



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

**INFLACIÓN CÓSMICA MEDIANTE TEORÍAS  $f(R)$**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
**SAÚL AMBRIZ ARÉVALO**

TUTOR PRINCIPAL:  
**DR. MARCELO SALGADO RODRÍGUEZ. ICN-UNAM**

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:  
**DR. DANIEL EDUARDO SUDARSKY SAIONZ. ICN-UNAM**  
**DR. JUAN CARLOS HIDALGO CUÉLLAR. ICF-UNAM**

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., MARZO 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*Para Ofelia e Hilario*

*Es un deber para mí agradecer a esas personas que han sido importantes en el desarrollo de la presente tesis, ya sea en un ámbito profesional tanto como personal. En particular al Dr. Marcelo Salgado, quien sin su paciencia y capacidad esto no hubiera sido posible. Además, agradecimientos a los proyectos DGAPA-PAPIIT (UNAM) IN111719, IN105223, y CONACYT (FORDECYT-PRONACES) 140630 por su apoyo.*



*«...in this harsh world of deception, I will stand up once more and find within myself the strength to stumble again.»*

Pallbearer. "An Offering of Grief". *Sorrow and Extinction*. 20 Buck Spin, 2012.



# Resumen

El modelo inflacionario se ha vuelto un punto crucial en nuestro entendimiento de la cosmología moderna puesto que, presuntamente, provee las condiciones iniciales a partir de las cuales el universo evolucionó a la estructura que observamos actualmente. Sin embargo, la inflación no ha sido aceptada del todo, ya sea que se sigan construyendo distintos modelos inflacionarios o esta se descarte totalmente. Por nuestra parte, consideramos que hasta el momento nos resta apegarnos a las observaciones realizadas e ir restringiendo modelos inflacionarios.

En la presente tesis realizamos un estudio invariante de norma de la inflación para una teoría  $f(R)$  arbitraria. Esto motivado en el éxito de modelo  $R^2$  de Starobinsky como modelo inflacionario, así como la reciente popularidad en los modelos  $f(R)$  empleados en contextos cosmológicos. Para ello usamos los resultados conocidos de la inflación slow-roll de tal forma que traslademos, mediante una transformación conforme de la métrica, las soluciones al marco de Jordan. Esto puesto que, como verificamos, las ecuaciones son equivalentes en ambos marcos debido a que el acoplamiento entre la materia y el campo escalar, que surge en el marco de Einstein, no aparece en nuestro caso.





# Abstract

The inflationary model has become a crucial point in our understanding of modern cosmology since it presumably provides the initial conditions from which the universe evolved into the structure we observe today. However, inflation has not been fully accepted, whether different inflationary models continue to be constructed or discard it altogether. For our part, we consider that so far we have to stick to the observations and gradually restrict inflationary models.

In the present master's thesis we perform a gauge invariant study of inflation for an arbitrary  $f(R)$  theory. This is motivated by the success of Starobinsky's  $R^2$  as an inflationary model, as well as the *recent* popularity of  $f(R)$  models used in cosmological contexts. For this reason we use the known slow-roll inflation results in such a way that we translate, by a conformal transformation of the metric, the solutions to Jordan's frame. This because, as we verify, the equations are equivalent in both frames since the coupling between matter and the scalar field, which arises in the Einstein frame, does not appear in our case.



# Notación y convenciones

Con la finalidad de una mejor exposición se reúnen algunas de las convenciones y notación usadas en este texto:

- Se emplea la signatura métrica  $(- + + +)$ , así como la convención de signos del texto de Wald [125] para las definiciones de cantidades geométricas, tales como el tensor de Riemann  $R_{abcd}$  y sus derivados.
- Al igual que el texto clásico de Wald [125], se utiliza la notación abstracta de índices introducida por Penrose, en cuyo caso índices latinos del inicio del alfabeto, i.e.  $a, b, c, d, \dots$  se emplean para caracterizar el tensor en sí mismo<sup>1</sup>. Índices griegos, i.e.  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  se emplean para caracterizar las componentes del tensor en una base específica. Por ejemplo  $A^a_{bc}$  es un tensor de tipo (1,2) y  $A^\alpha_{\beta\gamma}$  son las componentes en una base coordenada dada.
- Se emplean unidades naturales donde  $c = \hbar = k_B = 1$ , a menos que de antemano se indique lo contrario. Entonces las cantidades físicas tendrán unidades de energía a alguna potencia, e.g. [fuerza]=[energía]<sup>2</sup>.
- Denotamos al tiempo conforme por  $\eta$ . Aunque en su mayoría usaremos el tiempo cósmico  $t$  será útil tener en mente como pasar de una descripción a la otra (ver Sección A.5).
- En el Capítulo 6 será de utilidad trabajar en el espacio de Fourier, sin embargo hay diferentes convenciones para normalizar las transformaciones. En el presente texto las convenciones de signos y factores de  $2\pi$  son de la forma:

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int d^3x f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

$$\delta_D(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

---

<sup>1</sup>En algunos casos será conveniente separar un tensor en su parte espacial y temporal en cuyo caso se emplearán índices latinos de la parte media del alfabeto, i.e.  $i, j, k, \dots$ , para las componentes espaciales, cuidando que el contexto en el texto sea claro.

- Ecuaciones útiles o ampliamente usadas en el texto están en cajas, por ejemplo

$$G_{ab} = \kappa T_{ab}.$$

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Abstract</b>	<b>VII</b>
<b>Notación y convenciones</b>	<b>IX</b>
<b>1. Prólogo</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación y descripción del problema . . . . .	3
1.2. Panorama del texto . . . . .	4
<b>2. Cosmología</b>	<b>7</b>
2.1. Historia del universo . . . . .	7
2.2. El universo en expansión . . . . .	9
2.2.1. Homogeneidad e isotropía . . . . .	10
2.2.2. Métrica FRW . . . . .	11
2.2.3. Ecuaciones de Friedmann . . . . .	13
2.2.4. Inventario cósmico . . . . .	17
2.3. Horizontes . . . . .	20
2.3.1. Radio de Hubble . . . . .	20
2.3.2. Horizonte de partículas . . . . .	21
2.3.3. Horizonte de eventos . . . . .	22
2.4. Modelo de concordancia $\Lambda$ CDM . . . . .	22
<b>3. Inflación cosmológica</b>	<b>25</b>
3.1. Problema de planitud . . . . .	26
3.2. Problema del horizonte . . . . .	27
3.3. Reliquias no deseadas . . . . .	29
3.4. Inflación . . . . .	30
3.4.1. Problema de la planitud revisado . . . . .	31
3.4.2. Problema del horizonte revisado . . . . .	32
3.4.3. Problema de las reliquias revisado . . . . .	34
3.5. Modelo inflacionario clásico . . . . .	34
3.5.1. Inflación por un campo escalar . . . . .	36
3.5.2. Inflación slow-roll . . . . .	38
3.5.3. $e$ -folds . . . . .	40

3.5.4. Recalentamiento . . . . .	40
3.6. Inflación de Starobinsky . . . . .	41
3.7. Restricciones observacionales a la inflación . . . . .	47
<b>4. Teorías <math>f(R)</math></b> . . . . .	<b>51</b>
4.1. Motivación . . . . .	52
4.2. Introducción a las teorías $f(R)$ . . . . .	53
4.2.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	54
4.3. Tensor efectivo de la energía oscura geométrica . . . . .	56
4.4. Cosmología $f(R)$ . . . . .	58
4.5. Modelos $f(R)$ . . . . .	58
4.5.1. Modelo de Starobinsky no-polinomial . . . . .	58
4.5.2. Modelo MJWQ . . . . .	61
4.5.3. Modelo Hu-Sawicki . . . . .	62
<b>5. Inflación en teorías <math>f(R)</math></b> . . . . .	<b>67</b>
5.1. Dinámica inflacionaria en el marco de Jordan . . . . .	68
5.1.1. Resultados numéricos . . . . .	69
5.2. Dinámica inflacionaria en el marco de Einstein . . . . .	73
5.2.1. Transformación conforme . . . . .	73
5.2.2. Dinámica para el modelo $R^2$ . . . . .	75
5.2.3. Solución numérica . . . . .	76
5.3. Equivalencia de los marcos . . . . .	81
<b>6. Perturbaciones cosmológicas</b> . . . . .	<b>85</b>
6.1. Teoría lineal de perturbaciones cosmológicas . . . . .	87
6.1.1. Desarrollo del tensor de Riemann . . . . .	88
6.1.2. Desarrollo del tensor de Ricci . . . . .	89
6.1.3. Desarrollo del escalar de Ricci . . . . .	89
6.1.4. Desarrollo del tensor de Einstein . . . . .	90
6.2. Perturbaciones lineales a un fondo FRW . . . . .	91
6.2.1. Descomposición escalar-vectorial-tensorial . . . . .	92
6.2.2. Tensor de Einstein . . . . .	94
6.3. Libertad de norma . . . . .	96
6.3.1. Invariantes de norma . . . . .	98
6.4. Inflación con un campo escalar . . . . .	101
6.4.1. Perturbaciones escalares . . . . .	101
6.4.2. Perturbaciones tensoriales . . . . .	112
6.4.3. Conexión con los parámetros cosmológicos . . . . .	114
6.5. Inflación $f(R)$ . . . . .	115
6.5.1. Perturbaciones escalares . . . . .	115
6.5.2. Perturbaciones tensoriales . . . . .	118
6.5.3. Transformación conforme . . . . .	119
6.5.4. Conexión con los parámetros cosmológicos . . . . .	120
6.6. Modelo $R^2$ de Starobinsky . . . . .	121

<b>7. Epílogo</b>	<b>125</b>
<b>A. Universo FRW homogéneo</b>	<b>129</b>
A.1. Geometría del espacio-tiempo . . . . .	129
A.2. 3-curvatura escalar . . . . .	131
A.3. Ecuaciones de movimiento de un campo escalar . . . . .	132
A.4. Tensor de Energía-Momento de un campo escalar . . . . .	132
A.5. Tiempo conforme . . . . .	133
A.5.1. Tensores de Ricci y Einstein . . . . .	134
A.5.2. Ecuaciones de Friedmann . . . . .	134
A.5.3. Ecuación de conservación . . . . .	135
A.5.4. Campo escalar . . . . .	135
<b>B. Universo FRW perturbado</b>	<b>137</b>
B.1. Tensor de Einstein perturbado . . . . .	137
B.2. Perturbaciones al campo escalar . . . . .	144
B.3. Curvatura intrínseca en hipersuperficies espaciales . . . . .	145
B.4. Perturbaciones a la cosmología $f(R)$ . . . . .	146
B.5. Tiempo conforme . . . . .	149
B.5.1. Tensor de Einstein . . . . .	150
B.5.2. Ecuaciones de campo para un campo escalar . . . . .	151
B.5.3. Ecuaciones de campo para la cosmología $f(R)$ . . . . .	151
B.6. Transformación conforme . . . . .	152
<b>C. Elementos de las teorías <math>f(R)</math></b>	<b>161</b>
C.1. Ecuaciones de campo . . . . .	161
C.2. Ecuación generalizada de Friedmann . . . . .	164
C.3. Potencial del modelo $R^2$ . . . . .	164
C.4. Equivalencia de las constricciones . . . . .	165
C.5. Tiempo conforme . . . . .	165
C.5.1. Ecuación de Friedmann de las teorías $f(R)$ . . . . .	166
C.5.2. Modelo $R^2$ . . . . .	166





# Capítulo 1

## Prólogo

Pasado más de un siglo, actualmente es bien conocido que la Relatividad General (RG) favorece al análisis de la estructura del espacio-tiempo, así como su evolución, en términos de leyes físicas. Fue Alexander Friedmann (1888-1925) en 1922 quien descubrió la existencia de soluciones cosmológicas en expansión y en contracción al resolver las ecuaciones de campo de la relatividad General [44], pero por esa época estas características no eran consideradas favorables en una teoría física que describiera al universo. Sin embargo, en 1929 Edwin Hubble (1889-1953) se encontró con la expansión del universo mediante las observaciones en el corrimiento al rojo de las galaxias, como predice la teoría de Einstein [56]. Más aún, George Gamow (1904-1968) y sus colaboradores encontraron en 1946 que el universo debe comenzar en un estado muy caliente y denso a partir de la teoría de la nucleosíntesis [45], y también predijeron en 1948 que el universo actual debería estar inmerso en un campo de microondas con radiaciones de cuerpo negro [46]. Fue hasta 1964 que Arno Allan Penzias (1933–) y Robert Woodrow Wilson (1936–) descubrieron esta radiación de fondo de microondas [96], las cuales coinciden bien con las predicciones teóricas de Gamow. Estas fuertes evidencias observacionales han hecho pensar que el universo comenzó a partir de un estado caliente y denso, el cual está descrito por el modelo estándar del Big-Bang.

En la cosmología moderna se toma como hipótesis inicial el *principio cosmológico*, basado en un número creciente de observaciones, y el cual afirma que a escalas lo suficientemente grandes<sup>1</sup>, el universo es homogéneo e isotrópico. Este principio nos conducirá al espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) (cf. Sección 2.2).

En el modelo estándar del Big Bang, la evolución del universo se caracterizaba usualmente por las etapas dominadas por radiación y por materia, las cuales corresponden a una expansión desacelerada del universo. Sin embargo, este modelo presenta una serie de problemas cosmológicos, a saber: el *problema del horizonte*, el *problema de la homogeneidad e isotropía del espacio*, el *problema de la planitud* y el *problema de las reliquias no deseadas*<sup>2</sup>. Para superar estos problemas fundamentales, es usual considerar una época

---

<sup>1</sup>Del orden de cientos de Mpc (megapársecs). Para dimensionar esta magnitud tomemos la Galaxia de Andrómeda, el objeto celeste más lejano a la Tierra que es visible a simple vista, la cual se encuentra a  $2.5 \text{ Mly} \approx 0.765 \text{ Mpc}$  [105].

<sup>2</sup>Estos problemas se describen en el Capítulo 3.

de expansión acelerada en el universo temprano, es decir, una época *inflacionaria*<sup>3</sup>. Posteriormente a este periodo inflacionario, el universo continua su expansión pero de manera más lenta y desacelerada. Por el momento guardaremos los detalles técnicos para el resto de la tesis, pero cabe mencionar que las ideas básicas de inflación fueron propuestas originalmente por Alan Guth (1947–) [47] en 1980. Algunas versiones revisadas fueron elaboradas por Andrei Linde (1948–) [79, 80], y por Andreas Albrecht (1957–) y Paul Steinhardt (1952–) [2].

Aunque la inflación fue concebida para dar solución a los problemas arriba mencionados, si esta fuera la única motivación, difícilmente habría cobrado notoriedad, mas allá de la mera curiosidad. La verdadera importancia de la inflación radica en que esta puede *convertir* ciertas fluctuaciones cuánticas microscópicas en *semillas* macroscópicas que, posterior a su evolución, dieron origen a la estructura que observamos hoy en día, abriendo la posibilidad a poder restringir modelos inflacionarios. En este sentido las anisotropías del CMB proveen evidencia acerca de los valores que definen los modelos inflacionarios, por ejemplo, los llamados parámetros de *slow-roll*  $\epsilon$  y  $\delta$  son parámetros generales que se pueden estimar a partir de las observaciones. Estas fluctuaciones pueden separarse en dos clases: las escalares y las tensoriales. Las escalares se convierten en fluctuaciones de densidad que evolucionan en las estructuras observadas actualmente (galaxias, cúmulos, etc) y son observadas en la distribución angular de temperaturas del CMB, mientras que las tensoriales generan ondas gravitacionales primordiales, las cuales hasta la fecha no han sido detectadas, pero su detección sería una prueba firme de la existencia del periodo inflacionario.

A lo largo de los ya más de cuarenta años desde la introducción de la idea inflacionaria, se han construido muchos tipos de modelos inflacionarios (véase [81, 83]), lo cual oscurece más de lo que favorece al análisis. Afortunadamente existen criterios para favorecer, desfavorecer e inclusive descartar modelos, de acuerdo a restricciones o cotas observacionales realizadas por sondas espaciales como el *Cosmic Background Explorer* (COBE), *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) y más recientemente Planck (ver Sección 3.7).

Por otro lado, la RG es la teoría de gravitación más aceptada, en parte por su simplicidad pero más importante aún, por su amplio éxito en la descripción de fenómenos físicos tanto a escalas del sistema solar como en escalas cosmológicas [132, 12]. Es por esto que en varios contextos se conoce a la RG como La teoría de la gravitación. Sin embargo, actualmente se considera a la RG como una teoría “incompleta” por ciertos argumentos teóricos y fenomenológicos, el principal de ellos es la incompatibilidad entre la Mecánica Cuántica y la relatividad general. Esto, aunado a nuestra ignorancia en ciertas cuestiones físicas como la Materia y Energía Oscuras, alimenta el deseo de obtener una *teoría definitiva* de gravitación. Una de las formas más simples es generalizar la acción de Einstein-Hilbert, que da lugar a las ecuaciones de Einstein, de tal forma que se emplee una función del escalar de Ricci arbitraria, estas son las llamadas teorías  $f(R)$ .

---

<sup>3</sup>Actualmente sabemos de acuerdo a las observaciones actuales hechas por supernovas del tipo Ia el universo se encuentra en expansión acelerada.

## 1.1. Motivación y descripción del problema

Como mencionamos, han pasado más de 40 años desde la introducción del concepto de inflación en la literatura científica y, sin embargo, esta no deja de tener ciertos inconvenientes. Inclusive hay investigadores que están abandonando esta idea para seguir otros caminos que aparentan ser más *naturales*. Entre ellos está uno de los pioneros de la inflación, Paul Steinhardt<sup>4</sup> [62, 63]. El hecho de que las observaciones no terminen de ser completamente concluyentes sobre la validez de este periodo cosmológico es inconveniente. No obstante, la inflación es el mecanismo físico que mejor se ajusta a las observaciones y en consecuencia debe ser sometida al escrutinio científico, de tal forma que su descripción tome la mejor forma posible o podamos descartarla totalmente.

Además de proporcionar una manera excelente de resolver el problema de las condiciones iniciales del universo, la inflación da una explicación sencilla al origen de la estructura a gran escala, esto a partir de fluctuaciones cuánticas que son magnificadas por la expansión exponencial del universo y las cuales dan origen a las semillas para el crecimiento de la estructura en el mismo [9, 51, 116]. Es decir, la inflación proporciona un mecanismo causal para generar espectros de perturbaciones cosmológicas *casi invariantes de escala*, tal y como predicen las observaciones actuales [101]. Asimismo, las fluctuaciones cuánticas del campo que impulsa la inflación<sup>5</sup> se *congelan*<sup>6</sup> por la expansión acelerada cuando las escalas de las fluctuaciones abandonan el *radio de Hubble*. Posteriormente, mucho después de que termina la inflación, las escalas cruzan nuevamente dentro del radio de Hubble, así, las perturbaciones impresas durante la inflación pueden ser el origen de una estructura a gran escala en el universo.

Por otro lado, se consideran a la relatividad general y a la Teoría Cuántica de Campos como los dos pilares de la Física moderna. Estas son dos de las teorías más aceptadas actualmente por su gran éxito, sin embargo, pese a que la RG describe fenómenos como la expansión del universo, la propagación de ondas gravitacionales, el comportamiento de agujeros negro, entre otros fenómenos, cuando la teoría se debe trasladar al mundo microscópico esta se encuentra con varios obstáculos. Esto, por sí solo, es un gran golpe a las ambiciones de construir una teoría que tome en cuenta *todo* tipo de interacción posible. Lo anterior aunado a la emergencia del *universo oscuro*<sup>7</sup> podría ser otra señal de que necesitamos modificar la RG. Dicha idea no es nueva, de hecho desde los trabajos germinales de Einstein esto ya se estaba planteando, entre los precursores están Arthur

---

<sup>4</sup>Anna Ijjas y Steinhardt proponen un universo cíclico que surge de la combinación de intervalos de contracción lenta del universo con un rebote clásico (donde el parámetro de Hubble cambia de signo).

<sup>5</sup>Usualmente llamado inflatón. Aunque esta es sólo la posibilidad más simple, y por lo tanto es importante tener siempre presente que, aunque nuestro trabajo solo incluye a la inflación generada por un campo escalar y a partir de la modificación de la teoría gravitacional, existen varias formas de implementar la inflación, por ejemplo, emplear varios campos escalares o usar una densidad lagrangiana con término cinético no-canónico (ver e.g. [84]).

<sup>6</sup>Con congelar nos referimos a que son constantes fuera del radio de Hubble. Además cabe destacar que no son las perturbaciones del campo escalar propiamente (a menos que se emplee una norma particular), si no una cantidad invariante de norma  $\mathcal{R}$  que recibe el nombre de perturbación comóvil de curvatura (cf. ecuación (6.83)).

<sup>7</sup>En alusión a la materia y energía oscuras, las cuales, durante las últimas décadas su evidencia ha ido en aumento, sin que podamos aún conocer del todo su naturaleza.

Eddington [37], Hermann Weyl [130], Theodor Kaluza [69] y Oskar Klein [71]. Si bien esta idea de modificar la RG no se ha abandonado desde entonces, es en las últimas décadas que ha sido ampliamente explorada debido a los avances teóricos de las teorías de orden superior<sup>8</sup>, así como los nuevos avances para construir teorías renormalizables de la gravedad [30]. Respecto a esto último, desde 1962 era conocido que la cuantización de campos en un espacio-tiempo clásico puede conducir a teorías de orden superior [122], tales como las teorías de cuarto-orden<sup>9</sup> las cuales tienen propiedades que favorecen al proceso de renormalización [118]. Además estas teorías de orden superior pueden conducir a un periodo de expansión acelerada en el universo primordial [115] y también han sido de interés para explicar la expansión acelerada tardía del universo observada actualmente [4].

En resumen, aunque parezca ambicioso –y tal vez innecesario– modificar una teoría tan exitosa como la RG, tenemos que estar abiertos a esta posibilidad, siempre y cuando dicha teoría modificada reproduzca los éxitos obtenidos por la RG. Un ejemplo de ello, es el modelo  $R^2$  de Starobinsky (a saber  $f(R) = R + \alpha R^2$ ), el cual ha sido extensamente empleado en la literatura como modelo inflacionario, y es el modelo que mejor se ajusta a las observaciones en las anisotropías de temperatura del CMB (ver detalles en la Sección 3.7).

## 1.2. Panorama del texto

El presente trabajo de tesis tiene la siguiente estructura:

- **Capítulo 2.** Se presentan las ideas más importantes de la cosmología clásica; en este se introduce el concepto de universo en expansión así como las ecuaciones de Friedmann que surgen de las ecuaciones de Einstein en un espacio-tiempo espacialmente homogéneo e isotrópico. También se introducen conceptos como el radio de Hubble que jugarán un papel importante durante inflación. Además se presenta el llamado modelo de concordancia  $\Lambda$ CDM el cual es consistente con las observaciones de la Colaboración Planck 2018.
- **Capítulo 3.** Se introduce el concepto de inflación, y a partir de un campo escalar mínimamente acoplado con la gravedad vemos que se obtiene una expansión acelerada temprana en el universo. Además se revisan los problemas cosmológicos antes mencionados sobre las condiciones iniciales y se analiza la manera como la inflación los resuelve. También se considera un caso particular que ha sido ampliamente usado en contextos inflacionarios: un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad con un potencial *motivado* por el modelo  $R^2$  de Starobinsky. Por último revisamos los resultados de la Colaboración Planck 2018 para ver como restringen ciertos parámetros a la inflación.

---

<sup>8</sup>La RG es la teoría más general descrita por una métrica 4-dimensional cuyas ecuaciones de campo son de segundo orden (Teorema de Lovelock). Entonces con teorías de orden superior nos referimos a mayor de segundo orden.

<sup>9</sup>Entre ellas las teorías  $f(R)$  que nos atañen en la presente tesis.

- **Capítulo 4.** Aquí estudiamos las generalidades de las teorías  $f(R)$  y la manera cómo estas pueden ser empleadas en otros contextos cosmológicos. También se toman algunos modelos particulares que han sido usados en la cosmología como ejemplo de estudio .
- **Capítulo 5.** Habiendo introducido modelos  $f(R)$  en contextos cosmológicos generales, se procede a analizar al modelo  $R^2$  de Starobinsky como modelo inflacionario, por ser el que mejor se ajusta a las observaciones actuales. Este estudio se hace tanto en el marco de Jordan (físico) como en el marco de Einstein (conforme), empleando la transformación conforme para este último. En ambos casos se analizan de forma numérica, y se muestra la equivalencia entre ambos marcos, en consistencia con lo obtenido en el Capítulo 3.
- **Capítulo 6.** Se presenta el análisis perturbativo. En primera instancia para el sector geométrico de las ecuaciones de Einstein en un espacio-tiempo de fondo (es decir, un espacio-tiempo no-perturbado) arbitrario. Posteriormente se toma el caso particular y de interés en la presente tesis de un espacio-tiempo de fondo FRW. Antes de pasar al caso de inflación  $f(R)$  se hace un estudio del formalismo de invariantes de norma, el cual se emplea para el análisis inflacionario estándar con un campo escalar, y así obtener expresiones para los parámetros cosmológicos (inflacionarios) de la Colaboración Planck 2018. A continuación se hace un tratamiento similar para la Cosmología  $f(R)$ , tanto en el marco de Jordan como el de Einstein para una teoría  $f(R)$  arbitraria. En particular se retoma el modelo  $R^2$  para obtener los resultados presentes en la literatura.
- **Apéndices.** Contienen relaciones útiles, cálculos que requieran presentarse con más detalle, así como ecuaciones en términos del tiempo conforme (en el texto usamos en su mayoría al tiempo cósmico).



# Capítulo 2

## Cosmología

Para iniciar el estudio de la Inflación Cósmica debemos entender las ideas centrales de la Cosmología. Ideas que serán la base de nuestro entendimiento en el primer acercamiento a la Inflación.

La Cosmología es el estudio del origen, naturaleza y evolución de nuestro universo, para esto se usan las bases de la física moderna y las matemáticas abstractas. Sin embargo, nuestros conocimientos actuales están aún muy lejos de darnos todas las respuestas. De hecho aún no podemos responder preguntas fundamentales tales como: ¿el universo es finito o infinito? ¿Siempre ha existido? De caso contrario, ¿en que momento y bajo qué condiciones surgió? ¿Tendrá un final? Preguntas que nos han acompañado, al menos, desde la Edad Antigua. Y por mucho tiempo se creía que nunca conoceríamos las respuestas a estas preguntas cosmológicas. Por lo tanto, los cosmólogos físicos se centraron principalmente en los aspectos del universo que podía observarse directamente, dejando a los filósofos y teólogos discutir sobre los grandes misterios.

Afortunadamente se han obtenido importantes desarrollos en Cosmología en las últimas décadas, a través de análisis científicos rigurosos con los cuales se ha logrado responder otras de las grandes interrogantes cosmológicas, pero este es aún un trabajo en construcción.

En el presente Capítulo presentaremos las ideas más importantes de la Cosmología moderna desde sus fundamentos, los cuales serán útiles sobre todo cuando estudiemos perturbaciones cosmológicas en el Capítulo 6, en particular los distintos tipos de horizontes. Finalmente se recopilan algunos datos observacionales obtenidos por la Colaboración Planck los cuales están en acuerdo con el modelo de concordancia actual, el llamado modelo  $\Lambda$ CDM. Los textos vastamente usados en este Capítulo, se encuentran en las referencias [11, 35, 77, 90, 98, 129].

### 2.1. Historia del universo

La comprensión actual del universo se basa principalmente en la teoría del Big Bang, que explica su evolución desde la primera fracción de segundo hasta la edad actual<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Se estima que la edad del universo es de casi 14 mil millones de años, aunque es fácil obtener una estimación para la edad del universo del orden de  $9.7 \times 10^9$  años si no se considera la componente



Esta teoría, a su vez, se basa en dos pilares: en primer lugar en la relatividad general; en segundo lugar en los resultados observacionales, entre ellos la expansión del universo descubierta por Edwin P. Hubble, mediante la recesión de las galaxias a una velocidad proporcional a su distancia de nosotros [56]; la relativa abundancia de elementos ligeros, explicada por George Gamow, principalmente la del helio, deuterio y litio, que se cocinaron a partir de las reacciones nucleares que tuvieron lugar alrededor del primer segundo a unos minutos después del Big Bang, cuando el universo era unas cuantas veces más caliente que el núcleo del Sol [45]; y el CMB, el resplandor del Big Bang, descubierto en 1965 por Arno Penzias y Robert W. Wilson como una radiación de cuerpo negro muy isotrópica emitida cuando el universo estaba lo suficientemente frío como para formar átomos neutros y fotones desacoplados de la materia, aproximadamente 380 000 años después del Big Bang [96]. Hoy en día, estas observaciones se confirman con gran precisión y han ayudado a establecer el Big Bang como el modelo preferido del universo.

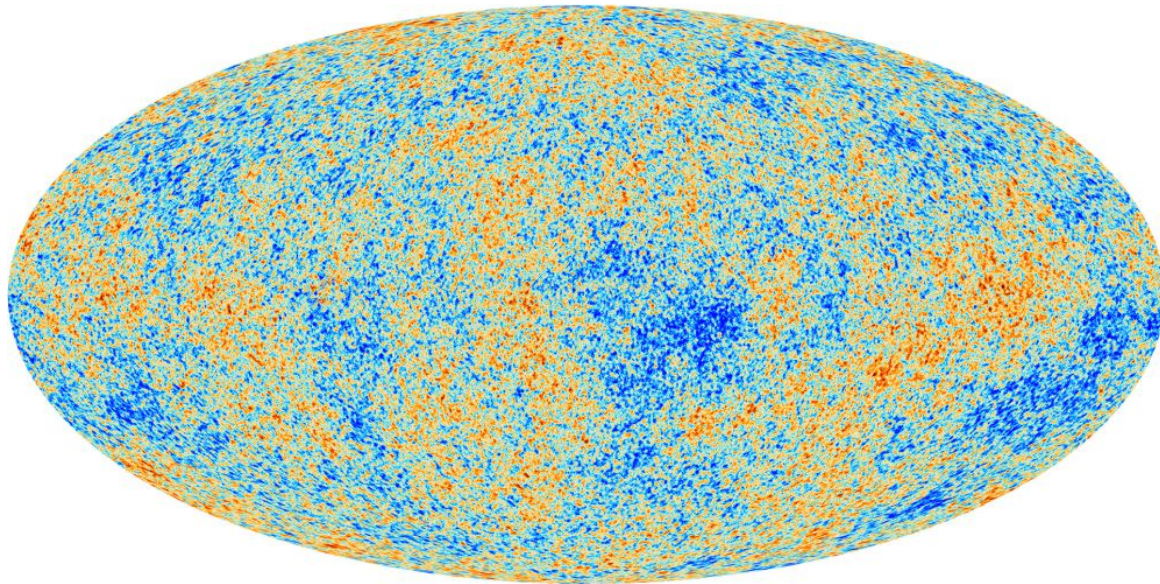
La cosmología puede verse como la historia de aproximadamente 14 mil millones de años de evolución cósmica: en una edad temprana el universo era muy caliente y denso, las interacciones entre partículas eran frecuentes y muy energéticas. La materia estaba constituida por electrones libres y núcleos atómicos; los fotones estaban confinados, rebotando entre electrones y núcleos. Conforme este plasma primordial se enfrió, los elementos ligeros (como el hidrógeno, helio y litio) se comenzaron a formar; esta es la llamada *época de recombinación*. Cuando la energía disminuyó lo suficiente para que los primeros átomos estables se originaran, fue el momento en que los fotones pudieron *fluir* libremente. Miles de millones de años después observamos este resplandor del Big Bang como radiación en microondas<sup>2</sup> (ver Figura 2.1). Esta radiación, sorprendentemente, es casi completamente isotrópica, observando prácticamente la misma temperatura de 2.725 K en todas las direcciones de nuestra bóveda celeste. Las pequeñas variaciones de temperatura en el Fondo Cósmico de Microondas (CMB, por sus siglas en inglés), entre las partes del cielo ligeramente más caliente y aquellas ligeramente más frías, son del orden de  $\mu\text{K}$ , es decir  $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$ . Estas pequeñas fluctuaciones de temperatura se traducen en pequeñas variaciones en la densidad de materia primordial, las cuales bajo la influencia gravitacional crecieron, dando lugar a regiones en el espacio cada vez más densas, eventualmente formando galaxias, estrellas y planetas. Por lo tanto, estas anisotropías terminaron siendo decisivas en la formación de estructura en el universo.

Por otro lado, la dispersión Compton producida justo antes de la época de recombinación genera anisotropías en la polarización. De hecho, estas nos abren una ventana única para buscar ondas gravitacionales producidas durante inflación, puesto que estas producen un patrón particular de polarización. Por lo tanto, es muy probable que la polarización del CMB se convierta en una de las herramientas más importantes para poner a prueba el entendimiento que tenemos actualmente sobre el universo primitivo.

---

correspondiente a una Constante Cosmológica o Energía Oscura. Sin embargo las poblaciones estelares más antiguas tienen entre  $10^{10}$  y  $1.2 \times 10^{10}$  años de edad, lo que favorece el empleo de una Constante Cosmológica.

<sup>2</sup>El CMB es una fotografía de la luz más vetusta de nuestro universo, impresa en el cielo cuando el universo era muy joven, alrededor de 380 000 años de edad. Muestra la uniformidad del universo de aproximadamente 1 parte en  $10^5$ .



**Figura 2.1:** Anisotropías del CMB observadas por el observatorio espacial Planck. [ESA and the Planck Collaboration]

En el contexto de la relatividad general, la cosmología se hace una pregunta fundamental: ¿Cuál es la solución a las ecuaciones de campo de Einstein que describe nuestro universo?<sup>3</sup> No es necesario mencionar que no sabemos la respuesta con absoluta certeza, sin embargo podemos darnos idea de ella tomando en cuenta tanto los datos observacionales actuales, los cuales han aumentado de manera asombrosa en las últimas décadas, así como considerar ciertas hipótesis sobre nuestro universo (cf. Sección 2.2.1).

## 2.2. El universo en expansión

Una pieza fundamental de la evidencia observacional en cosmología, es la obtenida por Hubble [56], la cual indica que las galaxias en el universo parecen alejarse de nosotros, y cuanto más lejos están, más rápida parece ser su recesión. Esta velocidad se mide mediante el corrimiento al rojo (*redshift*), que es básicamente el efecto Doppler aplicado a ondas de luz.

Las galaxias tienen un conjunto de líneas de absorción y emisión identificables en sus espectros, cuyas frecuencias características son bien conocidas [70]. Entonces, si una galaxia se mueve hacia nosotros, las ondas de luz se *apiñan*, lo que da una impresión de un aumento en la frecuencia. Esto se conoce como desplazamiento hacia el azul

---

<sup>3</sup>Esta cuestión, formulada de otra forma como: ¿cuál es la geometría del espacio físico?, estuvo presente desde la antigua Grecia, sin embargo en forma tácita se afirmaba que el espacio era euclidiano. El problema se fue tornando más interesante para los científicos cuando Bernhard Riemann se interesó en el problema. Siendo Weyl, ya con la teoría de la gravitación de Einstein formulada, el que le dio el nombre de *Das Raumproblem* (del alemán *El Problema del Espacio*) y quien junto a Élie Cartan tuvieron un gran interés en reformular los criterios antiguos de la elección de la estructura espacial (para un análisis más detallado véase [110])

(*blueshift*). De manera contraria, si la galaxia está alejándose, las ondas de luz se *separan*, es decir, las líneas características se mueven hacia el rojo. De ahí el nombre *redshift*.

La terminología estándar es  $z$  para el **redshift**, y se define como [35]

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}}, \quad (2.1)$$

donde  $\lambda_{\text{em}}$  y  $\lambda_{\text{obs}}$  son las longitudes de onda de la luz en los puntos de emisión (galaxia) y observación (nosotros).

### 2.2.1. Homogeneidad e isotropía

La premisa central de la cosmología moderna es que, al menos a gran escala, el universo parece homogéneo e isotrópico<sup>4</sup>. En otras palabras, el universo visible parece el mismo en todas las direcciones que nos rodean, al menos si miramos a distancias superiores a unos 300 millones de años luz. La isotropía es mucho más precisa (aproximadamente una parte de cada  $10^{-5}$ ), la cual se ve confirmada por una variedad de observaciones, como se mencionó antes, la más espectacular de las cuales es la temperatura casi idéntica del CMB proveniente de diferentes partes del cielo (Figura 2.1). Esta radiación ha estado viajando hacia nosotros durante aproximadamente 14 mil millones de años, lo que respalda la conclusión de que el universo a distancias suficientemente grandes es casi el mismo en todas las direcciones.

Sin embargo, es evidente que las regiones cercanas del universo observable son en la actualidad muy heterogéneas, con material agrupado en estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias. Se cree que estas estructuras se han formado a lo largo del tiempo a través de la atracción gravitacional, a partir de una distribución que en el pasado era más homogénea. Se estima que el universo hoy en día es homogéneo e isotrópico a escalas mayores a los 100 Mpc.

Es conveniente entonces dividir la dinámica del universo observable en dos partes: el comportamiento a gran escala del universo se puede describir asumiendo un fondo homogéneo e isotrópico. Sobre este fondo, podemos superponer las irregularidades a pequeña escala. Durante gran parte de la evolución del universo observable, estas irregularidades pueden considerarse pequeñas perturbaciones en la evolución del universo de fondo (universo no perturbado). Estas cuestiones serán tratadas con más detalle en el Capítulo 6, por el momento introduzcamos lo que se entiende por *homogeneidad* e *isotropía* del espacio.

De manera heurística podemos entender la **homogeneidad** del espacio, para un instante dado, como la afirmación de que cada punto del espacio es muy parecido a otro punto distinto, es decir, la métrica es la misma en toda la variedad. Lo anterior se puede expresar de manera más precisa [125] mediante: *Un espacio-tiempo es (espacialmente) homogéneo si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies espaciales  $\Sigma_t$  foliando el espacio-tiempo tal que para todo  $t$  y para todos dos puntos cualesquiera  $p, q \in \Sigma_t$  existe una isometría de  $g_{\mu\nu}$ , la cual lleva el punto  $p$  al punto  $q$ .*

<sup>4</sup>Cabe recalcar que la homogeneidad e isotropía se establecen sólo dentro del universo observable, y bien pueden fallar en regiones mucho más allá de la que observamos.

Para el concepto de **isotropía** del espacio se suele pensar que, para un instante dado, todas las direcciones en las que se observen deben de ser iguales. Nuevamente, una formulación más precisa está dada en [125] y dice que *un espacio-tiempo es espacialmente isotrópico en cada punto  $p$  si existe una congruencia de curvas tipo tiempo (observadores) con tangente  $u^a$ , que llenan el espacio-tiempo y que tienen la siguiente propiedad: dado cualquier punto  $p$  y dos vectores tangentes espaciales unitarios  $s_1^a, s_2^a \in T_p$  (es decir, vectores en  $p$  ortogonales a  $u^a$ ), existe una isometría de  $g_{\mu\nu}$  que deja a  $p$  y  $u^a$  fijos, pero rota a  $s_1^a$  en  $s_2^a$ .*

Es difícil pensar que estamos en una posición especial en el universo, por lo que llegamos a la conclusión de que el universo debería parecer isotrópico para los observadores del universo entero; pero no para todos los observadores. Por ejemplo, el universo no parece isotrópico para observadores que recorren nuestra galaxia a la mitad de la velocidad de la luz. Tales observadores verán la luz de las estrellas y la radiación del CMB viniendo hacia ellos desde la dirección hacia la que se mueven con mucha mayor intensidad que desde atrás. Entonces, al formular la suposición de isotropía, se debe especificar que el universo parece el mismo en todas las direcciones para una familia de observadores “típicos” en caída libre, o dicho de otra forma, para observadores donde el dipolo del CMB es nulo.

Destaquemos que no necesariamente hay una relación entre la homogeneidad y la isotropía, i.e., una variedad puede ser homogénea pero no isotrópica, o puede ser isotrópica alrededor de un punto, pero sin llegar a ser homogénea. Por otro lado, si un espacio es isotrópico en todo punto, entonces es homogéneo, o de manera análoga, si el espacio es isotrópico y homogéneo alrededor de un punto, será isotrópico en todo punto. Podemos pensar en la isotropía y la homogeneidad como invariancia ante rotaciones y traslaciones (ambas espaciales) respectivamente. La utilidad de estos conceptos es que traen consigo que un subespacio  $\Sigma_t$  homogéneo e isotrópico es maximalmente simétrico, y por lo tanto, el subespacio tiene su máximo número posible de vectores de Killing<sup>5</sup>. En este caso seis vectores de Killing<sup>6</sup>, tres rotacionales y tres traslacionales.

### 2.2.2. Métrica FRW

La métrica más general de un espacio tiempo de 4 dimensiones que admite un subespacio de 3 dimensiones, que a su vez satisface la homogeneidad e isotropía a gran escala es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)<sup>7</sup>:

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]}, \quad (2.2)$$

<sup>5</sup>Para una variedad  $n$ -dimensional son  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Para ilustrar esto consideremos el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , donde las isometrías son bien conocidas: traslaciones y rotaciones. En general, habrá  $n$  traslaciones, una por cada dirección en la que podamos movernos, y también  $\frac{n(n-1)}{2}$  rotaciones o *boosts*.

<sup>6</sup>Los vectores de Killing son campos vectoriales generadores de isometrías infinitesimales. En particular, un campo vectorial  $\xi$  es un vector de Killing si satisface que  $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$ .

<sup>7</sup>También llamada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) o Robertson-Walker (RW).



donde esta forma de la métrica está expresada en términos de las coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ , llamadas *coordenadas comóviles*, con  $t$  siendo el tiempo cósmico, medido por un observador comóvil<sup>8</sup>. Además  $a(t)$  es el factor de escala, el cual determina las distancias espaciales al tiempo  $t$  en la hipersuperficie espacial  $\Sigma_t$  y está relacionado con la expansión del universo así como con el redshift de la luz que proviene de galaxias; la constante  $K$  está relacionada con la curvatura espacial o 3-curvatura<sup>9</sup>, la cual para subespacios homogéneos e isotrópicos es constante. Notemos que  $K$  tiene unidades de  $[\text{longitud}]^{-2}$ , y solo hay tres opciones:

$$K > 0 \text{ (universo cerrado),}$$

$$K = 0 \text{ (universo plano),}$$

$$K < 0 \text{ (universo abierto).}$$

Para estudiar la interpretación física de estos casos, en ocasiones es conveniente introducir una nueva coordenada radial  $\chi$  de tal forma:

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2.3)$$

De la métrica (2.2) vemos que si  $K = 0$ , se tiene una métrica plana o euclidiana con un re-escalamiento de la coordenada radial ( $r \rightarrow a(t)r$ ), es por esto que este caso recibe el nombre de *universo plano*. En este caso, de (2.3) vemos que  $\chi = r$ .

Para el caso  $K > 0$ , la transformación de coordenadas toma la forma  $r = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \chi$ , para  $\chi \in [0, \pi)$ . En este caso la métrica (2.2) se reescribe como

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{K} \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.4)$$

donde la parte espacial corresponde a una 3-esfera, en cuyo caso, el espacio-tiempo carece de frontera y el universo se dice cerrado [25].

De manera similar, para  $K < 0$ , se tiene que  $r = \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh \chi$ , donde  $\chi \in [0, \infty)$ , y la métrica se escribe como

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{|K|} \left[ d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.5)$$

cuya parte espacial corresponde a un hiperboloide y el universo al cual describe es abierto [25].

En el Apéndice A se calculan las componentes de los tensores de Ricci y Einstein, así como el escalar de curvatura, lo cual se empleará en la siguiente subsección.

<sup>8</sup>De hecho, en la Tierra no somos del todo observadores comóviles y en consecuencia se observa un dipolo de anisotropía en el CMB como resultado del efecto Doppler (cf. [11]).

<sup>9</sup>En particular  ${}^{(3)}R = \frac{6K}{a^2}$ , véase la Sección A.2.

Por otro lado, notemos que el elemento de línea (2.2) tiene la simetría ante los reescalamientos

$$a \rightarrow \lambda a, \quad (2.6a)$$

$$r \rightarrow \frac{r}{\lambda}, \quad (2.6b)$$

$$K \rightarrow \lambda^2 K. \quad (2.6c)$$

Esto significa que la geometría del espacio-tiempo permanece igual si simultáneamente se reescala  $a$ ,  $r$  y  $K$ . Con esta libertad se puede establecer el factor de escala a la unidad hoy en día, i.e.  $a(t_0) \equiv 1$ , lo cual se usará en adelante, a menos que se indique claramente lo contrario<sup>10</sup>.

También, destaquemos que  $r$  es la coordenada radial comóvil, pero los resultados físicos dependen únicamente de la coordenada física  $r_{\text{phys}} = a(t)r$ . Entonces, la velocidad física de un objeto es

$$v_{\text{phys}} \equiv \frac{dr_{\text{phys}}}{dt} = a(t) \frac{dr}{dt} + \frac{da}{dt} r = v_{\text{pec}} + Hr_{\text{phys}}. \quad (2.7)$$

Vemos que la velocidad física tiene dos contribuciones: la llamada *velocidad peculiar*,  $v_{\text{pec}} \equiv a\dot{r}$ , y el *flujo de Hubble*,  $Hr_{\text{phys}}$ , donde se ha definido el **parámetro de Hubble** mediante [11]

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.8)$$

En cosmología este parámetro es muy importante y dicta la tasa de expansión. El valor del parámetro de Hubble en la época actual es la llamada **constante de Hubble**  $H_0$ . Mediciones obtenidas por el satélite espacial Planck en 2018 obtuvieron un valor de  $H_0 = 67.66 \pm 0.42$  (km/s)/Mpc (un pársec (pc) equivale a 3.2616 ly) [100]. Sin embargo aún hay cierta incertidumbre con este valor<sup>11</sup> y a menudo se parametriza la constante de Hubble como<sup>12</sup>

$$H_0 = 100h \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}, \quad (2.9)$$

de tal forma que  $h \approx 0.7$ .

### 2.2.3. Ecuaciones de Friedmann

La dinámica del universo, caracterizada por la evolución del factor de escala del espacio-tiempo FRW, está determinada por las ecuaciones de Einstein

$$G_{ab} = 8\pi GT_{ab}, \quad (2.10)$$

<sup>10</sup>Equivalentemente se puede normalizar la métrica, tal que  $K = 0, \pm 1$ .

<sup>11</sup>Hay que resaltar que actualmente esta *tensión* surge debido a que el satélite Planck obtuvo un valor para la constante de Hubble de  $H_0 \approx 67$  (km/s)/Mpc y un grupo de astrofísicos, encabezados por Adam G. Riess, reportaron un valor para la constante de Hubble de  $H_0 \approx 74$  (km/s)/Mpc (cf. [106], véase también [123]).

<sup>12</sup>No confundir  $h$  con la constante de Planck.

donde  $G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$  es el **tensor de Einstein** y  $T_{ab}$  el **tensor energía-momento**.

Los requisitos de isotropía y homogeneidad del espacio obligan al tensor de energía-momento a ser el de un fluido perfecto<sup>13</sup>, definido por

$$T_{ab} = (\rho + p)U_a U_b + pg_{ab}, \quad (2.11)$$

donde  $\rho$  y  $p$  son las densidades de energía y presión propias del marco en reposo del fluido, respectivamente<sup>14</sup>, y  $U_\mu$  es la 4-velocidad del fluido. En el marco cómovil del fluido, donde  $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , el tensor de energía momento toma una forma sencilla:

$$(T^\mu{}_\nu) = (g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu}) = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (2.12)$$

Ahora podemos escribir las ecuaciones de campo (2.10) empleando la forma explicita que toma el tensor de Einstein para un Universo FRW (cf. Sección A.1); para  $G_{00} = 8\pi GT_{00}$  usamos la ecuación (A.8a) y con esto obtenemos

$$3 \left( H^2 + \frac{K}{a^2} \right) = 8\pi G\rho,$$

o en su forma más *conocida*

$$\boxed{\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}}, \quad (2.13)$$

y para  $G_{ij} = 8\pi GT_{ij} = 8\pi Gpg_{ij}$  obtenemos

$$- \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{K}{a^2} \right) = 8\pi Gp.$$

Equivalentemente

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)}. \quad (2.14)$$

El par de ecuaciones (2.13)-(2.14), se conocen como **ecuaciones de Friedmann**<sup>15</sup>.

Observemos que en un universo en expansión (i.e.,  $\dot{a} > 0$ ) compuesto de materia ordinaria (es decir, materia que satisface la condición de energía fuerte<sup>16</sup>:  $\rho + 3p \geq 0$ ), la ecuación (2.14) implica que  $\ddot{a} < 0$ . Esto indica la existencia de una singularidad en el

<sup>13</sup>Como definición de un fluido perfecto podemos tomar a aquellos fluidos que cumplen con el principio de Pascal y donde el transporte de energía ocurre únicamente mediante el transporte de materia (i.e. no conduce calor, corriente eléctrica y además la viscosidad es nula.)

<sup>14</sup>Las hipótesis de homogeneidad e isotropía implican que  $\rho = \rho(t)$  y  $p = p(t)$ .

<sup>15</sup>En algunos contextos a la ecuación (2.13) se le llama la ecuación de Friedmann, y si se conocen la dependencia de  $\rho$  de  $a$ , esta es suficiente para obtener  $a(t)$ . Mientras que la ecuación (2.14) en ocasiones es llamada Ecuación de Raychaudhuri.

<sup>16</sup>La condición de energía fuerte requiere que

$$T_{ab}\xi^a\xi^b \geq -\frac{1}{2}T, \quad (2.15)$$

para todo  $\xi^a$  vector unitario temporal [125].

pasado finito:  $a(t = 0) = 0$ . Esta conclusión se basa en el supuesto de que la relatividad general y las ecuaciones de Friedmann son válidas a altas energías arbitrarias y que ninguna forma exótica de materia se vuelve relevante a altas energías.

La ecuación de Friedmann (2.13) se puede reescribir de tal forma que

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left( H^2 + \frac{K}{a^2} \right) = \rho_{\text{cr}} + \frac{3K}{8\pi G a^2}, \quad (2.16)$$

donde se define la **densidad crítica de energía**  $\rho_{\text{cr}}$  como

$$\rho_{\text{cr}}(t) \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.17)$$

Empleando (2.9) se obtiene su valor numérico hoy en día:  $\rho_{\text{cr},0} = 1.88 \times 10^{-26} h^2 \text{ kg m}^{-3}$ , donde  $h \approx 0.7$ .

Además es usual el empleo del **parámetro de densidad**  $\Omega$ , definido como la razón entre la densidad de energía y la densidad crítica:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_{\text{cr}}(t)}. \quad (2.18)$$

Si se da el caso de tener diferentes *especies* de partículas (bariones, fotones, neutrinos, materia y/o energía oscura, etc) que contribuyan de manera significativa al modelo a estudiar,  $\rho$  y  $p$  harán alusión a la suma de todas las contribuciones, es decir

$$\rho \equiv \sum_s \rho_s, \quad (2.19a)$$

$$p \equiv \sum_s p_s. \quad (2.19b)$$

Entonces para cada especie  $s$  se define la razón actual de la densidad de energía relativa a la densidad de energía crítica [35]

$$\Omega_{s,0} \equiv \frac{\rho_{s,0}}{\rho_{\text{cr},0}}. \quad (2.20)$$

En la literatura es usual emplear el subíndice «0» para denotar la evaluación hoy en día, i.e.  $\rho_{0,s} = \rho_s(t_0)$ . Esta notación la seguiremos de este punto en adelante, a menos que se indique claramente lo contrario<sup>17</sup>.

Con lo anterior se reescribe la ecuación de Friedmann como

$$1 = \Omega - \frac{K}{a^2 H^2} = \sum_s \Omega_s + \Omega_K, \quad (2.21)$$

<sup>17</sup>Debemos resaltar que en la literatura, sobre todo en la reciente, los parámetros de densidad y la densidad crítica evaluados hoy en día se denotan simplemente por  $\Omega \equiv \Omega(t_0)$  y  $\rho_{\text{cr}} \equiv \rho_{\text{cr},0}$  respectivamente. Es decir, (2.20) tomaría la forma  $\Omega_s \equiv \frac{\rho_{s,0}}{\rho_{\text{cr}}}$ . No obstante, para una etapa cosmológica arbitraria la dependencia se debería hacer siempre explícita. Por esto, en la presente tesis quitaremos estas sutilezas y etiquetaremos con «0» a toda cantidad evaluada hoy en día y en todo lado que aparezca  $\Omega$  estaremos refiriéndonos al parámetro de densidad como función del tiempo, i.e.,  $\Omega(t)$ . De igual manera para la densidad crítica.



donde

$$\Omega_K \equiv -\frac{K}{a^2 H^2}, \quad (2.22)$$

es el parámetro de densidad asociado al término de curvatura.

De la ecuación (2.21) notamos tres situaciones:

1. si  $\rho = \rho_{\text{cr}} \Rightarrow \Omega = 1$ , entonces necesariamente  $K = 0$ ;
2. si  $\rho < \rho_{\text{cr}} \Rightarrow \Omega < 1$ , lo cual impone que  $K < 0$ ;
3. y por último, si  $\rho > \rho_{\text{cr}} \Rightarrow \Omega > 1$  entonces  $K > 0$ .

Por lo tanto, la naturaleza de la curvatura espacial depende de la densidad de energía del universo.

Las observaciones (véase por ejemplo [100]) sugieren que la densidad de energía del universo es muy cercana a la crítica,  $\Omega \approx 1$ , dando como resultado un universo muy cerca al plano ( $K \approx 0$ ). Como veremos en el siguiente capítulo el modelo inflacionario predice que  $K \approx 0$  [101].

Por otro lado, para estudiar como evoluciona la densidad de energía, es conveniente considerar la conservación del tensor energía-momento; en particular, para la componente cero de la ecuación de conservación:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\nu T^\nu_0 \\ &= \partial_\nu T^\nu_0 + \Gamma^\nu_{\nu\alpha} T^\alpha_0 - \Gamma^\alpha_{\nu 0} T^\nu_\alpha \\ &= -\dot{\rho} - 3H\rho - 3Hp, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\boxed{\dot{\rho} = -3H(\rho + p)}. \quad (2.23)$$

O equivalentemente

$$\frac{d(a^3 \rho)}{dt} = -p \frac{da^3}{dt}. \quad (2.24)$$

Para resolver esta ecuación, es posible resumir algunas situaciones cosmológicas definiendo el parámetro de la **ecuación de estado**  $w_s$  de la forma usual en la literatura

$$w_s = \frac{p_s}{\rho_s}, \quad (2.25)$$

con la cual para cada especie  $s$  se puede escribir (2.23) de la forma

$$\boxed{\dot{\rho}_s = -3H\rho_s(1 + w_s)}. \quad (2.26)$$

Esta ecuación puede ser integrada para una  $w_s$  arbitraria, de tal forma que

$$\boxed{\rho_s \propto a^{-3(1+w_s)}}. \quad (2.27)$$

Notemos que este resultado es válido para cualquier valor de  $K$ .

### 2.2.4. Inventario cósmico

El universo está compuesto por una mezcla de diferentes componentes de materia:

- **Materia no relativista** o también llamado *polvo* en el contexto de RG. Este término se emplea para referirse a todas las formas de materia para las cuales la presión es mucho menor que la densidad de energía,  $p \ll \rho$ , siendo este el caso de un gas de partículas no relativistas<sup>18</sup>. Entonces, tomando  $p = 0$  en la ecuación (2.24), o equivalentemente  $w = 0$  en (2.27), obtenemos que

$$\rho_m \propto a^{-3}. \quad (2.28)$$

Esta dilución de la densidad de energía (cuando  $a$  crece) refleja la expansión del volumen como  $V \propto a^3$ . Además, por la ecuación de Friedmann (2.13) (con  $K = 0$ ), tenemos que  $dt = \sqrt{\frac{3}{8\pi G} \frac{da}{a\sqrt{\rho}}}$ , lo que en este caso se traduce a  $a_m(t) \propto t^{2/3}$ , para épocas dominadas por la materia.

Es importante distinguir las dos principales contribuciones a la materia (i.e.  $\Omega_m = \Omega_{DM} + \Omega_b$ ):

- **Materia oscura.** La mayor parte de la materia del universo se encuentra en forma de materia oscura invisible ( $\Omega_{0,cdm} \sim 0.26$ ). Esta se piensa que es constituida por una especie de partículas muy masivas, pero su naturaleza no la sabemos con certeza aún.
- **Bariones.** En cosmología se piensa a la materia ordinaria (núcleos y electrones) como bariones. Aunque en realidad los electrones son *leptones*. A pesar de ello, la mayor contribución de masa dentro de un átomo es debida a su núcleo, por lo tanto *virtualmente* toda su masa *está* contenida en los bariones (neutrón y protón) ( $\Omega_{0,b} \sim 0.05$ ).
- **Radiación** o también *partículas relativistas*. Esta clasificación se usa para denotar cualquier contribución para la cual la presión es aproximadamente un tercio la densidad de energía,  $p = \frac{1}{3}\rho$ . Este es el caso de un gas de partículas relativistas, cuya energía de estas es mucho mayor que su masa (siempre cierto para partículas sin masa<sup>19</sup>). En este caso  $w = \frac{1}{3}$  y en consecuencia de (2.27)

$$\rho_r \propto a^{-4}. \quad (2.29)$$

Con este resultado y por la ecuación de Friedmann (2.13) (con  $K = 0$ ) obtenemos para épocas dominadas por radiación que  $a_r(t) \propto t^{1/2}$ .

En este caso, las dos principales contribuciones a la radiación son (i.e.  $\Omega_r = \Omega_\gamma + \Omega_\nu$ ; aunque en ocasiones también se consideran los gravitones):

<sup>18</sup>Cabe resaltar que con *partículas* nos referimos a galaxias, por la escala cosmológica.

<sup>19</sup>Notemos que en este caso la traza del tensor de energía-momento (2.12) se anula ( $T^\mu{}_\mu = 0$ ). La razón de esto, es que si las partículas no tienen masa, entonces se mueven a la velocidad de la luz y no hay un marco de referencia especial. Pero  $T^{ab}$  tiene dimensiones de masa y es invariante ante transformaciones de Lorentz. Por otro lado, la única cantidad dimensional es la energía de las partículas, pero esta por si sola no es invariante de Lorentz, por lo que la traza debe anularse.

- **Fotones.** El universo temprano estaba dominado por fotones. En la actualidad, se detectan esos fotones en forma de fondo cósmico de microondas (CMB).
- **Neutrinos.** Durante la mayor parte de la historia del universo, los neutrinos se comportaron como radiación. Solo recientemente sus pequeñas masas se han vuelto relevantes y comenzaron a comportarse como materia.
- **Energía oscura** o también llamada constante cosmológica  $\Lambda$ . Hemos aprendido que la materia y la radiación no son suficientes para describir la evolución del universo. En cambio, en la actualidad el universo parece estar dominado por una componente de presión negativa ( $\Omega_{0,\Lambda} \sim 0.69$ ) con la forma peculiar  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$ . Esto es diferente a todo lo que hemos encontrado en el laboratorio. En particular, de la ecuación (2.26), encontramos que la densidad de energía es constante, i.e.

$$\rho_\Lambda \propto a^0. \quad (2.30)$$

Esto implica que  $a(t) \propto e^{\lambda t}$ , donde  $\lambda^2 \equiv \frac{\Lambda}{3}$  (véase ec. (2.39)).

- **Energía del vacío.** La Teoría Cuántica de Campos (QFT, por sus siglas en inglés), predice la existencia de una constante cosmológica a través de la energía del vacío. La energía del estado base del vacío corresponde al tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu}^{\text{vac}} = \rho_{\text{vac}} g_{\mu\nu}. \quad (2.31)$$

Desafortunadamente, el tamaño previsto de  $\rho_{\text{vac}}$  está completamente fuera de lugar, puesto que

$$\frac{\rho_{\text{vac}}}{\rho_\Lambda} \sim 10^{120}, \quad (2.32)$$

es decir, la física de partículas predice una constante cosmológica, pero cuantitativamente incorrecta en 120 órdenes de magnitud (“*This is probably the worst theoretical prediction in the history of physics.*” [53]). Este es el llamado *problema de la constante cosmológica* (véase [14, 24, 127]).

- **Otras posibilidades.** El fracaso de la QFT para explicar el valor de la energía oscura observada ha llevado a los cosmólogos a considerar posibilidades más exóticas, tales como la energía oscura variable en el tiempo y las teorías modificadas de la relatividad general, entre estas últimas las teorías  $f(R)$  las cuales se abordan en este texto, aunque no precisamente con este problema en mente (cf. Capítulo 4).

Consideremos la situación donde el universo contiene los tres tipos de energía: materia no relativista (M), relativista o radiación (R) y constante cosmológica ( $\Lambda$ ). Como describimos brevemente en los renglones anteriores, sus respectivas densidades son proporcionales a algún factor del factor de escala  $a(t)$ , es decir proporcionales a  $a^{-3}$ ,  $a^{-4}$  y  $a^0$  respectivamente. Entonces la densidad total de energía está dada por las tres contribuciones

$$\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda, \quad (2.33)$$

por lo cual la ecuación de Friedmann (2.13) toma la forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda) - \frac{K}{a^2}. \quad (2.34)$$

o bien

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\rho_{r,0}}{a^4} + \frac{\rho_{m,0}}{a^3}\right) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (2.35)$$

donde  $\rho_{r,0}$ ,  $\rho_{m,0}$  y  $\Lambda$  son constantes. De aquí notamos que mientras el universo se expande, es decir,  $a(t)$  aumenta, cada término se vuelven más dominantes en ciertas etapas de la evolución del universo. Esto es, para el universo temprano ( $a$  pequeña) el término de radiación es el dominante. Sin embargo, la contribución de la radiación es insignificante actualmente ( $\Omega_{r,0} \sim 10^{-4}$ ). Así, conforme el universo evoluciona, otros términos van contribuyendo en mayor o menor medida. De hecho, actualmente sabemos que el término correspondiente a  $\Lambda$  es el dominante y además que la geometría del universo es muy cercana a la plana (i.e.  $K \sim 0$ ) (ver Sección 2.4 o cf. resultados de Planck 2018 [100]). Como último comentario, se piensa que en la época inflacionaria existió *algo* muy parecido a una energía de vacío<sup>20</sup>, el cual posteriormente desapareció del universo.

Con la discusión anterior como motivación, podemos asumir que solo uno de los términos de la ecuación de Friedmann (2.35) es dominante sobre el resto, por lo cual

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \lambda^2 a^{-n}, \quad \lambda = \text{cte}, \quad (2.36)$$

donde  $n = 0, 2, 3, 4$  para los casos de dominio de constante cosmológica, curvatura, materia y radiación, respectivamente.

Para  $n \neq 0$ , integrando (por simplicidad tomamos  $a(t=0) = 0$ ) tenemos

$$a(t) = \left(\frac{2n}{\lambda}t\right)^{2/n}. \quad (2.37)$$

Para  $n = 0$ , tenemos que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \lambda^2, \quad \lambda^2 \equiv \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.38)$$

y si tomamos que  $a(t = t_i) = a_i$ , entonces

$$a_\Lambda(t) = a_i e^{\lambda(t-t_i)}, \quad (2.39)$$

lo cual corresponde a una expansión acelerada, i.e.  $\ddot{a}(t) > 0$ , lo cual es claro por su crecimiento exponencial.

Es de gran utilidad resumir las ideas anteriores en la siguiente Tabla:

La columna correspondiente a  $a(\eta)$  se obtiene directamente de (2.40). Además destacamos que la cantidad  $(aH)^{-1}(t)$  es creciente para universos dominados por materia y/o radiación pero decae exponencialmente en un universo dominado por energía oscura.

---

<sup>20</sup>Usualmente se toma la energía del estado de vacío asociada a un campo escalar el cual recibe el nombre de **inflatón** (ver Capítulo 3).

	$w$	$\rho(a)$	$a(t)$	$a(\eta)$	$\dot{a}(t)$	$H(t)$	$(aH)^{-1}$
Materia	0	$a^{-3}$	$t^{2/3}$	$\eta^2$	$t^{-1/3}$	$t^{-1}$	$t^{1/3}$
Radiación	$\frac{1}{3}$	$a^{-4}$	$t^{1/2}$	$\eta$	$t^{-1/2}$	$t^{-1}$	$t^{1/2}$
Energía oscura	-1	$a^0$	$e^{\lambda t}$	$-\eta^{-1}$	$e^{\lambda t}$	$t^0$	$e^{-\lambda t}$

**Tabla 2.1:** Soluciones para un universo FRW plano dominado por: materia, radiación o constante cosmológica. La variable  $\eta$  corresponde al tiempo conforme y se introduce más adelante (cf. ec. (2.40)).

## 2.3. Horizontes

Es posible estudiar algunas propiedades de la propagación de la luz y de partículas que serán de gran importancia en los siguientes capítulos. Primero será útil introducir el **tiempo conforme**  $\eta$ , el cual es de utilidad para analizar trayectorias de fotones, el cual está dado por

$$\eta \equiv \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.40)$$

con el cual se puede describir la métrica (2.2) (cf. Sección A.5), de tal forma que tengamos la métrica de un espacio-tiempo de Minkowski multiplicada por un factor conforme  $a(\eta)$ .

De su definición (2.8), es claro que  $H^{-1}$  tiene unidades del SI de tiempo y  $cH^{-1}$  de distancia. Es por esto que  $H^{-1}$  recibe el nombre de **tiempo de Hubble** y  $cH^{-1}$  de **distancia o longitud de Hubble**. En las unidades naturales empleadas en el presente texto, ambas cantidades coinciden y son de crucial importancia. Por lo general, se necesita del orden de un tiempo de Hubble para que el universo se expanda apreciablemente, y mientras eso sucede, la luz viaja del orden de una longitud de Hubble.

### 2.3.1. Radio de Hubble

En la gran mayoría de literatura inflacionaria a  $H^{-1}(t)$  se le llama sencillamente el **horizonte** y en menor medida **radio de Hubble**. En esta tesis trataremos de evitar ambigüedades y ser claros al hacer alusión a este como el radio de Hubble, puesto que, como veremos hay otros tipos de horizontes. A la cantidad  $(aH)^{-1}$  se le llama el *radio comóvil de Hubble* [35].

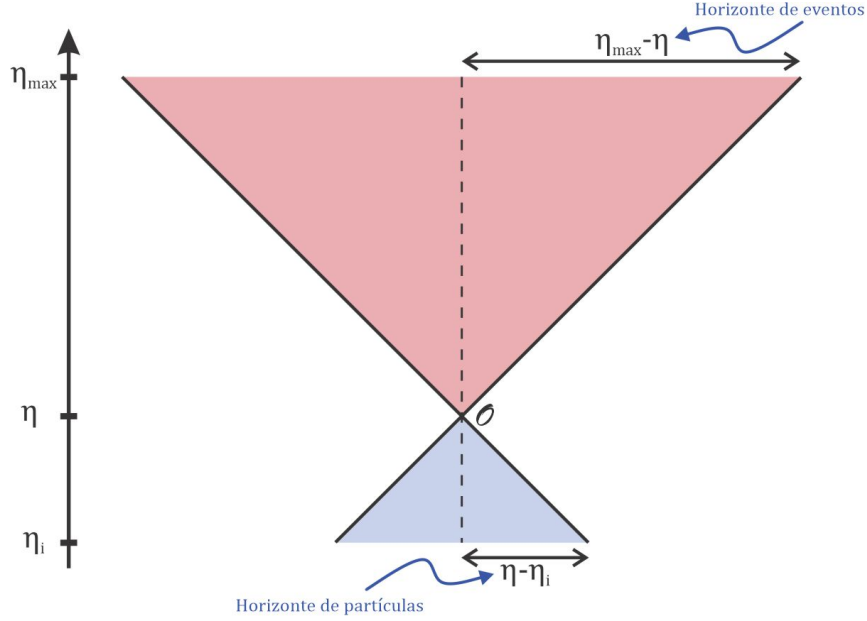
Físicamente, el radio de Hubble proporciona una estimación de la distancia que la luz puede viajar durante un tiempo de Hubble. En otras palabras, es una estimación de qué tan lejos puede viajar la luz mientras el universo se expande apreciablemente.

En un momento dado, se dice que una región arbitraria de tamaño<sup>21</sup>  $a(t)R$  está fuera (dentro) del horizonte si la razón

$$\frac{aR}{H^{-1}} \equiv \dot{a}R, \quad (2.41)$$

es mayor (menor) que la unidad. En otras palabras, si la acción de la gravedad resulta en una expansión desacelerada ( $\ddot{a} > 0$ ), entonces la razón (2.41) decrece con el tiempo y

<sup>21</sup>De acuerdo al párrafo precedente a la ecuación (2.7), estamos comparando un tamaño físico con el radio de Hubble, donde  $R$  es el tamaño comóvil, por ejemplo el radio de una región esférica



**Figura 2.2:** Diagrama espacio-temporal de los horizontes de partículas y de eventos para un observador  $\mathcal{O}$ .

en consecuencia regiones comóviles están entrando al radio de Hubble. Por el contrario, si la expansión es acelerada ( $\ddot{a} < 0$ ), entonces la razón (2.41) crece y por lo tanto regiones comóviles están saliendo del radio de Hubble.

