



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

POLICÍAS Y LADRONES SOBRE DIGRÁFICAS DE FICHAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JOSÉ JENARO FERNÁNDEZ VELÁZQUEZ

DIRECTOR
CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ
CINVESTAV

CIUDAD DE MÉXICO A 18 DE NOVIEMBRE DE 2022.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Apellido paterno	Fernández
Apellido materno	Velázquez
Nombre(s)	José Jenaro
Teléfono	55 4569 5787
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	312274816

2. Datos del tutor

Grado	Dr.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz

5. Datos del sinodal 3

Grado	Dr.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz

3. Datos del sinodal 1

Grado	Dr.
Nombre(s)	Ruy
Apellido paterno	Fabila
Apellido materno	Monroy

6. Datos del sinodal 4

Grado	Dra.
Nombre(s)	Hortensia
Apellido paterno	Galeana
Apellido materno	Sánchez

4. Datos del sinodal 2

Grado	Dr.
Nombre(s)	Juan José
Apellido paterno	Montellano
Apellido materno	Ballesteros

7. Datos del sinodal 5

Grado	Dra.
Nombre(s)	María Del Rocío
Apellido paterno	Sánchez
Apellido materno	López

7. Datos del trabajo escrito

Título	Policías y Ladrones sobre Digráficas de Fichas
Número de páginas	XX p.
Año	2022

Agradecimientos

A los gigantes en cuyos hombros me paré para poder alcanzar este punto.
A mi mamá y a Monse, por todo el apoyo que me brindaron desde que las conozco.
A César, por creer en mí.
Y al equipo.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA104521. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Agradecimientos	v
1. Prólogo	1
2. Conceptos Básicos	3
2.1. Gráficas y digráficas	3
2.2. Subgráficas y subdigráficas	4
2.3. Isomorfismos y homomorfismos	5
2.4. Caminos y conexidad	5
2.5. Ciclos y gráficas circulantes	7
2.6. Árboles	8
2.7. Torneos y gráficas completas	8
2.8. Producto cartesiano	9
3. Gráficas y Digráficas de Fichas	11
3.1. Propiedades básicas	13
3.2. Conexidad fuerte	18
3.3. Ciclos y circulantes	22
3.3.1. Ciclos dirigidos	22
3.3.2. Ciclos no dirigidos	24
3.3.3. Gráficas circulantes	25
3.4. Árboles	25
3.5. Digráficas semicompletas	27
3.5.1. Dirregularidad	28
3.5.2. Panciclicidad	29
3.6. Diámetro	29
3.7. k -conexidad	31

4. Policías y Ladrones	33
4.1. Ciclos	34
4.2. Trayectorias	39
4.3. Árboles	39
4.4. Rejillas	41
4.5. Rejillas cilíndricas	42
4.5.1. Con dos fichas	43
4.5.2. Generalización para $k \leq m$	47
4.5.3. Generalización para $k > m$	50
4.6. Rejillas toroidales	51
5. Conclusiones	57
Índice alfabético	59

Capítulo 1

Prólogo

Una vez que un concepto es explorado y comprendido en gráficas, es natural querer expandirlo hacia gráficas dirigidas, que a su vez encuentran aplicaciones en redes y, por ejemplo, en ciencias de la computación.

Para este fin, esta tesis se basó inicialmente en el artículo *Token Graphs*, escrito por Ruy Fabila Monroy et al y citado en [9]. La idea original era ver qué aspectos analizados en ese artículo se podían generalizar si en lugar de usar gráficas se usaban digráficas, y observar qué aspectos cambian radicalmente, así como las causas de estos cambios.

Al no encontrar una fuente donde se estudiaran las digráficas de fichas, el primer paso fue extender el concepto y preguntarse si tenía sentido. Posteriormente, se estudian propiedades básicas de las digráficas de fichas, como las conexidades fuerte y débil, las condiciones bajo las cuáles existen trayectorias entre sus vértices, y se mencionan resultados cuya demostración es idéntica a aquella en [9].

Después de que estos aspectos son analizados, se procede a estudiar las digráficas de fichas de algunas familias comunes de digráficas, como los torneos, los árboles y los ciclos.

En el último capítulo, se habla sobre el juego Policías y Ladrones, y se mencionan las reglas que éste necesita para poder jugarse sobre digráficas de fichas. Una vez que el juego está explicado, se seleccionan varias familias de digráficas; para cada una se crea algoritmo para poder capturar a un ladrón sobre su digráfica de fichas, y se da una cota de tiempo para garantizar dicha captura. Algunas de estas familias constan de digráficas cuyas propiedades no se aprecian en los casos pequeños, por lo que no fueron examinadas en el capítulo correspondiente.

Capítulo 2

Conceptos Básicos

2.1. Gráficas y digráficas

Dado un conjunto no vacío V , una **gráfica simple** sobre V es una pareja ordenada (V, E) , donde $E \subseteq \binom{V}{2}$ ¹, y cada uno de sus elementos recibe el nombre de **arista**. Una **digráfica estricta** sobre V es una pareja ordenada (V, A) donde $A \subseteq \{(u, v) \in V \times V : u \neq v\}$, y cada elemento de A es una **flecha**. En ambos casos, los elementos del conjunto V reciben el nombre de **vértices**. A lo largo de esta tesis, G representa una gráfica con conjunto de vértices $V(G)$ y conjunto de aristas $E(G)$, y D representa una digráfica con conjunto de vértices $V(D)$ y conjunto de flechas $A(D)$, al menos que se indique lo contrario. Si en el contexto no hay lugar a ambigüedades, estos conjuntos se denotarán únicamente V , E y A .

Decimos que el **orden** de una gráfica (digráfica) es $|V|$, y su **tamaño** es $|E|$ ($|A|$). Por lo general, denotaremos con n al orden y con m al tamaño, aunque este último parámetro se utiliza menos. Dada $e \in E$, si $e = \{u, v\}$, entonces u y v son los **extremos** de e y son **adyacentes** entre sí, y son **vecinos** uno del otro. También decimos que e **incide** tanto en u como en v , y por lo general, nos referimos a una arista únicamente por sus extremos. Para facilitar la notación eliminamos las llaves, es decir, la arista $\{u, v\}$ se denota por uv . Por otro lado, si a es la flecha (u, v) , entonces u es su **cola**, v es su **cabeza**, y u **domina** a v . En este caso, u es **invecino** de v , y v es **exvecino** de u . Una flecha (u, v) , en una digráfica D , es **simétrica** si (v, u) también es una flecha en D .

Para un vértice v en una gráfica G , el conjunto $\{u \in V(G) : u \text{ es vecino de } v\}$ es llamado **vecindad** de v , y se denota por $N_G(v)$. El **grado** de v , denotado por

¹Dados un conjunto X y un natural k , $\binom{X}{k} = \{a \subseteq X : |a| = k\}$

$d_G(v)$, corresponde a $|N_G(v)|$. En una digráfica D , la **exvecindad** de un vértice v es el conjunto $\{u \in V(D) : v \text{ domina a } u\}$, y su cardinalidad es el **exgrado** de v , denotado por $d_D^+(v)$. Análogamente, la invencindad de v es el conjunto de vértices que dominan a v , su cardinalidad se llama **ingrado**, y se denota por $d_D^-(v)$. Decimos que un vértice es una **fuelle (sumidero)** si su ingrado (exgrado) es 0. Una gráfica es **regular** si todos los vértices tienen el mismo grado, y es r -regular si ese grado es r . Similarmente, una digráfica es **inregular (exregular)** si el ingrado (exgrado) es el mismo para todo vértice. Si una digráfica es inregular y exregular, el ingrado y el exgrado son el mismo, recibe el nombre de **dirregular**. Es fácil demostrar que si una gráfica es inregular y exregular, también es dirregular, sin embargo, una gráfica puede ser inregular sin ser exregular, como se muestra en la Figura 2.1.

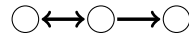


Figura 2.1: Una digráfica inregular, pero no exregular

Dada una digráfica D , su **gráfica subyacente** $U(D)$, es la gráfica que tiene el mismo conjunto de vértices, y para la cual el conjunto de aristas es $\{uv : (u, v) \in A(D)\}$. Similarmente, para una gráfica G podemos generar una **superorientación** de G , que es una digráfica cuya gráfica subyacente es G . Una **biorientación** es una superorientación donde todas las flechas son simétricas, y una **orientación** es una superorientación sin flechas simétricas. De manera similar, una digráfica es una **gráfica orientada** si no tiene flechas simétricas.

2.2. Subgráficas y subdigráficas

Dos operaciones comunes en las gráficas son la remoción de vértices y aristas. La notación para remover la arista e de G es simplemente $G - e$, y el resultado es la gráfica $(V(G), E(G) - \{e\})$. La notación para remover un vértice es $G - v$, y el resultado es la gráfica $(V(G) - \{v\}, E(G) - \{e \in E(G) : v \in e\})^2$. Además de estas dos, podemos definir la remoción en G de un conjunto de vértices X de manera recursiva como G , si $X = \emptyset$, o $(G - (X - \{x\})) - x$, si $x \in X$. Las remociones de vértices y flechas se definen análogamente para las digráficas, y se pueden realizar iteradamente para resultar en una **subgráfica (subdigráfica)**. Para denotar que H es subgráfica o subdigráfica de G , escribimos $H \subseteq G$. Una subgráfica (subdigráfica) es **inducida** si se puede obtener de la gráfica original aplicando únicamente la operación de remoción de vértices, y decimos que es **generadora** si puede obtenerse eliminando únicamente aristas (flechas). Se puede notar que en cualquier gráfica (digráfica), las subgráficas

(subdigráficas) inducidas están determinadas únicamente por los vértices que tienen o que remueven, es decir, si $X \subseteq V$, la subgráfica de G inducida que contiene solo los vértices en X es única. Esta subgráfica (subdigráfica) se denota por $G[X]$. Decimos que G tiene una **copia** de H si existe $X \subseteq V(G)$ tal que $G[X] \cong H$.

2.3. Isomorfismos y homomorfismos

Dadas dos gráficas G y H , un **isomorfismo** es una función $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ biyectiva que preserva adyacencias y no-adyacencias, es decir, $uv \in E(G)$ si y solo si $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$. Si G es isomorfa a H , solemos escribir $G \cong H$. La relación “ser isomorfa a” es de equivalencia, por lo que podemos trabajar con la clase de todas las gráficas isomorfas entre sí como si fueran la misma gráfica. Los isomorfismos para digráficas se definen de manera similar. Un **automorfismo** es un isomorfismo de una gráfica a ella misma, y una gráfica (digráfica) es **vértice-transitiva** si dados cualesquiera dos vértices u y v existe un automorfismo φ tal que $\varphi(u) = v$. Generalizando este concepto, una gráfica (digráfica) es k -vértice transitiva si dados dos k -conjuntos de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ y $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ existe un automorfismo φ tal que $\varphi(v_i) = u_i$ para toda i . Además, es **arista-transitiva (flecha-transitiva)** si para cualesquiera dos aristas (flechas) existe un automorfismo que mande una en la otra.

Por otro lado, un **homomorfismo** de G a H es una función $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ que preserva adyacencias en el caso de las gráficas, y dominancias en el caso de las digráficas. A diferencia de un isomorfismo, un homomorfismo no necesita ser biyectivo, así que, intuitivamente, puede “comprimir” una gráfica en una subgráfica de otra gráfica.

2.4. Caminos y conexidad

En una gráfica, un **camino** es una sucesión alternante de vértices y aristas que empieza y termina en un vértice, y en la que cada arista entre dos vértices incide en ellos. Análogamente, un **camino dirigido** es una sucesión alternante de vértices y flechas, donde cada flecha une al vértice anterior con el siguiente. Si un camino (dirigido) está dado por la sucesión $(v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_l, v_l)$, su longitud es l . El primer y el último vértice en un camino, ya sea dirigido o no, reciben el nombre de **extremos** del camino, y cualquier otro vértice recibe el nombre de **vértice interno**. Un

²Esto es posible ya que las aristas son conjuntos.

uv -camino es un camino que empieza en u y termina en v , y un uv -camino dirigido se define de forma análoga. Un camino (dirigido) es **cerrado** si sus extremos son iguales, y una **trayectoria** es un camino que no repite vértices, mientras que una **trayectoria dirigida** es un camino dirigido que no repite vértices. Una trayectoria es **hamiltoniana** si utiliza todos los vértices de una gráfica, una gráfica es **hamiltonianamente conexa** si cualesquiera dos vértices están unidos por una trayectoria hamiltoniana.

Las gráficas que sean trayectorias con n vértices se denotan por P_n , o \vec{P}_n en caso de ser dirigidas. Decimos que una gráfica es **conexa** si entre cualesquiera dos vértices existe un camino que los una, e **inconexa** en el caso contrario. De hecho, es posible demostrar que si existe un camino entre dos vértices, también existe una trayectoria entre ellos. Una digráfica es **fuertemente conexa** (también llamada “fuerte”) si para cualesquiera dos vértices existe un camino dirigido que los une, y es **débilmente conexa** (o “débil”) si su gráfica subyacente es conexa.

Generalizando el concepto de conexidad, una gráfica con al menos un par de vértices no adyacentes es **k -conexa** si no existe un $(k - 1)$ -conjunto de vértices cuya remoción resulte en una gráfica inconexa, y el **número de conexidad** de una gráfica es el número más pequeño k para el cual existe un k -subconjunto X de V tal que $G - X$ es inconexa. Similarmente, una digráfica es **k -conexa** si es fuertemente conexa y no existe $(k - 1)$ -conjunto alguno de vértices cuya remoción resulte en una digráfica que no sea fuertemente conexa. La k -conexidad de una digráfica y la de su gráfica subyacente no necesariamente son la misma, por ejemplo, la gráfica con vértices $\{v_0, v_1, \dots, v_9\}$ y aristas $\{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_9v_0\}$ es 2-conexa, pero la digráfica obtenida al convertir la arista v_iv_{i+1} en la flecha (v_i, v_{i+1}) no es 2-conexa, pues al quitar cualquier vértice, el resultado es \vec{P}_{10} , que no es fuertemente conexa.

Dados dos vértices u y v en una gráfica (digráfica) G , la **distancia** (distancia **dirigida**) de u a v , denotada por $d_G(u, v)$ es la longitud de la uv -trayectoria más corta en la gráfica (digráfica) en caso de que exista, y se define como ∞ en caso de no existir. A pesar de que la distancia es una métrica en las gráficas, no es simétrica en las digráficas. De hecho, si la digráfica en cuestión no es fuertemente conexa y de tamaño al menos 1, existen vértices u y v tales que $d(u, v)$ es un entero, pero $d(v, u)$ es ∞ . Tanto para gráficas como digráficas, la **eccentricidad** de un vértice v , denotada por $e(v)$ se define como $\max_{u \in V} d(v, u)$. Apoyándose de esta definición, el **radio** y el **diámetro** son $\min_{v \in V} e(v)$ y $\max_{v \in V} e(v)$ respectivamente. Es fácil demostrar que si $H \subseteq G$ y $u, v \in V(H)$, entonces $d_H(u, v) \geq d_G(u, v)$.

2.5. Ciclos y gráficas circulantes

Un **ciclo** en una gráfica es un camino cerrado de longitud al menos 3 que no repite aristas, en el cual el primer y el último vértice son iguales, y cualesquiera dos vértices internos son distintos entre sí y distintos a los extremos. En una digráfica, un **ciclo dirigido** es un camino dirigido cerrado de longitud al menos 2 en el que el único vértice repetido es el primero, que aparece dos veces: una como extremo inicial y otra como extremo final. Decimos que un ciclo es **impar** o **par** dependiendo del número de vértices que tenga, y decimos que es **inducido** en una gráfica G (digráfica D), si para cualesquiera dos vértices v_i, v_j del ciclo sucede que $v_i v_j \in E_G$ ($(v_i, v_j) \in A_D$) si y solo si $j = i + 1$. Los ciclos con n vértices se denotan por C_n , o \vec{C}_n en caso de ser dirigidos, y decimos que una gráfica es **hamiltoniana** si contiene un ciclo que use todos sus vértices. Notemos que para cualquier $n \geq 3$, las gráficas y digráficas C_n y \vec{C}_n son vértice-transitivas, arista-transitivas o flecha-transitivas y hamiltonianas.

Una gráfica G de orden n es **pancíclica** si para cualquier $k \in \{3, 4, \dots, n\}$ sucede que G contiene un ciclo de longitud k . La gráfica en cuestión es **vértice pancíclica** si por cada vértice pasa un ciclo de longitud k para toda $k \in \{3, 4, \dots, n\}$. Un ejemplo de gráfica pancíclica se verá en la Sección 2.7.

Una manera de generalizar los ciclos es mediante las **gráficas circulantes**. Éstas a su vez son un caso particular de las Gráficas de Cayley, y se definen de la siguiente manera. Sea $(\mathbb{Z}_n, +)$ el grupo aditivo de enteros módulo n y sea $S \subseteq \mathbb{Z}_n - \{0\}$ tal que $-s \in S$ siempre que $s \in S$, la gráfica circulante $C(n, S)$ tiene como conjunto de vértices \mathbb{Z}_n y dos vértices i, j son adyacentes si y solo si $j - i \in S$. En particular, $C_n \cong C(n, \{1, -1\})$. Las **digráficas circulantes** se definen de manera similar: sus vértices son los elementos de \mathbb{Z}_n , el conjunto S también es subconjunto de $\mathbb{Z}_n - \{0\}$, pero no necesita cumplir que $-s \in S$ para todo $s \in S$, e i domina a j si $j - i \in S$. Para distinguirlas de las gráficas circulantes, las digráficas circulantes se denotarán $\vec{C}(n, S)$.

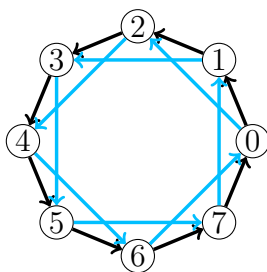


Figura 2.2: La digráfica circulante $\vec{C}(8, \{1, 2\})$.

2.6. Árboles

Un **árbol** es una gráfica conexa acíclica (es decir, sin ciclos), y un **árbol dirigido** es una digráfica sin flechas simétricas cuya gráfica subyacente es un árbol. Es fácil demostrar que en un árbol, cualesquiera dos vértices están unidos por exactamente una trayectoria, y si estos vértices son u y v y el árbol es T , esta trayectoria se denota uTv . Todo árbol de orden mayor o igual que 2 tiene al menos dos vértices de grado 1, que reciben el nombre de **hojas**. La siguiente es una caracterización de los árboles.

Teorema 1 ([12]). *Si G es una gráfica, entonces las siguientes son equivalentes.*

1. *La gráfica G es un árbol.*
2. *La gráfica G es acíclica de tamaño $n - 1$*
3. *La gráfica G es conexa de tamaño $n - 1$.*
4. *La gráfica G es acíclica, y al añadirle cualquier arista se forma un ciclo.*
5. *La gráfica G es conexa, y se vuelve inconexa cuando se remueve cualquiera de sus aristas.*
6. *Dados dos vértices en G , el camino que los une es único.*

En el contexto de gráficas, un **árbol enraizado** es un árbol T con un vértice distinguido r , que recibe el nombre de raíz. En un árbol de este tipo se pueden definir varias funciones, de las cuales nos importan dos, la de **parentesco** y el **nivel**. Para un vértice v , el nivel $l_T(v)$ se define como $d_T(r, v)$, mientras que el padre de v es el penúltimo vértice de rTv .

En un árbol enraizado dirigido, cada flecha va de un vértice con nivel i a uno con nivel $i + 1$. En particular, la raíz es la única fuente, y todos los vértices sin hijos (es decir, que no son padres de ningún otro vértice) son sumideros. En un árbol enraizado dirigido, un vértice es un sumidero si y solo si es una hoja.

2.7. Torneos y gráficas completas

Una gráfica es **completa** si entre cualesquiera dos de sus vértices existe una arista. La gráfica completa de n vértices se denota por K_n , es $(n - 1)$ -regular, y por convención, es $(n - 1)$ -conexa. Cualquier función biyectiva definida sobre sus vértices es un automorfismo, y no existen homomorfismos biyectivos de K_n a ninguna gráfica distinta de K_n .

