



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

**MECANISMOS INERCIALES Y VISCOELASTICIDAD LINEAL DE
TENSOACTIVOS CATIONICOS:
INTERACCIONES SOLVENTE-POLÍMERO Y
POLÍMERO-POLÍMERO**

TESIS

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERA QUÍMICO**

PRESENTA:

ITZEL VASQUEZ ROBLERO

DIRECTOR DE TESIS

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

ASESORES

DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

M. en C. LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES

CIUDAD DE MÉXICO, 28 DE ABRIL DE 2023





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE**

Comunico usted que la alumna Itzel Vasquez Roblero con número de cuenta 314251932 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado en el mes de mayo del 2023 para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)
Secretario:	Dr. Fausto Calderas García
Suplente:	M. en C. Luis Antonio Ramírez Torres
Suplente:	Dra. Guadalupe Salinas Juárez

El título de la tesis que se presenta es: “Mecanismos Inerciales y Viscoelasticidad Lineal de Tensoactivos Catiónicos: Interacciones Solvente-Polímero, Polímero-Polímero”

Opción de Titulación:	Tesis convencional
Director de tesis:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Asesor de tesis:	Dr. Fausto Calderas García
Asesor de tesis:	M. en C. Luis Antonio Torres Ramírez

AGRADECIMIENTOS

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM << IN102823 >> <<Modelado matemático y simulación computacional de fluidos complejos con aplicación a bioingeniería >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- A la Universidad Nacional Autónoma de México por ser fundamental en mi desarrollo académico.
- A la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza agradezco que me brindó el conocimiento necesario para mi desarrollo profesional, un sin fin de gratas experiencias que jamás olvidaré y que me permitió conocer a mis grandes profesores y a mis mejores amigos.
- A la carrera de ingeniería química de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- A cada uno de los profesores con los que tuve el placer de formarme y de los cuales obtuve conocimientos los cuales podré aplicar en la vida laboral tanto como en la cotidiana.
- Al profesor Edtson Emilio Herrera Valencia por motivarme a interesarme en el tema y proporcionarme todas las herramientas para la realización de la tesis.
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación de las líneas de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A mi familia por ser un tronco sólido en el que siempre he podido apoyarme en especial a mis padres por apoyarme en todos los aspectos necesarios para hacer posible terminar la carrera y realizar esta tesis.

DEDICATORIAS

- A Dios
- A mis padres, Ramiro Vasquez Martínez y Ana María Roblero González, por apoyarme en cada paso que he dado, ser sustento y alivio en los momentos más oscuros, por creer en mí más de lo que yo creo en mí misma y siempre tener palabras de aliento para mí. Me faltan palabras para agradecer todo lo que ha hecho por mí. ¡Los adoro!
- A ferni, mi hermanita, mi amor chiquito acabado de nacer, gracias por crecer a mi lado, estar en mis tristezas y alegrías, permitirme crecer a tu lado, escuchar mis locuras y contarme las tuyas, recuerda que siempre estaré ahí para ti tanto como tú para mí, eres la más importante para mí.
- A mí mejor amiga, Baneri Getsemaní por enseñarme a comprender a las personas, ser ejemplo de lo que es una buena amiga y una gran compañera, gracias por siempre estar ahí cuando te necesité.
- A mis amigos; Sixto, Jesús, Marco Antonio, Andrea, Giselle, Itzel, Maylin, Monse, Lucero, Sebastián, Rivaldo, Héctor, Leo, Jair Rivera, Jair Córdova, Fernando, Memo, Selene, Fernanda Valiente, Fernanda García, Erick Rosete, Elisa, Kevin, Orlando, Ulises y Cynthia por compartir cada una de las buenas y malas experiencias que nos dejó la vida estudiantil, las risas, las pláticas, las fiestas y cada pequeño momento que guardo en mi corazón con mucha felicidad y nostalgia, no pude haber escogido mejores personas a las que llamar amigos ¡Gracias!
- A mí Dianita ojotes, por acompañarme cada noche de desvelo, rasguñarme cuando el sueño ya me vencía y ser mi despertador personal.
- A Sharif Fernández y Rafael Lechowski porque tocaron mi alma, me enseñaron lo bonito e importante de la vida y me impulsaron a seguir adelante con su poesía. A Mauricio Hernández porque con su perseverancia me enseñó que “el tiempo pone a cada uno en el lugar que se merece”
- A mí, porque superamos cada una de las adversidades que nos surgieron y seguimos siempre mirando hacia adelante ¡Lo logramos!

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 Preliminares	(2)
1.1.1 Modelo Logístico	(2)
1.1.2 Ecuación de Hagen y Poiseuille	(2)
1.2 Fluidos estructurados: sistemas micelares:	(4)
1.2.1. Micelas tipo gusano	(5)
1.3 Hipótesis	(6)
1.4 Objetivos	(7)
1.4.1 Objetivo General	(7)
1.4.2 Objetivos particulares	(7)
1.5 Distribución del material	(7)
Capítulo 1:	(7)
Capítulo 2:	(7)
Capítulo 3:	(7)
Capítulo 4:	(7)
Capítulo 5:	(8)

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Flujo de Hagen y Poiseuille en un capilar de radio $r=a$ y longitud $z=L$	(10)
2.1.1 Ecuación de continuidad	(10)
2.1.2 Ecuación de movimiento	(11)
2.1.3 Modelo tensorial de Newton	(11)
2.1.4 Análisis de las componentes de la ecuación de movimiento	(12)
2.1.5 Perfil de velocidades	(12)
2.1.5 Flujo volumétrico	(12)
2.2 Ecuaciones constitutivas	(13)
2.2.1 Ecuación constitutiva de Maxwell	(13)
2.2.2 Ecuaciones constitutivas de Kelvin-Voigh	(14)
2.2.3 Ecuaciones constitutivas del Bimodal de Maxwell	(15)
2.2.4 Ecuaciones constitutivas de Burgers	(16)
2.2.5 Ecuaciones constitutivas para el modelo de Burgers adaptado para este trabajo	(17)
2.3 Función de transferencia compleja	(18)

CAPÍTULO III SISTEMA FÍSICO

3.1 Función de transferencia compleja de un fluido viscoelástico lineal en un capilar	(20)
3.2 Balance de cantidad de movimiento con mecanismos inerciales	(20)
3.3 Perfil de velocidades	(22)
3.4 Condiciones de frontera	(22)
3.5 Velocidad particular	(22)
3.6 Flujo volumétrico en un capilar con mecanismos inerciales	(22)
3.7 Función de transferencia flujo volumétrico gradiente de presión	(23)
3.8 Función de transferencia del esfuerzo-gradiente de presión	(23)

CAPÍTULO IV SIMULACIÓN COMPUTACIONAL Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1 Variables adimensionales	(26)
4.2 Números adimensionales	(26)
4.3 Espacio paramétrico 3D de los principales grupos adimensionales	(27)
4.4 Funciones adimensionales	(28)
4.5 Parámetro betha	(28)
4.6 Comparación entre los modelos Maxwell, Jeffreys y Burgers	(29)
4.7 Efecto del número elástico en la función de transferencia compleja	(30)
4.8 Aplicación a sistemas micelares tipo gusano.	(32)
4.9 Resonancia de dos tensoactivo catiónicos con diferente peso molecular CTAT Y EHAC	(35)
4.10 Efecto de la concentración del CETAT a diferentes concentraciones en peso.....	(38)
4.11 Resumen del capítulo	(40)

CAPÍTULO V CONCLUSIONES

5.1 Aportación al conocimiento	(42)
5.2 Trabajo futuro	(44)

BIBLIOGRAFIA	(45)
---------------------------	-------------

FIGURAS

CAPÍTULO I

Figura 1.1 La figura superior muestra una geometría capilar de radio $r = a$ y longitud axial z . El fluido se deforma continua e irreversiblemente por medio de un gradiente de presión transitorio. Esta fuerza superficial induce un flujo volumétrico.

Figura 1.2. Proceso de formación de las micelas tipo gusano. Se observa que las moléculas de tensoactivo no forman micelas hasta alcanzar una concentración crítica, una vez alcanzada esta se adiciona un electrolito para generar las micelas tipo gusano.

Figura 1.3. Representación esquemática del estado de la solución al aumentar la fracción de volumen de tensoactivo.

CAPÍTULO II

Figura 2.1. Capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. Se supone que el fluido es incompresible, isotérmico y newtoniano.

Figura 2.2. Representación del modelo de Maxwell en el cual podemos apreciar la unión de una parte viscosa y otra elástica en paralelo.

Figura 2.3. Representación del modelo de Kelvin-Voigh, en el cual vemos una contribución elástica y una viscosa en serie.

Figura 2.4. Representación del modelo del bimodal de Maxwell, los cuales son dos polímeros en serie.

Figura 2.6. Ilustra los dos polímeros representados por elementos de Maxwell en una configuración en paralelo.

Figura 2.7: Ilustra un esquema representativo de la función de transferencia en el sistema de estudio. La variable de entrada es un gradiente de presión y la variable de salida es el flujo volumétrico.

CAPÍTULO III

Figura 3.1. Capilar de radio $r = a$ y longitud axial $z = L$. Un gradiente de presión pulsátil de forma continua e irreversiblemente el fluido.

CAPÍTULO IV

Figura 4.1. Ilustra el espacio material que forma los valores numéricos deducidos en esta investigación a nivel de licenciatura.

Figura 4.2. Ilustra la norma de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia para diferentes valores del número de elástico. Los valores obtenidos corresponden a la máxima disipación, efectos del solvente mínimos y asimetría en las fases viscoelásticas.

Figura 4.3. Ilustra la función de transferencia compleja en función de la frecuencia. Los valores son los mismos que en la Fig. (4.2).

Figura 4.4. Ilustra la Norma de la FTC del flujo volumétrico para diferentes modelos viscoelástico en función de la frecuencia o del número de Womersley.

Figura 4.5. Ilustra la Norma de la FTC del esfuerzo para diferentes modelos viscoelástico en función de la frecuencia o del número de Womersley.

Figura 4.6. Efecto de la concentración en la FTC de gradiente de presión transitorio-flujo volumétrico para para dos diferentes tipos de tensoactivos CETAT 3% y EHAC 4 %.

Figura 4.7. Efecto de la concentración en la FTC de gradiente de presión transitorio-flujo volumétrico a menor escala para mejor visualización del CETAT 3%.

Figura 4.8. Efecto de la concentración en la FTC de gradiente de presión transitorio-esfuerzo para dos diferentes tipos de tensoactivos CETAT 3% y EHAC 4 % .

Figura 4.9. Efecto de la concentración en la FTC de gradiente de presión transitorio-esfuerzo a menor escala para mejor visualización del CETAT 3%.

Figura 4.10. Ilustra el efecto de la concentración en la norma de la función de transferencia compleja del flujo para el tensoactivo CETAT

Figura 4.11. Ilustra el efecto de la concentración en la norma de la función de transferencia compleja del esfuerzo para el tensoactivo CETAT

TABLAS

Tabla 1. Operador viscosidad para diferentes modelos constitutivos reológicos (Herrera-Valencia et al. 2022)

Tabla 2. Parámetros materiales del modelo de Burgers para los tensoactivos CTAT Y EHAC para concentraciones del 3 % y 4 % (Manero et al. 2002).

Tabla 3. Números adimensionales para el modelo de Burgers.

Tabla 3. Parámetros materiales del modelo de Burgers para el tensoactivo CETAT para diferentes concentraciones (Soltero et al. 1999).

Tabla 4. Números adimensionales para el CETAT a concentraciones del 5%, 10%, 15% y 20

%

RESUMEN DE NOMENCLATURA

Variable	Unidades	Nombre
p	N/m^2	Presión
$\frac{dp}{dz}$	Pa/m	Derivada de la presión con respecto al espacio
V	m/s	Velocidad
∇	$1/m$	Divergencia
∇V	$1/s$	Tensor gradiente de velocidad
\mathbf{V}	m/s	Vector velocidad
ρ	$\frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$	Densidad del sistema
$\frac{D}{Dt}$	$1/s$	Derivada substancial de la densidad
$\frac{\partial}{\partial r}$	$1/m$	Derivada parcial con respecto a la coordenada r
$\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$	m/s	Derivada de la velocidad en teta con respecto al ángulo
$\frac{\partial V_z}{\partial z}$	$1/s$	Derivada de la velocidad en zeta con respecto a zeta
$\frac{\partial V_z}{\partial t}$	m/s^2	Derivada de la velocidad en zeta con respecto al tiempo
\mathbf{T}	Pa	Tensor de esfuerzos total
I	Pa	Tensor unidad
μ	$Pa \cdot s$	Viscosidad del sistema
σ	Pa	Tensor esfuerzos viscoelásticos
\mathbf{D}	$\frac{\text{cambio}}{\text{tiempo}}$	Tensor rapidez de deformación
f	N	Fuerzas de bulto
g	m/s^2	Vector aceleración de la gravedad
C_1	Adimensional	Constante 1
C_2	Adimensional	Constante 2
Q	m^3/s	Flujo volumetrico
V_{max}	m/s	velocidad máxima
e_z	Adimensional	Vector unitario en la dirección normal de la superficie
Q	m^3/s	Ecuación de Hagen y Poiseuille
$O_\eta(D_t)$	$Pa \cdot s$	Operador viscosidad
$O_\eta(i\omega)$	$Pa \cdot s$	Operador viscosidad en el espacio de Fourier
ω	Hz	Frecuencia
O_ϕ	$Pa \cdot s$	Fluidez compleja
$J_0(z)$	Adimensional	Función de Bessel de primera especie de orden cero
$Y_0(z)$	Adimensional	Función de Bessel de segunda especie de orden 0
$T(\omega)$	$1/Pa \cdot s$	Función de transferencia compleja
$T_Q(i\omega)$	$1/Pa \cdot s$	Función de transferencia para el fujo

$T_{\sigma}(i\omega)$	Pa	Función de transferencia compleja para el esfuerzo
$\sigma_{rz}(\omega)$	Pa	Componente rz del tensor de esfuerzos
$\sigma_1(\omega, \beta)$	Pa	Esfuerzo inercial
σ	Pa	Esfuerzo total
λ_j	1/s	Tiempo de retardo de Jeffreys
O_{η}^B	Pa · s	Operador viscosidad de Burgers
$\dot{\gamma}$	$\frac{\text{deformación}}{t}$	Rapidez de deformación
α	1/Hz	Inverso de la longitud de onda
De	Adimensional	Número de Deborah
G	N/m ²	Elasticidad de corte
O_{ϕ}^M	1/Pas	Operador fluidez de Maxwell
λ_0	s	Tiempo de relajación de Maxwell
t_c	s	Tiempo característico
η_0	Pa · s	Viscosidad total
$\Sigma\eta$	Pa · s	Viscosidad de bulto
Π_{λ}	s ²	Simetría/ asimetría en la fase viscoelástica
β	s ²	Interacción polímero-polímero
E	Adimensional	Número elástico
We	Adimensional	Número de Weissenberg
Re	Adimensional	Número de Reynolds
Wo	Adimensional	Número de Womersley

RESUMEN

En esta tesis se analizó el flujo de una mezcla de polímeros en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. El fluido es deformado continua e irreversiblemente por medio de un gradiente de presión transitorio. Esta fuerza superficial induce un flujo volumétrico el cual, cual se puede interpretar en términos de un sistema lineal, como una variable de salida y una variable de entrada. La herramienta que se utiliza para obtener información del dispositivo es la transformada integral de Fourier, y la función de transferencia compleja.

Para caracterizar el fluido se utilizó un modelo mecánico que consiste en dos elementos de Maxwell en serie. Este modelo es conocido en la literatura como ecuación de Burgers la cual representa las interacciones: Solvente-polímero y polímero-polímero. Se obtuvieron dos funciones de transferencia compleja relacionadas al flujo volumétrico y al esfuerzo en la pared.

Las dos funciones dependen de un parámetro beta (inverso de una longitud característica) que depende de la inercia-elasticidad de bulto, mecanismos viscoelásticos, interacciones polímero-solvente, polímero-polímero. Este es un modelo más robusto que contiene varias ecuaciones constitutivas descritas en la literatura.

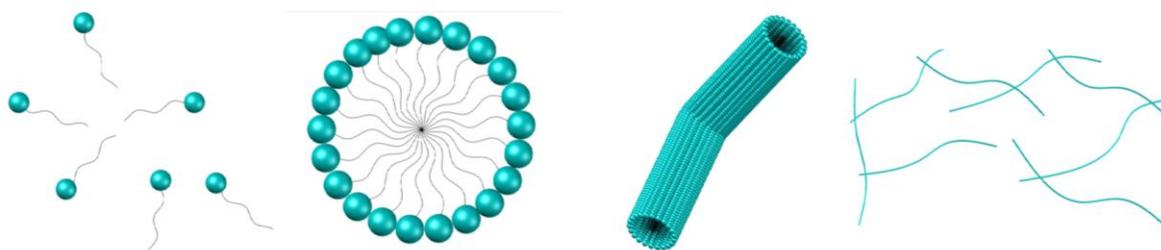
El conjunto de números adimensionales forma un espacio tridimensional 3D descrito por la viscosidad, viscoelasticidad y del solvente. Finalmente, se estudiaron los efectos de la viscoelasticidad, solvente, asimetría en las fases y la concentración de tensoactivos catiónicos EHAC Y CETAT.

Palabras claves:

Integral de Fourier, Espacio material 3D, modelo de Burgers, Tensoactivo catiónico (CTAT, Tensoactivo catiónico EHAC, Reología y Fenómenos de Transporte

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN



1.1 Preliminares

1.1.1 Modelo Logístico

El estudio de los fluidos complejos es un tópico a nivel mundial que es punto de partida de varios grupos nacionales e internacionales (**Chen et al. 2023; Gerónimo et al. 2022; De la Guerra y Corvera-Poiré 2022; Bravo-Gutiérrez et al. 2011; Hernández-Machado y Corvera-Poiré 2008**). La mayoría de estos, utilizan los fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos como punto de partida. El punto medula de estos fluidos es la estructura la cual, es proporcional a la resistencia del fluido y esta, puede ser de tipo disipativo asociado a la viscosidad o disipativo-elástico definido como viscoelástico (**Herrera-Valencia et al. 2022; Leal 2007; Bird et al. 1987, 2002; Macosko 1994**).

