



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA
CARRERA DE INGENIERÍA QUÍMICA

**ESTUDIO ANALÍTICO DE LOS MECANISMOS DE RELAJACIÓN EN
LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA COMPLEJA DE UN LÍQUIDO
VISCOELÁSTICO**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO QUÍMICO**

P R E S E N T A :

OMAR ARTURO ZAMORA CISNEROS

JURADO DE EXAMEN

DIRECTOR:

M. EN C. RAMIREZ TORRES LUIS ANTONIO

ASESOR:

DR. CALDERAS GARCIA FAUSTO

ASESOR:

DR. HERRERA VALENCIA EDTSON EMILIO

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO DE 2023





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR

P R E S E N T E

Comunico a usted que el alumno Omar Arturo Zamora Cisneros con número de cuenta (314253981) de la carrera de Ingeniería Química, se le ha asignado en el mes de mayo de 2023 la fecha para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

Presidente: I.Q. Dominga Ortiz Bautista

Vocal: M. en C. Luis Antonio Ramírez Torres

Secretario: Dr. Fausto Calderas García

Suplente: Dra. María Guadalupe Salinas Juárez

Suplente: Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia

El título de la tesis que se presenta es: “**Estudio analítico de los mecanismos de relajación en la función de transferencia compleja de un líquido viscoelástico**”.

Opción de Titulación: Tesis convencional.

Director de tesis: M. en C. Luis Antonio Ramírez Torres

Asesor de tesis: Dr. Fausto Calderas García

Asesor de tesis: Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia.

Agradecimientos

Al laboratorio de Reología de Fenómenos de Transporte de Fluidos Complejos por acogerme, recibirme y apoyarme en mi tesis.

Al Seminario de Investigación de Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos y Reología Teórica (LI-FESZ-420415) y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por darme la oportunidad de probarme y ayudar a mejorar este trabajo.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<IN102823>><<Modelado Matemático y Simulación Computacional de Fluidos Complejos con Aplicación a Bioingeniería>>.

A mi asesor Luis Ramírez por aceptarme, guiarme, apoyarme, animarme a completar mi tesis, al igual que, enseñarme nuevos horizontes.

A mi madre, padre, hermanos y hermana que me han apoyado y animado a seguir adelante en los estudios.

A Mau ya que con su generosidad se logro seguir trabajando sin algún inconveniente.

A Isra por todo el apoyo, conocimiento y risas que compartimos.

A todos los profesores y amistades que forjé en todo el trayecto de la licenciatura y tesis las cuales me influenciaron de forma positiva.

Dedicatorias

Le dedico primordialmente este gran logro a mi madre Claudia y a mi padre David por su infinito apoyo que me han brindado durante toda mi vida.

A mi hermano mayor Uriel que me ha motivado a cumplir este gran paso de mi vida.

A mi hermana Diana y hermano menor Diego les dedico este trabajo para que se motiven y cumplan sus propias metas.

A mi asesor Luis ya que el me probó que soy capaz de lograr objetivos que me parecían imposibles de lograr con la ayuda de los demás.

Contenido

Agradecimientos.....	ii
Dedicatorias.....	iii
Índice de Figuras y Tablas.....	vii
Resumen.....	1
1 Introducción.....	2
Hipótesis.....	3
Objetivos.....	3
Objetivo general.....	3
Objetivos particulares.....	3
2 Marco Teórico.....	5
2.1 Reología.....	5
2.1.1 Fluido no newtoniano.....	6
2.1.2 Fluido viscoelástico lineal.....	7
2.2 Teoría de Ondas.....	12
2.2.1 Velocidad de fase.....	12
2.2.2 Velocidad de grupo.....	14
2.2.3 Dispersión.....	14
2.3 Función de transferencia.....	15
2.4 Tiempo de relajación cinemático.....	16
2.4.1 Difusión de propiedades de transporte en interfases.....	16
2.5 Números adimensionales.....	18

2.5.1	Número de Deborah.....	18
2.5.2	Número de Womersley.....	19
2.5.3	Número de Mach.....	19
2.5.4	Número de Jeffreys.....	19
2.5.5	Número de Burgers 1.....	20
2.5.6	Número de Burgers 2.....	20
2.5.7	Número de Burgers 3.....	20
2.5.8	Número adimensional 1.....	21
2.6	Flujo de un fluido newtoniano en un cilindro rígido horizontal debido a un gradiente de presión constante.....	21
2.6.1	Esquema de proceso.....	21
2.6.2	Análisis de proceso.....	22
2.6.3	Flujo volumétrico.....	24
3	Metodología.....	26
4	Problema físico.....	27
4.1	Diagrama de proceso.....	27
4.2	Análisis de proceso.....	27
4.3	Ecuación de balance de <i>momentum</i>	28
4.3.1	Ecuación constitutiva reológica: modelo de Maxwell.....	32
4.3.2	Función de Bessel.....	36
4.3.3	Perfil de velocidades.....	39
4.3.4	Flujo volumétrico y función de transferencia.....	40

4.3.5	Esfuerzo en la pared	45
4.3.6	Velocidad de fase, velocidad de grupo y dispersión	46
4.3.7	Ecuación constitutiva reológica: modelo de Jeffreys y de Burgers.....	47
4.4	Unidades de las variables y funciones del sistema	57
4.5	Perfil de velocidades	57
4.5.1	Flujo volumétrico	58
4.5.2	Esfuerzo en la pared	58
5	Resultados y análisis	59
5.1	Perfil de velocidades a λ y ω constante.....	59
5.1.1	Perfil de velocidades a distintas λ y ω constante.....	62
5.1.2	Perfil de velocidades en el centro del tubo a distintas λ	65
5.2	Flujo volumétrico a distintas λ y ω variable	68
5.3	Función de transferencia a ω variable y λ diferentes	71
5.4	Esfuerzo en la pared del tubo a ω variable y a λ distintas.....	74
5.5	Longitud característica adimensional con ω variable y a distintas λ	76
5.6	Velocidad de fase y de grupo a distintas λ y a ω variable.....	78
5.7	Dispersión de ondas a distintas ω y λ	80
6	Conclusiones	84
7	Referencias	86

Índice de Figuras y Tablas

Figura 2-1. Clasificación de los fluidos según la reología [11].....	6
Figura 2-2. Respuesta del esfuerzo en función del tiempo para una unidad de paso en el esfuerzo [4].....	8
Figura 2-3. Los modelos de Maxwell, Kelvin-Voigt y Burgers [8].	9
Figura 2-4. Modelo viscoelástico de Maxwell [4].....	10
Figura 2-5. Modelo mecánico de Jeffreys [11].	11
Figura 2-6. Modelo de Burgers en detalle [7].	12
Figura 2-7. Representación gráfica de la función de transferencia [11].....	15
Figura 2-8. Transferencia de masa en una interfase líquida-gas.	17
Figura 2-9. Transferencia de calor en una interfase sólido-gas.....	17
Figura 2-10. Esquema del proceso para la deducción de la ecuación de Hagen-Poiseuille.	22
Figura 3-1. Diagrama de flujo para la obtención de las propiedades de flujo de un material viscoelástico fluyendo a través de una tubería horizontal.	26
Figura 4-1. Esquema del proceso.	27
Figura 5-1. Módulo, parte real e imaginaria del perfil de velocidades en dirección axial a $\lambda = 0.1$ s y $\omega = 1$ Hz con el modelo de Maxwell.....	60
Figura 5-2. Módulo, parte real e imaginaria del perfil de velocidades en dirección axial a $\lambda=0.1$ s y $\omega=1$ Hz a partir del modelo de Jeffreys.	61
Figura 5-3. Módulo, parte real e imaginaria del perfil de velocidades en dirección axial a $\lambda=0.1$ s y $\omega=1$ Hz a partir del modelo de Burgers.	62
Figura 5-4. Módulo complejo del perfil de velocidades en dirección axial a distintas λ y $\omega = 1$ Hz con el modelo de Maxwell.....	63

Figura 5-5. Módulo complejo del perfil de velocidades en dirección axial a distintas λ y $\omega = 1$ Hz a partir del modelo de Jeffreys.....	64
Figura 5-6. Módulo complejo del perfil de velocidades en dirección axial con distintas λ y $\omega = 1$ Hz a partir del modelo de Burgers.....	65
Figura 5-7. Módulo complejo del perfil de velocidades en dirección axial cuando $r = 0$ en función de ω a distintas λ a partir del modelo de Maxwell.	66
Figura 5-8. Módulo complejo del perfil de velocidades en dirección axial cuando $r = 0$ con λ y ω variables a partir del modelo de Jeffreys.....	67
Figura 5-9. Módulo complejo del perfil de velocidades en dirección axial cuando $r = 0$ en función de ω a distintos λ con el modelo de Burgers.	68
Figura 5-10. Módulo complejo del flujo volumétrico en dirección axial en función de ω a distintas λ con el modelo de Maxwell.	69
Figura 5-11. Módulo complejo del flujo volumétrico en dirección axial en función de ω a distintos valores de λ a partir del modelo de Jeffreys.....	70
Figura 5-12. Módulo complejo del flujo volumétrico en dirección axial en función de ω a distintas λ con el modelo de Burgers.....	71
Figura 5-13. Módulo complejo de la función de transferencia en función de ω a distintos valores de λ con el modelo de Maxwell.....	72
Figura 5-14. Módulo complejo de la función de transferencia en función de ω a distintos λ con el modelo de Jeffreys.	73
Figura 5-15. Módulo complejo de la función de transferencia en función de ω a distintas λ con el modelo de Burgers.....	73
Figura 5-16. Módulo complejo del esfuerzo generado en la pared del tubo en función de ω a distintos λ con el modelo de Maxwell.....	74

Figura 5-17. Módulo complejo del esfuerzo generado en la pared del tubo en función de ω a distintos λ a partir del modelo de Jeffreys.....	75
Figura 5-18. Módulo complejo del esfuerzo generado en la pared del tubo en función de ω a distintos valores de λ con el modelo de Burgers.....	75
Figura 5-19. Módulo complejo de la longitud característica adimensional en función de ω a distintas λ con el modelo de Maxwell.....	76
Figura 5-20. Módulo complejo de la longitud característica adimensional en función de ω a distintas λ con el modelo de Jeffreys.	77
Figura 5-21. Módulo complejo de la longitud característica adimensional en función de ω a distintas λ con el modelo de Burgers.	77
Figura 5-22. Módulo complejo de la velocidad de fase y de grupo en función de ω a distintas λ con el modelo de Maxwell.....	78
Figura 5-23. Módulo complejo de la velocidad de fase y de grupo en función de ω a distintas λ con el modelo de Jeffreys.....	79
Figura 5-24. Módulo complejo de la velocidad de fase y de grupo en función de ω a distintas λ con el modelo de Burgers.....	80
Figura 5-25. Módulo complejo de la dispersión en función de ω a distintas λ con el modelo de Maxwell.....	81
Figura 5-26. Módulo complejo de la dispersión en función de ω a distintas λ con el modelo de Jeffreys.....	82
Figura 5-27. Módulo complejo de la dispersión en función de ω a distintas λ con el modelo de Burgers.....	83
Tabla 4-1. Operador viscosidad para diferentes modelos constitutivos reológicos en el dominio de Fourier [11].	47
Tabla 4-2. Variables del proceso con su respectiva unidad.....	57

Resumen

En este trabajo se estudió el efecto del mecanismo de relajación cinemático generalizado, λ , en las propiedades de flujo de un fluido viscoelástico lineal, el cual fue descrito y analizado por medio de tres ecuaciones constitutivas: el modelo de Maxwell, el modelo de Jeffreys (interacción polímero – solvente) y el modelo de Burgers (interacción polímero – polímero), en estado no estacionario con un gradiente de presión pulsátil a través de una geometría cilíndrica. El proceso se lleva a cabo bajo condiciones isotérmicas y el líquido se supone incompresible. Asumiendo que el flujo es unidireccional, y que existe simetría cilíndrica en el sistema, se obtiene una ecuación diferencial parcial lineal que describe los cambios de la componente axial del vector velocidad en función del gradiente de presión pulsátil y de los mecanismos viscoelásticos del sistema (parámetros reológicos). Mediante la transformada de Fourier, la ecuación diferencial parcial lineal se convierte a una ecuación diferencial ordinaria de Bessel no homogénea, y se obtienen expresiones analíticas para la velocidad, el flujo volumétrico, el esfuerzo en la pared, y se propone un análisis de la dispersión de las ondas viscosa y elástica, lo anterior en términos de las funciones de Bessel de orden cero y orden uno, de primera y segunda especie. A partir del flujo volumétrico se construye la función de transferencia compleja (FTC). Finalmente, se analiza el efecto del tiempo de relajación cinemático λ en las propiedades del proceso.

Se llegó a la conclusión de que, dadas unas condiciones de proceso y dados unos parámetros materiales, si $\lambda = 0.5 \text{ s}$, se maximizan varias propiedades de flujo a una frecuencia crítica ω_c , es decir, existe un efecto resonante. Adicionalmente, se demostró que si $\lambda = 0.5 \text{ s}$, en concordancia con la teoría de ondas, a una frecuencia de oscilación específica, el medio minimiza la dispersión de las ondas de la velocidad de grupo y la velocidad de fase.

1 Introducción

La descripción de procesos en la industria química, en los cuales intervienen al menos dos fenómenos de transporte, en la actualidad presentan un reto tanto del punto de vista numérico como desde el punto de vista del análisis matemático [1-4]. El acoplamiento de 2 o más fenómenos de transporte necesariamente implica el acoplamiento de las ecuaciones generales de balance de masa, balance de *momentum* y balance de energía [4, 5]. El acoplamiento de las ecuaciones de balance, por lo general, se hace a través del vector velocidad \underline{v} generando un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales los cuales, en muchos casos, es imposible encontrar una solución analítica y los métodos numéricos más comunes empleados para la resolución de este tipo de ecuaciones poseen una gran inestabilidad si no se conoce una solución aproximada [6]. En este trabajo se propone una función lineal de la velocidad que acopla la transferencia de *momentum* con otro fenómeno de transporte, manifestando un tiempo de relajación cinemático λ en función de una velocidad de referencia \underline{v}_0 . Se llevará a cabo el estudio analítico del flujo no estacionario en una tubería cilíndrica rígida por la cual fluye un material viscoelástico lineal descrito por tres modelos constitutivos diferentes: modelo de Maxwell, modelo de Jeffreys y modelo de Burgers con la finalidad de analizar y comparar el efecto de la presencia de un solvente newtoniano y la presencia de otro polímero en las propiedades de proceso, además, a este sistema le es aplicado un mecanismo de relajación cinemático, debido al acoplamiento de otro fenómeno de transporte, manifestando una interdifusión de *momentum*. Al ser un sistema dinámico, la velocidad axial, el flujo volumétrico, la función de transferencia y el esfuerzo en la pared dependerán del tiempo. A través del formalismo de Fourier se expresará el dominio temporal al dominio de las frecuencias ($i\omega$) con el fin de obtener una expresión analítica general en la que se involucre tanto el

tiempo de relajación del polímero, polímero-solvente y polímero-polímero como el tiempo de relajación cinemático-general.

Hipótesis

Si el mecanismo de relajación cinemático manifestado a través de la interdifusión de *momentum*, por el acoplamiento con algún otro fenómeno de transporte (energía, masa, carga), se manifiesta durante el flujo de un material viscoelástico lineal en una tubería cilíndrica rígida entonces se observará un aumento o disminución en las propiedades de flujo debido al efecto resonante que este pueda crear, i.e. en el perfil de velocidades, en el flujo volumétrico y en el esfuerzo en la pared. Además, el efecto resonante será mayor o menor debido a la interacción polímero-solvente y polímero-polímero que se manifestarán a través de las ecuaciones constitutivas reológicas.

Objetivos

Objetivo general

Deducir las ecuaciones del perfil de velocidades, del flujo volumétrico, de la función de transferencia compleja y del esfuerzo en la pared de un flujo de un material viscoelástico lineal de tres modelos constitutivos diferentes en una tubería cilíndrica rígida horizontal sometido a un gradiente de presión pulsátil junto con un mecanismo de relajación cinemático lineal el cual genera una interdifusión de *momentum*.

Objetivos particulares

1. A partir de las ecuaciones generales de balance, deducir las ecuaciones de balance aplicables al sistema.
2. Resolver la ecuación diferencial parcial lineal involucrada, por medio de una transformada de Fourier, para obtener las propiedades de flujo para cada una de las ecuaciones constitutivas reológicas.

3. Calcular el flujo volumétrico para obtener la función de transferencia compleja.
4. Obtener la expresión para calcular el esfuerzo en la pared de la tubería.
5. Calcular la velocidad de fase y la velocidad de grupo del sistema, y obtener un parámetro de dispersión.
6. Realizar simulaciones numéricas en *Wolfram Mathematica* para indagar el efecto del tiempo de relajación cinemático, y del efecto solvente-polímero y polímero-polímero.

2 Marco Teórico

2.1 Reología

La reología se ha definido como el estudio del flujo y la deformación de los materiales, haciendo hincapié en el primero [1, 4, 7-10].

El objetivo de la Reología versa en la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades reológicas del material (propiedades materiales). Ejemplos cotidianos de interés para la reología son la mayonesa, yogurt, pinturas, asfalto, sangre y muchos más [1].

Uno de los parámetros reológicos más importantes es la viscosidad a bajas rapidez de deformación (η_0) la cual es interpretada como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo y su estructura intermolecular no se alinea con el flujo [7]. Por otro lado, otro parámetro reológico de interés, relacionado con la tendencia de ciertos materiales a sufrir deformaciones reversibles, es el módulo elástico de corte (G_0). En general, aquellos fluidos que exhiben una viscosidad dependiente de la deformación son llamados no fluidos newtonianos y, a los fluidos que exhiben características viscosas y elásticas se les llama viscoelásticos [7, 8].

La **Figura 2-1** muestra una clasificación sencilla de los fluidos en función de la respuesta que exhiben a la deformación [11]. Los gases se deforman continua e irreversiblemente de manera instantánea; los líquidos newtonianos se deforman irreversiblemente con una viscosidad independiente de la rapidez de deformación $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$, en cambio, los fluidos no newtonianos poseen propiedades reológicas dependientes de la deformación γ y de $\dot{\gamma}$, en particular, los fluidos no newtonianos inelásticos no poseen elasticidad y su viscosidad depende del tiempo y de $\dot{\gamma}$, asimismo, existen dos tipos de fluidos viscoelásticos: los

fluidos viscoelásticos lineales y los fluidos viscoelásticos no lineales, los primeros se caracterizan por relacionar el esfuerzo con la deformación de manera lineal mediante derivadas temporales con coeficientes constantes del esfuerzo y la deformación, en los segundos, el esfuerzo y la deformación se relacionan de maneras muy complicadas [4]. En este trabajo se emplearán ecuaciones constitutivas aplicables a fluidos viscoelásticos lineales las cuáles son válidas siempre que las deformaciones sean pequeñas [12, 13].

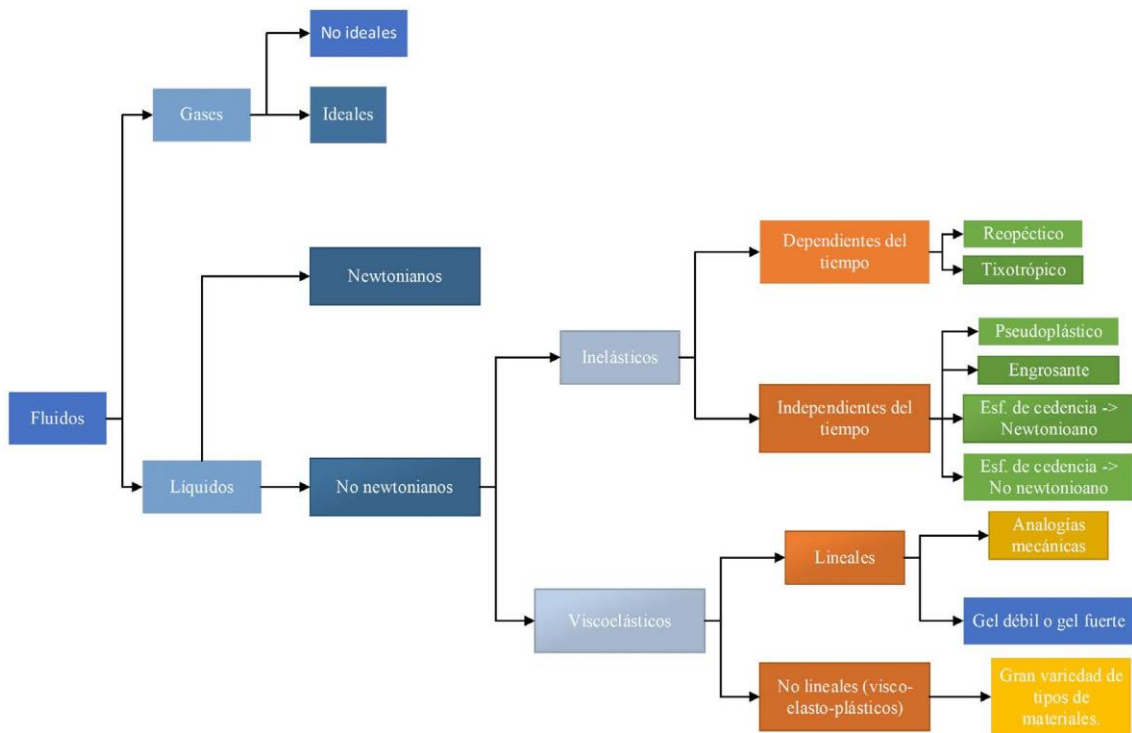


Figura 2-1. Clasificación de los fluidos según la reología [11].

2.1.1 Fluido no newtoniano

La Ec. (2-1) a menudo se denomina *ley de viscosidad de Newton* y establece que la fuerza cortante por área unitaria es proporcional al negativo de la rapidez de deformación:

$$\tau_{yx} = -\mu\dot{\gamma} \quad (2-1)$$

Se ha encontrado que la resistencia a fluir de todos los gases y líquidos con peso molecular < 5000 Da está descrita por dicha ley, y tales fluidos se denominan *fluidos newtonianos*.

Los líquidos poliméricos -suspensiones, pastas, lechadas (lodos) y otros fluidos complejos- no son descritos por la Ec. (2-1) y se denominan *fluidos no newtonianos* [2, 3, 14].

2.1.2 Fluido viscoelástico lineal

En todos los líquidos estructurados existe un estado de reposo natural de la microestructura que representa un estado de energía mínima [8]. Cuando estos líquidos se deforman, las fuerzas termodinámicas comienzan inmediatamente a operar para restaurar este estado de reposo, al igual que un resorte estirado siempre buscará volver a su forma natural. También como un muelle, el movimiento desde el estado de reposo representa un almacenamiento de energía, que se manifiesta como una fuerza elástica que intenta reproducir el *statu quo* estático. Este tipo de energía es el origen de la elasticidad en los líquidos estructurados [4]. Se dice que un sólido elástico lineal tiene memoria perfecta debido a que, si este es deformado, al cesar el esfuerzo, recupera su forma original, conversamente, cuando a un líquido se le aplica un esfuerzo se deformará continua e irreversiblemente.

