SOBRE LA DETERMINACION DE LA MASA EN GALAXIAS ESPIRALES

TESIS PROFESIONAL

DEBORAH DULTZIN KESSLER

México, D. F. 1968

A MIS PADRES

A MI ABUELITO

A EDUARDO

A la memoria de Julius Fucick
y el Che Guevara.

A todos los hombres que mueren
por la alegría.

Deseo manifestar mi mas profundo agradecimiento a la Dra. Paris Pişmiş, por todas sus atenciones, su ayuda, paciencia y dedicación durante la elaboración del presente trabajo, así como por sus valiosos consejos.

Deseo agradecer también al Dr. Guillermo Haro, director del Observatorio Astronómico Nacional, la ayuda, la confianza y el estímulo que siempre me ha brindado.

CONTENIDO

INTRODUCCION

El objeto del presente trabajo es el de hacer un análisis de los métodos que se han usado para determinar la masa y la distribución de masa en las galaxias de tipo espiral.

Aunque las ecuaciones fundamentales de la dinámica estelar se conocen desde hace mucho tiempo, su aplicación directa para determinar la masa de una galaxia es hasta la fecha un problema no resuelto.

El método mas simple que se ocurre para determinar la masa de una galaxia es atraves de la relación M/L, mediante un estudio de la luminosidad. Sin embargo, para poder usar esta relación es necesario suponer que la eficiencia luminosa es constante; lo cual en general no es cierto.

Por lo tanto, si queremos saber algo sobre la distribución de la densidad en una galaxia, debemos conocer en detalle el campo gravitacional de la misma, para lo cual es necesario usar un subsistema de la galaxia como "cuerpo de prueba" y observar la aceleración de éste, para de ahí inferir el campo gravitacional.

Sin embargo, las aceleraciones no se pueden medir directamente en una galaxia, se deben deducir del campo de velocidades en un momento dado, lo cual nos obliga a limitarnos al caso estacionario. Por otra parte, la espesificación del campo de velocidades requiere de la determinación de una función vectorial $V(\bar{r})$ del vector de posición, lo cual es observacionalmente imposible excepto para una parte muy limitada de nuestra galaxia. En todos los demás casos solo podemos observar la velocidad radial, y aún ésta está promediada a lo largo de la línea visual.

De este modo vemos que no solo nos tenemos que limitar a considerar aquellas galaxias que podemos suponer razonablemente en estado estacionario, sino además aquellas en las que exista algún tipo de simetría para poder generalizar los datos del campo de velocidades. Sin embargo hay muchas razones para suponer que el estado estacionario se encuentra ligado siempre a cierto grado de simetría. Por supuesto las galaxias sumamente irregulares presentan un problema muy difícil de resolver.

En general, el tipo de material observacional del que se dispone para obtener el campo de velocidades consiste, en el mejor de los casos, de fotografías directas, una colección de velocidades radiales obtenidas a partir del perfil de las líneas en emisión del espectro óptico, un pequeño segmento de la curva de rotación en el centro de la galaxia obtenida de las líneas en absorción, y en algunos casos del ancho de estas líneas podemos obtener alguna información sobre la dispersión de velocidades de las estrellas y del gas.

En el caso particular de nuestra galaxia, se puede disponer de mas material, sin embargo las distancias relativas son bastante difíciles de determinar.

En resúmen, si fuera posible la resolución simultánea de la ecuación de Poisson y las ecuaciones hidrodinámicas o la ecuación de Boltzmann, el problema de la determinación de la masa sería casi inmediato, pues los datos observacionales se podrían usar para adaptar los parámentros de un modelo teórico general. Sin embargo, por ahora esto no es posible excepto para el caso de las galaxias esféricas o elípticas muy ligeramente aplanadas. Por lo tanto hay que recurrir al método de pensar en modelos a priori, estos resultan en general burdos y poco aproximados a la realidad, particularmente en el caso de las galaxias espirales en que se toma en cuenta exclusivamente la velocidad de rotación.

En el presente trabajo se discutirá la necesidad de tomar en cuenta la dispersión de velocidades en las galaxias espirales.

CAPITULO I

LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA DINAMICA ESTELAR.

El objeto de este capítulo es el de presentar la base matemática que utilizaremos en el presente trabajo.

Todos los comentarios referentes a este material (sobre su desarrollo histórico, sobre la solución general de las ecuaciones, sobre su solución en casos particulares, etc.)se harán en el capítulo II. Aquí nos limitaremos a dar algunas definiciones y a partir de ellas derivaremos las ecuaciones fundamentales de la dinámica estelar.

Debido a las características especiales de los movimientos en un sistema estelar, nos encontraremos con dos tipos de ecuaciones: hidrodinámicas y estadísticas. Las primeras corresponden a propiedades de continuidad del medio y las segundas a propiedades de discontinuidad.

En el capítulo II analizaremos la aplicación de estos dos tipos de ecuaciones y los distintos enfoques posibles al problema de la dinámica estelar.

1).- La función de densidad de fase.

Consideremos un sistema estelar como un sistema de partículas de igual masa; en estas condiciones existe una función de distribución que define completamente el estado del sistema estelar. Esta función es la densidad de fase.

Para definir esta función vamos a considerar un elemento macroscópico de volúmen en el sistema, que llamaremos $d\omega$. Por ejemplo, un paralelepípedo rectangular con centro en (x,y,z) y bordes paralelos a los ejes coordenados. Este elemento de volúmen debe cumplir dos condiciones: por un lado debe ser pequeño en comparación con las dimensiones del sistema estelar, y por otro lado debe contener las suficientes estrellas como para que se puedan aplicar métodos estadísticos. De este modo, para escojer un elemento

de volúmen adecuado, debemos tomar en cuenta las características de cada sistema estelar en particular.

Ahora bien, sea dN el número de estrellas en este elemento de volúmen; evidentemente $dN/d\omega$ será la densidad estelar, que debe ser (dentro de ciertos límites) estadísticamente independiente de la forma y tamaño de $d\omega$. Por lo tanto tendremos: $dN(x,y,z) = \nu(x,y,z)d\omega$. El coeficiente de proporcionalidad, ν, es la función de densidad estelar.

Ahora generalicemos estos conceptos a un espacio fase, esto es, un espacio de seis dimensiones. El centro del elemento de volúmen que ahora llamaremos $d\Omega$ será el punto de coordenadas (x,y,z,u,v,w); u,v,w son las componentes de la velocidad de una estrella dentro del elemento de volúmen en el espacio fase.

Si dN representa el número de puntos que hay en $d\Omega$, tendremos:

$$dN = f(x,y,z,u,v,w)\,d\Omega$$

Análogamente a la definición de densidad estelar, el coeficiente de proporcionalidad f, será la <u>función de densidad de fase</u>.

Escribiendo en forma abreviada "q" para las coordenadas de posición y "p" para las coordenadas de velocidad, podemos ver fácilmente que la siguiente relación debe cumplirse: $\nu(q) = \int f(q,p)\,dp$, donde la integración se extiende sobre todo el espacio de las velocidades.

2).- La función de distribución de las velocidades.

A partir de la función de densidad de fase podemos obtener otra función de distribución de mucha importancia en la dinámica estelar: la función de distribución de velocidades.

La función de distribución de velocidades nos da la distribución en magnitud y dirección, de las velocidades de las estrellas en un punto particular del sistema estelar.

En cada punto (x,y,z) del espacio de coordenadas podemos construir un sistema de coordenadas (u,v,w) que defina un espacio de velocidades. Si tomamos en este espacio un elemento macroscópico de volúmen, el número de puntos dn en este volúmen será evidentemente:

$$dn = \varphi(q,p)dp$$

En la práctica las velocidades de las estrellas dentro de un sistema estelar están limitadas en magnitud, y después de cierto límite la función φ debe ser cero. Por lo tanto debemos suponer a priori que esta función debe ser no negativa para todos los valores de su argumento, y que conforme cualquier componente de la velocidad tiende a infinito, la función tiende a cero mas rápidamente que cualquier potencia de p. O sea: $\lim_{p\to\pm\infty} p^m \varphi(q,p) = 0$, $m > 0$. También supondremos que existen todas las derivadas parciales de la función, que sean necesarias para los cálculos.

La ecuación $\varphi(q,p) = C$, donde C es una constante positiva, define, para un sistema de coordenadas x,y,z dado, una superficie de nivel de la función de distribución de velocidades. Tomando todos los valores posibles de C, obtenemos una familia de superficies de nivel que nos da la forma y tamaño del conjunto de puntos en el espacio de velocidades, de la misma manera como las superficies de nivel de la función de densidad estelar nos darían la forma y tamaño del sistema estelar mismo.

En el caso mas simple, las superficies de nivel de la función de distribución de velocidades son esferas o elipsoides concéntricos. En general una ley elipsoidal está dada por: $\varphi(q,p) = \psi(T)$, donde ψ es una función arbitraria de T, y T es la función cuadrática positiva mas general de las velocidades:

$$T = au^2 + bv^2 + cw^2 + 2fuw + 2huv + 2gvw + pu + qv + rw + s$$

Los coeficientes a,b,c,...,s son funciones de las coordenadas, y en el caso mas general del tiempo también.

Si la forma cuadrática T es homogénea, tenemos: $\varphi(q,p) = (Q+\sigma)$, donde Q es otra forma cuadrática, que referida a ejes principales es

$$Q = h^2(u - u_o)^2 + k^2(v - v_o)^2 + l^2(w - w_o)^2$$

y σ es una función de las coordenadas. u_o, v_o, w_o son las componen - tes de la velocidad media de una estrella (la cual definiremos mas adelante).

El caso particular mas importante de la ley elipsoidal es la ley de Schwarzschild:

$$\varphi(q,p) = e^{-(Q+\sigma)}$$

Mas adelante volveremos a ocuparnos de esta ley de distribu - ción.

Si la distribución es esférica el caso particular mas importan- te es la ley de Maxwell, que de hecho se puede considerar como un caso particular de la ley de Schwarzschild.

3).- La ecuación de Boltzmann en coordenadas cartesianas.

En el inciso 1) de este capítulo hemos definido la función de densidad de fase f, función de las coordenadas de posición q, de las coordenadas de velocidad p, y hay que mencionar que en el caso mas general puede depender también del tiempo. Ahora veremos cual es la ecuación que satisface esta función. Veremos que se trata de una ecuación diferencial parcial lineal, y bajo ciertas considera- ciones homogénea.

Las ecuaciones de movimiento de las estrellas dentro del ele- mento macroscópico de volúmen del espacio fase dx dx ...,dx son:

$$\dot{x}_1 = x_4 \qquad \dot{x}_2 = x_5 \qquad \dot{x}_3 = x_6$$

$$\dot{x}_4 = F_1(x_1, x_2, x_3) \qquad \dot{x}_5 = F_2(x_1, x_2, x_3) \qquad \dot{x}_6 = F_3(x_1, x_2, x_3)$$

donde F_1, F_2, F_3, denotan las componentes de la fuerza gravitacional por unidad de masa. Conforme una estrella se mueve en el espacio, su punto "imágen" se mueve en el espacio fase.

Ahora vamos a encontrar el flujo de puntos fase a traves de un elemento de volúmen $d\Omega$ supuesto fijo en el espacio fase. El número de puntos que entran al volúmen por la cara del paralelepípedo perpendicular al eje x, en el tiempo dt, es $\dot{x}_k f(x_k)(d\Omega/dx)dt$. El número de puntos que salen por la cara opuesta, de coordenada x_k+dx_k es $\dot{x}_k(x_k+dx_k)(d\Omega/dx_k)dt$. Por lo tanto, el movimiento a traves de éstas disminuye el número de puntos del elemento de volúmen $d\Omega$ por $\dot{x}_k\left[f(x_k+dx_k) - f(x_k)\right](d\Omega/dx_k)dt$, ó $\dot{x}_k(\partial f/\partial x\ )d\Omega dt$.

Sumando sobre $k = 1,2,\ldots,6$ obtenemos la pérdida de puntos fase del volúmen $d\Omega$ en el tiempo dt, debida a la acción de las fuerzas gravitacionales

$$d\Omega\, dt \sum_{k=1}^{6} \dot{x}_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

En general, sin embargo, también se pierden puntos por la acción de fuerzas irregulares, i.e. por los encuentros entre las estrellas. Sea esta pérdida de puntos fase por unidad de volúmen y de tiempo $-(\partial f/\partial t)_i$. La pérdida de puntos del volúmen $d\Omega$ en el tiempo dt será $-(\partial f/\partial t)_i\, d\Omega dt$.

Sumando estas dos expresiones obtenemos la pérdida total de puntos fase del volúmen $d\Omega$ en el tiempo dt:

$$\left[\sum_{k=1}^{6} \dot{x}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i\right] d\Omega\, dt$$

Esta pérdida se puede escribir también como $-(\partial f/\partial t)\, d\Omega dt$. Igualando estas dos formas y cancelando términos obtenemos finalmente:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \dot{x}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i \qquad (\text{I-1})$$

Ahora bien, el término de la derecha, es el que nos da la acción de las fuerzas irregulares; este término es generalmente muy complejo. Aunque no se dará aquí una justificación, es muy aceptable considerar que en un sistema dinámico tal como una galaxia, podemos despreciar casi por completo el efecto de los encuentros estelares. Si consideramos este caso, el término de la derecha en la ec. (I-1) se hace cero y obtenemos una ecuación diferencial parcial lineal de primer órden y además homogénea.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \dot{x}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \qquad (\text{I-2})$$

Esta ecuacuión, obtenida fundamentalmente a partir de consideraciones de tipo estadístico, es una de las ecuaciones fundamentales de la dinámica estelar clásica (en la que se desprecian los efectos de las fuerzas irregulares). La ecuación (I-2) se conoce con el nombre de ecuación de Boltzmann.

Escribiéndola explícitamente:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} + X\frac{\partial f}{\partial u} + Y\frac{\partial f}{\partial v} + Z\frac{\partial f}{\partial w} = 0 \qquad (\text{I- 3})$$

Donde X, Y y Z son las componentes de la fuerza gravitacional.

4).- Teorema de Jeans y teorema de Liouville.

Consideremos un punto en el espacio fase, arbitrario excepto por el hecho de que sus coordenadas representen valores que sea posible tener en la práctica. Imaginemos ahora una estrella que en el tiempo t tenga las coordenadas de este punto fase. Cualquier función de estas coordenadas y del tiempo que permanece constante durante el movimiento de la estrella, la llamaremos una integral de movimiento. La propiedad característica de todas las integrales de movimiento es que su derivada total con respecto al tiempo es cero.

Ahora bien, podemos ver facilmente que la ec. (I-3) se puede escribir en forma abreviada de la siguiente manera: $D\rho/Dt = 0$.

Esto es una manera de expresar el Teorema de Jeans: Para cualquier movimiento que se considere dentro de un sistema estelar, la densidad de fase es una integral de movimiento.

Por medio de este teorema podemos probar (lo cual no se hará aquí) otro teorema muy importante, el Teorema de Liouville: En el movimiento de un sistema estelar, cualquier volúmen del espacio fase permanece constante.