Muchas aproximaciones matemáticas se han utilizado para caracterizar el flujo y la reología de estos sistemas. Las primeras aproximaciones se basan en el fluido más simple desde un punto de vista reológico como es el agua. El agua dependiendo con la rapidez que sea deformado, se comporta como fluido o como sólido. Las siguientes aproximaciones se centran en considerar la naturaleza viscosa o viscoelástica del material, a través de modelo basados en ecuaciones diferenciales logísticas las cuales, son punto de partida para modelos más realistas (**Herrera-Valencia et al. 2022; Leal 2007; Bird et al. 1987, 2002; Macosko 1994**). Es claro que, estos modelos tienen la estructura matemática siguiente:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha \left(P - \frac{P^2}{P_0} \right) \quad (1)$$

Este modelo se transforma, en el modelo de Maxwell, que describe la viscoelasticidad de los materiales, y es punto de partida en la transferencia de momento interfacial a través del tiempo viscoelástico de relajación. El modelo más simple viscoelástico tiene la forma (**Macosko 1994; Leal 2007; Herrera-Valencia et al. 2022**)

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (2)$$

1.1.2 Ecuación de Hagen y Poiseuille

La ecuación de Hagen y Poiseuille (HP) es una de las expresiones clásicas para describir el flujo en estado estacionario de un fluido newtoniano o newtoniano (**Leal 2007; Herrera-Valencia et al. 2022**). Esta, describe la relación entre una variable de entrada (Gradiente de presión) y una variable de salida (Flujo volumétrico). La ecuación de HP en su forma más simple puede escribirse como (**Herrera-Valencia et al. 2022**):

$$Q = \varphi_{ap} \frac{\pi a^4}{8} (-\nabla z p) \quad (3)$$

La Ec. (3) es la famosa ecuación de HP en donde, Q es el flujo volumétrico (m^3/s), φ_{ap} es la fluidez aparente, a es el radio del tubo, ∇ es el operador Nabla ($1/m$), p es un escalar relacionado con la presión (N/m^2). La Ec. (3) se puede describir de la siguiente manera (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$\square \quad \gamma_{ap} = \varphi_{ap} \sigma_w \quad (4)$$

La Ec. (4) es el equivalente de la ecuación de Newton. La variable del lado izquierdo representa la rapidez de deformación equivalente definida como (**Bird et al. 1977; Bird et al. 2002**).

$$\gamma_{ap} = \frac{4Q}{\pi a^3} \quad (5)$$

La fluidez aparente es la del experimento el flujo y no es la reométrica por lo que, es una aproximación a la fluidez real del sistema. Para un fluido Newtoniano, es independiente de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión (**Leal 2007; Macosko 1994**)

$$\phi_{ap} = \text{Constante} \quad (6)$$

Para un fluido No-Newtoniano, la fluidez aparente no es constante y depende de la fuerza motriz en el sistema

$$\phi_{ap} = \phi_{ap}(\sigma_w) \quad (7)$$

Para un fluido viscoelástico que sigue la Ec. (2) tiene una forma similar, excepto que la fluidez se transforma en la función de transferencia compleja, i.e. (**Hernández-Machado y Corvera-Poire 2008; Herrera-Valencia et al. 2022**)

$$T(i\omega) = \text{Re}[T(i\omega)] + i \text{Im}[T(i\omega)] = O\phi(i\omega) \cdot \frac{8i}{(\beta a)^2} \left[1 - \frac{J_1(\beta a)/\beta a}{J_0(\beta a)} \right] \quad (8)$$

Herrera-Valencia et al. (2022) generalizo la Ec. (8) mediante el operador Fluidez definido en la Ec. (9). Este operador, es un cociente entre el esfuerzo y la rapidez deformación en el espacio de Fourier, y se puede expresar como:

$$O\phi(i\omega) = \frac{\gamma(i\omega)}{\sigma(i\omega)} \quad (9)$$

Este, es característico de cada fluido y matemáticamente la función de transferencia tiene la misma expresión de la Ec. (8). Es importante notar, que la Ec. (9) es una generalización de la función fluidez tomando en cuenta los mecanismos inerciales en el sistema (**Herrera-Valencia et al. 2022, 2023**).

En la Ec. (8) el parámetro β es el inverso de una longitud característica que depende de la frecuencia, de propiedades materiales, geométricas y reológicas a través de la fluidez definida en la Ec. (9). Matemáticamente tiene la forma (**Hernández-Machado y Corvera-Poire 2008; Bravo-Gutierrez et al. 2011**)

$$\beta a(i\omega) = \sqrt{\rho a^2 \omega \cdot O\phi(i\omega)} \quad (10)$$

La expresión para el flujo volumétrico, suponiendo que el gradiente de presión puede aproximarse como una función exponencial, toma la forma (**Hernández-Machado y Corvera-Poire 2008; Bravo-Gutierrez et al. 2011**)

$$\nabla p(t) = \nabla p_0 \text{Exp}(\omega_0 t) \quad (11)$$

Por lo que, el flujo volumétrico transitorio toma la forma:

$$Q_{\text{Viscoelástico}}(t) = Q_{\text{Newton}} \cdot T(i\omega_0) \text{Exp}(\omega_0 t) \quad (12)$$

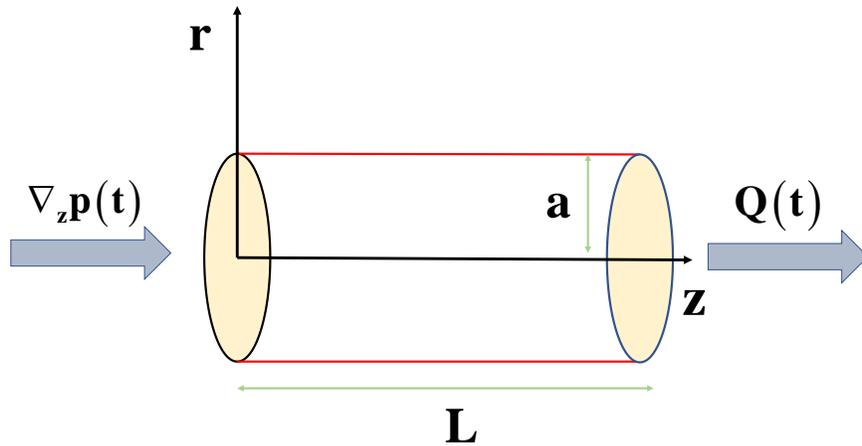


Figura 1.1. Ilustra una geometría capilar de radio $r = a$ y longitud axial z . El fluido se deforma continua e irreversiblemente por medio de un gradiente de presión transitorio. Esta fuerza superficial induce un flujo volumétrico.

1.2 Fluidos estructurados: sistemas micelares:

Los fluidos estructurados son aquellos que presentan entrecruzamientos físicos que dependen de la posición y del tiempo (**Herrera-Valencia et al. 2022, 2023**).

En estos fluidos, la estructura es proporcional a la viscosidad del tiempo en función de los mecanismos viscosos y viscoelásticos (**Herrera-Valencia et al. 2022, 2023**). La mayoría de los fluidos que se presentan en la industria y en la naturaleza se denomina complejos ya que, dependen del tiempo y de la rapidez de deformación (**Rey et al. 2022, 2023**). Ejemplos de estos fluidos son: (I) polímeros, (II) Suspensiones (Ciencia de alimentos y productos procesados), (III) Fluidos biológicos: a) Sangre, b) Sangre con hipercolesterolemia, c) Fluidos corporales (Saliva, mucosidades, fluidos de desecho), (IV) Sistemas micelares, (V) Polímeros asociativos, (VI) Cristales líquidos nemáticos, (VII) fibras naturales y (VIII) biopolímeros (colágeno tipo I que sirve para dotar al organismo de resistencia y flexibilidad) (**Sullivan et al. 2017**). En la mayoría de los sistemas estructurados existe una distribución de cadenas, i.e., existe un tamaño entre las estructuras (cadenas cortas y largas), esto se conoce como polidispersidad. En particular, las micelas, polímeros y polímeros asociativos, presentan interacciones: (i) Solvente-Polímero, (ii) Polímero-Polímero y (iii) Solvente-Solvente (**Solazzi et al. 2020**). Estas interacciones cambian completamente la transferencia de momento y la reología. No obstante, la mayoría de las aproximaciones consideran al solvente como un fluido newtoniano. Esto, no necesariamente es correcto, debido a que todos los fluidos presentan elasticidad (tiempo de relajación de Maxwell) (**Leal 2007; Macosko 1994; Bird et al. 2002; Bird et al. 1977**). Precisamente, esta investigación tiene como objetivo incorporar el efecto viscoelástico del solvente y del polímero (Mezcla polimérica), así como los mecanismos inerciales (inicio de flujo).

1.21. Micelas tipo gusano

Las macromoléculas (micelas tipo gusano) han recibido considerable atención en muchos estudios experimentales y teóricos. A diferencia de los polímeros, que consisten en enlaces covalentes fuertes que no se rompen fácilmente, las micelas parecidas a gusanos están formadas **por enlaces físicos débiles** (electrostáticos) que se rompen y se vuelven a formar continuamente, dando como resultado estructuras dinámicas o "vivas" (Manero et al. 2002).

Las micelas tipo gusano se forman principalmente mezclando un tensoactivo y un contraión orgánico que detecta las repulsiones electrostáticas entre los grupos de cabeza cargados del tensoactivo, en donde las micelas esféricas se transforman en micelas similares a gusanos tras la adición de un electrolito (Rothstein y Mohammadigoushki 2020). Esta transformación se produce porque la sal (electrolito) con los iones contrarios que penetran en el interior hidrofóbico de las micelas promueve el **autoensamblaje del tensoactivo** en micelas largas y flexibles con forma de gusano, este proceso está ilustrado en la Fig. 1.2. Al aumentar la concentración, el sistema promueve los entrecruzamientos físicos por lo que, se tiene más puntos de contacto y se forman flexibles flexo eléctricas conocidas como micelas tipo gusano (Herrera et al. 2010). En la Fig. (1.2) se observa el cambio de la estructura por efecto de la concentración: (a) Tensoactivo catiónico en un solvente, (b) Se aumenta la concentración induciendo que las hidrofóbica e hidrofílica interactúen con el solvente e induciendo efectos de volumen excluido, (c) Al aumentar la concentración, se forma tubos flexibles viscoelásticos tipo gusano y (d) por último los entramados físicos (Herrera et al. (2010).

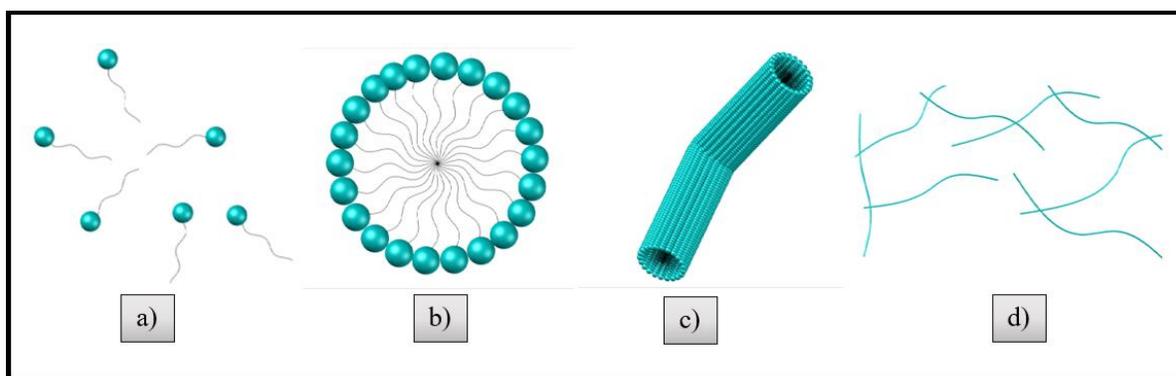


Figura 1.2. Proceso de formación de las micelas tipo gusano. Se observa que las moléculas de tensoactivo no forman micelas hasta alcanzar una concentración crítica, una vez alcanzada esta se adiciona un electrolito para generar las micelas tipo gusano.

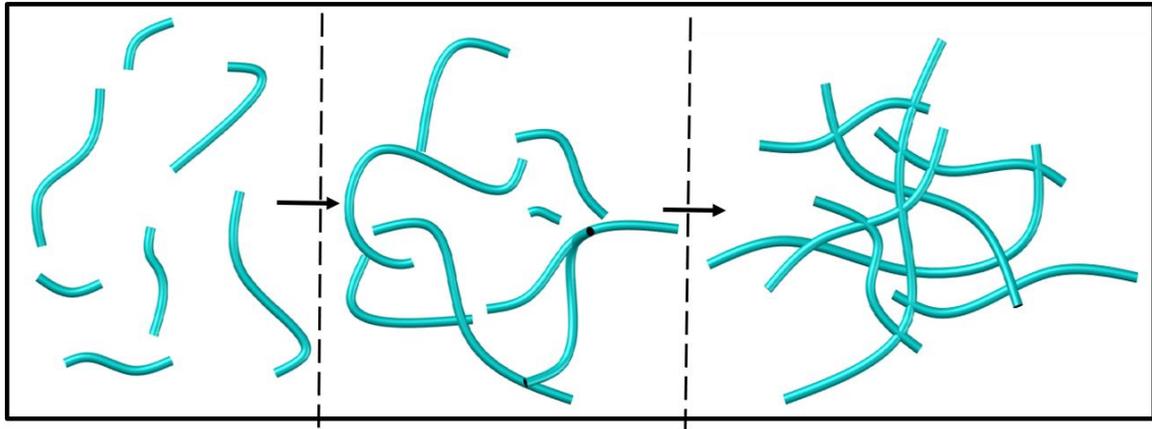


Figura 1.3. Representación esquemática del estado de la solución al aumentar la fracción de volumen de tensoactivo.

Estas estructuras alargadas que se forman confieren interesantes propiedades viscoelásticas que son de suma importancia dentro de la reología y sus aplicaciones (**Kang et al. 2020**).

Estas propiedades se deben principalmente a la capacidad que tienen las micelas para cambiar de estructura cuando son sometidas a una deformación y reestructurarse cuando cesa dicha deformación (**Pasquino et al. 2023**) Las predicciones del comportamiento de flujo de los tensoactivos viscoelásticos mediante ecuaciones constitutivas simples han sido un problema complejo, que ha llevado a grupos nacionales e internacionales a su estudio.

Esta es la razón de esta investigación a nivel de licenciatura. Existen dos importantes a investigar.

- A) Caracterizar el solvente incorporando los mecanismos viscoelásticos
- B) Estudiar la incorporación de los mecanismos: (I) inerciales, (II) viscoelásticos, (III) interacciones solvente-polímero, polímero-polímero y solvente-solvente.
- C) Obtener la relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión transitorio.

Para aclarar estos puntos, planteamos la siguiente hipótesis de trabajo:

1.3 Hipótesis

Si el efecto de las interacciones polímero-polímero, polímero-solvente modifican el flujo volumétrico en un sistema en estado no estacionario (mecanismos inerciales), entonces la respuesta dinámica se observa a través de la función de transferencia compleja (Gradiente de presión transitorio-flujo volumétrico y propiedades materiales).

1.4 Objetivos

El objetivo general y los objetivos particulares de la presente investigación son mencionados a continuación:

1.4.1 Objetivo General

Estudiar los mecanismos inerciales, e interacciones: (i) solvente-polímero, (ii) polímero-polímero mediante el cálculo de la función de transferencia compleja (Permeabilidad de Darcy o dinámica) en tensoactivos catiónicos (sistemas micelares tipo gusano).

1.4.2 Objetivos particulares

- Calcular la respuesta dinámica lineal de una mezcla de polímeros fluyendo a través de un capilar en función de las propiedades materiales y de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión.
- Caracterizar la transferencia de momento y la reología mediante el modelo de Burgers, el cual relaciona las interacciones entre polímeros (**Bird et al. 1987; Leal 2007**)
- Obtener grupos adimensionales que ayuden a la simulación de dichas interacciones y así, visualizar la importancia de cada una.
- Aplicar los resultados obtenidos a sistemas tensoactivos catiónicos tipo gusano, como el CETAT y el EHAC (**Soltero et al. 1999**)

1.5 Distribución del material

Para alcanzar los objetivos de este trabajo, el material se ha distribuido de la siguiente manera:

Capítulo 1:

Se introduce en el tema, y se definen los conceptos de permeabilidad intrínseca y dinámica de un líquido newtoniano y un líquido viscoelástico. En la segunda sección, se menciona el estado del arte, se plantean la hipótesis de trabajo y los objetivos del trabajo.

Capítulo 2:

Se establece la ecuación de Hagen y Poiseuille para un fluido Newtoniano mediante las ecuaciones de balance de materia sin reacción química, ecuación de movimiento que para un proceso isotérmico, fluido incompresible y líquido Newtoniano, se transforman en las ecuaciones de Navier-Stokes.

Capítulo 3:

Se presenta el problema de esta tesis de licenciatura. El sistema consiste en un fluido viscoelástico que fluye en una geometría cilíndrica. Se supone que el líquido es incompresible y el proceso es isotérmico. El líquido es caracterizado por una ecuación constitutiva que consiste en un sistema mecánico en paralelo. El polímero es modelado con la ecuación constitutiva de Maxwell y el solvente con un modelo de Maxwell, en vez del clásico Newtoniano. Esta configuración, permite describir un modelo asimétrico en donde el esfuerzo es de tercer orden en la derivada temporal y de segundo en la rapidez de deformación.

