



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

**ESTUDIO DEL FLUJO A GRADIENTE DE PRESIÓN PULSÁTIL DE
UNA MEZCLA DE POLÍMEROS EN GEOMETRÍAS CILINDRICAS:
ECUACIÓN REOLÓGICA CONSTITUTIVA DE BURGERS**

TESIS

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO**

PRESENTA:

DERIAN SALTIEL MIRANDA NÚÑEZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

ASESORES

DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

M. EN C. e I.M, DOCTORANTE

LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO 14 de Marzo del 2023





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR

PRESENTE

Comunico usted que el alumno Derian Saltiel Miranda Nuñez con número de cuenta (315053904) de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado en el mes de marzo de 2023 para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)
Secretario:	Dr. Fausto Calderas García
Suplente:	M.C. Doctorante Luis Antonio Ramírez Torres
Suplente:	Dra. Guadalupe Salinas Juárez

El título de la tesis que se presenta es: “Estudio del flujo a gradiente de presión pulsátil de una mezcla polímeros en geometrías cilíndricas: Ecuación reológica constitutiva de Burgers”.

Opción de Titulación:	Tesis convencional
Director de tesis:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Asesor de tesis:	Dr. Fausto Calderas García
Asesor de tesis:	M.C. Doctorante Luis Antonio Torres Ramírez

AGRADECIMIENTOS

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM <<IN102823>> << Modelado Matemático y Simulación Computacional de Fluidos Complejos con Aplicación a Bioingeniería >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación de las líneas de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- Facultad de Estudios Superiores Zaragoza agradezco mi gran universidad que me abrió las puertas al conocimiento, a un sin fin de gratas experiencias, dónde me permitió conocer a mis grandes profesores y a mis mejores amigos hoy colegas. Mi universidad donde pude adquirir grandes conocimientos para mi desarrollo profesional.

Dedicatoria

Este trabajo es dedicado a mi familia, ya que todos han sido participes en mi formación, han estado presentes siempre ofreciéndome el apoyo, esta tesis es el fruto y la suma de cada uno de ustedes.

A mi mamá, con todo el corazón por darme siempre el cariño y la motivación para seguir adelante, nunca podre agradecer tantas cosas que has hecho por mí, por todo lo que me has enseñado siempre para ser mejor persona gracias.

A mis tías, a las que considero también mis madres, Leti, Ale, Pata y Alma, porque con sus palabras siempre lograron motivarme, por brindarme siempre el apoyo para concluir este objetivo en la vida, por el cariño que siempre me han dado, por ello siéntanse orgullosas de este logro ya que también es suyo, gracias.

A mis tíos, quienes siempre han sido un padre para mí, Javier, Martin, Chucho, y Nacho gracias.

A mis primos que son como mis hermanos, agradezco que siempre he contado con su apoyo y han hecho de esta etapa más llevadera, por el ejemplo con que marcaban siempre en mí, gracias.

A Ibor por haber estado siempre para mi mamá y por ser parte de la familia.

Por ultimo y no menos importante, a mi amuleto de la suerte, mi compañero fiel, porque más allá de ser solo una mascota también fuiste mi motor para seguir adelante y terminar esta etapa en mi vida, gracias, Benji.

Índice

Capítulo I.

1.1	Introducción.....	
1.2	Definición de oclusiones centrales y periféricas.....	
1.3	¿Qué es una oclusión central y periférica?.....	
1.4	Aplicaciones (Motivación).....	
1.5	Relevancia.....	
1.6	Antecedentes.....	
1.7	Relevancia de tu trabajo de investigación	
1.8	Hipótesis.....	
1.9	Objetivos.....	
1.10	Distribución de material.....	

Capítulo II. Marco Teórico

2.1	Fluidos estructurales.....	
2.2	Ecuación de continuidad.....	
2.3	Derivada Material.....	
2.4	Estado Estacionario	
2.5	Esfuerzo cortante.....	
2.6	Fluidos Newtonianos.....	
2.7	Fluidos no newtonianos.....	
2.8	Tensor de esfuerzos	
2.9	Viscoelasticidad lineal y no lineal.....	
2.10	Modelos básicos de viscoelasticidad.....	
2.11	Modelo viscoelástico de Maxwell.....	
2.12	Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt.....	
2.13	Modelo de Burgers	

Capítulo III. Geometrías

3.1	Cálculo del Flujo volumétrico de un fluido Newtoniano en capilar	
3.2	Cálculo del flujo volumétrico de un fluido Newtoniano en una corona circular.....	

Capítulo IV. Modelo Físico y Modelado matemático

4.1	Análisis de proceso.....	
4.2	Geometrías.....	
4.3	Ecuaciones Teóricas.....	
4.4	Ecuación reológica de Burgers.....	
4.5	Condiciones de frontera.....	
4.6	Modelado Matemático.....	
4.7	Balance de masa sin reacción química.....	
4.8	Ecuación de movimiento con mecanismos inerciales.....	
4.9	Perfil de velocidades.....	

4.9.1 Ecuación diferencial homogénea	
4.9.2 Solución particular.....	
4.9.3 Condiciones de frontera.....	
4.10 Flujo volumétrico con transformada de Fourier.....	
4.11 Función de transferencia compleja	
4.12 Parámetro Beta.....	
4.12.1 Fluido Newtoniano.....	
4.12.2 Fluido No-Newtoniano: Burgers	
4.13 Cálculo de la función de transferencia para una corona circular.....	
4.14 Flujo volumetrico en una corona circular con mecanismos inerciales.....	

Capítulo V. Variables adimensionales, simulaciones y análisis de resultados.

5.1 Variables Adimensionales.....	
5.2 Grupos adimensionales	
5.3 Simulaciones y análisis de resultados.....	
5.4 Aplicaciones a Sangre humana con bajo contenido de colesterol.....	

Capítulo VI. Conclusiones y trabajo futuro.

6.1 Aportación al conocimiento.....	
6.2 Trabajo futuro.....	

Bibliografía

NOMENCLATURA Y SÍMBOLOS

a	Radio del tubo capilar [m]
G_0	Módulo elástico [Pa]
L	Longitud del capilar [m]
p	Presión [Pa]
r	Coordenada radial [m]
z	Coordenada rectangular [m]
O_η	Operador viscosidad
β	<i>Parametro Betha</i>

Letras griegas

η	Función de viscosidad [Pa s]
$\dot{\gamma}_{ji}$	Escalar rapidez de deformación de i respecto a j [1/s]
λ_j	Tiempo viscoelástico de Jeffrey
σ_{ij}	Componente ij del tensor de esfuerzos [Pa]
θ	Componente angular [1]

Vectores, diadas y tensores

\mathbf{V}	Vector velocidad [m/s]
$\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$	Producto diádico del vector velocidad [m ² /s ²]
\mathbf{D}	Tensor rapidez de deformación [1/s]
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de esfuerzos [Pa]
$\nabla \mathbf{V}$	Tensor gradiente del vector velocidad [1/s]
$\nabla \mathbf{V}^T$	Transpuesta del tensor gradiente del vector velocidad [1/s]
\mathbf{v}	Vector velocidad [m/s]

Operadores diferenciales y otros símbolos

$()^T$	Transpuesta para la matriz $m \times n$ [1]
∇	Operador gradiente (Nabla) [1/m]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]
∇^2	Operador Laplaciano [1/m]

Glosario

Deformación:	Es el cambio de la posición de una coordenada de un sistema con respecto a otra coordenada.
Esfuerzo:	Es la fuerza tangencial aplicada por una determinada área
Esfuerzo en la pared:	Es el esfuerzo cortante evaluado en la frontera del sistema (pared)
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (rapidez de deformación y esfuerzo).
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley de Newton aplicada a un medio contino.
Ecuación de Hagen y Poiseuille:	Es la ecuación que relaciona el flujo volumétrico con el gradiente de presión.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Fluido:	Es aquel sistema físico que al aplicársele un esfuerzo cortante este se deforma continua e irreversiblemente.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante, independiente de la posición y del tiempo.
Fluido newtoniano:	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación
Fluido no-newtoniano:	Fluido que su viscosidad depende de la rapidez con la que es deformado.
Fluido viscoelástico:	Es aquel fluido que tiene una contribución viscosa y otra elástica.
Flujo volumétrico:	Volumen de fluido que pasa por unidad de tiempo
Flujo oscilatorio:	Es el flujo que se origina cuando una fuerza periódica los deforma continua e irreversiblemente
Flujo cortante:	Flujo en el cual una fuerza tangencial deforma continua e irreversiblemente.

Flujo pulsátil:	Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.
Función de transferencia:	Función que relaciona la variable de entrada y la variable de salida en un sistema dinámico
Función estocástica:	Función probabilística que evoluciona en el tiempo.
Gradiente:	Operador matemática espacial que físicamente describe los cambios de la propiedad respecto al espacio.
Modelo de Burgers:	Ecuación reológica viscoelástica lineal que acopla en paralelo la contribución de dos líquidos poliméricos en paralelo y en serie.
Modelo de Maxwell:	Ecuación constitutiva que describe el estado viscoelástico de un sistema en el régimen de rapidezces de deformación bajas (viscoelasticidad lineal).
Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido.
Sangre:	Fluido biológico conformado por un solvente el cual es el plasma y un polímero que es el hematocrito.
Perfil de velocidad:	La distribución de las velocidades dentro de un sistema en función de la coordenada radial.
Rapidez de deformación:	Es la derivada temporal de la deformación de un fluido
Reología:	Ciencia que estudia la deformación y el flujo de materia cuando es sometida a un esfuerzo.
Tensor de esfuerzos:	Es una matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en el cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control
Tiempo de relajación:	Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo de deformación
Tiempo de retardo:	Es el tiempo que le lleva a un sistema para alcanzar un estado de equilibrio y que depende de la razón entre la viscosidad del solvente y viscosidad total del sistema (polímero+solvente).
Viscoelasticidad lineal:	Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta respuestas viscosas y elasticidad.

Viscoelasticidad no lineal: Es la región a medias y altas deformaciones, en donde el fluido presenta respuestas viscosas y elásticas.

Viscosidad: Es una medida de la resistencia a fluir de un material.

RESUMEN

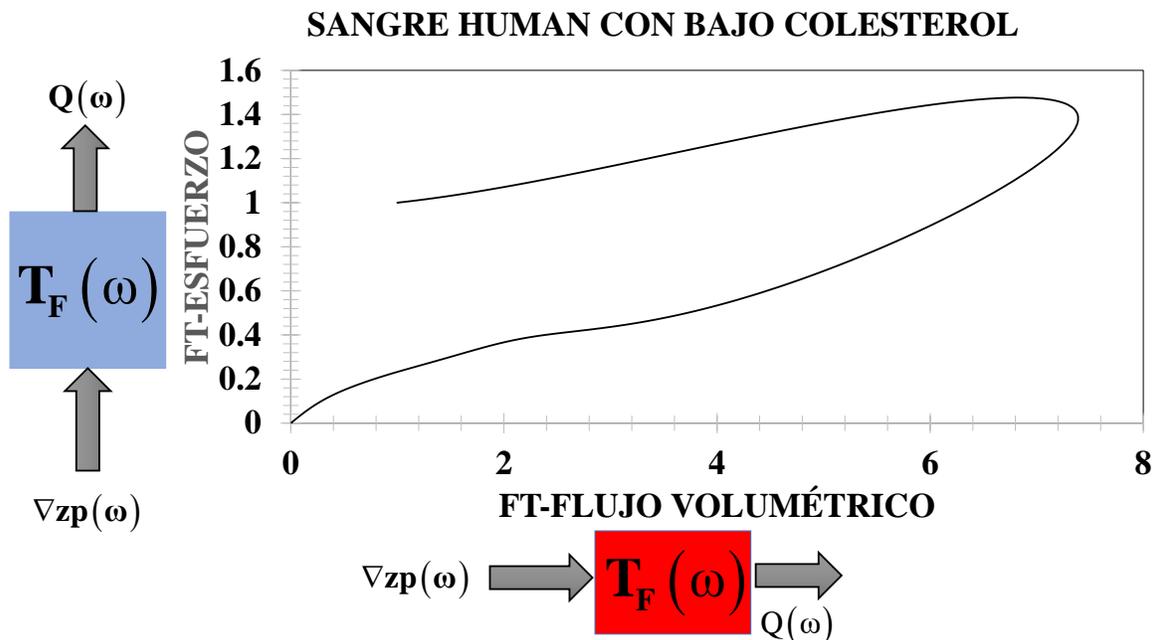
En este trabajo se analiza la reología de un fluido caracterizado por el modelo mecánico de Burgers deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión pulsátil. El sistema consta de dos geometrías cilíndricas las cuales representan una oclusión periférica (capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$) y una oclusión central (cilindros concéntricos de radio R_1 y R_2 respectivamente). Asumiendo que el líquido es incompresible, proceso isotérmico, estado no-estacionario y suponiendo que el campo de velocidades es unidireccional, se obtienen expresiones analíticas en el espacio de Fourier para: (i) el perfil de velocidades, (ii) flujo volumétrico y (iii) esfuerzo en la pared en términos de las propiedades materiales asociadas a los grupos adimensionales que caracterizan al sistema. Los grupos adimensionales que resultan para la descripción matemática de estos fluidos son: (i) El número de Deborah, (ii) El número de Jeffreys y (iii) La memoria asociada al producto de los tiempos de Maxwell de los dos polímeros. El análisis computacional fue realizado con el programa Mathematica. Los resultados computacionales muestran que la parte real, imaginaria y norma de las funciones de transferencia del flujo y la del esfuerzo dependen de las frecuencias naturales del sistema. La función de transferencia que describe la interacción pared-fluido describe una resonancia dominante seguida de un tren de resonancias inducidas por las propiedades viscoelásticas del material. El modelo de Burgers es más robusto lo que implica que puede aplicarse a situaciones reales en la industria. En particular, se aplicó este problema a la descripción en sangre humana de pacientes con un contenido bajo-moderado de colesterol el cual, puede describir una oclusión de tipo periférica en el sistema de estudio. Los resultados obtenidos, en este trabajo, son punto de partida en la creación de anticoagulantes y fluidos que puedan emplearse para enfermedades emergentes y que sean punto de partida en problemas en oclusiones centrales y periféricas en Bioingeniería.

Palabras claves

Flujo pulsátil, Función de transferencia, Oclusión, Ecuación constitutiva, Modelo mecánico, Modelo de Burgers, Esfuerzo, Flujo volumétrico, Frecuencia, Viscoelasticidad.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES



Funciones de transferencia del flujo volumétrico y de la función de transferencia de esfuerzo en función de la frecuencia adimensional para un fluido predominantemente viscoso.

1.1 Introducción

Diversos sistemas biológicos en los que la falta de movimiento de un fluido por la presencia de un obstáculo da como resultado el fallo parcial o total de un proceso **(Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2007)**

En particular, la oclusión de venas y arterias en el cuerpo humano es la principal causa de muchas enfermedades **(Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2007)**. Durante la oclusión de las arterias, la sangre disminuye su velocidad y, en casos críticos, no fluye correctamente **(Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2007)**. La falta de movimiento impide la irrigación que ocasiona la muerte de los tejidos **(Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2007)**.

En trabajos experimentales y teóricos anteriores sobre fluidos viscoelásticos han encontrado que la permeabilidad dinámica puede aumentar órdenes de magnitud a ciertas frecuencias **(Bravo-Gutierrez et al. 2011; Castrejon-Pita et al. 2003; Castro et al. 2008; Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2007; Cuevas y Del Rio 2001; De la Guerra y Corvera-Poire 2022; Del Rio et al. 1988; Flores et al. 2010; Flores et al. 2010; Hernández-Machado y Corvera-Poire 2008; Herrera-Valencia et al. 2022)**

La permeabilidad dinámica es una propiedad intrínseca del medio viscoelástico que confina el fluido y determina la respuesta del sistema a diferentes señales del gradiente de presión **(Bravo-Gutierrez et al. 2011; Castrejon-Pita et al. 2003; Castro et al. 2008; Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2007; Herrera-Valencia et al. 2022)**.

Puede considerarse como una medida de la resistencia al flujo, cuanto mayor es la permeabilidad dinámica, menor es la resistencia al flujo **(Herrera-Valencia et al. 2022)**.

El aumento de la permeabilidad dinámica a ciertas frecuencias sugiere que la magnitud del flujo podría incrementarse impulsando el fluido con un gradiente de presión que contiene la frecuencia que maximiza la permeabilidad dinámica **(Del Rio et al. 1988; Flores et al. 2010; Flores et al. 2010)**. Al imponer un gradiente de presión periódico a la frecuencia que maximiza la permeabilidad dinámica, la magnitud del flujo de un fluido viscoelástico que fluye en un tubo se puede incrementar en gran medida **(Del Rio et al. 1988; Flores et al. 2010; Flores et al. 2010)**. Esto implica que la dinámica del gradiente de presión con una frecuencia elegida adecuadamente proporciona una forma de controlar la magnitud del flujo.

En este trabajo, se estudia el comportamiento del efecto de un líquido viscoelástico deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión pulsátil y su efecto en el flujo volumétrico **(Herrera-Valencia et al. 2022)**. La reología y el flujo es caracterizado por un modelo Bi-modal de Maxwell que se mapea en una clase de modelo de Burgers **(Herrera-Valencia et al. 2022)**. Este sistema se estudia en geometrías cilíndricas: (i) capilar radio $r = a$ y longitud $z = L$ y (ii) cilindros concéntricos de radio $r = R_1$ y $r = R_2$ y longitud $z = L$.

Este estudio permitirá entender sistemas biológicos que pueden ser punto de partida en la bio-ingeniería y en el estudio de enfermedades inducidas por venas obstruidas que están relacionadas con la hipercolesterolemia y ataques al miocardio inducidas por las oclusiones **(Herrera-Valencia et al. 2022)**.

1.2 Definición de oclusiones centrales y periféricas

Las oclusiones centrales y periféricas representan uno de los problemas más difíciles de describir en ingeniería química, debido al comportamiento complejo del flujo de líquidos newtonianos y no newtonianos en estos sistemas (**Colleparado-Guevara y Corvera Poire 2007**).

1.3 ¿Qué es una oclusión central y periférica?

Las oclusiones periféricas, son obstrucciones debido a los minerales que se depositan en las paredes de las geometrías que transportan los fluidos en los sistemas de interés en ingeniería (**Bird et al. 2002; Colleparado-Guevara y Corvera Poire 2007**).

Un ejemplo biológico de una oclusión periférica se presenta en el estudio del hipercolesterolemia en vasos sanguíneos, el calcio se adhiere a las paredes y son los puntos que permiten que el colesterol migre a las paredes, produciendo un engrosamiento en estas (**Moreno et al. 2015**). Por otra parte, las oclusiones centrales describen un sistema en donde hay una obstrucción central, la cual es aproximada mediante dos cilindros concéntricos, en los cuales el líquido de interés fluye por la región de la corona circular (**Colleparado-Guevara y Corvera Poire 2007**).

1.4 Aplicaciones

El flujo de líquidos en estos sistemas ha sido ampliamente estudiado en Bioreología, en biología, en medicina, en el área de liberado de fármacos controlados y drogas experimentales (**Colleparado-Guevara y Corvera Poire 2007**).

Otra aplicación de estos sistemas se ha empleado en la extracción terciaria en yacimientos de petróleo (**Manero et al. 2015**).

En ciencias físicas en el estudio de la permeabilidad magnética y eléctrica, se han calculado expresiones para describir la interacción de materiales con campos magnéticos y eléctricos (**Cuevas y del Rio 2001**).

Otra de las aplicaciones es el estudio de la curvatura promedio en sistemas biológicos que amplifican la respuesta mecánica y resonante en el oído humano (**Herrera-Valencia et al, 2012, 2014, 2018, 2021, 2023**).

1.5 Relevancia: Importancia

Todos estos estudios involucran una propiedad del medio que cuantifica la resistencia a fluir en este, y se conoce como permeabilidad dinámica (**Bravo-Gutiérrez et al. 2008, 2011**). Esta, se define como la propiedad intrínseca que tiene un sistema físico para fluir en este, la ecuación básica que la describe en términos de la ecuación de Hagen y Poiseuille (**Herrera-Valencia et al. 2023**), que relaciona el gradiente de presión (variable de entrada) y el flujo volumétrico (variable de salida).

1.6 Antecedentes

En algunas investigaciones se ha verificado se ha verificado que al imponer un gradiente de presión a la frecuencia que maximiza la permeabilidad dinámica, la magnitud del flujo de un fluido viscoelástico que fluye en un tubo puede incrementarse en gran medida (**Colleparado-Guevara y Corvera-Poire 2007**). Esto implica, que la dinámica del gradiente de presión con la frecuencia elegida correctamente proporciona una forma de controlar la

magnitud del flujo (**Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2007; Castrejon-Pita 2003; Castro 2008**).

Se modelaron dos tipos de oclusiones y muestran que, al conducir el fluido con un gradiente de presión periódico a la frecuencia que maximiza la permeabilidad del sistema obstruido, el flujo puede parcialmente recuperarse sin la eliminación de la obstrucción (**Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2007**). Al compararse los resultados obtenidos se observa que la recuperación de flujo es mayor en el caso de las oclusiones centrales (**Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2007**).

A bajas frecuencias, la parte real de la permeabilidad dinámica del fluido con una oclusión central es mucho menor que la parte real de la permeabilidad dinámica en un tubo sin obstrucciones (**Cuevas-Poire y Hernández-Machado 2010**). Por otro lado, la parte real de la permeabilidad dinámica a la frecuencia de resonancia en una oclusión central es tan grande como la parte real de la permeabilidad dinámica a la frecuencia de resonancia sin obstrucción (**De la Guerra y Corvera-Poire 2022**).

A su vez, se puede ver que para el sistema ocluido la frecuencia de resonancia es más grande que para el sistema sin oclusión (**Del Rio et al. 1998**). El valor máximo de la magnitud del flujo depende de dos cosas: la parte real de la permeabilidad dinámica y el área de sección transversal disponible para flujo (**Del Rio et al. 1998; Flores et al. 2010**).

Entonces, cuando ocurre una obstrucción en un sistema que fluye a la frecuencia de resonancia sin obstrucciones, la disminución del flujo se debe no solo a la reducción del área de la sección transversal disponible para el flujo, sino también debido a la dramática disminución de la permeabilidad en esa frecuencia (**Del Rio et al. 1998; Flores et al. 2010; Hernández-Machado y Corvera-Poire 2008**).

Primero, a bajas frecuencias, la permeabilidad dinámica es mucho menor cuando hay una oclusión que cuando no hay oclusión (**Herrera-Valencia et al. 2023**). Esto se puede entender fácilmente debido a la disminución del espacio de flujo y se ha comprendido durante mucho tiempo en el caso del estado estacionario (**Collepardo-Guevara, Corvera-Poire 2007**).

El segundo efecto, en la estructura máxima de la permeabilidad dinámica se desplaza hacia el lado derecho, lo que implica que el rango de frecuencias en el que la parte real de la permeabilidad dinámica es grande, ocurre a frecuencias más altas para sistemas ocluidos que para los no ocluidos (**Collepardo-Guevara, Corvera-Poire 2007**).

También se ha analizado que, para la misma área obstruida, la frecuencia de resonancia es mucho mayor en una oclusión central que en una oclusión periférica (**Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2007**). Esto se debe a la gran fricción que experimenta el fluido al fluir entre las paredes del tubo y el obstáculo. Los resultados para el flujo después de que ocurre una obstrucción, indican que la disminución del flujo es mayor para las oclusiones centrales que para las oclusiones periféricas (**Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2007**).

En algunos sistemas se ha estudiado la permeabilidad dinámica como una posible explicación del ritmo cardiaco en mamíferos (**Flores et al. 2010**).

En particular, el estudio de la sangre, fluyendo en venas y arterias o en una red de arterias se puede analizar mediante la teoría de control asociada a una variable de entrada, una variable de salida y la función de transferencia correspondiente **(Flores et al. 2010)**.

El corazón que estimula el flujo mediante pulsaciones puede ser considerado como una válvula de desplazamiento positivo y modelada mediante un gradiente de presión pulsátil, el cual deforma continua e irreversiblemente a la sangre como fluido viscoelástico **(Flores et al. 2010)**.

