



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA QUÍMICA – INGENIERÍA DE PROCESOS

ESTUDIO TERMOHIDRODINÁMICO DEL TRANSPORTE DE CRUDO PESADO
EN OLEODUCTOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ING. RAFAEL FLORES QUIRINO

TUTOR (ES) PRINCIPAL(ES)
Dr. JUAN PABLO, AGUAYO, VALLEJO, ICAT- UNAM
Dr. SALVADOR ENRIQUE, SÁNCHEZ, MINERO, ICAT-UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, FEBRERO 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Méndez Lavielle Federico
Secretario: Dr. López Aguilar José Esteban
1 er. Vocal: Dr. Aguayo Vallejo Juan Pablo
2 do. Vocal: Dr. Chávez Castellanos Ángel Enrique
3 er. Vocal: Dr. Salinas Vázquez Martín

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología,
Universidad Nacional Autónoma de México.

TUTOR DE TESIS:

DR. JUAN PABLO AGUAYO VALLEJO

FIRMA

TUTOR DE TESIS:

DR. SALVADOR ENRIQUE SÁNCHEZ MINERO

FIRMA

Para mi madre Patricia, mi padre Rafael y mis hermanos; Alfredo, Daniel y José Luis.

Agradezco a la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca brindada, con el No. 488820, para los estudios de maestría y la realización de la presente tesis.

Agradezco al Dr. Salvador y al Dr. Juan Pablo en la ayuda dada para la culminación de este trabajo, por sus consejos, su amistad y los ánimos para terminar este trabajo en tiempos de pandemia, SARS-CoV-2 (COVID-19). También agradezco al Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología (ICAT) por el espacio ofrecido para la realización de la tesis y por la beca dada con el No. IPR 2021-204. Gracias por el apoyo y por las admirables personas que conocí allí.

Agradezco al Dr. Enrique Chávez, al Dr. Federico, al Dr. Esteban y al Dr. Martín por su tiempo en leer y darme sus puntuales observaciones para mejorar este trabajo.

Índice general

Lista de figuras	IV
Lista de tablas	V
Nomenclatura	VI
1. Antecedentes	1
1.1. ¿Qué es el petróleo y cómo se clasifica?	1
1.1.1. Densidad API	3
1.1.2. Viscosidad	4
1.1.3. Contenido de azufre	8
1.1.4. S.A.R.A.	9
1.2. Contexto mundial y mexicano	12
1.3. Transporte del aceite crudo no convencional	14
1.3.1. Calentamiento del crudo	17
1.4. Propuesta de investigación	21
2. Análisis del problema	22
2.1. Descripción general del proceso	22
2.2. Ecuaciones de gobierno	23
2.3. Viscosidad	24
2.3.1. Comportamiento reológico	25
2.4. Ecuaciones de transporte para el crudo pesado	27
2.4.1. Condiciones de frontera	28
2.5. Análisis de escala	29
2.5.1. Estimación de los órdenes de magnitud	29
2.6. Ecuaciones adimensionales	33
2.6.1. Condiciones a la frontera adimensionales	34
3. Método de solución analítica	36
3.1. Teoría de la lubricación	36
3.2. Problema Graetz-Nusselt	36
3.3. Análisis en el límite $\alpha \ll 1$	37
3.4. Número de Nusselt	39
3.5. Caudal (aseguramiento de flujo)	41
3.6. Solución asintótica para el límite de efectos térmicos débiles ($\gamma \rightarrow 0$)	42
4. Esquema de solución numérica	46
4.1. Definición de la ecuación de corrección de presión P'	48
4.2. Discretización	50

4.2.1. Discretización de las condiciones de frontera en el fluido	51
4.3. Cálculo de \bar{u}_0 , \bar{v}_0 y \bar{P}'	53
4.3.1. Ecuaciones de momentum discretas	55
4.3.2. Implementación del algoritmo de corrección de presión. Evaluación de \bar{P}' . . .	59
4.4. Cálculo de θ_f, θ_p y θ_s	61
5. Resultados y discusión	68
5.1. Validación analítica. Efectos térmicos débiles $\gamma \ll 1$	69
5.2. Solución numérica, efectos térmicos fuertes $\gamma \sim 1$	71
5.3. Conclusiones	77
Bibliografía	79

Índice de figuras

1.1.	Relación empírica entre el valor °API y la viscosidad [6]	5
1.2.	Relación empírica entre el valor °API y la viscosidad [8]	5
1.3.	Comportamiento reológico para diferentes aceites crudos [10]	7
1.4.	Viscosidad aparente como función del valor de la densidad API [10]	7
1.5.	Variación del °API con el contenido de azufre [11]	8
1.6.	Viscosidad aparente en función del contenido de asfaltenos (●) y saturados (□) a 20°C [10]	9
1.7.	Representación simplificada del análisis S.A.R.A. [1]	10
1.8.	Modelos representativos para un asfalteno y una resina	11
1.9.	Producción de aceite crudo pesado por país al 2018 [18]	12
1.10.	Producción de crudo pesado promedio [19]	13
1.11.	Porcentaje de reservas de hidrocarburos por tipo [20]	14
1.12.	Efecto de dilución con un condensado en la viscosidad de diferentes aceites con diferentes valores API [12]	15
1.13.	Emulsiones encontradas en la producción y transporte del aceite crudo [22]	16
1.14.	Comparativo [21]	17
1.15.	Viscosidad vs Temperatura en diferentes tipos de aceite crudo [10]	18
1.16.	Esquema del transporte del crudo a través de un ducto [28]	19
2.1.	Diseño general del proceso [40]	22
2.2.	Detalles del proceso	23
2.3.	Pruebas reológicas para dos muestras distintas de petróleo	26
2.4.	Comportamiento de la viscosidad en función de la temperatura	26
4.1.	Esquema numérico de solución.	47
5.1.	Resultados para las variables adimensionales de velocidad, caída de presión, temperatura del fluido y flujo volumétrico	69
5.2.	Mapa de calor	71
5.3.	Temperatura adimensional del fluido para diferentes valores de α	72
5.4.	Perfil de velocidad y caída de presión para diferentes valores de α y γ	73
5.5.	Evaluación del flujo volumétrico a diferentes valores de α y γ	74
5.6.	Perfil de velocidad y campo de temperatura para diferentes valores de α	75
5.7.	Flujo volumétrico y flujo de energía en función de $Gz/\tilde{N}u$	76

Índice de cuadros

1.1. Datos de inspección recomendados para el petroleo convencional y no convencional .	2
1.2. Clasificación de los aceites crudos considerando su peso específico y °API [4]	3
1.3. Contexto nacional evaluado los principales activos de explotación.[5]	4
1.4. Correlaciones para predecir la viscosidad de aceites crudos	6
1.5. Variación del análisis SARA	11
2.1. Comparación de propiedades físicas entre aceites medio y pesado	25
5.1. Valores estimados para las propiedades físicas de este estudio [40]	68

Nomenclatura

Símbolo	Definición
b	Parámetro de sensibilidad térmica de la viscosidad del fluido, K^{-1}
Br	Número de Brinkman definido como $Br = \frac{\bar{\mu} U_c^2}{k_f \Delta T_c}$
C_p	Capacidad calorífica, $\frac{J}{kg K}$
Gz	Número de Graetz definido como $Gz = Pe\beta$ la relación del transporte de energía térmica por convección axial y difusión radial
h	Grosor del ducto, m
H	Grosor del aislante, m
H_g	Elevación entre la entrada y salida del oleoducto, m
ℓ	Distancia entre la entrada y la salida del oleoducto, m
k	Conductividad térmica, $\frac{W}{m K}$
L	Longitud del ducto, m
g	aceleración de la gravedad definida como $g = -9.81 \text{ m/s}^2$
Nu	Número de Nusselt
\tilde{Nu}	Número de Nusselt modificado.
p	presión, Pa
\bar{P}	Presión adimensional
P_T	Presión en los depósitos de crudo, Pa
P_p	Presión de bombeo, Pa
Pe	Número de Peclet definido como $Pe = \frac{\rho c_p U_c r_0}{k_f}$
q_r''	Flux de calor radial.
q_η''	Flux de calor adimensional.
r_0	Radio interno del ducto, m
Re	Número de Reynolds definido como $Re = \frac{\rho U_c r_0}{\bar{\mu}}$
\bar{H}_H	Término adimensional de elevación definido como $\bar{H}_H = \rho_f g H_l r_0^2 / \mu_c U_c L$
\bar{H}_l	Término adimensional de flotación definido como $\bar{H}_l = \rho_f g \ell r_0^3 / \mu_c U_c L^2$
T	Temperatura, K
T_0	Temperatura ambiente, K
U_c	velocidad característica axial. m/s
V_c	velocidad característica radial. m/s
u	Componente axial de la velocidad.
v	Componente radial de la velocidad.
\bar{u}	Componente adimensional axial de la velocidad.
\bar{v}	Componente adimensional radial de la velocidad.
r	Coordenada radial, m
z	Coordenada axial, m

Letras griegas

ϕ	Ángulo de ascenso
α	parámetro conjugado adimensional definido como $\alpha = \frac{r_0 k_s}{H k_f}$
β	parámetro de relación geométrico adimensional definido como $\beta = r_0/L$
ε	parámetro de relación geométrico adimensional definido como $\varepsilon = h/r_0$
δ	parámetro de relación geométrico adimensional definido como $\delta = H/r_0$
κ	parámetro de relación geométrico adimensional definido como $\kappa = H/(r_0 + h)$
γ	parámetro térmico adimensional definido como $\gamma = -b\Delta T_c$
θ	temperatura adimensional
μ	viscosidad dinámica, Pa.s
ρ_f	densidad del aceite crudo, $\frac{kg}{m^3}$
ρ_w	densidad del agua, $\frac{kg}{m^3}$
Λ	parámetro adimensional definido como $\Lambda = \frac{h k_s}{H k_p}$
ΔP_c	caída de presión característica definida como $P_c = \frac{U_c \mu_0 L}{r_0^2}$, Pa
ΔP_{zc}	caída de presión axial característica, Pa
ΔP_{rc}	caída de presión radial característica, Pa
ΔT_c	incremento característico de temperatura en este trabajo, K
χ	longitud axial del ducto adimensional
η	longitud radial del ducto adimensional
Υ	grosor del ducto adimensional
ξ	grosor del aislante adimensional

Subíndices

in	entrada del ducto
out	salida del ducto
f	región del fluido
p	región del ducto
s	región del aislante térmico

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. ¿Qué es el petróleo y cómo se clasifica?

El petróleo es una mezcla compleja con un número indeterminado de compuestos que en general se pueden agrupar en tres categorías: compuestos inorgánicos, compuestos orgánicos definidos, y compuestos orgánicos no definidos. Dependiendo de la facilidad con la que se extrae el crudo de los yacimientos y su composición, estos se pueden clasificar como crudos convencionales y no convencionales [1].

En un principio, la clasificación de los aceites crudos se ha manejado un tanto arbitraria, puesto que, en la mayoría de los casos se ha pensado que un crudo convencional es aquel que se obtiene cuando su extracción se lleva a cabo mediante operaciones de bombeo fluyendo libremente sin la adición de energía térmica. Por otra parte se ha asumido que un crudo no convencional es aquel que presenta dificultad al momento de ser extraído del yacimiento, condición que se encuentra asociada a valores bajos de °API, y en consecuencia, a valores altos de viscosidad. Lo anterior, es un aspecto particular que distingue a los yacimientos de crudos no convencionales, y a la vez, precisa el requerimiento de mecanismos alternos de explotación; por ejemplo, la adición de energía térmica para facilitar su extracción. Como se podrá entender, esta clasificación se ha enfocado básicamente en aspectos de índole comercial que brindan a la industria petrolera una guía sobre las condiciones de proceso. En general, este procedimiento de clasificación sólo se ha concentrado en la inspección superficial de una sola propiedad física, la cual es fácil de obtener. Al definir la densidad relativa del aceite crudo expresada en la escala API y su relación con un valor de viscosidad se ha podido determinar en gran medida la calidad de los aceites crudos [1].

El procedimiento que se menciona ha sido útil y da un buen panorama de la potencial calidad de los aceites crudos, no obstante, debido a la evolución de la clasificación de los diferentes aceites crudos, ya no es conveniente describirlos con base en una sola propiedad. Hoy en día, los datos ha recabar deben de mostrar una descripción precisa sobre la calidad del petróleo, algo que es fundamental para los diferentes procesos de la industria petrolera; por ejemplo, la explotación y extracción, transporte y refinación, ver Tabla 1.1 [1].

Aceite crudo convencional	Aceite crudo no convencional
Densidad, densidad relativa °API	Densidad, densidad relativa °API
Carbono wt. %	Carbono wt. %
Hidrógeno wt. %	Hidrógeno wt. %
Nitrógeno wt. %	Nitrógeno wt. %
Azufre wt %	Azufre wt. %
	Níquel, ppm
	Vanadio, ppm
	Plomo, ppm
Punto de escurrimiento (Pour point)	Punto de escurrimiento (Pour point)
Contenido de parafinas (Wax)	
Temperatura de apreciación de parafinas	
Viscosidad a varias temperaturas	Viscosidad a varias temperaturas
Residuo de carbono de la fracción residual atmosférica y al vacío	Residuo de carbono
	Ceniza, wt. %
Perfil de destilación:	Composición fraccional:
Todas la fracciones incluyendo la fracción residual al vacío	Asfaltenos wt. %
	Resinas wt. %
	Aromáticos wt. %
	Saturados wt. %

Tabla 1.1: Datos de inspección recomendados para el petroleo convencional y no convencional

Los datos que se ilustran en la Tabla 1.1 representan los análisis y estudios básicos que se le deben realizar a los aceites crudos, en particular, esta información brinda una guía para definir su calidad y los procesos que se requieren para su manejo. Por ejemplo, datos como su análisis de composición e impurezas permite tener una idea general de los productos que se pueden llegar a recuperar. Por otra lado, datos como la densidad relativa, °API, el contenido de azufre, la viscosidad, el contenido de sal, el contenido de agua y sedimentos, o las trazas de metales (o haluros orgánicos), proporcionan una estimación de los retos que se tendrán al momento del manejo y procesamiento de los aceites crudos. Lo antes mencionado es información medular al momento de diseñar e instrumentar los diferentes procesos que se llevan a cabo en el sector petrolero [1].

En los distintos ámbitos técnico y económico que rige la industria petrolera, es claro suponer que la producción y procesamiento de crudos no convencionales requieren una mayor inversión y trabajo, como dato de referencia, en promedio los costos se incrementan a más del doble que el caso de la producción de aceites convencionales. El principal inconveniente que hacen a la producción de crudos no convencionales mas costosa se debe a que estos aceites presentan una baja movilidad dado su alta viscosidad en condiciones de yacimiento; además, derivado de su composición donde se tiene: una composición alta concentración de asfaltenos y altos contenidos de azufre y metales pesados, los diferentes subprocesos de la refinación incrementan sus costos, lo cual hace a la caracterización de los diferentes aceites crudos un procedimiento fundamental a la hora de definir los esquemas de trabajo dentro de la industria petrolera. [2]

Tomando en cuenta lo antes mencionado, se ha podido constatar que no es conveniente describir la naturaleza de un aceite crudo con base solo en la densidad API. Caso contrario, la caracterización completa de las diferentes propiedades y componentes de los aceites crudos son de gran relevancia para determinar si dichos aceites pueden considerarse como convencionales o no convencionales. Actualmente entre las principales propiedades a determinar para el proceso de clasificación de los aceites crudos se tienen: la densidad API, la viscosidad (comportamiento reológico), la composición (análisis composicional SARA), y la determinación del contenido de azufre. Estos estudios son de importancia para la clasificación dado que los aceites convencionales y no convencionales presentan propiedades marcadamente diferentes.

1.1.1. Densidad API

En el ámbito de la industria petrolera, más específico, en el contexto de la caracterización de los aceites crudos, el primer acercamiento de utilidad para describir la naturaleza de los aceites es la densidad API medida en grados. De acuerdo a la escala creada por el Instituto Americano del Petróleo, los aceites crudos se puede clasificar a través de su densidad relativa, evaluando la siguiente correlación [3]:

$$^{\circ}\text{API} = \frac{141.5}{\rho_{GE}} - 131.5 \quad (1.1)$$

En la ecuación 1.1, ρ_{GE} se refiere a la división entre la densidad del aceite crudo, ρ_f , y la densidad del agua, ρ_w , ambas a 60°F [3].

$$\rho_{GE} = \frac{\rho_f}{\rho_w} \quad (1.2)$$

En la Tabla 1.2, se ilustra la clasificación de los diferentes tipos de aceites crudos en función de la densidad relativa y °API, siendo esta clasificación la mas habitual y conocida. Se considera que un aceite es no convencional cuando tiene un valor menor a 20 °API [1]. Entre los aceites convencionales, se tiene tres subdivisiones: aceites super ligeros, ligeros y medios, los cuales presentan densidades relativas inferiores a 0.92 y °API superiores a 22.2. Por otra parte, los aceites no convencionales o pesados y extra pesados presenta densidades relativas superiores a 0.92 y °API menores a 22.2.

Aceite	ρ_f [g/cm ³]	°API
Extrapesado	>1.0	10.0
Pesado	1.0-0.92	10.0-22.3
Mediano	0.92-0.87	22.2-31.1
Ligero	0.87-0.83	31.1-30
Superligero	<0.83	>39

Tabla 1.2: Clasificación de los aceites crudos considerando su peso específico y °API [4]

Claramente, la frontera entre los aceites convencionales y no convencionales es relativa y cambiante. Dicha condición se suscita debido a que la caracterización de otras propiedades le puede conferir a un aceite crudo la connotación de no convencional. Por ejemplo, el crudo de mayor producción en México, el aceite Maya, presenta propiedades de medio y pesado; donde, para el caso de la

densidad relativa y °API, podría considerarse como un aceite medio, no obstante, otros estudios y análisis que se definen en los siguientes subtemas le confieren la condición de aceite pesado. Por consiguiente, la clasificación de los crudos en el contexto nacional se modifica y especifica de la siguiente manera, Tabla 1.3.

	Petróleo	ρ_{GE}	°API
Olmecca	Superligero	0.83	38-39
Istmo	Ligero	0.87-0.83	32-33
Maya	Pesado	1.0-0.92	21-22
Talam	Pesado	0.9618	15.8-16.0
Altamira	Pesado	0.9576	15.0-16.5

Tabla 1.3: Contexto nacional evaluado los principales activos de explotación.[5]

Como puede observarse en las Tablas 1.2 y 1.3 , el valor del °API es solo un indicador de la calidad de los diferentes aceites crudos, esto debido a su densidad relativa. A mayores valores del °API, se determina que los componentes del aceite son de menor peso, y a la vez, esto indica una mayor calidad del aceite crudo. [6].

Al ser el valor de la densidad °API una de las primeras mediciones hechas en la industria petrolera, se han desarrollado diferentes correlaciones empíricas para poder relacionar esta propiedad con otras de gran importancia al momento de definir la calidad de los aceites crudos. Principalmente, se ha buscado simplificar el procedimiento de caracterización de los aceites crudos, por ejemplo, una de las propiedades que se ha buscado evaluar en dichos modelos es la viscosidad, esto porque dicha propiedad es fundamental al momento de definir la movilidad de los aceites crudos.

1.1.2. Viscosidad

La viscosidad es una propiedad de transporte del fluido que relaciona el esfuerzo cortante aplicado a un fluido con la rapidez de deformación resultante. Esta relación representa, en términos generales, las interacciones intermoleculares que existen en el fluido y a nivel macroscópico esta propiedad depende del valor de la temperatura y presión al que está sometido el fluido. Para fluidos en fase líquida, los efectos de presión son considerados despreciables.[7].

Para el caso en particular del estudio del transporte de aceites crudos, la viscosidad es una propiedad de gran importancia para definir la transportabilidad a través de ductos. Al considerarse a los aceites crudos como fluidos de composición química compleja, se han hechos muchos esfuerzos en poder caracterizar su viscosidad. Los primeros esfuerzos que se hicieron fue relacionar de manera empírica el valor API sin importar el comportamiento reológico del aceite crudo [6], como se muestra en la Figura 1.1

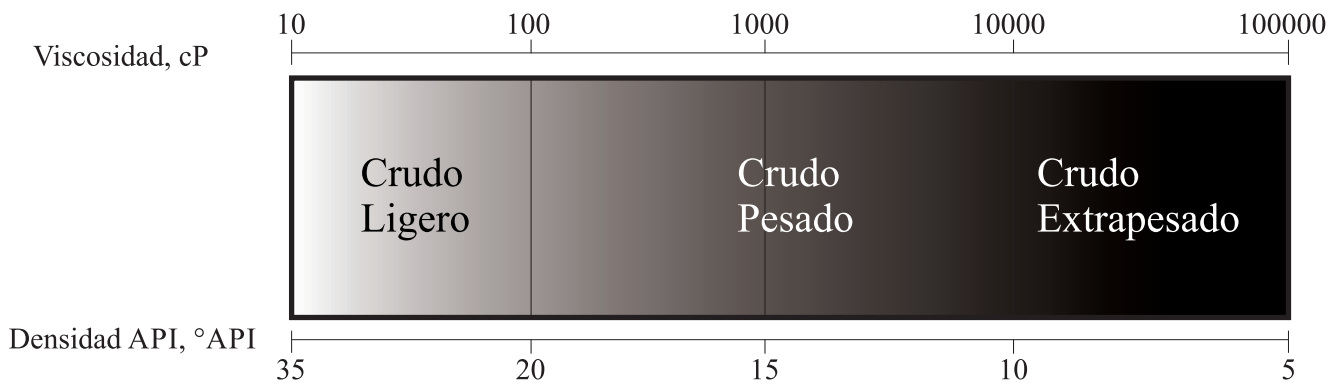


Figura 1.1: Relación empírica entre el valor °API y la viscosidad [6]

En la misma dirección, la Figura 1.2 muestra los valores de la viscosidad de diferentes aceites crudos a 303.15 K, esto como función de su densidad °API. Se observa un incremento exponencial de la viscosidad al disminuir el valor °API, lo cual ilustra de una mejor manera y describe mejor la relación viscosidad-densidad °API a lo que se observa en la Figura 1.1 [8].

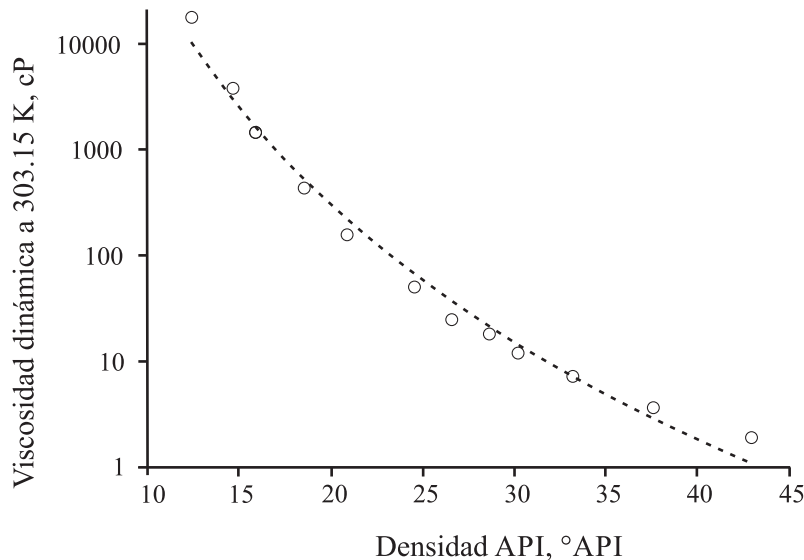


Figura 1.2: Relación empírica entre el valor °API y la viscosidad [8]

Bajo esta idea, se han hecho varios esfuerzos en encontrar diferentes funciones matemáticas que describan una correlación entre °API y el valor de la viscosidad para aceites crudos. Dado lo mostrado en la Figura 1.2, se anticipa que el modelo para predecir la viscosidad de aceites crudos debe de tener una función exponencial. En la Tabla 1.4, se observan algunas de las muchas correlaciones descritas en la literatura para este caso, mostrando los rangos de aplicación en relación °API para cada una de las funciones. [8].

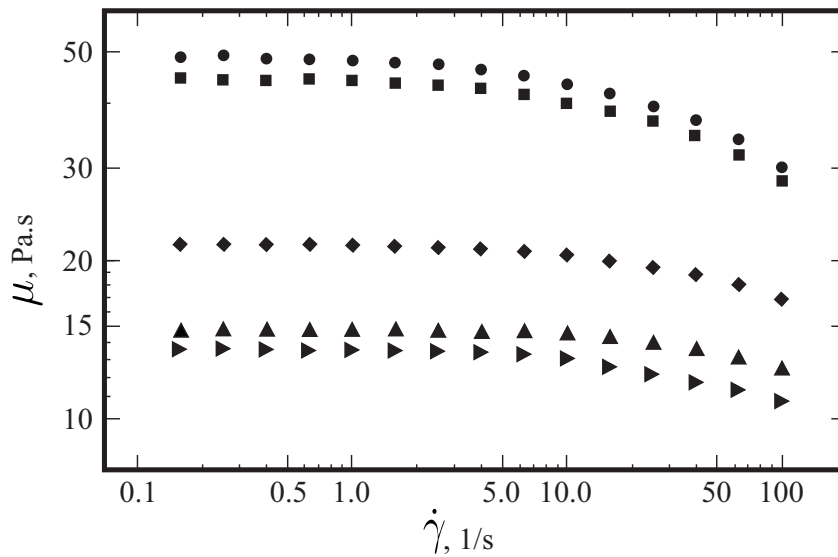
1.1. ¿QUÉ ES EL PETROLEO Y CÓMO SE CLASIFICA?

Autor	Correlación	°API	Viscosidad (cP)	Fuente
Beal	$\mu_{od} = \left[0.32 + \frac{1.8 \times 10^7}{\text{API}^{4.53}} \right] \times \left[\frac{360}{T_f + 200} \right]^a$ $a = \text{antilog} (0.43 + 8.33/\text{API})$	10 - 52	0.8 - 155	US
Beggs and Robison	$\mu_{od} = 10^x - 1$ $x = y \times (T_f)^{-1.163}$ $y = 10^z$ $z = 3.0324 - 0.02023 \times \text{API}$	16 - 58	NA	Sin datos
Glaso	$\mu_{od} = [3.141 \times (10^{10})] \times (T_f)^{-3.444} \times [\log(\text{API})]^a$ $a = 10.313 [\log(T_f)] - 36.447$	20 - 48	0.6 - 39	North Sea
Egbogah and Ng	$\mu_{od} = 10^x - 1$ $x = 10^y$ $y = 2.06492 - 0.0179\text{API} - 0.70226 \log_{10}(T_f)$	5 - 28	NA	Databank
Kartoatmodjo and Schmidt	$\mu_{od} = 16 (10^8) T_f^{-2.8177} [\log(\text{API})]^x$ $x = 5.7526 \log(T_f) - 26.9718$	14 - 59	0.5 - 586	Databank

Tabla 1.4: Correlaciones para predecir la viscosidad de aceites crudos

Aunque se tiene un gran número de modelos empíricos para relacionar la densidad API y la viscosidad de los aceites crudos, la literatura técnica ya ha demostrado en muchas que estas correlaciones no muestran una buena predicción de la viscosidad cuando se trata de aceites crudos no convencionales [8]. Lo que se indica se debe principalmente a que en la mayoría de las funciones existentes no se ha tomado en cuenta el comportamiento reológico de los fluidos (aceites crudos). Este efecto se ve al comparar el típico comportamiento reológico de un aceite crudo convencional con uno que presenta características de crudo no convencional [9].

Por ejemplo, en los datos que se ilustran en la Figura 1.3, las isotermas a 20°C donde se describe el comportamiento reológico de 5 muestras de aceite crudo no convencional con una densidad API similar de alrededor de 12°, se hace notar que a pesar de que todas las muestras tengan un valor de densidad API cercano, y sean considerados como aceites no convencionales siguen el mismo comportamiento reológico, pero su valor de la viscosidad aparente difiere casi tres veces. También, se observa que estas muestras tienen un comportamiento newtoniano a una rapidez de deformación bajo, pero al incrementarse la rapidez de deformación la viscosidad disminuye, lo cual va en concordancia con la definición de un fluido con comportamiento no newtoniano [10].



- (●) API=12.2, $\rho_f=0.9834$ $\mu=42.0$ (■) API=12.3, $\rho_f=0.9832$, $\mu=44.47$ (◆) API=12.6, $\rho_f=0.9811$, $\mu=20.03$
 (▲) API=12.2, $\rho_f=0.9834$, $\mu=15.19$ (▶) API=12.6, $\rho_f=0.9808$, $\mu=12.87$

Figura 1.3: Comportamiento reológico para diferentes aceites crudos [10]

De las mismas 5 muestras del ensayo descrito en el trabajo [10] (ver Figura 1.3), la Figura 1.4 tomada del mismo trabajo muestra un comparativo entre el valor de la viscosidad aparente (zero shear viscosity, por sus siglas en inglés) a 20°C y como función de la densidad API. Aquí observan diferencias en los valores de la viscosidad a pesar de que las muestras de los aceites crudos tenga un valor de densidad API semejante.

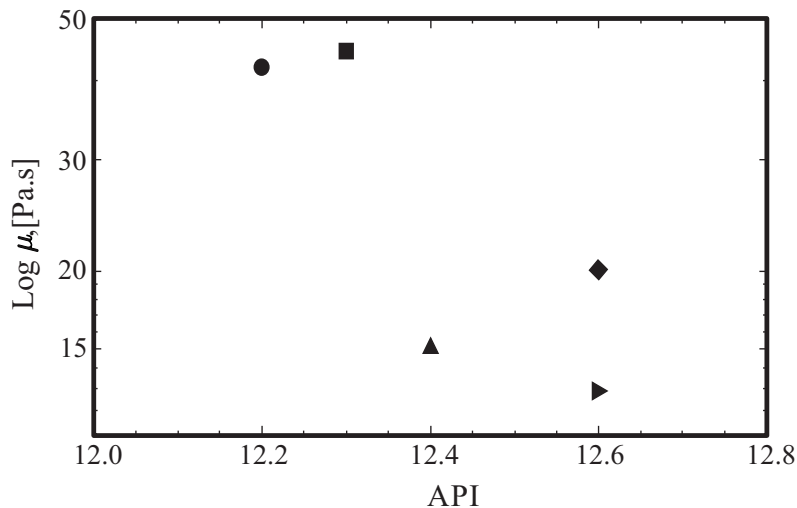


Figura 1.4: Viscosidad aparente como función del valor de la densidad API [10]

De lo mostrado en las Figuras 1.3 y 1.4, se presenta un contraste con lo mostrado en la Figura 1.1, donde la viscosidad de los aceites crudos se puede relacionar de forma proporcional con el valor de la densidad API. Para este caso, las relaciones presentan un comportamiento errático que tiene su explicación en la naturaleza particular de cada muestra. Este hecho implica que basarse sólo

en un método (densidad API) de caracterización para definir la calidad de los aceites crudos es un procedimiento superficial, por lo menos, para el caso de los aceites crudos no convencionales. Se puede llegar a caer en errores de caracterización al tratar de medir la calidad de un aceite crudo. Actualmente, la caracterización de la viscosidad, y más aún, la evaluación del comportamiento reológico de los aceites crudos es fundamental al momento de determinar su calidad. Además, la viscosidad no es la única propiedad y característica que marca una diferencia entre los crudos convencionales y no convencionales, El contenido de azufre es otra característica importante a evaluar, esto porque los crudos no convencionales presentan un contenido sustancialmente elevado en comparación a los crudos convencionales; por consiguiente, los procesos de refinación se vuelven más complejos para dichos fluidos.

1.1.3. Contenido de azufre

En el contexto de los procesos de refinación de la industria petrolera, el contenido de azufre y la densidad relativa API son dos propiedades más importantes para medir el valor del petróleo. La industria de la refinación clasifica a los aceites crudos que contienen menos del 1 % peso de azufre como “bajo en azufre”, por el contrario, a los aceites crudos que contienen más de 1 % peso de azufre se le llama “alto en azufre” [11]. Con esta clasificación la industria considera a los crudos pesados y residuales como materia prima con alto contenido en azufre. El contenido de azufre es expresado como un porcentaje en la cantidad de masa de azufre que hay dentro del crudo. Este valor puede variar aproximadamente de 0.1 % a 5.0 %. En la Figura 1.5 se muestra una relación empírica que se ha reportado entre la densidad API y el contenido de azufre que potencialmente puede contener un aceite crudo. No obstante, esta relación no siempre se cumple, caso particular y ejemplo de esto es el aceite Maya proveniente de los yacimientos de México. Dicho hidrocarburo con una densidad API de aproximadamente de 20, cuenta con una cantidad de azufre mucho mayor de la que la relación indica.

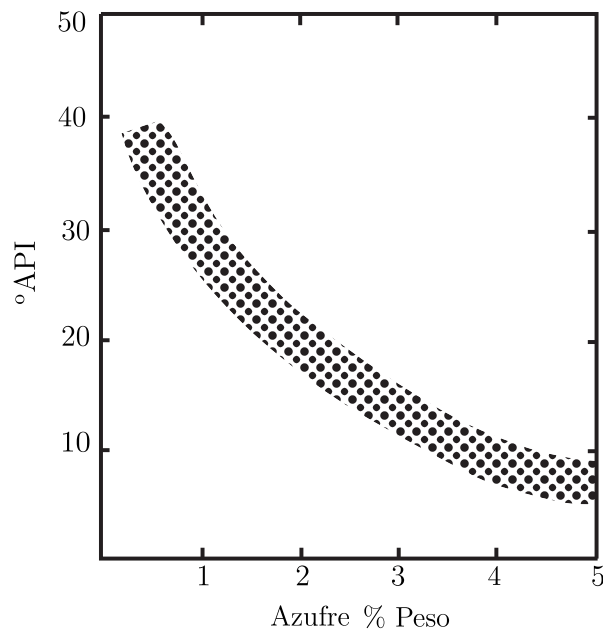


Figura 1.5: Variación del °API con el contenido de azufre [11]

Como puede observarse en la Figura 1.5, para el caso particular de los aceites pesados, tener una

gran cantidad de azufre hace necesario removerlo, esto con la finalidad de evitar afectaciones en los diferentes dispositivos y procesos de refinación. Por ejemplo, la corrosión de equipos de flujo y de proceso, la disminución del rendimiento en los productos, la estabilidad y calidad de las gasolinas, etc. Por lo tanto, es plausible pensar que la concentración de azufre en los aceites crudos es una variable más que define su calidad.

1.1.4. S.A.R.A.

Finalmente, otros de los estudios que definen hoy en día la calidad de los aceites crudos es el estudio composicional, más bien conocido como análisis S.A.R.A (Cantidad de Saturados, Aromáticos, Resinas y Asfaltenos por sus siglas en inglés). Actualmente se ha puesto mucha atención en medir la composición de asfaltenos en el aceite crudo no convencional, ya que se ha encontrado que ha mayor cantidad de asfaltenos disminuye la calidad deseada de los aceites. Lo anterior se asocia a múltiples factores, por ejemplo, una gran concentración de asfaltenos en la fracción residual de aceites convencionales y no convencionales [1], es la principal causa de que disminuya la vida media de los catalizadores utilizados en la refinación [11].

