



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – GEOTECNIA

INFLUENCIA DE CARGAS INCLINADAS Y DAÑO POR VOLADURA EN LA ESTABILIDAD  
DE PILARES DE ROCA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
EDJAN EDUARDO BUSTAMANTE MÉNDEZ

TUTORES PRINCIPALES:  
  
EDGAR MONTIEL GUTIÉRREZ  
SRK CONSULTING GROUP CHILE

ALEXANDRA OSSA LÓPEZ  
INSTITUTO DE INGENIERÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: M.I. DEMÉNEGHI COLINA AGUSTÍN

Secretario: M.I. SÁNCHEZ REYES FERMÍN ANTONIO

1 er. Vocal: DRA. OSSA LÓPEZ ALEXANDRA

2 do. Vocal: DR. ORTIZ HERMOSILLO RICARDO ENRIQUE

3 er. Vocal : M.I. MONTIEL GUTIÉRREZ EDGAR

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: FACULTAD DE INGENERÍA UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

DRA. ALEXANDRA OSSA LÓPEZ

-----  
**FIRMA**

**CO-TUTOR DE TESIS:**

M. I. EDGAR MONTIEL GUTIÉRREZ

-----  
**FIRMA**

# Dedicatoria

Por y para, mis padres Eduardo y Jannet; g como para mis abuelos Pina, Eduardo, Juanela y Miguel, el cariño que he encontrado en ustedes es inigualable y su guía ha sido indispensable para mí, este logro es de ustedes también. Gracias.

# Agradecimiento

A la Universidad Nacional Autónoma de México.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico durante mis estudios de posgrado.

A la Facultad de Ingeniería.

Mi más sincero agradecimiento al Maestro Edgar por la confianza, motivación y la amistad brindada. Gracias por la dedicación en tu enseñanza, eres un gran mentor.

A la Dra. Alexandra por su confianza, instrucción y apoyo.

A los sinodales, el Dr. Ricardo, el M.I. Fermín y al M.I. Agustín por las contribuciones para la mejora de este trabajo.

A mis amigos de la Maestría, en especial a Uriel y Hazel.

A Katya, por siempre apoyarme y darme consejos. Eres la mejor.

A Ernesto, Jorge y Ricardo gracias por las risas y los días de juego.

A mi familia.

# Índice

Resumen .....	IX
Abstract.....	X
Capítulo 1 Introducción.....	1
1.1 Objetivos generales .....	2
1.2 Objetivos específicos .....	2
1.3 Alcances .....	2
Capítulo 2 Antecedentes .....	3
2.1 Cargas inclinadas en obras mineras.....	3
2.1.1 Pilares en métodos de hundimiento .....	3
2.1.2 Pilares en otros tipos de operaciones mineras.....	7
2.2 Consideraciones en el diseño de pilares .....	8
2.2.1 Relación de esbeltez .....	8
2.2.2 Efecto de escala.....	9
2.2.3 Efecto de forma y confinamiento .....	9
2.2.4 Discontinuidades .....	10
2.2.5 Comportamiento de pilares .....	10
2.2.6 Análisis de esfuerzos en pilares.....	11
2.3 Métodos de diseño y análisis de pilares .....	13
2.3.1 Fórmulas empíricas para el diseño de pilares.....	13
2.3.2 Métodos numéricos para el análisis de cargas inclinadas en pilares .....	14
2.4 Voladura .....	16
2.4.1 Métodos numéricos para pilares dañados por voladura.....	18
Capítulo 3 Marco teórico .....	19
3.1 Modelado numérico .....	19
3.1.1 Ecuaciones de equilibrio .....	19
3.1.2 Compatibilidad de deformaciones y desplazamientos .....	20
3.1.3 Leyes constitutivas.....	21
3.2 Modelado en la geotecnia.....	22
3.3 Diferencias finitas .....	23

3.3.1	Aproximación a derivadas con diferencias finitas.....	24
3.3.2	Aproximación a derivadas parciales con diferencias finitas .....	25
3.3.3	Programa de diferencias finitas.....	26
3.4	Criterios de rotura y GSI .....	31
3.4.1	Mohr-Coulomb .....	31
3.4.2	Hoek & Brown .....	32
3.4.3	GSI.....	35
3.4.4	Estimación del módulo de deformación del macizo, $E_m$ .....	36
3.5	Técnica de reducción de resistencia.....	37
Capítulo 4	Metodología .....	38
4.1	Generación del modelo por medio de primitivas.....	38
4.1.1	Geometrías regulares .....	38
4.1.2	Geometría de pilares de caving .....	39
4.2	Condiciones de fronteras y estado inicial de esfuerzos .....	40
4.3	Introducción del daño de voladura y factor de seguridad .....	42
4.4	Incorporación de vectores para modificar las cargas inclinadas.....	44
4.5	Generación de la gráfica esfuerzo desplazamiento .....	45
4.6	Desarrollo de la envolvente de resistencia con respecto a la inclinación de la carga	46
4.7	Validación del método attach.....	47
Capítulo 5	Resultados .....	52
5.1	Resultados en pilares regulares .....	52
5.1.1	Impacto de cargas inclinadas en pilares regulares .....	54
5.1.2	Validación respecto a ecuaciones empíricas .....	60
5.2	Valoración de la influencia de daño por voladura .....	63
5.2.1	Análisis de pilar en propiedades límite .....	66
5.3	Análisis de pilares de panel caving con carga inclinada .....	71
5.3.1	Resultados sin daño.....	71
5.3.2	Resultados con daño .....	72
Capítulo 6	Conclusiones y recomendaciones.....	75
6.1	Conclusiones .....	75
6.1.1	Referente a pilares de geometría regular.....	75

6.1.2	Referente a pilares complejos de caving .....	76
6.2	Recomendaciones y análisis posteriores.....	77
	Referencias.....	78
	Anexos.....	82



# Índice de Figuras

Fig. 2.1 Representación conceptual de la subsidencia en los métodos de hundimiento (Modificado de Vyazmensky et. al., 2007). .....	3
Fig. 2.2 Esquema general de panel caving (Tomado de Gómez & Labbé, 2019; Cuello & Newcombe, 2018; Paredes et. al., 2018).....	4
Fig. 2.3 Concentración de esfuerzos en métodos de hundimiento (stress abutment) (Modificado de Montiel E., 2020). .....	5
Fig. 2.4 Redistribución de esfuerzos en panel caving (stress abutment) (Modificado de Barraza & Croknan 2000).....	6
Fig. 2.5 Sistema de extracción de panel caving visto en planta, malla de pilar tridimensional y pilar real (Montiel E., 2020).....	7
Fig. 2.6 Minado de frentes largas en roca dura (Brady & Brown, 2005) y pilar inclinado dentro del manto (Modificado de Jessu & Spearing, 2018). .....	8
Fig. 2.7 Relación de esbeltez (Montiel E. et. al. 2018).....	8
Fig. 2.8 Variación de la resistencia del pilar con el cambio de tamaño (Modificado de Hudson & Harrison, 2000).....	9
Fig. 2.9 Variación de la resistencia del pilar con el cambio de forma (Hudson & Harrison , 2000).....	10
Fig. 2.10 Modo de falla de control y progresiva en pilares (Modificado de Brady & Brown, 2005; Montiel E. et. al. 2018; Esterhuizen et. al. 2011). .....	11
Fig. 2.11 Redistribución de esfuerzos durante el minado (Modificado de Brady & Brown, 2005). .....	12
Fig. 2.12 Esfuerzos medios en pilares verticales de acuerdo con la teoría de áreas tributarias (Yrarrazaval Herrera, 2013). .....	12
Fig. 2.13 Modelo tridimensional de hundimiento para determinar los esfuerzos transmitidos a pilares (Montiel E., 2020). .....	13
Fig. 2.14 Resistencia de pilares a diferentes inclinaciones (Jessu & Spearing, 2018). .....	15
Fig. 2.15 Factor de seguridad de pilar sin y con carga inclinada (Suorineni et. al., 2011). ....	15
Fig. 2.16 a) Tipos de fisuras en las proximidades del barreno y b) Agrietamiento debido a la tensión generada por la onda reflejada (Modificada de Bernaola Alonso et. al., 2013). .....	16
Fig. 2.17 a) Geometría de plantilla de barrenación y b) configuración de un barreno (González, 2016).....	17
Fig. 2.18 Zona de daño con y sin postcorte. ....	17
Fig. 2.19 a) Modelo del pilar con núcleo de roca masiva y roca dañada en los costados y b) Efecto del daño por voladura en pilares inclinados variando el grosor de la voladura (Jessu et. al., 2018).....	18
Fig. 3.1 Elemento diferencial en una base ortonormal (Potts & Zdravkvoic, 1999).....	20
Fig. 3.2 Modos de deformación (Potts & Zdravkvoic, 1999). .....	21

Fig. 3.3 Interrelación entre variables para la solución de un problema de mecánica de sólidos (Sánchez, 2018).	22
Fig. 3.4 Clasificación de métodos numéricos en la geotecnia (Modificado de Guzmán, 2017).	22
Fig. 3.5 Modelos continuos y discretos (Bobet, 2010).	23
Fig. 3.6 Derivada de una función por diferencias finitas.	24
Fig. 3.7 Malla de diferencias finitas en 2D (Modificado de Bobet, 2010 y Chaves, 2010).	25
Fig. 3.8 Ciclo básico de cálculo explícito (Modificado de ITASCA, 2009).	26
Fig. 3.9 Base del ciclo de cálculo en FLAC (Modificado de ITASCA, 2006).	28
Fig. 3.10 Subelemento triangular con vectores de fuerzas nodales (Modificado de ITASCA, 2006).	29
Fig. 3.11 Subelemento triangular con vectores de velocidad (Modificado de ITASCA, 2006).	29
Fig. 3.12 Rejilla numérica de FLAC (Modificado de ITASCA, 2006).	30
Fig. 3.13 Criterio de rotura Mohr-Coulomb (Modificado de Hudson & Harrison, 2000).	32
Fig. 3.14 Envolvente de rotura del criterio Hoek & Brown en función de esfuerzos principales a) esfuerzos normales y b) tangenciales (González de Vallejo et. al., 2002).	33
Fig. 3.15 Criterio Hoek & Brown para macizo rocoso degradado por daño de voladura y macizo rocoso inalterado (Modificado de Hoek E., 2012).	35
Fig. 3.16 Límites de aplicación del GSI dependiendo la escala (Modificado de Hoek & Brown, 2019).	36
Fig. 4.1 a) Primitiva Brick y b) primitiva con forma de pilar.	39
Fig. 4.2 Mallas para diferentes relaciones de esbeltez.	39
Fig. 4.3 Dimensiones del pilar del caving.	40
Fig. 4.4 Indicación de los gridpoints en los bordes del modelo.	40
Fig. 4.5 Aplicación de la rutina attach de reflexión.	41
Fig. 4.6 Estado de esfuerzos en modelo de panel caving antes de abrir la excavación.	41
Fig. 4.7 a) Fuerza desbalanceada y b) velocidad dentro del modelo.	42
Fig. 4.8 Zona de daño por voladura en la malla de pilares de caving a diferentes distancias.	43
Fig. 4.9 Corte transversal de los pilares para observar el área de roca sana tras introducir la zona de daño.	43
Fig. 4.10 Ilustración del criterio de velocidad con vectores de prueba (GeoGebra).	44
Fig. 4.11 Incorporación de los vectores de velocidad en modelo local de pilar de FLAC <sup>3D</sup> .	45
Fig. 4.12 Curva esfuerzo-desplazamiento en color rosa y pilar fallado de W/H=1 de 10x10m con plunge de 15° en FLAC <sup>3D</sup> .	45
Fig. 4.13 Envolvente de resistencia en función del plunge para pilar W/H=1 de 10x10 m.	46
Fig. 4.14 a) Estado inicial de esfuerzos y b) incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de caving sin condiciones de frontera.	47

Fig. 4.15 a) Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de caving solo con apply y b) contorno de esfuerzos verticales al abrir la excavación. ....	48
Fig. 4.16 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de caving con rodillos a) carga de 90°, b) carga de 45° con vectores de velocidad y c) carga de 0° con vectores de velocidad.....	49
Fig. 4.17 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de caving con attach a) carga de 90°, b) carga de 45° con vectores de velocidad, d) carga de 0° y c) contorno de desplazamientos para carga de 45°. ....	49
Fig. 4.18 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de caving cargado a cortante a) con rodillos y b) con attach; contornos de desplazamiento para pilar de caving cargado a cortante c) con rodillos y d) con attach. ....	50
Fig. 5.1 Contorno de desplazamiento en pilares de W/H=1.....	52
Fig. 5.2 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de W/H=1.....	53
Fig. 5.3 Gráficas esfuerzo desplazamiento para diferentes inclinaciones de carga en pilar regular de W/H=1.....	53
Fig. 5.4 Envoltentes de falla en función del plunge para pilares con misma relación de esbeltez. ....	54
Fig. 5.5 Envoltentes de falla en función del plunge para pilares con misma relación de esbeltez en porcentaje. ....	55
Fig. 5.6 Envoltente de resistencia en función de plunge para diferentes relaciones de esbeltez. ....	56
Fig. 5.7 Envoltente de resistencia en función del plunge para diferentes relaciones de esbeltez normalizada a carga máxima. ....	57
Fig. 5.8 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de W/H=0.5.....	57
Fig. 5.9 Envoltente de resistencia en parámetros equivalentes entre Mohr-Coulomb y Hoek & Brown a 1 MPa. ....	58
Fig. 5.10 Envoltente de resistencia en parámetros equivalentes entre Mohr-Coulomb y Hoek & Brown a 5 MPa. ....	59
Fig. 5.11 Envoltente de resistencia para diferentes estados de esfuerzos. ....	60
Fig. 5.12 Validación entre ecuaciones empíricas y modelo numérico con GSI de 50.....	62
Fig. 5.13 Validación entre ecuaciones empíricas y modelo numérico con GSI de 30.....	63
Fig. 5.14 Incremento de máximas deformaciones cortantes y factor de seguridad para pilares de panel caving dañados por voladura a diferentes distancias de afectación en roca de calidad media. ....	64
Fig. 5.15 Contornos de esfuerzos en los centros de los pilares de panel caving dañados por voladura a diferentes distancias de afectación en roca de calidad media. ....	65
Fig. 5.16 Reducción de la carga en función de la distancia de afectación por voladura para pilares con propiedades de roca de calidad media.....	66
Fig. 5.17 Reducción del factor de seguridad en función de la distancia de afectación por voladura para pilares con propiedades de roca de calidad media. ....	66

Fig. 5.18 Incremento de máximas deformaciones cortantes y factor de seguridad para pilares de panel caving con propiedades límite con daño $D=0.7$ a diferentes distancias de afectación. ....	68
Fig. 5.19 Contornos de esfuerzos en los centros de los pilares de panel caving con propiedades límite con $D=0.7$ a diferentes distancias de afectación. ....	68
Fig. 5.20 Incremento de máximas deformaciones cortantes y factor de seguridad para pilares de panel caving con propiedades límite con daño $D=1$ a diferentes distancias de afectación. ....	69
Fig. 5.21 Contornos de esfuerzos en los centros de los pilares de panel caving con propiedades límite con $D=1$ a diferentes distancias de afectación. ....	69
Fig. 5.22 Reducción de la carga en función de la distancia de afectación por voladura para pilares con propiedades límite. ....	70
Fig. 5.23 Reducción del factor de seguridad en función de la distancia de afectación por voladura para pilares con propiedades límite. ....	70
Fig. 5.24 Comparativa entre resultados de roca con calidad media y propiedades límite. ....	71
Fig. 5.25 Incremento de máximas deformaciones cortantes en pilares de panel caving con roca de calidad media sometido a cargas inclinadas. ....	72
Fig. 5.26 Incremento de máximas deformaciones cortantes en pilares de panel caving con daño $D=0.7$ a 1.5 m y roca de calidad media sometido a cargas inclinadas. ....	73
Fig. 5.27 Comparación entre envolventes con y sin daño de voladura en pilares para caving con calidad de roca media. ....	74
Fig. 0.1 Relación entre esfuerzos principales mayores y menores para el criterio de Hoek & Brown y el equivalente de Mohr-Coulomb (Modificada de Hoek et. al., 2002). ....	83
Fig. 0.2 Incremento de máximas deformaciones cortantes del factor de seguridad de un pilar con propiedades límite y diferentes condiciones de frontera: a) sin ninguna frontera, b) frontera de esfuerzos, c) rodillos y d) attach de reflexión. ....	88
Fig. 0.3 Incremento de máximas deformaciones cortantes de un pilar con propiedades límite y condiciones de frontera de rodillo a cargas de a) $90^\circ$ , b) $45^\circ$ y c) $0^\circ$ . ....	89
Fig. 0.4 Incremento de máximas deformaciones cortantes de un pilar con propiedades límite y condiciones de frontera de attach de reflexión a cargas de a) $90^\circ$ , b) $45^\circ$ y c) $0^\circ$ . ....	89
Fig. 0.5 Gráfica esfuerzo desplazamiento para pilares de panel caving dañados por voladura a diferentes distancias en roca de calidad media. ....	95
Fig. 0.6 Gráfica esfuerzo desplazamiento para pilares de panel caving dañados por voladura a diferentes distancias en roca con propiedades límite. ....	95
Fig. 0.7 Gráfica esfuerzo desplazamiento para pilares de panel caving sin daño por voladura sometido a cargas inclinadas en roca de calidad media. ....	96
Fig. 0.8 Gráfica esfuerzo desplazamiento para pilares de panel caving con afectación por daño de voladura $D=0.7$ a 1.5 m sometido a cargas inclinadas en roca de calidad media. ....	96

## Índice de Tablas

Tabla 2.1 Fórmulas de escala.....	14
Tabla 2.2 Fórmulas de efecto forma. ....	14
Tabla 4.1 Valores para generar envolvente de resistencia. ....	46
Tabla 4.2 Resultados al comparar diferentes condiciones de frontera. ....	47
Tabla 5.1 Resultados de pilares con misma relación de esbeltez ( $W/H=1$ ), pero diferentes dimensiones.....	54
Tabla 5.2 Envolvente de resistencia en función del plunge para diferentes relaciones de esbeltez. ....	55
Tabla 5.3 Resultados de los parámetros equivalentes entre Mohr-Coulomb y Hoek & Brown a 1 MPa. ....	58
Tabla 5.4 Resultados de los parámetros equivalentes entre Mohr-Coulomb y Hoek & Brown a 5 MPa. ....	59
Tabla 5.5 Resultados para diferentes estados de esfuerzos. ....	60
Tabla 5.6 Resultados de las ecuaciones empíricas y modelo numérico GSI de 50.....	61
Tabla 5.7 Resultados de las ecuaciones empíricas y modelo numérico GSI de 30.....	62
Tabla 5.8 Resultados de daño por voladura para pilar con roca de calidad media.....	63
Tabla 5.9 Resultados del pilar con propiedades límite. ....	67
Tabla 5.10 Resultados de pilar de caving con parámetros de roca con calidad media sometido a cargas inclinadas. ....	72
Tabla 5.11 Resultados de pilar de caving con daño y parámetros de roca con calidad media sometido a cargas inclinadas.....	73
Tabla 5.12 Comparativa entre resistencia con y sin daño por voladura ante la carga máxima soportada por el pilar. ....	74
Tabla 0.1 Guía para estimar el factor de perturbación D por relajación de esfuerzos y daño por voladura (Modificada de Hoek & Brown, 2019).....	85
Tabla 0.2 Tabla básica de GSI (Modificada de Hoek & Brown, 2019). ....	86
Tabla 0.3 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilares con misma relación de esbeltez, pero diferente dimensión de acuerdo con el plunge ( $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ y $45^\circ$ ). ....	90
Tabla 0.4 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilares con misma relación de esbeltez, pero diferente dimensión de acuerdo con el plunge ( $60^\circ, 75^\circ$ y $90^\circ$ ).....	91
Tabla 0.5 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilares con diferente relación de esbeltez, pero diferente dimensión de acuerdo con el plunge ( $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ y $45^\circ$ ). ....	92
Tabla 0.6 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilares con diferente relación de esbeltez, pero diferente dimensión de acuerdo con el plunge ( $60^\circ, 75^\circ$ y $90^\circ$ ).....	93

# Resumen

Con la finalidad de analizar la influencia que tiene las cargas inclinadas y el daño por voladura en los pilares de roca, en este trabajo se elaboraron modelos locales que pudieran cuantificar el impacto. En la primera parte del trabajo se realiza una recopilación de la información básica necesaria para entender el uso, comportamiento, análisis y diseño de pilares. Así como por qué están sometidos a cargas inclinadas y daño por voladura.

En el desarrollo de esta tesis se investigó acerca de los modelos numéricos y su implementación en la geotecnia de minería, con esto fue posible elaborar modelos tridimensionales locales de los pilares de roca en FLAC<sup>3D</sup>. Para esto se decidió usar los criterios de rotura de Hoek & Brown y Mohr-Coulomb con parámetros equivalentes, simulando una roca de calidad media de acuerdo con el GSI y sus parámetros de roca intacta. Asimismo, se creó un criterio de velocidad para dar inclinación a la carga actuante en el pilar, se desarrollaron rutinas específicas para generar condiciones de frontera que repliquen las condiciones de la mina y crear graficas esfuerzo desplazamiento.

Con estos modelos se midió el impacto de cargas inclinadas en pilares cuadrados y *caving*, la relevancia de la relación de esbeltez, el detrimento en la resistencia debido a voladuras y la afectación de voladuras en conjunto con las cargas inclinadas.

Los resultados de los modelos en pilares de roca demostraron lo siguiente: 1) Son menos resistentes ante las cargas inclinadas con componentes mayormente cortantes, siendo la mínima resistencia una carga a 0° y la máxima a 90°; 2) Su resistencia aumenta considerablemente al incrementar su relación de esbeltez; 3) El daño por voladura mostró que, al afectar una zona del pilar, esta no carga causando que los esfuerzos se transmitan por el núcleo, la parte más rígida. Esto provoca una disminución en la resistencia del pilar e incluso cuando hay mucha afectación se puede hablar de una independencia del macizo de roca y la zona dañada y 4) Por último, se determinó que al incluir cargas inclinadas con daño por voladura la resistencia disminuye entre un 35 y 97%.

# *Abstract*

To analyze the influence of inclined loads and blast damage on rock pillars, in this work local models which could quantify the impact, were developed. In the first part of the work, a compilation of the basic information necessary to understand the use, behavior, analysis, and design of pillars is carried out. As well as why they are subjected to inclined loads and blast damage.

In the development of this thesis, numerical models and their implementation in mining geotechnics were investigated, with this it was possible to elaborate local three-dimensional models of rock pillars in FLAC<sup>3D</sup>. For this, the Hoek & Brown and Mohr-Coulomb failure criteria were founded with equivalent parameters, simulating a medium quality rock according to the GSI and its intact rock parameters. Likewise, a speed criterion was created to give inclination to the load acting on the pillar, specific routines were developed to generate boundary conditions that replicate the conditions of the mine in order to create stress-displacement graphs.

With these, the impact of inclined loads on square pillars and caving was measured, the relevance of the relationship of slenderness models, the detriment of strength in pillars due to blasting and the affectation of blasting in conjunction with inclined loads.

The results of the models demonstrated: 1) the pillars are less resistant to inclined loads with mostly shear components, the minimum resistance being a load at 0° and the maximum at 90°; 2) The strength of the pillars increases by increasing their slenderness ratio; 3) The blast damage showed that when affecting an area of the pillar, this non-load caused the stresses to be transmitted through the core, the most rigid part. This causes a decrease in the resistance of the pillar and when there is a lot of damage an independence of the rock mass and the damaged area its created and 4) Finally, the strength decreases between 35 and 97% when was included inclined loads with blast damage.

# Capítulo 1 Introducción

La minería ha sido esencial para el desarrollo de la civilización al ser fuente de materias primas que son necesarias para nuestras actividades cotidianas. Actualmente, muchos de los avances tecnológicos dependen de estas materias, lo cual ha incrementado la demanda de minerales metálicos y por ende de la actividad minera. Debido a esto se han tenido que desarrollar y mejorar técnicas de minado que permitan la extracción de la mena (mineral de interés económico) de forma eficiente, segura y sustentable. Para lograrlo es indispensable que la minería se apoye en otras ramas de la ingeniería, una de las más importantes es la geotecnia.

Por medio de la geotecnia se pueden analizar las condiciones geológicas y mecánicas de un sitio para el diseño de obras mineras. De ahí que, uno de sus principales objetivos sea prevenir la inestabilidad global o local en la mina; en consecuencia, se reduce el riesgo para los trabajadores y permite tener una producción continua de mineral. La prevención de la inestabilidad dependerá si se trata de una mina a cielo abierto o subterránea.

En el caso de una mina a cielo abierto es necesario hacer el diseño de taludes, monitoreo (con radares o inclinómetros), análisis del daño por voladura, subsidencia y en ocasiones transición a minería subterránea. Mientras que para una mina subterránea se hace el diseño de pozos, contrapozos, niveles, túneles, cuartos, evaluación de la subsidencia y de nuevos métodos de explotación, análisis del daño por voladura, así como el sostenimiento.

Conviene subrayar que este trabajo se basa en analizar pilares de roca utilizados como método de soporte en obras subterráneas. La finalidad del pilar es asegurar la estabilidad local (entre túneles o cuartos) y/o global de la mina; es decir, los desplazamientos del macizo rocoso en zonas afectadas por explotación. En particular, un pilar se define como un elemento geotécnico de roca *in-situ* entre dos o más excavaciones (Montiel *et. al.* 2018).

Para diseñarlos es necesario determinar la resistencia que tendrán ante las cargas actuantes. Las cuales debido a la naturaleza de las operaciones mineras pueden ser axiales, cortantes o bien algún rango intermedio entre ambas. Esto depende de la orientación misma del pilar, pero también del campo de esfuerzos actuante durante el proceso de extracción (Jessu & Spearing, 2018).

Ahora bien, para determinar la resistencia de los pilares se usan métodos empíricos que relacionan la resistencia a la compresión uniaxial de la roca, calidad geotécnica, geometría (relación de esbeltez) y en algunos casos discontinuidades. Sin embargo, estas formulaciones



se basan en la teoría del área tributaria, dicha teoría no considera la interacción de esfuerzos de confinamiento, aumento de las cargas durante la excavación, solo considera cargas axiales y supone que los pilares soportan toda la carga litostática.

Las deficiencias en los métodos empíricos se pueden complementar con el uso de métodos numéricos, entre ellos destacan: elemento finito, diferencias finitas o elementos distintos. En estos modelos se puede evaluar el impacto que tendrán las cargas inclinadas, las diferentes geometrías del pilar y el daño por voladura sobre la resistencia de este.

### **1.1      *Objetivos generales***

Evaluar la influencia de cargas inclinadas y daño por voladura en la resistencia de pilares construidos en roca con base en el criterio de rotura Hoek & Brown.

### **1.2      *Objetivos específicos***

- a) Investigar la geometría y tipo de pilares más comunes en ingeniería de minas;
- b) Investigar en qué tipo de operaciones mineras se presentan cargas inclinadas;
- c) Generar un modelo de pilar regular y otro irregular de *caving* mediante diferencias finitas, el cual contará con la resistencia definida por medio del criterio de rotura Hoek & Brown;
- d) Someter el pilar a distintas intensidades de cargas inclinadas para obtener la envolvente de resistencia, así como analizar sus mecanismos de falla desarrollados;
- e) Evaluar el efecto de la relación de esbeltez;
- f) Evaluar el daño por voladura en pilares de *panel caving*;
- g) Evaluar el daño por voladura y cargas inclinadas en pilares de *panel caving*;
- h) Generar conclusiones sobre la respuesta de pilares ante cargas inclinadas y daños por voladura;
- i) Generar recomendaciones de futuras investigaciones relacionadas con pilares en macizos rocosos.

### **1.3      *Alcances***

- a) Recopilación bibliográfica sobre pilares;
- b) Desarrollar un modelo de diferencias finitas tridimensional, para valorar los mecanismos de falla, cuantificar el efecto geométrico de acuerdo con distintas relaciones de esbeltez y daño por voladura;
- c) Presentación de resultados y conclusiones.

## Capítulo 2 Antecedentes

En la minería existen tres tipos de pilares: 1) de soporte, usados en paneles de forma sistemática en zonas de extracción de mineral (rebaje) en métodos subterráneos como: cuartos y pilares, frentes largas, rebajes abiertos, además de métodos de hundimiento (*caving*); 2) de protección, sirven para salvaguardar instalaciones como edificios en superficie, por tanto no es permisible que presenten fallas y 3) de control, los cuales se diseñan para reducir la magnitud en los cambios de esfuerzo y aliviar el riesgo de estallidos de roca (Lunder, 1994). De acuerdo con autores como Hoek & Brown (1985), Lunder (1994), Brady & Brown (2005) y Esterhuizen *et. al.* (2011) los pilares de soporte son los más comunes por lo que más adelante se profundizará en su descripción.

### 2.1 Cargas inclinadas en obras mineras

#### 2.1.1 Pilares en métodos de hundimiento

Los métodos de hundimiento/socavación (*caving*) pretenden maximizar la extracción del mineral de interés económico (mena) mediante un derrumbe inducido, controlado y masivo. Es aplicado en cuerpos mineralizados con leyes bajas o medias, comúnmente son pórfidos de cobre, hierro o molibdeno con calidad de roca media a profundidades entre 50 y 300 m. Al extraer por la parte inferior del yacimiento un gran volumen de mineral, se genera subsidencia en la parte superficial de la mina (Fig. 2.1) (Howard L. Hartman, 1992). Aunque es un método subterráneo se puede usar para explotar las reservas de tajos a cielo abierto. Existen diversos métodos de hundimiento (*sublevel caving*, *panel caving* y *block caving*), este trabajo se enfoca en *panel caving*.

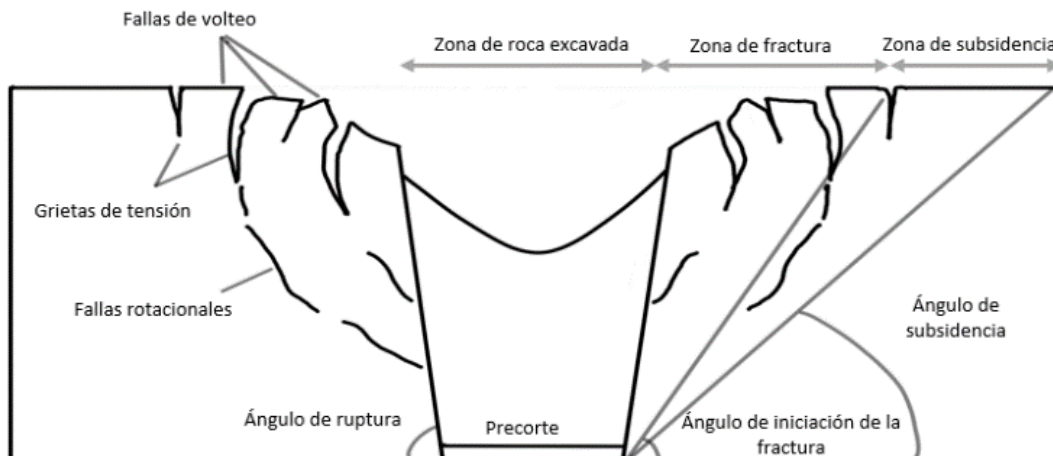


Fig. 2.1 Representación conceptual de la subsidencia en los métodos de hundimiento (Modificado de Vyazmensky *et. al.*, 2007).

Con el *panel caving* se puede recuperar hasta el 90% del mineral, su producción es equiparable con minas superficiales de entre 5 y 45 mil toneladas por día, tiene bajos costos operativos, es poco selectivo y es altamente automatizable. No obstante, puede presentar diluciones mayores al 20%, hay riesgos de colapso si no hay buena planificación y ejecución del método, riesgos de generar excesiva sismicidad y necesita fuertes inversiones. Este método es una variante del *Block caving* que se realiza por el hundimiento gravitacional de paneles (rebanadas del yacimiento mineral), para poder llevar a cabo esto se requiere un cuerpo mineral grande, regular y apto para ser socavado.

La capacidad de socavación depende del patrón natural de fracturamiento, la resistencia de las discontinuidades, la distribución de esfuerzos en el dominio de la zona abierta y la calidad del macizo rocoso (de media a baja). Si el macizo rocoso cumple con estas especificaciones es posible movilizar el material, sin usar la perforación y voladura de forma recurrente, ya que conforme se retira el mineral (por la parte inferior) se propaga el rompimiento del macizo, lo cual permite que caiga para ser extraído (Brady & Brown, 2005).

En la Fig. 2.2 podemos observar que para realizar la extracción del material (Fig. 2.2 (a)) es necesario excavar una serie de túneles (galerías/niveles), bateas y pilares en la parte inferior del yacimiento mineral (Fig. 2.2 (b)). Hay dos tipos de niveles principales: de producción y precorte (*undercut level*), el primero es para acarrear el mineral mientras que el segundo ayuda a disminuir los esfuerzos inducidos, así como controlar el ritmo de extracción. Por otro lado, las bateas son aberturas por donde el material quebrado puede rodar hacia los niveles de producción y los pilares son elementos excavados de roca *in-situ* para mantener abiertos los túneles.

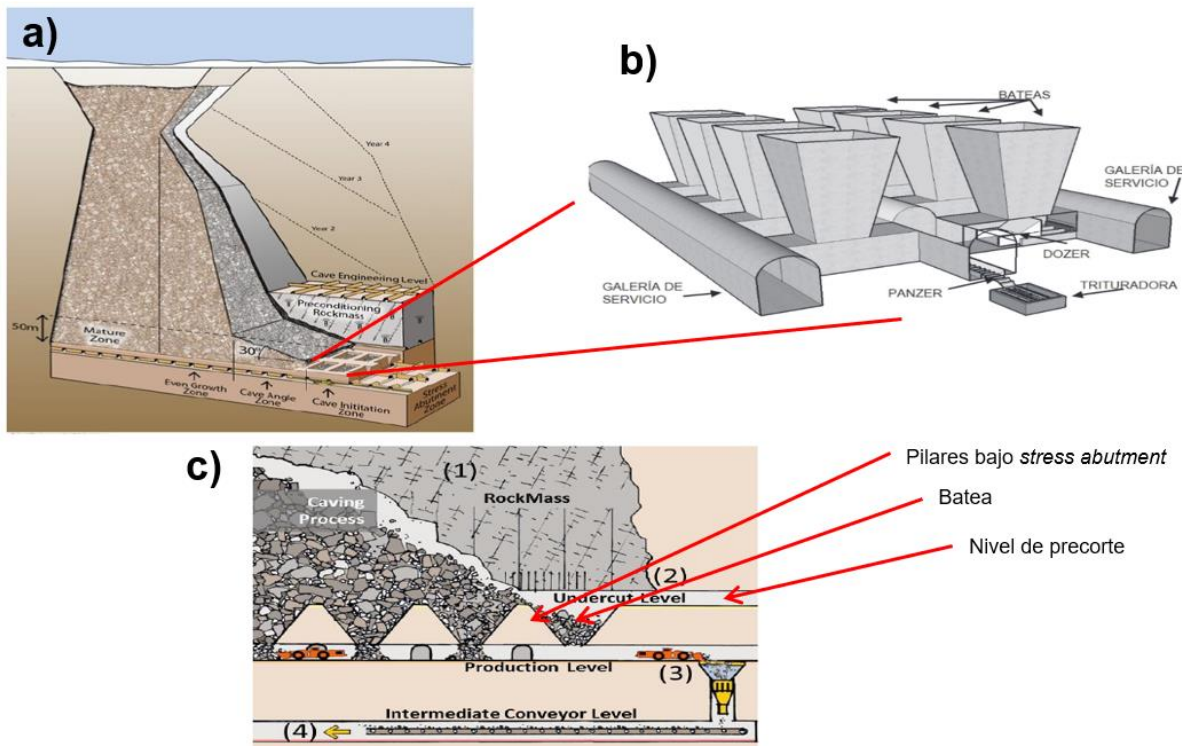


Fig. 2.2 Esquema general de panel caving (Tomado de Gómez & Labbé, 2019; Cuello & Newcombe, 2018; Paredes et. al., 2018).

El proceso comienza excavando las galerías o túneles, lo que da forma a los pilares, posteriormente se rompe el mineral (con voladura) por encima del nivel de precorte (Fig. 2.2 (c)). Después, cuando se tiene mineral sobre el nivel de precorte se abren las bateas, así el mineral descenderá por estas hasta el nivel de producción. Una vez que el mineral llega ahí, se podrá introducir algún equipo de acarreo como cargadores frontales para proceder a depositarlo en las bandas transportadoras y subirlo a superficie (Fig. 2.2(c)). Existe una variante en el método donde; primero se abren las bateas y luego se derrumba la roca por encima del nivel de precorte.

Conforme el material es acarreado del nivel de producción, la tensión en la superficie de la excavación incrementa y se propaga, induciendo la ruptura del macizo rocoso. En consecuencia, la roca caerá por influencia de la gravedad al desprenderse del macizo (*stress caving*). Así es como se aprovecha la condición geotécnica inicial del macizo rocoso para crear un ciclo de minado “en efecto dominó”, al extraer mineral, la roca se vuelve a romper, cae, aumenta la socavación y esto continúa hasta que se termina el mineral o ya no es costea la extracción. Sin embargo, cuando esto ocurre los esfuerzos se redistribuyen por el aumento de las tensiones en el macizo y se concentran en la periferia de la excavación, a esto se le conoce como *stress abutment*. En la Fig. 2.3 se observa una representación de la caverna o excavación con este efecto.

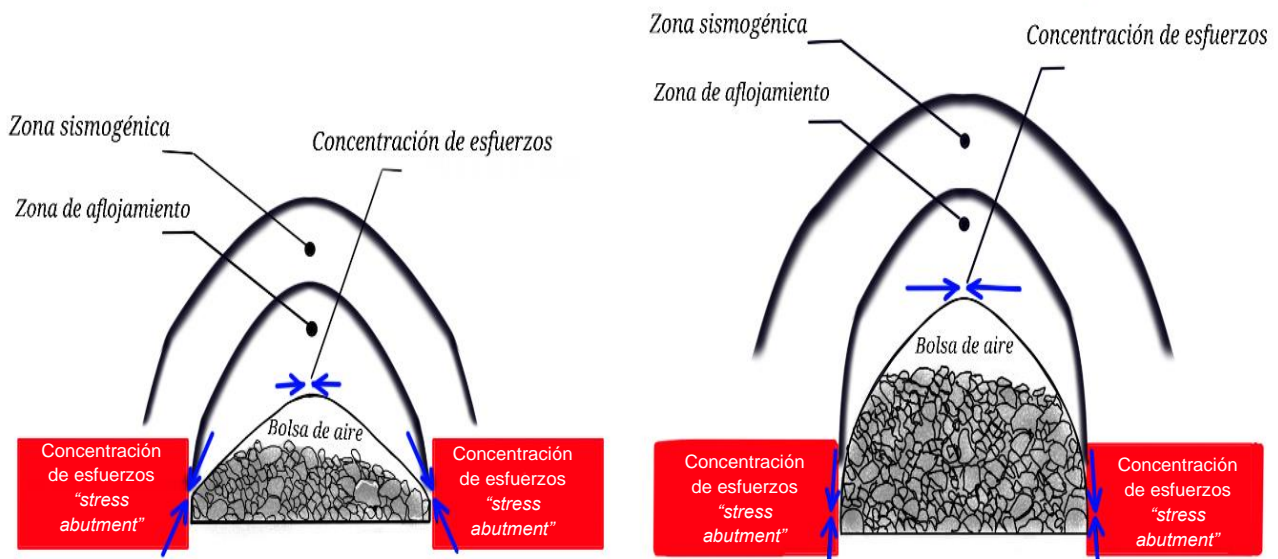


Fig. 2.3 Concentración de esfuerzos en métodos de hundimiento (*stress abutment*) (Modificado de Montiel E., 2020).

En esta misma figura se tienen las siguientes zonas dentro de la caverna de *caving* (Brady & Brown, 2005):

- 1) *Zona cavada*, es donde encontramos bloques de roca que han caído del techo (color gris). Aquí ocurre el flujo gravitacional de roca, provocando trituración al material de forma autógena, reduciendo su tamaño, de esta manera se consigue la granulometría adecuada para entrar por las bateas;

- 2) *Bolsa de aire*, separación entre el techo y la zona cavada;
- 3) *Zona de deformaciones discontinuas*, esta región ya no brinda soporte al macizo suprayacente, además aquí el material se desintegra (zona de aflojamiento);
- 4) *Zona sismogénica*, hay un frente sísmico causado por el deslizamiento en las discontinuidades y falla frágil de la roca, esta zona es generada por el cambio de esfuerzos en el avance del socavamiento y aumento en el tamaño de la caverna;
- 5) *Masa rocosa circundante*, por encima y alrededor de la zona sismogénica hay deformaciones elásticas en la roca;
- 6) *Stress abutment*, concentración de esfuerzos en la periferia de la excavación.

El *stress abutment* recae sobre los pilares de las zonas que aún no se han abierto para extracción. Es decir, la máxima concentración de esfuerzos tiene lugar antes de la apertura del nivel de precorte y de las bateas (Fig. 2.4). De acuerdo con Montiel E. (2020) este sobreesfuerzo no actúa de forma axial, sino que tiene cierta inclinación (*plunge*). En otras palabras, tiene componentes axiales y cortantes, tal como se ve en la Fig. 2.4; consecuentemente, hay un impacto negativo no cuantificado sobre la resistencia de los pilares.

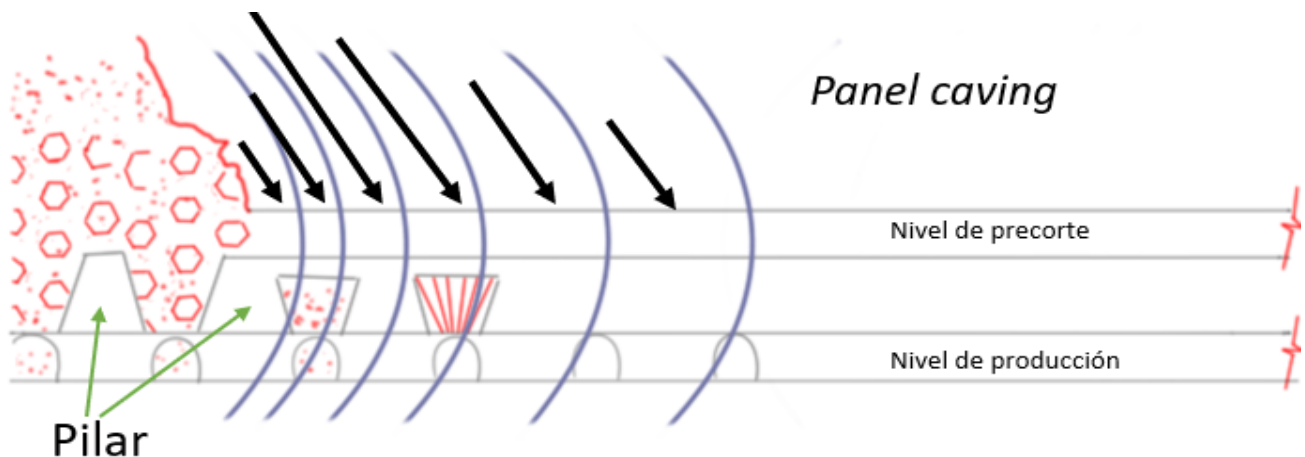


Fig. 2.4 Redistribución de esfuerzos en panel caving (*stress abutment*) (Modificado de Barraza & Croknan 2000).

Los pilares tienen la función de mantener la estabilidad local de los túneles de extracción, pero cuando se tienen organizados de manera sistemática ayudan a mantener la estabilidad global de la mina, en la Fig. 2.5 se muestra el acomodo sistemático de los pilares en planta. Partiendo de este hecho, la intersección de pares de túneles paralelos forman un pilar. Estos túneles o galerías se señalan con la flecha de color verde y de color rojo los pilares con sus respectivas bateas.

Cuando la estructura del pilar es afectada por cargas inclinadas, también se afectarán los túneles. Es importante comprender que no es necesario el colapso del túnel para considerarlo inseguro, con rebasar un límite de convergencia es suficiente para inhabilitarlo.

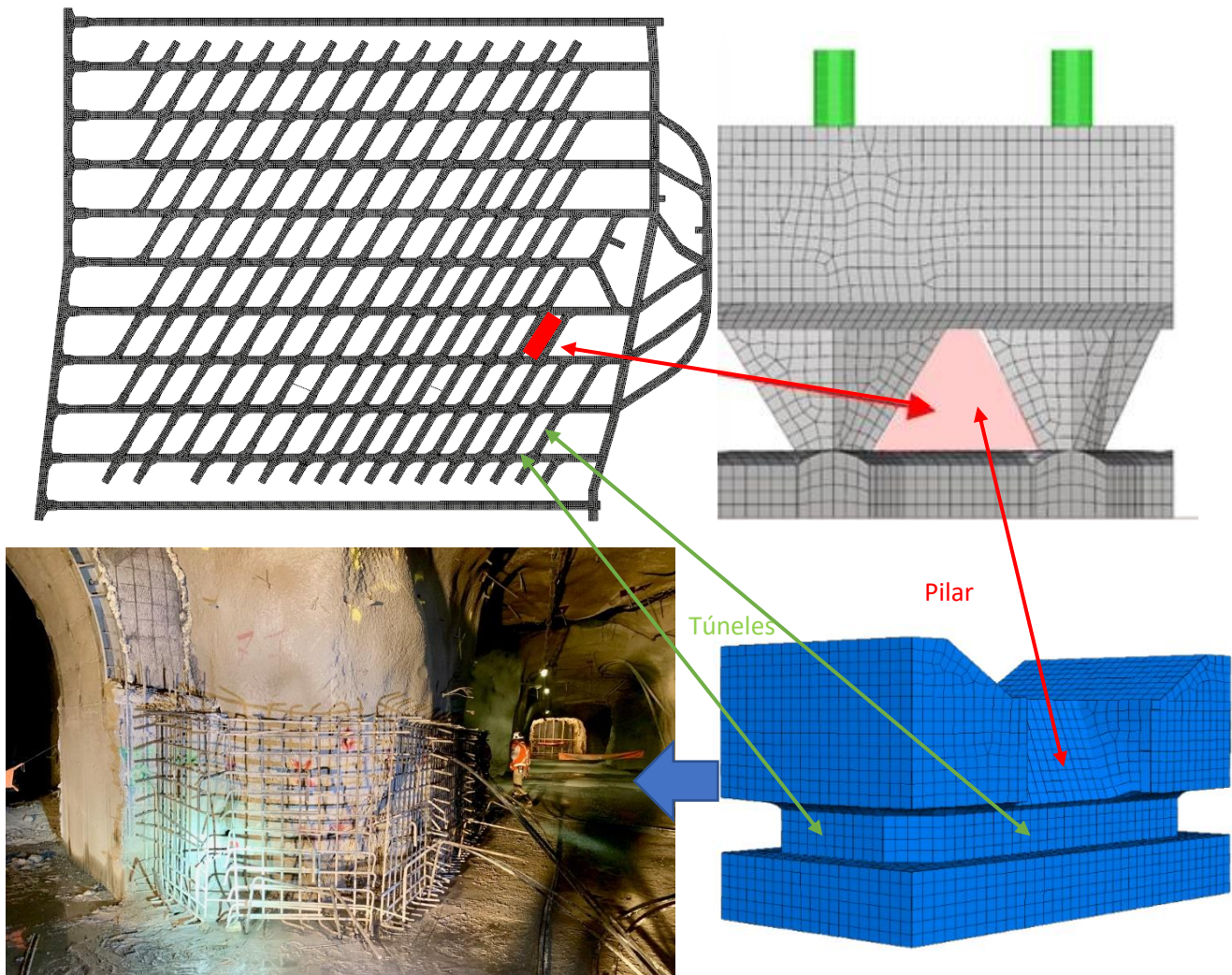


Fig. 2.5 Sistema de extracción de panel caving visto en planta, malla de pilar tridimensional y pilar real (Montiel E., 2020).

