

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---



FACULTAD DE CIENCIAS

SOLUCIONES ESPECIALES EN EL  
FLUJO DE RICCI

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

EDUARDO FLORES MARTÍNEZ



DIRECTOR DE TESIS:  
DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno  
Flores  
Martínez  
Eduardo  
5542274298  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
315128653
2. Datos del tutor  
Dr.  
Oscar Alfredo  
Palmas  
Velasco
3. Datos del sinodal 1  
Dra.  
María de los Ángeles  
Sandoval  
Romero
4. Datos del sinodal 2  
Dr.  
Pierre Michel  
Bayard
5. Datos del sinodal 3  
Dr.  
Juan Carlos  
Fernandez  
Morelos
6. Datos del sinodal 4  
Dr.  
Jonatán Torres  
Orozco  
Román
7. Datos del trabajo escrito  
Soluciones especiales en el Flujo de Ricci  
96 p  
2023

# Agradecimientos

A mis padres, por impulsarme a seguir estudiando lo que me gusta y darme las herramientas para hacerlo. A mis amigos y múltiples profesores, por su continuo apoyo e interesantes pláticas llenas de ideas. Por supuesto, a mi asesor, el Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco, por sus aportaciones, tiempo y esfuerzo puesto en este trabajo conjunto, en pocas palabras, por impulsar de gran manera mi gusto por la geometría. A mis sinodales, por sus valiosas preguntas, correcciones y comentarios. De todas las pláticas y momentos anteriores me he hecho aún más preguntas y he encontrado intereses en el análisis geométrico, por esto agradezco a todos, en especial a quienes son cercanos a mi, y de manera general a toda persona que contribuyó al desarrollo de esta tesis y de mi formación profesional.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>3</b>
<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1. Preliminares algebraicos . . . . .	9
1.2. Marcos móviles e isomorfismos musicales . . . . .	12
1.3. Operadores sobre funciones y campos . . . . .	13
1.4. Formas diferenciales y sus operaciones . . . . .	15
1.5. Los tensores de curvatura . . . . .	20
1.6. Productos alabeados . . . . .	24
1.7. Ecuaciones de Cartan . . . . .	25
1.8. Ecuaciones de Cartan en dimensión 2 . . . . .	27
<b>2. Ecuaciones de variación y flujo de Ricci</b>	<b>31</b>
2.1. Derivadas temporales . . . . .	31
2.2. Evolución temporal . . . . .	34
2.3. El flujo de Ricci y sus propiedades básicas . . . . .	43
<b>3. Soluciones especiales</b>	<b>49</b>
3.1. Los primeros ejemplos . . . . .	49
3.2. Flujo normalizado y puntos fijos . . . . .	52
3.3. Solitones . . . . .	54
3.4. El cigarro de Hamilton . . . . .	59
3.5. La solución de Rosenau . . . . .	64
3.6. El solitón de Bryant . . . . .	68
3.7. Respiradores . . . . .	77
<b>4. Singularidades</b>	<b>81</b>
4.1. Modelos . . . . .	81
4.2. Variedades de Einstein . . . . .	85
4.3. El cigarro de Hamilton: Tipo III . . . . .	88
4.4. La solución de Rosenau: Tipo IIb . . . . .	90
<b>Comentarios finales</b>	<b>93</b>
<b>Referencias</b>	<b>94</b>



# Introducción

En 1904 Poincaré se preguntó si toda 3-variedad cerrada y simplemente conexa era homeomorfa a la esfera de dimensión 3. Este problema permaneció sin resolver por casi 100 años, pero fue generalizado en 1982 por William Thurston; conjeturó que las variedades de dimensión 3 cumplían un análogo al teorema de uniformización para superficies de Riemann, el cual dice que una superficie de Riemann simplemente conexa debe ser conformemente equivalente al plano complejo, la esfera de Riemann o al disco; en otras palabras se le puede asignar una de tres geometrías. La conjetura de Thurston (llamada la conjetura de geometrización) era similar en el sentido de que se quiere asignar una de ocho estructuras geométricas a las variedades cerradas de dimensión 3 pero difiere en que esto no es siempre posible, así que la conjetura propone descomponer a la variedad en partes fundamentales, para después asignarle a cada una de ellas una de las ocho geometrías propuestas. En este mismo año el flujo de Ricci fue introducido por Hamilton para resolver la conjetura de geometrización. El flujo de Ricci es parte de un objeto de estudio más general que es el de los flujos geométricos, lo cual consiste en una ecuación diferencial parcial que involucra tensores sobre una variedad riemanniana. Nosotros nos enfocamos en el flujo de Ricci pero existen otros como el flujo de curvatura media, el flujo de Yamabe, etcétera. Con respecto al flujo de Ricci, más precisamente se busca que la evolución de una familia de métricas riemannianas  $g_t$  se comporte como el tensor de Ricci, de la manera siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = -2 \operatorname{Ric}(g_t).$$

Como se verá más adelante, esta ecuación tiene un comportamiento parecido al de una ecuación de calor no homogénea y más aún, la evolución de varias cantidades geométricas bajo el flujo de Ricci toman esta misma forma. Por ejemplo la curvatura escalar se comporta como

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + 2|\operatorname{Ric}|^2.$$

A partir de esto se puede esperar que, como el calor, estas cantidades se vuelvan más homogéneas y este es justo el objetivo del flujo de Ricci. En otras palabras se busca deformar la métrica a una que sea más homogénea. Ejemplos de esto son la esfera y el espacio hiperbólico al tomarlos como condición inicial para el flujo de Ricci. En particular al tomar la esfera con su métrica usual  $g_0$  como condición inicial, la curvatura asociada a la evolución  $g_t$  bajo el flujo de Ricci tiende a infinito cuando el tiempo tiende a  $T < \infty$ ; el espacio hiperbólico por otra parte tiene un comportamiento opuesto en el sentido de que su curvatura tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ . Estos primeros resultados intuitivamente indican que la geometría de la variedad tiende a ser más homogénea.



En los años siguientes Hamilton continuó trabajando en la conjetura de geometrización pero no fue hasta 2002 que Grigori Perelman publicó el primero de tres artículos (los dos siguientes en 2003) donde presentó una solución a la conjetura de Poincaré y más en general a la conjetura de geometrización utilizando el flujo de Ricci con cirugía. En este texto no discutiremos la cirugía en el flujo de Ricci pero en una introducción a singularidades de este flujo, damos pie a un primer estudio de este tema. En el flujo de Ricci esto quiere decir parar el flujo, hacer cirugía y continuar el flujo, esto se hace en tiempos cercanos a cuando ocurra una singularidad, lo cual es análogo a una sucesión de puntos en el disco, con punto límite en su frontera, es decir el punto límite no es de la misma naturaleza que todos los demás puntos de la sucesión. En nuestro caso puede suceder que el flujo de Ricci al volverse singular, produzca algo que ya no sea una variedad, por ejemplo los *cuellos pellizcados degenerados* que introduciremos al final de este trabajo.

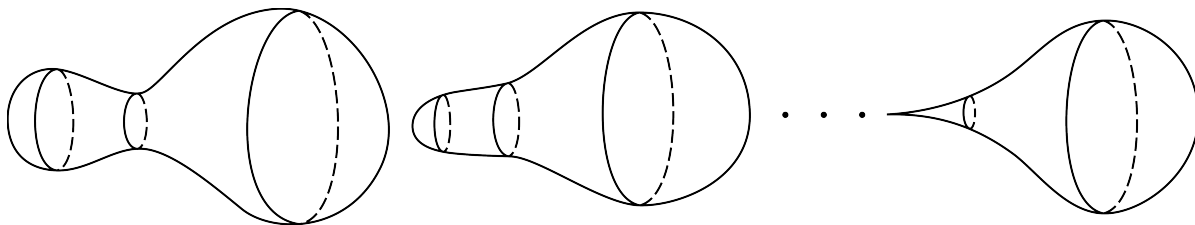


Figura 1: Ejemplo de un cuello pellizcado degenerado

La organización de este texto es la siguiente:

En el Capítulo 1 daremos las definiciones y resultados necesarios para desarrollar la teoría más adelante, también se incluirán los preliminares necesarios para poder hablar de familias de objetos geométricos de uso común en geometría diferencial y de igual forma introducimos las ecuaciones de Cartan para relacionar la curvatura escalar de dos métricas conformemente equivalentes en una superficie.

En el Capítulo 2 calculamos la evolución de distintos tensores bajo un flujo geométrico arbitrario, después aplicamos estos resultados al flujo de Ricci para introducirlo y hablar de sus propiedades básicas junto con algunos primeros resultados, así como particularidades del flujo en dimensión dos que dan pie al análisis cualitativo de la evolución de distintas cantidades geométricas.

En el Capítulo 3, a partir de los resultados obtenidos anteriormente nos enfocamos en soluciones particulares al flujo, los llamados *solitones de Ricci* que provienen de considerar el flujo como un sistema dinámico en un cociente del espacio de métricas riemannianas. Estas soluciones serán puntos fijos en este espacio y cumplen propiedades interesantes que se estudian a lo largo de esta sección, así como ejemplos particulares de estudio clásico en el tema de solitones.

En el Capítulo 4 trataremos el tema de singularidades desde un punto de vista elemental ya que para profundizar se necesitan más preliminares, de los cuales algunos son un extenso objeto de estudio por sí solos. Después de clasificar las singularidades y conectar este tema con las variedades de Einstein, incluimos un análisis de los solitones que se estudiaron en el Capítulo 3. Finalmente concluimos con algunos comentarios sobre un solitón en particular del cual hay varios resultados, el llamado *solitón de Bryant*. Todas las figuras en este texto fueron dibujadas por el autor.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Preliminares algebraicos

A lo largo de este texto se emplearán tensores y varios productos tensoriales de manera explícita e implícita, así como la notación de Einstein; a raíz de esto mencionamos algunas propiedades importantes de estos objetos. En primer lugar, se tienen los siguientes isomorfismos para espacios vectoriales  $V, W$  sobre  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} V^* \otimes W &\simeq \text{Hom}(V, W) \simeq B(V, W^*; \mathbb{R}), \\ V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q} &\simeq \text{Hom}((V^*)^{\times p-1} \times V^{\times q}, V), \end{aligned}$$

donde  $B(A, B; \mathbb{R})$  representa el espacio vectorial real de funciones bilineales de  $A \times B$  en  $\mathbb{R}$ , es decir  $B(A, B; \mathbb{R}) = \text{Hom}(A \times B, \mathbb{R})$ . En particular se tiene que

$$\text{End}(V) \simeq V^* \otimes V.$$

El isomorfismo está dado por

$$T \longmapsto f^i(T(e_j))f^j \otimes e_i,$$

donde  $\{e_i\}_{i=1}^n$  es base de  $V$  y  $\{f^j\}_{j=1}^n$  su base dual. Nos interesa definir una generalización del concepto de traza de un operador en  $\text{End}(V)$ . Con este objetivo consideramos el isomorfismo ya descrito y la base  $\{f^j \otimes e_i\}_{i,j=1}^n$  de  $V^* \otimes V$ . Se define la contracción  $C : V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$T_j^i f^j \otimes e_i \longmapsto T_j^i f^j(e_i) = T_j^i \delta_{ij} = T_i^i,$$

que es la traza del endomorfismo asociado a  $T$ .

Aunque se esté fijando la base  $\{e_i\}_{i=1}^n$ , como la traza es invariante bajo cambio de base, esto permite definirla en el producto tensorial, independientemente de la base que se escoja. Lo anterior es un ejemplo de contracción de un tensor, que es una generalización de la traza. Para la contracción de un tensor general, se fijan dos índices y la contracción o traza se define entonces como

$$\text{tr}_t^s : (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow (V^*)^{\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1},$$

$$T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} f^{i_1} \otimes \dots \otimes f^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} \mapsto T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} f^{i_s}(e_{j_t}) f^{i_1} \otimes \dots \otimes \widehat{f^{i_s}} \otimes \dots \otimes f^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e_{j_t}} \otimes \dots \otimes e_{j_q}.$$

En el caso de un tensor **no** mixto, en la presencia de un producto interior  $g \in V^* \otimes V^*$  (que llamaremos tensor métrico) se puede definir una **contracción métrica** subiendo ó bajando índices, es decir multiplicando por el tensor métrico covariante o contravariante y sumando sobre los índices repetidos. De esta forma se obtiene un tensor mixto y se puede contraer de manera usual. Veamos esto con detalle.

Consideramos, como antes, una base  $\{e_i\}_{i=1}^n$  en  $V$  y su base dual  $\{f^j\}_{j=1}^n$ . Entonces  $V$  y  $V^*$  son isomorfos bajo  $v \mapsto g(v, \cdot)$ . Si consideramos  $v = v^j e_j$ , “bajar un índice” quiere decir considerar su imagen bajo este isomorfismo. Para exhibir por qué se baja un índice basta desarrollar la imagen de  $v$ , tomando en cuenta la siguiente expresión para  $g(v, w)$ .

$$\begin{aligned} g(v, w) &= g(v^k e_k, w^l e_l) = g_{kl} v^k w^l = g_{kl} f^k(v) f^l(w) = g_{kl} f^k \otimes f^l(v, w), \\ g(v, \cdot) &= g_{kl} f^k(v) f^l(\cdot) = g_{kl} v^j f^k(e_j) f^l(\cdot) = g_{kl} v^j \delta_j^k f^l(\cdot) = g_{kl} v^k f^l(\cdot). \end{aligned}$$

Es decir, al vector con componentes  $v^k$  le corresponde el covector con componentes  $v_l := g_{kl} v^k$ . Por otro lado, “subir un índice” se refiere a usar el “tensor métrico inverso”  $\mathfrak{g} \in V \otimes V$  definido por

$$\mathfrak{g}^{ki} g_{ij} = \delta_j^k,$$

con lo cual bajar el índice quiere decir considerar

$$\begin{aligned} g_{ij} v^j &=: v_i, \\ \mathfrak{g}^{ki} g_{ij} v^j &= \mathfrak{g}^{ki} v_i, \\ v^k &= \mathfrak{g}^{ki} v_i. \end{aligned}$$

Es decir, al covector con componentes  $v_l$  le corresponde el vector con componentes  $\mathfrak{g}^{kl} v_l = v^k$ . De aquí en adelante se denotará al tensor métrico y su inverso con la misma letra pero con subíndices y superíndices para diferenciarlos. Esto se extiende a un tensor de cualquier orden, obteniendo los coeficientes multiplicando por el tensor métrico (o por su inverso). El concepto de subir y bajar índices se extiende a objetos que no son tensores. En este texto consideramos dichos eventos como notación, por ejemplo, más adelante se le subirá un índice a la conexión de Levi-Civita y se define esto como  $\nabla^k := g^{ik} \nabla_{\partial_i}$  donde  $\partial_i$  es el operador derivada parcial en la  $i$ -ésima dirección.

Eventualmente necesitaremos estimar la magnitud del tensor de curvatura para analizar cambios en la curvatura con respecto al tiempo, en este sentido generalizamos la norma euclidiana a tensores. En  $\mathbb{R}^n$  se tiene la conocida norma euclidiana inducida por el producto interior usual utilizando la base canónica:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x^i y_i, \\ \|x\|^2 &= \langle x, x \rangle = \sum_i^n x_i^2. \end{aligned}$$

Este producto interior se puede generalizar a matrices reales para obtener la norma de Frobenius de la siguiente forma. Sean  $A = (a_{ij})_{i,j}$ ,  $B = (b_{ij})_{i,j}$  dos matrices reales de tamaño  $n$ , entonces el producto interior de Frobenius (y consecuentemente la norma inducida) se define como

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B) = \sum_{i,j}^n a_{ij} b_{ij},$$

$$\|A\|_F^2 = \langle A, A \rangle = \sum_{i,j}^n a_{ij}^2.$$

Como las matrices  $M_n(\mathbb{R})$  son un espacio vectorial real isomorfo a  $\text{End}(V) \simeq V^* \otimes V$ , en realidad ya se tiene una norma para los tensores de orden  $(1, 1)$ . En este contexto, para generalizar a un tensor de orden  $(p, q)$  expresamos la norma de Frobenius de la matriz  $[T]$  asociada al endomorfismo  $T$  utilizando una base  $\{e_i\}_{i=1}^n$  ortonormal con respecto al producto interior  $g \in B(V, V; \mathbb{R})$  y su respectiva base dual  $\{f^j\}_{j=1}^n$  junto con la notación escrita anteriormente para un tensor en  $V^* \otimes V$ .

$$\|[T]\|_F^2 = \sum_{i,j}^n (f^i \circ T(e_j))^2 = \sum_{i,j}^n (T_j^i)^2 = \sum_{i,j}^n g^{ik} g_{jl} T_{kj} T^{il} = T_{ij} T^{ij}.$$

Notemos que al tensor  $T_j^i f^j \otimes e_i$  le corresponde el tensor  $T_{ij} f^j \otimes f^i$  al bajar un índice, análogamente al subir un índice se obtiene el tensor  $T^{ij} e_j \otimes e_i$ ; es decir, los coeficientes  $T_j^i$  se corresponden con los coeficientes  $T^{ij}, T_{ij}$  en los espacios  $V^* \otimes V^*$  y  $V \otimes V$ . Utilizando esto obtenemos que la norma de un tensor de tipo  $(1, 1)$  es igual a  $T_{ij} T^{ij}$  y en general, definimos la norma de un tensor de orden  $(p, q)$  como

$$|T|^2 := T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$$

A lo largo del texto, usaremos las siguientes notaciones:

- $M$ : variedad (diferenciable. o riemanniana, según sea el caso).
- Para un haz vectorial  $\pi : E \rightarrow B$ ,  $\Gamma(E)$  representa las secciones suaves del haz.
- $T_q^p M = \bigsqcup_{x \in m} T_q^p(T_x M)$ : el haz tensorial de  $(p, q)$ -tensores sobre  $M$ , donde

$$T_q^p(T_x M) := (T_x^* M)^{\otimes p} \otimes (T_x M)^{\otimes q}.$$

- $\mathcal{T}_q^p(M) = \Gamma(T_q^p(M))$ : el espacio de  $(p, q)$ -tensores sobre  $M$ , que es un módulo sobre el anillo de funciones diferenciables  $C^\infty(M)$  y a los elementos de este espacio se les llama campos tensoriales.
- $TM = T_1^0(M)$ : el haz tangente de  $M$ .
- $TM^* = T_0^1(M)$ : el haz cotangente de  $M$ .

- $\mathfrak{X}(M) = \mathcal{T}_1^0(M) = \Gamma(TM)$ : el módulo de campos vectoriales diferenciables definidos en  $M$ .
- $\Lambda^k(M)$ : el haz de  $k$ -formas diferenciales en  $M$
- $\Omega^k(M)$ : el espacio de  $k$ -formas diferenciales definidas en  $M$ , que es un submódulo de  $\mathcal{T}_0^k(M)$  y es el espacio de secciones diferenciables de  $\Lambda^k(M)$ .

## 1.2. Marcos móviles e isomorfismos musicales

**Definición 1.2.1.** *Un marco móvil tangente definido en un subconjunto abierto  $U$  de una variedad diferenciable  $M$  es una colección de campos vectoriales  $\{e_1, \dots, e_n\} = \mathbf{e}$  tales que en cada punto  $p \in U$ ,  $\mathbf{e}_p$  es base de  $T_pM$ .*

El **marco dual** del marco  $\mathbf{e}$  es el marco  $\mathbf{w} = \{w^1, \dots, w^n\}$  en  $TM^*$  tal que  $w^i(e_j) = \delta_j^i$

Si  $M$  tiene una métrica  $g$  y el marco  $\mathbf{e}$  es ortonormal con respecto de esta métrica, localmente tenemos que

$$g = w^i \otimes w_i.$$

Esto es consecuencia directa de evaluar en  $x = x^i e_i, y = y^j e_j \in T_pM$ :

$$g(x, y) = x^i y^j g(e_i, e_j) = x^i y_i = w^i(x) w_i(y) = w^i \otimes w_i(x, y).$$

Dada  $\eta = \eta_i w^i \in \Omega^1(M)$ , se define su **sostenida** como

$$\eta^\sharp = g^{ij} \eta_i e_j = \eta^j e_j \in \mathfrak{X}(M),$$

que puntualmente es “subir el índice” como se discutió en 1.1 y, análogamente, bajar el índice quiere decir tomar un campo  $X = x^i e_i$  y obtener a partir de él su **bemol**

$$X^\flat = g_{ij} x^i w^j = x_j w^j \in \Omega^1(M).$$

Notemos que  $X^\flat$  es simplemente  $g(X, \cdot)$  pues

$$X^\flat(Y) = x_j w^j(Y) = w_j(X) w^j(Y) = w_j \otimes w^j(X, Y) = g(X, Y).$$

Análogamente  $g(\eta^\sharp, \cdot) = \eta$ :

$$g(\eta^\sharp, Y) = w_j \otimes w^j(\eta^\sharp, Y) = w_j(g^{ik} \eta_i e_k) w^j(Y) = \sum_{j=1}^n g^{ij} \eta_i w^j(Y) = \sum_{j=1}^n \eta^j w^j(Y) = \eta(Y).$$

Los operadores  $\sharp : T^*M \rightarrow TM$  y  $\flat : TM \rightarrow T^*M$  son inversos:

$$\begin{aligned} ((X)^\flat)^\sharp &= (x_j w^j)^\sharp = g^{ji} x_j e_i = x^i e_i = X, \\ ((\eta)^\sharp)^\flat &= (\eta^j e_j)^\flat = g_{ij} \eta^j w^i = \eta_i w^i = \eta. \end{aligned}$$

### 1.3. Operadores sobre funciones y campos

Aquí presentamos ciertos operadores que usaremos más adelante. Es de particular importancia el operador de Laplace-Beltrami, que llamaremos laplaciano y denotaremos por  $\Delta$ , ya que la curvatura escalar, los coeficientes del tensor de curvatura y los del tensor de Ricci, cumplen (bajo el flujo de Ricci) una ecuación de **reacción-difusión** donde el término de difusión es el laplaciano de la cantidad que evoluciona, o en otras palabras una ecuación de calor no-homogénea donde las fuerzas externas son los términos de reacción. Para comentar acerca de  $\Delta$  primero recordamos la definición de volumen en una variedad riemanniana orientable.

**Definición 1.3.1.** *Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana orientable. Se define la **forma de volumen** en coordenadas locales como*

$$d\mu = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Con  $d\mu$  se puede encontrar una expresión explícita para  $\Delta$  en coordenadas locales. Definimos el laplaciano utilizando la divergencia y el gradiente en una variedad riemanniana, los cuales presentamos a continuación.

**Definición 1.3.2.** *Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana.*

1. El **gradiente** de  $f \in C^\infty(M)$  es el único campo  $\text{grad}(f)$  tal que para cualquier campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,

$$\langle \text{grad}(f), X \rangle = X(f) = df(X).$$

2. La **divergencia** de un campo  $X$  es la función  $\text{div} X \in C^\infty(M)$  tal que

$$(\text{div} X)(p) = \text{tr}(Y_p \mapsto \nabla_{Y_p} X_p) = \text{tr}(\nabla_\bullet X_p).$$

3. El **laplaciano** de una función  $f \in C^\infty(M)$  se define como

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f)),$$

en coordenadas locales se tiene que

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right). \quad (1.1)$$

Una forma de ver al laplaciano involucra al operador Hessiano.

**Definición 1.3.3.** *Definimos el **Hessiano** de una función  $f \in C^\infty(M)$  como*

$$\text{Hess}(f) \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M),$$

$$\text{Hess}(f) = \nabla \nabla f = \nabla df.$$

El Hessiano es la **segunda derivada covariante**, esto es sencillo de observar utilizando la derivada tensorial<sup>1</sup> en  $df$ :

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f)(X, Y) &= (\nabla_X df)(Y) = X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) = X(\nabla_Y f) - \nabla_{\nabla_X Y} f \\ &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\nabla_X Y})f = \nabla_{X, Y}^2 f. \end{aligned}$$

De la segunda igualdad y la compatibilidad de la conexión de Levi-Civita obtenemos otra expresión útil para el Hessiano en términos de la métrica riemanniana. Primero tenemos que

$$\text{Hess}(f)(X, Y) = X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) = X(\langle \text{grad}(f), Y \rangle) - \langle \text{grad}(f), \nabla_X Y \rangle;$$

por la compatibilidad de la métrica,

$$X\langle \text{grad}(f), Y \rangle = \langle \nabla_X \text{grad}(f), Y \rangle + \langle \text{grad}(f), \nabla_X Y \rangle,$$

de modo que

$$\text{Hess}(f)(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad}(f), Y \rangle.$$

Basta utilizar estas definiciones y los isomorfismos musicales para encontrar una expresión familiar del laplaciano. Por definición del gradiente y de  $\flat$ , se tiene que

$$(\text{grad}(f))^\flat = \langle \text{grad}(f), \cdot \rangle = df,$$

por lo que

$$\text{grad}(f) = df^\sharp = (\nabla f)^\sharp$$

y por tanto,

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f)) = \text{tr}(\nabla(\nabla f)^\sharp) = \text{tr}_g \nabla \nabla f = \text{tr}_g \text{Hess}(f),$$

donde, en coordenadas,  $g^{ij}$  sale como una constante de la derivada covariante por la compatibilidad de la conexión de Levi-Civita con el tensor métrico ( $\nabla g = 0$ ). En resumen, el laplaciano es la contracción métrica del Hessiano.

Por último mencionamos un teorema atribuido a Eberhard Hopf [PW12] que involucra al laplaciano y que nos será útil mas adelante al considerar mínimos.

**Teorema 1.3.4** (Principio del Máximo de Hopf). *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un dominio (subconjunto abierto y conexo) y sea  $u \in C^2(\Omega)$  tal que cumple la desigualdad diferencial*

$$Lu = a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b^i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0,$$

donde  $a_{ij}, b_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  son acotadas y la matriz  $a_{ij}(x)$  es positiva definida. Si  $u$  alcanza su máximo  $u_{\max}$  en  $\Omega$  entonces  $u$  es constante. Si además  $\partial\Omega$  es una variedad suave,  $u \in C^1(\bar{\Omega})$

<sup>1</sup>Extenderemos la noción de conexión en la sección 2.1. En el caso de una 1-forma  $w$  se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Omega^1(M) &\rightarrow \Omega^1(M) \\ (\nabla_X w)(Y) &:= X(w(Y)) - w(\nabla_X Y). \end{aligned}$$

y el máximo de  $u$  se alcanza en algún punto  $p$  de  $\partial\Omega$  (excluyendo el caso  $u$  constante), entonces para cualquier dirección normal exterior  $\nu$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(p) > 0.$$

El principio del máximo es igualmente válido en el caso de un mínimo, con lo cual se tendría un "principio del mínimo", para esto simplemente hay que tomar  $u = -v$  en el principio del máximo.

Notemos que el laplaciano en coordenadas locales puede ser obtenido del Hessiano, que a su vez puede ser obtenido a partir del gradiente:

$$\Delta f = \text{tr}_g(\partial_i \partial_j f - \Gamma_{ij}^k \partial_k f) = g^{ij} \partial_i \partial_j f - g^{ij} \Gamma_{ij}^k \partial_k f.$$

Con lo cual se puede extender el principio del Máximo de Hopf a un abierto de una variedad riemanniana. En este texto no extendemos esta noción, pero el principio del máximo se extiende de manera más general con respecto a una generalización del laplaciano usual y una variedad riemanniana de clase  $C^2$  en [PS04]:

**Teorema 1.3.5.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana de clase  $C^2$ . Localmente en una subvariedad riemanniana abierta y conexa  $\Omega$  el principio del máximo de Hopf es válido para la desigualdad*

$$\Delta u \geq 0.$$

Donde  $u \in C^2(\Omega)$ .

## 1.4. Formas diferenciales y sus operaciones

En esta sección definiremos algunas operaciones importantes sobre formas diferenciales y campos, que a su vez emplearemos para hablar de diversos conceptos en geometría diferencial, como las llamadas ecuaciones de estructura. Antes de comenzar esta sección definimos notación que encontraremos y recordaremos a lo largo del texto.

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_i := \nabla_{\partial_i}, \nabla^i := g^{ij} \nabla_j.$$

### El corchete de Lie

El corchete de Lie se define como

$$[\bullet, -] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto [X, Y] := XY - YX.$$

Donde  $XY(f) := X(Y(f))$  para  $f \in C^\infty(M)$ . En coordenadas locales

$$[X, Y] = [x^i \partial_i, y^j \partial_j] = (x^j \partial_j y^i - y^j \partial_j x^i) \partial_i.$$

El corchete de Lie cumple las siguientes propiedades:

- Es  $\mathbb{R}$ -bilineal.
- Es anti-simétrico:  $[X, Y] = -[Y, X]$ .
- Cumple la identidad de Jacobi  $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ .



## El producto exterior

Definimos el **producto exterior**

$$\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M), \quad (w, \eta) \longmapsto w \wedge \eta,$$

con regla de correspondencia

$$w \wedge \eta = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) (w \otimes \eta)^\sigma,$$

donde  $S_n$  es el conjunto de permutaciones de un conjunto de cardinalidad  $n$ ,  $\text{sgn } \sigma$  es el signo de la permutación y

$$f^\sigma(v_1, \dots, v_n) := f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}).$$

A la expresión que define a  $w \wedge \eta$  se le llama la alternación de  $w \otimes \eta$ , pues es una forma de convertir al tensor  $w \otimes \eta$  en uno alternante. En particular, si  $w_1, w_2 \in \Omega^1(M)$  se tiene que

$$w_1 \wedge w_2(X, Y) = w_1 \otimes w_2(X, Y) - w_1 \otimes w_2(Y, X) = w_1(X)w_2(Y) - w_1(Y)w_2(X). \quad (1.2)$$

## La derivada exterior

Esta derivada generaliza de manera única el concepto de diferencial de una función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a una derivación graduada en  $\Omega^\bullet(M)$ . En este caso sabemos que el diferencial  $df$  toma valores en el haz tangente  $TM$  y tiene imagen en  $T\mathbb{R}$ ; al evaluar en un campo  $X$  se tiene que  $df(X)$  es la derivada direccional de  $f$  en la dirección de  $X$ , es decir  $d$  toma valores en  $C^\infty(M) := \Omega^0(M)$  y tiene imagen en  $\Omega^1(M)$ , que son objetos que se evalúan en un campo y regresan una función. Más en general se define

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

como el único operador  $\mathbb{R}$ -lineal tal que

- $df$  es el diferencial de la 0-forma  $f$ . En un sistema de coordenadas  $x^i$ ,  $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ , donde cada  $dx^i$  coincide con la derivada exterior de la  $i$ -ésima función coordenada  $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- $d^2 = 0$ ;
- $d(w \wedge \eta) = dw \wedge \eta + (-1)^k w \wedge d\eta$  para cualesquiera  $w \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$ .

Como consecuencia, se tiene la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} dw(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(w(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} w([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k). \end{aligned} \quad (1.3)$$

En particular para una 1-forma, lo anterior se convierte en

$$dw(X, Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X, Y]). \quad (1.4)$$

### Pullback de tensores

Sean  $\varphi : M \rightarrow M$  un difeomorfismo,  $w \in \mathcal{T}_0^1(M)$  y  $T \in \mathcal{T}_q^p(M)$ . El pullback  $\varphi^*w \in \mathcal{T}_0^1(M)$  se define como

$$\varphi^*w(X) = w(d\varphi(X)) \text{ para } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Con lo cual el pullback  $\varphi^*T \in \mathcal{T}_q^p(M)$  de  $T$  bajo  $\varphi$  esta definido por

$$\varphi^*T(w_1, \dots, w_p, X_1, \dots, X_q) = T(\varphi^*w_1, \dots, \varphi^*w_p, d\varphi^{-1}(X_1), \dots, d\varphi^{-1}(X_q)),$$

donde  $w_i \in \mathcal{T}_0^1(M)$ ,  $X_j \in \mathfrak{X}(M)$ .

