



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE POLINOMIOS DE INDEPENDENCIA DE GRÁFICAS  
CIRCULANTES Y UNA APLICACIÓN A LA MÚSICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

ADRIANA LORENA MENDOZA FIERRO



TUTOR

M.EN C. LOIRET ALEJANDRÍA DOSAL TRUJILLO

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



The moon is no door. It is a face in its own right,  
White as a knuckle and terribly upset.  
It drags the sea after it like a dark crime; it is quiet  
With the O-gape of complete despair. I live here.

Twice on Sunday, the bells startle the sky —  
Eight great tongues affirming the Resurrection  
At the end, they soberly bong out their names.

*-Sylvia Plath*



## Agradecimientos

A mi hermana, Lulú, cuyo apoyo me ha ayudado a no darme por vencida a pesar de los malos pensamientos, gracias por todo Haru. Espero que podamos seguir siempre apoyándonos como ahora.

A Roberto por no rendirse conmigo, sin ti no lo hubiera ni intentado, gracias por toda la paciencia y disculpa la demora. Joachim, no vas a poder leer esto, pero me ayudaste mucho con tu presencia por sí sola, espero siempre tenerte a mi lado.

Jana, eres es una de las personas más pacientes y lindas que he conocido en mi vida, muchas gracias por darme esta oportunidad para aprender y por aguantarme todo este tiempo.

Gonzalo, María, mis papás, los quiero mucho y les agradezco porque nunca se rindieron y me ayudaron con todo lo que estuvo en sus manos, espero poder ser yo quién les ayude más en el futuro.



# Índice

<b>1 Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1 Gráficas y subgráficas . . . . .	2
1.2 Tipos de gráficas y operaciones . . . . .	4
1.3 Caminos y distancias . . . . .	10
1.4 Gráficas isomorfas . . . . .	16
1.5 Circulantes . . . . .	18
<b>2 Independencia</b>	<b>20</b>
2.1 Polinomio de independencia de $C_n^d$ . . . . .	32
2.2 Polinomio de independencia de $\overline{C}_n^d$ . . . . .	46
2.2.1 Casos particulares $n = 2d + 2$ , $n = 2d + 3$ y $n \geq 3d + 1$ . . . . .	46
2.2.2 Caso general $n \geq 2d + 2$ . . . . .	49
2.2.3 Demostración del caso general $n \geq 2d + 2$ . . . . .	68
<b>3 Aplicación a la música</b>	<b>73</b>

<b>4 Conclusiones</b>	<b>80</b>
<b>Referencias</b>	<b>81</b>

## Introducción

El polinomio de independencia de una gráfica ha sido ampliamente estudiado en diversos campos como biología, química, y hasta en música. En otros trabajos se han calculado fórmulas para los polinomios de independencia de algunas familias de gráficas circulantes y una posible aplicación en la construcción de acordes de la escala musical de doce tonos [1].

El presente trabajo de tesis comprende los aspectos anteriores de la siguiente forma: en el primer capítulo de esta tesis empezamos por definir los conceptos y teoremas esenciales de la teoría de gráficas. Luego nos enfocamos en familias de gráficas circulantes y algunas de sus propiedades [2], [9], y [3].

En el segundo capítulo ahondamos en el concepto de independencia, como el número de Fibonacci de una gráfica y el polinomio de independencia; vemos como usarlos en las familias de gráficas circulantes y sus complementos [7], [4]. Usamos sucesiones de diferencia y sucesiones  $l$ -construibles para determinar el polinomio de independencia de familias de gráficas circulantes de salto consecutivo [11].

Finalmente, en el tercer capítulo, describimos conceptos musicales de occidente [6] y hacemos una analogía entre las escalas musicales  $n$ -tet y familias de gráficas circulantes de orden  $n$ . Así, podemos calcular el polinomio de independencia de estas gráficas que modelen restricciones de acordes.

# 1 Preliminares

## 1.1 Gráficas y subgráficas

A continuación hablaremos de las nociones básicas de la teoría de gráficas. Los orígenes los podemos rastrear en el siglo XVIII, gracias a Euler y el problema de los puentes de Königsberg, en el cual ahondaremos más adelante. Después, en el siglo XIX se exploraron más conceptos como el de gráfica hamiltoniana. En general, los problemas que ayudaron a desarrollar la teoría de gráficas trataban de modelar relaciones entre objetos, desde lo más simple como el concepto de línea y punto. Con el paso del tiempo se formalizó lo suficiente para proporcionar los conceptos de una forma amigable, como la que presentaremos.

Una *gráfica* simple es un par ordenado  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto de objetos no vacío (posiblemente infinito) y  $E$  es un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de  $V$ . A  $V$  lo llamamos el conjunto de *vértices* de  $G$  y a  $E$  el conjunto de *aristas* de  $G$ , también se denotan por  $V(G)$  y  $E(G)$ , respectivamente. Para fines prácticos, dados  $u, v$  vértices de  $G$  denotaremos a la arista  $\{u, v\}$  en  $G$  por  $uv$ , y diremos que esta incide en los vértices  $u$  y  $v$ , a los que también llamamos extremos de  $uv$ . Decimos que  $u$  y  $v$  son *adyacentes* o *vecinos*. En este caso, cabe notar que dada la definición en una gráfica  $G$  no hay aristas distintas con los mismos extremos, ni tampoco hay aristas con ambos extremos en el mismo vértice.

Decimos que una gráfica  $G$  tiene *orden*  $n$  si la cardinalidad del conjunto de los vértices de  $G$  es  $n$  y que tiene *tamaño*  $m$  si la cardinalidad del conjunto de las aristas de  $G$  es  $m$ . Además, se define el *grado* de  $u$ , vértice en  $G$ , como el número de aristas que inciden en  $u$  y este es denotado por  $d_G(u) = k$ . Si conocemos la gráfica en la que estamos trabajando basta denotar el grado del vértice por  $d(u) = k$ .

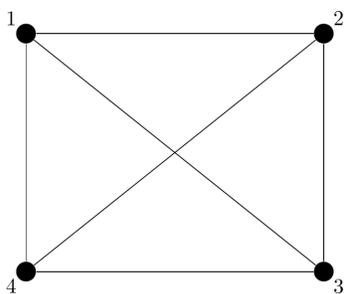


Fig. 1: Ejemplo de una gráfica con orden 4 y tamaño 6

Definimos la *vecindad* de un vértice  $v$  en  $G$  como el conjunto  $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$ . La *vecindad cerrada* de  $v$  en  $G$  es el conjunto  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ . Se sigue de la definición de gráfica simple que  $d_G(v) = |N(v)|$ .

En matemáticas siempre es de utilidad definir subestructuras de las gráficas, como hacemos a continuación. Dada  $G$  una gráfica,  $H$  es una *subgráfica* de  $G$  si es una gráfica tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ . Existen además algunos tipos de subgráficas, por ejemplo, decimos que una subgráfica  $H$  de  $G$  es una *subgráfica generadora* si  $V(H) = V(G)$ . En particular, si  $w \in V(G)$ ,  $e \in E(G)$  y  $U \subseteq V(G)$  usamos la notación dada por  $G - w = G[V(G) - \{w\}]$ ,

$$G - e = (V(G), E(G) - \{e\}) \text{ y } G - U = G[V(G) - U].$$

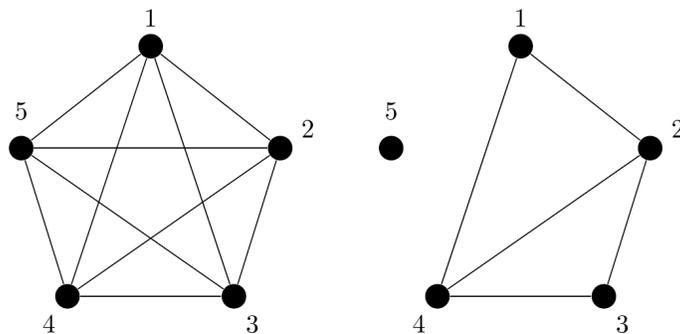


Fig. 2: Ejemplo de una subgráfica generadora

Una subgráfica  $H$  de  $G$ , es una *subgráfica inducida por vértices* si existe  $S \subseteq V(G)$  no vacío, tal que  $V(H) = S$  y si  $uv \in E(G)$  con  $u, v \in S$ , entonces  $uv \in E(H)$ .

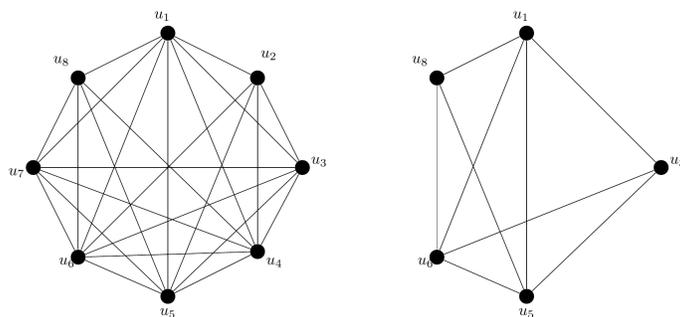


Fig. 3: Ejemplo de una subgráfica inducida por vértices

## 1.2 Tipos de gráficas y operaciones

En esta sección revisamos algunas familias de gráficas de acuerdo a algunas de sus propiedades y cómo crear nuevas gráficas a partir de operaciones.

Describimos algunas de las más conocidas; decimos que una gráfica  $G$  con orden  $n$  es *completa* si  $d_G(v) = n-1$ , para cualquier  $v \in V(G)$ . A una gráfica completa de orden  $n$  la denotamos por  $K_n$ .

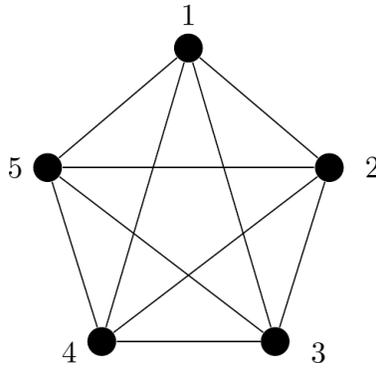


Fig. 4: Ejemplo de una gráfica completa  $K_5$

Una gráfica  $G$  es *bipartita*, si existe una partición de  $V(G)$ , en conjuntos  $V_1$  y  $V_2$  tal que cualquier arista de  $G$  tiene un extremo en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ . Una gráfica  $G$ , es bipartita completa si todo vértice de  $V_1$  es adyacente a todo vértice de  $V_2$ . Esta gráfica se denota por  $K_{n,m}$ , con  $n = |V_1|$  y  $m = |V_2|$ .

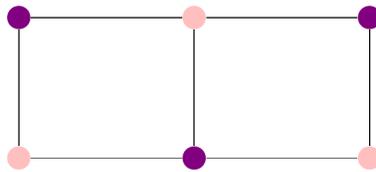


Fig. 5: Ejemplo de una gráfica bipartita con partición el conjunto de vértices morados y el conjunto de vértices rosas

Particularmente, a una gráfica bipartita completa  $K_{1,n-1}$  se le llama estrella y se le denota por  $S_n$ .

Dada una gráfica  $G = (V, E)$  un *apareamiento*  $M$  en  $G$  es un conjunto de aristas que no comparten ningún vértice entre sí. Decimos que una gráfica es  $k$  - *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado. Un  $k$  - *factor* de una gráfica  $G$  es una subgráfica generadora  $k$  - *regular*. Una  $k$ -*factorización* es una partición de las aristas de una gráfica en  $k$  - *factores* ajenos.

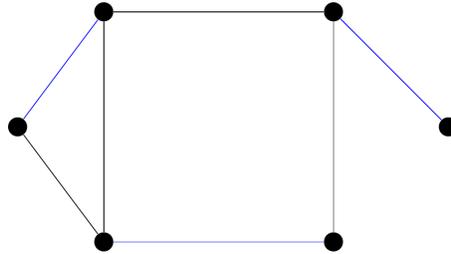


Fig. 6: Ejemplo de un apareamiento

La *trayectoria de orden  $n$*  es la gráfica  $P_n$  con conjunto de vértices  $V(P_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$  y conjunto de aristas  $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} : i \in \{1, \dots, n-1\}\}$ . El ciclo de orden  $n$  es la gráfica  $C_n$  con conjunto de vértices  $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$  y conjunto de aristas  $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} : i \in \{1, \dots, n-1\}\} \cup \{v_1 v_n\}$ .

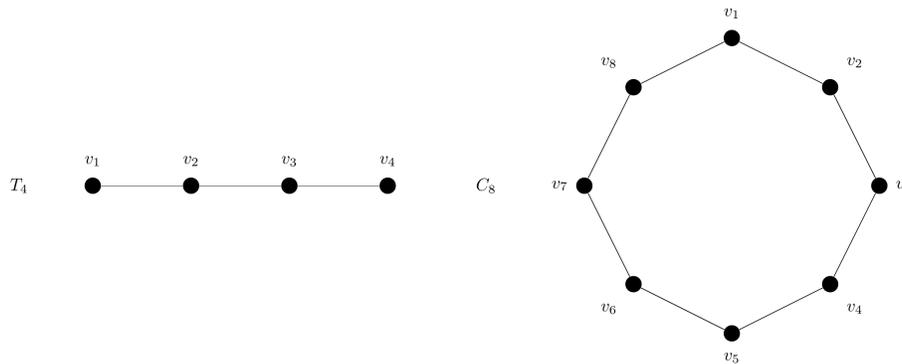


Fig. 7: Ejemplos de trayectoria y ciclo

Otras gráficas que nos son útiles son las que se obtienen de hacer operaciones con gráficas. Algunas de estas operaciones tienen su origen en las operaciones con conjuntos. En este trabajo mencionamos algunas operaciones fundamentales.

Se define al *complemento* de una gráfica  $G$ , como aquella gráfica  $G^c$  con conjunto de vértices  $V(G^c) = V(G)$  y tal que  $uv \in E(G^c)$  si y solo si  $uv \notin E(G)$ .

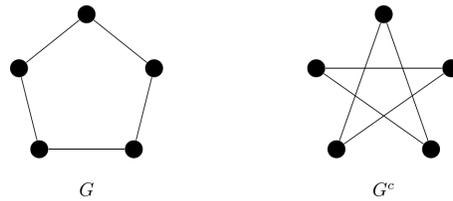


Fig. 8: Ejemplos de una gráfica y su complemento

Consideremos dos gráficas ajenas en vértices  $G$  y  $H$ ; la *unión*  $G \cup H$  es la gráfica tal que  $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$  y  $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$ .

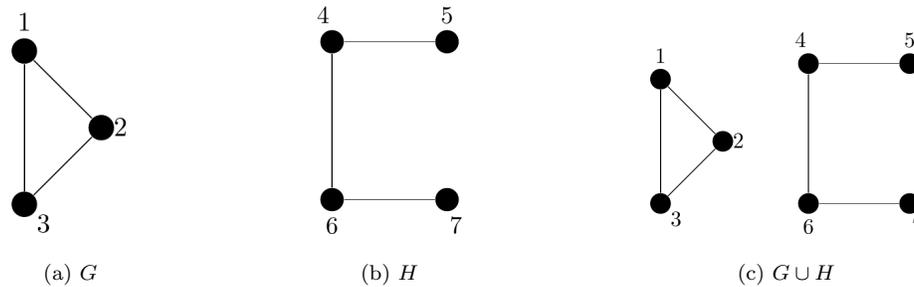


Fig. 9: Ejemplo de la unión de dos gráficas

Se define la *suma* de las gráficas  $G$  y  $H$  como la gráfica  $G + H$  con conjunto de vértices y aristas, respectivamente  $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$  y  $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G) \text{ y } v \in V(H)\}$ .

El *producto cartesiano*  $G \square H$  de las gráficas  $G$  y  $H$  es la gráfica con  $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$  y tal que  $(u_1, u_2)(v_1, v_2) \in E(G \square H)$  si y solo si  $u_1 = v_1$  y  $u_2v_2 \in E(H)$  o  $u_2 = v_2$  y  $u_1v_1 \in E(G)$ .

El *producto lexicográfico o composición* de dos gráficas  $G$  y  $H$  es la gráfica que denotaremos por  $G[H]$  con  $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$  y tal que cualesquiera dos vértices  $(g, h)$  y  $(g', h')$  en  $G[H]$  son adyacentes si y solo si  $gg' \in E(G)$  o  $g = g'$  y  $hh' \in E(H)$ .

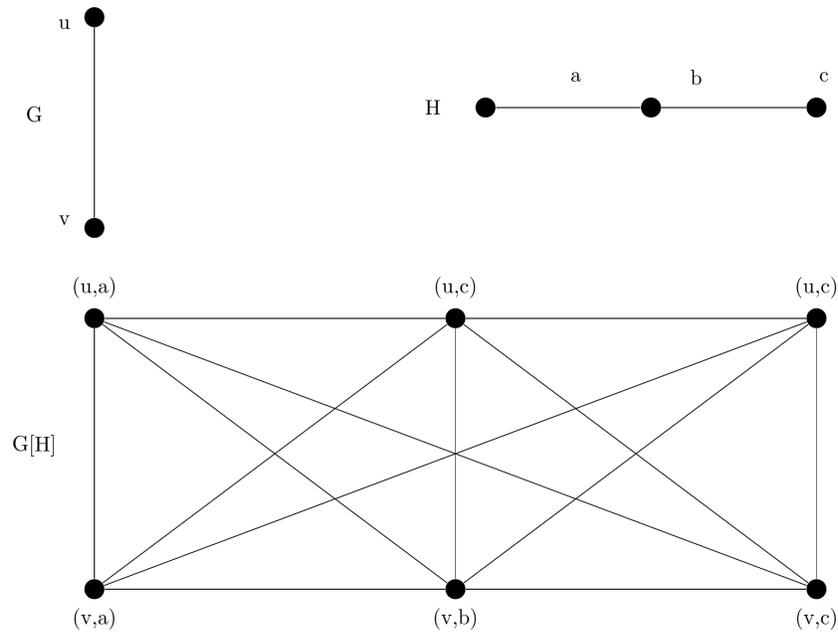


Fig. 10: Ejemplo de composición de gráficas

La *gráfica de líneas* de  $G$ , denotada por  $L(G)$ , es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de aristas de  $G$ , y dos vértices son adyacentes si como aristas en  $G$  comparten un extremo.

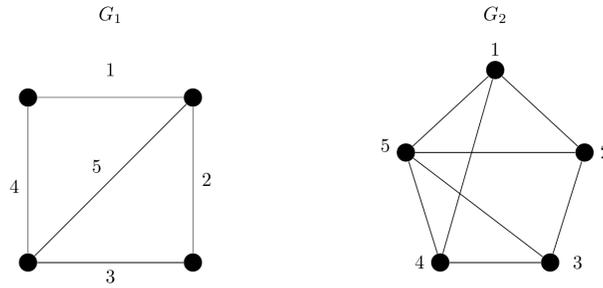


Fig. 11:  $G_2$  es la gráfica de líneas de  $G_1$

**Proposición 1.1.** *No toda gráfica es la gráfica de líneas de alguna gráfica.*

*Demostración.* De ser así existirían gráficas con más de dos aristas incidiendo en el mismo vértice. Como contraejemplo, si consideramos a  $K_{1,3}$ , la gráfica de la cual se obtendría como gráfica de líneas tendría que cumplir que tres de sus aristas inciden en un vértice, lo cual no pasa.  $\square$

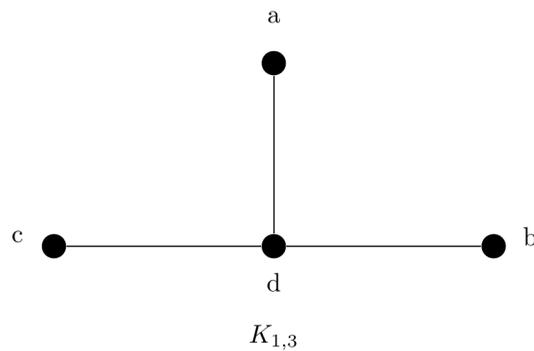


Fig. 12:  $K_{1,3}$  no es gráfica de líneas de ninguna gráfica

Sean  $G$  y  $H$  gráficas de orden  $n$  y  $k$  respectivamente. Definimos a la corona  $G \odot H$  como la gráfica obtenida de tomar una copia de  $G$  y  $n$  copias de  $H$ , uniendo el  $i$ -ésimo vértice de  $G$  con cada vértice de la  $i$ -ésima copia de  $H$ . Es decir, si  $H_1, H_2, \dots, H_n$  son las copias de la gráfica  $H$  con conjuntos de vértices  $V(H_i) = \{v_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$ . Entonces  $V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{i=1}^n V(H_i)$  y  $E(G \odot H) = \bigcup_{i=1}^n E(H_i) \cup E(G) \cup \{u_i v_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$ .