Además se ha encontrado que uno de los principales factores que influyen en la viscosidad del aceite crudo no convencional es la cantidad de asfaltenos presentes. Esto se debe a que son las fracciones de los hidrocarburos con mayor peso molecular, con mayor proporción de compuestos aromáticos y mayor polaridad [12]. En la Figura 1.6 se presenta la viscosidad aparente, μ_0 , del aceite crudo en función del contenido de asfaltenos y saturados. Se observa que a mayor contenido de asfaltenos la viscosidad aumenta de manera exponencial. Se comienza a mostrar un comportamiento no newtoniano cuando el contenido de asfaltenos es superior al 10 % p/p [10].

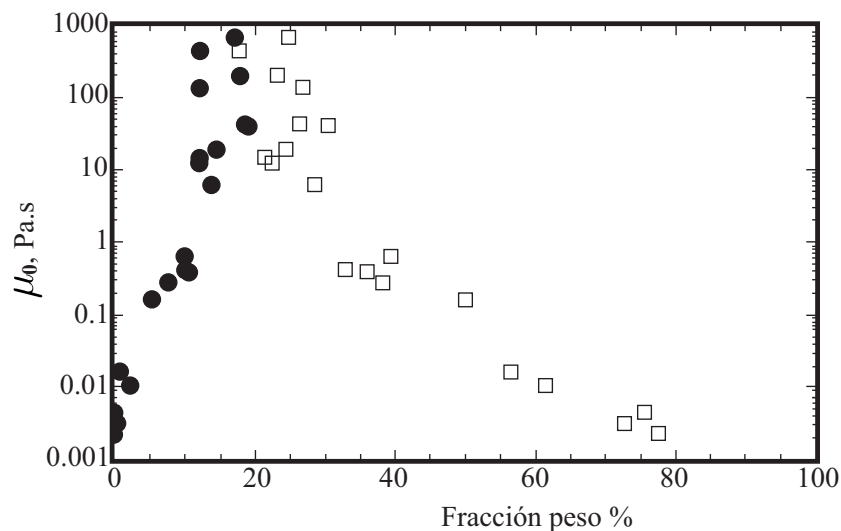


Figura 1.6: Viscosidad aparente en función del contenido de asfaltenos (●) y saturados (□) a 20°C [10]

Debido a las condiciones que se mencionan, para análisis composicional se tiene un especial interés en conocer la cantidad de asfaltenos en las muestras del aceite crudo no convencional, dado que, tal información ayuda a tener una mejor predicción del comportamiento reológico y la viscosidad.

El análisis composicional S.A.R.A. consiste en caracterizar 4 grupos principales de compuestos con base en su solubilidad y polaridad. S: Compuestos saturados, A: compuesto aromáticos, R: resinas, A: asfaltenos.

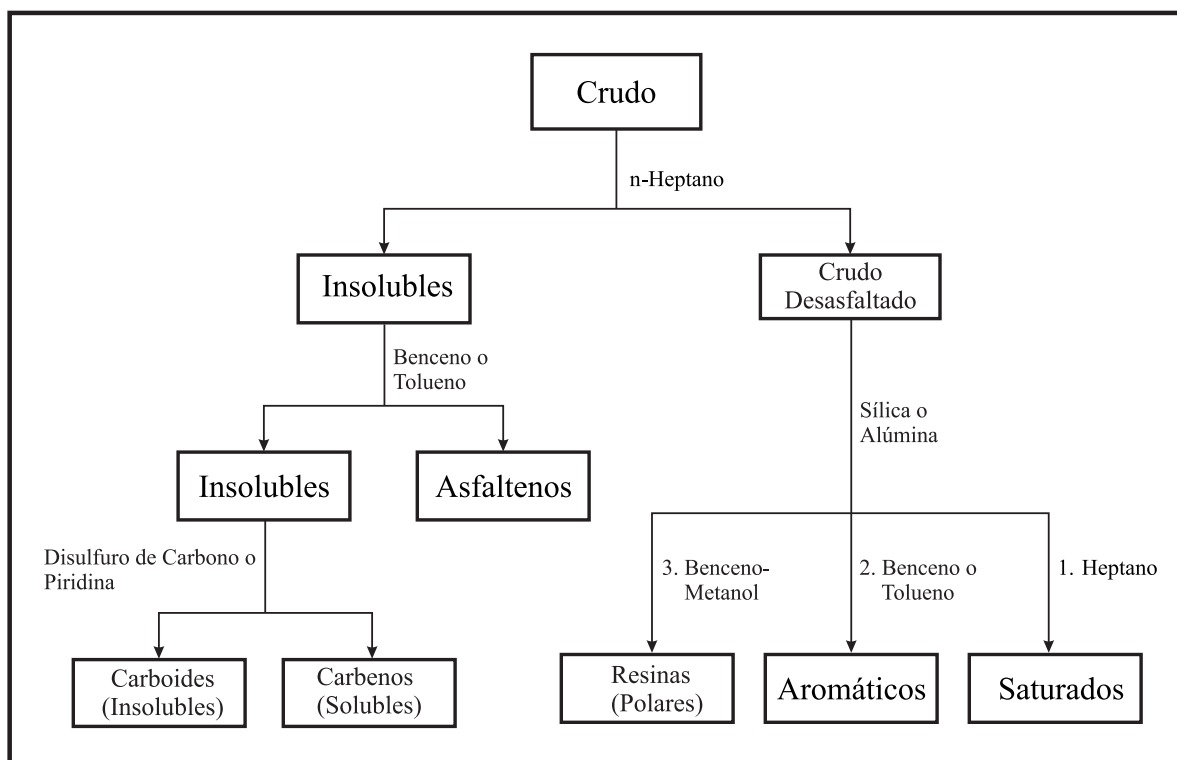


Figura 1.7: Representación simplificada del análisis S.A.R.A. [1]

La mayoría de los métodos para cuantificar los componentes del crudo lo hacen con base a su estructura química y grupos funcionales que los componen, el método S.A.R.A clasifica los componentes del petróleo en: saturados, aromáticos, resinas y asfaltenos. Como se observa en la Figura 1.7 la separación de estos compuestos se lleva a cabo con base a sus propiedades de solubilidad. Los asfaltenos y resinas son insolubles en n-alcenos y solubles en compuestos aromáticos tales como benceno y tolueno. Se utiliza n-heptano para precipitar asfaltenos y en menor cantidad a las resinas. [13]

La estructura de los asfaltenos se compone de varios anillos aromáticos ocasionando que sea el compuestos más polar y pesado dentro del petróleo. A medida que el contenido de resinas y asfaltenos aumenten, el crudo tendrá una densidad, polaridad y aromaticidad altas, mientras que si el contenido de saturados y aromáticos es mayor, estas propiedades tendrán valores más bajos.[13]. Los asfaltenos al estar compuestos de abundantes grupos aromáticos y grupos alquilo laterales tienden a formar sistemas micelares, los cuales alojan la mayor proporción de heteroátomos del crudo, tales como: S, N, O, V y Ni [14]. En el esquema de la Figura 1.8 se muestra una representación de la estructura química de un asfalteno y una resina [15] [16].

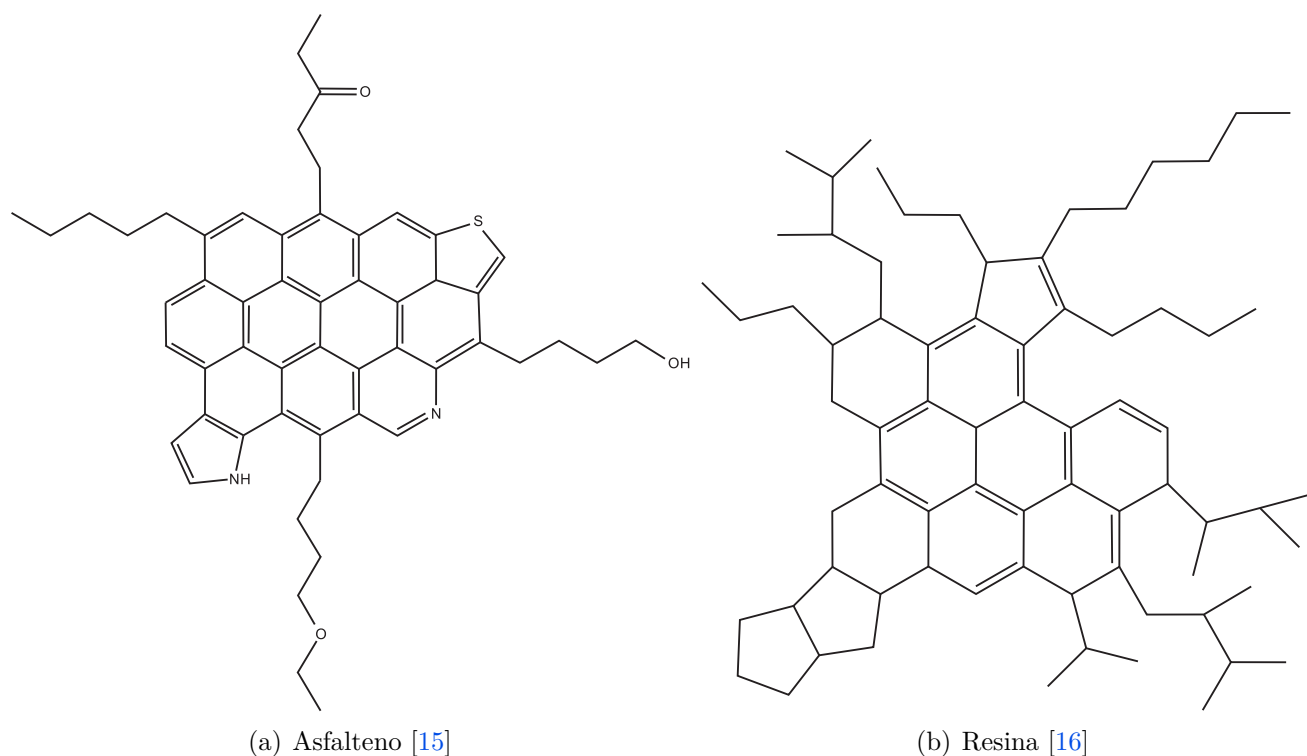


Figura 1.8: Modelos representativos para un asfalteno y una resina

Del análisis de un gran número de datos proporcionados por la literatura, para predecir el valor de la viscosidad de un aceite crudo, se puede inferir que ya existe una correlación donde se considera la composición de estos [16]. La tendencia muestra el aumento de la viscosidad y la aparición de un comportamiento no newtoniano al aumentar la cantidad de asfaltenos en el aceite crudo; por consiguiente, esto es de interés para la industria petrolera en el contexto de clasificar y definir la calidad de los aceites crudos [10].

Tipo de Crudo	°API	Asfaltenos %	Resinas %	Saturados y Aromáticos % Peso	Azufre % Peso
Extra ligero	> 50	0 - < 2	0.05 - 3	-	0.02-0.2
Ligero	22-32	< 0.1 - 12	3 - 22	67 - 97	0.05-4.0
Pesado	10-22	11 - 25	14 - 39	24 - 64	0.1-5.0
Extra pesado	< 10	15 - 40	-	-	0.8-6.0

Tabla 1.5: Variación del análisis SARA

La Tabla 1.5 muestra una clasificación del crudo ya no sólo definida sobre el valor API, sino que también muestra la cantidad de asfaltenos presentes para una mejor descripción de la calidad del aceite crudo [17].

En conclusión, dada la gran demanda de combustibles (aceites pesados) hoy en día, la clasificación y caracterización de los aceites crudos implica una serie de estudios que permiten definir su calidad y utilidad, algo que para la industria petrolera es de gran interés, puesto que, los resultados marcan las condiciones de proceso requeridas para la extracción, transporte y refinación de estos fluidos que potencialmente podrían ser no convencionales.

1.2. Contexto mundial y mexicano

La demanda mundial del petróleo se ha incrementado de 60 millones de barriles por día a 84 millones de barriles por día en los últimos 20 años, lo cual a provocado que se busquen otras fuentes de energía u otras fuentes de hidrocarburos. Debido a esto, se han considerado a los aceites crudos no convencionales, el crudo pesado y extrapesado, como fuentes de energía que potencialmente pueden suplir, o más bien, subsanar la excesiva demanda energética. Lo anterior, a generado en los últimos años la necesidad de realizar estudios especializados con miras a su aprovechamiento. De tales investigaciones se puede inferir que la extracción, el transporte y la refinación de este tipo de hidrocarburos representan importantes retos de logística [2].

En el contexto mundial, México ocupa el 13 ° en el grupo de los productores de petróleo, ver Figura 1.9. Por lo tanto, se podría considerar como un país productor, condición que hace que cualquier avance en este campo sea de interés nacional.

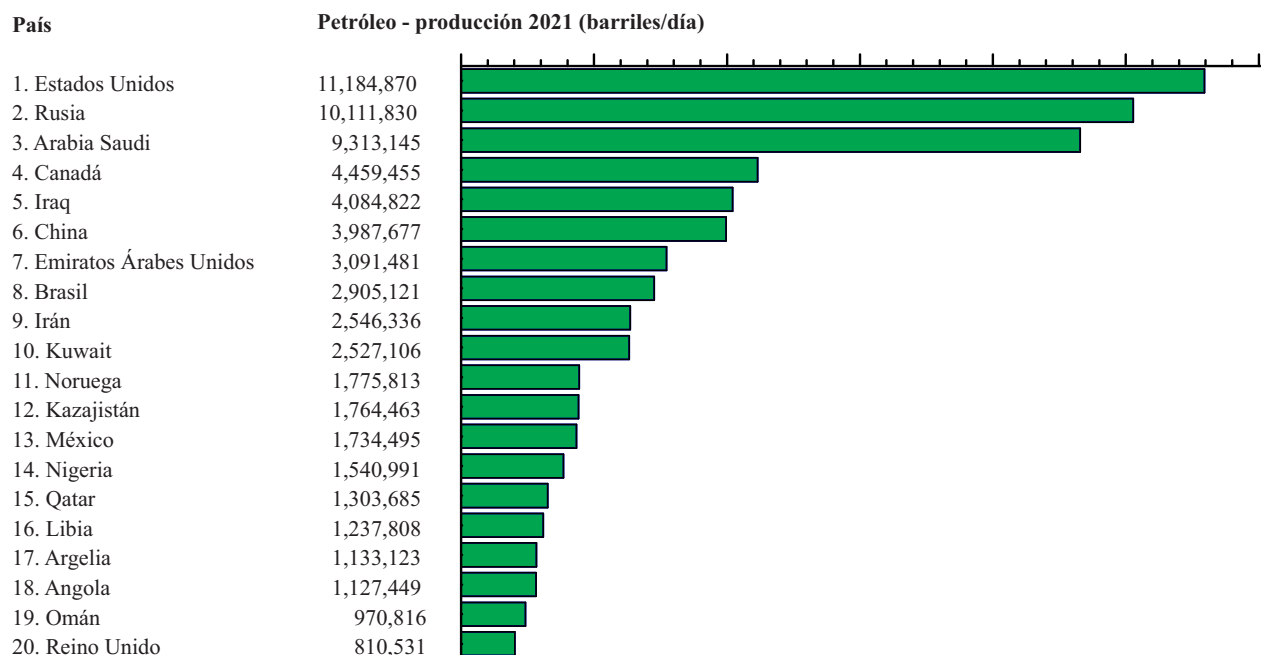


Figura 1.9: Producción de aceite crudo pesado por país al 2018 [18]

México al ser un país con industria alrededor del petróleo, desde la exploración hasta la refinación y venta de productos finales, es de gran importancia tener en cuenta los retos y oportunidades hacia el futuro, más aún, si consideramos que la producción actual de los combustibles se ha orientado hacia aceites crudos no convencionales. Los datos que se tiene, ver Figura 1.10, indican que la producción de crudos convencionales se ha reducido en proporción, y por ende, la mayoría de la producción se ha redireccionado hacia crudos cada vez más pesados, lo que implica un reto en la adaptación de los sistemas de la industria, algo que se avizora en corto tiempo. Por el contrario, la utilización de otras fuentes de energía requiere de un mayor tiempo de madurez, lo que hace a la utilización de las reservas de crudos no convencionales un buen puente para una transición energética ordenada.

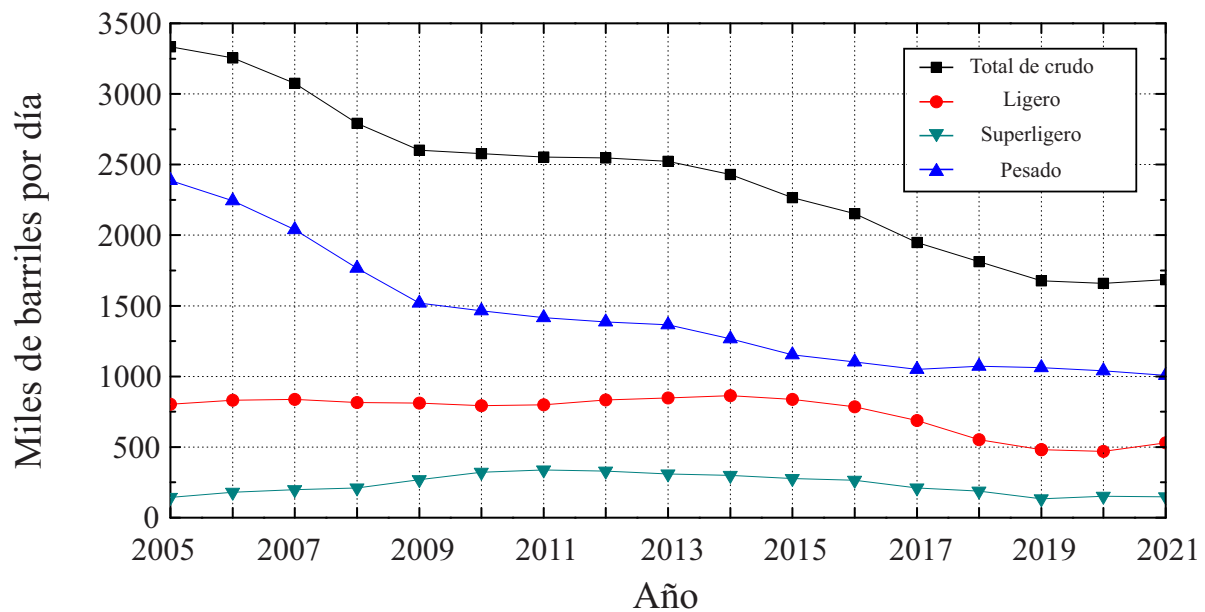


Figura 1.10: Producción de crudo pesado promedio [19]

En la Figura 1.10, se muestran los datos históricos de la producción de petróleo en el país. En el año 2005 se obtuvo un máximo de producción con un valor de 3.47 MMBd aproximadamente [19]. Se observa también que en comparación con el año 2005, la producción de petróleo al 2018 hubo una disminución de aproximadamente 53.27%. La tendencia observada es que a lo largo de los últimos 5 años la producción total de hidrocarburos en el país ha disminuido, pero a partir del 2016 la producción de hidrocarburos no convencionales se ha mantenido constante, ocasionando que, se encuentre en mayor proporción para uso en la industria mexicana.

De acuerdo a las reservas totales al 1º de enero del 2017 (reservas probadas, probables y posibles de hidrocarburos), información que se ilustra en la Figura 1.11, la mayor parte de crudo producido en México será aceite crudo no convencional, ocupando más del 50% del total de producción del hidrocarburo. Se estima que las reservas totales son aproximadamente de 19970 millones de barriles, de donde se estima que: 1432 millones de barriles corresponde al crudo extra pesado, 9351 millones de barriles al crudo pesado, 4290 millones de barriles al crudo mediano, 2800 corresponde al crudo ligero y 1669 al crudo súper ligero, respectivamente [20]. Ante esta tendencia, se espera que la producción de crudo pesado seguirá siendo el principal producto del activo mexicano, por consiguiente, es simple asumir la necesidad de incrementar las capacidades tecnológicas en el manejo de estos hidrocarburos, lo cual podría permitir un mejor aprovechamiento de las materias primas.

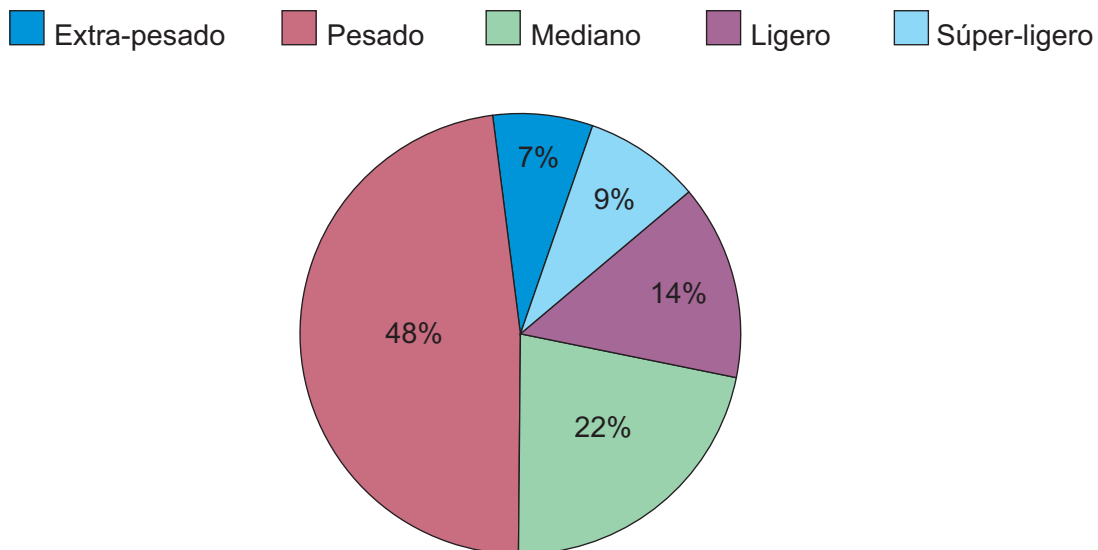


Figura 1.11: Porcentaje de reservas de hidrocarburos por tipo [20]

1.3. Transporte del aceite crudo no convencional

En general, como bien se ha indicado en líneas anteriores, todos los procesos que se llevan a cabo en la industria petrolera se complican cuando se tiene que procesar aceites no convencionales. Por ejemplo, para el caso de la refinación un excesivo contenido de azufre hace de la operación algo muy complejo, o bien, para el caso particular de la extracción y transporte de este tipo de aceites la excesiva viscosidad a temperaturas de yacimiento o líneas de transporte, en conjunto con su poca termoestabilidad (cambio de la viscosidad con la temperatura), dificulta la movilidad de las materias primas hasta las instalaciones de procesamiento.

No obstante la complejidad que implica el manejo de aceites no convencionales, el incremento en la demanda de energía hace necesario su utilización, por lo tanto, los últimos años se han buscado técnicas innovadoras para su manejo y procesamiento. En el caso particular del transporte de crudos pesados en líneas de oleoductos, el principal reto a afrontar es la elevada viscosidad que presenta el fluido, en este sentido, se ha buscado implementar diferentes métodos para modificar el valor de la viscosidad a un mínimo posible. Los principales procedimientos que se han usado para transportar crudos no convencionales son generalmente englobados en tres grandes grupos: 1) reducción de la viscosidad, 2) reducción de la fricción y 3) mejoramiento in-situ del crudo pesado. Al ser la viscosidad la propiedad dominante durante el transporte del aceite crudo a través de las tuberías, los principales factores que determinan el comportamiento de la viscosidad es la temperatura y la composición química del aceite crudo [9, 7].

A partir de la literatura se indica que la viscosidad de los aceites crudos a temperatura ambiente puede variar desde 0.005 Pa·s hasta más de 100 Pa·s, existiendo un valor de viscosidad de operación recomendado para el transporte a través de ductos menor de 0.4 Pa·s [21]. Por lo que los principales métodos para controlar el valor de dicha propiedad son: dilución del aceite crudo no convencional, reducción de la viscosidad a través de emulsiones aceite/agua, mecanismos de reducción de fricción y el calentamiento del aceite crudo.

Dilución del aceite crudo no convencional

Consiste en la adición de un aceite ligero, proveniente muchas veces del mismo sistema de refinación como el condensado de la producción del gas natural. Esta es una opción eficaz para reducir la viscosidad del crudo no convencional, y así, facilitar su movilidad en ducto ya que a una proporción de 20 a 30 % de disolvente suele ser suficiente para reducir de forma considerable las caídas de presión en tales sistemas de transporte [22].

En la Figura 1.12, se muestra una descripción de la relación exponencial entre el valor de la viscosidad de la mezcla resultante y la cantidad de diluyente para diferentes aceites no convencionales con diferentes valores de API. Lo anterior, con la finalidad de poder apreciar cuando una mezcla llega a una viscosidad óptima de transporte [12].

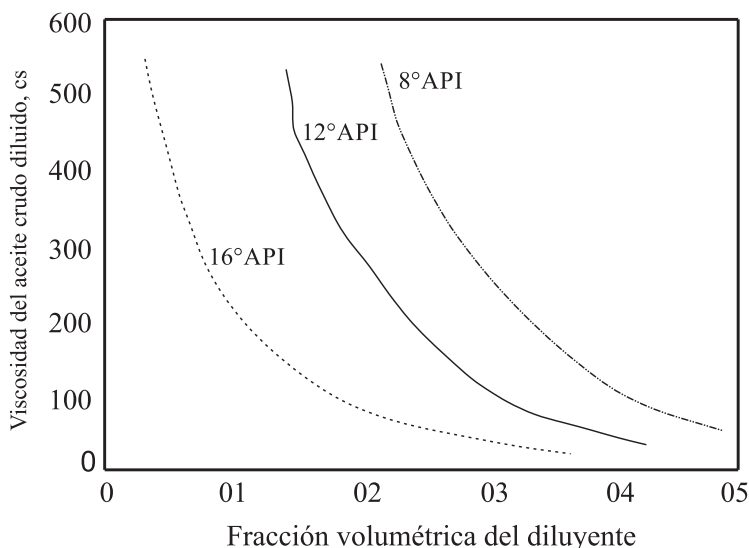


Figura 1.12: Efecto de dilución con un condensado en la viscosidad de diferentes aceites con diferente valores API [12]

Este es uno de los métodos más utilizados en la industria petrolera, sin embargo, muestra limitaciones ya que depende de la disponibilidad de diluyentes. Además al haber una mayor producción de aceites crudos no convencionales la producción de aceites ligeros no es suficiente para cubrir la demanda y satisfacer los requerimientos de disolventes [2]. Otra limitación es la presencia de asfaltenos en el aceite crudo no convencional, como estos son insolubles en disolventes ricos en alcanos, también llamados compuestos parafínicos, se esperaría la formación de precipitados afectando en gran medida la estructura de los ductos. Igualmente, se ha encontrado en la literatura la necesidad de un calentamiento previo a las mezclas para lograr un valor de la viscosidad deseado. Para una mezcla de un aceite crudo no convencional con un diluyente (7:3), se ha logrado una viscosidad aproximada de 1 Pa·s a 303 K, y de 0.3 Pa·s a 323 K, comparándose con el valor de la viscosidad del aceite crudo no convencional sin diluyente, está puede escalar hasta el valor de 15 Pa·s a 293 K. Claramente, la adición de un diluyente con un API de 29° y la necesidad de un calentamiento para la mezcla resultante, incrementa de forma considerable los costos de operación de este método [22, 2].

Reducción de la viscosidad a través de emulsiones aceite/agua

El método de reducción de la viscosidad a través de crear emulsiones aceite en agua (O/W) consiste en dispersar el crudo pesado en agua en forma de gotitas estabilizadas por tensioactivos, conduciendo a una importante reducción de la viscosidad. Sin embargo, en la producción y el transporte de aceite crudos también se ha encontrado emulsiones del tipo agua en aceite (W/O) y tipo aceite en agua en aceite (O/W/O), los cuales provocan un incremento en la viscosidad del aceite crudo, y generan daños materiales a los ductos, tales como la corrosión y la dificultad en el acondicionamiento del aceite crudo antes de su llegada a la refinera, principalmente, la separación del agua y las sales afectan los costos de operación. En la Figura 1.13, se ilustran los esquemas simplificados de como se presentan las emulsiones encontradas en el aceite crudo [22].

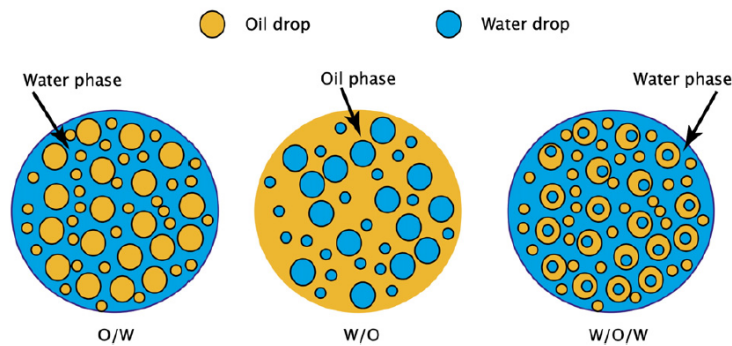


Figura 1.13: Emulsiones encontradas en la producción y transporte del aceite crudo [22]

Además de lo antes mencionado, la generación de emulsiones puede producir otros efectos no deseados, tal es el caso de comportamientos reológicos complejos (comportamiento no newtoniano), los cuales pueden dificultar la predicción del comportamiento del flujo dentro de los sistemas de transporte. De la Figura 1.3, se puede apreciar como se gesta el comportamiento reológico de un aceite no convencional con valor de API de 10.71° a 15 °C, para una condición en emulsión y pura. En ambos ensayos se mide la viscosidad del aceite crudo en función de la rapidez de deformación a diferentes temperaturas[21]. En la Figura 1.14-a) se muestra el comportamiento de la viscosidad del aceite crudo sin la adición de algún aditivo como se esquematiza en la Figura 1.3, aquí, el fluido presenta un comportamiento reológico similar en todo el rango de temperaturas del estudio (no newtoniano). Por otra parte, la Figura 1.14-b) muestra cambios apreciables cuando al crudo se le agrega emulsificantes (Agua). Al momento de añadir el aditivo para la formación de la emulsión, la viscosidad disminuye aproximadamente en un 35% a la temperatura más baja del estudio (25°C). También, se puede observar que a una baja rapidez de deformación, el comportamiento del fluido es no newtoniano, esto en comparación con una alta rapidez de deformación donde el fluido tiene un comportamiento newtoniano, para lo cual la viscosidad es independiente de la rapidez de deformación.

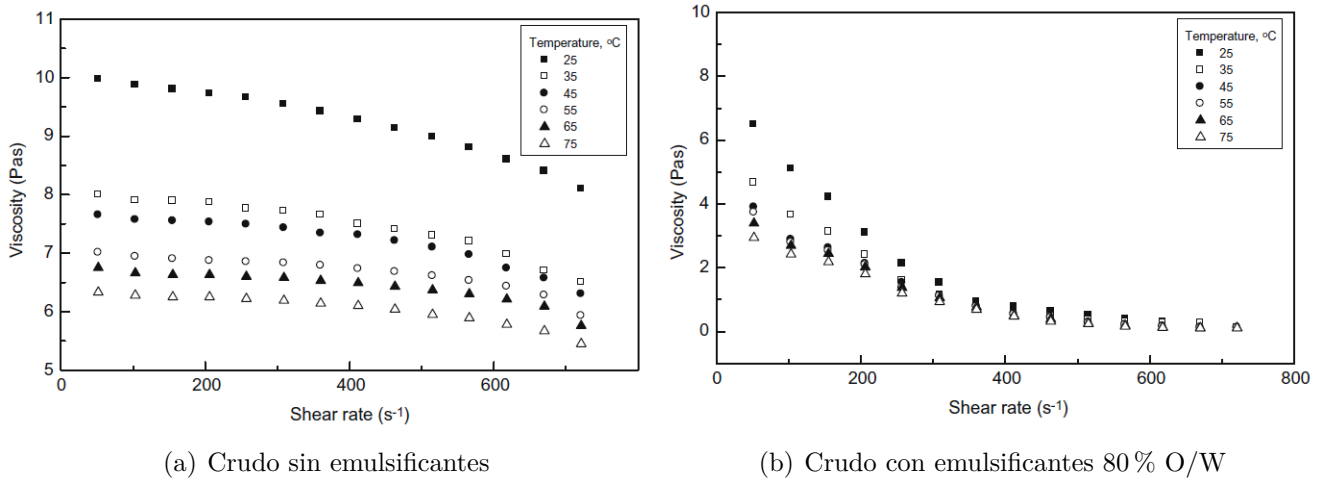


Figura 1.14: Comparativo [21]

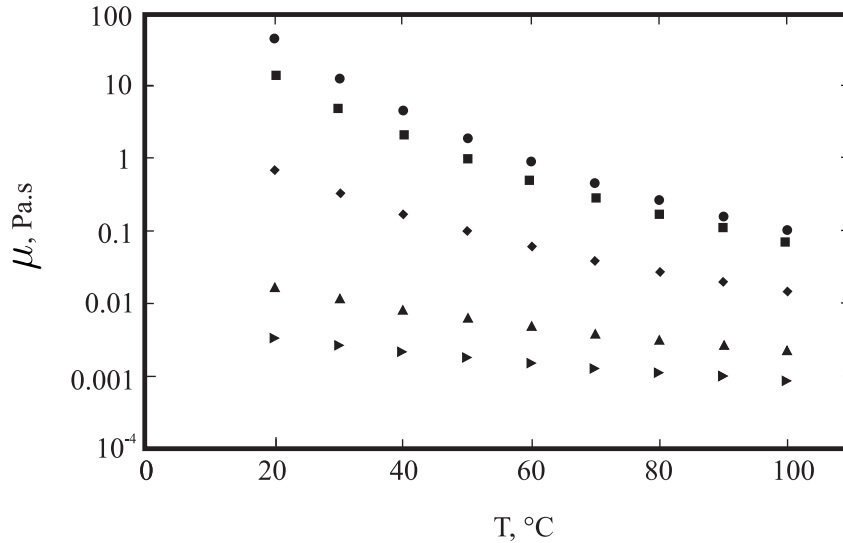
En la literatura, se ha reportado que una típica emulsión aceite en agua está conformada de 70 % de crudo pesado, 30 % de fase acuosa y 500-2000 ppm de aditivos. La mezcla resultante arroja una viscosidad entre 0.05-0.2 Pa·s en condiciones de operación de la tubería [12]. No obstante, las limitaciones reportadas sobre este método de reducción de la viscosidad es la posibilidad de congelamiento del fluido, mayor probabilidad de corrosión del ducto, la posible la separación de la emulsión al momento del transporte del aceite crudo formándose así un flujo en dos fases, el incremento de los costos operacionales debido a la separación y tratamiento del agua usada para la emulsificación del aceite crudo [23].

