



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE ENERGÍAS RENOVABLES

INSTITUTO DE INGENIERÍA

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS SUPERIORES JURIQUILLA

**Dinámica conservativa de un
dímero polaritónico con simetría
Paridad-Tiempo**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero en Energías Renovables

P R E S E N T A

Issac Jesán Velázquez Reséndiz

TUTOR DE TESIS

Dr. Yuriy Rubo

Temixco, Mor., a 28 de marzo de 2023





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

OF/IER/LIER/035/2023
ASUNTO: Notificación de jurado y
fecha para examen profesional.

LIC. IVONNE RAMÍREZ WENCE
DIRECTORA GENERAL DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
Presente

Por medio de la presente le informo que el día martes 28 de marzo de 2023, a las 11:00 h, en el Instituto de Energías Renovables, el **C. ISAAC JESÁN VELÁZQUEZ RESÉNDIZ**, con número de cuenta 316080060 de la Licenciatura de Ingeniería en Energías Renovables, llevará a cabo la presentación de su trabajo de titulación y examen profesional titulado:

***“Dinámica conservativa de un dímero polaritónico
con simetría Paridad-Tiempo”***

Debido a que el alumno ha cumplido con los requisitos que establece el Reglamento General de Exámenes, el Comité Académico de la Licenciatura de Ingeniería en Energías Renovables, le asigna el Jurado de Examen Profesional integrado por los siguientes académicos.

PRESIDENTA:	DRA. JULIA TAGÜEÑA PARGA
VOCAL:	DR. GENNADIY BURLAK
SECRETARIO:	DR. YURIY RUBO
SUPLENTE:	DR. MARIANO LÓPEZ DE HARO
SUPLENTE:	DRA. HAILIN ZHAO HU

Sin otro particular, le envío un cordial saludo.

Atentamente,
“Por mi raza hablará el espíritu”
Temixco, Mor., a 22 de marzo de 2023



Dr. Jorge Alejandro Wong Loya
Coordinador de la LIER
IER-UNAM

JAWL´mfp.



JURADO ASIGNADO:

Presidenta: Dra. Julia Tagüeña Parga

Secretario: Dr. Yuriy Rubo

1er Vocal: Dr. Gennadiy Burlak

Suplente: Dr. Mariano López de Haro

Suplente: Dra. Hailin Zhao Hu

Instituto de Energías Renovables, Temixco, Morelos, México.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Yuriy Rubo

FIRMA

*"To live is to risk it all; otherwise you're just an inert chunk
of randomly assembled molecules drifting wherever the universe blows you"*
- Rick Sánchez (C137)

Agradecimientos

Desde antes de nacer ya conocía el mundo académico gracias a mi madre que acompañé a su examen profesional para obtener el grado de Licenciada en educación primaria. Gracias a ella por enseñarme desde antes de nacer este mundo tan maravilloso, por siempre apoyarme en las tareas de toda mi formación académica y por siempre apoyarme y emocionarse con mis temas de investigación aunque no entienda mis explicaciones. También por enseñarme que lo más importante en la vida es ayudar a quien más lo necesita sin hacer preguntas. Mi padre siempre me enseñó a ser responsable y luchar por mis sueños sin importar el qué. Me acompañaba a mis partidos de fútbol demostrando su apoyo incondicional y siempre resaltando las cosas en las que podía mejorar para ser el mejor. A mi padre le quiero agradecer el siempre estar ahí cuando lo necesité, por darme el carácter que tengo hoy en día y sobre todo por enseñarme a ser buena persona.

A mi Nina le quiero agradecer las enseñanzas de la vida que me ha dado todos estos años y por siempre ser un modelo a seguir en la vida. A mi tío Natas por leerme desde pequeño mitología griega, explicarme sociología aún estando en primaria y mostrarme el significado de la vida. A mi tía Tere que fue una segunda madre que me compraba caprichos cuando era niño y que siempre se alegró de mis victorias. A mi hermano Ángel por apoyarme, darme buenos consejos de la vida, haber compartido tantas experiencias juntos y por siempre sentirse orgulloso de mí, yo me siento igual. A mi otro hermano Adrián por enseñarme que siempre tienes que luchar por tus ideales a pesar de la situación. A mi tío César por contarme acerca del IER, sin él no estaría en esta carrera. Gracias a Sarah por apoyarme, entenderme y animarme cada día que lo necesité.

Gracias al Dr. Yuriy Rubo por introducirme de nuevo al camino de la física con un tema tan interesante como lo es la computación cuántica y la óptica cuántica. Por darme su confianza para trabajar con él y responder cualquier pregunta que tuviera. Gracias por ser tan buena persona. Espero que algún día pueda ser tan buen investigador, profesor y

persona como usted.

Gracias al Dr. Jorge Alejandro Wong Loya por darme la oportunidad en primer semestre de trabajar en un proyecto con él y por ser buen profesor y persona. Al Dr. Memo Barrios por siempre responder a mis preguntas y por dejarme trabajar a su lado y aprender de él. También gracias al Dr. Mariano López de Haro por el apoyo brindado en las preguntas que tuviera y por ser una de las mejores personas del IER.

Al Instituto de Energías Renovables de la UNAM por darme una casa en Temixco y por hacerme pasar buenos y malos momentos. Gracias a la licenciada Maribel Fernández por siempre apoyarme en mis trámites de becas de movilidad. Al señor Miguel Chavez y Claudia Ramirez por apoyarme en las becas económicas y trámites del instituto.

Al PAPIME, al proyecto de Investigación de Ciencia Básica de CONACYT No. 251808 “*Rompimiento de simetría en condensados de bosones y láser polaritónico*” y al proyecto PAPIIT-UNAM IN106320 “*Condensados polaritónicos para simulación y computación cuántica*” por brindar la oportunidad de participar en proyectos académicos y apoyo económico.

Abstract

Conservative dynamics of a polariton dimer with \mathcal{PT} -symmetry

Isaac Jesan Velazquez Resendiz, Bachelor’s thesis

Computing is one of the most important tools in humanity now days, and the related energy consumption has to be analyzed and attacked in the best way to mitigate the climate change. One of the most interesting technologies allowing substantial reduction in time and energy demands is quantum computing, which also offers solutions to problems that are impossible to tackle with classical computers. This proposal requires the unit called a quantum bit (qubit) to work and make the necessary operations. The qubits can be built using superconducting circuits, trapped ions, solid state spins, and other systems. Recently, there is increasing interest in the exciton-polariton (polariton) condensates to perform the qubit operations, because of the existence of scalable manufacturing methods and reliable condensate control [1]. In addition, it has been shown that the trapped polariton condensates possess record energy consumption to switch between two polarization (spin) states, with the switch energy of the order of sub-femtojoules [2].

In this thesis, the conservative dynamics of a key element for the computing, a polaritonic dimer, is considered in conditions of Parity-Time (\mathcal{PT}) symmetry. The system consists of a polariton condensate having two circular polarization states with both coherent Josephson and dissipative coupling between them, and in the presence of polariton-polariton repulsion. Coherent Josephson coupling leads to the splitting ε between X and Y linearly polarized states. Dissipative coupling with the rate γ consists of equal pump and decay of some other two states of the polariton dimer. For a noninteracting dimer, the \mathcal{PT} -symmetry is unbroken, the semiclassical trajectories are closed, and the energies are real for the weak coupling case, when $\gamma < \varepsilon$, while for $\gamma > \varepsilon$ the \mathcal{PT} -symmetry is broken, which is manifested

by complex energies, disclosed semiclassical trajectories, and prevents qubit operations.

We show that the polariton-polariton interaction can make the \mathcal{PT} -symmetry unbroken even in the strong pump-dissipation case (large values of gain-loss parameter γ), in conditions when pump and dissipation happens for diagonal (D) and antidiagonal (A) linearly polarized states. The exact solutions for the trajectories and the fixed points for different domains are obtained. For weak gain-loss, when $\gamma < \varepsilon$, the trajectories are residing on an ellipsoid and there could be either two or four fixed points. Meanwhile, for a strong gain-loss case, i.e., when $\gamma > \varepsilon$, the trajectories are residing on a hyperboloid with either one or three fixed points. The semiclassical trajectories are closed and the dynamics is pseudo-conservative in both cases. This indicates the perspective of this system for possible qubit operations.

Publicación: Comunicación de la ciencia

La publicación para la comunicación de la ciencia producida durante este trabajo fue:

- J. Velázquez-Reséndiz, Y. G. Rubo. **El dinero que no existe: Criptomonedas y energías renovables**, *La Unión de Morelos*, 5 de septiembre 2022

Contenido

1. Introducción	1
1.1. Historia de la computación clásica	1
1.2. Consumo energético de la computación clásica	3
1.3. Computación cuántica	6
1.4. Excitón-Polaritón	8
1.4.1. Microcavidades	8
1.4.2. Polaritones y excitones	9
1.5. Organización de la tesis	11
2. Puntos fijos de un dímero polaritónico con simetría \mathcal{PT}	12
2.1. Simetría Paridad-Tiempo	12
2.1.1. Polaritones y simetría Paridad-Tiempo	16
2.2. Modelo de Hubbard	18
2.2.1. Hamiltoniano de Bose-Hubbard simple	18
2.2.2. El dímero de Bose-Hubbard con simetría Paridad-Tiempo	19
2.3. Dinámica de un dímero Bose-Hubbard con simetría \mathcal{PT}	19
2.4. Ecuaciones reducidas	23
2.4.1. Puntos fijos y trayectorias	24

3. Dinámica conservativa de un dímero polaritónico con simetría \mathcal{PT}	30
3.1. Trayectorias generales y soluciones exactas	30
3.1.1. Caso con cuatro raíces reales	33
3.1.2. Caso con un par de raíces complejas	36
3.1.3. Soluciones	36
3.1.4. Valores de la constante de movimiento	39
4. Conclusiones	41
A. Dinámica del espín	43
B. Cálculo de la longitud crítica ρ_c	45
C. Funciones elípticas de Jacobi	48
D. Radio cruzado	50

Capítulo 1

Introducción

1.1. Historia de la computación clásica

La evolución es un aspecto inherente de la humanidad. La incesante necesidad de resolución de problemas y el constante apetito por respuestas a preguntas que no tienen una, son las principales razones. Para satisfacer este apetito siempre se recurre a la revolución tecnológica. En la época prehistórica se solían construir armas de caza con la propia mano del hombre, y el acto de hallar a la presa para poder cenar podía tardar horas o incluso días. Hoy en día existen industrias con maquinaria que convierten a animales en comida en cuestión de horas. Lo único que tienes que hacer para conseguir comida es ir a un supermercado, tomar el alimento, pagarlo y volver a tu casa. La computación y el procesamiento de información no es la excepción. Alan Turing construyó la famosa máquina de Turing en 1936 [3], la cual ayudó a descifrar mensajes en la Segunda Guerra Mundial. Gracias a esta nueva tecnología se sentaron las bases para la evolución de la computación.

En 1944, la empresa IBM construye la *Mark I*, una computadora electromecánica que poseía 760 mil ruedas y 800 kilómetros de cable [4]. Más tarde, en 1946, gracias a esfuerzos de un equipo de investigación en la Universidad de Pensilvania liderado por John Presper Eckert y John William Mauchly, se pone en funcionamiento la *Electronic Numerical Integrator And Computer* (*ENIAC*, por sus siglas en inglés) [5], la cual es considerada como la primer computadora electrónica.

Una de las innovaciones más importantes en la computación fue el transistor. Es un

dispositivo electrónico de estado sólido de tres terminales, en las cuales se puede controlar el voltaje o corriente en dos de ellas mediante la aplicación de voltaje o corriente a la tercera. Otra innovación que vale la pena destacar son los circuitos integrados que son un conjunto de circuitos electrónicos ubicados en un chip de material semiconductor con la ventaja del ahorro de espacio comparado con una configuración independiente de los componentes. Este tipo de circuitos contienen cantidades enormes de transistores que ayudan al procesamiento de la información; en 2016 NVIDIA lanzó un circuito integrado con 25 millones de transistores por mm^2 [6].

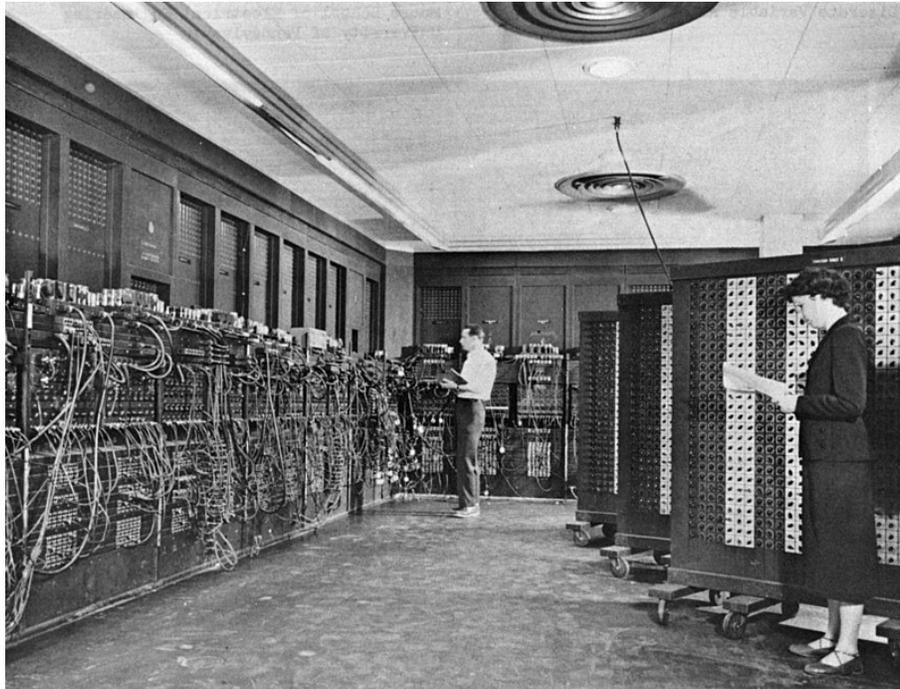


Figura 1.1: Foto que muestra a Glen Beck (al fondo) y Betty Snyder (en frente) programando la ENIAC en el *Ballistic Research Laboratory (BRL)*. Tomada de [5]

Gracias a los circuitos integrados y transistores, la innovación de las computadoras fue más sencilla. La construcción de computadoras de escritorio para trabajar en una oficina fue factible y, tiempo después, las laptops y tabletas comenzaron a introducirse en el mercado para aquellas personas en movilidad constante. El mundo comenzó a tener un nuevo objeto de atención que podía considerarse un bien preciado: la información. Hoy en día es utilizado por empresas para construir una campaña publicitaria, o atacar a sectores de clientes específicos; también es utilizado por universidades para mejorar el nivel académico, entre otras aplicaciones. De esta manera, fue necesario la creación de lugares en los cuales se pudiera almacenar la información mundial, surgiendo finalmente las supercomputadoras

y los centros de datos.

1.2. Consumo energético de la computación clásica

El consumo energético de las computadoras puede relacionarse con la irreversibilidad. El principio de Landauer establece un mínimo de consumo energético para el cambio de un bit, y aparece porque la pérdida en información en el sistema físico se convierte en calor, impidiendo la extracción de información útil del mismo. En otras palabras, entre más información se pierda en el proceso, más energía se requiere. El límite de Landauer está dado por

$$E_L = k_B T \ln(2), \quad (1.1)$$

donde E_L es la energía de Landauer, $k_B = 1.38 \times 10^{-23} J/K$ es la constante de Boltzman, T es temperatura en grados Kelvin y $\ln(2)$ es el logaritmo natural de los dos estados posibles que puede tomar un bit (0 ó 1).

Las innovaciones como el transistor o los circuitos integrados han permitido tener una computación más eficiente y rápida. Además, permiten la portabilidad de computadoras con grandes capacidades de procesamiento. Sin embargo, las computadoras portátiles y de escritorio no son suficiente para almacenar la información que se genera en el mundo. Para esto tenemos a los centros de datos.

Hay dos tipos de bases de datos: tradicionales y de hiper escala. Los tradicionales se caracterizan por almacenar la información de manera física en supercomputadoras (que manejan, por ejemplo, las universidades). Las de hiper-escala (*hyperscale*, en inglés) son bases de datos tradicionales pero a gran escala para almacenar cantidades de información enormes (estos bases manejan las empresas multinacionales de tecnología).

Debido a la importancia que toman los centros de datos, su consumo energético se tiene que considerar. Según datos de la *International Energy Agency* (IEA) [7], el consumo energético de los centros de datos y las redes de transmisión de información en el año 2021 fue entre 220 y 320 TWh, lo que equivale al 0.9-1.3% de la energía mundial consumida ese mismo año. Este consumo energético no incluye la tecnología de minería de criptomonedas. Las emisiones de estas tecnologías fueron de 300 MT (mega toneladas, donde una tonelada son 1000 kg) de CO_2 en 2020, que tiene un equivalente al 0.6% de las emisiones de gases del efecto invernadero (GEI) mundiales en ese mismo año.

Uno de los principales problemas que se tiene en los centros de datos es la refrigeración, que puede llegar a consumir entre 35-55% de la energía total consumida. Esta rama es lo que consume mayor energía en esta tecnología. Debido a esto, en el *Proyecto Natick* de Microsoft se sumergió el *Nothorn Isles datacenter* a 37 metros de profundidad en las islas Orkney, Escocia, en 2018 durante dos años [9]. Se demostró que este tipo de construcciones para centros de datos son factibles. Asimismo, la energía consumida por el centro de datos

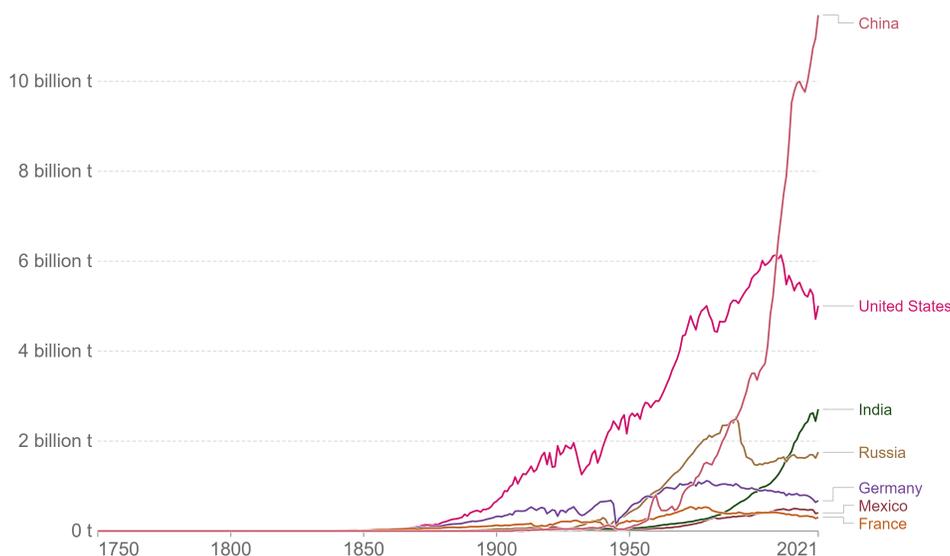


Figura 1.2: Emisiones de CO_2 anuales de algunos países. Tomada de [8]

era de origen solar y eólica. De esta manera se demuestra que las innovaciones tecnológicas pueden ser energéticamente eficientes si se hace el análisis y el estudio correctos.

