UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Ideas para mejorar la enseñanza del Cálculo y el Álgebra en el bachillerato

TESIS

Que para optar por el grado de
Maestra en docencia para la educación media superior (Matemáticas)

Presenta
Magdalena María Bernardette Maurer Spitalier

Tutor: Dr. Carlos Torres Alcaraz
Facultad de Ciencias

Ciudad Universitaria, CDMX, marzo, 2023

Agradezco profundamente al Dr. Carlos Torres Alcaraz el tiempo y el empeño que dedicó a la dirección de mi tesis.

A mis tres hijos

A mis tres nietos

Tesis

Magdalena M. B. Maurer Spitalier

Prefacio

El 15 de abril de 2017 apareció en internet una curiosa noticia proveniente del MIT relativa a la desobediencia:

> El MIT [Massachusetts Institute of Technology] premiará a los desobedientes[1]
>
> El Media Lab crea un premio de 250.000 dólares para quienes rompan las reglas porque "no puedes cambiar el mundo siendo obediente".
>
> Tanto Zuckerman (Ethan Zuckerman, director del MIT Center for Civic Media) como Ito (Joichi Ito, director del MIT Media Lab) han hecho referencia a Martin Luther King, Ghandi (sic) o Copérnico como ejemplos de personas que tuvieron que forzar las normas de su tiempo para el bien social y que, de estar vivas, podrían ser candidatos al recibir el nuevo galardón.
>
> …es posible nominar a "cualquier persona viva o grupo que esté o haya estado implicado en actos de desobediencia responsable, honrada y ética a la autoridad con el objetivo de beneficiar a la sociedad"

¿Qué tiene que ver el tema de la desobediencia con la enseñanza de las matemáticas? Notoriamente el MIT se ha dado cuenta del valor de la desobediencia, en cuyo tenor voy a escribir esta tesis. Claro, desde una actitud de desobediencia responsable, con el objeto ya señalado: beneficiar a la sociedad.

---

1 http://elpais.com/elpais/2017/04/10/ciencia/1491837459_077361.html?id_externo_rsoc=FB_CM

En cuanto a mi desobediencia, tiene dos niveles: uno de formato y otro mucho más profundo: el lector a quien se dirige el texto. El punto de desobediencia es que no voy a elaborar una tesis dentro de los marcos más o menos establecidos de tomar un tema de clase, organizar cierta información (un tanto irrelevante) para los alumnos y con ello crear una secuencia didáctica que los haga asimilar un conocimiento formal en cuya construcción pueden muy bien no participar. Mi postura es diferente: las bases de ese conocimiento ya están en el alumno y la labor del (de la) profesor(a) es ayudarlo, conducirlo a que tome consciencia de ello y le de forma matemática. El beneficio que busco es no caer en ese lugar común tan frecuente en la MADEMS y exponer aquí los lineamientos de un curso que he forjado a lo largo del tiempo y que tomó su forma final durante el periodo en que cursé la maestría y gracias a ella.

Mi propósito es ofrecer una manera diferente de concebir e impartir las clases de matemáticas en el nivel Preparatoria, comenzando por la ciudad de México.

En efecto: lo que he podido observar que se espera de una tesis de MADEMS es una secuencia didáctica que, dentro del esquema de clases actual el cual, *grosso modo*, me hace pensar en la Edad Media, debo detallar cómo trataría yo un tema específico: cómo haría entrar en la mente de la alumna o el alumno, una *información* que no tiene en este momento.

Mi punto de vista es otro: de lo que se espera que yo "enseñe" al alumno, él ya tiene prefiguradas algunas nociones a las que hay que dar forma matemática; de allí que mi tesis no quepa dentro del esquema de lo que se acostumbra llamar "secuencia didáctica". Lo que voy a tratar aquí -propiamente, lo que propondré a los maestros de matemáticas del nivel de preparatoria en el curso que he ido perfeccionando- es, no que se esmeren en trasmitir al alumno ciertos conocimientos, sino que se esfuercen ellos, los maestros, por *comprender* las matemáticas (que en algunos casos implicará la creación en sus mentes del concepto *“comprender”* por oposición a “repetir”, “recordar”) sino además, un cambio en la concepción de sus clases, un cambio acerca de la didáctica y la actitud que de ahí deriva. En lo que sigue

- detallaré las ideas fundamentales de mi proyecto,
- hablaré extensamente de la filosofía que dio cuerpo a mis ideas y
- daré algunos ejemplos concretos sobre la manera de tratar, desde esta concepción que propongo al maestro, temas específicos del programa de los dos primeros semestres del bachillerato según la ENP.

El otro nivel en que esta tesis desobedece las normas es, como decía yo, mucho más profundo. En efecto: una tesis se escribe para convencer a los miembros de un sínodo de que quien la escribe está capacitado(a) para llevar a cabo el trabajo que a partir del momento estará autorizado a hacer: diseñar edificios, cuidar la salud de futuros pacientes, litigar, cultivar vegetales, en fin: en su caso, señores miembros del sínodo, ustedes certificarán que a partir del día de la titulación habrá una maestra de nivel Bachillerato que es capaz de hacer su labor mejor que antes; concretamente tendrá más elementos para ello que antes de haber hecho la maestría.

El lenguaje que se utiliza en esta tesis debería ser entonces uno que aprovecha la formación matemática de quien lo escribe y de aquéllos a quienes se dirige, los miembros del sínodo, con todas las ventajas que este lenguaje provee en términos de exactitud, de referencias a resultados que todos conocemos, de agilidad en los pasos deductivos y demás.

Pero lo que ofrezco a la sociedad a cambio de todo el esfuerzo que ella ha invertido en mi persona no es dar mejores clases de matemáticas a los alumnos (30, 60, 90 cada semestre) sino preparar maestros que enseñen bien matemáticas a los alumnos. Sobra decir que el número de alumnos beneficiados será, hablando solamente del primer semestre después de que mis alumnos tomaron el curso, del orden del cuadrado de la cantidad de maestros que yo prepare o mucho mayor según la razón de los tamaños de unos y otros grupos.

Si ustedes, señores sinodales, tienen la encomienda de verificar que la enseñanza de las matemáticas mejore, pueden estar seguros de que eso ocurrirá a mayor velocidad en el caso de esta tesis que en el caso de otras que habrán ustedes tenido en sus manos dentro del programa de MADEMS.

Hasta aquí no hemos visto dónde estaría la antes mencionada desobediencia, que ahora explicaré: se refiere al lenguaje. En efecto: este mismo documento que estoy presentando para ustedes deberá servir más tarde para convencer a profesores de matemáticas de bachillerato de que les conviene asistir a mi curso y a directores de escuelas de nivel medio superior de que les conviene enviar a mi curso a sus profesores de matemáticas.

Ahora bien: si voy a dirigir un mismo texto a los dos conjuntos de lectores, los sinodales y los futuros alumnos, entonces debería yo pedir a cada una de las dos partes que se moviera "al punto medio del segmento que los une". No obstante ellos, los profesores y los directores, no pueden moverse (es precisamente por lo que pretendo darles mi curso) de manera que tendré que pedir a ustedes, señores sinodales, que sean quienes hagan todo el trabajo: que lean este texto desde la posición de un profesor de bachillerato o de un director de escuela que no solamente no entiende las matemáticas (como ocurre con gran frecuencia) sino que está atemorizado (como sucede a veces) de que su falta de conocimiento sea puesta en evidencia.

El primer paso deberá ser entonces romper ese miedo y eso no se logrará si no hay un lenguaje coloquial a lo largo del texto; por ello decidí escribir esta tesis en ese tenor.

Introducción

Si usted, lector, es matemático (no ingeniero, ni pedagogo, ni actuario, ni ninguna otra cosa), entonces no es necesario explicarle que la enseñanza de las matemáticas es radicalmente diferente de la de otras materias y espero que lea este trabajo en su totalidad, si así lo desea, pero particularmente la descripción de mi propuesta.

Si usted no tiene la formación de un matemático, pero se dedica a la enseñanza de ellas, entonces tal vez no conozca la razón de la dificultad que tienen los alumnos, si bien tendrá la experiencia del conflicto en que se encuentran muchos de ellos ante la tarea de aprenderlas: enseñar matemáticas es muy diferente de enseñar otras cosas. Usted se halla, en esos términos, en una posición equiparable a la de casi todos nuestros connacionales. Efectivamente hoy por hoy en nuestro país muy pocos adultos comprenden la esencia de la tarea pedagógica en matemáticas; los directores de escuelas preparatorias no son una excepción. No podemos recriminar con excesiva dureza a los mencionados directores dicha falta de comprensión, ya que el problema es sistémico y transgeneracional; es decir, hace ya décadas que las características generales del pacto social, del modelo de producción y de las instituciones encargadas de velar por la calidad de la educación se constituyen en *un sistema de incentivos perversos* en el cual ninguno de los agentes (para usar un término de la teoría de juegos) percibe una ventaja real en tratar de mejorar la situación. Es decir: los maestros no pueden aplicar exámenes de más alto nivel porque los alumnos no los pasarían; los directores no pueden permitir que el número de reprobados sea demasiado alto porque los padres se quejarían; los padres no pueden permitirse que sus hijos repitan año escolar porque necesitan que entren a trabajar y los patrones, amparados en muchos casos por instituciones cuyo interés no es precisamente el desarrollo de los pueblos, por lo general lo último que quieren son empleados capaces de plantearse un problema de manera crítica y determinar si tiene o no solución y bajo qué condiciones.

Mi proyecto se inscribe así de pleno derecho dentro de la misión humanista de nuestra Universidad. Es a los mencionados directores de preparatorias, atrapados en el punto álgido de la contradicción entre el Estado (la SEP) y las personas (los padres de familia) a quienes estoy obligada a convencer de las bondades de mi curso, si quiero que envíen a sus maestros de matemáticas a tomarlo. En esos términos nos interesa mucho que usted se proponga leer la parte de este trabajo que fue escrita para quienes no son matemáticos.

La parte del texto que no fue escrita para ser accesible al público en general está señalada mediante una barra del lado derecho como la que aparece aquí. Los párrafos que la tienen pueden requerir de una formación que de ninguna manera puedo presuponer en el lector común y los señalo así por si usted no desea leerlos.

Este documento se integra de las siguientes partes:

- En el Capítulo 1 hago consideraciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, desde un punto de vista general y particularmente en el nivel medio superior. Hago notar todo lo que se pierde en la educación de los jóvenes por la mala calidad de esa enseñanza.
- En el Capítulo 2 describo la relación de mi punto de vista sobre la enseñanza de las matemáticas con otros que han aparecido a lo largo de la historia.
- En el Capítulo 3 hago una descripción somera de lo que, en términos de gusto por la matemática en alumnos de preparatoria de la Ciudad de México he decantado en años de experiencia con grupos muy pequeños de ellos y analizo algunas causas de la complicada situación actual en este campo.
- En el Capítulo 4 presento una síntesis de la filosofía educativa de Rudolf Steiner como una solución a estos problemas.

- En el Capítulo 5 hago un análisis de dicha filosofía con respecto a los dos elementos principales del problema: el alumno y el maestro.
- En el Capítulo 6 hago una descripción del curso que preparé durante la maestría.
- En el capítulo 7 doy algunas muestras de clases sobre temas específicos del programa del nivel bachillerato que se sigue en distintas instituciones.
- En el capítulo 8 escribo brevemente algunas conclusiones que se siguen de este trabajo.

Capítulo 1. La enseñanza de las matemáticas y sus repercusiones en el contexto de la transformación social.

En esta tesis, por enseñar matemáticas entiendo conducir al estudiante a la comprensión general de cada uno de los temas cubiertos, lo que significa que sea capaz, en el corto plazo, de

- plantear en términos claros problemas relacionados con dicho tema y establecer por sí mismo qué resultados se requiere utilizar en cada caso para resolverlos,
- percibir analogías y diferencias con otros problemas que resulten suficientemente similares al primero,
- desarrollar su imaginación tratando de idear maneras de resolver un problema dado,
- explicar, a su vez, lo que ha comprendido de dicho tema.

Resulta sumamente importante señalar que, de acuerdo a esta concepción, las matemáticas presentan una particularidad epistémica muy especial: saber matemáticas implica ser capaz de comunicarlas, (es decir enseñarlas) y entonces

Enseñar matemáticas resulta equivalente a *enseñar a enseñar* matemáticas.

A más largo plazo lo que espero de un buen curso de matemáticas es que capacite al alumno para que

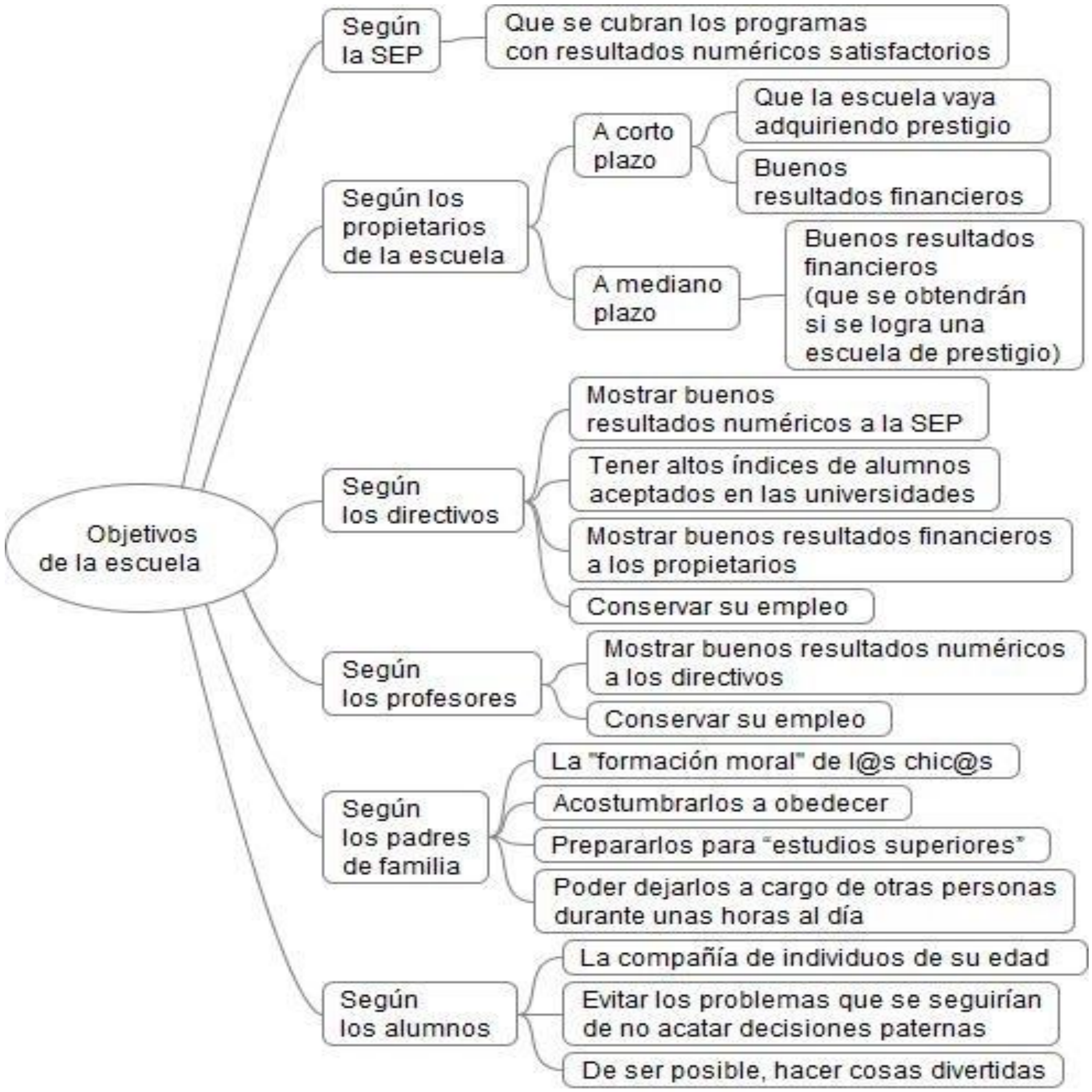
- aproveche la capacidad de razonamiento lógico de modo que sea capaz de construir una filosofía personal que le sirva de guía en la toma de decisiones.

¿Este objeto se logra, en general, en los cursos de matemáticas de preparatoria? Antes de contestar esta pregunta, definiré tres términos que usaré a lo largo de este escrito: entenderé por *"el alumno"*, *"el profesor"* y *"la clase"*, prototipos de dichas categorías, es decir: aunque no puedo esperar que los alumnos o los profesores o las clases sean exactamente como los imagino, me refiero a un alumno, a un profesor y a una clase hipotéticos *suficientemente parecidos* a los alumnos, a los profesores y las clases concretas como para que las observaciones hechas con el modelo resulten de utilidad.

Volviendo a nuestra pregunta: ¿se logra en la preparatoria enseñar matemáticas? En los largos años de experiencia con alumnos de ese nivel puedo afirmar que no es así. La muestra con la que tuve contacto no es representativa en cuanto a los alumnos pues trabajé solamente con quienes tenían problemas en sus respectivas clases de matemáticas; no obstante, sí tuve, a través de ellos, una visión general indirecta de lo que un profesor de matemáticas de preparatoria entiende por enseñar matemáticas. En la mente del profesor eso tiene que ver con llevar al alumno a ser capaz de manipular símbolos, lo que se llama *capacidad algorítmica,* responder cierto tipo de preguntas, resolver cierto tipo de problemas rutinarios (v.g. sustituyendo valores en una fórmula) lograr calificaciones aprobatorias en exámenes y de ninguna manera está eso relacionado con su capacidad de <u>comprender</u>, experiencia que las más de las veces, ni el mismo profesor ha tenido.

¿Cómo es que hemos llegado a esta situación? En casi cualquier actividad <u>el objetivo buscado es más o menos claro</u> y es el mismo para todos los miembros del equipo. Puede ser preparar la comida, derrotar al equipo contrario, disfrutar escuchando música, encontrar una casa para rentar, etc. Ese objetivo no siempre es explícito pero está claro en las mentes de los participantes, tanto en la descripción general de la actividad como en la lista de "sub-tareas" que la integran. En la formación académica de los jóvenes no ocurre así. Por lo pronto no existe un objetivo común y a veces ni siquiera todos los miembros del equipo tienen claro un objetivo.

Presento aquí con respecto a los objetivos de la educación un mapa mental que forma parte de otro más grande que aparecerá más adelante.



En "Los demasiados libros", Gabriel Zaid imagina que tratamos de explicarles el objetivo del futbol a unos marcianos. Algún marciano podría preguntar, según Zaid: "Si el objetivo es meter un máximo número de goles, ¿por qué no instalar una especie de cañón-ametralladora frente a cada portería, que dispare el máximo número de balones por unidad de tiempo? Otra confusión posible respecto del fútbol queda consignada en el antiguo chiste que se atribuye a Jorge Luis Borges: "A mí me choca que se estén peleando todos los jugadores por un solo balón cuando se les podría dar uno a cada uno". En ambos casos el objetivo del fut se ha perdido de vista y se hacen sugerencias para alcanzar logros parciales que desde un punto de vista global no tienen sentido.

Otro ejemplo viene de la tradición sufi, encargada de transmitir una sabiduría, a decir de ellos mismos, sumamente profunda y sutil. Una de las herramientas didácticas más clásicas de dicha tradición son los cuentos alegóricos. Uno de ellos nos habla de un viajero que recorrió muchos lugares enseñando a las personas a hacer café. Lamentablemente, en su ausencia, y con el paso de los siglos, en cada lugar se fue perdiendo la comprensión de uno u otro de los detalles clave del procedimiento.

- En uno de los países visitados, por ejemplo, se había llegado a olvidar que se necesitaba fuego.
- En otros se hacían los movimientos con las herramientas pero sin agua ni café.
- En otro más se limitaban a honrar la memoria del viajero que les había enseñado a hacer el café.
- En algunos lugares llevaban a cabo el proceso completo pero con otro grano, lo cual resultaba en la preparación de un veneno mortal. Grandes eruditos escribían voluminosos tratados sobre el sentido filosófico de terminar la vida tomando este veneno y no otro.
- Había algún otro en el que todo el proceso era correcto, incluyendo la selección y el tostado de los granos de café, excepto que la bebida obtenida era considerada un mero residuo y simplemente desechada.

Lo grave en los pasados ejemplos es que se sigue trabajando para lograr un fin pero el fin primero ya se perdió, ya se olvidó.

Eso exactamente es lo que sucede en “la clase” de matemáticas. ¿Qué podemos observar allí?

- Durante la clase el profesor se esfuerza por que los alumnos permanezcan sentados y atentos, cosa poco natural en niños y jóvenes.

- El profesor da ciertas explicaciones (algunas sobre qué son ciertas cosas, otras sobre para qué sirven ciertas cosas y, las más de las veces, otras sobre cómo se llevan a cabo ciertos procedimientos).
- Cada cierto tiempo el profesor hace un examen en el que presenta a los alumnos ciertas preguntas o, como se ha dado en llamarlas, reactivos.
- De acuerdo a las respuestas dadas por los alumnos éstos son clasificados con una escala numérica.
- Dicha escala de calificaciones determina en cierta medida las perspectivas del futuro de los alumnos.
- Los padres de los alumnos quieren que las calificaciones de ellos sean buenas.
- Los alumnos comprenden que de acuerdo a las reglas no escritas de este juego, si sus calificaciones son malas van a ser presionados, reprendidos, castigados o calificados como incapaces por sus padres y maestros.

Como en el relato de la preparación del café, el objetivo del estudio de las matemáticas está totalmente perdido y en cambio esta variedad de procesos que recién describí da lugar a una variedad más o menos análoga de confusiones posibles. Por ejemplo: una de ellas, confesada con pesar por los maestros en algunos casos, es que el único objetivo de la escuela es tener a los jóvenes vigilados y verificar que no se dañen entre sí ni dañen la propiedad ajena.

Es todavía más común que se considere que el objetivo de “la clase” es lograr pasar el examen; esto constituye un grado de confusión un poco menor pues supone volver a los alumnos capaces de dar por sí mismos las respuestas a las preguntas del examen. Esta concepción está un poco más cerca de ser la correcta, pero todavía deja un amplio margen a la operación de métodos pedagógicos basados en la memoria y la mecanización irreflexiva. En ocasiones, además, esto hace que padres y alumnos recurran a instituciones engañosas donde obtienen de antemano la serie de respuestas que hay que dar en uno u otro examen, dando al alumno una primera impresión de que no se puede vivir la vida fuera del autoengaño.

Hablemos ahora del engaño: en nuestro país no solamente se hacen trampas (mecánicos que cobran de más o no hacen correctamente la reparación del auto, profesores de inglés que no hablan inglés, diputados que no saben cuántos artículos hay en nuestra constitución política, sobornos a diestra y siniestra y muchos otros ejemplos) sino que además eso se considera “normal” e incluso la persona común tiene el permiso social de jactarse de trampas muy grandes que haya logrado hacer. ¿Somos esencialmente más perversos que los nacionales de otros países?

No: yo, como J. J. Rousseau, pienso que "El hombre es bueno por naturaleza; es la sociedad la que lo corrompe". Uno de los problemas aquí es que los (las) jóvenes tienen contacto con adultos, concretamente sus profesores (incluyendo los de matemáticas), quienes oscuramente se dan cuenta de que <u>no conocen</u> su materia (nuevamente, en particular los de matemáticas) y de que por lo tanto están fingiendo, haciendo trampa. A <u>casi todos los jóvenes</u> se les da ese mensaje: “todo el mundo hace trampa: tal vez no es lo mejor pero con frecuencia es lo único que se puede hacer”.

Desde luego no nos referimos a <u>todos</u> los profesores de matemáticas. Algunos -sin duda ustedes que están dispuestos a seguir estudiando- tienen la convicción de que sus cursos pueden mejorar. Esperamos que así sea, en un sentido muy profundo, puesto que lo que propondremos en nuestro curso no es un cambio en el método para dar la clase sino uno en <u>la concepción misma</u> de lo que es una clase.

Sin embargo muchos otros profesores, muchos, necesitan ser informados de estos esfuerzos por prepararlos para que sean capaces de enviar a la vida a muchachos seguros de sí mismos, de sus capacidades de comprender y de hacer preguntas.