### 2.3.2. Horizonte de partículas

La máxima distancia comóvil que la luz puede propagarse entre un tiempo inicial  $t_i$  y un tiempo arbitrario  $t$  posterior es

$$\chi_p(t) = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')} = \eta(t) - \eta(t_i). \quad (2.42)$$

Esta expresión define el llamado **horizonte de partículas** (comóvil) [11]. El horizonte de partículas es muy importante para comprender la estructura causal del universo y será fundamental en la discusión sobre inflación. Como veremos en el Capítulo 3, el modelo estándar del Big Bang involucra fenómenos ocurridos hace un tiempo finito hacia el pasado, entonces la luz viaja solo una distancia finita en ese tiempo y el volumen de espacio-tiempo desde el cual podemos recibir información en un tiempo dado es limitado. A la intersección de este volumen con la superficie espacial a  $\eta = \eta_i$  es a la cual llamamos horizonte de partículas. Dicho de otra forma, el tamaño del horizonte de partículas a un tiempo  $\eta$  se puede visualizar mediante la intersección del cono de luz pasado de un observador  $\mathcal{O}$  con la superficie espacial  $\eta = \eta_i$ , entonces, las influencias causales tienen que provenir dentro de esta región (ver Figura 2.2).

El tamaño físico del horizonte de partículas es

$$d_p(t) = a(t)\chi_p. \quad (2.43)$$

### 2.3.3. Horizonte de eventos

Un **horizonte de eventos** define el conjunto de puntos a partir de cuales, señales enviadas en un momento dado  $\eta$ , nunca serán recibidas por un observador en el futuro al tiempo  $t_{\max}$ . En coordenadas comóviles estos puntos satisfacen (ver Figura 2.2)

$$\chi > \chi_e = \int_t^{t_{\max}} \frac{dt'}{a(t')} = \eta_{\max} - \eta, \quad (2.44)$$

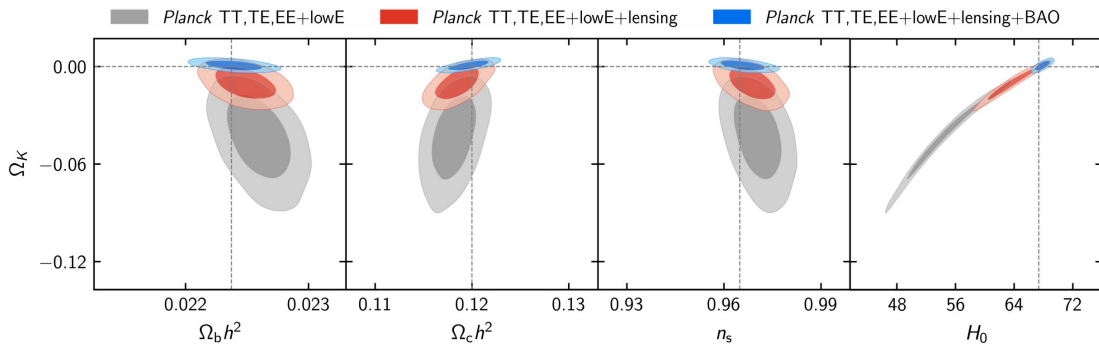
donde  $\eta_{\max}$  es el tiempo conforme asociado a  $t_{\max}$ .

Cómo recién mencionamos, el concepto de *horizonte* puede confundirse. Por ejemplo, cuando la materia cumple con la condición fuerte de energía  $\rho + 3p > 0$ , usualmente el horizonte de partículas es del orden de  $H^{-1}$  (cf. [11]), dando lugar al uso indistinto de *radio de Hubble* y *horizonte de partículas*. No obstante, el radio de Hubble es conceptualmente distinto al de un horizonte: mientras que, tanto el horizonte de partículas como de eventos, son establecidos por argumentos cinemáticos, el radio de Hubble es una escala dinámica que caracteriza la tasa de expansión y entra en las ecuaciones que describen. Veremos más de esto cuando estudiemos perturbaciones cosmológicas en el Capítulo 6.

## 2.4. Modelo de concordancia $\Lambda$ CDM

De acuerdo a los resultados arrojados por la Colaboración Planck [100], los cuales toman en cuenta mediciones de BAO y lentes gravitacionales, se encuentra que el universo es muy cercano a plano, i.e.

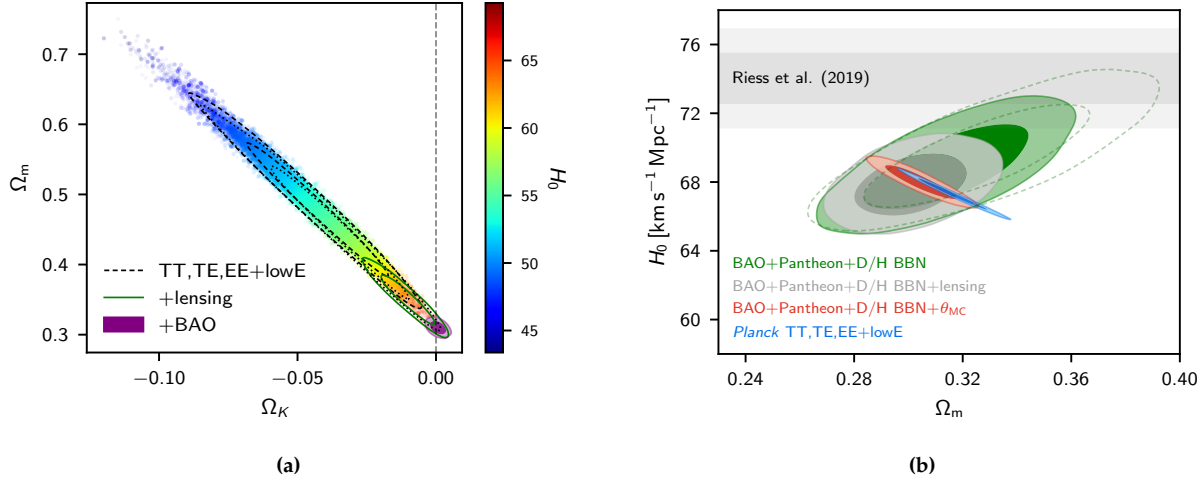
$$\Omega_K \sim 0. \quad (2.45)$$



**Figura 2.3:** Restricciones en las extensiones de 1-parámetro al modelo base  $\Lambda$ CDM. La línea discontinua horizontal corresponden al valor del parámetro  $\Omega_K$  asumido en la cosmología base  $\Lambda$ CDM, mientras que las líneas discontinuas verticales muestran los valores medios posteriores en el modelo base. Los contornos muestran regiones de confianza del 68 % y el 95 %. Tomada de *Planck 2018* [100].

De hecho, las observaciones de Oscilaciones Acústicas de Bariones<sup>22</sup> (BAO, por sus siglas en inglés) [1] son las que resultan extremadamente importantes a la hora de





**Figura 2.4:** (a). Constricciones en un universo no-plano como una extensión mínima del modelo base  $\Lambda$ CDM. (b). Constricciones al parámetro de Hubble y  $\Omega_m$  en el modelo base  $\Lambda$ CDM impuestas por mediciones de distancias, en comparación con el resultado de los datos completos de Planck del espectro de potencia del CMB. Las bandas grises muestran la medición de escalera local de distancias de Riess et al. [106]. Ambas tomadas de *Planck 2018* [100].

restringir  $\Omega_K$ , como se observa en las Figuras 2.3 y 2.4a.

También, de acuerdo con [100] (para TT,TE,EE+lowE+lensing+BAO), el universo está constituido por cerca de 5% de átomos (bariones), 26% de materia oscura (fría<sup>23</sup>) y 69% de energía oscura<sup>24</sup> (ver Figuras 2.3 y 2.4b), esto es:

$$\Omega_b = 0.04897, \quad 68\% \text{ CL}, \quad (2.46a)$$

$$\Omega_{\text{cdm}} = 0.2607, \quad 68\% \text{ CL}, \quad (2.46b)$$

$$\Omega_\Lambda = 0.6889, \quad 68\% \text{ CL}. \quad (2.46c)$$

Además se tiene para el parámetro de Hubble (véase Figuras 2.3 y 2.4b)

$$h = 0.6766, \quad 68\% \text{ CL}. \quad (2.47)$$

Notemos que los datos de BAO ayudan a restringir su valor de gran manera. Sin embargo, de la Figura 2.4b es visible una discrepancia entre lo obtenido por [100] y por Riess et al. [103]. Esta es la esencia de la *tensión de Hubble* (para mayor información ver [123]).

En resumen, el modelo de concordancia de la cosmología está constituido por un universo euclidiano dominado actualmente por constante cosmológica y en menor medida por materia oscura (fría) no-bariónica, donde, las condiciones iniciales son generadas por la *inflación cosmológica* en el universo temprano (veremos esto en mejor detalle en la Sección 3.7). Este modelo recibe el nombre de  $\Lambda$ CDM [35].

<sup>22</sup>Fluctuaciones en la densidad de la materia visible del universo, causada por ondas acústicas en la época primordial del universo.

<sup>23</sup>Fría en el sentido de que las partículas que constituyen la materia oscura son no-relativistas, lo cual permite que se aglomeren de manera eficiente en el universo temprano.

<sup>24</sup>Las observaciones han sido consistentes con la energía oscura como una constante cosmológica  $\Lambda$ , de aquí el subíndice en (2.46c).





# Capítulo 3

## Inflación cosmológica

En la comprensión convencional del modelo del Big-Bang, el universo se considera dominado por radiación en el universo temprano (previo a recombinación) y dominado por materia en el universo tardío, con una transición a la dominación de energía oscura actual. El modelo ha resultado muy exitoso, observacionalmente hablando. Entre sus predicciones más fuertes están: la expansión del universo, la existencia del Fondo Cósmico de Microondas (CMB, por sus siglas en inglés), la relativa abundancia de elementos ligeros en el universo (nucleosíntesis). No obstante, no aborda algunas preguntas desconcertantes sobre nuestro universo: ¿Por qué la geometría del universo está tan cerca de ser plana? ¿Por qué este es tan homogéneo a gran escala? ¿Cuál es la naturaleza de las pequeñas fluctuaciones de densidad que dieron origen a la formación de estructuras?

Estas preguntas no tienen respuesta en la cosmología del Big Bang, y, están más bien conectadas con un conjunto de condiciones iniciales muy particulares para poder explicar la evolución del universo con las características que se observan en la actualidad. Sin embargo, todavía podemos preguntarnos si las condiciones iniciales que dieron lugar a tal universo parecen naturales. Esta pregunta en sí, es extraña, puesto que normalmente a partir de las leyes físicas uno es libre de elegir las condiciones iniciales y preguntarnos por la evolución dada por dichas leyes. Por lo que parece razonable preguntarse si tales condiciones son relativamente genéricas o están finamente ajustadas. Inclusive, podría llegar a ser decepcionante que sólo condiciones iniciales muy especiales y finamente ajustadas condujeran al universo tal como lo vemos, convirtiendo el universo observado en un “accidente improbable”.

Dentro del panorama convencional, el universo primitivo está ajustado con una precisión increíble. En particular, dos características de nuestro universo parecen altamente no genéricas: su planitud espacial y su alto grado de homogeneidad e isotropía. Quizás simplemente sea que nos tocó este universo, y no tiene sentido preguntarse sobre la probabilidad de diferentes condiciones iniciales. Alternativamente, podría ser que estas condiciones sean más probables de lo que parecen al principio si existe algún mecanismo dinámico que pueda tomar un amplio espectro de condiciones iniciales y evolucionarlas hacia la planitud, homogeneidad e isotropía. Aquí encaja el concepto de *inflación cosmológica*, el cual proporciona tal mecanismo, y además, desde la visión moderna, una de las propiedades más importantes de la inflación es que puede generar

irregularidades en el universo, lo que puede llevar a la formación de estructuras. Por esto es que se ha convertido en un punto importante de la cosmología moderna, incluso si todavía está lejos de demostrar su completa validez.

Supongamos que el universo tuvo un período en el que el factor de escala aumentó exponencialmente, tal como describe la ecuación (2.39). Este crecimiento exponencial en el factor de escala recibe el nombre de **inflación cosmológica**. Incluso un período corto (fracciones de segundo) y temprano de expansión inflacionaria puede ayudar a explicar por qué el universo se ve tan homogéneo e isotrópico actualmente. Este capítulo se dedicará a revisar los aspectos antes mencionados, así como introducir una descripción de la dinámica clásica de la inflación. También, al igual que en el Capítulo anterior, se recopilan datos observacionales de la Colaboración Planck que ayudan a restringir modelos inflacionarios. Por último, tomaremos un potencial que ha sido ampliamente usado en la cosmología inflacionaria y veremos como se comportan las soluciones numéricas con él. Algunas referencias seguidas en este capítulo son [11, 35, 75, 83, 90, 98].

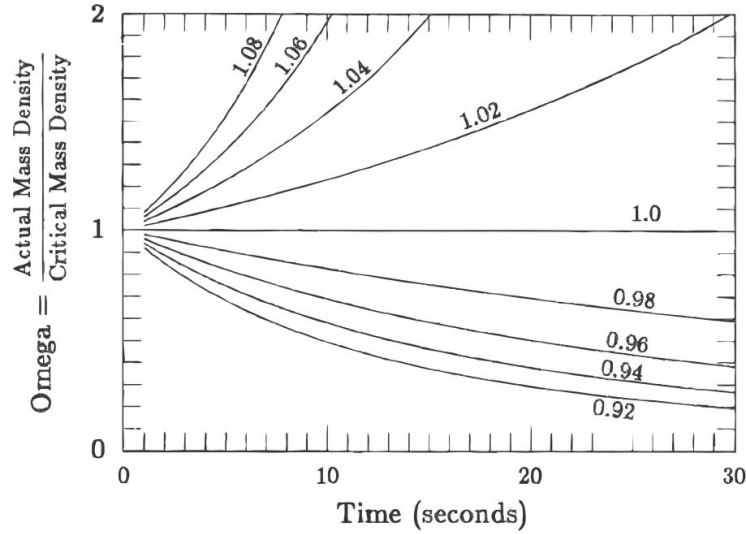
### 3.1. Problema de planitud

El universo que observamos hoy en día, está cerca de tener una geometría espacial euclidiana. Esto es equivalente a que la densidad de energía es aproximadamente igual a la densidad crítica; o dicho de otra forma que el parámetro de densidad actual  $\Omega_0 \approx 1$  (cf. ec. (2.18)). Las observaciones indican que  $\Omega_0$  se desvía de la unidad en no más del 1 % [100]. El problema de planitud surge de considerar la ecuación de Friedmann (2.21) en un universo con materia y radiación pero sin energía oscura, es decir

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}. \quad (3.1)$$

Notemos que si el universo es plano ( $\Omega = 1$ ) en un instante, seguirá siendo plano para todo tiempo. Sin embargo,  $(aH)(t)$  es una función decreciente con el tiempo en las épocas dominadas por materia y radiación. Por ejemplo, en un universo casi plano y dominado por materia, tenemos que  $|\Omega - 1| \propto t^{2/3}$ , y en un universo casi plano y dominado por radiación, tenemos  $|\Omega - 1| \propto t$  (cf. Tabla 2.1). En particular, si no tomáramos en cuenta un periodo inflacionario, la planitud ( $\Omega_K \sim 0$ ) observada actualmente mediante el CMB y BAO (ver Figura 2.4a) requiere que la desviación de un universo completamente plano en el momento de la nucleosíntesis (BBN, por sus siglas en inglés: Big Bang Nucleosynthesis) satisfaga que  $|\Omega(t_{\text{nuc}}) - 1| \lesssim 10^{-16}$  y además en la época de Planck  $|\Omega(t_{\text{Planck}}) - 1| \lesssim 10^{-61}$  [11].

En otras palabras, el valor crítico  $\Omega = 1$  es un punto fijo inestable, puesto que  $|\Omega - 1|$  diverge con el tiempo (ver Figura 3.1), y en consecuencia las observaciones actuales de  $\Omega_0 \sim 1$  requieren de un ajuste extremadamente fino, cercano a 1, en el universo primigenio [11]. Si, por ejemplo, tuviéramos  $\Omega = 1.01$  al inicio de la nucleosíntesis ( $t \approx 1$  s), entonces en menos de un minuto tendríamos  $\Omega = 2$  y en poco más de tres minutos el universo colapsaría. De manera similar, si comenzamos con  $\Omega = 0.99$  en  $t \approx 1$  s, entonces en aproximadamente un año la densidad sería 300,000 veces menor que la crítica, i.e.  $\Omega = 0.000003$ . En este sentido, casi todas las condiciones iniciales conducen



**Figura 3.1:** Evolución de  $\Omega$  en los primeros 30 segundos. Cada línea representa la evolución del parámetro de densidad con su respectivo valor inicial [48].

a un universo cerrado que vuelve a colapsar casi de inmediato, o a un universo abierto que entra muy rápidamente en el régimen de dominio de la curvatura y se enfría por debajo de los 3 K en el primer segundo de su existencia. Por esta razón, el problema de planitud en ocasiones se encuentra relacionado con el *problema de la edad cósmica*: ¿Cómo llegó nuestro universo a ser tan viejo? En un universo de tan baja densidad no se formarían nunca galaxias o estrellas.

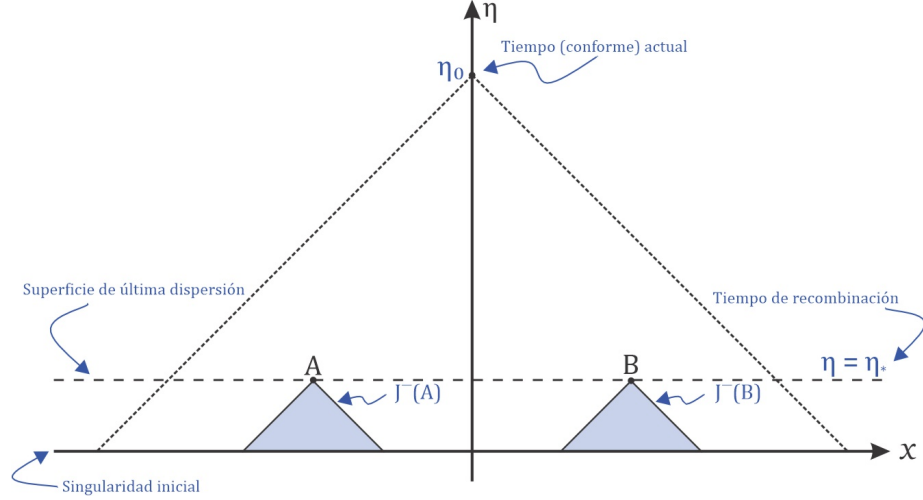
En resumen, el problema de planitud radica en que el universo debe iniciarse con una  $\Omega$  finamente ajustada a la unidad, aunque el modelo del Big Bang no puede explicar por qué debe ser así. Simplemente debe asumirse como una condición inicial.

## 3.2. Problema del horizonte

La alta uniformidad de la temperatura del CMB, muestra que el universo era extremadamente homogéneo en el momento en que se emitió la radiación. No obstante, dentro del modelo estándar del Big Bang no hay ninguna razón por la que este deba ser el caso, a menos que el universo partiera *milagrosamente* con unas condiciones iniciales muy especiales. En primera instancia, esta uniformidad de temperatura parece no ser importante, puesto que la temperatura del CMB podría equilibrarse (por la ley cero de la termodinámica), si hubiera alguna interacción entre regiones *cercanas* que emiten radiación. Sin embargo, cuando se emitió el CMB, el tiempo que había transcurrido desde el Big Bang no era suficiente para que esas regiones interactuaran antes de emitir los fotones (véase Figura 3.2).

Consideremos un fotón que se mueve a lo largo de una trayectoria radial en un universo plano. Una geodésica radial nula obedece

$$0 = ds^2 = -dt^2 + a^2 dr^2, \quad (3.2)$$



**Figura 3.2:** Problema del horizonte ilustrado en un diagrama de espacio-tiempo. El CMB es emitido cuando el pasado causal de  $\eta_0$  interseca la superficie de la última dispersión en  $\eta = \eta_*$ . Los fotones emitidos en los puntos  $A$  y  $B$  no están conectados causalmente (donde  $J^-(A)$  y  $J^-(B)$  son los pasados causales de  $A$  y  $B$  respectivamente) por lo que no hay un mecanismo que permita que la radiación en estas regiones pueda interactuar y hacerla homogénea.

por lo que la distancia comóvil recorrida por dicho fotón entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  es justamente el horizonte de partículas comóvil (cf. (2.42)), i.e.

$$\chi_p(t_1 \rightarrow t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (3.3)$$

Si suponemos que desde el Big Bang, a un tiempo  $t_{\text{BB}}$ , y hasta la época de recombinación  $t_*$ , el universo estuvo dominado por radiación ( $a \propto t^{1/2}$ , ver Tabla 2.1), entonces

$$\chi_p(t_{\text{BB}} \rightarrow t_*) = \int_{t_{\text{BB}}}^{t_*} \frac{dt'}{\alpha t'^{1/2}} = \frac{2}{\alpha} (t_*^{1/2} - t_{\text{BB}}^{1/2}). \quad (3.4)$$

Además, asumiendo que el universo estuvo dominado por materia ( $a \propto t^{2/3}$ , ver Tabla 2.1), desde la época de recombinación y hasta nuestros días, entonces

$$\chi_p(t_* \rightarrow t_0) = \int_{t_*}^{t_0} \frac{dt'}{\beta t'^{2/3}} = \frac{3}{\beta} (t_0^{1/3} - t_*^{1/3}). \quad (3.5)$$

Por continuidad para el factor de escala en  $t_*$ , tenemos que

$$\alpha t_*^{1/2} = \beta t_*^{2/3}, \quad (3.6)$$

entonces

$$\frac{\alpha}{\beta} = t_*^{1/6}. \quad (3.7)$$

Para estimar un valor consideremos que el Big Bang comienza con la singularidad inicial

en<sup>1</sup>  $t_{\text{BB}} \sim 0$  y  $\frac{t_0}{t_*} \sim 10^5$ . Con esto calculamos el cociente<sup>2</sup>

$$\frac{\chi_p(t_* \rightarrow t_0)}{\chi_p(t_{\text{BB}} \rightarrow t_*)} = \frac{3}{2} t_*^{1/6} \frac{(t_0^{1/3} - t_*^{1/3})}{t_*^{1/2}} = \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{t_0}{t_*} \right)^{1/3} - 1 \right] \sim 68, \quad (3.8)$$

por lo tanto

$$\chi_p(t_{\text{BB}} \rightarrow t_*) \ll \chi_p(t_* \rightarrow t_0). \quad (3.9)$$

Físicamente, (3.9) nos dice que la distancia que la luz pudo haber viajado antes de que se formara el CMB es más pequeña que la distancia del horizonte comóvil actual. De hecho las regiones separadas por más de 2 grados en el cielo no están en contacto causal en la época de recombinación. Sin embargo, observacionalmente, se ven fotones que alcanzan el equilibrio térmico a la misma temperatura en todas las regiones del cielo de CMB (cf. Figura 2.1). Este es el llamado problema del horizonte. En consecuencia, en la teoría estándar del Big Bang resulta complicado concebir una explicación a la homogeneidad e isotropía, por lo que estas debería corresponder a una condición inicial.

Notemos que ni el problema de horizonte ni el de planitud están en contradicción con el Big Bang. Son problemas en el sentido de que estas características notables del universo no tienen explicación dentro de la teoría.

La raíz del problema de horizonte está en considerar una expansión del universo que se desacelera con el tiempo, por lo que los objetos que no están en contacto causal hoy nunca podrían haber estado en contacto causal antes. Esto hace surgir la pregunta: ¿qué pasaría si el universo pasara por una etapa de expansión acelerada? La respuesta es que, en tal universo, las regiones que actualmente no están en contacto causal habrían estado en contacto causal en épocas anteriores (ver Figura 3.3). Entonces no habría problema de horizonte. Además, el problema de planitud también desaparecería. Se puede demostrar que una expansión acelerada lleva el valor de  $\Omega$  a la unidad, incluso si inicialmente es totalmente diferente de uno. Pero surge una nueva pregunta, ¿qué podría provocar una expansión acelerada?<sup>3</sup>

### 3.3. Reliquias no deseadas

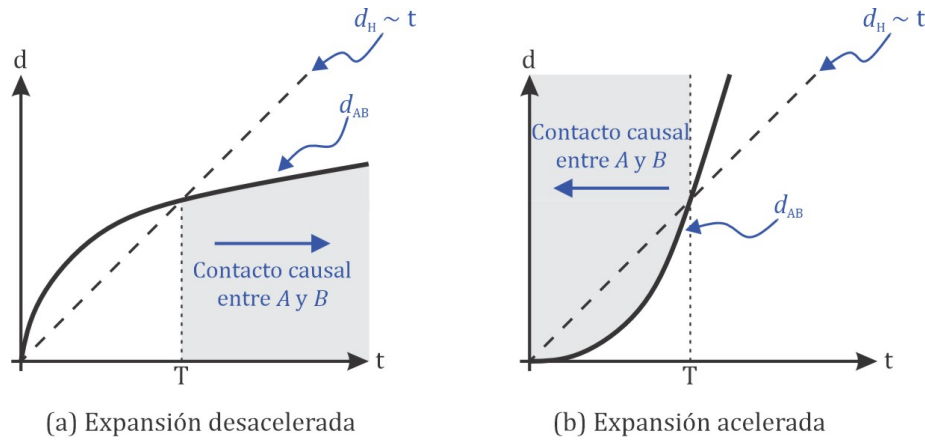
Las *reliquias* son partículas o defectos topológicos producidas en el universo muy temprano y con las palabras *no-deseadas* se hace hincapié en la contradicción con las observaciones. Según el punto de vista de la física de partículas, la ruptura espontánea de la supersimetría<sup>4</sup> conduce a la producción de muchas reliquias no deseadas como monopolos, cuerdas cósmicas y defectos topológicos [81] que quedan como reliquias

<sup>1</sup>Notemos que la singularidad inicial es un *momento en el tiempo* pero no es un *punto espacial*. En la Figura 3.2 se representa la singularidad como una hipersuperficie espacial.

<sup>2</sup>De acuerdo con lo reportado por Planck 2018 [100],  $t_0 = 13.787$  Gyr y  $t_* = 3.8 \times 10^5$  yr, lo cual motiva los valores para los parámetros empleados.

<sup>3</sup>La forma más usual es considerar un campo escalar mínimamente acoplado (inflatón).

<sup>4</sup>A grandes rasgos, la supersimetría predice una partícula compañera para cada partícula en el modelo estándar, esto ayuda a explicar por qué las partículas tienen masa. Para el rompimiento espontáneo de la supersimetría, puede describir sistemas donde la acción de la teoría es invariante ante transformaciones de supersimetría, pero el vacío de la teoría no.



**Figura 3.3:** (a) Universo que desacelera su expansión. Donde  $d_H$  es la distancia (física) al horizonte definida por (2.43). En universos dominados por radiación o materia su comportamiento es similar (cf. ecs. (3.4) y (3.5)), i.e.,  $d_H(t) = a(t)\chi_p \sim t$ . También  $d_{AB}$  es la distancia entre dos regiones  $A$  y  $B$  del CMB. De manera simplificada podemos suponer que el universo ha estado en la época dominada por materia desde el momento en que las regiones  $A$  y  $B$  emitieron su radiación, con lo cual su distancia crece como el factor de escala de la época de dominación de materia  $d_{AB} \sim t^{2/3}$ . (b) Universo que acelera su expansión. Nuevamente  $d_{AB}$  crece como el factor de escala pero en este caso este caso  $\ddot{a} > 0$ .

de la gran era unificada, que pudieran haber sobrevivido hasta la época actual, lo cual está en total contradicción con la observación. Es decir, si estas partículas existieron en la etapa temprana del universo, sus densidades de energía deben de disminuir como la componente de materia, i.e.  $\sim a^{-3}$ . Dado que la densidad de energía de radiación decae como  $\sim a^{-4}$ , estas reliquias deberían ser los materiales dominantes en el universo, lo que contradice las observaciones. Este problema se denomina generalmente el problema de las reliquias no deseadas o, en algunas ocasiones, el problema del monopolio (para una descripción más detallada ver [83]).

### 3.4. Inflación

Los *problemas* de la planitud y del horizonte se conocían desde la década de los 60, pero rara vez se discutían, puesto que como vimos estos necesitan abordar la cuestión aún más fundamental, de qué sucedió en el universo primordial. Sin ningún progreso en esa dirección, todo parecía indicar que las preguntas sobre el estado inicial del universo pertenecían a la filosofía, no a la física. Fue hasta 1980 que Alan Guth proporcionó una manera de resolver estos acertijos cosmológicos [47]. Inicialmente intentaba explicar por qué el universo actual es tan homogéneo a grandes escalas. Sin embargo pronto el enfoque cambió, puesto que el mismo mecanismo que explica la homogeneidad también puede explicar el origen de las perturbaciones en el universo.

La teoría inflacionaria no busca ser un remplazo del modelo estándar del Big Bang, más bien un componente adicional que ocurre a tiempos muy tempranos del universo, donde al terminar esta etapa inflacionaria, el universo continuó con su evolución descrita por el modelo estándar del Big Bang, sin alterar sus predicciones.

Para comenzar este estudio recordemos que en la Tabla 2.1 vimos que el radio comó-

vil de Hubble  $(aH)^{-1}$  puede decrecer si tenemos una época cuyo presión efectiva  $p < 0$ . En este sentido, el mecanismo que genere la inflación (o de igual manera el mecanismo que produce la reciente aceleración del universo) no es materia ordinaria ni radiación. Tampoco puede ser una constante cosmológica puesto que involucraría una inflación perpetua, y claramente necesitamos que el periodo inflacionario termine y posteriormente se obtengan las épocas dominadas por radiación y materia que observamos.

Entonces, si reescribimos el horizonte comóvil de partículas (2.42) como una integral logarítmica obtenemos<sup>5</sup>

$$\eta(a) = \int_0^a \frac{d \ln a'}{a' H'}. \quad (3.10)$$

Resaltemos la sutil diferencia entre el horizonte comóvil  $\eta$  y el radio comóvil de Hubble  $(aH)^{-1}$ . Si un par de partículas están separadas por distancias más grandes que  $\eta$ , estas *nunca* podrían estar en contacto causal; por otro lado si están separadas por distancias mayores a  $(aH)^{-1}$ , estas no están en contacto causal *ahora* [11]. Sobre todo notemos que es posible que  $\eta$  sea mucho más grande que  $(aH)^{-1}$  actualmente, de tal forma que hay partículas que no puedan comunicarse actualmente pero estuvieron en contacto causal en algún momento anterior.

Esta idea está detrás de la solución de los problemas de las secciones anteriores, pero aún mejor, es fundamental para la generación cuántica de perturbaciones cosmológicas descritas en el Capítulo 6.

### 3.4.1. Problema de la planitud revisado

El origen de los problemas de planitud y de horizonte se derivan de la expansión desacelerada del universo. En un universo en desaceleración, el parámetro de densidad  $\Omega$  se aleja del valor de la unidad (es decir,  $\Omega$  se vuelve muy grande o muy pequeña) y, por lo tanto, es asombroso que en la actualidad se mida tan cerca de la unidad. Para mirar esto en un poco más de detalle, tomemos el valor absoluto de la ecuación (3.1) y derivando con respecto al tiempo tenemos

$$\frac{d}{dt}(|\Omega(t) - 1|) = |K| \frac{d\dot{a}^{-2}}{dt} = -\frac{2|K|}{\dot{a}^3} \ddot{a}. \quad (3.11)$$

Si consideramos un universo que se expande, en cuyo caso  $\dot{a} > 0$  y en consecuencia  $\dot{a}^{-3} > 0$ , de la cual podemos extraer dos situaciones:

$$\frac{d}{dt}(|\Omega(t) - 1|) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{a} < 0, \quad (3.12a)$$

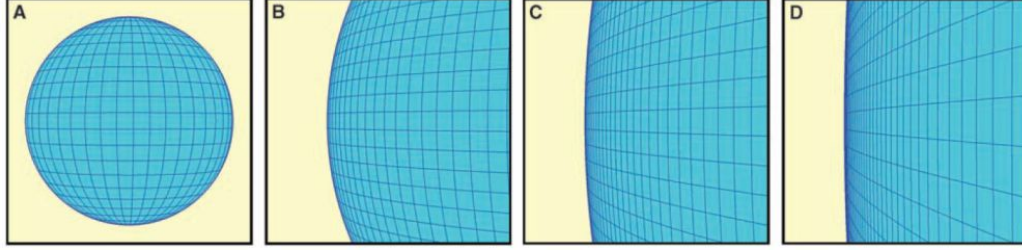
$$\frac{d}{dt}(|\Omega(t) - 1|) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{a} > 0. \quad (3.12b)$$

De la relación (3.12a) vemos que el problema de planitud surge cuando la expansión del universo es desacelerada (ver Figura 3.1). La expresión (3.12b) nos dice que si

---

<sup>5</sup>Notemos que cuanto tomamos  $t_i = 0$  en la ecuación (2.42), el horizonte comóvil coincide con el tiempo conforme.





**Figura 3.4:** Ilustración de una esfera inflándose, en analogía con la solución al problema de planitud. La geometría espacial plana ( $\Omega \approx 1$ ) se reproduce por el escenario inflacionario. Tomada de Guth & Kaiser [49]

tuviéramos una etapa temprana del universo, cuya expansión fuera acelerada, entonces  $|\Omega(t) - 1| \rightarrow 0$  rápidamente, para condiciones iniciales arbitrarias. En consecuencia, una vez que  $\Omega$  alcance un valor cercano a la unidad, la etapa inflacionaria terminaría y el universo continuaría su evolución descrita por el modelo estándar del Big Bang, con  $\Omega(t) \approx 1$ , coincidiendo con los valores observacionales. A esta etapa de expansión acelerada se le conoce como *inflación* [11, 35, 83].

De manera esquemática este comportamiento se entiende mediante una superficie curvada (esfera), que es *alargada* de manera muy rápida, de tal forma que rápidamente se obtenga una superficie plana cuando se observan pequeñas partes de la superficie, por ejemplo la tierra vista desde una pequeña porción de ella (ver Figura 3.4).

En términos del radio comóvil de Hubble, tenemos directamente de la ecuación (3.1), para  $K \neq 0$ , que

$$|\Omega(a) - 1| = \frac{|K|}{(aH)^2}, \quad (3.13)$$

lo cual nos dice que si el radio comóvil de Hubble decrece con el tiempo, el universo es conducido hacia la planitud. Dicho de otra forma, la solución  $\Omega = 1$  es un atractor durante la inflación.

### 3.4.2. Problema del horizonte revisado

Por otra parte, si el factor de escala es una función exponencial  $e^{H_{\text{inf}}t}$  (cf. ecuación (2.39)), con  $H_{\text{inf}}$  una constante positiva, entonces

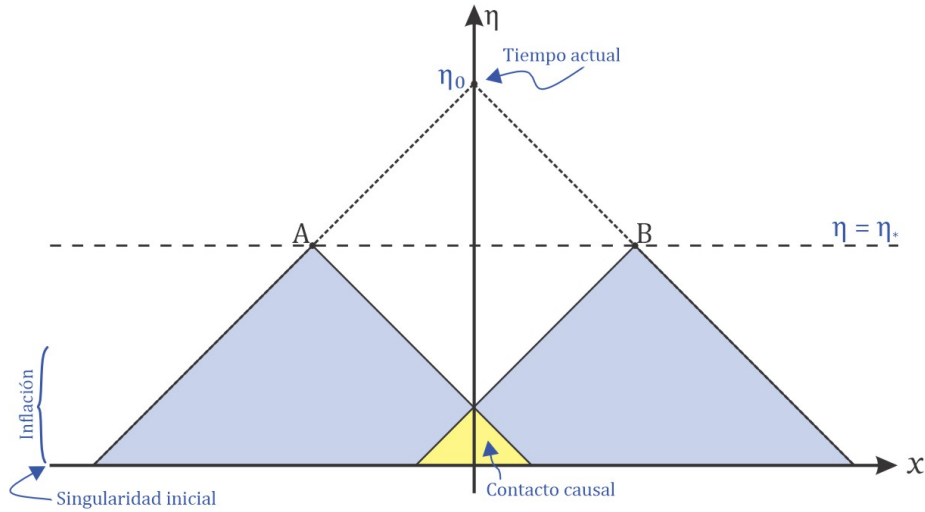
$$\int_{t_i}^{t_*} \frac{dt'}{a(t')} = \frac{1}{H_{\text{inf}}} (e^{-H_{\text{inf}}t_i} - e^{-H_{\text{inf}}t_*}) \gg \frac{1}{H_{\text{inf}}} (e^{-H_{\text{inf}}t_*} - e^{-H_{\text{inf}}t_0}) = \int_{t_*}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (3.14)$$

siendo  $t_i$  el tiempo al cual comenzó el periodo inflacionario. En otras palabras

$$\chi_p(t_i \rightarrow t_*) \gg \chi_p(t_* \rightarrow t_0), \quad (3.15)$$

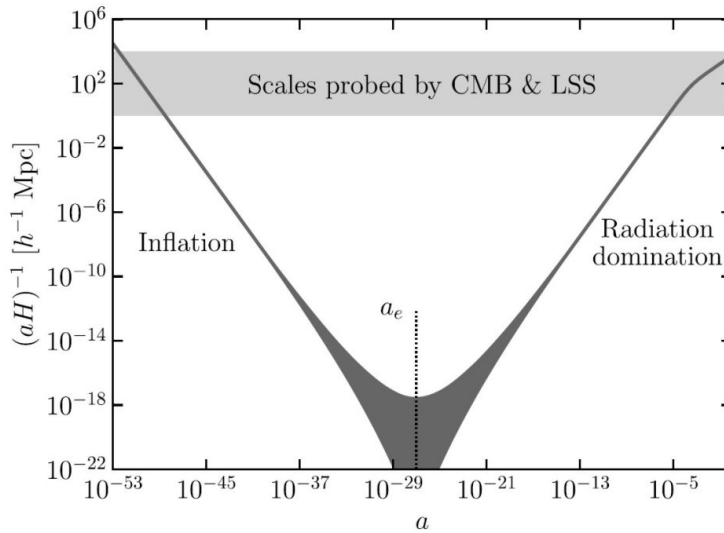
en contraposición a (3.9), dando solución al problema del horizonte (ver Figura 3.5).

En otras palabras, una época temprana en donde el horizonte comóvil de Hubble decrece permite que el tamaño de una región en contacto causal pueda ser más grande de lo que teníamos sin considerar la inflación [11].



**Figura 3.5:** A diferencia de la Figura 3.2, ahora los fotones emitidos en los puntos A y B están conectados causalmente por lo que la inflación permite que la radiación en estas regiones se pueda mezclar y hacer homogénea.

De la Figura 3.6 vemos que las escalas comóviles de interés eran mucho mayores a  $(aH)^{-1}$  a tiempos previos y posteriores (por la simetría del diagrama) al final de inflación  $t_e$ . En algún momento muy temprano durante la inflación, el radio comóvil de Hubble era muy grande, más grande que cualquier escala de interés cosmológico actual, es decir, todas las escalas de interés estaban dentro del horizonte.



**Figura 3.6:** Radio comóvil de Hubble como función del factor de escala. Las escalas de interés cosmológico (banda sombreada horizontal) eran más grandes que el radio de Hubble cuando  $10^{-45} \lesssim a \lesssim 10^{-5}$ . Más tarde entraron al radio comóvil de Hubble donde podemos observarlas. Sin embargo, muy temprano durante la inflación todas las escalas de interés eran más pequeñas que el radio comóvil de Hubble y, por lo tanto, estaban en contacto causal. Tomada de Dodelson & Schmidt [35].

### 3.4.3. Problema de las reliquias revisado

Por último, un periodo inflacionario demanda que todas las reliquias no deseadas producidas antes o durante la inflación sean diluidas por la enorme expansión, de modo que su densidad actual se vuelve insignificante. Esto es posible puesto que la densidad de energía durante la inflación decae más lentamente que la densidad de partículas de las reliquias [76]. Entonces de manera muy rápida, la densidad de las reliquias se vuelve despreciable.

Lo anterior es válido si, después de la inflación, la densidad de energía del universo se convierte en materia ordinaria sin reconstruir reliquias no deseadas. Esto se puede lograr al asegurar que durante esta conversión, conocida como recalentamiento, la temperatura no aumente demasiado para permitir su recreación. Tal recalentamiento permite regresar al modelo del Big Bang, recuperando todos sus éxitos posteriores, como la nucleosíntesis y el fondo de microondas [76, 77].

## 3.5. Modelo inflacionario clásico

La inflación cósmica es un fenómeno bastante peculiar y, en el contexto de la relatividad general, requiere de una presión negativa (similar al caso de la energía oscura; ver Sección 2.2.4) y una densidad de energía constante. Más adelante revisaremos las condiciones físicas que hacen posible este comportamiento.

Desde un punto de vista histórico, para entender lo que causaba la época inflacionaria, lo que se necesitaba era un vacío con una densidad de energía muy grande a tiempos muy tempranos, lo cual se traduce en una gravedad fuertemente repulsiva, y con ella se produce una etapa de expansión acelerada. Las *Teorías de Gran Unificación* de la Física de Partículas hacen plausible la existencia de estos estados de vacío de alta energía [48]. Esta idea motivó a Guth a proponer su modelo, donde se asumía que un campo escalar quedaba atrapado en un estado de falso vacío con una densidad de energía muy grande, similar a una constante cosmológica [47]. Entonces la enorme repulsión gravitacional del *falso vacío* causaría un periodo de expansión rápida y acelerada. Esto daría respuesta a los problemas de horizonte y planitud. El periodo inflacionario termina cuando el falso vacío decae en el *vacío verdadero*.

El exceso de energía del falso vacío tiene que ir a alguna parte, y Guth asumió que esta se convertía en una bola muy caliente de partículas. Esta bola se expande por inercia y la velocidad de expansión disminuye lentamente debido a la gravedad. Sin embargo, el mismo Guth manifestó que su modelo presentaba fallos [47].

Otros modelos más viables fueron presentados por Linde [79, 80], y por Albrecht & Steinhardt [2], en ambos casos se consideraba un campo escalar que bajo ciertas condiciones se comportaba como *una bola que rueda sobre una colina*, siendo este el origen de la inflación slow-roll (cf. Sección 3.5.2).

Históricamente, la inflación vio la luz porque buscaba dar respuesta a los problemas antes mencionados del modelo estándar del Big Bang, sin embargo, se considera como el mayor éxito del modelo inflacionario el que pueda generar irregularidades en el universo, las cuales pueden conducir a la formación de estructuras [77].

Cabe destacar que el modelo inflacionario no es la única alternativa para resolver esta problemática (ver por ejemplo [54]), sin embargo, debido a la consistencia que tienen ciertas predicciones del modelo inflacionario con los datos observacionales (e.g. un espectro casi invariante de escala) actualmente se considera a la inflación como el mejor modelo para esta etapa del universo primitivo.

La definición de *inflación* es la época durante la cual el factor de escala de un universo modelado por la métrica FRW se *acelera*, i.e.

$$\ddot{a} > 0, \quad (3.16)$$

esta relación es la que define a la inflación como un periodo de expansión acelerada; equivalentemente observando la ecuación de Friedmann (2.14), vemos que  $\ddot{a} > 0$  requiere que

$$\rho + 3p < 0. \quad (3.17)$$

Dado que siempre asumimos que  $\rho$  es positiva, entonces necesariamente  $p$  es negativa y además existe una violación a la condición fuerte de energía (cf. (2.15)). Una situación similar fue mencionada en la Sección 2.2.3 para el caso de una constante cosmológica.

Hay una tercera expresión equivalente a las dos anteriores, la cual se obtiene partiendo de que  $\dot{a} = aH$  crece durante la inflación y por lo tanto, el radio comóvil de Hubble  $(aH)^{-1}$  decrece durante la fase inflacionaria, es decir

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0. \quad (3.18)$$

En otras palabras, la condición para tener una época inflacionaria es que la longitud comóvil de Hubble, la cual es la escala característica más importante del universo en expansión, decrece con el tiempo.

Como mencionamos brevemente en las secciones anteriores, la inflación ofrece la explicación más prometedora para el origen de pequeñas fluctuaciones de densidad que posteriormente evolucionan en galaxias y cúmulos. Esto a partir del hecho de que la longitud comóvil de Hubble (3.18) disminuye durante la inflación (cf. Figura 3.6) lo cual hace posible generar las perturbaciones primordiales casi invariantes a gran escala ( $n_s \approx 1$ ; cf. Sección 3.7). Dado que las escalas de las perturbaciones se encuentran dentro del radio de Hubble en la etapa inicial de inflación, la física causal trabaja para generar pequeñas fluctuaciones cuánticas. Después de que una escala sale del radio de Hubble durante la inflación (ver primer cruce en Fig. 3.6), las perturbaciones pueden describirse clásicamente. Cuando termina el período inflacionario, la evolución del universo es descrita por el modelo estándar del Big Bang, y el radio comóvil de Hubble comienza a aumentar. Posteriormente, las escalas de las perturbaciones se cruzan nuevamente dentro del radio de Hubble (ver segundo cruce en Fig. 3.6), con lo cual se vuelve una perturbación observable. Las pequeñas perturbaciones impresas durante la inflación aparecen como perturbaciones a gran escala después del segundo cruce del horizonte. De esta manera, el modelo inflacionario proporciona naturalmente un mecanismo causal para generar las semillas de las perturbaciones de densidad observadas en las anisotropías de CMB (Fig. 2.1).

Ya vimos que un periodo de inflación en el universo primitivo puede resolver los problemas que presenta el modelo estándar del Big Bang, pero para que el modelo inflacionario sea algo completo, necesitamos entender cómo surge y termina.

El modelo inflacionario más simple [35] (el producido por un campo escalar) se analiza en la siguiente sección.

### 3.5.1. Inflación por un campo escalar

La alternativa más sencilla<sup>6</sup> (desde el punto de vista matemático) para generar una época temprana de expansión acelerada es a través de un campo escalar  $\phi$  mínimamente acoplado<sup>7</sup> a la gravedad<sup>8</sup>. Si partimos de la acción para un campo escalar real en un potencial

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi - V(\phi) \right), \quad (3.19)$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica  $g_{ab}$ . Entonces podemos calcular la ecuación de movimiento para el campo efectuando la variación de (3.19) o equivalentemente mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_a \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_a \phi)} - \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial \phi} = 0, \quad (3.20)$$

en cuyo caso

$$\square \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g} \partial^a \phi) - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (3.21)$$

Notemos que (3.21) es la expresión general para una métrica arbitraria. Un caso particular es tomar la métrica FRW (2.2) para un universo plano ( $K = 0$ ) compatible con las hipótesis de homogeneidad e isotropía (i.e.  $\phi \equiv \phi(t)$ ), en cuyo caso se obtienen las ecuaciones de movimiento (ver Sección A.3):

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \partial_\phi V(\phi) = 0. \quad (3.22)$$

Empleando la relación entre el tensor de energía-momento y la derivada funcional de la acción

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}}, \quad (3.23)$$

obtenemos (ver Sección A.4)

$$T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi + g_{ab} \mathcal{L}. \quad (3.24)$$

<sup>6</sup>En este Capítulo solo presentamos el caso de un campo escalar, sin embargo, existen diferentes alternativas. Una de ellas es emplear teorías modificadas de la gravedad; este será nuestro enfoque a partir de la próxima sección. Otro camino involucra emplear varios campos escalares (para más alternativas así como sus breves motivaciones ver [11]).

<sup>7</sup>A grandes rasgos, esto significa que en la acción del campo escalar no aparecen términos cruzados del campo y la curvatura escalares, por ejemplo  $R\phi^2$ .

<sup>8</sup>Aunque conocemos un campo escalar en la naturaleza, el bosón de Higgs, sus propiedades parecen indicar que no sirve como mecanismo para generar la inflación. Por lo cual debemos pensar a  $\phi$  como un campo escalar genérico del cual desconocemos su conexión con la física actual. Tal vez en un futuro esta conexión sea conocida.

Comparando con el tensor de energía-momento para un fluido perfecto (2.12) obtenemos de la ecuación (3.24) las respectivas expresiones para la densidad de energía y presión:

$$\rho = -T^0_0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.25a)$$

$$p = \frac{1}{3}(T^1_1 + T^2_2 + T^3_3) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.25b)$$

En el Capítulo 6 se analiza las pequeñas desviaciones de la homogeneidad e isotropía, en cuyo caso, para realizar un análisis dinámico del campo escalar  $\phi$  y de la métrica  $g_{ab}$  es conveniente separarlos en sus partes homogénea (correspondiente a un valor de fondo o no-perturbado) e inhomogénea (correspondiente a la perturbación), i.e.

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}), \quad (3.26a)$$

$$g_{ab}(t, \mathbf{x}) = \bar{g}_{ab}(t) + \delta g_{ab}(t, \mathbf{x}). \quad (3.26b)$$

Lo anterior no implica que existan inhomogeneidades de cierto tipo en el universo inflacionario, simplemente estas no se descartan.

En lo que resta del presente capítulo, nos referiremos a la parte homogénea del campo escalar sencillamente por  $\phi$ , pero siempre tengamos en cuenta que más adelante estudiaremos el comportamiento de ambas contribuciones en (3.26a).

De esto vemos que, un campo escalar homogéneo tiene una dinámica parecida a la de una partícula en un potencial, esto nos permite pensar a  $\phi(t)$  como la posición de la partícula y  $\dot{\phi}(t)$  su velocidad. Además, tenemos que la ecuación de estado resulta ser

$$w_\phi = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (3.27)$$

Notemos que si  $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$ , recuperaríamos la condición  $\rho \approx -p$  ( $w_\phi < 0$ ). En otras palabras, un campo escalar cuya *energía potencial*<sup>9</sup> domina sobre su término cinético, de acuerdo con (3.17), implica que  $\ddot{a} > 0$  dando origen a un periodo inflacionario. La dinámica de este campo escalar en un espacio-tiempo FRW está dado por la ecuación de movimiento (3.22) (ver Sección A.3) y las ecuaciones de Friedmann (2.13)-(2.14), con  $K = 0$ , es decir

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \partial_\phi V(\phi) = 0, \quad (3.28a)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right), \quad (3.28b)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{\kappa}{3}(\dot{\phi}^2 - V(\phi)), \quad (3.28c)$$

donde, en unidades naturales  $\kappa \equiv 8\pi G$ .

<sup>9</sup>Notemos que, en unidades naturales,  $[V] = \text{energía}^4$ . Entonces  $V(\phi)$  es de hecho una densidad de energía.

### 3.5.2. Inflación slow-roll

En (3.28b) hemos ignorado el término de curvatura, ya que la inflación aplanará el universo de todos modos. Entonces, la inflación se puede llevar a cabo, si las siguientes tres condiciones se satisfacen: (1) la evolución del campo es lo suficientemente gradual como para que el potencial domine sobre el término cinético; (2) la expansión acelerada se mantiene durante un intervalo de tiempo suficientemente largo, para que la inflación *cumpla su cometido* (esto tiene que ver con los  $e$ -folds que veremos en la Sección 3.5.3); y (3) la segunda derivada temporal de  $\phi$  es lo suficientemente pequeña. Esto significa que buscaremos que se satisfagan las condiciones

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad (3.29a)$$

$$|\ddot{\phi}| \ll 3|H\dot{\phi}|. \quad (3.29b)$$

Estas relaciones reciben el nombre de **condiciones de slow-roll** [11], puesto que si pensamos a  $\phi(t)$  como la posición de una partícula, entonces para un potencial lo suficientemente plano ( $V \approx \text{cte} \Rightarrow \partial_\phi V \approx 0$ ) que satisfaga (3.29a) para algunos valores de  $\phi$ , entonces la *partícula rodará lentamente* (ver Figura 3.7), provocando una expansión acelerada del universo. Adicionalmente, debido a que el potencial es plano, se puede suponer que  $\ddot{\phi} \approx 0$ .

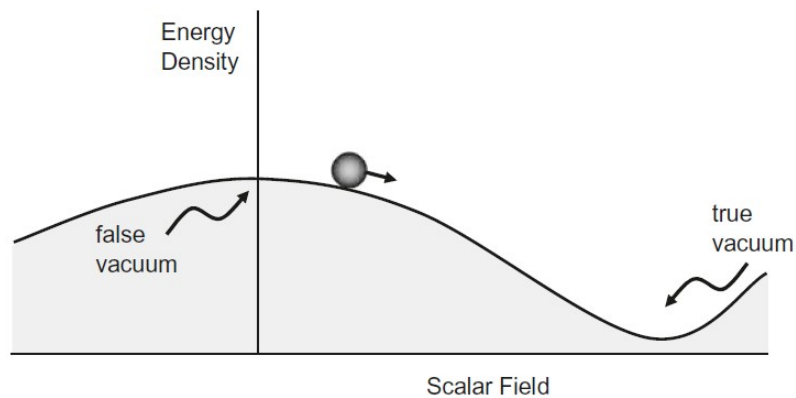
Aplicando las condiciones de slow-roll a las expresiones (3.28), se obtienen las **ecuaciones de slow-roll**:

$$3H\dot{\phi} + \partial_\phi V(\phi) \approx 0, \quad (3.30a)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx \frac{\kappa}{3} V(\phi) \equiv \frac{V(\phi)}{3M_P^2}, \quad (3.30b)$$

$$\dot{H} \approx 0, \quad (3.30c)$$

donde  $M_P$  es la masa reducida de Planck, la cual en unidades naturales es  $M_P \equiv \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} = 2.436 \times 10^{18}$  GeV.



**Figura 3.7:** Escenario simplificado de la inflación slow-roll. Tomada de Perlov & Vilenkin [98].



Por otro lado, se introducen los **parámetros de slow-roll del potencial** como

$$\epsilon_V(\phi) \equiv \frac{1}{2} M_P^2 \left( \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)^2, \quad (3.31a)$$

$$\eta_V(\phi) \equiv M_P^2 \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}. \quad (3.31b)$$

Destaquemos que estos parámetros son adimensionales (en unidades naturales  $[\phi] = \text{energía}$ ). Los parámetros de slow-roll son muy útiles para cuantificar las predicciones inflacionarias; en particular,  $\epsilon_V$  mide la pendiente del potencial y  $\eta_V$  la curvatura. Además la fase inflacionaria termina cuando  $\epsilon_V$  y  $|\eta_V|$  se aproximan a la unidad. Notemos que las condiciones de slow-roll (3.29) implican en los parámetros (3.31) que  $\epsilon_V \ll 1$  y  $|\eta_V| \ll 1$ , durante inflación. Sin embargo, aunque estas condiciones son necesarias, no son suficientes para que la aproximación slow-roll sea válida, debido a que estas son condiciones sobre el potencial, no obstante son útiles para identificar donde es válida dicha aproximación [78].

Las condiciones de slow-roll también pueden expresarse en términos del parámetro de Hubble

$$\epsilon \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (3.32a)$$

$$\delta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}. \quad (3.32b)$$

En este caso la expansión acelerada ocurre si  $\epsilon < 1$  y la condición (3.29b) implica que  $|\delta| \ll 1$  durante inflación. Las relaciones (3.32) reciben el nombre de **parámetros slow-roll de Hubble** de tal forma que se diferencien de (3.31). Sobre todo tengamos cuidado puesto que en la aproximación de slow-roll los parámetros potenciales y de Hubble se relacionan mediante

$$\epsilon \approx \epsilon_V, \quad (3.33a)$$

$$\delta \approx \eta_V - \epsilon_V. \quad (3.33b)$$

También, cuando se toma el límite de *de Sitter*<sup>10</sup>, el cual corresponde a  $p_\phi \rightarrow -\rho_\phi$ , se tiene que  $\epsilon \rightarrow 0$ , y por lo tanto la condición (3.29a) se satisface. Además, los parámetros  $\epsilon$  y  $\epsilon_V$  nos dicen cuando termina la inflación. En particular

$$\epsilon(\phi_f) \equiv 1, \quad (3.34a)$$

$$\epsilon_V(\phi_f) \approx 1, \quad (3.34b)$$

siendo  $\phi_f$  el valor del campo escalar al final de inflación.

<sup>10</sup>El espacio de de Sitter describe un universo espacialmente plano y cuya dinámica está dominada por una constante cosmológica. Durante la inflación slow-roll el espacio-tiempo de fondo es aproximadamente de Sitter y cualquier desviación de la ecuación de estado (3.27) del límite exacto de de Sitter  $w = -1$  está dada por el parámetro  $\epsilon$  en (3.32a), puesto que por (3.28) tenemos  $\epsilon = \frac{3}{2}(w_\phi + 1)$ .



Notemos que la ecuación de movimiento del campo escalar (3.28a) es de segundo orden, por lo que acepta condiciones iniciales arbitrarias en  $\phi$  y  $\dot{\phi}$ . De esta manera, las condiciones de slow-roll no necesariamente se cumplen inicialmente. Sin embargo, la *solución slow-roll* de las ecuaciones (3.30a)-(3.30b), es un atractor de las ecuaciones más generales (3.28a)-(3.28b). Es decir, la solución de las ecuaciones completas evoluciona rápidamente hacia la solución slow-roll, siempre y cuando las condiciones iniciales estén dentro del rango de atracción, para que el atractor sea efectivo, esto es, que  $\phi$  debe encontrarse en la sección slow-roll del potencial ( $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ ).

### 3.5.3. *e*-folds

Para cuantificar la duración del periodo inflacionario que necesitamos, de tal forma que el problema del horizonte pueda resolverse, es útil introducir el **número de e-folds**  $N$  como<sup>11</sup> [11]

$$N(t) \equiv \ln\left(\frac{a(t_f)}{a(t)}\right) = \int_t^{t_f} H(t') dt' \approx \frac{1}{M_P^2} \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{V(\phi')}{\partial_{\phi} V(\phi')} d\phi', \quad (3.35)$$

donde el subíndice  $f$  etiqueta al tiempo final, el cual en nuestro contexto sera el final de inflación. En la última expresión en (3.35) se usaron las ecuaciones de slow-roll (3.30). En términos de los parámetros de slow-roll tenemos:

$$N(\phi) = \frac{1}{M_P} \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon}} \approx \frac{1}{M_P} \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_V}}. \quad (3.36)$$

La expresión para los *e*-folds hace referencia a que si conocemos la forma explícita de  $a(t)$ , es posible cuantificar que tanto se ha expandido el universo, desde un tiempo arbitrario  $t$  hasta  $t_f > t$ . De acuerdo con [11, 35, 114]:  $\ln\left(\frac{a_f}{a_i}\right) \approx 60$ , es decir, se requieren un mínimo de 60 *e*-folds para que la inflación resuelva los problemas de planitud y horizonte<sup>12</sup>.

### 3.5.4. Recalentamiento

La inflación asegura que la densidad de monopolos magnéticos sea insignificante, mientras que la inclusión de un cierto mecanismo llamado *recalentamiento* [77], asegura que no vivamos en un universo con una densidad de fotones insignificante. En este contexto el recalentamiento es el mecanismo mediante el cual la inflación se conecta con la evolución estándar de la teoría del Big Bang. Dicho de otro modo, el *recalentamiento* es el proceso mediante el cual la densidad de energía del campo escalar se convierte

<sup>11</sup>Los *e*-folds cuantifican el intervalo de tiempo en el que el espacio, que crece exponencialmente, aumenta por un factor de  $e$ .

<sup>12</sup>Destaquemos que 60 *e*-folds es el límite superior aproximado que asegura que la escala más grande observada hoy en día estuvo dentro del radio de Hubble durante la época inflacionaria. Por lo tanto, el número de *e*-folds necesarios para resolver el problema del horizonte depende de la escala de energía en la que se produce la inflación (cf. [114]).

nuevamente en materia convencional después del periodo inflacionario, regresando así a la teoría estándar del Big Bang, esto puesto que, una vez que se violan las condiciones de slow-roll, el campo escalar comienza a oscilar alrededor del mínimo del potencial, de esta forma, decayendo en materia convencional. Los detalles del recalentamiento (siempre que consideremos que este ocurre) no son importantes para nuestras consideraciones. Sin embargo cabe destacar que la teoría del recalentamiento se encuentra incompleta puesto que esta depende de la teoría fundamental de la física de partículas que va más allá del Modelo Estándar. Esta es una razón por la cual hasta el momento solo existen modelos de juguete que nos devuelven un universo que siga la teoría estándar del Big Bang (para mejores detalles ver por ejemplo [10, 72]).

Los detalles altamente inciertos del recalentamiento, no afectan las perturbaciones cosmológicas en las que estamos interesados, ya que están por fuera del horizonte al final de la inflación, y estas permanecen *congeladas* a lo largo de esta transición [35].

### 3.6. Inflación de Starobinsky

A manera ilustrativa tomemos el potencial<sup>13</sup>

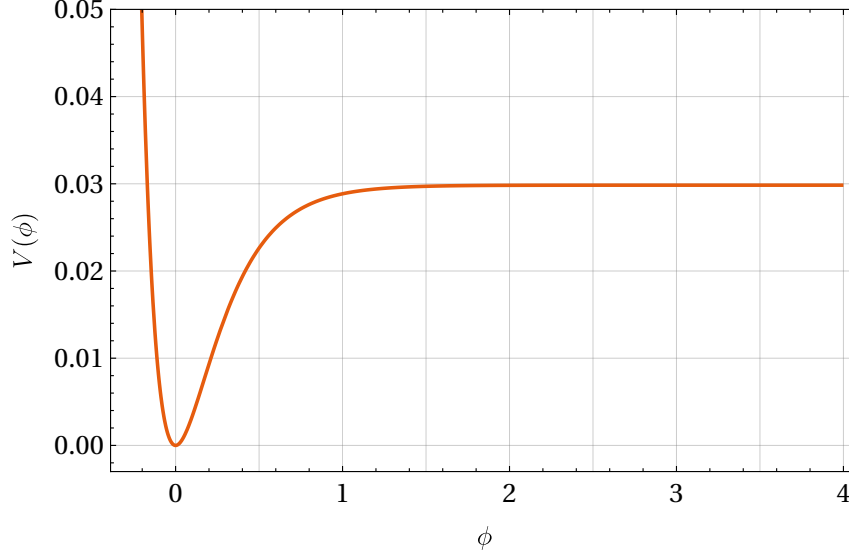
$$V(\phi) = \frac{3M^2}{4\kappa} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi}\right)^2, \quad (3.37)$$

donde  $M$  es una escala de energía y la cual por el momento será tomada como la unidad, de tal forma que este ejemplo solo sirve para ilustrar lo recopilado en esta sección y más adelante fijaremos bien los parámetros de tal forma que podamos comparar entre dos enfoques distintos. El perfil de  $V(\phi)$  con  $M = 1$  se muestra en la Figura 3.8.

Para verificar que a partir de un campo escalar mínimamente acoplado con el potencial dado por (3.37) se obtiene un periodo inflacionario se realiza la integración numérica de las ecuaciones (3.28a) y (3.28c), así como de la definición del parámetro de Hubble (2.8). En este caso la ecuación de Friedmann (3.28b) actúa como constricción hamiltoniana<sup>14</sup> y por lo tanto se cumple a todo tiempo y de la cual podemos calcular el error a cada paso de integración. En particular, a  $t_i$  dicha ecuación sirve para determinar los datos iniciales.

<sup>13</sup>Este proviene del modelo  $f(R) = R + \alpha R^2$  propuesto por Starobinsky en 1980 [115] (cf. Sección 5.2, ec. (5.25)). Este es uno de los modelos que mejor se ajusta a los datos observacionales del universo primitivo.

<sup>14</sup>En nuestro caso nos referimos simplemente a que la expresión no involucra segundas derivadas temporales del factor de escala ni del campo escalar, y en este sentido no es considerada una ecuación de evolución pero sí una constricción que se cumple a todo tiempo. En el formalismo ADM, es una ecuación en términos de la curvatura extrínseca que se extrae de las ecuaciones de Einstein.



**Figura 3.8:** Diagrama del potencial de Starobinsky dado por la ec. (3.37), con  $\kappa = 8\pi$  y  $M = 1$ . La inflación se lleva a cabo en la región cóncava del potencial, i.e. cuando  $V'' < 0$ .

Por simplicidad se introducen los parámetros con barra (inferior) adimensionales:

$$\underline{t} = H_i t, \quad (3.38a)$$

$$\underline{\phi} = \phi, \quad (3.38b)$$

$$\underline{H} = \frac{H}{H_i}, \quad (3.38c)$$

$$\underline{a} = \frac{a}{a_i}, \quad (3.38d)$$

$$\underline{V} = \frac{V}{H_i^2}, \quad (3.38e)$$

de tal forma que el sistema a resolver es:

$$\ddot{\underline{\phi}} = -3\underline{H}\dot{\underline{\phi}} - \partial_{\underline{\phi}}\underline{V}(\underline{\phi}), \quad (3.39a)$$

$$\dot{\underline{H}} = -\underline{H}^2 - \frac{\kappa}{3}(\dot{\underline{\phi}}^2 - \underline{V}(\underline{\phi})), \quad (3.39b)$$

$$\dot{\underline{a}} = \underline{a}\underline{H}, \quad (3.39c)$$

con restricción hamiltoniana

$$\underline{H}^2 - \frac{\kappa}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\underline{\phi}}^2 + \underline{V}(\underline{\phi}) \right) = 0. \quad (3.40)$$

Usando el método Runge-Kutta de 4º orden (RK4) con datos iniciales  $(\bar{\phi}_i, \dot{\bar{\phi}}_i, \bar{H}_i, \bar{a}_i) = (4, -0.423142, 1, 1)$ , elegidas de tal forma que (3.40) se cumpla de manera exacta al inicio de la integración, y donde  $H_i, a_i$  son los valores del parámetro de Hubble y el factor de escala al comienzo de la inflación.

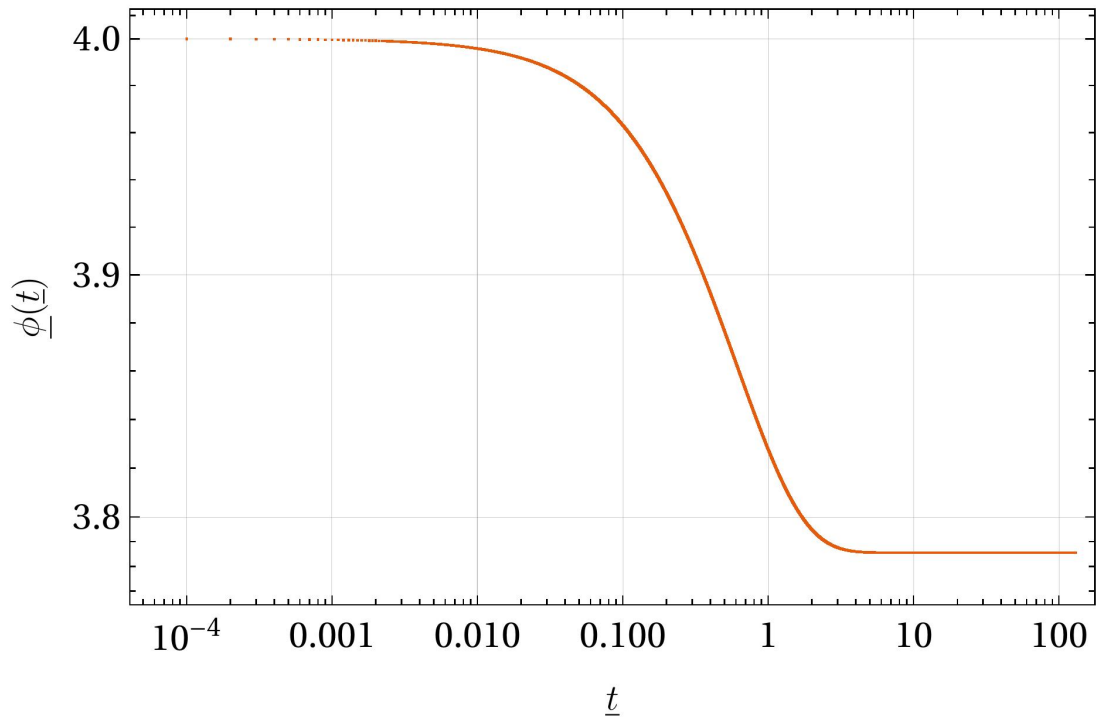


Figura 3.9: Solución obtenida para el campo escalar mediante el método RK4, con  $\phi(t=0) = 4$ .

