Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ALGEBRAICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

Isabel Vásquez Ortiz

TUTOR:

DR. VALENTE SANTIAGO VARGAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX. 2023

Dedicado a
mi madre.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia y amigos por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de este gran camino. En especial quiero agradecer a mi madre, sin duda alguna es gracias a su trabajo y confianza, sintetizados en amor, que pude terminar la licenciatura en algo que me gusta. Gracias mamá, por siempre estar a mi lado y apoyarme de forma incondicional en todas y cada una de mis aspiraciones. Igualmente le agradezco a mi hermano, por recibirme con alegría cuando regresaba a casa. Es verdad que las despedidas en casa son tristes, no obstante, mi familia siempre me dio fuerza y motivación para continuar.
También quiero agradecer a Victor por su apoyo y consejos en numerosas situaciones, gracias por tantos momentos divertidos y por ser testigo de todo este proceso.

De igual forma, quiero agradecer a mis profesores, quienes a lo largo de este camino y con los conocimientos compartidos han logrado que mis horizontes sean más amplios. Gracias profesores, por enseñarme lo que realmente hace un matemático. De forma especial quiero agradecer al Doctor Valente Santiago Vargas por todo el apoyo que me ha brindado, por siempre preocuparse porque los alumnos realmente entiendan lo que expone, pero sobre todo, gracias por su apoyo en la realización de este trabajo, por confiar en mi y por los consejos y paciencia que tuvo en todo el proceso; sin su ayuda esto no habría sido posible.

Índice general

Introducción

El desarrollo histórico de la geometría algebraica es muy amplio, su estudio se puede remontar a la antigua grecia. Por ejemplo, fue de sumo interés para los griegos el estudio de las cónicas, aquellas curvas que se pueden obtener al intersectar un plano con la superficie de un cono. A pesar de que en aquella época no se contaba con el pensamiento algebraico para plantear los problemas como se plantean ahora, y a pesar de carecer de las modernas herramientas analíticas y algebraicas actuales, los griegos fueron capaces de caracterizar todas estas secciones cónicas, produciendo círculos, elipses, hipérbolas, parábolas, líneas rectas y el caso degenerado de un punto; es importante mencionar que se concentraban en el estudio de estos objetos geométricos, más no en las ecuaciones que se les pudieran asociar.
Actualmente es bien sabido que es posible asociar a tales objetos geométricos (las cónicas) una ecuación de la forma $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, donde los coeficientes son todos números reales, fue posible llegar a estos conocimientos con avances posteriores en la geometría. Para comenzar, fue Descartes quien propuso que cada punto en dos dimensiones se puede describir con dos números en un plano, uno que da la ubicación horizontal del punto y el otro que proporciona la ubicación vertical. Descartes inventó el sistema coordenado cartesiano, sentando así las bases de la geometría analítica, estableciéndose por primera vez un puente entre la geometría y el álgebra: se observó que cualquier ecuación algebraica se puede representar en el plano cartesiano trazando en él el conjunto de soluciones de la ecuación, y viceversa, se pueden asociar ecuaciones algebraicas a objetos geométricos. Fue así como se empezaron a introducir el pensamiento, las nociones y los métodos algebraicos de la forma en que los conocemos ahora.

Parte de la motivación del estudio de la geometría algebraica es el hecho de que algunas curvas o superficies geométricas se pueden describir con ecuaciones algebraicas. Un ejemplo muy sencillo es la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y de radio 1. Dicha circunferencia es el conjunto de puntos (x, y) del plano $\mathbb{R}^2$ tales que $x^2 + y^2 = 1$, es decir, $x^2 + y^2 - 1 = 0$; esta relación es una ecuación polinomial en las variables x e y, que, como se ha visto, define un lugar geo-

métrico. Los polinomios son los principales objetos estudiados por la geometría algebraica, de forma más general, se estudian los objetos geométricos que pueden ser definidos como conjuntos de soluciones de polinomios, no sólo en una, sino en varias variables. Más aún, el estudio que se hace de estos objetos, no se concentra sólo en la geometría, sino que también trata numerosos aspectos topológicos.
Cuando se estudia geometría algebraica, se hacen conexiones con otras áreas como el álgebra conmutativa, el análisis, la topología y la teoría de números; esta es precisamente una de las peculiaridades de la geometría algebraica; la asociación que hace entre elementos algebraicos y geométricos es en ambos sentidos. Si estamos interesados en una ecuación, podemos observar la variedad algebraica asociada y trabajar con herramientas geométricas para dar resultados sobre nuestra ecuación; por otro lado, si nos interesan objetos geométricos, podemos estudiarlos analizando sus ecuaciones con ayuda de algunas herramientas algebraicas. Es la maravilla de la geometría algebraica, usar métodos algebraicos para hacer geometría y métodos geométricos para hacer álgebra. Es importante mencionar que fue a finales del siglo XIX cuando el álgebra pura se desarrolló, esto se dió especialmente en Alemania y fue principalmente gracias a los trabajos de Max Noether, y, posteriormente, de Emmy Noether y David Hilbert. Se puede decir que es en este momento que las ideas del álgebra abstracta toman su lugar en la geometría.
La geometría algebraica se ha desarrollado en varias etapas y de diversas formas, pero fue con Oscar Zariski y André Weil cuando los métodos del álgebra conmutativa se aplicaron a la geometría algebraica. Un poco más tarde, en las décadas de 1950 y 1960, fue la teoría de esquemas de Grothendieck la que introdujo el lenguaje utilizado hoy en día. Alexandre Grothendieck hizo mucho más que fijar un lenguaje: al hacerlo, amplía significativamente el campo de las intuiciones geométricas. Imagina conceptos que hacen posible hacer geometría y topología -para usar la intuición visual, en última instancia- sobre objetos muy generales, provenientes de la aritmética, por ejemplo.

El propósito de este trabajo es dar una introducción al estudio de la geometría algebraica. Se comienza con las nociones más básicas que hacen posible ahondar en esta rama de las matemáticas. En los capítulos uno y dos se hablará de los conjuntos algebraicos, afines y proyectivos respectivamente, es en estos capítulos donde se comienzan a notar las amplias relaciones entre la geometría, el álgebra y la topología, pues se introducen diversas nociones algebraicas y topológicas referentes a los conjuntos algebraicos. Finalmente, en el capítulo tres, se introducen las nociones de morfismo de variedades, esto permitirá observar a las variedades como una categoría, pues se tienen definidos los objetos y los mapeos entre ellas.
Cabe mencionar que para el desarrollo del presente trabajo se seguirá el esque-

ma de [6]. Además, las fuentes de consulta en donde el lector puede examinar las pruebas omitidas de algunos teoremas y proposiciones, son los materiales del [1] al [13] con excepción de [6].

Es importante recalcar que se pretende que este material sirva de apoyo en cursos de geometría algebraica, pues en cada sección se da una amplia cantidad de resultados basados en notación e ideas modernas, es decir, nada rudimentarios.

Capítulo 1

Variedades afines

1.1. Conjuntos algebraicos afines

Dado un campo K, se define el **espacio afín** de dimensión n, denotado por $\mathbb{A}^n_K$, como el conjunto de n-adas de elementos de K, es decir:

$$\mathbb{A}^n_K = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in K\}.$$

Si $P \in \mathbb{A}^n_K$, entonces $P = (a_1, \ldots, a_n)$, donde $a_i \in K$. A P se le llama punto y los elementos $a_i \in K$ son las coordenadas de P. En general, si K es un campo, se nombra *recta afín* al conjunto $\mathbb{A}^1_K$ y *plano afín* a $\mathbb{A}^2_K$.

En este apartado, el objetivo principal es relacionar el espacio afín $\mathbb{A}^n_K$ con los polinomios en n variables, por tal motivo presentamos las siguientes definiciones.

Definición 1.1 *Un* ***monomio*** *en las variables $x_1, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, donde todos los exponentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son naturales. El* ***grado del monomio*** *$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ es la suma $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.*

Para simplificar la notación de los monomios, vamos a considerar la $n-$ada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ formada por los naturales $\alpha_1, \ldots \alpha_n$. De este modo tenemos una nueva representación para los monomios en las variables $x_1, \ldots, x_n$:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Definición 1.2 *Un* ***polinomio*** *f en las variables $x_1, \ldots, x_n$, con coeficientes en el campo K, es una combinación $K-$lineal finita de monomios. Es decir, podemos escribir a f de la forma siguiente:*

$$f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha,$$

donde $c_\alpha \in K$ *y la suma se hace sobre un número finito de* $n-$*adas* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
El ***grado de*** f *es el máximo de los grados de los monomios* x^α *que componen a* f *y tales que* $c_\alpha \neq 0$.
El conjunto de todos los polinomios en las variables $x_1, \ldots, x_n$ *con coeficientes en* K *es el anillo de polinomios* $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Observación 1.3 *Si* $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in K[x_1, \ldots, x_n]$, *donde* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *entonces* f *determina la siguiente función (denotada también por* f*):*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^n_K &\longrightarrow K \\ (a_1, \ldots, a_n) &\longmapsto \sum_\alpha c_\alpha a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Definición 1.4 *Sea* $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ *un polinomio. Se dice que un punto* $P \in \mathbb{A}^n_K$ *es un* ***cero del polinomio f*** *si la función* f *toma el valor cero en* P, *es decir, si* $f(P) = 0$.

La asociación entre los elementos de $K[x_1, \ldots, x_n]$ y las funciones de $\mathbb{A}^n_K$ en K (ver 1.3), junto con la definición 1.4, nos permiten hablar del conjunto de ceros de un polinomio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Dicho conjunto está dado de la siguiente manera:

$$Z(f) := \{P \in \mathbb{A}^n_K : f(P) = 0\}.$$

De forma general, si $T \subseteq K[x_1, \cdots, x_n]$, definimos el conjunto de ceros comunes de los elementos de T de la siguiente forma:

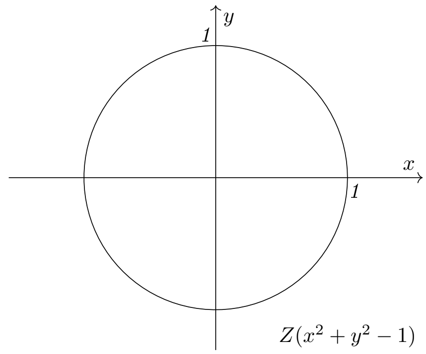
$$Z(T) := \{P \in \mathbb{A}^n_K : f(P) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Los conjuntos que son relevantes en este trabajo son precisamente los que se pueden visualizar como el conjunto de ceros comunes de un subconjunto de polinomios.

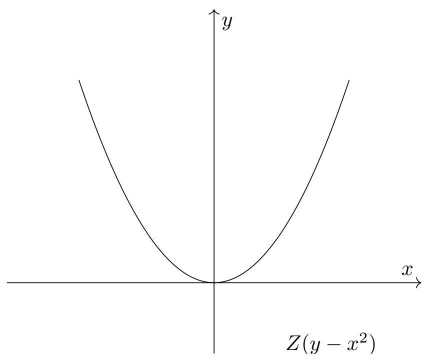
Definición 1.5 *Sean* K *un campo y* $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$. *Decimos que* X *es un* ***conjunto algebraico*** *si existe* $T \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ *tal que* $X = Z(T)$.

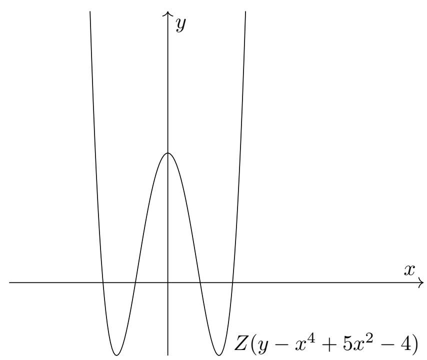
Ejemplo 1.6 *Para* $K = \mathbb{R}$, *los siguientes son ejemplos de conjuntos algebraicos:*

(a) El conjunto $Z(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2_\mathbb{R}$, *corresponde precisamente a la circunferencia de radio* 1 *con centro en el origen.*



(b) *Las gráficas de funciones polinomiales son conjuntos algebraicos, pues la gráfica de $y = f(x)$ es precisamente $Z(y - f(x))$.*





Los conjuntos algebraicos expuestos hasta ahora son conjuntos definidos por una cantidad finita de polinomios. Ante esto surge la pregunta: ¿habrá subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}_K^n$ que no se puedan describir como el conjunto de ceros de una cantidad finita de polinomios?
A continuación, con ayuda de algunos resultados y recordando que estamos trabajando con un campo K, se podrá dar respuesta a este planteamiento.
Cabe mencionar que en este trabajo sólo se considerarán anillos conmutativos con 1, a menos de que se especifique lo contrario. Por tal motivo, a lo largo de todo el trabajo, el término **anillo** hará referencia a anillos conmutativos con 1.

Definición 1.7 *Sea A un anillo. Se dice que A es un* ***anillo noetheriano*** *si satisface una de las siguientes condiciones:*

(a) *Si $S \neq \emptyset$ es un conjunto de ideales de A, entonces S tiene un elemento maximal.*

(b) *Toda cadena ascendente de ideales de A se estaciona, es decir, si $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$, entonces existe n tal que $I_n = I_{n+m}$ $\forall m \geq 1$.*

(c) *Todo ideal de A es finitamente generado, esto significa que si I es un ideal de A, entonces existen $a_1, a_2, \ldots, a_t \in A$ tales que $I = \langle a_1, a_2, \ldots, a_t \rangle$.*

Las condiciones anteriores son equivalentes, una demostración de tal hecho puede ser consultada en [1, págs. 74-75].

Teorema 1.8 *(Teorema de la base de Hilbert) Si A es un anillo noetheriano, entonces $A[x]$ es un anillo noetheriano.*

Demostración. Ver [7, pág. 67]. $\square$

Corolario 1.9 *Si A es un anillo noetheriano, entonces $A[x_1, \ldots, x_n]$ es noetheriano.*

Una vez que hemos recordado estos resultados, podemos ver que trabajar con conjuntos algebraicos es una tarea que se puede simplificar, esto se debe a que conocemos el comportamiento de una categoría muy especial de conjuntos: los ideales. Esto se empieza a observar a partir de la siguiente proposición.

Proposición 1.10 *Sean K un campo, $T \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ e $I = \langle T \rangle$ el ideal generado por T. Entonces $Z(I) = Z(T)$.*

Demostración. Sea $P \in Z(I)$. Entonces $f(P) = 0\, \forall f \in I$. De esta forma, si $g \in T \subseteq I$, entonces $g(P) = 0$, es decir, $P \in Z(T)$.

Por otro lado, si $P \in Z(T)$, entonces $f(P) = 0\, \forall f \in T$. Primero notemos que como I es un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$, por la definición 1.7 se tiene que I es finitamente generado, es decir, $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$, con $f_1, \ldots f_r \in T$. Tomemos $g \in I$, entonces $g = h_1 f_1 + \ldots + h_r f_r$ con $h_1, \ldots h_r \in K[x_1, \ldots, x_n]$, es decir, g es combinación lineal de elementos de T. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} g(P) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(P) f_i(P) \\ &= \sum_{i=1}^{r} h_i(P) \cdot 0 \quad [\text{ porque } f_i(P) = 0 \text{ para todo } i\ ] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P \in Z(I)$. De esta forma queda probado que $Z(I) = Z(T)$. $\square$

La proposición 1.10 nos dice que, para trabajar con conjuntos algebraicos, basta considerar ideales I de $K[x_1, \ldots, x_n]$ y trabajar con $Z(I)$. Más aún, en la siguiente observación se dará respuesta a un planteamiento hecho anteriormente, pues se verá que todo conjunto algebraico de $\mathbb{A}_K^n$ se puede describir por medio de una cantidad finita de polinomios.

Observación 1.11 *Si K es un campo, entonces todo conjunto algebraico de $\mathbb{A}^n_K$ se puede ver como el conjunto de ceros de una cantidad finita de polinomios.*
Lo anterior se debe a que, como K es campo, entonces resulta ser un anillo noetheriano, y por el corolario 1.9 se tiene que $K[x_1, \ldots, x_n]$ es también noetheriano. Entonces, en vista de la definición 1.7, se concluye que todo ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$ es finitamente generado; de esta forma, si I es un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$, existen $f_1, \cdots, f_r \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $I = \langle f_1, \cdots, f_r \rangle$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Z(I) &= Z(\langle f_1, \cdots, f_r \rangle) \\ &= Z(\{f_1, \cdots, f_r\}) \quad [\text{ \textit{por la proposición} } 1.10 \text{ }]. \end{aligned}$$

A continuación, veremos algunas propiedades que se satisfacen para los conjuntos algebraicos.

Proposición 1.12 *Si K es un campo, entonces se satisfacen las siguientes propiedades.*

(a) $\emptyset$ y $\mathbb{A}^n_K$ son conjuntos algebraicos en $\mathbb{A}^n_K$.

(b) La unión de dos conjuntos algebraicos en $\mathbb{A}^n_K$ es un conjunto algebraico en $\mathbb{A}^n_K$.

(c) La interseccíon de una familia de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico en $\mathbb{A}^n_K$.

(d) Si $\{J_i\}_{i=1}^n$ es una familia de ideales de $K[x_1, \ldots, x_n]$, entonces se satisface que $Z(\bigcap_{i=1}^n J_i) = \bigcup_{i=1}^n Z(J_i)$.

(e) Si $I \subseteq J$ son ideales de $K[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $Z(J) \subseteq Z(I)$.

Demostración.

(a) Tenemos que $1 \in K[x_1, \ldots, x_n]$ y además, si $P \in \mathbb{A}^n_K$, entonces $1(P) = 1 \neq 0$, por lo que $Z(1) = \emptyset$, es decir, $\emptyset$ es un conjunto algebraico.
De igual forma, notemos que $0 \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Más aún, si $P \in \mathbb{A}^n_K$, entonces $0(P) = 0$, por lo tanto $P \in Z(0)$ para todo $P \in \mathbb{A}^n_K$, esto significa que $Z(0) = \mathbb{A}^n_K$ y así deducimos que $\mathbb{A}^n_K$ es un conjunto algebraico.

(b) Tomemos X_1 y X_2 dos conjuntos algebraicos, veamos que $X_1 \cup X_2$ es un conjunto algebraico.
Ya que X_1 y X_2 son algebraicos, entonces existen $T_1, T_2 \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $X_1 = Z(T_1)$ y $X_2 = Z(T_2)$.
Probemos que $X_1 \cup X_2 = Z(T_1) \cup Z(T_2) = Z(T_1T_2)$, donde $T_1T_2 = \{fg : g \in T_1 \text{ y } g \in T_2\}$.

Si $P \in Z(T_1) \cup Z(T_2)$, entonces $P \in Z(T_1)$ o $P \in Z(T_2)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $P \in Z(T_1)$, es decir, $f(P) = 0$ para todo polinomio $f \in T_1$.
Tomemos $g = hj \in T_1T_2$ con $h \in T_1$ y $j \in T_2$. Dado que $P \in Z(T_1)$, se tiene que $h(P) = 0$. De este modo:

$$\begin{aligned} g(P) &= h(P)j(P) \\ &= 0 \cdot j(P) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, $P \in Z(T_1T_2)$.
Por otro lado, consideremos $P \in Z(T_1T_2)$ y supongamos que $P \notin Z(T_1)$. Esto significa que $f(P) = 0$ para todo $f \in T_1T_2$ y que existe $g \in T_1$ tal que $g(P) \neq 0$.
Sea $h \in T_2$, luego $gh \in T_1T_2$ y por lo tanto $(gh)(P) = g(P)h(P) = 0$.
Ahora, ya que $g(P) \neq 0$, se deduce que $h(P) = 0$ y de esta forma $P \in Z(T_2)$. Así, concluimos que $P \in Z(T_1) \cup Z(T_2)$.

(c) Sea $\{Z(T_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia indizada de conjuntos algebraicos. Veamos que $\bigcap\limits_{\alpha \in I} Z(T_\alpha) = Z(\bigcup\limits_{\alpha \in I} T_\alpha)$.
Tomemos $P \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Z(T_\alpha)$, esto significa que $P \in Z(T_\alpha)\ \forall \alpha \in I$. Entonces se tiene que $f(P) = 0$ para todo $f \in T_\alpha$ y para todo $\alpha \in I$. Ahora, si $g \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} T_\alpha$, entonces existe $\alpha \in I$ tal que $g \in T_\alpha$, y por lo anterior tenemos que $g(P) = 0$. Como g fue arbitrario se concluye que $P \in Z(\bigcup\limits_{\alpha \in I} T_\alpha)$.
Por otro lado, si $P \in Z(\bigcup\limits_{\alpha \in I} T_\alpha)$, entonces $f(P) = 0$ para todo $f \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} T_\alpha$.
Sean $\alpha \in I$ arbitrario y $g \in T_\alpha$. Notemos que $g \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} T_\alpha$ y por lo tanto $g(P) = 0$. Esto implica que $g(P) = 0$ para todo $\alpha \in I$ y todo polinomio $f \in T_\alpha$. Por consiguiente, $P \in Z(T_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$, pues $f \in T_\alpha$ fue arbitraria, de este modo tenemos que $P \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Z(T_\alpha)$.

(d) Tomemos $\{J_i\}_{i=1}^n$ una familia de ideales de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Como la familia es finita, para probar que $Z(\bigcap\limits_{i=1}^{n} J_i) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} Z(J_i)$ haremos el caso $n = 2$ y el argumento general se seguirá por inducción.
Sean I, J ideales de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Veamos que $Z(I \cap J) = Z(I) \cup Z(J)$.
Sea $P \in Z(I \cap J)$, es decir, $f(P) = 0$ para todo $f \in I \cap J$.
Supongamos que $P \notin Z(I) \cup Z(J)$, esto significa que existen $f \in I$ y $g \in J$

tales que $f(P) \neq 0$ y $g(P) \neq 0$, entonces $(fg)(P) = f(P)g(P) \neq 0$.
Más aún, ya que tanto I como J son ideales, entonces $fg \in I$ y $fg \in J$, por lo que $fg \in I \cap J$. Como $P \in Z(I \cap J)$, entonces $(fg)(P) = 0$, lo cual representa una contradicción.
Por lo tanto, debe ocurrir que $P \in Z(I) \cup Z(J)$.
Por otro lado, consideremos $P \in Z(I) \cup Z(J)$. Luego $P \in Z(I)$ o $P \in Z(J)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $P \in Z(I)$. En consecuencia, para todo $f \in I$, se tiene que $f(P) = 0$. Ahora, si $g \in I \cap J$, en particular $g \in I$, de este modo $g(P) = 0$. Por lo tanto, $g(P) = 0$ para todo $g \in I \cap J$, es decir, $P \in Z(I \cap J)$.

(e) Sean $I \subseteq J$ ideales de $K[x_1, \cdots, x_n]$. Para probar que $Z(J) \subseteq Z(I)$, tomemos $P \in Z(J)$ y veamos que $P \in Z(I)$.
Como $P \in Z(J)$, se sigue que $f(P) = 0 \ \forall f \in J$. Consideremos $g \in I$ un polinomio, ya que $g \in I \subseteq J$, entonces $g \in J$ y por lo tanto $g(P) = 0$. De esta forma, se tiene que $g(P) = 0 \ \forall g \in I$, es decir, $P \in Z(I)$.

□

Notemos que los incisos $a), b)$ y $c)$ de la proposición 1.12 indican que los conjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^n_K$ satisfacen los axiomas para conjuntos cerrados en una topología, por tal motivo se presenta la siguiente definición.

Definición 1.13 *Dado un campo K, definimos la* ***topología de Zariski en*** *$\mathbb{A}^n_K$ tomando como conjuntos abiertos a los complementos de los conjuntos algebraicos.*
Dado X un subconjunto de $\mathbb{A}^n_K$, podemos considerar la topología de subespacio inducida por la topología de Zariski. Los conjuntos cerrados en X son los conjuntos de la forma $X \cap Z(T)$, donde $T \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$.

Ejemplo 1.14 *Sea K un campo algebraicamente cerrado. Consideremos la topología de Zariski en la recta afín $\mathbb{A}^1_K$.*
Debido a que K es campo, $K[x]$ es un dominio de ideales principales; y esto significa que todo ideal de $K[x]$ es principal.
Tomemos $X \subseteq \mathbb{A}^1_K$ algebraico. Entonces existe I un ideal de $K[x]$ tal que $X = Z(I)$. Ya que I es principal, existe $f \in K[x]$ tal que $I = \langle f \rangle$, por lo cual $X = Z(I) = Z(f)$, esto último por la proposición 1.10.
Más aún, ya que K es algebraicamente cerrado, f se factoriza como $f(x) = c(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, donde $c, a_1, \ldots, a_n \in K$.
De esta forma, $X = Z(f) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
Por lo tanto, ***los conjuntos cerrados en $\mathbb{A}^1_K$ son los conjuntos finitos y el espacio total $\mathbb{A}^1_K$****. Finalmente, los conjuntos abiertos en la topología de Zariski para $\mathbb{A}^1_K$ son el conjunto vacío y los complementos de subconjuntos finitos.*

Ejemplo 1.15 *Si K es un campo y $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ es un polinomio no constante, entonces llamaremos* ***hipersuperficie*** *al conjunto algebraico $Z(f) \subseteq \mathbb{A}^n_K$. Más aún, si f es de grado 1, entonces $Z(f)$ será llamado* ***hiperplano afín*** *en $\mathbb{A}^n_K$.*
En el caso particular $n = 2$, a $Z(f)$ se le llamará ***curva afín*** *en $\mathbb{A}^2_K$.*

1.2. El ideal asociado a subconjuntos del espacio afín

En la sección previa, a cada ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$ le asociamos un subconjunto de $\mathbb{A}^n_K$. En esta sección haremos la construcción recíproca, es decir, a cada subconjunto $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ le asociaremos un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Esta construcción está dada por la siguiente definición.

Definición 1.16 *Sea $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$, el conjunto dado por:*

$$I(Y) := \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] : f(P) = 0 \; \forall P \in Y\},$$

es el ideal asociado al conjunto Y.

Observemos que en la definición 1.16 se asume que, al asociar a un subconjunto del espacio afín $\mathbb{A}^n_K$ un conjunto de polinomios en $K[x_1, \ldots, x_n]$, se obtiene un ideal. En el siguiente resultado se hace la prueba formalmente.

Proposición 1.17 *Si $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$, entonces $I(Y)$ es un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Es decir, se satisfacen las siguientes propiedades:*

(a) El polinomio 0 pertenece a $I(Y)$.

(b) Si $f, g \in I(Y)$, entonces $f + g \in I(Y)$.

(c) $-f \in I(Y) \; \forall f \in I(Y)$.

(d) $fg \in I(Y) \; \forall f \in I(Y)$ y para todo $g \in K[x_1, \ldots, x_n]$.

Demostración. Sea $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$.

(a) Notemos que $0 \in K[x_1, \ldots, x_n]$ y además $0(P) = 0 \; \forall P \in Y$. De esta forma, $0 \in I(Y)$.

(b) Consideremos ahora $f, g \in I(Y)$, es decir, $f(P) = 0$ y $g(P) = 0 \; \forall P \in Y$. Sea $P \in Y$, tenemos que

$$(f + g)(P) = f(P) + g(P) = 0 + 0 = 0.$$

Por lo cual, $f + g \in I(Y)$ como queríamos.

(c) Si $f \in I(Y)$, entonces $f(P) = 0 \; \forall P \in Y$. Además

$$(-f)(P) = -(f(P)) = -0 = 0.$$

Por lo tanto, $-f \in I(Y)$.

(d) Sean $f \in I(Y)$ y $g \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Como $f \in I(Y)$, se tiene que $f(P) = 0 \; \forall P \in Y$.
Sea $Q \in Y$, observemos que

$$(fg)(Q) = f(Q)g(Q) = 0 \cdot g(Q) = 0.$$

Por lo tanto, $(fg)(Q) = 0 \; \forall \; Q \in Y$, es decir, $fg \in I(Y)$.

□

Ejemplo 1.18 *Consideremos $K = \mathbb{R}$ y $V = \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.*
El ideal $I(\{(0,0)\})$ está conformado por los polinomios que se anulan en el origen.
Se afirma que $I(\{(0,0)\}) = \langle x, y \rangle$.
En efecto, notemos que si $f \in \langle x, y \rangle$, entonces $f = g(x,y)x + h(x,y)y$ con $g, h \in K[x,y]$, de modo que $f(0,0) = g(0,0) \cdot 0 + h(0,0) \cdot 0 = 0 + 0 = 0$, es decir $f \in I(\{(0,0)\})$.
Por otro lado, si $f = \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j \in I(\{(0,0)\})$, se tiene que $0 = f(0,0) = c_{00}$, por lo que podemos expresar a f de la forma

$$\begin{aligned} f &= c_{00} + \sum_{i,j \neq 0} c_{ij} x^i y^j \\ &= 0 + \left(\sum_{\substack{i,j \\ i>0}} c_{ij} x^{i-1} y^j \right) x + \left(\sum_{\substack{i=0 \\ j>0}} c_{ij} y^{j-1} \right) y. \end{aligned}$$

Y de acuerdo a esta última expresión, concluimos que $f \in \langle x, y \rangle$.
Por lo tanto, $I(\{(0,0)\}) = \langle x, y \rangle$.

De forma más general, tenemos el siguiente ejemplo que será de suma utilidad en secciones posteriores.

Proposición 1.19 *Si K es un campo infinito, entonces $I(\mathbb{A}^n_K) = \{0\}$.*

Demostración. El argumento se hará por inducción sobre $n \geq 1$.
Veamos para $n = 1$. Notemos que el número de raíces de todo polinomio en $K[x]$ es menor o igual a su grado. De este modo, si existe $f \in I(\mathbb{A}^1_K) \setminus \{0\}$, entonces f se anula en todo el campo K y así K debe ser finito. Esto representa una contradicción con la hipótesis. Por lo tanto, $I(\mathbb{A}^1_K) = \{0\}$.

Supongamos válido para $r \leq n-1$ y veamos que es válido para n.
Sea $f \in I(\mathbb{A}^n_K)$ y supongamos que $f \neq 0$. Recordemos que $f = \sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha$ donde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, factorizando las potencias de x_n podemos escribir a f en la forma

$$f = c_r(x_1, \ldots, x_{n-1})x_n^r + c_{r-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})x_n^{r-1} + \ldots + c_0(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

donde $c_r \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ y r es la mayor potencia de x_n que aparece en f.
Notemos que si $r = 0$, la variable x_n no aparece en f y por lo tanto $f \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. Como $f \in I(\mathbb{A}^n_K)$ se concluye que f se anula en $\mathbb{A}^{n-1}_K$. Por hipótesis de inducción se tiene que $f = 0$, contradiciendo el hecho de que $f \neq 0$. De esta forma, se puede suponer que $r \neq 0$ y $c_r(x_1, \ldots, x_{n-1})$ no es el polinomio cero.
Por hipótesis de inducción, $I(\mathbb{A}^{n-1}_K) = \{0\}$, por lo que $c_r \notin I(\mathbb{A}^{n-1}_K)$; esto significa que existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}_K$ tal que $c_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq 0$, evaluando los polinomios $c_r(x_1, \ldots, x_{n-1})$ que aparecen en f en el punto $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ se obtiene el polinomio:

$$\hat{f} = c_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})x_n^r + c_{r-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})x_n^{r-1} \ldots + c_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in K[x_n]$$

donde el coeficiente principal $c_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ es distinto de cero, ya que $\hat{f}$ es de grado r, y así tiene a lo más r raíces, es decir, $\hat{f}$ no se puede anular en todo $\mathbb{A}^1_K$ que es infinito, de modo que existe $\alpha_n \in \mathbb{A}^1_K$ tal que $\hat{f}(\alpha_n) \neq 0$; notemos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{A}^n_K$ y además

$$0 \neq \hat{f}(\alpha_n) = c_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})\alpha_n^r + \ldots + c_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Así, existe un punto en $\mathbb{A}^n_K$ que no anula a f, esto representa una contradicción con la hipótesis de que $f \in I(\mathbb{A}^n_K)$, ya que dicha contradicción se originó al suponer $f \neq 0$, se concluye que $f = 0$. Por lo tanto, $I(\mathbb{A}^n_K) = \{0\}$. $\square$

Ahora que hemos visto algunos ejemplos de ideales asociados a subconjuntos del espacio afín, en la siguiente proposición se tratarán las propiedades que cumplen estos ideales.

Proposición 1.20 *Para un campo K, los ideales asociados a subconjuntos del espacio afín $\mathbb{A}^n_K$ cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $I(\emptyset) = K[x_1, \ldots, x_n]$.

(b) Si $Y_1 \subseteq Y_2$ son subconjuntos de $\mathbb{A}^n_K$, entonces $I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$.

(c) Si $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{A}^n_K$, entonces $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$

(d) Si $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$, entonces $Y \subseteq Z(I(Y))$.

(e) Si $\mathfrak{a}$ es ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $\mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$.

(f) Si $Y \subseteq \mathbb{A}_K^n$, entonces $Z(I(Y)) = \overline{Y}$, donde $\overline{Y}$ es la cerradura de Y en la topología de Zariski para $\mathbb{A}_K^n$.

Demostración.

(a) Por contradicción.
Supongamos que $I(\emptyset) \neq K[x_1, \ldots, x_n]$. Esto significa que existe un polinomio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f \notin I(\emptyset)$, es decir, $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ y existe $P \in \emptyset$ tal que $f(P) \neq 0$. Esto resulta ser una contradicción, pues el conjunto vacío no tiene elementos.
Por lo tanto, $I(\emptyset) = K[x_1, \ldots, x_n]$.

(b) Sean $Y_1 \subseteq Y_2$ subconjuntos de $\mathbb{A}_K^n$. Para probar que $I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$, tomemos $f \in I(Y_2)$, esto significa que $f(P) = 0$ para todo $P \in Y_2$. Ahora, si $Q \in Y_1 \subseteq Y_2$, se tiene que $Q \in Y_2$ y así $f(Q) = 0$. Por lo tanto $f \in I(Y_1)$.

(c) Sean $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{A}_K^n$.
Sea $f \in I(Y_1 \cup Y_2)$. Entonces $f(P) = 0\ \forall P \in Y_1 \cup Y_2$. En particular, si $P \in Y_1 \subseteq Y_1 \cup Y_2$, se tiene que $f(P) = 0$, es decir, $f \in I(Y_1)$. De igual forma, si $P \in Y_2 \subseteq Y_1 \cup Y_2$, tenemos que $f(P) = 0$, por lo que $f \in I(Y_2)$. Por lo tanto, $f \in I(Y_1) \cap I(Y_2)$.
Por otro lado, si $f \in I(Y_1) \cap I(Y_2)$, entonces $f \in I(Y_1)$ y $f \in I(Y_2)$, esto es, $f(P) = 0\ \forall P \in Y_1$ y $f(Q) = 0\ \forall Q \in Y_2$. De esta forma, si $P \in Y_1 \cup Y_2$, entonces $P \in Y_1$ o $P \in Y_2$. En cualquier caso se tiene que $f(P) = 0$. Por lo tanto, $f \in I(Y_1 \cup Y_2)$.

(d) Sea $Y \subseteq \mathbb{A}_K^n$. Veamos que $Y \subseteq Z(I(Y))$.
Tomemos $P \in Y$ y $f \in I(Y)$, entonces $f(Q) = 0\ \forall Q \in Y$. Ya que $P \in Y$ se deduce que $f(P) = 0$. Por lo tanto, $f(P) = 0\ \forall f \in I(Y)$, es decir, $P \in Z(I(Y))$.

(e) Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Probemos que $\mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$.
Tomemos $f \in \mathfrak{a}$ y sea $P \in Z(\mathfrak{a})$, entonces $g(P) = 0\ \forall g \in \mathfrak{a}$. Como $f \in \mathfrak{a}$, se tiene que $f(P) = 0$, es decir, $f(P) = 0\ \forall P \in Z(\mathfrak{a})$. Por lo tanto, $f \in I(Z(\mathfrak{a}))$.

(f) Sea $Y \subseteq \mathbb{A}_K^n$. Por el inciso *d*) se tiene que $Y \subseteq Z(I(Y))$. Además $Z(I(Y))$ es un conjunto cerrado en la topología de Zariski para $\mathbb{A}_K^n$ y $\overline{Y}$ es el mínimo cerrado, con respecto a la contención, que contiene a Y, así concluimos que $\overline{Y} \subseteq Z(I(Y))$.
Por otro lado, sea $W \subseteq \mathbb{A}_K^n$ un cerrado tal que $Y \subseteq W$. Como W es cerrado, existe $\mathfrak{a}$ ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $W = Z(\mathfrak{a})$. Por lo tanto, $Y \subseteq Z(\mathfrak{a})$. Ahora, por el inciso *b*), se tiene que $I(Z(\mathfrak{a})) \subseteq I(Y)$ y por el

inciso e), $\mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$, de este modo, $\mathfrak{a} \subseteq I(Y)$.
De esta forma, por el inciso d) de la proposición 1.12, tenemos que $Z(I(Y)) \subseteq Z(\mathfrak{a}) = W$. Por lo tanto $Z(I(Y)) = \overline{Y}$.

□

Corolario 1.21 *Sean K un campo y $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$. Entonces $X = Z(I(X))$ si y solo si X es algebraico.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$.
Supongamos que $X = Z(I(X))$. Luego, como $I(X) \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, se sigue por definición que X es algebraico.
Ahora, supongamos que X es algebraico. Por el inciso f) de la proposición 1.20, se tiene que $Z(I(X)) = \overline{X}$; ya que X es algebraico, entonces es un conjunto cerrado con la topología de Zariski de $\mathbb{A}^n_K$, por lo que $X = \overline{X}$. Por lo tanto, $Z(I(X)) = X$. □

Corolario 1.22 *Sean K un campo y $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ subconjuntos algebraicos. Entonces $X = Y$ si y solo si $I(X) = I(Y)$.*

Demostración. Sean $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ subconjuntos algebraicos. Es inmediato que, si $X = Y$, entonces $I(X) = I(Y)$.
Por otro lado, si $I(X) = I(Y)$, al aplicar Z se tiene que:

$$Z(I(X)) = Z(I(Y)).$$

Además, como X y Y son algebraicos, por el corolario 1.21 se tiene que $Z(I(X)) = X$ y $Z(I(Y)) = Y$. De este modo, se deduce que:

$$\begin{aligned} X &= Z(I(X)) \\ &= Z(I(Y)) \\ &= Y. \end{aligned}$$

□

A pesar de que el corolario 1.22 nos indica que la correspondencia I es inyectiva cuando se restringe a conjuntos algebraicos, la siguiente observación nos habla acerca de una propiedad que no cumple tal correspondencia.

Observación 1.23 *En general, en el inciso e) de la proposición 1.20, no siempre se da la igualdad.*
Consideremos $K = \mathbb{R}$ y $\mathfrak{a} = \langle x^2 + y^2 + 1 \rangle \subsetneq \mathbb{R}[x, y]$.
Notemos que si $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, entonces $x_0^2 + y_0^2 \geq 0$, por lo cual $x_0^2 + y_0^2 + 1 \geq 1 > 0$; esto nos dice que $Z(\mathfrak{a}) = \emptyset$. Más aún, $I(Z(\mathfrak{a})) = I(\emptyset) = \mathbb{R}[x, y]$ por el inciso a) de la proposición 1.20.
Por lo tanto, $\mathfrak{a} \neq I(Z(\mathfrak{a}))$ pues $\mathbb{R}[x, y]$ contiene propiamente a $\mathfrak{a}$.