Se vuelve complejo cuantificar el impacto de las cargas inclinadas en los pilares y su afectación a los túneles debido a la escala del problema, la falta de acceso a las obras, la compleja respuesta mecánica por parte del macizo rocoso, el conocimiento limitado y con bases empíricas de los métodos de hundimiento. No obstante, el uso de modelos numéricos locales tridimensionales que representen de forma adecuada la modificación de esfuerzos y el desempeño deformacional de los pilares, brinda la posibilidad de investigar factores geomecánicos que rigen este tipo de obras mineras (Vyazmensky *et. al.*, 2007).

### 2.1.2 Pilares en otros tipos de operaciones mineras

Hay otros métodos de minado denominados “auto soportados” como cuartos y pilares o frentes largas, en donde los yacimientos son cuerpos minerales de forma tabular que facilitan el uso de pilares de manera directa en la zona de extracción (rebaje). Aunque generalmente estos yacimientos son horizontales (mantos), en ocasiones tienen cierto grado de inclinación (manto inclinado). Lo anterior genera componentes tanto de carga axial como cortantes sobre el pilar, en otras palabras, cargas inclinadas (Fig. 2.6). Con ello podemos concluir que las cargas dependen de la geometría del yacimiento, del pilar y/o el campo de esfuerzos actuante.

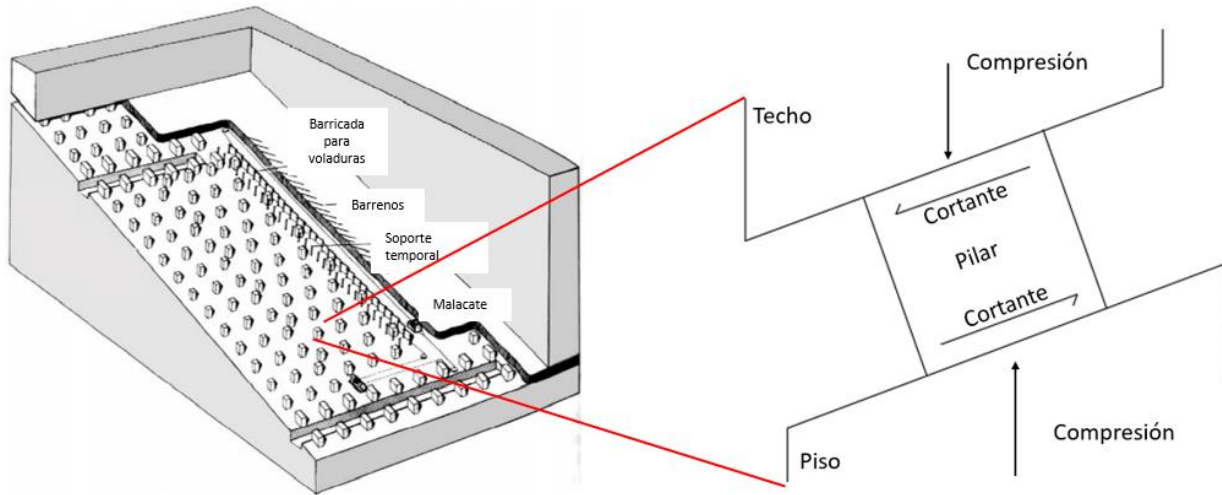


Fig. 2.6 Minado de frentes largas en roca dura (Brady & Brown, 2005) y pilar inclinado dentro del manto (Modificado de Jessu & Spearing, 2018).

## 2.2 Consideraciones en el diseño de pilares

Para estimar que un pilar es estable se utiliza el concepto de factor de seguridad (F.S.) Ecuación (2.1).

$$F.S. = \text{Resistencia del pilar} / \text{esfuerzo sobre el pilar} \quad (2.1)$$

Para poder aplicar la fórmula, se analizan los esfuerzos actuantes sobre el pilar y la respuesta estructural, que está condicionada por su resistencia. A su vez, la resistencia será establecida en función de las propiedades del material, escala, relación de esbeltez, confinamiento, discontinuidades, efectos de la voladura y cargas máximas actuantes.

### 2.2.1 Relación de esbeltez

La resistencia de un pilar está en función de la relación ancho entre altura, al ser una de las variables más importantes dentro del diseño de pilares se acuña el término relación de esbeltez ( $W/H$ ). En donde se define al ancho y la altura como: la dimensión perpendicular a la dirección de la carga y la dirección paralela a la carga, respectivamente (Fig. 2.7).

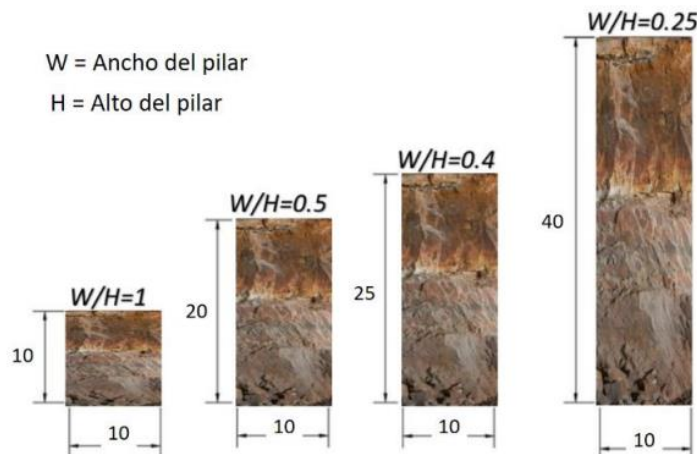


Fig. 2.7 Relación de esbeltez (Montiel E. et. al. 2018).

Si bien esta relación es funcional en pilares cuadrados, en el caso de que sean rectangulares o circulares, se puede hacer un ajuste asignando un ancho equivalente.

De acuerdo con *Esterhuizen et. al.* (2011), lo ideal es que la relación de esbeltez no sea menor de 0.8, pues a partir de ese valor la roca comienza a presentar fracturas de extensión que se propagan y el núcleo está menos confinado. No obstante, cuando esto ocurre, se puede castigar el valor de la resistencia a la compresión simple de la roca intacta con un factor de 0.7. Además, se recomienda diseñar con factores de seguridad iguales o mayores de 1.6 para estabilidad a largo plazo y de 1.3 a corto plazo.

Aunque de forma general en métodos como cuartos y pilares las relaciones de esbeltez suelen oscilar de 1 a 2 con un promedio de 1.41. Por el contrario, en *panel caving* suelen ser mayores a 2.

### 2.2.2 Efecto de escala

A medida que el pilar incrementa su volumen o tamaño representado por su relación de esbeltez, hay una disminución en su resistencia a la compresión (Fig. 2.8). Lo anterior se debe a que a mayor tamaño incrementa la cantidad de discontinuidades. La resistencia a la compresión es sensible a los defectos, lo cual se refleja en la forma de la curva esfuerzo deformación post-pico (Hudson & Harrison, 2000).

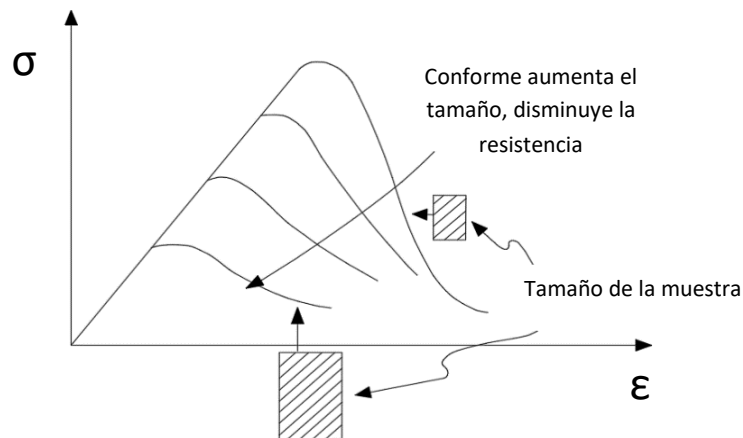


Fig. 2.8 Variación de la resistencia del pilar con el cambio de tamaño (Modificado de Hudson & Harrison, 2000).

Entre más grande sea la muestra para conseguir los parámetros, menor será el efecto de escala y en consecuencia se tendrán mejores resultados. Sin embargo, es difícil obtener esta clase de muestras. Entonces, es necesario desarrollar una relación entre la resistencia y el tamaño de la muestra cuando se extrapolan a las escalas del sitio, a esto le denominaremos escala de trabajo (Brady & Brown, 2005; Oke & Kalenchuk, K., 2017).

### 2.2.3 Efecto de forma y confinamiento

Ocurre entre pilares con el mismo volumen, pero distinta forma (relación de esbeltez). Al tratarse de un pilar más ancho el núcleo permanece intacto en un estado de esfuerzos triaxial; es decir confinado, mientras las paredes sufren la deformación producida por la dilatación. Por el contrario, un pilar esbelto no tiene este confinamiento extra, de esta forma podemos concluir



que, a mayor ancho y menor altura, mayor será la resistencia (Fig. 2.9) (Potvin & Hudyma, 1989).

De igual forma el apoyo en la base y en el techo proporciona cierto grado de confinamiento; por consiguiente, el mecanismo de falla no corresponde al de la compresión simple y daría lugar a torsiones en algunas esquinas del pilar.

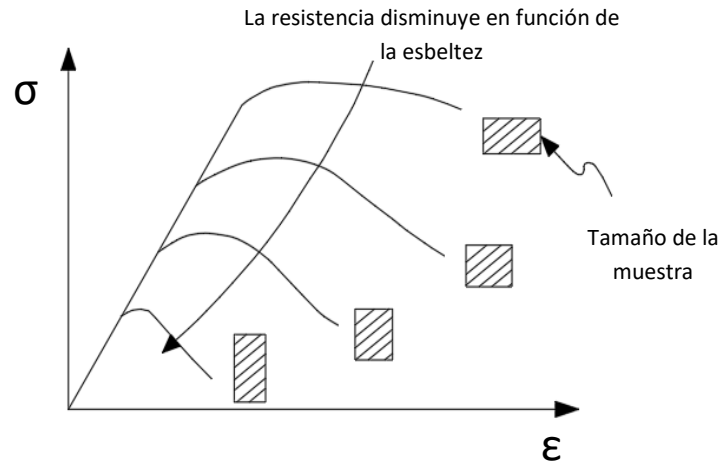


Fig. 2.9 Variación de la resistencia del pilar con el cambio de forma (Hudson & Harrison, 2000).

#### 2.2.4 Discontinuidades

Esterhuizen *et al.* (2011) demuestra la afectación de las discontinuidades angulares sobre la resistencia de los pilares. Si se trata con discontinuidades con inclinación entre 30° y 70°, que además atravesasen el núcleo del pilar, deben ser consideradas en un modelo numérico, o bien en caso de utilizar alguna fórmula empírica, necesita ser ajustada. Asimismo, hay que tomar en cuenta que entre menor sea la relación de esbeltez del pilar, mayor será la afectación por discontinuidades.

Otro estudio realizado por Montiel *et al.* (2018) demuestra que si se tienen discontinuidades en los contactos del pilar (techo y piso) de 30°, el modelo no genera tracciones en las esquinas y hay una concentración de esfuerzos en el mismo, llevándolo a comportarse como una probeta. Igualmente, concluyen que en presencia de estratificaciones y discontinuidades la resistencia disminuye de manera significativa.

#### 2.2.5 Comportamiento de pilares

Para estimar las dimensiones de los pilares, es necesario considerar sus posibles mecanismos de falla, ya que esto podrá afectar en su desempeño estructural y vida útil. Brady & Brown (2005) y Montiel E. *et al.* (2018) los describen como (Fig. 2.10):

- Descostramiento/desprendimiento* de la roca en pilares de roca masiva, es un estrechamiento del pilar (*spalling*) en forma de reloj de arena. La degradación ocurre de modo progresivo.
- Falla por corte* en macizos fracturados con baja relación de esbeltez, es una falla extensa y un gran volumen del pilar se ve afectado, ocurre en planos de debilidad del pilar.
- Es un estado en donde hay grandes esfuerzos actuantes sobre el pilar, desencadenando *fisuras o fallas por tensión*. Generalmente siguen planos de debilidad.

- d) Cuando el pilar es atravesado por estructuras inclinadas que exceden al ángulo de fricción, mecánicamente se encuentran en un estado de *falla de control estructural*.
- e) En pilares con foliación, esquistosidad o discontinuidades paralelas al eje de carga se tiene una *falla controlada por la estructura* y se asocia falla por pandeo.

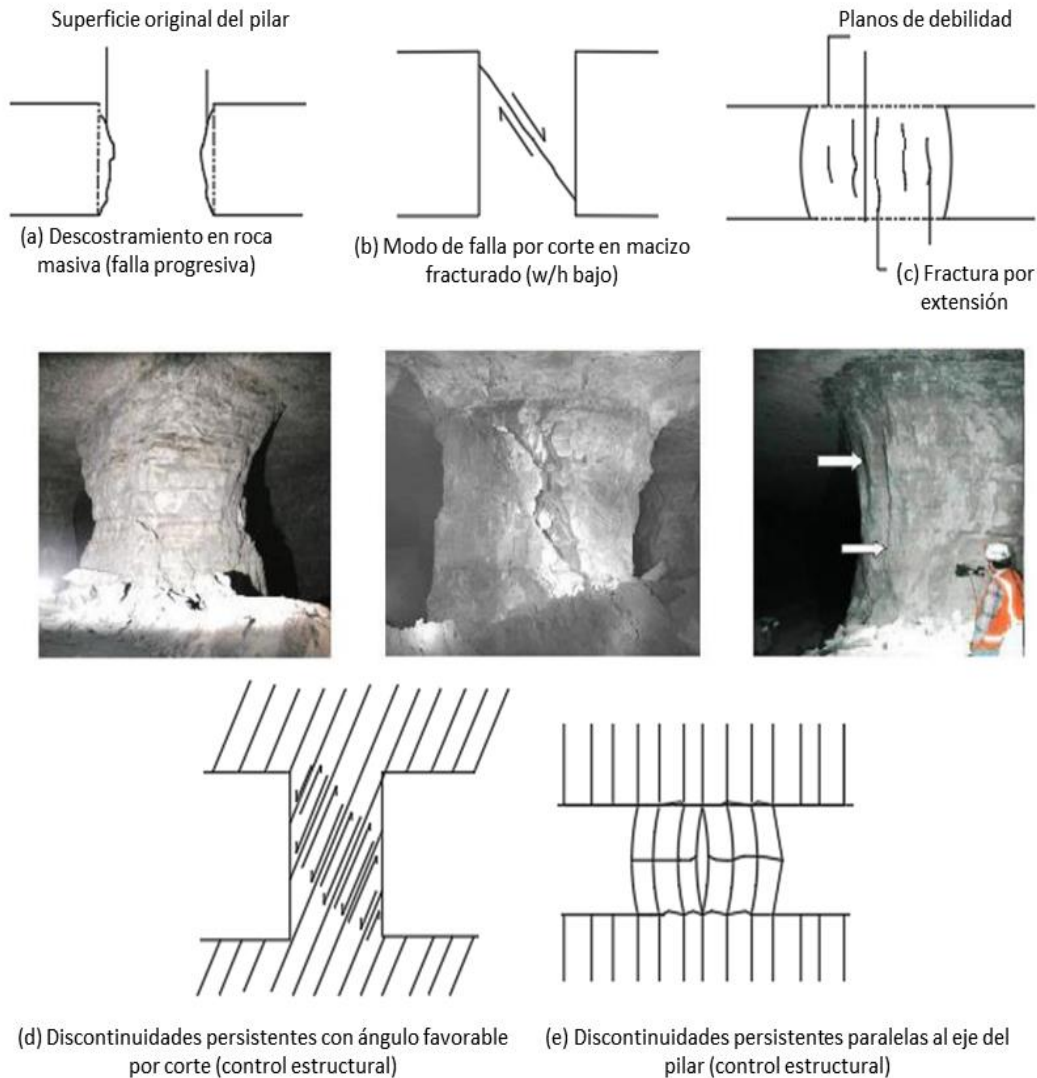


Fig. 2.10 Modo de falla de control y progresiva en pilares (Modificado de Brady & Brown, 2005; Montiel E. et. al. 2018; Esterhuizen et. al. 2011).

### 2.2.6 Análisis de esfuerzos en pilares

La trayectoria de esfuerzos en los pilares actuará de acuerdo con el esfuerzo medio (que está en función del área excavada) y de la concentración de esfuerzos, la cual a su vez depende de la forma del pilar (Hoek & Brown, 1985). Además de otros factores como esfuerzos *in-situ*, efectos geológicos (fallas y discontinuidades), relación espacial entre pilares y redistribución de esfuerzos debido al proceso de minado (Fig. 2.11). Esto último genera un aumento de carga sobre los pilares conforme mayor cantidad de material sea extraído (*stress abutment*), no se debe olvidar que estos esfuerzos no siempre son verticales, en ocasiones tienen algún ángulo de inclinación (Lunder, 1994).

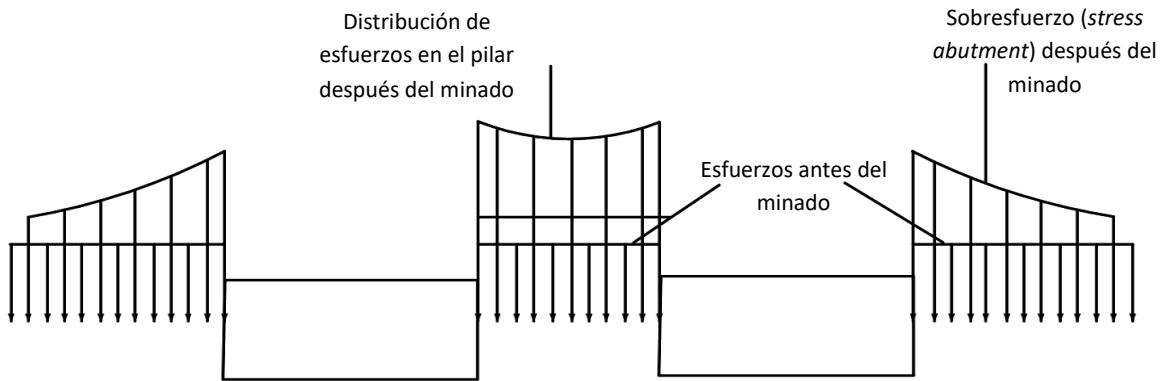


Fig. 2.11 Redistribución de esfuerzos durante el minado (Modificado de Brady & Brown, 2005).

Aunque hay diversas formas de obtener el esfuerzo de pilares, hay dos que destacan, teoría de áreas tributarias y métodos numéricos.

La teoría de áreas tributarias es adecuada para arreglos de pilares extensos y de dimensiones geométricas similares. De acuerdo con Lunder (1994) sus hipótesis pierden validez en depósitos irregulares e inclinados, a profundidades variables, patrones de minado irregulares, en los bordes del rebaje y en campos de esfuerzos triaxiales complejos. Esta teoría se basa en aplicar la carga de toda la columna de roca por encima del pilar en un área determinada (Fig. 2.12). De esto se obtiene la Ecuación (2.2).

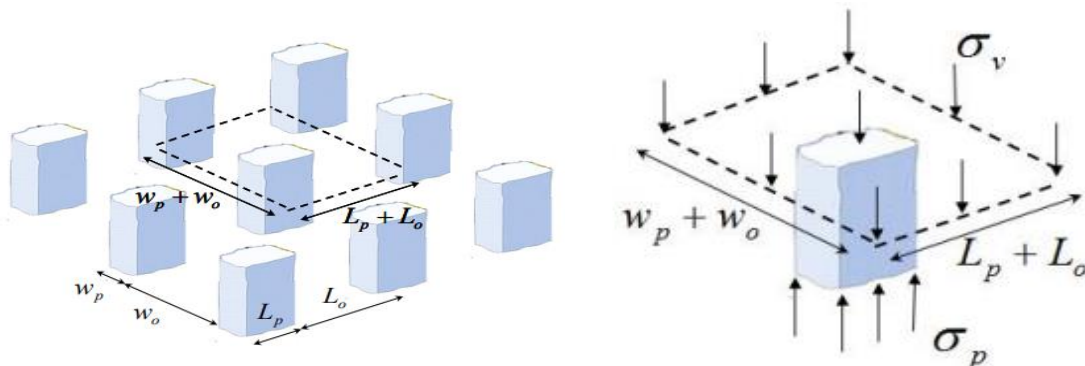


Fig. 2.12 Esfuerzos medios en pilares verticales de acuerdo con la teoría de áreas tributarias (Yrarrazaval Herrera, 2013).

$$\sigma_p = \sigma_v \frac{(W_p + W_o)(L_p + L_o)}{W_p L_p} \quad (2.2)$$

Donde  $\sigma_p$  es la carga del pilar;  $\sigma_v$  esfuerzo vertical *in-situ*;  $W_p$  ancho del pilar;  $L_p$  es el largo del pilar;  $W_o$  ancho de la excavación y  $L_o$  es el largo de la excavación.

Si bien la teoría de áreas tributarias es ampliamente usada, tiene limitaciones para calcular el esfuerzo real que recibirá el pilar. Esto ocurre por varias razones: omite la redistribución de esfuerzos por el minado; toma en cuenta toda la carga litostática que, solo puede resultar correcto en zonas superficiales; tampoco considera la geología estructural del sitio y únicamente considera carga axial.

Los modelos numéricos sirven para determinar los esfuerzos en los pilares, pero también en los túneles de extracción y para cuantificar el *stress abutment*. En la Fig. 2.13 se observa un modelo numérico tridimensional para evaluar la carga transmitida a pilares sometidos a *caving*. La envoltura de material extraído se muestra en color café, debajo de ella está el material quebrado y por arriba se encuentran las concentraciones máximas de esfuerzos.

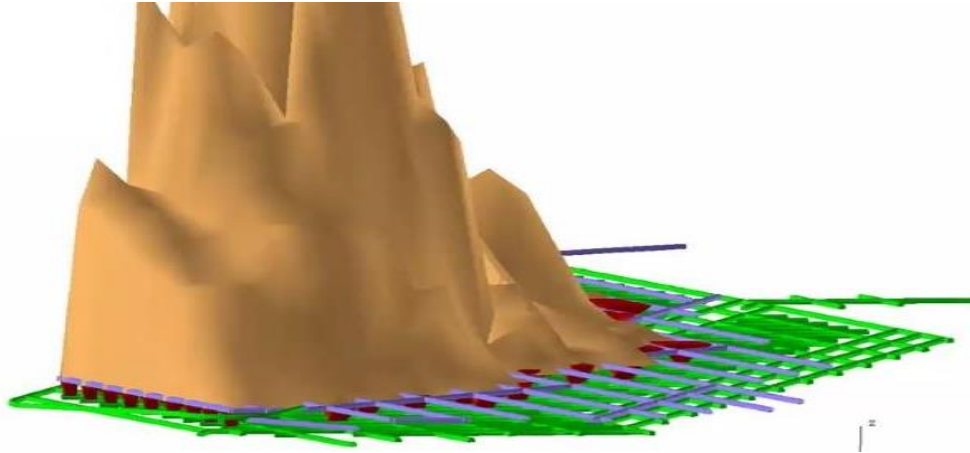


Fig. 2.13 Modelo tridimensional de hundimiento para determinar los esfuerzos transmitidos a pilares (Montiel E., 2020).

De acuerdo con Suorineni *et. al.* (2011), las cargas inclinadas afectan considerablemente la resistencia de los pilares. Por lo tanto, se vuelve transcendental conocer la orientación e inclinación de las cargas (*plunge*), para ello sugiere realizar mediciones directas en campo, observaciones en perforaciones subterráneas, así como modelos numéricos y análisis de sensibilidad.

## 2.3 Métodos de diseño y análisis de pilares

### 2.3.1 Fórmulas empíricas para el diseño de pilares

Muchos métodos de análisis se basan en ecuaciones empíricas (Tabla 2.1 y Tabla 2.2) que parten de una base estadística de observaciones. Las dos principales limitaciones son: 1) al formular las ecuaciones mediante una base de datos, estas solo pueden usarse en condiciones similares y 2) se suele representar al pilar como si fuera una probeta en carga puramente axial, lo cual en realidad ocurre si el pilar está separado del techo y piso. A partir de eso, se escalan los parámetros de resistencia de una probeta al macizo y en algunas ocasiones se considera la calidad geotécnica.

Actualmente el diseño de pilares en obras subterráneas sigue siendo empírico, complementado por modelos numéricos cuando faltan datos o las condiciones geotécnicas son demasiado complejas. Las fórmulas empíricas tienen una estructura general que se puede observar en la Ecuación (2.3).

$$S_p = S_0 \left( A + B \left( \frac{W^\alpha}{H^\beta} \right) \right) \quad (2.3)$$

En donde  $S_p$  es la resistencia del pilar (MPa);  $S_0$  es la constante relacionada con el tipo de roca (MPa);  $W$  es el ancho del pilar;  $H$  es la altura del pilar y  $A, B, \alpha, \beta$  son constantes del ajuste de datos empíricos.

### 2.3.1.1 Fórmulas de escala

El planteamiento parte de considerar que a mayor volumen del pilar hay menor resistencia. Las fórmulas usuales de esta clase se muestran en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Fórmulas de escala.

Autor	Fórmulas	Tipo de roca
Hedley & Grant (1972)	$S_p = 0.578 \times UCS \times \frac{W^{0.5}}{H^{0.75}}$	Carbón
Salamon & Munro (1967)	$S_p = 9.115 \times \left( \frac{W^{0.5}}{H^{0.66}} \right)$	Carbón
Laubscher (1990)	$S_p = RMS \times \frac{W^{0.5}}{H^{0.75}}$	-
González (2006)	$S_p = UCS \times e^{\frac{RMR-100}{20}} \times \frac{W^{0.46}}{H^{0.75}}$	Mármol
Sheorey (1987)	$S_p = 0.27 \times UCS \times \frac{1}{H^{0.36}} + \frac{H}{160} \times \left( \frac{W}{H} - 1 \right)$	Carbón

### 2.3.1.2 Fórmulas de efecto forma

Este tipo de fórmulas considera pilares con misma relación de esbeltez y con tamaños similares tendrán una resistencia parecida. Algunas de las fórmulas en este rubro son las que se mencionan en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2 Fórmulas de efecto forma.

Autor	Fórmulas	Tipo de roca
Obert & Duvall (1967)	$S_p = UCS \times \left( 0.778 + 0.222 \times \frac{W}{H} \right)$	Carbón
Bieniawski (1975)	$S_p = UCS \times \left( 0.64 + 0.36 \times \frac{W}{H} \right)$	Carbón
Sjoberg (1992)	$S_p = 0.308 \times UCS \times \left( 0.778 + 0.222 \times \frac{W}{H} \right)$	Limestone
Krauland & Soder (1987)	$S_p = 0.354 \times UCS \times \left( 0.778 + 0.222 \times \frac{W}{H} \right)$	Limestone/Skarn
Lunder (1994)	$S_p = 0.44 \times UCS \times (0.68 + 0.52 \times k)$ $k = \tan \left[ \arccos \left( \frac{1 - C_{pav}}{1 + C_{pav}} \right) \right]$ $C_{pav} = 0.46 \times \left[ \log \left( \frac{W}{H} + 0.75 \right) \right]^{1.4 / W/H}$	Roca dura

### 2.3.2 Métodos numéricos para el análisis de cargas inclinadas en pilares

Estos tienen un especial uso cuando se trata del análisis de situaciones complejas. En el caso particular de cargas inclinadas, estudios recientes como los efectuados por Jessu & Spearing (2018), han demostrado que su mayor resistencia se encuentra cuando son sometidos a carga axial y disminuye si aumenta la carga cortante. En la Fig. 2.14 se representa como 0° la inclinación del pilar con respecto a la horizontal, en esa posición la carga sería axial, las cargas

inclinadas se obtendrían al inclinar el pilar a 10°, 20°, 30° y 40°. De los resultados se ve una disminución en la resistencia generada primero por la inclinación de la carga y segundo por la reducción en la relación de esbeltez.

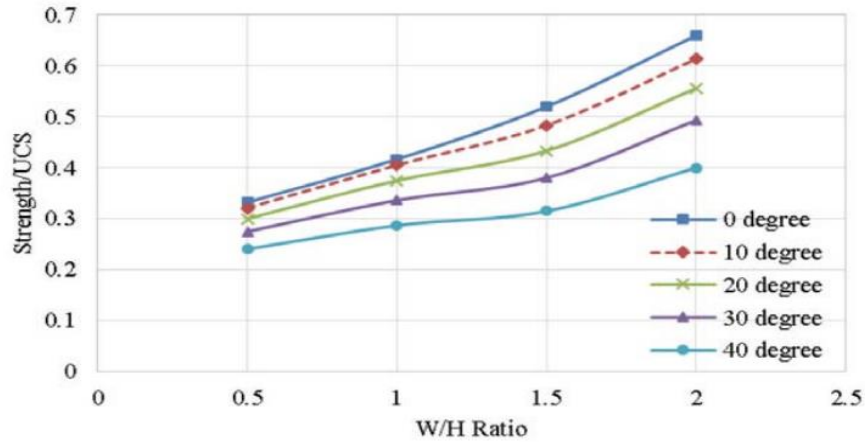


Fig. 2.14 Resistencia de pilares a diferentes inclinaciones (Jessu & Spearing, 2018).

Jessu & Spearing, 2018 demostraron que en pilares cuadrados conforme aumentaba su relación de esbeltez, también lo hacía su resistencia. Asimismo, en los rectangulares el incremento de la relación longitud (L) entre el ancho (W) beneficia la resistencia para valores mayores a 1.5. Además, el mecanismo de falla predominante en pilares inclinados esbeltos es la falla frágil y una vez que el núcleo del pilar está comprometido es posible el estallido de roca.

Mientras que otros estudios realizados por Hedley *et. al.* (1984) (citado por Suorineni *et. al.*, 2011, pg. 141), muestran que el factor de seguridad cae de forma drástica si la carga recibida es inclinada, esto provocó estallidos de pilares en la mina de Quirke (Fig. 2.15). De igual forma, Suorineni *et. al.* (2011) encontró que los cuerpos tabulares son afectados por cargas inclinadas, las cuales llevan a fallas asimétricas causadas por la combinación de esfuerzos cortantes y normales, resultando en factores más bajos de lo previsto. Por consiguiente, a compresión axial los pilares tienen su máxima resistencia, aparte de eso, el no considerar la carga inclinada tiene implicaciones importantes, como pérdidas completas de niveles de extracción.

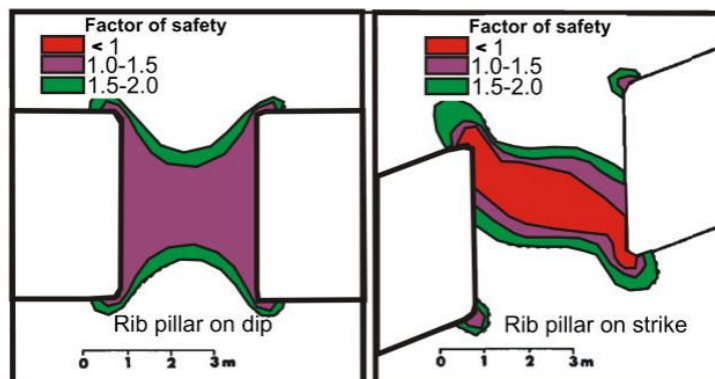


Fig. 2.15 Factor de seguridad de pilar sin y con carga inclinada (Suorineni *et. al.*, 2011).

## 2.4 Voladura

Es una técnica aplicable para la extracción de roca donde los medios mecánicos no son rentables. Es ajustable a cualquier método de explotación, civil o minero, donde sea necesaria la movilización de tierra mediante el uso de explosivos (sustancias capaces de reaccionar de forma exotérmica con formación de gases a muy alta presión).

La implementación consiste en perforar la roca por percusión o roto percusión hasta dejar una cavidad de forma cilíndrica, barreno (Fig. 2.17(b)). Posteriormente se colocará una carga explosiva que, por medio de su detonación transmite la energía necesaria para la fragmentación del macizo rocoso (Bernaola Alonso *et. al.*, 2013).

El mecanismo de fractura comienza cuando el explosivo se encuentra confinado dentro de un área pequeña en el barreno y es detonado. Es decir, el explosivo es calentado o impactado con el fin de incitar la reacción química de descomposición, liberando una onda de choque a alta presión y temperatura, debido a la generación/expansión de gases.

En la primera etapa, la onda de choque se propaga por el macizo rocoso de manera paralela al plano del barreno a velocidades de 2500 a 6000 m/s, causando una compresión lateral en la roca. Lo anterior ensancha el diámetro del barreno por rotura plástica, además de formar micro fisuras de tipo radial (Fig. 2.16 (a)). La presión lateral de choque seguirá avanzando a través del macizo rocoso hasta disiparse por completo o bien llegar a una cara libre, ahí al cambiar de medio se reflejará la componente radial de compresión de vuelta al barreno, produciendo sobre la roca un esfuerzo de tensión (Fig. 2.16 (b)). Este efecto terminará de triturar la roca creando más grietas.

La segunda etapa es más lenta, pero una vez que la onda de choque rompe el macizo, los gases formados que están en expansión, penetran por las fisuras abriéndolas y desprendiendo el material hacia la cara libre tal como se observa en la Fig. 2.16 (b).

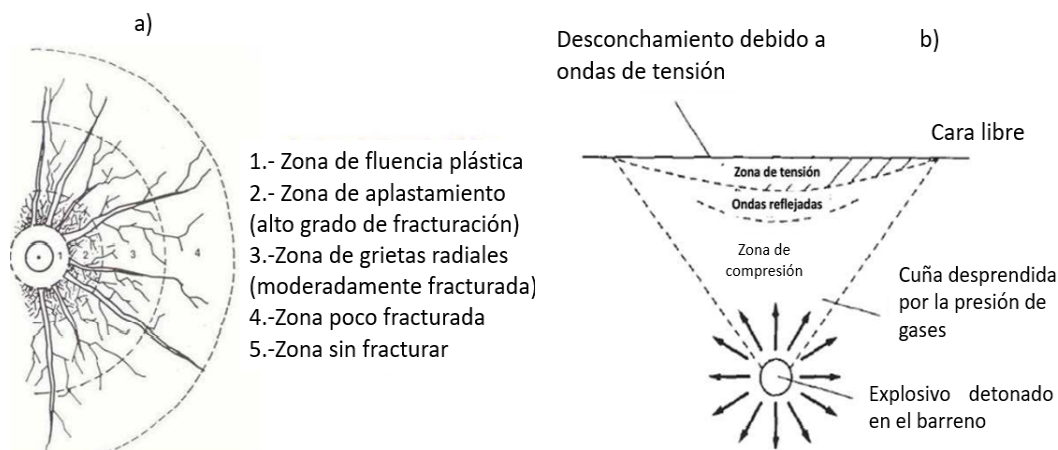


Fig. 2.16 a) Tipos de fisuras en las proximidades del barreno y b) Agrietamiento debido a la tensión generada por la onda reflejada (Modificada de Bernaola Alonso *et. al.*, 2013).

Un solo barreno no es capaz de fragmentar una sección completa de la obra, así que usualmente se perforan una serie de barrenos con una relación geométrica entre sí (plantilla), la Fig. 2.17(a) es un ejemplo de una plantilla utilizada para excavar una sección de túnel.

Las plantillas determinan el grado de fragmentación de la roca para su movilización; por lo tanto, es necesario determinar los siguientes elementos: 1) el espaciamiento, distancia lateral entre centros de barrenos; 2) el Bordo, distancia entre filas de barrenos con respecto a la cara libre y 3) el tipo de cuña, en obras subterráneas no hay una cara libre por la inclinación de los barrenos; por ende, para que la energía de la voladura no se disipe en el macizo es imprescindible crear una. Lo anterior se consigue haciendo un acomodo de barrenos vacíos al centro de la plantilla, los cuales funcionan como una cara libre, a esto se le conoce como cuña y se puede observar en color rojo en la Fig. 2.17(a).

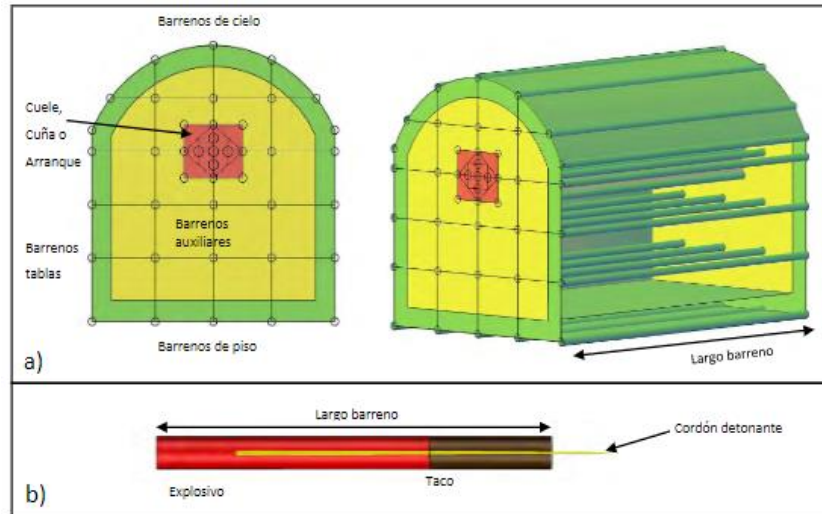


Fig. 2.17 a) Geometría de plantilla de barrenación y b) configuración de un barreno (González, 2016).

Al usar explosivo es inevitable dañar el macizo rocoso circundante, debido a la propagación de la onda de choque. No obstante, se pueden utilizar técnicas para mitigar el daño, una de las más usuales es la voladura de contorno (Fig. 2.18). Esta consiste en delimitar una superficie de contorno con barrenos en la periferia del túnel, los barrenos estarán cargados con poco explosivo a fin de formar una fisura que aisle la roca a excavar del resto del macizo. Si la detonación de los barrenos de contorno es unos milisegundos antes de la voladura recibe el nombre de voladura de precorte. Por el contrario, al realizarse en simultáneo o poco después se denomina voladura de postcorte.

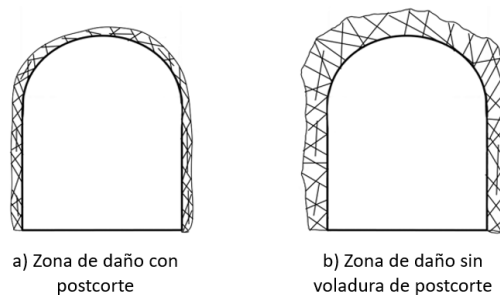


Fig. 2.18 Zona de daño con y sin postcorte.

Las ventajas de la voladura como método de excavación son: versatilidad en cuanto a tipos de roca y secciones mineras, adaptabilidad a otros trabajos (exploración, drenaje, explotación, sostenimiento, etc.) y poca inversión inicial. Los inconvenientes son: daños al macizo rocoso



circundante aún con el uso de precorte o postcorte, perfiles irregulares y generación de vibraciones que afecten zonas urbanas, edificios e incluso otras estructuras subterráneas (López Jimeno, 1997).

### 2.4.1 Métodos numéricos para pilares dañados por voladura

Es complejo cuantificar en campo el daño debido a la voladura, así como el efecto que tendrá al deteriorar el macizo. Sin embargo, diversos autores han optado por los métodos numéricos para estudiar dicho efecto. Como el estudio realizado por Jessu *et. al.* (2018) donde analizó el efecto de daño por voladura en la resistencia de pilares de roca utilizando FLAC<sup>3D</sup>. Ellos propusieron un modelo tridimensional de un pilar con un modelo bilineal basado en el criterio de falla Mohr-Coulumb, mientras que en el techo y el piso se impuso un modelo elástico. Para simular el daño se introdujo en la malla una zona lateral con el mismo modelo bilineal, aunque con propiedades alteradas por el factor de daño  $D$  del criterio de Hoek & Brown (Fig. 2.19 (a)), esto se hizo mediante las equivalencias entre el criterio de Hoek & Brown y Mohr-Coulomb.

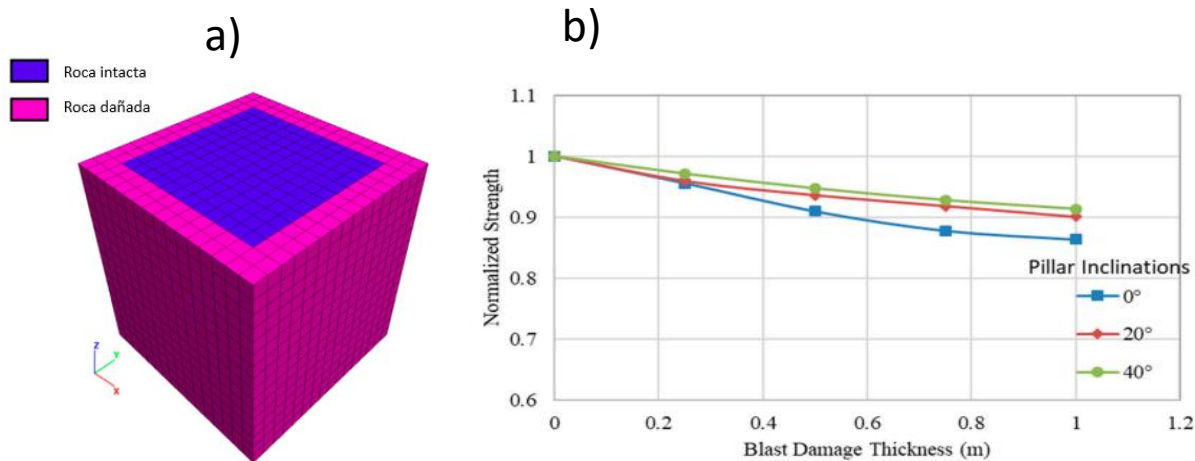


Fig. 2.19 a) Modelo del pilar con núcleo de roca masiva y roca dañada en los costados y b) Efecto del daño por voladura en pilares inclinados variando el grosor de la voladura (Jessu *et. al.*, 2018).

Los resultados del estudio se muestran en la Fig. 2.19 (b), estos demostraron que al aumentar el grosor de las paredes dañadas con un factor de daño constante  $D=0.5$ , la resistencia de un pilar con relación de esbeltez de 1.5 disminuye. También que al inclinar el pilar la resistencia en magnitud es menor a la de un pilar horizontal, aunque estos son menos susceptibles al daño por voladura, pues esta no disminuye tanto en porcentaje. Cabe mencionar que en la Fig. 2.19 (b) se normalizó con respecto a la resistencia sin daño de cada prueba.

Además, se señaló que, para roca de buena calidad con daño la resistencia puede disminuir hasta un 27% si la relación de esbeltez es mayor a uno. De igual forma, la falla de los modelos con daño comenzaba más allá de la zona dañada por voladura resultando en una reducción del núcleo y en consecuencia pérdida de resistencia. En cambio, los pilares con relación de esbeltez de 0.5 tienen la misma resistencia, porque la falla con o sin daño ocurre desde el centro. En conclusión, el daño es un parámetro necesario en cualquier diseño para obras con voladuras, ya que esto podría mejorar la seguridad de la mina, la estabilidad y ayudar a mantener la rentabilidad.

## Capítulo 3 Marco teórico

### 3.1 Modelado numérico

Un modelo es la aproximación a la realidad por medio del lenguaje matemático. El cual simula las características de un sistema (dominio), así como el efecto que producen las alteraciones dentro del mismo. Esta aproximación busca abstraer un problema de forma simplificada para obtener una solución precisa y sistemática. Por tal motivo, es necesario conocer las propiedades del dominio y probar su validez con evidencia del comportamiento real. De esta manera definimos las etapas que constituyen el planteamiento de un modelo:

- 1) *Planteamiento del dominio o sistema físico de análisis;*
- 2) *Formulación de un modelo matemático* que corresponda al problema físico con suposiciones apropiadas y validado, es decir, el modelo debe ser congruente con el sistema;
- 3) *Simulación y verificación del modelo;*
- 4) *Predicción e interpretación de los resultados* que den soporte al problema.

El planteamiento de modelos en ingeniería geotécnica se hace a través de la mecánica del medio continuo, esta resuelve problemas de cálculo tenso-deformacional en medios sólidos. La solución de estos problemas está condicionada bajo los esquemas de la mecánica, por lo tanto, tiene que cumplir con: **las ecuaciones de equilibrio; compatibilidad de deformaciones y desplazamientos; leyes constitutivas del material** (relación esfuerzo deformación) **y condiciones de frontera** (desplazamiento y fuerza). Estas últimas se incluyen dentro de las ecuaciones de equilibrio y de leyes constitutivas.

#### 3.1.1 Ecuaciones de equilibrio

El análisis espacial de fuerzas dentro de un sólido continuo se realiza por medio del concepto de esfuerzo, este es una cantidad ficticia con dirección y magnitud. Los estados de esfuerzos o campos de esfuerzos que actúan en un cuerpo se representan mediante tensores de Cauchy  $t=n\sigma=n_j \sigma_{ij}$  como se ve en la Ecuación (3.1). Dicho tensor es el valor límite de la relación de una fuerza actuando en un elemento diferencial de superficie (Fig. 3.1) (Sánchez, 2018).

