



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Suma y resta de distribuciones de probabilidad: el
teorema del límite central y la conjetura del límite
periférico

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Juan García Vazquez

TUTOR

M en C. Augusto Cabrera Becerril

Cd. Mx. 2023





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Índice general	2
1. Historia y prehistoria de la teoría de la probabilidad	15
1.1. Distribución de la suma de variables aleatorias independientes	24
1.2. Distribución de la diferencia variables aleatorias independientes	25
1.3. Modos de convergencia	26
1.4. Relaciones entre los modos de convergencia	28
1.5. Teorema de Bernoulli.	29
1.6. Teorema del límite central	29
1.7. Leyes de potencia	30
1.8. La ley de Zipf	31
1.8.1. El discurso de Andrés Manuel López Obrador (AMLO).	32
1.9. La ley de Pareto	33
1.10. Otra ley de potencia: la distribución de las revistas con mayor impacto	34
2. Ubicuidad de la Germi-beta	37
2.1. Ranking de los científicos mexicanos	37
2.2. El ranking de las universidades	39
2.3. El producto interno bruto (PIB) de los países del mundo . . .	41
2.4. Terremotos en México	44
2.5. Interpretación de los parámetros de la Germi-beta	47
2.6. Ajuste en Python	49
3. La conjetura del límite periférico	53
4. Discusiones y conclusiones	82
A. Código en Python	85
Bibliografía	112

Agradecimientos

De las muchas personas que me apoyaron de una u otra manera en la elaboración de este trabajo destacan y merecen un especial agradecimiento: el M. en C. Sergio Hernández López, por las constantes consultas que le hice en el uso del lenguaje de Python; Dr. Hugo Iván Cruz Rosas por su lectura crítica; a mi tutor de tesis, el M. en C. Augusto Cabrera Becerril, por aceptar ser mi tutor, después de la lamentable muerte de Germinal Cocho Gil, mi primer tutor; y a mis sinodales, por su rigurosa crítica y sus comentarios que le dieron mejor presentación a mi trabajo.

Finalmente, quiero agradecer al Dr. Adonis Germinal Cocho Gil, pues con él inicie este trabajo, y cuya conjetura es el tema central de mi tesis. Quiero agregar que aunque, Germinal murió sus enseñanzas se han quedado para siempre entre los que fuimos sus alumnos.

Presentación

Las formas de estudio de la naturaleza han evolucionado a lo largo de la historia de la humanidad y los modos de explicarla también, dando como resultado que con el avance del tiempo nos aproximemos a una explicación diversa de ella. Estos modos de explicación se han hecho desde diferentes perspectivas, apoyándose en la filosofía e incluso la modelación matemática, tal como lo dice Sergio F. Martínez [13].

El analizar los fenómenos naturales desde una perspectiva filosófica rigurosa y siguiendo un método, tiene su auge en la antigua Grecia, donde ya los presocráticos buscaban las causas primarias de los fenómenos naturales. Los griegos propusieron a distintos elementos como el origen de los diferentes objetos de la naturaleza. Heráclito, concibe la idea de que la realidad es cambiante, sin llegar a decir con claridad cuál era el origen de ese cambio, dice Rodolfo Mondolfo [16]. Posteriormente con la aparición de otros destacados filósofos y hechos importantes de la historia, han permitido que las diferentes percepciones cambien o se modifiquen. Un ejemplo de lo anterior, es la popularización de las leyes de Newton, según Martínez [13]. Podemos considerar que la mecánica Newtoniana marca el comienzo de una intensa búsqueda de leyes fundamentales para los fenómenos de la naturaleza.

En el siglo XX, surgió el concepto de sistema complejo ¹ como un nuevo paso en la explicación de ciertos fenómenos, según Martínez [13]. El estudio de sistemas complejos considera los comportamientos colectivos o de todo un sistema como el objeto fundamental de estudio; intenta explicar los sistemas en términos de sus partes constituyentes y las interacciones individuales entre ellos, surgió una forma de ver a los fenómenos de la naturaleza, como sistemas en donde la interrelación de sus componentes individuales hace posible la emergencia de nuevas propiedades ², capaces de ser observables en

¹Un sistema complejo consiste de múltiples componentes individuales que interactúan entre sí y con el “ambiente” y que en conjunto, tienen propiedades que no tienen por separado.

²Un comportamiento emergente o una propiedad emergente puede aparecer cuando los componentes individuales de un sistema interactúan entre sí y con su entorno. El resultado es un comportamiento colectivo, que no puede reducirse al comportamiento de

dicho fenómeno, surgidas a partir de la interacción de sus componentes individuales [13], así como diversos factores contingentes que lo pueden afectar de manera significativa. Con la definición anterior todo fenómeno puede ser tomado como un sistema complejo, sin embargo este modo de estudiar a los fenómenos resulta diferente al modo reduccionista. Esta última tendencia del pensamiento es entendida como: *el sistema como un todo sólo puede ser explicado a partir del comportamiento de sus componentes individuales*, según Enrique Ruelas [22].

Algunos fenómenos como la posición de una partícula sumergida en un líquido pueden ser estudiados y modelados haciendo uso de la Teoría de Probabilidad y del teorema del límite central, dice Luis Rincón [20]. Por otro lado en la naturaleza existe una enorme variedad de fenómenos que no pueden estudiarse como resultado de una suma de factores contingentes, sino una alternancia de suma y resta: como la excitación e inhibición de neuronas mediante sinápsis o el nacimiento y muerte de individuos en una población, ambos fenómenos hacen que los factores contingentes (históricos y azarosos) sean relevantes para que el fenómeno presente un comportamiento o un estado particular, dice Cocho [2].

En décadas recientes se ha estudiado fuertemente la ubicuidad de las leyes de potencia³ en el comportamiento de los sistemas complejos, por ejemplo en las distribuciones rango-orden de datos varían significativamente en escala, como el caso del tamaño de las ciudades o la frecuencia de uso de las palabras en un idioma.

Las leyes de potencia no logran ajustar todos los datos, en particular los que corresponden a rangos extremos, tal como observaron Gustavo Martínez-Mekler y otros colaboradores [14]. Se han dado distintas explicaciones sobre esta aparente falla en la universalidad de las leyes de potencia, entre ellas el efecto finito (no hay suficientes datos para un análisis estadístico robusto). Otra explicación es que, en realidad, las leyes de potencia no son el modelo adecuado para este tipo de fenómenos. Un modelo alternativo es propuesto Germinal Cocho y otros colaboradores, y sorprendentemente ajusta a los datos en todo su rango [11].

Al observar estas propiedades, Germinal Cocho se preguntó si existe alguna razón o causa que genere este modelo. La respuesta fue que en los fenómenos en los que ajusta la beta generalizada hay *microdinámicas en conflicto*, y propuso que por medio de una resta de variables aleatorias se puede llegar a su modelo. Tomese una colección de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots , independientes, idénticamente distribuidas, y con soporte en

los componentes individuales del sistema.

³Una distribución de leyes de potencia suele ser indicador de invarianza de escalas.

el intervalo $[0, 1]$. Así la variable aleatoria $Y_n = (\dots((X_1 - X_2) - X_3)\dots) - X_n$ o $Y'_n = (X_n - (\dots(X_3 - (X_2 - X_1)\dots))$, cuando n tiende a infinito, tiene como función de densidad a una Germe-beta. A este resultado le hemos llamado la conjetura del límite periférico.

En este trabajo, por medio de integración numérica, y utilizando el lenguaje de programación Python, pretendemos mostrar evidencia numérica de como la función de densidad de Y_n y Y'_n se aproximan a la función que Cocho propone, cuando n tiende a infinito [2]. Ante tal evidencia se abre una línea de investigación sobre si en efecto la resta de variables aleatorias con soporte en el intervalo $[0, 1]$ se aproxima a una nueva variable aleatoria con función de densidad, la Germe-beta.

La principal aportación que hacemos en este trabajo consiste en analizar la evolución de los parámetros de la distribución Beta Generalizada (Beta de Cocho o Germe-beta) luego de ajustar la función de densidad de la resta de variables aleatorias con soporte en el intervalo $[0, 1]$. Este trabajo corresponde principalmente a una extensión de los artículos *Universality of rank-ordering distributions in the arts and sciences* [14] y *General model of subtraction of stochastic variables. Attractor and stability analysis* [2] en los cuales se tratan cuestiones acerca de la distribución beta discreta generalizada, también llamada Germe-beta en reconocimiento a Cocho.

$$f(x) = N \frac{(R + 1 - x)^b}{x^a},$$

donde R es el número máximo de valores por clasificar; f es la propiedad medida (frecuencia, tamaño, áreas, magnitud, etcétera); x la clasificación $x = 1, 2, \dots, R$; N es una constante de normalización; y a, b son parámetros libres [26].

En el capítulo 2, a manera de introducción haremos un breve resumen de la historia de los modos de explicación científica con comentarios adicionales. Tomaremos como referencia las ideas Sergio F. Martínez que expresa en su libro *De los efectos a las causas* sobre la evolución de los modos de explicación científica [13].

En el capítulo 3 mostramos algunos conceptos y resultados de la teoría de la probabilidad, en los que aparecerán las principales distribuciones de probabilidad. Entre ellas destaca la distribución normal por estar fuertemente ligada al teorema del límite central. De igual manera presentamos algunos resultados límite de la teoría de la Probabilidad. Posteriormente mostramos algunos modelos de leyes de potencia, entre los que se encuentran la ley de Zipf y la ley de Pareto. La frecuencia del uso de las palabras en el discurso del Presidente Andrés Manuel López Obrador (AMLO) y el factor de impacto de las revistas científicas también son mostrados siguiendo una ley de potencias.

En el capítulo 4 mostramos fenómenos que son modelados con la función propuesta por Cocho. De igual manera mostramos la interpretación que reciben los parámetros de esta función de densidad.

En el capítulo 5 buscaremos las causas que generan distribuciones Germi-beta, para ello llevaremos a cabo el proceso de seudo correlación cruzada de funciones con soporte en el intervalo $[0, 1]$ cuyo resultado se ajusta de manera excelente a la Germi-beta.

Justificación

Encontrar un patrón con el que evolucionan los parámetros de la Germi-Beta al realizar el proceso de seudo correlación cruzada de funciones con soporte en el intervalo $[0, 1]$, nos puede permitir hacer predicciones acerca de cómo serían los parámetros de esta función al realizar esta operación de manera consecutiva, de manera semejante a como se hace en la suma de variables aleatorias e incluso como en la ley de los grandes números y el teorema del límite central.

Hacer lo anterior quizás podría ayudar a encontrar pistas para la demostración matemática rigurosa de esta conjetura. La cual propone que el proceso de seudo correlación cruzada de funciones con soporte en el intervalo $[0, 1]$ se aproxima a la función Germi-beta.

Objetivos

- Hacer un resumen sobre los resultados encontrados con respecto a la Germi-beta.
- Mostrar nuevos fenómenos que también siguen el modelo de Cocho.
- Mostrar las causas que generan a los fenómenos anteriores.
- Mostrar la manera en que evolucionan los parámetros de la Germi-beta al realizar el proceso de seudo correlación cruzada de funciones con soporte en el intervalo $[0, 1]$.

Conjeturas

- La distribución Beta generalizada de dos parámetros, ajusta bien a varios fenómenos aparentemente distintos. En realidad, tienen en común ser el resultado de múltiples dinámicas en conflicto.

- La diferencia de variables aleatorias con soporte en el intervalo $[0, 1]$ se aproxima a una nueva variable aleatoria cuya función de distribución es la función Beta discreta generalizada de dos parámetros.
- Existe una gran variedad de fenómenos en la naturaleza que son el resultado de un equilibrio entre diferentes dinámicas en conflicto.

Introducción

La intención de este resumen es mostrar que el modelo propuesto por Cocho tiene sustento en las causas, en este caso, dinámicas en conflicto en todas las escalas y niveles de organización.

En el antiguo Egipto y en Mesopotamia ya contaban con un sistema de numeración que les permitía realizar los cálculos necesarios de sus actividades diarias, dice Jean-Claude Magueron [12]. En Mesopotamia contaban con conocimientos suficientes para resolver ecuaciones de tercer grado e incluso eran capaces de prever eventos astronómicos.

En la época de la antigua Grecia, se originó un tipo de conocimiento con las características más distintivas de lo que hoy llamamos ciencia en la cultura occidental, es decir un sistema de creencias desarrolladas como parte de un núcleo cultural común griego, cuyo objetivo era rechazar las explicaciones de tipo no naturales, cómo dioses, encantamientos o rituales mágicos, según Martínez [13].

En la antigua Grecia se distinguen dos tradiciones científicas: la teórica-especulativa y las tradiciones empíricas, dice Martínez. Tales, Anaximandro y Anaxímenes serían conocidos como milesios y encabezarían la tradición teórico-especulativa. Los milesios buscaban principios explicativos del origen de todas las cosas. Por ejemplo, Tales propuso al agua como principio material de todas las cosas, que daban origen a otras cosas por medio de la rarefacción y condensación. Filósofos posteriores como Sócrates pensaban en que las explicaciones no sólo deben ser acerca de como están compuestas las cosas, sino además explicar porqué están compuestas como lo están necesariamente. Para Sócrates, las cosas forman parte del mejor arreglo posible del mundo. Sócrates propuso considerar la hipótesis más adecuada y que se acepte por verdadera mientras que no podamos encontrar contradicciones por vía de la experiencia.

Este método de contrastar las hipótesis con la experiencia sería utilizado frecuentemente en el Renacimiento.

Una cuestión interesante es el llamado *problema del cambio* planteado por Heráclito y Parménides, según Martínez. Mientras el primero afirmaba que

el movimiento y el cambio, es lo que origina a todas las cosas (fenómenos). El segundo argumentó que nada puede surgir de lo que no es, llegando a la conclusión de que el conocimiento por vía de los sentidos es ilusorio.

Hubo distintos filósofos trataron de conciliar estas dos posturas, dice Martínez. Empédocles, por ejemplo, explicó el cambio por medio de un proceso de mezcla o separación de los elementos simples y las distintas proporciones. Mientras que Anaxágoras “resolvió” el problema del cambio partiendo de la idea de que “todo está mezclado con todo”. Leucipo y Demócrito argumentaron que lo que realmente existe son sustancias a las que llamó átomos, indestructibles (sin color, sabor) eternas y sólidas. De este modo es la estructura de los átomos la que hace diferente a un objeto de otro y produce los cambios.

Sin embargo, la teoría atomista aún dejaba preguntas sin respuesta, por ejemplo cómo se producen los colores y sabores, o si es que en realidad estas características sólo son producidas por la mente. Aristóteles sería el primero en dar respuestas serias a estas cuestiones.

En la época de Aristóteles existían dos patrones de explicación respecto al problema del cambio, las teorías de Platón y de Demócrito. Para Aristóteles el método de Platón se limitaba a explicar muchos fenómenos de la naturaleza y de nuestra experiencia, pero era incapaz de explicar la generación de nuevos compuestos y cuerpos. Por otro lado, el método de Demócrito lograba distinguir diferentes tipos de cambio, pero también era incapaz de explicar fenómenos como el crecimiento y la alteración. Además de no poder explicar como se pasa de una configuración a otra.

Ante esta dificultad Aristóteles pensó en que para explicar fenómenos naturales era necesario explicar propiedades emergentes, propiedades que no son el resultado de la mera agregación de las propiedades de los componentes individuales, sino más bien resultado del comportamiento colectivo. Así Aristóteles muestra la necesidad de recurrir a lo que llamaría *causas finales y formales*. Para Aristóteles entender el cambio requería entender que diferentes tipos de cambio que son el resultado de diferentes tipos de causas: la forma que recibe una cosa, la materia que toma esa forma y que persiste en el cambio, el agente que lleva a cabo el cambio y el propósito o fin al que sirve este cambio. Estas causas se conocen respectivamente como causas formales, materiales, eficientes y finales.

Pensemos en el siguiente ejemplo: la madera utilizada en la construcción de una mesa es la causa material de la mesa. La causa formal es la forma de la mesa, la causa eficiente es el carpintero y la causa final es el fin para el que la mesa se produce. Es decir, las causas finales de Aristóteles son principios explicativos de procesos que son el resultado de la relación del todo con sus partes.

Para Aristóteles una ciencia demostrativa es un sistema axiomatizado que incluye un número finito de demostraciones conectadas y logró contrastar dos formas distintas que puede tomar una demostración. Por una parte está la forma que Martínez llama la “causa próxima”, en la que demuestra la presencia de un objeto observado por medio de un silogismo en el cual el término medio del silogismo especifica la causa próxima del efecto, el cual sería conocido como el método deductivo. Aristóteles pone el siguiente ejemplo:

- Los cuerpos celestes cercanos a la Tierra no titilan.
- Los planetas están cercanos a la Tierra;
- Por tanto, los planetas no titilan.

Aunque en este razonamiento se puede ver que en segundo inciso es una justificación para que se cumpla la causa, la inferencia sí va de una causa a un efecto, y no al revés. Martínez respecto al razonamiento dice: la presencia de un efecto “no titilar” como consecuencia de algo que es propio de los planetas: no titilar. Mientras que el otro tipo de demostración, se demuestra la presencia de una causa a partir de un efecto. Veamos un ejemplo:

- Los cuerpos celestes que no titilan están cerca de la Tierra
- Los planetas no titilan
- Por tanto, los planetas están cerca de la Tierra

De manera análoga en este razonamiento se puede ver como el segundo inciso es una justificación para que se pueda aplicar el primer inciso, sin embargo la inferencia sí va de un efecto a una causa. Este razonamiento iba en contra de lo que para Aristóteles y muchos otros filósofos, dice Martínez, que señalaban como la forma correcta de una explicación, el tomar inferencias que van de las causas a los efectos. Este último modo de explicación sería retomado muy en serio en el siglo XVI y sería de gran importancia para Descartes, Galileo y Newton, según Martínez.

Terminando de hablar de las tradiciones teórico-especulativas, Martínez habla de la tradición empírica, que serían encabezados por la escuela hipocrática. Esta escuela al igual que la escuela anterior rechazaba las explicaciones sobrenaturales, pero a diferencia de la tradición teórico-especulativa, Martínez dice que en esta se buscaba a partir de los síntomas de los pacientes las causas y corregirlos a partir de estas, un modo en el que se va de los efectos a las causas.

La Edad Media fue una época en la cual el conocimiento científico se redujo a la transmisión del conocimiento proveniente de la antigüedad (la antigua Grecia), dice Martínez. Se podían distinguir dos tipos de conocimiento, por un lado, el llamado conocimiento “alto” que era justamente aquel que provenía de la antigüedad; y el otro llamado conocimiento “bajo”, el proveniente de los artesanos, médicos e ingenieros. Pronto hubo la necesidad de fusionar a estos dos tipos de conocimiento, esto fue lo que probablemente originó la “revolución científica” en el Renacimiento.

En la época del Renacimiento Galileo, Descartes y Newton encabezan la síntesis del conocimiento “alto” y “bajo”, explica Martínez. En esta época se buscaban leyes de aplicación universal, lo cual constituyó un nuevo modo de explicación científica. Pero tanto Descartes como Galileo y Newton, concebían las explicaciones científicas de acuerdo con la concepción heredada de la antigua Grecia, donde las explicaciones son el resultado de principios que no admiten duda. Para Newton, esta concepción de la explicación dificulta el entendimiento de la relación entre la naturaleza del conocimiento producto de la experimentación y la supuesta naturaleza demostrativa de la “ciencia verdadera”. Tratando de resolver esta dificultad Newton desarrolló la idea de que las explicaciones científicas pueden considerarse “deducciones de fenómenos”, y buscar la estructura matemática de los fenómenos, supone la existencia de leyes universales de la naturaleza. Otras alternativas para superar esta dificultad fueron presentadas por Galileo y Descartes, que propusieron aceptar inferir conocimiento a partir de los efectos que dan los experimentos, es decir, conocimiento cierto de las causas. Y otra más fue el abandonar el requisito de que para que sea científico, el conocimiento debe de ser demostrativo, cierto o absoluto.

Un ejemplo de como Galileo trató de pasar de los efectos a las causas fue dado por Martínez. Al considerar a las mareas como un efecto, infería que se debían al movimiento de la Tierra. La limitación de Galileo fue pensar que un efecto podía tener una sola causa (actualmente se sabe que las mareas son ocasionadas por la atracción de la luna).

Esto implica un nuevo modo de explicación científica, según Martínez, la búsqueda de leyes universales que explicarán todos los fenómenos empíricos. Este modo de explicación científica también tuvo críticas. Por ejemplo, Leibniz creía necesario tener criterios más profundos para poder inferir de los efectos a las causas, decía que para Dios no hay irregularidades en el mundo, sino que sólo es nuestra mente la que las nota. Para Leibniz la “regularidad” no es un buen criterio para describir lo que es una ley pues cualquier conjunto de observaciones puede ajustarse a una supuesta ley. De igual manera criticó el pensar que con las leyes de la mecánica, se pudieran explicar procesos como el nacimiento, pues para ello se necesitaba la existencia de algo previamente

organizado.

Con la revolución científica iniciada por Galileo y Newton, se concibió la idea de que los fenómenos podían modelarse matemáticamente. Por ejemplo, con la segunda ley de Newton se había logrado hacer predicciones muy precisas de ciertos fenómenos al conocer las condiciones iniciales. Esta metodología se extendió a muchas disciplinas: la óptica, la hidrodinámica, la teoría de la electricidad y el magnetismo, la teoría de los gases y la química analítica.

Ante el gran éxito predictivo logrado por Newton, sugirió un modo de entender cuando una teoría es científica. La propuesta de Newton está implícita en el libro III de los *Principia Mathematica*, dice Martínez, de ella se extraen dos reglas:

La regla I dice que “no debemos admitir más causas de las cosas naturales que aquellas que son verdaderas y suficientes para explicar sus apariencias”. Esta regla fue bautizada posteriormente como la regla de la “*vera causa*”.

En la regla III nos dice: “Newton señaló implícitamente que las propiedades universales de los cuerpos son aquellas propiedades de la materia que a pesar de no ser observables son “derivables” de los fenómenos. En el sentido de que son agregativas, esto es que las propiedades del todo son la suma de las propiedades de las partes”.

En esta regla Newton utiliza la distinción entre dos tipos de propiedades para aplicar esta regla del razonamiento a la mecánica.

A raíz de este gran éxito, John Herschel formula de manera clásica lo que se conoce cómo la metodología de la *vera causa*. Tal metodología será de gran importancia para entender el modo de explicación científica utilizado por Darwin en su teoría de la evolución de las especies, dice Martínez.

Darwin trató de ajustarse al concepto de *vera causa* de Herschel, pero no consiguió ajustarse al patrón de explicación por leyes deterministas, pues la teoría de la evolución por la selección natural, está constituida por factores contingentes e históricos.

Por otra parte, las condiciones explícitas para que una causa verdadera deba ser considerada cómo tal, según Herschel.

- La causa debe ser accesible a la observación.
- Se tiene que establecer que en efecto la causa es la responsable.

En esta época se había implantado el paradigma de la astronomía física, como dice Martínez. Lo anterior debido al gran éxito obtenido por Newton y se deseaba encontrar las leyes deterministas que regían el mundo. En la segunda mitad del siglo XIX, se formuló la teoría de la Evolución, cuya tesis

principal era que la selección natural era la causa primordial de la evolución de las especies.

La teoría de Darwin trajo un cambio de paradigma, donde se hacía uso del azar y la historia para explicar el proceso evolutivo de las especies, lo cual no coincidía con los elementos de la *vera causa* de Herschel. Con esto, Darwin trató de explicar la complejidad de las adaptaciones en distintos ambientes a lo largo de la historia de la vida en la Tierra.

En el siglo XX surge el concepto de sistema complejo, el cual puede entenderse como un nuevo modo de explicación científica, según Martínez. Aquí un sistema complejo es aquello donde hay partes interconectadas cuya interrelación crea nuevas propiedades en el sistema, las cuales no pueden explicarse estudiando las propiedades de los componentes individuales del sistema. Con la definición anterior todo fenómeno puede ser tomado como un sistema complejo, sin embargo este modo de estudiar a los fenómenos resulta diferente al modo reduccionista. Esta última tendencia del pensamiento es explicado como: *el sistema como un todo sólo puede ser explicado a partir del comportamiento de sus componentes individuales*, según Enrique Ruelas [22].

La evolución de los modos de explicación científica nos muestra los cambios de paradigma en el sentido que le dá Thomas S Kuhm [8]. Nuestro trabajo involucra estudiar datos de distintos fenómenos que no tienden a estar cercanos a una medida central, es decir, hay mediciones grandes, así como también hay otras muy pequeños. Este tipo de datos y fenómenos han sido estudiados mayormente por medio de modelos de leyes de potencia. Muchas veces los modelos de leyes de potencia no logran ajustar a todos los datos en alguna cola. Cocho propone un nuevo modelo el cual logra ajustar bien a ambas colas.

El modelo de Cocho resulta ser una función de masa de probabilidad, la cual puede ser aproximada por medio de nuestro proceso de seudo correlación cruzada de funciones, acotadas y con dominio en el intervalo $[0, 1]$, este procedimiento es parecido al que se hace en el Teorema del límite central. En nuestro procedimiento no obtenemos curvas gaussianas sino curvas que se ajustan a la Germi-beta por lo que resulta interesante. Ante la necesidad de entender nuestro proceso revisaremos algunas cuestiones de la teoría de la probabilidad, repasaremos los conceptos fundamentales y enunciaremos algunos teoremas límite.

Capítulo 1

Historia y prehistoria de la teoría de la probabilidad

En este capítulo resumiremos los principios del cálculo de probabilidades para posteriormente resumir y comentar.

En los juegos de azar llevados a cabo en la corte de Luis XIV, Antonie de Gambard, mejor conocido como: Chevalier de Meré, se planteaba problemas relacionados con el azar, algunos los lograba resolver y otros no. Dos ejemplos de estos son los siguientes:

- ¿Cuántas veces debe lanzarse un dado para sea más favorable obtener por lo menos un 6?
- ¿Cómo deben repartirse las apuestas en un juego que se interrumpe? Por ejemplo, suponiendo que dos jugadores, P y Q, apuestan 32 pesos cada uno en un juego que consiste en partidas consecutivas. En cada una de estas, los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar y quien gane acumula un punto. El juego es ganado por quien obtenga primero cuatro puntos, ¿cómo deben repartirse las apuestas en caso de que el juego se interrumpa cuando el jugador P ha ganado dos puntos y Q un punto?

Notesé que en el segundo problema ya se han realizado tres partidas y pudieron ser de la siguiente manera: (p, p, q) , (p, q, p) , (q, p, p) , donde p significa que ganó P y q que ganó Q.