En la siguiente sección se analizarán, entre otras cosas, cuándo se puede dar la igualdad en el inciso e) de la proposición 1.20.

1.3. El teorema de los ceros de Hilbert (Nullstellensatz)

Hasta el momento, dado un campo K, tenemos una correspondencia entre los ideales de $K[x_1, \ldots, x_n]$ y los subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^n_K$ dada de la siguiente forma:

$$Z : \{ \text{ ideales de } K[x_1, \ldots, x_n]\} \longrightarrow \{ \text{ subconjuntos algebraicos de } \mathbb{A}^n_K\}$$
$$T \longmapsto Z(T)$$

De igual forma, la correspondencia entre los subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^n_K$ y los ideales de $K[x_1, \ldots, x_n]$ está dada de la siguiente manera:

$$I : \{ \text{ subconjuntos algebraicos de } \mathbb{A}^n_K\} \longrightarrow \{ \text{ ideales de } K[x_1, \ldots, x_n]\}$$
$$Y \longmapsto I(Y)$$

El principal objetivo de esta sección es determinar el comportamiento de estas correspondencias.
Primero notemos que, de acuerdo a las proposiciones 1.12 y 1.20, ambas correspondencias invierten contenciones; además, como ya se mencionó anteriormente, el corolario 1.22 indica que la correspondencia I es inyectiva.

Sin embargo, la correspondencia Z no es inyectiva, pues diferentes ideales pueden definir el mismo conjunto algebraico, por ejemplo, $\langle x\rangle$ y $\langle x^2\rangle$ son ideales de $K[x]$ distintos, no obstante, $Z(x) = Z(x^2) = \{0\}$; más adelante se verá que estos no son los únicos ideales que definen el mismo conjunto algebraico.

De hecho, si el campo K que se está tomando no es algebraicamente cerrado, también ocurren algunos problemas. Por ejemplo, si $K = \mathbb{R}, I_1 = \langle 1+x^2\rangle$ e $I_2 = \langle 1+x^2+x^4\rangle$, entonces $Z(I_1) = Z(1+x^2) = \emptyset$ y $Z(I_2) = Z(1+x^2+x^4) = \emptyset$. Más aún, en la observación 1.23 se puede ver que también existen ideales de $K[x, y]$ que están asociados con el conjunto algebraico $\emptyset$. Además, la observación 1.23 nos indica que en general estas correspondencias no son inversas una de la otra, lo que deseamos ahora es saber cómo debemos restringir estas correspondencias para que se comporten precisamente como inversas.

Para comenzar, ¿Basta considerar al campo K algebraicamente cerrado para resolver el problema de que distintos ideales de $K[x_1, \ldots, x_n]$ definen el conjunto algebraico $\emptyset \subset \mathbb{A}^n_K$?
Como un primer acercamiento a la respuesta de este planteamiento, en la siguiente proposición se observa el caso $n = 1$.

Proposición 1.24 *Sea K un campo algebraicamente cerrado. Si I es un ideal de $K[x]$ tal que $Z(I) = \emptyset$, entonces $I = K[x]$.*

Demostración. Sea I un ideal de $K[x]$ tal que $Z(I) = \emptyset$.
Ya que K es campo, $K[x]$ es un dominio de ideales principales, es decir, todo ideal de $K[x]$ es generado por un único elemento. Como I es ideal de $K[x]$, existe $f \in K[x]$ tal que $I = \langle f \rangle$. Por la proposición 1.10 se deduce que $Z(I) = Z(f)$, es decir, $Z(I)$ es el conjunto de raíces de f.
Por hipótesis, se tiene que $Z(I) = \emptyset$, por lo que $Z(f) = \emptyset$. Ahora, como K es algebraicamente cerrado, todo polinomio no constante en $K[x]$ tiene sus raíces en K, por consiguiente, la única posibilidad que se tiene para que $Z(f) = \emptyset$ es que $f = c$ con c una constante no cero.
Por lo tanto, $I = \langle c \rangle = \langle 1 \rangle = K[x]$. $\square$

La proposición 1.24 nos indica que $I = K[x]$ es el único ideal que está asociado al conjunto algebraico $\emptyset \subset \mathbb{A}^1_K$, cuando el campo K es algebraicamente cerrado.
De hecho, esto no solo ocurre para el caso $n = 1$, esta propiedad también se satisface para $K[x_1, \ldots, x_n]$ con $n > 1$. La condición de que K sea algebraicamente cerrado es suficiente para garantizar que el único ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$ que está asociado con el conjunto algebraico $\emptyset$ es el anillo de polinomios mismo. Este resultado, conocido como el Nullstellenzats débil, se probará más adelante. Además, es la base para introducir uno de los teoremas fundamentales de la geometría algebraica, el *Nullstellensatz* o *Teorema de los ceros de Hilbert*, que nos permitirá ver cuándo las correspondencias Z e I son inversas una de la otra.

Para presentar este teorema antes veremos resultados que son necesarios, algunos se introducirán a modo de recordatorio y se harán algunas demostraciones pertinentes.

1.3.1. Propiedades de Anillos e Ideales

Definición 1.25 *Para R y S anillos, se tienen las siguientes nociones.*

*(a) Un **morfismo de anillos** es una función $\phi : R \longrightarrow S$ que satisface:*

i) $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$, para cualesquiera $a, b \in R$.

ii) $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, para cualesquiera $a, b \in R$.

iii) $\phi(1_R) = 1_S$.

*(b) El **kernel** del morfismo de anillos ϕ, denotado por $ker(\phi)$, es el siguiente conjunto:*

$$ker(\phi) := \{x \in R : \phi(x) = 0\}.$$

(c) *Un morfismo biyectivo de anillos, $\phi : R \longrightarrow S$, es llamado un **isomorfismo**, en tal caso diremos que R y S son anillos isomorfos y lo escribiremos $R \cong^{\phi} S$.*

Observación 1.26 *Puede probarse que si $\phi : R \longrightarrow S$ es un morfismo de anillos, entonces $ker(\phi)$ es un ideal de R y la imagen de R bajo ϕ, es decir $\phi(R)$, es un subanillo de S.*

Ahora, si R es un anillo e I es un ideal de R, se puede construir el anillo cociente R/I formado por las clases laterales $r + I$ con $r \in R$. Para el lector interesado en más detalles acerca de esta construcción, se le recomienda consultar [12, pág. 10].

Proposición 1.27 *Si I es un ideal de un anillo R, entonces la función dada por:*

$$\begin{aligned} \rho : R &\longrightarrow R/I \\ x &\longmapsto x + I. \end{aligned}$$

es un morfismo de anillos suprayectivo. Además $ker(\rho) = I$, y así todo ideal I del anillo R es kernel de un morfirsmo de anillos.
Al morfismo ρ se le conoce como el morfismo canónico.

Demostración. Ver [3, pág. 243]. □

Los teoremas siguientes, relacionados con morfismos de anillos e ideales, son sumamente importantes y además nos ayudarán en la realización de pruebas posteriores.

Teorema 1.28 *(Primer teorema de isomorfismo para anillos)*
Sean R, S anillos y $\phi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos. Entonces el anillo cociente $R/ker(\phi)$ es isomorfo a $\phi(R)$. Es decir, $R/ker(\phi) \cong \phi(R)$.

Demostración. En [3, pág. 243] se puede consultar una demostración. □

Teorema 1.29 *(Tercer teorema de isomorfismo para anillos)*
Sean R un anillo e I, J ideales de R tales que $I \subseteq J$. Entonces J/I es un ideal de R/I y además $(R/I)/(J/I) \cong R/J$.

Teorema 1.30 *(Teorema de la correspondencia biyectiva de anillos)*
Si R es un anillo e I es un ideal de R, entonces el morfismo canónico $\rho : R \longrightarrow R/I$ induce una biyección entre el conjunto de ideales de R/I y el conjunto de ideales de R que contienen a I.

Demostración. Una demostración de este teorema se puede consultar en [12, pág. 12]. □

Las siguientes definiciones y resultados se introducen debido a que están involucrados en aspectos relacionados con conjuntos algebraicos que se tratan más adelante.

Definición 1.31 *Sean R un anillo y $\mathfrak{p}$ un ideal de R. Decimos que $\mathfrak{p}$ es un **ideal primo** si $\mathfrak{p} \neq R$ y $xy \in \mathfrak{p}$ implica que $x \in \mathfrak{p}$ o $y \in \mathfrak{p}$.*

Definición 1.32 *Sea R un anillo. Un **ideal maximal** de R es un ideal propio $\mathfrak{m} \subsetneq R$ tal que para cualquier otro ideal $\mathfrak{a}$ de R, con $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq R$, se tiene que $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$ o $\mathfrak{a} = R$. Es decir, los únicos ideales de R que contienen a $\mathfrak{m}$ son R y $\mathfrak{m}$.*

Proposición 1.33 *En un anillo R todo ideal propio está contenido en un ideal maximal.*

Demostración. Ver [3, pág. 254]. □

Proposición 1.34 *Sean R un anillo y $\mathfrak{m}$ un ideal propio de R. Entonces $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal si y solo si el anillo cociente $R/\mathfrak{m}$ es un campo.*

Demostración. Una demostración se puede consultar en [3, pág. 254]. □

Observación 1.35 *Si R es un campo, entonces R tiene un único ideal maximal, a saber $\{0\}$.*

Como se puede notar en la observación 1.35, existen anillos con exactamente un ideal maximal. En el capítulo 3 se observará la importancia y utilidad de esta clase de anillos, es por ello que presentamos la siguiente definición.

Definición 1.36 *Sea R un anillo. Diremos que R es un **anillo local** si tiene exactamente un ideal maximal.*

Proposición 1.37 *Sean R un anillo y $\mathfrak{m} \subsetneq R$ un ideal de R tal que x es unidad de R, para todo $x \in R \setminus \mathfrak{m}$. Entonces, R es un anillo local y $\mathfrak{m}$ es su único ideal maximal.*

Demostración. Consultar [1, Proposición 1.6, pág. 4]. □

1.3.2. Ideales radicales

Introducimos la siguiente definición debido a que, en el estudio de los conjuntos algebraicos, es de gran utilidad trabajar con una clase particular de ideales.

Definición 1.38 *Sean R un anillo e $I \subseteq R$ un ideal de R. Se define el* ***radical de*** *I como:*

$$\sqrt{I} := \{x \in R : x^r \in I \text{ para algún natural } r\}.$$

Se puede probar que $\sqrt{I}$ es un ideal. Además, se dice que I es un ***ideal radical*** *si $I = \sqrt{I}$.*

Observación 1.39 *Si I es un ideal de un anillo R, entonces $I \subseteq \sqrt{I}$.*

Es inmediato a partir de la definición, pues, si $x \in I$, se tiene que $x^1 = x \in I$, es decir $x \in \sqrt{I}$.

Las siguientes proposiciones nos permiten observar algunas propiedades relacionadas con los ideales radicales.

Proposición 1.40 *Si R es un anillo, entonces todo ideal primo de R es un ideal radical.*

Demostración. Sean R un anillo e I un ideal primo de R. Veamos que $I = \sqrt{I}$. De acuerdo a la observación 1.39, sabemos que $I \subseteq \sqrt{I}$.
Falta probar que $\sqrt{I} \subseteq I$. Para esto, consideremos $x \in \sqrt{I}$, esto significa que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $x^r \in I$.
De este modo, $x^r = x \cdot x^{r-1} \in I$, como I es un ideal primo, entonces $x \in I$ o $x^{r-1} \in I$. Si $x \in I$, la prueba ha terminado debido a que x fue un elemento arbitrario de I. Por otro lado, si $x^{r-1} \in I$, se tiene que $x^{r-1} = x \cdot x^{r-2} \in I$, y por un argumento similar, ya que I es un ideal primo se tiene que $x \in I$ o $x^{r-2} \in I$. Si $x \in I$, la prueba terminó, de lo contrario seguimos con esta idea hasta concluir que $x \in I$, de esta manera se tiene que $\sqrt{I} \subseteq I$.
Por lo tanto $\sqrt{I} = I$, es decir, I es un ideal radical. $\square$

Proposición 1.41 *Sean R un anillo e I, J ideales de R. Entonces*

$$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}.$$

Demostración. Sean I, J ideales de R.

Tomemos $x \in \sqrt{I \cap J}$, esto significa que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $x^r \in I \cap J$. Entonces $x^r \in I$ y $x^r \in J$, con $r \in \mathbb{N}$, por lo que $x \in \sqrt{I}$ y $x \in \sqrt{J}$, es decir, $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

Por otro lado, consideremos $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Luego, $x \in \sqrt{I}$ y $x \in \sqrt{J}$, esto implica que existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $x^r \in I$ y $x^s \in J$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $r \leq s$, por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $r + m = s$.
De esta forma, $x^s = x^{r+m} = x^r \cdot x^m$, ya que I es un ideal de R y $x^r \in I$, se sigue que $x^r \cdot x^m = x^s \in I$. De este modo, $s \in \mathbb{N}$ es tal que $x^s \in I$ y $x^s \in J$, por lo tanto $x \in \sqrt{I \cap J}$. $\square$

1.3.3. Localización de anilllos

A continuación presentaremos una noción de suma importancia en el estudio de objetos geométricos y algebraicos. Dicha noción nos permitirá, en capítulos posteriores, concluir diversos resultados en el estudio de las variedades.

Consideremos un anillo A y $S \subseteq A$ un **subconjunto multiplicativo**, es decir, $1 \in S$ y $ab \in S$ siempre que $a, b \in S$. Definimos la relación $\sim$ en $A \times S$ de la siguiente forma:

$$(a, s) \sim (b, t) \text{ si y solo si existe } u \in S \text{ tal que } u(at - bs) = 0.$$

Se deja como ejercicio para el lector probar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Denotaremos como $[a, s]$ o $\frac{a}{s}$ a la clase de equivalencia del elemento $(a, s) \in A \times S$, mientras que el conjunto cociente se denotará como $S^{-1}A$, es decir, $S^{-1}A := A \times S / \sim$. Como se expresa en el siguiente resultado, este conjunto resulta tener una estructura muy interesante. Omitiremos la prueba dada su sencillez y los fines de este trabajo.

Proposición 1.42 *Sean A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativo. Si definimos la suma y el producto en $S^{-1}A$ como sigue*

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st} \qquad y \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st},$$

estas operaciones están bien definidas y hacen de $S^{-1}A$ un anillo conmutativo con 1.

Definición 1.43 *Sean A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativo. El anillo $S^{-1}A$ recibe el nombre de **anillo de fracciones de A con respecto a S**.*
*Además, se tiene un morfismo de anillos $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$, dado por $\varphi(a) = \frac{a}{1}$, llamado **morfismo canónico**.*

Dentro de las primeras propiedades del anillo $S^{-1}A$, se encuentran las siguientes:

Proposición 1.44 *Sean $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativo de un anillo A y $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$ el morfismo canónico. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\varphi(s)$ es invertible en $S^{-1}A$, para todo $s \in S$.

(b) $\varphi(a) = 0$ si y solo si $as = 0$, para algún $s \in S$.

(c) Todo $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ es de la forma $\varphi(b)\varphi(t)^{-1}$, con $b \in A$ y $t \in S$.

(d) *Si $\psi : A \longrightarrow B$ es otro morfismo de anillos tal que $\psi(s)$ es invertible en B, para todo $s \in S$, entonces existe un único morfismo de anillos $\theta : S^{-1}A \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & S^{-1}A \arrow[dl, "\theta"] \\ B. & \end{tikzcd}$$

Demostración. Ver [11, Pág. 56]. □

Ejemplo 1.45 *Sean A un dominio entero y $S = A \setminus \{0\}$. Entonces S es un subconjunto multiplicativo. El anillo $S^{-1}A$ resulta ser un campo al que se le conoce como el* ***campo de fracciones de*** *A y se le denota por $Frac(A)$.*

Tenemos la siguiente propiedad del campo de fracciones de un dominio entero.

Corolario 1.46 *(**Propiedad universal del campo de fracciones**) Sea A un dominio entero, $\mathrm{Frac}(A)$ su campo de fracciones y $\varphi : A \longrightarrow \mathrm{Frac}(A)$ el morfismo canónico. Entonces, para cualquier otro morfismo inyectivo de anillos $\psi : A \longrightarrow K$, donde K es un campo, existe un único morfismo inyectivo de anillos $\theta : \mathrm{Frac}(A) \longrightarrow K$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathrm{Frac}(A) \arrow[dl, "\theta"] \\ K & \end{tikzcd}$$

En este caso, se tiene que $\theta(\frac{a}{b}) := \psi(a)\psi(b)^{-1}$, para todo $\frac{a}{b} \in \mathrm{Frac}(A)$.

Ejemplo 1.47 *Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo de A. Entonces el conjunto $S_{\mathfrak{p}} := A \setminus \mathfrak{p}$ es un subconjunto multiplicativo de A, por lo que tiene sentido construir el conjunto $S_{\mathfrak{p}}^{-1}A$. Es común, y lo haremos en el presente trabajo, usar la notación*

$$A_{\mathfrak{p}} := S_{\mathfrak{p}}^{-1}A.$$

Al anillo $A_{\mathfrak{p}}$ se le llama la ***localización de** A **en** $\mathfrak{p}$.*

Como es de suponerse, el anillo $S_{\mathfrak{p}}^{-1}A$ cumple diversas propiedades, al lector interesado le recomendamos consultar [11, Págs. 56-59].

Proposición 1.48 *Si A es un dominio entero, entonces $A = \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$, donde $\mathfrak{m}$ corre sobre todos los ideales maximales de A y las localizaciones son tomadas dentro del campo de fracciones $Frac(A)$, es decir, $A_{\mathfrak{m}} \subseteq Frac(A)$, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$.*

Demostración. Consideremos A un dominio entero.
Observemos que si $a \in A$, entonces para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subsetneq A$ se tiene que $\frac{a}{1} \in A_{\mathfrak{m}}$, por lo que podemos concluir que $A \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$.
Por otro lado, consideremos $s \in Frac(A)$ de tal forma que $s \in \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$. Supongamos además que $s \notin A$.
Consideremos el conjunto $J := \{a \in A : \ as \in A\}$, es claro que J es un ideal de A. Notemos que $1 \notin J$, por lo que J es un ideal propio de A; de esta forma, por la proposición 1.33, sabemos que existe $\mathfrak{M}$ un ideal maximal de A tal que $J \subseteq \mathfrak{M}$.
Como $s \in \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$, en particular $s \in A_{\mathfrak{M}}$, esto implica que $s = \frac{p}{q}$ con $p \in A$ y $q \in A \setminus \mathfrak{M}$. De lo anterior se concluye que $qs \in A$, es decir, $q \in J$, esto representa una contradicción con el hecho de que $J \subseteq \mathfrak{M}$ y $q \in A \setminus \mathfrak{M}$. □

Una vez presentados los resultados de teoría de anillos necesarios en nuestro estudio sobre conjuntos algebraicos e ideales asociados a estos, podemos continuar con los aspectos que desarrollamos al incio de esta sección. En primer lugar, la siguiente proposición nos permite ver una propiedad más de la correspondencia I, que nos permitirá considerar algunas restricciones de las correspondencias Z e I.

Proposición 1.49 *Sean K un campo y $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$. Entonces $I(V)$ es un ideal radical.*

Demostración. Para probar que $I(V)$ es un ideal radical veremos que $I(V) = \sqrt{I(V)}$.
Notemos primero que, por la observación 1.39, se tiene que $I(V) \subseteq \sqrt{I(V)}$.
Por otro lado, tomemos $f \in \sqrt{I(V)}$, es decir, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r \in I(V)$. Entonces $f^r(P) = 0$ para todo $P \in V$, ya que $f^r(P) = f(P)^r$, se concluye que $f(P)^r = 0$. De esta forma se tiene que $f(P) = 0$ para todo $P \in V$, es decir, $f \in I(V)$. □

La siguiente proposición nos permite observar de forma más general que la correspondencia Z no es inyectiva, más aún nos da una pauta de cuándo puede serlo.

Proposición 1.50 *Sean K un campo e I un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces $Z(I) = Z(\sqrt{I})$.*

Demostración. Consideremos I un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$.
Sea $P \in Z(I)$, es decir, $f(P) = 0$ para todo $f \in I$.
Para ver que $P \in Z(\sqrt{I})$, consideremos $g \in \sqrt{I}$, por definición esto significa que

existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $g^r \in I$, de esta forma, como $P \in Z(I)$, entonces $g^r(P) = 0$. Notemos ahora que $0 = g^r(P) = (g(P))^r$, por lo que se tiene que $g(P) = 0$. Esto nos permite concluir que $g(P) = 0 \quad \forall g \in \sqrt{I}$, por lo tanto $P \in Z(\sqrt{I})$.

Por otro lado, por la observación 1.39, se tiene que $I \subseteq \sqrt{I}$; y por la proposición 1.12, sabemos que Z invierte contenciones, por lo tanto $Z(\sqrt{I}) \subseteq Z(I)$. □

1.3.4. Álgebras de tipo finito y finitamente generadas

Como se mencionó antes, la proposición 1.50 indica que la correspondencia Z no es inyectiva cuando se consideran ideales de $K[x_1, \ldots, x_n]$ que no son radicales; la pregunta ahora es ¿Basta restringir la correspondencia Z a ideales radicales para que sea inyectiva y así las correspondencias Z e I sean inversas una de la otra?
Esto se podrá concluir más adelante cuando veamos algunos resultados más, donde el principal es el *Nullstellensatz*.

Los siguientes resultados son necesarios para la prueba que se dará del teorema de los ceros de Hilbert (Nullstellensatz). Se omitirá la demostración del Lema de Zariski y se pide al lector interesado en profundizar con los aspectos de los cuales habla este lema consultar [13, pág. 17].

Definición 1.51 *Sea A un anillo. Una **A-álgebra** es un anillo B que admite un morfismo de anillos $\psi : A \longrightarrow B$. En tal caso, diremos que B es una $A-$álgebra vía el morfismo de anillos $\psi : A \longrightarrow B$.*

Ejemplo 1.52 *Sea A un anillo. Como A tiene al 1 como elemento, se sigue que la siguiente correspondencia es un morfismo de anillos:*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z} &\longrightarrow A \\ n &\longmapsto n * 1, \end{aligned}$$

donde $n * 1$ es el resultado de sumar n veces el elemento 1, dentro del anillo A. De esta forma, todo anillo es una $\mathbb{Z}-$álgebra.

Ejemplo 1.53 *Sea K un campo. Consideremos la siguiente correspondencia:*

$$\begin{aligned} \psi : K &\longrightarrow K[x] \\ t &\longmapsto f_t \end{aligned}$$

donde f_t es el polinomio constante t. Es inmediato que ψ es un morfismo de anillos. Por lo tanto, el anillo de polinomios $K[x]$ es una K-álgebra.

Ejemplo 1.54 *Si K es un campo y $n \in \mathbb{N}$, entonces el anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$ es una K-álgebra. El morfismo que funciona es el que asocia a cada elemento $k \in K$ el polinomio constante k, tal y como en el ejemplo 1.53.*

Definición 1.55 *Sea A un anillo. Consideremos B y C dos A-álgebras vía los morfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow C$, respectivamente. Un* ***morfismo de A-álgebras*** *$\phi : B \longrightarrow C$ es un morfismo de anillos tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ B \arrow[rr, "\phi"] & & C \end{tikzcd}$$

es decir, $\phi \circ f = g$.

Definición 1.56 *Sean $A \subseteq B$ anillos tales que B es una $A-$álgebra. Entonces:*

(a) Se dice que B es una ***A-álgebra finita*** *si B es finitamente generado como A-módulo, es decir, si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in B$ tales que todo elemento $b \in B$ se puede expresar de la forma:*

$$b = b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n, \text{ con } b_i \in A.$$

(b) Decimos que B ***es de tipo finito sobre*** *A, o que B es una* ***$A-$álgebra finitamente generada sobre*** *A, si existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in B$ tales que todo elemento $b \in B$ puede ser expresado como un polinomio en $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ con coeficientes en A, es decir:*

$$b = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ donde } f \in A[x_1, \ldots, x_n].$$

Observación 1.57 *Si A es un anillo, se tienen las siguientes observaciones con respecto a $A-$álgebras como las dadas en la definición 1.51.*

(a) ***Toda $A-$álgebra finita es de tipo finito.***
En efecto, si B es una $A-$álgebra finita, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in B$ tales que cada $b \in B$ admite una expresión de la forma

$$b = b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n \text{ con } b_i \in A.$$

De este modo, B es una $A-$álgebra de tipo finito, ya que, para cada elemento $b \in B$, basta considerar el polinomio $f_b = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n \in A[x_1, \ldots, x_n]$, pues

$$\begin{aligned} b &= b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n \\ &= f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

(b) ***Existen $A-$álgebras de tipo finito que no son finitas.***
Consideremos K un campo y la $K-$álgebra $K[x]$.

Es claro que $x \in K[x]$ es tal que todo elemento $f \in K[x]$ puede ser expresado como un polinomio en x con coeficientes en K. Es decir, $K[x]$ es una $K-$álgebra de tipo finito.
Sin embargo, no existe una cantidad finita de elementos de $K[x]$ que pueda generar a todo el anillo $K[x]$. Esto significa que dicho anillo no es una $K-$álgebra finita.

(c) B ***es una*** $A-$***álgebra de tipo finito si y solo si, para alguna*** $n \in \mathbb{N}$, ***existe un morfismo suprayectivo de*** $A-$***álgebras:***

$$\psi : A[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow B.$$

Ejemplo 1.58 *El campo $\mathbb{C}$ de los números complejos es una $\mathbb{R}$-álgebra, pues la inclusión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ es un morfismo de anillos. Más aún, $\mathbb{C}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra finita; esto se debe a que existen $1, i \in \mathbb{C}$ de tal modo que todo elemento $z \in \mathbb{C}$ se puede expresar de la forma $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$.*
Además, de acuerdo a la observación 1.57, tenemos que $\mathbb{C}$ es una álgebra de tipo finito sobre $\mathbb{R}$.

Lema 1.59 *(Zariski)*
Sean $K \subseteq L$ campos, con L de tipo finito sobre K. Entonces L/K es una extensión algebraica y por lo tanto una extensión finita.

Demostración. Ver [13, pág. 20]. □

1.3.5. El Nullstellensatz débil y fuerte

El siguiente resultado nos muestra una caracterización de los ideales maximales del anillo $K[x_1, \dots, x_n]$. Dicha caracterización es sumamente importante e interesante, pues, entre otras cosas, nos ayudará a probar una versión del Nullstellensatz.

Proposición 1.60 *Sea K un campo algebraicamente cerrrado. Entonces todo ideal máximo $\mathfrak{m}$ del anillo de polinomios $K[x_1, \dots, x_n]$ es de la forma*

$$\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle,$$

con $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n_K$.

Demostración. Sea K un campo algebraicamente cerrado.

Primero veamos que si $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n_K$, entonces el ideal dado por $\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ es un ideal maximal de $K[x_1, \dots, x_n]$. Consideremos el morfismo evaluación en P:

$$\begin{aligned} ev_P : K[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow K \\ f &\longmapsto f(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Este morfismo es suprayectivo y además $ker(ev_P) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\rangle = \mathfrak{m}$. De esta forma, por el primer teorema de isomorfismo para anillos (teorema 1.28) se tiene que $K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m} \cong K$. Ya que K es campo, por la proposición 1.34, se tiene que $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $K[x_1, \dots, x_n]$.

Por otro lado, supongamos que $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $K[x_1, \dots, x_n]$. Por la proposición 1.34, se tiene que $L := K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$ es un campo. Consideremos el morfismo inclusión $i : K \hookrightarrow K[x_1, \dots, x_n]$ y el morfismo canónico $\rho : K[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow L$ y realicemos la composición de estos morfismos:

$$\psi := \rho \circ i : K \longrightarrow L$$

Notemos que tanto K como L son campos, además L es una K-álgebra generada por las clases $x_i + \mathfrak{m}$, por lo que es de tipo finito sobre K. De este modo, por el lema de Zariski (1.59), se concluye que L/K es una extensión algebraica sobre K, y, ya que K es algebraicamente cerrado, se tiene que $K \cong L$ mediante ψ.
Así, se deduce que, para cada $x_i + \mathfrak{m} \in L$, existe un único $a_i \in K$ tal que $\psi(a_i) = x_i + \mathfrak{m}$. Sin embargo, por definición de ψ:

$$\psi(a_i) = (\rho \circ i)(a_i) = \rho(a_i) = a_i + \mathfrak{m}.$$

Por consiguiente, $a_i + \mathfrak{m} = x_i + \mathfrak{m}$. Esto significa que $x_i - a_i \in \mathfrak{m}$, de donde se deduce que:

$$\mathfrak{p} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\rangle \subseteq \mathfrak{m}.$$

Más aún, en la primer parte de esta prueba se vio que el ideal $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal, por lo que concluimos que $\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\rangle$. $\square$

El teorema siguiente es una generalización del hecho que se probó en la proposición 1.24.

Teorema 1.61 *(Nullstellensatz versión débil)*
Sea K un campo algebraicamente cerrado. Si I es un ideal de $K[x_1, \dots, x_n]$ tal que $Z(I) = \emptyset$, entonces $I = K[x_1, \dots, x_n]$.

Demostración. Consideremos K un campo algebraicamente cerrado.
Para demostrar este teorema, mostraremos que si $I \subsetneq K[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal propio, entonces $Z(I) \neq \emptyset$.
Ya que I es un ideal propio, por la proposición 1.33, existe $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de $K[x_1, \dots, x_n]$ tal que $I \subseteq \mathfrak{m}$. Por la proposición 1.60, se tiene que existe un punto $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n_K$ tal que $\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\rangle$, y por lo tanto se concluye que $I \subseteq \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\rangle$.
De este modo, al considerar los conjuntos algebraicos asociados a estos ideales y por el inciso e) de la proposición 1.12, se deduce que:

$$Z(\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\rangle) \subseteq Z(I).$$

Además, $Z(\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle) = \{(a_1, \ldots, a_n)\} = \{P\}$, y por lo tanto $P \in Z(I)$, es decir, $Z(I) \neq \emptyset$. $\square$

El siguiente teorema es el más importante de esta sección, pues nos permitirá concluir cuándo las correspondencias Z e I son inversas una de la otra, y más adelante nos permitirá establecer relaciones entre aspectos topológicos y algebraicos.

Teorema 1.62 *(Nullstellensatz)*
Sea K un campo algebraicamente cerrado. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Demostración. Consideremos K un campo algebraicamente cerrado y $\mathfrak{a}$ un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Comenzaremos probando que $I(Z(\mathfrak{a})) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Esta prueba es más ingeniosa que la otra contención.
Notemos que $\mathfrak{a}$ es un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$ que resulta ser finitamente generado, por el teorema 1.8. De esta forma existen $f_1, \ldots, f_r \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$.
Consideremos $f \in I(Z(\mathfrak{a}))$, es decir, $f(P) = 0$ para todo $P \in Z(\mathfrak{a})$. Observemos que si $f = 0$, entonces la prueba está terminada. Supongamos entonces que $f \neq 0$.
Definimos el ideal $\hat{\mathfrak{a}} := \langle f_1, \ldots, f_r, 1 - yf \rangle \subseteq K[x_1, \ldots, x_n, y]$, es decir, estamos agregando una nueva variable.
Nuestro objetivo es probar que $Z(\hat{\mathfrak{a}}) = \emptyset$. Para esto, tomemos un elemento $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{A}_K^{n+1}$ y veamos que $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \notin Z(\hat{\mathfrak{a}})$. Ya que $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$, entonces $P \in Z(\mathfrak{a})$ o $P \notin Z(\mathfrak{a})$.
Supongamos primero que $P \in Z(\mathfrak{a})$, como $f \in I(Z(\mathfrak{a}))$ entonces se deduce que $f(P) = 0$. Por consiguiente, al evaluar el polinomio $1 - yf$ en el punto $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ tenemos que:

$$1 - a_{n+1} f(P) = 1 - 0 = 1 \neq 0.$$

Por lo tanto, $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \notin Z(\hat{\mathfrak{a}})$.
Supongamos ahora que $P \notin Z(\mathfrak{a})$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $f_i(P) \neq 0$. Observemos que podemos considerar a f_i como un polinomio en $n+1$ variables en el cual únicamente aparecen las variables $x_1, \ldots, x_n$.
Como $f_i(P) \neq 0$, entonces $f_i(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \neq 0$, por lo tanto concluimos que $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \notin Z(\hat{\mathfrak{a}})$.
Ya que $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ fue un elemento arbitrario de $\mathbb{A}_K^{n+1}$, entonces obtenemos que $Z(\hat{\mathfrak{a}}) = \emptyset$. Así, por el Nullstellensatz en la versión débil (Teorema 1.61), tenemos que $\hat{\mathfrak{a}} = K[x_1, \ldots, x_n, y]$, es decir, $1 \in \hat{\mathfrak{a}}$. Entonces:

$$1 = \sum_{i=1}^{r} p_i(x_1, \ldots, x_n, y) f_i + q(x_1, \ldots, x_n, y)(1 - yf)$$

con $p_i, q \in K[x_1, \ldots, x_n, y]$.
Debido a que $f \neq 0$, podemos considerar $y := \frac{1}{f(x_1,\ldots,x_n)}$.
Es así como obtenemos que en el anillo de fracciones de $K[x_1, \ldots, x_n]$, se tiene que:

$$1 = \sum_{i=1}^{r} p_i(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f})f_i + q(x_1, \ldots, x_n, y)(1 - \frac{1}{f} \cdot f) \tag{1.1}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} p_i(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f})f_i. \tag{1.2}$$

Podemos elegir un número m tal que al multiplicar ambos lados de la igualdad (1.2) por f^m se cancele el denominador. De esta forma, obtenemos que:

$$f^m = \sum_{i=1}^{r} g_i f_i$$

con $g_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$.
Por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m \in \langle f_1, \ldots, f_r \rangle = \mathfrak{a}$, es decir, $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Por otro lado, sea $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, es decir, $f^r \in \mathfrak{a}$ para algún $r \in \mathbb{N}$. Sea $P \in Z(\mathfrak{a})$, entonces $f^r(P) = 0$; más aún, $f^r(P) = (f(P))^r$ por lo que, si $f^r(P) = 0$, entonces $f(P) = 0$, ya que esto ocurre para todo $P \in Z(\mathfrak{a})$ se concluye que $f \in I(Z(\mathfrak{a}))$. $\square$

Utilizando el teorema anterior podremos probar el siguiente corolario.

Corolario 1.63 *Sean K un campo algebraicamente cerrado y $\mathfrak{a}$ un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces $\mathfrak{a} = I(Z(\mathfrak{a}))$ si y solo si $\mathfrak{a}$ es un ideal radical.*

Demostración. Consideremos K un campo algebraicamente cerrado y $\mathfrak{a}$ un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Supongamos que $\mathfrak{a} = I(Z(\mathfrak{a}))$. Por el Nullstellensatz (teorema 1.62), se tiene que $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$, de este modo:

$$\mathfrak{a} = I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{a}$ es un ideal radical.

Por otro lado, supongamos que $\mathfrak{a}$ es un ideal radical, es decir, $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Nuevamente, el teorema 1.62 nos permite concluir que $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$, por lo que:

$$\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} = I(Z(\mathfrak{a})).$$

Por lo tanto, $\mathfrak{a} = I(Z(\mathfrak{a}))$. $\square$

Una vez probados todos los resultados de esta sección, estamos listos para indicar las condiciones bajo las cuales las correspondencias Z e I son inversas una de la otra.

La proposición 1.49 nos indica que, para cualquier subconjunto Y del espacio afín, $I(Y)$ es un ideal radical. De igual forma la proposición 1.21 nos indica que la correspondencia Z es inversa izquierda de la correspondencia I. Más aún, el Nullstellensatz (1.62) nos permitió probar el corolario 1.63, el cual indica que si trabajamos con ideales radicales, entonces la correspondencia I es inversa izquierda de Z. Es así como concluimos que, si K es un campo algebraicamente cerrado, y consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned} R &:= \{ \text{ ideales radicales de } K[x_1, \ldots, x_n]\} \quad \text{y} \\ S &:= \{ \text{ subconjuntos algebraicos de } \mathbb{A}^n_K\}, \end{aligned}$$

entonces las correspondencias:

$$\begin{aligned} Z : R &\longrightarrow S \\ T &\longmapsto Z(T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I : S &\longrightarrow R \\ Y &\longmapsto I(Y) \end{aligned}$$

resultan ser correspondencias biyectivas, invierten inclusiones y son inversas una de la otra.
Este resultado nos permitirá establecer un puente entre aspectos topológicos y aspectos algebraicos.

Para avanzar en el estudio de los conjuntos algebraicos y los ideales asociados a ellos, en la siguiente sección trabajaremos con una categoría muy especial e importante de conjuntos algebraicos, los conjuntos irreducibles, que en varios casos nos simplificarán algunas cuestiones.

1.4. Conjuntos irreducibles

Observemos que algunos conjuntos algebraicos se pueden ver como la unión de dos o más conjuntos algebraicos, por ejemplo, en el espacio afín $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tomemos el conjunto algebraico $Z(xy - x)$. Podemos notar lo siguiente:

$$Z(xy - x) = Z(x(y - 1)) = Z(x) \cup Z(y - 1).$$

Más aún, $Z(x)$ y $Z(y - 1)$ son subconjuntos propios de $Z(xy - x)$ debido a que $(1, 1) \in Z(xy - x)$ pero $(1, 1) \notin Z(x)$. De igual manera se puede observar que $(0, 0) \in Z(xy - x)$ pero $(0, 0) \notin Z(y - 1)$. Esto nos indica que $Z(xy - x)$ se puede escribir como la unión de dos subconjuntos propios algebraicos.

En esta sección nos enfocaremos en estudiar a los conjuntos algebraicos que no se pueden representar como la unión de dos o más conjuntos algebraicos, por ello presentamos lo siguiente.

Definición 1.64 *Sean (X,τ) un espacio topológico y $Y \subseteq X$. La familia formada por los conjuntos de la forma $Y \cap U$, donde U es abierto en X, forma una topología para el conjunto Y. A dicha topología se le conoce como la* ***topología de subespacio para*** *Y.*

Definición 1.65 *Sean (X,τ) un espacio topológico y $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Se dice que Y es* ***irreducible*** *si no puede ser expresado como la unión $Y = Y_1 \cup Y_2$ de dos subconjuntos propios cerrados en Y con la topología de subespacio.*
Si Y no es irreducible decimos que Y es ***reducible****.*

Ejemplo 1.66 *Si K es un campo algebraicamente cerrado, entonces $\mathbb{A}^1_K$ es irreducible.*

En efecto, como se vio en el ejemplo 1.14, los subconjuntos propios cerrados en $\mathbb{A}^1_K$ son conjuntos finitos. Debido a que $\mathbb{A}^1_K$ no puede verse como unión de conjuntos finitos, pues K es algebraicamente cerrado y por tanto infinito, entonces el espacio afín $\mathbb{A}^1_K$ es irreducible.