### Integración

Para definir la integral de una forma diferencial  $w \in \Omega^k(M)$  primero definimos este concepto para  $M = \mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.4.1.** *Sea  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un subconjunto compacto tal que  $\partial D$  es de medida cero con respecto a la medida de Lebesgue. Sea  $w = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^k(D)$  con  $f \in C^\infty(D)$ . Definimos la integral de  $w$  sobre  $D$  como*

$$\int_D w := \int_D f dx_1 \cdots dx_n.$$

Para extender este concepto a variedades, definimos el soporte de una forma diferencial.

**Definición 1.4.2.** *Sea  $w \in \Omega^k(M)$ , definimos su soporte como*

$$\text{sop}(w) := \overline{\{x \in M : w_x \neq 0\}},$$

*decimos que  $w$  tiene soporte compacto si  $\text{sop}(w)$  es compacto.*

**Definición 1.4.3.** *Sea  $M$  una variedad orientable y  $w \in \Omega^k(M)$  de soporte compacto contenido en la carta  $(U, \varphi)$ . Definimos la **integral** de  $w$  sobre  $U$  como*

$$\int_U w := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*w.$$

Por último, definimos el volumen.

**Definición 1.4.4.** *Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana orientable y compacta, definimos el **volumen** de  $M$  como*

$$\int_M d\mu.$$

Tomar la variedad compacta nos permite integrar globalmente (pues el soporte sería un subconjunto cerrado de un conjunto compacto) sin tener que recurrir a particiones de la unidad (ver [Tu11] capítulo 13), y que sea orientable es equivalente a que exista la forma de volumen.

### El producto interior

La operación  $\iota : \mathfrak{X}(M) \times \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$  se define como

$$\iota_X(w)(X_1, \dots, X_{p-1}) := w(X, X_1, \dots, X_{p-1}).$$

Este producto cumple la misma regla de Leibniz que la derivada exterior y se tiene la *fórmula integral de Leibniz* para una forma diferencial dependiente del tiempo; ver [Fla73]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} w = \int_{\Omega(t)} \iota_v(dw) + \int_{\partial\Omega(t)} \iota_v w + \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} w, \quad (1.5)$$

donde  $v = \partial x / \partial t$  y  $x$  es parametrización de  $\Omega(t)$ .

### Derivada de Lie

Definimos a continuación la derivada de Lie de un campo tensorial  $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$  con respecto de un campo vectorial  $X$  en  $M$ . En una vecindad  $U$  de  $p$  y para  $t$  suficientemente pequeño, existe una familia uniparamétrica de difeomorfismos locales  $\varphi_t$  tales que

$$\frac{d}{dt} \varphi_t = X \circ \varphi_t \quad \text{y} \quad \varphi_0 = \text{Id}.$$

Entonces la derivada de Lie con respecto a  $X$  se define como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{T}_l^k(M) &\rightarrow \mathcal{T}_l^k(M) \\ (X, T) &\longmapsto \mathcal{L}_X T := \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^* T \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Más adelante será de interés conocer la ecuación anterior para todo tiempo:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^* T \right|_{t=t_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi_{t_0+h}^* T - \varphi_{t_0}^* T) \\ &= \varphi_{t_0}^* \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi_h^* T - T) \right) \\ &= \varphi_{t_0}^* \left( \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^* T \right|_{t=0} \right) = \varphi_{t_0}^* \mathcal{L}_X T. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Podemos generalizar este resultado al caso en que tengamos una familia uniparamétrica de campos vectoriales  $X(p, t)$ . Primero notamos que al tener una familia de campos vectoriales, entonces para cada  $t$  debe de existir un flujo  $\varphi_s(\bullet, t) := \varphi_s \in \text{Diff}(M)$  tal que

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_s(p, t)) \right|_{s=s_0} = X(\varphi_{s_0}(p, t), t), \quad \varphi_0(\bullet, t) = \text{Id},$$

para todo  $t$  y todo  $s_0$ ; en particular,

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_s(p, t)) \right|_{s=t} = X(\varphi_t(p, t), t) \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_s(p, 0)) \right|_{s=s_0} = X(\varphi_{s_0}(p, 0), 0)$$

Para definir la derivada de Lie con respecto a una familia  $X_t := X(\bullet, t)$  de campos vectoriales, consideramos dicha familia como una curva diferenciable en  $\mathfrak{X}(M)$  y  $\mathcal{L}_{X_t}T$  como una curva diferenciable de tensores<sup>2</sup>.

Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : C^\infty(I, \mathfrak{X}(M)) \times \mathcal{T}_l^k(M) &\rightarrow C^\infty(I, \mathcal{T}_l^k(M)) \\ (X_t, T) &\rightarrow \mathcal{L}_{X_t}T := \left. \frac{\partial}{\partial s} \varphi_s^*(\bullet, t)T \right|_{s=0}. \end{aligned}$$

Análogamente la expresión (1.6) tiene la forma

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \varphi_s^*(\bullet, t)T \right|_{s=s_0} = \varphi_{s_0}^*(\bullet, t) \mathcal{L}_{X_t}T. \quad (1.7)$$

La derivada de Lie cumple las siguientes propiedades; ver [CLN06]:

1.  $\mathcal{L}_X f = Xf = df(X)$ .
2.  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ .
3. Para tensores  $\alpha$  y  $\beta$  se tiene que  $\mathcal{L}_X(\alpha \otimes \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \otimes \beta + \alpha \otimes (\mathcal{L}_X \beta)$ .
4. Para un  $(2, 0)$ -tensor  $\alpha$  y campos  $X, Y, Z$  se tiene que

$$(\mathcal{L}_X \alpha)(Y, Z) = (\nabla_X \alpha)(Y, Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z) + \alpha(Y, \nabla_Z X).$$

En particular si  $g$  es una métrica riemanniana para  $M$  y  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita de  $g$ , como  $\nabla$  es compatible con la métrica, entonces el primer término es cero y

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle. \quad (1.8)$$

En un marco ortonormal

$$(\mathcal{L}_X g)_{ij} = (\nabla_i X)_j + (\nabla_j X)_i. \quad (1.9)$$

Ya definidos estos objetos de uso cotidiano en geometría diferencial, continuamos con nociones de curvatura.

---

<sup>2</sup>Decimos que una curva  $\gamma_X : I \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  es diferenciable si la curva  $X_t(p) := \gamma_X(t)(p) \subset \mathbb{R}^n$  lo es en el sentido usual para todo  $p \in M$ . De manera análoga, decimos que una curva  $\gamma_w : I \rightarrow \mathcal{T}_l^k(M)$  es diferenciable si  $(\mathcal{L}_{X_t}T)|_p := \gamma_w(t)(p) \subset (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$  es diferenciable en el sentido usual para todo  $p \in M$ .

## 1.5. Los tensores de curvatura

La convención que seguiremos es que la definición del tensor de curvatura para una variedad riemanniana  $M$  es

$$\begin{aligned} \text{Rm}(X, Y) &= [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}, \\ R(X, Y, Z, W) &:= \langle \text{Rm}(X, Y)Z, W \rangle. \end{aligned}$$

En particular a  $\text{Rm}(\cdot, \cdot) : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  le corresponde el tensor  $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \in \Gamma(T^*M) \otimes \Gamma(TM)^{\otimes 3}$  definido por

$$R_{ijk}^l = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta(\partial_i, \partial_j, \partial_k, dx^l) := dx^l(\text{Rm}(\partial_i, \partial_j)\partial_k) = dx^l R_{ijk},$$

donde el uso de alfabeto griego diferencia el tensor  $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$  de los coeficientes  $R_{ijk}^l$  del tensor de curvatura evaluado en  $\partial_i, \partial_j, \partial_k$ .

El tensor  $R$  tiene varias simetrías, las cuales están contenidas en el siguiente resultado.

### Proposición 1.5.1.

1.  $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$ ,
2.  $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$ ,
3.  $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$ , (*1<sup>era</sup> identidad de Bianchi*)
4.  $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$ .

La prueba de esta proposición se puede encontrar en [Mil63] pg. 53.

**Definición 1.5.2.** Definimos la **curvatura seccional** de un plano  $\sigma_{x,y} \subseteq T_p M$  generado por  $x, y \in T_p M$  con respecto al tensor de curvatura y la métrica riemanniana como

$$K(\sigma_{x,y}) := \frac{R(x, y, y, x)}{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

donde el denominador es el cuadrado del área del paralelogramo formado por  $x, y$ .

$K(\sigma_{x,y})$  coincide con la curvatura Gaussiana (en el punto) de la superficie imagen de  $\sigma_{x,y}$  bajo la exponencial (en una vecindad  $U$  de radio inyectivo), donde la métrica en  $\exp(U)$ , es la inducida por la inclusión de  $\exp(U)$  en  $M$ . Es decir, si denotamos la curvatura Gaussiana en  $p$  de una superficie  $S$  por  $K_G(S)$ , se tiene que

$$K(\sigma_{x,y}) = K_G(\exp(U)).$$

El siguiente resultado dice que la curvatura seccional, junto con las propiedades algebraicas de la proposición 1.5.1 determinan por completo el tensor de curvatura.

**Proposición 1.5.3.** *Sea  $V$  un espacio vectorial y  $R_1, R_2$  dos  $(4, 0)$ -tensores que cumplen las propiedades de la proposición 1.5.1. Si  $R_1(x, y, y, x) = R_2(x, y, y, x)$  entonces  $R_1 = R_2$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{R} = R_1 - R_2$ ; basta usar las propiedades de la proposición 1.5.1 para probar que si  $\mathfrak{R}(x, y, y, x) = 0$ , entonces  $\mathfrak{R} = 0$ .

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathfrak{R}(x, y + w, y + w, x) = \mathfrak{R}(x, y + w, x, y + w) \\ &= \mathfrak{R}(x, y, x, y) + \mathfrak{R}(x, y, x, w) + \mathfrak{R}(x, w, x, y) + \mathfrak{R}(x, w, x, w) \\ &\stackrel{4}{=} 2\mathfrak{R}(x, y, x, w). \end{aligned}$$

Por lo tanto por la propiedad 1

$$\mathfrak{R}(y, x, x, w) = 0.$$

De esto se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{R}(x, y + z, y + z, w) \\ &= \mathfrak{R}(x, y, y, w) + \mathfrak{R}(x, y, z, w) + \mathfrak{R}(x, z, y, w) + \mathfrak{R}(x, z, z, w) \\ &= \mathfrak{R}(x, y, z, w) + \mathfrak{R}(x, z, y, w). \end{aligned}$$

Es decir  $\mathfrak{R}$  es alternante en cada pareja consecutiva de entradas (por las propiedades 1 y 2). Por la primera identidad de Bianchi obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{R}(x, y, z, w) + \mathfrak{R}(y, z, x, w) + \mathfrak{R}(z, x, y, w) \\ &= \mathfrak{R}(x, y, z, w) - \mathfrak{R}(y, x, z, w) - \mathfrak{R}(x, z, y, w) \\ &= 3\mathfrak{R}(x, y, z, w). \end{aligned} \quad \square$$

Las simetrías del tensor de curvatura implican que es una sección suave del haz tensorial simétrico de 2-formas sobre la variedad  $M$  que se esté tratando:

$$R \in \Gamma(\text{Sym}(\Lambda^2(M) \otimes \Lambda^2(M))).$$

En dimensión dos  $\Lambda^2(M)$  es un haz lineal y por lo tanto  $\text{Sym}(\Lambda^2(M) \otimes \Lambda^2(M))$  es de dimensión uno, es decir el tensor de curvatura puede obtenerse multiplicando por una función en  $C^\infty(M)$  y más aún, se pueden utilizar las simetrías del tensor de curvatura para obtener la siguiente expresión del tensor de curvatura:

$$R_{ijkl} = f(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}).$$

Al contraer en los índices  $i, l$  obtenemos que  $f = R/2$  y por lo tanto en dimensión dos se tiene la fórmula

$$R_{ijkl} = \frac{R}{2}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}). \quad (1.10)$$

Donde  $R$  es la curvatura escalar, definida al final de esta sección. En el caso de variedades con curvatura seccional constante, tenemos un resultado similar que probamos a continuación.

**Lema 1.5.4.** *Sea  $M$  una variedad de curvatura seccional constante  $K_0$ , entonces*

$$\langle \text{Rm}(X, Y)Z, W \rangle = K_0(\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle)$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  definida por

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = K_0(\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle)$$

Como  $M$  es de curvatura seccional constante  $K_0$ , por definición se tiene que

$$R(X, Y, Y, X) = K_0(\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2) = \mathcal{R}(X, Y, Y, X)$$

Basta observar que  $\mathcal{R}$  cumple las propiedades de la proposición 1.5.1 y usar la proposición 1.5.3 puntualmente para concluir que  $\mathcal{R} = R$ .  $\square$

**Definición 1.5.5.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana,  $p \in M$  y  $x \in T_pM$ . Definimos la **curvatura de Ricci** en  $p$  en la dirección  $x$  como*

$$\text{Ric}_p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} R(z_i, x, x, z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} K(\sigma_{z_i, x}),$$

donde  $\{z_1, \dots, z_{n-1}, x = z_n\} = \beta$  es base ortonormal de  $T_pM$ .

Esto es una versión restringida del tensor de Ricci, que definimos de la siguiente forma.

**Definición 1.5.6.** *Definimos el **tensor de Ricci** en  $p \in M$  como la forma bilineal*

$$\text{Ric}_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$\text{Ric}_p(x, y) = \text{tr}(z \mapsto \text{Rm}(z, x)y) = \text{tr}(\text{Rm}(\cdot, x)y).$$

En lo que sigue, recordemos que se está usando notación de Einstein. La curvatura de Ricci es el tensor de Ricci evaluado en el mismo vector por el siguiente argumento: Como para cualquier  $x \in T_pM$ ,  $x = \langle x, z_i \rangle z^i$ , entonces

$$\text{Rm}(z_j, x)y = \langle \text{Rm}(z_j, x)y, z_i \rangle z^i,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{Ric}_p(x, y) &= \text{tr}(\text{Rm}(\cdot, x)y) = \langle \text{Rm}(z_i, x)y, z^i \rangle = R(z_i, x, y, z^i), \\ \text{Ric}_p(x, x) &= R(z_i, x, x, z^i) = \text{Ric}_p(x). \end{aligned}$$

En particular se tiene lo siguiente:

$$\text{Ric}_{jk} = \langle R_{ijk}^l z_l, z^i \rangle = \sum_i^n R_{ijk}^l g_{li} = R_{ijk}^i. \quad (1.11)$$

Notemos también que los coeficientes de curvatura cumplen

$$\begin{aligned} R_{ijklm} &= \langle \text{Rm}(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_m \rangle = \langle R_{ijk}^l \partial_l, \partial_m \rangle = g_{lm} R_{ijk}^l, \\ R_{ijk} &= g_{lm} R_{ijk}^m \partial_m, \end{aligned}$$

y las identidades de Bianchi<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} &= 0, \quad (1^{\text{era}} \text{ identidad de Bianchi}) \\ \nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} &= 0. \quad (2^{\text{da}} \text{ identidad de Bianchi}) \end{aligned}$$

De la segunda identidad de Bianchi, al contraer dos veces obtenemos lo siguiente (recordando que  $\nabla^i = g^{ij} \nabla_j$ )

$$\begin{aligned} g^{im} g^{jl} \nabla_i R_{jklm} + g^{im} g^{jl} \nabla_j R_{kilm} + g^{im} g^{jl} \nabla_k R_{ijlm} &= 0, \\ -\nabla^m \text{Ric}_{km} - \nabla^l \text{Ric}_{kl} + g^{jl} \nabla_k \text{Ric}_{jl} &= 0, \end{aligned}$$

de donde obtenemos la *segunda contracción de la segunda identidad de Bianchi*

$$\nabla_k R = 2 \nabla^l \text{Ric}_{kl}. \quad (1.12)$$

Donde  $R$  es la curvatura escalar, definida a continuación junto con la curvatura escalar promedio, que son nociones de curvatura que utilizaremos constantemente más adelante.

**Definición 1.5.7.** La *curvatura escalar*  $R \in C^\infty(M)$  esta definida como la traza del tensor de Ricci:

$$R = \text{tr}_g \text{Ric}.$$

Con lo cual podemos definir la curvatura escalar promedio.

**Definición 1.5.8.** La *curvatura escalar promedio* con respecto a una métrica riemanniana  $g$  en una variedad compacta  $M$ , se define normalizando la integral de la curvatura escalar por el volumen de  $M$ :

$$r(g) = \frac{\int_M R d\mu}{\int_M d\mu}.$$

---

<sup>3</sup>La prueba de la segunda identidad de Bianchi se puede encontrar en [Lee19].



## 1.6. Productos alabeados

Definiremos cierto tipo de variedades que usaremos más adelante. Consideremos dos variedades riemannianas  $(B, g_B), (F, g_F)$ , su producto  $(B \times F, g)$  con las proyecciones  $\pi: B \times F \rightarrow B$  y  $\sigma: B \times F \rightarrow F$ , así como la métrica producto

$$g = \pi^*(g_B) + \sigma^*(g_F).$$

Al considerar una función  $f > 0$  en  $B$  podemos alabear  $g$  en cada fibra  $p \times F$  como sigue.

**Definición 1.6.1.** *El producto alabeado  $B \times_f F$  es la variedad producto  $B \times F$  con tensor métrico*

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F).$$

A  $B$  se le llama la base y a  $F$  la fibra; de igual manera,  $\pi^{-1}(p)$  también se le llama fibra y  $\sigma^{-1}(q)$  recibe el nombre de hoja. Diremos que un vector es *horizontal* si es tangente a una hoja y un vector es *vertical* si es tangente a una fibra, es decir al considerar el haz tangente al producto, se descompone en la suma de Whitney de  $B$  con  $F$ :

$$T(B \times F) = TB \oplus TF,$$

y al considerar esta descomposición, un campo vertical es un campo en  $TF$  y uno horizontal es un campo en  $TB$ .

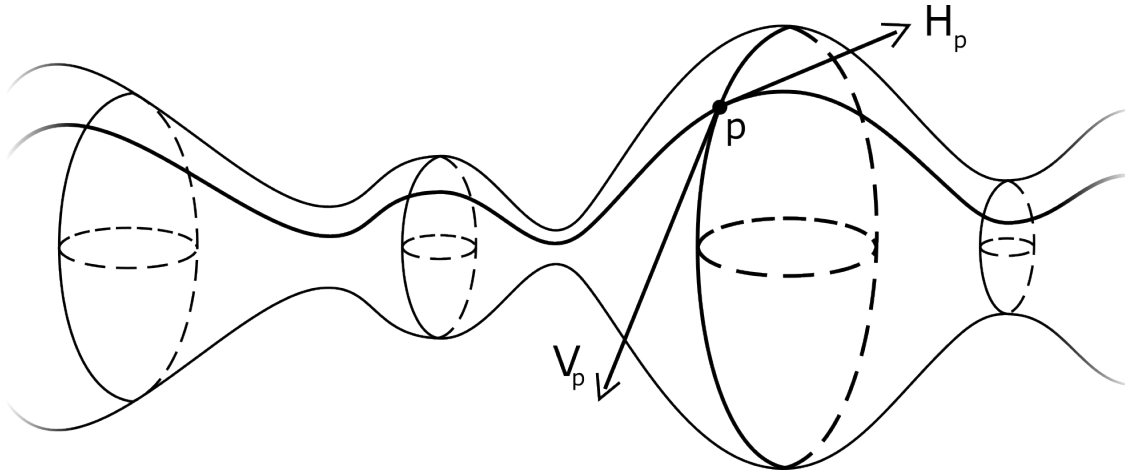


Figura 1.1:  $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^2$  con vectores horizontales y verticales, tangentes a una hoja y a una fibra respectivamente.

Equivalentemente podemos considerar el haz

$$\pi: B \times F \rightarrow B$$

y definir los campos horizontales como aquellos complementarios a  $\ker(d\pi)$  y los verticales como los campos en  $\ker(d\pi)$ . En general para un haz fibrado suave  $\pi: E \rightarrow M$  se define el *haz vertical* como  $VE = \ker(d\pi)$  (que es una subvariedad regular de  $TE$ ) y se escoge

un haz horizontal  $HE$  complementario, es decir, de forma que en cada  $e \in E$  se tenga que  $T_e E = V_e E \oplus H_e E$ ,  $HE$  recibe el nombre de *conexión de Ehresmann*. En un haz trivial solo hay un candidato para el haz horizontal, con lo cual la proyección es suficiente para definir los campos verticales y horizontales.

Podemos definir el *levantamiento* de un tensor en  $B$ , aquí lo hacemos para dos tipos de tensores. En caso de tener un tensor covariante  $T \in \Omega^1(B) \times \cdots \times \Omega^1(B)$  su levantamiento  ${}^B T$  es simplemente su pullback  $\pi^*(T) = T \circ (d\pi \times \cdots \times d\pi)$ . En caso de tener un  $(1, s)$ -tensor  $T : \mathfrak{X}(B) \times \cdots \times \mathfrak{X}(B) \rightarrow \mathfrak{X}(B)$  su levantamiento se define como el  $(1, s)$ -tensor  ${}^B T$  en  $B \times F$  tal que  ${}^B T(X_1, \dots, X_s)$  es el campo horizontal que se proyecta bajo  $d\pi$  a  $T \circ (d\pi \times \cdots \times d\pi)(X_1, \dots, X_s)$ .

En los dos tipos de tensores, si para algún  $i \in \{1, \dots, s\}$  se escoge  $X_i$  vertical, al estar en el núcleo de  $d\pi$  se tiene que  ${}^B T(X_1, \dots, X_i, \dots, X_s)$  es cero.

Sean  $X, Y$  campos horizontales y  $V, W$  verticales. Entonces se tienen las fórmulas siguientes ([ONe83] pg. 211) para la curvatura de Ricci en un producto alabeado  $B \times_f F$ , donde  $\dim F > 1$ .

1.  $\text{Ric}(X, Y) = {}^B \text{Ric}(X, Y) - \frac{\dim F}{f} \text{Hess}(f)(X, Y)$ .
2.  $\text{Ric}(X, V) = 0$ .
3.  $\text{Ric}(V, W) = {}^F \text{Ric}(V, W) - \langle V, W \rangle \left( \frac{\Delta f}{f} + (\dim F - 1) \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2} \right)$ .

## 1.7. Ecuaciones de Cartan

Aquí construiremos las llamadas ecuaciones de Cartan, o ecuaciones de estructura. Seguimos la notación de la sección 1.2. En presencia de una métrica riemanniana para nuestra variedad  $M$  y tomando  $\nabla$  como la conexión de Levi-Civita correspondiente a dicha métrica, la primera ecuación de Cartan será equivalente a la condición de simetría de la conexión; o bien, a que la torsión sea cero:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

mientras que la segunda ecuación de Cartan será equivalente a la definición del tensor de curvatura,

$$\text{Rm}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Sea  $\mathbf{e} = \{e_i\}$  un marco local

**Definición 1.7.1.** Las *1-formas de conexión*  $w_i^j \in \Omega^1(M)$  están definidas por

$$\nabla_X e_i = w_i^j(X) e_j.$$

Sea  $g_{ij} = g(e_i, e_j) \in C^\infty(M)$ . Las 1-formas de conexión cumplen  $w_i^j = -w_j^i$ , lo cual proviene de que  $\nabla$  sea compatible con la métrica, en efecto, tomemos el marco  $\mathbf{e}$  ortonormal y reescribamos la compatibilidad de la métrica con la conexión de Levi-Civita:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

en particular,

$$\begin{aligned} 0 &= X(g_{ij}) = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \nabla_X e_j \rangle = \langle w_i^k(X) e_k, e_j \rangle + \langle e_i, w_j^k(X) e_k \rangle \\ &= w_i^k(X) \delta_{kj} + w_j^k(X) \delta_{ik} = w_i^j(X) + w_j^i(X), \end{aligned}$$

de donde se obtiene que  $w_i^j = -w_j^i$ .

**Proposición 1.7.2** (Primera ecuación de Cartan). *Cada elemento del marco dual  $\{w^i\}_{i=1}^n$  del marco  $\{e_i\}_{i=1}^n$  cumple que su derivada exterior es la suma del producto exterior del marco y las 1-formas de conexión:*

$$dw^i = w^j \wedge w_j^i.$$

*Demostración.* Hay que desarrollar, usando la ecuación (1.4) y que la torsión es cero:

$$\begin{aligned} dw^i(e_k, e_l) &= e_k(w^i(e_l)) - e_l(w^i(e_k)) - w^i[e_k, e_l] = -w^i[e_k, e_l] = w^i[e_l, e_k] \\ &= w^i \nabla_{e_l} e_k - w^i \nabla_{e_k} e_l = w^i(w_k^j(e_l) e_j) - w^i(w_l^j(e_k) e_j) = w_k^i(e_l) - w_l^i(e_k) \\ &= w^j(e_k) w_j^i(e_l) - w^j(e_l) w_j^i(e_k) = w^j \wedge w_j^i(e_k, e_l). \quad \square \end{aligned}$$

Esto demuestra que tener torsión cero implica la primera ecuación de Cartan y en realidad, también demuestra la equivalencia pues de las ecuaciones anteriores se tiene que

$$w^i[e_l, e_k] = dw^i(e_k, e_l) = w^j \wedge w_j^i(e_k, e_l) = w^i(\nabla_{e_l} e_k - \nabla_{e_k} e_l).$$

Como esta ecuación se cumple para toda  $i$ , los coeficientes del corchete y los de la diferencia de conexiones son iguales, entonces debe pasar que

$$[e_l, e_k] = \nabla_{e_l} e_k - \nabla_{e_k} e_l.$$

Es decir, hemos probado la afirmación hecha al principio de esta sección:

**Proposición 1.7.3.** *La primera ecuación de Cartan es equivalente al hecho de que la torsión de  $\nabla$  se anule.*

**Definición 1.7.4.** *Las 2-formas de conexión  $\Omega_i^j \in \Omega^2(M)$  están definidas por*

$$\text{Rm}(X, Y)e_i = \Omega_i^j(X, Y)e_j.$$

Ahora probamos que la definición del tensor de curvatura implica la segunda ecuación de Cartan.

**Proposición 1.7.5** (Segunda ecuación de Cartan). *Las 2-formas de conexión son iguales a la diferencia de la derivada exterior de las 1-formas y la suma del producto exterior de las mismas:*

$$\text{Rm}_i^j \equiv \Omega_i^j = dw_i^j - w_i^k \wedge w_k^j.$$

*Demostración.* Simplemente hay que desarrollar:

$$\begin{aligned} \text{Rm}(X, Y)e_i &= \nabla_X \nabla_Y e_i - \nabla_Y \nabla_X e_i - \nabla_{[X, Y]} e_i = \nabla_X w_i^j(Y) e_j - \nabla_Y w_i^j(X) e_j - w_i^j[X, Y] e_i \\ &= X(w_i^j(Y)) e_j + w_i^j(Y) w_j^k(X) e_k - Y(w_i^j(X)) e_j - w_i^j(X) w_j^k(Y) e_k - w_i^j[X, Y] e_i \\ &= (X(w_i^j(Y)) - Y(w_i^j(X)) - w_i^j[X, Y] - w_i^k(X) w_k^j(Y) + w_i^k(Y) w_k^j(X)) e_j. \end{aligned}$$

Por (1.4) y (1.2) se tiene que

$$dw_i^j(X, Y) = X(w_i^j(Y)) - Y(w_i^j(X)) - w_i^j[X, Y],$$

y

$$w_i^k \wedge w_k^j(X, Y) = w_i^k(X) w_k^j(Y) - w_i^k(Y) w_k^j(X).$$

Por lo tanto,

$$\text{Rm}(X, Y)e_i = \Omega_i^j(X, Y) e_j = (dw_i^j(X, Y) - w_i^k \wedge w_k^j(X, Y)) e_j$$

y

$$\Omega_i^j = dw_i^j - w_i^k \wedge w_k^j. \quad \square$$

De manera similar a como se hizo con la primera ecuación de Cartan, de las ecuaciones de la prueba anterior se desprende que la segunda ecuación de Cartan implica la ecuación del tensor de curvatura, es decir se ha probado el siguiente resultado.

**Proposición 1.7.6.** *La segunda ecuación de Cartan*

$$\Omega_i^j = dw_i^j - w_i^k \wedge w_k^j,$$

*es equivalente a la ecuación que define al tensor de curvatura,*

$$\text{Rm}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

## 1.8. Ecuaciones de Cartan en dimensión 2

En dimensión 2 se tiene que

$$dw^1 = w^1 \wedge w_1^1 + w^2 \wedge w_2^1, \quad dw^2 = w^1 \wedge w_1^2 + w^2 \wedge w_2^2.$$

Como las 1-formas de conexión son antisimétricas con respecto a los índices, entonces

$$w^1 \wedge w_1^1 = w^2 \wedge w_2^2 = 0, \quad dw^1 = w^2 \wedge w_2^1, \quad dw^2 = w^1 \wedge w_1^2.$$

Con respecto a la segunda ecuación de Cartan, por la misma razón se obtiene

$$\text{Rm}_2^1 = dw_2^1.$$

Notemos que

$$\text{Rm}(X, Y)e_2 = \text{Rm}_2^1(X, Y)e_1 + \text{Rm}_2^2(X, Y)e_2 = \text{Rm}_2^1(X, Y)e_1.$$

Esto implica que la curvatura seccional está dada por

$$K := \langle \text{Rm}(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle = \langle \text{Rm}_2^1(e_1, e_2)e_1, e_1 \rangle = \text{Rm}_2^1(e_1, e_2).$$

Usaremos las ecuaciones de Cartan para estudiar la relación entre los conceptos geométricos asociados a dos métricas conformemente equivalentes.

**Lema 1.8.1.** *Si  $g$  y  $g'$  son métricas conformemente equivalentes en una superficie  $M^2$ , es decir, si existe una función  $u$  tal que  $g = e^{2u}g'$ , entonces sus curvaturas escalares están relacionadas por*

$$R_g = e^{-2u}(-2\Delta_{g'}u + R_{g'}).$$

*Demostración.* Notemos que en una superficie la curvatura seccional  $K$  es igual a la curvatura de Ricci, y la curvatura escalar  $R$  es igual a  $2K$ .