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

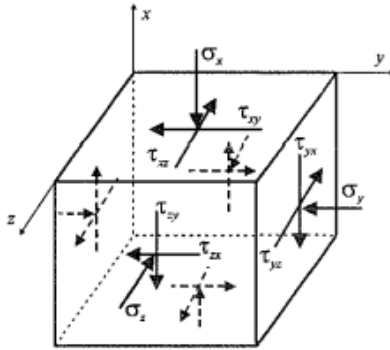


Fig. 3.1 Elemento diferencial en una base ortonormal (Potts & Zdravkvoic, 1999).

Las componentes de un campo de esfuerzos ( $\sigma_{ij}$ ) se pueden relacionar con las componentes de fuerza interna ( $F_i$ ) y con las fuerzas de superficie ( $T_i$ ). Para lograrlo se necesita satisfacer las condiciones de equilibrio, tanto al interior del cuerpo como en el contorno, lo anterior se hace por medio de consideraciones estáticas o dinámicas (Sánchez, 2018). Así, un campo de esfuerzo estáticamente admisible necesita cumplir con las condiciones de equilibrio Ecuación (3.2), siempre que se desprecien las fuerzas de cuerpos (a excepción del peso propio) y efectos de inercia (Timoshenko & Goodier, 1951 citado por Potts & Zdravkvoic, 1999, p. 5).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \gamma &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

En la ecuación anterior el peso ( $\gamma$ ) actúa en dirección  $z$ , los esfuerzos de compresión son positivos, el equilibrio se encuentra en términos de esfuerzos totales y se satisface el equilibrio de las condiciones de frontera (tensiones y reacciones).

### 3.1.2 Compatibilidad de deformaciones y desplazamientos

La deformación se define como el movimiento relativo de partículas de un medio en un entorno diferencial. Además, esta se puede conocer mediante los vectores que conforman al campo de desplazamientos completo, mismos que llevan a la configuración deformada. No obstante, este campo se relaciona con movimiento rígidos (traslacionales y rotacionales) y de forma. En el caso de movimientos rígidos el cuerpo sólo se desplaza, no así en la deformación, en donde si hay un cambio en la forma del cuerpo. Para su análisis se vuelve importante separar ambos conceptos.

Las condiciones de compatibilidad desde el punto de vista físico implican que, al momento de ocurrir una deformación no se genere una condición de incompatibilidad. O sea, no exista traslape de la materia ni discontinuidades. Como ejemplo de lo anterior se observa la Fig. 3.2 (Potts & Zdravkvoic, 1999).

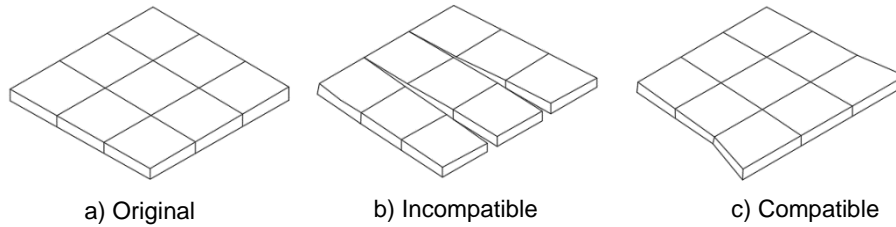


Fig. 3.2 Modos de deformación (Potts & Zdravkvoic, 1999).

La compatibilidad se puede expresar de forma matemática partiendo de la definición de deformación. Podemos entonces considerar un elemento diferencial (de un medio continuo) que sufre una deformación, definida bajo las funciones continuas de desplazamiento “ $u$ ”, “ $v$ ” y “ $w$ ” en la dirección “ $x$ ”, “ $y$ ” y “ $z$ ” respectivamente (Ecuación (3.3)), asumiendo el signo positivo para la compresión y teoría de pequeñas deformaciones (deformaciones infinitesimales).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -\frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = -\frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_{zz} = -\frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}; \gamma_{yz} = -\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \gamma_{xz} = -\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.3)$$

En donde la primera parte de la ecuación son componentes de deformación extensión-compresión o normales ( $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ ) y el resto son deformaciones de corte ( $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ ). A partir de lo anterior, se observa que las deformaciones ( $\varepsilon_{ij}$ ) representan un sistema de seis ecuaciones diferenciales parciales en función de 3 desplazamientos ( $u_i$ ); en consecuencia, no son independientes una de otra. Es posible demostrar que en un campo de desplazamientos compatibles todos los componentes de la deformación deben existir y ser continuos. Igualmente, es necesario que el campo de desplazamientos cumpla con las especificaciones impuestas en las fronteras (Potts & Zdravkvoic, 1999).

### 3.1.3 Leyes constitutivas

Si combinamos las ecuaciones de equilibrio (3.2) y de compatibilidad (3.3), se tiene un total de 15 incógnitas (6 esfuerzos, 6 de deformaciones y 3 de desplazamiento) y 9 ecuaciones (equilibrio y compatibilidad). Para resolver el sistema es necesario el uso de 6 ecuaciones más que son provistas de las relaciones constitutivas.

La descripción en términos de esfuerzos y deformaciones de un sólido se puede hacer mediante sus leyes constitutivas, con ello se puede formar una relación entre el equilibrio ( $T_i, F_i, \sigma_{ij}$ ) y la compatibilidad ( $u_i, \varepsilon_{ij}$ ). En la Fig. 3.3 se establecen las interrelaciones entre las variables involucradas en problemas tenso-deformacionales en medios sólidos.

Las leyes constitutivas dependen de la composición del material, así como de las condiciones a las que esté sujeto. Usualmente se obtienen de forma experimental con pruebas que determinan las respuestas del medio, conocidos como parámetros mecánicos (cantidades físicas medibles). Es posible expresar el comportamiento del material con la Ecuación (3.4).

$$\Delta\sigma = D\Delta\varepsilon \quad (3.4)$$

Donde  $\Delta\sigma$  son los incrementos de esfuerzos;  $D$  es la matriz que tiene las propiedades del material geotécnico y  $\Delta\varepsilon$  representa los incrementos de deformaciones.

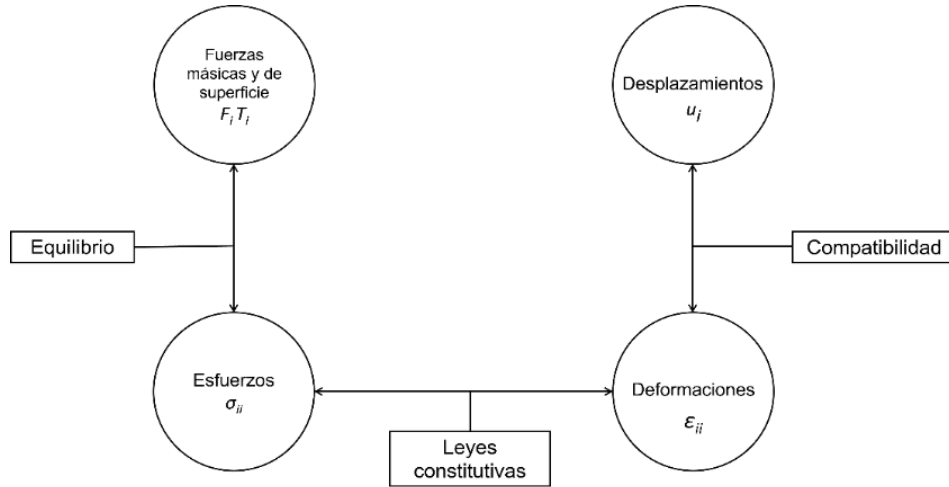


Fig. 3.3 Interrelación entre variables para la solución de un problema de mecánica de sólidos (Sánchez, 2018).

### 3.2 Modelado en la geotecnia

Como hemos visto la respuesta de un medio sólido se deriva de principios básicos de deformación, leyes de movimiento y ecuaciones constitutivas. Por ende, también en el uso de magnitudes físicas (esfuerzos, cantidad de movimiento o energía) manejadas en el límite infinitesimal. Resultando en un conjunto de ecuaciones diferenciales que tienen diversas familias como solución; por tanto, se tiene que recurrir a los métodos numéricos para aproximar la solución a esta clase de problemas (Montiel E., 2020).

Los métodos numéricos son importantes herramientas de cálculo tenso-deformacional que permiten obtener soluciones en tres o dos (con hipótesis como deformación plana) dimensiones. Cada uno de estos tiene limitaciones, ventajas y desventajas, motivo por el cual la selección del método dependerá de su entendimiento, la conceptualización del fenómeno físico, la escala, características del terreno, proceso de carga y geometría. De manera general los métodos numéricos se pueden clasificar según el medio que representan (Fig. 3.4), ya sea continuo o discontinuo (Sánchez, 2018).

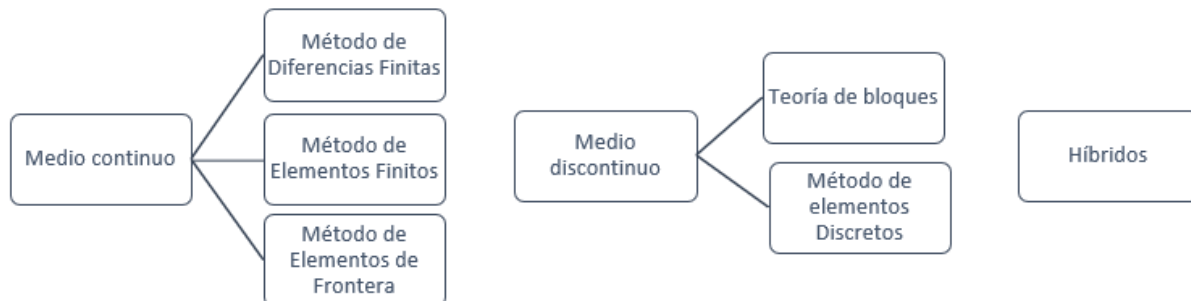


Fig. 3.4 Clasificación de métodos numéricos en la geotecnia (Modificado de Guzmán, 2017).

Se asume que los suelos son medios homogéneos, continuos e isótropos; susceptibles a colapsar por falla de la masa de suelo. Mientras que, las rocas pueden ser consideradas de forma a priori como un medio discontinuo, heterogéneo y anisótropo, ya que tiene fallas, cuñas y bloques resultado de la intersección de discontinuidades. Sin embargo, hay complejas zonas de transición entre roca y suelo (roca suave/suelo duro) donde es complejo discernir sobre el tipo de modelo (continuo o discontinuo) a utilizar e incluso dentro de un macizo rocoso dependerá de la escala de trabajo.

Entonces, se habla de tres tipos de medios continuos: continuos, discretos y equivalentes no estructurados. Si el medio es una roca masiva se puede representar como medio continuo Fig. 3.5(a). Por el contrario, si el medio cuenta con discontinuidades que rompen la compatibilidad de deformaciones, se deberá modelar como un continuo discreto a través de elementos interface que simulen el movimiento relativo entre grandes bloques Fig. 3.5(b).

Los medios no estructurados son aquellos donde no se forman bloques (Fig. 3.5(d)); es decir, suelos o rocas en transición: tobas, brechas o rocas intensamente alteradas. El medio está tan fracturado que se comporta como continuo y se conceptualiza para trabajar de forma indirecta con la gran cantidad de discontinuidades. En estos modelos es usual la caracterización con GSI, en conjunto con ensayos de laboratorio donde se asume que las propiedades obtenidas son escalables a todo el medio (Sánchez, 2018).

Finalmente, en la Fig. 3.5(c) tenemos un medio controlado por las discontinuidades. En ese caso los desplazamientos están en función de las propiedades de las discontinuidades y rotación de bloques; en consecuencia, un método numérico discontinuo o discreto es la mejor opción para modelarlo (Bobet, 2010).

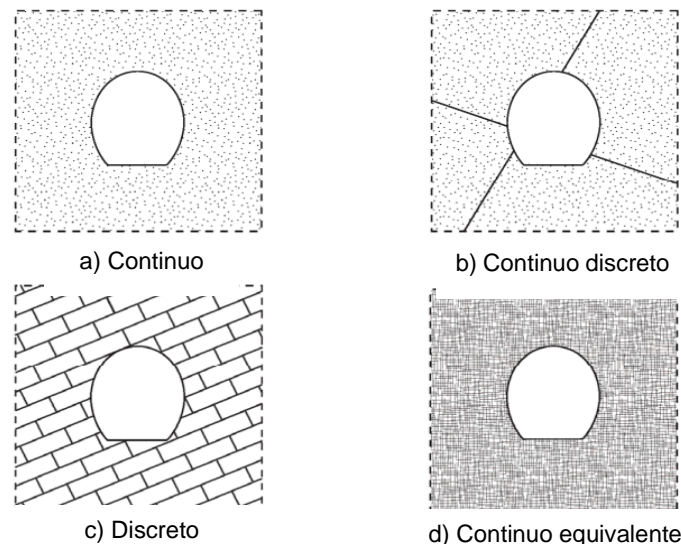


Fig. 3.5 Modelos continuos y discretos (Bobet, 2010).

### 3.3 Diferencias finitas

El método de diferencias finitas tiene como objetivo aproximar soluciones a ecuaciones diferenciales, en donde se satisfaga una relación entre varias de sus derivadas en alguna

región en el espacio y/o tiempo, junto con condiciones de frontera en los bordes del dominio. Lo anterior se consigue sustituyendo las derivadas parciales de la función objetivo (equilibrio, compatibilidad de deformaciones, desplazamiento, etc.) por ecuaciones de diferencias finitas, produciendo un sistema de ecuaciones algebraico resoluble por métodos matriciales.

### 3.3.1 Aproximación a derivadas con diferencias finitas

Las ecuaciones de diferencias finitas se basan en el concepto geométrico de la derivada. Si consideramos una función  $y=y(x)$ , definimos la derivada de  $y$  con respecto a  $x$  de la siguiente forma (Ecuación (3.5)), siendo  $y'$  la recta tangente al punto  $x_i$ .

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \quad (3.5)$$

Cuando la  $\Delta x$  es un valor finito y pequeño, pero no infinitesimal, la derivada en el punto  $x_i$  se puede obtener con la recta entre el punto de interés y uno a la izquierda ( $x_{i-1}$ ) a una distancia  $\Delta x$ , diferencia finita regresiva (Ecuación (3.6)); de igual forma se puede hacer si usamos el punto a la derecha  $x_{i+1}$  obteniendo las diferencias finitas progresivas (Ecuación (3.8)). De lo anterior se estima el promedio entre la diferencia regresiva y progresiva para la diferencia finita centrada (Ecuación (3.7)), resultando en una mejor aproximación al valor real (Fig. 3.6).

Diferencia finita regresiva  $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_r = y'_r = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \quad (3.6)$

Diferencia finita centrada  $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_c = y'_c = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.7)$

Diferencia finita progresiva  $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_p = y'_p = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \quad (3.8)$

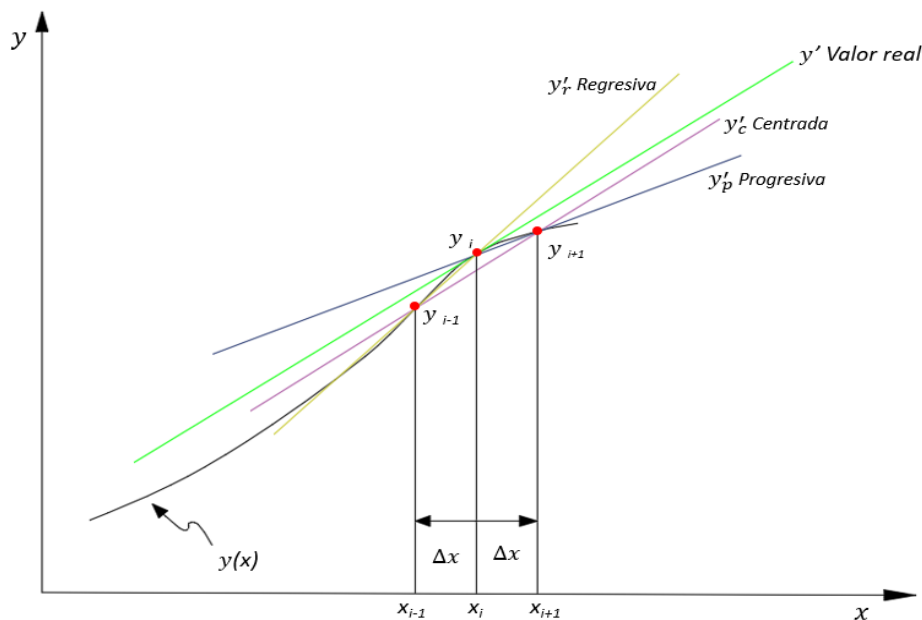


Fig. 3.6 Derivada de una función por diferencias finitas.

Las derivadas de orden superior se pueden escribir de la siguiente forma:

$$y_r'' = \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_r = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)_r \approx \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\Delta y_i - \Delta y_{i-1}}{\Delta x} \right) \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{y_i - y_{i-1} - y_{i-1} - y_{i-2}}{\Delta x} \right) = \frac{y_i - 2y_{i-1} - y_{i-2}}{\Delta x^2}$$

De manera análoga obtenemos las diferencias finitas restantes:

*Diferencia finita regresiva*  $\left( \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)_r = y_r'' = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^2} \quad (3.10)$

*Diferencia finita centrada*  $\left( \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)_c = y_c'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (3.11)$

*Diferencia finita progresiva*  $\left( \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)_p = y_p'' = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\Delta x^2} \quad (3.12)$

De forma que conforme  $\Delta x$  disminuye el cálculo se vuelve más preciso, al menos en el continuo, pero en el discreto tiene diferentes aproximaciones. Por consiguiente, si se desea cuantificar el error cometido y mejorar la precisión se podría realizar una expansión en serie de Taylor alrededor de un punto de interés; sin embargo, esto sale de los objetivos de este trabajo.

### 3.3.2 Aproximación a derivadas parciales con diferencias finitas

El método superpone una cuadrícula o malla al dominio (Fig. 3.7), en donde consideramos una función bidimensional continua. Ahí se reemplazarán las ecuaciones diferenciales parciales de las ecuaciones de campo (equilibrio, compatibilidad de deformaciones, etc.) por las fórmulas de diferencias finitas vistas en el subtema 3.3.1.

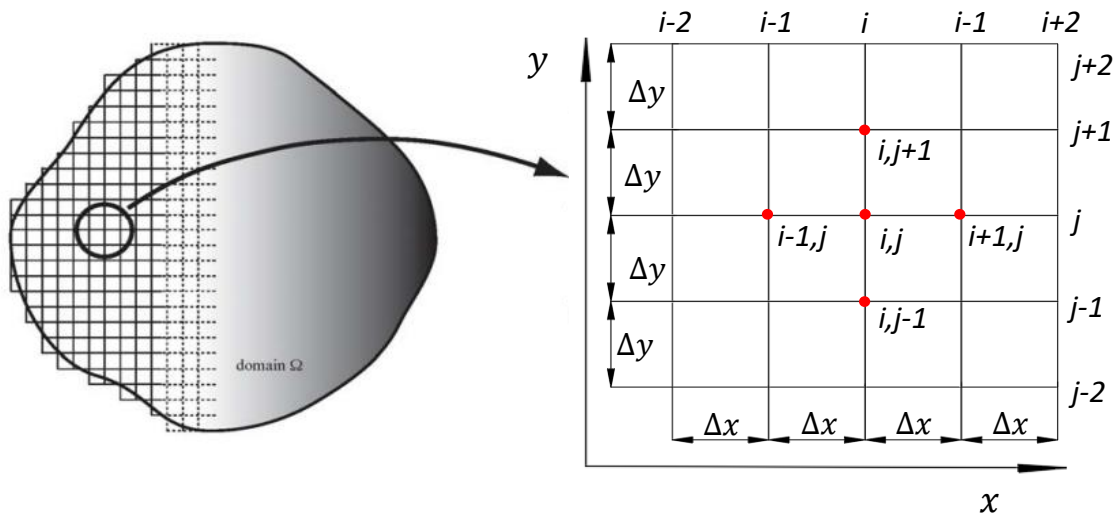


Fig. 3.7 Malla de diferencias finitas en 2D (Modificado de Bobet, 2010 y Chaves, 2010).

Con las ecuaciones de diferencias finitas centradas es posible reescribir las ecuaciones diferenciales de una función  $z$  asociadas a un dominio discretizado en una malla  $x$ - $y$  Ecuaciones (3.13), (3.15), (3.14) y (3.16). Dicha malla está compuesta por nodos que se



nombran con los índices  $i, j$ , para intervalos definidos por  $\Delta x$  y  $\Delta y$  (Fig. 3.7). De esta forma, se aproxima la solución de ecuaciones diferenciales complejas, siempre que se conozcan los valores de las fronteras del dominio.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (3.13) \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (3.14)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (3.15) \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (3.16)$$

### 3.3.3 Programa de diferencias finitas

El programa utilizado fue FLAC<sup>3D</sup> un software comercial de Itasca de diferencias finitas explícito (con esquema de marcha en el tiempo), este se basa en usar ecuaciones dinámicas de movimiento, aún para soluciones en problemas estáticos. Por lo cual se utiliza un esquema de amortiguamiento en donde se absorbe la energía cinética, permitiendo que problemas de colapso sean modelados de forma realista y eficiente. Así, el programa ofrece un esquema numérico estable incluso si el sistema modelado no lo es, tal como ocurre en materiales con comportamiento no lineal con inestabilidades físicas, por ejemplo, el colapso de un pilar.

El ciclo básico de FLAC (Fig. 3.8) se basa en emplear ecuaciones de movimiento, obteniendo nuevas velocidades y desplazamientos a partir de las fuerzas. Al tener las velocidades, se derivan las tasas de deformación, después se relacionan las deformaciones con los esfuerzos por medio de las leyes constitutivas y con los esfuerzos se calculan las fuerzas nuevamente. Lo anterior ocurre en un bucle para cada paso de tiempo “step”, que es un tiempo ficticio en problemas estáticos para resolver las ecuaciones de movimiento. El bucle se termina cuando las fuerzas nodales son cercanas a cero o bien se acaban los pasos de tiempo que se introdujeron.

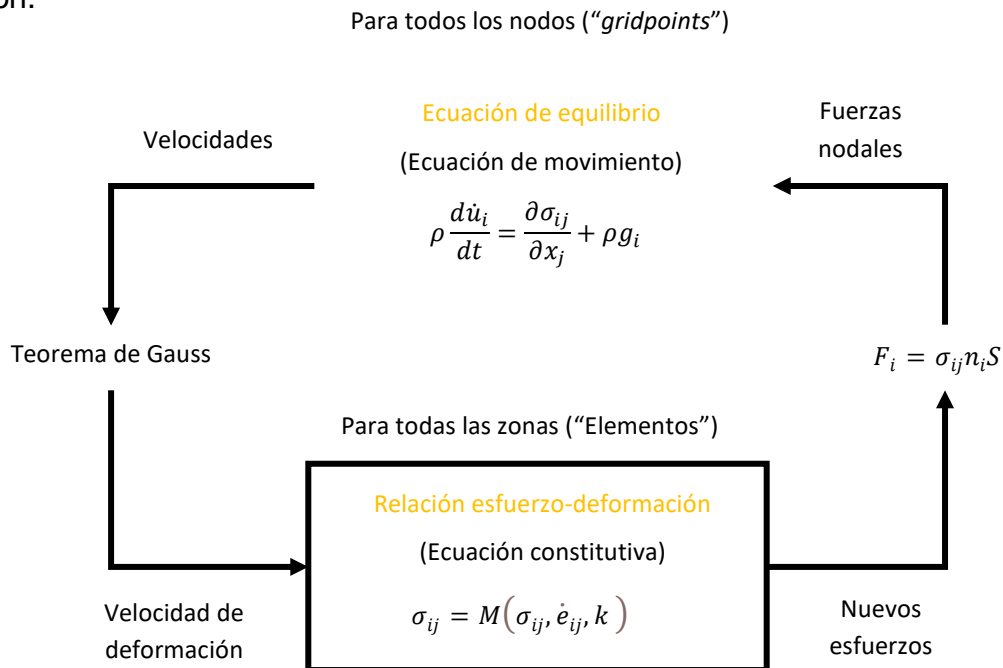


Fig. 3.8 Ciclo básico de cálculo explícito (Modificado de ITASCA, 2009).

### 3.3.3.1 Ecuaciones de equilibrio o de movimiento

A través de una analogía mecánica podemos establecer la ecuación de equilibrio o movimiento utilizada en FLAC, derivada de la segunda Ley de Newton, donde se relaciona la aceleración  $d\dot{u}/dt$ , la masa,  $m$ , además de la fuerza,  $F$ , en variación del tiempo (Ecuación (3.17)).

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d\dot{u}}{dt} \quad (3.17)$$

La Ecuación (3.17) puede ser generalizada para un cuerpo sólido continuo de la siguiente forma:

$$\rho \frac{d\dot{u}_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (3.18)$$

Donde  $\rho$  es la densidad de masa;  $t$  es el tiempo;  $\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t}$  es la derivada de la velocidad;  $x_j$  son las componentes del vector de coordenadas;  $g_i$  es la componente de aceleración gravitacional (Fuerzas másicas) y  $\sigma_{ij}$  son componentes del tensor de esfuerzos. En el caso de que la aceleración valga cero (equilibrio estático del medio), la Ecuación (3.18) toma la forma de una ecuación diferencial parcial en equilibrio.

Las condiciones de frontera deben ser impuestas como esfuerzos, velocidades (para inducir desplazamientos), fuerzas másicas e indicar el estado de esfuerzos inicial del cuerpo.

### 3.3.3.2 Relaciones esfuerzo deformación

Adicionalmente a las leyes de movimiento, un material continuo debe obedecer a una relación constitutiva (esfuerzo-deformación). Las leyes constitutivas de manera mecánica quedan definidas así (Ecuación (3.19)):

$$\sigma_{ij} = M(\sigma_{ij}, \dot{e}_{ij}, k) \quad (3.19)$$

Donde  $M$  es la forma funcional de la ley constitutiva;  $k$  es la historia de los parámetros y  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzos. La velocidad de deformación se deriva del gradiente de velocidad de la siguiente manera:

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right] \quad (3.20)$$

Donde  $\dot{e}_{ij}$  son las componentes de velocidad de deformación;  $\dot{u}_i$  y  $\dot{u}_j$  las componentes de velocidad.

El método de solución con FLAC primero reemplaza las derivadas de las ecuaciones de movimiento y esfuerzo-deformación, por ecuaciones algebraicas de diferencias finitas que relacionan variables en ubicaciones específicas de una cuadrícula. Dependiendo entonces de la ley constitutiva empleada se tendrán primero las deformaciones y después se relacionarán los esfuerzos (Fig. 3.9).

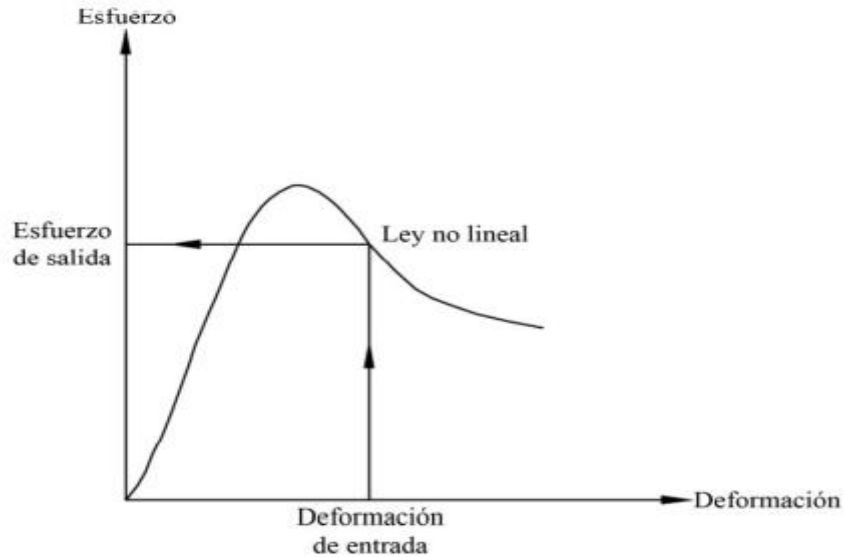


Fig. 3.9 Base del ciclo de cálculo en FLAC (Modificado de ITASCA, 2006).

Debido a que las expresiones algebraicas son totalmente explícitas, las cantidades de la derecha de la Ecuación (3.18) se conocen. Lo cual determina que cada elemento de la malla (zona y nodo) esté físicamente aislado del resto, esto para cada paso de tiempo. Lo anterior como consecuencia de que cada incremento de tiempo es tan pequeño que la información no se propaga a los elementos adyacentes en un solo incremento. Entonces las leyes de movimiento del continuo se transforman en formas discretas de la Ley de Newton en los nodos. Así, el sistema que resulta de las ecuaciones diferenciales ordinarias es aproximado numéricamente por diferencias finitas explícitas en el tiempo (ITASCA, 2009).

### 3.3.3.3 Fuerzas nodales

Con el fin de definir variaciones de velocidad en los intervalos espaciales correspondientes, el medio se discretiza (internamente) en elementos de velocidad de deformación constante, triángulos si se trata de dos dimensiones, cuyos vértices son los nodos de la malla. Cabe mencionar que un triángulo es un subelemento y al combinar dos de estos se forma un elemento (cuadrilátero).

Al tener todos los esfuerzos, las fuerzas equivalentes en los nodos son derivadas para cada triángulo. Los esfuerzos actúan como tensiones en los lados del triángulo (Fig. 3.10), mientras los nodos reciben dos contribuciones de fuerza, una por cada lado del triángulo. Aunque también reciben fuerzas de otros triángulos (subelementos), en este caso se obtiene el promedio, de forma tal que las fuerzas nodales quedan definidas como:

$$F_i = \frac{1}{2} \sigma_{ij} (n_i^{(1)} S^{(1)} + n_i^{(2)} S^{(2)}) \quad (3.21)$$

Donde  $F_i$  es la fuerza nodal;  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzos y  $n_i$  es la unidad normal a la superficie S del triángulo (Fig. 3.10).

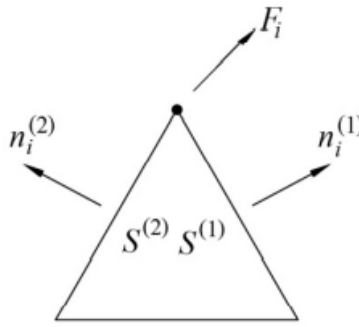


Fig. 3.10 Subelemento triangular con vectores de fuerzas nodales (Modificado de ITASCA, 2006).

En función de las fuerzas nodales obtenidas se calculan las velocidades y desplazamientos nodales, para ello se aplica una fórmula de diferencias finitas centrada (Ecuación (3.22)).

$$\dot{u}_i^{(t+\Delta t/2)} = \dot{u}_i^{(t-\Delta t/2)} + \sum F_i^{(t)} \frac{\Delta t}{m} \quad (3.22)$$

$$x_i^{(t+\Delta t)} = x_i^{(t)} + \dot{u}_i^{(t+\Delta t/2)} \Delta t$$

Luego por medio del teorema de Gauss se deducen las ecuaciones de diferencias finitas para un elemento de forma arbitraria.

$$\int_s n_i f ds = \int_A \frac{\partial y}{\partial x_i} dA \quad (3.23)$$

Donde  $\int_s$  es la integral alrededor de la frontera de la superficie cerrada;  $n_i$  es la unidad normal a la superficie,  $s$ ;  $f$  es un escalar, vector o tensor;  $x_i$  vector de posición y  $ds$  corresponde a la longitud de arco incremental y  $\int_A$  es la integral de la superficie de área,  $A$ .

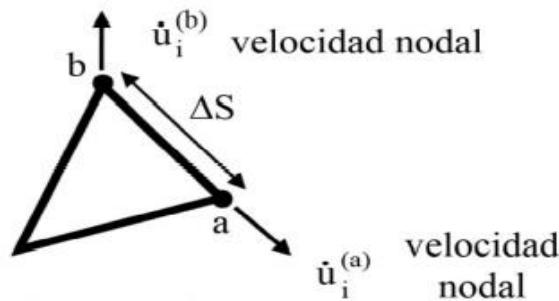


Fig. 3.11 Subelemento triangular con vectores de velocidad (Modificado de ITASCA, 2006).

La fórmula de diferencias finitas para un subelemento toma la forma de la Ecuación (3.24).

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{1}{A} \sum_s \langle f \rangle n_i \Delta s \quad (3.24)$$

De lo anterior se escriben los incrementos de deformación,  $\Delta e_{ij}$ , en términos de velocidades nodales para una zona, pasando de desplazamientos a deformaciones en las zonas. De ahí con la ley constitutiva se determinan nuevos esfuerzos y se repite el ciclo.

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \approx \frac{1}{2A} \sum_S (\dot{u}_i^{(a)} + \dot{u}_i^{(b)}) n_j \Delta s \quad (3.25)$$

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right] \Delta t$$

Recapitulando tenemos que las deformaciones y esfuerzos son calculados en las zonas de la malla, mientras las fuerzas, desplazamientos, aceleraciones y velocidades son calculadas en los nodos. De esta manera, la formulación en la rejilla numérica quedaría como en la Fig. 3.12.

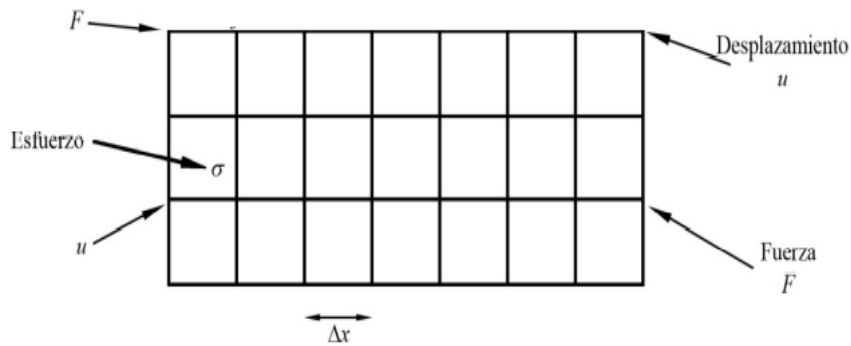


Fig. 3.12 Rejilla numérica de FLAC (Modificado de ITASCA, 2006).

### 3.3.3.4 Relajación dinámica

En la relajación dinámica de los nodos en la malla se mueve conforme a las leyes de movimiento de Newton. La aceleración de dichos nodos es proporcional a la fuerza desbalanceada (vector de fuerza nodal máximo). Entonces, para resolver problemas estáticos la vibración de los nodos debe amortiguarse, para tal efecto hay que conseguir un estado estacionario.

El estado estacionario podrá: 1) estar en equilibrio, cuando la relación entre la fuerza desbalanceada y la magnitud de la fuerza aplicada en un inicio sea aproximadamente cero o 2) cuando el material entre en fluencia plástica y se consiga un movimiento constante (fuerza desbalanceada constante). En otras palabras, en el primer caso la solución traerá al sistema a un estado de equilibrio después de un conjunto de desplazamientos o en el segundo caso se indicará el modo de la falla.

Por lo tanto, para encontrar el estado estacionario se introducen las ecuaciones de amortiguamiento (Ecuación (3.26)) a las ecuaciones de movimiento (Ecuación (3.27)).

$$F_d = -\alpha \left[ \sum F_i^{(t)} \right] \text{sign}(\dot{u}_i) \quad (3.26)$$

$$\Delta \dot{u}_i = \left[ \sum F_i - \alpha \left[ \sum F_i^{(t)} \right] \text{sign}(\dot{u}_i) \right] \frac{\Delta t}{m_n} \quad (3.27)$$

Donde la  $F_d$  es la fuerza de amortiguamiento;  $\alpha$  es una constante que vale 0.8;  $m_n$  es una masa nodal ficticia y  $sign(z)$  puede tomar valores positivos (+1) si es mayor a cero, negativo (-1), si  $z \leq 0$  el valor de  $sign$  es 0,  $\Delta t$  es el pasó virtual que ejecuta el programa y vale 1 en análisis estáticos.

### 3.3.3.5 Ventajas y desventajas

En la solución la malla se mueve con el material y los cambios en un elemento no afectan a los adyacentes en un incremento de tiempo; en resumidas cuentas, es una solución Lagrangiana actualizada explícita.

El *software* tiene las siguientes ventajas: resuelve de forma eficiente leyes no-lineales aun con grandes zonas de fluencia o de deformación; las inestabilidades físicas no producen inestabilidades numéricas; requiere poco poder computacional; puede trabajar en grandes deformaciones, desplazamientos y rotaciones sin necesitar tiempo adicional para calcular. Además, FLAC<sup>3D</sup> tiene la virtud de contar con un lenguaje de programación (*FISH*), que ofrece la posibilidad de modelar condiciones complejas o especiales.

Dentro de las desventajas se encuentran los elevados tiempos de ejecución cuando: se resuelven problemas lineales, existe un contraste grande de rigidez entre zonas o hay elementos de diferentes tamaños.

## 3.4 Criterios de rotura y GSI

Es difícil idealizar exactamente como falla una roca debido a la complejidad del proceso, ya sea en términos de la iniciación/propagación de micro fisuras o bien la ruptura estructural total. Sin embargo, se ha considerado que la causa son los esfuerzos, por esa razón se han desarrollado modelos constitutivos complejos que relacionan ambos; en otras palabras, ponen la resistencia del material en términos del esfuerzo presente al ocurrir la falla. De ahí que, las soluciones numéricas dependan en gran medida de los modelos constitutivos seleccionados. Los criterios más empleados en mecánica de rocas son los de Mohr-Coulomb y Hoek & Brown.

### 3.4.1 Mohr-Coulomb

Es un criterio donde la ecuación que define la superficie de rotura es lineal. Se basa en establecer una relación entre el esfuerzo cortante y normal en un plano de la siguiente forma  $\tau = f(\sigma)$  (Ecuación (3.28)). Se utilizan dos conceptos para definir la resistencia del material: la cohesión (la resistencia a corte de la roca sin esfuerzos normales) y el ángulo de fricción interna (dependiente del esfuerzo normal sobre el plano de rotura).

$$\tau = c + \sigma_n \tan \phi \quad (3.28)$$

Donde  $\tau$  es la resistencia a corte;  $c$  es la cohesión;  $\sigma_n$  es el esfuerzo normal y  $\phi$  es el ángulo de fricción interna. Reescribiendo la ecuación en términos de esfuerzos principales se obtiene la Ecuación (3.29).

$$\sigma_1 = \sigma_3 \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} + \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (3.29)$$

El plano y la envolvente de Mohr donde ocurre la falla se muestra en la Fig. 3.13. Los puntos por debajo de la envolvente de Mohr-Coulomb se encuentran en estado elástico (condiciones

estables), si están justo en la envolvente se encuentran equilibrio límite y los que están por encima representan condiciones que no se pueden obtener bajo carga estática (Hudson & Harrison , 2000).

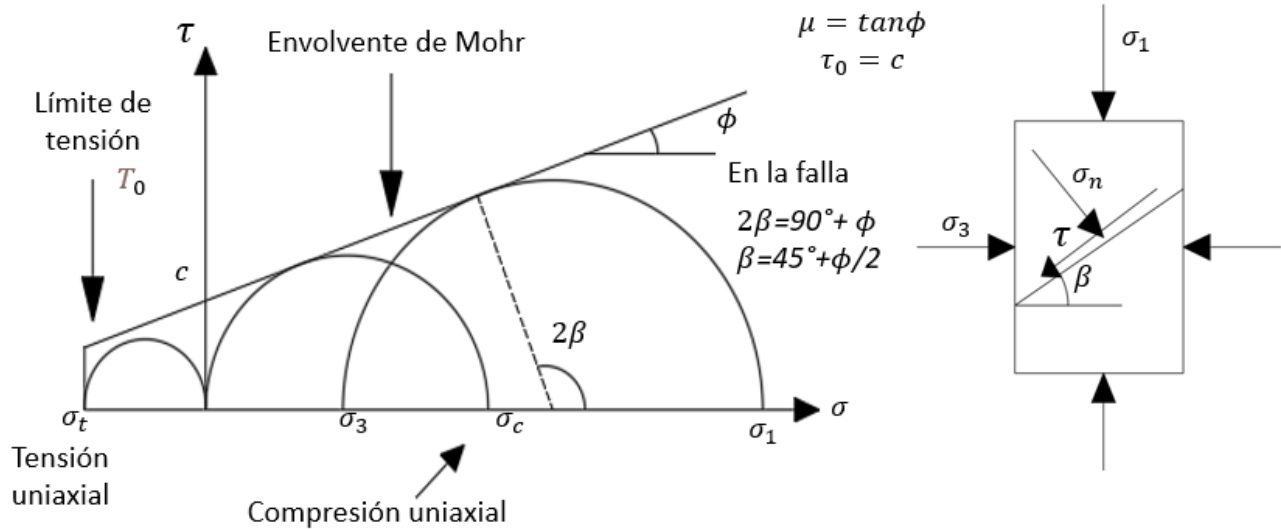


Fig. 3.13 Criterio de rotura Mohr-Coulomb (Modificado de Hudson & Harrison, 2000).

El criterio fue desarrollado para esfuerzos de compresión; por lo tanto, es usual el emplear un límite de tensión (“*tensile cut-off*”) obtenido de ensayos de laboratorio. Asimismo, el criterio es adecuado cuando el material se encuentra sometido a presiones altas de confinamiento, generando que el material falle por planos de corte. En comparación con las presiones bajas de confinamiento (como en el caso uniaxial), donde la falla ocurre por un aumento gradual en la densidad de microfisuras subparalelas al esfuerzo principal, haciendo que el criterio de fricción pierda validez (Hudson & Harrison , 2000).

### 3.4.2 Hoek & Brown

Este es un criterio que representa de forma adecuada el comportamiento de macizos rocosos con ciertos niveles de fracturamiento. Es empírico porque se basa en el ajuste estadístico de datos experimentales, supone una relación no lineal entre las componentes de esfuerzos efectivos  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  (Ecuación (3.30)).

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci} \left( m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \quad (3.30)$$

Donde  $m_b$  está definida por la Ecuación (3.31),  $s$  por la Ecuación (3.32) y  $a$  mediante la Ecuación (3.33), siendo las tres constantes del macizo rocoso.

$$m_b = m_i \exp[(GSI - 100)/(28 - 14D)] \quad (3.31)$$

$$s = \exp[(GSI - 100)/(9 - 3D)] \quad (3.32)$$

$$a = 1/2 + 1/6 (e^{-GSI/15} - e^{-20/3}) \quad (3.33)$$

Tanto  $m_i$  como  $\sigma_{ci}$  son parámetros de la roca intacta determinados por ensayos de laboratorio, a partir de análisis de regresión lineal con cinco o más pruebas triaxiales;  $\sigma_{ci}$  es la resistencia

a la compresión no confinada, establece la escala de la curva en la envolvente de resistencia para un macizo rocoso y  $m_b$  es una constante reducida del parámetro  $m_i$  en función de la calidad geotécnica del macizo.

La envolvente de falla curva se define por los parámetros del macizo rocoso  $s$  y  $a$ , el primer término representa el grado de fracturamiento en el macizo, cuando se trata con una roca intacta toman los siguientes valores  $s = 1$  y  $a = 0.5$ ; el  $GS$  es una caracterización geomecánica que permite vincular las observaciones geológicas de campo con el criterio de falla y  $D$  es un factor que depende del grado de perturbación en el macizo por el daño de voladura.

La resistencia a la compresión uniaxial se obtiene haciendo  $\sigma_3 = 0$  en la Ecuación (3.30), definiendo la Ecuación (3.34).

$$\sigma_c = \sigma_{ci} s^a \quad (3.34)$$

Mientras que la resistencia a la tensión se define como la Ecuación (3.35).

$$\sigma_t = s \sigma_{ci} / m_b \quad (3.35)$$

Podemos notar que el criterio no depende del esfuerzo principal intermedio ( $\sigma_2$ ); por ende, la envolvente de falla no es isotrópica (Fig. 3.14).

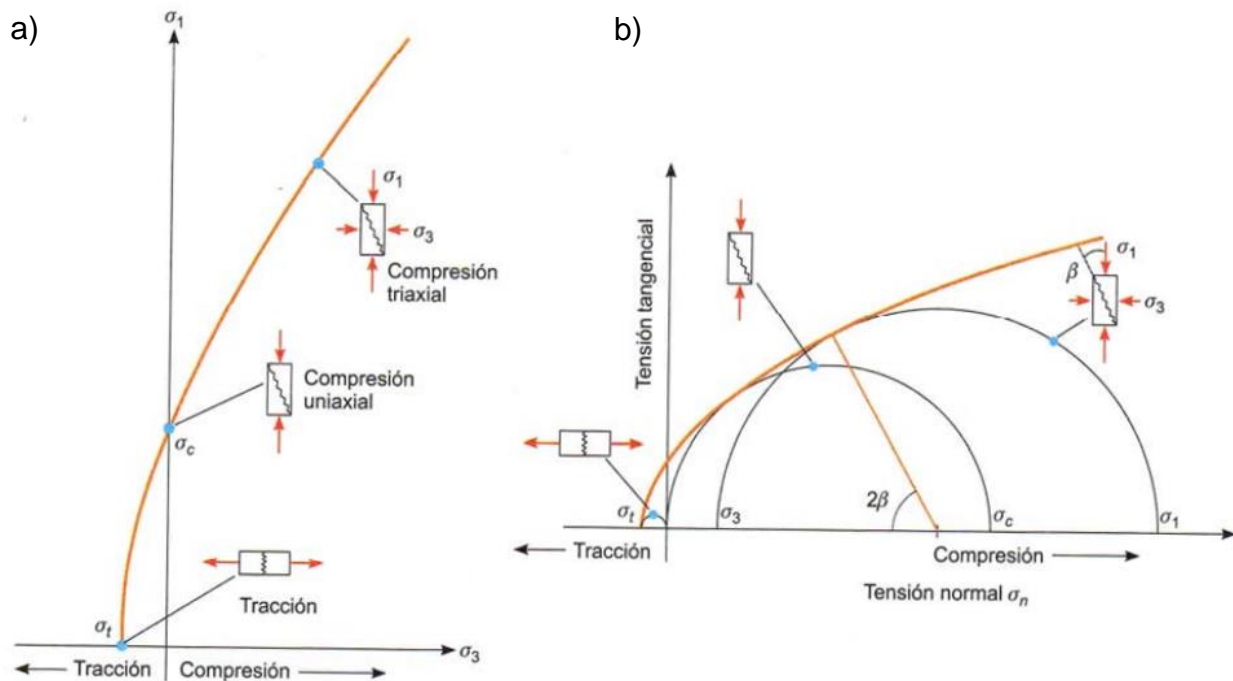


Fig. 3.14 Envolvente de rotura del criterio Hoek & Brown en función de esfuerzos principales a) esfuerzos normales y b) tangenciales (González de Vallejo et. al., 2002).