1.3.1. Calentamiento del crudo

Por último, se tienen los procedimientos de control de viscosidad basados en calentamiento. En este tipo de métodos se aprovecha el efecto que tiene la temperatura sobre la viscosidad de los fluidos (aceites crudos). Como se ilustra en la Figura 1.14, de la sección anterior, se pudo demostrar que para un aceite crudo no convencional emulsificado, el valor de su viscosidad también se disminuye si se aumenta su temperatura. Además, esto se puede constatar en la Tabla 1.4, donde la totalidad de las ecuaciones empíricas registradas en la literatura para obtener el valor de la viscosidad toman como un parámetro importante el valor de la temperatura de los aceites crudos.

Actualmente, la temperatura es una variable fundamental al momento de definir la viscosidad de los fluidos. Para el caso particular del transporte de los aceites crudos (proceso hidrodinámico), esto es aún más relevante, una evaluación adecuada de la viscosidad de este tipo de fluidos es imperativo, además, si la temperatura de los aceites cambia durante su desplazamiento, es indispensable definir los cambios de dicha propiedad con el fin de garantizar la transportabilidad. En tal contexto, es habitual en la industria petrolera una caracterización rigurosa de dicha propiedad de los aceites crudos, y además, se presta una mayor atención cuando se observa algún comportamiento ligados a crudos no convencionales. En la Figura 1.15, se presenta uno de dichos estudios, aquí se muestra la dependencia de la viscosidad con la temperatura para diferentes aceites crudos con diferentes valores API [10]. Los resultados del estudio que se menciona indican que la viscosidad de los aceites crudos no sólo dependen de su densidad (asociada a su composición), sino también depende fuertemente de la temperatura en la cual se registra la evaluación. Claramente, la viscosidad

muestra una tendencia descendente conforme aumenta la temperatura de los aceites, igualmente, la viscosidad disminuye conforme se reduce la densidad (valores altos de API). No obstante de lo anterior, es importante mencionar que dichos resultados también comprueban que las afectaciones que sufre la viscosidad de los aceites no es proporcional, cada crudo tiene un impacto en su viscosidad diferente, lo cual podría explicarse debido a que cada uno tiene una composición diferentes.



- (●) API=12.2, $\rho_f=0.9834$, $\mu=42.0$ (■) API=12.3, $\rho_f=0.9832$, $\mu=44.47$ (◆) API=12.6, $\rho_f=0.9811$, $\mu=20.03$
 (▲) API=12.2, $\rho_f=0.9834$, $\mu=15.19$ (▶) API=12.6, $\rho_f=0.9808$, $\mu=12.87$

Figura 1.15: Viscosidad vs Temperatura en diferentes tipos de aceite crudo [10]

Para los sistemas de transporte de aceites crudos con control de temperatura, un aumento de ésta en el fluido provoca una rápida reducción de su viscosidad, lo que a su vez, provoca la disminución de la resistencia del aceite crudo a fluir. Este objetivo se logra con el precalentamiento del aceite crudo no convencional seguido del blindaje térmico del ducto donde se transporte. Sin embargo, es necesario de estaciones de calentamiento a lo largo del sistema de ductos debido a la pérdida de calor que sufre el fluido a causa de las grandes distancias en las que se transporta, generalmente, no se puede garantizar condiciones ambientales constantes, lo cual se encuentra definido por el tiempo (estación y periodo del día) y por la zona o región por donde se encuentra instalado el oleoducto [24, 25]. Con las estaciones de calentamiento, se reduce parcialmente los efectos térmicos indeseables y se conservan las condiciones de transportabilidad por un mayor tiempo. Sin embargo, lo anterior implica utilizar una gran cantidad de energía, equipos y materiales que implican un aumento considerable en el costo de las instalaciones y operación de este tipo de sistema, lo que lo hace oneroso y de utilidad sólo en casos donde otros procedimientos no son factibles. [2]

En la actualidad, el estudio y la investigación de la transferencia de calor en oleoductos a tomado gran relevancia [26, 27], esto derivado de las características de los aceites crudos que se espera sean transportados, y de lo antes mencionado sobre los costos que representa los procesos de calentamiento en los sistemas de transporte. Claramente, realizar dicha investigación de forma experimental representa un reto muy difícil de llevar a cabo, algo que no se asocia al conocimiento

técnico requerido, sino a los costos exorbitantes que representa. Definir experimentalmente un campo de temperatura para un sistema de ductos de grandes distancias es imposible o poco práctico, la cantidad de dispositivos de medición (sensores) e instalaciones de conexión son sumamente costosas si se busca un buen resultado; por consiguiente, se ha optado por la utilización del modelado matemático y simulación numérica, con la cual, se ha buscado realizar estudios a detalle de la transferencia de calor en oleoductos a un costo razonado. La literatura técnica sobre el tema muestra un sesible inconveniente dentro de las diferentes propuestas que se tiene, dado que la pérdida de calor que sufre el fluido depende en gran medida del entorno que lo rodea y este se encuentra definida mediante la distribución de la temperatura en todo el ducto, es plausible asumir que no se tiene el mismo flujo de energía y temperatura externa del ducto en todas las partes (heterogeneidad de las condiciones del entorno), algo que hasta el momento no se a estudiado y analizado a detalle. Claramente, lo anterior es de interés, puesto que, las redes de ductos cruzan regiones con diferentes topografías, geomorfologías, características hídricas, condiciones climáticas, etc [25]. La mayoría de los trabajos publicados en relación a la simulación de la temperatura en ductos sólo han tomado en cuenta que la temperatura ambiente al que está sometido el ducto es constante. Dicha condición simplifica el análisis y permite tener una primera proyección de como se desarrollan los campos de temperatura en los oleoductos; no obstante, también representa una desviación de condiciones más realistas que se espera que se presenten en sistemas de transporte tan masivos, lo cual pudiera desencadenar errores en la predicción de los modelos numéricos que se han desarrollado. En los últimos años, se ha presentado algunas propuestas de como evaluar condiciones térmicas variables durante el transporte de aceites crudos, ver Figura 1.16, principalmente se ha estudiado como el tiempo (periodos del día y año) altera la temperatura ambiente que rodea a los oleoductos [28]. También, se ha analizado como la introducción de secciones de aceite (volúmenes) con diferente temperatura y composición pueden afectar tanto los campos de temperatura como la hidrodinámica del fluido [29]. Estos dos ejemplos muestran la importancia del entorno que rodea a los oleoductos al momento de definir su campo de temperatura, representan un esfuerzo para entender como se lleva a cabo la transferencia de calor entre el fluido que viaja a través del oleoducto y el medio ambiente que lo rodea (sistema conjugado). Desafortunadamente, en estos trabajos también se puede percibir que no se toma en cuenta el hecho de que el medio que rodea al oleoducto puede cambiar con facilidad, ya sea por que se pasa por un lago, es una ducto que atraviesa tanto el mar como la costa, o simplemente, que conecta dos regiones con un suelo que presentan composiciones diferentes.

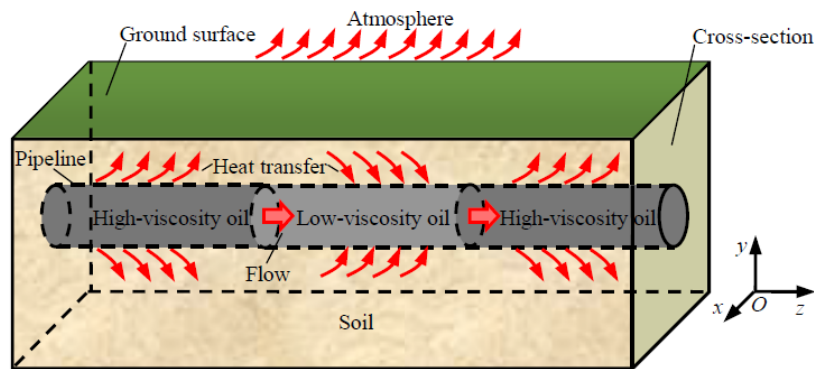


Figure 1. Schematic of batch transportation for the buried hot oil pipeline

Figura 1.16: Esquema del transporte del crudo a través de un ducto [28]

De los trabajos más relevantes de la literatura relacionados en como el entorno afecta el buen funcionamiento de los sistemas de transporte de crudo en oleoductos, se encuentran los que hacen referencia a la interacción entre suelos congelados y oleoductos [25]. Aquí, la dinámica de este tipo de suelo durante todo el año hace complejo la predicción de la distribución de temperatura dentro del oleoducto. En el mismo sentido, también se han reportado diversos trabajos donde se analiza el comportamiento de la temperatura ambiente con respecto a las fluctuaciones estacionales, lo cual dio como resultado cambios apreciables en el flujo volumétrico de aceite crudo derivado de la pérdida de energía térmica (aumento de la viscosidad). Para este caso, el caudal de flujo sigue el mismo patrón de comportamiento oscilatorio que presenta la temperatura ambiente con respecto al tiempo (invierno-verano y día-noche) [29].

Los esfuerzos realizados para modelar el flujo de crudos no convencionales teniendo en cuenta la dependencia de la viscosidad con la temperatura son pocos [30], se ha preferido despreciar en la mayoría de los casos dichos efectos térmicos en los estudios reportados hasta el momento. Matemáticamente, esto quiere decir que los modelos de estudio, conservación de masa, momentum y energía, para estos trabajos han sido resueltos de manera desacoplada, por consiguiente, se ha asumido que la hidrodinámica de flujo no se ve afectada por la transferencia de calor. La omisión que se menciona para el caso de crudos pesados puede ser muy representativa, generar grandes cambios en los resultados, y a la vez, representar un error considerable en las estimaciones que se deben realizar. Principalmente, se a podido constatar que el flujo volumétrico se ve afectado de forma considerable cuando se incrementa el valor de la viscosidad, lo que resulta en una sobre estimación en su valor para una condición de presión dada, o por el contrario, una subestimación de la presión requerida para obtener un cierto caudal de flujo [31]. Se han hecho esfuerzos para acoplar y resolver las ecuaciones de los modelos de transferencia de momentum y energía, sin embargo, el proceso de transferencia de energía es introducido de forma limitada a través de las condiciones de frontera, dándose más relevancia a la solución del modelo hidrodinámico del fluido [32, 33, 24].

Además, se han realizado estudios en los que se describen las pérdidas de energía térmica por parte del fluido como sistema conjugado. En tal caso, se asume que la energía que se transfiere del fluido hacia el entorno debe de transitar por varias regiones [34]. Tradicionalmente, para estos sistemas conjugados de convección forzada y conducción en paredes se ha asumido que no hay un acoplamiento entre estos efectos, imponiendo un estado isotérmico, o bien, un flujo de energía constante hacia los alrededores como una condición de frontera. Sin embargo, esta simplificación sólo es asintóticamente correcta cuando la conductividad térmica del sólido es mucho mayor comparado con la conductividad del fluido, algo que si pasa entre el fluido y el ducto, pero no es el caso entre un fluido y un recubrimiento aislante térmicamente (natural o artificial) [35, 36]. Por lo tanto, es imperativo realizar una evaluación adecuada, con un análisis de escala, para no caer en errores de simplificación, es necesario calcular la temperatura de todas las regiones involucradas antes de evaluar la temperatura del fluido. [37, 38]

Las simplificaciones hechas para saber la distribución de temperatura en el suelo han sido suponer que la conducción predomina en el transporte de calor y que el transporte en dirección horizontal no juega un rol significativo [35], condición que es valida cuando existe el desacoplamiento natural entre la hidrodinámica de flujo y la transferencia de calor en un sistema conjugado (fluido-oleoducto-aislante). Sin embargo, esto no es correcto cuando se presentan efectos térmicos (cambios de viscosidad del fluido) considerables durante el proceso de transporte. Dicha condición

puede afectar el flujo de energía que se emite desde el fluido hasta el entorno, más aún, tales afectaciones son más apreciables cuando las condiciones del entorno son cambiantes en el espacio y tiempo. Hasta el momento, los estudios más desarrollados en el tema han tomado en cuenta varios aspectos que definen la transferencia de calor en los sistemas de oleoductos, y como estos afecta la hidrodinámica del flujo; por ejemplo, las múltiples capas que componen el sistema conjugado y los cambios que sufre la temperatura del entorno con respecto al tiempo [39, 29]. No obstante, hasta el momento no se ha desarrollado la metodología adecuada para poder evaluar la transferencia de calor entre el sistema que se menciona y su entorno heterogéneo, en donde la condición ambiente cambia y se encuentra definida por las características propias del entorno por donde transita el oleoducto. Además, no se han realizado esfuerzos para poder mitigar efectos térmicos indeseables que detonan la condición antes mencionada.

1.4. Propuesta de investigación

En el presente trabajo de tesis se analizará el impacto térmico ejercido por el entorno sobre el transporte de un aceite crudo no convencional en un oleoducto aislado térmicamente. Principalmente, se evaluarán los efectos térmicos no uniformes ejercidos por un entorno que presenta condiciones cambiantes en el espacio. Además, se analizará a detalle cómo los procesos de transferencia de calor en el sistema de transporte que se menciona afectan la hidrodinámica del proceso. En este punto, se demostrará mediante procedimientos teóricos, analíticos y numéricos, qué efectos térmicos puntuales pueden deteriorar por completo el transporte del crudo a través del ducto. Por consiguiente, se propondrá un mecanismo adecuado para reducir y evitar los impactos térmicos agresivos, garantizando con esto un flujo adecuado dentro del oleoducto.

Para la elaboración de trabajo se plantea un procedimiento sistemático que consta de varios puntos a desarrollar. En primer lugar, en el capítulo 2 se ilustra el modelamiento matemático de los diferentes fenómenos que intervienen en el transporte de crudos en oleoductos relacionados con la transferencia de calor y mecánica de fluidos, esto considerando todas las condiciones que se han mencionado y algunas otras adicionales. Además, se realiza un análisis de escala a detalle para determinar las principales variables y parámetros que intervienen y controlan el proceso de estudio. También, resultado de análisis de escala, se obtienen los diferentes modelos de conservación en su versión simplificada, los cuales se resuelven mediante procedimientos analíticos dentro de límites bien definidos. Estos resultados son útiles para la validación del procedimiento numérico de solución, en donde se evalúan los modelos completos y se ilustra a detalle en el capítulo 3. Finalmente, en el capítulo 4 se ilustra los principales resultados obtenidos mediante las diferentes metodologías empleadas para el estudio, resaltando los puntos a evaluar que han sido mencionados anteriormente. Por ejemplo, el fuerte impacto térmico en un región en específico puede ocasionar que colapse la hidrodinámica de flujo, reduciéndose apreciablemente el caudal. En la última parte del trabajo se exponen las condiciones del estudio y las principales recomendaciones para poder afrontar los efectos térmicos indeseables que se presentan en los sistemas de transporte de aceites crudos no convencionales.

Capítulo 2

Análisis del problema

2.1. Descripción general del proceso

En la Figura 2.1 se muestra el esquema del modelo físico simplificado que se estudia en esta tesis. El fluido de trabajo es un aceite crudo pesado el cual es transportado desde una plataforma de extracción hasta un reservorio de almacenamiento a través de un ducto. Se considera que el ducto está aislado térmicamente y se encuentra en un entorno no heterogéneo, ya que la región a la entrada del ducto se encuentra sumergido en el mar, mientras que a la salida de este está recubierto en tierra. La distancia entre el reservorio y la plataforma de extracción está descrita en l y la altura entre la entrada y la salida del ducto está descrita por H_g . En la entrada del ducto, el fluido entra a una temperatura T_{in} y presión P_{in} . A la salida del ducto, el fluido entra al reservorio a una presión P_T . También se considera que existe un ángulo de ascenso en la línea de transporte del aceite crudo.

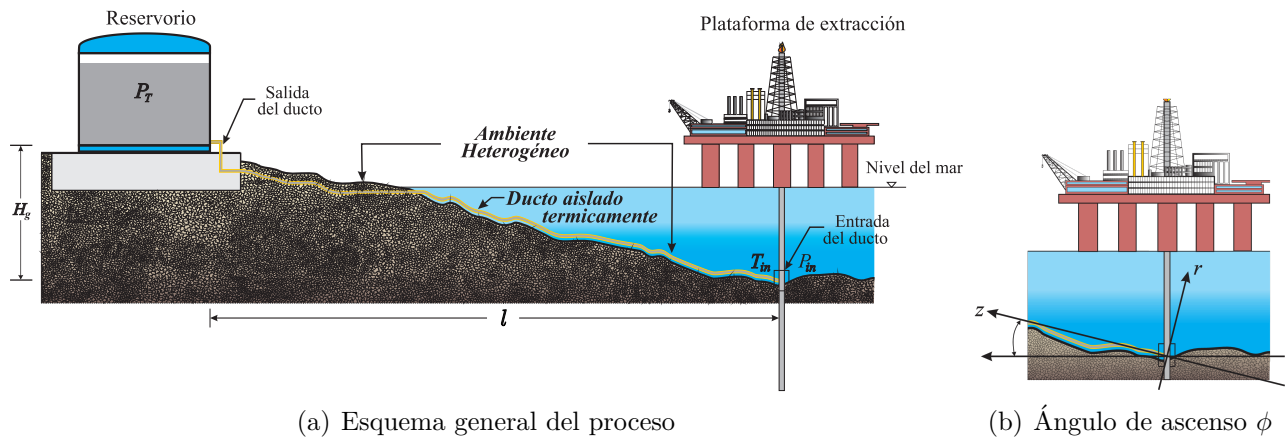


Figura 2.1: Diseño general del proceso [40]

En la Figura 2.2 se muestra una descripción específica del proceso de transporte del aceite crudo pesado. Las dimensiones del ducto donde r_0 , h y L son el radio interno, el espesor y la longitud del ducto, respectivamente. El aislante que recubre el ducto tiene un espesor H . La temperatura en la superficie del aislante se considera igual que la temperatura del entorno, $T_s = T_a$, debido a que el medio en el que está envuelto el aislante se considera no homogéneo.

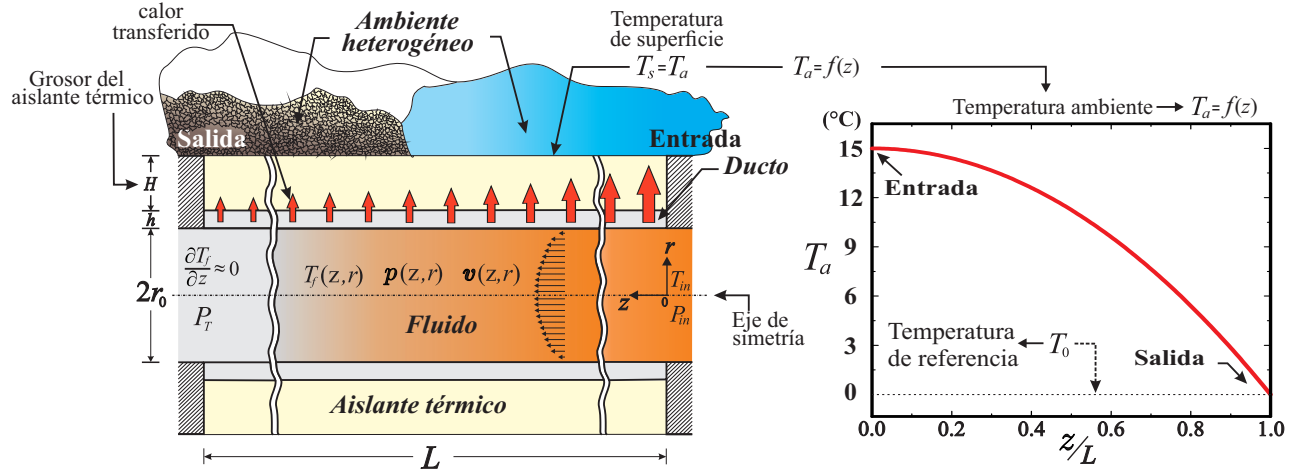


Figura 2.2: Detalles del proceso

Para mejorar el transporte del aceite crudo pesado a través del ducto, la temperatura de entrada T_{in} se supondrá mayor que la temperatura exterior T_a . La temperatura del aceite crudo está definida por T_f . En este modelo se considera que la temperatura exterior, T_a , no es constante a lo largo de la línea de transporte debido a la no heterogeneidad del medio. Esta diferencia entre la temperatura del fluido y la temperatura exterior provoca un estado que rompe con el equilibrio térmico, ocasionando un gradiente de temperatura en el sistema. La rapidez de transferencia de energía térmica está influenciada por los efectos difusivos del material del que están hechos el ducto y el aislante en las direcciones radial y longitudinal. Por lo tanto, el proceso de transferencia de energía térmica se lleva a cabo tomando en cuenta los tres elementos: fluido, pared del oleoducto y aislante térmico. En consecuencia, a este tipo de transferencia de calor difusivo-convectivo se le conoce como sistema conjugado [41].

Por lo anterior se presentan las ecuaciones gobernantes del sistema, esto para las secciones del fluido, pared de oleoducto y aislante térmico, respectivamente.

2.2. Ecuaciones de gobierno

Las ecuaciones de gobierno que permiten el estudio del fenómeno descrito se obtienen con las siguientes suposiciones:

- Debido al valor alto de viscosidad del aceite crudo pesado, se considera que el valor del número de Reynolds entra en el rango marcado para considerar un flujo en régimen laminar. $Re < 2300$ [7]
- El flujo a través del ducto se considera homogéneo y no se presenta el fenómeno de precipitación de ningún compuesto [31]
- Debido al valor alto de viscosidad, se supone la existencia de un calentamiento mecánico por el movimiento del fluido [42]
- El tiempo característico en el que fluido llega al flujo desarrollado es menor al tiempo de residencia del fluido en el ducto, por lo que se supone el estado estacionario del flujo.[31]

Para la sección del fluido se tienen las siguientes ecuaciones:

Ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (2.1)$$

Transporte de momentum:

$$\rho_f (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}) = \rho_f \underline{g} - \nabla p - \nabla \cdot \underline{\tau} \quad (2.2)$$

Transporte de energía:

$$\rho_f C_p \underline{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot \underline{q} + \Phi \quad (2.3)$$

Donde se define que $\Phi = \underline{\tau} : \nabla \underline{v}$

Aquí, Φ se encuentra relacionado con el término de calentamiento mecánico debido a la viscosidad del fluido, mostrando un proceso irreversible del sistema.

Para la sección de la pared de ducto y el aislante:

Transporte de energía:

$$\nabla \cdot \underline{q} = 0 \quad (2.4)$$

Para poder solucionar las ecuaciones de gobierno, es necesario definir la naturaleza reológica del fluido de transporte. Como se habló en la sección introductoria, la composición de un aceite crudo pesado es compleja, haciendo necesario la caracterización del aceite para definir su naturaleza reológica. En la siguiente sección se presentará la caracterización del aceite crudo para poder catalogar al fluido como newtoniano o no newtoniano, y así, poder resolver la ecuación de transporte de momentum 2.2 y energía 2.3.

2.3. Viscosidad

La relación que comparten fluidos incompresibles newtonianos y no newtonianos es que obedecen las ecuaciones de continuidad y de transporte de momentum; no obstante, difieren en la ecuación constitutiva del fluido. Esta ecuación representa al tensor de esfuerzos viscosos, $\underline{\tau}$, que a su vez contiene la información en como la deformación del fluido aporta al esfuerzo cortante [43].

Esta ecuación constitutiva tiene la forma $\underline{\tau} = f(\nabla \underline{v}, \underline{v}, \text{etc})$ y se puede dividir en dos formas:

Ecuación constitutiva para fluidos incompresibles.

$$\text{Newtonianos} \quad \underline{\tau} = -\mu \left[\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T \right] \quad (2.5)$$

$$\text{No newtonianos} \quad \underline{\tau} = f(\nabla \underline{v}, \underline{v}, \text{etc}) \quad (2.6)$$

Para fluidos newtonianos, la ecuación 2.5 describe la relación lineal entre la razón de deformación del fluido y el esfuerzo cortante viscoso que se le aplique. El parámetro μ es un coeficiente de proporcionalidad que físicamente describe la resistencia del fluido a deslizarse siendo dependiente de la presión y temperatura. Por otra parte, para el caso de fluidos no newtonianos, ecuación 2.6,

es necesario un estudio detallado de su naturaleza reológica para hallar una ecuación constitutiva que la describa correctamente [44].

Dicho lo anterior es importante conocer el comportamiento reológico del aceite crudo pesado para poder definir correctamente la ecuación constitutiva y fijar de manera correcta la ecuación de transferencia de momentum.

2.3.1. Comportamiento reológico

Para este trabajo de tesis se caracterizaron dos muestras de aceite crudo las cuales se definieron como mediano y pesado. La viscosidad dinámica, μ_f , y la densidad relativa, ρ_f , fueron obtenidas usando un viscosímetro SVM 3000 Stabinger, ajustándose al método ASTM D7042 a una temperatura estándar de 20°C [31]. La capacidad calorífica, $C_{p(20^\circ C)}$, y la conductividad térmica, $k_{f(20^\circ C)}$, de los aceites crudo fueron calculadas usando correlaciones empíricas descritas en la literatura [45, 46]. En la Tabla 2.1, están registradas las propiedades físicas de los aceites crudos al igual que se reporta el análisis SARA para cada muestra. [31].

Propiedades	Aceite mediano	Aceite pesado	Unidad
API	29.19	21.45	°API
ρ	880.6	925.1	kg/m ³
$\mu_{(20^\circ C)}$	0.02203	0.44192	Pa · s
$C_{p(20^\circ C)}$	1.85	1.75	kJ/kg · K
$k_{f(20^\circ C)}$	0.125	0.127	W/m · K
Composición del crudo			
Saturados	34.69	27	wt %
Aromáticos	28.01	15	wt %
Resinas	29.73	47	wt %
Asfaltenos	7.57	11	wt %

Tabla 2.1: Comparación de propiedades físicas entre aceites medio y pesado

Lo primero que se puede observar es la gran diferencia del valor de la viscosidad entre los dos aceites. El valor del aceite crudo pesado es aproximadamente 20 veces mayor en comparación con el aceite crudo mediano a la misma temperatura, mientras que los demás valores de las propiedades físicas se mantienen en el mismo orden de magnitud. A pesar de que las propiedades físicas del fluido, ρ_f , C_{p_f} y k_f , tiene alguna dependencia con la temperatura, para este trabajo se considerarán constantes.

Para determinar la naturaleza reológica de las muestras de aceite, estas fueron analizadas usando un reómetro Physica MCR 101 Modular Compact Rheometer, Anton Paar, Graz, Austria [31]. En la Figura 2.3 se muestra el cambio del valor de la viscosidad en función de la rapidez de deformación a diferentes temperaturas. Se observa que el valor de la viscosidad del aceite mediano es relativamente constante a una temperatura superior a los 20°C y hay pequeñas variaciones para el aceite pesado, considerándose un comportamiento newtoniano. Es importante notar que a una temperatura cercana a 10°C, las viscosidades de los crudos empiezan variar conforme disminuye la rapidez de deformación. En este caso a bajas temperaturas el fluido empieza a comportarse como un fluido no newtoniano [9].

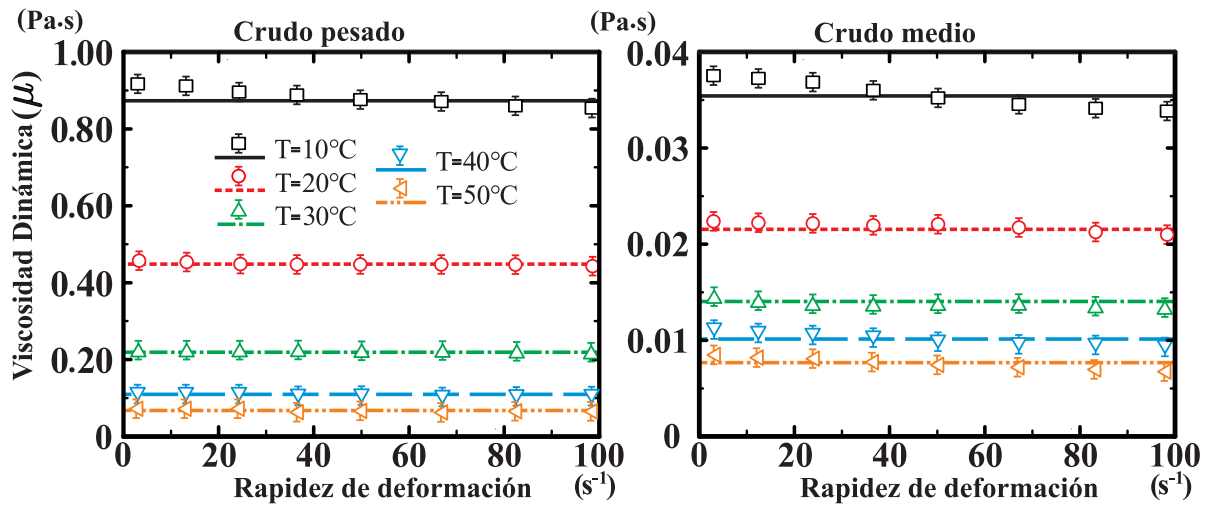


Figura 2.3: Pruebas reológicas para dos muestras distintas de petróleo

Por lo anterior, se considera que el aceite crudo mediano y pesado son fluidos newtonianos si la temperatura de estos fluidos están por arriba de los 10°C. La ecuación constitutiva para fluidos newtonianos e incompresibles se describen en la ecuación 2.7, donde la viscosidad es función de la temperatura del fluido, $\mu = \mu(T_f)$.

$$\underline{\tau} = -\mu [\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T] \quad (2.7)$$

Ahora es importante conocer la relación que hay entre la viscosidad y la temperatura de estos fluidos. Para este fin, se realizaron diferentes caracterizaciones con el aceite crudo mediano y pesado, pero ahora también midiendo el comportamiento del aceite crudo ligero con la finalidad de observar un contraste entre el comportamiento entre aceites crudos. Para estas pruebas, se siguió utilizando el viscosímetro Antor Paar SVM3000. Los resultados se muestra en la Figura 2.4.

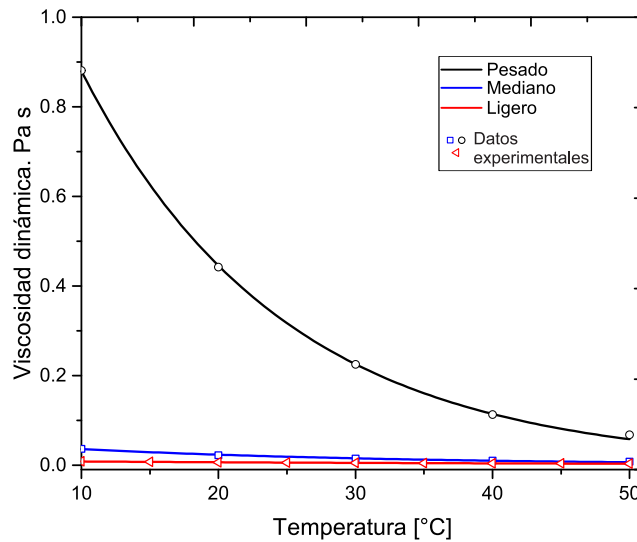


Figura 2.4: Comportamiento de la viscosidad en función de la temperatura

Para los datos experimentales reportados para el aceite crudo pesado se le ajustó una función matemática tipo Arrhenius, ecuación 2.8. Se hace notar la gran diferencia que hay entre el

comportamiento del crudo pesado respecto a los crudos ligero y mediano, para estos dos últimos casos, se tiene un comportamiento lineal en comparación al exponencial exhibido por el aceite pesado.

$$\mu = \mu_0 \exp(bT_f) \quad (2.8)$$

Donde μ_0 es un parámetro cinético, b es un parámetro de sensibilidad a la temperatura para el modelo tipo Arrhenius y T_f es la temperatura del fluido evaluada en escala absoluta (Kelvin) [31].

Se hace hincapié que la ecuación 2.8 sólo es válida para crudos ligeros, medios y pesados, en un intervalo de temperatura superior a los 10°C. A temperaturas inferiores a 10°C se observa que el crudo tiene un comportamiento no newtoniano. Por lo tanto, para la presente tesis, los datos reológicos indican que las muestras analizadas tienen un comportamiento newtoniano para el rango de temperatura del experimento. Se hace notar también que aproximadamente el 60% de la composición másica del aceite crudo pesado está definido por resinas y asfaltenos, contra un 40% del aceite crudo mediano.

2.4. Ecuaciones de transporte para el crudo pesado

Después de asumir que el fluido a transportar presenta un comportamiento newtoniano, donde el tensor de esfuerzos presenta la relación $\underline{\tau} = -\mu [\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T]$, se presentan las ecuaciones de continuidad, transferencia de momentum y energía desarrolladas para un espacio en coordenadas cilíndricas 2D (z, r) tomando en cuenta la geometría del ducto, donde el origen coordenado está en la entrada y centro de éste.

Continuidad.

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0 \quad (2.9)$$

Momentum z

$$\rho_f \left(v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \rho_f g \sin(\phi) \quad (2.10)$$

Momentum r

$$\rho_f \left(v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \rho_f g \cos(\phi) \quad (2.11)$$

Energía

$$\begin{aligned} \rho_f \bar{C}_p \left(v \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Para la sección del ducto y aislante se tienen las siguientes ecuaciones:

Transferencia de energía térmica en el ducto.

$$k_p \left[\frac{\partial^2 T_p}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_p}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (2.13)$$

Transferencia de energía térmica en el aislante

$$k_s \left[\frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (2.14)$$

2.4.1. Condiciones de frontera

Coordenada z:

$$\left. \frac{\partial T_p}{\partial z} \right|_{z=0,L} = \left. \frac{\partial T_s}{\partial z} \right|_{z=0,L} = 0 \quad (2.15)$$

$$T_f(z=0) = T_{in}, \quad \left. \frac{\partial T_f}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad (2.16)$$

$$p(z=0) = P_T + P_p, \quad p(z=L) = P_T \quad (2.17)$$

Coordenada r:

Condición a lo largo del eje de simetría en el centro del ducto.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial T_f}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (2.18)$$

Condición de no deslizamiento e impermeabilidad.

$$u(r=r_0) = v(r=r_0) = 0 \quad (2.19)$$

Condiciones en el sistema conjugado entre la interfase del fluido y el ducto.

$$T_f(r=r_0) = T_p(r=r_0), \quad k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial r} \right|_{r=r_0} = k_p \left. \frac{\partial T_p}{\partial r} \right|_{r=r_0} \quad (2.20)$$

Condiciones en el sistema conjugado entre la interfase del ducto y la tierra que recubre el ducto.

$$T_p(r=r_0+h) = T_s(r=r_0+h), \quad k_p \left. \frac{\partial T_p}{\partial r} \right|_{r=r_0+h} = k_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial r} \right|_{r=r_0+h} \quad (2.21)$$

La ecuación 2.22 es una condición de frontera que representa la interacción que hay entre la temperatura del material aislante y la temperatura ambiente.

$$T_s(r = r_0 + h + H) = f(z) \quad (2.22)$$

donde

$$f(z) = T_0 + \frac{A}{T_0} (L^2 - z^2) \quad (2.23)$$

La función $f(z)$ representa la temperatura que existe en la frontera entre el aislante térmico y el ambiente. En trabajos anteriores [31], esta temperatura se modelaba constante con la finalidad de tener una temperatura homogénea en la frontera del sistema. Aquí se propone tener una temperatura no homogénea, suponiendo una función parabólica que sólo dependa de la coordenada longitudinal del sistema.