Capítulo 4:

Se plantean las variables adimensionales y se obtienen los respectivos grupos adimensionales que describen las fuerzas macroscópicas de este problema. A partir de esto, se obtienen las simulaciones mediante el programa Mathematica Wolfram 12. Los resultados consisten en obtener la parte real, imaginaria y norma de la función de transferencia compleja. Aquí se analizan dos funciones de transferencia las cuales relacionan el gradiente

de presión transitorio-flujo volumétrico y gradiente de presión transitorio-esfuerzo en la pared. A partir de estas funciones de transferencia se varían los números adimensionales como son: (i) El número elástico (inverso del Deborah), (ii) La viscosidad de bulbo total, (iii) La memoria del sistema, la cual consiste en el producto de los tiempos de relajación entre los fluidos viscoelásticos y (iv) el tiempo de relajación de Jeffrey.

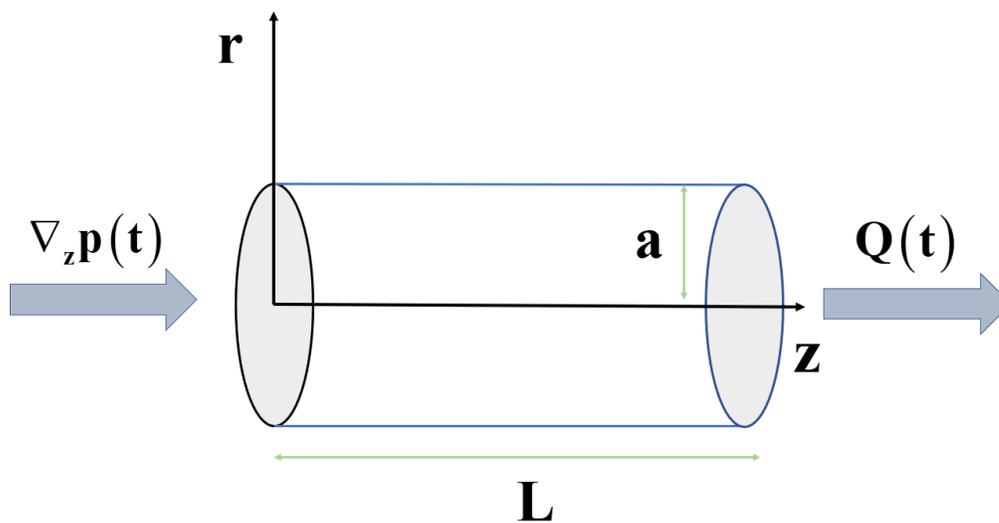
Capítulo 5:

En el último capítulo se hace el análisis de los resultados, se mencionan las conclusiones, aportación del conocimiento y se mencionan las líneas que puede seguir esta investigación.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

ECUACIÓN DE HAGEN Y POISEUILLE



2.1 Flujo de Hagen y Poiseuille en un capilar de radio $r=a$ y longitud $z=L$

En esta sección se calcula el flujo volumétrico asociado a un capilar de radio $r=a$. La longitud característica axial es L (Herrera-Valencia et al. 2022; Bird et al. 1987, 2002). En la Fig. (2.1) se muestra el capilar antes mencionado.

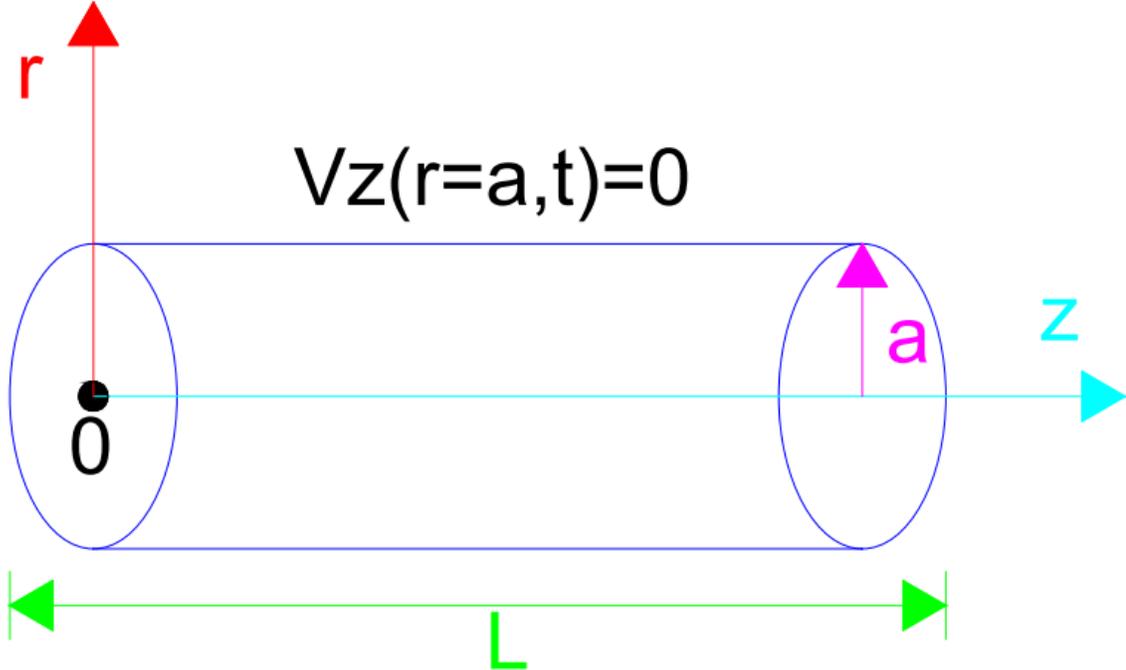


Figura 2.1. Capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. Se supone que el fluido es incompresible, isotérmico y newtoniano.

La sección (2.1) se basa en el desarrollo presentado por (Herrera-Valencia et al. 2022; Bird et al. 1987)

2.1.1 Ecuación de continuidad

A partir del balance de masa sin reacción química, se tiene lo siguiente (Herrera-Valencia et al. 2022; Bird et al. 1987, 2002)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (1)$$

Si imponemos que el fluido es incompresible, i.e. la derivada substancial es cero

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \rightarrow \rho \neq \rho(r, t) \quad (2)$$

Entonces, la ecuación de continuidad para un fluido incompresible toma la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3)$$

Asumiendo que el vector de velocidad \mathbf{V} en el sistema está dado por:

$$\mathbf{V} = [0, 0, V_z(r, \theta, z, t)] \quad (4)$$

Entonces combinando las Ecs. (3) y (4) se llega a la siguiente expresión analítica:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \rightarrow V_z \neq V_z(z) \quad (5)$$

Esto implica que el campo de velocidades no depende de la coordenada axial z , y que en estado estacionario, solo dependerá de las coordenadas angulares θ y r .

$$V_z = V_z(r, \theta) \quad (6)$$

Finalmente, la última hipótesis que postulamos en este sistema es la de la simetría cilíndrica, es decir, que el campo de velocidades no depende del ángulo polar θ .

$$V_z = V_z(r, \theta) = V_z(r) \quad (7)$$

Por lo tanto, en flujo laminar, isotérmico, incomprensible, estacionario y en coordenadas cilíndricas, el campo de velocidades solo depende de la coordenada radial r .

2.1.2 Ecuación de movimiento

La sección (2.2) se basa en el desarrollo presentado por **(Herrera-Valencia et al. 2022; Bird et al. 1987, 2002)**

La ecuación de movimiento en forma vectorial se puede expresar en términos matemáticos tiene la siguiente forma analítica:

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right) = \nabla \cdot T + f \quad (8)$$

En la Ec. (8) T es el tensor de esfuerzo total, el cual se puede expresar como la suma de dos contribuciones asociadas a las fuerzas normales y las fuerzas tangenciales, por lo que se puede expresar de la siguiente manera:

$$T = -pI + \sigma \quad (9)$$

Donde la Ec.(9) p es un escalar que tiene unidades de fuerza normal por unidad de área y que lo identificaremos con la presión del sistema. Entonces, en la Ec. (9), I es el tensor unitario definido de la siguiente manera:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

El tensor de esfuerzos σ se representa por una matriz simétrica y físicamente está relacionada con las fuerzas tangenciales y normales en un volumen de control σ . Matemáticamente, se puede expresar como:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (11)$$

En el tensor de esfuerzo (Ec. 11), $\sigma_{zr} = \sigma_{rz}$ son los esfuerzos cortantes los cuales son simétricos. Los esfuerzos $(\sigma_{zr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz})$ son esfuerzos normales y para un fluido con viscosidad constante las diferencias $N_1 = \sigma_{zr} - \sigma_{rr}$ y $N_2 = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ son iguales a cero y distintas de cero cuando el fluido presenta mecanismos relacionados a la elasticidad del sistema.

2.1.3 Modelo tensorial de Newton

La sección (2.1.3) se basa en el desarrollo presentado por **(Herrera-Valencia et al. 2022; Bird et al. 1987, 2002)**

La ecuación constitutiva que describe a un fluido newtoniano tiene la siguiente forma tensorial, por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\sigma = 2\mu D \quad (12)$$

En la Ec. (12) μ es la viscosidad del sistema. D es el tensor rapidez de deformación, el cual es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad ∇V , y tiene la forma:

$$2D = \nabla V + (\nabla V)^T \quad (13)$$

Si se combinan las Ecs. (8-13) se obtiene la siguiente expresión matemática:

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho g \quad (14)$$

En la Ec. (14), la fuerza de bulto $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$, es definida por la densidad del sistema y el vector aceleración de la gravedad. La magnitud de este vector $|\mathbf{g}|$ en el campo terrestre es una constante y cuyo valor numérico aproximadamente es de 9.77 m/s^2 .

2.1.4 Análisis de las componentes de la ecuación de movimiento

Aplicando las hipótesis de flujo en estado estacionario, incompresible, laminar, unidireccional, simetría cilíndrica, el fluido es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión constante en la dirección axial. La componente radial de la Ec. (14) se reduce a la siguiente expresión matemática para el gradiente de presión radial:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \rightarrow p \neq p(r) \quad (15)$$

De la misma manera, para la componente en θ , se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \rightarrow p \neq p(\theta) \quad (16)$$

Por lo que, en estado estacionario la presión solo depende de la coordenada axial z :

$$p = p(z) \quad (17)$$

La componente en z de la ecuación de movimiento tiene la siguiente forma:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (18)$$

2.1.5 Perfil de velocidades

Resolviendo la Ec. (18), se tiene la siguiente expresión analítica para la velocidad axial en función del gradiente de presión axial, viscosidad, y propiedades geométricas

$$V_z(r) = \frac{1}{4\mu} \nabla_z p r^2 + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (19)$$

La Ec. (19) es el perfil de velocidades general, para un fluido newtoniano deformado por un gradiente de presión constante la cual, contiene dos constantes de integración $[C_1, C_2]$. Estas, deben ser calculadas mediante dos condiciones de frontera.

C.F.1.: La velocidad axial en la frontera del tubo es cero, $V_z(r = R) = 0$

C.F.2.: La velocidad axial en el centro del tubo es máxima, $V_z(r = 0) = V_{max}$

Aplicando las condiciones de frontera, en la Ec. (19) se tiene el perfil de velocidades axial (Bird et al. 1987; Herrera-Valencia et al. 2022). Por lo que, el perfil de velocidades se reduce a lo siguiente:

$$V_z(r) = \frac{R^2}{4\mu} (-\nabla_z p) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (20)$$

La velocidad máxima se obtiene cuando $r = 0$, por lo que se tiene lo siguiente:

$$V_{max} = -\frac{R^2}{4\mu} \nabla_z p \quad (21)$$

2.1.5 Flujo volumétrico

Para calcular el flujo volumétrico, se calcula como la doble integral de superficie del perfil de velocidades a través de la sección transversal de área, por lo que:

$$Q = \int_S V \cdot e_z dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R (0,0,V_z) \cdot (0,0,1) |J| dr d\theta \quad (22)$$

En la Ec. (26) e_z es un vector unitario en la dirección normal de la superficie, $|J|$ es la magnitud del jacobiano de la transformación de coordenadas rectangulares a cilíndricas, $|J| = r$. Por lo que al sustituir la Ec. (20) en la Ec. (22), se tiene la ecuación de Hagen y Poiseuille (**Herrera-Valencia et al 2022; Bird et al 1987**)

$$Q = \frac{R^4 \pi}{8\mu} \left[-\frac{\partial p}{\partial z} \right] \quad (23)$$

La Ec. (23) representa el flujo volumétrico del modelo Newtoniano y es conocido como la ecuación de Hagen y Poiseuille la cual describe la relación entre el gradiente de presión y el flujo volumétrico.

2.2 Ecuaciones constitutivas

Esta sección se basa en las siguientes referencias (**Herrera-Valencia et al. 2022, 2023; Bird et al. 1987**).

2.2.1 Ecuación constitutiva de Maxwell



Figura 2.2. Representación del modelo de Maxwell en el cual podemos apreciar la unión de una parte viscosa y otra elástica en paralelo.

La deformación se define como la suma de las deformaciones viscosas y elásticas de la siguiente manera (**Herrera-Valencia et al. 2022, 2023; Bird et al. 1987**).

$$\gamma = \gamma_v + \gamma_e \quad (24)$$

La rapidez de deformación se define como la suma de la rapidez de deformación viscosas y elásticas de la siguiente manera:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_v + \dot{\gamma}_e \quad (25)$$

La rapidez de deformación viscosa y elástica se define:

$$\dot{\gamma}_v = \frac{1}{\eta_0} \sigma_v \quad (26)$$

$$\dot{\gamma}_e = \frac{1}{G_0} \frac{\partial \sigma_e}{\partial t} \quad (27)$$

El esfuerzo del modelo de Maxwell se caracteriza por ser igual en todos los casos:

$$\sigma_e = \sigma_v = \sigma \quad (28)$$

Sustituyendo la rapidez de deformación, tenemos:

$$\eta_0 \left(\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta_0} \sigma_v + \frac{1}{G_0} \frac{\partial \sigma_e}{\partial t} \right) \quad (29)$$

Y haciendo la operación correspondiente, nos queda:

$$\eta_0 \dot{\gamma} = \sigma + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (30)$$

2.2.2 Ecuaciones constitutivas de Kelvin-Voigh

Esta sección se basa en las siguientes referencias (Herrera-Valencia et al. 2022, 2023; Bird et al. 1987; Miranda-Núñez 2023).

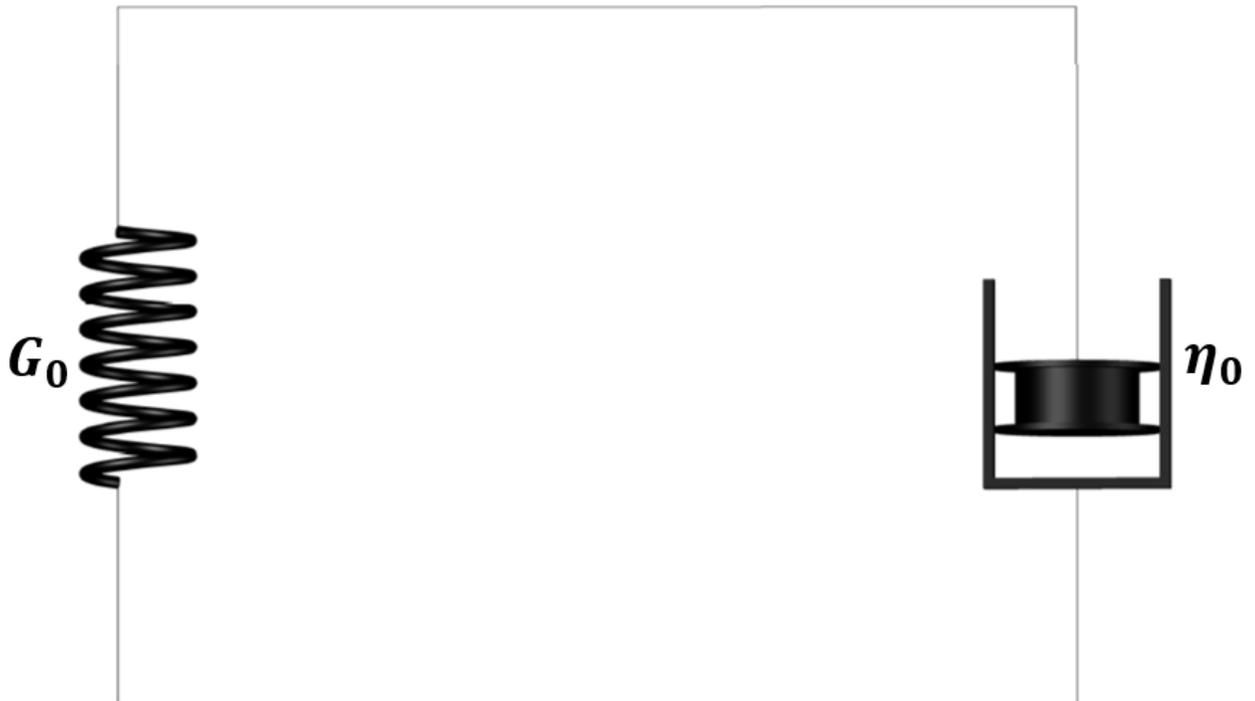


Figura 2.3. Representación del modelo de Kelvin-Voigh, en el cual vemos una contribución elástica y una viscosa en serie

El esfuerzo del modelo de Kelvin-Voigh se caracteriza por ser la suma de los esfuerzos viscosos y elásticos:

$$\sigma = \sigma_v + \sigma_e \quad (31)$$

El esfuerzo viscoso se define:

$$\sigma_v = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (32)$$

Y el esfuerzo viscoelástico tiene la siguiente forma:

$$\sigma_e = G_0 \gamma \quad (33)$$

Para tener ambos esfuerzos dependientes de la rapidez de deformación lo derivamos con respecto al tiempo, y queda:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial t} = G_0 \dot{\gamma} \quad (34)$$

Sustituyendo las Ecs. (32) y (34) en la Ec. (31):

$$\sigma = \eta_0 \dot{\gamma} + G_0 \gamma \quad (35)$$

Y al derivar con respecto al tiempo finalmente obtenemos la ecuación reológica de Kelvin-Voigh

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = G_0 \dot{\gamma} + \eta_0 \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \quad (36)$$

2.2.3 Ecuaciones constitutivas del Bimodal de Maxwell

Esta sección se basa en las siguientes referencias (Herrera-Valencia et al. 2022, 2023; Bird et al. 1987; Miranda-Núñez 2023).