Los esfuerzos normales Ecuación (3.36) y cortantes Ecuación (3.36) pueden relacionarse con los esfuerzos principales por medio de las ecuaciones de Balmer (Hoek, et. al. 2002).

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \frac{d\sigma_1/d\sigma_3 - 1}{d\sigma_1/d\sigma_3 + 1} \quad (3.36)$$



$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sqrt{d\sigma_1/d\sigma_3}}{d\sigma_1/d\sigma_3 + 1} \quad (3.37)$$

Donde:

$$d\sigma_1/d\sigma_3 = 1 + am_b (m_b\sigma_3/\sigma_{ci} + s)^{a-1} \quad (3.38)$$

El criterio solo es aplicable para esfuerzos de confinamiento entre  $\sigma_3 = 0$  y la transición entre falla por cortante a falla dúctil. *Kaiser et. al.* (2010), discute que el criterio subestima la resistencia del macizo rocoso, al menos en el contexto de roca dura quebradiza a grandes profundidades; en otras palabras, este criterio no puede ser aplicado en estados altos de confinamiento ( $\sigma_3 > \sigma_{ci}/10$ ).

*Bewick et. al.* (2018) discute que se deben ajustar los parametros obtenidos en laboratorio y así poder usar tanto el criterio Hoek & Brown como el GSI, cuando se trate de estimar la resistencia de macisos rocosos masivos o moderadamente fracturados de roca dura, por ejemplo  $GSI \geq 65$ .

Es usual que se tenga que adaptar el criterio de rotura de Hoek & Brown a parámetros equivalentes en Mohr-Coulomb; por tanto, Hoek & Brown (2002) realizaron un equivalencia entre criterios, la cual se describe en el Anexo A.

#### 3.4.2.1 Factor de daño $D$

Al momento de realizar una excavación en un macizo rocoso, la eliminación de la roca trae consigo un alivio de esfuerzos, permitiendo que esta se relaje y se dilate. Aunque esto se puede controlar en cierta medida con un diseño eficiente (método de excavación y si es necesario instalación de refuerzo y/o soporte). Adicionalmente del alivio de esfuerzos, en el caso de la minería hay una perturbación del macizo por el daño de voladura.

Con lo anterior en mente Hoek & Brown (2002) incluyeron en su criterio de rotura generalizado un nuevo coeficiente  $D$  (factor de daño), el cual relaciona la cantidad de daño ocasionado al macizo por el procedimiento de excavación y relajación del terreno. De esta manera se consiguió una forma sencilla de considerar el daño provocado por la explosión, degradando las propiedades del macizo rocoso, dando como resultado una menor resistencia, tal como se ve en la Fig. 3.15.

El factor de daño  $D$  puede tomar valores entre 0 y 1, siendo 0 el mínimo donde no se considera ningún daño y 1 es el máximo, pues hay combinación tanto de daño como de relajación de esfuerzos. Asimismo, es común asumir que el factor  $D$  es aplicado al macizo rocoso entero, pero este resultará en un escenario demasiado conservador. Finalmente, los autores del criterio generaron la Tabla 0.1 del Anexo A como guía para el uso del factor de daño  $D$ .

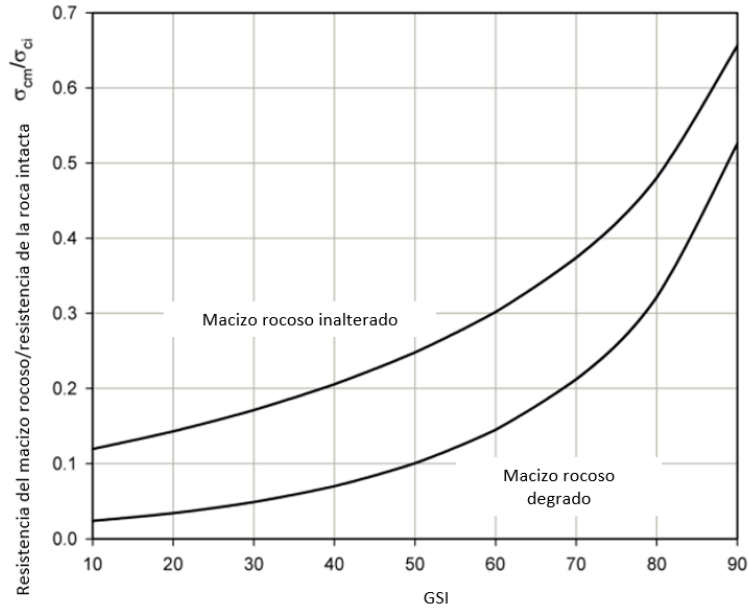


Fig. 3.15 Criterio Hoek & Brown para macizo rocoso degradado por daño de voladura y macizo rocoso inalterado (Modificado de Hoek E., 2012).

### 3.4.3 GSI

Por sus siglas en inglés “*geological strength index*” es una herramienta que sirve para recopilar información de campo e incorporarla en el criterio de rotura de Hoek & Brown. Fue diseñado para tratar con macizos rocosos compuestos por bloques angulares entrelazados y sin gran cantidad de fallas en la roca intacta, provocando que la falla sea controlada por rotación y deslizamiento de bloques.

La clasificación de GSI se basa en observaciones geológicas minuciosas y detalladas del macizo rocoso, a partir de exámenes visuales en afloramiento, excavaciones superficiales y núcleos de roca; por lo tanto, es una clasificación cualitativa. Este índice incorpora dos factores importantes en las propiedades mecánicas del macizo rocoso: la estructura; es decir, tamaño y forma de los bloques y la condición de las discontinuidades. La tabla completa para esta clasificación se encuentra en el Anexo A (Tabla 0.2).

Es aplicable en macizos rocosos homogéneos e isotrópicos debido a la gran cantidad de discontinuidades en el medio, en los cuales hay rotación y traslación de bloques entrelazados. No se puede utilizar en casos diferentes al ya mencionado, si por ejemplo las fallas son controladas por geometrías tridimensionales de la intersección de discontinuidades, será necesario realizar análisis de estabilidad donde se obtengan los factores de seguridad de bloques, cuñas o deslizamientos. Para esclarecer bajo que circunstancias es correcto su uso la Fig. 3.16 ilustra diversos casos, en donde añade que la relación entre el tamaño de los bloques y el tamaño de la estructura es importante para entender su aplicabilidad.

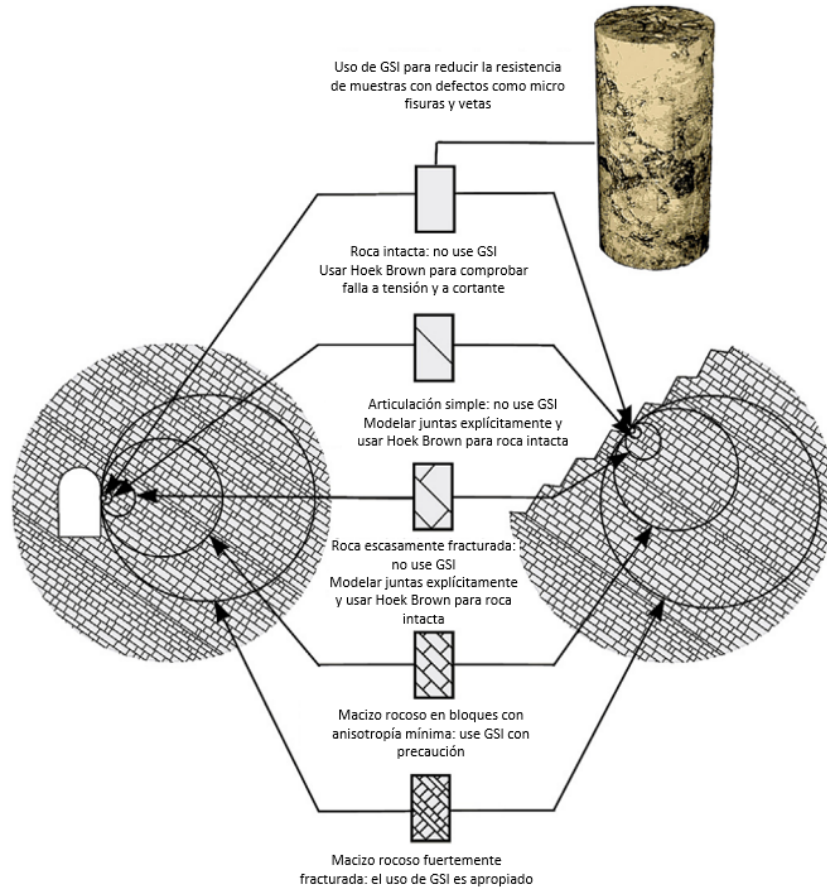


Fig. 3.16 Límites de aplicación del GSI dependiendo la escala (Modificado de Hoek & Brown, 2019).

### 3.4.4 Estimación del módulo de deformación del macizo, $E_m$

Hoek & Diederichs (2006) hicieron una amplia medición de módulos de macizos rocosos en China y Taiwán de diversos tipos de roca, de esos estudios propusieron la Ecuación (3.39) para calcular el módulo de un macizo.

$$E_{rm} = E_i \left\{ 0.02 + \frac{1 - D/2}{1 + \exp[(60 + 15D - GSI)/11]} \right\} \quad (3.39)$$

Donde  $E_i$  es el módulo de deformación de la roca en (MPa).

Hoek & Diederichs (2006) también recomiendan que cuando no se cuente con información confiable sobre el módulo de deformación de la roca intacta, se puede utilizar la Ecuación (3.40).

$$E_{rm} = 10^5 \frac{1 - D/2}{1 + \exp[(75 + 25D - GSI)/11]} \quad (3.40)$$

Los valores de límite superior predichos por estas ecuaciones se ajustan a mediciones históricas de otros macizos en varios países. Por ende, Hoek & Diederichs (2006) concluyeron que estas ecuaciones son de aplicación universal para macizos rocosos isotrópicos, siempre

que se tengan datos de GSI, RMR o Q, aunque se recomienda usar para rocas en condiciones confinadas. Asimismo, es posible considerar los efectos de afectación de daños por voladura mediante el factor  $D$ .

### 3.5 Técnica de reducción de resistencia

Esta técnica permite encontrar el factor de seguridad (F.S.) del modelo en falla con criterio de Mohr-Coulomb o Hoek & Brown. Consiste en reducir la resistencia cortante del material progresivamente hasta llevarlo a un estado de equilibrio límite. En el caso del criterio Mohr-Coulomb se reducen los parámetros  $c$  (Ecuación (3.41)) y  $\phi$  (Ecuación (3.42)).

$$c^{trial} = \frac{1}{F^{trial}} c \quad (3.41)$$

$$\phi^{trial} = \arctan\left(\frac{1}{F^{trial}} \tan\phi\right) \quad (3.42)$$

Donde  $F^{trial}$  es el factor de reducción de parámetros, entonces para estimar el F.S. se hace la relación entre la resistencia cortante real del material y la resistencia cortante reducida al momento de la falla (Dawson *et. al.*, 1999). El F.S. también se define como el factor de reducción al borde de colapso.

FLAC<sup>3D</sup> ejecuta la técnica de reducción de parámetros con un enfoque llamado “*bracketing*”, donde se busca encontrar dos estados límite uno estable y otro inestable, ambos se encuentran reduciendo o aumentando (si el material no está en equilibrio al iniciar la prueba) los parámetros de resistencia a través de una serie de simulaciones usando valores de prueba ( $F^{trial}$ ). Cuando se encuentran ambos estados, se determina la diferencia para establecer un intervalo, el cual es disminuido gradualmente hasta llevarlo a un límite de tolerancia y ahí obtener el F.S. La técnica se utiliza para Hoek & Brown mediante aproximaciones locales (cada zona en FLAC<sup>3D</sup>) al criterio de Mohr-Coulomb, una vez con los parámetros equivalentes de cohesión y cortante se hace la reducción.

Dentro de las ventajas de usar reducción de parámetros en FLAC<sup>3D</sup> encontramos: 1) siempre producirá una solución válida aún en caso de inestabilidad física, ya que se mostrará el estado de movimiento continuo que es admitido como equilibrio; 2) Un F.S.=1 corresponde a un mecanismo de fluencia, no un estado arbitrario previo a la fluencia; 3) no hay iteración en leyes constitutivas, el tensor de esfuerzos se coloca exactamente en la superficie de fluencia y 4) la superficies de falla se encuentran de forma automática.

## Capítulo 4 Metodología

Para realizar los modelos locales de los pilares se utilizó FLAC<sup>3D</sup> un *software* de Diferencias Finitas en el cual: no hay dependencia a la convergencia como sí lo hay en los Elementos Finitos, ya que siempre habrá una solución progresiva a las ecuaciones de movimiento aun cuando ocurren colapsos; ofrece la ventaja de poder usar modelos sofisticados con menor poder computacional, incluso en modelos tridimensionales y utiliza el lenguaje de programación *FISH*, que permite hacer rutinas complejas para simular de forma realista fenómenos físicos.

Para generar la malla en el *software* se usan figuras geométricas tridimensionales con divisiones en zonas de manera preestablecida (primitivas). Al aplicar las primitivas solas o en conjunto se da forma al modelo.

### 4.1 Generación del modelo por medio de primitivas

Se crearon dos tipos de pilares, el primero fue creado a partir de prismas rectangulares para métodos auto soportados y después se formaron otros con geometrías complejas reales de *panel caving*; a continuación, se describirán cada uno de ellos.

#### 4.1.1 Geometrías regulares

Por practicidad se tomará como ejemplo el pilar con relación de esbeltez de 1 con sección transversal cuadrada. Primero se formó un cubo mediante una primitiva *Brick* con dimensiones de 20 metros por lado y 16 de altura (Fig. 4.1(a)). Después, se colocó el modelo mecánico, para Hoek & Brown con características de GSI de 50,  $\sigma_{ci}$  de 75 MPa y  $m_i$  de 18, mientras que para Mohr-Coulomb se obtuvieron parámetros equivalentes.

Finalmente, se le da forma de pilar eliminando las zonas de las secciones laterales. En el ejemplo de la Fig. 4.1(b) se borraron 5 m por lado y 10 m en sentido vertical, dejando un pilar cuadrado de 10 m de ancho y 10 m de alto ( $W/H=1$ ). Este paso resulta fundamental porque el pilar debe tener tanto techo como piso que aporten confinamiento generando torsiones, de lo contrario se comportaría como una probeta a compresión simple.

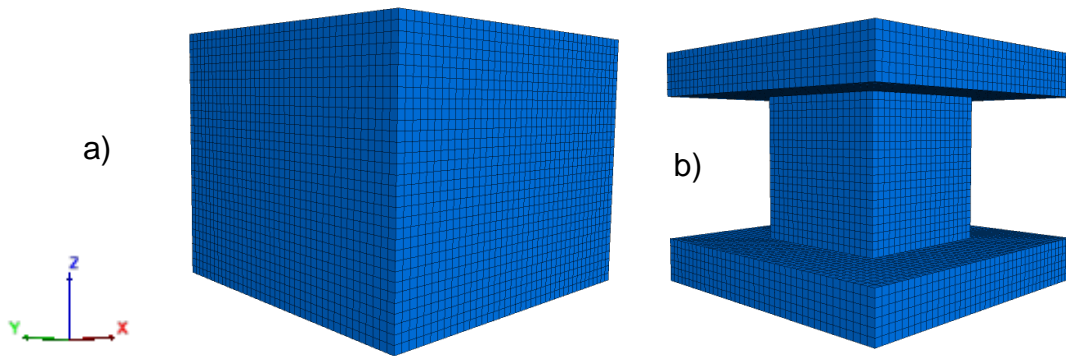


Fig. 4.1 a) Primitiva Brick y b) primitiva con forma de pilar.

Se crearon otros dos pilares cuadrados con la misma relación de esbeltez ( $W/H=1$ ) pero diferentes dimensiones, uno de 5x5 m y otro de 16x16 m. Asimismo, se generaron 3 pilares con diferentes relaciones de esbeltez para medir la influencia de cargas inclinadas, se debe mencionar que en estos últimos solo cambiaron sus alturas, conservando el mismo ancho. Las relaciones de esbeltez y dimensiones empleadas se muestran en la Fig. 4.2. Tales dimensiones son propuestas a partir de los estudios realizados por Esterhuizen *et. al.* (2011).

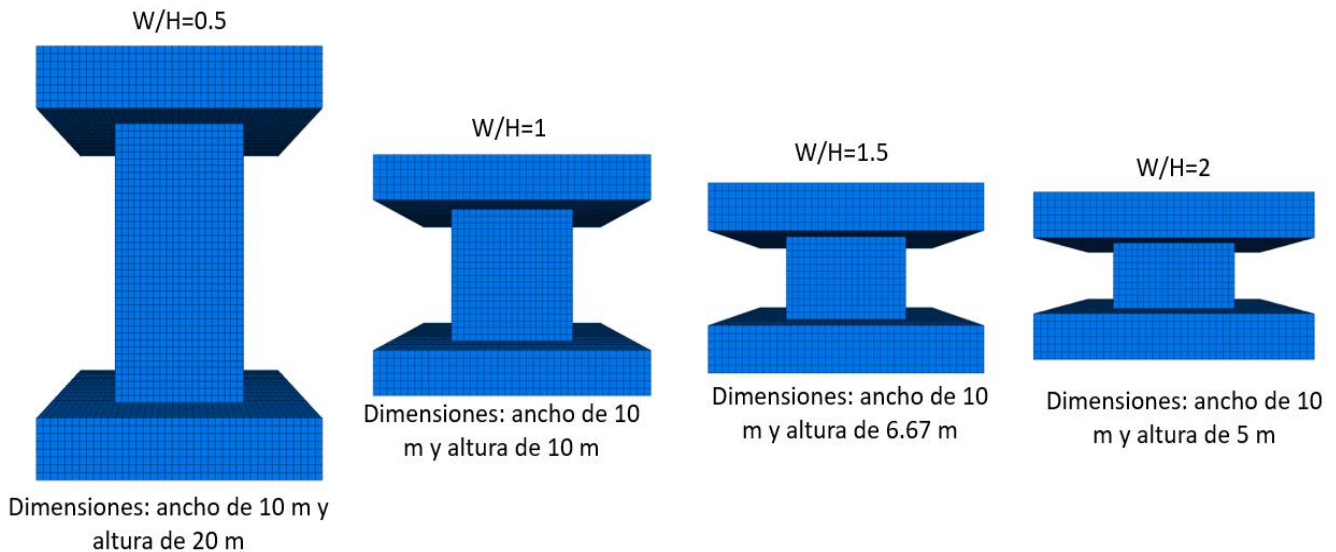


Fig. 4.2 Mallas para diferentes relaciones de esbeltez.

#### 4.1.2 Geometría de pilares de caving

Se modeló un pilar de *panel caving* con dos pares de túneles paralelos que intersecan entre sí, las dimensiones utilizadas se muestran en la Fig. 4.3 obteniendo una relación de esbeltez igual a 3. Esta malla al ser más compleja requirió el uso de varios *Brick*, *radcyl* y *radtun* como figuras primitivas para crearlos, además de la función *reflect*. Posterior a la creación de la malla se asigna el modelo constitutivo del material (Hoek & Brown), como se había mencionado anteriormente se necesita tener una calidad geotécnica media en el macizo para realizar el *caving*, así que las características de roca fueron: GSI de 50;  $\sigma_{ci}$  de 75 MPa y  $m_i$  de 18.

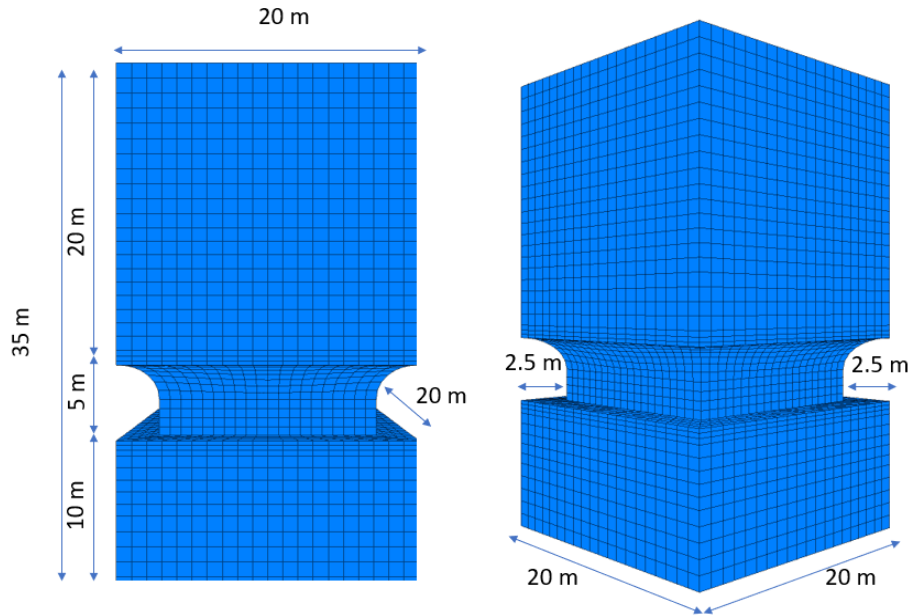


Fig. 4.3 Dimensiones del pilar del caving.

## 4.2 Condiciones de fronteras y estado inicial de esfuerzos

La condición de frontera en los bordes del techo y piso del pilar es *attach* de reflexión, esta condición simula pilares contiguos de forma sistemática alrededor del modelo, los cuales al ser vistos en planta aparentan una rejilla (Fig. 2.5). El *attach* consiste en atar los nodos o *gridpoints* de los bordes con su contra parte del otro borde. Una vez que están atados si una cara recibe alguna carga, ambos bordes reaccionarán en la misma dirección, pero diferente sentido como “efecto espejo”.

Cabe añadir que en estos modelos no es viable usar *rollers* (rodillos), pues no admitirían torsiones por las cargas inclinadas, en el subcapítulo 4.7 se hace una demostración de la diferencia entre las condiciones de frontera. También vale la pena decir que solo el piso se encuentra fijo.

Para usar el método hay que conocer cada uno de los *gridpoints* contenidos en los bordes del modelo (solo es utilizable en caras planas paralelas), en los planos  $x=0$ ,  $y=0$  y  $z=0$ . Se enumeran y se nombran los *gridpoints* en: “1” para el plano  $x=0$  en color verde claro, 2 para  $y=0$  en amarillo y 3 para  $z=0$  en color rojo (Fig. 4.4).

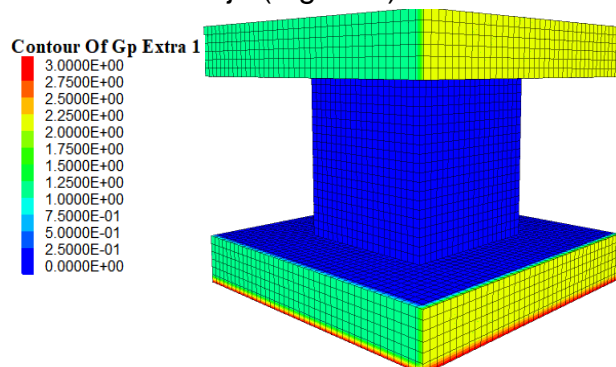


Fig. 4.4 Indicación de los gridpoints en los bordes del modelo.

Cuando se conocen los *gridpoints* en una cara se emplea una rutina *FISH* que los conecte con los *gridpoints* de su cara frontal, esto mediante un vector con el comando *attach*. Ahora bien, en la Fig. 4.5 se observa en color rosa los vectores que conectan los *gridpoints* para transmitir los cálculos; en negro están los *gridpoints* maestros (cara verde y amarilla de la Fig. 4.4), ahí se realizan los cálculos; en verde están los *gridpoints* esclavos que reciben y reflejan los cálculos en forma de espejo.

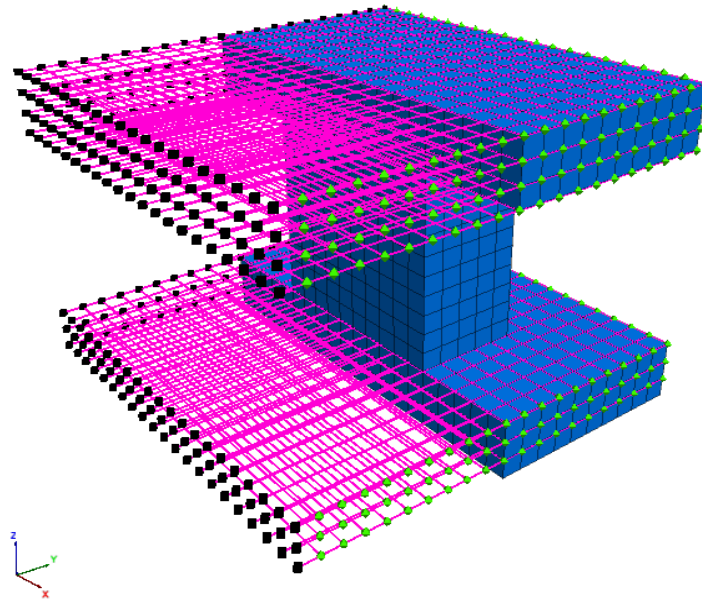


Fig. 4.5 Aplicación de la rutina *attach* de reflexión.

El estado inicial de esfuerzos fue planteado a una profundidad media para una roca con densidad de  $2600 \text{ kg/m}^3$ ,  $1 \text{ MPa}$  de esfuerzo vertical con  $k_0=1$  (Fig. 4.6). Además del *attach*, se impuso otra frontera de esfuerzos que ayuda a mantener el estado de esfuerzos inicial de  $1 \text{ MPa}$ .

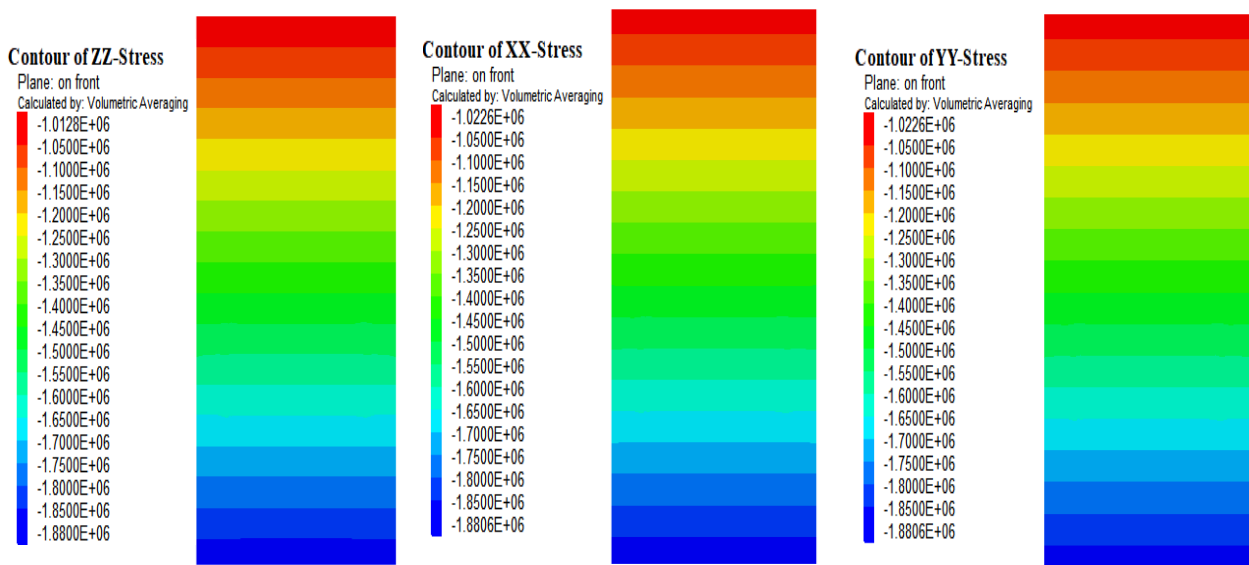


Fig. 4.6 Estado de esfuerzos en modelo de panel *caving* antes de abrir la excavación.



En el caso de *panel caving* después de establecer el estado inicial de esfuerzos el modelo fue puesto en equilibrio, ya que aquí era importante analizar la alteración de cuando se excava mediante voladura. En la Fig. 4.7 a) se tiene la fuerza desbalanceada de todo el modelo, cercana a 0 y en b) las velocidades en cero; por tanto, se indica que los modelos llegaron a un estado de equilibrio inicial con  $k_0=1$  (Fig. 4.6).

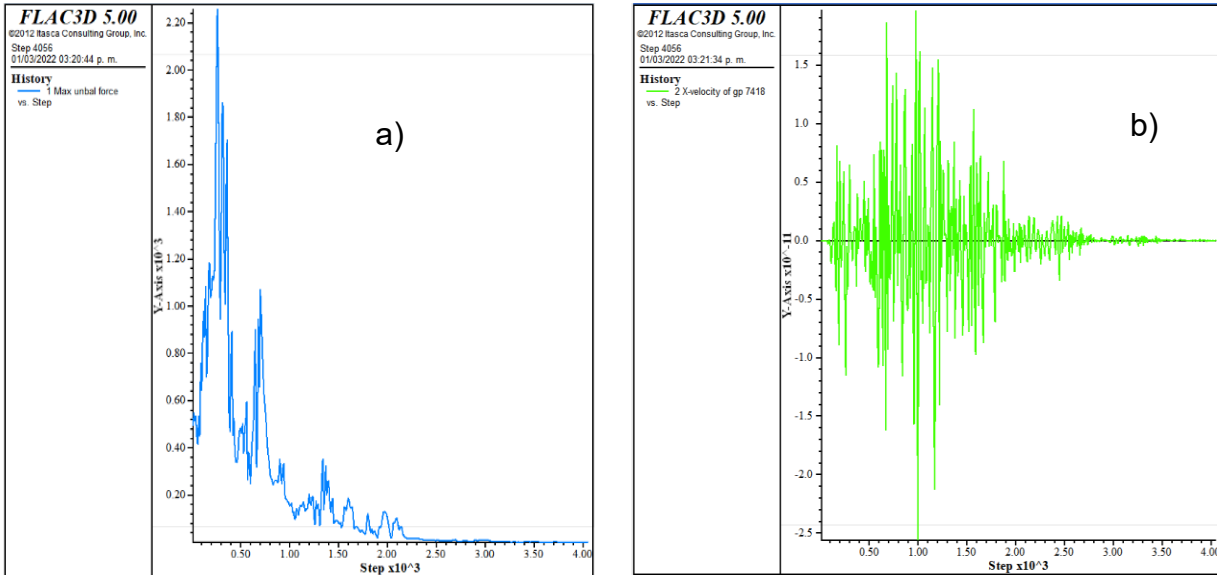


Fig. 4.7 a) Fuerza desbalanceada y b) velocidad dentro del modelo.

### 4.3 Introducción del daño de voladura y factor de seguridad

En el caso de pilares de *caving* se consideró el daño por voladura derivado de la excavación de los túneles. Como efecto de la voladura las propiedades del macizo se degradan, estas pueden obtenerse con el modelo Hoek & Brown mediante el factor de afectación  $D$ . Todas las pruebas se hicieron con corridas de daño  $D=0.7$  y  $D=1$ , la zona degradada se introdujo en la malla de forma radial adyacente a los túneles a diferentes distancias, variando desde 0 hasta 5 m (Fig. 4.8). En la figura se observa la zona dañada en color azul a diferentes distancias de afectación, mientras que la roca sin daño se muestra en color verde.

Tras abrir la excavación e introducir el daño se calculaba el factor de seguridad con la técnica de reducción de parámetros de resistencia, con la finalidad de cuantificar la afectación de la distancia y el factor de daño en los pilares. En última instancia se medía la resistencia de los pilares dañados ante cargas inclinadas o puramente axiales.

Al hacer un corte transversal en la zona más estrecha de estos pilares (justo a la mitad del túnel a 2.5 m por debajo de la bóveda), podríamos ver que conforme aumenta la distancia de afectación el área de roca sin daño (color verde) disminuye Fig. 4.9.

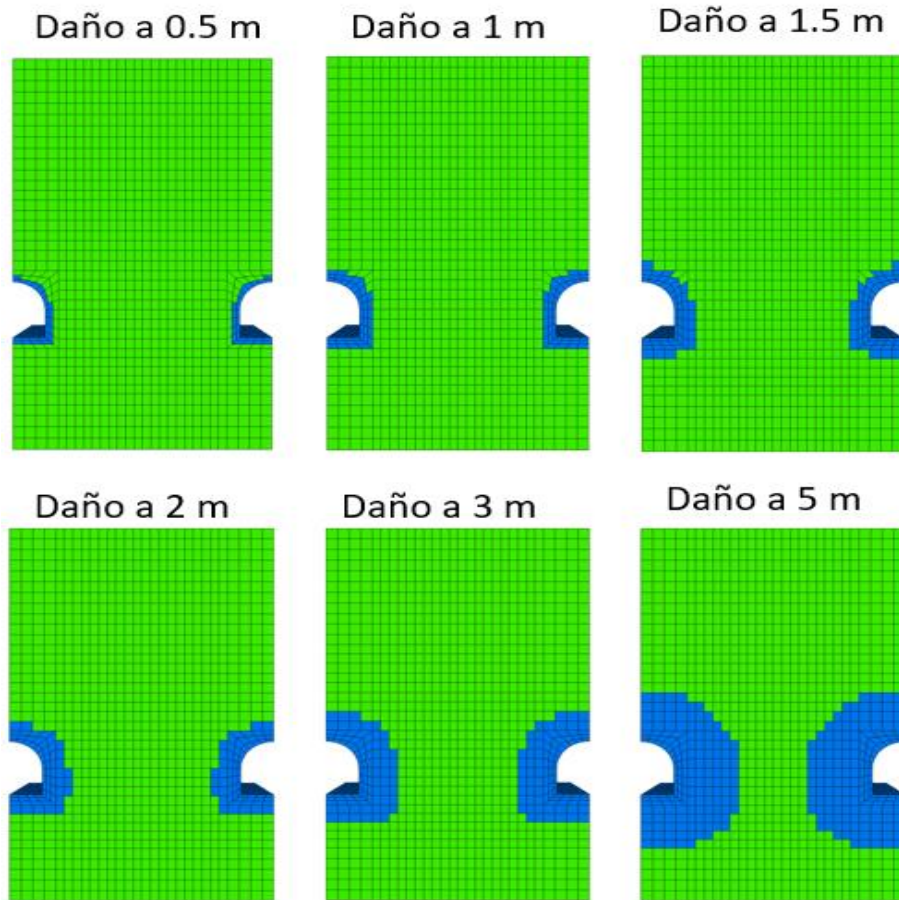


Fig. 4.8 Zona de daño por voladura en la malla de pilares de caving a diferentes distancias.

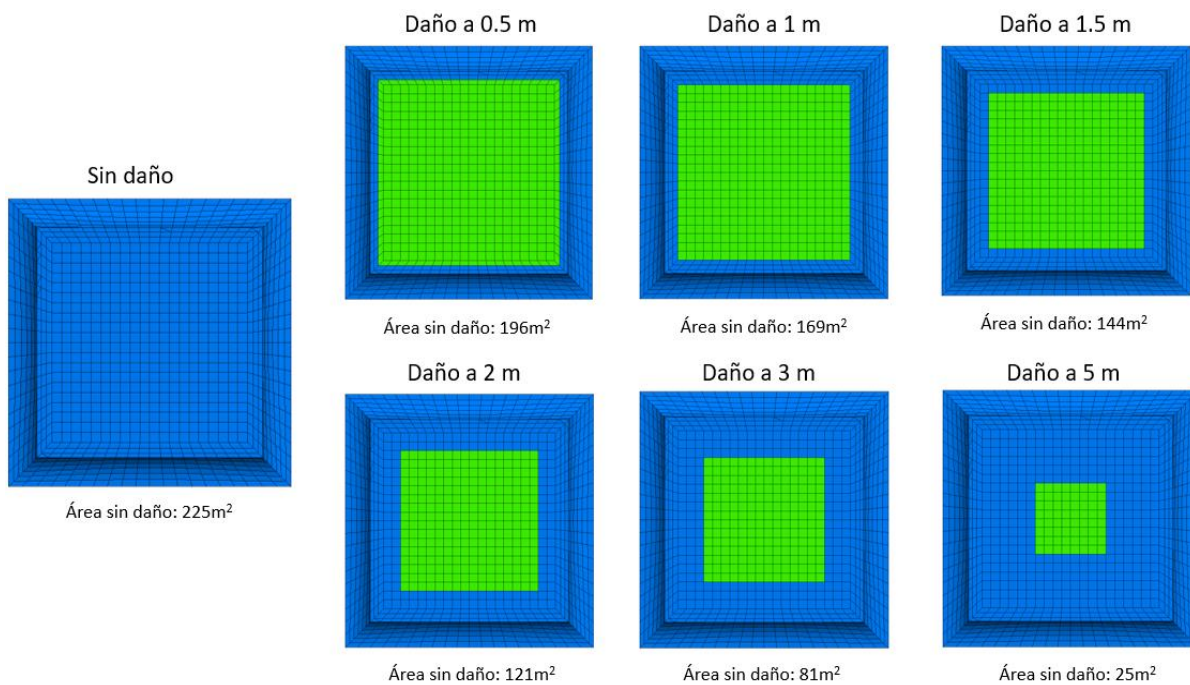


Fig. 4.9 Corte transversal de los pilares para observar el área de roca sana tras introducir la zona de daño.

#### 4.4 Incorporación de vectores para modificar las cargas inclinadas

Las pruebas tienen como objetivo encontrar la resistencia máxima de los pilares en función de la inclinación de carga, entonces es necesario hacer una prueba a deformación controlada. Sin embargo, el programa de Diferencias Finitas no admite desplazamientos de forma directa, para ello se generan vectores tridimensionales de velocidad.

Se desarrolló un criterio de velocidad que permitió modificar vectores con la misma magnitud (mismo módulo) a diferentes inclinaciones con respecto a la horizontal. Lo anterior se elaboró con base en las ecuaciones de vectores unitarios con las siguientes suposiciones: mantener el módulo del vector constante al igual que el ángulo beta; es decir, debe siempre estar contenido en un plano XZ y conocer la inclinación de la carga (*plunge*).

Suponiendo un módulo constante (propuesto) y un ángulo beta tenemos la Ecuación (4.1).

$$|\bar{e}| = \text{constante}; e_y = |\bar{e}| \cos\beta \quad (4.1)$$

$e_z$  se obtiene de la Ecuación (4.2) al calcular gamma como 90° menos el *plunge*.

$$e_z = |\bar{e}| \cos\gamma \quad (4.2)$$

Con lo anterior ya se puede conocer  $e_x$  (Ecuación (4.3)).

$$|\bar{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}; e_x^2 = |\bar{e}|^2 - e_y^2 - e_z^2; e_x = \sqrt{|\bar{e}|^2 - e_y^2 - e_z^2} \quad (4.3)$$

También con cosenos directores se pueden obtener los vectores (Ecuación (4.4)).

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1; \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma; \cos\alpha \\ &= \sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Conociendo que  $\cos\alpha = \frac{e_x}{|\bar{e}|}$  se tiene la Ecuación (4.5).

$$e_x = |\bar{e}|\cos\alpha \text{ ó } |\bar{e}| \sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma} \quad (4.5)$$

De esta forma conseguimos mantener el mismo módulo del vector de velocidad variando únicamente  $e_z$  y  $e_x$ . En la Fig. 4.10 se ilustra el criterio de velocidad, se ven 4 vectores de velocidad con la misma magnitud, pero diferente inclinación (*plunge*) contenidos en el plano XZ.

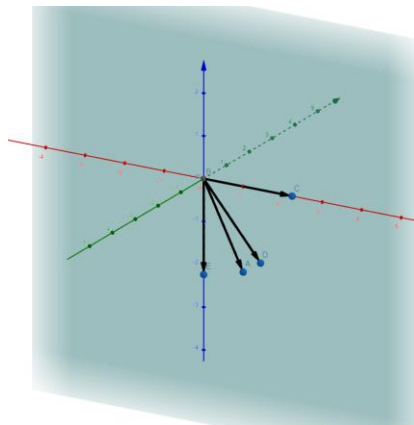


Fig. 4.10 Ilustración del criterio de velocidad con vectores de prueba (GeoGebra).

En las pruebas que se hicieron los *plunge* que se utilizaron fueron de: 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° y 90°. En la Fig. 4.11 se incorporó el criterio de velocidad a un pilar de W/H=1 con *plunge* de 45°.

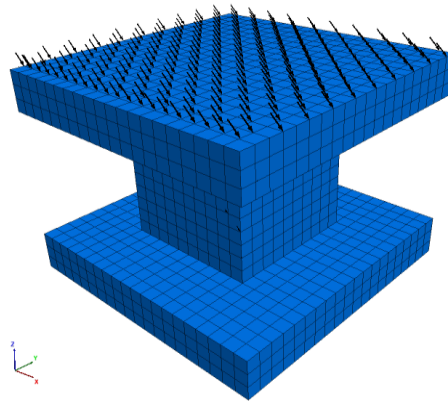


Fig. 4.11 Incorporación de los vectores de velocidad en modelo local de pilar de FLAC<sup>3D</sup>.

#### 4.5 Generación de la gráfica esfuerzo desplazamiento

El programa FLAC<sup>3D</sup> no cuenta con una función directa que elabore la curva esfuerzo-desplazamiento del pilar. No obstante, por medio de una rutina FISH fue posible crearla. La rutina consiste en crear 3 variables de conteo, que irán sumando de forma consecutiva la fuerza desbalanceada (fuerzas transmitidas internamente en FLAC<sup>3D</sup>) dentro de la base del modelo. De forma tal que, se conocerán las fuerzas para las 3 direcciones “x”, “y”, “z”; así se podrán dividir entre el área del modelo y conseguir la carga.

Se crea un registro del historial de carga para cada paso (*step*) del modelo y se instrumenta la cabeza del pilar para guardar el historial de desplazamiento. Cabe mencionar que el *step* son los pasos de tiempo virtual que da el programa para aproximar la solución. Después, se obtiene la curva graficando la carga calculada contra el desplazamiento (Fig. 4.12).

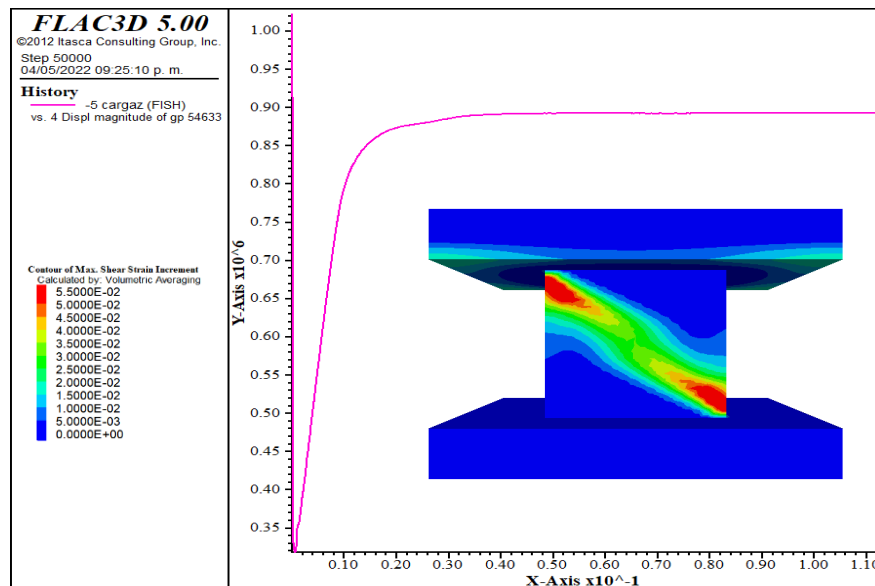


Fig. 4.12 Curva esfuerzo-desplazamiento en color rosa y pilar fallado de W/H=1 de 10x10m con *plunge* de 15° en FLAC<sup>3D</sup>.

### 4.6 Desarrollo de la envolvente de resistencia con respecto a la inclinación de la carga

Para generar la envolvente de resistencia en función de la inclinación de carga o *plunge*, es necesario obtener los últimos valores de carga cuando el modelo se encuentra en falla, o sea, el modelo está en movimiento continuo haciendo asintótica la curva esfuerzo desplazamiento, tal como se muestra en la Fig. 4.12. Así, con la resultante de las cargas utilizadas para romper el pilar y el *plunge* se obtiene uno de los puntos que conforma esta envolvente. Al graficar todas las cargas que corresponden a cada *plunge* se genera la envolvente Fig. 4.13.

En la Fig. 4.13 se presentan los resultados donde la mínima resistencia del pilar es a 0°, en cambio la máxima se encuentra en carga axial (*plunge* de 90°). Por esta razón, se tomó como 100% a la carga en donde se presentó la máxima resistencia, de ahí se calculó el porcentaje de carga correspondiente para cada *plunge*. Los valores graficados de la envolvente aparecen en la Tabla 4.1.

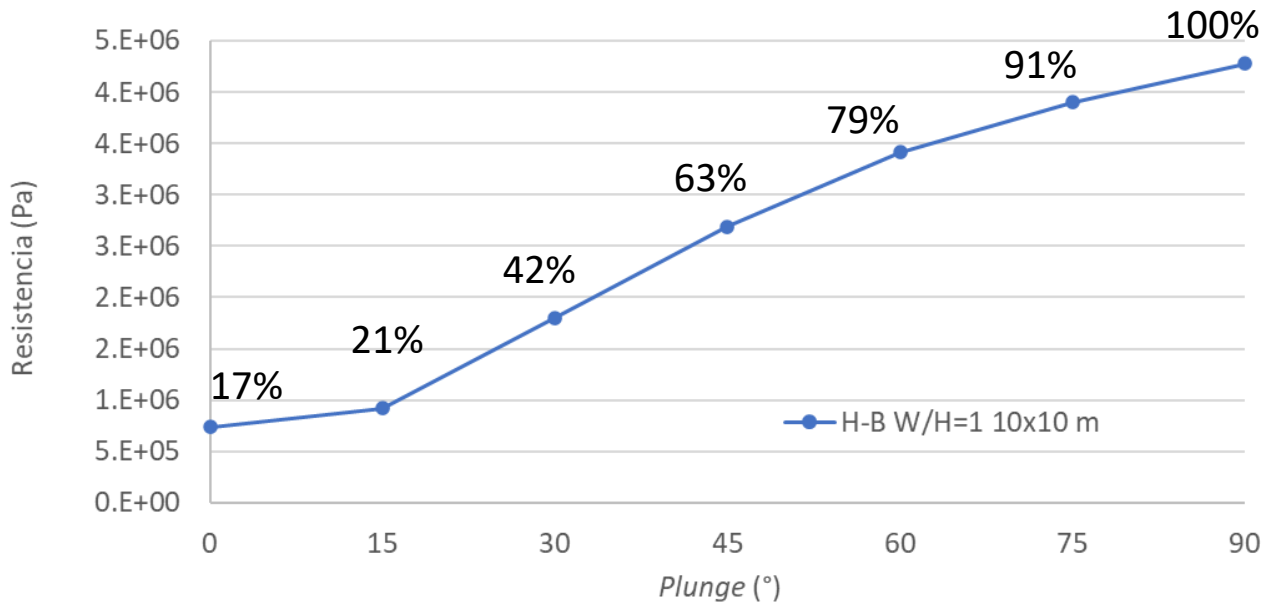


Fig. 4.13 Envolvente de resistencia en función del *plunge* para pilar W/H=1 de 10x10 m.