Sea  $\mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$  un marco ortogonal con respecto a  $g'$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2\}$  su dual y  $\eta_2^1$  la 1-forma de conexión correspondiente. Entonces el marco  $\mathbf{e} = e^{-u}\mathbf{f}$  y su dual  $\mathbf{w} = e^u\boldsymbol{\eta}$  son ortonormales con respecto a  $g$  pues

$$g(e_i, e_j) = e^{2u}g'(e^{-u}f_i, e^{-u}f_j) = g'(f_i, f_j) = \delta_{ij}.$$

Si denotamos por  $g^\#$  a la métrica en  $\Omega^1(M)$  inducida por el isomorfismo musical, entonces como  $w_i^\# = e_i$ , se tiene que

$$g^\#(w^i, w^j) = g(w_i^\#, w_j^\#) = e^{2u}g'(e^{-u}f_i, e^{-u}f_j) = \delta_{ij}.$$

En general, para una 1-forma  $\theta$ , si  $\mathbf{e}$  es un marco móvil y  $\mathbf{w}$  su dual, entonces

$$\theta = \theta(e_i)w^i.$$

En particular para la 1-forma de conexión  $w_2^1$  se tiene que

$$w_2^1 = w_2^1(e_1)w_1 + w_2^1(e_2)w_2.$$

Notemos que por la primera ecuación de Cartan

$$\begin{aligned} dw^1(e_2, e_1) &= w^2 \wedge w_2^1(e_2, e_1) = w^2(e_2)w_2^1(e_1) - w^2(e_1)w_2^1(e_2) = w_2^1(e_1), \\ dw^2(e_2, e_1) &= w^1 \wedge w_1^2(e_2, e_1) = w^1(e_2)w_1^2(e_1) - w^1(e_1)w_1^2(e_2) = -w_1^2(e_2) = w_2^1(e_2), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$w_2^1 = dw^1(e_2, e_1)w_1 + dw^2(e_2, e_1)w_2. \quad (1.13)$$

Desarrollemos  $dw^1$  y  $dw^2$  usando una regla de Leibniz y la primera ecuación de Cartan:

$$dw^1 = d(e^u\eta^1) = de^u \wedge \eta^1 + e^u d\eta^1 = e^u du \wedge \eta^1 + e^u d\eta^1 = e^u(d\eta^1 + du \wedge \eta^1).$$

Como  $\partial_i(u)dx^i = df$ , también se tiene que  $du = f_1(u)\eta^1 + f_2(u)\eta^2$  y lo anterior se convierte en

$$e^u(\eta^2 \wedge \eta_2^1 + (f_1(u)\eta^1 + f_2(u)\eta^2) \wedge \eta^1) = e^u(\eta^2 \wedge \eta_2^1 + f_2(u)\eta^2 \wedge \eta^1). \quad (1.14)$$

Del mismo modo desarrollamos  $dw^2$ :

$$\begin{aligned} dw^2 &= d(e^u\eta^2) = e^u(d\eta^2 + du \wedge \eta^2) = e^u(d\eta^2 + (f_1(u)\eta^1 + f_2(u)\eta^2) \wedge \eta^2) \\ &= e^u(d\eta^2 + f_1(u)\eta^1 \wedge \eta^2) = e^u(\eta^1 \wedge \eta_1^2 + f_1(u)\eta^1 \wedge \eta^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} dw^1 &= e^u(\eta^2 \wedge \eta_2^1 + f_2(u)\eta^2 \wedge \eta^1), \\ dw^2 &= e^u(\eta^1 \wedge \eta_1^2 + f_1(u)\eta^1 \wedge \eta^2). \end{aligned}$$

Calculemos  $dw^1(e_2, e_1)$  y  $dw^2(e_2, e_1)$ :

$$\begin{aligned} dw^1(e_2, e_1) &= e^u(\eta^2 \wedge \eta_2^1 + f_2(u)\eta^2 \wedge \eta^1)(e_2, e_1) \\ &= e^u(\eta^2(e_2)\eta_2^1(e_1) - \eta^2(e_1)\eta_2^1(e_2) + f_2(u)\eta^2(e_2)\eta^1(e_1) - f_2(u)\eta^2(e_1)\eta^1(e_2)) \\ &= e^u(e^{-u}\eta_2^1(e_1) + e^{-2u}f_2(u)) = \eta_2^1(e_1) + e^{-u}f_2(u), \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} dw^2(e_2, e_1) &= e^u(\eta^1 \wedge \eta_1^2 + f_1(u)\eta^1 \wedge \eta^2)(e_2, e_1) \\ &= e^u(\eta^1(e_2)\eta_1^2(e_1) - \eta^1(e_1)\eta_1^2(e_2) + f_1(u)\eta^1(e_2)\eta^2(e_1) - f_1(u)\eta^1(e_1)\eta^2(e_2)) \\ &= e^u(-e^{-u}\eta_1^2(e_2) - e^{-2u}f_1(u)) = -\eta_1^2(e_2) - e^{-u}f_1(u). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.13) obtenemos

$$\begin{aligned} w_2^1 &= (\eta_2^1(e_1) + e^{-u}f_2(u))w_1 - (\eta_1^2(e_2) + e^{-u}f_1(u))w_2 \\ &= e^u\eta_2^1(e_1)\eta^1 + f_2(u)\eta^1 - e^u\eta_1^2(e_2)\eta^2 - f_1(u)\eta^2 \\ &= e^u(\eta_2^1(e_1)\eta^1 + \eta_2^1(e_2)\eta^2) + f_2(u)\eta^1 - f_1(u)\eta^2 \\ &= \eta_2^1(f_1)\eta^1 + \eta_2^1(f_2)\eta^2 + f_2(u)\eta^1 - f_1(u)\eta^2 \\ &= \eta_2^1 + f_2(u)\eta^1 - f_1(u)\eta^2. \end{aligned}$$

Notemos que por la misma razón por la cual la ecuación (1.14) es válida, lo siguiente también lo es:

$$d[f_i(u)] = f_j f_i(u) \eta^j.$$

Con esto en mente, desarrollemos la segunda ecuación de Cartan con respecto a  $g$ :

$$\begin{aligned} \text{Rm}[g]_2^1 &= dw_2^1 = d\eta_2^1 + d[f_2(u)\eta^1] - d[f_1(u)\eta^2] \\ &= \text{Rm}[g']_2^1 + d[f_2(u)] \wedge \eta^1 + f_2(u)d\eta^1 - d[f_1(u)] \wedge \eta^2 - f_1(u)d\eta^2 \\ &= \text{Rm}[g']_2^1 + (f_1 f_2(u)\eta^1 + f_2 f_2(u)\eta^2) \wedge \eta^1 + f_2(u)d\eta^1 \\ &\quad - (f_1 f_1(u)\eta^1 + f_2 f_1(u)\eta^2) \wedge \eta^2 - f_1(u)d\eta^2, \end{aligned}$$

lo que implica

$$\text{Rm}[g]_2^1 = \text{Rm}[g']_2^1 + f_2 f_2(u) \eta^2 \wedge \eta^1 - f_1 f_1(u) \eta^1 \wedge \eta^2 + f_2(u) d\eta^1 - f_1(u) d\eta^2. \quad (1.15)$$

Notemos que la ecuación (1.13) es igualmente válida en el marco  $\mathbf{f}$ :

$$\begin{aligned} \eta_2^1 &= d\eta^1(f_2, f_1)\eta_1 + d\eta^2(f_2, f_1)\eta_2, \\ \eta_2^1(f_k) &= d\eta^k(f_2, f_1). \end{aligned}$$

Y por otro lado, nótese que

$$\eta_1^2(f_k)\eta^1 \wedge \eta^2(f_2, f_1) = \eta_2^1(f_k),$$

por lo que

$$\begin{aligned} d\eta^k(f_i, f_j) &= \eta_1^2(f_k)\eta^1 \wedge \eta^2(f_i, f_j), \\ d\eta^k &= \eta_1^2(f_k)\eta^1 \wedge \eta^2. \end{aligned}$$

Con esto, sustituimos en (1.15):

$$\text{Rm}[g]_2^1 = \text{Rm}[g']_2^1 + f_2 f_2(u) \eta^2 \wedge \eta^1 - f_1 f_1(u) \eta^1 \wedge \eta^2 + f_2(u) \eta_1^2(f_1) \eta^1 \wedge \eta^2 - f_1(u) \eta_1^2(f_2) \eta^1 \wedge \eta^2$$

y

$$\text{Rm}[g]_2^1 = \text{Rm}[g']_2^1 - (f_2 f_2(u) + f_1 f_1(u) - f_2(u) \eta_1^2(f_1) + f_1(u) \eta_1^2(f_2)) \eta^1 \wedge \eta^2. \quad (1.16)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{\nabla_{f_1} f_1} u &= \nabla_{\eta_1^2(f_1) f_2} u = \eta_1^2(f_1) f_2(u), \\ \nabla_{\nabla_{f_2} f_2} u &= \nabla_{\eta_1^2(f_2) f_1} u = -\eta_1^2(f_2) f_1(u), \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} f_2 f_2(u) + f_1 f_1(u) - f_2(u) \eta_1^2(f_1) + f_1(u) \eta_1^2(f_2) &= f_1(\nabla_{f_1} u) - \nabla_{\nabla_{f_1} f_1} u + f_2(\nabla_{f_2} u) - \nabla_{\nabla_{f_2} f_2} u \\ &= \nabla_{f_1} \nabla_{f_1} u - \nabla_{\nabla_{f_1} f_1} u + \nabla_{f_2} \nabla_{f_2} u - \nabla_{\nabla_{f_2} f_2} u \\ &= \nabla_{f_1, f_1}^2 u + \nabla_{f_2, f_2}^2 u \\ &= \Delta_{g'} u. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación (1.16) se ve como

$$\text{Rm}[g]_2^1 = \text{Rm}[g']_2^1 - (\Delta_{g'} u) \eta^1 \wedge \eta^2.$$

Con la observación hecha al inicio y la expresión para la curvatura seccional, se tiene el resultado:

$$R_g = 2K_g = 2\text{Rm}[g]_2^1(e_1, e_2) = 2(\text{Rm}[g']_2^1 - (\Delta_{g'} u) \eta^1 \wedge \eta^2)(e_1, e_2) = 2e^{-2u}(K_{g'} - \Delta_{g'} u),$$

de donde

$$R_g = e^{-2u}(R_{g'} - 2\Delta_{g'} u). \quad \square$$

Aquí hemos probado la fórmula anterior para  $g = e^{2u}g'$  en dimensión 2, pero notamos que es válida en cualquier dimensión [Bes07].

# Capítulo 2

## Ecuaciones de variación y flujo de Ricci

En este capítulo utilizaremos marcos móviles y ecuaciones de estructura para relacionar las curvaturas escalares de dos superficies conformemente equivalentes. Introduciremos el flujo de Ricci y sus propiedades básicas, destacando el caso de dimensión dos.

### 2.1. Derivadas temporales

En esta sección consideraremos una familia diferenciable de métricas  $g_t$  y una familia diferenciable de conexiones  $\nabla^t$ . Definiremos sus derivadas y mostraremos que éstas se comportan de manera tensorial. Empecemos con el caso de las métricas.

**Proposición 2.1.1.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $g_t$  una familia de métricas riemannianas en  $M$  que varía diferenciablemente con respecto a  $t$ , i.e., la transformación*

$$(t, p, X, Y) \longmapsto g_t(X_p, Y_p)$$

*es diferenciable con respecto a  $t$ . Entonces la derivada  $\frac{\partial g_t}{\partial t}$  definida por*

$$\left( \frac{\partial g_t}{\partial t} \Big|_{t_0} (X, Y) \right)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_{t+t_0}(X, Y) - g_{t_0}(X, Y)}{t} \Big|_p.$$

*es un tensor.*

*Demostración.* Como el espacio de secciones de un haz vectorial sobre un campo es un espacio vectorial sobre el campo, entonces la resta de dos secciones es una sección. En particular como  $g^{t+t_0}$  y  $g^{t_0}$  son dos métricas riemannianas, son secciones del haz  $T^*M \otimes T^*M$ , su diferencia es un tensor. Luego, las operaciones de multiplicación por el escalar  $1/t$  y límite preservan el carácter tensorial o en otras palabras, la multilinealidad.  $\square$

Ahora queremos ver qué pasa con la derivada de una familia de conexiones sobre  $M$ , para lo cual necesitamos un resultado preliminar sencillo.



**Proposición 2.1.2.** Sean  $\nabla, \bar{\nabla}$  dos conexiones en una variedad diferenciable  $M$ . Sea  $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definida por

$$B(X, Y) = \nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y.$$

Entonces  $B$  es un tensor.

*Demostración.*  $B$  es diferenciable en el sentido de que varía suavemente con respecto a  $p \in M$  y como  $\nabla, \bar{\nabla}$  son  $C^\infty(M)$ -lineales en  $X$  y aditivas en  $Y$ , basta ver que

$$B(X, fY) = fB(X, Y) \quad f \in C^\infty(M).$$

Lo cual es resultado de la regla de Leibniz para conexiones:

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= \nabla_X fY - \bar{\nabla}_X fY = X(f) + f\nabla_X Y - X(f) - f\bar{\nabla}_X Y \\ &= f(\nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y) = fB(X, Y). \end{aligned} \quad \square$$

Con esto ya podemos probar nuestro resultado acerca de la derivada de una familia de conexiones.

**Proposición 2.1.3.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\nabla^t$  una familia de conexiones en  $M$  que varía diferenciablemente con respecto a  $t$ , i.e., la transformación

$$(t, p, X, Y) \mapsto \nabla_X^t Y(p)$$

es diferenciable con respecto a  $t$ . Entonces la derivada  $\frac{\partial \nabla^t}{\partial t}$  definida por

$$\left( \left( \frac{\partial \nabla^t}{\partial t} \Big|_{t_0} \right)_X Y \right) (p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\nabla_X^{t+t_0} Y)(p) - (\nabla_X^{t_0} Y)(p)}{t}.$$

es un tensor.

*Demostración.* Por la proposición anterior, la diferencia de conexiones es un  $(2, 1)$ -tensor. Como la multiplicación por  $1/t$  y el proceso de límite preservan el carácter tensorial, se tiene el resultado.  $\square$

Notemos que los coeficientes del tensor  $\frac{\partial \nabla^t}{\partial t}$  en un marco  $\{E_i\}_{i=1}^n$  están dados por

$$\begin{aligned} \left( \left( \frac{\partial \nabla^t}{\partial t} \Big|_{t_0} \right)_{E_i} E_j \right) (p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\nabla_{E_i}^{t+t_0} E_j)(p) - (\nabla_{E_i}^{t_0} E_j)(p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Gamma_{ij}^k(t+t_0, p) - \Gamma_{ij}^k(t_0, p))E_k(p)}{t} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial t}(t_0, p)E_k(p), \end{aligned}$$

es decir,

$$\left( \frac{\partial \nabla^t}{\partial t} \Big|_{t_0} \right)_{E_i} E_j = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial t}(t_0)E_k.$$

En el caso de la conexión de Levi-Civita, será diferenciable con respecto al tiempo pues  $g_t$  lo es. Mas precisamente primero hay que notar que  $g_t^{ij}$  es diferenciable pues  $g^{ij} = g(f_i^\#, f_j^\#)$  (donde  $\{f_i\}_{i=1}^n$  es el marco dual de algún marco  $\{e_i\}_{i=1}^n$ ) y como los coeficientes de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{km}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij})$$

están dados en términos de  $g^{ij}$  y  $\partial_i g_{jm}$ , entonces también serán diferenciables y como se vio, se tiene la fórmula

$$\left(\frac{\partial \nabla^t}{\partial t}(t)\right)_{\partial_i} \partial_j = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial t}(t) \partial_k.$$

Con lo cual podemos concluir que  $\nabla^t$  será diferenciable con respecto al tiempo si se trata de la conexión de Levi-Civita. Con respecto a la notación  $\nabla$ , de aquí en adelante se refiere a la derivada tensorial, es decir la noción de derivada covariante extendida a tensores de algún orden. La notación utilizada es la misma, dada una conexión en el haz tangente

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

existe una conexión asociada en el haz cotangente

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(T^*M) \rightarrow \Gamma(T^*M)$$

definida por

$$(\nabla_X w)(Y) := X(w(Y)) - w(\nabla_X Y)$$

y tal que  $\nabla_X f = X(f)$  con  $f \in C^\infty(M)$ . Con lo cual, se define la derivada tensorial en el haz tensorial  $T_q^p M$

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(T_q^p M) \rightarrow \Gamma(T_q^p M)$$

como

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)(w_1, \dots, w_p, X_1, \dots, X_q) &:= \nabla_X(T(w_1, \dots, w_p, X_1, \dots, X_q)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^p T(w_1, \dots, \nabla_X w_i, \dots, w_p, X_1, \dots, X_q) \\ &\quad - \sum_{j=1}^q T(w_1, \dots, w_p, X_1, \dots, \nabla_X X_j, \dots, X_q). \end{aligned}$$

En particular para un  $(2,0)$ -tensor  $A$  y un marco geodésico  $\{E_i\}_{i=1}^n$  centrado en  $p$ , como  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$  se tiene que en  $p$

$$\begin{aligned} (\nabla_{E_i} A)(E_j, E_k) &= \nabla_{E_i}(A(E_j, E_k)) - A(\nabla_{E_i} E_j, E_k) - A(E_j, \nabla_{E_i} E_k) = \nabla_{E_i}(A(E_j, E_k)) \\ (\nabla_i A)_{jk} &= \nabla_i(A_{jk}) = \partial_i(A_{jk}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

En el caso de una métrica riemanniana  $g$ , como es un  $(2,0)$ -tensor, que una conexión sea compatible con  $g$  se traduce a  $\nabla g = 0$ , en efecto:

$$(\nabla_Z g)(X, Y) = \nabla_Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) = 0$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle.$$

Por lo tanto en un marco geodésico, en  $p$  se tiene que

$$0 = (\nabla_i g)_{jk} = \partial_i(g_{jk}), \quad (2.2)$$

hecho que estaremos utilizando al hacer cálculos en marcos geodésicos a continuación.

## 2.2. Evolución temporal

En esta parte del texto se desarrollan ecuaciones que describen la evolución de varias cantidades geométricas con respecto a una familia diferenciable de métricas riemannianas, en medida de lo posible, se evitará evaluar las cantidades dependientes del tiempo en  $t$ . Como se vio anteriormente el inverso de la métrica, los coeficientes de Christoffel y la familia de conexiones de Levi-Civita son diferenciables con respecto a  $t$ . En lo que sigue también trataremos otras familias de objetos de los cuales calcularemos su evolución, entre ellos el laplaciano  $\Delta = \text{tr}_g \nabla \nabla$  que está dado en términos de la conexión de Levi-Civita y el inverso de la métrica y, por lo tanto, será diferenciable, así como el tensor de curvatura, que está dado en términos de  $\nabla$  y, por lo tanto el tensor de Ricci y la curvatura escalar también serán diferenciables. En lo que sigue encontraremos ecuaciones que serán validas en cualesquiera coordenadas, esto es consecuencia de que los objetos calculados serán tensores y por lo tanto independientes de las coordenadas utilizadas, con lo cual podemos escribir estas cantidades intrínsecamente. Renombramos la evolución temporal de los coeficientes de la evolución de la familia de métricas  $g_t$  como

$$h_{ij}(t_0) := \left. \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t) \right|_{t_0},$$

con lo cual escribimos (omitiendo la dependencia temporal en la notación)

$$h_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}.$$

No podemos simplemente “subir” los índices de  $\frac{\partial}{\partial t}(g_{ij})$  como veremos en la ecuación (2.3).

**Lema 2.2.1.** *Sea  $g_t$  una familia diferenciable de métricas riemannianas con coeficientes  $g_{ij} = g_{ij}(t)$  y sean  $g^{ij} = g^{ij}(t)$  los coeficientes correspondientes de la inversa de la métrica. Entonces*

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -g_{ki} g_{ij} \frac{\partial}{\partial t} g^{ki}.$$

*Demostración.* Notemos que  $\delta_j^k = g^{ki} g_{ij}$  en un marco ortonormal. Derivando esto se obtiene

$$0 = g_{ij} \frac{\partial}{\partial t} g^{ki} + g^{ki} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}. \quad \square$$

El resultado anterior implica, en particular, que

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = -g^{il} g^{jk} \frac{\partial}{\partial t} g_{lk} := -h^{ij}. \quad (2.3)$$

Es decir la evolución de la métrica induce la evolución de la métrica en el haz cotangente.

**Lema 2.2.2.** *Sea  $g_t$  una familia diferenciable de métricas riemannianas,  $\nabla^t$  la familia (diferenciable) de conexiones asociadas de Levi-Civita y  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(t)$  los símbolos de Christoffel correspondientes. Entonces*

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial t} = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} + \nabla_j \frac{\partial}{\partial t} g_{il} - \nabla_l \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right).$$

*Demostración.* Sabemos que  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$ ; basta derivar para obtener

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{kl}}{\partial t} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) + \frac{1}{2} g^{kl} \left( \partial_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} + \partial_j \frac{\partial}{\partial t} g_{il} - \partial_l \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right).$$

Supongamos que el marco es geodésico en  $p$ , entonces por (2.2) se tiene que en  $p$ ,

$$\partial_i (g^{jk}) = 0,$$

y como  $\partial_t g$  es un  $(2, 0)$ -tensor (proposición 2.1.1), por (2.1)

$$\partial_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} = \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl}. \quad \square$$

**Proposición 2.2.3.** *Sea  $g(t)$  una familia diferenciable de métricas riemannianas y  $\Delta_{g(t)}$  la familia (diferenciable) de laplacianos asociados. Entonces*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{g(t)} = - \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) \nabla^i \nabla^j - g^{kl} \left( g^{ij} \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} - \frac{1}{2} \nabla_l \left( g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \right) \nabla_k.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{g(t)} &= \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} (\partial_i \partial_j - \Gamma_{ij}^k \partial_k) = \frac{\partial}{\partial t} (g^{ij} \partial_i \partial_j) - \frac{\partial}{\partial t} (g^{ij} \Gamma_{ij}^k \partial_k) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) \partial_i \partial_j + g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \partial_i \partial_j - \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) \Gamma_{ij}^k \partial_k - g^{ij} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k - g^{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial t} \partial_k \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) \nabla_i \nabla_j - g^{ij} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k \right) \nabla_k + g^{ij} \partial_i \partial_j \frac{\partial}{\partial t} - g^{ij} \Gamma_{ij}^k \partial_k \frac{\partial}{\partial t} - \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) \Gamma_{ij}^k \partial_k \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) \nabla_i \nabla_j - g^{ij} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k \right) \nabla_k + \Delta \left( \frac{\partial}{\partial t} (\cdot) \right) - \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) \Gamma_{ij}^k \partial_k. \end{aligned}$$

Evaluando en una función  $u$  constante con respecto a  $t$  se anula el penúltimo término y en coordenadas geodésicas en  $p$  el último término es cero. Así, se tiene que en  $p$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{g(t)} = \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) \nabla_i \nabla_j - g^{ij} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k \right) \nabla_k.$$

Notemos que, por el lema 2.2.2 obtenemos

$$\begin{aligned} g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{ij} g^{kl} \left( \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} + \nabla_j \frac{\partial}{\partial t} g_{il} - \nabla_l \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{kl} \left[ g^{ij} \left( \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} + \nabla_j \frac{\partial}{\partial t} g_{il} \right) - g^{ij} \nabla_l \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{2} g^{kl} \left[ 2g^{ij} \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} - g^{ij} \nabla_l \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right] = g^{kl} \left( g^{ij} \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} - \frac{1}{2} g^{ij} \nabla_l \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \\ &= g^{kl} \left( g^{ij} \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} - \frac{1}{2} \nabla_l \left( g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \right), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{g(t)} = \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) \nabla_i \nabla_j - g^{kl} \left( g^{ij} \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} - \frac{1}{2} \nabla_l \left( g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \right) \nabla_k.$$

Por último, por el lema 2.2.1, utilizando que  $\nabla^i = g^{ij} \nabla_j$ , se tiene que

$$\begin{aligned} - \left( \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \nabla^i \nabla^j &= g_{ki} g_{ij} \frac{\partial}{\partial t} g^{ki} \cdot g^{ij} \nabla_l (g^{js} \nabla_s) = g_{ki} g^{il} g_{ij} g^{js} \frac{\partial}{\partial t} g^{ki} \nabla_l \nabla_s \\ &= \delta_k^l \delta_i^s \frac{\partial}{\partial t} g^{ki} \nabla_l \nabla_s = \left( \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) \nabla_i \nabla_j. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{g(t)} = - \left( \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \nabla^i \nabla^j - g^{kl} \left( g^{ij} \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} - \frac{1}{2} \nabla_l \left( g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \right) \nabla_k. \quad \square$$

Ahora veremos dos proposiciones que inmediatamente permiten el estudio de la evolución del laplaciano y de la curvatura escalar en dimensión dos, en caso de que la métrica evolucione únicamente por una función escalar.

**Proposición 2.2.4.** *Si  $g(t)$  es una familia suave de métricas riemannianas en la superficie  $M^2$  tales que  $\partial g / \partial t = fg$  para una función escalar  $f$ , entonces*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta = -f \Delta.$$

*Demostración.* Primero notemos que en general, si la variedad es de dimensión  $n$  entonces el segundo término de la evolución del laplaciano tiene una expresión simple en coordenadas geodésicas:

$$\begin{aligned} g^{kl} \left( g^{ij} \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} - \frac{1}{2} \nabla_l \left( g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \right) &= g^{kl} \left( g^{ij} \nabla_i (f g_{jl}) - \frac{1}{2} \nabla_l (g^{ij} f g_{ij}) \right) \\ &= g^{kl} \left( \delta_l^i \nabla_i f - \frac{n}{2} \nabla_l f \right) = \left( 1 - \frac{n}{2} \right) g^{ki} \nabla_i f = \left( 1 - \frac{n}{2} \right) \nabla^k f. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para  $n = 2$  se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{g(t)} &= -f g_{ij} \nabla^i \nabla^j = -f g_{ij} g^{ik} \nabla_k (g^{jm} \nabla_m) = -f \delta_j^k g^{jm} \nabla_k \nabla_m \\ &= -f g^{ij} \nabla_i \nabla_j = -f \Delta_{g(t)}. \end{aligned} \quad \square$$

Veamos un lema que nos servirá para calcular la evolución de la curvatura escalar en dimensión 2.

**Lema 2.2.5.** *Sean  $(M^n, g)$  una variedad riemanniana de dimensión  $n$  y  $g = e^{2u} g'$ . Se cumple la siguiente relación local entre los laplacianos  $\Delta_{g'}$  y  $\Delta_g$ :*

$$\Delta_g = (n-2) e^{-2u} (g')^{ij} \partial_j (u) \partial_i + e^{-2u} \Delta_{g'}.$$

*Demostración.* Basta utilizar la expresión en coordenadas locales del Laplaciano descrita en la ecuación (1.1):

$$\begin{aligned}
\Delta_g &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i \left( g^{ij} \sqrt{\det g} \partial_j \right) = \frac{e^{-nu}}{\sqrt{\det g'}} \partial_i \left( e^{-2u} (g')^{ij} e^{nu} \sqrt{\det g'} \partial_j \right) \\
&= \frac{e^{-nu}}{\sqrt{\det g'}} \partial_i \left( e^{(n-2)u} (g')^{ij} \sqrt{\det g'} \partial_j \right) \\
&= e^{-nu} \partial_i \left( e^{(n-2)u} \right) (g')^{ij} \partial_j + \frac{e^{-2u}}{\sqrt{\det g'}} \partial_i \left( (g')^{ij} \sqrt{\det g'} \partial_j \right) \\
&= (n-2) e^{-2u} (g')^{ij} \partial_j (u) \partial_i + e^{-2u} \Delta_{g'} \quad \square
\end{aligned}$$

**Proposición 2.2.6.** Si  $g(t)$  es una familia suave de métricas riemannianas en la superficie  $M^2$  tales que  $\partial g / \partial t = fg$  para una función escalar  $f$  y  $R = R(t)$  es la curvatura escalar, correspondiente a  $g(t)$ , entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} R = -\Delta f - Rf.$$

*Demostración.* Sea  $g'$  una métrica en  $M^2$  y  $g = e^{2u} g'$  donde  $u$  depende de  $t$ . Por el lema 1.8.1 sabemos que

$$R_g = e^{-2u} (-2\Delta_{g'} u + R_{g'}).$$

Notemos que  $\partial g / \partial t = fg$  implica que  $2\partial u / \partial t = f$  pues

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial (e^{2u} g')}{\partial t} = 2e^{2u} \frac{\partial}{\partial t} u \cdot g' = f e^{2u} g'.$$

Basta calcular la derivada temporal de la curvatura escalar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} R_g &= \frac{\partial}{\partial t} (e^{-2u} (-2\Delta_{g'} u + R_{g'})) = -2e^{-2u} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot e^{2u} R_g + e^{-2u} \frac{\partial}{\partial t} (-2\Delta_{g'} u + R_{g'}) \\
&= -f R_g - 2e^{-2u} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{g'} u = -f R_g - e^{-2u} \Delta_{g'} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -f R_g - \Delta_{g'} f.
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad proviene del lema 2.2.5 en dimensión  $n = 2$ :

$$\Delta_g = e^{-2u} \Delta_{g'}.$$

□

De estos resultados, como en dimensión dos la curvatura seccional  $K$  es un medio de la curvatura escalar, la ecuación (2.5) del flujo de Ricci toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -Rg.$$

Por lo tanto a consecuencia de los resultados anteriores, al sustituir  $f$  por  $-R$  en las ecuaciones obtenidas a partir de las proposiciones 2.2.4 y 2.2.6:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \Delta &= -f \Delta, \\
\frac{\partial}{\partial t} R &= -\Delta f - Rf,
\end{aligned}$$

se tienen las siguientes ecuaciones de evolución para el flujo de Ricci en dimensión dos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Delta &= R\Delta, \\ \frac{\partial}{\partial t}R &= \Delta R + R^2.\end{aligned}$$

De la segunda ecuación vemos que la curvatura se comporta como una ecuación de calor no-homogénea y como se verá en 2.3.2, el área de una superficie cerrada crece de manera lineal bajo el flujo de Ricci y en particular, el área del toro es constante (con la métrica usual no plana) y la solución tiende a una métrica de curvatura constante, lo cual concuerda con la noción de que la temperatura tiende a homogeneizarse.