Los efectos del cambio climático no se tomaban en cuenta años atrás, se decía que no existía y que solo eran inventos de empresas, políticos y científicos. Recientemente se ha demostrado lo contrario, los efectos del cambio climático se han visto en primera fila con el aumento de la temperatura. Este incremento no solo altera los ecosistemas del planeta afectando a las especies de los mismos, sino también a la salud humana. En 2022 se registró la mayor ola de calor en Reino Unido que mató a más de 2800 personas mayores a 65 años [10].

Las emisiones de CO_2 anuales de algunos países se pueden ver en la figura 1.2. Este gas es uno de los causantes del conocido efecto invernadero. China es el mayor emisor de CO_2 mundial, en 2021 tuvo emisiones de 11.47 billones de toneladas, mientras que Estados Unidos emitió 5.01 billones de toneladas, menos de la mitad de China. Si analizamos a México, la cantidad de CO_2 que se despiden a la atmósfera son 407.21 millones de toneladas.

Ahora bien, una de las aplicaciones más importantes del cómputo actual es la inteligencia artificial, que tiene como una de sus ramas al *machine learning*. Las emisiones de CO_2 en algoritmos de aprendizaje profundo se tomaron en cuenta en [11], arrojando resultados sorprendentes. El método Tensor2Tensor con una *Neural Architecture Search* (Arquitectura de Búsqueda Neuronal, en español), aplicada en [12], presenta las mayores emisiones con 142 toneladas de CO_2 en un tiempo de entrenamiento de 274 120 horas. Por su parte, la arquitectura de Tensor2Tensor base tiene 65M de parámetros y su entrenamiento tomó tan

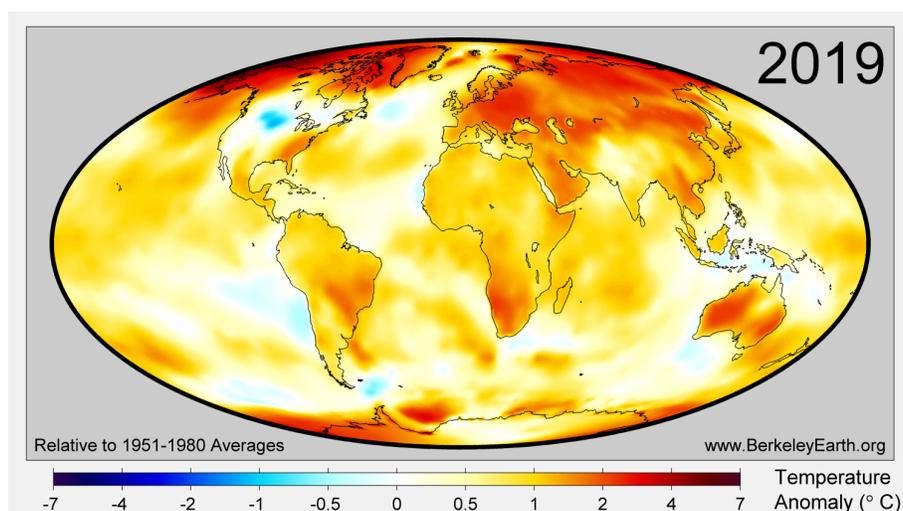


Figura 1.3: Anomalías de temperatura en el año 2019. Tomada de [8]

solo 12 horas con 6 kilogramos de CO_2 emitidos a la atmósfera.

La factorización de números enteros tiene su importancia en la criptografía, ya que es utilizada en la encriptación de transmisión de datos y firmas digitales. Los números RSA son semiprimos y fueron parte del *RSA Factoring Challenge* organizado por *RSA Laboratories* en marzo de 1991, los cuales son utilizados para la encriptación de datos. En 2020, Fabrice Boudot *et al* [13] publicaron un trabajo en el cual factorizan los números RSA-240 y RSA-250. Las simulaciones se llevaron a cabo en los procesadores *Intel Xeon Gold 6130 at 2.10GHz*.

El número RSA-240 tomó un tiempo de 953 *años-core* (los *años-core* es la medida de tiempo en años que le toma a una sola unidad *core* en resolver el problema). El número RSA-250 tomó un tiempo de 2700 *años-core*, lo que lo hace el número primo más grande en ser factorizado al momento de escribir este trabajo. En este mismo estudio se estima que un número con 1024-bits (o dígitos) tardaría 500 veces el tiempo requerido para uno con 240-bits (RSA-240) con los mismos procesadores.

En 1995 Peter Shor publicó su algoritmo cuántico que reduce el tiempo de compilación para la factorización [15]. El algoritmo de Shor tiene la gran ventaja de disminuir el tiempo de compilación de $t_d = e^{d^{1/3}}$ hacia una descripción polinomial de forma $t_s = d$, ver figura 1.4. Lo cual es una amenaza para la encriptación actual pero una mejora para demostrar que la computación cuántica puede ser de gran ayuda en un futuro.

Los problemas de búsqueda son uno de los retos más complicados que tiene la computación clásica, ya que se tienen que realizar como mínimo $N/2$ intentos o, en el peor de los casos, N intentos para encontrar la respuesta deseada (siendo N el número de datos). En

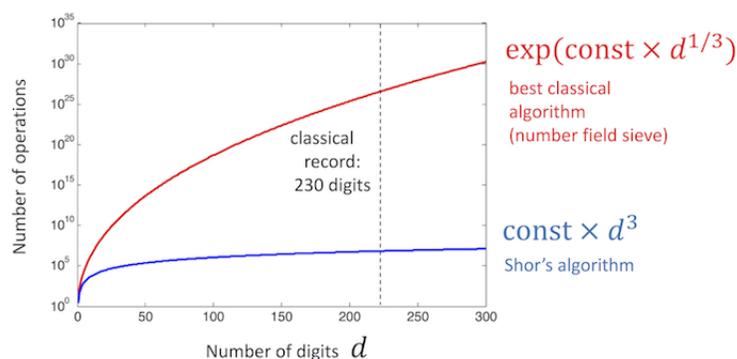


Figura 1.4: Factorización de números enteros por métodos clásicos y cuántico, siendo esta última la versión de este algoritmo creada por Alexey Kitaev. Tomada de [14]

la computación cuántica se tiene el algoritmo de Grover, que fue introducido por Lov K. Grover en 1996 [16], que reduce el número de intentos a tan solo \sqrt{N} . Reduciendo así no sólo el tiempo de compilación, sino también la energía consumida.

1.3. Computación cuántica

Hemos visto que la computación clásica tiene desventajas cuando se trata de resolver problemas complejos, ya que les llevaría un tiempo de miles de años. Por esta razón, las nuevas tecnologías, en este caso la computación cuántica, son una herramienta de interés mundial en la mayoría de las ramas de la ciencia. Esta idea fue por primera vez introducida al mundo por Richard Feynman en 1981 [17]. Una de las propiedades más importantes de la luz es la polarización. Esta propiedad fue la que utilizó Feynman en su analogía para crear sistemas cuánticos de dos estados para sustituir el procesamiento de información clásico: el bit. Esta idea iba encaminada a simular la física cuántica con una máquina cuántica que utilizara estos principios, ya que si una computadora clásica trata de simular un sistema cuántico se tienen que introducir modelos muy parecidos a los clásicos que eliminan las maravillosas propiedades de la cuántica.

La arquitectura de una computadora cuántica es totalmente diferente a la de una computadora clásica. Esta construcción debe aislar al sistema cuántico completamente del resto del universo, ya que cualquier interacción con él se ilustrará en errores posteriores. Los errores que se presentan en una computadora cuántica son gracias al ruido coherente o decoherente, a la medición, a la preparación de estados (SPAM, por sus siglas en inglés) y a la rotación de estados. Para reducir estos errores se tiene técnicas de corrección de errores cuánticos (*Quantum Error Correction. QEC*, en inglés) que pueden ser de carácter físico en el hardware o pueden ser algoritmos que se implementan en el código y la programación.

Uno de los requerimientos en arquitectura más importantes es mantener la temperatura muy baja, del orden de mili Kelvin, generando un gran consumo energético.

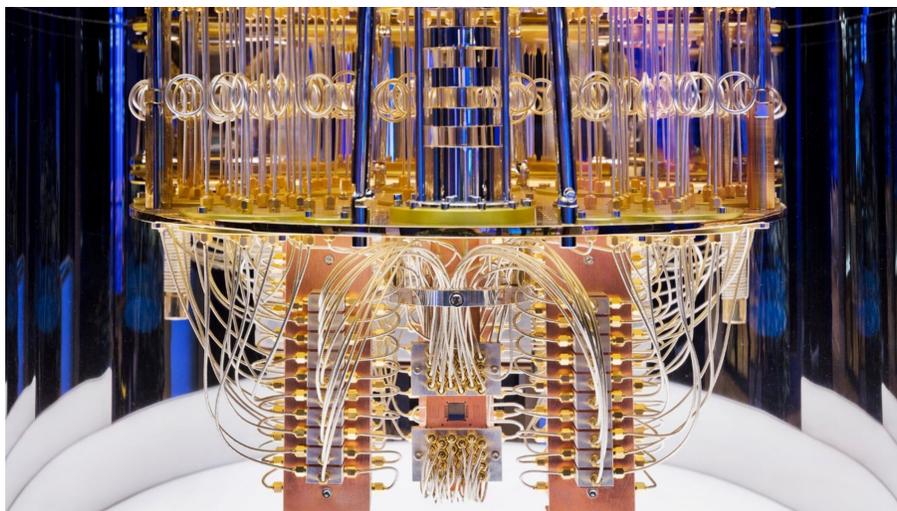


Figura 1.5: Computadora cuántica de la empresa IBM. Tomada de [18]

La unidad de procesamiento de una computadora cuántica se denomina cúbit (*quantum bit* o *qubit*, en inglés), utiliza las propiedades cuánticas de la superposición y entrelazamiento cuántico. Su representación gráfica es mediante la esfera de Bloch, donde el polo norte de la esfera es el estado $|0\rangle$ y el polo sur es el estado $|1\rangle$, que son parecidos a los estados 1 y 0 del bit clásico. En otras palabras, el sistema del cúbit se puede ver gráficamente como un vector espín en un espacio tridimensional.

Hoy en día existen varios tipos de cúbits: fotónicos (fotones individuales de la luz), iones atrapados (átomos cargados suspendidos en un campo electromagnético), circuitos superconductores (condensados de pares de Cooper que tienen en su circuito una unión de Josephson), etcétera. Estos últimos son los de mayor importancia debido a su escalabilidad. Nuevas investigaciones han mostrado interés en la implementación de condensados de excitón-polaritones debido a que presenta ventajas como operación a temperatura ambiente (atacando la problemática de la necesidad de tener temperaturas cercanas a los mili Kelvin), alta velocidad dinámica, facilidad en el manejo y control, y hay técnicas existentes para su fabricación [1]. Además de sus aplicaciones computacionales, también hay investigación en fenómenos cuánticos coherentes y no-lineales en materia condensada, óptica cuántica y atómica, fluidos de espín y microcavidades [19–23], entre otras. Aún así, la mayoría de la investigación de los excitón-polaritones va dirigida a la física semi-clásica, lo que quiere decir que el número de partículas en condensado es grande, tales como condensados de Bose-Einstein y láseres de polaritones [24], fluidos cuánticos y solitones [25], y polaritones topológicos [26]. Sin embargo, el excitón-polaritón es una partícula cuántica, por lo que

teóricamente puede tener la propiedad de entrelazamiento cuántico que utiliza el sistema de los cúbits. De esta manera, la investigación ha volteado hacia la dirección de la computación cuántica y sus aplicaciones [2, 27, 28]. En añadidura, el consumo energético promete ser menor ya que se ha demostrado que el *spin-switch* se realizó con energías menores a 0.5 femto-Joules [2].

Aunque todavía no existe una métrica para evaluar el consumo energético de la computación cuántica, Michael James Martin *et al* [29] realizaron un análisis para mostrar que el uso eficiente de la energía en la computación cuántica es posible y debe tomarse en cuenta.

1.4. Excitón-Polaritón

1.4.1. Microcavidades

Las microcavidades (MC) o micro-resonadores, son dispositivos que permiten almacenar la luz en volúmenes muy pequeños, idealmente de una sola frecuencia y por tiempos grandes. En la realidad, la luz almacenada tiene un ancho de línea en su frecuencia y un escape hacia el entorno. Debido a esto, se introduce el factor de calidad (Q). Esta variable es la medida del confinamiento óptico y está determinada por la relación entre la frecuencia del fotón almacenado y la tasa de escape de la microcavidad. Por lo que entre mayor sea el valor de Q , más calidad tendrá la microcavidad. Por consiguiente, se tiene que Q^{-1} es la medida de las pérdidas de energía.

La investigación de microcavidades semiconductoras ha tenido gran interés en los últimos años debido a acoplamiento fuerte de la luz con con la materia. Existen dos acoplamientos en las microcavidades: débil y fuerte. El primero da lugar al efecto Purcell, en el que se amplifica la emisión de la región activa de la cavidad. El acoplamiento fuerte da lugar a un tipo de cuasi-partícula: polaritón (este concepto se explicará en la siguiente sección). Existen varias construcciones para el confinamiento en una MC, uno de ellos es la microcavidad en pilar, figura 1.6(a). Esta configuración ofrece volúmenes pequeños y valores de Q del orden de 10^3 , tienen un patrón de emisión adecuado para el acoplamiento y manipulación de los fotones emitidos. También pueden incorporar puntos cuánticos como emisores.

Las microcavidades esféricas controlan los modos de los fotones incidentes mediante el confinamiento de la luz en dos de sus tres direcciones espaciales. Los espejos utilizados tienen una reflectividad de $R > 0.9999984$, dando lugar a microcavidades de $40\mu m$ con Q del orden de 10^8 . Los modos *whispering-gallery* pueden ser utilizados en microcavidades con reflectores de alta eficiencia sin tener que depender del material o las propiedades de multicapa. Estos modos se muestran cuando la luz incide en una interfaz plana de un alto índice de reflexión a un medio con menor índice de reflexión. Un tipo de microcavidad que

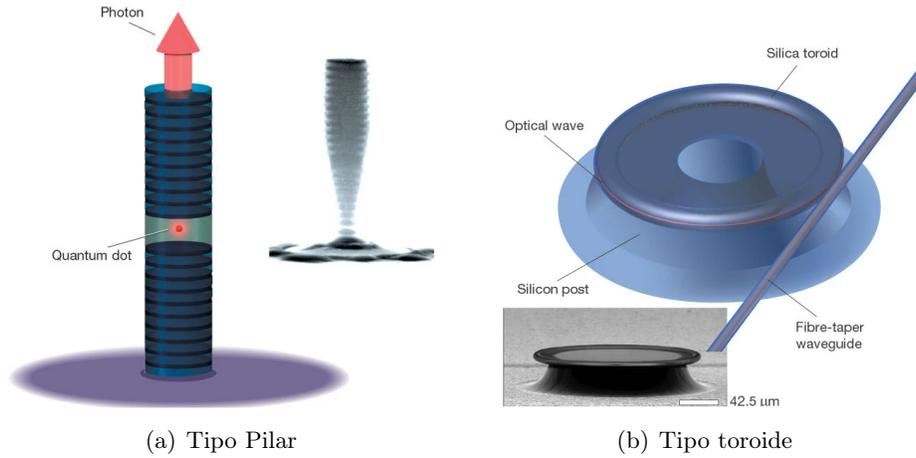


Figura 1.6: Microcavidad de tipo pilar (a) y tipo toroide (b). Tomadas de [30]

utiliza este principio es el resonador microtoroide [31], arrojando valores de Q del orden de 10^8 , ver figura 1.6(b).

1.4.2. Polaritones y excitones

En los materiales semiconductores existe lo que se conoce como brecha de energía (*band-gap*, en inglés), que es la energía que necesita superar un electrón para ser excitado y pasar de la banda de valencia a la banda de conducción. Si un fotón incide en un electrón con la suficiente energía hf que sea superior a la brecha de energía prohibida, el electrón pasará a la banda de conducción dejando una carga positiva denominada hueco, ver figura 1.7. Este electrón con carga negativa y el hueco con carga positiva pueden formar un estado ligado de electrón-hueco debido a la atracción de Coulomb, la cual reduce la energía del par. Este estado ligado está llamado un excitón, y tiene energía menor de la brecha de semiconductor.

El concepto del excitón fue introducido por primera vez en 1931 por Y. Frenkel [32]. Este estado de electrón y hueco ligado no tiene carga eléctrica, así que transporta energía sin transferencia de carga; se dice que es un estado ligado en virtud de que el electrón se encuentra en el orbital con ocupación más baja y el hueco se encuentra en el orbital de ocupación más alta. Su tiempo de vida es del orden de nanosegundos, al transcurrir este tiempo se emite un fotón o unos fonones. Generalmente, los estados de excitón son controlados mediante pozos cuánticos artificiales y barreras de potencial.

Un polaritón es una cuasi-partícula, parcialmente un fotón y parcialmente una excitación de materia. En el caso del acoplamiento fuerte entre un fotón y un excitón, donde

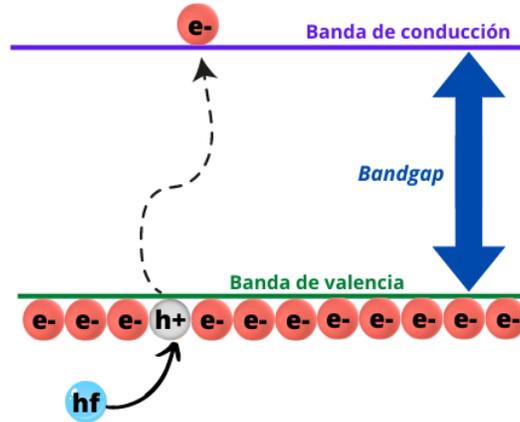


Figura 1.7: Diagrama cualitativo de un electrón (esfera roja) siendo excitado por un fotón (esfera azul) con la suficiente energía para superar la brecha de energía prohibida y pasar de la banda de valencia hacia la banda de conducción, dejando un hueco (esfera gris) y formando un par electrón-hueco.

la velocidad de intercambio de energía es mayor que la tasa de desintegración, se generan nuevos estados propios y una superposición entre el fotón y el electrón denominada polaritón. Los tipos de estas quasi-partículas se dividen según el acoplamiento: fonón-polaritón, excitón-polaritón, plasmón-polaritón, entre otros. Si existen varias quasi-partículas de este tipo, se pueden condensar en un solo estado cuántico ya que son bosones. En consecuencia, pueden formar estados coherentes en microcavidades semiconductoras, permitiendo el desarrollo de láseres de polaritones, fabricados por primera vez en el inicio del siglo XX [33].

El excitón-polaritón tiene propiedad de polarización, que resultan en formación de condensados polaritónicos caracterizados con espín. Estos condensados también pueden ser considerados como condensados con dos posibles estados, o dímeros polaritónicos. Ellos tienen varias propiedades importantes, como formación espontánea de polarización circular [2, 34], dinámica de ciclo limitado llevando a emisiones de peines de frecuencias [35, 36] y posible comportamiento caótico [37]. Como ya hemos hablado, los dímeros de excitón-polaritones pueden tener aplicaciones para el cómputo cuántico pero también para el cómputo análogo [38]. Además, recientemente se ha demostrado teórica y experimentalmente su uso en redes neuronales [39].