Un **torneo** es el resultado de orientar una gráfica completa, y una digráfica es **semicompleta** si su gráfica subyacente es completa. A pesar de las similitudes, las digráficas semicompletas pueden tener flechas simétricas, pero los torneos no. Decimos que un torneo es **transitivo** cuando es acíclico, esto para remarcar el hecho de que la relación definida por el conjunto de flechas es transitiva. En [19], Moon demostró lo siguiente.

Teorema 2 (De Moon). *Sea G un torneo de orden n , entonces G es fuertemente conexo si y solo si es vértice-pancíclico.*

Como corolario, un torneo es fuerte si y solo si es hamiltoniano.

2.8. Producto cartesiano

Además de remover vértices y aristas, una operación común es el **producto cartesiano** de dos gráficas, definido a continuación.

Definición 1. Dadas dos gráficas G y H , el **producto cartesiano**, de G con H , denotado por $G \square H$, es la gráfica con conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$, donde dos vértices (u, x) y (v, y) son adyacentes si $u = v$ y $xy \in E(H)$ o si $x = y$ y $uv \in E(G)$.

Gráficamente, esta operación sustituye cada vértice de H por una copia de G y viceversa. Es fácil demostrar que $G \square H \cong H \square G$, y para gráficas G_1, G_2, \dots, G_l , el producto se define de manera recursiva. Este producto se define de manera análoga para digráficas, y da lugar a algunas familias interesantes, varias de las cuales se definen a continuación.

- Un **prisma** es una gráfica de la forma $C_n \square P_2$
- El cubo Q_n se define recursivamente como $Q_1 \cong K_2$ y $Q_{n+1} \cong Q_n \square K_2$.
- Una **rejilla** es una gráfica de la forma $P_n \square P_m$. En particular, la rejilla de $n \times m$ es la gráfica $P_n \square P_m$.
- Una **rejilla cilíndrica** es una gráfica de la forma $C_n \square P_m$
- Una **rejilla toroidal** es una gráfica de la forma $C_n \square C_m$.

En una rejilla cilíndrica, $C_n \square P_m$, si x es un vértice en $V(P_m)$, un **nivel** será cualquier copia de C_n inducida por un conjunto de la forma $\{(v, x) : v \in C_n\}$. Si x es el i -ésimo vértice, llamaremos a la copia correspondiente el “ i -ésimo nivel”.

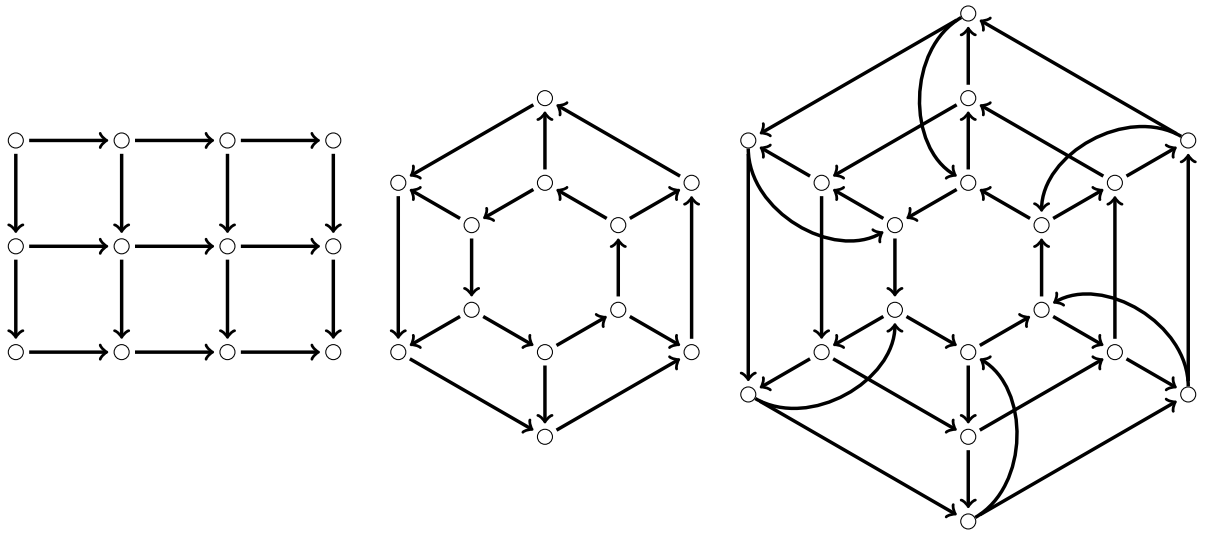


Figura 2.3: De izquierda a derecha: $\vec{P}_3 \square \vec{P}_4$, $\vec{C}_6 \square \vec{P}_2$ y $\vec{C}_6 \square \vec{C}_3$.

Cuando trabajemos con rejillas orientadas, supondremos que las orientaciones de C_n y P_n son \vec{C}_n y \vec{P}_n respectivamente. Varios ejemplos de estas rejillas se pueden observar en la Figura 2.3.

Capítulo 3

Gráficas y Digráficas de Fichas

Para una gráfica G con n vértices y un número natural $k \leq n$, se define la **gráfica de k fichas** $F_k(G)$ de la siguiente manera. Cada vértice de $F_k(G)$ es un k -conjunto de $V(G)$, y dos vértices A y B son adyacentes en $F_k(G)$ si $A\Delta B \in E(G)$.

De manera alternativa a la definición anterior, podemos pensar los vértices de $F_k(G)$ como configuraciones de k vértices, donde cada uno de estos tiene una ficha, y dos vértices A y B de $F_k(G)$ son adyacentes si es posible pasar de la configuración A a la configuración B deslizando una ficha a través de una arista. La idea de ver los vértices como configuraciones fue propuesta en [9], y es análoga a pensar en las “distintas maneras de colocar k fichas sobre los vértices”, lo que motiva el nombre de la gráfica de fichas. En este mismo artículo se muestran resultados sobre conectividad, diámetro, clanes, número cromático, trayectorias hamiltonianas, y producto cartesiano de las gráficas de fichas. Así mismo, se menciona que las Gráficas de Johnson son casos particulares de las gráficas de fichas, por lo que éstas últimas generalizan algunos resultados de las primeras. Una de las conjeturas propuestas en este artículo dice que si G es t -conexa con $t \geq k$, entonces $F_k(G)$ es $k(t - k + 1)$ -conexa. Dicha conjetura fue demostrada en [15], y tres años después, en [16] muestra que si G es t -conexa por aristas y $t \geq k$, entonces $F_k(G)$ es al menos $k(t - k + 1)$ -conexa por aristas; en ese mismo artículo se muestran familias de gráficas que cumplen con esta cota.

Como se menciona en [4], Alavi et al estudiaron las gráficas de dos fichas en 1991 en [2], llamándolas “gráficas de vértices dobles”. Varias de las propiedades de éstas son mencionadas en [3], y en este mismo artículo se menciona cómo estas gráficas pueden ser generalizadas para tomar más de dos vértices. En 1992, Virginia Wright escribió una tesis titulada *n -Tuple vertex graphs*¹sobre el mismo tema. Una

¹Esta información se encuentra en [3], aunque no se pudo hallar dicha tesis.

manera distinta de generalizar las gráficas de vértices dobles que se propuso en [13] es mediante “gráficas completas de vértices dobles”. Dada una gráfica G , la gráfica completa de vértices dobles de G , denotada por $CU_2(G)$, tiene como vértices las $\binom{n+1}{2}$ parejas no ordenadas de $V(G)$, incluyendo aquellas con repetición, es decir, las de la forma $\{v, v\}$. De nuevo, dos vértices $\{u, v\}$ y $\{x, y\}$ de $CU_2(G)$ son adyacentes si $\{u, v\} \Delta \{x, y\}$ es una arista de G . A pesar del nombre, estas gráficas son distintas a las “Gráficas dobles” tratadas en [17]. Las gráficas de dos fichas de caminos de longitud n muestran ser de suma importancia en [11], donde se utilizan para resolver un problema abierto de códigos binarios.

En [5] se estudian las propiedades de las gráficas de k -fichas, llamadas en el artículo “ k -ésimas potencias simétricas”, desde una perspectiva algebraica, y se presentan resultados relacionados con la mecánica cuántica. Además, se presenta una fórmula para la matriz de adyacencia de $F_k(G)$, que utiliza productos tensoriales.

Posteriormente, en [4], se hallan fórmulas para el número de independencia de $F_2(K_{m,n})$ y de $F_2(C_n)$, así como una fórmula por casos para encontrar o acotar el número de apareamiento ν de $F_k(G)$ cuando $\nu(G) = \lfloor n/2 \rfloor$.

En [7], los autores caracterizan las gráficas que tienen al menos una gráfica de fichas regular, y muestran que para $n > 10$, las únicas gráficas de fichas planas son $F_2(P_n)$, y por consiguiente, $F_{n-2}(P_n)$. Además, se muestra que si H es un menor de G , entonces $F_k(H)$ es menor de $F_k(G)$.

Un año más tarde, en [8] se estudiaron las propiedades del espectro laplaciano de las gráficas de fichas. En este artículo, se define al espectro laplaciano $Spec(G)$ de una gráfica G como el conjunto de valores propios de $D(G) - A(G)$, donde $D(G)$ es la matriz diagonal que en la i -ésima entrada diagonal tiene el grado del vértice v_i , y $A(G)$ es la matriz de adyacencia. Uno de los resultados más sobresalientes presentados aquí nos dice que dados dos enteros h y k tales que $1 \leq h \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, se tiene que $Spec(F_h(G)) \subseteq Spec(F_k(G))$. Además, se muestra que si $Spec(F_k(G)) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\binom{n}{k}}\}$, y $Spec(F_k(\overline{G})) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\binom{n}{k}}\}$, entonces $Spec(F_k(K_n)) = \{\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \dots, \lambda_{\binom{n}{k}} + \mu_{\binom{n}{k}}\}$.

A lo largo de esta tesis, se pretende trasladar el concepto de gráficas de k fichas hacia digráficas, y se exhiben ciertas propiedades que se cumplen tanto en gráficas de fichas como en digráficas, así como otras que solo pueden cumplirse en gráficas. A continuación, se presenta la definición de una digráfica de fichas.

3.1. Propiedades básicas

Dada una digráfica D de orden n y un número natural $k \leq n$, se define la **digráfica de k fichas** $F_k(D)$ como la digráfica cuyos vértices son los k -conjuntos de $V(D)$, y en la cual para dos vértices A, B , sucede que $(A, B) \in A(F_k(D))$ si y solo si $A \Delta B = \{a, b\}$, con $a \in A$, $b \in B$ y $(a, b) \in A(D)$. En seguida se presentan algunas propiedades que cumplen las digráficas de fichas.

Proposición 3. *Sea D una digráfica de orden n y $U(D)$ su gráfica subyacente, para cualquier $k \leq n$ se tiene que $U(F_k(D)) = F_k(U(D))$.*

Demostración. Es fácil ver que en ambos casos, el conjunto de vértices es $\binom{V(D)}{k}$, por lo que basta demostrar que los conjuntos de aristas son iguales. Supongamos primero que $AB \in E(F_k(U(D)))$, entonces $A \Delta B$ es una arista en $U(D)$, lo que corresponde a al menos una flecha en D . De este modo, $A \Delta B$ corresponde a una flecha en $F_k(D)$, por lo que AB es una arista en la gráfica subyacente $U(F_k(D))$. De la misma forma, si AB es una arista en $U(F_k(D))$, entonces le corresponde a una flecha en $F_k(D)$, así que $A \Delta B$ es una arista en $U(D)$. \square

Otro resultado fácil de demostrar pero menos intuitivo es el siguiente.

Proposición 4. *Dada una digráfica D y $k \leq n = |V_D|$, se tiene que $F_k(D) \cong \overleftarrow{F}_{n-k}(D)$.*

Demostración. Sabiendo que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, se propone la función φ definida por $\varphi(A) = V - A$. Observemos que si (A, B) es una flecha de $F_k(D)$, entonces $A \Delta B = \{a, b\}$, con $a \in A$, $b \in B$ y $(a, b) \in A(D)$. En $\overleftarrow{F}_{n-k}(D)$, esto se traduce como una flecha de $V - B$ (conjunto que contiene a a) a $V - A$ (conjunto que contiene a b). El mismo razonamiento puede aplicarse para ver que toda flecha $(V - A)(V - B)$ en $\overleftarrow{F}_{n-k}D$ corresponde a una flecha de la forma (B, A) en $F_k(D)$. \square

Un corolario de esta Proposición es que para una gráfica G de orden n , se tiene que $F_k(G) \cong F_{n-k}(G)$. En virtud de este último resultado, podemos suponer siempre $k \leq n/2$. Este corolario se presentó en [9].

A continuación veremos más propiedades de las digráficas de fichas. Como se mencionó anteriormente, $F_K(D)$ tendrá orden $\binom{n}{k}$ cuando D tenga n vértices. Para contar las flechas, podemos observar que cada flecha (A, B) de $F_k(D)$ proviene de una flecha (a, b) de D , con $a \in A$ y $b \in B$. Por otro lado, dada una flecha (a, b) de

D , podemos tomar un conjunto S de $\binom{n-2}{k-1}$ vértices de $V - \{a, b\}$, y de este modo $(S \cup \{a\}, S \cup \{b\})$ será una flecha de $F_k(D)$. Este razonamiento nos hace ver que hay

$$\binom{n-2}{k-1} |A(D)|$$

flechas en $F_k(D)$. Tanto este resultado como su prueba son análogos a los obtenidos en [9].

Para encontrar la exvecindad de un vértice A , tenemos que fijarnos en cada uno de los vértices de D que componen a A . En concreto, cada vecino de A se ve de la forma $A \cup \{b\} - \{a\}$, donde $a \in A, b \notin A$ y $(a, b) \in A(D)$. Esto significa dos cosas. En primer lugar, la cantidad de flechas con cola en A (es decir, su exgrado) es el número de flechas con cola en A y cabeza en $V - A$, y en segundo lugar, que la exvecindad de A es $\bigcup_{a \in A} \{A \cup \{b\} - \{a\} : b \notin A, (a, b) \in A(D)\}$. Los resultados correspondientes al ingrado de A se obtienen de manera similar.

Antes de poder analizar aspectos más complicados de las digráficas de fichas, es conveniente saber cómo obtener caminos en una digráfica de fichas a partir de los caminos en la digráfica original.

Proposición 5. *Sea $k \in \mathbb{N}$, D una digráfica de orden al menos k , y a y b dos de sus vértices. Dado un $(k-1)$ -conjunto $X \subseteq V - \{a, b\}$, existe una trayectoria de $X \cup \{b\}$ a $X \cup \{a\}$ en $F_k(D)$ si y solo si existe una ab -trayectoria en D .*

Demostración. Primero supondremos que existe una ab -trayectoria en D . Sean $A = X \cup \{a\}$ y $B = X \cup \{b\}$. Sea P dado por (a_0, a_1, \dots, b) un ab -camino, llamemos a_i al último vértice P que se encuentra en A . De esta forma,

$$(A, A \cup \{a_{i+1}\} - \{a_i\}, A \cup \{a_{i+2}\} - \{a_i\}, \dots, A \cup \{b\} - \{a_i\})$$

es un camino en $F_k(D)$ que empieza en A y termina en $A \cup \{b\} - \{a_i\}$. Pensando en $F_k(D)$ como una gráfica de acomodos de fichas, esto corresponde a deslizar una ficha de a_i a b a través de P . Para completar el camino en $F_k(D)$, solo debemos mover la ficha de a_j a a_{j+1} para $j \in \{i-1, i-2, \dots, 0\}$. Al final del procedimiento, los vértices de D con fichas son los de $A \cup \{b\} - \{a_0\}$, que son precisamente los de B . En general, este camino recibe el nombre de $A \xrightarrow{P} B$. Es importante mencionar que esta implicación, así como la construcción de $A \xrightarrow{P} B$ se realizó en [9] usando gráficas no dirigidas.

Para la otra implicación, tomamos una $(X \cup \{a\})(X \cup \{b\})$ -trayectoria P , dada por la sucesión de vértices (X_1, X_2, \dots, X_l) , y llamamos S a la sucesión de flechas

de P . Para construir la ab -trayectoria en D , se usará el Algoritmo 1. Si S tiene una sola flecha, ésta es en realidad $(X \cup \{a\}, X \cup \{b\})$, lo que implica que (a, b) es una ab -trayectoria en D . Como este caso ya está cubierto, supondremos que S tiene más de una flecha. Podemos ver que en caso de que el ciclo de la Línea 1.6 termine, T será un ab -camino. Para demostrar que este ciclo siempre termina, primero se argumenta por qué la Línea 1.8 siempre puede ejecutarse. Supongamos que el algoritmo está en su i -ésima iteración, y que u es el último vértice que fue añadido a T . En este momento, puede suceder cualquiera de los siguientes casos.

- Si $u = b$, el algoritmo ha terminado.
- Si $u \in X$, sabemos que cada vez que “saquemos” a u de un elemento de la trayectoria P , debemos “meterlo” en algún momento posterior. Formalmente, por cada i tal que $X_i - X_{i+1} = \{u\}$ existe j , con $j > i$, tal que $X_{j+1} - X_j = \{u\}$.
- Si $u \notin X$ y $u \neq a$, tenemos un argumento similar al del caso anterior, y por cada i tal que $X_{i+1} - X_i = \{u\}$ existe j , con $j > i$, tal que $X_j - X_{j+1} = \{u\}$.
- Por último, si $u = a$, u sale de X_i en la primera iteración, y cada vez que entre, tiene que volver a salir, por lo que existen exactamente $p + 1$ índices i tales que $X_i - X_{i+1} = \{a\}$ siempre que existan exactamente p índices j tales que $X_{j+1} - X_j = \{a\}$.

Los razonamientos en los casos anteriores implican que cada vez que se tenga una flecha (X_i, X_{i+1}) , con $X_{i+1} - X_i = \{u\}$, se tendrá una flecha (posiblemente antes en S_D) de la forma (X_j, X_{j+1}) , con $X_j - X_{j+1} = \{u\}$, por lo que la línea 1.8 siempre puede ejecutarse.

Ahora veamos que, eventualmente, el ciclo en el algoritmo alcanza a b . Supongamos por el contrario que el algoritmo se detiene sin encontrar a b , y que x es el último vértice de T . Por construcción de P , $\{x\} = X_{i+1} - X_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, l\}$. Por lo que cae en algún caso de la lista anterior. Estos casos indican que siempre se puede continuar la ejecución, por lo que siempre se puede salir de x cuando $x \neq b$. \square

A continuación se presenta una consecuencia inmediata de la Proposición 5.

Corolario 6. *Si una digráfica D de orden n tiene un ciclo dirigido de longitud ℓ y $1 < k < n$, entonces $F_k(D)$ tiene un ciclo dirigido de longitud ℓ .*

Demostración. Sea $C = (v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}, v_0)$ un ciclo de longitud ℓ en D , y sea $P = (v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1})$ y sea X un $(k - 1)$ -conjunto de $V - \{v_0, v_{\ell-1}\}$. Consideremos los

Algoritmo 1 Reconstrucción de caminos

ENTRADA: lista de flechas de una trayectoria de $X \cup \{a\}$ a $X \cup \{b\}$ en $F_k(D)$.
 SALIDA: un ab -camino en D .

- 1: **Procedimiento** RECONSTRUCCIÓN(S)
 - 2: $a \leftarrow S_1 - S_l$
 - 3: $b \leftarrow S_l - S_1$
 - 4: $u \leftarrow a$
 - 5: $T \leftarrow []$
 - 6: **Mientras** $u \neq b$ **ejecutar:**
 - 7: añadir u al final de T .
 - 8: $A \leftarrow$ primer elemento de S de la forma $(Z \cup \{u\}, Z \cup \{v\})$
 - 9: $u \leftarrow v$
 - 10: quitar A de S
 - 11: **Terminar ciclo**
 - 12: añadir u al final de T .
 - 13: **Regresar** T
 - 14: **Terminar procedimiento**
-

vértices $X \cup \{v_0\}$ y $X \cup \{v_{\ell-1}\}$ en $F_k(D)$. Por la Proposición 5, $X \cup \{v_0\} \xrightarrow{P} X \cup \{v_{\ell-1}\}$ es una trayectoria de longitud $\ell - 1$, y como $X \cup \{v_{\ell-1}\}$ domina a $X \cup \{v_0\}$, se tiene un ciclo de longitud ℓ en $F_k(D)$. \square

Es importante recalcar que la conversa del Corolario 6 es falsa, como se ve en la Figura 3.1. La versión para gráficas de la primera implicación de la Proposición 5 fue presentada en [9], y tiene como consecuencia que la digráfica de k fichas de una digráfica débilmente conexa siempre es débilmente conexa. La siguiente proposición nos hace ver que la conversa de la versión para gráficas es verdadera, es decir, que una gráfica es conexa si y solo si su gráfica de fichas es conexa.