De hecho los dos teoremas son complementarios, y cualquiera de los dos se puede tomar como una consecuencia del otro. En física estadística el Teorema de Liouville es de mucha importancia y por lo general se demuestra primero. Sin embargo, para la dinámica estelar el teorema de Jeans es mas importante pues nos conduce a la forma de la solución general de la ec. de Boltzmann.

Para resolver la ecuación de Boltzmann, que es una ecuación lineal y homogénea en ρ, escribiremos las correspondientes ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{du}{\partial U/\partial x} = \frac{dv}{\partial U/\partial y} = \frac{dw}{\partial U/\partial z} = \frac{dt}{1} \qquad (I-4)$$

Donde U es una función potencial.

En el caso mas general la solución de la ecuación es una función arbitraria de integrales independientes del sistema (I-4). Si igualamos sucesivamente cada miembro de (I-4) con el último, obtenemos seis ecuaciones independientes que no son otra cosa que las ecuaciones de movimiento de una estrella bajo la acción de fuerzas gravitacionales. Por lo tanto las integrales del sistema (I-4) son integrales de movimiento.

La integración del sistema da, en general, seis integrales de movimiento: $I_k(t,x,y,z,u,v,w) = C_k$; $k = 1,2,\ldots,6$

Estas ecuaciones determinan completamente, en principio, el movimiento de cualquier estrella si se conocen sus coordenadas iniciales en el tiempo t_o . Al substituir los valores iniciales en las integrales podemos determinar el valor de la constante arbitraria C_k, y resolviendo el sistema de ecuaciones podemos encontrar x,y,z,u,v y w como funciones de t y de las seis constantes arbitrarias. Así tendremos, en general:

$$f = F(I_1, I_2, \ldots, I_6)$$

Donde F denota una función arbitraria. Durante todo el movimiento las cantidades I_1 , $I_2, \ldots, I_6$ permanecen, por definición, constantes. Por lo tanto la densidad de fase permanece también constante, i.e. es una integral de movimiento, en completa concordancia con el Teorema de Jeans.

En el capítulo II nos ocuparemos con mas detalle de estas integrales. Por ahora es importante dejar sentado lo que en adelante llamaremos el problema de Jeans; el problema de Jeans consiste en encontrar f a partir de U.

5).- La ecuación de Poisson.

Existe otra ecuación que relaciona la función de distribución con la función potencial, esta es la ecuación de Poisson:

$$\Delta U = -4\pi G m \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z,u,v,w)\, du\, dv\, dw \qquad (\text{I-5})$$

Esta ecuación se puede escribir también en forma diferencial. Supongamos que las estrellas se mueven bajo la acción de un campo de fuerza dado por el potencial $-\phi$. La ecuación de Poisson será:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \equiv \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \qquad (\text{I-6})$$

Donde ρ es la densidad de masa total del sistema.

De este modo vemos que al satisfacerse la ec. de Poisson, se satisface la condición de que la fuerza gravitacional sea la producida por la totalidad de materia (estrellas y gas) del sistema estelar.

La ecuación de Poisson es otra de las ecuaciones fundamentales de la dinámica estelar.

6).- Centroides. El campo diferencial de velocidades.

El concepto de centroide es de suma importancia en la descripción de sistemas estelares. Lo podemos definir de la siguiente manera: el centroide es un punto que se encuentra en reposo con respecto al elemento macroscópico de volúmen al que pertenece. En otras palabras, el centroide es un punto que, en un momento dado, se mueve con la velocidad media de todas las estrellas de un elemento macroscópico de volúmen dado.

Si φ es la función de distribución de velocidad del elemento de volúmen considerado, entonces las ecuaciones

$$\bar{V} = \frac{1}{\nu} \int V \varphi \, d\Omega$$

$$\bar{u}=\frac{1}{\nu}\int u\varphi d\Omega \qquad \bar{v}=\frac{1}{\nu}\int v\varphi d\Omega \qquad \bar{w}=\frac{1}{\nu}\int w\varphi d\Omega \tag{I-7}$$

nos dan la velocidad del centroide y sus componentes a lo largo de los ejes coordenados. El centroide coincide con el centro estadístico de la distribución de velocidades en el elemento de volúmen. Por ejemplo, en el caso de una ley elipsoidal las componentes de la velocidad del centroide son u_0, v_0, w_0; estas componentes son las mismas que mencionamos en la pg. 4.

A la diferencia (vectorial) entre la velocidad de una estrella y la del centroide del elemento de volúmen al que pertenece, la llamaremos <u>velocidad residual</u> de la estrella. Tendremos que:

$$\mathbb{V}=\mathbb{V}_0+\mathbb{V}'$$

$$u=u_0+u' \qquad v=v_0+v' \qquad w=w_0+w' \tag{I-8}$$

donde $\mathbb{V}$ y $\mathbb{V}_0$ son la velocidad de la estrella y del centroide respectivamente y $\mathbb{V}'$ es la velocidad residual. $u,v,w; u_0,v_0,w_0; u',v',w'$ son sus respectivas componentes. No es difícil ver de (I-7) y (I-8) que $\sum \mathbb{V}'=0$; $\sum u'=0$ $\sum v'=0$ $\sum w'=0$

De todo esto resulta evidente que la función de distribución de velocidades definida en el inciso 2), nos da la distribución de velocidades residuales y no la de velocidades totales.

Ahora vamos a considerar la otra componente de la velocidad de una estrella, la velocidad del centroide. Esta velocidad está relacionada con el movimiento interno ordenado de los sistemas estelares. Por ejemplo, consideremos la rotación de una galaxia alrededor de un eje. El movimiento circular alrededor del eje está relacionado a los centroides y no a las estrellas individualmente, pues éstas pueden describir órbitas sumamente complejas que no guarden ninguna relación con la rotación del sistema estelar como un todo.

En general la velocidad del centroide es una función contínua de la posición. Supondremos que las componentes de esta velocidad a lo largo de los ejes de un sistema de coordenadas fijo tienen derivadas parciales contínuas de primer y segundo órden. Como en adelante no nos ocuparemos más de las velocidades individuales de las estrellas denotaremos por $\mathbb{V}$ la velocidad de un centroide cualquiera; $\mathbb{V} = \mathbb{V}\,(\mathbb{R})$ donde $\mathbb{R}$ es el radio vector de un punto en el sistema.

Sea $\mathbb{V}_0 = \mathbb{V}\,(\mathbb{R}_0)$ la velocidad del centroide del observador. El vector $\mathbb{V} - \mathbb{V}_0$ será la velocidad relativa del centroide que estamos estudiando con respecto a la velocidad del centroide del observador.

Mientras que la distribución de las velocidades residuales nos dan un patrón estadístico del movimiento, el campo de velocidades de los centroides nos presenta el aspecto hidrodinámico de los movimientos estelares en un sistema. En la dinámica estelar es de mucha importancia el problema de la distribución de las velocidades de los centroides en una pequeña región alrededor de un cierto punto, esto es, el campo local o diferencial de velocidades del centroide. Esto se debe a que en un principio el estudio de nuestra galaxia empezó con la investigación de una pequeña región alrededor del sol, esta región es el punto de partida de todos nuestros conocimientos acerca de las regiones mas distantes de la galaxia. Las expresiones obtenidas en este inciso serán aplicadas en el capítulo III.

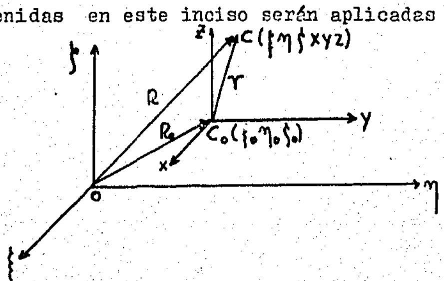


fig. I

En la figura 1, C es un centroide arbitrario y O el centroide del observador. El sistema de coordenadas ξ, η, ζ está fijo en la galaxia. El campo de velocidades del centroide se puede escribir:

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}(\mathbb{R}) = \mathbb{V}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbb{V}(\xi_0 + x, \eta_0 + y, \zeta_0 + z)$$

Si suponemos que el vector $\mathbf{r}(x,y,z)$ es pequeño en comparación con $\mathbb{R}$, podemos expander la función $\mathbb{V}(\mathbb{R})$ en potencias de x,y,z y tomando solo los términos de primer órden:

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 + \left(\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial \xi}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial \eta}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial \zeta}\right)_0 z$$

donde $\mathbb{V}_0 = \mathbb{V}(\mathbb{R}_0) = \mathbb{V}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ es la velocidad del centroide del observador y las derivadas se toman en el punto $C_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$.

Como $\xi = \xi_0 + x \quad \eta = \eta_0 + y \quad \zeta = \zeta_0 + z$

$$\partial \mathbb{V}/\partial \xi = \partial \mathbb{V}/\partial x \qquad \partial \mathbb{V}/\partial \eta = \partial \mathbb{V}/\partial y \qquad \partial \mathbb{V}/\partial \zeta = \partial \mathbb{V}/\partial z$$

y tenemos :

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 + \left(\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial z}\right)_0 z \qquad \text{(I-9)}$$

Esta es la forma vectorial del campo diferencial de velocidades del centroide.

Sean u,v,w las componentes de la velocidad del centroide C y u_0, v_0, w_0 las componentes de la velocidad del centroide C_0. (I-9) se puede escribir:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + u_x x + u_y y + u_z z \\ v &= v_0 + v_x x + v_y y + v_z z \\ w &= w_0 + w_x x + w_y y + w_z z \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I-10)}$$

donde $u_x, u_y, u_z, \ldots, w_z$ denotan las derivadas parciales respectivas en el centroide del observador. Las fórmulas (I-10) nos dan el campo diferencial de velocidades del centroide en coordenadas rectangulares.

Haciendo la analogía con la mecánica de fluídos u_0, v_0, w_0 son las componentes de la velocidad de traslación y los otros términos son las componentes de la velocidad relativa de desplazamiento dentro de la región. Los coeficientes de estos términos forman la matriz de desplazamiento:

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$$

Substituyendo en (I-9) ó (I-10):

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 + \mathbb{D} \cdot \mathbb{r} \qquad \text{(I-11)}$$

Ahora vamos a ver cual es el significado de la cantidad $\mathbb{D} \cdot \mathbb{r}$.

Para esto vamos a escribir la matriz $\mathbb{D}$ como la suma de dos matrices, una simétrica $\mathbb{S} = \frac{1}{2}(\mathbb{D} + \mathbb{D}_c)$ y una antisimétrica $\mathbb{A} = \frac{1}{2}(\mathbb{D} - \mathbb{D}_c)$ donde $\mathbb{D}_c$ es la matriz conjugada de $\mathbb{D}$. Substituyendo en (I-11):

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 + \mathbb{S} \cdot \mathbb{r} + \mathbb{A} \cdot \mathbb{r} \qquad \text{(I-12)}$$

Sabemos del cálculo tensorial que la matriz de desplazamiento $\mathbb{D}$ y su conjugada $\mathbb{D}_c$ se pueden escribir como $\mathbb{D} = d\mathbb{V}/d\mathbb{r}$; $\mathbb{D}_c = \operatorname{grad} \mathbb{V}$ por lo tanto, $\mathbb{S} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbb{V}}{d\mathbb{r}} + \operatorname{grad} \mathbb{V}\right)$ $\quad \mathbb{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbb{V}}{d\mathbb{r}} - \operatorname{grad} \mathbb{V}\right)$

Consideremos ahora el significado mecánico de las cantidades $\mathbb{A} \cdot \mathbb{r}$ y $\mathbb{S} \cdot \mathbb{r}$ cuya suma, de acuerdo con (I-12), nos da el campo diferencial relativo de las velocidades del centroide. Escribiendo explícitamente la matriz $\mathbb{S}$ tenemos:

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} u_x & \frac{1}{2}(u_y + v_x) & \frac{1}{2}(u_z + w_x) \\ \frac{1}{2}(v_x + u_y) & v_y & \frac{1}{2}(v_z + w_y) \\ \frac{1}{2}(w_x + u_z) & \frac{1}{2}(w_y + v_z) & w_x \end{bmatrix}$$

Esta matriz simétrica se llama tensor de deformación local.

Escribiendo explícitamente $\mathbb{A}$ tenemos:

$$\mathbb{A} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_y - v_x) & \frac{1}{2}(u_z - w_x) \\ \frac{1}{2}(v_x - u_y) & 0 & \frac{1}{2}(v_z - w_y) \\ \frac{1}{2}(w_x - u_z) & \frac{1}{2}(w_y - v_z) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las cantidades $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ que aparecen en la matriz antisimétrica son las componentes del vector $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbb{V}$ que es la velocidad angular instanténea para una rotación rígida de la pequeña región. Se sabe que $\mathbb{A}\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ por lo tanto $\mathbb{A}$ se puede llamar el tensor de rotación local.

La fórmula (I-12) es el teorema de Helmholtz para sistemas estelares: En una pequeña región alrededor de cualquier punto en un sistema estelar, las velocidades de los centroides son la suma de: (1) la velocidad $\mathbb{V}_0$ de traslación rígida de la región, (2) la velocidad $\mathbb{A}\cdot\boldsymbol{r}$ de rotación rígida de la región con velocidad angular instanténea $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbb{V}$, (3) la velocidad $\mathbb{S}\cdot\boldsymbol{r}$ de deformación de la región.

La fórmula (I-12) se puede expresar de una manera todavía mas clara si pensamos en que las componentes del vector $\mathbb{S}\cdot\boldsymbol{r}$ se pueden representar en términos de las derivadas parciales de la función cuadrática $F=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\cdot\mathbb{S}\cdot\boldsymbol{r}$, de tal modo que $(\mathbb{S}\cdot\boldsymbol{r})_x = \partial F/\partial x$ $(\mathbb{S}\cdot\boldsymbol{r})_y=\partial F/\partial y$ $(\mathbb{S}\cdot\boldsymbol{r})_z=\partial F/\partial z$. Así el teorema de Helmholtz se puede escribir como:

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 + \mathrm{grad}\,F + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \qquad \text{(I-13)}$$

7).- Ecuaciones hidrodinámicas del movimiento del centroide, en coordenadas cilíndricas, para un sistema estacionario y con simetría rotacional.

La ecuación de Boltzmann (ec. (I-3)) en coordenadas cilíndricas $\tilde{\omega}, \theta, z$ es:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Pi\frac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\Theta}{\tilde{\omega}}\frac{\partial f}{\partial \theta} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\Theta^2}{\tilde{\omega}}\right)\frac{\partial f}{\partial \Pi} + \left(\frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\Pi\Theta}{\tilde{\omega}}\right)\frac{\partial f}{\partial \Theta} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial Z} = 0 \qquad \text{(I-14)}$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento del centroide a partir de esta ecuación debemos "promediar" (integrar) la ecuación sobre todo el espacio de velocidades. Al hacer esto debemos recordar la condición de que en cualquier sistema estelar real, las velocidades de las estrellas están limitadas por la velocidad de escape. Esta condición la podemos escribir de la siguiente manera: $\lim_{V\to\infty} V^m f = 0$ $m > 0$. En particular se usa para las integraciones el hecho de que

$$\lim_{V\to\infty} f = 0 \qquad \lim_{V\to\infty} V f = 0 \qquad \lim_{V\to\infty} V^2 f = 0 \qquad \text{(I-15)}$$

Para obtener las ecuaciones hidrodinámicas en el caso general, se multiplica la ecuación (I-14) por el elemento de volúmen (en el espacio de velocidades) $d\Omega = d\Pi\, d\Theta\, dZ$ y luego se integra sobre Π, Θ y Z.