Tabla 4.1 Valores para generar envolvente de resistencia.

H-B W/H=1 10x10 m		
Plunge °	Resistencia	
	Pa	%
0	7.37E+05	17.23
15	9.22E+05	21.54
30	1.80E+06	42.08
45	2.69E+06	62.85
60	3.41E+06	79.75
75	3.90E+06	91.19
90	4.28E+06	100.00

### 4.7 Validación del método attach

La validación del *attach* de reflexión se hizo para pilares de *caving* con todos los pasos descritos anteriormente. Se introdujeron 3 inclinaciones de carga (0°, 45° y 90°) bajo diferentes condiciones de frontera. La primera condición utilizada fue la de *attach*; la segunda fue de rodillos (apoyos libres) en todas las caras laterales del modelo; la tercera fue únicamente dejando esfuerzos en las caras laterales del modelo y en la cuarta se quitaron todas las condiciones de frontera. Cabe mencionar que, el factor de seguridad se determinó después de abrir la excavación, posterior a este procedimiento se ejecutó la prueba con cargas inclinadas. Las pruebas se efectuaron con parámetros de roca con GSI de 30;  $\sigma_{ci}$  de 40 MPa;  $m_i$  de 7; un estado inicial de esfuerzos para una roca de profundidad media (1 MPa); un  $k_0=1$  y un módulo de velocidad para las pruebas de deformación controlada de  $5 \times 10^{-5}$  m/s. Los resultados aparecen en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2 Resultados al comparar diferentes condiciones de frontera.

Frontera	Plunge a 0°	Plunge a 45° Resistencia	Plunge a 90°	F.S.
	Pa			
Attach	1.55E+06	5.27E+06	5.93E+06	1.54
Rodillos	1.60E+06	5.88E+06	5.87E+06	1.54
Sólo Apply	-	-	-	0.75
Sin frontera	-	-	-	menor de 0.03

Los modelos sin condiciones de frontera no pudieron ser establecidos en equilibrio inicial, además su factor de seguridad es tan bajo que no puede ser calculado (Fig. 4.14 b). Al no existir sostenimiento lateral de la roca el modelo se rompe por tensión al abrir la excavación (Fig. 4.14 a).

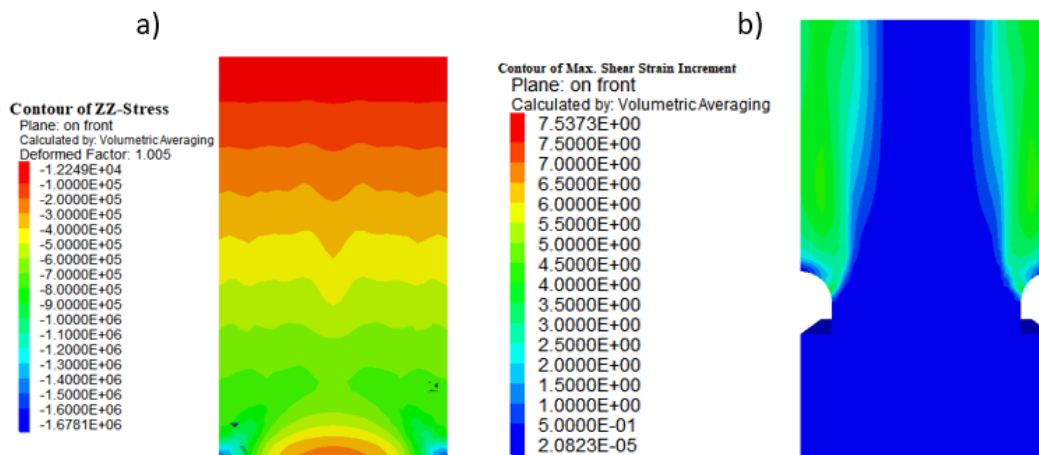


Fig. 4.14 a) Estado inicial de esfuerzos y b) incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de *caving* sin condiciones de frontera.

En el caso con fronteras donde solamente se dejaron esfuerzos (*apply*) se establece un apoyo a las caras laterales, las cuales son convertidas por FLAC<sup>3D</sup> en vectores de fuerza actuantes sobre los nodos, aplicados perpendicularmente a la cara en donde se impuso. Asimismo, en

el manual de FLAC<sup>3D</sup> se recomienda usar esta frontera sola cuando el material que rodea al modelo es 20 veces más suave.

Estas fronteras ayudan a mantener el estado de esfuerzos y con ello se logra establecer el equilibrio inicial en el modelo. No obstante, al abrir la excavación el modelo falla en el piso del túnel (Fig. 4.15 a), esto como consecuencia de: la relajación de esfuerzos (Fig. 4.15 b), el empuje lateral de los vectores de fuerza en los nodos de las caras laterales y la poca resistencia a la tensión de la roca. De igual forma, el factor de seguridad determinó inestabilidad en el modelo bajo estas condiciones.

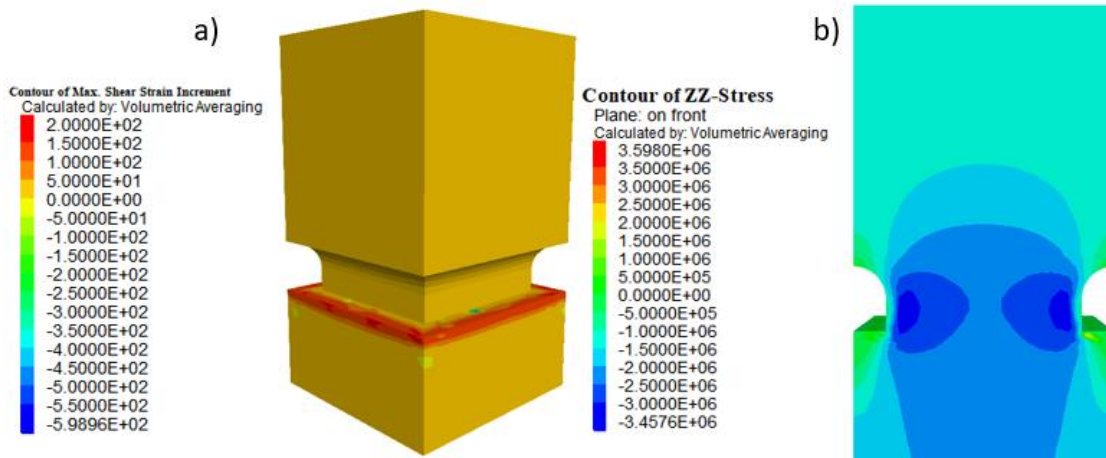


Fig. 4.15 a) Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de *caving* solo con *apply* y b) contorno de esfuerzos verticales al abrir la excavación.

En las pruebas con rodillos o apoyos libres, se consiguió establecer un estado de equilibrio y hacer la excavación con un factor de seguridad de 1.54. Igualmente, al cargarlo de manera axial se obtiene un mecanismo de falla de compresión para el pilar, lo anterior en adición a la resistencia alcanzada coincide con lo esperado para este tipo de pilares (Fig. 4.16 (a)). En contraste, al analizar los vectores de velocidad ante una carga inclinada a 45°, vemos que en un principio actúan con dicho ángulo, pero luego cambian abruptamente anulando las componentes de inclinación convirtiéndose en carga axial, provocando la falla local en la esquina del modelo (Fig. 4.16 (b)). En la carga de 0° los vectores de velocidad se vuelven verticales y salen del modelo, tal como se ve en la Fig. 4.16 (c).

Los modelos con fronteras de *attach* se lograron establecer en equilibrio. Además, tanto el factor de seguridad (1.54) como la carga vertical y el tipo de falla (Fig. 4.17 (a)) coinciden con los resultados de fronteras con apoyos libres, pero la diferencia nace a partir de las cargas inclinadas.

Al introducir una carga inclinada de 45° en el *attach* los vectores de velocidad sí mantienen su inclinación, rompiendo el pilar a cortante (Fig. 4.17 (b)). También se muestra en la Fig. 4.17 (c) que el método *attach* permite el desplazamiento lateral del modelo, simulando de forma realista el movimiento que tendrían los pilares. Por otro lado, al aplicar carga cortante en el modelo, este se rompe en el lugar de aplicación, lo cual probablemente ocurrió por la mala

calidad de la roca empleada. Por esta razón, se volvieron hacer dos modelos a cortante puro, uno con *attach* y otro con rodillos, aunque mejorando los parámetros de roca.

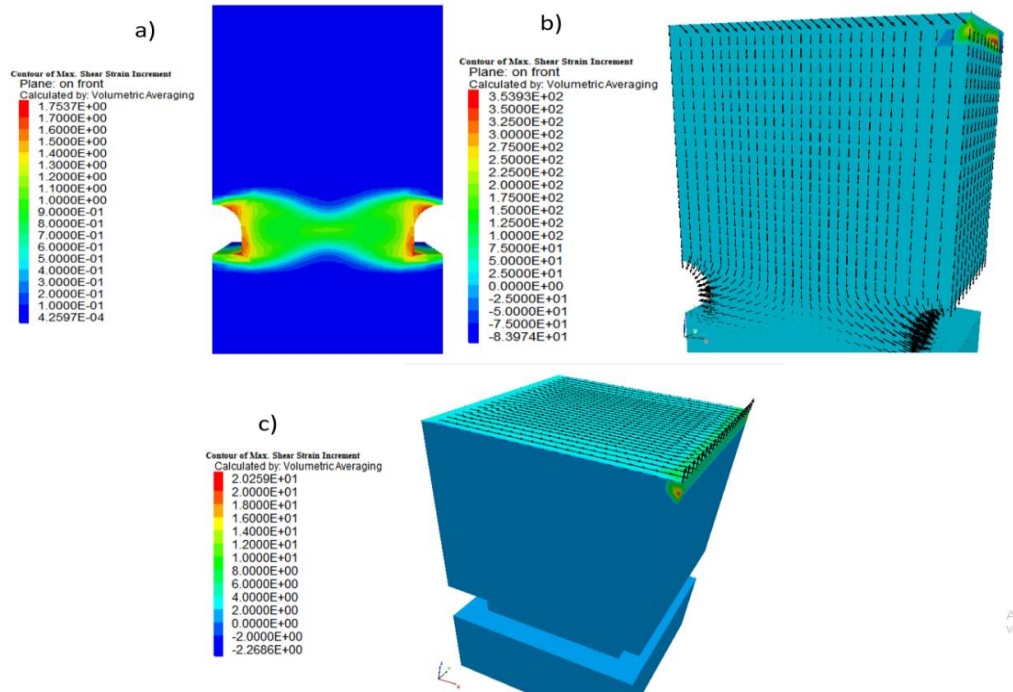


Fig. 4.16 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de caving con rodillos a) carga de 90°, b) carga de 45° con vectores de velocidad y c) carga de 0° con vectores de velocidad.

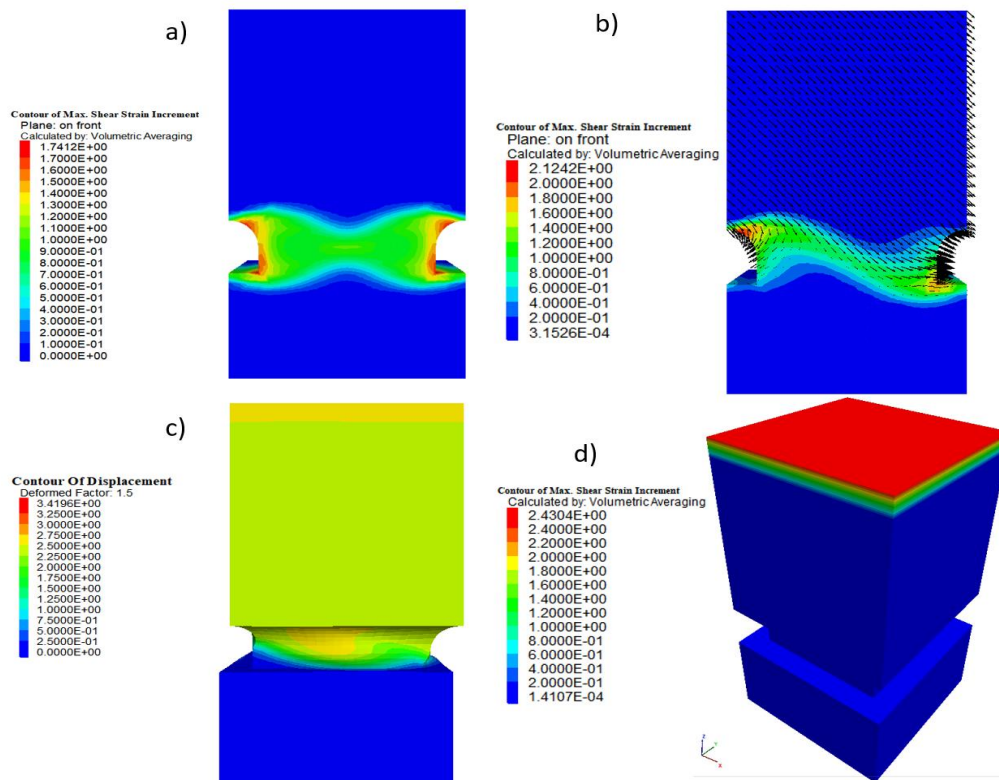


Fig. 4.17 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de caving con attach a) carga de 90°, b) carga de 45° con vectores de velocidad, d) carga de 0° y c) contorno de desplazamientos para carga de 45°.



Los modelos se repitieron para una calidad de roca media GSI de 50;  $\sigma_{ci}$  de 75 MPa y  $m_i$  de 18 solo a cortante puro. De lo anterior, se estimó una resistencia de 4.8 MPa en el caso del modelo con rodillos, mientras que para el modelo con *attach* fue de 2 MPa. Por otra parte, el mecanismo de falla para los rodillos se mantuvo igual, aún con el cambio de parámetros de roca se rompió sólo una esquina del modelo, ya que el vector de fuerza es redireccionado en sentido vertical (Fig. 4.18 (a)); no así con el modelo de *attach*, donde en esta ocasión la roca transmitió la carga hacia el pilar consiguiendo la falla a cortante del mismo (Fig. 4.18 (b)).

Al analizar los contornos de desplazamiento, es notorio que el pilar con *attach* simula de forma precisa el desplazamiento lateral, mismo que tendría si una carga lo empujara horizontalmente (Fig. 4.18 (d)). A diferencia del pilar con rodillos, pues al restringir el desplazamiento lateral el modelo se rompe en la esquina donde se redireccionan los vectores (Fig. 4.18(c)).

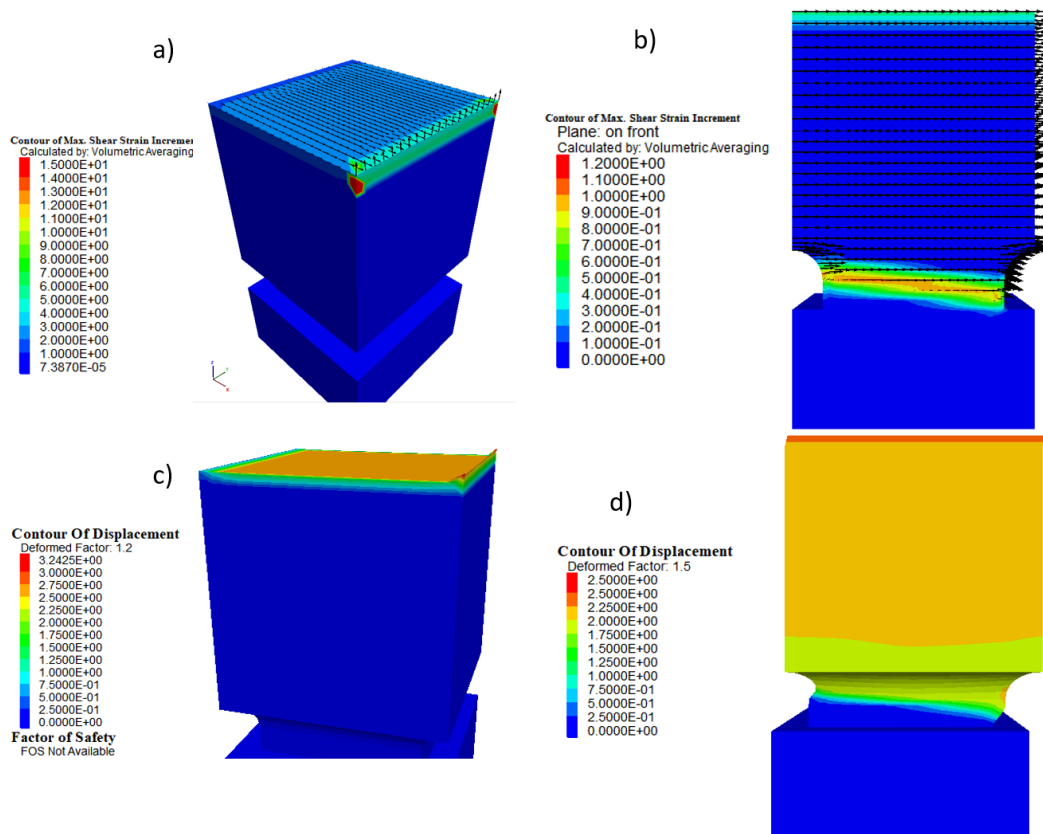


Fig. 4.18 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de *caving* cargado a cortante a) con rodillos y b) con *attach*; contornos de desplazamiento para pilar de *caving* cargado a cortante c) con rodillos y d) con *attach*.

En definitiva, después de comparar las diferentes fronteras, se puede concluir que solo usar *apply* no es suficiente para mantener el modelo estable, los rodillos no dejan lugar a las torsiones inducidas por la carga inclinada y sólo la simulación del *attach* de reflexión se ajusta ante cargas inclinadas; por ende, se considera válida para usarse en modelos locales. Asimismo, en el caso de pilares con carga axial se puede recurrir a los rodillos o apoyos libres, pues tuvieron un desempeño similar al de *attach*.

Todos los mecanismos de falla para las cargas inclinadas con rodillos y *attach* aparecen en el Anexo B. Igualmente, aparecen los mecanismos para los factores de seguridad de las diferentes fronteras usadas.

# Capítulo 5 Resultados

## 5.1 Resultados en pilares regulares

Las primeras pruebas realizadas fueron para un pilar con relación de esbeltez unitaria, con dimensiones de 10x10 m, un estado inicial de esfuerzos de una roca a profundidad media (1 MPa) en un estado de esfuerzos isotrópico ( $k_0=1$ ), calidad de roca media GSI de 50;  $\sigma_{ci}$  de 75 MPa y  $m_i$  de 18. Adicionalmente, se usó criterio Hoek & Brown y el módulo de velocidad empleado fue de  $2.25 \times 10^{-5}$  m/s.

Solo se consideró cambiar la relación de esbeltez y carga inclinada en estos pilares cuadrados de métodos auto soportados, sin tomar en cuenta el daño de voladura. Los resultados de esta prueba se muestran en la Tabla 4.1 y la envolvente en función de la carga en la Fig. 4.13. Posteriormente, se obtuvieron los contornos de desplazamiento (Fig. 5.1) y las máximas deformaciones a cortante para observar los mecanismos de falla (Fig. 5.2).

En el contorno de desplazamientos los pilares que son sometidos a cargas inclinadas de  $0^\circ$  a  $60^\circ$  suelen presentar desplazamientos en el techo, generando torsiones en las esquinas afectando el núcleo. No obstante, al llegar a los  $75^\circ$  de *plunge* el pilar se abulta, esto quiere decir que las paredes se están dilatando; por lo tanto, el núcleo es dañado en menor medida.

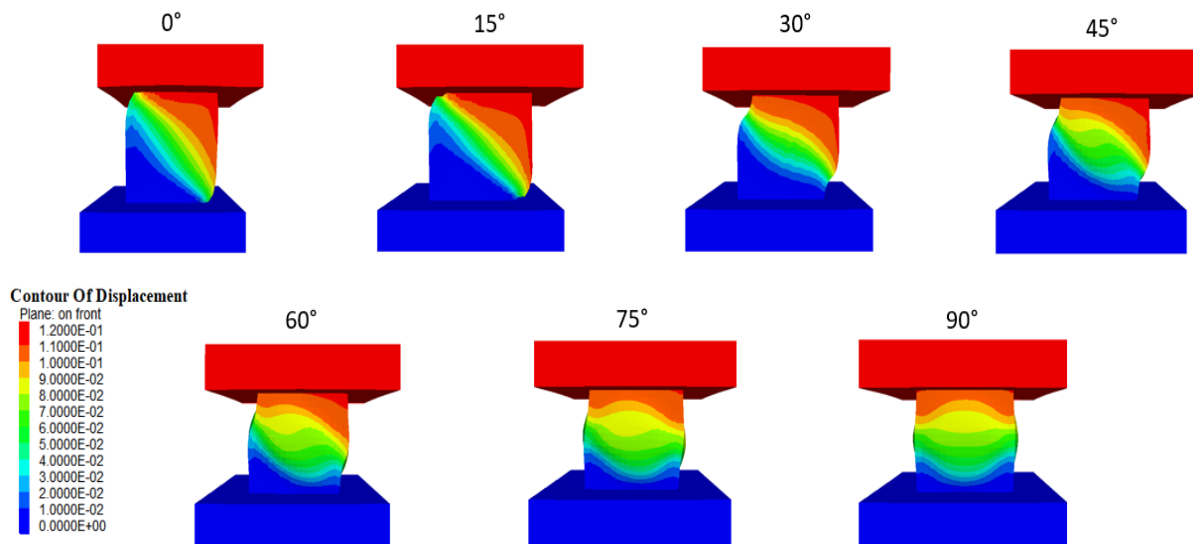


Fig. 5.1 Contorno de desplazamiento en pilares de  $W/H=1$ .

En las máximas deformaciones cortantes se muestra que en cortante puro se tiene la mínima resistencia, porque tanto el núcleo del pilar como una pared son afectadas comprometiendo la estructura, para  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$  el núcleo sigue afectado, el mecanismo observado es el de

falla por cortante, pero conforme aumenta la componente de carga axial se puede ver la formación de la cruz típica de falla por compresión. Al llegar a 75° se presentan las máximas resistencias y el mecanismo de falla se asemeja al de compresión simple, formando una cruz bien definida en 90°.

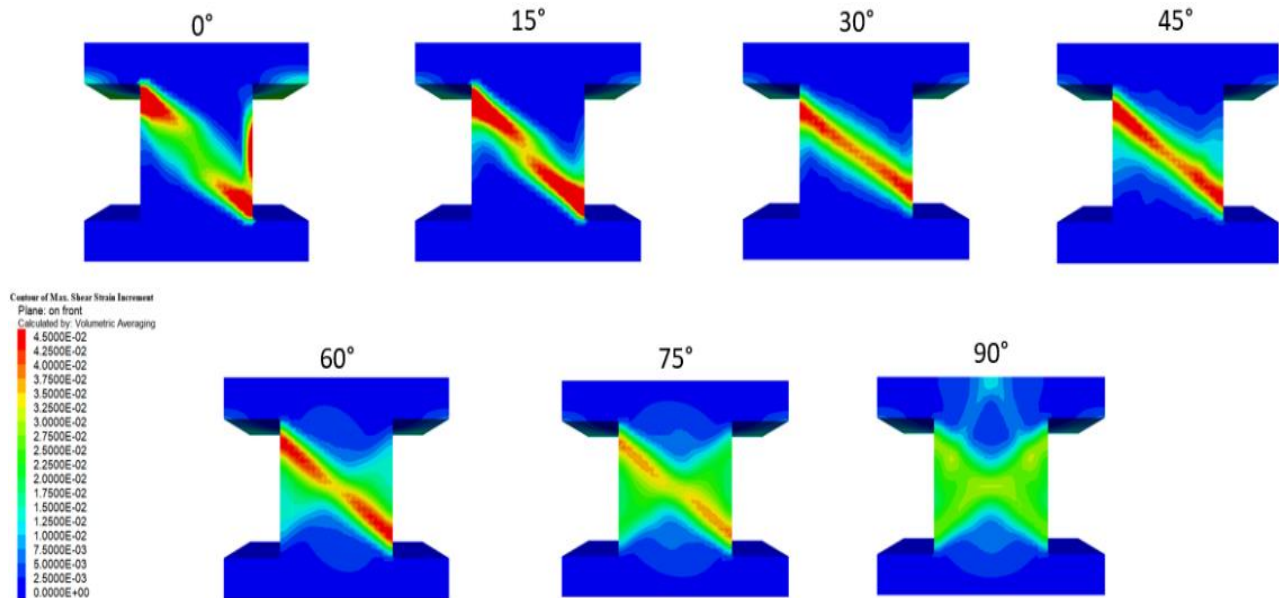


Fig. 5.2 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de  $W/H=1$ .

Se obtuvieron todas las curvas esfuerzo-desplazamiento de esta prueba, en ellas existe la misma magnitud de desplazamientos porque se usó el mismo módulo de velocidad y la misma cantidad de *steps* en cada carga inclinada (Fig. 5.3). En la gráfica inferior se observa que hay un incremento en la resistencia, por el aumento de la inclinación de la carga desde 0° (cortante) hasta llegar al punto de máxima resistencia a 90° (compresión pura), lo anterior coincide con lo reportado en la literatura, pero esto nos lleva a comprobar que las fórmulas empíricas pueden sobrestimar la resistencia de los pilares si la carga aplicada no es axial.

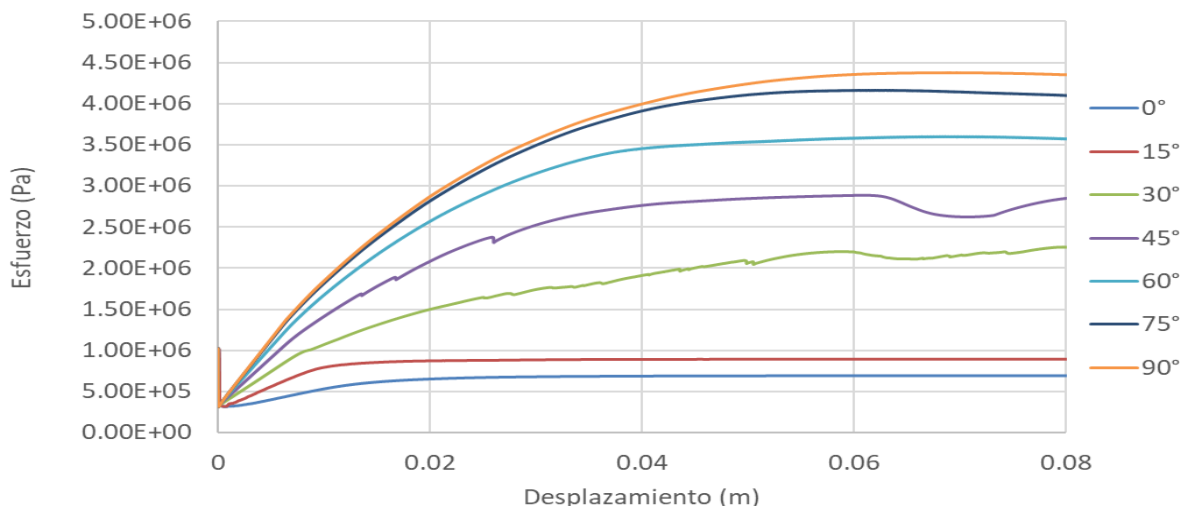


Fig. 5.3 Gráficas esfuerzo desplazamiento para diferentes inclinaciones de carga en pilar regular de  $W/H=1$ .

5.1.1 Impacto de cargas inclinadas en pilares regulares

5.1.1.1 Resultados para una misma relación de esbeltez, pero diferentes dimensiones

Se hicieron 3 pilares cuadrados con la misma relación de esbeltez ( $W/H=1$ ) de diferentes dimensiones, conservando los mismos parámetros de roca (roca intacta y macizo rocoso). Aunque en la práctica difícilmente pueda ocurrir esto, debido a que al cambiar la escala o las dimensiones del pilar muy probablemente no se tenga el mismo GSI y por tanto haya un efecto de escala que disminuya la resistencia de los parámetros de roca. Las dimensiones del pilar fueron de: 5 x 5 m, 10 x 10 m y de 16 x 16 m. Los resultados se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1 Resultados de pilares con misma relación de esbeltez ( $W/H=1$ ), pero diferentes dimensiones.

Plunge °	Resistencia (Pa)			Resistencia (%)		
	5x5 m	10x10 m	16x16 m	5x5 m	10x10 m	16x16 m
0	3.8E+05	7.4E+05	1.1E+06	16	17	16
15	4.2E+05	9.2E+05	1.5E+06	18	22	20
30	8.3E+05	1.8E+06	3.3E+06	36	42	45
45	1.6E+06	2.7E+06	4.5E+06	70	63	62
60	2.1E+06	3.4E+06	5.8E+06	91	80	79
75	2.3E+06	3.9E+06	6.8E+06	99	91	92
90	2.3E+06	4.3E+06	7.3E+06	100	100	100

En la Fig. 5.4 se distinguen las envolventes de resistencia en función del *plunge*, es notorio que hay un incremento considerable de resistencia de acuerdo con el aumento en el tamaño del pilar, siendo el de 16 m el pilar con mayor resistencia, le sigue el de 10 m y por último el de 5 m. En este análisis se presenta un efecto de forma, el cual es un aumento sustancial de la resistencia al incrementar el tamaño, pues el núcleo es mucho más robusto y al tener más volumen de roca se mantiene un estado de esfuerzos triaxial. También, se observa que a partir de 45° de *plunge* el incremento ya es mayor al 50% y al alcanzar 75° se supera el 90%.

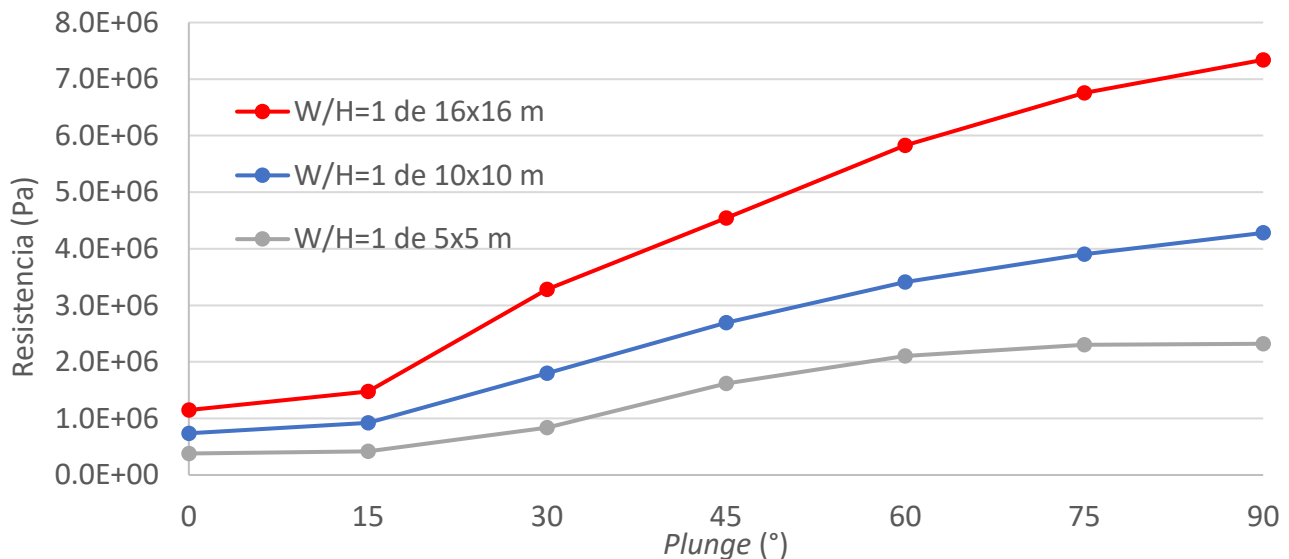


Fig. 5.4 Envolventes de falla en función del *plunge* para pilares con misma relación de esbeltez.

Ahora si normalizamos las curvas a porcentaje, ajustando para cada uno que su carga máxima a 90° sea su 100% respectivamente, obtenemos la Fig. 5.5. Al compararlas bajo la misma escala vemos que si bien la curva de dimensiones de 5 metros es una “s” bien definida, todas las curvas tienen la misma tendencia y son muy similares. De igual forma los mecanismos de falla permanecen parecidos, excepto el caso del pilar de 5x5 metros donde hay una mayor concentración de deformaciones cortantes en el núcleo, prácticamente para todas las inclinaciones de carga, incluso la falla en cruz no se distingue claramente al llegar a los 90°. Las figuras de estos mecanismos de falla se pueden ver juntos en la Tabla 0.3 y en la Tabla 0.4 del Anexo B.

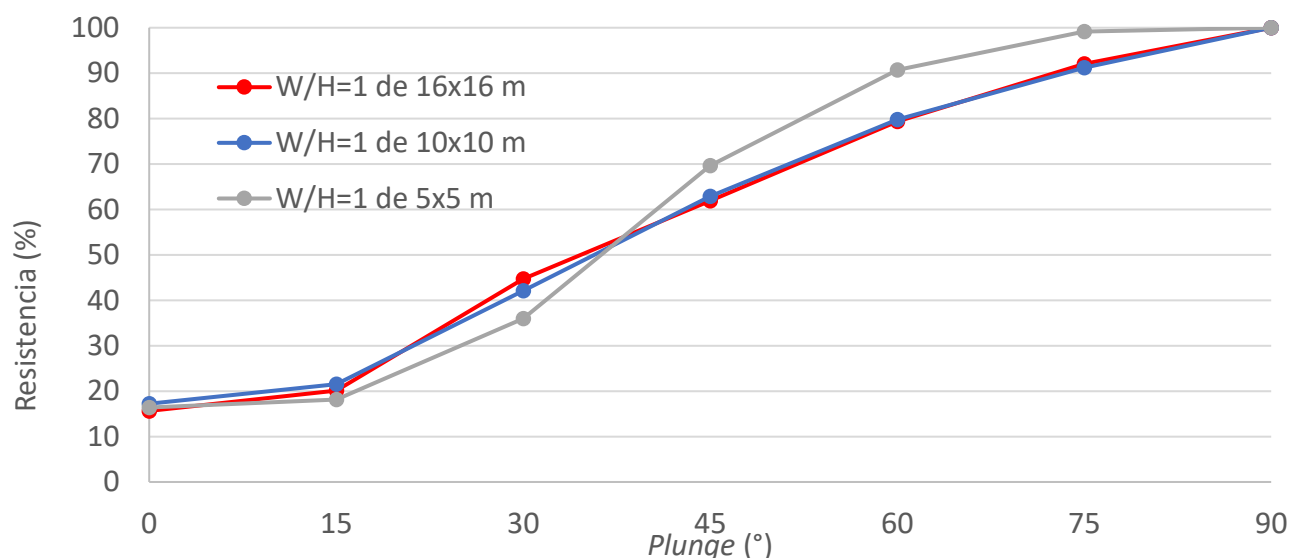


Fig. 5.5 Envolventes de falla en función del plunge para pilares con misma relación de esbeltez en porcentaje.

### 5.1.1.2 Resultados en la relación de esbeltez

Para analizar el impacto en función de la relación de esbeltez se usaron 4 modelos de pilar con el mismo ancho de 10 m y área, variando la altura para conseguir relaciones de esbeltez de 0.5, 1, 1.5 y 2 (Fig. 4.2). Los resultados de estos análisis están plasmados en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2 Envolvente de resistencia en función del plunge para diferentes relaciones de esbeltez.

Plunge °	Resistencia (Pa)				Resistencia (%)			
	W/H=0.5	W/H=1	W/H=1.5	W/H=2	W/H=0.5	W/H=1	W/H=1.5	W/H=2
0	7.6E+05	7.4E+05	8.2E+05	7.9E+05	52	17	9	6
15	1.0E+06	9.2E+05	9.9E+05	2.0E+06	70	22	11	15
30	1.2E+06	1.8E+06	5.0E+06	7.7E+06	82	42	55	58
45	1.3E+06	2.7E+06	7.2E+06	1.1E+07	88	63	79	83
60	1.4E+06	3.4E+06	8.5E+06	1.2E+07	94	80	93	94
75	1.4E+06	3.9E+06	8.9E+06	1.3E+07	97	91	98	98
90	1.5E+06	4.3E+06	9.1E+06	1.3E+07	100	100	100	100

Los resultados muestran que al acotar la altura hay un incremento importante en la resistencia (mayor relación de esbeltez). Al graficar las envolventes (Fig. 5.6) es claro que las cuatro

parten del mismo punto, porque al tener los pilares sometidos en cortante puro y tener el mismo ancho se tiene la misma resistencia. No obstante, según incrementa la componente de carga axial las curvas se van separando cada vez más, siendo más resistentes las que tienen una relación de esbeltez mayor. Si solo consideramos carga axial, la diferencia entre estas incrementa en aproximadamente 4 MPa.

Se muestra nuevamente que por encima de 45° de carga inclinada la resistencia del pilar aumenta de forma considerable y por debajo se tiene la zona más crítica. De igual forma, al llegar a los 75° la resistencia supera el 90% de su capacidad, esta es la zona de la envolvente menos crítica. Si comparamos las relaciones de esbeltez con carga de 90° vemos que al aumentar la esbeltez de 1 a 1.5 se incrementa la resistencia 2 veces en magnitud, si pasamos de  $W/H=1$  a  $W/H=2$  se incrementa 3 veces y por último si de  $W/H=1$  disminuimos la relación de esbeltez a  $W/H=0.5$  la resistencia cae a 34%.

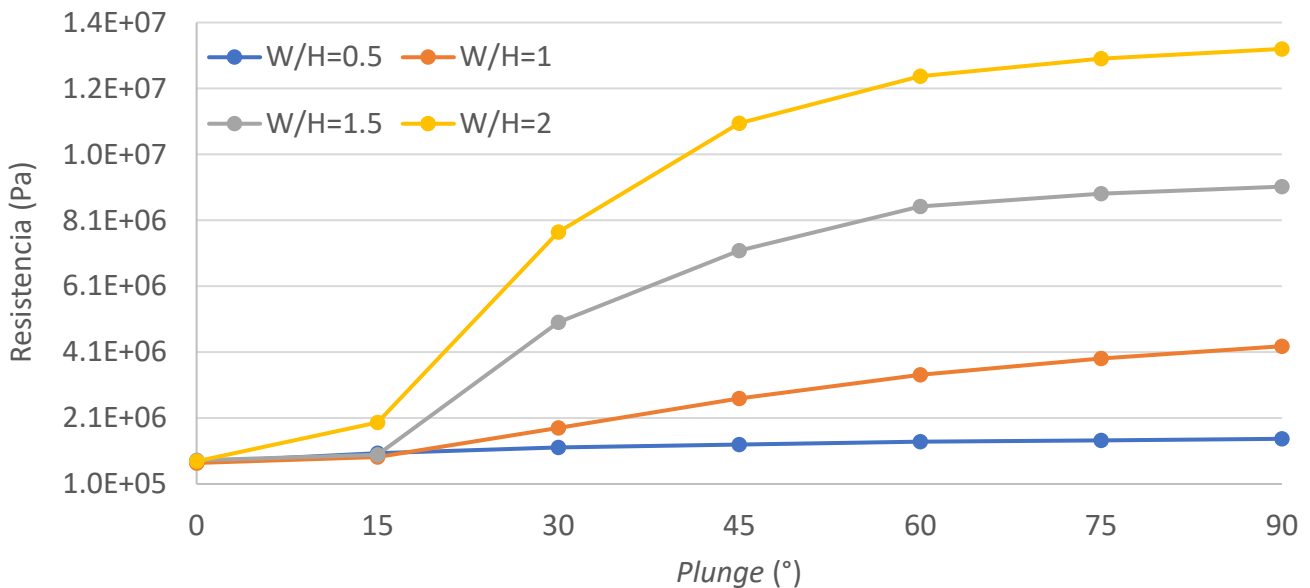


Fig. 5.6 Envolvente de resistencia en función de plunje para diferentes relaciones de esbeltez.

Al normalizar las envolventes en función de su máxima resistencia (Fig. 5.7), las 3 envolventes con  $W/H$  mayor a 1 forman una sigmoide, mientras que para 0.5 se forma una parábola. Esto es una consecuencia de mantener la misma área en el pilar, porque todas comienzan en el mismo punto a cortante puro; sin embargo, al incrementar la componente de carga vertical las envolventes que tienen mayor relación de esbeltez incrementan demasiado su resistencia, formando la sigmoide. Por otro lado, la resistencia final de la envolvente de 0.5 no es mucho mayor a la resistencia cortante por lo que tiende hacer una parábola.

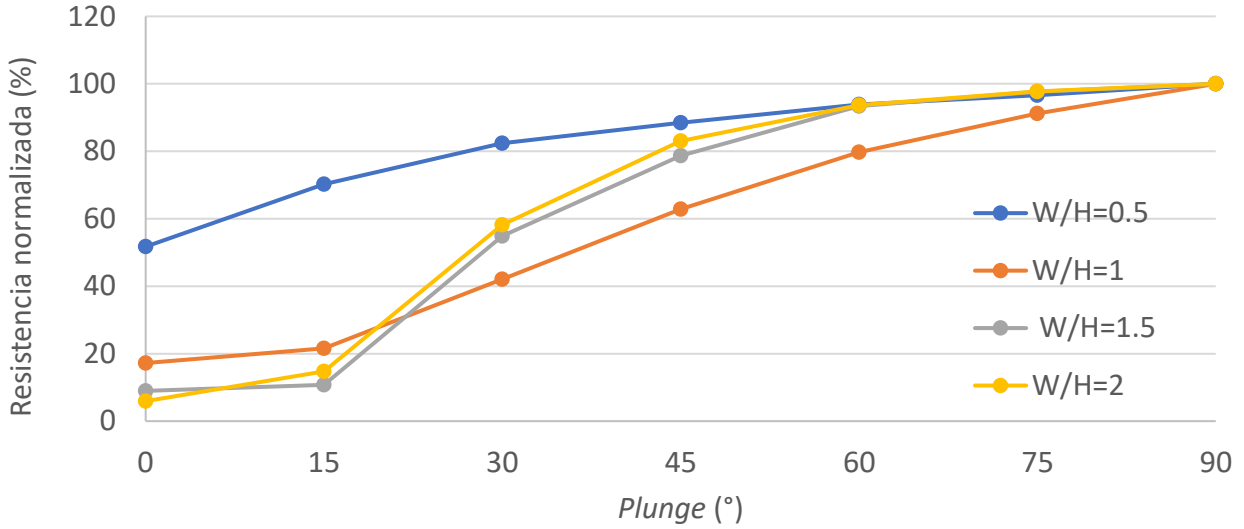


Fig. 5.7 Envoltura de resistencia en función del plunge para diferentes relaciones de esbeltez normalizada a carga máxima.

Comparando los mecanismos de falla para las diferentes relaciones de esbeltez presentadas en la Tabla 0.5 y Tabla 0.6 del Anexo B observamos similitudes en su comportamiento y modo de falla. Para cargas inclinadas por debajo de los 60°, se generan principalmente fallas cortantes, seguido de esa inclinación se empieza a formar la falla en cruz para los pilares. Adicionalmente cuando se genera dicha rotura, hay menor concentración de deformaciones cortantes en los núcleos, esto solo para pilares con relaciones de esbeltez mayores o iguales a 1.

El único caso distinto en el mecanismo de falla sucede en la relación de esbeltez de 0.5. Por debajo de los 60° de carga inclinada el pilar falla a cortante, al igual que en los casos anteriores. Pero al pasar esta carga inclinada el pilar sigue presentando deformaciones cortantes en el núcleo, causadas por el bajo nivel de confinamiento (Fig. 5.8), a su vez eso induce a que se presenten deflexiones en el pilar; en consecuencia, hay menor resistencia.

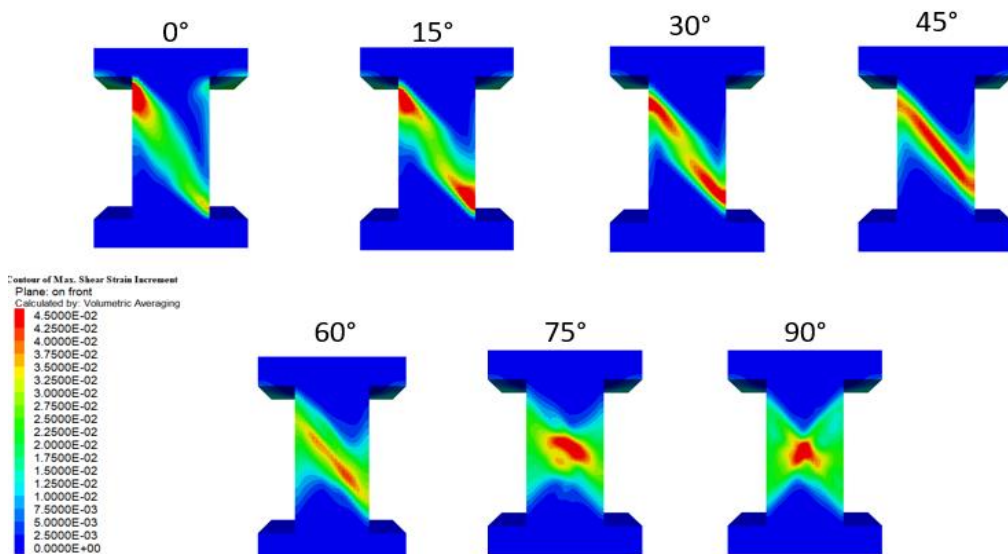


Fig. 5.8 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilar de W/H=0.5.