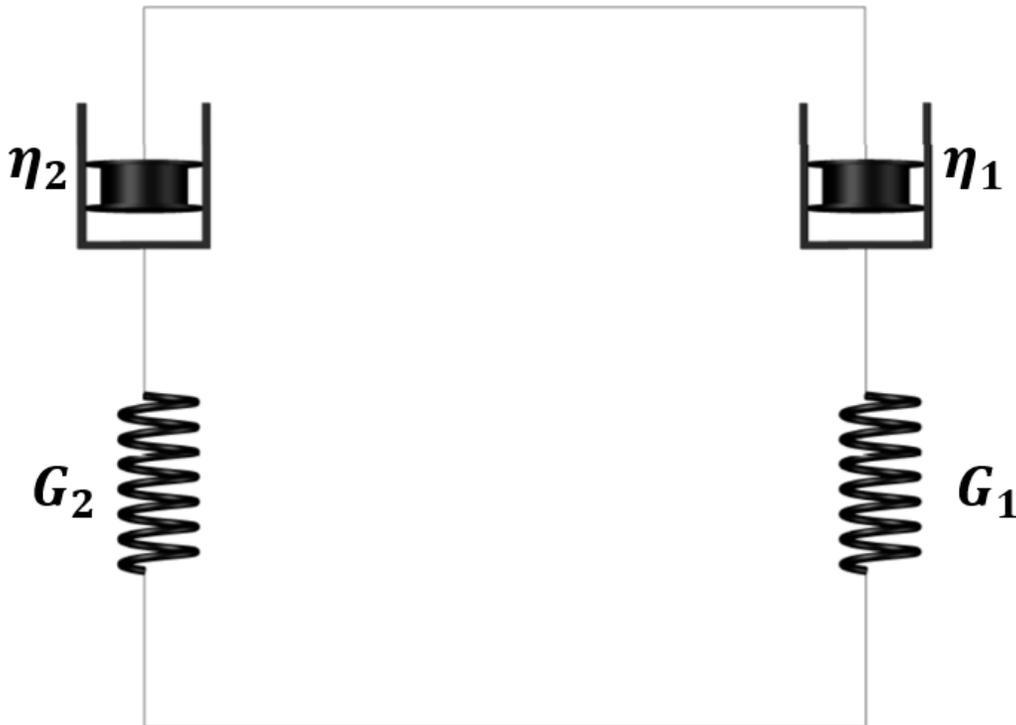


Figura 2.4. Representación del modelo del bimodal de Maxwell, los cuales son dos polímeros en serie.

El esfuerzo del modelo del bimodal de Maxwell se caracteriza por ser la suma de los esfuerzos viscosos y elásticos (**Herrera-Valencia et al. 2022, 2023; Bird et al. 1987; Miranda-Núñez 2023**).

$$\sigma = \sigma_v + \sigma_e \quad (37)$$

Una vez sustituyendo el esfuerzo y multiplicando por la rapidez de deformación tenemos:

$$\sigma = \dot{\gamma} \left(\frac{\eta_1}{1 + \lambda_1 \partial t} + \frac{\eta_2}{1 + \lambda_2 \partial t} \right) \quad (38)$$

La deformación total se define como la suma de las deformaciones elásticas 1 y 2 de la siguiente manera:

$$\gamma = \gamma_{G_1} + \gamma_{G_2} \quad (39)$$

Entonces, tenemos:

$$\left(1 + \sum \lambda \frac{\partial}{\partial t} + \pi \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma = \eta_1 + \eta_2 \left(1 + \frac{\lambda_1 \eta_2 + \lambda_2 \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\gamma} \quad (40)$$

2.2.4 Ecuaciones constitutivas de Burgers

Esta sección se basa en las siguientes referencias (**Herrera-Valencia et al. 2022, 2023; Bird et al. 1987; Miranda-Núñez 2023**).

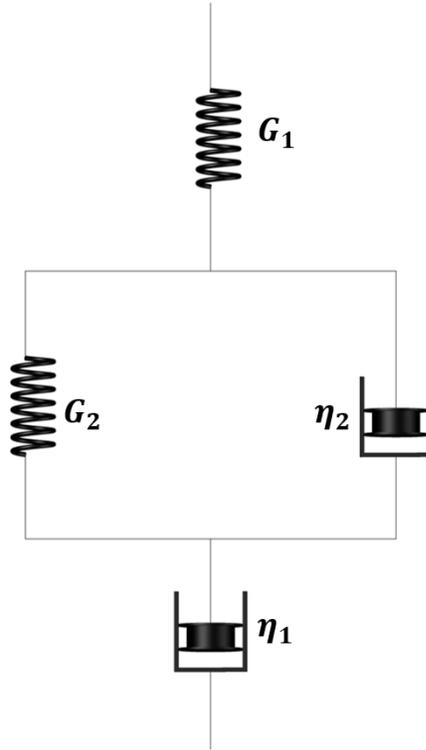


Figura 2.5. Representa el modelo de Burgers, compuesto por un Maxwell y un Kevin Voigh

$$G_1 \dot{\gamma} = \sigma_1 + \frac{\eta_1}{G_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} \quad (41)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = \eta_2 \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} + G_2 \dot{\gamma} \quad (42)$$

Finalmente, se obtiene el modelo de Burgers

$$\left(1 + \sum \lambda \frac{\partial}{\partial t} + \pi_\lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \sigma = \eta_1 \left(1 + \frac{\eta_2}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\gamma} \quad (43)$$

2.2.5 Ecuaciones constitutivas para el modelo de Burgers adaptado para este trabajo

El esfuerzo del modelo de Burgers se caracteriza por ser la suma de dos diferentes esfuerzos de polimeros, por lo que quedaría (Herrera-Valencia et al. 2022, 2023; Bird et al. 1987; Miranda-Nuñez 2023):

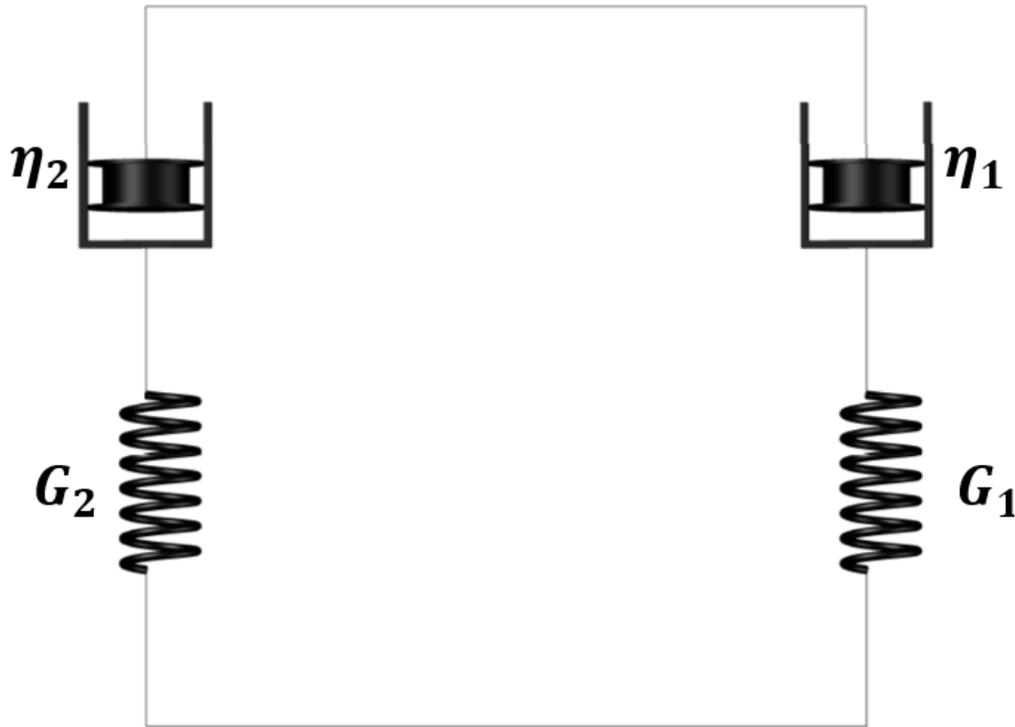


Figura 2.6. Ilustra los dos polímeros representados por elementos de Maxwell en una configuración en paralelo.

$$\sigma = \sigma_{P_1} + \sigma_{P_2} \quad (44)$$

Para cada esfuerzo tenemos:

$$\sigma_{P_1} = \frac{\eta_1 \dot{\gamma}}{1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}} \quad (45)$$

$$\sigma_{P_2} = \frac{\eta_2 \dot{\gamma}}{1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}} \quad (46)$$

Sustituyendo las Ecs. (49) y (50) en la Ec. (48), tenemos:

$$\sigma = \frac{\eta_1 \dot{\gamma}}{1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}} + \frac{\eta_2 \dot{\gamma}}{1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}} \quad (47)$$

Resolviendo la Ec. (51), llegamos a:

$$\left(1 + (\lambda_2 + \lambda_1) \frac{\partial}{\partial t} + (\lambda_1 \lambda_2) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \sigma = (\eta_1 + \eta_2) \left[1 + \left(\frac{\lambda_2 \eta_1 + \lambda_1 \eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)}\right) \frac{\partial}{\partial t}\right] \dot{\gamma} \quad (48)$$

En la Ec. (48) se ha definido las siguientes variables para el modelo de Burgers

$$(\lambda_2 + \lambda_1) = \lambda_0$$

$$(\lambda_1 \lambda_2) = \alpha$$

$$(\eta_1 + \eta_2) = \eta_0$$

$$\left(\frac{\lambda_2 \eta_1 + \lambda_1 \eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)}\right) = \lambda_j$$

Entonces, tenemos:

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \sigma = \eta_0 \left[1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t}\right] \dot{\gamma} \quad (49)$$

La Ec. (49) es el modelo reológico de Burgers el cual, es punto de partida en la presente investigación y contiene varios casos particulares llamados (**Herrera-Valencia et al. 2022, 2023; Bird et al. 1987; Miranda-Nuñez 2023**).

- a) Newtoniano
- b) Maxwell
- c) Jeffreys
- d) Kelvin-Voight
- e) Hooke

2.3 Función de transferencia compleja

La función de transferencia compleja relaciona las variables de entrada y salida de un sistema dinámico lineal, a través de una función conocida como “función de transferencia” la cual dependerá de las propiedades geométricas, del medio a través de las ecuaciones constitutivas con las que se caracterice el fluido. En la Fig. (2.7) se ilustra un esquema de la función de transferencia compleja del sistema

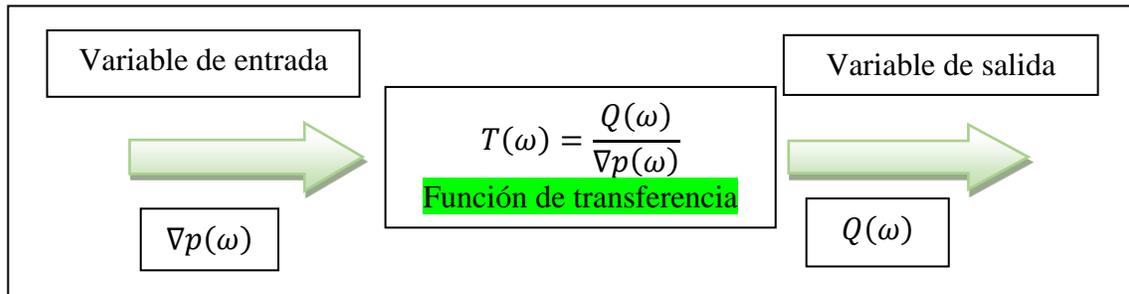
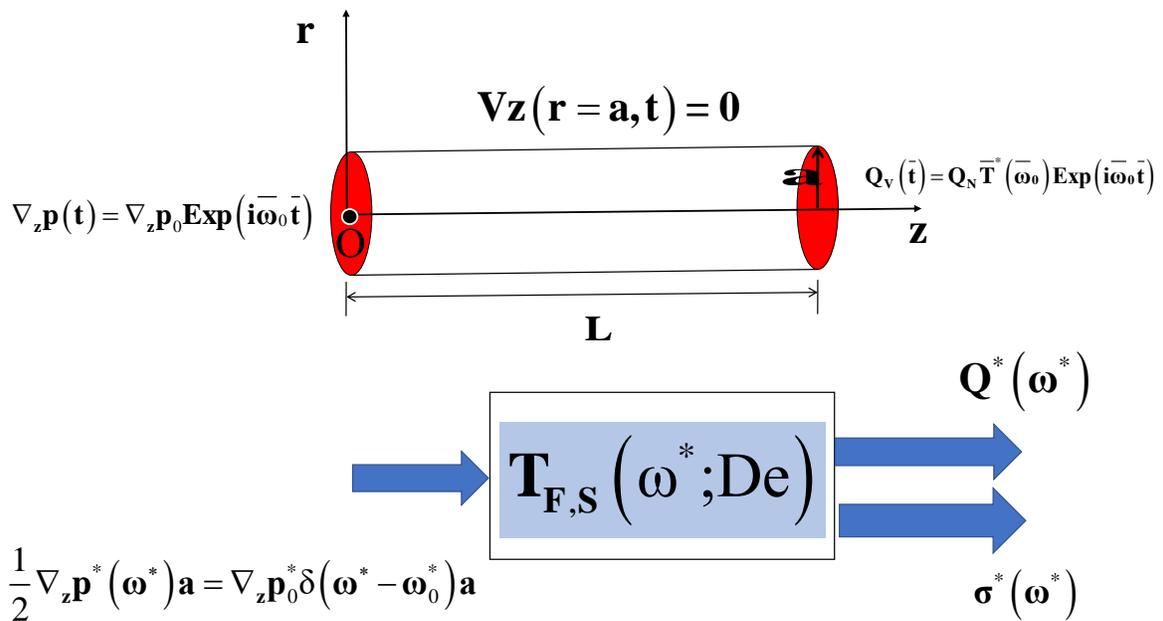


Figura 2.7: Ilustra un esquema representativo de la función de transferencia en el sistema de estudio. La variable de entrada es un gradiente de presión y la variable de salida es el flujo volumétrico

CAPÍTULO III

SISTEMA FÍSICO



3.1 Función de transferencia compleja de un fluido viscoelástico lineal en un capilar

Para realizar este cálculo se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema (**Herrera-Valencia et al. 2022; Tozzi y Hartt 2022**).

- Líquido no-Newtoniano viscoelástico lineal (Maxwelliano)
- Líquido incompresible
- El proceso se lleva a cabo en estado estacionario: La velocidad y la presión dependen del tiempo (presión pulsátil)
- El fluido se deforma continua e irreversiblemente debido a un gradiente de presión pulsátil en la dirección axial
- Los mecanismos gravitacionales se desprecian con respecto al gradiente de presión pulsátil y los mecanismos viscoelásticos lineales ya que el capilar ($a \ll L$) se encuentra en posición horizontal
- Existe simetría angular $\theta \in [0, 2\pi]$

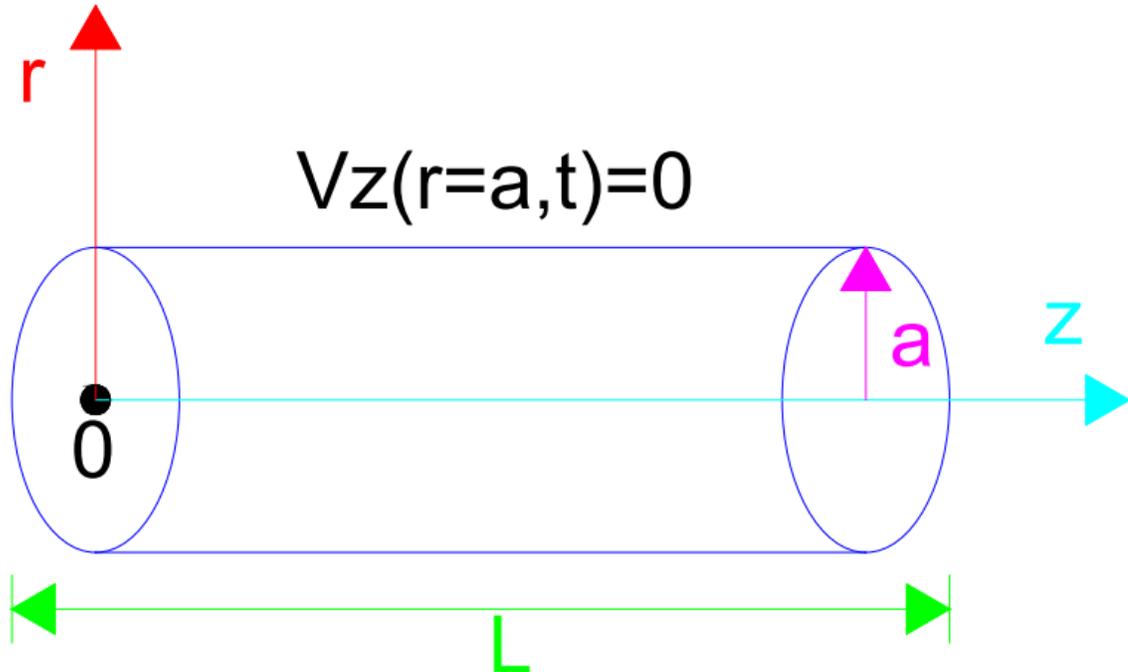


Figura 3.1. Capilar de radio $r=a$ y longitud axial $z=L$. Un gradiente de presión pulsátil de forma continua e irreversiblemente el fluido

3.2 Balance de cantidad de movimiento con mecanismos inerciales

La componente z de la ecuación de movimiento, tomando en cuenta los mecanismos inerciales, toma la siguiente forma (**Bird et al. 1987**)

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (1)$$

El término $\rho \partial_t V_z$ es la masa por unidad de volumen multiplicada por la aceleración en el sistema (**Herrera-Valencia et al. 2022; Bird et al. 1987, 2002**)

El esfuerzo cortante es el producto de la función viscosidad por la rapidez de deformación (**Herrera-Valencia et al. 2022**)

$$\sigma_{rz} = O_\eta(D_t) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (2)$$

En donde $O_\eta(D_t)$ es un operador viscosidad que generaliza para cualquier fluido viscoelástico lineal (**Herrera-Valencia et al. 2022; Miranda Nuñez 2023**). En la Tabla 1 se presenta el operador viscosidad $O_\eta(D_t)$ y el operador viscosidad en el espacio de Fourier $O_\eta(i\omega)$ de modelos reológicos más comunes (**Herrera-Valencia et al. 2022; Miranda Nuñez 2023**).