Como se ilustra en la **Figura 2-2**, cuando un líquido polimérico se somete a un aumento escalonado de la deformación, el esfuerzo se relaja de forma exponencial. Si se somete un líquido puramente viscoso a la misma deformación, el esfuerzo se relaja instantáneamente hasta llegar a cero en cuanto la deformación se hace constante. Un sólido elástico no mostraría ninguna relajación [4].

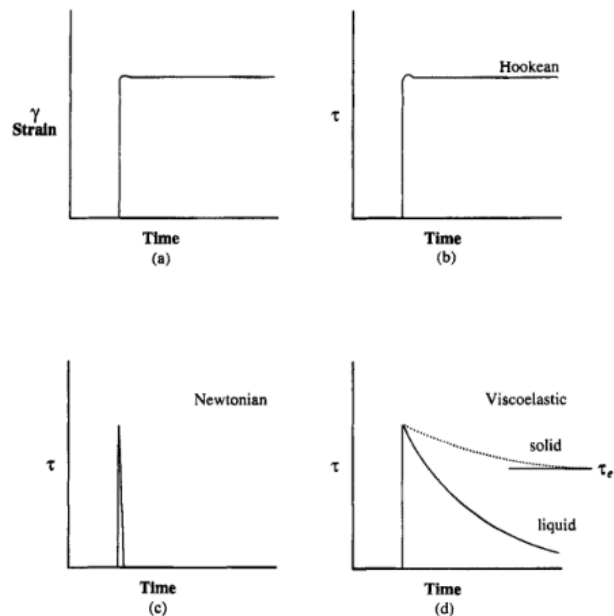


Figura 2-2. Respuesta del esfuerzo en función del tiempo para una unidad de paso en el esfuerzo [4].

Una de las formas más sencillas de entender el tema es recurrir a modelos mecánicos sencillos. Estos consisten en combinaciones de elementos elásticos lineales y viscosos que visualizan los conceptos mediante resortes y pistones, respectivamente [7].

Un resorte es una representación de un elemento elástico lineal que obedece a la ley de Hooke, es decir, la deformación es proporcional al esfuerzo aplicado. En una deformación generada por un esfuerzo cortante simple, la constante de proporcionalidad es el módulo elástico cortante G_0 [7, 8].

Del mismo modo, la respuesta viscosa se puede modelar utilizando un pistón con un líquido newtoniano. El émbolo se mueve a través del líquido y lo representa físicamente [7].

En la **Figura 2-3** se muestran los 3 modelos mecánicos más empleados en la representación de materiales viscoelásticos lineales: el modelo de Maxwell, el modelo de Kelvin-Voigt y el modelo de cuatro elementos, mejor conocido como el modelo de

Burgers [4]. En el modelo de Maxwell un pistón, que representa la viscosidad newtoniana del sistema, es conectado en serie a un resorte, el cual representa la parte elástica lineal del fluido; la deformación total del modelo de Maxwell es la suma de la deformación del resorte más la deformación del pistón; en el modelo de Kelvin-Voigt la deformación total es igual a la del resorte y a del pistón, a este modelo se le asocian características elasto-plásticas debido a que la deformación de este sistema está controlada por el resorte; finalmente, en el modelo de Burgers se conectan en serie un modelo de Maxwell y un modelo de Kelvin-Voigt, es decir, la deformación total del sistema es la deformación del modelo de Maxwell más la deformación del modelo de Kelvin-Voigt.

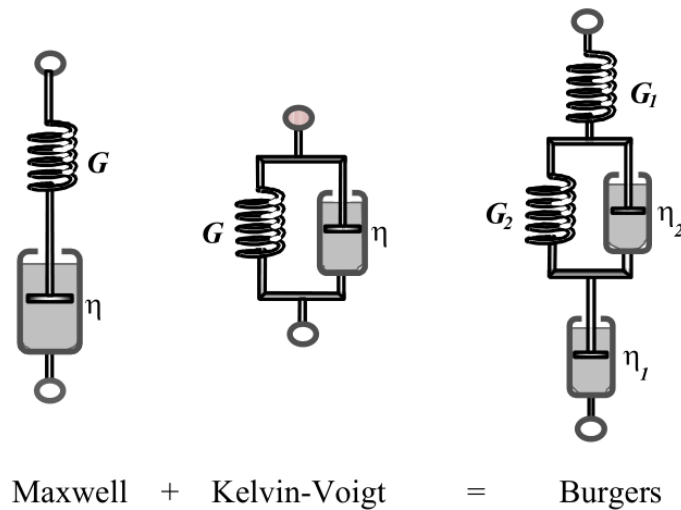


Figura 2-3. Los modelos de Maxwell, Kelvin-Voigt y Burgers [8].

2.1.2.1 Modelo de maxwell

El primer intento para obtener una ecuación constitutiva viscoelástica parece haber sido el modelo de Maxwell, este modelo consiste en conectar un resorte y un pistón en serie (véase la **Figura 2-4**). Maxwell propuso que los fluidos con características viscoelásticas podían describirse mediante la Ec. (2-2) [7]:

$$\underline{\underline{\sigma}} + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} = 2\eta_0 \underline{\underline{D}} \quad (2-2)$$

Para flujos en estado estacionario, la Ec. (2-2) se simplifica al fluido newtoniano con viscosidad η_0 . Para cambios bruscos de esfuerzo, el término de la derivada del tiempo domina el lado izquierdo de la ecuación, y entonces la integración con respecto al tiempo devuelve la ley del sólido de Hooke con modulo elástico G_0 . La Ec. (2-2) es la expresión más simple para la descripción del tensor de esfuerzos viscoelásticos en el balance de *momentum* siempre que las deformaciones sean pequeñas. La cantidad $\frac{\eta_0}{G_0}$ se le conoce como tiempo de relajación de Maxwell o tiempo de relajación de esfuerzos λ_0 el cuál mide la competencia de los mecanismos viscosos del material con los mecanismos elásticos del mismo [1]. El modelo de Maxwell representa razonablemente bien polímeros fundidos sometidos a bajas frecuencias [4].

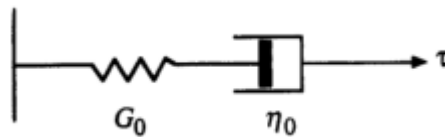


Figura 2-4. Modelo viscoelástico de Maxwell [4].

2.1.2.2 Modelo de Jeffreys

Para representar el modelo de Jeffreys, se conecta en paralelo un modelo de Maxwell (polímero, en azul) con un pistón (solvente newtoniano, en verde) tal y como se puede observar en la **Figura 2-5**. Matemáticamente, el modelo de Jeffreys se puede expresar como [11]:

$$\underline{\underline{\sigma}} + \lambda_0 \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \underline{\underline{D}} \quad (2-3)$$

Donde λ_J es el tiempo de relajación de Jeffreys (o del solvente).

La Ec. (2-3) describe la variación del esfuerzo con la deformación de un sistema que consta de un polímero disuelto en un solvente newtoniano.

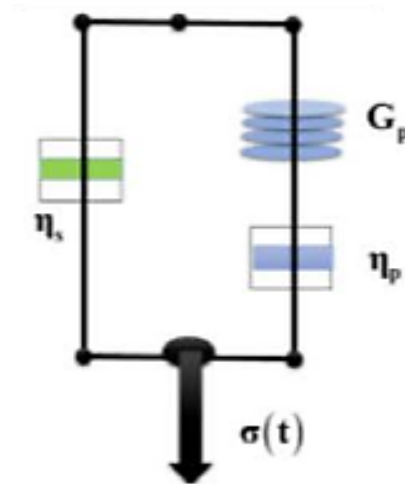


Figura 2-5. Modelo mecánico de Jeffreys [11].

2.1.2.3 Modelo de Burgers

El modelo de Burgers proviene de combinar un modelo de Maxwell y un modelo de Kelvin-Voigt en serie, y es nombrado en honor del físico holandés homónimo [7].

Dicho modelo permite representar el comportamiento de, por ejemplo, un polímero dentro de un solvente; ya que, de acuerdo a Barnes (2000) [7] el modelo de Maxwell representa a un material viscoelástico *líquido*; mientras que el modelo de Kelvin-Voigt (resorte y pistón en paralelo) representa, a un material viscoelástico *sólido*.

Las contribuciones individuales del modelo son mostradas en la **Figura 2-6**. A tiempos cortos (frecuencias altas) la deformación del modelo de Burgers está dada por el resorte del modelo de Maxwell, a tiempos largos (frecuencias bajas), la deformación será dominada por el resorte del modelo de Kelvin-Voigt. Finalmente, a tiempos lo suficientemente largos (frecuencias cortas), la viscosidad del modelo de Maxwell dictará la deformación total del sistema.

La ecuación constitutiva reológica del modelo de Burgers tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} + (\lambda_{01} + \lambda_{02}) \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} + \lambda_{01} \lambda_{02} \frac{\partial^2 \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t^2} \\ = (\eta_{01} + \eta_{02}) \dot{\gamma} + (\eta_{01} \lambda_{02} + \eta_{02} \lambda_{01}) \frac{\partial}{\partial t} \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (2-4)$$

Donde λ_{01} y η_{01} es el tiempo característico y la viscosidad del modelo de Maxwell, λ_{02} y η_{02} es el tiempo característico y la viscosidad del modelo de Kelvin-Voigt.

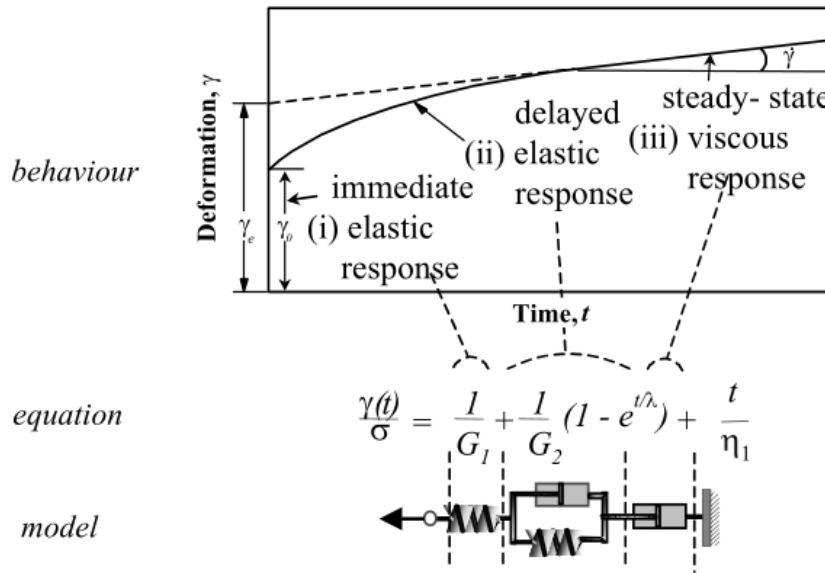


Figura 2-6. Modelo de Burgers en detalle [7].

2.2 Teoría de Ondas

Una onda consiste en la propagación de una perturbación de alguna propiedad del espacio. El espacio perturbado puede contener materia o no. La teoría de ondas es una rama de la física que se ocupa de las propiedades de los fenómenos ondulatorios independientemente de cuál sea su origen físico [15, 16].

2.2.1 Velocidad de fase

Una combinación particular de la ecuación de onda resulta en la siguiente expresión [17]:

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} \quad (2-5)$$

La variable k es la llamada constante de propagación o número de onda.

La Ec. (2-5) describe la propagación hacia la derecha (x creciente) de una onda que posee una pulsación bien definida con una frecuencia ω . Una función de onda como la descrita en la Ec. (2-5) puede servir para describir con mucha aproximación determinados casos reales, como son la propagación por el espacio de una onda luminosa monocromática o la de una onda sinusoidal a lo largo de una cuerda muy larga [17].

Sí el argumento de la exponencial de la Ec. (2-5) permanece constante, entonces la función de onda $\Psi(x, t)$ permanecerá también constante. Este argumento recibe el nombre de *fase* ϕ de la onda que se expresa por medio de la Ec. (2-6).

$$\phi \equiv \omega t - kx \quad (2-6)$$

Si trasladamos nuestro punto de observación a lo largo del eje x a tal velocidad que la fase sea la misma en todos los puntos, veremos siempre una onda estacionaria de la misma forma. Esta velocidad a la que debemos trasladarnos es la llamada *velocidad de fase* (V) de la onda y corresponde a la velocidad a la que se propaga el *contorno de la onda*. Para que $\phi = cte.$, se verifica que:

$$d\phi = 0 \quad (2-7)$$

O sea

$$\omega dt = k dx \quad (2-8)$$

De donde

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v \quad (2-9)$$

Sólo puede hablarse de velocidad de fase cuando la función de onda tenga la misma forma a lo largo de toda su longitud. Está condición debe cumplirse necesariamente para que nos sea posible medir la longitud de onda tomando la distancia entre dos crestas sucesivas cualesquiera de la onda [17].

2.2.2 Velocidad de grupo

La velocidad de grupo (U) a la que se propagan las modulaciones (o grupos de ondas) vendrá dada por la condición de que la fase del término de amplitud sea constante. Así

$$U = \frac{v_0}{1 - \frac{\omega_0}{v_0} \left(\frac{dv}{d\omega} \right)_0} \quad (2-10)$$

Donde el subíndice cero significa que k y ω poseen valores constantes k_0 y ω_0 , respectivamente.

El concepto de velocidad de grupo sólo es aplicable a aquellos casos representables mediante un paquete de ondas; o sea, a funciones de onda que contienen un pequeño intervalo (o *banda*) de pulsaciones [17].

2.2.3 Dispersión

Cuando un conjunto de ondas pasa oblicuamente de un medio a otro, el conjunto de ondas cambia de dirección, separándose y tomando una dirección particular cada una, en base a su frecuencia [17].

En un medio no dispersivo se tiene que $\Delta\omega/\Delta k = V$, por lo que las velocidades de grupo y de fase serán iguales. Sin embargo, cuando haya dispersión, U y V serán distintas [17].

Cuando se presenta el caso en que la velocidad de fase es función del número de onda; ósea, que V es dependiente de la pulsación ($V = V(k)$), en un medio dado, se dice que ese medio es dispersivo y que la onda presenta dispersión. Un prisma óptico simple

constituye el ejemplo más conocido de este fenómeno. El índice de refracción del prisma depende de la longitud de onda de la luz incidente y, cuando ésta lo atraviesa, la luz se descompone en un espectro de longitudes de onda (dispersión) [17]. En este trabajo, la dispersión se expresa de una manera sencilla (ver Ec. (2-11)):

$$\text{Dispersión} = V - U \quad (2-11)$$

Si la dispersión es 0, $V = U$, si la dispersión es diferente de 0, implica que las velocidades de fase y de grupo son diferentes.

2.3 Función de transferencia

La función de transferencia relaciona una variable de entrada y una variable de salida en un estado dinámico [11] de un proceso de interés. Comúnmente, el dominio de una función de transferencia se genera por medio de una transformación matemática como en el espacio de Laplace, Fourier, Laguerre, etc. En la **Figura 2-7** se muestra un esquema típico de una función de transferencia durante el flujo de un material viscoelástico a través de una tubería cilíndrica [17]; la variable de entrada es el gradiente de presión pulsátil que, por medio de una función de transferencia, genera una variable de salida que es el flujo volumétrico, nótese que estas tres cantidades se encuentran en el espacio de la transformada de Fourier.

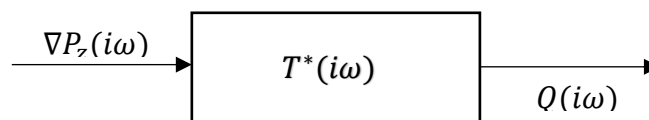


Figura 2-7. Representación gráfica de la función de transferencia [11].

La ventaja del formalismo de Fourier es la de generalizar la función de transferencia para cualquier modelo viscoso-inercia y viscoelástico-inercia [11].

2.4 Tiempo de relajación cinemático

El tiempo de relajación cinemático, representado por la letra griega λ , se propone para la representación de un tiempo de relajación de algún fenómeno de transporte diferente al de *momentum* (transferencia de energía, transferencia de masa, transferencia de carga, etc.). Dado que el acoplamiento de las ecuaciones de balance se da en torno al vector velocidad \underline{v} , como primera aproximación se propone que λ sea una constante y, además, la interdifusión de *momentum* se genera por medio de una fuerza directora que depende de \underline{v} de manera lineal, se utiliza tal aproximación para obtener una solución analítica de las ecuaciones aplicables al sistema.

El tiempo de relajación cinemático, λ , es una constante la cual nos permite, de manera aproximada y rápida, obtener los resultados de un análisis del flujo de un material viscoelástico en el que se involucra un fenómeno de transporte distinto sin la necesidad de resolver simultáneamente las ecuaciones acopladas. Como ejemplo de un fenómeno de este tipo se tiene al tiempo en que se logra alcanzar el equilibrio en la difusión de una bolsa de té dentro de una taza llena de agua hirviendo que se encuentra en agitación.

2.4.1 Difusión de propiedades de transporte en interfases

Para entender de una mejor la interdifusión de *momentum* que se propone en este trabajo de tesis, hablaremos de la transferencia de masa en una interfase.

Para caracterizar la transferencia de masa de una fase a otra, de manera sencilla, se utiliza el concepto del coeficiente de transferencia de masa k_c [2, 3, 5, 14, 18], que postula la teoría de doble capa de Lewis-Whitman, tal que:

$$N_{Ax}|_{x=0} = N_{Ai} = k_c(C_{Ai} - C_A) \quad (2-12)$$

Donde $N_{Ax}|_{x=0}$ es el flux de masa del componente A a través de la interfase líquido-gas (véase **Figura 2-8**), k_c es el coeficiente de transferencia de masa que depende de las

condiciones de proceso, de las propiedades geométricas del volumen de control, de las propiedades físico-químicas de los fluidos involucrados, etc. , y C_{Ai} es la concentración del componente A en la interfase que se asume en equilibrio termodinámico, C_A es la concentración del componente A en el seno del fluido.

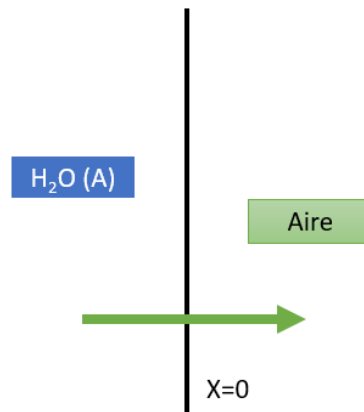


Figura 2-8. Transferencia de masa en una interfase líquida-gas.

Otra propiedad de transporte que tiene similitud con la anterior es la transferencia de energía en una interfase [14, 19]; la cual, para caracterizar dicha transferencia de una fase a otra, se utiliza el concepto de coeficiente de transferencia de calor, h , tal que:

$$q_x|_{x=0} = q_i = -h(T_i - T) \quad (2-13)$$

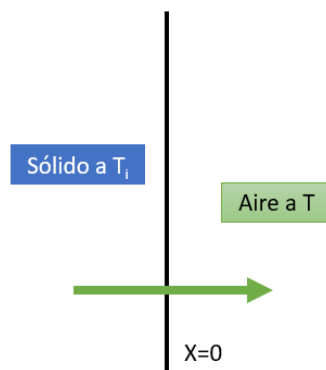


Figura 2-9. Transferencia de calor en una interfase sólido-gas.

Parece razonable pensar que, para caracterizar la transferencia de *momentum* de una fase a otra, o bien, entre una sola fase (interdifusión), se puede usar un concepto análogo a los anteriores (véase la Ec. (2-16)).

$$\begin{aligned} \text{densidad de flujo de momentum} \\ \text{(interdifusión)} \end{aligned} = -\frac{\rho}{\lambda}(\underline{v} - \underline{v}_0) \quad (2-14)$$

Donde v_0 es una velocidad característica de la interdifusión.

2.5 Números adimensionales

Se propone el uso de distintos números adimensionales que serán usados en las expresiones obtenidas a partir de las ecuaciones de balance. Lo anterior con la finalidad de escalar las ecuaciones de balance aplicables al sistema.

2.5.1 Número de Deborah

Al número de Deborah se le fue atribuido dicho nombre por el profesor Markus Reiner y proviene del canto de Débora tras su victoria sobre los filisteos “hasta las montañas fluyeron ante el Señor”, Jueces 5:5 [8].

El número de Deborah es la relación entre el tiempo de relajación de esfuerzos del material y el tiempo de observación o experimental [11].

$$De = \frac{t_c}{t_e} = \frac{\lambda_0}{t} = \lambda_0 \omega \quad (2-15)$$

Donde ω es la frecuencia de oscilación en el espacio de Fourier.

Sí $De \rightarrow 0$ el material se comportará como un líquido newtoniano, sí $De = 1$ el material exhibirá un comportamiento viscoelástico y sí $De \rightarrow \infty$ entonces el material tendrá un comportamiento de sólido elástico [4, 11].

2.5.2 Número de Womersley

El número de Womersley surge al resolver las ecuaciones linealizadas de Navier Stokes para un flujo oscilatorio en un cilindro. Expresa la relación entre el mecanismo oscilatorio y la fuerza de corte dado por la viscosidad; al igual que es utilizado para determinar el grosor de la capa límite para ver si los efectos de entrada pueden ser ignorados [3, 11].

$$Wo^2 = \frac{\rho\omega}{\mu L^{-2}} = \frac{\rho\omega R^2}{\eta_0} \quad (2-16)$$

Cuando $Wo < 1$, la frecuencia de pulsaciones es lo suficientemente baja como para que un perfil de velocidad parabólica tenga tiempo para desarrollarse durante cada ciclo, y el flujo estará casi en fase con el gradiente de presión (flujo de Hagen-Poiseuille). Cuando $Wo > 10$ la frecuencia de pulsaciones es lo suficientemente grande como para que el perfil de velocidad sea relativamente plano o parecido a un flujo tapón, y el flujo promedio se retrasa en el gradiente de presión unos 90 grados [3, 11].

2.5.3 Número de Mach

El número de Mach fue llamado así en honor al físico austriaco Ernst Mach [11]. Este número relaciona dos rapidezces características del sistema y ha sido utilizado para describir el comportamiento de membranas flexo-eléctricas en medios newtonianos y no newtonianos, en particular, en medios viscoelásticos lineales (Maxwell, Jeffreys, Burgers, etc.) [11-13, 20, 21].

$$Ma = \frac{\rho R^2}{\lambda \eta_0} = \frac{\text{Fuerzas inerciales}}{\text{Fuerzas elásticas}} = \frac{\rho R^2}{\lambda \lambda_0 G_0} = \frac{1}{De} \quad (2-17)$$

2.5.4 Número de Jeffreys

El número de Jeffreys relaciona el tiempo de relajación del solvente con el tiempo de relajación del polímero.

$$Je = \frac{\lambda_j}{\lambda_0} = \frac{\text{tiempo característico del solvente o de Jeffreys}}{\text{tiempo característico del polímero o de Maxwell}} \quad (2-18)$$

Si $Je < 1$, el tiempo característico del polímero dominará el proceso de flujo. Si resulta que $Je > 1$ entonces el tiempo característico que dominará será el del solvente, este caso no posee interpretación física y no es útil en el análisis de resultados de este trabajo. Y en el último caso donde $Je = 1$, lo cual implica que $\lambda_0 = \lambda_j$, por lo cual se está tratando del modelo de Maxwell.