Chevalier de Meré logró resolver el primero pero no el segundo, por lo que consultó al matemático Blaise Pascal, quien posteriormente consultó a otro matemático francés, Fermat, juntos tuvieron un intercambio epistolar de siete cartas. En este intercambio resuelven dichos problemas. Veamos como los resuelven. Para eso haremos un pequeño resumen de lo encontrado entre

las páginas en el libro Introducción a la teoría de la probabilidad de Miguel Ángel García Álvarez [1]. Veamos:

García describe que para el segundo problema Fermat hace uso del método combinatorio, por cierto esta solución recibiría objeciones que mencionaremos más adelante. Siguiendo a García haremos lo siguiente. Primero Fermat nota que a lo más se necesitan 4 partidas para que haya un ganador. Luego supone que se juegan este número de partidas. Al primer jugador lo llama P y al segundo Q , ahora ilustremos cuales serían los resultados de estas cuatro partidas

$$\begin{array}{cccc}
 (p, p, p, p) & (p, p, p, q) & (p, p, q, p) & (p, q, p, p) \\
 (q, p, p, p) & (p, q, p, q) & (p, q, q, p) & (q, p, p, q) \\
 (q, p, q, p) & (q, p, p, q) & (q, q, p, p) & (p, q, q, q) \\
 (q, p, q, q) & (q, q, p, q) & (q, q, q, p) & (q, q, q, q)
 \end{array}$$

en donde p significa que ganó P y q que ganó Q . Finalmente de todos los posibles resultados encontrados determina el número veces que hacen ganar a P y los que hacen ganar Q . En 11 ocasiones ganaría P el juego, mientras que Q lo ganaría en 5, resultando una proporción 11:5. Misma proporción en que deben repartirse las apuestas.

Hubo diversas objeciones hechas a la solución dada por Fermat. Roberval, amigo de Pascal, decía que no es necesario que se jueguen las cuatro partidas pues el juego puede terminarse antes, por ejemplo cuando P gana las siguientes dos partidas. A esta objeción respondió Pascal diciendo que la hipótesis de las cuatro partidas es una convención que no afecta el resultado pues si uno gana en menos de cuatro partidas los resultados de las partidas siguientes no afectan porque el otro jugador no podrá completar los puntos que le faltan para ganar.

Por otro lado Pascal utiliza un método recursivo. Primero supone el caso en el cual a P le falta un punto para ganar, y a Q dos puntos y que se apuestan 64 pesos. Si se juega la siguiente partida y gana P , entonces P se lleva los 64 pesos, pero si gana Q ambos quedan en igualdad de circunstancias. Esto nos lleva a concluir que P tiene asegurados 32 pesos y los otros 32 son disputados en igualdad de circunstancias. Así a P le corresponden $32 + 32(1/2) = 48$, y a Q 16.

Un segundo caso es cuando a P le falta un punto y a Q 3 puntos. Si en la siguiente partida gana P , entonces se lleva toda la apuesta, pero si gana Q entonces P gana 48 y Q 16. Es decir P tiene asegurados 48, y 16 pesos son disputados en igualdad de condiciones. Así a P le corresponden 56 y a Q 8 pesos.

En el caso en que a P le faltan 2 puntos, y a Q 3 puntos. Si en la siguiente partida gana P , entonces por el caso anterior P gana 56 pesos, y Q 8. Pero si

gana Q , entonces tanto P y Q quedan en igualdad de circunstancias, es decir P tiene asegurados 32, y puede disputar 24. Por tanto a P le corresponden $32 + 24(1/2) = 44$, y a Q $8 + 24(1/2) = 20$ pesos. La proporción de 44:20 es igual a la encontrada por Fermat.

Este cálculo de probabilidades hecho por Fermat y Pascal es llamado por Kolmogorov y Gnedenko [5] la prehistoria de la teoría de la probabilidad y el inicio de la propia historia con el teorema límite de Bernoulli y de Moivre. De igual manera la conjetura del límite periférico corresponde a un resultado límite en la teoría de la probabilidad.

Antes de definir algunos modelos de probabilidad necesitaremos algunos conceptos previos como espacio muestral, una sigma algebra y una medida de probabilidad.

Un espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de experimento aleatorio. A dicho conjunto lo denotaremos con la letra Ω .

Una σ -álgebra, \mathcal{F} , es una colección de subconjuntos de Ω , la cual cumple tres propiedades:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Si $E \in \mathcal{F}$ entonces $E^c \in \mathcal{F}$.
3. Si $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$.

Puede probarse fácilmente que la intersección finita, infinita numerable o bien infinita arbitraria de σ -álgebras es nuevamente una σ -álgebra, tal como lo hace Rincón [19] pág. 7. Así podemos hacer la siguiente definición.

Definición. σ -álgebra generada. Sea \mathcal{C} una colección no vacía de subconjuntos de Ω . La σ -álgebra generada por \mathcal{C} , denotada por $\sigma(\mathcal{C})$, es la colección

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F} \}$$

Así podemos definir la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} , denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definición. σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} .

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a \leq b\})$$

A los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se le llama conjunto Boreliano B .

De igual manera podemos considerar σ -álgebra de conjuntos para una porción de los números reales. Para ello consideremos la siguiente definición:

Definición. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La σ -álgebra de Borel de A , denotada por $\mathcal{B}(A)$, se define de la siguiente manera

$$\mathcal{B}(A) = \{A \cap B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Los siguientes conjuntos son elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$[a, b], (a, \infty), (-\infty, b), [a, b), (a, b] \quad \text{y} \quad \{a\}.$$

Una prueba detallada de este hecho puede leerse en [19] pág. 11 y 12.

Así podemos hablar de

$$\mathcal{B}([a, b]), \quad \mathcal{B}((a, \infty)), \quad \mathcal{B}((-\infty, b)), \quad \mathcal{B}([a, b)), \quad \text{y} \quad \mathcal{B}(\{a\}).$$

Una medida de probabilidad es una función $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ que cumple las siguientes tres propiedades:

1. $\forall E \in \mathcal{F} \quad 0 \leq P(E) \leq 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si E_1, E_2, \dots eventos disjuntos entonces $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$.

Así un espacio de probabilidad queda definido como la terna (Ω, \mathcal{F}, P) . Mientras que a (Ω, \mathcal{F}) se le llama espacio medible y a los elementos de \mathcal{F} eventos o conjuntos medibles.

Ahora definimos el concepto de variable aleatoria. Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Una variable aleatoria es una función con dominio el espacio Ω de resultados, e imagen el conjunto de los números reales. Estas funciones cumplen la condición de medibilidad. Es decir para cualquier conjunto Boreliano B , se cumple que el conjunto $X^{-1}(B)$ es un elemento de \mathcal{F} . Generalmente estas funciones se denotan con letras mayúsculas X, Y, Z . Estas variables aleatorias pueden ser tanto discretas o continuas. De este modo al ser las variables aleatorias funciones se puede pensar que las operaciones entre ellas también son variables aleatorias, por ejemplo: $X + Y, X - Y$.

Un concepto asociado a una variable aleatoria, es el de función de masa (o de densidad) de probabilidad, algunas veces solo la llamaremos función de densidad. Dada una variable aleatoria X discreta, f es su función de masa de probabilidad si se tiene lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{si } x = x_0, x_1, \dots \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $P(X = x)$ es la función definida anteriormente y denota a la probabilidad de que X tome el valor x . Además f tiene las siguientes propiedades:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$.

Para el caso continuo, dada una variable aleatoria continua X . Diremos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de masa (o de densidad) de probabilidad de X si es integrable, y para cualquier intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} se cumple la igualdad:

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx, \quad (1.2)$$

donde f cumple con las siguientes propiedades:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Donde $P(X \in [a, b])$ denota a la probabilidad de que X pertenezca al intervalo $[a, b]$.

Otro concepto ligado al de variable aleatoria es el de función de distribución.

La función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $F(x) = P(X \leq x)$ donde $P(X \leq x)$ denota a la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a x .

Algunas cantidades numéricas que pueden ser calculadas y asociadas a una variable aleatoria son la esperanza y la varianza.

La esperanza de una variable aleatoria discreta X con función de masa probabilidad $f(x)$, se define como sigue:

$$E(X) = \sum_x x f(x). \quad (1.3)$$

Mientras que si X es una variable aleatoria continua con f su función de masa de probabilidad. Su esperanza se define de la siguiente manera:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (1.4)$$

Otra propiedad numérica de una variable aleatoria, es la varianza, generalmente denotada por $Var(X)$.

La varianza de una variable aleatoria X , con función de masa de probabilidad $f(x)$ y esperanza $E(X)$, se define como:

$$Var(X) = \sum_x (x - E(X))^2 f(x) \quad (1.5)$$

para el caso discreto.

Mientras que si X es continua se tiene:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx. \quad (1.6)$$

Existen ciertas variables aleatorias con características muy particulares que dependen de su función de distribución. En este trabajo mencionaremos algunas.

Distribución Bernoulli. X tiene distribución Bernoulli con parámetro p si su función de densidad es:

$$f(x) = p^x(1 - p)^{1-x} \quad (1.7)$$

para $x = 0, 1$.

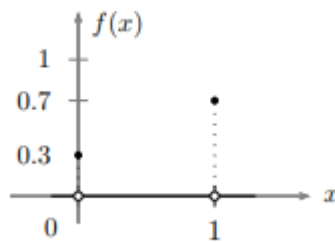


Figura 1.1: Función de densidad Bernoulli [21].

En la figura 4.1 el parámetro p es igual a 0.3.

Distribución Binomial. X tiene distribución Binomial con parámetro (n, p) si su función de densidad es:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x(1 - p)^{n-x} \quad (1.8)$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, n$.

x	$f(x)$
0	0.0282475
1	0.1210608
2	0.2334744
3	0.2668279
4	0.2001209
5	0.1029193
6	0.0367569
7	0.0090016
8	0.0014467
9	0.0001377
10	0.0000059

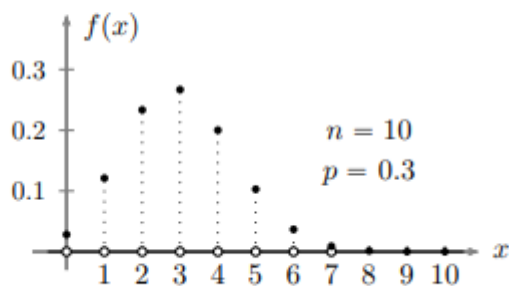


Figura 1.2: Función de densidad Binomial [21].

Distribución Poisson. Una variable aleatoria X tiene distribución Poisson con parámetro λ , si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \tag{1.9}$$

para $x = 0, 1, 2, \dots$

x	$f(x)$
0	0.1353353
1	0.2706706
2	0.2706706
3	0.1804470
4	0.0902235
5	0.0360894
6	0.0120298
7	0.0034370
...	...

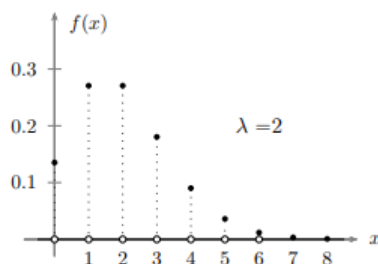


Figura 1.3: Funcion de densidad Poisson [21].

Distribución Uniforme Discreta. Una variable aleatoria X tiene distribución uniforme discreta, si su función densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{n} \tag{1.10}$$

para $x = 1, 2, \dots, n$.

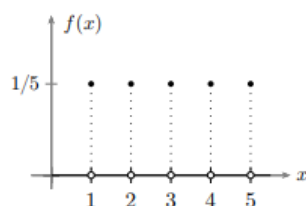


Figura 1.4: Función de densidad uniforme discreta [21].

Distribución Uniforme Continua. Una variable aleatoria X tiene distribución uniforme continua, con parámetros $a < b$ si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad (1.11)$$

para $x \in (a, b)$.

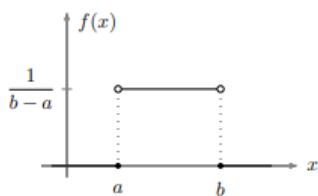


Figura 1.5: Función de densidad uniforme continua [21].

Distribución exponencial. Una variable aleatoria X tiene distribución exponencial de parámetro λ , si su función de densidad es:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (1.12)$$

para $x > 0$.

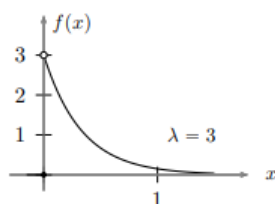


Figura 1.6: Función de densidad exponencial continua [21].

Algunos fenómenos que se modelan con la distribución exponencial, según Kiyosi Ito [7], son: los tiempos de decadencia de partículas radioactivas, el tiempo de espera para completar un trabajo, o el tiempo de espera para obtener un nuevo cliente.

La distribución Normal

La distribución Normal aparece en el teorema del límite central, el cual estudiaremos más adelante. Diremos que una variable aleatoria X tiene distribución normal si su función de densidad de probabilidad es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.13)$$

donde μ y σ^2 son números reales. El primero no tiene restricciones y el segundo debe ser estrictamente positivo. Esta distribución también es conocida como gaussiana. La gráfica de esta función tiene forma de campana.

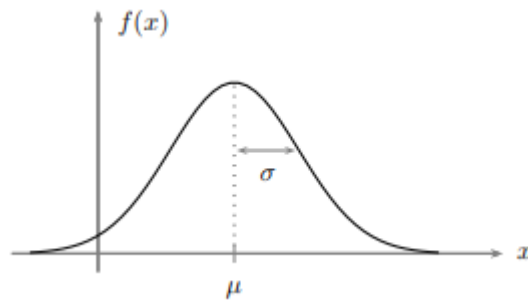


Figura 1.7: Función de densidad Normal o Gaussiana [21].

Y cuya función de distribución es:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \quad (1.14)$$

Cuando $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ se dice que X tiene distribución Normal estándar. Puede probarse que la integral de la distribución no tiene una solución analítica cerrada, y se aproxima por métodos numéricos, como lo hace Rincón [21].

Por otro lado, algunos datos que se han aproximado mediante esta distribución, según Kiyosi Ito [7], son los errores de medida en varios experimentos de física, las mercancías en una línea de producción industrial, así como la altura y peso en los organismos de una misma especie.

Distribución lognormal. Una variable X tiene distribución lognormal con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{para } x > 0. \quad (1.15)$$

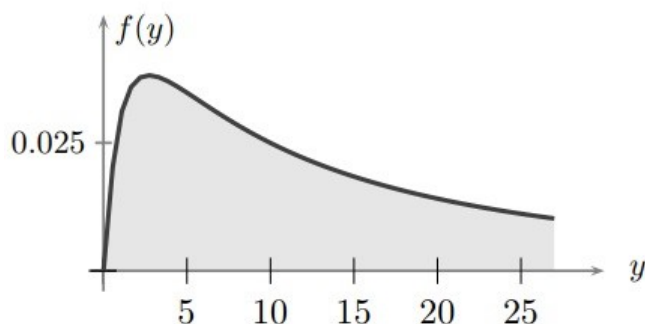


Figura 1.8: Función de densidad lognormal con $\mu = 3$, $\sigma^2 = 2$ [19].

Distribución Gamma. Una variable X tiene distribución Gamma con parámetros (n, λ) , con $n > 0$ y $\lambda > 0$, si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda e^{-\lambda x} \text{ para } x > 0. \quad (1.16)$$

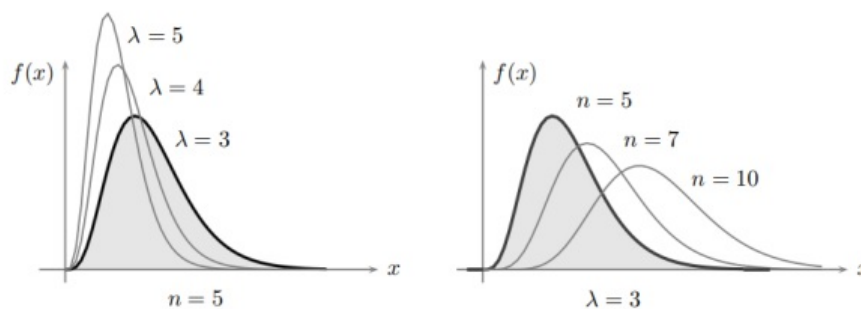


Figura 1.9: Función de densidad gamma [19].

Obsérvese que cuando $n = 1$ se obtiene la función de densidad exponencial.

1.1. Distribución de la suma de variables aleatorias independientes

En la teoría de la probabilidad se muestra como la suma de variables aleatorias es una nueva variable aleatoria.

Proposición. Dadas dos variables aleatorias X y Y independientes con funciones de densidad continuas f_X y f_Y respectivamente. Entonces la función de densidad de la variable $X + Y$ es:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx. \quad (1.17)$$

Demostración. Dado que X y Y son variables independientes podemos escribir la función de densidad conjunta como el producto de ambas. Por lo que:

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(z) &= P(X + Y \leq z) = \int \int_{x+y \leq z} f_X(x)f_Y(y)dydx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_X(x)f_Y(y)dydx \end{aligned}$$

Derivando con respecto a z obtenemos el resultado deseado:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx.$$

□

1.2. Distribución de la diferencia variables aleatorias independientes

Encontrar la función de distribución y densidad de la diferencia de dos variables aleatorias es parecido a encontrarlas para la suma.

Proposición. La diferencia de dos variables aleatorias independientes X , Y con función de densidad f_X y f_Y respectivamente, tiene como función de densidad.

$$f_{X-Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z+x)f_Y(x)dx. \quad (1.18)$$

Demostración. Dado que estas variables aleatorias son independientes escribimos a la función de distribución conjunta como el producto de sus correspondientes funciones de densidad.

$$\begin{aligned} F_{X-Y}(z) &= P(X - Y \leq z) = \int \int_{x-y \leq z} f_X(x)f_Y(y)dydx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z+y} f_X(x)f_Y(y)dydx \end{aligned}$$

derivando con respecto a z obtenemos el resultado deseado. □

Describiremos ahora otros resultados de la teoría de la probabilidad respecto a la suma de variables aleatorias:

Proposición. La suma de variables aleatorias independientes X y Y con distribución Binomial con parámetros (p, n) y (p, m) respectivamente, es otra variable aleatoria con distribución binomial y parámetro $(p, n + m)$.

Proposición. La suma de variables aleatorias independientes X y Y con distribución Poisson con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente, es una nueva variable aleatoria con distribución Poisson y parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

Proposición. La suma de variables aleatorias independientes X_1, \dots, X_n con distribución exponencial con parámetro λ , es una nueva variable aleatoria con distribución gamma y parámetros (n, λ) .

Proposición. La suma de dos variables aleatorias independientes X y Y con distribución normal con parámetros (μ_1, σ_1^2) y (μ_2, σ_2^2) , es otra distribución normal con parámetros $\mu_1 + \mu_2$ y $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Ahora surge una pregunta ¿la suma límite de variables aleatorias converge a una nueva variable aleatoria de probabilidad? La respuesta a esta pregunta es sí y converge a una variable aleatoria con distribución Normal. Este resultado fue demostrado por A.M Lyapunov, dice Rincón [19].

Para el estudio de los teoremas límite necesitaremos de las siguientes definiciones y resultados.

1.3. Modos de convergencia

Definición. Convergencia puntual. Se dice que una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots converge puntualmente a X si para cada ω en Ω ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

Tómese la sucesión de variables aleatorias continuas $X_n = \omega^n$ definida en el espacio medible $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1])$. Para cada $\omega \in [0, 1)$ la sucesión numérica $X_n(\omega)$ converge a 0, mientras que para $\omega = 1$, para cualquier n , $X_n = 1$. De esta manera la sucesión converge puntualmente a la variable aleatoria

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } \omega = 1 \end{cases}$$

El ejemplo anterior es dado por Rincón [19] pág. 288.

Definición. Convergencia casi segura. Decimos que una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots converge casi seguramente a X si:

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1.$$

Considerese el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], P)$ con P la medida de probabilidad uniforme, en este caso, la medida de probabilidad de un intervalo es su longitud, este ejemplo es proporcionado por Rincón [19] págs. 290 y 291. Tomemos la sucesión de variables aleatorias $X_n(\omega) = 1_{[0, 1/n]}(\omega)$. La variable X_n tiene distribución Bernoulli con parámetro $p = 1/n$, converge casi seguramente a la variable aleatoria cero. Para probarlo basta con verificar que $\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow 0\}$ es el intervalo $(0, 1]$ en cual tiene probabilidad 1. El punto $\omega = 0$ es el único punto muestral en el que $X_n(\omega)$ no converge a cero.

Definición. Convergencia en probabilidad. Se dice que una sucesión de variables aleatorias X_n converge en probabilidad a X si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$$

para cualquier $\epsilon > 0$. En este caso se escribirá $X_n \rightarrow X$ en probabilidad.

Consideremos el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], P)$ con P la medida de probabilidad uniforme. Tómese la siguiente sucesión de eventos, los cuales son conjuntos medibles de $\mathcal{B}[0, 1]$:

$$\begin{aligned} A_1 &= (0, 1/2), & A_2 &= (1/2, 1), \\ A_3 &= (0, 1/3), & A_4 &= (1/3, 2/3), & A_5 &= (2/3, 1), \\ A_6 &= (0, 1/4), & A_7 &= (1/4, 2/4), & A_8 &= (2/4, 3/4), & A_9 &= (3/4, 1), \\ & \dots & & & & & \end{aligned}$$

Definamos $X_n = 1_{A_n}$. Así $X_n \rightarrow 0$ en probabilidad ya que para cualquier $\epsilon > 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0.$$

Este ejemplo es proporcionado por Rincón [19] págs. 291 y 292.

Definición. Convergencia en media. Una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots converge en media a X si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|) = 0.$$

Definamos $X_n = n1_{(0, 1/n^2)}$ en el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}(0, 1), P)$, con P la medida de probabilidad uniforme. Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ decimos que $X_n \rightarrow 0$ en media. El ejemplo anterior es dado por Rincón [19] pág. 300.

Definición. Convergencia en media cuadrática. Una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots se dice que converge en media cuadrática a X si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^2) = 0.$$

Para un ejemplo del caso anterior tómesese el espacio de probabilidad $((0, 1), \mathcal{B}(0, 1), P)$, con P la medida de probabilidad uniforme. Sea $X_n = n1_{(0, 1/n^3)}$ así $E(|X_n - 0|^2) = 1/n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto $X_n \rightarrow 0$ en media cuadrática.

Definición. Convergencia en distribución. Una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots converge en distribución a una nueva variable aleatoria X si para todo punto x en donde la función $F_{X_n}(x)$ es continua se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

1.4. Relaciones entre los modos de convergencia

Proposición. La convergencia casi segura implica convergencia en probabilidad.

Proposición. Convergencia en media implica convergencia en probabilidad.

Proposición. Convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución.

La prueba de los resultados anteriores también son mostrados por Rincón [19] en las páginas 297-302.

En seguida enunciaremos dos teoremas muy importantes en la teoría de la probabilidad.

Teorema de convergencia monótona. Sea $0 < X_1 < X_2 < X_3 \dots$ una sucesión de variables aleatorias convergente casi seguramente a X . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(X).$$

Teorema de la convergencia dominada. Sean X_1, X_2, X_3, \dots una sucesión de variables aleatorias para el cual existe otra variable Y integrable tal que $|X_n| \leq Y$, para $n \geq 0$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ c.s, entonces X y X_n son integrables y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(X).$$

La prueba de estos resultados son mostradas por Rincón [19] en las páginas 303-305.

Ahora revisaremos algunos teoremas límite de la teoría de la probabilidad. Estos teoremas son el teorema de Bernoulli, la ley de los grandes números y el teorema del límite central.

1.5. Teorema de Bernoulli.

El teorema de Bernoulli, publicado en 1718, representa un resultado teórico de algo que tiene una contraparte muy intuitiva en términos prácticos.

Teorema de Bernoulli. Una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots independientes, todas con distribución Bernoulli con parámetro p , entonces:

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow p \text{ en probabilidad.}$$

Una generalización del teorema de Bernoulli es la ley débil de los grandes números. La cual podemos enunciar de la siguiente manera:

La ley débil de los grandes números. Una colección de variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n idénticamente distribuidas con esperanza finita μ , entonces:

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mu \text{ en probabilidad.}$$

Una generalización aún mayor es la ley fuerte de los grandes números, a diferencia de la anterior la convergencia se da de manera casi segura:

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mu \text{ c.s.}$$

La prueba de estos resultados son presentados por Rincón [19] en las páginas 352-357.

1.6. Teorema del límite central

El Teorema del Límite Central representa un resultado muy importante en la probabilidad, cuya uso y aplicaciones se extiende en muchas disciplinas por su facilidad para aproximar a otras distribuciones.

Teorema del límite central. Dada una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots infinita, independientes e idénticamente distribuidas, con media μ y varianza σ^2 . Entonces la función de distribución de la variable aleatoria

$$Z_n = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

tiende a la función de distribución normal estándar cuando n tiende a infinito.

La prueba de este resultado es dada por Rincón en [19] en las págs. 358-359.

Una pregunta análoga a la anterior es ¿la diferencia de variables aleatorias converge a un nuevo tipo de variable aleatoria? Germinal Cocho y otros colaboradores [2] dan evidencia numérica de como la diferencia de variables aleatorias cuya función de densidad tiene soporte en el $[0, 1]$ en efecto se aproxima a una nueva variable aleatoria cuya función de densidad se ajusta bien a la Germe-beta. Para lo anterior, tomese una colección de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots , independientes, idénticamente distribuidas, y con soporte en el intervalo $[0, 1]$. Así la variable aleatoria $Y_n = (\dots((X_1 - X_2) - X_3)\dots) - X_n$ o $Y'_n = (X_n - (\dots(X_3 - (X_2 - X_1)\dots))$, cuando n tiende a infinito, tiene como función de densidad a una Germe-beta. A este resultado le hemos llamado la conjetura del límite periférico.

1.7. Leyes de potencia

Es muy común al realizar ciertas medidas notar como hay un valor alrededor del cual las medidas oscilan. Como lo es la altura de los seres humanos. Estas fluctúan alrededor de un valor típico. Pero hay otras medidas como la frecuencia de uso de las palabras en diversos tipos de textos, que no se comportan de esa forma. Mientras que hay palabras como los pronombres y las preposiciones que son muy utilizadas hay otras que solo son mencionadas en una ocasión. En este último caso no hay un valor típico en el uso de cada palabra. De manera análoga cuando medimos el ingreso de las personas, podemos notar que hay pocas personas con grandes fortunas mientras que hay muchas con pocos ingresos.

En la búsqueda de regularidades (leyes) en el comportamiento de los fenómenos que no oscilan alrededor de un valor típico, se han encontrado unas de un tipo muy especial a las que se han denominado leyes de potencia que satisfacen la siguiente relación:

$$f(x) = Cx^\alpha, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{y } C > 0. \quad (1.19)$$

En las leyes de potencia cambios pequeños en la x pueden implicar cambios grandes en f . Lo anterior se puede notar al aplicar un escalamiento en x , es decir, $x \mapsto \lambda x$, con $\lambda > 0$ obtenemos lo siguiente:

$$f(\lambda x) = C\lambda^\alpha x^\alpha$$

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha C\lambda^\alpha$$

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

Lo anterior nos recuerda la idea de que en los sistemas complejos un cambio pequeño (o pequeña causa) puede implicar un cambio significativo.

Entre las primeras leyes de potencia estudiadas según Mark EJ Newman [17] esta la ley de Zipf. Otra ley de potencia es la ley de Pareto. Ambas serán estudiadas a continuación.

1.8. La ley de Zipf

El lingüista estadounidense George Kingsley Zipf fue de los primeros en estudiar el comportamiento de las leyes de potencia, según Roberto Carlos Álvarez Martínez en su tesis doctoral [26], al observar la frecuencia de uso de las palabras en los textos del idioma inglés. De igual manera nos muestra como Zipf ordenó de forma decreciente a las palabras de acuerdo a su frecuencia de uso en los textos. Y posteriormente graficó el logaritmo natural de la clasificación de las palabras (rango) contra el logaritmo natural de su respectiva frecuencia obteniendo siempre algo que se ajustaba muy bien a una línea recta con pendiente cercana a -1.

