



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Una construcción de la medida de Haar en
 $SU(2)$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Kevin Alonso Ramírez Franco

TUTOR

M. en C. Raúl Rodríguez Barrera



Cd. Mx. 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Ramírez

Franco

Kevin Alonso

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

314322236

2. Datos del tutor

M. en C.

Raúl

Rodríguez

Barrera

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Francisco Javier

Torres

Ayala

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Oscar Alberto

Garrido

Jiménez

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Pavel

Ramos

Martínez

6. Datos del sinodal 4

M. en C.

Fernando Javier

Núñez

Rosales

7. Datos del trabajo escrito

Una construcción de la medida
de Haar en $SU(2)$

86 p

2023

*La diferencia entre
el poeta y el matemático es que el poeta
intenta meter su cabeza en los cielos,
mientras que el matemático intenta
meter los cielos en su cabeza
Chesterton*

*Este trabajo está dedicado
a mi madre Olga.*

Agradecimientos

A mis padres por su todos los años de trabajo duro para y lo necesario para llegar a este momento.

A Raúl Barrera por su paciencia, amistad, ayuda y guía en la realización esta tesis.

A César Aguillón por la oportunidad de continuar con mi desarrollo como profesor.

Al departamento de matemáticas de la facultad por su apoyo y a los sinodales por su tiempo dedicado a este trabajo.

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares	1
1.1. Algunas nociones topológicas	2
1.2. Grupos Topológicos	11
1.3. Medida en espacios localmente compactos	19
2. Existencia y unicidad de la medida de Haar	25
2.1. Existencia de la medida de Haar	26
2.2. Unicidad	37
3. Construcción de la medida de Haar en $SU(2)$	53
3.1. Diferenciabilidad e Integración en $\mathbb{R}^n$	53
3.1.1. La integral de superficie de campos escalares	55
3.1.2. Formas diferenciables e integración de formas en $\mathbb{R}^n$	57
3.2. Variedades diferenciables en $\mathbb{R}^n$	64
3.2.1. Campos y formas en variedades	66
3.2.2. Integración de formas en variedades	68
3.3. El grupo especial unitario de grado 2, $SU(2)$	69
3.4. La medida de Haar en $SU(2)$	74

Introducción

La *teoría de la medida* es una rama del análisis real que estudia funciones llamadas medidas, dichas funciones están definidas en familias de conjuntos llamadas σ -álgebras, y a cada uno de los elementos de esta familia se les asocia un número real. Un espacio que admite las propiedades anteriores se le denomina *espacio medible*. Gracias a esta rama las aplicaciones en probabilidad, estadística y física han avanzado de manera extraordinaria. A continuación, revisamos un fragmento de la historia acerca de la noción de *medida* hasta llegar al contexto de este trabajo.

El concepto de *medida* tiene una historia de más 5000 años, que surge del manejo de longitudes, áreas y volúmenes fundamentales y su calculo. Desde el *Papiro de Moscú* (1800 A.C.) pasando por el libro de Euclides, *Los Elementos* (300 A.C.) y también por los resultados de Arquímedes (287-212 A.C.). Así, se mantuvieron las cosas durante 2000 años, hasta que en 1883 G. Cantor (1845-1918) dio la primera definición de medida $m(A)$, de un conjunto acotado arbitrario, $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

En 1901 Lebesgue introduce su medida, que lleva su nombre. Para dicha medida en $\mathbb{R}$, se muestran múltiples propiedades que esta cumple, una de ellas es que es invariante bajo traslaciones, la estructura de los reales y la definición de medida de Lebesgue, hace inmediata esta propiedad. Sin embargo, en un curso de teoría de la medida, el estudio de medidas abstractas definidas sobre una σ -álgebra no se enfoca en probar esta propiedad, esto es porque no resulta cierto para todo espacio medible. Así, para introducir el concepto de "traslaciones" se requiere trabajar en espacios con más propiedades los cuáles son los espacios topológicos y grupos algebraicos.

Con este par de conceptos es posible introducir los grupos topológicos, esta

idea fue considerada por primera vez a finales del siglo XIX por Sophus Lie. Los grupos topológicos introdujeron nuevas herramientas para analizar problemas históricos a principios del siglo XX, una de las conjeturas concebidas en este periodo era la existencia de una medida invariante sobre un grupo. Alfred Haar fue el primero en probar la existencia de una medida invariante bajo traslaciones izquierdas en cualquier grupo compacto y separable, este resultado fue publicado en 1933.

Debido a esto, a las medidas invariantes bajo traslaciones se les llama medidas de Haar, cabe destacar que en este trabajo no se mencionó la unicidad de dicha medida, el primero en demostrar la existencia y la unicidad fue André Weil, cuya prueba estaba basada en el Axioma de Elección.

Este trabajo está enfocado en dar una demostración de la existencia y la unicidad de la medida de Haar en grupos topológicos localmente compactos, y más en concreto, exhibir de manera explícita la medida de Haar en el grupo especial unitario $SU(2)$, el trabajo se divide en los tres capítulos siguientes:

Capítulo 1 (Preliminares): En este capítulo, se introducen los conceptos topológicos más importantes que fundamentan la existencia y unicidad de la medida de Haar, así como la definición y propiedades de los grupos localmente compactos y de Hausdorff, que son los espacios donde desarrollamos la teoría. Por último, introducimos el concepto de medida regular de Borel para grupos localmente compactos y de Hausdorff, y mostramos algunas de sus propiedades.

Capítulo 2 (Existencia y Unicidad de la medida de Haar): En este capítulo, definimos la medida de Haar para espacios localmente compactos y de Hausdorff, damos una construcción que prueba la existencia de la medida de Haar para dichos espacios, esta construcción se basa en los conceptos de ser una medida de Borel regular sobre los conjuntos compactos, y se extiende de una medida exterior a todos los conjuntos. Posteriormente, recordamos dos resultados fundamentales como lo son el teorema de representación de Riesz y el teorema Fubini para grupos localmente compactos. Utilizando dichos resultados, mostramos la unicidad de la medida de Haar, en el sentido de que dadas dos medidas de Haar izquierdas μ y ν , existe un número no negativo c tal que $\mu = c\nu$.

Capítulo 3 (La medida de Haar en $SU(2)$): Para finalizar este trabajo, estudiaremos el grupo especial unitario de grado dos " $SU(2)$ ", mostraremos diversas propiedades algebraicas que dicho grupo cumple, para posteriormente, darle estructura de grupo topológico. Para esto, es necesario notar que dicho grupo es una variedad diferenciable de dimensión 3, que es difeomorfo a la 3-esfera, y como consecuencia de esto se puede pensar en el grupo $SU(2)$ como un grupo topológico compacto, con la topología inducida por los abiertos en el espacio real de dimensión 4. Luego, por lo mostrado en el capítulo anterior podemos asegurar la existencia y unicidad de la medida de Haar izquierda en $SU(2)$. Para finalizar este capítulo, mostraremos por medio del estudio de formas diferenciables un calculo explícito de esta medida.

Capítulo 1

Preliminares

Como mencionamos anteriormente, el propósito de este capítulo es introducir los conceptos necesarios para dar la demostración de la existencia de la medida de Haar. Para poder introducir la medida de Haar, es necesario trabajar con los 3 siguientes conceptos:

- i) **Topología:** Son 3 resultados importantes que debemos mostrar en los espacios topológicos de Hausdorff, el primero, consta de separar conjuntos compactos por subconjuntos compactos disjuntos. El segundo, es mostrar que existe un conjunto compacto con interior no vacío en un espacio localmente compacto, la última es mostrar compacidad mediante la propiedad de intersección finita (P.I.F.) y el teorema de Tychonoff.
- ii) **Grupos topológicos:** Definimos grupo topológico y damos resultados que destacan la importancia de los subconjuntos abiertos que contienen al elemento neutro.
- iii) **Medida de Borel:** Definición de una medida en un grupo topológico localmente compacto y de Hausdorff.

A continuación, introducimos la notación y convenciones que ocuparemos a lo largo de este trabajo.

Notación y convenciones

- Si X es un conjunto denotamos por $\mathcal{P}(X)$ a su conjunto potencia.
- Sean X un conjunto y $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$. Denotaremos por $\sigma[\Sigma]$ a la σ -álgebra generada por Σ .

- Decimos que un conjunto es **numerable** si existe una función biyectiva entre los elementos del conjunto y $\mathbb{N}$. Diremos que es **contable** si es finito numerable.

1.1. Algunas nociones topológicas

La topología es una de las ramas más importantes de la matemática, a continuación, revisamos algunos de los principales conceptos y resultados que usaremos a lo largo del trabajo.

Definición 1.1. *Una topología en un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ que cumple las siguientes propiedades*

- i) $\emptyset$ y X están contenidos τ .*
- ii) La unión de los elementos de toda subcolección de τ está contenida en τ .*
- iii) La intersección de elementos de cada subcolección finita de τ está contenida en τ .*

Un conjunto X para el que se ha especificado una topología τ se denomina espacio topológico.

Hablando rigurosamente un espacio topológico es un par ordenado (X, τ) , formado por un conjunto X y una topología τ en X , pero a menudo se omite la mención específica de τ si no hay confusión.

Si X es un espacio topológico con una topología τ , decimos que un subconjunto U de X es un **conjunto abierto** si U pertenece a la colección τ . Usando esta terminología, se dice que un espacio topológico es un conjunto X , junto con una colección de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ llamados **conjuntos abiertos**, tales que $\emptyset$ y X son abiertos, las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de los conjuntos abiertos son abiertos. Sea (X, τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Se define el interior de A denotado por A° como la unión de todos los abiertos contenidos en A .

Con la siguiente definición asociamos conjuntos abiertos a cada elemento del espacio X .

Definición 1.2. Sea (X, τ) un espacio topológico, sea $U \subseteq X$ y sea $x \in X$. Se dice que U es una vecindad o vecindad abierta del elemento x si $x \in U$ y $U \in \tau$.

Del concepto de un conjunto abierto U en un espacio topológico X , se deriva el concepto de **conjunto cerrado**, el cual se define como sigue, $F \subseteq X$ es un conjunto cerrado si y sólo si $X - F$ es un conjunto abierto. La siguiente definición permite caracterizar un conjunto formado por subconjuntos cerrados dado cualquier subconjunto de X .

Definición 1.3. Sea X un espacio topológico y sea A un subconjunto de X . La intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a A se llama la cerradura de A en X , y es denotado por $Cl_X(A)$.

Dado un subconjunto S de un espacio topológico (X, τ) es posible definir una topología en S a partir de τ , para esto es necesario introducir el concepto de **topología relativa**¹.

Definición 1.4. Dados un espacio topológico (X, τ) y un subconjunto S de X se llama topología relativa sobre S a la topología

$$\tau|_S := \{A \cap S \mid A \in \tau\}.$$

Se dice que el espacio topológico $(S, \tau|_S)$ es un **subespacio topológico** de (X, τ) .

Mostrar de manera explícita todos los conjuntos en una topología resulta complicado en muchos casos, como solución a esta problema hay dos formas de generar una topología implícitamente a partir de una colección más pequeña de subconjuntos, la siguiente definición describe que debe cumplir dicha colección.

Definición 1.5. Sea X un conjunto. Una base para una topología en X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X , llamados elementos base, tales que

- i) Para cada $x \in X$, hay un elemento base B tal que $x \in B$.
- ii) Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2 , entonces, hay un elemento base B tal que $x \in B$ y $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

¹También es conocida como topología inducida o heredada.

Si $\mathcal{B}$ es una base para una topología en X , diremos que: Un subconjunto U de X es abierto si para cada punto x en U , existe un elemento de base B tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$.

Definición 1.6. Sea X un conjunto. Una subbase para una topología en X es una colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X , llamados elementos de subbase, tal que $\cup \mathcal{S} = X$. La topología generada por $\mathcal{S}$ se define como la colección de todas las uniones de intersecciones finitas de conjuntos en $\mathcal{S}$.

En cualquier espacio métrico, las vecindades abiertas forman una base para una topología en ese espacio. La **topología euclidiana** en $\mathbb{R}^n$ es entonces simplemente la topología generada por estas vecindades. En otras palabras, los conjuntos abiertos de la topología euclidiana en $\mathbb{R}^n$ están dadas por uniones (arbitrarias) de las vecindades abiertas $B_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(p, x) < r\}$, donde $r > 0$ y $p \in \mathbb{R}^n$, dónde d es la métrica euclidiana.

Observación 1.1. Se debe tener en cuenta también que la colección de todas las intersecciones finitas de elementos en $\mathcal{S}$ forma una base. Esto significa que cada subbase induce una base.

Continuamos con el tema de las funciones entre espacios topológicos el cual es un tema importante y extenso, nos centraremos en la continuidad de las funciones, veamos su definición.

Definición 1.7. Sean (X, τ_1) , (Y, τ_2) espacios topológicos. Se dice que una función $f : X \rightarrow Y$ es continua si para cada subconjunto abierto V de Y , el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X . Se dice que f es un homeomorfismo si f es biyectiva y f , f^{-1} son continuas.

Nos interesa trabajar en una clase particular de espacios topológicos los cuáles cumplen condiciones llamadas axiomas de separación que a continuación enunciamos.

Definición 1.8. Sea X un espacio topológico.

- i) Se dice que X es T_1 (y se denota por $X \in T_1$), si para cualquier par de elementos x, y en X distintos, existe una vecindad U tal que

$$\text{card}(\{x, y\} \cap U) = 1.$$

ii) Se dice X es T_2 (y se denota por $X \in T_2$), si para cualquier par de elementos x, y en X distintos, existen dos vecindades U y V de x y de y , respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$.

Un resultado importante de los axiomas de separación es que son un **invariante topológico**.²

A los espacios T_2 también se les conoce como espacios de **Hausdorff**, en honor a Felix Hausdorff, quién los introdujo por primera vez.

Antes de enunciar la definición de un espacio compacto, necesitamos el concepto de cubiertas.

Definición 1.9. Sea X un espacio topológico y $R \subseteq X$. Consideremos una familia de subconjuntos de X dada por $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$. Se dice que $\mathcal{U}$ es **cubierta** de R si

$$R \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha.$$

Si además cada elemento $U_\alpha \in \mathcal{U}$ es abierto, diremos que $\mathcal{U}$ es una **cubierta abierta**.

Por otro lado, si $\mathcal{V} = \{V_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$ es otra cubierta de R , diremos que $\mathcal{V}$ es **subcubierta** de $\mathcal{U}$, si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.

Definición 1.10. Un espacio topológico X se llama **compacto**, si toda cubierta $\mathcal{U}$ de X posee una subcubierta finita.

Nos centraremos en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ cuyos conjuntos compactos con la topología euclidiana se pueden caracterizar mediante el teorema de **Heine-Borel** el cual afirma que los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ son los cerrados y acotados.

En el siguiente resultado, enunciamos un par de propiedades de los subconjuntos compactos en espacios con otras características.

²Un invariante topológico es una propiedad del espacio que se preserva bajo homeomorfismos.

Proposición 1.1. *Sea X un espacio topológico.*

- i) Si X es de Hausdorff y $K \subseteq X$ es un subconjunto compacto, entonces K es cerrado.*
- ii) Si X es un espacio compacto y $K \subseteq X$ es cerrado, entonces K es compacto.*

Demostración. Ver [2] página 163. □

El siguiente concepto es más débil que la compacidad, sin embargo, será fundamental en este trabajo.

Definición 1.11. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es localmente compacto si cada elemento $x \in X$ tiene una vecindad abierta U cuya cerradura $Cl_X(U)$ es compacta.*

Observación 1.2. *La compacidad y la compacidad local son un invariante topológico.*

A continuación, mostraremos algunas propiedades de los conjuntos compactos en un espacio de Hausdorff, dichos resultados serán claves en los capítulos posteriores.

El siguiente lema, es un resultado derivado de la **Proposición 1.1 i).**

Lema 1.1. *Sea X un espacio de Hausdorff y $K \subseteq X$ un subconjunto compacto. Entonces, para cada $x \in X - K$ existen abiertos U_x, U_K tal que $\{x\} \subseteq U_x$, $K \subseteq U_K$ y $U_x \cap U_K = \emptyset$.*

Demostración. Ya que X es de Hausdorff, para cada $k \in K$ podemos encontrar abiertos disjuntos tales que $\{x\} \subseteq U_{x,k}$, $\{k\} \subseteq U_k$. Notemos que los abiertos U_k forman una cubierta abierta de K . Como K es compacto, existe una subcubierta abierta finita, sea $Y \subseteq K$ un conjunto finito tal que $\{U_y\}_{y \in Y}$ cubre a K . Definimos

$$U_x := \bigcap_{y \in Y} U_{x,y}.$$

Por construcción U_x es abierto y disjunto de todos los U_y , por lo tanto también de la unión

$$U_K := \bigcup_{y \in Y} U_y.$$

Así, U_x y U_K son los dos abiertos requeridos. □

El siguiente resultado generaliza el **Lema 1.1**.

Proposición 1.2. *Sean X un espacio de Hausdorff, K y L dos conjuntos compactos ajenos. Entonces existen U, V conjuntos abiertos tales que $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Demostración. Sea $k \in K$. Como $K \cap L = \emptyset$, $k \notin L$.

Ya que L es compacto, por el **Lema 1.1**, existen abiertos U_k, V_k tales que $k \in U_k$, $L \subseteq V_k$ y $U_k \cap V_k = \emptyset$. Los conjuntos $\{U_k\}_{k \in K}$ forman una cubierta abierta de K . Por ser compacto, hay una subcubierta finita $\{U_{k_1}, \dots, U_{k_n}\}$ que lo cubre.

Ahora, para cada $k_i \in K$ consideremos el correspondiente V_{k_i} , y definimos

$$U = \bigcup_{i=1}^n U_{k_i}$$

y

$$V = \bigcap_{i=1}^n V_{k_i}.$$

Observe que por construcción U y V son abiertos, y $K \subseteq U$ y $L \subseteq V$ así, para cada k_i , $U_{k_i} \cap V_{k_i} = \emptyset$ por lo que $U \cap V = \emptyset$.

□

Continuamos con la siguiente definición.

Definición 1.12. *Sea X un espacio topológico. Para $x \in X$, definimos la familia de vecindades de x , denotada por $\mathcal{N}_x$ como*

$$\mathcal{N}_x := \{U \subseteq X \mid \text{existe un conjunto abierto } V \text{ tal que } x \in V \subseteq U\}.$$

La siguiente proposición muestra una característica importante de los espacios que son localmente compactos y de Hausdorff simultáneamente.

Proposición 1.3. *Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $x \in X$. Entonces, para cada $U \in \mathcal{N}_x$, existe V tal que $V \in \mathcal{N}_x$, $Cl_X(V)$ es compacto y $Cl_X(V) \subseteq U$.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{N}_x$. Como X es localmente compacto, por definición, existe un conjunto compacto K y un conjunto abierto U_1 tal que $x \in U_1 \subseteq K$.

Sea $U_0 = U_1 \cap U$. Entonces U_0 es un conjunto abierto que contiene a x . Sea $L = K - U_0$. Como X es de Hausdorff y K es compacto, se sigue por la **Proposición 1.1** que K es cerrado. Así, L también es cerrado y por ser un subconjunto cerrado de un compacto también es compacto, además $x \notin L$. Como X es de Hausdorff y K es compacto por la **Proposición 1.2**, existen dos conjuntos abiertos disjuntos V_1, V_2 tales que $x \in V_1$ y $L \subseteq V_2$.

Ahora, tomemos $V = V_1 \cap U_0$, entonces $V \in \mathcal{N}_x$, también $V \subseteq K$. Luego, dado que $V \subseteq V_1, L \subseteq V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, se tiene que $Cl_X(V) \cap L = \emptyset$, esto implica que $Cl_X(V) \subseteq U_0 \subseteq U$.