1.5. Organización de la tesis

El objetivo general del presente trabajo es realizar el estudio teórico de la dinámica conservativa de un dímero polaritónico con simetría Paridad-Tiempo (simetría \mathcal{PT}) para su uso en computación cuántica y simulaciones.

El primer *objetivo específico* es estudiar los puntos fijos del espín del condensado. Para esto es importante considerar dos casos:

- Cuando el parámetro de acoplamiento disipativo del sistema es bajo, $0 < \gamma < \varepsilon$, donde ε es el acoplamiento coherente que escribe el efecto de Josephson entre dos polarizaciones circulares del condensado.
- Cuando el parámetro de acoplamiento disipativo del sistema es alto: $\gamma > \varepsilon$.

El segundo *objetivo específico* es encontrar las soluciones exactas para las trayectorias semi-clásicas y demostrar que son conservativas, por lo que es necesario resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento de las componentes del espín y establecer que las trayectorias son cerradas.

En base a los objetivos, la tesis se estructura de la siguiente manera. En el capítulo 2 se obtienen los puntos fijos para los dos casos antes mencionados, introduciendo el modelo del dímero de Bose-Hubbard con simetría \mathcal{PT} . Además se obtienen las condiciones para cada caso y se obtiene de manera gráfica la dinámica conservativa. En el capítulo 3 se presenta la dinámica conservativa mediante las soluciones de las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del espín del condensado con simetría \mathcal{PT} . Finalmente, en el último capítulo se presentan las conclusiones del trabajo. Además, se tienen apéndices que explican la derivación de la ecuación para la evolución de la dinámica del espín para Hamiltonianos no hermitianos (apéndice A), el cálculo de la longitud crítica del espín (apéndice B), algunas características de las funciones elípticas de Jacobi (apéndice C) y el radio cruzado (apéndice D).

Capítulo 2

Puntos fijos de un dímero polaritónico con simetría \mathcal{PT}

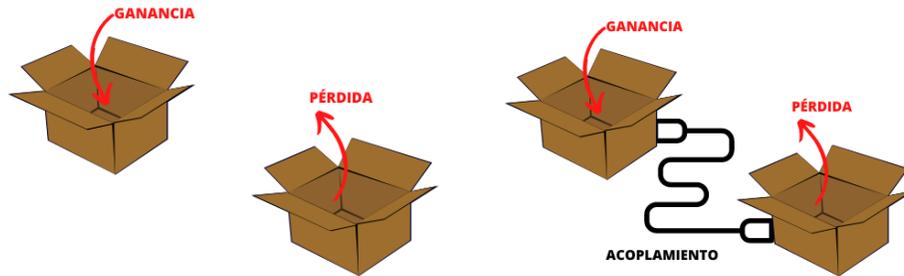
En este capítulo se presentará el modelo de Bose-Hubbard para la descripción de un dímero polaritónico. En este análisis se introducirá el dímero con las pérdidas y ganancias que tienen la simetría de Paridad-Tiempo. Estudiaremos los cambios cualitativos y bifurcaciones en el comportamiento del sistema, obtendremos las trayectorias del sistema y los puntos fijos del espín.

2.1. Simetría Paridad-Tiempo

En el nivel más introductorio de la mecánica cuántica, dos de sus condiciones son que el espectro de energías sea real y que la teoría debe ser unitaria (conservación de la probabilidad en la evolución en el tiempo). Para que estas dos condiciones se cumplan, los Hamiltonianos que describen a los sistemas deben ser Hermitianos, en otras palabras, el adjunto del Hamiltoniano debe ser igual a él mismo $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$. Esto dejó de ser completamente correcto, ya que Carl M. Bender y Stefan Boettcher demostraron que los sistemas con Hamiltonianos no-Hermitianos ($\mathcal{H} \neq \mathcal{H}^\dagger$), pero que conservan la simetría Paridad-Tiempo, también pueden tener un espectro real de energías [40].

Un sistema cerrado, o aislado, es aquel que no tiene interacciones con el medio que lo rodea. Estos sistemas se describen con Hamiltonianos Hermitianos y poseen valores de

energía reales y la probabilidad se conserva en la evolución del tiempo (evolución unitaria). Este tipo de análisis puede considerarse ideal porque la evolución en el tiempo no es afectada por las interacciones con el medio. Un sistema abierto, o no aislado, se refiere a aquel en el cual las interacciones con el medio se toman en cuenta. Un sistema abierto puede tener ganancia con un flujo de corriente de probabilidades hacia adentro o pérdida mediante un flujo de corriente de probabilidades hacia afuera (figura 2.1(a)). Estos dos sistemas por separado no están en equilibrio. Para producir un cuasi-equilibrio, se consideran dos sistemas acoplados abiertos, en los cuales el flujo neto de probabilidades es cero. El sistema con ganancia se conecta con el de pérdida. De esta manera, las pérdidas de un sistema se compensan por las ganancias del otro, como demuestra la figura 2.1(b) [41].



(a) Dos sistemas abiertos en desequilibrio por ganancia o pérdida con el medio. (b) Dos sistemas acoplados abiertos, una con ganancia y otra con pérdida, pero con flujo neto de probabilidad igual a cero.

Figura 2.1: Sistemas abiertos en desequilibrio (a) y en cuasi-equilibrio (b).

En el sistema acoplado se dice que hay un equilibrio dinámico ya que el flujo de probabilidades de ganancia fluye del sistema de pérdidas. Cuando existe este balance se tiene una fase de simetría \mathcal{PT} no rota (*unbroken \mathcal{PT} -symmetric phase*). Por su parte, si existe un desequilibrio dinámico se tiene una fase de simetría \mathcal{PT} rota (*broken \mathcal{PT} -symmetric phase*).

Un sistema con simetría \mathcal{PT} no rota es similar a un sistema cerrado porque está en cuasi-equilibrio y está descrito con el espectro real de energías. Cuando se tiene un sistema con simetría \mathcal{PT} rota, se tienen similitudes con un sistema abierto con la diferencia de que el flujo neto de probabilidades se desvance y las energías del sistema tienen valores complejos. De esta manera, se puede pensar que los sistemas con simetría \mathcal{PT} están en medio de los sistemas abiertos y cerrados. La transición de fase \mathcal{PT} describe el momento cuando se pasa del desequilibrio al equilibrio, o viceversa, y solo ocurre en un punto crítico en específico (punto de transición).

Antes de poner un ejemplo, tenemos que explicar qué acción realizan los operadores de paridad $\hat{\mathcal{P}}$ y de tiempo $\hat{\mathcal{T}}$. Para sistemas de bosones, que nos interesan aquí, existe la

base donde el operador de inversión del tiempo \hat{T} se reduce a la operación del complejo conjugado, tal como explico Eugene Wigner en los años 30s. De otro lado, el operador de paridad \hat{P} intercambia el lugar de dos estados ortogonales y está expresado por la matriz

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x \quad (2.1)$$

(aquí y en lo que sigue σ_x , σ_y y σ_z son matrices de Pauli). Entonces, el operador de inversión del tiempo cambia las pérdidas por las ganancias, y viceversa, y el operador de paridad intercambia los sistemas. Pongamos un ejemplo.

Supongamos que tenemos el Hamiltoniano $\hat{H} = i\gamma/2$, que no es Hermitiano. El sistema físico descrito no tiene dependencia espacial, así que se puede pensar como una región confinada del espacio. La solución a la ecuación de Schrödinger de este Hamiltoniano es $\psi(t) = Ce^{\gamma t/2}$, donde C es una constante. La probabilidad es

$$P = \psi^* \psi = |C|^2 e^{\gamma t},$$

la cual crece exponencialmente con el paso del tiempo, describiendo un sistema abierto con ganancia y que no tiene simetría \mathcal{PT} .

Para que el sistema tenga simetría \mathcal{PT} tenemos que combinar \hat{H} con su contraparte invertida en el tiempo $\hat{H}^\dagger = \hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1}$. Con $\hat{H}^\dagger = -i\gamma/2$ se comprueba que el operador de inversión temporal cambia la ganancia por la pérdida, ya que la solución de este Hamiltoniano es $\psi(t) = Ce^{-\gamma t/2}$ y la probabilidad es

$$P = \psi^* \psi = |C|^2 e^{-\gamma t},$$

la cual decae conforme el paso del tiempo, describiendo un sistema con pérdidas.

Combinando los dos Hamiltonianos llegamos a

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} i\gamma & 0 \\ 0 & -i\gamma \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

que es diagonal debido a que no están acoplados. Este Hamiltoniano no es Hermitiano, describe un sistema fuera del equilibrio y tiene simetría \mathcal{PT} :

$$\hat{P}\hat{T}\hat{\mathcal{H}}(\hat{P}\hat{T})^{-1} = \hat{\mathcal{H}}.$$

Todavía los eigenvalores de la matriz (2.2) son imaginarios y por lo tanto tenemos el caso de simetría \mathcal{PT} rota. Pero podemos considerar un Hamiltoniano más interesante introduciendo un acoplamiento entre los dos estados. Este sistema no está en equilibrio ya que la probabilidad de un sistema crece con el tiempo y la del otro decae. Por esto, se inserta un parámetro de acoplamiento ε en los elementos fuera de la diagonal

$$\mathcal{H}_a = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\gamma & \varepsilon \\ \varepsilon & -i\gamma \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} (\varepsilon\sigma_x + i\gamma\sigma_z). \quad (2.3)$$

Este Hamiltoniano de nuevo no es Hermitiano pero si tiene simetría \mathcal{PT} . Para obtener las energías en este caso, resolvemos el determinante de la ecuación secular

$$\det(\hat{\mathcal{H}}_a - E\hat{I}) = E^2 + \frac{1}{4}(\gamma^2 - \varepsilon^2) = 0,$$

donde \hat{I} es la matriz de identidad. Resolviendo esta ecuación para E se obtiene

$$E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 - \gamma^2}. \quad (2.4)$$

Vemos que si ε es lo suficientemente grande, $\varepsilon^2 > \gamma^2$, los valores de energía son reales, y obtenemos el caso de la simetría \mathcal{PT} no rota. En otras palabras, si el acoplamiento es lo suficientemente fuerte, la energía tendrá valores reales, ve la Figura 2.2.

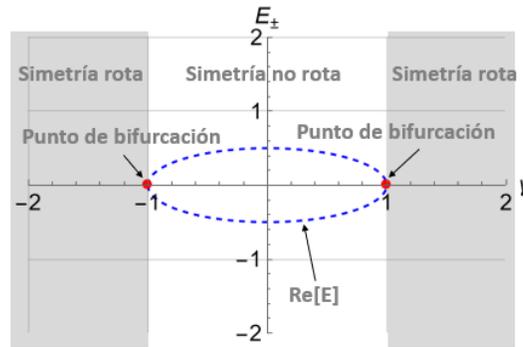


Figura 2.2: Eigenvalores E_{\pm} (2.4) de los Hamiltonianos \mathcal{H}_a (2.3) y \mathcal{H}_s (2.5), calculados con $\varepsilon = 1$. Los valores están en función del parámetro de disipación γ . Las partes reales se muestran con líneas discontinuas azules. Las energías son reales cuando $-1 < \gamma < 1$ (región de simetría \mathcal{PT} no rota), y son imaginarias cuando $\gamma > 1$ y $\gamma < -1$ (región de simetría \mathcal{PT} rota). Los puntos de bifurcación ocurren cuando $\gamma = \pm 1$ (puntos rojos).

Existe otra manera de introducir pérdidas y ganancias en el sistema, la cual será importante para la presente tesis. Consideremos el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_s = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon + \gamma \\ \varepsilon - \gamma & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} (\varepsilon \sigma_x + i\gamma \sigma_y), \quad (2.5)$$

que de nuevo no es Hermitiano, pero presenta simetría \mathcal{PT} y el mismo espectro de energías (2.4), que el Hamiltoniano anterior. El análisis general de las posibles matrices 2×2 no-Hermitianas, pero con la simetría \mathcal{PT} y el espectro real de eigenvalores se encuentra en Ref. [42].

2.1.1. Polaritones y simetría Paridad-Tiempo

Una de las aplicaciones más interesantes de los polaritones son los láseres. En este tópico se ha analizado que a temperatura ambiente, si el acoplamiento fuerte se sostiene, la relajación de polaritones y fonones acústicos puede ser más eficiente que con temperaturas bajas [43]. Para la formación de este tipo de láseres son necesarias microcavidades, principalmente de espejos de Bragg, de diferentes materiales que presentan distintas propiedades. Las microcavidades de nitruro de galio (GaN) parece que son las más eficientes, llamando la atención para realizar múltiples investigaciones [44, 45]. Aunque también han surgido otro tipo de microcavidades orgánicas [46–48] o microcavidades metal/aire [49].

Recientemente se ha analizado el dímero polaritónico con simetría Paridad-Tiempo [50] que puede utilizarse en computación cuántica. El problema con esta propuesta es que las no linealidades de las interacciones polaritón-polaritón rompen la simetría \mathcal{PT} y consecuentemente se destruye la operabilidad del sistema con gran número de ocupaciones. El alcance de sistemas con simetría \mathcal{PT} se demostró de manera teórica en el mismo trabajo. El resultado fue que la dinámica de un típico sistema aislado puede ser reproducida con un sistema con disipación compuesto de dos estados cuánticos caracterizados por factores de ganancia y pérdida, combinando simetría \mathcal{PT} pasiva y un mecanismo específico de saturación de ganancia. De esta manera, el fenómeno aquí demostrado se puede utilizar para láseres polaritónicos.

La importancia de los sistemas con simetría \mathcal{PT} es que puede modelar sistemas con disipación abierta que presentan dinámicas oscilatorias parecidas a sistemas conservativos. En contraste con las soluciones cíclicas límite de sistemas no lineales, las oscilaciones de la simetría \mathcal{PT} forman un continuo de órbitas no aisladas. La principal problemática es que los potenciales y el perfil de ganancia-pérdida requeridos para establecer la simetría \mathcal{PT} son muy difíciles de construir. Un ejemplo de esta problemática es la relajación en la dinámica que presentan los láseres, por lo que no pueden producir estos sistemas.

El análisis de la dinámica de Rabi [51] y el efecto de Josephson [52] es importante debido a que tiene aplicaciones en los polaritones (fotónica), información cuántica, nano electrónica, entre otras áreas. En 2010 se realizó un trabajo experimental en el que se demostró el efecto bosónico interno de Josephson en un condensado de Bose-Einstein de espinores de rubidio [53], concluyendo que este tipo de sistemas puedan utilizarse para el entrelazamiento cuántico. En 2013, Flach, Barashenkov y Jackson [54], analizaron un acoplamiento activo en un par de ondas guiadas con simetría \mathcal{PT} . Se mostró que aunque el régimen *blow-up* es estable en el par de ondas, es inestable y no es observable o controlable en el acoplamiento activo del dímero. En otro estudio [55] se demostró que el régimen permanente de oscilaciones de Rabi se puede realizar arribar del umbral de bombeo en el cual la simetría Paridad-Tiempo del sistema acoplado excitón-fotón se alcanza.

En un estudio reciente del año 2021 realizado por Kalozoumis y Petrosyan [56], se

obtuvo que cuando el bombeo de excitones es mayor al valor del umbral para la formación de un condensado de polaritones, la población de excitones satisface la condición de simetría \mathcal{PT} para la formación de un condensado polaritónico. Aunque este trabajo fue teórico y no experimental, se tomaron en cuenta las fluctuaciones de fase que se presentan en un sistema realista, demostrando el decaimiento de la población de polaritones.

Otro estudio ha ayudado al mejor entendimiento de las bifurcaciones que ocurren en este tipo de sistemas, ya que la estabilidad de los condensados está influenciada por ello [57]. Probaron un punto excepcional de quinto orden en un condensado de Bose-Einstein dipolar. Un punto excepcional se refiere a la fusión de dos o más estados en el mismo punto del espacio; estos puntos son características importantes en los sistemas no conservativos con intercambio de energía. También se han hecho estudios en materia de sistemas de muchas partículas [58].

En [59] se estudió un acoplamiento no lineal con simetría \mathcal{PT} de un sistema de ondas guiadas acopladas para lograr un transporte de la luz unidireccional. Se demostró que la luz puede localizarse completamente en una de estas dos ondas y que se pueden controlar respuestas *blow-up*. Las aplicaciones de estos resultados pueden caer en la construcción de nuevos diodos ópticos o aislantes ópticos. La posibilidad de construcción de nuevos dispositivos para amplificación óptica o para aplicaciones de baja potencia se demostró gracias al estudio realizado en [60]. Otro estudio importante fue [61], el cual concluye que todas las extensiones con simetría \mathcal{PT} de los sistemas conservativos no lineales de dímeros de Schrödinger permanecen completamente integrables. En el aspecto físico, se tiene que hay una variedad de clases de dímeros con simetría \mathcal{PT} que tienen trayectorias conservativas sin importar el parámetro de ganancia-pérdida, teniendo aplicaciones en óptica integrada.

También se ha demostrado de forma experimental un sistema a temperatura ambiente de polaritones con simetría \mathcal{PT} y transición de fase desde la fase de simetría no rota hasta la simetría rota. Los experimentos se hicieron en una microcavidad semiconductor hexagonal que genera modos de *whispering gallery*. De esta manera se demostró un nuevo método para mejorar los grados de libertad desde el punto de vista de integración y construcción para un sistema de acoplamiento de bosones con pérdida-ganancia [62]. En [63] se demostró que cerca de los puntos excepcionales que presentan los condensados de polaritones, puede existir un control del mismo mediante el bombeo de un láser externo que necesita mucha menos potencia que si se trata de controlar el sistema directamente. La extensión del estudio en configuraciones más complejas promete panoramas factibles para investigaciones de puntos excepcionales de mayor orden y fotónica topológica no Hermitiana en sistemas en desequilibrio de muchos cuerpos.

2.2. Modelo de Hubbard

Hasta ahora se tiene el modelo estándar que junta las tres fuerzas fundamentales del Universo en una sola ecuación. La gravedad es excluida debido a su naturaleza misteriosa; sin embargo, la teoría de cuerdas y la gravedad cuántica de bucles investigan como incorporar esta fuerza en una ecuación que contenga las cuatro fuerzas. Cuando apareció la mecánica cuántica, las explicaciones a fenómenos de la materia condensada eran necesarias. Una de ellas es el modelo de Hubbard, el cual fue introducido por Martin Gutzwiller [64], Junjito Kanamori [65] y John Hubbard [66]. El objetivo de este modelo fue explicar las correlaciones de los electrones en sólidos. Estas partículas se encuentran en una red en la cual dan saltos de un sitio a otro. Teniendo en cuenta que la probabilidad del salto de un electrón cae exponencialmente, lo más simple es considerar que solo existen saltos en los vecinos más cercanos. La energía cinética de cada salto es la misma.

Múltiples aplicaciones han surgido para este modelo en campos como la superconductividad, transiciones en metales aislantes, ferromagnetismo, átomos fríos, entre otras. Ésta última demostró como una red de átomos bosónicos muestra una transición de superfluido a un aislante de Mott [67], que ya se había previsto en el modelo Bose-Hubbard (modelo de Hubbard para bosones).