2.5.5 Número de Burgers 1

El primer número de Burgers (Br_1) relaciona los tiempos de relajación de del polímero de Maxwell y del polímero de Kelvin-Voigt.

$$Br_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{02}} = \frac{\text{tiempo característico del modelo de Maxwell}}{\text{tiempo característico del modelo de K - V}} \quad (2-19)$$

2.5.6 Número de Burgers 2

El segundo número de Burgers (Br_2) reporta la aportación elástica del modelo de Maxwell al modelo completo, cuyo valor no debe superar la unidad debido a que carecería de todo sentido físico. Si $0.5 < Br_2 < 1$, entonces el modelo viscoelástico lineal de Maxwell aporta la mayor elasticidad en el modelo de Burgers. Caso contrario, donde $0 < Br_2 < 0.5$, la aportación de elasticidad, del modelo de Kelvin-Voigt, será menor.

$$Br_2 = \frac{G_{01}}{G_{01} + G_{02}} = \frac{\text{elasticidad del modelo de Maxwell}}{\text{elasticidad del modelo de Burgers}} \quad (2-20)$$

2.5.7 Número de Burgers 3

El número de Burgers 3 (Br_3) describe la aportación de la elasticidad del modelo de Kelvin-Voigt al modelo de Burgers.

$$Br_2 = \frac{G_{02}}{G_{01} + G_{02}} = \frac{\text{elasticidad del modelo de Kelvin - Voigt}}{\text{elasticidad del modelo de Burgers}} \quad (2-21)$$

Es similar a Br_2 ; donde Si $0.5 < Br_3 < 1$, entonces la elasticidad del modelo elasto-plasto dominará en el modelo de Burgers. Sí $0 < Br_3 < 0.5$, la aportación de elasticidad será menor.

2.5.8 Número adimensional 1

El siguiente número adimensional fue resultado de la deducción de las ecuaciones en este trabajo y el cual se denominará como N_1 . Este número relaciona el tiempo característico de Maxwell con el tiempo de relajación cinemático.

$$N_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\rho R^2}{\eta_0 \lambda} = \frac{\text{Tiempo característico de esfuerzos}}{\text{Tiempo característico cinemático}} \quad (2-22)$$

Sí $N_1 < 1$; el tiempo de relajación del material regirá. Sí $N_1 = 1$, los dos tiempos son iguales. Sí $N_1 > 1$, el tiempo de relajación cinemático dictará las propiedades de flujo.

2.6 Flujo de un fluido newtoniano en un cilindro rígido horizontal debido a un gradiente de presión constante

A continuación, se mostrará el procedimiento para obtener el flujo volumétrico en estado estacionario de un fluido newtoniano incompresible que fluye a través de un cilindro horizontal por medio de un gradiente de presión constante. La metodología empleada en esta sección será fundamental para cumplir con los objetivos establecidos.

2.6.1 Esquema de proceso

En la **Figura 2-10** se aprecia el esquema de flujo de un fluido newtoniano a través de una tubería rígida horizontal. La presión en el punto P_1 es mayor a la presión en el punto P_2 , es decir, $\Delta P < 0$, provocando que el fluido viaje de izquierda a derecha. El perfil de velocidades \underline{v} es parabólico y unidireccional, además, el radio del cilindro es mucho

menor a la longitud del mismo $r \ll L$. En las paredes del cilindro el fluido permanece estático (condición de no deslizamiento). A la expresión del flujo volumétrico de este sistema se le conoce como ecuación de Hagen-Poiseuille [2].

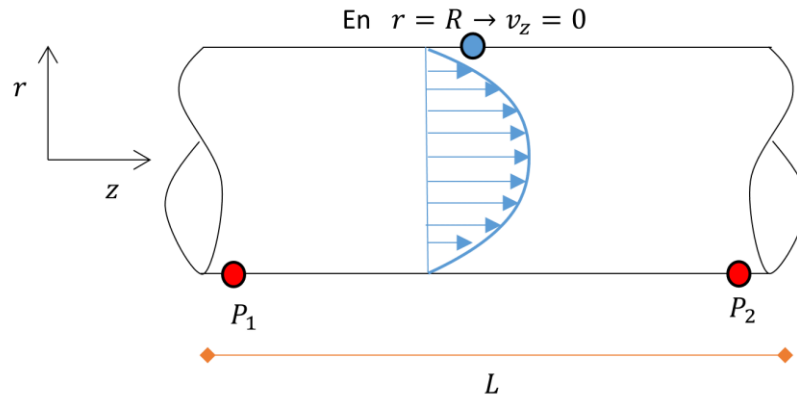


Figura 2-10. Esquema del proceso para la deducción de la ecuación de Hagen-Poiseuille.

2.6.2 Análisis de proceso

Para resolver las ecuaciones de balance aplicables al sistema de la **Figura 2-10**, se deben realizar simplificaciones. A continuación, se enlistan las condiciones a las que se lleva a cabo el proceso.

- El sistema de coordenadas se expresará en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y el origen es colocado en el centro de la cara izquierda del tubo.
- Fluido incompresible ($\rho(r, \theta, z, t) = cte$).
- Fluido newtoniano.
- Flujo axial (unidireccional), es decir, el vector velocidad depende solamente de la coordenada radial $\underline{v} = (0, 0, v_z(r))$ ya que se supone una simetría angular.
- Flujo estacionario.
- No hay reacción química.

- Flujo en régimen laminar (el término no lineal del balance de *momentum* se desprecia $Re \rightarrow 0$).
- Fluido isotrópico (las propiedades físicas (materiales) no dependen del espacio).
- Flujo isotérmico (el balance de energía no es aplicable).
- Las fuerzas gravitacionales son despreciables (a causa de la orientación horizontal de la tubería).

La ecuación de balance de masa en forma tensorial se expresa de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (2-23)$$

Por otra parte, la ecuación de balance de *momentum* es:

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{g} \quad (2-24)$$

Al expresar la Ec. (2-23) en coordenadas cilíndricas [2] y al aplicar las simplificaciones previamente mencionadas, se tiene lo siguiente.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2-25)$$

La Ec. (2-25) muestra que la velocidad en dirección axial no depende de la coordenada axial. Posteriormente, al expresar la Ec. (2-24) en coordenadas cilíndricas y tomando en cuenta solo la componente axial de la velocidad usando la ecuación constitutiva del fluido newtoniano, se obtiene la siguiente ecuación diferencial parcial no lineal:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{aligned} \quad (2-26)$$

Dadas las condiciones del proceso, la Ec. (2-26) se reduce a la siguiente ecuación diferencial parcial.

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (2-27)$$

Dado que el gradiente de presión es pulsátil, la Ec. (2-27) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria de variables separables cuya solución general tiene la siguiente forma [11]:

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (2-28)$$

Dado que v_z requiere ser finita en $r = 0$, la c_1 debe ser igual a 0. Por otra parte, dada la condición de no deslizamiento, donde $v_z = 0$ en $r = R$, se tiene:

$$c_2 = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \quad (2-29)$$

Se sustituye c_2 en la Ec. (2-28) para obtener el perfil de velocidades.

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \quad (2-30)$$

Con el fin de obtener el flujo volumétrico se reescribirá la Ec. (2-30).

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu} \nabla_z p r^2 + c_2 \quad (2-31)$$

2.6.3 Flujo volumétrico

Para calcular el flujo volumétrico se resuelve una integral de superficie del perfil de velocidades a través de la sección transversal de área del cilindro, por lo que [11]:

$$Q = \iint \underline{v} \cdot \widehat{dS} \quad (2-32)$$

En coordenadas cilíndricas, el vector diferencial de superficie, dS , tiene la forma [2, 11]:

$$Q = \iint \underline{v} \cdot \widehat{dS} = \int_0^{2\pi} \int_0^R (0,0,v_z) \cdot (0,0,1)|J|dr d\theta \quad (2-33)$$

En la Ec. (2-33), e_z es un vector unitario en la dirección normal de la superficie, $|J|$ es la magnitud del jacobiano de la transformación de coordenadas rectangulares a cilíndricas, i.e., $|J| = r$. Por lo que, la Ec. (2-33) toma la forma [11].

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r) r dr d\theta \quad (2-34)$$

Nótese que la Ec. (2-34) es general para un sistema de coordenadas cilíndrico y no depende de la frecuencia. Al sustituir la Ec. (2-31) en la Ec. (2-34), se tiene lo siguiente:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{1}{4\mu} \nabla_z p r^2 + c_2 \right) r dr d\theta \quad (2-35)$$

Finalmente, al realizar las integraciones en la Ec. (2-35) se obtiene [3]:

$$Q = \pi R^2 \left(\frac{R^2}{8\mu} \nabla_z p + c_2 \right) \quad (2-36)$$

La Ec. (2-36) representa el flujo volumétrico de un fluido newtoniano en una tubería y es conocido como la ecuación de Hagen-Poiseuille, esta ecuación describe la relación entre el gradiente de presión y el flujo volumétrico [11].

3 Metodología

En la **Figura 3-1** se puede apreciar el diagrama de flujo que representa las actividades más importantes realizadas en este trabajo.

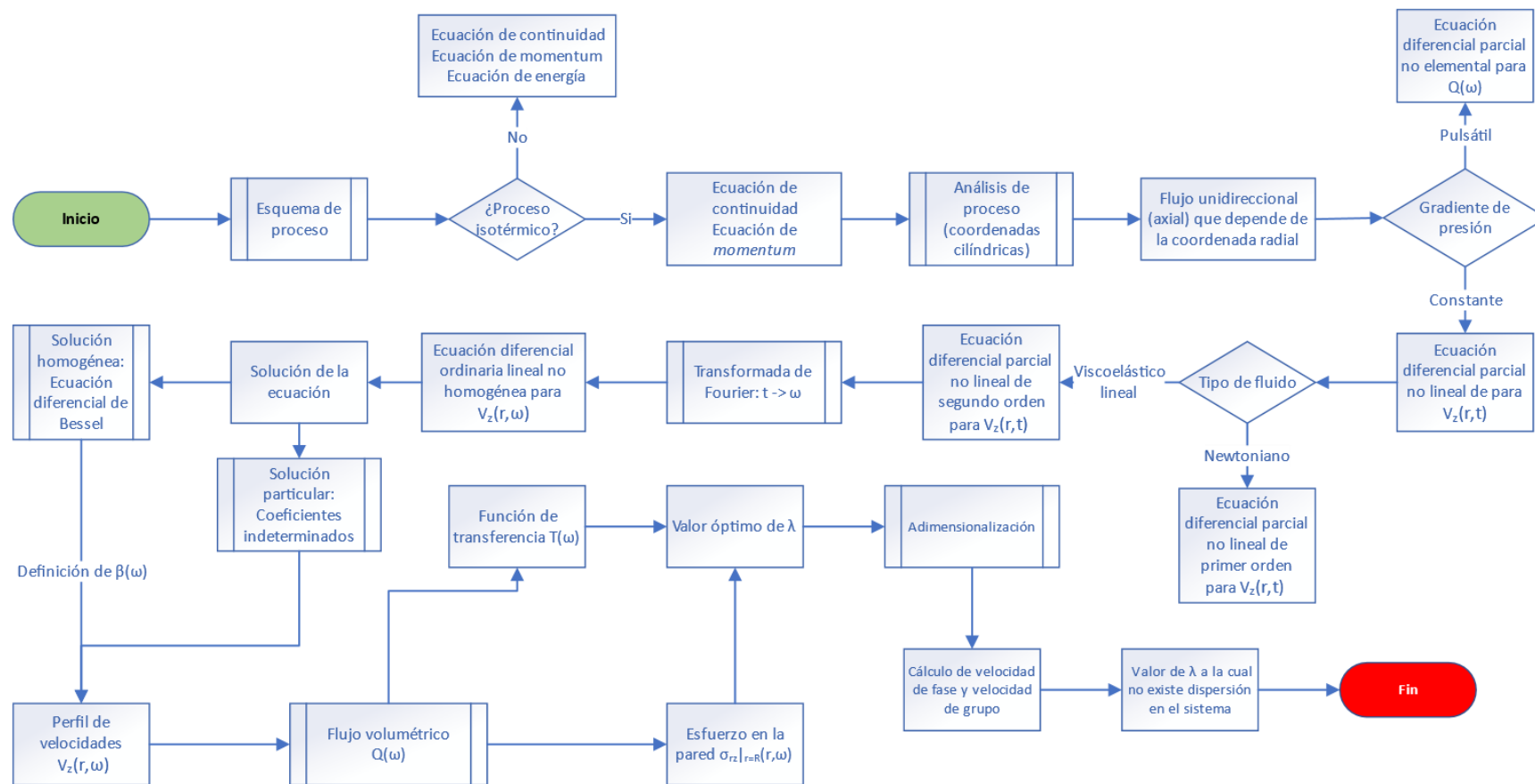


Figura 3-1. Diagrama de flujo para la obtención de las propiedades de flujo de un material viscoelástico fluyendo a través de una tubería horizontal.

4 Problema físico

4.1 Diagrama de proceso

En la **Figura 4-1** se muestra el esquema de proceso que se analizará en esta tesis de licenciatura. Por un lado, el fluido viscoelástico lineal se mueve en dirección axial (en el eje z), la fuerza motriz que deforma continua e irreversiblemente al fluido es un gradiente de presión pulsátil que se manifiesta en dirección axial, la longitud del tubo es L , no hay deslizamiento en las paredes y las paredes del tubo son rígidas.

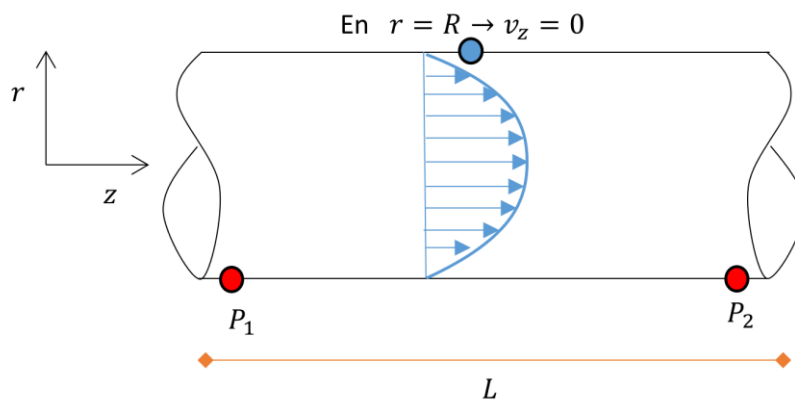


Figura 4-1. Esquema del proceso.

4.2 Análisis de proceso

Se proponen las siguientes condiciones de proceso para modelar matemáticamente el flujo de un fluido viscoelástico lineal en donde se manifiesta un fenómeno de relajación arbitrario provocado por otro fenómeno de transporte diferente al de *momentum*.

- El sistema geométrico se expresará en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y el origen es colocado en el centro del tubo a la izquierda.
- Fluido incompresible ($\rho(r, \theta, z, t) = cte$).
- Fluido viscoelástico lineal representado por tres ecuaciones constitutivas: modelo de Maxwell, modelo de Jeffreys y modelo de Burgers.

- Flujo no estacionario.
- Flujo axial (unidireccional), es decir, el vector velocidad depende solamente de la coordenada radial $\underline{v} = (0,0, v_z(r, t))$ ya que se supone una simetría angular.
- No hay reacción química.
- Flujo en régimen laminar (el término no lineal se desprecia $Wo \rightarrow 0$).
- Fluido isotrópico (las propiedades físicas (materiales) no tienen una dirección preferencial).
- La función de relajación general es lineal.
- Las fuerzas gravitacionales son despreciables (a causa de la orientación horizontal de la tubería).
- El fluido es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión constante.

4.3 Ecuación de balance de *momentum* (o segunda ley del movimiento de Cauchy)

La aportación de la interdifusión al balance de *momentum* se considerará como una fuerza volumétrica. A la Ec. (2-26) se le suma al lado izquierdo la densidad de flujo de *momentum* (ver Ec. (4-1)).

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \frac{\underline{v} - \underline{v}_0}{\lambda} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (4-1)$$

Donde, \underline{v} es el vector velocidad, \underline{v}_0 es una velocidad característica del proceso de interdifusión, λ es el tiempo de relajación cinemático o general, ρ es la densidad del fluido, t es el tiempo de proceso, p es la presión y $\underline{\underline{T}}$ es el tensor de esfuerzos totales.

La derivada parcial del vector velocidad con respecto al tiempo se puede representar mediante un vector columna.

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial t} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (4-2)$$

Dado que el vector velocidad \underline{v} es unidireccional, la Ec. (4-2) se puede expresar como:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (4-3)$$

El gradiente del vector velocidad $\nabla \underline{v}$ se puede expresar como una matriz de 3x3 [2].

$$\nabla \underline{v} = \begin{pmatrix} (\nabla \underline{v})_{rr} & (\nabla \underline{v})_{r\theta} & (\nabla \underline{v})_{rz} \\ (\nabla \underline{v})_{\theta r} & (\nabla \underline{v})_{\theta\theta} & (\nabla \underline{v})_{\theta z} \\ (\nabla \underline{v})_{zr} & (\nabla \underline{v})_{z\theta} & (\nabla \underline{v})_{zz} \end{pmatrix} \quad (4-4)$$

Cada gradiente, en coordenadas cilíndricas, se expresa como derivada parcial y otros términos [2].

$$(\nabla \underline{v})_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0 \quad (4-5)$$

$$(\nabla \underline{v})_{r\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = 0 \quad (4-6)$$

$$(\nabla \underline{v})_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (4-7)$$

$$(\nabla \underline{v})_{\theta r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} = 0 \quad (4-8)$$

$$(\nabla \underline{v})_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (4-9)$$

$$(\nabla \underline{v})_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0 \quad (4-10)$$

$$(\nabla \underline{v})_{zr} = \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0 \quad (4-11)$$

$$(\nabla \underline{v})_{z\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = 0 \quad (4-12)$$

$$(\nabla \underline{v})_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4-13)$$

Y al sustituir las Ecs. (4-5)-(4-13) en la matriz de la Ec. (4-4), se tiene que:

$$\nabla \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-14)$$

Se opera el termino $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$:

$$\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = (v_r \quad v_\theta \quad v_z) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (4-15)$$

Al realizar la divergencia del tensor de esfuerzos totales se obtiene lo siguiente:

$$\nabla \cdot \underline{T} = \nabla \cdot (-p\underline{I} + \underline{\sigma}) = -\underline{I} \cdot \nabla p + \nabla \cdot \underline{\sigma} \quad (4-16)$$

Donde \underline{I} es la matriz identidad y $\underline{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos viscoelásticos. El término $\underline{I} \cdot$

∇p se opera de la siguiente forma:

$$\underline{I} \cdot \nabla p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4-17)$$

Y la divergencia del tensor de esfuerzos $\nabla \cdot \underline{\sigma}$ resulta como:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}})_r \\ (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}})_\theta \\ (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}})_z \end{pmatrix} \quad (4-18)$$

Donde cada componente, en coordenadas cilíndricas se representa como [2]:

$$(\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \quad (4-19)$$

$$(\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}})_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \quad (4-20)$$

$$(\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (4-21)$$

Al aplicar las condiciones de proceso, el único componente que resulta de la divergencia es el siguiente:

$$(\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}})_r = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0 \quad (4-22)$$

$$(\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}})_\theta = 0 \quad (4-23)$$

$$(\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) \quad (4-24)$$

Al sustituir las Ecs. (4-22)-(4-24) en la Ec. (4-18) se obtiene:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) \end{pmatrix} \quad (4-25)$$

En la Ec. (4-1) se sustituyen las Ecs. (4-2), (4-15), (4-17) y (4-25) para obtener la siguiente ecuación.

$$\rho \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v_z - v_o}{\lambda} \end{pmatrix} \right] = - \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \end{pmatrix} \quad (4-26)$$

El término $v_z \frac{\partial v_z}{\partial r}$ se considera despreciable ya que el flujo se encuentra en régimen laminar; entonces la Ec. (4-26) se reduce a:

$$\rho \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v_z - v_o}{\lambda} \end{pmatrix} \right] = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \end{pmatrix} \quad (4-27)$$

Entonces, el perfil de velocidades v_z de la Ec. (4-27) se puede reescribir como:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{v_z - v_o}{\lambda} \right) = -\nabla_z p + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \quad (4-28)$$

Multiplicamos por $\frac{\partial}{\partial t}$ a la Ec. (4-28)

$$\rho \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \nabla_z p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} \quad (4-29)$$

Donde se intercambi6 las derivadas parciales de $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} \right)$, con el fin de agregar la aportaci6n al tensor de esfuerzos viscoel6sticos del modelo reol6gico.