La sangre a su vez, se desplaza y fluye gracias a la frecuencia y se sabe que la frecuencia cardíaca real en reposo de los mamíferos optimiza el flujo en vasos sanguíneos, para así llevar la sangre oxigenada rápidamente lejos del corazón, hacia la cabeza y las extremidades **(Flores et al. 2010)**.

En este trabajo se tomaron datos de distintos mamíferos con diferentes morfologías como son: (i) caballo, (ii) perro, (iii) humano, con un modelo simple reológico analizando la respuesta del sistema a diferentes frecuencias, tanto en reposo como en estado agitado (ejercicio). Además, se analizaron las distintas redes y vasos sanguíneos del cuerpo, aorta, arterias grandes, ramas arteriales principales, ramas terminales, arteriolas y capilares **(Flores et al. 2010)**.

Después del análisis se determinó que la frecuencia cardíaca en reposo no está optimizada para todas las redes sanguíneas del sistema circulatorio, tampoco, para las estructuras pequeñas que constituyen la microcirculación, ni para el flujo en la aorta. En conclusión, parcial, solo estaría optimizado para el flujo en arterias grandes **(J. Flores & Corvera, 2010)**.

Otros autores han trabajado con sistemas en donde los fluidos son viscoelásticos y la geometría es elástica **(Torres et al. 2017)**. Se analizó el comportamiento dinámico de fluidos newtonianos lineales incompresibles en tubos elásticos sujetos a gradientes de presión pulsátil, es decir, gradientes de presión que varían periódicamente en el tiempo con al menos una frecuencia característica, y muestran que la interacción entre la viscosidad del fluido, la elasticidad de la pared y el tamaño característico de los medios confinantes da lugar a una rica fenomenología que incluye resonancias **(Torres et al. 2017)**.

El comportamiento dinámico de los fluidos newtonianos en tubos elásticos donde se ejerce una presión pulsátil, el gradiente de presión adecuado describe la permeabilidad dinámica de un fluido **(Torres et al. 2017)**.

Realizando el análisis se encontró que el modelo de la permeabilidad dinámica es una función no monótona de la frecuencia y presenta una frecuencia de resonancia; además de que la permeabilidad dinámica de un fluido newtoniano para tubos rígidos presenta un decaimiento con respecto a la frecuencia **(Torres et al. 2017)**.

Se concluyó que la permeabilidad dinámica siempre es mayor en un tubo rígido a comparación con respecto a lo estudios sobre flujos en a través de tubos elásticos **(Torres et al. 2017)**. La frecuencia de la resonancia está basada en ciertos parámetros de los tubos, de tal manera que la resonancia llega a desaparecer al haber un cierto radio de este **(Torres et al. 2017)**.

El flujo de un fluido newtoniano en un microcanal rectangular utilizado para microfluidos, que consiste en dos placas planas paralelas entre sí, separados por una cierta distancia que es mucho menor que la longitud de las placas **(Corvera-Poire y Hernández-Machado 2010)**. Al analizar el sistema a distintas condiciones la permeabilidad dinámica de estos microfluidos con el modelo de Navier, determinó que estos están sujetos a los

gradientes de presión no estacionarios, además se observa que en ausencia de deslizamiento, la permeabilidad dinámica de dos microcanales obedecen una relación de escala que se rompe cuando hay deslizamiento (**Corvera-Poire y Hernández-Machado 2010**). Esta conclusión ayuda a conocer mediante estimaciones la longitud si hubiera deslizamiento y prueba la hipótesis de Navier en situaciones dinámicas (**Corvera-Poire y Hernández-Machado 2010**)

El concepto de permeabilidad dinámica ha sido punto de partida para el estudio de la sangre humana en la red arterial del sistema circulatorio humano (**Flores et al. 2010**)

Se calculó el flujo sanguíneo y la presión, ondas y perfiles en la carótida común humana, arteria, aorta torácica superior, bifurcación aórtica, así como los modelos de la arteria de la aorta, y sus ramas más grandes, y se llegó a una solución la cual reproduce la onda de pulsaciones en las redes grandes de arterias (**Flores et al. 2010**).

Para esto se tuvo que analizar esto mediante un modelo GDEM para el flujo sanguíneo en una red vasos elásticos, la cual se descompone en segmentos conectados entre sí por ciertos nodos, y cada segmento es modelado como un tubo deformable que representa un vaso con sangre. Una red genérica de vasos puede tener múltiples entradas y salidas (**Flores et al. 2010**).

Debido a la gran cantidad de redes y características que presenta cada vaso que transporta sangre, se le denominaba un cierto modelo para poderlo resolver y programar con el software “Wolfram Mathematica”, y poder conocer a su vez su comportamiento en el sistema humano de una forma cuantitativa que se asemeje a la realidad (**Flores et al. 2010**).

Otros trabajos, han empleado el concepto de permeabilidad para describir el flujo de un líquido viscoelástico fluyendo en una celda de Hele-Shaw y en sistemas en donde existe una interfase entre un fluido viscoso y uno viscoelástico (**Castro et al. 2008**). Esto conduce a una expresión analítica para la permeabilidad dinámica que tiene máximos que son de varios órdenes de magnitud mayores que la permeabilidad estática (**Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2010**). Dicho esto, se concluyen distintas cosas, una de ellas es que los fluidos cercanos al límite de fluidos newtonianos, decae su frecuencia, además esta siempre es menor o igual que uno (**Castro et al. 2008; Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2010**). También se determinó que si la señal impuesta tiene una frecuencia igual que cero para la cual la permeabilidad dinámica tiene un máximo, la amplitud también tendrá un máximo y las variaciones de tiempo del ancho del dedo será muy grande.

Lo que este resultado significa es que si desplazamos el fluido viscoso a la frecuencia que maximiza la permeabilidad, el fluido fluirá con la menor resistencia posible. Para que existan dedos, el gradiente de presión debe ser negativo en todo momento **Castro et al. 2008; Collepardo-Guevara y Corvera-Poire 2010**). Las señales oscilatorias simples no son posibles ya que la inestabilidad existirá solo durante la mitad del período. Entonces, estamos pensando, por ejemplo, en señales superpuestas a gradientes de presión que son lo suficientemente grandes como para desestabilizar la interfaz. Las simulaciones también predicen que la amplitud de la oscilación decae monótonamente con la frecuencia (**Corvera & Poire, 2004**).

1.7 Relevancia de tu trabajo de investigación

A pesar de todos los intentos en describir las oclusiones centrales y periféricas en sangre, la mayoría de los modelos de estudio no contemplan todas las propiedades características un fluido viscoelástico fluyendo en geometrías cilíndricas: (i) viscosidad, viscoelasticidad, (iii) Tiempo de retardo y (iv) Memoria, etc.

Precisamente, este trabajo de investigación a nivel licenciatura contribuye en esta búsqueda. El estudio de la función de transferencia en sistemas de flujo pulsátil debe de hacerse con modelos más sofisticados, en este caso, estudiaremos un fluido complejo viscoelástico con una modelo de Maxwell Bi-modal que se mapea en un modelo de Burgers. Este modelo acopla dos polímeros en paralelo resultando un modelo cuadrático en el esfuerzo. Este modelo es robusto y contiene los siguientes casos particulares: (i) Maxwell, (iii) Jeffreys, (iii) Newton y (iv) Kelvin-Voight.

1.8 Hipótesis

Si el gradiente de presión pulsátil afecta al flujo volumétrico, este podrá ser cuantificado a través de la función de transferencia compleja en el espacio de Fourier y dependerá de las propiedades materiales a través de los grupos adimensionales.

1.9 Objetivos

Para debatir esta hipótesis, se propondrán los siguientes objetivos:

- a) Estudiar el flujo pulsátil de un líquido viscoelástico fluyendo por un capilar y una corona circular.
- b) Obtener la función de transferencia compleja mediante del gradiente de presión pulsátil y flujo volumétrico mediante la transformada integral de Fourier.
- c) Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar las ecuaciones y obtener las respectivas curvas resonantes.
- d) Comparar las predicciones de nuestras simulaciones con datos reométricos de sangre con hipercolesterolemia.

1.10 Distribución del material

Para desarrollar el trabajo de esta tesis de licenciatura, el material se distribuirá de la siguiente manera:

- En el capítulo 1, se dan los preliminares, introducción, antecedentes, hipótesis y objetivos.
- En el capítulo 2, el marco teórico.
- En el capítulo 3, el cálculo de los flujos volumétricos en capilar y corona circular
- En el capítulo 4, el sistema físico y se presenta el modelado matemático de los sistemas de estudio
- En el capítulo 5, se presentan las simulaciones en el programa Mathematica (licencia UNAM), análisis de resultados, aporte al conocimiento de este trabajo, aplicación a sangre humana, conclusiones y trabajo futuro.
- En el capítulo 6, se presentan las conclusiones, así como el trabajo a futuro y la bibliografía consultada

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

Hooke

G_p

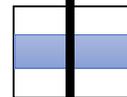


(a)

Sólido elástico de Hooke

Newton

Newton



η_p

(b)

Fluido Newtoniano

En este capítulo presentaremos las bases mínimas que introducirán al lector a los principios mínimos necesarios de este trabajo (**Bird et al. 2002; Herrera-Valencia et al. 2023**). En la primera parte de este capítulo, hablaremos de la ecuación de continuidad y que está basado en los principios de la conservación de la materia sin reacción química (**Herrera-Valencia et al. 2023**). En la segunda parte, estableceremos la ecuación de momento que es un balance de fuerzas y una consecuencia de la segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo (**Bird et al. 2002; Herrera-Valencia et al. 2023**). En la tercera sección se hablará de conceptos como: fluido Newtoniano y no newtoniano. En la última sección se introducirá un modelo bi-modal de Maxwell el cual, se puede mapear en la ecuación constitutiva de Burgers (**Herrera-Valencia et al. 2023**)

2.1 Fluidos estructurados

La principal hipótesis de los fluidos estructurados es que la viscosidad del fluido es igual al número de puntos estructurales o entrecruzamientos físicos al tiempo t (**Herrera-Valencia et al. 2023**). Un ejemplo de este tipo, son los tensoactivos catiónicos conocidos como sistemas micelares tipo gusano (**Manero et al. 2002**)

Cuando la concentración es suficiente grande, varias cadenas de polímero se entrelazan entre si formando una red que confiere una mayor viscosidad y propiedades elásticas a la disolución (**Bird et al. 2002; Manero et al. 2002**)

La resistencia a deformaciones que opone la red tridimensional depende de la cantidad de entrelazamientos físicos entre cadenas, del peso molecular del polímero y de la concentración (**Bird et al. 2002, Capítulo 8**)

El efecto de la estructura se cuantifica a través de los cambios macroscópicos, de la viscosidad, i.e. un fluido con mayor cantidad de puntos estructurales presenta menor fluidez (mayor viscosidad) que aquel con un menor número de puntos estructurales (**Bird et al. 2002; Manero et al. 2002**). Están formados por un componente hidrofílico siendo este la cadena principal y por uno o más grupos hidrofóbicos que se encuentran unidos a la cadena principal (**Bird et al. 2002; Capítulo 8**). Este trabajo estudia este tipo de fluidos estructurados en el régimen de viscoelasticidad lineal tomando en cuenta las contribuciones del solvente y las del polímero.

2.2 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad, para un fluido incompresible, establece que la masa total de un fluido que circula por un tubo, sin pérdidas ni ganancias, se mantiene constante (**Bird et al. 2002**). En otras palabras, la masa se conserva sin cambios a medida que el fluido se desplaza (**Bird et al. 2002**). Un fluido incompresible es aquel cuya densidad permanece aproximadamente constante mientras fluye (**Bird et al. 2002**). Por ejemplo, el agua es un líquido considerado incompresible bajo condiciones estándar de presión y temperatura.

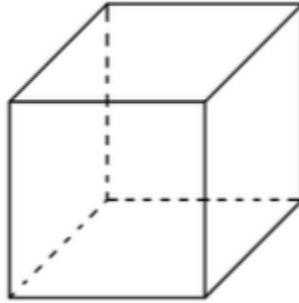


Figura 2.1 Representación de un espacio de control

Basándonos de las coordenadas cartesianas se puede representar dentro del cubo el siguiente plano, con sus respectivas longitudes infinitesimales dx , dy y dz .

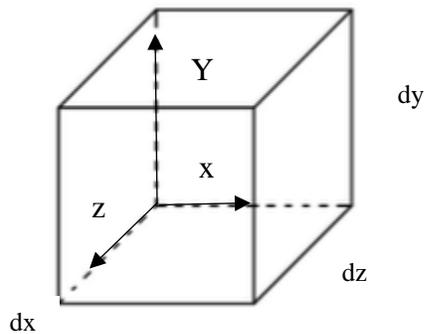


Figura 2.2 Representación del plano en un espacio de control

La ecuación de continuidad se basa en la conservación de masa sin reacción química. Supongamos, que la cantidad de materia que fluye en el cubo de la Fig, (2.2), se puede expresar de la siguiente manera:

$$\{\text{Entrada de materia al elemento de control}\} - \{\text{Salida de materia al elemento de control}\} = \{\text{Acumulación}\}$$

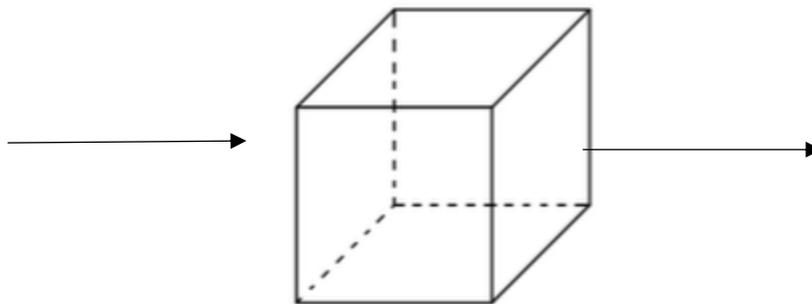


Figura 2.3 Dirección en la que fluye la masa en el eje x

Suponiendo que la masa fluye de lado izquierdo a lado derecho del cubo en el eje x, se sabe que el flujo es igual a $\dot{m} = \rho * Q$ donde ρ es la densidad del fluido y Q el caudal volumétrico, dará como resultado la tasa de flujo masico en esa dirección. Por tanto $\dot{m} = \rho \left| v_x \right| dx dy dz$ que se traduce como, el flujo masico será igual a la densidad en alguna posición arbitraria por la velocidad en algún punto arbitrario, multiplicado por el área de sección transversal.

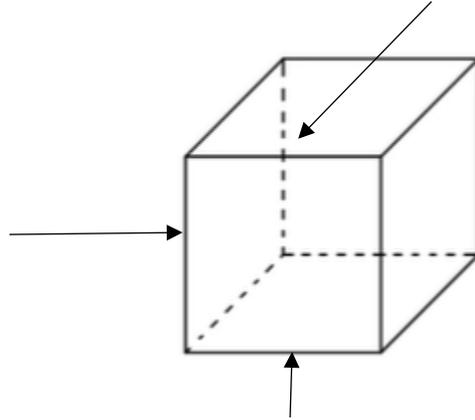


Figura 2.4 Direcciones en las que es posible fluir (x, y, z)

Realizando un balance dentro del cubo en todas las direcciones la ecuación es representada de la siguiente manera:

$$\dot{m} = \rho \left| v_x \right| dx dy dz + \rho \left| v_y \right| dx dz + \rho \left| v_z \right| dx dy \quad (2.3)$$

Para representar las entradas y salidas se plantea de la siguiente manera

$$\dot{m}_{entrada} = \rho v \left| v_x \right| dx dy dz + \rho v \left| v_y \right| dx dz + \rho v \left| v_z \right| dx dy \quad (2.4)$$

$$\dot{m}_{salida} = \rho v \left| v_{x+\Delta x} \right| dx dy dz + \rho v \left| v_{y+\Delta y} \right| dx dz + \rho v \left| v_{z+\Delta z} \right| dx dy \quad (2.5)$$

La masa es igual a:

$$masa = \rho * dV \text{ o } dx dy dz \quad (2.6)$$

La cual puede ser representada de la siguiente manera:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d\rho}{dt} dx dy dz \quad (2.7)$$

Sustituyendo las ecuaciones en $\dot{m}_{entrada}-\dot{m}_{salida}$ tiene como resultado:

$$\frac{d\rho}{dt} dx dy dz = \rho v \left| v_x \right| dx dy dz + \rho v \left| v_y \right| dx dz + \rho v \left| v_z \right| dx dy - \rho v \left| v_{x+\Delta x} \right| dx dy dz - \rho v \left| v_{y+\Delta y} \right| dx dz - \rho v \left| v_{z+\Delta z} \right| dx dy \quad (2.8)$$

Por tanto, la masa de entrada menos la masa de salida es igual a la velocidad a la que se acumula la masa dentro del volumen de control. Si se divide la ecuación entre los términos $dx dy dz$

$$\frac{\frac{d\rho}{dt}dxdydz}{dxdydz} = \frac{\rho v|_x dydz + \rho v|_y dx dz + \rho v|_z dx dy - \rho v|_{x+\Delta x} dydz - \rho v|_{y+\Delta y} dx dz - \rho v|_{z+\Delta z} dx dy}{dxdydz} \quad (2.9)$$

Queda de la siguiente manera:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho v|_x - \rho v|_{x+\Delta x}}{dx} + \frac{\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y}}{dy} + \frac{\rho v|_z - \rho v|_{z+\Delta z}}{dz} \quad (2.10)$$

Dado que son longitudes diferenciales, y los límites para dx, dy y dz se acercan a 0 se obtiene la ecuación de continuidad en su forma tradicional

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d(\rho v)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho v)}{dz} = 0 \quad (2.11)$$

Algunas simplificaciones comunes para esta ecuación son las siguientes:

- Si el flujo es constante entonces la densidad no cambiara con respecto al tiempo

$$\cancel{\frac{d\rho}{dt}} + \frac{d(\rho v)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho v)}{dz} = 0 \quad (2.12)$$

- Si el fluido es incomprensible entonces la densidad no es función de x, y, o z. La densidad no cambiara con respecto al tiempo

$$\cancel{\frac{d\rho}{dt}} + \frac{d(\rho v)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho v)}{dz} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{d(\rho v)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho v)}{dz} = 0 \quad (2.14)$$

Para ver una deducción de la ecuación de continuidad por el teorema integral de la divergencia, consultar los libros de **Bird et al, (2002)** y el libro de **Herrera-Valencia et al. (2023)**

2.3 Derivada Material

Tasa de cambio temporal debido al movimiento de un fluido de un lugar a otro en cualquier campo de flujo como temperatura, presión, etc (**Bird et al. 2002**).

$$\frac{DT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (v * \nabla) \quad (2.15)$$

$$\frac{DT}{dt} = u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.16)$$

2.4 Estado Estacionario

Un estado estacionario, es aquel estado de un proceso o de un sistema en estudio en donde los parámetros a estudiar no varían a través del tiempo, es decir, no presentan cambios a medida que pasa el tiempo (Bird et al. 2002, Macosko et al. 1987; Herrera-Valencia et al. 2023)

2.5 Esfuerzo cortante

Las fuerzas aplicadas a un elemento estructural pueden inducir un efecto de deslizamiento de una parte de este con respecto de otra (Esfuerzo cortante). En este caso, sobre el área de deslizamiento se produce un esfuerzo cortante σ (Bird et al. 2002); Dicho esfuerzo puede calcularse de la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.17)$$

Donde F corresponde a la fuerza y A el área que es sometida a esfuerzo cortante (Bird et al. 1977). Existen dos tipos de fuerza, las externas o de volumen, que son aquellas que actúan sobre el elemento material de manera global, con una magnitud proporcional a la cantidad de masa, y entre las cuales se encuentran las fuerzas gravitacionales y las magnéticas. Por otro lado, se encuentran las fuerzas internas o de superficie o contacto, que son proporcionales a la cantidad de superficie del elemento material, como, por ejemplo, la presión (Bird et al. 1977; Bird et al. 2002)

2.6 Fluidos Newtonianos

Un fluido newtoniano es aquel que no importa la rapidez con la que sea deformada, su viscosidad permanecerá constante (Bird et al. 1977). Físicamente son sustancias con bajo peso molecular como: (i) Agua y solventes orgánicas. Matemáticamente, son aquellos que cumplen con la Ley de viscosidad de Newton. Para coordenadas rectangulares:

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad \mu \neq \mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right) \quad (2.18)$$

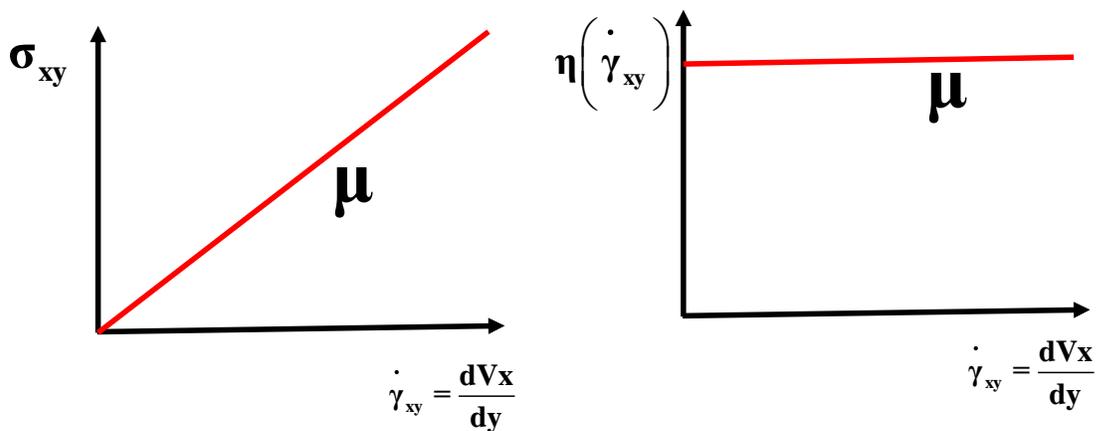


Figura 2.5 Fluidos Newtonianos

proporcional a la rapidez de deformación y la pendiente de dicha recta es la viscosidad (Bird et al. 1988). La viscosidad μ solo es función de la temperatura (Herrera Valencia et al. 2023). La magnitud de la rapidez de deformación $\frac{dv_x}{dy}$ no tiene ningún efecto sobre la magnitud de la viscosidad.

2.7 Fluidos no newtonianos

Los fluidos no-newtonianos son aquellos que dependen de la rapidez de deformación y que no satisfacen la ecuación de Newton (Bird et al. 1977; Bird et al. 2002; Herrera-Valencia et al. 2023).

$$\sigma_{yx} \neq \mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right) \quad \sigma_{yx} \neq \eta \left(\frac{dv_x}{dy} \right) \quad (2.19)$$

Donde η se conoce como la viscosidad aparente, que puede estar en función de la rapidez de deformación:

$$\eta = \eta \left(\frac{dv_x}{dy} \right) \quad \text{Si } \eta \neq \eta \left(\frac{dv_x}{dy} \right) \quad (2.20)$$

Es importante clasificar los fluidos no newtonianos en independientes del tiempo o dependientes del tiempo (Bird et al. 1977, 2012; Herrera-Valencia et al. 2022). Como su nombre lo dice, los fluidos independientes tienen una viscosidad que no varía con el tiempo, aunque se le esté aplicando algún esfuerzo cortante (Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). Sin embargo, la viscosidad de los fluidos dependientes del tiempo si varía el σ_{xy}

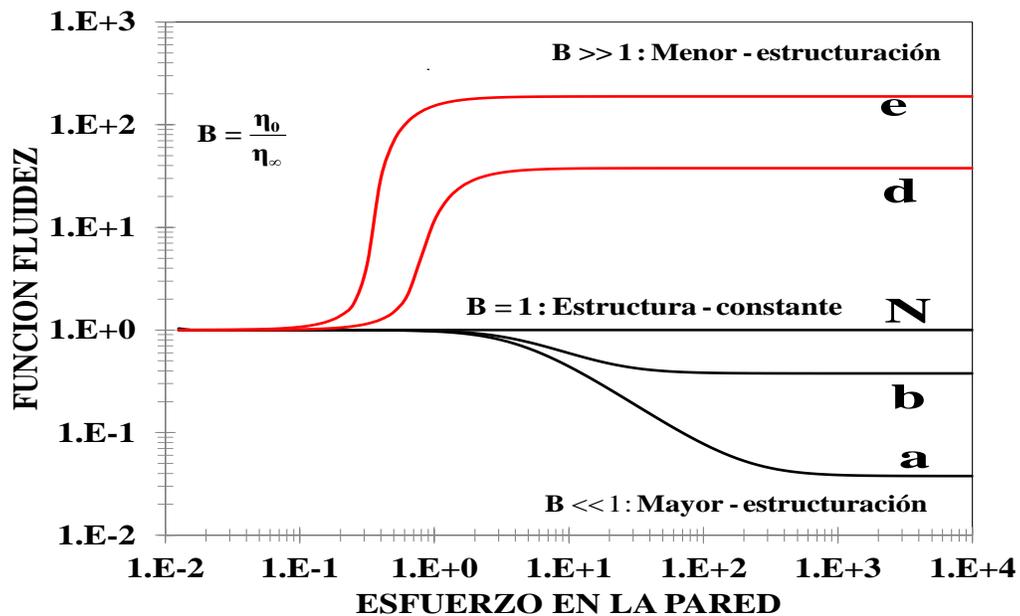


Figura 2.6 Función fluidez aparente vs rapidez de deformación. Se observa que la fluidez aumenta con respecto al esfuerzo en la pared. Un fluido Newtoniano, tiene un comportamiento constante. Un fluido engrosante aumenta su viscosidad y por lo tanto su fluidez aparente decrece.