Teniendo que $V \subset K$ y al ser K cerrado, se sigue que $Cl_X(V) \subseteq K$, la compacidad de K implica que $Cl_X(V)$ también es compacto. Por lo tanto tenemos una vecindad $V \in \mathcal{N}_x$ tal que

$Cl_X(V)$ es compacto y $Cl_X(V) \subseteq U$. □

La existencia de este conjunto compacto $Cl_X(V)$ con interior no vacío en un espacio localmente compacto y de Hausdorff será clave para probar la existencia de la medida de Haar. Con esta idea es posible construir un nuevo conjunto compacto que contiene a un compacto dado.

Proposición 1.4. *Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff, $K \subseteq X$ un subconjunto compacto y U un conjunto abierto de X tal que $K \subseteq U$. Entonces existe V un conjunto abierto tal que $K \subseteq V \subseteq Cl_X(V) \subseteq U$ con $Cl_X(V)$ compacto.*

Demostración. Por la **Proposición 1.3**, dada $x \in K$, existe V_x un conjunto abierto con cerradura compacta tal que $x \in V_x \subseteq Cl_X(V_x) \subseteq U$. Como K es compacto existen $V_1, \dots, V_n$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$. Sea $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$, entonces $Cl_X(V)$ es compacto y $Cl_X(V) \subseteq U$. □

En el siguiente lema damos una idea similar que consiste en separar conjuntos compactos que están contenidos en la unión de dos abiertos en subconjuntos compactos ajenos.

Lema 1.2. *Sea X un espacio de Hausdorff, sea K un subconjunto compacto de X , y sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos de X tal que $K \subseteq U_1 \cup U_2$.*

Entonces, hay dos conjuntos compactos K_1 y K_2 de X tal que

$$K_1 \subseteq U_1, K_2 \subseteq U_2, \text{ y } K = K_1 \cup K_2.$$

Demostración. Definamos $L_1 = K - U_1$ y $L_2 = K - U_2$. K es cerrado ya que X es de Hausdorff, así cada L_i es cerrado. Dado que cada L_i es un subespacio cerrado de K y K es compacto, se sigue que cada L_i es también compacto. Además, como $K \subseteq U_1 \cup U_2$, se sigue que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

Dado que L_1 y L_2 son subconjuntos compactos disjuntos de un espacio de Hausdorff, por la **Proposición 1.2** podemos separarlos con conjuntos abiertos disjuntos, digamos V_1 y V_2 respectivamente. Definamos $K_1 = K - V_1$ y $K_2 = K - V_2$. De manera similar al razonamiento anterior K_1 y K_2 son compactos. Ahora

$$K_1 = K - V_1 \subseteq K - L_1 = K - (K - U_1) = K \cap (K \cap U_1^C)^C = K \cap (K^C \cup U_1) \subseteq U_1$$

y

$$K_2 = K - V_2 \subseteq K - L_2 = K - (K - U_2) = K \cap (K \cap U_2^C)^C = K \cap (K^C \cup U_2) \subseteq U_2.$$

Además, $K_1 \cup K_2 = (K - V_1) \cup (K - V_2) = K - (V_1 \cap V_2) = K$. $\square$

Dado el resultado anterior, es natural pensar que al conjunto K podemos dividirlo en más de dos subconjuntos compactos. Gracias al principio de inducción matemática tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.1. Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff, $K \in X$ un conjunto compacto y $U_1, \dots, U_n$ conjuntos abiertos tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$.

Entonces existen $K_1, \dots, K_n$ conjuntos compactos tales que $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ y $K_i \subseteq U_i$ con $i \in \{1, \dots, n\}$.

Para concluir con los temas de topología, repasaremos los conceptos de productos de espacios topológicos compactos y la propiedad de intersección finita que sustentan gran parte de la prueba de la existencia de la medida de Haar .

Dada una colección $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ de espacios topológicos, la *topología producto* τ sobre el producto cartesiano

$$X = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$$

es la topología que tiene como subbase $\mathcal{S} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) \mid \alpha \in \mathcal{A}, U \in \tau_\alpha\}$, donde $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ es la proyección en la coordenada α . La topología producto de estos espacios es entonces la topología inducida por las proyecciones.

La *topología de las cajas* sobre X es la topología $\tau_{\mathcal{B}}$ que tiene como base de la colección de los productos de la forma

$$U = \prod_{U_\alpha \in \tau_\alpha} U_\alpha$$

y es claramente más fina que la topología producto, pero ambas coinciden sobre productos con una cantidad finita de factores.

Si se quiere mostrar que un conjunto es compacto, por supuesto que se podría probar directamente que cada cubierta abierta del conjunto tiene una subcubierta finita. Sin embargo, es conveniente tener una forma alternativa de comprobar la compacidad. A continuación, damos tal método alternativo.

Definición 1.13. *Dada una colección $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ diremos que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita (**PIF**) si toda subcolección finita*

$$\{C_1, \dots, C_n\}$$

de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía

$$\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset.$$

La propiedad de intersección finita nos permite caracterizar a los conjuntos compactos usando conjuntos cerrados como lo enuncia la siguiente proposición.

Proposición 1.5. *Sea X un espacio topológico. X es compacto si y sólo si para toda colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de intersección finita, se cumple que $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.*

Demostración. Ver [2] página 260. □

El siguiente resultado es el último y uno de los más importantes de la sección, ya que nos garantiza la compacidad del producto de espacios compactos.

Teorema 1.2. (Tychonoff) *Un producto es compacto si y sólo si cada uno de los factores es compacto.*

Demostración. Ver [2] página 262. □

1.2. Grupos Topológicos

Comencemos con la definición de grupo.

Definición 1.14. *Un grupo es un par ordenado $(G, \circ)$, con G un conjunto no vacío, $\circ$ una función de $G \times G \longrightarrow G$ llamada operación binaria y denotada por $\circ(x, y) := x \circ y$, la cual satisface*

- i) La operación $\circ$ es asociativa, es decir, $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ para todos $x, y, z \in G$.*
- ii) Existe $e \in G$ tal que $e \circ x = x = x \circ e$, para todo $x \in G$.*
- iii) Dado $x \in G$, existe $x' \in G$ tal que $x' \circ x = e = x \circ x'$.*

En lo que sigue, la operación " $\circ$ " la denotaremos simplemente por $x \circ y = xy$. Si G es un grupo que cumple que para todo $x, y \in G$, $xy = yx$ diremos que el grupo G es *abeliano*.

En esta sección introducimos y estudiamos una parte de la teoría de los grupos topológicos. Estos son grupos en sentido algebraico, que han sido dotados de una estructura topológica. Tener una topología nos permite imponer ciertas condiciones de continuidad en la operación del grupo. También, nos permite hablar sobre subconjuntos compactos y abiertos de estos grupos. Esto tiene consecuencias interesantes, algunas serán usadas en el siguiente capítulo.

Por último, definimos y demostramos algunas propiedades de las funciones continuas sobre grupos topológicos. En su mayor parte estudiaremos grupos topológicos arbitrarios, posteriormente enfocaremos nuestra atención a aquellos grupos topológicos cuya topología sea localmente compacta y de Hausdorff, los llamados grupos localmente compactos. Es sobre estas estructuras que vamos a probar que existe una única medida de Haar.

Dado un intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, podemos pensar en trasladarlo por una distancia $x \in \mathbb{R}$ a la izquierda o la derecha, lo que nos da nuevos intervalos $[a - x, b - x]$ o $[a + x, b + x]$ cuya longitud es la misma de $[a, b]$. Queremos generalizar esta idea de traslación para un subconjunto A de un grupo G por un elemento del mismo grupo ya sea por la derecha o la izquierda usando la operación definida en el grupo, lo que nos da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.15. Sean G un grupo, $a \in G$, y A, B subconjuntos de G . Definimos los siguientes conjuntos.

- (1) $aB = \{ab \in G \mid b \in B\}$.
- (2) $Ba = \{ba \in G \mid b \in B\}$.
- (3) $AB = \{ab \in G \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$.
- (4) $A^{-1} = \{a^{-1} \in G \mid a \in A\}$.

Si $A = A^{-1}$, diremos que A es simétrico.

Comentario 1.1. De la definición anterior, en algunos ejemplos o resultados llamaremos a los mapeos $x \mapsto xa$ y $x \mapsto ax$ traslaciones por a .

Ahora, definimos las estructuras con las que trabajaremos. Es decir, los grupos topológicos y los grupos localmente compactos.

Definición 1.16. Sea G un grupo cuyo conjunto subyacente está dotado por una topología. Si la función $x \mapsto x^{-1}$ es continua en la topología sobre G , y la operación de grupo $(x, y) \mapsto xy$ es continua en la topología del producto de $G \times G$, entonces llamamos al conjunto G con sus estructuras asociadas un grupo topológico. Si un grupo topológico es Hausdorff y localmente compacto, diremos que es un grupo localmente compacto.

A continuación, damos varios ejemplos. Algunos de ellos los retomaremos más adelante.

Ejemplo 1.1. Sea G un grupo. Definimos la topología discreta τ como la topología en la que cada elemento de $\mathcal{P}(G)$ es un conjunto abierto. Entonces (G, τ) es un grupo localmente compacto.

Ejemplo 1.2. $G = \mathbb{R}^n$ es un grupo topológico con la operación suma usual y la topología euclidiana en $\mathbb{R}^n$. Es evidente que $0 \in \mathbb{R}^n$ es el elemento neutro y, $-x$ es el inverso de $x \in \mathbb{R}^n$. En particular, este grupo es abeliano. Este ejemplo se puede extender en el caso de que G es un espacio vectorial de dimensión finita con la topología euclidiana.

Ejemplo 1.3. Sea $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$ con la operación multiplicación, el elemento neutro es el 1 y el inverso de x es $1/x$, es inmediato que la operación es continua. Más aún, este grupo es localmente compacto.

Ejemplo 1.4. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x > 0, y \in \mathbb{R} \right\}$. Le daremos la estructura de grupo con el producto usual de matrices con la topología dada por la identificación de G con el conjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\varphi : G \longrightarrow \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0\}, \quad \varphi \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x, y).$$

a) Sean $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ con $x, w > 0$ entonces

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xw & xz + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

b) Sea $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, la matriz inversa es

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/x & -y/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

c) Las operaciones producto e inversión son continuas.

d) Es localmente compacto pues la función

$$\varphi : G \longrightarrow \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0\}, \quad \varphi \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x, y)$$

es un homeomorfismo.

El siguiente ejemplo es clave, pues nos introduce al espacio de matrices.

Ejemplo 1.5. Denotemos al conjunto de matrices de orden $n \times n$ con coeficientes en el campo $\mathbb{F}$ por $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{F})$, el campo $\mathbb{F}$ puede ser $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Sabemos que hay un isomorfismo φ de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ de espacios vectoriales que a su vez es un homeomorfismo de espacios topológicos. Para un elemento

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

se tiene que

$$\varphi(A) = \varphi \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \right) = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}) \in \mathbb{R}^{n^2},$$

por lo que en virtud del **Ejemplo 1.2** es un grupo topológico con la adición, y la topología es la topología euclidiana de $\mathbb{R}^{n^2}$ bajo el isomorfismo φ .

Extendemos el ejemplo para algunos subconjuntos de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ los cuales definimos a continuación.

- i) Sea $G = \mathcal{GL}_{n \times n}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de $n \times n$ no singulares, i.e. el conjunto de matrices cuyo determinante es distinto de 0 y con coeficientes en $\mathbb{R}$. El cual forma un grupo con la operación de multiplicación de matrices. Comúnmente, es llamado el **grupo general lineal**. Para $g \in \mathcal{GL}_{n \times n}(\mathbb{R})$, g^{-1} denota la matriz inversa de g y el elemento neutro es la matriz identidad $I_{n \times n}$.

Una observación es que $\mathcal{GL}_{n \times n}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. La función determinante

$$\det : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua. Si escribimos

$$\mathcal{GL}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \{A \mid A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \det(A) \neq 0\},$$

podemos ver que $\mathcal{GL}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es un subconjunto abierto del espacio euclidiano $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ pues es el complemento del conjunto cerrado

$$\{x \mid x \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \det(x) = 0\} = \det^{-1}(\{0\}).$$

Así, $\mathcal{GL}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es un espacio topológico con la topología heredada de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Las operaciones multiplicación e inversión son continuas, por lo tanto es un grupo topológico.

- ii) Sea $\mathcal{O}_{n \times n}(\mathbb{R})$ el grupo de matrices ortogonales (i.e. son las matrices con determinante 1 ó -1) con coeficientes en $\mathbb{R}$. Ya que $\mathcal{O}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es un conjunto cerrado y acotado en $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ por ser la imagen inversa

de la función $\det^{-1} : \{-1, 1\} \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Se sigue por el teorema de Heine-Borel que es un conjunto compacto con la topología heredada. Por otro lado, es un subgrupo de $\mathcal{GL}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con la operación de multiplicación de matrices. Así, las operaciones multiplicación e inversión son continuas, este grupo es conocido como el **grupo ortogonal**.

iii) Denotamos al **grupo afín** por $\mathcal{AL}_{n \times n}$. Los elementos del grupo afín son los pares ordenados (g, x) con $g \in \mathcal{GL}_{n \times n}(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}^n$. La operación en el grupo es definida por

$$(g_1, x_1)(g_2, x_2) = (g_1 g_2, g_1 x_2 + x_1),$$

donde $g_1 g_2$ es la multiplicación de matrices en $\mathcal{GL}_{n \times n}(\mathbb{R})$ y $g_1 x_2 + x_1$ es la multiplicación de la matriz g_1 por x_2 lo que nos da un elemento en $\mathbb{R}^n$ al que le sumamos x_1 . El elemento neutro es $(e, 0)$ por lo que el inverso es $(g, x)^{-1} = (g^{-1}, -g^{-1}x)$. La topología para $\mathcal{AL}_{n \times n}$ es la topología producto de $\mathcal{GL}_{n \times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, y es un subconjunto abierto de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$. La continuidad de las operaciones son directas.

Los grupos de transformaciones son estudiados en la geometría analítica, principalmente en el plano $\mathbb{R}^2$, pues con estos grupos podemos describir algunas isometrías como lo son las traslaciones, reflexiones, rotaciones alrededor de un punto y composiciones de estas. En la siguiente figura se muestra un rectángulo de área 1 sometido a distintas isometrías de interés.

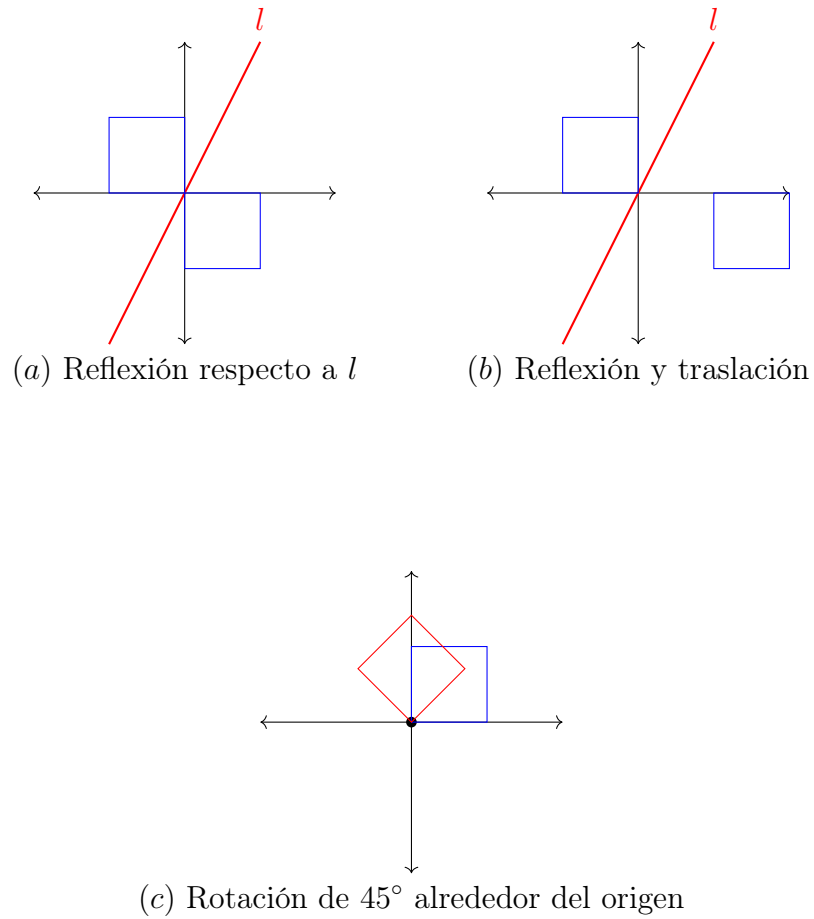


Figura 1.1: Representación geométrica de los grupos de matrices

Es fácil mostrar que su área no cambia bajo estas transformaciones. Mas adelante, retomaremos esta idea geométrica para motivar acciones en el grupo de nuestro interés.

El elemento neutro e tiene un lugar muy importante en la teoría de grupos topológicos, pues resulta de gran utilidad "trasladar" vecindades a vecindades de este elemento para un análisis mas sencillo, los siguientes resultados muestran esta propiedad.

Proposición 1.6. *Sea G un grupo topológico y sea a un elemento arbitrario de G .*

- i) Las funciones $x \mapsto ax, x \mapsto xa$ y $x \mapsto x^{-1}$ son homeomorfismos de G en G .
- ii) Si $\mathcal{U}$ es una base para la familia de vecindades de e , entonces $\{aU : U \in \mathcal{U}\}$ y $\{Ua : U \in \mathcal{U}\}$ son bases para la familia de vecindades de a .
- iii) Si K y L son subconjuntos compactos de G , entonces aK, Ka, KL y K^{-1} son subconjuntos compactos de G .

Demostración.

- i) Notemos que la operación $xa : G \longrightarrow G$ dado por $x \mapsto xa$ es la composición de los mapeos continuos $G \longrightarrow G \times G, x \mapsto (x, a)$ con x fijo y $G \times G \longrightarrow G, (x, a) \mapsto xa$, y tiene inversa continua $(xa)^{-1}$. La prueba para $x \mapsto ax$ es análoga.

Ahora, el mapeo $x^{-1} : G \longrightarrow G$ dado por $x \mapsto x^{-1}$ es continua por definición y además es su propio inverso, por lo tanto es un homeomorfismo.

- ii) Es inmediato de lo anterior, pues bases van a bases bajo homeomorfismos.
- iii) Se sigue del hecho que la imagen de un conjunto compacto bajo mapeos continuos es compacto.

□

A continuación demostraremos algunas propiedades que cumplen las vecindades que resultarán de utilidad.

Proposición 1.7. *Sea G un grupo topológico, sea e el elemento neutro de G y sea U una vecindad abierta de e .*

- i) *Hay una vecindad abierta V de e tal que $VV \subseteq U$.*
- ii) *Hay una vecindad abierta simétrica de e que está incluida en U .*

Demostración.

- i) De la continuidad del mapeo $(x, y) \mapsto xy$, el conjunto W definido como $W = \{(x, y) \mid xy \in U\}$ es un conjunto abierto de (e, e) en $G \times G$, y entonces hay vecindades abiertas V_1 y V_2 de e que satisfacen $V_1 \times V_2 \subseteq W$. El conjunto V definido como $V = V_1 \cap V_2$ es una vecindad abierta de e que satisface $VV \subseteq U$.
- ii) Notemos que la continuidad del mapeo $x \mapsto x^{-1}$ implica que si U es una vecindad abierta de e , entonces U^{-1} es también una vecindad abierta de e . Así, $U \cap U^{-1}$ es una vecindad simétrica abierta de e que esta contenida en U .

□

Concluimos esta sección con el siguiente lema.