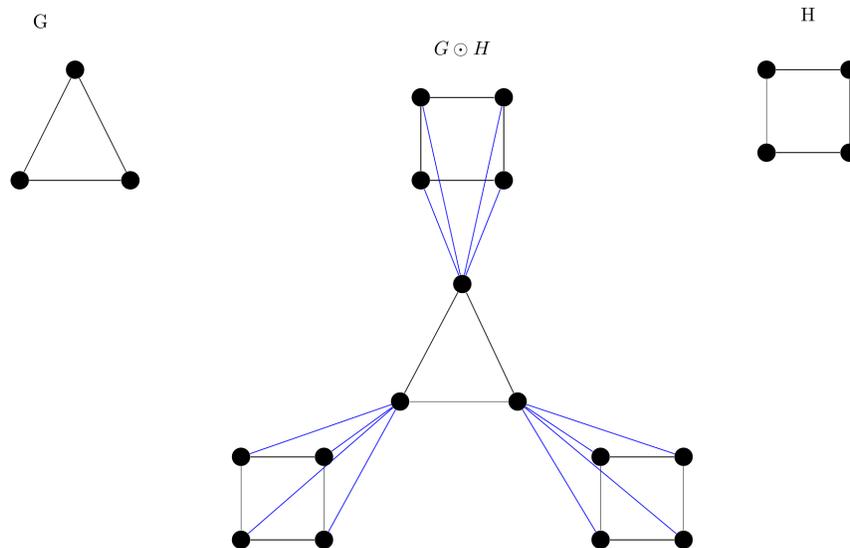


Fig. 13: Ejemplo de la corona de dos gráficas

### 1.3 Caminos y distancias

Los caminos y distancias son muy útiles en la teoría de gráficas, muchos de los problemas que inspiraron al desarrollo de la teoría de gráficas involucran estos conceptos. Por ejemplo, el famoso problema de los siete puentes de Königsberg

que mencionamos anteriormente resuelto por Euler. El problema consistía en recorrer las 4 regiones de tierra rodeadas por un río, en la pequeña ciudad de Königsberg, situada en la antigua Prusia; pasando una sola vez por cada uno de los siete puentes de tal modo que se termine el recorrido en el punto de partida. Euler también resolvió usando recorridos el problema del caballo, que consiste en encontrar la forma de que dicha pieza de ajedrez, el caballo, pase por todas las casillas de un tablero de ajedrez utilizando los movimientos válidos para esta pieza. En este sentido, la noción de caminar sobre una gráfica se define a continuación.

Un camino  $W = (u = u_0, u_1, \dots, u_k = v)$  en una gráfica  $G$  es una sucesión de vértices tal que  $\{u_0, u_1, \dots, u_k\} \subseteq V(G)$  y  $u_i u_{i+1} \in E(G)$  para todo  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ ; donde  $k$  es la longitud de  $W$ , la cual denotaremos por  $l(W)$ . También podemos llamar a  $W$  un  $uv$ -camino en  $G$ . Dado un camino  $W = (u_0, u_1, \dots, u_k)$  definimos a su camino inverso como  $W^{-1} = (u_k, u_{k-1}, \dots, u_1, u_0)$ . Dados dos caminos  $W_1 = (u_0, u_1, \dots, u_k)$  y  $W_2 = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ , si  $u_k = v_0$ , la *concatenación de  $W_1$  con  $W_2$*  es el camino definido como  $W_1 \cdot W_2 = (u_0, u_1, \dots, u_k = v_0, v_1, \dots, v_l)$ . Claramente,  $l(W_1 \cdot W_2) = l(W_1) + l(W_2)$ . Decimos que un camino  $W = (u_0, u_1, \dots, u_k)$  es *abierto* si  $u_0 \neq u_k$  y en otro caso que es *cerrado*. El camino  $W[u_i u_j]$  denota la subsucesión de  $W$  que va de  $u_i$  a  $u_j$  con  $i, j \in \{0, \dots, k\}$   $i < j$ .

Un *paseo*  $P$  en una gráfica  $G$  es un camino que no repite aristas. Un camino que no repite vértices es una *trayectoria*. Un *ciclo*  $C$  es un camino

cerrado de longitud al menos 3 que no repite vértices, excepto por el vértice inicial y el vértice final.

**Teorema 1.1.** *Si  $u$  y  $v$  son vértices distintos en  $G$ , entonces cualquier  $uv$ -camino contiene una  $uv$ -trayectoria.*

*Demostración.* Procedemos por inducción fuerte sobre la longitud del camino. Sea  $W$  un  $uv$ -camino. Como  $u \neq v$ , tenemos que  $l(W) \geq 1$ . Si  $l(W) = 1$ , entonces  $W = (u, v)$ , que ya es una trayectoria. Supongamos que para todo  $uv$ -camino  $W$ , tal que  $1 \leq l(w) < k$ ,  $W$  contiene una  $uv$ -trayectoria. Sea  $W$  un  $uv$ -camino de longitud  $k$ . Si  $W = (u = u_0, u_1, \dots, u_k = v)$  no repite vértices ya es una trayectoria. Supongamos que existen  $u_i$  y  $u_j$  con  $i < j$ , en  $W$  tales que  $u_i = u_j$ , consideremos al camino  $W[u_0, u_i - 1] \cdot W[u_j, u_k]$  que resulta de eliminar el subcamino  $W[u_i, u_j]$  de  $W$ . Así,  $l(W') < l(W) = k$  y por hipótesis inductiva tenemos que  $W'$  contiene una  $uv$ -trayectoria, y por lo tanto,  $W$  también.  $\square$

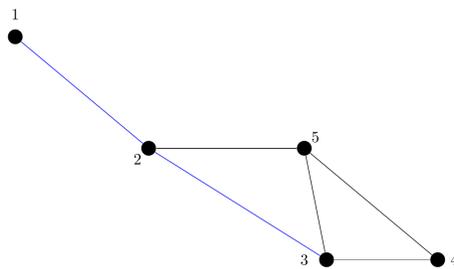


Fig. 14: El camino  $(1, 2, 3, 4, 5, 3)$  contiene a la trayectoria  $(1, 2, 3)$

Decimos que una gráfica  $G$  es *conexa* si para cualesquiera  $u, v \in V(G)$  existe un  $uv$ -camino ( $uv$ -trayectoria) en  $G$ . En otro caso diremos que  $G$  es

*inconexa o no conexa.*

Decimos que una subgráfica  $C$  de  $G$  es una *componente conexa* de  $G$  si esta es máxima por contención con la propiedad de ser conexa, es decir, para cualesquiera  $u, v \in V(C)$  existe  $W = (u = u_0, u_1, \dots, u_k = v)$  camino en  $V(C)$ .

Coloquialmente hablando, a una gráfica conexa la podemos visualizar como una gráfica que podemos dibujar sin tener que despegar la pluma de la hoja. Ahora, teniendo la definición de gráfica conexa, podemos definir la distancia entre dos vértices, y veremos que a partir de dicha definición podemos ver el conjunto de vértices como un espacio métrico. Recordemos qué es un espacio métrico.

Una *métrica* en un conjunto  $X$  es una función llamada distancia  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que satisface las siguientes propiedades:

1.  $d(x, y) \geq 0$  para cualesquiera  $x, y$  en  $X$
2.  $d(x, y) = 0$  si y solo si  $x = y$
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in X$
4.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  para todo  $x, y, z \in X$

La *distancia geodésica* entre dos vértices  $u$  y  $v$  en una gráfica conexa  $G$  la definimos como sigue:

$$d_G(u, v) = \min\{l(T) : T \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\}.$$

Si  $l(T) = d_G(u, v)$  decimos que  $T$  es una  $uv$ -geodésica.

**Proposición 1.2.** *La distancia geodésica es una métrica.*

*Demostración.* La longitud de cualquier trayectoria es en efecto por lo menos 0. Además,  $d(u, u) = 0$  y si  $d(u, v) = 0$ , entonces  $u = v$ . Consideremos una  $uv$ -geodésica  $T$ , entonces  $T^{-1}$  es también una trayectoria de longitud mínima, pues de lo contrario existiría  $T'$  con  $l(T') = d(u, v) < l(T^{-1})$ , en cuyo caso  $(T^{-1})^{-1}$  sería de longitud menor a  $T$  lo cual es una contradicción, por lo que la simetría en efecto se cumple. También pasa que  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  pues al tomar una  $xz$ -geodésica  $P$  y una  $zy$ -geodésica  $Q$  podemos construir un  $xy$ -camino  $C = P \cdot Q$ , el cual contiene una  $xy$ -trayectoria  $T$  por el Teorema 1.1. Así que,  $d(x, y) \leq l(T) \leq l(C) = l(P) + l(Q) = d(x, z) + d(z, y)$ .  $\square$

La *distancia detour* entre dos vértices  $u$  y  $v$  en una gráfica  $G$  la definimos como sigue:

$$D(u, v) = \max\{l(T) : T \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\}.$$

**Proposición 1.3.** *La distancia detour es una métrica.*

*Demostración.* La longitud de cualquier trayectoria es por lo menos es 0. Además, si el máximo de las longitudes es 0 entonces estamos hablando del mismo vértice. La simetría se sigue de que considerando una trayectoria  $T$  de longitud máxima,  $T^{-1}$  es también una trayectoria de longitud máxima, en caso contrario tendríamos que existe  $T'$  con  $l(T') > l(T^{-1})$ , es decir,  $(T^{-1})^{-1}$  tendría longitud mayor a  $T$ , lo cual no es posible. Ahora, para ver que se cumple

la desigualdad del triángulo, tomamos 3 vértices  $u, v$ , y  $w$ , y consideramos  $T$  una trayectoria de longitud máxima entre  $u$  y  $v$ . Si  $w$  está en  $T$ , entonces  $D(u, v) \leq l(T[u, w]) + l(T[w, v]) \leq D(u, w) + D(w, v)$ . Por otro lado, si  $w$  no está en  $T$  entonces tomamos una trayectoria  $P$  que vaya de  $w$  a cualquier vértice de  $T$ , más aún una que solo tenga un vértice de  $T$ , a saber  $x$ . Hacemos  $T_1 = T[u, x] \cdot P[x, w]$  y similarmente obtenemos una  $wv$ -trayectoria  $T_2$ . De lo anterior se sigue que  $D(u, v) \leq l(T_1) + l(T_2) \leq D(u, w) + D(w, v)$ .  $\square$

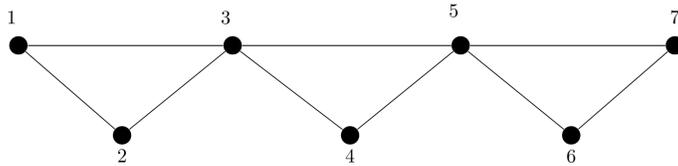


Fig. 15: Ejemplo de gráfica en la que  $d(1, 7) = 3$  pero  $D(1, 7) = 6$

La *distancia circular* entre dos vértices  $u$  y  $v$  en una gráfica  $G$  la definimos como sigue:

$$cir(u, v) = d(u, v) + D(u, v).$$

**Proposición 1.4.** *La distancia circular es una métrica.*

*Demostración.* Se sigue de que las distancias geodésica y detour son métricas.  $\square$

## 1.4 Gráficas isomorfas

Muchas veces trabajamos con descripciones distintas de una misma estructura. En estos casos resulta redundante estudiar las propiedades de cada una de sus descripciones. Por ello, nos interesa identificar cuándo dos gráficas son esencialmente la misma; ya que esto nos permite trabajarlas como una sola.

Dos gráficas  $G$  y  $H$  son *isomorfas* si existe una función biyectiva  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  de forma que  $uv \in E(G)$  si y solo si  $f(u)f(v) \in E(H)$ . En este caso lo denotamos por  $G \cong H$ .

Se deduce que el isomorfismo de gráficas es una relación de equivalencia. Basta considerar la función identidad, la inversa de un isomorfismo y finalmente la composición de isomorfismos, para verificar la reflexividad, la simetría y la transitividad, respectivamente.

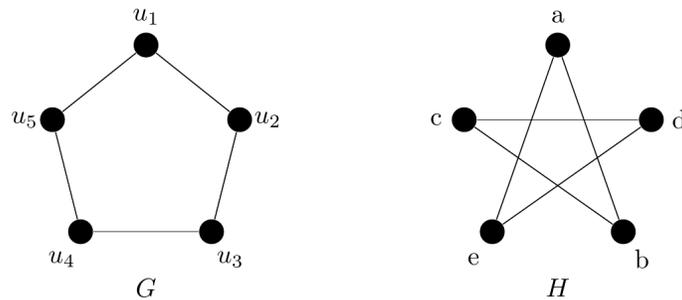


Fig. 16: Ejemplo de dos gráficas que son isomorfas

El siguiente teorema es conocido como el primer teorema de la teoría

de gráficas.

**Teorema 1.2.** (1er Teorema de la teoría de gráficas) En cualquier gráfica de orden  $n$  y tamaño  $m$  sucede que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

*Demostración.* Como cada arista tiene exactamente dos extremos al sumar los grados estamos contando dos veces cada arista en  $G$ .  $\square$

Como consecuencia del Teorema 1.2 podemos ver que el isomorfismo de gráficas, de hecho preserva orden, tamaño y grado de los vértices.

**Proposición 1.5.** Si las gráficas  $G$  y  $H$  son isomorfas, entonces sucede que  $|V(G)| = |V(H)|$ ,  $|E(G)| = |E(H)|$ , y los grados de los vértices se preservan.

*Demostración.* Como  $G \cong H$  entonces existe una función biyectiva  $f : V(G) \rightarrow V(H)$ , entonces  $|V(G)| = |V(H)|$ . Además, si  $u \in V(G)$ , para cualquier  $w \in N_G(u)$  sucede que  $f(u)f(w) \in E(H)$ . Por lo anterior,  $f(w) \in N_H(f(u))$  y de hecho son todos sus elementos. Así, tenemos que  $|N_G(u)| = |N_H(f(u))|$ . Por otro lado,

$$2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{f(v) \in V(H)} d(f(v)) = 2|E(H)|,$$

de lo que se sigue inmediatamente que  $|E(G)| = |E(H)|$ .  $\square$

Cabe observar que los isomorfismos preservan caminos y ciclos de la misma longitud que la gráfica tenga, ya que dado un camino  $W$  de longitud  $k$

en  $G$  con  $W = (u_0, u_1, \dots, u_k)$  se puede construir un camino  $W' = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  en  $H$  tomando  $v_i = f(u_i)$  para  $0 \leq i \leq k$ .

Notemos que además el recíproco de la Proposición 1.5 no siempre se cumple, es decir, existen gráficas  $G$  y  $H$  con  $|V(G)| = |V(H)|$ ,  $|E(G)| = |E(H)|$ , y una función biyectiva entre sus vértices que preserva grados, pero  $G$  y  $H$  no son isomorfas.

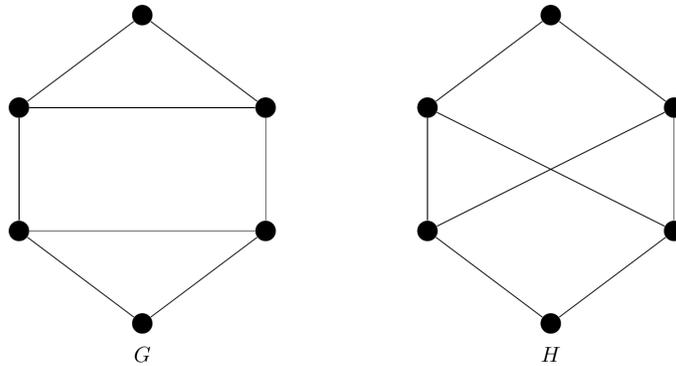


Fig. 17: Ejemplo de que el recíproco de 1.5 es falso

En la gráfica  $G$  hay ciclos de orden 3, mientras que en  $H$  no hay por lo que no son isomorfas. Sin embargo, es posible dar una función que preserve orden, tamaño, y grados de los vértices.

## 1.5 Circulantes

Como hemos visto previamente, suele ser de utilidad estudiar ciertos conjuntos de gráficas pues estas comparten características y pueden servir para modelar ciertas relaciones entre objetos. A continuación estudiaremos la familia de

gráficas circulantes, pieza fundamental para modelar acordes musicales más adelante.

Sean  $n$  y  $s_1, s_2, \dots, s_k$  enteros positivos con  $s_i \neq s_j$  para toda  $i \neq j$  *circulante*, definimos a la gráfica circulante  $C_n^{s_1, \dots, s_k}$  con saltos  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  como la gráfica con vértices  $1, \dots, n$  donde cada vértice  $i$  es adyacente a  $2k$  vértices:  $i \pm s_1, \dots, i \pm s_k$  (mód  $n$ ). Decimos que es una circulante de salto consecutivo si  $s_1, s_2, \dots, s_k$  son enteros consecutivos módulo  $n$ .

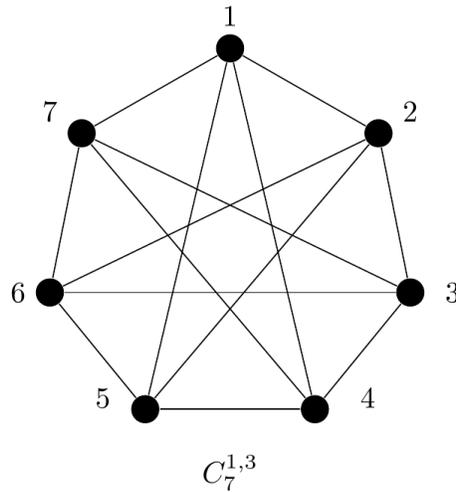


Fig. 18: Ejemplo de una gráfica circulante

Cabe notar que cualquier ciclo es de hecho una gráfica circulante de salto consecutivo 1, es decir, que  $C_n \simeq C_n^1$ . Una propiedad que tienen las gráficas circulantes es que son  $2k$ -factorizables ya que cada salto genera un factor. Además, son *vértice-transitivas*, esto es, dados vértices  $u, v \in V(G)$ , existe un isomorfismo  $f : V(G) \rightarrow V(G)$  tal que  $f(u) = v$ .

## 2 Independencia

En este capítulo se muestran conceptos sobre conjuntos independientes para así poder definir y calcular el polinomio de independencia para ciertas familias de gráficas.

Dada  $G$  una gráfica y  $S \subseteq V(G)$ , decimos que  $S$  es un *conjunto independiente* de  $G$  si para cualesquiera  $u, v \in S$ , estos no son adyacentes en  $G$ . El *número de independencia* de una gráfica  $G$  es

$$\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ es independiente}\}.$$

El *polinomio de independencia* de una gráfica  $G$  con  $n$  vértices es  $P_G(x) = \sum_{k=0}^n i_k x^k$ , donde  $i_k$  es el número de conjuntos independientes de cardinalidad  $k$  en  $G$ . Notemos que  $i_k = 0$  para toda  $k > \alpha(G)$ , e  $i_0 = 1$  en cualquier gráfica  $G$ . El grado del polinomio de independencia no es  $n$ , sino el número de independencia,  $\alpha(G) \leq n$ .