2.2.1. Hamiltoniano de Bose-Hubbard simple

El modelo Bose-Hubbard, introducido por Gersch y Knollman [68], tiene la misma descripción que el modelo de Hubbard con la diferencia que aquí se analizan bosones. De esta manera, un número arbitrario de bosones pueden ocupar el mismo sitio y es posible obtener la energía del estado base. La correlaciones que captura este modelo son las que surgen cuando hay interacciones fuertes entre las partículas. El Hamiltoniano de Bose-Hubbard viene dado entonces como

$$\hat{H} = -\frac{\varepsilon}{2} \sum_{ij} \left(\hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_j + \hat{\psi}_j^\dagger \hat{\psi}_i \right) + \frac{\alpha}{4} \sum_i \hat{\psi}_i^{\dagger 2} \hat{\psi}_i^2, \quad (2.6)$$

donde $\hat{\psi}_i^\dagger$ y $\hat{\psi}_i$ son los operadores de creación y aniquilación de bosones en el sitio i , respectivamente. La suma en el primer término toma los sitios más cercanos $\langle ij \rangle$. El operador de número (operador que mide el número de partículas del sitio) viene dado por $\hat{n}_i = \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_i$. El parámetro ε describe los saltos coherentes o el efecto túnel entre los vecinos más cercanos (también llamado acoplamiento coherente), indicando la energía cinética del sistema. El parámetro α expone la interacción local entre partículas del mismo sitio, donde si $\alpha > 0$ la interacción es repulsiva y si $\alpha < 0$, es atractiva. El conmutador de los operadores de creación y aniquilación tiene las propiedades de

$$[\hat{\psi}_i, \hat{\psi}_j^\dagger] = \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j^\dagger - \hat{\psi}_j^\dagger \hat{\psi}_i = \delta_{ij}; \quad [\hat{\psi}_i, \hat{\psi}_i] = [\hat{\psi}_i^\dagger, \hat{\psi}_i^\dagger] = 0. \quad (2.7)$$

2.2.2. El dímero de Bose-Hubbard con simetría Paridad-Tiempo

Cuando se introduce la simetría \mathcal{PT} en un sistema cuántico, entonces se toman en cuenta las pérdidas y ganancias del sistema mediante un parámetro que denotamos γ . Los condensados polaritónicos en dos sitios (los dímeros polaritónicos) se realizan en microcavidades semiconductoras, en donde un sitio se puede considerar como polarización circular positiva, y el otro como polarización circular negativa de polaritones. Las microcavidades semiconductoras naturalmente presentan el fenómeno del dicroísmo entre las polarizaciones lineales, que es caracterizado por el parámetro de separación ε entre las energías de los fotones con polarizaciones lineales X (horizontal) y Y (vertical), definidas por los ejes cristalográficos $[110]$ y $[\bar{1}\bar{1}0]$. Este fenómeno también se puede considerar como el efecto túnel entre polarizaciones circulares. La separación es de alrededor de decenas de μeV y puede ser controlado mediante la aplicación de un campo eléctrico [2]. Para lograr una buena simetría \mathcal{PT} se puede utilizar una microcavidad rayada a lo largo de la dirección diagonal o antidiagonal (en la dirección $[100]$ o en $[010]$). De esta manera, se introduce un cambio en el tiempo de vida de los polaritones con polarización diagonal y antidiagonal, caracterizado por el parámetro γ . Este mismo parámetro define la ganancia-pérdida que se comentó anteriormente, y lo referimos también como acoplamiento disipativo. Como resultado, cuando el bombeo externo del condensado iguala a la disipación promedio de la cavidad, el condensado es descrito por un Hamiltoniano con simetría \mathcal{PT} que se define como

$$H_{\mathcal{PT}} = -\frac{\varepsilon}{2} \left(\hat{\psi}_{+1}^\dagger \hat{\psi}_{-1} + \hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_{+1} \right) + \frac{\gamma}{2} \left(\hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_{+1} - \hat{\psi}_{+1}^\dagger \hat{\psi}_{-1} \right) + \frac{\alpha}{4} \left(|\hat{\psi}_{+1}|^4 + |\hat{\psi}_{-1}|^4 \right), \quad (2.8)$$

donde $\hat{\psi}_{+1}$ y $\hat{\psi}_{-1}$ aniquilan polaritones con polarizaciones circulares derechas y izquierdas, respectivamente.

En el caso de un solo polaritón, el último término en (2.8) desaparece y los primeros dos términos definen una matriz 2×2 , que es igual al Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_s$ analizado arriba, ver la ecuación (2.5). Entonces para un solo polaritón, la simetría \mathcal{PT} se rompe para $\gamma > \varepsilon$. La meta principal de nuestro estudio es demostrar que en el caso de muchos polaritones con interacción, la simetría \mathcal{PT} no está rota para todos los valores de γ . Para eso consideramos la dinámica semi-clásica del Hamiltoniano (2.8) y mostramos que es la dinámica pseudo-conservativa, con todas las trayectorias cerradas.

2.3. Dinámica de un dímero Bose-Hubbard con simetría \mathcal{PT}

Un condensado de Bose-Einstein (conocido como dímero BEC o unión de Josphson bosónico) en una trampa óptica de doble pozo que se utiliza para el estudio de la coherencia. Es muy útil para comprender el efecto túnel, predice el auto atrapamiento macroscópico, el colapso y las oscilaciones de Rabi. En particular, el dímero de condensados excitón-polaritón

se crea con una alta precisión [69] y presenta entrelazamiento cuántico [53, 70, 71]. El BEC también tiene interesantes aplicaciones en la rama de la materia oscura ultra ligera, ya que este tipo de materia oscura está compuesta por bosones de masas entre $mc^2 < eV$ y forman condensados de Bose-Einstein o superfluidos a escalas galácticas [72].

La importancia de la simetría \mathcal{PT} se ha comentado en la anterior sección, teniendo aplicaciones teóricas y experimentales. Pai-Yen Chen [73] propuso y validó una técnica telemétrica de alto orden con simetría \mathcal{PT} , la cual aumenta la sensibilidad y el factor de calidad Q de un sensor inductor-capacitor (LC) pasivo inalámbrico, usado para aplicaciones médicas e industriales. Otra aplicación interesante es el análisis de la molécula de hidrógeno con interacciones de ganancia-pérdida balanceada con el ambiente [74].

El control no coherente de un dímero Bose-Hubbard con hamiltoniano no hermitiano demostró que la única energía real aparece cuando las fuertes interacciones y la no hermiticidad están balanceadas, lo cual indica que un sistema abierto de muchos cuerpos puede existir [75]. En otro estudio [76], se analizó el modelo Bose-Hubbard de doble pozo. En este caso, a la parte dependiente del tiempo se agregó una parte imaginaria (no hermitiana) dependiente del tiempo, aumentando el efecto túnel en las regiones caóticas. Muy recientemente se ha estudiado la dinámica disipativa en una dimensión en términos del modelo Bose-Hubbard de dos partes con ganancia-pérdida alternada [77]. El sistema muestra simetría \mathcal{PT} bajo ciertas condiciones y muestra una transición en esta misma que es caracterizada por un parámetro de ordenamiento. Se encontró que modulando periódicamente el acoplamiento disipativo el régimen de simetría se conserva y no hay riesgo de ruptura.

En el límite semi-clásico, el Hamiltoniano del dímero Bose-Hubbard con simetría \mathcal{PT} se define como

$$\mathcal{H} = -\frac{\varepsilon}{2}(\psi_{+1}^* \psi_{-1} + \psi_{-1}^* \psi_{+1}) + \frac{\gamma}{2}(\psi_{-1}^* \psi_{+1} - \psi_{+1}^* \psi_{-1}) + \frac{\alpha}{4}(|\psi_{+1}|^4 + |\psi_{-1}|^4), \quad (2.9)$$

donde $\psi_{\pm 1}$ se toman como números complejos que indican la polarización circular a la derecha (+1) y a la izquierda (-1). Esto debido a que es un análisis semi-clásico, correspondiente a un sistema con gran número de bosones. El parámetro ε describe el acoplamiento coherente (acoplamiento de Josephson), mientras que el parámetro α describe las interacciones polaritón-polaritón (también llamadas no linealidades de Kerr). El parámetro γ indica la diferencia de vida de los polaritones con polarización diagonal y antidiagonal; en otras palabras, es el parámetro de ganancia-pérdida que introduce la simetría \mathcal{PT} . También se define como el acoplamiento disipativo. Los parámetros tienen dimensionalidad de energía y haciendo $\hbar = 1$ se tienen también las unidades de frecuencia.

Si usamos la representación de Heisenberg de manera clásica (con números complejos en lugar de operadores), la evolución de la polarización está dada por

$$i \frac{d\psi_{\pm 1}}{dt} = -\frac{1}{2}(\varepsilon \pm \gamma) \psi_{\mp 1} + \frac{\alpha}{2} |\psi_{\pm 1}|^2 \psi_{\pm 1}. \quad (2.10)$$

Para el análisis del dímero bosónico con simetría \mathcal{PT} es de utilidad introducir el espín, el cual está definido como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \Psi^* \boldsymbol{\sigma} \Psi, \quad (2.11)$$

donde $\Psi = (\psi_{+1}, \psi_{-1})^T$ es el espinor y $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de Pauli con sus respectivas componentes matriciales ($n = 0, x, y, z$)

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Ahora podemos encontrar las componentes del vector de espín. De esta manera tenemos que las componentes son

$$S_x = \frac{1}{2} \Psi^* \sigma_x \Psi = \frac{1}{2} (\psi_{+1}^* \psi_{-1} + \psi_{-1}^* \psi_{+1}), \quad (2.13a)$$

$$S_y = \frac{1}{2} \Psi^* \sigma_y \Psi = \frac{i}{2} (\psi_{-1}^* \psi_{+1} - \psi_{+1}^* \psi_{-1}), \quad (2.13b)$$

$$S_z = \frac{1}{2} \Psi^* \sigma_z \Psi = \frac{1}{2} (|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2), \quad (2.13c)$$

$$S_0 \equiv S = \frac{1}{2} \Psi^* \sigma_0 \Psi = \frac{1}{2} (|\psi_{+1}|^2 + |\psi_{-1}|^2). \quad (2.13d)$$

Las componentes presentadas en el conjunto de ecuaciones (2.13) satisfacen las relaciones de conmutación conocidas $[S_n, S_j] = i\hbar \epsilon_{njl} S_l$, donde ϵ_{njl} es el símbolo de Levi-Civita. Se observa que en el límite clásico se tiene la relación $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$.

En este punto se puede reescribir el Hamiltoniano (2.9) en términos de las componentes del espín como

$$\mathcal{H} = -\varepsilon S_x + \frac{\alpha}{2} S_z^2 + \frac{\alpha}{2} (S^2 - S) - i\gamma S_y, \quad (2.14)$$

siendo

$$\mathcal{H} = H_0 + iH_1, \quad (2.15a)$$

$$H_0 = \frac{\alpha}{2} (S^2 - S) - \varepsilon S_x + \frac{\alpha}{2} S_z^2, \quad (2.15b)$$

$$H_1 = -\gamma S_y. \quad (2.15c)$$

La parte hermitiana de Hamiltoniano (2.15b) corresponde al modelo de Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) introducido en 1965 [78], mientras la parte anti-hermitiana (2.15c) satisface la simetría \mathcal{PT} . Cuando se tiene que $\gamma \neq 0$, entonces obtenemos el modelo LMG con simetría \mathcal{PT} . En otras palabras, se toma en cuenta la ganancia-pérdida del sistema con el ambiente. El modelo LMG se ha utilizado para el análisis de átomos ultrafríos y microcavidades [79–

[82], termodinámica de sistemas de polaritones [83], entrelazamiento cuántico [84], efecto de Josephson [85], entre otros campos. El Hamiltoniano H_1 hace que perdamos la hermiticidad pero obtengamos la simetría Paridad-Tiempo, y puede ser introducido de varias maneras. Por ejemplo, en [54] fue introducido como $H_1 = -\gamma S_z$, mostrando una simetría \mathcal{PT} rota con cualquier valor del parámetro γ .

Para encontrar la evolución en el tiempo de las componentes del espín podemos sustituir la ecuación (2.10) en las componentes del espín (2.13). Para el caso general de los Hamiltonianos no-hermitianos $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{S}) = H_0(\mathbf{S}) + iH_1(\mathbf{S})$ derivamos estas ecuaciones en el apéndice A:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \left[\frac{dH_0}{d\mathbf{S}} \times \mathbf{S} \right] + S \frac{dH_1}{d\mathbf{S}}. \quad (2.16)$$

De esta manera obtenemos

$$\frac{dS_x}{dt} = \dot{S}_x = -\alpha S_y S_z, \quad (2.17a)$$

$$\frac{dS_y}{dt} = \dot{S}_y = -\gamma S + \varepsilon S_z + \alpha S_x S_z, \quad (2.17b)$$

$$\frac{dS_z}{dt} = \dot{S}_z = -\varepsilon S_y, \quad (2.17c)$$

$$\frac{dS}{dt} = \mathbf{S} \cdot \frac{dH_1}{d\mathbf{S}} = \dot{S} = -\gamma S_y. \quad (2.17d)$$

Se puede ver que la longitud del espín no es constante, sino que depende del parámetro de acoplamiento disipativo y de la componente del eje y del espín.

En lo que sigue, sólo se tomarán en cuenta los valores positivos de los parámetros del sistema ($\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$). Si tenemos la atracción de partículas, es decir $\alpha < 0$, la ecuación (2.17a) cambiaría de signo, al igual que el tercer término de la ecuación (2.17b). Si intercambiamos $S_x \rightarrow -S_x$, los signos vuelven a cambiar y el sistema queda intacto. De esta manera solo es suficiente tomar en cuenta la repulsión de los polaritones ($\alpha > 0$). Si $\varepsilon < 0$, entonces el segundo término de la ecuación (2.17b) cambia de signo al igual que la ecuación (2.17c). Si intercambiamos $S_z \rightarrow -S_z$ y $S_y \rightarrow -S_y$, el sistema no cambia. De esta manera, sólo se toma en cuenta valores positivos de ε . Si $\gamma < 0$, el primer término de la ecuación (2.17b) cambia de signo, y la ecuación (2.17d) también. Al intercambiar $S_z \rightarrow -S_z$ y $S_x \rightarrow -S_x$, el sistema no cambia por lo que sólo es necesario analizar valores positivos del acoplamiento disipativo.

2.4. Ecuaciones reducidas

Se tomará un tiempo adimensional $t' = \varepsilon t$, un parámetro de ganancia-pérdida $\gamma' = \gamma/\varepsilon$ y un parámetro de interacción $\alpha' = \alpha/\varepsilon$, obteniendo

$$\frac{dS_x}{dt'} = \alpha' S_y S_z, \quad \frac{dS_y}{dt'} = -\gamma' S + S_z \alpha' S_z S_x, \quad \frac{dS_z}{dt'} = -S_y.$$

En lo que sigue omitimos las primas, que es equivalente a usar las unidades de energía en donde $\varepsilon = 1$. Además, escalamos la longitud del espín y definimos nuevas variables

$$s = \frac{S}{\sqrt{\alpha}}, \quad x = \frac{S_x}{\sqrt{\alpha}}, \quad y = \frac{S_y}{\sqrt{\alpha}}, \quad z = \frac{S_z}{\sqrt{\alpha}}. \quad (2.18)$$

Para estas variables tenemos las ecuaciones equivalentes al fijar $\alpha = 1$ y $\varepsilon = 1$ en las ecuaciones (2.17):

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -yz, \quad (2.19a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = -\gamma s + z + xz, \quad (2.19b)$$

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = -y, \quad (2.19c)$$

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = -\gamma y. \quad (2.19d)$$

En el caso de la simetría \mathcal{PT} se tienen tres casos de interés:

- $0 < \gamma < 1$: El caso del acoplamiento disipativo débil.
- $\gamma = 1$: El caso de acoplamiento disipativo crítico.
- $\gamma > 1$: El caso del acoplamiento disipativo fuerte.

Cuando el valor de γ es cercano a 1 (cercano al valor del acoplamiento coherente), es donde debería existir un punto de bifurcación entre simetría rota y no rota. Sin embargo, en este caso en particular, se tiene una transición que conserva la simetría \mathcal{PT} y lo único que se ve afectado es la geometría y la cantidad de puntos fijos que se encuentran sobre el espín.

2.4.1. Puntos fijos y trayectorias

Para obtener el valor de los puntos fijos se tienen que tomar en cuenta las ecuaciones (2.19) y la propiedad

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (2.20)$$

de esta manera si analizamos las ecuaciones (2.19c) y (2.19d) para obtener una constante de movimiento tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma \dot{z} - \dot{s} &= -\gamma y + \gamma y \\ &= 0, \end{aligned}$$

teniendo entonces como constante de movimiento a la ecuación

$$s - \gamma z = \rho, \quad (2.21)$$

donde ρ es una constante del movimiento.

Por otro lado, tenemos la condición de conservación de la combinación

$$-x + \frac{1}{2}z^2 = E, \quad (2.22)$$

donde E es una otra constante del movimiento, que en el caso del modelo LMG ordinario es la energía. Las dos ecuaciones (2.21) y (2.22) definen por completo las trayectorias en el espacio del espín de tres dimensiones.

Antes de analizar las posibles trayectorias, buscaremos posibles puntos fijos no triviales del espín. El punto fijo trivial $x = y = z = s = 0$ corresponde al condensado vacío y no tiene interés práctico.

La condición que se tiene que cumplir para los puntos fijos es que la evolución en el tiempo de las componentes del espín sea constante ($\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$). De la ecuación (2.19c) obtenemos que el valor de la componente y del espín para los puntos fijos debe ser cero,

$$y = 0. \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23) ya satisface que $\dot{x} = 0$, por lo que si ahora tomamos a la ecuación (2.19b) para \dot{y} tenemos

$$(1 + x)z - \gamma s = 0. \quad (2.24)$$

Tomando en cuenta la propiedad (2.20) y que el valor de $y = 0$, la ecuación (2.24) se convierte en

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \frac{(1 + x)z}{\gamma}, \quad (2.25)$$

en donde si se sustituye en la constante de movimiento (2.21) se obtiene que el valor para el punto fijo de la componente z , en términos de la componente x y el acoplamiento disipativo, es

$$z = \frac{\gamma\rho}{1 - \gamma^2 + x}. \quad (2.26)$$

Este valor puede ser introducido dentro de la ecuación (2.24) y haciendo un poco de álgebra se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\gamma\rho}{1 - \gamma^2 + x}(1 + x) &= \gamma\sqrt{\left(\frac{\gamma\rho}{1 - \gamma^2 + x}\right)^2 + x^2} \\ \Rightarrow (1 - \gamma^2 + x)^2 x^2 - \rho^2 ((1 + x)^2 - \gamma^2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

la cual se tiene que resolver para encontrar los posibles valores de la componente x en los puntos fijos.

Primero observamos que esta ecuación siempre tiene al menos dos raíces reales. Considerando el lado izquierdo de la ecuación (2.27) como una función de x , $f(x)$, vemos que por grandes valores de $|x|$ esta función es positiva;

$$f(x \rightarrow \pm\infty) \approx x^4 > 0.$$

Por otro lado, esta función también toma valores negativos. En el caso $0 \leq \gamma < 1$ tenemos $f(0) = -\rho^2(1 - \gamma^2) < 0$, y en el caso $\gamma > 1$ tenemos $f(\gamma^2 - 1) = -\rho^2\gamma^2(\gamma^2 - 1) < 0$. De esta manera se tiene que la función cambia continuamente de valores negativos a valores positivos y hay al menos una raíz real de la ecuación (2.27), donde la función es cero. Las raíces reales deben aparecer o desaparecer en pares, por lo que siempre tendremos al menos dos raíces.