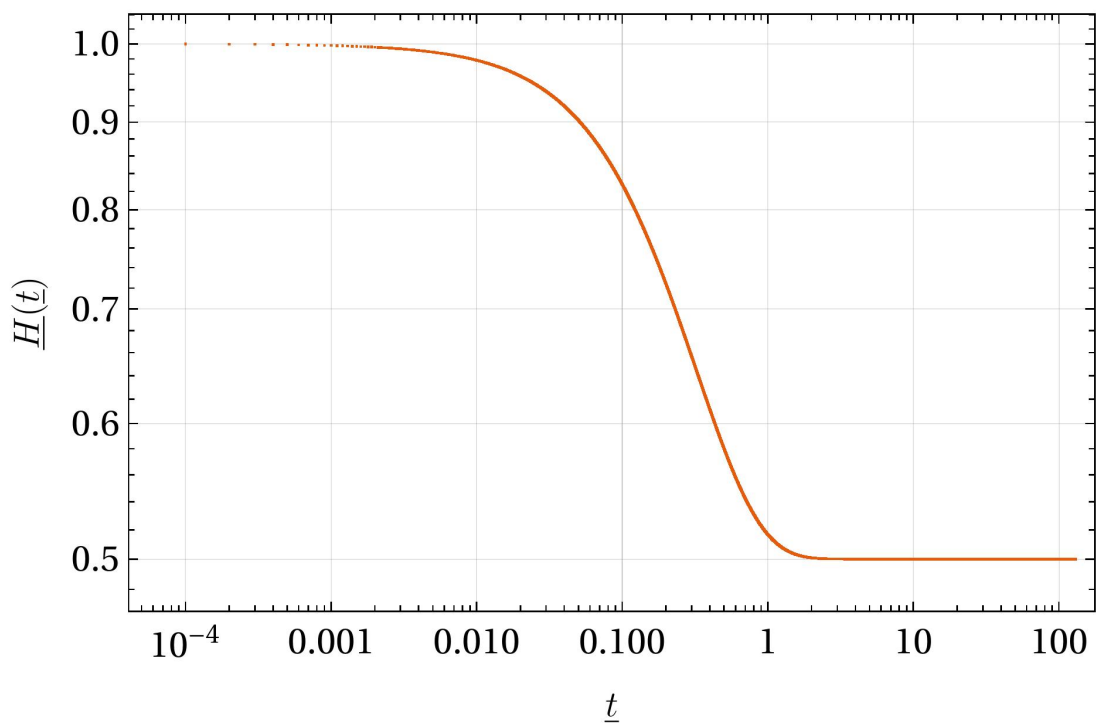
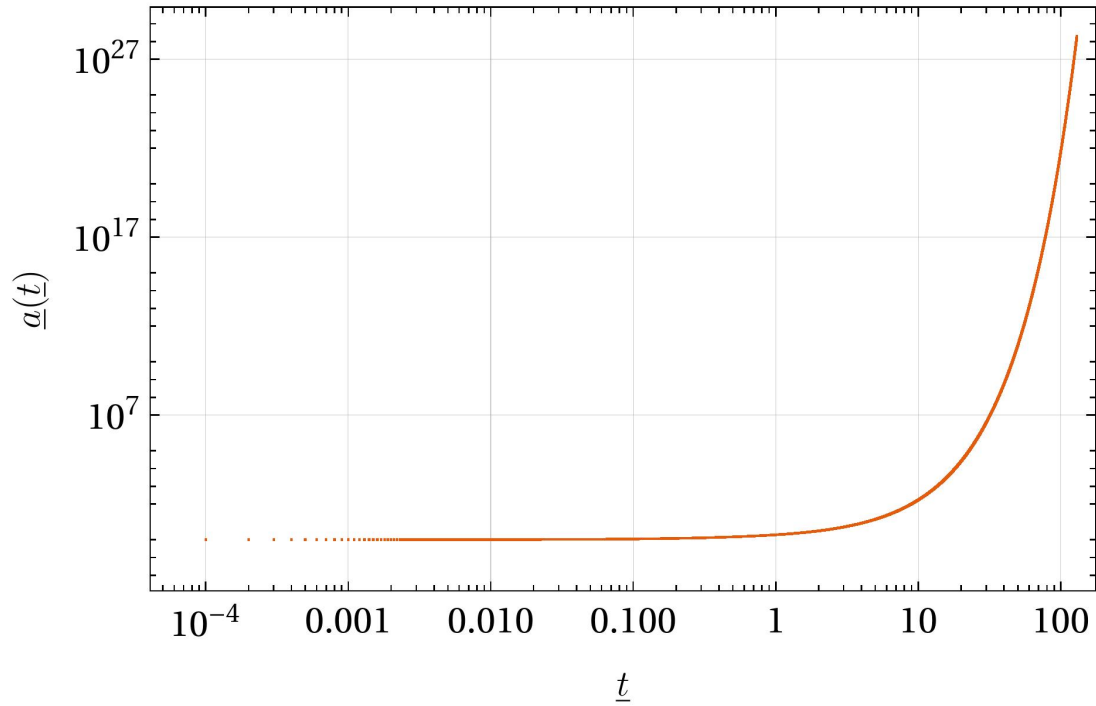
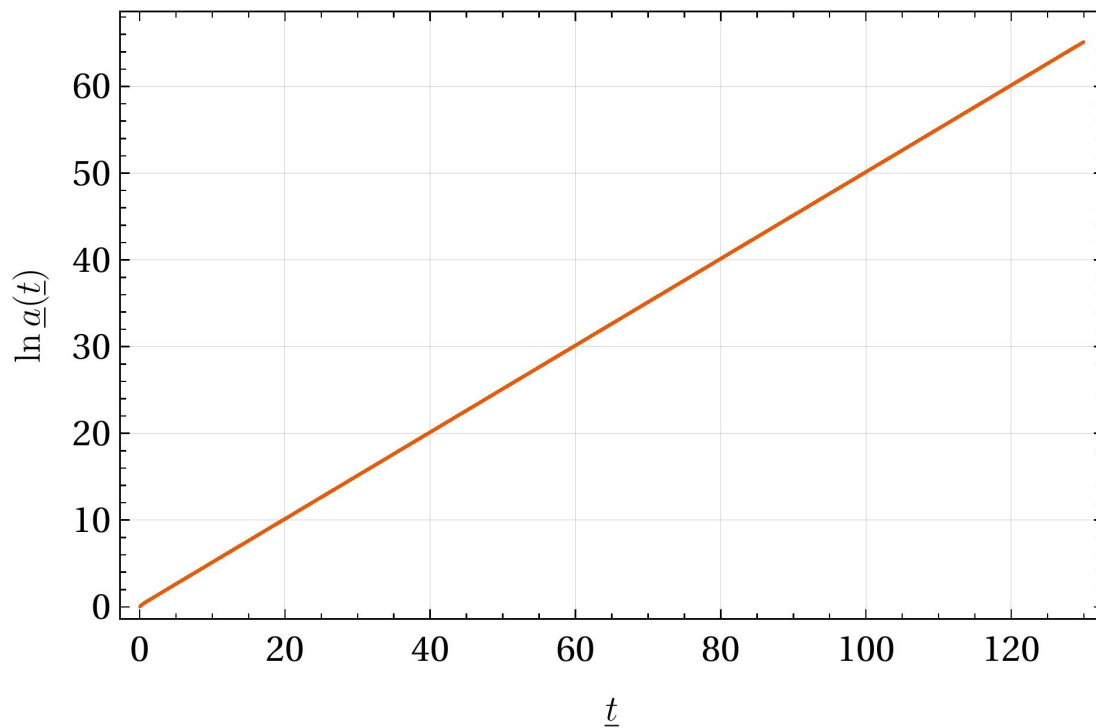


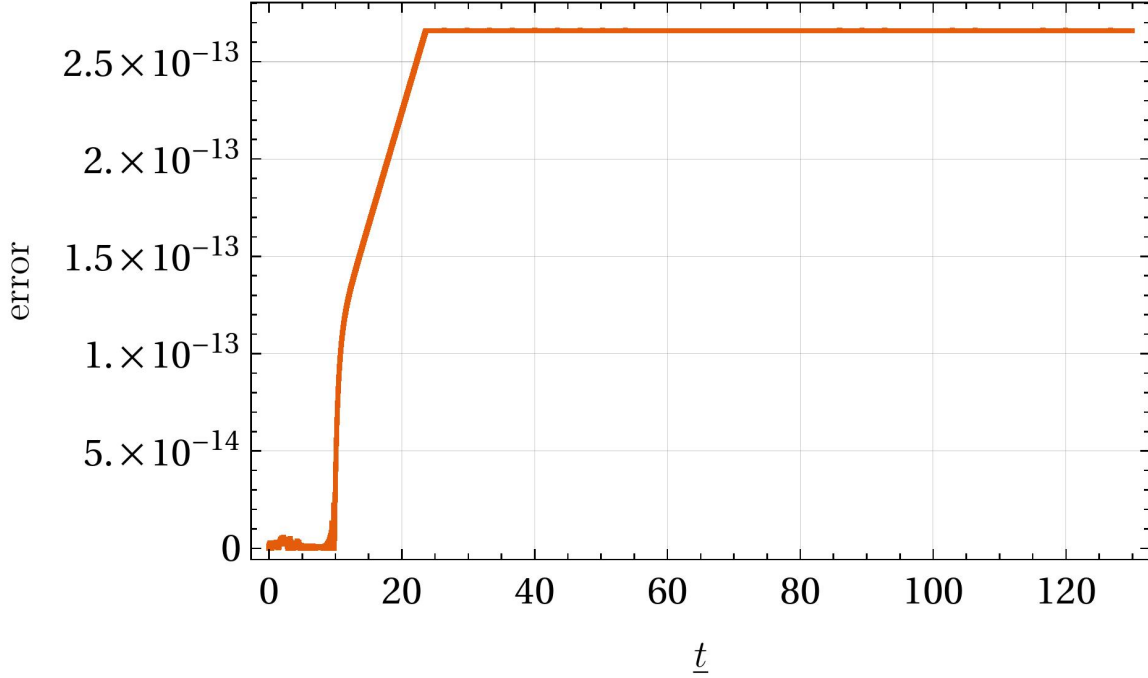
Figura 3.10: Solución obtenida para el parámetro de Hubble en escala logarítmica, mediante el método RK4, con  $H(t=0) = 1$ .



**Figura 3.11:** Solución obtenida para el factor de escala en escala logarítmica, mediante el método RK4, con  $\underline{a}(t=0) = 1$ .



**Figura 3.12:** Diagrama tomado a partir de la Fig. 3.11 para el  $\ln(a)$ .



**Figura 3.13:** Perfil del error numérico empleando (3.40) a todo tiempo de integración.

Con estos resultados es posible verificar que las condiciones de slow-roll se satisfacen mientras el periodo inflacionario se lleva a cabo, es decir

$$\frac{\dot{\phi}^2}{V(\phi)} \ll 1, \quad (3.41)$$

lo cual se verifica en la Figura 3.14; y para

$$\frac{|\ddot{\phi}|}{3H|\dot{\phi}|} \ll 1, \quad (3.42)$$

ver Figura 3.15. Notemos que alrededor de  $t \sim 10$  las condiciones de slow-roll se satisfacen. Con esto, es fácil verificar, con  $\bar{a}_i \approx 170$  y  $\bar{a}_f \approx 10^{28}$ , que  $\ln\left(\frac{a_f}{a_i}\right) \approx 60$  (cf. Figura 3.11), lo cual está alrededor del número mínimo de e-folds necesarios para coincidir con las observaciones.

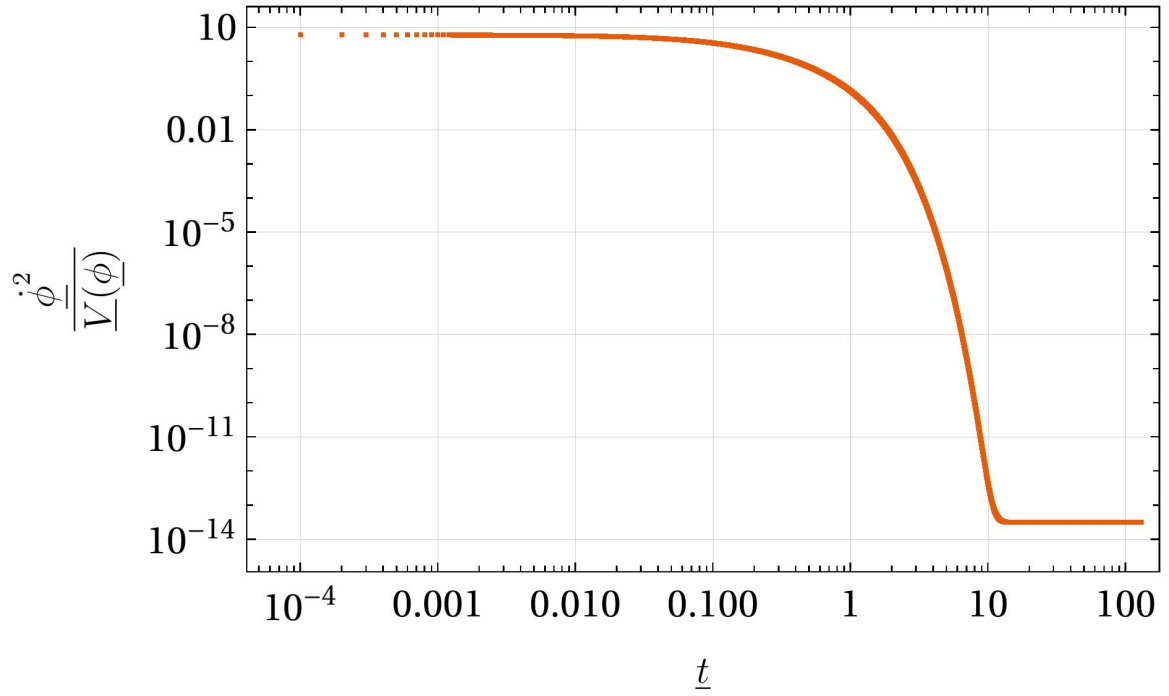


Figura 3.14: Diagrama que muestra que la condición (3.41) se satisface durante el periodo inflacionario.

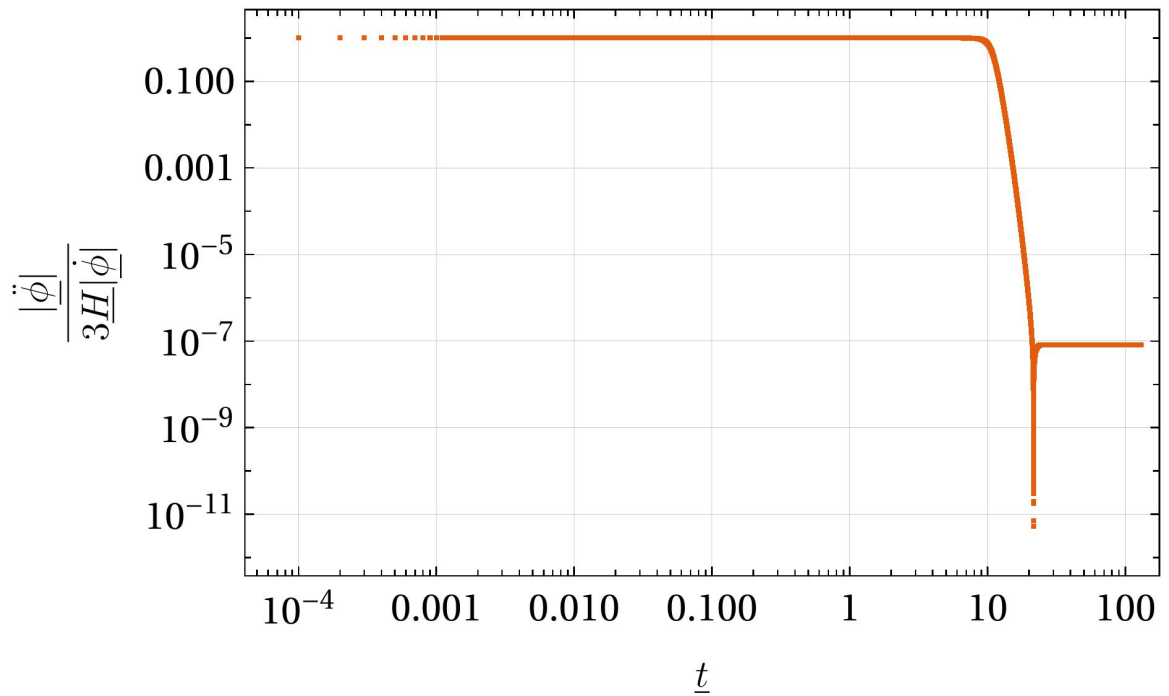


Figura 3.15: Diagrama que muestra que la condición (3.42) se satisface durante el periodo inflacionario.

### 3.7. Restricciones observacionales a la inflación

Dado que todo modelo inflacionario válido debe generar fluctuaciones del campo escalar las cuales se convierten en la *estructura a gran escala*<sup>15</sup> (LSS, por sus siglas en inglés) que observamos hoy en día, así como modos tensoriales los cuales, en algunos modelos, dan origen a un fondo de ondas gravitacionales, debemos tener una forma de restringir dichos modelos. A continuación recopilamos algunos parámetros que restringen a la inflación tal y como se reportan por la Colaboración Planck [101]. Estas observaciones verifican experimentalmente un conjunto de predicciones genéricas al escenario de inflación: las condiciones iniciales para la estructura son gaussianas, adiabáticas y casi invariantes de escala [11].

Puesto que por definición el parámetro de Hubble es casi constante durante inflación, las perturbaciones cuánticas generadas por modelos que sólo involucran un campo escalar son típicamente bien aproximados por la ley de potencias de las componentes escalares y tensoriales [43], es decir, los **espectros de potencias** escalar y tensorial,  $\mathcal{P}_s$  y  $\mathcal{P}_t$  respectivamente, se introducen como:

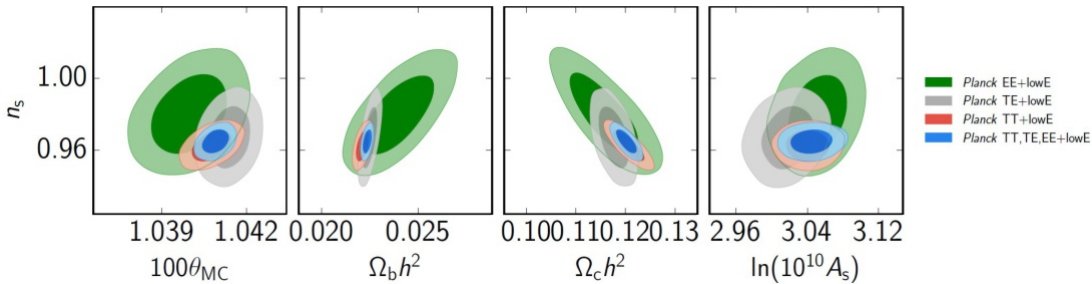
$$\ln \mathcal{P}_s(k) = \ln A_s + (n_s - 1) \ln \left( \frac{k}{k_{\text{pivote}}} \right) + \dots, \quad (3.43a)$$

$$\ln \mathcal{P}_t(k) = \ln A_t + n_t \ln \left( \frac{k}{k_{\text{pivote}}} \right) + \dots, \quad (3.43b)$$

donde  $k_{\text{pivote}}$  es conocida como la *escala pivote* [31, 100], y es la escala a la cual son determinados los observables;  $A_s$  y  $A_t$  son las **amplitudes escalar y tensorial**, respectivamente, las cuales se relacionan mediante la **razón tensor-escalar**  $r$  definida como

$$r \equiv \frac{A_t}{A_s}. \quad (3.44)$$

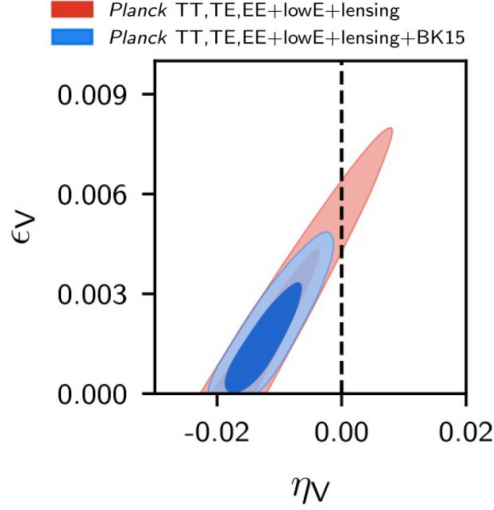
Más adelante veremos como calcular los espectros de potencias escalar  $\mathcal{P}_s$  y tensorial  $\mathcal{P}_t$  primordiales así como algunos de estos parámetros (cf. Secciones 6.4 y 6.5).



**Figura 3.16:** Niveles de confianza a 68 % y 95 % para el índice espectral  $n_s$  y los parámetros cosmológicos  $\theta_{\text{MC}}$  (aproximación al tamaño angular del horizonte del sonido en la última dispersión),  $\Omega_b$ ,  $\Omega_c$  y  $A_s$ . Tomada de Planck 2018 [101].

<sup>15</sup>Se refiere a como las galaxias y materia se distribuyen en escalas mucho más grandes que galaxias individuales o agrupaciones de galaxias.





**Figura 3.17:** Niveles de confianza a 68% y 95% para los parámetros de slow-roll introducidos en las ecuaciones (3.31). La línea punteada divide los potenciales cóncavos (izquierda) y convexos (derecha). Tomada de Planck 2018 [101].

De esta forma se definen los **índices espectrales escalar y tensorial** como

$$n_s - 1 \equiv \left. \frac{d \ln \mathcal{P}_s(k)}{d \ln k} \right|_{k=k_{\text{pivote}}}, \quad (3.45a)$$

$$n_t \equiv \left. \frac{d \ln \mathcal{P}_t(k)}{d \ln k} \right|_{k=k_{\text{pivote}}}, \quad (3.45b)$$

siendo el  $-1$  en el lado izquierdo de la ecuación (3.45a) una convención. Los índices espectrales (3.45) describen como las fluctuaciones varían con la escala, y de esta manera cuantifican que tanto se desvían del caso *invariante de escala*. De hecho, diferentes modelos inflacionarios predicen diferentes índices espectrales. Más adelante elaboraremos sobre este punto, cuando revisemos las perturbaciones cosmológicas en el Capítulo 6.

Los datos de temperatura y polarización<sup>16</sup> de Planck 2018 [101] determinan que el índice espectral de las perturbaciones escalares es (ver Figura 3.16)

$$n_s = 0.9649 \pm 0.0044, \quad 68 \% \text{ CL}. \quad (3.46)$$

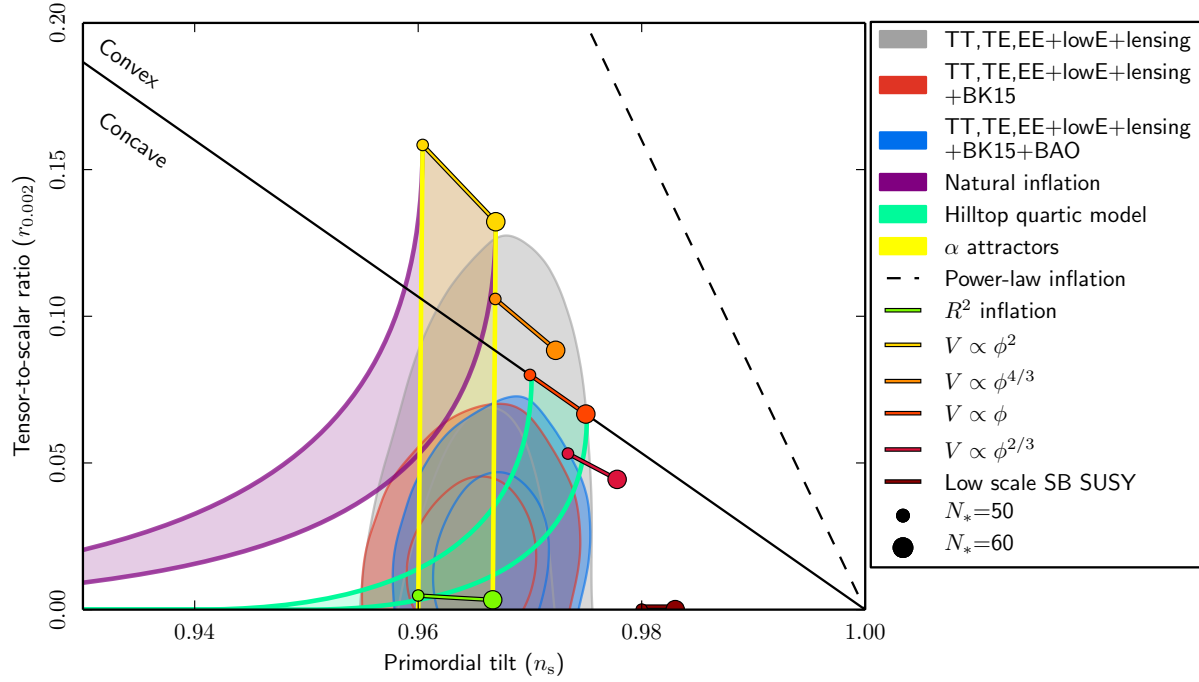
Además de que los resultados (temperatura+polarización+lentes gravitacionales<sup>17</sup>) son consistentes con un *running* del índice espectral nulo, es decir,

$$\frac{dn_s}{d \ln k} = -0.0045 \pm 0.0067, \quad 68 \% \text{ CL}. \quad (3.47)$$

También, el límite superior de Planck 2018 a 95% en los niveles de confianza para la razón tensor-escalar,  $r_{0.002} < 0.10$ , se ajustan aún mejor al combinarse con los datos de

<sup>16</sup>Sobre la terminología de las figuras: TT representa el espectro de potencia de temperatura, TE es el espectro cruzado de temperatura y polarización y EE es el espectro de potencia de polarización. Además lowE involucra datos de polarización en multipolos bajos ( $2 \leq \ell \leq 29$ ) [100].

<sup>17</sup>En este caso, *lensing* hace referencia a la reconstrucción del espectro de potencias del CMB que ha sido distorsionado por lentes gravitacionales débiles.



**Figura 3.18:** Niveles de confianza a 68 % y 95 % para el índice espectral escalar  $n_s$  y la razón tensor-escalar  $r$  en  $k = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$  de Planck 2018 por sí solo y en combinación con los datos de BK15 y BK15+BAO, en comparación con las predicciones teóricas de modelos inflacionarios selectos. En este caso se asume que  $\frac{dn_s}{d \ln k} = 0$ . Tomada de Planck 2018 [101].

BICEP2/Keck Array<sup>18</sup> (BK15) para obtener el límite superior [101]

$$r_{0.002} < 0.056, \quad 95 \% \text{ CL.} \quad (3.48)$$

En el marco de los modelos inflacionarios de un solo campo escalar en la relatividad general, estos resultados implican que las predicciones de los modelos de slow-roll con un potencial cóncavo, i.e.  $V''(\phi) < 0$  (ver Figura 3.8), se ven favorecidas cada vez más por las observaciones (ver Figura 3.18). Además Planck se basa en dos métodos diferentes para reconstruir el potencial del campo escalar, sin encontrar evidencia de dinámicas más allá del slow-roll [101].

Por último la Figura 3.18 muestra las cotas observacionales entre el índice espectral  $n_s$  y la razón tensor-escalar  $r$ , a primer orden en la aproximación slow-roll para algunos modelos inflacionarios. Estas predicciones son calculadas para la escala de referencia  $k_{\text{pivote}} = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ , e incluyen una incertidumbre en el número de  $e$ -folds de  $50 < N_* < 60$  y además se asume que  $\frac{dn_s}{d \ln k} = 0$ .

<sup>18</sup>BICEP y Keck Array son una serie de experimentos del CMB, con el objetivo de medir la polarización del CMB. Donde BK15 etiqueta a las observaciones correspondientes a la temporada de 2015.



# Capítulo 4

## Teorías $f(R)$

Ha pasado ya más de un siglo desde la introducción de la relatividad general, y como es bien conocido, ha sido ampliamente aceptada como una teoría fundamental que describe ciertas propiedades físicas del espacio-tiempo. Por ejemplo, como se estudió en el Capítulo 2, en un espacio-tiempo homogéneo e isotrópico, las ecuaciones de campo de Einstein dan lugar a las ecuaciones de Friedmann, las cuales describen la evolución del universo (cf. Sección 2.2.3). También sabemos que la cosmología estándar del Big Bang basada en las épocas dominadas por radiación y por materia está descrita dentro del marco de la relatividad general y de hecho corresponde al modelo  $\Lambda$ CDM (cf. Sección 2.4; para un análisis detallado cf. textos clásicos como Dodelson & Schmidt [35]).

Pero ¿Podría ser que nuestra descripción de la interacción gravitacional a escalas relevantes (cosmológicamente hablando) no es suficientemente adecuada? ¿Deberíamos considerar modificar nuestra teoría de la gravitación?, y si es así, ¿esto ayudaría a dilucidar los componentes de energía y materia oscura así como responder los enigmas cosmológicos?

En este sentido, cuestionar la teoría de la gravitación tiene sus méritos: nos ayuda a obtener una comprensión más profunda de las hipótesis involucradas, tiene altas posibilidades de conducir a nueva física y además *ha funcionado* en el pasado<sup>1</sup>.

En el presente Capítulo revisaremos las ideas principales de las teorías  $f(R)$ , así como la forma que toma la teoría cosmológica en estas. También se estudian algunos modelos  $f(R)$  específicos que han sido ampliamente usados en el contexto cosmológico (no necesariamente dentro del marco inflacionario) los cuales serán de ayuda para entender las ideas principales de estas teorías, estas ideas son recopiladas de las referencias [32, 65, 113].

---

<sup>1</sup>Inicialmente la precesión de la órbita de Mercurio se atribuyó a algún planeta no observado (*oscuro*) que orbitaba dentro de la órbita de Mercurio, lo que resultó una transición de la Gravedad Newtoniana a la relatividad general.

## 4.1. Motivación

Desde sus inicios se ha planteado la posibilidad de que la relatividad general no es única entre las teorías gravitacionales (ver [37, 130]). Aunque inicialmente modificaciones a la RG fueron motivadas por la curiosidad, puesto que complicar la acción de Einstein-Hilbert y, en consecuencia, las ecuaciones de campo sin una motivación teórica o experimental aparente no era muy atractivo. Fue hasta la década de los 60 que esta idea de modificar la acción comenzó a ser atractiva. Por ejemplo, la GR es no-renormalizable<sup>2</sup> y por lo tanto no se puede cuantizar de manera convencional. En la década de los 70 se demostró que acciones de orden superior son renormalizables (pero no unitarias) [118].

Este tipo de consideraciones incentivaron el interés en teorías gravitacionales de orden superior, es decir, modificaciones de la acción de Einstein-Hilbert que incluían términos no-lineales del escalar de Ricci (por ejemplo  $R + \alpha R^2$ ) (cf. [109]). Sin embargo, se consideró que la relevancia de estos términos en la acción estaba restringida a regímenes de gravedad muy fuerte y por lo tanto se esperaba que fueran fuertemente suprimidos por pequeños acoplamientos, como se esperaba cuando se tienen en cuenta consideraciones simples de la teoría efectiva de campos [113].

Por lo tanto, las correcciones a la RG se consideraron importantes solo en escalas cercanas a la escala de Planck, y en consecuencia, en el universo temprano, o bien, cerca de singularidades de agujeros negros (ver [17, 19, 115]). Sin embargo, no se esperaba que tales correcciones pudieran afectar la fenomenología gravitacional a bajas energías, y consecuentemente a grandes escalas como por ejemplo, el universo tardío.

El rápido desarrollo de la cosmología observacional que comenzó en la década de los 90, muestra que el universo ha pasado por dos fases de aceleración cósmica: la primera es la inflación (cf. Capítulo 3) y la segunda ha comenzado después del dominio de la materia ( $z \sim 0.3$ ) y puede explicarse más fácilmente recurriendo a la existencia de una constante cosmológica  $\Lambda$ , cuyo origen desconocido da lugar a esta aceleración cósmica tardía, la cual recibe el nombre de *energía oscura* [57]. La existencia de energía oscura ha sido confirmada por una serie de observaciones astronómicas basadas en supernovas de tipo Ia (SNIa). Como se ha enfatizado esta constante cosmológica, junto con la introducción de la materia oscura<sup>3</sup>, han originado lo que hoy se conoce como el modelo  $\Lambda$ CDM, el cual explica la mayoría de los detalles del CMB, en el marco de la RG, así como otras características importantes del universo a gran escala (cf. Sección 2.4; para una revisión completa, véase [126]).

Sin embargo, a pesar de la simplicidad y el éxito de este modelo, se han presentado argumentos teóricos en contra de un modelo tan simple del universo. Por ejemplo, en lo que se refiere a la hipótesis de la materia oscura, una de las principales críticas es que su naturaleza (es decir, sus propiedades cuánticas y clásicas) aún no se entiende del

---

<sup>2</sup>La *renormalización* es la rama de la Teoría Cuántica de Campos empleada para tratar (usualmente, pero no siempre) con cantidades infinitamente grandes, las cuales surgen como respuesta de los efectos de auto-interacciones (e.g. ver [111]).

<sup>3</sup>Datos obtenidos de distintas fuentes, como el CMB y estudios con supernovas, parecen indicar que la energía del universo está constituida por 5 % de materia bariónica, 26 % de materia oscura y 69 % de energía oscura (cf. Sección 2.4 y [100, 104]).

todo, y solo tenemos su abundancia promedio y el hecho de que debe de ser fría [35]. Además, el modelo  $\Lambda$ CDM es agobiado por los *problemas de la constante cosmológica* (cf. [14, 24, 127]), i.e., el *problema de la magnitud*, de acuerdo al cual el valor observado de la constante cosmológica es varios ordenes de magnitud más pequeña que la atribuida a la energía de vacío, y el *problema de la coincidencia*, el cual consiste en explicar la ocurrencia relativamente reciente (en los últimos miles de millones de años) de la (casi) igualdad entre las densidades de energía de la energía oscura y de la materia oscura, a pesar de que deben haber evolucionado de manera diferente para que las estructuras cósmicas se hayan formado en el universo temprano, es decir, la energía oscura debe haber sido un componente insignificante en el pasado lejano [14].

## 4.2. Introducción a las teorías $f(R)$

Entre las teorías modificadas de la gravitación, están las **teorías  $f(R)$**  [64]; donde una función, a priori arbitraria, del escalar de Ricci  $R$  sustituye a  $f(R) = R - 2\Lambda$  en la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica que reproduce las ecuaciones de campo de Einstein.

Este tipo de teorías modificada inicialmente se concibió con la finalidad de crear un efecto acelerado tardío sin la necesidad de emplear una constante cosmológica o como modelo inflacionario sin un campo escalar adicional [22, 26]. No obstante se ha encontrado evidencia acumulativa, tanto teórica como observacional, contra la mayoría de los modelos  $f(R)$  propuestos inicialmente para substituir a  $\Lambda$ , principalmente presentando inestabilidades o bien sufren la ausencia de una etapa de dominio de materia [32]. Sin embargo, se han propuesto nuevos modelos para superar las dificultades iniciales, algunos mejor motivados que otros pero ninguno ha introducido un nuevo principio fundamental que puede utilizarse como punto de partida. Por el contrario se han construido a base de ensayo y error. Por ejemplo, suelen exigirse condiciones matemáticas y físicas generales para evitar ciertas patologías en los modelos. Por ejemplo, las condiciones  $f_{RR} > 0$  y  $f_R > 0$  (donde  $f_R \equiv \frac{\partial f}{\partial R}$ ,  $f_{RR} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}$ ) son necesarias por consideraciones de estabilidad y para asegurar una constante gravitacional efectiva definida positiva, respectivamente [65].

La tendencia general actual es que no hay modelo capaz de explicar la mayoría de las observaciones actuales, sólo ciertos aspectos de ellas. Es decir, la mayoría de los modelos  $f(R)$  fallan fuertemente cuando se presentan como modelos de energía o materia oscura y también al tener en cuenta las pruebas del sistema solar [65]. En cuyo caso se toman las teorías  $f(R)$  simplemente como un modelo para explicar la expansión acelerada del universo así como la introducción de un componente de materia oscura de la misma manera que en el modelo  $\Lambda$ CDM.

En cuanto a las restricciones cosmológicas a estas teorías, se han ideado criterios de aplicabilidad bastante generales que permiten descartar muchos de los modelos  $f(R)$  propuestos. Por ejemplo, los trabajos de Amendola et al. [3, 4], muestran que una gran clase de modelos que producen una expansión acelerada en tiempos tardíos, no logran generar una época correcta dominada por materia (el factor de escala se comporta como radiación) o viceversa. De hecho, cuando se ven desde el pasado hasta el presente,

muchos de los modelos revisados por Amendola et al. pasan de la época dominada por radiación (época de desaceleración) a una época efectiva de energía oscura (época de aceleración) con una época de dominación de materia muy corta o ni siquiera existente.

Finalmente cabe señalar que existen controversias con respecto al tratamiento de estas teorías al utilizar el enfoque de las *teorías escalares-tensoriales* en los marcos de Einstein y Jordan, como se argumenta en [65]. Por consiguiente, es aconsejable abandonar ese enfoque y tratar los modelos  $f(R)$  sin realizar la transformación a cualquier marco de la teoría escalar-tensorial.

### 4.2.1. Ecuaciones de movimiento

El punto de partida de estas teorías modificadas se basa en generalizar la parte gravitacional de la acción de Einstein-Hilbert

$$S_{\text{grav}}[g_{ab}] = \int \frac{d^4x}{2\kappa} \sqrt{-g} R, \quad (4.1)$$

donde<sup>4</sup>  $\kappa \equiv 8\pi G$ , y considerar la acción

$$S[g_{ab}, \psi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{f(R)}{2\kappa} + \mathcal{L}_M[g_{ab}, \psi] \right], \quad (4.2)$$

siendo  $f(R)$  una función aún arbitraria<sup>5</sup> del escalar de Ricci  $R$ . El primer término corresponde a la acción de gravedad modificada, mientras que el segundo es la acción usual para la materia, donde  $\psi$  representa esquemáticamente a los campos de materia (incluyendo tanto la materia oscura como la visible).

Las ecuaciones de campo se obtienen al variar la acción (4.2) con respecto a  $g_{ab}$  (formalismo métrico<sup>6</sup>) obteniendo (cf. Sección C.1)

$$f_R R_{ab} - \frac{1}{2} f g_{ab} - (\nabla_a \nabla_b - g_{ab} \square) f_R = \kappa T_{ab}, \quad (4.3)$$

donde se define  $f_R \equiv \frac{df}{dR}$ ,  $f_{RR} \equiv \frac{d^2f}{dR^2}$  y así sucesivamente, además el D'Alembertiano covariante se introduce como  $\square = g^{ab} \nabla_a \nabla_b$  y  $T_{ab}$  es el tensor energía-momento, que surge de la parte de la acción de materia en (4.2), definido de la manera usual (e.g. [125]), es decir

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{ab}}. \quad (4.4)$$

<sup>4</sup>En unidades del SI  $\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}$ .

<sup>5</sup>Cabe destacar que algunos textos consideran la acción modificada como  $S = \int \frac{d^4x}{2\kappa} \sqrt{-g} (R + \tilde{f}(R))$ , siendo  $\tilde{f}(R)$  una función arbitraria que engloba el distanciamiento con la RG. En el presente texto nos apegaremos a la forma (4.2).

<sup>6</sup>Existen al menos dos formalismos variacionales que se pueden aplicar a la acción de Einstein-Hilbert de tal forma que reproducen las ecuaciones de campo de Einstein: la variación estándar de la métrica y la variación de Palatini en donde, tanto la métrica como la conexión, son variables independientes. Sin embargo estos formalismos aplicados a acciones más generales no necesariamente conducen a las mismas ecuaciones de movimiento (ver por ejemplo [16]).

Empleando la definición del tensor de Einstein  $G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$  y desarrollando las derivadas covariantes, tenemos que  $\nabla_a f = \frac{df}{dR} \nabla_a R \equiv f_R \nabla_a R$ , y entonces se puede expresar la ecuación (4.3) de la siguiente forma

$$f_R G_{ab} - f_{RR} \nabla_a \nabla_b R - f_{RRR} (\nabla_a R) (\nabla_b R) + g_{ab} \left( \frac{1}{2} (f_R R - f) + f_{RR} \square R + f_{RRR} (\nabla R)^2 \right) = \kappa T_{ab}. \quad (4.5)$$

Tomando la traza de (4.5) obtenemos (siempre y cuando  $f_{RR} \neq 0$ )

$$\square R = \frac{1}{3f_{RR}} \left( 2f - f_R R - 3f_{RRR} (\nabla R)^2 + \kappa T \right). \quad (4.6)$$

Finalmente, usando (4.6) en (4.5) obtenemos

$$G_{ab} = \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR} \nabla_a \nabla_b R + f_{RRR} (\nabla_a R) (\nabla_b R) - \frac{g_{ab}}{6} (f_R R + f + 2\kappa T) + \kappa T_{ab} \right]. \quad (4.7)$$

Las ecuaciones (4.6) y (4.7) son las ecuaciones básicas para teorías  $f(R)$  de gravitación para tratar en toda aplicación en lugar de transformarlas a las teorías escalar-tensorial [64]. De estas notamos el carácter de cuarto orden de la teoría (con respecto a la métrica), sin embargo, un punto importante será promover a  $R$  como una variable independiente y resolver el sistema de ecuaciones (4.6)-(4.7) como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas de segundo orden en las variables  $g_{ab}$  y  $R$ . Cabe destacar que se deben considerar funciones  $f(R)$  monótonamente crecientes y convexas (i.e.  $f_R, f_{RR} > 0$ ; como mencionamos antes por cuestiones de estabilidad y/o problemas con la constante gravitacional efectiva) de tal forma de evitar posibles divergencias en las ecuaciones de campo.

Bajo este enfoque, las condiciones iniciales en  $R$  y  $\dot{R}$  no son arbitrarias, si no que están sujetas a las constricciones (modificadas) hamiltoniana y de momento, lo cual se hace evidente cuando se formula la teoría como un problema de valores iniciales. En el caso que nos concierne del espacio-tiempo de FRW, lo anterior se verá reflejado en que los valores iniciales para  $R$  y  $\dot{R}$  deben de satisfacer el equivalente de la ecuación de Friedmann (ver Sección 4.4), la cual equivale a la restricción hamiltoniana modificada. La restricción de momento se satisface trivialmente en este caso.

Por otro lado, una propiedad importante es que tanto el tensor de energía-momento de materia (ec. (4.4)) como el *tensor energía-momento efectivo*, definido como el lado derecho de la ecuación (4.7), i.e.

$$\kappa \mathcal{T}_{ab}^{(\text{eff})} \equiv \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR} \nabla_a \nabla_b R + f_{RRR} (\nabla_a R) (\nabla_b R) - \frac{g_{ab}}{6} (f_R R + f + 2\kappa T) + \kappa T_{ab} \right], \quad (4.8)$$

se conservan. Para demostrar que el tensor energía-momento asociado a la materia se conserva, con algunos cálculos, se puede verificar que el lado izquierdo de la divergencia de la ecuación (4.3) se anula (ver Apéndice A de la referencia [27] para más detalles). Para  $\nabla_a \mathcal{T}^{(\text{eff}) ab} = 0$  es directo de la ecuación (4.7) puesto que  $\nabla_a G^{ab} = 0$ .



Notemos de la ecuación (4.7) que recuperamos RG con una constante cosmológica  $\Lambda$  si tomamos  $f(R) = R - 2\Lambda$ . En cuyo caso  $f_R = 1$  y cero en sus derivadas de orden superior; además la traza del tensor de energía-momento es  $\kappa T = -R + 4\Lambda$ , con lo cual el lado derecho de (4.7) se reduce a  $\Lambda g_{ab} + \kappa T^{ab}$  como esperamos. Entonces, las teorías  $f(R)$  contienen al modelo  $\Lambda$ CDM como un caso particular.

Finalmente, destaquemos que es posible definir un *potencial* con la forma  $V(R) = -\frac{1}{3}f(R)R + \int^R f(x)dx$ , de tal forma que  $V_R = \frac{dV}{dR} \equiv \frac{1}{3}(2f - f_R R)$ . Si los términos de materia son pequeños o nulos, la ecuación (4.6) admite una solución  $R = R_1 = \text{cte}$ , i.e. el espacio-tiempo es maximalmente simétrico y además  $R_1$  es un punto crítico del potencial  $V(R)$ . En cuyo caso tenemos que  $G_{ab} = -\frac{1}{4}R_1 g_{ab}$ , lo cual *imita* una constante cosmológica en la actualidad, siendo esta una de las propiedades más importantes de las teorías  $f(R)$ , i.e.,  $G_{ab} = -\Lambda_{\text{eff}} g_{ab}$ , donde  $\Lambda_{\text{eff}} \equiv \frac{R_1}{4}$ . Esta solución, con escalar de Ricci constante, es justamente la solución de de Sitter, la cual coincide con una solución cosmológica que representa el universo observado [64]. Resumiendo lo anterior,  $f(R)$  es capaz de imitar una constante cosmológica, siempre que se encuentren soluciones en donde los términos de materia sean despreciables, e.g. asintóticamente en el tiempo o el espacio, y además el escalar de Ricci se acerca a un máximo o a un mínimo (descartando los puntos de inflexión, i.e.  $f_{RR}(R_1) \neq 0$ ) del *potencial*  $V(R)$ .

### 4.3. Tensor efectivo de la energía oscura geométrica

Usualmente es conveniente escribir las ecuaciones de campo de las teorías alternativas de tal forma que se asemejen a las ecuaciones de campo de Einstein, con un tensor de energía-momento efectivo, como el introducido en (4.8), el cual contenga las contribuciones de materia ordinaria y las debidas a las modificaciones de la teoría.

En el caso cosmológico, este reordenamiento suele ser útil cuando se trata de identificar las contribuciones en el tensor de energía-momento efectivo, de tal forma que representen una cierta contribución de *energía oscura geométrica*<sup>7</sup>. Una de sus principales ventajas es que se puede definir una ecuación de estado asociada a la energía oscura y compararla con el modelo  $\Lambda$ CDM. El único inconveniente es que no hay una convención para realizar la separación de los términos de materia y los de energía oscura geométrica.

Aunque en lo que concierne al trabajo realizado en el resto del texto no será fundamental, es útil tener presente que no existe una convención, a la fecha, de introducir el tensor energía-momento asociado a esta energía oscura (geométrica). Presentamos cuatro formas inequivalentes de definir el tensor de energía-momento asociado a la energía oscura geométrica y en consecuencia cuatro formas inequivalentes de introducir su ecuación de estado, tal y como se recopilan en la Ref. [65]:

1. En este primer caso se elige el tensor de energía-momento de la energía oscura geométrica como  $T_{ab}^X := \mathcal{T}_{ab} - T_{ab}$ . Bajo esta definición es directo que  $T_{ab}^X$  se conserva.

<sup>7</sup>Geométrica en el sentido de que siempre es posible expresar este tensor de energía-momento efectivo en términos de cantidades puramente geométricas. Para nuestro caso, es conveniente dejar la contribución del tensor energía-momento de la materia pero recordando que  $G_{ab} = \kappa \mathcal{T}_{ab}$ .

Entonces

$$\kappa T_{ab}^X := \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR} \nabla_a \nabla_b R + f_{RRR} (\nabla_a R) (\nabla_b R) - \frac{g_{ab}}{6} (R f_R + f + 2\kappa T) + \kappa T_{ab} (1 - f_R) \right]. \quad (4.9)$$

Aunque parece extraño que esta definición contenga al tensor de energía-momento correspondiente a la materia podemos hacer uso de  $G_{ab} = \kappa \mathcal{T}_{ab} = \kappa (T_{ab}^X + T_{ab})$ , para expresar  $T_{ab}^X$  en términos de cantidades puramente geométricas. Por el momento nos quedamos con la forma dada en (4.9). Para el caso de la RG,  $f(R) = R$ , tenemos que  $\mathcal{T}_{ab} = T_{ab}$ , y por lo tanto  $T_{ab}^X \equiv 0$ . También, para  $f(R) = R - 2\Lambda$  obtenemos que  $\kappa T_{ab}^X = -\Lambda g_{ab}$ .

2. En este caso escribimos el tensor de energía-momento de la energía oscura geométrica como la combinación lineal particular  $T_{ab}^{X,II}(A) := A \mathcal{T}_{ab} - T_{ab}$ , donde  $A$  es una constante. Nuevamente es directo ver que  $T_{ab}^{X,II}$  se conserva. De esta manera

$$\kappa T_{ab}^{X,II} := \frac{A}{f_R} \left[ f_{RR} \nabla_a \nabla_b R + f_{RRR} (\nabla_a R) (\nabla_b R) - \frac{g_{ab}}{6} (R f_R + f + 2\kappa T) + \kappa T_{ab} \left( 1 - \frac{f_R}{A} \right) \right]. \quad (4.10)$$

Notemos que  $T_{ab}^{X,II} = T_{ab}^X$  si y solo si  $A = 1$ . Puesto que en general  $A \neq 1$ , las ecuaciones de estado de las prescripciones 1 y 2 no son equivalentes. De hecho, la ecuación de estado de esta prescripción es divergente en ciertos casos debido a que en la cosmología de FRW la densidad de energía asociada a  $\kappa T_{ab}^{X,II}$  se anula en algún corrimiento al rojo (cf. [65, 117]).

3. En este caso el tensor de energía-momento surge de (4.7) simplemente al identificar

$$\kappa T_{ab}^{X,III} := f_{RR} \nabla_a \nabla_b R + f_{RRR} (\nabla_a R) (\nabla_b R) - \frac{g_{ab}}{6} (R f_R + f + 2\kappa T), \quad (4.11)$$

de tal forma que la ecuación (4.7) se reescribe como  $G_{ab} = \frac{\kappa}{f_R} (T_{ab}^{X,III} + T_{ab})$ .

Esta prescripción tiene la molesta propiedad de que  $T_{ab}^{X,III}$  no necesariamente se conserva, por el simple hecho de tener el factor  $f_R^{-1}$  al frente.

4. Por último, se define  $T_{ab}^{X,IV} := \frac{1}{f_R} T_{ab}^{X,III}$ , de tal forma que  $G_{ab} = \kappa T_{ab}^{X,IV} + \frac{\kappa}{f_R} T_{ab}$ . Esto es

$$\kappa T_{ab}^{X,IV} := \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR} \nabla_a \nabla_b R + f_{RRR} (\nabla_a R) (\nabla_b R) - \frac{g_{ab}}{6} (R f_R + f + 2\kappa T) \right]. \quad (4.12)$$

De igual manera a la prescripción III,  $T_{ab}^{X,IV}$  no se conserva por el factor  $f_R^{-1}$  que acompaña a  $T_{ab}$ . Sin embargo sí se conserva en el caso de ausencia materia, i.e.  $\nabla^a T_{ab}^{X,IV} = -T_{ab} \nabla^a \left( \frac{1}{f_R} \right) = 0$ .

## 4.4. Cosmología $f(R)$

Interesados en los espacio-tiempos homogéneos e isotrópicos, los cuales como vimos en la Sección 2.2, están descritos por la métrica FRW dada en la ec. (2.2). Con esta podemos escribir la ecuación (4.6), usando que  $\square R = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}\partial_b R)$ , como (cf. ec. (B.49))

$$\ddot{R} + 3H\dot{R} = -\frac{1}{3f_{RR}}\left[2f - f_R R - 3f_{RRR}\dot{R}^2 + \kappa T\right]. \quad (4.13)$$

Por otro lado, en analogía a como se obtuvo en la Sección 2.2, las componentes diagonales de la ecuación (4.7) proporcionarán las ecuaciones de campo restantes. Sin embargo, debemos tener en cuenta que la componente 0-0 de la ecuación (4.7) contendrá un término de  $\ddot{R}$  (ver Sección C.2 de los apéndices) el cual se reescribirá en términos de derivadas de orden inferior utilizando la ecuación (4.13). La expresión final para las ecuaciones tienen la forma deseada de un problema de Cauchy de valores iniciales, sujeta a la constricción:

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = -\frac{1}{f_R}\left(\frac{1}{6}(f - f_R R) + f_{RR}H\dot{R} + \frac{\kappa T_0^0}{3}\right), \quad (4.14)$$

la cual corresponde a la ligadura Hamiltoniana que generaliza la ecuación de Friedmann (cf. (2.13)). Esta restringe los valores iniciales posibles de  $a$ ,  $H$ ,  $R$  y  $\dot{R}$  (no necesariamente en, o cerca, del Big Bang; de hecho en nuestro caso usualmente tomamos el inicio de la inflación). O bien usando el escalar de Ricci de la métrica FRW ec. (A.6) se obtiene

$$\dot{H} + H^2 = \frac{1}{f_R}\left(\frac{1}{6}f + f_{RR}H\dot{R} + \frac{\kappa T_0^0}{3}\right). \quad (4.15)$$

Destaquemos que la consistencia de estas ecuaciones se resalta al emplear (4.14) y (4.15) en la ecuación (A.6) obteniendo la identidad  $R = R$ . Entonces se tiene la libertad de usar, ya sea el sistema de ecuaciones (4.13), (4.14) y (A.6), o bien (4.13)-(4.15); lo cual junto a la expresión del parámetro de Hubble  $H$  en términos del factor de escala  $a$  (cf. ec. (2.8)) serán sistemas equivalentes para obtener la solución  $(a, H, R, \dot{R})$ .

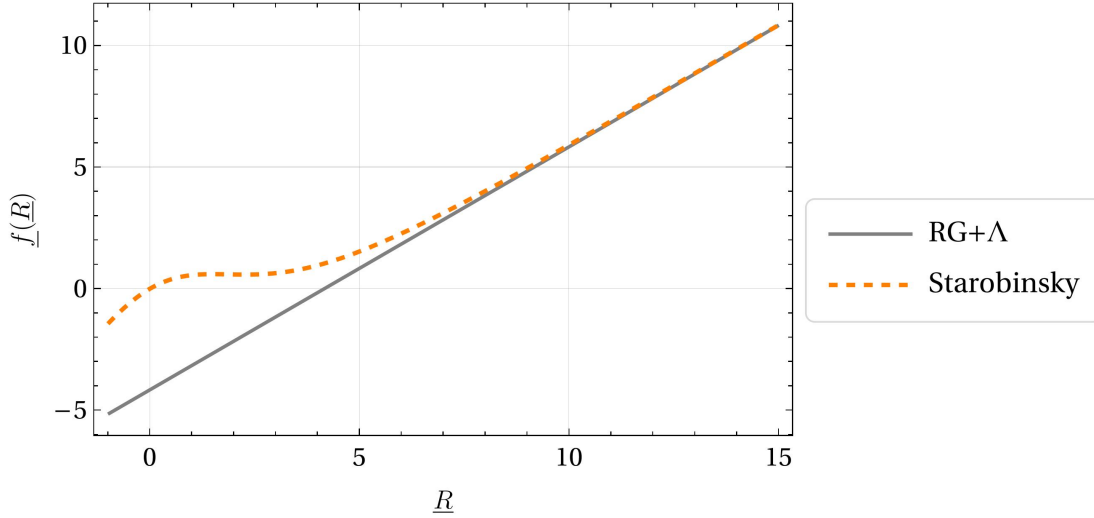
## 4.5. Modelos $f(R)$

En esta sección se muestran tres modelos  $f(R)$  [55, 87, 117] y se discuten brevemente, tanto sus aspectos generales como su posible viabilidad en un contexto cosmológico general. En particular, se comparan con el modelo  $\Lambda$ CDM.

### 4.5.1. Modelo de Starobinsky no-polinomial

El modelo se introduce (ver [117]) mediante la función

$$f_S(R) = R + \lambda R_S \left[ \left(1 + \frac{R^2}{R_S^2}\right)^{-q} - 1 \right], \quad (4.16)$$



**Figura 4.1:** Perfil del modelo de Starobinsky (línea discontinua) con  $\lambda = 1$ ,  $q = 2$  y  $\sigma_S = 4.17$ , comparado con el de RG con una constante cosmológica  $\Lambda = 2.08H_0^2$  (línea sólida). Se toman las variables adimensionales  $\underline{R} \equiv \frac{R}{H_0^2}$  y  $\underline{f}(\underline{R}) \equiv \frac{f(R)}{H_0^2}$ .

donde  $q$  y  $\lambda$  son parámetros positivos y  $R_S$  está relacionado con la constante de Hubble. En particular se puede parametrizar  $R_S$  como  $R_S = \sigma_S H_0^2$ , siendo  $\sigma_S$  un parámetro adimensional, de tal forma que este se pueda ajustar de acuerdo a las observaciones cosmológicas (véase Figura 4.1).

Notemos que este modelo presenta la curiosa propiedad de que para espacio-tiempos planos ( $R = 0$ ) se tiene que  $f(0) = 0$ , pero para espacio-tiempos lo suficientemente curvados ( $|R| \gg R_S$ )  $f(R) \rightarrow R - 2\Lambda_{\text{eff}}^\infty$ , donde el valor de esta constante cosmológica efectiva<sup>8</sup> es  $\Lambda_{\text{eff}}^\infty = \frac{\lambda R_S}{2}$ . En otras palabras, se obtiene un comportamiento correspondiente a una constante cosmológica efectiva existente en un espacio-tiempo lo suficientemente curvado pero la cual *desaparece* en uno plano.

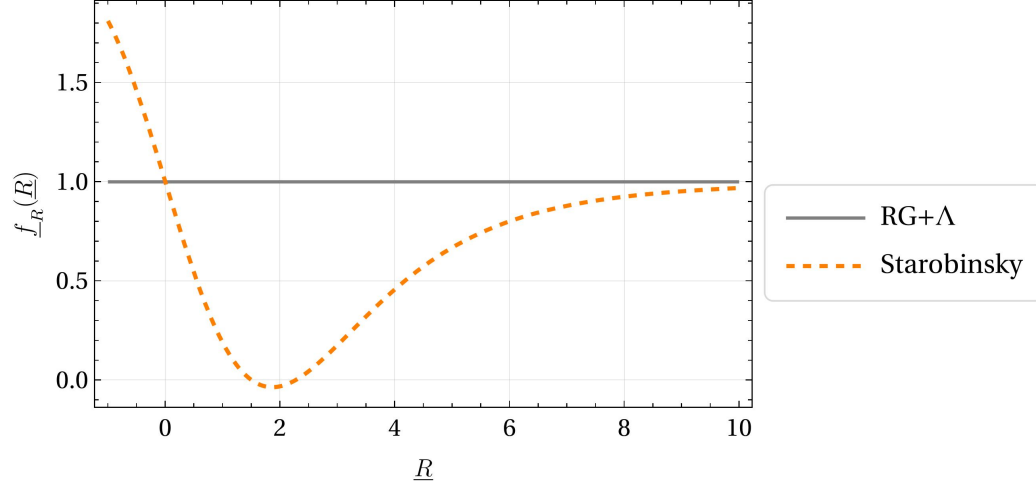
Del modelo (4.16) es directo obtener (ver también Figuras 4.2 y 4.3):

$$\frac{df_S(R)}{dR} = 1 - 2q\lambda \frac{R}{R_S} \left(1 + \frac{R^2}{R_S^2}\right)^{-q-1}, \quad (4.17a)$$

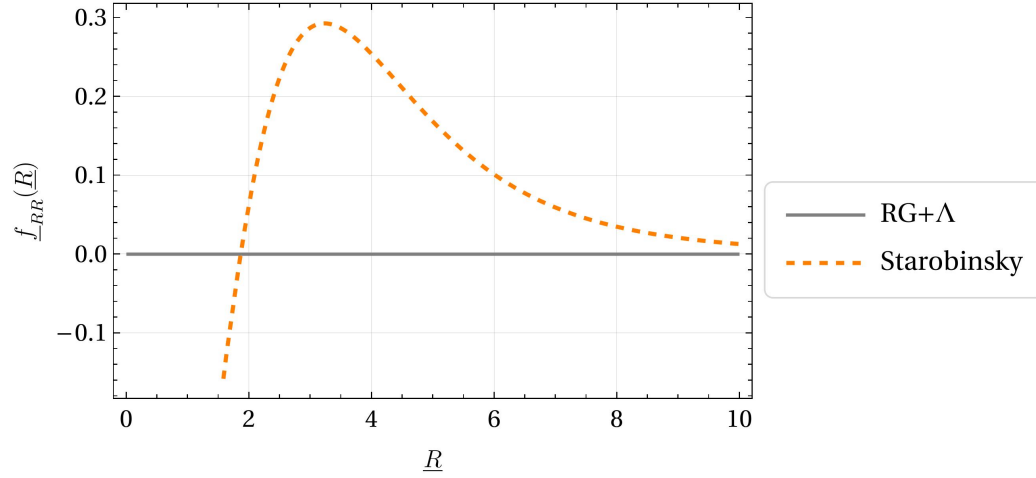
$$\frac{d^2f_S(R)}{dR^2} = 2q\lambda \frac{1}{R_S} \left(1 + \frac{R^2}{R_S^2}\right)^{-q-1} \left[2(q+1) \frac{R^2}{R_S^2} \left(1 + \frac{R^2}{R_S^2}\right)^{-1} - 1\right]. \quad (4.17b)$$

De la ecuación (4.17b) es directo ver que cuando  $(f_S)_{RR} = 0$ , entonces  $\frac{R}{R_S} = \pm \frac{1}{\sqrt{2q+1}}$ , en consecuencia  $(f_S)_{RR}$  no es positiva definida. Estos puntos, llamados *singularidades débiles* por Starobinsky, necesitan un análisis cuidadoso cuando las soluciones alcanzan estos puntos [117]. Sin embargo, estas singularidades no son alcanzadas en la evolución cosmológica [65].

<sup>8</sup>Donde el superíndice  $\infty$  es porque se obtiene en el límite cuando  $R \rightarrow \infty$ .



**Figura 4.2:** Perfil de  $f_R$  para el modelo de Starobinsky (línea discontinua) con  $\lambda = 1$ ,  $q = 2$  y  $\sigma_S = 4.17$ , y para el caso de RG con una constante cosmológica  $\Lambda = 2.08H_0^2$  (línea sólida). Se toman las variables adimensionales  $\underline{R} \equiv \frac{R}{H_0^2}$  y  $\underline{f}_R(\underline{R}) \equiv f_R(R)$ .

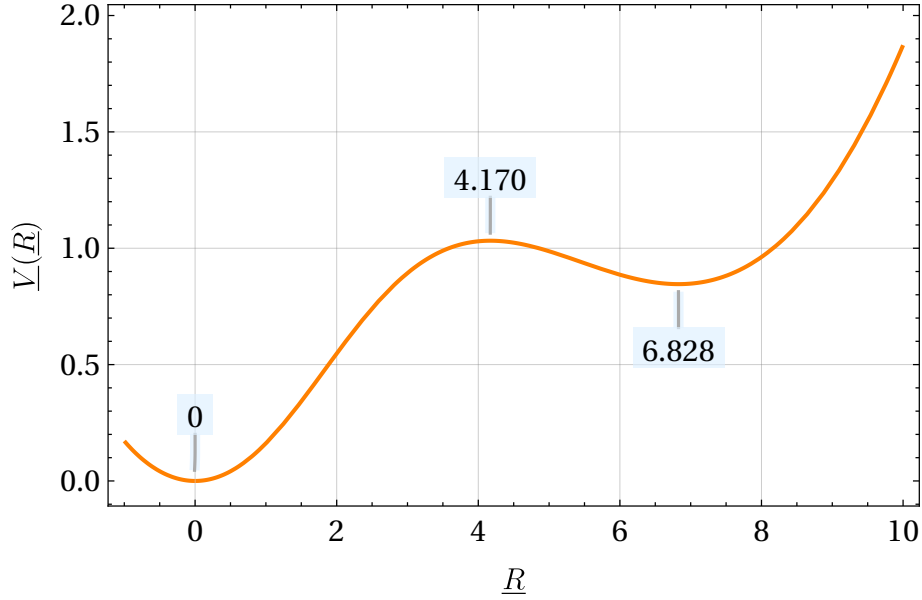


**Figura 4.3:** Perfil de  $f_{RR}$  para el modelo de Starobinsky (línea discontinua) con  $\lambda = 1$ ,  $q = 2$  y  $\sigma_S = 4.17$ , y para el caso de RG con una constante cosmológica  $\Lambda = 2.08H_0^2$  (línea sólida). Se toman las variables adimensionales  $\underline{R} \equiv \frac{R}{H_0^2}$  y  $\underline{f}_{RR}(\underline{R}) \equiv H_0^2 f_{RR}(R)$ .

La forma explícita del potencial mencionado en la Sección 4.2.1, i.e.,  $V(R) = -\frac{1}{3}Rf(R) + \int^R f(x)dx$ , es

$$V_S(R) = \frac{1}{6} \left( R^2 - \lambda R_S \frac{R(4R^2 + 5R^2 R_S^2 + 3R_S^4)}{(R^2 + R_S^2)^2} \right) + \frac{\lambda R_S^2}{2} \arctan\left(\frac{R}{R_S}\right), \quad (4.18)$$

cuyo perfil se muestra en la Figura 4.4 y en ella notamos los puntos críticos, donde  $R_1$  corresponde a una posible solución trivial en vacío  $R = R_1 = \text{cte}$ , i.e., el punto de de Sitter asociado a  $R_1 > 0$ . Estos puntos críticos deben alcanzarse de manera asintótica en el tiempo para la evolución cosmológica, cuando una solución no trivial para  $R$  se aproxima a su valor asintótico donde la materia está prácticamente ausente o al menos



**Figura 4.4:** Perfil de  $V(R)$  para el modelo de Starobinsky con  $\lambda = 1$ ,  $q = 2$  y  $\sigma_S = 4.17$ . Se toman las variables adimensionales  $\underline{R} \equiv \frac{R}{H_0^2}$  y  $\underline{V}(\underline{R}) \equiv \frac{V(R)}{H_0^4}$ .

muy diluida. En este caso tenemos que en  $R = 0$  hay un mínimo global. También hay un máximo y un mínimo local en  $R \approx 4.17H_0^2$  y  $R \approx 6.83H_0^2 = R_1$  respectivamente. Este último pertenece al punto de de Sitter  $R_1$  donde la solución cosmológica se asienta en un tiempo cosmológico futuro.

Notemos que la constante cosmológica efectiva del modelo  $\Lambda_{\text{eff}}^\infty = 2.09H_0^2$  (para  $\lambda = 1$  y  $R_S = 4.17H_0^2$ ) es muy parecida a la real debida al punto de de Sitter  $\Lambda_{\text{eff}} = \frac{R_1}{4} \approx 1.71H_0^2$ .

Una de las propiedades de mayor importancia del modelo de Starobinsky es que puede satisfacer las condiciones impuestas por las observaciones cosmológicas, por ejemplo, una época dominada por materia seguida de época tardía acelerada [5, 121]. Otro punto importante, como el mismo Starobinsky menciona, es que el modelo pasa las pruebas de gravedad conocidas para el sistema solar con  $q \geq 2$  (cf. Sección III en [117]).

### 4.5.2. Modelo MJWQ

En [87] Miranda et al., presentan el modelo que involucra dos parámetros positivos  $\beta$  y  $R_*$ , i.e.

$$f_M(R) = R - \beta R_* \ln\left(1 + \frac{R}{R_*}\right). \quad (4.19)$$

Como en el modelo de Starobinsky, en lo sucesivo tomaremos  $\beta = 2$  y  $R_* = \sigma_* H_0^2$ , donde  $\sigma_*$  nuevamente es un parámetro adimensional. Estas elecciones se toman simplemente para comparar los modelos, y no necesariamente son la mejor opción. Entonces de (4.19)

obtenemos (ver Figuras 4.5-4.7)

$$\frac{df_M}{dR} = 1 - \frac{\beta}{\left(1 + \frac{R}{R_*}\right)}, \quad (4.20a)$$

$$\frac{d^2f_M}{dR^2} = \frac{\beta}{R_* \left(1 + \frac{R}{R_*}\right)^2}. \quad (4.20b)$$

Con esto podemos ver las condiciones de estabilidad. Notemos primero que el dominio de la función está definido solo para  $\frac{R}{R_*} > -1$ . Entonces, la condición  $(f_M)_R > 0$  se cumple para  $\frac{R}{R_*} > \beta - 1$ . Para el valor  $\beta = 2$  obtenemos la condición  $\frac{R}{R_*} > 1$  (cf. Figura 4.6). Por otro lado, la condición  $(f_M)_{RR} > 0$  se cumple de manera inmediata puesto que  $\frac{R}{R_*} = -1$  no pertenece al dominio de la función y además  $\beta$  y  $R_*$  son parámetros positivos (cf. Figura 4.7). En la referencia [65] obtuvieron que, en el contexto cosmológico, la desigualdad  $\frac{R}{H_0^2} > 1$  se cumple durante la evolución cosmológica (para  $\beta = 2$  y  $\sigma_* = 1$ ).

En este caso el potencial asociado a este modelo es

$$V_M(R) = \frac{1}{6} \left( R^2 + 6\beta R_* R - 2\beta R_* (2R + 3R_*) \ln \left( 1 + \frac{R}{R_*} \right) \right), \quad (4.21)$$

donde el mínimo global en  $R_1 \approx 6.146H_0^2$  es el punto de de Sitter alcanzado en la evolución cosmológica (cf. [65]).

Finalmente cabe destacar que Miranda, et al., demostraron que su modelo es consistente con la cosmología de FRW y que para objetos compactos idealizados el modelo evade las singularidades. Además demostraron que con este modelo se puede reproducir la época dominada por la materia, así como la fase acelerada necesaria para explicar varias observaciones.