Pensamos que estos profesores son tan numerosos que en este texto nos atreveremos a llamar “<u>profesor común</u>” al profesor de ese tipo, víctima de un sistema educativo mal diseñado. En efecto: si dicho “profesor común” no da mejores cursos de matemáticas, ello puede deberse a varias causas, algunas de las cuales describo aquí:

- No ha tenido la oportunidad de conocer esta otra concepción de lo que es una clase de matemáticas y menos de ir generando desde esa concepción un método para llevarla a cabo puesto que las clases de matemáticas que él recibió fueron como las que él mismo imparte.
- Los sueldos que percibe son de tal manera reducidos que lo fuerzan a dar un gran número de horas de clase y esa misma sobrecarga de trabajo le impide dedicar algunas horas a su propia formación personal.
- Mucho menos tendrá, en esa urgencia en que vive, la oportunidad de preguntarse cómo se inserta su propia actividad en el marco de lo que se podría llamar "educar" a los alumnos y qué es lo que realmente significa "educar"

¿Acaso educar no es, entre otras cosas, formar personas moralmente confiables, con un sentido del honor y de la dignidad? Eso, en muchas de las escuelas preparatorias en la Ciudad de México, no se está logrando.

Por ello cuando hablo de que mejore en el país la enseñanza de las matemáticas me interesan dos grupos de personas: uno, el de <u>los alumnos</u> de preparatoria para quienes deseo que no sean maltratados por sus profesores y que además aprendan matemáticas; otro el de <u>los profesores</u>, a quienes pretendo beneficiar no solamente en el aspecto académico de su actividad docente, sino también en el plano moral pues considero que deben estar orgullosos de su labor y juntos podemos lograrlo. No olvidemos que el profesor es un modelo a seguir para los alumnos que pasan por esta etapa de su desarrollo, en la que son tan fácilmente moldeables por los ejemplos de los adultos con que tratan.

Hablábamos de mecánicos de autos, de diputados y de actividades que no se hacen "bien" en México. Una gran excepción a esta tristísima regla en el país son las cocinas económicas; si elegimos uno de los muy pequeños restaurantes que abundan en la Ciudad de México con solamente dos opciones de menú, en una grandísima mayoría de los casos podemos confiar en que la comida estará bien preparada y sabrosa. ¿Por qué allí sí se hacen bien las cosas? Yo presumo que se debe a que las cocineras de allí trabajan con orgullo y con amor por su trabajo. Si el "profesor común" de matemáticas de preparatoria tuviera esos sentimientos con respecto al suyo las cosas serían diferentes en la educación matemática en esta ciudad.

¿Y cómo lograr que este profesor se sienta orgulloso de su trabajo? ¿Y que lo haga con amor? Yo pienso que las matemáticas mismas, cuando se entienden, establecen en quien las estudia una impresión de estar *haciendo las cosas bien,* lo cual más tarde redunda en una actitud de agradecimiento hacia ellas.

¿Y podemos asegurar que los profesores que tomen nuestro curso van a estudiar matemáticas? Por el momento, no, pero estarán dando los primeros pasos en la dirección correcta.

Recibirán, durante el curso, un planteamiento muy distinto a los que conocen; verán una <u>concepción</u> totalmente nueva para ellos de lo que es una clase de matemáticas en la que <u>se buscan preguntas en lugar de respuestas</u>. Eso, sin duda, en algunos casos modificará la dirección de sus clases, desde que ellos las preparan hasta que diseñan modos de conocer los avances del alumno y los aplican, pero eso no cambiará las condiciones laborales en las que se desempeñan y no será posible que dispongan del tiempo necesario para la reflexión.

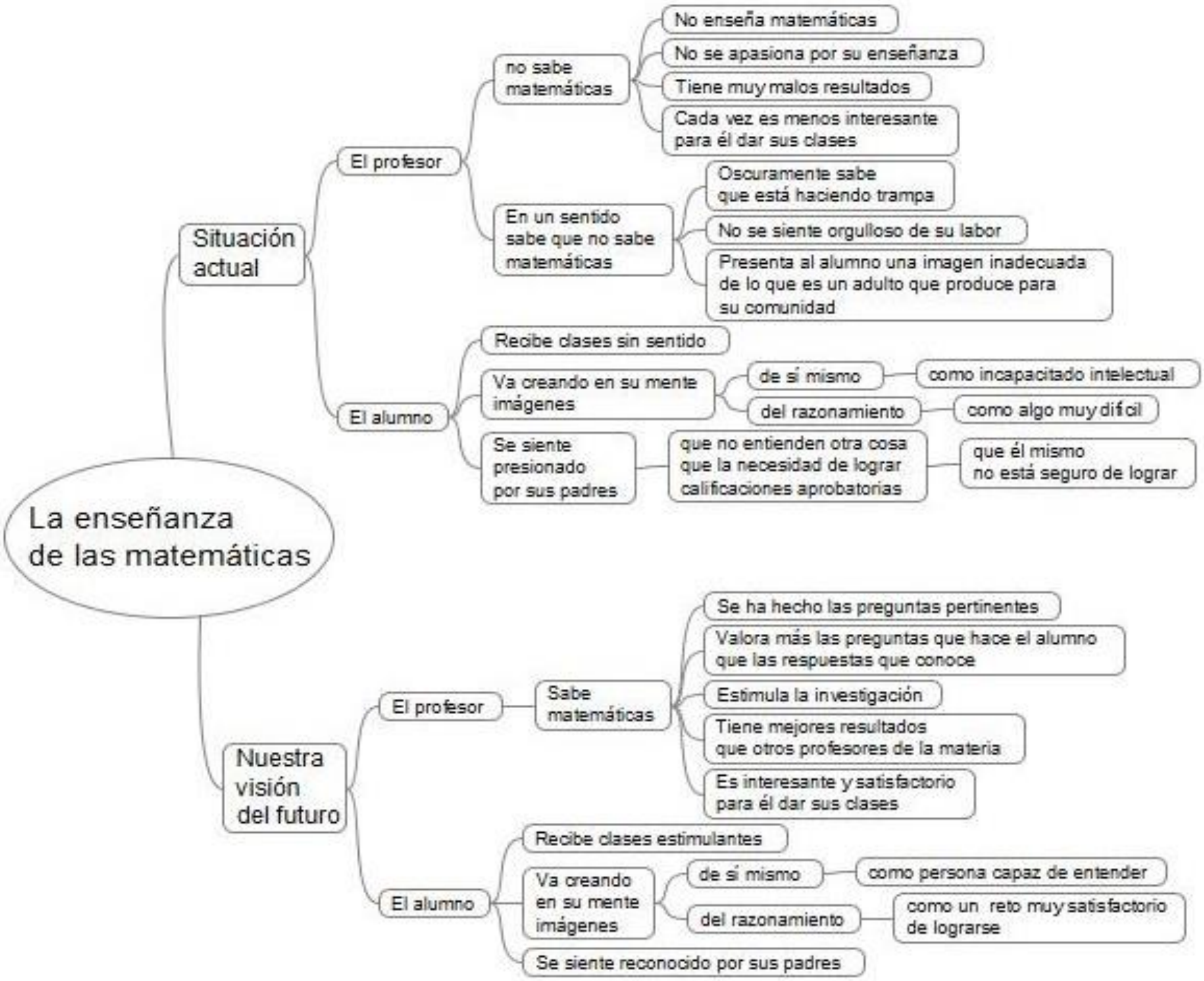
La gran diferencia es que ellos también comenzarán a hacerse preguntas y poco a poco la sociedad les devolverá el respeto (y el sueldo) que merece quien forma a las generaciones futuras.

Nuestra labor durante el curso será, entonces, simplemente lograr despertar en el maestro, -nuestro alumno- el interés superficial de quien todavía no entiende nuestra propuesta y retener su atención hasta que logre un grado de comprensión que lo mueva a seguir trabajando en el tema. Así, si vamos a tratar un tema específico como podría ser “La pendiente de una recta”, en la primera parte de la clase presentaremos a los alumnos (sin ninguna solemnidad y sin el afán de suponer que se trata de algo muy útil o importante) un problema en una situación “real” y que para su solución requiere que se pueda conocer la pendiente de una recta dados dos puntos por los que pasa o cualquier otro conjunto de datos que determinen la recta.

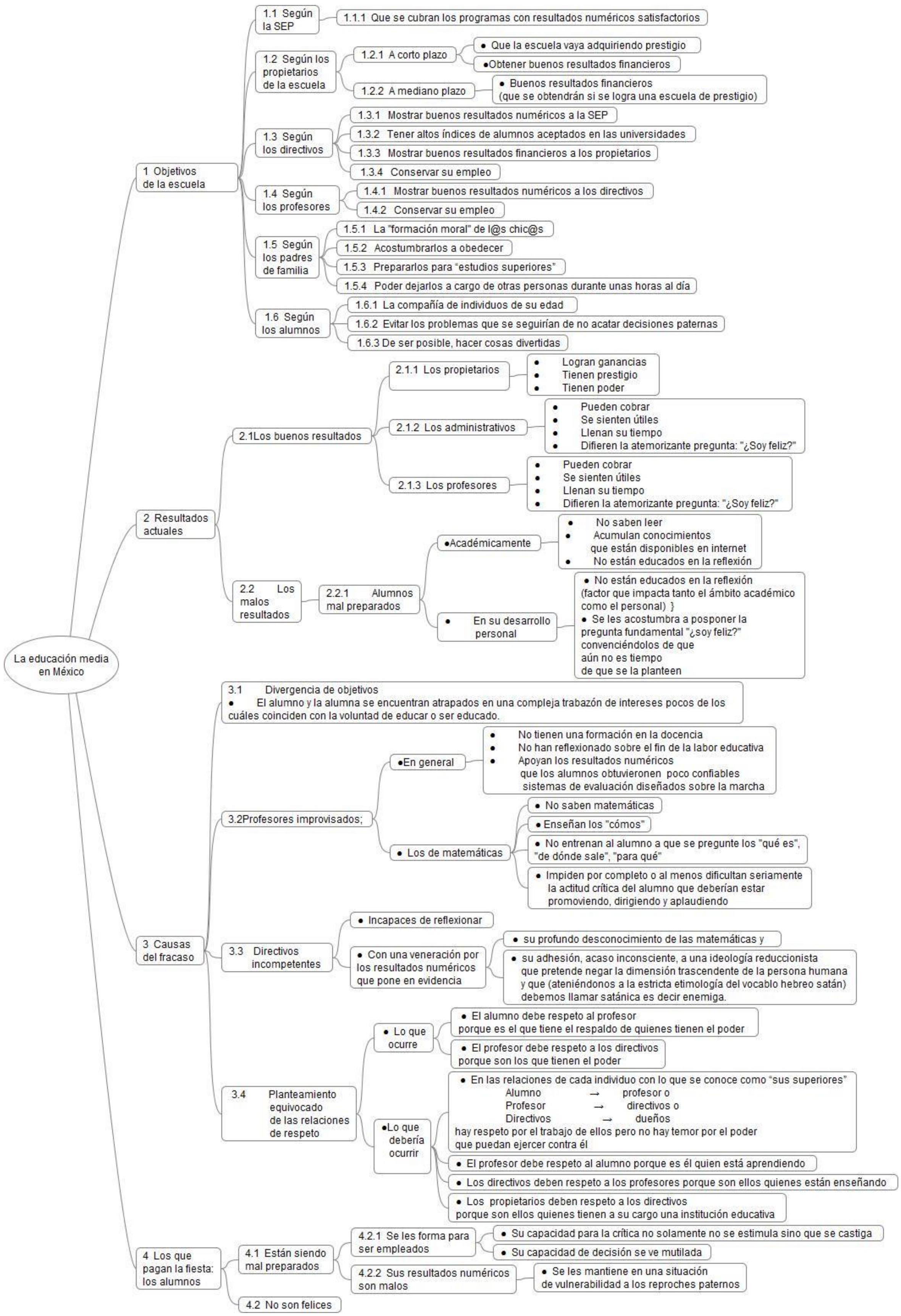
Estaremos, mis colaboradores y yo misma, trabajando durante el curso en dos niveles: en uno de ellos nuestro colega, el profesor de profesores, “fingirá” que no conoce el tema -en este caso “La pendiente de una recta”- y conducirá una clase en la que él mismo titubea o se equivoca y será necesario que los “alumnos” (los profesores de preparatoria) propongan soluciones o corrijan los “errores” de su propio “profesor”.

En otro nivel nuestro alumno, el profesor de preparatoria, observará la clase para extraer el modelo en el que hay una parte de actuación. Mi reto es que los resultados obtenidos en mi clase sean suficientemente buenos como para mover al profesor a imitar en sus propias clases esa forma de presentar problemas en lugar de presentar resultados, en espera de que sus alumnos le hagan preguntas (o se hagan ellos mismos preguntas) en vez de ofrecer él mismo respuestas, mostrándoles la manera en que la humanidad fue encontrando resultados matemáticos.

Presento aquí un árbol comparativo de dos momentos de la enseñanza de las matemáticas vistos desde el punto de vista del alumno y del maestro. Obviamente no describo lo que ocurre en todas las escuelas pero sí en muchas, muchísimas de ellas.



Y aquí, una visión más amplia y más profunda del mismo problema porque toma en cuenta los principales factores del negocio de la educación académica.


La educación media en México
1 Objetivos de la escuela
1.1 Según la SEP
1.1.1 Que se cubran los programas con resultados numéricos satisfactorios
1.2 Según los propietarios de la escuela
1.2.1 A corto plazo
• Que la escuela vaya adquiriendo prestigio
•Obtener buenos resultados financieros
1.2.2 A mediano plazo
• Buenos resultados financieros (que se obtendrán si se logra una escuela de prestigio)
1.3 Según los directivos
1.3.1 Mostrar buenos resultados numéricos a la SEP
1.3.2 Tener altos índices de alumnos aceptados en las universidades
1.3.3 Mostrar buenos resultados financieros a los propietarios
1.3.4 Conservar su empleo
1.4 Según los profesores
1.4.1 Mostrar buenos resultados numéricos a los directivos
1.4.2 Conservar su empleo
1.5 Según los padres de familia
1.5.1 La "formación moral" de l@s chic@s
1.5.2 Acostumbrarlos a obedecer
1.5.3 Prepararlos para "estudios superiores"
1.5.4 Poder dejarlos a cargo de otras personas durante unas horas al día
1.6 Según los alumnos
1.6.1 La compañía de individuos de su edad
1.6.2 Evitar los problemas que se seguirían de no acatar decisiones paternas
1.6.3 De ser posible, hacer cosas divertidas
2 Resultados actuales
2.1Los buenos resultados
2.1.1 Los propietarios
• Logran ganancias
• Tienen prestigio
• Tienen poder
2.1.2 Los administrativos
• Pueden cobrar
• Se sienten útiles
• Llenan su tiempo
• Difieren la atemorizante pregunta: "¿Soy feliz?"
2.1.3 Los profesores
• Pueden cobrar
• Se sienten útiles
• Llenan su tiempo
• Difieren la atemorizante pregunta: "¿Soy feliz?"
2.2 Los malos resultados
2.2.1 Alumnos mal preparados
•Académicamente
• No saben leer
• Acumulan conocimientos que están disponibles en internet
• No están educados en la reflexión
• En su desarrollo personal
• No están educados en la reflexión (factor que impacta tanto el ámbito académico como el personal) }
• Se les acostumbra a posponer la pregunta fundamental "¿soy feliz?" convenciéndolos de que aún no es tiempo de que se la planteen
3 Causas del fracaso
3.1 Divergencia de objetivos
• El alumno y la alumna se encuentran atrapados en una compleja trabazón de intereses pocos de los cuáles coinciden con la voluntad de educar o ser educado.
3.2Profesores improvisados;
•En general
• No tienen una formación en la docencia
• No han reflexionado sobre el fin de la labor educativa
• Apoyan los resultados numéricos que los alumnos obtuvieronen poco confiables sistemas de evaluación diseñados sobre la marcha
• Los de matemáticas
• No saben matemáticas
• Enseñan los "cómos"
• No entrenan al alumno a que se pregunte los "qué es", "de dónde sale", "para qué"
• Impiden por completo o al menos dificultan seriamente la actitud crítica del alumno que deberían estar promoviendo, dirigiendo y aplaudiendo
3.3 Directivos incompetentes
• Incapaces de reflexionar
• Con una veneración por los resultados numéricos que pone en evidencia
• su profundo desconocimiento de las matemáticas y
• su adhesión, acaso inconsciente, a una ideología reduccionista que pretende negar la dimensión trascendente de la persona humana y que (ateniéndonos a la estricta etimología del vocablo hebreo satán) debemos llamar satánica es decir enemiga.
3.4 Planteamiento equivocado de las relaciones de respeto
• Lo que ocurre
• El alumno debe respeto al profesor porque es el que tiene el respaldo de quienes tienen el poder
• El profesor debe respeto a los directivos porque son los que tienen el poder
•Lo que debería ocurrir
• En las relaciones de cada individuo con lo que se conoce como "sus superiores"
Alumno → profesor o
Profesor → directivos o
Directivos → dueños
hay respeto por el trabajo de ellos pero no hay temor por el poder que puedan ejercer contra él
• El profesor debe respeto al alumno porque es él quien está aprendiendo
• Los directivos deben respeto a los profesores porque son ellos quienes están enseñando
• Los propietarios deben respeto a los directivos porque son ellos quienes tienen a su cargo una institución educativa
4 Los que pagan la fiesta: los alumnos
4.1 Están siendo mal preparados
4.2.1 Se les forma para ser empleados
• Su capacidad para la crítica no solamente no se estimula sino que se castiga
• Su capacidad de decisión se ve mutilada
4.2.2 Sus resultados numéricos son malos
• Se les mantiene en una situación de vulnerabilidad a los reproches paternos
4.2 No son felices

¿Y se espera que un trabajo como éste resuelva un problema de ese tamaño? No exactamente; se espera que un conocimiento de las matemáticas, aunque sea rudimentario, abra las puertas para la reflexión, el cuestionamiento, y más tarde para la concertación entre los factores que inciden en la educación pre universitaria ya mencionada.

No es este trabajo el que va a cambiar las cosas, pero apunta hacia quitar a la materia de matemáticas en el nivel de preparatoria ese aspecto atemorizante que tienen hoy en día y que impide a los alumnos siquiera asomarse a ellas antes de decir que son terribles. Serían pues las propias matemáticas las que podrían modificar la concepción de las clases, si logro que las personas (alumnos y profesores) superen sus miedos, enfrenten el hecho de que necesitan comprender, se asomen a las matemáticas a ver un espectáculo interesante y luego se atrevan a participar en él.

Capítulo 2. Sustento teórico

Se espera que hable de las diferentes tendencias educativas estudiadas a lo largo de la maestría y diga en cuál o cuáles de ellas se apoya mi tesis. Para que dicha revisión de los paradigmas pedagógicos sirva efectivamente a mi propósito, primero esclareceré una diferencia conceptual entre dos fenómenos psicocognitivos que llamaré "*conocimiento*" y "*entendimiento*".[2]

Hablaré de algunas de las tendencias educativas estudiadas con el propósito de clasificarlas de acuerdo a dicha diferencia conceptual. La intención es dedicar un espacio particular a la discusión de la corriente pedagógica con la cual hallo el mayor grado de convergencia teórica (y que, por cierto, no tuve oportunidad de revisar en la maestría): la llamada pedagogía "Waldorf" fundada a principios del siglo XX por Rudolf Steiner.

<u>Diferencia conceptual entre conocimiento y entendimiento</u>

Existe una operación mental que consiste en, por así decirlo, "incorporar a un archivo" información relativamente "inerte". Ejemplos: "El símbolo del potasio es K" "El género taxonómico de los alacranes se llama *Aracnidae"*, "Napoleón nació en 1769" "Las ecuaciones de segundo grado se resuelven con tal fórmula".

Ésta es una cantidad de información que el alumno no puede sino recibir pasivamente de alguien más, ya sea de viva voz o a través de un libro. Poseer una información de este tipo es tener un <u>conocimiento</u>. El último ejemplo, sin embargo, es ligeramente distinto dado que la fórmula mencionada implica un procedimiento que habrá de ser aplicado en los casos pertinentes, además de que, hipotéticamente, el alumno podría llegar a descubrir la fórmula por sí mismo.

[2] Usamos estos dos términos en el sentido que aquí mismo detallamos y sin hacer referencia a ningún otro autor que haya señalado alguna otra diferencia similar.

Entender, por el contrario, que el volumen es la integral del flujo o que la aceleración es la derivada de la velocidad significa haber captado la esencia profunda del contenido de los conceptos y potencialmente la interrelación de cada concepto con cada uno de los demás conceptos de las matemáticas. Como volveremos a ver más adelante, el mundo de los conceptos posee una estructura coherente intrínseca y lo que aquí llamo entendimiento equivale al conocimiento de regiones específicas de este “árbol de interrelación general de los conceptos”.

Es decir, entender lo que es la integral implica, por ejemplo, darse cuenta de que se parece a la suma y ser capaz de notar de qué maneras difiere de ella, captar su relación con la derivada y hacerse una idea general sobre qué tipo de fenómeno puede ser modelado con ella. De esta manera el entendimiento de cada concepto resulta más afín a la exploración progresiva de un horizonte abierto que a la posesión definitiva de un objeto o dato, dado que todo entendimiento es siempre susceptible de ser profundizado mediante la añadidura de nuevas interrelaciones efectivamente contempladas.

Para dar otro ejemplo, consideremos el problema de la navegación a través de una ciudad. Quien conozca la ciudad y sepa dónde está la catedral será capaz de crear instrucciones para llegar a ella desde cualquier punto de la ciudad, es decir, será potencialmente capaz de enunciar una colección muy grande de trayectorias. De manera similar el entendimiento de un concepto puede potencialmente desdoblarse en una multitud de saberes concretos la cual no agota el contenido del concepto entendido, ya que la comprensión de dicho concepto trasciende la simple *suma* de dichos saberes.

De acuerdo a esta diferencia separaré las tendencias educativas de las que voy a hablar en dos categorías:

- La primera, que pone la actividad del profesor como la de un “dador” o “proveedor”, análogo a un mesero que debe transferir sopa de la fuente a los platos vacíos. La “actitud existencial”, por así llamarla, correspondiente a este punto de vista se expresaría más o menos como:

"Yo te doy algo que no tienes". Una actividad de este tipo difícilmente logrará otra cosa que incrementar el conocimiento del alumno y cuando así suceda será más por casualidad que gracias a su propia estructura.
- La segunda, que concibe que la labor del profesor es conducir al alumno a tomar conciencia de los entendimientos que de alguna manera ya operan en su mente y que ahora deben ser conceptualizados a través de profundas reflexiones.[3] Esta actividad es análoga a la de un entrenador que está ahí para ayudar con sus indicaciones y consejos al atleta para que desarrolle lo que de hecho ya está en él y solamente hace falta mostrarle. La "actitud existencial" que corresponde a este otro punto de vista se expresa más bien con una frase del tipo: "Yo te ayudo a que veas de lo que eres capaz". Su objetivo asumido y resultado plausible es hacer crecer el entendimiento que el alumno tiene de las cosas, así como su capacidad de generar por sí mismo nuevos entendimientos.

La enseñanza de las matemáticas es esencialmente distinta de la de otras materias precisamente porque no consiste en la "entrega" de *conocimientos* sino en el entrenamiento del alumno para que aprenda a *hacerse las preguntas* que lo lleven a entender relaciones, mecanismos, analogías, etc.

Pasemos entonces a la descripción somera de algunas de las tendencias de que hablábamos. Mis comentarios al respecto irán sobre todo en el sentido de distinguir en cuál de estas dos categorías cae cada una. En algunos casos sólo incluyo un breve párrafo en donde intento sintetizar aquel aspecto de su obra que es para mí relevante.

La mayéutica

Sócrates, más de cuatro siglos antes de la era cristiana, ya tenía una impresión clara de que las personas tienen de suyo un entendimiento de ciertas cosas, y de que la labor principal de un verdadero maestro no es

---

[3] Este término toma un sentido bastante literal dado que queremos que el alumno pase de, por ejemplo, "saber mecánica" en el sentido en el que la sabe un perro capaz de cachar una pelota, a *saber que sabe* mecánica.

impartir información al alumno sino *guiarlo* para que se dé cuenta de que él ya entendía de suyo muchas cosas. Consiste también en *acompañarlo* a tomar conciencia y formalizar dichos entendimientos gracias, en gran parte, al uso de una terminología clara. Entender cómo usar un término viene siendo concebir el concepto. La mayéutica es frecuentemente caracterizada por su *método* que consiste en no hacer más que preguntas.

La mayéutica es una de las más antiguas filosofías pedagógicas del segundo tipo de las que tenemos noticia. Desafortunadamente hoy por hoy son pocos los maestros que consideran pertinente su aplicación y son capaces de hacer uso de ella. Curiosamente, en las materias no matemáticas de la maestría (que por cierto fueron presentadas todas de acuerdo a una filosofía pedagógica del primer tipo) apenas se habló de este método.