En lo que resta del capítulo no haremos cálculos puntuales, con lo cual estaremos utilizando las letras  $p, q$  para denotar índices y no puntos en una variedad  $M$  como es lo usual. En la siguiente proposición se calculará la evolución del tensor de curvatura en dimensión arbitraria. Para esto utilizaremos una expresión estándar para sus coeficientes, la cual es un cálculo directo:

$$\begin{aligned}\text{Rm}(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \nabla_i\nabla_j\partial_k - \nabla_j\nabla_i\partial_k \\ &= \nabla_i\Gamma_{jk}^p\partial_p - \nabla_j\Gamma_{ik}^p\partial_p = \Gamma_{jk}^p\nabla_i\partial_p + \partial_i\Gamma_{jk}^p\partial_p - \Gamma_{ik}^p\nabla_j\partial_p - \partial_j\Gamma_{ik}^p\partial_p \\ &= \Gamma_{jk}^p\Gamma_{ip}^m\partial_m + \partial_i\Gamma_{jk}^p\partial_p - \Gamma_{ik}^p\Gamma_{jp}^m\partial_m - \partial_j\Gamma_{ik}^p\partial_p \\ &= (\Gamma_{jk}^p\Gamma_{ip}^m + \partial_i\Gamma_{jk}^m - \Gamma_{ik}^p\Gamma_{jp}^m - \partial_j\Gamma_{ik}^m)\partial_m,\end{aligned}$$

de donde

$$R_{ijk}^l = \partial_i\Gamma_{jk}^l - \partial_j\Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^p\Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p\Gamma_{jp}^l. \quad (2.4)$$

**Proposición 2.2.7.** *Sea  $g(t)$  una familia diferenciable de métricas riemannianas. La evolución de los tensores de curvatura  $\text{Rm}$  asociados está dada por*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R_{ijk}^l &= \frac{1}{2}g^{lp}\{\nabla_i\nabla_j h_{kp} + \nabla_i\nabla_k h_{jp} - \nabla_i\nabla_p h_{jk} \\ &\quad - \nabla_j\nabla_i h_{kp} - \nabla_j\nabla_k h_{ip} + \nabla_j\nabla_p h_{ik}\}.\end{aligned}$$

*Demostración.* Tenemos por (2.4) que

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ijk}^l = \partial_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{jk}^l\right) - \partial_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ik}^l\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma_{jk}^p\Gamma_{ip}^l\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma_{ik}^p\Gamma_{jp}^l\right).$$

En coordenadas geodésicas en un punto, como los últimos dos términos incluyen coeficientes de Christoffel, se anulan y obtenemos lo siguiente

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ijk}^l = \nabla_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{jk}^l\right) - \nabla_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ik}^l\right).$$

Esto es válido en cualquier punto y cualesquiera coordenadas pues ambos lados son tensores. Utilizando el tensor

$$R(X, Y, Z, w) = w(\text{Rm}(X, Y)Z),$$

donde  $w$  es una 1-forma y recordando que  $dx^l(\text{Rm}(\partial_i, \partial_j)\partial_k) = R_{ijk}^l$ , se desprende que la derivada temporal representa un tensor:

$$\left(\frac{\partial R^t}{\partial t}\right)(X, Y, Z, w)_q(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (R_q^{t+t_0}(X, Y, Z, w) - R_q^{t_0}(X, Y, Z, w)),$$

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), w \in \Omega^1(M).$$

En especial,

$$\left(\frac{\partial R^t}{\partial t}\right)(\partial_i, \partial_j, \partial_k, dx^l)_q(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (R_{ijk}^l)^{t+t_0} - (R_{ijk}^l)^{t_0} = \left(\frac{\partial R_{ijk}^l}{\partial t}\right)_q(t_0).$$

Para concluir, basta utilizar el lema 2.2.2 y reescribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ik}^l &= \frac{1}{2} g^{lp} (\nabla_i h_{kp} + \nabla_k h_{ip} - \nabla_p h_{ik}), \\ \frac{\partial}{\partial t} R_{ijk}^l &= \nabla_i \left( \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{jk}^l \right) - \nabla_j \left( \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ik}^l \right) = \frac{1}{2} g^{lp} \{ \nabla_i \nabla_j h_{kp} + \nabla_i \nabla_k h_{jp} - \nabla_i \nabla_p h_{jk} \\ &\quad - \nabla_j \nabla_i h_{kp} - \nabla_j \nabla_k h_{ip} + \nabla_j \nabla_p h_{ik} \}. \end{aligned}$$

□

**Proposición 2.2.8.** *Sea  $g(t)$  una familia diferenciable de métricas riemannianas. La evolución de los coeficientes del tensor de Ricci está dada por*

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Ric}_{jk} = \frac{1}{2} g^{pq} (\nabla_q \nabla_j h_{kp} + \nabla_q \nabla_k h_{jp} - \nabla_q \nabla_p h_{jk} - \nabla_j \nabla_k h_{qp}).$$

*Demostración.* Sabemos que  $\text{Ric}_{jk} = R_{ijk}^i$ , así que basta usar la proposición anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \text{Ric}_{jk} &= \frac{\partial}{\partial t} R_{ijk}^i = \frac{1}{2} g^{pq} \{ \nabla_q \nabla_j h_{kp} + \nabla_q \nabla_k h_{jp} - \nabla_q \nabla_p h_{jk} \\ &\quad - \nabla_j \nabla_q h_{kp} - \nabla_j \nabla_k h_{qp} + \nabla_j \nabla_p h_{qk} \} \\ &= \frac{1}{2} g^{pq} (\nabla_q \nabla_j h_{kp} + \nabla_q \nabla_k h_{jp} - \nabla_q \nabla_p h_{jk} - \nabla_j \nabla_k h_{qp}). \end{aligned}$$

Donde la última igualdad proviene de sumar sobre  $p, q$  y usar que  $g$  es simétrica:

$$g^{pq} \nabla_j \nabla_p h_{qk} = g^{pq} \nabla_j \nabla_q h_{kp}. \quad \square$$

Para calcular la evolución de la curvatura escalar y cálculos subsecuentes introducimos la siguiente notación para la traza de la evolución de la familia de métricas  $g_t$ :

$$H := g^{ij} h_{ij}.$$

**Proposición 2.2.9.** *Sea  $g(t)$  una familia diferenciable de métricas riemannianas. La evolución de la curvatura escalar está dada por*

$$\frac{\partial}{\partial t} R = -\Delta H + \nabla^p \nabla^q h_{pq} - h^{pq} \text{Ric}_{pq}.$$



*Demostración.* Como antes, se usarán coordenadas geodésicas y el resultado será válido en cualquier punto y coordenadas pues las cantidades son tensoriales. Como la curvatura escalar es la traza del tensor de Ricci se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \frac{\partial}{\partial t} (g^{ij} \text{Ric}_{ij}) = \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \cdot \text{Ric}_{ij} + g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \text{Ric}_{ij}.$$

Por el lema 2.2.1 se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = -g^{il} g^{jk} \frac{\partial}{\partial t} g_{lk} = -h^{ij};$$

entonces, usando la proposición anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R &= -h^{ij} \text{Ric}_{ij} + g^{jk} \frac{\partial}{\partial t} \text{Ric}_{jk} \\ &= -h^{ij} \text{Ric}_{ij} + \frac{1}{2} g^{jk} g^{pq} (\nabla_q \nabla_j h_{kp} + \nabla_q \nabla_k h_{jp} - \nabla_q \nabla_p h_{jk} - \nabla_j \nabla_k h_{qp}). \end{aligned}$$

Notemos que los primeros dos términos del factor de 1/2 son iguales, para evidenciar esto basta escribir las dos sumas y renombrar los índices (utilizando la simetría de  $g$  y que la multiplicación de funciones es abeliana), sucede de manera similar con los últimos dos términos:

$$\begin{aligned} g^{jk} g^{pq} \nabla_q \nabla_j h_{kp} &= g^{jk} g^{pq} \nabla_q \nabla_k h_{jp}, \\ g^{jk} g^{pq} \nabla_q \nabla_p h_{jk} &= g^{jk} g^{pq} \nabla_j \nabla_k h_{qp} \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$\frac{\partial}{\partial t} R = -h^{ij} \text{Ric}_{ij} + g^{pi} g^{qj} \nabla_i \nabla_j h_{pq} - g^{jk} g^{pq} \nabla_q \nabla_p h_{jk}.$$

Al usar coordenadas normales y la compatibilidad de la métrica, podemos conmutar los coeficientes de la métrica inversa con la conexión de Levi-Civita y al reordenar obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R &= -g^{pq} \nabla_q \nabla_p (g^{jk} h_{jk}) + g^{pi} g^{qj} \nabla_i \nabla_j h_{pq} - h^{ij} \text{Ric}_{ij} = -\Delta H + g^{pi} \nabla_i (g^{qj} \nabla_j h_{pq}) - h^{pq} \text{Ric}_{pq} \\ &= -\Delta H + \nabla^p \nabla^q h_{pq} - h^{pq} \text{Ric}_{pq}. \end{aligned}$$

Donde  $g^{pq} \nabla_q \nabla_p (g^{jk} h_{jk}) = \Delta H$  por definición del laplaciano como traza del hessiano y la notación usada para la traza de la evolución de la métrica:

$$g^{jk} h_{jk} = H. \quad \square$$

**Proposición 2.2.10.** *Sea  $g(t)$  una familia diferenciable de métricas riemannianas. La evolución del elemento de volumen está dada por*

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu = \frac{H}{2} d\mu.$$

*Demostración.* Basta derivar y usar la *fórmula de Jacobi* ([MN99] Parte 3, Sección 8.3) para una matriz invertible  $A$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \det A = \det A \cdot \operatorname{tr} \left( A^{-1} \frac{\partial}{\partial t} A \right).$$

Usando que para una función  $f$  que depende de  $t$  se tiene que

$$\frac{d|f|}{dt} = \frac{f}{|f|} \frac{df}{dt},$$

obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} |\det A| = \frac{(\det A)^2}{|\det A|} \operatorname{tr} \left( A^{-1} \frac{\partial}{\partial t} A \right) = |\det A| \operatorname{tr} \left( A^{-1} \frac{\partial}{\partial t} A \right).$$

Como  $d\mu = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} d\mu &= \frac{\partial \sqrt{\det g}}{\partial t} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \frac{1}{2\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial t} \det g dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\det g}} (\det g) \operatorname{tr} \left( g^{-1} \frac{\partial}{\partial t} g \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \frac{H}{2} d\mu. \end{aligned} \quad \square$$

**Proposición 2.2.11.** *Sea  $g(t)$  una familia diferenciable de métricas riemannianas. El volumen de la variedad (compacta) cambia conforme a la traza de la evolución de la métrica, es decir*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M d\mu = \int_M \frac{H}{2} d\mu.$$

*Demostración.* Sean  $x$  una parametrización de  $U \subset M$  constante con respecto al tiempo y

$$v = \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Por la fórmula integral de Leibniz (1.5) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_U d\mu = \int_U \iota_v (d^2 \mu) + \int_{\partial U} \iota_v d\mu + \int_U \frac{\partial}{\partial t} d\mu.$$

Como  $d^2 = 0$  y  $v = 0$ , se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_U d\mu = \int_U \frac{\partial}{\partial t} d\mu.$$

Así, usando particiones de la unidad llegamos a que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M d\mu = \int_M \frac{\partial}{\partial t} d\mu$$

y por la proposición anterior concluimos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M d\mu = \int_M \frac{H}{2} d\mu. \quad \square$$

Para terminar esta sección describimos cómo cambian varias cantidades geométricas al multiplicar la métrica por una constante  $C$ .

**Proposición 2.2.12.** [Bes07, pg. 58.] Sean  $g$  una métrica riemanniana y  $C \in \mathbb{R}^+$ , entonces

1.  $(Cg)^{ij} = C^{-1}g^{ij}$ .
2.  $\Gamma_{ij}^k(Cg) = \Gamma_{ij}^k(g)$ .
3.  $R_{ijk}^l(Cg) = R_{ijk}^l(g)$ .
4.  $R_{ijkl}(Cg) = CR_{ijkl}(g)$ .
5.  $R^{ijkl}(Cg) = C^{-3}R^{ijkl}(g)$ .
6.  $|\text{Rm}(Cg)| = C^{-1}|\text{Rm}(g)|$ .
7.  $\text{Ric}(Cg) = \text{Ric}(g)$ .
8.  $R(Cg) = C^{-1}R(g)$ .
9.  $d\mu(Cg) = C^{n/2}d\mu(g)$ .
10. Si  $C_t$  es una función positiva y  $g_t$  una familia de métricas riemannianas entonces  $H(h_t) = nC_t^{-1}C_t' + H(g_t)$ .

*Demostración.* Se prueban los incisos 1, 5, 6 y 10. Los demás incisos son casos particulares del resultado general en el que  $Cg$  es conforme a  $g$  ( $Cg = e^{2f}g$  con  $f = 2^{-1} \ln C$ ).

1. Como  $(Cg)^{ij}(Cg)_{jk} = g^{ij}g_{jk}$ , entonces  $(Cg)^{ij}Cg_{jk} = g^{ij}g_{jk}$  y por lo tanto  $(Cg)^{ij} = C^{-1}g^{ij}$ .
5. Utilizando el inciso 4 y el inciso 1 se tiene que

$$R^{ijkl}(Cg) = (Cg)^{ai}(Cg)^{bj}(Cg)^{ck}(Cg)^{dl}R_{abcd}(Cg) = C^{-3}g^{ai}g^{bj}g^{ck}g^{dl}R_{abcd}(g) = C^{-3}R^{ijkl}(g).$$

6. Por los incisos 4 y 5

$$|\text{Rm}(Cg)|^2 = R^{ijkl}(Cg)R_{ijkl}(Cg) = C^{-2}R^{ijkl}(g)R_{ijkl}(g) = C^{-2}|\text{Rm}(g)|^2.$$

10.  $H(h_t) = C_t^{-1}g_t^{ij}\frac{\partial}{\partial t}h_{ij}(t) = C_t^{-1}g_t^{ij}C_t'g_{ij}(t) + C_t^{-1}g_t^{ij}C_t\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}(t) = nC_t^{-1}C_t' + H(g_t)$ .  $\square$

## 2.3. El flujo de Ricci y sus propiedades básicas

Sea  $M$  una variedad diferenciable. El **flujo de Ricci** en  $M$  está descrito por la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = -2 \operatorname{Ric}(g_t), \quad (2.5)$$

que involucra una familia de métricas riemannianas  $g_t$  y sus correspondientes tensores de Ricci. Una **solución al flujo de Ricci** es una familia de variedades riemannianas  $(M, g_t)$ , o simplemente de métricas  $g_t$ , que evoluciona de acuerdo a la ecuación anterior. Cuando no hay posibilidad de confusión, se omite escribir la dependencia del tiempo.

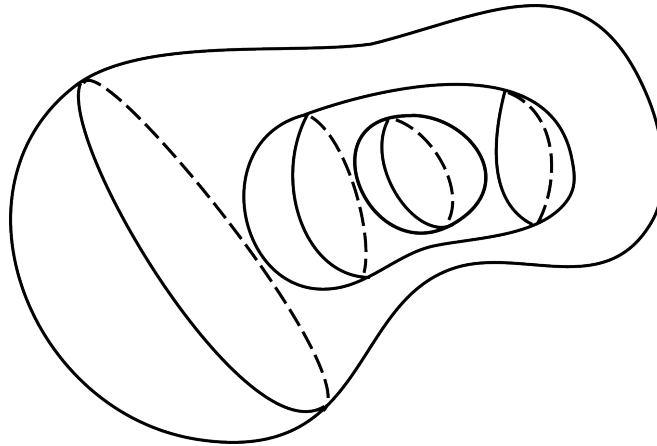


Figura 2.1: Evolución de  $M$  bajo el flujo de Ricci.

Es común encontrarse con que el flujo de Ricci tiene un comportamiento similar a la ecuación de calor no lineal, que en  $\mathbb{R}^n$  está descrita por

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta u + f.$$

Esto se debe a lo siguiente. Al contraer la ecuación (2.4) en coordenadas armónicas<sup>1</sup> se obtiene

$$-2 \operatorname{Ric}_{jk} = \Delta(g_{jk}) + \dots,$$

es decir, al combinar esta expresión con (2.5) en coordenadas locales se tiene la ecuación de calor no homogénea

$$\frac{\partial}{\partial t} g = \Delta g + \dots$$

Los cálculos explícitos de esta aseveración se encuentran en [CK04, Lema 3.32]. Para estudiar el flujo de Ricci, interesa conocer la evolución de varias cantidades geométricas, las cuales son caso particular de las ecuaciones de variación para un flujo arbitrario.

<sup>1</sup>Una carta coordenada  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $U \subseteq M^n$  es **armónica** si cada coordenada  $x_i$  es una función armónica en  $U$ , es decir

$$\Delta x_i = 0.$$

**Teorema 2.3.1.** *Sea  $(M, g_t)$  una solución al flujo de Ricci (2.5). Entonces, las siguientes cantidades geométricas varían como se indica:*

1. *Inverso de la métrica:*

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = 2\text{Ric}^{ij}.$$

2. *Símbolos de Christoffel:*

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial t} = g^{kl} (\nabla_l \text{Ric}_{ij} - \nabla_i \text{Ric}_{jl} - \nabla_j \text{Ric}_{il}).$$

3. *Laplaciano:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{g(t)} = 2\text{Ric}_{ij} \nabla_i \nabla_j.$$

4. *Coefficientes del tensor de curvatura:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijk}^l &= \Delta R_{ijk}^l + g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rpk}^l - 2R_{pik}^r R_{jqr}^l + 2R_{pir}^l R_{jqk}^r) \\ &\quad - \text{Ric}_i^p R_{pjk}^l - \text{Ric}_j^p R_{ipk}^l - \text{Ric}_k^p R_{ijp}^l + \text{Ric}_p^l R_{ijk}^p. \end{aligned}$$

5. *Coefficientes del tensor de Ricci:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Ric}_{jk} = \Delta \text{Ric}_{jk} + \nabla_j \nabla_j R - \nabla^p (\nabla_j \text{Ric}_{kp} + \nabla_k \text{Ric}_{jp}).$$

6. *Curvatura escalar:*

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2.$$

7. *Elemento de volumen:*

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu = -Rd\mu.$$

8. *Volumen:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M d\mu = - \int_M R d\mu.$$

*Demostración.* Seguimos la numeración del teorema.

1. Es directo de la ecuación (2.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = -g^{il} g^{jk} \frac{\partial}{\partial t} g_{lk} = 2g^{il} g^{jk} \text{Ric}_{lk} = 2\text{Ric}^{ij}.$$

2. Consecuencia del Lema 2.2.2.

3. De la proposición 2.2.3 sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{g(t)} &= - \left( \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \nabla_i \nabla_j - g^{kl} \left( g^{ij} \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} - \frac{1}{2} \nabla_l \left( g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \right) \nabla_k \\ &= -h_{ij} \nabla_i \nabla_j - \left( \nabla^j h_{jl} - \frac{1}{2} \nabla_l H \right) \nabla^l \\ &= 2 \operatorname{Ric}_{ij} \nabla_i \nabla_j - \left( \nabla_l R - 2 \nabla^j \operatorname{Ric}_{jl} \right) \nabla^l = 2 \operatorname{Ric}_{ij} \nabla_i \nabla_j, \end{aligned}$$

donde se usó la doble contracción de la segunda identidad de Bianchi (1.12),

$$2g^{ij} \nabla_i \operatorname{Ric}_{jl} = \nabla_l R.$$

4. Primero encontramos una expresión para el laplaciano de los coeficientes de curvatura y luego comparamos con la ecuación para la evolución (Proposición 2.2.7).

De la *identidad de Ricci* ([CLN06] pg.15) para el conmutador de derivadas covariantes evaluado en un  $(s, r)$ -tensor (sin notación de Einstein).

$$[\nabla_p, \nabla_i] A_{k_1, \dots, k_m}^{l_1, \dots, l_s} = - \sum_{h=1}^m \sum_{r=1}^n R_{pik_h}^r A_{k_1, \dots, k_{h-1}, r, k_{h+1}, \dots, k_m}^{l_1, \dots, l_s} + \sum_{h=1}^s \sum_{r=1}^n R_{pir}^{l_h} A_{k_1, \dots, k_m}^{l_1, \dots, l_{h-1}, r, l_{h+1}, \dots, l_s}$$

obtenemos en particular para el  $(1, 3)$ -tensor de curvatura  $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$  (continuando con la notación de Einstein).

$$[\nabla_p, \nabla_i] R_{jqk}^l = - (R_{pij}^r R_{rqk}^l + R_{piq}^r R_{jrk}^l + R_{pik}^r R_{jqr}^l) + R_{pir}^l R_{jqk}^r.$$

Intercambiando  $i$  con  $j$  y los primeros dos índices de la curvatura obtenemos

$$-\nabla_p \nabla_j R_{qik}^l = -\nabla_j \nabla_p R_{qik}^l - R_{pji}^r R_{rqk}^l - R_{pjq}^r R_{irk}^l - R_{pj k}^r R_{iqr}^l + R_{pjr}^l R_{iqk}^r.$$

Utilizando las ecuaciones anteriores y aplicando la segunda identidad de Bianchi al laplaciano de los coeficientes de curvatura (en coordenadas geodésicas), obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta R_{ijk}^l &= g^{pq} \nabla_p \nabla_q R_{ijk}^l = g^{pq} \nabla_p (-\nabla_i R_{jqk}^l - \nabla_j R_{qik}^l) \\ &= g^{pq} \{ -\nabla_i \nabla_p R_{jqk}^l + R_{pij}^r R_{rqk}^l + R_{piq}^r R_{jrk}^l + R_{pik}^r R_{jqr}^l - R_{pir}^l R_{jqk}^r \\ &\quad + \nabla_j \nabla_p R_{iqk}^l - R_{pji}^r R_{rqk}^l - R_{pjq}^r R_{irk}^l - R_{pj k}^r R_{iqr}^l + R_{pjr}^l R_{iqk}^r \}. \end{aligned}$$

De la segunda identidad de Bianchi y las simetrías del tensor de curvatura se tiene que

$$\begin{aligned} g^{pq} \nabla_p R_{jqk}^l &= g^{pq} g^{lm} \nabla_p R_{jqkm} = g^{pq} g^{lm} \nabla_p R_{kmjq} \\ &= g^{pq} g^{lm} (-\nabla_k R_{mpjq} - \nabla_m R_{pkjq}) = \nabla_k \operatorname{Ric}_j^l - \nabla^l \operatorname{Ric}_{jk}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta ecuación en el laplaciano se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta R_{ijk}^l &= -\nabla_i \nabla_k \operatorname{Ric}_j^l + \nabla_i \nabla^l \operatorname{Ric}_{jk} + \nabla_j \nabla_k \operatorname{Ric}_i^l - \nabla_j \nabla^l \operatorname{Ric}_{ik} \\ &\quad + g^{pq} \{ R_{pij}^r R_{rqk}^l + R_{piq}^r R_{jrk}^l + R_{pik}^r R_{jqr}^l - R_{pir}^l R_{jqk}^r \\ &\quad - R_{pji}^r R_{rqk}^l - R_{pjq}^r R_{irk}^l - R_{pj k}^r R_{iqr}^l + R_{pjr}^l R_{iqk}^r \}. \end{aligned}$$

Los términos de la primera columna de la expresión en corchetes se simplifican por la primera identidad de Bianchi,

$$R_{pij}^r R_{rqk}^l - R_{pji}^r R_{rqk}^l = -R_{ijp}^r R_{rqk}^l$$

y los términos de la segunda columna (junto con  $g^{pq}$ ) se ven de la siguiente forma:

$$g^{pq} R_{piq}^r R_{jrk}^l - g^{pq} R_{pjq}^r R_{irk}^l = -g^{pq} R_{ipq}^r R_{jrk}^l + g^{pq} R_{j pq}^r R_{irk}^l = -\text{Ric}_i^r R_{jrk}^l + \text{Ric}_j^r R_{irk}^l.$$

Con esto, el laplaciano se simplifica:

$$\begin{aligned} \Delta R_{ijk}^l &= -\nabla_i \nabla_k \text{Ric}_j^l + \nabla_i \nabla^l \text{Ric}_{jk} + \nabla_j \nabla_k \text{Ric}_i^l - \nabla_j \nabla^l \text{Ric}_{ik} - \text{Ric}_i^r R_{jrk}^l + \text{Ric}_j^r R_{irk}^l \\ &\quad + g^{pq} \{-R_{ijp}^r R_{rqk}^l + R_{pik}^r R_{jqr}^l - R_{pir}^l R_{jqk}^r - R_{pjk}^r R_{iqr}^l + R_{pjr}^l R_{iqk}^r\}. \end{aligned}$$

Ahora, de la proposición 2.2.7 sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijk}^l &= g^{lp} \{-\nabla_i \nabla_j \text{Ric}_{kp} - \nabla_i \nabla_k \text{Ric}_{jp} + \nabla_i \nabla_p \text{Ric}_{jk} \\ &\quad + \nabla_j \nabla_i \text{Ric}_{kp} + \nabla_j \nabla_k \text{Ric}_{ip} - \nabla_j \nabla_p \text{Ric}_{ik}\}. \end{aligned}$$

En la primera columna se encuentra un conmutador de derivadas covariantes; utilizando la identidad de Ricci, como el conmutador está evaluado en un tensor covariante, la segunda suma no aparece en la identidad y se tiene que

$$[\nabla_j, \nabla_i] \text{Ric}_{kp} = -R_{jik}^q \text{Ric}_{qp} - R_{jip}^q \text{Ric}_{kq}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijk}^l &= g^{lp} (-\nabla_i \nabla_k \text{Ric}_{jp} + \nabla_i \nabla_p \text{Ric}_{jk} + \nabla_j \nabla_k \text{Ric}_{ip} - \nabla_j \nabla_p \text{Ric}_{ik} - R_{jik}^q \text{Ric}_{qp} - R_{jip}^q \text{Ric}_{kq}) \\ &= -\nabla_i \nabla_k \text{Ric}_j^l + \nabla_i \nabla^l \text{Ric}_{jk} + \nabla_j \nabla_k \text{Ric}_i^l - \nabla_j \nabla^l \text{Ric}_{ik} + g^{lp} (R_{ijk}^q \text{Ric}_{qp} + R_{ijp}^q \text{Ric}_{kq}). \end{aligned}$$

Por la fórmula obtenida para el laplaciano obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijk}^l &= \Delta R_{ijk}^l + \text{Ric}_i^r R_{jrk}^l - \text{Ric}_j^r R_{irk}^l + g^{pq} \{R_{ijp}^r R_{rqk}^l - R_{pik}^r R_{jqr}^l + R_{pir}^l R_{jqk}^r \\ &\quad + R_{pjk}^r R_{iqr}^l - R_{pjr}^l R_{iqk}^r\} + g^{lp} (R_{ijk}^q \text{Ric}_{qp} + R_{ijp}^q \text{Ric}_{kq}). \end{aligned}$$

Los términos negativos dentro del corchete son iguales bajo suma en  $p$  y  $q$ ; del mismo modo pasa con los términos positivos con el signo de suma, con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijk}^l &= \Delta R_{ijk}^l + g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rqk}^l - 2R_{pik}^r R_{jqr}^l + 2R_{pir}^l R_{jqk}^r) \\ &\quad - \text{Ric}_i^p R_{pj k}^l - \text{Ric}_j^p R_{ipk}^l + g^{lp} \text{Ric}_{kq} R_{ijp}^q + \text{Ric}_p^l R_{ijk}^p. \end{aligned}$$

Por último, basta notar que

$$g^{lp} \text{Ric}_{kq} R_{ijp}^q = g^{lp} g^{qr} \text{Ric}_{kq} R_{ijpr} = g^{lp} \text{Ric}_k^r R_{ijpr} = -g^{lp} R_k^r R_{ijrp} = -\text{Ric}_k^r R_{ijr}^l$$

y se tiene el resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijk}^l &= \Delta R_{ijk}^l + g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rqk}^l - 2R_{pik}^r R_{jqr}^l + 2R_{pir}^l R_{jqk}^r) \\ &\quad - \text{Ric}_i^p R_{pj k}^l - \text{Ric}_j^p R_{ipk}^l - \text{Ric}_k^p R_{ijp}^l + \text{Ric}_p^l R_{ijk}^p. \end{aligned}$$

5. De la proposición 2.2.8 sabemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \text{Ric}_{jk} &= g^{pq}(-\nabla_q \nabla_j \text{Ric}_{kp} - \nabla_q \nabla_k \text{Ric}_{jp} + \nabla_q \nabla_p \text{Ric}_{jk} + \nabla_j \nabla_k \text{Ric}_{qp}) \\ &= g^{pq}(\nabla_q \nabla_p \text{Ric}_{jk} + \nabla_j \nabla_k \text{Ric}_{qp}) - g^{pq}(\nabla_q \nabla_j \text{Ric}_{kp} + \nabla_q \nabla_k \text{Ric}_{jp}) \\ &= \Delta \text{Ric}_{jk} + \nabla_j \nabla_j R - \nabla^p(\nabla_j \text{Ric}_{kp} + \nabla_k \text{Ric}_{jp}).\end{aligned}$$

6. Bajo el flujo de Ricci sabemos que

$$h^{pq} = -2g^{pl}g_{lk} \text{Ric}_{lk} = -2 \text{Ric}^{pq}, \quad H = -2g^{ij} \text{Ric}_{ij} = -2R;$$

por la proposición 2.2.9 basta sustituir y usar la segunda contracción de la segunda identidad de Bianchi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} R &= 2\Delta R - 2\nabla^p \nabla^q \text{Ric}_{pq} + 2|\text{Ric}|^2 \\ &= 2\Delta R - \nabla^p \nabla_p R + 2|\text{Ric}|^2 = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2,\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde  $|\cdot|$  es la norma Euclidiana extendida a tensores, por ejemplo para  $\text{Rm}$ ,

$$|\text{Rm}|^2 := \text{Rm}^{ijkl} \text{Rm}_{ijkl}.$$

7. Como  $H = -2R$ , por la proposición 2.2.10 se tiene el resultado.

8. Es válido por el inciso anterior.  $\square$

**Corolario 2.3.2.** *El área de una superficie cerrada (compacta, sin frontera y de género  $g$ ) crece de manera lineal bajo el flujo de Ricci.*

*Demostración.* Esto es consecuencia del teorema de Gauss-Bonnet, pues

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{M^2} d\mu = - \int_{M^2} R d\mu = -2 \int_{M^2} K_g d\mu = -4\pi\chi(M^2) = 8(g-1)\pi. \quad \square$$

En particular, a medida que el tiempo crece, el área de una esfera decrece, el área de un toro es constante, y el área de una superficie de género mayor que 1 crece.

Enunciamos el siguiente teorema que es resultado del trabajo hecho a lo largo del capítulo 5 en [CK04] para comentar acerca del tiempo de existencia del toro.

**Teorema 2.3.3.** *Si  $(M^2, g_0)$  es una superficie cerrada, existe una única solución  $g(t)$  al flujo de Ricci normalizado*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} g &= (r - R)g \\ g(0) &= g_0\end{aligned}$$

*La solución existe para todo tiempo. Al hacer  $t \rightarrow \infty$ , las métricas  $g(t)$  convergen uniformemente en cualquier norma  $C^k$  a una métrica suave  $g_\infty$  de curvatura constante.*

Más adelante estudiaremos el flujo de Ricci normalizado, que consiste en escalar con respecto al tiempo una solución al flujo de Ricci de forma que su volumen sea constante. En particular sabemos que el tiempo de existencia del toro es infinito ya que al tener volumen constante, su solución es la misma para el flujo de Ricci normalizado y por lo tanto existe para todo tiempo  $t$ .





# Capítulo 3

## Soluciones especiales

En este capítulo abordaremos el tema principal de este trabajo, que consiste en exponer ejemplos explícitos de soluciones del flujo de Ricci, comenzando con los más sencillos y naturales, hasta ir pasando por ejemplos más sofisticados.

### 3.1. Los primeros ejemplos

Una variedad riemanniana  $(M^n, g_0)$  es un punto fijo del flujo de Ricci

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} g \right|_{t=t_0} = -2 \operatorname{Ric}(g(t_0))$$

si y sólo si la métrica es Ricci-plana, es decir si  $\operatorname{Ric} = 0$ . Ejemplos de esto son  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{S}^1$ ; en el segundo caso, sabemos que el tensor de curvatura de una variedad de dimensión 1 es 0 por simetría. Con esto podemos construir el toro plano  $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$  como otro ejemplo de punto fijo del flujo de Ricci. La esfera de dimensión mayor a 1 no es Ricci-plana, y como su área decrece su curvatura seccional tiende a infinito, es decir no es un punto fijo. Para estudiar otros ejemplos, introducimos la siguiente definición.

**Definición 3.1.1.** *Una **variedad de Einstein** es una variedad riemanniana  $(M, g_0)$  tal que*

$$\operatorname{Ric}_{g_0} = \lambda g_0.$$

Una variedad de Einstein nos da una solución explícita al flujo de Ricci. En efecto, consideremos la familia  $g_t = \phi(t)g_0$  como solución al flujo de Ricci, con una función diferenciable  $\phi$ . Como la curvatura de Ricci es invariante bajo multiplicación por un escalar (proposición 2.2.12) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi \cdot g_0 = \frac{\partial}{\partial t} g_t = -2 \operatorname{Ric}_{g_t} = -2 \operatorname{Ric}_{g_0} = -2\lambda g_0.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t) = -2\lambda.$$

Si fijamos el valor inicial de  $\phi$ , digamos,  $\phi(0) = 1$ , entonces  $\phi(t) = 1 - 2\lambda t$ , lo cual debe suceder ya que al obtener una solución al flujo de Ricci es necesario que  $\phi(0)g_0 = g_0$ , juntando lo anterior obtenemos

$$g_t = (1 - 2\lambda t)g_0.$$

Por lo general en este texto consideraremos que cuando se tenga una solución con condición inicial una métrica de Einstein, la solución tendrá la forma  $g_t = \phi(t)g_0$ . Se dice que la solución se *contrae*, es *estática*, o se *expande* si  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$  o  $\lambda < 0$  correspondientemente. En el primer caso, la solución existe para  $t \in [0, (2\lambda)^{-1})$  y se degenera a un punto en tiempo  $t = 1/(2\lambda)$ , donde la degeneración de la solución es en el sentido de que el tensor  $g_t$  a tiempo  $1/(2\lambda)$  ya no es una métrica riemanniana. En el caso  $\lambda < 0$  la métrica crece indefinidamente, como el nombre indica.

De aquí podemos probar inmediatamente que el signo de la curvatura escalar de  $M$  se preserva a lo largo del flujo.