### 4.5.3. Modelo Hu-Sawicki

En la referencia [55], Hu y Sawicki introducen su modelo mediante

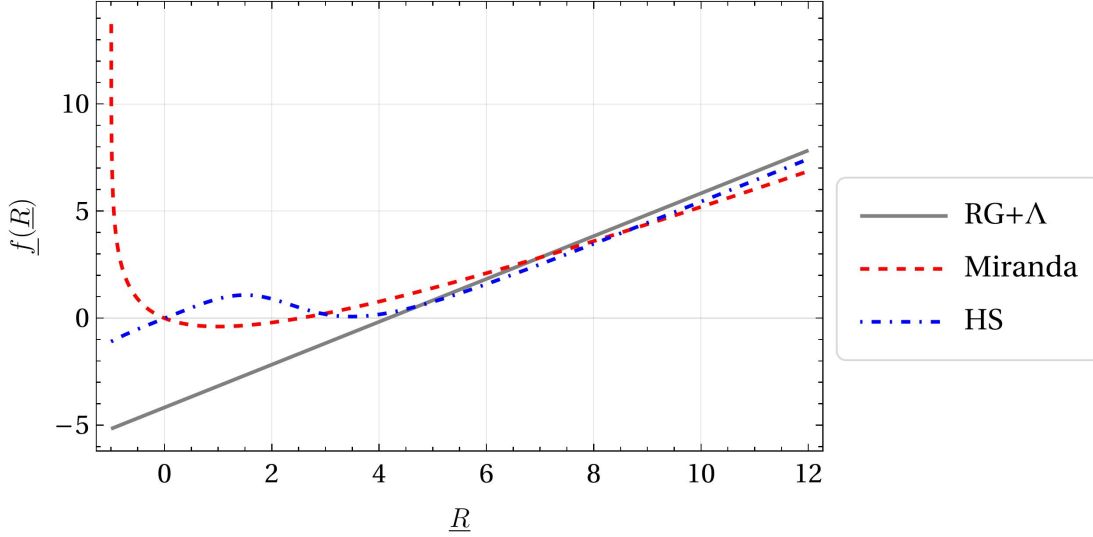
$$f_{HS}(R) = R - m^2 \frac{c_1 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n}{1 + c_2 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n}, \quad (4.22)$$

donde  $c_1, c_2, n$  y  $m$  son parámetros del modelo<sup>9</sup>. Además  $n > 0$  y por conveniencia  $m^2$  se fija a partir de las escalas de longitud del universo, i.e.

$$m^2 \equiv \frac{\kappa^2 \rho_0}{3}, \quad (4.23)$$

siendo  $\rho_0$  la densidad promedio actual del universo. Los parámetros  $c_1$  y  $c_2$  son adimensionales y se pueden fijar exigiendo que este modelo imite al modelo  $\Lambda$ CDM. Por

<sup>9</sup>Notemos que el modelo de Hu-Sawicki con  $n = 2$  es básicamente el mismo modelo que el de Starobinsky con  $q = 1$ , con una redefinición de los parámetros.



**Figura 4.5:** Perfiles de los modelo de Miranda, et al., (línea discontinua) con  $\beta = 2$  y  $\sigma_S = 1$ ; y el modelo de Hu-Sawicki (línea punteada y discontinua) con  $c_1 = 1.25 \times 10^{-3}$ ,  $c_2 = 6.56 \times 10^{-5}$ ,  $n = 4$  y  $m^2 = 0.24H_0^2$ ; comparados con RG con una constante cosmológica  $\Lambda = 2.08H_0^2$  (línea sólida). Donde  $\underline{R} \equiv \frac{R}{H_0^2}$  y  $\underline{f}(\underline{R}) \equiv \frac{f(R)}{H_0^2}$ .

la adimensionalidad de  $c_1$  y  $c_2$  vemos que (puesto que  $[R] = [m^2]$ )  $[m] = [\text{energía}]$ , o en unidades del SI,  $[m^{-1}] = [\text{longitud}]$ .

Notemos de la Figura 4.5 y de la ecuación (4.22), que cuando  $R \gg m^2$ ,  $f_{HS} = R - m^2 \frac{c_1}{c_2}$  y por lo tanto, en este régimen, la constante cosmológica efectiva del modelo es  $\Lambda_{\text{eff}}^\infty = \frac{m^2 c_1}{2c_2}$ , la cual no es despreciable, puesto que  $c_1 \gg c_2$ .

Además, para este modelo obtenemos:

$$\frac{df_{HS}}{dR} = 1 - \frac{nc_1 \left(\frac{R}{m^2}\right)^{n-1}}{\left(1 + c_2 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n\right)^2}, \quad (4.24a)$$

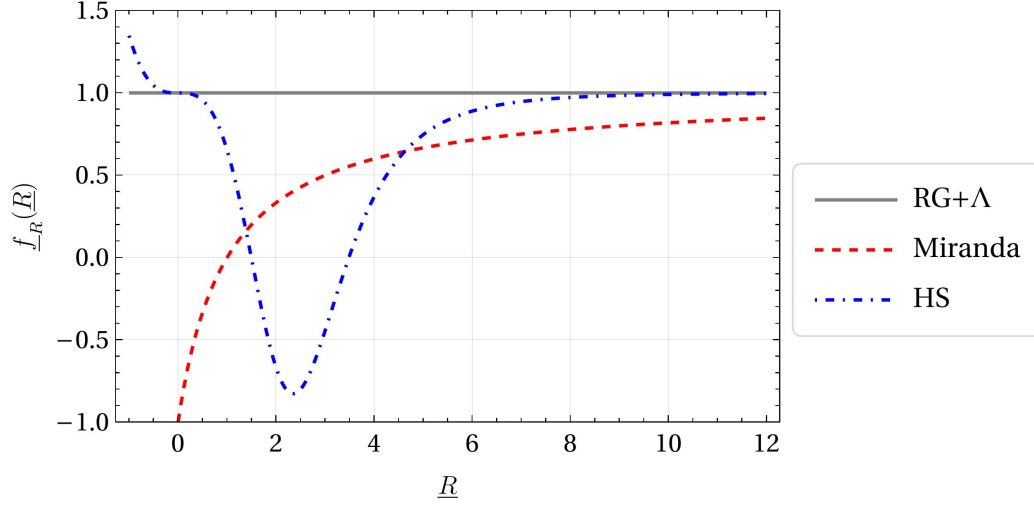
$$\frac{d^2 f_{HS}}{dR^2} = \frac{nm^2 c_1 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n \left((1-n) + (1+n)c_2 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n\right)}{R^2 \left(1 + c_2 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n\right)^3}. \quad (4.24b)$$

En lo sucesivo se asumirá el valor numérico  $m^2 = 0.24H_0^2$ ,  $n = 4$ ,  $c_1 = 1.25 \times 10^{-3}$  y  $c_2 = 6.56 \times 10^{-5}$ . Ver Figuras 4.6-4.7.

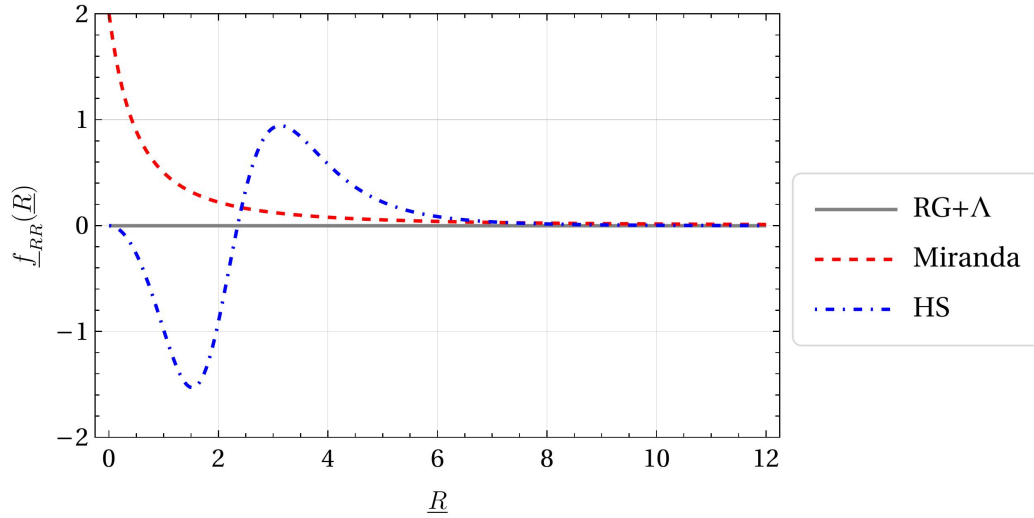
De igual manera al modelo de Starobinsky, el modelo de Hu-Sawicki tiene la propiedad de que a pesar de que  $f_R$  y  $f_{RR}$  no sean positivas definidas en general, si lo serán durante la evolución cosmológica. Para el potencial asociado al modelo de Hu-Sawicki, y puesto que la extensión de su expresión explícita es un tanto extensa y poco iluminadora, solo presentamos el perfil de la Figura 4.8.

Podemos ver de la Figura 4.8 que se tiene un mínimo local en  $R = 0$ , un máximo local en  $R \approx 3.54H_0^2$  y un mínimo global en  $R_1 \approx 8.93H_0^2$  el cual corresponde al punto de de Sitter obtenido en la evolución cosmológica. Con los parámetros empleados vemos que  $\Lambda_{\text{eff}}^\infty \approx 2.29H_0^2$  mientras que para el punto el caso de de Sitter  $\Lambda_{\text{eff}} = \frac{R_1}{4} \approx 2.23H_0^2$ . Estos valores son muy cercanos puesto que  $R_1 \approx 37m^2$ , i.e.  $R_1 \gg m^2$ .





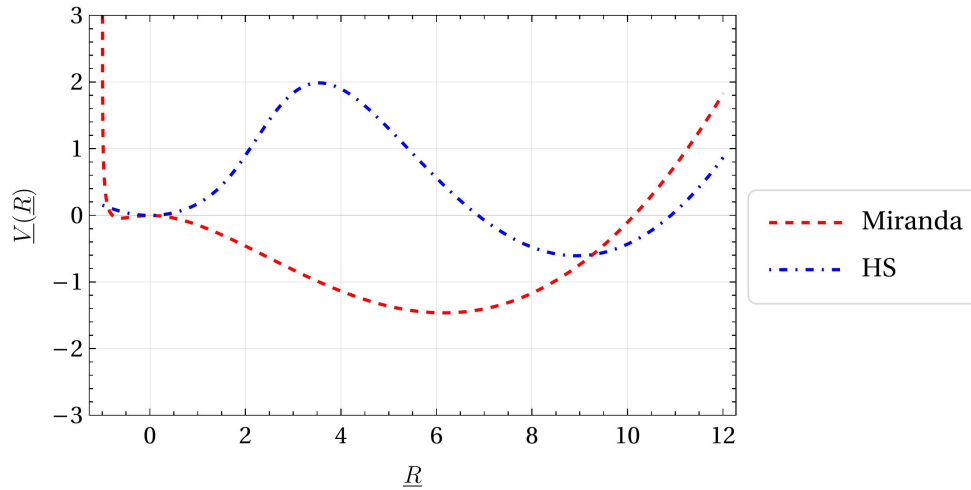
**Figura 4.6:** Perfiles de  $f_R$  para los modelo de Miranda, et al., (línea discontinua) con  $\beta = 2$  y  $\sigma_* = 1$ ; y el modelo de Hu-Sawicki (línea punteada y discontinua) con  $c_1 = 1.25 \times 10^{-3}$ ,  $c_2 = 6.56 \times 10^{-5}$ ,  $n = 4$  y  $m^2 = 0.24H_0^2$ ; comparados con RG con una constante cosmológica  $\Lambda = 2.08H_0^2$  (línea sólida). Donde  $\underline{R} \equiv \frac{R}{H_0^2}$  y  $\underline{f}_R(\underline{R}) \equiv f_R(R)$ .



**Figura 4.7:** Perfiles de  $f_{RR}$  para los modelo de Miranda, et al., (línea discontinua) con  $\beta = 2$  y  $\sigma_* = 1$ ; y el modelo de Hu-Sawicki (línea punteada y discontinua) con  $c_1 = 1.25 \times 10^{-3}$ ,  $c_2 = 6.56 \times 10^{-5}$ ,  $n = 4$  y  $m^2 = 0.24H_0^2$ ; comparados con RG con una constante cosmológica  $\Lambda = 2.08H_0^2$  (línea sólida). Donde  $\underline{R} \equiv \frac{R}{H_0^2}$  y  $\underline{f}_{RR}(\underline{R}) \equiv H_0^2 f_{RR}(R)$ .

Finalmente, cabe destacar que los modelos  $f(R)$  de Hu-Sawicki y de Starobinsky, son quizás los modelos mas probados cosmológicamente hablando, y estas pruebas incluyen verificaciones con el CMB, supernovas de tipo Ia, oscilaciones acústicas de bariones y lentes gravitacionales, entre otras.

Si bien estos modelos han sido ampliamente estudiados en la Cosmología, se emplean en su mayoría para estudiar la aceleración tardía del universo, y puesto que el objeto de esta tesis es la inflación, es decir una aceleración temprana, en los siguientes



**Figura 4.8:** Perfil de  $V(R)$  para los modelos Miranda, et al., (línea discontinua) con  $\beta = 2$  y  $\sigma_* = 1$ , y el modelo de Hu-Sawicki (línea punteada y discontinua) con  $c_1 = 1.25 \times 10^{-3}$ ,  $c_2 = 6.56 \times 10^{-5}$ ,  $n = 4$  y  $m^2 = 0.24H_0^2$ .

capítulos emplearemos el modelo  $R^2$  de Starobinsky [115] (este difiere al de la ecuación (4.16)) el cual ha sido estudiado exhaustivamente en este contexto. Para un análisis más detallado de soluciones numéricas de estos modelos en el contexto de una aceleración tardía del universo véase [65].



# Capítulo 5

## Inflación en teorías $f(R)$

Como se ha mencionado, cuando se estudia inflación en el universo temprano, en general, se emplean modelos basados en campos escalares que aparecen en teorías como supergravedad o supercuerdas. Mientras tanto, en 1980 Alexei Starobinsky consideró correcciones cuánticas a la relatividad general, las cuales deberían de ser importantes para el universo temprano [115]. En este contexto, la gravedad  $f(R)$  es una, de una amplia gama de variaciones a la gravedad de Einstein, y en la que nos enfocamos ya que algunos modelos  $f(R)$  pueden explicar la expansión acelerada tardía del universo sin introducir nuevos campos como fuente de energía oscura. El *modelo inflacionario de Starobinsky* (también llamado  $R^2$ ), a diferencia de otros modelos de la llamada “vieja inflación” tales como el de Guth [47], no presenta el *problema de la salida elegante*<sup>1</sup> (*graceful exit problem*), y además predice espectros de ondas gravitacionales casi invariantes de escala y anisotropías de temperatura consistentes con las observaciones del CMB [60, 89] (ver Figura 3.18).

Los modelos  $f(R)$  pueden dar solución a algunas cuestiones cosmológicas, pero antes enfatizamos los criterios que deben cumplirse para que un modelo  $f(R)$  sea consistente y compatible con las observaciones y experimentos cosmológicos. El modelo debe:

- tener una correcta dinámica cosmológica<sup>2</sup>,
- exhibir el correcto comportamiento de las perturbaciones cosmológicas,
- y generar perturbaciones cosmológicas compatibles con las constricciones del CMB, la estructura a gran escala, la nucleosíntesis y las ondas gravitacionales [113].

---

<sup>1</sup>De manera resumida, el problema de la salida elegante es atribuido a un defecto propio de la propuesta inicial de la teoría inflacionaria, en el cual esta expansión acelerada hace que el universo sea homogéneo y plano, pero nunca se detiene, impidiendo que el universo se recaliente y forme estrellas y galaxias. Esto es, o bien la inflación no termina en absoluto, o bien termina demasiado rápido de tal forma que no alcanza a resolver los problemas para los que fue inventada en primera instancia. Guth era consciente de este problema mencionando: «*I am publishing this paper in the hope that it will highlight the existence of these problems and encourage others to find some way to avoid the undesirable features of the inflationary scenario*» [47].

<sup>2</sup>Es decir, que describa una correcta evolución del universo.

El presente Capítulo está dedicado al estudio del modelo  $R^2$  como modelo inflacionario. Esto está motivado por el hecho de que es el que mejor comportamiento presenta, lo cual se muestra en los resultados de la Colaboración Planck 2018 [101] (cf. Figura 3.18). Las referencias principales son [32, 113].

## 5.1. Dinámica inflacionaria en el marco de Jordan

El modelo  $R^2$  de Starobinsky [115] (en lo sucesivo nos referiremos a él simplemente como el modelo  $R^2$  para evitar confusión con el modelo introducido en la sección 4.5.1) tiene la forma

$$f(R) = R + \frac{1}{6M^2}R^2, \quad (5.1)$$

donde el parámetro  $M$  está relacionado con la escala de energía y tiene unidades de energía. Cuando se haga un análisis numérico en el presente texto, se usará el valor estándar empleado en la literatura como  $M \sim 10^{13}$  GeV (cf. [21, 32, 68, 82, 88]). El término cuadrático en  $R$  es el que conduce a una expansión acelerada del universo temprano, mientras que la presencia del término lineal eventualmente causa que la inflación termine.

Cabe destacar que este modelo se puede *generalizar* como  $f(R) = R + \alpha R^n$ , sin embargo, como se muestra en [60] empleando los resultados de COBE y posteriormente por los resultados de la Colaboración Planck 2018 [101],  $n \approx 2$  es la única opción viable. Además este modelo es consistente con las anisotropías observadas por el CMB, siendo un modelo viable y una alternativa a la inflación clásica mediante campos escalares (Sección 3.5).

A partir de (5.1), se obtienen las primera y segunda derivadas, las cuales son

$$f_R = 1 + \frac{1}{3M^2}R, \quad (5.2a)$$

$$f_{RR} = \frac{1}{3M^2}, \quad (5.2b)$$

y puesto que  $\frac{1}{3M^2} > 0$  entonces  $f_{RR}$  es positiva definida (véase Figura 5.1).

En este modelo, en vacío y con una 3-geometría plana ( $K = 0$ ), la constricción (4.14) toma la forma

$$H^2 + \frac{1}{3 + \frac{R}{M^2}} \left( \frac{1}{M^2} H \dot{R} - \frac{1}{12M^2} R^2 \right) = 0, \quad (5.3)$$

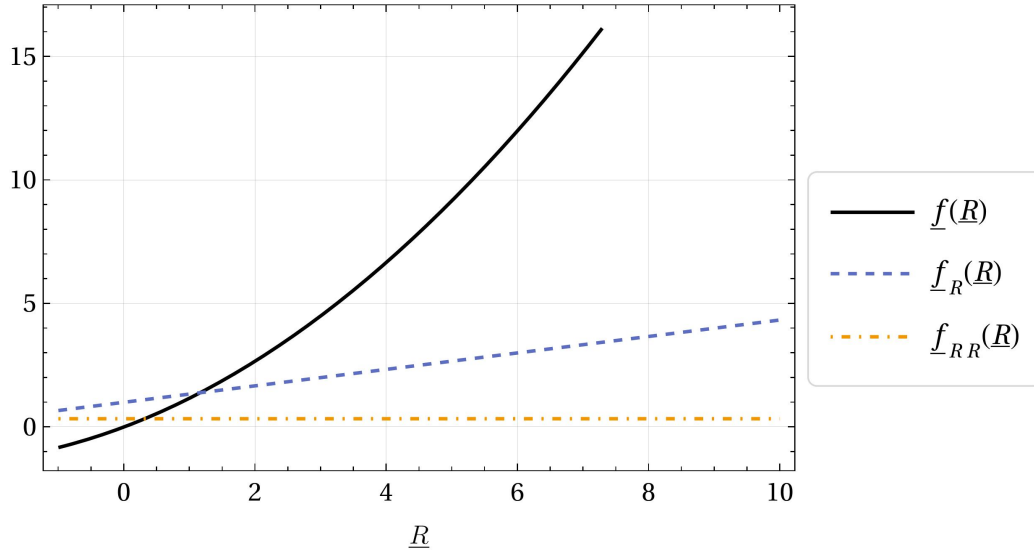
siendo las ecuaciones dinámicas para este modelo (ver (2.8), (4.13), (A.6), (4.15)):

$$\ddot{R} + 3H\dot{R} + M^2 R = 0, \quad (5.4a)$$

$$\dot{H} + 2H^2 - \frac{1}{6}R = 0, \quad (5.4b)$$

$$\dot{H} + H^2 - \frac{1}{3 + \frac{R}{M^2}} \left( \frac{1}{M^2} H \dot{R} + \frac{1}{2}R + \frac{1}{12M^2} R^2 \right) = 0, \quad (5.4c)$$

$$\dot{a} - aH = 0. \quad (5.4d)$$



**Figura 5.1:** Perfiles del modelo  $R^2$ . Con  $f(R)$  (línea sólida) dada en (5.5e), de igual manera para su primera (5.5f) (línea discontinua) y segunda derivada (5.5g) (línea punteada y discontinua).

Como vimos en el capítulo anterior, tenemos la libertad de emplear la ecuación (5.4b) o (5.4c), puesto que estas son equivalentes (cf. [65]).

### 5.1.1. Resultados numéricos

Para estudiar la dinámica inflacionaria en el modelo  $R^2$  será necesario buscar soluciones numéricas, para ello primero introduciremos *nuevas* variables de tal forma que las ecuaciones diferenciales sean adimensionales, es decir:

$$\underline{R} = \frac{R}{M^2}, \quad (5.5a)$$

$$\underline{t} = Mt, \quad (5.5b)$$

$$\underline{H} = \frac{H}{M}, \quad (5.5c)$$

$$\underline{a} = \frac{a}{a_i}, \quad (5.5d)$$

$$\underline{f} = \frac{f}{M^2}, \quad (5.5e)$$

$$\underline{f}_R = f_R, \quad (5.5f)$$

$$\underline{f}_{RR} = M^2 f_{RR}. \quad (5.5g)$$

Además, por conveniencia usaremos la ecuación (5.4b) en lugar de (5.4c), puesto que como ya mencionamos tenemos esa libertad. Entonces, a integrar tenemos el sistema de

ecuaciones

$$\ddot{\underline{R}} + 3\underline{H}\dot{\underline{R}} + \underline{R} = 0, \quad (5.6a)$$

$$\dot{\underline{H}} + 2\underline{H}^2 - \frac{1}{6}\underline{R} = 0, \quad (5.6b)$$

$$\dot{\underline{a}} - \underline{a}\underline{H} = 0, \quad (5.6c)$$

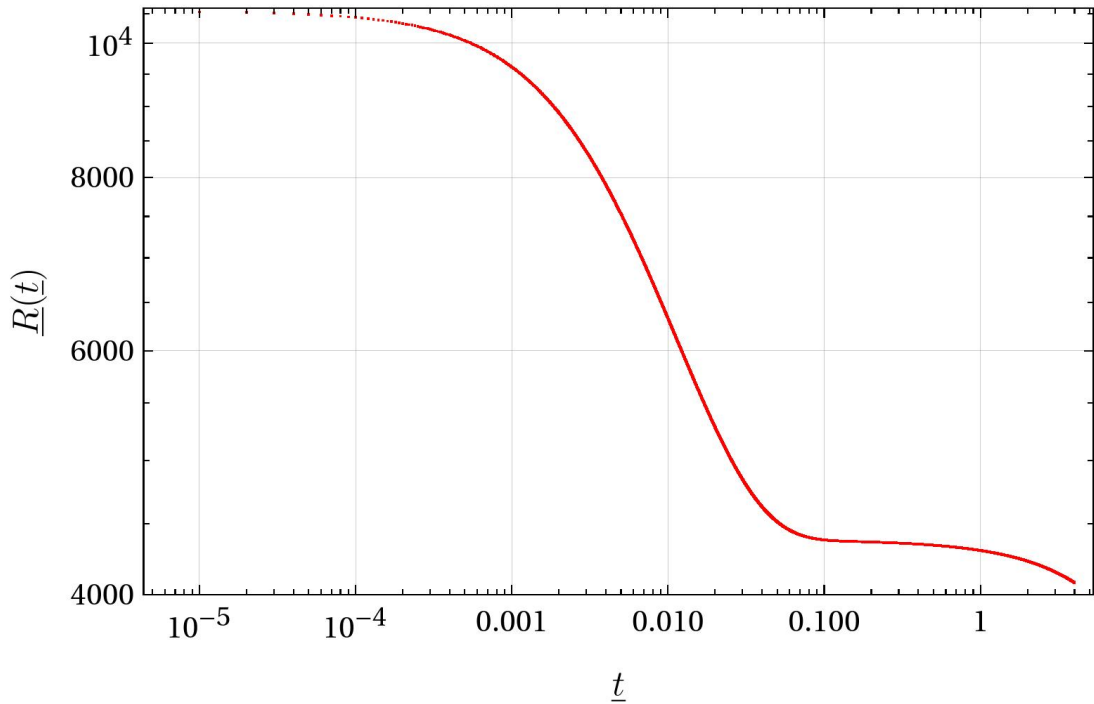
con restricción hamiltoniana (ver (5.3))

$$\underline{H}^2 + \frac{1}{3 + \underline{R}} \left( \underline{H}\dot{\underline{R}} - \frac{\underline{R}^2}{12} \right) = 0, \quad (5.7)$$

la cual se usa para calcular el error a todo tiempo de integración. Los resultados obtenidos mediante RK4 (Runge-Kutta de 4º orden), con un paso de  $\Delta \underline{t} = 10^{-5}$  y con condiciones iniciales<sup>3</sup>

$$(\underline{R}_i, \dot{\underline{R}}_i, \underline{H}_i, \underline{a}_i) = (10543.8, -1.1 \times 10^6, 110.6, 1.0), \quad (5.8)$$

se presentan a continuación.



**Figura 5.2:** Solución obtenida para el escalar de Ricci  $\underline{R}$  mediante RK4, con  $\underline{R}(\underline{t} = 0) = 10543.8$ .

<sup>3</sup>Estas condiciones son tomadas de manera ad hoc, tal que podamos comparar los resultados de la presente sección con los obtenidos empleando una transformación conforme (cf. Sección 5.2). Por ello tomamos  $\underline{R}_i$  de tal forma que cumpla la condición (5.26) con  $\phi = 10$  y con ella establecer  $\dot{\underline{R}}_i$  a partir de la restricción (5.7).

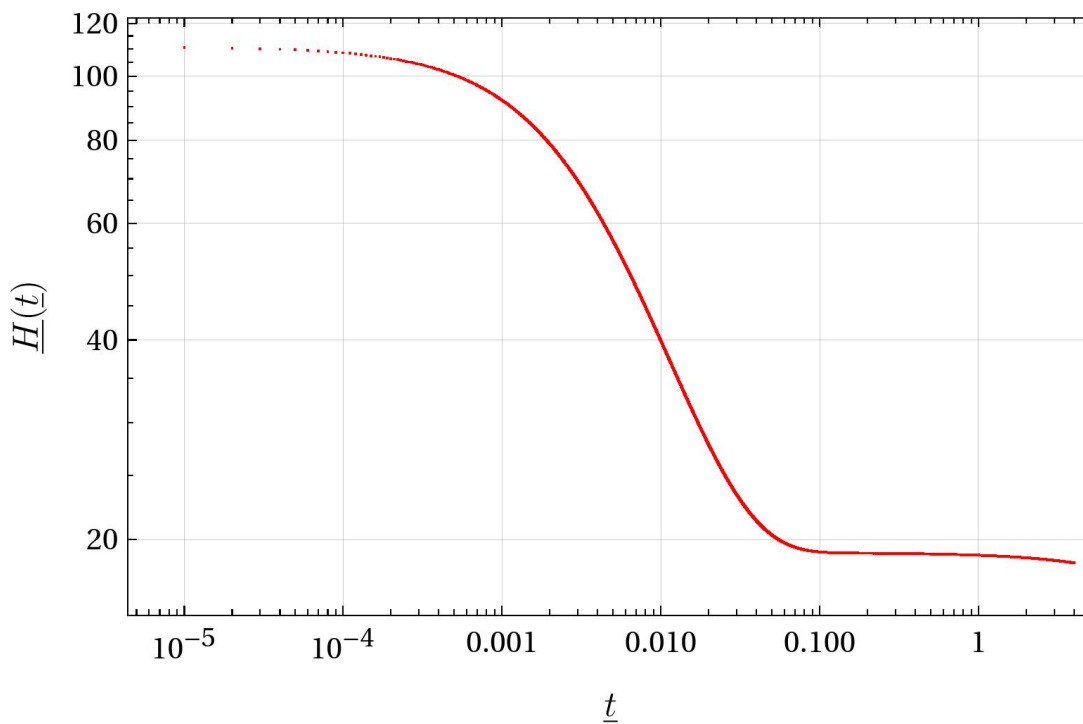


Figura 5.3: Solución obtenida para el parámetro de Hubble  $\underline{H}$  mediante RK4, con  $\underline{H}(t = 0) \doteq 110.6$ .

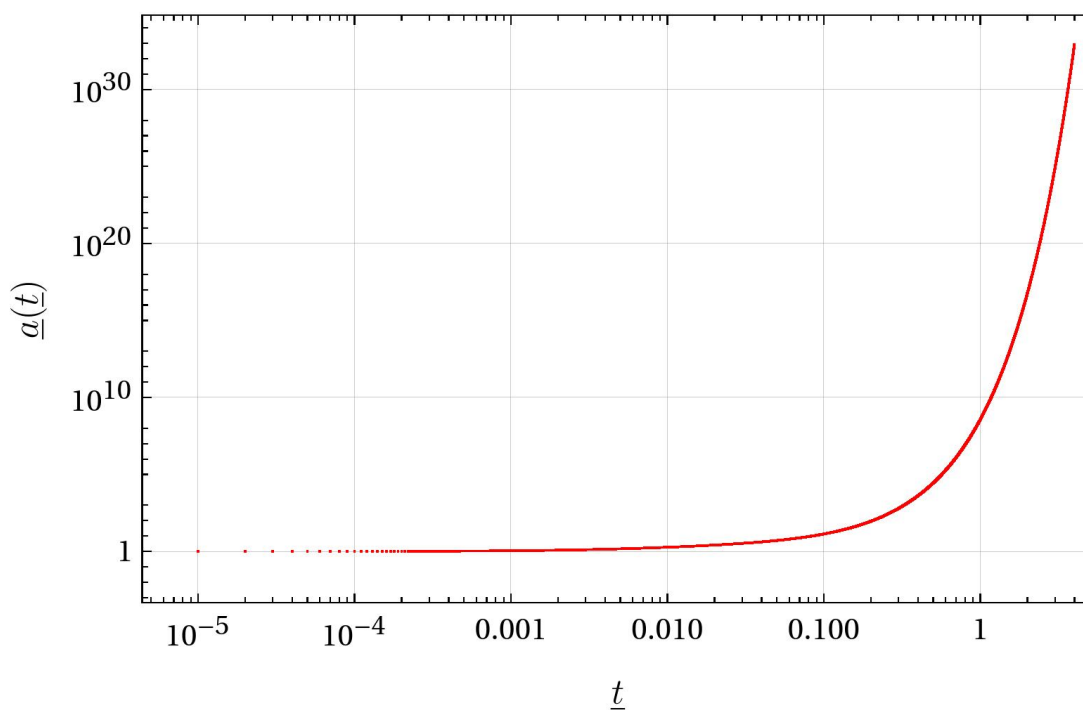


Figura 5.4: Solución obtenida para el factor de escala  $\underline{a}$  mediante RK4, con  $\underline{a}(t = 0) = 1$ . Se observa que el número de e-folds es  $N \sim 60$  con  $\underline{a}_f \sim 10^{26}$ .



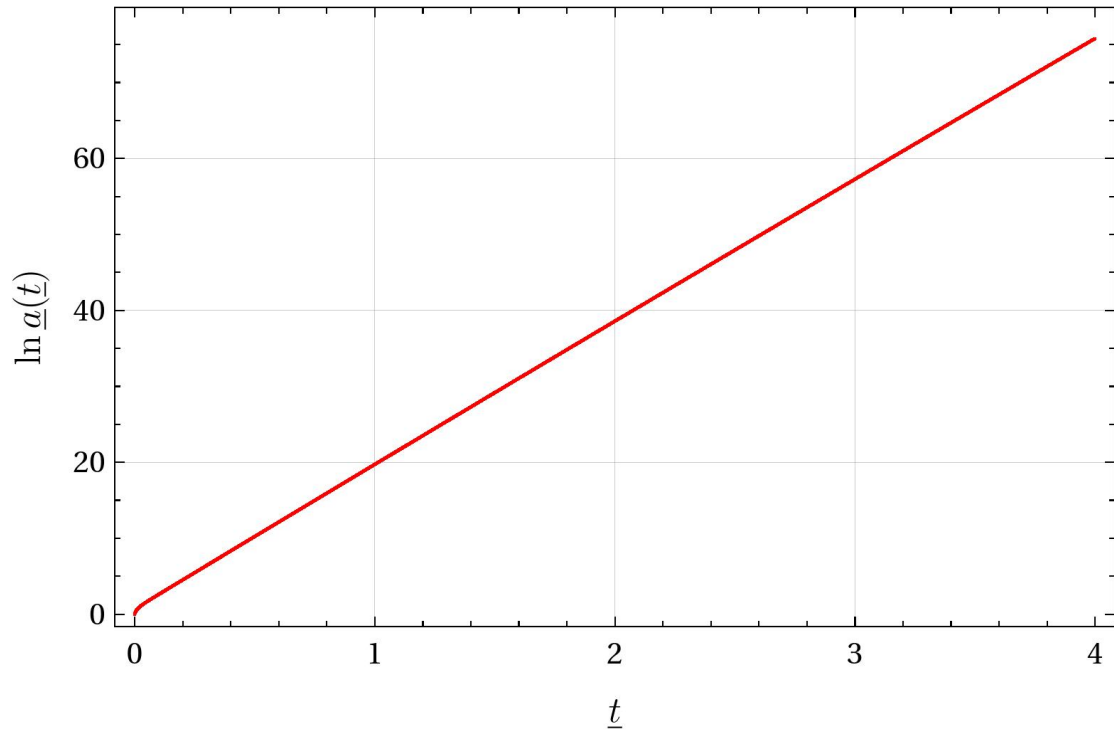


Figura 5.5: Perfil del logaritmo natural del factor de escala  $\ln(\underline{a})$ .

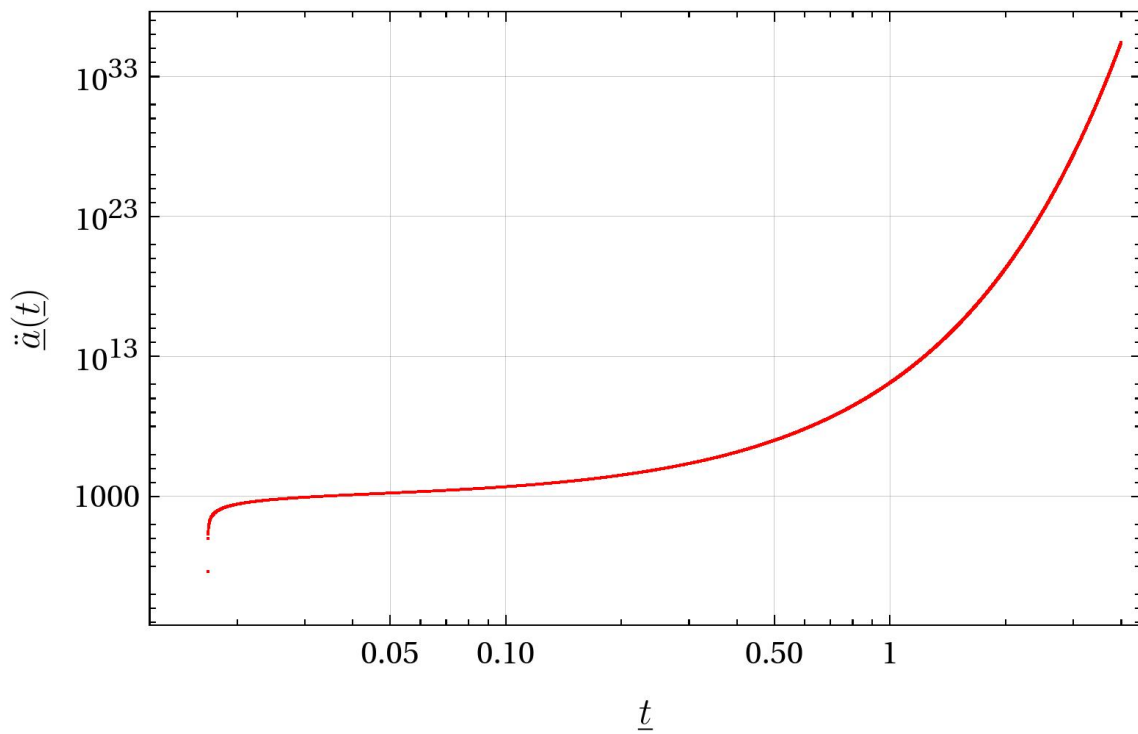


Figura 5.6: Perfil para la segunda derivada temporal del factor de escala  $\ddot{\underline{a}}$ .

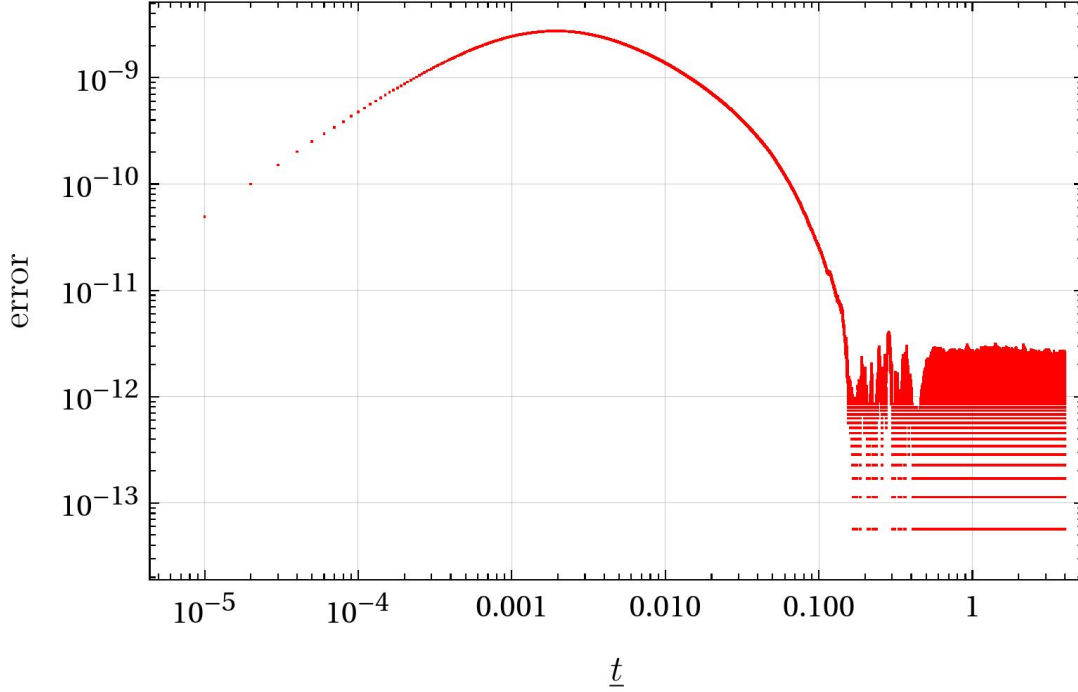


Figura 5.7: Perfil del error numérico calculado de la ecuación (5.7).

Resaltemos un par de cosas. En la Figura 5.2 vemos que  $R$  decae muy rápidamente, y su perfil es muy similar al de la Figura 3.9, esto debido, como veremos en la siguiente sección, a que  $R$  y  $\phi$  están relacionadas.

La Figura 5.3 muestra el perfil del parámetro de Hubble, donde una  $H \approx \text{cte}$ , caracteriza un periodo inflacionario; esto se cumple a partir de  $\underline{t} \approx 0.1$ . Esto se corrobora también a partir de las Figuras 5.4-5.6, es decir el factor de escala crece de manera exponencial y además acelerado.

Finalmente mostramos el error numérico en la Figura 5.7 calculado a partir de la construcción (5.7) a todo tiempo de integración.

## 5.2. Dinámica inflacionaria en el marco de Einstein

### 5.2.1. Transformación conforme

La acción (4.2) en general corresponde a una función no lineal en  $R$ , y es posible derivar una acción en un marco conforme bajo la transformación [125]

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}, \quad (5.9)$$

donde  $\Omega^2$  es el factor conforme y los factores con tilde representan cantidades en el **marco conforme** o también llamado **marco de Einstein**. La relación entre los escalares de Ricci en los distintos marcos es (véase [125])

$$R = \Omega^2 \left( \tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\omega\tilde{\nabla}_b\omega \right), \quad (5.10)$$

donde se define

$$\omega \equiv \ln \Omega. \quad (5.11)$$

Las cantidades sin tilde hacen referencia al llamado **marco de Jordan** y, en nuestro contexto, es también llamado el **marco físico** (ver Sección 5.1). En este marco la acción de la teoría está enunciada en la ecuación (4.2). En este sentido es conveniente reescribir la acción de la teoría como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2\kappa} R f_R - U \right) + S_M[g_{ab}, \psi], \quad (5.12)$$

donde se introduce

$$U \equiv \frac{R f_R - f}{2\kappa}. \quad (5.13)$$

Entonces, usando que  $\sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^4 \sqrt{-g}$  y la ecuación (5.10) obtenemos la acción transformada

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{1}{2\kappa \Omega^2} f_R(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\omega\tilde{\nabla}_b\omega) - \frac{U}{\Omega^4} \right] + S_M[\Omega^{-2}\tilde{g}_{ab}, \psi], \quad (5.14)$$

donde el marco Einstein está definido aislando un término lineal de  $R$  en la acción, lo cual se logra eligiendo

$$\Omega^2 = f_R. \quad (5.15)$$

Esto es válido siempre y cuando  $f_R > 0$ . Eligiendo el resto de la acción de tal forma que esté en términos de un campo escalar<sup>4</sup> mínimamente acoplado con la gravedad, esto es

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \ln f_R, \quad (5.16)$$

de lo cual vemos que  $f_R$  es una función de  $\phi$  a través de  $R$ , es decir,  $R = R(\phi)$ , lo cual será de utilidad al hacer el cambio de marco. Con lo anterior tenemos que

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{6}} \phi, \quad (5.17)$$

y puesto que

$$\tilde{\square}\omega = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_a \left( \sqrt{\frac{\kappa}{6}} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \partial_b \phi \right), \quad (5.18)$$

entonces este término se anula bajo la integral al emplear el Teorema de Gauss.

Por otro lado, también es usual introducir el potencial [32]

$$\tilde{V}(\phi) \equiv \frac{U}{f_R^2} = \frac{R f_R - f}{2\kappa f_R^2}, \quad (5.19)$$

<sup>4</sup>Notemos que en principio deberíamos etiquetar al campo escalar con un tilde ( $\tilde{\phi}$ ), sin embargo, en el marco de Jordan el que juega el papel de campo escalar es la función  $f_R$  y lo cual, en principio, nos ayuda a evitar confusiones. Por esto abusamos de la notación para no saturar más con simbología el desarrollo.

de tal forma que obtengamos una forma familiar en la acción resultante. Entonces la acción en el marco conforme toma la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{1}{2\kappa} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi - \tilde{V}(\phi) \right] + S_M[e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi} \tilde{g}_{ab}, \psi]. \quad (5.20)$$

Esta describe a la relatividad general en la presencia de un campo escalar  $\phi$  mínimamente acoplado a la gravedad, pero no-mínimamente acoplado a la materia<sup>5</sup> en el marco conforme o de Einstein.

Ahora consideremos un espacio-tiempo FRW plano en el marco físico

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) dx^2. \quad (5.21)$$

Entonces, la métrica en el marco conforme tiene la forma

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{t}^2 + \tilde{a}^2(\tilde{t}) d\tilde{x}^2 = f_R (-dt^2 + a^2(t) dx^2) = \Omega^2 ds^2, \quad (5.22)$$

por lo tanto, para  $f_R > 0$ , tenemos

$$d\tilde{t} = \sqrt{f_R} dt, \quad (5.23a)$$

$$\tilde{a} = \sqrt{f_R} a. \quad (5.23b)$$

Con lo anterior, obtenemos que el parámetro de Hubble transforma como

$$\tilde{H} = \frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \frac{\sqrt{f_R} \frac{da}{dt} + \frac{1}{2\sqrt{f_R}} \frac{df_R}{dt} a}{a\sqrt{f_R}} = \frac{\dot{a} + \frac{\dot{f}_R}{2f_R} a}{a\sqrt{f_R}} = \frac{1}{\sqrt{f_R}} \left( H + \frac{\dot{f}_R}{2f_R} \right), \quad (5.24)$$

donde, el punto denota derivación temporal en el marco físico, i.e.  $\dot{f}_R = \frac{df_R}{dt}$ .

### 5.2.2. Dinámica para el modelo $R^2$

Mediante (5.19) y el modelo  $R^2$  obtenemos el potencial (cf. Sección C.3)

$$\tilde{V}(\phi) = \frac{3M^2}{4\kappa} \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi} \right)^2. \quad (5.25)$$

Por otro lado, empleando (5.2a) en (5.16), obtenemos que

$$R = 3M^2 \left( e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi} - 1 \right), \quad (5.26)$$

y directamente de esta expresión se tiene que

$$\dot{R} = \frac{d\tilde{t}}{dt} \frac{dR}{d\tilde{t}} = \sqrt{6\kappa} M^2 e^{\sqrt{\frac{3\kappa}{2}}\phi} \frac{d\phi}{d\tilde{t}}, \quad (5.27)$$

<sup>5</sup>Esto significa que pueden surgir términos donde  $\phi$  aparece en el sector de materia de la acción. Esto debido a la relación (5.16).

donde hemos usado que

$$\frac{dt}{d\tilde{t}} = e^{-\sqrt{\frac{\kappa}{6}}\phi}. \quad (5.28)$$

Finalmente de la ec. (5.24) tenemos

$$H = e^{\sqrt{\frac{\kappa}{6}}\phi} \left( \tilde{H} - \sqrt{\frac{\kappa}{6}} \frac{d\phi}{d\tilde{t}} \right), \quad (5.29)$$

y de (5.23b)

$$a = \tilde{a} e^{-\sqrt{\frac{\kappa}{6}}\phi}. \quad (5.30)$$

Entonces, obteniendo una solución en el marco conforme podemos usar las relaciones anteriores para obtener las soluciones en el marco físico o marco de Jordan, lo cual realizaremos en la siguiente subsección de forma numérica.

### 5.2.3. Solución numérica

Para ilustrar ideas y ver que esto realmente se cumpla resolveremos un problema análogo al que realizamos en la Sección 3.6, pero usando  $\kappa = 1$  y en unidades de  $M^2$ , es decir, en este caso usaremos las variables adimensionales:

$$\underline{t} = M\tilde{t}, \quad (5.31a)$$

$$\underline{\phi} = \phi, \quad (5.31b)$$

$$\underline{H} = \frac{\tilde{H}}{M}, \quad (5.31c)$$

$$\underline{a} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{a}_i}, \quad (5.31d)$$

$$\underline{V} = \frac{\tilde{V}}{M^2}, \quad (5.31e)$$

y con estas resolver el sistema de ecuaciones:

$$\frac{d^2\underline{\phi}}{d\underline{t}^2} = -3\underline{H} \frac{d\underline{\phi}}{d\underline{t}} - \partial_\phi \underline{V}(\phi), \quad (5.32a)$$

$$\frac{d\underline{H}}{d\underline{t}} = -\underline{H}^2 - \frac{1}{3} \left( \left( \frac{d\underline{\phi}}{d\underline{t}} \right)^2 - \underline{V}(\phi) \right), \quad (5.32b)$$

$$\frac{d\underline{a}}{d\underline{t}} = \underline{a}\underline{H}, \quad (5.32c)$$

$$\frac{d\underline{t}_J}{d\underline{t}} = e^{-\sqrt{\frac{\kappa}{6}}\phi}, \quad (5.32d)$$

donde  $\underline{t}_J$  es el tiempo adimensional en el marco Jordan, ec. (5.23a) y el que nos dará el cambio entre los marcos. Para evitar confusión entre estos se distinguen con el subíndice

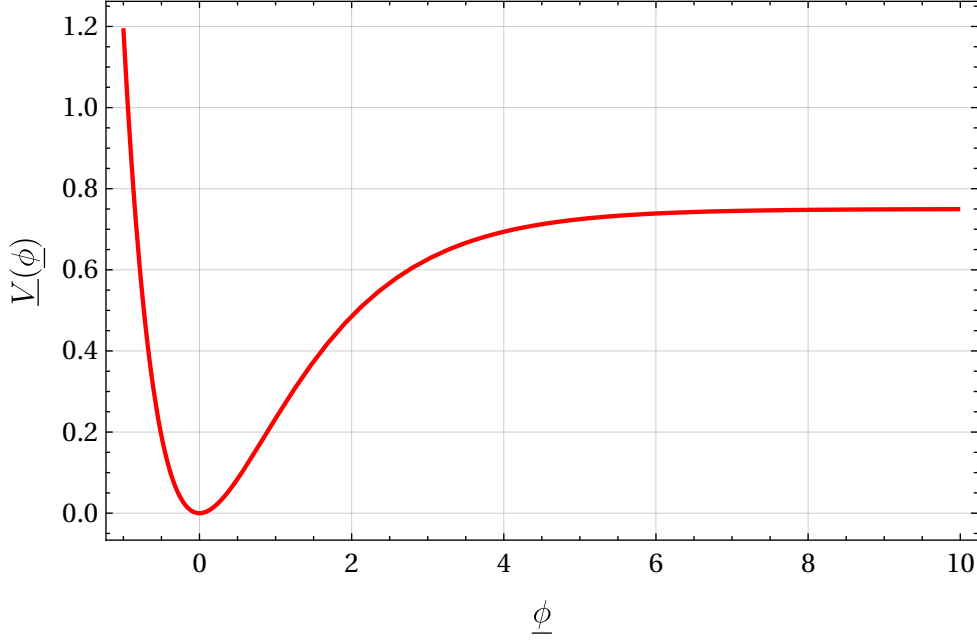


Figura 5.8: Perfil del potencial (5.33).

$J$  pero se omitirá cuando esto sea claro. El potencial en estas unidades es (ver Figura 5.8):

$$\bar{V}(\phi) = \frac{3}{4} \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi} \right)^2, \quad (5.33)$$

y la restricción hamiltoniana

$$\bar{H}^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \bar{V}(\phi) \right) = 0. \quad (5.34)$$

Nuevamente empleando el método RK4, con un paso de  $\Delta \underline{t} = 10^{-4}$  y condiciones iniciales

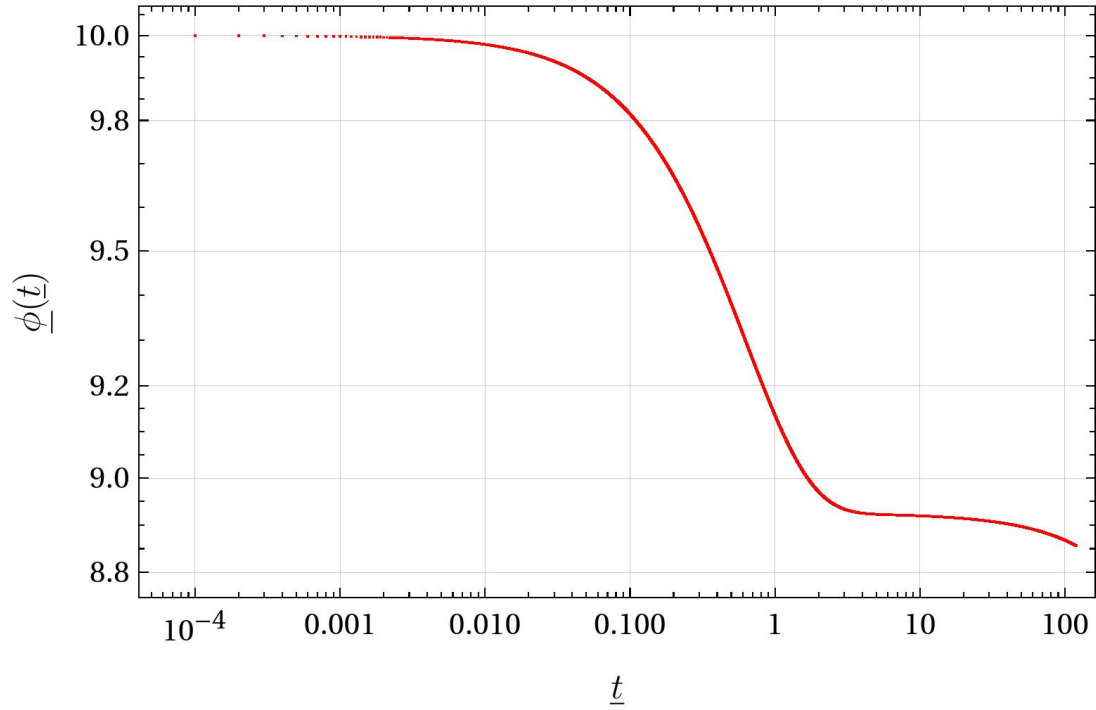
$$(\underline{\phi}_0, \dot{\underline{\phi}}_0, \underline{H}_0, \underline{a}_0, \underline{t}_{J0}) \doteq (10.0, -2.12152, 1.0, 1.0, 0), \quad (5.35)$$

las cuales son elegidas de tal forma que coincidan con aquellas del análisis hecho en la sección anterior. En particular, para  $\underline{\phi}_0$  se elige 10 por ser una región donde el potencial es muy plano (cf. Figura 5.8) y  $\underline{a}_0$  por construcción es 1 al inicio de la integración.

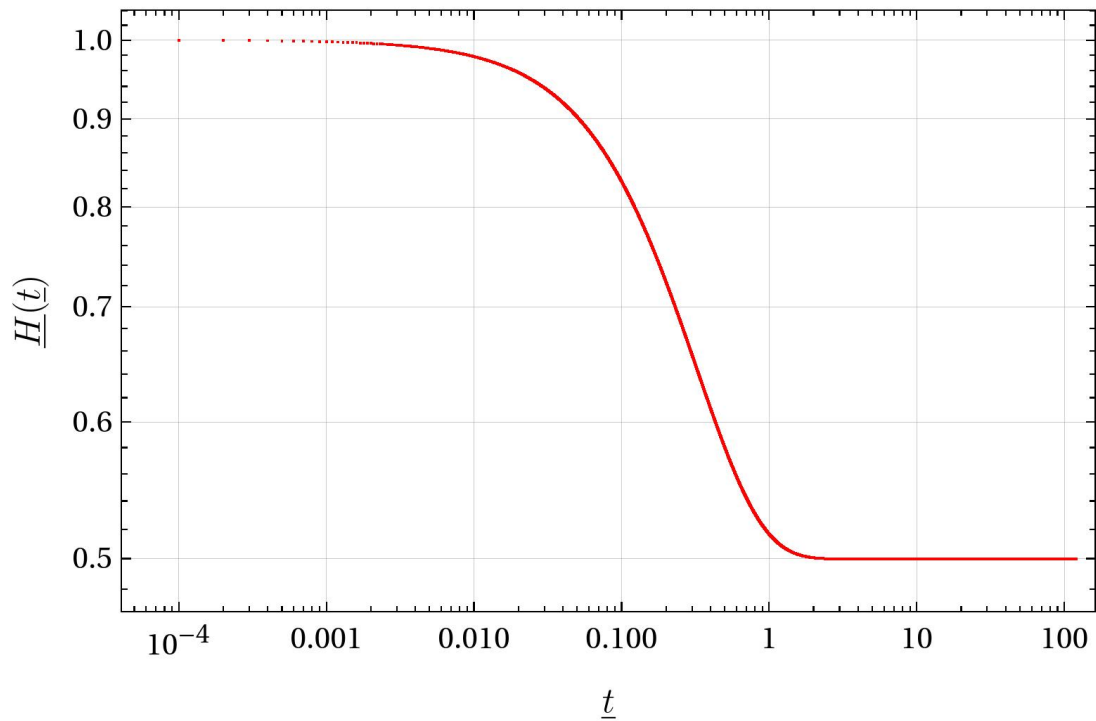
Debemos resaltar que de la Figura 5.9 podemos ver que en  $\underline{t} \approx 3$  el campo escalar entra en una etapa de inflación (slow-roll), lo cual se puede ver también de la Figura 5.10 puesto que el parámetro de Hubble se mantiene muy cerca a constante.

Además, de las Figuras 5.11-5.12 es claro que tenemos un crecimiento exponencial en el factor de escala y además acelerado (cf. Figura 5.13).

Por último se calcula el error numérico empleando la restricción (5.34) a todo tiempo de integración (ver Figura 5.14).



**Figura 5.9:** Solución obtenida para el campo escalar  $\underline{\phi}$  en el marco conforme mediante RK4, con  $\underline{\phi}_0 = 10$ .



**Figura 5.10:** Solución obtenida para el parámetro de Hubble  $\underline{H}$  en el marco conforme mediante RK4, con  $\underline{H}_0 = 1$ .

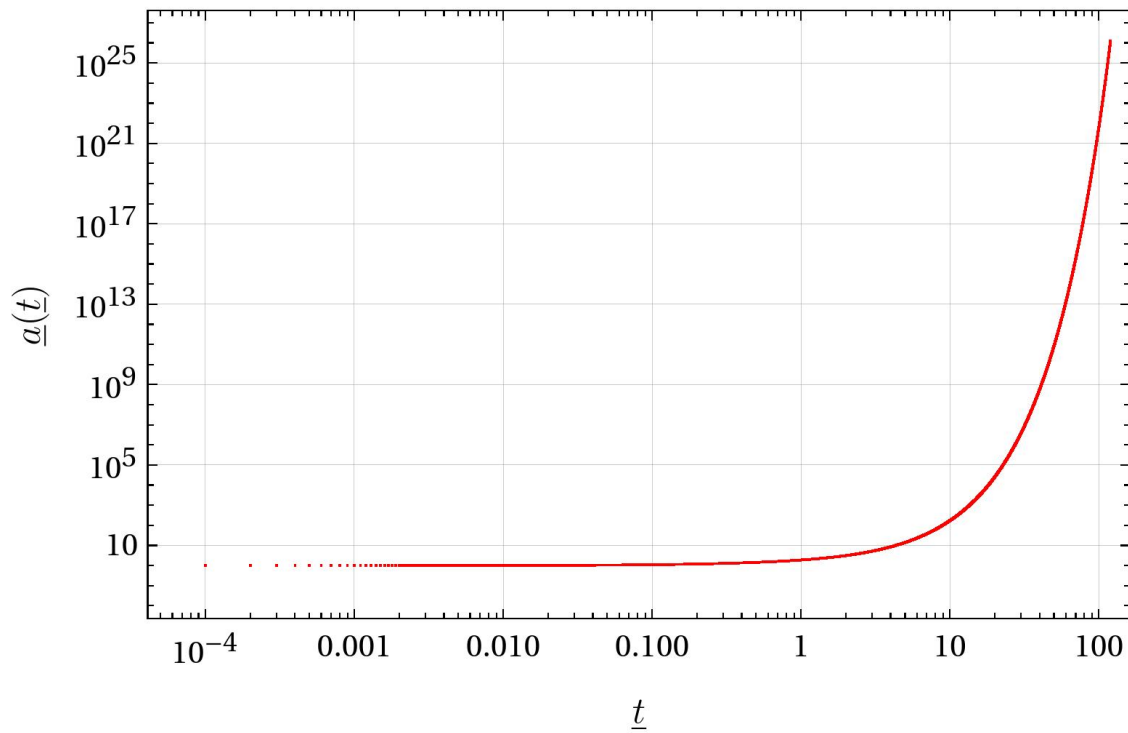


Figura 5.11: Solución obtenida para el factor de escala  $\underline{a}$  en el marco conforme mediante RK4, con  $\underline{a}_0 = 1$ .

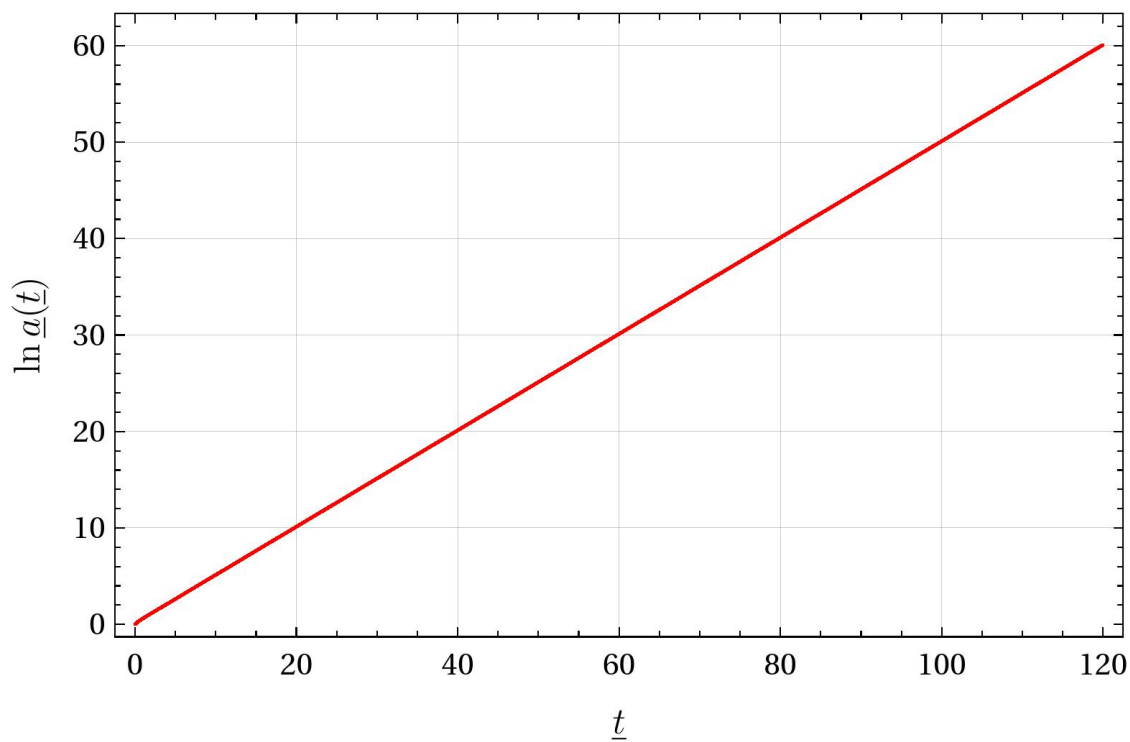


Figura 5.12: Perfil del logaritmo natural del factor de escala  $\ln(\underline{a})$ .



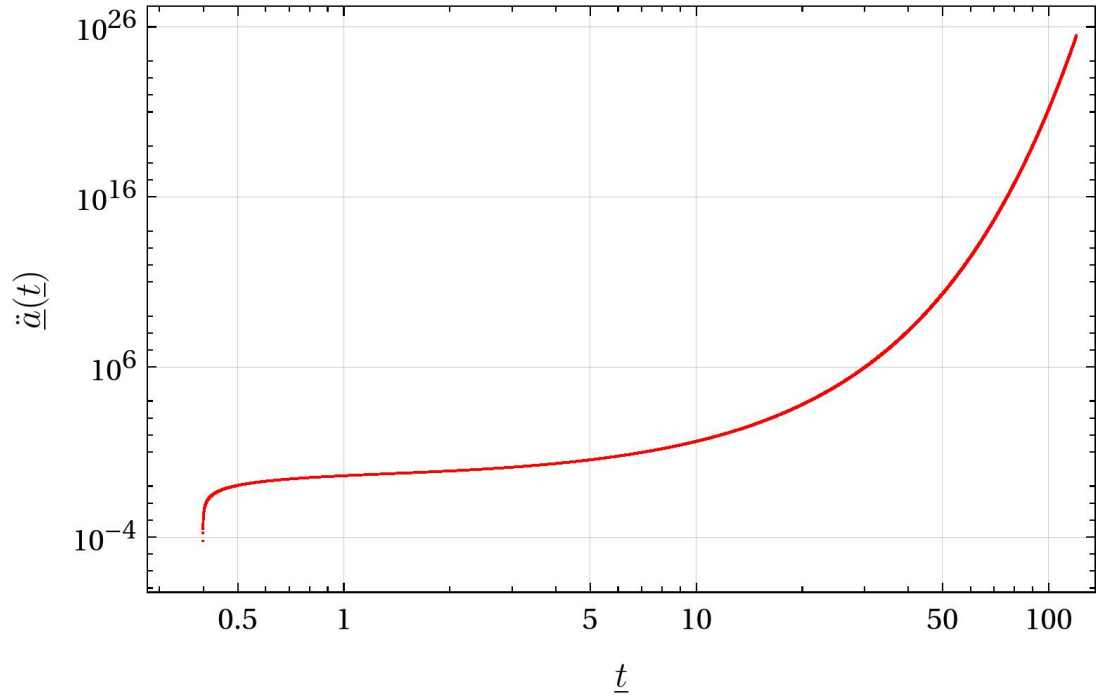


Figura 5.13: Perfil para la segunda derivada temporal del factor de escala  $\ddot{a}$ .

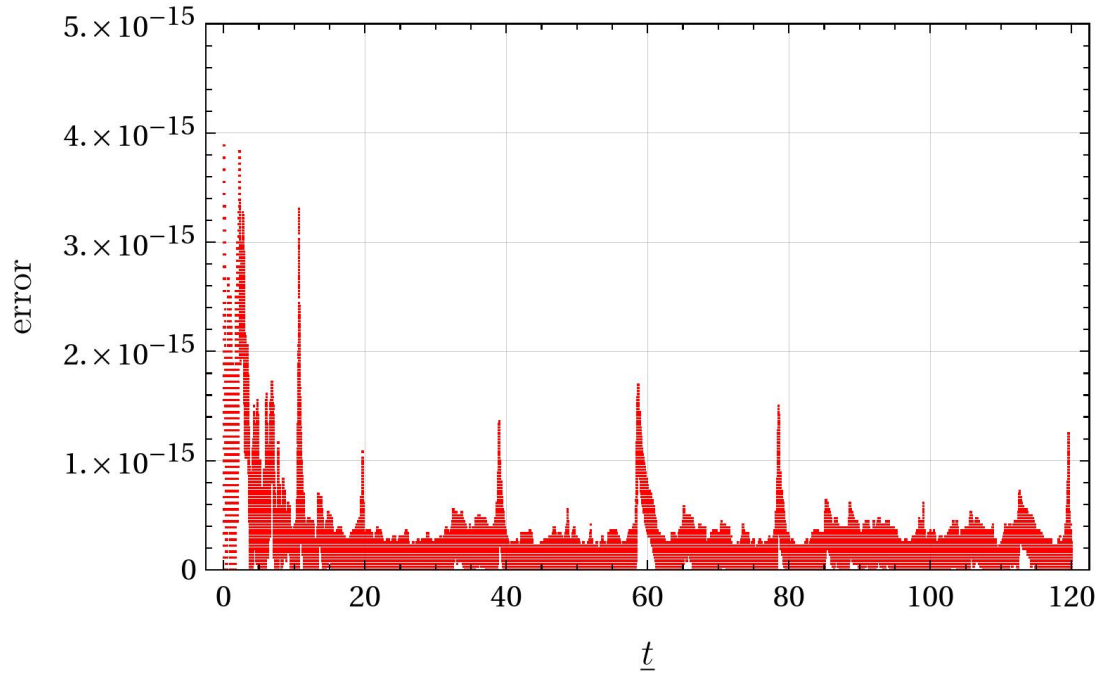
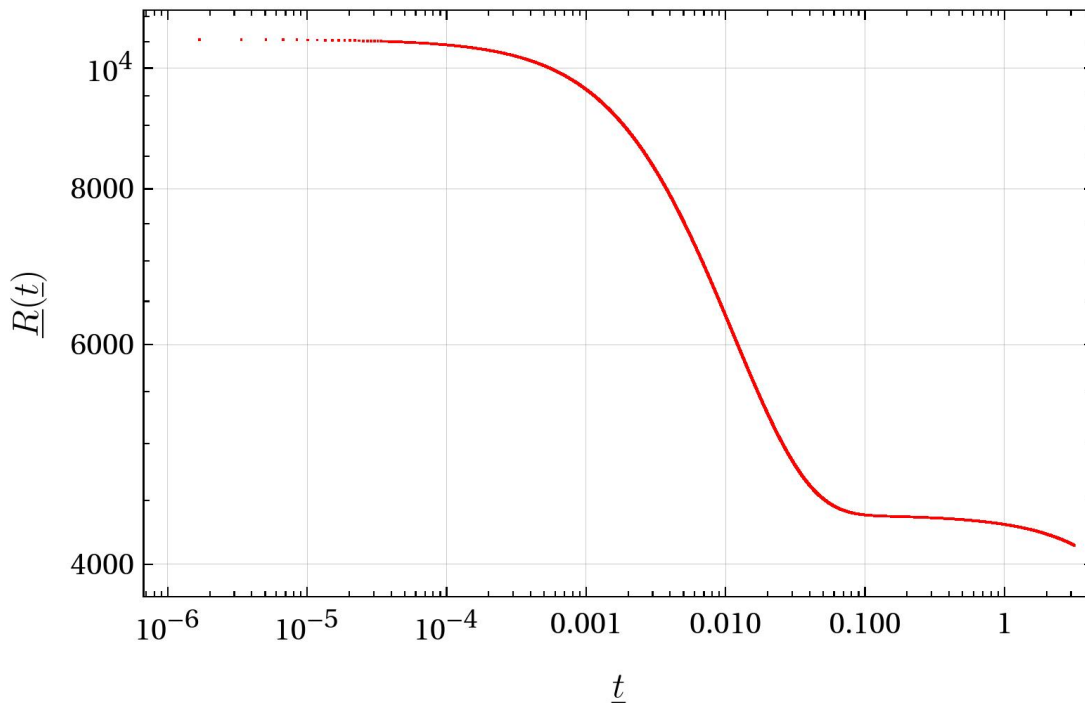


Figura 5.14: Perfil del error numérico calculado a partir del valor absoluto de la ecuación (5.34).