Considerando que $f(x)$ un polinomio de orden cuatro, el máximo número de raíces es cuatro también. El determinante de la ecuación viene dado por la expresión

$$\Delta_1 = 16\rho^4\gamma^2 \left[(\rho^2 - (1 - \gamma^2)^2)^3 - 27\gamma^2\rho^4 \right]. \quad (2.28)$$

Este discriminante tiene dos características para el número de raíces reales de la ecuación (2.27), que son

$$\Delta_1 < 0, \quad 2 \text{ raíces}, \quad 0 < \rho < \rho_c; \quad (2.29a)$$

$$\Delta_1 > 0, \quad 4 \text{ raíces}, \quad \rho > \rho_c; \quad (2.29b)$$

en donde ρ_c es el punto crítico donde existe una bifurcación, y pasa cuando el discriminante es igual a cero.

Entonces, obtenemos ρ_c de la ecuación $\Delta_1 = 0$. Cuando se analiza $16\rho^4\gamma^2$ se llega a la conclusión que se tiene la solución trivial de $\rho = 0$, por lo que la verdadera ecuación que se tiene que analizar es la que está dentro de los corchetes,

$$[\rho^2 - (1 - \gamma^2)^2]^3 - 27\gamma^2\rho^4 = 0, \quad (2.30)$$

que tiene un discriminante

$$\Delta_2 = -3^9(1 - \gamma^2)^6 [2 - 3(1 - \gamma^2) + (1 - \gamma^2)^2]^2. \quad (2.31)$$

El discriminante de la ecuación (2.31) es menor que cero, $\Delta_2 < 0$, lo cual significa que solo hay una solución real para la ecuación (2.30). Indicando la existencia de un solo punto crítico donde existe la bifurcación, teniendo como consecuencia que superado un valor crítico no se puede volver a tener dos puntos fijos. En otras palabras, cuando se pasa de tener dos puntos fijos a tener cuatro, siempre se tendrán estos últimos al ir aumentando ρ .

La ecuación (2.30) se tiene que resolver para encontrar el valor del punto crítico. Para resolver esta ecuación cúbica por respeto al ρ^2 utilizamos el método de Cardano (publicada por Gerolamo Cardano en su *Ars Magna* [86]) y un método equivalente a las sustituciones de Vieta [87]. El proceso para encontrar a ρ_c se puede ver en el apéndice B. De esta manera obtenemos que el punto de bifurcación en términos de γ :

$$\rho_c^2 = 1 + 7\gamma^2 + \gamma^4 + 3 \left[(1 + 2\gamma^2)\gamma^{\frac{2}{3}} + (2 + \gamma^2)\gamma^{\frac{4}{3}} \right]. \quad (2.32)$$

Caso del acoplamiento disipativo débil, $0 < \gamma < 1$

Cuando se tiene un acoplamiento disipativo débil (menor al acoplamiento coherente), las trayectorias del dímero yacen sobre la superficie de una elipsoide de rotación. Considerando la ecuación (2.21) podemos ver que el parámetro ρ , que define el tamaño del elipsoide, no puede ser negativo, y los elipsoides están definidos por

$$x^2 + y^2 + (1 - \gamma^2)(z - z_0)^2 = \frac{\rho^2}{1 - \gamma^2}, \quad z_0 = \frac{\gamma\rho}{1 - \gamma^2}, \quad \rho \geq 0. \quad (2.33)$$

Los elipsoides se prolongan a lo largo del eje z y su forma depende directamente del parámetro γ : la excentricidad es igual a γ . Cuando el parámetro ρ tiene un valor pequeño y no se supera el valor crítico ρ_c , se obtienen dos puntos fijos de tipo foco (figura 2.3(a)). Por otro lado, para elipsoides grandes, definidos por $\rho > \rho_c$, se obtienen cuatro puntos fijos (figura 2.3(b)). Se tiene que tres de ellos son de tipo foco y uno es de tipo silla. En este último caso, los dos puntos de foco que ya se tenían antes conservan sus propiedades, solo aparecen dos puntos fijos más, un foco y uno de silla.

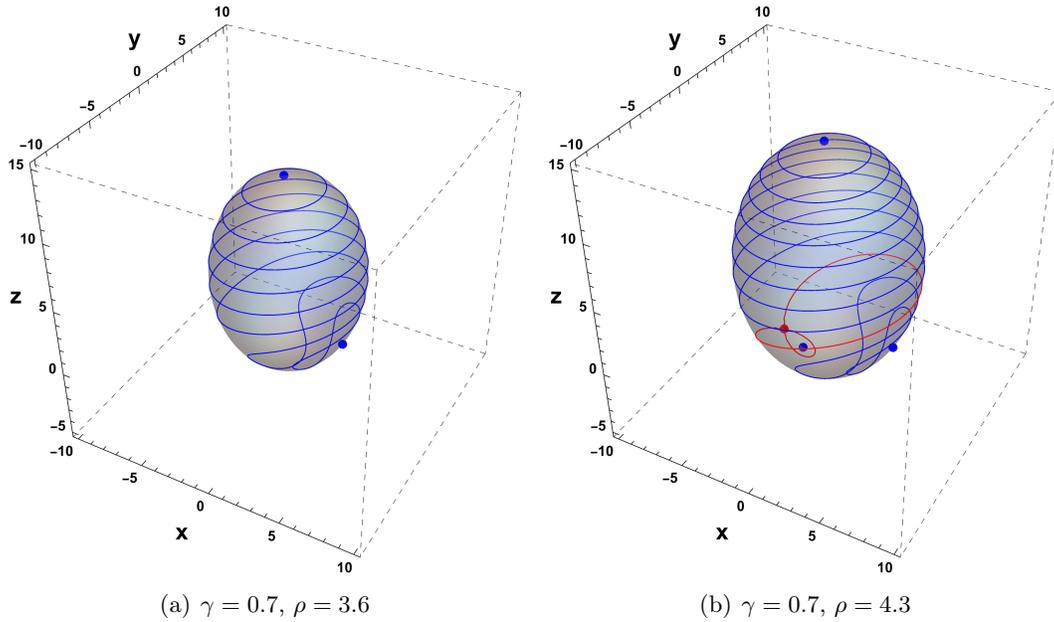


Figura 2.3: Trayectorias del espín de un dímerno polaritónico con simetría \mathcal{PT} en el caso conservativo. Con el valor de $\gamma = 0.7$ se tiene un punto crítico donde se da la bifurcación de $\rho_c = 3.741$. En la figura (a) se tiene un valor de longitud del espín de $\rho = 3.6$, el cual es menor al punto crítico, por lo que se tienen dos puntos fijos de tipo foco (puntos azules). En la figura (b) se tiene un valor de $\rho = 4.3$ que excede el valor del punto crítico, en consecuencia se tienen cuatro puntos fijos de los cuales tres son focos (puntos azules) y solo uno es de tipo silla (punto rojo), en donde la trayectoria roja indica una trayectoria con periodo infinito correspondiente al punto de silla. Las trayectorias azules indican trayectorias alrededor de los puntos fijos de tipo foco

En este punto cabe resaltar que aunque se introduzca el bombeo y disipación con la simetría \mathcal{PT} en el sistema, se conservan las trayectorias cerradas, similares cualitativamente con las trayectorias del dímerno conservativo ($\gamma = 0$), y solo cambia la superficie en que yacen. Como se dijo antes, el parámetro γ es el que controla la forma del elipsoide. Cuando su valor tiende a cero, el elipsoide tiende a una esfera. Mientras que cuando su valor crece la elipse se hace más larga en el eje z .

Caso del acoplamiento disipativo crítico, $\gamma = 1$

En el caso cuando el valor del acoplamiento disipativo tiende al valor del acoplamiento coherente, las superficies definidas por el parámetro ρ cambian drásticamente. Ahora ya no tendremos elipsoides, tendremos paraboloides definidos por

$$z = -\frac{\rho}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2\rho}. \quad (2.34)$$

El parámetro crítico en este caso es $\rho_c = \sqrt{27}$, pero hay un cambio en el número de puntos fijos en los paraboloides. Tenemos

$$\rho < \sqrt{27}, \quad 1 \text{ raíz}; \quad (2.35a)$$

$$\rho > \sqrt{27}, \quad 3 \text{ raíces}. \quad (2.35b)$$

El cambio en el número de raíces se debe a que si $\gamma = 1$ la ecuación para los puntos fijos de la componente x (2.27) se convierte en una ecuación cúbica

$$x^3 - \rho^2 x - 2\rho^2 = 0.$$

Caso del acoplamiento disipativo fuerte, $\gamma > 1$

Cuando se supera el valor de transición, se tiene un acoplamiento disipativo fuerte que supera al acoplamiento coherente. En este caso, se esperaría que la simetría \mathcal{PT} se rompiera. Sin embargo, se tiene una conservación de ésta y lo único que cambia es la superficie en que yacen las trayectorias y los puntos fijos. Los elipsoides se convierten en hiperboloides. En este caso se tiene que si el valor de ρ no excede la longitud crítica, existe un punto fijo de tipo foco (figura 2.4(a)) y un punto ficticio que no yace sobre la superficie. Por su parte, cuando se supera la longitud crítica existen tres puntos fijos de los cuales dos son focos, solo uno es de silla (figura 2.4(b)) y uno es ficticio que no yace en la superficie.

En este capítulo se analizaron los puntos fijos y se obtuvieron las expresiones analíticas para examinar cada uno de los casos de interés. En el siguiente capítulo se analizará la dinámica y se obtendrán las soluciones exactas para demostrar que se tiene una dinámica conservativa del espín.

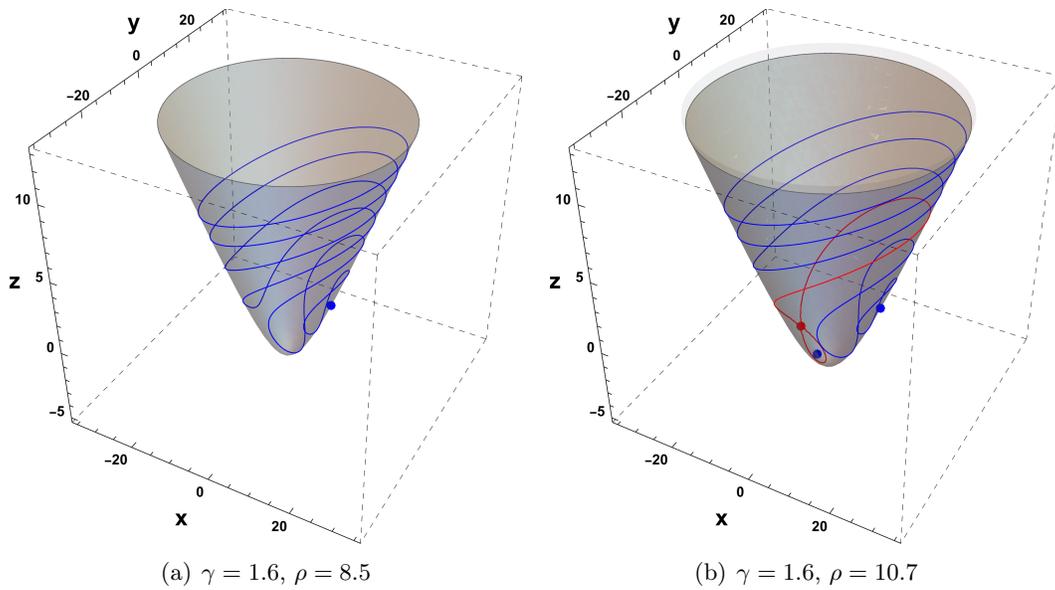


Figura 2.4: Trayectorias del espín de un dímero polaritónico con simetría \mathcal{PT} en el caso conservativo. Con el valor de $\gamma = 1.6$ se tiene un punto crítico donde se da la bifurcación de $\rho_c = 8.729$. En la figura (a) se tiene un valor de longitud del espín de $\rho = 8.5$, el cual es menor al punto crítico, por lo que se tienen un punto fijo de tipo foco (punto azul). En la figura (b) se tiene un valor de $\rho = 10.7$ que excede el valor del punto crítico, en consecuencia se tienen tres puntos fijos de los cuales dos son focos (puntos azules) y solo uno es de tipo silla (punto rojo), en donde la trayectoria roja indica una trayectoria con periodo infinito correspondiente al punto de silla. Las trayectorias azules indican trayectorias alrededor de los puntos fijos de tipo foco

Capítulo 3

Dinámica conservativa de un dímero polaritónico con simetría \mathcal{PT}

En este capítulo se presentan las soluciones exactas de las ecuaciones de movimiento del espín para demostrar que su dinámica es conservativa. Para esto, se toma en cuenta el parámetro de acoplamiento disipativo que introduce la simetría Paridad-Tiempo.

3.1. Trayectorias generales y soluciones exactas

Para obtener las trayectorias para cada componente del espín, primero se tiene que recordar que las ecuaciones de movimiento están definidas como

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -yz, \quad (3.1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = -\gamma s + z + xz, \quad (3.1b)$$

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = -y, \quad (3.1c)$$

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = -\gamma y, \quad (3.1d)$$

y también la conservación de energía

$$-x + \frac{1}{2}z^2 = E, \quad (3.2)$$

en donde también es donde yacen las trayectorias. Además, es importante recordar la condición de constante de movimiento

$$s - \gamma z = \rho, \quad (3.3)$$

en donde la longitud del espín está definida por la propiedad

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.4)$$

Con todo esto dicho, elevamos al cuadrado la ecuación (3.1c) y utilizamos la propiedad (3.4) y (3.3) para obtener el valor de la componente y elevada al cuadrado y obtenemos que

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (\dot{z})^2 = y^2 = (\rho + \gamma z)^2 - x^2 - z^2. \quad (3.5)$$

Ahora, para dejar solo una variable en esta ecuación diferencial podemos utilizar la constante de energía (3.2) para obtener el valor de la componente x del espín. De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{1}{2}z^2 - E\right)^2 \\ \rightarrow \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= y^2 = (\rho + \gamma z)^2 - x^2 - z^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= y^2 = (\rho + \gamma z)^2 - \left(\frac{1}{2}z^2 - E\right)^2 - z^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

De esta manera tenemos una ecuación diferencial no lineal que se puede resolver mediante funciones elípticas de Jacobi (ver apéndice C para las características de este tipo de funciones). Para esto, primero expandimos la ecuación y agrupamos los términos según su potencia

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{4}z^4 - z^2(1 - E - \gamma^2) + 2\rho\gamma z + (\rho^2 - E^2). \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7) es una ecuación diferencial no lineal la cual tiene un polinomio de orden cuarto. Para resolver este tipo de ecuaciones, tomamos el método presentado en [88]

para reducir esta ecuación diferencial en términos de funciones elípticas de Jacobi. Este método asume que las raíces del polinomio de cuarto orden son reales, sin embargo, también describen a dos pares de raíces con su complejo conjugado e, incluso, coeficientes complejos. Introducimos la variable

$$w = \frac{pz + q}{rz + v}, \quad (3.8)$$

de manera que su derivada tiene la forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dt}\right) &= \frac{pv - qr}{(rz + v)^2} \left(\frac{dz}{dt}\right) \\ \Rightarrow \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 &= \frac{(pv - qr)^2}{(rz + v)^4} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

La variable w es una función elíptica de Jacobi que satisface

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = -k^2\beta^2 (w^2 - w_a^2) (w^2 - w_b^2), \quad (3.10)$$

donde las variables $\pm w_a$ y $\pm w_b$ son las raíces de la ecuación cuártica para w . Por su parte, k^2 es el módulo elíptico. Estas tienen los valores de

$$w_a^2 = 1, \quad w_b^2 = \frac{k^2 - 1}{k^2}. \quad (3.11)$$

La ecuación (3.7) se puede escribir en términos de sus raíces de la siguiente manera

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c_4 z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z^1 + c_0 = c_4(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4), \quad (3.12)$$

en donde en nuestro caso $c_4 < 0$ ($c_4 = -1/4$). Cabe resaltar que este polinomio puede tener cuatro raíces reales, dos reales y dos complejas, y cero raíces reales y todas complejas. Esta última opción indica que no habrá trayectorias.

Comparando las ecuaciones (3.7) y (3.10), podemos realizar el radio cruzado (las características del radio cruzado se pueden ver en el Apéndice D). En este punto se tienen seis arreglos (gracias al grupo de Klein) que pueden utilizarse para obtener las soluciones. De manera general se tiene el radio cruzado

$$\kappa(z, z_2, z_3, z_4) = \kappa(w, w_2, w_3, w_4),$$

o de manera explícita se tiene

$$\frac{(z - z_2)(z_3 - z_4)}{(z - z_4)(z_3 - z_2)} = \frac{(w - w_2)(w_3 - w_4)}{(w - w_4)(w_3 - w_2)}.$$

El mapeo de este tipo de radio cruzado es

$$\begin{aligned} z = z_2 & \quad \text{mapeo a} & w = w_2 & \quad \text{con} & \kappa = 0, \\ z = z_3 & \quad \text{mapeo a} & w = w_3 & \quad \text{con} & \kappa = 1, \\ z = z_4 & \quad \text{mapeo a} & w = w_4 & \quad \text{con} & \kappa = \infty. \end{aligned}$$

3.1.1. Caso con cuatro raíces reales

Para este caso, las raíces del polinomio (3.12) son tales que $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ y para w se tiene que son bicuadráticas, $\pm w_a$ y $\pm w_b$. El arreglo utilizado, tomando en cuenta las condiciones del mapeo general ($0 \leq \kappa \leq 1$), para realizar el radio cruzado tiene la forma

$$\kappa(z, z_4, z_2, z_3) = \kappa(w, w_a, -w_b, w_b), \quad (3.14)$$

o de manera explícita se tiene que

$$\frac{(z - z_4)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_4)} = \frac{(w - w_a) - 2w_b}{(w - w_b) w_a + w_b}. \quad (3.15)$$

Introduciendo el valor $z = z_1$ y $w = -w_a$ obtenemos

$$\kappa_0 = \frac{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)} = \frac{4w_a w_b}{(w_2 - w_b)^2}, \quad 0 \leq \kappa_0 \leq 1. \quad (3.16)$$

O bien, haciendo un poco de álgebra

$$1 - \kappa_0 = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}. \quad (3.17)$$

De esta manera, podemos mapear la ecuación (3.12) en (3.10), tomando a w como un coseno elíptico de Jacobi, $w = \text{cn}(\omega t, k^2)$, ya que los signos de los coeficientes indican esta forma. Así pues, tomando el radio cruzado (3.17) se convierte en

$$1 - \kappa_0 = 1 - \frac{4w_a w_b}{(w_a + w_b)^2} = \frac{(w_a - w_b)^2}{(w_a + w_b)^2} = \frac{(k - \sqrt{k^2 - 1})^2}{(k + \sqrt{k^2 - 1})^2}.$$

Obtenemos la raíz cuadrada de este término y nombramos a una nueva variable de manera que

$$\sigma = \sqrt{1 - \kappa_0} = \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{k + \sqrt{k^2 - 1}} = \sqrt{\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}}. \quad (3.18)$$

Resolviendo esta ecuación para encontrar el valor del módulo elíptico se obtiene que

$$k^2 = \frac{(1 + \sigma)^2}{\sigma}, \quad (3.19)$$

teniendo como característica que $k^2 > 1$. Podemos reescribir los valores de las raíces del polinomio de cuarto orden de la variable w 3.10 si jugamos un poco con las definiciones de σ y el módulo elíptico

$$w_a = \pm 1, \quad w_b = \pm \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}. \quad (3.20)$$

Recordando la ecuación para la variable w (3.8), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{(pv - qr)^2}{(rz + v)^4} \left(\frac{ds_z}{dt} \right)^2 &= \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 = \frac{(pv - qr)^2 c_4}{(rz + v)^4} (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) \\ &= -\beta^2 k^2 (w^2 - w_a^2)(w^2 - w_b^2), \end{aligned} \quad (3.21)$$

De esta manera, si comparamos los términos de las ecuaciones, podemos obtener el valor de la variable β en su forma

$$\beta^2 = \frac{(pv - qr)^2 c_4}{-k^2 (rz + v)^4}. \quad (3.22)$$

Para encontrar los valores de las variables p , q , r y v , tenemos que utilizar el radio cruzado (3.15) y resolver para w de manera que sea posible igualar este valor con la ecuación (3.8) y comparar sus términos.