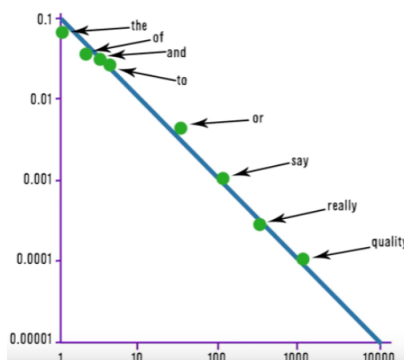


Figura 1.10: La ley de Zipf. Tomada de <https://images.app.goo.gl/c4YpJe116bZUf6Ev6>

En distintos idiomas y contextos, la línea recta que se obtiene haciendo el mismo ejercicio tiene una pendiente muy parecida. Entre las explicaciones que se han dado para explicar este comportamiento se encuentra el modelo probabilístico mostrado, por Octavio Eduardo Vizcaya Xilotl en su tesis de licenciatura [25], para la aparición de letras y espacios. Otra explicación es la dada por Ramón Ferrer i Cancho [6] dice que los lenguajes han evolucionado siguiendo el principio de “mínimo esfuerzo” tanto del hablante como del

oyente así se propicia el uso de palabras que son fáciles de entender y pronunciar. De igual manera podemos notar que hay palabras que tienen una función importante en cada lenguaje como lo son los distintos tipos de conectores, preposiciones, pronombres, etcétera. Otras palabras serán frecuentes en un tipo de texto debido al contexto en el que se encuentren.

Enseguida analizaremos el discurso de AMLO al tomar protesta como Presidente de México. Varios conectores y preposiciones ocupan los primeros lugares en la clasificación, mientras que las palabras más frecuentes de acuerdo al contexto son: México, corrupción y neoliberalismo; y muchas otras solo son mencionadas en una ocasión.

1.8.1. El discurso de Andrés Manuel López Obrador (AMLO).

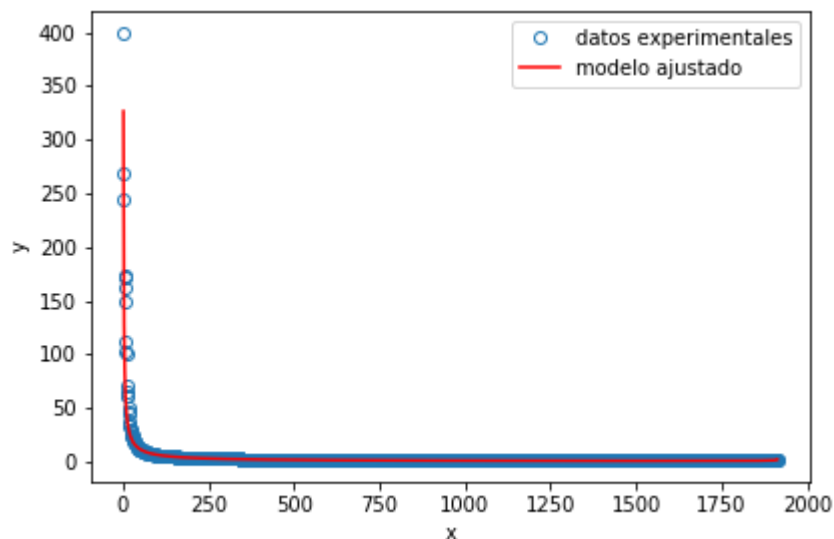


Figura 1.11: Discurso de AMLO. Distribución de rango-frecuencia del uso de las palabras en el discurso de Andrés Manuel López Obrador al tomar protesta como Presidente de México. Las palabras son clasificadas en orden descendente de acuerdo a su frecuencia de uso en dicho discurso y graficadas vs su propia frecuencia. Los puntos azules corresponden a los datos mientras que la curva roja es el ajuste a la Gamma-beta con $a = 0.8550$, $b = -0.1864$ y $r^2 = 0.8489$ como parámetros y coeficiente de determinación respectivamente.

Al analizar el discurso de AMLO, cuando tomó protesta en el año 2018, vemos que pronunció 6114 palabras, en las cuales había 1913 diferentes. Di-

cho discurso representa la toma del poder político por parte de la izquierda electoral en México tras varios años de campaña y dos elecciones perdidas.

Dicho discurso fué pronunciado ante diputados, senadores y representantes de distintos países, y organismos internacionales. Por lo que podemos pensar que las palabras que integran dicho discurso buscan expresar estas ideas con cierto grado de elocuencia.

Al ordenar las palabras de la misma manera en que lo hizo Zipf, encontramos que la palabra número 1 es *de*, *la* el número 2 y así consecutivamente hasta las palabras que solo se pronunciaron una vez y graficarlas contra su respectiva frecuencia. Esta gráfica sigue una ley de potencia, así lo podemos verificar al hacer una gráfica log-log y notar el ajuste a una recta.

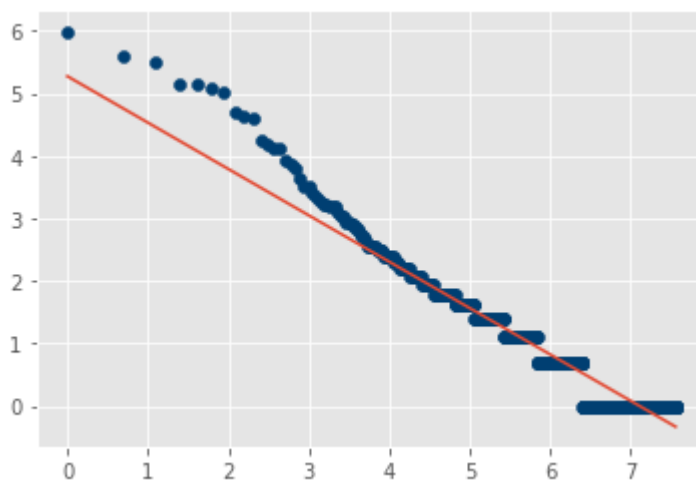


Figura 1.12: Discurso de Amlo en escala log-log
 $r^2 = 0.9143$

1.9. La ley de Pareto

Vilfredo Pareto, un economista italiano, según Vizcaya [25], ordeno de forma decreciente los ingresos de los habitantes italianos. Posteriormente, luego de registrarlos y graficarlos contra la cantidad de personas que reportaron dichos ingresos, encontró la siguiente relación:

$$f(x) = x^\alpha, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

Que representa cuánto ingreso tiene la persona x .

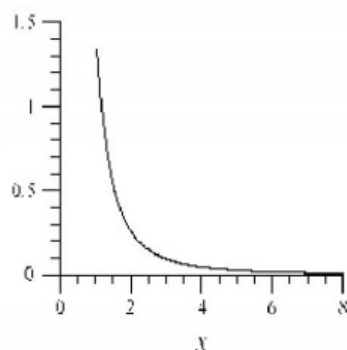


Figura 1.13: Distribución Paretiana. En el eje x se representan las clasificaciones de las personas mientras que en el eje vertical se representan sus ingresos [25].

Una de las explicaciones por la cual aparece la ley Pareto, según Vizcaya, es dada por el mismo Pareto, la naturaleza humana como el principal factor determinante de este fenómeno [25]. A pesar de toda la gran cantidad de factores heterogéneos, al igual que la ley de Zipf se presenta una maravillosa regularidad que entra en la clasificación de ley de potencia.

1.10. Otra ley de potencia: la distribución de las revistas con mayor impacto

En esta sección tomamos el factor de impacto de todas las revistas científicas de todas las áreas e hicimos el procedimiento descrito arriba, observando un comportamiento que se ajusta a una ley de potencia. En el experimento se contemplaron 24374 revistas diferentes en los últimos tres años.

Los datos del factor de impacto fueron tomados de www.scimagojr.com. Este factor de impacto es calculado por Scimago Journal Rank (SJR) de la empresa Elsevier otorgando un peso determinado a las citas de una revista, en función del área científica y la relevancia de las revistas citantes. Es decir que a la cita de una fuente con SJR tiene más valor que la cita de una fuente con menor SJR, de igual manera restringe a las autocitas para darles sólo 33 % del cómputo.

Para calcular el valor del factor de impacto, se cuentan todas las citas en los años 2017, 2018 y 2019, dividiendo esas citas entre el total de documentos incluidos en scopus en este periodo de tres años, salvo los artículos “in press”, artículos aceptados pero aún sin publicar.

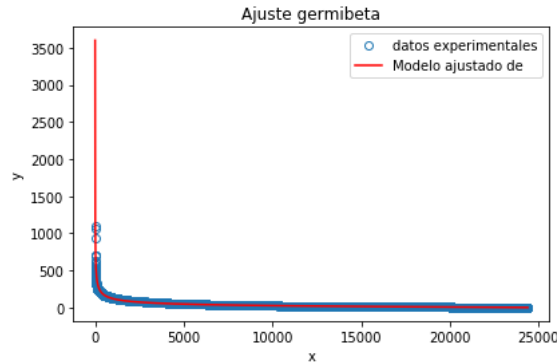


Figura 1.14: La distribución de orden-rango para el factor de impacto de las revistas científicas en el periodo de años 2017, 2018 y 2019. Los círculos azules representan el factor de impacto de las revistas mientras que la curva roja representa el ajuste a la Germi-beta con parámetros $a = 0.4878$ $b = 0.9155$.

En otras distribuciones de rango-orden, los ajustes por medio de leyes de potencia resultan inadecuados para todo el intervalo de datos, dando solo un buen ajuste para los datos intermedios, dejando fuera del ajuste a los datos pequeños y grandes o como en muchos casos solo se logra el ajuste para una cola, tal como lo muestra Gustavo Martínez-Mekler [14]. Entre las razones dadas está el llamado efecto finito (no hay suficientes datos para una buena estadística).

Esto ocurre en fenómenos variados como las distribuciones del ranking de las universidades, la distribución de la intensidad de los terremotos, el PIB de los países del mundo, entre otros.

Después de todo lo anterior estamos en condiciones de presentar el modelo de Germinal Cocho y sus colaboradores. Este resulta ser una función de masa de probabilidad, la función Beta Discreta Generalizada de dos Parámetros:

$$f(x) = N \frac{(R + 1 - x)^b}{x^a},$$

también llamada Germi-beta; donde R es el número máximo de valores por clasificar; f es la propiedad medida (frecuencia, tamaño, áreas, magnitud, etcétera); x la clasificación $x = 1, 2, \dots, R$; N es una constante de normalización; y a, b son parámetros libres [26]. Algunas características de esta función de densidad de probabilidad son:

- El soporte de esta función es el conjunto $\{1, 2, \dots, R\}$.
- El factor de normalización se calcula de la siguiente manera: $N = \left(\sum_{x=1}^R \frac{(R + 1 - x)^b}{x^a} \right)^{-1}$.

*CAPÍTULO 1. HISTORIA Y PREHISTORIA DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD*36

- Cuando $b = 0$ se tiene una ley de potencia.
- Cuando $a = b = 0$ se tiene la función de densidad uniforme.
- Para que ésta función sea decreciente a y b deben ser positivos [4].

Capítulo 2

Ubicuidad de la Germi-beta

Los fenómenos en los que se ha reportado que la distribución rango-orden se ajusta bien a una Germi-beta son:

- La distribución de las notas musicales dentro de las partituras de acuerdo con su frecuencia de uso.
- El ranking mundial de las universidades.
- El impacto de las revistas científicas.
- La distribución del tamaño de los asentamientos humanos.
- La distribución del tamaño de las figuras geométricas dentro de pinturas abstractas.
- La distribución del tamaño de las plantas en cierta área.

Además de las causas que originan este comportamiento, describiremos la interpretación de los parámetros de la Germi-beta dada por Roberto Carlos Álvarez Martínez.

2.1. Ranking de los científicos mexicanos

En esta sección analizaremos la clasificación de los científicos mexicanos para ello buscamos en la base de datos del ranking web o webmetría es el mayor rango de instituciones a nivel superior académica.

El grupo *Cybermetrics Lab* ha estado desarrollando estudios cuantitativos en la web académica desde mediados de los noventa. Se presentó un primer indicador durante la conferencia EASST/45 en Biellefeld en 1996 y la recopilación de datos web de universidades europeas comenzó en 1999 con el apoyo

del proyecto EICSTES, financiado por la Unión Europea. Estos esfuerzos fueron el comienzo de una línea de investigación, la cienciometría, iniciada en 1994 que se presentó en las conferencias de la Sociedad Internacional de Scientometrics e Informetrics (1995-2001) y las conferencias internacionales sobre indicadores de ciencia y tecnología (1996-2012) y publicado en revistas de alto impacto (Journal of Informetrics, Journal of the American Society for Information Science and Technology).

El ranking de científicos en instituciones de México se realiza de acuerdo a su índice H , que se calcula con base en la distribución de las citas que han recibido los trabajos científicos de un investigador. En palabras de Hirsch:

“Un científico tiene índice h si en h de sus Np trabajos recibe al menos h citas cada uno, y los otros ($Np - h$) tienen como máximo h citas cada uno” [15].

Entre las ventajas del uso del índice H es el balance entre la cantidad de trabajos y la calidad de ellos logrando hacer una distinción entre los científicos más influyentes de aquellos que solo publican una gran cantidad de trabajos.

El cálculo del índice se hace por medio de *Google Scholar*. Esta es una base de datos bibliográfica gratuita muy grande que es especialmente útil para fines bibliométricos. Esta proporciona el número (y enumera todas) de citas recibidas por los elementos (publicaciones) incluidos. Su tamaño actual es de más de 200 millones de documentos únicos (muchos de ellos con enlaces a versiones de texto completo disponibles).

Google Scholar Citations (GSC) es una herramienta para configurar perfiles de autor de individuos y sus publicaciones. Es realmente fácil de usar, ya que los académicos solo necesitan una cuenta de Google para comenzar a recopilar sus publicaciones y las métricas asociadas. El sistema es muy potente y lo guía en cada paso ofreciendo publicaciones candidatas (con una tasa de error muy baja) y la posibilidad de fusionar, eliminar o agregar registros.

Entre los objetivos originales del ranking está promover la presencia de la academia en la web, apoyando las iniciativas de acceso abierto para aumentar significativamente la transferencia del conocimiento científico y cultural generado en las universidades a la sociedad. Para lograr este objetivo, la publicación de clasificaciones es una de las herramientas más poderosas y exitosas para iniciar y consolidar los procesos de cambio en la academia y establecer estrategias a largo plazo muy necesarias.

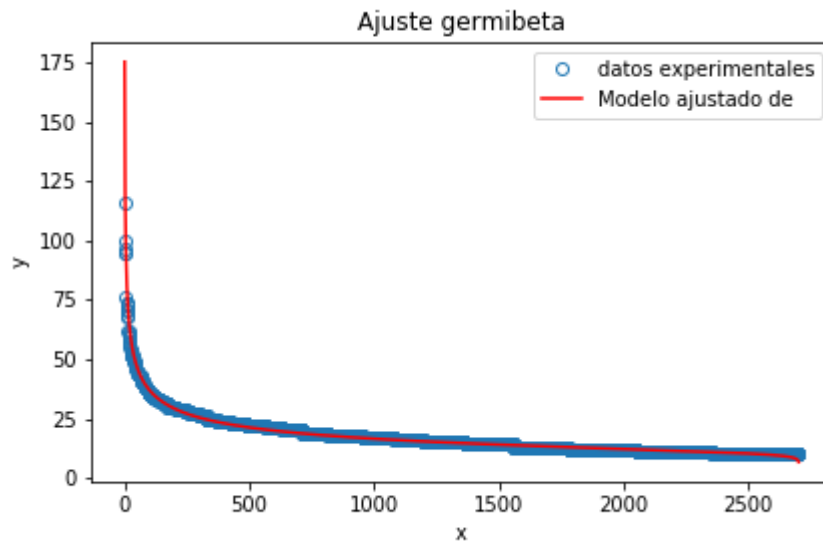


Figura 2.1: Distribución de orden-rango para la citación de los científicos mexicanos. Los datos son ordenados de manera descendente de acuerdo con su índice de citación cada uno de ellos graficado contra su propio índice. Los puntos azules corresponden a los valores experimentales mientras que la curva roja corresponde al ajuste con la GerMI-beta con $a = 0.3374$, $b = 0.0778$ y $r^2 = 0.9583$ como parámetros y coeficiente de determinación respectivamente.

2.2. El ranking de las universidades

La clasificación que mostramos es la publicada por Academic ranking of World Universities (ARWU) en su página oficial: <http://www.arwu.org/> para el año 2018. A partir de junio de 2003, el centro de Universidades de clase mundial (CWCU), y Escuela de Graduados de Educación (anteriormente el instituto de Educación Superior) de la Universidad Jiao Tong de Shanghai, China se encargan de actualizar de manera anual la página oficial de ARWU.

La ARWU utiliza seis criterios para hacer dicha clasificación:

- La cantidad de exalumnos, alumnos y personal que ganaron premios Nobel y medallas Fields.
- Cantidad de investigadores altamente citados seleccionados por *Clarivate Analytics*.
- Cantidad de artículos publicados en las revistas *Nature* y *Science*.
- Cantidad de artículos indexados en índice de citas de ciencias.

- Índice de citas de ciencias sociales ampliado.
- Rendimiento per cápita de la Universidad.

La relevancia de ARWU es tanta que fue citada en una encuesta publicada por *The Economist* en 2005 como “el ranking anual más utilizado de las universidades de investigación del mundo”, de igual manera Burton Bollang, reportero de *Chronicle of Higher Education*, escribió que ARWU “es considerado el ranking internacional más influyente”. Otro ejemplo es el ocurrido en Francia, dada la mala actuación de este país en el ranking de Shanghai se desencadenó un debate nacional sobre la educación que resultó en una nueva ley que proporciona a las universidades más libertad.

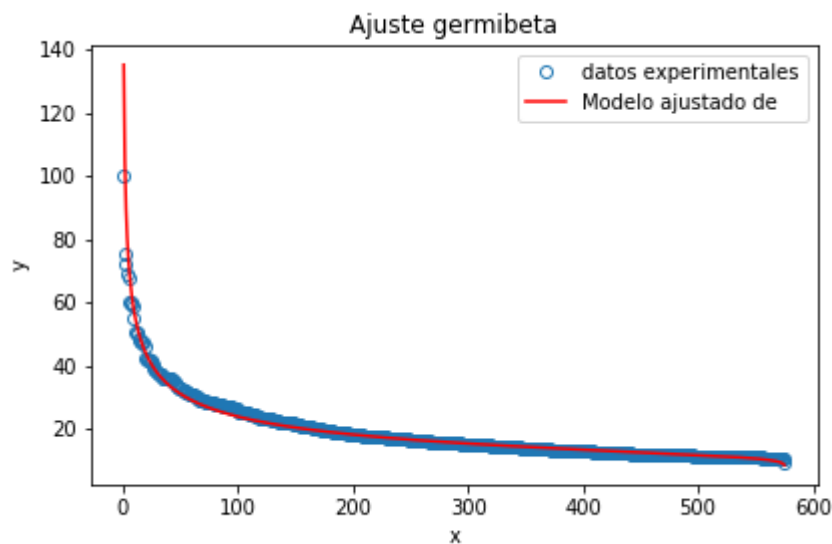


Figura 2.2: Distribución de orden-rango para el ranking de las universidades en el año 2018. Las universidades fueron clasificadas y ordenadas de manera descendente y graficadas contra sus puntos obtenidos. Los puntos azules corresponden a los datos mientras que curva roja a la Germe-beta con $a = 0.3744$, $b = 0.0620$ y $r^2 = 0.9536$ como parámetros y coeficiente de determinación respectivamente.

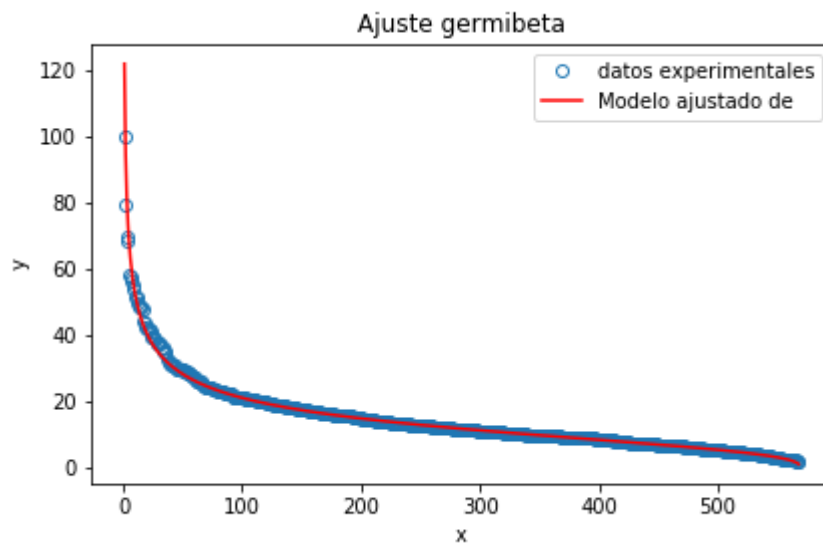


Figura 2.3: Distribución de orden-rango para el ranking de las universidades de acuerdo al criterio: NS. Las universidades son clasificadas de manera descendente de acuerdo al puntaje obtenido en el criterio NS y graficadas con su puntaje. Los puntos azules corresponden a los valores mientras que la curva de color rojo es el ajuste a la Germi-beta con $a = 0.3657$, $b = 0.4228$ y $r^2 = 0.9836$ como parámetros y coeficiente de determinación respectivamente.

En la gráfica anterior se clasificó de manera decreciente a las universidades de acuerdo con el puntaje reportado, posteriormente se graficó la clasificación contra el puntaje reportado, para finalmente ajustar los datos a una Germi-beta.

2.3. El producto interno bruto (PIB) de los países del mundo

Los datos que analizamos a continuación provienen de los reportes del Banco Mundial en su portal electrónico <https://www.bancomundial.org>. Observamos que los datos correspondientes al PIB de diferentes países en el año 2018 se ajustan a una distribución Germi-beta. La manera de obtener la gráfica es la misma que en los casos anteriores.

El PIB es una variable macroeconómica que mide el valor monetario de la cantidad de bienes y servicios producidos en un determinado periodo de tiempo, dice Michael Parkin [18]. El PIB resume datos tanto administrativos que son subproductos de funciones de los gobiernos, como la recaudación

de impuestos, los programas de educación, la defensa y la regulación, como datos estadísticos, que proceden de encuestas oficiales, por ejemplo: establecimientos minoristas, empresas manufactureras y explotaciones agrícolas. Todos estos datos como el resultado de la actividad económica obtenida en un año.

Para explicar cómo se calcula el PIB de un país tomaremos como referencia el libro de Macroeconomía de N. Gregory Mankiw [10], en el cual se explica lo siguiente:

Existen tres métodos para calcular el PIB:

- El método de gasto: consiste en sumar todos los gastos finales o demanda agregada de los distintos agentes de la economía. Es decir, se trata de sumar el valor a precio de mercado de todas las compras realizadas de bienes y servicios finales. Esto incluye: el consumo de hogares e instituciones sin fines de lucro (C), la inversión de las empresas y familias (I), el gasto en consumo final del sector público (G) y el valor de las exportaciones netas (valor de las exportaciones (X) menos el valor de las importaciones (M)).

$$PIB = C + I + G + X - M.$$

- Segundo método: método del valor añadido: si una manera de calcular el PIB consiste en sumar los gastos, parece coherente pensar que otro método se base en la suma de las ventas u oferta de los productores (lo que se compra debe ser igual a lo que se vende). El problema está en que este procedimiento produciría duplicaciones, es decir, se sumaría varias veces el valor de un mismo producto, dado que los productos finales de un productor son, a menudo, un consumo intermedio de otro. Por ejemplo, si sumamos el valor de las ventas de una empresa de coches, el valor de las ruedas se cuenta dos veces (como ruedas y como componentes del coche).

Por eso, lo que se hace es sumar el valor de las ventas de los productos de las empresas pero restando, en cada caso, el valor de las materias primas y de otros bienes intermedios utilizados en la elaboración de dichos productos: con esto se obtiene el valor añadido bruto total. Los datos de valor agregado se agrupan por sectores.

Finalmente, si restamos los Impuestos indirectos netos de subvenciones ($Tiind-Subv$) al valor Añadido Bruto Total, obtenemos el PIB.

$$PIB = VAB(total) + (Tiind-Subv).$$

- Método de las rentas: consiste en la suma de tres elementos: las rentas de los asalariados (RA), Excedente Bruto de Explotación (EBE) y los impuestos indirectos netos de subvenciones ($Tiind-Subv$). La renta de los asalariados incluye salarios, compensaciones extra-salariales y cotizaciones de las empresas a la seguridad social. Por su parte, el EBE refiere a intereses, alquileres y beneficios de los inversores.

$$PIB = RA + EBE + (Tiind-Subv).$$

Estos tres métodos son equivalentes, es decir, con cualquiera de estos obtendríamos el mismo resultado.

Para algunos economistas, el PIB es la variable macroeconómica más importante, y un PIB elevado es síntoma de una economía en crecimiento. Aunque la verdadera importancia del PIB como métrica sigue en discusión, es importante buscar regularidades para tratar de entender hasta que punto es una buena medida macroeconómica.

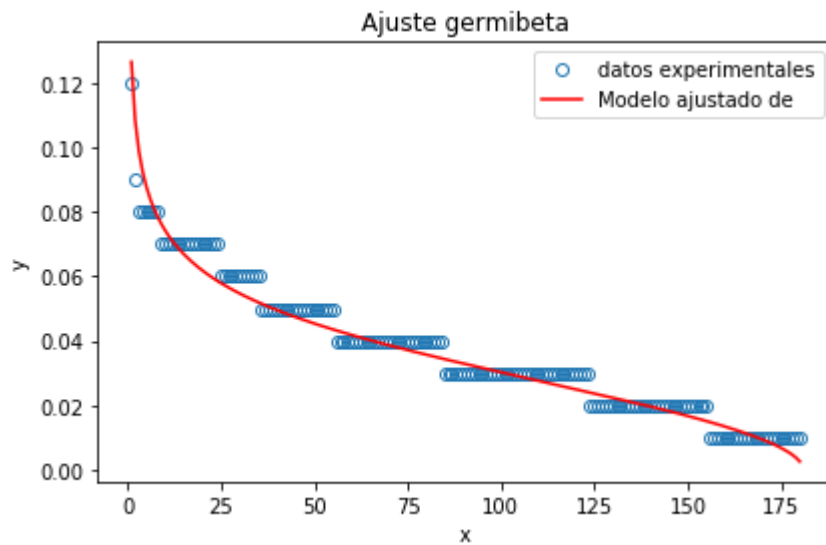


Figura 2.4: Distribución de orden-rango para el PIB de los países en el año 2018 reportados por el Banco Mundial. Los países fueron clasificados de manera descendente de acuerdo a su PIB. Los puntos azules corresponden a los datos mientras que la curva de color rojo corresponde al ajuste con la Germi-beta con $a = 0.2193$, $b = 0.5235$ y $r^2 = 0.9561$ como parámetros y coeficiente de determinación respectivamente.

2.4. Terremotos en México

Los terremotos en el territorio mexicano son monitoreados por el Servicio Sismológico Nacional, dependencia del Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional Autónoma de México encargado de registrar, almacenar y distribuir los datos recabados del movimiento en el terreno mexicano.

