UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

DISEÑO DE ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE VARIACIÓN EN UN CONTEXTO DE LÁPIZ Y PAPEL EN LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMATICÁS)

PRESENTA:

MARIO ALBERTO RAMÍREZ JIMÉNEZ

TUTOR PRINCIPAL:

DR. VICTOR MANUEL ULLOA ARELLANO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

SANTA CRUZ ACATLÁN, NAUCALPAN, ESTADO DE MÉXICO, FEBRERO DE 2023

"Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica: la voluntad".

Albert Einstein

A mi papá Mario y a mi mamá Yolanda por enseñarme a tener voluntad.

A mi amada esposa Patricia y a mis adorados hijos Mario, Mariana y Adriana que amo con el corazón.

Gracias

Agradecimientos.

Este trabajo es muy importante para mí porque me ha hecho crecer como persona, porque me ha enseñado a creer en mí, porque me ha devuelto la fe y la esperanza y me ha mostrado que hay personas en este mundo que me pueden guiar por un mejor camino en la vida. Es por eso por lo que agradezco de todo corazón:

- A Dios, porque siempre ha estado a mi lado en todo lo que he hecho.

- A la Universidad Nacional Autónoma de México, por haberme apoyado a realizar mi maestría, la llevo en el corazón. Gracias a mi Universidad.

- Al doctor Víctor Manuel Ulloa Arellano, por haber creído en mí y por haberme guiado en el desarrollo de mi trabajo de tesis, le doy las gracias por toda su ayuda y paciencia. Gracias doctor Victo Manuel.

- A mis sinodales. M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza, Doctora. María de los Ángeles Trejo González, M. en I. José Víctor Palencia Gómez, Doctora Rita Esther Zuazua Vega por haberme guiado en mi tesis y estar conmigo en mi examen de grado. Gracias por su ayuda.

- Al maestro Carlos Alberto Covarrubias Santiago, por haber trabajado conmigo en equipo, por asesorarme en mi trabajo, por permitirme aplicar mi trabajo en uno de sus grupos y darme su tiempo. Gracias, Maestro Carlos Alberto.

- A todos los estudiantes del Maestro Carlos Alberto que se prestaron para resolver los ejercicios. Gracias a todos ustedes, porque sin ustedes mi proyecto no hubiera sido posible.

- A todos los docentes, maestros y doctores que forman parte de MADEMS, porque sin ustedes no hubiera podido realizar mi maestría, gracias por enseñarme a ser mejor como persona. Gracias por todo.

- A mi esposa Patricia y a mis hijos Mario, Mariana y Adriana porque siempre me alentaban a seguir con mis estudios para ser un mejor hombre, un mejor esposo y papá. Gracias.

- A mi papá Mario, a mi mamá María Yolanda y a todos mis hermanos, Marco Antonio, Julio Cesar Osvaldo, María del Carmen y José Arturo, porque me enseñaron a nunca rendirme y que a pesar de las cosas siempre seguir adelante. Gracias.

Resumen.

Este trabajo contiene un acercamiento histórico de personas que han realizado proyectos relacionados con el tema de variación en la materia de cálculo diferencial, como también estudios realizados por investigadores muy importantes que buscan ayudar a las personas a entender el tema de razón de cambio.

Todos los comentarios presentados en este trabajo de tesis están acompañados de teóricos en educación que han contribuido con sus investigaciones a entender muchos de los problemas que existen en el pensamiento y proceder de los alumnos en los diferentes niveles escolares.

En este proyecto se documenta cuáles son las dificultades que los alumnos de nivel medio superior presentan en el tema de razón de cambio que ven en la materia de cálculo diferencial, esto está expuesto en las respuestas de un ejercicio a lo que los alumnos fueron expuestos, el ejercicio lo realizarán en un contexto estático de lápiz y papel pues esta es la manera en que la mayoría de los profesores y alumnos trabajan el tema de variación en las aulas de clase.

Los resultados arrojados por los estudiantes ayudarán a entender esta problemática en la que se encuentran los educandos y con esto podrán ayudar a dar una solución a este dilema en la que están inmersos los estudiantes de cálculo diferencial en el nivel medio superior.

Abstract.

This work contains a historical approach of people who have carried out projects of variation in the matter of differential calculus, as well as studies carried out by very important researchers that seek to help people understand the subject of the rate of change.

All the comments presented in this thesis work will be accompanied by educational theorists who have contributed with their research to understand many of the problems that exist in the thinking and behavior of students at different school levels.

In this project it is documented which are the difficulties that the students of the upper secondary level present in the subject of the rate of change that they see in the matter of differential calculus, this is exposed in the answer of an exercise to which the students were exposed, the exercise will be carried out in a static context of pencil and paper, as this is the way most teachers and students work on the subject of variation in classrooms.

The results thrown by the students will help to understand this problem in which the students find themselves and with this they will be able to help to give a solution to this dilemma in which the students of differential calculus are immersed in the upper secondar

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.

Este trabajo se realizó para saber cuál es la problemática de entender el cálculo, principalmente el entendimiento de la razón de cambio en los estudiantes de nivel medio superior en un contexto estático es decir utilizando lápiz y papel.

Uno de los conceptos principales en el estudio del cálculo diferencial e integral y por tanto en su aprendizaje y enseñanza es el concepto de variación y su medición a través de la razón de cambio. Sin embargo, la experiencia y la documentación en la literatura sobre este punto, *(Orton, 1983. Ferrini-Mundy y Graham, 1994. Porzio, 1997),* muestran dificultades considerables para su aprendizaje.