A continuación se presentan algunos resultados de topología que nos permitirán observar las características de los conjuntos irreducibles.

Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Podemos considerar a la familia $\mathfrak{C}_A$ formada por todos los subconjuntos cerrados en X que contienen al conjunto A.
Notemos primero que $X \in \mathfrak{C}_A$, por lo que $\mathfrak{C}_A \neq \emptyset$. De esta forma, la intersección de esta familia resulta ser un cerrado por ser intersección de conjuntos cerrados, esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.67 *Sean (X,τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $\mathfrak{C}_A$ la familia formada por los subconjuntos cerrados en X que contienen a A. Se define la* ***cerradura de*** *A* ***en*** *X, denotada por $\overline{A}$, como la intersección de todos los subconjuntos cerrados que contienen a A, es decir,*

$$\overline{A} := \bigcap \mathfrak{C}_A.$$

Observación 1.68 *Si A es subconjunto de un espacio topológico X, entonces $\overline{A}$ es el conjunto cerrado más pequeño, respecto a la contención, que contiene a A.*

Esto es inmediato, pues si Z es un subconjunto cerrado en X tal que $A \subseteq Z$, entonces $Z \in \mathfrak{C}_A$ y de este modo $\overline{A} = \bigcap \mathfrak{C}_A \subseteq Z$.

Proposición 1.69 *Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y solo si $U \cap A \neq \emptyset$ para todo subconjunto U abierto en X tal que $x \in U$.*

Demostración. La demostración se puede seguir a partir de la definición de cerradura, puede consultarse una prueba en [4, pág. 13]. □

Definición 1.70 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $Y \subseteq X$, se dice que Y es denso en X si $\overline{Y} = X$.*

Proposición 1.71 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces $Y \subseteq X$ es denso en X si y solo si $A \cap Y \neq \emptyset$ para todo $A \subseteq X$ abierto no vacío.*

Demostración. Sea $Y \subseteq X$.

Supongamos que Y es denso en X. Esto significa que $\overline{Y} = X$, lo cual a su vez implica que $x \in \overline{Y}$ $\forall x \in X$.
Sea $\emptyset \neq A \subseteq X$ abierto en X. Como A es no vacío, entonces existe $x \in A$, por hipótesis se tiene que $x \in \overline{Y}$, por lo que, por la proposición 1.69, se tiene que $A \cap Y \neq \emptyset$. De esta forma se concluye que Y tiene intersección no vacía con cualquier abierto no vacío.

Por otro lado, supongamos que $A \cap Y \neq \emptyset$, para todo abierto $A \subseteq X$ no vacío.
Veamos que $\overline{Y} = X$.
Es inmediato que $\overline{Y} \subseteq X$ por definición de cerradura.
Falta ver que $X \subseteq \overline{Y}$. Consideremos $x \in X$ y $U \subseteq X$ abierto en X tal que $x \in U$. Como $U \neq \emptyset$, por hipótesis se tiene que $U \cap Y \neq \emptyset$. Por lo tanto, por la proposición 1.69, se concluye que $x \in \overline{Y}$ y de este modo $X = \overline{Y}$, es decir, Y es denso en X. □

Teniendo presentes los resultados anteriores de topología, presentamos la siguiente proposición que establece algunas propiedades de los conjuntos irreducibles. Más adelante se observará por qué en ocasiones es más conveniente trabajar con este tipo de conjuntos.

Proposición 1.72 *Sea (X, τ) es un espacio topológico, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) X es irreducible.

(b) Si U_1, U_2 son subconjuntos abiertos no vacíos de X, entonces $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

(c) Todo subconjunto abierto no vacío de X es denso en X.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$
Sean U_1, U_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X.
Procederemos por contradicción.
Supongamos que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Al tomar complementos, se observa que $X = X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$. Además, al ser complementos de conjuntos

abiertos, $X \setminus U_1$ y $X \setminus U_2$ son cerrados en X. Debido a que X es irreducible se tiene que $X = X \setminus U_1$ o $X = X \setminus U_2$, es decir, $U_1 = \emptyset$ o $U_2 = \emptyset$, lo cual es una contradicción.
Así, se concluye que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

$(b) \Rightarrow (c)$
Supongamos b) y tomemos $\emptyset \neq U$ subconjunto abierto en X. Veamos que U es denso en X.
Para esto consideremos $\emptyset \neq V$ subconjunto abierto en X, por hipótesis se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$, pues tanto U como V son abiertos no vacíos. Así, U es denso en X al tener intersección no vacía con todo subconjunto abierto de X.

$(c) \Rightarrow (a)$
Supongamos que todo subconjunto abierto no vacío de X es denso en X.
Supongamos que X es reducible. Entonces existen U_1, U_2 subconjuntos propios cerrados de X tales que $X = U_1 \cup U_2$. Al tomar complementos se deduce que $\emptyset = (X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2)$, donde $X \setminus U_1$ y $X \setminus U_2$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por tanto, se tiene que $\emptyset \neq X \setminus U_1$ es un abierto de X que no es denso en X, lo cual representa una contradicción con la hipótesis.
Por tal motivo, se tiene que X es irreducible. $\square$

Proposición 1.73 *Si (X, τ) es un espacio topológico y $Y \subseteq X$ es un conjunto irreducible, entonces $\overline{Y}$ es irreducible.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico. Tomemos $Y \subseteq X$ irreducible y veamos que $\overline{Y}$ es irreducible. Para esto, en vista de la proposición 1.72, basta probar que cualesquiera dos abiertos no vacíos de $\overline{Y}$ tienen intersección no vacía.
Sean Z_1, Z_2 abiertos no vacíos de $\overline{Y}$, entonces existen W_1, W_2 abiertos de X tales que $Z_1 = W_1 \cap \overline{Y}$ y $Z_2 = W_2 \cap \overline{Y}$. Notemos que $Z_1 \cap Y = (W_1 \cap \overline{Y}) \cap Y = W_1 \cap Y$, lo cual indica que $Z_1 \cap Y$ es un abierto no vacío de Y, de igual forma se tiene que $Z_2 \cap Y$ es abierto no vacío de Y. Como Y es irreducible, se tiene que $(Z_1 \cap Y) \cap (Z_2 \cap Y) \neq \emptyset$.
De este modo tenemos que $\emptyset \neq (Z_1 \cap Y) \cap (Z_2 \cap Y) = (Z_1 \cap Z_2) \cap Y \subseteq Z_1 \cap Z_2$.
Así, $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$ y por lo tanto $\overline{Y}$ es irreducible. $\square$

Proposición 1.74 *Si (X, τ) es un espacio topológico irreducible, entonces todo subconjunto no vacío abierto en X es irreducible.*

Demostración. Sean (X, τ) un espacio topológico irreducible y $\emptyset \neq Y \subseteq X$ abierto en X. Procedemos por contradicción.

Supongamos que Y es reducible, esto significa que $Y = Y_1 \cup Y_2$ con Y_1 y Y_2 subconjuntos cerrados propios en Y; esto implica que existen V_1, V_2 subconjuntos propios cerrados en X tales que $Y_1 = V_1 \cap Y$ y $Y_2 = V_2 \cap Y$. Observemos que V_1 debe ser propio, pues de lo contrario, si $V_1 = X$, entonces $Y_1 = V_1 \cap Y = X \cap Y = Y$, hecho que contradice que Y_1 es un subconjunto propio de Y. Similarmente se observa que V_2 debe ser un subconjunto propio de X.

Notemos ahora que $X = (X \setminus Y) \cup Y$ y por la hipótesis obtenemos que:

$$\begin{aligned} X &= (X \setminus Y) \cup Y \\ &= (X \setminus Y) \cup (Y_1 \cup Y_2) \\ &= (X \setminus Y) \cup ((V_1 \cap Y) \cup (V_2 \cap Y)) \\ &= (X \setminus Y) \cup ((V_1 \cup V_2) \cap Y) \\ &= ((X \setminus Y) \cup (V_1 \cup V_2)) \cap ((X \setminus Y) \cup Y). \end{aligned}$$

Además, ya que $(X \setminus Y) \cup Y = X$, entonces:

$$\begin{aligned} X &= ((X \setminus Y) \cup (V_1 \cup V_2)) \cap X \\ &= (X \setminus Y) \cup (V_1 \cup V_2) \end{aligned}$$

donde $X \setminus Y$ y $V_1 \cup V_2$ son subconjuntos cerrados en X.
Más aún, como $Y \neq \emptyset$, entonces $X \setminus Y$ es un subconjunto propio de X. De igual forma, $V_1 \cup V_2$ es un subconjunto propio de X, pues de lo contrario, si $X = V_1 \cup V_2$, entonces X sería reducible debido a que V_1 y V_2 son subconjuntos propios cerrados en X.
De esta forma, se concluye que X se puede expresar como unión de dos subconjuntos propios cerrados en X, es decir, X es reducible. Esto contradice la hipótesis de que X es irreducible; como la contradicción vino de suponer que Y es reducible, se concluye que Y es irreducible, que es lo que se quería probar. $\square$

Una vez observadas las propiedades de los conjuntos irreducibles, el objetivo principal es establecer relaciones entre características de conjuntos algebraicos del espacio afín $\mathbb{A}^n_K$ y características de ideales asociados a estos conjuntos algebraicos. Para la demostración del siguiente resultado, es pertinente recordar la definición 1.31 sobre ideales primos.

Proposición 1.75 *Sean K un campo y $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$ un subconjunto algebraico. Entonces V es irreducible si y solo si $I(V)$ es un ideal primo.*

Demostración. Tomemos $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$ algebraico.

Supongamos que V es irreducible y veamos que $I(V)$ es un ideal primo.
Tomemos $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $fg \in I(V)$. Para ver que $I(V)$ es primo, basta ver que $f \in I(V)$ o $g \in I(V)$.
Si $fg \in I(V)$, entonces $\{fg\} \subseteq I(V)$ y, por el inciso $d)$ de la proposición 1.12, se tiene que $Z(I(V)) \subseteq Z(fg)$. Ahora, por el inciso $d)$ de la proposición 1.20 sabemos que $V \subseteq Z(I(V))$, por lo tanto $V \subseteq Z(fg)$. Más aún, $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$, por lo que concluimos que $V \subseteq Z(f) \cup Z(g)$ y de esta forma $V = V \cap (Z(f) \cup Z(g)) = (V \cap Z(f)) \cup (V \cap Z(g))$, donde $V \cap Z(f)$ y $V \cap Z(g)$ son subconjuntos cerrados en V; como V es irreducible, tenemos que $V = V \cap Z(f)$ o $V = V \cap Z(g)$,

es decir, $V \subseteq Z(f)$ o $V \subseteq Z(g)$. Entonces $I(Z(f)) \subseteq I(V)$ o $I(Z(g)) \subseteq I(V)$. Además $f \in I(Z(f))$ y $g \in I(Z(g))$, por lo que $f \in I(V)$ o $g \in I(V)$. Por lo tanto $I(V)$ es un ideal primo.

Recíprocamente, supongamos que $I(V)$ es un ideal primo y probemos que V es irreducible.
Supongamos que existen W_1 y W_2 subconjuntos propios cerrados en V tales que $V = W_1 \cup W_2$, entonces $I(V) = I(W_1 \cup W_2)$. Además, por el inciso $c)$ de la proposición 1.20, tenemos que $I(V) = I(W_1 \cup W_2) = I(W_1) \cap I(W_2)$, de donde $I(V) \subset I(W_1), I(W_2)$, observemos que la contención es propia debido a que W_1 y W_2 son subconjuntos propios de V. De esta forma, existen $f \in I(W_1) \setminus I(V)$ y $g \in I(W_2) \setminus I(V)$; como $I(W_1)$ e $I(W_2)$ son ideales, entonces $fg \in I(W_1)$ y $fg \in I(W_2)$, en consecuencia $fg \in I(W_1) \cap I(W_2) = I(V)$.
Por lo tanto, existen $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $fg \in I(V)$ y $f, g \notin I(V)$, esto representa una contradicción con la hipótesis de que $I(V)$ es primo.
Ya que la contradicción viene de suponer la existencia de W_1 y W_2, concluimos que V es irreducible. $\square$

Ahora que encontramos una condición bajo la cual un conjunto algebraico es irreducible, presentamos la siguiente definición.

Definición 1.76 *Una* ***variedad afín*** *es un subconjunto cerrado irreducible de $\mathbb{A}^n_K$ con la topología de Zariski. Un subconjunto abierto de una variedad afín es una* ***variedad casi-afín****.*

Ejemplo 1.77 *Si K es un campo infinito, entonces $\mathbb{A}^n_K$ es una variedad afín.*
En efecto, si K es un campo infinito, por la proposición 1.19 se tiene que $I(\mathbb{A}^n_K) = \{0\}$, debido a que $\{0\} \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal primo, entonces por la proposición 1.75 se concluye que $\mathbb{A}^n_K$ es irreducible y por tanto es una variedad afín.
Más aún, al ser abierto en sí mismo, $\mathbb{A}^n_K$ es también una variedad casi-afín.

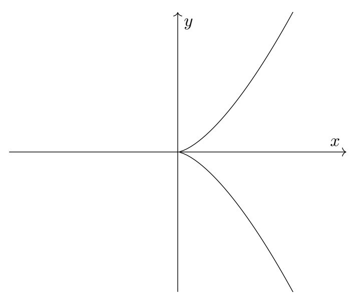
Ejemplo 1.78 *Consideremos K un campo algebraicamente cerrado. De acuerdo al ejemplo 1.14, los subconjuntos cerrados en $\mathbb{A}^1_K$ son los conjuntos finitos y el espacio total.*
De modo que, si $\emptyset \neq Y$ es un subconjunto propio cerrado en $\mathbb{A}^1_K$, entonces Y es finito, es decir, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.
Notemos ahora que si $n > 1$, entonces $Y = \{y_1\} \cup \{y_2, \ldots, y_n\}$. De igual forma, observemos que $\{y_1\}$ y $\{y_2, \ldots, y_n\}$ son subconjuntos propios de Y, porque $n > 1$. Más aún, $\{y_1\}$ es cerrado en Y, pues $\{y_1\} = \{y_1\} \cap Y$ y $\{y_1\}$ es cerrado en $\mathbb{A}^1_K$ por ser finito. Similarmente, se tiene que $\{y_2 \ldots, y_n\}$ es cerrado en Y.
Por lo tanto, Y se expresa como la unión de dos subconjuntos propios cerrados en Y, esto significa que Y es reducible. Esto se obtuvo al suponer que $n > 1$,

por lo que en $\mathbb{A}^1_K$ las únicas variedades afines son los conjuntos unitarios y el espacio total $\mathbb{A}^1_K$.

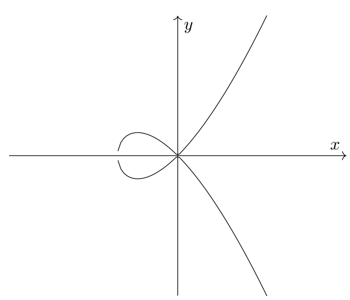
Ahora, al ser abierto en sí mismo, todo subconjunto unitario de $\mathbb{A}^1_K$ es una variedad casi-afín. Por otro lado, por el ejemplo 1.14, sabemos que los conjuntos abiertos de $\mathbb{A}^1_K$ son el conjunto vacío y los complementos de subconjuntos fiinitos. De este modo, en $\mathbb{A}^1_K$ las variedades casi-afines son el conjunto vacío, los conjuntos unitarios y los complementos de subconjuntos finitos.

Ejemplo 1.79 *Sea $f \in K[x,y]$ un polinomio irreducible. Ya que $K[x,y]$ es un dominio de factorización única, $\langle f \rangle$ es un ideal primo y de esta forma $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n_K$ es irreducible. Además, este conjunto algebraico es la curva afín dada por $f(x,y) = 0$.*
Ejemplos de esta situación son los siguientes conjuntos:

(a) *El conjunto algebraico $Z(y^2 - x^3)$ es irreducible pues $y^2 - x^3 \in \mathbb{R}[x,y]$ es un polinomio irreducible.*



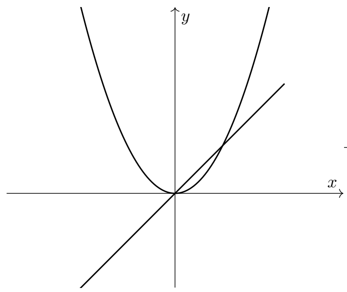
(b) *El conjunto $Z(y^2 - x^3 - x^2)$ es irreducible por ser el conjunto algebraico determinado por un polinomio irreducible.*

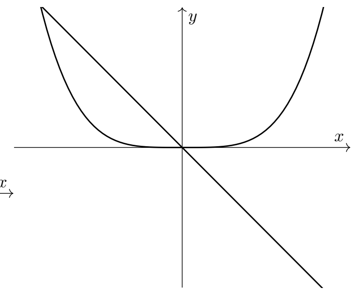


Ejemplo 1.80 *Los siguientes subconjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ no son irreducibles:*

(a) *El conjunto algebraico $Z((y-x)(y-x^2))$, pues, de acuerdo al inciso b) de la proposición 1.12, se tiene que $Z((y-x)(y-x^2)) = Z(y-x) \cup Z(y-x^2)$.*

(b) *El conjunto $Z((y+x)(y-x^4))$, debido a que $Z((y+x)(y-x^4)) = Z(y+x) \cup Z(y-x^4)$.*





A continuación, presentamos un lema referente a conjuntos irreducibles, este resultado será de suma utilidad en la siguente sección donde se habla acerca de la dimensión de variedades algebraicas.

Lema 1.81 *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$ una variedad afín y W un abierto de V, es decir, W es una variedad casi-afín.*
Sean $Z_0 \subsetneq Z_1 \subseteq W$ cerrados irreducibles de W distintos. Entonces se satisface lo siguiente:

(a) *Sea $\overline{W}$ la cerradura de W como subespacio de V. Entonces se tiene que $\overline{Z_0} \subsetneq \overline{Z_1} \subseteq \overline{W}$ son cerrados irreducibles de $\overline{W}$, considerando las cerraduras de Z_0 y Z_1 como subespacios de $\overline{W}$.*

(b) *Si no existen cerrados irreducibles N' y M' de W tales que*

$$Z_0 \subsetneq N' \subsetneq Z_1 \subsetneq M' \subsetneq W,$$

entonces no existen cerrados irreducibles N y M de $\overline{W}$ con

$$\overline{Z_0} \subsetneq N \subsetneq \overline{Z_1} \subsetneq M \subsetneq \overline{W}.$$

Demostración. Primero notemos los siguientes hechos.
Ya que W es un abierto no vacío de una variedad afín V, W es un subconjunto abierto de un irreducible y por tanto W es también irreducible (por la proposición 1.74). Además, por definición de topología de subespacio para V, se tiene que $W = V \cap U$, con U un abierto de $\mathbb{A}^n_K$. Más aún, W es subconjunto abierto de V que es irreducible, por lo que se concluye, por el inciso c) de la proposición 1.72, que W es denso en V, es decir, $\overline{W} = V$.

(a) Para hacer la prueba del primer inciso, comencemos describiendo los cerrados de W.
Como $W \subseteq V$, entonces W tiene la topología inducida de V, es decir, T es un cerrrado de W si y solo si $T = W \cap Y$, con Y un cerrado de V. A su vez, dado

que V tiene la topología inducida de subespacio del espacio afín $\mathbb{A}_K^n$, entonces $Y = V \cap Z$ donde Z es un cerrado de $\mathbb{A}_K^n$. De esta forma, cuando T es un cerrado de W, se cumple que

$$T = W \cap Y = (U \cap V) \cap (V \cap Z) = (U \cap V) \cap Z, \tag{1.3}$$

para algún cerrado Z de $\mathbb{A}_K^n$.

Consideremos ahora la cadena

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subseteq W \subseteq V = \overline{W},$$

donde Z_0 y Z_1 son cerrados irreducibles de W. Por la descripción hecha anteriormente, se tiene que

$$Z_0 = (U \cap V) \cap Y_0,\ Z_1 = (U \cap V) \cap Y_1,$$

donde Y_0, Y_1 son cerrados de $\mathbb{A}_K^n$.
Sea L un cerrado de V tal que $Z_0 \subseteq L$. Entonces $L = V \cap L'$, donde L' es un cerrado de $\mathbb{A}_K^n$. De esta forma, $Z_0 \subseteq V \cap L'$.
Consideremos $\overline{Z_0}$ la cerradura de Z_0 en V. Notemos que por definición de Z_0 se tiene que $Z_0 \subseteq V \cap Y_0 = V \cap (V \cap Y_0)$, donde $V \cap Y_0$ es un cerrado de $\mathbb{A}_K^n$ por ser intersección de cerrados, es decir, $V \cap Y_0$ es un cerrado de V que contiene a Z_0. Por consiguiente, por definición de cerradura, se tiene que $\overline{Z_0} \subseteq V \cap Y_0$. De esta manera:

$$Z_0 = Z_0 \cap \overline{Z_0} = ((U \cap V) \cap Y_0) \cap \overline{Z_0} = U \cap (V \cap Y_0) \cap \overline{Z_0} = U \cap \overline{Z_0}.$$

De la misma forma, concluimos que $Z_1 = U \cap \overline{Z_1}$. Además, notemos que si ocurriera que $\overline{Z_0} = \overline{Z_1}$, entonces se tendrá que

$$Z_0 = U \cap \overline{Z_0} = U \cap \overline{Z_1} = Z_1,$$

lo cual representa una contradicción, por lo tanto $\overline{Z_0} \subsetneq \overline{Z_1}$.

Ahora consideremos la contención $Z_0 \subseteq W \subseteq \overline{W} = V$, donde Z_0 es un subconjunto irreducible de W. Lo que se afirma es que Z_0 es irreducible en $\overline{W} = V$. Para demostrar esto, consideremos F, G cerrados de Z_0 (recordando que Z_0 tiene la topología inducida de subespacio de V) tales que $Z_0 = F \cup G$. Ya que F, G son cerrados de Z_0, se sigue que:

$$F = Z_0 \cap F_0,\ G = Z_0 \cap G_0,$$

con F_0, G_0 cerrados de V. De igual forma, como V tiene la topología de subespacio de $\mathbb{A}_K^n$, entonces

$$F_0 = V \cap F_1,\ G_0 = V \cap G_1,$$

donde F_1 y G_1 son cerrados de $\mathbb{A}_K^n$. De este modo

$$F = Z_0 \cap F_0 = ((U \cap V) \cap Y_0) \cap (V \cap F_1) = (U \cap V) \cap (Y_0 \cap F_1),$$

donde $Y_0 \cap F_1$ es un cerrado de $\mathbb{A}_K^n$ por ser intersección de cerrados. Liuego, por la descripción de los cerrados de W hecha anteriormente (ver 1.3), se tiene que F es un cerrado de W.
Como $F = F \cap Z_0$, se sigue que F es un cerrado de Z_0 con la topología inducida de subespacio de W.
De la misma forma, se tiene que G es un cerrado de Z_0 con la topología de subespacio de W. Ahora, el hecho de que Z_0 es irreducible con la topología de subespacio de W, implica que $F = Z_0$ o $G = Z_0$. Es así como queda probado que Z_0 es irreducible con la topología de subespacio de V. Por lo tanto, por la proposición 1.73, concluimos que $\overline{Z_0}$ y $\overline{Z_1}$ son subconjuntos irreducibles de V por ser cerraduras de irreducibles en V.
De este modo, se tiene la cadena $\overline{Z_0} \subsetneq \overline{Z_1} \subseteq \overline{W}$, donde $\overline{Z_0}$ y $\overline{Z_1}$ son cerrados irreducibles de $\overline{W}$.

(b) Supongamos que no existen cerrados irreducibles N' y M' de W tales que

$$Z_0 \subsetneq N' \subsetneq Z_1 \subsetneq M' \subsetneq W,$$

y supongamos también que existe un cerrado irreducible N de V, el cual, en particular, es un cerrado irreducible de $\mathbb{A}_K^n$, tal que

$$\overline{Z_0} \subseteq N \subseteq \overline{Z_1} \subseteq V.$$

Por la descripción de los cerrados de W hecha en el inciso anterior (ver 1.3), se tiene que $U \cap N = (U \cap V) \cap N = W \cap N$ es un cerrado de W. Notemos que $\emptyset \neq Z_0 = \overline{Z_0} \cap U \subseteq U \cap N$, por lo tanto $U \cap N$ es un irreducible de N (con la topología inducida) por ser un abierto no vacío del espacio irreducible N.
Lo que se afirma es que $U \cap N = W \cap N$ es irreducible en W.
Supongamos que $U \cap N$ no es irreducible con la topología de subespacio de W. Entonces tenemos que $U \cap N = A \cup B$ con A y B cerrados de $U \cap N$ tales que $A, B \subsetneq U \cap N$. Ya que $U \cap N$ tiene la topología inducida de subespacio de W, se sigue que $A = A' \cap (U \cap N)$ y $B = B' \cap (U \cap N)$, donde A' y B' son cerrados de W; además, W tiene la topología de subespacio inducida por V, de modo que $A' = W \cap A'' = (U \cap V) \cap A''$ y $B' = (U \cap V) \cap B''$ donde A'' y B'' son cerrados de V. Luego, $A'' = V \cap A'''$ y $B'' = V \cap B'''$, con A''' y B''' cerrados de $\mathbb{A}_K^n$. De este modo, se obtiene que:

$$\begin{aligned} A = A' \cap (U \cap N) &= ((U \cap V) \cap A'') \cap (U \cap N) \\ &= ((U \cap V) \cap (V \cap A''')) \cap (U \cap N) \\ &= (U \cap N) \cap A'''. \end{aligned}$$

Por otro lado, notemos que un cerrado de $U \cap N$, con la topología inducida de subespacio de N, es un subconjunto de la forma $(U \cap N) \cap Z$, con Z un subconjunto cerrado de N. Además, Z es cerrado de N si $Z = N \cap Z'$, donde Z' es un cerrado de V. Y de igual forma, $Z' = V \cap Z''$, con Z'' cerrado en $\mathbb{A}^n_K$. Por lo tanto:

$$(U\cap N)\cap Z = (U\cap N)\cap(N\cap Z') = (U\cap N)\cap Z' = (U\cap N)\cap(V\cap Z'') = (U\cap N)\cap Z'',$$

pues $N \subseteq V$. De esta forma, se puede concluir que A y B son subconjuntos cerrados de $U \cap N$, donde $U \cap N$ se está considerando con la topología de subespacio inducida por N.
Ya que $U \cap N = A \cup B$, con A y B cerrados de $U \cap N$ tales que $A, B \subsetneq U \cap N$, se tiene una contradicción con el hecho de que $U \cap N$ es irreducible como subespacio de N.
Por lo tanto, se concluye que $U \cap N = (U \cap V) \cap N = W \cap N$ es un cerrado irreducible de W.
Por otro lado, tenemos que

$$Z_0 = \overline{Z_0} \cap U \subseteq U \cap N \subseteq \overline{Z_1} \cap U = Z_1,$$

donde $U \cap N$ es irreducible en W.
Como estamos suponiendo que no existe N', cerrado irreducible de W, tal que $Z_0 \subsetneq N' \subsetneq Z_1$, tenemos que $U \cap N = Z_0$ o $U \cap N = Z_1$.
Si $U \cap N = Z_0$, afirmamos que la cerradura de Z_0 en V es N. En efecto, como N es un subconjunto irreducible de V y $U \cap N$ es un abierto no vacío de N, por la proposición 1.72 inciso c), se tiene que la cerradura de $U \cap N$ como subespacio de N es precisamente N. Ahora, como N es un cerrado de V, tenemos que la cerradura de $U \cap N$ como subespacio de V coincide con la cerradura como subespacio de N, por lo tanto $\overline{Z_0} = N$. De forma similar, si $U \cap N = Z_1$, se tiene que $\overline{Z_1} = N$.
Ahora, al suponer que existe un irreducible M de V tal que

$$\overline{Z_1} \subseteq M \subseteq V,$$

se obtendrán de forma similar irreducibles

$$Z_1 = \overline{Z_1} \cap U \subseteq M \cap U \subseteq U \cap V = W.$$

Por hipótesis, no existe M' cerrado irreducible de W, que satisfaga $Z_1 \subsetneq M' \subsetneq W$, por lo cual, se deduce que $M \cap U = Z_1$ o $M \cap U = W$. De la misma forma como se hizo anteriormente, tenemos que, si $M \cap U = Z_1$, entonces $M = \overline{Z_1}$, y por otro lado, si $M \cap U = W$, se sigue que $M = \overline{W} = V$.
De esta forma, queda probado que, si no existen cerrados irreducibles N' y M' de W tales que

$$Z_0 \subsetneq N' \subsetneq Z_1 \subsetneq M' \subsetneq W,$$

entonces no existen cerrados irreducibles N y M de $\overline{W}$ con

$$\overline{Z_0} \subsetneq N \subsetneq \overline{Z_1} \subsetneq M \subsetneq \overline{W}.$$

□

Una vez vistos algunos ejemplos y resultados acerca de conjuntos algebraicos irreducibles, veremos una construcción que es de suma importancia para el tratado de estos conjuntos y para resultados posteriores que además involucran resultados de teoría de anillos.

Así como el anillo $K[x_1, \ldots, x_n]$ está asociado con el espacio afín $\mathbb{A}^n_K$, a cada conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$ le asociaremos un anillo de la siguiente forma.

Definición 1.82 *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$ un conjunto algebraico. El* ***anillo de coordenadas afín de V*** *está dado por:*

$$K[V] = K[x_1, \ldots, x_n]/I(V).$$

Es decir, $K[V]$ es un anillo cociente.

Observación 1.83 *A los elementos $\psi \in K[V]$ se les puede asociar una función de V en K, a la cual también llamaremos ψ.*
Consideremos $\psi = f + I(V) \in K[V]$, con $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$.
Para $P = (a_1, \ldots, a_n) \in V$, se define:

$$\psi(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n).$$

Lo anterior está bien definido, pues dicho valor no depende del representante de la clase lateral ψ. En efecto, si $\psi = f + I(V) = g + I(V)$, entonces $f - g \in I(V)$ y de esta forma se obtiene que $(f-g)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) - g(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $P = (a_1, \ldots, a_n) \in V$. Por lo tanto, $\psi(P) = f(P) = g(P)$.

Una vez definido el anillo de coordenadas de un conjunto algebraico, podemos establecer una condición más, bajo la cual, un conjunto algebraico es irreducible, esto se observará en la proposición 1.86.

Definición 1.84 *Sea R un anillo conmutativo con 1. R es un* ***dominio entero*** *si para cualesquiera $a, b \in R$, tales que $ab = 0$, se tiene que $a = 0$ o $b = 0$.*

Proposición 1.85 *Sean R un anillo conmutativo y $\mathfrak{p}$ un ideal de R. Entonces $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de R si y solo si el anillo cociente $R/\mathfrak{p}$ es un dominio entero.*

Demostración. Ver [3, pág. 255]. □

A continuación se presenta un resultado que es consecuencia directa de la relación entre ideales primos y dominios enteros.

Proposición 1.86 *Sea $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ un conjunto algebraico, entonces V es irreducible si y solo si su anillo de coordenadas $K[V]$ es un dominio entero.*

Demostración. Sea $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ algebraico. Por la proposición 1.75, tenemos que V es irreducible si y solo si $I(V)$ es primo, y a su vez, $I(V)$ es primo si y solo si $K[x_1, \ldots, x_n]/I(V) = K[V]$ es dominio entero, esto último a partir de la proposición 1.85. □

Ejemplo 1.87 *En $\mathbb{A}_K^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in K\}$ los siguientes conjuntos algebraicos son irreducibles:*

1) $Z(x_i)$, con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Debido a que su anillo de coordenadas es isomorfo a $K[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$.

2) $Z(x_i, x_j)$, tal que $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$. Pues su anillo de coordenadas es isomorfo a $K[x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}]$.

3) $Z(x_i, x_j, x_k)$ con $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y diferentes entre sí. Ya que su anillo de coordenadas es isomorfo a $K[x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}]$.

Así, sucesivamente hasta el conjunto:

n) $Z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, al tener anillo de coordenadas isomorfo a K.

En estos ejemplos, la irreducibilidad se debe a la proposición 1.86, pues los anillos de coordenadas de los conjuntos algebraicos en cuestión, son isomorfos a un dominio entero.

La siguiente definición será muy útil para probar que todo conjunto algebraico se puede descomponer, de forma única, como unión de algebraicos irreducibles.

Definición 1.88 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que X es un* ***espacio topológico noetheriano*** *si satisface la condición de cadena descendente para subconjuntos cerrados, es decir, para cualquier cadena $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$ de cerrados existe un natural r tal que $Y_r = Y_{r+m}$, con $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.89 *Si K es un campo, entonces $\mathbb{A}_K^n$, con la topología de Zariski, es noetheriano.*

En efecto, tomemos $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$ una cadena descendente de cerrados en $\mathbb{A}_K^n$, es decir, de conjuntos algebraicos.
Por la proposición 1.20, tenemos que $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \ldots$ es una cadena ascendente de ideales en $K[x_1, \ldots, x_n]$, que como recordamos es un anillo noetheriano. Así, en vista de la definición 1.7, se tiene que esta cadena de ideales se estaciona. Por lo tanto, existe un natural r tal que $I(Y_r) = I(Y_{r+m})$, con $m \geq 1$.
Ya que Y_r es algebraico, por el teorema 1.63, sabemos que $Y_r = Z(I(Y_r))$. De

este modo, $Y_r = Z(I(Y_r)) = Z(I(Y_{r+m}))$*, para* $m \geq 1$*. De igual forma, como* Y_{r+m} *es algebraico,* $Z(I(Y_{r+m})) = Y_{r+m}$*. Por ende,* $Y_r = Y_{r+m}$*, para* $m \geq 1$*. Así, la cadena descendente de cerrados tomada inicialmente se estaciona y por lo tanto,* $\mathbb{A}^n_K$ *es un espacio topológico netheriano.*

Proposición 1.90 *Para un espacio topológico* (X, τ)*, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) X *es noetheriano.*

(b) Toda familia no vacía de subconjuntos cerrados tiene elemento minimal respecto a la contención.

(c) Toda familia no vacía de subconjuntos abiertos tiene elemento maximal respecto a la contención.

(d) X *satisface la condición de cadena ascendente para subconjuntos abiertos.*

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$

Supongamos que X es noetheriano, es decir, X satisface la condición de cadena descendente para subconjuntos cerrados. Probemos el inciso b).
Procederemos por contradicción.
Supongamos que existe una familia $\mathfrak{F}$ no vacía de subconjuntos cerrados que no tiene elemento minimal. Ya que $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, existe $F_0 \in \mathfrak{F}$, además F_0 no es elemento minimal de $\mathfrak{F}$, esto es, existe $F_1 \in \mathfrak{F}$ tal que $F_1 \subset F_0$. De igual forma F_1 no es elemento minimal de $\mathfrak{F}$, por lo que existe $F_2 \in \mathfrak{F}$ de tal modo que $F_2 \subset F_1$. Procediendo de la misma forma, podemos suponer que para $m \geq 1$ hemos construido $F_m \in \mathfrak{F}$ tal que $F_m \subset F_{m-1} \subset \ldots \subset F_0$, como F_m no es elemento minimal, se deduce que existe $F_{m+1} \in \mathfrak{F}$ que satisface $F_{m+1} \subset F_m \subset F_{m-1} \subset \ldots \subset F_0$. De esta manera se puede construir una cadena descendente, $\{F_n\}_{n\geq 0}$, de subconjuntos cerrados en X que no se estaciona. Esto representa una contradicción, pues, por hipótesis, X es noetheriano.
Por lo tanto, se concluye que toda familia no vacía de subconjuntos cerrados tiene elemento minimal respecto a la contención.

$(b) \Rightarrow (c)$

Supongamos el inciso b) y probemos que se verifica c).
Sea $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia no vacía de subconjuntos abiertos en X. Veamos que $\mathfrak{F}$ tiene elemento maximal respecto a la contención.
Notemos que $X \setminus F_\alpha$ es un subconjunto cerrado en X para cada $\alpha \in I$, por lo que $\mathfrak{G} = \{X \setminus F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia no vacía de subconjuntos cerrados en X. Por b) se tiene que la familia $\mathfrak{G}$ tiene elemento minimal, es decir, existe $\beta \in I$ tal que no existe $\alpha \in I$ que satisfaga $X \setminus F_\alpha \subset X \setminus F_\beta$, donde la contención es propia. Tomando complementos obtenemos que existe $\beta \in I$ tal que F_β no

está contenido propiamente en F_α para todo $\alpha \in I$. Por lo tanto, $F_\beta \in \mathfrak{F}$ es el elemento maximal de $\mathfrak{F}$ buscado.

$(c) \Rightarrow (d)$

Supongamos que se satisface el inciso c) y probemos que se cumple d).
Consideremos $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots$ una cadena ascendente de subconjuntos abiertos en X. Veamos que dicha cadena se estaciona.
Podemos considerar la familia $\mathfrak{F} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, la cual es una familia no vacía de subconjuntos abiertos. Por hipótesis se tiene que $\mathfrak{F}$ tiene elemento maximal, es decir, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que U_r no está contenido propiamente en U_k para todo $k \in \mathbb{N}$. Sin embargo, como la cadena de abiertos es ascendente, se tiene que $U_r \subseteq U_t$ para todo $t \geq r$ y dado que la contención no puede ser propia, entonces $U_r = U_t$ $\forall t \geq r$. Por lo tanto, toda cadena ascendente de abiertos en X se estaciona.

$(d) \Rightarrow (a)$

Supongamos que X satisface la condición de cadena ascendente para subconjuntos abiertos. Veamos que X es noetheriano.
Tomemos $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$ una cadena descendente de subconjuntos cerrados en X, el objetivo es probar que esta cadena se estaciona.
Notemos que al tomar complementos a cada uno de estos subconjuntos cerrados obtenemos la cadena $X \setminus Y_1 \subseteq X \setminus Y_2 \subseteq \ldots$, que es una cadena ascendente de subconjuntos abiertos en X. Por hipótesis existe un natural r tal que $X \setminus Y_r = X \setminus Y_{r+m}$, con $m \geq 1$. De este modo, $r \in \mathbb{N}$ es tal que $Y_r = Y_{r+m}$, para $m \geq 1$. Por lo tanto, toda cadena descendente de subconjuntos cerrados en X se estaciona, es decir, X es noetheriano. $\square$

Una vez probadas estas equivalencias para espacios topológicos noetherianos podemos probar la siguiente proposición que nos permitirá obtener una representación para todo subconjunto no vacío algebraico del espacio afín $\mathbb{A}^n_K$

Proposición 1.91 *Sea (X, τ) un espacio topológico noetheriano. Entonces todo subconjunto no vacío cerrado en X se puede expresar como la unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles. Es decir, si $\emptyset \neq Y \subseteq X$ es cerrado en X, entonces $Y = Y_1 \cup Y_2 \ldots \cup Y_s$ donde cada conjunto Y_i es un subconjunto cerrado irreducible. Si además se pide que $Y_i \nsubseteq Y_j$ para $i \neq j$, entonces los conjuntos Y_i están univocamente determinados y son llamados las componentes irreducibles de Y.*

Demostración. Veamos primero que tal representación existe para cada subconjunto cerrado en X.
Sea $\mathfrak{F}$ la familia de los subconjuntos no vacíos cerrados en X que no pueden ser representados como unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles. Supongamos que $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, ya que X es noetheriano, por el teorema 1.90, se tiene que $\mathfrak{F}$ tiene elemento minimal, es decir, existe $Y \in \mathfrak{F}$ tal que, si $W \in \mathfrak{F}$, entonces

$W \not\subset Y$, o de forma equivalente, si W es subconjunto propio de Y, entonces $W \notin \mathfrak{F}$.