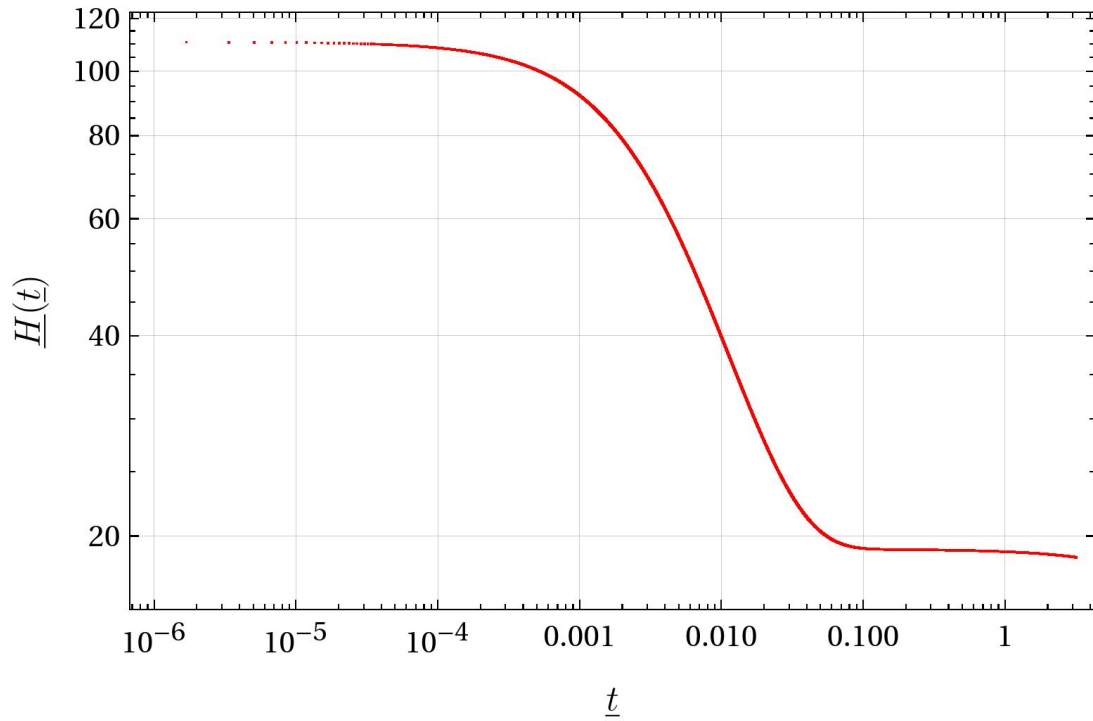
### 5.3. Equivalencia de los marcos

La definición de esta *equivalencia*, en el contexto actual es a menudo oscura. Para ello se pueden tomar dos caminos; en el primero se puede considerar que la física en ambos marcos es idéntica, lo cual requiere que definamos claramente lo que significa *equivalencia física*. Por ejemplo [34, 41] definen la equivalencia física como los marcos cuyos observables deben ser equivalentes. El segundo caso es que un sistema en el marco físico se puede resolver en el marco conforme siempre que se transforme de nuevo al marco físico para su interpretación [102], para ello se requiere que se defina el concepto de *marco físico* a priori, aquel en el que se deberán tomar las observaciones. En nuestro caso, puesto que estamos interesados en teorías  $f(R)$  el marco de Jordan es el que tomamos como marco físico.

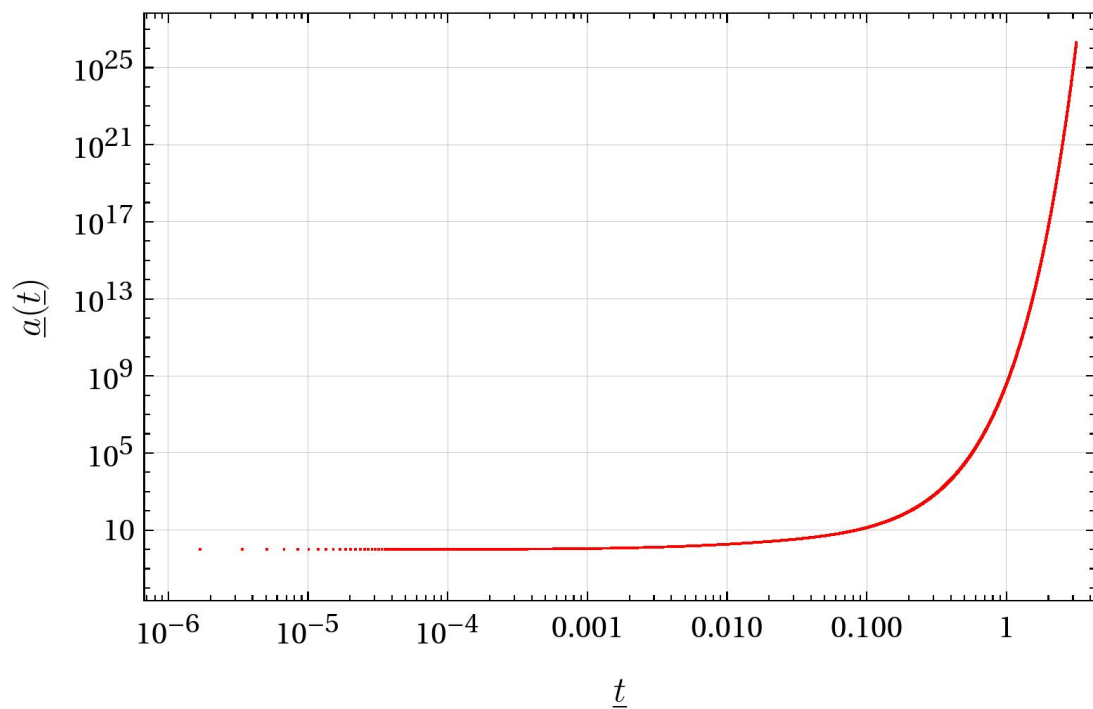
En este sentido, el marco de Jordan (físico) corresponde a aquel para el que las partículas de prueba siguen geodésicas de la métrica  $g_{ab}$ , teniendo para el caso con materia que el tensor de energía-momento  $T_{ab}$  se conserva. Por otro lado, en el marco de Einstein (conforme) las partículas de prueba no siguen, en general, las geodésicas de la métrica  $g_{ab}$  y el tensor energía-momento  $\tilde{T}_{ab}$  no se conserva en general. No obstante, cuando no hay contribuciones de materia, como es en nuestro caso, la distinción entre cuál es el marco físico y cuál el conforme se vuelve irrelevante. Esto es importante en el contexto de teorías  $f(R)$  puesto que en dado caso la inflación no es producida por campos de materia, si no que es producida por la parte geométrica de la teoría. Esto será tratado con más detalle en el Capítulo 6.



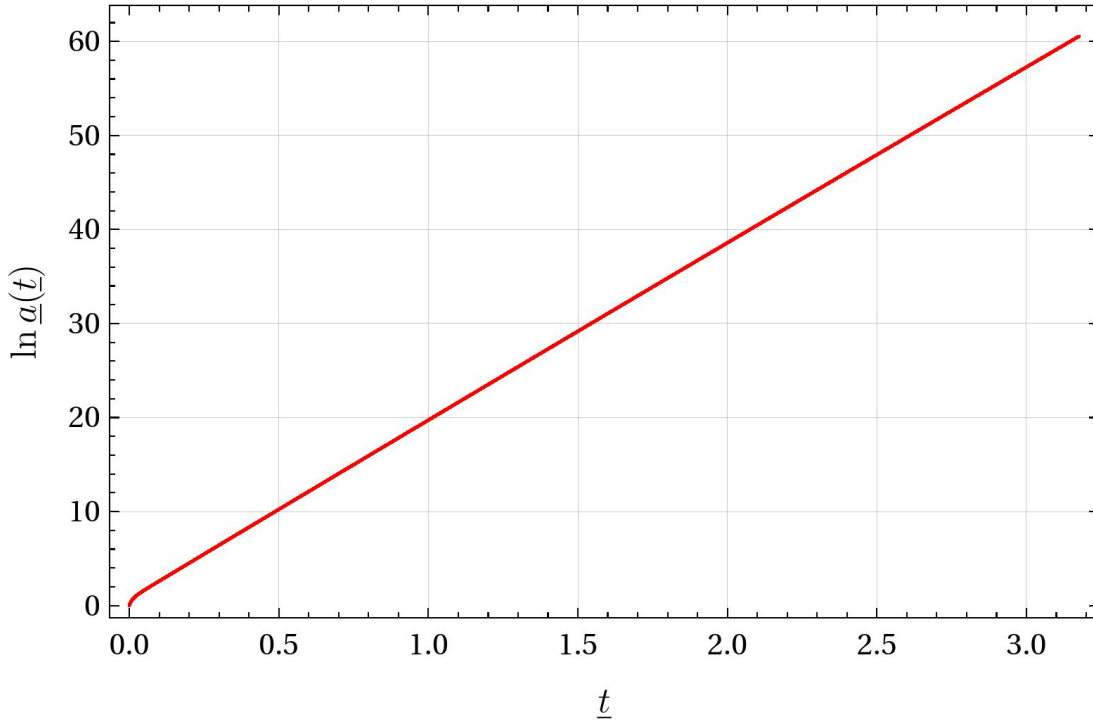
**Figura 5.15:** Solución obtenida para el escalar de curvatura  $R$ , al hacer la transformación conforme mediante (5.26) (compárese con Figura 5.2).



**Figura 5.16:** Solución obtenida para el parámetro de Hubble  $H$  en el marco físico, al hacer la transformación conforme mediante (5.29) (compárese con Figura 5.3).



**Figura 5.17:** Solución obtenida para el factor de escala  $a$  en el marco físico, al hacer la transformación conforme mediante (5.30) (compárese con Figura 5.4). Notemos que el valor inicial  $a_i$  también transforma.



**Figura 5.18:** Perfil del logaritmo del factor de escala en el marco físico  $\ln \frac{a}{a_i}$  (compárese con Figura 5.5).

La equivalencia física entre marcos implica que el comportamiento general de las soluciones en ambos marcos coincidirían. Para verificar esto, tomemos las soluciones obtenidas en la sección anterior para el marco de Einstein y mediante las relaciones (5.26)-(5.30) podemos obtener la evolución en el marco de Jordan. Lo cual se puede comparar con lo obtenido en la Sección 5.1. Por ejemplo, vemos que el escalar de Ricci en el tratamiento  $f(R)$  (marco de Jordan) se obtiene en la Figura 5.2 y para el que obtenemos a través de la transformación conforme a partir de la teoría con un campo escalar mínimamente acoplado se presenta en la Figura 5.15. Es claro que estas coinciden de gran manera. Lo análogo ocurre con el parámetro de Hubble y el factor de escala (cf. Figuras 5.3-5.5 y 5.16-5.18).

Finalmente, podemos concluir que la equivalencia de los marcos se da puesto que la contribución de materia en la acción (5.20) es nula.



# Capítulo 6

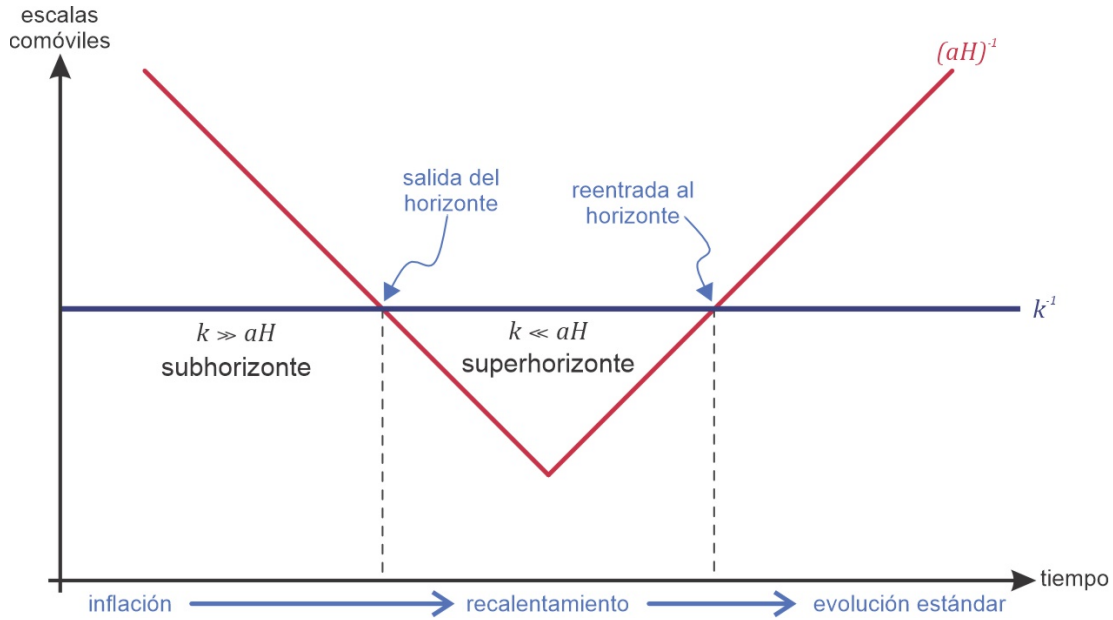
## Perturbaciones cosmológicas

Como hemos mencionado en los capítulos previos, la inflación no solo resuelve *problemas* como el del horizonte y planitud (cf. Sección 3.4), sino que también explica la formación de estructura, esto es, el periodo durante el cual perturbaciones cuánticas dan origen a la estructura observada hoy en día, siendo la expansión exponencial del espacio la causante de que las perturbaciones crezcan a escalas de relevancia actualmente. La Figura 6.1 muestra cómo perturbaciones cuánticas son generadas en escalas de *subhorizonte*, pero salen del horizonte una vez que el radio (comóvil) de Hubble  $(aH)^{-1}$  se vuelve más pequeño que su longitud de onda comóvil [77]. Esto se traduce en una expansión superluminal en donde las perturbaciones quedan fuera del contacto causal, volviéndose perturbaciones clásicas de densidad en escalas de *superhorizonte*, las cuales reingresan al horizonte en la evolución sucesiva y posteriormente colapsando gravitacionalmente de tal forma que formen la estructura a gran escala que observamos en el universo [11].

Para entender el origen de las estructuras observadas hoy en día, es usual emplear teoría de perturbaciones a partir de una configuración homogénea y de ella obtener la evolución de las inhomogeneidades. En otras palabras, queremos saber como pequeñas inhomogeneidades en la distribución de materia evolucionan en tiempo y espacio. Actualmente se piensa que las anisotropías observadas en el CMB tuvieron origen en las perturbaciones primordiales de la densidad en el universo primitivo, y de hecho las anisotropías del CMB proveen estimaciones para parámetros como los de slow-roll (e.g. Fig. 3.17) que nos pueden ayudar a descartar modelos inflacionarios.

Al analizar la teoría de perturbaciones, dos espacio-tiempos están involucrados: el *ficticio* o no-perturbado cuya descripción idealizada suele ser conocida y sirve como el espacio-tiempo de “fondo”; y el *físico* que está perturbado y se considera como el espacio-tiempo “real”. En cosmología usualmente se toma el espacio-tiempo de FRW como el fondo, por lo cual el tratamiento realizado en el Capítulo 3 será válido a orden cero en las perturbaciones, y las predicciones sobre el origen de estructura estarán dadas en términos de las perturbaciones.

Las observaciones del CMB (ver Figura 2.1) muestran un gran éxito de la teoría de perturbaciones. Estas muestran que en la superficie de última dispersión el universo era casi totalmente homogéneo, esto es, las inhomogeneidades solo contribuían a un orden de  $10^{-5}$ . Es por esto que en el presente capítulo se asume que a lo largo de la



**Figura 6.1:** Diagrama esquemático (no a escala) de la evolución de las perturbaciones cuánticas generadas durante la inflación. El radio comóvil de Hubble (*horizonte*) decrece durante inflación y crece en la evolución posterior del universo. Esto implica que las escalas comóviles ( $k^{-1}$ ) pueden salir del horizonte durante la inflación y posteriormente reentran para evolucionar en anisotropías en el CMB y perturbaciones en la estructura a gran escala. La física causal no puede actuar sobre las perturbaciones en el superhorizonte y estas se *congelan* hasta que vuelven a entrar al horizonte. Esta evolución temporal debe tenerse en cuenta para relacionar las observaciones cosmológicas con las perturbaciones primordiales establecidas por la inflación.

evolución del universo, en general, cualquier desviación de la homogeneidad e isotropía será pequeña y por lo tanto puede tratarse mediante la teoría lineal de perturbaciones. De acuerdo a la Figura 6.1 la evolución de las perturbaciones cosmológicas tendrá tres etapas [11]: (1) el origen de las fluctuaciones cuánticas cuando salen del horizonte (subhorizonte) durante inflación<sup>1</sup>; (2) la evolución de estas mientras están fuera del horizonte (superhorizonte), la cual está descrita por la suposición de *universo separado*<sup>2</sup>; y (3) su subsecuente evolución está descrita por el formalismo usual de la teoría perturbativa cosmológica de primer orden.

La idea básica consiste en perturbar la métrica  $g_{ab}$  y el tensor energía-momento de fondo  $T_{ab}$ , de tal forma que las cantidades perturbadas difieran de sus respectivas cantidades de fondo por valores pequeños, i.e.  $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta g_{ab}$  y  $T_{ab} \rightarrow T_{ab} + \delta T_{ab}$ . A través de este procedimiento se linealizan las ecuaciones de campo en las perturbaciones  $\delta g_{ab}$  y  $\delta T_{ab}$ , obteniendo un sistema de ecuaciones diferenciales lineales para las perturbaciones de la métrica y de la materia<sup>3</sup>. Sin embargo, la teoría de perturbaciones presenta

<sup>1</sup>Una descripción a segundo orden será necesaria cuando fenómenos como la no-gaussianidad entren en juego. Sin embargo en este trabajo no se consideran.

<sup>2</sup>La *conjetura* del universo separado establece que una perturbación de densidad se comporta localmente (es decir, en escalas mucho más pequeñas que la longitud de onda del modo) como un universo separado con diferente densidad y curvatura de fondo.

<sup>3</sup>A partir de la siguiente sección denotaremos a las perturbaciones por un superíndice del lado

el problema de la *libertad de norma*, esto significa que al comparar cantidades de los espacio-tiempos perturbado y de fondo existe una arbitrariedad respecto a la elección de la manera en que se realiza la identificación de los puntos en un espacio-tiempo con los del otro. Para lidiar con este problema existen al menos dos alternativas [35]: (1) fijar la norma, o (2) emplear cantidades invariantes de norma. En el presente texto usaremos en su mayoría el segundo enfoque a menos que se especifique lo contrario.

El presente capítulo está dedicado a describir la teoría perturbativa lineal aplicado a un espacio-tiempo arbitrario para posteriormente tomar como caso específico el espacio-tiempo de FRW como fondo. También el formalismo de invariantes de norma es presentado y usado para describir la dinámica en dos escenarios: (1) el correspondiente a la RG más un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad y que corresponde a la inflación estándar, y (2) el descrito por teorías  $f(R)$ . Finalmente se hace la conexión en ambos escenarios con los observables cosmológicos. Los textos que fueron de gran ayuda para construir este capítulo son [8, 35, 92, 125].

## 6.1. Teoría lineal de perturbaciones cosmológicas

Antes de analizar la teoría lineal de perturbaciones cosmológicas en la gravedad  $f(R)$ , lo haremos primero en RG ya que las ecuaciones de campo son muy similares y difieren por un término de  $\mathcal{T}_{ab}^{(eff)}$ . Para ello estudiaremos la pequeña desviación de una métrica física  $g_{ab}$ , también llamada métrica perturbada, la cual se descompone en términos de una métrica de fondo, o no perturbada, y una parte asociada a la perturbación; es decir, como una familia uniparamétrica de soluciones

$$g_{ab}(\lambda) = \bar{g}_{ab} + \lambda h_{ab}, \quad (6.1)$$

siendo  $\bar{g}_{ab}$  la métrica del fondo, la cual se asume es una solución conocida de las ecuaciones de campo pero por el momento arbitraria. En lo sucesivo las cantidades con barra caracterizarán valores del fondo. Por otro lado,  $h_{ab}$  es la perturbación a la métrica la cual se considera pequeña<sup>4</sup> y, como ya mencionamos, en este capítulo sólo se consideran perturbaciones lineales en el parámetro  $\lambda$ .

Notemos que la inversa de la métrica física es

$$g^{ab}(\lambda) = \bar{g}^{ab} - \lambda \bar{g}^{ac} \bar{g}^{bd} h_{cd}, \quad (6.2)$$

lo cual es válido a primer orden en  $\lambda$ , como se muestra a continuación:

$$g^{ab} g_{bc} = (\bar{g}^{ab} - \lambda \bar{g}^{ae} \bar{g}^{bf} h_{ef}) (\bar{g}_{bc} + \lambda h_{bc}) = \delta^a_c + \lambda \bar{g}^{ab} h_{bc} - \lambda \bar{g}^{ae} \bar{g}^{bf} h_{ef} \bar{g}_{bc} + \mathcal{O}(\lambda^2) = \delta^a_c, \quad (6.3)$$

donde en la última igualdad se usó que  $\lambda \bar{g}^{ae} \bar{g}^{bf} h_{ef} \bar{g}_{bc} = \lambda \bar{g}^{ae} h_{ec} = \lambda \bar{g}^{ab} h_{bc}$ .

---

izquierdo de la cantidad a perturbar, etiquetando el orden de la perturbación; e.g.  ${}^{(1)}T_{ab}$  se usa en lugar de  $\delta T_{ab}$ . El único caso que no seguirá esto es la métrica, donde la perturbación será denotada por  $h_{ab}$ .

<sup>4</sup>Podríamos elegir  $\lambda h_{ab} \rightarrow h_{ab}$ , donde  $|\lambda| \ll 1$  es absorbida dentro las componentes de  $h_{ab}$ . De hecho, en las siguientes secciones implementaremos esto, es decir, por simplicidad se absorberá el parámetro  $\lambda$  dentro de  $h_{ab}$  para simplificar la notación.



Por lo anterior es conveniente definir<sup>5</sup>

$$h^{ab} \equiv \bar{g}^{ac} \bar{g}^{bd} h_{cd}, \quad (6.4)$$

es decir, los índices de  $h^{ab}$  ( $h_{ab}$ ) se *bajan* (*suben*) con la métrica de fondo  $\bar{g}_{ab}$  ( $\bar{g}^{ab}$ ).

Denotemos por  $\nabla_a$  a la derivada covariante compatible con la métrica física, es decir  $\nabla_c g_{ab}(\lambda) = 0$  y  $\bar{\nabla}_a$  la derivada covariante compatible con la métrica de fondo, i.e.  $\bar{\nabla}_c \bar{g}_{ab} = 0$ . De acuerdo con el análisis usual de la Geometría Diferencial, la *diferencia* entre las derivadas  $\nabla_a$  y  $\bar{\nabla}_a$  es determinado por la conexión  $C^c_{ab}$  dada por [125]

$$C^c_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2} g^{cd} (\bar{\nabla}_a g_{bd} + \bar{\nabla}_b g_{da} - \bar{\nabla}_d g_{ab}). \quad (6.5)$$

En particular notemos que la conexión toma una forma conveniente al emplear (6.1) y (6.2), i.e.

$$\begin{aligned} C^c_{ab}(\lambda) &= \frac{1}{2} (\bar{g}^{cd} - \lambda h^{cd}) (\bar{\nabla}_a (\lambda h_{bd}) + \bar{\nabla}_b (\lambda h_{da}) - \bar{\nabla}_d (\lambda h_{ab})) \\ &= \frac{\lambda}{2} \bar{g}^{cd} (\bar{\nabla}_a h_{bd} + \bar{\nabla}_b h_{da} - \bar{\nabla}_d h_{ab}) + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned}$$

Notemos que la conexión no tiene contribuciones a orden cero, y por lo tanto es una cantidad puramente de primer orden en  $\lambda$ :

$$\boxed{{}^{(1)}C^c_{ab} = \frac{1}{2} \bar{g}^{cd} (\bar{\nabla}_a h_{bd} + \bar{\nabla}_b h_{da} - \bar{\nabla}_d h_{ab})}. \quad (6.6)$$

### 6.1.1. Desarrollo del tensor de Riemann

Usando que la conexión se relaciona con la diferencia de dos operadores derivada diferentes mediante:

$$(\bar{\nabla}_b - \nabla_b) \omega_c = C^d_{bc} \omega_d, \quad (6.7)$$

entonces

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c = \bar{\nabla}_a (\bar{\nabla}_b \omega_c - C^d_{bc} \omega_d) - C^e_{ab} (\bar{\nabla}_e \omega_c - C^d_{ec} \omega_d) - C^e_{ac} (\bar{\nabla}_b \omega_e - C^d_{be} \omega_d), \quad (6.8)$$

donde por definición del tensor de Riemann tenemos

$$\begin{aligned} R_{abc}{}^d \omega_d &= (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c \\ &= \bar{\nabla}_a (\bar{\nabla}_b \omega_c - C^d_{bc} \omega_d) - C^e_{ab} (\bar{\nabla}_e \omega_c - C^d_{ec} \omega_d) - C^e_{ac} (\bar{\nabla}_b \omega_e - C^d_{be} \omega_d) \\ &\quad - \bar{\nabla}_b (\bar{\nabla}_a \omega_c - C^d_{ac} \omega_d) + C^e_{ba} (\bar{\nabla}_e \omega_c - C^d_{ec} \omega_d) + C^e_{bc} (\bar{\nabla}_a \omega_e - C^d_{ae} \omega_d) \\ &= \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \omega_c - \bar{\nabla}_b \bar{\nabla}_a \omega_c - \omega_d \bar{\nabla}_a C^d_{bc} + C^e_{ca} C^d_{be} \omega_d + \omega_d \bar{\nabla}_b C^d_{ac} - C^e_{bc} C^d_{ae} \omega_d \\ &= \bar{R}_{abc}{}^d \omega_d - \omega_d \bar{\nabla}_a C^d_{bc} + C^e_{ca} C^d_{be} \omega_d + \omega_d \bar{\nabla}_b C^d_{ac} - C^e_{bc} C^d_{ae} \omega_d, \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Notemos que esta definición es por simplicidad y bajo esta definición (6.2) tendrá un signo negativo, i.e.  $g^{ab} = \bar{g}^{ab} - \lambda h^{ab}$ , el cual no parece ser *natural*. Por ejemplo, en el texto de Weinberg [129] la definición (6.4) incluye el signo negativo resolviendo lo anterior.

por lo tanto

$$R_{abc}{}^d(\lambda) = \bar{R}_{abc}{}^d - 2\bar{\nabla}_{[a}C^d{}_{b]c} + 2C^e{}_{c[a}C^d{}_{b]e}. \quad (6.9)$$

Usando (6.6) y que los productos de conexiones son términos de segundo orden obtenemos que

$$\begin{aligned} R_{abc}{}^d &= \bar{R}_{abc}{}^d - \bar{\nabla}_a C^d{}_{bc} + \bar{\nabla}_b C^d{}_{ac} + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \bar{R}_{abc}{}^d - \frac{\lambda}{2} \bar{g}^{de} \bar{\nabla}_a (\bar{\nabla}_b h_{ce} + \bar{\nabla}_c h_{eb} - \bar{\nabla}_e h_{bc}) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \bar{g}^{de} \bar{\nabla}_b (\bar{\nabla}_a h_{ce} + \bar{\nabla}_c h_{ea} - \bar{\nabla}_e h_{ac}) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \bar{R}_{abc}{}^d - \frac{\lambda}{2} \left[ \bar{g}^{de} (\bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b h_{ce} + \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_c h_{eb}) - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^d h_{bc} \right. \\ &\quad \left. - \bar{g}^{de} (\bar{\nabla}_b \bar{\nabla}_a h_{ce} + \bar{\nabla}_b \bar{\nabla}_c h_{ea}) + \bar{\nabla}_b \bar{\nabla}^d h_{ac} \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \bar{R}_{abc}{}^d + \lambda {}^{(1)}R_{abc}{}^d + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned}$$

Entonces a primer orden en  $\lambda$  tenemos

$$\boxed{{}^{(1)}R_{abc}{}^d = -\bar{g}^{de} (\bar{\nabla}_{[a} \bar{\nabla}_{b]} h_{ce} + \bar{\nabla}_{[a} \bar{\nabla}_c h_{e|b]}) + \bar{\nabla}_{[a} \bar{\nabla}^d h_{b]c}.} \quad (6.10)$$

### 6.1.2. Desarrollo del tensor de Ricci

Para el tensor de Ricci usamos

$$R_{ab}(\lambda) = \bar{R}_{ab} - 2\bar{\nabla}_{[a}C^c{}_{b]} + 2C^e{}_{b[a}C^c{}_{c]e}, \quad (6.11)$$

y análogamente al cálculo de (6.10)

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \bar{R}_{ab} - \frac{\lambda}{2} (\bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^c h_{bc} - \bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_a h_{bc} + \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b h^c{}_c - \bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_b h_{ca} - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^c h_{cb} + \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c h_{ab}) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \bar{R}_{ab} + \frac{\lambda}{2} (\bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_a h_{bc} - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b h^c{}_c + \bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_b h_{ca} - \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c h_{ab}) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \bar{R}_{ab} + \lambda {}^{(1)}R_{ab} + \mathcal{O}(\lambda^2), \end{aligned}$$

o bien

$$\boxed{{}^{(1)}R_{ab} = \frac{1}{2} (2\bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_{(a} h_{b)c} - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b h - \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c h_{ab}),} \quad (6.12)$$

donde  $h \equiv h^c{}_c = \bar{g}^{ac} h_{ac}$  es la traza del tensor  $h_{ab}$ . Notemos que (6.12) coincide con (6.10) al contraer los índices  $b$  y  $d$ .

### 6.1.3. Desarrollo del escalar de Ricci

Para el escalar de curvatura tenemos que

$$R(\lambda) = g^{ab}(\lambda)R_{ab}(\lambda) = \bar{R} - 2g^{ab}\bar{\nabla}_{[a}C^c{}_{c]b} + 2g^{ab}C^e{}_{b[a}C^c{}_{c]e}, \quad (6.13)$$

lo cual, explícitamente

$$\begin{aligned}
R &= (\bar{g}^{ab} - \lambda h^{ab}) \left( \bar{R}_{ab} + \frac{\lambda}{2} (2\bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_{(a} h_{b)c} - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b h - \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c h_{ab}) \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= \bar{R} - \lambda h^{ab} \bar{R}_{ab} + \frac{\lambda}{2} \bar{g}^{ab} (2\bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_{(a} h_{b)c} - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b h - \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c h_{ab}) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= \bar{R} - \lambda [h^{ab} \bar{R}_{ab} - \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b h_{ab} + \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c h] + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= \bar{R} + \lambda^{(1)} R + \mathcal{O}(\lambda^2),
\end{aligned}$$

entonces

$$\boxed{{}^{(1)}R = -h^{ab} \bar{R}_{ab} + \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b h_{ab} - \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c h.} \quad (6.14)$$

#### 6.1.4. Desarrollo del tensor de Einstein

Por último, usando la definición del tensor de Einstein

$$G_{ab}(\lambda) = R_{ab}(\lambda) - \frac{1}{2} g_{ab}(\lambda) R(\lambda), \quad (6.15)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
G_{ab}(\lambda) &= \bar{R}_{ab} + \frac{\lambda}{2} (\bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_a h_{bc} - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b h + \bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_b h_{ca} - \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c h_{ab}) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\bar{g}_{ab} + \lambda h_{ab}) [\bar{R} - \lambda (h^{cd} \bar{R}_{cd} - \bar{\nabla}^c \bar{\nabla}^d h_{cd} + \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c h)] + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= \bar{G}_{ab} + \frac{\lambda}{2} \left[ \bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_a h_{bc} - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b h + \bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_b h_{ca} - \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c h_{ab} \right. \\
&\quad \left. + \bar{g}_{ab} (h^{cd} \bar{R}_{cd} - \bar{\nabla}^c \bar{\nabla}^d h_{cd} + \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c h) - h_{ab} \bar{R} \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= \bar{G}_{ab} + \lambda^{(1)} G_{ab} + \mathcal{O}(\lambda^2),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\boxed{{}^{(1)}G_{ab} = \frac{1}{2} \left[ 2\bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_{(a} h_{b)c} - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b h - \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c h_{ab} - h_{ab} \bar{R} \right.} \\ \left. + \bar{g}_{ab} (h^{cd} \bar{R}_{cd} - \bar{\nabla}^c \bar{\nabla}^d h_{cd} + \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c h) \right].} \quad (6.16)$$

Notemos que la introducción de una nueva variable

$$\tilde{h}_{ab} \equiv h_{ab} - \frac{1}{2} \bar{g}_{ab} h, \quad (6.17)$$

nos permitirá simplificar (6.16), esto es:

$$\boxed{{}^{(1)}G_{ab} = \bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_{(a} \tilde{h}_{b)c} - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c \tilde{h}_{ab} - \frac{1}{2} \bar{g}_{ab} \bar{\nabla}^c \bar{\nabla}^d \tilde{h}_{cd} + \frac{1}{2} \bar{R}_{cd} (\bar{g}_{ab} \tilde{h}^{cd} - \tilde{h}_{ab} \bar{g}^{cd}).} \quad (6.18)$$

Cabe destacar que tanto en la ecuación (6.16) como en (6.18) dos términos dependen del tensor de Ricci del espacio-tiempo del fondo, y por lo tanto las expresiones se simplifican si estamos considerando perturbaciones al fondo de Minkowski o en una solución en vacío (i.e.  $\bar{R}_{ab} = 0$ ).

También, es posible reescribir el primer factor en términos del tensor de Riemann, es decir

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_{(a} \tilde{h}_{b)c} &= \frac{1}{2} g^{cf} \left[ \bar{\nabla}_f \bar{\nabla}_a \tilde{h}_{bc} + \nabla_f \nabla_b \tilde{h}_{ac} \right] \\ &= \frac{1}{2} g^{cf} \left[ \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_f \tilde{h}_{bc} + \bar{R}_{fab}{}^e \tilde{h}_{ec} + \bar{R}_{fac}{}^e \tilde{h}_{be} + \bar{\nabla}_b \bar{\nabla}_f \tilde{h}_{ac} + \bar{R}_{fba}{}^e \tilde{h}_{ec} + \bar{R}_{fbc}{}^e \tilde{h}_{ae} \right] \\ &= \bar{\nabla}_{(a} \bar{\nabla}^c \tilde{h}_{b)c} + \bar{R}^c{}_{(ab)}{}^e \tilde{h}_{ec} + \bar{R}_{(a}{}^c \tilde{h}_{b)c},\end{aligned}$$

donde se usó que  $(\bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b - \bar{\nabla}_b \bar{\nabla}_a) \tilde{h}_{cd} = \bar{R}_{abc}{}^e \tilde{h}_{ed} + \bar{R}_{abd}{}^e \tilde{h}_{ce}$ , además de poder quitar la notación de simetrización en el segundo término puesto que este es ya simétrico en los subíndices<sup>6</sup>  $a$  y  $b$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}{}^{(1)}G_{ab} &= \bar{\nabla}_{(a} \bar{\nabla}^c \tilde{h}_{b)c} - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c \tilde{h}_{ab} - \frac{1}{2} \bar{g}_{ab} \bar{\nabla}^c \bar{\nabla}^d \tilde{h}_{cd} \\ &\quad + \bar{R}^c{}_{ab}{}^e \tilde{h}_{ec} + \bar{R}_{(a}{}^c \tilde{h}_{b)c} + \frac{1}{2} \bar{R}_{cd} \left( \bar{g}_{ab} \tilde{h}^{cd} - \tilde{h}_{ab} \bar{g}^{cd} \right).\end{aligned}\quad (6.19)$$

Expresión que coincide con la obtenida en [7, 23]. También debemos destacar nuevamente que (6.19) es válida para un espacio-tiempo de fondo arbitrario.

## 6.2. Perturbaciones lineales a un fondo FRW

En nuestro caso estamos interesados en pequeñas desviaciones del espacio-tiempo homogéneo e isotrópico, es por eso que en lo sucesivo tomaremos al fondo como el espacio-tiempo de FRW. La motivación principal es que las observaciones demuestran que a grandes escalas el universo es muy homogéneo e isotrópico. Un resultado importante es que, las soluciones físicas razonables de las ecuaciones de campo linealizadas, corresponden a soluciones de las ecuaciones completas no-lineales del espacio-tiempo FRW ligeramente perturbado [33]. Por tanto, la teoría de perturbaciones lineales está matemáticamente bien definida.

La métrica del fondo (cf. ec. (2.2)) tiene la forma

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (6.20)$$

donde,  $\gamma_{ij}$  se define como la 3-métrica conforme inducida en la hipersuperficie espacial  $\Sigma_t$ , la cual, de momento, no necesariamente es plana, i.e.

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2. \quad (6.21)$$

<sup>6</sup>Esto es directo de las propiedades del tensor de Riemann y por las simetría de  $\tilde{h}_{ec}$ , i.e.

$$\bar{R}^c{}_{ab}{}^e \tilde{h}_{ec} = \bar{g}^{cd} \bar{g}^{ef} \bar{R}_{dabf} \tilde{h}_{ec} = \bar{g}^{cd} \bar{g}^{ef} \bar{R}_{fbad} \tilde{h}_{ec} = \bar{g}^{ed} \bar{g}^{cf} \bar{R}_{fbad} \tilde{h}_{ce} = \bar{R}^c{}_{ba}{}^e \tilde{h}_{ec}.$$

Por otro lado, las ecuaciones de Einstein son ecuaciones diferenciales de segundo orden no-lineales y acopladas, lo que en principio las hace complicadas, relacionando las perturbaciones métricas con las perturbaciones del tensor energía-momento. Sin embargo, las simetrías del espacio-tiempo FRW permiten separar a las perturbaciones en sus partes escalares, vectoriales y tensoriales, las cuales evolucionan independientemente (a orden lineal). Esta clasificación es debida al comportamiento de  $h_{ab}$  ante transformaciones de coordenadas espaciales en hipersuperficies con  $t$  constante [119]. Esto nos permite reducir a las ecuaciones de campo como un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales desacopladas.

Una virtud de lo anterior es que, como veremos más adelante, las perturbaciones vectoriales no son creadas por la inflación o en dado caso decaen rápidamente en un universo en expansión y las perturbaciones tensoriales conducen a ondas gravitacionales, las cuales no se acoplan con la densidad de energía y con las inhomogeneidades de presión. Sin embargo, las perturbaciones escalares pueden conducir a inhomogeneidades que evolucionan con el tiempo, las cuales tienen un impacto importante en la dinámica de la materia [92]. Esto nos permite analizar cada tipo de componentes por separado y, una vez que regresemos al estudio de la inflación, tomar las perturbaciones vectoriales idénticamente cero.

### 6.2.1. Descomposición escalar-vectorial-tensorial

Como recién mencionamos, el carácter tensorial de las ecuaciones de Einstein hace que, en general, tengamos un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. Sin embargo usando una cierta descomposición es posible desacoplar las ecuaciones en modos diferentes [35].

#### Perturbaciones escalares

Si separamos la perturbación  $h_{ab}$  en componentes temporal, temporal-espacial y espacial, entonces es sencillo ver que una función escalar  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  caracteriza a la componente  $h_{00}$ . Para  $h_{0i}$  la idea es similar, pero ahora la única alternativa es con una derivada covariante con respecto a la 3-métrica de fondo  $\gamma_{ij}$ , i.e.,  $D_i\mathcal{B}$ , donde

$$D_k\gamma_{ij} = 0. \quad (6.22)$$

Notemos que si  $K = 0$  en (6.21) recuperamos un espacio plano y por lo tanto  $\gamma_{ij} \rightarrow \delta_{ij}$  y además  $D_i \rightarrow \partial_i$ .

Por último para  $h_{ij}$  hay dos formas de caracterizarla mediante funciones escalares, una es multiplicando a la 3-métrica  $\gamma_{ij}$  por una función escalar arbitraria  $\mathcal{D}$  y la segunda es como una doble derivada covariante de una función  $\mathcal{E}$ .

En resumen, para las perturbaciones escalares:

$$h_{00}^{\text{esc}} = -2\mathcal{A}, \quad (6.23a)$$

$$h_{0i}^{\text{esc}} = -a(t)D_i\mathcal{B}, \quad (6.23b)$$

$$h_{ij}^{\text{esc}} = 2a^2(t)(\mathcal{D}\gamma_{ij} - D_iD_j\mathcal{E}), \quad (6.23c)$$

siendo los signos y factores de 2 una convención<sup>7</sup>.

Entonces la forma más general de la perturbación métrica en términos de las perturbaciones escalares es caracterizada por cuatro funciones escalares arbitrarias  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$ , las cuales son funciones de las coordenadas espacio-temporales.

### Perturbaciones vectoriales

Siguiendo la misma idea, las perturbaciones vectoriales puede construirse usando los 3-vectores  $\mathcal{C}^i$  y  $\mathcal{V}^i$  que están restringidos por

$$D_k \mathcal{C}^k = D_k \mathcal{V}^k = 0. \quad (6.24)$$

Esta condición está bien motivada puesto que si, por ejemplo,  $D_k \mathcal{C}^k \neq 0$ , entonces por el *Teorema de Helmholtz* podríamos separar  $\mathcal{C}^k$  en un vector sin 3-divergencia y un 3-gradiente de una función escalar, pero esto no sería una perturbación vectorial en estricto sentido.

En resumen, para las perturbaciones vectoriales:

$$h_{00}^{\text{vec}} = 0, \quad (6.25a)$$

$$h_{0i}^{\text{vec}} = -a(t)\mathcal{C}_i, \quad (6.25b)$$

$$h_{ij}^{\text{vec}} = a^2(t)(D_i \mathcal{V}_j + D_j \mathcal{V}_i), \quad (6.25c)$$

donde los índices se bajan (suben) con la 3-métrica  $\gamma_{ij}$  ( $\gamma^{ij}$ ).

### Perturbaciones tensoriales

Las perturbaciones tensoriales son implementadas usando un 3-tensor simétrico, con 3-divergencia nula y sin traza<sup>8</sup>,  $h_{ij}^{\text{TT}}$  (TT por sus siglas en inglés *transverse-traceless*), es decir

$$h_{ij}^{\text{TT}} = h_{ji}^{\text{TT}}, \quad (6.26a)$$

$$D^i h_{ij}^{\text{TT}} = 0, \quad (6.26b)$$

$$(h^{\text{TT}})^k_k = 0, \quad (6.26c)$$

por lo tanto  $h_{ij}^{\text{TT}}$  no contiene partes que transformen como escalares o vectores.

Entonces, las perturbaciones tensoriales son simplemente

$$h_{00}^{\text{ten}} = 0, \quad (6.27a)$$

$$h_{0i}^{\text{ten}} = 0, \quad (6.27b)$$

$$h_{ij}^{\text{ten}} = a^2(t)h_{ij}^{\text{TT}}. \quad (6.27c)$$

<sup>7</sup>Notemos que los factores de  $a(t)$  en (6.23b) y (6.23c) también se introducen por convención y no hay pérdida de generalidad puesto que las ecuaciones (6.23) no involucran derivadas temporales (de hecho esto se cumple también en las perturbaciones vectoriales y tensoriales), entonces esto es un simple reescalamiento de las funciones escalares, i.e.  $\mathcal{B}(t, x^k) \rightarrow a(t)\mathcal{B}(t, x^k)$ . Si empleáramos el tiempo conforme  $\eta$  entonces sería conveniente reescalar las cuatro funciones escalares por un factor de  $a^2$ .

<sup>8</sup>Al exigir que  $h_{ij}^{\text{TT}}$  no tenga traza, no perdemos generalidad, ya que cualquier parte de la traza se puede absorber en  $\mathcal{D}$ .

Cabe señalar que  $h_{ab}$  tiene 10 componentes algebraicamente independientes (por su simetría) las cuales están representadas por 4 de las perturbaciones escalares, 4 de las perturbaciones vectoriales (2 por cada 3-vector) y 2 de las perturbaciones tensoriales (por las constricciones de  $h_{ij}^{\text{TT}}$ ). De hecho, de estas 10 componentes, 4 se pueden fijar puesto que tenemos la libertad de transformar nuestras coordenadas  $(t, x^i)$  sin cambiar ninguna cantidad física. Las transformaciones de coordenadas infinitesimales, llamadas transformaciones de norma, dan como resultado cambios en los campos  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}^i, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{V}^i, h_{ij}^{\text{TT}})$  puesto que el intervalo  $ds^2$  debe ser invariante bajo transformaciones de coordenadas generales [35].

Finalmente, el *Teorema de la Descomposición* (cf. [35]) establece que, a primer orden, las perturbaciones de cierto tipo (escalares, vectoriales o tensoriales) evolucionan de manera independiente<sup>9</sup>. Esto significa que si algún proceso físico genera perturbaciones tensoriales, estas no generan perturbaciones escalares conforme evolucionan. De manera análoga, para determinar la evolución de perturbaciones escalares, no nos preocuparemos por perturbaciones vectoriales o tensoriales. La razón principal por la que el Teorema de la Descomposición se satisface es porque la métrica FRW de fondo es espacialmente isotrópica. Más adelante nos concentraremos en las perturbaciones puramente escalares, puesto que estas serán las que exhiban inestabilidades y pueden conducir a la formación de estructura, y las perturbaciones tensoriales, las cuales involucran ondas gravitacionales.

Entonces podemos reconstruir la forma total de la perturbación con esta descomposición como

$$h_{ab} = h_{ab}^{\text{esc}} + h_{ab}^{\text{vec}} + h_{ab}^{\text{ten}}, \quad (6.28)$$

o de forma explícita

$$h_{00} = -2\mathcal{A}, \quad (6.29a)$$

$$h_{0i} = -a(t) (D_i \mathcal{B} + \mathcal{C}_i), \quad (6.29b)$$

$$h_{ij} = a^2(t) [2\mathcal{D}\gamma_{ij} - 2D_i D_j \mathcal{E} + D_i \mathcal{V}_j + D_j \mathcal{V}_i + h_{ij}^{\text{TT}}]. \quad (6.29c)$$

Cabe destacar que por la adimensionalidad del tensor métrico y del factor de escala  $a$ , las variables  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}_i$ ,  $\mathcal{D}$  y  $h_{ij}^{\text{TT}}$  son adimensionales. Sin embargo, en unidades naturales,  $[\mathcal{B}] = [\mathcal{V}_i] = (\text{Energía})^{-1} = [\mathcal{E}]^{1/2}$ .

### 6.2.2. Tensor de Einstein

Notemos que con la forma (6.20) para la métrica de fondo y empleando la separación en (6.29) se obtiene la traza de  $h_{ab}$

$$h = \bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h^\mu{}_\mu = -h_{00} + \frac{1}{a^2} \gamma^{jk} h_{jk} = 2\mathcal{A} + 6\mathcal{D} - 2D^k D_k \mathcal{E}, \quad (6.30)$$

<sup>9</sup>Esta nomenclatura se emplea en la literatura, sin embargo cabe destacar que esta descomposición es para 3-escalares, 3-vectores y 3-tensores, y es importante resaltarlo.

entonces la variable  $\tilde{h}_{ab} \equiv h_{ab} - \frac{1}{2}\bar{g}_{ab}h$ , introducida en (6.17), es separada en sus componentes como

$$\tilde{h}_{00} = -\mathcal{A} + 3\mathcal{D} - D^k D_k \mathcal{E}, \quad (6.31a)$$

$$\tilde{h}_{0i} = -a(t) (D_i \mathcal{B} + \mathcal{C}_i), \quad (6.31b)$$

$$\tilde{h}_{ij} = a^2(t) \left[ -(\mathcal{A} + \mathcal{D} - D^k D_k \mathcal{E}) \gamma_{ij} - 2D_i D_j \mathcal{E} + D_i \mathcal{V}_j + D_j \mathcal{V}_i + h_{ij}^{\text{TT}} \right]. \quad (6.31c)$$

Resaltemos que para la métrica FRW (6.20)

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = \frac{1}{2}\bar{g}^{il} (\partial_j \bar{g}_{kl} + \partial_k \bar{g}_{lj} - \partial_l \bar{g}_{jk}) = \frac{1}{2}\gamma^{il} (\partial_j \gamma_{kl} + \partial_k \gamma_{lj} - \partial_l \gamma_{jk}) = {}^{(3)}_{(\gamma)}\Gamma_{jk}^i, \quad (6.32)$$

esto puesto que (6.32) no involucra derivadas temporales y por esto los factores  $a(t)$  no contribuyen, sin embargo debemos tener cuidado en distinguir objetos tales como el tensor de Riemann asociado a la 4-métrica de fondo,  $\bar{R}_{abc}{}^d$ , y el respectivo asociado a la 3-métrica de fondo,  ${}^{(3)}\bar{R}_{abc}{}^d$ . Con lo anterior en mente podemos reescribir términos que implican a la derivada covariante  $\bar{\nabla}_k$  en términos del operador derivada  $D_k$ , por ejemplo

$$\bar{\nabla}_k \tilde{h}_{ij} = D_k \tilde{h}_{ij} - \tilde{h}_{0j} \bar{\Gamma}^0_{ki} - \tilde{h}_{i0} \bar{\Gamma}^0_{kj}. \quad (6.33)$$

De manera análoga se obtienen relaciones para segundas derivadas covariantes. Con esto, y con las expresiones para las cantidades geométricas de fondo enlistadas en la Sección A.1, es posible ver la forma que toma el tensor de Einstein a primer orden en las perturbaciones (6.19). De acuerdo con lo obtenido en el Apéndice B tenemos que

$${}^{(1)}G^0_0 = \frac{2}{a^2} \left[ \nabla^2 (\mathcal{D} - aH(\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}})) - 3a^2 H (\dot{\mathcal{D}} - HA) + 3K\mathcal{D} \right], \quad (6.34a)$$

$${}^{(1)}G^0_i = \frac{2}{a^2} \left[ a^2 D_i \left( \dot{\mathcal{D}} - HA - \frac{K}{a} (\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}}) \right) - \frac{1}{4} a \nabla^2 (\mathcal{C}_i + a\dot{\mathcal{V}}_i) - \frac{1}{2} a K (\mathcal{C}_i + a\dot{\mathcal{V}}_i) \right], \quad (6.34b)$$

$${}^{(1)}G^i_j = \frac{2}{a^2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \nabla^2 \Upsilon + a^2 \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right) \mathcal{A} + a^2 H \dot{\mathcal{A}} - a^2 \ddot{\mathcal{D}} - 3a^2 H \dot{\mathcal{D}} + K\mathcal{D} \right] \delta^i_j - \frac{1}{2} D^i D_j \Upsilon + \frac{1}{4} D^i \left[ 2aH (\mathcal{C}_j + a\dot{\mathcal{V}}_j) + a\partial_t (\mathcal{C}_j + a\dot{\mathcal{V}}_j) \right] + \frac{1}{4} D_j \left[ 2aH (\mathcal{C}^i + a\dot{\mathcal{V}}^i) + a\partial_t (\mathcal{C}^i + a\dot{\mathcal{V}}^i) \right] + \frac{a^2}{4} \gamma^{im} \left( \ddot{h}_{mj}^{\text{TT}} + 3H \dot{h}_{mj}^{\text{TT}} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 h_{mj}^{\text{TT}} + 2\frac{K}{a^2} h_{mj}^{\text{TT}} \right) \right\}, \quad (6.34c)$$

donde  $\nabla^2 \equiv \gamma^{ij} D_i D_j$  es el laplaciano y se define  $\Upsilon$  mediante

$$\Upsilon \equiv (\mathcal{A} + \mathcal{D}) - aH (\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}}) - \partial_t \left[ a (\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}}) \right]. \quad (6.35)$$



Estas expresiones son un tanto aparatosas, sin embargo hay cierta libertad que uno tiene sobre estas, siendo posible simplificarse en ciertas situaciones. Esto lo veremos en la Sección 6.3. También, cabe resaltar que estas expresiones coinciden con las encontradas en la literatura, e.g. en [92] cuando nos limitamos sólo a perturbaciones escalares; en [119] cuando empleamos las normas longitudinal y vectorial; y, en [23] cuando se toman sólo perturbaciones tensoriales.

Por último, en lo que resta del texto nos centraremos en el caso  $K = 0$ , puesto que la inflación aplanará el universo de todos modos. Por lo tanto las derivadas covariantes asociadas a la 3-métrica son simplemente derivadas parciales ( $D_i \rightarrow \partial_i$ ) puesto que la 3-métrica toma su forma trivial como una *delta de Kronecker* ( $\gamma_{ij} \rightarrow \delta_{ij}$ ). Además, las perturbaciones tensoriales se pueden manejar independientemente y en una discusión posterior. Por otro lado, puesto que las perturbaciones vectoriales son despreciables en la mayoría de los escenarios cosmológicos y, en cualquier caso, estas decaen rápidamente después de que son producidas [35], entonces no las tomaremos en cuenta en el resto del presente texto. De momento sólo quedándonos con las perturbaciones escalares, con lo cual, las ecuaciones (6.34) se reducen a

$${}^{(1)}G^0_0 = \frac{2}{a^2} \left[ \nabla^2 (\mathcal{D} - aH(\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}})) - 3a^2 H (\dot{\mathcal{D}} - HA) \right], \quad (6.36a)$$

$${}^{(1)}G^0_i = 2\partial_i (\dot{\mathcal{D}} - HA), \quad (6.36b)$$

$${}^{(1)}G^i_j = \frac{2}{a^2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \nabla^2 \Upsilon + a^2 \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right) \mathcal{A} + a^2 H \dot{\mathcal{A}} - a^2 \ddot{\mathcal{D}} - 3a^2 H \dot{\mathcal{D}} \right] \delta^i_j - \frac{1}{2} \partial^i \partial_j \Upsilon \right\}. \quad (6.36c)$$

### 6.3. Libertad de norma

En relatividad general una transformación de norma se refiere simplemente a una transformación de coordenadas. Sin embargo, en el contexto perturbativo, estamos tratando con dos espacio-tiempos (el perturbado y el no-perturbado), y por lo tanto necesitamos un mapeo entre estos. De tal forma que dicho mapeo nos relacione puntos en el espacio-tiempo *físico* con puntos en el de *fondo*. No obstante, este mapeo no es único, lo cual nos genera una *libertad de norma*. Es decir, cada elección de una norma nos permite identificar puntos entre el espacio-tiempo de fondo y el físico de manera unívoca<sup>10</sup> (para mas detalles ver [112]).

Una manera natural de entender esta libertad de norma es mediante el equivalente electromagnético. En tal caso, derivadas espacio-temporales del potencial vectorial  $A_a$  contienen toda la información posible de los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$ . Estos

<sup>10</sup>En la práctica y en este contexto, dicha transformación de norma indica como se transforman las componentes de las perturbaciones lineales de tensores ante cambios infinitesimales de coordenadas.

campos físicos se mantienen invariantes si tomamos  $A_a \rightarrow A_a + \partial_a \chi$ , donde  $\chi$  es una función escalar arbitraria, i.e.  $\chi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces hay una libertad residual en elegir el potencial<sup>11</sup>. En el caso tratado en esta sección, una libertad similar existe sin que la elección de la norma afecte cualquier resultado físico.

Para ello, si  $\phi : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo, entonces  $(M, g_{ab})$  y  $(M, \phi^* g_{ab})$  representan el mismo espacio-tiempo físico. Si consideramos una familia uniparamétrica de espacio-tiempos  $(M, g_{ab}(\lambda))$ , entonces  $(M, \phi_\lambda^* g_{ab}(\lambda))$  representa la misma familia uniparamétrica de soluciones físicas, siendo  $\phi_\lambda$  un grupo uniparamétrico arbitrario de difeomorfismos.

En nuestro caso, de la ecuación (6.1) tenemos que

$$h_{ab} = \left. \frac{dg_{ab}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (6.37)$$

y además<sup>12</sup>

$$h'_{ab} = \left. \frac{d(\phi_\lambda^* g_{ab})}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (6.38)$$

las cuales representan la misma perturbación física. De manera directa a partir de estas ecuaciones obtenemos que

$$h'_{ab} = h_{ab} - \mathcal{L}_\xi \bar{g}_{ab}, \quad (6.39)$$

donde  $\xi^a$  es el vector que genera  $\phi_\lambda$  y  $\phi_\lambda^*$  es el *pullback* de  $\phi_\lambda$ . Por lo tanto, la libertad de norma está determinada por la derivada de Lie de la métrica de fondo<sup>13</sup> en la dirección  $\xi^a$  arbitraria, i.e.  $\mathcal{L}_\xi \bar{g}_{ab}$ . En cuyo caso tenemos que

$$\mathcal{L}_\xi \bar{g}_{ab} = \xi^c \nabla_c \bar{g}_{ab} + \bar{g}_{cb} \nabla_a \xi^c + \bar{g}_{ac} \nabla_b \xi^c, \quad (6.41)$$

donde esta expresión se reduce si  $\nabla_a$  es el operador derivada asociado a  $\bar{g}_{ab}$ ,  $\bar{\nabla}_a$ . Por lo tanto la transformación de norma (6.39) toma la forma

$$h'_{ab} = h_{ab} - 2\bar{\nabla}_{(a} \xi_{b)}, \quad (6.42)$$

lo cual resulta análogo a la libertad de norma en electromagnetismo.

<sup>11</sup>En particular, en electromagnetismo, se tiene la *libertad* de elegir  $A^0 = 0$  o bien la norma de Lorenz  $\partial_a A^a = 0$ .

<sup>12</sup>Tenemos que resaltar qué en esta sección y únicamente en esta, usaremos cantidades primadas, i.e.  $A'$  para denotar una transformación de norma y no deben confundirse con derivación respecto al tiempo conforme.

<sup>13</sup>Notemos que esto es válido para todo tensor arbitrario, es decir, sea  $\mathbf{A}$  un tensor de tipo  $(r, s)$  el cual se puede escribir de manera perturbativa (a primer orden) como  $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} + {}^{(1)}\mathbf{A}$ , donde en la misma notación que tenemos,  $\bar{\mathbf{A}}$  es el tensor a orden cero en las perturbaciones y  ${}^{(1)}\mathbf{A}$  a primer orden, por lo tanto, su transformación está determinada por

$${}^{(1)}\mathbf{A}' = {}^{(1)}\mathbf{A} - \mathcal{L}_\xi \bar{\mathbf{A}}, \quad (6.40)$$

siendo  $\xi^a$  el vector que genera el difeomorfismo  $\phi_\lambda$ .

### 6.3.1. Invariantes de norma

En teorías métricas de gravitación, y en el contexto de la teoría lineal de perturbaciones, la elección de coordenadas es a menudo asociado a la elección de norma. La libertad de moverse de una norma a otra es útil cuando se analizan las perturbaciones cosmológicas ya que a menudo las ecuaciones se simplifican en una norma, mientras que las cantidades observables son más naturalmente calculadas en otra. También se pueden tomar combinaciones lineales específicas de las perturbaciones métricas que son invariantes ante transformaciones de norma, esto es lo que nos ocupará en esta sección.

Entonces al enfocarnos en perturbaciones lineales está implícito que las transformaciones de coordenadas son infinitesimales, por lo tanto, mediante un desarrollo de Taylor se obtiene la transformación de coordenadas

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(t, x^k), \quad (6.43)$$

donde el generador  $\xi^a$  puede descomponerse en una parte escalar y otra vectorial mediante

$$\xi^0 = \zeta, \quad (6.44a)$$

$$\xi^i = \varepsilon^i + D^i \chi, \quad (6.44b)$$

siendo  $\varepsilon^i$  un 3-vector con divergencia nula, i.e.  $D_k \varepsilon^k = 0$  [119].

Para aplicar la transformación dada en (6.42), notemos que

$$\begin{aligned} 2\bar{\nabla}_{(\alpha}\xi_{\beta)} &= \bar{g}_{\mu\beta}\bar{\nabla}_\alpha\xi^\mu + \bar{g}_{\mu\alpha}\bar{\nabla}_\beta\xi^\mu \\ &= \bar{g}_{\mu\beta}(\partial_\alpha\xi^\mu + \xi^\nu\Gamma^\mu_{\alpha\nu}) + \bar{g}_{\mu\alpha}(\partial_\beta\xi^\mu + \xi^\nu\Gamma^\mu_{\beta\nu}) \\ &= \bar{g}_{\mu\beta}(\partial_\alpha\xi^\mu + \xi^0\Gamma^\mu_{\alpha 0} + \xi^k\Gamma^\mu_{\alpha k}) + \bar{g}_{\mu\alpha}(\partial_\beta\xi^\mu + \xi^0\Gamma^\mu_{\beta 0} + \xi^k\Gamma^\mu_{\beta k}), \end{aligned}$$

entonces

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\mu\beta}(\partial_\alpha\xi^\mu + \xi^0\Gamma^\mu_{\alpha 0} + \xi^k\Gamma^\mu_{\alpha k}) - \bar{g}_{\mu\alpha}(\partial_\beta\xi^\mu + \xi^0\Gamma^\mu_{\beta 0} + \xi^k\Gamma^\mu_{\beta k}). \quad (6.45)$$

Empleando la métrica (6.20) y usando la descomposición dada en (6.29) obtenemos que

$$\begin{aligned} h'_{00} &= -2\mathcal{A}' = h_{00} + 2\partial_0\xi^0 \\ &= -2\mathcal{A} + 2\dot{\zeta}, \end{aligned}$$

de lo cual tenemos que

$$\boxed{\mathcal{A}' = \mathcal{A} - \dot{\zeta}.} \quad (6.46)$$

De manera análoga tenemos

$$\begin{aligned} h'_{0i} &= -a(D_i\mathcal{B}' + \mathcal{C}'_i) = -a(D_i\mathcal{B} + \mathcal{C}_i) - \bar{g}_{li}(\partial_0\xi^l + \xi^k\Gamma^l_{0k}) + (\partial_i\xi^0 + \xi^l\Gamma^0_{il}) \\ &= -a(D_i\mathcal{B} + \mathcal{C}_i) - a^2\gamma_{li}(\dot{\varepsilon}^l + D^l\dot{\chi} + H(\varepsilon^l + D^l\chi)) + \partial_i\zeta + a^2H(\varepsilon^l + D^l\chi)\gamma_{il} \\ &= -a\left[D_i\left(\mathcal{B} - \frac{1}{a}\zeta + a\dot{\chi}\right) + (\mathcal{C}_i + a\dot{\varepsilon}_i)\right], \end{aligned}$$

donde usamos que  $\partial_i \zeta = D_i \zeta$ . En consecuencia

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} - \frac{1}{a} \zeta + a \dot{\chi}, \quad (6.47a)$$

$$\mathcal{C}'_i = \mathcal{C}_i + a \dot{\varepsilon}_i. \quad (6.47b)$$

También

$$\begin{aligned} h'_{ij} &= a^2 [2\mathcal{D}'\gamma_{ij} - 2D_i D_j \mathcal{E}' + D_i \mathcal{V}'_j + D_j \mathcal{V}'_i + h'^{\text{TT}}_{ij}] \\ &= a^2 [2\mathcal{D}\gamma_{ij} - 2D_i D_j \mathcal{E} + D_i \mathcal{V}_j + D_j \mathcal{V}_i + h^{\text{TT}}_{ij} \\ &\quad - \bar{g}_{lj} (\partial_i \xi^l + \zeta \Gamma^l_{i0} + \xi^k \Gamma^l_{ik}) - \bar{g}_{li} (\partial_j \xi^l + \zeta \Gamma^l_{j0} + \xi^k \Gamma^l_{jk})] \\ &= a^2 [2\mathcal{D}\gamma_{ij} - 2D_i D_j \mathcal{E} + D_i \mathcal{V}_j + D_j \mathcal{V}_i + h^{\text{TT}}_{ij} - D_i \xi_j - H \gamma_{ij} \zeta - D_j \xi_i - H \gamma_{ij} \zeta] \\ &= a^2 [2(\mathcal{D} - H\zeta) \gamma_{ij} - 2D_i D_j (\mathcal{E} + \chi) + D_i (\mathcal{V}_j - \varepsilon_j) + D_j (\mathcal{V}_i - \varepsilon_i) + h^{\text{TT}}_{ij}], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D} - H\zeta, \quad (6.48a)$$

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \chi, \quad (6.48b)$$

$$\mathcal{V}'_i = \mathcal{V}_i - \varepsilon_i, \quad (6.48c)$$

$$h'^{\text{TT}}_{ij} = h^{\text{TT}}_{ij}. \quad (6.48d)$$

Vemos que estos resultados son esperados puesto que las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales no se mezclan [11]. Por ejemplo, una perturbación escalar no genera una perturbación vectorial. Recordemos que, hay cuatro funciones escalares independientes ( $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ), otras cuatro cantidades dentro de las componentes vectoriales ( $\mathcal{C}_i$ ,  $\mathcal{V}_i$ ) y dos dentro de la perturbación tensorial ( $h^{\text{TT}}_{ij}$ ), con lo cual especificamos las 10 componentes algebraicamente independientes.

Es claro que estas 10 cantidades no son invariantes ante transformaciones de norma, a excepción de  $h^{\text{TT}}_{ij}$ ; sin embargo se pueden construir cantidades invariantes como combinaciones de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}_i$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{V}_i$ . Para las perturbaciones escalares, una de las elecciones más populares es la de Bardeen [8], y está constituida por una combinación lineal de las perturbaciones en la métrica de la forma

$$\Psi = \mathcal{A} - \partial_t [a(\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}})], \quad (6.49a)$$

$$\Phi = -\mathcal{D} + aH(\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}}), \quad (6.49b)$$

$$\Theta_i = \mathcal{C}_i + a\dot{\mathcal{V}}_i, \quad (6.49c)$$

$$h_{ij} = h^{\text{TT}}_{ij}. \quad (6.49d)$$

Estas variables son invariantes de norma<sup>14</sup> y pueden considerarse como las perturbaciones físicas del espacio-tiempo ya que no pueden eliminarse mediante una transformación de coordenadas del tipo (6.43). Además notemos que, por las condiciones

<sup>14</sup>Tengamos en cuenta que para (6.49a) y (6.49b), otras convenciones que difieren por un signo son comunes. Además que algunos textos llaman  $\Psi$  a la variable  $\Phi$  en (6.49b). Por ejemplo en el texto de Bardeen [8] llaman  $\Phi_A$  a la expresión de  $\Psi$  del presente texto, así como  $\Phi_H \rightarrow -\Phi$ . En esta tesis nos apegamos a la notación de Dodelson [35] en la medida de lo posible.

(6.24),  $D_k \Theta^k = 0$ . Con estas relaciones parece claro el origen de la separación “ad hoc” propuesta en las ecuaciones (6.36), en particular, estas toman la forma (después de hacerlas invariantes, cf. Apéndice B)

$${}^{(1)}G^{(\text{IN})0} = \frac{2}{a^2} \left[ -\nabla^2 \Phi + 3a^2 H (\dot{\Phi} + H\Psi) \right], \quad (6.50a)$$

$${}^{(1)}G^{(\text{IN})0}_i = -2\partial_i (\dot{\Phi} + H\Psi), \quad (6.50b)$$

$${}^{(1)}G^{(\text{IN})i}_j = \frac{2}{a^2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \nabla^2 \Upsilon + a^2 \ddot{\Phi} + 3a^2 H \dot{\Phi} + a^2 H \dot{\Psi} + a^2 \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right) \Psi \right] \delta^i_j - \frac{1}{2} \partial^i \partial_j \Upsilon \right\}, \quad (6.50c)$$

donde

$$\Upsilon = \Psi - \Phi. \quad (6.51)$$

Destaquemos que para hipersuperficies espaciales la 3-curvatura  ${}^{(3)}R$ , en términos únicamente de perturbaciones escalares y a primer orden en estas, toma la forma (véase Sección B.3)

$${}^{(3)}R = -\frac{4}{a^2} \nabla^2 \mathcal{D}. \quad (6.52)$$

Esta es una razón por la cual a  $\mathcal{D}$  se le conoce en la literatura como *perturbación de curvatura*.

Por otro lado, como ejemplo, en la llamada *norma longitudinal* (también llamada *conforme-newtoniana*), en la cual  $\mathcal{B} = \mathcal{E} = 0$ , tenemos que

$$\Psi^{(\text{long})} = \mathcal{A}, \quad (6.53a)$$

$$\Phi^{(\text{long})} = -\mathcal{D}. \quad (6.53b)$$

En esta norma, es directo que

$${}^{(3)}R^{(\text{long})} = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \Phi^{(\text{long})}. \quad (6.54)$$

Usualmente la forma más fácil de derivar ecuaciones invariantes de norma es a través de la norma longitudinal. Por ejemplo, después de obtener las ecuaciones en esta norma, simplemente se reemplazan las variables de las perturbaciones por las cantidades invariantes de norma correspondientes, i.e.,  $\Psi^{(\text{long})} \rightarrow \Psi$  y  $\Phi^{(\text{long})} \rightarrow \Phi$  [119]. Los invariantes (6.49) son muy importantes puesto que son útiles para pasar de una norma a otra, es decir, podemos hacer cálculos en una norma en la cual las ecuaciones sean relativamente simples, construir las variables invariantes de norma, y entonces cambiar a alguna otra norma. Para un breve glosario de normas populares ver Apéndices de la referencia [11]. En lo que resta del presente capítulo nos centraremos en cantidades invariantes de norma.

## 6.4. Inflación con un campo escalar

Como primer acercamiento al estudio de las perturbaciones primordiales repasaremos el tratamiento clásico de un universo temprano dominado por un campo escalar.

Ya vimos como se aplican las perturbaciones de la métrica a cantidades geométricas (cf. Sección 6.1), pero, para obtener una descripción de las ecuaciones de Einstein perturbadas, necesitamos perturbar las contribuciones de la materia. En nuestro caso estamos interesados en el universo inflacionario, por lo cual las contribuciones como radiación y materia bariónica se desprecian, sin embargo destaquemos que en la literatura hay una amplia gama de textos que ofrecen una buena descripción para las perturbaciones de materia, por ejemplo ver las referencias [11, 35, 129].