**Proposición 3.1.2.** *El flujo de Ricci preserva el signo de la curvatura escalar si la condición inicial es una variedad de Einstein  $(M, g_0)$ .*

*Demostración.* Sea  $\lambda$  la constante de Einstein de  $(M, g_0)$ . Como se vio anteriormente, la solución explícita al flujo de Ricci en este caso es

$$g_t = (1 - 2\lambda t)g_0.$$

Usando la proposición 2.2.12 se obtiene

$$R^t = (1 - 2\lambda t)^{-1}R_0.$$

Si  $\lambda \leq 0$ , entonces  $(1 - 2\lambda t)^{-1} > 0$  para todo  $t \geq 0$ . Por otro lado, si  $\lambda > 0$  y  $t \in [0, T)$ , con  $T = (2\lambda)^{-1}$ , entonces  $(1 - 2\lambda t)^{-1} > 0$  para todo  $t \in [0, T)$ . Se sigue el resultado.  $\square$

Dentro de las variedades de Einstein se encuentran las variedades de curvatura seccional constante; probemos esto calculando sus constantes de Einstein  $\lambda$ . Por el lema 1.5.4, si tenemos un marco ortonormal obtenemos

$$R_{ijkl} = K_0(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}),$$

de donde

$$\text{Ric}_{jk} = K_0 \sum_{i=1}^n (g_{ii}g_{jk} - g_{ik}g_{ji}) = K_0(n g_{jk} - g_{jk}),$$

o bien

$$\text{Ric} = K_0(n - 1)g. \quad (3.1)$$

Es decir, las variedades de curvatura seccional constante son de Einstein, con esto podemos analizar los espacios modelo restantes  $(\mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n)$ , pues sus curvaturas seccionales son 1 y  $-1$ . En el caso de la esfera  $\lambda = n - 1$  y en tiempo  $t = 1/2(n - 1)$  se vuelve un punto; mientras más grande sea la dimensión, más rápido se contrae. Su curvatura seccional se vuelve infinita en un tiempo finito, pero en todo tiempo distinto a  $1/2(n - 1)$  la variedad es esencialmente la misma.

En el caso del espacio hiperbólico,  $\lambda = 1 - n$ , y por lo tanto la solución al flujo de Ricci es de la forma

$$g_t = (1 + 2(n - 1)t)g_0.$$

De donde se ve que mientras más grande sea la dimensión, más rápido va a crecer su curvatura (en el sentido negativo) cuando el tiempo avance positivamente, es decir el espacio hiperbólico y la esfera tienen comportamientos opuestos.

Un ejemplo de una variedad de Einstein de curvatura seccional no constante, es el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  con la métrica de Fubini-Study y  $n > 1$ , cuya constante de Einstein es  $2n + 2$ . Esto proviene de la sumersión  $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  y de la estructura casi-compleja  $J$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , definida por

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para calcular la constante de Einstein utilizamos una base ortonormal real  $\{E_i\}_{i=1}^{2n}$  del espacio tangente a un punto en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Por [ONe66] la curvatura seccional cumple

$$R_{ijji} = 1 + 3\langle E_i, JE_j \rangle^2 = 1 + 3\delta_{ij}$$

y por lo tanto la curvatura de Ricci en la  $j$ -ésima dirección es

$$\text{Ric}_j = \text{Ric}(E_j) = R_{ijj}^i = \sum_{i=1}^{2n} (1 + 3\delta_{ij}) = 2n - 1 + 3 = 2n + 2.$$

Para conocer el tensor de Ricci por completo basta utilizar un argumento de polarización, es decir, utilizar que  $\text{Ric}(x, y)$  es la forma bilineal asociada de la forma cuadrática  $\text{Ric}(x)$  y su ecuación asociada, evaluada en elementos distintos de la base ortonormal:

$$\text{Ric}_{i+j} - \text{Ric}_i - \text{Ric}_j = 2\text{Ric}_{ij}, \quad \text{donde } \text{Ric}_{i+j} := \text{Ric}(E_i + E_j)$$

$$\text{Ric}_{i+j} - 2\text{Ric}_i = 2\text{Ric}_{ij}.$$

Notemos que para  $x$  de norma 1 y colineal a  $E_i + E_j$  se tiene que

$$\text{Ric}_{i+j} = 2\text{Ric}(x) = 2\text{Ric}_i$$

y por lo tanto  $\text{Ric}_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ . En resumen,

$$\text{Ric} = 2(n + 1)g.$$

Con lo cual, la solución al flujo de Ricci es

$$g_t = (1 - 4(n + 1)t)g_0,$$

que en el caso  $n = 1$  concuerda con lo obtenido para la esfera, pues  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^2$  con la métrica de Fubini-Study es de curvatura seccional constante 4, que de acuerdo a la solución del flujo (para variedades de curvatura seccional constante), se vuelve un punto en tiempo  $1/8$ .

### 3.2. Flujo normalizado y puntos fijos

En la sección anterior obtuvimos que los puntos fijos del flujo de Ricci son las variedades Ricci-planas y que bajo el flujo, la esfera se contrae y el espacio hiperbólico se expande. Quisiéramos modificar el flujo de tal forma que el volumen de una variedad compacta sea constante y que la métrica solución a este nuevo flujo, sea un reescalamiento de una solución al flujo de Ricci. Procedemos como en [She06], utilizando la proposición 2.2.12.

Sea  $g_t$  solución al flujo de Ricci en  $M$  y  $\eta_t = \varphi_t g_t$  tal que  $\varphi_0 = 1$  y

$$\int_M d\mu(\eta_t) = \int_M d\mu(\eta_0), \quad \text{donde } d\mu(\eta_t) = \sqrt{\det \eta_t} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Entonces se tiene que

$$\int_M d\mu(\eta_t) = \varphi_t^{n/2} \int_M d\mu(g_t) = \int_M d\mu(g_0).$$

Por lo tanto

$$\varphi_t = \left( \frac{\int_M d\mu(g_0)}{\int_M d\mu(g_t)} \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Al derivar obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_t &= \frac{2}{n} \left( \frac{\int_M d\mu(g_0)}{\int_M d\mu(g_t)} \right)^{\frac{2}{n}-1} \int_M d\mu(g_0) \frac{d}{dt} \left( \int_M d\mu(g_t) \right)^{-1} \\ &= \frac{2}{n} \left( \frac{\int_M d\mu(g_0)}{\int_M d\mu(g_t)} \right)^{\frac{2}{n}-1} \int_M d\mu(g_0) \left( \int_M d\mu(g_t) \right)^{-2} \int_M R(g_t) d\mu(g_t) \\ &= \frac{2}{n} \varphi_t \frac{\int_M R(g_t) d\mu(g_t)}{\int_M d\mu(g_t)} = \frac{2r(g_t)}{n} \varphi_t = \frac{2r(\eta_t)}{n} \varphi_t^2. \end{aligned}$$

Donde  $r(g_t)$  es la curvatura escalar promedio definida en 1.5.8. Con esto, se obtiene la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta_t = \varphi_t \frac{\partial}{\partial t} g_t + \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t \cdot g_t = -2\varphi_t \text{Ric}(g_t) + \frac{2r(\eta_t)}{n} \varphi_t^2 g_t = \varphi_t \left( -2 \text{Ric}(\eta_t) + \frac{2r(\eta_t)}{n} \eta_t \right).$$

Para deshacerse de  $\varphi_t$  reescalamos el tiempo con una función  $\tau$  de tal forma que

$$\frac{d\tau}{dt}(t) = \varphi(t), \quad \tau(t) = \int_0^t \varphi(u) du.$$

Como  $\tau$  es estrictamente creciente, entonces es invertible y podemos considerar evaluar la ecuación diferencial parcial obtenida en  $t(\tau)$  y multiplicar por  $dt/d\tau$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \eta_{t(\tau)} \frac{dt}{d\tau}(\tau) &= \frac{dt}{d\tau}(\tau) \frac{d\tau}{dt}(t(\tau)) \left( -2 \text{Ric}(\eta_{t(\tau)}) + \frac{2r(\eta_{t(\tau)})}{n} \eta_{t(\tau)} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \eta_{t(\tau)} &= -2 \text{Ric}(\eta_{t(\tau)}) + \frac{2r(\eta_{t(\tau)})}{n} \eta_{t(\tau)}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \eta_t &= -2 \text{Ric}(\eta_t) + \frac{2r(\eta_t)}{n} \eta_t. \end{aligned}$$

A esta ecuación se le llama la **ecuación del flujo de Ricci normalizada** y tiene por puntos fijos a ciertas variedades de Einstein. Probaremos esto después de la siguiente observación. El procedimiento para normalizar el flujo puede ser hecho en general para un flujo arbitrario, que resulta en una condición suficiente y necesaria para que el flujo preserve el volumen, es decir, si  $g_t$  es solución de algún flujo, y definimos  $\eta_t = \varphi_t g_t$  de tal forma que  $\varphi_0 = 1$  y el volumen con respecto a  $\eta_t$  sea igual al volumen con respecto a  $\eta_0$ , obtenemos (como antes) lo siguiente:

$$\varphi_t = \left( \frac{\int_M d\mu(g_0)}{\int_M d\mu(g_t)} \right)^{\frac{2}{n}}$$

de donde

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = \frac{2}{n} \left( \frac{\int_M d\mu(g_0)}{\int_M d\mu(g_t)} \right)^{\frac{2}{n}-1} \int_M d\mu(g_0) \frac{d}{dt} \left( \int_M d\mu(g_t) \right)^{-1}.$$

Al usar la ecuación de evolución del volumen (proposición 2.2.11) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = \frac{2}{n}\varphi_t \frac{-\int_M \frac{H(g_t)}{2} d\mu(g_t)}{\int_M d\mu(g_t)} = -\frac{\varphi_t \int_M (H(\eta_t) - n\varphi_t^{-1}\varphi_t') d\mu(\eta_t)}{n \int_M d\mu(\eta_t)},$$

donde se usó la proposición 2.2.12. Al separar la integral, la ecuación anterior toma la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = -\frac{\varphi_t \int_M H(\eta_t) d\mu(\eta_t)}{n \int_M d\mu(\eta_t)} + \frac{d}{dt}\varphi_t,$$

lo que implica

$$\int_M H(\eta_t) d\mu(\eta_t) = 0.$$

Por otro lado, si suponemos que esta integral es 0 con respecto a  $g_t$ , por la ecuación de variación de volumen se tiene que

$$0 = \int_M H(g_t) d\mu(g_t) = 2 \frac{\partial}{\partial t} \int_M d\mu(g_t).$$

En resumen, hemos probado lo siguiente.

**Proposición 3.2.1.** *Sea  $g_t$  una solución a un flujo geométrico, entonces el volumen con respecto de  $g_t$  es constante si y sólo si la traza de su evolución integra 0:*

$$\int_M H d\mu = 0.$$

**Proposición 3.2.2.** *Una solución  $(M^n, g_t)$  al flujo de Ricci normalizado es punto fijo si y sólo si es una variedad de Einstein para todo  $t$ .*

*Demostración.* Supongamos que una solución  $g_t$  es punto fijo del flujo de Ricci normalizado:

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2 \text{Ric} + \frac{2r}{n} g.$$

Entonces debe suceder que

$$\text{Ric} = \frac{r}{n}g.$$

Al tomar la traza obtenemos que  $r = R$ :

$$g^{ij} \text{Ric}_{ij} = R = r = \frac{r}{n}g^{ij}g_{ij}.$$

Es decir

$$R \int_M d\mu = \int_M R d\mu.$$

Así,  $R$  debe ser constante y por lo tanto  $(M^n, g_t)$  es una variedad de Einstein para todo  $t$ . Para la implicación restante veamos qué sucede con una familia de variedades de Einstein de constantes  $\lambda_t$  (al tomar la traza obtenemos  $\lambda_t = R_t/n$ ).

$$\frac{\partial}{\partial t}g = -2 \text{Ric} + \frac{2r}{n}g = \frac{2}{n}(r - R)g = \frac{2}{n \int_M d\mu} \left( \int_M R d\mu - R \int_M d\mu \right) = 0,$$

pues  $R$  es constante en  $M$  ya que la variedad es de Einstein. □

Por lo visto anteriormente, algunos ejemplos de puntos fijos para este flujo normalizado son las variedades de curvatura seccional constante como la esfera, el plano y el espacio hiperbólico, así como el espacio proyectivo complejo, de curvatura seccional en el intervalo  $(1/4, 1]$ .

### 3.3. Solitones

Interesa estudiar puntos fijos “generalizados” del flujo de Ricci. Esta generalización es en el sentido del espacio donde se está considerando el flujo.

Se ha visto que los puntos fijos del flujo de Ricci

$$\frac{\partial}{\partial t}g = -2 \text{Ric}$$

son las variedades Ricci-planas y que los puntos fijos del flujo de Ricci normalizado

$$\frac{\partial}{\partial t}g = -2 \text{Ric} + \frac{2r}{n}g,$$

son variedades de Einstein. Un **solitón** es en cierto sentido una generalización de una variedad de Einstein que resulta natural de considerar si se tiene en cuenta que el flujo de Ricci es invariante bajo difeomorfismos; con esto nos referimos a lo siguiente.

Al considerar un difeomorfismo  $\varphi : M \rightarrow M$  podemos realizarlo como una isometría de la siguiente forma

$$\varphi : (M, \varphi^*g) \rightarrow (M, g).$$

Como el tensor de curvatura es invariante bajo isometrías, entonces el tensor de Ricci lo es. Usando esta información, si  $g_t$  es una solución al flujo de Ricci y  $\tilde{g}_t = \varphi^*g_t$  entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_t = \varphi^* \left( \frac{\partial}{\partial t}g_t \right) = \varphi^*(-2 \text{Ric } g_t) = -2 \text{Ric}(\tilde{g}_t).$$

Es decir el flujo de Ricci es invariante bajo el grupo de difeomorfismos  $\text{Diff}(M)$ . Además de esto, el reescalamiento de una métrica no es importante desde el punto de vista del flujo de Ricci pues la variedad es en cierta forma la misma. Para interpretar el flujo como un sistema dinámico es natural colapsar las soluciones que se obtienen a partir de las métricas inducidas por una familia de difeomorfismos  $\varphi_t$  (multiplicadas por alguna función  $\sigma_t$ ).

**Definición 3.3.1.** *Un **solitón de Ricci**, o más brevemente un **solitón**, es una solución al flujo de Ricci de la forma*

$$g_t = \sigma_t \varphi_t^* g_0.$$

Donde  $\sigma_t$  es una familia de funciones en  $C^\infty(M)$  y similarmente  $\varphi_t$  es una familia de difeomorfismos de  $M$  donde las dos familias son diferenciables<sup>1</sup> con respecto a  $t$ . Los solitones se clasifican con respecto al tiempo de existencia. Si el solitón existe para  $t \in (-\infty, T)$  con  $T < \infty$  entonces se le llama **antiguo**, si existe para  $t \in (T, \infty)$  con  $-\infty < T$  entonces se le llama **inmortal** y por último si existe para todo tiempo se le denomina **eterno**.

En un solitón todas las variedades riemannianas  $(M, g_t)$  son conformes. Los solitones son puntos fijos del flujo de Ricci considerado como un sistema dinámico en el espacio de módulos  $\mathcal{M}(M)$  de métricas riemannianas módulo difeomorfismo y reescalamiento.

El espacio de métricas riemannianas está definido por  $\mathcal{R}(M) := C^\infty(M, S_2^+ M)$  (donde  $S_2^+ M$  es el haz de  $(2, 0)$ -tensores simétricos y positivo-definidos) y  $\mathcal{M}$  es el espacio de órbitas

$$\mathcal{M}(M) := \mathcal{R}(M) / \text{Diff}(M) \times \mathbb{R}_+,$$

donde el grupo  $\text{Diff}(M) \times \mathbb{R}_+$  actúa en  $\mathcal{R}(M)$  vía pullback:

$$\begin{aligned} \text{Diff}(M) \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{R}(M) &\rightarrow \mathcal{R}(M), \\ (\varphi, c, g) &\mapsto c\varphi^*g. \end{aligned}$$

Si consideramos  $\sigma_t = 1$  entonces bien podemos quedarnos únicamente con el espacio de módulos

$$\widetilde{\mathcal{M}}(M) := \mathcal{R}(M) / \text{Diff}(M),$$

que es el punto de partida para entender este espacio pues podemos considerar a  $\mathcal{M}(M)$  como subconjunto de  $\widetilde{\mathcal{M}}(M)$  y

$$\mathcal{M}(M) = \widetilde{\mathcal{M}}(M) / \mathbb{R}_+,$$

donde  $\mathbb{R}_+$  actúa sobre  $\widetilde{\mathcal{M}}(M)$  como antes:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ \times \widetilde{\mathcal{M}}(M) &\rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}(M) \\ (c, [g]) &\mapsto [cg]. \end{aligned}$$

$\mathcal{R}(M)$  y el módulo  $\widetilde{\mathcal{M}}(M)$  son interesantes por sí mismos al ser  $\mathcal{R}(M)$  una variedad de Fréchet (en el caso compacto) y  $\text{Diff}(M)$  un grupo de Fréchet-Lie. Aquí sólo se presentan estas definiciones para localizar el espacio donde se consideran los solitones como puntos fijos. Una discusión sobre la acción de  $\text{Diff}(M)$  en  $\widetilde{\mathcal{M}}(M)$  y la existencia de rebanadas<sup>2</sup> en

<sup>1</sup>Decimos que las curvas  $t \mapsto \sigma_t \in C^\infty(M), t \mapsto \varphi_t \in \text{Diff}(M)$ , son diferenciables si lo son puntualmente con respecto a  $t$ .



$\widetilde{\mathcal{M}}(M)$  se encuentra en [CK19]. Ejemplos interesantes donde se imponen restricciones en la curvatura escalar y se considera el espacio de módulos pueden ser

- El espacio de módulos  $\mathcal{R}_+(M)/\text{Diff}(M)$  (con  $\mathcal{R}_+$  el espacio de las métricas de curvatura escalar estrictamente positiva) de una 3-variedad compacta orientable que admite una métrica de curvatura escalar estrictamente positiva, es conexo por trayectorias.
- $\mathcal{R}_-(M^n)$  es contraíble para  $n \geq 3$ .

También existen conexiones con cirugía y variedades spin, las dos teniendo que ver con curvatura escalar positiva, donde el análisis cualitativo es similar en el estudio de dinámica de métricas riemannianas. Estos temas aunque interesantes, se salen de los objetivos de este texto, para esto se puede consultar [Mar12] y [RS01].

Existe una forma de generar solitones, la cual hace evidente que los solitones son en cierta forma generalizaciones de las variedades de Einstein.

**Teorema 3.3.3.** *Sean  $(M, g_0)$  una variedad riemanniana,  $X$  un campo vectorial en  $M$  y  $\lambda$  una constante tales que*

$$\text{Ric}(g_0) = \lambda g_0 - \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g_0. \quad (3.2)$$

*Entonces  $g_0$  genera un solitón de Ricci.*

*Demostración.* Sea  $\sigma_t = 1 - 2\lambda t$ . Observemos que si  $\lambda > 0$  entonces  $\sigma_t > 0$  en el intervalo  $[0, T)$ , donde  $T = (2\lambda)^{-1}$ , mientras que si  $\lambda \leq 0$ , entonces  $\sigma_t > 0$  para todo  $t \in [0, \infty)$ . Para estos valores de  $t$ , sea

$$Y_t = \frac{X}{\sigma_t}.$$

Sea  $\varphi_s = \varphi_s(\bullet, t)$  la familia uniparamétrica de difeomorfismos generada por  $Y_t$ . Veremos que el flujo  $g_t = \sigma_t \varphi_t^* g_0$  es un solitón; es decir, que cumple la ecuación del flujo de Ricci. Al derivar obtenemos

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} g_t \right|_{t=t_0} = \sigma'_{t_0} \varphi_{t_0}^* g_0 + \sigma_{t_0} \left. \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_t^* g_0) \right|_{t=t_0}.$$

Por la ecuación (1.7) tenemos que

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_t^* g_0) \right|_{t=t_0} = \varphi_{t_0}^* \mathcal{L}_{Y_{t_0}} w = \frac{1}{\sigma_{t_0}} \varphi_{t_0}^* \mathcal{L}_X g_0,$$

---

**Definición 3.3.2.** *Sea  $G$  un grupo de Lie con acción continua  $\mu$  en una variedad topológica  $X$ .*

*Una **rebanada** a través de  $p \in X$ , es una subvariedad cerrada y encajada  $S_p$  de  $X$  que contiene a  $p$  y tal que*

- $\forall g \in G_p$  se tiene que  $g \cdot S_p \subset S_p$  donde  $G_p$  es el estabilizador de  $p$ .
- Si  $g \in G$  cumple que  $g \cdot S_p \cap S_p \neq \emptyset$ , entonces  $g \in G_p$ .
- Existen un abierto  $U$  de la identidad en  $G/G_p$  y una aplicación  $\chi : U \rightarrow G$ , tal que la función

$$F : U \times S_p \rightarrow X,$$

$$F(u, s) = \mu(\chi(u), s),$$

*es un homeomorfismo a una vecindad abierta de  $p \in X$ .*

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} g_t \right|_{t=t_0} &= \sigma'_{t_0} \varphi_{t_0}^* g_0 + \varphi_{t_0}^* \mathcal{L}_X g_0 = -2\varphi_{t_0}^* \left( \lambda g_0 - \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g_0 \right) = -2\varphi_{t_0}^* (\text{Ric}(g_0)) \\ &= -2 \text{Ric}(\varphi_{t_0}^* g_0) = -2 \text{Ric}(\sigma_{t_0} \varphi_{t_0}^* g_0) = -2 \text{Ric}(g_t)|_{t=t_0}. \end{aligned}$$

pues por la proposición 2.2.12 sabemos que Ric es invariante bajo los múltiplos escalares  $\sigma_t$ ; aplicamos este resultado para cada  $t$  y obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = -2 \text{Ric}(g_t). \quad \square$$

Los solitones generalizan a las métricas de Einstein pues si el campo  $X$  es idénticamente 0, o es un campo de Killing para la métrica  $g_0$ , la condición impuesta en Ric es que la métrica sea de Einstein. Esto a su vez muestra que las variedades de Einstein son puntos fijos del flujo de Ricci en  $\mathcal{M}(M)$ .

**Definición 3.3.4.** *Un **solitón gradiente** es un solitón de Ricci tal que su condición inicial  $g_0$  en  $M$  cumple*

$$\text{Ric}(g_0) = \lambda g_0 - \text{Hess}_{g_0}(f), \quad (3.3)$$

para alguna  $f \in C^\infty(M)$ , a la cual se le llama **función potencial**.

Esta definición proviene de que un solitón a tiempo 0 cumple

$$\text{Ric}(g_0) = \lambda g_0 - \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g_0.$$

Si el campo  $X$  es el gradiente de una función (la llamada función potencial)  $f \in C^\infty(M)$ , la ecuación anterior toma la forma de la ecuación (3.3). Esto se debe a la ecuación (1.8) y a la ecuación obtenida en la sección 1.3:

$$\text{Hess}(f)(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad}(f), Y \rangle.$$

Con lo cual, como el hessiano es simétrico se tiene que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\text{grad}_g(f)}g)(X, Y) &= g(\nabla_X \text{grad}_g(f), Y) + g(X, \nabla_Y \text{grad}_g(f)) \\ &= 2\text{Hess}_g(f) \end{aligned}$$

El campo que genera el solitón no es único como se verá más adelante. De la ecuación que define a los solitones gradientes podemos ver inmediatamente que si el gradiente de una función potencial es un campo de Killing, entonces esta función tendrá hessiano idénticamente cero y por lo tanto a tiempo 0 el solitón será una variedad de Einstein. Nuevamente por la ecuación (3.3) cualquier función potencial tendrá hessiano idénticamente 0 si por lo menos una tiene hessiano 0.

El teorema siguiente dice que un solitón único con respecto a la condición inicial cumple la ecuación (3.3), con lo cual un solitón gradiente sería simplemente un solitón de Ricci generado por un campo gradiente.

**Teorema 3.3.5.** *Sea  $(M, g_t)$  tal que  $g_t$  es un solitón de Ricci único con respecto a la condición inicial. Entonces  $g_0$  debe de cumplir*

$$\text{Ric}(g_0) = \lambda g_0 - \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g_0, \quad \lambda = -\frac{\sigma'_0}{2}. \quad (3.4)$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad asumimos  $\sigma_0 = 1, \varphi_0 = \text{Id}$ . Un solitón  $g_t = \sigma_t \varphi_t^* g_0$  cumple

$$-2 \text{Ric}(g_0) = \frac{\partial}{\partial t} g_t \Big|_{t=0} = \left( \sigma'_t \varphi_t^* g_0 + \sigma_t \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^* g_0 \right)_{t=0} = \sigma'_0 \varphi_0^* g_0 + \sigma_0 \varphi_0^* \mathcal{L}_{Y_0} g_0,$$

donde  $\frac{X}{\sigma_t} = Y_t$  es el campo asociado a la familia  $\varphi_t$ , y por lo tanto

$$-2 \text{Ric}(g_0) = \sigma'_0 g_0 + \mathcal{L}_X g_0. \quad \square$$

Para deducir cómo debe ser  $\sigma_t$  consideramos lo siguiente:

$$-2 \text{Ric}(g_t) = \frac{\partial}{\partial t} g_t = \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_t \varphi_t^* g_0) = \sigma'_t \varphi_t^* g_0 + \sigma_t \varphi_t^* \mathcal{L}_{Y_t} g_0 = \sigma'_t \varphi_t^* g_0 + \varphi_t^* \mathcal{L}_{X_t} g_0.$$

Como  $\text{Ric}(g_t) = \text{Ric}(\sigma_t \varphi_t^* g_0) = \text{Ric}(\varphi_t^* g_0) = \varphi_t^* \text{Ric}(g_0)$ , podemos deshacernos del pullback de  $\varphi_t$ :

$$-2 \text{Ric}(g_0) = \sigma'_t g_0 + \mathcal{L}_{X_t} g_0. \quad (3.5)$$

Al derivar esta expresión con respecto a  $t$  obtenemos

$$\sigma''_t g_0 + \mathcal{L}_{\dot{X}_t} g_0 = 0. \quad (3.6)$$

Entonces hay dos casos.

- $\sigma''_t$  idénticamente cero: En este caso, claramente debe suceder que  $\sigma_t = 1 - 2\lambda t$  para algún  $\lambda$ .
- Existe  $t_0$  tal que  $\sigma''_{t_0} \neq 0$   
Para  $Z_0 := -\dot{X}_{t_0} / \sigma''_{t_0}$ , utilizando la ecuación (3.6) obtenemos

$$\mathcal{L}_{Z_0} g_0 = g_0$$

y al sustituir en (3.5) se tiene

$$-2 \text{Ric}(g_0) = \sigma'_t \mathcal{L}_{Z_0} g_0 + \mathcal{L}_{X_t} g_0 = \mathcal{L}_{(\sigma'_t Z_0 + X_t)} g_0.$$

Sean  $S_t = \sigma'_t Z_0 + X_t$  y  $\psi_t$  la familia uniparamétrica de difeomorfismos generada por  $S_0$ , es decir se cumple la ecuación

$$-2 \text{Ric}(g_0) = \mathcal{L}_{S_0} g_0$$

y  $\psi_t^* g_0$  es una solución del flujo de Ricci con la misma condición inicial  $g_0$ . Como la solución es única con respecto a solitones con condición inicial  $g_0$ , al reemplazar  $\varphi_t$  por  $\psi_t$  en  $g_t = \sigma_t \varphi_t^* g_0$ , obtenemos  $\sigma_t = 1$ .

De aquí podemos asociar nombres que den sentido a los distintos posibles valores de  $\lambda$ . Se dice que un solitón se *contrae*, es *estático*, o se *expande* si  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$  ó  $\lambda < 0$  correspondientemente.

Para concluir esta sección, veamos dos solitones modelados en  $\mathbb{R}^n$  pero generados por dos campos distintos, basándonos en la ecuación (3.2).

1. Sea  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{can}}, X)$  con  $g_{\text{can}}$  la métrica canónica. Consideremos el campo  $X$  que es idénticamente 0. Al tener este espacio curvatura 0, escogemos  $\lambda = 0$  y la ecuación que define al solitón se cumple trivialmente; es decir  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{can}}, 0)$  es un solitón estático.
2. Podemos ahora utilizar una función potencial para considerar este espacio como un solitón que se expande o uno que se contrae. Consideremos la función potencial

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2.$$

La ecuación (3.3) que caracteriza a los solitones gradientes se reduce (cuando  $\lambda \neq 0$ ) a

$$\text{Hess}_{g_{\text{can}}}(f) = \lambda g_{\text{can}},$$

y es claro que se cumple esta ecuación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \lambda \delta_{ij}.$$

A este solitón se le conoce como **solitón de Gauss**.

### 3.4. El cigarro de Hamilton

Definimos el cigarro de Hamilton  $(\mathbb{R}^2, g_{\Sigma})$  por

$$g_{\Sigma} = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{1 + x^2 + y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

Para ver que la métrica es rotacionalmente simétrica basta expresarla en coordenadas polares. Si  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ , entonces

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} dx^2 &= \cos^2 \theta dr^2 - r \cos \theta \sin \theta dr \otimes d\theta - r \sin \theta \cos \theta d\theta \otimes dr + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2, \\ dy^2 &= \sin^2 \theta dr^2 + r \sin \theta \cos \theta dr \otimes d\theta + r \cos \theta \sin \theta d\theta \otimes dr + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2, \end{aligned}$$

por lo que

$$dx^2 + dy^2 = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta,$$

y la métrica se escribe como

$$g_{\Sigma} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{1 + r^2}.$$

Ahora calculamos los símbolos de Christoffel pues son fundamentales para hablar de la geometría de una variedad. Por ejemplo se usarán para expresar la derivada de Lie en la dirección de cierto gradiente y para analizar qué tipo de solitón es el cigarro, además de que se pueden utilizar para encontrar el tensor de curvatura.