Sustituyendo los valores de w_a y w_b dentro de la ecuación del radio cruzado 3.15 tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{(z - z_4)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_4)} &= \frac{(w - 1)}{\left(w - \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}\right)} \left(\frac{2 \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}}{1 + \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}} \right) \\ &= \frac{(w - 1)k}{\left(wk - \sqrt{k^2 - 1}\right)} \left(\frac{2\sqrt{k^2 - 1}}{k + \sqrt{k^2 - 1}} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Realizando un poco de álgebra, podemos llegar a una expresión en la que es posible comparar los términos obtenidos con la ecuación para la variable w . Por lo tanto se obtiene que si resolvemos la ecuación 3.23 para w tenemos que el numerador y denominador son

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \left[\sqrt{k^2 - 1}(z_2 - z_3) - 2k\sqrt{k^2 - 1}(z_2 - z_4) \right] z, \\ &\quad - \sqrt{k^2 - 1}(z_2 - z_3)z_4 + 2k\sqrt{k^2 - 1}(z_2 - z_4)z_3 \end{aligned} \quad (3.24a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & \left[\left(k + \sqrt{k^2 - 1} \right) (z_2 - z_3) - 2k\sqrt{k^2 - 1}(z_2 - z_4) \right] z \\ & - \left(k + \sqrt{k^2 - 1} \right) (z_2 - z_3)z_4 + 2k\sqrt{k^2 - 1}(z_2 - z_4)z_3, \end{aligned} \quad (3.24b)$$

respectivamente. De esta manera, la ecuación 3.8 para la variable introducida w se puede escribir también como

$$w = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}. \quad (3.25)$$

Finalmente se tiene que los valores de las variables p , q , r y v se pueden escribir como

$$p = \frac{2(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)^2} [(z_2 - z_3) + \sigma(z_3 - z_4)], \quad (3.26a)$$

$$q = \frac{2(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)^2} [-\sigma(z_2 - z_4)z_3 - (z_3 - z_4)z_2], \quad (3.26b)$$

$$r = \frac{2}{1 + \sigma} [-\sigma(z_2 - z_4) + (z_3 - z_4)], \quad (3.26c)$$

$$v = \frac{2}{1 + \sigma} [\sigma(z_2 - z_4)z_3 - (z_3 - z_4)z_2]. \quad (3.26d)$$

Antes de obtener el valor de β , definimos nuevas variables para poder reescribir de manera más elegante las variables importantes del análisis

$$\nu_1 = \sqrt{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}, \quad \nu_4 = \sqrt{(z_3 - z_4)(z_2 - z_4)}. \quad (3.27)$$

Por lo que podemos escribir a la variable sigma de diferente modo

$$\sigma = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{\nu_1\nu_4}. \quad (3.28)$$

Ahora, podemos obtener el valor de β no sin antes renombrarla por motivos de convención. El resultado es

$$\beta = \omega = \frac{1}{2}\sqrt{\nu_1\nu_4}. \quad (3.29)$$

En donde tenemos la condición

$$\omega^4 = (c_4\nu_1\nu_4)^2 \geq 0. \quad (3.30)$$

Como $\sigma^* = \frac{1}{\sigma}$, tenemos que el módulo

$$m = k^2 = \frac{1}{4} \left(\sigma + 2 + \frac{1}{\sigma} \right) \in \mathbb{R}.$$

3.1.2. Caso con un par de raíces complejas

Cuando el polinomio de la ecuación diferencial (3.12) tiene solo dos raíces reales y dos complejas, se obtiene que $\{z_1, z_4\} \in \mathbb{R}$ siendo $z_1 < z_4$. Las otras dos raíces tienen la característica de ser complejo conjugado una de otra $z_3 = z_2^*$. En consecuencia se tiene que $w \in \mathbb{R}$ y

$$w_b = i|w_b|, \quad w_b^* = -w_b, \quad p^* = -p, \quad q^* = -q, \quad r^* = -r, \quad v^* = -v.$$

Para este caso también se cumple la condición (3.30). En los dos casos analizados se tiene que los valores de ν_1, ν_4 y $m = k^2$ siempre son reales.

3.1.3. Soluciones

Finalmente, habiendo obtenido los valores de las variables necesarias hacemos uso de la ecuación (3.8) y resolvemos para z . De esta manera se obtiene la ecuación de las trayectorias en esta componente del espín

$$z = \frac{\nu_1 z_4 [1 \pm \text{cn}(\omega t, m)] + \nu_4 z_1 [1 \mp \text{cn}(\omega t, m)]}{\nu_1 [1 \pm \text{cn}(\omega t, m)] + \nu_4 [1 \mp \text{cn}(\omega t, m)]}. \quad (3.31a)$$

$$z_+ = \frac{\nu_1 z_4 [1 + \text{cn}(\omega t, m)] + \nu_4 z_1 [1 - \text{cn}(\omega t, m)]}{\nu_1 [1 + \text{cn}(\omega t, m)] + \nu_4 [1 - \text{cn}(\omega t, m)]}. \quad (3.31b)$$

$$z_- = \frac{\nu_1 z_4 [1 - \text{cn}(\omega t, m)] + \nu_4 z_1 [1 + \text{cn}(\omega t, m)]}{\nu_1 [1 - \text{cn}(\omega t, m)] + \nu_4 [1 + \text{cn}(\omega t, m)]}. \quad (3.31c)$$

donde t es el tiempo y $m = k^2$. Las trayectorias de la componente x son descritas por la ecuación de conservación de energía, en términos de la componente z

$$x = \frac{1}{2}z^2 - E. \quad (3.32)$$

Por su parte, las trayectorias de la componente y son la derivada temporal de las de z de acuerdo con la ecuación (3.1c). Por lo tanto se obtiene que

$$y = \frac{8\omega^3(z_4 - z_1)\text{dn}(\omega t, m)\text{sn}(\omega t, m)}{(\nu_1 [1 \pm \text{cn}(\omega t, m)] + \nu_4 [1 \mp \text{cn}(\omega t, m)])^2}, \quad (3.33)$$

donde el signo de la función elíptica de Jacobi en x y y no tiene importancia ya que está elevado al cuadrado.

El periodo máximo, por definición, de las funciones elípticas de Jacobi es

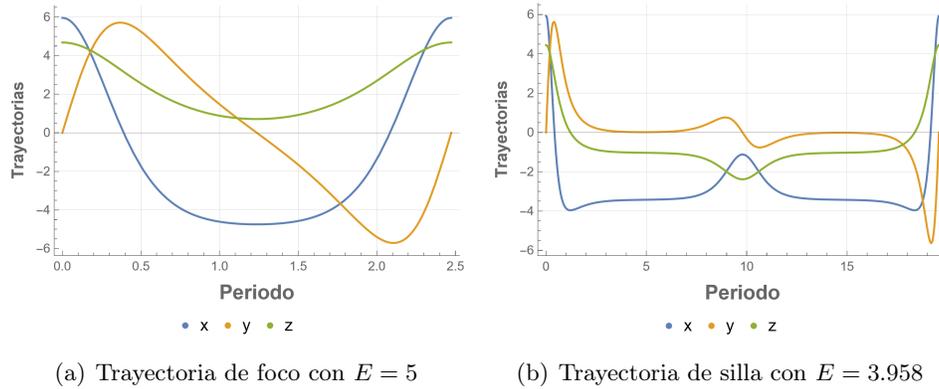


Figura 3.1: Soluciones exactas de las trayectorias en términos de las funciones elípticas de Jacobi con valores $\rho = 4.3$ y $\gamma = 0.7$ (acoplamiento disipativo débil). En (a) se presentan las soluciones gráficas de una trayectoria de foco. En (b) se muestra una trayectoria de silla. Los dos casos presentan una dinámica conservativa.

$$t_{max} = \begin{cases} 4K & m < 1; \\ \frac{2K(\frac{1}{m})}{\sqrt{m}} & m > 1. \end{cases} \quad (3.34)$$

Analizando el caso del acoplamiento disipativo débil con valores de $\rho = 4.3$ y $\gamma = 0.7$ podemos analizar una trayectoria de foco (figura 3.1(a)) y otra de silla (figura 3.1(b)). La trayectoria de foco con energía $E = 5$ tiene un periodo de valor pequeño $t_{max} = 2.47$. La trayectoria de silla tiene energía $E = 3.958$ y un periodo de $t_{max} = 19.59$ el cual, como se esperaba, es muy grande. En los dos casos se muestra una dinámica conservativa.

En caso del acoplamiento disipativo crítico se esperaría que el periodo no fuera finito, ya que lo que se espera es que la simetría se rompa. Sin embargo, en este caso de análisis se tiene una conservación de la simetría aún con el acoplamiento disipativo crítico, mostrando periodos finitos para las soluciones. Para valores de $\rho = 5.5$ y $\gamma = 1$ se tiene que con una energía $E = 7$ se tiene una trayectoria de foco, presentando un periodo finito de valor $t_{max} = 1.941$ (figura 3.2(a)). Para una energía $E = 4.833$ se tiene una trayectoria de silla que presenta un periodo muy grande valor $t_{max} = 8.312$ (figura 3.2(b)). Los dos casos muestran dinámica conservativa.

Para el acoplamiento disipativo fuerte con valores $\gamma = 1.6$ y $\rho = 10.7$ se tiene que con energía $E = 12$ se presenta una trayectoria de foco con $t_{max} = 1.533$ (figura 3.3(a)). Mientras que con una energía $E = 9.226$ se tiene una trayectoria de silla con un periodo muy grande de valor $t_{max} = 5.231$ (figura 3.3(b)). Los dos casos presentan dinámica conservativa.

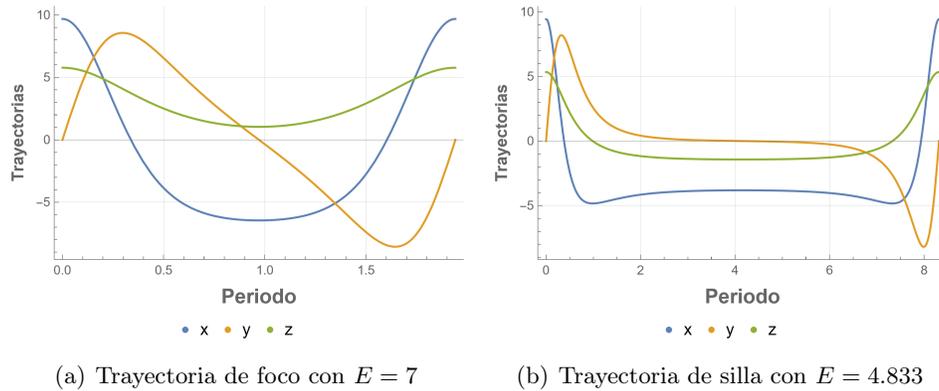


Figura 3.2: Soluciones exactas de las trayectorias en términos de las funciones elípticas de Jacobi con valores $\rho = 5.5$ y $\gamma = 1$ (acoplamiento disipativo crítico). En (a) se presentan las soluciones gráficas de una trayectoria de foco. En (b) se muestra una trayectoria de silla. Los dos casos presentan una dinámica conservativa.

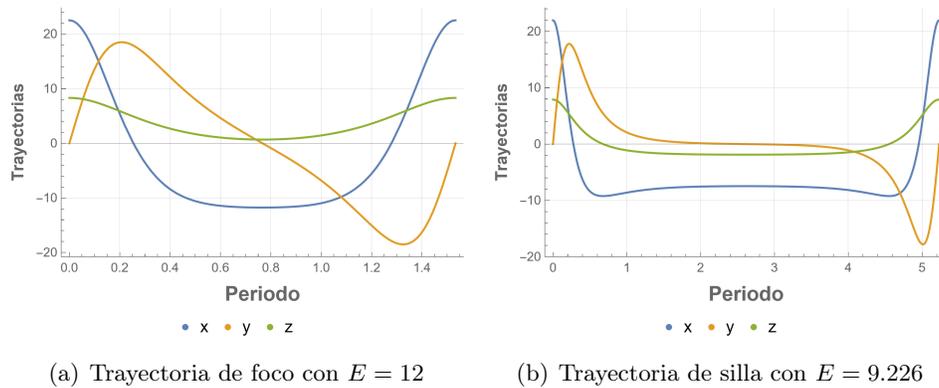


Figura 3.3: Soluciones exactas de las trayectorias en términos de las funciones elípticas de Jacobi con valores $\rho = 10.7$ y $\gamma = 1.6$ (acoplamiento disipativo fuerte). En (a) se presentan las soluciones gráficas de una trayectoria de foco. En (b) se muestra una trayectoria de silla. Los dos casos presentan una dinámica conservativa.

En añadidura, se tiene lo que se comentó anteriormente. En todos los casos, para todos los valores de los parámetros, el módulo elíptico y la variables ω , ν_1 y ν_4 son reales.

Para el caso donde las raíces del polinomio son reales, se tiene que el signo positivo (ecuación (3.31b)) arroja soluciones que oscilan entre z_4 y z_3 , mientras que si se tiene el

signo negativo ((3.31c)) arroja soluciones que oscilan entre z_1 y z_2 . El módulo $k^2 > 1$ y podemos utilizar que

$$\text{cn}(\omega t, k^2) = \text{dn}\left(k\omega t, \frac{1}{k^2}\right),$$

por lo que $\text{cn}(\omega t, k^2)$ oscila entre $w_a = 1$ y $w_b = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$.

Por otro lado, cuando $z_2 = z_3^*$ los signos dan las mismas soluciones pero desplazadas en el tiempo y oscilando entre z_1 y z_4 . Entonces, $w = \pm \text{cn}(\omega t, k^2)$ oscila entre $w_a = \pm 1$ ya que $0 < k^2 < 1$.

3.1.4. Valores de la constante de movimiento

Los valores de ρ pueden ser tanto positivos como negativos, dejando intactas a las soluciones y demostrando siempre trayectorias conservativas. Los cambios son sobre las raíces del polinomio (3.12) de manera que

$$z_1 \rightarrow -z_4, \quad z_4 \rightarrow -z_1, \quad z_2 \rightarrow -z_2^*, \quad z_3 \rightarrow -z_3^*, \quad (3.35)$$

Sin embargo, en este punto surgen dos casos a analizar:

- Caso con $0 \leq \gamma \leq 1$
- Caso con $\gamma > 1$

Constante de movimiento con $0 \leq \gamma \leq 1$

Recordando por la ecuación para la constante de movimiento está definida como

$$s - \gamma z = \sqrt{x^2 + z^2} - \gamma z = \rho, \quad (3.36)$$

siendo el valor de ρ positivo siempre ya que el valor de la raíz cuadrado siempre será más grande que el valor lineal de z cuando $\gamma = 0$ ó $\gamma = 1$, aún con $z < 0$. Cuando se tiene $0 < \gamma < 1$ podemos fijar el valor de $x = 0$ y obtener

$$|z| - \gamma z = \rho,$$

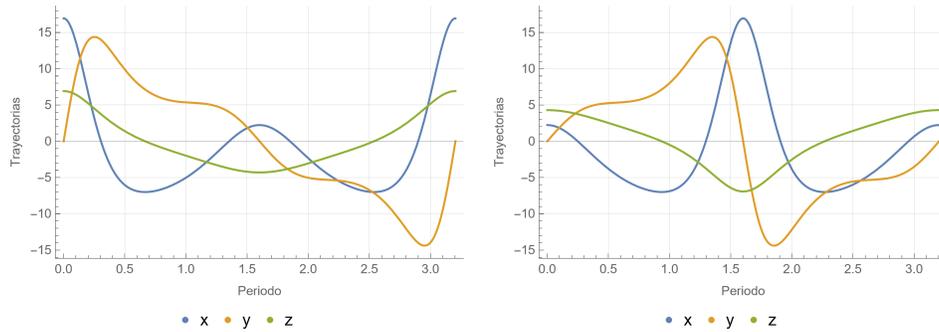
lo cual es mayor que cero aún con $z < 0$. Esto da como resultado que cuando $0 \leq \gamma \leq 1$ el valor de la constante de movimiento siempre sea positivo. Este caso lo podemos apreciar en las figuras anteriores 3.1, 3.2 y 3.3 demostrando trayectorias conservativas.

Constante de movimiento con $\gamma > 1$

Ahora bien, cuando $\gamma > 1$, tenemos que la ecuación (3.36) puede tener un valor negativo o positivo. Si tomamos $x = 0$,

$$|z| - \gamma z = \rho,$$

surgen dos casos. El primero es cuando $z < 0$, en el cual obtenemos que $\rho > 0$. El segundo caso es cuando $z > 0$, arrojando el resultado de $\rho < 0$. Este caso se aprecia en las figuras 3.4, demostrando trayectorias conservativas.



(a) Trayectorias de las tres componentes con $\rho = 10$

(b) Trayectorias de las tres componentes con $\rho = -10$

Figura 3.4: Soluciones exactas de las trayectorias en términos de las funciones elípticas de Jacobi con valores $\rho = \pm 10$, $\gamma = 1.2$ y $E = 7$. En (a) se presentan el caso con $\rho = 10$. Mientras que en (b) se muestra el caso cuando $\rho = -10$. Se tiene como $t_{max} = 3.2035$ y como módulo elíptico $m = 0.804$

En este capítulo se ha demostrado que la dinámica es conservativa para todos los valores del sistema. En el siguiente capítulo se enlistarán las conclusiones del trabajo.

Capítulo 4

Conclusiones

En el presente trabajo hacemos una propuesta de fabricación de un dímero polaritónico para fines de la computación cuántica. La idea principal es introducir el acoplamiento disipativo γ y coherente ε en una forma especial que preserva la simetría \mathcal{PT} . Demostramos que este dímero tiene una dinámica conservativa para cualquier valor de los parámetros del sistema. Se ha encontrado que las soluciones para las trayectorias generales de cada una de las componentes del espín tienen un periodo finito para cualquier valor del parámetro de acoplamiento disipativo, indicando conservación de la simetría aún teniendo un acoplamiento disipativo mayor al coherente. A continuación se enumeran las conclusiones del trabajo con más detalle.