2.8 Tensor de esfuerzos

El tensor de esfuerzos describe la distribución de los esfuerzos en todas las direcciones del espacio en cualquier parte del elemento material (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). El tensor de segundo orden simétrico está constituido por nueve elementos (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023).

La notación T_{xy} indica como se aplica el esfuerzo. El subíndice x indica la dirección de la transferencia de momento y el índice y está asociada a la velocidad (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). Para ese caso, la dirección la dirección de la fuerza es en y y dicha fuerza es aplicada a una superficie cuya normal apunta en x . Los esfuerzos con subíndices iguales se conocen como esfuerzos normales o perpendiculares.

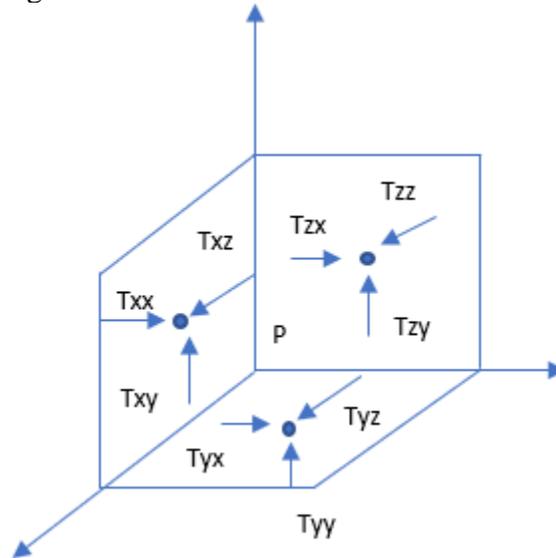


Figura 2.7 Componentes del esfuerzo que actúan sobre los planos

2.9 Viscoelasticidad lineal y no lineal

Cuando materiales como la seda, la goma de caucho, las resinas, entre otros materiales, fueron sometidas a una fuerza, ocurre una deformación instantánea (como se esperaría que ocurriera para un sólido de Hooke), seguida de una deformación continua (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). Cuando la carga es removida, parte de la deformación se recupera instantáneamente, pero el resto se recupera con el tiempo. Estas características de un comportamiento viscoelástico (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). Observe en la Fig. (2.8), si un líquido newtoniano es sujeto a un aumento en deformación, el esfuerzo se relaja instantáneamente a cero tan pronto como la deformación llegue a ser constante “c”. Un sólido elástico no mostrara relajación, ya que almacena la energía por dicha deformación “b.” En cambio, un sólido o líquido viscoelástico muestra relajación de esfuerzos sobre un tiempo determinado “d”. En un líquido viscoelástico el esfuerzo se relaja a cero, mientras un sólido de este tipo se aproxima asintóticamente a un esfuerzo de equilibrio (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023).

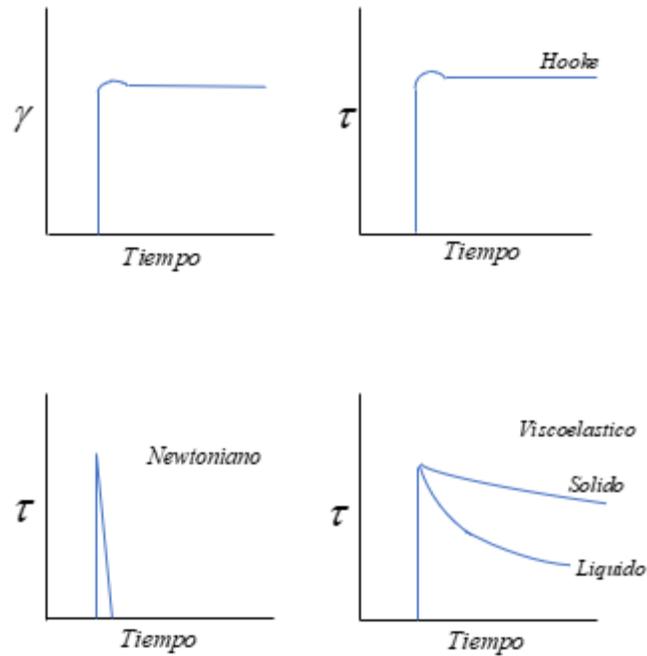


Figura 2.8 Comportamiento del esfuerzo en función del tiempo aplicando una deformación constante para un líquido viscoso, un sólido de Hooke y una sustancia viscoelástica

Una prueba similar se realiza, pero ahora se aplica por determinado tiempo un esfuerzo. Si se ejerce un esfuerzo sobre un sólido-elástico este se deforma hasta que la fuerza cesa y la deformación vuelve a su valor original “a” (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). Por otra parte, si un esfuerzo es aplicado a un fluido viscoso este se deforma, pero no recupera nada de lo que se deforma (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). Un comportamiento intermedio es el viscoelástico, en la deformación del cuerpo sobre el que se aplica el esfuerzo tiende a regresar a su valor original, pero nunca llega dicho valor (disminución exponencial de la deformación).

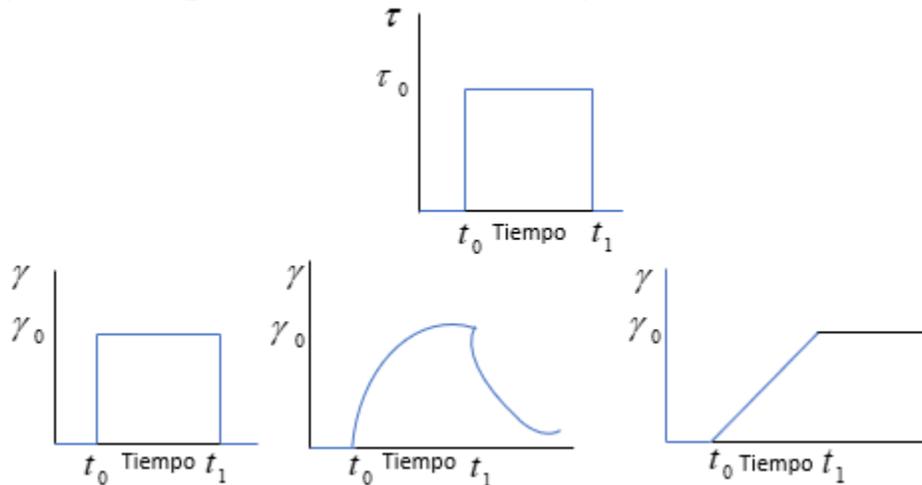


Figura 2.9 Comportamiento de γ en función del tiempo aplicando un esfuerzo constante para un sólido de Hooke, una sustancia viscoelástica y un líquido viscoso

2.10 Modelos básicos de viscoelasticidad

Los materiales poliméricos ofrecen una respuesta dual, elástica y viscosa (Bird et al. 1977). Por un lado, presentan una deformación inmediata, como consecuencia de la aplicación de una carga sobre ellos, y una deformación dependiente del tiempo como respuesta a la aplicación de una carga constante en el tiempo (Bird et al. 1977; 2002).

. Esta deformación creciente con el tiempo se conoce como fluencia viscoelástica y puede ser significativa incluso a temperatura ambiente, tal y como se observa en materiales viscoelásticos como la maicena o siliconas que son capaces de reaccionar de forma distinta en función de la velocidad a la cual se le apliquen las cargas (Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). En un material elástico cuando se aplica una carga y se mantiene constante, la deformación es instantánea y proporcional a la carga aplicada (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). Este es el comportamiento que tradicionalmente se ha representado mediante un muelle o resorte, cuyo comportamiento se rige mediante la ley de Hooke Ec. (2.9a), donde σ representa la tensión aplicada, ε representa la elongación y la constante de proporcionalidad viene definida por ξ . Según la Ec. (2.9a), la deformación en un elemento puramente elástico es inmediata y no depende de la variable tiempo

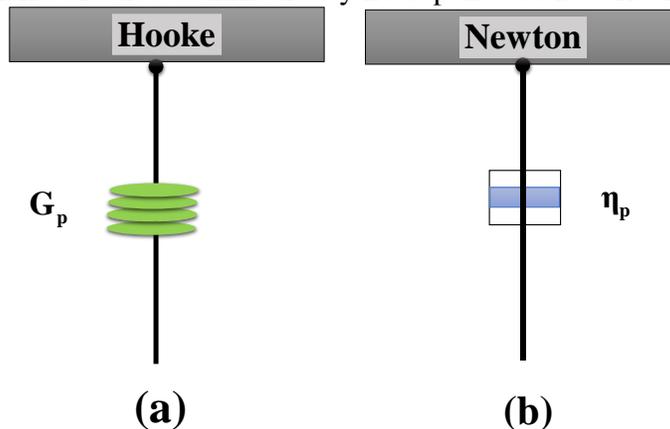


Fig 2.10 Representación esquemática del elemento físico representativo del comportamiento de un a) solido-elástico–muelle o resorte y b) líquido viscoso–embolo o pistón.

$$\sigma = \xi \cdot \varepsilon \quad (2.21a)$$

Por el contrario, en un material puramente viscoso (fluido newtoniano), la deformación no es instantánea; es decir, la respuesta del material va a depender del tiempo (Bird et al. 1977). Hay que tener en cuenta que esta deformación no es reversible o recuperable (Bird et al. 1977; 2002). Tradicionalmente este tipo de comportamiento viscoso se ha representado mediante un embolo con un fluido en su interior, cuyo comportamiento se rige por la ley de Newton (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022). Según esta expresión, la tensión aplicada (σ) es proporcional a velocidad de deformación ($d\varepsilon/dt$) y la constante de proporcionalidad viene representada por la constante viscosa del fluido en el interior del embolo (η) (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023).

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.21b)$$

Por lo tanto, para poder explicar matemáticamente como va a ser el comportamiento viscoelástico, se requiere la combinación de ambos elementos. Cada uno de los elementos, se caracteriza por un parámetro o constante del elemento. Así pues, la constante elástica del modelo elástico se representa como (ξ) y la constante viscosa del elemento viscoso se representa como (η). Así pues, al combinar estos dos elementos básicos en serie o en paralelo, se obtienen dos modelos simples que contemplan, simultáneamente, un comportamiento elástico y uno viscoso (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023).

2.11 Modelo viscoelástico de Maxwell

El modelo de Maxwell considera que el comportamiento de un polímero viscoelástico viene definido por una combinación de un elemento elástico y un elemento viscoso acoplados en serie (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023).

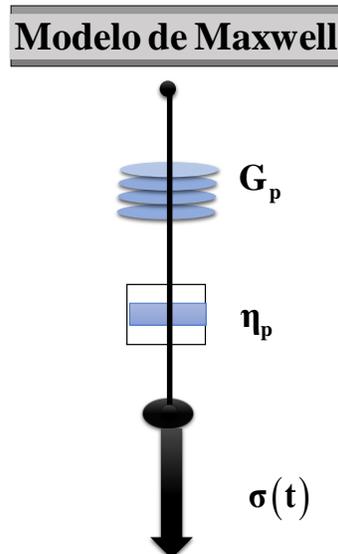


Figura 2.11 Modelo viscoelástico de Maxwell

Al aplicar una fuerza (o tensión si se considera el área) sobre un polímero, este se comportará de forma dual (Bird et al. 1977; 2002). Por un lado, ofrecerá una deformación o alargamiento instantáneo definido por la ley de Hooke (Bird et al. 1977; 2002). Esta respuesta elástica se produce de forma inmediata y no cambia con el tiempo (Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). No obstante, como el polímero también presenta una naturaleza de líquido viscoso, la deformación ira incrementando con el paso del tiempo según indica la ley de Newton para fluidos newtonianos (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). En este sentido, la variación de la deformación con el tiempo será proporcional a (σ/η) (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). Hay que tener en cuenta que dado el acoplamiento en serie de ambos componentes (elástico o elemento 1 y viscoso o elemento 2), la deformación total del polímero (ϵ) será la suma de la deformación puramente elástica (ϵ_1) y la componente viscosa (ϵ_2) véase la Ec. (2.22). Como se

intuye, la deformación elástica (ϵ_1) será independiente del tiempo mientras que la deformación viscosa (ϵ_2) será creciente con el tiempo.

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (2.22)$$

Por otra parte, las tensiones, al estar conectadas en serie serán idénticas para ambos elementos (condiciones de iso-tension):

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (2.23)$$

Si se tiene en cuenta la variable tiempo, que es lo que se pretende analizar en este tipo de problema, y se despejan las deformaciones correspondientes al elemento elástico Ec. (2.9a) y elemento viscoso Ec. (2.21b) con sus correspondientes leyes se tiene que:

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{1}{\xi} \frac{d\sigma_1}{dt}. \quad (2.24a)$$

$$\frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{1}{\eta} \sigma_2. \quad (2.24b)$$

Derivando la Ec. (2.22) con respecto al tiempo, se tiene:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_1}{dt} + \frac{d\epsilon_2}{dt} \quad (2.25)$$

Substituyendo las Ecs. (2.24) y (2.25), y considerando que las tensiones son las mismas, se tiene la expresión general del modelo viscoelástico de Maxwell:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{\xi} \left(\frac{d\sigma_1}{dt} \right) + \frac{1}{\eta} \sigma_2 = \frac{1}{\xi} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma \quad (2.26)$$

La ecuación constitutiva de Maxwell (Ec. 2.26), nos da una representación matemática del comportamiento viscoelástico de un material complejo, viscoso y elástico.

2.12 Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt.

En esta ecuación, se considera el comportamiento viscoelástico de un polímero como el descrito por un acoplamiento en paralelo de un embolo y un resorte tal y como se muestra en la Fig. (2.12)

Modelo de Kelvin - Voigt

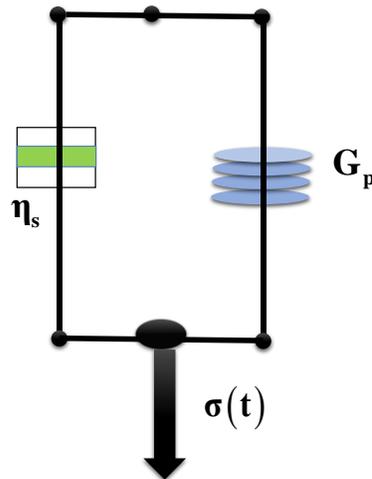


Figura 2.12 Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt

En esta configuración hay que tener en cuenta que, al aplicar una tensión al polímero, parte de la energía será almacenada por el muelle y el resto se disipará progresivamente al desplazarse el embolo, lo que motiva una deformación dependiente del tiempo (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). Al cesar la carga, se recuperará la forma original en función de la energía que se había quedado almacenada en el muelle, pero no así en la del embolo (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023). Las condiciones de contorno que derivan del acoplamiento en paralelo en el modelo de Kelvin-Voigt son dos (Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023).

Por una parte, las tensiones soportadas por el material plástico serán la suma de la tensión en el muelle (σ_1) y la tensión en el embolo (σ_2) tal y como se muestra en la Ec. (2.15) y, por otra parte, la deformación de los dos elementos será idéntica, puesto que están conectados en paralelo (condiciones de isodeformación) Ec. (2.16):

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad 2.27$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad 2.28$$

Tomando como referencia la expresión de la aditivita de las tensiones Ec. (2.27), teniendo en cuenta la variable tiempo y despejando las tensiones de la parte elástica —Ley de Hooke, Ec. (2.28) y la parte viscosa Ley de Newton, Ec. (2.21b)—, se obtiene la expresión general del Modelo de Kelvin-Voigt.

$$\sigma = \xi \varepsilon_1 + \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \xi \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad 2.29$$

2.13 Modelo de Burgers (Maxwell Bimodal)

Como ninguno de los modelos anteriores explica con un alto grado de fiabilidad los fenómenos ligados a la naturaleza viscoelástica de los polímeros, surge el modelo de Burgers, el cual combina en serie un sub-elemento de Maxwell con uno de Kelvin-Voigt (**Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023**). Este modelo combinado predice de manera más real el comportamiento viscoelástico de los materiales poliméricos (**Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023**), y la deformación total es la suma de las deformaciones sufridas, por un lado, en el sub-elemento de Maxwell, y por otro, en el sub-elemento de Kelvin-Voigt (**Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023**).

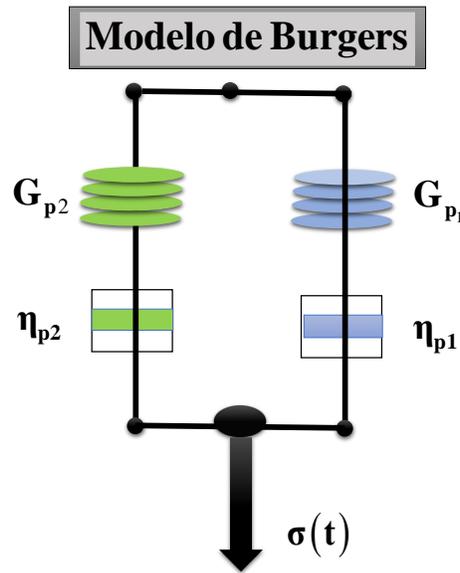


Figura 2.13 Ilustra el comportamiento mecánico del sistema en paralelo en donde se tienen dos configuraciones de Maxwell acopladas y generan una ecuación análoga al modelo de Burgers

El esfuerzo total del sistema está representado con la siguiente ecuación:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (2.30)$$

$$\sigma_1 + \lambda_1 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} \right) = \eta_1 \gamma \quad (2.31a)$$

$$\sigma_2 + \lambda_2 \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} \right) = \eta_2 \gamma \quad (2.31b)$$

Al factorizar σ_1 y σ_2 (2.32a)

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_1 = \eta_1 \gamma$$

$$\left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_2 = \eta_2 \gamma \quad (2.32b)$$

Despejando σ_1 y σ_2 (2.33a)

$$\sigma_1 = \frac{\eta_1 \gamma}{1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\sigma_2 = \frac{\eta_2 \gamma}{1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}} \quad (2.33b)$$

Sustituyendo la Ec. (2.33a) y (2.33b) en la Ec.(2.30)

$$\left(\sigma = \frac{\eta_1 \dot{\gamma}}{1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}} + \frac{\eta_2 \dot{\gamma}}{1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}} \right) \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2.34)$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma = \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \eta_1 \dot{\gamma} + \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \eta_2 \dot{\gamma}' \quad (2.35)$$

$$\left(1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial}{\partial t} + (\lambda_1 \lambda_2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma = (\eta_1 + \eta_2) \left[1 + \frac{\lambda_2 \eta_1 + \lambda_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \dot{\gamma}' \quad (2.36)$$

Definiendo el operador viscosidad de Burgers como el cociente entre el esfuerzo y la rapidez de deformación $\frac{\sigma}{\dot{\gamma}'}$ (**Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022, 2023**).

$$O_\eta = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}'} = \sum \eta \frac{1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \sum \lambda \frac{\partial}{\partial t} + \Pi \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2}} \quad (2.37)$$

En donde, se han definido la memoria del sistema como:

$$\Pi \lambda = \lambda_1 * \lambda_2 \quad (2.38)$$

La viscoelasticidad total (o relajación del sistema)

$$\sum \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (2.39)$$

La viscosidad total

$$\sum \eta = \eta_1 + \eta_2 \quad (2.40)$$

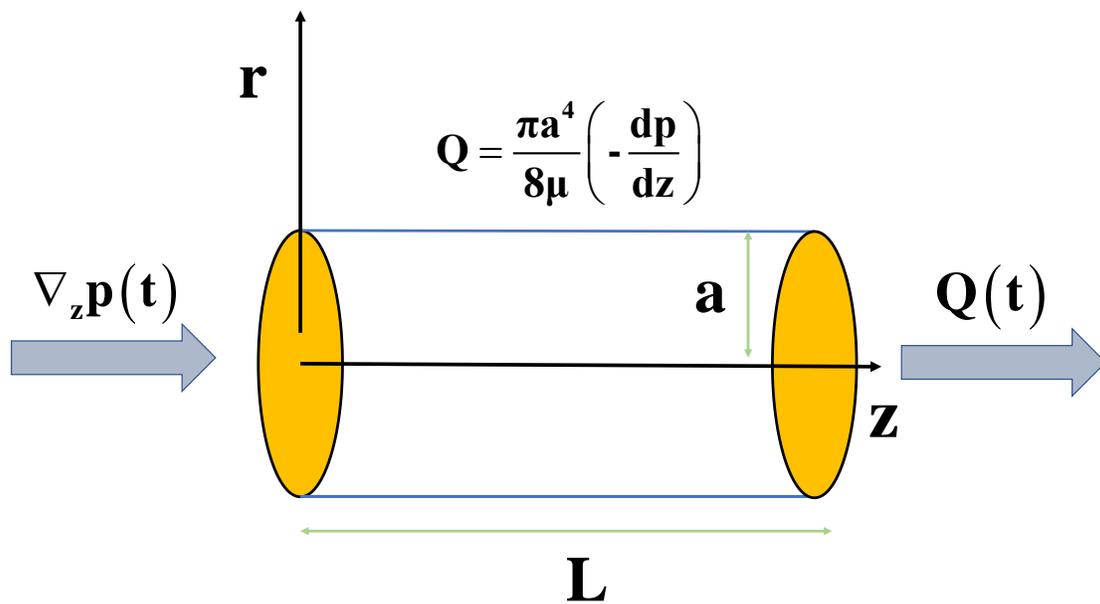
Finalmente, el tiempo de retardo el cual es un promedio ponderado de los tiempos de relajación

$$\lambda_j = \frac{\lambda_2 \eta_1 + \lambda_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \quad (2.41)$$

En este capítulo se presentaron las bases mínimas que introducirán al lector a los principios mínimos necesarios de este trabajo (**Bird et al. 1977**). En la primera parte, se habló de la ecuación de continuidad y que está basado en los principios de la conservación de la materia (**Bird et al. 1977; 2002**). En la segunda parte se estableció la ecuación de momento que es un balance de fuerzas y una consecuencia de la segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo (**Bird et al. 1977; 2002, Herrera-Valencia et al. 2022**). En la tercera sección se habló de conceptos como: fluido Newtoniano y no Newtoniano. En la última sección se introdujo al modelo de Burgers que es una combinación de dos elementos de Maxwell en paralelo.