Lema 1.3. *Sea G un grupo topológico, sea K un subconjunto compacto de G y sea U un subconjunto abierto de G tal que $K \subseteq U$. Entonces hay un conjunto abierto V que contiene al neutro tal que $KV \subseteq U$.*

Demostración. Para cada $x \in K$, definamos $W_x = x^{-1}U$. Como $x \in U$, W_x es una vecindad abierta del neutro. En virtud de i) de la **Proposición 1.6** podemos tomar V_x una vecindad abierta del neutro tal que $V_x V_x \subseteq W_x$.

Entonces, la colección $\{xV_x \mid x \in K\}$ es una cubierta abierta de K , así hay una colección finita de puntos $x_1, \dots, x_n$ tal que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n x_k V_{x_k}$. Definamos

$V = \bigcap_{k=1}^n V_{x_k}$, y sea $x \in K$, entonces, hay algún x_k tal que $x \in x_k V_{x_k}$, así que

$$xV \subseteq x_k V_{x_k} V_{x_k} \subseteq x_k W_{x_k} = U.$$

Por lo tanto, $KV \subseteq U$.

□

1.3. Medida en espacios localmente compactos

Comenzamos introduciendo el concepto de álgebra y σ -álgebra en un conjunto X .

Definición 1.17. Sea X un conjunto arbitrario. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es un álgebra sobre X si

- i) $X \in \mathcal{A}$.
- ii) Para cada conjunto A que pertenece a $\mathcal{A}$, el conjunto A^c pertenece a $\mathcal{A}$.
- iii) Para cada sucesión finita $A_1, \dots, A_n$ de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$, el conjunto $\bigcup_{i=1}^n A_i$ pertenece a $\mathcal{A}$.
- iv) Para cada sucesión finita $A_1, \dots, A_n$ de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$, el conjunto $\bigcap_{i=1}^n A_i$ pertenece a $\mathcal{A}$.

La siguiente observación nos permite definir un álgebra con menos condiciones.

Observación 1.3. Notemos que al utilizar el hecho

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c \right)^c,$$

se prueba que si es cerrado bajo complementos y uniones finitas implica que es cerrado bajo intersecciones finitas. Así, se puede definir un álgebra usando sólo las condiciones i), ii), iii). Un argumento similar muestra que podríamos haber usado sólo las condiciones i), ii), iv).

Definición 1.18. Sea X un conjunto arbitrario. Una colección de subconjuntos $\mathcal{A}$ de X es una σ -álgebra en X si

- i) $X \in \mathcal{A}$.
- ii) Para cada conjunto A que pertenece a $\mathcal{A}$, el conjunto A^c pertenece a $\mathcal{A}$.

iii) Para cada sucesión numerable $\{A_i\}$ de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$, el conjunto $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ pertenece a $\mathcal{A}$.

iv) Para cada sucesión numerable $\{A_i\}$ de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$, el conjunto $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ pertenece a $\mathcal{A}$.

Así, una σ -álgebra de X es una familia de subconjuntos de X que contiene a X y es cerrada bajo complementos, uniones contables, y intersecciones contables.

Un argumento similar a la **Observación 1.18** nos asegura que se puede definir una σ -álgebra utilizando sólo las condiciones i), ii), iii), o, i), ii), iv), de la definición.

Cada σ -álgebra sobre X es un álgebra sobre X ya que, por ejemplo, la unión finita $A_1, A_2, \dots, A_n$ es lo mismo que la unión de la sucesión infinita $A_1, A_2, \dots$. La siguiente observación nos ofrece una alternativa para definir los conceptos previos.

Observación 1.4. Si X es un conjunto y $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ que es cerrada bajo complementos, entonces X pertenece a $\mathcal{A}$ si y solo si $\emptyset$ pertenece a $\mathcal{A}$. Así en las definiciones de álgebras y σ -álgebras dadas anteriormente, podemos reemplazar la condición i) con el requisito de que $\emptyset$ pertenezca a $\mathcal{A}$, además, si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de X no vacío, cerrado bajo complementos y uniones finitas o contables, entonces $\mathcal{A}$ debe contener a X , pues si $A \in \mathcal{A}$, se sigue que $A \cup A^c = X \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, en nuestras definiciones de álgebras y σ -álgebras, podemos reemplazar la condición i) con el requisito de que $\mathcal{A}$ debe ser no vacío.

Si $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra de subconjuntos de X , a veces es conveniente llamar a un subconjunto de X $\mathcal{A}$ -medible si pertenece a $\mathcal{A}$. En las σ -álgebras es posible definir una función llamada medida como sigue.

Definición 1.19. Sean X un conjunto, y Σ una σ -álgebra en X . Una función μ cuyo dominio es la σ -álgebra Σ y cuyas imágenes pertenecen a la semi recta

extendida $[0, +\infty]$, se dice que es contablemente aditiva si satisface

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Para cada sucesión infinita $\{A_i\}$ de conjuntos disjuntos que pertenecen a Σ (dado que $\mu(A_i)$ es no negativa para cada i , la suma $\sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ siempre existe, ya sea como un número real o como $+\infty$). Una **medida** (o una medida contablemente aditiva) en Σ es una función $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ que satisface $\mu(\emptyset) = 0$ y es contablemente aditiva.

Si X es un conjunto, Σ es una σ -álgebra en X , y μ es una medida en Σ , entonces la tripleta (X, Σ, μ) es a menudo llamado un **espacio de medida**.

En este trabajo, nos interesa estudiar medidas definidas sobre un espacio X que sea localmente compacto y de Hausdorff. Para ello, necesitamos una σ -álgebra particular que definimos a continuación.

Definición 1.20. Sea X un espacio topológico localmente compacto. Definimos la σ -álgebra de Borel como la σ -álgebra generada por los conjuntos abiertos y la denotamos por $\mathcal{B}(X)$.

En esta σ -álgebra $\mathcal{B}(X)$, se pueden definir diversas medidas. Los conjuntos de esta σ -álgebra pueden ser abiertos, cerrados, etc, pero los que nos interesan son los compactos. Para estudiarlos como conjuntos medibles, es necesario introducir una medida particular, llamada **medida de Borel**, la cual se define como sigue.

Definición 1.21. Una medida μ en un espacio topológico X es llamada una medida de Borel si X es de Hausdorff.

Con esto en mente, estamos en condiciones de definir un tipo particular de medidas de Borel.

Definición 1.22. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, donde X es localmente compacto de Hausdorff y μ una medida de Borel. Decimos que μ es **semi-regular** si

- 1) Para cualquier $K \subseteq X$ compacto, se tiene que $\mu(K) < \infty$.

2) Para cualquier $A \in \Sigma$, se tiene que³

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U, U \text{ es abierto}\}.$$

3) Para cualquier $U \subseteq X$ abierto, se tiene que

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq U, K \text{ es compacto}\}.$$

Decimos que μ es **regular** si $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A, K \text{ es compacto}\}$ ⁴ para cada $A \in \Sigma$.

Antes de pasar al siguiente capítulo, donde definiremos la medida de Haar, mostraremos un par de resultados preliminares importantes.

Lema 1.4. Sea $f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ y sea $E \subseteq \mathcal{P}(Y)$. Entonces,

$$\sigma[f^{-1}(E)] = f^{-1}(\sigma[E]).$$

Demostración.

i) Para demostrar que $\sigma[f^{-1}(E)] \subseteq f^{-1}(\sigma[E])$.

Mostraremos que $f^{-1}(\sigma[E])$ es una σ -álgebra contenida en $f^{-1}(E)$. Sea $U \in f^{-1}(E)$, entonces hay algún $V \in E$ tal que $U = f^{-1}(V)$ y $V \in E$, así $V \in \sigma[E]$, por lo que $U \in f^{-1}(\sigma[E])$, entonces $f^{-1}(E) \in f^{-1}(\sigma[E])$. Sólo resta mostrar que $f^{-1}(\sigma[E])$ es una σ -álgebra. Para ello, sea

$$\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq f^{-1}(\sigma[E]).$$

Para cada U_n , hay algún $V_n \in \sigma[E]$ tal que $U_n = f^{-1}(V_n)$.

Sea

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \in \sigma[E],$$

así

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(V_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \in f^{-1}(\sigma[E]).$$

³Esto algunas veces hace referencia a la regularidad exterior.

⁴Esto algunas veces hace referencia a la regularidad interior.

Por lo tanto $f^{-1}(\sigma[E])$ es cerrada bajo uniones numerables. De manera análoga, para $V_o^C \in \sigma[E]$ se tiene que

$$f^{-1}(V_o^C) = f^{-1}(V_o)^C = U_o^C \in f^{-1}(\sigma[E]),$$

por lo tanto, $f^{-1}(\sigma[E])$ es cerrada bajo complementos. Por último, $Y \in \sigma[E]$, se sigue que $f^{-1}(Y) = X \in f^{-1}(\sigma[E])$. Por lo tanto, $f^{-1}(\sigma[E])$ es una σ -álgebra contenida en $f^{-1}(E)$ entonces

$$\sigma[f^{-1}(E)] \subseteq f^{-1}(\sigma[E]).$$

ii) Para demostrar que $f^{-1}(\sigma[E]) \subseteq \sigma[f^{-1}(E)]$.

Definamos $\Sigma = \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \sigma[f^{-1}(E)]\}$. Queremos demostrar que Σ es una σ -álgebra contenida en E , entonces tendremos que demostrar que $\sigma[E] \subseteq \Sigma$. Sea $U \in E$ se sigue que $f^{-1}(U) \in f^{-1}(E)$, por lo cual $f^{-1}(U) \in \sigma[f^{-1}(E)]$, por lo tanto $E \subseteq \Sigma$.

Ahora, sea $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$, entonces $f^{-1}(U_n) = V_n$ para algún $V_n \in \sigma[f^{-1}(E)]$, notemos que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(U_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \in \sigma[f^{-1}(E)],$$

así, Σ es cerrada bajo uniones numerables.

□

Para finalizar este capítulo mostraremos el siguiente lema.

Lema 1.5. *Sea (X, Σ, μ) un espacio medible donde Σ es una σ -álgebra de Borel y sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- 1) $A \in \Sigma$.
- 2) $f(A) \in \Sigma$.
- 3) $f^{-1}(A) \in \Sigma$.

Demostración. Sea τ la topología en X . Entonces por definición, $\Sigma = \sigma[\tau]$.
(1) $\Rightarrow$ 2)) Supongamos $A \in \Sigma$. Por el **Lema 1.4** tenemos que

$$f(A) \in f(\Sigma) = f(\sigma[\tau]) = \sigma[f(\tau)] = \sigma[\tau] = \Sigma$$

donde hemos usado el hecho de que $f(\tau) = \tau$, esto es consecuencia de f sea un homeomorfismo.

(2) $\Rightarrow$ 3)) Supongamos $f(A) \in \Sigma$. De manera similar al inciso anterior, tenemos que

$$A \in f^{-1}(\Sigma) = f^{-1}(\sigma[\tau]) = \sigma[f^{-1}(\tau)] = \sigma[\tau] = \Sigma.$$

Ahora, por (1) $\Rightarrow$ 2)) con el homeomorfismo f^{-1} (en lugar de f como antes), tenemos que $f^{-1}(A) \in \Sigma$.

(3) $\Rightarrow$ 1)) Supongamos $f^{-1}(A) \in \Sigma$. Entonces, como antes

$$A \in f(\Sigma) = f(\sigma[\tau]) = \sigma[f(\tau)] = \sigma[\tau] = \Sigma.$$

□

Con esto, hemos introducido toda la teoría necesaria para pasar a mostrar la existencia y unicidad de la medida de Haar.

Capítulo 2

Existencia y unicidad de la medida de Haar

En esta sección enunciaremos y demostraremos el primero de los dos teoremas centrales de este capítulo. El primero de ellos se refiere a la existencia de una medida de **Haar izquierda** en cada grupo topológico localmente compacto.

Antes de abordar la prueba, repasaremos el concepto de medida exterior para un conjunto medible, ya que es natural definir la medida exterior de un conjunto abierto por medio de cubiertas y con ello extenderlo a los conjuntos compactos de nuestro interés.

Definición 2.1. *Sea X un conjunto. Una medida exterior en X es una función $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ tal que*

- i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.*
- ii) si $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*
- iii) Si $\{A_n\}$ es una sucesión finita de subconjuntos de X , entonces*

$$\mu^* \left(\bigcup_n A_n \right) \leq \sum_n \mu^*(A_n).$$

Por lo tanto, una medida exterior en X es una función subaditiva numerable y monótona de $\mathcal{P}(X)$ a $[0, +\infty]$ cuyo valor en $\emptyset$ es 0.

Una medida de Haar izquierda se define de tal manera que esta cumpla las mismas propiedades que cumple la medida de Lebesgue, pero en el concepto de grupos topológicos localmente compactos, esto es:

Definición 2.2. Sea G un grupo topológico, una medida de Haar izquierda (respectivamente derecha) en G es una medida μ de Borel, regular, no cero en G , tal que $\mu(gA) = \mu(A)$ (respectivamente $\mu(Ag) = \mu(A)$) para toda $g \in G$ y todos los subconjuntos medibles A de G .

Teniendo en cuenta esta definición pasamos a demostrar la existencia de la medida de Haar izquierda sobre grupos topológicos localmente compactos.

2.1. Existencia de la medida de Haar

El énfasis en **medida izquierda** es sólo para indicar como estamos tomando la "traslación" de un conjunto medible, es decir, el conjunto gA . Así, la demostración que daremos se centra en probar la invarianza de la medida de Haar por la izquierda. A continuación, daremos una prueba de la existencia de la medida de Haar izquierda.

Teorema 2.1. Sea G un grupo localmente compacto. Entonces, existe una medida de Haar izquierda en G .

Demostración. Paso 1: Definir $(K : V)$.

Sea K un subconjunto compacto de G y sea V un subconjunto de G con interior no vacío y $e \in V^1$. Entonces $\{gV^\circ \mid g \in G\}$ es una cubierta abierta de K , de la cual podemos extraer una subcubierta finita con elementos de G , digamos $g_1, \dots, g_n$, tal que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^n g_k V^\circ.$$

Definimos:

$$(K : V) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid K = \bigcup_{i=1}^n g_i V^\circ \right\}.$$

¹En el caso que $e \notin V$ se procede de manera análoga al **Lema 1.3**, es decir de los abiertos V° generamos nuevos abiertos traslados que cumplan lo requerido.

Por convención, diremos que $(\emptyset : V) = 0$ para todo $V \subseteq G$ con interior no vacío.

Paso 2: Definir μ_U .

Sea $\mathcal{K}$ la colección de todos los subconjuntos compactos de G y sea $\mathcal{U}$ la colección de todos los subconjuntos abiertos de G que contienen a e . Como G es localmente compacto, hay un subconjunto compacto de G con interior no vacío, sea K_0 dicho subconjunto. Para cada $U \in \mathcal{U}$, definimos una función $\mu_U : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mu_U(K) = \frac{(K : U)}{(K_0 : U)} \quad (2.1)$$

Dado que K_0 es no vacío, $(K_0 : U) \neq 0$ por lo que está bien definida.

Paso 3: Demostrar que $0 \leq \mu_U(K) \leq (K : K_0)$.

Como $(K : U)$ siempre es un entero no negativo, μ_U es claramente no negativa. Mostraremos que $(K : U) \leq (K : K_0)(K_0 : U)$ para $K \in \mathcal{K}$ y $U \in \mathcal{U}$. Sean $m = (K : K_0)$ y $n = (K_0 : U)$, $g_1, \dots, g_m \in G$ y $h_1, \dots, h_n \in G$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^m g_k K_0^\circ$$

y

$$K_0 \subseteq \bigcup_{k=1}^n h_k U.$$

Por lo tanto,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^m \left[\bigcup_{j=1}^n g_i h_j U \right],$$

así que K puede ser cubierto por mn clases² de U , por lo que

$$(K : U) \leq mn = (K : K_0)(K_0 : U).$$

Se sigue que

$$0 \leq \mu_U(K) \leq (K : K_0).$$

²Las n clases hace referencia a una de las cubiertas del compacto que tiene una cantidad n de elementos de U .

Paso 4: Construcción de la medida de Haar en $\mathcal{K}$.

Definimos el siguiente conjunto compacto:

$$X := \prod_{K \in \mathcal{K}} [0, (K : K_0)].$$

Como $0 \leq \mu_U(K) \leq (K : K_0)$, cada μ_U puede ser pensado como un "punto" en X . Así, para cada $V \in \mathcal{U}$ definimos el siguiente conjunto:

$$C(V) := Cl_X \{ \mu_U \mid U \in \mathcal{U}, U \subseteq V \}.$$

Queremos mostrar que la colección $\{C(V) \mid V \in \mathcal{U}\}$ posee la propiedad de intersección finita. Para esto, sean $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{U}$. Entonces

$$\mu_{\bigcap_{k=1}^n V_k} \in \bigcap_{k=1}^n C(V_k),$$

así que $\bigcap_{k=1}^n C(V_k)$ es no vacía. Por lo tanto,

$$\{C(V) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

satisface la propiedad de intersección finita, como X es compacto, se sigue que $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} C(V)$ es no vacía. Así, podemos tomar un elemento en dicha intersección, digamos

$$\mu^* \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} C(V).$$

Antes de continuar con la demostración daremos algunas propiedades importantes de la función μ_U las cuales nos serán de gran utilidad en el resto de la construcción.

Lema 2.1. *Sea μ_U definida en 2.1, entonces cumple lo siguiente:*

- (1) Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ tal que $K_1 \subseteq K_2$, para cada $U \in \mathcal{U}$, se tiene que $\mu_U(K_1) \leq \mu_U(K_2)$.

Demostración. Ya que las cubiertas de K_2 con $(K_2 : U)$ clases de U son también cubiertas de K_1 con $(K_2 : U)$ clases de U , se sigue que $(K_1 : U) \leq (K_2 : U)$, y por lo tanto $\mu_U(K_1) \leq \mu_U(K_2)$. $\square$

(2) Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ entonces $\mu_U(K_1 \cup K_2) \leq \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$, para cada $U \in \mathcal{U}$.

Demostración. Si tomamos una cubierta de K_1 con $(K_1 : U)$ clases de U junto con una cubierta de K_2 con $(K_2 : U)$ clases de U generamos una cubierta de $K_1 \cup K_2$ con $(K_1 : U) + (K_2 : U)$ clases de U , por lo que $(K_1 \cup K_2 : U) \leq (K_1 : U) + (K_2 : U)$. Se sigue que

$$\mu_U(K_1 \cup K_2) \leq \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2).$$

□

(3) $\mu_U(K_1 \cup K_2) = \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$, si $K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1} = \emptyset$.

Demostración. Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ tal que $K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1} = \emptyset$. Sean $g_1, \dots, g_n$ donde $n = (K_1 \cup K_2 : U)$ y

$$K_1 \cup K_2 \subseteq \bigcup_{k=1}^n g_k U.$$

Si algún $g_k U$ interseca a K_1 y K_2 a la vez entonces $g_k \in K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1}$ lo cual es una contradicción. Así, cada $g_k U$ interseca a K_1 o K_2 pero no a ambos. Con esto, podemos encontrar un número natural m que cumple $0 \leq m \leq n$ y usarlo para renombrar los índices de cada g_k de tal modo que

$$K_1 \subseteq \bigcup_{k=1}^m g_k U$$

y

$$K_2 \subseteq \bigcup_{k=m+1}^n g_k U.$$

Así $(K_1 : U) + (K_2 : U) \leq (K_1 \cup K_2 : U)$, combinando este resultado con el inciso 2) se sigue que $\mu_U(K_1 \cup K_2) = \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$ para cada $U \in \mathcal{U}$. □

Paso 5: Demostrar que $\mu^*(K_1) \leq \mu^*(K_2)$ si $K_1 \subseteq K_2$.

Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ tal que $K_1 \subseteq K_2$, si consideremos a los elementos de X como funciones de $\mathcal{K}$ a $\mathbb{R}$ (proyecciones), con esta idea es posible encontrar una función $f \in X$ que es la composición resultante de restar dos proyecciones $f_1(K_2) - f_2(K_1)$ en $\mathbb{R}$. Esta es una composición de funciones continuas, y por lo tanto continua³. Este mapeo también es no negativo en cada $C(V)$, como $\mu_U(K_1) \leq \mu_U(K_2)$, para cada $U \in \mathcal{U}$ por (1) del **Lema 2.1** (necesitamos continuidad para que sepamos que es no negativa en toda la cerradura.). Se sigue que el mapeo μ^* es no negativo, así que

$$0 \leq \mu^*(K_2) - \mu^*(K_1),$$

ya que K_1 es compacto se sigue que $\mu_U(K_1) < \infty$ para todo $U \in \mathcal{U}$, en particular para $\mu^*(K_1) < \infty$, por lo tanto

$$\mu^*(K_1) \leq \mu^*(K_2).$$

Paso 6: Demostrar que $\mu^*(K_1 \cup K_2) \leq \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2)$.

Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$. Procediendo de manera similar al *Paso 5*, la función $f \in X$ que envía a $f(K_1) + f(K_2) - f(K_1 \cup K_2)$ es continua y no negativa, esto es por (2) del **Lema 2.1**, esto en cada $C(V)$, y por lo tanto es no negativa para $\mu^* \in X$. Entonces

$$\mu^*(K_1 \cup K_2) \leq \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2).$$

Paso 7: Demostrar que $\mu^*(K_1 \cup K_2) = \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2)$ si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ tal que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Entonces, podemos encontrar dos conjuntos disjuntos U_1 y U_2 tal que $K_1 \subseteq U_1$ y $K_2 \subseteq U_2$. Ahora, por el **Lema 1.2** hay dos vecindades abiertas del neutro V_1 y V_2 tales que $K_1 V_1 \subseteq U_1$ y $K_2 V_2 \subseteq U_2$. Definimos $V := V_1 \cap V_2$. Luego, $K_1 V$ y $K_2 V$ son disjuntos pues U_1 y U_2 son disjuntos. Así, para cada $U \in \mathcal{U}$ con $U \subseteq V^{-1}$, tenemos que $K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1} = \emptyset$, por (3) del **Lema 2.1** se sigue de la continuidad del

³Los mapeos (proyecciones) $f_{1,2} : \mathcal{K} \rightarrow [0, +\infty)$ forman el par ordenado $(f_1(K_1), f_2(K_2))$, como cada proyección es un número real positivo podemos restar la primera entrada de la segunda, y como $K_1 \subseteq K_2$ dicha resta es no negativa, así el mapeo f es continuo en cada coordenada por definición de la topología producto.

mapeo de X a $\mathbb{R}$ que envía $f \in X$ a $f(K_1) + f(K_2) - f(K_1 \cup K_2)$ es 0 para cada $f \in C(V)$. En particular, $\mu^*(K_1 \cup K_2) = \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2)$

Paso 8: Extender μ^* a todos los subconjuntos de G .

Para $U \subseteq G$ abierto, definimos

$$\mu^*(U) = \sup\{\mu^*(K) \mid K \subseteq U, K \in \mathcal{K}\}.$$

Nos gustaría mostrar que si K es compacto o abierto, ambas definiciones de $\mu^*(K)$ coinciden. Esto es, demostrar que

$$\mu^*(K) = \sup\{\mu^*(K') \mid K' \subseteq K, K' \in \mathcal{K}\},$$

donde el lado izquierdo de la ecuación es la definición original de μ^* como un punto en $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} C(U)$.

Esto se sigue, ya que

$$\{\mu^*(K') \mid K' \subseteq K, K' \in \mathcal{K}\} \ni \mu^*(K) \leq \sup\{\mu^*(K') \mid K' \subseteq K, K' \in \mathcal{K}\}.$$

Por otro lado, por el *paso 5*, el conjunto

$$\{\mu^*(K') \mid K' \subseteq K, K' \in \mathcal{K}\}$$

es acotado superiormente por $\mu^*(K)$, así que

$$\sup\{\mu^*(K') \mid K' \subseteq K, K' \in \mathcal{K}\} \leq \mu^*(K).$$

Por lo tanto, ambas definiciones coinciden.

Una observación, es que, esta extensión aún satisface la propiedad

$$\mu^*(U_1) \leq \mu^*(U_2) \text{ si } U_1 \subseteq U_2.$$

Ahora, para un subconjunto arbitrario A de G , definimos

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U) \mid A \subseteq U, U \text{ es abierto}\}.$$

Análogamente, al considerar la regularidad exterior de μ^* se deduce que es una extensión. Más aún, por construcción, se sigue que esta extensión satisface que

$$\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2) \text{ si } A_1 \subseteq A_2.$$

Paso 9: Mostrar que μ^* es una medida exterior en G .

Tenemos que, $\mu^*(\emptyset) = 0$. Pues $(\emptyset, U) = 0$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Para mostrar que μ^* es no negativa, dadas las definiciones previas de la extensión, es suficiente probar que μ^* es no negativa en $\mathcal{K}$. Para un K fijo, el mapeo que envía $f \in X$ a $f(K)$ es continuo (por la misma razón de antes). Además, como el mapeo es no negativo en cada μ_U , se sigue que el mapeo es no negativo en cada $C(V)$. Por lo tanto, este mapeo es no negativo en μ^* , así que $\mu^*(K) \geq 0$.

Para mostrar la σ -subaditividad, primero mostraremos para cada colección numerable de conjuntos *abiertos* $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, se cumple que

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(U_n).$$

Para esto, sea $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una colección numerable de subconjuntos abiertos de G . Sea K un subconjunto compacto de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Entonces, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el **Corolario 1.1**, podemos encontrar conjuntos compactos $K_1, \dots, K_n$ tal que $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ y $K_i \subseteq U_i$ para $1 \leq i \leq n$. Así, podemos aplicar el *paso 6* inductivamente, por lo que

$$\mu^*(K) \leq \sum_{i=1}^n \mu^*(K_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu^*(U_i) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(U_n).$$

Se sigue que

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) = \sup \left\{ \mu^*(K) \mid K \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n, K \in \mathcal{K} \right\} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(U_n).$$

Ahora, sea $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una colección arbitraria de subconjuntos de G . Si

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) = +\infty,$$

se sigue que

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Supongamos ahora que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) < +\infty.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos un conjunto abierto U_n tal que $A_n \subseteq U_n$ y

$$\mu^*(U_n) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &\leq \mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(U_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, tenemos que

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Por lo tanto μ^* es una medida exterior en G .

Paso 10: Mostrar que la colección de conjuntos de Caratheodory medibles contienen a los subconjuntos de Borel de G .

Para ello, basta con mostrar que todo subconjunto abierto de G es Borel medible (porque la colección de conjuntos Borel medibles forman una σ -álgebra, si esta colección contiene la topología de G . Entonces, ciertamente contiene la σ -álgebra generada por la topología).

Sean $U \subseteq G$ abierto y $A \subseteq U$. Si $\mu^*(A) = \infty$, se sigue que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^C).$$

Supongamos ahora que $\mu^*(A) < \infty$ y sea $\varepsilon > 0$. Consideremos $V \subseteq G$ abierto tal que $A \subseteq V$ y $\mu^*(V) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$. Ahora, sean K un subconjunto compacto

de $V \cap U$ tal que $\mu^*(V \cap U) - \varepsilon \leq \mu^*(K)$ y L un subconjunto compacto de $V \cap K^C$ tal que $\mu^*(V \cap K^C) - \varepsilon \leq \mu^*(L)$. Ya que $K \subseteq U, V \cap U^C \subseteq V \cap K^C$, entonces

$$\mu^*(V \cap U^C) - \varepsilon \leq \mu^*(V \cap K^C) - \varepsilon \leq \mu^*(L).$$

Así, por el *paso 8*, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^C) - 2\varepsilon &\leq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^C) - 2\varepsilon \\ &\leq \mu^*(K) + \mu^*(L) \\ &= \mu^*(K \cup L) \leq \mu^*((V \cap U) \cup (V \cap K^C)) \\ &\leq \mu^*(V) \leq \mu^*(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^C) \leq \mu^*(A)$$

y por lo tanto U es Caratheodory medible. De ello se deduce que μ^* se restringe a una medida sobre subconjuntos Borel de G , por lo que es una medida de Borel.

Paso 11: Mostrar que μ^* es regular.

Consideremos a μ^* como un elemento de X . μ^* es finita en conjuntos compactos. Además, por construcción

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U) \mid A \subseteq U, U \text{ es abierto}\},$$

por lo que es evidente que μ^* es exterior regular. En el *paso 8*, vimos que ambas definiciones coinciden, con ello podemos inferir que μ^* es interior regular.

Paso 12: Mostrar que μ^* no es cero.

De la definición de μ_U , se sigue que $\mu_U(K_0) = 1$ para cada $U \in \mathcal{U}$, y la función continua que mapea $f \in X$ a $f(K_0)$ es la constante 1 en cada $C(U)$, y en particular $\mu^*(K_0) = 1$, por lo tanto μ^* no es cero.

Paso 13: Mostrar que μ^* es invariante bajo traslaciones izquierdas.

Sean $g \in G$ fijo y $K \in \mathcal{K}$. Los elementos $x_1, \dots, x_n$ generan una cubierta para K si y sólo si los elementos $gx_1, \dots, gx_n$ generan una cubierta de gK ,

así que $(K : U) = (gK : U)$ para cada $U \in \mathcal{U}$, por lo tanto $\mu_U(K) = \mu_U(gK)$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Se sigue que la función continua que mapea $f \in X$ a $f(K) - f(gK)$ es 0 en cada $C(U)$, entonces $\mu^*(K) = \mu^*(gK)$. Así, queda demostrado que μ^* es invariante bajo traslaciones izquierdas, y por lo tanto una medida de Haar izquierda en G . $\square$

Si el grupo topológico fuese abeliano, la equivalencia de invarianza izquierda y derecha es inmediata, para el caso en que el grupo no sea abeliano tenemos un resultado que afirma que se puede obtener una medida de Haar derecha a partir de una medida de Haar izquierda y viceversa.

Proposición 2.1. *Sean G un grupo topológico, μ una medida de Haar en G y definamos $\mu'(A) := \mu(A^{-1})$. Entonces, μ es una medida de Haar izquierda (respectivamente derecha) si y sólo si μ' es una medida de Haar derecha (respectivamente izquierda) en G .*

Demostración. Supongamos que μ es una medida de Haar izquierda en G , mostraremos que μ' es una medida de Haar derecha en G .

Paso 1: Demostrar que μ' es una medida de Borel en G . Sabemos que la inversión es un homeomorfismo en G , por el **Lema 1.4**, μ' está definida exactamente en los subconjuntos Borel de G . De manera inmediata, μ' es no negativa y $\mu'(\emptyset) = 0$.

Ahora, sea $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una colección de subconjuntos medibles disjuntos dos a dos de G . Veamos que $\{A_n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ es también una colección de subconjuntos medibles disjuntos dos a dos. De nueva cuenta, por el **Lema 1.4**, estos conjuntos son medibles.

Para ver que son disjuntos, supongamos que hay algún $x \in A_n^{-1} \cap A_m^{-1}$ para $m \neq n$. Entonces, $x = a^{-1} = b^{-1}$ para algunos $a \in A_m$ y $b \in A_n$, por lo tanto $a = b \in A_m \cap A_n$ lo que es una contradicción. Así, $\{A_n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos medibles disjuntos dos a dos, por lo que

$$\begin{aligned} \mu' \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &= \mu \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^{-1} \right) = \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{-1} \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n^{-1}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu'(A_n). \end{aligned}$$

Lo que demuestra que μ' es una medida de Borel en G .

Paso 2: Demostrar que μ' es regular. Sea $K \subseteq G$ compacto. Entonces, K^{-1} también es compacto, así

$$\mu'(K) = \mu(K^{-1}) < \infty.$$

Para un subconjunto $U \subseteq G$ diremos que es abierto si satisface lo siguiente.

Sea A un subconjunto medible de G . Si tenemos que $A^{-1} \subseteq U$ entonces U es abierto si y sólo si $A \subseteq U^{-1}$ y U^{-1} es abierto, por lo tanto

$$\{\mu(U) \mid A^{-1} \subseteq U, U \text{ es abierto}\} = \{\mu(U^{-1}) \mid A \subseteq U, U \text{ es abierto}\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mu'(A) &= \mu(A^{-1}) = \inf\{\mu(U) \mid A^{-1} \subseteq U, U \text{ es abierto}\} \\ &= \inf\{\mu(U^{-1}) \mid A \subseteq U, U \text{ es abierto}\} \\ &= \inf\{\mu'(U) \mid A \subseteq U, U \text{ es abierto}\}. \end{aligned}$$

Ahora, consideremos A abierto, se sigue que

$$\mu'(A) = \sup\{\mu'(K) \mid K \subseteq A, K \text{ es compacto}\},$$

y por lo tanto μ' es regular.

Paso 3: Demostrar que μ' es una medida de Haar derecha. De las propiedades mostradas de μ' se sigue que es no es cero. También,

$$\mu'(Ag) = \mu((Ag)^{-1}) = \mu(g^{-1}A^{-1}) = \mu(A^{-1}) = \mu'(A).$$

La otra implicación es análoga. □

2.2. Unicidad

En esta sección, enunciamos y demostramos el segundo de los dos teoremas centrales de este trabajo. Se refiere, a saber, que si μ es una medida de Haar izquierda en un grupo localmente compacto G , entonces μ es única, salvo múltiplos positivos. Para la demostración de este hecho, es necesario utilizar funciones integrables respecto a una medida. Como hemos desarrollado esta teoría en espacios topológicos localmente compactos, es preciso que estas funciones tengan características particulares para dichos espacios. Por esta razón, comenzamos estudiando funciones continuas con la propiedad de que no son nulas en conjuntos compactos.

Continuaremos con algunos resultados de funciones integrables. El primero de ellos, establece que la integral de una función con respecto a una medida de Haar izquierda es invariante bajo traslaciones izquierdas. Luego, mostramos la igualdad entre las integrales iteradas con respecto a las medidas de Borel regulares para funciones continuas con soporte compacto.

Enunciamos y demostramos un lema que afirma que, en algunos casos, la integral con respecto a una medida de Haar izquierda debe ser distinta de cero para dichas funciones. Finalmente establecemos, sin prueba, el teorema de representación de Riesz, que usaremos para probar la unicidad de la medida de Haar izquierda.

Definición 2.3. Sea X un espacio topológico, y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. El **soporte** de f , denotado por $\text{sop}(f)$, es la cerradura del conjunto $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Si X es localmente compacto y de Hausdorff, denotaremos por $\mathcal{S}(X) \neq \emptyset$, al conjunto de todas las funciones continuas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo soporte sea compacto.

Comentario 2.1. De la definición de $\mathcal{S}(X)$ es claro ver que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y cada función en $\mathcal{S}(X)$ es acotada en todo X . También notemos que si $f \in \mathcal{S}(X)$ y μ es una medida de Borel regular en X , entonces f es μ -integrable. Como f es continua, el **Lema 1.4** implica que f es Borel medible. Además, ya que μ es regular, tenemos que $\mu(\text{sop}(f)) < \infty$.

Ya que por definición las funciones en $\mathcal{S}(X)$ son continuas, es válido preguntarse por una condición más fuerte como lo es la continuidad uniforme en grupos topológicos.

Definición 2.4. Sea G un grupo topológico, y sea $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si para cada $\varepsilon > 0$ hay una vecindad abierta U de e tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

se cumple para cualesquiera $x, y \in G$, $y \in xU$, diremos que la función es uniformemente continua por la izquierda. Si cambiamos la condición de $y \in xU$ a $y \in Ux$, entonces la definición se convierte en uniformemente continua por la derecha. A continuación, mostraremos que en un grupo localmente compacto G , cada función en $\mathcal{S}(G)$ es uniformemente continua.

Proposición 2.2. Sea G un grupo localmente compacto. Entonces cada función en $\mathcal{S}(G)$ es uniformemente continua por la izquierda y por la derecha.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}(G)$, sea $K = \text{sop}(f)$, y $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$, tomamos una vecindad abierta U_x de e tal que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

se cumple para cualquier $y \in xU_x$. Por *i)* de la **Proposición 1.7** podemos tomar una vecindad abierta V_x de e tal que $V_x V_x \subseteq U_x$. La colección $\{xV_x \mid x \in K\}$ es una cubierta abierta del conjunto compacto K , por lo que hay una colección finita $\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ de elementos en K tal que tal que la colección $\{x_1 V_{x_1}, \dots, x_n V_{x_n}\}$ cubre a K . Sea V una vecindad abierta simétrica de e tal que $V \subseteq \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Este último conjunto es la intersección finita de vecindades abiertas de e , por lo tanto, también es una vecindad abierta de e . La existencia de V es garantizada por *ii)* de la **Proposición 1.7**. Demostraremos que si $x, y \in G$ e $y \in xV$, entonces

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Esta desigualdad, ciertamente se cumple si ni x ni y pertenecen a K , ya que en este caso $f(x) = f(y) = 0$, por definición de K . Supongamos entonces que $x \in K$, $y \in xV$. En este caso, hay un índice i tal que $x \in x_i V_{x_i}$. Como $x_i V_{x_i} \subseteq x_i U_{x_i}$ y $xV \subseteq x_i V_{x_i} V_{x_i} \subseteq x_i U_{x_i}$, se sigue que x, y pertenecen a $x_i U_{x_i}$. Así, tenemos que

$$|f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$|f(y) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por la desigualdad del triangulo tenemos que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

El caso restante es cuando $y \in K, y \in xV$. Como V es simétrica, esto es exactamente el caso donde $y \in K, x \in yV$, y se muestra de manera similar intercambiando x por y . Por lo tanto, f es uniformemente continua por la izquierda. La demostración de la continuidad uniforme por la derecha es análoga. $\square$

Ahora, enunciaremos un lema donde se relaciona al conjunto $\mathcal{S}(G)$ y sus integrales respecto a las medidas de Borel regulares.

Lema 2.2. *Sea G un grupo localmente compacto, sea μ una medida de Borel regular en G , y sea $f \in \mathcal{S}(G)$. Entonces las funciones*

$$x \mapsto \int_G f(xy) d\mu(y)$$

y

$$x \mapsto \int_G f(yx) d\mu(y)$$

son continuas.

Demostración. Sea $K = \text{sop}(f)$, y sea $x_0 \in G$. Como G es localmente compacto, podemos tomar una vecindad abierta U de x_0 cuya cerradura sea compacta, denotemos por $W = Cl_G(U)$. La función $y \mapsto f(yx)$ es continua para toda $x \in U$, esto se sigue ya que es la composición de las funciones continuas $y \mapsto yx$ y f . Además, se anula fuera del conjunto compacto KW^{-1} . Esto muestra que $y \mapsto f(yx)$ es un elemento de $\mathcal{S}(G)$, y como μ es una medida de Borel regular en G , entonces es μ -integrable. Ahora, sea $\varepsilon > 0$ y tomamos $\varepsilon' > 0$ tal que

$$\varepsilon' \mu(KW^{-1}) < \varepsilon.$$

Por la **Proposición 2.2**, la función f es uniformemente continua por la izquierda, así, podemos tomar una vecindad abierta V de e tal que

$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon'$$

se cumple para cualesquiera $s, t \in G$ y $s \in tV$. Entonces, para cada $x \in U \cap x_oV$ y cada $y \in G$, tenemos $yx \in yx_oV$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_G f(yx) d\mu(y) - \int_G f(yx_o) d\mu(y) \right| &\leq \int_G |f(yx) - f(yx_o)| d\mu(y) \\ &\leq \varepsilon' \mu(KW^{-1}) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, la demostración está completa.