El Constructivismo

- Jean Piaget (1896-1980)

> *"Cuando enseñas a un niño algo, le quitas para siempre su oportunidad de descubrirlo por sí mismo*". Jean Piaget

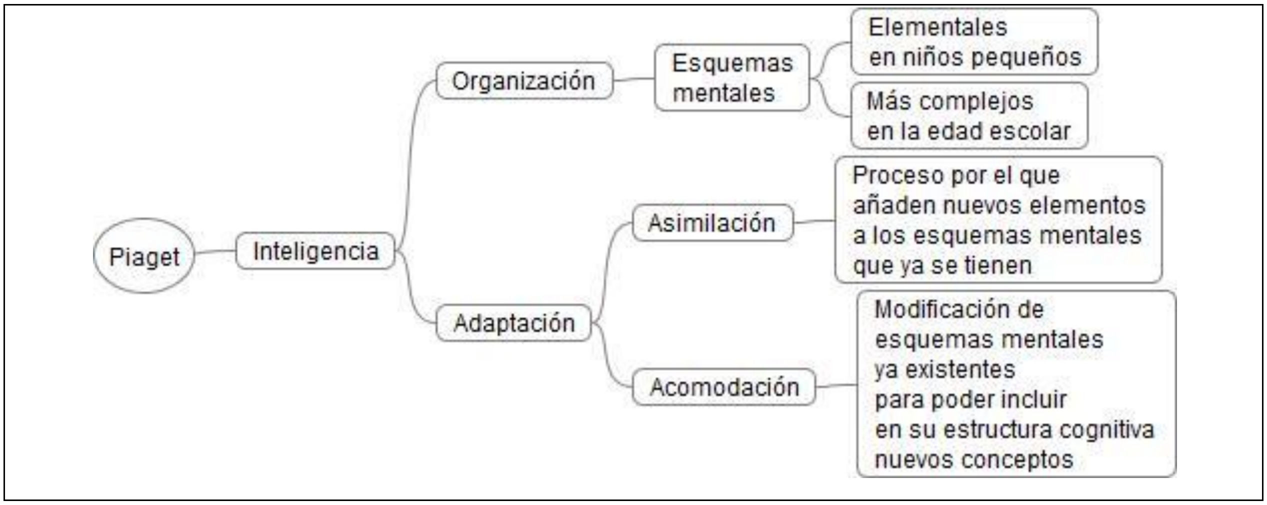
- La teoría
  - Se supone que el alumno va a integrar conocimiento a su visión del mundo.

> *"Lo que vemos cambia lo que sabemos. Lo que conocemos cambia lo que vemos*". Jean Piaget

  - El profesor anima y acompaña al alumno quien, a través de la acción, construye su propio entendimiento; "[El conocimiento lógico-matemático]…surge de una abstracción reflexiva". Está claro que es una filosofía pedagógica del segundo tipo.

- La praxis
  - Se promueve la discusión, la participación, la emancipación. El conflicto se desea porque allí nace la conciencia crítica.

En un sencillo diagrama esquematizo el análisis de la inteligencia que propone Piaget



Podemos ver que Piaget estudia la forma en la que "se añaden conocimientos" a la mente del educando. "*El conocimiento es, pues, un sistema de transformaciones que se vuelven progresivamente adecuadas*" J. Piaget. La concepción teórica parecería, de acuerdo a esto, pertenecer al primer tipo de mi clasificación si bien en la praxis se aproxima al segundo tipo.

(PIAGET, El lenguaje y el pensamiento del niño pequeño, 1984)

(PIAGET, Psicología, 1981)

- Lev Vygotski (1896-1934)

- La teoría
  - El planteamiento de Vygotski explica el desarrollo de las funciones superiores del individuo a través de la historia. Su gran aportación, a mi parecer, es dar al ser social la misma importancia que al ser individual. Es evidente que le interesa cierto tipo de conocimiento, aunque no está claro si hace alguna distinción entre conocimiento y entendimiento similar a la mía.
Vygotski trabaja con hechos que se manifiestan en el aprendizaje, pero, dado que no se ocupa de conceptos matemáticos, es difícil establecer qué elementos de su pensamiento podrían ser útiles en la enseñanza de las matemáticas (campo en el que considero que se requiere mucho más

un trabajo individual que uno social).[4]

Por otra parte, su insistencia en el proceso de internalización nos deja ver que concibe la educación, nuevamente, como un método para que el alumno añada información a la que ya tiene, es decir que esta filosofía pedagógica corresponde al primer tipo. "*Lo que un niño puede hacer hoy con ayuda, será capaz de hacerlo por sí mismo mañana*" (Vygotski, 1956).

- La praxis

Si bien, como dije, la enseñanza de las matemáticas no se beneficia particularmente de ello, nos parece muy acertada la idea de considerar al estudiante un ser social; más abajo me extenderé al respecto.

"La verdadera dirección del desarrollo del pensamiento no es de lo individual a lo social, sino de lo social a lo individual." (VYGOTSKY, 1978)

♦ David Paul Ausubel (1918-2008)

- La teoría
  - Considera que el aprendizaje consiste en integrar nueva información, a la que el alumno ya tiene. Esto la colocaría más bien dentro de la primera categoría, pero es interesante su postura con respecto al método de enseñanza;

    "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente" (AUSUBEL, 1968).

    Esto nos deja ver la preocupación de Ausubel por que la nueva información que el alumno va recibiendo tenga sentido dentro de su concepción anterior de las cosas.

    Además, dado que habla del aprendizaje significativo por oposición al aprendizaje de memoria y del descubrimiento por oposición a la actitud meramente receptiva, [haciendo patente la insensatez de la educación escolar de su tiempo (que por desgracia persiste)], tiene una afinidad importante con el punto de vista a favor del cual argumento. Por lo

[4] como lo esclarece la reclasificación de la capacidad de abstracción conceptual pura (que antes llamábamos simplemente "inteligencia") bajo la etiqueta de "inteligencia autista".

> tanto, si bien el análisis detallado de su concepción teórica no resulta pertinente dentro de esta tesis, quiero reconocerle el mérito de valorar la iniciativa del propio alumno en el proceso.

(AUSUBEL, Educational Psychology: A Cognitive View , 1968)

- Jerome Bruner (1915-2016)

Su gran interés es lograr que el alumno participe activamente en su aprendizaje. Dos ideas importantes que él aporta son

- El aprendizaje por descubrimiento en donde la función del profesor es la de *motivar a los estudiantes* a que ellos mismos lleguen a las cosas
- El *diálogo activo* que el profesor debe promover entre él y el alumno

En suma se trata de una propuesta basada en la mayéutica, a la que ya me referí, método en el que el profesor viene a ser simplemente un guía en los descubrimientos del alumno. Tal como su precursora, por lo tanto, su lugar de acuerdo a mi clasificación es dentro de la segunda categoría.

Bruner habla también del cuidado que debe haber en <u>el lenguaje con el que el profesor se comunica con el alumno:</u> debe ser apropiado para su grado de desarrollo y de una estructura "espiral" en la que los conocimientos adquiridos en etapas tempranas se revisan periódicamente profundizando en ellos. Aquí se vuelve a hacer patente su preocupación por lograr que el alumno tenga un nivel creciente de *entendimiento*.

<u>La Pedagogía Crítica</u>

- Paulo Freire (1921 – 1997)

Freire describe la educación tradicional que él llama "educación bancaria", en la que el educador es el único que tiene los conocimientos y los transmite a los alumnos, pasivos y por lo tanto oprimidos.

Propone cambiar la educación por otra que fomente en el alumno una visión crítica del mundo que lo rodea, visión crítica de la cual más tarde habrá de nutrirse el proceso de auto liberación del alumno.

Concuerdo profundamente con su visión de la educación como un instrumento que puede contribuir tanto a la liberación del individuo como a su esclavización, según sea concebida e implementada. Esta visión de las cosas constituye y presenta un *ideal* que, independientemente de que sea alcanzable en la práctica, resulta útil como principio orientador a la manera de un faro o estrella.

Antes de estudiar en detalle la filosofía educativa con la que mejor coincide la mía, dedicaré algunas páginas a describir lo que mi experiencia me ha hecho saber sobre las condiciones actuales de la educación matemática en la Ciudad de México.

Capítulo 3. La educación matemática en la Ciudad de México

Hablemos ahora de las causas del fracaso de la educación matemática en las instituciones educativas de nivel bachillerato en la Ciudad de México. Restrinjo mi estudio a esta entidad porque es donde he trabajado por largo tiempo y porque la etapa inicial de mi proyecto no contempla otros lugares, pero supongo que algo similar ocurre en otras partes del país y tal vez fuera de él.

Como dije, el propósito de esta tesis es exponer la estructura y características de un proyecto en el que he trabajado por varios años, consistente en formar maestros de matemáticas de nivel Preparatoria en todo lo que se detalló en el Capítulo 1. El propósito es que sean capaces de dar a sus alumnos una experiencia que efectivamente los prepare y los deje listos para trabajar en la argumentación matemática -en el caso de que sean alumnos que elijan carreras como Física, Matemáticas o Ciencias de la computación, donde se verán enfrentados al método axiomático y la abstracción pura-. En el caso de los alumnos que no elijan dicho ámbito profesional, busco que tengan una experiencia vivencial de su propia capacidad de comprensión, que se traduzca en una capacidad general de resolver problemas y tomar decisiones.

¿Por qué es necesario este curso? Porque ese “profesor común” de matemáticas de Preparatoria (ver pág. 14) no enseña lo que se debería enseñar en un curso de matemáticas. Y ¿por qué ese profesor no enseña lo que se debería enseñar? Por dos razones

El “profesor común” no enseña lo que se debería enseñar en matemáticas porque ni sabe realmente lo que son las matemáticas ni sabe qué es eso que debería enseñar.

Otra razón por la que no lo hace es porque no tiene con su trabajo el grado de compromiso que se requiere para una labor de ese tamaño.

Recordemos que no nos referimos a <u>todos</u>, pero sí a muchos profesores. Estudiemos la primera de estas dos frases.

¿Realmente ese "profesor común" no sabe realmente lo que son las matemáticas o lo que se debería enseñar acerca de ellas? En general podemos decir que es un eficiente *usuario* de las matemáticas y puede, por lo tanto, utilizarlas con buenos resultados e incluso enseñar a emplearlas, pero no ha sido formado en la reflexión y por ende le resulta imposible mover a sus alumnos a llevar a cabo esa actividad que es *el núcleo de la tarea matemática*. Los alumnos de profesores usuarios no pueden esperar nada más que llegar a ser usuarios.

Ese maestro no sabe ni entiende bien a bien la matemática. No sabe que lo que un buen profesor de matemáticas espera de un buen alumno no es que dé respuestas, sino que se haga preguntas. ¿Por qué no lo sabe?

Porque muchos de sus propios "padres académicos", los "abuelos" de los muchachos, usuarios también, *tampoco lo sabían* y podemos remontarnos muchas generaciones atrás sin hallar el principio de la cadena de insuficiencia pedagógica. No se trata, pues, de levantar acusaciones sino de proponer soluciones. En México no se enseña lo que realmente son las matemáticas porque no se sabe. Este "profesor común" de matemáticas no sabe que

Las matemáticas son el *arte* de resolver problemas, no la simple capacidad de seguir reglas.

Y, dado que nadie le ha hablado de ello, él piensa precisamente lo contrario y sus clases se reducen a enseñar procedimientos para calcular cantidades o expresiones que a fin de cuentas, *no se sabe qué son*: la raíz cuadrada de un entero, el determinante de una matriz, la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas -encontrado, de preferencia, por el método de determinantes, para que sea todavía más críptico-, la derivada de una composición de funciones: nadie (las más de las veces ni siquiera el mismo profesor) sabe qué cosas son, pero enseña a calcularlas.

Para el alumno la clase de matemáticas durante la Secundaria consistió en recibir una serie de conjuros como $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ que no entendemos qué significan pero sabemos qué escribir en lugar de la **a**, de la **b** y de la **c** para encontrar el resultado. ¿Cuál es ese resultado? ¿Qué significa? No sabemos, pero hacemos las cuentas.

En muchísimos de los casos, cuando el (la) estudiante llega a conocer al profesor de un nuevo año escolar (a ese profesor que ya sabe que sus resultados al final del año van a ser mediocres, por no decir malos) ya va cargando "la culpa" de no ser capaz de entender. No es de sorprender que esto provoque ya en él, ella, una actitud defensiva que haga imposible dedicarse a las matemáticas desde el principio, sino que requeriría un par de sesiones para curar la herida que trae en el alma. En un grupo de 30 ó 40 alumnos esto no es fácil, pero he utilizado a lo largo de los años una estrategia para desmontar esa barrera: muestro al estudiante cuántas cosas ya es capaz de entender de matemáticas (casi siempre son muchas más de las que él mismo creía) y lo aplaudo por ello. Con ese buen principio, al cabo de algún tiempo una parte de los alumnos, en muchos de los casos, realmente pierde parte de su miedo a las matemáticas.

Por otra parte, a través de los alumnos he tenido acceso, a lo largo de los años, a la tristísima manera en que el profesor (el "profesor común") conduce su clase, no tanto imaginando que una clase así pudiera interesar o informar a un alumno (mucho menos formar su mente en el razonamiento), sino simplemente "cargando la cruz" que le tocó, que es estar condenado a pasar, con cada grupo, tres horas semanales (haciendo labores de profesor y simultáneamente de policía, cuidando el orden en el salón) que para nuestro alumno común no servirán de nada. Es por eso que una parte de los maestros no tiene con su labor docente *el grado de compromiso* que sería necesario:

porque año tras año los resultados que ha obtenido u obtendrá serán malos o muy malos y eso va mermando el entusiasmo del docente.

Como se verá, mi interés es ayudar a resolver la situación del maestro de matemáticas. Desde luego. Si la persona que pasa con el alumno tres horas por semana es una persona optimista, productiva, exitosa, feliz, eso se reflejará en la imagen del ser humano que se está formando en la mente del alumno. Es frecuente oír que los padres se preocupan por las “malas compañías” de los hijos adolescentes, y con razón: sus almas están todavía en formación y conviene que se relacionen con las personas adecuadas evitando las malas compañías que, en la mente de los padres, son en general otros adolescentes.

Pero las peores influencias pueden ser los profesores que no aman su trabajo, que dan al alumno una imagen muy triste de lo que es un adulto y que, además, tienen con respecto a los jóvenes una posición de poder desde la que pueden hacerles mucho daño.

Por eso decidí escribir este curso y además hacer la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior, MADEMS, donde esperaba yo tener contacto –como de hecho sucedió- con profesores de matemáticas del nivel de preparatoria. Tuve contacto con algunos de ellos y tuve la oportunidad de invitarlos a participar en mi proyecto de formación matemática de otros profesores de matemáticas de nivel preparatoria, sabiendo que eran conscientes de que las cosas no se están haciendo bien, en muchos sentidos.

- El joven, la joven no está aprendiendo matemáticas.
- El alumno está siendo convencido de que no es inteligente y de que, además, merece un castigo.
- El profesor, a causa de su sistemático fracaso va perdiendo su empeño y creando en su alma un cierto nivel de hastío que lo hace cada vez menos buen profesor.

- El alumno está siendo lastimado en su alma, pero en unos años estará fuera de la escuela; el alma del profesor, en cambio, también está siendo lesionada pero además él (o ella), no tienen esperanza de que esto acabe nunca.

Volvamos al aspecto académico del problema. Convendría preguntarnos entonces:

¿Cuánto sabe cada quién de matemáticas, del verdadero quehacer matemático?

Estudiemos esa pregunta.

Un teorema matemático tiene casi siempre forma de implicación. Una demostración matemática consiste en presentar una serie de razones que hacen evidente que el consecuente de la implicación efectivamente se sigue del antecedente. Veamos, por ejemplo, el ampliamente conocido teorema de Pitágoras:

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Enunciando el mismo teorema de una manera que haga más explícita su estructura de_implicación_podemos decir:

Si un triángulo es rectángulo, *entonces* el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

¿Y si el triángulo no es rectángulo? Entonces no hay nada que decir. El problema no consiste en saber si un triángulo dado es rectángulo; más bien consiste en saber que, cuando uno no lo es, pasamos a otra cosa y ya está.

Esta ley lógica se aplica también en la vida real, donde la gente la maneja con soltura sin etiquetarla con terminologías académicas. Sería curioso que algún día se diera una conversación así:

- Pedro: si llama el mecánico, dile que venga en la tarde
- ¿Y si no llama?
- Pues no le dices que venga en la tarde.

Difícilmente ningún Pedro haría la pregunta; ya se entiende que solamente se le está encargando algo que debe hacer (pedir al mecánico que venga en la tarde) SI ACASO sucede otra cosa (que el mecánico llame).

De hecho, si el mecánico no llama, Pedro habrá logrado, sin hacer nada, lo que se le pide y él lo sabe. En efecto sabe que la proposición $A \Rightarrow B$ es verdadera si A es falsa, independientemente del valor de B, es decir que en la tabla

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

solamente hay un renglón donde la implicación es falsa. ¿Realmente lo sabe? <u>En muchos casos</u> sí lo sabe: <u>conoce el hecho</u>; lo que no conoce es el idioma en que lo estamos escribiendo. Y digo bien: “en muchos casos”. Ni pueden <u>todas las personas</u> ni tampoco cada uno puede <u>en todas las formas</u> de presentar la implicación, pero pueden muchos en muchos casos si quien hace la pregunta tiene el interés de mostrar a quien responde que <u>lo sabe</u>.

Podemos, entonces establecer dos cosas; la primera es que

una buena parte de los ciudadanos comunes *conocen el sentido* de la expresión $A \Rightarrow B$ (1) o reconocen, en algunos casos, su analogía con historias como la de Pedro.

aunque nunca hayan llevado siquiera un curso de lógica. No conocen la expresión pero entienden su significado, es decir que

hay gente que está más cerca de las matemáticas de lo que cree (2)

(concretamente, comprende a la perfección muchas cosas de la lógica y la lógica es hermana de las matemáticas).

Ahora bien: sabemos que

muchos de los alumnos de Preparatoria tienen horror a las matemáticas(3)

me refiero al 40% o 50%[5]; y por ello me hago la siguiente pregunta: ¿por qué, si los alumnos *saben* matemáticas, no gustan de ellas? En primer lugar porque

los alumnos no comprenden lo que su profesor les dice (4) (que, por cierto a veces tiene poco que ver con *hacer matemáticas*).

Ilustremos la situación con una analogía. Imaginemos que una pareja de ingleses se pasea por las calles de Tepoztlán; la señora encuentra una blusa bordada y pide a su esposo que averigüe su precio. Con un gesto, el marido pregunta a la encargada del local cuánto cuesta la blusa. Ella amablemente contesta "cuatrocientos cincuenta pesos". El marido simplemente pone cara de "no entiendo" tratando de repetir las palabras de la encargada y, desamparado, voltea a ver a su esposa. ¿El hombre no es muy inteligente, o

[5] Alguien podría discrepar en cuanto al porcentaje pero difícilmente en cuanto al hecho mismo

cómo es que queda tan desvalido con lo que se le dice? La esposa entonces le tiende una pluma y una libreta; el marido se los da a la encargada, que escribe $450 y lo muestra. El marido entonces dice a la esposa “four hundred and fifty pesos; wait a minute”. En su teléfono divide esa cantidad entre 23.38 (tipo de cambio libra esterlina/peso mexicano de ese día) y dice a la esposa “nineteen pounds twenty five pence”. Resulta ser que el hombre no solamente puede entender lo que la encargada le dice, sino que además puede traducir esa cantidad a las unidades que él conoce y en las que puede sopesar ese costo.

Puede parecer absurdo contar la historia de una dificultad así de obvia. De hecho, lo sería, si no fuera igualmente obvia la dificultad que enfrentan los alumnos en una clase estándar de matemáticas de Preparatoria.

Los alumnos en la clase se sienten tan perdidos como el marido en la historia pero no hay quien les diga que ellos podrían *entender* buena parte de lo que el profesor quiere explicar, *si él hablara el mismo idioma que ellos* - para empezar porque ni ellos ni el maestro han reflexionado sobre qué es *entender*. Por otro lado la persona que correspondería a la esposa y que puede observar la interacción de marido y vendedora no está allí en la clase para hacer ver a maestro y alumnos que se trata de encontrar un *lenguaje común.*

Analicemos con más detalle lo que suele suceder en una clase. Volvamos a la expresión $A \Rightarrow B$ de la que ya hablamos

- El “profesor común” (descrito en la pág. 14) anunciará que se va a estudiar la expresión “A implica B” y escribirá sin más preámbulos en el pizarrón,

$$A \Rightarrow B$$

absolutamente incomprensible para los alumnos y totalmente desligada de sus experiencias cotidianas. El profesor <u>pasa por alto</u> el hecho de que sus alumnos <u>ya saben</u> lo que se supone que están a punto de aprender y, en lugar de decirles que están aprendiendo un nuevo idioma supone que les está dando a conocer un hecho.

- El alumno, la alumna, enfrentado(a) a una expresión que, las más de las veces, para él, ella, no significa nada; tiene inmediatamente varias reacciones, formadas a lo largo de años de frustración: "No entiendo", "qué tediosas son las matemáticas", "ojalá pronto termine la clase". En todo caso ya no hará el esfuerzo por *comprender*; ya quedó fuera del juego.
- El profesor luego hará la tabla de verdad de la implicación.
- El alumno se dirá "debo memorizar eso o lograr hacer un acordeón para el momento del examen".

¿Eso es grave? Sí; es gravísimo porque además de que los alumnos no aprenden matemáticas (tan disfrutables y tan útiles al momento de tomar decisiones)

el aparato social escolar los culpa a ellos por no poder entender, (5)

(cosa que daña su autoestima en una etapa crítica de su formación como ciudadanos, como profesionistas, como seres humanos), cuando, de hecho,

su "profesor común" es el responsable de que no entiendan (6)

en una medida mucho mayor y en la generalidad de las ocasiones, obviando los casos de alumnos conflictivos o con otro tipo de dificultades.

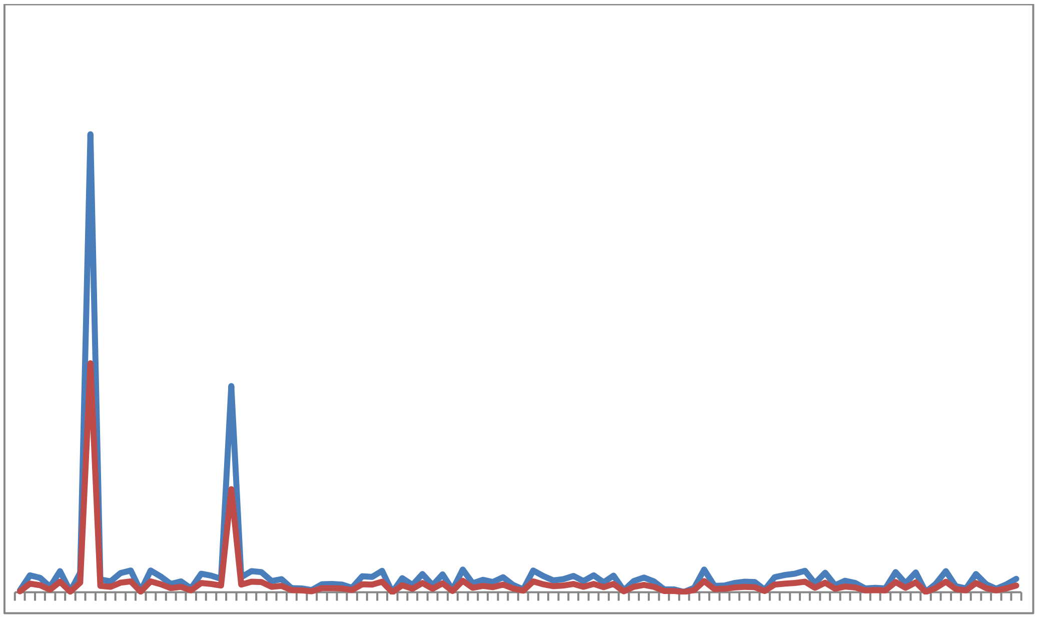
Resumiendo: la causa del fracaso de tantos estudiantes en sus clases de matemáticas tiene dos vertientes:

▪ El alumno está en posibilidades de entender muchas matemáticas pero *no sabe* que lo puede hacer. ▪ El "profesor común" en realidad no entiende mucho de matemáticas pero *no sabe* que no las entiende.

Ambas cosas tienen que ver con *no entender lo que es entender.* ¿Y quién sería el responsable de mostrar al alumno cuántas matemáticas puede entender? Precisamente el profesor, pero a él nadie le ha informado que ésa es una de las tareas que se espera de él.