4.3.1 Ecuaci6n constitutiva reol6gica: modelo de Maxwell

Se considera a σ_{rz} como una contribuci6n de un pol6mero de Maxwell.

$$\sigma_{rz} + \lambda_0 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} = \eta_0 \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (4-30)$$

Al despejar σ_{rz} .

$$\lambda_0 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} = \eta_0 \frac{\partial v_z}{\partial r} - \sigma_{rz} \quad (4-31)$$

Luego, se multiplica la Ec. (4-29) por λ_0 .

$$\lambda_0 \rho \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) = -\lambda_0 \frac{\partial \nabla_z p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \lambda_0 \left(\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} \right) + \frac{1}{r} \lambda_0 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} \quad (4-32)$$

Donde la Ec. (4-31) se sustituye en la Ec. (4-32)[22].

$$\dots = -\lambda_0 \frac{\partial \nabla_z p(t)}{\partial t} + \eta_0 \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\eta_0}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\sigma_{rz}}{r} \quad (4-33)$$

Se agrupan los términos de la Ec. (4-33) y se tiene que:

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \rho \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} + \frac{\lambda_0 \rho}{\lambda} \frac{\partial v_z}{\partial t} \\ & = -\lambda_0 \frac{\partial \nabla_z p(t)}{\partial t} + \eta_0 \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} - \frac{\sigma_{rz}}{r} \end{aligned} \quad (4-34)$$

Los términos restantes que involucran al esfuerzo cortante pueden ser reemplazados al despejar la Ec. (4-28) y multiplicarla por -1.

$$-\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{v_z - v_0}{\lambda} \right) - \nabla_z p = -\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} - \frac{\sigma_{rz}}{r} \quad (4-35)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \rho \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right) \\ & = -\lambda_0 \left(\frac{\partial \nabla_z p}{\partial t} + \frac{\nabla_z p}{\lambda_0} \right) \\ & + \eta_0 \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \rho \frac{v_z - v_0}{\lambda} \end{aligned} \quad (4-36)$$

Se puede reducir el término de la viscosidad con la regla de la cadena.

$$\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \quad (4-37)$$

$$\eta_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \quad (4-38)$$

Es posible integrar el operador viscosidad, $O_\eta(D_t)$, el cual generaliza varios modelos viscoelásticos, en nuestro caso el modelo de Maxwell se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$O_\eta(D_t) = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 D_t} \quad (4-39)$$

Y se despeja a la viscosidad.

$$O_\eta(D_t)(1 + \lambda_0 D_t) = \eta_0 \quad (4-40)$$

Se integra la Ec. (4-40) a la Ec. (4-38).

$$O_\eta(D_t)(1 + \lambda_0 D_t) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \quad (4-41)$$

En términos del operador viscosidad, la Ec. (4-32) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \rho \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1\right) \\ & = -\lambda_0 \left(\frac{\partial \nabla_z p(t)}{\partial t} + \frac{\nabla_z p(t)}{\lambda_0}\right) \\ & + O_\eta(D_t)(1 + \lambda_0 D_t) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) - \rho \frac{v_z - v_0}{\lambda} \end{aligned} \quad (4-42)$$

4.3.1.1 Transformada de Fourier

Dado que la Ec. (4-42) es una ecuación diferencial parcial lineal que depende del tiempo y de la coordenada radial, se aplicará la transformada de Fourier para convertirla a una

ecuación diferencial ordinaria lineal. Ahora transformamos cada término de la Ec. (4-42)

al dominio de las frecuencias.

$$\mathcal{F} \left\{ \lambda_0 \rho \frac{\partial^2 v_z(r, t)}{\partial t^2} \right\} = \lambda_0 \rho (i\omega)^2 v_z(r, \omega) \quad (4-43)$$

$$\mathcal{F} \left\{ \rho \frac{\partial v_z(r, t)}{\partial t} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right) \right\} = \rho \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right) (i\omega) v_z(r, \omega) \quad (4-44)$$

$$\mathcal{F} \left\{ -\lambda_0 \left(\frac{\partial \nabla_z p(t)}{\partial t} + \frac{\nabla_z p(t)}{\lambda_0} \right) \right\} = -\lambda_0 \left((i\omega) \nabla_z p(\omega) + \frac{\nabla_z p(\omega)}{\lambda_0} \right) \quad (4-45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ O_\eta(Dt)(1 + \lambda_0 Dt) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z(r, t)}{\partial r} \right) \right\} \\ = O_\eta(i\omega)(1 + \lambda_0(i\omega)) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z(r, \omega)}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (4-46)$$

$$\mathcal{F} \left\{ -\rho \frac{v_z(r, t) - v_o}{\lambda} \right\} = -\rho \frac{v_z(r, \omega) - v_o}{\lambda} \quad (4-47)$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \rho (i\omega)^2 v_z(r, \omega) + \rho \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right) (i\omega) v_z(r, \omega) \\ = -\nabla_z p(\omega)(1 + \lambda_0(i\omega)) \\ + O_\eta(i\omega)(1 + \lambda_0(i\omega)) \left(\frac{d^2 v_z(r, \omega)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z(r, \omega)}{dr} \right) \\ - \rho \frac{v_z(r, \omega) - v_o}{\lambda} \end{aligned} \quad (4-48)$$

$$\begin{aligned}
& \rho v_z(r, \omega) \left(\lambda_0(i\omega)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right) \right) \\
& = -\nabla_z p(\omega)(1 + \lambda_0(i\omega)) \\
& + O_\eta(i\omega)(1 + \lambda_0(i\omega)) \left(\frac{d^2 v_z(r, \omega)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z(r, \omega)}{dr} \right) \\
& - \rho \frac{v_z(r, \omega)}{\lambda} + \frac{\rho v_0}{\lambda}
\end{aligned} \tag{4-49}$$

Se tiene una ecuación diferencial ordinaria lineal de Bessel no homogénea [23].

4.3.2 Función de Bessel

Ahora es necesario que la Ec. (4-49) tenga la misma forma que la función de Bessel [23]; por lo que, se debe multiplicar dicha ecuación por r^2 y se agrupan términos:

$$\begin{aligned}
& r^2 \rho v_z \left(\lambda_0(i\omega)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right) \right) \\
& = -r^2 \nabla_z p(\omega)(1 + \lambda_0(i\omega)) \\
& + r^2 O_\eta(i\omega)(1 + \lambda_0(i\omega)) \left(\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right) - r^2 \rho \frac{v_z}{\lambda} \\
& + \frac{r^2 \rho v_0}{\lambda}
\end{aligned} \tag{4-50}$$

Se separa el término del operador viscosidad.

$$\begin{aligned}
& r^2 \rho v_z(r, \omega) \left(\lambda_0 (i\omega)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right) (i\omega) \right) \\
& = -r^2 \nabla_z p(\omega) (1 + \lambda_0(i\omega)) \\
& + O_\eta(i\omega) (1 + \lambda_0(i\omega)) \left(r^2 \frac{d^2 v_z(r, \omega)}{dr^2} \right) \\
& + O_\eta(i\omega) (1 + \lambda_0(i\omega)) \left(r \frac{dv_z(r, \omega)}{dr} \right) - r^2 \rho \frac{v_z(r, \omega)}{\lambda} \\
& + \frac{r^2 \rho v_0}{\lambda}
\end{aligned} \tag{4-51}$$

Se juntan los términos de v_z y se reordena la Ec. (4-51) recordando que $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned}
& O_\eta(i\omega) (1 + \lambda_0(i\omega)) \left(r^2 \frac{d^2 v_z}{dr^2} \right) + O_\eta(i\omega) (1 + \lambda_0(i\omega)) \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \\
& - r^2 \rho v_z \left(-\lambda_0 \omega^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right) (i\omega) + \frac{1}{\lambda} \right) \\
& = -\frac{r^2 \rho v_0}{\lambda} + r^2 \nabla_z p(\omega) (1 + \lambda_0(i\omega))
\end{aligned} \tag{4-52}$$

Y se divide la Ec. (4-52) por $O_\eta(i\omega) (1 + \lambda_0(i\omega))$.

$$\begin{aligned}
& r^2 \frac{d^2 v_z}{dr^2} + r \frac{dv_z}{dr} - \frac{r^2 \rho v_z \left(-\lambda_0 \omega^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right) (i\omega) + \frac{1}{\lambda} \right)}{O_\eta(i\omega) (1 + \lambda_0(i\omega))} \\
& = -\frac{r^2 \rho v_0}{\lambda O_\eta(i\omega) (1 + \lambda_0(i\omega))} + \frac{r^2 \nabla_z p(\omega)}{O_\eta(i\omega)}
\end{aligned} \tag{4-53}$$

Para obtener el perfil de velocidades, se propone que la solución general sea resultado de la solución de la parte homogénea y de la solución particular [23].

$$v_z(r, \omega) = v_{zH}(r, \omega) + v_{zP}(r, \omega) \tag{4-54}$$

4.3.2.1 Solución de la parte homogénea

La Ec. (4-53) se iguala a 0:

$$r^2 \frac{d^2 v_z(r, \omega)}{dr^2} + r \frac{dv_z(r, \omega)}{dr} - \frac{r^2 \rho \left(-\lambda_0 \omega^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right) (i\omega) + \frac{1}{\lambda} \right)}{O_\eta(i\omega)(1 + \lambda_0(i\omega))} v_z(r, \omega) = 0 \quad (4-55)$$

Se sustituye $O_\eta(i\omega)$ por $\frac{\eta_0}{1+i\lambda\omega}$ en la Ec. (4-55).

$$r^2 \frac{d^2 v_z}{dr^2} + r \frac{dv_z}{dr} - \frac{r^2 \rho \left(-\lambda_0 \omega^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right) (i\omega) + \frac{1}{\lambda} \right)}{\eta_0} v_z = 0 \quad (4-56)$$

Se juntan las constantes en un solo parámetro β^2 .

$$\beta^2 = - \frac{\rho \left(-\lambda_0 \omega^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right) (i\omega) + \frac{1}{\lambda} \right)}{\eta_0} \quad (4-57)$$

Se sustituye la Ec. (4-57) en la Ec. (4-56).

$$r^2 \frac{d^2 v_z(r, \omega)}{dr^2} + r \frac{dv_z(r, \omega)}{dr} + \beta^2 r^2 v_z(r, \omega) = 0 \quad (4-58)$$

La Ec. (4-58) tiene la forma de función de Bessel de orden cero, la cual tiene como solución [23]:

$$v_{zH} = c_1 J_0(\beta r) + c_2 Y_0(\beta r) \quad (4-59)$$

Donde J_0 y Y_0 son las funciones de Bessel de orden cero de primera y segunda clase, y tienen valores establecidos en tablas [23].

4.3.2.2 Solución particular

Para la solución particular se aplica el método de coeficientes indeterminados, la Ec.

(4-53) puede expresarse como:

$$v_{zP} = A ; A \in \mathbb{R} \quad (4-60)$$

Para facilitar los cálculos, la Ec. (4-53) se reescribe.

$$\left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} + \beta^2 r^2 \right\} v_z(r, \omega) = r^2 \nabla_z p(\omega) O_\phi(i\omega) - \frac{r^2 \rho v_0 O_\phi(i\omega)}{\lambda(1 + \lambda_0(i\omega))} \quad (4-61)$$

Donde $O_\phi(i\omega) = 1/O_\eta(i\omega)$. Se sustituye la Ec. (4-60) en la Ec. (4-61).

$$\beta^2 r^2 A = r^2 \nabla_z p(\omega) O_\phi(i\omega) - \frac{r^2 \rho v_0 O_\phi(i\omega)}{\lambda(1 + \lambda_0(i\omega))} \quad (4-62)$$

Se despeja A.

$$v_{zp} = A = \frac{\nabla_z p(\omega) O_\phi(i\omega)}{\beta^2} - \frac{\rho v_0 O_\phi(i\omega)}{\beta^2 \lambda(1 + \lambda_0(i\omega))} \quad (4-63)$$

4.3.3 Perfil de velocidades

Se sustituye las Ecs. (4-63) y (4-59) en la Ec. (4-54).

$$v_z(r, \omega) = c_1 J_0(\beta r) + c_2 Y_0(\beta r) + \frac{\nabla_z p(\omega) O_\phi(i\omega)}{\beta^2} - \frac{\rho v_0 O_\phi(i\omega)}{\beta^2 \lambda(1 + \lambda_0(i\omega))} \quad (4-64)$$

Para resolver la ecuación, se toma en cuenta las siguientes condiciones de frontera: en $r = 0 \rightarrow v_z = finita$ & en $r = R \rightarrow v_z = 0$. Se aplica la primera condición a la Ec. (4-64).

$$finita = c_1 J_0(0) + c_2 Y_0(0) + \frac{\nabla_z p(\omega) O_\phi(i\omega)}{\beta^2} - \frac{\rho v_0 O_\phi(i\omega)}{\beta^2 \lambda(1 + \lambda_0(i\omega))} \quad (4-65)$$

Donde $J_0(0) = 1$ y $Y_0(0) = -\infty$.

$$finita = c_1(1) + c_2(-\infty) + \frac{\nabla_z p(\omega) O_\phi(i\omega)}{\beta^2} - \frac{\rho v_0 O_\phi(i\omega)}{\beta^2 \lambda(1 + \lambda_0(i\omega))} \quad (4-66)$$

$$v_{z_{m\acute{a}x}} \cong c_2(-\infty) \quad (4-67)$$

La igualdad de la Ec. (4-67) nos indica que la velocidad en el centro del tubo es infinita, lo cual no tiene sentido fısico. Para evitar dicha inconsistencia, la constante c_2 debe ser cero.

$$c_2 = 0 \quad (4-68)$$

Para obtener la variable c_1 , se aplica la condici3n de no deslizamiento y la variable c_2 de la Ec. (4-68) a la Ec. (4-64).

$$0 = c_1 J_0(\beta R) + \frac{\nabla_z p(\omega) O_\phi(i\omega)}{\beta^2} - \frac{\rho v_0 O_\phi(i\omega)}{\beta^2 \lambda(1 + \lambda_0(i\omega))} \quad (4-69)$$

Se despeja la variable c_1 .

$$c_1 = \frac{\rho v_0 O_\phi(i\omega)}{\beta^2 \lambda(1 + \lambda_0(i\omega))} * \frac{1}{J_0(\beta R)} - \frac{\nabla_z p(\omega) O_\phi(i\omega)}{\beta^2} * \frac{1}{J_0(\beta R)} \quad (4-70)$$

Luego, se sustituye las constantes (c_1 y c_2) en la Ec. (4-64) y se factoriza la ecuaci3n resultante para obtener el perfil de velocidades correspondiente al modelo de Maxwell.

$$v_z(r, \omega) = \frac{\rho v_0 O_\phi(i\omega)}{\beta^2 \lambda(1 + i\lambda_0 \omega)} \left(\frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} - 1 \right) + \frac{\nabla_z p(\omega) O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right) \quad (4-71)$$

4.3.4 Flujo volumetrico y funci3n de transferencia

Para calcular el flujo volumetrico en geometrfa cilndrica, se debe integrar la siguiente ecuaci3n [11].

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r, \omega) r dr d\theta \quad (4-72)$$

Antes de sustituir, se puede integrar con respecto al eje θ .

$$Q = 2\pi \int_0^R v_z(r, \omega) r dr \quad (4-73)$$

Se sustituye el perfil de velocidades (véase la Ec. (4-71)), y se procede a integrar con respecto r .

$$Q = 2\pi \int_0^R \left[\frac{\rho v_0}{\beta^2 \lambda \eta_0} \left(\frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} - 1 \right) + \frac{dP}{dz} \frac{[1 + \lambda_0(i\omega)]}{\beta^2 \eta_0} \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right) \right] r dr \quad (4-74)$$

Para facilitar el cálculo, se aplicará la propiedad de linealidad a la integral.

$$Q = \frac{2\pi \rho v_0}{\beta^2 \lambda \eta_0} \int_0^R \left(\frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} - 1 \right) * r dr + \frac{dP}{dz} \frac{2\pi [1 + \lambda_0(i\omega)]}{\beta^2 \eta_0} \int_0^R \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right) * r dr \quad (4-75)$$

Es necesario definir un par de variables adimensionales.

$$\beta^* = \beta R \quad ; \quad r^* = \frac{r}{R} \quad (4-76)$$

Ahora multiplicamos la Ec. (4-75) por R^2/R^2 , acotamos los límites de la integral multiplicándolos por $1/R$; al igual que multiplicamos las funciones de Bessel por R/R .

$$Q = \frac{2\pi\rho v_0 R^2}{\beta^2 \lambda \eta_0} \int_{0/R}^{R/R} \left(\frac{J_0\left(\beta R \frac{r}{R}\right)}{J_0(\beta R)} - 1 \right) \frac{r}{R} d\frac{r}{R} \quad (4-77)$$

$$+ \frac{dP}{dz} \frac{2\pi[1 + \lambda_0(i\omega)]R^2}{\beta^2 \eta_0} \int_{0/R}^{R/R} \left(1 - \frac{J_0\left(\beta R \frac{r}{R}\right)}{dJ_0(\beta R)} \right) \frac{r}{R} d\frac{r}{R}$$

$$Q = \frac{2\pi\rho v_0 R^2}{\beta^2 \lambda \eta_0} \int_0^1 \left(\frac{J_0(\beta^* r^*)}{J_0(\beta^*)} - 1 \right) r^* dr^* \quad (4-78)$$

$$+ \frac{dP}{dz} \frac{2\pi[1 + \lambda_0(i\omega)]R^2}{\beta^2 \eta_0} \int_0^1 \left(1 - \frac{J_0(\beta^* r^*)}{dJ_0(\beta^*)} \right) r^* dr^*$$

Para no extender la Ec. (4-78), se separará en dos ecuaciones.

$$Q(\omega) = Q_1(\omega) + Q_2(\omega) \quad (4-79)$$

Donde:

$$Q_1 = \frac{2\pi\rho v_0 R^2}{\beta^2 \lambda \eta_0} \int_0^1 \left(\frac{J_0(\beta^* r^*)}{J_0(\beta^*)} - 1 \right) r^* dr^* \quad (4-80)$$

$$Q_2 = \frac{dP}{dz} \frac{2\pi[1 + \lambda_0(i\omega)]R^2}{\beta^2 \eta_0} \int_0^1 \left(1 - \frac{J_0(\beta^* r^*)}{dJ_0(\beta^*)} \right) r^* dr^* \quad (4-81)$$

Primero se analizará a $Q_1(\omega)$; y se desarrolla la integral.

$$Q_1 = \frac{2\pi\rho v_0 R^2}{\beta^2 \lambda \eta_0} \left[\int_0^1 \frac{J_0(\beta^* r^*)}{J_0(\beta^*)} r^* dr^* - \int_0^1 r^* dr^* \right] \quad (4-82)$$

$$Q_1 = \frac{2\pi\rho v_0 R^2}{\beta^2 \lambda \eta_0} \left[\int_0^1 \frac{J_0(\beta^* r^*)}{J_0(\beta^*)} r^* dr^* - \frac{1}{2} \right] \quad (4-83)$$

Después, se multiplica $\frac{\beta^{*2}}{\beta^{*2}}$ por la Ec. (4-83), acotamos nuevamente los límites de la integral multiplicándolos por β^* y se hace un cambio de variable con $u = \beta^* r^*$.

$$Q_1 = \frac{2\pi\rho v_0 R^2}{\beta^2 \lambda \eta_0} \left[\int_0^{\beta^*} \frac{J_0(\beta^* r^*)}{J_0(\beta^*)} \frac{\beta^* r^*}{\beta^{*2}} d\beta^* r^* - \frac{1}{2} \right] \quad (4-84)$$

$$Q_1 = \frac{2\pi\rho v_0 R^2}{\beta^2 \lambda \eta_0} \left[\frac{1}{J_0(\beta^*) \beta^{*2}} \int_0^{\beta^*} J_0(u) * u du - \frac{1}{2} \right] \quad (4-85)$$

Ahora es necesario utilizar una de las varias propiedades de las funciones de Bessel, *las relaciones de recurrencia* [23]. Aplicando dicha relación con nuestra función de Bessel, se obtiene la Ec. (4-86).

$$u J_0(u) = \frac{d}{du} [u J_1(u)] \quad (4-86)$$

Se sustituye la Ec. (4-86) en la Ec. (4-85).

$$Q_1 = \frac{2\pi\rho v_0 R^2}{\beta^2 \lambda \eta_0} \left[\frac{1}{J_0(\beta^*) \beta^{*2}} \int_0^{\beta^*} \frac{d}{du} [u J_1(u)] du - \frac{1}{2} \right] \quad (4-87)$$

$$Q_1 = \frac{2\pi\rho v_0 R^2}{\beta^2 \lambda \eta_0} \left[\frac{1}{J_0(\beta^*) \beta^{*2}} \int_0^{\beta^*} d [u J_1(u)] - \frac{1}{2} \right] \quad (4-88)$$

$$Q_1 = \frac{2\pi\rho v_0 R^2}{\beta^2 \lambda \eta_0} \left[\frac{J_1(\beta^*)}{\beta^* J_0(\beta^*)} - \frac{1}{2} \right] \quad (4-89)$$

Con la Ec. (4-89) la variable Q_1 está resuelta; a continuación, se aplica el mismo procedimiento para obtener Q_2 de la Ec. (4-81).

$$Q_2 = \frac{dP}{dz} \frac{2\pi[1 + \lambda_0(i\omega)]R^2}{\beta^2\eta_0} \left(\frac{1}{2} - \frac{J_1(\beta^*)}{\beta^* J_0(\beta^*)} \right) \quad (4-90)$$

Se agrupan las Ecs. (4-89) y (4-90), después, para adimensionar a β es necesario multiplicar la ecuación resultante por R^2/R^2 .

$$Q = \frac{2\pi\rho v_0 R^4}{\beta^{*2}\lambda\eta_0} \left[\frac{J_1(\beta^*)}{\beta^* J_0(\beta^*)} - \frac{1}{2} \right] + \frac{dP}{dz} \frac{2\pi[1 + \lambda_0(i\omega)]R^4}{\beta^{*2}\eta_0} \left[\frac{1}{2} - \frac{J_1(\beta^*)}{\beta^* J_0(\beta^*)} \right] \quad (4-91)$$

La Ec. (4-91) representa el flujo volumétrico para el modelo de Maxwell; para nuestro caso, se ordenará la ecuación para agregar la función de transferencia; por lo que, se multiplica la Ec. (4-91) por $\frac{-8}{-8}$. Recordar que $O_\phi(i\omega) = \frac{1+\lambda_0(i\omega)}{\eta_0}$.

$$Q = \frac{\pi R^4}{8} \frac{\rho v_0}{\lambda[1 + \lambda_0(i\omega)]} \frac{8i^2 O_\phi(i\omega)}{\beta^{*2}} \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta^*)}{\beta^* J_0(\beta^*)} \right] - \frac{\pi R^4}{8} \frac{dP}{dz} \frac{8i^2 O_\phi(i\omega)}{\beta^{*2}} \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta^*)}{\beta^* J_0(\beta^*)} \right] \quad (4-92)$$

Ahora se define la función de transferencia [11].

$$T(i\omega) = \frac{8i^2 O_\phi(i\omega)}{\beta^{*2}} \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta^*)}{\beta^* J_0(\beta^*)} \right] \quad (4-93)$$

La forma adimensional de la función de transferencia se obtiene como el producto de la viscosidad a bajas deformaciones y la función de transferencia.

$$T(\omega)\eta_0 = T^*(\omega) = \frac{8i^2 O_\phi^*(i\omega)}{\beta^{*2}} \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta^*)}{\beta^* J_0(\beta^*)} \right] \quad (4-94)$$

Se sustituye la Ec. (4-93) en la Ec. (4-92) para obtener el flujo volumétrico en términos de la función de transferencia.

$$Q(\omega) = \frac{\pi R^4}{8} T(\omega) \left(\frac{\rho v_0}{\lambda[1 + \lambda_0(i\omega)]} - \frac{dP}{dz} \right) \quad (4-95)$$

4.3.5 Esfuerzo en la pared

La Ec. (4-96) representa el esfuerzo que se genera en la pared durante el flujo en una tubería horizontal [11].

$$\sigma_{rz}(\omega) = O_\eta(i\omega) \frac{\partial v_z(r, \omega)}{\partial r} \quad (4-96)$$

Se deriva parcialmente la Ec. (4-71) con respecto a r.

$$\sigma_{rz}(\omega) = \frac{\rho v_0}{\beta^2 \lambda (1 + i\lambda_0 \omega)} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\beta J_1(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right) + \frac{\nabla_z p(\omega)}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\beta J_1(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right) \quad (4-97)$$

Para operar la función matemática se llevará a cabo una derivada de una composición de funciones y las propiedades de derivadas de la función de Bessel de orden cero [23].

$$\frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial r} = \left(\frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial(\alpha r)} \right) \left(\frac{\partial(\alpha r)}{\partial r} \right) = -\alpha J_1(\alpha r) \quad (4-98)$$