Para calcular los símbolos de Christoffel usamos la ecuación estándar

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) g^{kl}.$$

Notamos que la métrica en el punto  $(x, y)$  tiene matriz

$$g_\Sigma = \begin{bmatrix} (1+x^2+y^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (1+x^2+y^2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Tenemos entonces que los símbolos de Christoffel son:

■  $\Gamma_{11}^k$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^k &= \frac{1}{2} (2\partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) g^{kl} = \frac{1}{2} (\partial_1 g_{11} \cdot g^{k1} - \partial_2 g_{11} \cdot g^{k2}) \\ &= -\frac{x}{(1+x^2+y^2)^2} g^{k1} + \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2} g^{k2} = \frac{yg^{k2} - xg^{k1}}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ \Gamma_{11}^1 &= -\frac{x}{1+x^2+y^2}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{y}{1+x^2+y^2}. \end{aligned}$$

■  $\Gamma_{22}^k$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^k &= \frac{1}{2} (2\partial_2 g_{22} - \partial_1 g_{22}) g^{kl} = \frac{1}{2} (-\partial_1 g_{22} \cdot g^{k1} + \partial_2 g_{22} \cdot g^{k2}) = \frac{xg^{k1} - yg^{k2}}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\Gamma_{11}^1, \quad \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2. \end{aligned}$$

■  $\Gamma_{12}^k$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^k &= \frac{1}{2} (\partial_1 g_{2l} + \partial_2 g_{1l}) g^{kl} = \frac{1}{2} (\partial_2 g_{11} \cdot g^{k1} + \partial_1 g_{22} \cdot g^{k2}) = -\frac{yg^{k1} + xg^{k2}}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{21}^1, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2. \end{aligned}$$

En conclusión,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\frac{x}{1+x^2+y^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = -\frac{y}{1+x^2+y^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{x}{1+x^2+y^2}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{y}{1+x^2+y^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{x}{1+x^2+y^2}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{y}{1+x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Estos símbolos se pueden utilizar para calcular el tensor de curvatura como en (2.4),

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l.$$

En lugar de hacer esto, nos auxiliamos de las ecuaciones de estructura desarrolladas en el capítulo 2. Para esto definimos un nuevo parámetro de distancia

$$s := \operatorname{arcsenh}(r)$$

y reescribimos

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}}, & (1+r^2)ds^2 &= dr^2, \\ g_\Sigma &= ds^2 + \frac{r^2}{1+r^2}d\theta^2 = ds^2 + \tanh^2(s)d\theta^2. \end{aligned}$$

Lo siguiente, aunque aquí está a manera de comentario, se desarrolla y prueba en el capítulo 2. Seguimos la notación de la sección 1.2 y denotamos

$$w^1 = ds, \quad w^2 = \phi(s)d\theta.$$

Las 1-formas de conexión  $w_{ij}$  y las 2-formas de curvatura  $\Omega_i^j$  cumplen las ecuaciones de estructura de Cartan

$$dw^i = w^j \wedge w_j^i, \quad \Omega_i^j = dw_i^j - w_i^k \wedge w_k^j,$$

que en dimensión 2 se simplifican a

$$dw^1 = w^2 \wedge w_2^1, \quad dw^2 = w^1 \wedge w_1^2, \quad \Omega_2^1 = dw_2^1.$$

La curvatura seccional  $K$  es exactamente  $\Omega_2^1(e_1, e_2)$ . Como en dimensión 2 se tiene que  $2K = 2\operatorname{Ric} = R$ , esto basta para calcular la curvatura escalar en el caso de tener una métrica dada por

$$g = ds^2 + \phi(s)^2 d\theta^2.$$

Para calcular la 1-forma de conexión  $w_2^1$  notemos que en nuestro caso,

$$\begin{aligned} dw^1 &= d^2s = 0, & dw^2 &= d(\phi(s)d\theta) = \phi'(s)ds \wedge d\theta = -ds \wedge w_2^1, \\ w_2^1 &= -\phi'(s)d\theta, \\ \Omega_2^1 &= dw_2^1 = -\phi''(s)ds \wedge d\theta = -\frac{\phi''(s)}{\phi(s)}dw^1 \wedge dw^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la curvatura seccional es  $-\phi''(s)/\phi(s)$  y en el caso del solitón  $g_\Sigma$  se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \tanh(s), \\ \phi''(s) &= -2\operatorname{sech}^2(s)\tanh(s), \\ K &= \frac{\phi''(s)}{\phi(s)} = -2\operatorname{sech}^2(s) = \frac{2}{1+r^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la curvatura escalar es

$$R_\Sigma = \frac{4}{1+x^2+y^2}.$$

Expresando la métrica en coordenadas usuales, la forma de volumen es

$$d\mu_\Sigma = \sqrt{\det g_\Sigma} dx \wedge dy = \frac{dx \wedge dy}{1 + x^2 + y^2}.$$

Entonces el área de discos de radio fijo  $r$  centrados en  $z$  es menor que el área de discos euclidianos, y esta área es una función decreciente cuando  $\|z\|$  crece, es decir, para  $z \neq (0, 0)$  y  $\varepsilon > 0$ ,

$$\int_{B_r(z)} d\mu < \int_{B_r((1+\varepsilon)z)} d\mu < \pi r^2.$$

Recordemos que una 1-forma  $w = w_j dx^j$  tiene por sostenida el campo  $w^\# = g^{ij} w_j \partial_i$  y que  $df^\# = \text{grad}_g(f)$ . Con esto, veamos que la función  $f(x, y) = -\ln(1 + x^2 + y^2)$  es una función potencial para el cigarro de Hamilton. Expresemos el gradiente con las coordenadas usuales  $\partial_x, \partial_y$  en la métrica  $g_\Sigma$ .

$$\begin{aligned} df^\# &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^\# = \left( g^{11} \frac{\partial f}{\partial x} + g^{12} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( g^{21} \frac{\partial f}{\partial x} + g^{22} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\ &= g^{11} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + g^{22} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

El gradiente de  $f$  es el siguiente

$$\text{grad}_{g_\Sigma}(f) = df^\# = -g^{11} \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} - g^{22} \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y} = -2x \frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Vimos en (1.9) una expresión para la derivada de Lie de un  $(2, 0)$ -tensor en la dirección de un campo, esta ecuación proviene de

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle.$$

Utilizaremos las expresiones anteriores para calcular la derivada de Lie de la métrica  $g_\Sigma$  en la dirección del gradiente de  $f$ . Con este propósito calculamos la derivada en la base  $\{\partial_x, \partial_y\}$  y por linealidad se seguirá que el solitón definido por el cigarro de Hamilton, es gradiente. En lo siguiente, se utilizarán ciertas expresiones que calculamos de una vez.

$$\begin{aligned} \nabla_x \text{grad}(f) &= \nabla_x(-2x\partial_x - 2y\partial_y) = -2\partial_x(x)\partial_x - 2x\nabla_x\partial_x - 2\partial_x(y)\partial_y - 2y\nabla_x\partial_y \\ &= -2\partial_x - 2x\Gamma_{11}^1\partial_x - 2x\Gamma_{11}^2\partial_y - 2y\Gamma_{12}^1\partial_x - 2y\Gamma_{12}^2\partial_y; \\ \nabla_y \text{grad}(f) &= \nabla_y(-2x\partial_x - 2y\partial_y) = -2x\nabla_y\partial_x - 2\partial_y(x)\partial_x - 2y\nabla_y\partial_y - 2\partial_y(y)\partial_y \\ &= -2x\Gamma_{21}^1\partial_x - 2x\Gamma_{21}^2\partial_y - 2y\Gamma_{22}^1\partial_x - 2y\Gamma_{22}^2\partial_y - 2\partial_y. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\text{grad}(f)} g_\Sigma)(\partial_y, \partial_x) &= (\mathcal{L}_{\text{grad}(f)} g_\Sigma)(\partial_x, \partial_y) = \langle \nabla_x \text{grad}(f), \partial_y \rangle_\Sigma + \langle \partial_x, \nabla_y \text{grad}(f) \rangle_\Sigma \\ &= -2(x\Gamma_{11}^2 + y\Gamma_{12}^2)g_{22} - 2(x\Gamma_{21}^1 + y\Gamma_{22}^1)g_{11} \\ &= -2 \left( \frac{xy}{1+r^2} - \frac{yx}{1+r^2} \right) g_{22} - 2 \left( -\frac{xy}{1+r^2} + \frac{yx}{1+r^2} \right) g_{11} = 0. \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\text{grad}(f)}g_\Sigma)(\partial_y, \partial_y) &= (\mathcal{L}_{\text{grad}(f)}g_\Sigma)(\partial_x, \partial_x) = 2\langle \nabla_x \text{grad}(f), \partial_x \rangle_\Sigma \\ &= 2(-2)(1 + x\Gamma_{11}^1 + y\Gamma_{12}^1)g_{11} = -4 \left( 1 - \frac{x^2}{1+r^2} - \frac{y^2}{1+r^2} \right) g_\Sigma(\partial_x, \partial_x) \\ &= -4 \left( 1 - \frac{r^2}{1+r^2} \right) g_\Sigma(\partial_x, \partial_x) = -\frac{4}{1+r^2} g_\Sigma(\partial_x, \partial_x). \end{aligned}$$

Con esto, obtenemos la siguiente expresión del Hessiano:

$$2\text{Hess}_{g_\Sigma}(f) = \mathcal{L}_{\text{grad}(f)}g_\Sigma = -\frac{4}{1+x^2+y^2}g_\Sigma.$$

Por lo tanto, para  $\lambda = 0$  se cumple la ecuación que caracteriza a los solitones gradientes estáticos:

$$-\text{Ric}_\Sigma = -\frac{1}{2}R_\Sigma = -\frac{2}{1+x^2+y^2} = \text{Hess}_{g_\Sigma}(f) - \lambda g_\Sigma.$$

Un último análisis que sustenta el nombre de “cigarro” o “puro”. Como

$$2K_\Sigma = R_\Sigma \xrightarrow{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} 0,$$

por la simetría de la métrica una rebanada del solitón se ve como una parábola que se hace plana cuando se aleja del origen. Además, al expresar la métrica en coordenadas polares y cambiar el parámetro de distancia,

$$g_\Sigma = ds^2 + \tanh^2(s)d\theta^2,$$

como  $\tanh(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1$ , el cigarro se aproxima asintóticamente en el infinito al cilindro de radio 1.

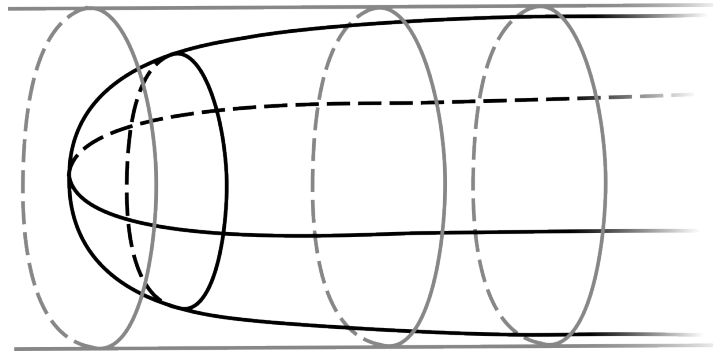


Figura 3.1: Aproximación asintótica del cigarro al cilindro.

En resumen, el cigarro es un solitón gradiente estático rotacionalmente simétrico. Además un resultado de clasificación afirma que el único solitón gradiente rotacionalmente simétrico de curvatura positiva en  $\mathbb{R}^2$  es el cigarro de Hamilton (ver [CK04] pg.26). En lo siguiente veremos un solitón  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, g_t)$  relacionado al cigarro, en el sentido siguiente. Para coordenadas  $(x, \theta)$  en  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ , en las “puntas”  $x = \infty, -\infty$ , al retroceder en el tiempo, el solitón se aproxima al cigarro, y en el “ecuador”  $x = 0$  la métrica se aproxima a la del cilindro.



### 3.5. La solución de Rosenau

La “solución de Rosenau” está definida por  $g_{Ros} = u\mathfrak{h}$  donde  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \mathfrak{h})$  denota al cilindro con la métrica plana y  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  es la función dada por

$$u(x, t) = \frac{2\beta \sinh(-\alpha\lambda t)}{\cosh \alpha x + \cosh \alpha\lambda t},$$

donde  $\beta, \alpha, \lambda$  son constantes positivas por determinar. Antes de empezar a analizar la solución de Rosenau veamos el siguiente resultado.

**Lema 3.5.1.** *Sea  $(M^2, \tilde{\mathfrak{h}})$  una superficie plana (con tensor de curvatura cero). Entonces  $(M^2, \tilde{u}\tilde{\mathfrak{h}})$  es solución del flujo de Ricci si y sólo si*

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u} = \Delta_{\tilde{\mathfrak{h}}} \ln \tilde{u},$$

donde  $\tilde{u} : M^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Por el lema 1.8.1 sabemos que si dos métricas  $g, g'$  son conformemente equivalentes ( $g = e^{2v}g'$ ) entonces

$$R_g = e^{-2v}(-2\Delta_{g'}v + R_{g'})$$

En nuestro caso esta ecuación toma la siguiente forma para  $g = \tilde{u}\tilde{\mathfrak{h}}$ :

$$R_g = \frac{1}{\tilde{u}}(-\Delta_{\tilde{\mathfrak{h}}} \ln \tilde{u} + R_{\tilde{\mathfrak{h}}}).$$

Como  $g$  es solución al flujo de Ricci y la dimensión es 2, se tiene que  $Rg = 2\text{Ric}$  y entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -R_g g$$

lo que escribimos como

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u} \cdot \tilde{\mathfrak{h}} = \frac{1}{\tilde{u}}(\Delta_{\tilde{\mathfrak{h}}} \ln \tilde{u} - R_{\tilde{\mathfrak{h}}}) \cdot g$$

y por tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u} = \Delta_{\tilde{\mathfrak{h}}} \ln \tilde{u} - R_{\tilde{\mathfrak{h}}}.$$

Como  $\tilde{\mathfrak{h}}$  es plana entonces se sigue el resultado. □

Veamos qué condiciones hay que imponer sobre la solución de Rosenau para que sea solución al flujo de Ricci. Como  $u$  no depende de  $\theta$ , por definición

$$\Delta_{\mathfrak{h}} \ln u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln u.$$

Primero calculemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \ln u(x, t) &= \frac{1}{u(x, t)} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t), \\ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{2\beta \sinh(-\alpha\lambda t)}{\cosh \alpha x + \cosh \alpha\lambda t} = -\frac{2\beta \sinh(-\alpha\lambda t) \alpha \sinh \alpha x}{(\cosh \alpha x + \cosh \alpha\lambda t)^2}, \\ \frac{1}{u(x, t)} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) &= -\alpha \frac{\sinh \alpha x}{\cosh \alpha x + \cosh \alpha\lambda t}. \end{aligned}$$

Con esto, calculamos la segunda derivada:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln u(x, t) &= -\alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sinh \alpha x}{\cosh \alpha x + \cosh \alpha \lambda t} = -\alpha \frac{\alpha \cosh \alpha x \cdot (\cosh \alpha x + \cosh \alpha \lambda t) - \alpha \sinh^2 \alpha x}{(\cosh \alpha x + \cosh \alpha \lambda t)^2} \\ &= -\alpha^2 \frac{\cosh \alpha \lambda t \cdot \cosh \alpha x + 1}{(\cosh \alpha x + \cosh \alpha \lambda t)^2}.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{2\beta \sinh(-\alpha \lambda t)}{\cosh \alpha x + \cosh \alpha \lambda t} \\ &= \frac{-2\beta \alpha \lambda \cosh(-\alpha \lambda t)(\cosh \alpha x + \cosh \alpha \lambda t) - \alpha \lambda 2\beta \sinh \alpha \lambda t \cdot \sinh(-\alpha \lambda t)}{(\cosh \alpha x + \cosh \alpha \lambda t)^2} \\ &= -2\alpha \beta \lambda \frac{\cosh \alpha \lambda t \cdot \cosh \alpha x + \cosh^2 \alpha \lambda t - \sinh^2 \alpha \lambda t}{(\cosh \alpha x + \cosh \alpha \lambda t)^2}, \\ &= -2\alpha \beta \lambda \frac{\cosh \alpha \lambda t \cdot \cosh \alpha x + 1}{(\cosh \alpha x + \cosh \alpha \lambda t)^2}.\end{aligned}$$

Para que la ecuación del lema anterior se cumpla, y consecuentemente  $g$  sea solución al flujo de Ricci, debe suceder que

$$2\beta\lambda = \alpha.$$

Es decir, podemos refinar el Lema anterior al siguiente

**Lema 3.5.2.** *Sea  $(M^2, \tilde{\mathfrak{h}})$  una superficie plana.  $(M^2, u\tilde{\mathfrak{h}})$  es solución del flujo de Ricci si y sólo si  $2\beta\lambda = \alpha$ .*

Como corolario del Lema 3.5.1 obtenemos que la solución de Rosenau cumple

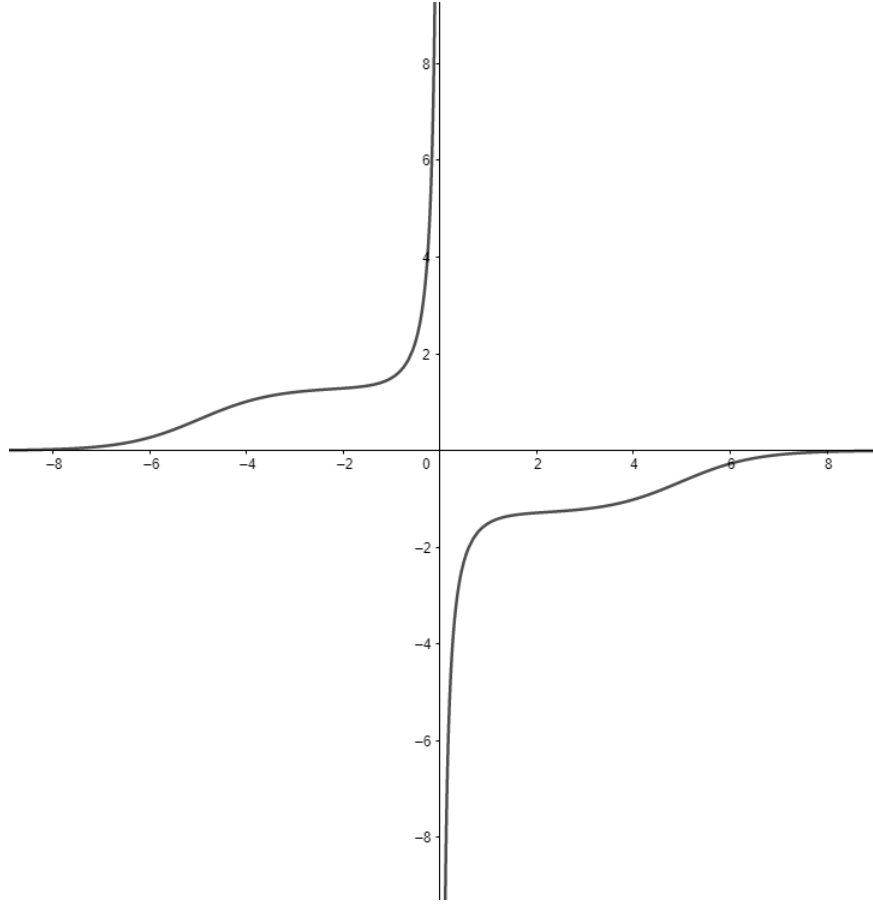
$$\frac{\partial}{\partial t} u = -Ru,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}R &= -\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} u = -\frac{\cosh \alpha x + \cosh \alpha \lambda t}{2\beta \sinh(-\alpha \lambda t)} \left( -2\alpha \beta \lambda \frac{\cosh \alpha \lambda t \cdot \cosh \alpha x + 1}{(\cosh \alpha x + \cosh \alpha \lambda t)^2} \right) \\ &= -\alpha \lambda \frac{\cosh \alpha \lambda t \cdot \cosh \alpha x + 1}{\sinh \alpha \lambda t (\cosh \alpha x + \cosh \alpha \lambda t)}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Notemos que  $R$  es par en  $x$  y que si tomamos  $x$  fijo, como  $\cosh \alpha x \in [1, \infty)$  obtenemos que la gráfica de la curvatura escalar como función de  $t$  es parecida a una hipérbola.

$$\alpha, \lambda = 1, \cosh x = 320.$$



Con esto obtenemos que la curvatura escalar tiende a 0 cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Notemos que por definición de  $u$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\beta \sinh(-\alpha\lambda t)}{\cosh \alpha x + \cosh \alpha\lambda t} = 0;$$

obtenemos que la solución de Rosenau es antigua pero no eterna. Para ver que el límite “hacia atrás” en el tiempo es el cigarro o el cilindro (dependiendo de donde se tome el límite) consideramos la **métrica del cigarro en el cilindro**  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , que es de la forma

$$g_{\Sigma-0} = \frac{dx^2 + d\theta^2}{1 + e^{-2x}},$$

donde la notación proviene de la forma en que se denota la métrica en el cigarro ( $g_\Sigma$ ). Esto puede deducirse “transportando” la métrica del cigarro al cilindro, escalando la métrica usual en el cilindro con respecto a la posición longitudinal para que se comporte como la métrica del cigarro en coordenadas polares, es decir, buscamos escalar (con respecto a la longitud) a la métrica del cilindro, para obtener precisamente la métrica del cigarro. Esto se logra resolviendo una ecuación que involucra a las dos métricas, es decir encontrar una función  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$g_{\Sigma-0} = F(x)^2(dx^2 + d\theta^2) = ds^2 + \tanh^2(s)d\theta^2.$$

De aquí, separamos y resolvemos por partes. En  $d\theta$  es claro que debería suceder lo siguiente:

$$F(x) = \tanh(s).$$

Partiendo de esto encontramos  $x$  en función de  $s$  en  $F(x)dx = ds$ . Como

$$\tanh(s)dx = ds$$

entonces

$$dx = \coth(s)ds$$

y por tanto

$$x = \ln(\sinh s).$$

Utilizando este parámetro encontramos que

$$F(x)^2 = (\tanh(\operatorname{arcsinh} e^x))^2 = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \frac{1}{1 + e^{-2x}}.$$

Para continuar, consideraremos  $\alpha = 1$ , pues en este caso, la métrica de la solución de Rosenau se extiende a una solución antigua del flujo de Ricci en  $\mathbb{S}^2$  al compactificar el cilindro [CK04, Lema 2.12]. En este caso, utilizando  $2\beta\lambda = \alpha = 1$  tenemos que

$$u(x, t) = \lambda^{-1} \frac{\sinh(-\lambda t)}{\cosh x + \cosh \lambda t}.$$

De aquí, basta tomar traslaciones para obtener que el límite en  $-\infty$  de la solución de Rosenau es efectivamente la métrica del cigarro en el cilindro:

$$\begin{aligned} u(x + \lambda t, t) &= \lambda^{-1} \frac{\sinh(-\lambda t)}{\cosh(x + \lambda t) + \cosh \lambda t} = \lambda^{-1} \frac{\sinh(-\lambda t)}{\cosh x \cosh \lambda t + \sinh x \sinh \lambda t + \cosh \lambda t} \\ &= -\lambda^{-1} (\cosh x \coth \lambda t + \sinh x + \coth \lambda t)^{-1}. \end{aligned}$$

Definimos la familia uniparamétrica de difeomorfismos  $\psi_t \in \operatorname{Diff}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$  como

$$\psi_t(x, \theta) = (x + \lambda t, \theta),$$

con lo cual  $\psi_t^* g_{Ros}(x, t) = u(x + \lambda t, t) \mathfrak{h}(x)$  y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi_t^* g_{Ros} = \lambda^{-1} (\cosh x - \sinh x + 1)^{-1} h = \lambda^{-1} \frac{dx^2 + d\theta^2}{e^{-x} + 1}.$$

Al hacer el cambio de coordenadas  $x \mapsto x/2\sqrt{\lambda}$ ,  $y \mapsto y/2\sqrt{\lambda}$  obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi_t^* g_{Ros} = 4 \frac{dx^2 + d\theta^2}{e^{-2x} + 1} = 4g_{\Sigma-0},$$

que es precisamente un múltiplo de la métrica del cigarro en el cilindro. En resumen, en las “puntas”  $-\infty, \infty$ , la métrica de la solución de Rosenau tiende a la del cigarro y en los demás puntos tiende a un cilindro.

### 3.6. El solitón de Bryant

Podemos generalizar la métrica del cigarro a un solitón gradiente estático no-compacto y rotacionalmente simétrico de curvatura seccional positiva en dimensión  $n \geq 3$ . El solitón de Bryant es un ejemplo importante, pues se espera que modele un caso de los cuellos pellizcados degenerados en dimensión 3, estos objetos son un tipo de singularidad que puede ocurrir en el flujo de Ricci. Soluciones con singularidades de este tipo reciben su nombre a partir del análisis del comportamiento de la norma de su tensor de curvatura, que en este caso tiende a infinito. Más adelante comentaremos un poco más al respecto de los cuellos pellizcados. A diferencia del cigarro de Hamilton, en lugar de aproximarse asintóticamente a un cilindro, el solitón de Bryant se abre como un paraboloides.

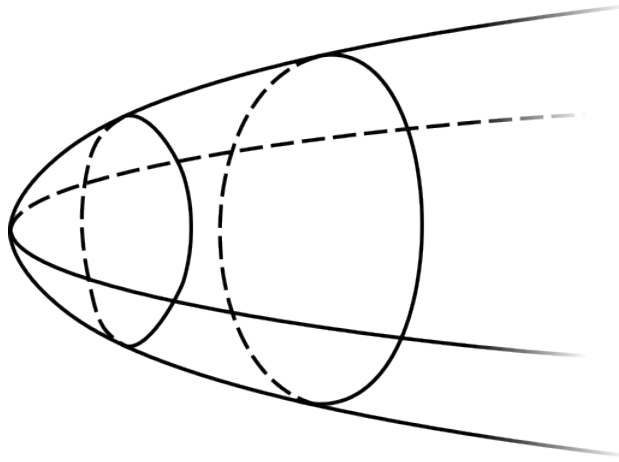


Figura 3.2

Para construir este solitón, seguimos a [CLN06],[Cho07]. Sea  $g_{S^{n-1}}$  la métrica usual en  $S^{n-1}$ . Buscamos un producto alabeado en el cilindro  $(0, \infty) \times_{\phi} S^{n-1}$ , donde la función  $\phi$  que alabea es a determinar bajo las condiciones de ser un solitón y a su vez, que el solitón obtenido se extienda a un solitón en la extensión de Alexandroff  $\mathbb{R}^n$  (compactificación por un punto). Consideramos el producto alabeado

$$g = dr^2 + \phi^2(r)g_{S^{n-1}}$$

y calculamos su curvatura de Ricci y el Hessiano de  $\phi$ ; para esto, consideramos el haz

$$\pi: (0, \infty) \times S^{n-1} \rightarrow (0, \infty)$$

de modo que un campo vertical es un campo en la esfera pues estos campos están en  $\ker(d\pi)$ . Sean  $X, Y$  campos horizontales y  $V, W$  verticales. Como en la sección 1.6, podemos calcular las expresiones para la curvatura de Ricci utilizando levantamientos de tensores como se definieron en esta misma sección.

En nuestro caso, el levantamiento de Ric en  $(0, \infty)$  es cero pues  $((0, \infty), dr^2)$  tiene curvatura cero y por tanto,

1.  $\text{Ric}(X, Y) = -\frac{n-1}{\phi} \text{Hess}(\phi)(X, Y);$

$$2. \operatorname{Ric}(X, V) = 0;$$

$$3. \operatorname{Ric}(V, W) = \mathbb{S}^{n-1} \operatorname{Ric}(V, W) - g(V, W) \left( \frac{\Delta \phi}{\phi} + (n-2) \left( \frac{\|\operatorname{grad}(\phi)\|_g}{\phi} \right)^2 \right).$$

Expresaremos lo anterior de otra manera. Primero, determinamos el Hessiano de una función  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  arbitraria. Como  $\operatorname{grad}(f) = f' \partial_r$ , si  $X = x \partial_r, Y = y \partial_r$  son horizontales, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess}(f)(X, Y) &= g(\nabla_X \operatorname{grad}(f), Y) = g(x \nabla_r f' \partial_r, y \partial_r) \\ &= g(x f'' \partial_r, y \partial_r) = f'' xy g_{rr} = f'' dr^2(X, Y). \end{aligned}$$

En particular,  $\operatorname{Hess}(\phi)(X, Y) = \phi'' dr^2(X, Y)$ .

Por otro lado, si  $V, W$  son verticales, el levantamiento de  $\operatorname{Ric}$  en  $\mathbb{S}^{n-1}$  al producto es igual a  $\operatorname{Ric}$  en el producto, y como la esfera es una variedad de Einstein, sabemos que  $\operatorname{Ric} = (n-2)g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ . Usando esto obtenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}(V, W) &= (n-2)g_{\mathbb{S}^{n-1}}(V, W) - \phi^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}(V, W) \left( \frac{\phi''}{\phi} + (n-2) \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 \right) \\ &= (n-2 - \phi \phi'' - (n-2)(\phi')^2) g_{\mathbb{S}^{n-1}}(V, W) \\ &= ((n-2)(1 - (\phi')^2) - \phi \phi'') g_{\mathbb{S}^{n-1}}(V, W). \end{aligned}$$

Juntando lo anterior obtenemos

$$1. \operatorname{Ric}(X, Y) = -(n-1) \frac{\phi''}{\phi} dr^2(X, Y),$$

$$2. \operatorname{Ric}(X, V) = 0,$$

$$3. \operatorname{Ric}(V, W) = ((n-2)(1 - (\phi')^2) - \phi \phi'') g_{\mathbb{S}^{n-1}}(V, W),$$

lo que podemos escribir de manera resumida como

$$\operatorname{Ric}_g = -(n-1) \frac{\phi''}{\phi} dr^2 + ((n-2)(1 - (\phi')^2) - \phi \phi'') g_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Para calcular el Hessiano, utilizamos  $\nabla_V X = (X(\phi)/\phi)V$  y que la conexión de Levi-Civita en  $(0, \infty)$  es igual a la conexión en el producto cuando se evalúa en campos horizontales (ver [ONe83] pg. 206). Igual que antes, calculamos en combinaciones de campos verticales y horizontales. Por ejemplo, ya hemos calculado que  $\operatorname{Hess}(f)(X, Y) = f'' dr^2(X, Y)$ , así que hacemos los dos casos restantes.

$$\operatorname{Hess}(f)(V, W) = g(\nabla_V f' \partial_r, W) = f' g \left( \frac{\phi'}{\phi} V, W \right) = f' \frac{\phi'}{\phi} g(V, W) = \phi \phi' f' g_{\mathbb{S}^{n-1}}(V, W),$$

$$\operatorname{Hess}(f)(X, V) = f' g(\nabla_X \partial_r, V) = 0.$$

Esta última ecuación es 0 pues  $\nabla_X \partial_r = 0$ . En efecto, si tomamos en cuenta la conexión en  $(0, \infty)$ , no es más que derivar una función constante en el sentido usual. Por lo tanto, obtenemos la siguiente ecuación para el Hessiano:

$$\nabla \nabla f = f'' dr^2 + \phi \phi' f' g_{S^{n-1}}. \quad (3.8)$$

Con esta información, reescribimos la ecuación que define a los solitones gradientes estáticos ( $\text{Ric}_g + \text{Hess}(f) = 0$ ) como

$$\left( f'' - (n-1) \frac{\phi''}{\phi} \right) dr^2 + (\phi \phi' f' + (n-2)(1 - (\phi')^2) - \phi \phi'') g_{S^{n-1}} = 0.$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} f'' = (n-1) \frac{\phi''}{\phi}, \\ \phi \phi' f' = \phi \phi'' - (n-2)(1 - (\phi')^2). \end{cases} \quad (3.9)$$

Hacemos las sustituciones

$$x = \phi', \quad y = (n-1)\phi' - \phi f', \quad dt = \frac{dr}{\phi},$$

y encontramos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en  $x, y$ :

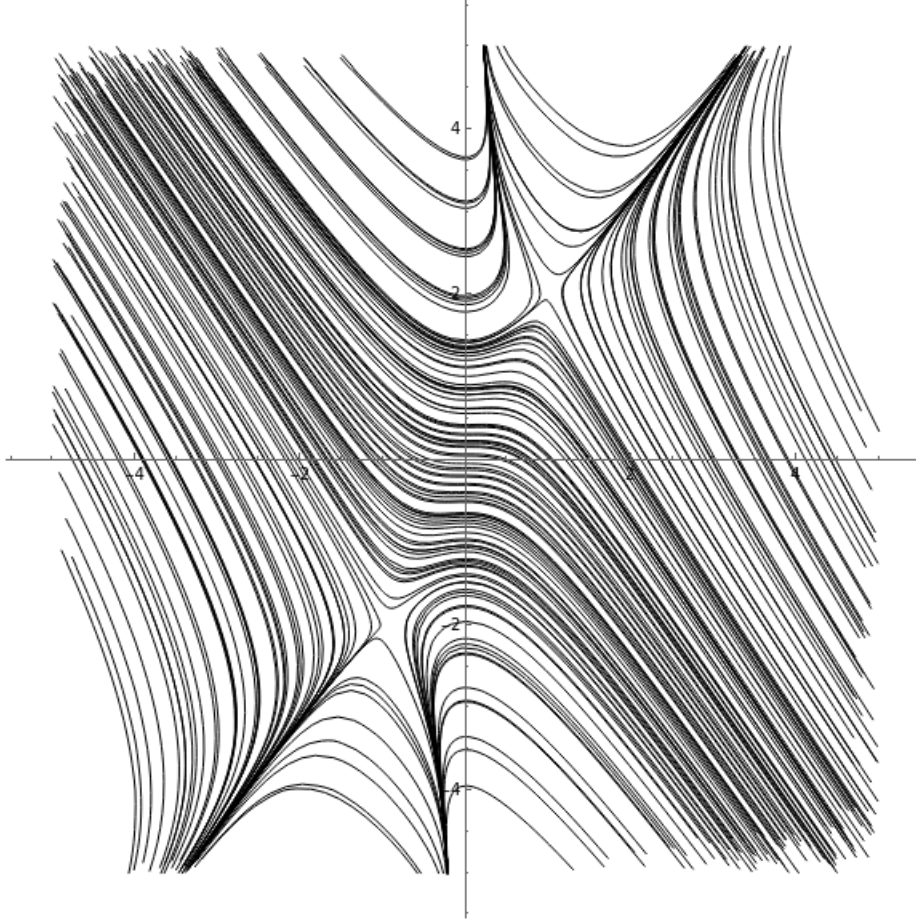
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \phi \frac{dx}{dr} = \phi \phi'', \\ \frac{dy}{dt} = \phi \frac{dy}{dr} = -\phi \phi' f' - \phi^2 f'' + (n-1)\phi \phi''. \end{cases}$$

Utilizando el primer sistema encontrado y  $xy = (n-1)(\phi')^2 - \phi \phi' f'$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \phi \phi' f' + (n-2)(1 - (\phi')^2) = \phi \phi' f' - (n-1)(\phi')^2 + (\phi')^2 + n-2 = x^2 - xy + n-2, \\ \frac{dy}{dt} &= -\phi \phi' f' = xy - (n-1)x^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, basta analizar el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - xy + n-2, \\ \frac{dy}{dt} = (1-n)x^2 + xy. \end{cases} \quad (3.10)$$

Espacio de fase del sistema (3.10) en dimensión  $n = 3$ 

Para que  $g$  y  $f$  se extiendan suavemente al origen deben de cumplirse las condiciones

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

Para ver por qué necesitamos estas condiciones veamos el siguiente lema.