Ya que $Y \in \mathfrak{F}$, $Y \neq \emptyset$ es un subconjunto cerrado en X y no se puede escribir como unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles. De esta forma, Y no es irreducible. Luego existen Z, W subconjuntos propios no vacíos cerrados en Y tales que $Y = Z \cup W$. Ya que Y es elemento minimal de $\mathfrak{F}$, entonces $Z, W \notin \mathfrak{F}$, por lo cual, Z y W se pueden escribir como unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles. Así, $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_r$ y $W = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_t$, donde Z_i y W_j son subconjuntos cerrados irreducibles. De este modo $Y = Z \cup W = (Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_r) \cup (W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_t)$, por consiguiente Y es unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles, esto representa una contradicción con el hecho de que $Y \in \mathfrak{F}$. Por lo tanto, $\mathfrak{F} = \emptyset$, es decir, todo subconjunto no vacío cerrado en X puede ser representado como unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles.

Para la unicidad, supongamos que $Y = Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_r = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_t$, donde Z_i y W_m son subconjuntos cerrados irreducibles tales que $Z_i \not\subseteq Z_j$ si $i \neq j$ y $W_m \not\subseteq W_n$ si $m \neq n$. Notemos que $W_1 \subseteq Y = Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_r$, por lo que $W_1 = W_1 \cap (Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_r) = \bigcup_{i=1}^{r} (W_1 \cap Z_i)$. Ya que W_1 es irreducible y cada $W_1 \cap Z_i$ es un subconjunto propio cerrado en W_1, entonces $W_1 = W_1 \cap Z_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, r\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $j = 1$, y así $W_1 \subseteq Z_1$. De forma análoga, tenemos que $Z_1 \subseteq Y = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_t$, y así se sigue que $Z_1 = Z_1 \cap (W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_t) = \bigcup_{i=1}^{t} (Z_1 \cap W_i)$. Ahora, como Z_1 es irreducible, $Z_1 = Z_1 \cap W_s$ para algún $s \in \{1, \ldots, t\}$. Por lo tanto, $Z_1 \subseteq W_s$. Así, obtenemos que $W_1 \subseteq Z_1 \subseteq W_s$, sin embargo, $W_m \not\subseteq W_n$ si $m \neq n$, de modo que $s = 1$ y entonces $W_1 = W_s$. Por lo tanto, $W_1 = Z_1$.
Consideremos ahora al conjunto $U = Z_2 \cup \ldots \cup Z_r = W_2 \cup \ldots \cup W_t$. Procediendo por inducción, obtenemos que $r = t$ y $Z_i = W_i$ para todo índice $i \in \{1, \ldots, r\}$. De este modo, queda probada la unicidad de la representación para conjuntos cerrados. $\square$

Corolario 1.92 *Todo conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}_K^n$ se puede expresar como unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles no contenidos uno en otro, es decir, como unión finita de variedades afines, no contenidas una en otra.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{A}_K^n$ algebraico, es decir, X es cerrado en $\mathbb{A}_K^n$ con la topología de Zariski. Por el ejemplo 1.89, tenemos que $\mathbb{A}_K^n$ es noetheriano, por lo que, gracias a la proposición 1.91, se concluye que todo subconjunto cerrado del espacio afín se puede ver como unión finita de cerrados irreducibles. Como X es cerrado en $\mathbb{A}_K^n$, se puede expresar como unión finita de cerrados irreducibles no contenidos uno en otro, es decir, X se expresa como unión finita de variedades afines no contenidas una en otra. □

El corolario 1.92 nos dice que todo conjunto algebraico se puede expresar como unión finita de variedades afines, a continuación veremos algunos ejemplos de tales expresiones.

Ejemplo 1.93 *Consideremos $K = \mathbb{R}$ y el conjunto algebraico $Z(xz, yz) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Notemos que $xz = 0$ si $x = 0$ o $z = 0$, de igual forma $yz = 0$ si $y = 0$ o $z = 0$; de esta forma $xz = yz = 0$ si $x = y = 0$ o $z = 0$. Por lo que $Z(xz, yz) = Z(x, y) \cup Z(z)$, donde estos últimos conjuntos algebraicos son irreducibles. Por lo tanto, $Z(x, y)$ y $Z(z)$ son las componentes irreducibles de $Z(xz, yz)$ el cual resulta ser la únion del plano xy, que corresponde a $Z(z)$, y el eje z, que corresponde a $Z(x, y)$.*

Ejemplo 1.94 *Sea $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, con K un campo. Consideremos $f = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la descomposición de f en factores irreducibles tales que los polinomios p_i son distintos. Entonces se tiene que*

$$\langle f \rangle = \langle p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \rangle = \bigcap_{i=1}^{k} \langle p_i^{\alpha_i} \rangle.$$

Por lo que

$$\sqrt{\langle f \rangle} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{k} \langle p_i^{\alpha_i} \rangle}.$$

Ahora, la proposición 1.41 nos permite concluir que

$$\sqrt{\langle f \rangle} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{k} \langle p_i^{\alpha_i} \rangle} = \bigcap_{i=1}^{k} \sqrt{\langle p_i^{\alpha_i} \rangle}.$$

Veamos ahora que $\sqrt{\langle p_i^{\alpha_i} \rangle} = \langle p_i \rangle$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.
Tomemos $g \in \langle p_i \rangle$, es decir, $g = hp_i$ con $h \in K[x_1 \ldots, x_n]$.
Luego $g^{\alpha_i} = h^{\alpha_i} p_i^{\alpha_i} \in \langle p_i^{\alpha_i} \rangle$. Por lo tanto, $g \in \sqrt{\langle p_i^{\alpha_i} \rangle}$ pues $\alpha_i \in \mathbb{N}$.
Por otro lado, si $g \in \sqrt{\langle p_i^{\alpha_i} \rangle}$ entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $g^r \in \langle p_i^{\alpha_i} \rangle$, es decir, $g^r = hp_i^{\alpha_i}$ donde $h \in K[x_1 \ldots, x_n]$. Consideremos $g = g_1^{m_1} \cdots g_s^{m_s}$ la descomposición de g en factores irreducibles, entonces $g_1^{m_1 r} \cdots g_s^{m_s r} = g^r = hp_i^{\alpha_i}$.
Ya que p_i es irreducible y $K[x_1 \ldots, x_n]$ es un dominio de factorización única, p_i es un múltiplo constante de algún g_j. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p_i = tg_1$, con $t \in K$. Así, se concluye que g_1 es un múltiplo constante de p_i, digamos $g_1 = wp_i$. Por lo tanto,

$$g = g_1^{m_1} \cdots g_s^{m_s} = (wp_i)^{m_1} \cdots g_s^{m_s} \in \langle p_i \rangle.$$

De esta forma, obtenemos que

$$\sqrt{\langle f\rangle} = \bigcap_{i=1}^{k} \sqrt{\langle p_i^{\alpha_i}\rangle} = \bigcap_{i=1}^{k} \langle p_i\rangle.$$

Por la proposición 1.10, sabemos que $Z(f) = Z(\langle f\rangle)$, *y, por la proposición 1.50, se tiene que* $Z(\langle f\rangle) = Z(\sqrt{\langle f\rangle})$. *Por consiguiente*

$$Z(f) = Z(\sqrt{\langle f\rangle}) = Z\left(\bigcap_{i=1}^{k} \langle p_i\rangle\right).$$

Además por el inciso $d)$ *de la proposición 1.12, se tiene que:*

$$Z\left(\bigcap_{i=1}^{k} \langle p_i\rangle\right) = \bigcup_{i=1}^{k} Z(\langle p_i\rangle).$$

Y por lo tanto,

$$Z(f) = \bigcup_{i=1}^{k} Z(p_i).$$

Más aún, como los polinomios p_i *son irreducibles,* $\langle p_i\rangle$ *es un ideal primo para cada* i. *Así, por la proposición 1.75, se concluye que* $Z(p_i)$ *es un conjunto algebraico irreducible. De igual forma, el hecho de que* p_i *sea irreducible implica que, si* $i \neq j$, *entonces* $Z(p_i) \nsubseteq Z(p_j)$.
Es así como se concluye que

$$Z(f) = \bigcup_{i=1}^{k} Z(p_i)$$

es la descomposición de la hipersuperficie $Z(f)$ *en sus componentes irreducibles.*

Hemos visto que los conjuntos irreducibles son muy importantes en el estudio de los conjuntos algebraicos. De hecho, el análisis que hemos venido haciendo sobre estos conjuntos nos permitirá relacionar aspectos topológicos con aspectos algebraicos. Esto se hará en la siguiente sección.

1.5. Dimensión de variedades afines

Definición 1.95 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Se define* ***la dimensión de*** X *como el máximo de los enteros* n *tales que existe una cadena de* $n+1$ *subconjuntos cerrados irreducibles de* X, *todos ellos distintos:*

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n.$$

En tal caso, se dirá que la cadena tiene longitud n. *La dimensión de* X *se denota como* $dim(X)$.

Definición 1.96 *Si Z es una variedad afín o una variedad casi-afín, la* ***dimensión de*** *Z es su dimensión como espacio topológico.*

Ejemplo 1.97 *Sea K un campo algebraicamente cerrado. Entonces la dimensión de $\mathbb{A}_K^1$ es 1.*

Por el ejemplo 1.78, tenemos que los únicos subconjuntos cerrados irreducibles de $\mathbb{A}_K^1$ son los conjuntos unitarios y el espacio total. Por consiguiente, las cadenas de longitud máxima de subconjuntos cerrados irreducibles de $\mathbb{A}_K^1$ sólo constan de dos elementos, a saber, las cadenas que son de la forma $\{P\} \subsetneq \mathbb{A}_K^1$, con $P \in \mathbb{A}_K^1$. Por lo tanto, $dim(\mathbb{A}_K^1) = 1$.

Proposición 1.98 *Si (X, τ) es un espacio topológico y $Y \subseteq X$, entonces se tiene que $dim(Y) \leq dim(X)$.*

Demostración. Sea una cadena de subconjuntos cerrados irreducibles de Y:

$$Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n.$$

Para cada conjunto Y_i, consideremos la cerradura $\overline{Y_i}$ en X. Claramente estos conjuntos son cerrados de X y además, por la proposición 1.73, tenemos que los conjuntos $\overline{Y_i}$ son irreducibles.
Más aún, si existieran i, j tales que $\overline{Y_i} = \overline{Y_j}$, tendríamos que

$$Y_i = Y \cap \overline{Y_i} = Y \cap \overline{Y_j} = Y_j$$

lo cual contradice la hipótesis. De este modo, obtenemos la cadena

$$\overline{Y_0} \subsetneq \overline{Y_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{Y_n}$$

compuesta por subconjuntos cerrados irreducibles de X, lo cual implica que $dim(Y) \leq dim(X)$. $\square$

Proposición 1.99 *Sea (X, τ) es un espacio topológico que es cubierto por una familia de conjuntos abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$, es decir, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Entonces*

$$dim(X) = sup\{dim(U_i) : i \in I\}.$$

Demostración. Primero analicemos el caso en que $dim(X)$ es finita. Sea $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $n = dim(X)$. Consideremos una familia de conjuntos abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de tal forma que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Notemos que $U_i \subseteq X$ para todo $i \in I$, por lo que, de acuerdo a la proposición 1.98, se tiene que $dim(U_i) \leq dim(X) = n$ para todo $i \in I$; esto nos permite concluir que $sup\{dim(U_i) : i \in I\} \leq n$.
Por otro lado, podemos considerar una cadena

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n \subseteq X$$

de subconjuntos cerrados irreducibles de X todos ellos distintos. Como la cadena considerada es de longitud máxima, entonces X_0 debe ser un conjunto unitario, de lo contrario, se podría obtener una cadena de longitud mayor agregando un punto de X_0 al inicio de la cadena, pues estos conjuntos unitarios son cerrados e irreducibles en X. De esta forma, se tiene que $X_0 = \{P\}$. Ahora, como X es cubierto por lo conjuntos U_i, entonces existe $j \in I$ de tal forma que $P \in U_j$. Más aún, $P \in X_i$ para todo $i \leq n$, por lo que $U_j \cap X_i \neq \emptyset$ para todo $i \leq n$.
Observemos que $U_j \cap X_i$ es abierto en X_i, el cual es un conjunto irreducible. Por lo que, de acuerdo a la proposición 1.74, se concluye que cada conjunto $U_j \cap X_i$ es irreducible al considerarlo como subespacio de X_i.

Veamos que $U_j \cap X_i$ es irreducible como subespacio de U_j.
Por contradicción. Supongamos que $U_j \cap X_i = W_1 \cup W_2$, con $W_1, W_2 \subsetneq U_j \cap X_i$ subconjuntos cerrados en $U_j \cap X_i$ con la topología de subespacio de U_j. Luego, existen Y_1, Y_2 subconjuntos cerrados de U_j (con la topología de subespacio de X) de tal forma que $W_1 = (U_j \cap X_i) \cap Y_1$ y $W_2 = (U_j \cap X_i) \cap Y_2$. Como Y_1 es cerrado en U_j con la topología de subespacio de X, entonces $Y_1 = U_j \cap Z_1$ con Z_1 subconjunto cerrado de X; de igual forma, existe Z_2 un subconjunto cerrado de X de tal modo que $Y_2 = U_j \cap Z_2$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} W_1 &= (U_j \cap X_i) \cap Y_1 = (U_j \cap X_i) \cap (U_j \cap Z_1) \\ &= (U_j \cap X_i) \cap Z_1 = (U_j \cap X_i) \cap (X_i \cap Z_1). \end{aligned}$$

Notemos ahora que $T_1 := X_i \cap Z_1$ es un subconjunto cerrado en X_i (con la topología de subespacio de X), por consiguiente se concluye que

$$W_1 = (U_j \cap X_i) \cap T_1,$$

es decir, W_1 es un subconjunto propio cerrado de $U_j \cap X_i$ con la topología de subespacio de X_i. De igual forma, se concluye que $W_2 = (U_j \cap X_i) \cap (X_i \cap Z_2)$ es un subconjunto propio cerrado de $U_j \cap X_i$ con la topología de subespacio de X_i.
Por lo tanto, se sigue que:

$$U_j \cap X_i = W_1 \cup W_2,$$

con W_1, W_2 son subconjuntos propios cerrados de $U_j \cap X_i$ con la topología de subespacio de X_i. Este hecho contradice la hipótesis de que $U_j \cap X_i$ es irreducible al considerarlo como subespacio de X_i.
De esta forma, se concluye que $U_j \cap X_i$ es irreducible como subespacio de U_j, como se quería.

Ahora notemos que si $i \leq n$, entonces $U_j \cap X_i$ es un conjunto cerrado en U_j con la topología de subespacio (por ser intersección de U_j con un cerrado de X).

Afirmamos que $U_j \cap X_i \subsetneq U_j \cap X_{i+1}$ para todo $i \leq n$. Para esto, veamos que $(X_{i+1} \setminus X_i) \cap U_j \neq \emptyset$. Por contradicción, supongamos que $(X_{i+1} \setminus X_i) \subseteq U_j^c$.
Bajo esta hipótesis, afirmamos que $X_{i+1} = X_i \cup (X_{i+1} \cap U_j^c)$. En efecto, si $x \in X_{i+1}$, tenemos dos casos, $x \in X_i$ o $x \notin X_i$. En caso de que $x \in X_i$, se tiene que $x \in X_i \cup (X_{i+1} \cap U_j^c)$; en caso contrario, si $x \notin X_i$, se sigue que $x \in X_{i+1} \setminus X_i$, y por nuestra hipótesis podemos concluir que $x \in U_j^c$, de esta forma se tiene que $x \in X_{i+1} \cap U_j^c$ y por lo tanto, $x \in X_i \cup (X_{i+1} \cap U_j^c)$. Por otro lado, si tomamos $x \in X_i \cup (X_{i+1} \cap U_j^c)$, se sigue que $x \in X_i$ o $x \in X_{i+1} \cap U_j^c$, si $x \in X_i \subseteq X_{i+1}$, entonces $x \in X_{i+1}$ como se quería; es inmediato que $x \in X_{i+1} \cap U_j^c$ implica que $x \in X_{i+1}$.
De esta forma concluimos que $X_{i+1} = X_i \cup (X_{i+1} \cap U_j^c)$, con X_i y $X_{i+1} \cap U_j^c$ subconjuntos propios cerrados en X_{i+1}, contradiciendo la hipótesis de que X_{i+1} es irreducible. Por lo tanto, debe ocurrir que $(X_{i+1} \setminus X_i) \cap U_j \neq \emptyset$, es decir, existe $x \in (X_{i+1} \setminus X_i) \cap U_j$. Esto implica que $x \in X_{i+1} \cap U_j$ y $x \notin X_i \cap U_j$, por lo que $X_i \cap U_j \subsetneq X_{i+1} \cap U_j$.
Así, hemos construido la cadena

$$X_0 \cap U_j \subsetneq X_1 \cap U_j \subsetneq \cdots \subsetneq X_n \cap U_j \subseteq U_j,$$

que consta de subconjuntos cerrados irreducibles de U_j, todos ellos distintos.
De este modo se tiene que $n \leq dim(U_j) \leq sup\{dim(U_i) : i \in I\}$, y por lo tanto $n \leq sup\{dim(U_i) : i \in I\}$.
Esto prueba que $dim(X) = sup\{dim(U_i) : i \in I\}$.

Finalmente analicemos el caso en el que $dim(X) = \infty$. Si esto ocurre, se sigue que para todo $r \in \mathbb{N}$ existe una cadena de longitud $r + 1$

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{r+1} \subseteq X$$

de subconjuntos cerrados irreducibles de X. Primero notemos que $X_0 \neq \emptyset$, pues de lo contrario la cadena no sería de longitud $r + 1$. Con un argumento similar al que se hizo cuando $dim(X) < \infty$, podemos obtener una cadena estrictamente creciente (con respecto a la contención) de longitud $r+1$ de subconjuntos cerrados irreducibles de U_j, para algún $j \in I$. Esto implica que, para todo $r \in \mathbb{N}$, se cumple que $dim(U_j) > r$. Por lo tanto, $sup\{dim(U_i) : i \in I\} = \infty = dim(X)$. $\square$

La siguiente definición nos permitirá llegar al objetivo de esta sección que, como ya se mencionó, es establecer más nociones entre aspectos topológicos y aspectos algebraicos. Para lograr esto, también presentamos algunos resultados a modo de recordatorio, estos nos servirán, por ejemplo, para probar la proposición 1.103.

Definición 1.100 *Sean A un anillo y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A.* ***La altura del ideal*** $\mathfrak{p}$*, denotada por $h(\mathfrak{p})$, es el máximo de los enteros n tales que existe una* *cadena ascendente de ideales primos distintos contenidos en* $\mathfrak{p}$*:*

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}.$$

En este caso, se dirá que la cadena es de longitud n*.*
Dada esta situación, se define la ***dimensión de Krull*** *del anillo* A*, como el máximo de las alturas de los ideales primos* $\mathfrak{p}$ *de* A*, y se denota por* $dim_{Kr}(A)$*.*

Ejemplo 1.101 *Si* K *es un campo, entonces* $dim_{Kr}(K) = 0$*.*
Este es un resultado inmediato recordando que, si K *es campo, sus únicos ideales son* $\{0\}$ *y* K*. De este modo, toda cadena de ideales primos tendrá longitud cero.*

Proposición 1.102 *Sean* A *un anillo conmutativo y* $\mathfrak{p}$ *un ideal primo de* A*. Entonces* $dim_{Kr}(A_{\mathfrak{p}}) = h(\mathfrak{p})$*.*

Demostración. Consultar [11, Proposición 6.8, pág. 142]. □

El siguiente resultado es de los más importantes de esta sección, establece una relación entre la dimensión de un espacio topológico y la dimensión de Krull de un anillo, en el sentido de las definiciones 1.95 y 1.100. Para efectuar la demostración, conviene que el lector recuerde el teorema de la correspondencia relativo a ideales (teorema 1.30).

Proposición 1.103 *Sean* K *un campo algebraicamente cerrado y* $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ *un conjunto algebraico. Entonces la dimensión de* Y *es igual a la dimensión de Krull de su anillo de coordenadas* $K[Y] = K[x_1, \ldots, x_n]/I(Y)$*.*

Demostración. Sea $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ un conjunto algebraico.
Consideremos una cadena estrictamente creciente, respecto a la contención, de subconjuntos cerrados irreducibles en Y:

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n \subseteq Y.$$

Al tomar el ideal asociado a cada subconjunto irreducible, y gracias al inciso $b)$ de la proposición 1.20 y al corolario 1.22, obtenemos que la cadena tomada inicialmente se corresponde biyectivamente con la cadena

$$I(Z_0) \supset I(Z_1) \supset \ldots \supset I(Z_n) \supset I(Y)$$

la cual es una cadena ascendente de ideales de $K[x_1, \ldots, x_n]$ que contienen a $I(Y)$. Además, los ideales $I(Z_i)$ resultan ser ideales primos debido a que cada conjunto Z_i es irreducible.
Ahora, por el teorema 1.30, cada ideal primo $I(Z_i)$, que contiene a $I(Y)$, se corresponde de manera biyectiva con un ideal primo de $K[x_1, \ldots, x_n]/I(Y) = K[Y]$. De esta forma, la cadena

$$I(Y) \subset I(Z_n) \subset \ldots \subset I(Z_1) \subset I(Z_0)$$

se corresponde de manera biyectiva con una cadena estrictamente creciente de ideales primos, todos distintos, de $K[Y]$:

$$\mathfrak{p_n} \subset \ldots \subset \mathfrak{p_1} \subset \mathfrak{p_o}.$$

Así, dada una cadena $Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n$ de subconjuntos cerrados irreducibles en Y, se puede obtener una cadena ascendente de ideales primos, todos ellos distintos, de $K[Y]$. Por lo tanto, $dim(Y) \leq dim_{Kr}(K[Y])$.
Por otro lado, consideremos una cadena estrictamente creciente de ideales primos de $K[Y]$, todos ellos distintos:

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n.$$

Ya que todos los elementos de esta cadena de ideales contienen al ideal $\mathfrak{p_o}$, por el teorema 1.30, se concluye que cada ideal primo $\mathfrak{p_i}$ de $K[Y]$ se corresponde de forma biyectiva con un ideal primo J_i de $K[x_1, \ldots, x_n]$ que contiene a $I(Y)$. De este modo, se obtiene una cadena ascendente de ideales primos, todos distintos, de $K[x_1, \ldots, x_n]$:

$$I(Y) \subseteq J_0 \subset J_1 \subset \ldots \subset J_n.$$

Al aplicarle la correspondencia Z a cada uno de estos ideales obtenemos la cadena:

$$Z(I(Y)) \supseteq Z(J_0) \supset Z(J_1) \supset \ldots \supset Z(J_n).$$

Observemos que como Y es un conjunto algebraico, por el corolario 1.21, se tiene que $Z(I(Y)) = Y$. De esta forma, se puede reescribir a la cadena como sigue:

$$Z(J_n) \subset \ldots \subset Z(J_1) \subset Z(J_0) \subseteq Y.$$

Deseamos probar que esta cadena obtenida es una cadena estrictamente creciente de conjuntos cerrados irreducibles en Y. Para ello, primero notemos que, como $Z(J_i) \subset Y$, entonces $Z(J_i) = Y \cap Z(J_i)$, es decir, $Z(J_i)$ es un conjunto cerrado en Y con la topología de subespacio. Además, al aplicar la correspondencia I a cada uno de estos conjuntos algebraicos obtenemos que $I(Z(J_i)) = \sqrt{J_i}$, esto último por el Nullstellensatz (teorema 1.62). Ahora, como J_i es un ideal primo, por la proposición 1.40, se tiene que $\sqrt{J_i} = J_i$. De este modo $I(Z(J_i)) = J_i$ es un ideal primo de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Por lo tanto, por la proposición 1.75, se deduce que $Z(J_i)$ es un conjunto cerrado irreducible en Y. Es así como se concluye que, dada una cadena estrictamente creciente de ideales primos, todos distintos, en $K[Y]$:

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n,$$

se puede construir una cadena creciente de subconjuntos cerrados irreducibles en Y:

$$Z(J_n) \subset \ldots \subset Z(J_1) \subset Z(J_0) \subseteq Y.$$

Así, $dim_{Kr}(K[Y]) \leq dim(Y)$.
Con esto queda probado que $dim(Y) = dim_{Kr}(K[Y])$. $\square$

La proposición 1.103, junto con la teoría que presentamos a continuación, nos permitirán aplicar resultados relativos a dimensión de anillos en geometría algebraica.

Definición 1.104 *Sean $K \subset L$ una extensión de campos de K y $B \subseteq L$. Recordemos que $K(B)$ es el menor subcampo de L que contiene a K y B. Entonces:*

(a) B es llamado ***algebraicamente dependiente*** *sobre K si existe un polinomio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ no cero tal que $f(b_1, \ldots, b_n) = 0$ para algunos elementos distintos $b_1, \ldots, b_n \in B$. En caso contrario se dirá que B es* ***algebraicamente independiente****.*

(b) El subconjunto B es llamado una ***base trascendente*** *de L sobre K si es un subconjunto algebraicamente independiente y además L es algebraico sobre $K(B)$.*

Proposición 1.105 *Sea $K \subset L$ una extensión de campos. Si L tiene una base trascendente finita sobre K, digamos con n elementos, entonces toda base trascendente es finita y tiene exactamente n elementos.*
En tal caso, a n se le llama ***el grado de trascendencia*** *de L sobre K y se denota por $gr_{tr}(L/K)$.*

Demostración. Consultar [10, Teorema 19.15, pág.178]. $\square$

Ejemplo 1.106 *(a) Sean $K \subset L$ una extensión y $\alpha \in L$. El subconjunto $\{\alpha\}$ es algebraicamente independiente si y solo si α es trascendente sobre K. En tal caso, $gr_{tr}(K(\alpha)/K) = 1$.*

(b) Sea K un campo. Consideremos el anillo $K[x_1, \ldots, x_n]$ y también el campo de fracciones:

$$L = K(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in K[x_1, \ldots, x_n], g \neq 0 \right\}.$$

El conjunto $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base trascendente de L sobre K pues los elementos de B son algebraicamente independientes y además el menor subcampo de L que contiene a K y $x_1 \ldots, x_n$ es justamente L.
De este modo, $gr_{tr}(K(x_1, \ldots, x_n)/K) = n$.

Teorema 1.107 *Sean K un campo y B un dominio entero que es además una $K-$álgebra finitamente generada (ver definición 1.56). Entonces:*

(a) La dimensión de Krull de B es igual al grado de trascendencia del campo de fracciones $Frac(B)$ sobre K, es decir, $dim_{Kr}(B) = gr_{tr}(Frac(B)/K)$.

(b) Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de B, entonces:

$$h(\mathfrak{p}) + dim_{Kr}(B/\mathfrak{p}) = dim_{Kr}(B).$$

Demostración. Una prueba del inciso a) se puede consultar en [8, Pág. 24]. Para consultar una prueba del inciso b) se recomienda consultar [8, Pág. 25]. □

Proposición 1.108 *Sea K un campo algebraicamente cerrado. Entonces la dimensión del espacio afín $\mathbb{A}^n_K$ es n.*

Demostración. Consideremos K un campo algebraicamente cerrado.
Por la proposición 1.103, se tiene que $dim(\mathbb{A}^n_K) = dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]/I(\mathbb{A}^n_K))$.
Notemos que K es un campo infinito por ser algebraicamente cerrado, así, por la proposición 1.19, tenemos que $I(\mathbb{A}^n_K) = \{0\}$; de esta forma:

$$K[x_1, \ldots, x_n]/I(\mathbb{A}^n_K) \cong K[x_1, \ldots, x_n].$$

Y por lo tanto, se concluye que:

$$dim(\mathbb{A}^n_K) = dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]).$$

Basta ver que $dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]) = n$.
Por el inciso a) del teorema 1.107, podemos concluir que

$$dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]) = gr_{tr}(K(x_1, \ldots, x_n)/K).$$

Y, ya que el grado de trascendencia de $K(x_1, \ldots, x_n)$ sobre K es igual a n, entonces:

$$\begin{aligned} dim(\mathbb{A}^n_K) &= dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]) \\ &= gr_{tr}(K(x_1, \ldots, x_n)/K) \\ &= n. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.109 *Sean K un campo algebraicamente cerrado y $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ una variedad casi-afín. Entonces $dim(Y) = dim(\overline{Y})$.*

Demostración. Sea $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ una variedad casi-afín, es decir, existe $W \subseteq \mathbb{A}^n_K$ una variedad afín tal que Y es un abierto de W.
Como Y es un abierto de W, existe U abierto de $\mathbb{A}^n_K$ tal que $Y = W \cap U$. Además W es irreducible, por lo que, de acuerdo al inciso c) de la proposición 1.72, se tiene que $\overline{Y} = W$. De igual forma, a partir de la proposición 1.74, se concluye que Y es irreducible.
Consideremos

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_{k-1} \subsetneq Z_k,$$

una cadena de subconjuntos cerrados irreducibles distintos de Y. Por el lema 1.81, se tiene que

$$\overline{Z_0} \subsetneq \overline{Z_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{Z_{k-1}} \subsetneq \overline{Z_k}$$

es una cadena de subconjuntos cerrados irreducibles de $\overline{Y} = W$. Por lo que se concluye que $dim(Y) \leq dim(\overline{Y})$.
Notemos que cada conjunto $\overline{Z_i}$ es cerrado en $\overline{Y} = W$ y a su vez W es cerrado en $\mathbb{A}^n_K$, pues es una variedad afín. Por lo tanto, se deduce que $\overline{Z_i}$ es cerrado en $\mathbb{A}^n_K$. De este modo, la cadena

$$\overline{Z_0} \subsetneq \overline{Z_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{Z_{k-1}} \subsetneq \overline{Z_k}$$

es una cadena de cerrados irreducibles del espacio afín. Más aún, por la proposición 1.108, se tiene que $dim(\mathbb{A}^n_K) = n$, por lo tanto

$$dim(Y) \leq dim(\overline{Y}) \leq n.$$

En particular, se concluye que $dim(Y)$ es finita.
Como $dim(Y)$ es finita, podemos escoger una cadena

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_{m-1} \subsetneq Z_m = Y$$

de subconjuntos cerrados irreducibles de Y de tal forma que $m = dim(Y)$. Notemos además que se puede considerar $Z_m = Y$ porque Y es irreducible y cerrado en Y.
Ya que la cadena considerada es de longitud máxima, entonces Z_0 debe constar de un sólo punto, pues, de lo contrario, se podría obtener una cadena de longitud mayor agregando un punto de Z_0 al inicio de la cadena, es posible hacer esto porque los puntos de Y son cerrados e irreducibles. De esta forma, $Z_0 = \{P\}$.
Ahora, por el lema 1.81, obtenemos la cadena

$$\{P\} = \overline{Z_0} \subsetneq \overline{Z_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{Z_m} = \overline{Y} = W$$

de cerrados irreducibles, distintos, de W. Ya que Z_0 consta de un solo punto, por el inciso b) del lema 1.81, se deduce que esta cadena no se puede refinar a una cadena de cerrados irreducibles de W de longitud mayor.
Sabemos, por el inciso b) de la proposición 1.20 y por la proposición 1.75, que se obtiene una cadena de ideales primos distintos de $K[x_1, \ldots, x_n]$:

$$I(W) \subsetneq I(\overline{Z_{m-1}}) \subsetneq \cdots \subsetneq I(\overline{Z_1}) \subsetneq I(\overline{Z_0}) = I(P).$$

Debido a que $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_K$, entonces $I(P) = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$, el cual es además un ideal maximal por la proposición 1.60.
Además, esta es una cadena de ideales primos que ya no se puede refinar debido a la correspondencia que existe entre ideales primos y conjuntos irreducibles.

Consideremos ahora el anillo $A = K[W] = K[x_1 \ldots, x_n]/I(W)$, el anillo de coordenadas de W. Por el teorema de la correspondencia (teorema 1.30), obtenemos una cadena de ideales primos distintos de A todos ellos contenidos en $\frac{I(\overline{Z_0})}{I(W)}$:

$$0 = \frac{I(W)}{I(W)} \subsetneq \frac{I(\overline{Z_{m-1}})}{I(W)} \subsetneq \cdots \subsetneq \frac{I(\overline{Z_1})}{I(W)} \subsetneq \frac{I(\overline{Z_0})}{I(W)} \subsetneq A,$$

cadena que no se puede refinar a una cadena de ideales primos distintos de A de longitud mayor. Esto significa que la altura del ideal primo $\mathfrak{p} = \frac{I(\overline{Z_0})}{I(W)}$ es igual a m, es decir, $h(\mathfrak{p}) = m$.
Por otro lado, notemos que, por el tercer teorema de isomorfismo de anillos (teorema 1.29), se tiene que:

$$A/\mathfrak{p} = (K[x_1 \ldots, x_n]/I(W))/(I(\overline{Z_0})/I(W)) \cong K[x_1 \ldots, x_n]/I(\overline{Z_0}).$$

Y de esta forma:

$$\begin{aligned} A/\mathfrak{p} &\cong K[x_1 \ldots, x_n]/I(\overline{Z_0}) \\ &= K[x_1, \ldots, x_n]/\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\rangle \\ &\cong K. \end{aligned}$$

Es así como obtenemos que $dim_{Kr}(A/\mathfrak{p}) = dim_{Kr}(K)$, y, por el ejemplo 1.101 se tiene que $dim_{Kr}(A/\mathfrak{p}) = 0$. Por lo tanto, se concluye que:

$$\begin{aligned} dim(\overline{Y}) = dim(W) &= dim_{Kr}(A) \quad [\text{ Por proposición } 1.103] \\ &= h(\mathfrak{p}) + dim_{Kr}(A/\mathfrak{p}) \quad [\text{ Por teorema } 1.107 \text{ b)}] \\ &= m + 0 = m. \end{aligned}$$

De este modo queda probado que $dim(Y) = dim(\overline{Y})$. □

Teorema 1.110 *(Teorema del ideal principal de Krull)*
Sean R un anillo noetheriano y $a \in R$ un elemento que no es unidad ni divisor de cero. Entonces todo ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ tal que $a \in \mathfrak{p}$ tiene altura 1.

Demostración. Consultar [1, pág. 122]. □

Proposición 1.111 *Sea R un dominio entero noetheriano. Entonces, R es un dominio de factorización única si y solo si todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R, tal que $h(\mathfrak{p}) = 1$, es principal.*

Demostración. Una prueba se puede consultar en [9, pág. 141]. □

Proposición 1.112 *Sea K un campo algebraicamente cerrado. Entonces, una variedad afín $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ tiene dimensión $n-1$ si y solo si $Y = Z(f)$ con $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio no constante irreducible.*

Demostración. Consideremos K un campo algebraicamente cerrado.

Supongamos que $Y \subseteq \mathbb{A}_K^n$ es una variedad tal que $dim(Y) = n-1$. Ya que Y es una variedad afín, $\mathfrak{p} = I(Y)$ es un ideal primo de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Por el teorema 1.107, sabemos que:

$$dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]) = h(\mathfrak{p}) + dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}).$$

Además, por la proposición 1.103, se tiene que $dim_{Kr}(K[Y]) = dim(Y)$, por lo que:

$$dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]) = h(\mathfrak{p}) + dim(Y).$$

De esta forma, se deduce que:

$$\begin{aligned} h(\mathfrak{p}) &= dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]) - dim(Y) \\ &= n - (n-1) = 1. \end{aligned}$$

Notemos también que $K[x_1, \ldots, x_n]$ es un dominio de factorización única, por lo que, de acuerdo a la proposición 1.111, se tiene que $\mathfrak{p}$ es un ideal principal, es decir, existe $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $\mathfrak{p} = \langle f \rangle$. Más aún, observemos que f no es constante, pues, de lo contrario, se tendría que $\mathfrak{p} = \langle f \rangle = K[x_1, \ldots, x_n]$, el cual no es un ideal primo.
Ahora, como $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, f es un elemento irreducible de $K[x_1 \ldots, x_n]$. Finalmente, por el corolario 1.21 y por la proposición 1.10, tenemos que:

$$\begin{aligned} Y &= Z(\mathfrak{p}) \\ &= Z(f). \end{aligned}$$

Así, concluimos que Y es el conjunto de ceros de un polinomio irreducible no constante.

Por otro lado, supongamos que $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ es un polinomio no constante irreducible, veamos que $Y := Z(f)$ es una variedad afín de dimensión $n-1$.
Como f es irreducible, $\mathfrak{p} = \langle f \rangle$ es un ideal primo de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Además f no es unidad ni divisor de cero, y $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal que contiene a f, pues $\langle f \rangle = \mathfrak{p}$. Entonces, por el teorema 1.110, se deduce que $h(\mathfrak{p}) = 1$.
Por el inciso b) del teorema 1.107 sabemos que:

$$dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]) = h(\mathfrak{p}) + dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}).$$

Observemos que $\mathfrak{p} = I(Y)$, esto por el teorema 1.62 y porque $\mathfrak{p}$ es un ideal primo. Entonces:

$$dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]) = h(\mathfrak{p}) + dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]/I(Y)).$$

Lo que significa que:

$$n = 1 + dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]/I(Y)).$$

Así, concluimos que:

$$\begin{aligned} dim(Y) &= dim_{Kr}(K[x_1, \ldots, x_n]/I(Y)) \quad [\text{ Por la proposición } 1.103 \text{ }] \\ &= n - 1. \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 2

Variedades proyectivas

En el capítulo anterior se introdujo el espacio afín y posteriormente se construyeron las variedades afines. El objetivo de este capítulo es introducir el espacio proyectivo y después realizar la construcción de otra especie de variedades, mismas que serán llamadas variedades proyectivas.
Los conceptos, la mayoría de los resultados de esta sección y las pruebas, son muy similares al caso afín, es por ello que algunas se omitirán y se dejarán al lector, siempre haciendo énfasis en los resultados que marcan la diferencia con el caso afín o diciendo de forma explícita por qué la prueba es similar.