Tabla 1. Operador viscosidad para diferentes modelos constitutivos reológicos (Herrera-Valencia et al. 2022)

	$O_\eta(D_t)$	$O_\eta(i\omega)$
Newton	η_0	η_0
Maxwell	$\frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 D_t}$	$\frac{\eta_0}{1 + \lambda_0(i\omega)}$
Jeffreys	$\frac{\eta_0(1 + \lambda_J D_t)}{1 + \lambda_0 D_t}$	$\frac{\eta_0(1 + \lambda_J(i\omega))}{1 + \lambda_0(i\omega)}$
Burgers	$\frac{\eta_0(1 + \lambda_J D_t)}{1 + \lambda_0 D_t + \beta D^2 t}$	$\frac{\eta_0(1 + \lambda_J(i\omega))}{1 + \lambda_0(i\omega)\beta(i\omega)^2}$

Al combinar las Ecs. (1) y (2), se tiene lo siguiente:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\rho}{O_\eta(D_t)} \frac{\partial}{\partial t} \right] V_z = \frac{1}{O_\eta(D_t)} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2)$$

La Ec. (2) es una ecuación diferencial parcial lineal y describe las variaciones de la velocidad por los efectos del espacio tiempo. Aplicado el formalismo de Fourier, en las derivadas temporales de la Ec. (5)

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \rightarrow (i\omega)^k \quad (3)$$

Por lo tanto, para las funciones: (i) Velocidad axial $V_z = V_z(r, t)$, (ii) Presión transitoria $p = p(t)$ y (iii) Flujo volumétrico $Q = Q(t)$. Además, el operador viscosidad en el espacio de Fourier, toma la forma:

$$O_\eta \left(D_t = \frac{\partial}{\partial t} \right) \rightarrow O_\eta(i\omega) \quad (4)$$

Por lo que al aplicar por la ecuación diferencial parcial lineal (5) toma la forma:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2(\omega) \right] V_z(r, \omega) = O_\phi(i\omega) \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (5)$$

Y el parámetro α tiene la forma:

$$\alpha^2(\omega) = \frac{\rho}{O_\eta(i\omega)} i^3 \omega = \rho O_\phi(i\omega) i^3 \omega \quad (6)$$

En la Ec. (6) se ha definido la fluidez compleja O_ϕ como el inverso del operador viscosidad:

$$O_\phi(i\omega) = \frac{1}{O_\eta(i\omega)} \quad (7)$$

La Ec. (5), es punto de partida para el cálculo de la velocidad y el flujo volumétrico respectivamente.

3.3 Perfil de velocidades

Para resolver la Ec. (5), se propone que la solución general se puede descomponer en términos de una solución homogénea particular. Esta ha sido estudiada ampliamente por lo que solamente expresamos la solución general en términos de funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden cero (**Herrera-Valencia et al. 2022; Bravo-Gutierrez 2011, Hernandez-Machado 2008; De la Guerra y Corvera-Poiré 2022; Gerónimo et al. 2022**)

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (8)$$

3.4 Condiciones de frontera

La solución general contiene dos constantes de integración C_1 y C_2 , las cuales deben de determinarse a partir de la siguiente condición de frontera:

$$C.F. 1: r = 0; |V_z(0, \omega)| \leq M \quad (9)$$

$$C.F. 2: r = a; |V_z(a, \omega)| \leq M \quad (10)$$

La primera de estas condiciones obedece a que la solución particular debe de permanecer acotada. La segunda condición de frontera, se relaciona con las condición de no deslizamiento en la frontera (pared del tubo capilar).

3.5 Velocidad particular

Al sustituir las condiciones de frontera Ecs. (9) y (10) en la Ec. (8), resolver un sistema de ecuaciones algebraicas, la velocidad particular es obtenida:

$$V_z(r, \omega) = \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(1 - \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} \right) \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (11)$$

Esta expresión nos permite obtener el perfil de velocidades en función de los parámetros materiales del líquido, la fuerza motriz que deforma continuamente e irreversiblemente el fluido asociado al gradiente de presión en la dirección axial. Nótese que el perfil de velocidades está determinado por un cociente de funciones de Bessel, lo que podría inducir efectos resonantes en el sistema (**Herrera-Valencia et al. 2022; Bravo-Gutierrez 2011, Hernandez-Machado 2008; De la Guerra y Corvera-Poiré 2022; Gerónimo et al. 2022**)

3.6 Flujo volumétrico en un capilar con mecanismos inerciales

La expresión para calcular el flujo volumétrico en un capilar de radio $r = a$ y la longitud $z = L$, se puede expresar como una doble integral de superficie. Transformando el flujo volumétrico en el espacio de Fourier (**Herrera-Valencia et al. 2022; Bird et al. 1987; Miranda Nuñez 2023**)

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^a V_z(r, \omega) r dr \quad (12)$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el flujo volumétrico, se obtiene la siguiente expresión:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^3}{4} TF(\omega) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} a \right) \quad (13)$$

La Ec. (13) puede ser descrito en términos de la función de transferencia $T(\omega)$

3.7 Función de transferencia flujo volumétrico gradiente de presión

En donde la función de transferencia $T(\omega)$, tiene la siguiente expresión analítica (Herrera-Valencia et al. 2022; Bird et al. 1987; Miranda Nuñez 2023)

$$TF(\omega) = 8i^2 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(1 - 2 \frac{J_1[\beta(\omega)]/\beta(\omega)}{J_0[\beta(\omega)]} \right) \quad (14)$$

A muy bajas frecuencias, la función de transferencia $T(\omega)$ tiende asintóticamente en el operador fluidez. Desarrollando las funciones de Bessel de la Ec. (14), se tiene lo siguiente:

$$TF(\omega) = 8i^2 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(i^2 \frac{\beta^2}{8i^2} \right) = O_\phi(i\omega) \quad (15)$$

3.8 Función de transferencia del esfuerzo-gradiente de presión

A partir del perfil de velocidades y el calculando la rapidez de deformación, se puede obtener el esfuerzo en la pared (Herrera-Valencia et al. 2022; Bird et al. 1987; Miranda Nuñez 2023)

$$\sigma_{r_z}(\omega) = O_\eta(i\omega) \frac{\partial V_z(\omega, r)}{\partial r} \quad (16)$$

El campo de velocidades ya fue previamente calculado en las secciones anteriores (Ec. 11), escalando la coordenada radial r con la longitud característica a de la función de Bessel J_1 , y empleando el hecho de que $\beta = \alpha a$, el esfuerzo en la pared tiene la siguiente forma:

$$\sigma_1(\omega, \beta) = -\sigma_{r_z}(\omega, r)|_{r=1} = 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \sigma_w(\omega) \quad (17)$$

Entonces la función de transferencia del esfuerzo se puede expresar como (Herrera-Valencia et al. 2022; Miranda Nuñez 2023)

$$TS(\omega) = \frac{\sigma_1(\omega, \beta)}{\sigma_w(\omega)} = 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \quad (18)$$

La Ec. (18) tiene la siguiente estructura matemática (Miranda Nuñez 2023)

$$TS(\omega) = \frac{\sigma_1(\omega, \beta)}{\sigma_w(\omega)} = \frac{\text{Esfuerzo} - \text{inercia}}{\text{Esfuerzo} - \text{viscoso}} \quad (19)$$

En esta sección se desarrollaron las ecuaciones más importantes de la presente investigación. La primera ecuación desarrollada fue la función de transferencia que describe la relación entre el gradiente de presión y el flujo volumétrico (Herrera-Valencia et al. 2022; Miranda-Nuñez 2023). La segunda de estas es la función de transferencia del esfuerzo en función del gradiente de presión. Ambas funciones u objetos matematicos dependen de la geometría y las propiedades reologicas a traves del operador que se escoja.

Un hecho importante es que las ocilaciones asociadas a la resonancia se deben a un acoplamiento entre las propiedades: a) inerciales b) viscoelasticas c) dispersiveas y d)

geométricas (**Herrera-Valencia et al. 2022; Miranda-Núñez 2023**). En el siguiente capítulo se escalarán las ecuaciones adimensionales mediante variables características que permitan tres cosas importantes:

- a) Escalar las ecuaciones dimensionales
- b) Introducir grupos adimensionales que permitan describir los grupos adimensionales en el sistema
- c) Facilitan las simulaciones computacionales en el programa de Mathematica 13.0
Licencia UNAM.

CAPÍTULO IV
SIMULACIÓN COMPUTACIONAL Y
ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1 Variables adimensionales

Las variables adimensionales se define a continuación. Las variables escaladas son:
(i) La coordenada radial r , la coordenada azial z , la componente rz del tensor de esfuerzos, la presión, frecuencia y la velocidad axial:

$$r = \frac{r}{a} \quad (1)$$

$$z = \frac{z}{a} \quad (2)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{\Sigma_G \Sigma_\lambda} \quad (3)$$

$$P = \frac{P}{\Sigma_G} \quad (4)$$

$$\omega = \Sigma_\lambda \omega \quad (5)$$

$$\beta = a\beta \quad (6)$$

$$O_\eta(i\omega) = \frac{O_\eta(i\omega)}{\Sigma_G \Sigma_\lambda} \quad (7)$$

$$O_\varphi(i\omega) = \frac{O_\varphi(i\omega)}{1/\Sigma_G \Sigma_\lambda} \quad (8)$$

$$T_Q(i\omega) = \frac{T_Q(i\omega)}{1/\Sigma_G \Sigma_\lambda} \quad (9)$$

$$T_\sigma(i\omega) = \frac{T_\sigma(i\omega)}{1/\Sigma_G \Sigma_\lambda} \quad (10)$$

4.2 Numeros adimensionales

Los numeros adimensionales que se obtienen para este modelo son:

$$\Sigma\eta = \frac{\Sigma\eta}{\Sigma_G \Sigma_\lambda} \quad (11)$$

$$\Pi_\lambda = \frac{\Pi_\lambda}{\Sigma_G \Sigma_\lambda} \quad (12)$$

Por lo tanto, el último grupo adimensional no es independiente y se puede expresar en terminos del cociente de la memoria del polímero y la viscosidad total.

$$\Sigma_{\lambda J} = \frac{\Sigma_{\lambda J}}{\Sigma_\lambda} = \frac{\lambda_1 \eta_2 + \lambda_2 \eta_1}{\Sigma_\lambda (\eta_2 + \eta_1)} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (G_1 + G_2)}{\Sigma_\lambda (\eta_2 + \eta_1)} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \Sigma_G}{\Sigma_\lambda (\eta_2 + \eta_1)} = \frac{\Pi_\lambda}{\Sigma\eta}$$

Por lo que:

$$\Sigma_{\lambda J} = \frac{\Sigma_{\lambda J}}{\Sigma_\lambda} = \frac{\Pi_\lambda}{\Sigma\eta} \quad (13)$$

Los valores que tienen los tres grupos adimensionales son:

$$\varepsilon = 10^{-4} \leq \Sigma\eta \leq 1 \quad (14)$$

$$\varepsilon = 10^{-4} \leq \Pi_\lambda \leq 1/4 \quad (15)$$

$$\varepsilon = 10^{-4} \leq \Sigma_{\lambda_j} \leq 1 \quad (16)$$

Los modulos elásticos y los tiempos de relajación viscoelásticos, satisfacen las siguientes restricciones (multiplicadores de Lagrange)

$$G_1 + G_2 = 1 \quad (17)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (18)$$

4.3 Espacio paramétrico 3D de los principales grupos dimensionales

Los valores numéricos encontrados en las Ecs. (14-16) pueden ser representados en un espacio 3D paramétrico el cual, puede ser indentificado mediante sel siguiente prisma.

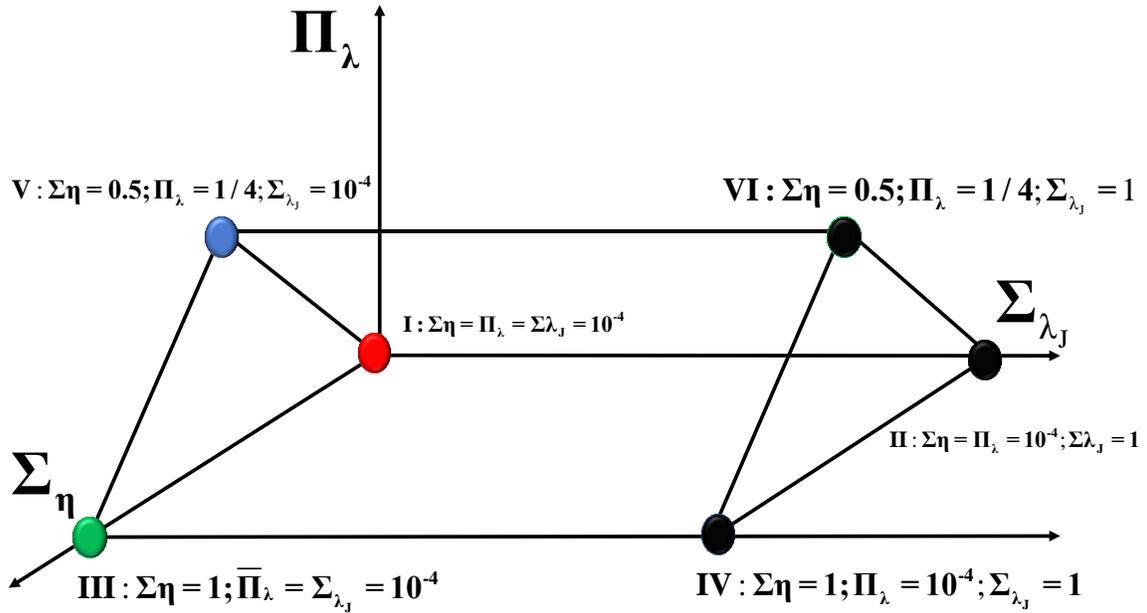


Figura 4.1. Ilustra el espacio material que forman los grupos dimensionales: (i) Viscosidad de Bulto, (ii) Mecanismos viscoelásticos, (iii) Mecanismo de retardo.

I: El punto uno corresponde a una viscosidad minima de bulto, una bajasa asimetria en las fases viscoelásticas y un tiempo de relajación pequeño.

II: El punto II corresponde a una baja viscosidad de bulto. Asimetria en las fases viscoelásticas y un tiempo total de retardo máximo.

III. El punto 3 corresponde a una alta viscosidad de bulto, asimetria en las fases y un tiempo total de retardo mínimo.

IV. El punto 4 corresponde a una viscosidad de bulto maxima, asimetria en las fases viscoelásticas y un tiempo de retardo máximo.

V. El punto 5 corresponde a una viscosidad de bulto intermedia, a fases viscoelásticas simétricas y un tiempo de retardo mínimo.

VI. El punto 6 corresponde a una viscosidad de bulto intermedia, a fases viscoelásticas simétricas y un tiempo de retardo máximo.

Es importante recordar que las fases asimétricas tiene que ver conque una de ellas es poco viscoelástica y la otra totalmente viscoelástica ($\Pi_{\lambda} = 10^{-4}$). En contraste cuando se tengan fases simétricas el valor del número adimensional $\Pi_{\lambda} = 1/4$.

El punto clave de esta investigación es deducir las condiciones para las cuales se obtiene la máxima resonancia en el sistema de estudio (**Herrera-Valencia 2023**)

4.4 Funciones adimensionales

Las funciones importantes que se obtienen son la función de transferencia del flujo volumétrico (**Herrera-Valencia et al. 2022**)

$$T_Q(i\omega) = \text{Re}[T_Q(i\omega)] + \text{Im}[T_Q(i\omega)] = \frac{Q(i\omega)}{\nabla p(i\omega)} = O_\varphi(i\omega)F(\beta) \quad (19)$$

$$F(\beta) = \frac{8i^2}{\beta^2} \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta)/(\beta)}{J_0(\beta)} \right] \quad (20)$$

La función de transferencia del esfuerzo (**Herrera-Valencia 2022; Miranda-Nuñez 2023**)

$$T_\sigma(i\omega) = \text{Re}[T_\sigma(i\omega)] + i\text{Im}[T_\sigma(i\omega)] = \frac{\sigma_w(i\omega)}{-\nabla p(\omega)/2} = 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \quad (21)$$

Si acoplamos las dos funciones de transferencia, se tiene lo siguiente:

$$T_Q(i\omega) = O_\varphi(i\omega) \frac{8i^2}{\beta^2} [1 - T_\sigma(i\omega)] \quad (22)$$

Al despejar la función de transferencia del esfuerzo:

$$T_\sigma(i\omega) = 1 - \frac{\beta^2}{8i^2 O_\varphi(i\omega)} T_Q(i\omega) \quad (23)$$

La Ec. (23) respresenta el mayor de las contribuciones de la presente investigación original. Es claro, que las dos funciones de transferencia estan acompladas y son punto de partida en la descripción de los lazos.