CAPÍTULO III

HAGEN Y POISEUILLE



3.1 Calculo del flujo volumétrico de un fluido Newtoniano en capilar

En esta sección se calcula el flujo volumétrico asociado a una geometría capilar de radios mayor a y longitud L respectivamente. Se presenta un esquema del problema de estudio en la Fig. 3.1

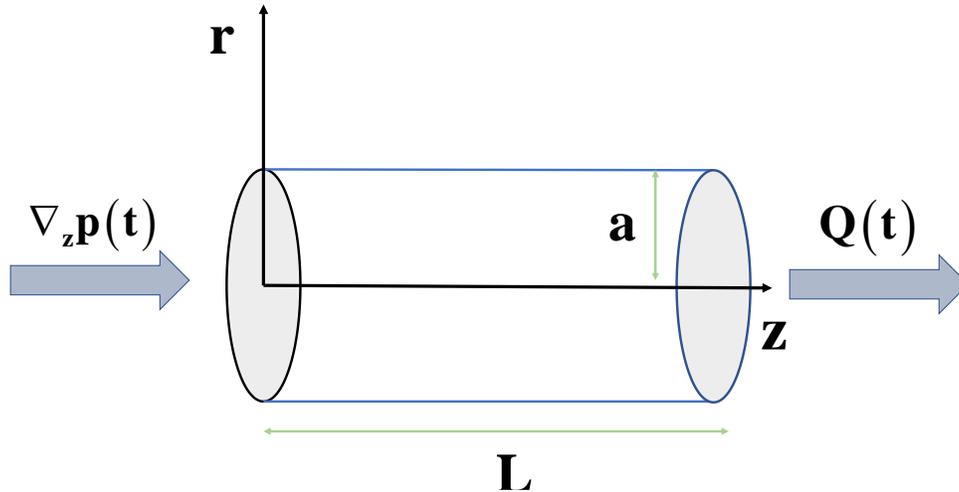


Figura 3.1 Ilustra el Capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. Se supone que el fluido es incompresible, isotérmico y newtoniano.

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (3.1)$$

Identidad Vectorial

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{F} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (3.2)$$

Se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v})) \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \rho \cdot \mathbf{v} - \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (3.3b)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3.3c)$$

Hay que recordar que la derivada material es:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (3.4)$$

Por tanto, se tiene que

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3.5)$$

No es función de la posición ni del tiempo

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \rightarrow \rho \neq \rho(r,t) \quad (3.6)$$

Divergencia del campo de velocidades es 0

$$(\nabla * v) = 0 \text{ Flujo solenoidal} \quad (3.7)$$

La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas se escribe de la siguiente manera

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

El flujo va en dirección de z por tanto

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

Entonces

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.10)$$

La velocidad no es función de z por tanto $V_z = \text{constante} \neq f(z)$.

Asumiendo que el vector de velocidad \mathbf{V} en el sistema está dado por:

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z(r, \theta, z, t)) \quad (3.11)$$

Esto implica que el campo de velocidades no depende de la coordenada axial z, y solo dependería de las coordenadas angulares θ y r respectivamente.

Entonces el campo de velocidades se puede expresar de la siguiente manera:

$$V_z = \underbrace{V_z(r, \theta, z, t)}_{\text{No-depende de } z} = V_z(r, \theta, t) \quad (3.12)$$

Además, si consideramos estado estacionario i.e. ninguna variable dinámica o intrínseca del sistema depende del tiempo, i.e.

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = 0 \Rightarrow V_z \neq V_z(t) \quad (3.13)$$

Físicamente, la ecuación anterior implica que los perfiles de velocidad se encuentran desarrollados y no dependen del tiempo.

$$V_z = \underbrace{V_z(r, \theta, t)}_{\text{No-depende de } t} = V_z(r, \theta) \quad (3.14)$$

Finalmente, la última hipótesis que postulamos en este sistema es la de la simetría cilíndrica es decir que el campo de velocidades no depende del ángulo polar θ .

$$V_z = \underbrace{V_z(r, \theta)}_{\text{No-depende de } \theta} = V_z(r) \quad (3.15)$$

Por lo tanto, en flujo laminar, isotérmico incomprensible, estacionario y en coordenadas cilíndricas, el campo de velocidades solo depende de la coordenada radial r.

$$\rho \left(\frac{DV}{Dt} \right) = -\nabla P + \nabla * \sigma + \rho g \quad (3.16)$$

Descomponiendo la derivada material

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V * \nabla V \right) = -\nabla P + \nabla * \sigma + \rho g \quad (3.17)$$

Donde

- $V * \nabla V =$ Aceleracion convectiva(movimiento del fluido)
- $-\nabla P + \nabla * \sigma + \rho g =$ Fuerzas de superficie
- $\frac{\partial V}{\partial t} =$ velocidad o aceleracion instantanea
- $\rho g =$
La fuerza de volumen se aproxima a 0 ya que el sistema es en un eje horiozontal
- $-\nabla P =$ El fluido solo se mueve a un gradiente de presion

Aproximando con Navier-Stokes

$$\sigma = 2\mu D \quad (3.18)$$

donde

$$D = \frac{1}{2}(\nabla V + \nabla V^T) = \text{Tensor rapidez de deformacion}$$

Para llegar a la ecuación de Navier-Stokes de un fluido Newtoniano

$$\rho \left(\frac{DV}{Dt} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 V + \rho g \quad (3.19)$$

De acuerdo con el planteamiento del problema la derivada material y los términos gravitacionales son igual a cero

$$\rho \left(\frac{DV}{Dt} \right) = 0 \quad (3.20a)$$

$$\rho g = 0 \quad (3.20b)$$

Solo quedan los siguientes términos:

$$-\nabla P_z + \mu \nabla^2 V = 0 \quad (3.21)$$

Descomponiendo la ecuación se obtiene lo siguiente:

$$\frac{1}{\mu} \nabla P_z = \nabla^2 V \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla P_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right) \quad (3.23)$$

Reagrupando y resolviendo el sistema

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right) = \frac{1}{\mu} \nabla P_z \quad (3.24a)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{\nabla P_z}{\mu} \int r \partial r \quad (3.24b)$$

$$r \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{\nabla P_z}{\mu} \left(\frac{r^2}{2} \right) + C_1 \quad (3.24c)$$

$$\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{\nabla P_z}{2\mu} (r) + \frac{C_1}{r} \quad (3.24d)$$

Integrando nuevamente

$$\int \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{\nabla P_z}{2\mu} \int r dr + C_1 \int \frac{dr}{r} \quad (3.25a)$$

$$V_z = \frac{\nabla P_z r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (3.25b)$$

Aplicando las condiciones

- $V_z(r = R) = 0$ En la pared su velocidad es 0
- $V_z(r = 0) = \text{finita}$ La velocidad en el centro es maxima o finita
- $C_1 = 0$; $V_z(r = 0) = \text{finita}$
- *Para* $V_z(r = R) = 0$

$$0 = \frac{\nabla P_z R^2}{4\mu} + C_1 \ln(R) + C_2 \quad (3.26a)$$

$$C_2 = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (3.26b)$$

Sustituyendo las constantes obtenemos el perfil de velocidades

$$V_z(r) = \frac{1}{4\mu} (\nabla P_z r^2) - \frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (3.27)$$

Para el flujo volumétrico:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\nabla P R^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) r dr d\theta \quad (3.28a)$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{\nabla P R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{1}{R^2} \right) \int_0^R r^3 dr d\theta \quad (3.28b)$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{\nabla P R^2}{4\mu} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{1}{R^2} \right) \left(\frac{r^4}{4} \right) d\theta \quad (3.28c)$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{\nabla P R^2}{4\mu} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{R^2} \right) \left(\frac{R^4}{4} \right) d\theta \quad (3.28d)$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{\nabla P R^2}{4\mu} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right) d\theta \quad (3.28e)$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{\nabla P R^4}{4\mu} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) d\theta \quad (3.28f)$$

$$Q = \frac{\nabla P R^4}{4\mu} \left(\frac{1}{4} \theta \right) \Big|_0^{2\pi} \quad (3.28g)$$

$$Q = \frac{\nabla P R^4}{4\mu} \left(\frac{2\pi}{4} \right) \quad (3.28h)$$

$$Q = \frac{\pi \nabla P R^4}{8\mu} \quad (3.28i)$$

3.2 Calculo del flujo volumétrico de un fluido Newtoniano en una corona circular

En esta sección se calcula el flujo volumétrico asociado a una corona circular de radios mayor R_2 y menor R_1 respectivamente. La longitud característica axial es L . Se presenta un esquema del problema de estudio en la Fig.3.2

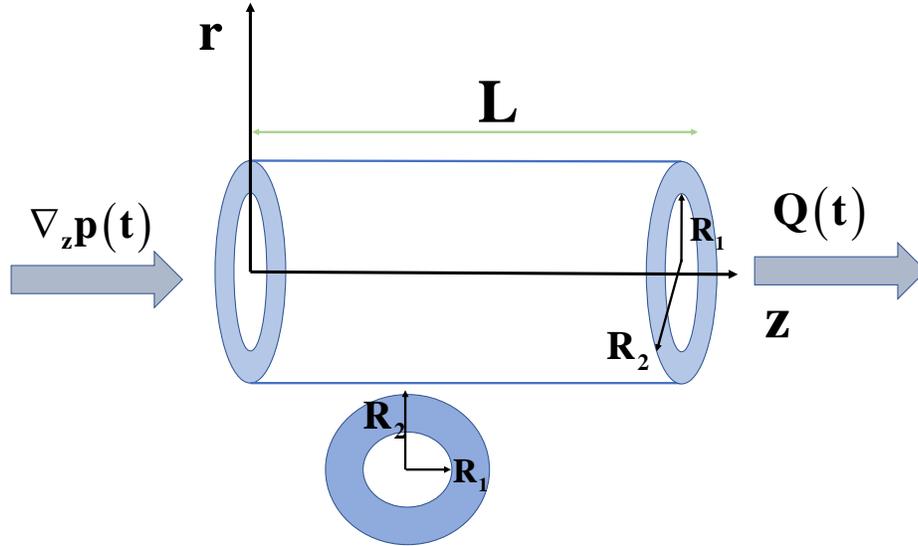


Figura 3.2 Ilustra la Corona Circular de radios $r = R_2$, y $r = R_1$ y longitud $z = L$. Se supone que el fluido es incompresible, isotérmico y newtoniano.

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (3.29)$$

Identidad Vectorial

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{F} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (3.30)$$

Se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v})) \quad (3.31a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \rho \cdot \mathbf{v} - \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (3.31b)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3.31c)$$

Hay que recordar que la derivada material es:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (3.32)$$

Por tanto, se tiene que

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3.33)$$

No es función de la posición ni del tiempo

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \rightarrow \rho \neq \rho(r,t) \quad (3.34)$$

Divergencia del campo de velocidades es 0

$$(\nabla * v) = 0 \text{ Flujo solenoidal} \quad (3.35)$$

La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas se escribe de la siguiente manera

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.36)$$

El flujo va en dirección de z por tanto

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.37)$$

Entonces

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.38)$$

La velocidad no es función de z por tanto $V_z = \text{constante} \neq f(z)$.

Asumiendo que el vector de velocidad \mathbf{V} en el sistema está dado por:

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z(r, \theta, z, t)) \quad (3.39)$$

Esto implica que el campo de velocidades no depende de la coordenada axial z, y solo dependería de las coordenadas angulares θ y r respectivamente.

Entonces el campo de velocidades se puede expresar de la siguiente manera:

$$V_z = \underbrace{V_z(r, \theta, z, t)}_{\text{No-depende de } z} = V_z(r, \theta, t) \quad (3.40)$$

Además, si consideramos estado estacionario i.e. ninguna variable dinámica o intrínseca del sistema depende del tiempo, i.e.

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = 0 \Rightarrow V_z \neq V_z(t) \quad (3.41)$$

Físicamente, la ecuación anterior implica que los perfiles de velocidad se encuentran desarrollados y no dependen del tiempo.

$$V_z = \underbrace{V_z(r, \theta, t)}_{\text{No-depende de } t} = V_z(r, \theta) \quad (3.42)$$

Finalmente, la última hipótesis que postulamos en este sistema es la de la simetría cilíndrica es decir que el campo de velocidades no depende del ángulo polar θ .

$$V_z = \underbrace{V_z(r, \theta)}_{\text{No-depende de } \theta} = V_z(r) \quad (3.43)$$

Por lo tanto, en flujo laminar, isotérmico incompresible, estacionario y en coordenadas cilíndricas, el campo de velocidades solo depende de la coordenada radial r.

$$\rho \left(\frac{DV}{Dt} \right) = -\nabla \rho + \nabla * \sigma + \rho g \quad (3.44)$$

Descomponiendo la derivada material

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V * \nabla V \right) = -\nabla P + \nabla * \sigma + \rho g \quad (3.45)$$

Donde:

- $V * \nabla V =$ Aceleracion convectiva (movimiento del fluido)
- $-\nabla P + \nabla * \sigma + \rho g =$ Fuerzas de superficie
- $\frac{\partial V}{\partial t} =$ velocidad o aceleracion instantanea
- $\rho g =$ La fuerza de volumen se aproxima a 0 ya que el sistema es en un eje horizontal
- $-\nabla P =$ El fluido solo se mueve a un gradiente de presion

Aproximando con Navier-Stokes

$$\sigma = 2\mu D \quad (3.46)$$

Donde:

$$D = \frac{1}{2} (\nabla V + \nabla V^T) = \text{Tensor rapidez de deformacion}$$

Para llegar a la ecuación de Navier-Stokes de un fluido Newtoniano

$$\rho \left(\frac{DV}{Dt} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 V + \rho g \quad (3.47)$$

De acuerdo con el planteamiento del problema la derivada material y los términos gravitacionales son igual a cero

- $\rho \left(\frac{DV}{Dt} \right) = 0$ Velocidades bajas y estado estacionario
- $\rho g = 0$ por simetría

Solo quedan los siguientes términos

$$-\nabla P_z + \mu \nabla^2 V = 0 \quad (3.48)$$

Descomponiendo la ecuación se obtiene lo siguiente

$$\frac{1}{\mu} \nabla P_z = \nabla^2 V \quad (3.49a)$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla P_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right) \quad (3.49b)$$

Reagrupando y resolviendo el sistema

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right) = \frac{1}{\mu} \nabla P_z \quad (3.50a)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{\nabla P_z}{\mu} \int r \partial r \quad (3.50b)$$

$$r \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{\nabla P_z}{\mu} \left(\frac{r^2}{2} \right) + C_1 \quad (3.50c)$$

$$\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{\nabla P_z}{2\mu} (r) + \frac{C_1}{r} \quad (3.50d)$$

Integrando nuevamente

$$\int \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{\nabla P_z}{2\mu} \int r \partial r + C_1 \int \frac{\partial r}{r} \quad (3.51a)$$

$$V_z(r) = \frac{\nabla P_z r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (3.51b)$$

Condiciones iniciales:

- $V_z(r = R_1) = 0$
- $V_z(r = R_2) = 0$

Las condiciones iniciales son determinadas debido que el fluido se pega en las paredes por tanto la velocidad es igual a 0

Sustituyendo las condiciones en el perfil de velocidades

$$0 = \frac{\nabla P_z R_1^2}{4\mu} + C_1 \ln(R_1) + C_2 \quad (3.52a)$$

$$0 = \frac{\nabla P_z R_2^2}{4\mu} + C_1 \ln(R_2) + C_2 \quad (3.52b)$$

Aplicando el signo negativo a una de las ecuaciones para encontrar el valor de C_1

$$\frac{\nabla P_z R_1^2}{4\mu} + C_1 \ln(R_1) \nearrow C_2 = 0 \quad (3.53a)$$

$$-\left(\frac{\nabla P_z R_2^2}{4\mu} + C_1 \ln(R_2) \right) \nearrow C_2 = 0 \quad (3.53b)$$

Acomodando términos se obtiene lo siguiente

$$\frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 - \frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_2^2 + C_1 \ln(R_1) - \quad (3.54a)$$

$$C_1 \ln(R_2) = 0$$

$$\frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 - \frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_2^2 + C_1 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = 0 \quad (3.54b)$$

$$C_1 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_2^2 - \frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 \quad (3.54c)$$

$$C_1 = \frac{\left(\frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_2^2 - \frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 \right)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \quad (3.54d)$$

Para encontrar C_2 se sustituirá C_1 en la ecuación

$$\frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 + C_1 \ln(R_1) + C_2 = 0 \quad (3.55a)$$

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 - C_1 \ln(R_1) \quad (3.55b)$$

Sustituyendo en el perfil de velocidades las constantes

$$V_z(r) = \frac{1}{4\mu} \nabla P_z r^2 + C_1 \ln(r) - \frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 - C_1 \ln(R_1) \quad (3.56a)$$

$$V_z(r) = \frac{1}{4\mu} \nabla P_z r^2 - \frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 + C_1 \ln(r) - C_1 \ln(R_1) \quad (3.56b)$$

$$V_z(r) = \frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 \left(\frac{r^2}{R_1^2} \right) - \frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 + C_1 (\ln(r) - \ln(R_1)) \quad (3.56c)$$

$$V_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 \left(1 - \left(\frac{r^2}{R_1^2} \right) \right) + C_1 \left(\ln \frac{r}{R_1} \right) \quad (3.56d)$$

Al sustituir C_1 se obtiene

$$V_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 \left(1 - \left(\frac{r^2}{R_1^2} \right) \right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_2^2 - \frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 \right)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right) \left(\ln \frac{r}{R_1} \right) \quad (3.57a)$$

$$V_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 \left(1 - \left(\frac{r^2}{R_1^2} \right) \right) - \frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 \left(\frac{1 - \frac{\frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_2^2}{\frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2}}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right) \left(\ln \frac{r}{R_1} \right) \quad (3.57b)$$

$$V_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 \left(1 - \left(\frac{r^2}{R_1^2} \right) \right) - \frac{1}{4\mu} \nabla P_z R_1^2 \left(\frac{1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right) \left(\ln \frac{r}{R_1} \right) \quad (3.57c)$$

$$V_z(r) = \frac{R_1^2}{4\mu} (-\nabla P_z) \left(1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right) \left(\ln \frac{r}{R_1} \right) \right) \quad (3.57d)$$

Para el flujo volumétrico

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} V_z(r) r dr d\theta \quad (3.58a)$$

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} V_z(r) r dr \int_0^{2\pi} d\theta \quad (3.58b)$$

Escalando los límites con el radio mayor y multiplicando por R_2 fuera de la integral

$$Q = 2\pi R_2 \int_{R_1/R_2}^{R_2/R_2} V_z(r) \left(\frac{r}{R_2} \right) \left(\frac{dr}{R_2} \right) \quad (3.59a)$$

$$Q = 2\pi R_2^2 \int_R^1 V_z \left(\frac{r}{R_2} \right) u du \quad (3.59b)$$

$$Q = 2\pi R_2^2 \int_R^1 V_z(u) u du \quad (3.59c)$$

$$Q = 2\pi R_2^2 \int_R^1 \frac{P_0 - P_L R_2^2}{4L\mu} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 + \frac{(1-R^2)(-1)}{(-1)\ln\left(\frac{1}{R}\right)} * \ln\left(\frac{R^2}{R}\right) \right] u du \quad (3.59d)$$

$$Q = 2\pi R_2^2 \left(\frac{P_0 - P_L R_2^2}{4L\mu} \right) \left[\int_R^1 (u^2 - 1) + \frac{1-R^2}{\ln R} \int_R^1 \ln u * u du \right] \quad (3.59e)$$

$$Q = 2\pi R_2^2 \left(\frac{P_0 - P_L R_2^2}{4L\mu} \right) \left[\left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2} \right) \Big|_R^1 + \frac{1-R^2}{\ln R} \left[\frac{1}{4} u^2 \ln u - \frac{1}{4} u^2 \right] \Big|_R^1 \right] \quad (3.59f)$$

$$Q = 2\pi R_2^2 \left(\frac{P_0 - P_L R_2^2}{4L\mu} \right) \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^2}{2} \right) + \frac{1-R^2}{\ln R} \left[\left(\frac{1}{4} 1^2 * \ln(1) - \frac{1}{4} 1^2 \right) - \left(\frac{1}{4} R^2 \ln R - \frac{1}{4} R^2 \right) \right] \right] \quad (3.59g)$$

$$Q = \frac{2\pi R_2^4 (P_0 - P_L)}{4\mu L} \left[-\frac{1}{4} + \frac{2(R^2)}{2(2)} - \frac{R^4}{4} + \frac{1-R^2}{\ln R} \left(-\frac{1}{4} - \frac{R^2 \ln R}{4} + \frac{R^2}{4} \right) \right] \quad (3.59h)$$

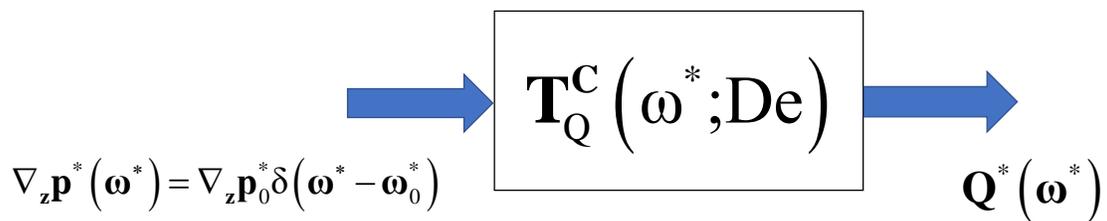
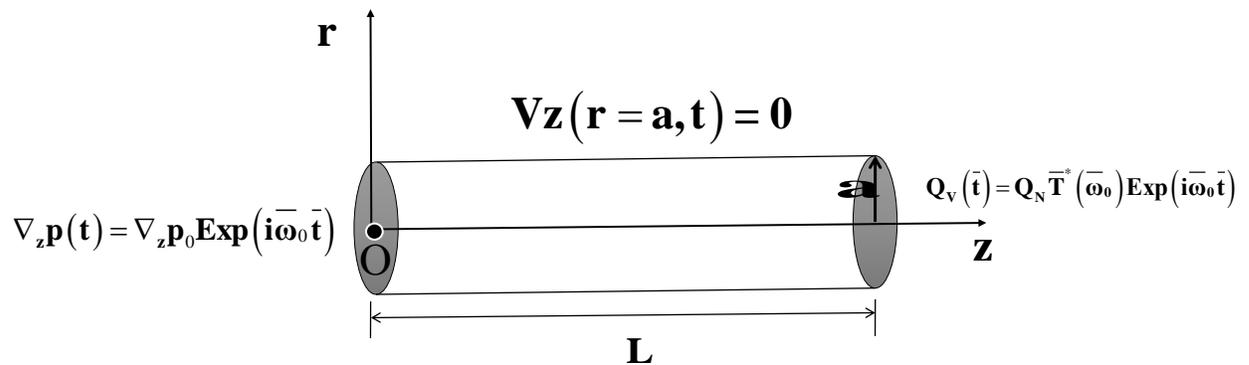
$$Q = \frac{2\pi R_2^4 (P_0 - P_L)}{4*4\mu L} \left[2R^2 - R^4 - 1 + \frac{(1-R^2)}{\ln R} (R^2 - 1 - R^2 \ln R) \right] \quad (3.59i)$$

$$Q = \frac{\pi R_2^4 (P_0 - P_L)}{8\mu L} \left[2R^2 - R^4 - 1 + \frac{(1-R^2)}{\ln R} (R^2 - 1 - R^2 \ln R) \right] \quad (3.59j)$$

En este capítulo se dedujeron expresiones como el perfil de velocidades, flujo volumétrico, para una simetría cilíndrica partiendo de la ecuación de continuidad para un fluido Newtoniano en un capilar y en una corona circular.

CAPÍTULO IV

MODELADO MATEMÁTICO



En este capítulo se describe el sistema físico y modelo matemático de estudio el cual consiste en: a) análisis de proceso b) geometrías, c) Ecuaciones de continuidad, d) Ecuaciones de cantidad de movimiento, e) Ecuación reológica de Burgers, f) Condiciones de frontera, g) Función de transferencia de un capilar, h) función de transferencia de una corona circular

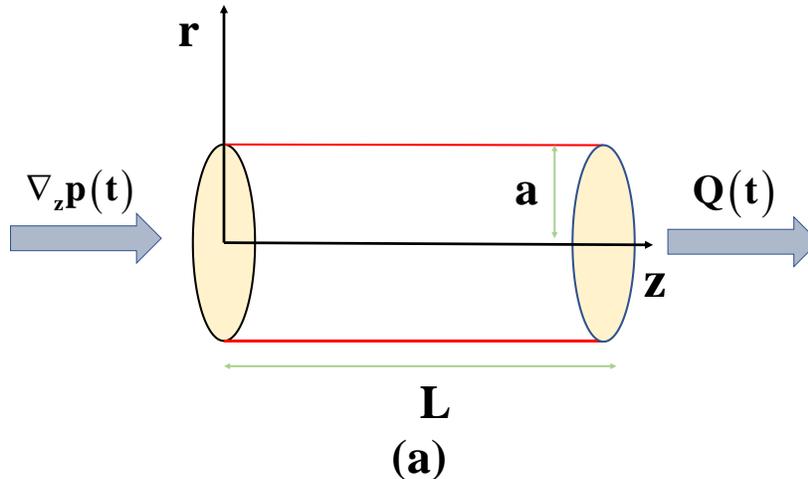
4.1 Análisis de proceso

En esta subsección presentaremos las restricciones para modelar el sistema. Las siguientes consideraciones son válidas para los dos sistemas:

- Fluido incompresible $\nabla \cdot V = 0$
- Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) .
- Estado No-estacionario $\frac{\partial v_z}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial p_z}{\partial t} \neq 0$
- Fluido no-newtoniano $O_\eta \neq cte.$
- La fuerza motriz: Gradiente de presión transitorio $P = P(z, t)$.
- Mecanismos gravitacionales despreciables $g_z = 0$.
- Geometría A: Capilar
- Geometría B: Corona circular
- Flujo unidireccional en eje axial z .