La prueba para $x \mapsto \int_G f(yx) d\mu(y)$ es análoga. $\square$

A continuación, enunciamos sin demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Sea G un grupo localmente compacto, y sea $x \in G$. Si f es una función no negativa y μ -integrable definida en un subconjunto de Borel en G y μ es una medida de Haar izquierda en G , entonces*

$$\int_G f(x^{-1}t) d\mu(t) = \int_G f(t) d\mu(t).$$

Demostración. Ver [6] página 314-315. $\square$

El siguiente lema es de carácter topológico y de suma importancia en las siguientes proposiciones.

Lema 2.3. *Sean S y T espacios topológicos tal que T es compacto, y sea $f : S \times T \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $s_0 \in S$, hay una vecindad abierta U de s_0 tal que $|f(s, t) - f(s_0, t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ se cumple para cada $s \in U$ y cada $t \in T$.*

Demostración. La continuidad de f implica que, para cada $t \in T$, podemos tomar una vecindad abierta U_t de s_0 y V_t de t tal que si $(s, t') \in U_t \times V_t$, se tiene que $|f(s, t') - f(s_0, t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Se sigue que si $s \in U_t$ y $t' \in V_t$, entonces $(s, t'), (s_0, t) \in U_t \times V_t$, por lo tanto

$$|f(s, t') - f(s_0, t')| \leq |f(s, t') - f(s_0, t)| + |f(s_0, t) - f(s_0, t')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como T es compacto, podemos tomar una colección finita $t_1, \dots, t_n$ de puntos en T tal que la colección $\{V_{t_1}, \dots, V_{t_n}\}$ cubre a T . Así $\bigcap_{i=1}^n U_{t_i}$ es la vecindad requerida de s_0 . $\square$

La siguiente definición introduce una notación importante que usaremos en el teorema central de esta sección.

Definición 2.5. Sean X, Y conjuntos. Si f es una función en $X \times Y$, entonces las **secciones** f_x y f^y son funciones en Y y X , respectivamente, dadas por

$$f_x(y) = f(x, y)$$

y

$$f^y(x) = f(x, y).$$

La importancia de las **secciones** radica en su uso para el intercambio del orden de integración, la siguiente proposición de la cual omitiremos la prueba, nos asegura el resultado.

Proposición 2.4. Sean X y Y espacios localmente compactos y de Hausdorff, sean μ y ν medidas de Borel regulares en X y Y , respectivamente, y sea $f \in S(X \times Y)$.

i) Para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, las secciones f_x y f^y pertenecen a $S(Y)$ y $S(X)$, respectivamente.

ii) Las funciones

$$x \mapsto \int_Y f_x(y) d\nu(y)$$

y

$$y \mapsto \int_X f^y(x) d\mu(x)$$

pertenecen a $S(X)$ y $S(Y)$, respectivamente.

iii) La igualdad

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$$

se cumple.

Demostración. Ver [1] páginas 148-149. □

El siguiente lema asegura que la integral respecto a una medida de Haar izquierda de una función continua no cero con soporte compacto es no cero. De este resultado, se seguirá la definición de un cociente en el teorema central de la sección.

Lema 2.4. Sea G un grupo localmente compacto, y sea μ una medida de Haar izquierda en G . Entonces cada subconjunto abierto no vacío U de G satisface $\mu(U) > 0$, y cada función no negativa f que pertenece a $S(G)$ y no nula, satisface

$$\int_G f d\mu > 0.$$

Demostración. Como μ es una medida regular y no cero, podemos escoger un conjunto compacto K tal que $\mu(K) > 0$. Sea U un subconjunto abierto no vacío de G . Así la colección $\{xU \mid x \in G\}$ es una cubierta abierta del conjunto compacto K , por lo que hay una colección finita $\{x_1, \dots, x_n\}$ de elementos en G tal que la colección $\{x_1U, \dots, x_nU\}$ cubre a K . La desigualdad

$$\mu(K) \leq \sum_{i=1}^n \mu(x_iU)$$

y la invarianza de μ , implica que $\mu(K) \leq n\mu(U)$, por lo tanto $\mu(U) > 0$.

Supongamos ahora que f es una función no negativa en $S(G)$ y no nula. Entonces, hay un $\varepsilon > 0$ y un conjunto abierto no vacío U tal que $f \geq \varepsilon\chi_U$.

Ya que $\mu(U) > 0$, se sigue que

$$\int_G f d\mu \geq \int_G \varepsilon\chi_U d\mu = \varepsilon\mu(U) > 0.$$

□

El siguiente teorema es fundamental, pues nos permite relacionar funcionales lineales a medidas únicas de Borel, y a través de esta es que mostramos la unicidad de la medida de Haar izquierda.

Teorema 2.2. (de Representación de Riesz) Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff, y sea I un funcional lineal positivo en $\mathcal{S}(X)$. Entonces hay una única medida de Borel regular μ en X tal que

$$I(f) = \int_X f d\mu$$

se cumple para cada $f \in \mathcal{S}(X)$.

Demostración. Ver [1] página 193. □

Ahora, estamos en condiciones de demostrar la unicidad de la medida de Haar izquierda.

Teorema 2.3. *Sea G un grupo localmente compacto, y sean μ y ν medidas de Haar izquierdas en G . Entonces, hay un número real positivo c tal que $\nu = c\mu$.*

Demostración. Sea $g \in \mathcal{S}(G)$ una función no cero y no negativa, la cual será fija, y sea f una función arbitraria en $\mathcal{S}(G)$. Por el **Lema 2.4**, tenemos que

$$\int_G g \, d\mu \neq 0.$$

Así, podemos definir el cociente $\int_G f \, d\mu / \int_G g \, d\mu$. Mostraremos que este cociente es independiente de la elección de la medida de Haar izquierda μ , y sólo depende de las funciones f y g . Ahora, si ν es otra medida de Haar izquierda, entonces

$$\frac{\int_G f \, d\mu}{\int_G g \, d\mu} = \frac{\int_G f \, d\nu}{\int_G g \, d\nu},$$

o equivalentemente

$$\int_G f \, d\nu = c \int_G f \, d\mu = \int_G f \, d(c\mu), \quad (1)$$

donde $c = \int_G g \, d\nu / \int_G g \, d\mu$. Observemos que la integral es un funcional lineal positivo en el espacio vectorial $\mathcal{S}(G)$ y la igualdad anterior se cumple para toda $f \in \mathcal{S}(G)$. La observación anterior nos permite aplicar el teorema de representación de Riesz.

Sea $f \in \mathcal{S}(G)$, definamos

$$I_\mu = \int_G f \, d\mu = \frac{1}{c} \int_G f \, d\nu = \int_G f \, d\lambda = J_\lambda.$$

La segunda igualdad se da por la ecuación (1). Así, por el teorema de representación de Riesz, se sigue que $\mu = \lambda$, por lo tanto $\nu = c\mu$.

Ahora, usando *iii)* de la **Proposición 2.4** se tiene que si $h(x, y) \in \mathcal{S}(G \times G)$, entonces

$$\int_G \int_G h(x, y) d\mu(x) d\nu(y) = \int_G \int_G h(x, y) d\nu(y) d\mu(x).$$

Usando la invarianza izquierda de μ , ν y aplicando la **Proposición 2.3**, primero reemplazamos a x con $y^{-1}x$, luego invertimos el orden de integración, y por último, reemplazando y con xy , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_G \int_G h(x, y) d\nu(y) d\mu(x) &= \int_G \int_G h(x, y) d\mu(x) d\nu(y) \\ &= \int_G \int_G h(y^{-1}x, y) d\mu(x) d\nu(y) \\ &= \int_G \int_G h(y^{-1}x, y) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int_G \int_G h(y^{-1}, xy) d\nu(y) d\mu(x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Consideremos ahora la función $l : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$l(x, y) = \frac{f(x)g(yx)}{\int_G g(tx) d\nu(t)}.$$

Así,

$$l(y^{-1}, xy) = \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int_G g(ty^{-1}) d\nu(t)}.$$

El **Lema 2.2** implica que la función $x \mapsto \int_G g(tx) d\nu(t)$ es continua, y el **Lema 2.4** nos garantiza que nunca se anula. Las funciones $f(x)$ y $g(xy)$ también son continuas, por lo tanto $l(x, y)$ es bien definida y continua. Además, si $K = \text{sop}(f)$ y $L = \text{sop}(g)$, entonces $\text{sop}(l) \subseteq K \times LK^{-1}$. Por el teorema de Tychonoff y la continuidad de $x \mapsto x^{-1}$ se sigue que $K \times LK^{-1}$ es compacto, así $\text{sop}(l)$ es compacto. Esto muestra que $l \in \mathcal{S}(G \times G)$.

Ahora, retomando las integrales de h y $h(y^{-1}, xy)$, una primera observación es que

$$\int_G h(x, y) d\nu(y) = \int_G \frac{f(x)g(yx)}{\int_G g(tx) d\nu(t)} d\nu(y) = f(x) \frac{\int_G g(yx) d\nu(y)}{\int_G g(tx) d\nu(t)} = f(x),$$

lo cual implica que

$$\int_G \int_G h(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = f(x). \quad (2.2)$$

De un calculo similar, obtenemos que

$$\int_G h(y^{-1}, xy) d\nu(y) = \int_G \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int_G g(ty^{-1})d\nu(t)} d\nu(y) = g(x) \int_G \frac{f(y^{-1})}{\int_G g(ty^{-1})d\nu(t)} d\nu(y),$$

lo cual implica que

$$\int_G \int_G h(y^{-1}, xy) d\nu(y) d\mu(x) = \int_G g d\mu \int_G \frac{f(y^{-1})}{\int_G g(ty^{-1})d\nu(t)} d\nu(y). \quad (2.3)$$

Substituyendo (2.2) y (2.3) en (2.1) obtenemos que

$$\int_G f d\mu = \int_G g d\mu \int_G \frac{f(y^{-1})}{\int_G g(ty^{-1})d\nu(t)} d\nu(y).$$

Esto significa que el cociente $\int_G f d\mu / \int_G g d\mu$ en efecto sólo depende de f y g , pero no de μ . Así, la prueba esta completa. $\square$

Antes de mostrar algunos ejemplos, es necesario mencionar que, para poder construir la medida de Haar en un espacio G se requieren condiciones muy exigentes como lo es

- G admite una estructura de grupo topológico localmente compacto.

Si bien, la compacidad local del grupo es totalmente definida por la topología, lo complicado es definir la medida, pues la característica de que un subconjunto compacto K de G tiene medida finita, frecuentemente se demuestra por medio de la regularidad exterior, también hay que destacar que si cambiamos la operación que le da la estructura de grupo a nuestro conjunto G entonces la medida puede cambiar pues esencialmente estaríamos trabajando en un nuevo espacio.

Nuestro objetivo es construir la medida de Haar izquierda en el grupo $SU(2)$ para ello, recurriremos a las propiedades del espacio.

Veamos unos ejemplos de medidas de Haar en los cuales sólo nos limitaremos a probar la invarianza por la izquierda sin profundizar en probar la regularidad de la medida salvo en algunos.

Ejemplo 2.1. Sea G un grupo localmente compacto. Definimos la medida de conteo sobre $\mathcal{P}(G)$ como $\mu(E) = \text{card}(E)$ si la cardinalidad de E es finita y $\mu(E) = \infty$ en caso contrario. Entonces, μ satisface $\mu(E) = \mu(xE)$ para toda $x \in X$ y $E \subseteq X$.

Ejemplo 2.2. Sea $G = \mathbb{R}$, como mencionamos en el **Ejemplo 1.2** G con la operación suma es un grupo localmente compacto con la topología euclidiana, la medida de **Lebesgue** que denotaremos por λ es en muchos textos la primera medida abstracta, pues su construcción es sencilla, recordemos su definición. Para $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, sea $\mathcal{L}(I) \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la longitud de I . Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y C una colección de intervalos abiertos que cubren a A , la medida de Lebesgue de A es definida por

$$\lambda(A) = \inf \left\{ \sum_{I \in C} \mathcal{L}(I) \right\}.$$

Considerando a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la σ -álgebra generada por los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, con esta topología y por el teorema de Heine-Borel la medida de Lebesgue es regular, pues los compactos son cerrados y acotados por lo que podemos tomar una cubierta de intervalos abiertos acotada con medida de Lebesgue finita. El resultado de la invarianza para un conjunto arbitrario $A \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ es inmediata del hecho que $\mathcal{L}(x + I) = \mathcal{L}(I)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Geométricamente, la suma como operación en el grupo es una traslación de los conjuntos la cual se puede estudiar como una transformación T de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

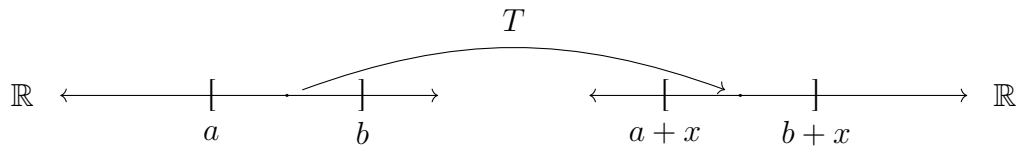


Figura 2.1: Traslación de $[a, b]$

Este ejemplo se puede extender de manera análoga a $\mathbb{R}^n$ con la operación suma de vectores, la topología euclidiana y la respectiva medida de Lebesgue multidimensional.

Al considerar $\mathbb{R}^n$, es natural pensar en conjuntos con **volumen** a los cuales se les asocia una medida de Lebesgue usando la integral, por lo que se usa herramientas del cálculo diferencial e integral para $\mathbb{R}^n$. Así, para calcular la medida de algunos subconjuntos se recurre a los cambios de coordenadas con su respectivo jacobiano.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, queremos la medida de Lebesgue de una superficie como la 2-esfera definida por $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, se toman las coordenadas esféricas y la integral de área para superficies

$$\int_{S^2} d\lambda.$$

En el siguiente capítulo, abordamos más a fondo lo relacionado con diferenciabilidad e integración, en los siguientes ejemplos nos enfocamos en conjuntos de matrices.

Comentario 2.2. *Henri Lebesgue, introdujo en 1902 lo que en la actualidad se conoce como medida de Lebesgue. Por otro lado, la definición de medida de Haar fue introducida 3 décadas después, es decir, ya se tenía presente la invarianza bajo traslaciones, las numerosas propiedades que cumple $\mathbb{R}^n$ como espacio topológico, espacio vectorial, grupo, etc. Lo hace un espacio de referencia para buscar medidas de Haar en espacios más abstractos ya sea por medio de homeomorfismos o isomorfismos.*

Ejemplo 2.3. *Por el Ejemplo 1.4, sabemos que*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x > 0, y \in \mathbb{R} \right\}$$

es un grupo localmente compacto, además la función

$$\varphi : G \longrightarrow \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0\},$$

dada por

$$\varphi \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x, y)$$

es un homeomorfismo.

Veamos que

$$\mu(A) = \int \int_{\varphi(A)} \frac{1}{x^2} d\lambda_x \lambda_y$$

es una medida de Haar izquierda, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Dado que μ es una medida semi-regular, entonces lo es en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ y φ es un homeomorfismo, sólo resta ver que es invariante bajo traslaciones izquierdas.

Sea $v = \begin{pmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ y $A \in \mathcal{B}(G)$. Entonces⁴

$$\mu(vA) = \int \int_{\varphi(vA)} \frac{1}{x^2} d\lambda_x \lambda_y = \int \int_{\varphi(vA)} \frac{1}{x^2} dx dy = \int \int \frac{\chi_{\varphi(vA)}(x, y)}{x^2} dx dy.$$

Notemos que $(x, y) \in \varphi(vA)$ si y sólo si $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in vA$ que es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1/w & -z/w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/w & (y-z)/w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A.$$

Por lo tanto

$$\mu(vA) = \int \int \frac{\chi_{\varphi(A)}(x/w, (y-z)/w)}{x^2} dx dy.$$

Si hacemos el cambio de variable $s = x/w$ y $t = (y-z)/w$, entonces el Jacobiano es $J_{s,t} = \begin{pmatrix} 1/w & 0 \\ 0 & 1/w \end{pmatrix}$ y por el Teorema de Cambio de Variable se tiene que

$$\mu(vA) = \int \int \frac{\chi_{\varphi(A)}(s, t)w^2}{s^2} ds dt = \int \int \frac{\chi_{\varphi(A)}(s, t)w^2}{s^2} ds dt = \mu(A).$$

El siguiente ejemplo ilustra el concepto de un espacio abstracto.

⁴Dado el homeomorfismo φ , la integral pasa a una integral de Riemann en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 2.4. Sea $G = \mathcal{GL}_{n \times n}(\mathbb{R})$ definido en el **Ejemplo 1.4 i**).

Sea λ la medida de Lebesgue restringida a $G = \mathcal{GL}_{n \times n}$, como lo mencionamos antes es un subconjunto abierto de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ entonces tiene una medida de Lebesgue distinta de 0.

Definimos una integral J por

$$J(f) = \int f(x) \frac{d\lambda(x)}{|\det(x)|^n}.$$

Afirmamos que J es invariante izquierda y derecha. Para mostrar esto, consideremos

$$J(L_g f) = \int f(g^{-1}x) \frac{d\lambda(x)}{|\det(x)|^n}$$

con el cambio de variables $y = g^{-1}x$ se tiene que $x = gy$. Para calcular el Jacobiano de esta transformación (definida por g), escribimos x como un vector columna.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2}$$

donde x_i es la i -ésima columna de x y de la misma forma con y . En esta notación, la ecuación $x = gy$ se convierte

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & & \\ & g & \\ & & \ddots \\ & & & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

donde los elementos no indicados en la matriz de $n^2 \times n^2$ son 0. Esta transformación lineal que relaciona x con y tiene determinante igual a $(\det(g))^n$.

Así, $x = gy$ implica

$$d\lambda(x) = |(\det(g))^n| d\lambda(y) = |\det(g)|^n d\lambda(y).$$

Sustituyendo esto en la expresión de $J(L_g f)$ se obtiene

$$\begin{aligned} J(L_g f) &= \int f(g^{-1}x) \frac{d\lambda(x)}{|\det(x)|^n} = \int f(y) \frac{|\det(g)|^n d\lambda(y)}{|\det(gy)|^n d\lambda(y)} \\ &= \int f(y) \frac{d\lambda(y)}{|\det(y)|^n d\lambda(y)} = J(f). \end{aligned}$$

Por tanto, J es una integral invariante a la izquierda. Un calculo similar (usando filas de x e y en lugar de columnas) muestra que J también es invariante a la derecha.

Resulta interesante pensar, si podemos dotar a un mismo espacio que cumpla las hipótesis para tener una medida de Haar con dos estructuras de grupo distintas, en el caso que sea posible encontrar dicho grupo, es prudente preguntar si hay una relación entre dichas medidas. En el siguiente ejemplo mostramos como cambian radicalmente las medidas.

Ejemplo 2.5. Sea $G = \mathbb{R}^+$ por el **Ejemplo 1.3**, sabemos que es un grupo con la multiplicación y es evidente que es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Si dotamos a G con la medida de Lebesgue es claro que no es invariante por la izquierda pues para $A = [a, b]$ y $x = 2$ entonces $\lambda(xA) \neq 2\lambda(A)$, geométricamente ya no es una traslación si no una homotecia.

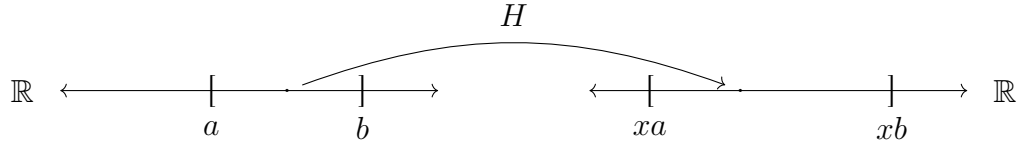


Figura 2.2: Homotecia de $[a, b]$

Si definimos $\mu(A) = \frac{\lambda(A)}{|x|}$ ya es una medida de Haar izquierda pues para cada $y \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $xy = A(x)y + b(x)$ donde $A(x) = x \in \mathcal{GL}_{1 \times 1}(\mathbb{R})$ y $b(x) = 0$. Así, el resultado se sigue del hecho que $\det(A(x)) = x$ y el argumento del **Ejemplo 2.4**.