4.5 Parámetro betha

El parámetro β tiene la siguiente estructura física, importante (**Herrera-Valencia et al. 2022; Bird et al. 1987; Miranda Nuñez 2023**):

$$\beta(\omega) = i^{3/2} \sqrt{\text{De}^2 \cdot \omega \cdot O_\varphi(i\omega)} = \sqrt{\frac{\omega \cdot O_\varphi(i\omega)}{E}} \quad (24)$$

En donde el número de Deborah puede ser descrito como el cociente de dos tiempos característicos (**Macosko 1994**)

$$\text{De} = \frac{\sqrt{\Sigma \rho a^2 / \Sigma_G}}{\Sigma_\lambda} \quad (25)$$

En vez de definir el parámetro β en terminos del De, se propone un nuevo enfoque debido a que no tenemos una velocidad macroscópica característica por lo que:

$$E = \frac{1}{\text{De}^2} \quad (26)$$

En donde E se conoce en la literatura como número elástico el cual, se define como un cociente fundamental definido como (**Shankar y Subramanian 2022**)

$$E = \frac{We}{Re} \quad (27)$$

En la Ec. (27), We es el número de Weissenberg el cual, relaciona los procesos viscoelásticos del material. Re es el famoso Reynolds el cual, tiene que ver con los procesos inerciales y viscosos del material. El operador fluidez definido para el modelo de Burgers de esta investigación tiene la forma (**Herrera-Valencia et al. 2022; Bird et al. 1987; Miranda Nuñez 2023**)

$$O_{\phi}(i\omega) = (1/\Sigma\eta) \frac{1+i\omega + \Pi_{\lambda}(i\omega)^2}{1+\Sigma\eta_j(i\omega)} \quad (28)$$

Observese que el parametro beta se puede expresar en terminos de números adimensionales definidos de la siguiente manera:

$$\beta(iW_o^2) = i^{3/2} De W_o \sqrt{O_{\phi}(iW_o^2)} \quad (29)$$

Finalmente, el parametro Beta que define la dispersión en el sistema, se puede expresar como:

$$\beta(iW_o^2) = E^{-1/2} W_o \sqrt{(1/\Sigma\eta) \frac{1+iW_o^2 + \Pi_{\lambda}(iW_o^2)^2}{1+\Sigma\eta_j(iW_o^2)}} \quad (30)$$

Notese que este parámetro contiene toda la física involucrada en este problema y puede ser punto de partida en la descripción de la velocidad de fase y la velocidad de grupo del sistema de estudio. La Ec. (30) contiene información de dos números fundamentales (**Loudon y Todesillas 1988; Shankar y Subramanian 2022**)

- a) El número elástico E
- b) El número de Womersley W_o

4.6 Comparación entre los modelos Maxwell, Jeffreys y Burgers

En la Figs. (4.2) y (4.3) se simulan las normas de la función de transferencia del flujo volumétrico y del esfuerzo en función de los mecanismos inerciales. En estas simulaciones se comparan los tres modelos clásicos o resultados particulares del de Burgers.

- A) La mayor resonancia se obtiene con el polímero puro (Maxwell), la segunda resonancia o respuesta se obtiene con la interacción polímero-solvente y finalmente la interacción polímero-polímero.
- B) La mayor resonancia se obtiene en el sistema gradiente de presión transitorio-volumétrico en vez de la interacción del gradiente de presión transitorio-esfuerzo

MODELOS VISCOELÁSTICOS

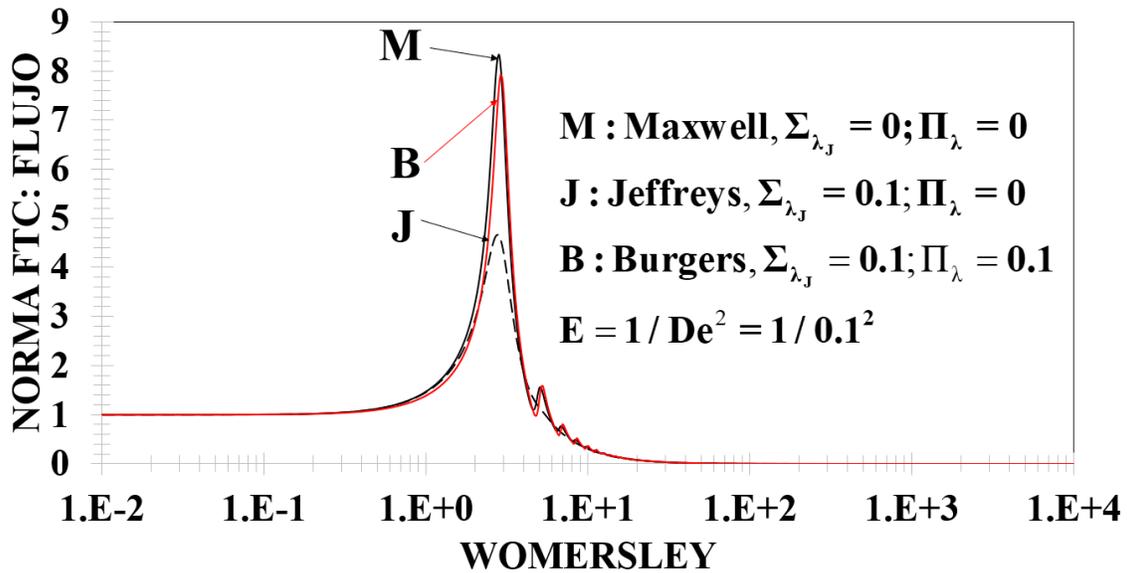


Figura 4.2 Ilustra la Norma de la FTC del flujo volumétrico para diferentes modelos viscoelástico en función de la frecuencia o del número de Womersley

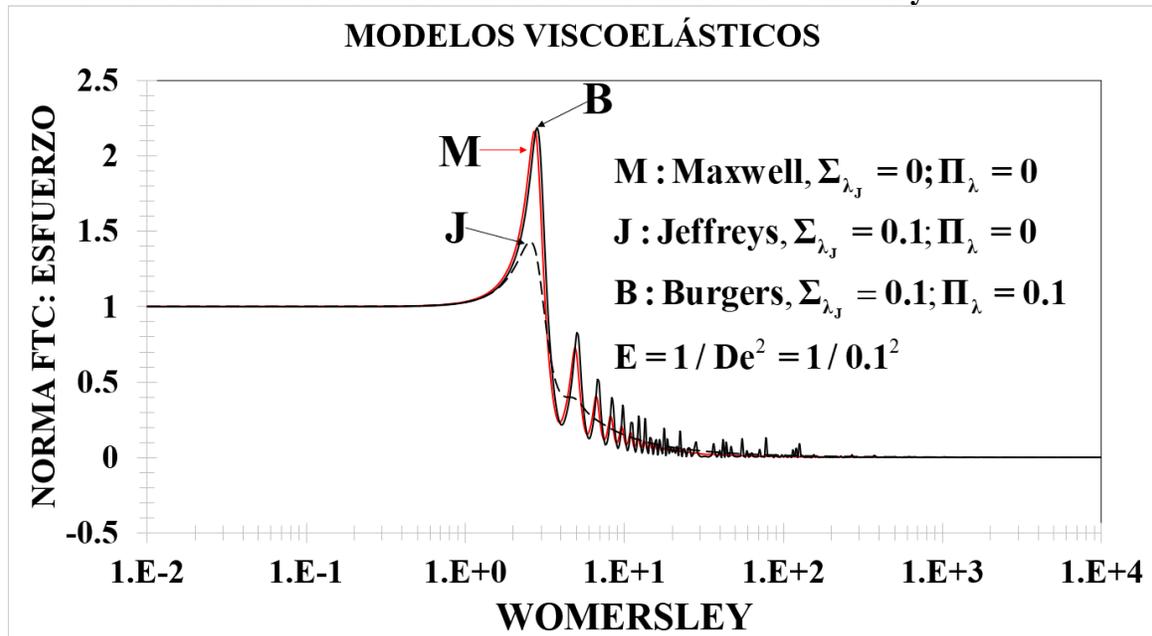


Figura 4.3. Ilustra la Norma de la FTC del esfuerzo para diferentes modelos viscoelástico en función de la frecuencia o del número de Womersley

4.7 Efecto del número elástico en la función de transferencia compleja

En la Figs. (4.4) y (4.5) se ilustra la norma de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia adimensional o del número de Womersley. Los parámetros utilizados en esta simulación son: (a) $\Sigma_{\lambda,J} = 0.1$, (b) $\Pi_{\lambda} = 0.1$, (c) $\Sigma_{\eta} = 0.1$. Los valores del número elástico se presentan

Se observa tres zonas importantes. (i) La primera de ellas, es a bajas frecuencias en donde el sistema no presenta respuesta. (ii) La segunda, es cuando se observa que, a una frecuencia en específico, se observa un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo determinado por un acoplamiento de mecanismos inerciales, elásticos de bulto, viscoelásticos, mecanismos solvente-polímero y polímero-polímero. A una segunda frecuencia crítica el sistema presenta una segunda zona resonante seguida de un tren de picos secundarios.

Tres hechos importantes son perceptibles en las Figs. (4.4) y (4.5). La primera es que la viscoelasticidad del material afecta directamente a la resonancia. Si el número Elástico aumenta, el sistema es más viscoelástico por lo que la resonancia crece. Opuesto a esto, si el Elástico disminuye la resonancia también lo hace.

El segundo es que la función de transferencia del esfuerzo (esfuerzo-gradiente de presión) presenta una menor respuesta que la del flujo (flujo volumétrico-gradiente de presión). El tercero es que el sistema debe de presentar asimetría en las fases viscoelásticas del material para obtenerse la resonancia.

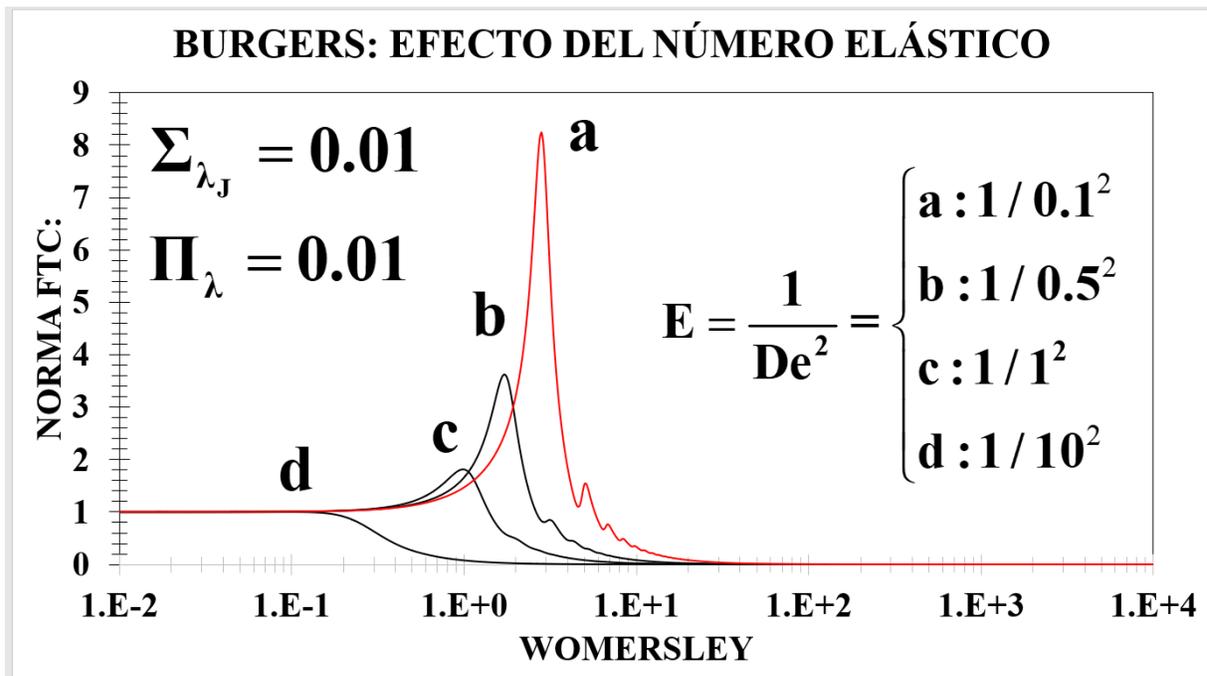


Figura 4.4. Ilustra la norma de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia para diferentes valores del número elástico. Los valores obtenidos corresponden a la máxima disipación, efectos del solvente mínimos y asimetría en las fases viscoelásticas. Los valores han sido definidos previamente en la Fig. (4.2)

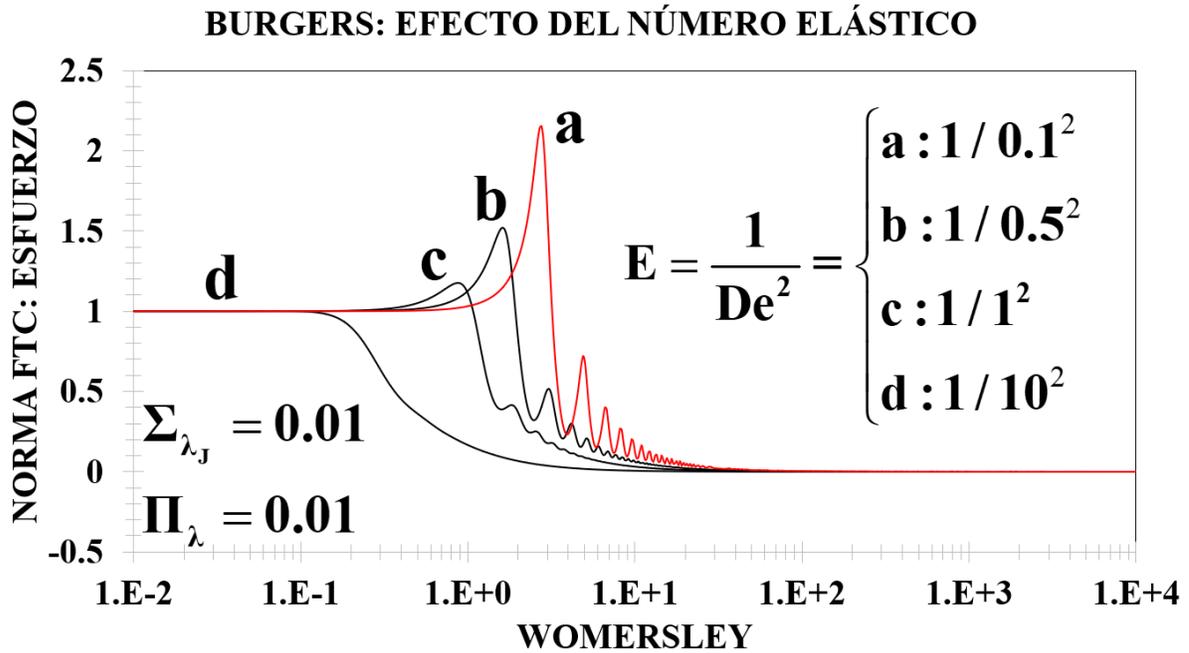


Figura 4.5. Ilustra la función de transferencia compleja en función de la frecuencia. Los valores son los mismos que en la Fig. (4.2).

4.8 Aplicación a sistemas micelares tipo gusano

En esta sección presentaremos una aplicación práctica a fluidos de interés en ingeniería química. En particular, nos centraremos en un fluido viscoelástico de alto peso molecular conocido en la literatura como micelas tipo gusano. Estos fluidos estructurados tienen una parte hidrofóbica y una parte hidrofílica. Al aumentar la concentración pasan de una geometría esférica a una laminar seguida de un tubo flexible, el cual es conocido como micelas tipo gusano. Finalmente, al aumentar la concentración forman entramados físicos los cuales le dan una configuración reológica muy interesante. Los fluidos que vamos a discutir en esta sección se conocen como CTAT y EHAC los cuales son considerados fluidos tensoactivos catiónicos. Estos fluidos son modelo debido a que presentan propiedades reológicas en estado estacionario y no estacionario muy interesantes.

Tabla 2. Propiedades materiales de los tensoactivos catiónicos CTAT y EHAC. Estos resultados fueron obtenidos mediante pruebas reológica en estado estacionario (prueba de flujo) y no estacionario (Prueba de flujo oscilatorio baja amplitud).