### 6.4.1. Perturbaciones escalares

Como vimos en la Sección 3.5, el tensor de energía-momento de un campo escalar puede ser descrito por (cf. ec. (3.24))

$$T_{ab}^{(\phi)} = \partial_a \phi \partial_b \phi - g_{ab} \left( \frac{1}{2} \partial_c \phi \partial^c \phi + V(\phi) \right). \quad (6.55)$$

Entonces, estudiando las perturbaciones escalares en primera instancia, consideraremos perturbaciones a un campo escalar en su forma (3.26a). Es decir, como ya es usual, separamos el campo escalar en su parte de fondo y su parte correspondiente a la perturbación. En resumen:

$$g_{ab}(t, \mathbf{x}) = \bar{g}_{ab}(t) + h_{ab}(t, \mathbf{x}), \quad (6.56a)$$

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}), \quad (6.56b)$$

donde por homogeneidad e isotropía del espacio  $\bar{\phi} \equiv \bar{\phi}(t)$  y por lo tanto la dependencia espacial está dentro de la perturbación  $\delta\phi \equiv \delta\phi(t, \mathbf{x})$ . Además,  $h_{ab}$  ha sido descompuesta en la forma dada en las ecs. (6.29), entonces con  $K = 0$  y quedándonos solo con las perturbaciones escalares:

$$h_{00} = -2\mathcal{A}, \quad (6.57a)$$

$$h_{0i} = -a\partial_i \mathcal{B}, \quad (6.57b)$$

$$h_{ij} = 2a^2 (\mathcal{D}\delta_{ij} - \partial_i \partial_j \mathcal{E}), \quad (6.57c)$$

siendo la métrica de fondo FRW plana

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (6.58)$$

Usando la separación (6.56) en (6.55) obtenemos que las componentes del tensor de

energía-momento de fondo para un campo escalar son<sup>15</sup>

$$\bar{T}_{00} = \frac{1}{2}\dot{\bar{\phi}}^2 + V(\bar{\phi}), \quad (6.59a)$$

$$\bar{T}_{0i} = 0, \quad (6.59b)$$

$$\bar{T}_{ij} = \left( \frac{1}{2}\dot{\bar{\phi}}^2 - V(\bar{\phi}) \right) \bar{g}_{ij}. \quad (6.59c)$$

Puesto que por construcción

$$T_{ab} = \bar{T}_{ab} + {}^{(1)}T_{ab} + \mathcal{O}(2), \quad (6.60)$$

entonces es posible obtener la expresión para el tensor de energía-momento a primer orden directamente de (6.55). Esto es

$$\begin{aligned} {}^{(1)}T_{ab} &= (\partial_a \delta\phi) \partial_b \bar{\phi} + \partial_a \bar{\phi} (\partial_b \delta\phi) \\ &\quad + \bar{g}_{ab} \left( \dot{\bar{\phi}} \delta\dot{\phi} - \dot{\bar{\phi}}^2 \mathcal{A} - \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \Big|_{\delta\phi=0} \delta\phi \right) + h_{ab} \left( \frac{1}{2}\dot{\bar{\phi}}^2 - V(\bar{\phi}) \right). \end{aligned} \quad (6.61)$$

Será conveniente extraer sus componentes empleando (6.57) y (6.58). En cuyo caso:

$${}^{(1)}T_{00} = \dot{\bar{\phi}} \delta\dot{\phi} + 2V(\bar{\phi}) \mathcal{A} + \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \delta\phi, \quad (6.62a)$$

$${}^{(1)}T_{0i} = \dot{\bar{\phi}} \partial_i \delta\phi - a \left( \frac{1}{2}\dot{\bar{\phi}}^2 - V(\bar{\phi}) \right) \partial_i \mathcal{B}, \quad (6.62b)$$

$${}^{(1)}T_{ij} = \left[ \dot{\bar{\phi}} \delta\dot{\phi} - \dot{\bar{\phi}}^2 \mathcal{A} - \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \delta\phi + 2 \left( \frac{1}{2}\dot{\bar{\phi}}^2 - V(\bar{\phi}) \right) \mathcal{D} \right] \bar{g}_{ij} - 2a^2 \partial_i \partial_j \mathcal{E} \left( \frac{1}{2}\dot{\bar{\phi}}^2 - V(\bar{\phi}) \right). \quad (6.62c)$$

Notemos que, en analogía con (B.8)

$${}^{(1)}T^a_b = \bar{g}^{ac} {}^{(1)}T_{cb} - h^{ac} \bar{T}_{cb}, \quad (6.63)$$

con lo cual obtenemos las componentes del tensor energía-momento en su forma de índices mixtos

$${}^{(1)}T^0_0 = \dot{\bar{\phi}}^2 \mathcal{A} - \dot{\bar{\phi}} \delta\dot{\phi} - \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \delta\phi, \quad (6.64a)$$

$${}^{(1)}T^0_i = -\dot{\bar{\phi}} \partial_i \delta\phi, \quad (6.64b)$$

$${}^{(1)}T^i_j = \left[ \dot{\bar{\phi}} \delta\dot{\phi} - \dot{\bar{\phi}}^2 \mathcal{A} - \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \delta\phi \right] \delta^i_j. \quad (6.64c)$$

<sup>15</sup>Para no enturbiar aún más la notación omitiremos el superíndice  $\phi$  en el tensor de energía-momento (6.55), pero debemos distinguir entre el tensor asociado al campo escalar  $\phi$  y el proveniente de teorías  $f(R)$  de la Sección 6.5.

Puesto que estamos interesados en un formalismo invariante de norma, a partir de estas cantidades podemos construir las componentes invariantes de norma del tensor de energía-momento (cf. Sección B.2), en analogía con (6.50) tenemos

$${}^{(1)}T^{(\text{IN})0}{}_0 = \dot{\phi}^2 \Psi - \dot{\phi} \dot{\phi} - \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \varphi, \quad (6.65a)$$

$${}^{(1)}T^{(\text{IN})0}{}_i = -\dot{\phi} \partial_i \varphi, \quad (6.65b)$$

$${}^{(1)}T^{(\text{IN})i}{}_j = \left[ \dot{\phi} \dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \Psi - \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \varphi \right] \delta^i_j, \quad (6.65c)$$

donde, denotamos con  $\varphi$  a la perturbación invariante de norma del campo escalar introducida en (B.24) como

$$\varphi \equiv \delta\phi - a\dot{\phi} \left( \mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}} \right). \quad (6.66)$$

### Ecuaciones de campo

Ahora estamos listos para darle forma a las ecuaciones de Einstein perturbadas y resolverlas para cuantificar el campo escalar y las perturbaciones métricas. Empleando (6.50) y (6.65) en  ${}^{(1)}G^{(\text{IN})a}{}_b = 8\pi G {}^{(1)}T^{(\text{IN})a}{}_b$  obtenemos

$$-\nabla^2 \Phi + 3a^2 H \left( \dot{\Phi} + H\Psi \right) = 4\pi G a^2 \left[ \dot{\phi}^2 \Psi - \dot{\phi} \dot{\phi} - \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \varphi \right], \quad (6.67a)$$

$$\partial_i \left( \dot{\Phi} + H\Psi \right) = 4\pi G \left( \dot{\phi} \partial_i \varphi \right), \quad (6.67b)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} \nabla^2 \Upsilon + a^2 \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right) \Psi + a^2 H \dot{\Psi} + a^2 \ddot{\Phi} + 3a^2 H \dot{\Phi} \right] \delta^i_j - \frac{1}{2} \partial^i \partial_j \Upsilon \\ = 4\pi G a^2 \left[ \dot{\phi} \dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \Psi - \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \varphi \right] \delta^i_j. \end{aligned} \quad (6.67c)$$

De la ecuación (6.67c) vemos que cuando  $i \neq j$ ,

$$\partial^i \partial_j \Upsilon = 0, \quad (6.68)$$

donde, o bien  $\Upsilon = 0$ ; o  $\Upsilon$  es lineal en las coordenadas espaciales. Lo segundo no es posible puesto que la perturbación se haría arbitrariamente grande para coordenadas espaciales lo suficientemente grandes. Esto implica que  $\Upsilon = 0$  y por su definición (6.51) tenemos que

$$\Psi = \Phi. \quad (6.69)$$

Quedándonos entonces con la variable  $\Psi$  y empleando la ecuación (3.28b) junto a (3.28c), de tal forma que obtengamos una expresión para el parámetro de Hubble en términos del valor de fondo del campo escalar, i.e.  $\dot{H} = -4\pi G \dot{\phi}^2$ , entonces las ecuacio-



nes de campo (6.67) toman la forma

$$\frac{1}{a^2} \nabla^2 \Psi - 3H\dot{\Psi} - \left( \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 \right) \Psi = 4\pi G \left[ \dot{\phi} \dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \varphi \right], \quad (6.70a)$$

$$\dot{\Psi} + H\Psi = 4\pi G \dot{\phi} \varphi, \quad (6.70b)$$

$$\ddot{\Psi} + 4H\dot{\Psi} + \left( \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 \right) \Psi = 4\pi G \left[ \dot{\phi} \dot{\varphi} - \frac{\partial V}{\partial \phi} \varphi \right]. \quad (6.70c)$$

Vemos que las perturbaciones de la métrica  $\Psi$  y del campo escalar  $\varphi$  están acopladas, sin embargo podemos hacer algunos arreglos para trabajar con ellas. Las primeras dos ecuaciones (ecs. (6.70a) y (6.70b)) son suficientes para determinar las perturbaciones de *curvatura*  $\Psi$  y del campo escalar  $\varphi$ . Sin embargo, es útil reformularlas en una forma ligeramente diferente y más conveniente. Restando (6.70a) de (6.70c) se obtiene que

$$\ddot{\Psi} + 7H\dot{\Psi} + 2 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 \right) \Psi - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \Psi = -8\pi G \frac{\partial V}{\partial \phi} \varphi, \quad (6.71)$$

donde, empleando (6.70b), podemos expresar la perturbación del campo escalar en términos de la perturbación métrica. Además usando la ecuación (3.28a) podemos escribir la derivada del potencial en términos de las derivadas temporales del valor de fondo del campo escalar, i.e.

$$-8\pi G \frac{\partial V}{\partial \phi} \varphi = \frac{2}{\dot{\phi}} \left( \dot{\Psi} + H\Psi \right) \left( \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} \right). \quad (6.72)$$

Por lo tanto la ec. (6.71) toma la forma

$$\ddot{\Psi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \Psi + \left( H - 2\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \right) \dot{\Psi} + 2 \left( \dot{H} - H\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \right) \Psi = 0. \quad (6.73)$$

Podemos ir un poco mas allá, introduciendo la variable

$$u \equiv \frac{\Psi}{4\pi G \dot{\phi}}, \quad (6.74)$$

con la cual la ecuación (6.73) se reescribe como

$$\ddot{u} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 u + H\dot{u} - \frac{1}{a\dot{\theta}} \partial_0 (a\dot{\theta}) u = 0, \quad (6.75)$$

donde se define

$$\theta \equiv \frac{H}{a\dot{\phi}}. \quad (6.76)$$

Esta ecuación toma una forma más simple empleando el tiempo conforme, es decir

$$\boxed{u'' - \nabla^2 u - \frac{\theta''}{\theta} u = 0.} \quad (6.77)$$

### Ecuación de Klein-Gordon

Para ver como las pequeñas inhomogeneidades  $\varphi$  evolucionan durante el periodo inflacionario tenemos varias formas de proceder. La primera, y que parece más directa, es combinar las ecuaciones de campo (6.71); esto lo haremos un poco más adelante para emplear la variable de Mukhanov-Sasaki. Una segunda opción es a partir de la conservación del tensor de energía-momento  $\nabla_a T^a_b = 0$ . Por último, es posible utilizar el hecho de que, para la acción de un campo escalar en un potencial  $V(\phi)$  (ec. (3.19)), la ecuación de movimiento corresponde a la ecuación de Klein-Gordon:

$$\square\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\bar{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) = \frac{\partial V}{\partial\phi}. \quad (6.78)$$

Del lado izquierdo es posible usar que la métrica y el campo escalar perturbados están dados por (6.56a)-(6.56b) respectivamente. A orden cero en las cantidades perturbadas, la ecuación (6.78) se reduce a (3.22). Además a primer orden tenemos:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\varphi + \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\varphi - 4\dot{\phi}\dot{\Psi} + 2\frac{\partial V}{\partial\phi}\Psi = 0. \quad (6.79)$$

Es claro que esta ecuación es válida en cualquier sistema coordenado. Además, esta contiene las variables  $\varphi$  y  $\Psi$ , y debe complementarse con las ecuaciones de Einstein. En resumen, las ecuaciones (6.70) y (6.79) (más específicamente (6.77) y (6.79)) son las ecuaciones generales que gobiernan la evolución de las perturbaciones de la métrica acopladas a un campo escalar. Entonces, combinando dichas ecuaciones se puede analizar el comportamiento de las perturbaciones en diferentes etapas de la inflación.

### Perturbación comóvil de curvatura

Puesto que esperamos obtener información acerca de la inflación cósmica a partir de las observaciones, será necesario encontrar alguna forma de conectar las propiedades de las fluctuaciones cosmológicas producidas durante la inflación con las fluctuaciones detectadas mas cerca al presente. Sin embargo, posteriormente al periodo inflacionario siguen etapas de la evolución cosmológica (recalentamiento y épocas dominadas por materia, radiación y energía oscura) las cuales en esta tesis no son de interés. No obstante, como menciona Weinberg [128], estas etapas ocurrieron cuando las fluctuaciones de interés cosmológico estaban fuera del radio comóvil de Hubble (es decir, cuando el modo estaba fuera del *horizonte*,  $k \ll aH$ ; cf. Figura 6.1), por lo cual es esencial emplear algún tipo de *ley de conservación* que sea válida a longitudes de onda grandes, independientemente de los detalles de la evolución cósmica, para relacionar las fluctuaciones producidas durante la inflación con las observadas en el CMB y en las estructuras de gran escala.

Para ello notemos que, a grandes escalas (tal que  $k \ll aH$ ; además recordemos que al pasar al espacio de Fourier  $\nabla^2 \rightarrow -k^2$ ) la ecuación (6.73) se puede reformular como una constante de movimiento, como se describe a continuación. Definiendo la **perturbación**

comóvil de curvatura<sup>16</sup> en un universo inmerso en un campo escalar como

$$\mathcal{R} \equiv \Phi + \frac{H}{\dot{\phi}}\varphi, \quad (6.80)$$

la cual claramente es invariante de norma. Además, empleando (6.67b) vemos que

$$\mathcal{R} = \Phi + \frac{2}{3} \frac{(\dot{\Phi} + H\Psi)}{H(1+w)}. \quad (6.81)$$

Con esta expresión, la ecuación de Friedmann (2.13) (con  $K = 0$ ) y además de emplear que  $\Psi = \Phi$ , es posible reescribir (6.73) en la forma

$$\frac{3}{2}H(1+w)\dot{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\Psi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (6.82)$$

Entonces, cuando se consideran longitudes de onda muy por fuera del radio comóvil de Hubble (superhorizonte; cf. Figura 6.1), el segundo término se puede despreciar y, por lo tanto a estas escalas,  $\mathcal{R}$  se conserva [9]. Esto es (cuando  $k \ll aH$ ):

$$(1+w)\dot{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (6.83)$$

Esta *ley de conservación* facilita relacionar fluctuaciones primordiales con fluctuaciones en una reciente etapa de la evolución cósmica. Visto de otra forma, el valor constante de  $\mathcal{R}$  en escalas del superhorizonte es crucial puesto que nos permitirá conectar las perturbaciones generadas durante inflación con las perturbaciones después de inflación, incluso si no sabemos nada acerca de la física durante el fin de inflación y el recalentamiento<sup>17</sup>.

Como su nombre lo indica,  $\mathcal{R}$  está definida como la perturbación de la curvatura espacial en la norma comóvil ( $E = 0 = \delta q$ ). Donde la 3-curvatura espacial es  $R^{(3)} = \frac{4}{a^2}\nabla^2\mathcal{D}$  (ver Sección B.3), siendo  $\mathcal{D}$  la perturbación de la curvatura espacial<sup>18</sup>.

### Variable de Mukhanov-Sasaki

La razón de que podamos hacer predicciones acerca de la inflación es debida a que algunas perturbaciones estuvieron sujetas a ciertas leyes de conservación, como la ec.

<sup>16</sup>La definición se puede generalizar un poco usando  $\mathcal{R} \equiv -\mathcal{D} - \frac{H}{\rho+p}\delta q$ , donde  $\delta q$  es la parte escalar de la densidad de 3-momento, i.e.,  $T^0_i = \partial_i\delta q$ . Sin embargo, en el periodo inflacionario  $T^0_i = -\dot{\phi}\partial_i\delta\phi$ , esto nos permite reescribir  $\mathcal{R}$  en términos de los invariantes de norma  $\Psi$  y  $\varphi$  como en la ec. (6.80).

<sup>17</sup>En el texto de Weinberg [129] se presenta un teorema que establece que, sin importar los constituyentes del universo, siempre hay dos soluciones escalares físicas adiabáticas de las ecuaciones de Einstein independientes, para las cuales  $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$  permanece constante fuera del horizonte; además un modo tensorial para el cual la amplitud permanece constante fuera del horizonte.

<sup>18</sup>Tengamos en cuenta que la perturbación de la curvatura comóvil es denotada en algunos textos por  $\zeta$ , por ejemplo en Mukhanov et al. [92], donde además está definida en términos de las perturbaciones métricas en la norma longitudinal. En esta tesis nos apegamos a la notación estándar en textos como Dodelson [35] y Baumann [11], en estos  $\zeta$  es la *perturbación de la curvatura en hipersuperficies de densidad uniforme*.

(6.83), durante la inflación y hasta tiempos recientes. Es por esto que  $\mathcal{R}$  tiene la virtud de favorecer el tratamiento cuántico de las fluctuaciones [35].

El problema radica en que las ecuaciones diferenciales para las perturbaciones son de segundo orden y estas requieren condiciones iniciales. Estas condiciones pueden pensarse, de manera intuitiva, como si fueran establecidas por la naturaleza cuántica de las perturbaciones al comienzo de la inflación. Para ello es conveniente introducir una nueva variable que pueda cuantizarse empleando las herramientas que son conocidas actualmente, esta es la llamada **variable de Mukhanov-Sasaki** (MS) [91, 108]:

$$v \equiv z\mathcal{R} = a \left( \varphi + \frac{\bar{\phi}'}{\mathcal{H}} \Phi \right), \quad (6.84)$$

donde<sup>19</sup>

$$z = \frac{a\bar{\phi}'}{\mathcal{H}}. \quad (6.85)$$

Notemos que hemos introducido dos variables con las que podemos reexpresar las ecuaciones de campo:  $u$  definida en (6.74) y la variable de MS (6.84). De hecho, es posible obtener una ecuación análoga a (6.77) para  $v$ , para ello se toman las ecuaciones de campo (B.54a)-(B.54b) empleando  $\Psi = \Phi$ . En particular, la ecuación (B.54b) se puede reescribir como

$$\frac{d}{d\eta} \left( \frac{a^2}{\mathcal{H}} \Psi \right) = \frac{4\pi G a^2 \bar{\phi}'}{\mathcal{H}} \left( \varphi + \frac{\bar{\phi}'}{\mathcal{H}} \Phi \right) \equiv \frac{4\pi G a \bar{\phi}'}{\mathcal{H}} v. \quad (6.86)$$

Además, la ecuación (B.54a) se puede expresar en términos únicamente de  $\Psi$  y  $\varphi$ , empleando las ecuaciones de fondo (A.25) y (A.30), esto es

$$\nabla^2 \Psi = \frac{4\pi G \bar{\phi}'^2}{\mathcal{H}} \frac{d}{d\eta} \left( \Psi + \frac{\mathcal{H}}{\bar{\phi}'} \varphi \right) \equiv \frac{4\pi G \bar{\phi}'^2}{\mathcal{H}} \mathcal{R}'. \quad (6.87)$$

Entonces empleando las variables  $u$  y  $v$  definidas<sup>20</sup> en (6.74) y (6.84), respectivamente, obtenemos que (6.87) toma la forma

$$\nabla^2 u = z \frac{d}{d\eta} \left( \frac{v}{z} \right) \equiv z \mathcal{R}', \quad (6.88)$$

y análogamente para la ec. (6.86)

$$v = \theta \frac{d}{d\eta} \left( \frac{u}{\theta} \right), \quad (6.89)$$

donde  $\theta$  se definió en (6.76) y esta satisface  $\theta = z^{-1}$ .

Destaquemos que con una sustitución directa de la ecuación (6.89) en (6.88), es posible recuperar la ecuación (6.77). También, aplicando el laplaciano a la ecuación (6.89) y notando que  $\theta$  solo es función del tiempo, obtenemos la ecuación buscada para la variable de MS, es decir

$$\boxed{v'' - \nabla^2 v - \frac{z''}{z} v = 0.} \quad (6.90)$$

<sup>19</sup>Por simplicidad se usará el tiempo conforme como parámetro temporal en lo que resta de la presente sección.

<sup>20</sup>En términos del tiempo conforme  $u \equiv \frac{a}{4\pi G \bar{\phi}'} \Psi$ .

### Cuantización

La cuantización de las perturbaciones cosmológicas es equivalente a la cuantización de un *campo escalar libre*  $v$  con *masa* dependiente del tiempo ( $m^2(\eta) \equiv -\frac{z''}{z}$ ) en el espacio-tiempo de Minkowski<sup>21</sup>. La dependencia temporal en la *masa* es debida a la interacción de las perturbaciones con el fondo homogéneo en expansión [90]. Entonces, al cuantizar  $v$ , automáticamente estaremos cuantizando los campos  $\Psi$  y  $\varphi$ , puesto que  $v$  es una combinación invariante de norma de dichos campos.

En primer lugar tomemos la expansión de Fourier del campo  $v$ , i.e.

$$v(\eta, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} v_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (6.91)$$

con lo cual es directo que (6.90) se reescribe como

$$\boxed{v_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right) v_k = 0}, \quad (6.92)$$

ecuación que, en algunos textos, es llamada la **ecuación de Mukhanov-Sasaki**. Esta es difícil de resolver de forma general ya que la función  $z$  depende de la dinámica de fondo. Sin embargo para un fondo inflacionario dado, uno puede resolver (6.92) numéricamente.

Posteriormente, para cuantizar (6.92) se introduce el momento canónico conjugado de  $v$  como<sup>22</sup>

$$\pi_v \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v'} = v', \quad (6.93)$$

el cual, junto al campo  $v$ , puede promoverse a operador. En cuyo caso la teoría cuántica nos permite imponer las relaciones de conmutación estándar a tiempos (conforme) iguales:

$$[\hat{v}(\eta, \mathbf{x}), \hat{v}(\eta, \mathbf{y})] = [\hat{\pi}_v(\eta, \mathbf{x}), \hat{\pi}_v(\eta, \mathbf{y})] = 0, \quad (6.94a)$$

$$[\hat{v}(\eta, \mathbf{x}), \hat{\pi}_v(\eta, \mathbf{y})] = [\hat{v}'(\eta, \mathbf{x}), \hat{v}'(\eta, \mathbf{y})] = i\delta_{\mathbb{D}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (6.94b)$$

de tal forma que en el espacio de Fourier

$$[\hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta), \hat{\pi}_{\tilde{\mathbf{k}}}(\eta)] = i\delta_{\mathbb{D}}(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}}). \quad (6.95)$$

Resaltemos que el operador cuántico  $\hat{v}$  obedece una ecuación análoga a (6.90) para el campo clásico  $v$ , y además la solución general se expresa como

$$\hat{v}(\eta, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ v_k(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + v_k^*(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (6.96)$$

<sup>21</sup>El tratamiento formal de este caso, así como una análisis riguroso sobre cuantización de campos en espacio-tiempos curvos se puede encontrar en textos como el de Birrell y Davies [15].

<sup>22</sup>En este caso no hemos empleado densidades lagrangianas por lo cual no se ve claramente de donde surge (6.93). Sin embargo, cabe destacar que existe otro método usual para la derivación de la ecuación de movimiento (6.90) a partir de la acción de la teoría a segundo orden en las perturbaciones (cf. [11, 90]).

Asimismo, es conveniente expresar los operadores  $\hat{v}_{\mathbf{k}}$  en términos de operadores de creación  $\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger$  y aniquilación  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ , siendo el resultado el operador hermitiano

$$\hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) = v_{\mathbf{k}}(\eta)\hat{a}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}^*(\eta)\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger, \quad (6.97)$$

donde las funciones  $v_{\mathbf{k}}(\eta)$ , así como su compleja conjugada, son soluciones normalizadas clásicas y linealmente independientes de la ecuación de MS (6.92). Además los operadores de creación y aniquilación satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\tilde{\mathbf{k}}}] = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\tilde{\mathbf{k}}}^\dagger] = 0, \quad (6.98a)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\tilde{\mathbf{k}}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta_{\mathbb{D}}(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}), \quad (6.98b)$$

si y solo sí, los modos están normalizados de tal forma que<sup>23</sup>

$$\langle v_{\mathbf{k}}, v_{\tilde{\mathbf{k}}}^* \rangle \equiv i (v_{\mathbf{k}}^* v_{\tilde{\mathbf{k}}} - v_{\tilde{\mathbf{k}}}^* v_{\mathbf{k}}) = 1. \quad (6.99)$$

El lado izquierdo de (6.99) es el wronskiano de las funciones de modos. Esta ecuación también provee una condición de frontera a las soluciones de la ecuación (6.92). Una segunda condición saldrá de la elección del vacío.

### Vacío de Bunch-Davies

Por otro lado, los estados cuánticos del espacio de Hilbert son construidos a partir de la elección del estado de vacío, denotado por  $|0\rangle$ , como [11]

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0. \quad (6.100)$$

Sin embargo existe una cierta arbitrariedad, y es que, cualquier cambio en las funciones  $v_{\mathbf{k}}(\eta)$  que deje a la solución  $\hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta)$  inalterada, provoca un cambio en los operadores de creación y aniquilación (cf. ec. (6.97)), lo cual, de acuerdo a la ec. (6.100), provoca que cada solución corresponda a un estado de vacío diferente. Por lo tanto, en primera instancia requerimos fijar la función de modos de tal forma que podamos definir el vacío<sup>24</sup>. Este proceso puede llegar a ser ambiguo, sin embargo, una opción sensata es elegirlo al comienzo de la inflación, es decir, en  $\eta_i \rightarrow -\infty$ , lo cual es la elección estándar en inflación, y de hecho recibe un nombre especial. Esta elección corresponde al vacío de Minkowski de un observador comóvil en el pasado lejano (cuando todas las escalas comóviles estaban muy dentro del horizonte de Hubble, i.e.,  $\eta \rightarrow -\infty$  ó  $|k\eta| \gg 1$  ó  $k \gg \mathcal{H}$ ). Esto es, al inicio de la inflación  $H = \text{cte}$ , además de la definición de tiempo conforme (2.40) vemos que  $\eta = -(aH)^{-1} = -\mathcal{H}^{-1}$ , lo cual implica que la evolución de  $\bar{\phi}$  y  $\mathcal{H}$  es mucho más lenta que la de  $a$ . Por lo tanto

$$\frac{z''}{z} \approx \frac{a''}{a} = \frac{2}{\eta^2}, \quad (6.101)$$

<sup>23</sup>Visto de otra forma la relación (6.99) se pide para que los operadores de creación y aniquilación satisfagan las relaciones de conmutación canónicas del oscilador armónico ecs. (6.98).

<sup>24</sup>De hecho, para un oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo  $\omega(\eta)$  no existe una elección única para  $v(\eta)$ .

y en consecuencia, la ecuación de modos a resolver es una ecuación de oscilador armónico con una *frecuencia* dependiente del tiempo:

$$v_k'' + \left( k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) v_k = 0. \quad (6.102)$$

Entonces, la condición inicial para resolver la ecuación anterior proviene de tomar  $v_k$  a tiempos muy tempranos,  $\eta \rightarrow -\infty$ , con lo cual la ecuación (6.102) se reduce a

$$v_k'' + k^2 v_k = 0, \quad (6.103)$$

esto es, muy por dentro del horizonte (radio de Hubble). Además los modos se comportan como un campo libre en el espacio-tiempo de Minkowski. Dos soluciones linealmente independientes son  $v_k \propto e^{\pm ik\eta}$ , sin embargo, sólo el modo de frecuencia positiva corresponde al estado base del hamiltoniano (cf. [11]), y es por esto que se elige este modo para definir al vacío inflacionario. Esto significa resolver la ecuación de MS con condición inicial para las fluctuaciones cuánticas en una forma de un vacío físico único, es decir, el llamado **vacío de Bunch-Davies** [11]:

$$\boxed{\lim_{\eta \rightarrow -\infty} v_k = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}},} \quad (6.104)$$

donde el factor se elige de tal forma que la normalización dada en (6.99) se cumpla.

### Solución en el límite de de Sitter

Para la inflación slow-roll será suficiente con estudiar la ecuación de MS en el límite de *de Sitter*, es decir, resolver la ecuación (6.102). Esta tiene como soluciones exactas a

$$v_k(\eta) = \alpha e^{-ik\eta} \left( 1 - \frac{i}{k\eta} \right) + \beta e^{ik\eta} \left( 1 + \frac{i}{k\eta} \right), \quad (6.105)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes que son determinadas por las condiciones iniciales (6.99) y (6.104). Esto es, de la condición (6.104) vemos que  $\beta = 0$  y de (6.99) tenemos que  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2k}}$ . Por lo tanto la **función de modos de Bunch-Davies** es [11]

$$\boxed{v_k(\eta) = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left( 1 - \frac{i}{k\eta} \right).} \quad (6.106)$$

### Espectro de potencias primordial

El espectro de potencias está definido como la transformación de Fourier de la función de correlación de dos-puntos, y viceversa, es decir para el campo  $\hat{\psi}$  arbitrario

$$\langle \hat{\psi}(\eta, \mathbf{x}) \hat{\psi}(\eta, \mathbf{y}) \rangle \equiv \langle 0 | \hat{\psi}(\eta, \mathbf{x}) \hat{\psi}(\eta, \mathbf{y}) | 0 \rangle := \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_\psi(k) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}, \quad (6.107)$$

o en otras palabras

$$\langle \hat{\psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \hat{\psi}_{\tilde{\mathbf{k}}}(\eta) \rangle = (2\pi)^3 \delta_{\text{D}}(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}}) P_{\psi}(k), \quad (6.108)$$

donde, por isotropía del espacio,  $P_{\psi}(k)$  solo depende de la magnitud de  $\mathbf{k}$ .

En nuestro caso estamos interesados en el espectro de potencias del campo  $\mathcal{R}$ ,  $P_{\mathcal{R}}$ , el cual es constante en el tiempo una vez que la inflación *estira* el modo más allá del horizonte. Esta constante determinará las condiciones iniciales una vez que los modos reingresan al horizonte. Por el momento será útil emplear la variable auxiliar  $\hat{\psi}_{\mathbf{k}} \equiv \frac{\hat{v}_{\mathbf{k}}}{a}$  como paso intermedio, esto es:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \hat{\psi}_{\tilde{\mathbf{k}}}(\eta) \rangle &= \frac{1}{a^2} \langle 0 | \hat{v}_{\mathbf{k}} \hat{v}_{\tilde{\mathbf{k}}} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{a^2} \langle 0 | \left( v_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}^* \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \right) \left( v_{\tilde{\mathbf{k}}} \hat{a}_{\tilde{\mathbf{k}}} + v_{\tilde{\mathbf{k}}}^* \hat{a}_{\tilde{\mathbf{k}}}^{\dagger} \right) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{a^2} v_{\mathbf{k}} v_{\tilde{\mathbf{k}}}^* \langle 0 | \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\tilde{\mathbf{k}}}^{\dagger} \right] | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}}) \frac{|v_{\mathbf{k}}(\eta)|^2}{a^2} \\ &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}}) \frac{1}{2ka^2} \left( 1 + \frac{1}{k^2 \eta^2} \right) \\ &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}}) \frac{1}{2k^3 a^2 \eta^2} (1 + k^2 \eta^2) \\ &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}}) \frac{H^2}{2k^3} (1 + k^2 \eta^2), \end{aligned}$$

donde se usó que  $H = -(a\eta)^{-1}$  durante inflación. La delta de Dirac hace que la independencia en los modos distintos se satisfaga.

En el límite del superhorizonte ( $k \ll aH$ ; ver Figura 6.1) esto resulta en

$$\langle \hat{\psi}_{\mathbf{k}}(\eta) \hat{\psi}_{\tilde{\mathbf{k}}}(\eta) \rangle_{k \ll aH} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}}) \frac{H^2}{2k^3}. \quad (6.109)$$

Además, recuperando la variable  $\mathcal{R}_{\mathbf{k}} = \frac{\mathcal{H}}{\phi} \psi_{\mathbf{k}}$ , así como calcular el valor del espectro de potencias al cruce del horizonte  $k = a_* H_* \equiv a(\eta_*) H(\eta_*)$  y en términos del tiempo físico  $t$ , obtenemos

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}}(t) \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{k}}}(t) \rangle_{aH=k} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}}) \frac{H_*^2}{2k^3} \frac{H_*^2}{\dot{\phi}_*^2}, \quad (6.110)$$

y en consecuencia el **espectro de potencias (primordial)** de las perturbaciones escalares<sup>25</sup> al cruce del horizonte es

$$\boxed{P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{2k^3} \frac{H_*^4}{\dot{\phi}_*^2} = \frac{2\pi G}{k^3} \frac{H_*^2}{\epsilon_*}}. \quad (6.111)$$

<sup>25</sup>Si  $\mathcal{R}$  es gaussiano, el espectro de potencia contiene toda la información estadística. Aunque no hablaremos más de ella, es interesante saber que la no-gaussianidad primordial se codifica en funciones de correlación de orden superior de  $\mathcal{R}$ , e.g., el biespectro de potencias. En la inflación slow-roll de un solo campo escalar, se predice que la no-gaussianidad es pequeña [85], pero esta puede ser significativa en modelos de múltiples campos o de un solo campo con términos cinéticos no triviales y/o que violan las condiciones de slow-roll.



En el cálculo anterior se asume que  $H = \text{cte}$ , pero en realidad  $H$  cambia muy lentamente durante la inflación. Sin embargo este resultado es válido si se evalúa en el momento que el modo deja el horizonte ( $k = aH$ ) [35].

Como hemos mencionado, estas fluctuaciones permanecen *congeladas* fuera del horizonte, hasta que re-ingresan al horizonte durante la época dominada por radiación o, para longitudes de onda más grande, en la época dominada por la materia. Dicho de otra forma, puesto que  $\mathcal{R}$  es constante a escalas de superhorizonte, entonces el espectro de potencias (6.111) determina el espectro de potencias *inicial* una vez que el modo re-ingresa al horizonte.

## 6.4.2. Perturbaciones tensoriales

Aunque actualmente las perturbaciones escalares son las más importantes en el contexto cosmológico, las perturbaciones tensoriales podrían resultar en un futuro cercano ser igual de importantes o inclusive más que las escalares. Lo anterior debido a que la detección de ondas gravitacionales primordiales serían una prueba notable del universo temprano, por ejemplo, las ondas gravitacionales producen un patrón particular en la polarización del CMB que no puede reproducirse mediante perturbaciones escalares.

Para obtener una descripción física el procedimiento es análogo al caso escalar, y de hecho más sencillo. En particular veamos que las perturbaciones tensoriales solo aparecen en las componentes espaciales de las ecuaciones de campo (cf. (6.34c)), y además el tensor energía-momento de primer orden  ${}^{(1)}T_j^i$  (cf ec. (6.61)), se anulará cuando consideremos solo las perturbaciones tensoriales. Entonces para  $K = 0$  tenemos que solo el término correspondiente al tensor de Einstein perturbado contribuye, i.e. (omitiendo lo superíndices TT en  $h_{mj}^{\text{TT}}$ )

$$\ddot{h}_{mj} + 3H\dot{h}_{mj} - \frac{1}{a^2}\nabla^2 h_{mj} = 0. \quad (6.112)$$

Nuevamente será conveniente trabajar en términos del tiempo conforme y en el espacio de Fourier, donde la ecuación (6.112) toma la forma

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} + k^2 h_{ij} = 0. \quad (6.113)$$

Puesto que  $h_{ij}$  es transverso y sin traza, solo tendremos dos grados de libertad, los cuales son justamente los dos tipos de polarización de las ondas gravitacionales  $h_+$  y  $h_\times$ . Además estos modos satisfacen la ecuación (6.113) individualmente, por lo cual podemos renombrar  $h_{ij}$  como  $h_t$ , donde  $h_t = h_+, h_\times$ .

De tal forma que obtengamos una ecuación diferencial manejable, es conveniente definir la variable<sup>26</sup>

$$v_t \equiv \frac{a}{\sqrt{16\pi G}} h_t, \quad (6.114)$$

<sup>26</sup>El factor de  $(16\pi G)^{-1/2}$  proviene de derivar la acción de la teoría para las perturbaciones tensoriales, lo cual requiere ir a segundo orden en estas. Este enfoque es irrelevante en lo que tratamos en la presente tesis, por lo cual no será necesario usar dicho tratamiento, sin embargo, es bueno tener presente que textos como [11, 92] se presenta este tratamiento en detalle.

con la cual, la ecuación (6.113) toma la forma

$$v''_{t,k} + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_{t,k} = 0. \quad (6.115)$$

Notemos que, durante inflación, esta ecuación es completamente análoga a (6.102), dado que  $a = -(H\eta)^{-1}$  y por lo tanto  $\frac{a''}{a} = \frac{2}{\eta^2}$ . En consecuencia tendremos un resultado análogo a (6.111) que engloba estas dos contribuciones a las polarizaciones.

### Espectro de potencias

Usando los resultados de la Sección 6.4, en particular para el espectro de potencias de las perturbaciones tensoriales tenemos

$$\begin{aligned} \langle \hat{h}_{t,\mathbf{k}}(\eta) \hat{h}_{t,\tilde{\mathbf{k}}}(\eta) \rangle &= \frac{16\pi G}{a^2} \langle 0 | \hat{v}_{t,\mathbf{k}} \hat{v}_{t,\tilde{\mathbf{k}}} | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}}) \frac{16\pi G}{a^2} |v_{t,k}(\eta)|^2 \\ &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}}) \frac{16\pi G H^2}{2k^3} (1 + k^2 \eta^2), \end{aligned}$$

donde  $t$  en  $\hat{h}_{t,\mathbf{k}}$  solo nos recuerda que este resultado es el mismo para cada polarización.

Por lo tanto, el espectro de potencias en escalas de superhorizonte ( $|k\eta| \ll 1$ ) para una sola polarización es

$$P_t(k) = \frac{8\pi G}{k^3} H_*^2. \quad (6.116)$$

Por lo tanto, el **espectro de potencias primordial de las ondas gravitacionales** es<sup>27</sup>

$$P_T(k) = 4P_t(k) = \frac{32\pi G}{k^3} H_*^2. \quad (6.117)$$

Notemos algunas cosas respecto a los espectros de potencias. Lo primero es que el espectro de potencias escalar (6.111) depende del parámetro de slow-roll  $\varepsilon$ , el cual es proporcional a  $\dot{H}$  (cf. ec. (3.32a)), y por ende, durante la inflación se considera muy pequeño. Pero el espectro de potencias tensorial (6.117) sólo depende del parámetro de Hubble, con lo cual de ser el caso, una detección de ondas gravitacionales primordiales así como la obtención de  $P_T(k)$  nos proporcionaría una medición extraordinaria de  $H$  durante inflación.

Por otro lado, es usual definir el espectro de potencias adimensional, del campo arbitrario  $q$  como  $\Delta_q^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_q(k)$ , de tal forma que para nuestros resultados tenemos

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \frac{G}{\pi} \frac{H_*^2}{\varepsilon_*}, \quad (6.118a)$$

$$\Delta_T^2(k) = \frac{16G}{\pi} H_*^2. \quad (6.118b)$$

<sup>27</sup>El factor de 4 delante de la primera igualdad es debido a que los modos no están correlacionados y por la simetría de  $h_{ij}$ , lo cual implica que  $2\langle \hat{h}_+ \hat{h}_+ \rangle + 2\langle \hat{h}_\times \hat{h}_\times \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}}) P_T(k)$ .

### 6.4.3. Conexión con los parámetros cosmológicos

La importancia de los espectros de potencias adimensionales (6.118), radica en que un espectro de potencias  $\Delta_q^2(k)$  constante es llamado **invariante de escala** o de **Harrison-Zel'dovich** [83]. Entonces, aunque en primera instancia pareciera que ambos espectros en (6.118) son invariantes de escala, la condición de cruce de horizonte  $k = aH$  hace que estos sean funciones de  $k$ .

Para ver esto más claramente es útil introducir los **índices espectrales** escalar y tensorial  $n_s$  y  $n_t$ , respectivamente, como

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \ln k}, \quad (6.119a)$$

$$n_t \equiv \frac{d \ln \Delta_T^2}{d \ln k}. \quad (6.119b)$$

Empleando (6.118) así como las expresiones (3.32) para los parámetros de slow-roll, obtenemos

$$n_s = 1 - 4\varepsilon_* + 2\delta_*, \quad (6.120a)$$

$$n_t = -2\varepsilon_*. \quad (6.120b)$$

Destaquemos que para un espectro invariante de escala  $n_s = 1$  o  $n_t = 0$ , lo que implica que todas las escalas contribuyen de igual manera al espectro de potencias. De esta forma  $P_s(k)$  (o de igual manera  $n_t$ ) se puede modelar como una ley de potencias, i.e.

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) \equiv \mathcal{A}_s \left( \frac{k}{k_p} \right)^{n_s-1}, \quad (6.121a)$$

$$\Delta_T^2(k) \equiv \mathcal{A}_t \left( \frac{k}{k_p} \right)^{n_t}, \quad (6.121b)$$

donde  $k_p$  es una escala de interés observacional, es decir, esta es determinada como la escala mejor restringida por un conjunto dado de observaciones. Por ejemplo en los resultados de la Colaboración Planck 2018 [100] se usa  $k_p = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$  en algunos contextos y  $k_p = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$  en otros (por ejemplo ver [6]).

Por último, una cantidad útil para caracterizar los modelos inflacionarios es la **razón tensor-escalar**  $r$ , definida como [35]

$$r(k) \equiv \frac{P_T(k)}{P_{\mathcal{R}}(k)} = \frac{\Delta_T^2(k)}{\Delta_{\mathcal{R}}^2(k)}. \quad (6.122)$$

Es directo de (6.111) y (6.117) que, a la entrada al horizonte, la razón es

$$r(k) = 64\pi G \frac{\dot{\phi}_*^2}{H_*^2} = 16\varepsilon_*. \quad (6.123)$$

Las cotas observacionales de Planck, BK15 y BAO sobre  $r$  y  $n_s$  se muestran en la Figura 3.18. Además, si en un futuro se obtuvieran mediciones para el índice espectral tensorial, la *relación de consistencia*

$$r(k) = -8n_t, \quad (6.124)$$

ayudaría a validar o descartar modelos inflacionarios de un campo escalar. Ver Sección 3.7 para el análisis de la Colaboración Planck 2018 de los parámetros cosmológicos que restringen a la inflación.

## 6.5. Inflación $f(R)$

En la presente Sección haremos un tratamiento análogo al caso de la inflación generada por un campo escalar, estudiado en la Sección anterior, pero aplicado a las teorías  $f(R)$ . Posteriormente haremos la conexión con el tratamiento conforme de la Sección 5.2. Para ello, en primera instancia perturbaremos a orden lineal la función  $f(R)$  que caracteriza una teoría arbitraria, y nuevamente estudiando por separado las perturbaciones escalares y tensoriales, obtendremos las respectivas ecuaciones de campo en el marco físico. Aprovechando que en nuestro caso tratamos con un espacio-tiempo en vacío, i.e., la acción de la contribución de materia (cf. ec. (5.12)) se anula, podemos usar la equivalencia entre los marcos para hacer la transformación conforme, lo cual nos permitirá extraer los resultados de la Sección 6.4 de manera casi directa.

### 6.5.1. Perturbaciones escalares

Tomando el tensor efectivo de energía-momento de las teorías  $f(R)$  dado por el lado derecho de la ecuación (4.7) en vacío:

$$\kappa T_{ab}^{(\text{eff})} = \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR} \nabla_a \nabla_b R + f_{RRR} (\nabla_a R) (\nabla_b R) - \frac{g_{ab}}{6} (f_R R + f) \right], \quad (6.125)$$

y usando, para una descripción perturbativa, que<sup>28</sup>

$$R = \bar{R} + {}^{(1)}R + \mathcal{O}(2), \quad (6.126)$$

es posible desarrollar las funciones  $f(R)$ , así como sus derivadas, en términos que involucran cantidades perturbadas a primer orden. Esto es

$$f(R) = f(\bar{R} + {}^{(1)}R) = f(\bar{R}) + f_R(\bar{R}) {}^{(1)}R + \mathcal{O}(2) \equiv \bar{f} + \bar{f}_R {}^{(1)}R + \mathcal{O}(2), \quad (6.127)$$

también

$$f_R(R) = f_R(\bar{R}) + f_{RR}(\bar{R}) {}^{(1)}R + \mathcal{O}(2) \equiv \bar{f}_R + \bar{f}_{RR} {}^{(1)}R + \mathcal{O}(2), \quad (6.128)$$

así como los análogos para ordenes superiores:

$$f_{RR}(R) = \bar{f}_{RR} + \bar{f}_{RRR} {}^{(1)}R + \mathcal{O}(2), \quad (6.129)$$

$$f_{RRR}(R) = \bar{f}_{RRR} + \bar{f}_{RRRR} {}^{(1)}R + \mathcal{O}(2), \quad (6.130)$$

y así sucesivamente.

<sup>28</sup>Nuevamente cantidades con barra como  $\bar{R}$  denotan cantidades del fondo y la perturbaciones de primer orden se denotan por superíndices izquierdos como  ${}^{(1)}R$ .

### Ecuaciones de campo

De acuerdo a lo obtenido en la Sección B.4 de los Apéndices (usando solo las contribuciones escalares y con  $K = 0$ ), las componentes del tensor energía-momento invariante de norma son

$${}^{(1)}T^{(\text{IN})0}{}_0 = \frac{1}{\kappa \bar{f}_R} \left[ -\bar{f}_{RR}\ddot{\varrho} - 2\bar{f}_{RRR}\dot{\bar{R}}\dot{\varrho} - F\varrho + \bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}}\dot{\Psi} + 2\left(\bar{f}_{RR}\ddot{\bar{R}} + \bar{f}_{RRR}\dot{\bar{R}}^2\right)\Psi \right], \quad (6.131a)$$

$${}^{(1)}T^{(\text{IN})0}{}_i = \frac{1}{\kappa \bar{f}_R} \partial_i \left[ -\bar{f}_{RR}\dot{\varrho} - \left(\bar{f}_{RRR}\dot{\bar{R}} - H\bar{f}_{RR}\right)\varrho + \bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}}\Psi \right], \quad (6.131b)$$

$${}^{(1)}T^{(\text{IN})i}{}_j = \frac{1}{\kappa \bar{f}_R} \left\{ \left[ -H\bar{f}_{RR}\dot{\varrho} + \left(\frac{1}{6}\left(\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\bar{f} - 2\bar{f}_R\right) - H\dot{\bar{R}}\left(\bar{f}_{RRR} - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R}\right)\right)\varrho + \bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}}\dot{\Phi} + 2H\bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}}\Psi \right] \delta^i_j + \frac{\bar{f}_{RR}}{a^2} \partial^i \partial_j \varrho \right\}, \quad (6.131c)$$

donde  $\varrho$  es la perturbación invariante de norma al escalar de Ricci definida por  $\varrho \equiv {}^{(1)}R - a\dot{\bar{R}}(\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}})$ , y  $F$  (*digamma*) se define como

$$F \equiv \left(\bar{f}_{RRR} - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R}\right)\ddot{\bar{R}} + \left(\bar{f}_{RRRR} - \frac{\bar{f}_{RR}\bar{f}_{RRR}}{\bar{f}_R}\right)\dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{6}\left(2\bar{f}_R - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\bar{f}\right). \quad (6.132)$$

Entonces, empleando (6.50) y (6.131) en  ${}^{(1)}G^{(\text{IN})a}{}_b = \kappa {}^{(1)}T^{(\text{IN})a}{}_b$  obtenemos las ecuaciones de campo:

$$\begin{aligned} -\nabla^2\Phi + 3a^2H(\dot{\Phi} + H\Psi) \\ = \frac{a^2}{2\bar{f}_R} \left[ -\bar{f}_{RR}\ddot{\varrho} - 2\bar{f}_{RRR}\dot{\bar{R}}\dot{\varrho} - F\varrho + \bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}}\dot{\Psi} + 2\left(\bar{f}_{RR}\ddot{\bar{R}} + \bar{f}_{RRR}\dot{\bar{R}}^2\right)\Psi \right], \end{aligned} \quad (6.133a)$$

$$\dot{\Phi} + H\Psi = \frac{1}{2\bar{f}_R} \left[ \bar{f}_{RR}\dot{\varrho} + \left(\bar{f}_{RRR}\dot{\bar{R}} - H\bar{f}_{RR}\right)\varrho - \bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}}\Psi \right], \quad (6.133b)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2}\nabla^2\Upsilon + a^2\ddot{\Phi} + 3a^2H\dot{\Phi} + a^2H\dot{\Psi} + a^2\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\right)\Psi \right] \delta^i_j - \frac{1}{2}\partial^i \partial_j \Upsilon \\ = \frac{a^2}{2\bar{f}_R} \left\{ \left[ -H\bar{f}_{RR}\dot{\varrho} + \left(\frac{1}{6}\left(\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\bar{f} - 2\bar{f}_R\right) - H\dot{\bar{R}}\left(\bar{f}_{RRR} - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R}\right)\right)\varrho + \bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}}\dot{\Phi} + 2H\bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}}\Psi \right] \delta^i_j + \frac{\bar{f}_{RR}}{a^2} \partial^i \partial_j \varrho \right\}, \end{aligned} \quad (6.133c)$$

donde  $\Upsilon = \Psi - \Phi$ . De la ecuación (6.133c) vemos que en el caso  $i \neq j$

$$-\frac{1}{2}\partial^i \partial_j \Upsilon = \frac{\bar{f}_{RR}}{2\bar{f}_R} \partial^i \partial_j \varrho, \quad (6.134)$$

o equivalentemente

$$\Psi - \Phi + \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho = 0, \quad (6.135)$$

lo cual en principio nos permite expresar las ecuaciones (6.133) en términos de solo dos campos. Nótese que en RG  $\bar{f}_{RR} = 0$  y por lo tanto la parte asociada al campo escalar (cf. ec. (6.152c)) desaparece. En tal caso no tendríamos inflación *geométrica*.

### Ecuación de Klein-Gordon

Además, para la ecuación tipo Klein-Gordon (4.6), tenemos que a orden cero en las perturbaciones (en vacío y con  $K = 0$ ; cf. ecuación (4.13))

$$\ddot{\bar{R}} + 3H\dot{\bar{R}} = \frac{1}{3\bar{f}_{RR}} \left[ \bar{f}_R \bar{R} - 2\bar{f} - 3\bar{f}_{RRR} \dot{\bar{R}}^2 \right], \quad (6.136)$$

y a primer orden (cf. ec. (B.50))

$$\begin{aligned} \ddot{\varrho} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \varrho + \left( 3H + 2 \frac{\bar{f}_{RRR}}{\bar{f}_{RR}} \dot{\bar{R}} \right) \dot{\varrho} \\ + \frac{1}{3\bar{f}_{RR}} \left( \bar{f}_R - \bar{R} \bar{f}_{RR} + 3\bar{f}_{RRR} \left( \ddot{\bar{R}} + 3H\dot{\bar{R}} \right) + 3\bar{f}_{RRRR} \dot{\bar{R}}^2 \right) \varrho \\ = 3\dot{\bar{R}}\dot{\Phi} + \dot{\bar{R}}\dot{\Psi} + 2 \left( \ddot{\bar{R}} + 3H\dot{\bar{R}} \right) \Psi. \end{aligned} \quad (6.137)$$

De inmediato notamos que las ecuaciones de campo que surgen de perturbar la acción modificada (4.2) son considerablemente más complejas, en cuyo caso resolverlas se puede complicar aún más, puesto que la función  $f(R)$  hasta este punto es arbitraria. Sin embargo, hay trabajos que se han dedicado a ello, y en los siguientes renglones se resumirán las ideas esenciales de estos, aunque al final del día el camino que sigamos sea distinto.

### Tratamiento simplificado

A continuación se presenta una visión heurística sobre como estudiar estas ecuaciones. Las referencias que analizan en mayor detalle estas (o alguna modificación de ellas) son [28, 32, 59, 61, 66, 99, 124].

La mayoría de las referencias arriba citadas siguen la analogía del campo escalar y definen a la perturbación comóvil de curvatura, de manera similar a (6.80), como  $\mathcal{R} \equiv -\mathcal{D} + \frac{H}{\bar{R}} R$  o bien en términos de los invariantes de norma  $\Phi$  y  $\varrho$ :

$$\mathcal{R} = \Phi + \frac{H}{\dot{\bar{R}}} \varrho, \quad (6.138)$$

donde claramente  $\mathcal{R}$  es invariante de norma. En consecuencia se pueden manejar las ecuaciones de campo (6.133)-(6.137), de tal forma que  $\mathcal{R}$  satisfaga (en el espacio de Fourier) la ecuación

$$\ddot{\mathcal{R}} + \frac{1}{a^3 Q} \frac{d}{dt} (a^3 Q) \dot{\mathcal{R}} + \frac{k^2}{a^2} \mathcal{R} = 0, \quad (6.139)$$

donde (cf. de Felice & Tsujikawa [32])

$$Q \equiv \frac{3\dot{\bar{R}}^2 \bar{f}_{RR}^2}{16\pi G \bar{f}_R (H + \frac{\dot{\bar{R}} \bar{f}_{RR}}{2\bar{f}_R})^2}. \quad (6.140)$$

Si además, en analogía con (6.84), se define la variable  $v$  como

$$v \equiv z_e \mathcal{R}, \quad (6.141)$$

siendo

$$z_e \equiv a\sqrt{Q_e}, \quad (6.142)$$

entonces, la ec. (6.139) se puede reescribir como

$$\boxed{v'' + \left(k^2 - \frac{z_e''}{z_e}\right) v = 0.} \quad (6.143)$$

Esta ecuación posee la misma estructura algebraica que la ecuación de Mukhanov-Sasaki (6.92). De hecho, durante inflación, su solución se puede expresar en términos de funciones de Hankel. Véase [28, 32, 66, 124] para una exposición más detallada.

## 6.5.2. Perturbaciones tensoriales

Para el caso de la generación de ondas gravitacionales se recomienda las referencias [32, 93, 94]. En este caso (a diferencia al tratamiento con un campo escalar) ahora surge un término tensorial que surge del tensor energía-momento (cf. (B.48)). Por lo tanto, usando la parte que solo involucra perturbaciones tensoriales en las ecuaciones (B.22c) y (B.48), obtenemos la componente  $i$ - $j$  de las ecuaciones de campo, que dan origen a la ecuación de ondas gravitacionales:

$$\ddot{h}_t + \left(3H + \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \dot{\bar{R}}\right) \dot{h}_t - \frac{1}{a^2} \nabla^2 h_t = 0, \quad (6.144)$$

donde el subíndice  $t$  etiqueta las dos polarizaciones  $+$  y  $\times$ , tal y cómo en la Sección 6.4. En términos del tiempo conforme y en el espacio de Fourier, la ecuación anterior toma la forma

$$h_t'' + \left(2\mathcal{H} + \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \bar{R}'\right) h_t' + k^2 h_t = 0. \quad (6.145)$$

Usando ideas análogas a aquellas de la Sección 6.4.2, se definen

$$v_t \equiv \frac{a\sqrt{\bar{f}_R}}{\sqrt{16\pi G}} h_t = \frac{z_t}{\sqrt{16\pi G}} h_t, \quad (6.146a)$$

$$z_t \equiv a\sqrt{\bar{f}_R}, \quad (6.146b)$$

con las cuales podemos reescribir (6.145) como

$$\boxed{v_t'' + \left( k^2 - \frac{z_t''}{z_t} \right) v_t = 0.} \quad (6.147)$$

Esta ecuación tiene la forma deseada y se puede resolver de varias maneras. En [93, 94] se emplea el método WKB para obtener una solución a (6.147) en términos de la solución conocida de RG. Además si tomamos  $f(\bar{R}) = \bar{R}$  recuperamos la ecuación (6.115).

### 6.5.3. Transformación conforme

A pesar de que la obtención de las ecuaciones (6.143) y (6.147) son directas (es decir, de una manera análoga a lo hecho en la Sección 6.4), este proceso puede llegar a ser tedioso. Además de que tomar el límite de grandes escalas ( $k \ll aH$ ) puede ser oscuro, puesto que  $z_e$  y  $z_t$  dependen de la función arbitraria  $f(R)$ . Sin embargo, podemos emplear las nociones de la Sección 5.2 y transformar las ecuaciones de campo del marco de Jordan (físico) al marco de Einstein (conforme), donde las soluciones ya han sido obtenidas.

Para el análisis es conveniente emplear el tiempo conforme, en donde la métrica FRW en el marco conforme toma la forma

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{a}^2(\eta) \left( -d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \right). \quad (6.148)$$

En este caso, las coordenadas en ambos marcos son las mismas, ventaja de emplear el tiempo conforme en lugar del tiempo físico. Sin embargo, el factor de escala cambia entre los marcos de acuerdo a (5.23b).

Como hemos mostrado en la Sección 5.2, ambos marcos son equivalentes a nivel de la acción. Sin embargo, las ecuaciones de campo en ambos marcos son también equivalentes entre sí (cf. Sección 5.3 y ref. [20]), es decir, una solución en el marco de Jordan corresponde a una solución en el marco de Einstein, y viceversa, siempre y cuando  $f_R > 0$  y  $f_{RR} > 0$ .

Entonces, aplicando la transformación conforme a una métrica lineal en las perturbaciones tenemos

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = {}^{(0)}\tilde{g}_{\mu\nu} + \tilde{h}_{\mu\nu} = (\bar{f}_R + \bar{f}_{RR} {}^{(1)}R) ({}^{(0)}g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = f_R g_{\mu\nu}. \quad (6.149)$$

Donde, por el momento, cambiaremos la notación para las cantidades de fondo, i.e.  $\bar{g}_{ab} \rightarrow {}^{(0)}g_{ab}$ , esto para no enturbiar aún más las ecuaciones. De la ecuación anterior es fácil ver que las perturbaciones métricas transforman como

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \bar{f}_R h_{\mu\nu} + \bar{f}_{RR} g^{(0)}_{\mu\nu} {}^{(1)}R. \quad (6.150)$$

Para la métrica plana FRW, podemos ver como la descomposición métrica transforma



a partir de esta relación. En particular tenemos

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} {}^{(1)}R, \quad (6.151a)$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}, \quad (6.151b)$$

$$\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} {}^{(1)}R, \quad (6.151c)$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}, \quad (6.151d)$$

$$\tilde{h}_{ij}^{\text{TT}} = h_{ij}^{\text{TT}}. \quad (6.151e)$$

De estas es directo, que las perturbaciones invariantes de norma toman la forma

$$\tilde{\Psi} = \Psi + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho, \quad (6.152a)$$

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho, \quad (6.152b)$$

$$\tilde{\varphi} = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho. \quad (6.152c)$$

Lo primero que observamos es que la condición  $\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}$  (ec. (6.69)) del marco de Einstein se traduce en la ecuación (6.135) del marco físico<sup>29</sup>.

Otro resultado que será de vital importancia es que  $\mathcal{R}$  es invariante ante la transformación conforme (6.149), i.e.,

$$\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}}, \quad (6.153)$$

lo cual, aunado a que  $h_{ij}^{\text{TT}}$  también es invariante, nos permitirá escribir los parámetros cosmológicos (inflacionarios) de igual manera en ambos marcos.

Algunos detalles para comprobar que las ecuaciones de campo son equivalentes se presentan en la Sección B.6 de los Apéndices. En lo sucesivo, transformamos los resultados de la Sección 6.4 al marco físico.

#### 6.5.4. Conexión con los parámetros cosmológicos

Usando los resultados obtenidos en el marco conforme, vemos que de acuerdo a la ecuación (6.111), el espectro de potencias primordial en el marco físico corresponde a

$$P_{\mathcal{R}}(k) = P_{\tilde{\mathcal{R}}}(k) = \frac{2\pi G}{k^3} \frac{4}{3\bar{f}_R} \frac{\left(H + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \dot{\bar{R}}\right)^4}{\frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R^2} \dot{\bar{R}}^2} \Bigg|_{t=t_*}, \quad (6.154)$$

<sup>29</sup>Notemos que las cantidades extraídas de la Sección 6.4, serán denotadas por cantidades con tilde, las cuales corresponden al marco de Einstein o conforme.

donde se usó que los parámetros de slow-roll (definidos en ec. (3.32)) transforman como

$$\tilde{\epsilon} = \frac{3}{4} \frac{\left(\frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \dot{\bar{R}}\right)^2}{\left(H + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \dot{\bar{R}}\right)^2}, \quad (6.155a)$$

$$\tilde{\delta} = -\frac{\left(\frac{\bar{f}_{RRR}}{f_R} \dot{\bar{R}}^2 + \frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \ddot{\bar{R}} - \frac{3}{2} \frac{\bar{f}_{RR}^2}{f_R^2} \dot{\bar{R}}^2\right)}{\frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \dot{\bar{R}} \left(H + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \dot{\bar{R}}\right)}, \quad (6.155b)$$

además de que  $\tilde{H}$  está dado por la ec. (5.24). De igual manera para el espectro de potencias tensorial, a partir de la ec. (6.117), tenemos

$$P_T(k) = \frac{32\pi G}{k^3} \frac{1}{f_R} \left(H + \frac{\bar{f}_{RR}}{2f_R} \dot{\bar{R}}\right)^2 \Big|_{t=t_*}. \quad (6.156)$$

Además, los índices espectrales en función de los parámetros de slow-roll (6.155) son equivalentes a los del marco de Einstein. Es decir

$$n_s - 1 = -3 \frac{\left(\frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \dot{\bar{R}}\right)^2}{\left(H + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \dot{\bar{R}}\right)^2} \Big|_{t=t_*} - 2 \frac{\left(\frac{\bar{f}_{RRR}}{f_R} \dot{\bar{R}}^2 + \frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \ddot{\bar{R}} - \frac{3}{2} \frac{\bar{f}_{RR}^2}{f_R^2} \dot{\bar{R}}^2\right)}{\frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \dot{\bar{R}} \left(H + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \dot{\bar{R}}\right)} \Big|_{t=t_*}, \quad (6.157a)$$

$$n_t = -\frac{3}{2} \frac{\left(\frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \dot{\bar{R}}\right)^2}{\left(H + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \dot{\bar{R}}\right)^2} \Big|_{t=t_*}. \quad (6.157b)$$

Por último es directo de las ecuaciones (6.154) y (6.156) que la razón tensor-escalar es

$$r(k) = 12 \frac{\frac{\bar{f}_{RR}^2}{f_R^2} \dot{\bar{R}}^2}{\left(H + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \dot{\bar{R}}\right)^2} \Big|_{t=t_*}. \quad (6.158)$$

De nuevo notemos que si  $f(\bar{R}) = \bar{R}$ , no hay inflación geométrica.

## 6.6. Modelo $R^2$ de Starobinsky

Es usual encontrar en la literatura los parámetros cosmológicos (inflacionarios) en términos de los  $e$ -folds, entonces se debe encontrar una relación en términos de los parámetros de slow-roll. Para esto usemos el modelo  $f(\bar{R}) = \bar{R} + \alpha \bar{R}^2$  de Starobinsky, con lo cual, la ecuación (5.4a) se reduce a  $\dot{H} \approx -\frac{M^2}{6}$  en el límite de inflación, i.e.  $\left|\frac{\dot{H}}{H^2}\right| \ll 1$

y  $\ddot{H} \ll H\dot{H}$ , por lo tanto por (A.6):  $\bar{R} \approx 12H^2$ ,  $\dot{\bar{R}} \approx 24H\dot{H}$  y  $\ddot{\bar{R}} \approx 24\dot{H}^2$ . Entonces tenemos que

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt \approx \int_{t_i}^{t_f} \left( H_i - \frac{M^2}{6}t \right) dt = H_i(t_f - t_i) - \frac{M^2}{12}(t_f - t_i)^2, \quad (6.159)$$

donde el subíndice  $i$  caracteriza el inicio de la inflación y  $f$  el final. En este caso  $t_f - t_i \approx \frac{6H_i}{M^2}$ , por lo tanto

$$N \approx \frac{3H_i^2}{M^2} \approx \frac{1}{2\varepsilon_i}. \quad (6.160)$$

Con lo cual, vemos que en el límite inflacionario (donde  $\frac{\bar{f}_{RR}}{f_R} \approx \frac{1}{12H^2}$ ), los parámetros de slow-roll transformados se reducen a

$$\tilde{\varepsilon} \approx 3\varepsilon^2 \approx \frac{3}{4N^2}, \quad (6.161a)$$

$$\tilde{\delta} \approx -2\varepsilon \approx -\frac{1}{N}. \quad (6.161b)$$

Por lo tanto, en el límite inflacionario, el modelo  $R^2$  estima los parámetros cosmológicos en términos del número de  $e$ -folds mediante<sup>30</sup>

$$n_s \approx 1 - \frac{2}{N}, \quad (6.162a)$$

$$n_t \approx -\frac{3}{2N^2}, \quad (6.162b)$$

y la correspondiente razón tensor-escalar

$$r(k) \approx \frac{12}{N^2}. \quad (6.163)$$

De lo anterior podemos notar que  $|n_t| \ll |n_s|$ , por lo cual es conveniente emplear  $r$  a través de la relación de consistencia (6.124) en lugar que  $n_t$ . Además, recordemos que necesitamos alrededor de 60  $e$ -folds para que problema del horizonte no entre en juego<sup>31</sup> (cf. Subsección 3.5.3). Si tomamos el límite inferior de  $N = 50$   $e$ -folds, obtenemos

$$n_s \approx 0.960, \quad (6.164a)$$

$$r \approx 0.00480, \quad (6.164b)$$

y para  $N = 60$   $e$ -folds:

$$n_s \approx 0.967, \quad (6.165a)$$

$$r \approx 0.00333, \quad (6.165b)$$

<sup>30</sup>La ecuación (6.162a) sólo toma contribuciones de  $N^{-1}$ , pero en realidad tendríamos  $n_s \approx 1 - \frac{2}{N} - \frac{3}{N^2}$ , donde el último término se desprecia puesto que  $N \sim 50$ .

<sup>31</sup>De hecho  $N = 60$  es el límite superior y, en general, los  $e$ -folds dependen de la escala a la que se desarrollaría la inflación. Lo anterior da un límite inferior de  $N = 50$  para una escala de energía de  $H \approx 10^2$  GeV [114].

lo cual está en acuerdo con la Figura 3.18 obtenida por la Colaboración Planck 2018 [101].

Como se ha mostrado, la inflación  $f(R)$  puede analizarse tanto en el marco de Jordan como en el marco de Einstein, sin necesidad de enfocarse en la tediosa *controversia* (cf. [102]) de la transformación conforme (5.9). Esto debido a que durante inflación no hay contribuciones de campos de materia (o estas se diluyen muy rápidamente), en cuyo caso, las acciones (4.2) y (5.20) (sin las respectivas contribuciones de materia) implican que el tratamiento de una teoría modificada mediante funciones  $f(R)$  es completamente equivalente al de un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad. Por lo tanto en nuestro caso, ambos tratamientos son análogos independientemente del marco empleado.

Puesto que las perturbaciones son lineales en ambos marcos, entonces se pueden escoger combinaciones lineales de ellas para pasar de un marco a otro. Finalmente cabe resaltar que las ecuaciones (6.154)-(6.158), para una  $f(R)$  general, son algunos de los resultados más importantes de esta tesis.



# Capítulo 7

## Epílogo

Las recientes observaciones de la Colaboración Planck 2018 [100, 101] restringen de manera notable al índice espectral  $n_s$  y la razón tensor-escalar  $r$  (cf. Figura 3.18), por lo cual tenemos un mecanismo confiable para descartar modelos inflacionarios y, por otro lado, favorecer a los modelos que mejor se comporten. Entre estos últimos, el que parece llevar la delantera es el modelo  $R^2$  de Starobinsky.

Pese a que, con el paso del tiempo, el modelo inflacionario se ha vuelto un punto crucial en nuestro entendimiento de la Cosmología, es importante destacar que este sigue siendo un tema “oscuro” y aún en construcción. En este sentido, uno de los mayores objetivos actualmente es detectar componentes tensoriales de las fluctuaciones primordiales. Sin embargo, todo parece indicar que esto no será sencillo, aunque valdrá la pena intentarlo. Una detección de un fondo de ondas gravitacionales primordiales podría revelarnos la escala de energía en la que ocurrió la inflación, lo que significa que podemos determinar  $H_{\text{inflación}}$ , o de igual manera, la magnitud del potencial  $V(\phi)$  y con ello darnos una idea del origen de esta expansión temprana del universo (ver [23]). Otro problema que surge es que si la escala de la inflación está cerca a la escala de los TeV (superior a la capacidad de los aceleradores de partículas actuales), entonces parece improbable que se encuentren modos tensoriales en un futuro cercano [35].