1) Para los puntos fijos se analizaron las ecuaciones de movimiento del espín, obteniendo las expresiones generales que nos indican la cantidad y tipo de puntos fijos del sistema. El punto fijo de la componente y tiene un valor constante de $y = 0$ para todos los casos analizados. También se encontró que el número de puntos fijos depende del tamaño del espín, teniendo una longitud crítica en donde el número de puntos fijos cambia. En el caso del acoplamiento disipativo débil, $\gamma < \varepsilon$, las trayectorias yacen sobre una elipsoide. Para elipsoides que no superan la longitud crítica hay dos puntos fijos, ambos de tipo foco. Mientras que si se supera el valor de la longitud crítica, aparecen otros dos otros puntos fijos, uno de tipo foco y uno de tipo de punto silla, obteniendo un total de tres focos y uno de silla.

En el caso del acoplamiento crítico, cuando $\gamma = \varepsilon$, la morfología del sistema cambia y la elipsoide se convierte en una paraboloides donde yacen las trayectorias. La cantidad de

puntos fijos se reduce a solo tener uno de tipo foco, si no se supera la longitud crítica, o tres, si se supera la longitud crítica, teniendo dos de tipo foco y uno de tipo silla.

Cuando se tiene un acoplamiento disipativo fuerte con $\gamma > \varepsilon$ las trayectorias yacen en una hiperboloide pero siguen siendo cerradas en nuestro modelo del dímero. Por lo tanto, la simetría \mathcal{PT} no se rompe para todos los posibles valores del acoplamiento disipativo. En este caso, si no se supera la longitud crítica, se obtiene un punto crítico de tipo foco y uno ficticio que no yace en la superficie; mientras que si se supera la longitud crítica, se obtienen dos puntos fijos de tipo foco, uno de tipo silla y uno ficticio que no yace en la superficie.

2) Las trayectorias generales de nuestro modelo se obtuvieron mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales de movimiento del espín, obteniendo expresiones en términos de las funciones elípticas de Jacobi, lo cual permite estudiar la dinámica lenta del espín cerca de las trayectorias de silla, que es de utilidad en aplicaciones de *scrambling*. Se mostró que para los tres casos analizados de disipación (acoplamiento disipativo débil, crítico y fuerte) el periodo de las trayectorias generales siempre es finito, mostrando así una dinámica conservativa para cualquier valor de los parámetros del sistema.

La importancia de nuestro análisis yace en la posibilidad de la construcción de nuevos tipos de cúbits que, además de poseer escalabilidad en su construcción, tengan un bajo consumo energético durante las operaciones. Además de también ofrecer buen desempeño, fiabilidad y operación a temperatura ambiente. Cabe resaltar que las razones no sólo son tecnológicas y energéticas, sino también sociales y de salud. La computación cuántica promete revolucionar el campo de la química, medicina, física, economía, entre otros. Teniendo una de sus aplicaciones más importantes a la simulación de moléculas y diseño de drogas, las cuales pueden ayudar al descubrimiento de curas para enfermedades autoinmunes o que no tienen cura actualmente.

Finalmente, se concluye que este análisis demuestra un nuevo tipo de sistema que posee una dinámica conservativa y en el cual la simetría Paridad-Tiempo no se rompe con ningún valor del parámetro de acoplamiento disipativo. Por lo que su uso en computación cuántica es posible.

Apéndice A

Dinámica del espín

Aquí derivamos la ecuación para la dinámica del vector del espín $\mathbf{S} = \{S_x, S_y, S_z\}$ que corresponde a un espinor de dos componentes Ψ ,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\Psi^*\boldsymbol{\sigma}\Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_{+1} \\ \psi_{-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

en condiciones cuando la evolución de componentes ψ_{\pm} está dada por la ecuación de Schrödinger no-lineal (en unidades con $\hbar = 1$)

$$i\frac{d\psi_{\pm 1}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi_{\pm 1}^*}. \quad (\text{A.2})$$

Cabe resaltar que la longitud del espín está dad por

$$|\mathbf{S}|^2 = S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \quad (\text{A.3})$$

Aquí consideramos el caso general del Hamiltoniano complejo $\mathcal{H} = H_0 + iH_1$ con $H_{0,1} = H_{0,1}^*$, tal que

$$\frac{d\Psi}{dt} = -i\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Psi^*} = -i\frac{\partial H_0}{\partial\Psi^*} + \frac{\partial H_1}{\partial\Psi^*}, \quad \frac{d\Psi^*}{dt} = i\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Psi} = i\frac{\partial H_0}{\partial\Psi} + \frac{\partial H_1}{\partial\Psi}. \quad (\text{A.4})$$

Considerando que $H_{0,1}$ son funciones del vector real \mathbf{S} , tenemos para las derivadas en estas ecuaciones

$$\frac{\partial H_0}{\partial\Psi} = \frac{dH_0}{d\mathbf{S}} \cdot \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\Psi}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial\Psi} = \frac{dH_1}{d\mathbf{S}} \cdot \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\Psi} \quad (\text{A.5})$$

Por otro lado, usando la definición del espín (A.1) en términos de las matrices de Pauli, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{S}}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d\Psi^*}{dt} \boldsymbol{\sigma} \Psi + \frac{1}{2} \Psi^* \boldsymbol{\sigma} \frac{d\Psi}{dt} \\ &= \frac{i}{2} \left(\frac{\partial H_0}{\partial \Psi} - i \frac{\partial H_1}{\partial \Psi} \right) \boldsymbol{\sigma} \Psi - \frac{i}{2} \Psi \boldsymbol{\sigma} \left(\frac{\partial H_0}{\partial \Psi} + i \frac{\partial H_1}{\partial \Psi} \right) \\ &= \frac{i}{2} \left(\left(\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{S}} - i \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{S}} \right) \cdot \frac{d\mathbf{S}}{d\Psi} \right) \boldsymbol{\sigma} \Psi - \frac{i}{2} \Psi^* \boldsymbol{\sigma} \left(\left(\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{S}} + i \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{S}} \right) \cdot \frac{d\mathbf{S}}{d\Psi^*} \right)\end{aligned}$$

Si la ecuación de las componentes del espín la derivamos con respecto al espinor tenemos que

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\Psi} = \frac{1}{2} \Psi^* \boldsymbol{\sigma}, \quad \frac{d\mathbf{S}}{d\Psi^*} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \Psi,$$

por lo que la evolución temporal del espín es

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{i}{4} \left(\left(\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{S}} - i \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{S}} \right) \cdot \Psi^* \boldsymbol{\sigma} \right) \boldsymbol{\sigma} \Psi - \frac{i}{4} \Psi^* \boldsymbol{\sigma} \left(\left(\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{S}} + i \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{S}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \Psi \right) \quad (\text{A.6})$$

Con este resultado podemos analizar cada una de las tres componentes del espín para obtener el resultado. Empezamos con la componente x

$$\begin{aligned}\frac{dS_x}{dt} &= \frac{i}{4} \frac{dH_0}{dS_x} \Psi^* (\sigma_x^2 - \sigma_x^2) \Psi + \frac{i}{4} \frac{dH_0}{dS_y} \Psi^* (\sigma_y \sigma_x - \sigma_x \sigma_y) \Psi + \\ &\quad + \frac{i}{4} \frac{dH_0}{dS_z} \Psi^* (\sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z) \Psi + \frac{1}{4} \frac{dH_1}{dS_x} \Psi^* (\sigma_x^2 + \sigma_x^2) \Psi \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{dH_1}{dS_y} \Psi^* (\sigma_y \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) \Psi + \frac{1}{4} \frac{dH_1}{dS_z} \Psi^* (\sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z) \Psi\end{aligned}$$

Recordando las propiedades de las matrices de Pauli que dicen $[\sigma_j, \sigma_n] = \sigma_j \sigma_n - \sigma_n \sigma_j = 2i\epsilon_{jnl}\sigma_l$ (donde ϵ_{jnl} es el símbolo de Levi-Civita), $\sigma_n \sigma_j + \sigma_j \sigma_n = 2\sigma_0 \delta_{nj}$ y que las componentes del espín están definidas por la ecuación (A.1) obtenemos

$$\frac{dS_x}{dt} = \frac{dH_0}{dS_y} S_z - \frac{dH_0}{dS_z} S_y + \frac{dH_1}{dS_x} S = \left[\frac{dH_0}{d\mathbf{S}} \times \mathbf{S} \right]_x + S \frac{dH_1}{dS_x}. \quad (\text{A.7})$$

Las otras dos componentes del espín se obtienen mediante las permutaciones cíclicas. De esta manera podemos concluir que la ecuación para la dinámica del espín en el límite clásico cuando se tiene el Hamiltoniano con una parte imaginaria es

$$\boxed{\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \left[\frac{dH_0}{d\mathbf{S}} \times \mathbf{S} \right] + S \frac{dH_1}{d\mathbf{S}}}. \quad (\text{A.8})$$

Apéndice B

Cálculo de la longitud crítica ρ_c

La ecuación que describe los puntos fijos de la componente x del espín es

$$(1 - \gamma^2 + x)^2 x^2 - \rho^2 ((1 + x)^2 - \gamma^2) = 0, \quad (\text{B.1})$$

de la cual se obtiene el discriminante que describe la cantidad de puntos fijos que se tiene, y como ya sabemos siempre tendremos dos o cuatro. Este discriminante tiene la forma siguiente

$$\Delta_1 = 16\rho^4\gamma^2 \left[(\rho^2 - (1 - \gamma^2)^2)^3 - 27\gamma^2\rho^4 \right]. \quad (\text{B.2})$$

Como vimos en el capítulo 2, se tiene que existe un punto crítico en el cual se pasa de tener dos puntos fijos a cuatro. Esto pasa cuando

$$(\rho^2 - (1 - \gamma^2)^2)^3 - 27\gamma^2\rho^4 = 0, \quad (\text{B.3})$$

de manera que se puede obtener otro discriminante en función de ρ para encontrar el punto crítico. Con este pensamiento, se obtiene que

$$\Delta_2 = -3^9(1 - \gamma^2)^6 [2 - 3(1 - \gamma^2) + (1 - \gamma^2)^2]^2, \quad (\text{B.4})$$

el cual indica que solo se tiene un valor de real para el valor crítico ρ_c en donde se obtienen cuatro puntos fijos en vez de dos cuando se supera este valor.

Para resolver la ecuación (B.3) y encontrar el valor de ρ_c , primero expandimos sus términos

$$\rho^6 - 3\rho^4 [9 - 9(1 - \gamma^2) + (1 - \gamma^2)^2] + 3\rho^2(1 - \gamma^2)^4 - (1 - \gamma^2)^6 = 0 \quad (\text{B.5})$$

Para resolver esta ecuación utilizamos el método de Cardano (publicada por Gerolamo Cardano en su *Ars Magna* [86]). Sea

$$a_2 = -3 [9 - 9(1 - \gamma^2) + (1 - \gamma^2)^2], \quad a_1 = 3(1 - \gamma^2)^4, \quad a_0 = -(1 - \gamma^2)^6 \quad (\text{B.6})$$

podemos insertar una nueva variable g para reducir la ecuación de tercer orden de manera

$$g = \rho^2 - \frac{a_2}{3} \\ \Rightarrow g^3 + P'g = Q', \quad (\text{B.7})$$

donde $P' = \frac{3a_1 - a_2^2}{3}$ y $Q' = \frac{9a_1a_2 - 27a_0 - 2a_2^3}{27}$. En este punto se podrían hacer las sustituciones con las relaciones de Vieta, sin embargo, vamos a tratar de factorizar la ecuación de manera que nos quede un término de forma $(g - B)$. Para esto definimos

$$Q = \frac{3a_1 - a_2^2}{9}, \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_0 - 2a_2^3}{54}, \quad (\text{B.8})$$

por lo que la ecuación (B.7) se convierte en

$$g^3 + 3gQ - 2R = 0. \quad (\text{B.9})$$

Para factorizar la ecuación (B.9) tenemos que introducir un factor C de manera que la ecuación tenga una factorización de la forma

$$(g^3 - B^3) + C(g - B) = (g - B) [g^2 + gB + (B^2 + C)] = 0, \quad (\text{B.10})$$

en donde se tiene que

$$C = 3Q, \quad B^3 + BC = B^3 + 3BQ = 2R. \quad (\text{B.11})$$

Ahora bien, si encontramos el valor de B , la ecuación se puede reducir a un orden cuadrático. Milagrosamente tenemos que

$$B = \left(R + \sqrt{Q^3 + R^2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(R - \sqrt{Q^3 + R^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad B^3 = -3QB + 2R, \quad (\text{B.12})$$

comprobando la relación de B en (B.11). Para encontrar el factor C introducimos su valor de la ecuación (B.11) dentro de la parte derecha dentro de los corchetes de la ecuación (B.10) de manera que

$$g^2 + gB + (B^2 + C) \Rightarrow g^2 + gB + (B^2 + 3Q) = 0,$$

de donde se pueden obtener las soluciones para f resolviendo la ecuación cuadrática. Por lo tanto se tiene que

$$g = -\frac{1}{2}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{3iA}, \quad (\text{B.13})$$

donde $A = B^2 + 4Q$. Para encontrar el valor del punto crítico, se tienen que definir nuevas variables de manera que

$$D = Q^3 + R^2, \quad U = \left(R + \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad T = \left(R - \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{B.14})$$

ya que la solución que nos interesa tiene la forma

$$\rho_c^2 = -\frac{1}{3}a_2 + (U + T). \quad (\text{B.15})$$

Realizando el álgebra necesitaría en Mathematica y recordando los cambios de variable hechos a lo largo de este proceso, se tiene que el punto crítico depende del parámetro del acoplamiento disipativo de manera

$$\boxed{\rho_c^2 = 1 + 7\gamma^2 + \gamma^4 + 3 \left[(1 + 2\gamma^2)\gamma^{\frac{2}{3}} + (2 + \gamma^2)\gamma^{\frac{4}{3}} \right]} \quad (\text{B.16})$$

Apéndice C

Funciones elípticas de Jacobi

Las funciones elípticas de Jacobi fueron introducidas por Carl Gustav Jakob Jacobi en 1829 [89], teniendo como característica más importante el intercambio de la descripción en un círculo, utilizada por las funciones trigonométricas ordinarias, por una elipse. Este tipo de funciones satisfacen ecuaciones diferenciales no lineales que suelen aparecer en aplicaciones físicas como péndulos y potenciales cuánticos. Estas funciones están definidas por dos parámetros importantes: el módulo y el ángulo. El módulo k es el que define la forma de la elipse, y está definido como

$$k = \frac{\sqrt{A^2 - a^2}}{a} \quad (\text{C.1})$$

en donde si $k = 0$ se tiene un círculo, si $0 < k < 1$ se tiene una elipse y si $k > 1$ se tiene una parábola. De esta manera se tiene que las funciones elípticas de Jacobi están definidas como

$$\text{sn}(u, k) = \frac{y}{r}, \quad \text{cn}(u, k) = \frac{x}{r}, \quad \text{dn}(u, k) = \frac{1}{r} \quad (\text{C.2})$$

las cuales cumplen con la identidad trigonométrica $\text{sn}^2 + \text{cn}^2 = 1$.

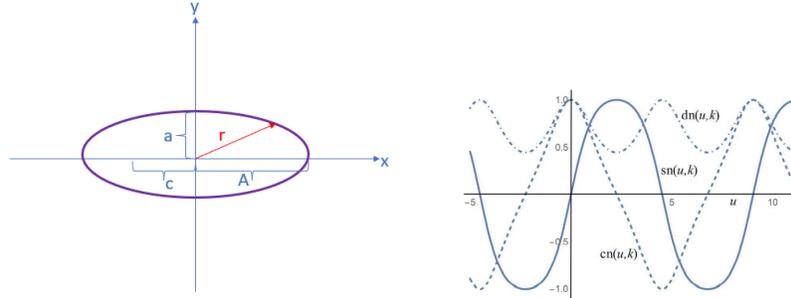
El periodo de las funciones sn y cn es $4K$, mientras que dn tiene un periodo de $2K$. La función $K = K(k)$ es una integral elíptica incompleta de primer orden que está definida

como

$$u = \int_0^\phi r d\theta = K(k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} \quad (\text{C.3})$$

donde $m = k^2$ y ϕ es la amplitud de Jacobi definida como $\text{am}(u, m) = \phi$. Este tipo de funciones se pueden reducir a

$$\text{sn}(u, 0) = \sin u, \quad \text{cn}(u, 0) = \cos u, \quad \text{dn}(u, 0) = 1, \quad (\text{C.4})$$



(a) Elipse con semieje mayor A , semi-eje menor a y la semidistancia focal c . r es la distancia desde el centro u . Tomada de [88]
 (b) Forma cualitativa de las funciones sn , cn y dn en función del argumento u . Donde r es la distancia desde el centro u . Tomada de [88]
 de la elipse hacia un punto cualquier de la misma

Figura C.1: Gráficas cualitativas de las funciones elípticas de Jacobi. En (a) se muestra una elipse con sus ejes indicados. En (b) se muestra una gráfica cualitativa de las funciones cn , sn y dn

También se tienen las siguientes propiedades

$$\text{sn}^2(u) + \text{cn}^2(u) = 1 \quad (\text{C.5a})$$

$$\text{dn}^2(u) - k^2 \text{cn}^2(u) = 1 - k^2 \quad (\text{C.5b})$$

$$\text{cn}^2(u) + (1 - k^2) \text{sn}^2(u) = \text{dn}^2(u) \quad (\text{C.5c})$$

Las derivadas que son importantes describir son las siguientes

$$\frac{d\text{sn}(u)}{du} = \text{cn}(u)\text{dn}(u) \quad (\text{C.6a})$$

$$\frac{d\text{cn}(u)}{du} = -\text{sn}(u)\text{dn}(u) \quad (\text{C.6b})$$

$$\frac{d\text{dn}(u)}{du} = -k^2 \text{sn}(u)\text{cn}(u) \quad (\text{C.6c})$$

Apéndice D

Radio cruzado

La razón anarmónica, también conocida como radio cruzado o radio doble, es el número asociado a una lista de cuatro puntos colineales proyectados en una línea. Dados los puntos A , B , C y D , el radio cruzado está definido como

$$(A, B; C, D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} \tag{D.1}$$

en donde el signo de cada distancia entre los puntos estará determinado por la orientación de la línea, y esta distancia está medida en el espacio euclidiano. Este radio es conservado por las transformaciones lineales fraccionarias.

La razón anarmónica es la única proyección invariante de cuatro puntos colineales, lo cual es de suma importancia en geometría proyectiva. Esto quiere decir que si cuatro puntos yacen sobre una línea recta de dos dimensiones, su radio cruzado está bien definido sea cuál sea el punto de origen elegido. En añadidura, si cuatro líneas que yacen en el mismo plano y pasan por el mismo punto Q , se tiene que cualquier línea que no pase por Q intersecta a las cuatro líneas anteriores en cuatro puntos distintos. Resultando que el valor del radio cruzado no depende de la elección de la línea que no cruza en Q ; en otras palabras, es invariante.