Proposición 7. *Si una gráfica G es inconexa, entonces $F_k(G)$ es inconexa para toda k .*

Demostración. Al tratar con gráficas, podemos suponer que $k \leq n/2$. Si G es inconexa, podemos tomar una partición (V_1, V_2) de V de tal forma que no haya aristas de V_1 a V_2 , y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|V_1| \leq k$. Se sigue que el conjunto de vértices $\binom{V_1}{k}$ de $F_k(G)$ no tiene aristas que lo conecten con su complemento, pues una arista de este tipo se ve de la forma $\{A, A \cup v - \{u\}\}$, con $v \in V_2$. Esta arista de $F_k(G)$ corresponde en G a la arista uv , con $u \in V_1$ y $v \in V_2$, lo que contradice que G sea inconexa. \square

Este mismo razonamiento se usará en el futuro para encontrar cómo se comporta la conexidad fuerte con respecto a las digráficas de fichas. Una consecuencia de las Proposiciones 5 y 7 es la siguiente.

Proposición 8. *Sean $\partial^+(X)$ y $\partial^-(X)$ un excorte y un incorte en una digráfica D , con $|X| \leq k$, entonces el conjunto $\{\partial^+(\{I \in \binom{V}{k} : |I \cap X| = t\}) : 1 \leq t \leq |X|\}$ es una colección de excortes en $F_k(D)$ cuyas flechas corresponden únicamente a las flechas de $\partial^+(X)$ y $\partial^-(X)$, y que toda flecha proveniente de $\partial^+(X) \cup \partial^-(X)$ está en alguno de estos cortes.*

Demostración. Para cada t se define el conjunto S_t como $\partial^+\{I \in \binom{V}{k} : |I \cap X| = t\}$. Por definición, S_t es un excorte por ser de la forma $\partial^+(A)$ para algún $A \subseteq V(F_k(D))$. Gracias a esto, solo basta ver que todas las flechas de S_t corresponden a flechas de $\partial^+(X) \cup \partial^-(X)$, y que todas las flechas de $\partial^+(X) \cup \partial^-(X)$ corresponden a una de S_t para al menos una t .

Para la primera parte, queremos tomar una flecha arbitraria de S_t y verificar que proviene de alguna flecha de $\partial^+(X) \cup \partial^-(X)$. Para esto, tomemos un k -conjunto I de $V(D)$ tal que $|I \cap X| = t$, y pongámosle una ficha a cada uno de los vértices de I . Fijémonos únicamente en las flechas de D con cola en I y cabeza fuera de I , es decir, en $\partial_D^+(I)$. Si queremos deslizar una ficha en I por una flecha de $\partial_D^+(I)$, de tal forma que el conjunto con fichas resultante *no* tenga exactamente t vértices de X , tenemos a lo más dos opciones.

1. Tomar una ficha en un vértice de $I \cap X$ y pasarla, mediante una flecha de $\partial_D^+(I)$, a un vértice de $V - X$. En este caso, el vértice resultante de $F_k(D)$ tendrá $t - 1$ vértices de X , o
2. tomar una ficha de $I - X$ y pasarla, a través de una flecha de $\partial_D^+(I)$, a un vértice de X . En este otro caso, el vértice resultante de $F_k(D)$ tendrá $t + 1$ vértices de X .

En la primera opción estamos usando una flecha de $\partial^+(X)$, y en la segunda, una de $\partial^-(X)$. Esto indica que todas las flechas de S_t corresponden a flechas de $\partial^+(X) \cup \partial^-(X)$.

Para la segunda correspondencia, tomemos cualquier flecha uv de $\partial^+(X) \cup \partial^-(X)$ y cualquier $(k - 1)$ -conjunto I de $V(D) - \{u, v\}$. En $F_k(D)$, tendremos la flecha $(I \cup \{v\}, I \cup \{u\})$, que estará en el corte $S_{|(I \cup \{v\}) \cap X|}$. \square

Además, existe una relación entre las digráficas de fichas y los productos de digráficas, que es expresada en la siguiente proposición. La versión para gráficas fue demostrada en [9], y el argumento para su demostración en digráficas es idéntico.

Proposición 9. Sean H_1, \dots, H_m subdigráficas inducidas de D ajenas por vértices dos a dos. Si $1 \leq s_i \leq |V(H_i)|$ y $\sum_{i=1}^m s_i = k$, entonces $F_k(D)$ contiene una copia de $\square_{i=1}^m F_{s_i}(H_i)$.

Como corolario, para $k = 2$ se tiene que si H y H' son subdigráficas ajenas inducidas de D , entonces $H \square H'$ es subdigráfica inducida de $F_2(D)$.

3.2. Conexidad fuerte

Una vez que sabemos qué sucede con las trayectorias en las gráficas de fichas, podemos ver qué sucede con las componentes fuertes. Para analizar este fenómeno, supongamos que D es una digráfica con al menos una componente fuerte H , y pensemos en los siguientes dos casos. El primero es que $|V(H)| \leq k + 1$, y el segundo que $|V(H)| > k + 1$.

Para el primer caso, supongamos primero que H tiene más de un vértice y fijemos un conjunto $X \subseteq V(D) - V(H)$ de cardinalidad $k + 1 - |V(H)|$. Notemos que por la cota de $|V(H)|$, X puede ser vacío. El siguiente paso es notar que por cada flecha (a, b) de H , tenemos la flecha $(X \cup V(H) - \{b\}, X \cup V(H) - \{a\})$ en $F_k(D)$, lo que implica que la gráfica inducida por $\{X \cup V(H) - \{a\} : a \in V(H)\}$ es una copia de H en D , y por lo tanto es fuertemente conexa. Esto significa que por cada componente fuerte H de D con menos de $k + 2$ vértices hay $\binom{|V(D) - V(H)|}{k + 1 - |V(H)|}$ subdigráficas fuertemente conexas en $F_k(D)$ que son isomorfas a H , y además son ajenas por vértices. Es importante observar que éstas pueden no ser máximas por contención con la propiedad de ser fuertemente conexas, pues esto depende del conjunto X que se tome. En la Figura 3.1 se puede observar que los vértices de color rojo en D forman una componente conexa. Las tres copias de dicha componente han sido marcadas con colores en la digráfica de fichas a la derecha, pero solo la copia roja es una componente, ya que las otras dos no son máximas por contención.

Observemos de nuevo la Figura 3.1. Al fijar H como la componente de la primera digráfica formada por los vértices 4 y 5 podemos notar que al definir $X = \{2, 3\}$ (o $X = \{1, 3\}$), es inmediato ver que los vértices verdes (respectivamente, los azules) en la gráfica de tres fichas no forman una componente conexa, y en ambos casos esto parece ser consecuencia de que exista un camino cerrado que empiece y termine en X pero que pase por vértices de $V - (X \cup V(H))$. A raíz de esta observación, uno puede intuir la siguiente proposición.

Proposición 10. Dadas D una digráfica, k un natural, H una componente fuerte de D con al menos dos y a lo más $k + 1$ vértices, y $X \subseteq V(D) - V(H)$ de cardinalidad

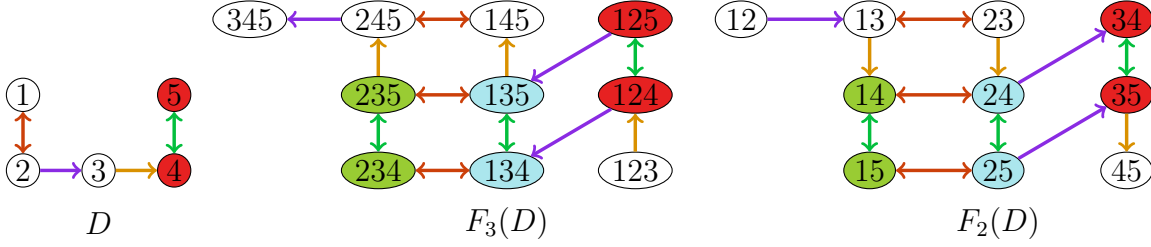


Figura 3.1: Del lado izquierdo, una digráfica débilmente conexa, y en el centro y a la derecha, sus digráficas de tres fichas y dos fichas respectivamente. Las flechas en las digráficas de fichas han sido coloreadas para identificar a qué flecha de la gráfica original corresponden.

$k + 1 - |V(H)|$. Si se define $X_H = \{X \cup V(H) - \{a\} : a \in V(H)\}$, entonces la digráfica inducida por X_H es una componente fuerte en $F_k(D)$ si y solo si no existe componente fuerte alguna de G que contenga vértices de X y de $V(G - H) - X$.

Demostración. Para cada $v \in V(H)$, se define el vértice H_v de $F_k(D)$ como $\{X \cup V(H) - \{v\}\}$. Para la primera implicación, procedemos por contrapositiva. Supongamos que existe un camino cerrado P en $D - H$ con vértices de X y de $V(G - H) - X$. Sea $P = (v_1, \dots, v_p)$, con $v_1 \in X$, y sea v_q el vértice de P tal que

- $v_{q-1} \in X$
- $v_q \notin X$
- Existe $l \in \{0, 1, \dots, p - q - 1\}$ tal que $v_i \notin X$ para toda $i \in \{q, q + 1, \dots, q + l\}$.
- $v_j \in X$ para toda $j \in \{q + l + 1, \dots, p\}$.

Se sigue que para cada $a \in V(H)$, el vértice H_a está en el camino de dos vértices $(H_a, H_a - \{v_{q-1}\} \cup \{v_q\})$. Como P es cerrado y $H_a - \{v_{q-1}\} \cup \{v_{q+l}\} \triangle H_a = \{v_{q+l}, v_{q-1}\}$, podemos concatenar este camino con el camino $(H_a - \{v_{q-1}\} \cup \{v_{q+l}\}) \xrightarrow{P} H_a$, que podemos obtener usando la Proposición 5. Esto quiere decir que X_H no es máxima por contención con la propiedad de ser fuerte, lo que concluye la primera implicación.

Para la otra implicación, supongamos que X_H no induce una componente fuerte, así que para algún $H_1 \in X_H$ dado por $X \cup V(H) - \{h_1\}$ existe un vértice $A \in N^+(H_1) \cap N^+(X_H)$ para el cual existe un AH_1 -camino. Demostremos primero que $X \not\subseteq A$.

Si $X \subseteq A$, entonces $A = ((X \cup V(H)) - \{h_1, h_2\}) \cup \{s\}$, con $h_2 \in V(H)$, $s \in V(D) - (X \cup V(H))$, y $(h_2, s) \in A(D)$. Sin embargo $A \triangle H_1 = \{s, h_2\}$, y usando el

Algoritmo 1, podemos ver que el AH_1 -camino en $F_k(D)$ nos da un sh_2 -camino en D , lo que contradice que H sea una componente fuerte de D .

Ahora sabemos que A es de la forma $X \cup V(H) - \{h_1, x_1\} \cup \{s\}$, con $x_1 \in X$. Notemos que si $s = h_1$, entonces $(x_1, h_1) \in A(D)$, y de nuevo, sabiendo que $A\Delta H_1 = \{h_1, x_1\}$ y usando el Algoritmo 1, existe una h_1x_1 -trayectoria en D , lo que contradice, de nuevo, que H sea una componente fuerte.

Una vez analizado ese caso, sabemos que $A = X \cup V(H) - \{h_1, x_1\} \cup \{s\}$, con $x_1 \in X$ y $s \in V - (X \cup V(H))$. Como $A\Delta H_1 = \{s, x_1\}$, en virtud del Algoritmo 1, tenemos un camino cerrado en D que contiene a x y a s , que era lo que estábamos buscando. A diferencia de los casos anteriores, la existencia de este camino cerrado no contradice que H sea una componente fuerte de D . \square

Si además se tiene la desigualdad $|V(H)| \leq n - k + 1$, podemos tomar cualquier subconjunto X de $V(D - H)$ de tamaño $k - 1$, y la subdigráfica de $F_k(D)$ inducida por $\{X \cup \{h\} : h \in V(H)\}$ será una copia de H . Este último resultado se puede generalizar de la siguiente manera: si H_1, H_2, \dots, H_r son componentes fuertes tales que $\sum_{i=1}^r |V(H_i)| \leq n - k + r$, entonces el conjunto $\{\{h_1, \dots, h_r, x_1, \dots, x_{k-r}\} : h_i \in V(H_i)\}$ es una copia de $\square_{i=1}^r H_i$ en $F_k(D)$ para cada $(k - r)$ -conjunto $\{x_1, \dots, x_{k-r}\}$ de $V(D - \bigcup_{i=1}^r H_i)$. Para que $\{\{h_1, \dots, h_r, x_1, \dots, x_{k-r}\} : h_i \in V(H_i)\}$ sea una componente fuerte de $F_k(G)$, debemos pedir que no exista una componente fuerte en D con vértices de $\{x_1, \dots, x_{k-r}\}$ y de $V(D) - \{x_1, \dots, x_{k-r}\}$, y el argumento es análogo al de la Proposición 10.

Como consecuencia de la Proposición 10 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 11. *Si H es una componente fuerte de D con exactamente $k + 1$ vértices, entonces el conjunto $\binom{V(H)}{k}$ induce una componente fuerte en $F_k(D)$.*

Notemos que en el análisis de la proposición anterior, el conjunto $\{X \cup V(H) - \{a\} : a \in V(H)\}$ se convierte en $\{X\}$ si H es una componente fuerte cuyo único vértice es v . Esto nos dice que en $F_k(D)$, cualquier k -conjunto X de $V(D) - \{v\}$ (es decir, cualquier vértice de $F_k(D)$) es una copia de H . Esto puede parecer antiintuitivo, sin embargo, al considerar la Proposición 4, sucede en realidad que todos los vértices son copias de esta componente. Es importante recalcar que esto no quiere decir que todos los vértices de $F_k(D)$ tengan las flechas que inciden en la componente unitaria en cuestión, pues es en la Figura 3.1 el vértice 234 no tiene flechas color **mostaza** ni **violeta**. Una vez analizada esta situación, podemos encontrar las flechas que unen a la componente unitaria con el resto de la gráfica de la siguiente forma.

Observación 12. Sea H una componente fuerte unitaria de una digráfica D formada por el vértice v y sea $X \subseteq V - (N^+(v) \cup N^-(v) \cup \{v\})$ de cardinalidad $k - 1$. Entonces

la subgráfica de $F_k(D)$ inducida por $\{X \cup \{s\} : s \in \{v\} \cup N^+(v) \cup N^-(v)\}$ es una copia de $D[\{v\} \cup N^+(v) \cup N^-(v)]$.

Esta observación facilita entender por qué las digráficas de dos y tres fichas de la Figura 3.1 tienen vértices terminales con flechas asimétricas, a pesar de que la digráfica original no los tiene.

Los resultados anteriores se pensaron para componentes fuertes pequeñas, es decir, con a lo más un vértice más que la cantidad de fichas con las que se está trabajando. A continuación, se analizará el caso en el que las componentes tienen más de $k + 1$ vértices.

Proposición 13. *Sea H una digráfica de orden n y sea $k < n$, H es fuertemente conexa, si y solo si su digráfica de fichas $F_k(H)$ es fuertemente conexa.*

Demostración. Para la primera implicación, supongamos que H es fuertemente conexa y que $A, B \in \binom{V(H)}{k}$. Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, sabemos que en H existen $a_i b_i$ -trayectorias para toda i , y al usar la Proposición 5 k veces, obtenemos un AB -camino en $F_k(H)$.

Para la segunda implicación, tomamos $u, v \in V(H)$ y $X \in \binom{V(H)}{k-1}$ tal que $X \cap \{u, v\} = \emptyset$. Como $F_k(H)$ es fuertemente conexa, existe una $(X \cup \{u\} X \cup \{v\})$ -trayectoria en $F_k(H)$, y usando el Algoritmo 1, tenemos un uv -camino en D . \square

La segunda implicación en la Proposición 13 puede ser demostrada sin usar el Algoritmo 1 de la siguiente manera.

Recordemos que si H no es fuertemente conexa, existe una partición de $V(H)$ en conjuntos V_1 y V_2 tales que todas las flechas entre estos van de V_1 a V_2 . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $|V_1| \geq k^2$. De este modo se tiene que

$$V(F_k(H)) = \binom{V_1}{k} \sqcup \left\{ X \in \binom{V(H)}{k} : X \not\subseteq V_1 \right\}.$$

Por un razonamiento similar al de la Proposición 7, no existen flechas de $\{X \in \binom{V(H)}{k} : X \not\subseteq V_1\}$ a $\binom{V_1}{k}$, ya que una flecha de este tipo correspondería en H a una flecha de V_2 a V_1 .

Notemos que el Corolario 11 y la Proposición 13 pueden usarse para ver que si H es una componente fuerte de D con al menos $k + 1$ vértices, entonces el conjunto $\binom{V(H)}{k}$ induce una componente fuerte en $F_k(D)$. Para extender las subdigráficas fuertes encontradas en esta sección hasta obtener componentes fuertes, podemos, notar que todas las proposiciones son en realidad casos particulares del siguiente teorema.

²Si $k \geq n/2$, trabajamos con $F_{n-k}(H)$ y usamos la Proposición 4.

Teorema 14. Sean H_1, \dots, H_m componentes fuertes distintas de D . Si $1 \leq s_i \leq |V(H_i)|$ y $\sum_{i=1}^m s_i = k$ entonces la copia de $\square_{i=1}^m F_{s_i}(H_i)$ inducida en $F_k(D)$ es una componente fuertemente conexas de $F_k(D)$.

Demostración. La copia de $\square_{i=1}^m F_{s_i}(H_i)$ en $F_k(D)$ es inducida por el conjunto $\{X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m : X_i \in \binom{V(H_i)}{s_i}\}$. Dicha copia es fuerte por ser producto de digráficas fuertes, así que solo falta ver que es máxima por contención con esa propiedad. Si por el contrario, existiera un vértice X fuera de la copia para el cual existiera un camino cerrado con al menos un vértice en dicha copia, la Proposición 5 nos hace ver que al menos una de las subdigráficas H_i no es máxima por contención, lo que contradice las hipótesis. \square

Más aun, para todo vértice X de $F_k(D)$ podemos encontrar m componentes fuertes H_1, H_2, \dots, H_m de D , tales que $|X \cap V(H_i)| = s_i$ para $1 \leq i \leq m$ y $\sum_{i=1}^m s_i = k$, por lo que toda componente fuerte de $F_k(D)$ está inducida por conjuntos de la forma

$$\left\{ X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m : X_i \in \binom{V(H_i)}{s_i} \right\}.$$

Pensando a las gráficas como digráficas en las que todas las flechas son simétricas, el resultado anterior arroja el siguiente corolario, enlistado como teorema en [9].

Corolario 15. Sea G una gráfica de orden n y sean H_1, H_2, \dots, H_m componentes conexas de G . Si $1 \leq s_i \leq |V(H_i)|$ para toda i y $\sum_{i=1}^m s_i = k$, entonces las componentes conexas de $F_k(G)$ son las inducidas por los conjuntos de la forma

$$\left\{ X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m : X_i \in \binom{V(H_i)}{s_i} \right\}.$$

3.3. Ciclos y circulantes

A continuación se estudia el comportamiento de las digráficas de fichas obtenidas a partir de orientaciones de ciclos. El primer caso particular corresponde a las digráficas de fichas de ciclos dirigidos, los cuáles se denotarán por \vec{C}_n cuando tengan orden n .