Dando como resultado a la Ec. (4-99).

$$\sigma_{rz}(\omega) = \frac{\rho v_0}{\beta^2 \lambda (1 + i\lambda_0 \omega)} \left(-\frac{\beta J_1(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right) + \frac{\nabla_z p(\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\beta J_1(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right) \quad (4-99)$$

Para analizar el efecto del material viscoelástico sobre la pared del tubo, se lleva a cabo la Ec. (4-100).

$$\sigma_W(\omega) = \sigma_{rz}(\omega)|_{r=R} \quad (4-100)$$

Y se obtiene el esfuerzo en la pared en la Ec. (4-101).

$$\sigma_W(\omega) = \frac{\rho v_0}{\beta^2 \lambda (1 + i\lambda_0 \omega)} \left(-\frac{\beta J_1(\beta R)}{J_0(\beta R)} \right) + \frac{\nabla_z p(\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\beta J_1(\beta R)}{J_0(\beta R)} \right) \quad (4-101)$$

4.3.6 Velocidad de fase, velocidad de grupo y dispersión

Para conocer la dispersión que se genera dentro del material viscoelástico el cual se rige por el modelo de Maxwell es necesario conocer la velocidad de fase (Ec. (2-9)) y la velocidad de grupo (Ec. (2-10)).

$$V = \frac{\omega_0}{\beta^*} \quad (4-102)$$

4.3.6.1 Análisis de β

En este trabajo se llevará a cabo un análisis correspondiente a la variable β de la cual resultan varios números adimensionales de suma importancia. Con el fin de identificar dichos números, se desarrolla la Ec. (4-57).

$$\beta^2 = \frac{\rho\lambda_0\omega^2}{\eta_0} - \frac{\rho}{\lambda\eta_0} - \frac{\rho(i\omega)}{\eta_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right) \quad (4-103)$$

Se despeja la potencia cuadrada.

$$\beta = \sqrt{\frac{\rho\lambda_0\omega^2}{\eta_0} - \frac{\rho}{\lambda\eta_0} - \frac{\rho(i\omega)}{\eta_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right)} \quad (4-104)$$

De acuerdo a la Ec. (4-76), la variable β adimensional resulta en la Ec. (4-105):

$$\beta R = \beta^* = \sqrt{\frac{\rho\lambda_0\omega^2 R^2}{\eta_0} - \frac{\rho R^2}{\lambda\eta_0} - \frac{\rho(i\omega)R^2}{\eta_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + 1 \right)} \quad (4-105)$$

A continuación, se definen los números adimensionales que están involucrados.

$$De = \lambda_0\omega \quad (4-106)$$

$$Wo^2 = \frac{\rho\omega R^2}{\eta_0} \quad (4-107)$$

$$Ma = \frac{\rho R^2}{\lambda \eta_0} = \frac{1}{De} \quad (4-108)$$

$$N_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda} \quad (4-109)$$

$$O_\phi^* = \eta_0 O_\phi = 1 + \lambda_0(i\omega) \quad (4-110)$$

Donde ω es el inverso del tiempo de observación y $G_0 = \eta_0/\lambda_0$. Se sustituyen las Ecs. (4-106)-(4-109) en la Ec. (4-105).

$$\beta^*(Wo, De, N_1, Ma) = \sqrt{Wo^2(De + (N_1 + 1)i) - Ma} \quad (4-111)$$

4.3.7 Ecuación constitutiva reológica: modelo de Jeffreys y modelo de Burgers

Con el fin de comparar los resultados del modelo de Maxwell obtenidos a partir de las simulaciones realizadas en el programa *Wolfram Mathematica*; se recurrirán a los modelos de Jeffreys y de Burgers. Se presenta la **Tabla 4-1** [11]; la cual expresa el operador viscosidad para ambos modelos y se presenta un procedimiento más simple que el presentado en la sección 4.3 para obtener las propiedades de flujo.

Tabla 4-1. Operador viscosidad para diferentes modelos constitutivos reológicos en el dominio de Fourier [11].

	Jeffreys	Burgers
$O_\eta(i\omega)$	$\frac{\eta_0(1 + \lambda_j i\omega)}{1 + \lambda_0 i\omega}$	$\frac{(\eta_{01} + \eta_{02}) + i\omega(\eta_{01}\lambda_{02} + \eta_{02}\lambda_{01})}{1 + (\lambda_{01} + \lambda_{02})i\omega - \lambda_{01}\lambda_{02}\omega^2}$

Para obtener las expresiones para realizar las simulaciones del perfil de velocidades (Ec. (4-133)), el flujo volumétrico (Ec. (4-143)) y el esfuerzo en la pared (Ec. (4-148)) correspondientes a los modelos de Jeffreys y Burgers se deberán sustituir los operadores de viscosidad correspondientes indicadas en la **Tabla 4-1** y en la sección 4.3.7.6.

La componente “z” de la ecuación de movimiento en coordenadas cilíndricas, tomando en cuenta los mecanismos inerciales, tiene la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \left(\frac{v_z - v_0}{\lambda} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (4-112)$$

Donde $\sigma_{rz} = O_\eta(D_t) \frac{\partial v_z}{\partial r}$.

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\rho v_z}{\lambda} - \frac{\rho v_0}{\lambda} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r O_\eta(D_t) \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (4-113)$$

Ahora se reordena la Ec. (4-113).

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} = O_\eta(D_t) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{\rho v_z}{\lambda} \quad (4-114)$$

El operador viscosidad pasa al lado izquierdo de la Ec. (4-114) y se factoriza. Se define el operador fluidez como $O_\phi(D_t) = 1/O_\eta(D_t)$.

$$\begin{aligned} O_\phi(D_t) \left(\frac{\partial p(t)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \\ = v_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \rho O_\phi(D_t) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{O_\phi(D_t) \rho}{\lambda} \right] \end{aligned} \quad (4-115)$$

Para cambiar el dominio del tiempo se aplica la transformada de Fourier.

$$\begin{aligned} O_\phi(i\omega) \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \\ = v_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - O_\phi(i\omega) \rho(i\omega) - \frac{O_\phi(i\omega) \rho}{\lambda} \right] \end{aligned} \quad (4-116)$$

Se reorganiza la Ec. (4-116).

$$O_\phi(i\omega) \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) = v_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + i^2 O_\phi(i\omega) \rho \left(i\omega - \frac{1}{\lambda} \right) \right] \quad (4-117)$$

Posteriormente, se factorizan las constantes.

$$\alpha^2(\omega) = i^2 O_\phi(i\omega) \rho \left(i\omega - \frac{1}{\lambda} \right) \quad (4-118)$$

La constante $\alpha^2(\omega)$ será analizada mas a fondo en la sección. Se tiene finalmente obtenemos una ecuación diferencial ordinaria lineal de Bessel no homogénea:

$$O_\phi(i\omega) \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) = v_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \alpha^2(\omega) \right] \quad (4-119)$$

4.3.7.1 Perfil de velocidades

La solución general se puede dividir en términos de solución homogénea y particular.

$$v_z(r, \omega) = v_{zH}(r, \omega) + v_{zP}(r, \omega) \quad (4-120)$$

4.3.7.2 Solución de la parte homogénea

Para la ecuación diferencial homogénea se reescribe la Ec. (4-119) igualando a cero.

$$v_z(r, \omega) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \alpha^2(\omega) \right] = 0 \quad (4-121)$$

Para resolver la Ec. (4-121) se aplica la regla de la cadena a la derivada y luego se multiplica por r^2 .

$$v_z(r, \omega) \left[r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2(\omega) r^2 \right] = 0 \quad (4-122)$$

La Ec. (4-122) tiene la forma de una función de Bessel de orden 0, por lo que, su solución ya está dada.

$$v_z(r, \omega) = c_1 J_0(\alpha r) + c_2 Y_0(\alpha r) \quad (4-123)$$

4.3.7.2.1 Solución particular

La solución particular se puede expresar como:

$$v_{z_p}(r, \omega) = A \quad ; \quad A \in \mathbb{R} \quad (4-124)$$

Al sustituir la Ec. (4-124) en Ec. (4-119).

$$O_\phi(i\omega) \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) = \alpha^2(\omega)A \quad (4-125)$$

Se despeja a A de la Ec. (4-125).

$$A = \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \quad (4-126)$$

Y revisitando la Ec. (4-124).

$$v_{z_p}(r, \omega) = \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \quad (4-127)$$

4.3.7.3 Solución general

La solución general resulta en:

$$v_z(r, \omega) = c_1 J_0(\alpha r) + c_2 Y_0(\alpha r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \quad (4-128)$$

Se sustituye la C.F. 1 en la Ec. (4-128); donde $J_0(0) = 1$ y $Y_0(0) = -\infty$:

$$v_{z_{m\acute{a}x}} = c_1 + c_2(-\infty) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \quad (4-129)$$

Para evitar la inconsistencia física referente a $c_2(-\infty)$ se debe igualar a cero dicho termino, se modifica la Ec. (4-129).

$$v_z(r, \omega) = c_1 J_0(\alpha r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \quad (4-130)$$

Se aplica la C.F. 2 a la Ec. (4-130).

$$0 = c_1 J_0(\alpha R) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \quad (4-131)$$

Se despeja a c_1 .

$$c_1 = -\frac{1}{J_0(\alpha R)} \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \quad (4-132)$$

Ahora se sustituye la c_1 en la ec general, para obtener el perfil de velocidades.

$$v_z(r, \omega) = \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \left[1 - \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} \right] \quad (4-133)$$

4.3.7.4 Flujo volumétrico

Como punto de partida se tomará la Ec. (4-73) y se sustituirá en ella la Ec. (4-130).

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^R c_1(\omega) J_0(\alpha r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) r dr \quad (4-134)$$

Al aplicar la propiedad de linealidad a la integral, se obtiene.

$$Q(\omega) = 2\pi c_1(\omega) \int_0^R J_0(\alpha r) r dr + 2\pi \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \int_0^R r dr \quad (4-135)$$

Se define las siguientes variables adimensionales $u = r/R$, $\beta = \alpha R$ y $z = \beta r$; por lo que, la Ec. (4-135) es modificada.

$$Q(\omega) = \frac{2\pi R^2}{\beta^2} c_1(\omega) \int_0^\beta z J_0(z) dz \quad (4-136)$$

$$+ 2\pi R^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \int_0^1 u du$$

Dichas variables nos permiten integrar las funciones de Bessel de manera más sencilla, con la propiedad de recurrencia.

$$\frac{d}{dz} [z J_1(z)] = z J_0(z) \quad (4-137)$$

$$Q(\omega) = \pi R^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) + 2\pi R^2 c_1(\omega) \frac{J_1(\beta)}{\beta} \quad (4-138)$$

Se sustituye la c_1 de la Ec. (4-132).

$$Q(\omega) = \pi R^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \quad (4-139)$$

$$- 2\pi R^2 \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \frac{J_1(\beta)}{\beta J_0(\beta)}$$

Se multiplica la Ec. (4-139) por R^2/R^2 para adimensionar a α cómo se realizó en la Ec. (4-136) y se factoriza.

$$Q(\omega) = \pi R^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta)}{\beta J_0(\beta)} \right] \quad (4-140)$$

Ahora se multiplica por $-8/-8$ y se modifica la Ec. (4-140).

$$Q(\omega) = \frac{\pi R^3}{4} \frac{8i^2 O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{R \rho v_0}{2 \lambda} - \frac{R \partial p(\omega)}{2 \partial z} \right) \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta)}{\beta J_0(\beta)} \right] \quad (4-141)$$

La función de transferencia tiene la siguiente forma.

$$T(\omega) = 8i^2 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^{*2}(\omega)} \left[1 - 2 \frac{J_1(\beta^*)}{\beta^* J_0(\beta^*)} \right] \quad (4-142)$$

Y se sustituye en la Ec. (4-141) para obtener el flujo volumétrico.

$$Q(\omega) = \frac{\pi R^3}{4} T(\omega) \left(\frac{R \rho v_0}{2 \lambda} - \frac{R \partial p(\omega)}{2 \partial z} \right) \quad (4-143)$$

4.3.7.5 Esfuerzo en la pared

Para la ecuación respectiva a σ_w se aplica la Ec. (4-96); no obstante, el perfil que será derivado con respecto a r será la Ec. (4-130).

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = c_1 \frac{\partial(J_0(\alpha r))}{\partial r} + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial r} \quad (4-144)$$

Al aplicar la propiedad de la Ec. (4-98), se obtiene la Ec. (4-145).

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = c_1 (-\alpha J_1(\alpha r)) \quad (4-145)$$

La Ec. (4-145) se sustituye en la Ec. (4-96).

$$\sigma_{rz}(\omega) = O_\eta(i\omega) c_1 (-\alpha J_1(\alpha r)) \quad (4-146)$$

La constante c_1 ya ha sido previamente calculada, Ec. (4-132), y se sustituye en la Ec. (4-146).

$$\sigma_{rz}(\omega) = \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha J_0(\alpha R)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \quad (4-147)$$

De acuerdo a la Ec. (4-100), el esfuerzo en la pared que se genera a consecuencia del flujo del material viscoelástico analizado a través del modelo de Jeffreys y de Burgers se representa de la siguiente forma.

$$\sigma_w = \frac{J_1(\alpha R)}{\alpha J_0(\alpha R)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} - \frac{\rho v_0}{\lambda} \right) \quad (4-148)$$

4.3.7.6 Análisis de la variable adimensional α

Se desarrolla la Ec. (4-118); al igual que se despeja la potencia.

$$\alpha(\omega) = \sqrt{i^3 \rho O_\phi(i\omega) \omega + \rho O_\phi(i\omega) \frac{1}{\lambda}} \quad (4-149)$$

Y en su forma adimensional se tiene la siguiente ecuación:

$$\alpha R = \beta^* = \sqrt{R^2 i^3 \rho O_\phi(i\omega) \omega + \frac{R^2 \rho O_\phi(i\omega)}{\lambda}} \quad (4-150)$$

La variable $\alpha(\omega)$ y β^* será modificada al momento de seleccionar algún modelo viscoelástico, como se presentará a continuación, pero primero se definirán un par de variables adimensionales.

$$\omega = \omega^* \omega_c \quad (4-151)$$

Donde $\omega_c = 1/\lambda_0$; dicha variable será modificada a conveniencia de modelos específicos.

$$O_\phi(i\omega) = \varphi O_\phi^*(i\omega) \quad (4-152)$$

Donde $\varphi = \frac{1}{\eta_0}$; en el cual la variable η_0 puede variar dependiendo el modelo planteado (en específico el modelo de Burgers).

Se sustituye las Ecs. (4-151) y (4-152) en la Ec. (4-150).

$$\beta^* = \sqrt{R^2 i^3 \rho \varphi O_\phi^*(i\omega) \omega^* \omega_c + \frac{R^2 \rho \varphi O_\phi^*(i\omega)}{\lambda}} \quad (4-153)$$

4.3.7.7 Modelo de Jeffreys

Para observar el comportamiento de un material viscoelástico de Jeffreys, el operador fluidez tomará la siguiente expresión:

$$O_{\phi}(i\omega) = \frac{1 + i\lambda_0\omega}{\eta_0(1 + i\lambda_j\omega)} \quad (4-154)$$

Y su forma adimensional es producto de la Ec. (4-153) donde:

$$O_{\phi}^*(i\omega) = \frac{1 + i(\lambda_0 - \lambda_j) \left(\frac{1}{\lambda_0}\right) \omega^* + \lambda_0\lambda_j \left(\frac{\omega^*}{\lambda_0}\right)^2}{1 + \lambda_j^2 \left(\frac{\omega^*}{\lambda_0}\right)^2} \quad (4-155)$$

Aquí se define un número adimensional, el número de Jeffreys.

$$Je = \frac{\lambda_j}{\lambda_0} \quad (4-156)$$

Al reescribir la Ec. (4-155) en términos de Je .

$$O_{\phi}^*(i\omega) = \frac{1 + i(1 - Je)\omega^* + Je \omega^{*2}}{1 + Je^2\omega^{*2}} \quad (4-157)$$

Por lo tanto, la variable β^* para el modelo de Jeffreys tendría la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \beta^* &= \sqrt{\frac{R^2 i^3 \rho \varphi}{\lambda_0} \left(\frac{1 + i(1 - Je)\omega^* + Je \omega^{*2}}{1 + Je^2\omega^{*2}} \right) \omega^* + \frac{R^2 \rho \varphi}{\lambda} \frac{1 + i(1 - Je)\omega^* + Je \omega^{*2}}{1 + Je^2\omega^{*2}}} \quad (4-158) \end{aligned}$$

Aplicando la definición de número de Deborah y N_1 se puede acortar la ecuación anterior.

$$\beta^* = \sqrt{De \left(\frac{1 + i(1 - Je)\omega^* + Je \omega^{*2}}{1 + Je^2\omega^{*2}} \right) \omega^* + N_1 \left(\frac{1 + i(1 - Je)\omega^* + Je \omega^{*2}}{1 + Je^2\omega^{*2}} \right)} \quad (4-159)$$

4.3.7.8 Modelo de Burgers

Para observar el comportamiento de un material viscoelástico de Burgers, el operador fluidez tomara la siguiente expresión:

$$O_{\phi}(i\omega) = \frac{1 + (\lambda_{01} + \lambda_{02})i\omega - \lambda_{01}\lambda_{02}\omega^2}{(\eta_{01} + \eta_{02})(\eta_{01}\lambda_{02} + \eta_{02}\lambda_{01})i\omega} \quad (4-160)$$

Y su forma adimensional es producto de la Ec. (4-153) donde $\omega_c = \frac{1}{\lambda_{01} + \lambda_{02}}$:

$$O_{\phi}^*(i\omega) = \frac{1 + \omega^{*2}(B - A) + i[\omega^*(1 - B) + \omega^{*3}AB]}{1 + B^2\omega^{*2}} \quad (4-161)$$

Donde

$$A = \frac{1}{Br_1 + 2 + Br_1^{-1}} \quad (4-162)$$

$$B = \frac{1}{Br_1Br_2 + 1 + Br_1^{-1}Br_3} \quad (4-163)$$

Aquí se definen tres números adimensionales de Burgers. Al incorporar la Ec. (4-161) en la Ec. (4-153) se obtiene el siguiente termino para el modelo de Burgers.

$$\beta^* = \sqrt{\frac{De_{Br} \left(\frac{1 + \omega^{*2}(B - A) + i[\omega^*(1 - B) + \omega^{*3}AB]}{1 + B^2\omega^{*2}} \right) \omega^* + N_1 \left(\frac{1 + \omega^{*2}(B - A) + i[\omega^*(1 - B) + \omega^{*3}AB]}{1 + B^2\omega^{*2}} \right)}{}} \quad (4-164)$$

Donde el número adimensional De es un caso especial.

$$De_{Br} = \frac{R^2\rho(\varphi_{01} + \varphi_{02})}{\lambda_{01} + \lambda_{02}} \quad (4-165)$$

4.4 Unidades de las variables y funciones del sistema

En esta sección se analizará dimensionalmente, en el sistema MKS, las ecuaciones generadas en este trabajo; primordialmente las referentes al perfil de velocidades, el flujo volumétrico y el esfuerzo en la pared.

Tabla 4-2. Variables del proceso con su respectiva unidad.

Variable	Unidad	Variable	Unidad	Variable	Unidad	Variable	Unidad
ρ	$\frac{Kg}{m^3}$	λ, λ_n	s	η_0	$\frac{Kg}{m\ s}$	$O_\phi(i\omega)$	$\frac{m\ s}{kg}$
v, v_0	$\frac{m}{s}$	ω	$\frac{1}{s}$	$\nabla_z P$	$\frac{Kg}{m^2 s^2}$	R	m

Según la Ec. (4-57) y con la **Tabla 4-2** la variable β^2 para el modelo de Maxwell tendrá como unidad a m^{-2} en el sistema MKS; al mismo tiempo, para los modelos de Jeffreys y Burgers la variable α^2 , según la Ec. (4-118), tendrá las mismas unidades. Considerando el anterior argumento, las variables β y α tienen como unidad a m^{-1} .

4.5 Perfil de velocidades

El perfil de velocidad para Maxwell, Ec. (4-71), de acuerdo a la **Tabla 4-2** se obtiene la unidad correspondiente a la velocidad:

$$v_z(r, \omega) [=] \frac{kg\ m^4\ s}{kg\ m^3\ s^2} + \frac{kg\ m^3\ s}{kg\ m^2\ s^2} [=] \frac{m}{s} \quad (4-166)$$

Mientras que para los modelos de Jeffreys y Burgers se analizará la Ec. (4-133); y se obtiene la misma unidad.

$$v_z(r, \omega) [=] \frac{m^3\ s}{kg} \left(\frac{kg}{m^2\ s^2} - \frac{kg\ m}{m^3\ s^2} \right) [=] \frac{m}{s} \quad (4-167)$$

4.5.1 Flujo volumétrico

En esta sección, el caso del flujo volumétrico se analizará dimensionalmente, sin embargo, primero se debe de considerar las dimensiones de $T(\omega)$, Ecs. (4-93) y (4-142).

$$T(\omega)[=] \frac{m \ s}{kg}$$

Y luego el flujo volumétrico referente al modelo de Maxwell, Ec. (4-95).

$$Q(\omega)[=] \frac{m^5 s}{kg} \left(\frac{kg}{s^2 m^2} \right) [=] \frac{m^3}{s}$$

En el caso de Jeffreys y Burgers, Ec. (4-143), se obtiene la misma unidad.

$$Q(\omega)[=] \frac{m^4 s}{kg} \left(\frac{kg \ m^2}{m^3 s^2} - \frac{kg \ m}{m^2 s^2} \right) [=] \frac{m^3}{s} \quad (4-168)$$

4.5.2 Esfuerzo en la pared

Para el modelo de Maxwell, Ec. (4-101), la unidad obtenida es referente a la presión.

$$\sigma_w [=] \frac{kg \ m^3}{m^3 \ s^2} \left(\frac{1}{m} \right) + \frac{kg \ m^2}{m^2 \ s^2} \left(\frac{1}{m} \right) [=] \frac{kg}{m \ s^2} [=] Pa \quad (4-169)$$

Al igual que para el Maxwell, se obtiene Pascales para Jeffreys y Burgers, Ec. (4-170).

$$\sigma_w [=] m \left(\frac{kg}{m^2 \ s^2} - \frac{kg \ m}{m^3 \ s^2} \right) [=] \frac{kg}{m \ s^2} [=] Pa \quad (4-170)$$

5 Resultados y análisis

5.1 Perfil de velocidades a λ y ω constante

Establecidos los parámetros materiales en esta sección se reportaran las simulaciones del perfil de velocidades V_z en función de la coordenada radial r del modelo de Maxwell (**Figura 5-1**), del modelo de Jeffreys (**Figura 5-2**) y del modelo de Burgers (**Figura 5-3**); a un tiempo de relajación cinemático λ constante de 0.1 s y a una frecuencia de oscilación ω constante de 1 Hz. La parte real de V_z representa la parte elástica del material y la parte imaginaria representa la parte viscosa y el módulo complejo de V_z , $|V_z|$, representa el perfil de velocidades observado macroscópicamente.