**Proposición 2.1.** (*Gutman y Harari, 1983*) *Para cualesquiera dos gráficas  $G$  y  $H$ , se tiene que*

$$P_{G \cup H}(x) = P_G(x) \cdot P_H(x).$$

*Demostración.* Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas que no comparten vértices. Un conjunto independiente de cardinalidad  $k$  en  $G \cup H$  se obtiene de tomar un conjunto independiente de cardinalidad  $i$  de  $G$  y un conjunto independiente de

cardinalidad  $j$  en  $H$  de forma que  $i + j = k$ . Esto ya que cualquier conjunto independiente  $S$  en la unión tiene como partición los conjuntos  $S_1 = S \cap V(G)$  y  $S_2 = S \cap V(H)$ , los cuales son independientes en sus respectivas gráficas. Dados dos conjuntos independientes  $S_1$  y  $S_2$ , en  $G$  y  $H$  respectivamente, como  $G$  y  $H$  no comparten vértices,  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . También pasa que  $S_1 \cup S_2$  es un conjunto independiente en  $G \cup H$  pues ninguna arista tiene un extremo en  $S_1$  y el otro en  $S_2$ .

Ahora, denotemos el número de conjuntos independientes de cardinalidad  $k$  en  $G$  por  $a_k$  y de  $H$  por  $b_k$ , entonces el coeficiente en el término  $x^k$  en  $P_{G \cup H}(x)$  denotado por  $c_k$  está dado por  $\sum_{m=0}^k a_m b_{k-m}$ . Así,

$$\begin{aligned} P_{G \cup H}(x) &= \sum_{k=0}^{\alpha(G)+\alpha(H)} \sum_{m=0}^k a_m b_{k-m} x^k \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\alpha(G)} a_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\alpha(H)} b_k x^k \right) \\ &= P_G(x) \cdot P_H(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $P_{G \cup H}(x) = P_G(x) \cdot P_H(x)$ .  $\square$

El resultado anterior se puede generalizar a la unión finita de gráficas ajenas por pares.

**Corolario 2.1.** Sean  $G_1, \dots, G_l$  gráficas ajenas dos a dos. Si  $H = \bigcup_{i=1}^l G_i$  entonces

$$P_H(x) = \prod_{j=1}^l P_{G_j}(x).$$

*Demostración.* Por inducción sobre  $l$ , si  $l = 2$ , se cumple por la

proposición anterior. Ahora suponemos que para algún  $l \in \mathbb{N}$ ,  $l \geq 2$ , el corolario se cumple. Sean  $G_1, \dots, G_{l+1}$  gráficas ajenas dos a dos. Si  $H = \bigcup_{i=1}^l G_i$  entonces  $\bigcup_{i=1}^{l+1} G_i = H \cup G_{l+1}$  y por hipótesis inductiva y el teorema anterior tenemos que

$$P_{\bigcup_{i=1}^{l+1} G_i}(x) = P_{H \cup G_{l+1}}(x) = \prod_{i=1}^l P_{G_i}(x) \cdot P_{G_{l+1}}(x) = \prod_{i=1}^{l+1} P_{G_i}(x).$$

□

Por el corolario anterior es fácil notar que, si  $C_1, C_2, \dots, C_l$  son todas las componentes conexas de una gráfica  $G$ , entonces  $P_G(x) = \prod_{i=1}^l P_{C_i}(x)$ .

**Proposición 2.2.** (*Gutman y Harari, 1983*) *Para cualesquiera gráficas  $G$  y  $H$  pasa que*

$$P_{G+H}(x) = P_G(x) + P_H(x) - 1.$$

*Demostración.* Basta notar que cualquier vértice  $u$  de  $G$  y  $v$  de  $H$  son adyacentes en  $G + H$ , por lo que no existe ningún conjunto independiente que contenga tanto vértices de  $G$  como de  $H$ . Sin embargo, cada conjunto independiente de ambas gráficas sigue siéndolo en la suma. Si denotamos el número de conjuntos independientes de cardinalidad  $k$  en  $G$  por  $a_k$  y de  $H$  por  $b_k$ , entonces para  $k > 0$  el coeficiente  $c_k$  en  $G + H$  está dado por  $c_k = a_k + b_k$ , sin embargo,  $c_0 = 1 = a_0 + b_0 - 1$  pues solo el vacío tiene tamaño 0. Así,  $P_{G+H}(x) = P_G(x) + P_H(x) - 1$ . □

Las siguientes proposiciones nos hablan de los polinomios de independencia de algunas familias de gráficas de suma importancia en la teoría de gráficas.

**Proposición 2.3.** (Gutman y Harari, 1983) Para cualquier  $n \in \mathbb{Z}^+$ , sucede que  $P_{K_n}(x) = 1 + nx$ .

*Demostración.* Como cualesquiera dos vértices son adyacentes en una gráfica completa, tenemos que solo los conjuntos unitarios de los vértices y el vacío son conjuntos independientes en esta. Si denotamos el número de conjuntos independientes de cardinalidad  $k$  en  $K_n$  por  $i_k$ , tenemos que  $i_0 = 1$  y que  $i_1 = nx$ , tenemos que para cualquier  $i_k$  con  $k > 1$ ,  $i_k = 0$ . Así,  $P_{K_n}(x) = 1 + nx$ .  $\square$

**Proposición 2.4.** (Gutman y Harari, 1983) Para cualquier  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $P_{S_n}(x) = x + (1 + x)^{n-1}$ .

*Demostración.* Sea  $c$  el vértice de  $S_n$  con grado  $n - 1$ , es decir, para cualquier otro vértice  $u \in V(S_n)$ ,  $cu \in E(S_n)$ , dado que los vértices terminales en la estrella no son adyacentes entre sí, tenemos que cualquier conjunto de vértices es de hecho, un conjunto independiente, mientras que el único conjunto independiente de  $S_n$  que contiene a  $c$  es  $\{c\}$ . Tenemos que si  $i_k$  es el número de conjuntos independientes de tamaño  $k \neq 1$  en  $S_n$ , pasa que  $i_k = \binom{n-1}{k}$ , mientras que para los conjuntos independientes de cardinalidad 1,  $i_1 = \binom{n-1}{1} + 1$ . Así, obtenemos por la expresión binomial correspondiente que

$$P_{S_n}(x) = \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \right) + 1 = x + (1 + x)^{n-1}.$$

$\square$

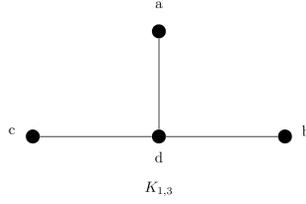


Fig. 19: Estrella con polinomio de independencia  $P_{S_4}(x) = 1 + 4x + 3x^2 + x^3$

El principio de inclusión y exclusión da pie a las ideas para el siguiente teorema pues analizar qué sucede eliminando ciertos conjuntos es una práctica común en la teoría de gráficas.

**Teorema 2.2.** (Hoede y Li, 1983 y 1994) Sea  $G = (V, E)$  una gráfica,  $u, v, w \in V$ ,  $uv \in E$  y  $U \subseteq V$  tales que la subgráfica inducida por  $U$  es una subgráfica completa de  $G$ . Se cumple

1.  $P_G(x) = P_{G-w}(x) + xP_{G-N[w]}(x)$ .
2.  $P_G(x) = P_{G-e}(x) - x^2P_{G-N(u) \cup N(v)}(x)$ .
3.  $P_G(x) = P_{G-U}(x) + x \sum_{v \in U} P_{G-N[v]}(x)$ .

*Demostración.* Para la primer afirmación, sea  $G$  una gráfica, y  $w$  un vértice de esta. Separamos los conjuntos independientes de  $G$  en dos. En la primera parte, consideramos los conjuntos independientes que no incluyan a  $w$ . En la segunda, a los que sí tienen a  $w$ . Notamos que esto nos genera una partición de los conjuntos independientes de  $G$ . El polinomio  $P_{G-w}(x)$  cuenta los conjuntos independientes de  $G$  que no tienen a  $w$ . El polinomio  $P_{G-N[w]}(x)$  cuenta a los conjuntos independientes que no incluyen a  $w$  ni a

su vecindad, para recuperar a los conjuntos independientes que incluyen a  $w$  basta tomar conjuntos independientes de  $G - N[w]$  y agregar  $w$  a estos, es decir, multiplicar por  $x$  cada elemento del polinomio de  $G - N[w]$ ; esto es, es agregar un elemento a cada conjunto independiente, así, podemos concluir que  $P_G(x) = P_{G-w}(x) + xP_{N[w]}(x)$ .

Para la segunda afirmación, probaremos equivalentemente que  $P_{G-e} = P_G(x) + x^2P_{G-N(u)\cup N(v)}(x)$ , donde  $uv = e$ . Para esto, notamos que cualquier conjunto independiente  $S$  de  $G - e$  con  $e = uv$  cumple que  $\{u, v\} \subseteq S$  o  $\{u, v\} \not\subseteq S$ . Si  $\{u, v\} \subseteq S$ , entonces  $S$  no es independiente en  $G$ , más aún, tenemos que  $S - \{u, v\}$  es independiente en  $G - (N(u) \cup N(v))$ , es decir, si  $S - \{u\}$  o  $S - \{v\}$  es un conjunto independiente de tamaño  $k$  en  $G - (N(u) \cup N(v))$ , entonces  $S$  es independiente de tamaño  $k + 1$  en  $G - e$ ; por lo que para cada elemento del polinomio estamos multiplicando por  $x^2$ . Si  $\{u, v\} \not\subseteq S$ , de hecho sucede que  $S$  es independiente en  $G$ , así que es contado en  $P_G(x)$ . Así, tenemos que  $P_{G-e}(x) = P_G(x) + x^2P_{G-N(u)\cup N(v)}(x)$ , es decir, que  $P_G(x) = P_{G-e}(x) - x^2P_{G-N(u)\cup N(v)}(x)$ .

Para la tercera parte. Sea  $U = \{u_1, \dots, u_r\}$  en  $G$  tal que la subgráfica inducida por  $U$  es completa. Consideremos  $S$  un conjunto independiente de tamaño  $k$  en  $G$ . Si para todo  $u \in U$  sucede que  $u \notin S$ , tenemos que  $S$  es independiente en  $G - U$ , así que  $S$  es contado en  $i_k$ , el  $k$ -ésimo coeficiente de  $P_{G-U}(x)$ .

Por otro lado, si para algún  $u \in U$  pasa que  $u \in S$ , entonces tenemos

que  $U - \{u\} \subseteq N(u) \not\subseteq S$ , de modo que  $S - \{u\}$  es un independiente de tamaño  $k - 1$  en  $G - N[u]$  y por ende es contado en  $i_{k-1}$ , el  $k - 1$ -ésimo término de  $P_{G-N[u]}(x)$ . Como esto pasa para cada  $u \in U$ , entonces hay tantos conjuntos independientes en  $G$  que tienen algún elemento de  $u$  como los hay en la suma  $\sum_{u \in U} P_{G-N[u]}(x)$ .

Finalmente, multiplicamos cada término por  $x$  pues al agregar el vértice  $u$  a cada conjunto independiente, estamos obteniendo un conjunto independiente  $S$  de tamaño  $k$  para  $G$ . Por lo tanto,  $P_G(x) = P_{G-U}(x) + x \sum_{v \in U} P_{G-N[v]}(x)$ .  $\square$

Sea  $G$  una gráfica simple, se define el *número de Fibonacci de  $G$*  como el número total de conjuntos independientes de vértices de  $G$  y se denota por  $F(G)$  [5].

**Observación 2.3.** *Notemos que  $F(G)$  puede obtenerse de  $P_G(x)$  al evaluar este en  $x = 1$ .*

*Demostración.* Basta notar que  $F(G) = \sum_{k=0}^{\alpha(G)} i_k$ , donde  $i_k$  es el  $k$ -ésimo coeficiente de  $P_G(x)$ .  $\square$

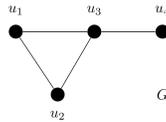


Fig. 20:  $G$  con  $F(G) = 2 + 4 + 1 = 7$  y con  $P_G(x) = 2x^2 + 4x + 1$

**Teorema 2.4.** (Helmut y Tichy, 1982) Si  $G$  y  $H$  son gráficas tales que  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ , entonces

$$F(G \cup H) = F(G) \cdot F(H).$$

*Demostración.* De la Observación 2.3 y la Proposición 2.1, como  $F_G = P_G(1)$ , pasa que  $F(G \cup H) = P_{G \cup H}(1) = P_G(1) \cdot P_H(1) = F(G) \cdot F(H)$ .  
□

**Teorema 2.5.** (Helmut y Tichy, 1982) Para cualquier gráfica  $G$  y  $u \in V(G)$  se tiene que

$$F(G) = F(G - u) + F(G - N[u]).$$

*Demostración.* De la Observación 2.3 y la Proposición 2.2, sucede que  $F(G) = P_G(1) = P_{G-u}(1) + P_{G-N[u]}(1) = F(G - u) + F(G - N[u])$ . □

Decimos que  $S \subseteq V(G)$  es *independiente máximo*, si  $|S| \geq |R|$  para cualquier  $R \subseteq V(G)$  conjunto independiente de  $G$ . Decimos que es *maximal* si para cualquier  $u \in V(G) - S$ ,  $S \cup \{u\}$  no es independiente.

Cabe notar que no todo conjunto independiente maximal es máximo.

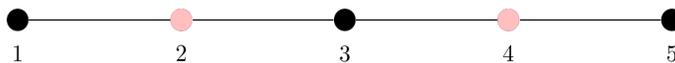


Fig. 21: El conjunto  $S = \{2, 4\}$  es independiente maximal y  $V \setminus S$  es independiente máximo

Decimos que una gráfica  $G$  está *bien cubierta* si todo conjunto independiente

maximal de  $G$  es también un conjunto independiente máximo. La gráfica  $G$  está *muy bien cubierta o completamente cubierta* si está bien cubierta, no contiene vértices aislados, y  $|V(G)| = 2\alpha(G)$ .

Si  $G = (V, E)$ ,  $V = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$ . Definimos  $G^*$  como la gráfica obtenida de  $G$  al agregarle una arista a cada vértice de  $G$  como sigue:

$$G^* = (V \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n\}, E \cup \{u_i v_i : 1 \leq i \leq n\}).$$

Observemos que  $G^*$  se puede ver como la  $G \odot K_1$ .

**Proposición 2.5.** (*Levit y Mandrescu, 2009*) *La gráfica  $G^*$  está bien cubierta, más aún, está completamente cubierta.*

*Demostración.* Notamos que  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  es el único conjunto independiente máximo de  $G^*$ , al agregarle cualquier vértice deja de ser independiente, y cualquier otro independiente contenido en este no es maximal.  $U$  tiene tamaño  $\frac{V(G^*)}{2}$ , por lo que,  $G^*$  está bien cubierta y su orden es en efecto  $2\alpha(G^*)$ .  $\square$

Sean  $G$  una gráfica con  $n$  vértices y  $m_k$  el número de apareamientos con  $k$  - aristas. El *polinomio de apareamiento* de  $G$  es

$$m_G(x) = \sum_{k \geq 0} m_k x^k.$$

Cabe notar que los apareamientos de tamaño  $k$  en  $G$  inducen conjuntos independientes de tamaño  $k$  en  $L(G)$ . Más aún, sucede que  $m_G(x) = P_{L(G)}(x)$ .

Decimos que una sucesión finita de números reales  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  es

*unimodal* si existe  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , donde  $a_k$  es llamado el *modo* de la sucesión, tal que  $a_0 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq a_k \geq a_{k+1} \dots \geq a_n$ , el modo es único si  $a_{k-1} < a_k > a_{k+1}$ .

Las siguientes sucesiones son unimodales:

- a) la sucesión 1, 2, 3, 3, 4, 2, 1, 1 es unimodal con modo 4, de modo único,
- b) la sucesión 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 es unimodal, con modo 1 no único,
- c) la sucesión 8, 9, 9, 9, 8, 7, 6, 5 es unimodal, de modo 9 y tampoco es único,
- d) la sucesión 1, 5, 8, 16, 16, 12, 0, 0, 0, 0, 0 es unimodal, de modo 16 que tampoco es único.

**Teorema 2.6.** (*Brown y Hoshino, 2008*) Si  $a_k$  denota el número de apareamientos de tamaño  $k$  en una gráfica, entonces la sucesión de estos números es unimodal.

*Demostración.* Denotamos a  $a_i(G)$  como el número de apareamientos de tamaño  $i$  aristas en  $G$ . Sea  $m$  la cardinalidad de un apareamiento máximo en  $G$ . Denotamos por  $r = r(G)$  al subíndice más pequeño tal que  $a_r \geq a_j$  con  $j \in \{1, \dots, k\}$  Por definición de  $m$  se cumple que es el mayor entero tal que  $a_m \neq 0$ . Probaremos las siguientes afirmaciones por inducción fuerte sobre el orden de  $G$ :

- a)  $a_0 < a_1 < \dots < a_r \geq a_{r+1} > \dots > a_m$ .
- b)  $r(G) - r(G - v) = 0$  ó  $r(G) - r(G - v) = 1$ .

Cuando  $G$  tiene un solo vértice entonces es trivial que es unimodal y se cumple por vacuidad la diferencia de los modos.

Supongamos que para toda gráfica  $G$  con orden menor a  $n$ , la sucesión de coeficientes de sus apareamientos es unimodal y cumple *a)* y *b)*. Ahora veamos que se cumple para  $n$ . Sea  $u$  un vértice en  $G$ , y consideremos  $N(u)$ . Cualquier apareamiento  $M$  de tamaño  $i$  cumple con alguna de estas opciones, o no tiene ninguna arista que incide en  $u$ , esto es, es un apareamiento en  $G - \{u\}$  (la cual cumple la hipótesis inductiva), o en otro caso existe  $v \in N(u)$  tal que  $M - uv$  es un apareamiento de tamaño  $i - 1$  en  $G - \{u, v\}$ . Así tendríamos que

$$a_i(G) = a_i(G - u) + \sum_{v \in N(u)} a_{i-1}(G - \{u, v\}).$$

Sea  $r = r(G - u)$ , por la hipótesis inductiva, para cualquier  $v \in N(u)$ ,  $r(G - u) - r(G - \{u, v\})$  es 0 o 1. Así, para cada  $i < r$  sabemos por la hipótesis inductiva que  $a_i(G - u) < a_{i+1}(G - u)$  y que  $a_{i-1}(G - \{u, v\}) < a_i(G - \{u, v\})$  por lo que al sumar estas desigualdades resulta que  $a_i(G) < a_{i+1}(G)$  para los  $i < r$ . Similarmente, para  $i > r$ , tenemos que  $a_i(G - u) > a_{i+1}(G - u)$  y  $a_{i-1}(G - \{u, v\}) \geq a_i(G - \{u, v\})$  y como la primer desigualdad es estricta al sumarlas también lo es, así que  $a_i(G) < a_{i+1}(G)$  para los  $i > r$ .

Ahora, si  $a_r(G) < a_{r+1}(G)$ , entonces  $r(G) = r(G - u) + 1$  o  $a_r(G) \geq a_{r+1}(G)$  en cuyo caso  $r(G) = r(G - u)$ . Cumpliendo tanto *a)* como *b)*.  $\square$

En la Figura 22, en  $G_1$ , podemos notar que el único apareamiento de tamaño 0, es el conjunto  $\emptyset$ , los apareamientos de tamaño 1 son  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ ,

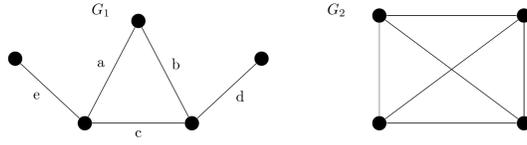


Fig. 22:  $G_1$  con  $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 3, a_3 = 0$  y  $G_2$  con  $a_0 = 1, a_1 = 6, a_2 = 3$

$\{d\}$ , y  $\{e\}$ , por lo que hay 5, y los apareamientos de tamaño 2 son  $\{a, d\}$ ,  $\{b, e\}$ , y  $\{c, d\}$ , es decir, 3 en total. Para toda  $k \geq 3$  hay 0 apareamientos de tamaño  $k$ .