2.5. Análisis de escala

El análisis de escala en ocasiones se confunde con el análisis dimensional, o con la adimensionalización de las ecuaciones gobernantes para llevar a cabo un análisis de perturbación y una simulación numérica. Lo anterior guarda cierta relación, no obstante, el objetivo del análisis de escala es usar los principios básicos de los órdenes de magnitud para estimar la importancia de los términos en la ecuación. Por ejemplo, cuando se calcula la transferencia de energía en la capa límite convectiva de un sistema, siendo el espesor de esta el valor de interés, el objetivo de análisis de escala es determinar cualitativamente la dependencia paramétrica de dicho espesor en función de las variables involucradas. Por consiguiente, cuando el análisis de escala se lleva a cabo apropiadamente, éste anticipa dentro de un factor de orden unidad los resultados producidos por el cálculo formal. Por lo tanto, la utilidad del análisis de escala es muy significativa [42]

Dado que se tiene una gran gama de variables y propiedades físicas, las cuales se encuentran relacionadas y modifican el proceso de transporte, los resultados tanto en la parte teórica y experimental son multifactoriales. En este caso, el análisis de órdenes de magnitud nos ayuda a generar parámetros adimensionales representativos que permiten llevar a cabo un análisis más expedito, disminuyendo el número de términos a analizar. Además, se puede obtener una solución general que facilita analizar diferentes escenarios del sistema [41].

2.5.1. Estimación de los órdenes de magnitud

A continuación se definen las escalas características en función de la geometría del sistema, la longitud del ducto y su radio interno.

$$z \sim L \quad ; \quad r \sim r_0 \quad (2.24)$$

Para poder determinar la velocidad característica del fluido en el ducto, se emplea la ecuación de continuidad 2.9, donde se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{U_c}{L} \sim \frac{V_c}{r_0} \quad (2.25)$$

$$V_c \sim \frac{r_0}{L} U_c \quad \longrightarrow \quad V_c \sim \beta U_c \quad \beta = \frac{r_0}{L} \quad (2.26)$$

Aquí $\beta \ll 1$ especifica la relación geométrica existente entre las dimensiones del ducto. La relación anterior nos indica que, $U_c \gg V_c$, por lo que en el ducto se presenta un flujo unidireccional. Utilizando la ecuación de transferencia de momentum axial, ecuación 2.10, y la relación en 2.26 se obtiene la escala característica de la presión, ΔP_{zc} . La ecuación 2.10 expresada en órdenes de magnitud es la siguiente:

$$\rho_{f0} \left[U_c \frac{U_c}{L} + V_c \frac{U_c}{r_0} \right] \sim \frac{\Delta P_{zc}}{L} + \frac{1}{r_0} \frac{1}{r_0} \left[r_0 \mu_c \left(\frac{U_c}{r_0} + \frac{V_c}{L} \right) \right] + \frac{1}{L} \left[\mu_c \frac{U_c}{L} \right] + \rho_{f0} g \sin(\phi), \quad (2.27)$$

después de sustituir la relación de velocidades se obtiene la siguiente expresión,

$$\rho_{f0} \left[U_c \frac{U_c}{L} + \frac{r_0}{L} U_c \frac{U_c}{r_0} \right] \sim \frac{\Delta P_{zc}}{L} + \frac{1}{r_0} \frac{1}{r_0} \left[r_0 \mu_c \left(\frac{U_c}{r_0} + \frac{r_0}{LL} U_c \right) \right] + \frac{1}{L} \left[\mu_c \frac{U_c}{L} \right] + \rho_{f0} g \sin(\phi) \quad (2.28)$$

Reduciendo y agrupando términos del mismo orden, se obtiene:

$$\rho_{f0} \frac{U_c^2}{L} \sim \frac{\Delta P_c}{L} + \frac{\mu_c U_c}{r_0^2} + \rho_{f0} g \sin(\phi) \quad (2.29)$$

Dado que $H_g \ll L$, se tiene que $\sin(\phi) = H_g/L \ll 1$:

$$\rho_{f0} \frac{U_c^2}{L} \sim \frac{\Delta P_{zc}}{L} + \frac{\mu_c U_c}{r_0^2} + \rho_{f0} g \frac{H_g}{L} \quad (2.30)$$

Se comparan la magnitud de los términos de las fuerza inercial y viscosa con el fin de encontrar cual de estas dos domina en el movimiento del fluido, se obtiene que:

$$\rho_{f0} \frac{U_c^2}{L} + \frac{\mu_c U_c}{r_0^2} \sim \frac{\Delta P_{zc}}{L} + \rho_{f0} g \frac{H_g}{L} \quad (2.31)$$

Por lo tanto la magnitud de la caída de presión característica en la dirección logitudinal es,

$$\Delta P_{zc} \sim \frac{\mu_c U_c}{r_0^2} [1 + Re\beta] + \rho_{f0} g \frac{H_g}{L} \quad (2.32)$$

Conociendo el valor de ΔP_{zc} , es necesario conocer ΔP_{rc} para comparar la magnitud del valor entre los gradientes de presión que existe en el oleoducto. Utilizando la ecuación de transferencia de momentum radial, ecuación (2.11), se obtiene la escala característica de la presión, ΔP_{rc} . La

ecuación (2.11) expresada en órdenes de magnitud y después de sustituir la relación de velocidades se obtiene la siguiente expresión:

$$\rho_{f0} \left[\frac{U_c r_0}{L} \frac{U_c r_0}{L r_0} + U_c \frac{U_c r_0}{L^2} \right] \sim \frac{\Delta P_c}{r_0} + 2 \frac{\mu_c U_c r_0}{r_0 r_0 L} + \frac{\mu_c U_c r_0}{L^3} + \frac{\mu_c U_c}{L r_0} + \rho_{f0} g \cos(\phi), \quad (2.33)$$

Reduciendo y agrupando términos del mismo orden, se obtiene:

$$\rho_{f0} \frac{U_c^2 r_0}{L^2} \sim \frac{\Delta P_{rc}}{r_0} + \frac{\mu_c U_c}{r_0 L} + \rho_{f0} g \cos(\phi) \quad (2.34)$$

Dado que $\ell \approx L$, se tiene que $\cos(\phi) = \ell/L \approx 1$, por lo que,

$$\rho_{f0} \frac{U_c^2 r_0}{L^2} \sim \frac{\Delta P_{rc}}{r_0} + \frac{\mu_c U_c}{r_0 L} + \rho_{f0} g \quad (2.35)$$

Comparando los términos inerciales y viscosos,

$$\rho_{f0} \frac{U_c^2 r_0}{L^2} + \frac{\mu_c U_c}{r_0 L} \sim \frac{\Delta P_{rc}}{r_0} + \rho_{f0} g \quad (2.36)$$

Por lo tanto, la caída de presión característica en la dirección radial es,

$$\Delta P_{rc} \sim \frac{\mu_c U_c}{L} [1 + Re\beta] + \rho_{f0} g r_0 \quad (2.37)$$

Comparando los términos ΔP_{zc} y ΔP_{rc} se demuestra que la caída de presión axial es mayor que la caída de presión radial, el cual también se considera una corrección de la caída de presión,

$$\Delta P_{zc} \left[1 + \frac{\Delta P_{rc}}{\Delta P_{zc}} \right] \sim \frac{\mu_c U_c L}{r_0^2} [1 + Re\beta] + \rho_{f0} g H_g \quad (2.38)$$

Del mismo análisis de escalas; se considera que $\Delta P_{rc}/\Delta P_{zc} \ll 1$ y $Re\beta \ll 1$, al igual que se considera que $\frac{\rho_{f0} g H_g r_0^2}{\mu_c U_c L} \leq 1$, donde la fuerza gravitacional es del mismo orden que las fuerzas viscosas, $\rho_{f0} g H_g \sim \mu_c U_c L / r_0^2$, por lo que se agrupan estos términos y la caída de presión global se define, ΔP_c , como:

$$\Delta P_c \sim \frac{\mu_c U_c L}{r_0^2} \quad (2.39)$$

De la misma forma que el análisis de escala de la hidrodinámica de flujo, para el caso del análisis de la transferencia de calor del balance de energía sobre el fluido podemos conocer el orden de magnitud de la pérdida de energía térmica a lo largo del ducto.

$$Q_l \sim \dot{m} C_p \Delta T_f \quad (2.40)$$

Donde ΔT_z es la diferencia de temperatura del fluido a la entrada y a la salida del ducto, Q_l es la energía térmica perdida del fluido y la magnitud del flujo másico, \dot{m} , es $\pi \rho r_0^2 U_c$ evaluada a una velocidad radial característica U_c . Para este trabajo, se supuso que las pérdidas de energía térmica del fluido sólo se llevan a cabo en la dirección radial, a través del área superficial del ducto. La entrada y salida de este se considera zonas adiabáticas, lo cual se debe a que ambas áreas de transporte son insignificantes. En este contexto, se puede determinar que la energía térmica transferida en la coordenada radial es:

$$\frac{q_r}{A_T} \sim q_r'' \quad (2.41)$$

donde, al tomar en cuenta la condición de frontera en la interfase fluido-ducto, se llega a la siguiente relación:

$$q_r'' \sim k_f \frac{\Delta T_f}{\Delta r_0} \sim k_p \frac{\Delta T_p}{\Delta r_0} \quad (2.42)$$

Como se mencionó anteriormente, al considerar que la energía térmica se transporta en la coordenada radial íntegramente, lo cual indica que la energía térmica que se transporta por convección a lo largo del tubo se pierde por medio de la difusión en las paredes del mismo en la dirección radial,

$$Q_l \sim q_r \quad (2.43)$$

Es posible determinar la relación de incrementos de temperatura en ambas coordenadas para la región del fluido; donde, realizando las sustituciones adecuadas se obtiene:

$$\frac{\Delta T_r}{r_0} \sim \frac{\pi \rho r_0^2 U_c c_p \Delta T_z}{\pi r_0 L} \quad (2.44)$$

En la expresión anterior ΔT_r representa el cambio de temperatura del fluido en la dirección radial y ΔT_z es el cambio de temperatura del fluido en la dirección axial. Reordenando y reduciendo términos, se determina que ambos incrementos de temperatura está relacionados por:

$$\Delta T_r \sim Pe \beta \Delta T_z \quad (2.45)$$

Aquí, Pe y β definen al número adimensional de Peclet, $Pe = \rho c_p U_c r_0 / k_f$, y a la relación geométrica, $\beta = r_0 / L$, respectivamente. De igual forma, se conoce que el producto de ambos parámetros adimensionales definen al número de Graetz; por consiguiente, el valor de dicho número nos indica de forma cualitativa cual gradiente de temperatura es mayor, o si ambos son del mismo orden de magnitud. Por otra parte, para analizar la difusión de calor a través de la interfase ducto-aislante, se hace uso de la otra condición de frontera asociada a la conservación de energía, ecuación 2.21, dicha expresión en términos de órdenes de magnitud se define de la siguiente manera,

$$k_p \frac{\Delta T_p}{h} \sim k_s \frac{\Delta T_s}{H} \quad (2.46)$$

Donde, agrupando términos, se puede definir el gradiente de temperatura en el ducto en términos del gradiente de temperatura del aislante.

$$\Delta T_p \sim \frac{k_s h}{k_p H} \Delta T_s \quad (2.47)$$

Por consiguiente, si se sustituye dicho gradiente de temperatura en el oleoducto por la relación que se obtuvo en términos del gradiente de temperatura en el fluido (coordenada radial), se puede definir los órdenes de magnitud de los diferentes gradientes de temperatura y su relación que guardan, ecuación 2.48.

$$\Delta T_r \sim Gz \Delta T_z \sim \alpha \Delta T_s \quad (2.48)$$

2.6. Ecuaciones adimensionales

Tomando en cuenta el análisis de escala, se presentan las variables adimensionales que participan en el problema

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{r}{r_0}, & \chi &= \frac{z}{L}, & \bar{u} &= \frac{u}{U_c}, & \bar{v} &= \frac{v}{V_c}, & \theta_f &= \frac{T_f - T_0}{\Delta T_c}, & \Upsilon &= \frac{r - r_0}{h}, \\ \xi &= \frac{r - (r_0 + h)}{H}, & \theta_p &= \frac{T_p - T_0}{\Delta T_c}, & \theta_s &= \frac{T_s - T_0}{\Delta T_c}, & \bar{P} &= \frac{p - P_T}{\Delta P_c}, & \bar{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_c}; \end{aligned}$$

donde, se asume que $\Delta T_c = T_{in} - T_0$ es el incremento de temperatura característico del estudio ya que es la máxima diferencia de temperaturas que se podrá encontrar en el sistema fluido/ambiente. Esto es importante, dicho gradiente es de interés para el estudio, dado que se desea conocer la pérdida de energía térmica del fluido a consecuencia de la diferencia de temperatura con el exterior. Adicionalmente, ΔP_c es la caída de presión característica, $\Delta P_c \sim \mu_c U_c L / r_0^2$, que está definida en términos de la viscosidad dinámica evaluada a una temperatura de referencia, $\mu_c = \exp(bT_0)$. A esta temperatura, T_0 , la viscosidad tendrá el valor correspondiente a la mínima temperatura que puede registrar el fluido. En consecuencia, la presión característica es el máximo valor que el sistema requiere.

Las siguientes expresiones representan las ecuaciones de gobierno en su forma adimensional:

Continuidad.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \bar{v}) = 0 \quad (2.49)$$

Momentum dirección axial

$$\begin{aligned} \text{Re}\beta \left(\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \chi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \exp(-\gamma \theta_f) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right) \right] \\ &+ 2\beta^2 \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\exp(-\gamma \theta_f) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \right) \right] + \bar{H}_H \end{aligned} \quad (2.50)$$

Momentum dirección radial

$$\begin{aligned} \text{Re}\beta^3 \left(\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} + 2\beta^2 \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \exp(-\gamma\theta_f) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \right] \\ &+ \beta^2 \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\exp(-\gamma\theta_f) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right) \right] + \bar{H}_l \end{aligned} \quad (2.51)$$

Energía

$$\begin{aligned} \text{Gz}\beta \left(\bar{v} \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} + \bar{u} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} \right) &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right) + \beta^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} + 2\text{Br} \exp(-\gamma\theta_f) \beta^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\bar{v}}{\eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \right)^2 \right] \\ &+ \text{Br} \exp(-\gamma\theta_f) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Transferencia de energía térmica en el ducto

$$\beta^2 \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_p}{\partial \chi^2} + \frac{1}{[\Upsilon \varepsilon + 1]} \frac{\partial}{\partial \Upsilon} \left[[\Upsilon \varepsilon + 1] \frac{\partial \theta_p}{\partial \Upsilon} \right] = 0 \quad (2.53)$$

Transferencia de energía térmica en el aislante

$$\beta^2 \delta^2 \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \chi^2} + \frac{1}{[\kappa \xi + 1]} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[[\kappa \xi + 1] \frac{\partial \theta_s}{\partial \xi} \right] = 0 \quad (2.54)$$

Para las ecuaciones 2.49 - 2.54, \bar{u} , \bar{v} , \bar{P} , θ_f , θ_p y θ_s representa la forma adimensional de las variables; velocidad longitudinal, velocidad radial, la presión hidrodinámica, temperatura del fluido, del ducto y del aislante, respectivamente. $Re = \rho U_c r_0 / \mu_c$ y $Br = \mu_c U_c^2 / k_f \Delta T_c$, es el Reynolds y Brinkman, respectivamente, que son número adimensionales bien definidos. Para las relaciones adimensionales de la geometría del tubo y el aislante se tiene que, $\beta = r_0 / L$ es la relación entre el radio interno y la longitud del ducto, $\delta = H / r_0$ es la relación entre el espesor del aislante y el radio internos del ducto, $\kappa = H / (r_0 + h)$ es la relación entre el espesor del aislante y la suma del radio interno y el espesor del ducto, y $\varepsilon = h / r_0$ es la relación entre el espesor y el radio interno del ducto. También $\gamma = -b \Delta T_c$ que se define como un parámetro térmico asociado con los efectos térmicos inducidos el el flujo hidrodinámico al igual que se asocia al tipo de aceite crudo pesado en el sistema y la temperatura característica (la diferencia de temperaturas ambiental y la del fluido a la entrada del ducto). Otros números adimensionales que se muestran son $\bar{H}_H = \rho_f g H_l r_0^2 / \mu_c U_c L$ que representa el término de elevación y el términos flotante que se determina por $\bar{H}_l = \rho_f g l r_0^3 / \mu_c U_c L^2$.

2.6.1. Condiciones a la frontera adimensionales

De la misma forma, introduciendo las variables adimensionales en las condiciones de frontera, ecuaciones 2.15 - 2.22, y realizando los diferentes procedimientos algebraicos, se obtienen las correspondientes condiciones de frontera adimensionales para el estudio, las cuales se presentan a continuación:

$$\left. \frac{\partial \theta_p}{\partial \chi} \right|_{\chi=0,1} = \left. \frac{\partial \theta_s}{\partial \chi} \right|_{\chi=0,1} \quad (2.55)$$

$$\theta_f(\chi = 0) = 1, \quad \left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} = 0 \quad (2.56)$$

$$\bar{P}(\chi = 0) = 1, \quad \bar{P}(\chi = 1) = 0 \quad (2.57)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (2.58)$$

$$\bar{u}(\eta = 1) = \bar{v}(\eta = 1) = 0 \quad (2.59)$$

$$\theta_f(\eta = 1) = \theta_p(\Upsilon = 0), \quad \left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \frac{\alpha}{\Lambda} \left. \frac{\partial \theta_p}{\partial \Upsilon} \right|_{\Upsilon=1} \quad (2.60)$$

$$\theta_p(\Upsilon = 1) = \theta_s(\xi = 0), \quad \left. \frac{\partial \theta_p}{\partial \Upsilon} \right|_{\Upsilon=1} = \Lambda \left. \frac{\partial \theta_s}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \quad (2.61)$$

y

$$\theta_s(\xi = 1) = f(\chi) = \tau(1 - \chi^2). \quad (2.62)$$

El valor de los parámetros adimensionales es $\alpha = \frac{k_s r_0}{k_f H}$ y $\Lambda = \frac{k_s h}{k_p H}$, representan la intensidad con la que se transfiere la energía térmica por medio de la conducción. α es el parámetro que se relaciona la transferencia de calor entre el fluido y el aislante térmico, mientras que Λ relaciona la transferencia de calor entre el aislante térmico y el ducto. Ambos parámetros dependen del grosor del aislante térmico y su conductividad térmica, k_s y H , respectivamente; por lo que se puede inferir que ambas propiedades físicas son de importancia para determinar la eficiencia térmica del proceso.

Capítulo 3

Método de solución analítica

3.1. Teoría de la lubricación

Tomando en consideración el análisis de escala para la hidrodinámica del flujo (visto en las ecuaciones de continuidad y momentum), donde se tiene una relación geométrica $r_0 \ll L$ y se transporta un fluido con alta viscosidad, se puede asumir que los términos multiplicados por β y $Re\beta$ son despreciables. Esto se debe a que $\beta \ll 1$ y $Re\beta \ll 1$, lo cual se conoce como la teoría de la lubricación. Lo dicho anteriormente afecta a los términos inerciales y algunos términos difusivos del balance de momentum. Los términos importantes en el balance de momentum es el gradiente de presión, el término gravitacional (si se asume una elevación considerable), y el esfuerzo cortante viscoso. Por lo tanto, las ecuaciones 2.50 y 2.51 se reducen a:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \chi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \exp(-\gamma \theta_f) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right] \quad (3.1)$$

y

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} = 0 \quad (3.2)$$

En estas expresiones, se puede constatar que los esfuerzos cortantes en la coordenada radial son los que predominan así como, la ecuación 3.2 muestra que la presión tiene un cambio despreciable en la coordenada radial, ya que $\frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} \approx 0$. Por lo tanto, la presión del sistema sólo es función de la coordenada axial, $\frac{\partial \bar{P}}{\partial \chi} \approx \frac{d\bar{P}}{d\chi}$ y $\bar{P} \approx \bar{P}(\chi)$.

3.2. Problema Graetz-Nusselt

Por otra parte, uno de los problemas más antiguos de convección forzada es el problema de Graetz-Nusselt, que describe los perfiles de temperatura en el flujo en un tubo donde la temperatura de la pared experimenta un cambio repentino en alguna posición a lo largo del tubo [47]. Con la relación $v_c \ll u_c$ (con análisis de escalas), se puede inferir que en la ecuación 2.52 el transporte convectivo de energía térmica en la dirección radial es despreciable. Además, los términos del orden $O(\beta^2)$ de la disipación viscosa se considerarán despreciables al igual que el término difusivo

de energía térmica en la dirección axial. Por lo tanto, la ecuación del balance de energía en el fluido se reduce a:

$$Gz \left(\bar{u} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right) + Br \exp(-\gamma \theta_f) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3.3)$$

Analizando la ecuación 3.3, los términos importantes para el análisis térmico son el transporte convectivo de energía térmica en dirección axial, la difusión térmica en dirección radial y el término de disipación viscosa asociado al esfuerzo de corte en la coordenada radial. De igual manera, para las secciones del ducto y el aislante térmico, las ecuaciones 2.53 y 2.54 respectivamente, también se reducen términos de orden $O(\beta, \beta^2)$.

Después de llevara a cabo todas las simplificaciones, los modelos reducidos que representan el transporte de aceites pesados en oleoductos son los siguientes:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \bar{v}) = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{d\bar{P}}{d\chi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \exp(-\gamma \theta_f) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right], \quad (3.5)$$

$$Gz \left(\bar{u} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right) + Br \exp(-\gamma \theta_f) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)^2, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Upsilon} \left[[\Upsilon \varepsilon + 1] \frac{\partial \theta_p}{\partial \Upsilon} \right] = 0 \quad (3.7)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[[\kappa \xi + 1] \frac{\partial \theta_s}{\partial \xi} \right] = 0. \quad (3.8)$$

3.3. Análisis en el límite $\alpha \ll 1$

Dada la relación descrita anteriormente, $\Delta T_{fr} \sim Gz \Delta T_{fz} \sim \alpha \Delta T_s$, se considera que el número de Graetz y alfa son del mismo orden, $Gz \sim \alpha \leq 1$. Para poder resolver la ecuación de balance de energía, 3.6, se toma el límite asintótico $\alpha \rightarrow 0$. En esta primera aproximación se considera en la sección del fluido un gradiente de temperatura despreciable en la dirección radial muy pequeño en comparación con el gradiente en la coordenada longitudinal. Por lo tanto, la temperatura adimensional del fluido puede expresarse de la siguiente forma:

$$\theta_f = \theta_{f0}(\chi) + \alpha \theta_{f1}(\chi, \eta) + O(\alpha^2) \quad (3.9)$$

La ecuación 3.9 describe que la temperatura adimensional en la región del fluido está definida como la suma de dos componentes; el primero asociado con el valor de la temperatura dependiente

sólo del eje axial, χ , y el segundo está asociado con pequeños cambios en los dos ejes del sistema (χ, η) [31]. Este límite implica un escenario donde el sistema cuanta con un buen medio aislante. Además, se cumple que $\Delta T_{fz} \sim \Delta T_s$ y $\Delta T_{fr} \ll \Delta T_z$, lo que representa que el cambio de temperatura en el fluido se encuentre definido principalmente en términos de la coordenada axial.

Aplicando la expansión 3.9 en la ecuación del balance de energía térmica del fluido 3.6, eliminando el término de $O(\alpha^2)$ y reordenando, se obtiene:

$$Gz\bar{u}\frac{\partial\theta_{f0}}{\partial\chi} = \frac{\alpha}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\theta_{f1}}{\partial\eta}\right) + Br\exp(-\gamma\theta_{f0})\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\right)^2. \quad (3.10)$$

Integrando la ecuación 3.10 en el espacio desde $\eta = 0$ hasta $\eta = 1$ resulta:

$$Gz\frac{\partial\theta_{f0}}{\partial\chi}\int_0^1\bar{u}\eta d\eta = \alpha\frac{\partial\theta_{f1}}{\partial\eta}\Bigg|_{\eta=1} + Br\exp(-\gamma\theta_{f0})\int_0^1\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\right)^2\eta d\eta. \quad (3.11)$$

Aquí, al tomar en cuenta las condiciones de frontera para $\frac{\partial\theta_f}{\partial\eta}$, las cuales fueron puntualizadas en el capítulo anterior y se resumen a continuación:

$$\frac{\partial\theta_f}{\partial\eta}\Bigg|_{\eta=0} = 0, \quad \frac{\partial\theta_f}{\partial\eta}\Bigg|_{\eta=1} = \frac{\alpha}{\Lambda}\frac{\partial\theta_p}{\partial\Upsilon}\Bigg|_{\Upsilon=1} \quad (3.12)$$

Para conocer el valor de la frontera, $\frac{\partial\theta_f}{\partial\eta}\Bigg|_{\eta=1}$, se necesita conocer el valor de θ_p y θ_s , además de realizar el procedimiento de sustitución de la temperatura del fluido por la expansión en términos de orden α . Se integran las ecuaciones 3.7 y 3.8 con sus respectivas condiciones de frontera descritas en el capítulo anterior, para estos casos, después de realizar los procedimientos algebraicos requeridos, se obtiene las siguientes expresiones que representan el comportamiento de la temperatura para las regiones de la pared del oleoducto y el aislante térmico (θ_p y θ_s)

$$\theta_p = \frac{\Lambda\lambda}{\varepsilon\alpha}\ln[\Upsilon\varepsilon + 1]f(\chi) + \left(1 - \frac{\Lambda\lambda}{\varepsilon\alpha}\ln[\Upsilon\varepsilon + 1]\right)\theta_{f0} \quad (3.13)$$

y

$$\theta_s = \left[\frac{\lambda(\ln[\kappa\xi + 1] - \ln[\kappa + 1])}{\alpha\kappa[\varepsilon + 1]} + 1\right]f(\chi) + \left[\frac{\lambda(\ln[\kappa + 1] - \ln[\kappa\xi + 1])}{\alpha\kappa[\varepsilon + 1]}\right]\theta_{f0} \quad (3.14)$$

En la condición de frontera donde $\eta = 1$, se realiza la evaluación considerando un sistema conjugado entre el fluido y las demás regiones, con lo cual se procede a trasladar la condición de frontera externa hacia la interfase de cálculo (fluido-pared). En este contexto, después de realizar los procedimiento matemáticos apropiados se obtiene la siguiente relación:

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = -\lambda \left[\theta_f|_{\eta=1} - f(\chi) \right]. \quad (3.15)$$

En esta expresión, cuando se asume el límite asintótico $\alpha \rightarrow 0$, se procede a realizar la expansión en términos del parámetro α con lo cual se obtienen las condiciones de frontera requeridas para definir el flujo de calor radial, ecuación 3.16

$$\left. \frac{\partial \theta_{f1}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial \theta_{f1}}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = f(\chi) - \theta_f|_{\eta=1}. \quad (3.16)$$

Estas expresiones permiten reducir la ecuación de la energía del fluido 3.11, haciendo que dicha temperatura sólo dependa de la coordenada radial.

$$Gz \frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \chi} \int_0^1 \bar{u} \eta d\eta = -\lambda \left(\theta_{f0}|_{\eta=1} - f(\chi) \right) + Br \exp(-\gamma \theta_{f0}) \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)^2 \eta d\eta. \quad (3.17)$$

donde $\lambda = \frac{\alpha}{\frac{\Lambda}{\varepsilon} \ln[\varepsilon + 1] + \frac{\ln[\kappa + 1]}{\kappa[\varepsilon + 1]}}$,

y bajo los preceptos antes mencionados esta variable puede simplificarse a $\lambda \approx \alpha \frac{\kappa}{\ln[\kappa + 1]}$

Cuando se realiza la simplificación, también se asume que la temperatura en la región del ducto tiene la misma temperatura que la del fluido [48]:

$$\theta_p = \theta_{f0} \quad (3.18)$$

3.4. Número de Nusselt

Hay términos que requieren estimar el calor que se transporta a través de los límites del sistema. Esto requiere conocer el coeficiente de transmisión de calor para describir el transporte interfásico. Por lo general, este coeficiente se proporciona, para el sistema de flujo de interés, como una expresión semiteórica del número de Nusselt (una densidad de flujo de calor en la pared o coeficiente de transmisión de calor adimensional) como una función de cantidades adimensionales relevantes como los números de Prandtl y de Reynolds. [47]. El Nusselt es la forma adimensional del coeficiente convectivo. Interpreta la transferencia de calor entre una superficie caliente y una fría. Para establecer como ocurre la transferencia de energía térmica que ocurre entre el fluido y el ducto en la interfase, el número de Nusselt se encuentra definido de la siguiente forma:

$$Nu = - \frac{q_r'' r_0}{\left[\bar{T}_f - T_w \right] k_f}, \quad (3.19)$$

donde:

$$T_w = T_f|_{r=r_0}, \quad \frac{q''_{cj}}{k_f} = \frac{\partial T_f}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \quad \text{y} \quad \tilde{T}_f = \left(\frac{1}{r_0}\right) \int_0^1 T_f dr. \quad (3.20)$$

En las definiciones anteriores, q''_{cj} es la cantidad de calor que se transporta entre la interfase fluido-ducto, esto debido a la diferencia de temperaturas que presenta el sistema conjugado; por consiguiente, después de realizar las sustituciones correspondientes, el número de Nusselt para el presente cálculo se reescribe como se ilustra a continuación

$$Nu = - \frac{r_0 \frac{\partial T_f}{\partial r} \Big|_{r=r_0}}{[\tilde{T}_f - T_w] k_f} \quad (3.21)$$

En el caso del límite analítico donde $\alpha \rightarrow 0$, se puede suponer que $\tilde{T}_f - T_w \approx 0$, por lo tanto se llega a una "paradoja analítica"[31]. En este caso, es necesario escribir la ecuación en términos donde en ningún escenario se llegue a esta "paradoja". Dado que existe la conservación de energía en las interfases del sistema conjugado, y a que se sabe del análisis de escalas que $\Delta \tilde{T}_r \sim \frac{k_s r_0}{k_f H} \Delta \tilde{T}_s$, es fácil suponer que $\Delta \tilde{T}_r = \tilde{T}_f - T_w$ y $\Delta T_{rs} = \tilde{T}_s - T_0$.

Sustituyendo la relación de incrementos de temperatura en la 3.21, se puede obtener otra definición del número de Nusselt en términos del gradiente de temperatura del aislante térmico, con lo cual se evita la paradoja matemática como lo muestra a continuación

$$Nu = - \frac{r_0 \frac{\partial T_f}{\partial r} \Big|_{r=r_0}}{\alpha [\tilde{T}_s - T_0]} \quad (3.22)$$

Posterior a obtener esta nueva definición del número de Nusselt, se procede a realizar la sustitución de las variables adimensionales. Después de realizar el reordenamiento algebraico, el valor del número de Nusselt en términos de las variables adimensionales del presente estudio esta definido de la siguiente manera,

$$Nu = - \frac{\frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1}}{\alpha \int_0^1 \theta_s d\xi}. \quad (3.23)$$

Aquí, sustituyendo el resultado ya obtenido de la derivada de la temperatura del fluido en la interfase, la cual se muestra a continuación,

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = -\lambda [\theta_f|_{\eta=1} - f(\chi)], \quad (3.24)$$

y resolviendo los demás cálculos matemáticos, la definición analítica del número de Nusselt para el presente estudio es

$$Nu = \frac{\lambda [\theta_f|_{\eta=1} - f(\chi)] \kappa^2 [\varepsilon + 1]}{-\lambda [\theta_f|_{\eta=1} - f(\chi)] [\ln |\kappa + 1| - \kappa] + \alpha \kappa^2 [\varepsilon + 1] f(\chi)}. \quad (3.25)$$

Igualmente utilizando los límites geométricos explicado previamente, donde $\varepsilon \ll 1$ y $\lambda \approx \alpha \frac{\kappa}{\ln [\kappa + 1]}$, agrupando términos semejantes y reduciendo las expresiones, se obtiene la siguiente expresión simplificada del número de Nusselt,

$$Nu = \frac{[\theta_f|_{\eta=1} - f(\chi)] \kappa^2}{[\theta_f|_{\eta=1} - f(\chi)] [\kappa - \ln [\kappa + 1]] + \kappa f(\chi) \ln [\kappa + 1]} \quad (3.26)$$

Como puede observarse en la expresión, para este caso particular Nu es función de la coordenada adimensional longitudinal, por lo tanto, se puede asumir que Nu es función de χ . Por otra parte, al definir el parámetro λ en términos del número de Nusselt y el parámetro α , se puede constatar que λ es una versión modificada del número de Nusselt y depende del parámetro conjugado α , la cual se ilustra a continuación

$$\lambda = \tilde{Nu} = \alpha \left[\frac{Nu}{Nu - \kappa} \right] \left[1 - \frac{\kappa f(\chi)}{\theta_f|_{\eta=1} - f(\chi)} \right] \quad (3.27)$$

3.5. Caudal (aseguramiento de flujo)

En la práctica de la ingeniería, para poder cuantificar la cantidad de fluido que se transporta a través de un oleoducto, es conveniente evaluar el caudal del fluido, el cual depende de la velocidad del fluido, del área de transporte y de la densidad del fluido. El caudal de fluido se define mediante la siguiente ecuación integral

$$Q = 2\pi\rho \int_0^{r_0} u r dr, \quad (3.28)$$

donde, al introducir las variables adimensionales, la ecuación 3.28 cambia a:

$$Q = 2\pi\rho u_c r_0^2 \int_0^1 \bar{u} \eta d\eta. \quad (3.29)$$

Claramente, en la expresión se puede constatar que es indispensable conocer el campo de velocidad adimensional \bar{u} para estimar el caudal de flujo.