En la **Figura 5-1** se aprecia una $|V_z|_{max}$ de $0.75 \frac{m}{s}$ cuando $r = 0$, dicha velocidad disminuye a medida que $r \rightarrow R$ generando un perfil parabólico achatado. En el caso de la parte real (elástica) de V_z , $V_{z_{max}}$ es positiva con un valor de $0.6 \frac{m}{s}$ cuando $r = 0$; en cambio, la parte imaginaria (viscosa) generó una velocidad negativa menor hasta alcanzar un máximo de $0.45 \frac{m}{s}$, lo anterior se puede interpretar como que la parte elástica del material aporta más a la velocidad macroscópica $|V_z|$ que la parte viscosa. Lo anterior puede deberse al efecto resonante que genera λ la cuál es más intensa en la parte elástica a las condiciones dadas en la **Figura 5-1**.

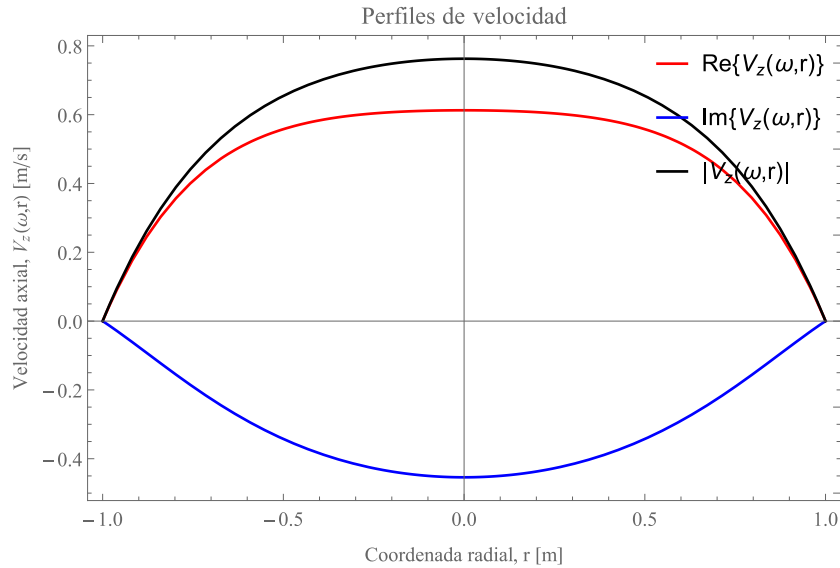


Figura 5-1. Módulo, parte real e imaginaria del perfil de velocidades en dirección axial a $\lambda = 0.1$ s y $\omega = 1$ Hz con el modelo de Maxwell.

Asimismo, en la **Figura 5-2** también se aprecia un perfil parabólico de $|V_z|$ alcanzado un máximo de $2.7 \frac{m}{s}$ en $r = 0$. En el caso de la parte imaginaria, no se presenta un perfil parabólico, ya que existen dos V_{zmax} de $0.5 \frac{m}{s}$ cuando $r = \pm \frac{R}{2}$ con una velocidad nula en el centro del tubo, lo anterior probablemente se deba a efectos de resonancia por las funciones de Bessel y los valores de los parámetros reológicos. Y la V_{zmax} de la parte imaginaria se observa el perfil parabólico con una $V_{zmax} = 2.7 \frac{m}{s}$. El efecto del solvente en el perfil de velocidades del polímero genera un efecto de resonancia con el polímero debido a las propiedades reológicas cambiando la forma de los perfiles de velocidades completamente al compararlo con la **Figura 5-1**.

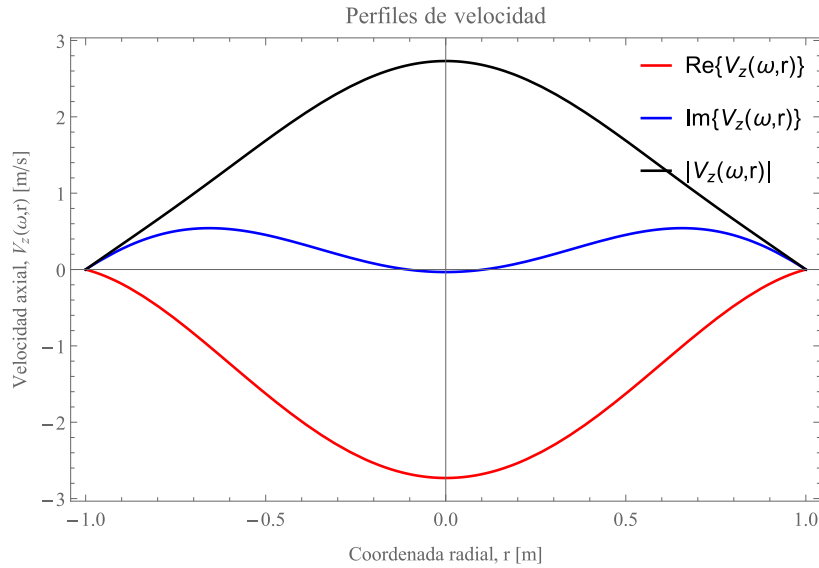


Figura 5-2. Módulo, parte real e imaginaria del perfil de velocidades en dirección axial a $\lambda=0.1$ s y $\omega=1$ Hz a partir del modelo de Jeffreys.

Y en la **Figura 5-3** es apreciable el mismo perfil parabólico en el módulo complejo con una $v_{m\acute{a}x} = 2.7 \frac{m}{s}$, diferentes a las reportadas en las **Figura 5-3**. En comparación del modelo de Jeffreys, el modelo de Burgers presenta el mismo perfil parabólico en la parte real e imaginaria. La parte real presenta una $v_{m\acute{a}x} = 1.85 \frac{m}{s}$ cuando $r = 0$. Mientras la parte imaginaria tiene una $v_{m\acute{a}x} = -2 \frac{m}{s}$. En este caso no se observa un cambio apreciable en el perfil de velocidades en comparación con el generado por modelo de Maxwell, en otras palabras, la interacción polímero-polímero (modelo de Burgers) genera un perfil de velocidades parecido al generado por el polímero solo (modelo de Maxwell).

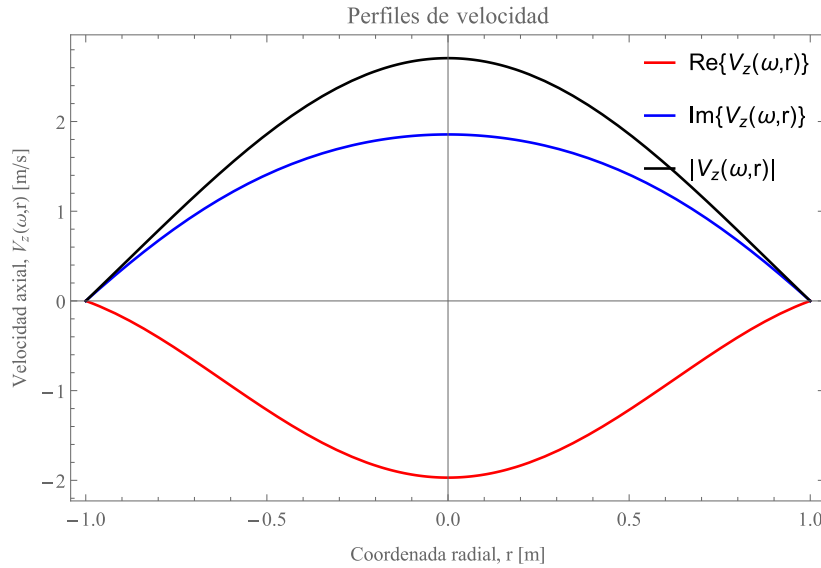


Figura 5-3. Módulo, parte real e imaginaria del perfil de velocidades en dirección axial a $\lambda=0.1$ s y $\omega=1$ Hz a partir del modelo de Burgers.

5.1.1 Perfil de velocidades a distintas λ y ω constante.

En las **Figura 5-4** -**Figura 5-6** están presentes $|V_z|$ del modelo de Maxwell, del modelo de Jeffreys y del modelo de Burgers, respectivamente, todas en función de la coordenada radial r a distintos valores de λ y a una ω constante de 1 Hz.

En la **Figura 5-4** se presentan dos tipos de perfiles: el parabólico y uno con forma de tapón. El valor de λ que genera el perfil de tapón es el de 0.01 s y su $v_{m\acute{a}x}$ se presenta en la coordenada radial en el rango de $r = -\frac{3R}{4}$ hasta $r = \frac{3R}{4}$ con un valor de $0.72 \frac{m}{s}$, aproximadamente. Adicionalmente, cuando $\lambda > 0.01$ s, la $v_{m\acute{a}x}$, de acuerdo a la simulación, se logra obtener cuando $\lambda = 0.1$ s y presenta un perfil parabólico con un valor en $r = 0$ de $0.75 \frac{m}{s}$. Es decir, cuando $\lambda = 0.1$ s se genera un efecto de resonancia maximizando $|V_z|$.

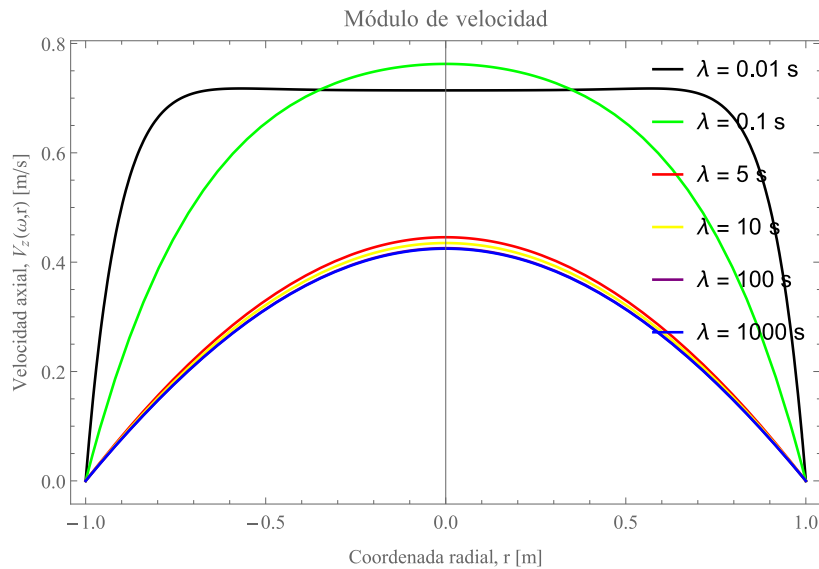


Figura 5-4. Módulo complejo del perfil de velocidades en dirección axial a distintas λ y $\omega = 1$ Hz con el modelo de Maxwell.

Asimismo, en la **Figura 5-5** se puede apreciar que para $\lambda = 0.01$ s se presentan 2 máximos en $r = \pm \frac{3R}{4}$ y dos mínimos en $r = \pm \frac{R}{2}$ lo cual revela un efecto de resonancia con las propiedades reológicas del polímero con las del solvente. En la **Figura 5-5** $|V_z|_{max}$ se obtiene a $\lambda = 0.1$ s generando un valor de $2.7 \frac{m}{s}$. El efecto que genera la presencia de un solvente newtoniano aumenta $|V_z|_{max}$ siendo mayor que la generada por el modelo de Maxwell. Lo anterior probablemente se deba a la combinación de efectos de resonancia del polímero, del solvente y del tiempo de relajación cinemático.

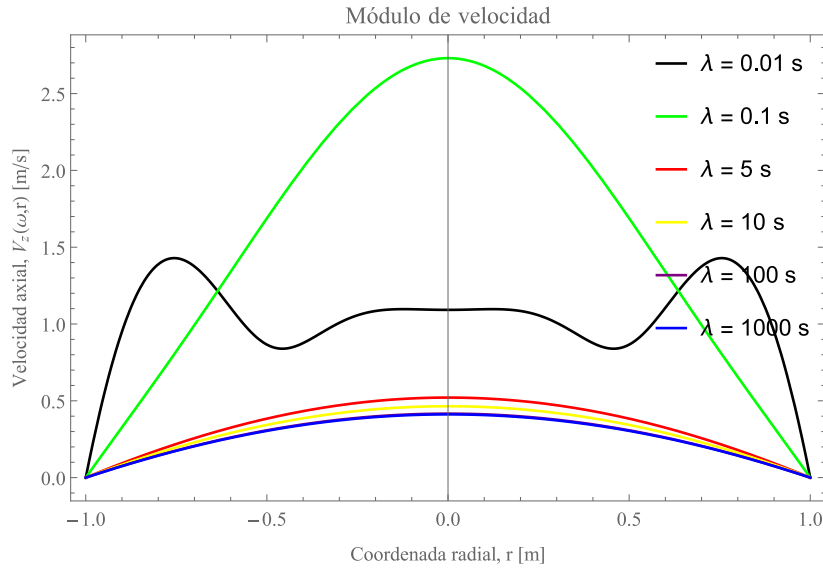


Figura 5-5. Módulo complejo del perfil de velocidades en dirección axial a distintas λ y $\omega = 1$ Hz a partir del modelo de Jeffreys.

Aparte, en la **Figura 5-6** también se observa un perfil con máximos y mínimos cuando $\lambda = 0.1$ s; en este caso hay 2 máximos presentes cuando $r = \pm \frac{3R}{4}$ con el valor de $|V_z|_{max} = 1.4 \frac{m}{s}$. Al igual que con el modelo de Maxwell y con el modelo de Jeffreys, se obtiene una $|V_z|_{max}$ en $r = 0$ cuando $\lambda = 0.1$ s. La interacción polímero-polímero genera efectos muy parecidos a la interacción polímero-solvente si se comparan las **Figura 5-5** y **Figura 5-6**.

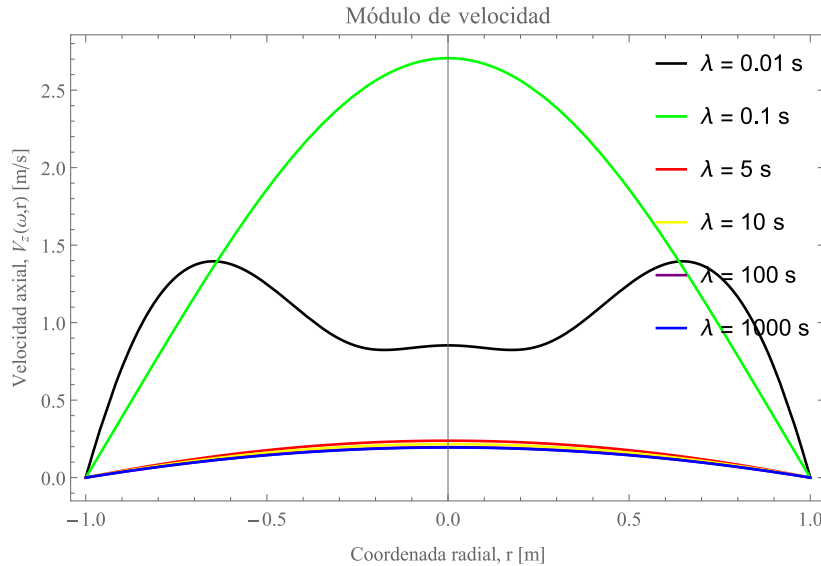


Figura 5-6. Módulo complejo del perfil de velocidades en dirección axial con distintos λ y $\omega = 1$ Hz a partir del modelo de Burgers.

5.1.2 Perfil de velocidades en el centro del tubo a distintas λ

A continuación se presenta $|V_z|$ cuando $r = 0$ en función de ω a distintas λ , se simuló con el modelo de Maxwell (**Figura 5-7**), con el modelo de Jeffreys (**Figura 5-8**) y con el modelo de Burgers (**Figura 5-9**).

Al analizar la **Figura 5-4**, $|V_z|_{max}$ se obtuvo cuando $\omega = 1$ Hz y $\lambda = 0.1$ s, sin embargo, en la **Figura 5-7** se puede observar un comportamiento oscilatorio que se amortigua conforme $\omega \rightarrow \infty$. Los máximos que se observaron en la **Figura 5-7** son producto de un fenómeno de resonancia los cuales se presentan cuando $\omega = \{2.5, 5.5, 8.7\}$ Hz para valores de $\lambda > 1$ s. Los picos máximos podrían ser indicativos de distintas frecuencias de resonancia con los dos fenómenos analizados en este trabajo los cuales son: tiempo característico de Maxwell λ_0 y tiempo de relajación cinemático λ . A valores de λ muy pequeños no se observa este efecto debido a que el fenómeno de relajación cinemático dicta completamente el valor de $|V_z|$ y no genera resonancia con otros efectos.

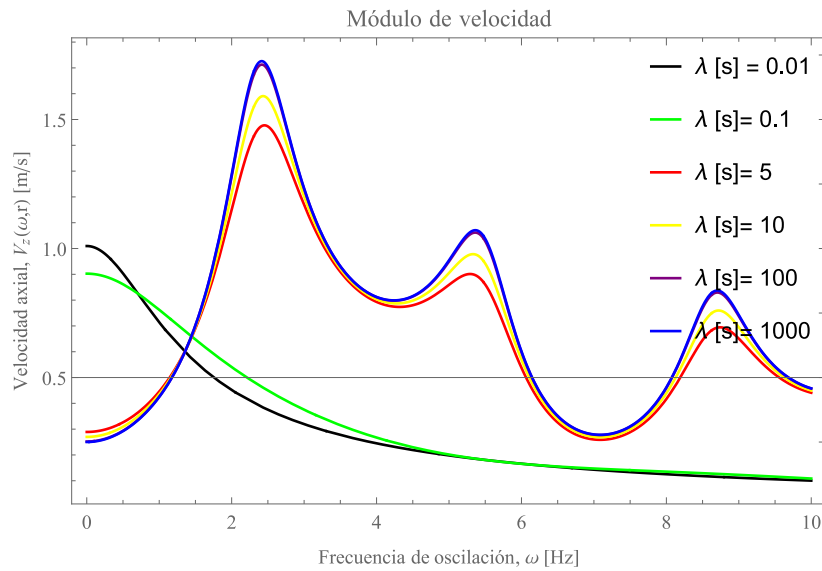


Figura 5-7. Módulo complejo del perfil de velocidades en dirección axial cuando $r = 0$ en función de ω a distintas λ a partir del modelo de Maxwell.

En el caso del modelo Jeffreys, mostrado en la **Figura 5-8**, el efecto de resonancia de $|V_z|$ es conseguido cuando $\lambda < 1$ s contrastando con la **Figura 5-7** ya que presenta 2 máximos y efecto de resonancia a $\lambda = 0.01$ s a $\omega = 30$ Hz y en $\lambda = 0.1$ s a $\omega = 10$ Hz. Es decir, la presencia del solvente genera efectos contrarios de $|V_z|$ en comparación con el modelo de Maxwell. Cabe resaltar que este análisis se lleva a cabo en el centro de la tubería.

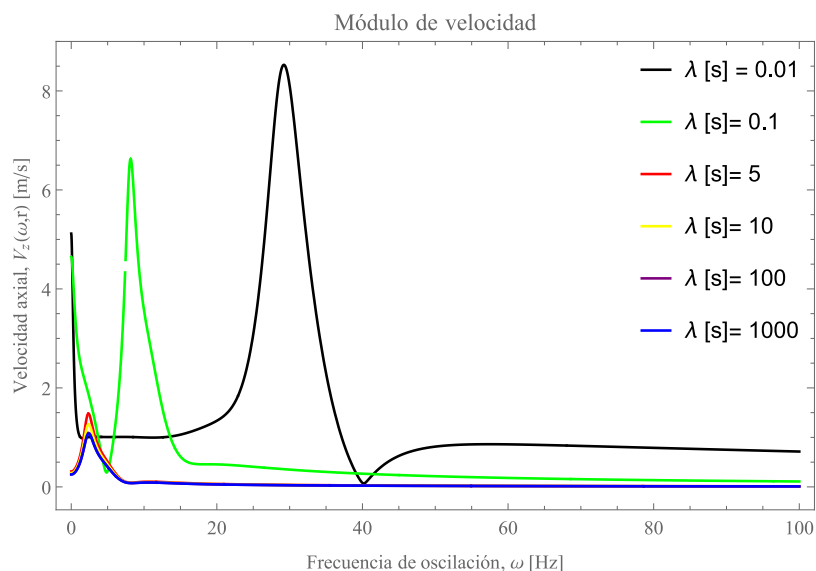


Figura 5-8. Módulo complejo del perfil de velocidades en dirección axial cuando $r = 0$ con λ y ω variables a partir del modelo de Jeffreys.

Además, en la **Figura 5-9**, el valor máximo $|V_z|$ se logra con una $\lambda > 1$ s debido a un efecto de resonancia, como ya se había indicado. Nótese que a $\lambda = 0.1$ s $|V_z|$ se indetermina cuando $\omega \rightarrow 0$ lo cual no tiene significado físico. El efecto de las interacciones solvente-polímero en $|V_z|$ propicia un efecto resonante mayor que el observado en las interacciones polímero-polímero.

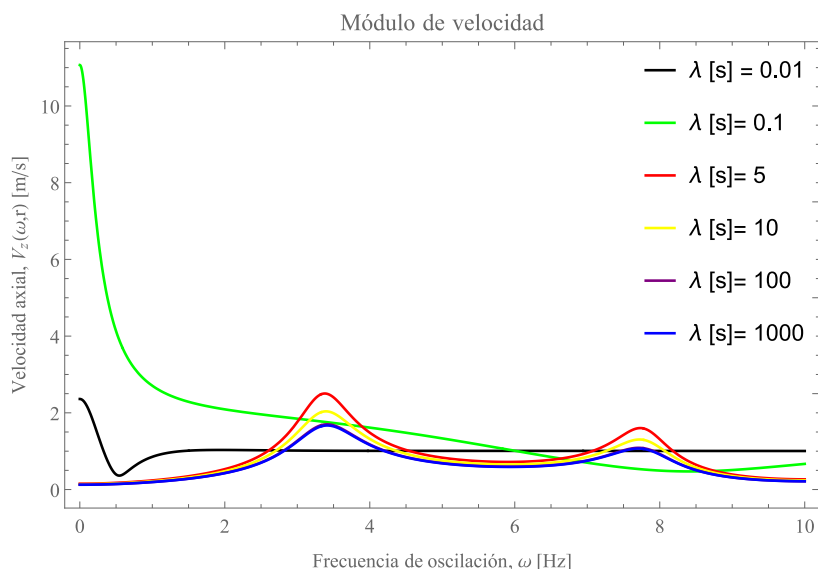


Figura 5-9. Módulo complejo del perfil de velocidades en dirección axial cuando $r = 0$ en función de ω a distintos λ con el modelo de Burgers.

5.2 Flujo volumétrico a distintas λ y ω variable

En las **Figura 5-10, 5-11 y 5-12** se presenta el módulo del flujo volumétrico $|Q|$ de los 3 modelos constitutivos en función de ω a distintas λ .