En la gráfica se analizan datos de los terremotos detectados desde 1960, que como vemos se ajustan a una distribución Germi-beta, donde observamos que el sismo con mayor magnitud es de 8.2 y el más pequeño de 1.2 grados en la escala de Richter.

Un terremoto lo podemos representar de acuerdo del lugar en que ocurren, así como el punto de la superficie que afectan. En nuestro país por ejemplo se detectan sismos desde una profundidad de 400 kilómetros.

Los terremotos ocurren por la fricción, choque o deslizamiento de las placas tectónicas, que son grandes bloques de litosfera que se encuentran sobre el manto terrestre, cuya velocidad de desplazamiento es de centímetros por año, dice Francisco Vidal Sánchez [23]. Éste desplazamiento de placas ha sido explicado por medio de la teoría de la deriva Continental, la cual fue propuesta por el meteorólogo y astrónomo alemán Alfred Wegener (1880-1930) [3], después de observar cómo los continentes podían encajar de la misma manera en que lo hace un rompecabezas.

En particular México se encuentra afectado por las placas de Norteamérica, el Pacífico, la de Cocos, de Rivera y del Caribe, dice María del Carmen Cabrera Santana [24]. Un diagrama que muestra cómo es la configuración de placas que afectan a México es el siguiente:



Figura 2.5: Tomada de <https://images.app.goo.gl/T4h6iJdzdDCBdi5V9>

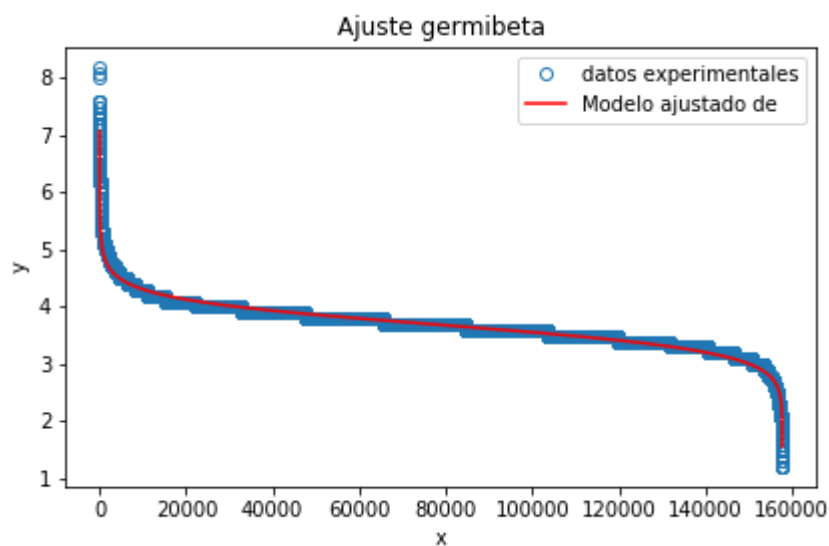


Figura 2.6: Distribución de orden-rango para los terremotos en México. Los terremotos fueron clasificados de acuerdo a su magnitud y ordenados de manera descendente graficados contra su respectiva magnitud. Los puntos azules corresponden a los datos mientras que la curva roja representa el ajuste a la Germi-beta con $a = 0.0533$, $b = 0.0728$ como parámetros.

Observamos que los grandes terremotos que causan grandes pérdidas humanas, económicas como el que afectó a la ciudad de México el 19 de septiembre de 1985 o los ocurridos en 2017 ocurren raramente, aquellos que mueven edificios sin destruirlos ocurren una vez por año mientras que aquellos apenas detectables ocurren a diario.

Otros fenómenos donde también se ha visto siguen este tipo de distribución son presentados por Martínez Mekler [14].

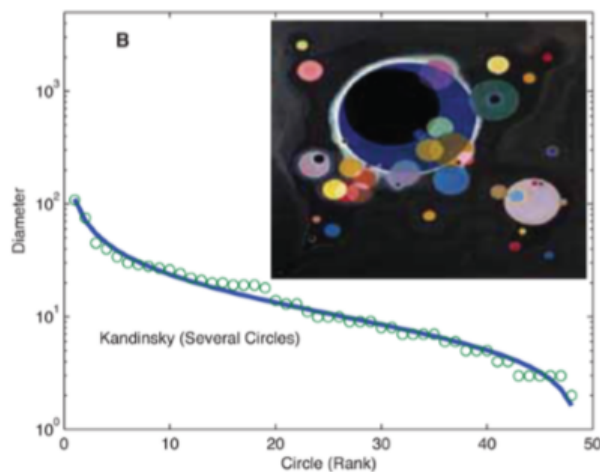


Figura 2.7: Pintura abstracta. En la obra de Kandinsky, “Several Circles”, se clasificaron de forma descendente los círculos de acuerdo con su área ocupada en la pintura y se grafica contra el tamaño de su área. Los círculos verdes representan a los datos mientras que la curva azul representa el ajuste a la Germi-beta con $a = 0.62$, $b = 0.32$ y $r^2 = 0.978$ como parámetros y coeficiente de determinación respectivamente [14].

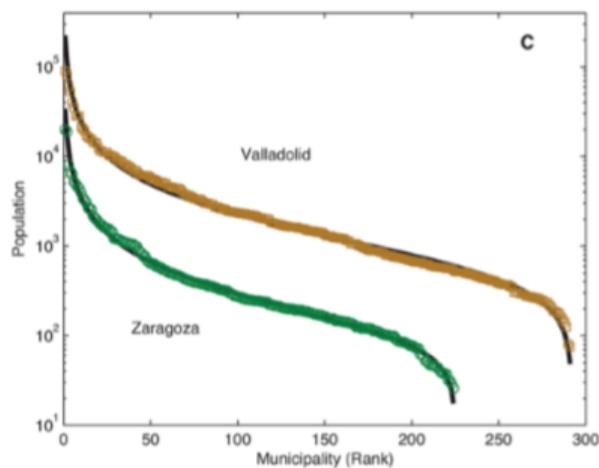


Figura 2.8: Las poblaciones de los municipios de las provincias españolas de Zaragoza y Valladolid. Los datos se ordenaron de forma descendente de acuerdo con el tamaño poblacional que cada municipio reporta y se gráfica contra su respectivo tamaño poblacional. Los puntos verdes y cafés representan a los datos mientras que las curvas de color negro representan los ajustes a la Germi-beta con parámetros y coeficiente de determinación para Zaragoza $a = 0.95$, $b = 0.54$ y $r^2 = 0.99$; y para Valladolid $a = 0.98$, $b = 0.42$ y $r^2 = 0.99$ [14].

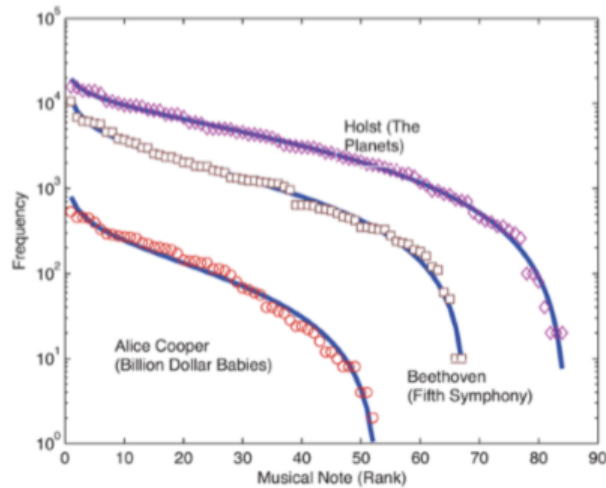


Figura 2.9: Música. Se ordenan las notas musicales de forma descendente de acuerdo con su uso en cada una de las partituras de “Los Planetas” de Holst, el primer momento de la Quinta Sinfonía de Beethoven y “Billion Dollar Babies” de Alice Cooper. Las notas son clasificadas de manera descendente de acuerdo a su ocurrencia y graficadas contra su propia ocurrencia. Los puntos representan a los datos mientras que las curvas continúan a los ajustes a la Germi-beta con parámetros y coeficientes de determinación $a = 0.23$, $b = 1.54$ y $r^2 = 0.988$; $a = 0.42$, $b = 1.25$, y $r^2 = 0.987$; y $a = 0.71$, $b = 1.06$ y $r^2 = 0.978$ respectivamente [14].

Para cada uno de estos fenómenos existe una explicación del por qué se ajusta a dicha distribución. En cualquier caso existe la pregunta de si ¿hay algún mecanismo o varios mecanismos que originan distribuciones Germi-beta?, es decir, ¿existe una causa más general para este comportamiento?. Una posible respuesta fue dada por el mismo Cocho: “en dichos fenómenos hay muchas microdinámicas involucradas en constante conflicto en los cuales llega a haber eventos contingentes con un gran efecto en todo el fenómeno” [2].

2.5. Interpretación de los parámetros de la Germi-beta

Presentamos a continuación la modificación de un proceso, dado por Roberto Carlos Álvarez Martínez en su tesis doctoral [26], presentado originalmente por Li [9].

Para dicho proceso Álvarez elige al azar uno de dos símbolos, el 0 o el 1.

Posteriormente sigue el algoritmo:

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 0 & p \\ 11 & 1-p \end{array} \right. \\ 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 1 & q \\ 00 & 1-q. \end{array} \right. \end{array} \quad (2.1)$$

En la expresión anterior p es la probabilidad de “mutar” de 1 a 0 mientras que q es la probabilidad de que la “mutación” inversa se lleve a cabo. Por otro lado las cantidades $1-p$ y $1-q$ son las probabilidades de duplicación para el 1 y el 0. En este proceso tanto p como q modulan el cambio mientras que $1-p$ y $1-q$ modulan la permanencia.

Para ejemplificar la manera en que hace las iteraciones, veamos lo siguiente: se comienza con el 0 para la primera iteración, luego para la segunda iteración el 0 “muta” al 1, para la tercera iteración 1 se duplica al 11, y para la cuarta iteración el primer 1 pasa a 0 y el segundo 1 también “muta” al 0. Obteniendo la secuencia 011100.

Podemos notar que cuando p y q son grandes, abundan los bloques con unos y ceros alternados, mientras que para p y q pequeñas los que abundan son los bloques con unos y ceros extensos.

El algoritmo anterior Álvarez lo itera un millón de veces, posteriormente toma bloques de 8 números (no traslapados) y los clasifica de acuerdo a su frecuencia de aparición. Con esta clasificación y sus respectivas frecuencias se grafica y se ajusta a una Germi-beta. Álvarez observa que cuando p y q aumentan a disminuye y b se incrementa. Debido a estas observaciones Álvarez conjetura que a esta asociado a la permanencia y b al cambio.

Una gráfica mostrada por Álvarez en [26] es la siguiente:

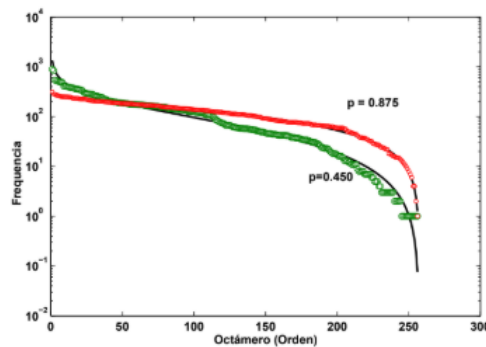


Figura 2.2: Distribuciones orden-frecuencia para los octámeros generados por el algoritmo de expansión-modificación 2.3. Las circunferencias en rojo están determinadas con una probabilidad de mutación $p = 0.875$, la línea sólida corresponde al ajuste de la FBC con $(a, b, R^2) = (0.36, 1.55, 0.96)$. Los circunferencias verdes corresponden a $p = 0.475$ y $(a, b, R^2) = (0.11, 1.28, 0.96)$.

2.6. Ajuste en Python

Enseguida presentamos el código en Python para hacer las gráficas y ajustes a la Germi-beta:

```
from scipy.stats import linregress
from scipy.optimize import curve_fit
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt
from sklearn.metrics import r2_score

from scipy.optimize import curve_fit

from pandas import *

import re
import collections
import sys
import math
archivo = open("datos_pib_Paises.txt", "r")
#noombre = archivo.
texto = archivo.read()
datos = (texto.split())
```

```

dat = []
for i in datos:
    dat.append(float(i))
dat.sort(reverse=True)
#Curva de los datos sin log
x1 = []
for i in range(1,len(dat)+1):
    x1.append(i)
#plot(x1, dat)
#show()

def germibeta(r, alfa, beta, A, N, base=10):
    fac = base**A
    num = pow((N+1-r),beta)
    den = pow(r,alfa)
    return fac*num/den
def genera_x0(F,verbose=False):
    N = len(F)
    R = range(1,N+1)
    r = arange(1,(N+1), 0.01)
    lgR, lgF = log10(R), log10(F)
    V = linregress(lgR, lgF)
    if(verbose):
        print(str(V))
    m = abs(V.slope)
    b = abs(V.intercept)
    return array([b, abs(m), abs(m)])
def ajuste(F, verbose=False):
    N = len(F)
    #print("Esta es la longitud de N",N)
    R = arange(1,N+1)
    #print("Esta es la longitud de R",R)
    r = arange(1,(N+1), 0.01)
    x0 = genera_x0(F,verbose)
    #N = 184
    modelo = lambda r,x,y,z : germibeta(r, x, y, z, N)
    #print("Esye es lo que el modelo:", modelo)
    #print("Todavía")
    popt, pcov = curve_fit( modelo, R, F, x0, sigma=F, method='lm')
    #print("Estos son los valores de popt", popt)

```

```

r2 = r2_score( F, modelo(array(R), popt[0], popt[1], popt[2]) )
if(verbose):
    print(str(popt))
    print(str(sqrt(diag(pcov))))
    print(str(r2))
return popt , r2
parametros, m_c = ajuste(dat)
print("Imprimiendo los parametros:", parametros)

def valores_Modelo(parametros):
    valores_ajuste = []
    for i in range(1,len(dat)+1):
        v = germibeta(i, parametros[0], parametros[1],
            parametros[2], N = len(dat), base = 10)
        valores_ajuste.append(v)
    return valores_ajuste

valores_del_ajuste = valores_Modelo(parametros)
#print(valores_del_ajuste)

def graficarAjuste(parametros):
    plt.figure()
    plt.plot( x1, dat, 'o', label='datos')
    plt.plot(x1, valores_del_ajuste, 'r-', label='modelo ajustado de ')
    plt.legend(loc='best')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.tight_layout()
    plt.show()

graficarAjuste(parametros)

ys = array([m for m in valores_del_ajuste])
xs = array([m for m in x1])
dats = array([m for m in dat])

def squared_error(ys_orig,ys_germi):
    return sum((ys_germi - ys_orig) * (ys_germi - ys_orig))

```

```
def coefficient_of_determination(ys_orig,ys_germi):
    y_mean_germi = [mean(ys_orig) for y in ys_orig]
    squared_error_regr = squared_error(ys_orig, ys_germi)
    squared_error_y_mean = squared_error(ys_orig, y_mean_germi)
    return 1 - (squared_error_regr/squared_error_y_mean)

#m, b = best_fit_slope_and_intercept(xs,ys)
#regression_line = [(m*x)+b for x in xs]

r_squared = coefficient_of_determination(dats, ys)
print(r_squared)
```

Capítulo 3

La conjetura del límite periférico

En este capítulo analizaremos la conjetura de Cocho. Realizaremos una diferencia consecutiva de variables aleatorias con soporte en el intervalo $[0, 1]$ y posteriormente haremos ajustes a la Germe-beta. Este procedimiento lo implementaremos numéricamente en Python usando el código que presentamos en el apéndice.

Para nuestros propósitos nos serán de utilidad las siguientes dos definiciones.

Definición. Definimos la correlación cruzada, denotada por \star , entre dos funciones de valores complejos, f y g , como:

$$f \star g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x+y)dx. \quad (3.1)$$

Donde f^* denota el conjugado de f para toda x en el dominio.

La seudo correlación cruzada, denotada por \ominus , se parece al operador correlación cruzada, de ahí su nombre seudo correlación cruzada. El operador seudo correlación cruzada se define de la siguiente manera:

Definición. Dadas dos funciones de valores complejos, f y g , su seudo correlación cruzada se define como:

$$f \ominus g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)g(x)dx. \quad (3.2)$$

Notese que tanto el operador \ominus y el operador \star no son necesariamente conmutativos, a diferencia del operador convolución, tal como lo mostraremos más adelante.

La importancia la seudo correlación cruzada viene de qué si f y g corresponden a la función de densidad de las variables aleatorias X y Y respectivamente, entonces $f \ominus g$ corresponde a la función de densidad de $X - Y$, tal como lo mostramos en el capítulo 3.

Por otro lado, la seudo correlación cruzada y la correlación cruzada no deben confundirse con el concepto de coeficiente de correlación, en donde se busca que tan asociadas están las muestras de al menos dos variables aleatorias.

La función de Lavalette, que corresponde a un caso especial de la Germi-beta cuando los parámetros a y b son iguales, surge como resultado de una seudo correlación cruzada de funciones. Lo anterior lo prueba Oscar Fontanelli en su tesis doctoral [4]. De igual manera Fontanelli construye un conjunto de funciones cerrado la seudo correlación cruzada, es decir, su seudo correlación cruzada es nuevamente el mismo tipo de función, aunque no necesariamente estas funciones son de masa de probabilidad. Aunque si muestra que la función de densidad gamma, y la función Lavalette, que corresponde a la Germi-beta con parámetros $a = b$, surge después de una correlación de funciones.

La importancia del conjunto construido por Fontanelli viene de un resultado mostrado por Kolmogorov y Gnedenko en *Limit distributions for sums of independent random variables* [5] pág.162. Este resultado dice que la propiedad de cerradura bajo la convolución es condición necesaria y suficiente para que una familia de distribuciones sea el límite de la suma de variables aleatorias. De igual manera dicen que se puede probar que la distribución Normal y las leyes de Lévy conforman una familia cerrada bajo la operación convolución. Sin embargo, no hay un resultado análogo para la operación seudo correlación cruzada.

Por otra parte, Germinal Cocho [2] toma funciones con reglas de correspondencia muy conocidas, acotadas, continuas, con valores reales positivos aunque no normalizadas, y con un soporte común, el intervalo $[0, 1]$, y luego define los siguientes procesos:

1. $P_n = (((f_1 \ominus f_2) \ominus f_3) \ominus \dots) \ominus f_{n+1}$
2. $P'_n = f_{n+1} \ominus (\dots \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))$

Donde f_i son las funciones mencionadas en el párrafo anterior con las que se realiza la operación dada en (5.1), pero dado que nuestras funciones están definidas en el intervalo $[0, 1]$ su seudo correlación cruzada se reduce a la siguiente expresión:

$$f_1 \ominus f_2(y) = \int_0^{1-y} f_1(x+y)f_2(x) dx, \quad \text{con } y \in [0, 1] \quad (3.3)$$

En esta operación las f_i no necesariamente son funciones idénticas, esta operación es la misma que la (4.18) solo que en esta ocasión el resultado que obtenemos no necesariamente es una función que integre 1 sobre su soporte.

Las f_i corresponden a las funciones de densidad sin normalizar (es decir no integran 1 bajo su soporte), de cierta colección de variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n . La operación $f_{X_i} \ominus f_{X_{i-1}}$ corresponde a la función de densidad de $(X_i - X_{i-1})$ sin normalizar. A dicho factor de normalización lo calculamos de la siguiente manera:

$$N_i = \left[\int_0^1 f_{X_i}(x+y)f_{X_{i-1}}(x)dx \right]^{-1}$$

Así realizamos la siguiente operación: $(\dots((X_1 - X_2) - X_3)\dots) - X_n$ o $(X_n - (\dots(X_3 - (X_2 - X_1)\dots))$. Esta diferencia o resta de variables aleatorias tiende a una nueva variable aleatoria cuya función de densidad es la beta discreta generalizada de dos parámetros (Germi-beta) cuando n tiende a infinito. A este resultado le hemos llamado la conjetura del límite periférico.

En nuestro procedimiento numérico hemos tomado f_i y hemos simulado su seudo correlación cruzada ya que con esta operación obtenemos la función de densidad sin normalizar de la diferencia de dos variables aleatorias. Posteriormente o hemos ajustado a la Germi-beta y hemos observado un comportamiento en la evolución de los parámetros a y b .

A continuación hemos realizado los procesos 1 y 2 mediante el código presentado en el apéndice.

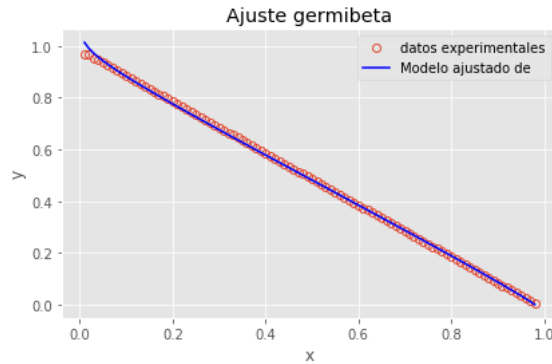


Figura 3.1: Aquí hemos hecho la operación $f_1 \ominus f_2$ con $f_1(x) = 1$ y $f_2(x) = 1$. Luego numéricamente obtuvimos los puntos rojos, mientras que la curva azul representa el ajuste con la Germi-beta correspondiente a $a = 0.020$, $b = 0.9446$ y $r^2 = 0.9992$ como parámetros y coeficiente de determinación respectivamente.

Veamos como se lleva a cabo el proceso para obtener la gráfica anterior,

calculamos:

$$\begin{aligned} f_2 \ominus f_1(y) &= \int_0^{1-y} f_2(x+y)f_1(x)dx \\ &= \int_0^{1-y} dx \\ &= 1-y. \end{aligned}$$

Ahora haremos el siguiente paso en el proceso 2, es decir, $f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)(y)$ cuando $f_3 = 1$, el cual se hace de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)(y) &= \int_0^{1-y} f_3(x+y)(f_2 \ominus f_1)(x) dx \\ &= \int_0^{1-y} 1-x dx \\ &= 1-y - \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1-y} \\ &= \frac{2-2y-1+2y-y^2}{2} \\ &= \frac{1-y^2}{2}. \end{aligned}$$

Por otro lado cuando se realiza el proceso 1 con esta misma función, es decir,

$$\begin{aligned} f_1 \ominus f_2(y) &= \int_0^{1-y} f_1(x+y)f_2(x) dx \\ &= \int_0^{1-y} dx \\ &= 1-y. \end{aligned}$$

El siguiente paso en este proceso es:

$$\begin{aligned} (f_1 \ominus f_2) \ominus f_3(y) &= \int_0^{1-y} (f_1 \ominus f_2)(x+y)f_3(x) dx \\ &= 1-y - \frac{(1-y)^2}{2} - y(1-y) \\ &= \frac{2-2y-1+2y-y^2-2y+2y^2}{2} \\ &= \frac{1-2y+y^2}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(1-y)^2}{2}.$$

Lo anterior nos muestra como el operador \ominus no necesariamente es conmutativo.

Enseguida ilustraremos el proceso 2 con la función $f_i(x) = e^{-2x}$, para el caso cuando las f_i son idénticas:

$$\begin{aligned} f_2 \ominus f_1(y) &= \int_0^{1-y} f_2(x+y) f_1(x) dx \\ &= \int_0^{1-y} e^{-2(x+y)} e^{-2x} dx \\ &= \int_0^{1-y} e^{-2x-2y} e^{-2x} dx \\ &= \int_0^{1-y} e^{-4x-2y} dx \\ &= \frac{-1}{4} \int_0^{1-y} e^t dt \\ &= \frac{-1}{4} e^{-4x-2y} \Big|_0^{1-y} \\ &= \frac{-1}{4} e^{-4(1-y)-2y} + \frac{1}{4} e^{-2y} \\ &= \frac{-1}{4} e^{-4+4y-2y} + \frac{1}{4} e^{-2y} \\ &= \frac{-1}{4} e^{2y-4} + \frac{1}{4} e^{-2y}. \end{aligned}$$

Para la segunda iteración tenemos:

$$\begin{aligned} f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)(y) &= \int_0^{1-y} (e^{-2(x+y)}) \left(\frac{-1}{4} e^{2x-4} + \frac{1}{4} e^{-2x} \right) dx \\ &= \int_0^{1-y} \frac{-1}{4} e^{-2y-4} + \frac{1}{4} e^{-4x-2y} dx \\ &= \frac{-1}{4} e^{-2y-4} (1-y) - \frac{1}{16} e^{-4(1-y)-2y} + \frac{1}{16} e^{-2y} \\ &= \frac{-1}{4} e^{-2y-4} (1-y) - \frac{1}{16} e^{2y-4} + \frac{1}{16} e^{-2y}. \end{aligned}$$

La siguiente gráfica es un caso donde la pseudo correlación cruzada no se hace entre las mismas funciones:

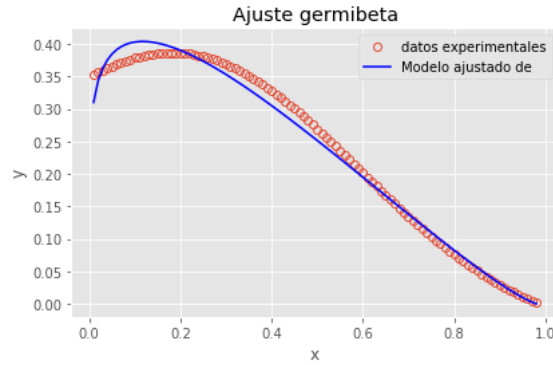
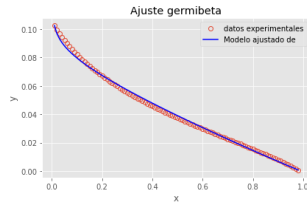


Figura 3.2: Hemos realizado la operación $f_1 \ominus f_2$ con $f_1(x) = e^{-5(x-0.5)^2}$ y $f_2(x) = 1 - x$. Con nuestro código obtuvimos los puntos rojos. Estos puntos los ajustamos a la Germe-beta con $a = -0.1655$, $b = 1.2185$ y $r^2 = 0.9887$ como parámetros y coeficiente de determinación respectivamente.

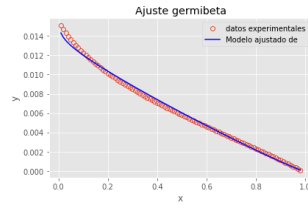
A continuación realizamos el proceso 2 en cuatro grupos de funciones. El proceso lo llevamos a cabo 10 veces, las f_i son idénticas, y en cada iteración se realiza el ajuste a la Germe-beta. Para llevar a cabo las operaciones y los respectivos ajustes hicimos uso del código presentado en el apéndice. El objetivo de esto es notar algún patrón en la evolución los parámetros a y b .