Es decir, si  $a_k = |\{M \subseteq E(G) : M \text{ es un apareamiento y } |M| = k\}|$ , tenemos una sucesión de la siguiente forma,  $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 3, a_3 = 0$ . En la gráfica  $G_2$ , pasa algo parecido, pues podemos obtener por la cantidad de apareamientos de distintos tamaños la sucesión 1, 6, 3, 0.

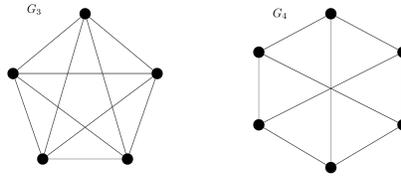


Fig. 23:  $G_3$  con  $a_0 = 1, a_1 = 10, a_2 = 15, a_3 = 0$  y  $G_4$  con  $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 18, a_3 = 6, a_4 = 0$

Finalmente, al tomar las gráficas  $G_3$  y  $G_4$  en la Figura 23, es fácil verificar que al contar los apareamientos de todos los tamaños también generamos las sucesiones 1, 10, 15, 0 y 1, 4, 18, 6, 0; respectivamente.

Un polinomio  $P(x)$  es llamado *unimodal* si la sucesión de sus coeficientes es unimodal.

**Teorema 2.7.** (Brown y Hoshino, 2008) *El polinomio de independencia de la gráfica de líneas de cualquier gráfica es un polinomio unimodal.*

*Demostración.* Notemos que  $P_{L(G)}(x)$  es el polinomio de apareamiento de  $G$ . Por el Teorema 2.6 los coeficientes de  $P_{L(G)}$  forman una sucesión unimodal, así que es un polinomio unimodal.  $\square$

Los conceptos anteriores son de gran ayuda cuando se trata de obtener el polinomio de independencia para ciertas gráficas y sus complementos, como Levit y Mandrescu [10] demostraron en varios de sus textos y como trataremos de señalar en la sección posterior.

## 2.1 Polinomio de independencia de $C_n^d$

Recordemos que  $C_n^{s_1, s_2, \dots, s_k}$ , la gráfica circulante con saltos  $s_1, s_2, \dots, s_k$ , es la gráfica con vértices  $1, \dots, n$  tal que el vértice  $i$  es adyacente al vértice  $i \pm s_j$  (mód  $n$ ) con  $1 \leq j \leq k$ . La  $d$ -ésima potencia de una gráfica  $G$ , denotada por  $G^d$ , con  $V(G) = V(G^d)$  y para cualesquiera  $u, v \in V(G^d)$ ,  $uv \in E(G^d)$  si y solo si  $d(u, v) \leq d$ .

En la circulante  $C_n^{1, 2, \dots, d}$  dos vértices son adyacentes si y solo si su distancia geodésica es a lo más  $d$ , esto es,  $uv$  es una arista si y solo si  $d(u, v) \leq d$ . En este sentido, las gráficas circulantes de salto consecutivo coinciden con  $C_n^d$ . Para facilitar la escritura, adoptaremos la notación de potencia para referirnos a estas gráficas circulantes de salto consecutivo  $1, 2, \dots, d$ , ya que son estas las

gráficas que estaremos trabajando.

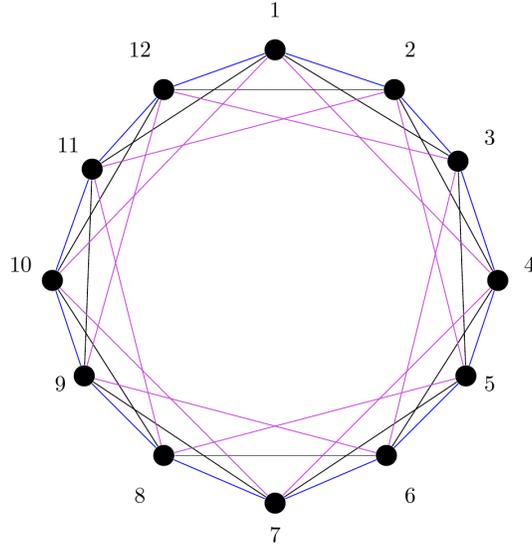


Fig. 24:  $C_{12}^3$

En esta sección, se tratará de determinar el polinomio  $P_{C_n^d}(x)$ , para todo  $n \geq 1$ . Cabe notar que cuando  $n \leq 2d + 1$ , sucede que  $C_n^d$  es de hecho la gráfica completa  $K_n$ , es decir, que  $P_{C_n^d}(x) = P_{K_n}(x) = 1 + nx$ .

Ya conocemos el polinomio de independencia cuando  $n \leq 2d + 1$ . A continuación se considera el caso en el cual  $n \geq 2d + 2$ .

**Teorema 2.8.** *(Brown y Hoshino, 2008) Sea  $d \geq 1$ . Se cumple que  $P_{C_n^d}(x) = P_{C_{n-1}^d}(x) + x \cdot P_{C_{n-d-1}^d}(x)$  para todo  $n \geq 2d + 2$ .*

*Demostración.* Como  $n \geq 2d + 2$ , pasa que  $\alpha(C_n^d) \geq 2$ , pues existen al menos dos vértices  $u$  y  $v$  tales que  $d(u, v) \geq d$ , es decir, que no son adyacentes. Para facilitar la notación, a partir de ahora denotamos el coeficiente para el

término  $x^k$  en un polinomio  $P(x)$  por  $[x^k]P(x)$ . Sucede que  $[x^0]P_{C_n^d}(x) = [x^0]P_{C_{n-1}^d}(x) + [x^0](x \cdot P_{C_{n-d-1}^d}(x))$  pues únicamente el conjunto  $\emptyset$  es independiente de tamaño 0 en las gráficas  $C_n^d$  y  $C_{n-1}^d$ , lo cual quiere decir que  $[x^0]P_{C_n^d}(x) = 1 = [x^0]P_{C_{n-1}^d}(x)$ , además de que  $[x^0](x \cdot P_{C_{n-d-1}^d}(x)) = 0$ . También se cumple que  $[x^1]P_{C_n^d}(x) = [x^1]P_{C_{n-1}^d}(x) + [x^1](x \cdot P_{C_{n-d-1}^d}(x))$  pues  $[x^1]P_{C_n^d}(x) = n$ ,  $[x^1]P_{C_{n-1}^d}(x) = n - 1$  y como en  $x \cdot P_{C_{n-d-1}^d}(x)$  el coeficiente de  $x^1$  es  $[x_0]P_{C_{n-d-1}^d}(x)$ , entonces  $[x^1](x \cdot P_{C_{n-d-1}^d}(x)) = 1$ . Mostremos ahora fijando  $k \geq 2$ , que  $[x^k]P_{C_n^d}(x) = [x^k]P_{C_{n-1}^d}(x) + [x^k](x \cdot P_{C_{n-d-1}^d}(x))$ .

Sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  un conjunto independiente de cardinalidad  $k$  en  $C_n^d$ . Notamos que  $0 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_k \leq n - 1$  pues un conjunto de vértices de tamaño  $n$  no es independiente. Para cualesquiera dos vértices  $v_i$  y  $v_j$  que no sean adyacentes en  $C_n^d$ , sucede que  $|v_i - v_j| > d$ . Así, tenemos para  $1 \leq i \leq k - 1$ , que:

1.  $v_{i+1} - v_i > d$ .
2.  $n + (v_1 - v_k) > d$ .

Ahora, si  $S^k$  es el conjunto de todos los conjuntos independientes de tamaño  $k$  en  $C_n^d$ , lo podemos separar de la siguiente manera:

$$S_1 = \{\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \text{ es independiente en } C_n^d : v_k - v_{k-1} = d + 1\} \text{ y}$$

$$S_2 = \{\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \text{ es independiente en } C_n^d : v_k - v_{k-1} > d + 1\}.$$

Claramente,  $S^k = S_1 \cup S_2$  y  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ , por lo que se tiene que

$$[x^k]P_{C_n^d} = |S_1| + |S_2|.$$

Afirmación 1: Pasa que  $|S_1| = [x^{k-1}]P_{C_{n-d-1}^d}$ .

Creemos una función biyectiva  $\phi$  entre  $S_1$  y los conjuntos independientes en  $C_{n-d-1}^d$  de tamaño  $k-1$ . Esto probará la igualdad deseada.

Para cada elemento de  $S_1$ , asignamos a  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  el conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ .

Como  $v_k = v_{k-1} + (d+1)$ , sucede que  $\phi$  es inyectiva. Ahora construimos  $C'_n$  obtenida de  $C_n^d$  al contraer algunos vértices de la siguiente manera, si  $v$  en  $\{v_k - d, \dots, v_k\}$ , entonces  $v$  es enviado a  $v + d + 1$  (mód  $n$ ). Ahora observamos lo siguiente.

**Observación 2.9.** *Primero,  $C'_n$  tiene  $n - d - 1$  vértices.*

Esto sucede ya que  $\{v_k - d, \dots, v_k\}$  tiene cardinalidad  $d + 1$  y son los vértices que ya no están en  $C'_n$ . Si renombramos los vértices, primero  $v_j = u_j$  para  $j \leq k$  y a partir de  $v_{k+1}$  de manera que los recorramos  $d + 1$  lugares, es decir,  $v_j = u_{j-d-1}$  cuando  $j \geq k + 1$  (mód  $n - d - 1$ ). Cabe notar que después de la contracción, los vértices desde  $v_k - d$  hasta  $v_k$  no se encuentran en la nueva gráfica, así que a la hora de regresarlos pasa que  $j \geq k + d + 1$ .

**Observación 2.10.** *Además, los vértices  $u_i$  y  $u_j$  son adyacentes si y solo si  $i \pm j \leq d$ .*

Consideremos dos vértices  $u_i$  y  $u_j$  con  $u_i$  adyacente a  $u_j$  y veamos los

siguientes casos:

Si  $i = 1$ ,  $u_i$ , entonces se cumple que  $v_{i+d+1} = v_1$  (mód  $n$ ). En este caso, cumple las adyacencias de  $v_i$ , como  $v_{i+d+1}$  en la contracción ya no es adyacente a aquellos vértices menores a  $v_k$ , pasa que  $u_1$  tiene solo las adyacencias correspondientes a  $v_1$ . Por otro lado, puede suceder que  $i, j \leq k$ , en este caso ambos son  $v_i$  y  $v_j$  respectivamente, los cuales ya eran adyacentes.

Supongamos entonces que  $i > k$ , en este caso  $u_i$  viene de  $v_{i+d+1}$  y este vértice cumple ser adyacente a  $v_j$  solo si  $i + d + 1 - d - 1 = i$  lo era en  $C_n^d$ , es decir, cuando  $i \pm j \leq d$ . Si  $i > k$  y  $j > k$  entonces ambos vienen de  $v_{i+d+1}$  y  $v_{j+d+1}$  respectivamente, y estos son adyacentes si y solo si ya lo eran en  $C_n^d$ . Lo anterior da pie a que  $C'_n$  es isomorfo con  $C_{n-d-1}^d$ . Lo que hicimos fue de hecho definir la función  $\psi$  de la siguiente manera:

$$\psi : V(C_{n-d-1}^d) \rightarrow V(C'_n) \text{ tal que}$$

$$\psi(v_i) = \begin{cases} \psi(v_i) = u_i & \text{si } i < k \\ \psi(v_i) = u_{i+d+1} & \text{si } i \geq k. \end{cases}$$

Para ver que  $\psi$  es un isomorfismo basta ver que vecindades van a dar a vecindades, es decir, para cualquier  $v \in V(C_{n-d-1}^d)$ , sucede que si  $u \in N(v)$ , entonces  $\psi(u) \in N(\psi(v))$ .

Notamos que los vértices que tienen distancia menor o igual a  $d$ , de hecho son adyacentes en ambas gráficas, más aún, si dos vértices no son vecinos en la imagen, pasa que a la hora de ser regresados en la circulante original,

estos no podrían ser adyacentes por la observación anterior. De lo contrario, existirían dos vértices  $v_j$  y  $v_i$ , cuya distancia es menor o igual a  $d$ . Así, en la gráfica obtenida después de hacer la contracción existen  $v, u$  con  $d(u, v) \leq d$ , pero esto no es posible. Lo anterior prueba que de hecho,  $C'_n$  puede ser vista como la gráfica circulante de orden  $n - d - 1$  con salto consecutivo hasta  $d$ . Así,  $C'_n$  es isomorfo a  $C_{n-d-1}^d$ .

Afirmamos que  $\phi(v_1, v_2, \dots, v_k)$  es un conjunto independiente de  $C_n^d$  si y solo si  $\{v_1, v_2, \dots, v_k - 1\}$  es un elemento de  $S_1$ .

Tenemos que  $\phi(v_1, v_2, \dots, v_k)$  es un conjunto independiente de  $C'_n \cong C_{n-d-1}^d$  si y solo si

1.  $v_{i+1} - v_i > d$  para  $1 \leq i \leq k - 2$ .
2.  $(n - d - 1) + v_1 - v_{k-1} > 2$ .

También,  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  es un elemento de  $S_1$  si y solo si

1.  $v_{i+1} - v_i > d$  para  $1 \leq i \leq k - 2$ .
2.  $v_k - v_{k-1} = d + 1$ .
3.  $n + v_1 - v_k > d$ .

La condición  $v_{i+1} - v_i > d$  para  $1 \leq i \leq k - 2$  es claramente cierta en ambos casos.

Si  $\phi(v_1, v_2, \dots, v_k) = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$  es un conjunto independiente de  $C'_n$ , entonces  $(n - d - 1) + v_1 - v_{k-1} > d$ . Sea  $v_k = v_{k-1} + (d + 1)$ . Entonces,  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\}$  es un conjunto independiente en  $C'_d$  pues  $(n - d - 1) + v_1 - (v_k - (d + 1)) > d$ , es decir,  $n + v_1 - v_k > d$ . Por lo tanto,  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\}$  está en  $S_1$ .

Ahora probemos el regreso. Si  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\}$  está en  $S_1$ , entonces  $v_k - v_{k-1} = d + 1$  y  $n + v_1 - v_k > d$ . Así,  $(v_k - v_{k-1}) + (n + v_1 - v_k) > 2d + 1$ , es decir,  $(n - d - 1) + v_1 - v_{k-1} > d$ . Así,  $\phi(v_1, v_2, \dots, v_k)$  es independiente en  $C'_n$ . Por lo anterior, hemos establecido que  $\phi$  es una biyección entre los conjuntos en  $S_1$  y los conjuntos independientes de cardinalidad  $k - 1$  en  $C'_n$  que es isomorfa a  $C^d_{n-d-1}$ . Finalmente,  $|S_1| = [x^{k-1}]P_{C_{n-d-1}}$ . Con esto concluimos la demostración de la Afirmación 1.

Afirmación 2: Sucede que  $|S_2| = [x^k]P_{C^d_{n-1}}$ .

Ahora daremos una biyección  $\phi$  entre  $S_2$  y los conjuntos independientes de tamaño  $k$  en  $C^d_{n-1}$ . Para cada elemento  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  de  $S_2$ , definimos  $\phi(v_1, v_2, \dots, v_k) = \{v_1, v_2, \dots, v_k - 1\}$ .

Observamos que esta función es inyectiva ya que  $v_k - 1$  no causa problemas, pues la distancia entre  $v_{k-1}$  y  $v_k$  es mayor a 1. Construimos la gráfica  $C''^d_n$  contrayendo el vértice  $v_k$  a  $v_k - 1$ .

$C''^d_n$  es isomorfa a  $C^d_{n-1}$  pues los vértices que eran adyacentes a  $v_k$  son ahora adyacentes a  $v_{k-1}$ . Es decir, que si  $v_k$  está a salto  $d$  o menor de otro

vértice,  $v_k - 1$  está a salto  $d - 1$  o menor de ese mismo vértice, y a la hora de contraer, los vértices a salto  $d$  con  $v_k$  ahora están a distancia  $d$  de  $v_{k-1}$  por lo que sigue siendo la gráfica circulante de salto consecutivo hasta  $d$  también cuando se contrae.

En este caso el isomorfismo entre las dos gráficas es el siguiente:

$\phi : V(C_{n-1}^d) \rightarrow (C_n''^d)$  tal que

$$\phi(v_i) = \begin{cases} \phi(v_i) = u_i & \text{si } i \leq k - 1 \text{ y} \\ \phi(v_i) = u_{i-1} & \text{si } i < k. \end{cases}$$

Además, afirmamos que  $\phi(v_1, v_2, \dots, v_k)$  es un conjunto independiente de  $C_n''^d$  si y solo si  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  es un elemento de  $S_2$ .

Primero notamos que  $\phi(v_1, v_2, \dots, v_k)$  es un conjunto independiente en  $C_n''^d$  si y solo si

1.  $v_{i+1} - v_i > d$  para  $1 \leq i \leq k - 2$ .
2.  $(v_k - 1) - v_{k-1} > d$ .
3.  $(n - 1) + v_1 - (v_k - 1) > d$ .

También  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  está en  $S_2$  si y solo si

1.  $v_{i+1} - v_i > d$  para  $1 \leq i \leq k - 2$ .
2.  $v_k - v_{k-1} > d + 1$ .

3.  $n + v_1 - v_k > d$ .

Los dos conjuntos de condiciones son equivalentes claramente. Así que la biyección se da, por lo que  $|S_2| = [x^k]P_{C_{n-1}^d}$ . Más aún, como ambas afirmaciones se cumplen, tenemos que  $P_{C_n^d}(x) = P_{C_{n-1}^d}(x) + x \cdot P_{C_{n-d-1}^d}(x)$ .  $\square$

Aún no sabemos que sucede cuando  $n < 2d + 1$ , el siguiente teorema nos proporciona una fórmula para el caso en el que  $n \geq d + 1$ .

**Teorema 2.11.** (Hoshino y Brown, 2008) Sea  $n \geq d + 1$ . Entonces,

$$P_{C_n^d}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{d+1} \rfloor} \frac{n}{n-dk} \binom{n-dk}{k} x^k.$$

*Demostración.* Por el Teorema 2.8, cuando  $n \geq 2d + 2$  tenemos que  $P_{C_n^d}(x) = P_{C_{n-1}^d}(x) + x \cdot P_{C_{n-d-1}^d}(x)$ . Para calcular el polinomio de independencia cuando  $n < 2d + 1$  haremos uso de funciones generadoras.

Sea

$$f_n = \begin{cases} P_{C_n^d}(x) & \text{para } n \geq d + 1 \\ 1 & \text{para } 1 \leq n \leq d \\ d + 1 & \text{para } n = 0. \end{cases}$$

Notamos que cada  $f_n$  es un polinomio en  $x$ .

Verifiquemos  $f_n = f_{n-1} + x \cdot f_{n-d-1}$  para todo  $n \geq d + 1$ .