Ya mostré que el alumno *entiende algo de lógica* (por ejemplo el sentido de la expresión $A \Rightarrow B$) y vimos que el profesor *no entiende bien la matemática* desde el momento que no ha entendido que su labor es *referir al alumno a cosas que <u>de algún modo ya conoce</u>* para partir de allí a la hora de presentarle nuevos conceptos o nuevas formas de ver los conceptos.

¿Y no hay en México nadie que sepa matemáticas y pueda enseñar a los profesores que enseñan matemáticas en niveles pre-universitarios? Claro que hay matemáticos, pero muchos de ellos están haciendo lo suyo: recibir en la universidad a los jóvenes que se salvaron del cataclismo que es la Preparatoria, que lograron atravesar 12 años de escolarización sin perder ese gusto por aprender que tienen los niños pequeños, tomar a estos jóvenes y llevarlos a niveles más allá del cálculo de una variable. Como es comprensible esos mismos profesores se quejan de que se ven obligados a hacer, durante el primer semestre de la licenciatura, una revisión larga y laboriosa de lo que los alumnos debían haber aprendido en la Preparatoria y que, las más de las veces, no entendieron.



Presento aquí una gráfica para dar una imagen visual de lo que digo.

En el eje horizontal aparecen 100 individuos imaginarios y en el eje vertical su comprensión de las matemáticas (medida en alguna unidad misteriosa). La línea roja (la inferior) representa el momento actual y la azul los objetivos por alcanzar, que en todos los casos serían “duplicar” esa comprensión, midiendo en las mismas unidades enigmáticas.

Sin duda hay jóvenes que entienden y disfrutan las matemáticas; en esta gráfica aparecen como los dos “picos” que se ven y representan el 2% del total, porción mucho mayor que la real. Esa es la parte de los alumnos que, con la ayuda de profesores que sí entienden las matemáticas, realmente logra un gran avance y en algunos casos llegan a ser connotados matemáticos.

¿Y el resto? Exceptuando esos dos picos de la gráfica, casi nadie sale de la línea roja (la inferior) porque no nos ocupamos de realmente enseñar matemáticas a los que han de enseñarlas a su vez a esa parte tan extensa de la población, a sus “padres académicos”. Haciendo una metáfora fisiológica: aquí en nuestro país, en nuestra ciudad, dejamos que se les rompan las piernas a todos los niños y jóvenes y luego, a esa parte numéricamente insignificante que llega a la Facultad de Ciencias (y seguramente a otras instituciones) se les atienden esas fracturas y se les enseña a caminar, a trotar y a correr. ¿Y los demás? Pues, cruzan por la vida con las piernas rotas.

En conversaciones sobre este proyecto con alguno de estos privilegiados profesores que tienen contacto con los privilegiados alumnos que entran a la Facultad de Ciencias, decía yo que no se debe enseñar Cálculo Diferencial e Integral en la prepa, excepto a un número muy pequeño de alumnos, un 10%, tal vez, y el dicho profesor nos decía que no estaba de acuerdo con esto: que era importante que se diera esa materia para que todo el mundo tuviera una experiencia de lo que es el infinito.

Si bien dicha idea es hermosa y noble, hay razones muy claras para argumentar en contra. Imaginemos que en alguna parte del país hay hambruna y algunos de nosotros conseguimos donaciones de arroz, frijoles y maíz. Comenzamos a organizar la preparación de la comida para mucha gente que comerá arroz, frijoles y tortillas durante semanas o meses: lo esencial de nuestro problema es el gran número de gente con la que hay que lidiar. Alguien más, en una situación de privilegio, consigue lo necesario para hacer chiles en nogada para algunos y los prepara. Bien por él: en su situación de ventaja está muy bien que pueda ofrecer, a los comensales de su comedor, platillos de esa calidad para que ellos puedan convertirse en grandes cocineros, pero nuestra situación es otra: debemos aliviar el hambre de un número muy grande de personas, es decir, enmendar los errores cometidos en la educación matemática de un número muy grande de alumnos. Con el tiempo y a medida que lo vayamos logrando, las universidades irán recibiendo mayores porcentajes de alumnos que comprenden bien el material visto en la prepa, los profesores de matemáticas emprenderán su labor mejor preparados en términos de la praxis y también de los objetivos a alcanzar.

En el presente contexto socioeconómico, un año repetido exilia para siempre al alumno de la pertenencia a cierto grupo de elite cuyos miembros son los únicos que pueden aspirar a cierto tipo de posiciones y prebendas. Es decir:

hacer que un alumno repita un año equivale a condenarlo a volverse un ciudadano de segunda.

Por otra parte, el profesor sabe que si entrega demasiadas calificaciones reprobatorias, compromete su propia seguridad laboral, de modo que termina entregando (con resignación) calificaciones aprobatorias a alumnos que no manejan los conceptos que marca el programa, con la confianza de que las deficiencias de su año no saldrán a relucir en los siguientes cuyos resultados también estarán por debajo del nivel del programa y, de que, en última instancia su vida laboral tampoco va a requerir de él o ella más que un ejercicio más bien somero de la capacidad de abstracción.

¿Cuál es, pues, el objeto del tipo de curso que propongo? En realidad hay dos grandes propósitos:

El *más importante* se refiere a las observaciones (6)-(7)

Se les culpa (a los alumnos) por no poder entender, cuando (6) su “profesor común” es en parte responsable (que no culpable) de ello (7)

Este propósito consiste en cuidar que los profesores de matemáticas de Preparatoria *no lastimen las almas* de sus alumnos convenciéndolos de que no son inteligentes o aptos para comprender esta materia. Como sabemos, deteriorar la idea que de sí misma tenga una persona es causar lo que los juristas llaman *daño a la persona.*

El otro, importantísimo también, aunque menos que el primero, se refiere a las frases

El alumno es capaz de comprender más matemáticas de lo que se cree (2) Pero tiene horror a las matemáticas (3) Porque no comprende el lenguaje que usa su “profesor común”. (4)

Este propósito consiste en capacitar a los maestros para que *enseñen realmente matemáticas* en un lenguaje que sus alumnos comprendan.

Espero que, a través de mis cursos, los profesores experimenten el auténtico *entendimiento* y desarrollen la capacidad y el deseo de facilitar una experiencia análoga en sus alumnas, sus alumnos.

Ahora bien; resulta más o menos evidente que una clase dada debe estar hecha, en cierto sentido, “a la medida” de quienes la van a recibir. En cualquier caso reflexionemos un poco más de cerca al respecto con un ejemplo.

Consideremos la diferencia entre la tarea de enseñar italiano a hablantes de español y enseñarlo a gente cuyo idioma es el inglés. En italiano los sustantivos tienen género, como en español, si bien el género de una palabra dada puede no ser el mismo en ambas lenguas, por ejemplo: “la flor” (femenino en español) es “il fiore” (masculino en italiano). Para el alumno que habla español basta con, por así decirlo, actualizar una tabla asociada a un concepto que ya tiene. Para el hablante de inglés, la tarea es estructuralmente distinta: debe añadir un concepto hasta ahora posiblemente desconocido (a saber: que cada sustantivo tiene asignado uno de dos valores de acuerdo a una tabla) que no sólo incluye la “tabla” que el hablante de español actualizó, sino también el entendimiento de que, por ejemplo, los adjetivos deben concordar con los sustantivos no sólo en número sino también en esta nueva “variable”.

Es claro que la persona que escribe el curso, opera con una especie de “prototipo” del alumno a quien se dirige: En efecto: lo que se llamaría *“el hispanohablante”,* a diferencia de *“el angloparlante”* conjuga los verbos, respeta las concordancias de adjetivos con sustantivos, etc. En forma muy parecida al italiano. Por lo tanto, hay una pregunta fundamental que consideramos que todo maestro debería hacerse

¿Quién es mi alumno?

Cuánto sabe de las cosas, qué cosas le interesan, cuánto sabe de matemáticas, cuál es su relación con la autoridad, con la escuela, con el poder, con la sociedad, con el deber; mover a mis futuros alumnos (los profesores de matemáticas) a que se hagan estas preguntas es uno de los objetivos de mi curso. Más adelante, cuando hable yo de Rudolph Steiner volveré sobre este punto.

Y, por último: los proyectos de vida de los alumnos comienzan a delinearse; algunos de ellos requerirán de un mayor dominio de las matemáticas que otros. Se presenta entonces otra importante pregunta:

¿Para qué quiero que aprenda lo que le quiero enseñar?

Si la respuesta no incluye "para que disfrute como lo hago yo de algo tan bello como las matemáticas", entonces una parte muy importante del trabajo en matemáticas se está perdiendo.

Mi curso no solamente pretende enseñar matemáticas a los maestros sino que comenzaría mostrando a quienes lo toman que realmente su problema tiene dos vertientes: una es cuánto sabe él mismo de matemáticas y la otra es cuánto le emociona enseñar y cuánto puede comunicar ese entusiasmo a sus alumnos.

Quiero formar profesores que, dejando atrás el mero adiestramiento del estudiante en la aplicación ciega de procedimientos memorizados, comprendan que los objetivos de una clase de matemáticas en preparatoria son, entre otros,

- sembrar en el estudiante las ganas de preguntar
- generar en él una comprensión suficientemente profunda del material como para que él sea capaz de transmitirla a su vez a un tercero
- lograr establecer en su clase una enseñanza que empodere

Este tipo de profesor permitirá el surgimiento de cadenas inductivas de comprensión clara e, hipotéticamente, reacciones en cadena donde el porcentaje de miembros de una generación que entienden bien las matemáticas puede, al menos teóricamente, crecer de acuerdo a la ecuación logística que modela la diseminación de las epidemias.

Capítulo 4. La pedagogía Waldorf: una filosofía educativa muy cercana a las ideas fundamentales de mi enfoque.

Rudolf Steiner (1861-1925) fue un filósofo austríaco que propuso mejoras y reformas a un amplio espectro de disciplinas y actividades humanas fundamentadas en un punto de vista sobre la persona y el mundo que él mismo llamó *antroposofía,* a partir del cual desarrolló, entre otras cosas, un método de agricultura, una disciplina corporal más o menos análoga a la danza llamada Euritmia y, lo más relevante para mis propósitos, una filosofía pedagógica que ha pasado a la posteridad bajo el nombre de Educación Waldorf, (en ocasiones Educación Steiner-Waldorf). Arraigado en la tradición del idealismo alemán que desemboca en la fenomenología, comparte con Husserl un maestro: Franz Brentano. A raíz de su primer trabajo profesional preparando la primera edición completa de los trabajos científicos de Goethe, Steiner revaloriza una veta intelectual paralela al desarrollo de la corriente principal de la filosofía alemana que incluye, además del propio Goethe, algunas figuras reconocidas principalmente como literatos como, por ejemplo, Novalis, así como algunas aportaciones de los místicos alemanes del renacimiento al desarrollo de ciertas perspectivas epistemológicas.

Al margen de toda consideración sobre sus métodos de investigación revisaré algunas de sus conclusiones en la medida en que parecen sustentarse en una concepción de la naturaleza de la psique y el intelecto que desemboca en un entendimiento de la praxis pedagógica muy cercano al mío.

Steiner hace una descripción detallada de las capacidades, limitaciones e intereses de los estudiantes de cada grado enmarcada en una teoría general del desarrollo humano y lo que en términos académicos llamaríamos una *antropología filosófica*. En ninguno de los programas oficiales de matemáticas en México he visto jamás el menor intento de hacer siquiera un esbozo de *lo que es* el alumno promedio de cada edad.

La doctrina pedagógica de Steiner reposa sobre una teoría bastante detallada del desarrollo de la persona, a partir de la cual describe las características, inquietudes, necesidades y retos correspondientes a cada edad: la actitud ante la vida, las motivaciones que va teniendo en cada etapa de su formación como persona, su relación con conceptos filosóficos como la justicia, el deber, la libertad, y –naturalmente- la comprensión de las matemáticas que va construyendo a lo largo de su educación, así como su manera de experimentar la sociedad, la escuela, la autoridad, el conocimiento y muy importantemente el entendimiento, es decir: Steiner nos da un retrato de su "estudiante estándar", por cierto muy parecido al mío.

En mi experiencia, en general las aptitudes que él indica que debemos fomentar ya existen, "adormiladas" en los chicos y un maestro competente las puede "despertar" o "revivir", especialmente si sabe que dichas aptitudes ya están latentes en ellos.

Mi experiencia de campo con grupos muy pequeños me dio la oportunidad de establecer una relación personal con cada alumno y, además, de *observar* a la persona mientras trabaja (cosa imposible en grupos numerosos de alumnos). Pude pues, como el mismo Steiner, establecer una imagen de lo que llamaríamos *el estudiante común*, una descripción de las cualidades que, en mayor o menor medida comparte un número muy grande de estudiantes. A ese *estudiante común* me referiré.

Respecto al maestro, Steiner no solamente habla de la forma en que un profesor debe *ser*, tanto en el aspecto profesional (aspecto al que se limitan la mayoría de los trabajos pedagógicos) sino también en otros, a saber su personalidad, su visión del mundo y su proyecto de vida, esto con el fin no solamente de tener profesores de mejor calidad sino también, considerando al maestro de manera integral, para lograr que los jóvenes se vean rodeados de personas más completas y felices.

Steiner describe, además, las cualidades que debe tener un profesor y contempla no solamente los aspectos académicos de su actividad sino también su estatura moral, su visión general de la vida y su compromiso con su práctica docente entendida como una labor de humanismo. Postula que las características particulares del vínculo psicológico de admiración y respeto que une al alumno con su maestro dan lugar a fenómenos que podríamos llamar de "resonancia" o "mimetismo" psicocognitivos, es decir: en el proceso de desarrollo del alumno tanto cualidades como defectos del maestro resultan calcados, por así decirlo, en capas profundas del alma[6] del alumno. De aquí se sigue el profundo énfasis en que el dominio correcto de los temas por parte del maestro esté acompañado de un cierto talento artístico para la didaxis y de una gran probidad.

En suma, hay un alto grado de coincidencia entre la idea de la enseñanza que yo he ido formando a través de la praxis didáctica y la reflexión sobre ella (antes incluso de tener noticia de la existencia de esta pedagogía) y el enfoque pedagógico que Steiner delinea en su obra, cuyos conceptos y postulados me permiten redondear, ampliar y explicar mis intuiciones germinales fruto de dicha práctica.

Una revisión de algunos conceptos clave de la pedagogía Waldorf-Steiner

Presentaré ahora algunas de las concepciones fundamentales de esta pedagogía a partir del plan de estudios de Tobías Richter para ella.[7]

Más adelante haré un análisis de los principios pedagógicos de Steiner.

---

[6] La palabra "alma" no es de uso corriente; suele sustituírsela por su sinónimo pudoroso "psique". Nosotros creemos que "psique" no transmite efectivamente la gravedad de la tragedia humana que se desarrolla ante nuestros ojos en los salones de clase de todo el país.

[7] RICHTER, Tobías; "*Plan de estudios de la pedagogía Waldorf Steiner*"

El alumno

A partir de las bases generales de su discurso, Steiner presenta una visión bastante detallada del proceso del desarrollo humano de la cual se desprenden imágenes muy claras sobre *aquello que la persona es*, en cada etapa de su juventud y aquello en lo que se va convirtiendo. Es así que en el libro de Richter hay una sección para cada año enfocada en la descripción del estado "espiritual" (mental, anímico) del joven y otra que detalla los objetivos pedagógicos del año, en términos de capacidades operacionales, cognitivas y filosóficas cuyo surgimiento la conducción correcta de la actividad escolar debe fomentar.

De acuerdo a su idea del desarrollo de la persona, que él postula debe entenderse como estructurada en ciclos de siete años, que él llama *septenios*, Steiner considera el noveno grado (equivalente a 3° de Secundaria) como el primero de los grados superiores.

- Lo que el alumno es

> "Los niños de los grados superiores no sólo esperan que sus profesores sean expertos en su campo respectivo, sino que necesitan saber que los maestros extraen sus propios ideales de su trabajo, de su vida." (ibíd. pág. 21)

> "Los estudiantes [de los grados superiores] no esperan que el profesor revele la verdad en un sentido absoluto pero lo que sí esperan es que el maestro les muestre que la verdad *se puede* encontrar y en cada asignatura quieren saber *cómo* se puede descubrir su sentido superior y su relevancia." (ibíd. pág. 21)

> "*El estudiante de noveno curso* (15 años de edad)… requiere un equivalente interior a volver a aprender a caminar, hablar y pensar." (ibíd. pág. 74)

> "Pensar, sentir y querer, como actividades, a menudo se contraponen y contradicen. Eso puede manifestarse junto a una gran claridad de argumentación intelectual y a una total incapacidad de actuar consecuentemente con esas ideas." (ibíd. pág. 74)

> "El estudiante con edad para el noveno curso busca y acepta claridad en las explicaciones." (ibíd. pág. 75)

> "Podemos resumir la situación del estudiante cuando entra en el inicio (sic) de los grados superiores del modo siguiente:

el despertar de una lógica rigurosa y un potencial de pensamiento que requiere distanciarse de uno mismo y de los demás.

La búsqueda de equilibrio entre la intelectualidad y el ámbito de la pasión y la voluntad impulsiva” (ibíd. pág. 75)

“*El estudiante de décimo curso* (16 años de edad)… [tiene] un deseo de conocer hechos, informaciones y detalles exteriores que reclaman un nuevo enfoque intelectual… ahora quieren saber *cómo sabemos* que son así. Dicho de otro modo necesitan no solamente [obtener] información sino comprenderla.” (ibíd. pág. 75)

“Las fachadas de la existencia burguesa deben ser derribadas para exponer con desnudez lo que hay detrás.” (ibíd. pág. 75)

“El diálogo [del estudiante de décimo curso] con los adultos alcanza un tono más agudo y existencial. Ya no es puramente un deporte intelectual.” (ibíd. pág. 75)

“El *estudiante de duodécimo curso* busca una visión global donde pueda reconciliar dos fuerza opuestas. Estas dos tendencias deberán hacerse aparentes a través de los estudios de ciencia, humanidades y experiencia práctica.” (ibíd. pág. 76)

“Para *el estudiante de duodécimo curso* el interrogante… es ¿cómo puedo influir yo al mundo? Esta pregunta ha de hacerse… en términos de economía… o en ciencia.” (ibíd. pág. 76)

“El hecho de reconocer algo del propio destino individual es la consecuencia de reconocer los aspectos globales del destino de la humanidad. En último término el estudiante de duodécimo curso quiere una respuesta útil a la pregunta: ¿se puede cambiar el mundo? y ¿soy yo digno de ser un instrumento de cambio?” (ibíd. pág. 76)

“A finales de los 16 años puede considerarse concluida la crisis de la transición de la pubertad…Hay más inclinación por el trabajo serio…*"en toda modestia el joven asume que tiene una parte importante que representar en la salvación de la humanidad, y planifica su vida de acuerdo con eso*". [Piaget, J. *Teorías y métodos de la educación moderna*. Frankfurt, 1974]. En estos casos los maestros pueden ayudar poniendo un ejemplo de cómo se forman los juicios... Es evidente que sienten y buscan "ideales" en su propio yo, en los otros y en el mundo.” (ibíd. pág. 77)

“Lo que encuentran en su búsqueda rara vez cubre su expectativa… Fácilmente pueden caer presa del escepticismo [¿el autor quiso decir cinismo?]. La ciencia que el maestro presenta ha de verse como algo que ha tenido éxito por los pasos que ha tenido que recorrer para llegar al conocimiento. El pesimismo respecto del conocimiento no es bueno para el estado psicológico de los jóvenes de esa edad, aunque lo que dicen, con frecuencia exprese ese hecho [actitud]. Cuando lo hacen, en realidad están desafiando al mundo adulto: "*Muéstrame que eso no es así*". Hay todo un elemento trágico y objetivo en los jóvenes de esta edad pues rara vez consideran que están viviendo de la manera [en] que a ellos les gustaría vivir, es decir, como adultos que se determinan a sí mismos.” (ibíd. pág. 77)

“[A finales de los 16 años] la escuela ya no es aceptable si se la siente como algo que transcurre *al lado* de la vida real y no en ella. Ha de ofrecer posibilidades que ayuden a poner los pies en el suelo, aquí y ahora. Los alumnos detectarán cualquier cosa que sea puramente especulativa o que disfrace la realidad. Su búsqueda de autenticidad y verdad es una versión más concreta de su búsqueda de un ideal inalcanzable.” (ibíd. pág. 77)

La cuestión de las habilidades para la vida y el desarrollo del compromiso y la motivación reales a menudo se ve soterrada por el efecto de estrechez que provocan los exámenes en el horizonte del joven.” (ibíd. pág. 78)

“Los estudiantes… ven los exámenes como la "verdadera" tarea.” (ibíd. pág. 78)

“Lo que ahora estimula y desarrolla a los jóvenes no son los resultados, sino los procesos de autoeducación del propio maestro.” (ibíd. pág. 78)

“Los jóvenes de noveno grado quieren entender todo lo que se relacione con la metamorfosis.” (ibíd. pág. 81)

“La pregunta interior de los jóvenes de 18/19 años es diferente de la de los de 16/17. Quieren saber: como ser humano individual, ¿cómo puedo tener algún impacto en los asuntos sociales, económicos y técnicos? ¿Cuál es mi lugar en el mundo?" (ibíd. pág. 87)

- Lo que queremos que llegue a ser

En la obra citada, Richter se toma el trabajo de discutir dichos objetivos con cierto detalle.

"Con toda razón, la sociedad tiene expectativas de resultados y estándares, de responsabilidad y comparación, y no ha de limitarse a pagar por el servicio. En la medida en que los resultados del aprendizaje, y más concretamente el marco temporal de estas expectativas, están basados en una comprensión del desarrollo normal del niño, esas expectativas son perfectamente legítimas." (ibíd. pág. 21)

“Si los resultados [buscados] del aprendizaje [la educación] son contrarios a la naturaleza de la infancia -y puede[n] llegar a ser incluso perjudicial[es] para algunos niños, como, por ejemplo, con la introducción prematura de las habilidades de alfabetización formal- entonces la educación se ha extraviado de su camino. La cuestión crucial es quién determina los resultados [buscados] del aprendizaje [educación] y qué criterios se utilizan.” (ibíd. pág. 21)

"Las necesidades reales que la sociedad moderna tiene de gente con iniciativa, energía, flexibilidad, creatividad y capacidad social, demandan que los estudiantes de los GRADOS

SUPERIORES aprendan a aprender, a trabajar, a transferir las habilidades de un ámbito a otro, a desarrollar facultades capaces (sic) de resolver problemas, ser creativos y, sobre todo, a tener un sutil sentido de responsabilidad social." (ibíd. pág. 78)

“Desarrollar un repertorio de habilidades que permitan al individuo ser creativo y adaptable en campos que van más allá de lo que han aprendido de manera específica". (ibíd. pág. 78)

“[En los grados superiores se espera que el alumno sea capaz de] desarrollar una voluntad ética basada en el entendimiento.” (ibíd. pág. 75)

“[A finales del noveno curso los alumnos deberían comenzar a] mostrar estructura en su pensamiento y ser capaces de hacer deducciones lógicas causales; pasar del juicio basado en el sentimiento (octavo curso) al juicio basado en la observación y el entendimiento. Aplicar procesos analíticos a un nexo global y descubrir los principios implícitos.” (ibíd. pág. 75)

“La claridad del pensamiento y la creciente habilidad de generar juicios debería ayudar a los alumnos a salirse de la naturaleza inestable de las fuerzas emocionales de simpatía y antipatía. De ahí el esfuerzo en asumir analíticamente las leyes que puedan entenderse con el pensamiento.” (ibíd. pág. 83)

“Lograr objetividad y claridad en el pensar; extraer conclusiones con lógica y causalidad; Ser capaz de formar juicios de sentido común a la vez que formular conceptos.” (ibíd. pág. 85)

“Reconocer leyes naturales usando el pensar analítico; aplicar herramientas conceptuales a situaciones prácticas.” (ibíd. pág. 85)

“Asumir cada vez más responsabilidad por su propio trabajo y comportamiento y ser capaces de tomar decisiones y llevarlas a cabo basados en su propio entendimiento; hacerse opiniones y ser capaces de explicarlas y justificarlas.” (ibíd. pág. 85)

“Si el noveno curso se dedicaba a expandir los horizontes y el décimo quería averiguar de dónde vienen las cosas, el undécimo curso tiene que ver con llegar a comprenderlas.” (ibíd. pág. 85)

“Aprendiendo el concepto de "cociente diferencial", los alumnos entienden una nueva dimensión de las matemáticas. Además de ser capaces de aplicarla, los alumnos también deberían (sic) entenderla y experimentarla. Derivando la forma de la ecuación y la [ecuación] de la forma, intentamos generar en los alumnos una actividad interior y una comprensión de lo que es cualitativo en las matemáticas. Entendiendo la base del cálculo integral, los alumnos reconocerán que, en el ámbito de las matemáticas superiores, un proceso matemático puede corresponder a otro opuesto [lo cual] abre todavía un nuevo nivel de entendimiento matemático del mundo.” (ibíd. pág. 89)

El maestro

Como dije, Steiner afirma que el alumno tiene una necesidad psicológica de *admirar* a quien tiene autoridad sobre él; en consecuencia concluye que el profesor debe efectivamente *merecer* esa admiración. Eso implica que el "tamaño moral" de los docentes debe ser considerable; por poner un ejemplo, el profesor debe ser suficientemente intelectualmente honesto como para *no aceptar* enseñar una materia que no domina profundamente.