Antes de entrar en el cálculo de las ecuaciones en nuestro caso particular escribiremos algunas relaciones generales que simplifican las integraciones.

Sea Λ cualquiera de las tres componentes de la velocidad en coordenadas cilíndricas y E(M,N) una función integrable cualquiera de las otras dos componentes M y N. Usando la condición (I-15) y las definiciones de densidad estelar (inciso 1) y de velocidad del centroide (inciso 6), tendremos:

$$\int f\, d\Omega = \nu$$

$$\int \Lambda f\, d\Omega = \Lambda_0$$

$$\int (\partial f/\partial \Lambda)\, d\Omega = \int [f]_{-\infty}^{\infty} dM\, dN = 0 \qquad \text{(I-16)}$$

$$\int \Lambda (\partial f/\partial \Lambda)\, d\Omega = \int [f\Lambda]_{-\infty}^{\infty} dM\, dN - \int f\, d\Lambda\, dM\, dN = -\nu$$

$$\int E f d\Omega = \nu \overline{E}$$

$$\int E \left(\partial f / \partial \Lambda\right) d\Omega = \int E \left[f \right]_{-\infty}^{\infty} dM dN = 0$$

$$\int E \Lambda \left(\partial f / \partial \Lambda\right) d\Omega = \int E \left[f \Lambda \right]_{-\infty}^{\infty} dM dN - \int E f d\Lambda dM dN = -\nu \overline{E}$$

$$\int E \Lambda^2 \left(\partial f / \partial \Lambda\right) d\Omega = \int E \left[f \Lambda^2 \right]_{-\infty}^{\infty} dM dN - 2\int E \Lambda f d\Lambda dM dN = -2\nu \overline{E\Lambda}$$

Ahora bien, en nuestro caso particular (estado estacionario y simetría rotacional) la ecuación de Boltzmann toma la forma:

$$\Pi \frac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}} + Z \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}} + \left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\Theta^2}{\tilde{\omega}}\right)\frac{\partial f}{\partial \Pi} - \frac{\Pi \Theta}{\tilde{\omega}} \frac{\partial f}{\partial \Theta} + \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{z}} \frac{\partial f}{\partial Z} = 0 \qquad \text{(I-17)}$$

La densidad de fase es en este caso (como veremos en el capítulo II) una función de la integral de energía y de la integral de área: $f = f\left[\Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 - 2U(\tilde{\omega}, \mathfrak{z}),\ \tilde{\omega}\Theta\right]$ (I-18)

Para derivar nuestras ecuaciones multiplicamos (I-17) por Π, Θ y Z sucesivamente e integramos sobre todo el espacio de velocidades. De (I-18) y (I-15) se sigue que la primera y tercera integración nos dan identidades. De (I-18) vemos que f es una función par de Π y de Z, por lo tanto $\int \Pi Z f d\Omega = 0$; $\int \Pi \Theta Z \left(\partial f / \partial \Theta\right) d\Omega = -\int \Pi Z f d\Omega = 0$

Usando estas relaciones y las fórmulas (~~I-~~16) obtenemos, de la tercera y cuarta integraciones, las ecuaciones:

$$\frac{\partial(\nu\overline{\Pi^2})}{\partial\tilde{\omega}} - \left(\nu\frac{\partial U}{\partial\tilde{\omega}} + \frac{1}{\tilde{\omega}}\nu\overline{\Theta^2}\right) + \frac{1}{\tilde{\omega}}\nu\overline{\Pi^2} = 0 \qquad \text{(I-19)}$$

$$\frac{\partial(\nu\overline{Z^2})}{\partial \mathfrak{z}} = \nu\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{z}}$$

De la simetría de f con respecto a Π y a Z se sigue que $\overline{Z^2} = \overline{\Pi^2}$ y haciendo

$$p = \int \Pi^2 f \, d\Omega = \nu \overline{\Pi^2} = \nu \overline{Z^2} \qquad q = \int \Theta^2 f \, d\Omega = \nu \overline{\Theta^2}$$

obtenemos de (I-19) las ecuaciones:

$$\frac{\partial p}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{p-q}{\tilde{\omega}} = \nu \frac{\partial U}{\partial \tilde{\omega}} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \frac{\partial U}{\partial z} \qquad \text{(I-20)}$$

Estas ecuaciones fueron derivadas por primera vez en 1922 por Jeans y a menudo se las llama "ecuaciones hidrodinámicas", pero de hecho son ecuaciones de transferencia. Para obtener las ecuaciones hidrodinámicas debemos introducir la velocidad del centroide.

Se puede demostrar que para un sistema estacionario con simetría rotacional, los centroides describen círculos. Osea que

$$\Pi_0 = Z_0 = 0 \qquad \Theta_0 = \Theta_0(\tilde{\omega}, z)$$

y por lo tanto en este caso $\Pi = \Pi'$ $\quad Z = Z'$ $\quad \Theta = \Theta_0 + \Theta'$

y $\overline{\Pi^2} = \overline{\Pi'^2} = \sigma_{\tilde{\omega}}^2 \qquad \overline{Z^2} = \overline{Z'^2} = \sigma_z^2 \qquad \overline{\Theta^2} = \overline{\Theta_0^2} + \overline{\Theta'^2} = \Theta_0^2 + \sigma_\Theta^2$

donde $\sigma_{\tilde{\omega}}^2$ σ_z^2 σ_Θ^2 son las varianzas de las velocidades en las direcciones correspondientes. De las relaciones anteriores podemos ver que $p = \nu \sigma_{\tilde{\omega}}^2 = \nu \sigma_z^2 \qquad q = \nu \Theta_0^2 + \nu \sigma_\Theta^2$.

las cantidades $\sigma_{\tilde{\omega}}^2$ y σ_z^2 caracterizan la distribución de velocidades residuales en el plano meridiano, y σ_Θ^2 en la dirección perpendicular a este plano. Por lo que podemos llamar a $\sigma_{\tilde{\omega}}^2$ (ó σ_z^2) la varianza radial y a σ_Θ^2 la varianza transversal.

Substituyendo en las ecuaciones (I-20) obtenemos finalmente las para un sistema estacionario con simetría rotacional:

$$\frac{\partial(\nu \sigma_{\tilde{\omega}}^2)}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\nu(\sigma_{\tilde{\omega}}^2 - \sigma_\Theta^2)}{\tilde{\omega}} = \nu \frac{\Theta_0^2}{\tilde{\omega}} + \nu \frac{\partial U}{\partial \tilde{\omega}} \qquad \text{(I-21)}$$

$$\frac{\partial(\nu\,\sigma_{\varpi}^{2})}{\partial z} = \nu\,\frac{\partial U}{\partial z}$$

Las cantidades U y ν se relacionan mediante la ecuación de Poisson (inciso 5) que en coordenadas cilíndricas, con U independiente de ϑ es:

$$\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\varpi\frac{\partial U}{\partial\varpi}\right) + \frac{\partial^{2}U}{\partial z^{2}} = -4\pi G m \nu$$

donde G es la constante gravitacional y m la masa promedio de una estrella.

CAPITULO II

SOBRE LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA DINAMICA ESTELAR.

1).- La solución de la ecuación de Boltzmann.

Hemos visto en el inciso 4 del capítulo I que la solución mas general de la ecuación de Boltzman es una función arbitraria de 6 integrales de movimiento, $f = F(I_1, I_2, \ldots I_6)$, y que el encontrar estas integrales y por lo tanto la densidad de fase constituye lo que hemos llamado el problema de Jeans.

Sin embargo esto es solo una solución formal del problema, puesto que en la práctica no es posible determinar la forma explícita de las seis integrales en el caso general, por lo que trataremos aquí solo casos particulares.

A continuación consideraremos solo casos en los que el sistema sea estacionario, o sea que ni la energía potencial U ni la densidad de fase f dependen del tiempo. Por este hecho el número de integrales de movimiento independientes se reduce a cinco.

a).- Distribución de masa arbitraria.

En este caso no existe ninguna restricción sobre U y podremos encontrar solo una primera integral, la integral de energía. Esta integral se obtiene de las ecuaciones (I-4) combinando el primero y cuarto, segundo y quinto y tercero y sexto miembros (y tomando en cuenta el hecho de que el tiempo ya no aparece explícitamente en las derivadas de U). Así obtenemos:

$$u\,du = (\partial U/\partial x)\,dx\,, \quad v\,dv = (\partial U/\partial y)\,dy\,, \quad w\,dw = (\partial U/\partial z)\,dz$$

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}\,d(u^2+v^2+w^2) = dU$$

integrando: $I_1 = u^2+v^2+w^2 - 2U = C_1$ $\qquad I_1 = V^2 - 2U = C_1$

donde V es la magnitud de la velocidad.

De manera que si no se toma una cierta distribución de masa definida para el sistema, no podemos obtener mas que la integral de energía. $f = f(I_1) = f(u^2+v^2+w^2-2U)$

Las componentes u,v,w aparecen simétricamente en la expresión de f, por lo tanto los puntos tienen, en el espacio de velocidades, la simetría mas alta posible: simetría esférica. Veremos que en general cuanto mayor sea la simetría en la distribución de la masa, mas asimétrica será la distribución de velocidades y viceversa.

b).- Simetría rotacional.

Si el eje de simetría es el eje z, entonces $U = U(\tilde{\omega}, z)$. En este caso podemos encontrar, ademas de la integral de energía I_1, otra integral independiente: la integral de área o integral de momento angular. Esta integral es (tomando las ecuaciones (I-4) y la expresión para U) $I_2 = xv - yu = C_2$.

Escribiendo las integrales I_1 y I_2 en coordenadas cilíndricas:

$$I_1 = \Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 - 2U = C_1 \qquad I_2 = \tilde{\omega}\,\Theta = C_2$$

tendremos que $$f = f(\Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 - 2U,\ \tilde{\omega}\,\Theta)$$

De aquí vemos que f es simétrica con respecto a las componentes de la velocidad Π y Z, de modo que en el espacio de velocidades los puntos fase tienen simetría rotacional alrededor del eje Θ.

c).- Simetría esférica.

En este caso $U = U(r)$ donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Puesto que en este caso cualesquiera tres ejes mutuamente perpendiculares son ejes de simetría, podemos escribir tres integrales de momento angular alrededor de los tres ejes: $I_2 = yw - zv = C_2$

$$I_3 = zu - xw = C_3 \qquad I_4 = xv - yu = C_4$$

De modo que en este caso $f = f(I_1, I_2, I_3, I_4)$.

Las cantidades I_2, I_3, I_4 son las componentes del vector de momento angular total $\mathbb{I} = \mathbb{r} \times \mathbb{V}$, donde $\mathbb{r}$ es el radio vector y $\mathbb{V}$ la velocidad total. Se puede demostrar que si escribimos $I^2 = I_2^2 + I_3^2 + I_4^2$, entonces $f = f(I_1, I^2)$.

Usando coordenadas esféricas: $I^2 = r^2(\Theta^2 + \Phi^2)$

$$I_1 = R^2 + \Theta^2 + \Phi^2 - 2U(r)$$

y $$f = f\left\{R^2 + \Theta^2 + \Phi^2 - 2U(r),\ r^2(\Theta^2 + \Phi^2)\right\}$$

Vemos que la función f es simétrica en las componentes Θ y Φ. O sea que para una distribución de masa con simetría esférica, los puntos fase presentan, en el espacio de velocidades, simetría rotacional alrededor de un eje paralelo al radio vector del punto considerado.

Hemos visto que en ninguno de estos casos es posible encontrar las cinco integrales de movimiento que nos dan la solución del problema para el caso estacionario.

A primera vista podría parecer que la ausencia de algunas de las cinco integrales en los argumentos de la densidad de fase, se debe simplemente a que son desconocidas, esto es, a nuestra inhabilidad para determinarlas. Sin embargo, si esto fuera así, existirían obstáculos insuperables para construir una teoría dinámica completa de los sistemas estelares, puesto que tendríamos que determinar tanto el potencial como la densidad de fase. En realidad la situación no es tan difícil, pues existe una condición mas que deben satisfacer las integrales que aparecen en el argumento de la densidad de fase: deben ser univaluadas. Esto debe ser así por el hecho de que la densidad de fase, por su significado físico, debe ser una función univaluada.

Si la densidad de fase solo puede tener integrales univaluadas de movimiento como argumento, el problema se reduce a determinar el número de estas integrales para cada sistema. Existen varios argumentos, aunque no una prueba rigurosa, en favor de la hipótesis de que las integrales clásicas, i.e. aquellas que se pueden encontrar mediante el teorema de Jeans, son las únicas integrales univaluadas. En otras palabras, de que las integrales que no aparecen como argumentos en la densidad de fase, no son univaluadas.

Esta situación es enteramente análoga a la que se presenta en la física estadística, donde para poder establecer una teoría estadística de los estados de equilibrio de los sistemas, es necesario introducir la hipótesis ergódica, de acuerdo con la cual la densidad de fase depende sólo de la integral de energía. Para cualquier sistema ergódico la integral de energía es la única integral de movimiento univaluada.

Por analogía con la física estadística podemos introducir el término "cuasi-ergódico" para describir un sistema estelar para el que las únicas integrales de movimiento univaluadas sean las integrales clásicas, i.e. las que se obtienen mediante el teorema de Jeans. En particular para el caso de sistemas con simetría rotacional (galaxias), la propiedad cuasi-ergódica significa que la densidad de fase depende solo de dos integrales independientes: la integral de energía y la integral de momento angular.

Las discrepancias entre el elipsoide de velocidades observado y los resultados de la teoría elipsoidal para una galaxia en estado estacionario (la desviación del vértice, la desigualdad de los ejes, etc.), han constituido un contínuo estímulo para tratar de generalizar la teoría clásica. Tal generalización es posible en dos aspec - tos. El primero consiste en abandonar el requerimento de estabilidad, ya sea a nivel galáctico o como un problema de inestabilidad local. Existe a este respecto una gran cantidad de literatura iniciada por Chandrasekhar. No comentaremos aquí este trabajo, no porque no valga la pena sino porque en el presente trabajo nos ocuparemos sólo de sistemas en estado estacionario, la justificación de esto se dará mas adelante.