$a_1 = 0.06760716$	$b_1 = 1.01231820$	$r_1^2 = 0.996281$
$a_2 = 0.03123646$	$b_2 = 1.07066463$	$r_2^2 = 0.994981$
$a_3 = 0.03057801$	$b_3 = 1.07855843$	$r_3^2 = 0.995380$
$a_4 = 0.03006647$	$b_4 = 1.07906915$	$r_4^2 = 0.995346$
$a_5 = 0.03009332$	$b_5 = 1.07916023$	$r_5^2 = 0.995358$
$a_6 = 0.03008262$	$b_6 = 1.07916595$	$r_6^2 = 0.995357$
$a_7 = 0.03008344$	$b_7 = 1.07916753$	$r_7^2 = 0.995357$
$a_8 = 0.03008313$	$b_8 = 1.07916766$	$r_8^2 = 0.995357$
$a_9 = 0.03008278$	$b_9 = 1.07916855$	$r_9^2 = 0.995357$
$a_{10} = 0.03008321$	$b_{10} = 1.07916761$	$r_{10}^2 = 0.995357$

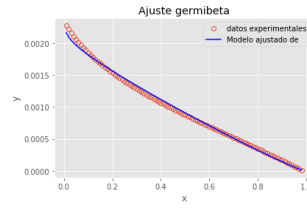
Cuadro 3.1: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = e^{-2\sqrt{x}}$



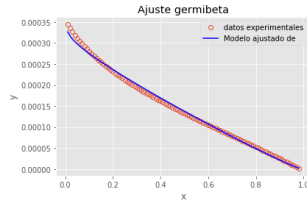
(a) $P'_1(x) = f_2 \ominus f_1(x)$



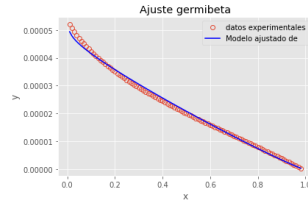
(b) $P'_2(x) = f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)(x)$



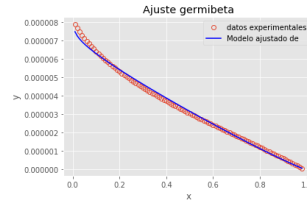
(c) $P'_3(x) = f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1))(x)$



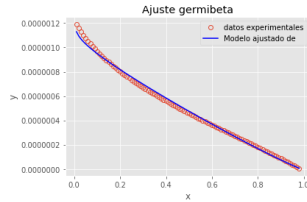
(d) $P'_4(x) = f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



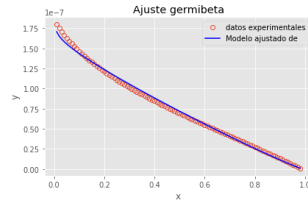
(e) $P'_5(x) = f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



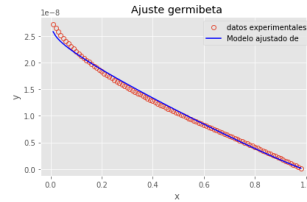
(f) $P'_6(x) = f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



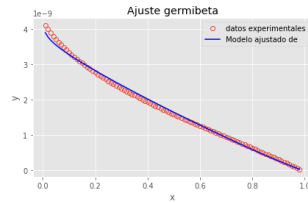
(g) $P'_7(x) = f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(h) $P'_8(x) = f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



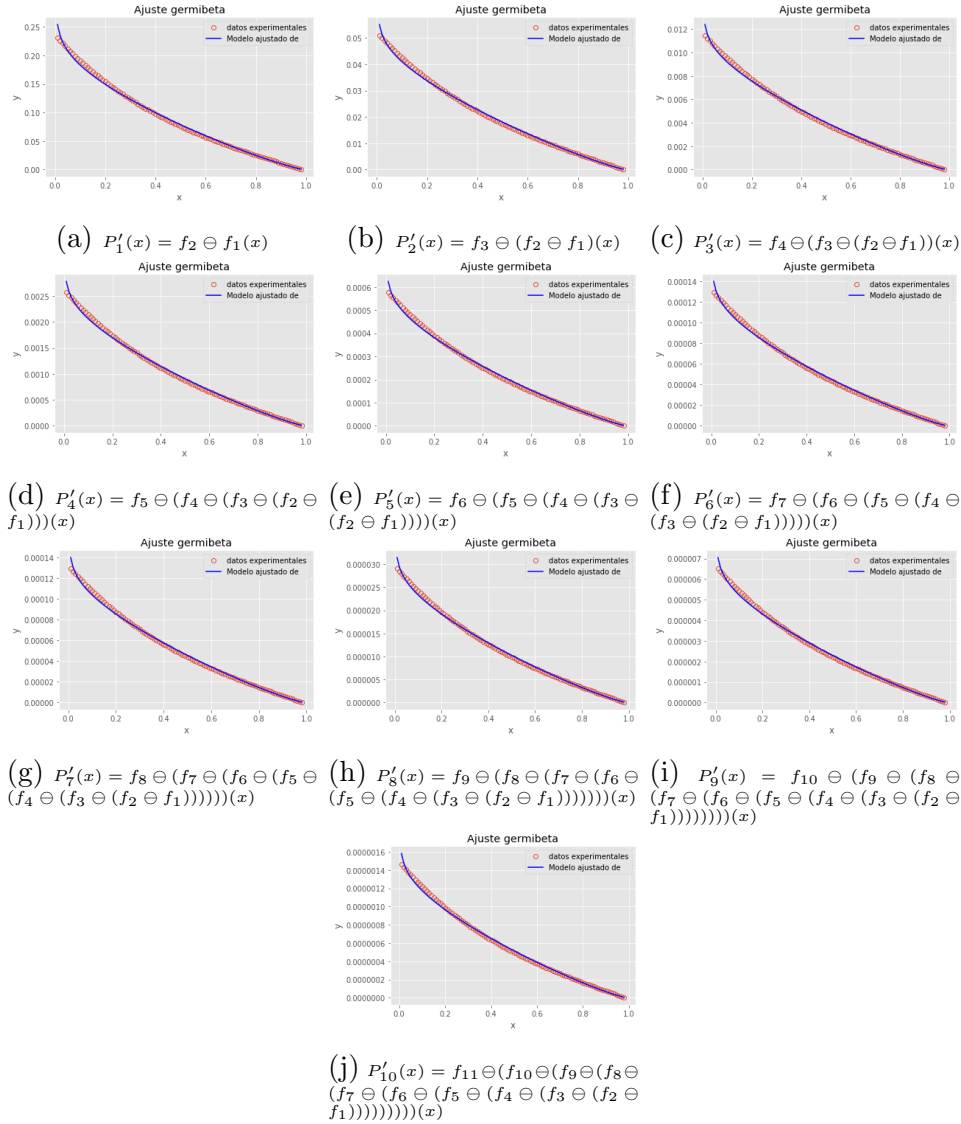
(i) $P'_9(x) = f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(j) $P'_{10}(x) = f_{11} \ominus (f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$

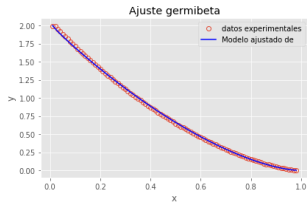
$a_1 = 0.09330459$	$b_1 = 1.16528850$	$r_1^2 = 0.996037$
$a_2 = 0.08036677$	$b_2 = 1.15776704$	$r_2^2 = 0.997005$
$a_3 = 0.08111654$	$b_3 = 1.16179039$	$r_3^2 = 0.996964$
$a_4 = 0.08092362$	$b_4 = 1.16162321$	$r_4^2 = 0.996981$
$a_5 = 0.08094488$	$b_5 = 1.16165814$	$r_5^2 = 0.996979$
$a_6 = 0.08094213$	$b_6 = 1.16165470$	$r_6^2 = 0.996979$
$a_7 = 0.08094194$	$b_7 = 1.16165591$	$r_7^2 = 0.996979$
$a_8 = 0.08094239$	$b_8 = 1.16165520$	$r_8^2 = 0.996979$
$a_9 = 0.08094243$	$b_9 = 1.16165516$	$r_9^2 = 0.996979$
$a_{10} = 0.08094236$	$b_{10} = 1.16165526$	$r_{10}^2 = 0.996979$

Cuadro 3.2: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = e^{-2x}$

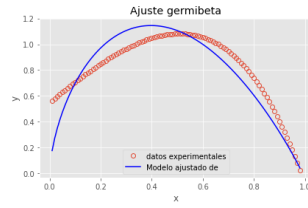


$a_1 = 0.00773766$	$b_1 = 1.55177337$	$r_1^2 = 0.999583$
$a_2 = -0.64138067$	$b_2 = 0.95767461$	$r_2^2 = 0.804653$
$a_3 = -0.26304571$	$b_3 = 1.20558045$	$r_3^2 = 0.987434$
$a_4 = -0.48756082$	$b_4 = 1.10420311$	$r_4^2 = 0.914682$
$a_5 = -0.36571042$	$b_5 = 1.16281528$	$r_5^2 = 0.965157$
$a_6 = -0.43353231$	$b_6 = 1.13398254$	$r_6^2 = 0.940980$
$a_7 = -0.34674676$	$b_7 = 1.15047671$	$r_7^2 = 0.955308$
$a_8 = -0.41701134$	$b_8 = 1.14185593$	$r_8^2 = 0.947813$
$a_9 = -0.40598534$	$b_9 = 1.14668451$	$r_9^2 = 0.952021$
$a_{10} = -0.41203657$	$b_{10} = 1.14409648$	$r_{10}^2 = 0.949754$

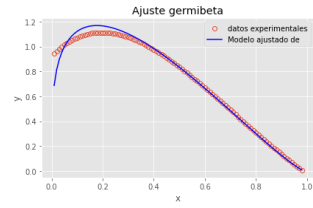
Cuadro 3.3: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$



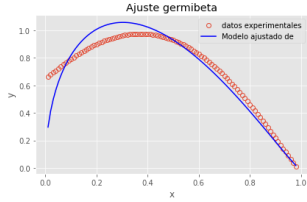
(a) $P'_1(x) = f_2 \ominus f_1(x)$



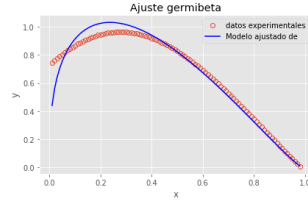
(b) $P'_2(x) = f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)(x)$



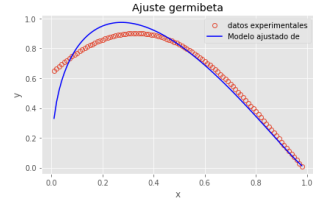
(c) $P'_3(x) = f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1))(x)$



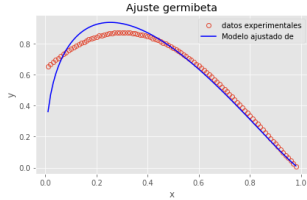
(d) $P'_4(x) = f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



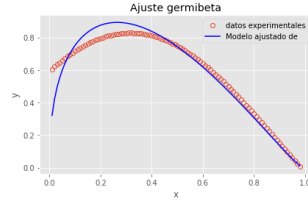
(e) $P'_5(x) = f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



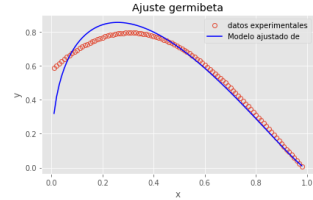
(f) $P'_6(x) = f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



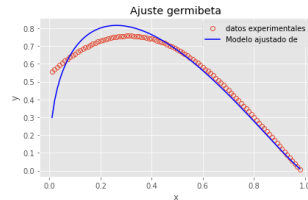
(g) $P'_7(x) = f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(h) $P'_8(x) = f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



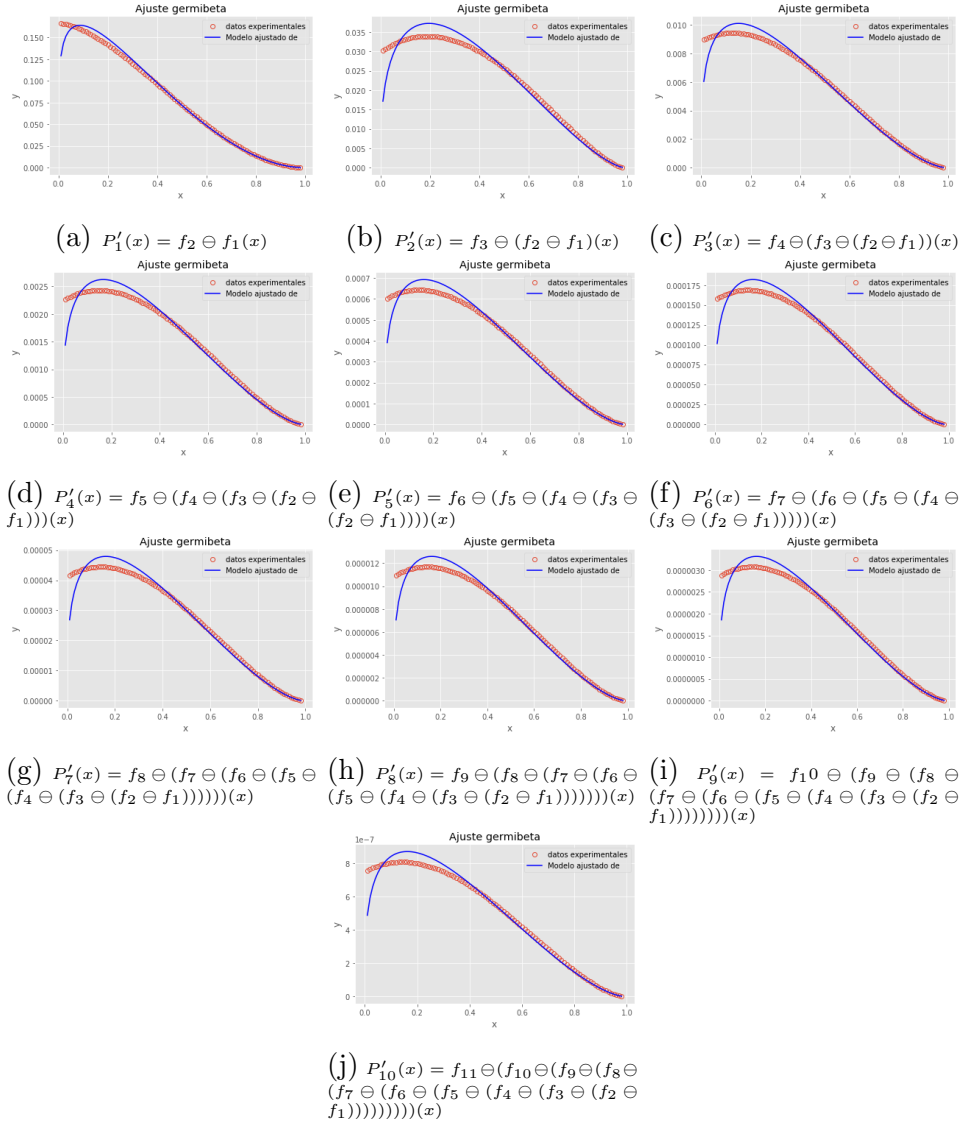
(i) $P'_9(x) = f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(j) $P'_{10}(x) = f_{11} \ominus (f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$

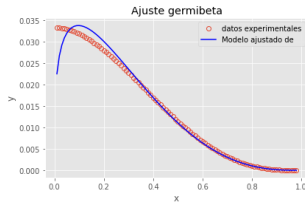
$a_1 = -0.18225039$	$b_1 = 1.87365569$	$r_1^2 = 0.989705$
$a_2 = -0.36480948$	$b_2 = 1.47884087$	$r_2^2 = 0.957150$
$a_3 = -0.27854521$	$b_3 = 1.55416366$	$r_3^2 = 0.978394$
$a_4 = -0.30874828$	$b_4 = 1.53041012$	$r_4^2 = 0.971795$
$a_5 = -0.30874828$	$b_5 = 1.53846974$	$r_5^2 = 0.974193$
$a_6 = -0.30193316$	$b_6 = 1.53668471$	$r_6^2 = 0.973388$
$a_7 = -0.30072098$	$b_7 = 1.53668471$	$r_7^2 = 0.973665$
$a_8 = -0.30113541$	$b_8 = 1.5363676$	$r_8^2 = 0.973571$
$a_9 = -0.30099383$	$b_9 = 1.53647605$	$r_9^2 = 0.973603$
$a_{10} = -0.30104255$	$b_{10} = 1.53643916$	$r_{10}^2 = 0.973592$

Cuadro 3.4: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$

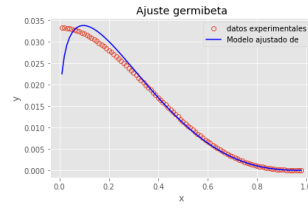


$a_1 = -0.28668895$	$b_1 = 2.64122160$	$r_1^2 = 0.980382$
$a_2 = -0.53865199$	$b_2 = 1.90159755$	$r_2^2 = 0.946098$
$a_3 = -0.38238582$	$b_3 = 2.00292278$	$r_3^2 = 0.971040$
$a_4 = -0.43911882$	$b_4 = 1.96024439$	$r_4^2 = 0.961771$
$a_5 = -0.41762072$	$b_5 = 1.97489865$	$r_5^2 = 0.965315$
$a_6 = -0.42558356$	$b_6 = 1.96928929$	$r_6^2 = 0.964002$
$a_7 = -0.42261146$	$b_7 = 1.97135452$	$r_7^2 = 0.964492$
$a_8 = -0.42371808$	$b_8 = 1.97058219$	$r_8^2 = 0.964310$
$a_9 = -0.42345944$	$b_9 = 1.97086927$	$r_9^2 = 0.964378$
$a_{10} = -0.42345944$	$b_{10} = 1.97076237$	$r_{10}^2 = 0.964352$

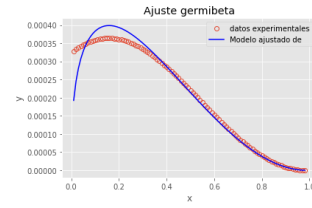
Cuadro 3.5: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = x(1 - x)$



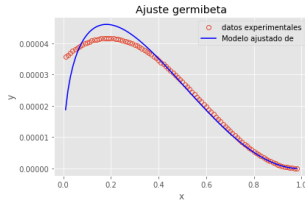
(a) $P'_1(x) = f_2 \ominus f_1(x)$



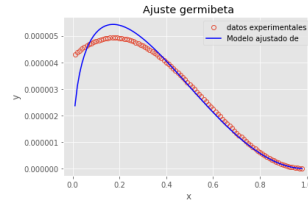
(b) $P'_2(x) = f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)(x)$



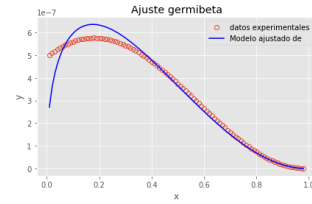
(c) $P'_3(x) = f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1))(x)$



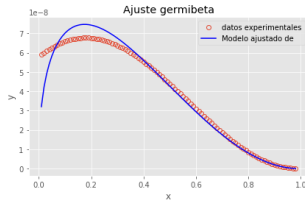
(d) $P'_4(x) = f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



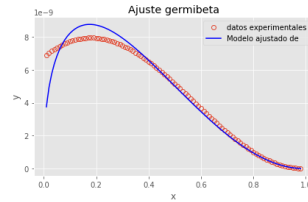
(e) $P'_5(x) = f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



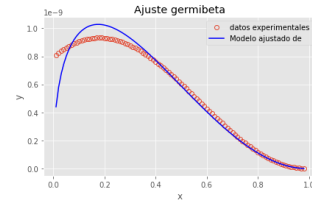
(f) $P'_6(x) = f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



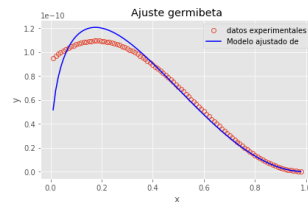
(g) $P'_7(x) = f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(h) $P'_8(x) = f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



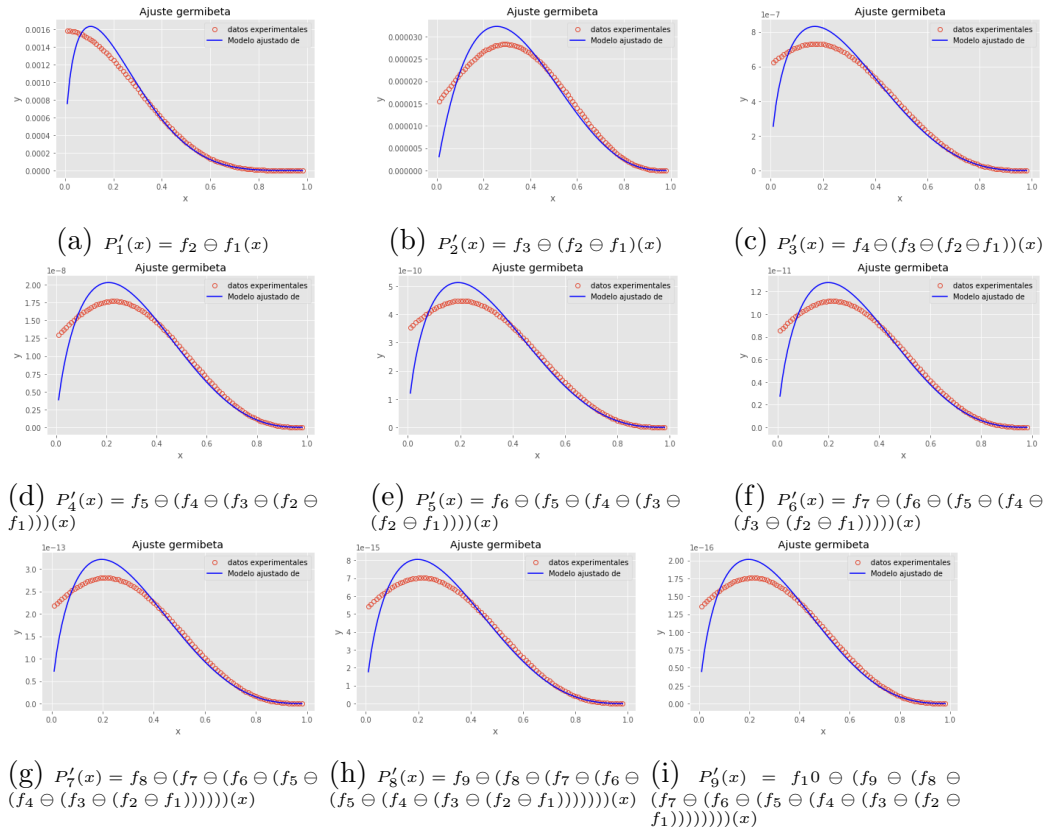
(i) $P'_9(x) = f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(j) $P'_{10}(x) = f_{11} \ominus (f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$

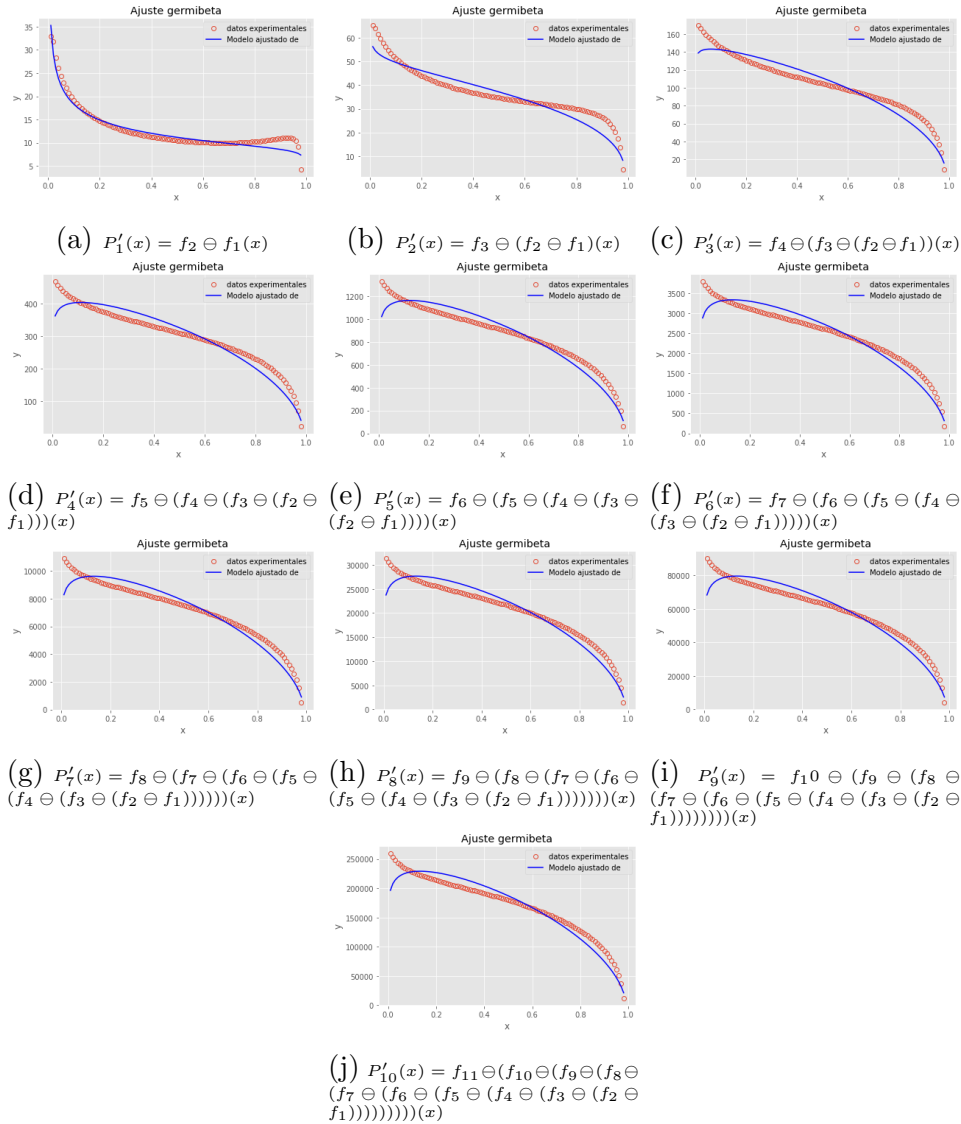
$a_1 = -0.51027182$	$b_1 = 4.24188984$	$r_1^2 = 0.949004$
$a_2 = -0.971395$	$b_2 = 2.77846428$	$r_2^2 = 0.920451$
$a_3 = -0.5996394$	$b_3 = 2.90648564$	$r_3^2 = 0.947079$
$a_4 = -0.75753781$	$b_4 = 2.82998912$	$r_4^2 = 0.928474$
$a_5 = -0.68678757$	$b_5 = 2.85671068$	$r_5^2 = 0.935645$
$a_6 = -0.7175454$	$b_6 = 2.84384566$	$r_6^2 = 0.932243$
$a_7 = -0.7040126$	$b_7 = 2.84922419$	$r_7^2 = 0.933687$
$a_8 = -0.70993038$	$b_8 = 2.84681607$	$r_8^2 = 0.933045$
$a_9 = -0.7073365$	$b_9 = 2.84786202$	$r_9^2 = 0.933324$

Cuadro 3.6: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = (x(1-x))^2$



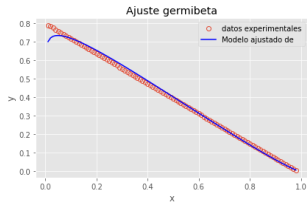
$a_1 = 0.2836557$	$b_1 = 0.05839904$	$r_1^2 = 0.934680$
$a_2 = 0.3909904$	$b_2 = 0.37879914$	$r_2^2 = 0.850766$
$a_3 = -0.03197547$	$b_3 = 0.50395778$	$r_3^2 = 0.901073$
$a_4 = -0.0696788$	$b_4 = 0.54486221$	$r_4^2 = 0.901163$
$a_5 = -0.07913989$	$b_5 = 0.56193825$	$r_5^2 = 0.914069$
$a_6 = -0.08589661$	$b_6 = 0.56853445$	$r_6^2 = 0.913966$
$a_7 = -0.08737786$	$b_7 = 0.57141232$	$r_7^2 = 0.916614$
$a_8 = -0.0868595$	$b_8 = 0.57259706$	$r_8^2 = 0.916510$
$a_9 = -0.08893465$	$b_9 = 0.05731263$	$r_9^2 = 0.917072$
$a_{10} = -0.08919694$	$b_{10} = 0.57334997$	$r_{10}^2 = 0.917031$