3.3.1. Ciclos dirigidos

Notemos que gracias al Corolario 6, $F_k(\vec{C}_n)$ tiene al menos un ciclo dirigido de longitud n , sin embargo, veremos a continuación que existen más ciclos en ella. Para ilustrar las propiedades de $F_k(\vec{C}_n)$, usaremos la Figura 3.2. En este ejemplo, los

vértices grises tienen exgrado e ingrado unitarios. En ambas gráficas de fichas hay seis de estos por una sencilla razón: cada uno de ellos corresponde a un arreglo de $2(3)$ fichas en vértices consecutivos en \vec{C}_6 , es decir, $12, 23, 34, \dots$ y $123, 234, 345, \dots$. En ambos casos, estos vértices yacen en un ciclo común. Este resultado se generaliza en la Proposición 16. Por otro lado, la Figura 3.2 también parece indicar que existe un homomorfismo de $F_k(\vec{C}_n)$ a \vec{C}_n . Esta propiedad se demuestra en la Proposición 17.

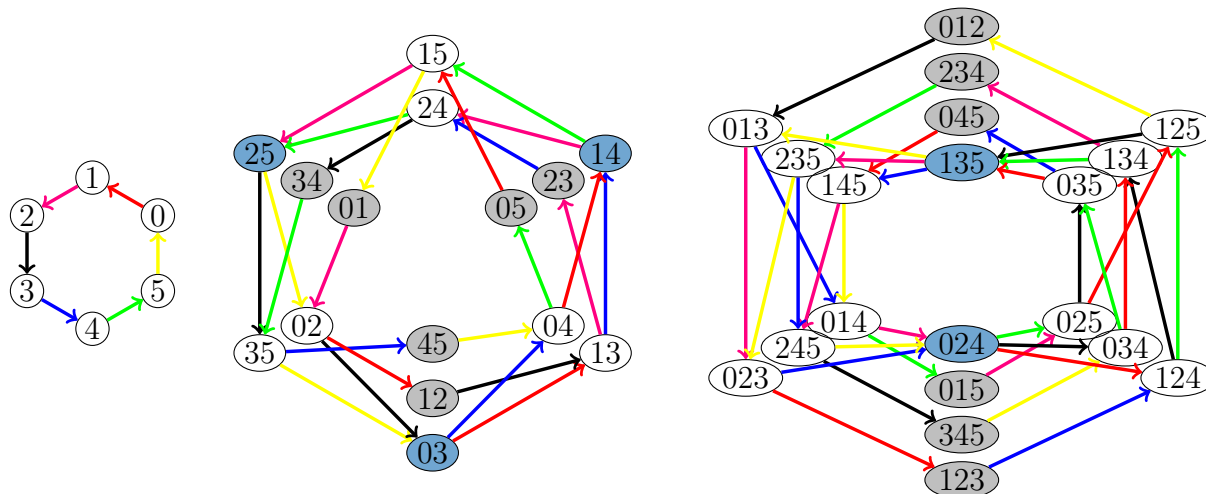


Figura 3.2: De izquierda a derecha: \vec{C}_6 , $F_2(\vec{C}_6)$, y $F_3(\vec{C}_6)$

Proposición 16. Para $1 < k < \lfloor n/2 \rfloor$, $F_k(\vec{C}_n)$ contiene un ciclo dirigido de longitud nk . Si $k \geq \lfloor n/2 \rfloor$, $F_k(\vec{C}_n)$ tiene un ciclo dirigido de longitud $n(n-k)$.

Demostración. Supongamos que el ciclo dirigido \vec{C}_n está formado por los vértices $(v_0, v_2, \dots, v_{n-1}, v_0)$. Tomemos los n vértices $\{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}$, $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, \dots , $\{v_{n-1}, v_0, \dots, v_{k-2}\}$ y llamémoslos V_0, V_2, \dots, V_{n-1} respectivamente. En la Figura 3.2, estos vértices están de color gris. Usando la Proposición 5, sabemos que la distancia de V_i a V_{i+1} es k . Si llamamos P_i a la trayectoria de V_i a V_{i+1} dada por esta proposición y P_n a la trayectoria de V_{n-1} a V_0 dada por la misma proposición, basta demostrar que estas trayectorias son internamente ajenas dos a dos para tener un nk -ciclo. En la Figura 3.2, los vértices internos de las trayectorias están indicados de color blanco. Para esto, cada vértice A de P_i corresponde a un k -conjunto de vértices de \vec{C}_n . Estos vértices son consecutivos si A es un vértice extremal de P_i , o no consecutivos si A es un vértice interno de P_i . En este segundo caso, hay un único espacio entre ellos, es

decir: el j -ésimo vértice de P_i es $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+k-j}, v_{i+k-(j-2)}, \dots, v_{i+k}\}$ para $j > 1$. En particular, esto significa si $i \neq j$, los vértices internos de P_i son distintos a los de P_j , por lo que su concatenación forma un kn -ciclo en $F_k \overrightarrow{C}_n$. Vale la pena notar que este ciclo no necesariamente es inducido, como se puede ver en la tercera gráfica de la Figura 3.2 La segunda implicación es consecuencia de la Proposición 4. \square

Proposición 17. *Para toda $k \in \{1, \dots, n-1\}$ existe un homomorfismo suprayectivo de $F_k(\overrightarrow{C}_n)$ a \overrightarrow{C}_n .*

Demostración. Supongamos que $V(C_n) = \{0, \dots, n-1\}$, $A(C_n) = \{(i, i+1 \text{ mód } n) : 0 \leq i \leq n-1\}$ y definamos la función $\sigma : \binom{V(C_n)}{k} \rightarrow V(C_n)$ como $\sigma(X) = \sum_{i \in X} i \text{ mód } n$. Notemos que si A y B son dos vértices en $F_k(C_n)$ tales que A domina a B , entonces $A = X \cup \{a\}$ y $B = X \cup \{b\}$ para algún $X \subseteq V - \{a, b\}$, con $b = a + 1$. De esta forma, $\sigma(B) = \sigma(A) + 1 \text{ mód } n$, por lo que $\sigma(A)$ domina a $\sigma(B)$, así que σ es un homomorfismo. Notemos que si $A = \{a_0, a_1, a_{k-1}\}$, existe al menos un vértice $a_x \in A$ tal que $a_x + 1 \text{ mód } n \notin A$. De este modo, si $\sigma(A) = j$ existe $A' \in V(F_k(\overrightarrow{C}_n))$ tal que $\sigma(A') = j + 1 \text{ mód } n$, lo que implica que σ es suprayectiva. A manera de ilustración, los vértices en las gráficas de fichas de la Figura 3.2 están acomodados por las clases dadas por la función σ . \square

Notemos que en general, $F_k(C_n)$ no será hamiltoniana cuando las σ -clases tengan tamaño distinto. Sin embargo, hay combinaciones de n y k tales que todas las σ -clases de $F_k(C_n)$ tienen el mismo tamaño, y la digráfica aun así no es hamiltoniana.

3.3.2. Ciclos no dirigidos

En general, si la digráfica a tratar D es un ciclo no dirigido, existen tantas fuentes como sumideros, y existe al menos una de cada uno. Para examinar un caso particular, supongamos que D_n es un ciclo no dirigido en el que todo vértice es una fuente o un sumidero, y que $U(D_n)$ es el ciclo $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$. A partir de este momento, podemos suponer que v_i es una fuente si i es par, y es un sumidero si i es impar. Notemos que para k par, cualquier k -conjunto de $V(D_n)$ formado por vértices consecutivos tendrá exfrontera e infrontera no vacías, por lo que no existen homomorfismos de $F_k(D_n)$ a D_n . Por otro lado, si k es impar, podemos tomar $k-1$ vértices consecutivos, y luego tomar otro vértice de tal forma que el resultado no sean k vértices consecutivos. Al hacer esto, el k -conjunto resultante no es fuente ni sumidero, así que tampoco hay homomorfismos entre la gráfica de fichas y el ciclo.

De manera general, se conjetura que si un ciclo no es dirigido, entonces no existen homomorfismos de su gráfica de k fichas a él, siempre que $1 < k < n$.

3.3.3. Gráficas circulantes

Sucede en este caso que la función σ definida en la Proposición 17 también sirve como homomorfismo entre $F_k(\vec{C}(n, S))$ y $\vec{C}(n, S)$, ya que cada flecha en $\vec{C}(n, S)$ va de un vértice i al vértice $i + s$ mód n para algún $s \in S$, lo que significa que la flecha correspondiente en $F_k(\vec{C}(n, S))$ va de un vértice A cuya imagen bajo σ es $\sigma(A)$ a un vértice cuya imagen es $\sigma(A) + s$ mód n . En virtud de esta observación, las digráficas de fichas de digráficas circulantes se ven como las digráficas de fichas de ciclos dirigidos, salvo con las flechas extra.

3.4. Árboles

Recordemos que un **árbol enraizado** $T(r)$ es un árbol dirigido cuya única fuente es r , y ésta puede alcanzar cualquier vértice. A pesar de que la Proposición 5 nos asegura que la digráfica de fichas de un árbol es acíclica, ésta tiene ciclos no dirigidos, como se aprecia en la Figura 3.3. A lo largo de esta sección T indicará un árbol enraizado de orden n , y k será cualquier entero menor o igual que n .

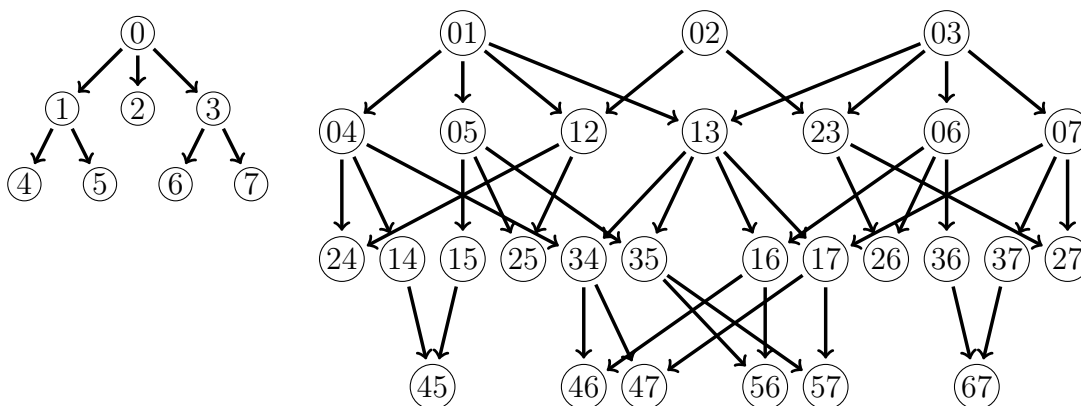


Figura 3.3: Un árbol enraizado de orden 8 y altura 3, con su respectiva digráfica de dos fichas.

Hay varios aspectos que se pueden notar en esta figura que pueden ser generalizados. En primer lugar, no existen un vértices en $F_2(T)$ que alcance a todas las no-fuentes. Para que una digráfica de fichas $F_k(D)$ tenga fuentes que alcancen a todos sus demás vértices, podemos pedir varias cosas. Puede ser, por ejemplo, que D tenga una trayectoria dirigida de longitud al menos k , en la que el último vértice pueda alcanzar a cualquier otro vértice fuera de esta trayectoria. Otra opción es

que D tenga al menos k fuentes, y que cada fuente pueda alcanzar a cualquier otro vértice. En ambos casos, la digráfica en cuestión deja de ser un árbol enraizado, por lo que no nos ocuparemos de ellos.

Como se aprecia en la Figura 3.3, un vértice A de $F_k(T)$ es una fuente si y solo si $T[A]$ es un subárbol con raíz r . Para encontrar cuántas fuentes tiene $F_k(T)$, definimos (T, v, q) como el número de subárboles de T enraizados en v de orden q , y aclaramos que $(T, v, 0) = 1$. Posteriormente, definimos el conjunto X_i como $\{x \in \mathbb{N}^i : \sum_{p \in x} p = k - 1\}$. Notemos que para encontrar (T, r, k) de forma recursiva, podemos contar todos los subárboles de orden $k - 1$ enraizados en cada exvecino de r , y a ese número sumarle la cantidad de subárboles que usan dos exvecinos de r , y seguir así hasta sumar la cantidad de subárboles que usan a todos los exvecinos de r . De esta forma, el número de fuentes de $F_k(T(r))$ está dado por la expresión

$$(T, r, k) = \sum_{x \in X_{d^+(r)}} (T, v_1, x_1)(T, v_2, x_2) \dots (T, v_{d^+(r)}, x_{d^+(r)}),$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_{d^+(r)})$. A pesar de que esta digráfica no es un árbol ni tiene una única fuente, conserva la noción de nivel, que se formaliza a continuación.

Definición 2. Para un vértice A dado por $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ en la gráfica de fichas de un árbol T , se define el **nivel de A en $F_k(T)$** ($l_{F_k(T)}(A)$) como $\sum_{i=1}^k l_T(a_i) - \min_{X \in \binom{V}{k}} \sum_{i=1}^k l_T(x_i)$.

Al igual que el nivel en los árboles, éste empieza en 0, y nos permite dibujar $F_k(T)$ de forma que todas las flechas vayan de un nivel al nivel siguiente. Además gracias a esto, dados A y B en $F_k(T)$, $d(A, B) = l(B) - l(A)$, siempre que A pueda alcanzar a B . A pesar de estas similitudes, las raíces de $F_k(T)$ no siempre tienen el mismo nivel, como se muestra en la Figura 3.4.

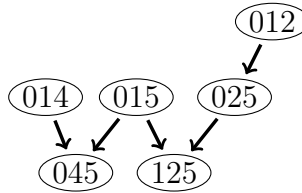


Figura 3.4: Subdigráfica de la gráfica de 3-fichas del árbol de la Figura 3.3.

3.4. La altura de la digráfica de fichas de un árbol enraizado se define de manera análoga a la altura del árbol:

$$h(F_k(T)) = \max_{A \in \binom{V}{k}} l(A)$$

3.5. Digráficas semicompletas

Decimos que una digráfica es un **torneo** si es la orientación de una gráfica completa. Por definición, un torneo no tiene flechas simétricas, por lo que se introduce el concepto de **digráfica semicompleta** en la Sección 2.7.

En [9], se caracterizan los clanes de $F_k(G)$ para una gráfica G , utilizando una versión para gráficas del Teorema 18, y se da a conocer una fórmula para encontrar el número de clan ω de $F_k(G)$. La validez de los Teoremas 18 y 19 en digráficas es consecuencia de la Proposición 3.

Teorema 18. *Sea X un conjunto de vértices en $F_k(D)$, Entonces $F_k(D)[X]$ es una subdigráfica semicompleta de $F_k(D)$ si y solo si existe una subdigráfica semicompleta K de D y un conjunto $S \subseteq V(D) - V(K)$, tal que*

$$(a) X = \{S \cup \{v\} : v \in V(K)\} \text{ y } |S| = k - 1, \text{ o}$$

$$(b) X = \{(S \cup K) \setminus \{v\} : v \in (K)\} \text{ y } |S| + |K| = k + 1.$$

Teorema 19. *Si D es una digráfica de orden n , entonces $\omega(F_k(D)) = \min\{\omega(D), \max\{k+1, n-k+1\}\}$*

En el contexto del Teorema 18, $F_k(D)[X]$ es una copia de $D[K]$, por lo que es fuerte cuando $D[K]$ es fuerte, y transitivo cuando $D[K]$ es transitivo. La gráfica de k fichas de la gráfica completa K_n se conoce como la **Gráfica de Johnson** $J(n, k)$. Se sabe que estas gráficas son vértice-transitivas y Hamiltonianamente-conexas, y recientemente se demostró en [18] que además son panconexas y pancíclicas, lo que implica que son vértice-pancíclicas. Para que estas propiedades se conserven en las digráficas, solo es necesario ver qué sucede con las direcciones de las flechas. Durante esta sección, T será un torneo de orden n .

Además de las propiedades conocidas de las gráficas de Johnson, la Proposición 17 nos muestra lo siguiente.

Teorema 20. *Para $1 \leq k < n$, la gráfica $J(n, k)$ tiene un homomorfismo hacia K_n .*

Demostración. Sean $0, 1, \dots, n-1$ los vértices de K_n . Usando la Proposición 17, $F_k(C_n)$ tiene un homomorfismo σ hacia C_n . $X \cup \{i\}$ y $X \cup \{j\}$ son adyacentes en $J(n, k)$, $\sum_{x \in X} x + i \neq \sum_{x \in X} x + j$, así que $\sigma(X \cup \{i\}) \neq \sigma(X \cup \{j\})$. Como K_n es completa, esta condición es suficiente para asegurar que $\sigma(X \cup \{i\})\sigma(X \cup \{j\})$ es una arista en K_n , lo que indica que σ es un homomorfismo. \square

3.5.1. Dirregularidad

Una incógnita que no surge en gráficas no dirigidas es saber cuándo una digráfica de la forma $F_k(D)$ es **dirregular**, es decir, cuando $d^+(v) = d^-(v) = d$ para todo vértice v de $F_k(D)$. Saber cuándo *no* es dirregular nos ayudará a descartar que sea vértice-transitiva, por lo que ésta será la primera propiedad a explorar.

Proposición 21. *La digráfica $F_k(T)$ es dirregular si y solo si T es dirregular.*

Demostración. Para esta prueba, demostraremos que $|\partial^+(X)|$ es la misma para todo k -conjunto X de $V(T)$. Si T es dirregular, sabemos que cada vértice tiene $(n-1)/2$ exvecinos. Sea $X = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Para cada v_i , definimos $n_i = |N^+(v_i) \cap X|$. Se tiene entonces que

$$d_{F_k(T)}^+(X) = \sum_{i=1}^k (d_T^+(v_i) - n_i) = \frac{k}{2}(n-1) - \sum_{i=1}^k n_i$$

Como $T[X]$ es un torneo y $n_i = d_{T[X]}^+(v_i)$, y entonces $\sum_{i=1}^k n_i = \binom{k}{2}$. Así,

$$d_{F_k(T)}^+(X) = \frac{k}{2}(n-1) - \binom{k}{2} = \frac{k}{2}(n-1) - \frac{k}{2}(k-1) = \frac{k(n-k)}{2}.$$

En cambio, si $F_k(T)$ es dirregular con $d_{F_k(T)}^+(X) = \delta$ y $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, entonces

$$\begin{aligned} d_{F_k(T)}^+(X) &= \sum_{i=1}^k d_T^+(v_i) - \binom{k}{2} \\ -d_T^+(v_1) &= \sum_{i=2}^k d_T^+(v_i) - \binom{k}{2} - \delta \end{aligned}$$

Esta igualdad es válida para cualquier k -conjunto de $V(T)$. En particular, si tomamos X y $(X - \{v_1\}) \cup \{v\}$ con $v \notin X$, obtenemos $d^+(v_1) = d^+(v)$. Como v y v_1 son arbitrarios, T es dirregular. \square

Como se ve en la Figura 3.2, esta prueba solo es válida cuando la digráfica en cuestión es un torneo. Como corolario, se exhibe una condición necesaria para que la digráfica de k fichas de un torneo T sea vértice transitiva.

Corolario 22. *Si $F_k(T)$ es vértice-transitiva, entonces T es dirregular.*

3.5.2. Panciclicidad

En gráficas, la transitividad por vértices de $J(n, k)$ es consecuencia de la k -transitividad por vértices de K_n . Sin embargo, la Figura 3.5 nos hace ver que no existen torneos k -transitivos para $k \geq 2$, por lo que el análisis de esta propiedad requiere de un acercamiento distinto.

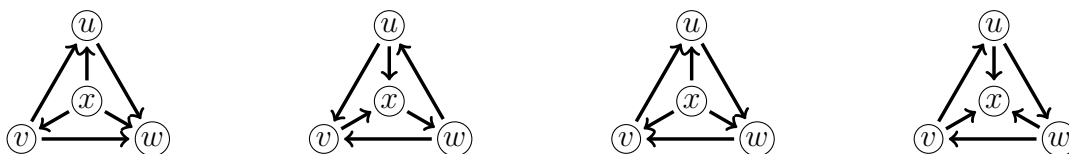


Figura 3.5: Los cuatro torneos no isomorfos de orden 4, como se muestran en [10]. Ninguno de ellos tiene un automorfismo φ tal que $\varphi(x) = u$ y $\varphi(u) = x$, por lo que ninguno es 2-vértice-transitivo.