Cuando  $n \geq 2d + 2$ , por el Teorema 2.8 se cumple. Cuando  $d + 2 \leq n \leq 2d + 1$ , la gráfica es la completa de orden  $n$ , en cuyo caso:

$$f_n = 1 + nx = (1 + (n-1)x) + x \cdot 1 = f_{n-1} + x \cdot f_{n-d-1}.$$

Finalmente, cuando  $n = d + 1$ , la gráfica es la completa de orden  $n$ ,

$$f_{d+1} = 1 + (d+1)x = f_d + x \cdot f_0.$$

Así,  $f_n = f_{n-1} + x \cdot f_{n-d-1}$ , para  $n \geq d + 1$ . Sea ahora

$F(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} f_p y^p$ . A continuación veremos que para cada  $n \geq d + 1$ ,

$$[x^k y^n]F(x, y) = \binom{n-dk}{k} + d \binom{n-dk-1}{k-1} = \frac{n}{n-dk} \binom{n-dk}{k}.$$

Como  $f_n = f_{n-1} + x \cdot f_{n-d-1}$ , para cualquier  $n \geq d + 1$ , tenemos

$$\sum_{n=d+1}^{\infty} f_n y^n = \sum_{n=d+1}^{\infty} f_{n-1} y^n + x \cdot \sum_{n=d+1}^{\infty} f_{n-d-1} y^n. \quad (1)$$

Notamos que podemos ver a  $\sum_{n=d+1}^{\infty} f_n y^n$  de la siguiente manera

$$\sum_{n=d+1}^{\infty} f_n y^n = F(x, y) - \sum_{n=0}^d f_n y^n. \quad (2)$$

Por otro lado,

$$\sum_{n=d+1}^{\infty} f_{n-1} y^n = \sum_{n=d+1}^{\infty} f_{n-1} y^{n-1} y = y \left( \sum_{n-1=d}^{\infty} f_{n-1} y^{n-1} \right),$$

más aún,

$$\sum_{n=d+1}^{\infty} f_{n-1}y^n = y \left( F(x, y) - \sum_{n=0}^{d-1} f_n y^n \right). \quad (3)$$

De manera similar, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=d+1}^{\infty} f_{n-d-1}y^n &= \sum_{n=d+1}^{\infty} f_{n-d-1}y^{d+1}y^{n-d-1} = y^{d+1} \sum_{n=d+1}^{\infty} f_{n-d-1}y^{n-d-1} \\ &= y^{d+1} \sum_{n-d-1=0}^{\infty} f_{n-d-1}y^{n-d-1} = y^{d+1}F(x, y). \end{aligned} \quad (4)$$

Así, sustituyendo (2), (3) y (4) en (1) obtenemos:

$$\sum_{n=d+1}^{\infty} f_n y^n = \sum_{n=d+1}^{\infty} f_{n-1}y^n + x \cdot \sum_{n=d+1}^{\infty} f_{n-d-1}y^n,$$

lo que se convierte en

$$F(x, y) - \sum_{n=0}^d f_n y^n = y \left( F(x, y) - \sum_{n=0}^{d-1} f_n y^n \right) + xy^{d+1}F(x, y)$$

y factorizando llegamos a que

$$\begin{aligned} F(x, y)(1 - y - xy^{d+1}) &= f_0 + f_1y + \sum_{n=2}^d f_n y^n - f_0y - \sum_{n=1}^{d-1} f_n y^{n+1} \\ F(x, y)(1 - y - xy^{d+1}) &= f_0 + f_1y + \sum_{n=2}^d f_n y^n - f_0y - \sum_{n=2}^d f_{n-1}y^n. \end{aligned}$$

Notamos que además

$$\sum_{n=2}^d f_n y^n = \sum_{n=2}^d y^n = \sum_{n=2}^d f_{n-1}y^n$$

por como fue definida  $f_n$ , ya que  $f_n = 1$  con  $1 < n \leq d$ . Más aún, tenemos que  $f_0 = d + 1$ , y en particular que  $f_1 = 1$ . Así, al sustituir obtenemos la igualdad

$$F(x, y)(1 - y - xy^{d+1}) = (d + 1) + y - (d + 1)y = d + 1 + y - dy - y = d + 1 - dy;$$

es decir,

$$F(x, y) = (d + 1 - dy)(1 - y - xy^{d+1})^{-1}$$

$$F(x, y) = \frac{d + 1 - dy}{1 - (y + xy^{d+1})}.$$

Rápidamente recordamos que la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$  converge y su suma es  $\frac{a}{1-r}$ . Lo anterior resulta en que

$$F(x, y) = (d + 1 - dy) \sum_{t=0}^{\infty} (y + xy^{d+1})^t = (d + 1 - dy) \sum_{t=0}^{\infty} (y(1 + xy^d))^t$$

y factorizando

$$F(x, y) = (d + 1 - dy) \sum_{t=0}^{\infty} y^t (1 + xy^d)^t.$$

Ahora, para cada  $t \in \mathbb{Z}^+$ , sucede que  $y^t(1 + xy^d)^t$  se puede ver como  $\sum_{u=0}^{\infty} \binom{t}{u} x^u y^{t+du}$ , correspondiente a:

$$y^t(1 + xy^d)^t = y^t \sum_{u=0}^{\infty} \binom{t}{u} x^u y^{du} = \sum_{u=0}^{\infty} \binom{t}{u} x^u y^{t+du}.$$

Así

$$F(x, y) = (d + 1 - dy) \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \binom{t}{u} x^u y^{t+du}$$

$$F(x, y) = (d + 1) \sum_{t,u=0}^{\infty} \binom{t}{u} x^u y^{t+du} - d \sum_{t,u=0}^{\infty} \binom{t}{u} x^u y^{t+du+1}.$$

Ahora, queremos extraer  $[x^k y^n]F(x, y)$ . Para esto notemos que el coeficiente se puede separar en las dos partes anteriores:

$$[x^k y^n]F(x, y) = [x^k y^n](d+1) \sum_{t,u=0}^{\infty} \binom{t}{u} x^u y^{t+du} - [x^k y^n]d \sum_{t,u=0}^{\infty} \binom{t}{u} x^u y^{t+du+1}.$$

Si obtenemos los coeficientes binomiales correspondientes en ambos polinomios, tenemos que

$$[x^k y^n](d+1) \sum_{t,u=0}^{\infty} \binom{t}{u} x^u y^{t+du} = (d+1) \binom{n-dk}{k}$$

ya que en la suma, al tener el termino con  $x^k$  y querer  $y^n$  pasa que  $u = k$  y que  $t + dk = n$ , por lo cual  $n - dk = t$ .

Por otro lado,  $[x^k y^n]d \sum_{t,u=0}^{\infty} \binom{t}{u} x^u y^{t+du+1} = d \binom{n-dk-1}{k}$  ya que en este caso  $k = u$  hace que  $t + du + 1 = n$ , es decir, que  $t = n - dk - 1$ .

Los dos coeficientes resultan en:

$$[x^k y^n]F(x, y) = (d+1) \binom{n-dk}{k} - d \binom{n-dk-1}{k}.$$

Al distribuir, obtenemos

$$\begin{aligned} & (d+1) \binom{n-dk}{k} - d \binom{n-dk-1}{k} = \\ & \binom{n-dk}{k} + d \left[ \binom{n-dk}{k} - \binom{n-dk-1}{k} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Ahora, recordemos la siguiente identidad de Pascal:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k},$$

de este modo,

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$$

entonces podemos aplicarla y de lo anterior, tendríamos específicamente

que

$$\binom{n-dk}{k} - \binom{n-dk-1}{k} = \binom{n-dk-1}{k-1}$$

sustituyendo (5),

$$\binom{n-dk}{k} + d\left[\binom{n-dk}{k} - \binom{n-dk-1}{k}\right] = \binom{n-dk}{k} + d\binom{n-dk-1}{k-1}.$$

Desarrollando, resulta que

$$\begin{aligned} \binom{n-dk}{k} + d\binom{n-dk-1}{k-1} &= \frac{(n-dk)!}{k!(n-dk-k)!} + \frac{kd(n-dk-1)!}{k!(n-dk-k)!} \\ &= \frac{(n-dk)! + kd(n-dk-1)!}{k!(n-dk-k)!} \\ &= \frac{(n-dk-1)![n-dk+dk]}{k!(n-dk-k)!} \\ &= \frac{n(n-dk-1)!}{k!(n-dk-k)!} \\ &= \frac{(n-dk)}{n-dk} \cdot \frac{n(n-dk-1)!}{k!(n-dk-k)!} \\ &= \frac{n}{n-dk} \left[ \frac{(n-dk)(n-dk-1)}{k!(n-dk-k)!} \right] \\ &= \frac{n}{n-dk} \binom{n-dk}{k}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$[x^k]P_{C_n^d}(x) = [x^k y^n]F(x, y) = \frac{n}{n-dk} \binom{n-dk}{k}.$$

Observamos que el coeficiente no es cero (por las combinaciones) cuando  $n - dk \geq k$ , es decir,  $n \geq dk + k = k(d + 1)$ , que equivale a que  $k \leq \frac{n}{d+1}$ . Lo anterior determina el grado del polinomio, el cual sería  $\lfloor \frac{n}{d+1} \rfloor$ .

Así, podemos concluir que en efecto,  $P_{C_n^d}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{d+1} \rfloor} \frac{n}{n-dk} \binom{n-dk}{k} x^k$ .  $\square$

Hasta el momento, hemos encontrado una fórmula para el polinomio de independencia de gráficas de salto consecutivo  $C_n^d$ .

Ahora, daremos una fórmula para  $P_{\overline{C_n^d}}(x)$ , el polinomio de independencia del complemento de  $C_n^d$ .

## 2.2 Polinomio de independencia de $\overline{C_n^d}$

### 2.2.1 Casos particulares $n = 2d + 2$ , $n = 2d + 3$ y $n \geq 3d + 1$

A continuación nos enfocamos en obtener el polinomio de independencia del complemento de circulantes de salto consecutivo. En esta sección, analizaremos los siguientes casos: cuando  $n = 2d + 2$ ,  $n = 2d + 3$ ,  $n \geq 3d + 1$ . El caso en el que  $2d + 4 \leq n \leq 3d$ , será resuelto en la siguiente sección, mediante el caso general  $n \geq 2d + 2$ . Aunque el caso general también incluye los primeros 3 casos, los analizaremos por separado ya que son casos interesantes dada la forma en que podemos expresar su polinomio de independencia.

**2.2.1.1 Caso  $n = 2d + 2$**

Notamos que cuando  $n = 2d + 2$ , pasa que  $\overline{C_n^d}$  es la unión ajena de  $d + 1$  copias de  $K_2$ , ya que la cantidad de vértices es par, y los vértices que no tienen saltos son aquellos opuestos entre sí, es decir, los vértices  $i, j$  tales que  $i \pm j = d + 1$  (mód  $n$ ), forman una arista en  $\overline{C_n^d}$ . Así, por el corolario de la Proposición 2.1, tenemos que

$$P_{\overline{C_n^d}}(x) = \prod_{i=1}^{d+1} P_{K_2}(x) = (P_{K_2}(x))^{d+1} = (1 + 2x)^{d-1}.$$

**2.2.1.2 Caso  $n = 2d + 3$**

Ahora, si  $n = 2d + 3$ , entonces  $\overline{C_n^d}$  es simplemente el ciclo  $C_{2d+3}$ . Para ver lo anterior, basta notar que el vértice  $i$  será adyacente al vértice  $i + (d + 1)$  y al vértice  $i - (d + 1)$ , pues  $-(d + 1) \cong d + 2$  (mód  $2d + 3$ ). De hecho, el ciclo que se forma con todos los vértices de la gráfica se puede ver como

$$1, d + 2, 2d + 3, d + 1, 2d + 2, d, 2d + 1, d - 1, 2d, \dots, 2, d + 3, 1.$$

Así, por el Teorema 2.11, el polinomio de independencia es  $P_{C_{2d+3}}(x)$ .

**2.2.1.3 Caso  $n \geq 3d + 1$**

Basta ver a  $\overline{C_n^d}$  como una gráfica circulante con saltos  $d + 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Primero notamos que en la gráfica  $C_n^d$ , ningún vértice  $i$  es adyacente a los vértices  $i + d + 1, i + d + 2, \dots, i + n - d$ , por lo que en el complemento, estas adyacencias

sucedan. Esto es, la gráfica del complemento de hecho puede verse como una gráfica circulante también. Lo anterior da pie al siguiente teorema.

**Teorema 2.12.** (Hoshino, 2007) Sea  $n \geq 3d + 1$ , pasa que  $\overline{C}_n^d = C_n^{d+1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  y  $P_{\overline{C}_n^d}(x) = 1 + nx(1+x)^d$ .

*Demostración.* La gráfica tiene vértices  $1, 2, \dots, n$  en la cual cada vértice  $i$  es adyacente a los vértices  $i + (d + 1), i + (d + 2), \dots, i + (n - d + 1)$  (mód  $n$ ). El vértice  $i$  está presente en  $\binom{d}{k-1}$  subconjuntos independientes de tamaño  $k$  con  $(k \geq 1)$  del subconjunto de vértices  $\{i, i + 1, \dots, i + d\}$  con los vértices considerados módulo  $n$ , esto es, pues el conjunto  $i + 1, \dots, i + d$ , tiene tamaño  $d$ . Notemos que para los conjuntos independientes que tienen a  $i$  y algún vértice de  $j \in \{i - 1, i - 2, \dots, i - d\}$ , basta considerar los  $\binom{d}{k-1}$  subconjuntos independientes del conjunto  $\{j + 1, \dots, j + d\}$  que tienen a  $j$ .

Conforme  $i$  corre por cada uno de los  $n$  vértices, contamos cada conjunto independiente de tamaño  $k$  una vez exactamente. Así

$$[x^k]P_{C_n(d)}(x) = n \binom{d}{k-1} \text{ para } k \geq 1 \text{ y de eso se sigue que}$$

$$P_{\overline{C}_n^d}(x) = 1 + \sum_{k=1}^d n \binom{d-1}{k-1} x^k = 1 + n \sum_{k-1=0}^d n \binom{d}{k-1} x^{k-1} x =$$

$$1 + \sum_{k-1=0}^d nx \binom{d}{k-1} x^{k-1} =$$

$$1 + nx \left( \sum_{k-1=0}^d \binom{d-1}{k-1} x^{k-1} \right) = 1 + nx(1+x)^d.$$

$$P_{\overline{C}_n^d}(x) = 1 + nx \left( \sum_{l=0}^d \binom{d}{l} x^l \right) = 1 + nx(1+x)^d.$$

Por lo tanto,  $P_{C_n^d}(x) = 1 + nx(1+x)^d$ .  $\square$

## 2.2.2 Caso general $n \geq 2d + 2$

### 2.2.2.1 Herramientas para la demostración del caso en el que $2d + 4 \leq n \leq 3d$

Los siguientes conceptos abonarán a la resolución del teorema que trata de los complementos de las gráficas circulantes de salto consecutivo, cuando  $2d + 4 \leq n \leq 3d$ . Estudiaremos la estructura de ciertas sucesiones y la relación que tienen con los conjuntos independientes para facilitar el cálculo del polinomio de independencia de estas familias de gráficas.

### 2.2.2.2 Sucesiones de diferencia y sucesiones válidas

Para cada  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  subconjunto de vértices de la gráfica  $G$  de orden  $n$ , donde los vértices son  $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_k \leq n$ , la *sucesión de diferencia* es

$$(d_1, d_2, \dots, d_k) = (v_2 - v_1, v_3 - v_2, \dots, v_k - v_{k-1}, n + v_1 - v_k).$$

Notemos que los  $d_i$  representan la distancia entre los índices de los vértices correspondientes.

**Observación 2.13.**  $\sum_{i=1}^k d_i = n$  pues  $(v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots + (v_k - v_{k-1}) + (n + v_1 - v_k) = (v_1 - v_1) + (v_2 - v_2) + \dots + n = 0 + 0 + \dots + n = n$ .

**Observación 2.14.** *Sucede que  $v_j = v_1 + \sum_{i=1}^{j-1} d_i$  para cada  $1 \leq j \leq k$  pues*

$$v_1 + \sum_{i=1}^{j-1} d_i = v_1 + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots + (v_j - v_{j-1}) = (v_1 + v_2 + \dots + v_{j-1}) - (v_1 + v_2 + \dots + v_{j-1}) + v_j = v_j.$$

Sean  $i, j$  enteros  $1 \leq i, j \leq k$ . La subsucesión cíclica de la sucesión de diferencia  $D$  del término  $i$  al término  $j$  es

$$D_{i,j} = \begin{cases} (d_i, d_{i+1}, \dots, d_{j-1}, d_j) & \text{con } i \leq j \\ (d_i, d_{i+1}, \dots, d_k, d_1, d_2, \dots, d_j) & \text{con } i > j \end{cases}$$

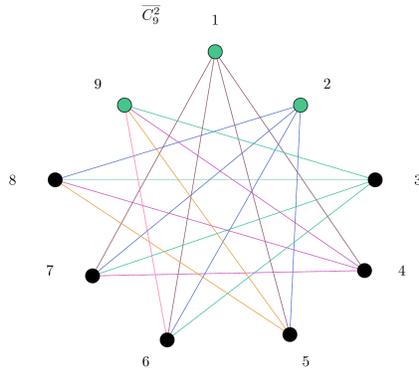


Fig. 25: En,  $\overline{C_9^{1,2}}$  la sucesión de diferencia dada por  $I = \{1, 2, 9\}$  es  $D_I = (1, 7, 1)$

En la Figura 25 sucede que  $D_{2,1} = (7, 1, 1)$  y  $D_{3,2} = (1, 1, 7)$ ,  $D_1 = (1)$  y  $D_{1,2} = (1, 7)$  son algunas subsucesiones cíclicas de  $D_I$ .

La sucesión de diferencia  $D = (d_1, d_2, \dots, d_k)$  de la gráfica circulante  $C_n^{d+1, d+2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  es *válida* si no hay subsucesión cíclica de  $d_i$  consecutivos cuya suma sea un elemento en  $\{d+1, d+2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ .

En la Figura 26a, la sucesión dada por  $I = \{1, 2, 3\}$  es válida,  $D_I = (1, 1, 7)$  pues las posibles sumas de subsucesiones son 1, 2, 7, 8, 9 mientras

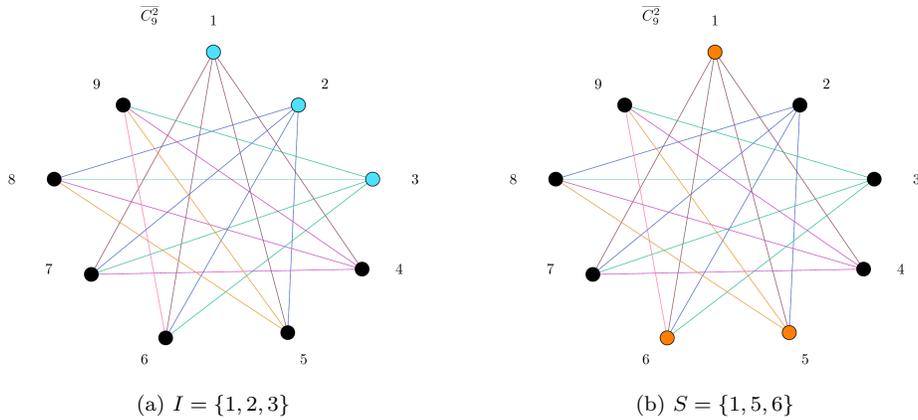


Fig. 26:  $C_9^{3,4,5,6}$

que en 26b la sucesión dada por  $S = \{1, 5, 6\}$  no es válida, pues  $D_S = (4, 1, 4)$  tiene la suma del primer término igual a 4, que es de hecho  $\lfloor \frac{9}{2} \rfloor$ .

**Teorema 2.15.** (Brown y Hoshino, 2008) Sea  $I = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  con sucesión de diferencia  $D_I = (d_1, d_2, \dots, d_k)$ .  $I$  es independiente en  $C_n^{d+1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  si y solo si  $D_I$  es válida.

*Demostración.* Supongamos primero que  $I$  es independiente, esto significa, que por pares, los índices de los vértices de  $I$  están a una distancia o menor que  $d + 1$ , o mayor a  $n - d - 1$ , es decir,  $d_i < d + 1$ , o  $d_i > n - (d + 1)$ . Así, la suma de los elementos de la sucesión correspondiente, nunca resulta ser un elemento de  $\{d + 1, d + 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ .

Sea  $D_I = (d_1, d_2, \dots, d_k)$  la sucesión, dada por  $I$ . Si esta no fuese válida, podríamos encontrar una subsucesión cíclica de términos consecutivos tal que su suma está en  $\{d + 1, d + 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ . Consideramos  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j\}$  dicha

subsucesión, tal que  $i \leq j$  y sea  $(d_i, d_{i+1}, \dots, d_j)$  su sucesión de diferencia.

Caso 1. Si  $j = k$  entonces

$$\begin{aligned} d_i + \dots + d_{k-1} + d_k &= (v_{i+1} - v_i) + \dots + (v_k - v_{k-1}) + (n + v_1 - v_k) \\ &= n + v_1 - v_k \end{aligned}$$

pero  $n + v_1 - v_k \notin \{d+1, d+2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$  pues por hipótesis  $v_1 v_k \notin E(C_n^{d+1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ .

Caso 2. Si  $j < k$ , entonces

$$\begin{aligned} d_i + d_{i+1} + \dots + d_{j-1} + d_j &= (v_{i+1} - v_i) + (v_{i+2} - v_{i+1})(v_{j+1} - v_j) \\ &= v_{j+1} - v_i, \end{aligned}$$

pero  $v_{j+1} - v_i \notin \{d+1, d+2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$  ya que por hipótesis  $v_{j+1} v_i \notin E(C_n^{d+1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ .

Supongamos entonces que  $i > j$ , así que la sucesión de diferencia es  $(d_i, d_{i+1}, \dots, d_k, d_1, d_2, \dots, d_j)$ , con lo cual la suma es

$$\begin{aligned} d_i + \dots + d_k + d_1 + \dots + d_j &= (v_{i+1} - v_i) + \dots + (n + v_1 - v_k) + (v_2 - v_1) \\ &\quad + (v_3 - v_2) + \dots + (v_{j+1} - v_j) \\ &= -v_i + (v_{i+1} + \dots + v_k) - (v_{i+1} + \dots + v_k) \\ &\quad + n + (v_1 + \dots + v_j) - (v_1 + \dots + v_j) + v_{j+1} \\ &= -v_i + n + v_{j+1} \\ &= n + (v_{j+1} - v_i) \end{aligned}$$

pero  $I$  es independiente, así que  $n + (v_{j+1} - v_i) \notin \{d+1, d+2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$  pues  $v_{j+1} v_i \notin E(C_n^{d+1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ .

Así, queda demostrado que  $D_I$  es válida.

Para el recíproco, si  $D_I$  es válida, para cualquier par de vértices  $i \leq j$  en  $I$ , podemos considerar la subsucesión dada por estos sin contar a  $d_j$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq l < j} d_l &= d_i + d_{i+1} + \dots + d_{j-1} \\ &= (v_{i+1} - v_i) + (v_{i+2} - v_{i+1}) + \dots + (v_j - v_{j-1}) \\ &= (v_j - v_i) \end{aligned}$$

con,  $v_j - v_i \notin \{d + 1, d + 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ , es decir, que  $I$  es en efecto independiente, lo que finaliza la prueba.  $\square$

### 2.2.2.3 Resultado sobre combinaciones

Para poder obtener una fórmula en el cuarto caso vamos a usar un lema sobre combinaciones. Este consiste en contar  $m$ -tuplas  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$  con una suma que tenga un total de  $t$  elementos distintos al cero en los  $Q_i$ , y donde  $Q_i$  sea una sucesión (posiblemente vacía) de números naturales.

**Lema 2.15.1.** *Sea  $a_1, a_2, \dots, a_m$  y  $k$  enteros no negativos tales que  $\sum_{i=1}^m a_i = k$ . Hay exactamente  $\binom{k}{t}$   $m$ -tuplas  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$  que contienen un total de  $t$  elementos diferentes a 0 en los  $Q_i$  donde cada  $Q_i$  es una sucesión (posiblemente vacía) de enteros positivos cuya suma es a lo más  $a_i$ .*

Para ilustrar la demostración, usemos como ejemplo el caso en que  $(a_1, a_2, a_3) = (5, 6, 4), m = 3, k = 15, t = 6$ .

Escribimos primero una sucesión de 15 unos, y ponemos 2 barras entre estos unos para crear una partición correspondiente a la 3-tupla  $(5, 6, 4)$ . Ahora elegimos cualesquiera 6 de los 15 unos. Claramente, existen  $\binom{15}{6}$  maneras de elegir exactamente 6 unos de esta sucesión.

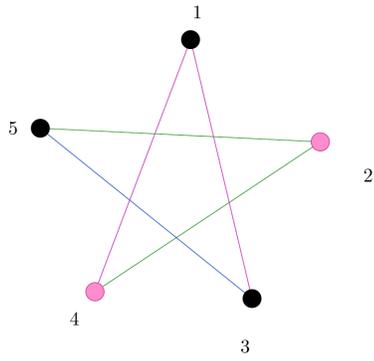
$$\underbrace{1, 1, 1, 1, 1}_{a_1 = 5} \mid \underbrace{1, 1, 1, 1, 1, 1}_{a_2 = 6} \mid \underbrace{1, 1, 1, 1}_{a_3 = 4}$$

Ahora, queremos enviar cada selección a una 3-tupla única  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  que contenga un total de 6 elementos diferentes al 0 en  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$ , para que  $\sum Q_1 + \sum Q_2 + \sum Q_3 \leq 6$ . Para cada  $Q_i$ ,  $r_j$  es el  $j$ -ésimo uno en la partición del  $Q_i$  elegido.  $Q_i = (r_2 - r_1, r_3 - r_2, \dots, r_p - r_{p-1}, a_i + 1 - r_p)$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Es decir, en  $Q_1$  tenemos que  $r_1 = 2$  y  $r_2 = 4$ , en  $Q_2$  pasa que  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ , y  $r_3 = 6$  y finalmente en  $Q_3$  resulta que  $r_1 = 2$ .

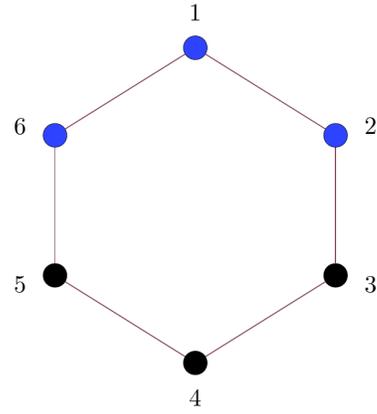
Es importante notar que para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$  la forma en que definimos  $Q_i$  se parece a como definimos una sucesión de diferencia, sin embargo, en el último término, en vez de utilizar  $r_1$  utilizamos un 1. Lo anterior se hace para que podamos calcular a partir de los  $Q_i$  los valores en cada sucesión dada por los  $a_i$ .

Denotamos por  $Q_i(j)$  el  $j$ -ésimo elemento de la sucesión  $Q_i$ . Si  $Q_1 = \{2, 2\}$ , podemos ver que  $Q_1(2) = a_1 + 1 - r_2$ , es decir,  $2 = 5 + 1 - r_2$ , entonces  $r_2 = 5 + 1 - 2 = 4$ , y como  $Q_1(1) = r_2 - r_1$ , entonces  $r_1 = 4 - 2 = 2$ . Similarmente de  $Q_2$  y  $Q_3$  podemos obtener los valores correspondientes de los  $r_i$ . Notemos que a cada sucesión  $Q_i$  podemos asociarle una circulante de orden

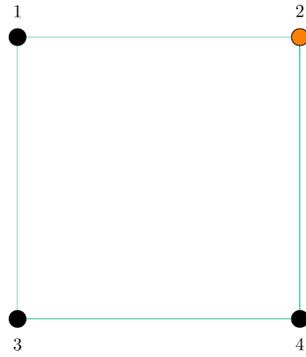
$a_i$ .



(a)  $C_5^{2,3}$  asociada a  $Q_1$



(b)  $C_6^1$  asociada a  $Q_2$



(c)  $C_4^1$  asociada a  $Q_3$

Fig. 27: Definimos en (a) para los vértices 2 y 4  $Q_1 = (4 - 2, 5 + 1 - 4) = (2, 2)$ , en (b) para los vértices 1, 2 y 6  $Q_2 = (2 - 1, 6 - 2, 6 + 1 - 6) = (1, 4, 1)$  y en (c) para el vértice 2  $Q_3 = (4 + 1 - 2) = (3)$ .

Específicamente,

$$\begin{array}{lll}
 Q_1 = \{2, 2\} & Q_2 = \{1, 4, 1\} & Q_3 = \{3\} \\
 \sum Q_1 = 4 < 5 = a_1 & \sum Q_2 = 6 \leq 6 = a_2 & \sum Q_3 = 3 < 4 = a_3 \\
 "a_1'' = 2, 4 & "a_2'' = 1, 2, 6 & "a_3'' = 2
 \end{array}$$

*Demostración.* En general, escribimos primero una sucesión de  $k$  unos, y ponemos  $m-1$  barras entre esos unos para crear una partición correspondiente a la  $m$ -tupla  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ . Ahora elegimos cualesquiera  $t$  de los  $k$  unos. Claramente, existen  $\binom{k}{t}$  maneras de elegir exactamente  $t$  unos de esta sucesión.

Cada selección la enviamos a una  $m$ -tupla única  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$  que contiene un total de  $t$  elementos diferentes al 0 en los  $Q_i$ , así, la suma de los elementos en cada  $Q_i$  es a lo más  $a_i$ .

Consideramos la subsucesión de  $a_i$  unos en la partición  $i$ -ésima. Si no hay elementos seleccionados en esta subsucesión, entonces hacemos  $Q_i = 0$ . Notamos que  $r_{ij}$  es el  $j$ -ésimo uno elegido en la parte  $a_i$ . Definimos

$$Q_i = (r_{i2} - r_{i1}, r_{i3} - r_{i2}, \dots, r_{ip} - r_{ip-1}, a_i + 1 - r_{ip}).$$

En otras palabras, cada  $Q_i$  se puede pensar como algo parecido a la *sucesión de diferencia* de los  $p$  vértices elegidos en una circulante de orden  $a_i$ .

Notamos que para cada  $i$ ,  $\sum Q_i = a_i + 1 - r_{1i} \leq a_i$ . Esta construcción nos garantiza que cada una de las  $\binom{k}{t}$  selecciones nos genera una  $m$ -tupla única  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  con un total de  $t$  elementos distintos a 0. Así  $\sum Q_i \leq a_i$ .

Por otro lado, para cada  $a_i$  podemos determinar de manera única los  $t$  unos que fueron seleccionados de dicha sucesión. De la definición de  $Q_i$  podemos determinar las posiciones de los  $r_{ji}$  empezando por  $r_{pi}$ , luego de  $r_{pi}$  podemos obtener  $r_{p-1i}$ , de este podemos obtener a  $r_{p-2i}$ , y seguir hasta que tengamos los valores de todos los  $r_{ji}$ . Hacemos eso para todos los  $i$ . Así, la selección de la  $m$ -tupla  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$  genera a una selección única de  $t$  elementos de una sucesión de  $k$  unos. De esto podemos concluir que la construcción es biyectiva y la prueba queda completa.  $\square$

#### 2.2.2.4 Sucesiones $l$ -construibles

Ahora queremos definir ciertos tipos de sucesiones que posteriormente ayuden a contar los conjuntos independientes en las gráficas que estamos trabajando. Estas sucesiones además tienen sus análogos con las sucesiones válidas que ya definimos previamente.

Sea  $D$  una sucesión de diferencia de  $\overline{C_n^d}$ , donde  $n \geq 2d + 2$ . Se cumple que para el entero  $l \geq 0$ ,  $D$  es  $l$ -construible si

$$D = Q_1, p_1, Q_2, p_2, \dots, Q_{2l+1}, p_{2l+1}$$

cumple con las siguientes propiedades:

1. Cada  $p_i$  es un entero con  $p_i \geq n - 2d$ .
2. Cada  $Q_i$  es una sucesión de enteros, posiblemente vacía.

3. Si  $S$  es una subsucesión, posiblemente cíclica, de términos en  $D$  tal que  $S$  contiene a lo más  $l$  de los  $p_i$ , entonces  $\sum S \leq d$ . Si no,  $\sum S \geq n - d$ .

Ahora probemos que cada sucesión de diferencia válida se puede expresar de manera única como una sucesión de diferencia  $l$ -construible para exactamente  $l \geq 0$ .

Primero notamos que como el complemento de cualquier subsucesión consecutiva de  $D$  es también una subsucesión consecutiva de  $D$ , entonces existe una subsucesión de términos consecutivos con suma  $t$  si y solo si existe una subsucesión de términos consecutivos con suma  $n - t$ .

Lo anterior quiere decir que de hecho  $D$  es válida si y solo si no hay subsucesión de términos consecutivos que sumen a un elemento en el intervalo discreto  $[d + 1, n - d - 1]$ .

Ahora, por la tercer propiedad en la definición de  $l$ -construible, cada sucesión  $l$ -construible es válida. Lo anterior sucede ya que cualquier subsucesión de términos consecutivos tiene suma a lo más  $d$  y por lo menos  $n - d$ .

Probemos que cada sucesión de diferencia válida es  $l$ -construible, para exactamente un  $l \geq 0$ . Primero, construimos un  $l$  que satisface las condiciones y que ningún otro número es suficiente.

**Lema 2.15.2.** *(Brown y Hoshino, 2008) Sea  $D$  una sucesión de diferencia válida de  $C_n^d$ . Existe un entero  $l \geq 0$  tal que  $D$  es  $l$ -construible. Para este entero  $l$ ,  $D$  es  $l$ -construible de manera única sin contar las permutaciones*

*cíclicas.*

Primero mostremos con un ejemplo la idea para la prueba. Consideremos el caso en que  $n = 89$  y  $d = 40$ . La sucesión de diferencia en este caso es  $D = (9, 1, 9, 2, 9, 20, 10, 19, 2, 9)$ , la cual es válida pues ninguna subsucesión tiene su suma en el intervalo cerrado  $[41, 48]$ . Empecemos construyendo una sucesión  $R_1 t_1 R_2 t_2 \dots R_7 t_7$  que será la base para construir una sucesión  $Q_1 p_1 \dots Q_{2l+1} p_{2l+1}$  que cumpla la definición. Notemos que  $n - 2d = 9$ . Como no importa si hacemos permutación cíclica, tomamos  $t_1 = 20$ . En este caso,  $R_2 = \emptyset, t_2 = 10, R_3 = \emptyset, t_3 = 19, R_4 = \{2\}, t_4 = 9, R_5 = \emptyset, t_5 = 9, R_6 = \{1\}, t_6 = 9, R_7 = \{1\}, t_7 = 9$ , y  $R_1 = \emptyset$ . Es decir, tenemos que

$$D = \underbrace{20}_{t_1}, \underbrace{10}_{t_2}, \underbrace{19}_{t_3}, \underbrace{2}_{R_4}, \underbrace{9}_{t_4}, \underbrace{9}_{t_5}, \underbrace{1}_{R_6}, \underbrace{9}_{t_6}, \underbrace{1}_{R_7}, \underbrace{9}_{t_7}$$

Sea  $l \geq 0$  el entero más grande tal que para cualquier subsucesión  $X$  de términos consecutivos de  $D$ ,  $\sum X \leq d$ ,  $X$  incluye a lo más  $l$  de los  $t_i$ . En nuestro ejemplo,  $l < 3$  porque si tomamos a  $X = \{20, 10, 19\}$ , este incluye tres de los  $t_i$  y  $\sum X = 49$ , pero  $49 > d$ . Se puede ver que de hecho  $l = 2$  pues por pares la suma nunca es mayor a 40.

Para este  $l$  veamos que  $D$  es  $l$ -construible, y que además la asignación de  $Q_i$ s y  $p_i$ s es única sin contar permutaciones cíclicas.

En principio notamos que 7, cumple que  $7 \geq 2l = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$ . En este caso, los  $p_i$  se asignan del conjunto de  $t_i$ , mientras que los  $Q_i$  los vamos a tomar de los  $R_i$  y de los  $t_i$  que sobren. Por la definición del índice  $l \geq 0$ , hay una

subsucesión  $X$  que contiene  $l+1$  de los  $t_i$ s tal que su suma se pasa de  $d$ . Como  $D$  es válida, no hay subsucesión de términos consecutivos que esté en el intervalo cerrado  $[d+1, n-d-1]$ , por lo que esta suma es mayor que  $n-d-1$ , es decir, que  $\sum X \geq n-d = 49$ . Lo que hacemos es permutar los elementos de  $D$ , de forma que

$X = \{20, 10, 19\}$  aparezca en frente de  $D$ , o en otras palabras, redefinimos los  $R_i$  y los  $t_i$  para que tengamos que

$$t_1 + \sum R_2 + t_2 + \dots + \sum R_{l+1} + t_{l+1} \geq 49$$

$$\sum X \geq 49$$

$$20 + 10 + 19 = 49 \geq 49.$$

Hacemos  $p_i = t_i$  para  $1 \leq i \leq l+1$  y  $Q_i = R_i$  para  $2 \leq i \leq l+1$ . Es decir, en este ejemplo tenemos que

$$X = \{20, 10, 19\}, p_1 = 20, Q_2 = \emptyset, p_2 = 10, Q_3 = \emptyset \text{ y } p_3 = 19.$$

Es importante que ninguno de los  $Q_i$  contenga un término  $t_j$ , de lo contrario pasaría que  $X$  tiene a lo más  $l=2$  de los  $p_i$ , pero su suma se pasaría de  $d = 49$ .

Ahora, si  $D$  es  $l$ -construible, necesitamos que los  $p_i$  y  $Q_i$  elegidos cumplan que

$$\sum Q_2 + p_2 + \dots + \sum Q_{l+1} + p_{l+1} + \sum Q_{l+2} \leq d = 40.$$

Como lo anterior ya contiene 2 de los  $p_i$  agregarle  $p_{l+2}$  cambia la desigualdad a

$$\sum Q_2 + p_2 + \dots + \sum Q_{l+1} + p_{l+1} + \sum Q_{l+2} + p_{l+2} \geq n - d = 89 - 40 = 49,$$

$$20 + 10 + 19 + 2 + 9 = 60 \geq n - d = 89 - 40 = 49.$$

Lo cual tiene sentido pues esta subsucesión contiene  $l + 1 = 3$  de los  $p_i$ .

Sea ahora  $T = \sum Q_2 + p_2 + \dots + \sum Q_{l+1} + p_{l+1} = 10 + 19 = 29$ . Se tiene que  $\sum Q_{l+2} \leq d - T = 40 - 29 = 11$ . Además  $\sum Q_{l+2} + p_{l+2} \geq n - d - T$ , con  $n - d - T = 89 - 40 - 29 = 20$ , es decir,  $\sum Q_{l+2} + p_{l+2} \geq 20$ . De las dos desigualdades anteriores podemos asegurar que de hecho  $Q_{l+2}$  fue elegido de manera única, pues es menor o igual a 11 y mayor o igual a 10. Notamos que para algún  $k \geq 0$ , pasa que  $Q_{l+2}$  está formado por primeros  $k$  elementos de la sucesión que resta, así que podemos hacer

$$X' = R_{l+2}, t_{l+2}, R_{l+3}, t_{l+3}, \dots, R_m, t_m, R_1 = 2, 9, 9, 1, 9, 1, 9.$$

Más aún,  $p_{l+2} = 9$  tendría que ser el siguiente término, es decir, el  $(k + 1)$ -ésimo término de  $X'$ . De hecho, afirmamos que  $k$  es el entero más grande tal que los primeros  $k$  términos en  $X'$  sumen a lo más a  $d - T = 11$ . Esta elección es única porque si  $k$  no es el mayor entonces  $\sum Q_{l+2} + p_{l+2} \leq d - T = 11$ , lo que contradice la desigualdad que teníamos de que  $\sum Q_{l+2} + p_{l+2} \geq 20$ . En este ejemplo,  $T = 29$ ,  $X' = \{2, 9, 9, 1, 9, 1, 9\}$ ,  $Q_4 = \{2, 9\}$ , y  $p_4 = 9$ . Consideremos la suma  $T + \sum Q_{l+2} + p_{l+2} > d = 40$ . Por como elegimos a  $k$  esta suma sí es mayor a 40. Como además  $D$  es válida, esta suma se pasa de 48, porque este total representa la suma de una subsucesión de términos consecutivos de  $D$ .