La segunda posibilidad consiste en conservar la estabilidad y pensar que existe, ademas de las integrales de energía y de momento angular, una tercera integral. Mientras que la propiedad cuasi-ergódica permanezca como hipótesis, la búsqueda de una tercera integral es totalmente legítima. La literatura al respecto es también muy extensa; varios autores, entre ellos Chandrasekhar, Heckmann y Strassl, Fricke, Camm y en particular Kuzmin y Contopoulos, han definido una tercera integral de diferentes maneras usando métodos matemáticos bastante abstractos, por ejemplo, imponiendo la condición de que la tercera integral sea cuadrática en las componentes de la velocidad, de que la masa del sistema sea finita, etc.

A partir de esto hay dos caminos posibles á seguir. Uno es el de determinar, mediante las tres integrales, el potencial gravitacional del sistema y por lo tanto la distribución de la densidad estelar. Esto se puede comparar con el resultado de las observaciones.

El otro enfoque consiste en tomar la tercera integral sólo como una cuasi-integral de movimiento, una función de las coordenadas y velocidades que sea localmente constante, i.e. que permanezca aproximadamente constante, bajo ciertas condiciones conocidas, en una región relativamente grande de la galaxia.

El problema de las cuasi-integrales fué considerado, en general, por primera vez por Kuzmin. Históricamente, la primera cuasi-integral fué usada por Oort para estudiar la distribución de la densidad estelar a diferentes distancias del plano galáctico. De ésto nos ocuparemos con mas detalle en el capítulo III.

En resumen podemos decir que el problema de Jeans no tiene una solución general.

2).- El problema de Jeans inverso.

La ecuación fundamental de la dinámica estelar (la ecuación de Boltzmann) se puede considerar no solo como una ecuación para determinar la densidad de fase a partir de un cierto potencial dado (problema de Jeans), sino también como una ecuación para determinar el potencial a partir de una cierta densidad de fase dada; en esto consiste el problema de Jeans inverso.

Este problema es, de hecho, un problema matemático mas que físico. Con respecto a la astronomía, por lo tanto, el problema inverso es mucho menos prometedor que el problema directo, sin embargo ha jugado un papel importante en el desarrollo histórico de la dinámica estelar. Este problema ha sido objeto de trabajos notables realizados por Eddington, Oort y otros; esta línea de investigación ha culminado en las investigaciones de Chandrasekhar.

Una de las razones principales que llevó a la consideración del problema de Jeans inverso es la dificultad de resolver el problema directo. Entre 1910 y 1930 la consideración del problema inverso resultaba una etapa natural en el desarrollo de la dinámica de sistemas estelares, puesto que los únicos datos observacionales que se tenían provenían de una pequeña región en la vecindad del sol, que se extendía a no mas de unos cuantos cientos de parsecs. Esta información concerniente a la distribución local de las estrellas no permitía una extrapolación confiable al resto de la galaxia, y mucho menos a otras galaxias. Por lo tanto es muy razonable y lógico, en estas circumstancias, tratar de determinar indirectamente la distribución de la masa en la galaxia a partir de la distribución local (conocida) de las velocidades estelares.

En el problema de Jeans inverso la densidad de fase, o por lo menos la función de distribución de velocidades se supone conocida, y se requiere encontrar una expresión para el potencial, o al menos poder conocer sus propiedades de simetría.

Como hemos visto anteriormente, las observaciones nos indican que la distribución de las velocidades residuales en la vecindad del sol está dada con bastante presición por la ley de Schwarzschild, $f = e^{-T}$, donde T es la función cuadrática positiva y definida mas general de las componentes u, v y w de la velocidad. El procedimiento usual para resolver el problema de Jeans inverso consiste en substituir la expresión para T en la ecuación de Boltzmann. En el polinomio cúbico resultante los coeficientes de las distintas potencias de u,v, y w se igualan a cero, así se obtienen veinte ecuaciones diferenciales parciales para determinar los coeficientes de la forma cuadrática T.

No es difícil ver que las propiedades del potencial que se obtiene al resolver la ecuación de Boltzmann son independientes de la manera como f dependa de T, de manera que podemos resolver el problema de Jeans inverso a partir de la forma general de la ley elipsoidal $f = f(T)$.

Es importante mencionar en este punto que en muchas ocaciones es necesario considerar un sistema estelar como formado por varios subsistemas, cada uno de los cuales está descrito por su propia función de distribución. No existe ninguna dificultad formal al considerar un sistema estelar como la superposición de dos o mas sistemas, y desde el punto de vista físico nos brinda la oportunidad de tener cierta libertad al interpretar el material observacional.

3).- Consistencia con la ecuación de Poisson.

En el desarrollo de la teoría de la dinámica estelar hasta 1940 se hizo una omisión importante en lo que se refiere al uso de la ecuación de Poisson, que relaciona el potencial gravitacional con la distribución de densidad que éste produce. Esto no fué un olvido, se debió al hecho de que la distribución de velocidades no es la misma para todos los tipos de estrellas. Sin embargo, mas adelante se encontró la manera de formular el problema de tal modo que la ecuación de Poisson se pueda aplicar.

Si la función f se define de tal modo que $f\,dxdydzdudvdw$ sea la masa total de estrellas que en el tiempo t están en el elemento de espacio fase dxdydzdudvdw, entonces f satisface la misma ecuación de Boltzmann y además la integral de f sobre todas las velocidades es la densidad de masa que da lugar al potencial gravitacional U que aparece en la ecuación de Poisson (inciso 5, capítulo II).

Es muy interesante que tres investigaciones realizadas independientemente y casi simultáneamente (Camm 1941-1950, Fricke 1951 y Kurth 1949) hayan dado un creciente énfasis al uso de la ecuación de Poisson. Los tres coinciden en que es necesario que el modelo matemático de un sistema estelar sea finito. Camm ha encontrado soluciones (para el caso estacionario) con radios finitos, bastante aceptables. Sin embargo se ha demostrado (Camm, 1941) que la distribución elipsoidal (para el caso estacionario) no puede satisfacer la ecuación de Poisson. Para el caso no estacionario no se ha encontrado ninguna solución satisfactoria.

4).- Estado estacionario y simetría axial.

Al final del inciso 3 del capítulo I, hemos usado el hecho de que la acción de las fuerzas irregulares (aquellas que producen encuentros cercanos entre las estrellas) es despreciable. Si bien como dijimos antes el dar una amplia justificación de esto queda fuera del marco del presente trabajo, es importante mencionar algunos puntos sobre lo que se entiende por estado estacionario ya que en el presente trabajo nos mantendremos dentro de este caso siempre.

Si en un sistema estelar todos los parámetros físicos tales como forma, tamaño y distribución de masa permanecen constantes, así como la naturaleza de los movimientos estelares en el sistema, diremos que éste sistema se encuentra en estado de equilibrio dinámico. Supongamos un sistema estelar en este estado de equilibrio dinámico. En el transcurso del tiempo la acción de las fuerzas irregulares, por pequeña que sea, tenderá a destruir este equilibrio. Puesto que los encuentros son muy raros, las estrellas que adquieren grandes velocidades debido a éstos por lo general abandonarán el sistema. De esta manera el sistema sufre una cierta pérdida gradual de masa lo que provoca cierta redistribución interna, de modo que el estado previo de equilibrio se destruye. Sin embargo, si el efecto acumulativo de las fuerzas irregulares es suficientemente pequeño, puede suceder que el sistema adquiera a cada instante un estado de equilibrio dinámico. A este estado del sistema, tal que en cada instante se encuentra en equilibrio dinámico, pero este equilibrio está cambiando continuamente, se le llama estado cuasi-estacionario.

En mecánica se considera a menudo el estado estacionario de un sistema, sin embargo, de lo dicho anteriormente se deduce que un sistema estelar no puede adquirir nunca un estado estrictamente estacionario, por lo que el concepto de estado cuasi-estacionario substituye, en este caso, al de sistema estacionario.

El efecto de las fuerzas irregulares en los sistemas estelares tiene dos efectos opuestos; por un lado, causan encuentros individuales entre las estrellas lo cual destruye el equilibrio dinámico del sistema. Por otro lado tienden a suavizar la distribución de velocidades residuales de las estrellas, tendiendo a establecer un estado de equilibrio estadístico.

Es evidente de la presencia de una estructura espiral que nuestra galaxia, por ejemplo, no tiene simetría axial y no ha alcanzado el estado estacionario. Sin embargo, el gas interestelar y las estrellas jóvenes muy brillantes que se encuentran en las partes mas prominentes de los brazos espirales, pueden representar solo una pequeña fracción de la masa total del sistema, el grueso de la cual probablemente consiste de estrellas mas viejas. No es una mala aproximación el considerar que estas estrellas mas viejas tienen una distribución axialmente simétrica, y en primera aproximación podemos considerar que el sistema es estacionario.

5).- Importancia del concepto de centroide.

La importancia del concepto de centroide (inciso 6, capítulo I) en la dinámica estelar estriba en que nos da la posibilidad de hacer una transición de un sistema estelar considerado como un medio discreto a un medio contínuo. Sin el uso de centroides, la interpre - tación de los movimientos internos en los sistemas estelares no es posible. Consideremos como un ejemplo el movimiento de la galaxia alrededor de su eje. El movimiento circular alrededor del eje se describe mediante el uso de centroides, no mediante los movimientos individuales de las estrellas. Las órbitas que éstas describen pueden ser muy complejas y guardar muy poca relación con la rotación del sistema como un todo.

Esto es análogo a lo que ocurre en la mecánica de fluídos. En este caso los movimientos térmicos de las moléculas hacen que éstas se muevan en cualquier dirección dentro del fluído, y el movimiento del fluído como un todo sólo se puede describir mediante un concepto enteramente análogo al del centroide en dinámica estelar. Por supuesto existe una diferencia fundamental entre un fluído ordinario y un medio altamente rarificado como es el medio de un sistema estelar. En un fluído, la trayectoria libre media de las moléculas es mucho menor que el diámetro del elemento de volúmen que se tome. En el caso de un sistema estelar la trayectoria libre media es mucho mayor que las dimenciones del elemento de volúmen.

6).- Acerca de las ecuaciones hidrodinámicas.

De las ecuaciones (I-21) y la ecuación de Poisson vemos que tenemos solo tres ecuaciones para determinar 5 incógnitas: ν, U, Θ_0, $\sigma_{\tilde{\omega}}^2$ y σ_θ^2, por lo que el problema de encontrar una solución general para las ecuaciones hidrodinámicas está indeterminado. Esta indeterminación se debe a un hecho muy importante: ademas de las cantidades hidrodinámicas ν, U y Θ_0, en las ecuaciones aparecen también dos cantidades esencialmente estadísticas: $\sigma_{\tilde{\omega}}^2$ y σ_θ^2.

Hemos visto que un enfoque puramente hidrodinámico no es suficiente para resolver por completo el problema de la dinámica estelar. Sin embargo, haciendo ciertas consideraciones, podemos obtener una relación sumamente interesante.

Pensemos en la aceleración cinemática que sufren los centroides en un sistema con simetría rotacional. La velocidad Θ_θ del centroide aparece solo en la primera de las ecuaciones hidrodinámicas; en esta ecuación substituimos, en lugar de la derivada del potencial, su expresión en términos de la velocidad circular Θ_c de una partícula a una distancia $\tilde{\omega}$: $\partial U/\partial \tilde{\omega} = -\Theta_c^2/\tilde{\omega}$

entonces:

$$\Theta_0^2 - \Theta_c^2 = \left[\frac{1}{\nu}\frac{\partial(\nu\sigma_{\tilde{\omega}}^2)}{\partial\tilde{\omega}} + \frac{\sigma_{\tilde{\omega}}^2 - \sigma_\theta^2}{\tilde{\omega}}\right] \qquad \text{(II-1)}$$

Esta derivación es válida si la población estelar en el sistema se considera uniforme, si no es así, la aceleración cinemática $\Theta_0 - \Theta_c$ será distinta para cada subsistema con diferente dispersión de velocidades residuales.

En nuestra galaxia, por ejemplo, los centroides de cada subsistema se desplazan entre si a lo largo del "eje de asimetría". Sea Δv la diferencia en la velocidad solar para cada subsistema, entonces

donde σ^2 es la varianza de la velocidad residual para un sistema dado, y c y d son dos constantes (obtenidas observacionalmente por Strömberg).

Si se considera que la distribución de velocidades obedece la ley de Schwarzschild, entonces la relación (II-1) nos queda de la siguiente manera:

$$\Theta_0^2 - \Theta_c^2 = \tilde{\omega}\left[\frac{\partial \log \nu}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{k_2 \tilde{\omega}}{1 + k_2 \tilde{\omega}^2}\right]\sigma_{\tilde{\omega}}^2 \qquad \text{(II-2)}$$

donde $k_2 = (a/c)^2 - 1/\tilde{\omega}^2$. a denota el semieje en las direccio - nes Π y Z y C en la dirección Θ.

La relación (II-2) es muy interesante pues nos relaciona una se rie de cantidades las cuales, a excepción de ν la densidad estelar, se pueden determinar todas (al menos en principio) observacional - mente.

CAPITULO III

LA DETERMINACION DE LA MASA EN NUESTRA GALAXIA.

Aunque nuestra galaxia es una galaxia de tipo espiral, como todas las demas que trataremos en este trabajo, la vamos a considerar aparte ya que es un caso particular. Particular en el sentido de que evidentemente la cantidad de datos observacionales que podemos tener sobre nuestra propia galaxia es mucho mayor que en el caso de otras galaxias. Esto ha permitido la construcción de muchos tipos de modelos que no se pueden aplicar a otras galaxias por el tipo de parámetros que quedan libres para determinar observacionalmente.

El trabajo que se ha hecho a este respecto es muy extenso y quedaría fuera del marco del presente trabajo el hacer un estudio detallado de todos y cada uno de los modelos que se han propuesto para determinar la masa de la galaxia. En la tabla I resumiremos los resultados que se han obtenido y a continuación haremos algunos comentarios sobre estos resultados.

Veremos que el tipo de modelos se puede dividir en dos grandes grupos: los primeros modelos que se basan en una cierta distribución de velocidades y modelos basados en leyes de distribución de densidad.

De hecho esto corresponde a los dos problemas que hemos analizado anteriormente: el problema de Jeans inverso y el problema directo respectivamente. Sin embargo, debido a que la teoría de la estructura y dinámica galáctica no es todavía completa como tal (como teoría), no se puede aplicar directamente; por lo que se recurre a la construcción de modelos.

El procedimiento general consiste en construir un esquema mas o menos natural de la estructura de la galaxia con parámetros a determinar de los datos observacionales. Mientras mayor sea la concordancia entre la distribución de masa resultante de la aplicación del modelo y los resultados de las observaciones respecto de la distribución de masa y la ley de rotación de la galaxia, mas satisfactorio será el esquema del que se partió.