Por otro lado, las observaciones de Planck 2018 [101] parecen descartar un espectro de potencias escalar invariante de escala (Harrison-Zel’dovich), i.e.  $n_s = 1$ , sin embargo tenemos un espectro de potencias escalar *casi* invariante de escala, i.e.  $n_s \approx 1$ . Algo similar ocurre para las perturbaciones tensoriales, donde se espera tener un espectro de potencias casi invariante de escala, en este caso  $n_t \approx 0$ . De hecho, el límite en la magnitud de las perturbaciones tensoriales respecto de las escalares se ve de la razón tensor-escalar  $r$ . Lamentablemente, por la escasez de observaciones, principalmente referentes a los modos tensoriales, de momento esta razón solo se suele acotar por arriba como  $r < 0.056$ , en la escala pivote  $k_{\text{pivote}} = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$  (Planck 2018 [101]).

Además de estos aspectos relacionados con los modos tensoriales, otro tópico que ha cobrado notoriedad al aumentar la precisión de los experimentos es la no-gaussianidad. A pesar de que no lo mencionamos, se estima que las perturbaciones, tensoriales y escalares, son muy cercanas a gaussianas, como lo son las fluctuaciones del oscilador armónico en la Teoría de Campos Cuánticos. De hecho, se espera una ligera no-gaussianidad, en particular, en las perturbaciones escalares inflacionarias, pese a que las observa-

ciones del CMB y de la estructura a gran escala confirman una casi gaussianidad, imponiendo cada vez más límites superiores para esta. Para su estudio es necesaria una descripción de la acción a tercer orden. Aunque en este trabajo nos limitamos a considerar a fluctuaciones puramente gaussianas, que como mencionamos está fuertemente apoyado por las observaciones, es importante tener este tópico en el horizonte porqué de ser detectada abriría una nueva puerta para el análisis inflacionario.

Como mencionamos en el Capítulo 4, las teorías  $f(R)$  han sido ampliamente estudiadas en el último par de décadas para tratar problemas abiertos como la inflación cósmica y la energía oscura, en parte debido a que es una de las teorías modificadas de la relatividad general más simples. Sin embargo, no basta con construir una teoría modificada de gravedad que, por ejemplo, provea únicamente una época inflacionaria, si no que uno debe asegurarse que satisfaga las cada vez más fuertes restricciones observacionales. En particular, para modelos de un campo escalar bajo la inflación slow-roll las expresiones son bien conocidas y en el presente texto se obtuvieron en (6.120) y (6.123). Donde estas cantidades están evaluadas en el tiempo al que la escala pivote ( $k_{\text{pivote}}$ ) sale del horizonte, lo cual se realiza en el intervalo de  $50 < N < 60$   $e$ -folds antes del final de la inflación.

Aunque tenemos consecuencias observacionales muy convincentes de un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad, si este realmente existe, aún desconocemos su naturaleza. Además, en caso de ser detectadas las no-gaussianidades, los modelos de un campo escalar se pondrían en duda, puesto que estos no predicen no-gaussianidades [29]. Entonces parece razonable explorar otras alternativas. Una de ellas es mediante teorías donde un campo escalar surge a partir de su formulación, como es el caso en teorías de orden superior de gravitación. Entre la amplia gama de teorías de orden superior capaces de representar un escenario inflacionario, el modelo  $R^2$  propuesto por Starobinsky en 1980 [115] fue el primero, y actualmente es uno de los más exitosos.

Para el estudio de la cosmología  $f(R)$ , o en nuestro caso la inflación  $f(R)$ , podemos resolver las ecuaciones de campo a fuerza bruta o bien aplicar la transformación conforme estudiada en la Sección 5.2. Aunque esto último no siempre es útil, puesto que después transformar la acción del marco de Jordan al de Einstein, la materia se acopla al campo escalar (cf. (5.14)). Afortunadamente, durante inflación es natural pensar que la dinámica es determinada únicamente por el campo escalar. Con esta restricción la transformación conforme se puede realizar de forma simple [131], de tal manera que podemos efectuar el análisis en cualquier marco y transformar los resultados al marco deseado. Esto fue lo que realizamos en la Sección 6.5, lo cual nos permite escribir los parámetros cosmológicos ( $n_s, n_t, r$ ) en términos de una función  $f(R)$  arbitraria. Estos resultados fueron aplicados al modelo  $R^2$  de Starobinsky recuperando las expresiones conocidas para dichos parámetros. Para obtener los parámetros cosmológicos nos hemos enfocado en emplear puramente un formalismo invariante de norma, puesto que es importante distinguir las perturbaciones físicas de las dependientes de la norma (ver Capítulo 6).

Esperemos en un futuro cercano tengamos observaciones aún más precisas que las obtenidas por Planck, de tal forma que podamos restringir aún más los modelos inflacionarios o inclusive refutar el paradigma inflacionario (aunque actualmente

esto parece difícil). Existen satélites de próxima generación diseñados para detectar modos tensoriales primordiales y estimar la no-gaussianidad de mejor manera, entre ellos están LiteBIRD [52], CORE [40] y PIXIE [73].





# Apéndice A

## Universo FRW homogéneo

En el presente Apéndice se agrupan resultados básicos para el Universo FRW no perturbado<sup>1</sup>. Además, si un cálculo vale la pena mostrarse se presentará de la forma más detallada sin llegar a saturar el texto. Por último, así como para el resto de los Apéndices, recopilamos expresiones importantes en términos del tiempo conforme, lo cual será útil en ciertos contextos y es por esto que vale la pena recopilarlas en una sección propia.

### A.1. Geometría del espacio-tiempo

El empleo de la métrica FRW (2.2) en las ecuaciones de campo de Einstein nos dará el comportamiento del factor de escala  $a(t)$ . Para ello tenemos las componentes de la métrica

$$g_{00} = g_{tt} = -1, \quad (\text{A.1a})$$

$$g_{11} = g_{rr} = \frac{a^2}{1 - Kr^2}, \quad (\text{A.1b})$$

$$g_{22} = g_{\theta\theta} = a^2 r^2, \quad (\text{A.1c})$$

$$g_{33} = g_{\phi\phi} = a^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{A.1d})$$

De las cuales podemos calcular los símbolos de Christoffel, de la forma usual, i.e.

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}). \quad (\text{A.2})$$

---

<sup>1</sup>Por esto debemos tener cuidado que donde aparezca  $g_{ab}$  nos estaremos refiriendo a la métrica de fondo que en otros capítulos denotamos por  $\bar{g}_{ab}$ . Lo mismo para otras cantidades como  $\phi$ .

Por ejemplo

$$\begin{aligned}
 \Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2} g^{1\sigma} (\partial_1 g_{\sigma 0} + \partial_0 g_{1\sigma} - \partial_\sigma g_{01}) \\
 &= \frac{1}{2} (g^{1\sigma} \partial_1 g_{\sigma 0} + g^{1\sigma} \partial_0 g_{1\sigma}), \\
 &= \frac{1}{2} g^{11} \partial_0 g_{11} \\
 &= \frac{\dot{a}}{a}.
 \end{aligned}$$

De manera análoga se obtienen los símbolos de Christoffel restantes, los no nulos son [25]:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^0_{11} &= \frac{a\dot{a}}{1-Kr^2}, & \Gamma^0_{22} &= a\dot{a}r^2, \\
 \Gamma^0_{33} &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, & \Gamma^1_{11} &= \frac{Kr}{1-Kr^2}, \\
 \Gamma^1_{01} &= \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^2_{12} &= \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \\
 \Gamma^1_{22} &= -r(1-Kr^2), & \Gamma^1_{33} &= -r(1-Kr^2) \sin^2 \theta, \\
 \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma^3_{23} &= \cot \theta.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Para las componentes del tensor de Ricci se usa su expresión general:

$$R_{ab} = \partial_c \Gamma^c_{ab} - \partial_a \Gamma^c_{cb} + \Gamma^c_{cd} \Gamma^d_{ab} - \Gamma^c_{ad} \Gamma^d_{cb}. \tag{A.4}$$

de las cuales, las no nulas son:

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \tag{A.5a}$$

$$R_{11} = \frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K)}{1-Kr^2}, \tag{A.5b}$$

$$R_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K)r^2, \tag{A.5c}$$

$$R_{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K)r^2 \sin^2 \theta. \tag{A.5d}$$

Además

$$\begin{aligned}
 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= g^{tt} R_{tt} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\
 &= \frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{3(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K)}{a^2} \\
 &= \frac{6}{a} \left[ \ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{K}{a} \right].
 \end{aligned}$$

entonces, el escalar de Ricci es

$$R = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{K}{a^2} \right]. \tag{A.6}$$

Con lo anterior es posible construir las componentes del tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{A.7}$$

por lo tanto para la métrica FRW se obtiene

$$G_{00} = 3 \left( H^2 + \frac{K}{a^2} \right), \quad (\text{A.8a})$$

$$G_{11} = -\frac{a^2}{1 - Kr^2} \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{K}{a^2} \right), \quad (\text{A.8b})$$

$$G_{22} = -\left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{K}{a^2} \right) a^2 r^2, \quad (\text{A.8c})$$

$$G_{33} = -\left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{K}{a^2} \right) a^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{A.8d})$$

## A.2. 3-curvatura escalar

Para hipersuperficies espaciales se calcula la 3-curvatura escalar a partir de la 3-métrica:

$$(\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

con la cual se pueden obtener los símbolos de Christoffel no nulos:

$${}^{(3)}\Gamma^1_{11} = \frac{Kr}{1 - Kr^2}, \quad (\text{A.10a})$$

$${}^{(3)}\Gamma^1_{22} = -r(1 - Kr^2), \quad (\text{A.10b})$$

$${}^{(3)}\Gamma^1_{33} = -r(1 - Kr^2) \sin^2 \theta, \quad (\text{A.10c})$$

$${}^{(3)}\Gamma^2_{21} = {}^{(3)}\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \quad (\text{A.10d})$$

$${}^{(3)}\Gamma^2_{33} = -\cos \theta \sin \theta, \quad (\text{A.10e})$$

$${}^{(3)}\Gamma^3_{31} = {}^{(3)}\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \quad (\text{A.10f})$$

$${}^{(3)}\Gamma^3_{32} = \cot \theta. \quad (\text{A.10g})$$

De estos podemos calcular las componentes del tensor de Ricci espacial, cuyas componentes no nulas son:

$${}^{(3)}R_{11} = \frac{2K}{1 - Kr^2}, \quad (\text{A.11a})$$

$${}^{(3)}R_{22} = 2Kr^2, \quad (\text{A.11b})$$

$${}^{(3)}R_{33} = 2Kr^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{A.11c})$$

Finalmente la 3-curvatura escalar:

$$R_{(3)} = \frac{6K}{a^2}. \quad (\text{A.12})$$

### A.3. Ecuaciones de movimiento de un campo escalar

Para la acción  $S[\phi]$  dada por (3.19), es posible aplicar una variación de tal forma que obtengamos las ecuaciones de movimiento para la teoría de un campo escalar con potencial  $V(\phi)$ , esto es:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi} \\
&= \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \sqrt{-g} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \\
&= -\sqrt{-g} \partial_\mu \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi (\partial_\mu \sqrt{-g}) + \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial\phi} \\
&= \sqrt{-g} \left[ -\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{1}{\sqrt{-g}} \dot{\phi} \partial_0 \sqrt{-g} + \frac{\partial V}{\partial\phi} \right] \\
&= \sqrt{-g} \left[ \ddot{\phi} - \partial_k \partial^k \phi + \frac{1}{a^3} \dot{\phi} \partial_0 (a^3) + \frac{\partial V}{\partial\phi} \right] \\
&= \sqrt{-g} \left[ \ddot{\phi} - \partial_k \partial^k \phi + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial\phi} \right] \\
&= \sqrt{-g} \left[ \ddot{\phi} - \partial_k \partial^k \phi + 3H \dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial\phi} \right],
\end{aligned}$$

donde  $\partial_i \partial^i \phi = g^{ij} \partial_i \partial_j \phi = \frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi$ , entonces

$$\boxed{\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi + 3H \dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0.} \quad (\text{A.13})$$

### A.4. Tensor de Energía-Momento de un campo escalar

Para construir el tensor de energía-momento de un campo escalar, se toma la acción (3.19) y mediante su derivada funcional se calcula el tensor energía-momento como prescribe la ecuación (3.23):

$$\begin{aligned}
T_{ab} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{ab}} \\
&= -2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{ab}} - \frac{2\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{ab}} \\
&= -2 \frac{\partial}{\partial g^{ab}} \left( -\frac{1}{2} g^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi - V(\phi) \right) - \frac{2\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{ab}} \\
&= \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{2\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{ab}}.
\end{aligned}$$

Recordemos que  $g = \det(g_{ab})$ , entonces usando la propiedad  $\ln(\det A) = \text{tr}(\ln A)$  obtenemos que

$$\boxed{\frac{1}{\det A} \frac{\partial \det A}{\partial g^{ab}} = \text{tr} \left( A^{-1} \frac{\partial A}{\partial g^{ab}} \right)}, \quad (\text{A.14})$$

lo cual se traduce en nuestro caso a

$$\frac{\partial g}{\partial g^{ab}} = g \left( g^{cd} \frac{\partial g_{cd}}{\partial g^{ab}} \right) = -g \left( g_{cd} \frac{\partial g^{cd}}{\partial g^{ab}} \right) = -g g_{ab},$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ab}} &= \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g^{ab}} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{-g}} (-g g_{ab}) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\boxed{T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi + g_{ab} \mathcal{L}.} \quad (\text{A.15})$$

## A.5. Tiempo conforme

El tiempo conforme  $\eta$  se define como

$$dt = a(t) d\eta, \quad (\text{A.16})$$

con lo cual la métrica FRW (2.2) toma la forma

$$\boxed{ds^2 = a^2(\eta) \left[ -d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]}, \quad (\text{A.17})$$

y en particular cuando  $K = 0$  se tiene un espacio-tiempo de Minkowski multiplicado por un factor conforme  $a(\eta)$ .

Notemos que con la definición (A.16) podemos encontrar la relación entre cantidades derivadas en función del tiempo cósmico y el conforme, e.g., para una función arbitraria del tiempo cósmico  $f = f(t)$  tenemos

$$\dot{f}(t) \equiv \frac{df}{dt} = \frac{d\eta}{dt} \frac{df}{d\eta} = \frac{1}{a(\eta)} \frac{df}{d\eta} \equiv \frac{1}{a(\eta)} f'(\eta). \quad (\text{A.18})$$

De manera análoga, la segunda derivada con respecto al tiempo conforme se puede expresar como

$$\ddot{f} \equiv \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d\eta}{dt} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{d\eta}{dt} \frac{df}{d\eta} \right) = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{a} \frac{d^2 f}{d\eta^2} - \frac{1}{a^2} \frac{da}{d\eta} \frac{df}{d\eta} \right) \equiv \frac{1}{a^2} (f'' - \mathcal{H} f') \quad (\text{A.19})$$

donde  $\mathcal{H}$  es el **parámetro de Hubble conforme** definido por

$$\mathcal{H}(\eta) \equiv \frac{a'}{a}. \quad (\text{A.20})$$

De (A.18) vemos que

$$\mathcal{H} = \dot{a} = aH. \quad (\text{A.21})$$

### A.5.1. Tensores de Ricci y Einstein

Estas expresiones serán extremadamente útiles al momento de cambiar entre el tiempo cósmico y el conforme. Por ejemplo, los resultados de la Sección A.1 se pueden trasladar al tiempo conforme directamente. Para las componentes del tensor de Ricci tenemos que

$$R_{00} = 3 \left( \mathcal{H}^2 - \frac{a''}{a} \right), \quad (\text{A.22a})$$

$$R_{11} = \frac{1}{1 - Kr^2} \left( \frac{a''}{a} + \mathcal{H}^2 + 2K \right), \quad (\text{A.22b})$$

$$R_{22} = \left( \frac{a''}{a} + \mathcal{H}^2 + 2K \right) r^2, \quad (\text{A.22c})$$

$$R_{33} = \left( \frac{a''}{a} + \mathcal{H}^2 + 2K \right) r^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{A.22d})$$

Similarmente, para el escalar de Ricci:

$$R = 6 \left[ \frac{a''}{a^3} + \frac{K}{a^2} \right]. \quad (\text{A.23})$$

Y por último las componentes del tensor de Einstein:

$$G_{00} = 3 (\mathcal{H}^2 + K), \quad (\text{A.24a})$$

$$G_{11} = -\frac{1}{1 - Kr^2} \left( 2\frac{a''}{a} - \mathcal{H}^2 + K \right), \quad (\text{A.24b})$$

$$G_{22} = -\left( 2\frac{a''}{a} - \mathcal{H}^2 + K \right) r^2, \quad (\text{A.24c})$$

$$G_{33} = -\left( 2\frac{a''}{a} - \mathcal{H}^2 + K \right) r^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{A.24d})$$

### A.5.2. Ecuaciones de Friedmann

A partir de las ecuaciones de Einstein, podemos obtener las ecuaciones de Friedman. En particular, empleando (A.24a) y (2.12), la componente 0 – 0 correspondiente a la

primera ecuación de Friedmann toma la forma:

$$\mathcal{H}^2 \equiv \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - K, \quad (\text{A.25})$$

y para la componente  $i - i$  tenemos la segunda ecuación de Friedmann o ecuación de Raychaudhuri:

$$\frac{a''}{a} = \frac{4\pi G}{3}(\rho - 3p)a^2 - K. \quad (\text{A.26})$$

### A.5.3. Ecuación de conservación

La conservación del tensor energía-momento ( $\nabla_\mu T^\mu_0 = 0$ ) toma una forma muy parecida al caso en términos del tiempo físico  $t$ :

$$\rho' = -3\mathcal{H}(\rho + p) = -3\mathcal{H}\rho(1 + w). \quad (\text{A.27})$$

### A.5.4. Campo escalar

En analogía con la obtención de la ecuación (A.13) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi} \\ &= \partial_\mu \left( a^4 (-\partial^\mu\phi) \right) + a^4 \frac{\partial V}{\partial\phi} \\ &= \partial_0 \left( a^2 \partial_0\phi \right) - a^4 g^{kl} \partial_k \partial_l \phi + a^4 \frac{\partial V}{\partial\phi} \\ &= a^2 \phi'' + 2aa'\phi' - a^4 g^{kl} \partial_k \partial_l \phi + a^4 \frac{\partial V}{\partial\phi} \\ &= a^2 \left[ \phi'' + 2\mathcal{H}\phi' - \delta^{kl} \partial_k \partial_l \phi + a^2 \frac{\partial V}{\partial\phi} \right], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' - \nabla^2\phi + a^2 \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \quad (\text{A.28})$$

Si el campo escalar en cuestión es homogéneo es isotrópico, como en el Capítulo 3, el término que involucra al laplaciano se anula. Además, las densidades de energía y de presión para un campo escalar transforma de la forma

$$\rho = \frac{1}{2a^2}\phi'^2 + V(\phi), \quad (\text{A.29a})$$

$$p = \frac{1}{2a^2}\phi'^2 - V(\phi), \quad (\text{A.29b})$$



lo cual es directo de (3.25) y (A.18).

Una relación ampliamente útil será obtenida a partir de (A.25), (A.26) y (A.29):

$$\boxed{\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' = 4\pi G\phi'^2.} \quad (\text{A.30})$$

# Apéndice B

## Universo FRW perturbado

En este Apéndice se detallan un poco más los cálculos para la obtención de cantidades importantes principalmente del Capítulo 6. Además, al igual que en las Secciones A.5 y C.5 se introduce una Sección enfocada a reproducir ecuaciones importantes en términos del tiempo conforme  $\eta$ .

### B.1. Tensor de Einstein perturbado

Para obtener una expresión explícita del tensor de Einstein a primer orden en las perturbaciones, notemos que cada uno de los términos de las componentes de la ecuación (6.19) se puede expresar en términos de la derivada covariante asociada a la 3-métrica  $\gamma_{ij}$  dada por (6.21), denotada por  $D_i$ . Por ejemplo<sup>1</sup>

$$\bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k \tilde{h}_{00} = D_l D_k \tilde{h}_{00} - 2H \left( D_l \tilde{h}_{0k} + D_k \tilde{h}_{0l} \right) - H \bar{g}_{lk} \partial_0 \tilde{h}_{00} + 2H^2 \left( \bar{g}_{lk} \tilde{h}_{00} + \tilde{h}_{lk} \right), \quad (\text{B.1a})$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k \tilde{h}_{0i} &= D_l D_k \tilde{h}_{0i} - H \left( D_l \tilde{h}_{ki} + D_k \tilde{h}_{li} + \bar{g}_{li} D_k \tilde{h}_{00} + \bar{g}_{ki} D_l \tilde{h}_{00} \right) - H \bar{g}_{lk} \partial_0 \tilde{h}_{0i} \\ &\quad + H^2 \left( 2\bar{g}_{kl} \tilde{h}_{0i} + 2\bar{g}_{li} \tilde{h}_{0k} + \bar{g}_{ki} \tilde{h}_{0l} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.1b})$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k \tilde{h}_{ij} &= D_l D_k \tilde{h}_{ij} - H \left( \bar{g}_{ki} D_l \tilde{h}_{0j} + \bar{g}_{kj} D_l \tilde{h}_{0i} + \bar{g}_{li} D_k \tilde{h}_{0j} + \bar{g}_{lj} D_k \tilde{h}_{0i} \right) - H \bar{g}_{lk} \partial_0 \tilde{h}_{ij} \\ &\quad + H^2 \left( 2\bar{g}_{lk} \tilde{h}_{ij} + \bar{g}_{li} \tilde{h}_{kj} + \bar{g}_{lj} \tilde{h}_{ik} + \bar{g}_{li} \bar{g}_{kj} \tilde{h}_{00} + \bar{g}_{lj} \bar{g}_{ki} \tilde{h}_{00} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1c})$$

donde se usa la forma que toman los símbolos de Christoffel que involucran algún índice temporal:

$$\Gamma^i_{0j} = H \delta^i_j, \quad (\text{B.2a})$$

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2} \partial_0 \bar{g}_{ij} = a \dot{a} \gamma_{ij} = H \bar{g}_{ij}. \quad (\text{B.2b})$$

<sup>1</sup>Notemos el abuso de notación; en principio tendríamos que distinguir entre  $\bar{\Gamma}^k_{ij}$  de la 4-métrica de fondo, de  ${}^{(3)}\Gamma^k_{ij}$  de la 3-métrica, sin embargo para FRW (cf. (6.32)) estos son idénticos.

Entonces, por definición

$$D_l D_k \tilde{h}_{00} = \partial_l \partial_k \tilde{h}_{00} - (\partial_m \tilde{h}_{00}) \Gamma^m_{lk}, \quad (\text{B.3a})$$

$$D_l D_k \tilde{h}_{0i} = \partial_l \left( \partial_k \tilde{h}_{0i} - \tilde{h}_{0l} \Gamma^l_{ki} \right) - \left( \partial_m \tilde{h}_{0i} - \tilde{h}_{0l} \Gamma^l_{mi} \right) \Gamma^m_{lk} - \left( \partial_k \tilde{h}_{0m} - \tilde{h}_{0l} \Gamma^l_{km} \right) \Gamma^m_{li}, \quad (\text{B.3b})$$

$$D_l D_k \tilde{h}_{ij} = \partial_l \left( \partial_k \tilde{h}_{ij} - \tilde{h}_{mj} \Gamma^m_{ki} - \tilde{h}_{im} \Gamma^m_{kj} \right) - \left( \partial_n \tilde{h}_{ij} - \tilde{h}_{mj} \Gamma^m_{ni} - \tilde{h}_{im} \Gamma^m_{nj} \right) \Gamma^n_{lk} \\ - \left( \partial_k \tilde{h}_{nj} - \tilde{h}_{mj} \Gamma^m_{kn} - \tilde{h}_{nm} \Gamma^m_{kj} \right) \Gamma^n_{li} - \left( \partial_k \tilde{h}_{in} - \tilde{h}_{mn} \Gamma^m_{ki} - \tilde{h}_{im} \Gamma^m_{kn} \right) \Gamma^n_{lj}. \quad (\text{B.3c})$$

Con las ideas anteriores podemos analizar la ecuación (6.19) por componentes. Primero:

$$\begin{aligned} {}^{(1)}G_{00} &= \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_\mu \tilde{h}_{0\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \tilde{h}_{00} + \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}^{\nu\beta} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta \tilde{h}_{\mu\nu} + \bar{R}_0{}^\mu \tilde{h}_{0\mu} + \bar{R}^\mu{}_{00}{}^\nu \tilde{h}_{\nu\mu} \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{R}_{\mu\nu} \left( \bar{g}^{00} \tilde{h}^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\nu} \tilde{h}_{00} \right) \\ &= \frac{1}{2} \bar{g}^{ij} \left[ \left( \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_i - \bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_0 \right) \tilde{h}_{0j} - \bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_j \tilde{h}_{00} + \bar{g}^{kl} \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_l \tilde{h}_{ik} \right] \\ &\quad - \frac{3}{2} \bar{R}_{00} \tilde{h}_{00} - \frac{1}{2} \bar{R} \tilde{h}_{00} - \frac{1}{2} \bar{R}_{ij} \tilde{h}^{ij} + \bar{g}^{ij} \bar{R}_{i00}{}^k \tilde{h}_{kj} \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a^2} D_i D^i \tilde{h}_{00} - \frac{4}{a^2} H D^i \tilde{h}_{0i} - 3H \partial_0 \tilde{h}_{00} + 2H^2 \left( 3\tilde{h}_{00} + \bar{g}^{ij} \tilde{h}_{ij} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{a^4} D^i D^j \tilde{h}_{ij} + \frac{8}{a^2} H D^i \tilde{h}_{0i} + H \bar{g}^{ij} \partial_0 \tilde{h}_{ij} - 6H^2 \left( \bar{g}^{ij} \tilde{h}_{ij} + 2\tilde{h}_{00} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{g}^{ij} \bar{R}_{0ij}{}^0 \tilde{h}_{00} - \frac{3}{2} \bar{R}_{00} \tilde{h}_{00} - \frac{1}{2} \bar{R} \tilde{h}_{00} - \frac{1}{2} \bar{R}_{ij} \tilde{h}^{ij} + \frac{1}{2} \bar{g}^{ij} \bar{R}_{i00}{}^k \tilde{h}_{kj} \\ &= -\frac{1}{2a^2} D_i D^i \tilde{h}_{00} + \frac{1}{2a^4} D^i D^j \tilde{h}_{ij} - \frac{2}{a^2} H D^i \tilde{h}_{0i} + \frac{3}{2} H \partial_0 \tilde{h}_{00} - \frac{1}{2} H \bar{g}^{ij} \partial_0 \tilde{h}_{ij} \\ &\quad + 3H^2 \tilde{h}_{00} + 2H^2 \bar{g}^{ij} \tilde{h}_{ij} - 3 \left( H^2 + \frac{K}{a^2} \right) \tilde{h}_{00} - \left( H^2 + \frac{K}{a^2} \right) \bar{g}^{ij} \tilde{h}_{ij} \\ &= -\frac{1}{2a^2} D_i D^i \tilde{h}_{00} + \frac{1}{2a^4} D^i D^j \tilde{h}_{ij} - \frac{2}{a^2} H D^i \tilde{h}_{0i} + \frac{3}{2} H \partial_0 \tilde{h}_{00} - \frac{1}{2} H \bar{g}^{ij} \partial_0 \tilde{h}_{ij} \\ &\quad - \frac{3K}{a^2} \tilde{h}_{00} + \left( H^2 - \frac{K}{a^2} \right) \bar{g}^{ij} \tilde{h}_{ij} \end{aligned}$$

donde para eliminar algunos términos se usaron los resultados de la Sección A.1 además de la relación  $\bar{g}^{kl} D_l = \frac{1}{a^2} \gamma^{kl} D_l = \frac{1}{a^2} D^k$ . Empleando la forma (6.31) de  $\tilde{h}$ , y usando las condiciones (6.24) y (6.26) de tal forma que se simplifique lo más posible, se obtiene

que

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}G_{00} &= \frac{1}{2a^2} D_i D^i (\mathcal{A} - 3\mathcal{D} + D^k D_k \mathcal{E}) + \frac{1}{2a^2} D^i D^j [- (\mathcal{A} + \mathcal{D} - D^k D_k \mathcal{E}) \gamma_{ij} - 2D_i D_j \mathcal{E} + D_i \mathcal{V}_j + D_j \mathcal{V}_i] \\
&\quad + \frac{2}{a} H D^i D_i \mathcal{B} - \frac{3}{2} H (\dot{\mathcal{A}} - 3\dot{\mathcal{D}} + D^k D_k \dot{\mathcal{E}}) + \frac{1}{2} H (3\dot{\mathcal{A}} + 3\dot{\mathcal{D}} - D^k D_k \dot{\mathcal{E}}) \\
&\quad + H^2 (3\mathcal{A} + 3\mathcal{D} - D^k D_k \mathcal{E}) + 3 \frac{K}{a^2} (\mathcal{A} - 3\mathcal{D} + D^k D_k \mathcal{E}) - \left( H^2 - \frac{K}{a^2} \right) (3\mathcal{A} + 3\mathcal{D} - D^k D_k \mathcal{E}) \\
&= -\frac{2}{a^2} D_i D^i \mathcal{D} + \frac{1}{a^2} D_i D^i D^k D_k \mathcal{E} - \frac{1}{a^2} D^i D^j D_j D_i \mathcal{E} + \frac{1}{2a^2} D^i D^j [D_i \mathcal{V}_j + D_j \mathcal{V}_i] \\
&\quad + \frac{2}{a} H D^i D_i \mathcal{B} + 6H\dot{\mathcal{D}} - 2H D^k D_k \dot{\mathcal{E}} + \frac{K}{a^2} (6\mathcal{A} - 6\mathcal{D} + 2D^k D_k \mathcal{E}) \\
&= \frac{2}{a^2} \left[ -D_i D^i \mathcal{D} + aH D_i D^i \mathcal{B} - a^2 H D_i D^i \dot{\mathcal{E}} + 3a^2 H \dot{\mathcal{D}} + K (3\mathcal{A} - 3\mathcal{D}) \right],
\end{aligned}$$

donde es útil emplear las relaciones de conmutación para derivadas covariantes que dan origen al 3-tensor de Riemann y simplificar lo arriba obtenido, i.e.,

$$\frac{1}{a^2} D_i D^i D^k D_k \mathcal{E} - \frac{1}{a^2} D^i D^j D_j D_i \mathcal{E} = -\frac{1}{a^2} D^i \left( {}^{(3)}R_{ikl}{}^k D^l \mathcal{E} \right) = -2 \frac{K}{a^2} D^i D_i \mathcal{E}, \quad (\text{B.4})$$

además de

$$\begin{aligned}
D^i D^j [D_i \mathcal{V}_j + D_j \mathcal{V}_i] &= D^i \left( D_i D_j \mathcal{V}^j - {}^{(3)}R_{ijl}{}^j \mathcal{V}^l \right) + D_i D_j D^i \mathcal{V}^j - {}^{(3)}R_{jil}{}^i D^l \mathcal{V}^j - {}^{(3)}R_{jil}{}^j D^i \mathcal{V}^l \\
&= -D^i \left( {}^{(3)}R_{ijl}{}^j \mathcal{V}^l \right) + D^i \left( {}^{(3)}R_{ijl}{}^j \mathcal{V}^l \right) - {}^{(3)}R_{jl} D^l \mathcal{V}^j + {}^{(3)}R_{il} D^i \mathcal{V}^l = 0.
\end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Por lo tanto

$$\boxed{{}^{(1)}G_{00} = \frac{2}{a^2} \left[ D_i D^i \left( -\mathcal{D} + aH(\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}}) \right) + 3a^2 H \dot{\mathcal{D}} + K(3\mathcal{A} - 3\mathcal{D}) \right]}. \quad (\text{B.6})$$

Suele ser conveniente expresar el tensor de Einstein en la forma  ${}^{(1)}G^a{}_b$ , para ello usamos que

$$G^a{}_b = g^{ac} G_{cb} = (\bar{g}^{ac} - \lambda h^{ac}) \left( \bar{G}_{cb} + \lambda {}^{(1)}G_{cb} \right) = \bar{G}^a{}_b + \lambda {}^{(1)}G^a{}_b, \quad (\text{B.7})$$

donde

$${}^{(1)}G^a{}_b = \bar{g}^{ac} {}^{(1)}G_{cb} - h^{ac} \bar{G}_{cb}. \quad (\text{B.8})$$

Destaquemos que en (B.8) tratamos con  $h_{ab}$ , dada en (6.29), y por lo tanto debemos tener cuidado y no confundir con  $\tilde{h}_{ab}$ , definida en (6.31).

Entonces por (B.6) tenemos

$$\boxed{{}^{(1)}G^0{}_0 = \frac{2}{a^2} \left[ D_i D^i \left( \mathcal{D} - aH(\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}}) \right) - 3a^2 H \left( \dot{\mathcal{D}} - H\mathcal{A} \right) + 3K\mathcal{D} \right]}. \quad (\text{B.9})$$

De manera análoga para  ${}^{(1)}G_{0i}$  tenemos

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}G_{0i} &= \frac{1}{2} \left[ \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}^\mu \tilde{h}_{i\mu} + \bar{\nabla}_i \bar{\nabla}^\mu \tilde{h}_{0\mu} - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}^\mu \tilde{h}_{0i} + 2\bar{R}^\mu{}_{0i}{}^\nu \tilde{h}_{\nu\mu} + \bar{R}_0{}^\mu \tilde{h}_{i\mu} + \bar{R}_i{}^\mu \tilde{h}_{0\mu} - \bar{R} \tilde{h}_{0i} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ -\bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_0 \tilde{h}_{00} + \bar{g}^{kl} \left( \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_l \tilde{h}_{ik} + \bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_l \tilde{h}_{0k} - \bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_l \tilde{h}_{0i} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \left( -\frac{\ddot{a}}{a} \bar{g}_{ki} \right) \bar{g}^{lk} \tilde{h}_{0l} - \left( -3\frac{\ddot{a}}{a} \right) \tilde{h}_{0i} + \left( \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + 2\frac{K}{a^2} \right) \bar{g}_{ik} \bar{g}^{lk} \tilde{h}_{0l} - 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{K}{a^2} \right) \tilde{h}_{0i} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ -D_i(\partial_0 \tilde{h}_{00}) + H(D_i \tilde{h}_{00} + 2\partial_0 \tilde{h}_{0i} - 4H \tilde{h}_{0i}) + \frac{1}{a^2} \partial_0(D^k \tilde{h}_{ik}) - \frac{3}{a^2} HD^k \tilde{h}_{ik} - 4H \partial_0 \tilde{h}_{0i} \right. \\
&\quad \left. + 4 \left( 2H^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \right) \tilde{h}_{0i} + \frac{1}{a^2} D_i D^k \tilde{h}_{0k} - H \left( \bar{g}^{kl} D_i \tilde{h}_{lk} + \frac{1}{a^2} D^k \tilde{h}_{ik} + 4D_i \tilde{h}_{00} \right) - H \partial_0 \tilde{h}_{0i} \right. \\
&\quad \left. + 7H^2 \tilde{h}_{0i} - \frac{1}{a^2} D_k D^k \tilde{h}_{0i} + 2H \left( \frac{1}{a^2} D^k \tilde{h}_{ki} + D_i \tilde{h}_{00} \right) + 3H \partial_0 \tilde{h}_{0i} - 9H^2 \tilde{h}_{0i} - 4 \left( H^2 + \frac{K}{a^2} \right) \tilde{h}_{0i} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a^2} D_i D^k \tilde{h}_{0k} - \frac{1}{a^2} D_k D^k \tilde{h}_{0i} - \partial_0(D_i \tilde{h}_{00}) + \frac{1}{a^2} \partial_0(D^k \tilde{h}_{ik}) - \frac{2}{a^2} HD^k \tilde{h}_{ik} - H \bar{g}^{kl} D_i \tilde{h}_{lk} \right. \\
&\quad \left. - HD_i \tilde{h}_{00} - 2H^2 \tilde{h}_{0i} - 4 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2} \right) \tilde{h}_{0i} \right],
\end{aligned}$$

y empleando la separación (6.31)

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}G_{0i} &= -\frac{1}{2a} D_i D^k D_k \mathcal{B} + \frac{1}{2a} D_k D^k (D_i \mathcal{B} + \mathcal{C}_i) + \frac{1}{2} D_i (\dot{\mathcal{A}} - 3\dot{\mathcal{D}} + D^k D_k \dot{\mathcal{E}}) \\
&\quad + \frac{1}{2a^2} \partial_0 \left( a^2 D^k \left[ -(\mathcal{A} + \mathcal{D} - D^l D_l \mathcal{E}) \gamma_{ik} - 2D_i D_k \mathcal{E} + D_i \mathcal{V}_k + D_k \mathcal{V}_i \right] \right) \\
&\quad - HD^k \left[ -(\mathcal{A} + \mathcal{D} - D^l D_l \mathcal{E}) \gamma_{ik} - 2D_i D_k \mathcal{E} + D_i \mathcal{V}_k + D_k \mathcal{V}_i \right] - \frac{1}{2} HD_i (-3\mathcal{A} - 3\mathcal{D} + D_l D^l \mathcal{E}) \\
&\quad + \frac{1}{2} HD_i (\mathcal{A} - 3\mathcal{D} + D^k D_k \mathcal{E}) + aH^2 (D_i \mathcal{B} + \mathcal{C}_i) + 2a \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2} \right) (D_i \mathcal{B} + \mathcal{C}_i) \\
&= a \frac{K}{a^2} D_i \mathcal{B} + \frac{1}{2a} D_k D^k \mathcal{C}_i - 2D_i \dot{\mathcal{D}} - 2a^2 \frac{K}{a^2} D_i \dot{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} D^k \left[ D_i \dot{\mathcal{V}}_k + D_k \dot{\mathcal{V}}_i \right] + 2HD_i \mathcal{A} \\
&\quad + a \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + 2\frac{K}{a^2} \right) (D_i \mathcal{B} + \mathcal{C}_i) \\
&= -2D_i \dot{\mathcal{D}} - 2a^2 \frac{K}{a^2} D_i \dot{\mathcal{E}} + 2HD_i \mathcal{A} + a \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + 3\frac{K}{a^2} \right) D_i \mathcal{B} \\
&\quad + \frac{1}{2} D^k \left[ D_i \dot{\mathcal{V}}_k + D_k \dot{\mathcal{V}}_i \right] + \frac{1}{2a} D_k D^k \mathcal{C}_i + a \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + 2\frac{K}{a^2} \right) \mathcal{C}_i,
\end{aligned}$$

en este caso empleamos algo similar a la componente anterior, es decir

$$-D_i D^k D_k \mathcal{B} + D_k D^k D_i \mathcal{B} = -{}^{(3)}R_{ikl}{}^k D^l \mathcal{B} = 2a^2 \frac{K}{a^2} D_i \mathcal{B}, \quad (\text{B.10})$$

y un término análogo para  $\dot{\mathcal{E}}$ .

Por lo tanto

$$\boxed{{}^{(1)}G_{0i} = 2D_i \left[ -\dot{\mathcal{D}} + H\mathcal{A} - K\dot{\mathcal{E}} + \frac{a}{2} \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + 3\frac{K}{a^2} \right) \mathcal{B} \right] + \frac{1}{2} \left[ D^k D_k \dot{\mathcal{V}}_i + \frac{1}{a} D^k D_k \mathcal{C}_i \right] + K\dot{\mathcal{V}}_i + a \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + 2\frac{K}{a^2} \right) \mathcal{C}_i.} \quad (\text{B.11})$$

Nuevamente empleando (B.8) se tiene

$$\boxed{{}^{(1)}G^0{}_i = \frac{2}{a^2} \left[ a^2 D_i \left( \dot{\mathcal{D}} - H\mathcal{A} - \frac{K}{a} (\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}}) \right) - \frac{1}{4} a D^k D_k (\mathcal{C}_i + a\dot{\mathcal{V}}_i) - \frac{1}{2} a K (\mathcal{C}_i + a\dot{\mathcal{V}}_i) \right].} \quad (\text{B.12})$$

Por último tenemos

$$\begin{aligned} {}^{(1)}G_{ij} &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_\alpha \tilde{h}_{j\mu} + \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_\alpha \tilde{h}_{i\mu} - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\alpha \tilde{h}_{ij} - \frac{1}{2} \bar{g}_{ij} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}^{\nu\beta} \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta \tilde{h}_{\mu\nu} \\ &\quad + \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{R}_{\alpha ij}{}^\nu \tilde{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{R}_{i\alpha} \tilde{h}_{j\mu} + \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{R}_{j\alpha} \tilde{h}_{i\mu} + \frac{1}{2} \bar{R}_{\mu\nu} \bar{g}_{ij} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}^{\nu\beta} \tilde{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \bar{R} \tilde{h}_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_0 \tilde{h}_{j0} - \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_0 \tilde{h}_{i0} + \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 \tilde{h}_{ij} - \bar{g}_{ij} \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 \tilde{h}_{00} + \bar{g}_{ij} \bar{g}^{kl} \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_l \tilde{h}_{0k} + \bar{g}_{ij} \bar{g}^{kl} \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_0 \tilde{h}_{k0} \right. \\ &\quad \left. + \bar{g}^{kl} \bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_l \tilde{h}_{jk} + \bar{g}^{kl} \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_l \tilde{h}_{ik} - \bar{g}^{kl} \bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_l \tilde{h}_{ij} - \bar{g}_{ij} \bar{g}^{kl} \bar{g}^{mn} \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_n \tilde{h}_{km} - 2\bar{R}_{0ij}{}^0 \tilde{h}_{00} \right. \\ &\quad \left. + 2\bar{g}^{kl} \bar{R}_{lij}{}^m \tilde{h}_{km} + \bar{g}^{kl} \bar{R}_{il} \tilde{h}_{jk} + \bar{g}^{kl} \bar{R}_{jl} \tilde{h}_{ik} + \bar{R}_{00} \bar{g}_{ij} \tilde{h}_{00} + \bar{R}_{kl} \bar{g}_{ij} \bar{g}^{km} \bar{g}^{ln} \tilde{h}_{mn} - \bar{R} \tilde{h}_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{g}_{ij} \left[ -\partial_0 \partial_0 \tilde{h}_{00} + \frac{2}{a^2} D^k \partial_0 \tilde{h}_{0k} - \frac{1}{a^4} D^k D^l \tilde{h}_{kl} - 4H \partial_0 \tilde{h}_{00} - \frac{1}{a^2} H \partial_0 (\gamma^{kl} \tilde{h}_{kl}) + \frac{2}{a^2} H D^k \tilde{h}_{0k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2H^2 \tilde{h}_{00} - 4\frac{\ddot{a}}{a} \tilde{h}_{00} + 2H^2 \tilde{h}_k{}^k \right] \right. \\ &\quad \left. + \partial_0 \partial_0 \tilde{h}_{ij} - D_i \partial_0 \tilde{h}_{0j} - D_j \partial_0 \tilde{h}_{0i} + \frac{1}{a^2} D_i D^k \tilde{h}_{jk} + \frac{1}{a^2} D_j D^k \tilde{h}_{ik} - \frac{1}{a^2} D_k D^k \tilde{h}_{ij} - H \partial_0 \tilde{h}_{ij} \right. \\ &\quad \left. - H D_i \tilde{h}_{0j} - H D_j \tilde{h}_{0i} - 2H^2 \tilde{h}_{ij} - 6\frac{\ddot{a}}{a} \tilde{h}_{ij} \right\}. \end{aligned}$$

De tal forma que

$$\begin{aligned}
 {}^{(1)}G_{ij} = 2 \left\{ \bar{g}_{ij} \left[ \frac{1}{2a^2} D_k D^k \Upsilon - \ddot{\mathcal{D}} + H \dot{\mathcal{A}} - 3H \dot{\mathcal{D}} + H^2 \mathcal{A} - H^2 \mathcal{D} + 2 \frac{\ddot{a}}{a} \mathcal{A} - 2 \frac{\ddot{a}}{a} \mathcal{D} \right] \right. \\
 - \frac{1}{2} D_i D_j \Upsilon + a^2 \left( 2 \frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{K}{a^2} \right) D_i D_j \mathcal{E} \\
 + \frac{1}{4} D_i \left[ 2aH \left( \mathcal{C}_j + a \dot{\mathcal{V}}_j \right) + a \partial_t \left( \mathcal{C}_j + a \dot{\mathcal{V}}_j \right) \right] \\
 + \frac{1}{4} D_j \left[ 2aH \left( \mathcal{C}_i + a \dot{\mathcal{V}}_i \right) + a \partial_t \left( \mathcal{C}_i + a \dot{\mathcal{V}}_i \right) \right] \\
 - \frac{1}{2} a^2 \left( 2 \frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{K}{a^2} \right) (D_i \mathcal{V}_j + D_j \mathcal{V}_i) \\
 \left. + \frac{1}{4} a^2 \ddot{h}_{ij}^{\text{TT}} + \frac{3}{4} a^2 H \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} - \frac{1}{4} D_k D^k h_{ij}^{\text{TT}} - a \ddot{a} h_{ij}^{\text{TT}} - \frac{1}{2} a^2 H^2 h_{ij}^{\text{TT}} \right\}, \quad (\text{B.13})
 \end{aligned}$$

donde, por simplicidad de la ecuación, se define la variable  $\Upsilon$  mediante

$$\Upsilon \equiv (\mathcal{A} + \mathcal{D}) - aH (\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}}) - \partial_t [a (\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}})]. \quad (\text{B.14})$$

El cálculo para la obtención de (B.13), si bien es directo, es demasiado largo para presentar en la presente tesis, sin embargo, la idea es la misma a las otras dos componentes (B.6) y (B.11). Entonces, empleando (B.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
 {}^{(1)}G^i_j = \frac{2}{a^2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} D_k D^k \Upsilon + a^2 \left( 2 \frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right) \mathcal{A} + a^2 H \dot{\mathcal{A}} - a^2 \ddot{\mathcal{D}} - 3a^2 H \dot{\mathcal{D}} + K \mathcal{D} \right] \delta^i_j \right. \\
 - \frac{1}{2} D^i D_j \Upsilon + \frac{1}{4} D^i \left[ 2aH \left( \mathcal{C}_j + a \dot{\mathcal{V}}_j \right) + a \partial_t \left( \mathcal{C}_j + a \dot{\mathcal{V}}_j \right) \right] \\
 + \frac{1}{4} D_j \left[ 2aH \left( \mathcal{C}^i + a \dot{\mathcal{V}}^i \right) + a \partial_t \left( \mathcal{C}^i + a \dot{\mathcal{V}}^i \right) \right] \\
 \left. + \frac{a^2}{4} \gamma^{im} \ddot{h}_{mj}^{\text{TT}} + \frac{3}{4} a^2 H \gamma^{im} \dot{h}_{mj}^{\text{TT}} - \frac{1}{4} \gamma^{im} D_k D^k h_{mj}^{\text{TT}} + \frac{K}{2} \gamma^{im} h_{mj}^{\text{TT}} \right\}. \quad (\text{B.15})
 \end{aligned}$$

Notemos que podemos usar las cantidades invariantes de norma (6.49) de tal forma que podamos simplificar las expresiones obtenidas. Por facilidad se tomarán las com-

ponentes del tensor de Einstein en su forma (1,1), i.e.  ${}^{(1)}G^a_b$ , con lo cual se tiene

$${}^{(1)}G^0_0 = \frac{2}{a^2} \left[ -\nabla^2\Phi + 3a^2H \left( \dot{\Phi} + H\Psi \right) - 3K\Phi - 3a^3H \left( \dot{H} - \frac{K}{a^2} \right) \left( \mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}} \right) \right], \quad (\text{B.16a})$$

$${}^{(1)}G^0_i = \frac{2}{a^2} \left\{ a^2 D_i \left[ -\left( \dot{\Phi} + H\Psi \right) + a \left( \dot{H} - \frac{K}{a^2} \right) \left( \mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}} \right) \right] - \frac{1}{4} a \nabla^2 \Theta_i - \frac{1}{2} a K \Theta_i \right\}, \quad (\text{B.16b})$$

$${}^{(1)}G^i_j = \frac{2}{a^2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \nabla^2 \Upsilon + a^2 \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right) \Psi + a^2 H \dot{\Psi} + a^2 \ddot{\Phi} + 3a^2 H \dot{\Phi} - K\Phi - a \left( a^2 \ddot{H} + 3a\ddot{a}H - 3a^2 H^3 - HK \right) \left( \mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}} \right) \right] \delta^i_j - \frac{1}{2} D^i D_j \Upsilon + \frac{1}{4a} \partial_t \left[ a^2 \left( D^i \Theta_j + D_j \Theta^i \right) \right] + \frac{a^2}{4} \gamma^{im} \left( \ddot{h}_{mj}^{\text{TT}} + 3H \dot{h}_{mj}^{\text{TT}} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 h_{mj}^{\text{TT}} + 2\frac{K}{a^2} h_{mj}^{\text{TT}} \right) \right\}, \quad (\text{B.16c})$$

donde

$$\Upsilon = \Psi - \Phi. \quad (\text{B.17})$$

Cabe destacar que (B.16) no son invariantes de norma por sí solas, pero sí lo será cuando se agrega el término del tensor de energía-momento, o equivalentemente escribir las ecuaciones de campo de Einstein. Esto puesto que, al igual que  $h_{ab}$ ,  $G_{ab}$  transforma de manera análoga a (6.39), i.e.

$${}^{(1)}G'^a_b = {}^{(1)}G^a_b - \mathcal{L}_\xi \bar{G}^a_b, \quad (\text{B.18})$$

donde

$$\mathcal{L}_\xi \bar{G}^a_b = \xi^c \nabla_c \bar{G}^a_b - \bar{G}^c_b \nabla_c \xi^a + \bar{G}^a_c \nabla_b \xi^c. \quad (\text{B.19})$$

Separando esta expresión en sus componentes y empleando en (B.18) vemos que las componentes del tensor de Einstein transforman como

$${}^{(1)}G'^0_0 = {}^{(1)}G^0_0 - \dot{\bar{G}}^0_0 \zeta, \quad (\text{B.20a})$$

$${}^{(1)}G'^0_i = {}^{(1)}G^0_i - \left( \bar{G}^0_0 - \frac{1}{3} \bar{G}^k_k \right) \partial_i \zeta, \quad (\text{B.20b})$$

$${}^{(1)}G'^i_j = {}^{(1)}G^i_j - \dot{\bar{G}}^i_j \zeta. \quad (\text{B.20c})$$



Con lo anterior es fácil ver que

$${}^{(1)}G^{(\text{IN})0}{}_0 = {}^{(1)}G^0{}_0 - a\dot{\bar{G}}^0{}_0 (\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}}), \quad (\text{B.21a})$$

$${}^{(1)}G^{(\text{IN})0}{}_i = {}^{(1)}G^0{}_i - a \left( \bar{G}^0{}_0 - \frac{1}{3}\bar{G}^k{}_k \right) \partial_i (\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}}), \quad (\text{B.21b})$$

$${}^{(1)}G^{(\text{IN})i}{}_j = {}^{(1)}G^i{}_j - a\dot{\bar{G}}^i{}_j (\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}}). \quad (\text{B.21c})$$

son invariantes de norma para las componentes del tensor de Einstein. Explícitamente estas toman la forma:

$${}^{(1)}G^{(\text{IN})0}{}_0 = \frac{2}{a^2} \left[ -\nabla^2\Phi + 3a^2H (\dot{\Phi} + H\Psi) - 3K\Phi \right], \quad (\text{B.22a})$$

$${}^{(1)}G^{(\text{IN})0}{}_i = \frac{2}{a^2} \left[ -a^2D_i (\dot{\Phi} + H\Psi) - \frac{1}{4}a\nabla^2\Theta_i - \frac{1}{2}aK\Theta_i \right], \quad (\text{B.22b})$$

$$\begin{aligned} {}^{(1)}G^{(\text{IN})i}{}_j = \frac{2}{a^2} \left\{ \left[ \frac{1}{2}\nabla^2\Upsilon + a^2 \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right) \Psi + a^2H\dot{\Psi} + a^2\ddot{\Phi} \right. \right. \\ \left. \left. + 3a^2H\dot{\Phi} - K\Phi \right] \delta^i{}_j \right. \\ \left. - \frac{1}{2}D^iD_j\Upsilon + \frac{1}{4a}\partial_t \left[ a^2 (D^i\Theta_j + D_j\Theta^i) \right] \right. \\ \left. + \frac{a^2}{4}\gamma^{im} \left( \ddot{h}_{mj}^{\text{TT}} + 3H\dot{h}_{mj}^{\text{TT}} - \frac{1}{a^2}\nabla^2h_{mj}^{\text{TT}} + 2\frac{K}{a^2}h_{mj}^{\text{TT}} \right) \right\}. \quad (\text{B.22c}) \end{aligned}$$

## B.2. Perturbaciones al campo escalar

Para un campo escalar, su perturbación no es invariante de norma sino que esta transforma como es ya usual:

$$\widetilde{\delta\phi}' = \delta\phi - \mathcal{L}_\xi\bar{\phi} = \delta\phi - \dot{\bar{\phi}}\zeta. \quad (\text{B.23})$$

Entonces, en analogía con (B.21), es fácil verificar (usando las ecuaciones (6.47a), (6.48b) y (B.23)) que

$$\delta\phi^{(\text{IN})} \equiv \varphi = \delta\phi - a\dot{\bar{\phi}} (\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}}). \quad (\text{B.24})$$

es invariante de norma.

Por otro lado, al igual que con el tensor de Einstein es conveniente construir las componentes del tensor de energía-momento invariantes de norma. En completa analogía con (B.18) es fácil ver que estas tienen la misma estructura algebraica que (B.21), es decir

$${}^{(1)}T^{(\text{IN})0}{}_0 = {}^{(1)}T^0{}_0 - a\dot{\bar{T}}^0{}_0 \left( \mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}} \right), \quad (\text{B.25a})$$

$${}^{(1)}T^{(\text{IN})0}{}_i = {}^{(1)}T^0{}_i - a \left( \bar{T}^0{}_0 - \frac{1}{3}\bar{T}^k{}_k \right) \partial_i \left( \mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}} \right), \quad (\text{B.25b})$$

$${}^{(1)}T^{(\text{IN})i}{}_j = {}^{(1)}T^i{}_j - a\dot{\bar{T}}^i{}_j \left( \mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}} \right). \quad (\text{B.25c})$$

Empleando (6.64) y (6.49a) en lo anterior tenemos que

$${}^{(1)}T^{(\text{IN})0}{}_0 = \dot{\bar{\phi}}^2 \Psi - \dot{\bar{\phi}} \dot{\bar{\phi}} - \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \varphi, \quad (\text{B.26a})$$

$${}^{(1)}T^{(\text{IN})0}{}_i = -\dot{\bar{\phi}} \partial_i \varphi, \quad (\text{B.26b})$$

$${}^{(1)}T^{(\text{IN})i}{}_j = \left[ \dot{\bar{\phi}} \dot{\bar{\phi}} - \dot{\bar{\phi}}^2 \Psi - \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \varphi \right] \delta^i{}_j. \quad (\text{B.26c})$$

### B.3. Curvatura intrínseca en hipersuperficies espaciales

Usando la 3-métrica perturbada ( $K = 0$ ) y considerando solo las perturbaciones escalares, i.e.

$$ds_{(3)}^2 = a^2 [(1 + 2\mathcal{D})\delta_{ij} - 2\partial_i \partial_j \mathcal{E}] dx^i dx^j, \quad (\text{B.27})$$

donde<sup>2</sup>

$$g^{ij} = \bar{g}^{ij} - h^{ij} = \frac{1}{a^2} [(1 - 2\mathcal{D})\delta^{ij} + 2\partial^i \partial^j \mathcal{E}]. \quad (\text{B.28})$$

Con esto podemos calcular la curvatura escalar intrínseca, similar a como obtuvimos (A.12). Además, puesto que los símbolos de Christoffel  ${}^{(3)}\Gamma^k{}_{ij} \sim \mathcal{O}(1)$ , i.e.

$${}^{(3)}\Gamma^k{}_{ij} = (\delta_{ji} \partial_i \mathcal{D} + \delta_{li} \partial_j \mathcal{D} - \delta_{ij} \partial_l \mathcal{D} - \partial_i \partial_j \partial_l \mathcal{E}) \delta^{kl} + \mathcal{O}(2), \quad (\text{B.29})$$

entonces

$$\begin{aligned} R_{(3)} &= g^{ij} R_{ij} \\ &= g^{ij} \left[ \partial_k {}^{(3)}\Gamma^k{}_{ij} - \partial_i {}^{(3)}\Gamma^k{}_{kj} \right] + \mathcal{O}(2) \\ &= \frac{1}{a^2} \left[ \partial_k (-\partial^k \mathcal{D} - \partial^k \partial^i \partial_i \mathcal{E}) - \partial^i (3\partial_i \mathcal{D} - \partial_i \partial^k \partial_k \mathcal{E}) \right] + \mathcal{O}(2) \\ &= -\frac{4}{a^2} \partial_k \partial^k \mathcal{D} + \mathcal{O}(2). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$${}^{(1)}R_{(3)} = -\frac{4}{a^2} \nabla^2 \mathcal{D}. \quad (\text{B.30})$$

<sup>2</sup>Por convención, las derivadas espaciales  $\partial_k$  viven en el espacio euclidiano y por lo tanto podemos subir y bajar índices con  $\delta_{ij}$  y su inversa. Esto siendo estándar en la literatura cuando se emplea un fondo euclidiano.

## B.4. Perturbaciones a la cosmología $f(R)$

De acuerdo con la ecuación (6.128) tenemos que

$$f_R^{-1} = \bar{f}_R^{-1} \left( 1 + \frac{\bar{f}_{RR}^{(1)} R}{\bar{f}_R} \right)^{-1} + \mathcal{O}(2) = \bar{f}_R^{-1} \left( 1 - \frac{\bar{f}_{RR}^{(1)} R}{\bar{f}_R} \right) + \mathcal{O}(2), \quad (\text{B.31})$$

Recordando que la métrica física tiene la forma (6.1), entonces

$$\frac{g_{ab}}{6} (f_R R + f) = \frac{\bar{g}_{ab}}{6} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) + \frac{\bar{g}_{ab}}{6} (2\bar{f}_R + \bar{f}_{RR} \bar{R})^{(1)} R + \frac{1}{6} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) h_{ab} + \mathcal{O}(2). \quad (\text{B.32})$$

Para los términos que involucran derivadas covariantes (compatibles con la métrica física  $g_{ab}$ , cf. Sección 6.1) en la ecuación (6.125) tenemos

$$f_{RR} \nabla_a \nabla_b R = \bar{f}_{RR} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \bar{R} + \bar{f}_{RR} (\bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b^{(1)} R - C_{ab}^c \bar{\nabla}_c \bar{R}) + \bar{f}_{RRR}^{(1)} R \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \bar{R} + \mathcal{O}(2), \quad (\text{B.33})$$

siendo  $C_{ab}^c$  la conexión dada en términos de la perturbación métrica  $h_{ab}$  en la ecuación (6.6); también

$$f_{RRR} (\nabla_a R) (\nabla_b R) = \bar{f}_{RRR} \bar{\nabla}_a \bar{R} \bar{\nabla}_b \bar{R} + \bar{f}_{RRR} (\bar{\nabla}_a \bar{R} \bar{\nabla}_b^{(1)} R + \bar{\nabla}_a^{(1)} R \bar{\nabla}_b \bar{R}) + \bar{f}_{RRRR} \bar{\nabla}_a \bar{R} \bar{\nabla}_b \bar{R}^{(1)} R + \mathcal{O}(2). \quad (\text{B.34})$$

### Ecuaciones de campo

En resumen tenemos para<sup>3</sup> (6.125)

$$\begin{aligned} T_{ab} &= \frac{1}{\kappa \bar{f}_R} \left( 1 - \frac{\bar{f}_{RR}^{(1)} R}{\bar{f}_R} \right) \left[ \bar{f}_{RR} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \bar{R} + \bar{f}_{RR} (\bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b^{(1)} R - C_{ab}^c \bar{\nabla}_c \bar{R}) + \bar{f}_{RRR}^{(1)} R \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \bar{R} \right. \\ &\quad + \bar{f}_{RRR} \bar{\nabla}_a \bar{R} \bar{\nabla}_b \bar{R} + \bar{f}_{RRR} (\bar{\nabla}_a \bar{R} \bar{\nabla}_b^{(1)} R + \bar{\nabla}_a^{(1)} R \bar{\nabla}_b \bar{R}) \\ &\quad + \bar{f}_{RRRR} \bar{\nabla}_a \bar{R} \bar{\nabla}_b \bar{R}^{(1)} R - \frac{\bar{g}_{ab}}{6} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) \\ &\quad \left. - \frac{\bar{g}_{ab}}{6} (2\bar{f}_R^{(1)} R + \bar{f}_{RR} \bar{R}^{(1)} R) - \frac{h_{ab}}{6} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) \right] \\ &= \bar{T}_{ab} + \frac{1}{\kappa \bar{f}_R} \left[ \bar{f}_{RR} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b^{(1)} R + \bar{f}_{RRR} (\bar{\nabla}_a \bar{R} \bar{\nabla}_b^{(1)} R + \bar{\nabla}_a^{(1)} R \bar{\nabla}_b \bar{R}) - \bar{f}_{RR} C_{ab}^c \bar{\nabla}_c \bar{R} - \frac{h_{ab}}{6} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) \right. \\ &\quad + \left( \bar{f}_{RRR} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \bar{R} + \bar{f}_{RRRR} \bar{\nabla}_a \bar{R} \bar{\nabla}_b \bar{R} - \frac{\bar{g}_{ab}}{6} (2\bar{f}_R + \bar{f}_{RR} \bar{R}) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \bar{R} - \frac{\bar{f}_{RR} \bar{f}_{RRR}}{\bar{f}_R} \bar{\nabla}_a \bar{R} \bar{\nabla}_b \bar{R} + \frac{\bar{g}_{ab} \bar{f}_{RR}}{6 \bar{f}_R} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) \right)^{(1)} R \right] + \mathcal{O}(2), \end{aligned}$$

<sup>3</sup>De manera análoga a la Sección 6.4, omitimos el superíndice (eff) pero debemos de tener cuidado con no confundir con el tensor de energía-momento de otras secciones.

donde el tensor energía-momento de fondo tiene la forma

$$\bar{T}_{ab} = \frac{1}{\kappa \bar{f}_R} \left[ \bar{f}_{RR} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \bar{R} + \bar{f}_{RRR} (\bar{\nabla}_a \bar{R}) (\bar{\nabla}_b \bar{R}) - \frac{\bar{g}_{ab}}{6} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) \right]. \quad (\text{B.35})$$

Entonces la parte que corresponde a perturbaciones lineales es

$${}^{(1)}T_{ab} = \frac{1}{\kappa \bar{f}_R} \left[ \bar{f}_{RR} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b {}^{(1)}R + \bar{f}_{RRR} (\bar{\nabla}_a \bar{R} \bar{\nabla}_b {}^{(1)}R + \bar{\nabla}_a {}^{(1)}R \bar{\nabla}_b \bar{R}) + \Delta_{ab} {}^{(1)}R - \bar{f}_{RR} C^c{}_{ab} \bar{\nabla}_c \bar{R} - \frac{h_{ab}}{6} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) \right], \quad (\text{B.36})$$

donde se define

$$\Delta_{ab} \equiv \left( \bar{f}_{RRR} - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} \right) \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \bar{R} + \left( \bar{f}_{RRRR} - \frac{\bar{f}_{RR} \bar{f}_{RRR}}{\bar{f}_R} \right) \bar{\nabla}_a \bar{R} \bar{\nabla}_b \bar{R} + \frac{1}{6} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \bar{f} - 2\bar{f}_R \right) \bar{g}_{ab}, \quad (\text{B.37})$$

lo cual únicamente depende del fondo.

Notemos que (B.36) es la expresión general para una función  $f(R)$  y en una métrica de fondo, ambas arbitrarias (pero en vacío). En nuestro caso usaremos, como es usual, la métrica FRW como fondo, con la cual obtendremos un sistema de ecuaciones diferenciales para  ${}^{(1)}R$  y las correspondientes perturbaciones métricas. En este caso,  $\bar{R} = \bar{R}(t)$  (cf. (A.6)) y por lo tanto el cálculo de las componentes del tensor de energía-momento se simplifican un poco. Usando lo anterior calculamos por componentes

$$\begin{aligned} {}^{(1)}T_{00} &= \frac{1}{\kappa \bar{f}_R} \left[ \bar{f}_{RR} \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 {}^{(1)}R + 2\bar{f}_{RRR} \bar{\nabla}_0 \bar{R} \bar{\nabla}_0 {}^{(1)}R - \bar{f}_{RR} C^{\mu}{}_{00} \bar{\nabla}_\mu \bar{R} - \frac{h_{00}}{6} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) \right. \\ &\quad + \left( \bar{f}_{RRR} \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 \bar{R} + \bar{f}_{RRRR} \bar{\nabla}_0 \bar{R} \bar{\nabla}_0 \bar{R} - \frac{\bar{g}_{00}}{6} (2\bar{f}_R + \bar{f}_{RR} \bar{R}) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 \bar{R} - \frac{\bar{f}_{RR} \bar{f}_{RRR}}{\bar{f}_R} (\bar{\nabla}_0 \bar{R}) (\bar{\nabla}_0 \bar{R}) + \frac{\bar{g}_{00}}{6} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) \right) {}^{(1)}R \right] \\ &= \frac{1}{\kappa \bar{f}_R} \left[ \bar{f}_{RR} {}^{(1)}\ddot{R} + 2\bar{f}_{RRR} \dot{\bar{R}} {}^{(1)}\dot{R} + \frac{1}{2} \bar{f}_{RR} \dot{\bar{R}} \partial_0 h_{00} - \frac{1}{6} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) h_{00} + \Delta_{00} {}^{(1)}R \right]. \end{aligned}$$

Entonces usando la descomposición (6.29) obtenemos

$${}^{(1)}T_{00} = \frac{1}{\kappa \bar{f}_R} \left[ \bar{f}_{RR} {}^{(1)}\ddot{R} + 2\bar{f}_{RRR} \dot{\bar{R}} {}^{(1)}\dot{R} + F {}^{(1)}R - \bar{f}_{RR} \dot{\bar{R}} \dot{\mathcal{A}} + \frac{1}{3} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) \mathcal{A} \right]. \quad (\text{B.38})$$

donde por la definición (B.37) para  $\Delta_{ab}$  se define ( $F$ , letra obsoleta *digamma* del alfabeto griego)

$$F \equiv \Delta_{00} = \left( \bar{f}_{RRR} - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} \right) \ddot{R} + \left( \bar{f}_{RRRR} - \frac{\bar{f}_{RR} \bar{f}_{RRR}}{\bar{f}_R} \right) \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{6} \left( 2\bar{f}_R - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \bar{f} \right). \quad (\text{B.39})$$

Además, usando que

$${}^{(1)}T^a_b = \bar{g}^{ac}{}^{(1)}T_{cb} - h^{ac}\bar{T}_{cb}, \quad (\text{B.40})$$

es directo que

$${}^{(1)}T^0_0 = \frac{1}{\kappa\bar{f}_R} \left[ -\bar{f}_{RR}{}^{(1)}\ddot{R} - 2\bar{f}_{RRR}\dot{\bar{R}}{}^{(1)}\dot{R} - F{}^{(1)}R + \bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}}\dot{\mathcal{A}} + 2\left(\bar{f}_{RR}\ddot{\bar{R}} + \bar{f}_{RRR}\dot{\bar{R}}^2\right)\mathcal{A} \right]. \quad (\text{B.41})$$

De igual manera que en el caso de un campo escalar, las perturbaciones  ${}^{(1)}R$  y  $\mathcal{A}$  no son invariantes de norma, y en consecuencia tampoco lo es (B.41). Es decir, tenemos que

$${}^{(1)}\tilde{R} = {}^{(1)}R - \mathcal{L}_\xi \bar{R} = {}^{(1)}R - \dot{\bar{R}}\zeta, \quad (\text{B.42})$$

y las expresiones (6.46)-(6.48) para las perturbaciones métricas. Entonces en analogía con (B.24)

$${}^{(1)}R^{(IN)} \equiv \varrho = {}^{(1)}R - a\dot{\bar{R}}\left(\mathcal{B} - a\dot{\mathcal{E}}\right). \quad (\text{B.43})$$

Puesto que (B.23) y (B.24) son completamente análogas a (B.42) y (B.43), entonces podemos emplear las relaciones (B.25). Por lo tanto

$$\boxed{{}^{(1)}T^{(IN)0}_0 = \frac{1}{\kappa\bar{f}_R} \left[ -\bar{f}_{RR}\ddot{\varrho} - 2\bar{f}_{RRR}\dot{\bar{R}}\dot{\varrho} - F\varrho + \bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}}\dot{\Psi} + 2\left(\bar{f}_{RR}\ddot{\bar{R}} + \bar{f}_{RRR}\dot{\bar{R}}^2\right)\Psi \right]}. \quad (\text{B.44})$$

Siguiendo las ideas empleadas en el calculo de la componente 00 (así como de la Sección 6.4.1) obtenemos

$$\begin{aligned} {}^{(1)}T_{0i} = \frac{1}{\kappa\bar{f}_R} D_i \left[ \bar{f}_{RR}{}^{(1)}\dot{R} + \left( \bar{f}_{RRR}\dot{\bar{R}} - H\bar{f}_{RR} \right) {}^{(1)}R - \bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}}\mathcal{A} \right. \\ \left. + a \left( \frac{1}{6}(\bar{f}_R\bar{R} + \bar{f}) + H\bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}} \right) \mathcal{B} \right] \\ + \frac{a}{\kappa\bar{f}_R} \left( \frac{1}{6}(\bar{f}_R\bar{R} + \bar{f}) + H\bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}} \right) \mathcal{C}_i, \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

y su correspondiente expresión invariante de norma

$$\boxed{{}^{(1)}T^{(IN)0}_i = \frac{1}{\kappa\bar{f}_R} D_i \left[ -\bar{f}_{RR}\dot{\varrho} - \left( \bar{f}_{RRR}\dot{\bar{R}} - H\bar{f}_{RR} \right) \varrho + \bar{f}_{RR}\dot{\bar{R}}\dot{\Psi} \right]}. \quad (\text{B.46})$$

De igual manera

$$\begin{aligned}
(1)T_{ij} = \frac{1}{\kappa \bar{f}_R} \left\{ \left[ -H \bar{f}_{RR} (1)\dot{R} + \left( \frac{1}{6} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \bar{f} - 2\bar{f}_R \right) - H \dot{R} \left( \bar{f}_{RRR} - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} \right) \right) (1)R \right. \right. \\
\left. \left. - \bar{f}_{RR} \dot{R} \dot{\mathcal{D}} + 2H \bar{f}_{RR} \dot{R} \mathcal{A} - 2 \left( H \bar{f}_{RR} \dot{R} + \frac{1}{6} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) \right) \mathcal{D} \right] \bar{g}_{ij} \right. \\
\left. + D_i D_j \left[ \bar{f}_{RR} (1)R - \bar{f}_{RR} \dot{R} a (\mathcal{B} - a \dot{\mathcal{E}}) + 2a^2 \left( H \bar{f}_{RR} \dot{R} + \frac{1}{6} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) \right) \mathcal{E} \right] \right. \\
\left. - \frac{a}{2} \bar{f}_{RR} \dot{R} \left( D_i \mathcal{C}_j + a D_i \dot{\mathcal{V}}_j + D_j \mathcal{C}_i + a D_j \dot{\mathcal{V}}_i \right) - \frac{a^2}{2} \bar{f}_{RR} \dot{R} h_{ij}^{\text{TT}} \right. \\
\left. - a^2 \left( H \bar{f}_{RR} \dot{R} + \frac{1}{6} (\bar{f}_R \bar{R} + \bar{f}) \right) (D_i \mathcal{V}_j + D_j \mathcal{V}_i + h_{ij}^{\text{TT}}) \right\}, \tag{B.47}
\end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned}
(1)T^{(\text{IN})i}{}_j = \frac{1}{\kappa \bar{f}_R} \left\{ \left[ -H \bar{f}_{RR} \dot{\varrho} + \left( \frac{1}{6} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \bar{f} - 2\bar{f}_R \right) - H \dot{R} \left( \bar{f}_{RRR} - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} \right) \right) \varrho \right. \right. \\
\left. \left. + \bar{f}_{RR} \dot{R} \dot{\Phi} + 2H \bar{f}_{RR} \dot{R} \Psi \right] \delta^i{}_j + \frac{\bar{f}_{RR}}{a^2} D^i D_j \varrho \right. \\
\left. - \frac{1}{2a} \bar{f}_{RR} \dot{R} (D^i \Theta_j + D_j \Theta^i) - \frac{1}{2} \bar{f}_{RR} \dot{R} \gamma^{ik} h_{kj}^{\text{TT}} \right\}. \tag{B.48}
\end{aligned}$$

### Ecuación de Klein-Gordon

Además, para la ecuación tipo Klein-Gordon (4.6), tenemos que a orden cero en las perturbaciones

$$\boxed{\bar{\square} \bar{R} = -\ddot{\bar{R}} - 3H \dot{\bar{R}} = \frac{1}{3\bar{f}_{RR}} \left[ \kappa \bar{T} - 3\bar{f}_{RRR} \dot{\bar{R}}^2 + 2\bar{f} - \bar{f}_R \bar{R} \right]}. \tag{B.49}$$

Y a primer orden

$$\begin{aligned}
& -\ddot{\varrho} - 3H \dot{\varrho} + \frac{1}{a^2} \nabla^2 \varrho + 3\dot{\bar{R}} \dot{\Phi} + \dot{\bar{R}} \dot{\Psi} + 2 \left( \ddot{\bar{R}} + 3H \dot{\bar{R}} \right) \Psi \\
& = \frac{1}{3\bar{f}_{RR}} \left[ 6\bar{f}_{RRR} \dot{\bar{R}} \dot{\varrho} + \left( \bar{f}_R - \bar{R} \bar{f}_{RR} + 3\bar{f}_{RRR} \dot{\bar{R}}^2 + 3\bar{f}_{RRR} \left( \ddot{\bar{R}} + 3H \dot{\bar{R}} \right) \right) \varrho \right]. \tag{B.50}
\end{aligned}$$

## B.5. Tiempo conforme

Al igual que la Sección A.5, la presente está dedicada a recopilar expresiones en términos del tiempo conforme para algunos resultados importantes del Capítulo 6.