Tabla 2. Parámetros materiales del modelo de Burgers para los tensoactivos CTAT Y EHAC para concentraciones del 3 % y 4 % (Manero et al. 2002)

	CTAT 3%	EHAC 4%
G_0 (Pa)	22	31
λ_0 (s)	4.33	50
λ_j (s)	0.0026	0.041
β (s ²)	0.011258	2.05
ρ (kg/m ³)	1000	1000
$\eta_0 = G_0 * \lambda_0$ (Pa * s)	95.26	1550

En la Tabla 2. Se han adaptado las siguientes variables:

$$G_0 = \Sigma G = G_1 + G_2$$

$$\lambda_0 = \Sigma \lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\lambda_j = \Sigma \lambda_j = \lambda_{j1} + \lambda_{j2}$$

$$\eta_0 = \Sigma \eta = \eta_1 + \eta_2$$

$$\beta = \Pi_\lambda = \lambda_0 \lambda_j$$

Los números adimensionales correspondientes bajo estas definiciones son las siguientes:

$$De = \frac{\sqrt{\Sigma \rho a^2 / \Sigma G}}{\Sigma \lambda} = \frac{\sqrt{\rho a^2 / G_0}}{\lambda_0}$$

$$\Sigma \lambda_j = \frac{\Sigma \lambda_j}{\Sigma \lambda} = \frac{\lambda_j}{\lambda_0}$$

$$\Pi_\lambda = \frac{\Pi_\lambda}{(\Sigma \lambda)^2} = \frac{\Pi_\lambda}{(\lambda_0)^2}$$

$$E = \frac{1}{De^2}$$

A partir de las definiciones anteriores, procedemos a calcular los valores numéricos de los números adimensionales del CETAT (3%)

$$De = \frac{\sqrt{\rho a^2 / G_0}}{\lambda_0} = \frac{\sqrt{(1000\text{kg/m}^3)(0.01\text{m})^2 / (31\text{Pa})}}{(4.33\text{s})}$$

$$\Sigma\lambda_J = \frac{\lambda_J}{\lambda_0} = \frac{0.0026\text{s}}{4.33\text{s}}$$

$$\beta = \frac{\beta}{(\lambda_0)^2} = \frac{0.011258\text{s}^2}{(4.33\text{s})^2}$$

A partir de las definiciones anteriores, procedemos a calcular los valores numéricos de los números adimensionales del CTAT (3%)

$$De = \frac{\sqrt{\rho a^2 / G_0}}{\lambda_0} = \frac{\sqrt{(1000\text{kg/m}^3)(0.01\text{m})^2 / (22\text{Pa})}}{(4.33\text{s})} = 0.1557$$

$$\lambda_J = \frac{\lambda_J}{\lambda_0} = \frac{0.0026\text{s}}{4.33\text{s}} = 0.0006$$

$$\beta = \frac{\beta}{(\lambda_0)^2} = \frac{0.011258\text{s}^2}{(4.33\text{s})^2} = 0.0006$$

A partir de las definiciones anteriores, procedemos a calcular los valores numéricos de los números adimensionales del EHAC (4%)

$$De = \frac{\sqrt{\rho a^2 / G_0}}{\lambda_0} = \frac{\sqrt{(1000\text{kg/m}^3)(0.01\text{m})^2 / (31\text{Pa})}}{(50\text{s})} = 0.01136$$

$$\lambda_J = \frac{\lambda_J}{\lambda_0} = \frac{0.041\text{s}}{50\text{s}} = 0.00082$$

$$\beta = \frac{\beta}{(\lambda_0)^2} = \frac{2.05\text{s}^2}{(50\text{s})^2} = 0.00082$$

Tabla 3. Números adimensionales para el modelo de Burgers

	CTAT 3%	EHAC 4%
De	0.1557	0.001136
λ_J	0.0006	0.00082
β	0.0006	0.00082

Nota: El valor numérico de la longitud característica radial es $a = 0.01\text{ m}$

4.9 Resonancia de dos tensoactivo catiónicos con diferente peso molecular CTAT Y EHAC

En las Figs. (4.6) y (4.7) se observan las funciones de transferencia del flujo volumétrico y del esfuerzo en la pared, para dos tensoactivos (CETAT Y EHAC). Se observa que las Figs. (4.8) y (4,9) tienen las siguientes relaciones:

- a) Matemáticamente, la función de transferencia para el flujo volumétrico y el esfuerzo tienen las mismas descripción y comportamiento.
- b) La física en cuanto a la descripción a bajas, moderadas y altas frecuencias es similar a las explicadas en las figuras anteriores.
- c) Las respuestas de las curvas resonantes dependen del peso molecular de los tensoactivos catiónicos los cuales tienen un alto peso molecular
- d) En particular la resonancia, depende de la distribución de las cadenas poliméricas, i.e., los diferentes tamaños entre estas.
- e) Comparando los dos tensoactivos, el EHAC presenta una mayor respuesta a la frecuencia que el CETAT por lo que la respuesta dinámica será función de los entramados físicos, tamaño de las cadenas y del peso molecular.

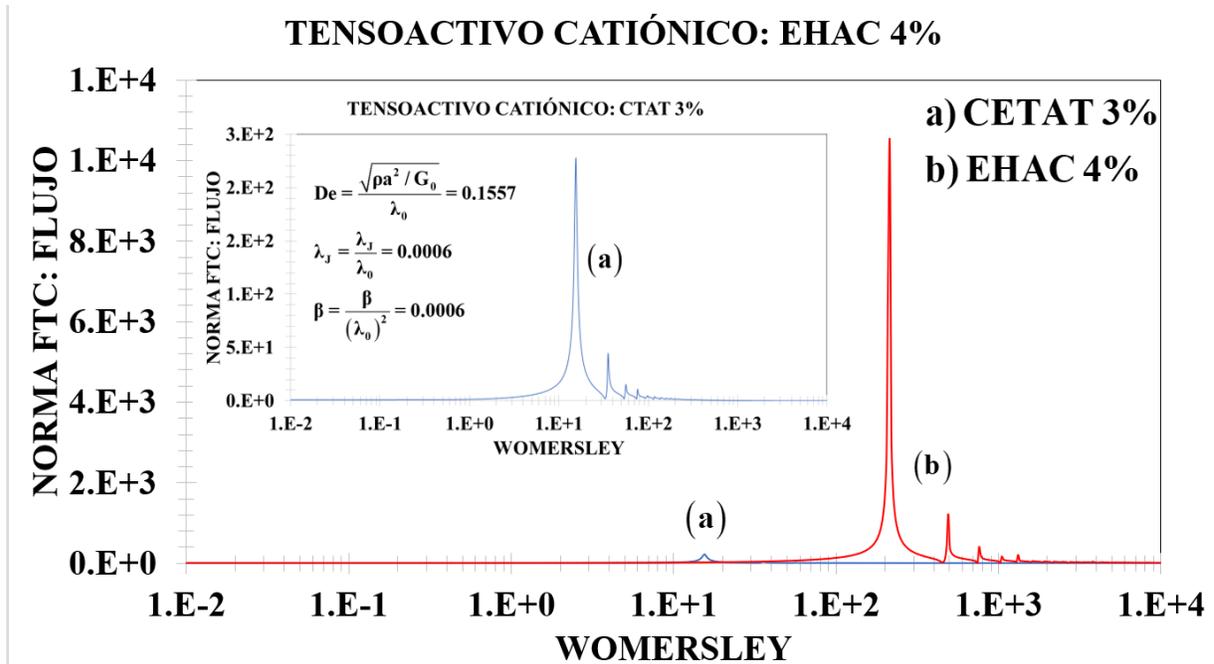


Figura 4.6. Efecto de la concentración en la FTC de gradiente de presión transitorio-flujo volumétrico para para dos diferentes tipos de tensoactivos CETAT 3% y EHAC 4 %.

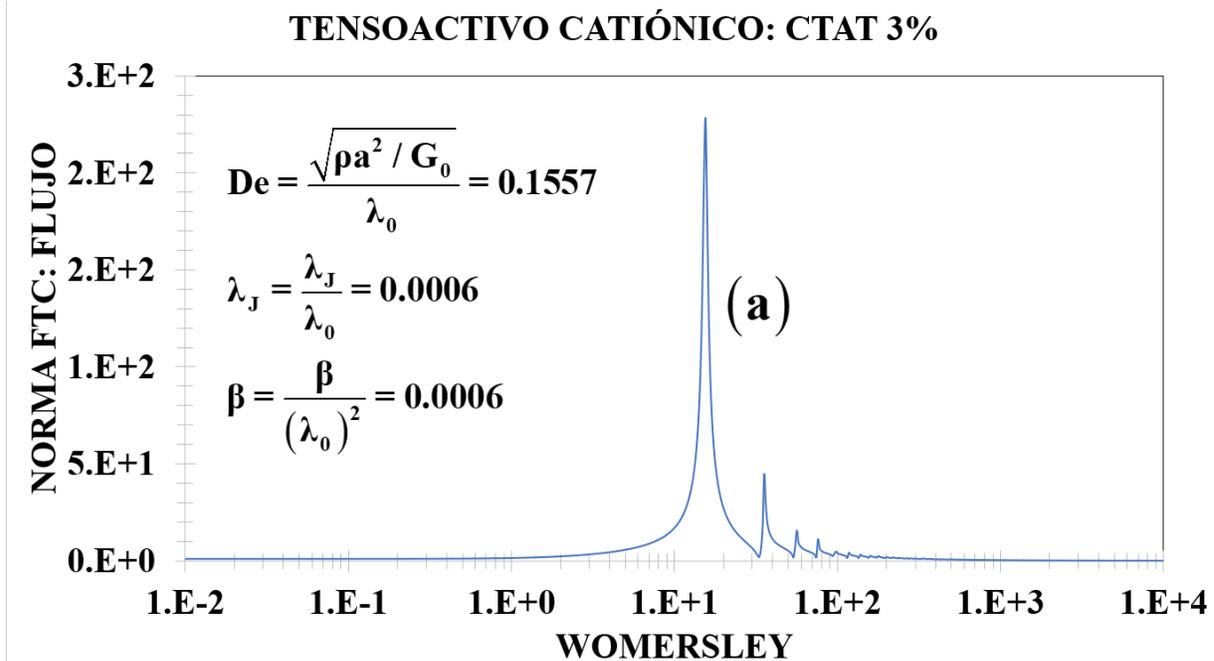


Figura 4.7. Efecto de la concentración en la FTC de gradiente de presión transitorio-flujo volumétrico a menor escala para mejor visualización del CETAT 3%.

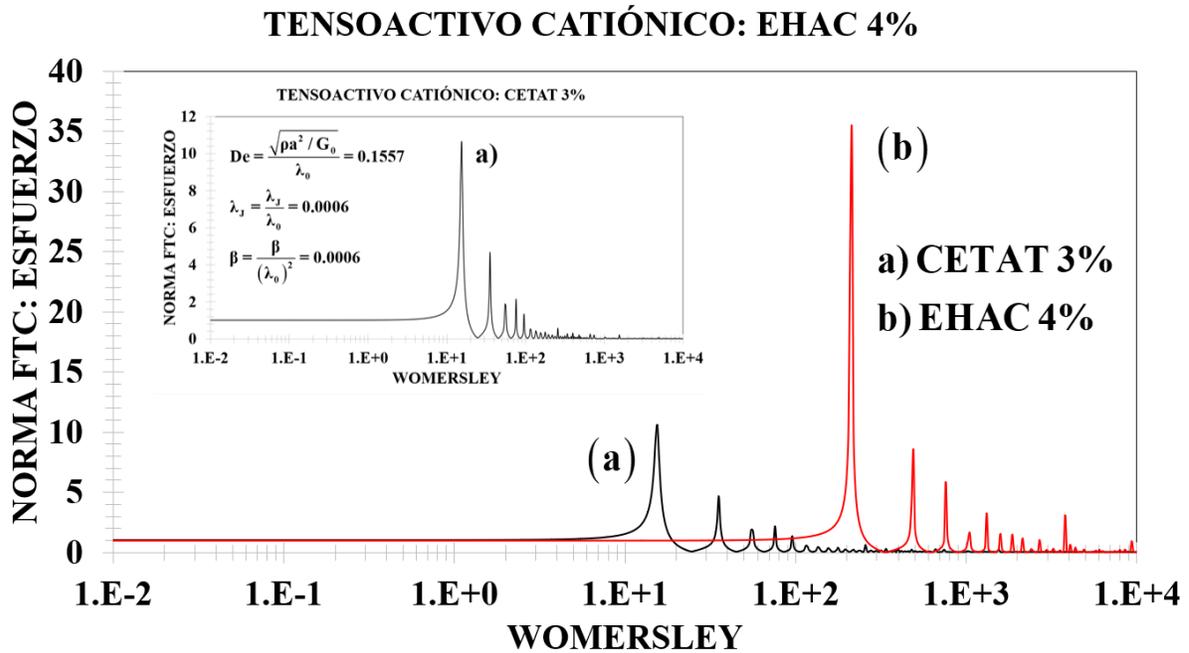


Figura 4.8. Efecto de la concentración en la FTC de gradiente de presión transitorio-esfuerzo para dos diferentes tipos de tensoactivos CETAT 3% y EHAC 4 %

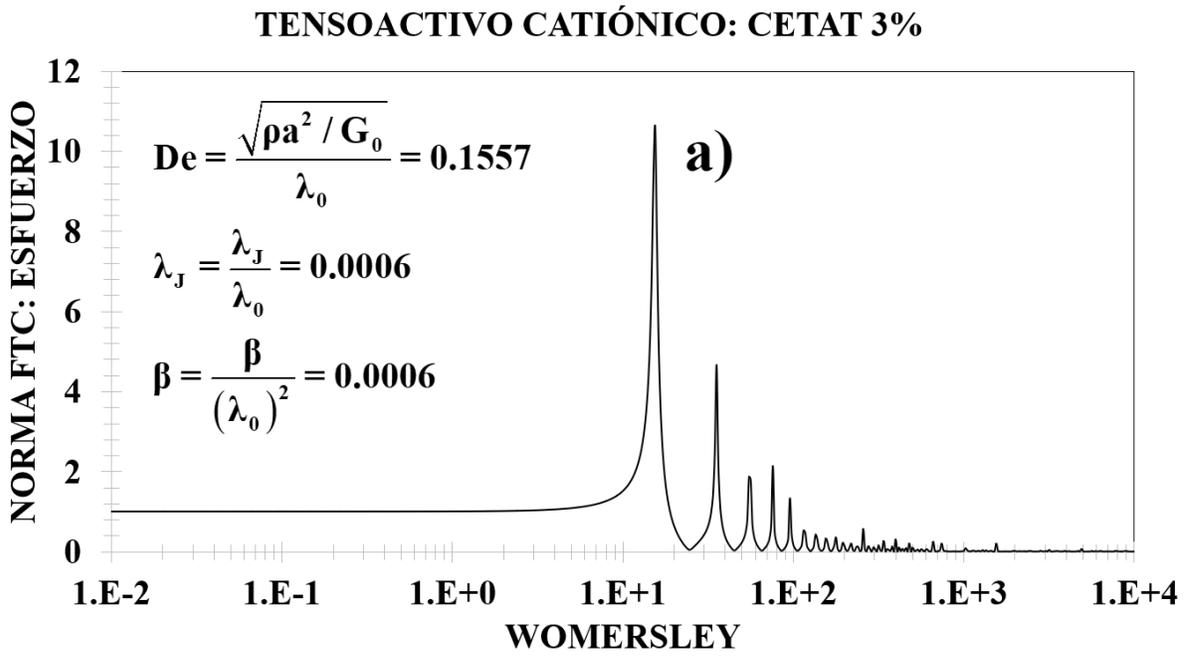


Figura 4.9. Efecto de la concentración en la FTC de gradiente de presión transitorio-esfuerzo a menor escala para mejor visualización del CETAT 3%.

4.10 Efecto de la concentración del CETAT a diferentes concentraciones en peso.

En esta sección se presentan el modelo discutido en este trabajo en función de la concentración. El tensoactivo, que se emplea para esta simulación es el CETAT al a) 5 %, b) 10 %, c) 15 %, d) 20 % (Soltero et al. 1999). Los datos reométricos se obtuvieron en experimentos en estado estacionario y no estacionarios en un reómetro de esfuerzo controlados. En las Figs. (4.10) y (4.11), se observan el mismo comportamiento matemático y físico de las Figs. (4.8) y (4.9). Dos observaciones son importantes en las Figs. (4.10) y (4.11)

- A) La resonancia no es directamente proporcional a la concentración. Un ejemplo claro es que la máxima resonancia, se obtiene en el porcentaje del 15 % wt. en peso.
- B) La mínima resonancia se obtiene en el 5 % wt. en peso.
- C) Al aumentar la concentración, se inducen las interacciones entre las estructuras e induce que pueda aumentar los efectos de las interacciones entre el solvente-polímero y polímero-polímero.

Tabla 3. Parámetros materiales del modelo de Burgers para el tensoactivo CETAT para diferentes concentraciones (Soltero et al. 1999).