Lo anterior nos dice que  $\sum Q_{l+2} + p_{l+2} \geq n - d - T = 89 - 40 - 29 = 20$ . Así, la forma en que elegimos  $p_i$  y  $Q_i$  para todo  $2 \leq i \leq l + 1$  nos genera de manera única los  $Q_{l+2}$  y  $p_{l+2}$  que satisfacen la  $l$ -constructibilidad.

Además,  $p_{l+2}$  debe satisfacer que  $p_{l+2} \geq n - 2d$  porque  $T + \sum Q_{l+2} \leq d$  y  $T + Q_{l+2} + p_{l+2} \geq n - d$ . Con ese mismo argumento cualquier  $p_i \geq n - 2d$ , lo que prueba que cada uno fue de hecho elegido de los  $t_i$  como queríamos. De hecho, todos los términos hasta los correspondientes a  $2l + 1$  ya están elegidos, por lo que los que restan van a dar a  $Q_1$ . Con la construcción anterior tendríamos que

$$D = \underbrace{1, 9}_{Q_1}, \underbrace{20, 10}_{p_1}, \underbrace{19, 2, 9}_{p_2}, \underbrace{9, 1}_{p_3}, \underbrace{9}_{Q_4}, \underbrace{1, 9}_{p_4}, \underbrace{1}_{Q_5}, \underbrace{9}_{p_5}.$$

*Demostración.* En general, primero definimos  $D = R_1 t_1 R_2 t_2 \dots R_m t_m$  donde cada  $t_i \geq n - 2d$  y cada  $R_i$  va a ser una sucesión de términos tal que  $\sum R_i < n - 2d$ . Así cada sucesión  $D$  tiene una representación única salvo permutación cíclica de los elementos.

Sea  $l \geq 0$  el mayor entero tal que cualquier subsucesión  $X$  de términos consecutivos de  $D$ , sucede que  $\sum X \leq d$  si  $X$  incluye a lo más  $l$  de los  $t_i$ s. Para este  $l \geq 0$  probaremos que  $D$  es  $l$ -construible. Más aún, la forma de asignar los  $Q_i$  y  $p_i$ s es única (sin contar las permutaciones cíclicas). Primero, suponemos que  $m \leq 2l$ .  $R_1 + t_1 + R_2 + t_2 + \dots + R_l + t_l \leq d$  porque esta sucesión contiene exactamente  $l$  de los  $t_i$ s y por como elegimos a  $l$ . Análogamente se tiene que  $R_{l+1} + t_{l+1} + \dots + R_{2l} + t_{2l} \leq d$ . Al suponer que  $m \leq 2l$  pasaría que sumando lo anterior,  $\sum D \leq 2d < n$ , lo cual es una contradicción. Así,  $m \geq 2l + 1$ .

Si  $m = 2l + 1$ , podemos hacer  $Q_i = R_i$  y  $p_i = t_i$  para todo  $i$ . En este caso cada  $D$  es  $l$ -construible pues  $\sum D \leq d$  cuando  $D$  tiene a lo más  $l$  de los  $p_i$ s, y si no  $\sum D \geq n - d$ . Ahora, suponemos que  $m > 2l + 1$ . En este caso, vamos a asignar a los  $p_i$  como alguno de los  $t_i$ , mientras que los  $Q_i$  los sacamos tanto de los  $R_i$  como de los  $t_i$  que no ocupemos para los  $p_i$ . Por como definimos  $l$ , tiene que haber una subsucesión  $X$  que tenga  $l + 1$  de los  $t_i$  y cuya suma exceda a  $d$ . Como tenemos que  $D$  es válida, no hay ninguna subsucesión que sume al intervalo  $[d + 1, n - d - 1]$ . Esto es,  $\sum X \geq n - d$ . Ahora, vamos a permutar los elementos de  $D$  tal que  $X$  aparezca al principio de  $D$ , es decir, tendríamos que

$$t_1 + \sum R_2 + t_2 + \dots + \sum R_{l+1} + t_{l+1} \geq n - d$$

Hacemos para  $p_i = t_i$  para  $1 \leq i \leq l + 1$ , también hacemos  $Q_i = R_i$  para  $2 \leq i \leq l + 1$ . Cabe notar que esta selección sirve para que  $Q_i$  no contenga ningún término  $t_j$  pues de lo contrario  $X$  tendría a lo más  $l$  de los  $p_i$  pero su suma sería mayor a  $d$ . Luego,

$$\sum Q_2 + p_2 + \dots + \sum Q_{l+1} + p_{l+1} + \sum Q_{l+2} \leq d,$$

pues ahí hay  $l$  de los  $p_i$  y

$$\sum Q_2 + p_2 + \dots + \sum Q_{l+1} + p_{l+1} + \sum Q_{l+2} + p_{l+2} \geq n - d,$$

pues ahí hay  $l + 1$  de los  $p_i$ .

Sea  $T = \sum Q_2 + p_2 + \dots + \sum Q_{l+1} + p_{l+1}$ . Entonces  $\sum Q_{l+2} \leq d - T$  y  $\sum Q_{l+2} + p_{l+2} \geq n - d - T$ . Como cada  $p_i$  y  $Q_i$  ya fueron asignados para  $2 \leq i \leq l + 1$ , tenemos que  $T$  es un entero fijo. Así, tenemos que dada la elección

de  $l$ , resulta que  $Q_{l+2}$  es único con la propiedad de que  $n - d - T - p_{l+2} \leq \sum Q_{l+2} \leq d - T$ .

Notamos que para algún  $k \geq 0$ ,  $Q_{l+2}$  consta de los primeros  $k$  elementos de la sucesión  $X' = R_{l+2}t_{l+2} + R_{l+2} + t_{l+2} + \dots + R_m t_m R_1$ . Más aún,  $p_{l+2}$  es el  $(k + 1)$ -ésimo término de  $X'$ .

Afirmamos que  $k$  es de hecho el entero más grande tal que los primeros  $k$  términos de  $X'$  sumen a lo más  $d - T$ . Esta elección es única porque si  $k$  no fuera el entero más grande que lo cumple, entonces  $\sum Q_{l+2} + p_{l+2} \leq d - T$  lo cual es una contradicción con que  $\sum Q_{l+2} + p_{l+2} \geq n - d - T$ . Es decir, como  $k$  lo conseguimos de forma única,  $Q_{l+2}$  representa los primeros  $k$  elementos de  $X'$  para que  $D$  sea  $l$ -construible. Si consideramos  $T + \sum Q_{l+2} + p_{l+2} > d$ , por cómo elegimos a  $k$ , esta suma excede  $d$ . Como  $d$  es válida, esa suma debe ser por lo menos  $n - d$ . Así  $\sum Q_{l+2} + p_{l+2} \geq n - d - T$ . Por la construcción que acabamos de dar, una vez que fijamos a  $p_i$  y  $Q_i$  para  $2 \leq i \leq l + 1$ , entonces  $Q_{l+2}$  y  $p_{l+2}$  quedan determinados y satisfacen las propiedades de  $l$ -constructibilidad. También pasa que  $p_{l+2} \geq n - 2d$  pues  $T + \sum Q_{l+2} \leq d$  y  $T + \sum Q_{l+2} + p_{l+2} \geq n - d$ . Con el mismo argumento se prueba que  $p_i \geq n - 2d$ . Es decir, que cada  $p_i$  fue en efecto elegido de los  $t_i$ .

Similarmente  $Q_i$  y  $p_i$  se determinan cuando  $i = i + 2, i = l + 2$  hasta  $i = 2l + 1$ . Una vez que quedan elegidos  $Q_{2l+1}$  y  $p_{2l+1}$  nos quedan términos sueltos los cuales asignamos a  $Q_1$ .  $\square$

A continuación, comprobamos que este  $l$  es único.

**Lema 2.15.3.** *(Brown y Hoshino, 2008) Si  $D$  es  $l$ -construible, entonces para cualquier  $l' \neq l$ ,  $D$  no es  $l'$ -construible.*

*Demostración.* Suponemos que  $D$  es  $l$ -construible y  $l'$ -construible.

Supongamos que  $l' < l$ . Así,  $D$  se puede expresar como sigue,

$$D = Q_1, p_1, Q_2, \dots, Q_{2l+1}, p_{2l+1},$$

$$D = Q'_1, p'_1, Q'_2, p'_2, \dots, Q'_{2l'+1}, p'_{2l'+1},$$

de forma que:

1. Cada  $p_i, p'_i$  es un entero con  $p_i, p'_i \geq n - 2d$ .
2. Cada  $Q_i, Q'_i$  es una sucesión de enteros, posiblemente vacía.
3. Si  $S$  es una subsucesión, posiblemente cíclica, de términos en  $D$  tal que  $S$  contiene a lo más  $l$  de los  $p_i, p'_i$ , entonces  $\sum S \leq d$ . Si no,  $\sum S \geq n - d$ .

Para cada  $1 \leq j \leq 2l' + 1$ , definimos  $X_j$  la subsucesión  $X_j = p'_j, Q'_{j+1}, p'_{j+1}, \dots, Q'_{j+l'}, p'_{j+l'}$ , con los índices vistos módulo  $(2l' + 1)$ . Como  $X_j$  contiene exactamente  $l' + 1$  de los  $p'_i$ s,  $\sum X_j \geq n - d$ . Esta sucesión  $X_j$  es una subsucesión de términos consecutivos en  $D = Q_1, p_1, Q_2, p_2, \dots, Q_{2l+1}, p_{2l+1}$ , esto es, pues  $D$  solo está reorganizada respecto a como veíamos la sucesión dada por  $l'$ . Como  $\sum X_j \geq n - d$ , entonces  $X_j$  debe tener al menos  $(l + 1)$  de los  $p_i$ s porque  $D$  es  $l$ -construible. Ahora, para cada  $1 \leq j \leq 2l' + 1$ , definimos  $\sigma(Q'_j)$

el número de  $p_i$ s que aparecen en  $Q'_j$ , y definimos  $\sigma(p'_j) = 1$  si  $p'_j = p_i$  para algún  $p_i$ , y si no lo hacemos 0. Cabe notar que cada  $X_j$  contiene al menos  $l + 1$  de los  $p_i$ s, pues si visualizamos cada  $X_i$  se ven como sigue:

$$\begin{aligned}
X_1 &= p'_1, Q'_2, \dots, p'_{l'+1}, Q'_{l'+2} \\
X_2 &= p'_2, Q'_3, \dots, p'_{l'+2}, Q'_{l'+3} \\
&\vdots \\
X_l &= p'_{l'}, Q'_{l'+2}, \dots, p'_{2l'}, Q'_{2l'+1} \\
X_{l+1} &= p'_{l'+1}, Q'_{l'+2}, \dots, p'_1, Q'_1 \\
&\vdots \\
X_{2l'} &= p'_{2l'}, Q'_{2l'+1}, p'_1, Q'_1, \dots, p'_{l'}, Q'_{l'} \\
X_{2l'+1} &= p'_{2l'+1}, Q'_1, p'_1, Q'_2, p'_2, Q'_3, \dots, p'_{l'+1}, Q'_{l'+2}
\end{aligned}$$

Así,

$$\sigma(p'_j) + \sigma(Q'_{j+1}) + \sigma(p_{j+1})' + \dots + \sigma(Q'_{j+l'}) + \sigma(p'_{j+l'}) \geq l + 1.$$

Sumando sobre todos los  $1 \leq j \leq 2l' + 1$ , tenemos que como cada  $\sigma(Q'_j)$  lo contamos  $l'$  veces y a cada  $\sigma(p'_j)$  lo contamos  $l' + 1$  veces, pasa que

$$l' \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(Q'_j) + (l' + 1) \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(p'_j) \geq (l + 1)(2l' + 1).$$

Lo anterior lo podemos reescribir y queda que

$$\sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(Q'_j) \geq \frac{(l + 1)(2l' + 1) - (l' + 1) \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(p'_j)}{l'}.$$

Para cada  $1 \leq j \leq 2l' + 1$  definimos  $Y_j$  como la subsucesión

$$Y_j = Q'_j, p'_j, Q'_{j+1}, p'_{j+1}, \dots, Q'_{j+l'-1}, p'_{j+l'-1}, Q'_{j+l'},$$

con índices módulo  $(2l' + 1)$ .  $\sum Y_j \leq d$ , pues  $Y_j$  contiene a lo más  $l$  de los  $p_i$ s

y  $D$  es  $l$ -construible. Así, tenemos que

$$\sigma(Q'_j) + \sigma(p'_j) + \sigma(Q'_{j+1}) + \sigma(p'_{j+1}) + \dots + \sigma(p'_{j+l'-1}) + \sigma(Q'_{j+l'}) \leq l.$$

Sumando sobre todos los  $1 \leq j \leq 2l'$ , tenemos que

$$(l' + 1) \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(Q'_j) + l' \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(p'_j) \leq l(2l' + 1).$$

Esta desigualdad la podemos reescribir de la siguiente forma

$$\sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(Q'_j) \leq \frac{l(2l' + 1) - l' \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(p'_j)}{l' + 1}.$$

Así, tenemos dos desigualdades en términos de  $\sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(Q'_j)$  y  $\sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(p'_j)$ . De

estas dos desigualdades obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{(l+1)(2l'+1) - (l'+1) \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(p'_j)}{l'} &\leq \frac{l(2l'+1) - l' \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(p'_j)}{l'+1}, \\ (l+1)(l'+1)(2l'+1) - (l'+1)^2 \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(p'_j) &\leq ll'(2l'+1) - l'^2 \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(p'_j)l' \\ 2l'+1)[(l+1)(l'+1) - (l'l)] &\leq (l'^2 - l'^2 + 2l' + 1) \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(p'_j) \\ \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(p'_j) &\geq ll' + l + l' + 1 - ll' \\ \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(p'_j) &= l + l' + 1 \\ \sum_{j=1}^{2l'+1} \sigma(p'_j) &> 2l' + 1 \text{ (esto porque } l > l'). \end{aligned}$$

Ahora, debe pasar que  $\sigma(p'_j) > 1$  para algún índice  $j$ . Sin embargo, cada  $\sigma(p'_j) \leq 1$  lo cual nos genera una contradicción y ya podemos concluir que  $l$  es único para la  $l$ -constructibilidad.  $\square$

### 2.2.3 Demostración del caso general $n \geq 2d + 2$

Finalmente, podemos obtener una fórmula para obtener  $P_{\overline{C}_n^d}(x)$  utilizando las herramientas anteriores.

**Teorema 2.16.** *(Brown y Hoshino, 2008) Sea  $(n, d)$  un par ordenado con  $n \geq 2d + 2$  y  $B_n = \overline{C}_n^d$  y fijamos  $r = n - 2d - 2 \geq 0$ . Entonces*

$$P_{B_n}(x) = 1 + \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{d}{r+2} \rfloor} \frac{n}{2l+1} \binom{d-lr}{2l} x^{2l+1} (1+x)^{d-l(r+2)}.$$

Cabe notar el Teorema 2.12 es resultado directo de esta afirmación.

Específicamente, cuando  $l = 0$ , pasa que

$$\begin{aligned} P_{B_n}(x) &= 1 + \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{d}{r+2} \rfloor} \frac{n}{2l+1} \binom{d-lr}{2l} x^{2l+1} (1+x)^{d-l(r+2)} \\ &= 1 + \frac{n}{1} x^1 (1+x)^d \\ &= 1 + nx(1+x)^d. \end{aligned}$$

*Demostración.* Por la definición de  $l$ -construible, dada una sucesión de este tipo, cada subsucesión de términos consecutivos de esta tiene una suma fuera del intervalo cerrado  $[d + 1, n - d - 1]$ . Así, cada sucesión  $l$ -construible es válida en  $C_n^d$  para cada  $l \geq 0$ . Por los Lemas 2.15.1 y 2.15.3 (que dicen que

para cada sucesión  $l$ -construible hay una sucesión de diferencia válida para este  $l$ ), podemos afirmar que existe una biyección entre las sucesiones de diferencia válidas en  $C_n^d$  y la unión de todas las sucesiones  $l$ -construibles para  $l \geq 0$ . Cada sucesión de diferencia válida  $D$  corresponde a una sucesión  $l$ -construible única, para exactamente un  $l \geq 0$ .

Si queremos determinar el número de sucesiones de diferencia válidas en  $C_n^d$ , es suficiente determinar el número de sucesiones  $l$ -construibles para cada  $l \geq 0$  y enumerar su unión. Sea  $D$  una sucesión  $l$ -construible, para algún  $l \geq 0$  fijo. Así,  $D$  es válida en  $\overline{C_n^d}$ . Por definición, cualquier subsucesión de términos consecutivos que contengan  $l$  de los  $p_i$  debe sumar a lo más  $d$ . Consideramos una sucesión  $l$ -construible  $D = Q_1 p_1 Q_2 p_2 \dots Q_{2l+1} p_{2l+1}$ . Enumeramos las sucesiones  $l$ -construibles posibles para este  $l \geq 0$  fijo. Mostraremos que cada sucesión  $l$ -construible  $D$  se genera de la siguiente forma:

1. Primero escogemos una tupla ordenada  $(a_1, a_2, \dots, a_{2l+1})$  de tamaño  $2l+1$  de enteros no negativos cuya suma sea  $k = (2l+1)d - ln$ .
2. Luego, seleccionamos  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2l+1}$  de manera que  $\sum Q_i \leq a_{j+l+1}$  para cada  $1 \leq j \leq 2l+1$ . Notamos que para  $j \geq l+1$  el índice  $j+1+l$  se reduce módulo  $(2l+1)$ .
3. Ahora, cada  $p_i$  queda determinado de forma única y satisface que  $p_j \geq n - 2d$ .
4. La sucesión  $D = Q_1 p_1 Q_2 p_2 \dots Q_{2l+1} p_{2l+1}$  es  $l$ -construible.

Los pasos anteriores nos ayudan a contar el número total de sucesiones de diferencia  $l$ -contruibles.

Definimos  $X_j = Q_j, p_j, \dots, Q_{j+l-1}, p_{j+l-1}$  para cada  $1 \leq j \leq 2l + 1$ , donde los índices los tomamos módulo  $(2l + 1)$ . Como  $X_j$  contiene  $l$  de los  $p_i$ s, entonces  $\sum X_k \leq d$ . Sea  $a_j$  el entero tal que  $\sum X_j = d - a_j$ . Entonces cada  $a_j \geq 0$ . Sea  $X'_j = X_j, Q_{j+1}$ . Entonces  $\sum X'_j \leq d$  porque de nuevo,  $X'_j$  contiene solo  $l$  de los  $p_i$ s. Así,  $\sum X'_j = \sum X_j + \sum Q_{l+j} \leq d$ , lo que implica que  $\sum Q_{l+j} \leq a_j$  ya que  $\sum X'_j = \sum X_j + \sum Q_{l+j}$ . Esto se cumple para todos los  $j$ , así que agregándole  $l + 1$  a ambos índices y reduciéndolos módulo  $(2l + 1)$  queda que  $\sum Q_j \leq a_{j+l+1}$ . Notamos que

$$\begin{aligned} \sum Q_j + p_j &= n - (Q_{j+1} + \dots + Q_{j+l} p_{j+l}) - (Q_{j+l+1} + \dots + Q_{j+2l} + p_{j+2l}) \\ &= n - \sum X_{j+1} - \sum X_{j+l+1} \\ &= n - (d - a_{j+1}) - (d - a_{j+l+1}) \\ &= n - 2d + a_{j+1} + a_{j+l+1}. \end{aligned}$$

Como  $\sum Q_j \leq a_{j+l+1}$ , tenemos que  $p_j \geq n - 2d + a_{j+1} \geq n - 2d$ , lo que es consistente con la definición de  $l$ -constructibilidad. También se debe cumplir que  $k = \sum a_j$ . Además, tenemos  $\sum X_j = d - a_j$  para cada  $j$ . Agregando  $2l + 1$  sumas. Tenemos  $ln = (2l + 1)d - k$  o  $k = (2l + 1)d - ln \geq 0$  con  $k$  fijo.