**Lema 3.6.1.** *La métrica del producto alabeado  $(\mathbb{R} \times_{\phi} \mathbb{S}^{n-1}, dr^2 + \phi^2(r)g_{\mathbb{S}^{n-1}})$  tiene la siguiente expresión en coordenadas polares  $x = rs$ .*

$$dr^2 + \phi^2(r)g_{\mathbb{S}^{n-1}} = \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\phi^2(r)}{r^4} \right) \left( \sum_{i=1}^n x^i dx^i \right)^2 + \frac{\phi^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2.$$

*Demostración.* Consideramos  $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  y coordenadas polares, es decir para  $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ , escribimos  $x = rs$ , y la métrica como

$$g_{\mathbb{S}^{n-1}} = \sum_{n=1}^n ds^i \otimes ds^i.$$



A partir de esto queremos encontrar una expresión útil para  $g_{S^{n-1}}$  que imponga restricciones sobre  $\phi$ . Del cambio de coordenadas obtenemos que  $dx^i = s^i dr + r ds^i$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i &= \sum_{i=1}^n (s^i dr + r ds^i) \otimes (s^i dr + r ds^i) \\ &= \sum_{i=1}^n (s^i)^2 dr \otimes dr + (s^i dr) \otimes (r ds^i) + (r ds^i) \otimes (s^i dr) + r^2 ds^i \otimes ds^i \\ &= \sum_{i=1}^n (s^i)^2 dr \otimes dr + r^2 ds^i \otimes ds^i + (r dr) \otimes (s^i ds^i) + (s^i ds^i) \otimes (r dr). \end{aligned}$$

Como  $\sum_{i=1}^n (s^i)^2 = 1$  entonces  $\sum_{i=1}^n s^i ds^i = 0$ , con lo cual las últimas dos sumas son 0 y obtenemos

$$\sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i = \sum_{i=1}^n (s^i)^2 dr \otimes dr + r^2 ds^i \otimes ds^i = dr^2 + r^2 g_{S^{n-1}}.$$

Notemos lo siguiente: Como  $\|x\|^2 = \|rs\|^2 = r^2$ ,

$$2r dr = 2 \sum_{i=1}^n x^i dx^i,$$

de modo que

$$dr = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n x^i dx^i.$$

Combinando esto con el resultado anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 &= \frac{1}{r^2} \left( \sum_{i=1}^n x^i dx^i \right)^2 + r^2 g_{S^{n-1}}, \\ g_{S^{n-1}} &= \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - \frac{1}{r^4} \left( \sum_{i=1}^n x^i dx^i \right)^2, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} dr^2 + \phi^2(r) g_{S^{n-1}} &= \frac{1}{r^2} \left( \sum_{i=1}^n x^i dx^i \right)^2 + \left( \frac{\phi(r)}{r} \right)^2 \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - \left( \frac{\phi(r)}{r^2} \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n x^i dx^i \right)^2 \\ &= \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\phi^2(r)}{r^4} \right) \left( \sum_{i=1}^n x^i dx^i \right)^2 + \frac{\phi^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2. \end{aligned} \quad \square$$

Del lema anterior, las funciones

$$\frac{1}{r^2} - \frac{\phi^2(r)}{r^4}, \quad \frac{\phi^2(r)}{r^2}$$

deben ser suaves. Para que  $\phi^2(r)/r^2$  sea continua en 0, debe suceder que  $\phi(0) = 0$  y por lo tanto la serie de Taylor de  $\phi$  en 0 es de la forma

$$\phi'(0)r + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} r^n.$$

Como se busca que la primera función sea continua en 0, entonces debe suceder que

$$\frac{\phi^2(r)}{r^4} = o\left(\frac{c}{r^2}\right), \quad c = \phi'(0) = 1.$$

Ahora analizaremos el sistema (3.10). Sus puntos fijos son  $(1, n-1)$ ,  $(-1, 1-n)$ . Para linealizar el sistema en  $(1, n-1)$ , renombramos

$$F(x, y) = x^2 - xy + n - 2, \quad G(x, y) = (1-n)x^2 + xy,$$

y hacemos los cálculos en el punto deseado:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x}(1, n-1)x + \frac{\partial F}{\partial y}(1, n-1)y = (3-n)x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial x}(1, n-1)x + \frac{\partial G}{\partial y}(1, n-1)y = ((1-n)2 + n-1)x + y = (1-n)x + y. \end{aligned}$$

Con esto tenemos la linealización

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-n & -1 \\ 1-n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

y calculamos los valores propios:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} 3-n-\lambda & -1 \\ 1-n & 1-\lambda \end{array} \right| &= (3-n-\lambda)(1-\lambda) + 1-n = 3-n-\lambda-3\lambda+n\lambda+\lambda^2+1-n \\ &= \lambda^2 + (n-4)\lambda + 4-2n = (\lambda-2)(\lambda-2+n) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto los valores propios son 2 y  $2-n$ , con lo cual concluimos que en el punto  $(1, n-1)$  se tiene una silla. Análogamente, se tiene una silla en  $(-1, 1-n)$ . Nos enfocamos en el punto  $(1, n-1)$  y las dos soluciones tales que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (1, n-1).$$

Una de ellas cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, \infty),$$

y se puede mostrar que define un solitón **completo** mientras que la métrica asociada a la otra trayectoria es **incompleta** [Cho07].

En [BDW16] se encuentra una función potencial para el solitón de Bryant en dimensión 5, con el cual, a partir de el sistema de ecuaciones (3.9) se puede encontrar una solución explícita al solitón de Bryant. Para terminar esta breve discusión sobre los solitones, probamos el siguiente resultado que dice que en cierto sentido, los solitones cerrados esencialmente distintos a los puntos fijos del flujo de Ricci se contraen.

**Proposición 3.6.2.** *Un solitón cerrado estático ó que se contrae es de Einstein.*

*Demostración.* La ecuación que genera a los solitones es

$$2 \operatorname{Ric} + \mathcal{L}_X - 2\lambda = 0,$$

donde (como cuando se introdujo el concepto de solitón)  $\sigma_t := 1 - 2\lambda t$ ,  $Y_t := X/\sigma_t$  y  $\varphi_t$  se define como la familia de difeomorfismos generada por  $Y_t$ . Por (1.9) la ecuación anterior en un marco ortonormal es

$$2 \operatorname{Ric}_{ij} + (\nabla_i X)_j + (\nabla_j X)_i - 2\lambda g_{ij} = 0.$$

Al tomar la traza obtenemos

$$R + g^{ij}(\nabla_i X)_j - \lambda n = 0.$$

Como las coordenadas son ortonormales, tenemos que

$$\operatorname{div}(X) = \operatorname{tr}(\nabla \bullet X) = g^{ij}(\nabla_i X)_j,$$

pues para  $T : V \rightarrow V$ , al tener bases  $e_j$  en  $V$  y  $w^j$  en el espacio dual  $V^*$ , se tiene que  $\operatorname{tr}(T) = w^j \circ T(e_j)$ , lo cual es fácil de ver con la representación matricial de  $T$ . Con esto, tenemos la ecuación

$$R + \operatorname{div}(X) - \lambda n = 0.$$

Como la variedad no tiene frontera, por el teorema de la divergencia (Gauss) obtenemos

$$\int_M R d\mu = \lambda n \int_M d\mu,$$

$$\lambda = \frac{r}{n},$$

donde  $r$  es la curvatura escalar promedio  $(\int_M R d\mu)/(\int_M d\mu)$ . Por otro lado, como el solitón cumple por definición que  $g_t = \sigma_t \varphi_t^* g_0$ , por la proposición 2.2.12 sabemos que

$$R_t = R_{\sigma_t \varphi_t^* g} = \frac{1}{\sigma_t} R_{\varphi_t^* g} = \frac{1}{\sigma_t} \varphi_t^* R,$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial t} R_t = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\sigma_t} \varphi_t^* R \right) = -\frac{\sigma_t'}{\sigma_t^2} \varphi_t^* R + \frac{1}{\sigma_t} \frac{d}{dt} \varphi_t^* R = -\frac{\sigma_t'}{\sigma_t} R_t + \frac{1}{\sigma_t} \frac{d}{dt} \varphi_t^* R,$$

y al evaluar en  $t = 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} R_t \Big|_{t=0} = -\frac{\sigma_0'}{\sigma_0} R + \frac{1}{\sigma_0} \mathcal{L}_{Y_0} R = 2\lambda R + \mathcal{L}_X R.$$

Al hacer un cambio de variable, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{t_0} = 2\lambda R_{t_0} + \mathcal{L}_X R_{t_0}.$$

Sustituyendo el valor de  $\lambda$  y sin escribir el tiempo en el que se está evaluando obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \frac{2r}{n} R + \mathcal{L}_X R.$$

Sabemos del teorema 2.3.1 que

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2,$$

donde  $|\text{Ric}|^2 = \text{Ric}^{pq} \text{Ric}_{pq}$ . Por lo tanto

$$\frac{2r}{n} R + \mathcal{L}_X R = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2.$$

La derivada de Lie tiene las expresiones

$$\mathcal{L}_X R = dR(X) = X(R) = \langle \text{grad}(R), X \rangle,$$

$$\Delta R - \langle \text{grad}(R), X \rangle + 2|\text{Ric}|^2 - \frac{2r}{n} R = 0.$$

Reescribimos la expresión anterior reemplazando  $R$  con  $R - r$  donde  $r$  es la curvatura escalar promedio. Los primeros dos términos no cambian, pues el gradiente y el laplaciano de una función más una constante son iguales a los objetos correspondientes de la función original. Con respecto a los dos últimos términos notemos que

$$\begin{aligned} 2 \left| \text{Ric} - \frac{r}{n} g \right|^2 + \frac{2r}{n} (R - r) &= 2 \left( \text{Ric} - \frac{r}{n} g \right)^{ij} \left( \text{Ric} - \frac{r}{n} g \right)_{ij} + \frac{2r}{n} (R - r) \\ &= 2|\text{Ric}|^2 - \frac{4r}{n} R + \frac{2r^2}{n} + \frac{2r}{n} (R - r) = 2|\text{Ric}|^2 - \frac{2r}{n} R. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Delta(R - r) - \langle \text{grad}(R - r), X \rangle + 2 \left| \text{Ric} - \frac{r}{n} g \right|^2 + \frac{2r}{n} (R - r) = 0. \quad (3.11)$$

Notemos que para  $x_0 \in M$  tal que  $R_{min} := R(x_0) = \min_{x \in M} R(x)$ ,

$$R_{min} = \frac{\int_M R_{min} d\mu}{\int_M d\mu} \leq \frac{\int_M R d\mu}{\int_M d\mu} = r,$$

de modo que

$$R_{min} - r \leq 0.$$

Al evaluar la ecuación (3.11) en  $x_0$ , como  $\text{grad}(R) = \text{grad}(R - r)$  entonces

$$0 = \text{grad}(R)(x_0) = \text{grad}(R - r)(x_0),$$

y

$$2 \left| \text{Ric}_{x_0} - \frac{r}{n} g_{x_0} \right|^2 + \frac{2r}{n} (R_{min} - r) = -\Delta(R_{min} - r).$$

Como el laplaciano en un mínimo es no negativo, se tiene que

$$2 \left| \text{Ric}_{x_0} - \frac{r}{n} g_{x_0} \right|^2 + \frac{2r}{n} (R_{\min} - r) \leq 0,$$

y como el solitón es estático o se contrae, se tiene la condición

$$\lambda = \frac{r}{n} \geq 0.$$

Como el segundo término es positivo, obtenemos  $\left| \text{Ric}_{x_0} - \frac{r}{n} g_{x_0} \right|^2 = 0$  y por lo tanto

$$\text{Ric}_{x_0} = \frac{r}{n} g_{x_0}.$$

Al tomar la traza concluimos que  $R_{\min} = r$ , o bien que  $R \equiv r$ . Al sustituir en (3.11) se tiene el resultado

$$\text{Ric} = \frac{r}{n} g. \quad \square$$

De esta proposición y de un corolario del teorema de Myers (ver [Lee19], pg 361) se tiene la siguiente equivalencia.

**Proposición 3.6.3.** *Sea un solitón completo de constante inicial mayor a cero, sin frontera y orientable. Entonces es compacto si y sólo si es de Einstein.*

*Demostración.* Supongamos que el solitón es compacto; como no tiene frontera es cerrado y por la proposición 3.6.2 la variedad debe ser de Einstein. Por otro lado, si suponemos que es de Einstein, como la variedad es completa y de constante inicial mayor a cero (curvatura escalar positiva), por el teorema de Myers debe ser compacta.  $\square$

### 3.7. Respiradores

Como los solitones son puntos fijos en el espacio de módulos de métricas riemannianas módulo difeomorfismo, se les puede pensar como una órbita periódica trivial. En general, a las órbitas periódicas en este espacio de módulos se les llama *respiradores*.

**Definición 3.7.1.** *Un respirador es una solución al flujo de Ricci para la cual existen  $t_1 < t_2$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\phi \in \text{Diff}(M)$  tales que*

$$g_{t_1} = \alpha \phi^* g_{t_2}.$$

Como sistema dinámico en el espacio de módulos, podemos pensar un respirador como una solución periódica, con periodo  $T = t_2 - t_1$  o menor. En caso de que esta definición aplicara para todo par de tiempos  $t_1, t_2$ , se tendría la definición de un solitón. Para  $\alpha = 1$ ,  $\alpha < 1$ ,  $\alpha > 1$ , se dice que el respirador es *estático*, se *contrae*, o se *expande* correspondientemente.

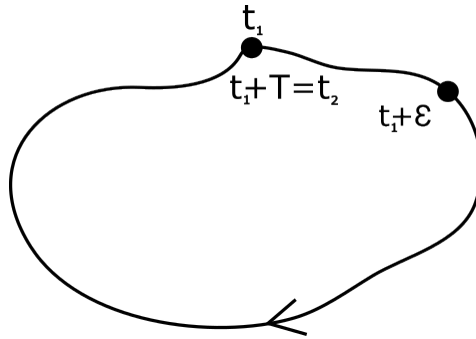


Figura 3.3

Los respiradores cumplen un resultado análogo a la proposición 3.6.2. Para esto probamos un resultado auxiliar para el flujo de Ricci normalizado.

**Lema 3.7.2.** *La evolución de la curvatura escalar bajo el flujo de Ricci normalizado está dada por*

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + 2|\mathring{\text{Ric}}|^2 + \frac{2}{n} R(R - r). \quad (3.12)$$

Donde  $\mathring{\text{Ric}} := \text{Ric} - \frac{R}{n}g$  es el “tensor de Ricci sin traza”.

*Demostración.* El flujo de Ricci normalizado está definido por la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2 \text{Ric} + \frac{2r}{n}.$$

Calculamos la evolución de la curvatura escalar para el flujo de Ricci normalizado utilizando la proposición 2.2.9. Notemos que para el flujo de Ricci normalizado se tienen las siguientes cantidades:

$$h_{pq} = \frac{\partial}{\partial t} g_{pq} = -2 \text{Ric}_{pq} + \frac{2r}{n} g_{pq}, \quad h^{pq} = g^{pi} g^{qj} h_{ij} = -2 \text{Ric}^{pq} + \frac{2r}{n} g^{pq}, \quad H = g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = 2(r - R).$$

Por lo tanto las primeras dos sumas de

$$\frac{\partial}{\partial t} R = -\Delta H + \nabla^p \nabla^q h_{pq} - h^{pq} \text{Ric}_{pq},$$

se desarrollan de manera análoga a cuando se calculó la evolución de la curvatura escalar bajo flujo de Ricci sin normalizar en la ecuación (2.6), es decir

$$-\nabla H + \nabla^p \nabla^q h_{pq} = \Delta R.$$

Solo hace falta calcular el último término de la evolución de la curvatura escalar.

$$-h^{pq} \text{Ric}_{pq} = 2|\text{Ric}|^2 - \frac{2Rr}{n} = 2\left(|\text{Ric}|^2 - \frac{R^2}{n}\right) + \frac{2R^2}{n} - \frac{2Rr}{n} = 2|\mathring{\text{Ric}}|^2 + \frac{2}{n}R(R-r).$$

Por lo tanto la evolución de la curvatura escalar bajo el flujo de Ricci normalizado está dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + 2|\mathring{\text{Ric}}|^2 + \frac{2}{n}R(R-r). \quad \square$$

**Proposición 3.7.3.** *Un respirador del flujo de Ricci normalizado en una variedad cerrada es una variedad de Einstein con curvatura escalar  $R \leq 0$ , o bien tiene curvatura escalar estrictamente positiva.*

*Demostración.* Por compacidad y periodicidad en el tiempo, la curvatura escalar alcanza su máximo y su mínimo. Sea  $p = (p_0, t_0)$  un mínimo de  $R$  y denotamos  $R(p)$  como  $R_{min}$ . Si  $R_{min} > 0$  no hay nada que demostrar, así que supongamos que  $R_{min} \leq 0$ . Como  $\Delta R \geq 0$  y  $\partial R / \partial t = 0$  en  $p$ , por la ecuación (3.12) se tiene que

$$-2|\mathring{\text{Ric}}|^2 - \frac{2}{n}R_{min}(R_{min} - r) \geq 0,$$

y por lo tanto  $R_{min}(R_{min} - r) \leq 0$ . Si  $R_{min} < 0$  entonces  $R_{min} - r \geq 0$  y por lo tanto  $R$  debe ser constante e igual a  $r$ ; al sustituir en la ecuación (3.12) obtenemos

$$|\mathring{\text{Ric}}| = 0.$$

Por lo tanto la variedad debe ser de Einstein con curvatura escalar negativa.

Ahora supongamos que  $R_{min} = 0$ . Como antes, por la ecuación (3.12) sabemos que  $\Delta R \leq 0$  en  $p$  y por lo tanto  $\Delta R(p) = 0$ . Supongamos que existe un abierto  $\Omega \neq \emptyset$  en la variedad a tiempo  $t_0$  tal que  $\Delta R < 0$  en  $\Omega$  y sin pérdida de generalidad tomamos  $\Omega$  de frontera suave. Como  $\text{div}(\text{grad}(R)) < 0$  entonces no hay puntos repulsores del campo gradiente de  $R$  en  $\Omega$ , en otras palabras  $R$  solo puede alcanzar su mínimo  $p_0$  (que es cero) en  $\partial\Omega$ .

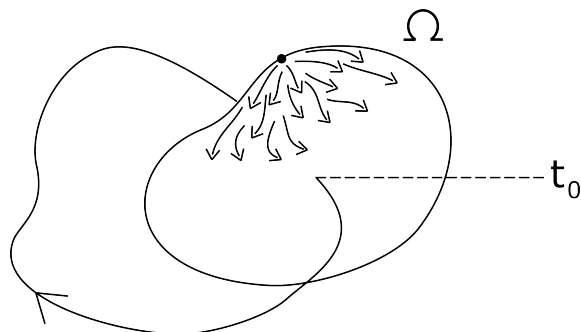


Figura 3.4

Al aplicar el principio del máximo de Hopf 1.3.5 se tiene que la derivada en la dirección normal exterior debe ser menor que cero, pero esto es imposible ya que  $\nabla R = 0$  en  $p$  y  $p$  es un mínimo.

Por lo tanto  $\Omega = \emptyset$  y debe suceder que  $\Delta R \geq 0$  globalmente. Como  $R$  alcanza su máximo, aplicando el principio del máximo 1.3.5,  $R$  debe ser constante e igual a 0. Como antes, de la ecuación (3.12) se obtiene que  $\mathring{\text{Ric}} = 0$  y por lo tanto se tiene una variedad Ricci-plana para todo tiempo  $t$ .  $\square$

Este resultado ayuda a clasificar a los objetos de usual estudio en sistemas dinámicos. En el caso del espacio de módulos  $\mathcal{M}$  nos referimos a solitones y respiradores, donde básicamente son conocidos (Einstein) o como dice la proposición anterior, debe de tenerse curvatura escalar positiva, con lo cual se asegura que el flujo encontrará una singularidad como se verá mas adelante. En el caso de una variedad cerrada, Perelman prueba en [Per02] que no pueden existir respiradores no triviales, es decir los únicos respiradores que existen son solitones y por lo tanto el espacio de módulos no tiene órbitas periódicas; en el caso no compacto Peter Topping construye un respirador expansivo no trivial en dimensión arbitraria [Top22].





# Capítulo 4

## Singularidades

### 4.1. Modelos

En esta sección primero definimos el concepto de un cuello pellizado, con lo cual damos pie a la clasificación de singularidades y a su vez la introducción de los modelos de singularidad.

**Definición 4.1.1.** (Singularidad de cuello pellizado, [CK04, pg.39])

Una solución  $(M^{n+1}, g_t)$  al flujo de Ricci tiene una **singularidad de cuello pellizado** a tiempo  $T < \infty$  si cumple las siguientes condiciones:

1. Existencia de un abierto dependiente del tiempo  $N_t \subset M^{n+1}$  tal que  $N_t$  es difeomorfo a  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n)/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un grupo finito que actúa libremente en el cilindro  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ .
2. El pullback de la métrica  $g_t|_{N_t}$  a  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ , se aproxima de manera asintótica al “solitón cilíndrico”

$$ds^2 + 2(n-1)(T-t)g_{can}$$

conforme  $t \rightarrow T$ , donde  $g_{can}$  es la métrica canónica en la esfera.

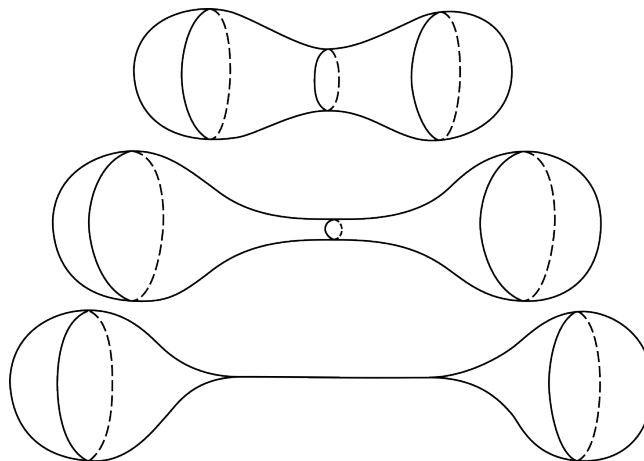


Figura 4.1

En general existen varios tipos de singularidades, de las cuales una singularidad de cuello pellizado formará parte. Enunciamos algunos tipos de singularidades.

**Definición 4.1.2.** Sea  $(M^n, g_t)$  una solución del flujo de Ricci que tiene un tiempo máximo de existencia  $T \leq \infty$  y no extendible de forma diferencial a tiempos mayores a  $T$ . Se dice que  $(M^n, g_t)$  tiene una

- **Singularidad de Tipo I** si  $T < \infty$  y

$$\sup_{M^n \times [0, T)} (T - t) |\text{Rm}_t| < \infty.$$

- **Singularidad de Tipo IIa** si  $T < \infty$  y

$$\sup_{M^n \times [0, T)} (T - t) |\text{Rm}_t| = \infty.$$

- **Singularidad de Tipo IIb** si  $T = \infty$  y

$$\sup_{M^n \times [0, \infty)} t |\text{Rm}_t| = \infty.$$

- **Singularidad de Tipo III** si  $T = \infty$  y

$$\sup_{M^n \times [0, \infty)} t |\text{Rm}_t| < \infty.$$

Veremos que el solitón cilíndrico tiene una singularidad de tipo I. Con este propósito utilizamos el siguiente resultado.

**Lema 4.1.3.** Sean  $M_1, M_2$  dos variedades riemannianas con tensores de curvatura  $R_1, R_2$ . Sea  $M = M_1 \times M_2$  su producto y sean  $X_i, Y_i, Z_i, W_i$  campos en  $M_i$ , entonces

$$R(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2, W_1 + W_2) = R_1(X_1, Y_1, Z_1, W_1) + R_2(X_2, Y_2, Z_2, W_2).$$

La demostración de esta proposición se sigue de

$$\nabla_{X_1 + X_2}^M (Y_1 + Y_2) = \nabla_{X_1}^1 Y_1 + \nabla_{X_2}^2 Y_2.$$

En particular para el cilindro, como la recta es plana se tiene que el tensor de curvatura del cilindro es en esencia el tensor de curvatura de la esfera, evaluado en las proyecciones de los campos al haz tangente de la esfera. Es decir, para  $M_1 = \mathbb{S}^n$  y  $M_2 = \mathbb{R}$ ,

$$R(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2, W_1 + W_2) = R_{\mathbb{S}^n}(X_1, Y_1, Z_1, W_1).$$

**Proposición 4.1.4.** *El solitón cilíndrico  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n, ds^2 + 2(n-1)(T-t)g_{can})$  tiene una singularidad de tipo I, donde  $T = (2(n-1))^{-1}$ .*

*Demostración.* Por el lema 1.5.4 sabemos que

$$R_{S^n}(X, Y, Z, W) = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle.$$

Por lo tanto, para una base ortonormal, si algún campo es tangente a  $\mathbb{R}$  entonces el tensor de curvatura es cero y se tiene que en el cilindro  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n, ds^2 + g_{can})$

$$R_{ijkl} = (R_{S^n})_{ijkl},$$

de modo que para  $g := g_{can}$

$$\begin{aligned} |\text{Rm}_t|^2 &= \frac{1}{(2(n-1)(T-t))^2} (R_{S^n})^{ijkl} (R_{S^n})_{ijkl} = \frac{1}{(2(n-1)(T-t))^2} g^{ip} g^{jq} g^{kr} g^{lu} R_{pqru} R_{ijkl} \\ &= \frac{g^{ip} g^{jq} g^{kr} g^{lu} (g_{pu} g_{qr} - g_{pr} g_{qu}) (g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl})}{(2(n-1)(T-t))^2} \\ &= \frac{g^{ip} g^{jq} g^{kr} g^{lu} (g_{pu} g_{qr} g_{il} g_{jk} - g_{pu} g_{qr} g_{ik} g_{jl} - g_{pr} g_{qu} g_{il} g_{jk} + g_{pr} g_{qu} g_{ik} g_{jl})}{(2(n-1)(T-t))^2} \\ &= \frac{2n(n-1)}{(2(n-1)(T-t))^2} \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\sup_{M^n \times [0, T)} |T-t| |\text{Rm}_t| = \sqrt{\frac{n}{2(n-1)}} < \infty. \quad \square$$

Con este resultado tenemos que una singularidad de cuello pellizado se aproxima a una singularidad de tipo I. Se dice que el solitón cilíndrico modela (localmente) a las singularidades de cuello pellizado y de manera más general, a una solución al flujo de Ricci se le llama *modelo de singularidad* de una solución (con singularidad) si existe una sucesión de soluciones punteadas (con puntos distinguidos) al flujo de Ricci que convergen a ella en el sentido de Cheeger-Hausdorff-Gromov<sup>1</sup>. A manera de comentario, seamos más explícitos con respecto a esta terminología. Este tipo de estudio se lleva a cabo por medio de un *blow-up* utilizando el método de *dilatación parabólica*. Se comienza con una solución  $(M, g(t))$  al flujo de Ricci con tiempo de existencia en  $[0, T)$  y se escoge

- Una sucesión de puntos  $x_j \in M$ ,
- Una sucesión creciente  $t_j \in [0, T)$ ,
- Factores de dilatación  $\lambda_j > 0$ .

Con estos objetos se define una familia punteada  $(M, g_j(t), x_j)$  de soluciones al flujo de Ricci donde

$$g_j(t) = \lambda_j g \left( t_j + \frac{t}{\lambda_j} \right).$$

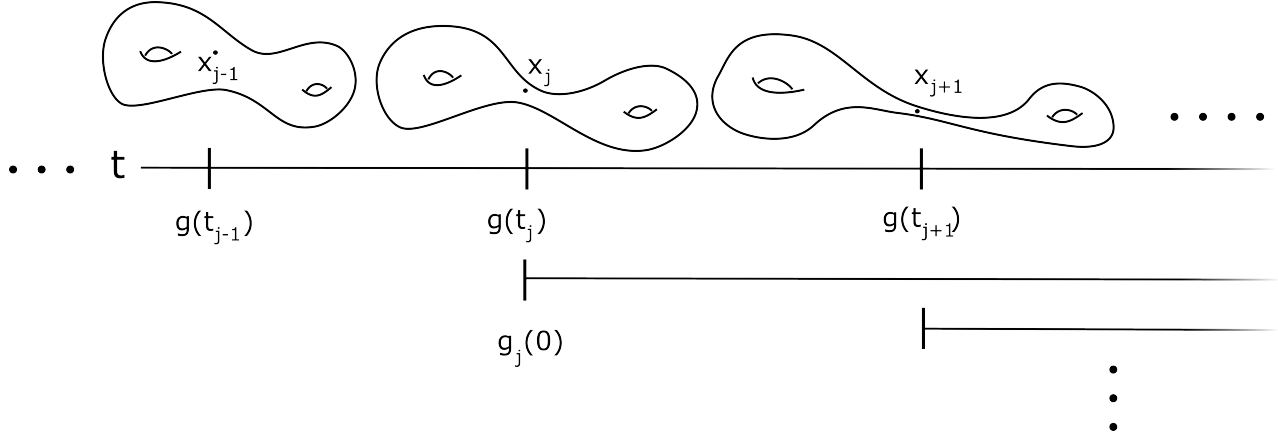


Figura 4.2: Sucesión de dilataciones parabólicas.

Notemos que  $g(t_j) = \lambda_j^{-1}g_j(0)$ , es decir la traslación en el tiempo asegura que  $g_j(0)$  es un múltiplo escalar de  $g(t_j)$ , la dilatación temporal asegura que  $g_j$  siga siendo solución al flujo de Ricci y la dilatación espacial se escoge de forma que el límite de las dilataciones parabólicas no sea plano; esto se logra si para toda  $j$  se cumple que

$$|\mathrm{Rm}_{g_j}(x_j, 0)| = 1.$$

**Lema 4.1.5.** *La dilatación parabólica  $g_j(t)$  es una solución del flujo de Ricci y si*

$$\lambda_j = |\mathrm{Rm}_g(x_j, t_j)|,$$

*entonces la norma del tensor de curvatura de  $g_j$  en  $(x_j, 0)$  es 1 para toda  $j$ .*

*Demostración.* Veamos que  $g_j(t)$  es solución del flujo de Ricci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}g_j(t) &= \lambda_j \frac{\partial}{\partial t}g(t_j + \lambda_j^{-1}t) = \lambda_j \frac{\partial}{\partial t}g|_{t_j + \lambda_j^{-1}t} \cdot \lambda_j^{-1} = -2 \mathrm{Ric}_g(t_j + \lambda_j^{-1}t) \\ &= -2 \mathrm{Ric}_{\lambda_j g}(t_j + \lambda_j^{-1}t) = -2 \mathrm{Ric}(g_j(t)). \end{aligned}$$

Ahora veamos que  $|\mathrm{Rm}_{g_j}(x_j, 0)| = 1$ . Por la proposición 2.2.12 se tiene que

$$|\mathrm{Rm}_{g_q}(x_q, 0)| = \lambda_j^{-1}|\mathrm{Rm}_g(x_q, t_q)| = 1. \quad \square$$

Notemos que, por el tiempo de existencia de  $g$  tenemos que

$$0 \leq t_j + \frac{t}{\lambda_j} < T, \quad -\lambda_j t_j \leq t < \lambda_j(T - t_j).$$

Es decir el tiempo de existencia de  $g_j$  se encuentra en  $[-\lambda_j t_j, \lambda_j(T - t_j))$ , que es un intervalo que contiene a 0. Al tomar el límite de  $(M, g_j(t), x_j)$ , si la familia de soluciones converge en el sentido de Cheeger-Hausdorff-Gromov a una solución límite  $(M_\infty, g_\infty(t), x_\infty)$  del flujo de Ricci, a ésta se le llama *modelo de singularidad* y como se vio, su curvatura es distinta de cero.