Cuadro 3.7: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = (x(1-x))^{-0.75}$

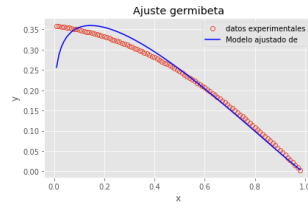


$a_1 = -0.05827931$	$b_1 = 1.13392628$	$r_1^2 = 0.994641$
$a_2 = -0.18618067$	$b_2 = 1.07801748$	$r_2^2 = 0.968789$
$a_3 = -0.15838279$	$b_3 = 1.12233225$	$r_3^2 = 0.982211$
$a_4 = -0.17016897$	$b_4 = 1.11674933$	$r_4^2 = 0.978379$
$a_5 = -0.16684514$	$b_5 = 1.11928120$	$r_5^2 = 0.979690$
$a_6 = -0.16793404$	$b_6 = 1.11890370$	$r_6^2 = 0.979299$
$a_7 = -0.16760925$	$b_7 = 1.11890370$	$r_7^2 = 0.979422$
$a_8 = -0.16771123$	$b_8 = 1.11884519$	$r_8^2 = 0.979385$
$a_9 = -0.16768009$	$b_9 = 1.11886378$	$r_9^2 = 0.979397$
$a_{10} = -0.16768959$	$b_{10} = 1.11885828$	$r_{10}^2 = 0.979393$

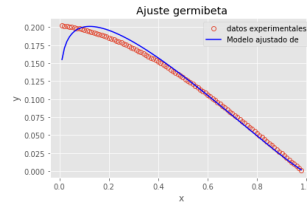
Cuadro 3.8: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = 1 - 0.2x$



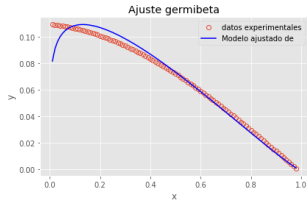
(a) $P'_1(x) = f_2 \ominus f_1(x)$



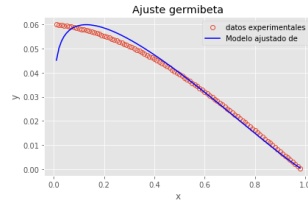
(b) $P'_2(x) = f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)(x)$



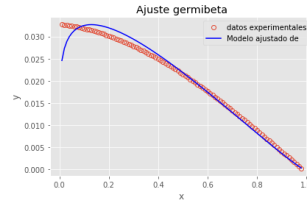
(c) $P'_3(x) = f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1))(x)$



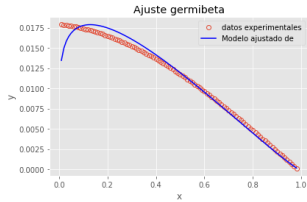
(d) $P'_4(x) = f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



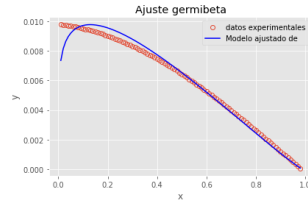
(e) $P'_5(x) = f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



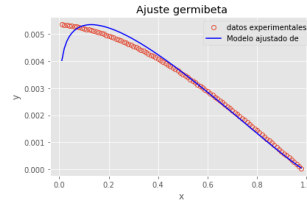
(f) $P'_6(x) = f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



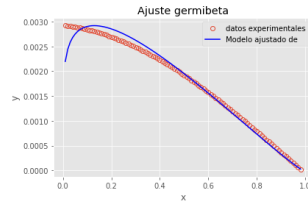
(g) $P'_7(x) = f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(h) $P'_8(x) = f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



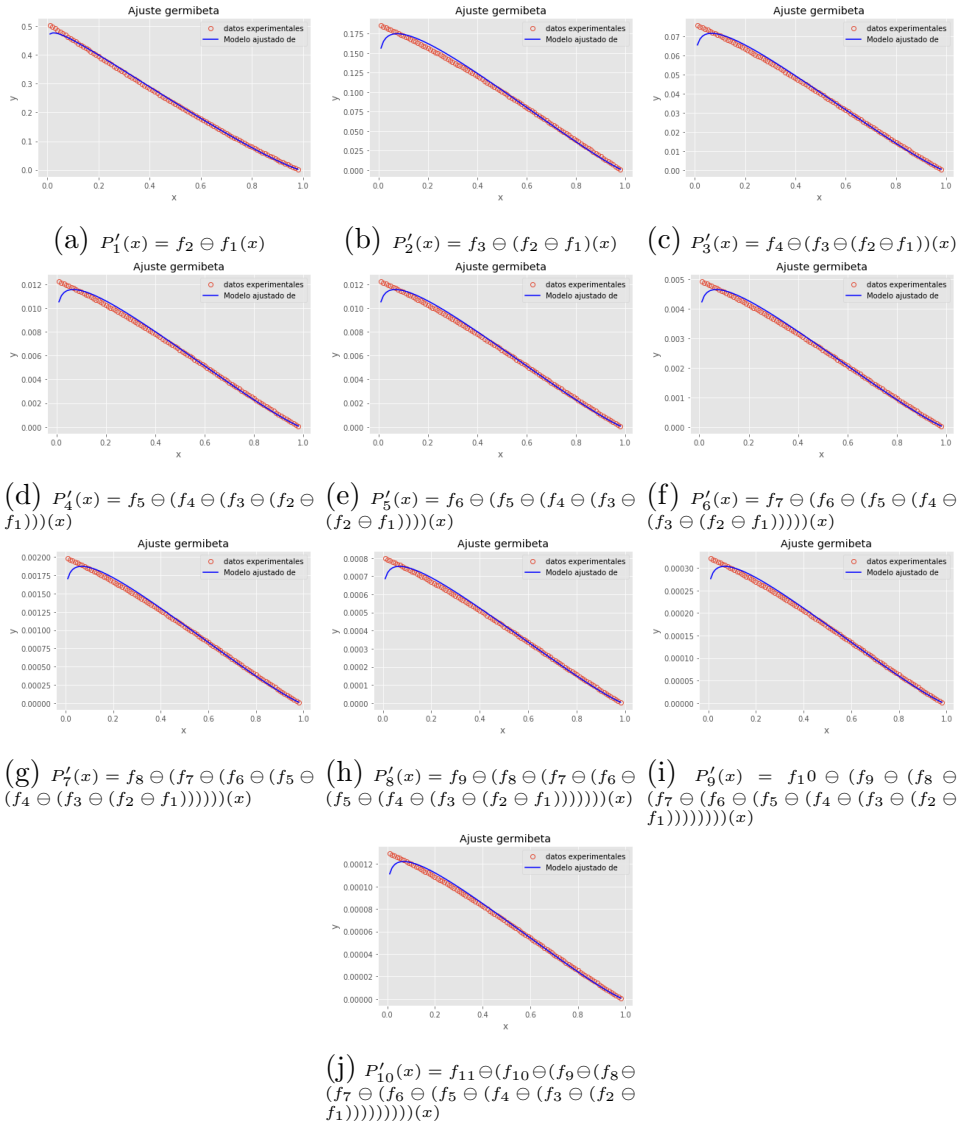
(i) $P'_9(x) = f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(j) $P'_{10}(x) = f_{11} \ominus (f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$

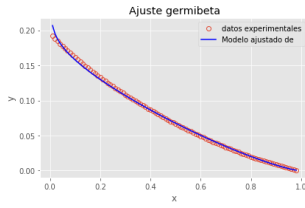
$a_1 = -0.2878448$	$b_1 = 1.17879385$	$r_1^2 = 0.998430$
$a_2 = -0.09432976$	$b_2 = 1.14023983$	$r_2^2 = 0.991416$
$a_3 = -0.08329733$	$b_3 = 1.16180595$	$r_3^2 = 0.994146$
$a_4 = -0.08679845$	$b_4 = 1.15938182$	$r_4^2 = 0.993510$
$a_5 = -0.08602862$	$b_5 = 1.16013988$	$r_5^2 = 0.993671$
$a_6 = -0.08621789$	$b_6 = 1.15999173$	$r_6^2 = 0.993634$
$a_7 = -0.08617412$	$b_7 = 1.160022959$	$r_7^2 = 0.993643$
$a_8 = -0.08618443$	$b_8 = 1.16002109$	$r_8^2 = 0.993641$
$a_9 = -0.08618205$	$b_9 = 1.16002312$	$r_9^2 = 0.993641$
$a_{10} = -0.08618315$	$b_{10} = 1.16002314$	$r_{10}^2 = 0.993641$

Cuadro 3.9: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = 1 - 0.6x$

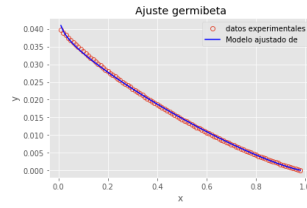


$a_1 = 0.06537738$	$b_1 = 1.24451084$	$r_1^2 = 0.998225$
$a_2 = 0.03949165$	$b_2 = 1.24941197$	$r_2^2 = 0.999544$
$a_3 = 0.04136968$	$b_3 = 1.25505871$	$r_3^2 = 0.999484$
$a_4 = 0.04096143$	$b_4 = 1.25472519$	$r_4^2 = 0.999499$
$a_5 = 0.04101511$	$b_5 = 1.25480041$	$r_5^2 = 0.999497$
$a_6 = 0.04006800$	$b_6 = 1.25479146$	$r_6^2 = 0.999497$
$a_7 = 0.04100801$	$b_7 = 1.25479289$	$r_7^2 = 0.999497$
$a_8 = 0.04100783$	$b_8 = 1.25479278$	$r_8^2 = 0.999497$
$a_9 = 0.04100781$	$b_9 = 1.25479278$	$r_9^2 = 0.999497$
$a_{10} = 0.04100786$	$b_{10} = 1.2547927$	$r_{10}^2 = 0.999497$

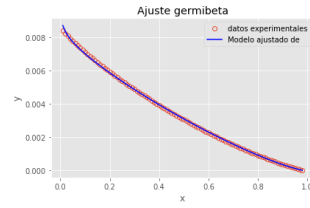
Cuadro 3.10: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = 1 - 0.9\sqrt{x}$



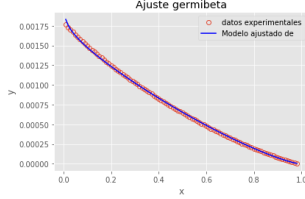
(a) $P'_1(x) = f_2 \ominus f_1(x)$



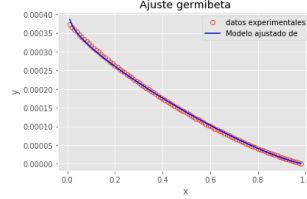
(b) $P'_2(x) = f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)(x)$



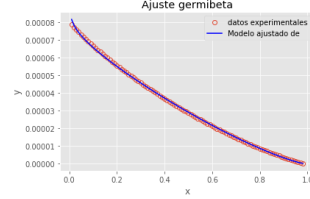
(c) $P'_3(x) = f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1))(x)$



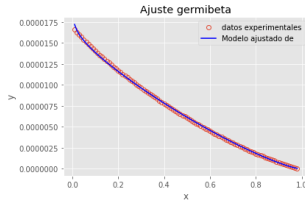
(d) $P'_4(x) = f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



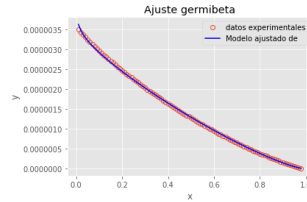
(e) $P'_5(x) = f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



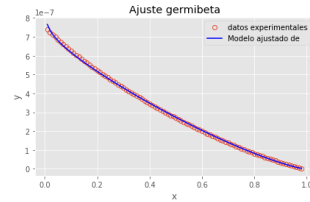
(f) $P'_6(x) = f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



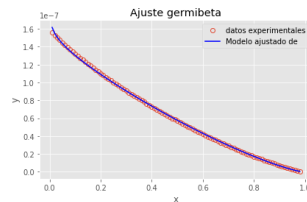
(g) $P'_7(x) = f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(h) $P'_8(x) = f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



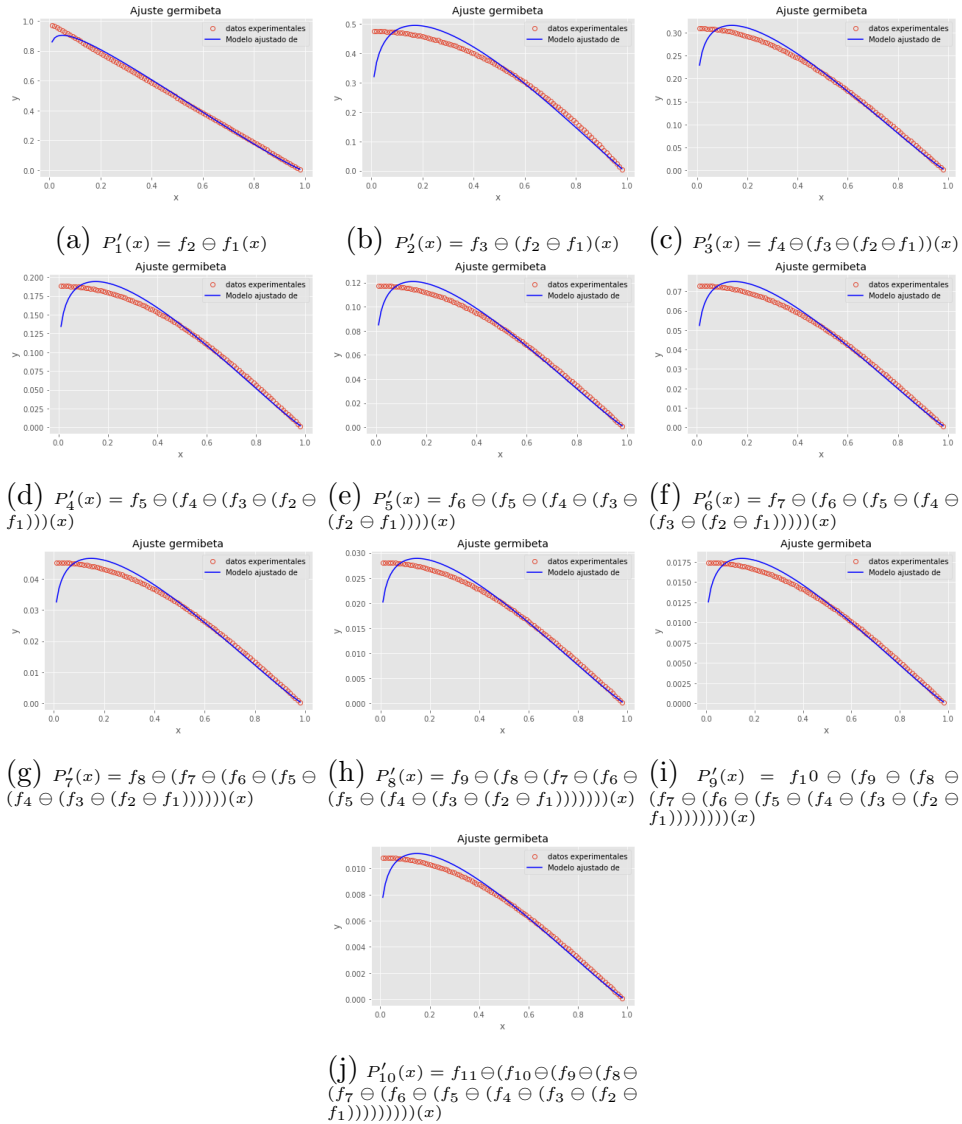
(i) $P'_9(x) = f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(j) $P'_{10}(x) = f_{11} \ominus (f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$

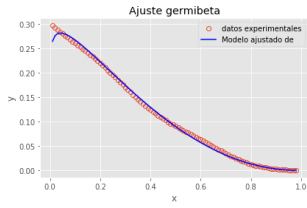
$a_1 = -0.06064019$	$b_1 = 1.13127512$	$r_1^2 = 0.994261$
$a_2 = -0.22034551$	$b_2 = 1.06403946$	$r_2^2 = 0.957840$
$a_3 = -0.18186718$	$b_3 = 1.11971382$	$r_3^2 = 0.978661$
$a_4 = -0.19930018$	$b_4 = 1.11201858$	$r_4^2 = 0.972455$
$a_5 = -0.19396491$	$b_5 = 1.11580918$	$r_5^2 = 0.974784$
$a_6 = -0.1958619$	$b_6 = 1.11486324$	$r_6^2 = 0.974036$
$a_7 = -0.19534755$	$b_7 = 1.11522912$	$r_7^2 = 0.974293$
$a_8 = -0.19545668$	$b_8 = 1.11511886$	$r_8^2 = 0.974208$
$a_9 = -0.19538753$	$b_9 = 1.11515742$	$r_9^2 = 0.974237$
$a_{10} = -0.19541102$	$b_{10} = 1.11514526$	$r_{10}^2 = 0.974227$

Cuadro 3.11: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = 1$

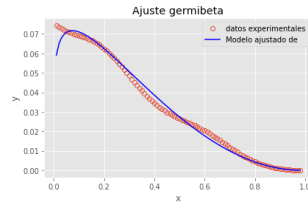


$a_1 = -0.09111483$	$b_1 = 2.07322983$	$r_1^2 = 0.996822$
$a_2 = -0.16484157$	$b_2 = 2.04062261$	$r_2^2 = 0.988541$
$a_3 = -0.15757428$	$b_3 = 2.06636697$	$r_3^2 = 0.989624$
$a_4 = -0.15959784$	$b_4 = 2.06304366$	$r_4^2 = 0.989624$
$a_5 = -0.15926508$	$b_5 = 2.06386246$	$r_5^2 = 0.989370$
$a_6 = -0.15933597$	$b_6 = 2.06371869$	$r_6^2 = 0.989359$
$a_7 = -0.15932287$	$b_7 = 2.06374852$	$r_7^2 = 0.989361$
$a_8 = -0.15932553$	$b_8 = 2.06374288$	$r_8^2 = 0.989361$
$a_9 = -0.159325$	$b_9 = 2.06374399$	$r_9^2 = 0.989361$
$a_{10} = -0.15932548$	$b_{10} = 2.06374396$	$r_{10}^2 = 0.989361$

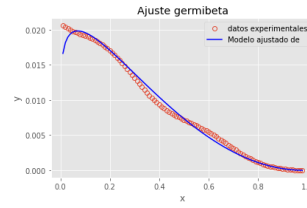
Cuadro 3.12: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = (1 - 0.25\sin(15x))(1 - x)$



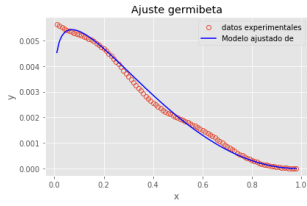
(a) $P'_1(x) = f_2 \ominus f_1(x)$



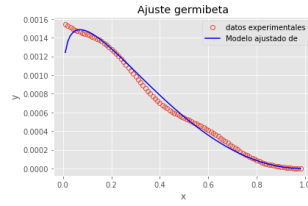
(b) $P'_2(x) = f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)(x)$



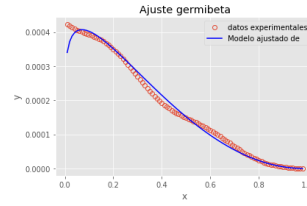
(c) $P'_3(x) = f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1))(x)$



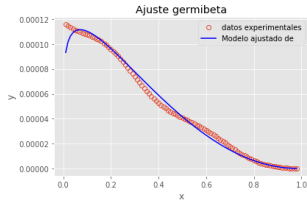
(d) $P'_4(x) = f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



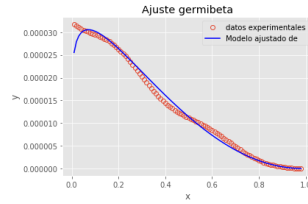
(e) $P'_5(x) = f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



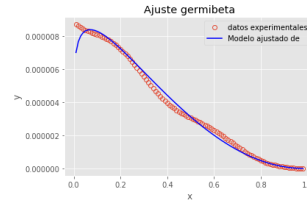
(f) $P'_6(x) = f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



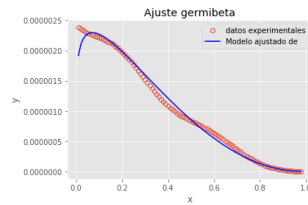
(g) $P'_7(x) = f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(h) $P'_8(x) = f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



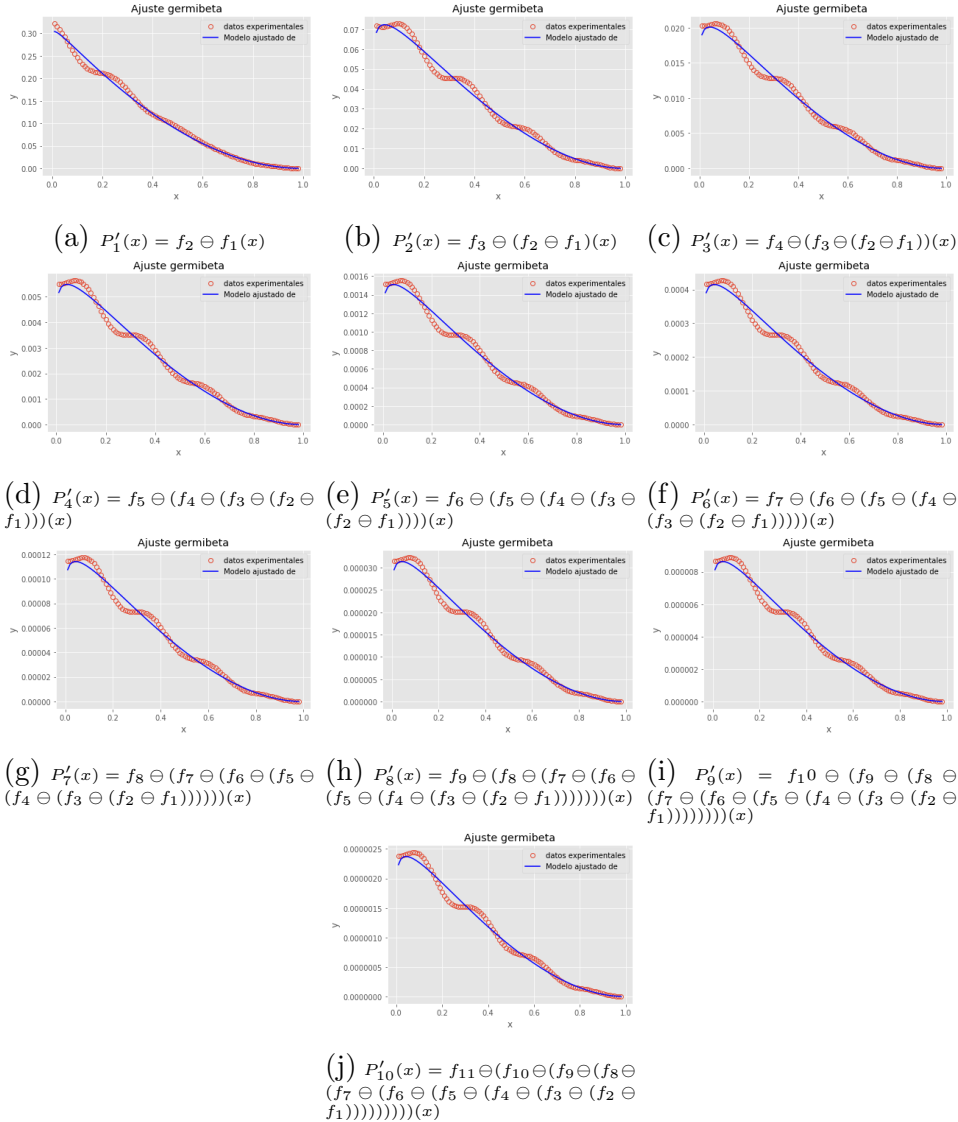
(i) $P'_9(x) = f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(j) $P'_{10}(x) = f_{11} \ominus (f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$

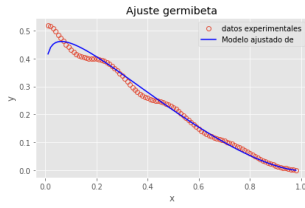
$a_1 = -0.01730723$	$b_1 = 1.93195866$	$r_1^2 = 0.993366$
$a_2 = -0.08080429$	$b_2 = 1.82926132$	$r_2^2 = 0.990628$
$a_3 = -0.0828249$	$b_3 = 1.87912109$	$r_3^2 = 0.991053$
$a_4 = -0.08513264$	$b_4 = 1.87124931$	$r_4^2 = 0.989737$
$a_5 = -0.08534098$	$b_5 = 1.87463296$	$r_5^2 = 0.989737$
$a_6 = -0.08543831$	$b_6 = 1.87398804$	$r_6^2 = 0.989655$
$a_7 = -0.08544868$	$b_7 = 1.87422240$	$r_7^2 = 0.989659$
$a_8 = -0.085545315$	$b_8 = 1.87417096$	$r_8^2 = 0.989654$
$a_9 = -0.08545388$	$b_9 = 1.87418807$	$r_9^2 = 0.989655$
$a_{10} = -0.08545377$	$b_{10} = 1.87418355$	$r_{10}^2 = 0.989654$

Cuadro 3.13: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = (1 - 0.5\sin(25x))(1 - x)$

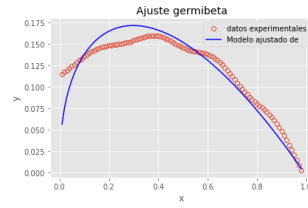


$a_1 = -0.10150809$	$b_1 = 1.52511733$	$r_1^2 = 0.984528$
$a_2 = -0.43004714$	$b_2 = 0.99517414$	$r_2^2 = 0.896208$
$a_3 = -0.26122554$	$b_3 = 1.16123309$	$r_3^2 = 0.978076$
$a_4 = -0.34981562$	$b_4 = 1.1075228$	$r_4^2 = 0.947845$
$a_5 = -0.31031557$	$b_5 = 1.13267726$	$r_5^2 = 0.964219$
$a_6 = -0.3286666$	$b_6 = 1.12236457$	$r_6^2 = 0.957282$
$a_7 = -0.32043185$	$b_7 = 1.12715024$	$r_7^2 = 0.960564$
$a_8 = -0.3241846$	$b_8 = 1.122505478$	$r_8^2 = 0.959106$
$a_9 = -0.32249508$	$b_9 = 1.12601399$	$r_9^2 = 0.959772$
$a_{10} = -0.32326059$	$b_{10} = 1.12558519$	$r_{10}^2 = 0.959473$

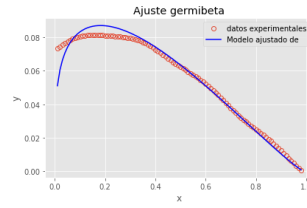
Cuadro 3.14: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = \frac{(1-0.25\sin(25x))}{\sqrt{x}}$