La condición adiabática del sistema, donde $\alpha \rightarrow 0$, es un caso hipotético que se tomará como referencia para analizar la reducción del flujo debido a efectos térmicos. Se eligió tomar esta

3.6. SOLUCIÓN ASINTÓTICA PARA EL LÍMITE DE EFECTOS TÉRMICOS DÉBILES ($\gamma \rightarrow 0$)

condición como base ya que al no existir gradientes de temperatura a lo largo del ducto, no se verá modificado el valor de la viscosidad. Entonces la temperatura de entrada del fluido, T_{in} , determinará la temperatura del fluido a lo largo del ducto. Por lo tanto $\theta_f = 1$. Para obtener la expresión que describa el perfil de velocidades para la condición adiabática, la ecuación de momentum 3.5 se reduce a:

$$\frac{d\bar{P}}{d\chi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \exp(-\gamma) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right]. \quad (3.30)$$

Resolviendo para \bar{u} , utilizando las correspondientes condiciones de frontera, se obtiene la siguiente expresión la cual representa el campo de flujo para el límite de $\alpha = 0$

$$\bar{u} = \frac{\frac{d\bar{P}}{d\chi} (\eta^2 - 1)}{4 \exp(-\gamma)} \quad (3.31)$$

Sustituyendo la ecuación 3.31 en 3.29, reduciendo términos y resolviendo la integral se determina el caudal característico, donde

$$Q_c = -\frac{\pi u_c r_0^2}{8 \exp(-\gamma)} \frac{d\bar{P}}{d\chi} \quad \rightarrow \quad Q_c = \frac{\pi u_c r_0^2}{8 \exp(-\gamma)} \quad (3.32)$$

y $d\bar{P}/d\chi$ se obtiene con ayuda de la ecuación de continuidad 3.4. Por lo tanto, se encuentra una expresión que represente el caudal de flujo adimensional que nos ayudará a conocer la disminución del flujo que sufre el sistema de transporte debido al intercambio de energía térmica con el exterior por la diferencia de temperaturas:

$$\bar{Q} = \frac{Q}{Q_c} = 16 \exp(-\gamma) \int_0^1 \bar{u} \eta \, d\eta \quad (3.33)$$

3.6. Solución asintótica para el límite de efectos térmicos débiles ($\gamma \rightarrow 0$)

Además de lo anterior, el sistema de ecuaciones resultantes puede resolverse para el caso de efectos térmicos débiles, $\gamma \ll 1$. Dicha solución analítica requiere de la implementación de métodos de perturbación asintótica, donde las ecuaciones pueden ser desacopladas y resueltas orden por orden.

Para la implementación del procedimiento teórico ya descrito, el primer paso indica que se tiene que realizar expansiones de las diferentes variables dependientes en función del parámetro pequeño, γ , ya que define los efectos térmicos débiles. Para el presente estudio, se propone las siguientes expansiones asintóticas,

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \gamma \bar{v}_1 + \dots, \quad (3.34)$$

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \gamma \bar{u}_1 + \dots, \quad (3.35)$$

$$\bar{P} = \bar{P}_0 + \gamma \bar{P}_1 + \dots, \quad (3.36)$$

$$\theta_{f0} = \theta_{f0,0} + \gamma \theta_{f0,1} + \dots, \quad (3.37)$$

Siguiendo con el procedimiento teórico, se procede a realizarse la sustitución de las diferentes variables en los modelos, lo cual se ilustra a continuación,

$$\frac{\partial [\bar{u}_0 + \gamma \bar{u}_1]}{\partial \chi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta [\bar{v}_0 + \gamma \bar{v}_1]) = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{d [\bar{P}_0 + \gamma \bar{P}_1]}{d\chi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \exp(-\gamma [\theta_{f0,0} + \gamma \theta_{f0,1}]) \frac{\partial [\bar{u}_0 + \gamma \bar{u}_1]}{\partial \eta} \right], \quad (3.39)$$

y

$$\begin{aligned} Gz \frac{\partial [\theta_{f0,0} + \gamma \theta_{f0,1}]}{\partial \chi} \int_0^1 \bar{u} \eta \partial \eta &= -\lambda [[\theta_{f0,0} + \gamma \theta_{f0,1}] - f(\chi)] \\ &+ Br \exp(-\gamma [\theta_{f0,0} + \gamma \theta_{f0,1}]) \int_0^1 \left(\frac{\partial [\bar{u}_0 + \gamma \bar{u}_1]}{\partial \eta} \right)^2 \eta \partial \eta \end{aligned} \quad (3.40)$$

Teniendo ya completamente desarrollados los modelos, se procede a separar los térmicos del mismo orden γ y a formar los diferentes grupos de ecuaciones para cada orden de prioridad, empezando con el orden principal llamado orden cero, los cuales se presentan a continuación:

Orden 0

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \chi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial [\eta \bar{v}_0]}{\partial \eta} = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \chi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} \right] \quad (3.42)$$

$$Gz \frac{\partial \theta_{0,0}}{\partial \chi} \int_0^1 \bar{u}_0 \eta \partial \eta = -\lambda [\theta_{0,0} - f(\chi)] + Br \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} \right)^2 \eta \partial \eta \quad (3.43)$$

Orden γ

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \chi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial [\eta \bar{v}_1]}{\partial \eta} = 0 \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \chi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \eta} - \eta \theta_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} \right] \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} Gz \frac{\partial \theta_{0,1}}{\partial \chi} \int_0^1 \bar{u}_0 \eta d\eta + Gz \frac{\partial \theta_{0,0}}{\partial \chi} \int_0^1 \bar{u}_1 \eta d\eta &= -\lambda \theta_{0,1} + 2 Br \int_0^1 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \eta} \eta d\eta \\ &\quad - Br \theta_{0,0} \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} \right)^2 \eta d\eta \end{aligned} \quad (3.46)$$

Finalmente, con ayuda de las condiciones de frontera resultantes también de un proceso de sustitución y separación de los diferentes órdenes, se obtienen las soluciones de cada ecuación para cada orden de prioridad. Como puede observarse en las ecuaciones anteriores, estas ya se encuentran secuencialmente acopladas, donde las soluciones del orden principal se utilizan para resolver las ecuaciones de orden de corrección. En este sentido, después de realizar todos los cálculos matemáticos, el siguiente grupo de expansiones muestran la solución de cada uno de los componentes de la solución asintótica de los modelos.

$$\bar{u}_0 = \frac{1}{4} \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \chi} (\eta^2 - 1), \quad (3.47)$$

$$\frac{d\bar{P}_0}{d\chi} = -1, \quad (3.48)$$

$$\bar{P}_0 = 1 - \chi, \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \theta_{f0,0} &= \tau \left\{ (1 - \chi^2) + 2 \frac{Gz}{16\lambda} \left[\chi - \frac{Gz}{16\lambda} \right] \right\} + \left[1 - \tau \left\{ 1 - 2 \left[\frac{Gz}{16\lambda} \right]^2 \right\} - \frac{Br}{16\lambda} \right] \exp \left[\frac{-16\lambda}{Gz} \chi \right] \\ &\quad + \frac{Br}{16\lambda}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \chi} - \theta_{f0,0} \right] [\eta^2 - 1], \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= \left[1 - \frac{Br}{12\lambda} - \tau + \frac{2\tau Gz^2}{(\lambda 16)^2} \right] \left[-\frac{Gz}{\lambda 16} \right] \left\{ \left[1 - \exp \left[\frac{-\lambda 16}{Gz} \right] \right] \chi + \left[\exp \left[\frac{-\lambda 16}{Gz} \right] - 1 \right] \right\} \\ &\quad + \left[\frac{1}{3} - \frac{Gz}{16\lambda} \right] \tau \chi + \frac{Gz}{16\lambda} \tau \chi^2 - \frac{1}{3} \tau \chi^3, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \chi} = & \left[1 - \tau \left\{ 1 - 2 \left[\frac{Gz}{16\lambda} \right]^2 \right\} - \frac{Br}{16\lambda} \right] \left[\exp \left[-\frac{16\lambda}{Gz} \chi \right] - \frac{Gz}{16\lambda} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{16\lambda}{Gz} \right] \right\} \right] \\ & + \tau \left\{ \frac{1}{3} + \frac{Gz}{16\lambda} (2\chi - 1) - \chi^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\theta_{f0,1} = \frac{Gz}{\lambda 16} \left\{ \left[1 - \exp \left(-\frac{16\lambda}{Gz} \chi \right) \right] \left[\frac{2Gz^2}{(\lambda 16)^2} B + C \frac{Gz}{16\lambda} + D \right] + B\chi^2 - \left[2B \frac{Gz}{16\lambda} + C \right] \chi \right\}; \quad (3.54)$$

donde:

$$A = \left[\frac{2\tau Gz^2}{(\lambda 16)^2} - \frac{Br}{12\lambda} - \tau + 1 \right] \left[\frac{Br}{Gz} + \left(\frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \chi} - \theta_{f0,0} \right) \frac{16\lambda}{Gz} \right],$$

$$B = \frac{Br}{Gz} \tau,$$

$$C = 2\tau \left(\frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \chi} - \theta_{f0,0} \right) + \frac{Br\tau}{\lambda 8}$$

y

$$D = \left(\frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \chi} - \theta_{f0,0} \right) \left(\frac{1}{8} \right) \frac{\tau Gz}{\lambda} - \left(\frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \chi} - \theta_{f0,0} \right) \frac{2Br}{Gz} - \frac{Br^2}{12\lambda Gz} - \frac{Br}{Gz} \tau + \frac{Br}{Gz} \frac{2\tau Gz^2}{(\lambda 16)^2}.$$

Al haber obtenido tanto el perfil de flujo de orden principal, \bar{u}_0 , como su correspondiente corrección, \bar{u}_1 , es fácil determinar el caudal de flujo dentro del sistema de transporte, el cual después de sustituir los resultados previamente obtenido y resolver la integral de la ecuación 3.33, se encuentra definido por la siguiente expresión.

$$\bar{Q} = \exp(-\gamma) \left[1 - \gamma \left(\frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \chi} - \theta_{f0,0} \right) \right] \quad (3.55)$$

Capítulo 4

Esquema de solución numérica

En este capítulo se muestra una breve explicación del esquema numérico utilizado para resolver las ecuaciones que describen el transporte no isotérmico de aceites crudos pesados en oleoductos. Lo anterior tomando en cuenta la condición de que la temperatura del fluido y la temperatura ambiente no tienen el mismo valor. Para resolver las ecuaciones de gobierno (2.50)-(2.54) se implementó un esquema basado en el método de diferencias finitas. Este esquema numérico, inicia con la resolución de los campos de velocidad y la presión (fenómeno hidrodinámico). En este sentido, se introduce una versión modificada del esquema S.I.M.P.L.E (Semi-implicit method for pressure-linked) con el fin de discretizar las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes [31]. Por otra parte, la temperatura del aceite crudo y las secciones de estudio se calculan mediante el método implícito de dirección alternante (ADI), esto utilizando el algoritmo de Thomas (TDMA). Para el primer paso de cálculo, el procedimiento de iteración comienza al obtener un valor preliminar de las variables de velocidad, presión y temperatura en el fluido; posteriormente, se resuelven las ecuaciones de energía del ducto y el aislante térmico utilizando de nuevo la método ADI junto con TDMA. En este caso, se toma en cuenta el sistema conjugado presente en la frontera entre el ducto y aislante. Hasta este punto no se ha tomado en cuenta la dependencia de la viscosidad con la temperatura, por lo que al calcularse un valor preliminar de la temperatura del fluido, se corrige el valor de la viscosidad ($\bar{\mu} = \exp(\gamma\theta_f)$) y es incluido cuando todas las variables vuelven a ser recalculadas en el paso de corrección del método numérico. Ver Figura 4.1

Algoritmo numérico

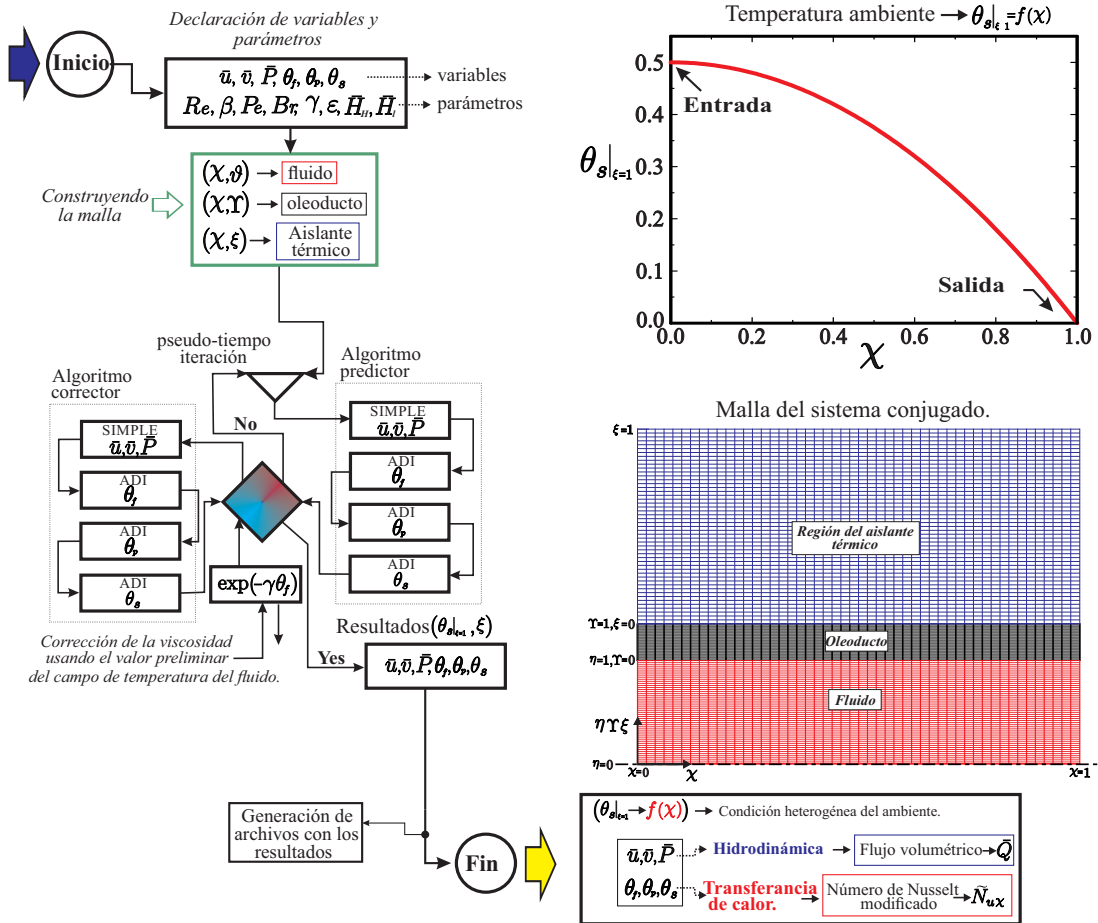


Figura 4.1: Esquema numérico de solución.

En general, al realizar un buen procedimiento de escalamiento de los modelos matemáticos (adimensionalización), se asegura que el tiempo de cómputo sea el mínimo posible, así también, se obtiene una mejor convergencia en el proceso de iteración, esto debido a que el algoritmo trabaja como un predictor-corrector buscando una solución de los modelos propuestos. Claramente, la utilización de los métodos numéricos y el algoritmo en conjunto obedece al problema de estudio. Por ejemplo, el método de corrección de presión es útil para el estudio de la mecánica de fluidos, implementando esquemas diferentes (diferencias finitas) validos dentro de los procedimientos numéricos [49], la idea principal en la que se basa S.I.M.P.L.E es crear una ecuación de presión discreta a partir de la ecuación de continuidad. Dado que la ecuación de continuidad contiene las variables de velocidad, es necesario relacionar estas velocidades con el campo de presión. S.I.M.P.L.E utiliza la ecuación de transporte de momentum para realizar esta conexión [50], el procedimiento que se lleva a cabo es el siguiente:

- Se empieza el proceso iterativo suponiendo un campo de presión. P_0
- Se usa el valor de P_0 para resolver u y v de la ecuación de momentum. Ya que estas velocidades se asocian con el valor de P_0 , los valores calculados de velocidad resultantes se definen como u_0 y v_0
- Al tener los valores de u_0 y v_0 , estos son añadidos a la ecuación de continuidad. Al ser valores

supuestos, no se cumplirá la relación en la ecuación de continuidad. Por consiguiente se usa la ecuación de continuidad para encontrar un valor de presión corregida P' . La presión corregida se añade a $P = P_0 + P'$, en el que P genera un campo de velocidades que si cumplen la relación de la ecuación de continuidad.

- La corrección del campo de velocidades, u' y v' , obtenidas de P' . $u = u_0 + u'$, $v = v_0 + v'$
- De la ecuación $P = P_0 + P'$ el valor resultante de P es el nuevo valor P_0 hasta que se obtenga un perfil de velocidades que satisfaga la relación de la ecuación de continuidad

Para el presente proyecto de tesis, el método de corrección de presión está diseñado para resolver flujos en estado estacionario. Desde este punto de vista, los superíndices, ω y Ω , son considerados como un paso de iteración secuencial en la coordenada de tiempo, t , sin ningún significado real en la variación transitoria del fenómeno. El valor de Δt puede ser visto como parámetro que tiene algún efecto sobre la rapidez en como se logra la convergencia [49].

4.1. Definición de la ecuación de corrección de presión P'

Para poder determinar una ecuación útil de corrección de presión, se lleva a cabo el procedimiento que se detalla a continuación. Primero, de la ecuación de momentum (u y v) , se anexa tanto el término de corrección de presión P' , como su correspondiente efecto sobre las variaciones de velocidad (u' y v'), al comparar y eliminar en dichas ecuaciones, se obtiene que:

$$\rho \frac{\partial u'}{\partial t} = - \frac{\partial P'}{\partial z} \quad (4.1)$$

y

$$\rho \frac{\partial v'}{\partial t} = - \frac{\partial P'}{\partial r}. \quad (4.2)$$

De las expresiones anteriores, al sumar ambas (vectores) se obtiene la siguiente ecuación, la cual ya muestra la relación que guardan las componentes de velocidad y el campo de presión.

$$\rho \left[\frac{\partial u'}{\partial t} i + \frac{\partial v'}{\partial t} j \right] = - \left[\frac{\partial P'}{\partial z} i + \frac{\partial P'}{\partial r} j \right] \quad (4.3)$$

Además, si se evalúa numéricamente ambas componentes temporales asociadas a la corrección de la velocidad (error de cálculo), donde Δt es un tiempo ficticio de corrección, la ecuación anterior se simplifica a:

$$u' i + v' j = - \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial P'}{\partial z} i + \frac{\partial P'}{\partial r} j \right]. \quad (4.4)$$

Aquí, introduciendo el producto punto (gradiente) en ambos lados de la ecuación cambia a:

$$\nabla \cdot [u'i + v'j] = -\frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot \left[\frac{\partial P'}{\partial z} i + \frac{\partial P'}{\partial r} j \right]; \quad (4.5)$$

donde sustituyendo el término de la corrección de las velocidades por su expresión correspondiente. Además, desarrollando los términos de corrección de presión, se puede determinar que la corrección de presión depende de los valores de las velocidades calculados previamente, $u' = u - u_0$, $v' = v - v_0$, $P' = P - P_0$

$$\nabla \cdot (ui + vj) - \nabla \cdot (u_0i + v_0j) = -\frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial^2 P'}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P'}{\partial r} \right) \right] \quad (4.6)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación es igual a cero porque corresponde al valor corregido de la velocidad el cual debe satisfacer la conservación de masa. Por lo tanto, la ecuación se reduce a la siguiente expresión,

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_0) = \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial^2 P'}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P'}{\partial r} \right) \right]. \quad (4.7)$$

Como puede observarse en la ecuación (4.7), el valor de la corrección de presión depende de los valores previamente calculados de las velocidades (para P_0), por consiguiente, se puede asumir que las desviaciones que existen entre la ecuación de conservación de momentum y masa se transfieren a la presión, con esto se satisface la ecuación de continuidad sin afectar la conservación de momentum. Al igual que lo realizado en el capítulo 2 (formulación matemática), introduciendo las escalas características y las variables adimensionales, se obtiene la siguiente expresión que define la forma adimensional del modelo de corrección de presión,

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \chi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \bar{v}_0) = \Delta \psi_c \left[\frac{\partial^2 \bar{P}'}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \bar{P}'}{\partial \eta} \right) \right], \quad (4.8)$$

donde:

$$\Delta \psi_c = \frac{\Delta t \mu_0}{\rho r_0^2}.$$

Al obtenerse los valores de \bar{u}_0 y \bar{v}_0 , se procede a usar estos valores para calcular la corrección de presión.

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \chi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \bar{v}_0) = \Delta \psi_c \left[\frac{\partial^2 \bar{P}'}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \bar{P}'}{\partial \eta} \right) \right] \quad (4.9)$$

Para este caso, la expresión se desarrollará de forma implícita con la finalidad de obtener el valor de la corrección en un solo paso. Posteriormente, con los resultados obtenidos de la corrección de presión, se lleva a cabo la correspondiente corrección del campo de presión y velocidad, esto mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 P &= P_0 + P', \\
 u &= u_0 - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z}, \\
 y & \\
 v &= v_0 - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial r}.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

De la misma forma que en todos los casos antes mencionados, introduciendo las variables adimensionales las expresiones cambian a:

$$\begin{aligned}
 \bar{P} &= \bar{P}_0 + \bar{P}', \\
 \bar{u} &= \bar{u}_0 - \Delta\psi_c \frac{\partial \bar{P}'}{\partial \chi}, \\
 y & \\
 \bar{v} &= \bar{v}_0 - \frac{\Delta\psi_c}{\beta^2} \frac{\partial \bar{P}'}{\partial \eta}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

En las ecuaciones anteriores, \bar{P} , \bar{u} y \bar{v} representan los valores de campos de presión y las componentes de la velocidad ya corregidas. Por consiguiente, se propone un subíndice ω como el término presente y el $\omega + 1$ como los términos de futuro. Por otra parte, los términos con subíndices Ω y $\Omega + 1$ definirán los valores presentes y futuros (iteración) en el procedimiento de corrección de presión.

4.2. Discretización

Para llevar a cabo los procedimientos numéricos antes mencionados, primeramente se tiene que realizar la correspondiente discretización, esto quiere decir, sustituir modelos matemáticos de cálculo por modelos algebraicos en el límite de incrementos espaciales y temporales muy pequeños. Para realizar dicho procedimiento, se optó por una discretización centrada de forma espacial y hacia adelante en la temporal; por lo tanto, las siguientes expresiones representan las derivadas presentes en los modelos matemáticos, tanto para el caso de las variables que definen el fenómeno hidrodinámico, así como las variable que representan el fenómeno térmico que se explican en los siguientes apartados.

Fenómeno hidrodinámico:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} &= \frac{\bar{u}_{i+1,j}^\omega - \bar{u}_{i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} &= \frac{\bar{v}_{i+1,j}^\omega - \bar{v}_{i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} & \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \chi} &= \frac{\bar{P}_{0i+1,j}^\omega - \bar{P}_{0i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} \\
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} &= \frac{\bar{u}_{i,j+1}^\omega - \bar{u}_{i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} &= \frac{\bar{v}_{i,j+1}^\omega - \bar{v}_{i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} & \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \eta} &= \frac{\bar{P}_{0i,j+1}^\omega - \bar{P}_{0i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \chi^2} = \frac{\bar{u}_{i+1,j}^\omega - 2\bar{u}_{i,j}^\omega + \bar{u}_{i-1,j}^\omega}{\Delta \chi^2}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} = \frac{\bar{u}_{i,j+1}^\omega - 2\bar{u}_{i,j}^\omega + \bar{u}_{i,j-1}^\omega}{\Delta \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \chi^2} = \frac{\bar{v}_{i+1,j}^\omega - 2\bar{v}_{i,j}^\omega + \bar{v}_{i-1,j}^\omega}{\Delta \chi^2}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \eta^2} = \frac{\bar{v}_{i,j+1}^\omega - 2\bar{v}_{i,j}^\omega + \bar{v}_{i,j-1}^\omega}{\Delta \eta^2}$$

Fenómeno térmico:

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} = \frac{\theta_{f_{i+1,j}}^\omega - \theta_{f_{i-1,j}}^\omega}{2\Delta \chi}$$

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial \Upsilon} = \frac{\theta_{p_{i,j+1}}^\omega - \theta_{p_{i,j-1}}^\omega}{2\Delta \Upsilon}$$

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} = \frac{\theta_{f_{i,j+1}}^\omega - \theta_{f_{i,j-1}}^\omega}{2\Delta \eta}$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial \xi} = \frac{\theta_{s_{i,j+1}}^\omega - \theta_{s_{i,j-1}}^\omega}{2\Delta \xi}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} = \frac{\theta_{f_{i+1,j}}^\omega - 2\theta_{f_{i,j}}^\omega + \theta_{f_{i-1,j}}^\omega}{\Delta \chi^2} \quad \frac{\partial^2 \theta_p}{\partial \chi^2} = \frac{\theta_{p_{i+1,j}}^\omega - 2\theta_{p_{i,j}}^\omega + \theta_{p_{i-1,j}}^\omega}{\Delta \chi^2} \quad \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \chi^2} = \frac{\theta_{s_{i+1,j}}^\omega - 2\theta_{s_{i,j}}^\omega + \theta_{s_{i-1,j}}^\omega}{\Delta \chi^2}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \eta^2} = \frac{\theta_{f_{i,j+1}}^\omega - 2\theta_{f_{i,j}}^\omega + \theta_{f_{i,j-1}}^\omega}{\Delta \eta^2} \quad \frac{\partial^2 \theta_p}{\partial \Upsilon^2} = \frac{\theta_{p_{i,j+1}}^\omega - 2\theta_{p_{i,j}}^\omega + \theta_{p_{i,j-1}}^\omega}{\Delta \Upsilon^2} \quad \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \xi^2} = \frac{\theta_{s_{i,j+1}}^\omega - 2\theta_{s_{i,j}}^\omega + \theta_{s_{i,j-1}}^\omega}{\Delta \xi^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right] = \frac{\bar{v}_{i+1,j+1}^\omega - \bar{v}_{i+1,j-1}^\omega - \bar{v}_{i-1,j+1}^\omega + \bar{v}_{i-1,j-1}^\omega}{4\Delta \chi \Delta \eta} \quad \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right] = \frac{\bar{u}_{i+1,j+1}^\omega - \bar{u}_{i+1,j-1}^\omega - \bar{u}_{i-1,j+1}^\omega + \bar{u}_{i-1,j-1}^\omega}{4\Delta \chi \Delta \eta}$$

Si $\Gamma_\theta = \exp(-\gamma\theta_f)$

$$\frac{\partial \Gamma_\theta}{\partial \chi} = \frac{\Gamma_{\theta_{i+1,j}}^\omega - \Gamma_{\theta_{i-1,j}}^\omega}{2\Delta \chi} = \frac{\exp(-\gamma\theta_{f_{i+1,j}}^\omega) - \exp(-\gamma\theta_{f_{i-1,j}}^\omega)}{2\Delta \chi}$$

$$\frac{\partial \Gamma_\theta}{\partial \eta} = \frac{\Gamma_{\theta_{i,j+1}}^\omega - \Gamma_{\theta_{i,j-1}}^\omega}{2\Delta \eta} = \frac{\exp(-\gamma\theta_{f_{i,j+1}}^\omega) - \exp(-\gamma\theta_{f_{i,j-1}}^\omega)}{2\Delta \eta}$$

4.2.1. Discretización de las condiciones de frontera en el fluido

De igual forma que con los modelos matemáticos, las correspondientes condiciones de frontera se discretizan siguiendo los preceptos ya mencionados. En este contexto, dada la naturaleza de las condiciones de frontera y de interfase, la discretización se realiza ya sea hacia adelante o hacia atrás dependiendo de lo que es más conveniente. Por ejemplo, cuando la condición de contorno se asocia al punto de entrada o inicio, la discretización hacia adelante es la más apropiada, puesto que, hacia atrás no existe un punto de evaluación.

Para la entrada del ducto, ($\chi = 0$), se precisa una discretización hacia adelante, nodo $i=1$:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} = 0 \longrightarrow \frac{\bar{u}_{i+1,j}^n - \bar{u}_{i,j}^n}{\Delta \chi} = 0 \longrightarrow \bar{u}_{1,j}^n = \bar{u}_{2,j}^n, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} = 0 \longrightarrow \frac{\bar{v}_{i+1,j}^n - \bar{v}_{i,j}^n}{\Delta \chi} = 0 \longrightarrow \bar{v}_{1,j}^n = \bar{v}_{2,j}^n, \quad (4.13)$$

$$\bar{P} = 1 \longrightarrow \bar{P}_{i,j}^n = 1 \longrightarrow \bar{P}_{1,j}^n = 1 \quad (4.14)$$

$$\theta_f = 1 \longrightarrow \theta_{f i,j}^n = 1 \longrightarrow \theta_{f 1,j}^n = 1 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial \chi} = 0 \longrightarrow \frac{\theta_{p i+1,j}^n - \theta_{p i,j}^n}{\Delta \chi} = 0 \longrightarrow \theta_{p 1,j}^n = \theta_{p 2,j}^n \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial \chi} = 0 \longrightarrow \frac{\theta_{s i+1,j}^n - \theta_{s i,j}^n}{\Delta \chi} = 0 \longrightarrow \theta_{s 1,j}^n = \theta_{s 2,j}^n \quad (4.17)$$

Para la salida del ducto, ($\chi = 1$), se precisa una discretización hacia atrás, nodo $i=m$:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} = 0 \longrightarrow \frac{\bar{u}_{i,j}^n - \bar{u}_{i-1,j}^n}{\Delta \chi} = 0 \longrightarrow \bar{u}_{m,j}^n = \bar{u}_{m-1,j}^n, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} = 0 \longrightarrow \frac{\bar{v}_{i,j}^n - \bar{v}_{i-1,j}^n}{\Delta \chi} = 0 \longrightarrow \bar{v}_{m,j}^n = \bar{v}_{m-1,j}^n, \quad (4.19)$$

$$\bar{P} = 0 \longrightarrow \bar{P}_{i,j}^n = 0 \longrightarrow \bar{P}_{m,j}^n = 0, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} = 0 \longrightarrow \frac{\theta_{f i,j}^n - \theta_{f i-1,j}^n}{\Delta \chi} = 0 \longrightarrow \theta_{f m,j}^n = \theta_{f m-1,j}^n, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial \chi} = 0 \longrightarrow \frac{\theta_{p i,j}^n - \theta_{p i-1,j}^n}{\Delta \chi} = 0 \longrightarrow \theta_{p m,j}^n = \theta_{p m-1,j}^n, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial \chi} = 0 \longrightarrow \frac{\theta_{s i,j}^n - \theta_{s i-1,j}^n}{\Delta \chi} = 0 \longrightarrow \theta_{s m,j}^n = \theta_{s m-1,j}^n, \quad (4.23)$$

En el eje de simetría del ducto, ($\eta = 0$), se precisa una discretización hacia adelante, nodo $j=1$:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = 0 \longrightarrow \frac{\bar{u}_{i,j+1}^n - \bar{u}_{i,j}^n}{\Delta \eta} = 0 \longrightarrow \bar{u}_{i,1}^n = \bar{u}_{i,2}^n, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = 0 \longrightarrow \frac{\bar{v}_{i,j+1}^n - \bar{v}_{i,j}^n}{\Delta \eta} = 0 \longrightarrow \bar{v}_{i,1}^n = \bar{v}_{i,2}^n, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} = 0 \longrightarrow \frac{\bar{P}_{i,j+1}^n - \bar{P}_{i,j}^n}{\Delta \eta} = 0 \longrightarrow \bar{P}_{i,1}^n = \bar{P}_{i,2}^n, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} = 0 \longrightarrow \frac{\theta_{f,i,j+1}^n - \theta_{f,i,j}^n}{\Delta \eta} = 0 \longrightarrow \theta_{f,i,1}^n = \theta_{f,i,2}^n \quad (4.27)$$

En la pared interna del ducto, ($\eta = 1$), se precisa una discretización hacia atrás, nodo $j=p$:

$$\bar{u} = 0 \longrightarrow \bar{u}_{i,j}^n = 0 \longrightarrow \bar{u}_{i,p}^n = 0, \quad (4.28)$$

$$\bar{v} = 0 \longrightarrow \bar{v}_{i,j}^n = 0 \longrightarrow \bar{v}_{i,p}^n = 0, \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} = 0 \longrightarrow \frac{\bar{P}_{i,j}^n - \bar{P}_{i,j-1}^n}{\Delta \eta} = 0 \longrightarrow \bar{P}_{i,p}^n = \bar{P}_{i,p-1}^n, \quad (4.30)$$

En la interfase de la pared interna del ducto ($\eta = 1, \Upsilon = 0$), se precisa una discretización hacia atrás del lados del fluido, nodo $j=p$, y hacia adelante del lado del ducto, nodo $j=1$.

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} = \frac{\alpha}{\Lambda} \frac{\partial \theta_p}{\partial \Upsilon} \longrightarrow \frac{\theta_{f,i,j}^n - \theta_{f,i,j-1}^n}{\Delta \eta} = \frac{\alpha}{\Lambda} \frac{\theta_{p,i,j}^n - \theta_{p,i-1,j}^n}{\Delta \chi} \quad (4.31)$$

4.3. Cálculo de \bar{u}_0 , \bar{v}_0 y \bar{P}'

Para el cálculo de \bar{u}_0 y \bar{v}_0 , se utilizan las ecuaciones de momentum introduciendo derivadas ficticias con la finalidad de crear un pseudotiempo de iteración y promedios entre el tiempo presente y futuro. Se construye el procedimiento implícito de cálculo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} = & -\text{Re}\beta \left(\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \right) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \chi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \exp(-\gamma \theta_f) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right) \right] \\ & + 2\beta^2 \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\exp(-\gamma \theta_f) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \right) \right] + \bar{H}_H \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} &= -\text{Re}\beta^3 \left(\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} + 2\beta^2 \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \exp(-\gamma\theta_f) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \right] \\ &\quad + \beta^2 \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\exp(-\gamma\theta_f) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right) \right] + \bar{H}_l \end{aligned} \quad (4.33)$$

Cómo ya se menciona, en el presente estudio se privilegió la construcción de procedimientos implícitos, por lo tanto, los términos $\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi}$ y $\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi}$ representan las predicciones de los cambios en el campo de velocidad, las cuales tienen que ser calculadas mediante un sólo paso de evaluación. En tal contexto, la obtención de la solución de los modelos en estado estacionario requiere que las correcciones asociadas a \bar{u}_0 y \bar{v}_0 sean aproximadamente igual a cero, o muy pequeñas que puedan ser consideradas como despreciables. Tomando en cuenta lo anterior, con el fin de poder manejar el procedimiento numérico de forma implícita, los términos de tiempos ficticios se discretizan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}} - \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \zeta_D^2} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}} \\ &\quad \text{y} \\ \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}} - \left[\frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial \zeta_D^2} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}}; \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde ζ_D representa la dimensión seleccionada para el barrido de cálculo.