TABLA I

No.	Autor	$\tilde{\omega}_\odot$ (kpc)	$\Theta_\odot$ (km/seg)	M ($10^{11} M_\odot$)
1	Idlis (1957)	7.2	233	1.0
				0.8
2	Lohmann (1953)	8.7	282	2.0
3	Kuzmin (1956)	7.0	211	1.04
4	Lohmann (1956)	8.5	277	2.50
5	Lohmann (1956)	8.5	277	2.6
6	Plaskett y Pearce (1936)	10.0	275	1.65
7	Gliese (1942)	8.6	300	2.5
8	ten Bruggencate (1943)	10.0	300	1.68
9	Oort (1941)	8.0	275	1.17
10	Safronov (1952)	7.2	233	0.8
		8.0	250	
11	Janák (1958)	8.2	216	0.83
12	Bucerius (1934)	10.0	278	2.4
13	Camm (1938)	9.8	195	1.77
14	Kuzmin (1952)	7.2	239	1.0
15	Kiladze(1958)	8.2	216	1.0
16	Brandt (1960)	8.2	216	1.8
17	Perek (1951)	7.8	260	0.9
18	Schmidt (1956)	8.2	216	0.70

(continúa)

No.	Autor	$\tilde{\omega}_\odot$ (kpc)	$\Theta_\odot$ (km/seg)	M ($10^{11} M_\odot$)
19	Perek (1954)	8.0	———	1.1
20	Takase (1955)	8.2	216	0.68
21	Yasuda (1958)	8.2	216	0.73
22	Perek (1959)	8.0	216	0.82

El pionero en el estudio de la determinación de la masa de nuestra galaxia fue Oort, quien atacó el problema inmediatamente después de desarrollar su teoría de la rotación galáctica (que resulta esencialmente de la aplicación de los conceptos del inciso 6 del capítulo I). Su primera publicación al respecto aparecíón en 1932, desde entonces ha hecho varias modificaciones a su modelo original.

A partir de la solución de Oort existen otros modelos, como el modelo 1 en la tabla1(Idlis).

La solución de Oort requiere que las dispersiones en la dirección $\tilde{\omega}$ y z sean iguales. Si introducimos el hecho de que las velocidades cuadradas medias son constantes y que la distribución es gaussiana en las ecuaciones (I-21) e integramos desde (0,0) hasta $(\tilde{\omega}, z)$, obtenemos:

$$\log \nu(\tilde{\omega}, z) = \log \nu(0,0) - \log \frac{\sigma_{\tilde{\omega}}}{\sigma_\odot} + \frac{\Theta_0^2}{2\sigma_\odot^2} - \frac{1}{\sigma_{\tilde{\omega}}^2}\left[\Pi(0,0) - \Pi(\tilde{\omega}, z)\right]$$

introduciendo los parámetros de Oort

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\Theta_0}{\tilde{\omega}} - \frac{\partial \Theta_0}{\partial \tilde{\omega}}\right) \qquad B = -\frac{1}{2}\left(\frac{\Theta_0}{\tilde{\omega}} + \frac{\partial \Theta_0}{\partial \tilde{\omega}}\right)$$

y la relación $\quad \dfrac{h^2}{k^2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\tilde{\omega}}{\Theta_0} \dfrac{\partial \Theta_0}{\partial \tilde{\omega}}\right)$

donde h^2 y k^2 son los coeficientes de los términos de segundo grado que aparecen en la forma cuadrática Q (inciso 2, capítulo I) que se usa para definir la ley elipsoidal de distribución de velocidades. Obtenemos

$$\frac{\sigma_\Theta^2}{\sigma_\varpi^2} = \frac{B}{A-B}$$

Si los parámetros A y B se deriven para un subsistema que se mueva en órbitas casi circulares, podemos substituir la velocidad circular Θ_c por la velocidad Θ_o y mediante la relación

$$\frac{\Theta_c^2}{\varpi} = -Q_\varpi$$

podemos derivar la siguiente expresión para A:

$$A = \frac{1}{4}\frac{\Theta_c}{\varpi}\left(1 - \frac{\varpi}{Q_\varpi}\frac{dQ_\varpi}{d\varpi}\right)$$

las dos fórmulas resultantes

$$\frac{Q_\varpi}{\varpi} = -(A-B)^2$$

$$\frac{dQ_\varpi}{d\varpi} = (A-B)(3A+B)$$

se introducen en la ecuación de Poisson para obtener:

$$2(A^2-B^2) + \frac{\partial Q_z}{\partial z} = -4\pi G\rho$$

Aplicando esto a la vecindad del sol obtenemos una relación entre la pendiente de la atracción en la dirección z y la densidad en esta vecindad del sol.

Existen algunas discrepancias importantes entre la solución de Oort y las observaciones (fundamentalmente en cuanto a la desviación del vértice), sin embargo su enfoque es muy interesante ya que en casi todos los demás modelos ni siquiera se toman en cuenta los movimientos en la dirección z.

En 1947 Parenago introdujo la hipótesis de que la curva de rotación debe presentar dos máximos; el primero corresponde a la población II y el segundo a la población I. Así el primer máximo corresponde a la fórmula

$$\Theta_0 = \frac{c_3 \tilde{\omega}}{c_1 + c_2 \tilde{\omega}^2} \qquad \text{(III-1)}$$

con constantes para la población II. En esta fórmula las constantes c_1, c_2 y c_3 fueron derivadas por Parenago del movimiento de las cefeidas.

Considerando la fuerza de atracción en el plano de simetría y mediante la aplicación de la fórmula (III-1) y la ecuación de Poisson, Parenago obtiene un modelo de la distribución de la densidad en nustra galaxia.

El modelo de Idlis resulta de una modificación al de Parenago que viene de introducir el hecho de que en algunas regiones fuera del plano galáctico la densidad es cero y de que el potencial debe tender a cero como $1/\tilde{\omega}$ a grandes distancias.

Los dos valores que aparecen en la tabla vienen de considerar la determinación de la masa para dos casos extrmos: una esfera y un disco plano respectivamente.

El modelo número 2 está basado en en la ley de Bottlinger para la fuerza:

$$Q_{\tilde{\omega}} = \frac{a \tilde{\omega}}{1 + b \tilde{\omega}} \qquad \text{(III-2)}$$

Esta ley tiene un comportamiento adecuado a grandes distancias, cosa que no sucede con la ley de Oort.

A grandes distancias la fórmula de Bottlinger es proporcional a $-a/b\tilde{\omega}^2$. Puesto que a grandes distancias la atracción se aproxima a la de un punto masa, $-GM/\tilde{\omega}^2$, la masa total será:

$$M = \frac{a}{bG} \qquad \text{(III-3)}$$

Lohmann usa esta ley para determinar la masa de la siguiente general:

La velocidad máxima, Θ_m, se obtiene de la curva de rotación y además sabemos que ésta es igual a $\Theta_m = \sqrt{\frac{a}{3}}\ \tilde{\omega}_m$

esta velocidad se alcanza en $\tilde{\omega}_m = \sqrt[3]{\frac{2}{b}}$

substituyendo las constantes a y b de (III-3) obtenemos:

$$M = \frac{3}{2}\frac{\Theta_m^2\tilde{\omega}_m}{G} \qquad \text{(III-4)}$$

El modelo número 3 está basado en la introducción de una tercera integral (a la que nos hemos referido en el inciso 1 del capítulo II).

En los modelos 4 y 5 se considera la aproximación de un punto masa. En el modelo 4 se aplica la aproximación Kepleriana según la cual la masa está dad por: $M = \frac{\tilde{\omega}\Theta_c^2}{G}$ (III-5)

por supuesto esta es una aproximación muy burda. Mas adelante (en el capítulo IV) veremos que esta aproximación se ha empleado para determinar la masa de algunas galaxias de las que no se han podido obtener mayores datos.

El modelo 5 se basa en el teorema Virial: $2T + \Omega = 0$, donde T es la energía cinética total y Ω es la energía potencial. Este método tiene el inconveniente de que si bien nos puede dar la masa total, no nos puede dar la distribución de la densidad.

Los modelos 6 y 7 consisten en representar la galaxia como una superposición de un punto masa y un esferoide homogéneo. Por supuesto ambos están basados en el modelo original de Oort (1927). Oort propuso este modelo en el que la atracción tiene dos componentes:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

donde Q_1 es la debida al punto masa y Q_2 al esferoide homogéneo,

$$Q_1 = p\,\tilde{\omega}^{-2} \qquad Q_2 = q\,\tilde{\omega}$$

Este modelo fue construido con los datos de la vecindad del sol, por lo que la validez de su extrapolación a grandes distancias no está justificada. Por otro lado la atracción es demasiado grande cerca del centro y aumenta como $\tilde{\omega}$ a grandes distancias, lo cual no es posible.

Los modelos 8, 9, 10 y 11 consisten en la superposición de 2 o mas cuerpos elementales. Se han construido un gran número de modelos combinando varios cuerpos elementales: puntos masa, esferoides homogéneos y esferoides inhomogéneos.

El modelo de ten Bruggencate consiste en un punto masa y un disco plano (caso límite de dos esferoides homogéneos).

De una discusión muy detallada de las densidades en la dirección z, resultó el modelo de Oort de 1941. Este modelo consiste en un punto masa, un esferoide interior y once esferoides exteriores.

Safronov (modelo 10) conserva los esferoides exteriores de Oort pero considera cinco interiores.

Mediante el modelo de Janák se representa el cuerpo principal de la galaxia mediante un esferoide y el halo mediante una esfera. Así el disco está inmerso en una esfera de baja densidad.

En los modelos 12, 13, 14, 15 y 16 se considera que el cuerpo principal de la galaxia es un disco. Es interesante notar que los modelos basados en un disco se construyenron antes que los modelos que usan esferoides heterogéneos, aún cuando las matemáticas que se emplean en los modelos de disco son mucho mas complicadas.

El primer modelo de disco fue dado por Bucerius y consiste en la superposición de tres cuerpos:

1. El núcleo en forma de un esferoide homogéneo con una relación axial de 1:2 y un semieje mayor de 2.5 kpc.

2. Un disco de radio a 15 kpc. y con una abrupta disminución de la densidad en la dirección z

3. El material difuso se representa mediante un disco homogéneo de 200 pc. de ancho.

Un disco plano se puede considerar como el caso límite de un esferoide, de este modo se puede determinar el potencial interior y exterior a un disco plano homogéneo. En 1942 Wyse y Mayall derivaron la atracción debida a un esferoide heterogéneo, y como caso límite la debida a un disco heterogéneo descomponiendolo en discos elementales homogéneos y desarrollando la densidad en serie.

Para la construcción del modelo 13 Camm usó el término lineal de esta expansión. Usó también un punto masa y el radio del disco igual a 15 kpc.

De la geometría de los esferoides se obtiene la siguiente ecuación

$$Q_{\tilde{\omega}^2} = -4\pi G \cos\psi_0 \frac{a^2}{\tilde{\omega}^2} \int_0^{m_0} \frac{\rho m^2 dm}{\sqrt{m_0^2 - m^2 \operatorname{sen}^2\psi_0}} \qquad (\text{III}-6)$$

donde $c/a = \cos\psi_0$, c y a son los semiejes mayor y menor del esferoide respectivamente. m es un parámetro adimensional, en el plano de simetría $m = \tilde{\omega}/a$ y en el eje de rotación $m = z/c$. $m_0 = \tilde{\omega}/a$.

Kuzmin (1952) fué el primero en notar que esta ecuación se puede reducir a una ecuación integral del tipo de Abel si el esferoide está totalmente aplanado, sen $\psi_0 = 1$.

Kuzmin extrapoló hacia ambas direcciones una curva de rotación empírica determinada para las estrellas cefeidas hasta una distancia de 2.5 kpc a ambos lados del sol, y mediante una integración numérica obtiene a partir de su ecuación integral, la densidad.

Este mismo procedimiento fue usado por Kiladze (modelo 15) pero usando la curva de rotación a partir del hidrógeno.

En el modelo de Brandt se usa también la ecuación (III-6) pero combinada con la ley de Bottlinger.

Los modelos 17 al 22 usan esferoides heterogéneos.

La primera aplicación de esferoides heterogéneos a modelos galácticos fué hecha por Perek (1948, 1951) usando la ley de densidad

$$\rho = \rho_c (1-m^2)^n$$

se han construido modelos para distintos valores de n, el que aparece en la tabla corresponde a $n = 2$. ρ_c y $\tilde{\omega}_\odot/a$ se determinan mediante las constantes de Oort.

El modelo de Schmidt (modelo 18) es uno de los mas completos junto con el modelo 22 que describiremos al final. La ley de densidad introducida por Schmidt es la siguiente:

aunque la densidad es infinita en el centro, la masa total es finita:

$$M = \frac{2}{3}\pi a^3 \rho_o \cos \psi_o$$

donde ρ_o es la densidad en $m = 1/2$.

En su trabajo Schmidt describe tres modelos distintos: el primero, el mas simple, consiste en un solo esferoide. El segundo consiste de tres esferoides inhomogéneos; el primero representa los objetos de la población I, el segundo la población de estrellas F – M y el tercero objetos desconocidos. Se demuestra que éste modelo probablemente no satisface las condiciones de continuidad y equilibrio. El tercer modelo consiste de cuatro esferoides no homogéneos, el mas masivo de los cuales corresponde a objetos desconocidos para poder explicar la atracción en el sol. Como en el segundo modelo, el primer esferoide representa la población I; el segundo la población de estrellas F -M, pero este esferoide no puede alcanzar mas allá de z±0.72 kpc. por lo que se introduce un tercer esferoide que representa la población de estrellas con altas velocidades en z. El cuarto esferoide es el de los objetos desconocidos. Para obtener el modelo final, Schmidt agrega a estos cuatro esferoides otros nueve mediante lo cual se elimina la desviación de una disminución perfectamente lineal de la fuerza central.

En 1954 Perek propuso el uso de una función gausiana como ley de densidad.

El modelo número 20 se basa en esta ley y el uso de dos esferoides heterogéneos.

Yasuda usó esta misma ley y cuatro esferoides heterogéneos.

En el modelo de Perek de 1959 (modelo 22) no se introduce un esferoide para objetos desconocidos, sino que se supone que el exceso de masa se debe a un exceso en las poblaciones conocidas o que está distribuido en todas ellas.

De este modelo se deduce que la población II no es de ninguna manera despreciable a gran escala, puesto que es responsable de un 13% a 20% de la atracción en el sol. A la distancia del sol, concluye Perek, del 3% al 5% de la masa es debida a población II. Por otro lado la población mas importante es la del disco, que representa por lo menos las dos terceras partes de la masa total de la galaxia.

Decir cual es el mejor modelo para representar la galaxia no es fácil; cada uno de ellos tiene alguna ventaja sobre los demás y su aplicación se justifica en la medida de la importancia que se le asigne a los distintos tipos de observaciones.

Como un ejemplo del poco sentido que tiene continuar elaborando modelos mas y mas complicados para determinar la masa de la galaxia mientras no se avance paralelamente en otros sentidos, comparemos los modelos 1 y 10 de la tabla. Usando los mismos valores ($\tilde{\omega}_{\odot}=7.2$, $\theta_{\odot}=233$) obtenemos mediante la aproximación de un disco plano (apro - ximación muy burda por cierto) exactamente la misma masa que empleando un elaborado modelo de 16 esferoides.