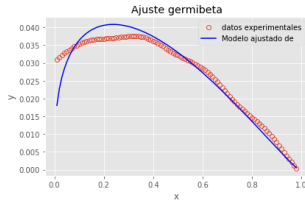
(a) $P'_1(x) = f_2 \ominus f_1(x)$



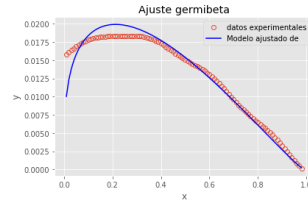
(b) $P'_2(x) = f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)(x)$



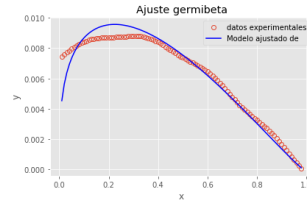
(c) $P'_3(x) = f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1))(x)$



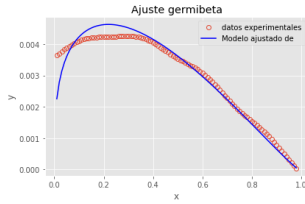
(d) $P'_4(x) = f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



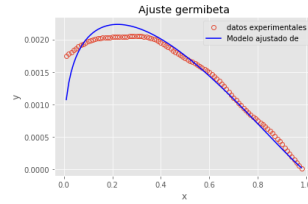
(e) $P'_5(x) = f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



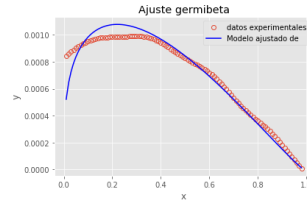
(f) $P'_6(x) = f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



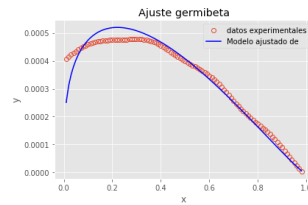
(g) $P'_7(x) = f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(h) $P'_8(x) = f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



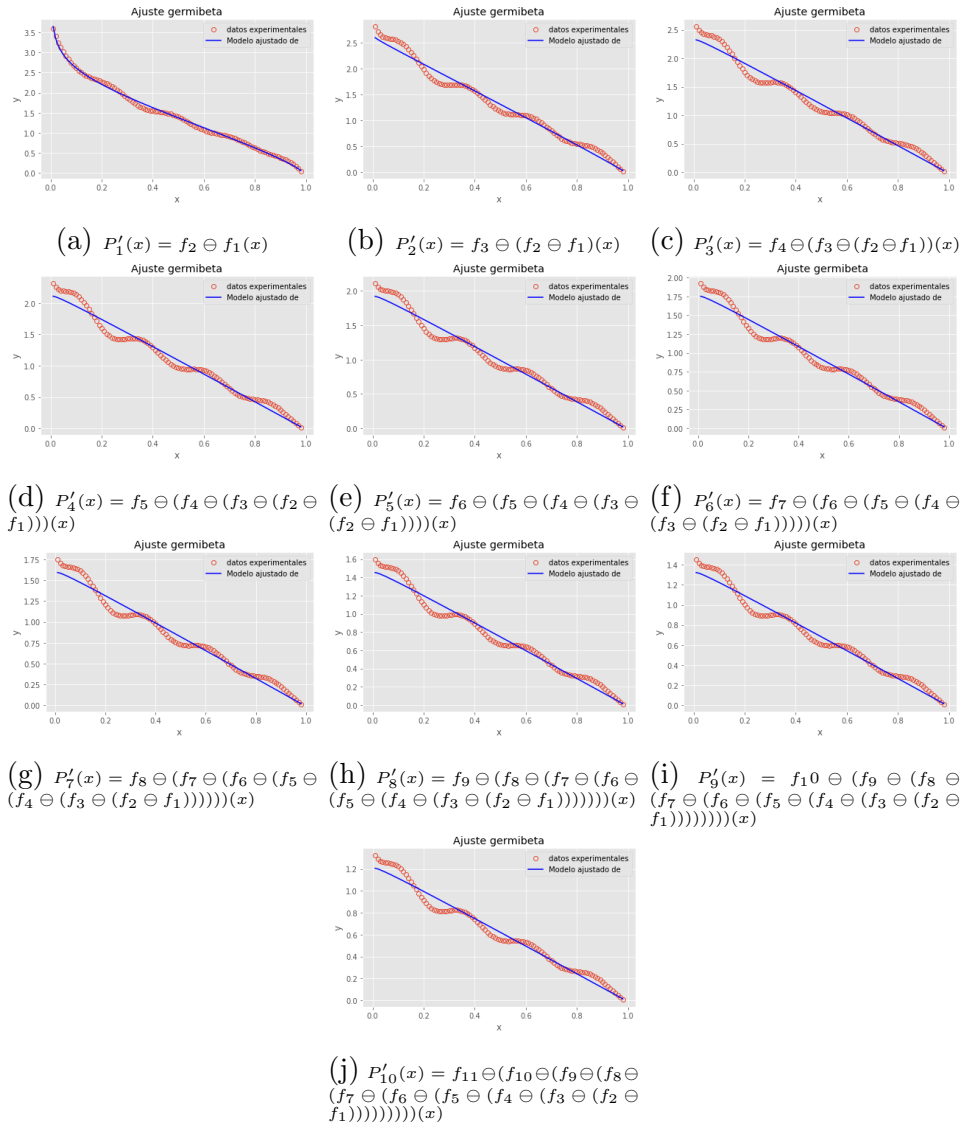
(i) $P'_9(x) = f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$



(j) $P'_{10}(x) = f_{11} \ominus (f_{10} \ominus (f_9 \ominus (f_8 \ominus (f_7 \ominus (f_6 \ominus (f_5 \ominus (f_4 \ominus (f_3 \ominus (f_2 \ominus f_1)))(x)$

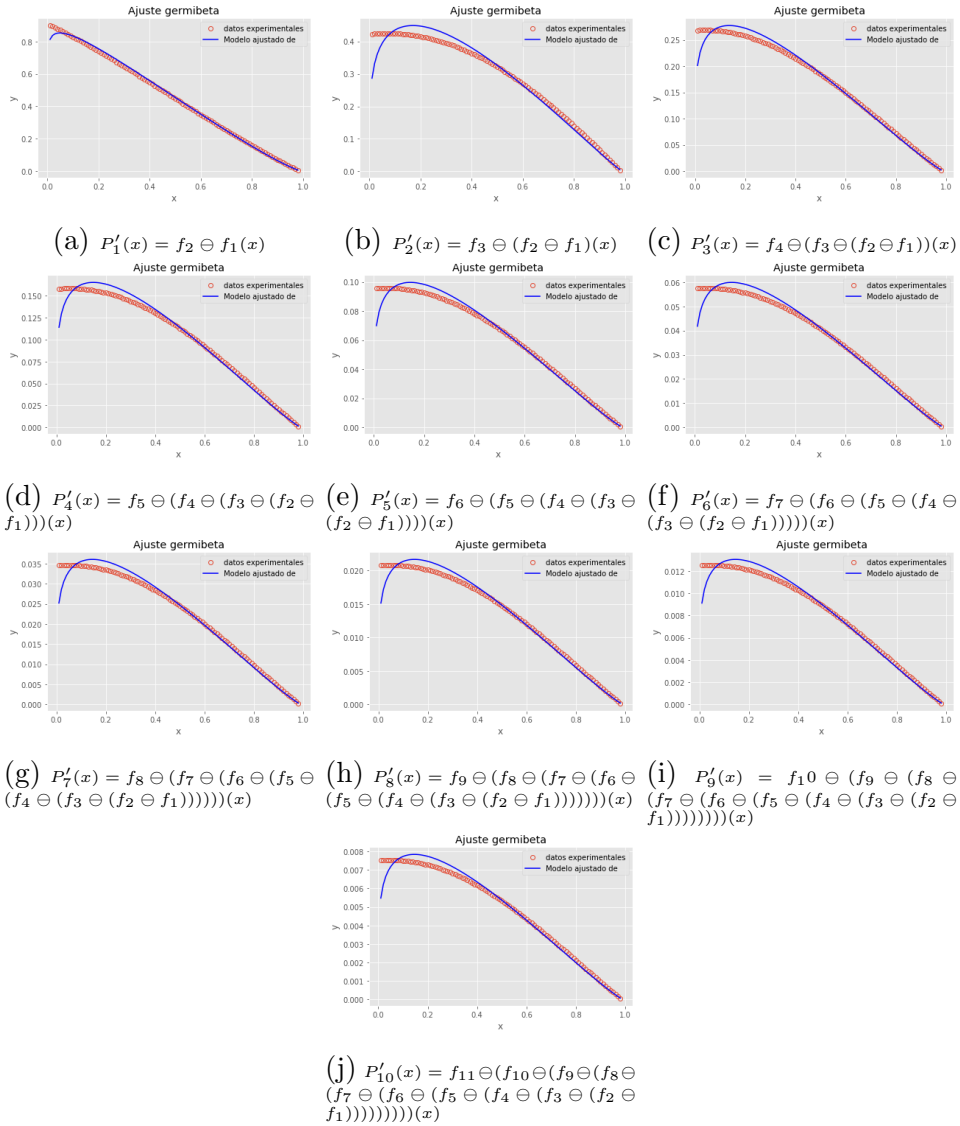
$a_1 = -0.10581916$	$b_1 = 1.54380678$	$r_1^2 = 0.937394$
$a_2 = -0.41503993$	$b_2 = 0.94580792$	$r_2^2 = 0.887721$
$a_3 = -0.26156855$	$b_3 = 1.14266817$	$r_3^2 = 0.971494$
$a_4 = -0.3473168$	$b_4 = 1.07939342$	$r_4^2 = 0.938983$
$a_5 = -0.30905994$	$b_5 = 1.10979001$	$r_5^2 = 0.956268$
$a_6 = -0.32730185$	$b_6 = 1.09761637$	$r_6^2 = 0.948290$
$a_7 = -0.31901019$	$b_7 = 1.1032403$	$r_7^2 = 0.952012$
$a_8 = -0.32283593$	$b_8 = 1.10080101$	$r_8^2 = 0.951072$
$a_9 = -0.32109243$	$b_9 = 1.10191081$	$r_9^2 = 0.951072$
$a_{10} = -0.322188954$	$b_{10} = 1.10141535$	$r_{10}^2 = 0.950709$

Cuadro 3.15: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = \frac{1-0.5\sin(25x)}{\sqrt{x}}$



$a_1 = -0.06033347$	$b_1 = 1.18161801$	$r_1^2 = 0.997027$
$a_2 = -0.2269173$	$b_2 = 1.09424885$	$r_2^2 = 0.963800$
$a_3 = -0.18364903$	$b_3 = 1.15117837$	$r_3^2 = 0.982427$
$a_4 = -0.20175189$	$b_4 = 1.14145783$	$r_4^2 = 0.976881$
$a_5 = -0.19610047$	$b_5 = 1.14564391$	$r_5^2 = 0.978912$
$a_6 = -0.19805620$	$b_6 = 1.14449555$	$r_6^2 = 0.978258$
$a_7 = -0.19742089$	$b_7 = 1.14491233$	$r_7^2 = 0.978479$
$a_8 = -0.19763467$	$b_8 = 1.14478213$	$r_8^2 = 0.978406$
$a_9 = -0.19756332$	$b_9 = 1.14482643$	$r_9^2 = 0.978431$
$a_{10} = -0.19758785$	$b_{10} = 1.14481202$	$r_{10}^2 = 0.978422$

Cuadro 3.16: Esta tabla corresponde la correlación consecutiva de $f(x) = e^{-0.5(x-0.5)^2}$



Las cuales nos recuerden a las curvas obtenidas en el capítulo 4. En este trabajo ajustaremos cada iteración en el proceso definido por Germinal Cocho y observaremos la manera en que cambian los parámetros a y b , con el objetivo de hallar a_∞ y b_∞ .

Capítulo 4

Discusiones y conclusiones

En el primer capítulo describimos cómo han cambiado los modos de explicación científica desde la geometrización griega hasta los sistemas complejos, los cuales son una nueva forma de estudiar o caracterizar a fenómenos de la naturaleza. En este trabajo hemos encontrado fenómenos que presentan características de los sistemas complejos, comportamientos emergentes, invarianza respecto a escala, no-linealidad, etcétera.

Hemos encontrado fenómenos cuya distribución rango-orden se ajusta a alguna ley de potencia y otros que se ajustan a un modelo más general: la distribución beta discreta generalizada o Germe-beta. Podemos pensar que encontramos a través de este modelo, ejemplos de propiedades emergentes en los fenómenos mencionados:

- En la ley de Zipf, se muestra un arreglo que se ajusta a una recta, mostrando cierto orden emergente. En el discurso de AMLO, observamos el mismo tipo de patrón ya que cuando se escribió este nunca se pensó en hacerlo de forma tal que se ajustara a la ley de Zipf.
- En el ejemplo de la medición del impacto de las revistas científicas también se observa la emergencia de ciertos comportamientos, que se reflejan en la emergencia de una distribución rango-orden que sigue una ley de potencia. Dicha propiedad se expresa en que en principio nadie busca beneficiar a cierta revista para darle una mejor posición en el ranking.
- En el ranking de las universidades observamos pocas universidades con alto puntaje mientras que abundan las universidades con bajo puntaje. Este fenómeno se ajusta bien a una Germe-beta, lo cual es también una propiedad emergente.

- Los terremotos, los cuales siempre están presentes abundando los de pequeña intensidad y muy pocos con gran intensidad capaces de cobrar vidas humanas y se ajustan a una Germe-beta.

Por otro lado podemos considerar lo siguiente respecto a las dinámicas que componen a estos fenómenos:

- En la ley de Zipf, en particular en el discurso de AMLO, podemos pensar que las dinámicas predominantes son: por una parte, aquellas que propician la repetición (permanencia) de cierto grupo pequeño de palabras, propiciadas por las funciones que desempeñan en el lenguaje español. Mientras que para el resto de las palabras predomina la dinámica de cambio propiciada por la necesidad de escribir de manera no repetitiva, apoyándose en sinónimos, pronombres, etcétera. Ambas dinámicas las podemos considerar, siguiendo a Cocho como dinámicas en conflicto.
- En la ley de Pareto, aunque hay muchas variables las que determinan el ingreso de las personas. Podemos considerar que el factor determinante para tener un ingreso alto es haber nacido en una familia rica, mientras que la dinámica que hace que haya gente con poco ingreso es el haber nacido en una familia pobre.
- En el ranking de los científicos mexicanos y su ajuste a la Germe-beta podemos considerar que se reflejan las desventajas entre los científicos eminentes y los poco conocidos (muchas veces con contribuciones equivalentes). De igual manera los científicos que apenas comienzan su carrera se encuentran en desventaja frente a los que ya llevan una carrera avanzada. Mientras que los científicos eminentes y los de carrera avanzada representan la permanencia; los científicos poco conocidos junto con los de una carrera corta representan a la dinámica del cambio.
- Los terremotos se producen generalmente en las fallas tectónicas, bastan pequeñas fricciones o choques para generar sismos. Lo anterior provoca que haya gran cantidad de sismos debido al constante movimiento de las placas tectónicas. Mientras que cuando se rompen las placas se producen los terremotos de mayor magnitud. Podemos pensar que las dinámicas en conflicto predominantes son la inestabilidad de las placas y al mismo tiempo la flexibilidad de las mismas, esta última permite que una gran cantidad de energía se encuentre acumulada.

En el capítulo 5, la diferencia de variables aleatorias con soporte en el intervalo $[0, 1]$, nos da una idea de la forma que tiene la resta consecutiva de

estas variables aleatorias. Al hacer tres o cuatro iteraciones, la forma resultante de las gráficas ya no exhiben cambios notorios, algo que se puede notar en la evolución los parámetros a_i y b_i que sólo varían en menos diezmilésimas o incluso millonésimas. Lo anterior nos lleva a pensar que para cada función hemos encontrado los primeros decimales de a_∞ y b_∞ , quizás en términos prácticos sea suficiente.

Al existir tantos fenómenos que siguen una distribución Germe-beta proponemos una causa global que la origina. La respuesta se encuentra en el último capítulo donde mostramos evidencia numérica de cómo la diferencia de variables aleatorias con soporte en el intervalo $[0, 1]$ se aproxima a una nueva variable aleatoria con función de densidad Germe-beta, es decir buscamos que nuestro modelo esté sustentado en las causas.

Con lo anterior podemos decir, que en este tipo de fenómenos existen microdinámicas que se encuentran en conflicto.

Dada la simplicidad del modelo y a la evidencia numérica mostrada, se plantea como línea futura, encontrar una prueba matemática formal para la conjetura del límite periférico.

Otras posibles aplicaciones son aquellas donde es evidente que existen dinámicas en conflicto como los son:

- Las poblaciones de organismos: donde existen las dinámicas de nacimiento y muerte que evidentemente se encuentran en conflicto.
- La actividad neuronal que depende de la excitación e inhibición de ellas.
- El tamaño de cierto grupo de personas (pandillas o mafias, por ejemplo), donde podemos considerar dos variables aleatorias: número de personas que se unen al grupo y la que cuantifica a los que se alejan. Aquí también podemos notar dos dinámicas en conflicto: por un lado las causas por las que se unen al grupo y por otro lado las razones por las que se alejan.

Apéndice A

Código en Python

```
    # -*- coding: utf-8 -*-
    """
    Created on Thu Mar  5 13:16:42 2020

    @author: Juan
    """
from mpmath import mp

from mpmath import *
from pylab import *

from scipy import integrate
from collections import *

from numba import jit
from scipy.stats import linregress
from scipy.optimize import curve_fit
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt
from sklearn.metrics import r2_score

from pandas import *

from matplotlib.pyplot import *
import re
import collections
```

```

import sys
import math

from statistics import mean

import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import style
style.use('ggplot')
#Previo
mp.dps=50 #; mp.pretty=True

h = 0.01
def u1(x):
    if 0<x<1:
        a = (1-0.5*sin(25*x))*x**(-0.5)
        return a
    else:
        return 0

def u3(x):
    if 0<x<1:
        a = (1-0.5*sin(25*x))*x**(-0.5)
        return a
    else:
        0
X = arange(0.01,0.99,h)
Y = arange(0.01,0.99,h)
#Z = arange(0,1000,1)
"""cálculo de P2 """
A = []
for y in Y:
    P1 = array ([u1(x+y)*u3(x) for x in X])

    A.append(integrate.simps(P1, dx = h))
#scatter(X, A, s = 1)

#N = 0.99
def germibeta(r, alfa, beta, A, N, base=10):
    fac = base**A
    num = pow((0.99-r),beta)

```

```

    den = pow(r,alfa)
    return fac*num/den
def genera_x0(F,verbose=False):
    N = 0.99
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    r = arange(0.01,0.99, h)
    lgR, lgF = log10(R), log10(F)
    V = linregress(lgR, lgF)
    if(verbose):
        print(str(V))
    m = abs(V.slope)
    b = abs(V.intercept)
    return array([b, abs(m), abs(m)])
def ajuste(F, verbose=False):
    N = 0.99
    #print("Esta es la longitud de N",N)
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    #print("Esta es la longitud de R",R)
    r = arange(0.01,0.99,h)
    x0 = genera_x0(F,verbose)
    #N = 184
    modelo = lambda r,x,y,z : germibeta(r, x, y, z, N)
    #print("Esye es lo que el modelo:", modelo)
    #print("Todavía")
    popt, pcov = curve_fit( modelo, R, F, x0, sigma=F, method='lm')
    #print("Estos son los valores de popt", popt)
    r2 = r2_score( F, modelo(array(R), popt[0], popt[1], popt[2]) )
    if(verbose):
        print(str(popt))
        print(str(sqrt(diag(pcov))))
        print(str(r2))
    return popt , r2

parametros, m_c = ajuste(A)
print("Imprimiendo los parametros:", parametros)

def valores_Modelo(parametros):

```



```

valores_ajuste = []
for i in X:
    v = germibeta(i, parametros[0], parametros[1],
                 parametros[2], N = len(A), base = 10)
    valores_ajuste.append(v)
return valores_ajuste
valores_del_ajuste = valores_Modelo(parametros)
#print(valores_del_ajuste)

def graficarAjuste(parametros):
    plt.figure()
    plt.plot( X, A, 'o', fillstyle='none', label='datos experimentales')
        #plt.plot( x1, dat, 'o', label='Datos')
    plt.plot(X, valores_del_ajuste, 'b-', label='Modelo ajustado de ')
    plt.title('Ajuste germibeta')
    plt.legend(loc='best')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.tight_layout()
    #plt.savefig('fig6.png')
    plt.show()

graficarAjuste(parametros)

ys = array([m for m in valores_del_ajuste])
xs = array([m*0.01 for m in range(1,99)])
dats = array([m for m in A])

def squared_error(ys_orig,ys_germi):
    return sum((ys_germi - ys_orig) * (ys_germi - ys_orig))

def coefficient_of_determination(ys_orig,ys_germi):
    y_mean_germi = [mean(ys_orig) for y in ys_orig]
    squared_error_regr = squared_error(ys_orig, ys_germi)
    squared_error_y_mean = squared_error(ys_orig, y_mean_germi)
    return 1 - (squared_error_regr/squared_error_y_mean)

#m, b = best_fit_slope_and_intercept(xs,ys)
#regression_line = [(m*x)+b for x in xs]

```

```

r_squared = coefficient_of_determination(dats, ys)
print(r_squared)

def G2( x ):
    if 0 < x < 1:
        a = int(100*( x ))
        return A[ a-1]
    else:
        return 0

B = []
for y in Y:
    P2 = array ([G2(x)*u1(x+y) for x in X])
    B.append(integrate.simps(P2, dx = h))
#scatter(X, B, s = 1)

#N = 0.99
def germibeta(r, alfa, beta, A, N, base=10):
    fac = base**A
    num = pow((0.99-r),beta)
    den = pow(r,alfa)
    return fac*num/den
def genera_x0(F,verbose=False):
    N = 0.99
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    r = arange(0.01,0.99, h)
    lgR, lgF = log10(R), log10(F)
    V = linregress(lgR, lgF)
    if(verbose):
        print(str(V))
    m = abs(V.slope)
    b = abs(V.intercept)
    return array([b, abs(m), abs(m)])
def ajuste(F, verbose=False):
    N = 0.99
    #print("Esta es la longitud de N",N)
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

```

```

        #print("Esta es la longitud de R",R)
    r = arange(0.01,0.99,h)
    x0 = genera_x0(F,verbose)
    #N = 184
    modelo = lambda r,x,y,z : germibeta(r, x, y, z, N)
    #print("Esye es lo que el modelo:", modelo)
    #print("Todavía")
    pop_t, pcov = curve_fit( modelo, R, F, x0, sigma=F, method='lm')
    #print("Estos son los valores de pop_t", pop_t)
    r2 = r2_score( F, modelo(array(R), pop_t[0], pop_t[1], pop_t[2]) )
    if(verbose):
        print(str(pop_t))
        print(str(sqrt(diag(pcov))))
        print(str(r2))
    return pop_t , r2

parametros, m_c = ajuste(B)
print("Imprimiendo los parametros:", parametros)

def valores_Modelo(parametros):
    valores_ajuste = []
    for i in X:
        v = germibeta(i, parametros[0], parametros[1],
            parametros[2], N = len(A), base = 10)
        valores_ajuste.append(v)
    return valores_ajuste
valores_del_ajuste = valores_Modelo(parametros)
#print(valores_del_ajuste)

def graficarAjuste(parametros):
    plt.figure()
    plt.plot( X, B, 'o', fillstyle='none', label='datos experimentales')
        #plt.plot( x1, dat, 'o', label='Datos')
    plt.plot(X, valores_del_ajuste, 'b-', label='Modelo ajustado de ')
    plt.title('Ajuste germibeta')
    plt.legend(loc='best')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.tight_layout()

```

```

plt.savefig('fig6.png')
plt.show()

graficarAjuste(parametros)

ys = array([m for m in valores_del_ajuste])
xs = array([m*0.01 for m in range(1,99)])
dats = array([m for m in B])

def squared_error(ys_orig,ys_germi):
    return sum((ys_germi - ys_orig) * (ys_germi - ys_orig))

def coefficient_of_determination(ys_orig,ys_germi):
    y_mean_germi = [mean(ys_orig) for y in ys_orig]
    squared_error_regr = squared_error(ys_orig, ys_germi)
    squared_error_y_mean = squared_error(ys_orig, y_mean_germi)
    return 1 - (squared_error_regr/squared_error_y_mean)

#m, b = best_fit_slope_and_intercept(xs,ys)
#regression_line = [(m*x)+b for x in xs]

r_squared = coefficient_of_determination(dats, ys)
print(r_squared)

C = []
def G3( x ):
    if 0 < x < 1:
        a = int(100*( x ))
        return B[ a - 1]
    else:
        return 0
for y in Y:
    P2 = array ([G3(x)*u1(x+y) for x in X])
    C.append(integrate.simps(P2, dx = h))
#scatter(X, C, s = 1)

#N = 0.99
def germibeta(r, alfa, beta, A, N, base=10):
    fac = base**A
    num = pow((0.99-r),beta)

```

```

    den = pow(r,alfa)
    return fac*num/den
def genera_x0(F,verbose=False):
    N = 0.99
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    r = arange(0.01,0.99, h)
    lgR, lgF = log10(R), log10(F)
    V = linregress(lgR, lgF)
    if(verbose):
        print(str(V))
    m = abs(V.slope)
    b = abs(V.intercept)
    return array([b, abs(m), abs(m)])
def ajuste(F, verbose=False):
    N = 0.99
    #print("Esta es la longitud de N",N)
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    #print("Esta es la longitud de R",R)
    r = arange(0.01,0.99,h)
    x0 = genera_x0(F,verbose)
    #N = 184
    modelo = lambda r,x,y,z : germibeta(r, x, y, z, N)
    #print("Esye es lo que el modelo:", modelo)
    #print("Todavía")
    popt, pcov = curve_fit( modelo, R, F, x0, sigma=F, method='lm')
    #print("Estos son los valores de popt", popt)
    r2 = r2_score( F, modelo(array(R), popt[0], popt[1], popt[2]) )
    if(verbose):
        print(str(popt))
        print(str(sqrt(diag(pcov))))
        print(str(r2))
    return popt , r2

parametros, m_c = ajuste(C)
print("Imprimiendo los parametros:", parametros)

def valores_Modelo(parametros):

```

```

valores_ajuste = []
for i in X:
    v = germibeta(i, parametros[0], parametros[1],
                 parametros[2], N = len(A), base = 10)
    valores_ajuste.append(v)
return valores_ajuste
valores_del_ajuste = valores_Modelo(parametros)
#print(valores_del_ajuste)

def graficarAjuste(parametros):
    plt.figure()
    plt.plot( X, C, 'o', fillstyle='none', label='datos experimentales')
        #plt.plot( x1, dat, 'o', label='Datos')
    plt.plot(X, valores_del_ajuste, 'b-', label='Modelo ajustado de ')
    plt.title('Ajuste germibeta')
    plt.legend(loc='best')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.tight_layout()
    #plt.savefig('fig6.png')
    plt.show()

graficarAjuste(parametros)

ys = array([m for m in valores_del_ajuste])
xs = array([m*0.01 for m in range(1,99)])
dats = array([m for m in C])

def squared_error(ys_orig,ys_germi):
    return sum((ys_germi - ys_orig) * (ys_germi - ys_orig))

def coefficient_of_determination(ys_orig,ys_germi):
    y_mean_germi = [mean(ys_orig) for y in ys_orig]
    squared_error_regr = squared_error(ys_orig, ys_germi)
    squared_error_y_mean = squared_error(ys_orig, y_mean_germi)
    return 1 - (squared_error_regr/squared_error_y_mean)

#m, b = best_fit_slope_and_intercept(xs,ys)
#regression_line = [(m*x)+b for x in xs]