### B.5.1. Tensor de Einstein

Usando las relaciones (A.18)-(A.21) podemos expresar las relaciones obtenidas en el Capítulo 6. Para las componentes del tensor de Einstein perturbado (ecs. (6.34)) tenemos

$${}^{(1)}G^0_0 = \frac{2}{a^2} \left[ \nabla^2 (\mathcal{D} - \mathcal{H}(\mathcal{B} - \mathcal{E}')) - 3\mathcal{H}(\mathcal{D}' - \mathcal{H}\mathcal{A}) + 3K\mathcal{D} \right], \quad (\text{B.51a})$$

$${}^{(1)}G^0_i = \frac{2}{a^2} \left[ aD_i (\mathcal{D}' - \mathcal{H}\mathcal{A} - K(\mathcal{B} - \mathcal{E}')) - \frac{1}{4}a\nabla^2 (\mathcal{C}_i + \mathcal{V}'_i) - \frac{1}{2}aK (\mathcal{C}_i + \mathcal{V}'_i) \right], \quad (\text{B.51b})$$

$${}^{(1)}G^i_j = \frac{2}{a^2} \left\{ \left[ \frac{1}{2}\nabla^2\Upsilon + \left( 2\frac{a''}{a} - \mathcal{H}^2 \right) \mathcal{A} + \mathcal{H}\mathcal{A}' - \mathcal{D}'' - 2\mathcal{H}\mathcal{D}' + K\mathcal{D} \right] \delta^i_j - \frac{1}{2}D^i D_j \Upsilon + \frac{1}{4}D^i [2\mathcal{H}(\mathcal{C}_j + \mathcal{V}'_j) + \partial_\eta (\mathcal{C}_j + \mathcal{V}'_j)] + \frac{1}{4}D_j [2\mathcal{H}(\mathcal{C}^i + \mathcal{V}'^i) + \partial_\eta (\mathcal{C}^i + \mathcal{V}'^i)] + \frac{1}{4}\gamma^{im} (h_{mj}^{\text{TT}''} + 2\mathcal{H}h_{mj}^{\text{TT}'} - \nabla^2 h_{mj}^{\text{TT}} + 2Kh_{mj}^{\text{TT}}) \right\}, \quad (\text{B.51c})$$

donde

$$\Upsilon \equiv (\mathcal{A} + \mathcal{D}) - 2\mathcal{H}(\mathcal{B} - \mathcal{E}') - \partial_\eta (\mathcal{B} - \mathcal{E}'). \quad (\text{B.52})$$

Notemos que las transformaciones de las cantidades que caracterizan las perturbaciones obtenidas en la Sección 6.3.1 también sufren un *cambio* y en consecuencia las cantidades invariantes de norma toman la forma

$$\Psi = \mathcal{A} - \frac{1}{a}\partial_\eta [a(\mathcal{B} - \mathcal{E}')], \quad (\text{B.53a})$$

$$\Phi = -\mathcal{D} + \mathcal{H}(\mathcal{B} - \mathcal{E}'), \quad (\text{B.53b})$$

$$\Theta_i = \mathcal{C}_i + \mathcal{V}'_i, \quad (\text{B.53c})$$

$$h_{ij} = h_{ij}^{\text{TT}}. \quad (\text{B.53d})$$

### B.5.2. Ecuaciones de campo para un campo escalar

Para un universo inmerso en un campo escalar las ecuaciones de campo (6.67) en términos del tiempo conforme toman la forma

$$-\nabla^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G \left[ \bar{\phi}'^2\Psi - \bar{\phi}'\varphi' - a^2\frac{\partial V}{\partial\bar{\phi}}\varphi \right], \quad (\text{B.54a})$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Psi = 4\pi G\bar{\phi}'\varphi, \quad (\text{B.54b})$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2}\nabla^2\Upsilon + \left( 2\frac{a''}{a} - \mathcal{H}^2 \right) \Psi + \mathcal{H}\Psi' + \Phi'' + 2\mathcal{H}\Phi' \right] \delta^i_j - \frac{1}{2}\partial^i\partial_j\Upsilon \\ = 4\pi G \left[ \bar{\phi}'\varphi' - \bar{\phi}'^2\Psi - a^2\frac{\partial V}{\partial\bar{\phi}}\varphi \right] \delta^i_j. \end{aligned} \quad (\text{B.54c})$$

Ademas, la ecuación dinámica de la perturbación del campo escalar (6.79) toma la forma

$$\varphi'' + 2\mathcal{H}\varphi' - \nabla^2\varphi + a^2\frac{\partial^2 V}{\partial\bar{\phi}^2}\varphi - 4\bar{\phi}'\Psi' + 2a^2\frac{\partial V}{\partial\bar{\phi}}\Psi = 0. \quad (\text{B.55})$$

### B.5.3. Ecuaciones de campo para la cosmología $f(R)$

Para un universo descrito por las teorías  $f(R)$  las ecuaciones de campo (6.133) en términos del tiempo conforme toman la forma

$$\begin{aligned} -\nabla^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) = \frac{1}{2\bar{f}_R} \left[ -\bar{f}_{RR}\varrho'' + (\bar{f}_{RR}\mathcal{H} - 2\bar{f}_{RRR}\bar{R}')\varrho' - a^2F\varrho \right. \\ \left. + \bar{f}_{RR}\bar{R}'\Psi' + 2(\bar{f}_{RR}\bar{R}'' - \bar{f}_{RR}\mathcal{H}\bar{R}' + \bar{f}_{RRR}\bar{R}'^2)\Psi \right], \end{aligned} \quad (\text{B.56a})$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Psi = \frac{1}{2\bar{f}_R} \left[ \bar{f}_{RR}\varrho' + (\bar{f}_{RRR}\bar{R}' - \mathcal{H}\bar{f}_{RR})\varrho - \bar{f}_{RR}\bar{R}'\Psi \right], \quad (\text{B.56b})$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2}\nabla^2\Upsilon + \Phi'' + 2\mathcal{H}\Phi' + \mathcal{H}\Psi' + \left( 2\frac{a''}{a} - \mathcal{H}^2 \right) \Psi \right] \delta^i_j - \frac{1}{2}\partial^i\partial_j\Upsilon \\ = \frac{1}{2\bar{f}_R} \left\{ \left[ -\mathcal{H}\bar{f}_{RR}\varrho' + \left( \frac{a^2}{6} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\bar{f} - 2\bar{f}_R \right) - \mathcal{H}\bar{R}' \left( \bar{f}_{RRR} - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} \right) \right) \varrho \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{f}_{RR}\bar{R}'\Phi' + 2\mathcal{H}\bar{f}_{RR}\bar{R}'\Psi \right] \delta^i_j + \bar{f}_{RR}\partial^i\partial_j\varrho \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.56c})$$

donde

$$a^2F \equiv \left( \bar{f}_{RRR} - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} \right) \bar{R}'' - \mathcal{H} \left( \bar{f}_{RRR} - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} \right) \bar{R}' + \left( \bar{f}_{RRRR} - \frac{\bar{f}_{RR}\bar{f}_{RRR}}{\bar{f}_R} \right) \bar{R}'^2 + \frac{a^2}{6} \left( 2\bar{f}_R - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R}\bar{f} \right). \quad (\text{B.57})$$



## B.6. Transformación conforme

Nuestro interés en la Sección 6.5.3 es transformar los resultados obtenidos en el marco conforme o marco de Einstein (Secc. 6.4) al marco físico o marco de Jordan. Para ello primero debemos verificar que las ecuaciones de campo (6.67),(6.112) y (6.133),(6.144) son equivalentes bajo la transformación conforme (5.9).

Por la simplicidad que representan las perturbaciones tensoriales (respecto a las escalares), veremos primero como esta transformación se comporta en ellas. Entonces, la ecuación (6.150) tenemos que

$$\tilde{h}_{ij} = \bar{f}_R h_{ij}. \quad (\text{B.58})$$

Usando la descomposición EVT de la Sección 6.2.1 (pero tomando solo las perturbaciones tensoriales) tenemos

$$h_{ij} = a^2 h_{ij}^{\text{TT}}, \quad (\text{B.59})$$

y su análoga en el marco de Einstein

$$\tilde{h}_{ij} = \tilde{a}^2 \tilde{h}_{ij}^{\text{TT}}. \quad (\text{B.60})$$

Con lo anterior, la ecuación (B.58) toma la forma

$$\tilde{h}_{ij}^{\text{TT}} = \bar{f}_R \frac{a^2}{\tilde{a}^2} h_{ij}^{\text{TT}} = h_{ij}^{\text{TT}}. \quad (\text{B.61})$$

Donde se usó la relación (5.23b) entre  $a$  y  $\tilde{a}$ . Esta ecuación es importante porque implica que el espectro de potencias (6.116) es invariante ante la transformación conforme  $\tilde{g}_{ab} = \bar{f}_R g_{ab}$ .

Ahora, tomando la ecuación de ondas gravitacionales en el marco de Einstein (6.112), vemos que transforma de la siguiente forma (omitiendo la etiqueta TT en  $h_{ij}$ ):

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{\tilde{t}}^2 \tilde{h}_{ij} + 3\tilde{H} \partial_{\tilde{t}} \tilde{h}_{ij} - \frac{1}{\tilde{a}^2} \nabla^2 \tilde{h}_{ij} \\ &= \frac{d\tilde{t}}{dt} \frac{d}{d\tilde{t}} \left( \frac{d\tilde{t}}{dt} \frac{d}{d\tilde{t}} h_{ij} \right) + 3 \frac{1}{\sqrt{\bar{f}_R}} \left( H + \frac{\bar{f}_{RR}}{2\bar{f}_R} \dot{\bar{R}} \right) \frac{d\tilde{t}}{dt} \frac{d}{d\tilde{t}} h_{ij} - \frac{1}{a^2 \bar{f}_R} \nabla^2 h_{ij} \\ &= \frac{1}{\bar{f}_R} \left[ \ddot{h}_{ij} - \frac{\bar{f}_{RR}}{2\bar{f}_R} \dot{\bar{R}} \dot{h}_{ij} + 3 \left( H + \frac{\bar{f}_{RR}}{2\bar{f}_R} \dot{\bar{R}} \right) \dot{h}_{ij} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 h_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{\bar{f}_R} \left[ \ddot{h}_{ij} + \left( 3H + \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \dot{\bar{R}} \right) \dot{h}_{ij} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 h_{ij} \right], \end{aligned}$$

donde (  $\dot{\phantom{x}}$  ) denota derivaciones temporales en el marco de Jordan. Entonces

$$\ddot{h}_{ij} + \left( 3H + \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \dot{\bar{R}} \right) \dot{h}_{ij} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 h_{ij} = 0, \quad (\text{B.62})$$

lo cual coincide con (6.144).

Para el análisis de las perturbaciones escalares es conveniente usar el tiempo conforme como variable temporal, puesto que las coordenadas serán las mismas en ambos marcos, esto es

$$ds^2 = a^2(\eta) (-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j), \quad (\text{B.63a})$$

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{a}^2(\eta) (-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j). \quad (\text{B.63b})$$

En este caso, el parámetro (conforme) de Hubble transforma como

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R'. \quad (\text{B.64})$$

En este caso tenemos que las perturbaciones escalares transforman como

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} {}^{(1)}R, \quad (\text{B.65a})$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}, \quad (\text{B.65b})$$

$$\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} {}^{(1)}R, \quad (\text{B.65c})$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}, \quad (\text{B.65d})$$

cuyas cantidades invariantes de norma en el marco conforme toman la forma

$$\tilde{\Psi} = \Psi + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho, \quad (\text{B.66a})$$

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho, \quad (\text{B.66b})$$

$$\tilde{\varphi} = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho. \quad (\text{B.66c})$$

Con estas expresiones se puede verificar la equivalencia entre los marcos y dado que la transformación (5.9) es invertible, lo contrario naturalmente se cumple. Es decir que tenemos la libertad de elegir el marco a partir del cual transformar las ecuaciones.

La primera situación, y la más directa, es para la componente fuera de la diagonal de la parte espacial de las ecuaciones de campo, es decir cuando  $i \neq j$ . En este caso tenemos simplemente que  $\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}$  (cf. ec. (6.69)) lo que a partir de (B.66a) y (B.66b) se traduce en

$$\Psi - \Phi + \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho = 0, \quad (\text{B.67})$$

de acuerdo con la ecuación (6.135).

Para la componente  $0i$  de las ecuaciones de campo tenemos un caso relativamente simple. Aquí el lado izquierdo de la ecuación (B.54b) toma la forma<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}' + \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Psi} &= \partial_\eta \left[ \Phi - \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right] + \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \left[ \Psi + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right] \\ &= \Phi' - \frac{1}{2} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) + \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \Psi + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \varrho,\end{aligned}$$

y usando la ec. (5.16) para el lado derecho de (B.54b)

$$\begin{aligned}4\pi G \bar{\phi}' \varphi &= 4\pi G \left( \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \left( \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) \\ &= \frac{3}{4} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right)^2 R' \varrho.\end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación (B.54b) transformada al marco de Jordan toma la forma

$$\begin{aligned}0 &= \tilde{\Phi}' + \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Psi} - 4\pi G \bar{\phi}' \varphi \\ &= \Phi' - \frac{1}{2} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) + \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \Psi + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \varrho - \frac{3}{4} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right)^2 R' \varrho \\ &= \Phi' + \mathcal{H}\Psi - \frac{1}{2} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \Psi + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \mathcal{H} \varrho + \frac{1}{4} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right)^2 R' \varrho - \frac{3}{4} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right)^2 R' \varrho \\ &= \Phi' + \mathcal{H}\Psi - \frac{1}{2\bar{f}_R} [-\bar{f}_{RR}\mathcal{H}\varrho - \bar{f}_{RR}R'\Psi] - \frac{1}{2\bar{f}_R} (\bar{f}_{RR}\varrho' + \bar{f}_{RRR}R'\varrho) \\ &= \Phi' + \mathcal{H}\Psi - \frac{1}{2\bar{f}_R} [\bar{f}_{RR}\varrho' + \bar{f}_{RRR}R'\varrho - \bar{f}_{RR}\mathcal{H}\varrho - \bar{f}_{RR}R'\Psi],\end{aligned}$$

lo que coincide justamente con la ecuación (B.56b).

Para el resto de las ecuaciones la situación se complica un poco puesto que en la definición del tensor efectivo (4.8) hemos empleado la traza para simplificar los términos. Por ello será conveniente usar que  $\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}$  y por lo tanto  $\tilde{\Upsilon} = 0$ . Sin embargo  $\Upsilon \neq 0$ , de hecho  $\Upsilon = -\frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho$ .

Para la componente  $00$ , la ecuación (B.54a) toma la forma

$$-\nabla^2 \tilde{\Psi} + 3\tilde{\mathcal{H}} (\tilde{\Psi}' + \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Psi}) = 4\pi G \left[ \bar{\phi}'^2 \tilde{\Psi} - \bar{\phi}' \varphi' - \tilde{a}^2 \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \varphi \right]. \quad (\text{B.68})$$

<sup>4</sup>Tenemos que tener cuidado con las derivadas temporales, puesto que en general no son iguales en los marcos, sin embargo la ventaja de usar el tiempo conforme como parámetro temporal es que estas coinciden en ambos marcos.

Donde el lado izquierdo de la igualdad transforma al marco de Jordan como

$$\begin{aligned}
-\nabla^2 \tilde{\Psi} + 3\tilde{\mathcal{H}} \left( \tilde{\Psi}' + \tilde{\mathcal{H}} \tilde{\Psi} \right) &= -\nabla^2 \Psi - \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \nabla^2 \varrho + 3 \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \left( \Psi' + \frac{1}{2} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) \right) \\
&\quad + 3 \left( \mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' + \frac{1}{4} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right)^2 \right) \left( \Psi + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) \\
&= -\nabla^2 \Psi + 3 \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \Psi' + 3 \left( \mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' + \frac{1}{4} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right)^2 \right) \Psi \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \nabla^2 \varrho + \frac{3}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \varrho' \\
&\quad + \frac{3}{2} \left[ \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \left( \mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' + \frac{1}{4} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) \right] \varrho.
\end{aligned}$$

Tenemos que tener cuidado con  $\partial_\eta$ , esta denota la derivada con respecto al tiempo conforme y no involucra un indice espacio-temporal. De igual manera, el lado derecho de la ecuación (B.68) toma la forma

$$\begin{aligned}
4\pi G \left[ \bar{\phi}'^2 \tilde{\Psi} - \bar{\phi}' \varphi' - \bar{a}^2 \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \varphi \right] &= 4\pi G \left\{ \frac{3}{2\kappa} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right)^2 \left( \Psi + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) - \frac{3}{2\kappa} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a^2 \bar{f}_R}{\kappa \bar{f}_R^2} \left( \bar{f} - \frac{1}{2} \bar{f}_R R \right) \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right\} \\
&= \frac{3}{4} \left\{ \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right)^2 \Psi - \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right)^2 R' \varrho' \right. \\
&\quad \left. + \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right)^2 - \frac{\bar{f}_{RRR}}{\bar{f}_R} R'^2 - \frac{2}{3} a^2 \frac{1}{\bar{f}_R} \left( \bar{f} - \frac{1}{2} \bar{f}_R R \right) \right] \varrho \right\}.
\end{aligned}$$

Juntando estas expresiones vemos que la ecuación (B.68) transforma como

$$\begin{aligned}
0 &= -\nabla^2 \tilde{\Psi} + 3\tilde{\mathcal{H}} \left( \tilde{\Psi}' + \tilde{\mathcal{H}} \tilde{\Psi} \right) - 4\pi G \left[ \bar{\phi}'^2 \tilde{\Psi} - \bar{\phi}' \varphi' - \tilde{a}^2 \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \varphi \right] \\
&= -\nabla^2 \Psi + 3 \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \Psi' + 3 \left( \mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' + \frac{1}{4} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right)^2 \right) \Psi \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \nabla^2 \varrho + \frac{3}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \varrho' \\
&\quad + \frac{3}{2} \left[ \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \left( \mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' + \frac{1}{4} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right)^2 \right) + \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) \right] \varrho \\
&\quad - \frac{3}{4} \left\{ \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right)^2 \Psi - \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right)^2 R' \varrho' \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right)^2 - \frac{\bar{f}_{RRR}}{\bar{f}_R} R'^2 - \frac{2}{3} a^2 \frac{1}{\bar{f}_R} \left( \bar{f} - \frac{1}{2} \bar{f}_R R \right) \right] \varrho \right\} \\
&= -\nabla^2 \Psi + 3\mathcal{H} \Psi' + 3\mathcal{H}^2 \Psi - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \nabla^2 \varrho + 3\mathcal{H} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) \\
&\quad - \frac{1}{2\bar{f}_R} \left\{ -\bar{f}_{RR} \nabla^2 \varrho + 3\bar{f}_{RR} \left( \mathcal{H} - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \varrho' \right. \\
&\quad \quad - 3\bar{f}_{RR} \left[ \mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' - \mathcal{H} \frac{\bar{f}_R}{\bar{f}_{RR}} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) + \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) R' \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + \frac{1}{3} a^2 \frac{1}{\bar{f}_R} \left( \bar{f} - \frac{1}{2} \bar{f}_R R \right) \right] \varrho \right. \\
&\quad \quad \left. - 3\bar{f}_{RR} R' \Psi' - 6\mathcal{H} \bar{f}_{RR} R' \Psi \right\}.
\end{aligned}$$

Además, la ecuación (B.55) nos permitirá reescribir el término de  $\nabla^2 \varrho$  dentro de las llaves. En este caso transformando dicha ecuación obtenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= -\bar{f}_{RR} \nabla^2 \varrho + \bar{f}_{RR} \varrho'' + \left[ 2\bar{f}_{RRR} R' + 2\bar{f}_{RR} \mathcal{H} - 3 \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} R' \right] \varrho' \\
&\quad + \left[ \bar{f}_R \partial_\eta^2 \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) + 2\bar{f}_R \mathcal{H} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) - \bar{f}_{RR} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) R' + \frac{2}{3} a^2 \bar{f}_{RR} \left( \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_R}{\bar{f}_{RR}} - \frac{\bar{f}}{\bar{f}_R} \right) \right] \varrho \\
&\quad - 4\bar{f}_{RR} R' \Psi' + \frac{4}{3} a^2 \left( \bar{f} - \frac{1}{2} \bar{f}_R R \right) \Psi,
\end{aligned} \tag{B.69}$$

y retomando el cálculo

$$\begin{aligned}
0 &= -\nabla^2 \tilde{\Psi} + 3\tilde{\mathcal{H}} \left( \tilde{\Psi}' + \tilde{\mathcal{H}} \tilde{\Psi} \right) - 4\pi G \left[ \bar{\phi}'^2 \tilde{\Psi} - \bar{\phi}' \varphi' - \tilde{a}^2 \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \varphi \right] \\
&= -\nabla^2 \Psi + 3\mathcal{H} \Psi' + 3\mathcal{H}^2 \Psi - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \nabla^2 \varrho + 3\mathcal{H} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) \\
&\quad - \frac{1}{2\bar{f}_R} \left\{ -\bar{f}_{RR} \varrho'' + (\bar{f}_{RR} \mathcal{H} - 2\bar{f}_{RRR} R') \varrho' \right. \\
&\quad \quad - \left[ \left( \bar{f}_{RRR} - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} \right) R'' + \left( \bar{f}_{RRRR} - \frac{\bar{f}_{RR} \bar{f}_{RRR}}{\bar{f}_R} \right) R'^2 \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. - \mathcal{H} \left( \bar{f}_{RRR} - \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} \right) R' + \frac{a^2}{6} \left( 2\bar{f}_R - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \bar{f} \right) \right] \varrho \right. \\
&\quad \quad \left. + \bar{f}_{RR} R' \Psi' + 2(\bar{f}_{RR} R'' - \mathcal{H} \bar{f}_{RR} R' + \bar{f}_{RRR} R'^2) \Psi \right\} \\
&= -\nabla^2 \Psi + 3\mathcal{H} \Psi' + 3\mathcal{H}^2 \Psi - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \nabla^2 \varrho + 3\mathcal{H} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) \\
&\quad - \frac{1}{2\bar{f}_R} \left\{ -\bar{f}_{RR} \varrho'' + (\bar{f}_{RR} \mathcal{H} - 2\bar{f}_{RRR} R') \varrho' - a^2 F \varrho \right. \\
&\quad \quad \left. + \bar{f}_{RR} R' \Psi' + 2(\bar{f}_{RR} R'' - \mathcal{H} \bar{f}_{RR} R' + \bar{f}_{RRR} R'^2) \Psi \right\}.
\end{aligned}$$

donde hemos empleado la expresión (B.57) de la variable digamma  $F$  en términos del tiempo conforme, así como las ecuaciones de fondo (C.23) y (C.24) en vacío<sup>5</sup>. Para que sea más clara la equivalencia con (B.56a), notemos que al introducir la ec. (B.67) en el lado izquierdo de (B.56a) obtenemos

$$-\nabla^2 \Phi + 3\mathcal{H} (\Phi' + \mathcal{H} \Psi) = -\nabla^2 \Psi + 3\mathcal{H} (\Psi' + \mathcal{H} \Psi) - \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \nabla^2 \varrho + 3\mathcal{H} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right), \quad (\text{B.70})$$

lo cual verifica la equivalencia de las ecuaciones (B.54a) y (B.56a).

De igual manera para la componente  $ij$ . Contrayendo los índices en (B.54c) obtenemos

$$\tilde{\Phi}'' + 3\tilde{\mathcal{H}} \tilde{\Phi}' + (\tilde{\mathcal{H}}' + 2\tilde{\mathcal{H}}^2) \tilde{\Phi} = 4\pi G \left[ \bar{\phi}' \varphi' - \tilde{a}^2 \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \varphi \right], \quad (\text{B.71})$$

donde hemos empleado (A.30) para simplificar un poco. En este caso será conveniente

<sup>5</sup>Estas se pueden derivar al transformar las ecuaciones (A.28) (con  $\nabla^2 \phi = 0$ ) y (A.25), respectivamente.

emplear  $\tilde{\Phi}$  en lugar de  $\tilde{\Psi}$ . Entonces, el lado izquierdo de (B.71) transforma como

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}'' + 3\tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Phi}' + (\tilde{\mathcal{H}}' + 2\tilde{\mathcal{H}}^2)\tilde{\Phi} &= \Phi'' - \frac{1}{2}\partial_\eta^2 \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) + 3 \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \left( \Phi' - \frac{1}{2} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) \right) \\
&\quad + \left( \mathcal{H}' + \frac{1}{2} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) + 2\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' + \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right)^2 \right) \\
&\quad \quad \quad \times \left( \Phi - \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho \right) \\
&= \Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho'' - \left[ \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) + \frac{3}{2} \mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} + \frac{3}{4} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right)^2 R' \right] \varrho' \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \left[ \mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2 + \frac{1}{2} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) + 2\mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right. \\
&\quad \quad \quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right)^2 + \frac{\bar{f}_R}{\bar{f}_{RR}} \partial_\eta^2 \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) \\
&\quad \quad \quad \left. + 3 \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \frac{\bar{f}_R}{\bar{f}_{RR}} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) \right] \varrho \\
&\quad + \frac{3}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \Phi' + \left[ \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RRR}}{\bar{f}_R} R'^2 + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R'' + 2\mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right] \Phi.
\end{aligned}$$

Análogamente para el lado derecho de (B.71) tenemos

$$4\pi G \left[ \bar{\phi}' \varphi' - \tilde{a}^2 \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \varphi \right] = \frac{3}{4} \left[ \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right)^2 R' \varrho' + \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) \varrho - \frac{2}{3} a^2 \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R^2} \left( \bar{f} - \frac{1}{2} \bar{f}_R R \right) \varrho \right].$$

Por lo tanto, reescribiendo la ecuación de campo con lo anterior y las ecuaciones de

fondo (C.23) y (C.24) en vacío, se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{\Phi}'' + 3\tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Phi}' + (\tilde{\mathcal{H}}' + 2\tilde{\mathcal{H}}^2) \tilde{\Phi} - 4\pi G \left[ \bar{\phi}'\phi' - \tilde{a}^2 \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \varphi \right] \\
&= \Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) \Phi \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \varrho'' - \left[ \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) + \frac{3}{2} \mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} + \frac{3}{4} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right)^2 R' \right] \varrho' \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \left[ \mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2 + \frac{1}{2} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) + 2\mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' + \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right)^2 \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{\bar{f}_R}{\bar{f}_{RR}} \partial_\eta^2 \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) + 3 \left( \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right) \frac{\bar{f}_R}{\bar{f}_{RR}} \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) \right] \varrho \\
&\quad + \frac{3}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \Phi' + \left[ \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RRR}}{\bar{f}_R} R'^2 + \frac{1}{2} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R'' + 2\mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \right] \Phi \\
&\quad - \frac{3}{4} \left[ \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right)^2 R' \varrho' + \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} R' \partial_\eta \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \right) \varrho - \frac{2}{3} a^2 \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R^2} \left( \bar{f} - \frac{1}{2} \bar{f}_R R \right) \varrho \right] \\
&= \Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) \Phi \\
&\quad - \frac{1}{2\bar{f}_R} \left\{ \bar{f}_{RR} \nabla^2 \varrho + \mathcal{H} \bar{f}_{RR} \varrho' \right. \\
&\quad \quad + \left[ 2\bar{f}_{RR} (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) - 3\mathcal{H} \frac{\bar{f}_{RR}^2}{\bar{f}_R} R' + \mathcal{H} \bar{f}_{RRR} R' + \frac{a^2}{6} \left( \frac{\bar{f}_{RR}}{\bar{f}_R} \bar{f} - 2\bar{f}_R \right) \right] \varrho \\
&\quad \quad \left. + \bar{f}_{RR} R' \Phi' - (2\bar{f}_R (\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2) - 2\mathcal{H} \bar{f}_{RR} R') \Phi \right\}.
\end{aligned}$$

lo cual justamente coincide con (B.56c) al contraer los índices y empleando (B.67) para quitar el grado de libertad  $\Psi$ . En analogía a la obtención de (B.70).





# Apéndice C

## Elementos de las teorías $f(R)$

En el presente Apéndice se recopilan expresiones útiles así como cálculos que merece la pena proporcionar más en detalle (en relación al texto) su origen dentro de las teorías  $f(R)$ .

### C.1. Ecuaciones de campo

Tomemos la acción (4.2) de la teoría gravitacional modificada, a saber:

$$S[g_{ab}, \psi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{f(R)}{2\kappa} + \mathcal{L}_M[g_{ab}, \psi] \right]. \quad (\text{C.1})$$

Por el principio de mínima acción obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S [g] \\ &= \int d^4x \left[ \frac{1}{2\kappa} \delta(\sqrt{-g}f(R)) + \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa} \left( \delta f(R) + \frac{1}{\sqrt{-g}} f(R) \delta\sqrt{-g} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) \right]. \end{aligned}$$

Ahora veamos cada término por separado. El último término del lado derecho está relacionado con el tensor de energía-momento asociado a la materia definido mediante

$$T_{ab} := \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{ab}}. \quad (\text{C.2})$$

En analogía con A.14, a partir de  $\ln(\det A) = \text{Tr}(\ln(A))$  y con  $A \rightarrow (g_{ab})$  tenemos que

$$\delta g = g (g^{ab} \delta g_{ab}) = -g (g_{ab} \delta g^{ab}), \quad (\text{C.3})$$

entonces

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{-g}{2\sqrt{-g}} g_{ab} \delta g^{ab} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{ab} \delta g^{ab}. \quad (\text{C.4})$$

Finalmente, el primer término del lado derecho corresponde a

$$\delta f(R) = \frac{df(R)}{dR} \delta R = f_R \delta R, \quad (\text{C.5})$$

donde, usando la definición del escalar de Ricci  $R = g^{ab} R_{ab}$ , entonces

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta(g^{ab} R_{ab}) \\ &= \delta g^{ab} R_{ab} + g^{ab} \delta R_{ab} \\ &= \delta g^{ab} R_{ab} + g^{ab} \delta R_{aeb}{}^e, \end{aligned}$$

y usando la definición del tensor de Riemann en términos de los símbolos de Christoffel (torsión nula)

$$R_{abc}{}^d = \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_a \Gamma_{bc}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ea}^d, \quad (\text{C.6})$$

calculamos

$$\delta R_{abc}{}^d = \partial_b \delta \Gamma_{ac}^d - \partial_a \delta \Gamma_{bc}^d + \delta(\Gamma_{ac}^e) \Gamma_{eb}^d + \Gamma_{ac}^e \delta \Gamma_{eb}^d - \delta(\Gamma_{bc}^e) \Gamma_{ea}^d - \Gamma_{bc}^e \delta \Gamma_{ea}^d, \quad (\text{C.7})$$

pero puesto que la variación  $\delta(\Gamma_{bc}^a)$  es la diferencia de dos conexiones y esta diferencia a su vez es un tensor de tipo  $(1, 2)$ , podemos agrupar términos empleando

$$\nabla_d(\delta \Gamma_{bc}^a) = \partial_d(\delta \Gamma_{bc}^a) + \Gamma_{de}^a \delta \Gamma_{bc}^e - \Gamma_{db}^e \delta \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{dc}^e \delta \Gamma_{be}^a, \quad (\text{C.8})$$

entonces de C.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \delta R_{abc}{}^d &= (\partial_b \delta \Gamma_{ac}^d + \delta(\Gamma_{ac}^e) \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{bc}^e \delta \Gamma_{ea}^d) \\ &\quad - (\partial_a \delta \Gamma_{bc}^d + \delta(\Gamma_{bc}^e) \Gamma_{ea}^d - \Gamma_{ac}^e \delta \Gamma_{eb}^d) \\ &\quad + \Gamma_{ab}^e \delta \Gamma_{ec}^d - \Gamma_{ab}^e \delta \Gamma_{ec}^d \\ &= \nabla_b \delta \Gamma_{ac}^d - \nabla_a \delta \Gamma_{bc}^d, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

por lo tanto

$$\delta R_{ab} = \delta R_{aeb}{}^e = \nabla_e \delta \Gamma_{ab}^e - \nabla_a \delta \Gamma_{eb}^e. \quad (\text{C.10})$$

Ahora, usemos que  $\delta \Gamma_{ab}^c$  transforma como un tensor, en cuyo caso obtenemos

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{ab}^e &= \frac{1}{2} g^{ef} [\nabla_a \delta g_{bf} + \nabla_b \delta g_{fa} - \nabla_f \delta g_{ab}] \\ &= -\frac{1}{2} [g_{ca} \nabla_b \delta g^{ce} + g_{cb} \nabla_a \delta g^{ce} - g_{ac} g_{bd} \nabla^e \delta g^{cd}], \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

y también

$$\delta \Gamma_{eb}^e = -\frac{1}{2} [g_{ce} \nabla_b \delta g^{ce} + g_{cb} \nabla_e \delta g^{ce} - g_{ec} g_{bd} \nabla^e \delta g^{cd}], \quad (\text{C.12})$$

donde hemos usado que

$$\delta g_{ab} = 2 \delta g_{ab} + g_{ac} g_{bd} \delta g^{cd} \quad \Rightarrow \quad \delta g_{ab} = -g_{ac} g_{bd} \delta g^{cd}.$$

con lo cual

$$\nabla_e \delta \Gamma^e_{ab} = -\frac{1}{2} [g_{ca} \nabla_e \nabla_b \delta g^{ce} + g_{cb} \nabla_e \nabla_a \delta g^{ce} - g_{ac} g_{bd} \square \delta g^{cd}], \quad (\text{C.13a})$$

$$\nabla_a \delta \Gamma^e_{eb} = -\frac{1}{2} [g_{ce} \nabla_a \nabla_b \delta g^{ce} + g_{cb} \nabla_a \nabla_e \delta g^{ce} - g_{ec} g_{bd} \nabla_a \nabla^e \delta g^{cd}]. \quad (\text{C.13b})$$

Por último, juntando lo anterior

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta g^{ab} R_{ab} + g^{ab} \delta R_{ab} \\ &= \delta g^{ab} R_{ab} + g^{ab} \nabla_e \delta \Gamma^e_{ab} - g^{ab} \nabla_a \delta \Gamma^e_{eb} \\ &= \delta g^{ab} R_{ab} - \frac{1}{2} [g^{ab} g_{ca} \nabla_e \nabla_b \delta g^{ce} + g^{ab} g_{cb} \nabla_e \nabla_a \delta g^{ce} - g^{ab} g_{ac} g_{bd} \square \delta g^{cd}] \\ &\quad + \frac{1}{2} [g^{ab} g_{ce} \nabla_a \nabla_b \delta g^{ce} + g^{ab} g_{cb} \nabla_a \nabla_e \delta g^{ce} - g^{ab} g_{ec} g_{bd} \nabla_a \nabla^e \delta g^{cd}] \\ &= \delta g^{ab} R_{ab} - \frac{1}{2} [\nabla_e \nabla_b \delta g^{be} + \nabla_e \nabla_a \delta g^{ae} - g_{ac} \square \delta g^{ca} - g_{ce} \nabla_a \nabla^a \delta g^{ce} - \nabla_a \nabla_e \delta g^{ae} + g_{ec} \nabla_a \nabla^e \delta g^{ca}] \\ &= \delta g^{ab} R_{ab} - \frac{1}{2} [\nabla_e \nabla_a \delta g^{ae} - g_{ac} \square \delta g^{ca} - g_{ce} \square \delta g^{ce} + \nabla_a \nabla_c \delta g^{ca}] \\ &= \delta g^{ab} R_{ab} + g_{ab} \square \delta g^{ab} - \nabla_a \nabla_b \delta g^{ab}. \end{aligned}$$

Con este resultado podemos regresar a la variación de la acción, i.e.

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa} \left( f_R \delta R + \frac{1}{\sqrt{-g}} f(R) \delta \sqrt{-g} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa} \left( f_R R_{ab} \delta g^{ab} + f_R g_{ab} \square \delta g^{ab} - f_R \nabla_a \nabla_b \delta g^{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f(R) \delta g^{ab} \right) - \frac{1}{2} T_{ab} \delta g^{ab} \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa} \left( f_R R_{ab} + g_{ab} \square f_R - \nabla_a \nabla_b f_R - \frac{1}{2} g_{ab} f(R) \right) - \frac{1}{2} T_{ab} \right] \delta g^{ab}, \end{aligned}$$

donde, en la tercera igualdad se han integrado por partes un par de veces al segundo y tercer término, i.e.

$$\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f_R g_{ab} \square \delta g^{ab} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{ab} g_{ab} \square f_R, \quad (\text{C.14a})$$

$$\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f_R \nabla_a \nabla_b \delta g^{ab} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{ab} \nabla_a \nabla_b f_R. \quad (\text{C.14b})$$

Puesto que la variación  $\delta g^{ab}$  es arbitraria obtenemos que

$$f_R R_{ab} + g_{ab} \square f_R - \nabla_a \nabla_b f_R - \frac{1}{2} g_{ab} f(R) = \kappa T_{ab}, \quad (\text{C.15})$$

lo cual coincide con la ecuación (4.3) del texto.

## C.2. Ecuación generalizada de Friedmann

En analogía con la obtención de la ecuación (2.13), se puede calcular el equivalente de la ecuación de Friedmann para las teorías  $f(R)$ . Usando los resultados de la Sección A.1 y tomando

$$G^a_b = R^a_b - \frac{1}{2}\delta^a_b R, \quad (\text{C.16})$$

entonces, la componente 0-0 es entonces

$$G^0_0 = -3 \left( H^2 + \frac{K}{a^2} \right). \quad (\text{C.17})$$

Por otro lado, tomando la ecuación (4.7) tenemos

$$G^a_b = \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR} \nabla^a \nabla_b R + f_{RRR} (\nabla^a R) (\nabla_b R) - \frac{1}{6} \delta^a_b (f_{RR} R + f + 2\kappa T) + \kappa T^a_b \right], \quad (\text{C.18})$$

y por lo tanto, la componente 0-0 toma la forma

$$\begin{aligned} G^0_0 &= \frac{1}{f_R} \left[ f_{RR} \left( -\ddot{R} + \Gamma^c_{00} \partial_c R \right) - f_{RRR} \dot{R}^2 - \frac{1}{6} (f_{RR} R + f + 2\kappa T) + \kappa T^0_0 \right] \\ &= \frac{1}{f_R} \left[ -f_{RR} \ddot{R} - f_{RRR} \dot{R}^2 - \frac{1}{6} (f_{RR} R + f + 2\kappa T) + \kappa T^0_0 \right] \\ &= \frac{1}{f_R} \left[ 3H f_{RR} \dot{R} + \frac{1}{3} (\kappa T + 3f_{RRR} \dot{R}^2 + 2f - f_{RR} R) - f_{RRR} \dot{R}^2 - \frac{1}{6} (f_{RR} R + f + 2\kappa T) + \kappa T^0_0 \right] \\ &= \frac{1}{f_R} \left[ 3H f_{RR} \dot{R} - \frac{1}{2} (f_{RR} R - f) + \kappa T^0_0 \right], \end{aligned}$$

entonces juntando este resultado con (C.18) obtenemos

$$H^2 + \frac{K}{a^2} + \frac{1}{f_R} \left[ \frac{1}{6} (f - f_{RR} R) + H f_{RR} \dot{R} - \frac{\kappa T^0_0}{3} \right] = 0. \quad (\text{C.19})$$

Notemos que al tomar  $f(R) = R$ , regresamos a la ecuación de Friedmann (2.13). Si además usamos la ecuación (A.6), obtenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{f_R} \left( \frac{1}{6} f + H f_{RR} \dot{R} + \frac{\kappa T^0_0}{3} \right) = 0. \quad (\text{C.20})$$

## C.3. Potencial del modelo $R^2$

El cálculo explícito de (5.25) es directo de (5.19):

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\phi) &= \frac{1}{2\kappa} \frac{R f_R - f}{f_R^2} \\ &= \frac{1}{2\kappa} \frac{\frac{R^2}{6M^2}}{\left(1 + \frac{R}{3M^2}\right)^2} \\ &= \frac{3M^2}{4\kappa} \frac{R^2}{(3M^2 + R)^2}, \end{aligned}$$

donde empleando la ecuación (5.16) obtenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{V}(\phi) &= \frac{3M^2}{4\kappa} \frac{R^2}{(3M^2 + R)^2} \\ &= \frac{3M^2}{4\kappa} \frac{\left(e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi} - 1\right)^2}{\left(1 + e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi} - 1\right)^2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\tilde{V}(\phi) = \frac{3M^2}{4\kappa} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi}\right)^2.} \quad (\text{C.21})$$

## C.4. Equivalencia de las constricciones

Un ejercicio útil es el verificar que las constricciones (5.7) y (5.34) son equivalentes ante el cambio de marcos. Usando las ecuaciones (5.26)-(5.29) en (5.7) obtenemos<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}0 &= H^2 + \frac{1}{3+R} \left( H\dot{R} - \frac{R^2}{12} \right) \\ &= e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi} \left( \tilde{H} - \sqrt{\frac{\kappa}{6}}\dot{\phi} \right)^2 + \frac{1}{3} e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi} \left[ e^{\sqrt{\frac{\kappa}{6}}\phi} \left( \tilde{H} - \sqrt{\frac{\kappa}{6}}\dot{\phi} \right) \left( \sqrt{6\kappa} e^{\sqrt{\frac{3\kappa}{2}}\phi} \dot{\phi} \right) - \frac{9}{12} \left( e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi} - 1 \right)^2 \right] \\ &= e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi} \left[ \tilde{H}^2 + \frac{\kappa}{6}\dot{\phi}^2 - \sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\tilde{H}\dot{\phi} + \sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\tilde{H}\dot{\phi} - \frac{\kappa}{3}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{4} \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi} \right)^2 \right] \\ &= e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi} \left[ \tilde{H}^2 + \frac{\kappa}{6}\dot{\phi}^2 - \frac{\kappa}{3}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{3}\tilde{V} \right] \\ &= e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi} \left[ H^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \tilde{V}(\phi) \right) \right],\end{aligned}$$

donde  $\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{dt}$ . Puesto que  $\phi \neq -\infty$ , con esto recuperamos la ecuación (5.34), es decir

$$H^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \tilde{V}(\phi) \right) = 0. \quad (\text{C.22})$$

## C.5. Tiempo conforme

En este caso recopilamos expresiones útiles en el contexto de las teorías  $f(R)$ , principalmente de los Capítulos 4 y 5.

<sup>1</sup>Recordando la adimensionalización de las variables, por simplicidad se omiten las barras.

### C.5.1. Ecuación de Friedmann de las teorías $f(R)$

De acuerdo a lo obtenido en la ecuación (4.13), en términos del tiempo conforme, esta toma la forma

$$R'' + 2\mathcal{H}R' = -\frac{a^2}{3f_{RR}} \left[ 2f - f_{RR}R + \frac{3}{a^2}f_{RRR}R'^2 + \kappa T \right]. \quad (\text{C.23})$$

Donde la constricción (4.14) en términos del tiempo conforme toma la forma

$$\mathcal{H}^2 + K = -\frac{a^2}{f_R} \left( \frac{1}{6}(f - f_{RR}R) + \frac{1}{a^2}f_{RR}\mathcal{H}R' + \frac{\kappa T_0^0}{3} \right). \quad (\text{C.24})$$

Por otro lado, usando el escalar de Ricci de la métrica FRW conforme (ec. (A.23)) para obtener la ecuación dinámica de  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H}' = \frac{a^2}{f_R} \left( \frac{1}{6}f + \frac{1}{a^2}f_{RR}\mathcal{H}R' + \frac{\kappa T_0^0}{3} \right). \quad (\text{C.25})$$

### C.5.2. Modelo $R^2$

Para el modelo  $R^2$  de Starobinsky (en vacío y con  $K = 0$ ) la constricción (C.24) (en analogía con (5.3)) toma la forma

$$\mathcal{H}^2 + \frac{a^2}{3 + \frac{R}{M^2}} \left( \frac{1}{a^2 M^2} \mathcal{H}R' - \frac{1}{12M^2} R^2 \right) = 0, \quad (\text{C.26})$$

siendo las ecuaciones dinámicas (ver ecs. (5.4)):

$$R'' + 2\mathcal{H}R' + a^2 M^2 R = 0, \quad (\text{C.27a})$$

$$\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 - \frac{a^2}{6} R = 0, \quad (\text{C.27b})$$

$$\mathcal{H}' - \frac{a^2}{3 + \frac{R}{M^2}} \left( \frac{1}{a^2 M^2} \mathcal{H}R' + \frac{1}{2} R + \frac{1}{12M^2} R^2 \right) = 0, \quad (\text{C.27c})$$

$$a' - a\mathcal{H} = 0. \quad (\text{C.27d})$$

# Bibliografía

- [1] S. Alam et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 470, 3:2617–2652, (2017), arXiv: [1607.03155](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [2] A. Albrecht and P. J. Steinhardt. Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1220–1223, (1982).
- [3] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski, and S. Tsujikawa. Conditions for the cosmological viability of  $f(R)$  dark energy models. *Phys.Rev.D*, 75:083504, (2007), arXiv: [gr-qc/0612180](#).
- [4] L. Amendola, D. Polarski, and S. Tsujikawa. Are  $f(R)$  dark energy models cosmologically viable? *Phys.Rev.Lett.*, 98:131302, (2007), arXiv: [astro-ph/0603703](#).
- [5] L. Amendola and S. Tsujikawa. Phantom crossing, equation-of-state singularities, and local gravity constraints in  $f(R)$  models. *Phys.Lett.B*, 660:125–132, (2008), arXiv: [0705.0396](#) [[astro-ph](#)].
- [6] B. Audren, D. G. Figueroa, and T. Tram. A note of clarification: BICEP2 and Planck are not in tension. (2014), arXiv: [1405.1390](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [7] E. Barausse and L. Lehner. A Post-Newtonian approach to black hole-fluid systems. *Phys. Rev. D*, 88:024029, (2013), arXiv: [1306.5564](#) [[gr-qc](#)].
- [8] J. M. Bardeen. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Phys. rev. D*, 22:1882–1905, (1980).
- [9] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner. Spontaneous creation of almost scale-free density perturbations in an inflationary universe. *Phys. Rev. D*, 28:679, (1983).
- [10] B. A. Bassett, S. Tsujikawa, and D. Wands. Inflation Dynamics and Reheating. *Rev.Mod.Phys.*, 78:537–589, (2006), arXiv: [astro-ph/0507632](#).
- [11] D. Baumann. TASI Lectures on Inflation. (2009), arXiv: [0907.5424](#) [[hep-th](#)].
- [12] E. Berti et al. Testing General Relativity with Present and Future Astrophysical Observations. *Class. Quantum Grav.*, 32:243001, (2015), arXiv: [1501.07274](#) [[gr-qc](#)].



- [13] E. Bertschinger. Cosmological Perturbation Theory and Structure Formation. (2000), arXiv: [astro-ph/0101009](#).
- [14] E. Bianchi and C. Rovelli. Why all these prejudices against a constant? (2010), arXiv: [1002.3966](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [15] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1994.
- [16] M. Borunda, B. Janssen, and M. Bastero-Gil. Palatini versus metric formulation in higher curvature gravity. *JCAP*, 11:008, (2008), arXiv: [0804.4440](#) [[hep-th](#)].
- [17] R. H. Brandenberger. A Nonsingular Universe. pages 99–102, (1992), arXiv: [gr-qc/9210014](#).
- [18] R. H. Brandenberger. Topological defects and structure formation. *Int.J.Mod.Phys.*, A9:2117–2190, (1994), arXiv: [astro-ph/9310041](#).
- [19] R. H. Brandenberger, V. Mukhanov, and A. Sornborger. Cosmological theory without singularities. *Phys. Rev. D*, 48:1629–1642, (1993).
- [20] I. A. Brown and A. Hammami. Gauge issues in extended gravity and  $f(R)$  cosmology. *JCAP*, 04:002, (2012).
- [21] D. D. Canko, I. D. Gialamas, and G. P. Kodaxis. A simple  $F(R, \phi)$  deformation of Starobinsky inflationary model. *Eur. Phys. J.*, C80:458, (2020), arXiv: [1901.06296](#) [[hep-th](#)].
- [22] S. Capozziello, S. Carloni, and A. Troisi. Quintessence without scalar fields. *RecentRes.Dev.Astron.Astrophys.*, 1:625, (2003), arXiv: [astro-ph/0303041](#).
- [23] C. Caprini and D. G. Figueroa. Cosmological Backgrounds of Gravitational Waves. *Class.Quant.Grav.*, 35:163001, (2018), arXiv: [1801.04268](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [24] S. M. Carroll. The cosmological constant. *Living Rev. Relativ.*, 4:1, (2001). [[DOI](#)].
- [25] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [26] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden, and M. S. Turner. Is Cosmic Speed-Up Due to New Gravitational Physics? *Phys.Rev.D*, 70:043528, (2004), arXiv: [astro-ph/0306438](#).
- [27] P. Cañate, L. G. Jaime, and M. Salgado. Spherically symmetric black holes in  $f(R)$  gravity: Is geometric scalar hair supported? (2015), arXiv: [1509.01664](#) [[gr-qc](#)].
- [28] A. Chatrabhuti, V. Yingcharoenrat, and P. Channuie. Starobinsky model in rainbow gravity. *Phys.Rev. D*, 93:043515, (2016), arXiv: [1510.09113](#) [[gr-qc](#)].

- [29] X. Chen. Primordial Non-Gaussianities from Inflation Models. *Adv.Astron.*, 2010:1–43, (2010), arXiv: [1002.1416](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [30] T. Clifton et al. Modified Gravity and Cosmology. *Phys.Rept.*, 513, 1:1–189, (2012), arXiv: [1106.2476](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [31] M. Cortês, A. R. Liddle, and P. Mukherjee. On what scale should inflationary observables be constrained? *Phys.Rev.D*, 75:083520, (2007), arXiv: [astro-ph/0702170](#).
- [32] A. De Felice and S. Tsujikawa.  $f(R)$  theories. *Living Rev. Relativ.*, 13:3, (2010). [[DOI](#)].
- [33] P. D. D’Eath. On the existence of perturbed Robertson-Walker universes. *Annals Phys.*, 98:237–263, (1976).
- [34] N. Deruelle and M. Sasaki. Conformal equivalence in classical gravity: the example of "veiled" General Relativity. (2010), arXiv: [1007.3563](#) [[gr-qc](#)].
- [35] S. Dodelson and F. Schmidt. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2021.
- [36] R. Durrer. Cosmological perturbation theory. (2004), arXiv: [astro-ph/0402129](#).
- [37] A. S. Eddington. *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge University Press, 1923.
- [38] A. S. Eddington. On the Instability of Einstein’s Spherical World. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 90, 7:668—678, (1930).
- [39] V. Faraoni. Solar System experiments do not yet veto modified gravity models. *Phys.Rev.D*, 74:023529, (2006), arXiv: [gr-qc/0607016](#).
- [40] F. Finelli et al. Exploring cosmic origins with CORE: Inflation. *JCAP*, 04:016, (2018), arXiv: [1612.08270](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [41] E. E. Flanagan. The conformal frame freedom in theories of gravitation. *Class.Quant.Grav.*, 21:3817, (2004), arXiv: [gr-qc/0403063](#).
- [42] E. E. Flanagan and S. A. Hughes. The basics of gravitational wave theory. *New J.Phys.*, 7:204, (2005), arXiv: [gr-qc/0501041](#).
- [43] M. Forconi et al. Cosmological constraints on slow-roll inflation: an update. *Phys. Rev. D*, 104:103528, (2021), arXiv: [2110.01695](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [44] A. Friedmann. On the Curvature of Space. Traducción al inglés del original. *General Relativity and Gravitation*, 31:1991–2000, (1999).
- [45] G. Gamow. Expanding Universe and the Origin of Elements. *Phys. Rev.*, 70:572, (1946).

- [46] G. Gamow. The Evolution of the Universe. *Nature*, 162:680–682, (1948).
- [47] A. H. Guth. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev.*, D23:347–356, (1980).
- [48] A. H. Guth. *The Inflationary Universe*. Helix Books, 1997.
- [49] A. H. Guth and D. I. Kaiser. Inflationary Cosmology: Exploring the Universe from the Smallest to the Largest Scales. *Science*, 307:884, (2005).
- [50] A. H. Guth and P. J. Steinhardt. The Inflationary Universe. *Scientific American*, pages 116–128, (1984).
- [51] S. W. Hawking. The development of irregularities in a single bubble inflationary universe. *Phys. Lett. B*, 115:295–297, (1982).
- [52] M. Hazumi et al. LiteBIRD satellite: JAXA’s new strategic L-class mission for all-sky surveys of cosmic microwave background polarization. *Proc. of SPIE*, 11443:114432F, (2020), arXiv: [2101.12449](https://arxiv.org/abs/2101.12449) [astro-ph.IM].
- [53] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [54] S. Hollands and R. M. Wald. An Alternative to Inflation. *Gen.Rel.Grav.*, 34:2043–2055, (2002), arXiv: [gr-qc/0205058](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0205058).
- [55] W. Hu and I. Sawicki. Models of  $f(R)$  cosmic acceleration that evade solar-system tests. *Phys.Rev.D*, 76:064004, (2007), arXiv: [0705.1158](https://arxiv.org/abs/0705.1158) [astro-ph].
- [56] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proc.Nat.Acad.Sci.*, 15:168–173, (1929).
- [57] D. Huterer and M. S. Turner. Prospects for probing the dark energy via supernova distance measurements. *Phys.Rev.D*, 60:081301, (1999), arXiv: [astro-ph/9808133](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9808133).
- [58] J. Hwang. Evolution of Structures in Generalized Gravity Theories. *Class.Quant.Grav.*, 14:1981–1991, (1997), arXiv: [gr-qc/9605024](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9605024).
- [59] J. Hwang and H. Noh. Cosmological perturbations in generalized gravity theories. *Phys.Rev. D*, 54, 2:1460, (1996).
- [60] J. Hwang and H. Noh.  $f(R)$  gravity theory and CMBR constraints. *Phys. Lett. B*, 506:13–19, (2001), arXiv: [astro-ph/0102423](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0102423).
- [61] J. Hwang and H. Noh. Classical evolution and quantum generation in generalized gravity theories including string corrections and tachyon: Unified analyses. *Phys.Rev. D*, 71:063536, (2005), arXiv: [gr-qc/0412126](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0412126).
- [62] A. Ijjas and P. J. Steinhardt. Bouncing Cosmology made simple. *IOP Publishing*, 35:135004, (2018), arXiv: [1803.01961](https://arxiv.org/abs/1803.01961) [astro-ph.CO].

- [63] A. Ijjas and P. J. Steinhardt. A new kind of cyclic universe. *Phys.Lett. B*, 795:666–672, (2019), arXiv: [1904.08022](#) [**gr-qc**].
- [64] L. G. Jaime, L. Patiño, and M. Salgado. Robust approach to  $f(R)$  gravity. *Phys.Rev.D*, 83:024039, (2011), arXiv: [1006.5747](#) [**gr-qc**].
- [65] L. G. Jaime, L. Patiño, and M. Salgado.  $f(R)$  Cosmology Revisited. (2012), arXiv: [1206.1642](#) [**gr-qc**].
- [66] X. Ji and T. Wang. Curvature and Entropy Perturbations in Generalized Gravity. *Phys.Rev. D*, 79:103525, (2009), arXiv: [0903.0379](#) [**hep-th**].
- [67] B. J. T. Jones. *Precision Cosmology*. Cambridge University Press, 2017.
- [68] R. Kallosh and A. Linde. Superconformal generalizations of the Starobinsky model. (2013), arXiv: [1306.3214](#) [**hep-th**].
- [69] T. Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1921:966–972, (1921).
- [70] R. C. Kennicutt. A spectrophotometric atlas of galaxies. *ApJS*, 79-2:255–284, (1992).
- [71] O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Z. Physik*, 37:895–906, (1926).
- [72] L. Kofman. The Origin of Matter in the Universe: Reheating after Inflation. (1996), arXiv: [astro-ph/9605155](#).
- [73] A. Kogut et al. The Primordial Inflation Explorer (PIXIE): a nulling polarimeter for cosmic microwave background observations. *JCAP*, 07:025, (2011), arXiv: [1105.2044](#) [**astro-ph.CO**].
- [74] D. Larson et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-Derived Parameters. *Astrophys. J. Suppl.*, 192:16, (2011), arXiv: [1001.4635](#) [**astro-ph.CO**].
- [75] G. León García. *Caracterización de los estados post-colapso del inflatón en el origen cuántico de las fluctuaciones cosmológicas primordiales*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2011.
- [76] A. R. Liddle. The Early Universe. (1997), arXiv: [astro-ph/9612093](#).
- [77] A. R. Liddle and D. H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [78] A. R. Liddle, P. Parsons, and J. D. Barrow. Formalising the Slow-Roll Approximation in Inflation. *Phys.Rev.*, D50:7222–7232, (1994).

- [79] A. D. Linde. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Phys. Lett. B*, 108:389–393, (1982).
- [80] A. D. Linde. Chaotic inflation. *Phys. Lett. B*, 129:177–181, (1983).
- [81] A. D. Linde. Particle Physics and Inflationary Cosmology. *Contemp. Concepts Phys.*, 5:1–362, (2005), arXiv: [hep-th/0503203](#).
- [82] L.-H. Liu. Analysis of  $R^p$  inflationary model as  $p \geq 2$ . (2018), arXiv: [1807.00666 \[gr-qc\]](#).
- [83] D. H. Lyth and A. R. Liddle. *The Primordial Density Perturbation*. Cambridge University Press, 2009.
- [84] D. H. Lyth and A. Riotto. Particle Physics Models of Inflation and the Cosmological Density Perturbation. *Phys.Rept.*, 314:1–146, (1999), arXiv: [hep-ph/9807278](#).
- [85] J. Maldacena. Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models. *JHEP*, 0305:013, (2003), arXiv: [astro-ph/0210603](#).
- [86] K. A. Malik and D. R. Matravers. A Concise Introduction to Perturbation Theory in Cosmology. *Class.Quant.Grav.*, 25:193001, (2008), arXiv: [0804.3276 \[astro-ph\]](#).
- [87] V. Miranda et al. Viable singularity-free  $f(R)$  gravity without a cosmological constant. *Phys.Rev.Lett.*, 102:221101, (2009), arXiv: [0905.1941 \[astro-ph.CO\]](#).
- [88] H. Motohashi. Consistency relation for  $R^p$  inflation. *Phys. Rev. D*, 91:064016, (2015), arXiv: [1411.2972 \[astro-ph.CO\]](#).
- [89] V. Mukhanov. CMB, Quantum Fluctuations and the Predictive Power of Inflation. (2003), arXiv: [arXiv:astro-ph/0303077](#).
- [90] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [91] V. F. Mukhanov. Quantum theory of gauge-invariant cosmological perturbations. *Sov.Phys.JETP*, 67:1297–1302, (1988).
- [92] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger. Theory of Cosmological Perturbations. *Phys. Rept*, 215:203, (1992).
- [93] S. Odintsov and V. Oikonomou. Pre-Inflationary Bounce Effects on Primordial Gravitational Waves of  $f(R)$  Gravity. (2021), arXiv: [2112.02584 \[gr-qc\]](#).
- [94] S. Odintsov, V. Oikonomou, and F. Fronimos. Quantitative Predictions for  $f(R)$  Gravity Primordial Gravitational Waves. (2021), arXiv: [2108.11231 \[gr-qc\]](#).

- [95] H. V. Peiris et al. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Inflation. *Astrophys. J. Suppl.*, 148:213, (2003), arXiv: [astro-ph/0302225](#).
- [96] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *Astrophys.J.*, 142:419–421, (1965).
- [97] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophys.J.*, 517:565–586, (1999), arXiv: [astro-ph/9812133](#).
- [98] D. Perlov and A. Vilenkin. *Cosmology for the Curious*. Springer, 2017.
- [99] F. Perrotta et al. Non-linear perturbations in scalar-tensor cosmologies. *Phys.Rev. D*, 69:084004, (2004), arXiv: [astro-ph/0310359](#).
- [100] Planck Collaboration. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *A&A*, 641:A6, (2020), arXiv: [1807.06209](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [101] Planck Collaboration. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation. *A&A*, 641:A10, (2020), arXiv: [1807.06211](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [102] I. Quiros et al. The conformal transformation’s controversy: what are we missing? *General Relativity and Gravitation*, 45, Issue 2:489–518, (2013), arXiv: [1108.5857](#) [[gr-qc](#)].
- [103] A. G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron.J.*, 116:1009–1038, (1998), arXiv: [astro-ph/9805201](#).
- [104] A. G. Riess et al. Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  From the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution. *Astrophys.J.*, 607:665–687, (2004), arXiv: [astro-ph/0402512](#).
- [105] A. G. Riess et al. Cepheid Period-Luminosity Relations in the Near-Infrared and the Distance to M31 from the Hubble Space Telescope Wide Field Camera 3. (2011), arXiv: [1110.3769](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [106] A. G. Riess et al. Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics Beyond LambdaCDM. (2019), arXiv: [1903.07603](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [107] A. Riotto. Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations. (2017), arXiv: [hep-ph/0210162v2](#).
- [108] M. Sasaki. Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe. *Prog. Theor. Phys.*, 76-5:1036–1046, (1986).
- [109] H. J. Schmidt. Fourth order gravity: equations, history, and applications to cosmology. *Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys.*, 4:209–248, (2007), arXiv: [gr-qc/0602017](#).



- [110] E. Scholz. The problem of space in the light of relativity: the views of H. Weyl and E. Cartan. (2014), arXiv: [1310.7334](#) [[math.HO](#)].
- [111] M. D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.
- [112] S. Sonego and M. Bruni. Gauge dependence in the theory of non-linear spacetime perturbations. *Commun.Math.Phys.*, 193:209–218, (1998), arXiv: [gr-qc/9708068](#).
- [113] T. P. Sotiriou and V. Faraoni.  $f(R)$  Theories of Gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 82:451–497, (2010), arXiv: [0805.1726](#) [[gr-qc](#)].
- [114] L. Sriramkumar. An introduction to inflation and cosmological perturbation theory. (2009), arXiv: [0904.4584](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [115] A. A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Phys. Lett. B*, 91:99–102, (1980).
- [116] A. A. Starobinsky. Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations. *Phys. Lett. B*, 117:175–178, (1982).
- [117] A. A. Starobinsky. Disappearing cosmological constant in  $f(R)$  gravity. *JETP Lett.*, 86:157–163, (2007), arXiv: [0706.2041](#) [[astro-ph](#)].
- [118] K. S. Stelle. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 16:953, (1977).
- [119] J. M. Stewart. Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models. *Class.Quant.Grav.*, 7:1169–1180, (1990).
- [120] The Royal Swedish Academy of Sciences. The accelerating universe. (2011), [Nobel Price Site](#).
- [121] S. Tsujikawa. Observational signatures of  $f(R)$  dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints. *Phys.Rev.D*, 77:023507, (2008), arXiv: [0709.1391](#) [[astro-ph](#)].
- [122] R. Utiyama and B. S. DeWitt. Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields. *J.Math.Phys.*, 3:608–618, (1962).
- [123] L. Verde, T. Treu, and A. G. Riess. Tensions between the Early and the Late Universe. *Nature Astronomy*, 3:891–895, (2019), arXiv: [1907.10625](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [124] A. Waeming and P. Channuie. Inflation from  $f(R)$  theories in gravity’s rainbow. *Eur.Phys.J.*, C80 no. 9:802, (2020), arXiv: [2005.08310](#) [[gr-qc](#)].
- [125] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [126] D. H. Weinberg et al. Observational Probes of Cosmic Acceleration. (2013), arXiv: [1201.2434](#) [[astro-ph.CO](#)].

- [127] S. Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23, (1989).
- [128] S. Weinberg. Adiabatic Modes in Cosmology. *Phys.Rev. D*, 67:123504, (2003), arXiv: [astro-ph/0302326](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0302326).
- [129] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [130] H. Weyl. A New Extension of Relativity Theory. *Ann. Phys.*, 59:101–133, (1919).
- [131] B. Whitt. Fourth Order Gravity as General Relativity Plus Matter. *Phys.Lett. B*, 145:176–178, (1984).
- [132] C. M. Will. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Rev. Relativ.*, 14:4, (2014).
- [133] A. Zee. *Einstein Gravity in a Nutshell*. Princeton University Press, 2013.