Por otro lado, observemos que para cualquier par de enteros  $n$  y  $k$ , el número de  $k$ -tuplas  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  con  $a_k \geq 0$  tal que  $\sum_{i=1}^k a_k = n$  es  $\binom{n+k-1}{k-1}$ . Por lo que como los  $a_j$ s son enteros no negativos con suma  $k$ , podemos

afirmar por el Lema 2.15.3 que hay  $\binom{k+2l}{2l}$  maneras de escoger la  $(2l + 1)$  -tupla  $(a_1, a_2, \dots, a_{2l+1})$ . Para cada una de las tuplas seleccionamos los  $Q_j$ s para que  $\sum Q_j \leq a_{j+l+1}$ . Por el Lema 2.15.1, si nuestros  $Q_i$ s tienen un total de  $t$  elementos distintos al cero, nuestra selección de  $Q_j$ s se puede hacer de  $\binom{k}{t}$  maneras. Esta sucesión  $l$ -construible  $D$  contiene un total de  $2l + t + 1$  términos, con  $t$  de estos obtenidos de la unión de los  $Q_i$ s y uno para cada  $p_i$  con  $1 \leq i \leq 2l + 1$ . Tenemos  $\binom{k+2l}{2l} \binom{k}{t}$  posibles sucesiones  $l$ -construibles con  $2l + t + 1$  términos.

Por lo tanto, existen  $\binom{k+2l}{2l} \binom{k}{t}$  sucesiones de diferencia válidas con  $2l + t + 1$  términos. Notamos que algunas de estas sucesiones son permutaciones cíclicas de otras, y notamos que hay que tomar esto en cuenta cuando determinemos el número de conjuntos independientes con  $2l + t + 1$  vértices.

Sea  $\psi$  el conjunto de pares  $(v, D)$ , donde  $v$  es un vértice de  $\overline{C_n^d}$  y  $D$  es cualquiera de las  $\binom{k+2l}{2l} \binom{k}{t}$  sucesiones  $l$ -construibles con  $2l + t + 1$  elementos. Tenemos para cada uno de los  $\binom{k+2l}{2l} \binom{k}{t}$  pares en  $\psi$  que corresponderá a un conjunto independiente  $I$  con  $2l + t + 1$  vértices:

$$I = \{v, v + d_1, v + d_1 + d_2, \dots, v + d_1 + d_2 + \dots + d_{2l+t}, \}$$

donde los elementos están reducidos módulo  $n$  y acomodados de forma creciente. Ahora justificamos que cada conjunto independiente  $I$  aparece exactamente  $(2l + 1)$  veces por esta construcción. Para esto, la clave es que cada  $D$  es una sucesión  $l$ -construible, con la forma:  $D = Q_1, p_1, Q_2, p_2, \dots, Q_{2l+1}, p_{2l+1}$ . Es decir, hay exactamente  $(2l + 1)$  permutaciones cíclicas de  $D$  tal que esta

tenga la forma de una sucesión  $l$ -construible: para cada permutación cíclica, la sucesión comienza en  $Q_i$ , para algún  $1 \leq i \leq 2l + 1$ . Así, debemos dividir el número total de conjuntos independientes entre  $(2l + 1)$ , esto es, ya que cada uno se repite esa cantidad de veces. En otras palabras, hay  $\frac{n}{2l+1} \binom{k+2l}{2l} \binom{k}{l}$  conjuntos independientes con  $2l + t + 1$  vértices. Como esto es cierto para cada  $l \geq 0$  y  $0 \leq t \leq k = (2l + 1)d - ln$ , se sigue que

$$\begin{aligned}
P_{C_n^d}(x) &= 1 + \sum_{l \geq 0} \sum_{t=0}^k \frac{n}{2l+1} \binom{k+2l}{2l} \binom{k}{t} x^{2l+1+t} \\
&= 1 + \sum_{l \geq 0} \frac{n}{2l+1} \binom{k+2l}{2l} \sum_{t=1}^k x^{2l+1} \binom{k}{t} x^t \\
&= 1 + \sum_{l \geq 0} \frac{n}{2l+1} \binom{k+2l}{2l} x^{2l+1} (1+x)^k \\
&= 1 + \sum_{l \geq 0} \frac{n}{2l+1} \binom{(2l+1)d-l(n-2)}{2l} x^{2l+1} (1+x)^{(2l+1)d-ln}.
\end{aligned}$$

Notamos que se requiere que  $k = (2l + 1)d - ln \geq 0$  para que existan conjuntos independientes. Así, sucede que  $l \leq \frac{d}{n-2d}$ . Dejando que  $r = n - 2d - 2$ , concluimos que

$$P_{C_n^d}(x) = 1 + \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{d}{r+2} \rfloor} \frac{n}{2l+1} \binom{d-lr}{2l} x^{2l+1} (1+x)^{d-l(r+2)}.$$

□

### 3 Aplicación a la música

Los conceptos musicales son amplios y han ido cambiando a lo largo de la historia, además de que varían de cultura a cultura, por lo que es difícil definir algunos. En este capítulo hablaremos de algunos de los más utilizados en occidente. También mostraremos una aplicación de los conjuntos independientes en este ámbito.

Primero que nada, la *música*, aunque definida de muchas formas, es esencialmente el arte de ordenar los sonidos con el fin de evocar ciertas emociones en el oyente. Para escribir música normalmente se utiliza el *pentagrama*, el cual está representado por cinco líneas horizontales equidistantes entre sí. También se usan claves, que son signos que definen las notas escritas en el pentagrama. Las claves más usadas son de sol y fa.



Fig. 28: La clave de sol en el pentagrama superior y la de fa en el inferior

La escala musical estándar empleada en la música occidental consta de 7 notas, do-re-mi-fa-sol-la-si las cuales están dispuestas en 12 semitonos  $C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#, A, A\#,$  y  $B$ , donde las letras representan las notas musicales  $C = do, D = re, E = mi, F = fa, G = sol, A = la,$  y  $B = si,$  y  $\#$  llamado *sostenido*, el cual significa medio tono por encima de la nota en la que

se indique. Estas notas tienen una cualidad llamada altura, la cual determina si cada nota es grave o aguda.

Un *intervalo simple* lo definimos como la distancia en semitonos entre dos notas musicales. Si la distancia entre dos notas equivale a dos semitonos, le llamamos un tono y lo denotamos por T, y a los semitonos los denotamos por st. A continuación presentaremos una tabla con los intervalos simples; aquellos que no excedan una octava.

Tipo de intervalo	Distancia en T y st	Notación
Unísono	0	-
Segunda menor	1 st	2m
Segunda mayor o tercera disminuida	1 T	2M
Tercera menor o segunda aumentada	1 T + 1 st	3m
Tercera mayor o cuarta disminuida	2 T	3M
Cuarta justa o tercera aumentada	2 T + 1 st	4J
Cuarta aumentada o quinta disminuida (tritono)	3 T	4A
Quinta justa o sexta disminuida	3T + 1 st	5J
Sexta menor o quinta aumentada	4T	6m
Sexta mayor o séptima disminuida	4T + 1 st	6M
Séptima menor o sexta aumentada	5 T	7m
Séptima mayor	5 T + 1 st	7M
Octava justa	6T	8J

A la escala musical también se le conoce como la escala *tet* (12-tone equal temperament), de temperamento igual, o escala templada, lo cual hace referencia a la división en doce partes iguales de los tonos.

Una tonalidad puede tener varios modos, comúnmente mayor o menor. Llamamos escala de un tono a una sucesión de notas, ya sea ascendente o descendente (en términos de altura). Al tono inicial de la sucesión le llamamos la nota fundamental. Decimos que la escala es mayor si está formada de modo que los intervalos de una nota consecutiva tienen la estructura T-T-st-T-T-T-st. La escala mayor más conocida es la de *do* mayor. Esta escala está compuesta por las 8 notas naturales (sin alteraciones, es decir, sin sostenidos) *CDEFGABC*. Las escalas menores de una nota están dadas por la estructura de intervalos T-st-T-T-st-T-T. La escala menor natural más conocida es la de *la* menor, compuesta por las notas naturales *BACDEFGB*.

Cada nota es identificada con su clase de tonos correspondiente, es decir, cada *C* se refiere a la misma nota, sin importar su octava, por ejemplo, la clase de tonos de do está compuesta por todos los do de todas las octavas.

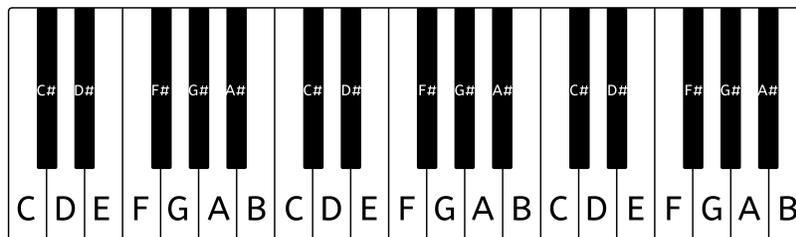


Fig. 29: Ejemplo de un piano con 3 octavas empezando en do

Cabe notar que las clases de tonos son el análogo musical a clases de equivalencia.

El *compás* lo consideramos como la unidad de tiempo en la que se divide una obra musical. También decimos que dos sonidos son *enarmónicos* cuando tienen distinto nombre, pero igual sonido. La *disonancia* la definimos como la cercanía entre dos notas. Los *intervalos* que consideraremos disonantes serán los tritonos, segunda mayor, y séptima mayor. Finalmente, un *acorde* vamos a considerarlo como un conjunto de dos o más notas musicales.

Supongamos que queremos tocar un acorde que consiste en  $k \geq 3$  diferentes clases de tonos de esta escala. Claramente, el número de posibilidades distintas es  $\binom{12}{k}$ . Pero si definimos intervalos prohibidos y le ponemos restricciones a los acordes que podemos tocar, entonces usando polinomios de independencia podríamos calcular los acordes disponibles. En particular, si los intervalos prohibidos corresponden a clases de tono que están cerca (y por lo tanto son disonantes porque sus notas chocan) podemos analizar esta situación con un polinomio de independencia  $P_{C_n^d}(x)$ .

Como ejemplo simple, supongamos que no podemos incluir ningún acorde con dos clases de tonos separadas por un semitono o tono, es decir, que no tenga segundas menores ni mayores (por ejemplo,  $C, C\#$  o  $G$  y  $A$ ). En otras palabras, si consideramos una gráfica con estas doce clases de tonos como nuestros vértices y consideramos las aristas dadas por los vértices que se encuentran a una distancia  $d \leq 2$ , entonces basta analizar sus conjuntos

independientes.

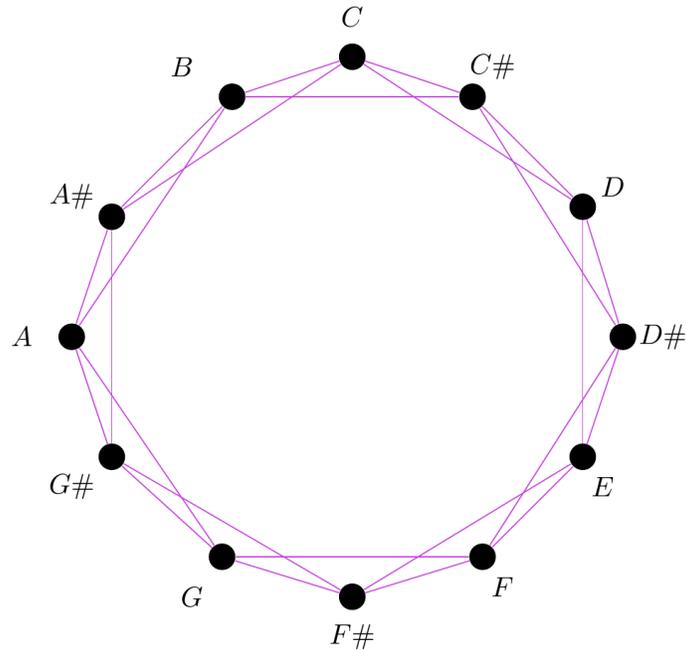


Fig. 30:  $C_{12}^2$  representa todos los posibles acordes que admiten segundas menores y mayores, esto es, tonos con 1 st o 1 T de distancia son adyacentes

Ahora podemos preguntar cuántos acordes posibles se pueden tocar con esa restricción. La respuesta está dada por  $P_{C_{12}^2}(x)$ .

Matemáticamente, esto equivale a evaluar el polinomio de independencia  $P_{C_{12}^2}(x)$ , y sustituir  $x = 1$  para determinar nuestra respuesta. En otras palabras, cada acorde posible es un conjunto independiente de tamaño al menos 3 en la circulante  $C_{12}^2$ . Como cada par de clases de tonos en un conjunto independiente está separado por al menos una tercera menor (3 semitonos), por el Teorema 2.11 tenemos que

$$P_{C_{12}^2}(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{12}{12-2k} \binom{12-2k}{k} x^k = 1 + 12x + 42x^2 + 40x^3 + 3x^4.$$

Así,  $P_{C_{12}^2}(1) = 98$ . Concluimos que hay  $98 - (1 + 12 + 42) = 43$  acordes posibles que se pueden tocar, excluyendo 55 acordes triviales de menos de tres clases de tonos, esto es, los 55 conjuntos independientes de tamaño a lo más 2 en  $C_{12}^2$ . Podemos observar, por ejemplo, que el número de todos los acordes posibles con exactamente 3 notas está dado por  $[x^3]P_{C_{12}^2}(x) = 40$ .

Cabe notar que se ha escrito música en escalas  $n$ -tet para otros valores de  $n$ . Por ejemplo, pasa que los instrumentos tradicionales tailandeses, que incluyen algunos xilófonos de madera conocidos como pong lang y ranat ek, se ajustan a una escala que es aproximadamente 7-tet.

Vale la pena generalizar la octava de 12-semitonos a la octava de  $n$ -semitonos para conocer los acordes en estas escalas musicales. Como en el de 12-semitonos, la octava de  $n$ -semitonos se divide en  $n$  tonos igualmente templados, cada uno formado al multiplicar la frecuencia por  $2^{\frac{1}{n}}$ .

En una escala  $n$ -tet, la razón entre dos semitonos es constante. Como las notas con frecuencias suficientemente cercanas suenan disonantes, es decir, el choque entre dos o más notas cuando se tocan juntas. Por lo anterior, en este caso requerimos que ningún acorde tenga dos clases de tonos separadas por  $d$  semitonos o menos, para algún entero  $d \geq 1$ . Sea  $f(n, d)$  el número de acordes posibles no triviales que se pueden tocar con esta restricción. Por el Teorema 2.11, la respuesta es

$$f(n, d) = \sum_{k=3}^{\lfloor \frac{n}{d+1} \rfloor} \frac{n}{n-dk} \binom{n-dk}{k}$$

que se obtiene de evaluar  $P_{C_{12}^2}(x)$  en  $x = 1$ , y restarle el número de acordes triviales con menos de tres clases de tonos. Esto nos da la fórmula para el número óptimo de acordes.

También podemos determinar el número de acordes para los cuales cada par de notas suena disonante, es decir, cada par de clases de tonos quede separada por a lo más  $d$  semitonos.

Esto se calcula determinando  $P_{C_{12}^2}(x)$ . Si  $g(n, d)$  es el número de acordes posibles que son disonantes, hacemos  $r = n - 2d - 2 \geq 0$ . Por el Teorema 2.16 la respuesta es simplemente

$$g(n, d) = 1 + \sum_{k=3}^{\lfloor \frac{d}{r+2} \rfloor} \frac{n}{2k+1} \binom{d-kr}{2k} 2^{d-k(r+2)}.$$

Este método lo podemos extender a subdivisiones que estén separadas uniformemente de octavas modificadas, donde la razón entre las frecuencias superior e inferior es mayor o menor a 2, respectivamente.

## 4 Conclusiones

Definiendo desde los conceptos más básicos de la teoría de gráficas como vértices y aristas hasta el de polinomio de independencia de una gráfica se calculó el polinomio de independencia para ciertos tipos de gráficas. Usamos sucesiones de diferencia y sucesiones  $l$ -construibles para poder determinar el polinomio de independencia de familias de gráficas circulantes de salto consecutivo y sus complementos. Específicamente, que para  $n \geq d + 1$  tenemos que

$$P_{C_n^d}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{d+1} \rfloor} \frac{n}{n-dk} \binom{n-dk}{k} x^k.$$

y que si  $(n, d)$  es un par ordenado con  $n \geq 2d + 2$  y  $B_n = \overline{C_n^d}$  y fijamos  $r = n - 2d - 2 \geq 0$ , entonces

$$P_{B_n}(x) = 1 + \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{d}{r+2} \rfloor} \frac{n}{2l+1} \binom{d-lr}{2l} x^{2l+1} (1+x)^{d-l(r+2)}.$$

También se planteó la analogía entre las escalas musicales  $n - tet$  y familias de gráficas circulantes de orden  $n$ . Así, calcular el polinomio de independencia de estas gráficas que modelen restricciones de acordes como los disonantes, equivale a determinar todos los acordes posibles válidos bajo esas restricciones. Esto se podría calcular en otro trabajo para más sistemas musicales distintos al occidental.

## Referencias

- [1] Jason Brown and Richard Hoshino. “Independence polynomials of circulants with an application to music”. In: *Discrete Mathematics* 309 (2009), pp. 2292–2304. DOI: 10.1016/j.disc.2008.05.003.
- [2] Gary Chartrand and Ping Zhang. *Chromatic Graph Theory*. Chapman and Hall/CRC, 2008. ISBN: 9780429138560.
- [3] Gregory Matthew Ferrin. “Independence Polynomials. (Master’s thesis)”. In: (2014). URL: <https://scholarcommons.sc.edu/etd/2609>.
- [4] Ivan Gutman and Frank Harary. “Generalizations of the matching polynomial”. In: *Utilitas Mathematica* 24.1 (1983), pp. 97–106.
- [5] Prodingger Helmut and Robert Tichy. “Fibonacci numbers of graphs: II”. In: *The Fibonacci Quarterly* 20 (Jan. 1982).
- [6] Enric Herrera. *Teoría musical y armonía moderna Vol. I*. Antoni Bosch Editor, S.A., 1990. ISBN: 8485855310.
- [7] Loiret Alejandría Dosal-Trujillo y Hortensia Galeana-Sánchez. “The Fibonacci numbers of certain subgraphs of circulant graphs”. In: *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* 12.2 (2015), pp. 94–103. ISSN: 0972-8600. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.akcej.2015.11.002>.
- [8] Richard Hoshino. *Independence Polynomials of Circulant Graphs*. 2007.
- [9] Richard Hoshino. “Independence polynomials of circulant graphs”. In: (Jan. 2007).

- [10] Vadim Levit and Eugen Mandrescu. “On the Roots of Independence Polynomials of Almost All Very Well-Covered Graphs”. In: *Discrete Applied Mathematics* 156 (June 2003), pp. 478–491. DOI: 10.1016/j.dam.2006.06.016.
- [11] Vadim Levit and Eugen Mandrescu. “The independence polynomial of a graph—A survey”. In: (Jan. 2005), pp. 232–238.