Habiendo puntualizado las principales características que distingue el procedimiento numérico, se procede a obtener ambas ecuaciones de momentum en su forma desarrollada. Lo anterior, facilita la discretización de las diferentes derivadas presentes en las ecuaciones. Después de realizar los diferentes procedimientos algebraicos ya mencionados, las ecuaciones de momentum en su forma desarrollada son las siguientes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} &= -\text{Re}\beta \left(\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \right) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \chi} + 2\beta^2 \left\{ \exp(-\gamma\theta_f) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial}{\partial \chi} [\exp(-\gamma\theta_f)] \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \right\} \\ &\quad + \beta^2 \exp(-\gamma\theta_f) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right] + \beta^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \frac{\partial}{\partial \eta} [\exp(-\gamma\theta_f)] + \frac{\beta^2 \exp(-\gamma\theta_f)}{\eta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \\ &\quad \exp(-\gamma\theta_f) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} [\exp(-\gamma\theta_f)] + \frac{\exp(-\gamma\theta_f)}{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \bar{H}_H \end{aligned} \quad (4.35)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} &= -\text{Re}\beta^3 \left(\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} + 2\beta^2 \exp(-\gamma\theta_f) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \eta^2} + 2\beta^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} [\exp(-\gamma\theta_f)] \\ &\quad + \frac{2\beta^2 \exp(-\gamma\theta_f)}{\eta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \beta^2 \left\{ \beta^2 \exp(-\gamma\theta_f) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \chi^2} + \beta^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} [\exp(-\gamma\theta_f)] \right. \\ &\quad \left. + \exp(-\gamma\theta_f) \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \chi} [\exp(-\gamma\theta_f)] \right\} + \bar{H}_l \end{aligned} \quad (4.36)$$

4.3.1. Ecuaciones de momentum discretas

Sustituyendo las derivadas discretizadas en las ecuaciones de momentum. La versión discreta de dichas ecuaciones se presenta a continuación, aquí, los términos conocidos (tiempo presente) están representados por el índice (ω).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} = & -\text{Re}\beta \left(\bar{v}_{i,j}^\omega \left[\frac{\bar{u}_{i,j+1}^\omega - \bar{u}_{i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} \right] + \bar{u}_{i,j}^\omega \left[\frac{\bar{u}_{i+1,j}^\omega - \bar{u}_{i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} \right] \right) - \frac{\bar{P}_{0i+1,j}^\omega - \bar{P}_{0i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} \\
 & + 2\beta^2 \exp(-\gamma\theta_{f_{i,j}}^\omega) \left[\frac{\bar{u}_{i+1,j}^\omega - 2\bar{u}_{i,j}^\omega + \bar{u}_{i-1,j}^\omega}{\Delta\chi^2} \right] + 2\beta^2 \left[\frac{\exp(-\gamma\theta_{f_{i+1,j}}^\omega) - \exp(-\gamma\theta_{f_{i-1,j}}^\omega)}{2\Delta\chi} \right] \left[\frac{\bar{u}_{i+1,j}^\omega - \bar{u}_{i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} \right] \\
 & + \beta^2 \exp(-\gamma\theta_{f_{i,j}}^\omega) \left[\frac{\bar{v}_{i+1,j+1}^\omega - \bar{v}_{i+1,j-1}^\omega - \bar{v}_{i-1,j+1}^\omega + \bar{v}_{i-1,j-1}^\omega}{4\Delta\chi\Delta\eta} \right] \\
 & + \beta^2 \left[\frac{\bar{v}_{i+1,j}^\omega - \bar{v}_{i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} \right] \left[\frac{\exp(-\gamma\theta_{f_{i,j+1}}^\omega) - \exp(-\gamma\theta_{f_{i,j-1}}^\omega)}{2\Delta\eta} \right] + \frac{\beta^2 \exp(-\gamma\theta_{f_{i,j}}^\omega)}{\eta_{i,j}} \left[\frac{\bar{v}_{i+1,j}^\omega - \bar{v}_{i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} \right] \\
 & \exp(-\gamma\theta_{f_{i,j}}^\omega) \left[\frac{\bar{u}_{i,j+1}^\omega - 2\bar{u}_{i,j}^\omega + \bar{u}_{i,j-1}^\omega}{\Delta\eta^2} \right] + \left[\frac{\bar{u}_{i,j+1}^\omega - \bar{u}_{i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} \right] \left[\frac{\exp(-\gamma\theta_{f_{i,j+1}}^\omega) - \exp(-\gamma\theta_{f_{i,j-1}}^\omega)}{2\Delta\eta} \right] \\
 & + \frac{\exp(-\gamma\theta_{f_{i,j}}^\omega)}{\eta_{i,j}} \left[\frac{\bar{u}_{i,j+1}^\omega - \bar{u}_{i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} \right] + \bar{H}_H
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

y

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} = & -\text{Re}\beta^3 \left(\bar{v}_{i,j}^\omega \left[\frac{\bar{v}_{i,j+1}^\omega - \bar{v}_{i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} \right] + \bar{u}_{i,j}^\omega \left[\frac{\bar{v}_{i+1,j}^\omega - \bar{v}_{i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} \right] \right) - \frac{\bar{P}_{0i,j+1}^\omega - \bar{P}_{0i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} \\
 & + 2\beta^2 \exp(-\gamma\theta_{f_{i,j}}^\omega) \left[\frac{\bar{v}_{i,j+1}^\omega - 2\bar{v}_{i,j}^\omega + \bar{v}_{i,j-1}^\omega}{\Delta\eta^2} \right] + \frac{2\beta^2 \exp(-\gamma\theta_{f_{i,j}}^\omega)}{\eta_{i,j}} \left[\frac{\bar{v}_{i,j+1}^\omega - \bar{v}_{i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} \right] \\
 & + 2\beta^2 \left[\frac{\bar{v}_{i,j+1}^\omega - \bar{v}_{i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} \right] \left[\frac{\exp(-\gamma\theta_{f_{i,j+1}}^\omega) - \exp(-\gamma\theta_{f_{i,j-1}}^\omega)}{2\Delta\eta} \right] + \beta^4 \exp(-\gamma\theta_{f_{i,j}}^\omega) \left[\frac{\bar{v}_{i+1,j}^\omega - 2\bar{v}_{i,j}^\omega + \bar{v}_{i-1,j}^\omega}{\Delta\chi^2} \right] \\
 & + \beta^4 \left[\frac{\bar{v}_{i+1,j}^\omega - \bar{v}_{i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} \right] \left[\frac{\exp(-\gamma\theta_{f_{i+1,j}}^\omega) - \exp(-\gamma\theta_{f_{i-1,j}}^\omega)}{2\Delta\chi} \right] \\
 & + \beta^2 \exp(-\gamma\theta_{f_{i,j}}^\omega) \left[\frac{\bar{u}_{i+1,j+1}^\omega - \bar{u}_{i+1,j-1}^\omega - \bar{u}_{i-1,j+1}^\omega + \bar{u}_{i-1,j-1}^\omega}{4\Delta\chi\Delta\eta} \right] \\
 & + \beta^2 \left[\frac{\bar{u}_{i,j+1}^\omega - \bar{u}_{i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} \right] \left[\frac{\exp(-\gamma\theta_{f_{i+1,j}}^\omega) - \exp(-\gamma\theta_{f_{i-1,j}}^\omega)}{2\Delta\chi} \right] + \bar{H}_l
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Como todos los términos del lado derecho de las ecuaciones (4.37) y (4.38) son valores conocidos se puede sustituir por un sólo término conocido como residuo de cálculo $\text{Res}1_{i,j}$ y $\text{Res}2_{i,j}$, dichas ecuaciones se reducen a las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} = \text{Res}1_{i,j} \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} = \text{Res}2_{i,j} \quad (4.40)$$

Para aplicar el método implícito propuesto en las ecuaciones (4.39) y (4.40), se requiere de la fragmentación del cálculo en dos partes para cada eje coordenado. También, para cada uno de los pasos del cálculo implícito, se necesita introducir la diferencia del laplaciano entre el tiempo presente y el futuro según corresponda la coordenada a evaluar.

Para el barrido en χ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}} - \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \chi^2} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}}, \\ \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} &= \frac{\bar{u}_{0,i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \bar{u}_{0,i,j}^{\omega}}{\Delta \psi} - \left[\frac{\bar{u}_{0,i+1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\bar{u}_{0,i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \bar{u}_{0,i-1,j}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \chi^2} \right] + \left[\frac{\bar{u}_{0,i+1,j}^{\omega} - 2\bar{u}_{0,i,j}^{\omega} + \bar{u}_{0,i-1,j}^{\omega}}{\Delta \chi^2} \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}} - \left[\frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial \chi^2} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}}, \\ \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} &= \frac{\bar{v}_{0,i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \bar{v}_{0,i,j}^{\omega}}{\Delta \psi} - \left[\frac{\bar{v}_{0,i+1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\bar{v}_{0,i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \bar{v}_{0,i-1,j}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \chi^2} \right] + \left[\frac{\bar{v}_{0,i+1,j}^{\omega} - 2\bar{v}_{0,i,j}^{\omega} + \bar{u}_{0,i-1,j}^{\omega}}{\Delta \chi^2} \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para el barrido en η :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} \right]_{\omega+\frac{1}{2}}^{\omega+1} - \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \eta^2} \right]_{\omega+\frac{1}{2}}^{\omega+1}, \\ \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} &= \frac{\bar{u}_{0,i,j}^{\omega+1} - \bar{u}_{0,i,j}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \psi} - \left[\frac{\bar{u}_{0,i,j+1}^{\omega+1} - 2\bar{u}_{0,i,j}^{\omega+1} + \bar{u}_{0,i,j-1}^{\omega+1}}{\Delta \eta^2} \right] + \left[\frac{\bar{u}_{0,i,j-1}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\bar{u}_{0,i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \bar{u}_{0,i,j-1}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \eta^2} \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} \right]_{\omega+\frac{1}{2}}^{\omega+1} - \left[\frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial \eta^2} \right]_{\omega+\frac{1}{2}}^{\omega+1}, \\ \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} &= \frac{\bar{v}_{0,i,j}^{\omega+1} - \bar{v}_{0,i,j}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \psi} - \left[\frac{\bar{v}_{0,i,j+1}^{\omega+1} - 2\bar{v}_{0,i,j}^{\omega+1} + \bar{v}_{0,i,j-1}^{\omega+1}}{\Delta \eta^2} \right] + \left[\frac{\bar{v}_{0,i,j+1}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\bar{v}_{0,i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \bar{v}_{0,i,j-1}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \eta^2} \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

Si se considera que:

$$\bar{u}_{0,i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \bar{u}_{0,i,j}^{\omega} = \Delta \bar{u}_{0,i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} \quad \bar{u}_{0,i,j}^{\omega+1} - \bar{u}_{0,i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} = \Delta \bar{u}_{0,i,j}^{\omega+1}$$

$$\bar{v}_{0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \bar{v}_{0i,j}^{\omega} = \Delta \bar{v}_{0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} \qquad \bar{v}_{0i,j}^{\omega+1} - \bar{v}_{0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} = \Delta \bar{v}_{0i,j}^{\omega+1}$$

Para el barrido en χ las ecuaciones (4.41) y (4.42) cambia a:

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[\Delta \bar{u}_{0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \left(\Delta \bar{u}_{0i+1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\Delta \bar{u}_{0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \Delta \bar{u}_{0i-1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (4.45)$$

y

$$\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[\Delta \bar{v}_{0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \left(\Delta \bar{v}_{0i+1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\Delta \bar{v}_{0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \Delta \bar{v}_{0i-1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (4.46)$$

Aquí, después de reacomodar los términos, ambas ecuaciones se reescriben de la siguiente forma,

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[-\frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \bar{u}_{0i+1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \right) \Delta \bar{u}_{0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \bar{u}_{0i-1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.47)$$

y

$$\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[-\frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \bar{v}_{0i+1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \right) \Delta \bar{v}_{0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \bar{v}_{0i-1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.48)$$

Como se puede observar en las expresiones, (4.47) y (4.48), los términos del lado derecho de las ecuaciones indican una solución del barrido en χ mediante la evaluación de una matriz tridiagonal con el algoritmo de Thomas, ecuaciones (4.49) y (4.50). Por consiguiente, se puede determinar los valores de los incrementos \bar{u}_0 y \bar{v}_0 para un tiempo $\omega + \frac{1}{2}$, los cuales serán empleados como valores conocidos para la segunda parte de cálculo.

$$\Delta \psi (\text{Res1}_{i,j}) = -\frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \bar{u}_{0i+1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \right) \Delta \bar{u}_{0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \bar{u}_{0i-1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} \quad (4.49)$$

y

$$\Delta \psi (\text{Res2}_{i,j}) = -\frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \bar{v}_{0i+1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \right) \Delta \bar{v}_{0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \bar{v}_{0i-1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} \quad (4.50)$$

Para el barrido en η las expresiones (4.43) y (4.44) cambian a:

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[\Delta \bar{u}_{0i,j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \left(\Delta \bar{u}_{0i,j+1}^{\omega+1} - 2\Delta \bar{u}_{0i,j}^{\omega+1} + \Delta \bar{u}_{0i,j-1}^{\omega+1} \right) \right] \quad (4.51)$$

y

$$\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[\Delta \bar{v}_{0,i,j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \left(\Delta \bar{v}_{0,i,j+1}^{\omega+1} - 2\Delta \bar{v}_{0,i,j}^{\omega+1} + \Delta \bar{v}_{0,i,j-1}^{\omega+1} \right) \right]; \quad (4.52)$$

donde, acomodando los términos en ambos casos, se obtiene las siguientes ecuaciones,

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[-\frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \Delta \bar{u}_{0,i,j+1}^{\omega+1} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \right) \Delta \bar{u}_{0,i,j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \Delta \bar{u}_{0,i,j-1}^{\omega+1} \right] \quad (4.53)$$

y

$$\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[-\frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \Delta \bar{v}_{0,i,j+1}^{\omega+1} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \right) \Delta \bar{v}_{0,i,j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \Delta \bar{v}_{0,i,j-1}^{\omega+1} \right] \quad (4.54)$$

En este caso, la solución de las ecuaciones anteriores implica el uso, una vez más, del algoritmo de Thomas. Ecuaciones (4.55) y (4.56)

$$\Delta \psi \Delta \bar{u}_{0,i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} = -\frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \Delta \bar{u}_{0,i,j+1}^{\omega+1} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \right) \Delta \bar{u}_{0,i,j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \Delta \bar{u}_{0,i,j-1}^{\omega+1} \quad (4.55)$$

y

$$\Delta \psi \Delta \bar{v}_{0,i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} = -\frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \Delta \bar{v}_{0,i,j+1}^{\omega+1} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \right) \Delta \bar{v}_{0,i,j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \Delta \bar{v}_{0,i,j-1}^{\omega+1} \quad (4.56)$$

Aquí, dado que ya se conocen los incrementos de $\Delta \bar{u}_{0,i,j}$ y $\Delta \bar{v}_{0,i,j}$ para el tiempo $\omega + \frac{1}{2}$, los resultados que se obtienen permiten conocer los valores de dichos incrementos para un tiempo futuro, $\omega + 1$. Cabe mencionar, dichos valores, más el valor conocido de $\Delta \bar{u}_{0,i,j}$ y $\Delta \bar{v}_{0,i,j}$, representan un valor de precálculo el cual todavía no ha sido sometido al algoritmo de corrección de presión. En consecuencia, para obtener los valores $\bar{u}_{0,i,j}^{\omega+1}$ y $\bar{v}_{0,i,j}^{\omega+1}$ necesarios para la corrección de presión se realiza las siguientes operaciones aritméticas,

$$\bar{u}_{0,i,j}^{\omega+1} = \bar{u}_{0,i,j}^{\omega} + \Delta \bar{u}_{0,i,j}^{\omega+1} \quad (4.57)$$

y

$$\bar{v}_{0,i,j}^{\omega+1} = \bar{v}_{0,i,j}^{\omega} + \Delta \bar{v}_{0,i,j}^{\omega+1} \quad (4.58)$$

Conociendo los valores estimados de $\bar{u}_{0,i,j}^{\omega+1}$ y $\bar{v}_{0,i,j}^{\omega+1}$, esto mediante los modelos de inercia, donde se asume un campo de presión $\bar{P}_{0,i,j}^{\omega}$ (propuesto o inicial), se procede a la implementación del procedimiento de corrección de presión, con lo cual se obtienen los valores correctos de $\bar{u}_{0,i,j}^{\omega+1}$ y $\bar{v}_{0,i,j}^{\omega+1}$, los cuales estarán asociados a un campo de presión corregido $\bar{P}_{i,j}^{\omega+1}$ (donde se satisface la conservación de masa).

4.3.2. Implementación del algoritmo de corrección de presión. Evaluación de \bar{P}' .

Para conocer el error que se tiene en los cálculos previos, \bar{u}_0 y \bar{v}_0 , el procedimiento de cálculo S.I.M.P.L.E indica que se tiene que realizar una corrección en el campo de presión, y a su vez, realizar las correspondientes modificaciones en las componentes de velocidad \bar{u} y \bar{v} . Para este caso, dadas las características del modelo de corrección de presión, se asume un método de solución mediante un esquema Euler-ADI implícito, esto con la finalidad de obtener el valor de dicha corrección en un sólo paso. Aquí, primeramente se calcula una coordenada como implícito y la otra como explícita. Posteriormente, se cambia la disposición y se evalúa la otra coordenada como implícita. Para el caso de un modelo en 2D, la fragmentación del cálculo se realiza en 2 partes.

Modelo de corrección de presión

$$\Delta\psi_c \left[\frac{\partial^2 \bar{P}'}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \bar{P}'}{\partial \eta} \right) \right] = \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \chi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \bar{v}_0) \quad (4.59)$$

Siguiendo lo antes mencionado, para realizar la evaluación en la coordenada χ , la expresión de corrección de presión se discretiza de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}'_{i+1,j}^{\Omega+\frac{1}{2}} - 2\bar{P}'_{i,j}^{\Omega+\frac{1}{2}} + \bar{P}'_{i-1,j}^{\Omega+\frac{1}{2}}}{\Delta\chi^2} + \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\bar{P}'_{i,j+1}^{\Omega} - 2\bar{P}'_{i,j}^{\Omega} + \bar{P}'_{i,j-1}^{\Omega}}{\Delta\eta^2} + \frac{1}{\eta_{i,j}} \left(\frac{\bar{P}'_{i,j+1}^{\Omega} - \bar{P}'_{i,j-1}^{\Omega}}{2\Delta\eta} \right) \right] = \\ \frac{1}{\Delta\psi_c} \left[\frac{\bar{u}_{0i+1,j}^{\omega+1} - \bar{u}_{0i-1,j}^{\omega+1}}{2\Delta\chi} + \frac{\bar{v}_{0i,j+1}^{\omega+1} - \bar{v}_{0i,j-1}^{\omega+1}}{2\Delta\eta} + \frac{\bar{v}_{0i,j}^{\omega+1}}{\eta_{i,j}} \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

Separando términos conocidos y desconocidos en los diferentes lados de la ecuación (4.60), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\psi_c}{\Delta\chi^2} \bar{P}'_{i+1,j}^{\Omega+\frac{1}{2}} - \frac{2\Delta\psi_c}{\Delta\chi^2} \bar{P}'_{i,j}^{\Omega+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\psi_c}{\Delta\chi^2} \bar{P}'_{i-1,j}^{\Omega+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{u}_{0i+1,j}^{\omega+1} - \bar{u}_{0i-1,j}^{\omega+1}}{2\Delta\chi} + \frac{\bar{v}_{0i,j+1}^{\omega+1} - \bar{v}_{0i,j-1}^{\omega+1}}{2\Delta\eta} + \frac{\bar{v}_{0i,j}^{\omega+1}}{\bar{v}_{i,j}} \\ - \frac{\Delta\psi_c}{\beta^2} \left[\frac{\bar{P}'_{i,j+1}^{\Omega} - 2\bar{P}'_{i,j}^{\Omega} + \bar{P}'_{i,j-1}^{\Omega}}{\Delta\eta^2} + \left(\frac{1}{\eta_{i,j}} \right) \frac{\bar{P}'_{i,j+1}^{\Omega} + \bar{P}'_{i,j-1}^{\Omega}}{2\Delta\eta} \right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Dado que los términos de tiempo Ω son conocidos, el residuo del cálculo del primer barrido, $\text{Rp1}_{i,j}$, es:

$$\begin{aligned} \text{Rp1}_{i,j} = \frac{\bar{u}_{0i+1,j}^{\omega+1} - \bar{u}_{0i-1,j}^{\omega+1}}{2\Delta\chi} + \frac{\bar{v}_{0i,j+1}^{\omega+1} - \bar{v}_{0i,j-1}^{\omega+1}}{2\Delta\eta} + \frac{\bar{v}_{0i,j}^{\omega+1}}{\bar{v}_{i,j}} - \frac{\Delta\psi_c}{\beta^2} \left[\frac{\bar{P}'_{i,j+1}^{\Omega} - 2\bar{P}'_{i,j}^{\Omega} + \bar{P}'_{i,j-1}^{\Omega}}{\Delta\eta^2} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\eta_{i,j}} \right) \frac{\bar{P}'_{i,j+1}^{\Omega} + \bar{P}'_{i,j-1}^{\Omega}}{2\Delta\eta} \right]; \end{aligned} \quad (4.62)$$

por consiguiente, la ecuación (4.62) se reescribe de la siguiente forma,

$$\frac{\Delta\psi_c}{\Delta\chi^2}\bar{P}'_{i+1,j}{}^{\Omega+\frac{1}{2}} - \frac{2\Delta\psi_c}{\Delta\chi^2}\bar{P}'_{i,j}{}^{\Omega+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\psi_c}{\Delta\chi^2}\bar{P}'_{i-1,j}{}^{\Omega+\frac{1}{2}} = \text{Rp1}_{i,j} \quad (4.63)$$

Aquí, mediante el uso del algoritmo de Thomas, se obtiene la solución de la tridiagonal que representa la primera fracción de la corrección de presión, $\Omega + \frac{1}{2}$. Para completar el valor, se realiza la segunda parte del procedimiento, donde se cambia la componente implícita de cálculo. En este caso, ahora se considera implícita la componente en η (componente $\Omega + 1$ desconocida) y explícita la componente χ (componente $\Omega + \frac{1}{2}$ ya conocida). De la misma ecuación de corrección de presión, ecuación (4.59), se realiza una discretización tomando en cuenta lo anterior, dando como resultado la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}'_{i+1,j}{}^{\Omega+\frac{1}{2}} - 2\bar{P}'_{i,j}{}^{\Omega+\frac{1}{2}} + \bar{P}'_{i-1,j}{}^{\Omega+\frac{1}{2}}}{\Delta\chi^2} + \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\bar{P}'_{i,j+1}{}^{\Omega+1} - 2\bar{P}'_{i,j}{}^{\Omega+1} + \bar{P}'_{i,j-1}{}^{\Omega+1}}{\Delta\eta^2} + \frac{1}{\eta_{i,j}} \left(\frac{\bar{P}'_{i,j+1}{}^{\Omega+1} - \bar{P}'_{i,j-1}{}^{\Omega+1}}{2\Delta\eta} \right) \right] = \\ \frac{1}{\Delta\psi_c} \left[\frac{\bar{u}_{0i+1,j}{}^{\omega+1} - \bar{u}_{0i-1,j}{}^{\omega+1}}{2\Delta\chi} + \frac{\bar{v}_{0i,j+1}{}^{\omega+1} - \bar{v}_{0i,j-1}{}^{\omega+1}}{2\Delta\eta} + \frac{\bar{v}_{0i,j}{}^{\omega+1}}{\eta_{i,j}} \right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

Separando términos conocidos y desconocidos en los diferentes lados de la ecuación, se obtiene que,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta\psi_c}{\Delta\eta^2} + \frac{\Delta\psi_c}{2\eta_{i,j}\Delta\eta} \right) \bar{P}'_{i,j+1}{}^{\Omega+1} - \frac{2\Delta\psi_c}{\Delta\chi^2} \bar{P}'_{i,j}{}^{\Omega+1} + \left(\frac{\Delta\psi_c}{\Delta\eta^2} - \frac{\Delta\psi_c}{2\eta_{i,j}\Delta\eta} \right) \bar{P}'_{i,j-1}{}^{\Omega+1} = \beta^2 \left\{ \frac{\bar{u}_{0i+1,j}{}^{\omega+1} - \bar{u}_{0i-1,j}{}^{\omega+1}}{2\Delta\chi} \right. \\ \left. + \frac{\bar{v}_{0i,j+1}{}^{\omega+1} - \bar{v}_{0i,j-1}{}^{\omega+1}}{2\Delta\eta} + \frac{\bar{v}_{0i,j}{}^{\omega+1}}{\eta_{i,j}} \right\} - \Delta\psi_c \beta^2 \left[\frac{\bar{P}'_{i+1,j}{}^{\Omega+\frac{1}{2}} - 2\bar{P}'_{i,j}{}^{\Omega+\frac{1}{2}} + \bar{P}'_{i-1,j}{}^{\Omega+\frac{1}{2}}}{\Delta\chi^2} \right]; \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde, los términos conocidos son ahora los definidos por $\omega + \frac{1}{2}$, y por tanto, el residuo en este caso se calcula de la siguiente forma:

$$\text{Rp2}_{i,j} = \beta^2 \left\{ \frac{\bar{u}_{0i+1,j}{}^{\omega+1} - \bar{u}_{0i-1,j}{}^{\omega+1}}{2\Delta\chi} + \frac{\bar{v}_{0i,j+1}{}^{\omega+1} - \bar{v}_{0i,j-1}{}^{\omega+1}}{2\Delta\eta} + \frac{\bar{v}_{0i,j}{}^{\omega+1}}{\eta_{i,j}} \right\} - \Delta\psi_c \beta^2 \left[\frac{\bar{P}'_{i+1,j}{}^{\Omega+\frac{1}{2}} - 2\bar{P}'_{i,j}{}^{\Omega+\frac{1}{2}} + \bar{P}'_{i-1,j}{}^{\Omega+\frac{1}{2}}}{\Delta\chi^2} \right] \quad (4.66)$$

De igual forma que en la primera parte del cálculo (barrido en χ), se hace uso del algoritmo de Thomas para resolver la ecuación resultante que se muestra a continuación,

$$\left(\frac{\Delta\psi_c}{\Delta\eta^2} + \frac{\Delta\psi_c}{2\eta_{i,j}\Delta\eta} \right) \bar{P}'_{i,j+1}{}^{\Omega+1} - \frac{2\Delta\psi_c}{\Delta\chi^2} \bar{P}'_{i,j}{}^{\Omega+1} + \left(\frac{\Delta\psi_c}{\Delta\eta^2} - \frac{\Delta\psi_c}{2\eta_{i,j}\Delta\eta} \right) \bar{P}'_{i,j-1}{}^{\Omega+1} = \text{Rp2}_{i,j} \quad (4.67)$$

En este caso, ya los resultados reflejan el valor de la corrección $\bar{P}'_{i,j}{}^{\Omega+1}$, en consecuencia, ya se puede realizar tanto la corrección del campo de presión, como las correspondientes rectificaciones de las componentes de la velocidad ($\bar{P}'_{i,j}{}^{\omega+1}$, $\bar{u}_{i,j}{}^{\omega+1}$, $\bar{v}_{i,j}{}^{\omega+1}$), las cuales se calculan mediante las siguientes expresiones discretas,

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{i,j}^{\omega+1} &= \bar{P}_{0i,j}^{\omega} + \bar{P}'_{i,j}^{\Omega+1}, \\
 \bar{u}_{i,j}^{\omega+1} &= \bar{u}_{0i,j}^{\omega+1} + \Delta\psi_c \left[\frac{\bar{P}'_{i+1,j}^{\Omega+1} - \bar{P}'_{i-1,j}^{\Omega+1}}{2\Delta\chi} \right], \\
 &\text{y} \\
 \bar{v}_{i,j}^{\omega+1} &= \bar{v}_{0i,j}^{\omega+1} + \frac{\Delta\psi_c}{\beta^2} \left[\frac{\bar{P}'_{i,j+1}^{\Omega+1} - \bar{P}'_{i,j-1}^{\Omega+1}}{2\Delta\eta} \right].
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Claramente, para el siguiente paso de cálculo (iteración), los valores calculados se vuelven valores conocidos, (ver ecuaciones (4.69), donde se indica que el tiempo futuro se convierte en el presente), con la cual, se vuelve a repetir el cálculo las veces que sea necesario hasta lograr una convergencia y solución del estado estacionario.

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{i,j}^{\omega+1} &= \bar{P}_{0i,j}^{\omega} \\
 \bar{u}_{i,j}^{\omega+1} &= \bar{u}_{0i,j}^{\omega} \\
 \bar{v}_{i,j}^{\omega+1} &= \bar{v}_{0i,j}^{\omega}
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

4.4. Cálculo de θ_f, θ_p y θ_s

Para el caso de la evaluación de la transferencia de calor, se ha propuesto un esquema de solución basado en una versión modificada del método ADI. Este procedimiento numérico incluye la componente de tiempos ficticios, con la cual, se busca obtener una solución de condición de convergencia (estado estacionario). También, se incluye la evaluación de la transferencia de calor en todas las regiones de estudio (fluido, pared del oleoducto y aislante térmico); por lo tanto, el procedimiento numérico implica la resolución de varias ecuaciones de energía enlazadas por condiciones de interfase, θ_f, θ_p y θ_s .

Ecuación de la energía para la región del fluido:

$$\begin{aligned}
 \text{Pe}\beta \left(\bar{v} \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} + \bar{u} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} \right) &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right) + \beta^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} + 2\text{Br} \exp(-\gamma\theta_f) \beta^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\bar{v}}{\eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \right)^2 \right] \\
 &+ \text{Br} \exp(-\gamma\theta_f) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right)^2
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Ecuación de la energía para la región de la pared del oleoducto:

$$\beta^2 \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_p}{\partial \chi^2} + \frac{1}{[\Upsilon \varepsilon + 1]} \frac{\partial}{\partial \Upsilon} \left[[\Upsilon \varepsilon + 1] \frac{\partial \theta_p}{\partial \Upsilon} \right] = 0 \tag{4.71}$$

Ecuación de la energía para la región de la pared del aislante térmico:

$$\beta^2 \delta^2 \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \chi^2} + \frac{1}{[\kappa \xi + 1]} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[[\kappa \xi + 1] \frac{\partial \theta_s}{\partial \xi} \right] = 0 \quad (4.72)$$

Como ya se indicó, para determinar el valor de θ_f , θ_p y θ_s , se requiere de la resolución de las ecuaciones (4.70), (4.71), y (4.72), esto mediante la inclusión de componentes ficticias en los modelos (derivada temporal de pseudotiempo). Lo anterior, tiene la finalidad de poder realizar un proceso de iteración en búsqueda de la solución en condiciones específicas (estado estacionario). Por tanto, tomando en cuenta procedimientos numéricos previamente desarrollados, las ecuaciones anteriores se describen de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \psi} = & -\text{Pe}\beta \left(\bar{v} \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} + \bar{u} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} \right) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right) + 2\text{Br} \exp(-\gamma \theta_f) \beta^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\bar{v}}{\eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \right)^2 \right] \\ & + \beta^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} + \text{Br} \exp(-\gamma \theta_f) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial \theta_{p0}}{\partial \psi} = \beta^2 \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_p}{\partial \chi^2} + \frac{1}{[\Upsilon \varepsilon + 1]} \frac{\partial}{\partial \Upsilon} \left[[\Upsilon \varepsilon + 1] \frac{\partial \theta_p}{\partial \Upsilon} \right]. \quad (4.74)$$

y

$$\frac{\partial \theta_{s0}}{\partial \psi} = \beta^2 \delta^2 \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \chi^2} + \frac{1}{[\kappa \xi + 1]} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[[\kappa \xi + 1] \frac{\partial \theta_s}{\partial \xi} \right] \quad (4.75)$$

Aquí, los términos del lado derecho representan las componentes de pseudotiempo, y los términos del lado izquierdo representan los modelos a resolver. Para el presente cálculo, los términos relacionados con θ_{f0} , θ_{p0} y θ_{s0} permiten desarrollar el procedimiento de cálculo de tiempos ficticios, esto de forma implícita ya que las derivadas de pseudotiempo se definen como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \psi} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}} - \left[\frac{\partial^2 \theta_{f0}}{\partial \zeta_D^2} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}}, \\ \frac{\partial \theta_{p0}}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \theta_{p0}}{\partial \psi} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}} - \left[\frac{\partial^2 \theta_{p0}}{\partial \zeta_D^2} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}}, \\ & \text{y} \\ \frac{\partial \theta_{s0}}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \theta_{s0}}{\partial \psi} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}} - \left[\frac{\partial^2 \theta_{s0}}{\partial \zeta_D^2} \right]_{\omega}^{\omega+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.76)$$

Desarrollando las ecuaciones (4.73), (4.74) y (4.75) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \psi} &= -\text{Pe}\beta \left(\bar{v} \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} + \bar{u} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} \right) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \eta^2} + 2\text{Br} \exp(-\gamma \theta_f) \beta^2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \right)^2 \\
 &+ 2\text{Br} \exp(-\gamma \theta_f) \beta^2 \left(\frac{\bar{v}}{\eta} \right)^2 + 2\text{Br} \exp(-\gamma \theta_f) \beta^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \right)^2 + \beta^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} \\
 &+ \text{Br} \exp(-\gamma \theta_f) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)^2 + 2\text{Br} \exp(-\gamma \theta_f) \beta^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right) \\
 &+ \text{Br} \exp(-\gamma \theta_f) \left(\beta^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} \right)^2, \tag{4.77}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta_{p0}}{\partial \psi} = \beta^2 \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_p}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta_p}{\partial \Upsilon^2} + \frac{\varepsilon}{[\Upsilon \varepsilon + 1]} \frac{\partial \theta_p}{\partial \Upsilon} \tag{4.78}$$

y

$$\frac{\partial \theta_{s0}}{\partial \psi} = \beta^2 \delta^2 \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \xi^2} + \frac{\kappa}{[\kappa \xi + 1]} \frac{\partial \theta_s}{\partial \xi}; \tag{4.79}$$

donde, después de realizar la sustituciones correspondientes de las derivadas por sus definiciones en diferencias finitas, las ecuaciones discretas que representan la transferencia de calor en el sistema son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \psi} &= -\text{Pe}\beta \left[\bar{v}_{i,j}^\omega \left(\frac{\theta_{f,i,j+1}^\omega - \theta_{f,i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} \right) + \bar{u}_{i,j}^\omega \left(\frac{\theta_{f,i+1,j}^\omega - \theta_{f,i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{\eta_{i,j}} \left(\frac{\theta_{f,i,j+1}^\omega - \theta_{f,i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} \right) + \frac{\theta_{f,i,j+1}^\omega - 2\theta_{f,i,j}^\omega + \theta_{f,i,j-1}^\omega}{\Delta\eta^2} + 2\text{Br} \exp(-\gamma \theta_{f,i,j}^\omega) \beta^2 \left(\frac{\bar{v}_{i,j+1}^\omega - \bar{v}_{i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} \right)^2 \\
 &+ 2\text{Br} \exp(-\gamma \theta_{f,i,j}^\omega) \beta^2 \left(\frac{\bar{v}_{i,j}^\omega}{\eta_{i,j}} \right)^2 + 2\text{Br} \exp(-\gamma \theta_{f,i,j}^\omega) \beta^2 \left(\frac{\bar{u}_{i+1,j}^\omega - \bar{u}_{i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} \right)^2 + \beta^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} \\
 &+ \text{Br} \exp(-\gamma \theta_{f,i,j}^\omega) \left(\frac{\bar{u}_{i,j+1}^\omega - \bar{u}_{i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} \right)^2 + 2\text{Br} \exp(-\gamma \theta_{f,i,j}^\omega) \beta^2 \left(\frac{\bar{u}_{i,j+1}^\omega - \bar{u}_{i,j-1}^\omega}{2\Delta\eta} \right) \left(\frac{\bar{v}_{i+1,j}^\omega - \bar{v}_{i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} \right) \\
 &+ \text{Br} \exp(-\gamma \theta_{f,i,j}^\omega) \beta^4 \left(\frac{\bar{v}_{i+1,j}^\omega - \bar{v}_{i-1,j}^\omega}{2\Delta\chi} \right)^2, \tag{4.80}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta_{p0}}{\partial \psi} &= \beta^2 \varepsilon^2 \left(\frac{\theta_{p,i+1,j}^\omega - 2\theta_{p,i,j}^\omega + \theta_{p,i-1,j}^\omega}{\Delta\chi^2} \right) + \frac{\theta_{p,i,j+1}^\omega - 2\theta_{p,i,j}^\omega + \theta_{p,i,j-1}^\omega}{\Delta\Upsilon^2} \\
 &+ \frac{\varepsilon}{(\Upsilon_{i,j} \varepsilon + 1)} \left[\frac{\theta_{p,i,j+1}^\omega - \theta_{p,i,j-1}^\omega}{2\Delta\Upsilon} \right] \tag{4.81}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{s0}}{\partial \psi} &= \beta^2 \delta^2 \left(\frac{\theta_{si+1,j}^\omega - 2\theta_{si,j}^\omega + \theta_{si-1,j}^\omega}{\Delta \chi^2} \right) + \frac{\theta_{si,j+1}^\omega - 2\theta_{si,j}^\omega + \theta_{si,j-1}^\omega}{\Delta \xi^2} \\ &\quad + \frac{\kappa}{(\kappa \xi + 1)} \left[\frac{\theta_{si,j+1}^\omega - \theta_{si,j-1}^\omega}{2\Delta \xi} \right]. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Como ya se vio anteriormente, dado que los términos del lado derecho de las ecuaciones (4.80), (4.81) y (4.82) son valores conocidos, estas expresiones se pueden reducir a,

$$\frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \psi} = \text{Res3}_{i,j}, \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial \theta_{p0}}{\partial \psi} = \text{Res4}_{i,j}, \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial \theta_{s0}}{\partial \psi} = \text{Res5}_{i,j}; \quad (4.85)$$

donde $\text{Res3}_{i,j}$, $\text{Res4}_{i,j}$ y $\text{Res5}_{i,j}$ representan los residuos de cada una de las ecuaciones. Para aplicar el esquema implícito de solución en las ecuaciones anteriores se requiere de dos procedimientos previos; el primero, de la fragmentación del cálculo en dos partes ya que el cálculo es en 2D, y el segundo, la inclusión de la diferencia del laplaciano entre el tiempo presente y futuro según corresponda la coordenada. Realizando el procedimiento descrito en cada una de las regiones y discretizando los modelos, se obtiene que ambos barridos de cálculo (uno por cada coordenada) permiten el cálculo de cada una de las temperaturas de estudio para un tiempo futuro. Lo anterior se ilustra de forma matemática mediante las siguientes expresiones:

Para el barrido en χ :

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{f0}}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \psi} \right]_\omega^{\omega+\frac{1}{2}} - \left[\frac{\partial^2 \theta_{f0}}{\partial \chi^2} \right]_\omega^{\omega+\frac{1}{2}}, \\ \frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \psi} &= \frac{\theta_{f0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \theta_{f0i,j}^\omega}{\Delta \psi} - \left[\frac{\theta_{f0i+1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\theta_{f0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \theta_{f0i-1,j}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \chi^2} \right] + \left[\frac{\theta_{f0i+1,j}^\omega - 2\theta_{f0i,j}^\omega + \theta_{f0i-1,j}^\omega}{\Delta \chi^2} \right], \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{p0}}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \theta_{p0}}{\partial \psi} \right]_\omega^{\omega+\frac{1}{2}} - \left[\frac{\partial^2 \theta_{p0}}{\partial \chi^2} \right]_\omega^{\omega+\frac{1}{2}}, \\ \frac{\partial \theta_{p0}}{\partial \psi} &= \frac{\theta_{p0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \theta_{p0i,j}^\omega}{\Delta \psi} - \left[\frac{\theta_{p0i+1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\theta_{p0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \theta_{p0i-1,j}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \chi^2} \right] + \left[\frac{\theta_{p0i+1,j}^\omega - 2\theta_{p0i,j}^\omega + \theta_{p0i-1,j}^\omega}{\Delta \chi^2} \right], \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{s0}}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \theta_{s0}}{\partial \psi} \right]_\omega^{\omega+\frac{1}{2}} - \left[\frac{\partial^2 \theta_{s0}}{\partial \chi^2} \right]_\omega^{\omega+\frac{1}{2}}, \\ \frac{\partial \theta_{s0}}{\partial \psi} &= \frac{\theta_{s0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \theta_{s0i,j}^\omega}{\Delta \psi} - \left[\frac{\theta_{s0i+1,j}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\theta_{s0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \theta_{s0i-1,j}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \chi^2} \right] + \left[\frac{\theta_{s0i+1,j}^\omega - 2\theta_{s0i,j}^\omega + \theta_{s0i-1,j}^\omega}{\Delta \chi^2} \right] \end{aligned} \quad (4.88)$$

Para el barrido en η, Υ y ξ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{f_0}}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \theta_{f_0}}{\partial \psi} \right]_{\omega+\frac{1}{2}}^{\omega+1} - \left[\frac{\partial^2 \theta_{f_0}}{\partial \eta^2} \right]_{\omega+\frac{1}{2}}^{\omega+1} \\ \frac{\partial \theta_{f_0}}{\partial \psi} &= \frac{\theta_{f_{0i,j}}^{\omega+1} - \theta_{f_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \psi} - \left[\frac{\theta_{f_{0i,j+1}}^{\omega+1} - 2\theta_{f_{0i,j}}^{\omega+1} + \theta_{f_{0i,j-1}}^{\omega+1}}{\Delta \eta^2} \right] + \left[\frac{\theta_{f_{0i,j+1}}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\theta_{f_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} + \theta_{f_{0i,j-1}}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \eta^2} \right] \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{p_0}}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \theta_{p_0}}{\partial \psi} \right]_{\omega+\frac{1}{2}}^{\omega+1} - \left[\frac{\partial^2 \theta_{p_0}}{\partial \Upsilon^2} \right]_{\omega+\frac{1}{2}}^{\omega+1} \\ \frac{\partial \theta_{p_0}}{\partial \psi} &= \frac{\theta_{p_{0i,j}}^{\omega+1} - \theta_{p_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \psi} - \left[\frac{\theta_{p_{0i,j+1}}^{\omega+1} - 2\theta_{p_{0i,j}}^{\omega+1} + \theta_{p_{0i,j-1}}^{\omega+1}}{\Delta \Upsilon^2} \right] + \left[\frac{\theta_{p_{0i,j+1}}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\theta_{p_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} + \theta_{p_{0i,j-1}}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \Upsilon^2} \right] \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{s_0}}{\partial \psi} &= \left[\frac{\partial \theta_{s_0}}{\partial \psi} \right]_{\omega+\frac{1}{2}}^{\omega+1} - \left[\frac{\partial^2 \theta_{s_0}}{\partial \xi^2} \right]_{\omega+\frac{1}{2}}^{\omega+1} \\ \frac{\partial \theta_{s_0}}{\partial \psi} &= \frac{\theta_{s_{0i,j}}^{\omega+1} - \theta_{s_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \psi} - \left[\frac{\theta_{s_{0i,j+1}}^{\omega+1} - 2\theta_{s_{0i,j}}^{\omega+1} + \theta_{s_{0i,j-1}}^{\omega+1}}{\Delta \xi^2} \right] + \left[\frac{\theta_{s_{0i,j+1}}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\theta_{s_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} + \theta_{s_{0i,j-1}}^{\omega+\frac{1}{2}}}{\Delta \xi^2} \right] \end{aligned} \quad (4.91)$$

Aquí, si se considera que:

$$\begin{aligned} \theta_{f_0}^{\omega+\frac{1}{2}} - \theta_{f_{0i,j}}^{\omega} &= \Delta \theta_{f_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} & \theta_{f_{0i,j}}^{\omega+1} - \theta_{f_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} &= \Delta \theta_{f_{0i,j}}^{\omega+1} \\ \theta_{p_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} - \theta_{p_{0i,j}}^{\omega} &= \Delta \theta_{p_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} & \theta_{p_{0i,j}}^{\omega+1} - \theta_{p_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} &= \Delta \theta_{p_{0i,j}}^{\omega+1} \\ \theta_{s_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} - \theta_{s_{0i,j}}^{\omega} &= \Delta \theta_{s_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} & \theta_{s_{0i,j}}^{\omega+1} - \theta_{s_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} &= \Delta \theta_{s_{0i,j}}^{\omega+1} \end{aligned}$$

Para el barrido en χ las expresiones (4.86), (4.87) y (4.88) cambia a:

$$\frac{\partial \theta_{f_0}}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[\Delta \theta_{f_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \left(\Delta \theta_{f_{0i+1,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\Delta \theta_{f_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} + \Delta \theta_{f_{0i-1,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} \right) \right], \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial \theta_{p_0}}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[\Delta \theta_{p_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \left(\Delta \theta_{p_{0i+1,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\Delta \theta_{p_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} + \Delta \theta_{p_{0i-1,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (4.93)$$

y

$$\frac{\partial \theta_{s_0}}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[\Delta \theta_{s_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \left(\Delta \theta_{s_{0i+1,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} - 2\Delta \theta_{s_{0i,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} + \Delta \theta_{s_{0i-1,j}}^{\omega+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (4.94)$$

De igual manera, al recomodar los términos del lado derecho de las ecuaciones (4.92), (4.93) y (4.94), las expresiones resultantes son,

$$\frac{\partial \theta_{f_0}}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[-\frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \theta_{f_0 i+1, j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \right) \Delta \theta_{f_0 i, j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \theta_{f_0 i-1, j}^{\omega+\frac{1}{2}} \right], \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial \theta_{p_0}}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[-\frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \theta_{p_0 i+1, j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \right) \Delta \theta_{p_0 i, j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \theta_{p_0 i-1, j}^{\omega+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.96)$$

y

$$\frac{\partial \theta_{s_0}}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[-\frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \theta_{s_0 i+1, j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \right) \Delta \theta_{s_0 i, j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \theta_{s_0 i-1, j}^{\omega+\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.97)$$

Como ya se ha puntualizado anteriormente, este tipo de expresiones requiere de la implementación del algoritmo de Thomas para su solución, por tanto, después de realizar un reacomodo y sustitución algebraica, el siguiente grupo de ecuaciones representa la primera parte de cálculo (barrido en la coordenada χ para el tiempo $\omega + \frac{1}{2}$) del modelo discreto de la transferencia de calor en el sistema.

$$\Delta \psi (\text{Res3}_{i,j}) = -\frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \theta_{f_0 i+1, j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \right) \Delta \theta_{f_0 i, j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \theta_{f_0 i-1, j}^{\omega+\frac{1}{2}} \quad (4.98)$$

$$\Delta \psi (\text{Res4}_{i,j}) = -\frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \theta_{p_0 i+1, j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \right) \Delta \theta_{p_0 i, j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \theta_{p_0 i-1, j}^{\omega+\frac{1}{2}} \quad (4.99)$$

$$\Delta \psi (\text{Res5}_{i,j}) = -\frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \theta_{s_0 i+1, j}^{\omega+\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \right) \Delta \theta_{s_0 i, j}^{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \chi^2} \Delta \theta_{s_0 i-1, j}^{\omega+\frac{1}{2}} \quad (4.100)$$

Por otra parte, para el barrido en las coordenadas η , Υ y ξ , las expresiones (4.89), (4.90) y (4.91) cambian a:

$$\frac{\partial \theta_{f_0}}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[\Delta \theta_{f_0 i, j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \left(\Delta \theta_{f_0 i, j+1}^{\omega+1} - 2\Delta \theta_{f_0 i, j}^{\omega+1} + \Delta \theta_{f_0 i, j-1}^{\omega+1} \right) \right] \quad (4.101)$$

$$\frac{\partial \theta_{p_0}}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[\Delta \theta_{p_0 i, j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \Upsilon^2} \left(\Delta \theta_{p_0 i, j+1}^{\omega+1} - 2\Delta \theta_{p_0 i, j}^{\omega+1} + \Delta \theta_{p_0 i, j-1}^{\omega+1} \right) \right] \quad (4.102)$$

$$\frac{\partial \theta_{s_0}}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[\Delta \theta_{s_0 i, j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \xi^2} \left(\Delta \theta_{s_0 i, j+1}^{\omega+1} - 2\Delta \theta_{s_0 i, j}^{\omega+1} + \Delta \theta_{s_0 i, j-1}^{\omega+1} \right) \right] \quad (4.103)$$

Aquí, reacomodando términos las expresiones resultantes son las siguientes,

$$\frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[-\frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \Delta \theta_{f0i,j+1}^{\omega+1} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \right) \Delta \theta_{f0i,j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \Delta \theta_{f0i,j-1}^{\omega+1} \right], \quad (4.104)$$

$$\frac{\partial \theta_{p0}}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[-\frac{\Delta \psi}{\Delta \Upsilon^2} \Delta \theta_{p0i,j+1}^{\omega+1} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \Upsilon^2} \right) \Delta \theta_{p0i,j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \Upsilon^2} \Delta \theta_{p0i,j-1}^{\omega+1} \right] \quad (4.105)$$

$$\frac{\partial \theta_{s0}}{\partial \psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \left[-\frac{\Delta \psi}{\Delta \xi^2} \Delta \theta_{s0i,j+1}^{\omega+1} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \xi^2} \right) \Delta \theta_{s0i,j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \xi^2} \Delta \theta_{s0i,j-1}^{\omega+1} \right] \quad (4.106)$$

Claramente, estas ecuaciones corresponden a la segunda parte del cálculo de la transferencia de calor en el sistema, por consiguiente, se pueden resolver utilizando nuevamente el algoritmo de Thomas, con lo cual, se obtienen los valores de los incrementos de las diferentes temperaturas para un tiempo $\omega + 1$ (futuro).

$$\Delta \psi \Delta \theta_{f0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} = -\frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \Delta \theta_{f0i,j+1}^{\omega+1} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \right) \Delta \theta_{f0i,j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \eta^2} \Delta \theta_{f0i,j-1}^{\omega+1} \quad (4.107)$$

$$\Delta \psi \Delta \theta_{p0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} = -\frac{\Delta \psi}{\Delta \Upsilon^2} \Delta \theta_{p0i,j+1}^{\omega+1} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \Upsilon^2} \right) \Delta \theta_{p0i,j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \Upsilon^2} \Delta \theta_{p0i,j-1}^{\omega+1} \quad (4.108)$$

y

$$\Delta \psi \Delta \theta_{s0i,j}^{\omega+\frac{1}{2}} = -\frac{\Delta \psi}{\Delta \xi^2} \Delta \theta_{s0i,j+1}^{\omega+1} + \left(1 + \frac{2\Delta \psi}{\Delta \xi^2} \right) \Delta \theta_{s0i,j}^{\omega+1} - \frac{\Delta \psi}{\Delta \xi^2} \Delta \theta_{s0i,j-1}^{\omega+1} \quad (4.109)$$

Después de determinar los incrementos de las temperaturas que integran el sistema, sólo se procede a calcular los valores futuros de dichas temperaturas, lo cual se obtiene realizando una simple suma aritmética, como se ilustra a continuación,

$$\theta_{f,i,j}^{\omega+1} = \theta_{f,i,j}^{\omega} + \Delta \theta_{f0i,j}^{\omega+1}, \quad (4.110)$$

$$\theta_{p,i,j}^{\omega+1} = \theta_{p,i,j}^{\omega} + \Delta \theta_{p0i,j}^{\omega+1}, \quad (4.111)$$

$$\theta_{s,i,j}^{\omega+1} = \theta_{s,i,j}^{\omega} + \Delta \theta_{s0i,j}^{\omega+1} \quad (4.112)$$

Evaluación de la dependencia de la viscosidad del fluido con respecto de la temperatura del fluido

Hasta este punto la viscosidad del fluido ha sido calculada considerando una temperatura del fluido constante, $\theta_{f,i,j}^{\omega}$, la cual es el punto de inicio del cálculo. Por consiguiente, se procede a repetir el procedimiento de cálculo de los campos hidrodinámico y térmico de las regiones considerando la temperatura calculada $\theta_{f,i,j}^{\omega+1}$. En este sentido, la primera serie de cálculo se puede asumir como un predictor y la segunda el corrector, alternándose la función conforme avanza la iteración en busca de la solución. Dicha solución se obtiene cuando las variaciones entre iteraciones tienden a cero y todos los modelos cumplen con las condiciones de frontera.

Capítulo 5

Resultados y discusión

Los resultados que se presentan en el presente capítulo se dividen en dos secciones. La primera parte muestra los resultados obtenidos del procedimiento de perturbación asintótica, la solución analítica en el que ΔT_c se considera pequeña tal que $\gamma \ll 1$. Al igual se consideró una condición en la que existe un buen aislamiento térmico tal que $\alpha \ll 1$. Derivado de las condiciones anteriores, se asume en esta sección la condición de efectos térmicos débiles. En la segunda sección se muestra los resultados obtenidos mediante el esquema numérico presentado en el capítulo anterior. Se resuelve el caso donde existen tanto efectos térmicos débiles como efectos térmicos fuertes. Para el caso de los efecto térmicos fuertes se considera que ΔT_c es un valor grande, tal que $\gamma \sim 1$. También se considera que no hay un buen sistema de aislamiento térmico tal que $\alpha \sim 1$

En la Tabla 5.1 se muestran el valor de las propiedades que se necesitan para resolver el sistema de ecuaciones.

Variable	Valor	Unidad	Variable	Valor	Unidad
b	-0.0677	K ⁻¹	T_0	273.15-283.15	K
$C_{p_f(20^\circ C)}$	1.75	kJ/kg·K	T_{in}	318.15-395.15	K
$C_{p_p(20^\circ C)}$	0.49	kJ/kg·K	U_c	0.25	m/s
$C_{p_s(20^\circ C)}$	1.50	kJ/kg·K	μ_0	1.738	Pa·s
k_f	0.127	W/m·K	r_0	0.2	m
k_p	50.0	W/m·K	h	0.01	m
k_s	0.025	W/m·K	H	0.25	m
ρ_f	925.1	kg/m ³	L	200000	m
ρ_p	8030	kg/m ³	ΔT_c	14-45	K
ρ_f	40	kg/m ³	g	-9.81	m/s ²
H_g	0-50	m			

Tabla 5.1: Valores estimados para las propiedades físicas de este estudio [40]

Una vez definidas las variables del sistema, las variables adimensionales tienen el siguiente rango de valores: $Re \sim 10^2$, $\beta = 10^{-7}$, $\gamma \sim 10^{-2} - 10^0$, $Gz \sim 10^{-1}$, $\alpha \sim 10^0 - 10^{-2}$

5.1. Validación analítica. Efectos térmicos débiles $\gamma \ll 1$

En la Figura 5.1 se comparan los resultados obtenidos de las variables adimensionales asociadas al fluido confinado en el oleoducto, tanto de manera analítica como numérica. Se muestra el campo de velocidad \bar{u} , la caída de presión $\frac{d\bar{P}}{d\chi}$, y temperatura del fluido θ_f para diferentes valores del parámetro térmico γ (0, 0.10, 0.30, 0.50, 1.0); además, se ilustra el valor del flujo volumétrico del fluido \bar{Q} .

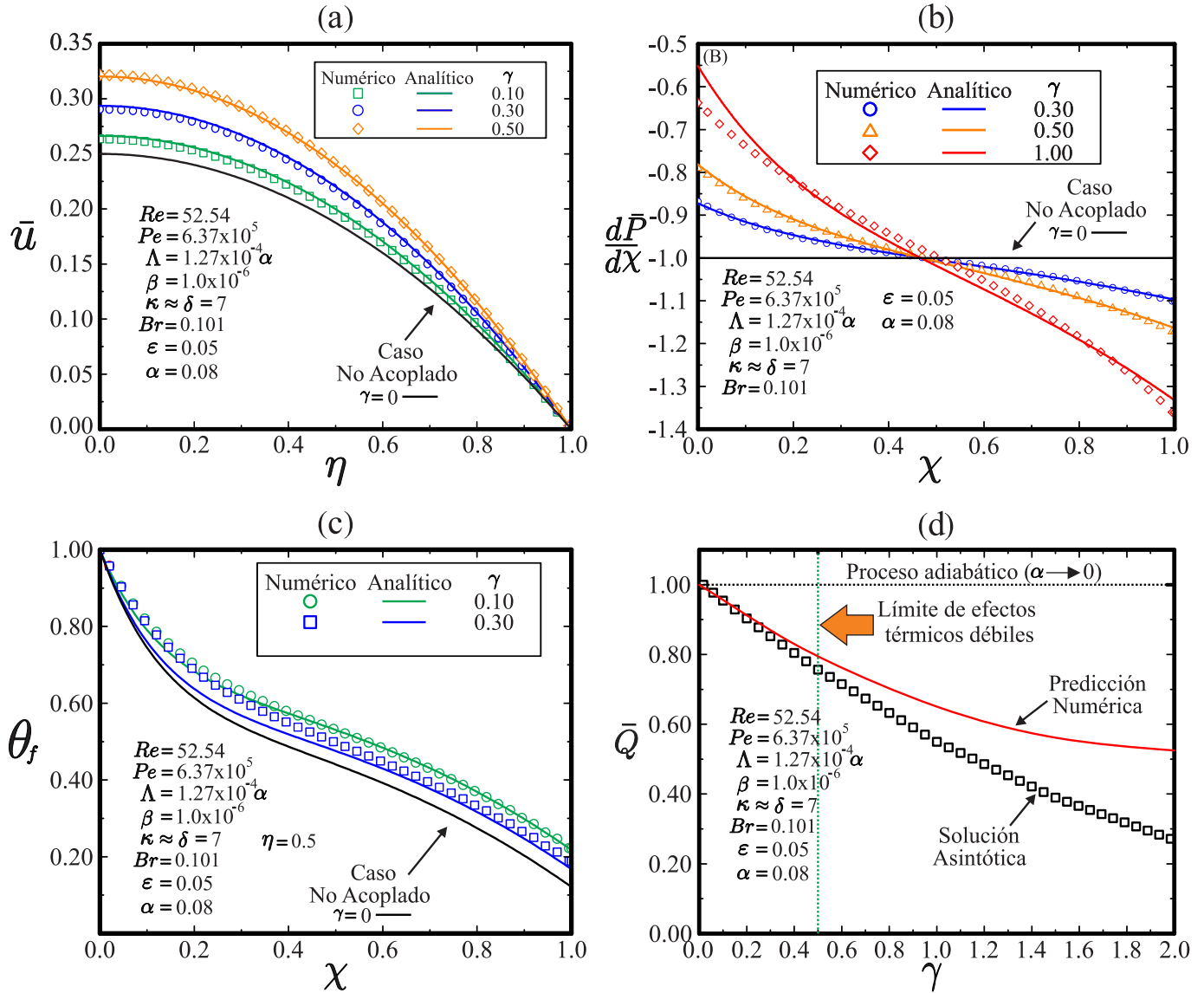


Figura 5.1: Resultados para las variables adimensionales de velocidad, caída de presión, temperatura del fluido y flujo volumétrico

El primer caso a observar en la Figura 5.1 en las gráficas (a), (b) y (c) se tiene que para $\gamma = 0$ y $Br = 0$ el flujo muestra un comportamiento similar a un sistema isotérmico desarrollado hidrodinámico. Para este caso, el sistema se define como un sistema desacoplado en el que el fenómeno hidrodinámico y térmico no dependen uno del otro, lo anterior porque la viscosidad es

considerada una constante [7, 51]. El valor $\gamma = 0$ se traduce en $\Delta T_c = 0$, en el que la temperatura de entrada del fluido es igual a la temperatura del entorno, $T_{in} = T_0$. Aquí se considera que hay un sistema isotérmico al no existir una diferencia de temperaturas, ayudando así a que el sistema sea desacoplado. El valor adimensional de la viscosidad es igual a 1, $\bar{\mu} = 1$. En la Figura 5.1 (b), se hace notar que la caída de presión es constante a estas condiciones de transporte, teniendo un comportamiento similar a un flujo tipo Hagen-Poiseuille [7]. La caída de presión responde al cambio de temperatura que sufre el fluido a lo largo del ducto. Al mantenerse constante la temperatura del fluido, la viscosidad no cambia por lo que la caída de presión es constante. Al incrementarse el valor de γ se puede apreciar que la velocidad del flujo incrementa en respuesta a la condición no isotérmica dentro del oleoducto. Debido a que $T_{in} > T_0$, la viscosidad del fluido tiene un valor menor a la entrada del ducto. Este efecto se invierte a lo largo del oleoducto ya que empieza a existir un gradiente de temperatura entre el fluido y el ambiente, también se observa que la caída de presión deja de ser constante a lo largo del oleoducto, y cambia en respuesta a las variaciones de temperatura del fluido. Lo anterior se observa en la Figura 5.1 (b) que para un valor de $\gamma = 0.3$ la caída de presión en la entrada es $\frac{d\bar{P}}{dx} \approx -0.85$ a una temperatura de $\theta_f = 1$ ($T_f = T_{in}$), en comparación a la salida del ducto en que la caída de presión vale $\frac{d\bar{P}}{dx} \approx -1.1$ para una temperatura de salida del ducto de $\theta_f = 0.20$.

En la Figura 5.1 (d), se ilustra el resultado del cálculo analítico y numérico del flujo volumétrico adimensional, \bar{Q} , para diferentes valores de γ . Aquí los resultados muestran una reducción de \bar{Q} conforme se incrementa el valor de γ . También, se puede notar que para $\gamma = 0$, el caso adiabático e isotérmico convergen en este punto. Para el caso adiabático, en donde $\alpha \rightarrow 0$, el valor del flujo volumétrico adimensional es igual a la unidad, lo cual se mantiene constante al cambiar el valor de γ teniéndose en cuenta que este caso es un escenario hipotético donde se logra mantener $\alpha \rightarrow 0$. A medida que va creciendo γ , el valor calculado de \bar{Q} mediante el procedimiento analítico y el método numérico propuesto comienzan a diferir, observándose que este comportamiento comienza cuando $\gamma > 0.4$. Para casos realistas, un incremento de γ afecta en gran medida el flujo volumétrico del fluido. La reducción del flujo volumétrico ocurre al existir un gradiente de temperatura entre el fluido al interior del oleoducto y el ambiente, provocando un cambio en el valor de la viscosidad del fluido, y en consecuencia, una disminución en el valor de \bar{Q} . Para pequeños incrementos en ΔT_c , el flujo volumétrico dentro del oleoducto cambia sustancialmente, se puede observar que para $\gamma = 0.3$, $\Delta T_c \approx 4.2$, el flujo volumétrico se estima en $\bar{Q} \approx 0.85$, resultado tanto para el método numérico como asintótico, lo cual indica una reducción del 15% en comparación con el caso hipotético donde existe el sistema adiabático.

Cabe resaltar que el cambio del valor de γ depende de ΔT_c que en este caso depende del aumento del valor de T_{in} . Esto se puede observar en la Figura 5.2, al incrementarse γ crece ΔT_c lo cual ocasiona que exista un mayor gradiente de temperatura. En la Figuras 5.2 (a)-(b) se ilustran los efectos térmicos débiles, $\gamma \ll 0$, al que está sometido el sistema de transporte a un valor de $\alpha = 0.08$, condición cercana al caso adiabático ($\alpha \rightarrow 0$). Aquí, se puede observar que a lo largo de η en la región del fluido, la temperatura es constante. En contraste, las dos imágenes posteriores, Figuras 5.2 (c)-(d) donde $\gamma \sim 1$, se observa que esta condición de distribución constante de temperatura la coordenada radial del ducto no se cumple.

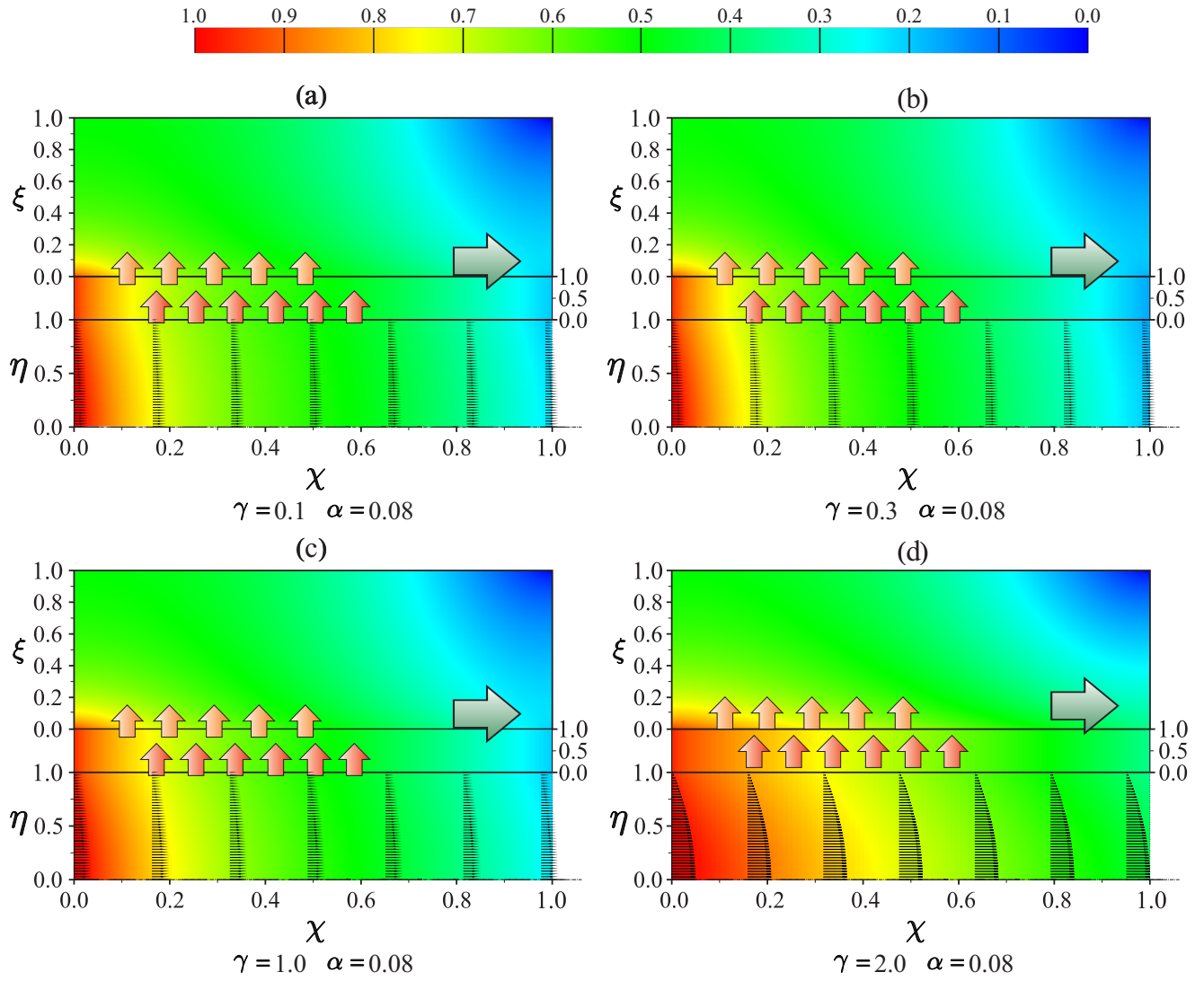


Figura 5.2: Mapa de calor

Al comparar los resultados de la Figura 5.1 obtenidos mediante la metodología numérica y el procedimiento analítico, se puede concluir que ambas soluciones son validas para el límite donde los parámetros adimensionales son $\alpha \rightarrow 0$ y $\gamma \rightarrow 0$, los cuales representan pequeños gradientes de temperatura en dirección transversal y efectos térmicos débiles, respectivamente. Por otro lado, cuando se tienen efectos térmicos fuertes, $\gamma \sim 1$ ($\Delta T_c = 10-30K$) o una mal sistema de aislamiento térmico, $k_s r_0 \sim k_f r_H$, los resultados obtenidos por ambas metodologías divergen, por lo que es necesario implementar la metodología numérica para obtener resultados bajo dichas condiciones.

5.2. Solución numérica, efectos térmicos fuertes $\gamma \sim 1$

En esta sección se analizaran los resultados obtenidos por la metodología numérica propuesta para valores de los parámetros adimensionales $\alpha \sim \gamma \sim 1$. Para estos casos, no hubiera sido posible encontrar una solución utilizando sólo la metodología analítica (método de perturbación asintótica regular).

Hasta este punto se ha tomado en cuenta que en el escenario adiabático se favorece el transporte del aceite crudo pesado ya que la temperatura del fluido se mantiene constante, y en consecuencia, no hay afectaciones en el valor de la viscosidad permitiendo así un flujo volumétrico estable. Se ha podido constatar que el parámetro α controla el fenómeno de transferencia de energía en el sistema conjugado, el cual comprende la transferencia de calor entre el fluido y el ambiente expresada en la condición de frontera del aislante $\theta_s|_{\xi=1} = f(\chi)$. Para definir el valor del parámetro α las variables más importantes son la conductividad térmica del aislante, k_s , y el espesor del mismo, H , lo que nos permite modelar casos fuera del escenario adiabático. En la Figura 5.3 se observan los resultados numéricos de la temperatura adimensional del fluido en función de la coordenada longitudinal, χ , teniendo como parámetro el valor de α y siendo $\gamma = 2$. Para $\alpha = 1$, la energía térmica no se conserva en el fluido por lo que existe una caída significativa de su temperatura a lo largo del oleoducto. En contraste, para un valor de $\alpha \ll 1$, se observa que el perfil de temperatura es cercano al caso adiabático, $\alpha \rightarrow 0$.

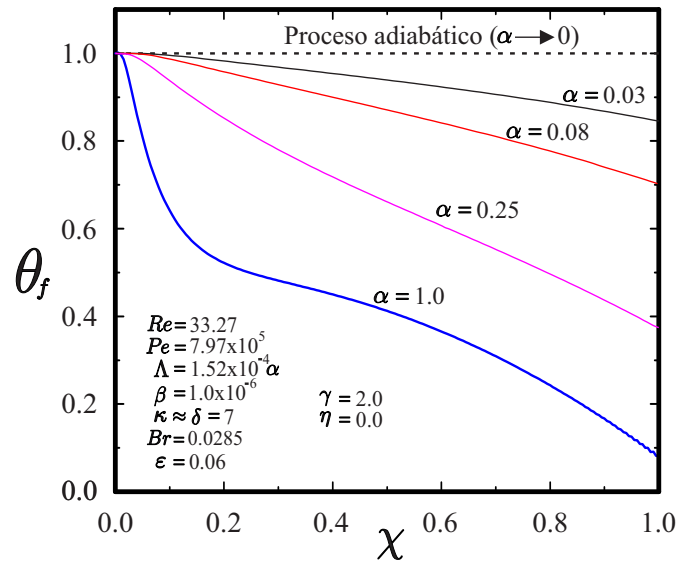


Figura 5.3: Temperatura adimensional del fluido para diferentes valores de α

Teniendo en cuenta que los parámetros α y γ controlan la transferencia de calor entre el fluido y el ambiente, se puede asumir que estos parámetros también influyen en la hidrodinámica del fluido. Lo anterior, permite evaluar como y bajo que condiciones la hidrodinámica de flujo se ve afectada por las interacciones entre el oleoducto y el ambiente.