Steiner enfatiza que, de acuerdo a las grandes cosas que la sociedad espera del profesor, en tanto que tiene en sus manos la formación de generaciones futuras, él, ella debe no solamente llevar a cabo su actividad profesional de manera competente y cuidadosa sino estar inmerso(a) en su cotidianidad misma en una visión de la vida que lo convierte en una persona merecedora del respeto y la admiración que sus alumnos necesitan poder otorgarle, especialmente dado el hecho crucial de que durante la preparatoria el joven descubre los ideales, en el sentido filosófico del término y experimenta un profundo deseo de entrar en contacto con ellos y manifestarlos en su propia vida.

> "La transición a los grados superiores implica un cambio de enfoque en la actividad del maestro. Si en el período anterior el alma del joven había de nutrirse del maestro de clase, lo que habrá de despertarse en la etapa superior es el espíritu pensante." (ibíd. pág. 20)
>
> "Los niños de los grados superiores no sólo esperan que sus profesores sean expertos en su campo respectivo, sino que necesitan saber que los maestros extraen sus propios ideales de su trabajo, de su vida." (ibíd. pág. 21)
>
> "Los estudiantes [de los grados superiores] no esperan que el profesor revele la verdad en un sentido absoluto pero lo que sí esperan es que el maestro les muestre que la verdad *se puede* encontrar y en cada asignatura quieren saber *cómo* se puede descubrir su sentido superior y su relevancia." (ibíd. pág. 21)
>
> "Lo que eso requiere, como actividad interior del maestro, es investigación continua. Cuando los estudiantes averiguan [¿se dan cuenta?] que sus profesores están ahondando continuamente la comprensión de su tema y de la naturaleza del ser humano, su propia actividad interior se ve alentada, reconocida y estimulada." (ibíd. pág. 21)

“Naturalmente [el maestro], ha de ser capaz de reaccionar, y eso implica permitir que los niños aprendan; es la habilidad primordial que necesitan los maestros.” (ibíd. pág. 21)

“Ser buen maestro no equivale sólo a ser competente en el aula, quiere decir tener las cualidades interiores que afrontan el desarrollo de los niños de maneras igualmente reales, pero menos visibles.” (ibíd. pág. 21)

“El maestro es un artista y un educador profesional. Como artista es responsable del ser del niño. Como profesional tiene una responsabilidad más amplia ante los requerimientos de los padres [las] autoridades y el estado.” (ibíd. pág. 21)

“Lo más importante es que tiene que haber el ambiente anímico correcto en el lugar. El personal a menudo se reúne por la mañana para recitar juntos algún verso antes de entrar en sus aulas y esperar que lleguen los niños.” (ibíd. pág. 55)

“Los estudiantes, finalmente, deberían tener la oportunidad de definir, crear y vivir su propio espacio de aprendizaje, no en solitario sino en colaboración con los compañeros y maestros.” (ibíd. pág. 76)

“Cuando los niños eran más jóvenes, la tarea del maestro era evaluar y escoger lo que decía a los niños. Ahora el maestro ha de dejar que los jóvenes lo experimenten como una persona con preguntas reales. Lo que ahora estimula y desarrolla a los jóvenes no son los resultados, sino los procesos de autoeducación del propio maestro. Sólo tendrán éxito los maestros que puedan dejar de lado sus propias actitudes arraigadas y permanezcan ellos mismos "aprendices vitalicios".” (ibíd. pág. 78)

“No habría que subestimar el desafío del despertar de ideales auténticos. La verdadera tarea de la etapa de los grados superiores es trabajar con los adolescentes de manera que puedan preguntar: "*¿Qué he de hacer para ser útil en la sociedad*?", en lugar de preguntar "*¿Qué he de hacer para hacer lo que quiero*?". (ibíd. pág. 78)

“La educación no es solamente un asunto de instrucción intelectual: es un proceso integral. Tampoco debería estar restringida al conocimiento especializado sino que debería buscar la implicación del ser humano entero. *Los alumnos y los maestros pueden considerar que han tenido éxito, si logran desarrollar en la misma medida el intelecto y una variada riqueza de vida emocional y volitiva y si provocan un sentimiento de libertad, igualdad y fraternidad*. Dar forma a cada clase será un "arte de la educación" que presupone *un maestro creativo que está en constante proceso de desarrollo*. En este sentido, educación quiere decir enseñar el tema correcto, de la manera conveniente en el momento oportuno.” (ibíd. pág. 78)

“Si los maestros logran entender las leyes del desarrollo humano y trabajar con ellas, entonces serán capaces de "leer" al ser humano. Los diversos fenómenos fisiológicos y psicológicos que tienen lugar a medida que el joven madura deben estar vinculados con el ser humano en su conjunto. Eso podemos compararlo con la planta cuya totalidad sólo puede ser observada en toda la secuencia de su ciclo vital. Cuando una persona ha aprendido a leer al ser humano lo suficiente para poder basar su acción educativa en ese entendimiento, ayudando así al joven en el conjunto de su ser, podemos decir que se ha hecho competente en educación, ha alcanzado la aptitud educativa." (ibíd. pág. 79)

"Los estudiantes tendrían que poder tener la vivencia de cómo los demás toman la euritmia en serio." (ibíd. pág. 82)

El entendimiento

"El *estudiante de décimo curso* (16 años de edad) … [tiene] un deseo de conocer hechos, informaciones y detalles exteriores que reclaman un nuevo enfoque intelectual… ahora quieren saber *cómo sabemos* que son así. Dicho de otro modo necesitan no solamente [obtener] información sino comprenderla." (ibíd. pág. 75)

"[En los grados superiores se espera que el alumno sea capaz de] desarrollar una voluntad ética basada en el entendimiento." (ibíd. pág. 75)

"[A finales del noveno curso los alumnos deberían comenzar a] mostrar estructura en su pensamiento y ser capaces de hacer deducciones lógicas causales; pasar del juicio basado en el sentimiento (octavo curso) al juicio basado en la observación y el entendimiento. Aplicar procesos analíticos a un nexo global y descubrir los principios implícitos." (ibíd. pág. 75)

"La claridad del pensamiento y la creciente habilidad de generar juicios debería ayudar a los alumnos a salirse de la naturaleza inestable de las fuerza emocionales de simpatía y antipatía. De ahí el esfuerzo en asumir analíticamente las leyes que puedan entenderse con el pensamiento." (ibíd. pág. 83)

"Lograr objetividad y claridad en el pensar; extraer conclusiones con lógica y causalidad; Ser capaz de formar juicios de sentido común a la vez que formular conceptos." (ibíd. pág. 85)

"Reconocer leyes naturales usando el pensar analítico; aplicar herramientas conceptuales a situaciones prácticas." (ibíd. pág. 85)

"Asumir cada vez más responsabilidad por su propio trabajo y comportamiento y ser capaces de tomar decisiones y llevarlas a cabo basados en su propio entendimiento; hacerse opiniones y ser capaces de explicarlas y justificarlas." (ibíd. pág. 85)

"Si el noveno curso se dedicaba a expandir los horizontes y el décimo quería averiguar de dónde vienen las cosas, el undécimo curso tiene que ver con llegar a comprenderlas." (ibíd. pág. 85)

"Aprendiendo el concepto de "cociente diferencial", los alumnos entienden una nueva dimensión de las matemáticas. Además de ser capaces de aplicarla, los alumnos también deberían (sic) entenderla y experimentarla. Derivando la forma de la ecuación y la [ecuación] de la forma, intentamos generar en los alumnos una actividad interior y una comprensión de lo que es cualitativo en las matemáticas. Entendiendo la base del cálculo integral, los alumnos reconocerán que, en el ámbito de las matemáticas superiores, un proceso matemático puede corresponder a otro opuesto [lo cual] abre todavía un nuevo nivel de entendimiento matemático del mundo.” (ibíd. pág. 89)

El conocimiento

“Las actividades artísticas y prácticas se consideran de igual valor que la transferencia de conocimiento”. (ibíd. pág. 78)

“La educación no es solamente un asunto de instrucción intelectual: es un proceso integral. Tampoco debería estar restringida al conocimiento especializado sino que debería buscar la implicación del ser humano entero. Los alumnos y los maestros pueden considerar que han tenido éxito, si logran desarrollar en la misma medida el intelecto y una variada riqueza de vida emocional y volitiva y si provocan un sentimiento de libertad, igualdad y fraternidad. Las personas entonces no rechazarán los desafíos que plantea la vida ni reaccionarán a las crisis con resignación. En lugar de eso ayudarán a encontrar significado y buscarán y recorrerán nuevos caminos. Dar forma a cada clase será un "arte de la educación" que presupone un maestro creativo que está en constante proceso de desarrollo. En este sentido, educación quiere decir enseñar el tema correcto, de la manera conveniente en el momento oportuno.” (ibíd. pág. 78)

El pensamiento

“Podemos resumir la situación del estudiante cuando entra en el inicio (sic) de los grados superiores del modo siguiente:

- el despertar de una lógica rigurosa y un potencial de pensamiento que requiere distanciarse de uno mismo y de los demás.
- la búsqueda de equilibrio entre la intelectualidad y el ámbito de la pasión y la voluntad impulsiva (ibíd. pág. 75)"

“A finales del noveno curso los alumnos deberían comenzar a… apreciar la tecnología como "quinto reino", el reino de la cultura creado por el ser humano: descubrir en la tecnología el pensamiento convertido en realidad del mundo.” (ibíd. pág. 82)

“…mostrar interés por el mundo que les rodea, por motivación propia; adquirir conocimientos sobre lo que les interesa para la recogida independiente de información y [el] registro de los hechos.” (ibíd. pág. 82)

“El contenido de todas las clases [durante el tercer septenio] debería responder a esa necesidad [de aprender a formar juicios]: La tarea de la educación es proporcionar oportunidades de aprendizaje donde se puedan experimentar y hacer conscientes leyes objetivas que sean accesibles al pensamiento. El juicio real sólo puede estar basado en el reconocimiento de la verdadera naturaleza de los fenómenos.” (ibíd. pág. 77)

“Si en el período anterior el alma del joven había de nutrirse del maestro de clase, lo que habrá de despertarse en la etapa superior es el espíritu pensante.” (ibíd. pág. 20)

“Pensar, sentir y querer, como actividades, a menudo se contraponen y contradicen. Eso puede manifestarse junto a una gran claridad de argumentación intelectual y a una total incapacidad de actuar consecuentemente con esas ideas.” (ibíd. pág. 74)

“La escuela se convierte en una preparación real para la vida si proporciona a los individuos oportunidades de convertirse en personalidades libres que puedan reconocer y aceptar las tareas que la vida les presenta, con las facultades anímicas del pensar, sentir y querer integradas por la actividad de su "yo".” (ibíd. pág. 78)

“A finales del noveno curso los alumnos debería comenzar a… mostrar estructura en su pensamiento y ser capaces de hacer deducciones lógicas causales; pasar del juicio basado en el sentimiento (octavo curso) al juicio basado en la observación y el entendimiento. Aplicar procesos analíticos a un nexo global y descubrir los principios implícitos.” (ibíd. pág. 82)

“La claridad del pensamiento y la creciente habilidad de generar juicios debería ayudar a los alumnos a salirse de la naturaleza inestable de las fuerza emocionales de simpatía y antipatía. De ahí el esfuerzo en asumir analíticamente las leyes que puedan entenderse con el pensamiento.” (ibíd. pág. 83)

“En LENGUAS EXTRANJERAS… El uso de la gramática como herramienta puede ser apreciado por el gozo que sienten los alumnos por el pensamiento claro.” (ibíd. pág. 84)

“[Al final del décimo curso el alumno debe poder] lograr objetividad y claridad en el pensar; extraer conclusiones con lógica y causalidad; ser capaz de formar juicios de sentido común a la vez que formular conceptos.” (ibíd. pág. 85)

“[El alumno debe ser capaz de] reconocer leyes naturales usando el pensar analítico; aplicar herramientas conceptuales a situaciones prácticas.” (ibíd. pág. 85)

“[El alumno debe ser capaz de] introducir movilidad en su pensamiento, lo que va más allá de la causalidad lógica de pensar en décimo curso y que ahora puede sintetizar y relacionar diferentes factores dentro de una visión global. Eso implica también ser capaces de pensar sobre fenómenos infinitos y no perceptibles con los sentidos.” (ibíd. pág. 87)

La sociedad

“[En el duodécimo curso] los desafíos de los exámenes públicos, en su unilateralidad, pueden lesionar la iniciativa y estrechar el ámbito de interés.” (ibíd. pág. 78)

“Cada clase y proceso de aprendizaje requiere un equilibrio de experiencia primaria, interacción social -por medio de conversaciones en grupo, escucha, trabajo conjunto etc.- y trabajo en solitario. (ibíd. pág. 21)

“El maestro es un artista y un educador profesional. Como artista es responsable del ser del niño. Como profesional tiene una responsabilidad más amplia ante los requerimientos de los padres [las] autoridades y el estado. (ibíd. pág. 21)

“Con toda razón, la sociedad tiene expectativas de resultados y estándares, de responsabilidad y comparación, y no ha de limitarse a pagar por el servicio. En la medida en que los resultados del aprendizaje, y más concretamente el marco temporal de estas expectativas, están basados en una comprensión del desarrollo normal del niño, esas expectativas son perfectamente legítimas. (ibíd. pág. 21)

“A esta edad [al inicio de los grados superiores], los jóvenes experimentan intensamente su "yo" en juicios extremos de simpatía y antipatía, especialmente el mundo convencional de los padres, autoridades, rutinas y reglas. Las fachadas de la existencia burguesa deben ser derribadas para exponer con desnudez lo que hay detrás. (ibíd. pág. 75)

“Los adolescentes que sólo encuentran respuestas inadecuadas entre sus profesores y los adultos que les rodean, más tarde en la vida tal vez luchen para superar el egoísmo y la inseguridad pero, como adultos, también podrían ser incapaces de encontrar el altruismo y la confianza que necesita una sociedad sana. (ibíd. pág. 77)

“Las necesidades reales que la sociedad moderna tiene… demandan que los estudiantes de los GRADOS SUPERIORES aprendan… a tener un sutil sentido de responsabilidad social. (ibíd. pág. 78)

“No habría que subestimar el desafío del despertar de ideales auténticos. La verdadera tarea de la etapa de los grados superiores es trabajar con los adolescentes de manera que puedan preguntar: "*¿Qué he de hacer para ser útil en la sociedad*?", en lugar de preguntar "*¿Qué he de hacer para hacer lo que quiero*?" (ibíd. pág. 78)

“Preparados de esta manera, los jóvenes podrán contribuir con libertad y responsabilidad, como individuos autodependientes, a la sociedad y a los tiempos en los que se encuentran, aprendiendo a participar en la configuración del futuro. (ibíd. pág. 78)

Las personas entonces no rechazarán los desafíos que plantea la vida ni reaccionarán a las crisis con resignación. En lugar de eso ayudarán a encontrar significado y buscarán y recorrerán nuevos caminos. Dar forma a cada clase será un "arte de la educación" que presupone un maestro creativo que está en constante proceso de desarrollo. En este sentido, educación quiere decir enseñar el tema correcto, de la manera conveniente en el momento oportuno.” (ibíd. pág. 78)

Capítulo 5. Análisis estructural del pensamiento pedagógico de Rudolf Steiner (de acuerdo al libro Plan de estudios de la Pedagogía Waldorf-Steiner de Tobías Richter)

Una vez hecho un extracto de las ideas de Steiner que, a mi parecer, dan una imagen bastante completa de su filosofía, haré aquí un análisis de la estructura de su pensamiento solamente en los dos conceptos más importantes entre los que vi: “el alumno” y “el maestro”.

El alumno

En los grados superiores correspondientes al período de la preparatoria comenzará a cotejar sus propios sentimientos con la percepción que tiene del mundo exterior. Detecta cualquier cosa puramente especulativa o que disfrace la realidad.

Tiene

- una capacidad y un interés por un trabajo serio, una comprensión de una lógica rigurosa, una necesidad de derribar fachadas y una voluntad intensa de comprometerse con la vida que lo lleva a la pregunta “¿Cómo me afecta el mundo?
- Una necesidad de saber cómo es que sabemos las cosas

Busca

- Una visión global que integre
    - La percepción de sí mismo como individuo
    - La conciencia global que tiene del mundo
    - Una forma de influir en el mundo en los aspectos de
        - Economía
        - Vida
            - personal
            - social
        - Política
        - Ciencia
    - Autenticidad y verdad, versión concreta de un ideal inalcanzable.

Las matemáticas son una vivencia de ese ideal porque en ellas la persona entra en contacto con una instancia de claridad total y coherencia absoluta.

Se pregunta

- ¿Es posible cambiar el mundo?
- ¿Puedo ser yo quien lo haga?

Y comienza, específicamente en los grados

- Noveno (primer año de Preparatoria), a
  - Ser capaz de hacer deducciones lógicas causales
  - Conocer el concepto de demostración y hacer alguna de ellas
  - Apreciar la tecnología como "quinto reino"
  - Conocer de la combinatoria, la probabilidad y el pensamiento lógico-formal
- Décimo (segundo año de Preparatoria) a
  - Asumir analíticamente las leyes que pueden entenderse con el pensamiento
  - Lograr objetividad y claridad en el pensar
  - Reconocer leyes naturales usando el pensar analítico

<u>El maestro</u>

Procurará

- Personalmente
  - Ser un "aprendiz vitalicio" cuyos procesos de autoeducación estimularán al alumno
  - Ofrecer posibilidades que ayuden a poner los pies en el suelo aquí y ahora
  - Proporcionar oportunidades de aprendizaje donde se puedan hacer conscientes leyes objetivas
  - Tener ideales auténticos
- Que su propia enseñanza
  - Se dé en un ambiente anímico correcto
  - Presente el tema correcto

        - De manera conveniente
        - En el momento oportuno

- Que sus estudiantes
    - Aprendan a
        - aprender
        - pensar
        - trabajar
        - transferir habilidades de un ámbito a otro
        - resolver problemas
        - ser creativos
        - tener un sutil sentido de responsabilidad social
    - Despierten en ellos el espíritu pensante
    - Maduren como personas con
        - iniciativa
        - flexibilidad
        - energía
        - creatividad
        - capacidad social
    - Se pregunten no "qué he de hacer para hacer lo que quiero" sino "qué he de hacer para ser útil en la sociedad" cuya respuesta implica
        - Familiarizarse con el mundo
        - Desarrollar habilidades
        - Descubrir su propia individualidad
        - Desarrollar poderes de discernimiento y juicio
        - Desarrollar una voluntad ética basada en el entendimiento

Steiner afirma

> "La ciencia que el maestro presenta ha de verse como algo que ha tenido éxito por los pasos que ha tenido que recorrer para llegar al conocimiento". (ibíd.pág. 77)

Esta frase valida mi enfoque mayéutico y constructivista de hacer las preguntas necesarias para dar al alumno la oportunidad de descubrir "sus propias herramientas". Las leyes de los exponentes que el alumno va a descubrir no son otras que las que podría consultar en un libro pero yo aquí hago énfasis en que pueda crear su propia instancia del descubrimiento de dichas leyes en el *sanctum* más intimo de su interioridad cognitiva.

> “El pesimismo respecto del conocimiento no es bueno para el estado psicológico de los jóvenes de esa edad aunque lo que dicen exprese ese hecho. Cuando lo hacen en realidad están desafiando al mundo adulto <<muéstrame que eso no es así>>”. (ibíd.pág. 77)

Las matemáticas son el único dominio del pensamiento en el que se puede dar una *justificación absoluta* en el contexto de un *entramado totalmente coherente* a partir de *supuestos básicos de innegable evidencia.*

Presentadas así, las matemáticas constituyen una experiencia de reflexión epistemológica “¿qué puedo saber?”.

Una conducción correcta del espíritu del adolescente a través de una secuencia adecuada de preguntas le permite responderse a sí mismo: “Esto lo sé y sé cómo es que lo llego a saber, y esto otro, sé que no lo puedo saber y sé cómo es que llego a saber que no lo puedo saber”.

La experiencia de presenciar en el propio espíritu la re-construcción del entramado natural de los conceptos constituye un mentís irrefutable a la posición trágica del pesimismo epistemológico, característica de los vaivenes emocionales y la condición existencial de esta edad.

> “La escuela ya no es aceptable si se la siente como algo que sucede *al lado* de la vida real y no *en* ella. Ha de ofrecer posibilidades que ayuden a poner los pies en el suelo, aquí y ahora. Los alumnos detectarán cualquier cosa que sea puramente especulativa o que disfrace la realidad.” (ibíd.pág. 77)

> “Su búsqueda [de los jóvenes] de autenticidad y verdad es una versión más concreta de su búsqueda de algún ideal inalcanzable. “(ibíd.pág. 77)

> “La tarea de los maestros es ofrecer experiencias positivas en esta búsqueda. Si no lo logran, los jóvenes no encontrarán un fundamento para la existencia que les otorgue firmeza y orientación.” (ibíd.pág. 77)

> “Permanecerán [los jóvenes] vacíos, en pie, sin lugar donde apoyarse en la corriente del tiempo. “(ibíd.pág. 77)

> “Los adolescentes que sólo encuentran respuestas inadecuadas entre sus profesores que los rodean, más tarde en la vida tal vez luchen para superar el egoísmo y la inseguridad pero

> como adultos también podrían ser incapaces de encontrar el altruismo y la confianza que necesita una sociedad sana. “ (ibíd.pág. 77)

Este párrafo sintetiza, de manera difícil de superar, tanto mi crítica al sistema educativo tal como existe actualmente como mi propuesta de solución a algunos de los problemas de ese sistema.

Constato que la perspectiva antroposófica recupera, comparte y destaca como fundamentales algunas de mis más importantes intuiciones obtenidas a lo largo de más de 40 años de práctica profesional. Me extenderé un poco más que hasta ahora en el análisis de su contenido.

Como educadores estamos familiarizados con un juego perverso que la mayoría de los alumnos aprende a jugar y entiende que debe jugar desde los primeros grados de la educación básica:

“respuesta deseada → premio, toda otra respuesta → castigo”.

Para poner en evidencia la perversión de esta dinámica, basta considerar que cuando el alumno no sabe, no se atreve a dar la respuesta honesta “no sé” sino que se ve a sí mismo atrapado ante la amenaza de un castigo psíquico (desaprobación, humillación) de la cuál trata de librarse mediante estrategias psicológicamente razonables pero estrictamente deshonestas, como, por ejemplo, tratar de adivinar o hacer correr el tiempo diciendo paja.

Precisamente este juego perverso está “al lado de la vida real” y el adolescente se pregunta por qué el destino (trágico) lo obliga a participar de una farsa triste, arbitraria y absurda digna de los más desgarradores momentos de “Esperando a Godot”.

Dicha participación forzada en la falsedad *lesiona profundamente el alma* del adolescente que, como sabemos, durante el tercer septenio está, a decir de Steiner, en busca de la verdad y, por lo tanto, de la virtud.

Continúo:

> "La escuela… ha de ofrecer posibilidades que ayuden a poner los pies en el suelo, aquí y ahora. "(ibíd.pág. 77)

Ejemplos concretos de este tipo de herramienta (supongo que donde el traductor puso "posibilidades" quiso escribir "herramientas" dado que es la herramienta la que da la posibilidad) son los contenidos del cálculo diferencial que permiten tomar decisiones juiciosas sobre el uso de los instrumentos de crédito, a saber: la comprensión cabal de las funciones exponencial y logaritmo de las que, por cierto, no me parece apropiado enseñarlas en preparatoria pero forman parte del programa.