A pesar de que no podemos garantizar panciclicidad en $F_k(T)$, el Corolario 6 implica que $F_k(T)$ tiene ciclos dirigidos de longitud ℓ para toda $3 \leq \ell \leq n$, para $k < \lfloor p/2 \rfloor$, tiene ciclos de longitud kp para toda $3 \leq p \leq n$. Más aun, la Proposición 17 nos garantiza que si el torneo es hamiltoniano (es decir, si es fuertemente conexo), existe una función $\varphi : \binom{V(T)}{k} \rightarrow V(T)$ que preserva las flechas del ciclo hamiltoniano de T . Puede suceder que preserve todas, como en la Figura 3.6. Sin embargo si volteamos la flecha azul del torneo en esa misma figura, también se voltean las flechas azules de la gráfica de fichas. Como todo homomorfismo debe preservar las flechas del ciclo hamiltoniano, los vértices $\{0, 1\}$ y $\{2, 4\}$ deben pertenecer a una clase, y los vértices $\{0, 4\}$ y $\{1, 3\}$ a otra. En este caso, las flechas entre estas dos clases no van todas en la misma dirección, por lo que no existe homomorfismo alguno de la gráfica de fichas al torneo cuando volteamos la flecha azul.

Como se vio en la Sección 3.3, si queremos garantizar la existencia de dicho homomorfismo, basta que el torneo sea una digráfica circulante.

3.6. Diámetro

Recordemos que una digráfica tendrá diámetro infinito siempre que no sea fuertemente conexa, aunque su gráfica subyacente sea conexa. En virtud de esta última observación, durante esta sección se trabajará únicamente con digráficas fuertemente conexas. De todos modos, los resultados presentados a continuación se pueden extender a cada componente fuerte de una digráfica.

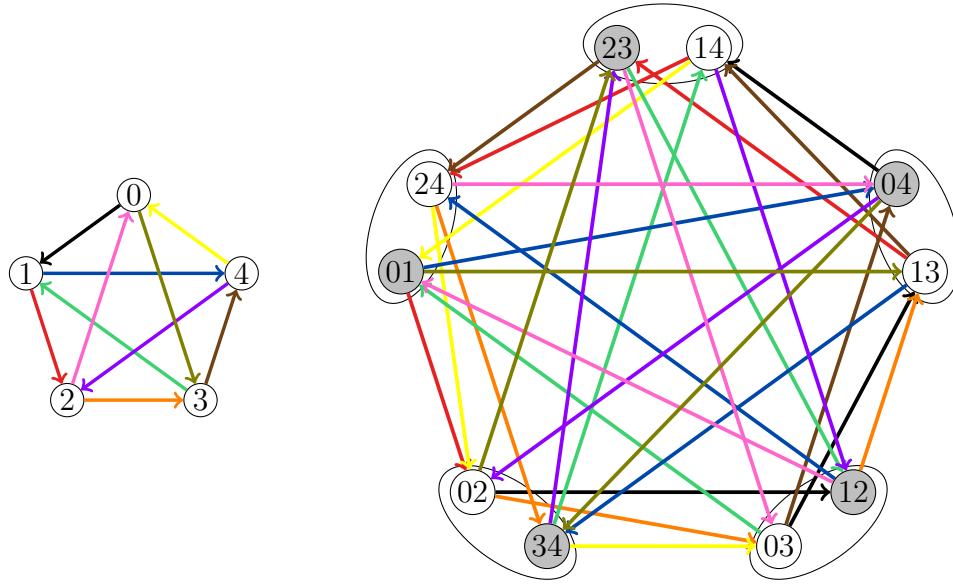


Figura 3.6: Un torneo de orden 5 y su digráfica de 2 fichas.

La versión para gráficas del siguiente teorema se debe a [9], y la demostración para digráficas es idéntica a la original.

Teorema 23. *Sea D una digráfica con diámetro δ , entonces $F_k(D)$ tiene diámetro al menos $k(\delta - k + 1)$ y a lo más $k\delta$.*

Para encontrar una digráfica de fichas $F_k(D)$ cuyo diámetro sea $k\delta$, necesitamos dos k -conjuntos A y B de $V(D)$ tales que $d(a, b) = \delta$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. A continuación, se presenta una construcción para generar una digráfica con dichas características.

1. Dados k y δ , se toma el conjunto de vértices $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_k, p_1, p_2, \dots, p_{\delta-1}, a, b$.
2. Añadir las flechas (u_i, p_1) y $(p_{\delta-1}, v_i)$ para toda $1 \leq i \leq k$.
3. Agregar las flechas necesarias para que $(p_1, p_2, \dots, p_{\delta-1}, p_1)$ sea un ciclo dirigido.
4. Para $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, agregar las flechas (v_i, u_j) .
5. Agregar las flechas (p_1, a) , $(b, p_{\delta-1})$, y para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, agregar las flechas (v_i, b) y (a, u_i) .

Para la cota inferior, notemos que para $\delta > k$, el ciclo $\vec{C}_{\delta-1}$ tiene diámetro $\delta - 1$, y los vértices $\{1, 2, \dots, k\}$ y $\{\delta, \delta - 1, \dots, \delta - k + 1\}$ están a distancia $k(\delta - k + 1)$. Tanto para la cota superior como la inferior, los ejemplos se derivan de los obtenidos en [9].

3.7. k -conexidad

Dos conceptos importantes en gráficas son la k -conexidad y la k -conexidad por aristas. En este contexto, decimos que un vértice v en una gráfica G es de corte si $G - v$ tiene más componentes conexas que G , y una arista e es un puente si $G - e$ tiene más componentes conexas que G . Para trasladar el concepto a digráficas, decimos que un vértice v en una digráfica D es un **separador** si $D - v$ tiene más componentes fuertes que D , y una flecha a es un **puente fuerte** si $D - a$ tiene más componentes fuertes que D . Los conceptos de conjunto de corte por vértices y por aristas en digráficas son idénticos a su versión en gráficas: dada una digráfica $D(x, y)$, un (x, y) -corte es un excorte $\partial^+(X)$ tal que $x \in X$ y $y \in V - X$ ([6, pág 159]), y un (x, y) -corte por vértices es un conjunto S de $V - \{x, y\}$ tal que en $D - S$ no existen xy -trayectorias. Es importante recalcar que un (x, y) -corte por vértices no necesariamente es un (y, x) -corte por vértices, y que un (x, y) -corte (por flechas) puede no ser un (y, x) -corte. En esta sección, es conveniente recordar las versiones del Teorema de Menger para digráficas.

Teorema 24. *En una digráfica $D(x, y)$, con x y y no adyacentes, el máximo número de (x, y) -trayectorias internamente ajenas dos a dos es igual al número mínimo de vértices en un (x, y) -corte por vértices.*

Teorema 25. *En una digráfica $D(x, y)$, el máximo número de (x, y) -trayectorias ajenas por flechas dos a dos es igual al número mínimo de flechas en un (x, y) -corte.*

A continuación se muestran dos resultados cuya versión para gráficas fue presentada en [9]. En ambos, la demostración para digráficas solo requiere tomar trayectorias dirigidas.

Lema 26. *Sea A un k -conjunto en una digráfica D . Sean $a \in A$ y $b \notin A$ y sean P y Q dos (a, b) -trayectorias dirigidas internamente ajenas en D . Entonces $A \xrightarrow{P} A'$ y $A \xrightarrow{Q} A'$ son dos trayectorias internamente ajenas en $F_k(D)$, donde $A' = A - \{a\} \cup \{b\}$.*

Lema 27. *Sea H una digráfica bipartita completa con partes Y y Z tales que $|Y| < |Z|$. Supóngase que las flechas de H están coloreadas de colores azul y rojo, y que en*

cada vértice en Y incide a lo más una flecha roja. Entonces H tiene un conjunto de flechas azules M tal que cada vértice en Y es incidente a exactamente una flecha en M , y la unión de M y flechas rojas resulta en una digráfica cuya gráfica subyacente es acíclica.

Gracias al Lema 26, la t -conexidad en las digráficas de fichas es una consecuencia de la t -conexidad en las digráficas de las que provienen.

Teorema 28. *Si D es fuertemente t -conexa, entonces $F_k(D)$ es fuertemente t -conexa para toda $k \geq 1$.*

En [9], se menciona un lema que indica que si una gráfica G es t -conexa, con $t > k$, entonces existen $k(t - k + 1)$ AB -trayectorias internamente ajenas en $F_k(G)$ siempre que $|A \triangle B| = 2$. Sin embargo, para su demostración, es crucial poder recorrer cierta arista en ambos sentidos, por lo que este lema no tiene una versión para digráficas. A pesar de esto, en la Figura 3.7 se muestra una digráfica 3-conexa, cuya digráfica de 2 fichas sí tiene $2(3 - 2 + 1)$ trayectorias internamente ajenas para cualesquiera dos vértices con diferencia simétrica de 2.

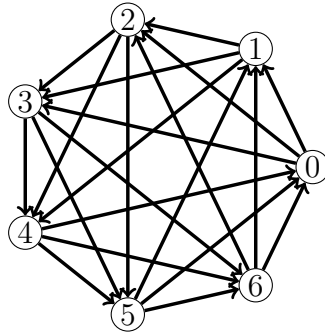


Figura 3.7: Una orientación de K_7 .

Capítulo 4

Policías y Ladrones

En [20], los autores introducen el juego de Policías y Ladrones con las siguientes reglas.

1. Hay dos jugadores: C (policía) y R (ladrón), cada uno con una ficha.
2. El jugador C coloca su ficha sobre cualquier vértice de la gráfica, y posteriormente R coloca su ficha sobre otro vértice.
3. Los jugadores, empezando por C , mueven sus fichas a través de las aristas de la gráfica. R puede elegir no mover su ficha, y C puede tener dos fichas en el mismo vértice.
4. El jugador C gana si logra atrapar a R en un tiempo finito, y R gana si tiene una estrategia para que C nunca lo atrape.

En esta versión del juego, existen gráficas para las cuales el jugador C siempre puede ganar, llamadas de clase \mathcal{C} , como los árboles, y otras para las cuales R tiene una estrategia que le permite escapar por siempre, llamadas de clase \mathcal{R} , como los ciclos. Un parámetro que surge naturalmente en este juego es el tiempo de captura $\text{capt}(G)$, que es el mínimo número de turnos en los que C captura a R sobre la gráfica G . Posteriormente, en [1] se añadió una variante para el juego, donde C puede tener más de un policía, y puede mover cualquier número de policías por turno. Bajo esta nueva condición, aparece un nuevo parámetro para las gráficas, llamado **número de policías**, denotado por $c(G)$, que indica el menor número de policías necesario para que C tenga una estrategia ganadora. Al menos que se indique de otra forma, para calcular el tiempo de captura, pensaremos que estamos trabajando con $c(G)$ policías.

Para jugar sobre una digráfica, lo único que cambia son los movimientos permitidos, que ahora son sobre las flechas. Es evidente que este cambio restringe los

movimientos de los jugadores, por lo que una gráfica en la clase \mathcal{C} puede orientarse de forma que el resultado quede en la clase \mathcal{R} . Un ejemplo sencillo es el de cualquier árbol que tenga al menos dos hojas con ingrado cero. En este caso, el ladrón siempre puede colocarse en una de ellas, por lo que el policía no podrá atraparlo.

En este capítulo se estudiará la relación entre el número de policías de una digráfica y el número de policías de su gráfica de k fichas. El primer caso que se revisará es el de ciclos dirigidos.

4.1. Ciclos

Veamos la Figura 3.2 para tener un ejemplo de cómo encontrar el número de policías en una digráfica. En los tres casos, es inmediato observar que un policía no basta para atrapar al ladrón, pero a continuación se mostrará que en cada caso, dos son suficientes. Para \vec{C}_6 , y en general para \vec{C}_n , cualquier configuración inicial de dos policías sirve, solo es necesario que uno de los dos policías persiga al ladrón hasta que éste quede atrás del otro policía. En $F_2(\vec{C}_6)$ y $F_3(\vec{C}_6)$ existen vértices cuya exvecindad es toda clase siguiente, a saber $\{2, 5\}$, $\{1, 4\}$ y $\{0, 3\}$ en $F_2(\vec{C}_6)$ y $\{1, 3, 5\}$ y $\{0, 2, 4\}$ en $F_3(\vec{C}_6)$. En ambas digráficas, la estrategia ganadora de los policías consiste en colocar un policía en cualquiera de esos vértices, y el otro policía en cualquier otro vértice. El segundo policía solo necesita perseguir al ladrón hasta que éste llegue al nivel donde está el primer policía. y dicho policía lo atraparé en el siguiente turno.

Aunque esta estrategia se ve prometedora, la Figura 4.1 nos hace ver que no siempre existe un vértice que domine a toda la clase siguiente. En este caso, los vértices marcados en verde dominan a toda la clase posterior, así que una estrategia con tres policías consiste en colocar un policía en cada vértice verde, y el tercer policía perseguirá al ladrón hasta que éste se encuentre en la misma clase que los policías en los vértices verdes. A pesar de esto, la proposición siguiente nos muestra que uno de los policías está demás.

Proposición 29. *Para $F_2(\vec{C}_8)$ solo son necesarios dos policías para atrapar al ladrón.*

Demostración. Coloquemos al policía a en $\{1, 4\}$ y al policía b en $\{0, 5\}$. Independientemente de dónde empieza el ladrón r , eventualmente el policía b puede acercarse suficiente hacia él, hasta que el ladrón esté en algún vértice de la clase 5, es decir, la clase donde está el policía a . Esto puede suceder incluso si b no está en un vértice que domine a la posición de r , y sucederá en a lo más seis movimientos de r , ya que “lo más atrás” que puede estar de los policías es en la clase 7.

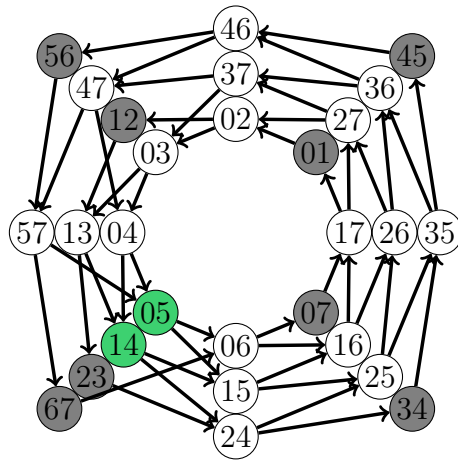


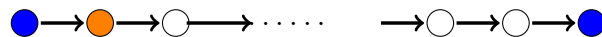
Figura 4.1: $F_2(\vec{C}_8)$

Una vez que r está en algún vértice de la clase 5, solo tiene tres opciones para moverse, pues si se queda quieto, eventualmente b puede atraparlo. De esas tres opciones, $\{0, 6\}$ es la única que no está dominada por a , así que es la única que puede tomar el ladrón. Una vez ahí, a pasa a $\{1, 5\}$, y r solo puede pasar a $\{0, 7\}$ para evitar su captura. Cuando pase a $\{0, 7\}$, a pasa a $\{1, 6\}$, y en el siguiente turno en el que r se mueva, a realiza la captura. \square

Aunque esta estrategia puede visualizarse en la digráfica de fichas, es conveniente saber qué significa cada posición en la digráfica original. Notemos que jugar en la digráfica de k -fichas con un ladrón y c policías es equivalente a jugar en la gráfica original, solo tanto el ladrón como los policías constan de k fichas, y los policías ganan si un policía logra cubrir a todas las fichas del ladrón.

En el ejemplo de la Figura 4.2, las fichas de los policías son de tonos azules (■ y ■), y las del ladrón de color naranja. En esta misma figura podemos observar que si el ladrón está en $\{0, 6\}$ y hay un policía en $\{1, 5\}$, el ladrón eventualmente será atrapado, independientemente de dónde esté el otro policía. Dicha observación se generaliza a una familia infinita de configuraciones en el resultado siguiente.

Proposición 30. Sean $1 < p < q < s < n$. Si en $F_2(\vec{C}_n)$ hay dos policías tales que uno de ellos tiene sus fichas en 1 y s y el ladrón tiene sus fichas en p y q , existe una estrategia ganadora para los policías, sin importar la ubicación de las fichas del policía restante.



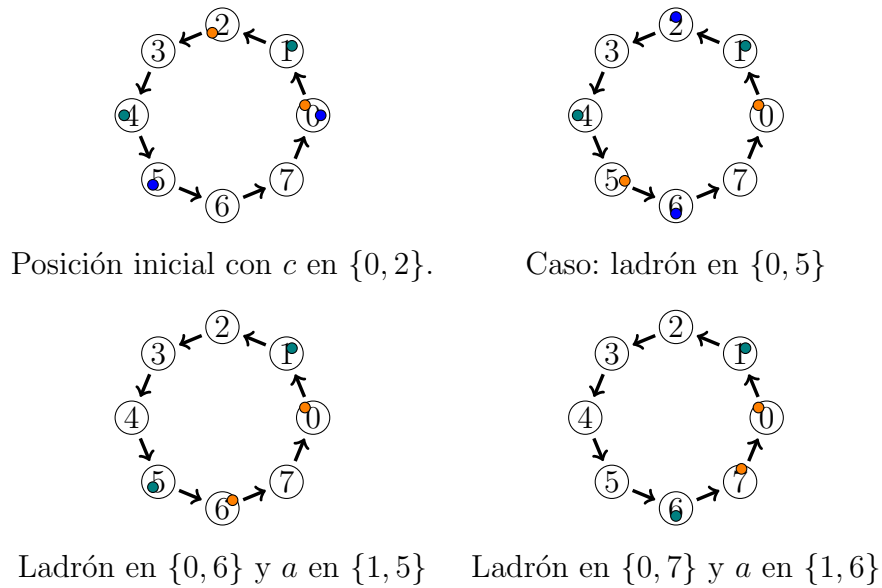


Figura 4.2: Visualización sobre \vec{C}_8 de una parte de la estrategia ganadora para dos policías en $F_2(\vec{C}_8)$

Demostración. Supongamos que la configuración es similar a la de arriba, aunque no conozcamos la ubicación de la ficha derecha del ladrón. Podemos suponer también que es turno del ladrón, ya que si es turno del policía, siempre podemos mover las fichas del otro color. A continuación se muestran los movimientos del policía, según lo que haga el ladrón.

- Si el ladrón mueve su ficha izquierda, el policía mueve su ficha izquierda, para volver a una configuración similar.
- Si el ladrón mueve su ficha derecha, y ésta se encuentra ahora en el mismo vértice que la ficha derecha del policía, el policía captura al ladrón moviendo su ficha izquierda.
- Si el ladrón mueve su ficha derecha y ésta **no** se encuentra ahora en el mismo vértice que la ficha derecha del policía, el policía mueve su ficha izquierda. En los turnos siguientes, se mueve al otro policía hasta que el ladrón mueva su ficha izquierda, y regrese a una configuración similar a la del dibujo, aunque más corta. Si el ladrón solamente mueve la ficha derecha, será capturado en a lo más $s - q + 1$ pasos.

Al realizar este procedimiento de forma recursiva, eventualmente se atrapará al ladrón. Vale la pena notar que la ficha derecha del policía nunca se mueve, por lo que este procedimiento se puede realizar en un ciclo sin la posibilidad de que el policía se estorbe a sí mismo. Más aun, si un policía empieza con sus fichas en los vértices 0 y 1, el otro policía siempre puede forzar al ladrón para que mueva alguna de sus fichas, y como están jugando sobre un ciclo, alguna de las fichas del ladrón eventualmente estará en el vértice 2, lo que asegura que la posición de las hipótesis de la Proposición 30 se puede alcanzar sin importar cómo se mueva el ladrón. En virtud de lo anterior, $c(F_2(\vec{C}_n)) = 2$ para toda n . \square

La estrategia anterior se generaliza mediante el siguiente teorema.

Teorema 31. *Para cualquier n y para toda $1 < k < n$, $c(F_k(\vec{C}_n)) = 2$*

La prueba se realizará mediante el Algoritmo 2. En este algoritmo, los policías y el ladrón deben verse como un conjunto de fichas que están en ciertos vértices, y no como un conjunto de vértices en sí. Para facilitar la notación, podemos suponer que las fichas r_0, r_1, \dots, r_{k-1} del ladrón están etiquetadas en sentido contrario de las manecillas del reloj, empezando por la ficha cuya distancia desde el vértice 0 es mínima. Similarmente, los policías a y b constan de fichas a_0, a_1, \dots, a_{k-1} y b_0, b_1, \dots, b_{k-1} , y las fichas a_i y b_i empiezan sobre el vértice i .