Este concepto se trato de manera equivalente por Pappus de Alexandria en su libro *Collection: Book VII*. Su modernización comenzó con Lazare Carnot en 1803 con el libro titulado *Géométrie de Position* y el término por el que se conoce más: *cross ratio* en inglés, se introdujo en 1878 por William Kingdon Clifford. Aunque el radio cruzado fue estudiado

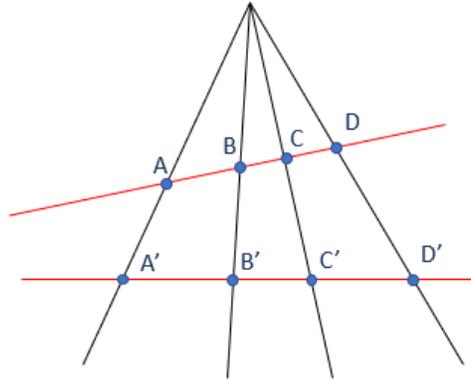


Figura D.1: Los puntos A, B, C, D y A', B', C', D' tienen el mismo valor de su radio cruzado debido a que están relacionados mediante su transformación en la proyección.

ampliamente en el siglo XIX, todavía era insatisfactoria debido a que dependía de la distancia euclidiana. Sin embargo, en 1847 Karl G. C. von Staudt mostró las consecuencias de separar estos dos conceptos. En menos de 30 años, Felix Klein mostró que los conceptos de la distancia y ángulo euclidiano podía definirse en términos del radio cruzado propuesto en 1847 por von Staudt.

Para cuatro números complejos a_1, a_2, a_3 y a_4 , el radio cruzado está definido por

$$\text{cross ratio}[a_1, a_2; a_3, a_4] = \frac{(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)}{(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)} \quad (\text{D.2})$$

Ahora bien, para cuatro puntos se tienen $4! = 24$ posibles arreglos, pero solo seis de ellos son diferentes gracias al subgrupo de cuatro permutaciones (grupo de Klein) generadas por

$$\begin{array}{cccc} a_1 \rightarrow a_2, & a_2 \rightarrow a_1, & a_3 \rightarrow a_4, & a_4 \rightarrow a_3 \\ a_1 \rightarrow a_3, & a_2 \rightarrow a_4, & a_3 \rightarrow a_1, & a_4 \rightarrow a_2 \end{array}$$

obteniendo $\frac{24}{4} = 6$ arreglos posibles.

Bibliografía

- [1] Sanjib Ghosh and Timothy CH Liew. [Quantum computing with exciton-polariton condensates](#). *npj Quantum Information*, 6(1):1–6, 2020.
- [2] Alexander Dreismann, Hamid Ohadi, Yago del Valle-Inclan Redondo, Ryan Balili, Yuri G Rubo, Simeon I Tsintzos, George Deligeorgis, Zacharias Hatzopoulos, Pavlos G Savvidis, and Jeremy J Baumberg. [A sub-femtojoule electrical spin-switch based on optically trapped polariton condensates](#). *Nature materials*, 15(10):1074–1078, 2016.
- [3] Wikipedia. [Computadora](#), 2022.
- [4] Wikipedia. [Harvard Mark I](#), 2022.
- [5] Wikipedia. [ENIAC](#), 2022.
- [6] NVIDIA Developer. [Inside Pascal: NVIDIA’s Newest Computing Platform](#), 5 de abril de 2016.
- [7] G. Kamiya. [data centres and data transmission networks](#). IEA, Septiembre 2022.
- [8] Hannah Ritchie, Max Roser, and Pablo Rosado. [co2 and greenhouse gas emissions](#). *Our World in Data*, 2020.
- [9] John Roach. [microsoft finds underwater datacenters are reliable, practical and use energy sustainably](#). *Microsoft - Innovation Stories*, 2020.
- [10] Reuters. [England recorded 2,800 excess deaths in over-65s during 2022 heatwaves](#). *The Guardian*, Octubre 2022.

- [11] Emma Strubell, Ananya Ganesh, and Andrew McCallum. *energy and policy considerations for modern deep learning research*. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 34(09):13693–13696, Abril 2020.
- [12] David So, Quoc Le, and Chen Liang. **The Evolved Transformer**. In Kamalika Chaudhuri and Ruslan Salakhutdinov, editors, *Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning*, volume 97 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pages 5877–5886. PMLR, 09–15 Junio 2019.
- [13] Fabrice Boudot, Pierrick Gaudry, Aurore Guillevic, Nadia Heninger, Emmanuel Thomé, and Paul Zimmermann. **Comparing the difficulty of factorization and discrete logarithm: a 240-digit experiment**. In *Annual International Cryptology Conference*, pages 62–91. Springer, 2020.
- [14] **Shor’s algorithm**. IBM Quantum Composer.
- [15] Peter W Shor. **Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring**. In *Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science*, pages 124–134. Ieee, 1994.
- [16] Lov K Grover. **A fast quantum mechanical algorithm for database search**. In *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 212–219, 1996.
- [17] Richard P Feynman. **Simulating physics with computers**. In *Feynman and computation*, pages 133–153. CRC Press, 2018.
- [18] European Space Agency. **Interior of IBM’s quantum computer**, noviembre 2020.
- [19] Shruti Puri, Na Young Kim, Eisuke Abe, and Yoshihisa Yamamoto. **Towards All Optical, Universal Quantum Computation using Trapped Electron Spins and Cavity Polariton Resonance**. *arXiv preprint arXiv:1208.2252*, 2012.
- [20] Tania Espinosa-Ortega and Timothy Chi Hin Liew. **Complete architecture of integrated photonic circuits based on and and not logic gates of exciton polaritons in semiconductor microcavities**. *Physical Review B*, 87(19):195305, 2013.
- [21] Michael J Hartmann, Fernando GSL Brandao, and Martin B Plenio. **Strongly interacting polaritons in coupled arrays of cavities**. *Nature Physics*, 2(12):849–855, 2006.
- [22] D Read, Yuri G Rubo, and AV Kavokin. **Josephson coupling of Bose-Einstein condensates of exciton-polaritons in semiconductor microcavities**. *Physical Review B*, 81(23):235315, 2010.
- [23] HeeBong Yang and Na Young Kim. **Microcavity Exciton-Polariton Quantum Spin Fluids**. *Advanced Quantum Technologies*, page 2100137, 2022.

- [24] Tim Byrnes, Na Young Kim, and Yoshihisa Yamamoto. **Exciton-polariton condensates**. *Nature Physics*, 10(11):803–813, 2014.
- [25] Iacopo Carusotto and Cristiano Ciuti. **Quantum fluids of light**. *Reviews of Modern Physics*, 85(1):299, 2013.
- [26] S Klemmt, TH Harder, OA Egorov, K Winkler, R Ge, MA Bandres, M Emmerling, L Worschech, TCH Liew, M Segev, et al. **Exciton-polariton topological insulator**. *Nature*, 562(7728):552–556, 2018.
- [27] Alexey Kavokin, Timothy CH Liew, Christian Schneider, Pavlos G Lagoudakis, Sebastian Klemmt, and Sven Höfling. **Polariton condensates for classical and quantum computing**. *Nature Reviews Physics*, pages 1–17, 2022.
- [28] SS Demirchyan, I Yu Chestnov, AP Alodjants, MM Glazov, and AV Kavokin. **Qubits based on polariton Rabi oscillators**. *Physical review letters*, 112(19):196403, 2014.
- [29] Michael James Martin, Caroline Hughes, Gilberto Moreno, Eric B Jones, David Sicking, Sreekant Narumanchi, and Ray Grout. **Energy use in quantum data centers: Scaling the impact of computer architecture, qubit performance, size, and thermal parameters**. *IEEE Transactions on Sustainable Computing*, 7(4):864–874, 2022.
- [30] Kerry J Vahala. **Optical microcavities**. *nature*, 424(6950):839–846, 2003.
- [31] DK Armani, TJ Kippenberg, SM Spillane, and KJ Vahala. **Ultra-high-Q toroid microcavity on a chip**. *Nature*, 421(6926):925–928, 2003.
- [32] Jacov Frenkel. **On the transformation of light into heat in solids. I**. *Physical Review*, 37(1):17, 1931.
- [33] Alexey V Kavokin, Jeremy J Baumberg, Guillaume Malpuech, and Fabrice P Laussy. *Microcavities*, volume 21. Oxford university press, 2017.
- [34] Hamid Ohadi, A Dreismann, YG Rubo, F Pinsker, Y del Valle-Inclan Redondo, SI Tsinzozos, Z Hatzopoulos, PG Savvidis, and JJ Baumberg. **Spontaneous spin bifurcations and ferromagnetic phase transitions in a spinor exciton-polariton condensate**. *Physical Review X*, 5(3):031002, 2015.
- [35] K Rayanov, BL Altshuler, YG Rubo, and Sergej Flach. **Frequency combs with weakly lasing exciton-polariton condensates**. *Physical review letters*, 114(19):193901, 2015.
- [36] Seonghoon Kim, Yuri G Rubo, Timothy CH Liew, Sebastian Brodbeck, Christian Schneider, Sven Höfling, and Hui Deng. **Emergence of microfrequency comb via limit cycles in dissipatively coupled condensates**. *Physical Review B*, 101(8):085302, 2020.

- [37] R Ruiz-Sánchez, R Rechtman, and YG Rubo. **Autonomous chaos of exciton-polariton condensates**. *Physical Review B*, 101(15):155305, 2020.
- [38] Pavlos G Lagoudakis and Natalia G Berloff. **A polariton graph simulator**. *New Journal of Physics*, 19(12):125008, 2017.
- [39] Rafal Mirek, Andrzej Opala, Paolo Comaron, Magdalena Furman, Mateusz Król, Krzysztof Tyszka, Bartłomiej Sredynski, Dario Ballarini, Daniele Sanvitto, Timothy CH Liew, et al. **Neuromorphic binarized polariton networks**. *Nano letters*, 21(9):3715–3720, 2021.
- [40] Carl M Bender and Stefan Boettcher. **Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry**. *Physical review letters*, 80(24):5243, 1998.
- [41] Carl M Bender. *PT symmetry: In quantum and classical physics*. World Scientific, 2019.
- [42] Qing-hai Wang. 2×2 \mathcal{PT} -symmetric matrices and their applications. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1989):20120045, 2013.
- [43] A Kavokin, G Malpuech, and Bernard Gil. **Semiconductor microcavities: towards polariton lasers**. *Materials Research Society Internet Journal of Nitride Semiconductor Research*, 8, 2003.
- [44] Gabriel Christmann, Raphael Butte, Eric Feltin, Jean-Francois Carlin, and Nicolas Grandjean. **Room temperature polariton lasing in a GaN/ AlGaIn multiple quantum well microcavity**. *Applied Physics Letters*, 93(5):051102, 2008.
- [45] Ayan Das, Junseok Heo, Marc Jankowski, Wei Guo, Lei Zhang, Hui Deng, and Pallab Bhattacharya. **Room temperature ultralow threshold GaN nanowire polariton laser**. *Physical review letters*, 107(6):066405, 2011.
- [46] Tien-Chang Lu, Ying-Yu Lai, Yu-Pin Lan, Si-Wei Huang, Jun-Rong Chen, Yung-Chi Wu, Wen-Feng Hsieh, and Hui Deng. **Room temperature polariton lasing vs. photon lasing in a ZnO-based hybrid microcavity**. *Optics express*, 20(5):5530–5537, 2012.
- [47] S Kéna-Cohen and SR Forrest. **Room-temperature polariton lasing in an organic single-crystal microcavity**. *Nature Photonics*, 4(6):371–375, 2010.
- [48] SI Tsintzos, NT Pelekanos, G Konstantinidis, Z Hatzopoulos, and PG Savvidis. **A GaAs polariton light-emitting diode operating near room temperature**. *Nature*, 453(7193):372–375, 2008.

- [49] C Grossmann, C Coulson, G Christmann, I Farrer, HE Beere, DA Ritchie, and JJ Baumberg. **Tuneable polaritonics at room temperature with strongly coupled Tamm plasmon polaritons in metal/air-gap microcavities.** *Applied Physics Letters*, 98(23):231105, 2011.
- [50] I Chestnov, YG Rubo, A Nalitov, and A Kavokin. **Pseudoconservative dynamics of coupled polariton condensates.** *Physical Review Research*, 3(3):033187, 2021.
- [51] Isidor Isaac Rabi. **Space quantization in a gyrating magnetic field.** *Physical Review*, 51(8):652, 1937.
- [52] Brian David Josephson. **Possible new effects in superconductive tunnelling.** *Physics letters*, 1(7):251–253, 1962.
- [53] Tilman Zibold, Eike Nicklas, Christian Gross, and Markus K Oberthaler. **Classical bifurcation at the transition from Rabi to Josephson dynamics.** *Physical review letters*, 105(20):204101, 2010.
- [54] IV Barashenkov, GS Jackson, and S Flach. **Blow-up regimes in the PT-symmetric coupler and the actively coupled dimer.** *Physical Review A*, 88(5):053817, 2013.
- [55] Igor Yu Chestnov, Sevak S Demirchyan, Alexander P Alodjants, Yuri G Rubo, and Alexey V Kavokin. **Permanent Rabi oscillations in coupled exciton-photon systems with PT-symmetry.** *Scientific reports*, 6(1):19551, 2016.
- [56] Panayotis A Kalozoumis and David Petrosyan. **Self-organized PT-symmetry of exciton-polariton condensate in a double-well potential.** *Applied Sciences*, 11(16):7372, 2021.
- [57] Robin Gutöhrlein, Holger Cartarius, Jörg Main, and Günter Wunner. **Bifurcations and exceptional points in a PT-symmetric dipolar Bose–Einstein condensate.** *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49(48):485301, 2016.
- [58] Eva-Maria Graefe, Hans Jürgen Korsch, and Astrid Elisa Niederle. **Quantum-classical correspondence for a non-Hermitian Bose-Hubbard dimer.** *Physical Review A*, 82(1):013629, 2010.
- [59] S Karthiga, VK Chandrasekar, M Senthilvelan, and M Lakshmanan. **Controlling of blow-up responses by nonlinear PT-symmetric coupling.** *Physical Review A*, 95(3):033829, 2017.
- [60] J Ramya Parkavi and VK Chandrasekar. **Unbreakable-symmetry and its consequence in a-symmetric dimer.** *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 53(19):195701, 2020.

- [61] IV Barashenkov, DE Pelinovsky, and P Dubard. **Dimer with gain and loss: Integrability and PT-symmetry restoration**. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(32):325201, 2015.
- [62] Hyun Gyu Song, Minho Choi, Kie Young Woo, Chung Hyun Park, and Yong-Hoon Cho. **Room-temperature polaritonic non-Hermitian system with single microcavity**. *Nature Photonics*, 15(8):582–587, 2021.
- [63] Yao Li, Xuekai Ma, Zaharias Hatzopoulos, Pavlos G Savvidis, Stefan Schumacher, and Tingge Gao. **Switching Off a Microcavity Polariton Condensate near the Exceptional Point**. *ACS Photonics*, 9(6):2079–2086, 2022.
- [64] Martin C Gutzwiller. **Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals**. *Physical Review Letters*, 10(5):159, 1963.
- [65] Junjiro Kanamori. **Electron correlation and ferromagnetism of transition metals**. *Progress of Theoretical Physics*, 30(3):275–289, 1963.
- [66] John Hubbard. **Electron correlations in narrow energy bands**. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 276(1365):238–257, 1963.
- [67] Markus Greiner, Olaf Mandel, Tilman Esslinger, Theodor W Hänsch, and Immanuel Bloch. **Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms**. *nature*, 415(6867):39–44, 2002.
- [68] HA Gersch and GC Knollman. **Quantum cell model for bosons**. *Physical Review*, 129(2):959, 1963.
- [69] Hamid Ohadi, AJ Ramsay, H Sigurdsson, Y del Valle-Inclan Redondo, SI Tsintzos, Z Hatzopoulos, TCH Liew, IA Shelykh, YG Rubo, PG Savvidis, et al. **Spin order and phase transitions in chains of polariton condensates**. *Physical review letters*, 119(6):067401, 2017.
- [70] Timothy CH Liew and Vincenzo Savona. **Multimode entanglement in coupled cavity arrays**. *New Journal of Physics*, 15(2):025015, 2013.
- [71] Wim Casteels and Cristiano Ciuti. **Quantum entanglement in the spatial-symmetry-breaking phase transition of a driven-dissipative Bose-Hubbard dimer**. *Physical Review A*, 95(1):013812, 2017.
- [72] Elisa GM Ferreira. **Ultra-light dark matter**. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 29(1):1–186, 2021.

- [73] Pai-Yen Chen. **High-order parity-time-symmetric electromagnetic sensors**. In *2018 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, pages 460–463. IEEE, 2018.
- [74] IA Wrona, MW Jarosik, R Szczesniak, KA Szewczyk, MK Stala, and W Leonski. **Interaction of the hydrogen molecule with the environment: stability of the system and the PT-symmetry breaking**. *Scientific reports*, 10(1):1–16, 2020.
- [75] Honghua Zhong, Wenhua Hai, Genbiao Lu, and Zejun Li. **Incoherent control in a non-Hermitian Bose-Hubbard dimer**. *Physical Review A*, 84(1):013410, 2011.
- [76] Haisheng Ye and Gengbiao Lu. **Quantum tunneling and Floquet energy in the Non-Hermitian Bose-Hubbard model**. In *2021 9th International Symposium on Next Generation Electronics (ISNE)*, pages 1–4. IEEE, 2021.
- [77] Catalin Pascu Moca, Doru Sticlet, Balázs Dóra, and Gergely Zaránd. **PT-symmetry phase transition in a Bose-Hubbard model with localized gain and loss**. *arXiv preprint arXiv:2211.08707*, 2022.
- [78] Harry J Lipkin, N Meshkov, and AJ Glick. **Validity of many-body approximation methods for a solvable model:(I). Exact solutions and perturbation theory**. *Nuclear Physics*, 62(2):188–198, 1965.
- [79] Juan A Muniz, Diego Barberena, Robert J Lewis-Swan, Dylan J Young, Julia RK Cline, Ana Maria Rey, and James K Thompson. **Exploring dynamical phase transitions with cold atoms in an optical cavity**. *Nature*, 580(7805):602–607, 2020.
- [80] Nick Sauerwein, Francesca Orsi, Philipp Uhrich, Soumik Bandyopadhyay, Francesco Mattiotti, Tigrane Cantat-Moltrecht, Guido Pupillo, Philipp Hauke, and Jean-Philippe Brantut. **Engineering random spin models with atoms in a high-finesse cavity**. *arXiv preprint arXiv:2208.09421*, 2022.
- [81] Ali Ü C Hardal and Özgür E Müstecaplıoğlu. **Einstein–Podolsky–Rosen-type quantum entanglement between coupled cavities**. *Physica Scripta*, 2014(T160):014016, 2014.
- [82] J Keeling, MJ Bhaseen, and BD Simons. **Collective dynamics of Bose-Einstein condensates in optical cavities**. *Physical review letters*, 105(4):043001, 2010.
- [83] Philipp Pilar, Daniele De Bernardis, and Peter Rabl. **Thermodynamics of ultrastrongly coupled light-matter systems**. *Quantum*, 4:335, 2020.
- [84] KS Choi, A Goban, SB Papp, SJ Van Enk, and HJ Kimble. **Entanglement of spin waves among four quantum memories**. *Nature*, 468(7322):412–416, 2010.
- [85] Wei-Feng Zhuang, Yue-Xin Huang, and Ming Gong. **Angular momentum Josephson effect between two isolated condensates**. *Chinese Physics Letters*, 38(6):060301, 2021.

-
- [86] Girolamo Cardano and C Spon. *Ars magna* (1545). *Opera Omnia*, 4:221–302, 1968.
- [87] Wolfram Math World. [Cubic Formula](#).
- [88] William A Schwalm. *Lectures on Selected Topics in Mathematical Physics: Elliptic Functions and Elliptic Integrals*. 2053-2571. Morgan and Claypool Publishers, 2015.
- [89] Carl Gustav Jacob Jacobi. *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Borntrager, 1829.