2.1. El espacio proyectivo

Consideremos un campo K y el espacio afín $\mathbb{A}_K^{n+1}$. En el conjunto $\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\}$ definimos la siguiente relación, que resulta ser de equivalencia:

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \text{ si y solo si } x_i = \lambda y_i \text{ para algún } \lambda \in K \setminus \{0\} \text{ } y \text{ } \forall i.$$

De esta forma, al tener definida una relación de equivalencia, podemos considerar al conjunto formado por las clases de equivalencia. Esto nos permite presentar la siguiente definición.

Definición 2.1 *Se define el* ***espacio proyectivo de dimensión*** n*, denotado por* $\mathbb{P}_K^n$*, como el conjunto de clases de equivalencia de la relación definida anteriormente en* $\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\}$ *, es decir:*

$$\mathbb{P}_K^n = (\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim .$$

Así, un elemento $P \in \mathbb{P}_K^n$ *será la clase de equivalencia de un punto* $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_K^{n+1}$ *de tal forma que alguna coordenada* a_i *sea distinta de cero.*

En tal caso, escribiremos $P = (a_0 : \ldots : a_n)$ y diremos que los elementos a_i son las coordenadas homogéneas de P.

2.2. Conjuntos algebraicos proyectivos

Tal y como se hizo con el espacio afín, queremos definir una especie de conjuntos, los conjuntos algebraicos proyectivos. Sin embargo, dado que los puntos del espacio proyectivo son clases de equivalencia, debemos ser más cautelosos para construir tales conjuntos. Esto se aprecia a continuación.

Consideremos el polinomio $f(x,y) = x^2 + 4y + 8 \in \mathbb{R}[x,y]$. Al trabajar en el espacio afín, se puede considerar el conjunto de ceros de este polinomio, sin embargo, si queremos definir sus ceros en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, esto no es tan inmediato; para observar esto, primero notemos que el punto $(2,-3) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ es tal que $f(2,-3) = 0$, no obstante el punto $(2:-3) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ no es un cero del polinomio $f(x,y)$ pues a pesar de que $(2,-3) \sim (6,-9)$ se tiene que $f(6,-9) \neq 0$. Esto nos permite observar que para construir los conjuntos algebraicos del espacio proyectivo no podemos trabajar con polinomios arbitrarios, sino que debemos restringirnos a cierta clase de estos.
Es por esto que presentamos el siguiente contenido a modo de recordatorio.

Definición 2.2 ***Un anillo graduado*** *es un anillo A que admite una descomposición $A = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ como suma directa de subgrupos abelianos $A_n \subseteq A$ de tal forma que, si $m,n \in \mathbb{Z}$, $f \in A_m$ y $g \in A_n$, se tiene que $fg \in A_{m+n}$, es decir, $A_n \cdot A_n \subseteq A_{m+n}$.*
Para $n \in \mathbb{Z}$, los elementos de A_n son llamados ***elementos homogéneos de grado n****.*

Observación 2.3 *Sean A un anillo graduado y $f \in A$. Entonces f se puede desomponer de forma única como la suma de elementos homogéneos, es decir, $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$, con $f_n \in A_n$, de tal modo que $f_n = 0$ para casi todo $n \in \mathbb{Z}$.*
En tal caso, los elementos f_n son ***las componentes homogéneas*** *de f, cada una de grado n.*

Definición 2.4 *Sean A un anillo graduado y $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Se dice que $\mathfrak{a}$ es un* ***ideal graduado u homogéneo*** *si, para todo elemento $f \in \mathfrak{a}$, con componentes homogéneas f_n, se satisface que $f_n \in \mathfrak{a}$. Es decir, $\mathfrak{a} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\mathfrak{a} \cap A_n)$.*

A continuación se presentan algunos resultados que tratan sobre ideales homogéneos, y que serán de suma utilidad más adelante. En todos estos resultados A será un anillo graduado.

Proposición 2.5 *Un ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ es homogéneo si y solo si es generado por elementos homogéneos.*

Demostración. Consultar [2, Pág. 404]. □

Proposición 2.6 *Sean R un anillo graduado y J, J_1, J_2 ideales de R. Entonces se satisface lo siguiente:*

a). Si J_1 y J_2 son ideales homogéneos, entonces también $J_1 + J_2$, J_1J_2, $J_1 \cap J_2$ y $\sqrt{J_1}$ son ideales homogéneos.

b). Si J es un ideal homogéneo, entonces el cociente R/J es un anillo graduado. Más aún, $R/J = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} R_d/(R_d \cap J)$.

Demostración. Una prueba se puede consultar en [5, Pág. 44]. □

Proposición 2.7 *Un ideal homogéneo $\mathfrak{a} \subseteq A$ es primo si y solo si para cualesquiera elementos homogéneos $f, g \in A$, tales que $fg \in \mathfrak{a}$, se tiene que $f \in \mathfrak{a}$ o $g \in \mathfrak{a}$.*

Demostración. Ver [2, Pág. 405]. □

Proposición 2.8 *Sea I un ideal homogéneo de $K[x_0, \ldots, x_n]$. Consideremos el anillo graduado $S = K[x_0, \ldots, x_n]/I$. Sea $L \subseteq S$ un conjunto multiplicativo que consiste de elementos homogeneos. Entonces la localización $L^{-1}S = \{\frac{s}{l} \mid s \in S, l \in L\}$ es un anillo graduado. Es decir,*

$$L^{-1}S = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(L^{-1}S\right)_n,$$

donde $\left(L^{-1}S\right)_n = \{\frac{s}{l} \mid s \in S, l \in l$ y son homogeneos tales que $\mathrm{grad}(s) - \mathrm{grad}(l) = n\}$.

Para remediar el inconveniente que se presentó para definir los conjuntos algebraicos del espacio proyectivo al considerar polinomios arbitrarios del anillo $K[x_0, \ldots, x_n]$, trabajaremos con una categoría particular de polinomios, los polinomios homogéneos.

Para esto, observemos que el anillo de polinomios $A = K[x_0, \ldots, x_n]$ es un anillo graduado al considerar, para cada $d \in \mathbb{N}$, el conjunto A_d de combinaciones lineales de monomios de grado d en las variables $x_0, \ldots, x_n$. Con estos conjuntos se tiene que $A = \oplus_{d\in\mathbb{N}} A_d$ y además $A_d \cdot A_e \subseteq A_{d+e}$, para cualesquiera $d, e \in \mathbb{N}$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.9 *Sea K un campo. Un polinomio $f = \sum_\alpha c_\alpha x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in K[x_0, \ldots, x_n]$ es un **polinomio homogéneo de grado** d, si todos los monomios que conforman a f son del mismo grado $d = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$, es decir, si $f \in A_d$.*

El hecho de que el anillo $K[x_0, \ldots, x_n]$ sea graduado, permite concluir que, si $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$, entonces f admite una expresión como la suma de polinomios homogéneos. Es decir:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n,$$

donde cada f_n es un polinomio homogéneo de grado n, y además $f_n = 0$ para casi todo $n \in \mathbb{Z}$, es decir, la suma es finita.
A tal expresión del polinomio f se le llamará **la descomposición de f en sus componentes homogéneas**. Cada polinomio homogéneo f_n presente en la expresión de f será una componente homogénea de f.

Observación 2.10 *Si f es un polinomio homogéneo de grado d, entonces se tiene que $f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n)$, para todo $\lambda \in K \setminus \{0\}$.*
Esto es inmediato a partir de la definición, pues si $f = \sum_{\alpha} c_\alpha x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ es un polinomio homogéneo de grado d, entonces:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) &= \sum_{\alpha} c_\alpha (\lambda x_0)^{\alpha_0} (\lambda x_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda x_n)^{\alpha_n} \\
&= \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha_0 + \cdots + \alpha_n} c_\alpha x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \\
&= \lambda^d \sum_{\alpha} c_\alpha x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad [\textit{ Pues } d = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n.] \\
&= \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Observación 2.11 *Sea $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ un polinomio homogéneo de grado d. Entonces, para todo $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_K^{n+1}$ y para todo $\lambda \in K \setminus \{0\}$, se tiene que $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0$ si y solo si $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$.*
En efecto, consideremos $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_K^{n+1}$. Ya que f es homogéneo, a partir de la observación 2.10, se tiene que $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \ldots, a_n)$.
De este modo, $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0$ si y solo si $\lambda^d f(a_0, \ldots, a_n) = 0$, ya que $\lambda \neq 0$, esta última igualdad ocurre si y solo si $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$.

Gracias a la asociación que se hizo en la observación 1.3, y a la observación 2.11, es que podemos considerar en el espacio proyectivo $\mathbb{P}_K^n$ los ceros de un polinomio homogéneo, pues por la naturaleza de estos polinomios y de los elementos del espacio proyectivo, estos ceros están bien definidos.

De esta forma, si $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ es un polinomio homogéneo, el conjunto de ceros de f está bien definido y además está dado por:

$$Z(f) := \{P = (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}_K^n : f(P) = 0\}.$$

De forma general, si T es un subconjunto conformado por elementos homogéneos de $K[x_0, \ldots, x_n]$, es decir, los elementos de T son polinomios homogéneos en las variables $x_0, \ldots, x_n$, entonces se puede hablar del conjunto de ceros comunes de los elementos de T:

$$Z(T) := \{P \in \mathbb{P}_K^n : f(P) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Por otro lado, si $I \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$ es un ideal homogéneo (ver proposición 2.5), por lo mencionado anteriormente, se puede considerar el siguiente conjunto:

$$X := \{P \in \mathbb{P}_K^n : f(P) = 0 \text{ para todo } f \in I \text{ homogéneo}\}.$$

Lo deseado es asociarle al ideal I un subconjunto del espacio proyectivo $\mathbb{P}_K^n$ de forma similar a como se dio la asociación en el espacio afín. Para ello, primero veremos que $X = \{P \in \mathbb{P}_K^n : f(P) = 0 \; \forall f \in I\}$.
La prueba se hará por doble contención.

Sea $P \in X$, esto significa que $g(P) = 0$ para todo polinomio homogéneo $g \in I$.
Sea $f \in I$ arbitrario y $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$ su descomposición en componentes homogéneas. Ya que I es un ideal homogéneo, se tiene que $f_i \in I$ para todo i. Dado que $P \in X$ y cada f_i es homogéneo, tenemos que $f_i(P) = 0$ para todo i, y por consiguiente $f(P) = \sum_{i=1}^{n} f_i(P) = 0$. De esta forma, se concluye que $X \subseteq \{P \in \mathbb{P}_K^n : f(P) = 0 \; \forall f \in I\}$.

Ahora consideremos $P \in \{P \in \mathbb{P}_K^n : f(P) = 0 \; \forall f \in I\}$. En particular, si $f \in I$ es homogéneo, se tiene que $f(P) = 0$. Esto nos permite concluir que $\{P \in \mathbb{P}_K^n : f(P) = 0 \; \forall f \in I\} \subseteq X$.
De esta forma se tiene que $X = \{P \in \mathbb{P}_K^n : f(P) = 0 \; \forall f \in I\}$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.12 *Sea I un ideal homogéneo de $K[x_0, \ldots, x_n]$. El subconjunto del espacio proyectivo $\mathbb{P}_K^n$ asociado a I está dado por:*

$$\begin{aligned} Z(I) : &= \{P \in \mathbb{P}_K^n : f(P) = 0 \; \forall f \in I\} \\ &= \{P \in \mathbb{P}_K^n : f(P) = 0 \; \forall f \in I \textit{ homogéneo}\}. \end{aligned}$$

Algunos aspectos que se tienen en la construcción de estos conjuntos de ceros en el espacio afín se verifican también al hacer las construcciones en el espacio proyectivo. Esto se aprecia en las siguientes observaciones.

Observación 2.13 *Si $I \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$ es un ideal homogéneo, y además $E \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$ es un subconjunto de polinomios homogéneos tal que $I = \langle E \rangle$, entonces $Z(I) = Z(E)$.*
La prueba de este hecho es similar al caso afín, la única modificación es que ahora se trabaja con polinomios homogéneos.

Observación 2.14 *Si K es un campo, entonces el anillo $K[x_0,\ldots,x_n]$ es noetheriano, por lo que, para cada ideal homogéneo I, existe un número finito de polinomios homogéneos $f_1,\ldots,f_r \in K[x_0,\ldots,x_n]$ tales que $I = \langle f_1,\ldots,f_r\rangle$.*

En efecto, ya que $K[x_0,\ldots,x_n]$ es un anillo noetheriano, cada ideal I es finitamente generado, es decir, existen $g_1,\ldots,g_k \in K[x_0,\ldots,x_n]$ de tal modo que $I = \langle g_1,\ldots,g_k\rangle$. Como I es un ideal homogéneo, las componentes homogéneas de cada g_i, digamos f_j, pertenecen al ideal I. De esta forma, tomando las componentes homogéneas f_j de todos los polinomios g_i, obtenemos un conjunto generador finito de I que además consta de polinomios homogéneos.

Como se había mencionado anteriormente, lo que se pretende es definir los conjuntos algebraicos proyectivos, ahora que comenzamos a trabajar con polinomios e ideales homogéneos estamos listos para establecer la siguiente definición.

Definición 2.15 *Un **conjunto algebraico proyectivo** es un conjunto $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ para el cual existe $T \subseteq K[x_0,\ldots,x_n]$, formado por polinomios homogéneos, tal que $Z(T) = Y$.*

Por la observación 2.14, es posible asumir que el conjunto T, que hace posible que $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ sea un conjunto algebraico proyectivo, es un conjunto finito. Más aún, la observación 2.13 nos indica que para el estudio de conjuntos algebraicos proyectivos basta considerar a los conjuntos algebraicos asociados a ideales homogéneos.
En los sucesivo de este capítulo, para referirnos a conjuntos algebraicos proyectivos diremos simplemente conjuntos algebraicos. Cuando sea necesario hablar también de conjuntos algebraicos afines se hará la distinción de manera explícita.

En la siguiente proposición se observa que los conjuntos algebraicos definen una topología para el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_K$, tal y como se tenía en el espacio afín.

Proposición 2.16 *Los conjuntos algebraicos satisfacen los axiomas de conjuntos cerrados de una topolología en $\mathbb{P}^n_K$. Es decir, se satisface lo siguiente:*

(a) El conjunto vacío y el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_K$ son conjuntos algebraicos.

(b) La unión finita de conjuntos algebraicos es nuevamente un conjunto algebraico.

(c) La intersección de una familia arbitraria de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico.

Demostración. La prueba es similar a la hecha para el caso afín (Proposición 1.12), el hecho que hace posible esta prueba es el resultado que se presenta en la proposición 2.5 respecto a los ideales homogéneos. $\square$

Proposición 2.17 *Si I, J son ideales homogéneos de $K[x_0, \ldots, x_n]$ tales que $I \subseteq J$, entonces $Z(J) \subseteq Z(I)$.*

Demostración. La prueba se deja como ejercicio al lector, pues es similar a la prueba para el caso afín. $\square$

Definición 2.18 *Sea K un campo. Se define la **topología de Zariski en el espacio proyectivo** $\mathbb{P}^n_K$, considerando como subconjuntos cerrados a los conjuntos algebraicos del espacio proyectivo. De este modo, los conjuntos abiertos en la Topología de Zariski son los complementos de conjuntos algebraicos.*

Uno de los objetivos de esta sección es mostrar que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_K$ tiene una cubierta abierta formada por conjuntos que tienen una estrecha relación con el espacio afín $\mathbb{A}^n_K$, estudiado en el capítulo anterior. De hecho, esta propiedad se heredará a otra clase de conjuntos que se definirán más adelante en este mismo capítulo.
Para cumplir con dicho objetivo, primero introducimos la notación y los elementos necesarios.

Definición 2.19 *Consideremos K un campo y sean $S := K[x_0, \ldots, x_n]$, $A := K[y_1, \ldots, y_n]$, $S^h := \{f \in S : \ f \text{ es homogéneo } \}$.*

(a) La correspondencia

$$\begin{aligned} \alpha : S^h &\longrightarrow A \\ f &\longmapsto f(1, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

*recibe el nombre de **morfismo de deshomogenización**.*

*(b) El **morfismo de homogenización** está dado por:*

$$\begin{aligned} \beta : A &\longrightarrow S^h \\ g &\longmapsto x_0^e g\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \end{aligned}$$

donde e es el grado del polinomio g.

Para cada $i = 0, \ldots, n$, consideremos el conjunto dado por:

$$H_i := \{(a_0 : \ldots : a_n) : a_i = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n_K.$$

Claramente H_i es un conjunto algebraico proyectivo, debido a que $H_i = Z(x_i)$. Ahora consideremos el conjunto $U_i = \mathbb{P}^n_K \setminus H_i$. Tal conjunto es abierto en $\mathbb{P}^n_K$ con la topología de Zariski por ser complemento de un conjunto cerrado.

Observación 2.20 *El espacio proyectivo $\mathbb{P}_K^n$ se puede ver como la unión de conjuntos abiertos.*

Para demostrar la observación, veremos que $\mathbb{P}_K^n = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} U_i$.

Es claro que $U_i \subseteq \mathbb{P}_K^n$, *por lo que* $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} U_i \subseteq \mathbb{P}_K^n$. *Por otro lado, siempre que* $P = (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}_K^n$, *existe* $i \in \{0, \ldots, n\}$ *tal que* $a_i \neq 0$, *por lo que* $P \in U_i$.

Como se verá a continuación, estos conjuntos abiertos tienen una amplia relación con el espacio afín $\mathbb{A}_K^n$. Para esto, definamos la función

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i &\longrightarrow \mathbb{A}_K^n \\ (a_0 : \ldots : a_n) &\longmapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right), \end{aligned}$$

donde $\frac{a_i}{a_i}$ ha sido omitido.
Primero notemos que ϕ_i no depende de la elección de las coordenadas homogéneas de P. Si $P \in \mathbb{P}_K^n$ es tal que $P = (a_0 : \ldots : a_n) = (b_0 : \ldots : b_n)$, entonces $a_i = \lambda b_i$ para algún $\lambda \in K \setminus \{0\}$ y para todo i.
De modo que:

$$\phi_i(P) = \left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right) = \left(\frac{\lambda b_0}{\lambda b_i}, \ldots, \frac{\lambda a_n}{\lambda a_i}\right) = \left(\frac{b_0}{b_i}, \ldots, \frac{b_n}{b_i}\right).$$

Por lo tanto ϕ_i está bien definida.
En el siguiente resultado se observará el comportamiento tan importante que presentan los conjuntos abiertos U_i.

Proposición 2.21 *La función $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{A}_K^n$ es un homeomorfismo, considerando a U_i con la topología inducida de subespacio de $\mathbb{P}_K^n$ y a $\mathbb{A}_K^n$ con la topología de Zariski.*

Demostración. Primero veamos que la función ϕ_i es biyectiva. Para esto, construiremos una función inversa.
Consideremos la función

$$\begin{aligned} \psi_i : \mathbb{A}_K^n &\longrightarrow U_i \\ (a_1, \ldots, a_n) &\longmapsto (a_1 : \ldots : 1 : \ldots : a_n) \end{aligned}$$

Es decir, a cada punto $(a_1, \ldots, a_n)$ del espacio afín, le asigna el elemento del espacio proyectivo cuya i-ésima coordenada homogénea es 1, su k-ésima coordenada es a_k si $k < i$ y es a_{k-1} si $k > i$.
Se afirma que ψ_i es la inversa de la función ϕ_i.

Consideremos $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_K$, entonces:

$$\begin{aligned}(\phi_i \circ \psi_i)(a_1, \ldots, a_n) &= \phi_i(\psi_i(a_1, \ldots, a_n))\\ &= \phi_i(a_1 : \ldots : 1 : \ldots : a_n)\\ &= \left(\frac{a_1}{1}, \ldots, \frac{a_n}{1}\right)\\ &= (a_1 \ldots, a_n).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\phi_i \circ \psi_i = Id_{\mathbb{A}^n_K}$.
Por otro lado, si $(a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}^n_K$, entonces:

$$\begin{aligned}(\psi_i \circ \phi_i)(a_0 : \ldots : a_n) &= \psi_i(\phi_i(a_0 : \ldots : a_n))\\ &= \psi_i\left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right)\\ &= \left(\frac{a_0}{a_i} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{a_n}{a_i}\right)\\ &= (a_0 : \ldots : a_i : \ldots : a_n)\\ &= (a_0 : \ldots : a_n).\end{aligned}$$

Esto significa que $\psi_i \circ \phi_i = Id_{\ \mathbb{P}^n_K}$.
Es así como se concluye que ϕ_i es biyectiva, por lo que, para probar que es un homeomorfismo, falta probar que es continua y cerrada.
Haremos el caso $i = 0$, para esto llamemos $U := U_0$ y $\phi := \phi_0$.
Primero veamos que ϕ es cerrada.
Sea $Y \subseteq U$ un subconjunto cerrado en U. Probemos que $\phi(Y)$ es un subconjunto cerrado en $\mathbb{A}^n_K$. Como $Y \subseteq U \subseteq \mathbb{P}^n_K$, podemos considerar $\overline{Y} \subseteq \mathbb{P}^n_K$, la cerradura de Y en el espacio proyectivo. Ya que $\overline{Y}$ es un conjunto cerrado, existe $T \subseteq S^h$ de tal forma que $\overline{Y} = Z(T)$. Ahora, como $T \subseteq S^h$, podemos considerar $T' := \alpha(T)$. Afirmamos que $\phi(Y) = Z(T')$.

Sea $x \in \phi(Y)$. Esto significa que existe $z = (a_0 : \ldots : a_n) \in Y$ de tal forma que $\phi(z) = \left(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right) = x$.
Para probar que $x \in Z(T')$, tomemos $f \in T'$ y veamos que $f(x) = 0$. Ya que $f \in T' = \alpha(T)$, se sigue que existe $g \in T$ tal que $\alpha(g) = f$. De este modo se tiene que:

$$\begin{aligned}f(x) &= [\alpha(g)](x)\\ &= [g(1, y_1 \ldots, y_n)]\left(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right)\\ &= g\left(1, \frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right).\end{aligned}$$

Notemos que $z \in Y \subseteq \overline{Y}$, por lo que $z \in \overline{Y}$; además $\overline{Y} = Z(T)$ y $g \in T$, de modo que $g(a_0 : \ldots : a_n) = 0$. El hecho de que g sea un polinomio homogéneo implica que $g(a_0,\ldots,a_n)=0$, más aún, la observación 2.11 nos permite concluir que $g\left(1,\frac{a_1}{a_0},\ldots,\frac{a_n}{a_0}\right)=0$. De esta forma, concluimos que $f(x)=0$ y por lo tanto $x\in Z(T')$.

Por otro lado, consideremos $x=(a_1,\ldots,a_n)\in Z(T')$ y veamos que $x\in\phi(Y)$. Para esto, basta probar que existe $x'\in Y$ tal que $\phi(x')=x$. Tomemos $x':=(1:a_1:\ldots:a_n)\in\mathbb{P}^n_K$, claramente $\phi(x')=x$.
Falta probar que $x'\in Y$.
Recordemos que Y es un conjunto cerrado de U, por lo que existe Z cerrado de $\mathbb{P}^n_K$ tal que $Y=U\cap Z$. Sea $\overline{Y}$ la cerradura de Y en $\mathbb{P}^n_K$. Ya que Z es un cerrado de $\mathbb{P}^n_K$ que contiene a Y, entonces se tiene que $\overline{Y}\subseteq Z$. Luego, se sigue que

$$(*): U\cap\overline{Y}\subseteq U\cap Z=Y.$$

Afirmamos que $x'\in U\cap\overline{Y}$.
Consideremos $f(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in T$, entonces $\alpha(f)=f(1,y_1,\ldots,y_n)\in T'$, y, como $x\in Z(T')$, tenemos que $[\alpha(f)](x)=0$. Ahora, por definición de $\alpha(f)$, tenemos que $0=[\alpha(f)(x)]=f(1,a_1,\cdots,a_n)$. Debido a que f es un polinomio homogéneo, se tiene que $f(1:a_1:\ldots:a_n)=f(x')=0$. De este modo, tenemos que $f(x')=0$ para todo $f\in T$, y así concluimos que $x'\in\overline{Y}=Z(T)$. Por otra parte, el hecho de que $U=\{(x_0:x_1:\ldots:x_n)\in\mathbb{P}^n_K\mid x_0\neq 0\}$, implica que $x'\in U$, de donde se deduce que $x'\in U\cap\overline{Y}$; así, por $(*)$ tenemos que $x'\in Y$. Esto demuestra que $x=\phi(x')$ con $x'\in Y$, es decir, $x\in\phi(Y)$.
De esta forma se concluye que $\phi(Y)=Z(T')$, y por lo tanto la correspondencia ϕ es cerrada.

Ahora veamos que ϕ es una función continua. Para esto, consideremos W un subconjunto cerrado de $\mathbb{A}^n_K$ y veamos que $\phi^{-1}(W)$ es un subconjunto cerrado de U.
Ya que W es un subconjunto cerrado, existe $T'\subseteq A$ de tal modo que $W=Z(T')$.
Afirmamos que $\phi^{-1}(W)=Z(\beta(T'))\cap U$.

Sea $P=(a_0:\ldots:a_n)\in\phi^{-1}(W)$, veamos que $P\in Z(\beta(T'))\cap U$.
Ya que $P=(a_0:\ldots:a_n)\in\phi^{-1}(W)$, tenemos que $P\in U$ y es tal que $\phi(P)=\left(\frac{a_1}{a_0},\ldots,\frac{a_n}{a_0}\right)\in W$. Como $W=Z(T')$, se tiene que $f\left(\frac{a_1}{a_0},\ldots,\frac{a_n}{a_0}\right)=0$ para todo $f\in T'$.
Consideremos $g\in\beta(T')$, es decir, existe $f\in T'$, digamos de grado e, tal que $g=\beta(f)=x_0^e f\left(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}\right)$. Entonces se sigue que:

$$\begin{aligned}
g(P)&=a_0^e f\left(\frac{a_1}{a_0},\ldots,\frac{a_n}{a_0}\right)\\
&=a_0^e\cdot 0 \quad \left[\text{ Pues } f\left(\frac{a_1}{a_0},\ldots,\frac{a_n}{a_0}\right)=0\,\right]\\
&=0.
\end{aligned}$$

De esta forma tenemos que $g(P) = 0$ para todo $g \in \beta(T')$, esto significa que $P \in Z(\beta(T'))$. Por lo tanto $P \in Z(\beta(T')) \cap U$.

Por otro lado, sea $P = (a_0 : \ldots : a_n) \in Z(\beta(T')) \cap U$, entonces $P \in U$ y $P \in Z(\beta(T'))$, esto significa que $g(P) = 0$ para todo $g \in \beta(T')$.
Para probar que $P \in \phi^{-1}(W)$, basta ver que $\phi(P) \in W = Z(T')$.
Primero notemos que $\phi(P) = \left(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right)$; además, si $f \in T'$ es un polinomio de grado e, entonces $\beta(f) = x_0^e f\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in \beta(T')$, por lo que:

$$\begin{aligned}(\beta(f))(\phi(P)) &= a_0^e f\left(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ya que $a_0 \neq 0$, debido a que $P \in U$, entonces se concluye que $f\left(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right) = 0$. Así, se tiene que $f(\phi(P)) = 0$ para todo $f \in T'$, es decir, $\phi(P) \in Z(T') = W$.
Por lo tanto, se concluye que $P \in \phi^{-1}(W)$.
De este modo, se concluye que la función ϕ es continua, ya que la imagen inversa de cerrados es nuevamente un conjunto cerrado.
Hemos probado que ϕ es una función biyectiva, continua y cerrada, por lo que resulta ser un homeomorfismo. □

La proposición 2.21 nos permite concluir que el espacio proyectivo $\mathbb{P}_K^n$ puede ser cubierto por conjuntos abiertos homeomorfos al espacio afín $\mathbb{A}_K^n$.

2.3. El ideal asociado a un conjunto algebraico proyectivo

Hasta el momento hemos asociado a cada ideal homogéneo de $K[x_0, \ldots, x_n]$ un subconjunto del espacio proyectivo $\mathbb{P}_K^n$. Lo que se desea en este capítulo es llevar a cabo una construcción recíproca, es decir, a cada subconjunto del espacio proyectivo $\mathbb{P}_K^n$ le asociaremos un ideal del anillo de polinomios $K[x_0, \ldots, x_n]$, además para que estas correspondencias sean enteramente recíprocas el ideal obtenido debe ser homogéneo, esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.22 *Sean K un campo y $Y \subseteq \mathbb{P}_K^n$. El ideal de $K[x_0, \ldots, x_n]$ asociado a Y está dado por:*

$$I(Y) = \langle \{f \in K[x_0, \ldots, x_n] : f \text{ es homogéneo y } f(P) = 0 \text{ para todo } P \in Y\} \rangle.$$

Observación 2.23 *Si K es un campo y $Y \subseteq \mathbb{P}_K^n$, entonces $I(Y)$ es un ideal homogéneo.*
En efecto, ya que $I(Y)$ está generado por elementos homogéneos del anillo $K[x_0, \ldots, x_n]$, de la proposición 2.5 se sigue que $I(Y)$ es un ideal homogéneo.

Proposición 2.24 *Sean K un campo infinito y $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$. Entonces*

$$I(Y) = \{f \in K[x_0, \ldots, x_n] : f(P) = 0 \text{ para todo } P \in Y\}.$$

Demostración. Verifiquemos la prueba por doble contención.

Sea $f \in I(Y)$. Como $K[x_0, \ldots, x_n]$ es un anillo graduado, podemos considerar la descomposición de f en sus componentes homogéneas, digamos que tal descomposición es $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_r$. Ya que $I(Y)$ es un ideal homogéneo (ver 2.23) y $f \in I(Y)$, de acuerdo a la definición 2.5, para todo $i \leq r$, se tiene que $f_i \in I(Y)$. Esto implica que $f_i(P) = 0$, para todo $i \leq r$ y todo $P \in Y$. Por consiguiente, si $P \in Y$, se sigue que $f(P) = f_1(P) + f_2(P) + \cdots + f_r(P) = 0$.

Por otro lado, sea $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ tal que $f(P) = 0$ para todo $P \in Y$. Tomemos la descomposición de f en sus componentes homogéneas, es decir, $f = f_1 + \cdots + f_r$. Observemos que de acuerdo a la definición 2.22, para probar que $f \in I(Y)$, basta probar que $f_i(P) = 0$ para todo $P \in Y$ e $i \leq r$. Con esta idea en mente, consideremos $P \in Y$. Notemos que $P = (x_0 : \ldots : x_n)$ tiene más de una representación, pues para cada $\lambda \in K \setminus \{0\}$ se tiene que $P = (\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n)$, esto debido a la definición del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_K$.
Ya que $f \in I(Y)$, entonces $f(P) = 0$ para todo $P \in Y$. Por lo que, para cada $\lambda \in K \setminus \{0\}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
0 &= f(P) = f(\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n) \\
&= \sum_{i=0}^{r} f_i(\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n) \\
&= \sum_{i=0}^{r} \lambda^i f_i(x_0 : \ldots : x_n) \quad [\text{ por obs. 2.10, pues } f_i \text{ es homogéneo de grado } i\ ] \\
&= \sum_{i=0}^{r} \lambda^i f_i(P).
\end{aligned}$$

Esto significa que el polinomio $g(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{r} f_i(P)x^i \in K[x]$ tiene como raíz a todo $\lambda \in K \setminus \{0\}$. Sin embargo, el número de raíces de todo polinomio no cero es menor o igual que su grado, por lo que se concluye que g es el polinomio 0, pues K es un campo infinito. De esta forma, se sigue que los coeficientes de g son todos cero, es decir, $f_i(P) = 0$ para todo $0 \leq i \leq r$ y para todo $P \in Y$. Por lo tanto, $f = f_1 + \cdots f_r \in \langle\{g \in K[x_0, \ldots, x_n] : \text{g es homogéneo y } g(P) = 0 \text{ para todo } P \in Y\}\rangle = I(Y)$. $\square$

Uno de los ejemplos más importantes de ideal asociado a subconjuntos del espacio proyectivo es el que se muestra en la siguiente proposición. Este ejemplo será de gran utilidad más adelante.

Proposición 2.25 *Si K es un campo infinito, entonces $I(\mathbb{P}^n_K) = \{0\}$.*

Demostración. La prueba es similar al caso afín (ver proposición 1.19) con la peculiaridad de que aquí se trabaja con polinomios homogéneos. □

A continuación se muestran las propiedades que satisfacen los ideales asociados a subconjuntos del espacio proyectivo.

Proposición 2.26 *Para un campo K, las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) Si $Y_1 \subseteq Y_2$ son subconjuntos de $\mathbb{P}^n_K$, entonces $I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$.

(b) Si $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{P}^n_K$, entonces $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

(c) Si $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$, entonces $Y \subseteq Z(I(Y))$.

(d) Si $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo de $K[x_0, \ldots, x_n]$, entonces $\mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$.

(e) Si $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$, entonces $Z(I(Y)) = \overline{Y}$, donde $\overline{Y}$ es la cerradura de Y en la topología de Zariski para $\mathbb{P}^n_K$.

(f) $I(\emptyset) = K[x_0, \ldots, x_n]$.

Demostración. La demostración es de forma similar a la hecha para el caso de ideales asociados a subconjuntos del espacio afín (proposición 1.20). Para convencer al lector de este hecho, haremos la prueba del inciso e).

(e) Sea $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$.
De acuerdo al inciso c) de esta proposición, se tiene que $Y \subseteq Z(I(Y))$. Además, el conjunto $Z(I(Y))$ es cerrado en la topología de Zariski para $\mathbb{P}^n_K$, por lo que se concluye que $\overline{Y} \subseteq Z(I(Y))$.
Por otro lado, consideremos $W \subseteq \mathbb{P}^n_K$ un conjunto cerrado tal que $Y \subseteq W$. Ya que W es cerrado, existe $\mathfrak{a} \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$ un ideal homogéneo tal que $W = Z(\mathfrak{a})$, de esta forma se sigue que $Y \subseteq Z(\mathfrak{a})$.
Por el inciso a), tenemos que $I(Z(\mathfrak{a})) \subseteq I(Y)$; y por el inciso d), sabemos que $\mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$. Por tanto se concluye que $\mathfrak{a} \subseteq I(Y)$. De esta forma, por la proposición 2.17, se sigue que $Z(I(Y)) \subseteq Z(\mathfrak{a}) = W$. Como $\overline{Y}$ es el conjunto cerrado más pequeño, respecto a la contención, que contiene a Y, se tiene que $\overline{Y} = Z(I(Y))$.

□

Corolario 2.27 *Sean K un campo y $X \subseteq \mathbb{P}^n_K$. Entonces $X = Z(I(X))$ si y solo si X es un conjunto algebraico proyectivo.*

Demostración. Consideremos $X \subseteq \mathbb{P}^n_K$.

Supongamos que $X = Z(I(X))$. Ya que $I(X) \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$ es un ideal homogéneo, por definición se tiene que X es algebraico.

Por otro lado, supongamos que X es algebraico, es decir, X es un subconjunto cerrado de $\mathbb{P}^n_K$ con la topología de Zariski.
Por el inciso e) de la proposición 2.26, sabemos que $Z(I(X)) = \overline{X}$; ya que X es cerrado con la topología de Zariski, concluimos que $X = \overline{X}$.
Por lo tanto, $Z(I(X)) = X$. □

Notemos que el corolario 2.27 nos indica que la correspondencia I resulta ser inyectiva al trabajar con conjuntos algebraicos, pues con esta restricción se consigue una inversa izquierda de I que es precisamente la correspondencia Z.

2.4. Nullstellensatz proyectivo.

Tal y como sucedió en el caso afín, se tienen definidas dos correspondencias entre diferentes conjuntos, la diferencia es que ahora no se trabaja con ideales arbitrarios si no con ideales homogéneos. Para observar esto, primero consideremos los conjuntos $U := \{$ ideales homogéneos de $K[x_0, \ldots, x_n]\}$ y $W := \{$ subconjuntos algebraicos de $\mathbb{P}^n_K\}$.
Entonces, dado un campo K, tenemos una correspondencia entre los ideales homogéneos de $K[x_0, \ldots, x_n]$ y los subconjuntos algebraicos de $\mathbb{P}^n_K$ dada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Z : U &\longrightarrow W \\ T &\longmapsto Z(T) \end{aligned}$$

Por otro lado, la correspondencia entre los subconjuntos algebraicos del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_K$ y los ideales homogéneos de $K[x_0, \ldots, x_n]$ está dada por:

$$\begin{aligned} I : W &\longrightarrow U \\ Y &\longmapsto I(Y) \end{aligned}$$

Naturalmente nos preguntamos si en el caso proyectivo estas correspondencias cumplen las mismas propiedades que en el caso afín. Algunas propiedades que se siguen verificando son que, al tomar $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ y considerar el ideal homogéneo $I(Y)$, este último resulta ser un ideal radical (ver definición 1.38); de igual forma, al trabajar en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_K$, se tiene que la correspondencia Z no es inyectiva.
Ambos hechos se enuncian de manera formal en las siguientes proposiciones.

Proposición 2.28 *Sean K un campo y $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$. Entonces $I(Y)$ es un ideal radical.*

Demostración. La demostración es completamente análoga a cuando se definió el ideal asociado a subconjuntos del espacio afín (ver proposición 1.49). □

La proposición 2.28 nos indica que, al considerar el ideal asociado a un subconjunto del espacio proyectivo, este ideal resulta ser siempre radical. Esto significa que si definimos $V := \{$ ideales radicales homogéneos de $K[x_0, \ldots, x_n]\}$, la correspondencia I resulta ser de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I : \{ \text{ subconjuntos algebraicos de } \mathbb{P}^n_K \} &\longrightarrow V \\ Y &\longmapsto I(Y). \end{aligned}$$

Como se ha dicho anteriormente, la correspondencia Z no es siempre inyectiva. A continuación no sólo se observa este hecho, sino también la relación de dicho comportamiento de Z con los ideales radicales.
Notemos que, por el inciso a) de la proposición 2.6, se tiene que, si I es un ideal homogéneo, entonces $\sqrt{I}$ también lo es. De esta forma, tiene sentido considerar al conjunto $Z(\sqrt{I})$. Así, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.29 *Sean K un campo e I un ideal homogéneo de $K[x_0, \ldots, x_n]$. Entonces $Z(I) = Z(\sqrt{I})$.*

Demostración. La demostración es similar al caso afín (ver proposición 1.50), únicamente haciendo la distinción de que en este resultado se trabaja con ideales homogéneos. □

Observación 2.30 *Para algunos resultados posteriores, será necesario el uso de la siguiente notación.*

Si $J \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$ es un conjunto de polinomios homogéneos, podemos considerar los conjuntos

$$Z_a(J) := \{P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1}_K : f(P) = 0 \ \forall f \in J\},$$

y

$$Z_p(J) := \{Q = (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}^n_K : f(Q) = 0 \ \forall f \in J\}.$$

El uso de esta notación se debe a que queremos hacer énfasis en que, si bien estos conjuntos están relacionados, no son iguales, pues la naturaleza de sus elementos es distinta. Debido a que el presente capítulo se refiere al espacio proyectivo, el uso de la escritura $Z_a(J)$ y $Z_p(J)$ se omitirá cuando únicamente aparezca el conjunto $Z_p(J)$, en tal caso lo escribiremos simplemente como $Z(J)$.