4.2 Geometrías

Las geometrías trabajadas son las siguientes: Capilar y Corona circular que son representadas por cilindros, en las cuales existe una oclusión diferente en cada una de ellas, en capilar una oclusión que cubre el perímetro del cilindro y en la corona circular que simula un cilindro dentro de otro, haciendo referencia a una oclusión central.



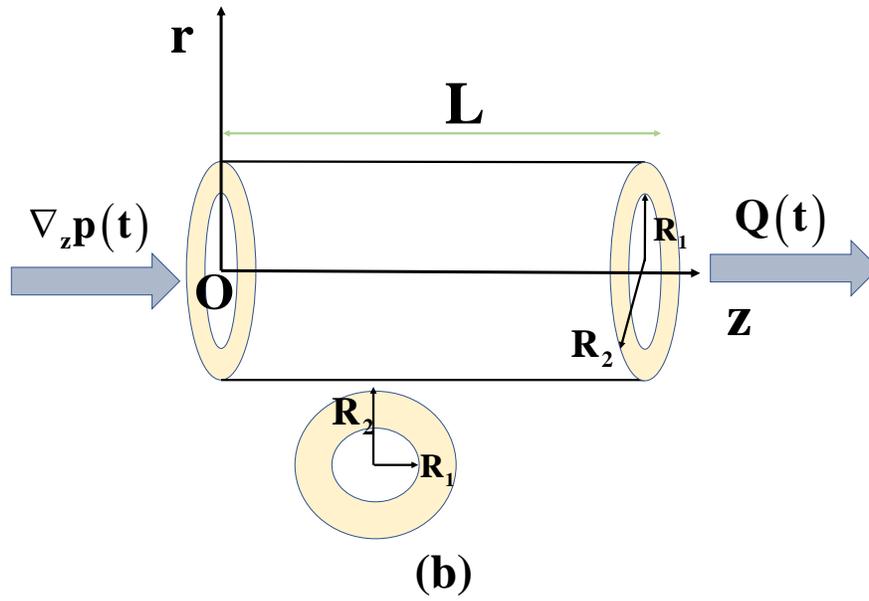


Figura 4.1 Ilustra las geometrías capilares y de corona circular (cilíndricas)

4.3 Ecuaciones Teóricas

En esta sección, se presentan las ecuaciones de balance, transporte y reológica del sistema físico.

Ecuación de continuidad

$$\frac{d(\rho v)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho v)}{dz} = 0 \quad (4.1)$$

Ecuación de movimiento

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \sigma_{rz} + \rho g \quad (4.2)$$

4.4 Ecuación reológica de Burgers

$$O_{\eta} = \frac{\sigma}{\gamma'} = \eta_0 \frac{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}} \quad (4.3)$$

4.5 Condiciones de frontera

4.5.1 Capilar

$$V_z(r = R) = 0 \text{ En la pared su velocidad es } 0 \quad (4.4)$$

$$V_z(r = 0) = \text{finita La velocidad en el centro es maxima o finita} \quad (4.5)$$

4.5.2 Corona circular

$$V_z(r = R_1) = 0 \quad (4.6)$$

$$V_z(r = R_2) = 0 \quad (4.7)$$

En las Ecs. (4.5.1) y (4.5.2) se asume que no hay deslizamiento en las paredes, por lo que la velocidad en la interfase del sólido y la del fluido es cero.

4.6 Modelado Matemático del primer sistema: Capilar

En esta sección, se deducirá la expresión analítica que describe la cinemática del sistema en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. Suponiendo que el flujo es unidireccional, la velocidad solo tiene un componente diferente de cero (V_z), coordenadas cilíndricas, simetría cilíndrica, los mecanismos gravitacionales son despreciables, y que la velocidad, gradiente de presión, depende del tiempo y de la posición se tiene el siguiente modelo que describe los mecanismos que a continuación se mencionan: (a) Inercia, (b) viscoelásticos, (c) Solvente, (d) Polímero-Polímero.

4.7 Balance de masa sin reacción química

Suponiendo que, el fluido es incompresible, e isotérmico, simetría cilíndrica y flujo unidireccional,

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (4.8)$$

4.8 Ecuación de movimiento con mecanismos inerciales

La componente z de la ecuación de movimiento tomando en cuenta los mecanismos inerciales, toma la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (4.9)$$

El término $\rho V_z / \partial t$ es la masa por unidad de volumen multiplicada por la aceleración instantánea en el sistema. El componente σ_{rz} del tensor de esfuerzos, es el producto de la función viscosidad por la rapidez de deformación:

$$\sigma_{rz} = O_\eta(D_t) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (4.10)$$

En donde $O_\eta(D_t)$ es un operador viscosidad que generaliza a cualquier fluido Newtoniano o Viscoelástico lineal. En la siguiente tabla se presentan algunos de los modelos reológicos lineales más comunes:

	Operador Viscosidad $O_\eta(D_t)$	Operador Fluidez $1/O_\eta(i\omega)$
Newton	η_0	$1/\eta_0$
Burgers	$\eta_0(1 + \lambda_1 Dt)/1 + \lambda_0 Dt + \beta Dt^2$	$1 + \lambda_0 (i\omega) + \beta (i\omega)^2/\eta_0(1 + \lambda_1 (i\omega))$

Tabla 1. Ilustra los operadores viscosidad y fluidez para el modelo de Newton y el modelo de Burgers

Al combinar las Ecs. (4.9) y (4.10), se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r O_\eta (D_t) \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (4.11)$$

Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + O_\eta (D_t) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (4.12)$$

La Ec. (4.12) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\rho}{O_\eta (D_t)} \frac{\partial}{\partial t} \right\} V_z = \frac{1}{O_\eta (D_t)} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.13)$$

La Ec. (4.13) es diferencial lineal y describe las variaciones de la velocidad por efectos del espacio y tiempo. Aplicando el formalismo de Fourier, en las derivadas temporales de la Ec. (4.13)

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \rightarrow (i\omega)^k \quad (4.14)$$

Y para las funciones: (i) Velocidad axial $V_z = V_z(r, t)$, $p = p(t)$, $Q = Q(t)$. Además, el operador viscosidad en el espacio de Fourier, toma la forma:

$$O_\eta \left(D_t = \frac{\partial}{\partial t} \right) \rightarrow O_\eta (i\omega) \quad (4.15)$$

Por lo que al aplicar la ecuación diferencial lineal toma la forma

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \beta^2(\omega) \right\} V_z(r, \omega) = O_\Phi(\omega) \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (4.16)$$

Y el parámetro Beta, tiene la forma:

$$\beta^2(\omega) = \frac{\rho}{O_\eta(i\omega)} i\omega = \rho O_\Phi(i\omega) i\omega \quad (4.17)$$

En la Ec. (4.17) se ha definido la fluidez compleja O_Φ como el inverso del operador viscosidad

$$O_\Phi(i\omega) = \frac{1}{O_\eta(i\omega)} \quad (4.18)$$

La Ec. (4.16) es punto de partida para el cálculo de la velocidad y el flujo volumétrico respectivamente.

4.9 Perfil de velocidades

Para resolver la Ec. (4.16), se propone que la solución general se puede descomponer en términos de una solución homogénea y particular.

$$V_z(r, \omega) = V_{z_H}(r, \omega) + V_{z_P}(r, \omega) \quad (4.19)$$

4.9.1 Ecuación diferencial homogénea

Solución de la ecuación diferencial homogénea, por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \beta^2(\omega) \right\} V_z(r, \omega) = 0 \quad (4.20a)$$

Desarrollando la velocidad en el espacio de Fourier, se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \beta^2(\omega) \right\} V_Z(r, \omega) = 0 \quad (4.20b)$$

Multiplicando por r^2 se tiene la ecuación diferencial del modelo de Bessel:

$$\left\{ r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} - \beta^2(\omega) r^2 \right\} V_Z(r, \omega) = 0 \quad (4.20c)$$

La Ec. (4.20c) es paramétrica de Bessel y para resolverla se propone el siguiente cambio de variable $z = i\beta r$

$$\left\{ z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z \frac{\partial}{\partial z} + z^2 \right\} V_Z(r, \omega) = 0 \quad (4.21)$$

La solución de la ecuación diferencial Ec. (4.21) está dada por la expresión:

$$V_Z(z, \omega) = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) \quad (4.22)$$

En la Ec. (4.22) $\{J_0(z), Y_0(z)\}$ son las funciones de Bessel de orden cero de primera y segunda especie respectivamente. Al contener números complejos la ecuación diferencial queda de la siguiente manera:

$$V_Z(r, \omega) = C_1 I_0(\beta r) + C_2 K_0(\beta r) \quad (4.23)$$

4.9.2 Solución particular

La solución particular para el problema de la Ec. (4.23) se puede expresar como:

$$V_{Z_p}(r, \omega) = A; A \in \mathbb{R} \quad (4.24)$$

Al sustituir la Ec. (4.24) en la Ec. (4.16)

$$\beta^2(\omega) A = O_\Phi(i\omega) \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (4.25)$$

Por lo que, la constante A se despeja y se tiene lo siguiente:

$$A = \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.26)$$

La solución homogénea de la Ec. (4.23) en términos de la coordenada radial r, se puede expresar como:

$$V_Z(r, \omega) = C_1 I_0(\beta r) + C_2 K_0(\beta r) + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.27)$$

4.9.3 Condiciones de frontera

La solución general (Ec. 5.21) contiene dos constantes de integración C_1 y C_2 , las cuales deben de determinarse a partir de las siguientes condiciones de frontera:

$$C.F.1: r = 0; \quad |V_Z(0, \omega)| \leq M \quad (4.28a)$$

$$C.F.2: r = a; \quad V_Z(R, \omega) = 0 \quad (4.28b)$$

La primera de estas condiciones obedece a que la solución particular debe de permanecer acotada, i.e. que para ningún valor que tome la coordenada radial debe ser infinita.

La segunda condición de frontera se relaciona con la condición de no deslizamiento en la frontera (pared del tubo capilar). Al sustituir la primera C.F.1 en la ecuación diferencial, se tiene lo siguiente:

$$V_{z_{\max}} = V_z(r=0, \omega) = C_1 I_0(\beta \cdot 0) + C_2 K_0(\beta \cdot 0) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.29a)$$

Simplificando la expresión se obtiene la siguiente expresión algebraica:

$$V_{z_{\max}} = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-\infty) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.29b)$$

Simplificando la ecuación anterior, se tiene lo siguiente:

$$V_{z_{\max}} = C_2 \cdot (-\infty) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cong C_2 \cdot (-\infty) \quad (4.29c)$$

La última igualdad, demuestra que la velocidad en el centro del capilar es infinita lo que carece de sentido físico. Para evitar esta inconsistencia física, la constante C_2 debe ser cero, i.e. $C_2 = 0$. Por lo que la solución general tiene la siguiente estructura:

$$V_z(r, \omega) = C_1 I_0(\beta r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.30)$$

La segunda condición de frontera al sustituirla nos da la siguiente información física:

$$V_z(R, \omega) = C_1 I_0(\beta a) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.31)$$

De análisis de la primera condición de frontera se deduce que la constante C_2 es cero por lo que al despejar C_1 se tiene lo siguiente:

$$C_1(\omega) = -\frac{1}{I_0(\beta R)} \frac{O_\phi(i\omega)}{i^2 \beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.32)$$

Finalmente, la velocidad axial $V_z(r, \omega)$ tiene la siguiente forma:

$$V_z(r, \omega) = C_1(\omega) I_0(\beta r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.33)$$

Esta expresión nos permite obtener el perfil de velocidades en función de los parámetros materiales del líquido, la fuerza motriz que de forma continua e irreversiblemente el fluido asociado al gradiente de presión en la dirección axial. Nótese, que el perfil de velocidades está determinado por un cociente de funciones de Bessel, lo que podría inducir efectos resonantes en el sistema.

4.10 Flujo volumétrico con transformada de Fourier

La expresión para calcular el flujo volumétrico en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$, se puede expresar como la doble integral del producto interno del vector de velocidad y la diferencial de superficie. El vector velocidad solo tiene componente axial z y el vector unitario que describe la sección de área transversal es el vector unitario en la dirección z ,

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r, t) r dr d\theta = 2\pi \int_0^a V_z(r, t) r dr \quad (4.34)$$

Al tomar la transformada de Fourier del flujo volumétrico, se tiene lo siguientes:

$$Q(\omega) = F\{Q(t)\} = F\left\{2\pi \int_0^a V_z(r, t) r dr\right\} \quad (4.35)$$

Por otra parte, suponiendo que la función es continua, el operador de Fourier se puede introducir en la doble integral por lo que se tiene lo siguiente:

$$F \left\{ 2\pi \int_0^a Vz(r,t) r dr \right\} = 2\pi \int_0^a F \{ Vz(r,t) \} r dr = 2\pi \int_0^a Vz(r,\omega) r dr \quad (4.36)$$

El flujo volumétrico transformado en el espacio de Fourier toma la forma:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^a Vz(r,\omega) r dr \quad (4.37a)$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el flujo volumétrico, se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^a Vz(r,\omega) r dr = 2\pi \int_0^a \left(C_1(\omega) I_0(\beta r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \right) r dr \quad (4.37b)$$

Haciendo el cambio de variable,

$$Q(\omega) = 2\pi C_1(\omega) \int_0^a (I_0(\beta r)) r dr + 2\pi \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^a r dr \quad (4.37c)$$

Definiendo las siguientes cantidades adimensionales: $u = r/a$; $\beta = \alpha a$ como una longitud característica adimensional, la Ec. (4.37c) se puede expresar como:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\beta^2} C_1(\omega) \int_0^\beta z I_0(z) dz + 2\pi a^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^1 u du \quad (5.37d)$$

En donde $z = \beta r$. Para integrar las funciones de Bessel, se utiliza la siguiente propiedad matemática:

$$\frac{d}{dz} [z I_1(z)] = z I_0(z) \quad (4.38)$$

Al sustituir la Ec. (4.38), en la integral de la expresión del flujo volumétrico Ec. (4.37d), se tiene lo siguiente por lo que,

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\beta^2} C_1(\omega) \int_0^\beta \frac{d}{dz} [z I_1(z)] dz + 2\pi a^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^1 u du \quad (4.39a)$$

(4.39a)

La Ec. (4.39), se puede simplificar a lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\beta^2} C_1(\omega) \int_0^\beta d[z I_1(z)] + \pi a^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^1 du^2 \quad (4.39b)$$

Finalmente, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \pi a^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) + 2\pi a^2 C_1(\omega) \frac{I_1(\beta)}{\beta} \quad (4.39c)$$

En donde la constante $C_1(\omega)$, dada por la Ec. (4.32) se sustituye en la Ec. (4.39c), y se obtiene:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^3}{4} O_\phi(i\omega) \frac{8i^2}{\beta^2(\omega)} \left(1 - 2 \frac{I_1(\beta)/\beta}{I_0(\beta)} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} a \right) \quad (4.39d)$$

4.11 Función de transferencia compleja

La Ec. (4.39d) puede ser descrito en términos de la función de transferencia $T(\omega)$,

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^3}{4} T(\omega) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} a \right) \quad (4.40)$$

En donde la función de transferencia $T(\omega)$, tiene la siguiente expresión analítica:

$$T(\omega) = O_\Phi(i\omega) \frac{8i^2}{\beta^2(\omega)} \left(1 - 2 \frac{I_1(\beta(\omega))/\beta(\omega)}{I_0(\beta(\omega))} \right) \quad (4.41)$$

La función de transferencia $T(\omega)$ queda de la siguiente manera:

$$\boxed{T_Q^C(\omega) = O_\Phi(i\omega) \frac{8i^2}{\beta^2(\omega)} \left\{ 1 - 2 \frac{I_1(\beta(\omega))/\beta(\omega)}{I_0(\beta(\omega))} \right\}} \quad (4.42)$$

La función de Transferencia se ilustra en la Fig. X. La variable de entrada es el esfuerzo en la pared, mientras que la variable de salida es el flujo volumétrico.

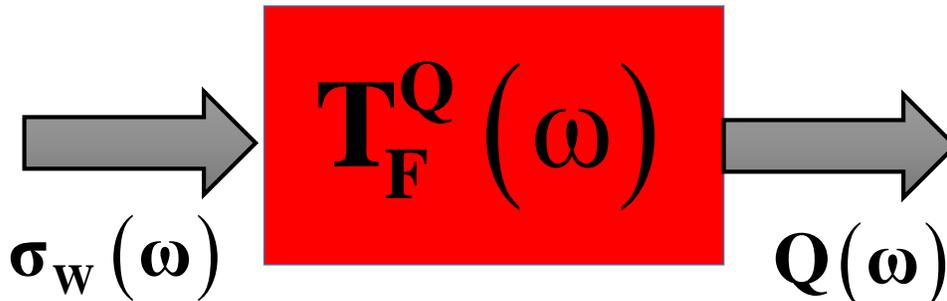


Figura 4.2 El diagrama de caja ilustra la función de transferencia para la geometría capilar. La variable de entrada es el esfuerzo en la pared, y la variable de salida es el flujo volumétrico.

4.12 Parámetro Beta

4.12.1 Fluido Newtoniano

El parámetro adimensional β tiene la forma adimensional:

$$\bar{\beta}(\bar{\omega}) = a\beta(\omega) \quad (4.43)$$

El parámetro beta en forma adimensional tiene la siguiente forma:

$$\bar{\beta}(\bar{\omega}) = a\beta(\omega) = i^{1/2} \sqrt{\left(\frac{\rho R^2 \phi_c}{t_c} \right)} O_\Phi(i\omega) (t_c \omega) \quad (4.44)$$

En donde el operador fluidez fue escalado con las siguientes variables adimensionales:

$$O_{\phi}(i\omega) = \frac{O_{\phi}(i\omega)}{\phi_c}; \omega = t_c \omega \quad (4.45)$$

En donde la fluidez característica ϕ_c y la frecuencia característica ω_c para un fluido newtoniano estan dada por las siguientes expresiones: (i) $\phi_c = 1/\mu$ y (ii) $t_c = a^2/\mu = a^2/(\mu/\rho) = R^2/\nu$, en donde ν es el coeficiente de transferencia de momento.

Por lo que el parametro beta, para un fluido newtoniano este coeficiente se simplifica de la siguiente manera:

$$\beta(\omega) = i^{1/2} \sqrt{\omega} \quad (4.46)$$

4.12.2 Fluido No-Newtoniano: Burgers

Para un fluido no-newtoniano viscoelástico lineal, la fluidez característica $\phi_c = 1/\eta_0$ y el tiempo característico del sistema t_c es el tiempo unimodal de Maxwell, i.e. $t_c = \lambda_0$. Por lo que el parámetro β tiene la forma:

$$\beta(\omega) = i^{1/2} \sqrt{De O_{\phi}(i\omega) \cdot \omega} \quad (4.47)$$

En la Eq. (4.47) De es el número de Deborah, el cual puede

$$De = \frac{\rho a^2 \phi_c}{t_c} \quad (4.48)$$

En donde:

$$\beta(\omega, De) = i^{1/2} \sqrt{(De)^{\delta} O_{\phi}(i\omega) \omega} \quad (4.49)$$

4.13 Calculo del esfuerzo cortante rz evaluado en la pared

El componente rz del tensor de esfuerzo puede expresarse en terminos del modelo Newtoniano de la siguiente manera:

$$\sigma_{rz}(r, \omega) = \frac{1}{O_{\phi}(i\omega)} \frac{\partial Vz(r, \omega)}{\partial r} \quad (4.50)$$

Derivando el perfil de velocidades, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\frac{\partial Vz(r, \omega)}{\partial r} = O_{\phi}(i\omega) \frac{i^2}{\beta} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \frac{J_1(\beta r)}{J_0(\beta r)} \quad (4.51)$$

Entonces, el esfuerzo en la pared, toma la siguiente forma:

$$\sigma(\omega) = -\sigma_{rz}(r, \omega)|_{r=a} = \frac{2}{a\beta} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} a \right) \frac{J_1(\beta r)}{J_0(\beta r)} \quad (4.52)$$

Simplificando,

$$\sigma(\omega) = \frac{2}{a\beta} \frac{J_1(\beta r)}{J_0(\beta r)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} a \right) = \frac{2}{a\beta} \frac{J_1(\beta a)}{J_0(\beta a)} \sigma_w(\omega) \quad (4.53)$$

La Ec. (4.53), se puede expresar en terminos de una función de transferencia del sistema:

$$\sigma(\omega) = T_{\sigma}(\omega) \sigma_w(\omega) \quad (4.54)$$

En donde, la función de transferencia toma la forma:

$$T_{\sigma}^C(\omega) = 2 \frac{J_1(\beta a) / a\beta}{J_0(\beta a)} \quad (4.55)$$

De la misma manera, el daigram de bloque para la función de transferencia del esfuerzo, queda exprsado como:

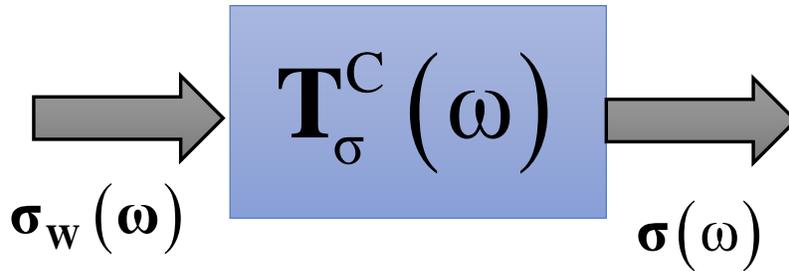


Figura 4.3 El diagrama de caja ilustra la función de transferencia para la geometria capilar. La variable de entrada es el esfuerzo en la pared, y la variable de salida es el flujo volumétrico.

4.14 Cálculo de la función de transferencia para una corona circular R_1 y R_2 , $R_1 < R_2$

Para resolver el problema se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema:

- Estado estacionario
- Fluido incompresible
- Proceso isotérmico
- Flujo unidireccional
- Mecanismos gravitacionales despreciables
- El fluido es deformado por un gradiente de presión en la dirección axial.
- Simetría cilíndrica
- Bajo las anteriores aseveraciones, obtenemos lo siguiente:
- El vector de velocidad es solo función de a la coordenada radial r
- El gradiente de presión es constante en la dirección z
- Existe un balance entre las fuerzas viscosas y el gradiente de presión.