Para finalizar esta sección, daremos un resultado que relaciona una propiedad del espacio a trabajar y su medida de Haar izquierda.

Proposición 2.5. Sea G un grupo localmente compacto, y sea μ una medida de Haar izquierda en G . Entonces μ es finita i.e. $\mu(G) < \infty$ si y sólo si G es compacto.

Demostración.

Por un lado, supongamos que G es compacto. Como μ es regular se sigue que $\mu(G) < \infty$. Ahora, supongamos que μ es finita. Sea K un subconjunto

compacto no vacío de G tal que $\mu(K) > 0$. Sean $x_1, \dots, x_n \in G$ tales que $x_i K$ son ajenos por pares, entonces

$$n\mu(K) = \sum_{i=1}^n \mu(x_i K) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n x_i K\right) \leq \mu(G).$$

Así, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_1 K, \dots, x_n K\}$ son ajenos por pares, y si $x \neq x_i$ para toda $i = 1, \dots, n$ se tiene que

$$\left(\bigcup_{i=1}^n x_i K\right) \cap xK \neq \emptyset.$$

Sea $x \in G$, entonces

$$x \in \left(\bigcup_{i=1}^n x_i K\right) K^{-1},$$

por lo tanto

$$G = \left(\bigcup_{i=1}^n x_i K\right) K^{-1}$$

es compacto. □

Una conclusión es que, cada grupo compacto G tiene una medida de Haar μ tal que $\mu(G) = 1$. Al tratar con grupos compactos, a menudo se supone que la medida de Haar correspondiente se han "normalizado" de esta manera.

Capítulo 3

Construcción de la medida de Haar en $SU(2)$

En este último capítulo construimos de manera explícita la medida de Haar izquierda para el grupo unitario especial de dimensión 2, el cual denotamos como $SU(2)$, que es el grupo de matrices de 2×2 unitarias con determinante 1. Para poder entender, y describir geométricamente a $SU(2)$ son necesarios algunos conceptos básicos del cálculo diferencial e integral de varias variables, como lo son los difeomorfismos, integración, formas diferenciables e integración de formas diferenciales.

Posteriormente, damos el isomorfismo de $SU(2)$ a la 3-esfera S^3 a la cual le daremos una estructura de subvariedad diferenciable inmersa en $\mathbb{R}^4$, con esto, motivaremos geométricamente como los "volumenes" que serán regiones de la 3-esfera son invariantes bajo traslaciones sobre la misma 3-esfera, con ello, se ilustrará la propiedad principal de la medida de Haar. Para esto, es necesario introducir las definiciones de variedad diferenciable en $\mathbb{R}^n$, formas y las aplicaciones entre los espacios tangentes como son la de pullback y pushforward e integración en variedades.

3.1. Diferenciabilidad e Integración en $\mathbb{R}^n$

A lo largo del trabajo hemos mostrado que $\mathbb{R}^{n^2}$ cumple con las condiciones necesarias para definir la medida de Haar, las condiciones de topología, álgebra y medida son de alguna manera más naturales de definir a comparación

de otros espacios. Para construir la medida de Haar en $SU(2)$ debemos añadir los conceptos de diferenciabilidad e integración para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, omitiremos los preliminares de continuidad, los cuales pueden ser consultados a detalle en [4]. Comenzamos dando la notación de las diferenciales y algunos resultados.

Nuestro análisis se enfocara en los dos siguientes conjuntos de funciones

- i) **Funciones escalares** son tales que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.
- ii) **Funciones vectoriales** son tales que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, y sus funciones componentes son $f^1, \dots, f^m$ tales que $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$.

La notación de derivadas es:

- i) La diferencial de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es un mapeo lineal denotado por $Df(a)$. La matriz jacobiana asociada $Df(a)$ respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ en a la denotamos por $J(a)$ y su respectivo jacobiano (determinante) $|J(a)|$.
- ii) Si f es diferenciable denotamos a la función $\frac{\partial f^i}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a la derivada parcial de f respecto a la i -ésima coordenada.

Los siguiente resultados son básicos, sin embargo, es preciso recordarlos pues se usaran más adelante.

Teorema 3.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

- i) Si f es una transformación lineal , entonces

$$Df(a) = f.$$

- ii) f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si cada f^i lo es, y

$$Df(a) = (Df^1(a), \dots, Df^m(a))$$

Así que, $Df(a)$ es la matriz $m \times n$ cuya i -ésima fila es $(f^i)'(a)$.

Demostración. Ver [4] página 19. □

La integral usual en $\mathbb{R}^n$ es construida como una generalización de la integral de Riemann en $\mathbb{R}$, la variante de integral de superficie en $\mathbb{R}^3$ nos permite calcular áreas de distintos subconjuntos mediante la siguiente construcción.

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto tal que $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable con

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), u, v \in D.$$

Supongamos que la superficie $S = r(D)$, entonces

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}i + \frac{\partial y}{\partial u}j + \frac{\partial z}{\partial u}k \quad \text{y} \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}i + \frac{\partial y}{\partial v}j + \frac{\partial z}{\partial v}k = r_v$$

serán los vectores tangentes que generan al plano tangente en un punto $p \in S$, al estar inmersa en $\mathbb{R}^3$, podemos considerar el vector normal al plano dado por $r_u \times r_v$.

3.1.1. La integral de superficie de campos escalares

Sea S una superficie dada por $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva y sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(r(u, v))$ es continua. Entonces

$$\int \int_S f \, dS = \int \int_D f(r(u, v)) \|r_u \times r_v\| \, dudv.$$

Si $f \equiv 1$ el valor de la integral representa el área de la superficie S .

$$A = \int \int_S dS = \int \int_D \|r_u \times r_v\| \, dudv.$$

Esta es la idea que nos interesa, pues "medir" regiones en conjuntos abstractos de $\mathbb{R}^n$ es el propósito de la medida de Haar y en general de cualquier otra medida.

La notación de integral de volumen dV nos reduce la notación $dx_1 \cdots dx_n$ ya que para calcular un volumen de un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se reduce a integrar la constante 1,

$$\int_A 1 \, dx_1 \cdots dx_n = \int_A dV.$$

Enunciaremos una serie de resultados clásicos de integración.

Teorema 3.2. (Cambio de variables) Sean A y B subconjuntos abiertos y con volumen de $\mathbb{R}^n$ y sea $g : A \longrightarrow B$ un difeomorfismo C^1 . Entonces, para toda función integrable $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, la función $(f \circ g)|Jg|$ es integrable en A , y

$$\int_B f = \int_A (f \circ g)|Jg|.$$

Demostración. Ver [4] paginas 67-69. □

Como mencionamos anteriormente, las transformaciones lineales tienen distintas propiedades acerca de la "medida" de conjuntos en algunos espacios, el siguiente resultado nos muestra como se relacionan los volúmenes de un conjunto y su imagen bajo una transformación lineal.

Lema 3.1. Sean $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, y $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto con volumen. Entonces $L(A)$ tiene volumen y

$$v(L(A)) = |\det(L)|v(A),$$

es decir,

$$\int_{L(A)} 1 \, dV = \int_A |\det(L)| \, dV.$$

3.1.2. Formas diferenciables e integración de formas en $\mathbb{R}^n$

Sea p un punto de $\mathbb{R}^3$. El conjunto de vectores $\{q - p \mid q \in \mathbb{R}^3\}$ (Los que tienen como origen en p) lo llamaremos el espacio tangente de $\mathbb{R}^3$ en p , y lo denotamos por $\mathbb{R}_p^3$. Los vectores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ de la base canónica de $\mathbb{R}_0^3$ serán identificados con los trasladados $((e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p)$ en el punto p , con esta identificación, podemos argumentar que $\mathbb{R}_p^3$ es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto tienen la misma dimensión.

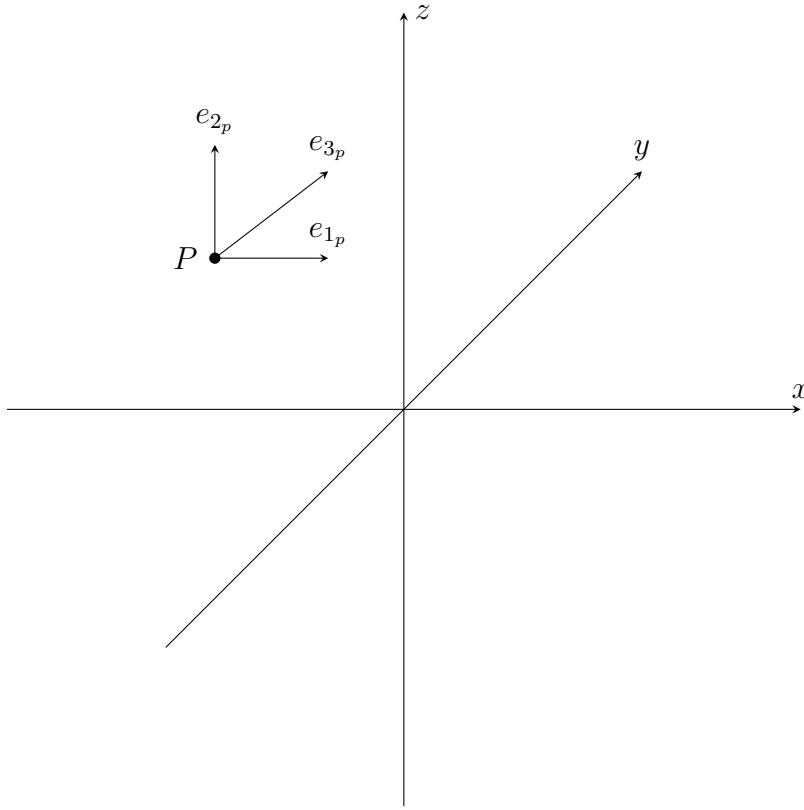


Figura 3.1: Espacio tangente de p en $\mathbb{R}^3$

La base canónica tiene orientación positiva, pues si calculamos

$$\det(e_1, e_2, e_3) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

por lo tanto $\mathbb{R}_p^n$ también tiene una base orientada positiva, con este concepto decimos que un mapeo lineal no singular¹ $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ preserva la orientación si $\det(T) > 0$.

Recordemos que la diferencial de un función vectorial $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en un punto p es un mapeo lineal $Df : \mathbb{R}_p^n \longrightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^m$ por lo que podemos hablar de difeomorfismos que preservan orientación.

Definición 3.1. Sea $\{(\alpha_i)_p \mid i = 1, \dots, n\}$ una base orientada positiva de $\mathbb{R}_p^n$ en un punto p y $f : \mathbb{R}_p^n \longrightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^m$ un difeomorfismo. Decimos que f preserva la orientación en $p \in \mathbb{R}^n$ si

$$\{(Df)(p)(\alpha_i)_p \mid i = 1, \dots, n\}$$

es una base orientada positiva para $\mathbb{R}_{f(p)}^m$, y $\det(Df(p)) > 0$.

Un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, es un mapeo v que asocia a cada punto $p \in \mathbb{R}^3$ un vector $v(p) \in \mathbb{R}_p^3$. Podemos escribir a v como

$$v(p) = a_1(p)e_1 + a_2(p)e_2 + a_3(p)e_3,$$

definiendo así tres funciones $a_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$, que caracterizan al campo vectorial v . Decimos que v es diferenciable si las funciones a_i son diferenciables.

A cada espacio tangente $\mathbb{R}_p^3$ le podemos asociar su espacio dual $(\mathbb{R}_p^3)^*$ el cual es el conjunto de mapeos lineales $\varphi : \mathbb{R}_p^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. El espacio dual $(\mathbb{R}_p^3)^*$ es de dimensión finita (de hecho de dimensión 3) y por lo tanto podemos tomar una base $(dx_i)_p, i = 1, 2, 3$, donde $x_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es el mapeo que asigna a cada punto su i -ésima coordenada. El conjunto

$$\{(dx_i)_p \mid i = 1, 2, 3\}$$

es en efecto la base dual de $\{(e_i)_p\}$ ya que

$$(dx_i)_p(e_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

¹Se dice que un mapeo lineal T entre dos espacios vectoriales V y W es no singular si T mapea el vector 0 de V al vector 0 de W .

Una vez obtenida la base del espacio dual, es posible definir objetos que nos permitan analizar características particulares de los espacios tangentes de conjuntos contenidos en $\mathbb{R}^n$. A continuación, definimos estos objetos como formas diferenciables.

Definición 3.2. *Un campo de formas lineales (o una forma exterior de grado 1) en $\mathbb{R}^3$ es un mapeo ω que asocia a cada punto $p \in \mathbb{R}^3$ un elemento $\omega(p) \in (\mathbb{R}_p^3)^*$; ω puede ser escrita como*

$$\omega(p) = a_1(p)(dx_1)_p + a_2(p)(dx_2)_p + a_3(p)(dx_3)_p$$

o bien

$$\omega = \sum_{i=1}^3 a_i dx_i,$$

donde a_i son funciones escalares de $\mathbb{R}^3$. Si las funciones a_i son diferenciables, ω es llamada una forma diferencial de grado 1, o 1-forma.

Ahora, sea $\Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)^*$ el conjunto de mapeos $\varphi : \mathbb{R}_p^3 \times \mathbb{R}_p^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que son bilineales y alternantes (i.e., $\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)$). Con las operaciones usuales de funciones el conjunto $\Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)^*$ forma un espacio vectorial.

Cuando φ_1 y φ_2 pertenecen a $(\mathbb{R}_p^3)^*$, podemos obtener un elemento

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)^{*2}$$

de la siguiente manera

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \det(\varphi_i(v_j)).$$

Para los elementos básicos $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p \in \Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)^*$ se deduce que el conjunto $\{(dx_i \wedge dx_j)_p, i < j\}$ es una base para $\Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)^*$ además,

$$(dx_i \wedge dx_j)_p = -(dx_j \wedge dx_i)_p, \quad i \neq j,$$

y

$$(dx_i \wedge dx_j)_p = 0.$$

De la definición de $\wedge$ de dos 1-formas, se obtiene un objeto similar el cual se define como sigue.

² $\wedge$ es llamado producto cuña o producto exterior

Definición 3.3. *Un campo bilineal de 2-formas alternantes en $\mathbb{R}^3$ es una correspondencia ω que asocia a cada punto $p \in \mathbb{R}^3$ un elemento $\omega(p) \in \Lambda(\mathbb{R}_p^3)^*$; ω se puede escribir como*

$$\omega = \sum_{i < j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

donde a_{ij} son funciones escalares en $\mathbb{R}^3$. Cuando las funciones a_{ij} son diferenciables, ω es una 2-forma diferenciable.

Ahora, generalizamos este concepto de formas diferenciales a $\mathbb{R}^n$. Sea $p \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_p^n$ es el espacio tangente y $(\mathbb{R}_p^n)^*$ su espacio dual. Sea $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ el conjunto de todos los mapeos k -lineales y alternantes.

$$\varphi : \mathbb{R}_p^n \times \cdots \times \mathbb{R}_p^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Con las operaciones usuales $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ es un espacio vectorial.

Dados $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in (\mathbb{R}_p^n)^*$, podemos obtener un elemento $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$ de $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ de la siguiente manera

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)), \quad i, j = 1, \dots, k$$

Se sigue, de las propiedades de los determinantes que $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$ es k -lineal y alternante. En particular $(dx_1)_p \wedge \cdots \wedge (dx_k)_p \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$, $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n$ y son una base para dicho espacio. Veamos ahora la definición de una forma multidimensional.

Definición 3.4. *Una k -forma en $\mathbb{R}^n$ es mapeo ω que asocia a cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ un elemento $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$; ω se puede escribir como*

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(p) (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_j \in \{1, \dots, n\},$$

donde $a_{i_1 \dots i_k}$ son funciones escalares en $\mathbb{R}^n$. Cuando las funciones $a_{i_1 \dots i_k}$ son diferenciables, ω es una k -forma diferenciable.

Diremos que, una 0-forma diferencial es una función escalar diferenciable $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con este concepto definimos

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable} \}.$$

Una de las características más importantes de las formas diferenciales es la manera en que se comportan bajo mapeos diferenciables. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapeo diferenciable. Entonces f induce un mapeo llamado **pullback** f^* que mapea k -formas en $\mathbb{R}^m$ en k -formas de $\mathbb{R}^n$ y se define como sigue.

Sea ω una k -forma en $\mathbb{R}^m$. Por definición, $f^*\omega$ es la k -forma en $\mathbb{R}^n$ dada por

$$f^*\omega(p)(v_1, \dots, v_n) = \omega(f(p))(f_*(v_1), \dots, f_*(v_k)).$$

Aquí, $p \in \mathbb{R}^n$, $v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}_p^n$, y $f_* : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^m$ es la derivada del mapeo f en p . Una convención es que si g es una 0-forma,

$$f^*(g) = g \circ f.$$

Enunciemos ahora algunas propiedades del pullback.

Proposición 3.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapeo diferenciable, ω, φ k -formas diferenciables en $\mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una 0-forma en $\mathbb{R}^m$. Entonces*

$$i) \quad f^*(\omega + \varphi) = f^*\omega + f^*\varphi.$$

$$ii) \quad f^*(g\omega) = f^*(g)f^*(\omega).$$

iii) *Si $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ son 1-formas en $\mathbb{R}^m$, entonces*

$$f^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) = f^*(\varphi_1) \wedge \dots \wedge f^*(\varphi_k).$$

Demostración. Ver [3] página 6. □

Ahora, enunciemos algunas de las propiedades del producto exterior y el pullback.

Proposición 3.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapeo diferenciable. Entonces*

$$i) \quad f^*(\omega \wedge \varphi) = f^*(\omega) \wedge f^*(\varphi), \text{ donde } \omega \text{ y } \varphi \text{ son cualquier forma en } \mathbb{R}^m.$$

$$ii) \quad (f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega), \text{ donde } g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ es un mapeo diferenciable.}$$

Demostración. Ver [3] página 8. □

Para la definición de la integral de una n -forma en $\mathbb{R}^n$, se deben dar condiciones similares a las de los mapeos diferenciales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Para ello, definimos el siguiente conjunto.

Sea ω una forma diferenciable definida en un abierto de $U \subseteq \mathbb{R}^n$. El **soporte** K de ω es la cerradura del conjunto

$$A = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \omega(p) \neq 0\}.$$

Recordemos que un dominio de integración es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ cuya frontera tiene medida n -dimensional 0. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio de integración compacto, y sea ω una n -forma en D . Cualquier forma se puede escribir como

$$\omega = a dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

para una función escalar a en D . Definimos la integral de ω sobre D como

$$\int_D \omega = \int_D a \, dV$$

Esto puede ser escrito explícitamente como

$$\int_D a \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_D a \, dx_1 \cdots dx_n$$

De manera más general, sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Nos gustaría definir la integral de cualquier n -forma con soporte compacto sobre U . Sin embargo, dado que ni U ni el soporte de ω pueden ser un dominio de integración en general, necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.2. *Supongamos que $K \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$, donde U es un conjunto abierto y K compacto. Entonces hay un dominio de integración compacto D tal que $K \subseteq D \subseteq U$.*

Demostración. Ver [5] página 350. □

Ahora, si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y ω es una n -forma con soporte compacto K en U , definimos

$$\int_U \omega = \int_D \omega,$$

donde D es cualquier dominio de integración tal que $K \subseteq D \subseteq U$. Está es una manera más fácil de verificar que esta elección no depende de D , de manera similar tenemos la siguiente definición.

Definición 3.5. Si V es un subconjunto abierto del semi-espacio superior $\mathbb{R}_+^n$ que está definido como $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ y ω es una n -forma con soporte compacto K contenido en V , definimos

$$\int_V \omega = \int_{D \cap \mathbb{R}_+^n} \omega,$$

donde $K \subseteq D \subseteq V$.