Es interesante también comparar distintas curvas de rotación; la curva de Wyse y Mayall sigue muy de cerca las observaciones de Babcock, lo mismo que la curva de Schwarzschild sigue las observa - ciones de radio. Las de Lohmann, Takase y Schwarzschild pasan atraves de puntos normales formados mediante diferentes procedimientos a partir de las velocidades radiales de Mayall. Es imposible decir cual de los modelos se ajusta mejor a las observaciones, y tiene muy poco sentido seguir construyendo modelos mientras no mejoren y aumenten los datos observacionales.

Desde el punto de vista de la construcción de modelos basados en una cierta distribución de velocidades, es evidente que se requiere un mejor conocimiento de la forma de esta distribución antes de seguir adelante.

Para la determinación directa de la densidad es muy necesario un criterio confiable para la clasificación de las estrellas en poblaciones. Son indispensables datos muy presisos de la vecindad solar, puesto que es un punto muy importante para checar.

Hay una gran cantidad de modelos basados en leyes especiales de densidad para las cuales se conoce la expresión del potencial. Sin embargo, es posible que de nuevas observaciones surja la necesidad de estudiar otras leyes de densidad que hasta ahora no han recibido atención.

CAPITULO IV

SOBRE LA DETERMINACION DE LA MASA EN OTRAS GALAXIAS ESPIRALES

Algunos de los modelos descritos en el capítulo III han sido usados por diferentes autores para determinar la masa de distintas galaxias espirales. Como se ha dicho antes, los modelos que se pueden emplear en este caso son bastante burdos debido a la escasa información observacional que se tiene en comparación con el caso de nuestra galaxia.

En un principio la atención se concentró en las galaxias mas cercanas M31 y M33. A continuación resumimos los resultados obtenidos en el estudio de estas dos galaxias en las tablas II y III respectivamente.

TABLA II

Las determinaciones de la masa de M31.

Autor	d (kpc)	M (10^{11} M$_\odot$)	Modelo
Babcock (1939)	460	1.02	esferoide homogéneo
Wyse y Mayall (1942)	210	0.95	disco plano
Lohmann (1954)	460	3.3	ley de Bottlinger
Schwarzschild (1954)	460	1.4	disco plano, M/L = cte.
Schmidt (1957)	630	3.38	esferoides homogéneos
Takase (1957)	540	2.0	esferoides heterogéneos
Poveda (1958)	500	2.0	estimación basada en simetría esférica
Brandt (1960)	600	3.7	disco plano

referencia.- Advances in Astronomy and Astrophysics Vol. I, 1962 L.Perek-Distribution on mass in oblate stellar sistems.

TABLA III

Las determinaciones de la masa de M33.

Autor	d (kpc)	$(10^9 M_\odot)$ M	Modelo
Aller (1942)	220	1.8	disco plano
Wyse y Mayall (1942)	220	1.7	disco plano
Lohmann (1954)	440	10.0	ley de Bottlinger
Schwarzschild (1954)	430	5.0	disco plano, M/L=cte.
Takase (1957)	540	4.4	esferoide heterogéneo.

Salta a la vista,de ambas tablas,la ambigüedad de las determinaciones. Por ejemplo, en el caso de las masas determinadas por Poveda y Takase (M31) con distancias parecidas, se obtienen resultados iguales con modelos diferentes.

Si bien desde entonces algunos autores han estudiado otras galaxias aplicando distintos modelos, en este trabajo nos limitaremos a discutir el extenso trabajo realizado al respecto por G. R. Burbidge et al, que es sin duda el mas completo realizado hasta la fecha.

Los trabajos publicados por ellos datan de 1959 y el último ha sido publicado en 1968. Abarcan un total de treinta galaxias espirales (y espirales en barra). En la table IV resumimos los resultados obtenidos y a continuación pasamos al análisis de estos resultados.

Las galaxias están numeradas en el órden cronológico de la publicación correspondiente.

En la cuarta columna se da la distancia en segundos de arco (desde el centro) hasta la que se extiende la curva de rotación obtenida de las observaciones espectroscópicas. La séptima columna nos indica hasta qué distancia (también desde el centro) se ha calculado la masa en el caso de que la masa calculada no se considere la masa total de la galaxia. La relación M/L de la octava columna está en unidades solares y de refiere a magnitudes fotográficas. Mas adelante haremos algunos comentarios sobre la quinta columna que nos da la distancia a la galaxia (en Mpc.) y sobre la última columna.

TABLA IV

Resúmen de los resultados obtenidos por Burbidge et al en el estudio de treinta galaxias de tipo espiral.

No.	NGC	tipo	dist. curva	d en Mpc.	Masa en $M_\odot$	hasta donde	M/L	grupo
1	1068	Sb	30"	16*	2.7×10^{10}	30"	2	II y I
2	2146	Sap	40"	2	1.7×10^{10} 1.8×10^{10}	TOTAL	3	I
3	5055	Sb/Sc	200"	10.3 7.4*	7.6×10^{10} 5.5×10^{10}	" "	2 2.8	II
4	3556	Sc	120"	10.31	1.4×10^{10}	"	1.1 - 1.6	II
5	1365	SBO	—	20.1	$3.4 - 2.2 \times 10^{10}$	NUCLEO	—	II
6	1097	SBO	—	16.1	$0.82 - 0.54 \times 10^{10}$	"	—	II
7	2903	Sb/Sc	140"	6 7.9*	3.7×10^{10} 4.9×10^{10}	140"	5.5 4.2	I
8	7479	SBb	80"	35.2	2.2×10^{10}	BARRA	—	II
9	3504	SBb	50"	19.8	9×10^{9} 2.5×10^{9}	TOTAL NUCLEO	0.7	I II

No.	NGC	tipo	dist. curva	d en Mpc.	Masa en $M_\odot$	hasta donde	M/L	grupo
10	5005	Sb	85"	14.4*	6.95×10^{10} 1.39×10^{11} 1.05×10^{11}	85" 12.67 kpc 10.5 kpc	4.1 8.2 6.3	I EXTRAPOL. "
11	3623	Sa/Sb	30"	9.3	1.4×10^{11}	126"	—	III
12	3646	Sc	—	54.7	2.7×10^{11}	15.5 kpc	—	III
13	157	Sc	80"	23.96	6×10^{10}	TOTAL	1.9	I
14	4736	Sb	130"	10*	2.9×10^{10}	65"	—	III
15	5248	Sc	—	15.4	$4-5 \times 10^{9}$ $3-7 \times 10^{10}$	NUCLEO 50"-55"	$2 \leq Y < 4$	II, III
16	253	Sc	290"	4*	5×10^{10} 2×10^{10}	400"	$\lesssim 9$	III, I
17	5383	SBb	60"	31.6	$6-7 \times 10^{9}$ 5×10^{10}	NUCLEO BARRA	—	II III
18	1084	Sc	55"	19.2	1.6×10^{10}	TOTAL	0.8	I
19	7469	Seyfert	3600 pc	67.7	1.1×10^{10}	3600 pc	—	I
20	4258	Sb	7000 pc	7.8	8.2×10^{10} 45.8×10^{10}	7 kpc TOTAL	5.3 10.2	I
21	6503	Sc	70"	5	1.3×10^{9}	60"	—	I
22	3521	Sb	170"	8.5	8×10^{10}	170"	$\gtrsim 4$	I
23	1792	Sc	70"	13.8	1.8×10^{10}	TOTAL	1	I
24	613	SBc	100"	20	9×10^{9}	NUCLEO	—	II
25	7331	Sb	143"	1.44	8×10^{10} 1.4×10^{11}	143" TOTAL	2	I EXTRAPOL
26	4826	Sb	2 kpc	8*	10^{10}	2 kpc	4	I
27	681	Sa	5250 pc	23	1.9×10^{10}	5250 pc	3.4	I
28	6181	Sc	3500 pc	32.9	4.8×10^{10}	22"	—	III
29	972	Sb	36"	22.1	8.7×10^{10}	36"	1.2	I
30	1808	Sb	110"	10	2.7×10^{10}	TOTAL	2	I

Todas las distancias, excepto aquellas marcadas con un asterisco, son las que se derivan del valor 75 km/seg para la constante de Hubble (Sandage 1958). El hecho de no convertir las distancias basándose en el valor reciente es intencional para própositos de comparación. Esta misma medida ha sido adoptada por Burbidge et al.

La última columna de la tabla se refiere al tipo de modelo que se ha usado para determinar la masa. Los modelos se pueden dividir en tres grupos:

I Las superficies equidensas son esferoides oblatos de eccentricidad constante.

II La galaxia se representa mediante un esferoide homogéneo.

III Aproximación Kepleriana.

Describiremos resumidamente el procedimiento empleado para determinar la masa con el modelo I.

En el primero de sus trabajos (Ap. J. 130-739) Burbidge et al demuestran que partiendo de las ecuaciones hidrodinámicas (derivadas en el primer capítulo de este trabajo), si se considera que la fuerza gravitacional sobre un elemento de masa debe estar balanceada por la fuerza centrífuga debida a la rotación, i.e., $V^2/\tilde{\omega} = f_{grav.}$ o sea que se desprecia el término de la presión debido a movimientos no circulares, entonces la velocidad de rotación (real) $V(\tilde{\omega})$ se relaciona con la distribución de densidad atraves de la ecuación integral:

$$V^2(\tilde{\omega}) = 4\pi G\,(1-k^2)^{1/2}\int_0^{\tilde{\omega}} \frac{\rho(a)\,a^2\,da}{(\tilde{\omega}^2-k^2a^2)^{1/2}} \qquad \text{(IV-1)}$$

donde $\rho(a)$ es la densidad de una capa esferoidal de semieje mayor a, semieje menor c y eccentricidad k .

Esta ecuación no puede resolverse en forma analítica para $\rho(a)$

por lo que se hace lo siguiente: se substituyen las expansiones en serie de Taylor

$$V^2(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}^2 \sum_{n=0}^{\infty} v_n \tilde{\omega}^n \quad \text{y} \quad \rho(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n a^n$$

y se igualan potencias de $\tilde{\omega}$. Al resolver el conjunto resultante de ecuaciones lineales se obtienen las ρ_n, que se pueden escribir de la forma

$$\rho_n = \frac{1}{4\pi G} \frac{k^{n+3}}{(1-k^2)^{1/2}} \frac{v_n}{A_{n+2}(k)} \tag{IV-2}$$

donde las A_n son coeficientes numéricos cuyas expresiones para valores pares e impares de n se dan en éste primer trabajo.

La masa total interior al punto mas lejano hasta el que se extiende la curva de rotación (distancia a_* del centro) está dada por

$$M = 4\pi (1-k^2)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \frac{a_*^{n+3}}{n+3}$$

$$= \frac{1}{G} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ka_*)^{n+3}}{n+3} \frac{v_n}{A_{n+2}(k)}$$

Debe de tomarse siempre en cuenta que la velocidad de rotación real $V(\tilde{\omega})$ en cualquier punto de la galaxia está relacionada con la velocidad de rotación observada $V'(\tilde{\omega})$ mediante la ecuación

$$V'(\tilde{\omega}) \sec\theta = V(\tilde{\omega})$$

donde θ es el ángulo entre el plano de rotación y la línea visual. Se demuestra que este factor se puede tomar en cuenta al final de los cálculos multiplicando la masa y la distribución de la densidad por $\sec^2\theta$.

En la práctica el procedimiento que se sigue es el siguiente: La curva de rotación observada está formada por una serie de puntos que por lo general representan el promedio de dos o más observaciones distintas; lo que se hace es adaptar polinomios de la forma

$$V = \tilde{\omega} \sum_{m=0}^{N} b_m \tilde{\omega}^m$$

a esta curva mediante el método de mínimos cuadrados, para esto se construyen soluciones con 3, 4, 5, 6 y en ocasiones hasta 7 parámetros y se toma el que mejos se ajusta a la curva observacional. Después este polinomio se eleva al cuadrado para determinar las v_m.

De los coeficientes v_m se obtienen las ρ_m mediante la ecuación (IV-2). Los valores que se toman para c/a van de 1/2 a 1/15.

La densidad obtenida mediante este método depende del valor del parámetro k, que es muy difícil de estimar a menos que la galaxia esté casi de canto, y si este es el caso, la velocidad de rotación aparente puede estar falseada debido a la absorción ya que podemos estar observando sólo una parte del perfil real de la línea.

Este método tiene algunos inconvenientes; si la curva de rotación observada es muy irregular (en algunos casos presenta intervalos vacíos) el método de ajuste de la curva mediante mínimos cuadrados puede ser muy engañoso. La distribución de la densidad puede no estar muy bien representada mediante esferoides de excentricidad constante, sin embargo, este es un modelo razonable a falta de mayor información. Se debe tener presente (este es un punto muy importante como veremos mas adelante) que la ecuación (IV-1) no toma en cuenta el efecto de los movimientos no circulares.

Lo que en la tabla IV se indica como extrapolación, consiste en suponer que la densidad en el punto mas lejano para el cual se ha calculado la masa interior se mantiene constante hasta otro punto más lejano (del centro) hasta el que se extrapola el valor de la masa.

debidas a los movimientos circulares.

La aproximación Kepleriana (modelo III) consiste, como ya hemos visto, en suponer que toda la masa se puede concentrar en un punto en el centro y entonces considerar la atracción Kepleriana de ese punto masa a una cierta distancia. La masa estará dada en este caso por

$$M = \frac{\tilde{\omega} V^2}{G} \qquad \text{(ec. III-5)}$$

donde V es la velocidad de rotación medida a una distancia $\tilde{\omega}$ del centro.

Lo que se hace es tomar la mayor distancia del centro a la que se puede medir al menos una velocidad de rotación para un punto y de esta manera se calcula la masa interior a ese punto.

Es importante en este punto, por algo que veremos mas adelante, hacer notar lo siguiente: si bien a grandes distancias de la galaxia la atracción debe tender a la Kepleriana, si se considera un punto interior a la galaxia (lo cual sucede en la mayoría de los casos ya que la galaxia se extiende, por lo general, mas allá del punto en el que se mide la velocidad de rotación) se estará estimando siempre una masa menor.

Hemos tomado dos galaxias de la tabla IV, NGC5005 y NGC5055 para hacer un análisis más detallado de la comparación entre varios modelos.

En ambos casos se ha trazado la curva de rotación que se obtendría si la masa estuviera distribuida de acuerdo con la ley de Bottlinger (modelo 2 de la tabla I, capítulo III). Como hemos visto esta ley de fuerza tiene un comportamiento muy parecido a la de Oort para pequeñas distancias y a diferencia de ésta a grandes distancias tiene un comportamiento Kepleriano.