<sup>1</sup>Convergencia de variedades riemannianas completas punteadas, lo cual tiene que ver con convergencia en cada norma  $C^k$  y con derivadas covariantes de orden superior; este material se encuentra en [CLN06].

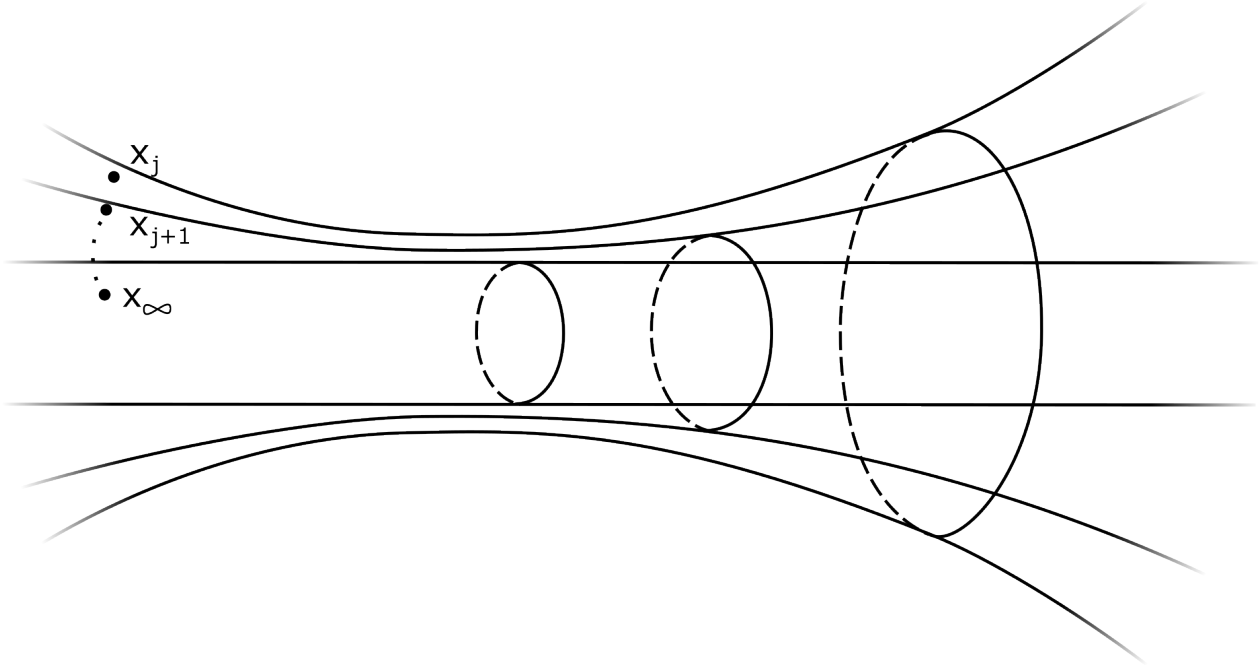


Figura 4.3

En particular los cuellos pellizados tienen modelo de singularidad con singularidad de tipo I. En este contexto, una singularidad de cuello pellizado está caracterizada por la existencia de una sucesión convergente de dilataciones parabólicas, con solución límite local (modelo de singularidad) el solitón cilíndrico (ver [CLN06]). Estas singularidades son comúnmente denominadas como singularidades de *formación rápida*, así como las singularidades de tipo II son llamadas de *formación lenta*.

## 4.2. Variedades de Einstein

Como se ha visto a lo largo de este texto, las variedades de Einstein son especialmente útiles al momento de clasificar y encontrar soluciones explícitas, lo cual sigue siendo el caso al analizar singularidades.

**Proposición 4.2.1.** *El flujo de Ricci en una variedad de Einstein completa de curvatura escalar positiva tiene una singularidad de tipo I.*

*Demostración.* Sea  $(M, g_0)$  una variedad de Einstein con constante de Einstein  $\lambda$  y tal que  $R_0 > 0$ , entonces sabemos que  $\lambda > 0$ . Por lo tanto la solución se vuelve singular en tiempo  $T = (2\lambda)^{-1} < \infty$  y podemos escribir la métrica  $g_t$  como

$$g_t = (1 - 2\lambda t)g_0 = 2\lambda(T - t)g_0.$$

Por la proposición 2.2.12 sabemos que

$$|\text{Rm}_t(x, t)| = (2\lambda(T - t))^{-1}|\text{Rm}_0(x, 0)|$$

y por lo tanto

$$\sup_{M \times [0, T)} (T - t) |\text{Rm}_t| = (2\lambda)^{-1} \sup_M |\text{Rm}_0|.$$

Como  $M$  es una variedad de Einstein completa y de curvatura escalar positiva, por el teorema de Myers,  $M$  debe ser compacta y por lo tanto la cantidad de arriba debe ser acotada, es decir  $M$  tiene una singularidad de tipo I en tiempo  $T$ .  $\square$

En particular, por la proposición 3.6.2 los solitones cerrados, completos y de constante mayor a cero tienen una singularidad de tipo I. Como posible motivación al estudio de una solución llamada el *solitón de Bryant* (que analizaremos más adelante) mencionamos un tipo de singularidad relacionada a los cuellos pellizcados (no de tipo I) al cual se le llama *singularidad de cuello pellizcado degenerado* pues un ejemplo de ellas forma una *cúspide*. Recibe este nombre de manera dual o complementaria, a como se definen las singularidades de cuello pellizcado, es decir se reemplaza la condición 2. de la definición 4.1.1 con su negación. Se busca que el pullback de la métrica restringida a  $N_t$  no se aproxime al solitón cilíndrico, en otras palabras un cuello pellizcado degenerado es como un cuello pellizcado pero difieren en “el límite”, en el caso degenerado existe un blow-up con modelo de singularidad (local) distinto al solitón cilíndrico.

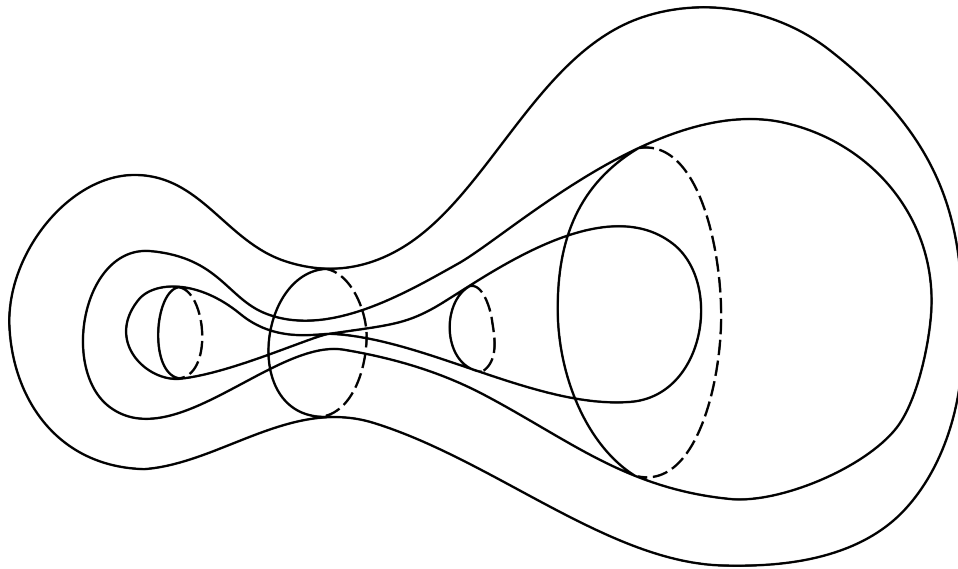


Figura 4.4: Cuello pellizcado degenerado

Se espera que el solitón de Bryant sea un modelo de singularidad de las singularidades de tipo IIa, de las cuales el cuello pellizcado degenerado forma parte. Comentaremos brevemente acerca de esto al final de este trabajo.

**Proposición 4.2.2.** *El flujo de Ricci en una variedad de Einstein de curvatura escalar negativa y tensor de curvatura acotado, tiene una singularidad de tipo III.*

*Demostración.* Sea  $(M, g_0)$  una variedad de Einstein con constante de Einstein  $\lambda$  y tal que  $R_0 < 0$  y  $|\text{Rm}_0| < M$ . Entonces  $\lambda < 0$  y la solución, por ser de la forma  $(1 - 2\lambda t)g_0$  existe para todo tiempo, es decir se hace singular en tiempo  $T = \infty$ .

De la misma forma que en la proposición anterior

$$\begin{aligned} |\text{Rm}_t(x, t)| &= (1 - 2\lambda t)^{-1} |\text{Rm}_0(x, 0)|, \\ \sup_{M \times [0, \infty)} t |\text{Rm}_t| &\leq (-2\lambda)^{-1} \sup_M |\text{Rm}_0(x, 0)| < M < \infty \end{aligned}$$

Es decir,  $M$  tiene una singularidad de tipo III.  $\square$

Por ejemplo, las variedades de curvatura seccional constante son variedades de Einstein y podemos calcular las constantes  $M$  que acotan los respectivos supremos de las proposiciones anteriores. Es consecuencia del lema 1.5.4 que para una variedad  $(M^n, g)$  de curvatura seccional constante  $K_0$

$$\text{Ric} = K_0(n - 1)g, \quad (4.1)$$

y

$$R_{ijkl} = K_0(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}).$$

Por lo tanto podemos calcular la norma del tensor de curvatura:

$$\begin{aligned} |\text{Rm}|^2 &= R^{ijkl} R_{ijkl} = g^{ai} g^{bj} g^{ck} g^{dl} R_{abcd} R_{ijkl} = g^{qi} g^{bj} g^{ck} g^{dl} K_0^2 (g_{ad}g_{bc} - g_{ac}g_{bd})(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) \\ &= K_0^2 g^{ai} g^{bj} g^{ck} g^{dl} (g_{ad}g_{bc}g_{il}g_{jk} - g_{ad}g_{bc}g_{ik}g_{jl} - g_{ac}g_{bd}g_{il}g_{jk} + g_{ac}g_{bd}g_{ik}g_{jl}) \\ &= K_0^2 (g_d^i g_c^j g_i^c g_j^d - g_d^i g_c^j g_i^c g_j^d - g_c^i g_d^j g_j^c g_i^d + g_c^i g_d^j g_j^c g_i^d + g_c^i g_d^j g_i^c g_j^d) \\ &= K_0^2 (n^2 - n - n + n^2) = 2K_0^2 n(n - 1), \end{aligned}$$

de donde

$$|\text{Rm}| = |K_0| \sqrt{2n(n - 1)} \quad (4.2)$$

Como se remarcó anteriormente, la constante de Einstein de esta variedad es  $K_0(n - 1)$  y por lo tanto en el caso de curvatura escalar positiva se tiene que  $K_0 > 0$ . En el contexto de la proposición 4.2.1, juntando lo anterior sabemos que

$$\sup_{M \times [0, T)} (T - t) |\text{Rm}_t| = (2K_0(n - 1))^{-1} \sup_M |\text{Rm}_0| = \frac{|K_0| \sqrt{2n(n - 1)}}{2K_0(n - 1)} = \sqrt{\frac{n}{2(n - 1)}}. \quad (4.3)$$

En el caso de curvatura escalar negativa, como  $|K_0|/K_0 = -1$  el signo negativo de la desigualdad que análogamente debe utilizarse, se vuelve positivo y por lo tanto se tiene la cota igual a la cantidad anteriormente encontrada.

Finalmente, analizamos el caso de constante de Einstein cero.



**Proposición 4.2.3.** *El flujo de Ricci en una variedad de Einstein no plana (de curvatura seccional distinta de cero) de curvatura escalar idénticamente cero, tiene una singularidad de tipo IIb.*

*Demostración.* Sea  $(M, g_0)$  una variedad de Einstein no plana de curvatura escalar idénticamente cero. Es claro que esto implica que  $M$  tiene constante de Einstein cero y por lo tanto, al ser condición inicial al flujo de Ricci, su solución es constante y eterna:

$$g_t = g_0.$$

Por lo tanto, al ser su tiempo de existencia infinito hay que revisar si tiene una singularidad de tipo IIb o de tipo III. Notamos que

$$\sup_{M \times [0, \infty)} t|\text{Rm}_t| = \sup_{M \times [0, \infty)} t|\text{Rm}_0| = \infty$$

Esta cantidad es no acotada ya que la curvatura seccional es no cero, es decir

$$|\text{Rm}_0| \neq 0.$$

□

Del cálculo explícito de la norma del tensor de curvatura podemos observar que en una variedad de curvatura seccional constante 0, también se tiene tensor de curvatura de norma 0, en este caso

$$\sup_{M \times [0, \infty)} t|\text{Rm}_t| = \sup_{M \times [0, \infty)} t|\text{Rm}_0| = 0.$$

El análisis anterior dice que los puntos fijos no triviales del flujo de Ricci tienen una singularidad de tipo IIb y los puntos fijos de curvatura seccional cero, no encuentran una singularidad. En un sentido más general, hemos visto que los puntos fijos del flujo de Ricci considerado en el espacio de módulos  $\mathcal{M}(M) := \mathcal{R}(M)/\text{Diff}(M) \times \mathbb{R}_+$  pueden encontrar singularidades como se vio en las proposiciones 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3. A raíz de esto, vale la pena examinar los solitones analizados anteriormente.

### 4.3. El cigarro de Hamilton: Tipo III

Primero analicemos el cigarro de Hamilton  $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma)$  donde

$$g_\Sigma = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

Se demostró anteriormente que el cigarro de Hamilton es un solitón gradiente estático rotacionalmente simétrico con función potencial

$$f(x, y) = -\ln(1 + x^2 + y^2).$$

Para analizar si tiene alguna singularidad, notemos primero que es eterno y, por lo tanto, con respecto a nuestra clasificación de singularidades basta revisar si tiene una singularidad

de tipo IIb o de tipo III. Para esto, calculamos explícitamente su solución al flujo de Ricci. Sea  $g_t$  la solución al flujo de Ricci con condición inicial  $g_0 = g_\Sigma$ .

Sabemos en términos generales que  $g_t = \sigma_t \varphi_t^* g_\Sigma$ . A partir del análisis de la ecuación (3.6), como el cigarro de Hamilton es único con respecto a la condición inicial, tenemos que  $\sigma_t = 1$  y por lo tanto la familia de campos que genera al solitón es constante, es decir solo se considera una familia de difeomorfismos  $\varphi_t$  y la métrica toma la siguiente forma

$$g_t = \varphi_t^* g_\Sigma.$$

Para calcular  $\varphi_t$  basta usar el gradiente de la función potencial anteriormente calculado:

$$\text{grad}(f) = -2x \frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial y}.$$

$\varphi_t$  debe ser la familia de difeomorfismos generada por este gradiente, es decir basta resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Con lo cual  $\varphi_t(x, y) = (xe^{-2t}, ye^{-2t})$  y por lo tanto

$$g_t = e^{-2t} g_\Sigma$$

ya que

$$g_t(X, Y) = \varphi_t^* g_\Sigma(X, Y) = g_\Sigma(d\varphi_t(X), d\varphi_t(Y))$$

y

$$d\varphi_t = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

De la expresión explícita de la solución al flujo de Ricci con condición inicial  $g_\Sigma$ , es claro que solo puede tener una singularidad de tipo IIb o de tipo III. Con esta información, la expresión (1.10) del tensor de curvatura en dimensión dos y la proposición 2.2.12 obtenemos

$$R_{ijkl}(t) = \frac{R_t}{2} (g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})(t) = \frac{R_\Sigma}{2} e^{-2t} (g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})_\Sigma.$$

Cuando se calculó la norma del tensor de curvatura de una variedad  $M^n$  de curvatura seccional constante  $K_0$  se obtuvo

$$|\text{Rm}|^2 = 2K_0^2 n(n-1).$$

En el caso que estamos tratando el cálculo es idéntico y por lo tanto basta sustituir la dimensión y  $K_0$  con las cantidades correspondientes:

$$|\text{Rm}(\bullet, t)|^2 = 2 \left( \frac{R_\Sigma}{2} e^{-2t} \right)^2 2(2-1) = (e^{-2t} R_\Sigma)^2,$$

$$|\text{Rm}((x, y), t)| = \frac{4}{e^{2t}(1+x^2+y^2)},$$

y entonces

$$\sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)} t |\text{Rm}((x, y), t)| = \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)} \frac{4t}{e^{2t}(1+x^2+y^2)} \leq \sup_{[0, \infty)} \frac{4t}{e^{2t}} < 1.$$

Hemos probado el siguiente resultado.

**Proposición 4.3.1.** *El cigarro de Hamilton tiene una singularidad de tipo III.*

## 4.4. La solución de Rosenau: Tipo IIb

Lo siguiente a estudiar es la solución de Rosenau en la esfera (considerada como un cilindro compactificado), que tendrá una singularidad de tipo IIb, lo cual es parecido a un cuello pellizado degenerado a tiempo infinito y como se vio antes, tiende al cigarro en los extremos y a un cilindro en los demás puntos.

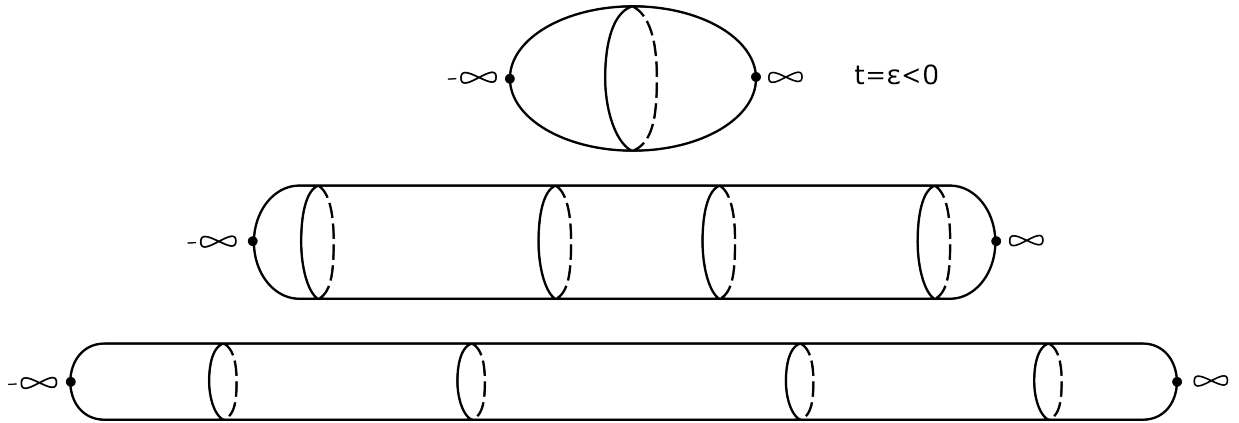


Figura 4.5: Evolución de la solución de Rosenau.

Recordemos la solución de Rosenau  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, g_t = u\mathfrak{h})$ , donde  $\mathfrak{h}$  es la métrica plana en el cilindro y  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por

$$u(x, t) = \frac{2\beta \sinh(-\alpha\lambda t)}{\cosh \alpha x + \cosh \alpha\lambda t},$$

con  $\alpha, \beta, \lambda > 0$  y  $2\beta\lambda = \alpha$ . Para extenderla a una solución antigua del flujo de Ricci en  $\mathbb{S}^2$ , debemos considerar como antes  $\alpha = 1$ , con lo cual

$$u(x, t) = \lambda^{-1} \frac{\sinh(-\lambda t)}{\cosh x + \cosh \lambda t}.$$

**Proposición 4.4.1.** *La solución de Rosenau tiene una singularidad de tipo IIB en tiempo  $T = -\infty$ .*

*Demostración.* Por las ecuaciones (1.10) y (3.7) se tiene que

$$\begin{aligned}
R_{ijkl}(t) &= \frac{R_t}{2}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})(t) \\
&= -\lambda u^2 \frac{\cosh \lambda t \cdot \cosh x + 1}{2 \sinh \lambda t (\cosh x + \cosh \lambda t)} (\mathfrak{h}_{il}\mathfrak{h}_{jk} - \mathfrak{h}_{ik}\mathfrak{h}_{jl}) \\
&= \lambda^{-2} \frac{\sinh^2(-\lambda t)}{(\cosh x + \cosh \lambda t)^2} \left( -\lambda \frac{\cosh \lambda t \cdot \cosh x + 1}{2 \sinh \lambda t (\cosh x + \cosh \lambda t)} \right) (\mathfrak{h}_{il}\mathfrak{h}_{jk} - \mathfrak{h}_{ik}\mathfrak{h}_{jl}) \\
&= -\lambda^{-1} \frac{\sinh(\lambda t)(\cosh \lambda t \cdot \cosh x + 1)}{2(\cosh x + \cosh \lambda t)^3} (\mathfrak{h}_{il}\mathfrak{h}_{jk} - \mathfrak{h}_{ik}\mathfrak{h}_{jl}).
\end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (4.2) y  $\lambda > 0$  obtenemos

$$\begin{aligned}
|\text{Rm}(x, t)| &= 2 \left| -\lambda^{-1} \frac{\sinh(\lambda t)(\cosh \lambda t \cdot \cosh x + 1)}{2(\cosh x + \cosh \lambda t)^3} \right| \\
&= \frac{|\sinh(\lambda t)|(\cosh \lambda t \cdot \cosh x + 1)}{\lambda(\cosh x + \cosh \lambda t)^3}
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sup_{\mathbb{S}^2 \times (-\infty, 0)} |t| |\text{Rm}(x, t)| = \infty.$$

□



# Comentarios finales

Para terminar este texto hacemos algunas observaciones sobre las singularidades que pueden tener las variedades de Einstein bajo el flujo de Ricci. Primero notamos que obtuvimos dos resultados que indican el tipo de singularidad que una variedad de Einstein puede tener, lo cual depende del signo de la curvatura escalar y de que la variedad sea completa ó de tensor de curvatura acotado para tipo I y III respectivamente. La condición del signo de la curvatura escalar es determinante para el tipo de singularidad ya que  $\mathbb{H}^n$  ( $n > 1$ ) es completa y de tensor de curvatura acotado como se vio en la ecuación (4.2), pero al ser de curvatura escalar negativa, por la proposición 4.2.2 su solución debe tener una singularidad de tipo III. Esto sugiere que las condiciones de completitud y de acotar  $|\text{Rm}|$  se puedan reducir. Ejemplos explícitos de variedades de Einstein compactas (consecuentemente de tensor de curvatura acotado) y de curvatura escalar negativa pueden ser encontrados en dimensión 4 en [FP20]; de nuevo, por la proposición 4.2.2 tendrán una singularidad de tipo III bajo el flujo de Ricci.

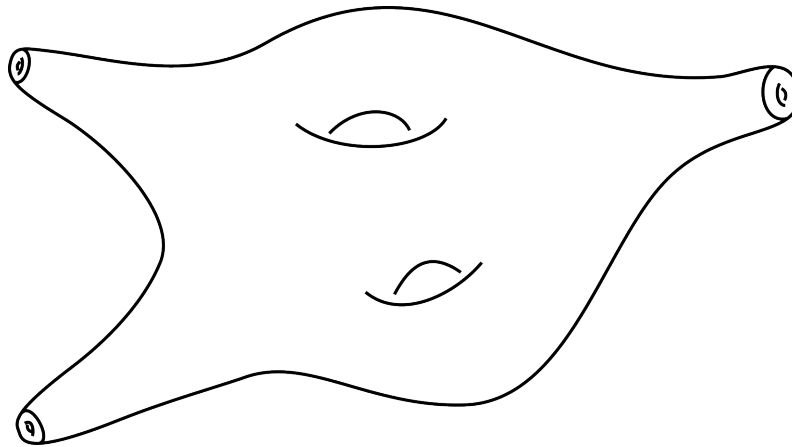


Figura 4.6: Rellenos de Dehn de cúspides hiperbólicas (ver [FP20])

Para concluir los análisis particulares sobre el tipo de singularidad de los solitones que estudiamos anteriormente, hacemos algunos comentarios sobre resultados acerca de las singularidades de tipo II y el solitón de Bryant.

Así como un cuello pellizado es una singularidad de tipo I, se espera que un cuello pellizado degenerado sea de tipo II (ya sea tiempo finito o infinito).

En 2002 Perelman probó que cualquier singularidad a tiempo  $T < \infty$  en dimensión 3 se modela en una  $\kappa$ -solución<sup>2</sup> antigua.

En [GI08] se hacen pruebas numéricas que sustentan la validez de la afirmación de que en dimensión 3, el solitón de Bryant modela localmente<sup>3</sup> de manera precisa el comportamiento del flujo de Ricci de geometrías rotacionalmente simétricas en  $\mathbb{S}^3$  que encuentran un cuello pellizado degenerado.

En [AIK15] se confirma el resultado anterior probando que en dimensión  $n + 1 \geq 3$  existe una solución al flujo de Ricci en  $\mathbb{S}^{n+1}$  con singularidad de cuello pellizado degenerado a tiempo finito que se aproxima asintóticamente al solitón de Bryant.

En [Wu14] se prueba que existen *soluciones estándar* (*soluciones especiales introducidas por Perelman*) en  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) cuyos blow-ups cerca del origen convergen en el sentido de Cheeger-Hausdorff-Gromov al solitón de Bryant, lo que lo hace un modelo de singularidad (local) y finalmente en [Bre20] S. Brendle prueba que las  $\kappa$ -soluciones antiguas, no compactas y de dimensión 3, son isométricas a un cociente del solitón cilíndrico o al solitón de Bryant.

En [Bre22] se hace un recuento y discusión sobre avances recientes que han culminado en una clasificación completa de los modelos de singularidad en dimensión 3. El solitón de Bryant como modelo de singularidad es un tema extenso del cual solo hemos mencionado algunos resultados. Es de nuestro parecer que puede ser merecedor de un estudio particular y centralizado en un texto más amplio.

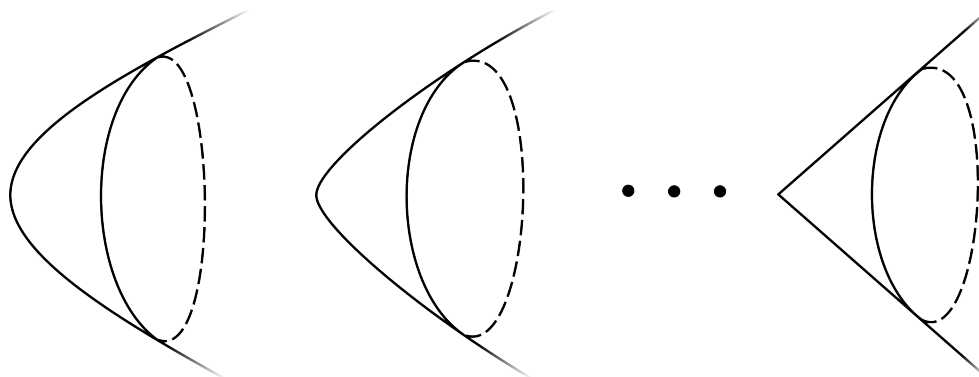


Figura 4.7: Evolución esperada del solitón de Bryant.

<sup>2</sup>Una  $\kappa$ -solución antigua al flujo de Ricci en dimensión 3 es una solución antigua, completa, no plana, de curvatura no negativa y acotada que es  $\kappa$ -no colapsada. Es decir, si  $\text{vol}_{g(t)}(B_{g(t)}(p, r)) \geq \kappa r^n$  cuando  $\sup_{x \in B_{g(t)}(p, r)} R(x, t) \leq r^{-2}$  en una solución antigua en dimensión  $n$ , entonces se le llama  $\kappa$ -no colapsada. Esta definición es atribuida a Perelman a partir de su teorema de *no-colapso*.

<sup>3</sup>En polos, similar a la solución de Rosenau y el acercamiento asintótico en los polos al cigarro de Hamilton.

# Referencias

- [AIK15] S. Angenent, J. Isenberg y D. Knopf. “Degenerate neckpinches in Ricci flow”. En: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2015.709 (2015), págs. 81-117.
- [BDW16] A. Betancourt, Andrew S. Dancer y McKenzie Y. Wang. “A Hamiltonian approach to the cohomogeneity one Ricci soliton equations and explicit examples of non-Kähler solitons”. En: *Journal of Mathematical Physics* 57.12 (2016).
- [Bes07] A.L. Besse. *Einstein Manifolds*. Springer, 2007.
- [Bre20] S. Brendle. “Ancient solutions to the Ricci flow in dimension 3”. En: *Acta Mathematica* 225.1 (2020), págs. 1-102.
- [Bre22] S. Brendle. “Singularity Models in the Three-Dimensional Ricci Flow”. En: *Recent Progress in Mathematics*. Springer, 2022, págs. 87-118.
- [Cho07] B. Chow. *The Ricci flow: techniques and applications. Part I: Geometric Aspects*. American Mathematical Society, 2007, págs. xxiv+536.
- [CK04] B. Chow y D. Knopf. *The Ricci Flow: An Introduction*. American Mathematical Society, 2004.
- [CK19] D. Corro y J-B Kordaß. “Short survey on the existence of slices for the space of Riemannian metrics”. En: *arXiv preprint arXiv:1904.07031* (2019).
- [CLN06] B. Chow, P. Lu y L. Ni. *Hamilton’s Ricci Flow*. American Mathematical Society/Science Press, 2006.
- [Fla73] H. Flanders. “Differentiation Under the Integral Sign”. En: *The American Mathematical Monthly* 80.6 (1973), págs. 615-627.
- [FP20] J. Fine y B. Premoselli. “Examples of compact Einstein four-manifolds with negative curvature”. En: *Journal of the American Mathematical Society* 33.4 (2020), págs. 991-1038.
- [GI08] D. Garfinkle y J. Isenberg. “The modeling of degenerate neck pinch singularities in Ricci flow by Bryant solitons”. En: *Journal of Mathematical Physics* 49.7 (2008).
- [Lee19] J.M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Springer, 2019.
- [Mar12] F. Marques. “Deforming three-manifolds with positive scalar curvature”. En: *Annals of mathematics* (2012), págs. 815-863.
- [Mil63] J.W. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.



- [MN99] J.R. Magnus y H. Neudecker. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. Wiley, 1999.
- [ONe66] B. O’Neill. “The fundamental equations of a submersion”. En: *Michigan Mathematical Journal* 13.4 (1966), págs. 459-469.
- [ONe83] B. O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry*. Elsevier Science, 1983.
- [Per02] Grisha Perelman. “The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications”. En: *arXiv: Differential Geometry* (2002).
- [PS04] P. Pucci y J. Serrin. “The strong maximum principle revisited”. En: *Journal of Differential Equations* 196.1 (2004), págs. 1-66.
- [PW12] M.H. Protter y H.F. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations*. Springer, 2012.
- [RS01] J. Rosenberg y S. Stolz. “Metrics of positive scalar curvature and connections with surgery”. En: 2001.
- [She06] N. Sheridan. “Hamilton’s Ricci Flow”. En: (2006).
- [Top22] P. Topping. “Nontrivial breathers for Ricci flow”. En: *Bulletin of the London Mathematical Society* (2022).
- [Tu11] L. W. Tu. *Introduction to manifolds*. Springer, 2011.
- [Wu14] H. Wu. “On Type-II Singularities in Ricci Flow on  $\mathbb{R}^N$ ”. En: *Communications in Partial Differential Equations* 39.11 (2014), págs. 2064-2090.