Como hemos visto hasta este momento, al considerar las correspondencias Z e I en el caso proyectivo, existen propiedades que se siguen cumpliendo tal y como en el caso afín. Sin embargo, esto no ocurre siempre. Por ejemplo, cuando se trabaja en el espacio afín, sabemos que el único ideal I de $K[x_1, \ldots, x_n]$ que está asociado con el conjunto algebraico $\emptyset$, es decir $Z_a(I) = \emptyset$, es el anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$.

No obstante, este hecho no se verifica si trabajamos en el espacio proyectivo. Para observar esto, primero notemos que el ideal $I = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \subsetneq K[x_0, \ldots, x_n]$ es un ideal homogéneo, pues está generado precisamente por lo polinomios x_i, y cada uno de estos polinomios es homogéneo de grado 1. Además observemos que $Z_p(I) = Z_p(x_0, \ldots, x_n) = \emptyset$, lo cual ocurrre debido a que no existe un punto $P \in \mathbb{P}^n_K$ de tal forma que todas las coordenadas homogéneas de P sean cero.
De esta forma, existe al menos un ideal homogéneo propio I de $K[x_0, \ldots, x_n]$ tal que $Z_p(I) = \emptyset$.

Las preguntas que surgen naturalmente son: ¿Es este el único ideal homogéneo de $K[x_0, \ldots, x_n]$ asociado al conjunto algebraico proyectivo vacío?, ¿Qué condición debe cumplir un ideal homogéneo I de $K[x_0, \ldots, x_n]$ para que $Z_p(I) = \emptyset$?
Estos planteamientos se responden en el siguiente resultado.

Proposición 2.31 *Para un ideal homogéneo $\mathfrak{a}$ de $K[x_0, \ldots, x_n]$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $Z_p(\mathfrak{a}) = \emptyset$.

(b) $\sqrt{\mathfrak{a}} = K[x_0, \ldots, x_n]$ *o bien* $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigoplus_{d>0} A_d$.

(c) $A_d \subseteq \mathfrak{a}$ *para algún* $d > 0$.

Donde A_d es el conjunto de polinomios homogéneos de grado d.
Además $\bigoplus_{d>0} A_d$ consta de todos los polinomios en las variables $x_0, \ldots, x_n$ sin término constante, es decir, $\bigoplus_{d>0} A_d = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$.

Demostración.
$(a) \implies (b)$. Supongamos que $Z_p(\mathfrak{a}) = \emptyset$.
Notemos primero que en el ideal $\mathfrak{a}$ puede o no haber polinomios constantes, es posible que suceda alguno de los dos casos gracias a la hipótesis de que $Z_p(\mathfrak{a}) = \emptyset$.

En caso de que existan polinomios constantes no nulos en el ideal $\mathfrak{a} \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$, al considerar el conjunto algebraico afín $Z_a(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_K$ obtenemos que $Z_a(\mathfrak{a}) = \emptyset$, pues ningun elemento del espacio afín $\mathbb{A}^n_K$ anulará a los elementos no nulos de $\mathfrak{a}$ que son polinomios constantes.
Al aplicar I, se tiene que $I(Z_a(\mathfrak{a})) = I(\emptyset) = K[x_0, \ldots, x_n]$, esto último por el inciso f) de la proposición 2.26. De este modo, por el Nullstellensatz (teorema 1.62), se concluye que $\sqrt{\mathfrak{a}} = K[x_0, \ldots, x_n]$.

Ahora veamos qué ocurre en caso de que en $\mathfrak{a}$ no existan polinomios constantes. Por hipótesis, $Z_p(\mathfrak{a}) = \emptyset$, esto significa que no hay elementos $Q \in \mathbb{P}^n_K$

tales que $f(Q) = 0$ para todo $f \in \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a}$ es un ideal de $K[x_0, \ldots, x_n]$, se puede considerar el conjunto algebraico afín $Z_a(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^{n+1}$.

Se afirma que $Z_a(\mathfrak{a}) = \{0\}$.
Notemos que $0 \in Z_a(\mathfrak{a})$, debido a que en $\mathfrak{a}$ no hay polinomios constantes. Supongamos ahora que $0 \neq P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_K^{n+1}$ es tal que $P \in Z_a(\mathfrak{a})$. En tal caso, como $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo, se tendría que $Q = (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}_K^n$ satisface $f(Q) = 0$ para todo $f \in \mathfrak{a}$. Esto representa una contradicción con la hipótesis de que $Z_p(\mathfrak{a}) = \emptyset$.
Así, se tiene que $Z_a(\mathfrak{a}) = \{0\}$, lo cual implica que:

$$I(Z_a(\mathfrak{a})) = I(\{(0, \ldots, 0)\}) = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle.$$

Finalmente, por el teorema 1.62, se sabe que $I(Z_a(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Por lo tanto, concluimos que $\sqrt{\mathfrak{a}} = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$.

$(b) \implies (c)$. Supongamos $b)$ y probemos que existe $d > 0$ tal que $A_d \subseteq \mathfrak{a}$.
Notemos que, si $\sqrt{\mathfrak{a}} = K[x_0, \ldots, x_n]$, entonces se tiene que $1 \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Esto implica que $1 \in \mathfrak{a}$, es decir, $\mathfrak{a} = K[x_0, \ldots, x_n]$. Por lo tanto, $A_d \subseteq \mathfrak{a}$ para todo $d \in \mathbb{N}$.
En otro caso, si $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigoplus_{d>0} A_d = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$, para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, existe $r_i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i^{r_i} \in \mathfrak{a}$.
Sea $k = \max\{r_i : i = 0, \ldots, n\}$. Notemos que $x_i^k \in \mathfrak{a}$ para todo i, esto es debido a que $\mathfrak{a}$ es un ideal. Se afirma que $A_{k(n+1)} \subseteq \mathfrak{a}$.
En efecto, consideremos $f = \displaystyle\sum_{\alpha} c_\alpha x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in A_{k(n+1)}$, es decir, f es homogéneo de grado $k(n+1)$. Consideremos $x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ un monomio que conforma a f. Primero notemos que $k(n+1) = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$. Además, si cada exponente α_i es menor que k, entonces $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n < k(n+1)$. Esto representa una contradicción, pues f es de grado $k(n+1)$. De este modo, todo monomio que conforma a f tiene al menos un x_i con exponente mayor o igual a k.
Es así como se concluye que $f = \displaystyle\sum_{\alpha} c_\alpha x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathfrak{a}$.
Por lo tanto, existe $k(n+1) > 0$ tal que $A_{k(n+1)} \subseteq \mathfrak{a}$.

$(c) \implies (a)$. Supongamos que existe $d > 0$ tal que $A_d \subseteq \mathfrak{a}$. Probaremos que $Z_p(\mathfrak{a}) = \emptyset$.
Ya que $A_d \subseteq \mathfrak{a}$, por el inciso $d)$ de la proposición 2.16, se tiene que $Z_p(\mathfrak{a}) \subseteq Z_p(A_d)$. Supongamos que existe $P \in Z_p(\mathfrak{a})$. Por lo dicho anteriormente, se sigue que $P \in Z_p(A_d)$; esto significa que $f(P) = 0$ para todo $f \in A_d$. Es decir, $P \in \mathbb{P}_K^n$ es tal que $f(P) = 0$ para todo polinomio homogéneo $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ de grado $d > 0$. En particular, $P = (a_0 : \ldots : a_n)$ es solución de los polinomios homogéneos $x_0^d, x_1^d, \ldots, x_n^d$. Esto es imposible, pues las coordenadas homogéneas de P no pueden ser todas cero. Por lo tanto, $Z_p(\mathfrak{a}) = \emptyset$. $\square$

El objetivo principal de esta sección es mostrar que el Nullstellensatz (teorema 1.62) tiene su versión proyectiva. Para poder probar esto, es necesario introducir algunos conceptos más, tal y como se observa a continuación.

Definición 2.32 ***(Conos)*** *Consideremos la proyección canónica*

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}_K^n \\ (a_0, \ldots, a_n) &\longmapsto (a_0 : \ldots : a_n). \end{aligned}$$

Entonces se tienen las siguientes definiciones:

(a) Un conjunto $X \subseteq \mathbb{A}_K^{n+1}$ es llamado ***cono*** *si $0 \in X$ y $\lambda x \in X$ para todo $\lambda \in K$ y $x \in X$.*

(b) Sea $Y \subseteq \mathbb{P}_K^n$ un conjunto algebraico proyectivo. Se define el ***cono afín sobre*** *Y como el subconjunto de $\mathbb{A}_K^n$:*

$$C(Y) := \{0\} \cup \pi^{-1}(Y) = \{0\} \cup \{(a_0, \ldots, a_n) : (a_0 : \ldots : a_n) \in Y\}.$$

(c) Sea $X \subseteq \mathbb{A}_K^{n+1}$ un conjunto algebraico afín. Definimos la ***proyectivización de*** *X como el siguiente subconjunto de $\mathbb{P}_K^n$:*

$$\mathbb{P}(X) := \pi(X \setminus \{0\}) = \{(a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}_K^n : (a_0, \ldots, a_n) \in X\}.$$

Ejemplo 2.33 *Sea K un campo. Entonces $C(\mathbb{P}_K^n) = \mathbb{A}_K^{n+1}$.*
En efecto, sabemos que $C(\mathbb{P}_K^n) \subseteq \mathbb{A}_K^{n+1}$. Por lo que basta ver que $\mathbb{A}_K^{n+1} \subseteq C(\mathbb{P}_K^n)$. Sea $P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_K^{n+1}$. Si $P = 0$, entonces $P \in C(\mathbb{P}_K^n)$, por definición de cono. Por otro lado, si $P \neq 0$, entonces $\pi(P) = (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}_K^n$, es decir, $P \in \pi^{-1}(\mathbb{P}_K^n)$ y de esta forma se concluye que $P \in C(\mathbb{P}_K^n)$.

Proposición 2.34 *Sean $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{P}_K^n$ conjuntos algebraicos proyectivos tales que $Y_1 \subseteq Y_2$. Entonces $C(Y_1) \subseteq C(Y_2)$.*

Demostración. Consideremos $Y_1 \subseteq Y_2$ conjuntos algebraicos proyectivos.
Tomemos $P \in C(Y_1)$. Si $P = 0$, entonces $P \in C(Y_2)$, por definición de cono afín. Por otro lado, si $P \in \pi^{-1}(Y_1)$, se tiene que $P \in \pi^{-1}(Y_2)$. Esto es debido a que $\pi^{-1}(Y_1) \subseteq \pi^{-1}(Y_2)$, lo cual se cumple por propiedades de imagen inversa de funciones. En consecuencia, $P \in C(Y_2)$. De esta forma, se concluye que $C(Y_1) \subseteq C(Y_2)$. □

En la siguiente proposición se establece una relación entre los conjuntos algebraicos afines y los conjuntos algebraicos proyectivos, es posible establecer tal relación gracias a los conos y la proyectivización definidos previamente.

Proposición 2.35 *Sea $J \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$ un conjunto de polinomios homogéneos de tal forma que $Z_a(J) \neq \emptyset$. Entonces:*

(a) $C(Z_p(J)) = Z_a(J)$

(b) $\mathbb{P}(Z_a(J)) = Z_p(J)$.

Demostración. Consideremos $J \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$ un conjunto de polinomios homogéneos tal que $Z_a(J) \neq \emptyset$. Primero notemos que en J no pueden existir polinomios constantes no nulos, pues de lo contrario, si $f \in J$ es un polinomio constante no nulo, entonces $Z_a(f) = \emptyset$ y por lo tanto $Z_a(J) = \emptyset$, contradiciendo la hipótesis. De hecho, como J está conformado por polinomios homogéneos, los elementos de J carecen de término constante.

(a) Procedamos con la prueba por doble contención.
Sea $P = (a_0, \ldots, a_n) \in C(Z_p(J))$, es decir, $P = 0$ o $Q = (a_0 : \ldots : a_n) \in Z_p(J)$.
Si $P = 0$, entonces $f(P) = 0$ para todo $f \in J$. Esto es debido a que en J no hay polinomios constantes. Por lo tanto, $P \in Z_a(J)$.
Ahora bien, si $Q = (a_0 : \ldots : a_n) \in Z_p(J)$, entonces $g(Q) = 0$ para todo $g \in J$. Observemos que si $g(a_0 : \ldots : a_n) = 0$, se sigue que $g(a_0, \ldots, a_n) = 0$, y esto implica que $g(P) = 0$ para todo $g \in J$, es decir, $P \in Z_a(J)$.

Por otro lado, consideremos $P = (a_0, \ldots, a_n) \in Z_a(J)$, es decir, $P \in \mathbb{A}_K^{n+1}$ es tal que $f(P) = 0$ para todo $f \in J$.
Ya que en J no existen polinomios constantes no nulos, cabe la posibilidad de que $P = 0$, y en tal caso $P \in C(Z_p(J))$. Por el contrario, si $P \neq 0$, entonces $Q = (a_0 : \ldots : a_n)$ es tal que $f(Q) = 0$ para todo $f \in J$, pues los elementos de J son polinomios homogéneos. Así, se concluye que $P \in C(Z_p(J))$.

(b) Sea $Q = (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}(Z_a(J))$. Esto significa que $Q \in \mathbb{P}_K^n$ es tal que $(a_0, \ldots, a_n) \in Z_a(J)$, y por lo tanto, para todo $f \in J$, $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$. Esto, junto con el hecho de que J es un conjunto de polinomios homogéneos, implica que $f(a_0 : \ldots : a_n) = 0$ para todo $f \in J$. De esta forma, se concluye que $Q \in Z_p(J)$.
Ahora sea $Q = (a_0 : \ldots : a_n) \in Z_p(J)$. Luego $f(Q) = 0$ para todo $f \in J$. Nuevamente recordemos que si $f(a_0 : \ldots : a_n) = 0$ para todo $f \in J$, entonces $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$ para todo $f \in J$.
Por lo tanto, $(a_0, \ldots, a_n) \in Z_a(J)$, es decir, $Q = (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}(Z_a(J))$.

□

Como se ha podido observar hasta ahora, tener la definición del cono sobre un conjunto algebraico proyectivo nos permite establecer varias relaciones entre conjuntos definidos para el caso afín y para el caso poyectivo. Los siguientes resultados seguirán mostrando la gran relevancia de esta construcción.

Recordemos que si $X \subseteq \mathbb{A}_K^{n+1}$ o $X \subseteq \mathbb{P}_K^n$, se puede hablar acerca del ideal de $K[x_0, \ldots, x_n]$ asociado a X, el cual está dado por $I(X) = \{f \in K[x_0, \ldots, x_n] : f(P) = 0$ para todo $P \in Y\}$. Usaremos el mismo símbolo para denotar a este ideal, tanto en el caso afin como proyectivo, teniendo precaución e identificando la diferencia de acuerdo al contexto en el cual se esté trabajando.

Si tomamos $Y \subseteq \mathbb{P}_K^n$ un conjunto algebraico proyectivo, podemos construir el cono sobre Y, se tiene que $C(Y) \subseteq \mathbb{A}_K^{n+1}$ y por lo tanto se pueden considerar los ideales $I(Y), I(C(Y)) \subseteq K_[x_0, \ldots, x_n]$ asociados a Y y a $C(Y)$, respectivamente. En el siguiente resultado se aprecia la relación entre tales ideales.

Proposición 2.36 *Sea $Y \subseteq \mathbb{P}_K^n$ un conjunto algebraico proyectivo. Entonces $I(Y) = I(C(Y))$.*

Demostración. Consideremos $Y \subseteq \mathbb{P}_K^n$ un conjunto algebraico proyectivo. Como Y es un conjunto algebraico proyectivo, por el corolario 2.27, se tiene que $Z_p(I(Y)) = Y$. De este modo, se tiene que $C(Y) = C(Z_p(I(Y)))$ y por la proposición 2.35, se concluye que:

$$\begin{aligned} C(Y) &= C(Z_p(I(Y))) \\ &= Z_a(I(Y)). \end{aligned}$$

Esto implica que $I(C(Y)) = I(Z_a(I(Y)))$. Además $I(Y)$ es un ideal radical de $K[x_0, \ldots, x_n]$ (por la proposición 2.28) por lo que, de acuerdo al corolario 1.63, tenemos que $I(Z_a(I(Y))) = I(Y)$. Por lo tanto, $I(Y) = I(C(Y))$ como se deseaba. □

Corolario 2.37 *Sea $Y \subseteq \mathbb{P}_K^n$ un conjunto algebraico proyectivo. Entonces, el cono sobre Y, $C(Y) \subseteq \mathbb{A}_K^{n+1}$, es un conjunto algebraico afín.*

Demostración. Como Y es un conjunto algebraico proyectivo, de acuerdo al corolario 2.27, se tiene que $Y = Z_p(I(Y))$, y por lo tanto $C(Y) = C(Z_p(I(Y)))$. Recordemos que, por el inciso a) de la proposición 2.35, $C(Z_p(I(Y))) = Z_a(I(Y))$, por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} C(Y) &= C(Z_p(I(Y))) \\ &= Z_a(I(Y)). \end{aligned}$$

Finalmente, por la proposición 2.36, sabemos que $I(Y) = I(C(Y))$. Así, tenemos que $C(Y) = Z_a(I(C(Y)))$. De esta forma, como $C(Y) \subseteq \mathbb{A}_K^{n+1}$, con la ayuda del corolario 1.21, concluimos que $C(Y)$ es un conjunto algebraico afín. □

Una vez introducido el concepto de cono sobre un conjunto algebraico proyectivo, estamos listos para probar el teorema más importante de esta sección, el Nullstellensatz en su versión proyectiva. Este teorema nos permitirá, al igual que en el caso afín, concluir cuándo las correspondencias Z e I son inversas una de la otra.

Teorema 2.38 ***Nullstellensatz*** *(Versión proyectiva)*
Sean K un campo algebraicamente cerrado y $J \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$ un ideal homogéneo. Si $Z_p(J) \neq \emptyset$, entonces $I(Z_p(J)) = \sqrt{J}$.

Demostración. Sean K un campo algebraicamente cerrado y $J \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$ un ideal homogéneo tal que $Z_p(J) \neq \emptyset$.
De acuerdo a la proposición 2.36, tenemos que $I(Z_p(J)) = I(C(Z_p(J)))$. Ahora, el hecho de que $Z_p(J) \neq \emptyset$, implica que $Z_a(J) \neq \emptyset$, y por la proposición 2.35, concluimos que $C(Z_p(J)) = Z_a(J)$. De este modo, se tiene que:

$$I(Z_p(J)) = I(C(Z_p(J))) = I(Z_a(J)).$$

Más aún, por el Nullstellensatz (teorema 1.62), sabemos que $I(Z_a(J)) = \sqrt{J}$. Por lo tanto, $I(Z_p(J)) = \sqrt{J}$. $\square$

Observación 2.39 *Recordemos que el ideal $I = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \subsetneq K[x_0, \ldots, x_n]$ es tal que $Z_p(I) = \emptyset$, por lo que*

$$I(Z_p(I)) = I(\emptyset) = K[x_0, \ldots, x_n].$$

Sin embargo, $\sqrt{I} = I \subsetneq K[x_0, \ldots, x_n]$, de modo que $I(Z_p(I)) \neq \sqrt{I}$.
Esto nos permite observar la importancia de la hipótesis $Z_p(I) \neq \emptyset$ en el teorema 2.38. Al ideal $I = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ se le llama el ***ideal irrelevante****.*

A partir del teorema 2.38, se deduce de forma inmediata el siguiente corolario.

Corolario 2.40 *Sean K un campo algebraicamente cerrado y J un ideal de $K[x_0, \ldots, x_n]$ tal que $Z_p(J) \neq \emptyset$. Entonces $J = I(Z_p(J))$ si y solo si J es un ideal radical.*

Demostración. La prueba es de forma similar a la hecha para el caso afín. Sugerimos consultar la prueba del corolario 1.63. $\square$

De esta manera, y con todos los resultados probados hasta ahora, podremos establecer las condiciones para que las correspondencias Z e I tengan el comportamiento deseado.

Gracias al corolario 2.27, pudimos concluir que Z es inversa izquierda de la correspondencia I. Además, por el Nullstellensatz en su versión proyectiva (teorema 2.38), se observa que si se hace una restricción y unicamente trabajamos con ideales radicales homogéneos $J \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$, tales que $Z(J) \neq \emptyset$, entonces la correspondencia I es inversa izquierda de Z.
De este modo, se concluye que si K es un campo algebraicamente cerrado y definimos los conjuntos

$$U := \{ \text{ ideales radicales homogéneos de } K[x_0, \ldots, x_n] \text{ distintos de } \bigoplus_{d>0} A_d \},$$

$$W := \{ \text{ subconjuntos algebraicos de } \mathbb{P}^n_K \}.$$

Entonces las correspondencias:

$$\begin{aligned} Z : U &\longrightarrow W \\ T &\longmapsto Z(T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I : W &\longrightarrow U \\ Y &\longmapsto I(Y) \end{aligned}$$

son correspondencias biyectivas, invierten inclusiones y además son inversas una de la otra.
Tal y como sucedió en el caso afín, este hecho nos permitirá establecer relaciones entre aspectos topológicos y algebraicos.

2.5. Irreducibilidad

En el capítulo anterior se habló acerca de un tipo muy especial e importante de conjuntos, los conjuntos irreducibles. Ya que esta noción se puede introducir en cualquier espacio topológico, entonces también podemos hablar de conjuntos irreducibles en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_K$. Esto queda establecido tal y como en la definición 1.65.

A lo largo de este capítulo se observará que algunas propiedades, referentes a los conjuntos algebraicos, enunciadas en el capítulo anterior también se satisfacen en el espacio proyectivo. Ejemplo de esto es la siguiente proposición, resultado que nos permite establecer una relación más entre los ideales homogéneos de $K[x_0, \ldots, x_n]$ y los subconjuntos algebraicos de $\mathbb{P}^n_K$.

Proposición 2.41 *Sean K un campo y $V \subseteq \mathbb{P}^n_K$ un conjunto algebraico. Entonces, V es irreducible si y solo si $I(V)$ es un ideal primo de $K[x_0, \ldots, x_n]$.*

Demostración. Consideremos $V \subseteq \mathbb{P}^n_K$ un conjunto algebraico.

Supongamos que V es irreducible y probemos que $I(V)$ es un ideal primo. Ya que $I(V)$ es un ideal homogéneo, para probar que es ideal primo basta demostrar que para cualesquiera polinomios homogéneos $f, g \in K[x_0, \ldots, x_n]$, tales que $fg \in I(V)$, se satisface que $f \in I(V)$ o $g \in I(V)$ (ver proposición 2.7).
La prueba de este hecho se hace de forma similar a como se realizó en la proposición 1.75 .

Por otro lado, supongamos que $I(V)$ es un ideal primo y veamos que V es un conjunto irreducible.
Supongamos que existen V_1, V_2 subconjuntos propios cerrados en V tales que $V = V_1 \cup V_2$. Entonces se tiene que $I(V) = I(V_1 \cup V_2)$. Por el inciso $b)$ de la proposición 2.26, se sigue que $I(V) = I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2)$.

Ya que V_1, V_2 son subconjuntos propios de V, se tiene que $I(V) \subsetneq I(V_1)$ y $I(V) \subsetneq I(V_2)$; esto significa que existen $f_i \in I(V_i) \setminus I(V)$ para $i \in \{1, 2\}$.

Consideremos $f_1 = \sum_{i=0}^{n} g_i$, la descomposición de f_1 en componentes homogéneas. Como $f_1 \in I(V_1)$, entonces $g_i \in I(V_1)$ para todo i; más aún, dado que $f_1 \notin I(V)$, se sigue que existe $j \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $g_j \notin I(V)$. De este modo, tenemos que existe un elemento homogéneo $g_j \in I(V_1) \setminus I(V)$. De la misma forma podemos conseguir un elemento homogéneo $h_k \in I(V_2) \setminus I(V)$.
Debido a que $I(V_1), I(V_2)$ son ideales, entonces $g_j h_k \in I(V_1)$ y $g_j h_k \in I(V_2)$, por lo que se deduce que $g_j h_k \in I(V_1) \cap I(V_2) = I(V)$.
Por lo tanto, existen polinomios homogéneos g_j, h_k tales que $g_j h_k \in I(V)$ y $g_j, h_k \notin I(V)$, esto representa una contradicción con la hipótesis de que $I(V)$ es un ideal homogéneo primo (ver proposición 2.7).
Así, se concluye que V es irreducible. $\square$

En la sección anterior se observó que si $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ es un conjunto algebraico proyectivo, entonces Y tiene algunas características comunes al cono sobre Y, una propiedad más que se satisface se observa en el siguiente resultado.

Proposición 2.42 *Sea $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ un conjunto algebraico proyectivo. Entonces Y es irreducible si y solo si $C(Y)$ es irreducible.*

Demostración. Tomemos $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ un conjunto algebraico proyectivo.
Notemos que Y es irreducible si y solo si $I(Y)$ es un ideal primo, por la proposición 2.41.

Por otra parte, gracias a la proposición 2.36, tenemos que $I(Y) = I(C(Y))$, por lo que $I(Y)$ es un ideal primo si y solo si $I(C(Y))$ lo es. A su vez, por la proposición 1.75, ocurre que $I(C(Y))$ es un ideal primo si y solo si $C(Y)$ es un conjunto irreducible.
De esta forma, se concluye que Y es irreducible si y solo si $C(Y)$ es irreducible. $\square$

La proposición 2.41 establece una condición bajo la cual se podrá determinar si un conjunto algebraico es irreducible. Nombraremos a los conjuntos que cumplen tal característica. Esto se presenta en la siguiente definición.

Definición 2.43 *Una **variedad proyectiva** es un subconjunto algebraico irreducible de $\mathbb{P}^n_K$, considerando la topología de Zariski.*
*A su vez, un subconjunto abierto de una variedad proyectiva recibe el nombre de **variedad casi-proyectiva**.*

Ejemplo 2.44 *Si K es un campo infinito, entonces $\mathbb{P}^n_K$ es una variedad proyectiva. Más aún, al ser un subconjunto abierto de sí mismo, también es una variedad casi-proyectiva.*

Efectivamente, si K es infinito entonces, por la proposición 2.25, se tiene que $I(\mathbb{P}^n_K) = \{0\}$. Ya que $\{0\}$ es un ideal primo de $K[x_0, \ldots, x_n]$, entonces, por la proposición 2.41, concluimos que $\mathbb{P}^n_K$ es un conjunto irreducible y por tanto es una variedad proyectiva.

Recordemos que, dado un conjunto algebraico afin $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$, se puede definir el anillo de coordenadas de Y, es decir $K[Y]$. Tal y como se observa a continuación, esta asociación entre conjuntos algebraicos y anillos también se puede realizar en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_K$.

Definición 2.45 *Sea $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ un conjunto algebraico. El* ***anillo de coordenadas proyectivo de*** *Y está dado por:*

$$K_p[Y] := K[x_0, \ldots, x_n]/I(Y).$$

En lo sucesivo, para referirnos al anillo de coordenadas proyectivo de Y, diremos simplemente anillo de coordenadas. Cuando se trabaje simultáneamente con este anillo y el definido para el caso afín, la distinción se hará de forma explícita.

Observación 2.46 *Si $V \subseteq \mathbb{P}^n_K$ es un conjunto algebraico, entonces el anillo de coordenadas de V, $K_p[V]$, es un anillo graduado.*
Esto es inmediato, pues $K[x_0, \ldots, x_n]$ es un anillo graduado, $I(V)$ es un ideal homogéneo y, por el inciso b) de la proposición 2.6, se tiene que $K_p[V] = K[x_0, \ldots, x_n]/I(V)$ es un anillo graduado.

Una vez establecida esta relación, podemos probar el siguiente resultado que nos da una forma más de averiguar cuándo un conjunto algebraico es irreducible.

Proposición 2.47 *Sea $V \subseteq \mathbb{P}^n_K$ un conjunto algebraico. Entonces, V es irreducible si y solo si $K_p[V]$ es un dominio entero.*

Demostración. A partir de la proposición 2.41, sabemos que V es irreducible si y solo si $I(V)$ es un ideal primo. Además, por la proposición 1.85, tenemos que $I(V)$ es primo si y solo si $K[x_0, \ldots, x_n]/I(V)$ es un dominio entero. Por lo tanto, V es irreducible si y solo si $K_p[V]$ es un dominio entero. $\square$

Otra noción que se trató en el capítulo anterior, y que podemos introducir en el estudio del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_K$, es la noción de espacio topológico noetheriano (ver definición 1.88). Es posible hacer esto puesto que la definición se hace para un espacio topológico arbitrario.

Uno de los resultados principales de este capítulo es el siguiente, que indica que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_K$ es un espacio topológico noetheriano. Dicho resultado es de suma importancia, pues nos permitirá concluir que todo conjunto algebraico proyectivo puede ser expresado como la unión finita de variedades proyectivas.

Proposición 2.48 *Si K es un campo, entonces $\mathbb{P}^n_K$, con la topología de Zariski, es un espacio topológico noetheriano.*

Demostración. La prueba de este resultado es de forma análoga al caso afín y se sigue de las propiedades de las correspondencias I y Z. Se recomienda consultar la prueba hecha en el ejemplo 1.89. $\square$

Proposición 2.49 *Todo conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{P}^n_K$ se puede expresar como unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles no contenidos uno en otro, es decir, como unión finita de variedades proyectivas no contenidas una en otra.*
A dichas variedades proyectivas presentes en la expresión de V se les llama ***componentes irreducibles de*** *V.*

Demostración. Sea $V \subseteq \mathbb{P}^n_K$ un conjunto algebraico, es decir, V es un cerrado de $\mathbb{P}^n_K$ con la topología de Zariski.
De acuerdo a la proposición 2.48, se tiene que $\mathbb{P}^n_K$ es noetheriano, y por la proposición 1.91, se deduce que V se puede espresar como unión finita de subconjuntos cerrados irreducibles, no contenidos uno en otro. Es decir, $V = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$, donde cada V_i es una variedad proyectiva y si $i \neq j$, entonces $V_i \nsubseteq V_j$. $\square$

2.6. Dimensión de variedades proyectivas.

Tal y como se introdujeron las nociones de dimensión de variedades afines, estas nociones se pueden introducir en el estudio de las variedades proyectivas, pues la definición 1.95 se dio para espacios topológicos de forma general.
En esta sección se presentarán algunos resultados relativos a las nociones de dimensión de espacios topológicos y dimensión de Krull de anillos (ver definición 1.100).

Para probar el resultado principal de esta sección (proposición 2.54), necesitamos algunos resultados auxiliares, los cuales se presentan a continuación a modo de recordatorio. Dados los fines del presente trabajo, las demostraciones de los siguientes lemas se dejan como ejercicio al lector interesado en realizarlas.

Lema 2.50 *Sean A un dominio entero y* $\mathrm{Frac}(A)$ *su campo de fracciones. Sea B un anillo tal que $A \subseteq B \subseteq \mathrm{Frac}(A)$. Entonces B es un dominio entero y además* $\mathrm{Frac}(B) = \mathrm{Frac}(A)$.

Lema 2.51 *Sea A un dominio entero, consideremos el anillo de polinomios en variable x con coeficientes en A, es decir, $A[x]$. Entonces, $A[x]$ es un dominio entero y su campo de fracciones está dado como sigue:*

$$\mathrm{Frac}(A[x]) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in A[x] \ y \ g(x) \neq 0 \right\}.$$

Lema 2.52 *Sean A un dominio entero, $s \in A$ y consideremos el conjunto multiplicativo $S := \{1, s, s^2, \ldots\}$. Entonces, la localización $A_s := S^{-1}A$ satisface que $A \subseteq A_s \subseteq \mathrm{Frac}(A)$.*

Lema 2.53 *Sean A un anillo y $A[x, x^{-1}] = \left\{\sum_{i=-n}^{m} a_i x^i \mid a_i \in A, n, m \geq 0\right\}$ el anillo de polinomios de Laurent con coeficientes en A y la variable x. Entonces $A[x, x^{-1}]$ es la localización de $A[x]$ respecto al conjunto multiplicativo $S = \{1, x, x^2, \cdots\}$. Es decir, tenemos que*

$$S^{-1}(A[x]) = A[x]_x = A[x, x^{-1}].$$

Con estos lemas en mente, podemos probar el siguiente resultado que nos permitirá concluir una relación más entre los conjuntos algebraicos proyectivos y los conos.

Proposición 2.54 *Sea $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ un conjunto algebraico con anillo de coordenadas proyectivo $K[Y]$. Entonces $dim_{Kr}(K[Y]) = dim(Y) + 1$.*

Demostración. Sean $S = K[x_0, \ldots, x_n]$ y $S^h := \{f \in S : \text{ f es homogéneo }\}$. Consideremos los abiertos canónicos $U_i := \{(a_0 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n_K \mid a_i \neq 0\}$ tales que $\mathbb{P}^n_K = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$.

Como $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$, entonces existe $i \leq n$ tal que $Y \cap U_i \neq \emptyset$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $Y \cap U_0 \neq \emptyset$.
Sea $\phi : U_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$ el homeomorfismo canónico dado por $\phi(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) := (\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \cdots, \frac{a_n}{a_0})$, para todo $(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in U_0$. Ya que $Y \cap U_0$ es un cerrado de U_0, entonces $Y_0 := \phi(Y \cap U_0) \subseteq \mathbb{A}^n_K$ es un cerrado de $\mathbb{A}^n_K$, pues, de acuerdo a la proposición 2.21, ϕ es un homeomorfismo.

Sea $K[Y] = K[x_0, \cdots, x_n]/I(Y)$ el anillo de coordenadas de Y, y denotemos por $\overline{g(x_0, \cdots, x_n)} = g(x_0, \cdots, x_n) + I(Y)$ a cada elemento de $K[Y]$.
Consideremos el elemento $\overline{x_0} := x_0 + I(Y) \in K[Y]$. Notemos que $\overline{x_0} \neq 0$ en $K[Y]$. En efecto, si $\overline{x_0} = 0$, entonces $x_0 \in I(Y)$, y así $x_0(P) = a_0 = 0$ para todo $P = (a_0 : \cdots : a_n) \in Y$. Esto es una contradicción, pues $Y \cap U_0 \neq \emptyset$.

Sea $L := \{1, \overline{x_0}, \overline{x_0}^2, \ldots\} \subseteq K[Y]$ y consideremos la localización de $K[Y]$ respecto a L:

$$K[Y]_{x_0} := L^{-1}(K[Y]) = \left\{ \frac{\overline{g(x_0, \cdots, x_n)}}{\overline{x_0}^m} \;\middle|\; 0 \neq \overline{g(x_0, \cdots, x_n)} \in K[Y],\ m \geq 0 \right\}.$$

Trabajaremos con el morfismo de homogenización β, dado en la definición 2.19, y consideraremos

$$\Theta : K[y_1, \cdots, y_n] \longrightarrow L^{-1}(K[Y])$$

dado como a continuación.
Para $f(y_1, \cdots, y_n) \in K[y_1, \cdots, y_n]$ de grado e definimos

$$\Theta(f(y_1, \cdots, y_n)) = \frac{\overline{x_0^e f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0})}}{\overline{x_0}^e} = \frac{\overline{\beta(f)}}{\overline{x_0}^e}.$$

El lector puede verificar que Θ es un morfismo de K-álgebras.

Primero calculemos $\mathrm{Ker}(\Theta)$.
Sea $f \in K[y_1, \cdots, y_n]$ de grado e tal que $\Theta(f(y_1, \cdots, y_n) = \frac{\overline{x_0^e f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0})}}{\overline{x_0}^e} = 0 = \frac{0}{1}$ en $L^{-1}(K[Y])$. Por definición de la relación de equivalencia dada en $L^{-1}(K[Y])$, tenemos que existe N tal que $(\overline{x_0}^N)\left(\overline{x_0^e f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0})}\right) = 0$ en $K[Y]$, es decir, $\overline{x_0^N \cdot (x_0^e f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0}))} = 0$.
Entonces se tiene que $g(x_0, \cdots, x_n) := x_0^N\left(x_0^e f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0})\right) \in I(Y)$, por lo que $g(P) = 0$ para todo $P = (a_0 : \cdots : a_n) \in Y$.
Sea $P \in Y \cap U_0$, entonces $a_0 \neq 0$ y así $\phi(P) = (\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \cdots, \frac{a_n}{a_0}) \in Y_0 = \phi(Y \cap U_0)$. Además, como $g(P) = a_0^N\left(a_0^e f(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \cdots, \frac{a_n}{a_0})\right) = 0$ y $a_0 \neq 0$, tenemos que $f(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \cdots, \frac{a_n}{a_0}) = 0$. Por lo tanto, como $Y_0 := \phi(Y \cap U_0)$, concluimos que $f(Q) = 0$ para todo $Q \in Y_0$. Así, tenemos que $f \in I(Y_0)$.
Esto demuestra que $\mathrm{Ker}(\Theta) \subseteq I(Y_0)$, el lector puede verificar que $I(Y_0) \subseteq \mathrm{Ker}(\Theta)$, y por lo tanto $\mathrm{Ker}(\Theta) = I(Y_0)$.

Ahora calculemos $\mathrm{Im}(\Theta)$.
Sea

$$\left(L^{-1}(K[V])\right)_0 = \left\{ \frac{\overline{g(x_0, \cdots, x_n)}}{\overline{x_0}^e} \,\middle|\, g \in S^h \;\text{ y }\; \mathrm{grad}(g(x_0, \cdots, x_n)) = \mathrm{grad}(x_0^e) \right\}$$

la componente homogénea de grado cero de $L^{-1}(K[Y])$.
Claramente se tiene que $\mathrm{Im}(\Theta) \subseteq \left(L^{-1}(K[V])\right)_0$.
Ahora veamos la otra contención. Sea $g(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in K[x_0, \ldots, x_n]$ homogéneo de grado e, y tomemos $\frac{\overline{g(x_0, \cdots, x_n)}}{\overline{x_0}^e} \in \left(L^{-1}(K[V])\right)_0$. Consideremos el morfismo $\alpha : S^h \longrightarrow K[y_1, \cdots, y_n]$ presentado en la definición 2.19. Sea r la mayor potencia de x_0 que divide a $g(x_0, \ldots, x_n)$ y $\alpha(g(x_0, \ldots, x_n)) = g(1, y_1, \ldots, y_n)$. Es fácil ver que

$$g(x_0, \ldots, x_n) = x_0^r \beta(\alpha(g(x_0, \ldots, x_n))) = x_0^r \beta(g(1, x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Definamos $f(y_1, \ldots, y_n) := g(1, y_1, \ldots . y_n) \in K[y_1, \ldots, y_n]$ con $l := \mathrm{grad}(f)$, entonces $l + r = e$.