5.1.1.3 Evaluando el modelo Mohr-Coulomb

Con el objetivo de evaluar la viabilidad de utilizar el modelo Mohr-Coulomb para obtener la resistencia los pilares, se implementó una equivalencia entre este criterio y el de Hoek & Brown. Las pruebas realizadas fueron para W/H=1 de dimensiones de 10x10 m con un estado inicial de esfuerzos de una roca de profundidad media (1 MPa) con  $k_0=1$ , con un módulo de velocidad de  $2.25 \times 10^{-5}$  m/s, la calidad de roca media GSI de 50;  $\sigma_{ci}$  de 75 MPa y  $m_i$  de 18, los parámetros equivalente de Mohr-Coulomb fueron:  $\phi = 58.24^\circ$  y  $c = 0.732$  MPa.

Los resultados se muestran en la Tabla 5.3. De igual manera en la Fig. 5.9 se encuentran los resultados de la envolvente de resistencia, comparando el criterio de Hoek & Brown contra Mohr-Coulomb con parámetros equivalentes.

Tabla 5.3 Resultados de los parámetros equivalentes entre Mohr-Coulomb y Hoek & Brown a 1 MPa.

Plunge °	Resultante en parámetros equivalente M-C Pa	Resultante en Hoek & Brown Pa
0	1.15E+06	7.98E+05
15	1.34E+06	1.04E+06
30	2.40E+06	2.51E+06
45	6.04E+06	3.54E+06
60	1.06E+07	4.49E+06
75	1.40E+07	5.00E+06
90	1.80E+07	5.22E+06

El modelo Mohr-Columb equivalente provoca oscilaciones y vibraciones excesivas en el modelo, por lo que es necesario reducir el módulo de velocidad para disminuir las vibraciones, esto significa aumentar los pasos virtuales “steps” dentro de FLAC<sup>3D</sup> incrementando los ciclos de cálculo. Asimismo, la oscilación no se puede eliminar debido a que el material es muy friccionante y poco cohesivo, con esto se sobrestima la resistencia del material tal como se ve en la curva azul de la Fig. 5.9.

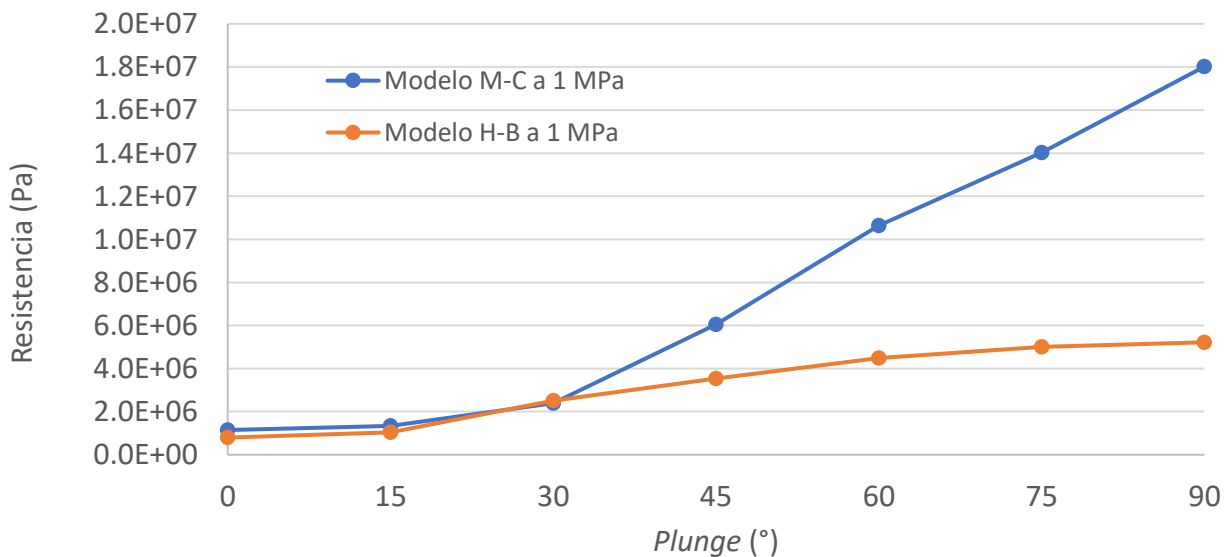


Fig. 5.9 Envolvente de resistencia en parámetros equivalentes entre Mohr-Coulomb y Hoek & Brown a 1 MPa.

La sobrestimación de la resistencia por parámetros equivalentes de entre Mohr-Coulomb y Hoek & Brown ocurre debido a que en bajos niveles de confinamiento como en este caso, la envolvente de Hoek & Brown tiene mayor curvatura. Entonces, para que la recta de Mohr pueda compensar la curvatura, se eleva demasiado la pendiente aumentando el ángulo de fricción interna (por encima de 45°), arrojando resultados poco realistas.

Por esta razón, se compararon los criterios a mayor confinamiento, aumentándolo hasta 5 MPa, los parámetros equivalentes resultantes fueron los siguientes:  $\phi = 45.39^\circ$  y  $c = 2.045$  MPa con esto se obtuvieron los siguientes resultados Tabla 5.4.

Tabla 5.4 Resultados de los parámetros equivalentes entre Mohr-Coulomb y Hoek & Brown a 5 MPa.

<i>Plunge</i> °	Resultante en parámetros equivalente M-C Pa	Resultante en Hoek & Brown Pa
0	7.98E+05	1.70E+06
15	9.13E+05	2.18E+06
30	2.26E+06	3.00E+06
45	3.64E+06	4.22E+06
60	4.51E+06	4.91E+06
75	5.10E+06	5.53E+06
90	5.23E+06	6.00E+06

De la comparación de ambas envolventes se obtuvo la Fig. 5.10, es notorio que los resultados son parecidos, pues al aumentar el confinamiento el material disminuye su fricción y aumenta la cohesión, ya que la equivalencia es muy susceptible al confinamiento. A pesar de la similitud en los resultados, el criterio Mohr-Coulomb sobrestima la resistencia del pilar, sería conveniente definir en trabajos posteriores bajo que rangos de confinamiento o estado de esfuerzos iniciales es posible utilizar parámetros equivalentes. Sin embargo, en esta tesis no es útil usar el criterio.

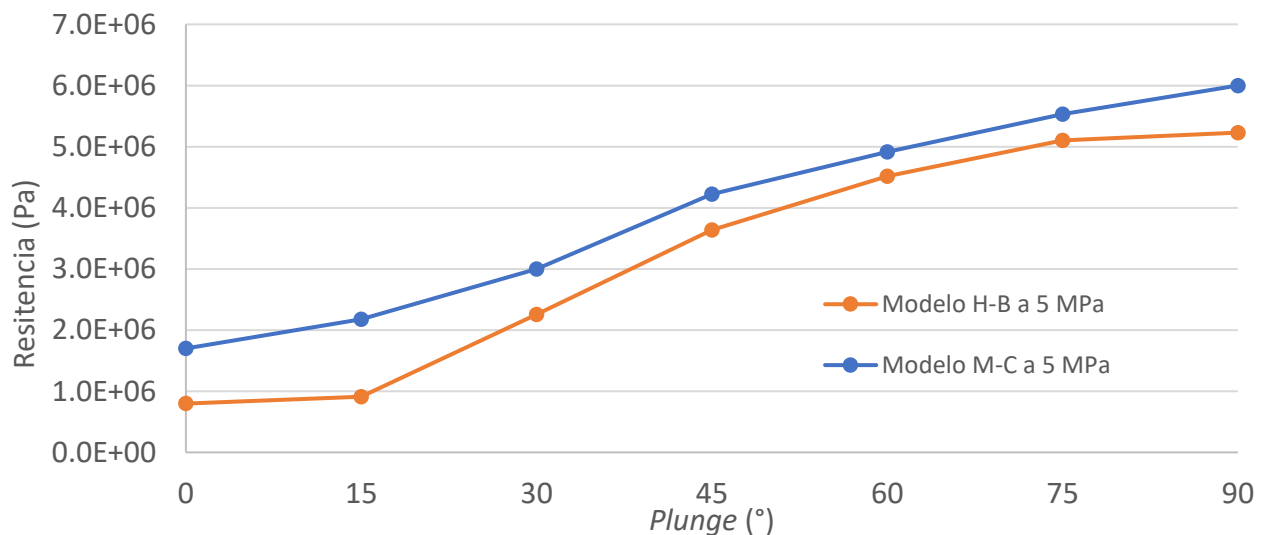


Fig. 5.10 Envolvente de resistencia en parámetros equivalentes entre Mohr-Coulomb y Hoek & Brown a 5 MPa.

5.1.1.4 Evaluando diferentes estados de esfuerzos iniciales

Se emplearon diferentes estados de esfuerzos iniciales para ver si estos plastificaban la roca y analizar si había una disminución en la resistencia. Se usó un pilar de W/H=1 de 10x10 m con  $k_0=1$ ; con un módulo de velocidad de  $2.25 \times 10^{-5}$  m/s; la calidad de roca media GSI de 50;  $\sigma_{ci}$  de 75 MPa y  $m_i$  de 18; con estados de esfuerzos iniciales de 0.5, 1, 3 y 5 MPa. Los resultados se enlistan en la siguiente Tabla 5.5 y en la envolvente de la Fig. 5.11.

Tabla 5.5 Resultados para diferentes estados de esfuerzos.

Plunge °	Resistencia			
	W/H=0.5	W/H=1	W/H=3	W/H=5
	Pa	Pa	Pa	Pa
0	8.36E+05	7.98E+05	7.98E+05	7.98E+05
15	9.93E+05	1.04E+06	9.93E+05	9.13E+05
30	2.20E+06	2.51E+06	2.23E+06	2.26E+06
45	3.54E+06	3.54E+06	3.64E+06	3.64E+06
60	4.48E+06	4.49E+06	4.52E+06	4.51E+06
75	5.00E+06	5.00E+06	5.07E+06	5.10E+06
90	5.22E+06	5.22E+06	5.22E+06	5.23E+06

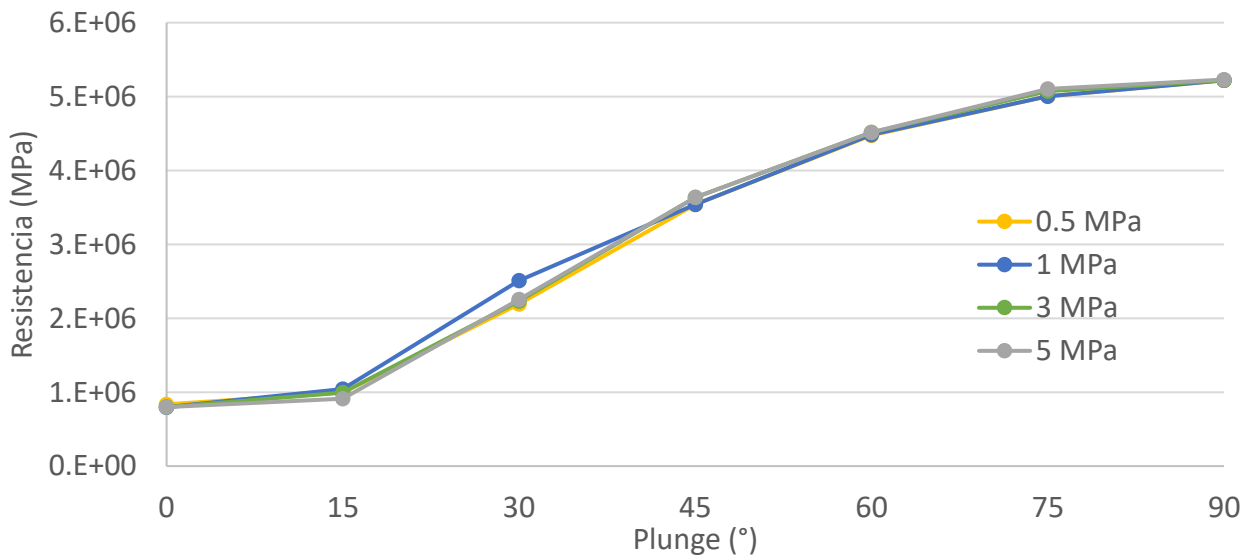


Fig. 5.11 Envolvente de resistencia para diferentes estados de esfuerzos.

De los resultados vemos que la resistencia no se ve afectada por el estado de esfuerzos, porque no hay plastificaciones en el modelo, al menos en el rango de estados de esfuerzos que comprenden las profundidades donde se encuentran los pilares. Asimismo, el pilar está excavado por todos sus lados, así que no mantiene un confinamiento lateral, a diferencia del techo y piso, donde sí hay este confinamiento “extra” y aun así no hay un aporte de resistencia.

5.1.2 Validación respecto a ecuaciones empíricas

Los modelos se compararon contra ecuaciones empíricas para validarlos (Tabla 2.1 y Tabla 2.2), en la primera validación se usaron los siguientes datos: un estado inicial de esfuerzos para una roca de profundidad media (1 MPa) con  $k_0=1$ ; módulo de velocidad de  $2.25 \times 10^{-5}$  m/s;

calidad de roca media GSI de 50;  $\sigma_{ci}$  de 75 MPa y  $m_i$  de 18. La validación se realizó para diferentes relaciones de esbeltez (0.5,1,1.5 y 2), los resultados de los modelos solo consideraron carga axial, ya que las ecuaciones empíricas no admiten cargas inclinadas. Los resultados se enlistan en la Tabla 5.6.

Tabla 5.6 Resultados de las ecuaciones empíricas y modelo numérico GSI de 50.

Autor	W/H=0.5	W/H=1	W/H=1.5	W/H=2
<i>Efecto escala</i>				
	MPa	MPa	MPa	MPa
Hedley & Grant (1972)	14	24	33	41
Salamon & Munro (1967)	4	5.8	8	9
González (2006)	2.7	4.5	6.1	7.5
Sheorey (1987)	6.8	8.8	10.2	11.4
<i>Efecto de forma</i>				
Obert & Duvall (1967)	67	75	83	92
Bieniawski (1975)	62	75	88	102
Sjoberg (1992)	21	23	26	28
Krauland & Soder (1987)	24	27	29	32
Lunder (1994)	23	32	40	46
Modelo en Flac <sup>3D</sup> con carga a 90° y GSI=50	1.5	4.3	9.1	13.3

En la gráfica para GSI de 50 (Fig. 5.12), se observa que la tendencias de Sheorey (línea de color verde), Salomón & Munro (línea de color rojo) y González (línea de color amarillo) son parecidas a las del modelo hecho en FLAC<sup>3D</sup> (línea negra punteada). Las primeras dos fórmulas son para carbón, cuyos parámetros son similares a los de la roca analizada, entonces podemos decir que los resultados son realistas. Por otro lado, la fórmula más reciente según González considera la calidad del macizo rocoso y la compresión simple; en consecuencia, los resultados son próximos al menos en el rango W/H de 0.5 a 1. El resto de las fórmulas sobrestiman la resistencia, en especial Bieniawski y Obert & Duvall.

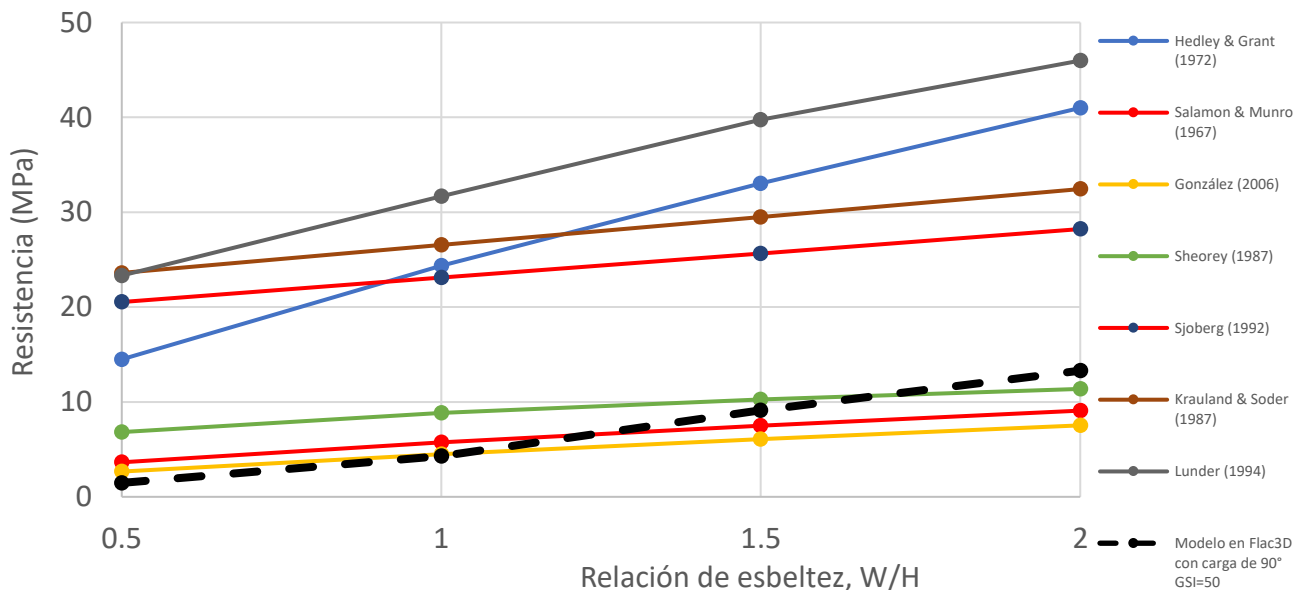


Fig. 5.12 Validación entre ecuaciones empíricas y modelo numérico con GSI de 50.

La segunda validación se realizó con estado inicial de esfuerzos de una roca de profundidad media (1 MPa) con  $k_0=1$ ; con un módulo de velocidad de  $2.25 \times 10^{-5}$  m/s; calidad de roca límite GSI de 30;  $\sigma_{ci}$  de 40 MPa y  $m_i$  de 7. Estos parámetros de roca se aplicaron en pilares de *panel caving* con propiedades límite, obtenidas de un retro análisis que será descrito más adelante. Los resultados se presentan a continuación:

Tabla 5.7 Resultados de las ecuaciones empíricas y modelo numérico GSI de 30.

Autor	W/H=0.5	W/H=1	W/H=1.5	W/H=2
<i>Efecto escala</i>				
	MPa	MPa	MPa	MPa
Hedley & Grant (1972)	8	13	18	22
Salamon & Munro (1967)	4	5.8	8	9
González (2006)	0.40	0.67	0.90	1.12
Sheorey (1987)	3.6	4.7	5.5	6.1
<i>Efecto de forma</i>				
Obert & Duvall (1967)	36	40	44	49
Bieniawski (1975)	33	40	47	54
Sjoberg (1992)	11	12	14	15
Krauland & Soder (1987)	13	14	16	17
Lunder (1994)	12	17	21	25
Modelo en Flac <sup>3D</sup> con carga de 90° y GSI=30	0.33	0.50	0.86	1.10

En las gráficas se muestra que la fórmula con mejor ajuste al modelo es la propuesta por González (2006) (Fig. 5.13). En este caso la aproximación no es sólo del mismo orden de magnitud, sino de decimales. Con esto se corrobora la validez de los modelos y queda demostrado que la mayoría de las ecuaciones empíricas consideran muy pocos parámetros sobrestimando la resistencia del pilar. Sin mencionar que no sirven para geometrías complejas

o cargas inclinadas y solo aplican cuando el pilar coincide en características con la base de datos de la ecuación.

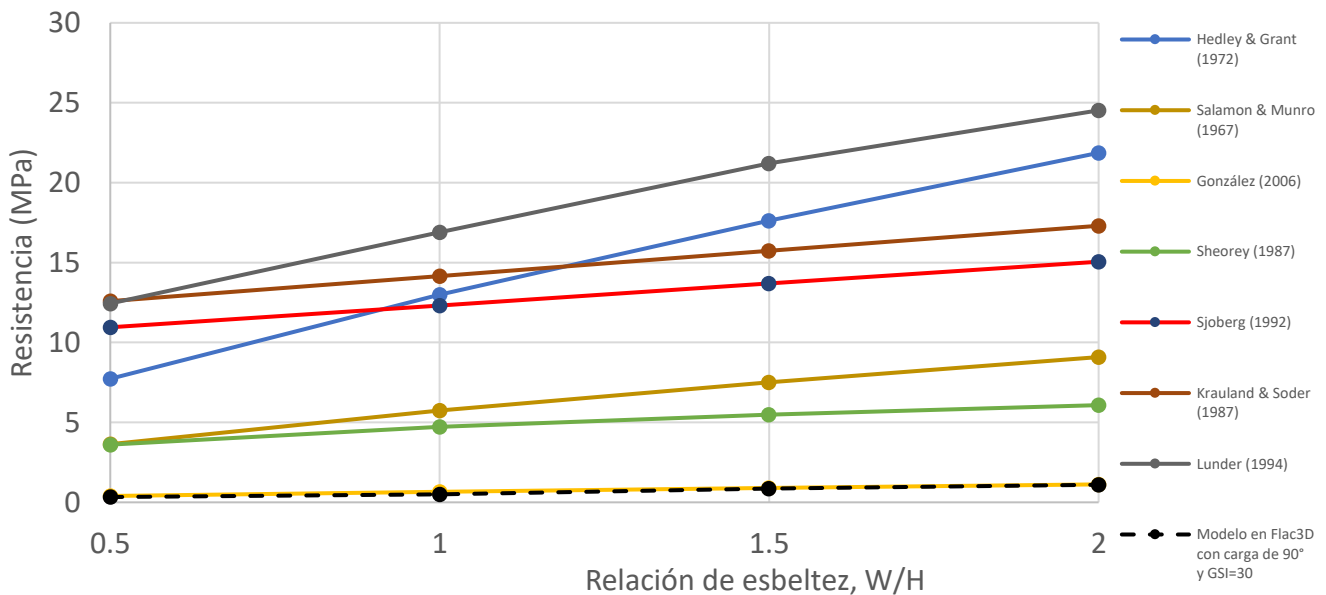


Fig. 5.13 Validación entre ecuaciones empíricas y modelo numérico con GSI de 30.

### 5.2 Valoración de la influencia de daño por voladura

Como se comentó en el capítulo anterior, se elaboró una malla para pilares de *caving* con geometrías reales usadas en minería (Fig. 4.3). En esta malla se incluye el material degradado por la voladura con el factor de daño  $D$  del criterio de Hoek & Brown, con el fin de ver la influencia del daño. El procedimiento consistía en establecer el equilibrio en el modelo, después se abría la excavación, se incorporaba el material dañado por la voladura, se calculaba el factor de seguridad y posteriormente se introducía la carga vertical. Los resultados de este procedimiento están plasmados en la Tabla 5.8.

En primera instancia se hicieron pruebas en pilares a una profundidad media (1 MPa) con  $k_0=1$ , un módulo de velocidad de  $5 \times 10^{-5}$  m/s; la calidad de roca media GSI de 50,  $\sigma_{ci}$  de 75 MPa y  $m_i$  de 18; para daños de  $D=0.7$  y  $D=1$ ; los radios de voladura usados fueron de 1.5, 3 y 5 m.

Tabla 5.8 Resultados de daño por voladura para pilar con roca de calidad media.

	Distancia afectada	Resistencia del pilar		F.S.	Área de roca sana
	m	Pa	%		
D=0	-	6.16E+07	100.00	3.46	225
	1.5	4.02E+07	65.26	2.95	144
	3	3.23E+07	52.44	2.73	81
D=0.7	5	2.60E+07	42.21	2.55	25
	1.5	3.05E+07	49.51	2.68	144
	3	2.04E+07	33.12	2.33	81
D=1	5	1.32E+07	21.43	2.04	25

Si analizamos los mecanismos de falla durante el cálculo del factor de seguridad (Fig. 5.14), se observa a los pilares fallando en toda su estructura, no hay fallas locales. Gracias a la calidad del macizo rocoso y roca intacta los factores de seguridad son altos, aún con daño se encuentran por encima del factor permisible (F.S.=1.3).

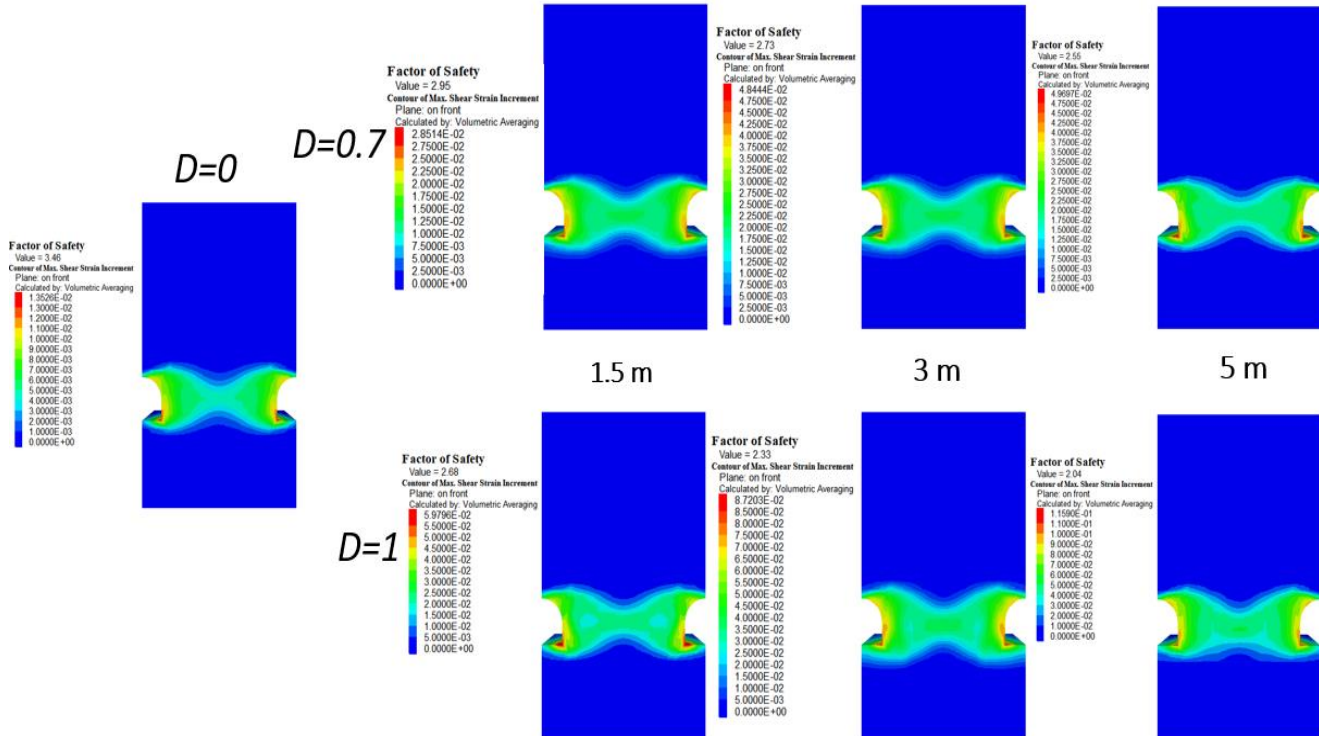


Fig. 5.14 Incremento de máximas deformaciones cortantes y factor de seguridad para pilares de panel cavity dañados por voladura a diferentes distancias de afectación en roca de calidad media.

Al analizar los contornos de esfuerzos en dirección z en los pilares después de la excavación (Fig. 5.15) observamos que, en un inicio cuando no hay daño en el pilar ( $D=0$ ) los esfuerzos se distribuyen mejor, teniendo una concentración en las paredes del pilar del lado de las tablas del túnel, al mismo tiempo hay una relajación de esfuerzos por encima de la bóveda y por debajo del piso. Por el contrario, cuando se analiza el daño a 1.5 m en cualquiera de los casos  $D=0.7$  o  $D=1$ , la concentración de esfuerzos compresivos se localiza en el núcleo del pilar, alejándose de las paredes del túnel, aunque se siguen relajando los esfuerzos en bóveda y piso.

Cuando se llega a un daño de 3 m la zona donde se transmiten los esfuerzos es reducida (zona azul), esto se extiende al llegar a los 5 m, donde es tal la reducción del área que el núcleo recibe un sobreesfuerzo; en consecuencia, se disminuye tanto el factor de seguridad como la carga final soportada. Así, podemos concluir que los esfuerzos se están transmitiendo únicamente por la zona rígida del pilar; en otras palabras, en el núcleo. Al dañar parte del pilar con la excavación, esta zona pierde su capacidad de transmitir esfuerzos reduciendo la carga final que puede soportar.

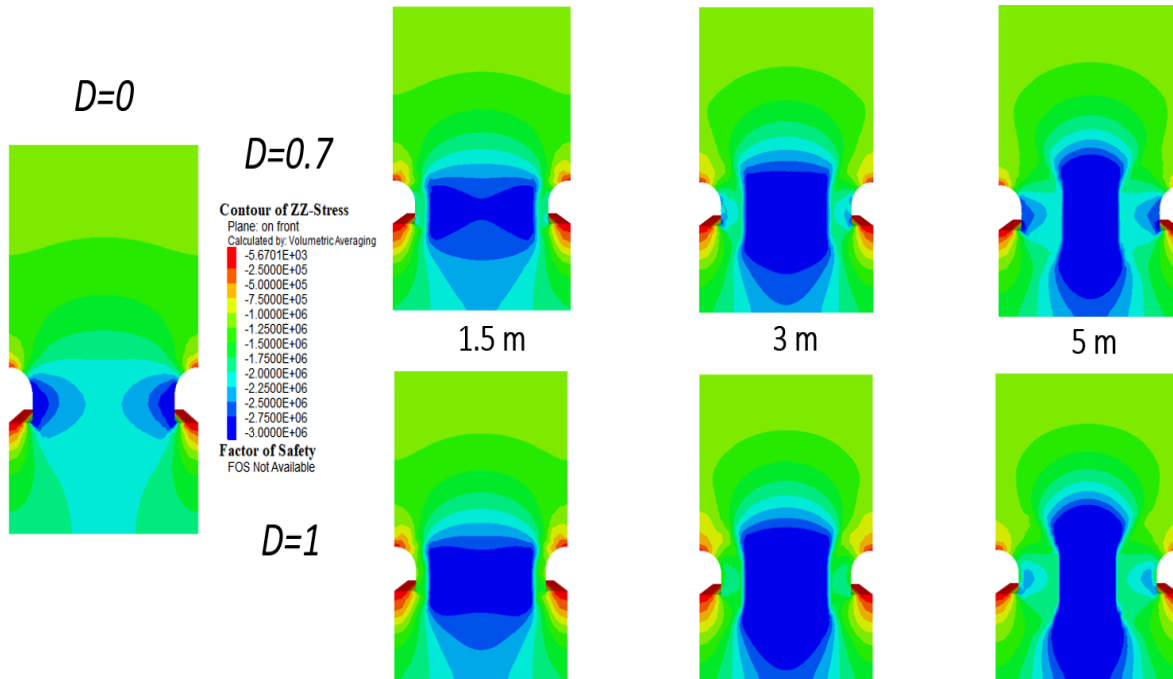


Fig. 5.15 Contornos de esfuerzos en los centros de los pilares de panel caving dañados por voladura a diferentes distancias de afectación en roca de calidad media.

Se graficaron los resultados de resistencia (Fig. 5.16) y factor de seguridad (Fig. 5.17), de acuerdo con el daño circundante a la excavación. En ambas graficas hay dos curvas:  $D=0.7$  de color naranja,  $D=1$  de color azul y  $D=0$  es un punto de color rojo. Cabe destacar que  $D=0$  es un valor usado para mostrar la mejor condición; pero esto no es realista, pues en la operación minera es indispensable usar explosivo para cumplir con la producción, causando que siempre exista daño en la roca. A pesar de que este escenario es irreal, sirve como parámetro de comparación, el cual representa 100% de carga o bien un factor de seguridad de 3.46, a partir de esta carga máxima se obtuvieron los porcentajes de reducción de carga ilustrados en la Fig. 5.16.

En la Fig. 5.17 al disminuir la zona por donde se transmiten los esfuerzos, decrece el factor de seguridad. Simplemente al introducir el daño con la mínima afectación ( $D=0.7$ ) en la mínima distancia (1.5 m) cae a 2.95. En términos de carga representa una reducción del 35%, en esa misma distancia para afectación de  $D=1$ , el factor de seguridad llega sólo a 2.68 y la resistencia cae al 50%.

Finalmente, cuando el pilar está sometido a las peores condiciones,  $D=0.7$  y  $D=1$  a 5 metros de distancia de afectación, el factor de seguridad disminuyó 0.9 y 1.46 respectivamente. Por otro lado, la carga disminuyó hasta solo soportar el 42% en el primer caso y 21% en el segundo. Entonces, tanto la resistencia como el factor de seguridad en pilares son dependientes de la magnitud y la distancia de afectación provocada por una voladura.



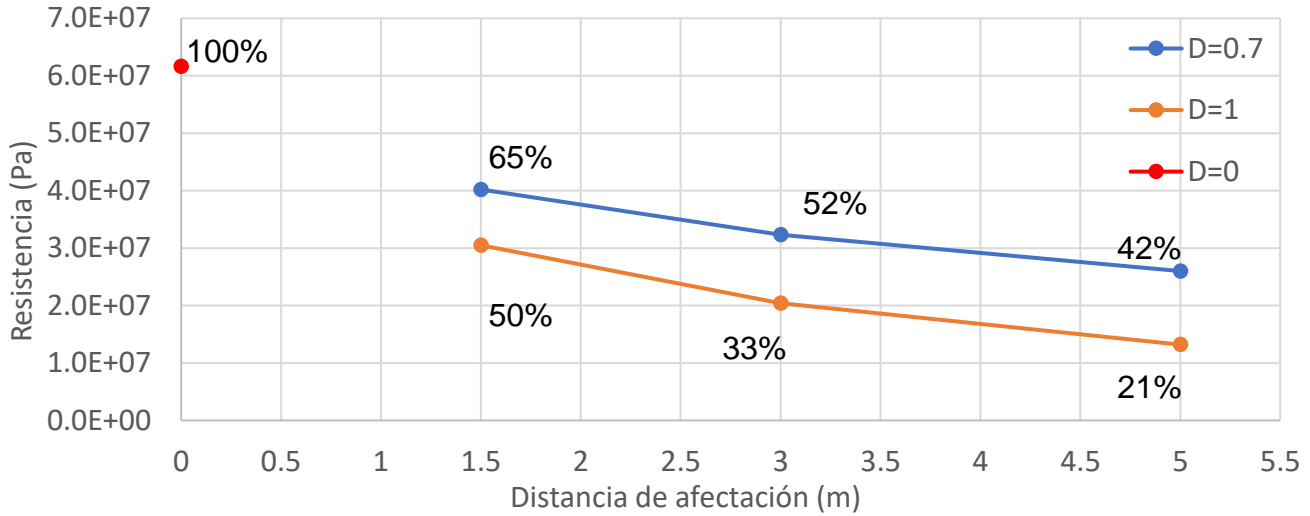


Fig. 5.16 Reducción de la carga en función de la distancia de afectación por voladura para pilares con propiedades de roca de calidad media.

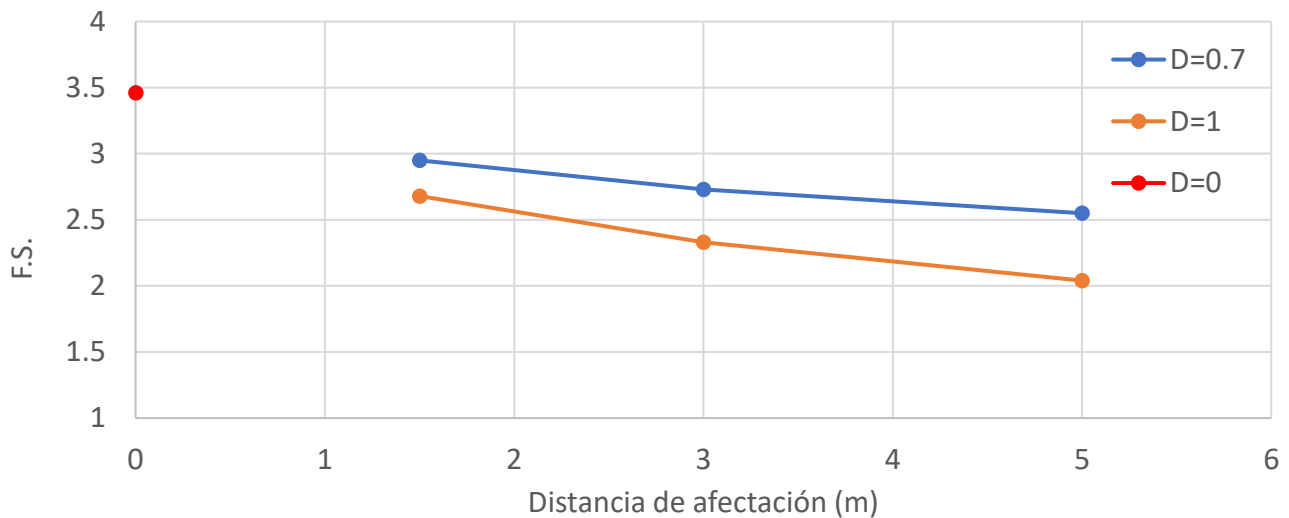


Fig. 5.17 Reducción del factor de seguridad en función de la distancia de afectación por voladura para pilares con propiedades de roca de calidad media.

La gráfica esfuerzo desplazamiento de esta prueba se encuentra en el Anexo C.

### 5.2.1 Análisis de pilar en propiedades límite

En esta etapa se realizó un pilar en condiciones realistas de campo, daño  $D=0.7$  a 1 metro de afectación, con un factor de seguridad igual a 1.3, este es el factor mínimo que se requiere en *panel caving*; es decir, se encontraría en una condición límite.

Fue necesario efectuar un aproximado de 20 pruebas en retro análisis, en cada una se redujo un parámetro específico de la roca (procurando no alcanzar propiedades de suelo), hasta llegar a un pilar con propiedades límite: GSI de 30;  $\sigma_{ci}$  de 40 MPa y  $m_i$  de 7.

Partiendo de los resultados del retro análisis se hicieron las pruebas con estado inicial de esfuerzos de una roca de profundidad media (1 MPa), un  $k_0=1$ ; un módulo de velocidad de  $5 \times 10^{-5}$  m/s; factor de daño  $D=0.7$  y  $D=1$ ; con distancias de afectación a 0.5, 1, 1.5, 2, 3 y 5 m;

el objetivo es conocer el efecto de la voladura en condiciones difíciles para la minería, además de estudiar mejor el impacto de la distancia de afectación alrededor del túnel. Los resultados se encuentran en la Tabla 5.9.

Tabla 5.9 Resultados del pilar con propiedades límite.

	Distancia de afectación	Resultante		F.S.	Área de roca sin daño (en la zona más angosta) m <sup>2</sup>
	m	Pa	%		
Sin daño	-	5.93E+06	100.00	1.54	225
<i>D=0.7</i>	0.5	4.60E+06	77.57	1.4	196
	1	3.80E+06	64.08	1.3	169
	1.5	3.30E+06	55.65	1.25	144
	2	2.99E+06	50.42	1.2	121
	3	2.50E+06	42.16	1.12	81
	5	1.88E+06	31.70	1	25
<i>D=1</i>	0.5	4.11E+06	69.31	1.34	196
	1	3.10E+06	52.28	1.18	169
	1.5	2.47E+06	41.65	1.09	144
	2	2.05E+06	34.54	1.02	121
	3	-	-	0.91	81
	5	-	-	0.72	25

Los mecanismos de falla del pilar al determinar el factor de seguridad con daño de voladura  $D=0.7$  (Fig. 5.18), revelaron una falla total en la estructura del pilar, de forma muy similar a lo ocurrido en las pruebas pasadas. El cambio más evidente en los resultados es la disminución del factor de seguridad, alcanzando el límite de la estabilidad (F.S. de 1) cuando se encuentra con afectación a 5 m. Además, de un aumento en las deformaciones cortantes en las paredes de la excavación, especialmente en el daño de 2, 3 y 5 m.

Analizando los esfuerzos en sentido vertical para el daño de  $D=0.7$  (Fig. 5.19), se muestra un incremento de esfuerzos en el centro del pilar al incrementar la distancia de afectación por voladura, sin olvidar que esta zona rígida es donde se transmiten los esfuerzos. Otra diferencia observada, es el alivio de esfuerzos en la zona dañada por la voladura, confirmando que esta zona no está transmitiendo esfuerzos.

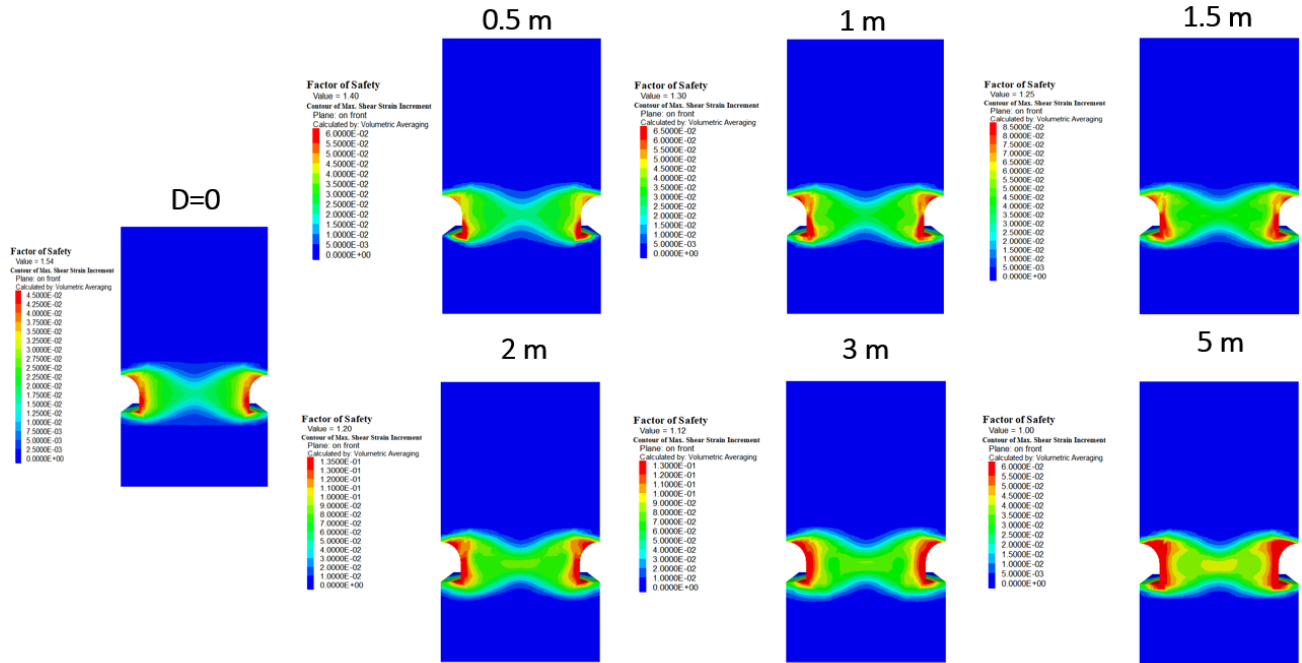


Fig. 5.18 Incremento de máximas deformaciones cortantes y factor de seguridad para pilares de panel caving con propiedades límite con daño  $D=0.7$  a diferentes distancias de afectación.

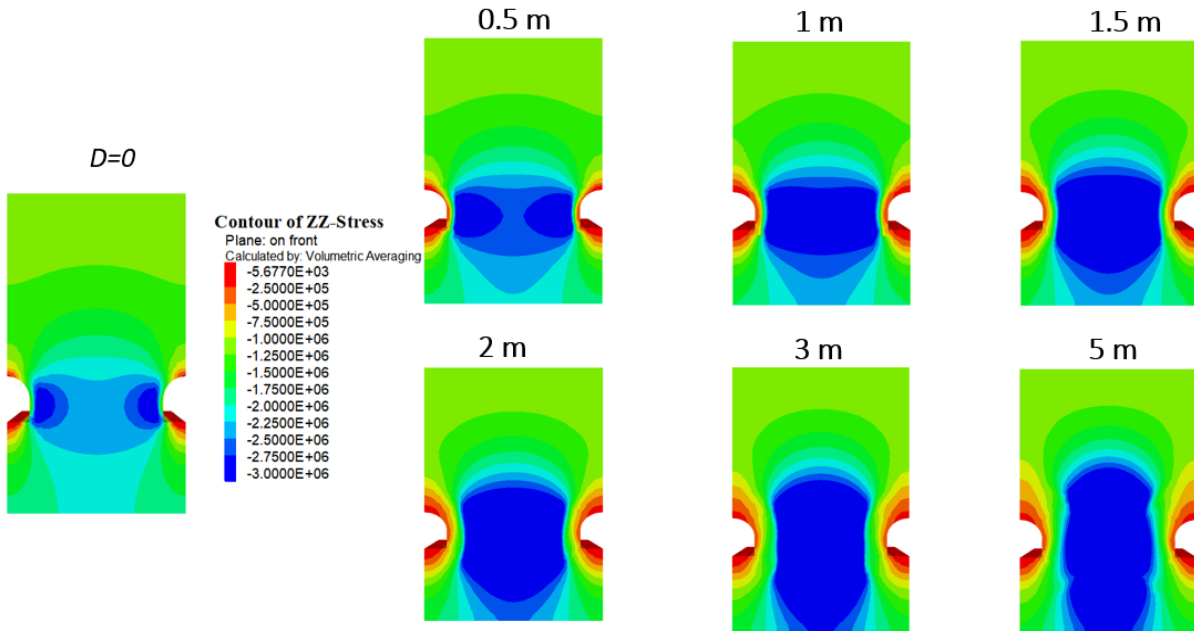


Fig. 5.19 Contornos de esfuerzos en los centros de los pilares de panel caving con propiedades límite con  $D=0.7$  a diferentes distancias de afectación.

En los resultados para el daño  $D=1$ , los mecanismos de falla (Fig. 5.20) no se muestran iguales a los de los modelos pasados. Al introducir el daño desde 0.5 a 2 m vemos que el pilar presenta un comportamiento distinto, este falla localmente en la bóveda del túnel, justo en la intersección entre los túneles y esta zona sufre mayores deformaciones cortantes al aumentar la distancia

del daño. Por último, se llega a los 3 m y a partir de esta distancia el pilar colapsa por peso propio, el factor de seguridad cae por debajo de uno, lo mismo ocurre con el daño a 5 m.