```

```
r_squared = coefficient_of_determination(dats, ys)
print(r_squared)
```

```
D = []
def G4( x ):
    if 0 < x < 1:
        a = int(100*( x ))
        return C[ a - 1 ]
    else:
        return 0
for y in Y:
    P2 = array ([G4(x)*u1(x+y) for x in X])
    D.append(integrate.simps(P2, dx = h))
#scatter(X, D, s = 1)

#N = 0.99
def germibeta(r, alfa, beta, A, N, base=10):
    fac = base**A
    num = pow((0.99-r),beta)
    den = pow(r,alfa)
    return fac*num/den
def genera_x0(F,verbose=False):
    N = 0.99
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    r = arange(0.01,0.99, h)
    lgR, lgF = log10(R), log10(F)
    V = linregress(lgR, lgF)
    if(verbose):
        print(str(V))
    m = abs(V.slope)
    b = abs(V.intercept)
    return array([b, abs(m), abs(m)])
def ajuste(F, verbose=False):
    N = 0.99
    #print("Esta es la longitud de N",N)
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    #print("Esta es la longitud de R",R)
```

```

    r = arange(0.01,0.99,h)
    x0 = genera_x0(F,verbose)
    #N = 184
    modelo = lambda r,x,y,z : germibeta(r, x, y, z, N)
    #print("Esye es lo que el modelo:", modelo)
    #print("Todavía")
    popt, pcov = curve_fit( modelo, R, F, x0, sigma=F, method='lm')
    #print("Estos son los valores de popt", popt)
    r2 = r2_score( F, modelo(array(R), popt[0], popt[1], popt[2]) )
    if(verbose):
        print(str(popt))
        print(str(sqrt(diag(pcov))))
        print(str(r2))
    return popt , r2

parametros, m_c = ajuste(D)
print("Imprimiendo los parametros:", parametros)

def valores_Modelo(parametros):
    valores_ajuste = []
    for i in X:
        v = germibeta(i, parametros[0], parametros[1],
            parametros[2], N = len(A), base = 10)
        valores_ajuste.append(v)
    return valores_ajuste
valores_del_ajuste = valores_Modelo(parametros)
#print(valores_del_ajuste)

def graficarAjuste(parametros):
    plt.figure()
    plt.plot( X, D, 'o', fillstyle='none', label='datos experimentales')
    #plt.plot( x1, dat, 'o', label='Datos')
    plt.plot(X, valores_del_ajuste, 'b-', label='Modelo ajustado de ')
    plt.title('Ajuste germibeta')
    plt.legend(loc='best')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.tight_layout()
    #plt.savefig('fig6.png')

```



```

plt.show()

graficarAjuste(parametros)

ys = array([m for m in valores_del_ajuste])
xs = array([m*0.01 for m in range(1,99)])
dats = array([m for m in D])

def squared_error(ys_orig,ys_germi):
    return sum((ys_germi - ys_orig) * (ys_germi - ys_orig))

def coefficient_of_determination(ys_orig,ys_germi):
    y_mean_germi = [mean(ys_orig) for y in ys_orig]
    squared_error_regr = squared_error(ys_orig, ys_germi)
    squared_error_y_mean = squared_error(ys_orig, y_mean_germi)
    return 1 - (squared_error_regr/squared_error_y_mean)

#m, b = best_fit_slope_and_intercept(xs,ys)
#regression_line = [(m*x)+b for x in xs]

r_squared = coefficient_of_determination(dats, ys)
print(r_squared)

E = []
def G5( x ):
    if 0 < x < 1:
        a = int(100*( x ))
        return D[ a - 1 ]
    else:
        return 0
for y in Y:
    P2 = array ([G5(x)*u1(x+y) for x in X])
    E.append(integrate.simps(P2, dx = h))
#scatter(X, E, s = 1)

#N = 0.99
def germibeta(r, alfa, beta, A, N, base=10):
    fac = base**A
    num = pow((0.99-r),beta)
    den = pow(r,alfa)

```

```

    return fac*num/den

def genera_x0(F,verbose=False):
    N = 0.99
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]
    r = arange(0.01,0.99, h)
    lgR, lgF = log10(R), log10(F)
    V = linregress(lgR, lgF)
    if(verbose):
        print(str(V))
    m = abs(V.slope)
    b = abs(V.intercept)
    return array([b, abs(m), abs(m)])
def ajuste(F, verbose=False):
    N = 0.99
    #print("Esta es la longitud de N",N)
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    #print("Esta es la longitud de R",R)
    r = arange(0.01,0.99,h)
    x0 = genera_x0(F,verbose)
    #N = 184
    modelo = lambda r,x,y,z : germibeta(r, x, y, z, N)
    #print("Esye es lo que el modelo:", modelo)
    #print("Todavía")
    popt, pcov = curve_fit( modelo, R, F, x0, sigma=F, method='lm')
    #print("Estos son los valores de popt", popt)
    r2 = r2_score( F, modelo(array(R), popt[0], popt[1], popt[2]) )
    if(verbose):
        print(str(popt))
        print(str(sqrt(diag(pcov))))
        print(str(r2))
    return popt , r2

parametros, m_c = ajuste(E)
print("Imprimiendo los parametros:", parametros)

def valores_Modelo(parametros):
    valores_ajuste = []

```

```

for i in X:
    v = germibeta(i, parametros[0], parametros[1],
                 parametros[2], N = len(A), base = 10)
    valores_ajuste.append(v)
return valores_ajuste
valores_del_ajuste = valores_Modelo(parametros)
#print(valores_del_ajuste)

def graficarAjuste(parametros):
    plt.figure()
    plt.plot( X, E, 'o', fillstyle='none', label='datos experimentales')
    #plt.plot( x1,          dat, 'o', label='Datos')
    plt.plot(X, valores_del_ajuste, 'b-', label='Modelo ajustado de ')
    plt.title('Ajuste germibeta')
    plt.legend(loc='best')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.tight_layout()
    #plt.savefig('fig6.png')
    plt.show()

graficarAjuste(parametros)

ys = array([m for m in valores_del_ajuste])
xs = array([m*0.01 for m in range(1,99)])
dats = array([m for m in E])

def squared_error(ys_orig,ys_germi):
    return sum((ys_germi - ys_orig) * (ys_germi - ys_orig))

def coefficient_of_determination(ys_orig,ys_germi):
    y_mean_germi = [mean(ys_orig) for y in ys_orig]
    squared_error_regr = squared_error(ys_orig, ys_germi)
    squared_error_y_mean = squared_error(ys_orig, y_mean_germi)
    return 1 - (squared_error_regr/squared_error_y_mean)

#m, b = best_fit_slope_and_intercept(xs,ys)
#regression_line = [(m*x)+b for x in xs]

r_squared = coefficient_of_determination(dats, ys)

```

```

print(r_squared)

F = []
def G6( x ):
    if 0 < x < 1:
        a = int(100*( x ))
        return E[ a - 1]
    else:
        return 0
for y in Y:
    P2 = array ([G6(x)*u1(x+y) for x in X])
    F.append(integrate.simps(P2, dx = h))
#scatter(X, F, s = 1)

#N = 0.99
def germibeta(r, alfa, beta, A, N, base=10):
    fac = base**A
    num = pow((0.99-r),beta)
    den = pow(r,alfa)
    return fac*num/den
def genera_x0(F,verbose=False):
    N = 0.99
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    r = arange(0.01,0.99, h)
    lgR, lgF = log10(R), log10(F)
    V = linregress(lgR, lgF)
    if(verbose):
        print(str(V))
    m = abs(V.slope)
    b = abs(V.intercept)
    return array([b, abs(m), abs(m)])
def ajuste(F, verbose=False):
    N = 0.99
    #print("Esta es la longitud de N",N)
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    #print("Esta es la longitud de R",R)
    r = arange(0.01,0.99,h)
    x0 = genera_x0(F,verbose)
    #N = 184

```

```

    modelo = lambda r,x,y,z : germibeta(r, x, y, z, N)
    #print("Esye es lo que el modelo:", modelo)
    #print("Todavía")
    popt, pcov = curve_fit( modelo, R, F, x0, sigma=F, method='lm')
    #print("Estos son los valores de popt", popt)
    r2 = r2_score( F, modelo(array(R), popt[0], popt[1], popt[2]) )
    if(verbose):
        print(str(popt))
        print(str(sqrt(diag(pcov))))
        print(str(r2))
    return popt , r2

parametros, m_c = ajuste(F)
print("Imprimiendo los parametros:", parametros)

def valores_Modelo(parametros):
    valores_ajuste = []
    for i in X:
        v = germibeta(i, parametros[0], parametros[1],
            parametros[2], N = len(A), base = 10)
        valores_ajuste.append(v)
    return valores_ajuste
valores_del_ajuste = valores_Modelo(parametros)
#print(valores_del_ajuste)

def graficarAjuste(parametros):
    plt.figure()
    plt.plot( X, F, 'o', fillstyle='none', label='datos experimentales')
    #plt.plot( x1, dat, 'o', label='Datos')
    plt.plot(X, valores_del_ajuste, 'b-', label='Modelo ajustado de ')
    plt.title('Ajuste germibeta')
    plt.legend(loc='best')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.tight_layout()
    #plt.savefig('fig6.png')
    plt.show()

graficarAjuste(parametros)

```

```

ys = array([m for m in valores_del_ajuste])
xs = array([m*0.01 for m in range(1,99)])
dats = array([m for m in F])

def squared_error(ys_orig,ys_germi):
    return sum((ys_germi - ys_orig) * (ys_germi - ys_orig))

def coefficient_of_determination(ys_orig,ys_germi):
    y_mean_germi = [mean(ys_orig) for y in ys_orig]
    squared_error_regr = squared_error(ys_orig, ys_germi)
    squared_error_y_mean = squared_error(ys_orig, y_mean_germi)
    return 1 - (squared_error_regr/squared_error_y_mean)

#m, b = best_fit_slope_and_intercept(xs,ys)
#regression_line = [(m*x)+b for x in xs]

r_squared = coefficient_of_determination(dats, ys)
print(r_squared)

G = []
def G7( x ):
    if 0 < x < 1:
        a = int(100*( x ))
        return F[ a - 1 ]
    else:
        return 0
for y in Y:
    P2 = array ([G7(x)*u1(x+y) for x in X])
    G.append(integrate.simps(P2, dx = h))
#scatter(X, G, s = 1)

#N = 0.99
def germibeta(r, alfa, beta, A, N, base=10):
    fac = base**A
    num = pow((0.99-r),beta)
    den = pow(r,alfa)
    return fac*num/den

```

```

def genera_x0(F,verbose=False):
    N = 0.99
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    r = arange(0.01,0.99, h)
    lgR, lgF = log10(R), log10(F)
    V = linregress(lgR, lgF)
    if(verbose):
        print(str(V))
    m = abs(V.slope)
    b = abs(V.intercept)
    return array([b, abs(m), abs(m)])
def ajuste(F, verbose=False):
    N = 0.99
    #print("Esta es la longitud de N",N)
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    #print("Esta es la longitud de R",R)
    r = arange(0.01,0.99,h)
    x0 = genera_x0(F,verbose)
    #N = 184
    modelo = lambda r,x,y,z : germibeta(r, x, y, z, N)
    #print("Esye es lo que el modelo:", modelo)
    #print("Todavía")
    popt, pcov = curve_fit( modelo, R, F, x0, sigma=F, method='lm')
    #print("Estos son los valores de popt", popt)
    r2 = r2_score( F, modelo(array(R), popt[0], popt[1], popt[2]) )
    if(verbose):
        print(str(popt))
        print(str(sqrt(diag(pcov))))
        print(str(r2))
    return popt , r2

parametros, m_c = ajuste(G)
print("Imprimiendo los parametros:", parametros)

def valores_Modelo(parametros):
    valores_ajuste = []
    for i in X:

```

```

    v = germibeta(i, parametros[0], parametros[1],
                  parametros[2], N = len(A), base = 10)
    valores_ajuste.append(v)
    return valores_ajuste
valores_del_ajuste = valores_Modelo(parametros)
#print(valores_del_ajuste)

def graficarAjuste(parametros):
    plt.figure()
    plt.plot( X, G, 'o', fillstyle='none', label='datos experimentales')
        #plt.plot( x1, dat, 'o', label='Datos')
    plt.plot(X, valores_del_ajuste, 'b-', label='Modelo ajustado de ')
    plt.title('Ajuste germibeta')
    plt.legend(loc='best')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.tight_layout()
    #plt.savefig('fig6.png')
    plt.show()

graficarAjuste(parametros)

ys = array([m for m in valores_del_ajuste])
xs = array([m*0.01 for m in range(1,99)])
dats = array([m for m in G])

def squared_error(ys_orig,ys_germi):
    return sum((ys_germi - ys_orig) * (ys_germi - ys_orig))

def coefficient_of_determination(ys_orig,ys_germi):
    y_mean_germi = [mean(ys_orig) for y in ys_orig]
    squared_error_regr = squared_error(ys_orig, ys_germi)
    squared_error_y_mean = squared_error(ys_orig, y_mean_germi)
    return 1 - (squared_error_regr/squared_error_y_mean)

#m, b = best_fit_slope_and_intercept(xs,ys)
#regression_line = [(m*x)+b for x in xs]

r_squared = coefficient_of_determination(dats, ys)
print(r_squared)

```



```

H = []
def G8( x ):
    if 0 < x < 1:
        a = int(100*( x ))
        return G[ a - 1 ]
    else:
        return 0
for y in Y:
    P2 = array ([G8(x)*u1(x+y) for x in X])
    H.append(integrate.simps(P2, dx = h))
#scatter(X, H, s = 1)

#N = 0.99
def germibeta(r, alfa, beta, A, N, base=10):
    fac = base**A
    num = pow((0.99-r),beta)
    den = pow(r,alfa)
    return fac*num/den
def genera_x0(F,verbose=False):
    N = 0.99
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    r = arange(0.01,0.99, h)
    lgR, lgF = log10(R), log10(F)
    V = linregress(lgR, lgF)
    if(verbose):
        print(str(V))
    m = abs(V.slope)
    b = abs(V.intercept)
    return array([b, abs(m), abs(m)])
def ajuste(F, verbose=False):
    N = 0.99
    #print("Esta es la longitud de N",N)
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    #print("Esta es la longitud de R",R)
    r = arange(0.01,0.99,h)
    x0 = genera_x0(F,verbose)

```

```

    #N = 184
    modelo = lambda r,x,y,z : germibeta(r, x, y, z, N)
    #print("Esye es lo que el modelo:", modelo)
    #print("Todavía")
    popt, pcov = curve_fit( modelo, R, F, x0, sigma=F, method='lm')
    #print("Estos son los valores de popt", popt)
    r2 = r2_score( F, modelo(array(R), popt[0], popt[1], popt[2]) )
    if(verbose):
        print(str(popt))
        print(str(sqrt(diag(pcov))))
        print(str(r2))
    return popt , r2

parametros, m_c = ajuste(H)
print("Imprimiendo los parametros:", parametros)

def valores_Modelo(parametros):
    valores_ajuste = []
    for i in X:
        v = germibeta(i, parametros[0], parametros[1],
            parametros[2], N = len(A), base = 10)
        valores_ajuste.append(v)
    return valores_ajuste
valores_del_ajuste = valores_Modelo(parametros)
#print(valores_del_ajuste)

def graficarAjuste(parametros):
    plt.figure()
    plt.plot( X, H, 'o', fillstyle='none', label='datos experimentales')
    #plt.plot( x1, dat, 'o', label='Datos')
    plt.plot(X, valores_del_ajuste, 'b-', label='Modelo ajustado de ')
    plt.title('Ajuste germibeta')
    plt.legend(loc='best')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.tight_layout()
    #plt.savefig('fig6.png')
    plt.show()

```

```

graficarAjuste(parametros)

ys = array([m for m in valores_del_ajuste])
xs = array([m*0.01 for m in range(1,99)])
dats = array([m for m in H])

def squared_error(ys_orig,ys_germi):
    return sum((ys_germi - ys_orig) * (ys_germi - ys_orig))

def coefficient_of_determination(ys_orig,ys_germi):
    y_mean_germi = [mean(ys_orig) for y in ys_orig]
    squared_error_regr = squared_error(ys_orig, ys_germi)
    squared_error_y_mean = squared_error(ys_orig, y_mean_germi)
    return 1 - (squared_error_regr/squared_error_y_mean)

#m, b = best_fit_slope_and_intercept(xs,ys)
#regression_line = [(m*x)+b for x in xs]

r_squared = coefficient_of_determination(dats, ys)
print(r_squared)

I = []
def G9( x ):
    if 0 < x < 1:
        a = int(100*( x ))
        return H[ a - 1]
    else:
        return 0
for y in Y:
    P2 = array ([G9(x)*u1(x+y) for x in X])
    I.append(integrate.simps(P2, dx = h))
#scatter(X, J, s = 1)

#N = 0.99
def germibeta(r, alfa, beta, A, N, base=10):
    fac = base**A
    num = pow((0.99-r),beta)
    den = pow(r,alfa)
    return fac*num/den
def genera_x0(F,verbose=False):

```

```

N = 0.99
R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

r = arange(0.01,0.99, h)
lgR, lgF = log10(R), log10(F)
V = linregress(lgR, lgF)
if(verbose):
    print(str(V))
m = abs(V.slope)
b = abs(V.intercept)
return array([b, abs(m), abs(m)])
def ajuste(F, verbose=False):
    N = 0.99
    #print("Esta es la longitud de N",N)
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    #print("Esta es la longitud de R",R)
    r = arange(0.01,0.99,h)
    x0 = genera_x0(F,verbose)
    #N = 184
    modelo = lambda r,x,y,z : germibeta(r, x, y, z, N)
    #print("Esye es lo que el modelo:", modelo)
    #print("Todavía")
    popt, pcov = curve_fit( modelo, R, F, x0, sigma=F, method='lm')
    #print("Estos son los valores de popt", popt)
    r2 = r2_score( F, modelo(array(R), popt[0], popt[1], popt[2]) )
    if(verbose):
        print(str(popt))
        print(str(sqrt(diag(pcov))))
        print(str(r2))
    return popt , r2

parametros, m_c = ajuste(I)
print("Imprimiendo los parametros:", parametros)

def valores_Modelo(parametros):
    valores_ajuste = []
    for i in X:
        v = germibeta(i, parametros[0], parametros[1],

```

```

    parametros[2], N = len(A), base = 10)
    valores_ajuste.append(v)
    return valores_ajuste
valores_del_ajuste = valores_Modelo(parametros)
#print(valores_del_ajuste)

def graficarAjuste(parametros):
    plt.figure()
    plt.plot( X, I, 'o', fillstyle='none', label='datos experimentales')
        #plt.plot( x1,          dat, 'o', label='Datos')
    plt.plot(X, valores_del_ajuste, 'b-', label='Modelo ajustado de ')
    plt.title('Ajuste germibeta')
    plt.legend(loc='best')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.tight_layout()
    #plt.savefig('fig6.png')
    plt.show()

graficarAjuste(parametros)

ys = array([m for m in valores_del_ajuste])
xs = array([m*0.01 for m in range(1,99)])
dats = array([m for m in I])

def squared_error(ys_orig,ys_germi):
    return sum((ys_germi - ys_orig) * (ys_germi - ys_orig))

def coefficient_of_determination(ys_orig,ys_germi):
    y_mean_germi = [mean(ys_orig) for y in ys_orig]
    squared_error_regr = squared_error(ys_orig, ys_germi)
    squared_error_y_mean = squared_error(ys_orig, y_mean_germi)
    return 1 - (squared_error_regr/squared_error_y_mean)

#m, b = best_fit_slope_and_intercept(xs,ys)
#regression_line = [(m*x)+b for x in xs]

r_squared = coefficient_of_determination(dats, ys)
print(r_squared)

```

```

J = []
def G10( x ):
    if 0 < x < 1:
        a = int(100*( x ))
        return I[ a - 1 ]
    else:
        return 0
for y in Y:
    P2 = array ([G10(x)*u1(x+y) for x in X])
    J.append(integrate.simps(P2, dx = h))
#scatter(X, J, s = 1)
#N = 0.99
def germibeta(r, alfa, beta, A, N, base=10):
    fac = base**A
    num = pow((0.99-r),beta)
    den = pow(r,alfa)
    return fac*num/den
def genera_x0(F,verbose=False):
    N = 0.99
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    r = arange(0.01,0.99, h)
    lgR, lgF = log10(R), log10(F)
    V = linregress(lgR, lgF)
    if(verbose):
        print(str(V))
    m = abs(V.slope)
    b = abs(V.intercept)
    return array([b, abs(m), abs(m)])
def ajuste(F, verbose=False):
    N = 0.99
    #print("Esta es la longitud de N",N)
    R = [i*0.01 for i in range(1,99)]

    #print("Esta es la longitud de R",R)
    r = arange(0.01,0.99,h)
    x0 = genera_x0(F,verbose)
    #N = 184
    modelo = lambda r,x,y,z : germibeta(r, x, y, z, N)
    #print("Esye es lo que el modelo:", modelo)
    #print("Todavía")

```

```

popt, pcov = curve_fit( modelo, R, F, x0, sigma=F, method='lm')
#print("Estos son los valores de pop", pop)
r2 = r2_score( F, modelo(array(R), pop[0], pop[1], pop[2]) )
if(verbose):
    print(str(pop))
    print(str(sqrt(diag(pcov))))
    print(str(r2))
return pop , r2

parametros, m_c = ajuste(J)
print("Imprimiendo los parametros:", parametros)

def valores_Modelo(parametros):
    valores_ajuste = []
    for i in X:
        v = germibeta(i, parametros[0], parametros[1],
            parametros[2], N = len(A), base = 10)
        valores_ajuste.append(v)
    return valores_ajuste
valores_del_ajuste = valores_Modelo(parametros)
#print(valores_del_ajuste)

def graficarAjuste(parametros):
    plt.figure()
    plt.plot( X, J, 'o', fillstyle='none', label='datos experimentales')
    #plt.plot( x1, dat, 'o', label='Datos')
    plt.plot(X, valores_del_ajuste, 'b-', label='Modelo ajustado de ')
    plt.title('Ajuste germibeta')
    plt.legend(loc='best')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.tight_layout()
    #plt.savefig('fig6.png')
    plt.show()

graficarAjuste(parametros)

ys = array([m for m in valores_del_ajuste])
xs = array([m*0.01 for m in range(1,99)])

```

```

dats = array([m for m in J])

def squared_error(ys_orig,ys_germi):
    return sum((ys_germi - ys_orig) * (ys_germi - ys_orig))

def coefficient_of_determination(ys_orig,ys_germi):
    y_mean_germi = [mean(ys_orig) for y in ys_orig]
    squared_error_regr = squared_error(ys_orig, ys_germi)
    squared_error_y_mean = squared_error(ys_orig, y_mean_germi)
    return 1 - (squared_error_regr/squared_error_y_mean)

#m, b = best_fit_slope_and_intercept(xs,ys)
#regression_line = [(m*x)+b for x in xs]

r_squared = coefficient_of_determination(dats, ys)
print(r_squared)
```


Bibliografía

- [1] Miguel Ángel García Álvarez. *Introducción a la teoría de la probabilidad I. Segundo curso*. Fondo de Cultura Económica, 2015.
- [2] M Beltrán del Río, G Cocho, and R Mansilla. General model of subtraction of stochastic variables. attractor and stability analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 390(2):154–160, 2011.
- [3] Juan Manuel Espíndola Castro. *Tectónica de placas*, 2006.
- [4] Oscar. Fontanelli Espinosa. “*The discrete generalized beta distribution : three study cases*”. (*Tesis de Doctorado*). Universidad Nacional Autónoma de México, México. Recuperado de <https://repositorio.unam.mx/contenidos/78174>, 2017.
- [5] BV Gnedenko, AN Kolmogorov, BV Gnedenko, and AN Kolmogorov. Limit distributions for sums of independent. *Am. J. Math*, 105, 1954.
- [6] Ramon Ferrer i Cancho and Ricard V Solé. Least effort and the origins of scaling in human language. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 100(3):788–791, 2003.
- [7] Kiyosi Itô et al. *An Introduction to Probability Theory*. Cambridge University Press, 1984.
- [8] Thomas S Kuhm. La estructura de las revoluciones científicas. *Traducción: Agustín Contín*. *Breviarios*, 213, 1971.
- [9] Wentian Li. Spatial 1/f spectra in open dynamical systems. *EPL (Europhysics Letters)*, 10(5):395, 1989.
- [10] N Gregory Mankiw. *Macroeconomía*. Antoni Bosch editor, 2014.
- [11] Ricardo Mansilla, Elke Köppen, Germinal Cocho, and Pedro Miramontes. On the behavior of journal impact factor rank-order distribution. *Journal of informetrics*, 1(2):155–160, 2007.

- [12] Jean-Claude Margueron. *Los mesopotámicos*. Anaya-Spain, 1996.
- [13] Sergio F Martínez. *De los efectos a las causas: Sobre la historia de los patrones de explicación científica*. 1997.
- [14] Gustavo Martínez-Mekler, Roberto Alvarez Martínez, Manuel Beltrán del Río, Ricardo Mansilla, Pedro Miramontes, and Germinal Cocho. Universality of rank-ordering distributions in the arts and sciences. *PLoS One*, 4(3), 2009.
- [15] Kim McDonald. Physicist proposes new way to rank scientific output. *Phys Org*, 2005.
- [16] Rodolfo Mondolfo. *Breve historia del pensamiento antiguo*, volume 143. Editorial Losada, 1953.
- [17] Mark EJ Newman. Power laws, pareto distributions and zipf's law. *Contemporary physics*, 46(5):323–351, 2005.
- [18] Michael Parkin and Eduardo Loria. Macroeconomía. novena. *Estado de México. Recuperado a partir de www.pearsoneducacion.net/parkin*, 2010.
- [19] Luis Rincón. *Curso intermedio de probabilidad*. UNAM, Facultad de Ciencias, 2007.
- [20] Luis Rincón. Introducción a los procesos estocásticos. *Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM*, 2012.
- [21] Luis Rincón. *Introducción a la probabilidad*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2014.
- [22] Enrique Ruelas, Ricardo Mansilla, Javier Rosado, and Luis García Barrios. *Las ciencias de la complejidad y la innovación médica: ensayos y modelos*. Unam, 2006.
- [23] Francisco Vidal Sánchez. Los terremotos y sus causas. In *El estudio de los terremotos en Almería*, pages 17–38. Instituto de Estudios Almerienses, 1994.
- [24] María del Carmen Cabrera Santana and Francisco José Pérez Torrado. Funcionamiento del sistema tierra: El paradigma de la tectónica de placas.

- [25] Octavio Eduardo. Vizcaya Xilotl. “*Leyes de Potencia de dos colas*”. (*Tesis de Licenciatura*). Universidad Nacional Autónoma de México, México., 2009.
- [26] Roberto Carlos. Álvarez Martínez. “*Transiciones orden-desorden en dinámicas en conflicto vía la función beta generalizada en rango-frecuencia*”. (*Tesis de Doctorado*). Universidad Nacional Autónoma de México, México. Recuperado de <https://repositorio.unam.mx/contenidos/74082>, 2012.