Por lo tanto, las siguientes ecuaciones se cumplen como en el caso de un a capilar inextensible, por lo que se tiene:

El flujo volumétrico para una corona circular, se puede expresar en una forma similar a la Ec. (47) por lo que, se tiene lo siguiente. Las condiciones de frontera, en este problema:

$$V_z(r = R_1, \omega) = 0 \quad (4.56)$$

$$V_z(r = R_2, \omega) = 0 \quad (4.57)$$

Sustituyendo en el perfil de velocidades, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas:

$$C_1 J_0(\beta R_1) + C_2 Y_0(\beta R_1) + \frac{O_{\phi}(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} = 0 \quad (4.58)$$

$$C_1 J_0(\beta R_2) + C_2 Y_0(\beta R_2) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} = 0 \quad (4.59)$$

Las Ecs. (4.58) y (4.59)

$$C_1 = -C_2 \frac{Y_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_2)}{J_0(\beta R_1) - J_0(\beta R_2)} \quad (4.60)$$

Sustituyendo la Ec. (4.60) en la Ec. (4.58), se tiene lo siguiente:

$$-C_2 \frac{Y_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_2)}{J_0(\beta R_1) - J_0(\beta R_2)} J_0(\beta R_1) + C_2 Y_0(\beta R_1) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} = 0 \quad (4.61)$$

Simplificando, obtenemos:

$$C_2 \left(\frac{Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_1) + Y_0(\beta R_2) J_0(\beta R_1)}{J_0(\beta R_1) - J_0(\beta R_2)} \right) = -\frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (4.62)$$

Simplificando la Ec. (4.62), se obtiene la constante C_2 . La constante C_1 , toma la forma.

$$C_1 = \frac{Y_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_2)}{Y_0(\beta R_2) J_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)} \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (4.63)$$

Y la constante C_2 ,

$$C_2 = -\frac{J_0(\beta R_1) - J_0(\beta R_2)}{Y_0(\beta R_2) J_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)} \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (4.63)$$

Estas ecuaciones, se resuelven para obtener las constantes C_1 y C_2 . Las Ecs. (55) y (56) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{R_2} &= -2 \frac{Y_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_2)}{Y_0(\beta R_2) J_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)} \frac{O_\phi(i\omega)}{(R_2 \beta)^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} R_2 \right) \\ &= O_\phi(i\omega) \frac{-2}{(R_2 \beta)^2} \frac{Y_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_2)}{Y_0(\beta R_2) J_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)} \sigma_{w2} \end{aligned} \quad (4.64)$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned} \frac{C_2}{R_2} &= \frac{J_0(\beta R_1) - J_0(\beta R_2)}{Y_0(\beta R_2) J_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)} \frac{O_\phi(i\omega)}{(R_2 \beta)^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} R_2 \\ &= O_\phi(i\omega) \frac{1}{(R_2 \beta)^2} \frac{J_0(\beta R_1) - J_0(\beta R_2)}{Y_0(\beta R_2) J_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)} \sigma_{w2} \end{aligned} \quad (4.65)$$

El flujo volumétrico puede ser calculado, de la misma manera que en el flujo capilar, por lo que se tiene:

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left(C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) r dr \quad (4.66)$$

Integrando y usando una de las propiedades de las funciones de Bessel, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$Q = -2\pi R_2^2 (1 - R^2) R_2 \frac{O_\Phi(i\omega)}{(R_2\beta)^2} \sigma_{w2} + \pi R_2^2 C_1 2 \frac{J_1(\beta R_2)\beta R_2 - J_1(\beta R_1)\beta R_2 (R_1/R_2)}{(R_2\beta)^2} \\ + \pi R_2^2 C_2 2 \frac{Y_1(\beta R_2)\beta R_2 - Y_1(\beta R_1)\beta R_2 (R_1/R_2)}{(R_2\beta)^2} \quad (4.67)$$

En el flujo volumétrico, se han definido las siguientes variables escaladas:

$$R = \frac{R_1}{R_2}; \beta = \beta R_2 \quad (4.68a-b)$$

Para el esfuerzo en la pared, se tiene la siguiente expresión analítica, por lo que:

$$\sigma = -\sigma_{rz}((i\omega)) \Big|_{r=R_2} = -\frac{1}{O_\Phi(i\omega)} \frac{\partial Vz(r,\omega)}{\partial r} \Big|_{r=R_2} \quad (4.69)$$

Por lo que:

$$\sigma(\omega) = -\frac{(C_1/R_2)}{O_\Phi(i\omega)} \beta J_1(\beta) - \frac{(C_2/R_2)}{O_\Phi(i\omega)} \beta Y_1(\beta) \quad (4.70)$$

En donde, las contantes se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\frac{C_1}{R_2} = O_\Phi(i\omega) \frac{-2}{(R_2\beta)^2} \frac{Y_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_2)}{Y_0(\beta R_2)J_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_1)J_0(\beta R_2)} \sigma_{w2}(\omega) \quad (4.71)$$

$$\frac{C_2}{R_2} = O_\Phi(i\omega) \frac{2}{(R_2\beta)^2} \frac{J_0(\beta R_1) - J_0(\beta R_2)}{Y_0(\beta R_2)J_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_1)J_0(\beta R_2)} \sigma_{w2}(\omega) \quad (4.72)$$

Definiendo el esfuerzo en la pared como:

$$\sigma_{w2}(\omega) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2 \quad (4.73)$$

Finalmente, se puede expresar de la siguiente manera:

$$C_1 = R_2 O_\Phi(i\omega) C_3 \sigma_{w2}(\omega) \quad (4.74)$$

En donde la constante C_3 , tiene la forma:

$$C_3(\omega) = \frac{-2}{\beta^2} \frac{Y_0(\beta R) - Y_0(\beta)}{Y_0(\beta)J_0(\beta R) - Y_0(\beta R)J_0(\beta)} \quad (4.75)$$

De la misma manera, se tiene lo siguiente:

$$C_2 = R_2 O_\Phi(i\omega) C_4(\omega) \sigma_{w2}(\omega) \quad (4.76)$$

Por lo que, la constante C_4 , tiene la forma:

$$C_4(\omega) = \frac{2}{(R_2\beta)^2} \frac{J_0(\beta R_1) - J_0(\beta R_2)}{Y_0(\beta R_2)J_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_1)J_0(\beta R_2)} \quad (4.77)$$

Finalmente, se tiene una expresión analítica para el flujo volumétrico

$$\langle Vz(\omega) \rangle = R_2 \cdot T_Q^{CC}(\omega) \cdot \sigma_{w2}(\omega) \quad (4.78)$$

En donde la función de transferencia se defien:

$$T_Q^{CC}(\omega) = O_\Phi(i\omega) \left[\frac{2}{\beta^2} + 2 \frac{C_3(\omega)}{1-R^2} \frac{J_1(\beta)\beta - J_1(\beta R)\beta R}{\beta^2} + 2 \frac{C_4(\omega)}{1-R^2} \frac{Y_1(\beta)\beta - Y_1(\beta R)\beta R}{\beta^2} \right]$$

(4.79)

Y las constantes $C_3(\omega)$ y $C_4(\omega)$

$$C_3(\omega) = \frac{-2}{\beta^2} \frac{Y_0(\beta R) - Y_0(\beta)}{Y_0(\beta)J_0(\beta R) - Y_0(\beta R)J_0(\beta)} \quad (4.80)$$

$$C_4(\omega) = \frac{2}{\beta^2} \frac{J_0(\beta R) - J_0(\beta)}{Y_0(\beta)J_0(\beta R) - Y_0(\beta R)J_0(\beta)} \quad (4.81)$$

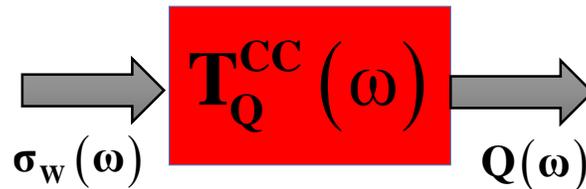


Figura 4.4 El diagrama de caja ilustra la función de transferencia para la geometría capilar. La variable de entrada es el esfuerzo en la pared, y la variable de salida es el flujo volumétrico.

4. 15 Calculo del esfuerzo cortante rz evaluado en la pared

Procediendo de la misma manera, que en los casos anteriores, se tiene la siguiente expresión analítica para el esfuerzo en el espacio de Fourier

El esfuerzo inercial, tiene la forma:

$$\sigma(\omega) = T_\sigma^{CC}(\omega) \sigma_w(\omega) \quad (4.85)$$

En donde la función de transferencia se define como:

$$T_\sigma^{CC}(\omega) = i^2 \beta [C_3(\omega)J_1(\beta) + C_4(\omega)Y_1(\beta)] \quad (4.86)$$

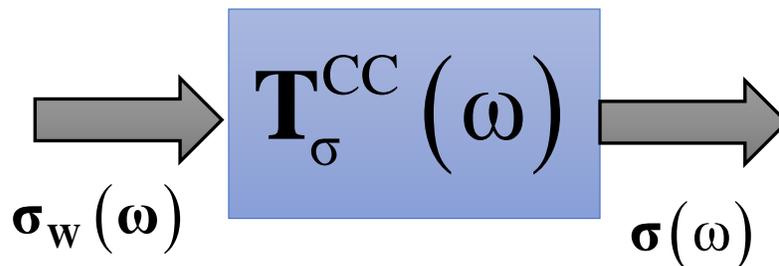


Figura 4.5 El digrama de caja ilustra la función de transferencia para la geometría capilar. La variable de entrada es el esfuerzo en la pared, y la variable de salida es el flujo volumétrico.

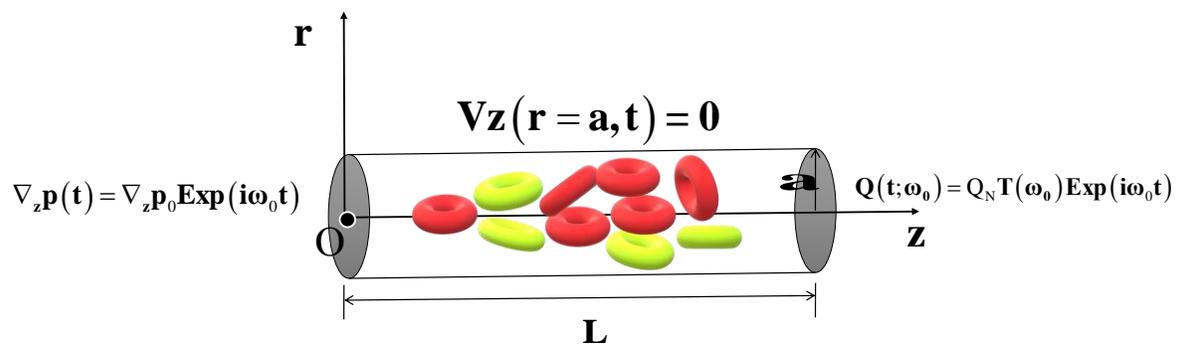
Resumen

En este capítulo, se desarrollaron los resultados más importantes de esta tesis de licenciatura. Para las dos configuraciones establecidas, se obtuvieron las funciones de transferencia correspondientes para el esfuerzo y el flujo volumétrico y el esfuerzo en la pared y el esfuerzo transitorio. Es importante resaltar, que la función de transferencia compleja para el capilar tiene las siguientes implicaciones:

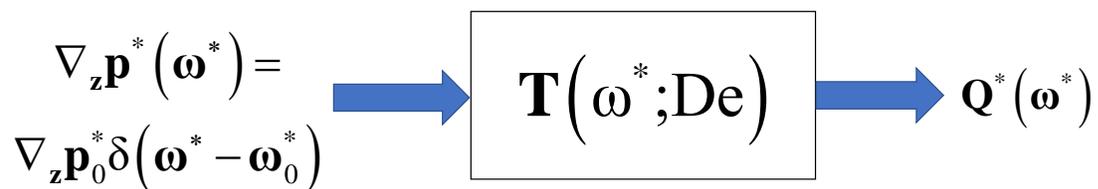
- A) La función de transferencia compleja es el producto de la fluidez y una función que depende del parámetro beta, i.e. depende del número de Deborah, el operador de fluidez y la inercia.
- B) La función de transferencia del esfuerzo depende exclusivamente del parámetro Beta y esta está contenida en la función de la transferencia del flujo volumétrico.
- C) Los resultados obtenidos de las funciones de transferencia son generales, y se pueden aplicar a cualquier fluido viscoelástico lineal a través de la función de transferencia compleja.
- D) La segunda configuración, que consiste en una geometría de cilindros concéntricos. El efecto de la geometría aparece en las funciones de Bessel de orden cero de segunda especie respectivamente.
- E) El efecto de la geometría se controla en la razón de longitudes características $R = R_1/R_2$.
- F) El modelo en paralelo de dos Maxwell, con lleva a un modelo de segundo orden, el cual contiene la misma estructura matemática que el modelo de Burgers. Este modelo contiene dos interacciones claves:
 - (i) Polímero-Solvente
 - (ii) Polímero-Polímero

CAPÍTULO V

ESCALAMIENTOS



Función de Transferencia



5.1 Variables Adimensionales.

En esta sección se escala las variables cinemáticas y dinámicas con el fin de introducir grupos adimensionales que describan la física del sistema de estudio. Las variables que van a ser escaladas son las siguientes:

- a) Fluidez o viscosidad
- b) Frecuencia o el tiempo
- c) Esfuerzo cortante rz
- d) Función de transferencia

$$\varphi = \frac{\varphi}{\varphi_c} \quad (5.73)$$

$$\omega = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (5.74)$$

$$T = \frac{T}{T_c} \quad (5.75)$$

$$t = \frac{t}{t_c} \quad (5.76)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{\sigma_c} \quad (5.78)$$

En donde las variables características se definen de la siguiente manera para la fluidez, viscosidad, función de transferencia y esfuerzo característico

$$\varphi_c = \frac{1}{\sum G \sum \lambda} \quad (5.79)$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sum \lambda} \quad (5.80)$$

$$T_c = \frac{1}{\sum G \sum \lambda} \quad (5.81)$$

$$t_c = \sum \lambda \quad (5.82)$$

$$\sigma_c = \sum G \quad (5.83)$$

En donde la suma de la elasticidad de bulto total, la relajación y viscosidad del sistema se definen como la suma de las dos fases líquidas

$$\sum G = G_1 + G_2 \quad (5.84)$$

$$\sum \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (5.85)$$

$$\sum \eta = \eta_1 + \eta_2 \quad (5.86)$$

5.2 Grupos adimensionales

Una vez que las variables han sido escaladas se obtienen los diferentes grupos adimensionales que describen los mecanismos y las fuerzas que dominan al sistema.

- a) El primer número adimensional es el número de Deborah el cual describe los mecanismos inerciales y viscoelásticos en el sistema de estudio y está definido como:

$$De = \frac{\sqrt{\frac{\rho a^2}{\sum G}}}{\sum \lambda} = \frac{\text{Mecanismos Inerciales}}{\text{Mecanismos Viscoelásticos}} \quad (5.87)$$

Deborah menor a uno significa que los mecanismos viscoelásticos dominan sobre las fuerzas inerciales. Por otra parte, un Deborah mayor a 1 significa que, los mecanismos inerciales son mayores que los viscoelásticos. Por último, un Deborah igual a 1 significa que existe un balance entre las fuerzas inerciales y viscoelásticas.

$$\lambda_j = \frac{\lambda_j}{\sum \lambda} = \frac{\text{Mecanismos Solvente}}{\text{Mecanismos Viscoelásticos}} \quad (5.88)$$

- b) El segundo número adimensional está relacionado con los mecanismos del solvente y los del polímero. Este número tiene dos valores asintóticos los cuales se describen a continuación, cuando el número adimensional es 0, significa que no existe solvente y que el sistema se rige netamente de polímero y para un λ_j diferente de cero significa que las contribuciones del solvente asociado al polímero son importantes.

$$\beta = \frac{\beta}{(\sum \lambda)^2} = \frac{\text{Interaccion Polimero – Polimero}}{\text{Mecanismos Viscoelásticos}} \quad (5.89)$$

- c) El último número adimensional está relacionado con las interacciones entre polímero-polímero y su valor esta acotado entre un valor muy pequeño y 0.25.

5.3 Simulaciones y análisis de resultados

En este capítulo se estudia el efecto del modelo de Burgers en las resonancias. Se analizarán tres efectos:

- Deborah. Competencia entre los mecanismos inerciales y viscoelásticos
- Interacción polímero-solvente: Modelo de Jeffreys
- Interacción polímero-polímero: Modelo de Burgers.

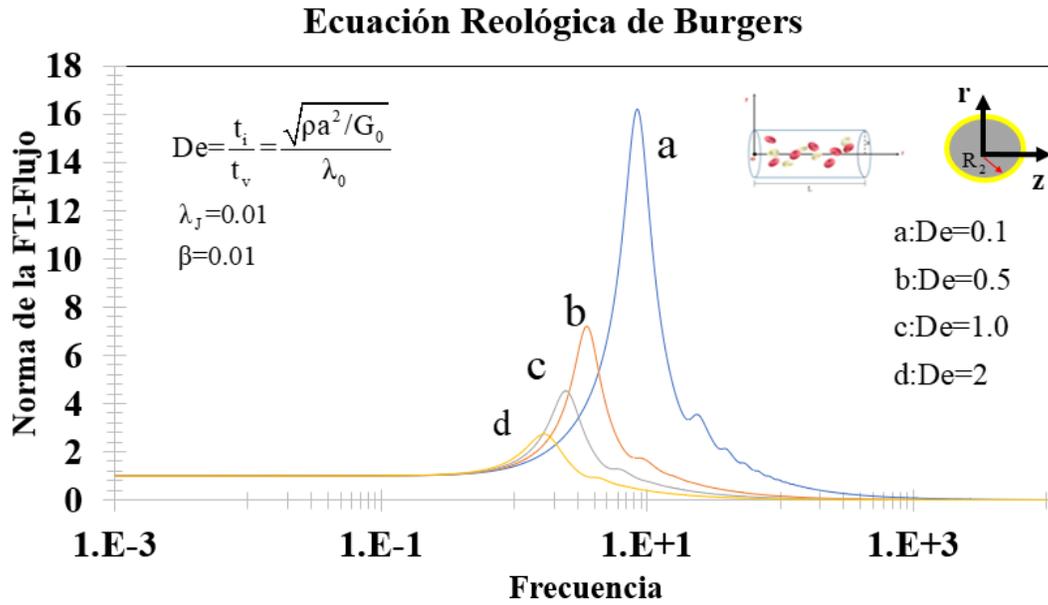


Figura 5.1 Ilustra el efecto de los mecanismos inerciales en la norma de la función de transferencia compleja, a través del número de Deborah. Los valores numéricos empleados en la simulación son los siguientes: (De= [0.1, 0.5, 1.0 y 2.0]), ($\lambda_J=0.01$), ($G=0$).

En la Fig. (5.1) se grafica la norma de la función de transferencia compleja en términos de frecuencia para diferentes valores del número de Deborah. A valores bajos, de la frecuencia, la norma es constante, pero para un valor crítico en la frecuencia y un Deborah de 0.1 el comportamiento es monótono decreciente hasta un valor asintótico cercano a cero (altas frecuencias). Por otra parte, al aumentar los mecanismos inerciales se observa que las curvas presentan curvas resonantes y el máximo está determinado por un acoplamiento de los mecanismos inerciales, del solvente y de la interacción polímero-polímero. Nótese que al aumentar los mecanismos inerciales la curva resonante se desfasa hacia valores de mayor frecuencia y el máximo aumenta. Muestra los mecanismos inerciales en la norma de la función de transferencia compleja de un tubo circular variando los valores del número de Deborah [0.1, 0.5, 1.0 y 2.0]. Se observa que a un valor del De=0.1 esta tiene un comportamiento creciente hasta el valor máximo. Para los valores del De= [0.5, 1.0 y 2.0] se observa un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo. Este valor máximo es conocido como resonancia y se puede interpretar como la máxima energía liberada en el sistema. La frecuencia a la que se lleva esta vibración se conoce como frecuencia resonante, a una frecuencia mayor a la crítica decrece monótonamente hasta un valor asintótico que se aproxima a cero.

Físicamente, la relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión es constante, a frecuencias moderadas, el flujo decrece considerablemente hasta un valor asintótico de cero

Ecuación Reológica de Burgers

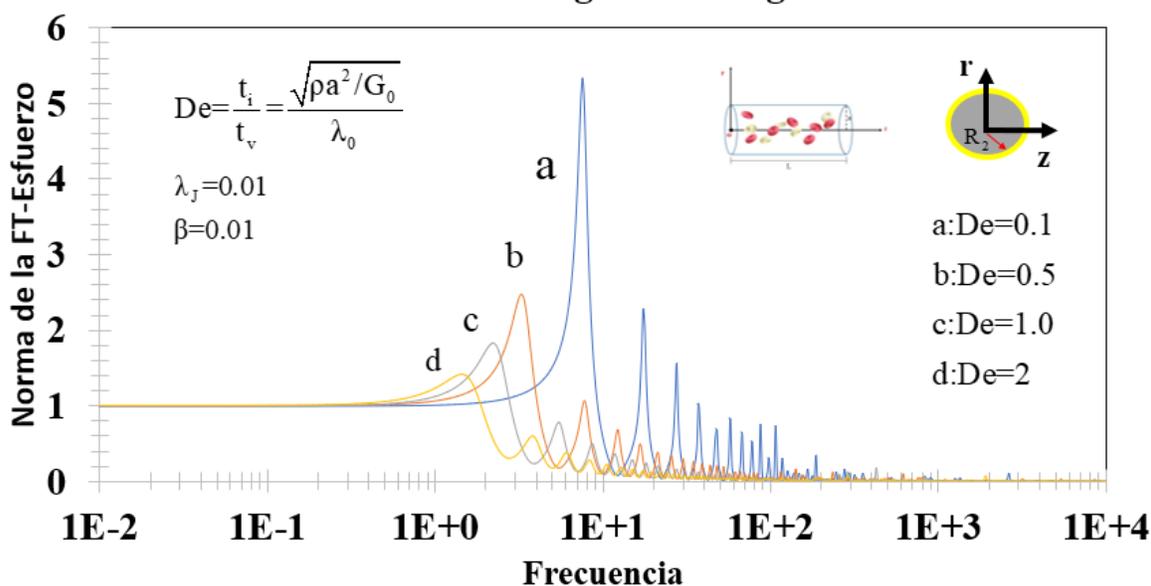


Figura 5.2 Ilustra la función de transferencia compleja del esfuerzo vs frecuencia en función del número de Deborah.

En la Fig. (5.2) se observa que a frecuencias bajas la función de transferencia del esfuerzo muestra un comportamiento constante y para un valor crítico se observa un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo. Este valor está determinado por un acoplamiento entre las propiedades viscoelásticas geométricas y resonantes del sistema a través de las funciones de Bessel. Es claro, que a partir de un valor máximo la función decrece monótonamente y empieza a tener comportamientos oscilatorios debido a un tren de picos secundarios asociados a las múltiples raíces de la función de Bessel. Por otra parte, al aumentar la frecuencia se observa que el sistema tiene un comportamiento constante e independiente de la relación entre el flujo y el gradiente de presión. Físicamente la función de transferencia compleja nos da la relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión pulsátil, el interés de este trabajo es encontrar los puntos en que se da la resonancia en el sistema. Es decir, lo que se busca, son las propiedades materiales que nos permiten encontrar esos máximos de nuestro sistema de estudio. En particular, las condiciones materiales para las cuales se obtienen estos máximos son que el Deborah sea diferente de 0 es decir que los mecanismos inerciales sean diferentes de 0 y que en comparación con los viscoelásticos sean mayores. Se observa de la curva que al aumentar del De la curva resonante aumenta y que este máximo está íntimamente ligado con las propiedades inerciales, las interacciones polímero-solvente y polímero-polímero en nuestro sistema. Desde un punto de vista físico entre el flujo y el gradiente de presión nos permite encontrar curvas resonantes de mayor intensidad que las curvas resonantes entre la interacción fluido-pared. Nótese, que la función de transferencia del flujo relaciona el gradiente de presión transitorio con el flujo volumétrico mientras que la función de transferencia del esfuerzo relaciona el gradiente de presión con el esfuerzo en la pared, es decir la interacción sólido-líquido.