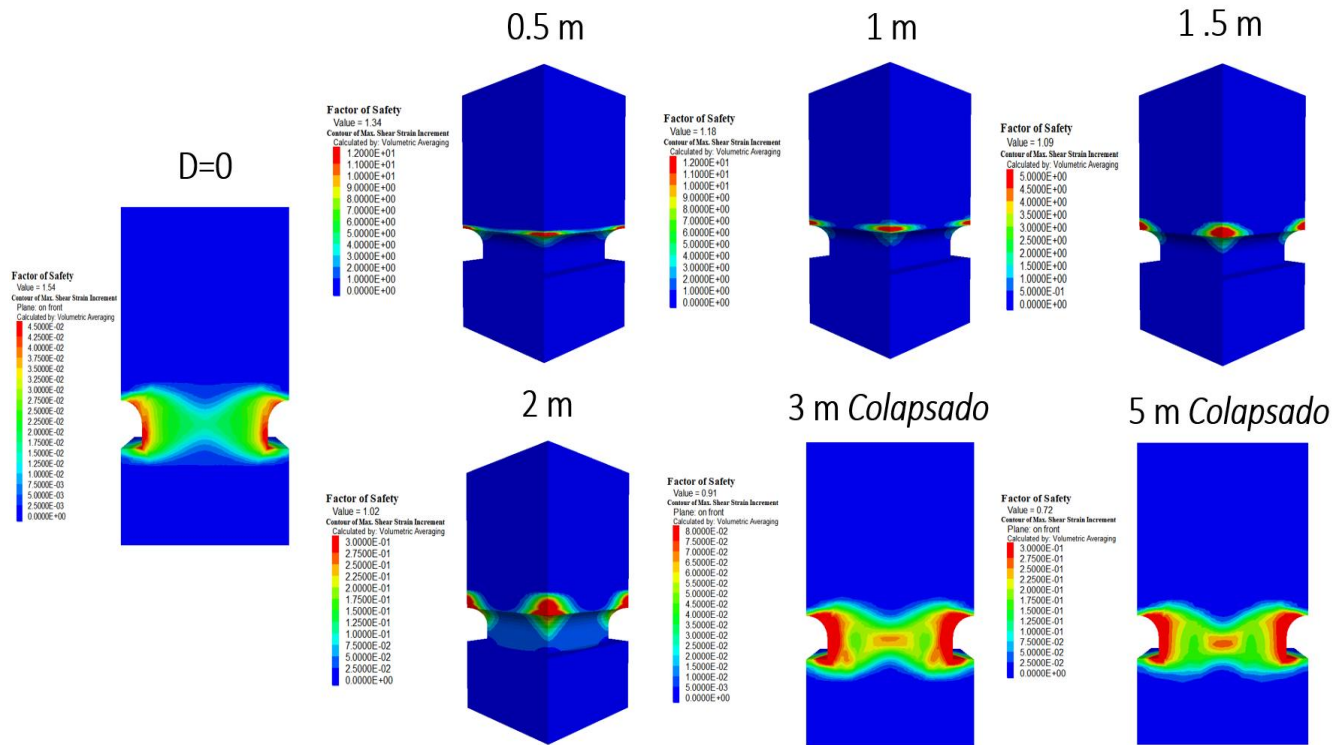


Fig. 5.20 Incremento de máximas deformaciones cortantes y factor de seguridad para pilares de panel caving con propiedades límite con daño  $D=1$  a diferentes distancias de afectación.

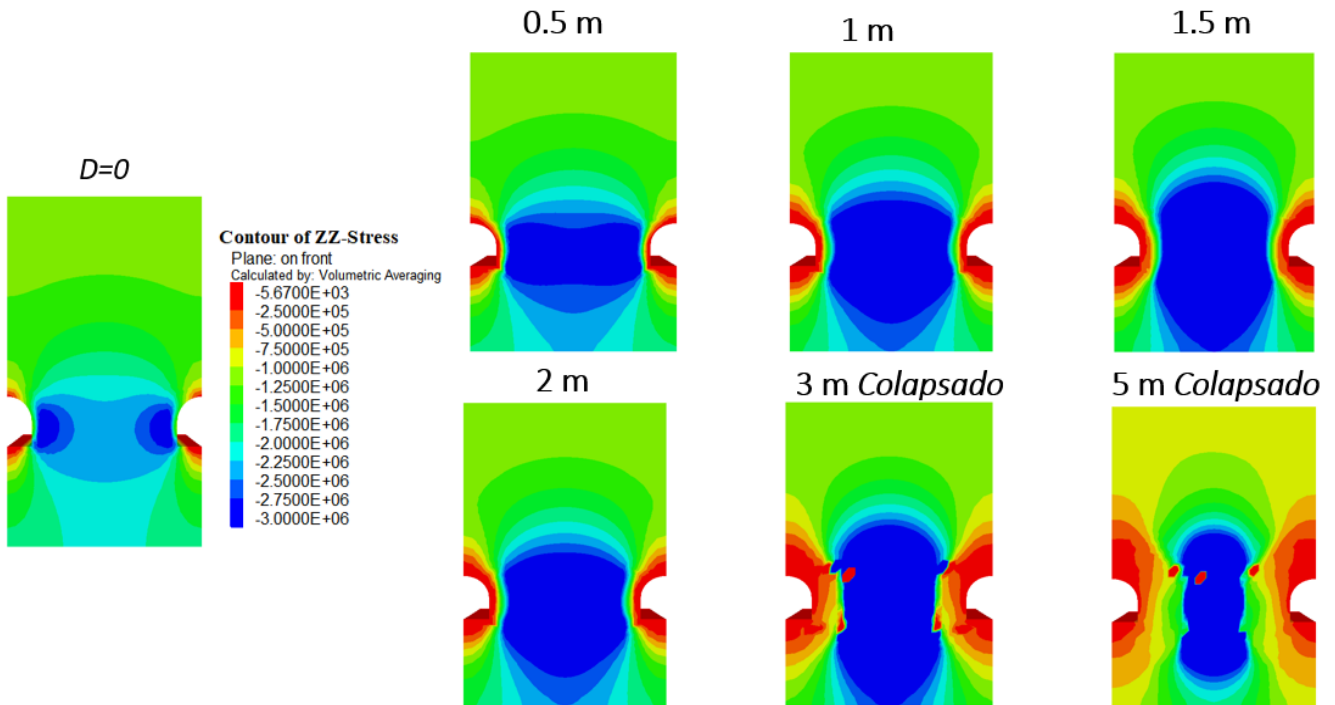


Fig. 5.21 Contornos de esfuerzos en los centros de los pilares de panel caving con propiedades límite con  $D=1$  a diferentes distancias de afectación.

Los contornos de esfuerzos presentan un comportamiento similar a pruebas pasadas hasta los 2 m, aunque con mayor daño en los contornos de excavación (Fig. 5.21). Sin embargo, para 3 y 5 m el pilar colapsa por peso propio.

Para graficar los resultados se consideró que el caso más optimista ( $D=0$ ) representaría el 100% de la carga (Fig. 5.22). De esta idea se analiza la reducción de carga, la cual resulta mayor para la afectación  $D=1$ , si comparamos la afectación contra la de  $D=0.7$  a mismas distancias vemos que hay una diferencia entre 8 y 15%. Obviamente los pilares con 3 y 5 m no pudieron ser sometidos a carga porque colapsaron.

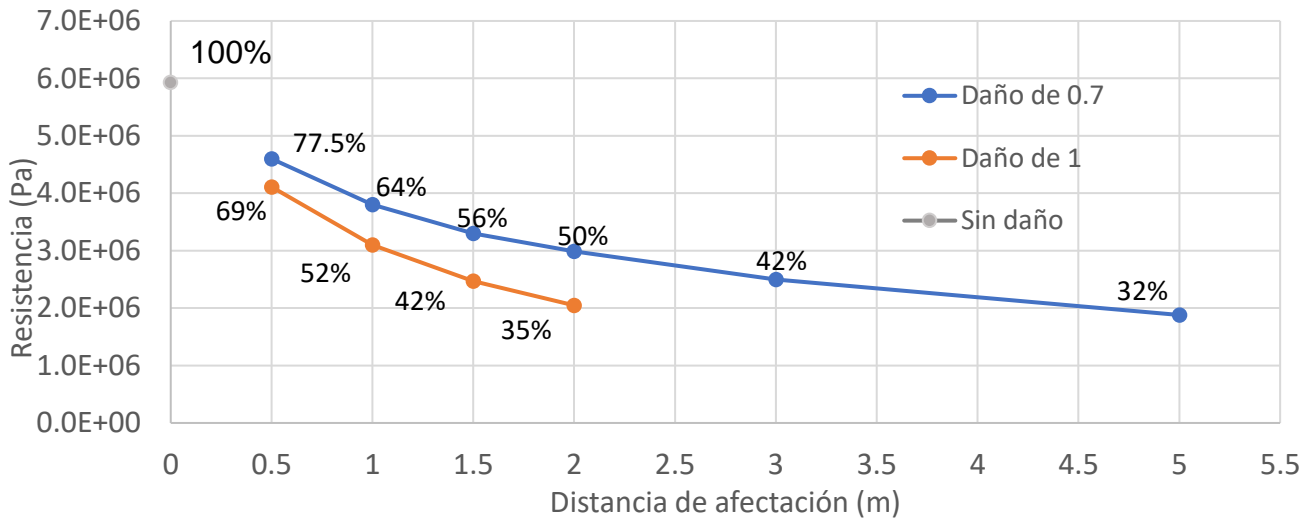


Fig. 5.22 Reducción de la carga en función de la distancia de afectación por voladura para pilares con propiedades límite.

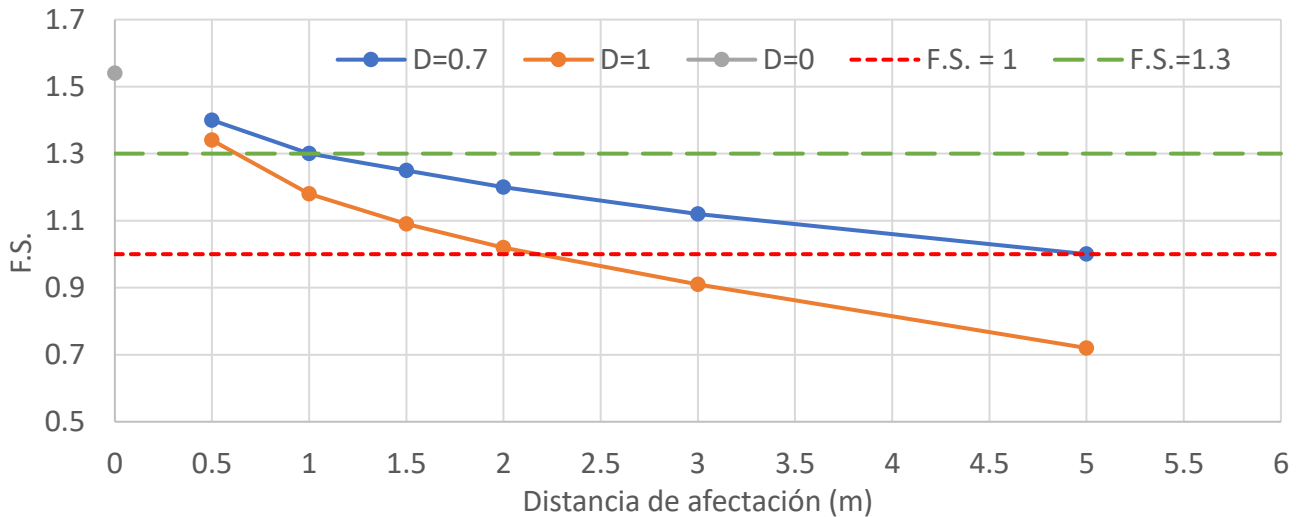


Fig. 5.23 Reducción del factor de seguridad en función de la distancia de afectación por voladura para pilares con propiedades límite.

Para el caso de  $D=0.7$  la afectación no puede ir más allá de 1 m, ya que es el mínimo factor de seguridad que necesitan tener los pilares (Fig. 5.23). Cuando llegamos al daño de  $D=1$  hay una independencia de la roca dañada con respecto del resto del pilar, pues la falla ocurre en la zona afectada. Con este daño solo se puede admitir 0.5 m de afectación, porque los demás

casos caen fuera del límite de seguridad y para daño de aproximadamente 2.5 metros sería imposible realizar la excavación.

Comparando los resultados normalizados (donde el 100% es su resistencia sin daño) de roca con calidad media y propiedades límite (Fig. 5.24), vemos que cuando el daño es de 0.7 (línea amarilla y roja) la roca con propiedades límite pierde más resistencia en porcentaje que la roca de calidad media. De igual forma ocurre al comparar  $D=1$  (línea azul y verde); por lo tanto, se concluye que la resistencia de roca con propiedades límite es más susceptible al daño por voladura.

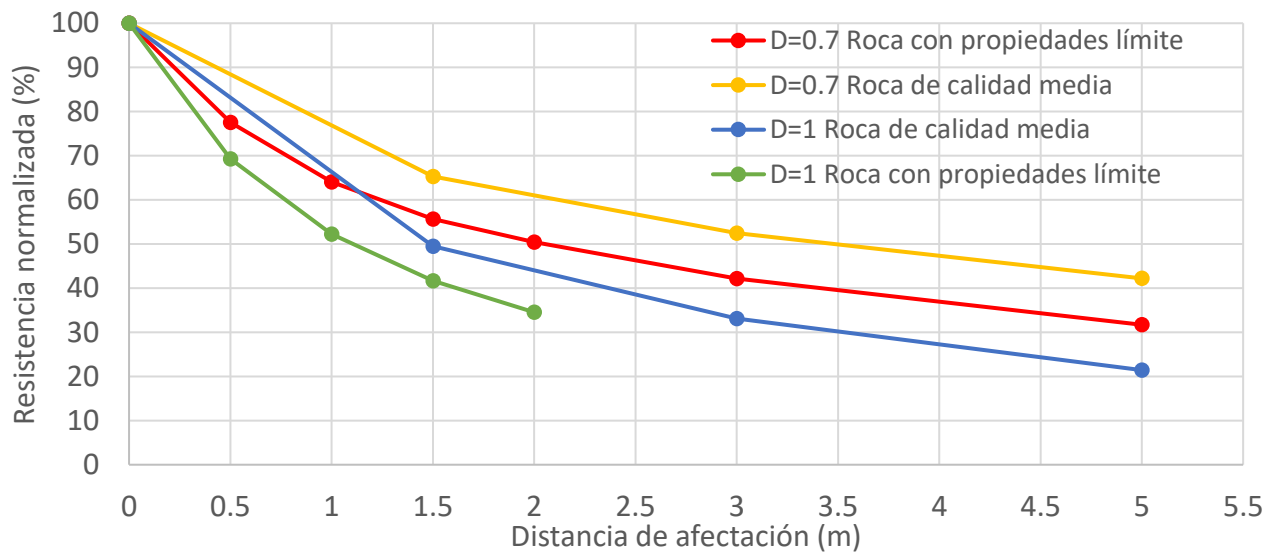


Fig. 5.24 Comparativa entre resultados de roca con calidad media y propiedades límite.

Las curvas esfuerzo desplazamiento de estas pruebas se encuentran en el Anexo C.

### 5.3 Análisis de pilares de panel caving con carga inclinada

Se analizó el efecto que tiene la carga inclinada ( $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  y  $90^\circ$ ) en pilares de caving sin y con daño de voladura de  $D=0.7$  a 1.5 m, estos parámetros son los esperados en campo. Las pruebas se hicieron simulando profundidad media (1 MPa);  $k_0=1$ ; un módulo de velocidad de  $5 \times 10^{-5}$  m/s; calidad de roca media GSI de 50;  $\sigma_{ci}$  de 75 MPa y  $m_i$  de 18.

#### 5.3.1 Resultados sin daño

Los resultados de la Tabla 5.10 muestran la susceptibilidad de pilares ante cargas inclinadas, por debajo de  $30^\circ$  de *plunge* se encuentra una zona crítica donde la resistencia cae más de 35%, mientras que por encima de  $45^\circ$  la resistencia incrementa a más del 70%. Las curvas esfuerzo desplazamiento se encuentran en el Anexo C.

Al analizar los mecanismos de falla, para  $0^\circ$  y  $15^\circ$  resulta una falla por cortante; en tanto, de  $30^\circ$  a  $45^\circ$  la falla es una combinación entre cortante y compresión, de  $60^\circ$  en adelante el mecanismo es más propio de una compresión. Por último, en los túneles se ve una concentración de deformaciones cortantes al incrementar la componente de carga axial (Fig. 5.25).

Tabla 5.10 Resultados de pilar de caving con parámetros de roca con calidad media sometido a cargas inclinadas.

Sin daño		
Plunge °	Resultante	
	Pa	%
0	1.99E+06	3.25
15	1.97E+07	32.08
30	4.48E+07	72.93
45	5.51E+07	89.69
60	5.94E+07	96.75
75	6.08E+07	99.04
90	6.14E+07	100.00

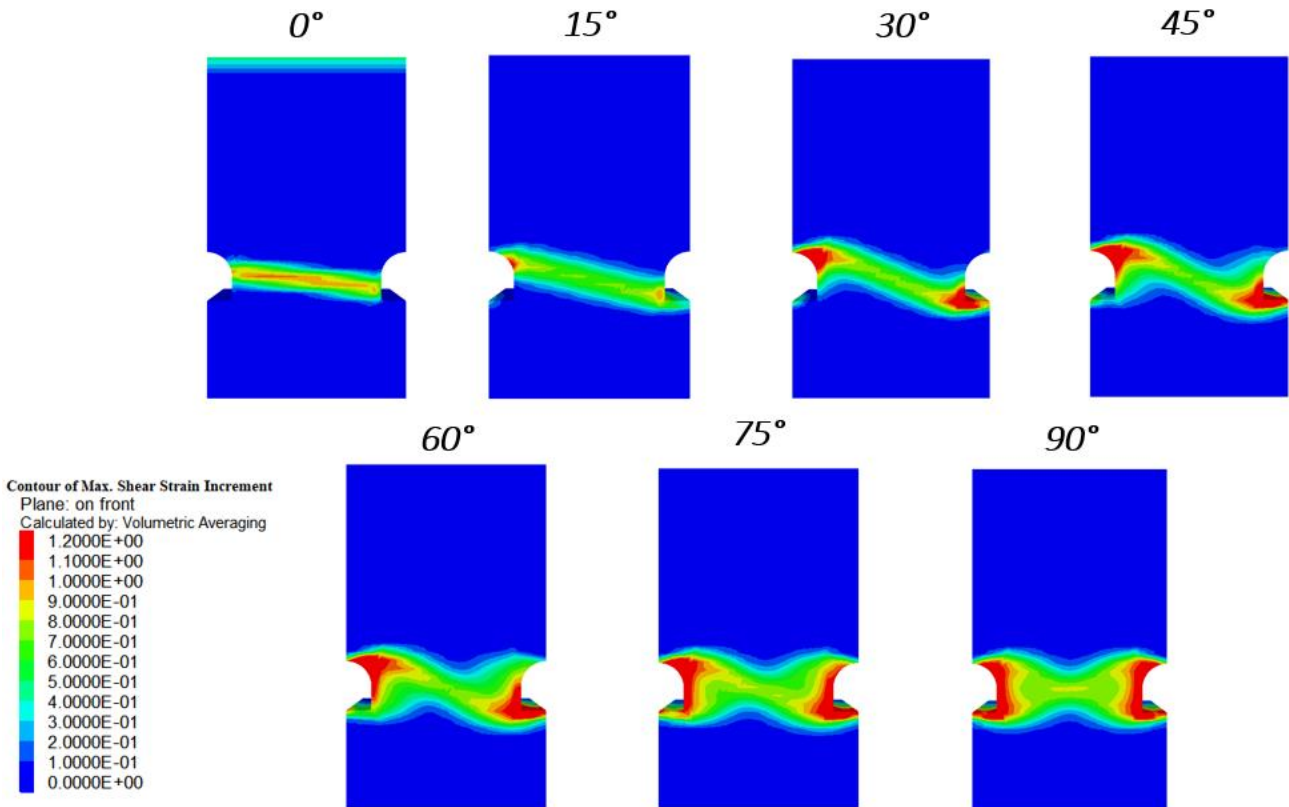


Fig. 5.25 Incremento de máximas deformaciones cortantes en pilares de panel caving con roca de calidad media sometido a cargas inclinadas.

### 5.3.2 Resultados con daño

Los parámetros empleados son iguales a los anteriores, sólo que ahora se consideró el daño por voladura ( $D=0.7$  con una distancia radial alrededor del túnel de 1.5 m). Los resultados son análogos a los anteriores, si bien con un ligero castigo sobre la resistencia ante cargas inclinadas (Tabla 5.11). Asimismo, al analizar los mecanismos de falla, se puede ver que estos se mantuvieron, aunque aumentaron las deformaciones cortantes en zonas aledañas a los túneles Fig. 5.26.

Tabla 5.11 Resultados de pilar de caving con daño y parámetros de roca con calidad media sometido a cargas inclinadas.

$D=0.7$ a $1.5$ m		
<i>Plunge</i> °	Resultante	
	Pa	%
0	1.62E+06	4.02
15	1.15E+07	28.69
30	2.80E+07	69.55
45	3.57E+07	88.78
60	3.81E+07	94.67
75	3.88E+07	96.57
90	4.02E+07	100.00

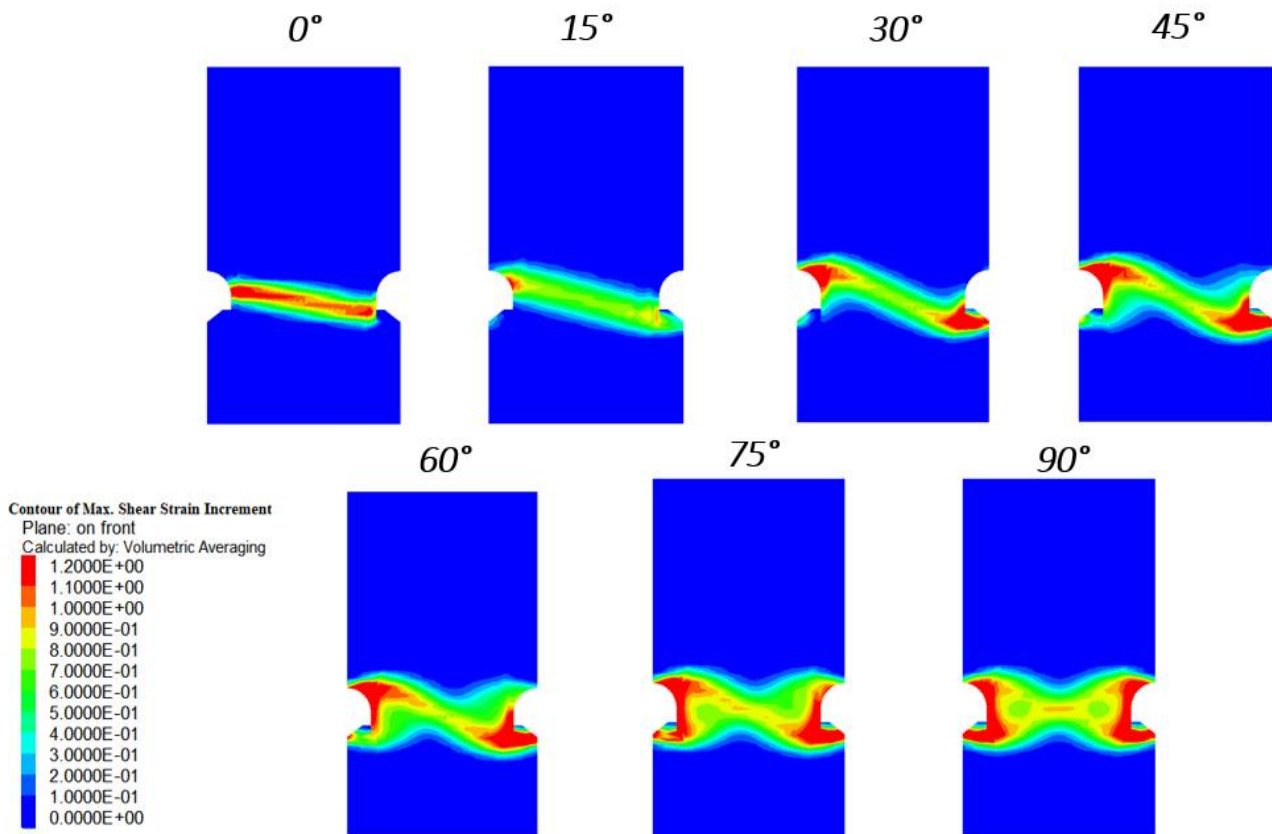


Fig. 5.26 Incremento de máximas deformaciones cortantes en pilares de panel caving con daño  $D=0.7$  a  $1.5$  m y roca de calidad media sometido a cargas inclinadas.

Ahora si normalizamos los valores de carga en función de la mejor condición del pilar (100%); es decir,  $D=0$  en carga axial, se obtiene la reducción de la resistencia al combinar carga inclinada y daño por voladura (Tabla 5.12). Partiendo de lo anterior, se comprueba que la combinación de carga inclinada y daño por voladura en las peores condiciones (*plunge* de  $0^\circ$ ) reduce la resistencia un 97%, al pasar de los  $40^\circ$  de inclinación se pierde el 50% y en carga



axial la reducción solo por el daño debido a la voladura es del 35%. Como se ha mencionado, el caso  $D=0$  es hipotético y difícilmente ocurrirá en condiciones reales de campo.

Tabla 5.12 Comparativa entre resistencia con y sin daño por voladura ante la carga máxima soportada por el pilar.

Plunge °	Carga máxima soportada por el pilar ( $D=0$ a $90^\circ$ )	Con daño	Carga del pilar dañado con respecto a la carga máxima soportada	Disminución de la carga
	Pa	Pa	%	%
0	-	1.62E+06	3	97
15	-	1.15E+07	19	81
30	-	2.80E+07	46	54
45	-	3.57E+07	58	42
60	-	3.81E+07	62	38
75	-	3.88E+07	63	37
90	6.14E+07	4.02E+07	65	35

En la gráfica de la Fig. 5.27 observamos dos curvas, una para el pilar sin daño (azul) y otra con daño (roja). Al analizar ambas, es claro que conforme se acercan a cortante, tienden a ser más cercanas entre sí, lo cual quiere decir que las cargas inclinadas son menos susceptibles a reducir su resistencia por voladura. Aun así, la combinación de ambos efectos resulta en una reducción importante de resistencia. Por consiguiente, es crucial considerar el estado de esfuerzos donde se realizarán los pilares. Además, es indispensable tomar en cuenta las posibles afectaciones por los trabajos de campo en el diseño, sino estos pilares serán propensos a fallar y poner en riesgo la estabilidad local y global de la mina. En consecuencia, podría haber afectaciones a vidas humanas, maquinaria o paralizar la extracción del mineral.

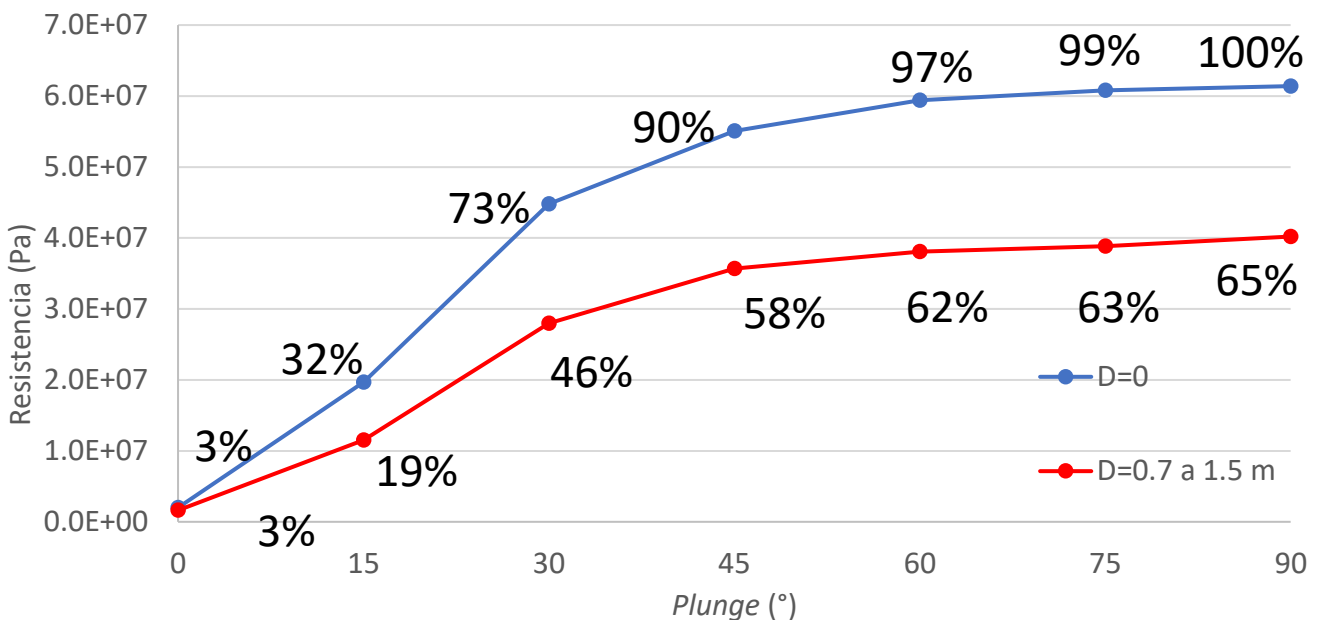


Fig. 5.27 Comparación entre envolventes con y sin daño de voladura en pilares para caving con calidad de roca media.

## Capítulo 6 Conclusiones y recomendaciones

### 6.1 Conclusiones

A lo largo de esta tesis se documentó el tema de pilares de roca cuadrados y de forma irregular (*caving*), se presentaron sus consideraciones en el diseño, los métodos de análisis y la influencia de las cargas inclinadas sobre la resistencia de estos. También se mostró información del daño que provoca la voladura en la resistencia de pilares de tipo cuadrado. A través de esta recopilación bibliográfica, se concluyó que es necesario considerar ambos efectos en el diseño, dado que la falla de un pilar puede ocasionar accidentes en la mina afectando a los trabajadores y/o el equipo.

Se consiguió generar una malla en diferencias finitas de pilares complejos de *caving* y regulares a diferentes relaciones de esbeltez; una rutina para imponer condiciones de frontera que simulan de forma realista los arreglos sistemáticos de pilares; un criterio de velocidades para introducir cargas inclinadas en el modelo, el cual permite evaluar la resistencia del pilar en función de la inclinación de la carga (*plunge*) y crear una rutina que genera gráficas esfuerzo desplazamiento. Adicionalmente, se desarrolló una rutina que cuantifica el daño por voladura en pilares de *caving*.

#### 6.1.1 Referente a pilares de geometría regular

A partir del modelo para pilares regulares con relación de esbeltez mayor a uno se demostró que a carga cortante (*plunge* de  $0^\circ$ ) se tiene la mínima resistencia y en carga axial (*plunge* de  $90^\circ$ ) la máxima. Mientras que la zona de inflexión en la envolvente de resistencia en función del *plunge* es a  $45^\circ$ , pues a cargas inclinadas menores la resistencia cae por debajo del 60% (zona crítica). Asimismo, cuando se alcanzan cargas inclinadas a  $75^\circ$  o mayores la resistencia del pilar estará por encima del 90%.

En las deformaciones cortantes para relaciones de esbeltez mayores a uno se muestra que en inclinaciones de  $0^\circ$  a  $15^\circ$  presenta mínima resistencia, porque se compromete el núcleo y una pared del pilar, siendo el mecanismo de falla cortante. Entre  $30^\circ$  y  $45^\circ$  el mecanismo corresponde al de falla por cortante, aunque la combinación con componentes axiales le confiere mayores resistencias. A diferencia, entre  $60^\circ$  y  $75^\circ$  el mecanismo de falla corresponde principalmente al de compresión en forma de cruz, en este punto se tiene una resistencia superior. Por último, al llegar a  $90^\circ$  el pilar falla por compresión, las paredes son las que se deforman manteniendo al pilar en un estado de esfuerzos triaxiales, ayudando a incrementar su resistencia, en este caso es probable el descostramiento de la roca.

Durante el análisis de la relación de esbeltez se determinó que si esta incrementa también lo hará la resistencia y contrariamente al disminuir la relación, las resistencias serán menores. En una  $W/H=2$  la resistencia es hasta 3 veces mayor si se compara con la relación de esbeltez unitaria a carga axial, para  $W/H=1.5$  será hasta 2 veces mayor y para una  $W/H=0.5$  disminuye un 66% de carga. En este último caso la resistencia es menor debido al escaso confinamiento del núcleo.

Se demostró que el estado de esfuerzos impuesto al modelo no influye significativamente en los resultados obtenidos en la envolvente de resistencia, pues no se presentaron plastificaciones para el tipo de roca simulada a profundidades medias.

De la misma forma se demostró que el modelo Mohr-Coulomb con parámetros equivalentes a los utilizados con el criterio de falla de Hoek & Brown sobrestima los valores de la envolvente de resistencia en confinamientos bajos, aunque si aumenta el confinamiento se podrían conseguir ángulos de fricción menores que den mejores resultados. No obstante, no se considera representativo para evaluar pilares de roca a profundidades medias.

Los resultados de pilares regulares fueron comparados con métodos tradicionales de diseño, métodos empíricos. En estos resultados vemos ajustes acordes con ecuaciones que consideraron la calidad geotécnica del macizo rocoso, en específico la ecuación de González (2006). En conclusión, la rutina y conceptualización se consideran válidas para su uso en modelos de pilares complejos de *caving*.

### 6.1.2 Referente a pilares complejos de *caving*

De las pruebas en pilares de *panel caving* se concluye que tanto la resistencia como el factor de seguridad, son dependientes de la magnitud y la distancia de afectación provocada por una voladura. Al incrementar la afectación a la roca de  $D=0.7$  a  $D=1$  la resistencia disminuye en un rango de entre 8 a 20% dependiendo del tipo de roca y la distancia de afectación. De igual forma, aumentando el radio de afectación alrededor del túnel (entre 0.5-5 m) la disminución puede ir de 20 a 100% (pérdida completa del pilar).

Los resultados del modelo numérico mostraron que el material degradado (por voladura) se ablanda, generando que los esfuerzos se transfieran por el centro del pilar (núcleo) al ser la parte más rígida. Esto quiere decir que el parámetro más importante es el módulo de Young de la roca. Conforme se incrementa la distancia de daño se reduce la zona por donde se transmiten los esfuerzos, provocando un sobreesfuerzo en el núcleo y por ende se reduce la resistencia.

En la roca con calidad media y en el pilar de propiedades límite con daño de  $D=0.7$ , los mecanismos de falla del pilar corresponden a los de compresión. No obstante, en el pilar con propiedades límite con  $D=1$ , se presentaron fallas locales en la bóveda que intersecan los túneles, lo que significa una independencia entre la zona dañada por la voladura y el resto del pilar. Después de los 3 metros de voladura con el mismo daño, el pilar colapsa por peso propio. También es evidente que hay mayor pérdida de resistencia en porcentaje en los pilares con propiedades límite, indicando mayor susceptibilidad de la resistencia ante el daño por voladura.

Finalmente, al incluir cargas inclinadas con daño hay una disminución de resistencia considerable de entre 97% (en *plunge* de 0°) y 35% (en *plunge* de 90°). Sin embargo, la reducción de resistencia es menor en cargas inclinadas cercanas al cortante puro; es decir, si hay mayor componente cortante son menos susceptibles al daño por voladura. En cuanto a los mecanismos de falla se presentan de forma similar a los de pilares regulares: a 0° de *plunge* es una falla por cortante, en 90° es por compresión, entre 30° y 45° predomina el mecanismo de falla cortante, mientras que entre 60° y 75° existe una combinación donde el mecanismo dominante es falla por compresión.

Podemos concluir que los métodos numéricos aportan una buena aproximación del problema al modelar cargas inclinadas, daño por voladura, interacción de los esfuerzos de confinamiento, la verdadera tridimensionalidad del problema, redistribución de esfuerzos, comportamiento de pilares bajo criterios de resistencia acordes al problema y generación de envolventes de resistencia.

Durante el desarrollo de esta tesis, se ha demostrado la importancia de conocer el campo de esfuerzos para entender la orientación e inclinación de la carga, así como considerar el daño por voladura al diseñar pilares. Ambas variables reducen considerablemente la estabilidad del pilar, más aún si se combinan, por lo que no tomarlas en cuenta en el diseño de la estructura sobrestimaría la resistencia sin conocer su límite real. Asimismo, es indispensable cuidar los trabajos de campo para no dañar el macizo rocoso durante la excavación y de esta forma mantener la estabilidad local y global de la mina.

## **6.2 Recomendaciones y análisis posteriores**

- Analizar pilares con cargas inclinadas y daño por voladura en elemento discreto.
- Cuantificar la convergencia de túneles sometidos a *stress abutment* y daños por voladura haciendo secciones para excavar.
- Variar la influencia de daño de forma gradual en los túneles hasta un valor cercano a cero.
- Evaluar diferentes relaciones de esbeltez en pilares rectangulares o circulares.

# Referencias

- Barraza, M., & Crokan, P. (2000). Esmeralda mine exploitation project. *Proceedings of MassMin*, 267-277.
- Bernaola Alonso, J., Castilla Gómez, J., & Herrera Herbert, J. (2013). *Perforación y voladura en rocas en minería*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid. Departamento de Explotación de Recursos Minerales y Obras Subterráneas.
- Bewick, R., Kaiser, P., & Amann, F. (2018). Strength of massive to moderately jointed hard rock masses. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 562-575.
- Bobet, A. (2010). Numerical Methods in Geomechanics. *The Arabian Journal for Science and Engineering*, Volume 35, Number 1B, 27-48.
- Brady, B., & Brown, E. (2005). *Rock Mechanics for underground mining Third Edition*. United States of America: Luwer academic publishers.
- Carrillo Ledesma, A., González Rosas, K., & Bernal Omar, M. (s.f.). *Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional*. Ciudad de México: Facultad de Ciencias, UNAM.
- Chapman, D., Metje, N., & Stark, A. (2010). *Introduction to Tunnel Construction*. London and New York: Spoon Press .
- Chaves, E. (2010). *Diferencias Finitas*. España : Universidad de Castilla-La Mancha.
- Cuello, D., & Newcombe, G. (2018). Key geotechnical knowledge and practical mine planning guidelines in deep, high-stress, hard rock conditions for block and panel cave mining. *Proceedings of the Fourth International Symposium on Block and Sublevel Caving* (págs. 17-36). Australian Centre for Geomechanics.
- Dawson, E., Roth, W., & Drescher, A. (1999). Slope stability by strength reduction. *Géotechnique*, 835-840.
- Elmo, D., Vyazmensky, A., & Stead, D. (2007). A hybrid FEM/DEM approach to model the interaction between open-pit and underground block-caving mining. *Rock Mechanics: Meeting Society's Challenges and Demands* (págs. 1287-1294). London : Taylor & Francis Group .
- Esterhuizen, G., Dolinar, D., & Ellenberger, J. (2011). Pillar strength in underground stone mines in the united states. *International Journal of Rock Mechanics & Mining*, 42-50.
- Esterhuizen, G., Dolinar, D., Ellenberger, J., & Prosser, L. (2011). *Pillar and roof span design guidelines for underground stone mines*. Pittsburgh, PA: National Institute for Occupational Safety and Health (NIOSH).
- Gómez , R., & Labbé, E. (2019). Una opción para el paso a la minería subterránea masiva: la actual metodología aplicada en Chile del block caving. *Boletín geológico y minero* 130 (1), 181-198.

- González de Vallejo, L. I., Ferrer, M., Ortuño, L., & Oteo, C. (2002). *Ingeniería Geológica*. Madrid, España: Pearson Educación.
- González Domínguez, F. (2016). Análisis de criterios matemáticos para predecir el radio de fracturamiento en roca generado por voladura en excavaciones subterráneas. Ciudad Universitaria, CDMX: Tesis que para obtener el título de Ingeniera de Minas y Metalurgista.
- Goodman, R. (1989). *Introduction to Rock Mechanics*. New York: John Wiley & Sons.
- Guzmán, J. S. (2017). *Estudio de los medios granulares por el método de elementos discretos*. CDMX.
- Hoek, E., & Diederichs, M. (2006). Empirical estimation of rock mass modulus. *International Journal of Rock Mechanics Sciences*, 203-215.
- Hoek, E. (1985). *Excavaciones subterráneas en roca*. México: McGraw-Hill.
- Hoek, E. (2012). Blast Damage Factor D. *RocNews*, 1-7.
- Hoek, E., & Brown, E. (2019). The Hoek-Brown failure criterion and GSI-2018 edition. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering* 11, 445-463.
- Hoek, E., Carranza-Torres, C., & Corkum, B. (2002). Hoek-Brown failure criterion-2002.
- Howard L. Hartman . (1992). SME Mining Engineering Handbook. *Society for Mining, Metallurgy, and Exploration, Inc.* .
- Hudson, J., & Harrison, J. (2000). *Engineering Rock Mechanics An Introduction to the Principles*. UK: Elsevier Science Ltd.
- ITASCA. (7-11 de Agosto de 2006). FLAC Training Course Basic Concepts and Recommended Procedures for Geotechnical Numerical Analysis. ITASCA Consulting Group, Inc.
- ITASCA. (2009). FLAC Fast Lagrangian Analysis of Continua Online Manual Table of Contents. ITASCA Consulting Group, Inc.
- ITASCA. (2009). Manual Fast Lagrangian Analysis of Continua in 3 Dimensions FLAC3D.
- Jessu, K., & Spearing, A. (2018). Effect of dip on pillar strength. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy VOL. 118*, 765-776.
- Jessu, K., Spearing, A., & Sharifzadeh, M. (2018). A parametric study of blast damage on Hard Rock Pillar Strength. *Energies*.
- Kaiser, P. K., Kim, B., Bewick, R., & Valley, B. (2010). Rock mass strength at depth and implications for pillar design. *Deep Mining*, 463-476.
- LeVeque, R. J. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations Steady-State and Time-Dependent Problems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- López Jimeno, C. (1997). *Manual de túnel y obras subterráneas*. Madrid, España.

- Lunder, P. J. (1994). *Hard rock pillar strength estimation an applied empirical approach*. Canada: M. Sc. Thesis, Faculty of graduate studies department of mining and mineral process engineering, Universtity of British Columbia.
- Martin, C., & Maybe, W. (2000). The strength of hard-rock pillars. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences* 37, 1239-1246.
- Montiel, E., Soberanis, J., López, J., & Catellanos Pedroza, V. (2018). Metodología para la revisión de la estabilidad de pilares en rocas anisótropas y modelización explícita de discontinuidades. *XXIX Reunión Nacional de Ingeniería Geotécnica León, Guanajuato*, 2-10.
- Montiel, E. (2020). Estimación de la respuesta de pilares sometidos a carga por hundimiento mediante simulaciones numéricas 3D. *2° Jornada Minero Metalúrgica*. Ciudad de México.
- Murphy, M., Esterhuizen, G., & Slaker, B. (2020). Addressing stone pillar design with the NIOSH s-pillar software. *SME Annual Meeting*, 23-26.
- Oke, J., & Kalenchuk, K. (2017). Selecting the Most Applicable Hard Rock Pillar Design Method. *American Rock Mechanics Association*.
- Palmstrom, A., & Stille, H. (2010). *Rock engineering*. Thomas Telford.
- Paredes, P., Leaño , T., & Jauriat, L. (2018). Chuquicamata underground mine design: the simplification of the ore handling system of Lift 1. *Proceeding of the Fourth International Symposium on Block and Sublevel Caving* (págs. 358-398). Australian Centre for Geomechanics.
- Potts, D. M., & Zdravkvoic, L. (1999). *Finite element analysis in geotechnical engineering Theory*. Thomas Telford.
- Potvin, Y., & Hudyma, M. (1989). Rib pillar design in open stope mining. *CIM*, 31-36.
- Rahman, M., & Can Ulker, M. (2018). *Modeling and computing for geotechnical engineering an introduction*. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group.
- Ramírez Oyanguren, P., & Alejano Monge, L. (2004). *Mecánica de rocas: Fundamentos e Ingeniería de Taludes*. Madrid, España.
- Sánchez, F. A. (2018). *Ingeniería de Túneles*. CDMX.
- Stille, H., & Palmstrom, A. (2008). Ground behaviour and rock mass composition in underground excavations. *Tunelling and underground space tech*, 46-64.
- Suorineni, F., Kaiser, P., Mgumbwa, J., & Thidodeau. (2011). Mining of Orebodies under shear loading Part 1- case histories . *Institute of Materials and Mining* , 137-147.
- Timoshenko, S., & Goodier, J. (1951). *Theory of elasticity*. New York: McGrawHill.
- Vyazmensky, A., Elmo, D., Stead, D., & Rance, J. (2007). Combined finite-discrete element modelling of surface subsidence associated with block caving mining. *Rock Mechanics: Meeting Society's Challenges and Demands* (págs. 467-475). London: Taylor & Francis Group.

- Wagner, H. (1980). Pillar design in coal mines. *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, 37-45.
- Wyllie, D. (2005). *Foundations on rock*. Nueva York: Taylor & Francis e-Library.
- Wyllie, D., & Mah, C. (2004). *Rock Slope Engineering Civil and mining*. Londres y Nueva York: Taylor & Francis .
- Yrarrazaval Herrera, M. J. (2013). Nueva fórmula de resistencia para el diseño empírico de pilares. Santiago de Chile, Chile: Universidad de Chile Facultad de Ciencias Físico y Matemáticas Departamento de Ingeniería de Mina: Memoria para optar al título de Ingeniero Civil de Minas.