Una buena parte de los contenidos anteriores al cálculo se debe presentar asumiendo plenamente que sus aplicaciones directas en la vida diaria no son ni frecuentes ni numerosas pero que constituyen peldaños indispensables en el ascenso hacia la adquisición de los conceptos de dichas funciones (logaritmo y exponencial).

Llego aquí a un punto absolutamente crucial. Según Steiner

> "Los alumnos detectarán cualquier cosa que sea puramente especulativa o que disfrace la realidad." (ibíd.pág. 77)
>
> "Su búsqueda de autenticidad y verdad es una versión más concreta de su búsqueda de algún ideal inalcanzable y tiene implicaciones importantísimas como ésta:" (ibíd.pág. 77)

Todos los profesores hicieron estudios de nivel preparatoria y en su certificado está implícito el hecho de que ellos *llevaron cursos de matemáticas y los entendieron.*

Si no saben matemáticas (me refiero específicamente a los profesores de inglés, de geografía, de historia y demás), entonces allí está algo que disfraza la realidad y, según Steiner, esto será evidente para los alumnos, quienes no tendrán respeto por esos maestros. Por lo tanto *todos los maestros de la escuela deben tener un auténtico entendimiento de las matemáticas.*

No contemplo por el momento las soluciones a este problema pero queda aquí la observación como un objetivo a lograr más tarde en las escuelas cuyos profesores de matemáticas sean capaces de iniciar a los otros en sencillas actividades de matemáticas.

Capítulo 6. El modelo del curso que propongo

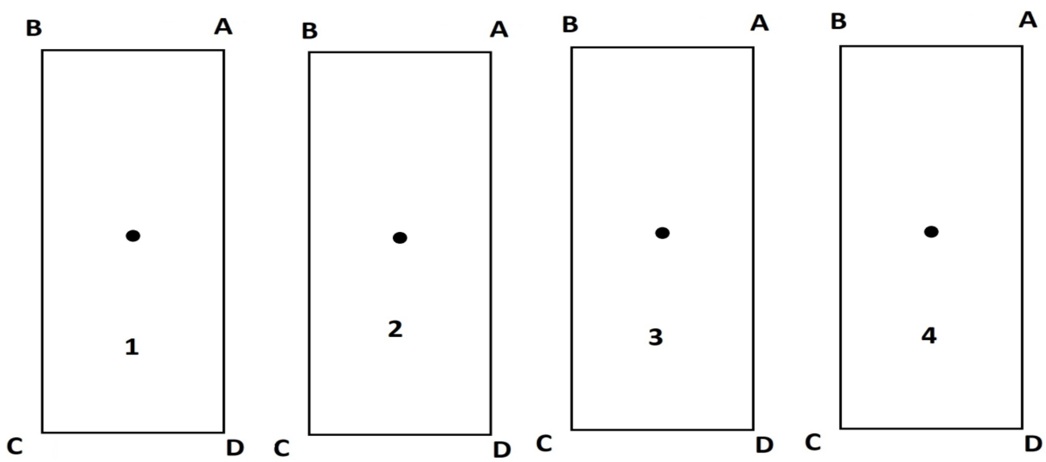
El objetivo de este trabajo es pues justificar las características específicas de un curso de formación de profesores de matemáticas de nivel bachillerato que suscite un cambio radical tanto en su manera de concebir las matemáticas y su enseñanza como en la estructura práctica de sus clases, dándoles también herramientas para adecuar estas clases a la visión teórica corregida.

El método que propongo al profesor se fundamenta totalmente en la profundización de los presupuestos filosóficos detrás de la mayéutica socrática.

¿Cómo espero convencer a algunos profesores de matemáticas de Preparatoria de que les conviene asistir a mis cursos?

Una vez que logre reunir a unos cuantos para exponer mis ideas, les propondré el siguiente juego.

Estará hecho en el pizarrón el siguiente dibujo



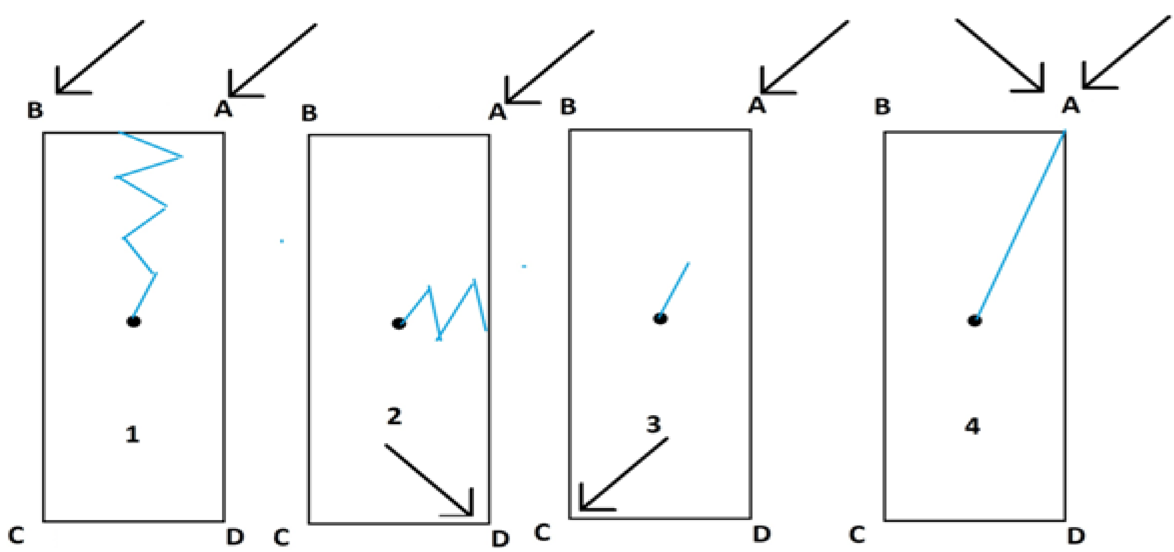
Se elegirán cuatro parejas de profesores para jugar sucesivamente una en cada rectángulo. [De no ser posible, una sola pareja irá jugando sucesivamente en cada rectángulo]. Se jugará en cada rectángulo, por orden numérico

Jugarán los dos profesores en forma alternada, comenzando con el del lado izquierdo y recibirán las siguientes instrucciones. El objetivo del juego es llegar hasta el borde de rectángulo. A partir del punto central, cada profesor deberá trazar un segmento de unos 5 cms de largo hacia el punto indicado en la siguiente lista que no será conocida más que por el profesor a quien se dirige; el otro la ignorará.

Lado izquierdo	
Rectángulo 1	A
Rectángulo 2	A
Rectángulo 3	B
Rectángulo 4	C

Lado derecho	
Rectángulo 1	B
Rectángulo 2	D
Rectángulo 3	D
Rectángulo 4	C

Al llegar al borde del rectángulo cada profesor marcará con una flecha la letra del punto que debía alcanzar. Esa parte del juego terminó y pasamos al rectángulo siguiente, hasta terminar los cuatro. Una vez terminado el ejercicio tendremos una imagen como ésta.



Propusimos este ejercicio para tener una representación visual de lo que se va logrando en un proyecto según que los objetivos de las partes sean distintos, contrarios o iguales. Sres. profesores, si volvemos al árbol “La educación media en México” de la Pag. 17 en su primera parte, “Objetivos de la escuela” veremos que nuestra situación real se parece a lo que ocurre en el tercer rectángulo. Lo que proponemos es que el profesor apele a la atracción del alumno por las actividades que lo divierten y de allí lo conduzca a un trabajo de razonamiento.

Revisaré algunos puntos de vista que describen la directriz principal de esta tesis y de los cursos para profesores que estoy preparando.

- El objetivo de un curso de matemáticas en Preparatoria NO ES capacitar al alumno para que dé *respuestas* (que, por cierto, están a unos cuantos clicks de distancia en internet) sino *sembrar en él las inquietudes* que lo muevan a hacer y hacerse *preguntas*, para *volverse capaz de resolver problemas*.
- Entre los otros profesores que tiene el alumno, la alumna, en estos años escolares, hay dos cuyas labores son más parecidas a la de su maestro de matemáticas que otras:
  - el de inglés, en el sentido de que no se necesita explicar lo que significa “blue” *(el “blue” es el color que se percibe ante la fotorrecepción de una luz cuya longitud de onda dominante mide entre 460 y 482nm [nanómetros])* sino que bastará con que se le diga que esa palabra corresponde al concepto que él ya tiene en la mente y que designa con la palabra “azul”.
  - el de deportes, en el sentido de que no explica demasiado sino que indica el objetivo del juego y luego deja que los alumnos mismos, por ensayo y error, vayan determinando cuáles son las mejores maneras de conseguirlo. La participación del profesor consiste sobre todo en supervisar que los alumnos estén jugando (de preferencia “bien”) durante el partido, mientras son los propios alumnos quienes llevan a cabo la actividad.

De acuerdo con mi punto de vista, el profesor de matemáticas debe entender que

Su tarea no es responder preguntas ni resolver problemas que no han sido planteados por el grupo

De aquí se desprende que el maestro no preparará la clase como tradicionalmente se hace, organizando una exposición de los temas que aparecen en el libro que usa como guía, sino imaginando situaciones "reales" (hipotéticas pero posibles) en las que el conocimiento de esos temas sea de utilidad.

En este contexto, "preparar una clase" significa <u>encontrar el vínculo</u> entre,

- por una parte situaciones o dificultades que ya interesan a los alumnos [a través de los métodos que ellos conocen o pueden idear para resolverlas] y,
- por otra, el material que debe ser presentado a ellos durante la clase.

Por ejemplo: si el tema que deseamos cubrir en las clases siguientes es, "Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas" podemos presentar el siguiente problema:

Para la fiesta del sábado quiero preparar el pastel más grande posible. Tengo en mi cocina todo lo necesario para hacer la masa, excepto la harina y el azúcar, cuyos costos, sumados, no deben rebasar los $900. Escribamos eso en lenguaje matemático, es decir: pongamos una fórmula que exprese lo que acabamos de decir.

El costo del kilo de azúcar es el doble del de harina. Escribamos también esto en lenguaje matemático.

En este punto el profesor recibirá sugerencias de los alumnos, las escribirá en el pizarrón y las irá estudiando en grupo, con ellos.

Ahora bien: es muy importante que este curso que estarán recibiendo los profesores se convierta en *un modelo* de los cursos que ellos darán y, por lo tanto

- Mis propios cursos no presentarán en una bandeja conocimientos acabados sino que sembrarán dudas en las mentes de los profesores-alumnos que asistan a ellos.
- Al término de mi curso cada profesor habrá comenzado a hacer reflexiones sobre las matemáticas mismas y sobre sus propios cursos, reflexiones que le darán ya entonces perspectiva, además de que el camino en esa actividad (la reflexión) estará trazado y se seguirá recorriendo una vez acabado el curso.

De aquí que, como profesor de profesores que seré, no conviene que siga yo describiendo con detalle la actividad del hipotético profesor-alumno del que estaba yo hablando, sino que, desde la concepción dinámica que pretendo sembrar en las mentes de los profesores, en cada una de las instancias de mi propia clase dejaré que esa actividad tome su propio curso.

¿Por qué debería hacer ese profesor de matemáticas reflexiones tan profundas sobre su actividad magisterial?

Porque es necesario que tome conciencia de la gran diferencia entre su actividad y la de profesores de algunas otras materias mientras establece la analogía que hay entre su propia actividad didáctica y la de los profesores de inglés y de deportes, que en este escrito supondremos que es el fútbol.

¿En qué sentido se parecen esas tres clases? En forma muy importante se parecen en que sus objetivos no consisten tanto en informar al alumno algunos datos sino que se debería lograr que el alumno cree *nuevos puntos de vista* sobre la realidad en la que se mueve. Con buenos profesores, al cabo de algunos meses del curso se esperaría que el alumno comience usar el inglés (o mejore su dominio) en su vida cotidiana, que se sienta atraído por meter goles o pararlos (o se convierta en un mejor futbolista) y eso le entusiasme e idealmente que comience a hacer observaciones sobre lo que ha aprendido de matemáticas: “qué pasa si sumo **n** cantidades iguales”, “es posible restar una cantidad de otra más pequeña o no es posible”, “por qué a veces decimos “y llevo una” cuando sumamos dos cantidades”, etc. Esto es: en los tres casos se espera que la materia permanezca en la mente del alumno más allá del tiempo de la clase.

Esa semilla difícilmente quedará sembrada en la mente del alumno si la actividad en clase no lo divierte o no constituye un reto posible de alcanzar. En el caso de las matemáticas pienso que lograr eso es imposible para un profesor que no ha comprendido a fondo lo que ellas son y lo que es su estudio.

Capítulo 7. Algunos ejemplos de dinámica pedagógica

En los dos primeros años de Preparatoria, lo que una alumna, alumno debería aprender es, esencialmente, una *nueva manera de decir* cosas que, o bien ya ha percibido en su entorno, o bien será capaz de observar, conducida, conducido por su profesor.

Para cada año de Preparatoria presentaré una historia que será la guía sobre la que iré construyendo esas situaciones. No necesariamente recomendaré a los profesores que cuiden la continuidad de las narraciones durante el curso, enmarcándolas dentro de una historia global pero yo misma decidí hacerlo.

Para los semestres 1° y 2° de Preparatoria mi historia generadora es que tenemos cerca de la ciudad un terreno que vamos a acondicionar para poder hacer en él grandes festivales musicales de varios días de duración.

Si esto se plantea al principio del curso, la fiesta a la que hacemos referencia en la pág. 67 para el tema "Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas" se presentará como la fiesta de inauguración del proyecto, la que se ha de llevar a cabo en la cumbre de la pequeña colina que se verá en la Pag. 74. Estableceremos así relaciones de unos temas del programa con otros.

Veamos algunos ejemplos de las clases que proponemos.

- ♦ Qué significa π

Lo que sigue podría ser el texto extraído de la grabación de la clase correspondiente al tema.

- Muchachas, muchachos: en el terreno ya están hechos, los cinco patios cuadrados de cemento que serán las pistas de baile para los diferentes tipos de música, y vamos a estudiar la forma en que estas pistas estarán decoradas. Aquí aparecerá ese famoso número π que todos han oído mencionar el conocido $\pi = 4.1416$. [*No es un error mecanográfico: realmente diremos que eso vale π. Sin duda, alguno dirá que hay un error*].

- No es eso, maestra, maestro: vale 3.1416, dirán algunos.

El profesor fingirá extrañeza y preguntará

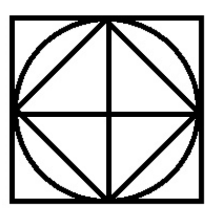
- ¿De dónde sacan ese valor? El que yo conozco es 4.1416.
- Todo el mundo lo sabe, (dirán, más o menos, los alumnos).
- Todo el mundo sabía que el sol daba vueltas alrededor de la Tierra y resultó falso, pero para no entretenernos en esa dificultad vamos a escribir

$$\pi \overset{?}{=} \begin{cases} 4.1416 \\ 3.1416 \end{cases}$$

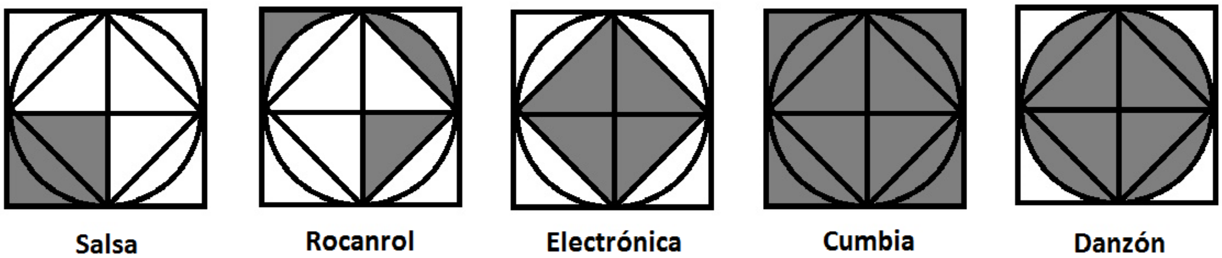
Este "error" del profesor creará cierta tensión y mantendrá a una parte de los alumnos atentos al desarrollo de la clase. Mostrará también, sobre todo, que el camino del conocimiento de las matemáticas a través de la historia de la humanidad ha estado lleno de tropiezos. Aquí coincido con la posición pedagógica Waldorf una vez más: "*La ciencia que el maestro presenta ha de verse como algo que ha tenido éxito por los pasos que ha tenido que recorrer para llegar al conocimiento*" (ibíd. pág. 77).

El profesor seguirá con la clase.

- Sobre cada uno de los 5 patios de los que hablábamos ya se hicieron los siguientes trazos.



- Decidimos colorear cierta parte de cada pista, de acuerdo a la siguiente figura,



y nosotros tenemos que mandar a comprar las cubetas de pintura para hacerlo, de tal manera que no falte pintura pero que tampoco sobre demasiada.

- De hecho, la pista de Salsa ya está coloreada y fue necesaria exactamente una cubeta de pintura para hacerlo. ¿Cuántas se necesitarán para las demás?

No será difícil que en el grupo se determine que para la de Rocanrol se requiere 1 cubeta, igual que para la de Salsa; para la de Electrónica se requieren 2 cubetas y para la de Cumbia 4. Nos queda saber cuántas para la de danzón; llamaremos a esa cantidad M. Conduciremos al grupo a que note que M es la cantidad de veces que cabe el cuadrito coloreado de la pista de Salsa dentro del círculo de la de Danzón y a que establezca que podemos afirmar que $2<M$, puesto que la región coloreada en la pista de Electrónica cabe dentro de la de Danzón y será obvio que $M<4$ cuando comparemos las pistas de Cumbia y Danzón. Tenemos pues $2<M<4$. Si cuesta trabajo que los alumnos analicen el problema podemos decir algo absurdo como “Para más seguridad yo voy a mandar 12 cubetas”, afirmación que muy probablemente moverá a algunos alumnos a exclamar que son demasiadas.

Haremos notar que, de hecho, lo que estamos tratando de hacer es *calcular el área* A del círculo, conociendo su radio y que el grupo probablemente *ya conoce* una fórmula para hacerlo, o incluso dos, y por fin las escribiremos:

$$A=\pi r^2 \qquad \text{y} \qquad A=2\pi r$$

(si no se pudiera elegir entre esas fórmulas haremos una pequeña digresión para distinguir entre “cuánto debo caminar” y “cuánta pintura necesito” y hacer notar que son medidas esencialmente diferentes).

El grupo, conducido por el profesor se dará cuenta de que r^2 es precisamente la medida (el área) de la parte pintada en la pista de salsa y, puesto que para esa área se necesita exactamente una cubeta, vemos que para el círculo se requieren π cubetas.

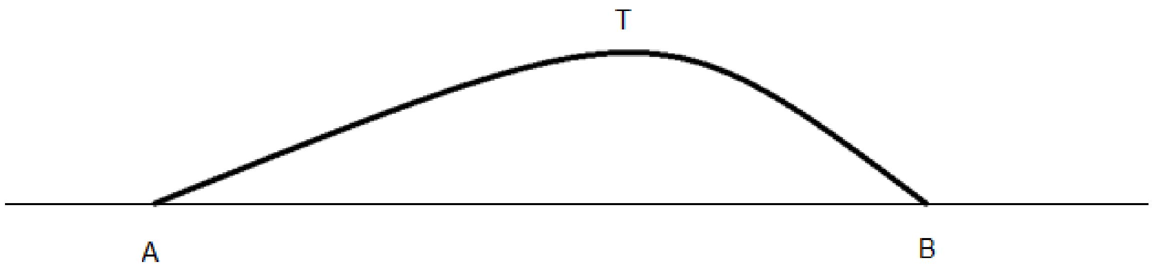
“Fingiremos” entonces preocupación y diremos que ahora nos resulta evidente que el valor que habíamos dado a π no puede ser el correcto; ellos notarán que $\pi < 4$. Aclararemos que tampoco sabemos si el de ellos sí es el correcto; hasta donde sabemos, podría ser cualquier número entre 2 y 4 y tal vez valdría la pena buscar algo en internet al respecto.

De lo que se trata no es de confirmar una información que ya tenían (y que, por cierto, no significaba nada en sus mentes) sino de haber sembrado una duda y, de paso, darle un sentido a lo que ya sabían. Podremos establecer “el cuadrito de la pista de Salsa cabe un poquito más de tres veces en el círculo de la de danzón”.

Haremos notar que algo análogo ocurre *en todo círculo;* el cuadrado que tiene como lados dos radios y dos tangentes cabrá un poco más de tres veces en el círculo.

- ♦ Pendiente de una recta.

Supongamos que vamos a presentar a los alumnos la ecuación de la recta y queremos conducirlos a la aprehensión del concepto de pendiente.



Nuevamente escribimos aquí lo que el profesor diría.

- Nuestro terreno es plano excepto por una pequeña colina como ésta [el profesor dibuja la figura de arriba] y vamos a hacer en el punto T una comida a la que están todos invitados. Hay que cargar hasta arriba las bebidas y el hielo. Podemos pedir que nos los lleven ya sea hasta el punto A o hasta el B. ¿En dónde conviene que los deje el camión?

Muchos probablemente contestarán que elegirían el izquierdo

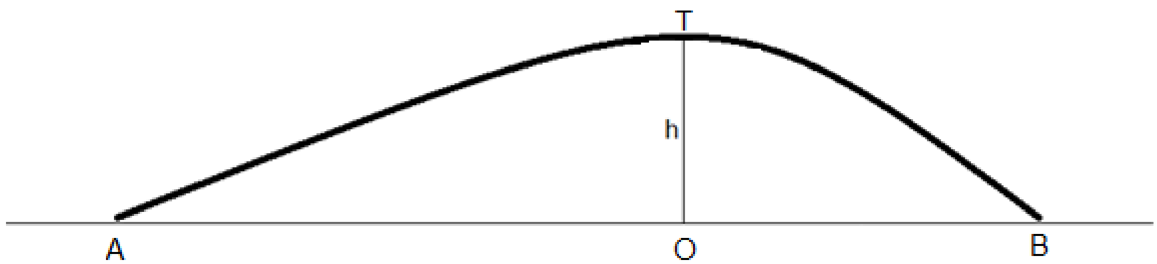
“porque está MENOS empinado subiendo desde A que desde B”

Esto significa que los alumnos <u>saben lo que es la pendiente</u> o entienden que la palabra “pendiente” indica un concepto relacionado con “inclinación”, “empinado”. ¿Qué es, entonces, lo que queremos que aprendan sobre la pendiente de una recta? No el concepto mismo (cuyo contenido claramente ya manejan) sino el término, la forma de expresarlo en lenguaje matemático y las ventajas de hacerlo.

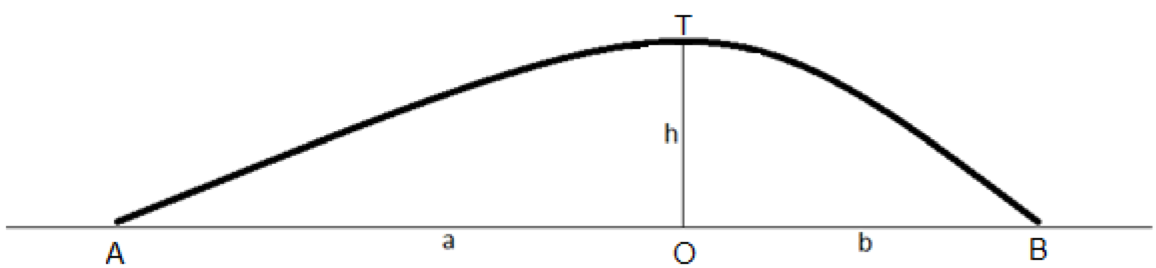
Entonces el profesor podría decir:

- Estoy en un apuro porque yo lo que me proponía enseñarles hoy era el concepto de *pendiente* y veo que ustedes ya lo tienen o tienen una idea bastante clara de él. ¿Qué podré hacer ahora?