Notemos que

$$\begin{aligned}\Theta(f) &= \frac{\overline{x_0^l f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})}}{\overline{x_0}^l} = \frac{\overline{\beta(g(1, x_1, \dots, x_n))}}{\overline{x_0}^l} \\ &= \frac{\overline{\beta(g(1, x_1, \dots, x_n))}}{\overline{x_0}^l} \cdot \frac{\overline{x_0}^r}{\overline{x_0}^r} = \frac{\overline{x_0^r \beta(g(1, x_1, \dots, x_n))}}{\overline{x_0}^e} = \frac{\overline{g(x_0, x_1, \dots, x_n)}}{\overline{x_0}^e}.\end{aligned}$$

Entonces $\Big(L^{-1}(K[V])\Big)_0 \subseteq \operatorname{Im}(\Theta)$, y por lo tanto $\operatorname{Im}(\Theta) = \Big(L^{-1}(K[V])\Big)_0$. Luego, por el primer teorema de isomorfismo (teorema 1.28), tenemos que:

$$K[Y_0] := K[y_1, \dots, y_n]/I(Y_0) \simeq \Big(L^{-1}(K[Y])\Big)_0.$$

Ahora, por la proposición 2.8, tenemos que $L^{-1}(K[V])$ es un anillo graduado y además

$$L^{-1}(K[Y]) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Big(L^{-1}(K[Y])\Big)_n.$$

Afirmamos que

$$L^{-1}(K[Y]) = \Big(L^{-1}(K[Y])\Big)_0 [\overline{x_0}, \overline{x_0}^{-1}],$$

donde $\Big(L^{-1}(K[Y])\Big)_0 [\overline{x_0}, \overline{x_0}^{-1}]$ es el anillo de polinomios de Laurent con coeficientes en $\Big(L^{-1}(K[Y])\Big)_0$ y variable $\overline{x_0}$.

Notemos que un elemento de $\Big(L^{-1}(K[Y])\Big)_0 [\overline{x_0}, \overline{x_0}^{-1}]$ es de la forma

$$\sum_{i=-n}^{m} \left(\frac{\overline{g_i(x_0, \dots, x_n)}}{\overline{x_0}^{e_i}}\right) \cdot \overline{x_0}^i,$$

con $\frac{\overline{g_i(x_0, \dots, x_n)}}{\overline{x_0}^{e_i}} \in \Big(L^{-1}(K[Y])\Big)_0$ para todo i.

Claramente se tiene que $\Big(L^{-1}(K[Y])\Big)_0 [\overline{x_0}, \overline{x_0}^{-1}] \subseteq L^{-1}(K[Y])$.

Ahora veamos la otra contención. Como $L^{-1}(K[Y]) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Big(L^{-1}(K[Y])\Big)_n$, basta ver que $\Big(L^{-1}(K[Y])\Big)_n \subseteq \Big(L^{-1}(K[Y])\Big)_0 [\overline{x_0}, \overline{x_0}^{-1}]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Sean $n \geq 0$ y $\frac{\overline{g(x_0, \dots, x_n)}}{\overline{x_0}^l} \in \Big(L^{-1}(K[V])\Big)_n$, es decir, $g(x_0, \dots, x_n)$ es homogéneo de grado m tal que $m - l = n$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\overline{g(x_0, \dots, x_n)}}{\overline{x_0}^l} &= \frac{\overline{g(x_0, \dots, x_n)}}{\overline{x_0}^l} \cdot \frac{\overline{x_0}^n}{\overline{x_0}^n} \\ &= \left(\frac{\overline{g(x_0, \dots, x_n)}}{\overline{x_0}^m}\right) \cdot \overline{x_0}^n \in \Big(L^{-1}(K[V])\Big)_0 [\overline{x_0}, \overline{x_0}^{-1}]\end{aligned}$$

pues $\left(\overline{\frac{g(x_0,\ldots,x_n)}{x_0{}^m}}\right) \in \left(L^{-1}(K[V])\right)_0$.
Por otro lado, sea $n < 0$ y $\overline{\frac{g(x_0,\ldots,x_n)}{x_0{}^l}} \in \left(L^{-1}(K[V])\right)_n$, es decir, $g(x_0,\ldots,x_n)$ es homogéneo de grado m tal que $m - l = n < 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\overline{\frac{g(x_0,\ldots,x_n)}{x_0{}^l}} &= \overline{\frac{g(x_0,\ldots,x_n)}{x_0{}^l}} \cdot \frac{\overline{x_0}^n}{\overline{x_0}^n} \\ &= \left(\overline{\frac{g(x_0,\ldots,x_n)}{x_0{}^m}}\right) \cdot \overline{x_0}^n \in \left(L^{-1}(K[V])\right)_0[\overline{x_0}, \overline{x_0}^{-1}]\end{aligned}$$

ya que $\left(\overline{\frac{g(x_0,\cdots,x_n)}{x_0{}^m}}\right) \in \left(L^{-1}(K[V])\right)_0$ y $n < 0$.
Por lo tanto, $L^{-1}(K[Y]) \subseteq \left(L^{-1}(K[Y])\right)_0 [\overline{x_0}, \overline{x_0}^{-1}]$. Así, tenemos que

$$L^{-1}(K[Y]) = \left(L^{-1}(K[V])\right)_0[\overline{x_0}, \overline{x_0}^{-1}].$$

Luego, como ya habíamos visto que

$$K[Y_0] := K[y_1,\cdots,y_n]/I(Y_0) \simeq \left(L^{-1}(K[Y])\right)_0,$$

entonces podemos concluir que

$$(*) : K[Y_0][\overline{x_0}, \overline{x_0}^{-1}] \simeq \left(L^{-1}(K[Y])\right)_0[\overline{x_0}, \overline{x_0}^{-1}] = L^{-1}(K[Y]) = K[Y]_{x_0}.$$

Sea $A = K[Y_0][x_0]$ el anillo de polinomios con coeficientes en $K[Y_0]$ en la variable x_0. Consideremos el conjunto multiplicativo $J = \{1, x_0, x_0^2, \ldots\} \subseteq A$ y la localización $A_{x_0} := J^{-1}A$, entonces se tiene que $K[Y_0][\overline{x_0}, \overline{x_0}^{-1}] \simeq A_{x_0}$ (ver lema 2.53).

Sea $B = K[Y]$. Como Y es una variedad proyectiva, tenemos que Y es irreducible, y así B es un dominio entero (por proposición 2.47). También tenemos que $Y \cap U_0$ es irreducible en Y, y por lo tanto $Y_0 := \phi(Y \cap U_0) \subseteq \mathbb{A}^n_K$ es un subconjunto irreducible de $\mathbb{A}^n_K$. De esta manera tenemos que $K[Y_0]$ es un dominio entero, y por consiguiente $A = K[Y_0][x_0]$ es también un dominio entero (ver lema 2.51). Es por esto que podemos calcular los campos de fracciones $\mathrm{Frac}(B)$ y $\mathrm{Frac}(A)$.
Notemos que $\mathrm{Frac}(B)$ y $\mathrm{Frac}(A)$ son los campos más pequenos en los cuales están contenidos B y A respectivamente. Además, tenemos que (ver lema 2.52)

$$A = K[Y_0][x_0] \subseteq A_{x_0} \subseteq \mathrm{Frac}(A) \qquad \text{y} \qquad B = K[Y] \subseteq B_{x_0} \subseteq \mathrm{Frac}(B).$$

Luego, por el lema 2.50, se tiene que A_{x_0} y B_{x_0} son dominios enteros. Más aún, se concluye que $\mathrm{Frac}(A_{x_0}) = \mathrm{Frac}(A)$ y $\mathrm{Frac}(B_{x_0}) = \mathrm{Frac}(B)$. Por la igualdad $(*)$ tenemos que $A_{x_0} \simeq B_{x_0}$, de donde concluimos que:

$$\mathrm{Frac}(A) = \mathrm{Frac}(A_{x_0}) \simeq \mathrm{Frac}(B_{x_0}) = \mathrm{Frac}(B).$$

Ahora, por el lema 2.51, se sigue que

$$\mathrm{Frac}(A) = \mathrm{Frac}(K[Y_0][x_0]) = \mathrm{Frac}(K[Y_0])(x_0),$$

donde $\mathrm{Frac}(K[Y_0])(x_0)$ es el campo de funciones racionales con coeficientes en el campo $\mathrm{Frac}(K[Y_0])$ en la variable x_0. De este modo, tenemos que

$$\mathrm{Frac}(K[Y_0])(x_0) \simeq \mathrm{Frac}(B).$$

Consideremos ahora $Q := \mathrm{Frac}(K[Y_0])$. Notemos que se tiene la siguiente torre de campos:

$$K \subseteq Q \subseteq Q(x_0).$$

Entonces, por [10, Proposición 19.18, pág. 179], se tiene que:

$$\mathrm{gr}_{tr}(Q(x_0)/K) = \mathrm{gr}_{tr}(Q(x_0)/Q) + \mathrm{gr}_{tr}(Q/K) = 1 + \mathrm{gr}_{tr}(Q/K).$$

Como $\mathrm{Frac}(K[Y_0])(x_0) \simeq \mathrm{Frac}(B)$, calculando el grado de trascendencia respecto de K, y gracias al inciso $a)$ del teorema 1.107, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathrm{Kr}}(K[Y]) = \mathrm{gr}_{tr}(\mathrm{Frac}(B)/K) &= \mathrm{gr}_{tr}\Big(\mathrm{Frac}(K[Y_0])(x_0)/K\Big) \\
&= \mathrm{gr}_{tr}\Big(Q(x_0)/K\Big) \\
&= 1 + \mathrm{gr}_{tr}(Q/K) \\
&= 1 + \mathrm{gr}_{tr}(\mathrm{Frac}(K[Y_0])/K) \\
&= 1 + \dim_{\mathrm{Kr}}(K[Y_0]) \\
&= 1 + \dim(Y_0).
\end{aligned}$$

Finalmente, como Y_0 es homeomeorfo a $Y \cap U_0$, entonces $\dim(Y \cap U_0) = \dim(Y_0)$. Notemos que $Y = \bigcup_{i=0}^{n} \Big(Y \cap U_i\Big)$, con $Y \cap U_i$ abierto en Y. Por lo que, de acuerdo a la proposición 1.99, tenemos que $\dim(Y) = \sup\{\dim(Y \cap U_i)\}$.
Observemos que lo hecho anteriomente se puede hacer para todo $i \leq n$ tal que $Y \cap U_i \neq \emptyset$, De modo que, si $Y_i := \phi(Y \cap U_i)$, se tiene que:

$$\dim_{\mathrm{Kr}}(K[Y]) - 1 = \dim(Y_i).$$

Por lo tanto, concluimos que $\dim(Y \cap U_i) = \dim_{\mathrm{Kr}}(K[Y]) - 1$ para todo i tal que $Y \cap U_i \neq \emptyset$.
Así, se tiene que

$$\dim(Y) = \sup\{\dim(Y \cap U_i)\} = \dim_{\mathrm{Kr}}(K[Y]) - 1.$$

□

Corolario 2.55 *Sea* $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ *un conjunto algebraico. Entonces se tiene que* $dim(C(Y)) = dim(Y) + 1$.

Demostración. Consideremos $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ un conjunto algebraico proyectivo. Por el corolario 2.37 sabemos que $C(Y)$ es un conjunto algebraico afín, y gracias a la proposición 1.103, podemos concluir que

$$dim(C(Y)) = dim_{Kr}(K[C(Y)]).$$

Recordemos además que $I(C(Y)) = I(Y)$ (ver proposición 2.36). De esta forma, se sigue que:

$$\begin{aligned} dim(C(Y)) &= dim_{Kr}(K[C(Y)]) \\ &= dim_{Kr}(K[x_0, \ldots, x_n]/I(C(Y))) \\ &= dim_{Kr}(K[x_0, \ldots, x_n]/I(Y)) \\ &= dim_{Kr}(K[Y]) \\ &= dim(Y) + 1 \quad [\text{ por proposición } 2.54 \text{ }]. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.56 *Sea* K *un campo algebraicamente cerrado. Entonces la dimensión del espacio proyectivo* $\mathbb{P}^n_K$ *es* n.

Demostración. De acuerdo al corolario 2.55, se tiene que $dim(C(\mathbb{P}^n_K)) = dim(\mathbb{P}^n_K) + 1$. Por lo que $dim(\mathbb{P}^n_K) = dim(C(\mathbb{P}^n_K)) - 1$. Además, de acuerdo al ejemplo 2.33, tenemos que $C(\mathbb{P}^n_K) = \mathbb{A}^{n+1}_K$. De esta forma:

$$\begin{aligned} dim(\mathbb{P}^n_K) &= dim(C(\mathbb{P}^n_K)) - 1 \\ &= dim(\mathbb{A}^{n+1}_K) - 1 \\ &= (n + 1) - 1 \quad [\text{ por proposición } 1.108 \text{ }] \\ &= n. \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Morfismos

En los capítulos anteriores hemos trabajado con diversos tipos de conjuntos, donde los principales son las variedades afines y proyectivas. De igual forma, hemos establecido numerosas relaciones entre aspectos topológicos asociados a estas variedades (afines y proyectivas) y aspectos algebraicos.

Así como existen morfismos entre anillos, homeomorfismos entre espacios topológicos y demás relaciones entre diversos tipos de estructuras, es natural preguntarse si podemos establecer relaciones entre variedades (afines o proyectivas) e incluso hablar de morfismos entre tales conjuntos, qué características cumplen estas transformaciones y saber cómo nos ayudan en el estudio de variedades y demás tipos de conjuntos.
Este es el objetivo principal del presente capítulo. Introduciremos las funciones regulares para posteriormente definir morfismos entre variedades y de esta manera tener una estructura más en la cual trabajar.

3.1. Funciones regulares

Tanto en el caso afín, como en el caso proyectivo, se trabajará con un campo K.
Para el caso afín, se trabajará con $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ una variedad casi-afín y consideraremos a las funciones f que van de Y en el campo K.

Definición 3.1 *Sean $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ una variedad casi-afín, un punto $P \in Y$ y una función $f : Y \longrightarrow K$. Se dice que f* ***es regular en el punto*** *$P \in Y$, si existen un abierto U, tal que $P \in U \subseteq Y$, y polinomios $g, h \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $h \neq 0$ en U y además $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ para todo $x \in U$.*
Se dice que f ***es regular en*** *Y si es regular en todo punto $P \in Y$.*

Ejemplo 3.2 *Sea K un campo. Para cada $i \leq n$, consideremos el polinomio $x_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$. De acuerdo a la observación 1.3, sabemos que este polinomio determina una función, la cual está dada de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} x_i : \mathbb{A}^n_K &\longrightarrow K \\ (a_1, \ldots, a_n) &\longmapsto a_i. \end{aligned}$$

A esta función se le conoce como la función coordenada $i-$ésima, pues cada punto de $\mathbb{A}^n_K$ está asociado con su $i-$ésima coordenada.
Es claro que, para todo $i \leq n$, la función x_i es regular en el espacio afín $\mathbb{A}^n_K$; de hecho, el polinomio que hace esto posible es exactamente $x_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$.

Proposición 3.3 *Sea $f : Y \longrightarrow K$ una función regular en una variedad casi-afín Y. Entonces, f es continua cuando se considera en $K = \mathbb{A}^1_K$ la topología de Zariski.*

Demostración. Sean $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ una variedad casi-afín y $f : Y \longrightarrow K$ una función regular. Consideremos $K = \mathbb{A}^1_K$ y equipemos a K con la topología de Zariski. Para probar que f es continua, basta probar que para todo subconjunto V cerrado en K la imagen inversa, $f^{-1}(V)$, es un cerrado de Y, considerando la topología de subespacio para Y.
Recordemos que los conjuntos cerrados propios de $\mathbb{A}^1_K$ son los conjuntos finitos (ver ejemplo 1.14), por lo que basta probar que para cada punto $a \in K$ se satisface que $f^{-1}(a) = \{P \in Y : f(P) = a\}$ es un cerrado de Y. Esto también se puede concluir probando que $Y \setminus f^{-1}(a)$ es abierto en Y.
Primero notemos que, como f es regular en Y, para cada $P \in Y$ existe U_p abierto en Y tal que $p \in U_p \subseteq Y$. Además, existen $g_p, h_p \in K[x_1, \ldots, x_n]$, con $h_p \neq 0$ en U_p, tales que $f = \frac{g_p}{h_p}$ en U_p.
Por otro lado, observemos que $f(x) \neq a$, si $\frac{g_p(x)}{h_p(x)} \neq a$. A su vez, esto ocurre si $(g_p - ah_p)(x) \neq 0$, es decir, $x \notin Z(g_p - ah_p)$; además todo esto sucede en el conjunto U_p. De este modo, se tiene que el conjunto

$$A_p = \{x \in U_p : f(x) \neq a\} = U_p \setminus Z(g_p - ah_p) = U_p \cap (Y \setminus Z(g_p - ah_p)).$$

es un conjunto abierto en Y por ser la intersección de dos conjuntos abiertos en Y, a saber U_p y $Y \setminus Z(g_p - ah_p)$. De esta forma, se tiene que $W = \bigcup_{p \in Y} A_p$ es un conjunto abierto en Y, más aún, $W = Y \setminus f^{-1}(a)$.
Por lo tanto, $f^{-1}(a)$ es un conjunto cerrado en Y debido a que su complemento es abierto. Es así como se concluye que f es una función continua. $\square$

En el capítulo 2 se observó que algunas definiciones y construcciones que se hacen en el espacio afín también se pueden hacer en el espacio proyectivo, este también es el caso de las funciones regulares. Para introducir este concepto, se trabajará con variedades casi-proyectivas.

Definición 3.4 *Sean $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ una variedad casi-proyectiva y $P \in Y$. Una función $f : Y \longrightarrow K$ es* ***regular en el punto*** *P, si existen un abierto U, con $P \in U \subseteq Y$, y polinomios homogéneos $g, h \in K[x_0, \ldots, x_n]$ del mismo grado tales que $h \neq 0$ en U y además $f = \frac{g}{h}$ en U.*
Se dice que f ***es regular en*** *Y, si es regular en todo punto $P \in Y$.*

Observación 3.5 *De forma similar al caso afín, se tiene que si $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ es una variedad casi-proyectiva, entonces toda función regular $f : Y \longrightarrow K$ es continua, nuevamente considerando $K = \mathbb{A}^1_K$ y al trabajar con la topología de Zariski.*

Lema 3.6 *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$ una variedad afín (respectivamente, $V \subseteq \mathbb{P}^n_K$ una variedad proyectiva). Si $f, g : V \longrightarrow K$ son funciones regulares en V, entonces $h := f - g$ es una función regular en V*

Demostración. Realizaremos la prueba para el caso afín y dejamos la demostración del caso proyectivo como ejercicio para el lector.

Tomemos $P \in V$. Veamos que h es una función regular en P.
Como f es una función regular en V y $P \in V$, se tiene que f es regular en el punto P. Esto significa que existen un abierto U_p, tal que $P \in U_p \subseteq V$, y polinomios $f_1, f_2 \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $f_2 \neq 0$ en U_p y $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ para todo $x \in U_p$.

Del mismo modo, tenemos que la función g es regular en V. Luego, existen un abierto W_p, tal que $P \in W_p \subseteq V$, y existen polinomios $g_1, g_2 \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $g_2 \neq 0$ en W_p y además $g(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ para todo $x \in W_p$.

Los hechos anteriores implican que $A_p := U_p \cap W_p \subseteq V$ es un conjunto abierto tal que $P \in A_p$, y en el cual la función h admite la expresión

$$h = f - g = \frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{f_2 g_2},$$

con $f_1 g_2 - f_2 g_1$ y $f_2 g_2$ polinomios en $K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $f_2 g_2 \neq 0$ en A_p. De esta forma, se concluye que h es regular en el punto P, lo cual implica que es regular V. $\square$

Una primera consecuencia importante de la continuidad de las funciones regulares en una variedad casi-afín, respectivamente casi-proyectiva, es la siguiente proposición que nos permitirá identificar con mayor facilidad cuándo dos funciones regulares son iguales. Esto nos permitirá más adelante construir una nueva estructura en la cual trabajaremos.

Proposición 3.7 *Sean $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ una variedad afín (respectivamente, $V \subseteq \mathbb{P}_K^n$ una variedad proyectiva) y $f, g : V \longrightarrow K$ dos funciones regulares en V tales que $f = g$ en $U \subseteq V$ un abierto no vacío. Entonces $f = g$ en todo V.*

Demostración. Consideremos la función $h := f - g$. De acuerdo al lema 3.6, h es una función regular en V.
Por la proposición 3.3, tenemos que h es una función continua. Por lo que, $h^{-1}(\{0\})$ es un conjunto cerrado de V por ser la imagen inversa de un cerrado de K.
Notemos además que

$$W := h^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : h(x) = 0\} = \{x \in V : f(x) = g(x)\}.$$

Por hipótesis, tenemos que $f = g$ en U, de modo que $U \subseteq W$.
Ya que V es un conjunto irreducible, por el inciso c) de la proposición 1.72, se tiene que U es denso en V, es decir, $V = \overline{U}$. Más aún, como W es un conjunto cerrado, entonces $V = \overline{U} \subseteq W$.
Como $W \subseteq V$, se concluye que $V = W$, es decir, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in V$. $\square$

3.2. Morfismos entre variedades

Ahora que hemos observado algunas propiedades de las funciones regulares y hemos notado que podemos hablar de dicha clase de funciones tanto en el caso afín como en el caso proyectivo, definimos la siguiente categoría de conjuntos.

Definición 3.8 *Sea K un campo algebraicamente cerrado. Se le llamará **variedad sobre** K, o simplemente **variedad**, a toda variedad afín, casi-afín, proyectiva o casi-proyectiva (ver definiciones 1.76 y 2.43).*

Observación 3.9 *De acuerdo a la definición 3.8, tenemos que una variedad sobre K es un espacio irreducible.*

Hasta el momento, hemos establecido relaciones entre aspectos algebraicos y topológicos. Entre otras cosas, hemos analizado la relación entre el comportamiento de una variedad y el comportamiento de su respectivo anillo de coordenadas. Sin embargo, faltan más aspectos por examinar. Uno de ellos es el análisis de las características que tienen las funciones que se pueden construir entre variedades. Ese es precisamente el objetivo del presente capítulo. Para ello, comenzamos presentando algunas definiciones.

En lo sucesivo, trabajaremos con un campo K algebraicamente cerrado.

Definición 3.10 *Sean X, Y dos variedades y $\varphi : X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que φ es un **morfismo de variedades** si es una función continua y además, para todo conjunto $V \subseteq Y$ abierto en Y y toda función regular $f : V \longrightarrow K$, se satisface que $f \circ (\varphi|_{\varphi^{-1}(V)}) : \varphi^{-1}(V) \longrightarrow K$ es una función regular.*

Por simplicidad, en la definición de morfismo de variedades, escribiremos φ en lugar de $\varphi|_{\varphi^{-1}(V)}$. Le pedimos al lector ser consciente de ello.

Proposición 3.11 *Sean X, Y, Z variedades y $\varphi : X \longrightarrow Y$, $\phi : Y \longrightarrow Z$ dos morfismos de variedades. Entonces la composición $\phi \circ \varphi : X \longrightarrow Z$ es nuevamente un morfismo de variedades.*

Demostración. Se deja la prueba como ejercicio para el lector. $\square$

La proposición 3.11 nos permite introducir la noción de isomorfismo de variedades.

Definición 3.12 *Sean X y Y variedades. Decimos que $\varphi : X \longrightarrow Y$ es un **isomorfismo,** si φ es un morfismo de variedades y además existe un morfismo $\psi : Y \longrightarrow X$ de tal forma que $\varphi \circ \psi = Id_Y$ y $\psi \circ \varphi = Id_X$.*

Ejemplo 3.13 *Sea $U_i \subseteq \mathbb{P}^n_K$ el conjunto abierto definido por la ecuación $x_i \neq 0$. Entonces la función $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$, vista en la proposición 2.21, es un isomorfismo de variedades.*

Observación 3.14 *Si $\varphi : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo de variedades. Entonces φ es biyectiva, continua y cerrada.*

Con algunos resultados posteriores, se observará que el recíproco de la observación 3.14 resulta ser falso en algunas ocasiones. Para lograr este y otros objetivos, introducimos algunos anillos de funciones que estarán asociados a las variedades.
Primero notemos que, si Y es una variedad, podemos considerar el conjunto de las funciones que son regulares en Y. En este conjunto se puede trabajar con las operaciones usuales de suma y producto de funciones, con dichas operaciones es posible darle la estructura de anillo al conjunto de funciones mencionado. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.15 *Sea Y una variedad. Denotaremos por $\mathscr{O}(Y)$ al **anillo de funciones regulares en** Y, es decir:*

$$\mathscr{O}(Y) := \{f : Y \longrightarrow K |\ f \text{ es regular en } Y\}.$$

Una vez que hemos definido este anillo de funciones, estamos en condiciones de presentar el siguiente resultado, mismo que nos hará más sencilla la tarea de identificar un morfismo de variedades.

Lema 3.16 *Sean X una variedad y $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ una variedad afín. Una función $\varphi : X \longrightarrow Y$ es un morfismo de variedades si y solo si, para cada $i = 1, \ldots, n$, la función $x_i \circ \varphi$ es regular en X, donde las funciones x_i son las funciones coordenadas.*

Demostración. Consideremos una función $\varphi : X \longrightarrow Y$.
$\Rightarrow$) Supongamos que φ es un morfismo de variedades. Es inmediato que Y es un conjunto abierto en Y. Además, de acuerdo al ejemplo 3.2, se tiene que, para $i \leq n$, la función coordenada $x_i : \mathbb{A}^n_K \longrightarrow K$ es regular en $\mathbb{A}^n_K$, de modo que la restricción $x_i|_Y$ es regular en Y.
Así, como φ es un morfismo de variedades, entonces, en vista de la definición 3.10, se tiene que $x_i \circ \varphi : X \longrightarrow K$ es regular en X, para cada $i = 1, \ldots, n$.
$\Leftarrow$) Supongamos que, para cada $i = 1, \ldots, n$, la función $x_i \circ \varphi$ es regular en X. Probemos que φ es un morfismo de variedades.
Primero observemos que, si $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $f = \displaystyle\sum_\alpha c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.
Por lo que $f \circ \varphi = \displaystyle\sum_\alpha c_\alpha (x_1 \circ \varphi)^{\alpha_1} \cdots (x_n \circ \varphi)^{\alpha_n}$ es una función regular en X, debido a que $\mathscr{O}(X)$ es una $K-$álgebra.
Probemos que φ es una función continua. Sea $W \subseteq Y$ un subconjunto cerrado de Y. Esto significa que $W = Z(f_1, \ldots, f_k) \cap Y$, con $f_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(W) &= \varphi^{-1}(Z(f_1, \ldots, f_k) \cap Y) \\
&= \{P \in X : \varphi(P) \in Z(f_1, \ldots, f_k) \cap Y\} \\
&= \{P \in X : f_i(\varphi(P)) = 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, k\} \\
&= \{P \in X : (f_i \circ \varphi)(P) = 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, k\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{k} (f_i \circ \varphi)^{-1}(\{0\}),
\end{aligned}$$

es decir, $\varphi^{-1}(W)$ es un conjunto cerrado, puesto que cada una de las funciones $f_i \circ \varphi : X \longrightarrow K$ es continua y además $\{0\}$ es un cerrado en K. Esto implica que φ es continua.

Para finalizar la prueba, consideremos $V \subseteq Y$ un abierto de Y y $f : V \longrightarrow K$ una función regular en V. Veamos que $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \longrightarrow K$ es una función regular en $\varphi^{-1}(V)$.
Consideremos $P \in \varphi^{-1}(V)$. Esto significa que $\varphi(P) \in V$. Como f es regular en V, existen $W \subseteq V$ abierto de V y $g, h \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $\varphi(P) \in W$, $h \neq 0$ en W y además $f = \frac{g}{h}$ en W.
Ahora, notemos que W es un abierto de Y, pues W es abierto en V y V es abierto en Y. Como φ es continua, $\varphi^{-1}(W)$ es un abierto de X. Más aún, como $\varphi^{-1}(W) = \varphi^{-1}(Y) \cap \varphi^{-1}(W)$, se tiene que $\varphi^{-1}(W)$ es un abierto de $\varphi^{-1}(V)$. Por otro lado, como $\varphi(P) \in W$, se sigue que $P \in \varphi^{-1}(W)$. Notemos además que en el conjunto $\varphi^{-1}(W)$ ocurre que

$$f \circ \varphi = \left(\frac{g}{h}\right) \circ \varphi = \frac{g \circ \varphi}{h \circ \varphi}.$$

Ya que g y h son polinomios, por la observación hecha al inicio de esta demostración, concluimos que tanto $g \circ \varphi$ como $h \circ \varphi$ son funciones regulares en X, y

por lo tanto, son regulares en $\varphi^{-1}(W)$.
Del hecho de que $g \circ \varphi$ sea regular en $\varphi^{-1}(W)$, se deduce que existe U_1 abierto de $\varphi^{-1}(W)$, con $P \in U_1$, y existen polinomios g_1, g_2 (con la naturaleza de estos polinomios dependiente de la naturaleza de la variedad X) tales que $g_2 \neq 0$ en U_2 y $g \circ \varphi = \frac{g_1}{g_2}$. De igual forma, existen U_2 un abierto de $\varphi^{-1}(W)$ y polinomios h_1, h_2 (homogéneos y del mismo grado si X es una variedad proyectiva) tales que $P \in U_2$, $h_2 \neq 0$ en U_2 y además $h \circ \varphi = \frac{h_1}{h_2}$.
De este modo, tenemos que $U := \varphi^{-1}(W) \cap U_1 \cap U_2$ es un abierto de $\varphi^{-1}(V)$ tal que $P \in U$, y en dicho conjunto se satisface que:

$$\begin{aligned} f \circ \varphi &= \frac{g \circ \varphi}{h \circ \varphi} \\ &= \frac{g_1/g_2}{h_1/h_2} \\ &= \frac{g_1 h_2}{g_2 h_1}, \end{aligned}$$

es decir, $f \circ \varphi$ es cociente de polinomios.

Para finalizar, basta probar que $g_2 h_1 \neq 0$ en U.
Sea $x \in U$. Recordemos que $g_2 \neq 0$ en U_2, por lo que $g_2(x) \neq 0$ debido a que $x \in U_2$. Por otro lado, si $x \in U$, entonces $x \in \varphi^{-1}(W)$, es decir $\varphi(x) \in W$; como $h \neq 0$ en W, se sigue que $h(\varphi(x)) \neq 0$, esto significa que $(h \circ \varphi)(x) \neq 0$. Además $(h \circ \varphi)(x) = \frac{h_1(x)}{h_2(x)}$, por lo que se concluye que $h_1(x) \neq 0$.
Lo anterior implica que $(g_2 h_1)(x) \neq 0$, por lo cual, $g_2 h_1 \neq 0$ en U.
Hemos probado que, para $P \in \varphi^{-1}(V)$ arbitrario, existe U abierto en $\varphi^{-1}(V)$ y existen polinomios $g_1 h_2, g_2 h_1$ (homogéneos del mismo grado, si X es una variedad proyectiva) tales que $P \in U$, $g_2 h_1 \neq 0$ en U y en tal conjunto se tiene que $f \circ \varphi = \frac{g_1 h_2}{g_2 h_1}$. Por tanto, concluimos que $f \circ \varphi$ es regular en $\varphi^{-1}(V)$, tal y como lo deseábamos.
De este modo, se tiene que φ es un morfismo de variedades. $\square$

Ahora bien, si Y es una variedad y $P \in Y$, podemos considerar a los conjuntos abiertos en Y que tienen a P como elemento. Es de nuestro interés trabajar con las funciones regulares en estos conjuntos abiertos. Con esta idea en mente, dado un punto $P \in Y$, consideremos los pares de la forma (U, f), donde U es un abierto en Y de tal forma que $P \in U$ y además f es regular en U.
Dados dos pares (U, f) y (V, g) tal y como se presentaron anteriormente, definimos la siguiente relación:

$$(U, f) \sim (V, g) \text{ si y solo si } f = g \text{ en } U \cap V. \tag{3.1}$$

Para probar que $\sim$ es una relación de equivalencia, presentamos el siguiente lema.

Lema 3.17 *Dados los pares* (U, f) *y* (V, g)*, se tiene que* $f = g$ *en* $U \cap V$ *si y solo si existe un conjunto abierto* $W \subseteq U \cap V$ *tal que* $f|_W = g|_W$*.*

Demostración. Consideremos los pares (U, f) y (V, g), donde U y V son abiertos en Y de tal forma que $P \in U$, $P \in V$ y además f es regular en U y g es regular en V.

Primero, supongamos que $f = g$ en $U \cap V$. Es claro que $W := U \cap V$ es un conjunto abierto en $U \cap V$ y además $f|_W = g|_W$ debido a que $f = g$ en $U \cap V$.

Por otro lado, si existe un conjunto abierto $W \subseteq U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$, entonces f y g son funciones regulares en $U \cap V$ que coinciden en un abierto no vacío de $U \cap V$. Por lo tanto, por la proposición 3.7, se tiene que $f = g$ en todo $U \cap V$. $\square$

Proposición 3.18 *Sean* Y *una variedad y* $P \in Y$*. Entonces la relación definida en 3.1 es una relación de equivalencia.*

Demostración. Consideremos una variedad Y y un punto $P \in Y$.

Sea (U, f) un par de tal forma que $P \in U$, U es abierto en Y y f es regular en U. Es claro que $(U, f) \sim (U, f)$, pues $f = f$ en U.
Sean $(U, f), (V, g)$ tales que $(U, f) \sim (V, g)$, es decir, $f = g$ en $U \cap V$. Entonces se tiene que $g = f$ en $V \cap U$, por lo tanto $(V, g) \sim (U, f)$.
Por último, consideremos los pares $(U, f), (V, g), (W, h)$ de tal forma que $(U, f) \sim (V, g)$ y $(V, g) \sim (W, h)$. Esto significa que $f = g$ en $U \cap V$ y además $g = h$ en $V \cap W$.
Notemos que, si $f = g$ en $U \cap V$, entonces $f = g$ en $U \cap V \cap W$ pues $U \cap V \cap W \subseteq U \cap V$; similarmente se tiene que $g = h$ en $U \cap V \cap W$. Por lo tanto, concluimos que $f = h$ en $U \cap V \cap W$. Ya que $U \cap V \cap W \subseteq U \cap W$ es un conjunto abierto por ser intersección de abiertos, por el lema 3.17, tenemos que $f = h$ en $U \cap W$. Por lo tanto, $(U, f) \sim (W, h)$. $\square$

A partir de ahora, denotaremos por $\langle U, f \rangle$ a la clase de equivalencia del elemento (U, f).

Definición 3.19 *Sean* Y *una variedad y* $P \in Y$*. Entonces el* ***anillo local de*** P ***en*** Y*, denotado por* $\mathscr{O}_P$*, es el anillo de gérmenes de funciones regulares en* Y *alrededor de* P*. Esto significa lo siguiente:*

$$\mathscr{O}_P := \{\langle U, f \rangle : \ U \textit{ es abierto en } Y, P \in U \textit{ y } f \textit{ es regular en } U\}.$$

Antes de observar algunas propiedades que tiene el conjunto dado en la definición 3.19, tenemos que hacer énfasis en las operaciones que hacen a dicho conjunto un anillo.

Lema 3.20 *Sean Y una variedad y $P \in Y$. Entonces $\mathscr{O}_P$ es un anillo conmutativo con* 1*, donde la suma y el producto están definidos como sigue.*
Si $\langle U, f\rangle, \langle V, g\rangle \in \mathscr{O}_P$, entonces:

$$\langle U, f\rangle + \langle V, g\rangle := \langle U \cap V, f + g\rangle$$
$$\langle U, f\rangle \cdot \langle V, g\rangle := \langle U \cap V, fg\rangle.$$

Además, el neutro multiplicativo de este anillo es el elemento $\langle Y, 1\rangle$, siendo 1 *la función constante 1.*

Demostración. La demostración se deja como ejercicio para el lector. □

El siguiente resultado establece que $\mathscr{O}_P$ es un anillo local. Para ello, conviene recordar la proposición 1.37.

Proposición 3.21 *Sean Y una variedad y $P \in Y$. Entonces el anillo $\mathscr{O}_P$ es un anillo local. Más aún, si denotamos por $\mathfrak{m}$ al ideal maximal de $\mathscr{O}_P$, entonces $\mathscr{O}_P/\mathfrak{m} \cong K$.*

Demostración. Sean Y una variedad y $P \in Y$.
Como Y es irreducible, entonces cualesquiera dos conjuntos abiertos en Y tienen intersección no vacía. Es por esto, que en $\mathscr{O}_P$ se puede trabajar con las operaciones usuales de suma y producto de funciones.
Por el lema 3.20, se tiene que $\mathscr{O}_P$ es un anillo. A continuación veremos que $\mathscr{O}_P$ es local.
Consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathfrak{m} := \{\langle U, f\rangle \in \mathscr{O}_P : f(P) = 0\} \subsetneq \mathscr{O}_P.$$

Primero veamos que $\mathfrak{m}$ es un ideal de $\mathscr{O}_P$.
Claramente se tiene que, si W es un conjunto abierto en Y y 0_f es la función cero, entonces $\langle W, 0_f\rangle \in \mathfrak{m}$, debido a que $0_f(P) = 0$.

Si $\langle U, f\rangle, \langle V, g\rangle \in \mathfrak{m}$, entonces $U, V \subseteq Y$ son conjuntos abiertos en Y de tal forma que $P \in U$, $P \in V$, f es regular en U, g es regular en V y $f(P) = g(P) = 0$. Como U y V son abiertos en Y, se sigue que $U \cap V$ es abierto en Y, además $f + g$ es regular en $U \cap V$, y es tal que $(f + g)(P) = f(P) + g(P) = 0$. Por tanto, $\langle U \cap V, f + g\rangle \in \mathfrak{m}$.

Por otro lado, si $\langle U, f\rangle \in \mathfrak{m}$, entonces U es un subconjunto abierto de Y de tal forma que $P \in U$ y f es una función regular en U que satisface $f(P) = 0$. De este modo, tenemos que $-f$ es una función regular en U y $(-f)(P) = -f(P) = 0$, por lo que se concluye que $\langle U, -f\rangle \in \mathfrak{m}$.

Finalmente, consideremos $\langle U, f\rangle \in \mathfrak{m}$ y $\langle V, g\rangle \in \mathscr{O}_P$. Esto significa que U y V son abiertos de Y tales que $P \in U$, $P \in V$, f es regular en U, g es regular en V y $f(P) = 0$. Notemos que $U \cap V$ es un abierto de Y tal que $P \in U \cap V$ y la

función fg es regular en $U \cap V$. Más aún, $(fg)(P) = f(P)g(P) = 0 \cdot g(P) = 0$, esto implica que $\langle U \cap V, fg\rangle \in \mathfrak{m}$.
Así, concluimos que $\mathfrak{m}$ es un ideal de $\mathscr{O}_p$.