Comparación Flujo Volumétrico Modelos Reológicos

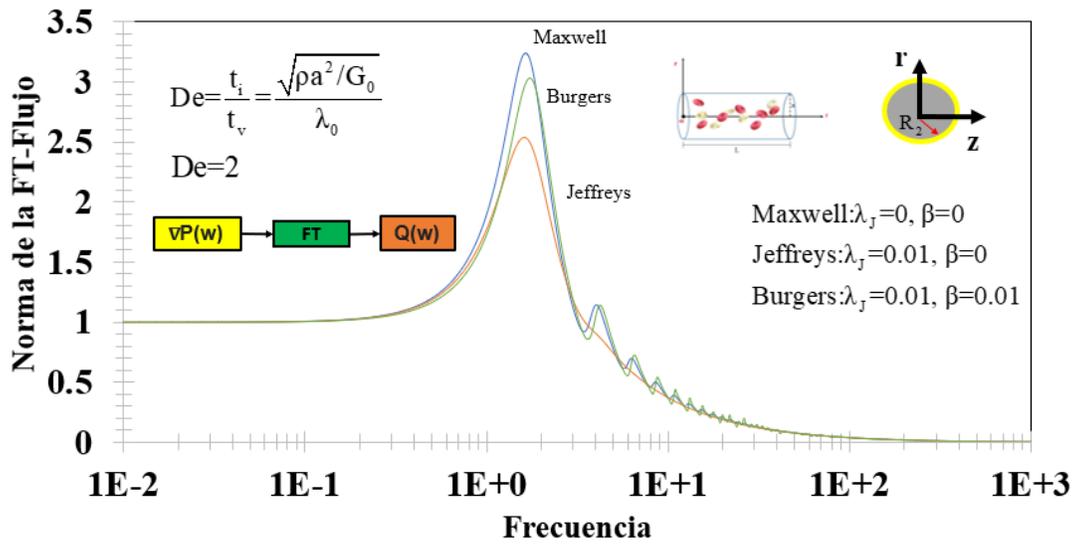


Figura 5.3 Ilustra la función de transferencia del flujo vs frecuencia para diferentes condiciones materiales: (i) Maxwell, (ii) Jeffreys, (iii) Burgers.

En la Fig. (5.3) se observa un comportamiento constante a valores bajos en la frecuencia. A un valor crítico, el sistema experimenta un comportamiento monótono creciente como el de las figuras 1 y 2, este valor está determinado por un acoplamiento de las inerciales, viscoelásticas y geométricas del sistema a un valor mayor a la frecuencia resonante se observa un comportamiento monótono creciente seguido de una serie de oscilaciones asociadas a una razón entre las funciones de Bessel. Nótese que para un segundo valor crítico se observa una segunda meseta. Es importantes resaltar los elementos de la figura 3 los cuales son mencionados a continuación:

- El modelo de maxwell asociado a un polímero puro presenta la mayor resonancia posible
- El modelo de Jeffrey el cual tienen una configuración mecánica de un modelo en paralelo presenta una reducción considerable de la resonancia asociada principalmente a una contribución del solvente
- El modelo de Burgers que puede ser considerado como una mezcla de polímeros con una configuración mecánica en paralelo muestra un comportamiento muy similar al de maxwell puro,
- Nótese, que debido a la mezcla de polímeros existe un tiempo de relajación asociado a un promedio ponderado por las viscosidades de las dos fases las cuales tienen como efecto una disminución en la curva resonantes
- Es importante resaltar que las curvas resonantes están íntimamente relacionadas con la ecuación constitutiva reológica con la cual se describe la viscoelasticidad del material y que permite tener una cantidad de modelos viscoelásticos y visco plastos respectivamente
- Finalmente, la parte de la resonancia está asociada a tres efectos principales los cuales son: (i geométrico, ii reológico, iii la función matemática que describe la parte de la geometría asociada al flujo)

Comparación Esfuerzo de Modelos Reológicos

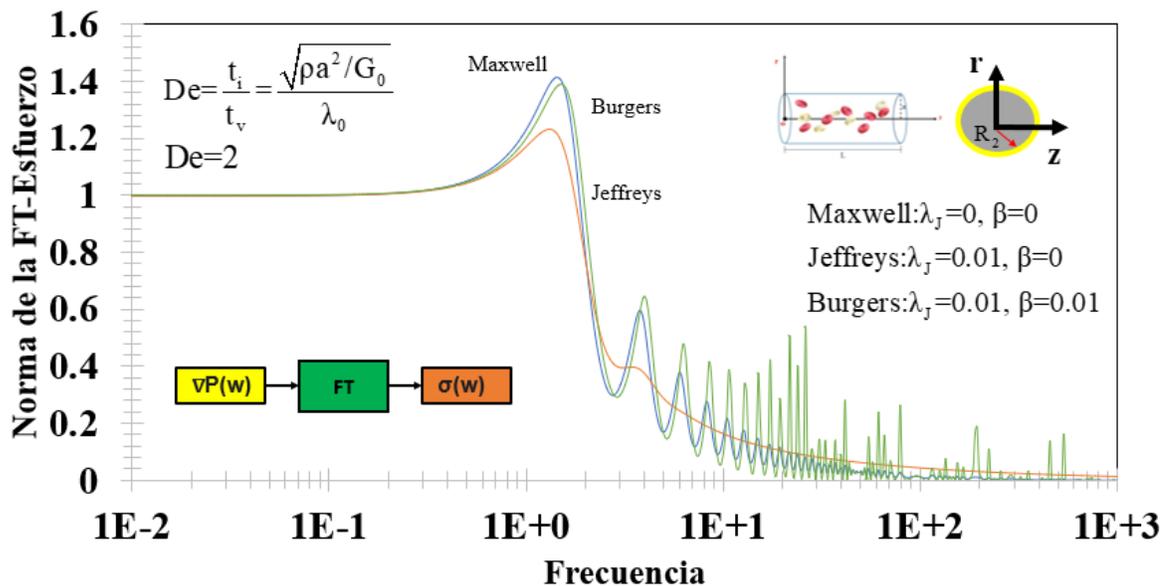


Figura 5.4 Ilustra el comportamiento de los tres modelos (i.Maxwell, iiJeffreys, iiiBurgers)

En la Fig. (5.4) Se representa los tres modelos discutidos en estas simulaciones. En todos los casos, se observa, el mismo comportamiento. A frecuencias bajas, el comportamiento de la función de transferencia compleja es constante. Aun valor crítico de la frecuencia, se observa un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo. Este valor, está determinado por un acoplamiento entre las propiedades inerciales, viscosas, elásticas, y geométricas las cuales están encapsuladas en el parámetro beta. A una frecuencia mayor a la resonante, el comportamiento de la función de transferencia es monótono decreciente y para un valor crítico se observa una cascada de resonancias. Es importante notar, que esta cascada de resonancias se debe principalmente a un posible cambio en las raíces de la ecuación de Bessel, es decir, el sistema pasa de raíces reales a raíces complejas. A frecuencias largas la función de transferencia tiende asintóticamente a un valor de cero. Físicamente se observa que el valor más grande resonante se obtiene por el polímero puro es decir el modelo de Maxwell mientras que cuando combinamos la contribución del solvente y el polímero obtenemos una menor resonancia. Esto implica que el efecto de la interacción solvente-polímero tiene una consecuencia negativa desde el punto de vista de la resonancia. Por otra parte, en la interacción polímero-polímero del modelo de Burgers se observa que aumenta la resonancia por efecto de las interacciones polímero-solvente y polímero-polímero. De esta simulación se ve claramente, que el polímero puro (Modelo de Maxwell) nos permitiría obtener la mayor respuesta dinámica del sistema.

5.4 Corona Circular

Ecuación Reológica de Burgers

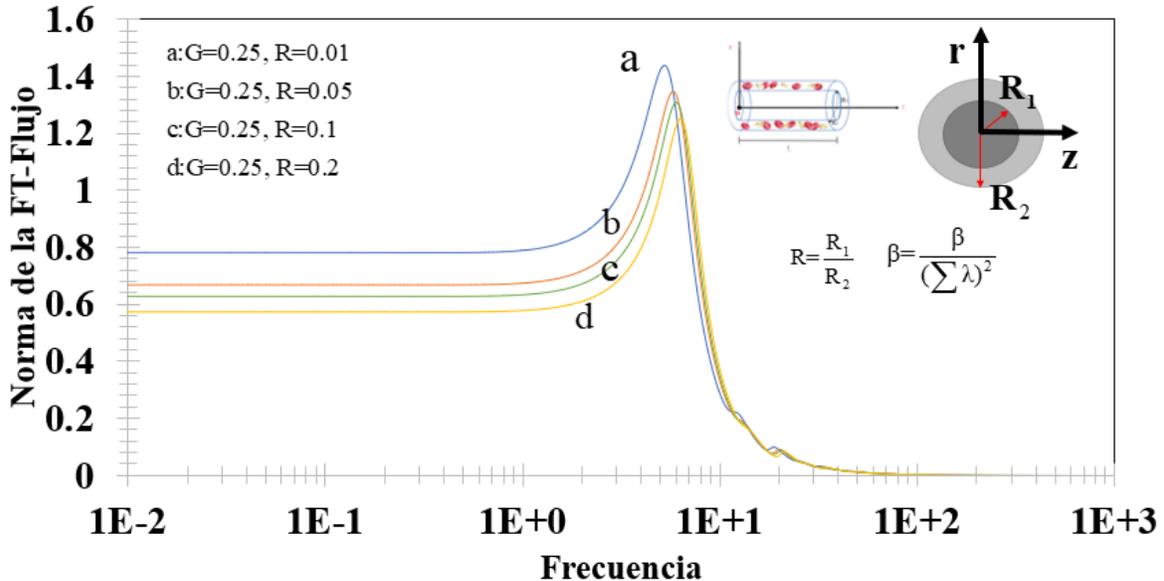


Figura 5.5 Ilustra el efecto de los mecanismos inerciales en la norma de la función de transferencia compleja, a través de la variación del valor R. Los valores numéricos empleados en la simulación son los siguientes: ($R = [0.01, 0.05, 0.1 \text{ y } 0.2]$), ($G=0.25$).

En la Fig. (5.5) se grafica la norma de la función de transferencia compleja en términos de frecuencia para diferentes valores de la geometría. A valores bajos, la norma es constante, pero para un valor crítico en la frecuencia y un radio de oclusión igual a 0.01 el comportamiento es monótono creciente hasta un valor asintótico cercano a cero (altas frecuencias). Nótese que al aumentar el radio de la oclusión la curva resonante se desfasa hacia valores de mayor frecuencia y el máximo disminuye para cada valor. Muestra los mecanismos inerciales en la norma de la función de transferencia compleja de una corona circular variando los valores del número del radio de la oclusión [0.01, 0.05, 0.1 y 0.2]. Se observa que a un valor del $R=0.1$ esta tiene un comportamiento creciente hasta el valor de máximo de resonancia. Para los valores del $R = [0.05, 0.1 \text{ y } 0.2]$ se observa un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo desplazado hacia la derecha. Este valor máximo es conocido como resonancia y se puede interpretar como la máxima energía liberada en el sistema. La frecuencia a la que se lleva esta vibración se conoce como frecuencia resonante, a una frecuencia mayor a la crítica decrece monótonamente hasta un valor asintótico que se aproxima a cero. Físicamente, la relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión es constante, a frecuencias moderadas, el flujo decrece considerablemente hasta un valor asintótico de cero.

Ecuación Reológica de Burgers

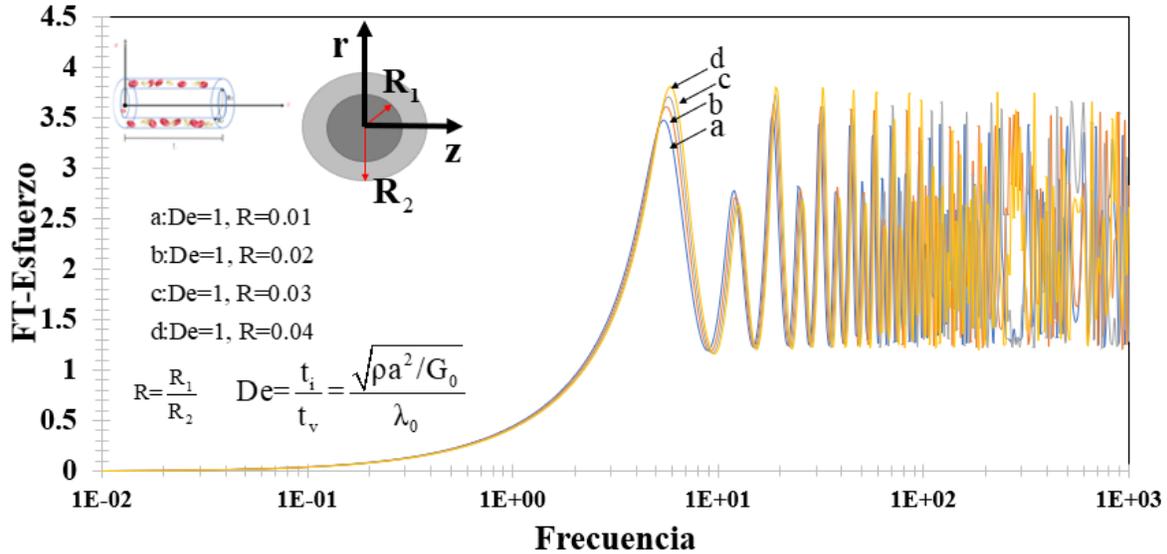


Figura 5.6 Ilustra el efecto de la geometría en la norma de la función de transferencia del esfuerzo, a través de la variación del valor R. Los valores numéricos empleados en la simulación son los siguientes: ($R = [0.01, 0.02, 0.03 \text{ y } 0.04]$), ($De=1$).

En la Fig. (5.6) se grafica la función de transferencia del esfuerzo en la pared, en términos de frecuencia para diferentes valores de la geometría. A valores bajos de la frecuencia mantiene un comportamiento asintótico hasta llegar a un valor crítico de frecuencia en el que comienza a tener un comportamiento creciente hasta su máxima resonancia, para después descender hasta un valor en el que a mayores frecuencias encontramos un comportamiento de picos los cuales mantienen una resonancia. El efecto de la geometría ocasiona en cada uno de los casos que la curva presente una mayor resonancia, en el caso de un $R=0.1$ se observa un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo, para los valores de $R=[0.02, 0.03 \text{ y } 0.04]$ comienza a mostrar un ligero desplazamiento a la derecha, a su vez a valores críticos presentan una mayor resonancia para después descender y comenzar un comportamiento de picos.

Ecuación Reológica de Burgers

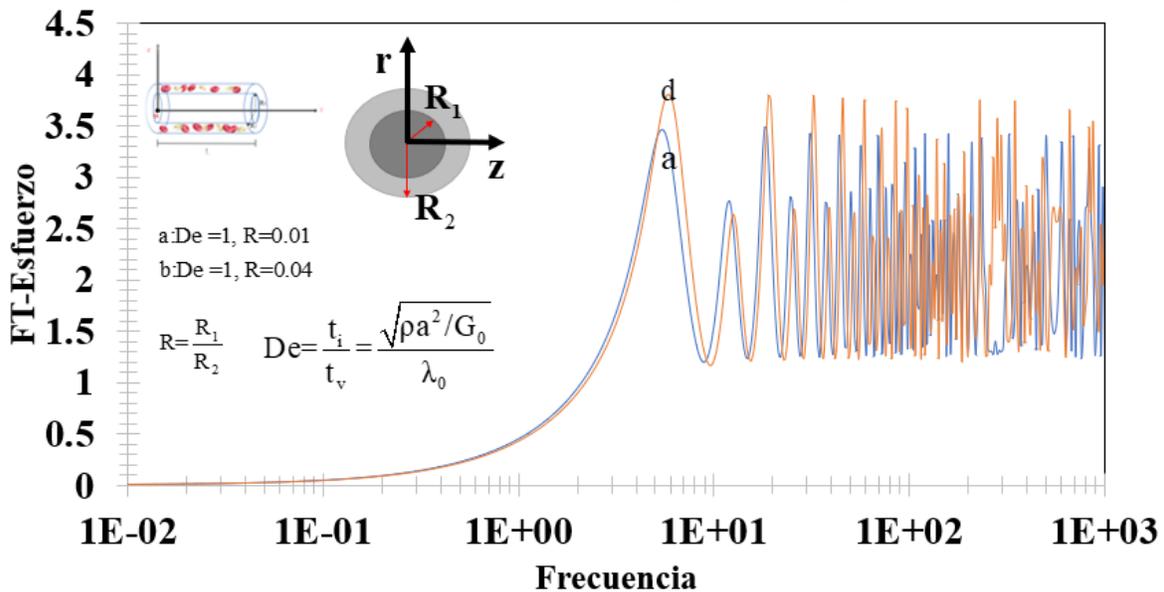


Figura 5.7 Ilustra el efecto de la geometría en la norma de la función de transferencia del esfuerzo, a través de la variación del valor R. Los valores numéricos empleados en la simulación son los siguientes: ($R= [0.01 \text{ y } 0.04]$), ($De=1$).

En la Fig. (5.7) se grafica la función de transferencia del esfuerzo en la pared, en términos de frecuencia para un valor de la relación de la geometría $R= [0.01 \text{ y } 0.04]$. A valores bajos de la frecuencia mantiene un comportamiento asintótico hasta llegar a un valor crítico de frecuencia en el que comienza a tener un comportamiento creciente hasta su máxima resonancia, para después descender hasta un valor en el que a mayores frecuencias encontramos un comportamiento de picos los cuales mantienen una resonancia. El efecto de la geometría ocasiona en cada uno de los casos que la curva presente una mayor resonancia, en el caso de un $R=0.1$ se observa un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo, para el valor de $R=0.04$ comienza a mostrar un ligero desplazamiento a la derecha, a un valor crítico presenta una mayor resonancia para después descender y comenzar un comportamiento de picos. En ambos casos se presenta resonancia.

Ecuación Reológica de Burgers

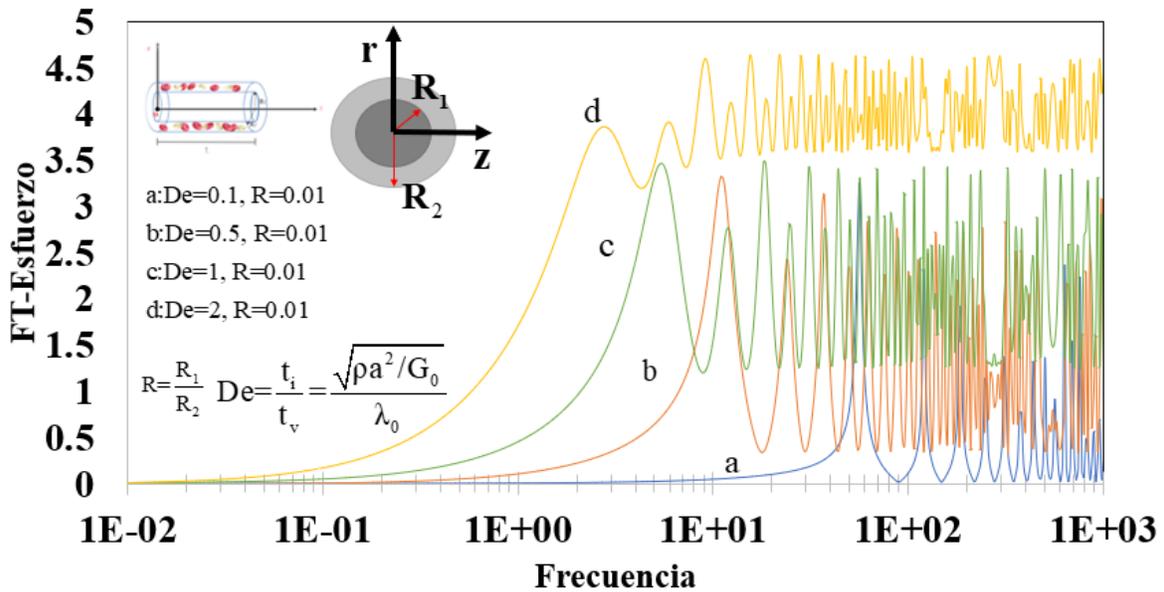


Figura 5.8 Ilustra el efecto de la geometría en la norma de la función de transferencia del esfuerzo, a través de la variación del valor de Deborah. Los valores numéricos empleados en la simulación son los siguientes: ($R= 0.01$) ($De= [0.1, 0.5, 1$ y $2]$).

En la Fig. (5.8) se grafica la función de transferencia del esfuerzo en la pared, en términos de frecuencia para un valor de $De= [0.1, 0.5, 1,$ y $2]$ que relaciona las propiedades viscoelásticas, manteniendo una relación de nuestra geometría de valor $R=0.01$. Se observa que para los valores de $De= [0.1$ y $0.5]$ mantienen un comportamiento constante hasta un valor crítico a altas frecuencias para presentar ahora un comportamiento creciente hasta llegar a un punto máximo o punto de mayor resonancia, comienza a descender hasta un valor característico hasta presentar un comportamiento de picos. Para los valores de $De= [1$ y $2]$ se muestra un comportamiento asintótico hasta valores característicos a frecuencias más bajas, para después tener un comportamiento ascendente hasta su punto máximo o mayor resonancia, posteriormente se observa un tren de picos que ascienden y descienden. Se muestra que para un fluido menos viscoelástico presenta un desplazamiento hacia la derecha en cambio los más viscoelásticos las curvas se presentan en frecuencias menores.

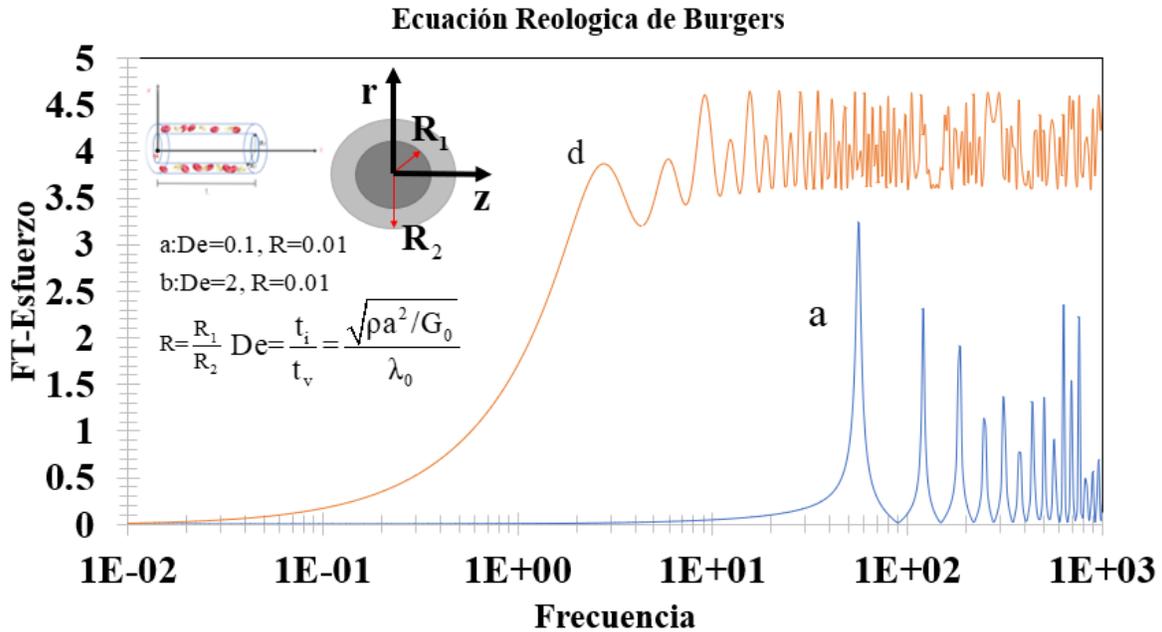


Figura 5.9 Ilustra el efecto de la geometría en la norma de la función de transferencia del esfuerzo, a través de la variación del valor R. Los valores numéricos empleados en la simulación son los siguientes: (R= [0.01, 0.05, 0.1 y 0.2]), (De=1).

En la Fig. (5.9) se grafica la función de transferencia del esfuerzo en la pared, en términos de frecuencia para un valor de $De = [0.1 \text{ y } 2]$ que relaciona las propiedades viscoelásticas, manteniendo una relación de nuestra geometría de valor $R = 0.01$. Se observa que para el valor de $De = 0.1$ se mantiene un comportamiento constante hasta un valor crítico a altas frecuencias para presentar ahora un comportamiento creciente hasta llegar a un punto máximo o punto de mayor resonancia, desciende a un valor característico hasta presentar un comportamiento de picos. Para el valor de $De = 2$ se muestra un comportamiento asintótico hasta valores característicos a frecuencias más bajas, para después tener un comportamiento ascendente hasta su punto máximo o mayor resonancia, posteriormente se observa un tren de picos que ascienden y descienden. Se observa que para un fluido menos viscoelástico presenta un desplazamiento hacia la derecha en cambio el más viscoelástico su curva se presentan en frecuencias menores.