En la **Figura 5-10** se observa un máximo de flujo volumétrico, $|Q|_{max}$, cuando $\lambda < 1$ s a ω muy bajas lo cual revela un efecto de resonancia a tiempos de relajación largos probablemente debido a las propiedades reológicas, cuando $\omega \rightarrow \infty$ (tiempos de relajación largos) se pierde dicho el efecto de resonancia. Cuando la frecuencia alcanza valores mayores a 1, las gráficas con $\lambda < 1$ s desarrollan menor flujo volumétrico; caso contrario, el flujo aumenta para $\lambda > 1$ s hasta un máximo en $\omega \approx 2$. A $\lambda = 0.01$ s se observa un aumento del flujo volumétrico a tiempos cortos.

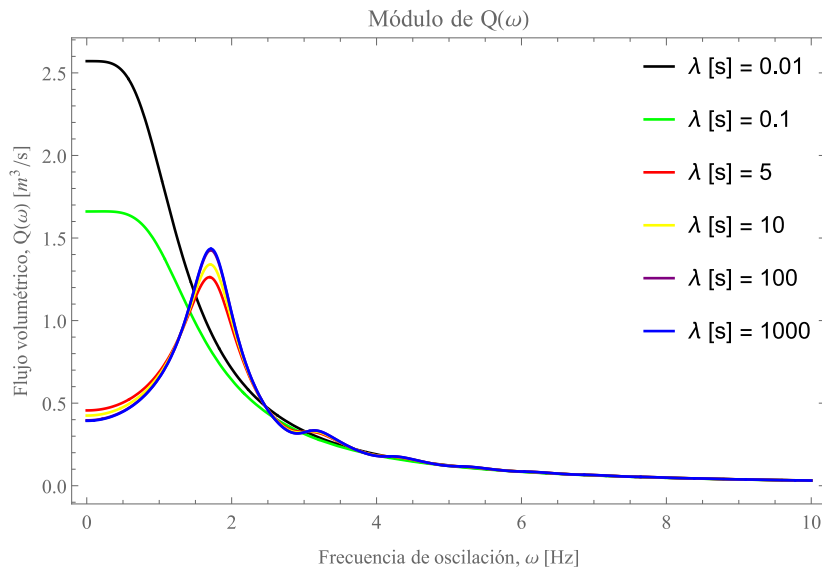


Figura 5-10. Módulo complejo del flujo volumétrico en dirección axial en función de ω a distintas λ con el modelo de Maxwell.

En la **Figura 5-12** se observa un $|Q|_{max}$ a una $\lambda = 0.1$ s a bajas frecuencias, para $\lambda = 0.01$ s exhibe un $|Q|$ casi constante con ω . Para $\lambda = 0.1$ s se observan máximos y mínimos, de hecho, existe resonancia a $\omega = 8.5$ posteriormente $|Q|$ disminuye gradualmente conforme $\omega \rightarrow \infty$. El efecto de la presencia del solvente es importante para $\lambda = 0.1$ s a tiempos cortos siendo mayor que el reportado en la **Figura 5-11**.

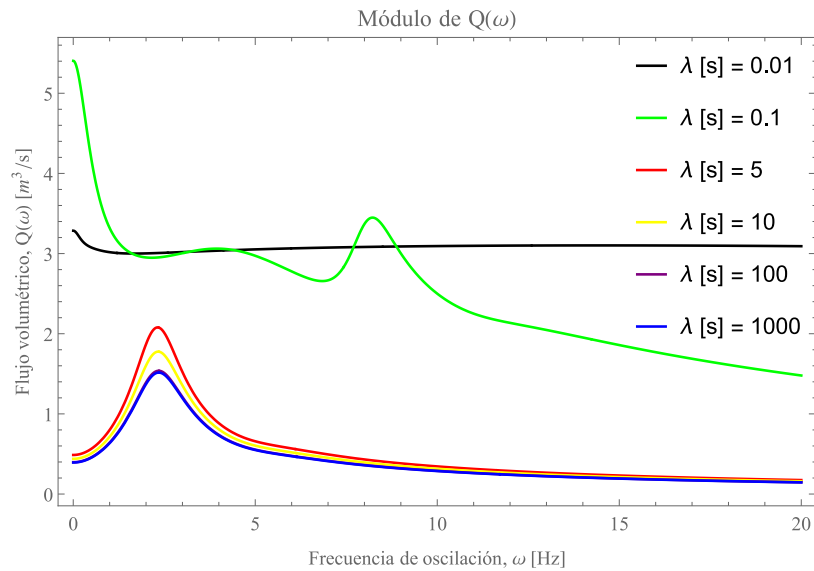


Figura 5-12. Módulo complejo del flujo volumétrico en dirección axial en función de ω a distintos valores de λ a partir del modelo de Jeffreys.

Con el modelo de Burgers (véase **Figura 5-13**) el cambio en el flujo es más notorio ya que el $|Q|_{max}$ se obtiene a $\lambda = 0.1$ s. Para este caso, si $\lambda > 1$ s se detectó un efecto de resonancia a $\omega \approx 4.7$ s. Dicho máximo se recorre hacia la izquierda y hacia abajo conforme λ aumenta. En general, si λ disminuye las interacciones polímero-polímero aumenta el flujo volumétrico del sistema.

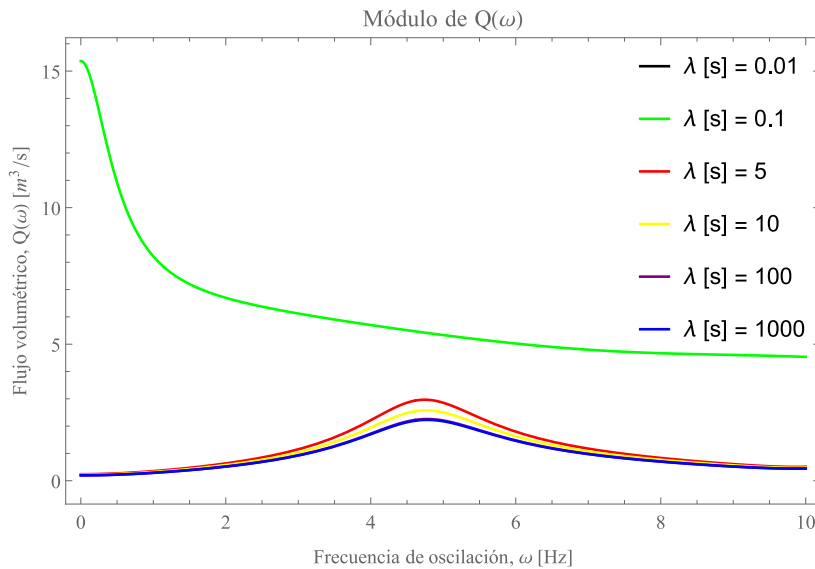


Figura 5-13. Módulo complejo del flujo volumétrico en dirección axial en función de ω a distintas λ con el modelo de Burgers.

5.3 Función de transferencia a ω variable y λ diferentes

En esta sección se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas de la función de transferencia, la cual depende de ω , a diferentes valores de λ para las tres ecuaciones constitutivas estudiadas.

En la **Figura 5-14**, la función de transferencia, $|T(\omega)|$, en el modelo de Maxwell tiene mayores valores cuando se presenta una $\lambda > 1$ s generando un fenómeno de resonancia a $\omega = 1.75$ Hz y, cuando $\omega \rightarrow \infty$, $|T(\omega)|$ comienza a disminuir presentando pequeñas resonancias hasta alcanzar un valor constante pequeño. En el caso en que $\lambda = 0.01$ s, la función de transferencia produce valores tan ínfimos que se podría decir que no tiene aportaciones en el flujo volumétrico (véase la **Figura 5-10**), en otras palabras, la frecuencia de oscilación es tan alta que el material viscoelástico no es capaz de responder a la variable de entrada y el sistema no fluye.

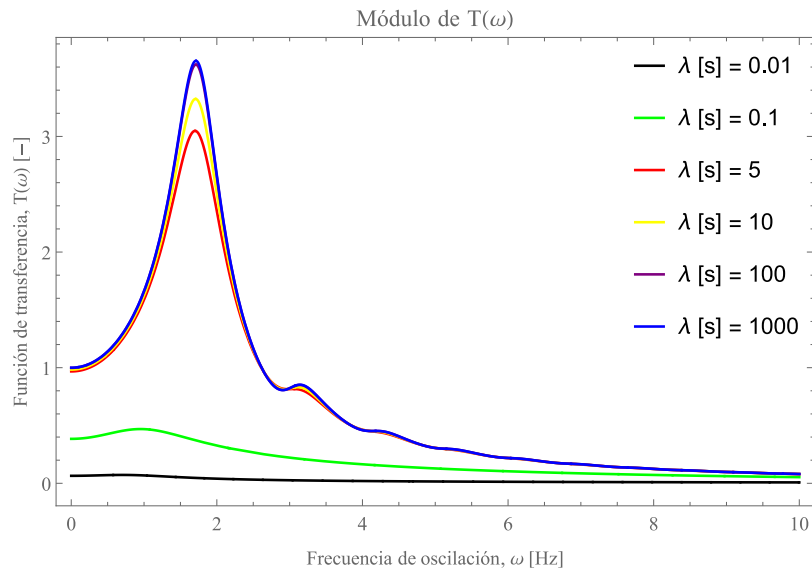


Figura 5-14. Módulo complejo de la función de transferencia en función de ω a distintos valores de λ con el modelo de Maxwell.

En la **Figura 5-16** (modelo de Jeffreys) se aprecia el mismo comportamiento para $\lambda = 0.01$ s que el observado en la **Figura 5-14**. Cuando $\omega \rightarrow 0$, la función de transferencia aumenta es máxima a $\lambda = 0.1$ s pero disminuye a medida que aumenta gradualmente el valor de λ . Cuando $\omega > 1$, la función de transferencia tendrá valores mayores si se presenta una $\lambda > 1$ s; de hecho, se presenta una resonancia cuando se alcanza una $\omega = 2.5$ Hz. El máximo logrado es conseguido con una $\lambda = 5$ s. La presencia del solvente en el material viscoelástico no tiene repercusiones importantes en la función de transferencia del sistema en comparación a los observado en la **Figura 5-15**.

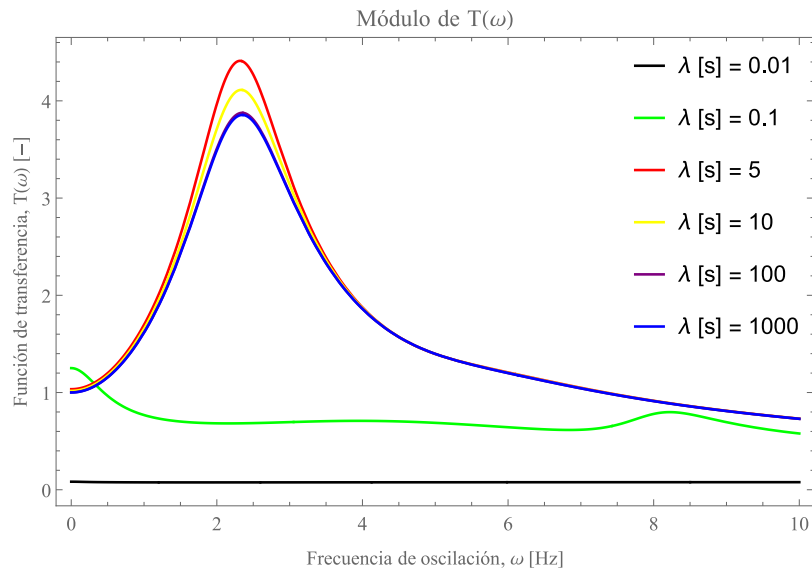


Figura 5-16. Módulo complejo de la función de transferencia en función de ω a distintos λ con el modelo de Jeffreys.

Para el modelo de Burgers (véase la **Figura 5-17**) también se observa el fenómeno de resonancia a un valor cercano de ω reportado en la **Figura 5-16**, sin embargo, se presentan otros máximos a frecuencias mayores: este comportamiento se amortigua cuando $\omega \rightarrow \infty$. La resonancia más importante se genera en $\lambda = 5 \text{ s}$ y $\omega \approx 5 \text{ Hz}$.

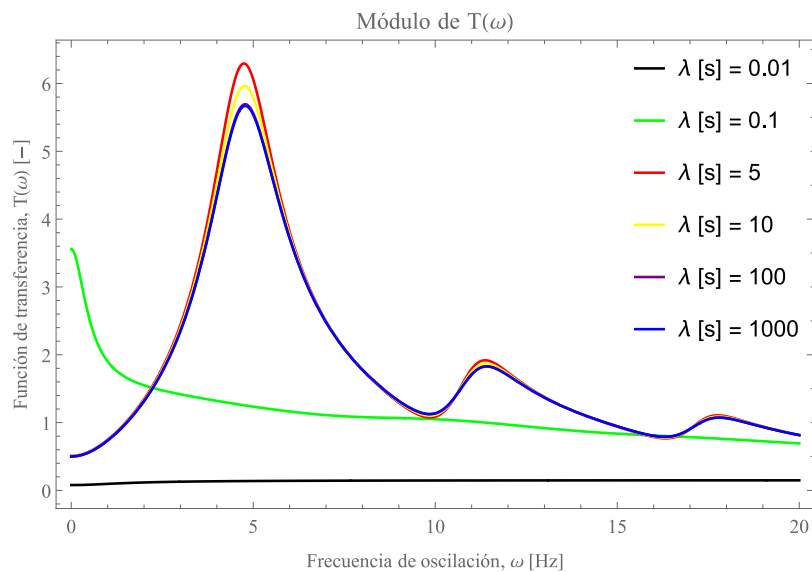


Figura 5-17. Módulo complejo de la función de transferencia en función de ω a distintas λ con el modelo de Burgers.

5.4 Esfuerzo en la pared del tubo a ω variable y a λ distintas

El esfuerzo en la pared es una variable de flujo importante a tomar en cuenta en el proceso, ya que puede generar perturbaciones en el material donde se confina el flujo del fluido, fracturas en el equipo, entre otras consecuencias [5, 18, 24]. El esfuerzo en la pared puede ser medido experimentalmente. En las **Figura 5-18 - Figura 5-20** se presentan el módulo complejo del esfuerzo en la pared, $|\sigma_w|$, para las tres ecuaciones constitutivas reportadas en este trabajo.

En la **Figura 5-18**, el máximo de $|\sigma_w|$ se obtiene cuando $\omega \rightarrow 0$ y $\lambda = 0.01$ s; el cual disminuye a medida que la frecuencia aumenta. En cambio, sí $\lambda > 1$ s, $|\sigma_w|$ es mínimo.

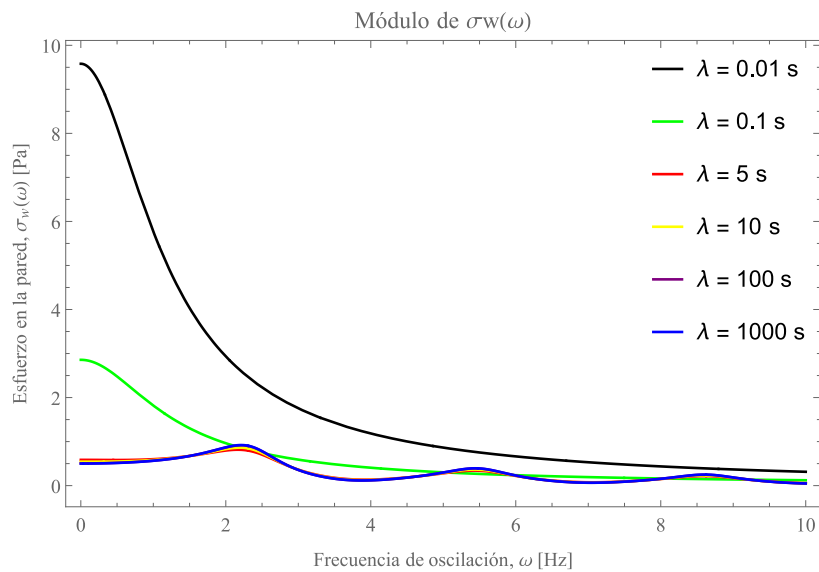


Figura 5-18. Módulo complejo del esfuerzo generado en la pared del tubo en función de ω a distintos λ con el modelo de Maxwell.

Por otro lado, el modelo de Jeffreys (véase **Figura 5-19**) presenta un máximo de $|\sigma_w|$ a $\lambda = 0.01$ s cuando $\omega \rightarrow 0$ para, inmediatamente, disminuir a medida que la frecuencia aumenta. El efecto del solvente en el polímero genera un pico de resonancia muy notable a un valor de $\omega \approx 1$ Hz.

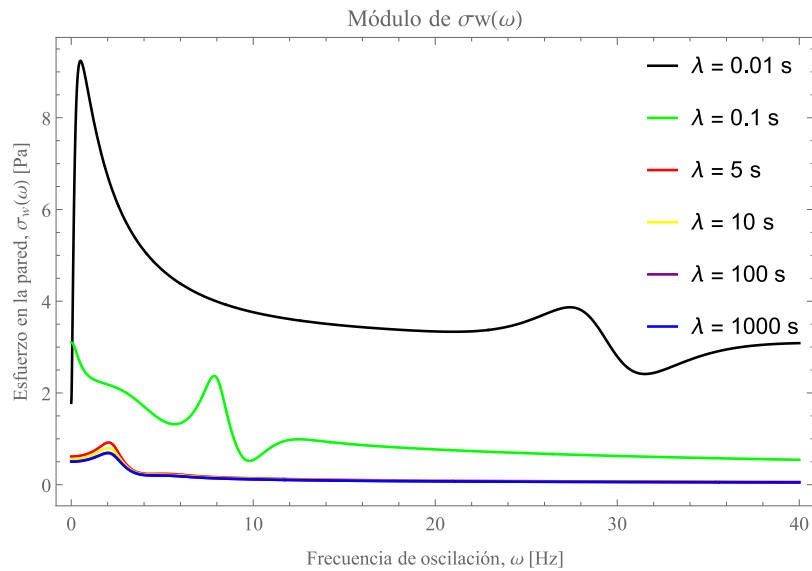


Figura 5-19. Módulo complejo del esfuerzo generado en la pared del tubo en función de ω a distintos λ a partir del modelo de Jeffreys.

Asimismo, para el caso del modelo de Burgers (véase **Figura 5-20**), $|\sigma_w|$ aumenta gradualmente con ω a un valor de $\lambda = 0.01s$ hasta alcanzar un máximo indefinido. En cambio, si $\lambda > 1 s$, el esfuerzo es demasiado pequeño comparado con el que se logra con una $\lambda = 0.1s$.

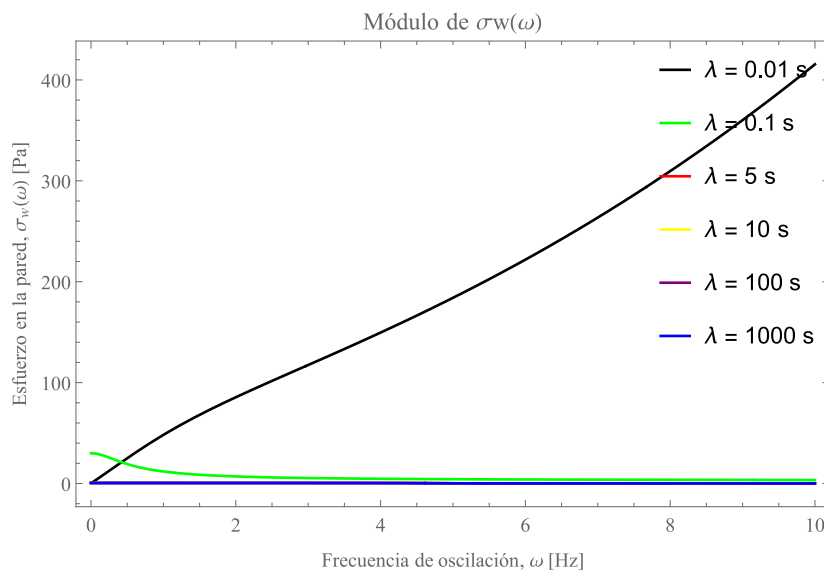


Figura 5-20. Módulo complejo del esfuerzo generado en la pared del tubo en función de ω a distintos valores de λ con el modelo de Burgers.

5.5 Longitud característica adimensional con ω variable y a distintas λ

Las aproximaciones referentes a β^* que se obtienen durante el proceso se presentan gráficamente de la **Figura 5-21** a la **Figura 5-23**.

Se aprecia que la β^* del modelo de Maxwell (**Figura 5-21**) fue en aumento a medida que la $\omega^* \rightarrow \infty$, donde $\beta_{m\acute{a}x}^*$ se consiguió en $\lambda = 0.01$ s. La β^* se mantuvo con un incremento diminuto constante cuando $\omega \rightarrow \infty$. Cuando $\lambda > 1$ s, la β^* tiene el mismo valor. La β_{min}^* se obtuvo a valores de $\lambda > 1$ s, los cuales mantuvieron un mismo valor sin importar la magnitud de λ .

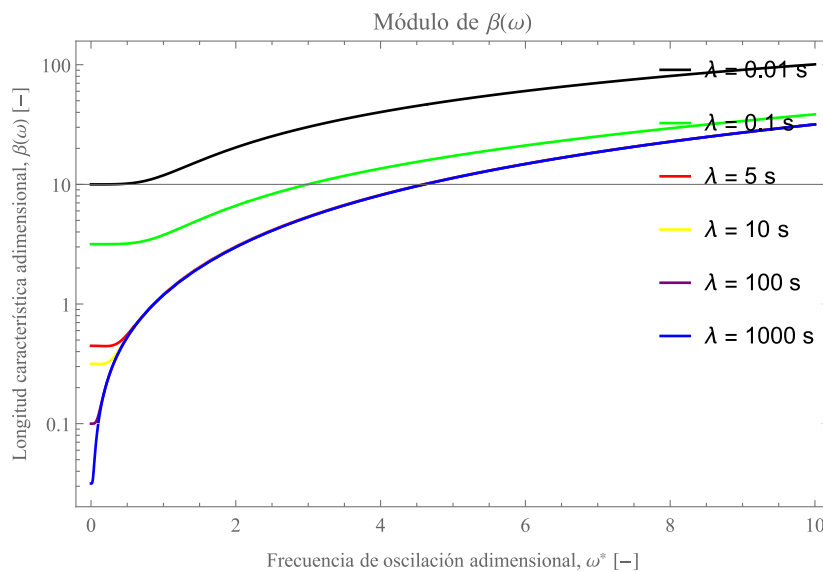


Figura 5-21. Módulo complejo de la longitud característica adimensional en función de ω a distintas λ con el modelo de Maxwell.

El modelo de Jeffreys (**Figura 5-22**) presentó el mismo comportamiento que el modelo de Maxwell (**Figura 5-21**) con la única diferencia en que presenta una magnitud menor.

La $\beta_{m\acute{a}x}^*$ se obtuvo a un $\lambda = 0.01$ s.