Ahora, tenemos condiciones para introducir la noción de integración de formas, veamos un resultado clave en el que se relacionan el pullback y los difeomorfismos que preservan la orientación del cual omitiremos su demostración.

Teorema 3.3. Sean D y E dominios de integración compactos en $\mathbb{R}^n$, y sea ω una n -forma en E . Si $f : D \rightarrow E$ es un mapeo diferenciable cuya restricción a D° es un difeomorfismo que preserva orientación en E° , entonces

$$\int_E \omega = \int_D f^* \omega$$

Demostración. Ver [5] página 352. □

De la conclusión del **Teorema 3.3**, notamos que el enfoque recae en dos conjuntos abiertos, por lo que se puede pensar en formularlo para dos abiertos cualesquiera, como lo demuestra el siguiente corolario.

Corolario 3.4. Supongamos que U, V son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo que preserva la orientación, y ω es una n -forma con soporte compacto en V . Entonces

$$\int_V \omega = \int_U f^* \omega.$$

Demostración. Ver [5] página 352. □

3.2. Variedades diferenciables en $\mathbb{R}^n$

El concepto de variedades tiene el propósito de generalizar a las superficies de dimensión 2 contenidas en $\mathbb{R}^3$ a conjuntos de mayor dimensión inmersas en un $\mathbb{R}^n$, como en el caso de las superficies, nuestro objetivo es poder "medir" estos conjuntos y sus subconjuntos.

Definición 3.6. *Un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ se denomina variedad k -dimensional con $k \leq n$, si para cada punto $x \in M$ se cumple la siguiente condición:*

(M) *Existe un conjunto abierto U que contiene a x , un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$, y un difeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tal que*

$$h(U \cap V) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{x \in V \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

En otras palabras, $U \cap M$ es simplemente $\mathbb{R}^k \times 0$ salvo difeomorfismos. Si analizamos los casos extremos de la definición, un punto en $\mathbb{R}^n$ es una variedad 0-dimensional, y un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ es una variedad n -dimensional, esto último implica que $\mathbb{R}^n$ es en si mismo una variedad n -dimensional.

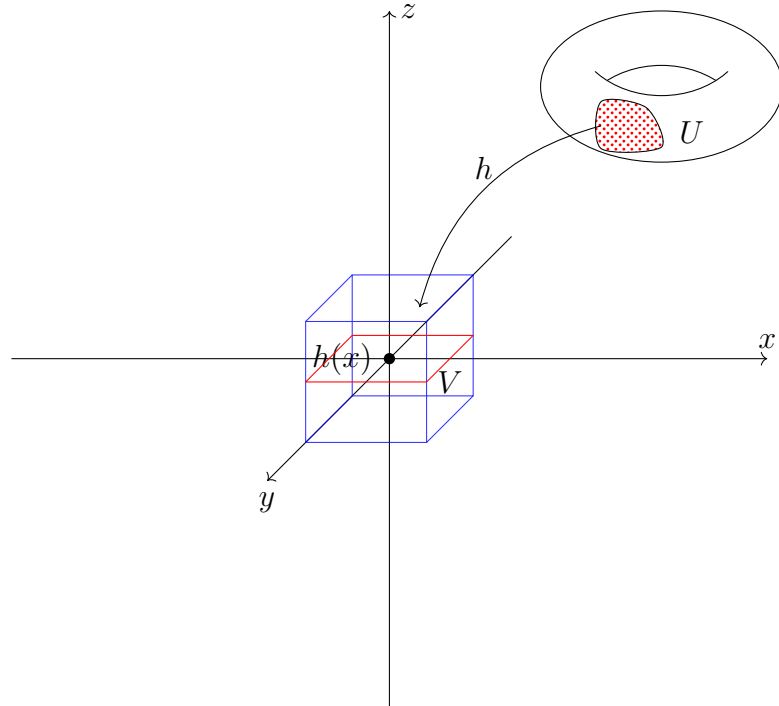


Figura 3.2: Ejemplo de una variedad bi-dimensional en $\mathbb{R}^3$

Notemos que la definición menciona la existencia de un difeomorfismo, el cual a su vez es un homeomorfismo de espacios topológicos por lo cual las propiedades topológicas quedan invariantes, con ello, se generaliza al concepto de **variedades topológicas** que no están contenidas en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera.

Supongamos que M es un espacio topológico. Decimos que M es una variedad topológica de dimensión k si tiene las siguientes propiedades.

- i) M es un espacio de Hausdorff
- ii) M es segundo numerable, es decir, existe una base numerable para la topología de M .
- iii) M es localmente euclidiana de dimensión k . Es decir, cada punto de M tiene un abierto homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k$.

Del hecho que estamos considerando a las variedades como subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, las primeras dos propiedades son inmediatas por la topología heredada, ya que la definición nos habla de que para cada punto p en M existe dos subconjuntos abiertos U y V tal que $p \in U$ y $h : U \rightarrow V$ un homeomorfismo.

Al par (U, h) se le llama carta coordenada y al conjunto de cartas coordenadas que cubren a M se le llama atlas, dado por

$$\mathcal{A} = \left\{ (U_\alpha, h_\alpha) \mid \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha = M \right\}.$$

Veamos que la n -esfera S^n , definida por $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ es una variedad de dimensión n . Para ello, usaremos (sin demostrar) el siguiente teorema.

Teorema 3.5. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y sea $g : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ una función diferenciable tal que $g'(x)$ tenga rango p siempre que $g(x) = 0$. Entonces, $g^{-1}(0)$ es una variedad de dimensión $(n - p)$ en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Ver [4] página 103. □

Regresando al caso de la n -esfera, es suficiente tomar $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \|x\|^2 - 1$ la cual es diferenciable, se sigue que $S^n = g^{-1}(0)$, por el **Teorema 3.5** es una variedad de dimensión n .

Hay otra forma de caracterizar a las variedades que se rige por coordenadas y abiertos para cada una de estas, como lo enuncia el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Un subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad k -dimensional si y sólo si para cada elemento $x \in M$ se verifica la siguiente **condición de coordenadas**:*

(C) *Existe un conjunto abierto U que contiene x , y un conjunto abierto $W \subseteq \mathbb{R}^n$, y una función inyectiva diferenciable $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$i) f(W) = M \cap U,$$

$$ii) f'(y) \text{ tiene rango } k \text{ para cada } y \in W.$$

Demostración. Ver [4] página 103. □

f se denomina **sistema de coordenadas** alrededor de a , o entorno de a .

3.2.1. Campos y formas en variedades

Sea M una variedad k -dimensional en $\mathbb{R}^n$, y sea $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ un entorno alrededor de $x = f(a)$. Puesto que $f'(a)$ tiene rango k , la transformación lineal $f_* : R_a^k \rightarrow R_x^n$ es inyectiva, y $f_*(R^k)$ es un subespacio k -dimensional de $\mathbb{R}_x^n$. Si $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es otro sistema de coordenadas, con $x = g(b)$, entonces

$$g_*(R_b^k) = f_*(f^{-1} \circ g)_*(R_b^k) = f_*(R_a^k).$$

Por tanto, el subespacio k -dimensional $f_*(R_a^k)$ no depende del sistema de coordenadas f .

Este subespacio denotado por M_x , y se denomina el **espacio tangente** de M en x . Una consecuencia de la contención $M \subseteq \mathbb{R}^n$, es que, existe un producto interior natural T_x en M_x inducido por el de $\mathbb{R}_x^n$, dado de la siguiente manera: si $v, w \in M_x$ se define $T_x(v, w) = \langle v, w \rangle_x$.

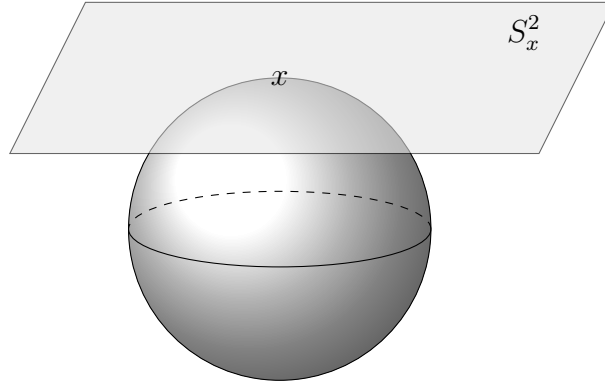


Figura 3.3: Plano tangente S_x^2

Una función ω que asigna $\omega(x) \in \Lambda^p(M_x)$ a cada $x \in M$ se denomina una p -forma en M . Si $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ es un entorno, entonces $f^*\omega$ es una p -forma en W ; diremos que ω es diferenciable, si $f^*\omega$ lo es. Una p -forma ω en M se puede escribir como

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Aquí, las funciones $\omega_{i_1, \dots, i_p}$ están definidas sólo en M . Frecuentemente es necesario elegir una orientación α_x para cada espacio tangente M_x de una variedad M . Estas elecciones se les dice **consistentes** siempre que para cada entorno $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $a, b \in W$ la relación

$$[f_*((e_1)_a), \dots, f_*((e_k)_a)] = \alpha_{f(a)}$$

se cumple si y sólo si

$$[f_*((e_1)_b), \dots, f_*((e_k)_b)] = \alpha_{f(b)}.$$

Supongamos que se han elegido orientaciones α_x consistentes.

Si $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $a, b \in W$ es un sistema de coordenadas tal que

$$[f_*((e_1)_a), \dots, f_*((e_k)_a)] = \alpha_{f(a)}$$

para uno, y por tanto para cada $a \in W$, entonces f conserva la orientación.

Si f no conserva la orientación, y $T : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es una transformación lineal con $\det(T) = -1$, entonces $f \circ T$ conserva la orientación. Por tanto existe un entorno alrededor de cada elemento que conserva la orientación.

Una variedad para la que se pueden elegir orientaciones consistentes α_x , se denomina orientable, y una elección particular de α_x se le llama una orientación α de M .

3.2.2. Integración de formas en variedades

Para la integración sobre variedades, es necesario definir el concepto de **variedad con frontera**. Un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ es una **variedad con frontera**, si para cada punto $x \in M$ se satisface la condición (M) , o la siguiente condición:

(M') Existe un conjunto abierto U que contiene a x , un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$, y un difeomorfismo $h : U \longrightarrow V$ tales que

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}_k^+ \times \{0\}) = \{x \in V \mid x^k \geq 0 \text{ y } x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}.$$

y $h(x)$ tiene su k -ésima componente igual a 0.

El conjunto de todos los puntos $x \in M$ para los que se satisface (M') se denomina **frontera** de M , y se denota por ∂M . Ahora, procederemos a definir la integral de una n -forma en M .

Para evitar problemas de convergencia, es conveniente suponer que M es compacto, entonces el soporte K de ω es cerrado en un espacio compacto y por lo tanto también es compacto. Para fines prácticos, asumiremos que M es orientable.

Supongamos que K está contenido en una carta $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$. Entonces, si la representación local ω_α de ω en U_α es

$$\omega_\alpha = a_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

definimos

$$\int_M \omega = \int_{V_\alpha} \omega_\alpha = \int_{U_\alpha} a_\alpha dx_1 \cdots dx_n,$$

donde en el lado derecho es una integral usual en $\mathbb{R}^n$.

De la misma manera que en el caso de las superficies, la integral nos permite calcular su área, esta idea se generaliza para las variedades utilizando formas diferenciables, y se construye de la siguiente manera.

Sea M una variedad k -dimensional (o variedad con frontera) en $\mathbb{R}^n$ con una orientación α . Si $x \in M$, entonces α_x , y el producto interior T_x que se definió anteriormente determinan un elemento de volumen $\omega(x) \in \Lambda^k(M_x)$. Se obtiene por tanto, una k -forma ω en M , no nula en ningún punto, que se denomina **elemento de volumen** en M (determinado por α) y lo denotamos por dV . El **volumen** de M se define como $\int_M dV$, siempre que esta integral exista, lo que ocurre siempre que M sea compacto.

Como mencionamos antes, la teoría de integración en variedades exige condiciones puntuales para su construcción, las cuales hemos omitido con la idea de sólo presentar la relación de invarianza de volúmenes bajo difeomorfismos que preservan la orientación, en el **Teorema 3.3** lo enunciamos para el caso de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, en el siguiente teorema, se generaliza para el caso de variedades y formas diferenciables.

Teorema 3.7. *Supongamos que M y N son variedades diferenciables y orientables de dimensión n con o sin frontera, y ω una n -formas con soporte compacto en M . Si $F : N \rightarrow M$ es un difeomorfismo que preserva la orientación, entonces*

$$\int_M \omega = \int_N F^* \omega.$$

Demostración. Ver [5] página 356. □

Con este resultado ya es posible ver la relación con la idea de la medida de Haar sobre la **invarianza** de conjuntos que son "medidos" por su **volumen** bajo funciones del espacio en si mismo.

3.3. El grupo especial unitario de grado 2, $SU(2)$

A diferencia de los ejemplos de grupos de matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$ que hemos desarrollado anteriormente, para definir a $SU(2)$ y en general a

$SU(n)$, recurrimos a los números complejos para poder utilizar algunas de las propiedades que se obtienen al trabajar con la estructura compleja. Para ello, introducimos la siguiente notación.

La forma cartesiana de un número complejo es $z = a + ib$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, y el conjugado de z es $\bar{z} = a - ib$. Otras representaciones de los números complejos son:

i) **Forma polar** $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ y

ii) **Forma exponencial** $z = re^{i\theta}$.

Sea $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ el espacio de todas las matrices de orden $n \times n$ con coeficientes en los complejos. De la misma manera que hacemos cuando los coeficientes son reales, podemos identificar a $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ con $\mathbb{C}^{n^2}$, también podemos considerar al subconjunto de matrices con determinante distinto de 0 que denotaremos por $\mathcal{GL}_{n \times n}(\mathbb{C})$. De este subconjunto, nos interesa trabajar con las matrices unitarias las cuales definimos a continuación.

Definición 3.7. Una matriz compleja A de orden $n \times n$ es llamada **unitaria** si cumple

$$A^*A = I = AA^*.$$

Aquí, A^* es la **adjunta**³, definida por

$$(A^*)_{jk} = \bar{A}_{kj},$$

lo anterior se puede reescribir como sigue

$$A^*A = \sum_{j=1}^n (A^*)_{ij} A_{jk} = \delta_{jk}. \quad (3.1)$$

De la ecuación (3.1) podemos inferir que A es unitaria si y sólo si $A^* = A^{-1}$. En particular, cada matriz unitaria es invertible.

Por otro lado, recordemos que $(AB)^* = B^*A^*$. De esto, podemos ver que si A y B son unitarias, entonces

$$(AB)^*(AB) = B^*A^*AB = B^{-1}A^{-1}AB = I.$$

³ U^* también es llamada la matriz Hermitiana conjugada de U .

Lo que muestra que AB también es unitaria. Además, ya que

$$(AA^{-1})^* = I^* = I,$$

podemos ver que

$$(A^{-1})^* A^* = I,$$

lo cual muestra que

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Por lo tanto, si A es unitaria, tenemos que

$$(A^{-1})^* A^{-1} = (A^*)^{-1} A^{-1} = (AA^*)^{-1} = I,$$

mostrando que A^{-1} también es unitaria.

Así, el conjunto de matrices unitarias es un subgrupo de $\mathcal{GL}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Este grupo es conocido como el grupo unitario, y es denotado por $U(n)$.

Comentario 3.1. Una definición equivalente es, U es unitaria si y sólo si

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$$

para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$, donde $\langle, \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es el producto interior usual en $\mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i.$$

Es decir, las matrices unitarias preservan el producto interior, por lo tanto son isometrías.

Definición 3.8. Definimos el grupo especial unitario de orden $n \times n$ como el subgrupo de $U(n)$ formado por matrices unitarias con determinante 1, y lo denotamos por $SU(n)$.

De la definición de $SU(2)$ como un subgrupo de matrices de $\mathcal{GL}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ que es un grupo topológico, se pueden deducir las siguientes propiedades:

i) $SU(2)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$.

Si identificamos $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ con el espacio $\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$. Entonces, podemos usar la estructura topológica habitual en $\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ e introducir la noción de convergencia: una sucesión de matrices $\{A_k\} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$

converge a alguna matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ si y sólo si, para todo $1 \leq i, j \leq k$, $(A_k)_{ij}$ converge a $(A)_{ij}$, es decir, las entradas de la sucesión $\{A_k\}$ convergen a la entradas correspondientes de A (convergencia estándar de números complejos).

En este caso, escribimos simplemente $A_k \rightarrow A$. Ahora, si $\{U_k\}$ es una sucesión de matrices en $SU(2)$, y $U_k \rightarrow U$, entonces se puede demostrar que $U \in SU(2)$, pues el producto interno y el determinante son funciones continuas.

ii) $SU(2)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$.

iii) $SU(2)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$.

Es una implicación directa de las dos propiedades anteriores y el teorema de Heine-Borel.

La siguiente caracterización de los elementos de $SU(2)$ se obtiene usando las propiedades de las matrices complejas, y nos da una idea geométrica del grupo.

Sea U un elemento de $SU(2)$, dado por

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Como cumple las ecuaciones $U^*U = I = UU^*$ y $\det(U) = 1$ se pueden deducir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} |a|^2 + |c|^2 &= 1, & |b|^2 + |d|^2 &= 1, \\ \bar{a}b + \bar{c}d &= 0, & ad - bc &= 1 \end{aligned}$$

Para resolver este sistema podemos asumir en primer lugar que $b = 0$, se sigue que $ad = 1$ y $\bar{c}d = 0$, implicando que $c = 0$ y U es diagonal con $a = \bar{d}$.

Ahora, si suponemos que $b \neq 0$ y usamos $a = -\frac{c\bar{d}}{b}$ se deduce que $|b| = |c|$ y $|a| = |d|$; entonces $b \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 0$, por lo tanto $a = \bar{d}$ y $b = -\bar{c}$. De esta forma, podemos escribir a cualquier elemento de $SU(2)$ como:

$$U(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}, \quad \text{con } |x|^2 + |y|^2 = 1.$$

El mapeo $S^3 \longrightarrow SU(2)$ dado por $(x, y) \mapsto U(x, y)$ claramente es inyectivo, y por el análisis anterior se deduce que es biyectivo, por lo que cubre a todo S^3 . Además, el mapeo es diferenciable, por lo que podemos concluir que $SU(2) \cong S^3$ como variedad.

Ya hemos demostrado que $SU(2)$ es un grupo topológico localmente compacto, por lo tanto, tiene una medida de Haar. En la siguiente sección damos una manera de construirla mediante la identificación de $SU(2)$ con S^3 .

3.4. La medida de Haar en $SU(2)$

La construcción de esta medida se basa en "medir" el volumen de los subconjuntos de S^3 vista como variedad de $\mathbb{R}^4$. Lamentablemente, no podemos visualizarlo geométricamente, pero la idea se puede representar perfectamente con S^2 y la integral de superficie de la siguiente manera, dado un subconjunto de S^2 , por ejemplo, la semi-esfera superior y rotarla respecto al origen obteniendo la "misma" semi-esfera, sólo que en una distinta posición.

como lo mostramos a continuación.