Si las fichas del ladrón están en los vértices v_0, v_1, \dots, v_{k-1} , el policía a puede alcanzarlo en $\sum_{i=0}^{k-1} d(i, v_i)$ turnos, lo que significa que debe moverse antes de que llegue ese turno. Como la ficha a_i no puede pasar la ficha r_i , ninguna ficha del ladrón puede quedarse inmóvil durante todo el juego. Eventualmente, esto hará que la ficha r_{k-1} esté en el vértice $k-1$, con la ficha b_{k-1} . Cuando esto sucede, los movimientos de b en el algoritmo indican que éste solo moverá fichas para retomar las fichas de r en caso de que éstas se alejen, por lo que la cantidad de fichas de r capturadas por b no puede disminuir después de cada iteración de la Línea 2.5. En virtud de que cada ficha r_i está obligada a pasar por el vértice i en algún momento, y que una vez que eso sucede, el policía b no deja escapar al ladrón por más de un turno, es inevitable que b atrape a r .

Veamos cómo se compara el tiempo de captura de $F_k(\vec{C}_n)$ con el de \vec{C}_n . Para \vec{C}_n , la configuración inicial que garantiza un tiempo menor es aquella en la que los policías están en los vértices 0 y $\lceil n/2 \rceil$, y la estrategia ganadora consiste en mover únicamente al policía más cercano al ladrón hasta que éste último llegue al vértice donde está el otro policía. Esta estrategia tomará a lo más $\lceil n/2 \rceil$ pasos. Aunque colocar a los policías en vértices diametralmente opuestos tiene sentido en \vec{C}_n , esta

Algoritmo 2 Estrategia ganadora para dos policías en $F_k(C_n)$

-
- ENTRADA: ciclo dirigido de longitud n dos policías a y b de k fichas en los vértices $0, 1, \dots, k-1$ y un ladrón de k fichas en un vértice arbitrario.
 SALIDA: Una configuración donde un policía ha capturado al ladrón.
 Sean $r = \{r_0, r_1, \dots, r_{k-1}\}$, $a = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$ y $b = \{b_0, b_1, \dots, b_{k-1}\}$
- 1: **Mientras** Los policías no hayan capturado a r **ejecutar**:
 - inicia turno de a :
 - 2: $i \leftarrow \max\{j: a_j \text{ y } r_j \text{ no están sobre el mismo vértice}\}$
 - 3: Mover a_i un vértice
 - inicia turno de b :
 - 4: **Si** r movió una ficha de un vértice cubierto por b a uno que no lo está **entonces**:
 - 5: b mueve la ficha en cuestión.
 - 6: **Terminar condicional**
 - 7: **Si** Ningún policía ha capturado al ladrón **entonces**:
 - 8: *Turno del ladrón*
 - 9: **Terminar condicional**
 - 10: **Terminar ciclo**
-

configuración inicial puede resultar contraproducente en $F_k(\vec{C}_n)$. La razón es que en \vec{C}_n , solo hay una ficha para el ladrón, y ésta siempre estará de un lado o del otro.

Para encontrar una cota superior para $\text{capt}(F_k(\vec{C}_n))$ necesitamos pensar en las distintas configuraciones iniciales que puede tomar el ladrón. Primero supongamos que la ficha r_0 no está en el vértice 0. En este caso, la numeración de las fichas indica que cuando r_0 llegue a 0, el ladrón será capturado. Así que solo tenemos que contar cuántos turnos pueden pasar antes de que esto suceda. Para colocar la ficha r_0 lo más lejana del 0, podemos pensar que el ladrón coloca la ficha r_i en el vértice $i+1$ para toda i . Posteriormente, para asegurar que la ficha r_0 se mueve, necesitamos que ninguna otra ficha pueda moverse. La manera más tardada de lograr esto es trasladando la ficha r_{k-1} al vértice 0, la r_{k-2} al vértice $n-1$, y continuar de esta forma. Esta sucesión se realiza en $(k-1)(n-k)$ movimientos, y al terminar, las fichas del ladrón estarán en los vértices $n-k-2, n-k-1, \dots, n-1, 0, 1$. Si el policía a no ha capturado al ladrón en este momento, el ladrón solo puede mover la ficha r_0 , y la forma más tardada de colocar ésta en 0 es mover las fichas en el orden $r_0, r_{k-1}, r_{k-2}, \dots, r_1$, y repetir esta secuencia tantas veces como sea posible. Cada iteración de la secuencia tiene k movimientos, y como r_0 debe moverse n veces, la ficha r_0 llegará a 0 en a lo más kn movimientos.

De este modo, si r_0 no inicia en 0, el ladrón será capturado usando esta estrategia en a lo más $(k-1)(n-k) + kn$ movimientos. Si el ladrón elige pasar, el policía a acorta su distancia hacia el ladrón en una unidad, por lo que el ladrón podrá pasar a lo más $\sum_{i=0}^{k-1} d(i, v_i)$ veces. Esta cantidad toma el valor máximo $k(n-k)$ cuando la posición inicial es $\{n-k, n-k+1, \dots, n-1\}$, por lo que el el ladrón será capturado en a lo más $(2k-1)(n-k) + kn$ turnos.

Si r_0 empieza en 0, es necesario que dé una vuelta al ciclo para que las demás fichas de R estén cubiertas por fichas de b , lo que puede realizarse en a lo más kn movimientos. Así, $\text{capt}(F_k(C_n)) \leq (2k-1)(n-k) + 2kn$.

4.2. Trayectorias

Usando un enfoque similar al del Teorema 31, es posible encontrar el número de policías de la gráfica de k -fichas de cualquier trayectoria.

Teorema 32. *Para cualquier n y para toda $1 < k < n$, $c(F_k(\vec{P}_n)) = 1$*

Demostración. Supongamos que los vértices de P_n son $1, 2, \dots, n$ y están acomodados de izquierda a derecha, llamemos c_1, \dots, c_k a las fichas del policía, y coloquemos a la i -ésima ficha en el vértice i . Las fichas del ladrón de nuevo son r_1, \dots, r_k , y podemos suponer que las acomoda de izquierda a derecha, Notemos que independientemente de la configuración inicial del ladrón, podemos asegurar que a partir de cierto índice i , la ficha r_i está más a la derecha que el vértice i , ya que de otra forma, el ladrón iniciaría en el mismo vértice de $F_k(\vec{P}_n)$ que el policía. La estrategia ganadora se presenta en el Algoritmo 3. \square

Calcular el tiempo de captura de esta digráfica resulta sencillo, pues solo es necesario llevar las fichas del policía de $\{1, 2, \dots, k\}$ a $\{n-k+1, n-k+2, \dots, n-k+k\}$. Esto se logra moviendo cada ficha $n-k$ veces, por lo que necesitamos $k(n-k)$ turnos. Gracias a esto, $\text{capt}(F_k(P_n)) = k(n-k)$.

Tanto en esta sección como en la anterior, resultó que el número de policías de la digráfica de fichas es el mismo que el de la digráfica original, sin embargo esto suele ser falso en otros casos. A continuación analizaremos una familia para la cual el número de policías puede crecer bastante rápido.

4.3. Árboles

En un árbol enraizado, basta colocar un policía en la raíz para asegurar que éste atraparé al ladrón, sin embargo, el número de policías va creciendo según la cantidad

Algoritmo 3 Estrategia ganadora para un policía en $F_k(P_n)$

ENTRADA: Trayectoria de longitud n con k fichas de policía c en los primeros k vértices y otras k fichas de un ladrón r en otros vértices.

SALIDA: Una configuración donde el policía ha capturado al ladrón.

- 1: **Procedimiento** CAPTURA(P_n, c, r)
- 2: **Mientras** c no haya capturado a r **ejecutar:**
- 3: $f \leftarrow \text{máx}\{c_i: c_i \text{ y } r_i \text{ no están sobre el mismo vértice}\}$
- 4: Mover f un vértice a la derecha.
- 5: **Si** c no ha capturado al ladrón **entonces:**
- 6: *Turno del ladrón*
- 7: **Terminar condicional**
- 8: **Terminar ciclo**
- 9: **Terminar procedimiento**

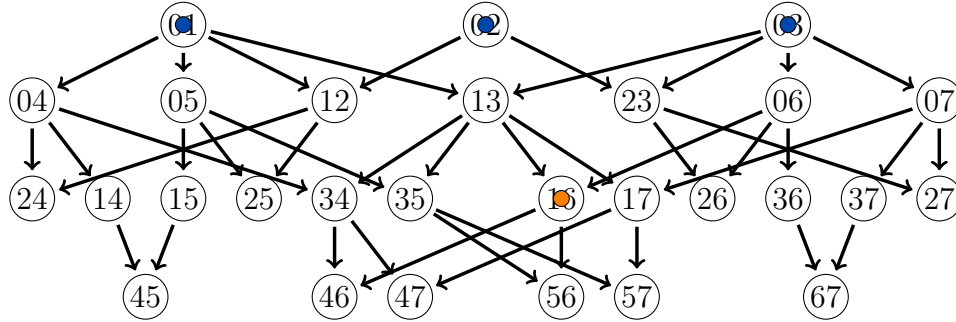


Figura 4.3: Digráfica de fichas de un árbol enraizado con un policía en cada fuente y un ladrón en algún vértice.

de fichas en la digráfica. Tomemos por ejemplo la Figura 4.3: en la digráfica de 2 fichas de este árbol, hay tres fuentes: a saber 01, 02 y 03, por lo que se necesitan al menos tres policías en dicha digráfica. Más aun, como la digráfica de fichas también es acíclica, se necesitan exactamente tres policías. A continuación se encontrará el número de policías para esta familia de digráficas.

Como $F_k(T)$ es acíclica, sabemos que encontrar su número de policías se reduce a contar sus fuentes, que como se vio en la Sección 3.4, es

$$(T, r, k) = \sum_{x \in X_{d+(r)}} (T, v_1, x_1)(T, v_2, x_2) \dots (T, v_{d+(r)}, x_{d+(r)}),$$

y el algoritmo para atrapar al ladrón es el Algoritmo 4. Se puede apreciar en la Figura 4.3 que el tiempo de captura de $F_k(T)$ es $h(F_k(T))$.

Algoritmo 4 Estrategia ganadora para (T, r, k) policías en $F_k(T_n)$

ENTRADA: Digráfica de fichas de un árbol enraizado con un policía en cada fuente y un ladrón en algún vértice.

SALIDA: Una configuración donde el policía ha capturado al ladrón.

- 1: **Procedimiento** CAPTURA(T_n, C, R)
- 2: **Mientras** C no haya capturado a R **ejecutar:**
- 3: $c \leftarrow$ policía más cercano al ladrón.
- 4: Mover c hacia el ladrón una flecha.
- 5: **Terminar ciclo**
- 6: **Terminar procedimiento**

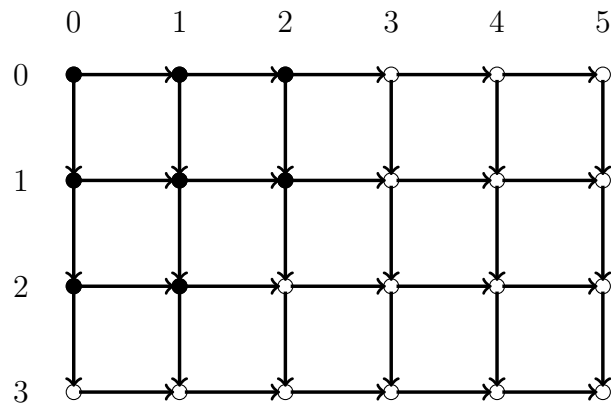


Figura 4.4: La rejilla rectangular $P_6 \square P_4$, con un 8-conjunto de infrontera vacía marcado en negro.

4.4. Rejillas

Para capturar a un ladrón en una rejilla $P_n \square P_m$, necesitamos únicamente un policía, ya que la digráfica en cuestión es acíclica y tiene solo una fuente. Como $F_k(P_n \square P_m)$ también es acíclica, su número de policías es el número de fuentes que tiene. Por simplicidad, pensaremos que $V(P_n) = \{0, 1, \dots, n\}$ y que $V(P_m) = \{0, 1, \dots, m\}$.

Como se mencionó anteriormente, las fuentes en la digráfica de k fichas corresponden a los k -conjuntos de vértices cuya infrontera es vacía. Supongamos que X es uno de estos k -conjuntos en la rejilla de la Figura 4.4. Si $(u, v) \in X$, entonces $(u - 1, v) \in X$ si $u > 0$, y $(u, v - 1) \in X$ si $v > 0$, por lo que X contiene todos los vértices de la subrejilla comprendida entre los vértices $(0, 0)$ y (u, v) . Es importan-

te notar que la subdigráfica inducida por X puede no verse como una rejilla, pues puede tener los vértices $(2, 2)$ y $(3, 1)$ y no tener al vértice $(3, 2)$. En realidad, si $D = P_6 \square P_4$, $D[X]$ se ve como la unión de varias rejillas, posiblemente unidimensionales, que contienen al vértice $(0, 0)$. En $F_k(P_n \square P_m)$, podemos asegurar que cada fuente es la unión de a lo más $\min\{n + 1, m + 1\}$ de estas rejillas, y que a lo más dos de ellas son unidimensionales. Por la forma que tienen las rejillas, podemos llamarlas $Q(u, v)$, donde (u, v) es el vértice de Q que está más alejado de $(0, 0)$, es decir, (u, v) es el máximo de la función $f(x, y) = x + y$ con dominio $V(Q)$. Estas rejillas tendrán $(u + 1)(v + 1)$ vértices cada una, y si tenemos s rejillas $Q(u_0, v_0), \dots, Q(u_{s-1}, v_{s-1})$, ordenadas de tal forma que $u_i < u_j$ cuando $i < j$ ¹, en total tendrán

$$(u_0 + 1)(v_0 + 1) + (u_1 - u_0)(v_1 + 1) + \dots + (u_{s-1} - u_{s-2})(v_{s-1} + 1)$$

vértices, y este número, por construcción, es k .

De esta forma, para contar el total de policías necesarios en $F_k(P_n \square P_m)$, solo tenemos que sumar las fuentes formadas por s rejillas para $1 \leq s \leq \min\{n + 1, m + 1\}$, tomando en cuenta que para s fijo, hay

$$\left| \left\{ ((u_0, v_0), (u_1, v_1), \dots, (u_{s-1}, v_{s-1})) : \left| \bigcup_{i=0}^{s-1} V(Q(u_i, v_i)) \right| = k \right\} \right|$$

fuentes, donde $0 \leq u_i \leq n - 1$, $0 \leq v_i \leq m - 1$, (u_i) es creciente, y (v_i) es decreciente.

4.5. Rejillas cilíndricas

Para asegurar la captura de un ladrón en $\vec{C}_n \square \vec{P}_m$, necesitamos colocar dos policías en cualesquiera vértices de la primera copia del ciclo, es decir, en el conjunto $\{(v, 0) : v \in V(C_n)\}$. Si el ladrón inicia en el i -ésimo nivel, los policías se trasladan a ese nivel y empiezan la persecución sobre esa copia del ciclo mediante el Algoritmo 2. Si el ladrón decide moverse hacia un nivel distinto, se repite el procedimiento. El ladrón puede pasar de un nivel a otro a lo más m veces, y si lo hace, los policías pueden llegar al mismo nivel, y aplicar la estrategia para capturarlo en un ciclo. Este caso puede verse como la gráfica de una ficha de la rejilla cilíndrica. Posteriormente se examina qué sucede con más de una ficha.

¹Esto hace que $v_i > v_j$ cuando $i < j$

4.5.1. Con dos fichas

A continuación se muestra una estrategia con la cual el ladrón puede evadir a dos policías por tiempo indefinido en $F_2(\vec{C}_n \square \vec{P}_m)$ con $n > 3$.

Algoritmo 5 estrategia de evasión para un ladrón y dos policías en $F_2(\vec{C}_n \square \vec{P}_m)$ con $m > 1$

- 1: **Procedimiento** EVASIÓN(un ladrón R , dos policías A y B .)
 - 2: $\{(A_1^\theta, A_1^r), (A_2^\theta, A_2^r)\}, \{(B_1^\theta, B_1^r), (B_2^\theta, B_2^r)\} \leftarrow$ posiciones iniciales de las fichas de los policías A y B respectivamente.
 - 3: **Si** $\max\{A_1^r, A_2^r, B_1^r, B_2^r, \} > 0$ **entonces:** ▷ SPG, $B_2^r > 0$
 - 4: R inicia en $\{(A_1^\theta - 1, 0), (A_2^\theta - 1, 0)\}$
Como se tiene solo un policía en el nivel 0, R puede evitar su captura por tiempo indefinido.
 - 5: **Si no:**
 - 6: $G \leftarrow F_2(C_n \square P_m)$
 - 7: $(x, y) \leftarrow \min\{(u, v) : d_G(A, \{(u, 0), (v, 1)\}) \geq 2, d_G(B, \{(u, 0), (v, 1)\}) \geq 2\}$
 - 8: R inicia en $\{(x, 0), (y, 1)\}$ ▷ El algoritmo continúa en la siguiente página.
-

Afirmación 33. Usando el Algoritmo 5, un ladrón puede evitar su captura por tiempo indefinido.

Demostración. Para mostrar que con el Algoritmo 5 el ladrón escapa de forma indefinida, recordemos que para que un policía capture al ladrón, debe capturar cada una de sus fichas. Gracias a la Línea 5.13, el ladrón no puede “entregar” una ficha a un policía para que éste capture la ficha restante en el siguiente turno. Debido a esto, el policía que capture al ladrón debe capturar una ficha, evitar que escape, y posteriormente capturar la otra ficha. A su vez, la Línea 5.13 garantiza que el policía que atrape al ladrón no puede pasar en su último turno. En virtud de lo anterior, podemos analizar los distintos casos en los que una ficha del ladrón puede ser capturada. Para el resto de la demostración, supondremos que P es el policía a distancia 1 de R en $F_2(\vec{C}_n \square \vec{P}_n)$, y que x es la ficha de R que P no ha capturado.

Si solo una ficha ha sido capturada, el condicional de la Línea 5.13 nos dice que hay dos casos posibles, los cuales se ejemplifican en las primeras dos rejillas de la Figura 4.5. En el primer caso, el ladrón mueve su ficha en el nivel 1, y en el segundo

9:	Mientras el ladrón no haya sido capturado ejecutar:
10:	Si Existe un policía a distancia 1 de R en $F_2(C_n \square P_m)$ entonces:
11:	$P \leftarrow$ Primer policía a distancia 1 de R , en orden lexicográfico
12:	$x \leftarrow$ ficha del ladrón no capturada por P
13:	Si x puede moverse sobre su nivel sin colocar a R a distancia 0 o 1 de un policía entonces:
14:	mover a x sobre su nivel
15:	Si no: \triangleright si x se mueve, el ladrón es capturado al terminar el turno de los policías
16:	mover la otra ficha del ladrón sobre su nivel
17:	Terminar condicional
18:	Si no:
19:	R pasa
20:	Terminar condicional
21:	Terminar ciclo
22:	Terminar condicional
23:	Terminar procedimiento

la ficha en el nivel 0. En ambos casos, el ladrón se aleja del policía P , y el otro policía no presenta amenaza alguna después del turno del ladrón.

Si dos policías capturan a la misma ficha, tenemos cualquiera de los casos 3, 4, y 5 de la Figura 4.5. En los casos 3 y 4, el algoritmo indica que ladrón mueve la ficha no capturada y escapa de los policías, y en el caso 5 mueve la ficha capturada y logra evadir a los policías.

Por último, revisemos el caso en el que cada policía captura una ficha distinta del ladrón, como se muestra en las rejillas 6 y 7 de la Figura 4.5. En la rejilla 6, los dos policías están a distancia 1 del ladrón, y el desempate lexicográfico nos ayudará a definir qué ficha se mueve. Independientemente de qué ficha sea, el ladrón dejará de estar a distancia 1 de ambos policías después de hacer su movimiento. En la rejilla 7, la ficha del nivel 1 no ha sido capturada por P , y si se mueve, el ladrón no queda a distancia 0 ni 1 de ningún policía, por lo que éste es el movimiento siguiente de R .