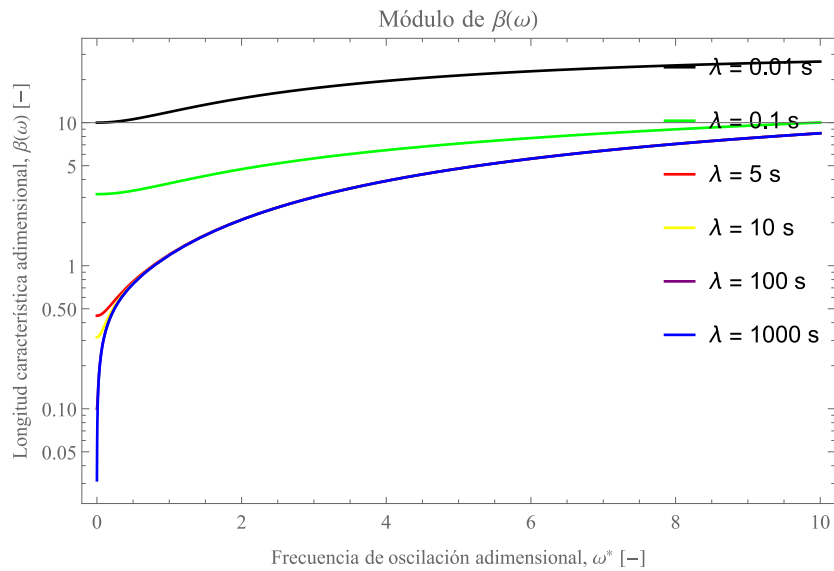


Figura 5-22. Módulo complejo de la longitud característica adimensional en función de ω a distintas λ con el modelo de Jeffreys.

Respecto al modelo de Burgers (**Figura 5-23**), también se presentó un comportamiento muy similar al de Jeffreys (**Figura 5-22**), incluso se podrá decir que es idéntico. La $\beta_{m\acute{a}x}^*$ se logró cuando λ tiene como valor 0.01 s.

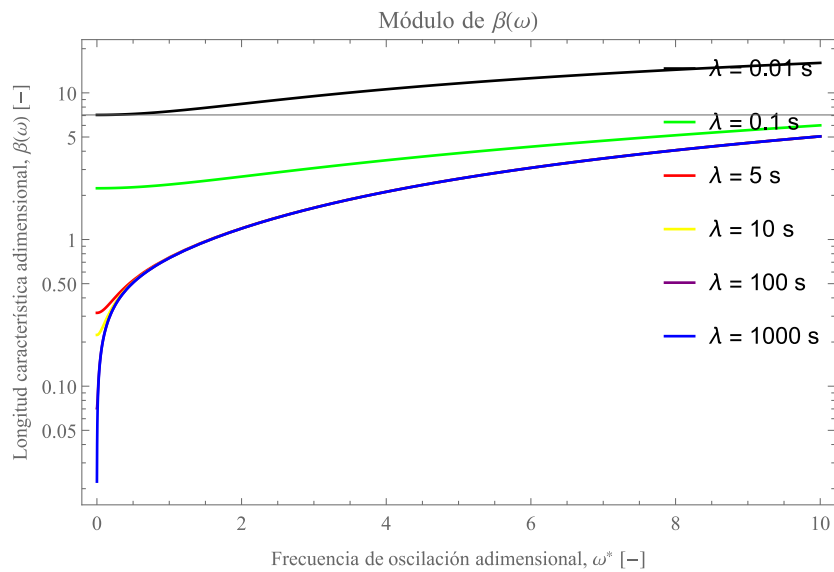


Figura 5-23. Módulo complejo de la longitud característica adimensional en función de ω a distintas λ con el modelo de Burgers.

5.6 Velocidad de fase y de grupo a distintas λ y a ω variable

La velocidad de fase y la velocidad de grupo del modelo de Maxwell se muestra en la **Figura 5-24**. Se observó que la velocidad de fase es superior a la velocidad de grupo con un máximo en la frecuencia adimensional de 1.5. En este caso las velocidades disminuyen a partir de una ω de 1.5; la cual puede ser generada por alguna propiedad del material polimérico, de acuerdo al modelo de Maxwell.

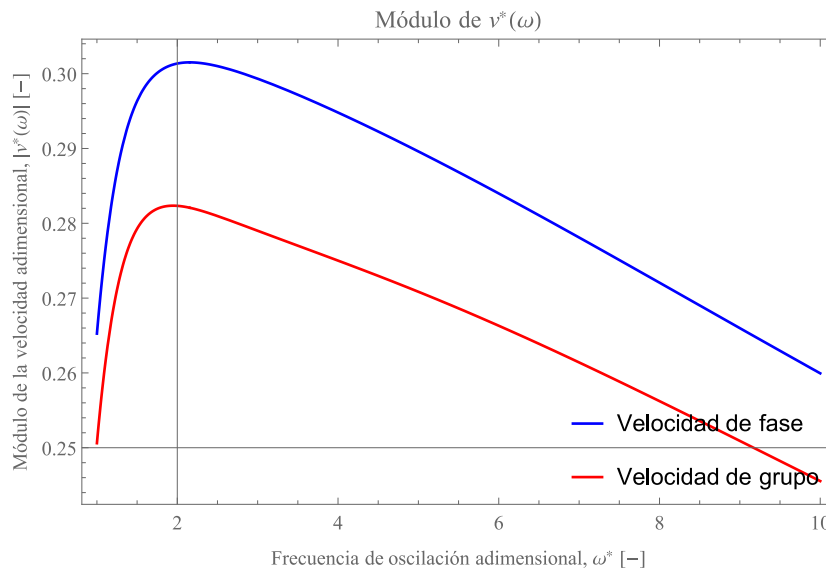


Figura 5-24. Módulo complejo de la velocidad de fase y de grupo en función de ω a distintas λ con el modelo de Maxwell.

En cambio, el modelo de Jeffreys (véase la **Figura 5-25**) nos presenta que la velocidad de fase es menor con respecto a la de grupo; y en el cual ambos aumentan de manera potencial.

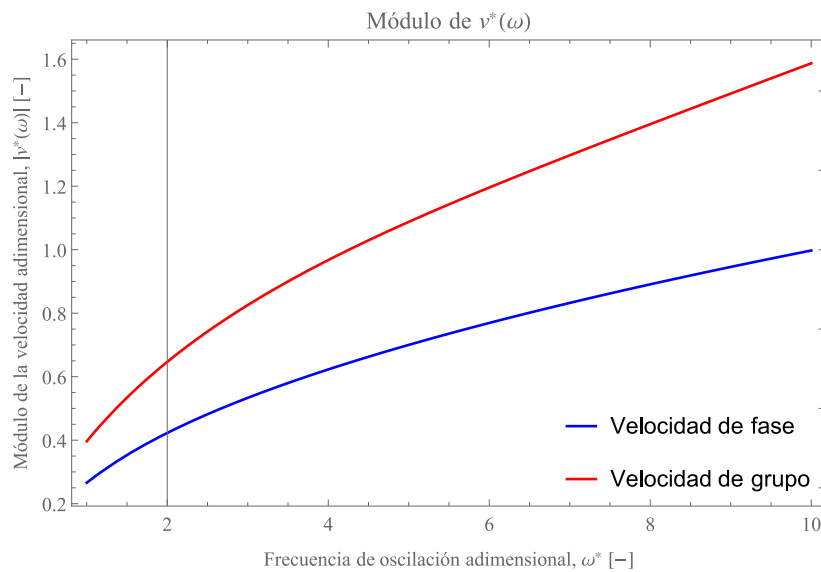


Figura 5-25. Módulo complejo de la velocidad de fase y de grupo en función de ω a distintas λ con el modelo de Jeffreys.

Y de acuerdo al material descrito por el modelo de Burgers (véase **Figura 5-26**) la velocidad de grupo será mayor y presentará un máximo al momento de que la frecuencia adimensional alcance un valor de 1.5; el mismo valor donde se obtiene máximo en el

modelo de Maxwell; dando a entender que la interacción polímero-polímero dispersa la onda viscoelástica de la misma manera a como si el polímero se encontrara solo.

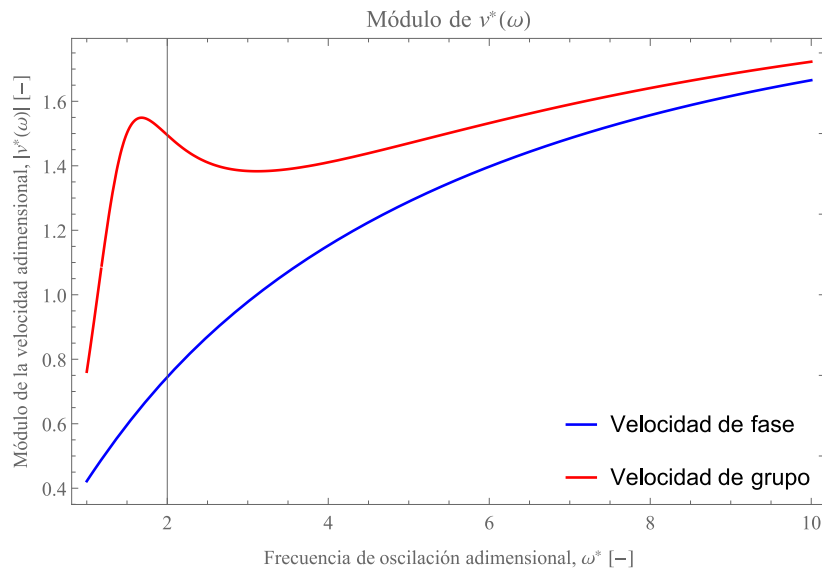


Figura 5-26. Módulo complejo de la velocidad de fase y de grupo en función de ω a distintas λ con el modelo de Burgers.

5.7 Dispersión de ondas a distintas ω y λ

Los siguientes resultados son mostrados en gráficas semi-logarítmicas. Se observaron las distintas dispersiones generadas a partir del modelo de Maxwell (**Figura 5-27**), del modelo de Jeffreys (**Figura 5-28**) y del modelo de Burgers (**Figura 5-29**).

Para el modelo de Maxwell se entiende que si el proceso tiene una $\lambda < 1$ s presentará una dispersión relativamente nula sin importar la frecuencia que se presente. Con lo anterior se puede afirmar que, si el proceso de relajación cinemático domina las propiedades de flujo, el fenómeno de dispersión no se presenta.

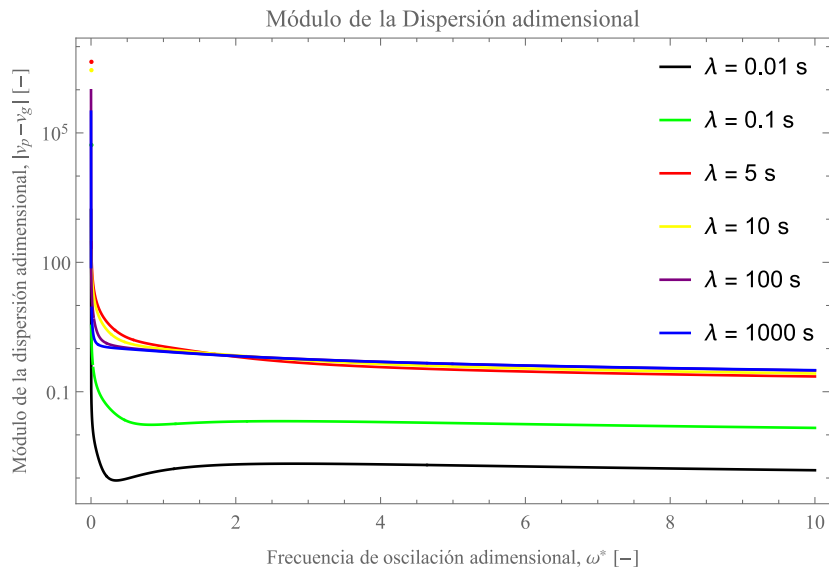


Figura 5-27. Módulo complejo de la dispersión en función de ω a distintas λ con el modelo de Maxwell.

Para el modelo de Jeffreys, a cualquier valor de λ , se presentó una dispersión muy baja en comparación con el modelo de Maxwell, en especial a λ muy bajas (la más baja se manifiesta cuando $\lambda = 0.01$ s). Nótese que la dispersión permanece constante con ω a partir de tiempos largos a excepción de las respuestas de $\lambda = 5$ y 10 s donde se presenta un máximo de dispersión a una frecuencia crítica que se desplaza hacia arriba y a la derecha conforme λ disminuye. La presencia del solvente hace que exista menos

dispersión de las ondas de velocidad de fase y velocidad de grupo, lo cual es un resultado interesante.

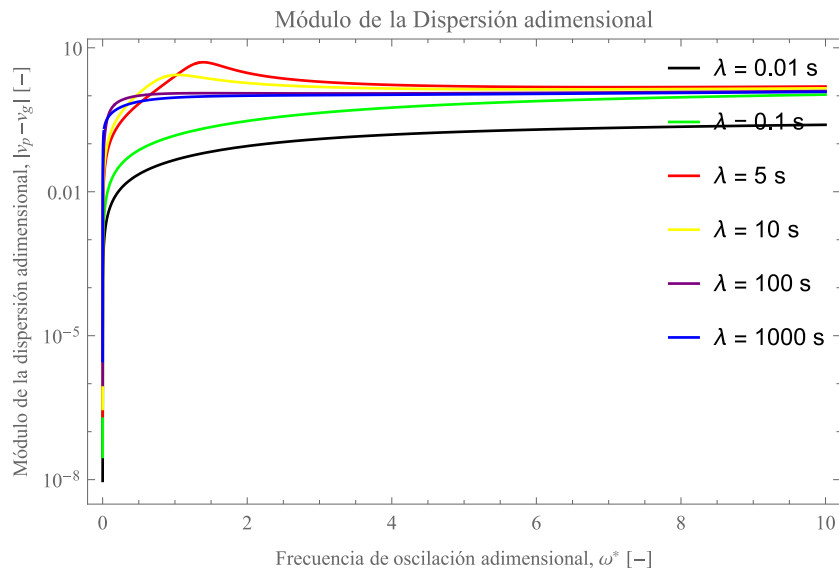


Figura 5-28. Módulo complejo de la dispersión en función de ω a distintas λ con el modelo de Jeffreys.

Y para el modelo de Burgers, se presenta el mismo caso que para Jeffreys donde a frecuencias bajas la dispersión más baja se logró conseguir cuando $\lambda = 0.01$ pero a medida que la frecuencia va aumentando, la dispersión más baja se obtiene también a $\lambda = 0.1$ s. El efecto del polímero del modelo de Burgers hace que la dispersión del sistema disminuya, i.e. el polímero evita que las ondas de velocidad de fase y velocidad de grupo se separen, haciendo que la respuesta del material se deba a la combinación de ambas propiedades. Numéricamente la dispersión que genera el modelo de Burgers es menor a

la dispersión del modelo de Jeffreys, esto es, las interacciones polímero-polímero minimizan el efecto de la dispersión.

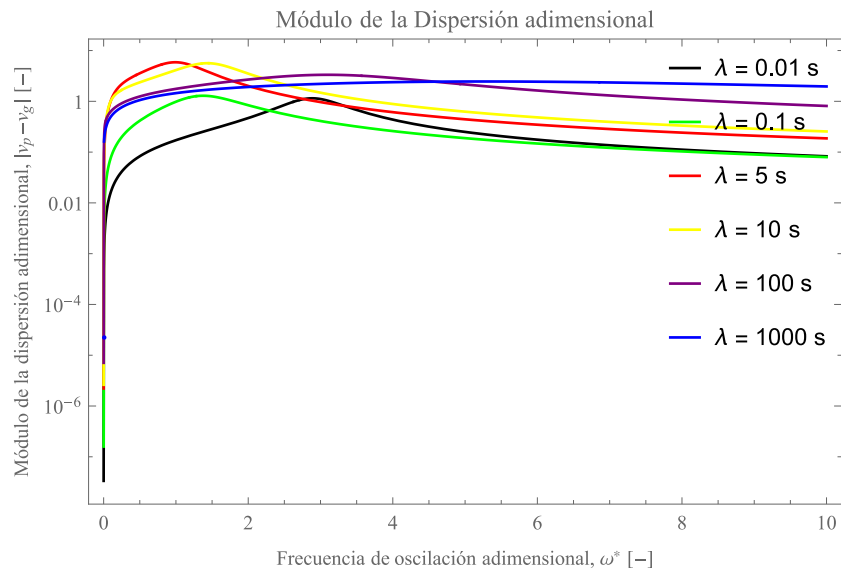


Figura 5-29. Módulo complejo de la dispersión en función de ω a distintas λ con el modelo de Burgers.

6 Conclusiones

El perfil de velocidades que se genera en los tres modelos reológicos, en la mayoría de los casos estudiados, tiene forma parabólica; casos especiales se dan a valores de λ específicos (flujo tapón, flujo con máximo y mínimos simétricos).

El módulo complejo de la velocidad axial en el centro del tubo, $|v_z|_{r=R}$, del modelo de Maxwell presentó curvas resonantes cuando $\lambda > 1$ s a medida que se incrementa ω , la cual fue provocada por alguna resonancia entre alguna propiedad del material viscoelástico con alguna variable del proceso. Asimismo, el modelo Jeffreys presentó un máximo a cualquier valor de λ a una frecuencia característica (ω_c), dicho máximo puede deberse a un efecto resonante en la interacción polímero-solvente ($p - s$); y con respecto al modelo de Burgers, la respuesta exhibida fue parecido al modelo de Maxwell ya que presenta las mismas curvas resonantes en el mismo rango de frecuencias indicando que $|v_z|_{r=R}$ del polímero solo y de la interacción polímero-polímero el material presentan efectos resonantes parecido.

Por otro lado, en los tres modelos constitutivos reológicos estudiados en este trabajo, se observó un máximo en la función de transferencia compleja (FTC a una frecuencia característica (ω_c) para valores de $\lambda > 1$ s, de hecho, este efecto también se observó en el módulo del flujo volumétrico, $|Q|$. Adicionalmente, para valores inferiores de $\lambda < 1$ s la FTC no tendrá influencia alguna en el módulo del flujo volumétrico.

La β^* que se generó tanto en el modelo de Maxwell, Jeffreys y Burgers tienen una respuesta similar, cuya longitud máxima se da cuando $\lambda = 0.01$ s, es decir, las interacciones polímero-solvente y polímero-polímero no tienen una influencia remarcable en β^* pero sí lo tienen las propiedades de proceso, lo cual es un resultado interesante.

Además, la velocidad de fase no presentó cambios apreciables entre los modelos reológicos analizados. Sin embargo, la velocidad de grupo es distinta a medida que el modelo considere más de una interacción dentro del material (polímero-solvente, polímero-polímero, etc.); al mismo tiempo, las diferentes interacciones ocasionan pequeños incrementos en dicha velocidad. La dispersión mantiene un valor constante al momento de alcanzar una frecuencia en específico para cualquier magnitud de λ con respecto a los tres modelos reológicos; en contraste, el menor valor de dispersión se logra cuando $\lambda < 0.5$ s.

La interacción entre dos materiales (polímero-solvente, polímero-polímero) descritos mediante modelos reológicos viscoelásticos lineales donde se involucre el λ generan la presencia de resonancias las cuales se presentan en forma de oscilaciones o de picos máximos o mínimos en las propiedades de flujo.

Para todo flujo de un líquido viscoelástico lineal, existe un valor crítico de λ y una frecuencia característica que maximiza las propiedades de flujo, es decir, genera un efecto de resonancia.

7 Referencias

1. Bird, R.B., R.C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of polymeric liquids*. 1977, New York: Wiley.
2. Bird, R.B., W.E. Stewart, and E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*. 2002, New York: John Willey & Sons.
3. Welty, J., G.L. Rorrer, and D.G. Foster, *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*. 2018, Oregon: Wiley.
4. Macosko, C.W., *Rheology: Principles, Measurements and Applications*. 1994, Weinheim: Wiley-VCH.
5. Coulson, J.M., et al., *Chemical Engineering Volume 1: Fluid Flow, Heat Transfer and Mass Transfer*. 1999: Butterworth-Heinemann.
6. Ramírez-Torres, L.A., et al., *Rheology and Hydrodynamics of Iron Ore Mineral Pulps during a Bioleaching Process in a Continuous Stirred-Tank Reactor*. *Chemical Engineering & Technology*, 2022. **46**(0).
7. Barnes, H.A., *A Handbook of Elementary Rheology*. 2000: University of Wales, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics.
8. Barnes, H.A., J.F. Hutton, and K. Walters, *An introduction to rheology*. 1989, Amsterdam: Elsevier.
9. Barnes, H.A., P. Towsend, and K. Walters, *Flow of non-Newtonian liquids under a varying pressure gradient*. *Nature*, 1969. **224**: p. 585-587.
10. Barnes, H.A., P. Towsend, and K. Walters, *On pulsatile flow of non-Newtonian liquids*. *Rheologica Acta*, 1971. **10**: p. 517-527.
11. Herrera-Valencia, E.E., et al., *Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos: Flujo pulsátil de sangre humana*. 2022, Ciudad de México: UNAM-FESZ.

12. Herrera-Valencia, E.E., et al., *On the pulsating flow behavior of a biological fluid: human blood*. *Rheologica Acta*, 2017. **56**: p. 387-407.
13. Herrera-Valencia, E.E., et al., *Simultaneous pulsatile flow and oscillating wall of a non-Newtonian liquid*. *Korea-Australia Rheology Journal*, 2016. **28**(4): p. 281-300.
14. Cengel, Y., *Transferencia de calor y masa*. 2007, Distrito Federal: McGraw-Hill.
15. Ostrovsky, L.A. and A.I. Potapov, *Modulated Waves: Theory and Applications*. 2002, Nizhny Novgorod: Johns Hopkins University Press.
16. Aguilar-Velázquez, M.d.J., *Análisis e inversión 1-D de curvas de dispersión de velocidad de fase de ondas superficiales*, in *Facultad de Ingeniería*. 2018, Universidad Nacional Autónoma de México: Ciudad de México, México.
17. Marion, J., *Dinámica clásica de partículas y sistemas*. 2003, Barcelona: Reverté.
18. McCabe, W.L., J.C. Smith, and P. Harriott, *Unit Operations of Chemical Engineering*. 2004, New York: McGraw-Hill.
19. Cengel, Y., M. Boles, and M. Kanoglu, *Termodinámica*. 2019, Ciudad de México: McGraw-Hill.
20. Herrera-Valencia, E.E., et al., *Study on the pulsating flow of a worm-like micellar solution*. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2010. **165**: p. 174-183.
21. Herrera-Valencia, E.E. and A.D. Rey, *Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells* *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2014. **372**: p. 1-28.
22. Del Rio, J.A. and J.R. Castrejón-Pita, *Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos*. *Revista Mexicana de Física*, 2003. **49**(1): p. 74-85.

23. Zill, D., *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores a la frontera*. 2015, Distrito Federal: Cengage.
24. Foust, A.S., et al., *Principles of Unit Operations*. 1980, New York: John Wiley & Sons.