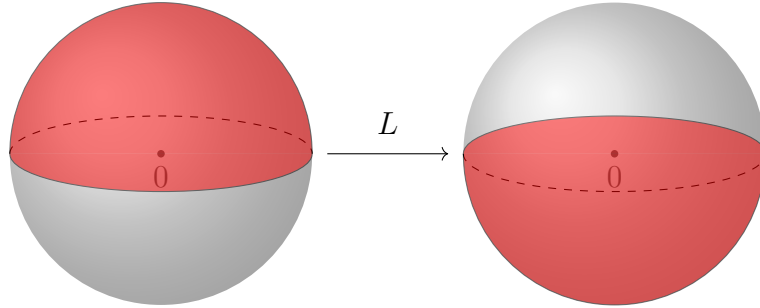


Figura 3.4: Rotación de la semi-esfera superior

Sea

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &=: \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ M_x =: \begin{bmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{bmatrix} \mid x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}, \end{aligned}$$

se sigue que $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ vía el isomorfismo de espacios vectoriales

$$M : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{H}, \quad M(x) = M_x. \quad (3.2)$$

Comenzamos definiendo el espacio tangente a S^3 en $p \in S^3$ de la siguiente manera

$$S_p^3 = \{v_p^4 \mid v \in \mathbb{R}^4, \langle v, p \rangle = 0\}.$$

⁴Los elementos v_p del espacio tangente en $p \in S^3$ pueden ser identificados por otros vectores paralelos en $\mathbb{R}^4$ que parten del origen, es por ello que, nos permitimos quitar el subíndice p .

Ya que S^3 es compacta y orientable, podemos hablar del elemento de volumen que es una 3-forma en S^3 definida por

$$\omega_p(u_p, v_p, w_p) = \det(p, u, v, w)$$

para $p \in S^3$ y $u_p, v_p, w_p \in S_p^3$. Con esto, estamos calculando el volumen del paralelepípedo generado por u, v, w con

$$\det(p, u, v, w) = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que, S_p^3 es un espacio vectorial de dimensión finita, por lo que podemos definir una base $\alpha = \{u_p, v_p, w_p\}$ que sea orientada positiva.

Ahora, consideremos al grupo $SO(4)$ de las transformaciones lineales ortogonales $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ con $\det(L) = 1$, tenemos que

$$SO(4) = \{L \in \mathcal{GL}_{4 \times 4}(\mathbb{R}) \mid \langle Lu, Lv \rangle = \langle u, v \rangle, \text{ para todo } u, v \in \mathbb{R}^4\}.$$

En particular, si $x \in S^3$ entonces $\|Lx\| = \|x\|$ por lo tanto $L \in SO(4)$ preserva a S^3 . Otra característica de los elementos de $SO(4)$ es que son difeomorfismos que preservan la orientación. En efecto son diferenciables por el **Teorema 3.1**. Así, $DL(p) = L(p)$ y es invertible por tener determinante distinto de 0, resta ver que preservan la orientación, para ello, enunciamos la siguiente proposición.

Proposición 3.3. *Cada $L \in SO(4)$ es un difeomorfismo que preserva la orientación de $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$.*

Demostración. Como $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es un elemento de $SO(4)$ entonces, es una transformación lineal y su diferencial $(DL)_p : \mathbb{R}_p^4 \longrightarrow \mathbb{R}_{Lp}^4$ en un punto $p \in S^3$ es $(DL)_p(u_p) = (Lu)_{Lp}$. Notemos ahora que

$$(Lu) \cdot (Lp) = u \cdot p = 0$$

pues $u_p \in S_p^3$.

Restringimos el dominio de L a S^3 , los siguientes argumentos se siguen pues cada L esta definida para todo $\mathbb{R}^4$. Así, la derivada

$$(DL)_p : S_p^3 \longrightarrow S_{Lp}^3 \text{ de } L : S^3 \longrightarrow S^3$$

también esta dada por

$$(DL)_p(u_p) = (Lu)_{Lp}.$$

Con la base α de S_p^3 podemos dar la base correspondiente de S_{Lp}^3 de la siguiente manera

$$\{(DL)_p(u_p), (DL)_p(v_p), (DL)_p(w_p)\} = \{(Lu)_{Lp}, (Lv)_{Lp}, (Lw)_{Lp}\}$$

cuyo determinante es

$$\det(Lu, Lv, Lw) = \det(L)\det(x, u, v, w) = \det(x, u, v, w) > 0.$$

□

Como hemos demostrado que cada $L \in SO(4)$ es un difeomorfismo que preserva la orientación podemos aplicar el **Teorema 3.6** y por lo tanto.

$$\int_{S^3} L^*(\eta) = \int_{S^3} \eta \quad (3.3)$$

para cualquier 3-forma en S^3 .

El resultado anterior es un ejemplo de la invarianza de los volúmenes bajo los elementos de un grupo de matrices. En este caso, las matrices ortogonales. Así, estamos dando la noción de "traslación" en S^3 que serán representados por elementos de $SO(4)$.

Proposición 3.4. ω es $SO(4)$ -invariante. Esto es, $L^*(\omega) = \omega$ para cada $L \in SO(4)$.

Demostración. Sean $L \in SO(4)$, $p \in S^3$ y α la base de S_p^3 . Entonces

$$\begin{aligned} (L^*\omega)_p(u_p, v_p, w_p) &= \omega_{Lp}((DL)_p(u_p), (DL)_p(v_p), (DL)_p(w_p)) \\ &= \omega_{Lp}((Lu)_{Lp}, (Lv)_{Lp}, (Lw)_{Lp}) \\ &= \det(Lx, Lu, Lv, Lw) \\ &= \det(L)\omega_p(u_p, v_p, w_p) \\ &= \omega_p(u_p, v_p, w_p). \end{aligned}$$

□

Sea

$$v := \int_{S^3} \omega > 0$$

el volumen de S^3 . Ahora, podemos definir una medida μ en S^3 dada por

$$\hat{\mu}(f) = \int_{S^3} f(x) d\mu(x) = \frac{1}{v} \int_{S^3} f\omega dS, \text{ para } f \in \mathcal{C}(S^3).$$

Notemos que $\hat{\mu} : \mathcal{C}(S^3) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cumple que

i) $\hat{\mu}$ es lineal.

ii) Si $f \geq 0$ entonces $\hat{\mu}(f) \geq 0$.

Por lo que cumple el **Teorema 2.2**, así existe μ medida regular en S^3 con

$$\hat{\mu} := \int_{S^3} f d\mu.$$

Esta definición de medida es sólo para funciones escalares diferenciables y está bien definida. Además, es claro que μ es normalizada ya que para $f = 1$,

$$\int_{S^3} d\mu(x) = \frac{1}{v} \int_{S^3} \omega = \frac{1}{v} \cdot v = 1.$$

Veamos que los elementos de $SO(4)$ son invariantes por la izquierda bajo esta medida.

Lema 3.3. Sea $L \in SO(4)$, entonces

$$\int_{S^3} f(Lx) d\mu(x) = \int_{S^3} f(x) d\mu(x)$$

Demostración. De la proposición anterior, como $L^*(\omega) = \omega$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{S^3} f(Lx) d\mu(x) &= \frac{1}{v} \int_{S^3} (f \circ L)\omega = \frac{1}{v} \int_{S^3} (f \circ L)L^*(\omega) \\ &= \frac{1}{v} \int_{S^3} L^*(f\omega). \end{aligned}$$

En general $(f\omega)$ no es la forma de volumen, pero si es una 3 forma en S^3 y por la **Ecuación (3.4)** tenemos que

$$\frac{1}{v} \int_{S^3} L^*(f\omega) = \frac{1}{v} \int_{S^3} f\omega = \int_{S^3} f(x) d\mu(x).$$

□

Identificando $SU(2)$ con S^3 mediante el mapeo $M : x \mapsto M_x$, podemos considerar la medida μ para $SU(2)$, explícitamente como sigue

$$\int_{SU(2)} f(g) d\mu(g) := \int_{S^3} f(M_x) d\mu(x), \quad \text{para } f \in \mathcal{C}(SU(2)).$$

Lema 3.4. μ es una medida de Haar izquierda $SU(2)$.

Demostración. Ya tenemos que μ es normalizada y por tanto regular, sólo necesitamos mostrar que es invariante por la izquierda en $SU(2)$.

Sea $k \in SU(2)$ y definimos el mapeo

$$L_k : SU(2) \mapsto SU(2), \quad L_k(g) = kg.$$

Notemos que, este mapeo corresponde a la restricción de una transformación, digamos $L'_k \in SO(4)$. En efecto, sea

$$T_k : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}, \quad T_k(q) = kq$$

Entonces L_k es la restricción a $SU(2)$ de T_k . Ahora, bajo el isomorfismo de la **Ecuación (3.3)** tenemos que T_k corresponde al mapeo lineal

$$L'_k : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad L'_k = M^{-1} \circ T_k \circ M.$$

Sólo necesitamos verificar que L'_k pertenece a $SO(4)$ pues por el **Lema 3.2** sabemos que la medida es invariante bajo subconjuntos de $SO(4)$.

Para esto, sean $x, y \in \mathbb{R}^4$ y supongamos que $L'_k(x) = y$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} kM_x = M_y \quad \text{entonces,} \quad \det(kM_x) &= \det(M_y), \quad \text{luego} \\ \det(k)\det(M_x) &= \det(M_y), \quad \text{por lo que} \\ \det(M_x) &= \det(M_y), \quad \text{se sigue que} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = \sum_{i=1}^4 y_i^2.$$

Así, L'_k es una transformación ortogonal, solo falta comprobar que el determinante es uno. Como $k \mapsto \det(L'_k)$ es continua en $SU(2)$ y $\det(I = L'_I) = 1$ entonces por la conexidad de $SU(2)$ tenemos que $\det(L'_k) = 1$ para cada $k \in SU(2)$. $\square$

Observación 3.1. *Uno puede reemplazar el mapeo L'_k en la demostración anterior por una multiplicación derecha.*

$$R_k : SU(2) \longrightarrow SU(2), \quad R_k(g) = gk.$$

Al igual que antes, esto corresponde a la restricción a S^3 de una transformación en $SO(4)$. Entonces, el argumento anterior también establece la propiedad de invariancia por la derecha de la medida de Haar anteriormente mencionada.

Veamos ahora una caracterización diferente de los elementos de $SU(2)$ con la cual podemos obtener una expresión de la medida de Haar en términos de una integral en coordenadas esféricas.

Lema 3.5. *Cada matriz $X \in SU(2)$ se descompone como*

$$X = \begin{bmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix}$$

donde $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $-\pi \leq \psi \leq \pi$.

Demostración. Sea $X \in SU(2)$,

$$X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Sea $\alpha = re^{ia}$ y $\beta = se^{ib}$ donde $r, s, a, b \in \mathbb{R}$, $r, s \geq 0$. Como $X \in SU(2)$ entonces $r^2 + s^2 = 1$. Así, hay un único $\theta \in [0, \pi]$ con $r = \cos \theta$ y $s = \sin \theta$.

Por otro lado, sea $\psi = (a + b)/2$ y $\phi = (a - b)/2$ con ello, podemos escribir $a = \psi + \phi$ y $b = \psi - \phi$.

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} re^{i(\psi+\phi)} & se^{i(\psi-\phi)} \\ -se^{-i(\psi-\phi)} & re^{-i(\psi+\phi)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} re^{i\phi} & se^{i\phi} \\ -se^{-i\phi} & re^{-i\phi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & s \\ -s & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

como lo queríamos. Para completar la demostración, resta mostrar que "recuperamos" a $SU(2)$ cuando los ángulos ϕ, ψ varían sobre los intervalos $[0, \pi]$ y $[-\pi, \pi]$ respectivamente. Para cualquier punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que $(a + 2k\pi, b + 2l\pi)$ se encuentra en la imagen de $[-\pi, \pi] \times [0, \pi]$ para algunos enteros k, l . □

Los números θ, ϕ, ψ se llaman los ángulos de Euler de la matriz X . Usando esta descomposición, podemos encontrar una fórmula de integración de la siguiente manera.

Proposición 3.5. *Sea μ la medida de Haar normalizada de $SU(2)$ y f una función integrable en $SU(2)$. Entonces*

$$\int_{SU(2)} f(x) d\mu(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^\pi d\phi \int_{-\pi}^\pi f \circ \Phi(\theta, \phi, \psi) d\psi$$

donde $\Phi : [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi] \times [-\pi, \pi] \mapsto SU(2)$ es el mapeo

$$\Phi(\theta, \phi, \psi) = \begin{bmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix}.$$

Demostración. Sea $X \in SU(2)$ donde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{bmatrix}$$

usando la descomposición del **Lema 3.5** podemos escribir

$$x_1 = \cos \theta \cos s$$

$$x_2 = \cos \theta \sin s$$

$$x_3 = \sin \theta \cos t$$

$$x_4 = \sin \theta \sin t$$

donde $s = \psi + \phi$ y $t = \psi - \phi$. Ahora, derivando tenemos que

$$dx_1 = -\cos \theta \sin s ds - \sin \theta \cos s d\theta$$

$$dx_2 = \cos \theta \cos s ds - \sin \theta \sin s d\theta$$

$$dx_3 = -\sin \theta \sin t dt + \cos \theta \cos t d\theta$$

$$dx_4 = \sin \theta \cos t dt + \cos \theta \sin t d\theta$$

tambi3n $ds = d\psi + d\phi$ y $dt = d\psi - d\phi$. As3 tenemos que

$$\begin{aligned} dx_1 &= -\sin \theta \cos s \, d\theta - \cos \theta \sin s \, (d\psi + d\phi) \\ dx_2 &= -\sin \theta \sin s \, d\theta + \cos \theta \cos s \, (d\psi + d\phi) \\ dx_3 &= \cos \theta \cos t \, d\theta - \sin \theta \sin t \, (d\psi - d\phi) \\ dx_4 &= \cos \theta \sin t \, d\theta + \sin \theta \cos t \, (d\psi - d\phi) \end{aligned}$$

y calculamos

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} x_1 & -\sin \theta \cos (\psi + \phi) & -\cos \theta \sin (\psi + \phi) & -\cos \theta \sin (\psi + \phi) \\ x_2 & -\sin \theta \sin (\psi + \phi) & \cos \theta \cos (\psi + \phi) & \cos \theta \cos (\psi + \phi) \\ x_3 & \cos \theta \cos (\psi - \phi) & -\sin \theta \sin (\psi - \phi) & \sin \theta \sin (\psi - \phi) \\ x_4 & \cos \theta \sin (\psi - \phi) & \sin \theta \cos (\psi - \phi) & -\sin \theta \cos (\psi - \phi) \end{bmatrix} \\ = -2\cos \theta \sin \theta. \end{aligned}$$

As3, tenemos que $|\Phi^*\omega| = 2\cos \theta \sin \theta \, d\theta \wedge d\phi \wedge d\psi = \sin 2\theta d\theta \wedge d\phi \wedge d\psi$.

Solo resta encontrar v_3 donde

$$v_3 = \int_{S^3} \omega.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \int_{S^3} \omega &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d\theta \int_0^\pi d\phi \int_{-\pi}^\pi d\psi = 2\pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d\theta \\ &= 2\pi^2 \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_{S^3} \omega = 1,$$

o bien

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d\theta \int_0^\pi d\phi \int_{-\pi}^\pi d\psi = 1.$$

Ahora para una función integrable f en $SU(2)$ y el homeomorfismo Φ podemos escribir

$$\int_{SU(2)} f(x) d\mu(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^\pi d\phi \int_{-\pi}^\pi f \circ \Phi(\theta, \phi, \psi) d\psi$$

como se deseaba. □

Para calcular la medida de un subconjunto $A \subseteq SU(2)$ es necesario aplicar el homeomorfismo y encontrar la medida del subconjunto en la esfera.

Comentario final:

La medida de Haar es un objeto de estudio de gran interés, pues la riqueza de las propiedades que cumple dicha medida hace que sea de gran utilidad en diversas áreas del análisis, es por esto que a lo largo de los años los matemáticos han trabajado en ir más allá de tener la certeza de la existencia de la medida de Haar.

A lo largo de este trabajo, construimos de manera explícita una expresión para la medida de Haar en el grupo especial unitario de dimensión dos, como mostramos, dicho grupo es en esencia la 3-esfera, por lo que podemos pensar que tiene una estructura hasta cierto punto sencilla, sin embargo, poder dar esta expresión de la medida de Haar requirió de otras áreas del conocimiento como lo es la geometría diferencial.

Es importante mencionar esto, pues se hace notorio que aunque el grupo sobre el que se sabe hay una medida de Haar parezca tener una estructura sencilla, dar de manera explícita una expresión para dicha medida resulta una tarea bastante complicada.

Con todo esto en mente, surge de manera natural preguntarse si se puede dar una generalización a lo desarrollado en este trabajo, es decir, si se puede dar de manera explícita una expresión de la medida de Haar en el grupo topológico $SU(n)$.

Aunque el entendimiento de este cuestionamiento resulta bastante sencillo, dar una respuesta es bastante complicado. Ahora bien, la respuesta a este

cuestionamiento es sí, por ejemplo, en [12] puede consultarse a detalle la construcción de dicha expresión.

Aunque el objetivo principal de este trabajo era dar la expresión de la medida de Haar en el grupo topológico $SU(2)$, consideramos apropiado mencionar la existencia de la expresión para el caso general.

Antes de pasar a enunciar dicha expresión, es necesario enunciar el siguiente resultado

Teorema 3.8. *Cualquier operador del grupo unitario $U(n)$ se puede escribir como*

$$U_C = \left[\prod_{m=1}^{n-1} \left(\prod_{k=m+1}^n \exp(iP_k \lambda_{k,m}) \exp(iY_{m,k} \lambda_{k,m}) \right) \right] \left[\prod_{l=1}^n \exp(iP_l \lambda_{l,l}) \right],$$

usando n^2 parámetros reales $\{\lambda_{m,k}\}_{m,k=1,\dots,n}$ tales que $\lambda_{m,k} \in [0, 2\pi]$ para $m \geq k$ y $\lambda_{m,k} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ para $m < k$.

En este contexto, se prueba que la medida de Haar en $SU(n)$ está dada como sigue

Teorema 3.9. *Cualquier operador del grupo especial unitario $SU(n)$ se puede escribir como*

$$U_C = \left[\prod_{m=1}^{n-1} \left(\prod_{k=m+1}^n \exp(iZ_{m,k} \lambda_{k,m}) \exp(iY_{m,k} \lambda_{m,k}) \right) \right] \left[\prod_{l=1}^n \exp(iZ_{l,n} \lambda_{l,l}) \right],$$

usando $n^2 - 1$ parámetros reales $\{\lambda_{m,k}\}_{m,k=1,\dots,n}$ tales que $\lambda_{m,k} \in [0, 2\pi]$ para $m > k$, $\lambda_{m,k} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ para $m < k$ y $\lambda_{m,k} \in [0, 2\pi]$ para $m = k$.

Bibliografía

- [1] Cohn. D. L. 2013. *Measure Theory*. Boston,USA: Editorial Birkhäuser. Second edition.
- [2] Munkres. J. 2000. *Topology.*: Editorial Person.
- [3] Carmo. M. P. 1994. *Differential forms and applications*. Berlin: Editorial Springer-Verlag.
- [4] Spivak. M. 1965. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. New York-Amsterdam: Editorial W. A. Benjamin, Inc.
- [5] Lee. J. M 2003. *Introduction to Smooth Manifolds, Graduate Text in Mathematics*. New York: Editorial Springer.
- [6] Lang. S. 1993. *Real and functional analysis*. Editorial Springer. Third edition.
- [7] Gleason. J. 2010. *Existence and uniqueness of Haar measure*. www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Gleason.pdf
- [8] Easton, M. L. 1989 *Integrals and the Haar measure. In Group invariance in applications in statistics (pp. 1-18*. Institute of Mathematical

Statistics.

- [9] Westra. D. B. *SU(2) and SO(3)*. <https://www.mat.univie.ac.at/westra/so3su2.pdf>
- [10] Lundgren. S. 2021. *The Existence and Uniqueness of Haar Measure*. www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1564300/FULLTEXT01.pdf
- [11] Leaser. T. 2012. *FOURIER ANALYSIS ON SU(2) [Master Degree]*. East Carolina University.
- [12] Christoph Spengler, Marcus Huber, and Beatrix C. Hiesmayr 2012. *Composite parameterization and Haar measure for all unitary and special unitary groups*. J. Math. Phys. 53, 013501. <https://doi.org/10.1063/1.3672064>