5.4 Aplicaciones a Sangre humana con bajo contenido de colesterol

En esta sección, se aplican los resultados a sangre con colesterol en pacientes con hipercolesterolemia (Moreno et al. 2015). Las propiedades materiales obtenidos fueron calculados a 50 pacientes hombres con las mismas condiciones de salud, tamaño y masa corporal. Las muestras fueron extraídas con los protocolos de bioética y previo consentimiento firmado de los autores. Las pruebas reológicas, fueron: (i) Flujo cortante en estado estacionario la cual, es una prueba destructiva y (ii) Flujo oscilatorio de baja amplitud. La última prueba es no destructiva, es decir, solo se analiza la respuesta mecánica del material es decir, que tan viscoso, elástico, o viscoelástico del material. Los datos reométricos obtenidos son los siguientes:

Tabla de datos experimentales de sangre humana en hombres con las mismas condiciones genéticas y biológicas

Propiedades materiales	Modo 1	Modo 2
Tiempo de relajación [s]	0.0052	0.03
Módulo de corte elástico [Pa]	28.5	0.25

5.5 Datos experimentales

El modelo Bimodal de Maxwell nos permite ajustar los datos experimentales obtenidos previamente por el Dr. Fausto Calderas y su grupo de trabajo (**Moreno et al. 2015**).

$$O\eta(i\omega) = \frac{G_{01}\lambda_{01}}{1+\lambda_{01}(i\omega)} + \frac{G_{02}\lambda_{02}}{1+\lambda_{02}(i\omega)}$$

Si se define la viscosidad a corte bajo como la suma de todos los modos, es decir:

$$\eta_0 = \eta_{01} + \eta_{02} = G_{01}\lambda_{01} + G_{02}\lambda_{02}$$

Para aplicar la teoría desarrollada en los capítulos anteriores, se hace adimensional el operador viscosidad, viscosidad, tiempo de relajación y frecuencia con las propiedades materiales de cruce que se ven en la Fig. (5.10) con las propiedades reométricos

$$O^*\eta(i\omega) = \frac{O\eta(i\omega)}{(G_{01}+G_{02})(\lambda_{01} + \lambda_{02})}$$

$$\eta_{02}^* = \frac{\eta_{02}}{\eta_{01}} = \frac{\eta_{02}}{(G_{01}+G_{02})(\lambda_{01} + \lambda_{02})}$$

$$\lambda_{01}^* = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{01} + \lambda_{02}}$$

$$\lambda_{02}^* = \frac{\lambda_{02}}{\lambda_{01} + \lambda_{02}}$$

$$\omega^* = (\lambda_{01} + \lambda_{02})\omega$$

Por lo que el operador viscosidad queda definido como:

$$O^*\eta(i\omega^*) = \frac{\eta_{01}^*}{1+\lambda_{01}^*(i\omega^*)} + \frac{\eta_{02}^*}{1+\lambda_{02}^*(i\omega^*)}$$

Por lo que el parámetro β^* en forma adimensional toma la forma:

$$\beta^* = i^{3/2} \sqrt{De^2 \cdot \omega^* \cdot O_\phi^*(i\omega^*)} = \sqrt{\frac{De^2 \cdot \omega^*}{O_\eta^*(i\omega^*)}}$$

En donde el número de Deborah, para este sistema se define como:

$$De = \frac{\sqrt{\rho R^2 / (G_{01} + G_{02})}}{\lambda_{01} + \lambda_{02}}$$

Para el número de Deborah, se utiliza los siguientes valores para la densidad y el radio de la vena que se aproxima a un capilar rígido, por lo que, se tiene lo siguiente:

- a) Densidad promedio de la sangre es: $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$
- b) Radio promedio de una vena humana: $R = 1\text{mm} = 1 \times 10^{-3}\text{m}$
- c) Radio promedio de una arteria: $0.02 \text{ cm} = 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ y $0.35 \text{ cm} = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m}$

Para estos valores, los números de Deborah para estos valores queda definido como:

$$De = \frac{\sqrt{\rho R^2 / (G_{01} + G_{02})}}{\lambda_{01} + \lambda_{02}} = \frac{\sqrt{\left(1053 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) (1 \times 10^{-3} \text{ m})^2}}{(28.5 \text{ Pa})} = \frac{36.9648}{0.0052\text{s}} = 36.9648 \cong 37$$

Para un valor de 0.02 cm el número de Deborah, tiene el siguiente valor analítico:

$$De = \frac{\sqrt{\rho R_{\text{vena}}^2 / (G_{01} + G_{02})}}{\lambda_{01} + \lambda_{02}} = \frac{\sqrt{\left(1053 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) (2 \times 10^{-4} \text{ m})^2}}{(28.5 \text{ Pa})} = \frac{0.2337}{0.0052\text{s}} = 0.2337 \cong 0.234$$

Para un valor de 0.35 cm el número de Deborah, tiene el siguiente valor analítico:

$$De = \frac{\sqrt{\rho R_{\text{vena}}^2 / (G_{01} + G_{02})}}{\lambda_{01} + \lambda_{02}} = \frac{\sqrt{\left(1053 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) (3.5 \times 10^{-4} \text{ m})^2}}{(28.5 \text{ Pa})} = \frac{4.09}{0.0052\text{s}} = 4.09 \cong 4.1$$

Entonces, los valores adimensionales de la viscosidad en el modo 2

$$\eta_{02}^* = \frac{\eta_{02}}{(G_{01} + G_{02})(\lambda_{01} + \lambda_{02})} = \frac{(0.37 \text{ Pa})(0.03\text{s})}{(28.5 \text{ Pa})(0.0052\text{s})} = 0.07489$$

Y los valores adimensionales de los tiempos de relajación son:

$$\lambda_{02}^* = \frac{\lambda_{02}}{\lambda_{01}} = \frac{0.03}{0.0052} = 5.769 \cong 5.77$$

A partir de estos valores, se calculan las curvas resonantes para las normas de funciones de transferencia de flujo volumétrico y esfuerzo.

$$T_F^*(\omega^*) = \sqrt{\left(\text{Re}\left[T_F^*(\omega^*)\right]\right)^2 + \left(\text{Im}\left[T_F^*(\omega^*)\right]\right)^2}$$

Y para la función esfuerzo, se tiene la siguiente expresión analítica

$$T_S^*(\omega^*) = \sqrt{\left(\text{Re}\left[T_S^*(\omega^*)\right]\right)^2 + \left(\text{Im}\left[T_S^*(\omega^*)\right]\right)^2}$$

A continuación, se presentan los resultados los módulos viscosos y elásticos para el modelo multimodal de Maxwell.

En la Fig. (5.10) se observa la respuesta de los módulos viscosos y elásticos con la frecuencia, para sangre humana con bajo contenido de colesterol y que se ajusta mediante un modelo bi-modal de Maxwell.

Se observan tres puntos importantes:

- a) A frecuencias bajas, el sistema es dominado por los mecanismos viscosos por lo que el modulo viscoso $G''(\omega) \gg G'(\omega)$.
- b) A frecuencias moderadas, el sistema presenta cambios en las pendientes, por lo menos dos relacionados con los modos de ajuste.
- c) En el punto de cruce, los módulos son iguales, i.e., $G'(\omega_c) = G''(\omega_c)$ el sistema se comporta viscosa y elástica, por lo que el comportamiento de la sangre es viscoelástico.
- d) A frecuencias mayores que la de cruce, i.e., $\omega > \omega_c$, el sistema se comporta de una manera más elástica, por lo que almacena más energía ($G'(\omega) \ll G''(\omega)$).

En la Fig. (5.11) se observa las dos funciones de transferencia volumétricas vs esfuerzo. En esta simulación, se observa la competencia entre la interacción entre el sólido-fluido y el fluido y la fuerza motriz asociada al gradiente de presión pulsátil.

A continuación, se presentan los siguientes puntos importantes:

- a) A frecuencias bajas, las dos funciones de transferencia son iguales y por lo tanto son iguales a uno.
- b) A medida que la frecuencia aumenta, la función de transferencia del flujo volumétrico y la del esfuerzo aumentan, hasta un punto de saturación.
- c) Este punto de saturación coincide con la frecuencia resonante que esta ligada con el tiempo de relajación total.
- d) A una frecuencia mayor que la resonante, las funciones de transferencia del flujo volumétrico decrecen.
- e) Es claro que la forma de los ciclos, dependen de la viscoelasticidad del material. A valores de Deborah pequeños, se extiende el área del ciclo y el punto de retorno se obtiene a valores mayores de la función de transferencia del flujo volumétrico. Esto significa que, el efecto de la viscoelasticidad controla la relación entre las dos funciones de transferencia.
- f) A valores de Deborah mayores de 0.1, i.e., $De > 0.1$ el sistema es dominado por los mecanismos viscosos y la forma de las curvas (lazos o ciclos) disminuyen considerablemente.
- g) La forma de los ciclos, dependen de la curva resonante dominante y el tren de curvas subsecuentes asociadas a las funciones de Bessel, propiedades materiales a través de los grupos adimensionales: (i) Deborah, (ii) Tiempo de retardo, (iii) Memoria.
- h) La forma de los lazos depende del contenido de colesterol
 - (i) La sangre con poca viscoelasticidad presenta un forma de los lazos o ciclos como los representados por las letras {b,c,d}.
 - (ii) La sangre con poca elasticidad puede estar asociado a un tipo de patología o enfermedad como el hipercolesterolemia, cirrosis hepática, cáncer, etc.
 - (iii) Desde el punto de vista reológico, los parámetros importantes para aislar este tipo de fenómenos son los tiempos de relajación y los módulos de corte.

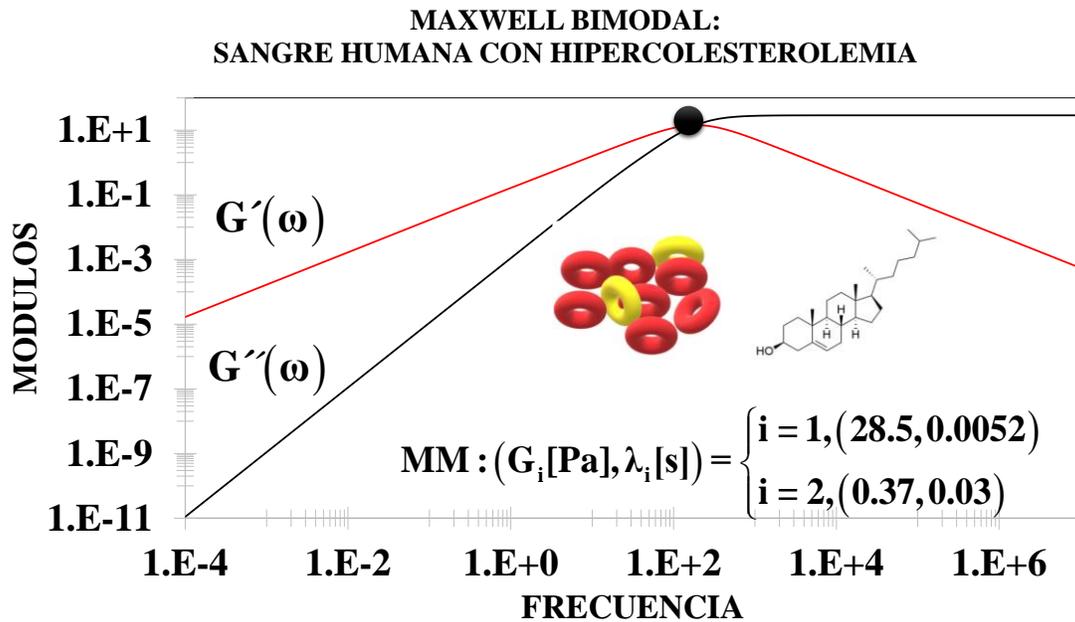


Figura 5.10 Ilustra los módulos viscosos y elásticos para el modelo bimodal de Maxwell que se mapea en el modelo de Burgers. A frecuencias bajas y moderadas el sistema es dominado por los mecanismos viscosos, mientras que en el cruce (bola negra el comportamiento es viscoelástico) y después de esto, el sistema es gobernado por la respuesta elástica del material.

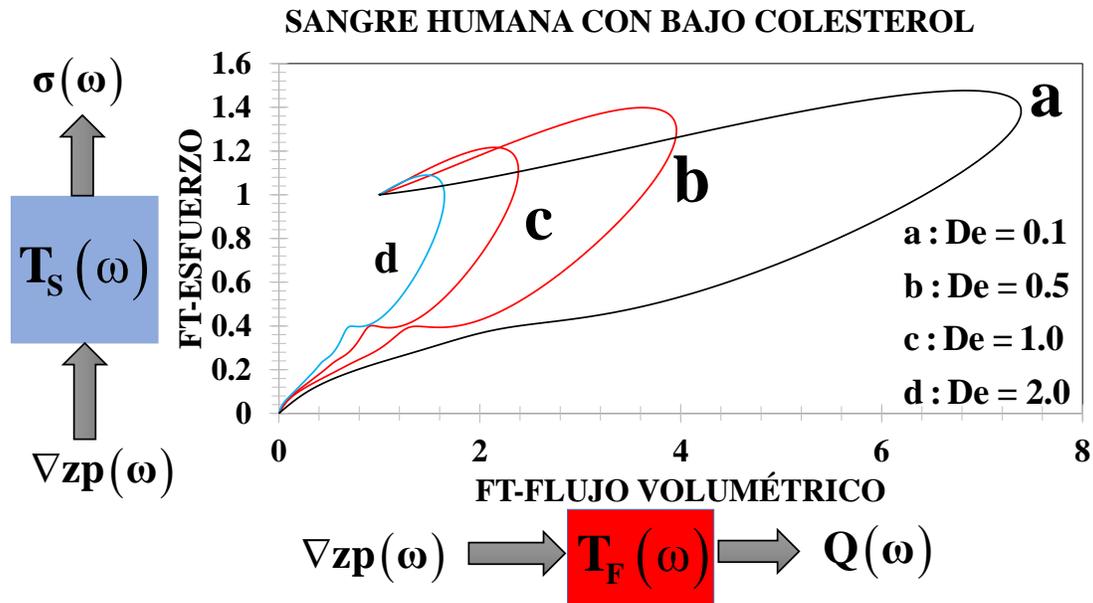


Figura 5.11 Ilustra la interacción de la función de transferencia del esfuerzo vs función de transferencia del flujo volumétrico. Se observa que para un fluido dominado por los mecanismos viscosos (a), el sistema presenta un lazo más pronunciado que aquellos asociados al incremento de los mecanismos viscoelásticos. Se observa, que a frecuencias bajas el sistema es igual a 1, mientras que a frecuencias moderadas el sistema el área de lazo aumenta por los efectos viscoelásticos, mientras que, a frecuencias altas, la respuesta dinámica de las dos funciones de transferencia disminuyen.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

6.1 Aportacion al conocimiento

En este trabajo se analizo el efecto del gradiente de presion pulsatil en dos geometrias cilindricas. La primera de ellas es un capilar de radio a y longitud $z = L$, la segunda de ellas es una corona circular con radio R_1 Y R_2 , y longitud $z = L$. Para describir el flujo y la reología del sistema se utilizo un modelo bi-modal de Maxwell en paralelo el cual, se mapea en una sub-clase de modelo de Burgers.

A) Capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$

El interés de esta investigación a nivel de licenciatura es deducir bajo qué condiciones el sistema, presenta resonancias dominantes y secundarias.

Suponiendo estado no estacionario, proceso isotérmico y fluido incompresible, se obtuvieron expresiones generales para las funciones de transferencia del flujo volumétrico y del esfuerzo en función del gradiente de presión pulsátil.

Las ecuaciones obtenidas en ambas geometrias fueron escaladas con variables dimensionales características y se obtuvieron tres grupos adimensionales, los cuales describen la viscoelasticidad del material, interacciones polímero-polímero y polímero-solvente.

Los grupos adimensionales que describen el sistema son:

- (i) Deborah: Mecanismos viscoelásticos e inerciales
- (ii) Jeffrey: Solvente
- (iii) Burgers: Memoria representa la interacción entre la viscoelasticidad del material

Físicamente, las funciones de transferencia compleja del flujo volumétrico-gradiente de presión y esfuerzo-gradiente de presión nos da la respuesta dinámica lineal.

A frecuencias bajas, las funciones de transferencia son independientes de la frecuencia y, por lo tanto, la respuesta dinámica de los sistemas es constante.

El valor máximo de las curvas resonantes está determinado por un acoplamiento entre las propiedades:

- (i) Inerciales
- (ii) Viscosas
- (iii) Elásticas
- (iv) Dispersivas a través del parámetro Betha.
- (v) Geométricas (longitud característica radial)

La interacción polímero-polímero del modelo de Burgers tiene un efecto positivo en el contexto de la respuesta dinámica del sistema asociada a la resonancia.

La interacción polímero-solvente del modelo de Burgers tiene un efecto negativo en el contexto de la respuesta resonante del sistema.

B) Corona circular de radios R_1 y R_2

La corona circular presenta resultados más complejos desde un punto de vista matemático, i.e. el efecto de la geometría se ve reflejado en las funciones de Bessel de orden cero de segunda especie.

El efecto de la geometría se observa en el número adimensional $R = R_1/R_2$. Este número controla el tamaño de las oclusiones en el sistema. Si $R \rightarrow 0$, el sistema se comporta como un capilar de radio a y longitud $z = L$. En este punto, se tendría una oclusión periférica, mientras que cuando $R \rightarrow 1$, el sistema se encuentra completamente ocluida.

El efecto de R controla las oclusiones y cuando R aumenta, la respuesta dinámica lineal del sistema (resonancias) se obtienen a mayores frecuencias. Es decir, que las curvas resonantes, se desfasan hacia la derecha a mayores por efecto de la geometría.

Los resultados y mecanismos observados en el capilar se replican con los diferentes números adimensionales.

C) Aplicaciones a sangre con colesterol

El efecto de la teoría utilizada en la descripción de la función de la transferencia del flujo volumétrico y del esfuerzo en función del gradiente de presión pulsátil.

El efecto del colesterol se analiza en las propiedades materiales reológicas asociadas a los tiempos de relajación viscoelástico y los módulos elásticos de corte.

Las formas de los ciclos o los lazos dependen de las propiedades materiales del fluido y esto puede ser un parámetro para definir enfermedades con reología.

6.2 Trabajo futuro

Esta investigación, puede ser extendida mediante los siguientes puntos importantes:

- a) Analizar el flujo pulsátil en el régimen no lineal de rapidez de deformación.
- b) Acoplar la transferencia de movimiento con ecuaciones de masa.
- c) Trabajo experimental para contrastar los resultados teóricos obtenidos.

Finalmente, este trabajo de investigación a nivel de licenciatura representa una aproximación en la búsqueda constante de modelos matemáticos que describan estos sistemas.

Para caracterizar este tipo de sistemas se utilizaron herramientas, como son fenómenos de transporte, reología de fluidos complejos, teorías basadas en cristales líquidos nemáticos.

Estas teorías son utilizadas como de carácter organizacional y permiten obtener información en la búsqueda constante de herramientas que permitan describir sistemas complejos biológicos y que permitan alternativas para enfermedades emergentes.

BIBLIOGRAFÍA

Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 Dynamics of polymeric liquids, vol. New York: John Wiley & Sons.

Bird, R.B., Stewart E. & Lighfoot E.N. 2002 Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.

Bravo-Gutierrez ME, Hernández-Machado A, Corvera-Poire E (2008). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannel. Phys. Rev. Lett. 101, 224501.

Bravo-Gutierrez ME, Castro M, Hernández-Machado A, Corvera-Poiré E (2011). Controlling viscoelastic flow in microchannels with slip. Langmuir 27, 2075-2079.

Cárdenas-I JC, Lopez-H OJ, Pinto-R KT (2011) Estudio Reológico de los fluidos viscoelásticos surfactantes utilizados en operaciones de fracturamiento hidráulico. El Rev. Ene. 9, 1.

Castrejón-Pita J, Del Rio. J, Castrejón-Pita A, Huelsz G (2003). Experimental observation of dramatic differences in the dynamic response of Newtonian and Maxwellian fluids. Phys. Rev. E 68, 046301 (2003).

Castro M, Bravo-Gutierrez ME, Hernández-Machado A, Corvera-Poire E (2008). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannel. Phys. Rev. Lett. 101, 224501.

Collepardo-Guevara R, Corvera-Poire E (2007). Controlling viscoelastic flow by tuning frequency during occlusions. Phys. Rev. E 76, 026301

Corvera-Poire E, Hernández-Machado E (2010). Frequency-induced stratification in viscoelastic microfluidics. Langmuir 26, 15084-15086

Cuevas S, del Rio JA (2001) Dynamic permeability of electrical conducting fluids under magnetic fields in annular ducts. Phys. Rev. E 64, 016313. Permeabilidad dinámica de fluidos conductores eléctricos bajo campos magnéticos en conductos anulares.

De la Guerra A y Corvera-Poire E (2022). Pulsatile parallel flow of air and a viscoelastic fluid with multiple characteristic times. An application to mucus in the trachea and the frequency of cough. J. Phys: Condens. 34. 314003 (9pp)

Del Rio JA, De Haro ML, Castrejón-Pita JR (1998). Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. Phys. Rev. E 58 6323.

Flores J, Corvera Poire E, Del Rio JA, Lopez de Haro M (2010). A plausible explanation for heart rates in mammals. *J. the Biol.* 265. 599-603.

Flores J, Alastruey J, Corvera-Poiré E (2010). A Novel Analytical Approach to Pulsatile Blood Flow in the Arterial Network. *Annals of Biomedical Engineering.* 44, 30047-3068.

Hernández-Machado A, Corvera-Poire E (2008). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannel. *Phys. Rev. Lett.* 101, 224501.

Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Calderas García F, Ramírez-Torres LA, Ortiz Bautista D, Soriano-Correa C, Nuñez-Ramirez DM, Medina-Torres L, Hernández Abad VJ (2022). Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos: Flujo pulsátil de sangre humana. UNAM, FES Zaragoza, agosto (2022). ISBN: 978-607-30-6436-1.

Herrera-Valencia EE, Ramírez-Torres LA, Sánchez-Villavicencio ML, Calderas García F, Ortiz Bautista D. Soriano-Correa C, Hernández Abad VJ (2022). Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Estructurados: UNAM, FES Zaragoza, marzo (2023). ISBN: (En tramite)

Herrera-Valencia EE, Rey AD (2014). Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. *Phil. Trans. R. Soc. A.* 372: 20130369/1-28.

Herrera EE, Calderas F, Chavez AE, Manero O, Mena B (2009). Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. *Rheol. Acta* 48 779-800.

Herrera EE, Calderas F, Chávez AE, Manero O (2010). Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165 174-183.

Lombard J, Pagonabarraga I, Poiré EC (2020). Dynamic response of a compressible binary fluid mixture. *Phys. Rev. Fluids* 5, 064201.

Lopez de Haro M, del Rio JA, Whitaker S (1996). Flow of Maxwell fluids in a porous media. *Transp. Porous Media* 25, 167.

Macosko CW, *Rheology: Principles, Measurement and Applications* (Wiley, Germany 1994).

Moreno L, Calderas F, Sánchez-Olivares G, Medina-Torres L, Sánchez-Solís A., Manero O. Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood. *Korea-Australia Rheology Journal*, Vol.27, No.1, pp.1-10 (February 2015) DOI: 10.1007/s13367-015-0001-4.

Torres Herrera U (2021). Dynamic permeability of fluids in rectangular and square microchannels: Shift and coupling of viscoelastic bidimensional resonances. *Phys. Fluids* 33, 012016.

Torres-Herrera U, Corvea-Poiré E (2018). An analytical framework to determine flow velocities with nanotubes from their vibration frequencies. *Phys. Fluids* 30, 122001

Torres Rojas AM, Pagonabarraga, Corvera-Poiré (2017). Resonances of Non-Newtonian fluids in elastomeric microtubes. *Phys. Fluids* 29, 122003.

Tsiklauri D, Beresnev I (2006). Non-Newtonian effects in the peristaltic flow of a Maxwell fluid. *Phys. Rev.* 73, 029901.

Wolfram Research, Inc., Mathematica (Licencia UNAM) Version 13, Champaign, IL., 2020.

Youbing Y y Ke-Oin Z (2006). Oscillating flow of a viscoelastic fluid in a pipe with the fractional Maxwell model. *Applied Mathematics and Computation.* 173, 231-242.