En todos los casos analizados, el ladrón puede aumentar en una unidad su distancia desde el policía más cercano cuando esta distancia es 1, por lo que es imposible que dos policías atrapen al ladrón con esta estrategia.

□

Posteriormente se presenta el Algoritmo 7, que asegura que con tres policías es posible atrapar a un ladrón. Este algoritmo supone que en todo momento hay a lo

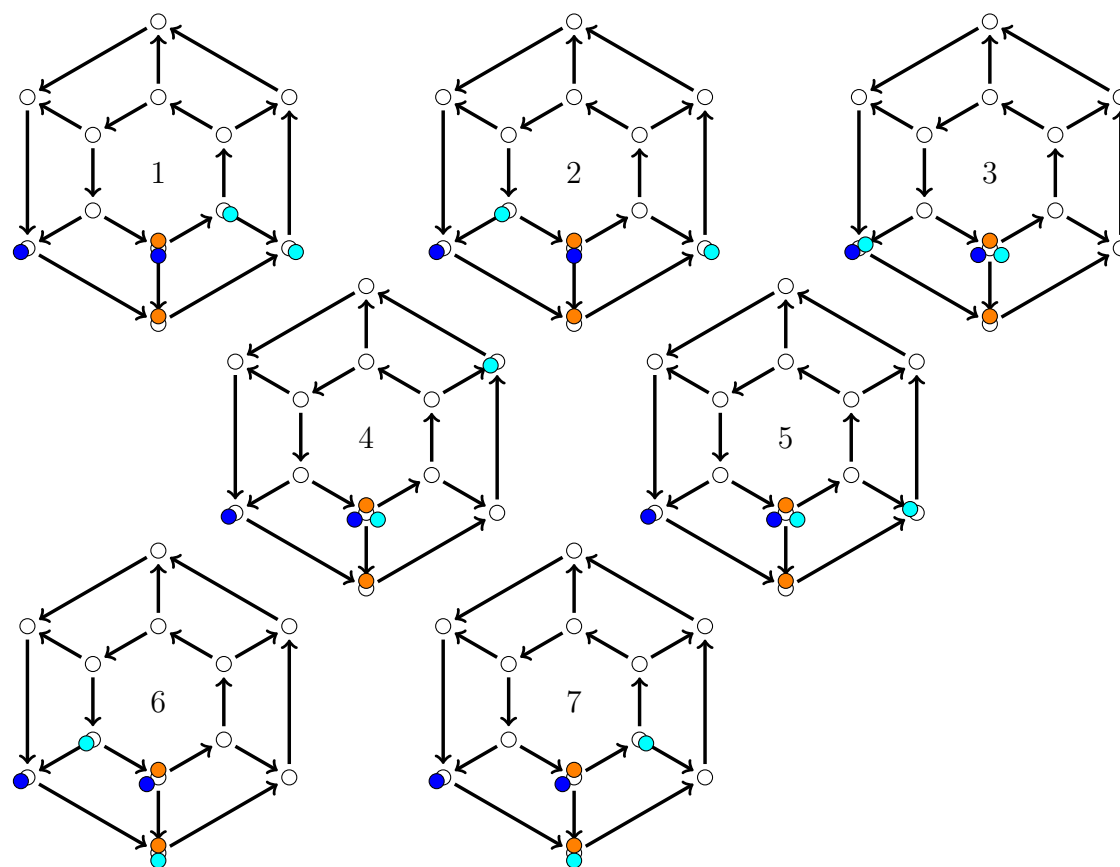


Figura 4.5: La rejilla $C_n \square P_n$ con un ladrón de dos fichas de color naranja ■, y dos policías de dos fichas, uno de color cyan ■ y otro en color azul ■.

más una ficha del ladrón por nivel, pues de otro modo, se usa el Algoritmo 2 hasta que esta condición se cumpla o hasta que el ladrón sea atrapado. A su vez, el algoritmo requiere de varias rutinas que se presentarán a continuación.

Proposición 34. *El Algoritmo 7 siempre termina.*

Demostración. Para esta prueba, podemos suponer que los únicos movimientos de las fichas del ladrón son sobre vértices del mismo nivel. Notemos que si el ladrón pasa, B acorta su distancia hacia él en una unidad. Como el ladrón no puede pasar indefinidamente, en algún momento una de las fichas debe pasar por un vértice donde haya una ficha de C . Supongamos que estamos en ese turno, y que la ficha del ladrón atrapada por C está en el nivel i . A partir de este turno, la ficha del ladrón en el

Rutinas 6 Subrutinas necesarias para Policías y Ladrones sobre una rejilla cilíndrica.

- 1: **Procedimiento** NIVELAR(Ladrón, policías)
 - 2: **Mientras** Exista un nivel l con más fichas de ladrón que de algún policía **ejecutar:**
 - 3: **Para cada** Policía P con menos fichas en l que el ladrón **ejecutar:**
 - 4: $i \leftarrow$ primer nivel donde hay más fichas de P que de R
 - 5: mover una ficha de P de i a $i + 1$
 - 6: **Terminar ciclo**
 - 7: **Terminar ciclo**
 - 8: **Terminar procedimiento**
 - 1: **Procedimiento** ACECHAR(policía)
 - 2: **Si** el ladrón tiene una ficha a distancia 1 de una ficha x del policía **entonces:**
 - 3: Mover x para capturar dicha ficha.
 - 4: **Si no:**
 - 5: El policía pasa.
 - 6: **Terminar condicional**
 - 7: **Terminar procedimiento**
 - 1: **Procedimiento** PERSEGUIR(Policía P , nivel i)
 - 2: las fichas de P sobre el nivel i imitan un turno de a en el Algoritmo 2, persiguiendo las fichas de R que están sobre el nivel i
 - 3: **Terminar procedimiento**
-

nivel j puede moverse a lo más $n - 2$ veces, ya que esta es la mayor distancia a la que puede estar la ficha de C sobre el nivel j .

Si el ladrón decide mover únicamente la ficha del nivel i , B capturará la ficha del nivel j después de a lo más $n - 1$ turnos, y la ficha del nivel i del ladrón caerá en el mismo vértice que la ficha del nivel i de B en a lo más $n - 2$ movimientos después de eso.

Esto nos indica que el ladrón debe mover su ficha del nivel j eventualmente, sin embargo, al hacer eso, se dirige hacia la ficha del nivel j del policía C .

Similarmente, si la primera ficha atrapada por C es la del nivel j , el ladrón puede ser capturado por A o por C , dependiendo de sus movimientos. \square

Algoritmo 7 Estrategia ganadora para tres policías en $F_2(\vec{C}_n \square \vec{P}_m)$.

ENTRADA: una rejilla cilíndrica con 3 policías de 2 fichas cada uno en los vértices $(0, 0)$ y $(1, 0)$ y un ladrón R de 2 fichas en un vértice arbitrario.

SALIDA: una configuración donde alguno de los policías ha atrapado al ladrón.

- 1: NIVELAR(Ladrón, Policías)
 - 2: $i \leftarrow \min\{\ell \in \{0, \dots, m-1\} : R \text{ tiene una ficha en el nivel } \ell\}$
 - 3: $j \leftarrow \max\{\ell \in \{0, \dots, m-1\} : R \text{ tiene una ficha en el nivel } \ell\}$
 - 4: **Mientras** el ladrón no haya sido capturado **ejecutar:** ▷ turno del ladrón
 - 5: **Si** el ladrón pasa **entonces:**
 - 6: A PERSIGUE la ficha más cercana que no esté tocando
 - 7: B PERSIGUE la ficha más cercana que no esté tocando
 - 8: C ACECHA
 - 9: **Si no: Si** el ladrón mueve la ficha *sobre* el nivel i **entonces:**
 - 10: A PERSIGUE con ficha en el nivel i
 - 11: B PERSIGUE con ficha en el nivel j
 - 12: C ACECHA
 - 13: **Si no: Si** el ladrón mueve la ficha *sobre* el nivel j **entonces:**
 - 14: A PERSIGUE con ficha en el nivel j
 - 15: B PERSIGUE con ficha en el nivel i
 - 16: C ACECHA
 - 17: **Si no:** ▷ El Ladrón movió una ficha a otro nivel.
 - 18: NIVELAR
 - 19: **Terminar condicional**
 - 20: **Terminar ciclo**
-

4.5.2. Generalización para $k \leq m$

A pesar de que los algoritmos anteriores son estrictamente para $F_2(\vec{C}_n \square \vec{P}_m)$, la idea detrás de ellos se puede generalizar a $F_k(\vec{C}_n \square \vec{P}_m)$ siempre que $k \leq m$. Primero, empecemos por ver que, para $k \leq m$, un ladrón puede escapar indefinidamente de k policías. La estrategia para lograrlo se presenta en el Algoritmo 8.

Afirmación 35. Usando el Algoritmo 8, un ladrón puede evitar su captura por tiempo indefinido en $F_k(\vec{C}_n \square \vec{P}_m)$.

Demostración. A pesar de que este algoritmo es, en esencia, idéntico al Algoritmo 5, esta demostración no puede realizarse por casos, ya que en principio no sabemos cuántos de ellos hay. En lugar de analizar los casos, observemos varios aspectos de la persecución.

Algoritmo 8 Estrategia de evasión para un ladrón y k policías en $F_k(C_n \square P_m)$ con $1 < k \leq m$.

- 1: **Procedimiento** EVASIÓN(un ladrón R , k policías P_0, \dots, P_{k-1})
 - 2: $S \leftarrow \{(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) : x_i \in V(C_n)\}$
 - 3: ordenar a S en orden lexicográfico
 - 4: $s \leftarrow$ primer elemento de S tal que $d_G(P_i, \{(x_0, 0), (x_1, 1), \dots, (x_{k-1}, k-1)\}) \geq 2$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$
 - 5: R inicia en la posición $\{(s[0], 0), (s[1], 1), \dots, s[k-1], k-1\}$.
 - 6: **Mientras** el ladrón no haya sido capturado **ejecutar:**
 - 7: **Si** Existe un policía a distancia 1 de R en $F_k(C_n \square P_m)$ **entonces:**
 - 8: $P \leftarrow$ Primer policía a distancia 1 de R , en orden lexicográfico
 - 9: $x \leftarrow$ ficha del ladrón **no** capturada por P
 - 10: **Si** x puede moverse sobre su nivel sin colocar a R a distancia 0 o 1 de un policía **entonces:**
 - 11: mover a x sobre su nivel
 - 12: **Si no:**
 - 13: $x \leftarrow$ primera ficha que al moverse sobre su nivel no coloca a R a distancia 0 o 1 de algún policía.
 - 14: mover a x sobre su nivel
 - 15: **Terminar condicional**
 - 16: **Si no:**
 - 17: R pasa
 - 18: **Terminar condicional**
 - 19: **Terminar ciclo**
 - 20: **Terminar procedimiento**
-

Notemos que si R tiene a lo más una ficha en cada nivel, en cada turno puede hacer k movimientos, correspondientes cada uno a una de sus k fichas. Si en algún momento hay policías O_1, O_2, \dots, O_s cuya distancia hacia R es 1 en $F_k(\vec{C}_n \square \vec{P}_m)$, entonces hay a lo más $k-s$ policías “adelante” de él, es decir, policías cuya distancia desde R es a lo más 2, a los que llamaremos Q_1, \dots, Q_{k-s} . En este momento, cualquier movimiento de R agranda la distancia desde los policías O_i , y como R tiene k movimientos posibles, alguno de éstos no acorta la distancia hacia los policías Q_i . Este movimiento hace que R quede libre otro turno, y pasará de turno hasta que, de nuevo, exista al menos un policía O_i con distancia 1 hacia R . \square

Ahora que sabemos que k policías son insuficientes para atrapar a un ladrón en $F_k(C_n \square P_m)$ para $2 < k \leq m$, el Algoritmo 9 generaliza la idea del Algoritmo 7 para

atrapar al ladrón usando $k + 1$ policías.

Proposición 36. *Usando el Algoritmo 9, los policías pueden atrapar al ladrón en tiempo finito.*

Demostración. De acuerdo a la línea 9.27, si el ladrón mueve su ficha sobre el nivel i , cada policía distinto de P_k persigue sobre un nivel distinto, y P_k acecha al ladrón.

Supongamos de nuevo que los únicos movimientos de las fichas del ladrón son sobre flechas que no pasan de un nivel a otro, pues de otra manera, solo nivelamos y repetimos el procedimiento. De forma similar a como ocurrió en el Algoritmo 7, cada vez que el ladrón pasa, hay policías que acortan su distancia hacia él en una unidad, lo que significa que no puede pasar por siempre. Similarmente, siempre que R se mueve, su distancia hacia P_k permanece igual (si P_k se mueve) o disminuye en una unidad (si P_k no se mueve). Debido a esto, en algún momento una de las fichas de R debe pasar por un vértice donde haya una ficha de P_k .

Notemos que si cada ficha del ladrón da una vuelta al nivel en el que está, cada ficha de P_k habrá capturado a una ficha del ladrón, lo que terminará el juego. Esta condición se cumplirá si no existe un turno a partir del cual R decide no volver a mover ciertas fichas, así que solo necesitamos garantizar que si el ladrón mueve un subconjunto propio de fichas a partir de cierto turno, también puede ser atrapado por los policías.

Pensemos que a partir de cierto turno, R decide mover únicamente las fichas de cierto conjunto de niveles X . Si $X = \{x\}$ con $x \neq 0$, P_x se dedicará a atrapar a las fichas en todos los niveles distintos de x . Cada vez que R decida mover una ficha que no esté sobre el nivel $x + s$ indicado en la línea 9.27, P_x se acercará a la ficha del nivel $x + s$, hasta que la atrape y pase al siguiente nivel. Una vez que acabe con estos niveles, P_x acechará a R sobre el nivel x , por lo que el juego terminará con la captura del ladrón. En cambio, si $x = 0$, el policía 0 eventualmente atraparé las demás fichas de R . Posteriormente, cada policía P_i con $0 < i < k$ atraparé a las fichas de todos los niveles distintos de 0, y perseguirá a R para que mueva la ficha en 0, donde P_0 estará acechando.

Si X no es unitario, cada policía P_x con $x \in X$ intentará atrapar a las fichas de los demás niveles, tanto dentro como fuera de X . En este caso no podemos asegurar que el ladrón será capturado por algún policía P_i con $i \notin X$, así que debemos demostrar que los policías P_x con $x \in X - \{0\}$ se acercan a R . Consideremos un policía P_x con $x \in X$. Como X no es unitario y R debe mover las fichas de todos los niveles de X , habrá turnos en los cuales el ladrón no moverá la ficha del nivel $x + s$ indicado en la Línea 9.27. Cuando esto suceda, P_x se acercará a la ficha del nivel $x + s$ del ladrón, y como este procedimiento se repetirá las veces necesarias, eventualmente alcanzará

esta ficha. Cuando la ficha en cuestión sea atrapada, el procedimiento se repetirá con la siguiente, hasta que P_x logre atrapar todas las fichas, salvo la del nivel x . Al llegar a este punto, es solo cuestión de tiempo para que el ladrón mueva la ficha del nivel x , y P_x capture al ladrón. □

El análisis para encontrar el tiempo de captura se realizará después de la generalización siguiente.

4.5.3. Generalización para $k > m$

Cuando tenemos más fichas que niveles, inevitablemente tendremos al menos un nivel con más de una ficha. Como el algoritmo 9 puede manejar ese caso, solo necesitamos adaptar el número de policías. Primero veamos que si $k > m$, no son suficientes m policías para atrapar al ladrón.

Observemos que si R coloca sus fichas sobre todos los niveles, en cada turno tiene entre m y k movimientos disponibles, dependiendo de qué tanto “se estorben” sus fichas. Si en algún turno R tiene solo m movimientos disponibles, hay a lo más m policías a distancia 1 desde él, por lo que puede elegir pasar y así no ser atrapado en ese turno. Si hay s policías cuya distancia hacia R sea 1, R tiene a lo más $m - s$ policías a distancia 1 desde él, por lo que tiene al menos s posibles movimientos para evitar ser capturado en ese turno. Esto implica que R no puede ser atrapado con m policías en $F_k(C_m \square P_m)$ cuando $m > k$.

Ahora veamos cómo atrapar al ladrón usando $m + 1$ policías. Nótese que el Algoritmo 10 es idéntico al Algoritmo 9 salvo en el número de policías, por lo que el argumento para mostrar que sirve también es análogo.

Proposición 37. *Usando el Algoritmo 10, m policías pueden atrapar a un ladrón en tiempo finito.*

Demostración. Podemos suponer por simplicidad que a partir de cierto turno, el ladrón no cambia sus fichas de nivel, pues si lo hace, el algoritmo reacomoda a los policías para que en cada nivel haya la misma cantidad de fichas de cada jugador.

De forma similar al Algoritmo 9, R no puede pasar indefinidamente, ya que P_0 lo persigue en cada turno que pase. Si a partir de cierto momento, R decide mover únicamente la(s) ficha(s) que tenga en el nivel l durante toda la partida, cada policía P_i con $1 \leq i < m$ capturará las fichas de los demás niveles, y posteriormente acechará sobre el nivel l hasta que R sea capturado.

Para seguir una demostración similar a la del Algoritmo 9, supongamos que estamos en el primer turno en el que todas las fichas del nivel l han sido capturadas

por P_m . Como se argumentó anteriormente, si R elige mover solo las fichas del nivel l , será capturado, así que debe mover fichas en algún otro nivel. Cada vez que R mueva una ficha en un nivel distinto a l , se acerca en una unidad a P_m , y cada vez que mueva una ficha en el nivel l , los policías P_i con $1 \leq i < m$ se acercan a las fichas de R en otro nivel en una unidad. □

Para encontrar el tiempo de captura, consideremos los siguientes aspectos:

1. Lo más lejos que un policía puede estar de R es $k(m + n - 2)$.
2. Si R pasa esa cantidad de turnos, P_0 lo atrapa.
3. El ladrón puede realizar a lo más $k(m - 1)$ movimientos que pasen de un nivel a otro, y si los hace, terminará en el nivel más bajo de la rejilla.
4. Cada ficha del ladrón necesita n movimientos para dar una vuelta al nivel, aunque puede dar más de una vuelta si el ladrón así lo desea.
5. Si el ladrón hace $(k - 1)n$ movimientos sobre el mismo nivel, hay un policía que habrá capturado todas las fichas del ladrón en los demás niveles, y estará acechando sobre ese nivel. Cuando se llegue a este punto, el ladrón puede hacer a lo más $\text{capt}(F_{k'}(C_n))$ movimientos, donde k' es el número de fichas que tiene sobre el nivel en cuestión. Como solo estamos buscando una cota, podemos hacer $k' = k$.

En total, R puede hacer $k(m - 1) + k(k - 1 + 4kn - 2k^2 - n + k)$ movimientos y pasar $k(m + n - 2)$ turnos, por lo que el tiempo de captura $\text{capt}(F_k(\vec{C}_n \square \vec{C}_m))$ es menor o igual que

$$k(4kn - 2k^2 + 2k + 2m - 4).$$

4.6. Rejillas toroidales

Para concluir con el estudio del juego en las rejillas, debemos adentrarnos en la última rejilla definida en la Sección 2.8. Para obtener una rejilla toroidal a partir de una cilíndrica $\vec{C}_n \square \vec{P}_m$, sólo debemos agregar las flechas del nivel $m - 1$ al nivel 0 para cada par de vértices $(v_i, m - 1)$ y $(v_i, 0)$. Aunque esta operación es sencilla, la digráfica resultante cambia una propiedad importante: en $\vec{C}_n \square \vec{C}_m$, los “niveles” se pueden recorrer de forma cíclica. Como consecuencia, no podemos perseguir al ladrón sobre las copias de C_n y nivelar en caso de que el ladrón se mueva sobre C_m ,

ya que en principio puede moverse sobre C_m de forma indefinida. En virtud de lo anterior, para este problema se presentarán únicamente cotas superiores e inferiores para $c\left(F_k\left(\vec{C}_n \square \vec{C}_m\right)\right)$.