Si suponemos que la galaxia se puede representar mediante un solo esferoide de densidad uniforme (modelo II) la masa estará dada por la expresión (Ap. J. 130-31)

$$M = \frac{a V^2}{\alpha G}$$

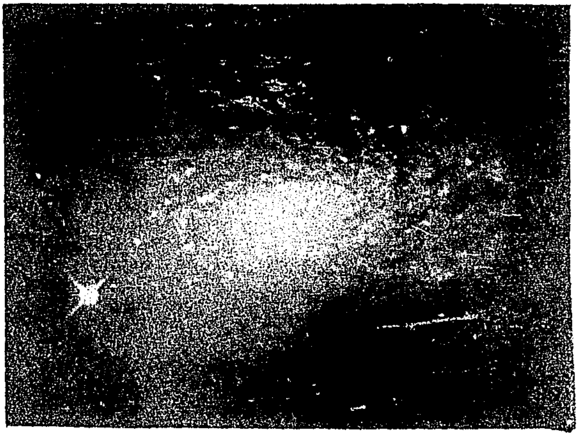
donde $\alpha = \frac{3}{2} \frac{a^2}{a^2-c^2} \left[\frac{a^2}{(a^2-c^2)^{1/2}} \cos^{-1}\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{c}{a} \right]$

es el semieje mayor, V es la velocidad de rotación real (corregida por un factor de orientación) en el extremo mas exterior de a y s es la pendiente de la curva de rotación.

Una manera muy simple de determinar la orientación es suponer que el cuerpo principal de la galaxia es circular en el plano de la galaxia; entonces la relación observada entre los ejes mayor y menor nos da la relación entre el ángulo ξ y la velocidad de rotación verdadera, V. Esta a su vez nos da la relación con la velocidad observada U, mediante la ecuación $U = V \operatorname{cosec} \xi$.

Este modelo es una aproximación bastante burda, ya que el suponer que una galaxia es un esferoide de densidad constante implica que la curva de rotación debe ser completamente lineal. El modelo ha sido empleado, en la mayoría de los casos, cuando la curva de rotación no se tiene mas que para las regiones centrales de la galaxia y sólo se puede determinar la masa del núcleo. Por otro lado, es sólo en esta región en que la curva es (al menos aproximadamente) lineal.

Existen otras dos dificultades; no existe una manera obvia y perfectamente determinada (sin ambigüedades) de obtener la relación c/a , por otro lado las pendientes de la curva de rotación obtenidas en cada lado del centro no son exactamente iguales. En este modelo, como en el anterior, sólo se toman en cuenta las fuerzas

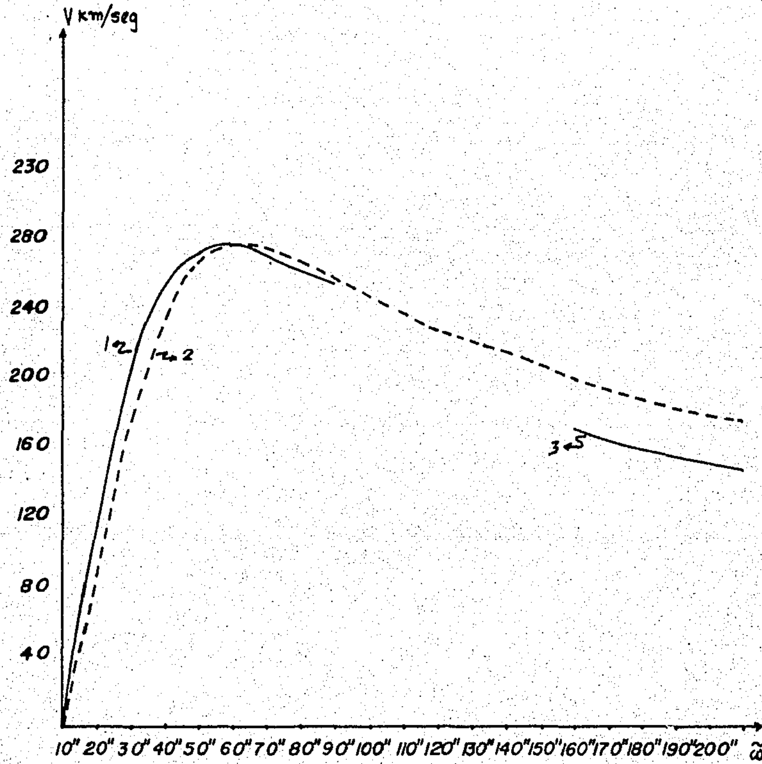


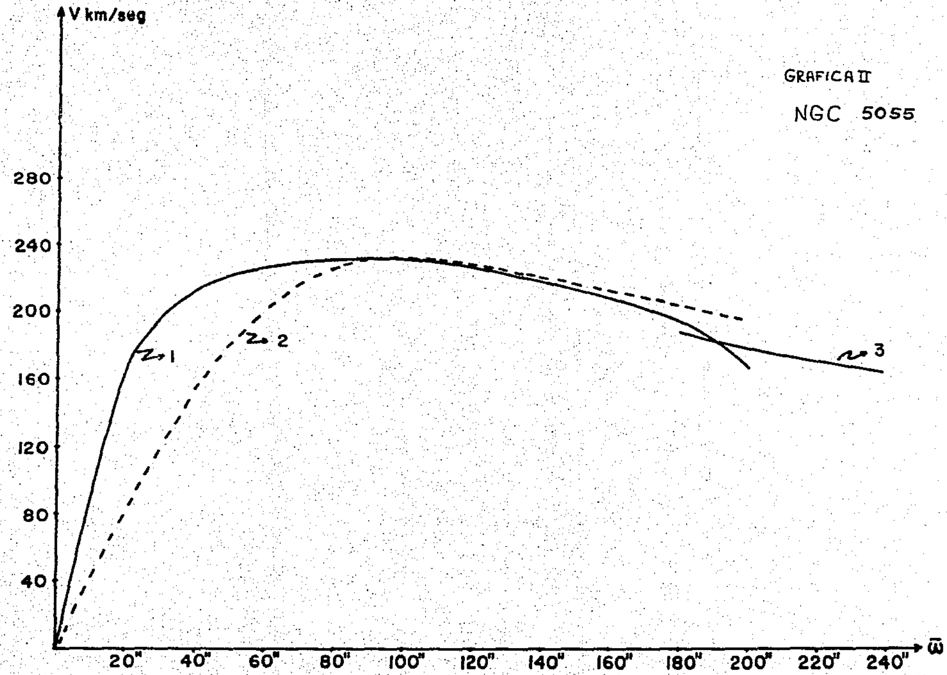
NGC 5055

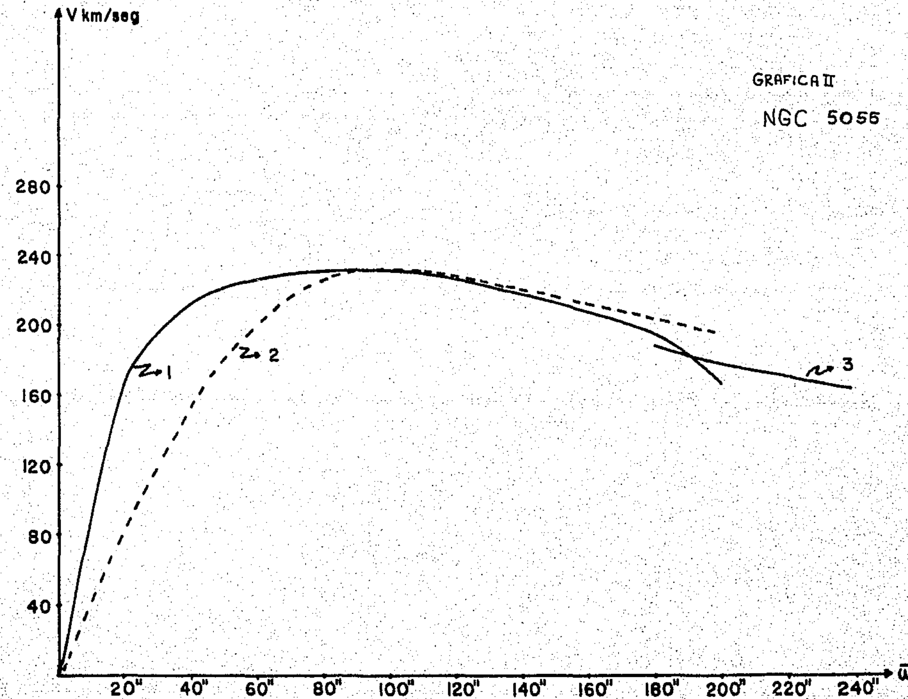
NGC 5005

GRAFICA I

NGC 5005




V km/seg
GRAFICA II
NGC 5055
280
240
200
160
120
80
40
1
2
3
20"
40"
60"
80"
100"
120"
140"
160"
180"
200"
220"
240"
$\bar{\omega}$


GRAFICA II
NGC 5055
V km/seg
280
240
200
160
120
80
40
20"
40"
60"
80"
100"
120"
140"
160"
180"
200"
220"
240"
$\bar{\omega}$
Z→1
Z→2
→3

A partir de las ecuaciones (III-2) y (III-3) y de las expresiones para Θ_m (que haciendo un cambio de notación llamaremos en lo sucesivo V_m)

$$V_m = \Theta_m = \sqrt{\frac{a}{3}}\,\tilde{\omega}_m \quad \text{y} \quad \tilde{\omega}_m = \sqrt[3]{\frac{2}{b}}$$

Lohmann encuentra la siguiente expresión

$$V = \frac{\tilde{\omega}/\tilde{\omega}_m \ \sqrt{3}}{\left[1+2\left(\tilde{\omega}/\tilde{\omega}_m\right)^3\right]^{1/2}} V_m \qquad \text{(IV-3)}$$

Tomando $\tilde{\omega}_m$ y V_m directamente de los datos observacionales es que se ha trazado, mediante la expresión (IV-3) la curva correspondiente a la ley de Bottlinger.

En las gráficas I y II estas curvas están marcadas con el número 2. Las curvas marcadas con el número 1 son las adaptadas a los datos observacionales por Burbidge et al mediante el método descrito en el modelo I.

En el caso de NGC5005 las curvas 1 y 2 no difieren demasiado, aunque es evidente que en ambos casos (mas todavía en el caso de NGC5055) la ley de Bottlinger corresponde a una concentración de masa menor en el centro, que se va extendiendo mas suavemente hacia afuera.

A partir de la expresión (III-4) hemos calculado la masa de ambas galaxias (es decir, usando la ley de Bottlinger).

a).- <u>NGC5005</u>.

Para esta galaxia se obtiene, mediante la ley de Bottlinger y los valores $V_m = 280$ km/seg y $\tilde{\omega}_m = 52''$, una masa de

$$M = 9.5 \times 10^{10}\ M_\odot \ (1)$$

Burbidge et al obtienen una masa de $M = 6.95 \times 10^{10}\ M_{\odot}$ para la distancia máxima del centro hasta la que se extiende la curva de rotación (5.95 kpc.). Sin embargo, extrapolando (bajo la suposición de que la densidad en un punto a esta distancia de 5.95kpc. se mantiene constante) hasta una distancia de 12.67 kpc. se obtiene una masa de $M = 1.39 \times 10^{11}\ M_{\odot}$. Este valor lo consideran como un límite superior ya que de hecho la densidad debe ir disminuyendo. Como el valor mas probable de la masa total se da

$$M = 1.05 \times 10^{11}\ M_{\odot} \quad (2)$$

que corresponde a una distancia de 10.5 kpc.

La concordancia entre los valores (i) y (2) es aceptable, hasta cierto punto, como lo es la concordancia entr ambas curvas en este caso, por lo que hemos extrapolado la curva 2 (ya que la 1 no se puede) para propósitos de comparación con la curva 3 (Kepleriana). Se observa que la concentración de masa mayor hacia el centro que se deduce de Burbidge et al, se compensa, hasta cierto punto, mas adelante con la mayor cantidad de masa que nos da la curva de Bottlinger al alejarnos del centro.

La curva 3 está basada en la atracción Kepleriana (tomando la masa de $6.95 \times 10^{10}\ M_{\odot}$ reducida a punto masa en el centro), se ha trazado a modo de comparación sólo a grandes distancias, y como es de esperarse (ya que representa un límite inferior) está por debajo de la curva de Bottlinger, y presumiblemente quedaría debajo de la otra también si ésta se pudiera extrapolar. La situación es congruente con el hecho de que esta no es la masa total.

La comparación con la curva Kepleriana es micho mas interesante en el caso de NGC5055 y la trataremos con mas detalles para obtener resultados mas significativos.

b).- NGC5055

Para esta galaxia se obtiene, mediante la ley de Bottlinger y los valores de $V_m = 233$km/seg y $\tilde{\omega}_m = 100''$, una masa de

$$M = 9.9 \times 10^{10} M_{\odot}$$

Esta masa es considerablemente mayor a cualquiera de las dos masas que dan Burbidge et al como totales:

$M = 7.6 \times 10^{10} M_{\odot}$ para una distancia de 10.3 Mpc.

$M = 5.5 \times 10^{10} M_{\odot}$ para una distancia de 7.4 Mpc.

Por otro lado las discrepancias entre las curvas son considerablemente mayores en este caso. Se observa que la curva de Burbidge et al cruza a la curva Kepleriana y sigue un pequeño trozo por debajo.

Se han tomado varios valores posibles de $\tilde{\omega}$ y V, y se ha encontrado que para $\tilde{\omega} = 90''$ y $V = 232$ km/seg la aproximación Kepleriana da la misma masa encontrada por los Burbidge ($M = 7.6 \times 10^{10} M_{\odot}$) como masa total mediante el modelo I. O sea que si esta masa estuviera concentrada en un punto en el centro de la galaxia, a partir de 90" la curva de atracción debería de ser idéntica a la resultante de una atracción Kepleriana. En la gráfica 2 observamos que la curva 1 cruza a la curva 3 (como ya se ha dicho) y después aparentemente tiende a bajar, lo cual no sucede con la curva derivada de la ley de Bottlinger que sigue tendiendo suavemente a la Kepleriana.

Del hecho de que la curva baja bruscamente Burbidge et al deducen que la masa calculada por ellos como interior a 200" es aproximadamente la masa total. Esta conclusión puede se [illegible] e-rrónea ya que se debe tener muy en cuenta que la curva es el resultado de un ajuste estadístico y ellos mismos mencionan que todos los puntos, excepto el último, (que es el que hace bajar mas la curva) es el resultado del promedio de cuatro observaciones distintas. De manera que la bajada puede ser el producto de una fluctuación estadística.

Por otro lado no tendría sentido físicamente si la curva 1 siguiera bajando después de haber cruzado a la 3, ya que como hemos dicho anteriormente la curva 3 representa un límite inferior.

Así que aún si la medición corresponde a una situación real, se debe esperar que se de un mínimo y la curva vuelva a subir, y este es un punto crucial del que partiremos para otro tipo de discusión, mas adelante.

Es un hecho que la gran mayoría de las curvas de rotación no son suaves, sino que presentan 2 ó mas máximos y mínimos y en general, fluctuaciones. Esto sucede en el caso de NGC5055, pero el método de Burbidge et al tiende a suavizar las curvas aún con polinomios hasta de 7 términos.