Para probar que $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de $\mathscr{O}_P$, probaremos que x es unidad $\forall x \in \mathscr{O}_P \setminus \mathfrak{m}$.
Consideremos $\langle U, f\rangle \in \mathscr{O}_P \setminus \mathfrak{m}$. Luego $\langle U, f\rangle \in \mathscr{O}_P$ y $\langle U, f\rangle \notin \mathfrak{m}$. Esto significa que U es un abierto de Y de tal modo que $P \in U$ y f es una función regular en U para la cual se tiene que $f(P) \neq 0$.
Como f es regular en U, existen polinomios g y h (con g y h del mismo grado si $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$) de tal forma que $f = \frac{g}{h}$. Observemos que $g(P) \neq 0$ debido a que $f(P) \neq 0$. Consideremos el conjunto $Z(g)$, el cual es un conjunto cerrado, ya sea del espacio afín o proyectivo. Entonces se sigue que $U \cap Z(g)$ es un conjunto cerrado en U con la topología de subespacio de Y, por lo que $U \setminus (U \cap Z(g))$ es un conjunto abierto en U. Como U es un conjunto abierto de Y, se concluye que $V := U \setminus (U \cap Z(g))$ es un abierto de Y.
Notemos que $P \in V$, pues $g(P) \neq 0$. Además, f resulta ser regular en V debido a que $V \subsetneq U$, de este modo tenemos que $f' := \frac{h}{g}$ es una función regular en V.

Finalmente, observemos que $f \cdot f' = 1$, por lo que $\langle V, f'\rangle$ actúa como inverso multiplicativo de $\langle U, f\rangle$.
De esta forma se tiene que $\langle U, f\rangle$ es unidad. Por lo tanto, todo elemento de $\mathscr{O}_P \setminus \mathfrak{m}$ es unidad, y por la proposición 1.37, concluimos que $\mathscr{O}_P$ es un anillo local cuyo único ideal maximal es $\mathfrak{m}$.
Para finalizar, probemos que $\mathscr{O}_P/\mathfrak{m} \cong K$. Para ello, consideremos el siguiente morfismo de anillos:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{O}_P &\longrightarrow K \\ \langle U, f\rangle &\longmapsto f(P). \end{aligned}$$

Primero, notemos que:

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \{\langle U, f\rangle \in \mathscr{O}_P : \varphi(\langle U, f\rangle) = 0\} \\ &= \{\langle U, f\rangle \in \mathscr{O}_P : f(P) = 0\} \\ &= \mathfrak{m}. \end{aligned}$$

Ahora, veamos que φ es un morfismo suprayectivo. En efecto, si $a \in K$, podemos considerar la función $g : Y \longrightarrow K$ dada por $g(y) = a$ para todo $y \in Y$, es claro que g es regular en Y. De este modo, se tiene que $\langle Y, g\rangle \in \mathscr{O}_P$ es un elemento tal que $\varphi(\langle Y, g\rangle) = g(P) = a$. Por lo tanto, φ es un morfismo suprayectivo.
Así, por el primer teorema de isomorfismo para anillos (teorema 1.28) podemos concluir que $\mathscr{O}_P/\mathfrak{m} \cong K$. $\square$

Nuestro siguiente objetivo es construir un campo de funciones, la cual será posible al considerar una variedad y cierta clase de funciones regulares.

Con esta idea en mente, tomemos Y una variedad y consideremos el anillo de gérmenes de funciones regulares en U, donde U es un abierto no vacío de Y. Es decir, para cada abierto U de Y consideremos el conjunto:

$$\mathscr{O}(U) = \{(U, f) : U \text{ es abierto en } Y \text{ y } f \text{ es regular en } U\}.$$

Definamos $\mathscr{B} = \bigcup_{\substack{U \subseteq Y \\ U abierto}} \mathscr{O}(U)$ y consideremos la relación en $\mathscr{B}$ definida como sigue:

$$(U, f) \sim' (V, g) \text{ si y solo si } f = g \text{ en } U \cap V.$$

Con esta relación se desea construir un campo que nos permitirá establecer relaciones entre diversos conjuntos definidos previamente.

Observación 3.22 *Se puede probar que si Y es una variedad, la relación $\sim'$ definida en $\mathscr{B}$ es de equivalencia. La prueba es similar a la exhibida en la proposición 3.18.*
De esta forma, denotaremos por $\langle U, f\rangle'$ a la clase de equivalencia de $(U, f) \in \mathscr{B}$.

Observación 3.23 *De forma similar a como se probó en el lema 3.17, se puede probar que si $(U, f), (V, g) \in \mathscr{B}$ entonces se tiene que $f = g$ en $U \cap V$ si y solo si existe un conjunto abierto $W \subseteq U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$.*

Tomando en cuenta que $\sim'$ es una relación de equivalencia en $\mathscr{B}$, podemos considerar al conjunto de clases de equivalencia módulo dicha relación.

Observación 3.24 *Si Y es una variedad, entonces es un conjunto irreducible, por lo que, en vista de la proposición 1.72, se tiene que cualesquiera dos subconjuntos no vacíos abiertos de Y tienen intersección no vacía. De este modo, tiene sentido trabajar con las operaciones análogas a las presentadas en el lema 3.20, dichas operaciones nos permiten construir un campo.*

Definición 3.25 *Sea Y una variedad. Se define el* ***campo de funciones*** *de Y, denotado por $K(Y)$, como el conjunto de clases de equivalencia de los elementos $(U, f) \in \mathscr{B}$ bajo la relación de equivalencia $\sim'$. Es decir:*

$$K(Y) := \{\langle U, f\rangle' : (U, f) \in \mathscr{B}\}.$$

Los elementos de $K(Y)$ son llamados ***funciones racionales*** *en Y.*

Lema 3.26 *Sea Y una variedad. Entonces $K(Y)$ es un campo con las siguientes operaciones.*
Si $\langle U, f\rangle', \langle V, g\rangle' \in K(Y)$, entonces:

$$\langle U, f\rangle' + \langle V, g\rangle' := \langle U \cap V, f + g\rangle'$$
$$\langle U, f\rangle' \cdot \langle V, g\rangle' := \langle U \cap V, fg\rangle'.$$

Demostración. Consideremos una variedad Y. Se deja como ejercicio para el lector realizar la prueba de que $K(Y)$ es un anillo.

Para probar que $K(Y)$ es un campo, basta probar que todo elemento $\langle U, f\rangle' \in K(Y)$, con $f \neq 0$, admite un inverso multiplicativo con el producto definido anteriormente.
Con este propósito en mente, consideremos $\langle U, f\rangle' \in K(Y)$ de tal modo que $f \neq 0$. Como f es regular en U, existen polinomios g y h (con g y h del mismo grado, si Y es una variedad proyectiva) de tal forma que $f = \frac{g}{h}$. Observemos que $g \neq 0$, debido a que $f \neq 0$. Consideremos el conjunto $Z(g)$. Dicho conjunto es un cerrado ya sea del espacio afín o proyectivo. Entonces se sigue que $U \cap Z(g)$ es un conjunto cerrado en U (viendo a U como subespacio del espacio afín o proyectivo según sea el caso). Por lo tanto, $U \setminus (U \cap Z(g))$ es un conjunto abierto en U, y dado que U es un conjunto abierto de Y, se concluye que $V := U \setminus (U \cap Z(g))$ es un abierto de Y.
Notemos que f es regular en V, debido a que $V \subsetneq U$. De modo que $f' := \frac{h}{g}$ también es una función regular en V. Para finalizar, observemos que $f \cdot f' = 1$, es decir, $\langle V, f'\rangle'$ actúa como inverso multiplicativo de $\langle U, f\rangle'$.
Así, se concluye que $K(Y)$ es un campo. $\square$

Hasta el momento, dada una variedad Y, hemos definido el anillo de funciones regulares en Y, $\mathscr{O}(Y)$, el anillo local de gérmenes de funciones regulares en Y alrededor de cada punto $P \in Y$, $\mathscr{O}_P$, y el campo de funciones racionales de Y, $K(Y)$.

Notemos que, si $f \in \mathscr{O}(Y)$, entonces se cumple que $f : Y \longrightarrow K$ es una función regular en Y. Por lo que, para cada $p \in Y$, se puede considerar el elemento $\langle U, f\rangle \in \mathscr{O}_P$, con $U \subseteq Y$ un abierto de Y, de tal forma que $P \in U$. De forma similar, si $\langle U, f\rangle \in \mathscr{O}_P$, entonces se satisface que $\langle U, f\rangle' \in K(Y)$, pues U es un abierto de Y y f es una función regular en U.
Esto se formaliza en la siguiente proposición.

Proposición 3.27 *Sean Y una variedad y $P \in Y$. Entonces las siguientes correspondencias son morfismos de anillos inyectivos*

$$\begin{aligned} \psi : \mathscr{O}(Y) &\longrightarrow \mathscr{O}_P \\ f &\longmapsto \langle U, f\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi : \mathscr{O}_P &\longrightarrow K(Y) \\ \langle U, f\rangle &\longmapsto \langle U, f\rangle', \end{aligned}$$

con U abierto de Y tal que $P \in U$.

Demostración. Se deja como ejercicio para el lector probar que ψ y ϕ son morfismos de anillos. Veamos que son correspondencias inyectivas.

Consideremos $f, g : Y \longrightarrow K$ funciones regulares en Y tales que $\langle U, f\rangle = \langle V, g\rangle$, con U, V abiertos de Y tales que $P \in U, V$. En vista de la definición de $\mathscr{O}_P$, se sigue que $f = g$ en $U \cap V$. Por el lema 3.17, se tiene que existe $W \subseteq U \cap V$ un conjunto abierto tal que $f|_W = g|_W$. Como W es abierto en Y, entonces, por 3.7, se concluye que $f = g$ en Y. Por lo tanto, ψ es inyectiva.
Por otro lado, supongamos que $\langle U, f\rangle, \langle V, g\rangle \in \mathscr{O}_P$ son tales que $\langle U, f\rangle' = \langle V, g\rangle'$. La definición de la relación de equivalencia en $K(Y)$ implica que $f = g$ en $U \cap V$, y así, por la definición de la relación de equivalencia en $\mathscr{O}_P$, se tiene que $\langle U, f\rangle = \langle V, g\rangle$ en $\mathscr{O}_P$. Así, ϕ es inyectiva. $\square$

Es importante observar que la proposición 3.27 muestra que podemos considerar a $\mathscr{O}_P$ y $\mathscr{O}(Y)$ como subanillos de $K(Y)$.

Observación 3.28 *Si consideramos una variedad Y y la reemplazamos por una variedad a la cual sea isomorfa (Ver definición 3.12), digamos Z, entonces los anillos correspondientes resultantes son isomorfos. Dado esto diremos que, $\mathscr{O}(Y)$, $\mathscr{O}_P$ y $K(Y)$ son* ***invariantes*** *de la variedad Y (y el punto P en el caso de $\mathscr{O}_P$) bajo isomorfismos.*

Ahora, dada una variedad afín Y, nos interesa relacionar estos anillos y el campo que hemos definido, con el anillo coordenado $K[Y]$, mismo con el cual trabajamos en el primer capítulo.

Teorema 3.29 *Sea $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ una variedad afín con anillo de coordenadas afín $K[Y]$. Entonces:*

(a) Para cada punto $P \in Y$, sea $\mathfrak{m}_P \subseteq K[Y]$ el ideal dado por las funciones que se anulan en P. Entonces, la asignación $P \longmapsto \mathfrak{m}_P$ es una correspondencia biyectiva entre los puntos de Y y los ideales maximales de $K[Y]$.

(b) Para cada $P \in Y$, se tiene que $\mathscr{O}_P \cong K[Y]_{\mathfrak{m}_P}$ y además $dim_{Kr}(\mathscr{O}_P) = dim(Y)$.

(c) $\mathscr{O}(Y) \cong K[Y]$.

(d) $K(Y)$ es isomorfo al campo de fracciones de $K[Y]$, por lo que $K(Y)$ es una extensión de K finitamente generada cuyo grado de trascendencia es igual a $dim(Y)$.

Demostración. Antes de iniciar con la prueba de cada inciso, construiremos un morfismo $\alpha : K[Y] \longrightarrow \mathscr{O}(Y)$.
Notemos que, si $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, por la observación 1.3, sabemos que f determina una función de $\mathbb{A}^n_K$ en K, la cual, por definición, es una función regular

en $\mathbb{A}^n_K$, y por lo tanto f es regular en Y. Definamos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \psi : K[x_1, \ldots, x_n] &\longrightarrow \mathscr{O}(Y) \\ f &\longmapsto f|_Y \end{aligned}$$

Se deja como ejercicio para el lector probar que ψ es un morfismo de anillos. Observemos que $Ker(\psi) = \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] : f(P) = 0 \ \forall P \in Y\} = I(Y)$, por lo que existe $\alpha : K[Y] \longrightarrow \mathscr{O}(Y)$ un morfismo de anillos inyectivo, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} K[x_1, \cdots, x_n] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{O}(Y) \\ K[x_1, \cdots, x_n]/I(Y) \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Probemos (a) :
De acuerdo a la proposición 1.60, sabemos que hay una correspondencia biyectiva entre los puntos del espacio afín $\mathbb{A}^n_K$ y los ideales maximales de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Esto implica que existe una correspondencia biyectiva entre los puntos de Y y los ideales maximales de $K[x_1, \ldots, x_n]$ que contienen a $I(Y)$. Para cada punto $P \in Y$, sea $J_P \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ su ideal asociado. Haciendo uso del teorema de la correspondencia biyectiva (teorema 1.30), se puede concluir que cada uno de estos ideales J_P se corresponde de forma biyectiva con el ideal $J_P/I(Y)$, que de hecho es un ideal maximal de $K[x_1, \ldots, x_n]/I(Y) = K[Y]$. En vista de la existencia del morfismo α, podemos identificar a los elementos de $K[Y]$ con funciones regulares en Y, por lo que obtenemos que:

$$\begin{aligned} J_P/I(Y) &= \{f + I(Y) \in K[Y] : f \in J_P\} \\ &= \{f + I(Y) : f(P) = 0\} \\ &= \{\hat{f} \in K[Y] : \hat{f}(P) = 0\} \\ &= \mathfrak{m}_P \end{aligned}$$

(b)
Consideremos $P \in Y$. Recordemos que la localización $K[Y]_{\mathfrak{m}_P}$ está conformada de la siguiente manera:

$$K[Y]_{\mathfrak{m}_P} := \left\{ \frac{f + I(Y)}{g + I(Y)} : f + I(Y) \in K[Y],\ g + I(Y) \notin \mathfrak{m}_P \right\}.$$

Notemos que, si $g \in K[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $Y \cap Z(g)$ es un cerrado de Y. Por lo que $U := Y \setminus (Y \cap Z(g))$ es un conjunto abierto de Y. Además, se verifica que $g \neq 0$ en U y $P \in U$. De este modo, tiene sentido considerar la siguiente correspondencia:

$$\begin{aligned} \phi : K[Y]_{\mathfrak{m}_P} &\longrightarrow \mathscr{O}_P \\ \frac{f+I(Y)}{g+I(Y)} &\longmapsto \left\langle U, \frac{f}{g} \right\rangle \end{aligned}$$

Afirmamos que ϕ es un isomorfismo de anillos.
Veamos primero que ϕ está bien definida.
Como Y es una variedad afín, por la proposición 1.86, se tiene que $K[Y]$ es un dominio entero. Consideremos $\frac{f+I(Y)}{g+I(Y)} = \frac{f_1+I(Y)}{g_1+I(Y)}$ en $K[Y]_{\mathfrak{m}_P}$, entonces en $K[Y]$ se tiene que

$$(f+I(Y))(g_1+I(Y)) = (f_1+I(Y))(g+I(Y)).$$

Esto significa que $fg_1 - f_1g \in I(Y)$, es decir, $f(P)g_1(P) - f_1(P)g(P) = 0$ para todo $P \in Y$. Más aún, como $g(P) \neq 0$ y $g_1(P) \neq 0$, se sigue que $\frac{f(P)}{g(P)} = \frac{f_1(P)}{g_1(P)}$ para todo $P \in Y$.
Ahora, $\phi\left(\frac{f+I(Y)}{g+I(Y)}\right) = \left\langle U, \frac{f}{g} \right\rangle$ con $U = Y \setminus (Y \cap Z(g))$ y $\phi\left(\frac{f_1+I(Y)}{g_1+I(Y)}\right) = \left\langle U_1, \frac{f_1}{g_1} \right\rangle$ con $U_1 = Y \setminus (Y \cap Z(g_1))$. Finalmente observemos que

$$\left\langle U, \frac{f}{g} \right\rangle = \left\langle U_1, \frac{f_1}{g_1} \right\rangle,$$

debido a que $\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}$ en Y y por tanto en $U \cap U_1$.
Esto prueba que ϕ está bien definida.
Se deja como ejercicio para el lector probar que ϕ es un morfismo de anillos. A continuación veremos que ϕ es biyectiva.

Supongamos que $\frac{f+I(Y)}{g+I(Y)}, \frac{f_1+I(Y)}{g_1+I(Y)} \in K[Y]_{\mathfrak{m}_P}$ son tales que

$$\left\langle U, \frac{f}{g} \right\rangle = \left\langle U_1, \frac{f_1}{g_1} \right\rangle.$$

Entonces, en vista del lema 3.17, se tiene que existe $W \subseteq U \cap U_1$ un conjunto abierto de Y tal que $\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}$ en W. Como $g(P) \neq 0, g_1(P) \neq 0$ y además las funciones $g, g_1 : \mathbb{A}^n_K \longrightarrow K$ son continuas, podemos asumir que $g, g_1 \neq 0$ en W. Del hecho de que $\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}$ en W, se sigue que $fg_1 - f_1g = 0$ en W. Luego, por la observación 3.7, se sigue que $fg_1 - f_1g = 0$ en Y. Así, $(f+I(Y))(g_1+I(Y)) = (f_1+I(Y))(g+I(Y))$; y por la relación de equivalencia que define a la localización $K[Y]_{\mathfrak{m}_P}$, concluimos que $\frac{f+I(Y)}{g+I(Y)} = \frac{f_1+I(Y)}{g_1+I(Y)}$ en $K[Y]_{\mathfrak{m}_P}$, es decir, ϕ es inyectiva.

Por otro lado, consideremos $\langle U, h \rangle \in \mathscr{O}_P$, donde U es un abierto de Y de tal forma que $P \in U$ y además $h = \frac{f}{g}$ con $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $g \neq 0$ en U. Observemos que si $g = 0$ en Y, entonces en particular $g = 0$ en U, pues $U \subseteq Y$; como esto representa una contradicción con lo dicho anteriormente, se sigue que $g \neq 0$ en Y. Esto implica que $g + I(Y) \neq I(Y)$ y además $g(P) \neq 0$,

pues $P \in Y$. Por lo tanto, $g + I(Y) \notin \mathfrak{m}_P$.
Para finalizar, notemos que $\phi\left(\frac{f+I(Y)}{g+I(Y)}\right) = \left\langle U, \frac{f}{g}\right\rangle = \langle U, h\rangle$.
Concluimos así, que ϕ es suprayectiva y por tanto biyectiva.
De esta forma, tenemos que $K[Y]_{\mathfrak{m}_P} \cong \mathscr{O}_P$.
De lo anterior se sigue que $dim_{Kr}(\mathscr{O}_P) = dim_{Kr}(K[Y]_{\mathfrak{m}_P})$. Además, como $\mathfrak{m}_P$ es un ideal maximal de $K[Y]$, por la proposición 1.102, se sigue que $dim_{Kr}(K[Y]_{\mathfrak{m}_P}) = h(\mathfrak{m}_P)$, así que $dim_{Kr}(\mathscr{O}_P) = h(\mathfrak{m}_P)$.
Ahora, por el inciso b) del teorema 1.107, tenemos que

$$h(\mathfrak{m}_P) + dim_{Kr}(K[Y]/\mathfrak{m}_P) = dim_{Kr}(K[Y]).$$

Usando ahora que $K[Y]/\mathfrak{m}_P \cong K$, se tiene que

$$dim_{Kr}(K[Y]/\mathfrak{m}_P) = dim_{Kr}(K) = 0 \quad [\text{ por ejemplo } 1.101].$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} dim_{Kr}(\mathscr{O}_P) &= h(\mathfrak{m}_P) \\ &= dim_{Kr}(K[Y]) \\ &= dim(Y) \quad [\text{ por proposición } 1.103, \text{ pues } Y \text{ es una variedad afín}]. \end{aligned}$$

(c)
Por la observación inicial de esta prueba, sabemos que existe $\alpha : K[Y] \longrightarrow \mathscr{O}(Y)$ un morfismo inyectivo. Por lo que se puede concluir la inclusión $K[Y] \subseteq \mathscr{O}(Y)$.
Ahora observemos que, si $h \in \mathscr{O}(Y)$, entonces h es regular en Y. Esto significa que, para cada $P \in Y$, existen $U_P \subseteq Y$ un abierto de Y y $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ de tal forma que $P \in U_P$, $g \neq 0$ en U_P y además $h = \frac{f}{g}$ en U_P. De este modo, se sigue que, para todo $P \in Y$, se satisface que $h \in \mathscr{O}_P$. Así, con ayuda del isomorfismo encontrado en el inciso anterior, se concluye que $h \in K[Y]_{\mathfrak{m}_P}$ para todo $P \in Y$, es decir, $h \in \bigcap_{P \in Y} K[Y]_{\mathfrak{m}_P}$.
Por otra parte, gracias al inciso b) de este teorema, sabemos que hay una correspondencia biyectiva entre los puntos $P \in Y$ y los ideales maximales de $K[Y]$. Es por esto que se tiene que $h \in \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \subset K[Y] \\ \text{ideal maximal}}} K[Y]_{\mathfrak{m}}$.
De este modo, se tiene la siguiente cadena de inclusiones:

$$K[Y] \subseteq \mathscr{O}(Y) \subseteq \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \subset K[Y] \\ \text{ideal maximal}}} K[Y]_{\mathfrak{m}}.$$

Finalmente, como $K[Y]$ es un dominio entero, por la proposición 1.48 se concluye que $\mathscr{O}(Y) \cong K[Y]$.
(d)

A partir del inciso b) tenemos que $\mathscr{O}_P$ es un dominio entero y, para cada $P \in Y$, se cumple que $Frac(\mathscr{O}_P) \cong Frac(K[Y]_{\mathfrak{m}_P})$.
Ahora, por el lema 2.50, se tiene que $Frac(K[Y]_{\mathfrak{m}_P}) \cong Frac(K[Y])$. Entonces:

$$Frac(\mathscr{O}_P) \cong Frac(K[Y]), \text{ para todo } P \in Y.$$

Como queremos probar que $K(Y) \cong Frac(K[Y])$, basta probar que para todo $P \in Y$ se satisface que $K(Y) \cong Frac(\mathscr{O}_P)$.
Sea $P \in Y$ fijo. Consideremos el morfismo $\phi : \mathscr{O}_P \longrightarrow K(Y)$ de la proposición 3.27. Por la propiedad universal del campo de fracciones $\mathrm{Frac}(\mathscr{O}_P)$ (ver corolario 1.46), existe un único morfismo inyectivo $\theta : \mathrm{Frac}(\mathscr{O}_P) \longrightarrow K(Y)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{Frac}(\mathscr{O}_P) \arrow[dl, "\theta"] \\
K(Y) &
\end{tikzcd}$$

Recordemos que el morfismo θ está dado por

$$\theta\Big(\frac{\langle U, f\rangle}{\langle W, g\rangle}\Big) = \phi\big(\langle U, f\rangle\big) \cdot \phi\big(\langle W, g\rangle\big)^{-1} := \langle U, f\rangle' \cdot (\langle W, g\rangle')^{-1},$$

para $\frac{\langle U,f\rangle}{\langle W,g\rangle} \in \mathrm{Frac}(\mathscr{O}_P)$.
Veamos que θ es suprayectiva. Consideremos $\langle U, f\rangle' \in K(Y)$.
Tomemos un punto $Q \in U$ (Q puede ser distinto de P). Como f es regular en U, para $Q \in U$ existe un abierto $U_Q \subseteq U$ tal que $f = \frac{g}{h}$ en U_Q, donde $g, h \in K[x_1, \cdots, x_n]$. Notemos que, como g y h son polinomios, entonces g y h son regulares un todo Y. Por lo tanto, tenemos que $\langle Y, g\rangle', \langle Y, h\rangle' \in K(Y)$. Consideremos $Z(h) \subseteq \mathbb{A}^n_K$. Entonces $Y \cap Z(h)$ es cerrado de Y, y así el conjunto $U' := Y - (Y \cap Z(h))$ es abierto de Y. Recordemos, de la prueba del lema 3.26, que el inverso de $\langle Y, h\rangle'$ en $K(Y)$ es el elemento $\langle U', \frac{1}{h}\rangle' \in K(Y)$. Por consiguiente, en $K(Y)$ se tiene que

$$\langle Y, g\rangle' \cdot (\langle Y, h\rangle')^{-1} = \langle Y, g\rangle' \cdot \langle U', \frac{1}{h}\rangle' = \langle Y \cap U', \frac{g}{h}\rangle' = \langle U', \frac{g}{h}\rangle'.$$

Notemos que $U_Q \subseteq U'$ y así, por la definición de clase de equivalencia en $K(Y)$, tenemos que $\langle U', \frac{g}{h}\rangle' = \langle U_Q, \frac{g}{h}\rangle' = \langle U, f\rangle'$. Por otro lado, como $P \in Y$, se sigue que $\langle Y, g\rangle$, $\langle Y, h\rangle \in \mathscr{O}_P$ con $h \neq 0$ en Y; por lo que $\frac{\langle Y,g\rangle}{\langle Y,h\rangle} \in \mathrm{Frac}(\mathscr{O}_P)$.
De esta manera, tenemos que

$$\theta\left(\frac{\langle Y, g\rangle}{\langle Y, h\rangle}\right) = \phi\big(\langle Y, g\rangle\big) \cdot \phi\big(\langle Y, h\rangle\big)^{-1} = \langle Y, g\rangle' \cdot (\langle Y, h\rangle')^{-1} = \langle U', \frac{g}{h}\rangle' = \langle U, f\rangle'.$$

Por lo tanto, θ es suprayectiva y así θ es un isomorfismo. De este modo, se concluye que $K(Y) \simeq Frac(K[Y])$.
Ahora bien, como $K[Y]$ es una $K-$álgebra finitamente generada, se sigue que $Frac(K[Y])$ es una extensión de K finitamente generada. Recordemos que, de acuerdo a la proposición 1.103, se satisface que $dim_{Kr}(K[Y]) = dim(Y)$, mientras que, por el inciso a) del teorema 1.107, sabemos que $dim_{Kr}(K[Y]) = gr_{tr}(Frac(K[Y])/K)$.
Por lo tanto:

$$\begin{aligned} gr_{tr}(Frac(K[Y])/K) &= dim_{Kr}(K[Y]) \\ &= dim(Y). \end{aligned}$$

□

De la misma manera como se dan características de los anillos $\mathscr{O}(Y), \mathscr{O}_P$ y del campo $K(Y)$ cuando hablamos de una variedad afín Y, también se pueden caracterizar a los anillos y campos definidos para variedades proyectivas. Para el lector interesado en tal resultado le recomendamos consultar [6, Teorema 3.4, Pág. 18].

El siguiente resultado es realmente interesante. Entre otras cosas, nos permitirá concluir que, dadas dos variedades afines X y Y, estas resultan isomorfas si y solo si los anillos coordenados $K[X]$ y $K[Y]$ son isomorfos como $K-$álgebras.

Con el objetivo de simplificar el enunciado, introducimos la siguiente notación. Si X y Y son dos variedades entonces:
$Hom(X,Y) := \{\psi | \psi : X \longrightarrow Y$ es un morfismo de variedades$\}$.
En caso de que A y B sean $K-$álgebras, usaremos el mismo símbolo, $Hom(A, B)$, para denotar al conjunto de los morfismos de $K-$álgebras que van de A en B.

El lector observará que hemos utilizado el mismo símbolo para referirnos a dos conjuntos de distinta naturaleza, para evitar futuras confusiones, le pedimos al lector ser consciente del contexto en el cual se establezcan los morfismos.

Proposición 3.30 *Sean X una variedad y Y una variedad afín. Entonces existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $Hom(X,Y)$ y el conjunto $Hom(K[Y], \mathscr{O}(X))$, donde $K[Y]$ y $\mathscr{O}(X)$ se consideran como $K-$álgebras.*

Demostración. Consideremos X una variedad y Y una variedad afín.
Tomemos $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morfismo de variedades. Veamos que φ induce un morfismo de $K-$álgebras de $K[Y]$ en $\mathscr{O}(X)$.
Primero, consideremos $f \in \mathscr{O}(Y)$. Como φ es un morfismo, por definición, se sigue que la función $f \circ \varphi : X \longrightarrow K$ es regular en X, es decir, $f \circ \varphi \in \mathscr{O}(X)$.

Definamos la correspondencia $\hat{\varphi}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} : \mathscr{O}(Y) &\longrightarrow \mathscr{O}(X) \\ f &\longmapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

Probemos que $\hat{\varphi}$ es un morfismo de $K-$álgebras.
Notemos primero que $\hat{\varphi}(1_{\mathscr{O}(Y)}) = 1_{\mathscr{O}(Y)} \circ \varphi = 1_{\mathscr{O}(X)}$, donde $1_{\mathscr{O}(Y)}(y) = 1 \in K$ para todo $y \in Y$ y $1_{\mathscr{O}(X)}(x) = 1$ para todo $x \in X$.
Por otro lado, si $f, g \in \mathscr{O}(Y)$, entonces:

$$\hat{\varphi}(f+g) = (f+g) \circ \varphi = (f \circ \varphi) + (g \circ \varphi) = \hat{\varphi}(f) + \hat{\varphi}(g),$$

pues f y g son cocientes de polinomios.
Gracias a la naturaleza de f y g, también se tiene que:

$$\hat{\varphi}(fg) = fg \circ \varphi = (f \circ \varphi)(g \circ \varphi) = \hat{\varphi}(f)\hat{\varphi}(g).$$

De esta forma se concluye que $\hat{\varphi}$ es un morfismo de anillos.
Para finalizar esta parte, tomemos los morfismos de anillos que dan a $\mathscr{O}(Y)$ y $\mathscr{O}(X)$ la estructura de $K-$álgebras. Es decir, consideremos $\upsilon : K \longrightarrow \mathscr{O}(Y)$ dado por $\upsilon(r) = f_r$ para cada $r \in K$, donde $f_r(y) = r \ \ \forall y \in Y$; y $\tau : K \longrightarrow \mathscr{O}(X)$ tal que $\tau(k) = g_k$ para todo $k \in K$, con $g_k(x) = k \ \ \forall x \in X$.
Es suficiente verificar que $\tau = \hat{\varphi} \circ \upsilon$. Notemos que, si $k \in K$, entonces $\tau(k) = g_k$, con g_k como se dijo anteriormente. Por otro lado, $(\hat{\varphi} \circ \upsilon)(k) = \hat{\varphi}(\upsilon(k)) = \hat{\varphi}(f_k) = f_k \circ \varphi$. Más aún, si $x \in X$, entonces $f_k \circ \varphi(x) = f_k(\varphi(x)) = k$, es decir, $g_k = f_k \circ \varphi$. Por lo tanto, se concluye que $\tau = \hat{\varphi} \circ \upsilon$.
De este modo, queda probado que $\hat{\varphi} : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow \mathscr{O}(X)$ es un morfismo de $K-$álgebras.
Ahora, por el inciso $c)$ del teorema 3.29, sabemos que existe un isomorfismo de $K-$álgebras $\beta : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow K[Y]$. Esto nos permite definir la siguiente correspondencia:

$$\begin{aligned} \alpha : Hom(X, Y) &\longrightarrow Hom(K[Y], \mathscr{O}(X)) \\ \varphi &\longmapsto \hat{\varphi} \circ \beta^{-1} \end{aligned}$$

Con $\beta^{-1}(f + I(Y)) = f|_Y$, de tal forma que, en esta última expresión, estamos considerando a f como una función de $\mathbb{A}^n_K$ en K.
Para cumplir nuestro objetivo, basta probar que α es una correspondencia biyectiva.
Probemos que α es inyectiva. Supongamos que $\varphi_1, \varphi_2 : X \longrightarrow Y$ son dos morfismos de variedades tales que $\alpha(\varphi_1) = \alpha(\varphi_2)$. Esto significa que los morfismos $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow \mathscr{O}(X)$ satisfacen que $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$. Por consiguiente, para toda función regular $f : Y \longrightarrow K$, se tiene que $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2$. Ahora, como las funciones coordenadas $x_i : \mathbb{A}^n_K \longrightarrow K$ son funciones regulares en $\mathbb{A}^n_K$, y por lo

tanto en Y, se tiene que $x_i|_Y \circ \varphi_1 = x_i|_Y \circ \varphi_2$ para todo $i \leq n$. De este modo, si $P \in X$, entonces se sigue que:

$$x_i|_Y(\varphi_1(P)) = x_i|_Y(\varphi_1(P)) \text{ para } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Esto nos permite concluir que $\varphi_1(P) = \varphi_2(P)$, para todo $P \in X$, es decir, $\varphi_1 = \varphi_2$. Por lo tanto, α es inyectiva.
Para finalizar, veamos que α es suprayectiva. Consideremos $h : K[Y] \longrightarrow \mathscr{O}(X)$ un morfismo de $K-$álgebras. Recordemos que $K[Y] = K[x_1, \ldots, x_n]/I(Y)$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ consideremos $\bar{x_i} \in K[Y]$ la clase de x_i, y sea $\xi_i = h(\bar{x_i}) \in \mathscr{O}(X)$, es decir, cada $\xi_i : X \longrightarrow K$ es una función regular en X. Definamos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow \mathbb{A}^n_K \\ P &\longmapsto (\xi_1(P), \ldots, \xi_n(P)). \end{aligned}$$

Para probar que φ es un morfismo de X en Y, primero veamos que $Im(\varphi) \subseteq Y$. Sea $P \in X$. Probaremos que $\varphi(P) \in Y$. Como Y es una variedad afín, entonces es un conjunto algebraico, y por lo tanto, del corolario 1.21, se deduce que $Y = Z(I(Y))$. De esta forma, basta probar que $\varphi(P) \in Z(I(Y))$. Para esto consideremos $f \in I(Y)$ y veamos que $f(\varphi(P)) = 0$.
Como $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, se tiene que $f = \sum_\alpha c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Por lo que

$$\begin{aligned} f(\varphi(P)) &= f(\xi_1(P), \ldots, \xi_n(P)) \\ &= f(h(\bar{x_1})(P), \ldots, h(\bar{x_n})(P)) \\ &= \sum_\alpha c_\alpha [h(\bar{x_1})(P)]^{\alpha_1} \cdots [h(\bar{x_n})(P)]^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Ya que h es un morfismo de $K-$álgebras, se sigue que

$$\begin{aligned} f(\varphi(P)) &= \sum_\alpha c_\alpha [h(\bar{x_1})(P)]^{\alpha_1} \cdots [h(\bar{x_n})(P)]^{\alpha_n} \\ &= h\left(\sum_\alpha c_\alpha \bar{x_1}^{\alpha_1} \cdots \bar{x_n}^{\alpha_n}\right)(P) \\ &= h(f(\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n}))(P). \end{aligned}$$

Ahora, como $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in I(Y)$, tenemos que $f(\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n}) = \bar{f} = f + I(Y) = I(Y) = 0_{K[Y]}$. Esto implica que $f(\varphi(P)) = h(0_{K[Y]})(P) = 0(P) = 0$. Es así como concluimos que $\varphi(P) \in Z(I(Y)) = Y$.
Dado lo anterior, se tiene que φ es una función de X en Y.
A continuación probaremos que φ es un morfismo de variedades. De acuerdo al lema 3.16, basta probar que $x_i \circ \varphi$ es una función regular en X para todo

$i \in \{1, \dots, n\}$. Con esta idea en mente, tomemos $i \in \{1, \dots, n\}$ y $P \in X$, notemos que:

$$\begin{aligned}(x_i \circ \varphi)(P) &= x_i(\varphi(P))\\ &= x_i(\xi_1(P), \dots, \xi_{i-1}(P), \xi_i(P), \dots, \xi_n(P))\\ &= \xi_i(P)\\ &= h(\bar{x}_i)(P).\end{aligned}$$

Esto significa que $x_i \circ \varphi = h(\bar{x}_i)$. Como $h(\bar{x}_i) \in \mathscr{O}(X)$, concluimos que $x_i \circ \varphi$ es una función regular en X. Por lo tanto, se tiene que $\varphi : X \longrightarrow Y$ es un morfismo de variedades.
Para terminar, veamos que en efecto $h = \alpha(\varphi)$.
Observemos que $\alpha(\varphi) = \hat{\varphi} \circ \beta^{-1}$. Además $\hat{\varphi} \circ \beta^{-1}, h : K[Y] \longrightarrow \mathscr{O}(X)$ son morfismos de $K-$álgebras. Por lo que es suficiente probar que $\hat{\varphi} \circ \beta^{-1}(\bar{x}_i) = h(\bar{x}_i)$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.
Consideremos $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego $\hat{\varphi} \circ \beta^{-1}(\bar{x}_i), h(\bar{x}_i) : X \longrightarrow K$, y para $P \in X$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} \circ \beta^{-1}(\bar{x}_i)(P) &= \hat{\varphi}(\beta^{-1}(\bar{x}_i))(P)\\ &= \hat{\varphi}(x_i|_Y)(P)\\ &= (x_i|_Y \circ \varphi)(P)\\ &= x_i|_Y(\varphi(P))\\ &= x_i|_Y(\xi_1(P), \dots, \xi_i(P), \dots, \xi_n(P))\\ &= \xi_i(P)\\ &= h(\bar{x}_i)(P).\end{aligned}$$

Esto muestra que $h = \hat{\varphi} \circ \beta^{-1} = \alpha(\varphi)$, es decir, α es suprayectiva.
De esta forma se concluye que existe una correspondencia biyectiva entre los conjuntos $Hom(X, Y)$ y $Hom(K[Y], \mathscr{O}(X))$. $\square$

Corolario 3.31 *Sean X y Y dos variedades afines. Entonces, X es isomorfa a Y si y solo si $K[X]$ y $K[Y]$ son isomorfas como $K-$álgebras.*

Demostración. Es inmediato a partir de la proposición 3.30 y del inciso c) del teorema 3.29.

$\square$

Bibliografía

[1] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Gran Bretaña, (1969).

[2] S. Bosch, *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer, Münster, Germany, (2012).

[3] D.S. Dummit, R.M. Foote, *Abstract Algebra*, tercera edición, John Wiley & Sons, Inc, EUA, (2003)

[4] R. Engelking, *General Topology*, Hieldermann Verlag Berlin, Berlin,(1989).

[5] A. Gathmann, *Algebraic Geometry*, Class notes TU Kaserslautern, (2019-2020).

[6] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, octava edición, Springer-Verlag, EUA, (1977).

[7] M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Algebras, Rings and Modules*, Kluwer Academic Publishers, New York, (2004).

[8] S. Iitaka, *Algebraic geometry: An Introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin, (1982).

[9] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, W.A. Benjamin Co., New York (1970).

[10] P. Morandi, *Fields and Galois Theory*, Springer-Verlag , New York. (1996).

[11] F.Zaldivar, *Introducción al álgebra conmutativa*, (2011).

[12] F.Zaldívar, *Introducción a la teoría de Galois*, Papirhos, México, (2018).

[13] F.Zaldivar, *Notas de geometría algebraica.*