**ANEXO A. EQUIVALENCIA ENTRE MODELOS HOEK & BROWN Y  
MOHR-COULOMB, FACTOR DE DAÑO POR VOLADURA Y GSI**

## EQUIVALENCIA ENTRE MODELOS HOEK & BROWN Y MOHR-COULOMB

Para realizar la equivalencia entre los criterios es necesario determinar el ángulo de fricción interna, la resistencia cohesiva del macizo rocoso y definir el intervalo de esfuerzos donde se hará la obra. Lo anterior se puede hacer con un ajuste lineal medio para la ecuación del criterio de Hoek & Brown, en un intervalo de esfuerzos principales menores definido por  $\sigma_t < \sigma_3 < \sigma'_{3max}$ , donde  $\sigma'_{3max}$  es el límite superior de esfuerzos del confinamiento. En el método de ajuste se equilibran las áreas por encima y por debajo de la envolvente de Mohr-Coulomb (Fig. 0.1), dando lugar a la Ecuación (0.1) y Ecuación (0.2) (Hoek *et. al.*, 2002).

$$\phi' = \sin^{-1} \left[ \frac{6am_b(s + m_b\sigma'_{3n})^{a-1}}{2(1+a)(2+a) + 6am_b(s + m_b\sigma'_{3n})^{a-1}} \right] \quad (0.1)$$

$$c' = \frac{\sigma_{ci}[(1+2a)s + (1-a)m_b\sigma'_{3n}](s + m_b\sigma'_{3n})^{a-1}}{(1+a)(2+a) \sqrt{1 + \frac{6am_b(s + m_b\sigma'_{3n})^{a-1}}{(1+a)(2+a)}}} \quad (0.2)$$

Siendo  $\sigma'_{3n} = \sigma'_{3max}/\sigma_{ci}$

Después para encontrar la resistencia a corte se usa la ecuación del criterio Mohr-Coulomb para un esfuerzo normal dado y sustituyendo la  $c'$  y  $\phi'$ . Así la gráfica equivalente en términos de esfuerzos principales queda definida por la Ecuación (0.3).

$$\sigma'_1 = \frac{2c' \cos \phi'}{1 - \sin \phi'} + \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'} \sigma'_3 \quad (0.3)$$

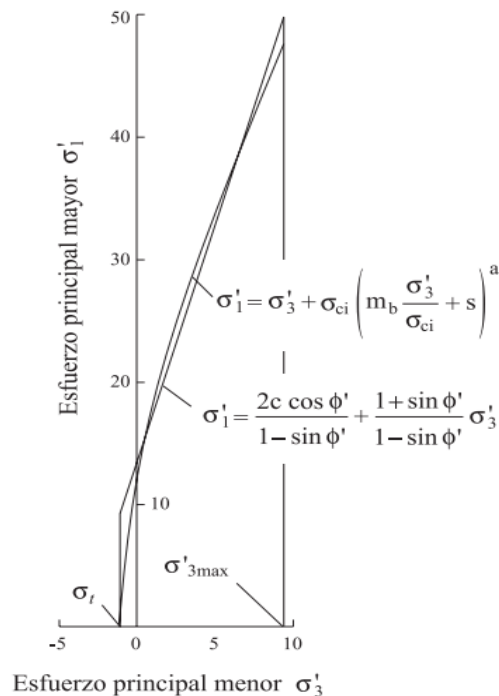


Fig. 0.1 Relación entre esfuerzos principales mayores y menores para el criterio de Hoek & Brown y el equivalente de Mohr-Coulomb (Modificada de Hoek *et. al.*, 2002).

Para determinar  $\sigma'_{3max}$  Hoek realizó cálculos analíticos por el método de la curva característica, buscando el valor del esfuerzo máximo de confinamiento, finalmente propone la siguiente aproximación (Ecuación (0.4)) con técnicas de regresión.

$$\sigma'_{3max} = \sigma_{cm} 0.47 \left( \frac{\sigma_{cm}}{\gamma H} \right)^{-0.94} \quad (0.4)$$

Donde  $\sigma_{cm}$  es la resistencia a la compresión simple global del macizo rocoso obtenido a partir del criterio de Mohr-Coulomb (Ecuación (0.5));  $\gamma$  es el peso específico del macizo y  $H$  profundidad del túnel.

$$\sigma_{cm} = \frac{2c' \cos \phi'}{1 - \sin \phi'} \quad (0.5)$$

A bajos niveles de confinamiento ( $\sigma_3$ ) el criterio de Mohr-Coulomb tiene que elevar su pendiente, de esta forma logra compensar la curvatura de la envolvente de Hoek & Brown con el fin de mantener las áreas por encima y por debajo de la recta de Mohr. Lo anterior, provoca un alto ángulo de fricción interna, haciendo que en túneles pocos profundos los resultados no sean realistas (Sánchez, 2018).

### **FACTOR DE DAÑO D**

En la primera ilustración de la Tabla 0.1 se muestra un daño  $D=0$ , ya que el daño al macizo es mínimo, se cuidó el patrón de barrenación, las cargas explosivas y la secuencia de detonación. Siendo un objetivo principal cuidar la alineación de los barrenos al crear las paredes en el túnel.

En la segunda imagen se ilustra una situación más compleja, el método es cabeceo y banqueo con un daño de  $D=0.5$ . Este factor solo debe aplicarse a una zona aproximada a dos metros alrededor de la mitad inferior del túnel de 12 metros de abertura. Se debe colocar una contra bóveda para controlar el desplazamiento excesivo en la parte inferior.

La tercera ilustración muestra una mala voladura de túnel con mal diseño y mala ejecución. Esto como consecuencia de mala alineación de barrenos en las paredes del túnel y falta de atención en la detonación. El factor de daño asignado es  $D=1$  con un decremento lineal hasta llegar a  $D=0$  a 3 m, la excavación es de 8 metros de abertura.







En la cuarta ilustración hay un talud de 15 m de altura, aquí se hizo una voladura con precorte en la cara izquierda. El factor de daño es  $D=0.5$  a 1 a 2 m hacia atrás de la cara de precorte, mientras que, para el resto del talud se asignó un factor  $D=1.0$  y con perturbación de 2 a 3 m.

En la última ilustración se observa un tajo abierto con taludes de hasta 1000 m de altura total. Es importante en estos casos asignar diferentes daños de voladura, ya que hay diferencias entre taludes creados por minería activa y taludes de diseño final que deben permanecer muchos años.

Tabla 0.1 Guía para estimar el factor de perturbación  $D$  por relajación de esfuerzos y daño por voladura (Modificada de Hoek & Brown, 2019).

El factor de perturbación $D$ nunca debe ser aplicado a la totalidad del macizo rocoso		
Apariencia del macizo rocoso	Descripción del macizo rocoso	Valor sugerido $D$
	Excelente calidad de voladura controlada o excavación con tuneladora, TBM, con resultados de alteración mínima del macizo rocoso confinado circundante al túnel.	$D=0$
	Excavación mecánica o manual en macizos rocoso de mala calidad (sin voladuras) con mínima alteración al macizo rocoso circundante. Cuando aparezcan problemas de deformación ( <i>squeezing</i> ) en el piso durante el avance, la alteración puede ser severa a menos que se coloque una contra bóveda temporal.	$D=0$  $D=0.5$ sin contra bóveda
	Mal control de la alineación en los barrenos, carga, diseño y secuencia de la detonación, como resultado voladura de mala calidad en roca en un túnel de roca competente con daños locales severos, extendiéndose 2 o 3 m en el macizo circundante.	$D=1$ en la superficie con decremento hasta $D=0$ a unos 2 m dentro del macizo rocoso
	Pequeñas voladuras en taludes de ingeniería civil dan lugar a pequeños daños en el macizo rocoso, particularmente si se usan voladuras con contorno como en el lado izquierdo de la fotografía. Sin embargo, el mal manejo de la voladura puede resultar en daños importantes en la cara de la roca.	$D=0.5$ para talud con precorte o pared lisa  $D=1.0$ voladura deficiente
	En algunas rocas débiles, la excavación se puede realizar con maquinaria, desgarrando y excavando la roca. Entonces el daño en estos casos se debe principalmente al alivio de esfuerzos. La minería de grandes tajos sufre alteraciones significativas debido a las grandes voladuras de producción y a la relajación de esfuerzos al retirar la roca estéril.	$D=0.7$ para efectos de alivio de esfuerzos en excavación mecánica  $D=1.0$ voladura deficiente

Tabla 0.2 Tabla básica de GSI (Modificada de Hoek & Brown, 2019).

GEOLOGICAL STRENGTH INDEX, GSI, PARA ROCAS FRACTURADAS (Hoek y Marinos, 2000)		Condiciones de los planos de las discontinuidades				
A partir de la litología la estructura y las condiciones de las discontinuidades, estimar el valor promedio del GSI. Evitar ser demasiado preciso, establecer un rango entre 33 y 37 es más realista que GSI=35. Nótese que la tabla no tiene en cuenta las fallas estructuralmente controladas. En los casos donde existan planos de debilidad con orientación desfavorable a la excavación, éstos dominarán el comportamiento de la masa. La resistencia de discontinuidades susceptibles al intemperismo se verá reducida si hay presencia de agua en el medio. En rocas de muy mala calidad y en presencia de agua conviene mover las categorías a la derecha						
Estructura		Disminución en la calidad de los planos →				
	ROCA INTACTA O MASIVA- muestras intactas de roca o macizos rocosos <i>in situ</i> con algunas discontinuidades espaciadas	90	80	70	60	N/A
	FORMADA POR BLOQUES- masa de roca no tectonizada, consiste en bloques cúbicos con buena trabazón entre ellos y es formada por tres familias de discontinuidades	80	70	60	50	N/A
	FORMADA POR MUCHOS BLOQUES- masa de formada por múltiples bloques angulosos con trabazón regular y definidos por más de 4 familias de discontinuidades	70	60	50	40	N/A
	FORMADA POR MUCHOS BLOQUES/TECTONIZADA/PLEGADA- formada por bloques angulosos con múltiples familias de discontinuidades que intersecan. Planos de estratificación y esquistosidad persistentes	60	50	40	30	N/A
	DESINTEGRADO- Macizo rocoso muy fracturado con una mezcla de bloques angulares y redondeados con poca trabazón.	50	40	30	20	N/A
	LAMINADA/CIZALLADA- No hay bloques por el escaso espaciamiento de débiles planos de esquistosidad o cizalla.	40	30	20	10	N/A

## **ANEXO B. RESULTADOS DE MECANISMOS DE FALLA**

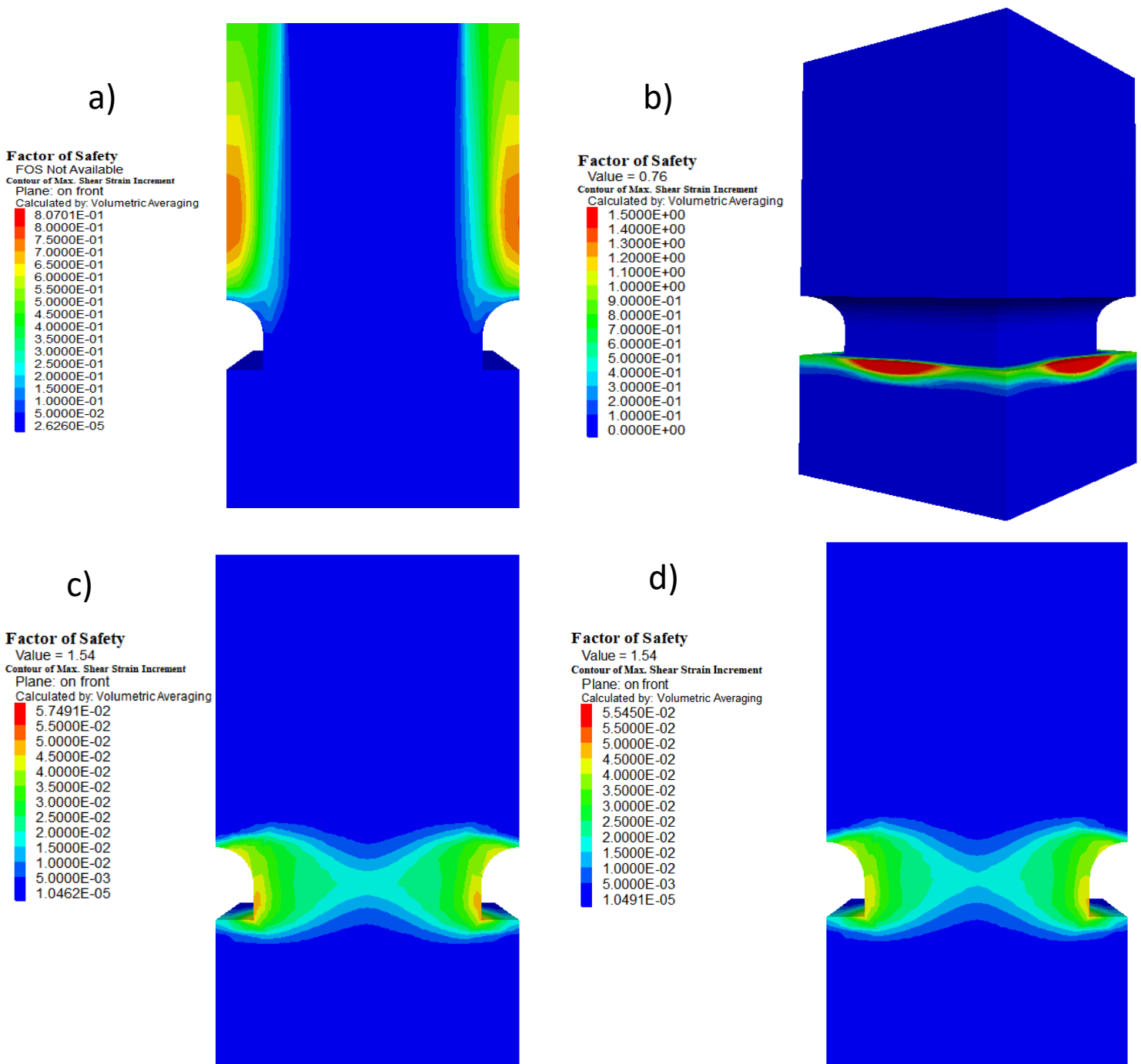


Fig. 0.2 Incremento de máximas deformaciones cortantes del factor de seguridad de un pilar con propiedades límite y diferentes condiciones de frontera: a) sin ninguna frontera, b) frontera de esfuerzos, c) rodillos y d) attach de reflexión.

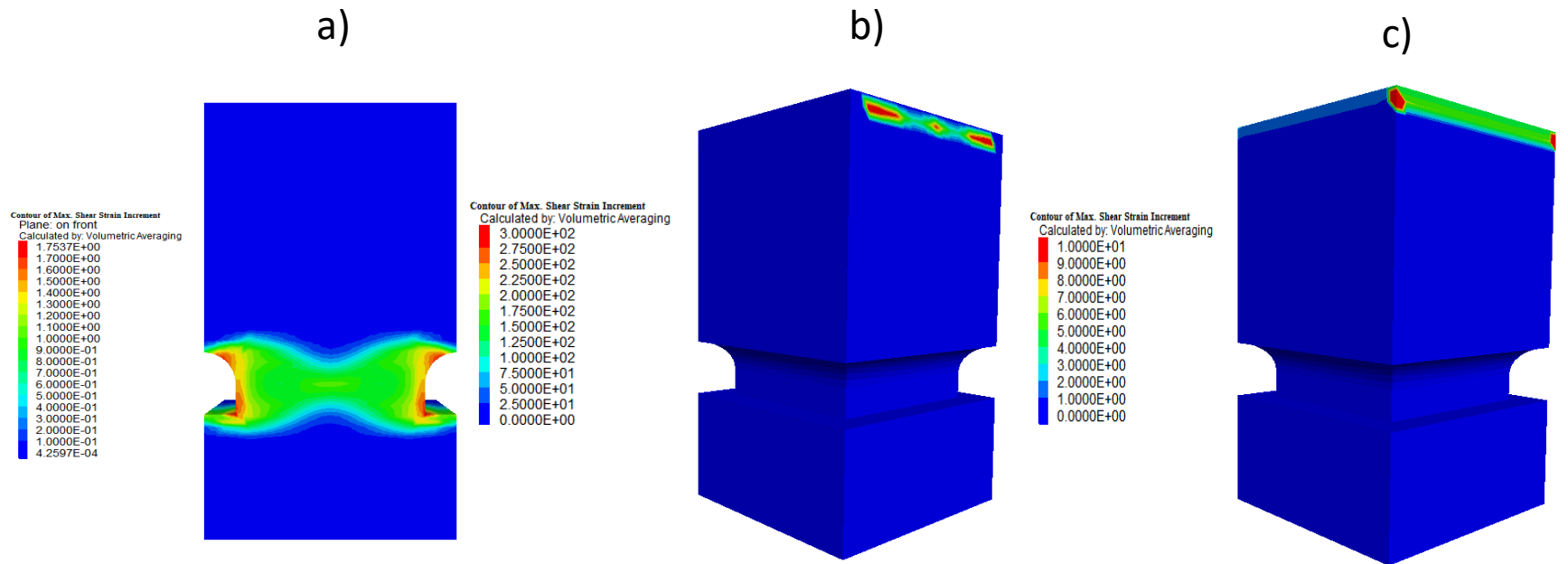


Fig. 0.3 Incremento de máximas deformaciones cortantes de un pilar con propiedades límite y condiciones de frontera de rodillo a cargas de a) 90°, b) 45° y c) 0°.

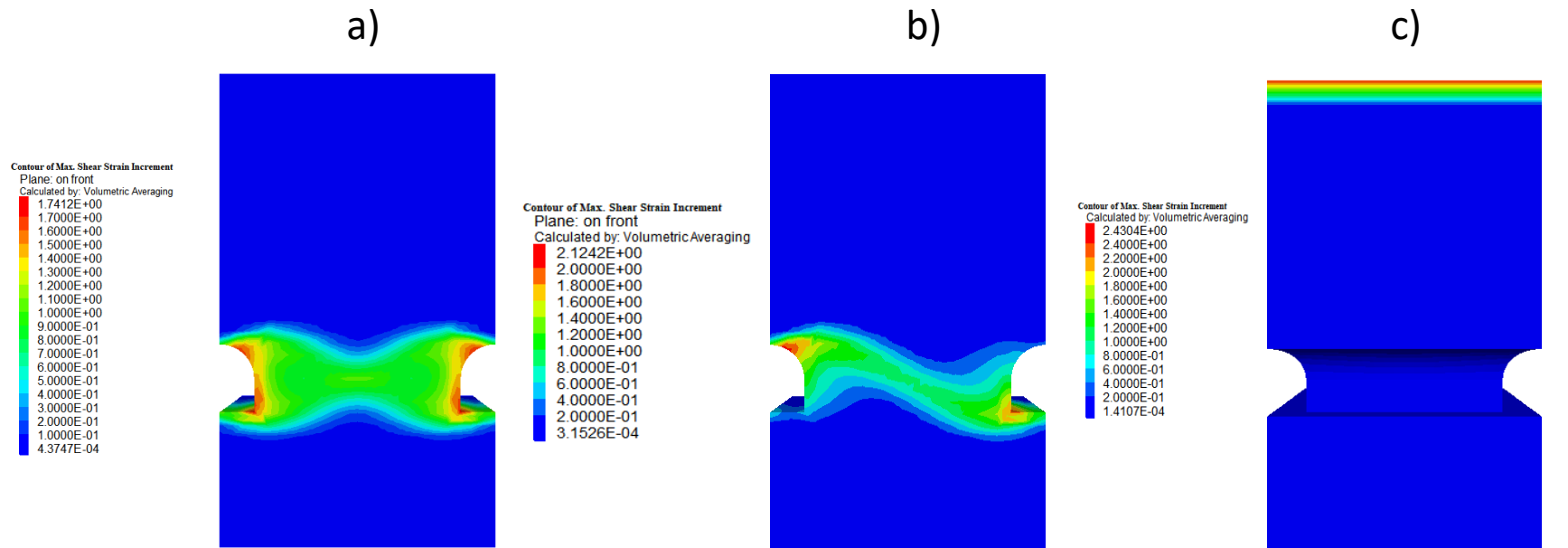


Fig. 0.4 Incremento de máximas deformaciones cortantes de un pilar con propiedades límite y condiciones de frontera de attach de reflexión a cargas de a) 90°, b) 45° y c) 0°.



Tabla 0.3 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilares con misma relación de esbelteza, pero diferente dimensión de acuerdo con el plunje ( $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$  y  $45^\circ$ ).

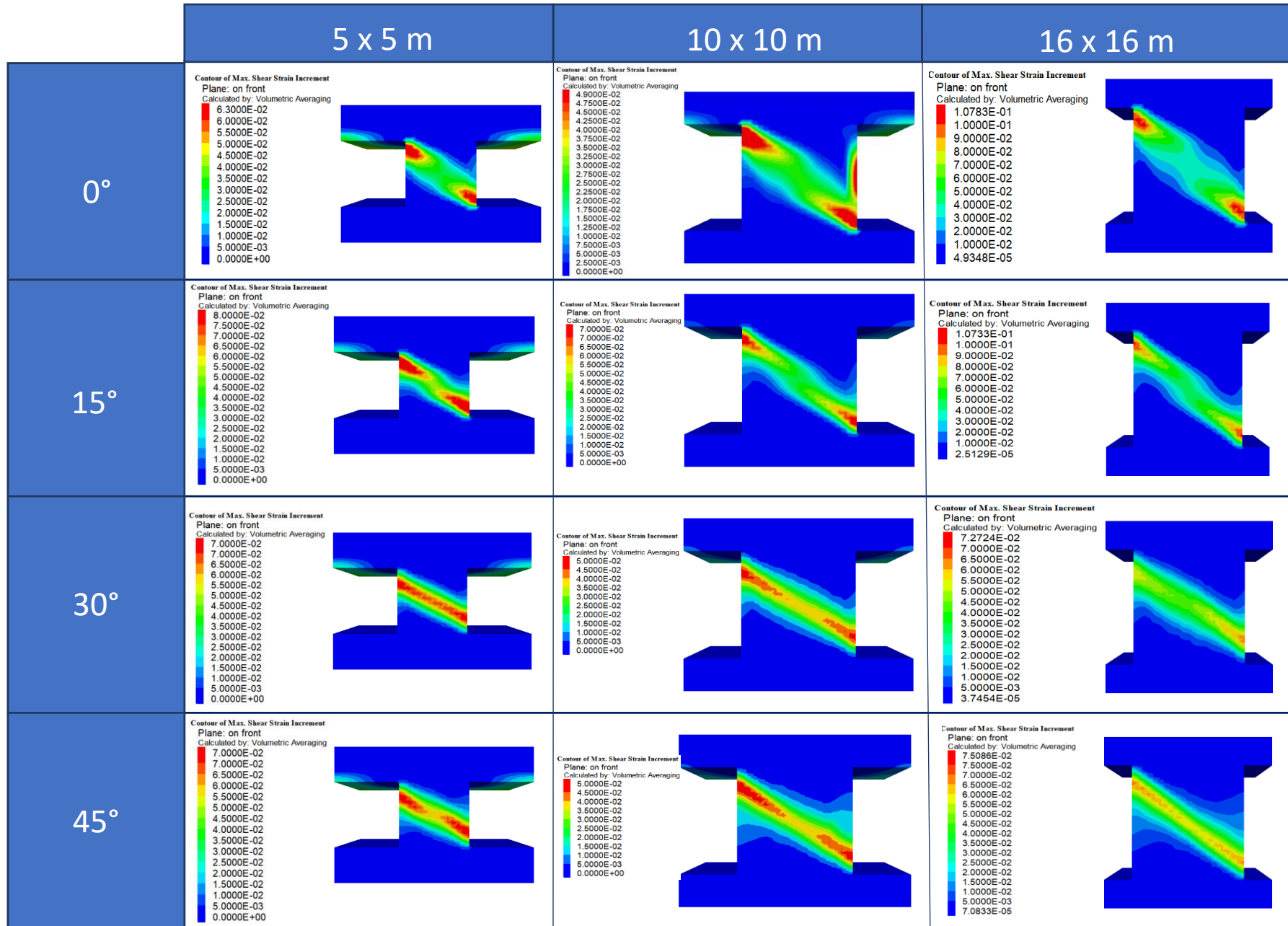


Tabla 0.4 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilares con misma relación de esbeltez, pero diferente dimensión de acuerdo con el plunje (60°,75° y 90°).

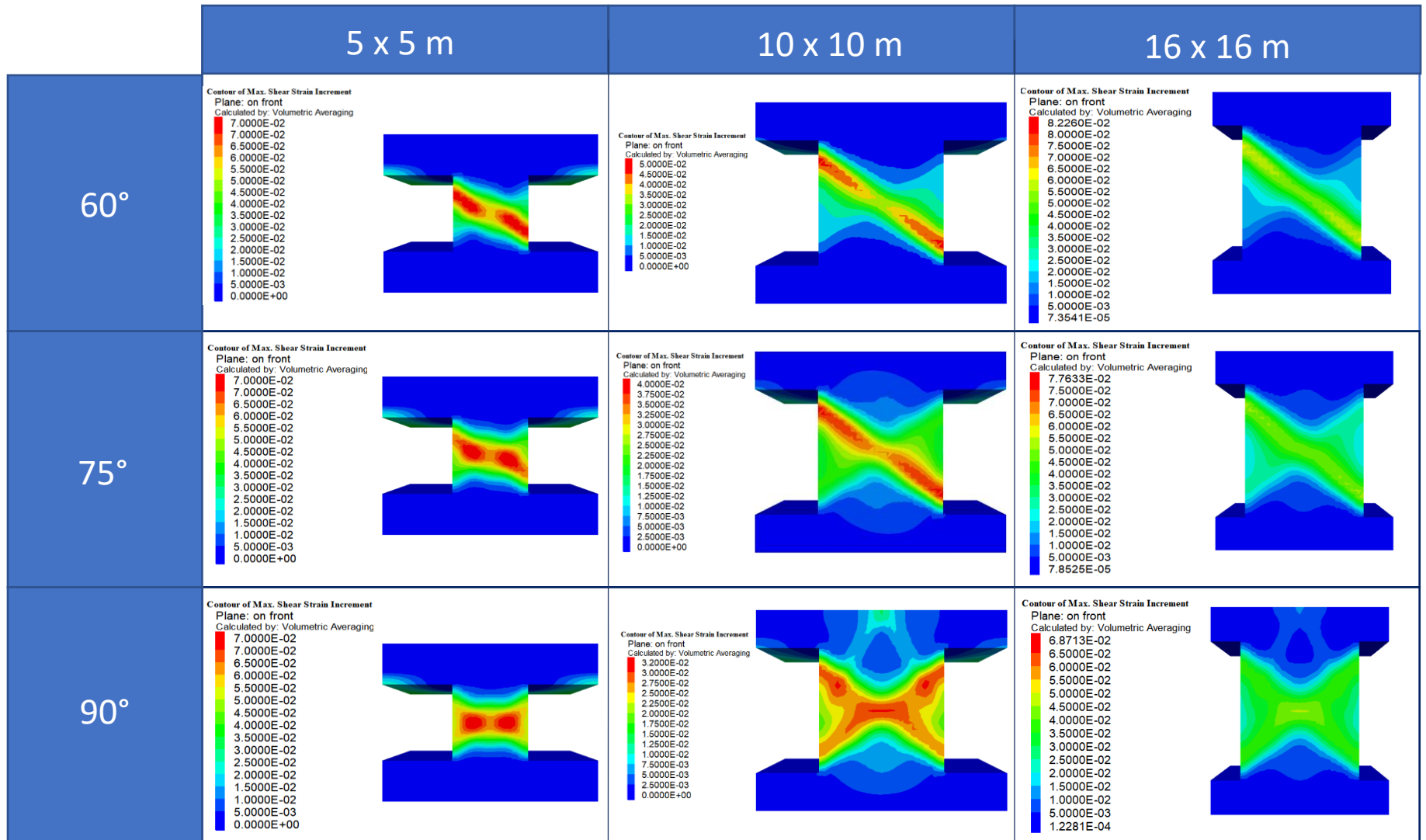


Tabla 0.5 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilares con diferente relación de esbeltez, pero diferente dimensión de acuerdo con el plunje ( $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$  y  $45^\circ$ ).

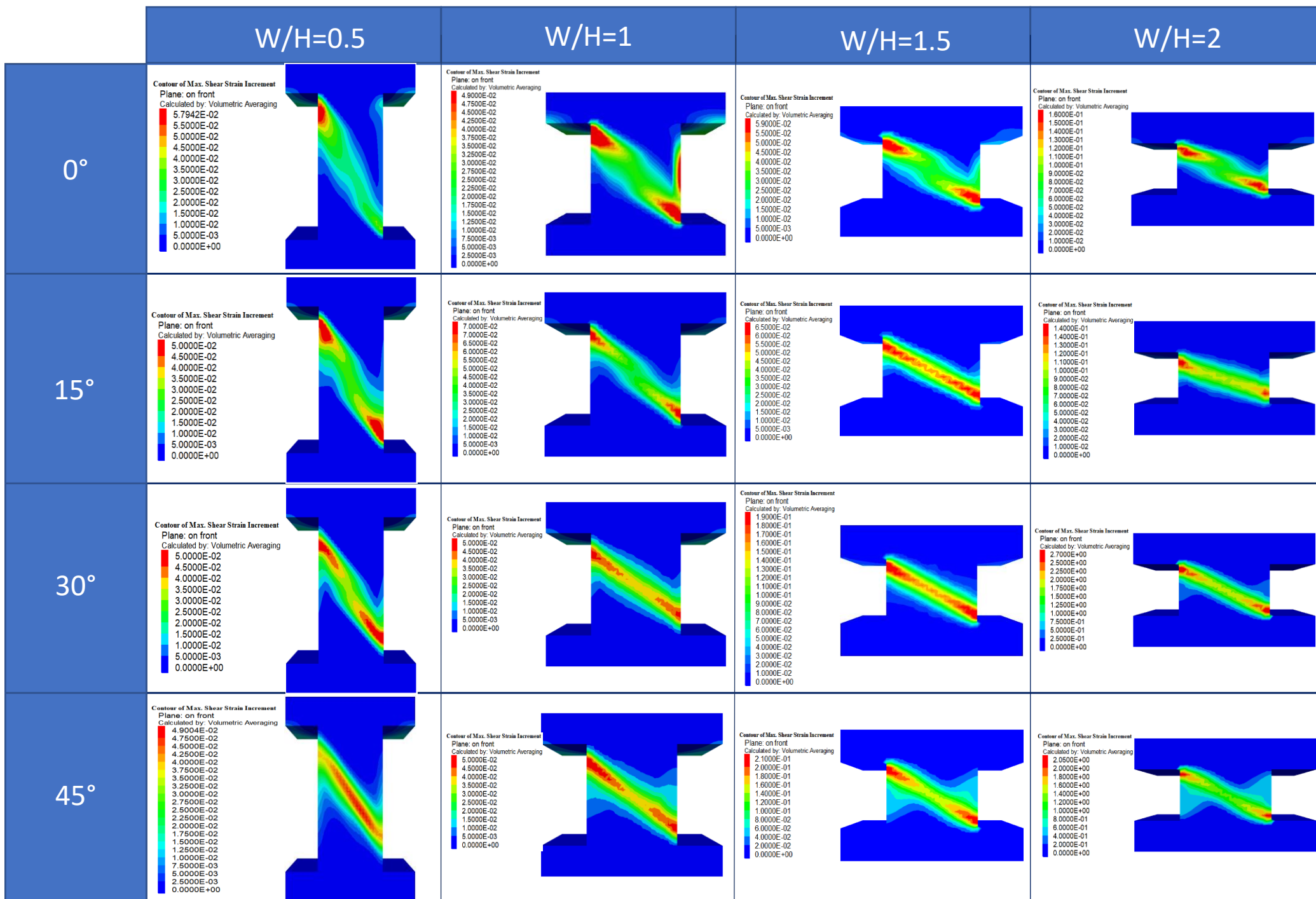
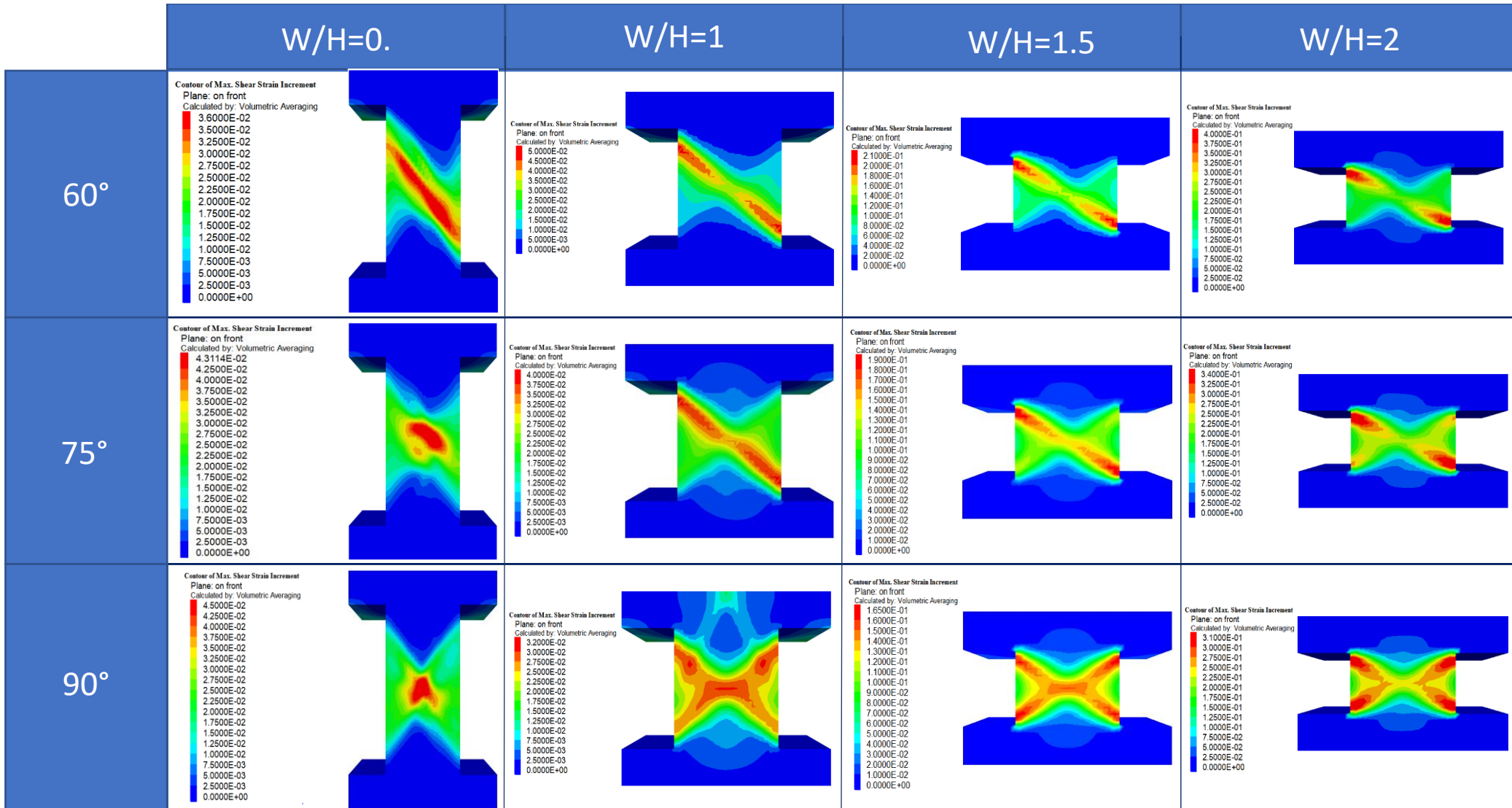


Tabla 0.6 Incremento de máximas deformaciones cortantes para pilares con diferente relación de esbeltez, pero diferente dimensión de acuerdo con el plunje (60°, 75° y 90°).



## **ANEXO C. CURVAS ESFUERZO DESPLAZAMIENTO**

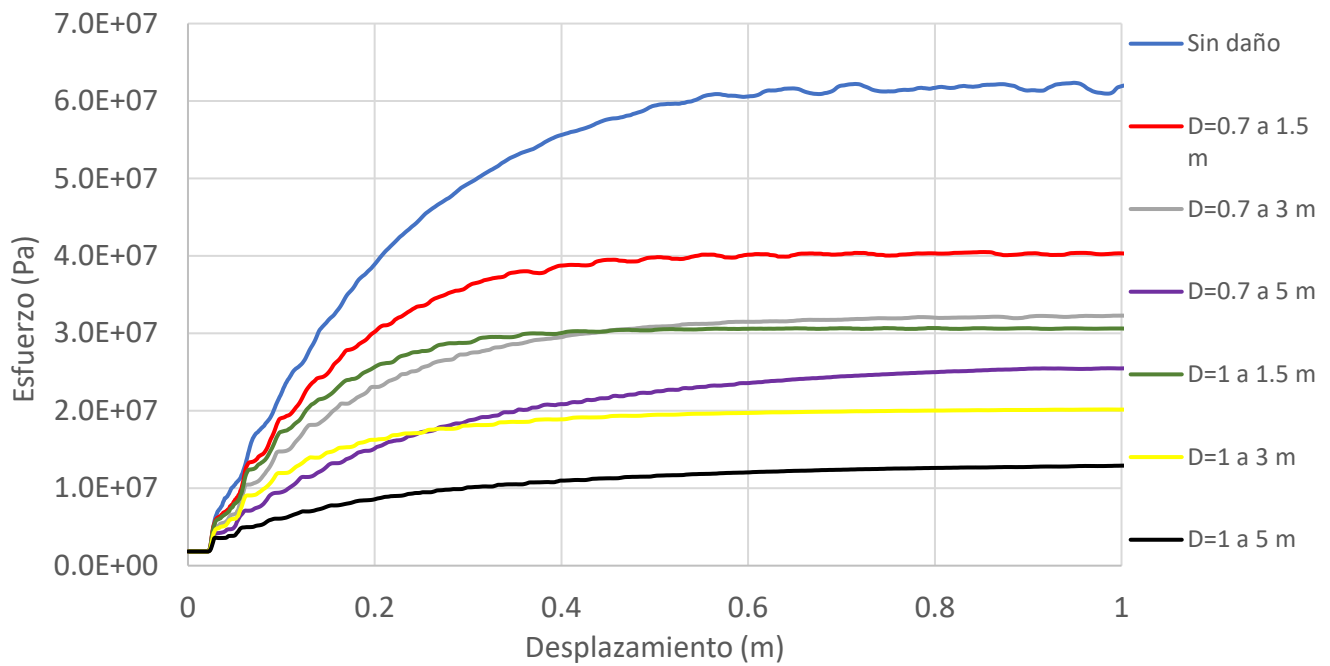


Fig. 0.5 Gráfica esfuerzo desplazamiento para pilares de panel caving dañados por voladura a diferentes distancias en roca de calidad media.

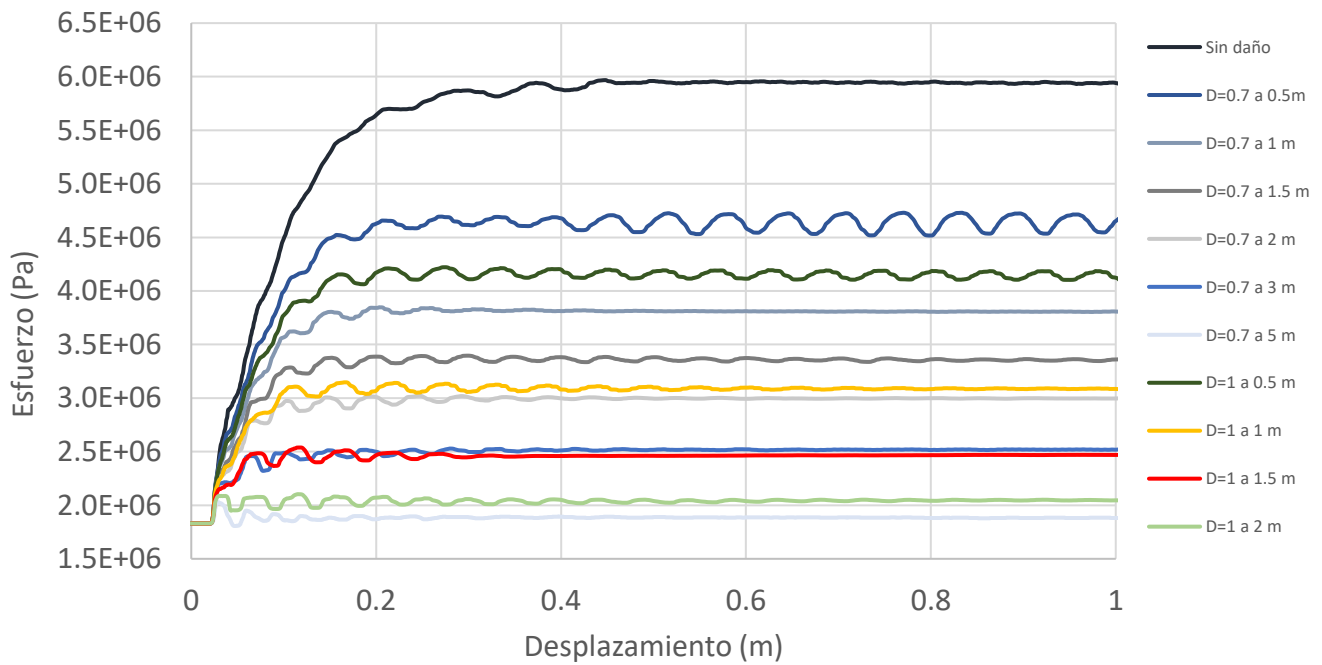


Fig. 0.6 Gráfica esfuerzo desplazamiento para pilares de panel caving dañados por voladura a diferentes distancias en roca con propiedades límite.

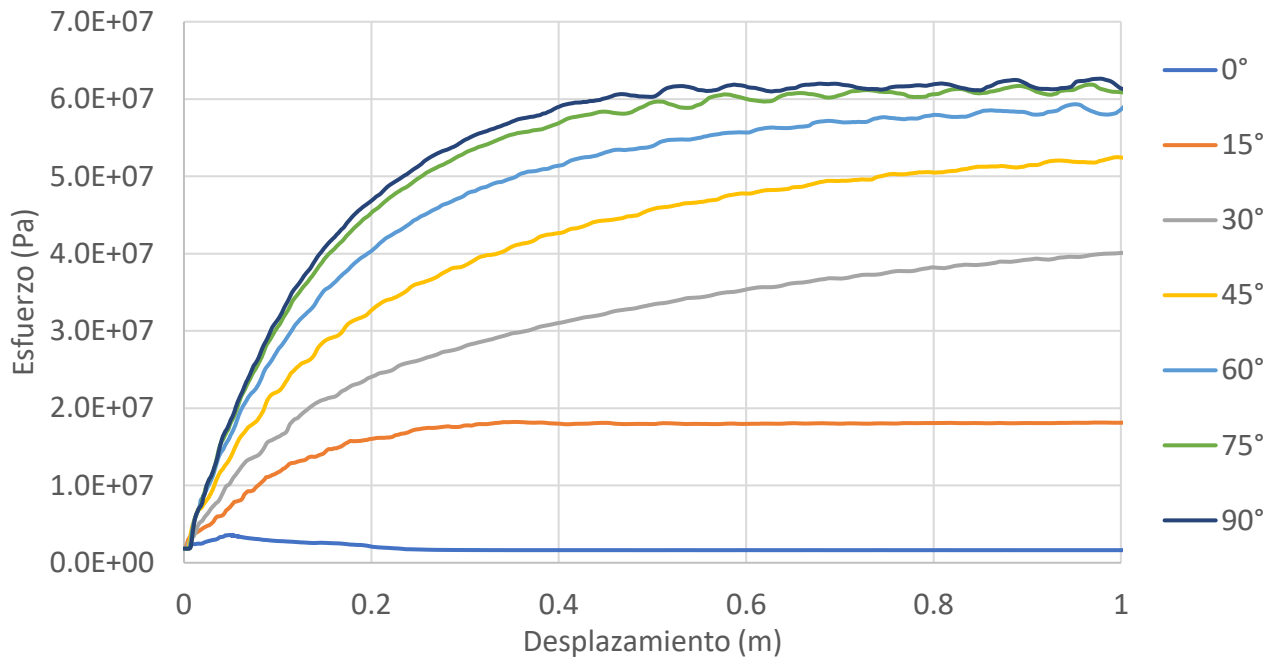


Fig. 0.7 Gráfica esfuerzo desplazamiento para pilares de panel caving sin daño por voladura sometido a cargas inclinadas en roca de calidad media.

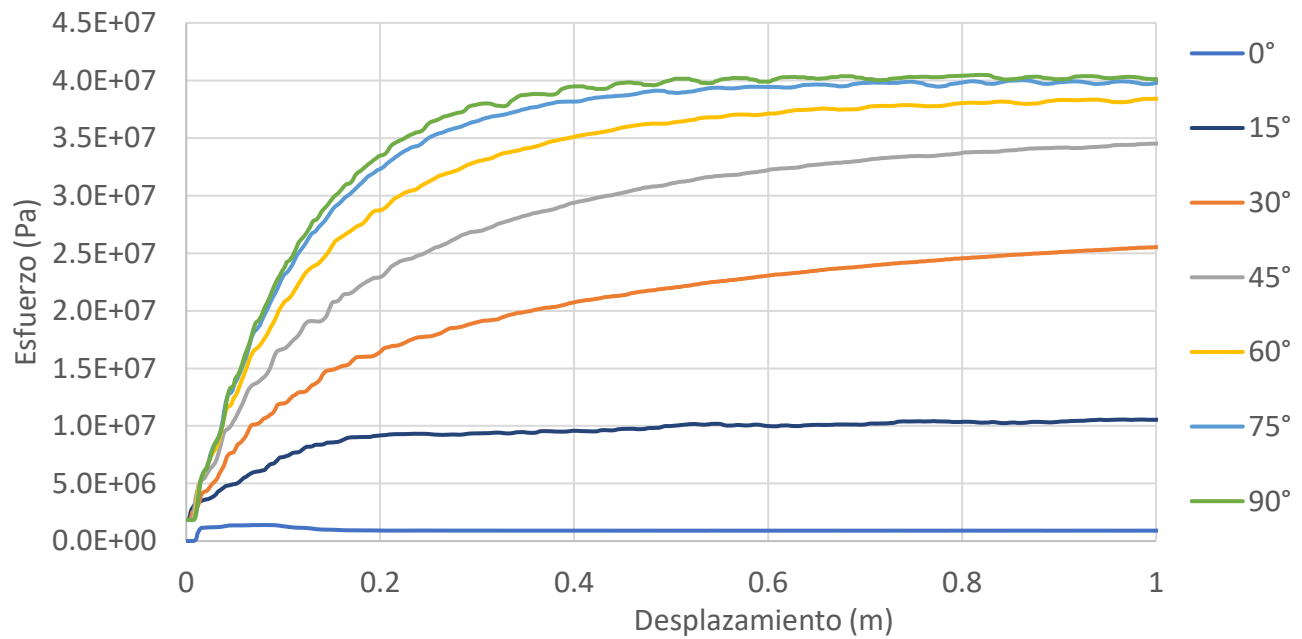


Fig. 0.8 Gráfica esfuerzo desplazamiento para pilares de panel caving con afectación por daño de voladura D=0.7 a 1.5 m sometido a cargas inclinadas en roca de calidad media.