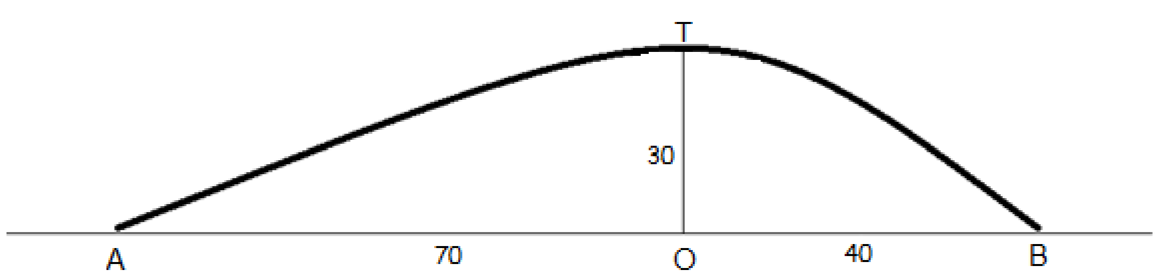
- Bueno: se me ocurre que lo que vamos a hacer es presentar la manera matemática de estudiar el problema, el concepto, y mostrar cómo el uso del lenguaje matemático nos va a facilitar algunas cosas.
- Lo primero que haremos notar es que los dos caminos nos llevan al mismo punto T, es decir que la altura ganada es la misma en los dos casos. Trazamos la vertical desde el punto T hasta la recta AB; llamamos O al punto en que la corta y h a la longitud del segmento TO.



- Notemos que el punto O divide al segmento AB en dos segmentos cuyas longitudes llamaremos a y b, como se ve en la figura.



Para no complicar el problema a quienes no manejan con confianza las literales representando cantidades, comenzaremos trabajando en un caso particular: pondremos las distancias, medidas en metros.



- Ahora bien: “MENOS INCLINADO subiendo desde A que desde B”, en este caso, es la expresión clave y nos preguntamos: ¿Qué podemos hacer con las cantidades 70, 40 y 30? ¿De qué manera, mediante qué operación podemos combinarlas de modo que 70 y 30 nos den una cantidad menor (puesto que está MENOS inclinado de ese lado) que la que nos dan 40 y 30?

Después de algunos intentos, no faltará la alumna, el alumno que descubra que convendrán

$$30 - 70 \quad y \quad 30 - 40 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{30}{70} \text{ y } \frac{40}{70}$$

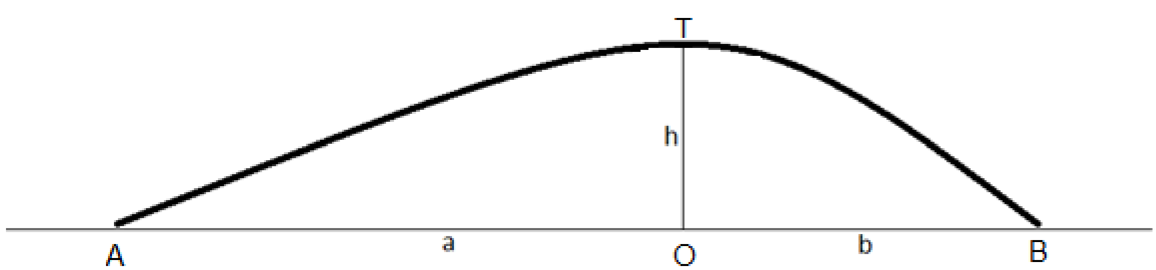
Podemos entonces decir que elegiremos

$$\frac{30}{70} \; y \; \frac{40}{70}$$

y que más tarde veremos en clase por qué conviene así o podemos encargar a quienes estén interesados que investiguen por qué se elige el cociente y no la diferencia y lo expongan en la clase siguiente.

Ésta es la parte importante de la clase: <u>generar la necesidad, el deseo</u> de entender, de crear, de resolver. No cerraremos el tema sin generalizar lo descubierto.

- Esto que encontramos es cierto para las cantidades que vimos hace unos momentos y para muchas otras ternas. Escribamos ahora lo mismo que antes pero con variables en lugar de cantidades fijas.



- Las operaciones que nos dan la relación de tamaños que esperamos son, nuevamente la resta y el cociente, es decir

$$\text{tanto} \quad h-a \;\text{ y }\; h-b \qquad\qquad \text{como} \quad \frac{h}{a} \;\text{ y }\; \frac{h}{b}$$

- y, análogamente a lo que hicimos antes, elegimos

$$\frac{h}{a} \;\text{ y }\; \frac{h}{b}$$

El profesor procurará que sea claro lo que espera de los tamaños de las dos fracciones.

¿Y si, a causa del tiempo invertido al principio, después no fuera posible estudiar en detalle la pendiente de una recta? Los alumnos que quedaron interesados en el asunto (que serán sin duda más que los que lo estarían con el método tradicional) tendrán sobrada capacidad para encontrar fácilmente esa información por sí mismos. Se puede pedir la colaboración de quien lo desee para que busque el dato y lo exponga la siguiente clase.

- ¿Sabe usted lo que es un radián?

¿Realmente es importante que el alumno reflexione sobre lo que es un radián? En un sentido no es importante (ya irá aprehendiendo el concepto como nosotros lo hicimos) y en otro es importantísimo: es el tema que yo elegí para que el alumno se vaya apoderando de los conceptos *reflexionar*, *asegurar*, *demostrar*. Que vaya construyendo con firmeza un concepto y se vaya observando a sí mismo mientras lo hace. Vayamos pues.

Utilizando todos los elementos posibles a nuestro favor con el objeto de mantener a los alumnos interesados en nuestra clase, haremos uso ahora de un misterioso ente que se da en nuestra sociedad: lo que hace años se conocía como “folletines”, más tarde “telenovelas” y últimamente “series”. Es un hecho que a las personas de una parte considerable de la población las mencionadas telenovelas-series las mantienen interesadas; ¿por qué? No lo sé pero pienso que uno de los elementos que juega algún papel es la suspensión, el dejar a medias, el dar tiempo a que los televidentes reflexionen durante el día y delineen expectativas que tienen al respecto. Decidí escribir mi propia telenovela-serie y experimentar con ella con los profesores; si los resultados son buenos, la recomendaré para los alumnos.

El profesor podría comenzar la clase diciendo

- Paralelamente a los temas de clase que estamos viendo vamos a tratar un tema interesante porque nos va a traer una evidencia que me interesa establecer: *sabemos mucho de matemáticas*, concretamente de geometría y de álgebra. Dedicaremos unos minutos cada día a este tema al principio de la clase.
- Probablemente desde la preparatoria ya han visto que con frecuencia los ángulos no se miden en grados sino en radianes. ¿Alguien sabe lo que es un radián?

Seguramente habrá en la clase diversas respuestas, a cual más incomprensible, que se irán anotando en el pizarrón. El profesor podrá decir que no entiende, que no está claro, que si las definiciones o explicaciones son equivalentes, etc. Conducirá al grupo a que se diga que es un patrón, una unidad para medir ángulos; y dirá el profesor:

- Entonces, si vamos a hablar del radián y éste sirve para medir, será bueno que podamos explicar qué es medir.

Dará la oportunidad, nuevamente, de que los alumnos expliquen o sugieran, encaminando la discusión para que se llegue a decir que

Medir es comparar

Entonces podría preguntar (si considera conveniente hacer esta breve digresión): “Por cierto: ¿contar también es comparar?” y conducir al grupo a que diga que, en cierto sentido, contar también es comparar: comparar, precisamente con la sucesión (1, 2, 3, 4, ...). [Sugerimos esto para dar a los alumnos la impresión de “nos estamos divirtiendo entre amigos”, de que el objetivo de la clase NO ES llegar a un resultado sino mostrar diversos caminos para que el alumno llegue por sí mismo].

- Medir es comparar; entonces queremos saber cuál de dos cantidades es más grande, ¿cierto?
- Y yo les pregunto: ¿qué es más grande:
  - un metro o la longitud de esta pared? ¿Y cuántas veces cabe la medida pequeña en la grande?
  - un metro cúbico o un litro? ¿Y cuántas veces cabe la medida pequeña en la grande?
  - un centímetro o una pulgada? ¿Y cuántas veces cabe la medida pequeña en la grande?
  - la velocidad máxima que alcanza el campeón del mundo en carreras de coches o la de un avión comercial en vuelo? (no conocemos la respuesta pero la pregunta tiene sentido, ¿cierto?)
  - un litro o un metro? Éste es un caso distinto del anterior, ¿verdad?

Será claro para el grupo que solamente se pueden comparar medidas análogas.

- Bien: entonces, si el radián se usa para medir ángulos, debe ser, forzosamente, la medida de un ángulo él mismo. Apuntemos aquí lo que hemos logrado en este camino:

Hay un ángulo cuya medida se llama “radián”

- Suspendemos nuestra discusión y seguimos en la siguiente clase.

Siguiente clase

- Retomando la clase pasada, si el radián es la medida de un ángulo, ¿qué ángulo, más o menos será eso?

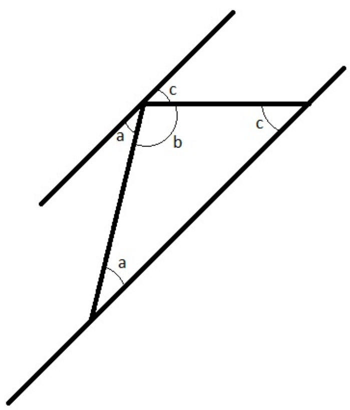
Y el profesor formará con sus dedos, con sus manos o con sus brazos ”ángulos” de unos 15°, 45°, 60°, 90°, 180°, 210°. Probablemente nadie podrá decir a cuál de todos ellos se parece el radián.

- ¿Quién de ustedes me puede decir cuánto mide un ángulo de un triángulo equilátero? O, para empezar ¿cuál es la suma de los ángulos de un triángulo?

Y vienen seguramente dos respuestas: 180° y 360°.

Entonces el profesor podrá elegir:

- dar la respuesta él mismo o
- trazar la siguiente figura



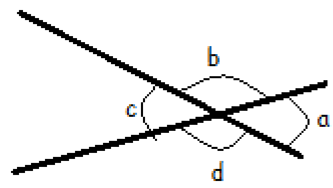
y “hacer notar” qué ángulos son iguales o

- hacer la siguiente explicación, más formal, que tomará más tiempo y se extenderá sobre más “capítulos de nuestra serie”.

El profesor dirá algo como

- Sí, en efecto, pero no recuerdo cuál de las dos. Vamos a ver.

Hará el conocido trazo



- Me pregunto cuál de los dos ángulos **a** y **c** es más grande. Parece ser que el ángulo **c** es mayor, ¿verdad?

Vendrán reacciones de los alumnos y entonces el profesor dirá, “titubeando”: analicemos el problema y veamos; qué querría decir “sumar dos ángulos”

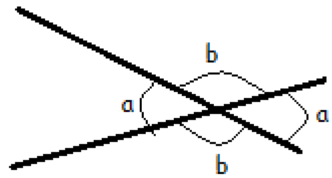
- Veamos: si sumo los ángulos **a** y **b** ¿cuánto me dan? 180°, ¿verdad?
- Los ángulos **b** y **c**, sumados, también me dan 180°. Díganme entonces qué ángulo es mayor: **a** + **b** o **b** + **c**.

En este punto es muy importante que no se hable de conceptos, de abstracciones, sino de “voltearse”, de movimientos en la vida real

- Cuatro amigos estamos con nuestros telescopios buscando algo en el cielo, Los cuatro telescopios apuntan hacia el norte y de pronto decidimos usted y yo voltearlos: yo elijo un ángulo de **a** + **b** (primero **a** y luego **b**) quedo mirando hacia …
- Hacia atrás, hacia el Sur [dirá algún alumno o el propio profesor]
- Usted elige voltear con un ángulo **b** + **c** [primero **b** y luego **c.** ¿Hacia dónde voltea ahora? Obviamente hacia el Sur, igual. Miramos en la misma dirección porque los ángulos de giro son iguales.
- Son iguales: entonces puedo escribir
- a + b = b + c
- Y díganme entonces: ¿quién es más grande, **a** o **c**?

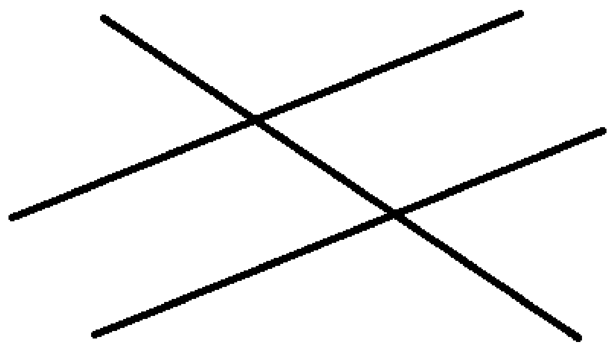
Se dará oportunidad de comentar y se establecerá que esto ocurre *siempre* de manera que podemos decir que dos ángulos opuestos por el vértice son iguales

Entonces, con todo derecho puedo repetir mi diagrama con los nombres

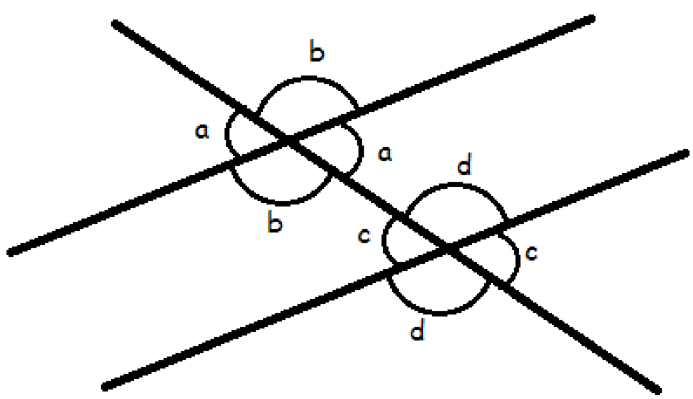


Suspendemos ahora y reanudamos la próxima clase.

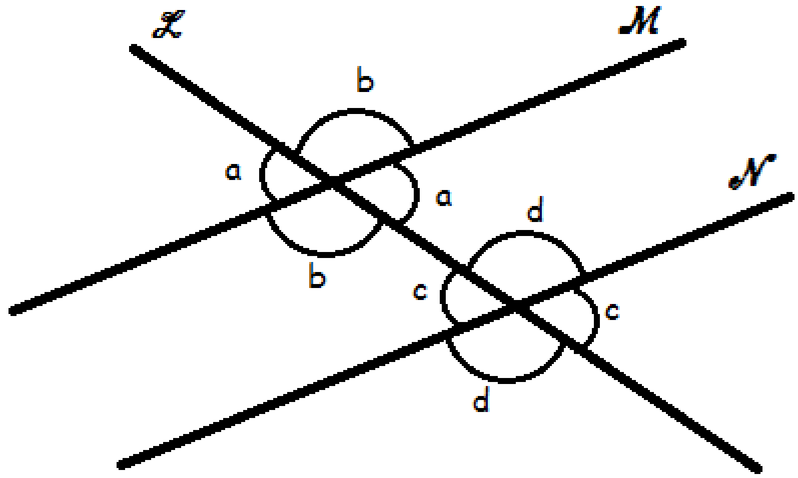
Veamos ahora este otro dibujo



Cuyos ángulos con toda razón podemos llamar como sigue



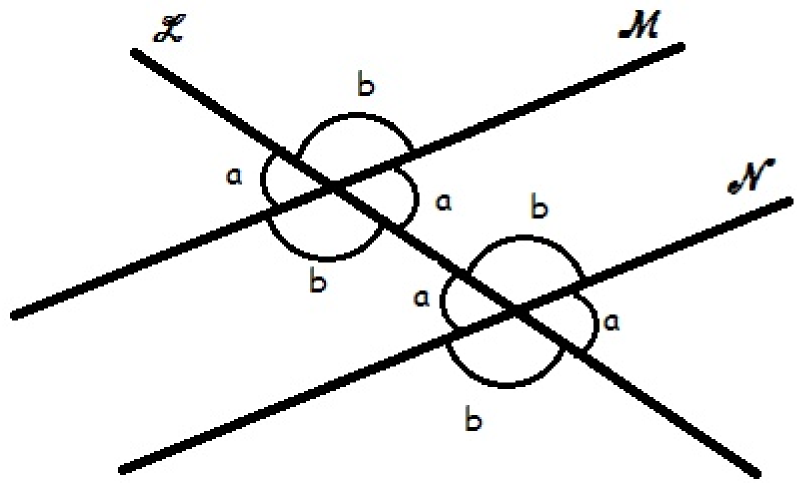
- ¿qué ángulos son mayores; los ángulos **a** o los ángulos **c**? Pongamos nombres a las tres rectas de nuestro diagrama



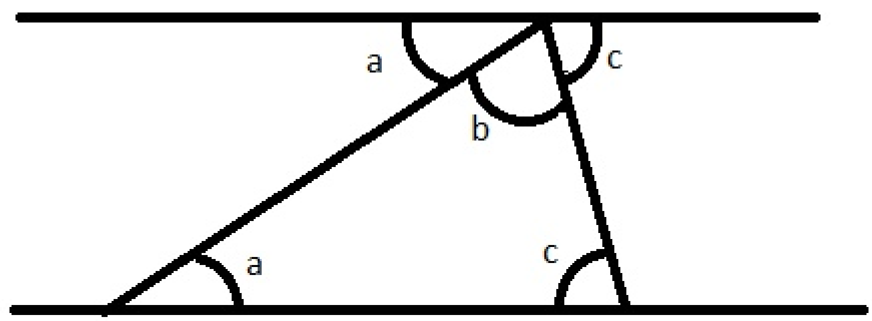
- Imaginemos que la recta $\mathcal{M}$ está fija al suelo, la recta $\mathcal{L}$ es un riel también fijo al suelo, y la recta $\mathcal{N}$ está fija sobre un carro que se desplaza sobre el riel. Comenzamos a desplazar, sobre el carro, la recta $\mathcal{N}$ hacia la recta $\mathcal{M}$.
- ¿En qué momento comenzará a inclinarse la recta $\mathcal{N}$ con respecto a la recta $\mathcal{L}$?

El profesor esperará comentarios y continuará

- No lo hará, ¿verdad? Entonces llegará el momento en que las rectas $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ coincidirán y por lo tanto podemos afirmar que los ángulos **a** y **c** son iguales. Nuestro diagrama se ha convertido pues en



- Entonces trazamos el conocido esquema

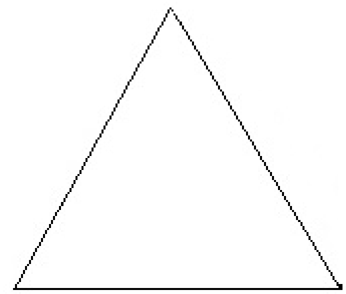


Justificando mismo nombre para dos ángulos y resolvemos la duda: la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

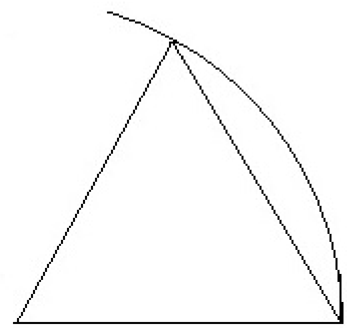
- Entonces sabemos que cada uno de los ángulos de un equilátero mide....60° (dirá algún alumno o el profesor mismo, si nadie dio la respuesta).

Suspendemos y a la siguiente clase decimos; “La última vez nos quedamos en que cada ángulo interno de un triángulo equilátero mide…

- Pensemos en un triángulo equilátero [y el profesor dibuja uno, con base horizontal].



- Ahora con centro en este vértice (abajo izquierda) tracemos el círculo que tiene este radio (la base del triángulo). ¿Pasa por este punto (el tercer vértice)?



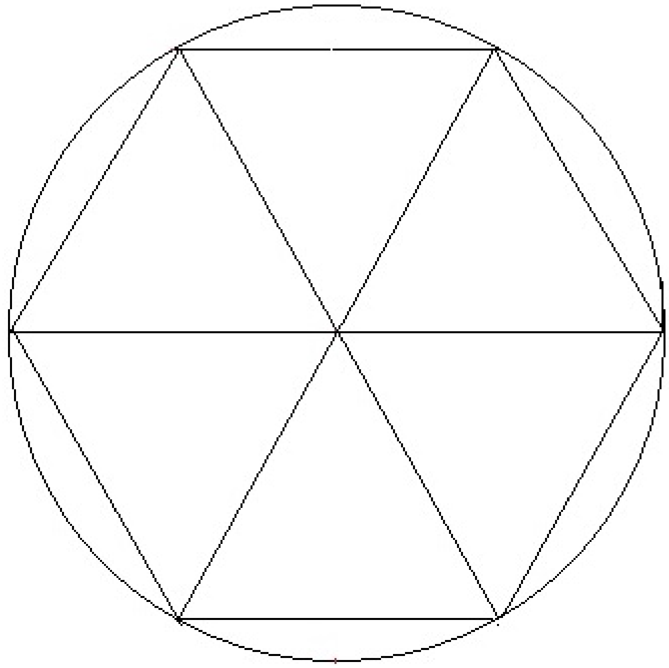
Se determinará que sí. Recordemos: lo importante en una clase de matemáticas de este nivel, lo que el profesor debe lograr del alumno NO ES QUE SEPA si el círculo pasa por el tercer vértice del triángulo sino QUE SE LO PREGUNTE.

- ¿Quién me puede decir, entonces, cuántos triángulos necesito colocar alrededor del centro para dar la vuelta completa?

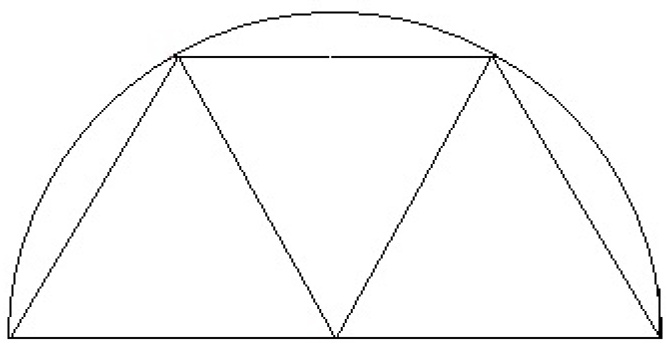
Nuevamente, no faltará quien diga que se necesitan 6 triángulos.

- ¿Seguro serán seis? No lo creo.

En fin; continúa ese juego del profesor de “yo no lo sé o tengo mis dudas pero soy capaz de razonar y de entender”. Cuando ya lo hayan “convencido” los alumnos de que en efecto son seis los trazará



y luego, tachando o borrando los tres de abajo, dirá:



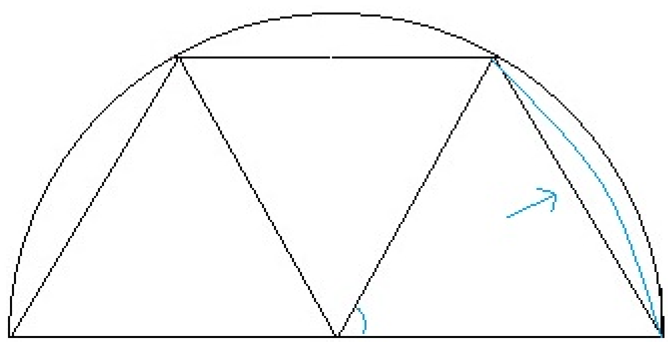
- Entonces aquí arriba tengo que con exactamente tres triángulos estas dos bases [que él señalará] quedan sobre una recta, ¿cierto?

Los alumnos estarán de acuerdo. Cuando digo “los alumnos” no esperamos que se trate de todos ellos pero la experiencia ha mostrado que una buena parte del grupo (con frecuencia más de la mitad) está interesada y participando, si uno logra el papel de la persona que no tiene la información pero es capaz de comprender.

En este punto se puede nuevamente suspender la discusión presente y reanudar más tarde.

- Ahora imaginen que en lugar de estas líneas (los lados de los triángulos) tengo un objeto hecho con varas de madera que son los 4 radios [y los muestra] y tres cuerdas delgadas que forman el tercer lado de cada triángulo [y los señala también].

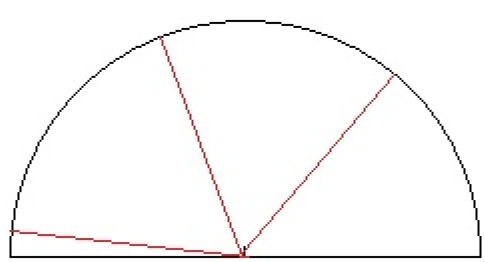
Ahora voy a jalar cada una de estas cuerdas poco a poco para que quede toda ella encima de la línea que forma el círculo. ¿Qué va a pasar con éste ángulo? [Y señala el ángulo central].



La clase misma contestará que el ángulo se cierra un poco por haber puesto un arco de circunferencia igual al radio del círculo.

Eso es un radián: El ángulo que queda cuando el de 60° se cierra un poquito.