	EHAC 5%	EHAC 10%	EHAC 15%	EHAC 20%
G_0 (Pa)	22	31	22	31
λ_0 (s)	4.33	50	4.33	50
λ_j (s)	0.0026	0.041	0.0026	0.041
β (s²)	0.011258	2.05	0.011258	2.05
ρ (kg/m³)	1000	1000	1000	1000
$\eta_0 = G_0 * \lambda_0$ (Pa * s)	95.26	1550	95.26	1550

Tabla 4. Números adimensionales para el CETAT a concentraciones del 5%, 10%, 15% y 20 %

	CTAT 5%	CTAT 10%	CTAT 15%	CTAT 20%
De	0.1557	0.001136	0.001136	0.001136
$\Sigma\eta$	1	1	1	1
$\Sigma\lambda J$	0.0006	0.00082	0.00082	0.00082
$\Pi\lambda$	0.0006	0.00082	0.00082	0.00082

Nota: El valor numérico de la longitud característica radial es $a = 0.01$ m

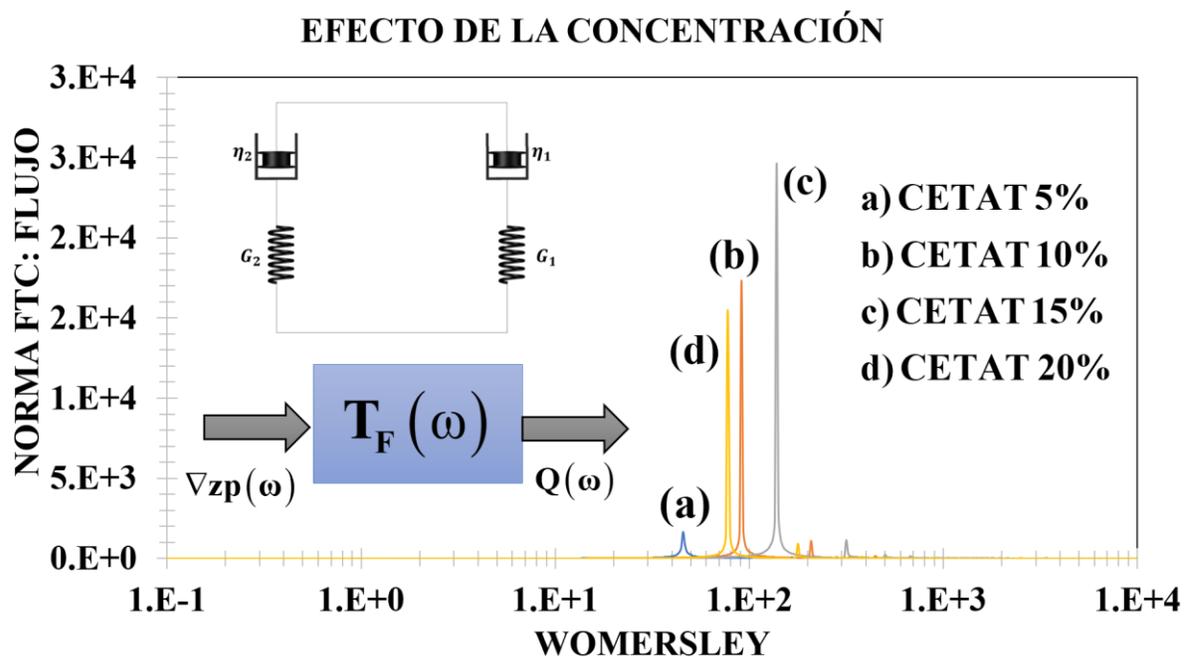


Figura 4.10. Ilustra el efecto de la concentración en la norma de la función de transferencia compleja del flujo para el tensoactivo CETAT

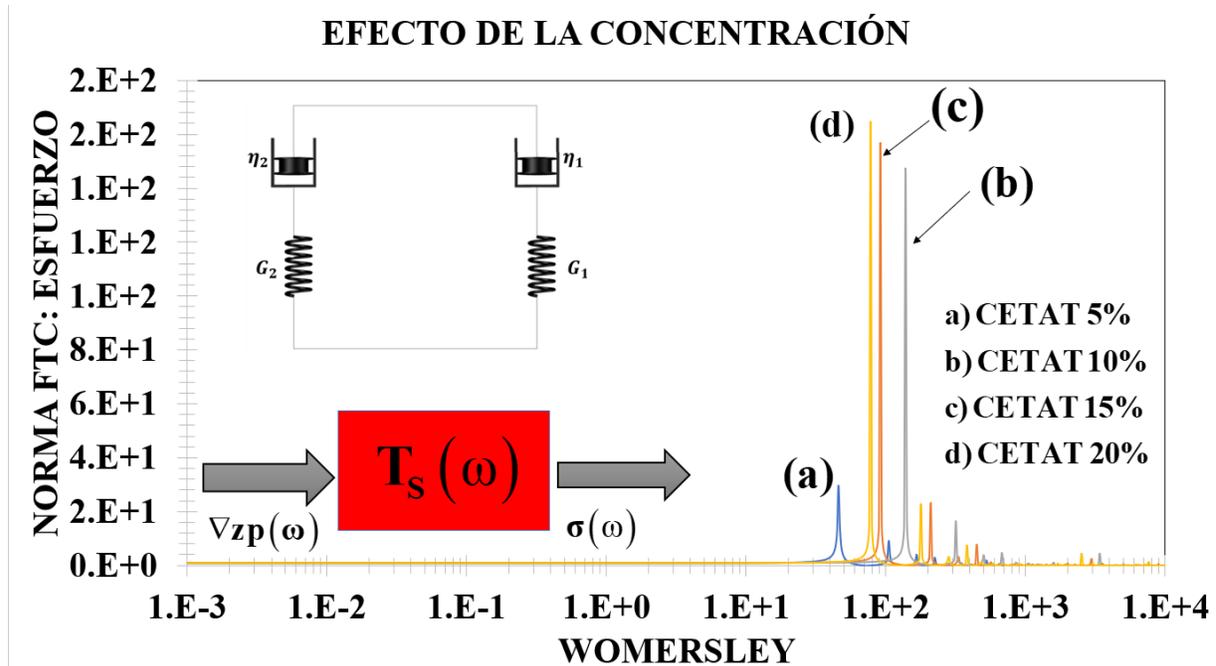


Figura 4.11. Ilustra el efecto de la concentración en la norma de la función de transferencia compleja del esfuerzo para el tensoactivo CETAT

4.11 Resumen del capítulo

Este capítulo representa la base de la presente tesis de licenciatura. En la primera sección, se establecieron los números adimensionales los cuales, describen la física del sistema de estudio. Además se demostró que el conjunto de números adimensionales describen un espacio material conformado con la viscosidad total de bulto, las propiedades asimétricas de los fluidos viscoelásticos y el tiempo de retardo total del sistema. Se exploró los efectos de la viscoelasticidad a través del número de elástico, el cual describe las propiedades viscoelásticas del material. Además se analizó la respuesta dinámica con diferentes ecuaciones constitutivas. El punto medular de este trabajo es analizar la respuesta mecánica del sistema a la concentración. Se probaron diferentes tensoactivos (CETAT y EHAC) a diferente concentración y la respuesta resonante es muy diferente.

Por otra parte, el incremento en la concentración es algo que debemos explorar debido a que no hay una relación lineal entre la concentración y el máximo resonante.

En la siguiente sección, se presentan los resultados más significativos de la presente investigación a nivel de licenciatura, junto con el trabajo futuro.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

5.1 Aportación al conocimiento

En esta tesis se analizó el flujo de una mezcla de polímeros en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. El fluido es deformado continua e irreversiblemente por medio de un gradiente de presión transitorio. Esta fuerza superficial induce un flujo volumétrico el cual, cual se puede interpretar en términos de un sistema lineal, como una variable de salida y una variable de entrada. La herramienta que se utiliza para obtener información del dispositivo es la transformada integral de Fourier, y la función de transferencia compleja.

Para caracterizar el fluido se utilizó un modelo mecánico que consiste en dos elementos de Maxwell en serie. Este modelo es conocido en la literatura como ecuación de Burgers la cual representa las interacciones: Solvente-polímero y polímero-polímero. Los méritos de esta investigación son:

1) Se dedujo una metodología general en términos de un operador fluidez que facilita la obtención el perfil de velocidades y el flujo volumétrico viscoelástico.

2) La función de transferencia compleja es una extensión de la fluidez tomando en cuenta la dispersión de sistema a través de una función de dispersión que depende de un parámetro asociado a las funciones cilíndricas de Bessel.

3) Las funciones de transferencia deducidas en este trabajo son la relación entre: (i) El flujo volumétrico y el gradiente de presión transitorio y (ii) el esfuerzo en la pared en función del gradiente de presión transitorio.

4) Las dos funciones de transferencia están acopladas y no son independientes. Consecuencia de esto, son los lazos que se forma viscoelásticos y que describen estas interacciones.

5) Las oscilaciones son una consecuencia del cociente de funciones de Bessel y esta posible interacción se puede deber a un cambio de raíces de reales a complejas. En este punto, el sistema es multivaluado.

6) El parámetro β es una función que depende de los números adimensionales: (i) Deborah el cual, es una función de dos tiempos característicos asociados a la inercia-elasticidad de Bulto del material y a las propiedades viscoelásticas del material. Este, se puede expresar también como el cociente entre el Reynolds y el Weissenberg. Esta relación se conoce como número elástico. Para sistemas en donde no hay una velocidad característica, el número que describe mejor estos sistemas es el elástico. Por último, β tiene la información reológica a través del operador-fluidez que describe la interacción entre el solvente-polímero y polímero-polímero.

7) La función de transferencia compleja a frecuencias bajas es independiente de la frecuencia y es constante por lo que, la razón entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión transitorio.

8) A una frecuencia característica, el sistema presenta un máximo resonante. Esto sucede cuando la frecuencia natural del material coincide con la frecuencia de proceso. Este máximo, está determinado por las propiedades viscoelásticas de material y las interacciones solvente-polímero, polímero-polímero y solvente-solvente.

9) Para una segunda frecuencia característica, los sistemas presentan resonancias secundarias seguidas de un tren de picos secundarios. Estas resonancias, están determinadas por las diferentes frecuencias naturales de los materiales

10) A frecuencias largas, la función de transferencia decrece hasta un valor en el que tiende a desvanecerse

11) Es importante notar que, las dos funciones de transferencia tienen un comportamiento similar, sin embargo, el impacto del sistema gradiente de presión transitorio-flujo volumétrico es mayor que aquel correspondiente al gradiente de presión transitorio-esfuerzo en la pared.

12) El efecto de los números adimensionales se presenta en la respuesta del material:

(a) El número de Deborah De : Está relacionado con la viscoelasticidad y define el máximo resonante en las curvas

(b) El número $\Sigma\lambda_r$ está relacionado con el retardo del material y los mecanismos del solvente. Este número tiene un contexto negativo en cuanto a la resonancia. Al aumentar los procesos del solvente, la resonancia decrece debido a la competencia del polímero. Este número está acotado entre 0 y 1. Un valor de cero, implica que no existe solvente y un valor máximo de 1 es que este tiene la mayor contribución. El efecto de este número es disminuir la resonancia en el sistema de estudio.

(c) El número $\Sigma\beta$ tiene que ver con la interacción entre los mecanismos de relajación y estos con la memoria del material. El valor mínimo es $\Sigma\beta = 10^{-4}$ el cual, describe un contraste entre las fases viscoelásticas. Una de ellas, es completamente viscoelástica y la otra débilmente viscoelástica. En contraste, si $\Sigma\beta = 1/4$ significa que la viscoelasticidad en el polímero es la misma. Este número incrementa la resonancia.

(d) El número $\Sigma\eta$ es la viscosidad total de los líquidos. El valor de $\Sigma\eta$ está acotado entre un valor mínimo de viscosidad, i.e. $\Sigma\eta = 10^{-4}$ y un valor máximo de $\Sigma\eta = 1$.

13) De acuerdo con los resultados, el modelo reológico que permite obtener la mayor resonancia es el de Maxwell, los demás, aunque más realistas, decrecen el efecto resonante.

14) El efecto de la concentración se sigue indirectamente en función de las propiedades materiales y los números adimensionales característicos del sistema. La relación entre las concentraciones no es directa, es decir, al aumentar la concentración no necesariamente aumenta la resonancia. A concentraciones bajas, la resonancia aumenta conforme aumenta la concentración. En este punto, si la concentración del polímero incrementa, existe una concentración crítica del orden del 10 % en peso en donde ya no se empieza a cumplir esto.

En este punto se tienen las siguientes conclusiones:

- (i) A bajas concentraciones, la viscoelasticidad induce resonancia
- (ii) A altas concentraciones, la viscoelasticidad induce interacciones mayores por lo que esto, puede ser negativo en el contexto de la resonancia.

Las bondades y el aporte de este trabajo de tesis de licenciatura es el de obtener una metodología sistemática para deducir una expresión para la función de transferencia compleja en geometrías cilíndricas, este análisis se puede aplicar a varias áreas de la física y la ingeniería como son: i) virología, ii) medios porosos, iii) cristales líquidos asociados al flexo electricidad de las células ciliadas externas

5.2 Trabajo futuro

Una de las posibles continuaciones de este trabajo es la extensión a modelos no lineales que capturan las interacciones entre las estructuras y la elasticidad de los materiales.

Implementar los experimentos para obtener datos experimentales y compararlas con las predicciones de nuestro modelo.

Ecuaciones constitutivas que acoplen la transferencia de momento, energía y masa son punto de partida para estudios posteriores de posgrado, maestría y doctorado.

Finalmente, este trabajo representa una aportación en la búsqueda constante de sistemas basados en materia suave, fluidos complejos, cristales líquidos y que usan como punto de partida los fenómenos de transporte, reología, transferencia de momento, modelado matemáticos y simulación computacional para deducir y encontrar los mecanismos que describen estos sistemas.

BIBLIOGRAFIA

Bird RB, Armstrong RC, Hassager O (1987). Dynamics of polymeric liquids, vol. New York: John Wiley & Sons.

Bird RB, Stewart E, Lighfoot EN (2002). Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.

Bravo-Gutierrez ME, Castro M, Hernández-Machado A, Corvera-Poiré E (2011). Controlling viscoelastic flow in microchannels with slip. *Langmuir* 27, 2075-2079.

Chen M, Li Q, Lv X, Pang W, Lyu C, Wen H, Ge Y (2023). Regular pore network model to study dynamic permeability evolution in hydrate-bearing sediments. *Energy & Fuels* 37, 1818-1827.

Hernández-Machado A, Corvera-Poire E (2008). Dynamic Characterization of permeabilities and flows in microchannel. *Phys. Rev. Lett.* 101, 224501.

De la Guerra PA, Corvera-Poiré E (2022). Pulsatile parallel flow of air and a viscoelastic fluid with multiple characteristic times. An application to mucus in the trachea and the frequency cough. *J. Phys.: Condens. Matter*, 34, 314003.

Gerónimo JF, Hernández-Machado A, Corvera-Poiré E (2022). Contact line dynamics of pulsatile fluid interfaces modulated by patterned substrates. *Phys. Fluids*, 34, 052001.

Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Calderas García F, Ramírez-Torres LA, Ortiz Bautista D, Soriano-Correa C, Nuñez-Ramírez DM, Medina-Torres L, Hernández Abad VJ (2022). Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos: Flujo pulsátil de sangre humana. UNAM, FES Zaragoza, agosto 2022. ISBN: 978-607-30-6436-1.

Herrera EE, Calderas F, Chávez AE, Manero O (2010). Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165 174-183.

Kang W, Mushi SJ; Yang H; Wang P; Hou X (2020). Development of smart viscoelastic surfactants and its applications in fracturing fluid: A review. *J. Pet. Sci. Eng.* 190, 107107.

Leal LG (2007). Advanced transport phenomena: fluid mechanics and convective transport processes. Print Book English

Li G, Li G, Luo C, Zhou R, Zhou J, Yang J (2023). Dynamic evolution of shale permeability under coupled temperature and effective stress conditions. *Energy* 266, 126320.

Lombard J, Pagonabarraga I, Poiré EC (2020). Dynamic response of a compressible binary fluid mixture. *Phys. Rev. Fluids* 5, 064201.

Loudon C, Tordesillas A (1998). The use of the dimensionless Womersley number to characterize the unsteady nature of internal flow. *J. Theor. Biol.* 191, 63-78.

Macosko CW (1994). Rheology: Principles, Measurement and Applications (Wiley, Germany).

Manero O, Bautista F, Soltero JFA, Puig JE (2002). Dynamics of worm-like micelles: The Cox-Merz rule. *J. Non-Newton. Fluids Mech.* 106, 1-15.

Miranda Nuñez DS (2023). Estudio del flujo a gradiente de presión de una mezcla de polímeros: Ecuación constitutiva. Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.

Park K, Tixier A, Paludan M, Østegaard E, Zwieniecki M, Jensen KH (2021). Fluid-structure interactions enable passive flow control in real and biomimetic plants. *Phys. Rev. Fluids* 6, 123102.

Pasquino R, Avallone PR, Constanzo S, Inbal I, Danino D, Ianniello V, Ianniruberto G, Marrucci G, Grizzuti N (2023). On the startup behavior of wormlike micellar networks: The effect of different salts bound to the same surfactant molecule. *J Rheol.* 67, 353-364.

Rothstein JP, Mohammadigoushki H (2020). Complex flows of viscoelastic wormlike micelle solutions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 285, 104382.

Ruizhi H, Shanfa T, Musa M, Zhaowen J, Shuyong F (2020). Research progress of viscoelastic surfactants for enhanced oil recovery. *Energy Exploration & Exploitation.* 39, 1324-1348.

Sadek Samir H, Pinho FT (2019). Electro-osmotic oscillatory flow of viscoelastic fluids in a microchannel, 266, 46-58.

Shah NA, Mahsud Y, Aziz M, Tlili I (2020). Analytical solutions for unsteady electrohydrodynamics flows of a Maxwell fluid in microchannels with circular cross section. *Phys. Fluids* 32, 013107.

Shankar V, Subramanian G (2022). A linear route to elasto-inertial turbulence. *Science Talks.* 100051.

Simpson JP; Leylek JH (2023). The influence of Womersley number on non-Newtonian effects: Transient computational study of blood rheology. *J. Fluids. Eng.* 145, 011206.

Solazzi SG, Rubino JG, Jougnot D, Holliger K (2020). Dynamic permeability functions for partially saturated porous media. *Geophysical J. Inter.* 221, 1182-1189.

Soltero JFA, Bautista F, Puig JE (1999). Rheology of Cetyltrimethylammonium p-Toluenesulfonate-Water System. 3. Non-linear viscoelasticity. *Langmuir* 15, 1804-1612.

Sullivan PF, Panga MK, Lafitte V (2017). Applications of wormlike micelles in the oilfield industry. *Soft Matter* 330-352.

Tozzi E, Hartt W (2022). Non-Newtonian laminar flows in pipes using radius, stress, shear rate or velocity as the independent variable. *Phys. Fluids* 33, 103104.

Torres-Herrera U (2021). Dynamic permeability of fluids in rectangular and square microchannels: Shift and coupling of viscoelastic bidimensional resonances. *Phys. Fluids* 33, 012016.

Wolfram Research, Inc., Mathematica (Licencia UNAM) Version 13, Champaign, IL., 2020.

Ying Y, Brayan FG, Soheil S (2020). Surfactant viscoelasticity as a key parameter to improve supercritical CO₂ foam stability/foamability and performance in porous media. *J. Non-Newton. Fluids Mech.* 282, 104311.