Al estudiar rejillas toroidales, vale la pena extender el concepto de **nivel** para abarcar tanto las copias de \vec{C}_n como de \vec{C}_m . De esta forma, podemos pensar que un nivel en $\vec{C}_n \square \vec{C}_m$ es una subdigráfica inducida por un conjunto de la forma $V(C_n) \times \{v\}$ con $v \in V(C_m)$, o de la forma $\{u\} \times V(C_m)$ con $u \in V(C_n)$. Estas digráficas serán llamadas n -niveles y m -niveles respectivamente. Cada m -nivel interseca a cada n -nivel en un único vértice, y cada vértice puede verse como la intersección de un m -nivel y un n -nivel únicos.

Primero observemos que en $\vec{C}_n \square \vec{C}_m$, dos policías son insuficientes para atrapar a un ladrón. Supongamos que tenemos al ladrón en el vértice (u, v) a una distancia mayor que 1 de ambos policías. Si los tres jugadores están sobre un mismo m -nivel (n -nivel), el ladrón solo debe moverse al m -nivel (n -nivel) siguiente para mantenerse a distancia mayor que 1. Si sólo un policía está en el mismo m -nivel (n -nivel), el ladrón debe fijarse en que éste policía no esté a distancia 1 de él. Si no lo está, el ladrón puede no moverse, pero si lo está, alguno de sus dos movimientos posibles lo alejará del policía sin colocarlo a distancia 1 del otro policía. Si ningún policía está sobre su m -nivel (n -nivel), el ladrón no tiene por qué moverse.

Como toda rejilla toroidal es 2-exregular y 2-inregular, el ladrón siempre tiene dos opciones para moverse. Si usamos tres policías, la estrategia ganadora consiste en colocar dos de ellos sobre el mismo m -nivel que el ladrón, y colocar al tercero sobre el mismo n -nivel que el ladrón. Si el ladrón se mueve sobre el m -nivel, uno de los policías ahí lo persigue mientras que el otro acecha, y el policía restante se mueve para acercarse a él sobre su propio m -nivel. Si el ladrón decide cambiar de m -nivel, los primeros dos policías lo siguen, mientras que el tercero ajusta su posición sobre su m -nivel para bloquearle el paso al ladrón cuando éste se acerque suficiente. Si el ladrón llega al m -nivel del tercer policía sin ser capturado, la estrategia sigue siendo la misma. Como ambos ciclos son finitos, el ladrón volverá a pasar por ese nivel, y cada vez que lo haga, el tercer policía estará más cerca, por lo que este proceso siempre terminará.

En vista de lo anterior, $c\left(F_k\left(\vec{C}_n \square \vec{C}_m\right)\right) = 3$. La primera parte de este resultado se generaliza en las siguientes dos proposiciones. Una vez más, es conveniente partir los casos dependiendo del valor de k .

Proposición 38. *Para $k < \min(m, n)$, se necesitan más de $k + 1$ policías para atrapar a un ladrón en $F_k\left(\vec{C}_n \square \vec{C}_m\right)$.*

Demostración. Si jugamos con k fichas, existen $\binom{m}{k}n^k$ formas distintas de acomodar al ladrón con a lo más una ficha en cada m -nivel. Como $n, m \geq 3$ entonces $2k(k+1) < \binom{m}{k}n^k$, lo que significa que existe al menos una configuración donde el ladrón está a distancia mayor que 1 desde el policía más cercano. Tomemos una de estas configuraciones como posición inicial.

Desde aquí, el ladrón tiene k formas distintas de mover una ficha sobre su m -nivel, y puede mover al menos una ficha para cambiarla de m -nivel manteniendo la condición de tener a lo más una ficha en cada m -nivel (porque $k < m$). Siguiendo un argumento usado en la sección anterior, si el ladrón tiene s policías a distancia 1 hacia él, tiene al menos $k+1-s$ policías a distancia 1 desde él, y como en esta configuración tiene $k+1$ movimientos posibles, siempre puede elegir un movimiento que lo coloque en una configuración segura (es decir, que no esté a distancia 1 de ningún policía) en la que tenga otros $k+1$ movimientos posibles para repetir este procedimiento. \square

Proposición 39. *Si $k > \min(m, n)$, se necesitan más de $\min(m, n)$ policías para atrapar a un ladrón en $F_k(\vec{C}_n \square \vec{C}_m)$.*

Demostración. Supongamos que $m \leq n$. Si acomodamos al ladrón para que cada m -nivel tenga $\lfloor k/m \rfloor$ o $\lceil k/m \rceil$ de sus fichas, en cada turno tiene al menos m movimientos posibles. Bajo un argumento similar al de la demostración anterior, el ladrón siempre puede mover una ficha sobre un m -nivel para escapar de los policías. A pesar de la similitud, no podemos asegurar que el ladrón pueda mover una ficha sobre un n -nivel, ya que si k es múltiplo de n , el ladrón puede tener la mala fortuna de cubrir solo n -niveles completos. Esta diferencia hace que la cota que se puede garantizar sea m , en lugar de $m+1$. \square

Ahora veamos cómo acotar el número de policías superiormente. Como la estructura de la digráfica es similar a la de una rejilla cilíndrica, podemos usar una estrategia similar a la de esa rejilla. Notemos que a diferencia de una rejilla cilíndrica, aquí podemos “nivelar” los policías infinitas veces. Para evitar que esto suceda, agregamos más policías al juego.

Proposición 40. *Para cualesquiera $m, n \geq 3$ y $k \leq \frac{mn}{2}$ bastan $2k+1$ policías para atrapar a un ladrón en $F_k(\vec{C}_n \square \vec{C}_m)$.*

Demostración. Enumeremos a los policías como P_0, P_1, \dots, P_{2k} . En una rejilla toroidal, el ladrón tiene a lo más $2k$ movimientos posibles, por lo que debemos cubrir todas las posiciones a las que puede moverse, y posteriormente atraparlo con el policía

restante. Cuando hay $2k$ movimientos posibles para el ladrón, k de estos son sobre m -niveles, y los otros k sobre n -niveles.

Para bloquear los movimientos, seleccionamos k policías para imitar los movimientos de los policías P_1, \dots, P_k del Algoritmo 9 sobre los m -niveles, y otros k policías para imitarlos sobre los n -niveles. El policía restante imitará a P_0 sobre los m -niveles y posteriormente los n -niveles, forzando al ladrón a recorrer la rejilla en ambas dimensiones.

Si el ladrón decide moverse solo sobre una dimensión después de cierto turno, su captura será en un escenario idéntico al proporcionado por el Algoritmo 9. Si decide moverse en ambas dimensiones, llegará un turno en el que una de ellas esté bloqueada por los policías, lo que nos lleva al caso anterior. \square

Algoritmo 9 Estrategia ganadora para $k + 1$ policías en $F_k(\vec{C}_n \square \vec{P}_m)$ cuando $k \leq m$.

ENTRADA: una rejilla cilíndrica con policías P_0, P_1, \dots, P_k de k fichas cada uno en los vértices $(0, 0), (1, 0), \dots, (k - 1, 0)$ y un ladrón R de k fichas en un vértice arbitrario.

SALIDA: una configuración donde alguno de los policías ha atrapado al ladrón.

- 1: NIVELAR(Ladrón, Policías)
 - 2: Renombrar los niveles de tal forma que el nivel i sea el i -ésimo nivel donde el ladrón tiene una ficha, empezando desde 0.
 - 3: $N \leftarrow \text{máx}\{\text{niveles donde haya una ficha del ladrón}\}$
 - 4: **Mientras** el ladrón no haya sido capturado **ejecutar:** ▷ turno del ladrón
 - 5: $S \leftarrow \{s > 0: P_0 \text{ no ha capturado a } R \text{ en el nivel } s\}$.
 - 6: **Si** $S = \emptyset$ **entonces:**
 - 7: P_0 ACECHA en el nivel 0
 - 8: **Para cada** Policía P_i con $0 < i < k$ **ejecutar:**
 - 9: $S \leftarrow \{s: 0 < s \leq N, P_i \text{ no esté capturando a } R \text{ en el nivel } s\}$
 - 10: **Si** $S = \emptyset$ **entonces:**
 - 11: P_i PERSIGUE en el nivel 0
 - 12: **Si no:**
 - 13: $s \leftarrow \text{mín}(S)$
 - 14: P_i PERSIGUE en el nivel s
 - 15: **Terminar condicional**
 - 16: **Terminar ciclo**
 - 17: **Si no:** **Si** el ladrón pasa **entonces:**
 - 18: P_0 PERSIGUE la ficha más cercana que no esté tocando
 - 19: P_k ACECHA
 - 20: **Si no:** **Si** el ladrón mueve la ficha *sobre* el nivel j **entonces:**
 - 21: **Para cada** Policía P_i con $0 < i < k$ **ejecutar:**
 - 22: $S \leftarrow \{s: 0 < s < N \text{ tal que } P_i \text{ no esté capturando a } R \text{ en el nivel } i + s \text{ mód } N\}$
 - 23: **Si** $S = \emptyset$ **entonces:**
 - 24: P_i ACECHA en el nivel i
 - 25: **Si no:**
 - 26: $s \leftarrow \text{mín}(S)$
 - 27: P_i PERSIGUE en el nivel $i + s \text{ mód } N$
 - 28: **Terminar condicional**
 - 29: **Terminar ciclo**
 - 30: P_k ACECHA
 - 31: **Si no:** ▷ El ladrón movió una ficha a otro nivel.
 - 32: NIVELAR
 - 33: renombrar los niveles de tal forma que el nivel i sea el i -ésimo nivel donde el ladrón tiene una ficha, empezando desde 0.
 - 34: **Terminar condicional**
 - 35: **Terminar ciclo**
-

Algoritmo 10 Estrategia de captura para $m + 1$ policías en $F_k(C_n \square P_m)$ si $k > m$

ENTRADA: una rejilla cilíndrica con policías P_0, P_1, \dots, P_m de k fichas cada uno en los vértices $(0, 0), (1, 0), \dots, (m - 1, 0)$ y un ladrón R de k fichas en un vértice arbitrario.

SALIDA: una configuración donde alguno de los policías ha atrapado al ladrón.

- 1: NIVELAR(Ladrón, Policías)
 - 2: Renombrar los niveles de tal forma que el nivel i sea el i -ésimo nivel donde el ladrón tiene una ficha, empezando desde 0.
 - 3: $N \leftarrow \text{máx}\{\text{niveles donde haya una ficha del ladrón}\}$
 - 4: **Mientras** el ladrón no haya sido capturado **ejecutar:** ▷ turno del ladrón
 - 5: $S \leftarrow \{s > 0: P_0 \text{ no ha capturado a } R \text{ en el nivel } s\}$.
 - 6: **Si** $S = \emptyset$ **entonces:**
 - 7: P_0 ACECHA en el nivel 0
 - 8: **Para cada** Policía P_i con $0 < i < m$ **ejecutar:**
 - 9: $S \leftarrow \{s: 0 < s \leq m \text{ } P_i \text{ no esté capturando a } R \text{ en el nivel } s \text{ mód } N\}$
 - 10: **Si** $S = \emptyset$ **entonces:**
 - 11: P_i PERSIGUE en el nivel 0
 - 12: **Si no:**
 - 13: $s \leftarrow \text{mín}(S)$
 - 14: P_i PERSIGUE en el nivel $s \text{ mód } N$
 - 15: **Terminar condicional**
 - 16: **Terminar ciclo**
 - 17: **Si no: Si** el ladrón pasa **entonces:**
 - 18: P_0 PERSIGUE la ficha más cercana que no esté tocando
 - 19: P_k ACECHA
 - 20: **Si no: Si** el ladrón mueve la ficha *sobre* el nivel j **entonces:**
 - 21: **Para cada** Policía P_i con $0 < i < m$ **ejecutar:**
 - 22: $S \leftarrow \{s: 0 < s \leq k \text{ tal que } P_i \text{ no esté capturando a } R \text{ en el nivel } i + s \text{ mód } N\}$
 - 23: **Si** $S = \emptyset$ **entonces:**
 - 24: P_i ACECHA en el nivel i
 - 25: **Si no:**
 - 26: $s \leftarrow \text{mín}(S)$
 - 27: P_i PERSIGUE en el nivel $i + s \text{ mód } N$
 - 28: **Terminar condicional**
 - 29: **Terminar ciclo**
 - 30: P_k ACECHA
 - 31: **Si no:** ▷ El ladrón movió una ficha a otro nivel.
 - 32: NIVELAR
 - 33: renombrar los niveles de tal forma que el nivel i sea el i -ésimo nivel donde el ladrón tiene una ficha, empezando desde 0.
 - 34: **Terminar condicional**
 - 35: **Terminar ciclo**
-

Capítulo 5

Conclusiones

Entre los resultados presentados en esta tesis, los más destacados son, en mi opinión, aquellos que se valen de algoritmos para ser demostrados. Algunos de ellos son muy sencillos de obtener (como el número de policías de la digráfica de fichas de un árbol enraizado). Sin embargo, existen otros, como el resultado del Algoritmo 1, que pueden aportar información para problemas más grandes, como saber si una digráfica está determinada por sus digráficas de fichas.

Varios de los problemas a los que se enfrentó este proyecto estuvieron relacionados con el orden que tienen las digráficas de fichas con respecto a las digráficas originales. Por ejemplo, la rejilla dirigida más pequeña cuya gráfica subyacente no es un ciclo ni una trayectoria es $P_2 \square P_3$, y su estudio no revela ninguna información sobre cómo se ven las digráficas de fichas de las rejillas, a diferencia de lo que sucedió cuando se estudiaron los ciclos. A pesar de eso, los resultados obtenidos fueron satisfactorios, ya que se lograron extender varios conceptos de [9], y se hicieron las modificaciones correspondientes para poder trasladar dichos conceptos a digráficas.

Se pueden tomar varios caminos para extender esta tesis. Uno de ellos es mejorar los tiempos de captura presentados en el Capítulo 4, ya sea mejorando los algoritmos presentados o haciendo un análisis más exhaustivo sobre los mismos. También se pueden estudiar las propiedades de las digráficas de fichas de los distintos tipos de rejillas, tomando en cuenta que una vez que se estudien las rejillas rectangulares, solo se necesitan agregar las flechas correspondiente para tener rejillas cilíndricas o toroidales. Estudiar las digráficas de fichas de las rejillas a fondo podría darnos un algoritmo general de persecución sobre ellas, aunque también se podría estudiar el juego sobre clases distintas de gráficas.

Índice alfabético

- adyacente, 1
- algoritmo
 - $F_k(C_n)$, 36
 - $F_k(P_n)$, 38
 - $F_k(T_n)$, 39
 - prismas, 43
 - Reconstrucción de caminos, 14
- árbol, 5
 - dirigido, 5
 - enraizado, 6, 23
- arista, 1
 - transitiva, 3
- automorfismo, 3
- biorietación, 2
- cabeza, 1
- camino, 3
 - cerrado, 3
 - dirigido, 3
- ciclo, 4
 - dirigido, 4
 - hamiltoniano, 5
 - impar, 4
 - par, 4
- cola, 1
- conexa, 4
 - k -conexa, 4
 - débilmente, 4
 - hamiltonianamente, 4
- copia, 3
- diámetro, 4
- digráfica, 1
 - k -conexa, 4
 - circulante, 5
 - de k -fichas, 11
 - semicompleta, 6, 25
- dirregular, 2, 26
- distancia, 4
 - dirigida, 4
- dominar, 1
- exgrado, 1
- exregular, 2
- extremo, 1
 - de un camino, 3
- exvecindad, 1
- exvecino, 1
- flecha, 1
 - simétrica, 1
- flecha
 - transitiva, 3
- fuelle, 2
- fuertemente conexa, 4
- función
 - de parentesco, 6
- grado, 1
- gráfica
 - circulante, 5
 - completa, 6

- de k -fichas, 9
- De Johnson, 25
- orientada, 2
- simple, 1
- subyacente, 2
- hojas, 6
- homomorfismo, 3
- incidir, 1
- inconexa, 4
- ingrado, 2
- irregular, 2
- invecino, 1
- isomorfismo, 3
- nivel, 6
 - en $F_k(T)$, 24
 - en una rejilla, 7
- número
 - de clan, 25
 - de conexidad, 4
 - de policías, 31
- orden, 1
- orientación, 2
- pancíclica, 5
 - vértice, 5
- Policías y Ladrones, 31
- prisma, 7
- producto cartesiano, 7
- radio, 4
- regular, 2
- rejilla, 7
 - cilíndica, 7
 - toroidal, 7
- subdigráfica, 2
- subgráfica, 2
- generadora, 2
- inducida, 2
- sumidero, 2
- superorientación, 2
- tamaño, 1
- tiempo
 - de captura, 31
 - de $F_k(T)$, 38
 - de $F_k(P_n)$, 37
- torneo, 6, 25
 - transitivo, 6
- trayectoria, 3
 - dirigida, 3
 - hamiltoniana, 4
- vecindad, 1
- vecino, 1
- vértice, 1
 - interno, 3
 - transitiva, 3

Bibliografía

- [1] Aigner M, Fromme M. *A game of cops and robbers*. Discrete Applied Mathematics. 1984;8(1):1-12. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166218X84900738>.
- [2] Alavi Y, Behzad M, Lick DR. *Double vertex graphs*. J Combin Inform System Sci. 1991;16(1):37-50.
- [3] Alavi Y, Lick DR, Liu J. *Survey of double vertex graphs*. Graphs and Combinatorics. 2002;18(4):709-15.
- [4] de Alba H, Carballosa W, Leños J, Rivera Martínez LM, et al. *Independence and matching number for some token graphs*. Australasian Journal Of Combinatorics. 2020.
- [5] Audenaert K, Godsil C, Royle G, Rudolph T. *Symmetric squares of graphs*. Journal of Combinatorial Theory, Series B. 2007;97(1):74-90.
- [6] Bondy JA, Murty USR. **Graph Theory**. Springer Publishing Company, Incorporated; 2008.
- [7] Carballosa W, Fabila-Monroy R, Leños J, Rivera LM. *Regularity and Planarity of Token Graphs*. Discussiones Mathematicae Graph Theory. 2017;37(3):573-86.
- [8] Dalfó C, Duque F, Fabila-Monroy R, Fiol MA, Huemer C, Trujillo-Negrete AL, et al. *On the Laplacian spectra of token graphs*. Linear Algebra and its Applications. 2021;625:322-48. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002437952100207X>.
- [9] Fabila-Monroy R, Flores-Peñaloza D, Huemer C, Hurtado F, Urrutia J, Wood DR. *Token Graphs*. Graphs and Combinatorics. 2011 Mayo ;28(3):365–380. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1007/s00373-011-1055-9>.

- [10] Gishboliner L, Steiner R, Szabó T. *Dichromatic number and forced subdivisions*. Journal of Combinatorial Theory, Series B. 2022;153:1-30. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895621000836>.
- [11] Gómez Soto JM, Leños J, Ríos-Castro LM, Rivera LM. *The packing number of the double vertex graph of the path graph*. Discrete Applied Mathematics. 2018;247:327-40. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X18301938>.
- [12] Harary, F. *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company. 1969.
- [13] Jacob, J, Goddard, W, Laskar, R. *Double vertex graphs and complete double vertex graphs*. Congressus Numerantium. 2007;188:161.
- [14] Khatri, D, Komarov, N, Krim-Yee, A, Kumar, N, Seamone, B, Virgile, V, Xu, AnQi. *A study of cops and robbers in oriented graphs*, arXiv:1811.06155,2018
- [15] Leños J, Trujillo-Negrete AL. *The connectivity of token graphs*. Graphs and combinatorics. 2018;34(4):777-90.
- [16] Leños J, Ndjatchi C. *The Edge-Connectivity of Token Graphs*. Graphs and Combinatorics. 2021 mayo;37:1013 1023. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s00373-021-02301-0>.
- [17] Marino MC, Salvi NZ. *Generalizing double graphs*. Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti - Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. 2007;85(2). Disponible en: <https://cab.unime.it/journals/index.php/AAPP/article/view/C1A0702002>.
- [18] Mirafzal SM, Heidari A. *Johnson graphs are panconnected*. Arxiv. 2019. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/1901.07207>.
- [19] Moon JW. *On subtournaments of a tournament*. Canadian Mathematical Bulletin. 1966 Aug;9(3):297-301.
- [20] Nowakowski R, Winkler P. *Vertex-to-Vertex Pursuit In a graph*. Discrete Mathematics. 1983;43:235-9.