- ¿Qué tanto es un poquito? Pues veamos: los tres ángulos centrales se cerraron. El objeto se ha convertido ahora en algo como esto:



- Un radián es exactamente cada uno de los tres ángulos grandes o la medida que tiene ese ángulo.
- Es claro entonces que ya no alcanzan tres para que las bases estén alineadas, ¿verdad? O, dicho con más propiedad, tres radianes no suman 180°.
- ¿Cuántos ángulos de esa medida creen ustedes que cabrán ahora en esta mitad del plano?

Si nadie dice que π (o si alguno lo hace el profesor fingirá incredulidad) se seguirá con la investigación.

- Veamos: el arco de círculo mide exactamente lo mismo que el radio. Queremos ver cuántas veces cabe el radio en el perímetro y luego dividimos entre dos y ya está. ¿Hay alguien que conozca alguna fórmula que relacione a la circunferencia con el radio?

Aparecerán, sin duda

$$A = \pi r^2 \qquad \text{y} \qquad A = 2\pi r$$

Se discutirá (distinguiendo, por ejemplo, entre tender una cuerda o cubrir con pintura) hasta determinar cuál de las dos no puede ser.

Una vez localizada, se recordará que el valor de π es 3.1415 y otro poco, es decir: π es un poco más grande que 3.

- ¿Qué tanto más grande que 3 es π?
- Pues, pensemos en una pila con treinta monedas y otra que tenga 31 o 32. Ya colocadas a un metro de distancia sería difícil decir cuál es más alta y la razón entre las dos cantidades es parecida a la que hay entre 3 y π.
- Entonces, si π es “un poquito más grande” que 3, con toda razón podemos decir que un radián es “un poquito más chico que 60°.

♦ Cantidades proporcionales

Pregunta el profesor

- ¿Hay dos de ustedes que me puedan prestar sus credenciales?

Digamos que entregaron sus credenciales una alumna y un varón que llamaremos Alicia (A) y Bernardo (B), respectivamente. Ahora pondremos lo que recomendamos decir al profesor y lo que se puede esperar que se obtengan como respuestas de Alicia y Bernardo o de otros alumnos del grupo.

- P. ¿Qué es esta imagen, Alicia?
- A. Es mi foto.
- P. Bien. Ésta es la foto de Alicia.

Tomará la otra credencial y dirá:

- Y aquí tenemos otra credencial con la foto de Alicia.
- A-B. No: ésa no es la foto de Alicia.
- P. ¿Cómo saben que ésta no es la foto de Alicia?
- A-B. Porque esa es no es la imagen de la cara de Alicia.
- P. ¿Y ésta sí?
- A-B. Sí: ésa sí.
- P. ¿Cómo es la imagen de su cara si el alto de su cabeza es de más de 20 cms y en cambio esta imagen no mide más de 3?
- A-B. Es más chica pero es parecida
- P. Pero ¿qué significa "parecido"? Aquí veo dos ojos, acá también, aquí hay una nariz, acá también, ¿qué es "parecido"?

Aquí convendrá ir escribiendo en el pizarrón ideas que den los alumnos. Poco a poco se irá haciendo evidente para los alumnos que no pueden explicar con claridad lo que piensan sobre algo que conocen: el concepto de "parecido". De hecho el concepto de proporcionalidad ya está en sus mentes aunque borroso y aquí hay algo muy importante: los alumnos *saben que saben* y saben que el maestro sabe y que todo lo que hay que hacer es encontrar la manera de expresar con precisión lo que tienen en las mentes.

De lo que se trata, una vez más, es de informar a los alumnos NO LO QUE ES el concepto a estudiar (en este caso el de proporcionalidad) sino el hecho de que ellos, en cierto sentido, YA LO CONOCEN y simplemente van a aprender a describirlo en un lenguaje nuevo.

Desde luego allí el profesor acompañará a los alumnos para que vayan construyendo en sus mentes la visión matemática del asunto, la conveniencia de expresar la idea de proporcionalidad en lenguaje matemático, la revisión del trabajo con fracciones, etc.,

- Teorema fundamental del cálculo

$Dada\ una\ función\ f\ integrable\ sobre\ el\ intervalo\ [a,b], definimos\ F\ sobre\ [a,b]\ por$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

$$Si\ f\ es\ continua\ en\ c \in (a,b), entonces\ F\ es\ derivable\ en\ \ c\ \ y\ F'(c)\ =\ f(c).$$

Escribiré este tema en el contexto elegido para los temas del primer año de preparatoria: la preparación de un gran terreno para festivales musicales.

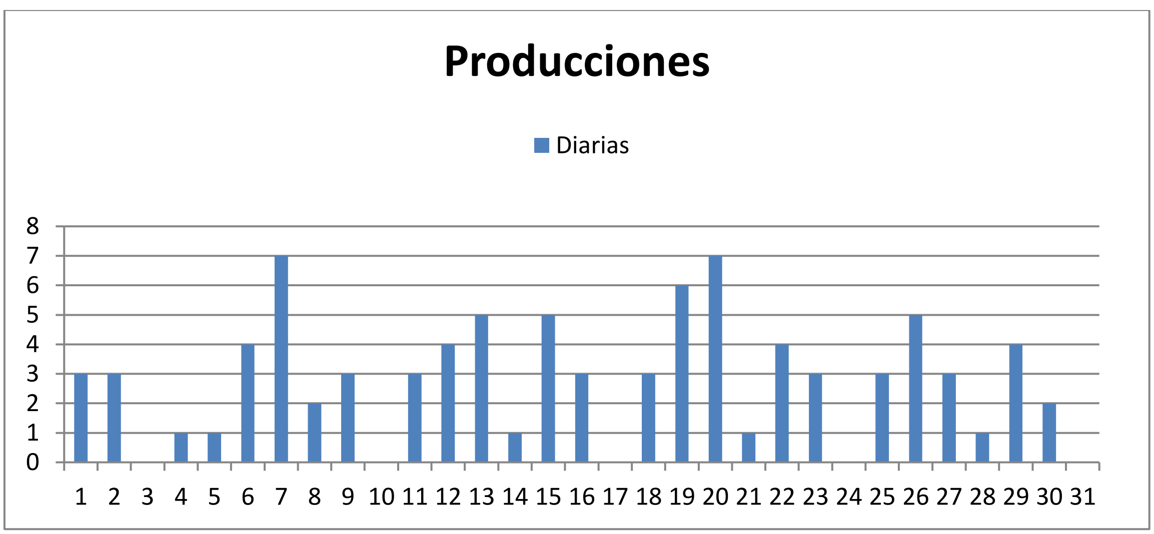
Jóvenes, tenemos una nueva tarea que planificar; se trata de pintar la barda perimetral del terreno que estamos acondicionando para nuestros festivales musicales. Como no es uno de los trabajos urgentes, se nos asigna para cada día del mes un número de operarios que depende de los que queden libres de otras labores necesarias. Se ha dividido el área total a pintar en lo que llamaremos “tarea” que es el área que pintará un operario en un día: precisamente el área que se puede pintar con una cubeta de pintura. Aquí tenemos la tabla de la cantidad de operarios que recibiremos cada día y las tareas que completarán. Marcamos una D en los días domingo, donde necesariamente aparecen cero trabajadores y cero tareas logradas, y la víspera, sábado, donde el número de tareas es cercano y no mayor que la mitad del número de trabajadores puesto que solamente trabajan medio día. Veamos la tabla.

	Día del mes	Trabajadores	Tareas
	1	3	3
	2	7	3
D	3	0	0
	4	1	1
	5	1	1
	6	4	4
	7	7	7
	8	2	2
	9	6	3
D	10	0	0

	Día del mes	Trabajadores	Tareas
	11	3	3
	12	4	4
	13	5	5
	14	1	1
	15	5	5
	16	7	3
D	17	0	0
	18	3	3
	19	6	6
	20	7	7

	Día del mes	Trabajadores	Tareas
	21	1	1
	22	4	4
	23	7	3
D	24	0	0
	25	3	3
	26	5	5
	27	3	3
	28	1	1
	29	4	4
	30	4	2
D	31	0	0

Y aquí presentamos la gráfica de las producciones diarias.

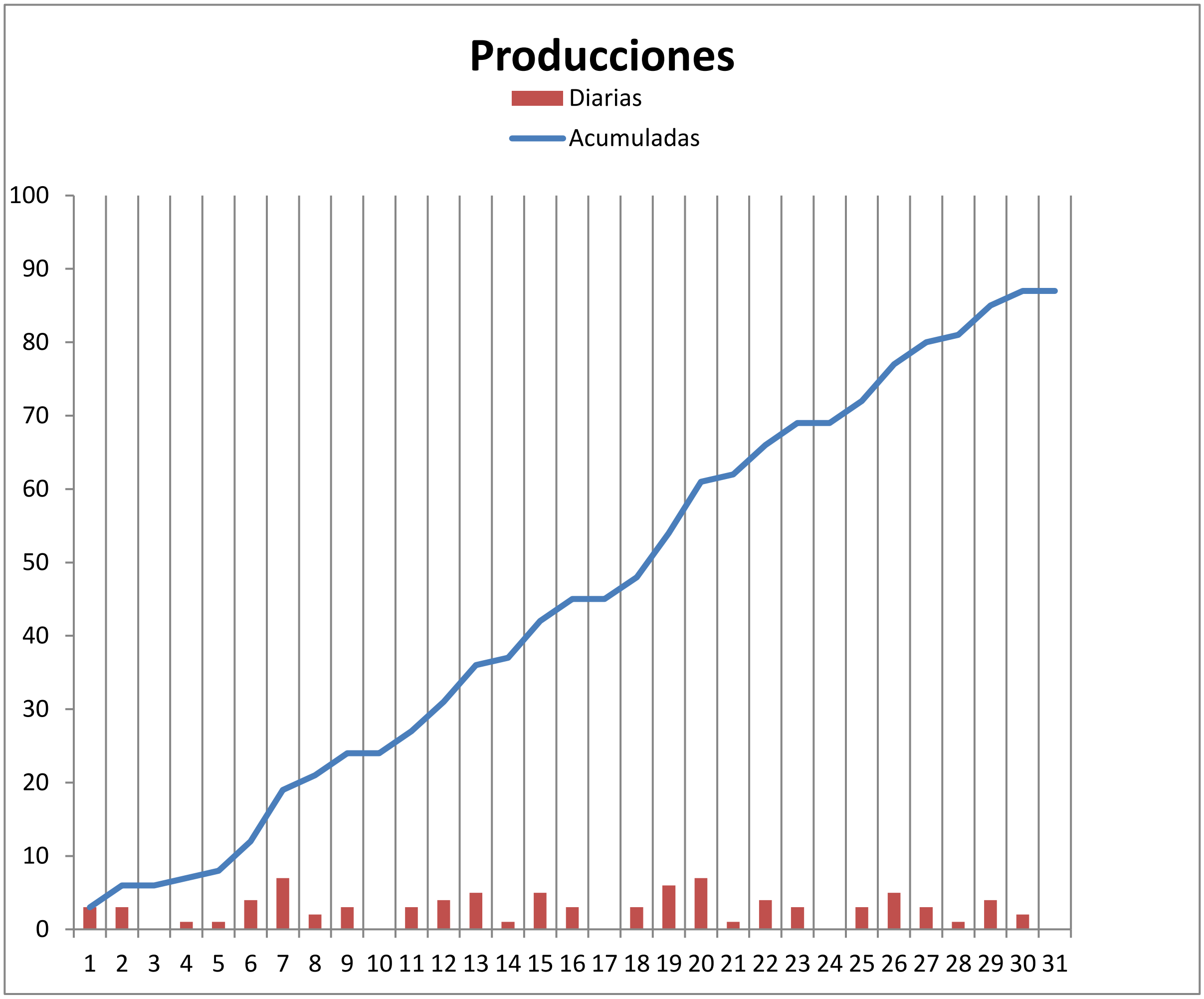


Ahora bien: es posible que nos pidan enviar la cantidad de cubetas necesarias para el día y eso está claro: para el día 1 mandamos 3, para el 15 mandamos 5, en fin: eso es muy sencillo. Pero también nos pueden pedir que mandemos las cubetas para los primeros 9 días, o para la semana, en fin: para ello conviene que tengamos calculadas las cantidades acumuladas de cubetas que se irán mandando, es decir las de las “tareas” que se irán pintando. Aquí las tenemos en una tabla y la gráfica correspondiente.

	Día del mes	Trabajadores	Tareas	Acumulado
	1	3	3	3
	2	7	3	6
D	3	0	0	6
	4	1	1	7
	5	1	1	8
	6	4	4	12
	7	7	7	19
	8	2	2	21
	9	6	3	24
D	10	0	0	24

	Día del mes	Trabajadores	Tareas	Acumulado
	11	3	3	27
	12	4	4	31
	13	5	5	36
	14	1	1	37
	15	5	5	42
	16	7	3	45
D	17	0	0	45
	18	3	3	48
	19	6	6	54
	20	7	7	61

	Día del mes	Trabajadores	Tareas	Acumulado
	21	1	1	62
	22	4	4	66
	23	7	3	69
D	24	0	0	69
	25	3	3	72
	26	5	5	77
	27	3	3	80
	28	1	1	81
	29	4	4	85
	30	4	2	87
D	31	0	0	87



Llamaremos D a la función que nos habla de las “tareas” diarias y A a la que nos da las cantidades acumuladas. Miremos con cuidado esta gráfica: en el día 1 coinciden la cantidad diaria y la acumulada, y la razón es evidente, ¿verdad? Vemos también que las cantidades acumuladas hasta el 9 son las mismas que hasta el 10, ¿cierto? Es porque el día 10 no se trabajó y por lo tanto no se pintó ninguna “tarea”. El segmento correspondiente en la curva de A es horizontal, es decir que su pendiente es 0. En cambio, del día 6 al día 7 la línea tiene gran inclinación; ¿por qué será? *[Los alumnos darán respuestas, algunas más sensatas que otras. Éste es el momento en el que se está* ***comprendiendo*** *el teorema fundamental del cálculo*].

Veamos estas consideraciones desde un punto de vista más abstracto. Supongamos que tengo una función con un número finito de puntos en su dominio y que toma valores no negativos; trazo una gráfica de barras de sus valores. En su mismo sistema de ejes trazo la gráfica de línea de las sumas de sus valores desde el extremo izquierdo (que será no decreciente ¿verdad?). Entonces la inclinación de la línea dependerá del tamaño de la barra que le corresponde abajo. La pendiente de ese segmento, ¿será igual al cuadrado del valor de la función D? ¿A su mitad? Habrá que ver. [*El profesor decidirá si deja pendiente la fórmula; yo lo haría. La pendiente de los acumulados y la altura de los diarios están relacionadas pero no sabemos con precisión cómo].*

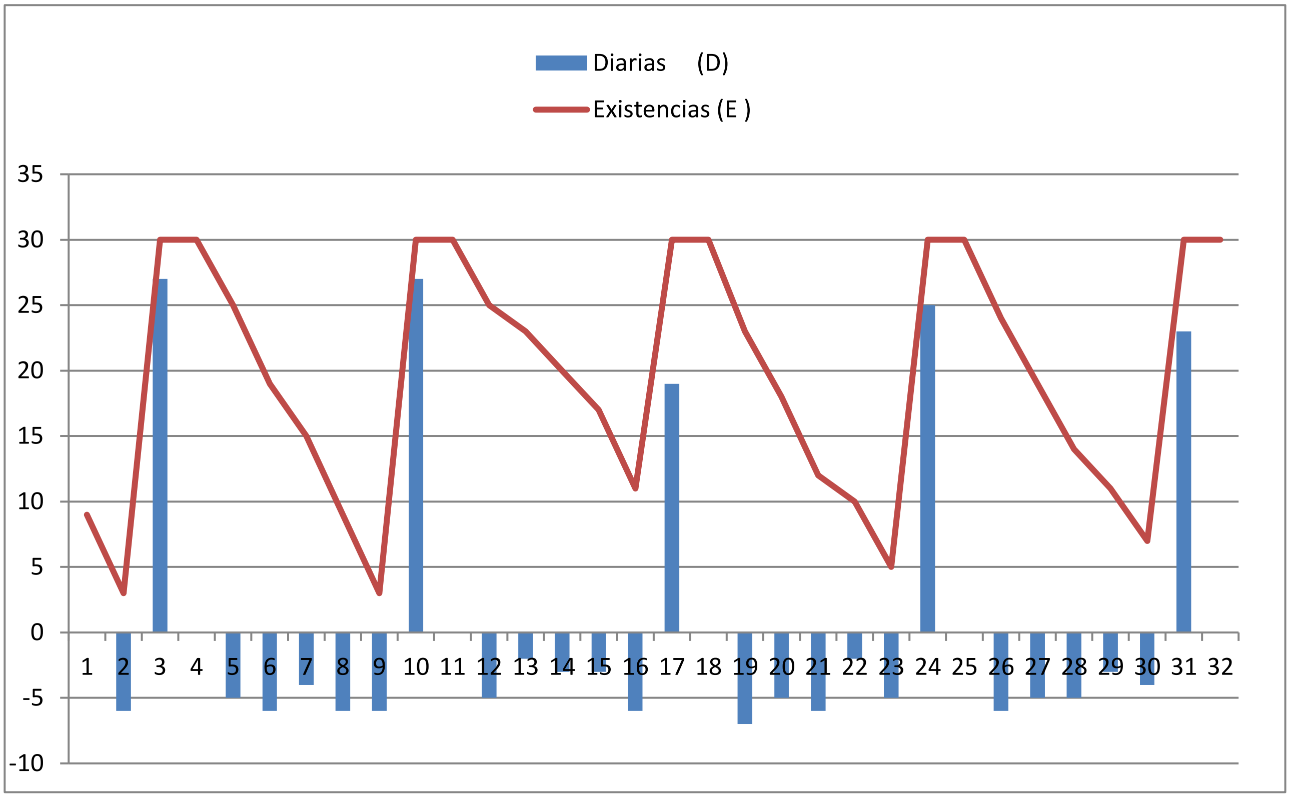
Y otra pregunta: ¿será esto cierto si no tenemos la restricción de valores no negativos? Veamos. Tenemos a nuestro cargo una pequeña bodega de costales de yeso para ir surtiendo lo que se vaya necesitando para repellar lo que sea necesario en cada "tarea" de la barda perimetral antes del día en que será pintada. Comenzaremos el mes con 9 costales y los sábados no se trabajará porque recibiremos una dotación para llevar a 30 el stock.

	Día del mes	Diarias (D)	Existencias (E)
			9
	1	-6	3
	2	27	30
D	3	0	30
	4	-5	25
	5	-6	19
	6	-4	15
	7	-6	9
	8	-6	3
	9	27	30
D	10	0	30

	Día del mes	Diarias (D)	Existencias (E)
	11	-5	25
	12	-2	23
	13	-3	20
	14	-3	17
	15	-6	11
	16	19	30
D	17	0	30
	18	-7	23
	19	-5	18
	20	-6	12

	Día del mes	Diarias (D)	Existencias (E)
	21	-2	10
	22	-5	5
	23	25	30
D	24	0	30
	25	-6	24
	26	-5	19
	27	-5	14
	28	-3	11
	29	-4	7
	30	23	30
D	31	0	30

Y aquí tenemos la gráfica.



Vemos que se relacionan las dos cosas que estamos estudiando (la altura de una y la pendiente de la otra): los ceros coinciden, los signos también (a valores negativos en una corresponden pendientes negativas en la otra). Sería interesante predecir exactamente cómo se relacionan. ¿Y si la función E, de existencias, tomara también valores negativos? [Nuevamente, en este momento lo más importante no es saber cuál de los alumnos da una respuesta acertada sino cuántos del grupo se animan a hacer predicciones y a publicarlas].

¿Y qué pasaría si una función no estuviera definida sobre un número finito de puntos sino sobre un intervalo? ¿Qué hacer puesto que no podemos sumar las cantidades en D para conocer el valor de A?

[Éstas serían las líneas generales de la clase; dejamos los detalles a cada profesor que decida usarla con sus alumnos].

Capítulo 8. Conclusiones

No hay muchas conclusiones que sacar en el sentido académico del asunto pero viene al caso una simpática anécdota.

Alguna vez fue necesario para Lila, la persona que ayudaba en casa, traer a su madre a vivir un tiempo en la Ciudad de México por cuestiones de salud; la señora, mujer del campo, pasó un par de meses en casa con nosotros y desde el lugar en el que se sentía cómoda y pasaba buena parte del día se podía ver el estacionamiento. Un día Lila, mujer de poco hablar, me contó que su mamá había dicho: "Los coches son como las gallinas: en la mañana se van yendo todos poco a poco y luego, en la tardecita todos van regresando". Me emocionó la analogía que visiblemente también había conmovido a Lila, tanto como para contarme, ella tan callada, la anécdota.

En ese tiempo estaba yo escribiendo mi tesis de licenciatura con el Dr. Guillermo Torres, del Instituto de Matemáticas y le conté el comentario de la mamá de Lila. Su observación fue "Claro, qué bien: aprender es relacionar lo nuevo con lo que uno ya conoce". Él fue natural e inmediatamente capaz de llevar al nivel verbal lo que ya Lila y yo misma habíamos sentido. Gracias, Dr. Torres.

En efecto

Aprender es *relacionar lo nuevo con lo que uno ya conoce*.

La labor del profesor es <u>crear el vínculo</u> entre lo que reza el programa de matemáticas para alumnos de ese año escolar y situaciones "reales" en las que resulte de utilidad haber comprendido ese tema.

He platicado a diestra y siniestra lo que describo en las páginas 71 y siguientes, "Qué significa π" en donde afirmo que su valor es 4.1416. Hasta ahora no me ha pasado que no me corrijan, algunas veces con cierta indignación, afirmando que es 3.1416. ¿Es eso lo que quiero infundir en el alma de mis alumnos, futuros profesores? ¿Qué conozcan el dato y sepan que lo conocen?

Desde luego, no: en general las personas tienen ese dato aislado y de ninguna manera se relaciona con otras partes de lo que ellos ya conocían. Es lo que en la página 21 llamamos “conocimiento” y está hoy día al alcance de todos en Internet. Lo que yo quisiera despertar en las mentes de quienes me oigan es otra cosa: un nivel de “comprensión”. Haciendo una metáfora deportiva: no invito a excursiones en bicicleta a la vecina ciudad de Cuernavaca con el objeto de *llegar* allá (hay mejores métodos para lograrlo) sino para disfrutar *recorrer el camino* que nos llevará hasta ella.

Eso en cuanto a la parte académica de mi trabajo.

No cerraré este capítulo sin plantear y contestar las siguientes preguntas: ¿qué van a ganar los profesores que tomen mi curso? ¿Qué les puedo ofrecer a cambio de su esfuerzo al haber presenciado las sesiones que lo integran y participado en ellas?

Tendrán dos grandes beneficios; el primero, de índole personal, es la renovación de una actividad que probablemente se ha ido volviendo rutinaria; en efecto, el profesor deberá al principio inventar, para cada tema del programa de matemáticas que está cubriendo, situaciones como la de la fiesta sobre la colina o como las credenciales de dos alumnos. Si comunican a nuestro grupo de maestros de profesores lo que idearon, iremos integrando una base de datos con sugerencias para cada uno de los temas de los tres años de preparatoria. En una segunda etapa el profesor podrá tomar los temas que allí encuentre y simplemente adaptarlos para generar sus propias clases.

El otro beneficio, en su relación con sus grupos de alumnos, es que en sus clases retendrá la atención de cantidades de alumnos que serán ahora mayores y sus resultados al final del período serán mejores que los que se obtienen hasta ahora.

Estas dos ventajas darán sin duda dinamismo a las clases del profesor y esperamos que se vaya poco a poco convirtiendo en esa figura digna de admiración y respeto por parte de los alumnos de la que nos habla Steiner.

Hay otras vertientes de la labor necesaria para que este proyecto tenga resultados: las partes técnica, administrativa y política. Convencer a las personas de tomar el curso, establecer si será gratuito o tendrá un costo, crear la plataforma virtual para mantener contacto con los alumnos-profesores, conseguir los fondos necesarios y varias cosas más; esperamos que entre nuestros colaboradores haya alguien que nos pueda ayudar con esos trabajos.

Bibliografía

AUSUBEL, D. P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View* . New York: Holt, Rinehart & Winston.

Ausubel, N. y. 1983.

FREIRE, P. (1970a). *Pedagogy of the Oppressed.* New York: Continuum.

JS, Brunner. (1990). *Car la culture donne forme à l'esprit, De la révolution cognitive à la psychologie culturelle.* Paris: Eshel.

PIAGET, J. (1984). *El lenguaje y el pensamiento del niño pequeño.* Ediciones Paidós.

PIAGET, J. (1981). *Psicología.* Ariel.

VYGOTSKY, L. S. (1978). *Mind in Society.* Cambridge, MA: Harvard University Press.