En 1960 Brandt desarrolló un método para determinar la masa que evita este problema. Brandt demuestra que en el caso límite en que c/a tiende a cero (lo cual no es una mala aproximación para las galaxias espirales), se puede resolver la siguiente ecuación integral para obtener la masa interior a un punto a una distancia $\tilde{\omega}$ del centro:

$$M(\tilde{\omega}) = \frac{2}{\pi G} \int_0^{\tilde{\omega}} \frac{V^2(a)\,da}{(\tilde{\omega} - a^2)^{1/2}} \qquad \text{(IV-4)}$$

Esta es una ecuación de forma abeliana que se puede resolver numéricamente.

Mediante el uso de esta expresión podemos calcular la densidad "superficial" (en el sentido de densidad por unidad de superficie, ya que la galaxia se considera aplanada) como función del radio vector para cualquier curva de rotación dada sin tener que forzar las observaciones a una expresión analítica. De este modo el efecto de las fluctuaciones no se cancela sino que al contrario, se exhibe plenamente.

En 1962 Brandt y Michael aplicaron este método a NGC5055 y obtuvieron una masa de $M = 1.2 \times 10^{11} M_{\odot}$ interior al punto $\tilde{\omega} = 190''$.

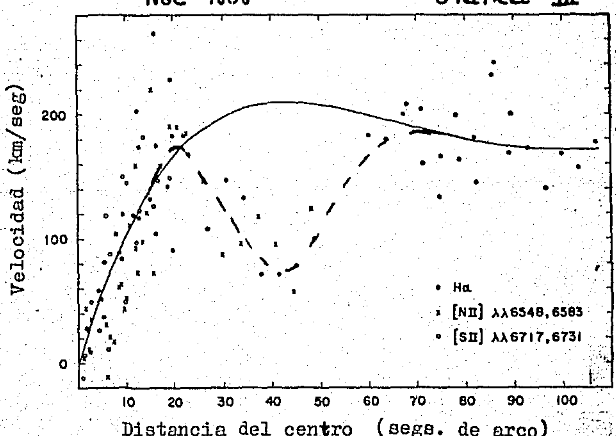
esta masa es nuevamente mayor que la obtenoda por Burbidge et al (7.6×10^{10} $M_{\odot}$) y se acerca mas a la que hemos obtenido mediante la ley de Bottlinger (9.9×10^{10} $M_{\odot}$). De todo lo anterior se deduce que Burbidge et al han dejado masa fuera; el análisis de las curvas es bastante claro, pero veamos con mas detalle porqué la solución de Brandt da también mas masa.

Hemos mencionado ya la existencia de fluctuaciones en muchas de las curvas de rotación de las galaxias (muy notoriamente por ejemplo, en las galaxias nos. 3,4,7,13,16,20,etc. de la tabla IV); estas fluctuaciones pueden ser debidas a errores sistemáticos o accidentales, pero también pueden ser, por lo menos en parte, producidas por fenómenos inherentes a la dinámica de la galaxia. En 1965 .P. Pismis ha propuesto que este fenómeno puede explicarse físicamente extendiendo a las nubes interestelares nuestro concepto actual sobre las poblaciones estelares. De acuerdo con este concepto, en las regiones en donde la velocidad de rotación disminuye, la contribución se debe principalmente a las nubes con características de población II. El conjunto de tales nubes -que individualmente describen órbitas excéntricas e inclinadas al plano galáctico- muestra una velocidad de rotación mas lenta que el conjunto de las nubes pertenecientes a los brazos espirales. Estas últimas describen órbitas casi circulares dentro del plano galáctico y muestran poca dispersión de velocidades a mayor rapidez de una rotación de conjunto.

Debido a esto se propone la existencia de nubes de alta velocidad, necesaria para la interpretación propuesta arriba. La existencia de tales nubes encuentra apoyo observacional tanto por métodos ópticos como radioastronómicos.

Se ha mencionado también anteriormente el hecho de que el método empleado por Burbidge et al tiende a suavizar las curvas de modo que se ignoran estas fluctuaciones. Un caso muy ilustrativo es el de NGC1808 (publicado en enero de 1968).

NGC 1808 Gráfica III



En la gráfica III se reproduce la curva ajustada por Burbidge et al (línea contínua) y se muestra la tendencia real de la curva (línea interrumpida).

Otra manera, quizá mas acertada de evitar las fluctuaciones sería tomar la envolvente.

Por otra parte hemos hecho notar ya también que en ninguno de los modelos usados por Burbidge et al se toma en cuenta la presión ejercida por la dispersión de velocidades.

Hay un solo caso, el de NGC2146, en el que se hace una aproximación para apreciar que tanto aumenta la masa si se toma en cuenta la dispersión de velocidades en el núcleo. Describiremos brevemente en que consiste esta aproximación.

La ecuación de movimiento del gas en la galaxia es

$$\frac{V^2}{\tilde{\omega}}\,\hat{1}_{\tilde{\omega}} = \mathrm{grad}\,\psi - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$$

donde $\tilde{\omega}$ es la distancia del eje de simetría, ψ es el potencial gravitacional, ρ la densidad y p la presión. Con las suposiciones usuales de la dinámica estelar se puede derivar una ecuación hidrodinámica similar para el movimiento de las estrellas (derivadas en el capítulo I, inciso 7), sin embargo los datos de que se dispone se relacionan solo al gas ya que tanto la curva de rotación como la presión se sacan del estudio de las líneas espectrales Hα y NII.

Se supone que $\langle u^2\rangle$ es la velocidad cuadrada media "de turbu--lencia" del gas en la región considerada y que la presión ejercida debido a este movimiento aleatorio es $1/3\,\rho\langle u^2\rangle$. Entonces la ecuación del movimiento para el gas se puede escribir

$$-\frac{V^2}{\tilde{\omega}}\,\hat{1}_{\tilde{\omega}} = \mathrm{grad}\,\psi - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,(\rho\langle u^2\rangle)$$

Si se supone que V es aproximadamente lineal cerca del centro e independiente de la distancia z del plano ecuatorial y que $\langle u^2\rangle$ es constante sobre la región considerada, la ecuación anterior se puede integrar para obtener

$$\rho = \rho_0 \exp\left[\frac{3(\psi-\psi_0)}{\langle\mu^2\rangle} + \frac{3d^2\tilde{\omega}^2}{2\langle\mu^2\rangle}\right]$$

donde d es la pendiente de la curva de rotación. Cerca del centro el potencial es, aproximadamente,

$$\psi - \psi_0 \sim 4/3\,\pi G \rho^* r^2$$

donde ρ^* es una especie de densidad promedio total (estrellas y gas) sobre la región considerada. La desviación media de la distribución del gas (que es gausiana) en la dirección $\tilde{\omega}$ es λ^2, se obtiene que

$$\rho^* = \frac{1}{8\pi G}\left(3d^2 + \frac{\langle\mu^2\rangle}{\lambda^2}\right)$$

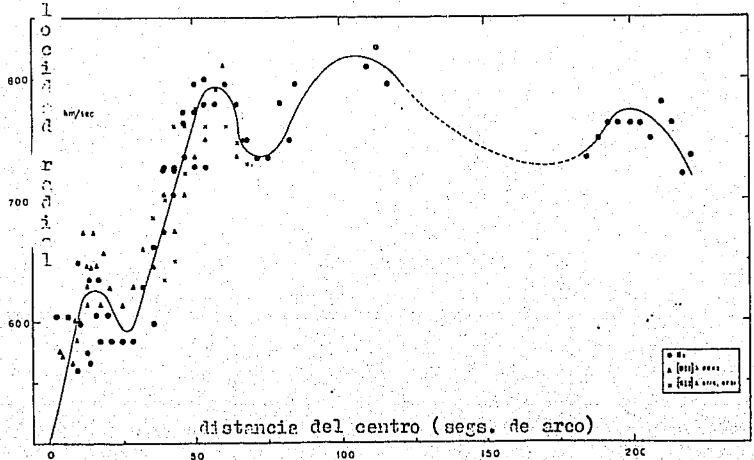
Una vez obtenida ρ^* se puede calcular ΔM mediante la relación

$$\Delta M = \frac{\rho^*}{\bar{\rho}}\left(\frac{\lambda}{a}\right)^3 M$$

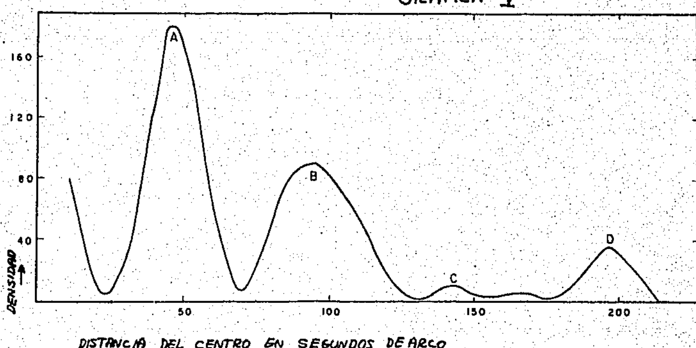
El resultado que se obtiene de aplicar esta correción es insignificante por lo que se refiere a la masa, pero no así por lo que respecta a la distribución de la densidad. Hay que tener en cuenta que la dispersión de velocidades se ha considerado solo en la región central y que con este procedimiento se parte de la curva ya "suavizada".

Un caso mas drástico, por lo que ilustra mejor la situación, es el de NGC 4258 estudiado por P. Pişmiş en 1965. Pişmiş parte de la curva no suavizada que reproducimos en la gráfica **IV** y aplicando el método de Brandt antes descrito obtiene la curva de distribución de la densidad que se muestra en la gráfica **V**. Se demuestra además en ese trabajo que las fluctuaciones no pueden ser causadas por una variación de la densidad dentro de la galaxia, pues la brusca variación calculada en NGC4258 no es compatible con la va-

GRAFICA IV



GRAFICA V



riación observada en su luminosidad. Esto implica que la suposición principal en que se basa el cálculo de la densidad no es correcta, es decir, que las componentes en las direcciones radial y perpendicular del campo de velocidades en una galaxia son apreciables. Dicho de otro modo, la dispersión de velocidades no es despreciable en todos los puntos de una galaxia espiral.

Por último agregaremos que ni siquiera el hecho que la curva de rotación sea suave (directamente de los datos observacionales) nos garantiza que no exista dispersión, pues éstapudoera ser uniforme en toda la galaxia y por lo tanto produciría un desplazamiento parejo de la curva de rotación hacia abajo.

Con esto terminamos el análisis de los casos que nos han parecido mas interesantes de la tabla IV y aunque ya hemos sacado varias conclusiones de este análisis, dejaremos algunos comentarios mas como conclusiones generales.

CONCLUSION

En este trabajo hemos tratado de hacer un resúmen de los diferentes procedimientos que se han empleado para estimar la masa de las galaxias espirales. Casi todos estos procedimientos hacen uso sólo del subsistema de población I extrema, i.e., los brazos espirales. Esto se debe fundamentalmente al hecho de que las líneas mas accesibles para medir las velocidades radiales son las líneas en emisión de las regiones HII.

El problema de obtener la distribución de la densidad en general para una gran extensión, requiere de la solución simultánea de las ecuaciones hidrodinámicas y la de Poisson. Aparte de las dificultades análiticas que existen para la solución de estas ecuaciones, nuestro conocimiento de los parámetros observacionales es aún muy pobre; la velocidad radial es tan solo una componente del campo de velocidades en una galaxia e inclusive en nuestra galaxia estamos lejos de conocer el campo de velocidades satisfactoriamente.

La distribución de la luminosidad aparente puede servir para estimar la masa si se conoce la relación M/L, pero hay que tener presente que la luminosidad aparente en un punto es una cantidad integrada a lo largo de la línea visual y que ésta puede variar dentro de la galaxia, por lo que su utilidad es bastante restringida.

Si bien todos los modelos tratados comprenden una gran variedad de galaxias, la actitud convencional en todos los casos es la de despreciar la dispersión de velocidades. En otras palabras, se supone que los movimientos en una galaxia aplanada consisten pura mente en una rotación.

Sin embargo, las fluctuaciones en las curvas de velocidad en un gran número de las galaxias estudiadas por Burbidge et al y la interpretación de estas fluctuaciones propuesta por Pişmiş, señalan que el efecto de la dispersión de velocidades es apreciable cuando menos en ciertas regiones de las galaxias.

La dispersión de velocidades se conoce sólo para la vecin - dad solar en nuestra galaxia, no se conoce su variación a lo largo de la galaxia. Para el caso de otras galaxias espirales en general no se ha hecho aún ningún esfuerzo para determinar la dis - persión de velocidadades en cada punto en donde se mide la velocidad radial; mucho menos se sabe si ésta es constante a lo largo de la galaxia.

Para concluir queremos señalar que el hacer un estudio de la variación de la dispersión de velocidades a lo largo de una galaxia será de suma utilidad para mejorar considerablemente las es - timaciones de la masa. Este estudio se podrá hacer en un futuro próximo mediante la ayuda de la fórmula (II-2), derivada al final del segundo capítulo, que nos relaciona la velocidad circular con la velocidad de dispersión en cada punto a lo largo de una galaxia.

BIBLIOGRAFIA

1).- Ogorodnikov. Dynamics of stellar sistems. Macmillan (1965).

2).- Chandrasekhar. Principles of stellar dynamics. Univ. of Chicago press (1942).

3).- W. M. Smart. Stellar dynamics. Cambridge (1938).

4).- J. H. Oort. Stellar dynamics. Stars and stellar sistems Vol. V (pg.455) Kuiper (1965).

5).- Prendergast. The determination of masses of galaxies and their internal mass distributions. Problems of extra-galactic research. Mc.Vittie (1961).

6).- Perek. Distribution of mass in oblate stellar sistems. Advances in astronomy and astrophysics Vol. I (pg. 165). (1962).

7).- Schmidt. A model of the distribution of mass in the galactic sistem. Bull. of the Astr. Inst. of the Neth. Vol XIII (pg. 468) (1956).

8).- Camm. Self gravitating star sistems. M.N. of the R.A.S. Vol 110 (pg. 305) (1950).

9).- Von Lohmann. Die masse des Andrómeda-und des Dreiek Nebels. Zeitschrift für astrophysik. Band 35 (pg.159). (1955).

10).- P. Pişmiş. On the wavy nature of the rotation curves in galaxies. Bol. de los obs. de Tonanzintla y Tacubaya. Num. 26. (1965).

11).- Ap. J. 130 - 26, 739.

12).- Ap. J. 131 - 282, 549.

13).- Ap. J. 132 - 30, 640, 654, 661.

14).- Ap. J. 133 - 814.

15).- Ap. J. 134 - 232, 237, 874.

16).- Ap. J. 135 - 366.

17).- Ap. J. 136 - 128, 339, 704,
18).- Ap. J. 137 - 376, 1022.
19).- Ap. J. 138 - 375.
20).- Ap. J. 139 - 80, 539, 1058.
21).- Ap. J. 140 - 80, 85, 94.
22).- Ap. J. 141 - 759, 885.
23).- Ap. J. 142 - 154, 641, 649
24).- Ap. J. 151 (NGC 1808).