En la Figura 5.4 se muestran el perfil de velocidades adimensional, \bar{u} , y la caída de presión, $\frac{\partial \bar{P}}{\partial \chi}$, en función de las coordenadas adimensionales η y χ , respectivamente. Aquí, se grafican los resultados y predicciones numéricas para diferentes valores de los parámetros α y γ . Continuando con la discusión anterior, para el caso en el que tenemos un valor de $\gamma = 2$ y $\alpha = 0.03$, se obtiene un valor grande de velocidad lo que favorece el flujo másico del fluido a través del ducto. Esto se debe a que al tener un valor de $\alpha \rightarrow 0$ se tiene un buen sistema de aislamiento, lo cual permite que el fluido pueda mantener su temperatura a lo largo del ducto sin importar la interacción que este tenga con el ambiente. En consecuencia, la viscosidad dinámica del fluido no sufre incremento alguno, y por ende, este conserva una buena condición de transportabilidad a todo lo largo del oleoducto. Por otro lado, al tener un valor de $\alpha = 1$ o $\gamma = 0.3$, el valor de la velocidad es cercano al caso isotérmico en donde el flujo másico a lo largo del ducto es desfavorable. En la misma figura,

también se ilustra el comportamiento de la caída de presión, donde su comportamiento responde al proceso de transferencia de calor que experimenta el fluido al interactuar con el ambiente. En conclusión, si se desea promover buenas condiciones de flujo, los resultados indican que el sistema debe contar con una condición de aislamiento térmico adecuada, $\alpha \rightarrow 0$, junto con una condición favorable en términos de la diferencia de temperatura característica del sistema $T_{in} \gg T_0 \rightarrow \gamma \sim 1$

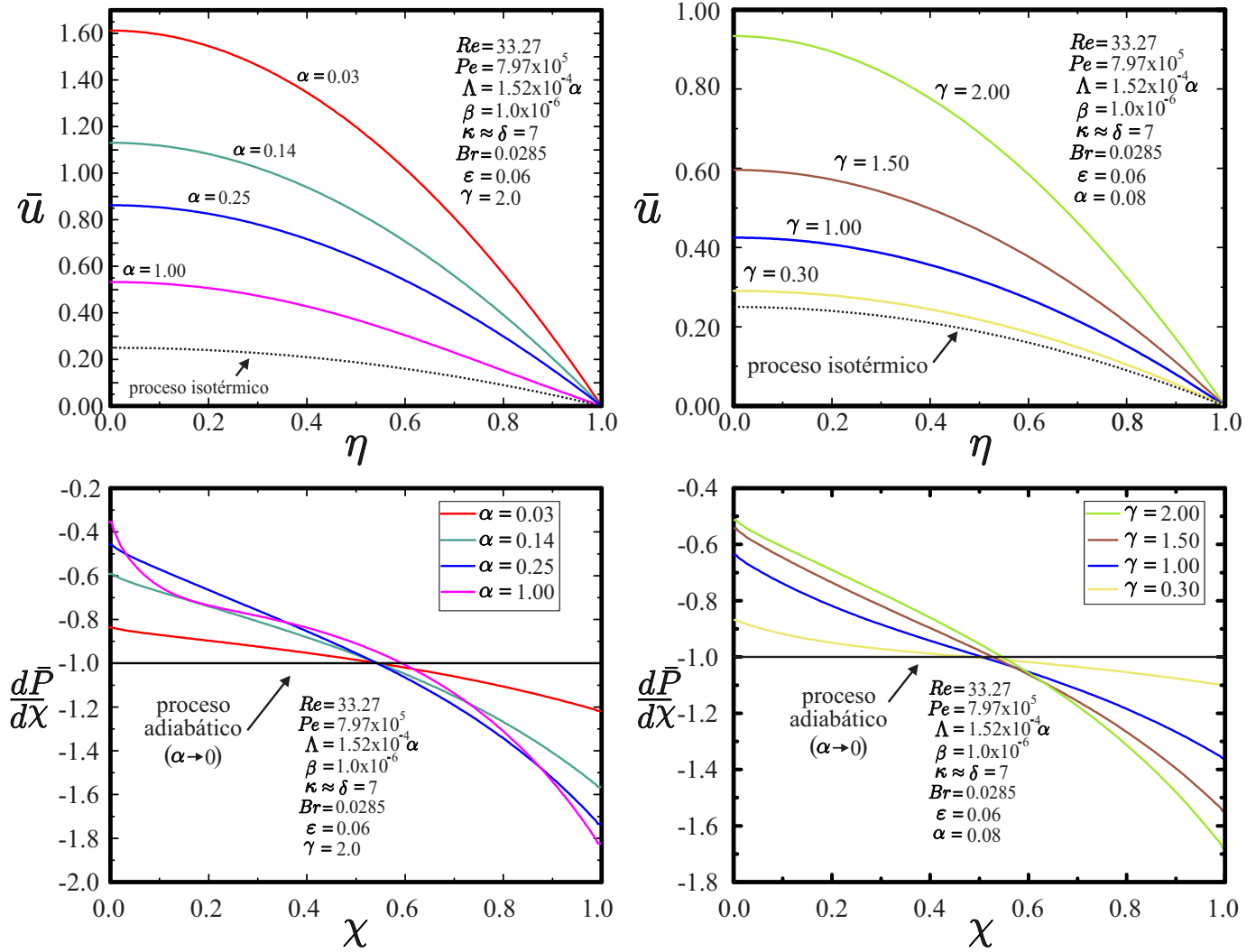


Figura 5.4: Perfil de velocidad y caída de presión para diferentes valores de α y γ

Con los resultados presentados hasta este punto, es importante resaltar que con un buen sistema de aislamiento, habría un buen transporte del aceite crudo pesado a través del oleoducto. Para corroborar con detenimiento esta afirmación, en la Figura 5.5 se muestra el comportamiento del flujo volumétrico adimensional en función de los parámetros γ y α , en donde el transporte del aceite crudo pesado es de manera no isotérmica en un sistema acoplado entre los fenómenos hidrodinámico y térmico. Aquí se muestran dos líneas punteadas representando los límites hipotéticos del sistema. El límite superior se refiere al caso adiabático, $\bar{Q} = 1$, en donde no existe pérdida de energía térmica del fluido hacia el exterior; y el límite inferior se refiere al caso isotérmico, $\bar{Q} = \exp(-\gamma)$, en donde existe un enfriamiento súbito, tal que, la temperatura del fluido es igual al del exterior al momento que este entra al ducto.

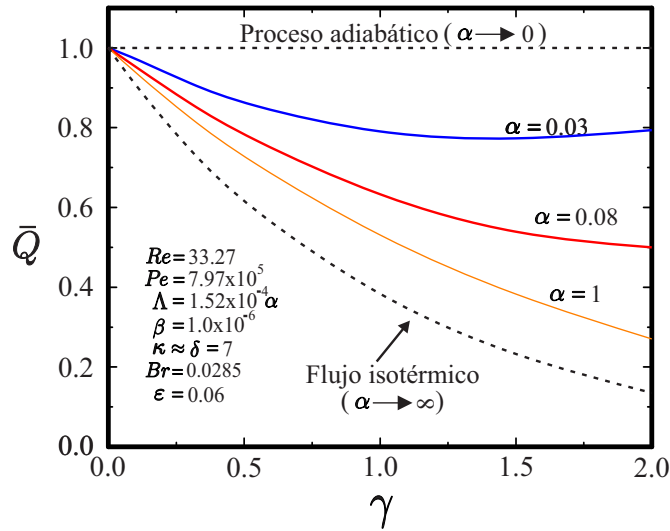


Figura 5.5: Evaluación del flujo volumétrico a diferentes valores de α y γ

De los resultados que se ilustran en la gráfica, se puede inferir que al tener valores de alfa $\alpha \rightarrow 0$ hay mejores condiciones del transporte del fluido a través del oleoducto. Más aún, se puede apreciar claramente que una buena condición de aislamiento térmico ayuda a conservar de mejor manera la transportabilidad del fluido. Lo anterior, se ve gráficamente en los campos de velocidad y temperatura que se ilustran a continuación.

En la Figura 5.6 se muestra ya un esquema completo del campo de temperaturas y velocidades del fluido para casos donde existen efectos térmicos fuertes, $\gamma \sim 1$, tomando en cuenta diferentes valores de α . Este esquema completo también muestra el campo de temperaturas para la región del ducto y aislante con el fin de observar con mayor detenimiento como se afecta la hidrodinámica de flujo con la interacción con el ambiente en función del parámetro α . En la Figura 5.6-(a), se evalúa una condición de mal aislamiento, $\alpha = 1$, donde a pesar de tener un valor favorable de transportabilidad $T_{in} \gg T_0$, el fluido llega a sufrir una rápida reducción de temperatura a lo largo del oleoducto. Un enfriamiento súbito al momento de entrar al ducto genera que el perfil de velocidad disminuya significativamente, esto como consecuencia de un aumento súbito de las fuerzas viscosas que se tiene que vencer para que el fluido se mueva.

En el otro extremo de estudio, en la Figura 5.6-(c) se observa un caso cercano a la condición adiabática, donde la temperatura del fluido se mantiene casi constante. En este caso, se observa que la región donde se presenta el mayor gradiente de temperatura es en el aislamiento térmico. El perfil de velocidades es cercano al caso adiabático, y por lo tanto, es el más grande que se puede lograr dada la temperatura de entrada del fluido al oleoducto.

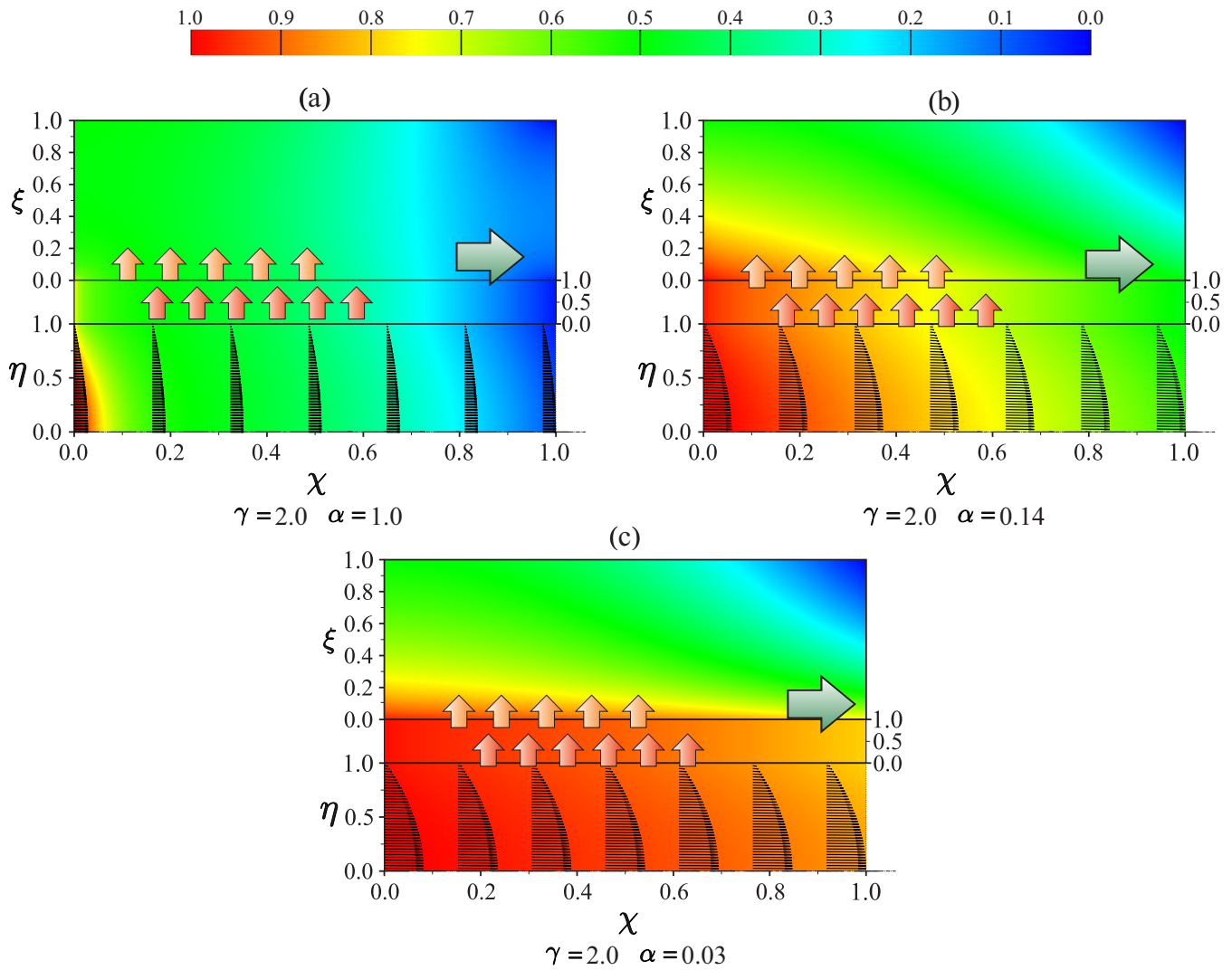


Figura 5.6: Perfil de velocidad y campo de temperatura para diferentes valores de α

Por último, la Figura 5.7 muestra el flujo volumétrico, \bar{Q} , y el flujo de calor adimensional promedio \tilde{q}''_{η} como funciones de la relación Graetz-Nusselt ($Gz/\tilde{N}u$). Tal relación $Gz/\tilde{N}u$ nos permite evaluar los procesos de transferencia de calor que se presentan en el sistema de estudio (oleoducto). En resumen, dentro del oleoducto en la región del fluido, se lleva a cabo la transferencia de calor por convección, por otro lado, en las otras dos regiones en estudio en la pared del ducto y aislante térmico, la transferencia de calor se realiza por difusión de calor. Como ya se sabe, para el estudio de la transferencia de calor por difusión se utiliza el número Nusselt modificado [31], el cual depende del parámetro α , y representa la capacidad de transferir calor a través del sistema conjugado. Por otra parte, para evaluar la transferencia de calor por convección (dentro del fluido), esto se hace mediante el valor de la relación $Pe\beta$, o también conocido como número de Graetz Gz . Los valores de ambos números adimensionales describen en conjunto la transferencia de calor, a dicho sistema se le conoce como una versión modificada del problema Graetz-Nusselt; donde el flujo volumétrico no es constante y es alterado por la condición no isotérmica.

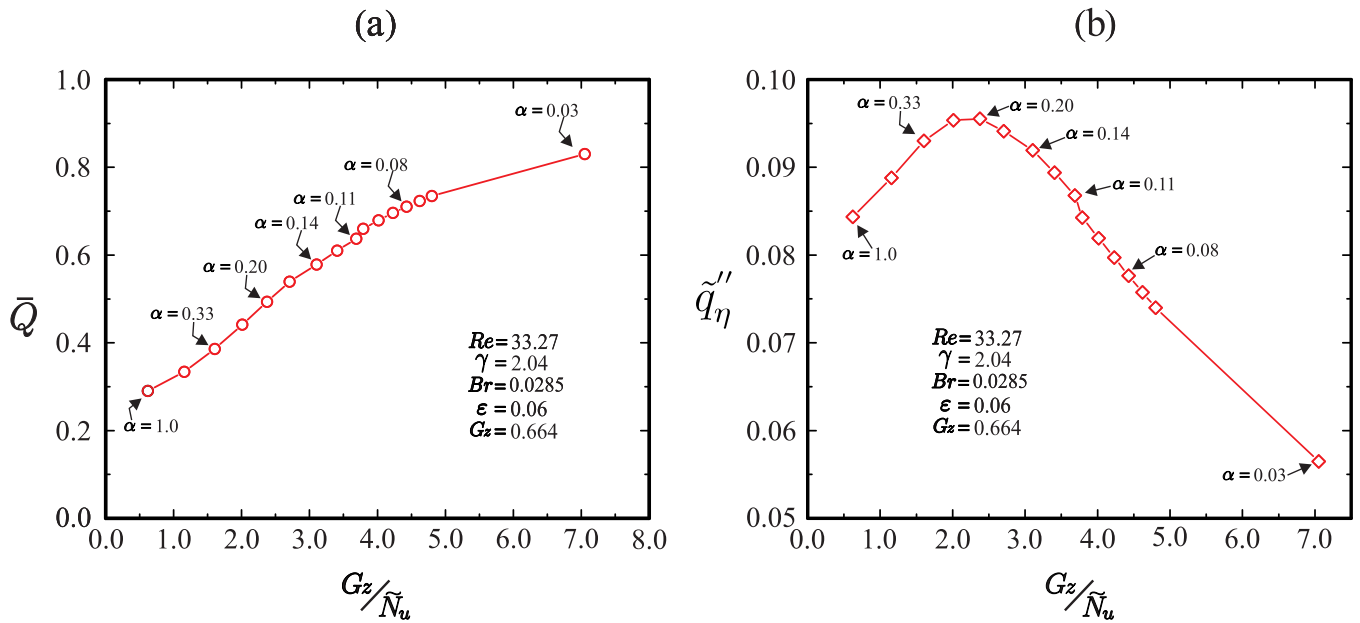


Figura 5.7: Flujo volumétrico y flujo de energía en función de Gz/\tilde{Nu}

En la Figura 5.7, se ilustran ambos el flujo volumétrico y el calor neto transferido hacia el ambiente como funciones de la relación Gz/\tilde{Nu} . Aquí, el valor de dicha relación se obtuvo al considerar diferentes condiciones de aislamiento térmico (valor de α). De los resultados, se aprecia que para valores de $Gz/\tilde{Nu} < 1$ ($Gz/\tilde{Nu} = 0.62$), la transferencia de calor se encuentra dominada por el proceso difusivo en el que el valor del flujo volumétrico del fluido, \bar{Q} , se reduce un 70% del valor en comparación con el escenario donde los fenómenos de transporte no están acoplados, $\gamma = 0$ (condición isotérmica). Para valores donde $Gz/\tilde{Nu} > 1$, ($Gz/\tilde{Nu} = 7.05$), el valor de flujo volumétrico se incrementa al tal nivel que sólo hay una diferencia del 17% en comparación con el caso no acoplado. Para valores $Gz/\tilde{Nu} < 1$, asociados a un sistema de mal aislamiento térmico ($\alpha \sim 1$), se puede observar que la transferencia de calor por difusión supera a la transferencia por convección, lo cual genera un mayor impacto térmico en el fluido y provoca una disminución del flujo volumétrico. En contraste cuando $Gz/\tilde{Nu} > 1$, asociado a un buen sistema de aislamiento térmico ($\alpha \rightarrow 0$), la transferencia de calor por convección supera a la de difusión ocasionando que el fluido mantenga su temperatura. De igual manera, para valores de $Gz/\tilde{Nu} < 1$, se disipa una mayor cantidad de calor hacia el ambiente, esto en términos del flujo másico que transita por el oleoducto. Lo anterior se deduce que para valores $Gz/\tilde{Nu} < 1$, el flujo volumétrico es el mínimo. Por otra parte, cuando el valor de la relación aumenta ($Gz/\tilde{Nu} \sim 1$), esto genera que el flujo volumétrico también se incremente, algo que proporcionalmente hace que el calor transferido igualmente aumente. No obstante, en proporción al flujo másico, la energía térmica transferida es inferior en comparación al que se emite cuando el fenómeno difusivo domina la transferencia de calor. Por último, para valores de la relación $Gz/\tilde{Nu} > 1$, la transferencia de calor por convección domina, se tienen valores de $\alpha \rightarrow 0$. En este caso, el calor que se difunde hacia el ambiente alcanza el valor mínimo, esto se debe a que existe un buen sistema de aislamiento, con lo cual se evita que una gran cantidad de calor se difunda hacia el ambiente, conservándose así la temperatura del fluido (aceite pesado) a todo lo largo del oleoducto.

5.3. Conclusiones

En este trabajo se estudió de forma teórica los efectos térmicos inducidos en la hidrodinámica de flujo durante el transporte del aceite crudo pesado en oleoductos. El flujo del fluido al estar en régimen laminar y al tener una viscosidad dependiente de la temperatura, se requirió resolver de manera simultánea las ecuaciones de continuidad, momentum y energía. Con los resultados obtenidos se evaluó la reducción del flujo volumétrico de éste a través del oleoducto al existir una diferencia de temperaturas entre el fluido y su entorno. Además, se analizaron los mecanismos de transferencia de energía considerando un sistema conjugado, el cual está integrado por otras dos regiones, la pared del oleoducto y el aislamiento térmico.

Se utilizó la medida de la densidad API como un sólo parámetro de calidad. A pesar de que se han hecho esfuerzos, tanto teóricos como experimentales, para poder relacionar este valor con la viscosidad del fluido, el valor API no describe características reológicas del fluido ni mucho menos se a podido relacionar éste con un valor de viscosidad determinado. Por lo tanto, es necesario hacer estudios reológicos al aceite crudo estudiado para determinar su comportamiento reológico. Para este trabajo se midió la viscosidad del fluido en función de la rapidez de deformación concluyendo que éste se trataba de un fluido newtoniano. También se determinó la función que tiene la viscosidad con la temperatura.

Para estudiar el efecto térmico sobre el flujo volumétrico del fluido, se logró definir dos parámetros, α y γ , obtenidas de la adimensionalización de las ecuaciones de transporte que describen el comportamiento del sistema. El parámetro α se encuentra relacionado con la condición de aislamiento térmico en el oleoducto, el cual este parámetro nos permite estudiar la transferencia de energía térmica en el sistema conjugado. Por otra parte, el parámetro γ está relacionado con la calidad del aceite crudo, si éste es pesado o ligero, determinado en el valor de b y con la diferencia de temperatura con la que éste entra al ducto y la temperatura ambiente, ΔT_c . Al ser γ uno de los argumentos de la función de la viscosidad, éste se considera como un parámetro térmico asociado a los efectos térmicos inducidos en la hidrodinámica del fluido.

La temperatura ambiente está definida en la condición de frontera del sistema al especificar una función de la temperatura en la pared externa del aislante que cubre al oleoducto. Para este trabajo, esta función de temperatura depende de la variable longitudinal del ducto. Esta función puede ser cambiada dependiendo de valores experimentales que se lleguen a obtener describiendo una temperatura en la frontera del aislante térmico, por lo que esta función podría llegar a depender de una variable longitudinal así como de una variable temporal. En la literatura, [31, 29, 40], se encuentran propuestas teóricas respecto a la forma de esta función.

Para validar el esquema de solución numérica se comparó los resultados de éste con la solución analítica del problema. La solución analítica se obtuvo al resolver las ecuaciones de transporte por medio del método de perturbación asintótica, en donde las variables perturbadas de este método fueron α y γ , haciendo que los valores de estos parámetros fueron definidos cercanos a cero. De este análisis se destaca que para tener una buena condición de transporte, donde el flujo volumétrico tendría que estar cercano al caso adiabático, se necesita tener una buena dupla entre los valores de α y γ . Se tomó como valor base el caso adiabático porque en este escenario, ideal hipotético, la temperatura del aceite crudo no tendría variación alguna en el transporte en el oleoducto sin importar la temperatura ambiente y en consecuencia no habría una disminución del

flujo volumétrico.

Como se observó anteriormente, al tener un valor de $\alpha \rightarrow 0$ se favorece el transporte del fluido a través del ducto para cualquier valor de γ . Con estos dos parámetros determinados es factible predecir el comportamiento de flujo del aceite crudo al ser transportado a través de un oleoducto. Se podrá determinar el porcentaje de disminución del flujo volumétrico del aceite crudo en función de α y γ . El valor de α puede determinarse con el valor de conductividad, k_s , y grosor, H , del aislante térmico, lo que ayudaría a determinar escenarios donde α tenga un valor óptimo.

Se analizó la competencia de los diferentes mecanismos de transferencia de energía que ocurre desde el fluido hasta el entorno. Con lo anterior, el estudio del transporte de aceite crudo puede llevarse a cabo considerando en una versión modificada del problema Graetz-Nusselt. Para valores de la relación $Gz/\tilde{Nu} < 1$, el flujo volumétrico se ve significativamente reducido ya que gran parte de la energía térmica del fluido se transporta por difusión hacia el exterior, mientras que para valores de $Gz/\tilde{Nu} > 1$, la energía térmica se transporta con convección a lo largo del oleoducto, provocando así que el fluido mantenga su temperatura y el flujo volumétrico sea mayor. Con lo antes dicho, es conveniente trabajar en casos donde $Gz/\tilde{Nu} \gg 1$, lo cual se consigue cuando existe un buen sistema de aislamiento, $\alpha \rightarrow 0$.

El esquema numérico de solución fue validado por los modelos matemáticos que describen al sistema, donde α y γ fueron los parámetros de perturbación. En este tenor, sería importante seguir validando esta solución con datos experimentales. Estos parámetros serán de gran ayuda en el desarrollo experimental ya que se podrá predecir el comportamiento del transporte del fluido con la manipulación de los parámetros antes dichos. Sin embargo, desde el inicio de este trabajo se delimitó los alcances para generar los modelos que describirían el fenómeno estudiado, cómo suponer un comportamiento newtoniano del aceite crudo y una función teórica de temperatura en el aislante que dependa sólo de la longitud del ducto, un cúmulo de datos experimentales serían de ayuda para refinar este modelo y delimitar nuevos alcances. Se trabajaría en determinar los efectos que se tendría en el esquema de solución si se trabajara con un fluido que ya no tuviera un comportamiento newtoniano, o encontrar la frontera en que el fluido pase de un comportamiento newtoniano a no newtoniano, y determinar los efectos si se plantea otro comportamiento en la temperatura en la frontera del aislante térmico. Lo anterior, fortalecería esta herramienta de simulación con la cual se pudieran determinar caídas de presión, perfiles de velocidad y temperatura para este proceso.

Bibliografía

- [1] James G Speight. *The chemistry and technology of petroleum*. CRC press, 2014.
- [2] Abarasi Hart. “A review of technologies for transporting heavy crude oil and bitumen via pipelines”. En: *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology* 4.3 (2014), pp. 327-336.
- [3] James H Gary y Glenn E Handwerk. *Petroleum refining: technology and economics*. Marcel Dekker, 2001.
- [4] Gustavo Jesús Marroquín Sánchez y Jorge Ancheyta Juárez. “Formación de sedimentos durante el hidrotatamiento catalítico de crudos pesados”. Tesis doctoral. Instituto Politécnico Nacional, 2007.
- [5] Petróleos Mexicanos. *Petróleo*. 2021. URL: <https://www.pemex.com/comercializacion/productos/Paginas/petroleo.aspx>.
- [6] Uttam Ray Chaudhuri. *Fundamentals of petroleum and petrochemical engineering*. Crc Press, 2011.
- [7] F.M. White. *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill international edition. McGraw-Hill, 2006. ISBN: 9780071244930.
- [8] Felipe Sánchez-Minero y col. “Comparison of correlations based on API gravity for predicting viscosity of crude oils”. En: *Fuel* 138 (2014), pp. 193-199.
- [9] Sergey O Ilyin y Larisa A Strelets. “Basic fundamentals of petroleum rheology and their application for the investigation of crude oils of different natures”. En: *Energy & Fuels* 32.1 (2018), pp. 268-278.
- [10] Patsy V Ramírez-González. “Rheological behavior from light to heavy oils: construction of master curves”. En: *Energy & Fuels* 30.9 (2016), pp. 7094-7099.
- [11] James G Speight. *The desulfurization of heavy oils and residua*. CRC Press, 1999.
- [12] A Saniere, I Hénaut y JF Argillier. “Pipeline transportation of heavy oils, a strategic, economic and technological challenge”. En: *Oil & gas science and technology* 59.5 (2004), pp. 455-466.
- [13] Julián Andrés García Cárdenas y Jorge Ancheyta Juárez. “Análisis de esquemas de proceso combinados para el mejoramiento de crudo pesado.” Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México, 2019.
- [14] Hugo Ortiz Moreno y Jorge Fernando Ramírez Solís. “Estudio y caracterización de sistemas de catalizadores dispersos aplicados al tratamiento de petróleo pesado.” Tesis doctoral. Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.

- [15] Deepa Subramanian, Kathleen Wu y Abbas Firoozabadi. “Ionic liquids as viscosity modifiers for heavy and extra-heavy crude oils”. En: *Fuel* 143 (2015), pp. 519-526.
- [16] Sergey Ilyin y col. “Asphaltenes in heavy crude oil: Designation, precipitation, solutions, and effects on viscosity”. En: *Journal of Petroleum Science and Engineering* 147 (2016), pp. 211-217.
- [17] Jorge Ancheyta, Fernando Trejo y Mohan Singh Rana. *Asphaltenes: chemical transformation during hydroprocessing of heavy oils*. CRC press, 2010.
- [18] Central Intelligence Agency. *Crude oil production*. 2020. URL: <https://www.cia.gov/the-world-factbook/field/crude-oil-production/country-comparison>.
- [19] Sistema de Información Energética. *Producción de crudo por bloque y tipo (Vigente a partir de 2002)*. 2020. URL: <https://sie.energia.gob.mx/bdiController.do?action=cuadro&cveca=PMXB1C04>.
- [20] *Prospectiva de Petróleo Crudo y Petrolíferos 2017-2031*. SENER, 2017.
- [21] Shadi W Hasan, Mamdouh T Ghannam y Nabil Esmail. “Heavy crude oil viscosity reduction and rheology for pipeline transportation”. En: *Fuel* 89.5 (2010), pp. 1095-1100.
- [22] Rafael Martínez-Palou y col. “Transportation of heavy and extra-heavy crude oil by pipeline: A review”. En: *Journal of petroleum science and engineering* 75.3-4 (2011), pp. 274-282.
- [23] DP Rimmer y col. “Pipeline emulsion transportation for heavy oils”. En: (1992), pp. 295-312.
- [24] Ricardo Dunia y Thomas F Edgar. “Study of heavy crude oil flows in pipelines with electromagnetic heaters”. En: *Energy & fuels* 26.7 (2012), pp. 4426-4437.
- [25] Guoyu Li y col. “Forecasting the oil temperatures along the proposed China–Russia Crude Oil Pipeline using quasi 3-D transient heat conduction model”. En: *Cold Regions Science and Technology* 64.3 (2010), pp. 235-242.
- [26] Elijah Bell y col. “Thermal methods in flow assurance: A review”. En: *Journal of Natural Gas Science and Engineering* 88 (2021), p. 103798.
- [27] Nsidibe Sunday y col. “An overview of flow assurance heat management systems in subsea flowlines”. En: *Energies* 14.2 (2021), p. 458.
- [28] Qing Yuan y col. “Comparative Study on Atmospheric Temperature Models for the Buried Hot Oil Pipeline”. En: *2018 12th International Pipeline Conference*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection. 2018.
- [29] G Silva-Oliver y col. “Theoretical evaluation of dilution processes versus thermal effects induced on the transport of heavy oil”. En: *Journal of Petroleum Science and Engineering* 192 (2020), p. 107246.
- [30] Patsy V Ramírez-González y Sergio E Quinones-Cisneros. “Rheological behavior of heavy and extra-heavy crude oils at high pressure”. En: *Energy & Fuels* 34.2 (2020), pp. 1268-1275.
- [31] S Sánchez y col. “Conjugate thermal-hydrodynamic model for the study of heavy oil transport”. En: *Journal of Petroleum Science and Engineering* 179 (2019), pp. 997-1011.
- [32] Qun Chen y col. “Optimization principle for variable viscosity fluid flow and its application to heavy oil flow drag reduction”. En: *Energy & fuels* 23.9 (2009), pp. 4470-4478.

- [33] Ricardo Dunia, Antonio Campo y Rodolfo Guzman. “Study of pressure and temperature developing profiles in crude oil pipe flows”. En: *Journal of Petroleum Science and Engineering* 78.2 (2011), pp. 486-496.
- [34] Qing Yuan y col. “Study on the thermal characteristics of crude oil batch pipelining with differential outlet temperature and inconstant flow rate”. En: *Journal of Petroleum Science and Engineering* 160 (2018), pp. 519-530.
- [35] Antonie Oosterkamp, Tor Ytrehus y Sondre T Galtung. “Effect of the choice of boundary conditions on modelling ambient to soil heat transfer near a buried pipeline”. En: *Applied Thermal Engineering* 100 (2016), pp. 367-377.
- [36] Mu Yanhu y col. “Rapid permafrost thaw induced by heat loss from a buried warm-oil pipeline and a new mitigation measure combining seasonal air-cooled embankment and pipe insulation”. En: *Energy* 203 (2020), p. 117919.
- [37] N Luna, F Méndez y C Trevino. “Conjugated heat transfer in circular ducts with a power-law laminar convection fluid flow”. En: *International journal of heat and mass transfer* 45.3 (2002), pp. 655-666.
- [38] Yang Liu, PHAN-THIEN NHAN y Ronald Kemp. “Coupled conduction-convection problem for an underground duct containing eight insulated cables”. En: *International Journal of Computational Engineering Science* 1.02 (2000), pp. 187-206.
- [39] I Shafagh y col. “Thermal energy transfer around buried pipe infrastructure”. En: *Geomechanics for Energy and the Environment* 29 (2022), p. 100273.
- [40] R. Flores-Quirino y col. “Thermal impact induced by the environment in the transport of heavy oils in offshore insulated pipelines: Evaluation of heat transfer”. En: *Journal of Petroleum Science and Engineering* 217 (2022), p. 110819.
- [41] Nestor Daniel Luna Gonzalez y Federico Méndez Lavielle. “Análisis de la transferencia de calor conjugada en fluidos no-newtonianos en tuberías.” Tesis doctoral. Universidad Nacional Autónoma de México, 2001.
- [42] William Murray Deen. *Analysis of transport phenomena*. Vol. 2. Oxford university press New York, 1998.
- [43] Faith A Morrison y col. *Understanding rheology*. Oxford University Press, USA, 2001.
- [44] Faith A Morrison. *An introduction to fluid mechanics*. Cambridge University Press, 2013.
- [45] Ramon Francisco Ramos-Pallares. “The Viscosity and Thermal Conductivity of Heavy Oils and Solvents”. Tesis doctoral. University of Calgary, 2017.
- [46] Jian Zhao y col. “Research on heat transfer characteristic of crude oil during the tubular heating process in the floating roof tank”. En: *Case Studies in Thermal Engineering* 10 (2017), pp. 142-153.
- [47] Robert Byron Bird, Warren E Stewart y Edwin N Lightfoot. *Fenómenos de transportes*. Limusa Wiley, 2006.
- [48] Tommy Firmansyah y col. “Transient cooling simulation of atmospheric residue during pipeline shutdowns”. En: *Applied Thermal Engineering* 106 (2016), pp. 22-32.
- [49] John David Anderson. *Computational fluid dynamics. The Basics with Applications*. McGraw-Hill, 1995.

- [50] WJ Minkowycz, Ephraim M Sparrow y JY Murthy. *Handbook of numerical heat transfer*. John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- [51] WM Kays y ME Crawford. "1993, Convective Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill". En: *New York*. ().