La noción de razón de cambio o tasa puede verse como una transición para el concepto de derivada, la cual permite cuantificar y medir cómo cambia una cantidad. En la vida diaria está involucrada la razón de cambio en diversos contextos, por ejemplo, en el mundo físico, económico y social. Situaciones en las que nos interesa conocer cuál es el más pequeño *(mínimo)* o más grande valor *(máximo)* que alcanza una cantidad o cómo aumenta *(crece)* o disminuye *(decrece)* dicha cantidad, en un intervalo de tiempo específico. En general, los problemas o fenómenos relativos a la variación subyacen una cantidad que depende de otra, por lo que se hace necesario describir y cuantificar estos cambios a través de modelos matemáticos, gráficas, y tablas en los cuales la razón de cambio es un concepto fundamental. En resumen, la razón de cambio es una cuantificación de cómo está cambiando una cantidad. Para cuantificar esta idea, a continuación, se discute un ejemplo.

Supóngase que en un poblado se presenta una epidemia y se cuenta con ciertos datos sobre el número de enfermos en los primeros tres días. La siguiente tabla ilustra la información.

Días	Día 0	Día 1	Día 2	Día 3
Número de infectados.	1859	1906	1953	2000

Se desea conocer el número de enfermos para los días 4, 5 y 6 que no están en la tabla. ¿Es posible saberlo?, ¿cómo podrían predecir estos valores?, ¿cómo podrían representar simbólicamente una expresión que nos permita conocer los valores para estos días?, en otras palabras ¿cómo podrían expresar simbólicamente un valor futuro para cualquier tiempo *"t"*?

Como ya se mencionó, la razón de cambio es una noción fundamental que mide o que cuantifica una cantidad que está variando. Intuitivamente se define como el cambio que sufre una cantidad durante un cierto intervalo de tiempo. En términos simbólicos se puede expresar de la siguiente manera $\frac{\Delta I}{\Delta t}$. donde ΔI es el cambio sufrido por una cantidad en un intervalo de tiempo, en este caso I es el número de infectados, con base en esto, el número de infectados para un tiempo futuro *(t)* se expresa así:

$I\ (t) = I(t_0) + \frac{\Delta I}{\Delta t}\ t$

Donde:

Valor actual = $I\ (t_0)$

Razón de cambio = $\frac{\Delta I}{\Delta t}$

Tiempo = t

Valor futuro = $I(t)$

Entonces:

$I(t_0) = 1859$

$I(t_1) = 1906$

$I(t_2) = 1953$

$I(t_3) = 2000$

Si se quiere calcular $I\ (t_4)$ se procede de la siguiente manera:

$I\ (t_4) = I(t_3) + \frac{\Delta I}{\Delta t}\ t$ .... (1)

$I\ (t_3) = 2000$

$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I(t3)-I(t2)}{t3-t2} = \frac{2000-1953}{3-2} = \frac{47}{1}$ (infectados por día)

Sustituyendo en (1)

$I\ (t_4) = 2000 + 47\ (1)$

= 2047 Nuevos infectados

Otra

$I\ (t_4) = 1859 + 47\ (4)$

= 1859 + 188

= 2047 Nuevos infectados

Si se quiere calcular $I\ (t_5)$ se procede de la siguiente manera:

$I\ (t_5) = I(t_4) + \frac{\Delta I}{\Delta t}\ t$ ……………………………………… (1)

$I\ (t_4) = 2047$

$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I(t4) - I(t3)}{t4 - t3} = \frac{2047-2000}{4-3} = \frac{47}{1}$ (infectados por día)

Sustituyendo en (1)

$I\ (t_5) = 2047 + 47\ (1)$
= 2094 Nuevos infectados

Otra

$I\ (t_5) = 1859 + 47\ (5)$
= 1859 + 235
= 2094 Nuevos infectados

Si se quiere calcular $I\ (t_6)$ se procede de la siguiente manera:

$I\ (t_6) = I(t_5) + \frac{\Delta I}{\Delta t}\ t$ ……………………………………… (1)

$I\ (t_5) = 2094$

$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I(t5) - I(t4)}{t5 - t4} = \frac{2094-2047}{5-4} = \frac{47}{1}$ (infectados por día)

$I\ (t_5) = 2094 + 47\ (1)$
= 2141 Nuevos infectados

Otra

$I\ (t_6) = 1859 + 47\ (6)$
= 1859 + 282
= 2141 Nuevos infectados

Como puede verse con base en el ejemplo anterior, la razón de cambio es una noción importante que permite modelar situaciones que cambian con el tiempo, ésta se introduce cuando se calcula el número de infectados que existen de un día a otro con relación al tiempo, es decir, la diferencia que existe del primer momento al segundo y del que hay del segundo al tercero y así sucesivamente. Esto se denota así $\frac{\Delta I}{\Delta t}$.

Donde ΔI representa la diferencia que hay infectados de un día a otro y Δt la diferencia que hay de tiempo de un momento a otro, esto es crucial para determinar los valores futuros que no aparecen en la tabla. En resumen, el modelo que describe el comportamiento del número de enfermos para cualquier tiempo (t) es $I\ (t) = I(t_0) + \frac{\Delta I}{\Delta t}\ t$. Sin embargo, es importante precisar que se asume que esta razón de cambio se mantiene constante, o sea, es de 47 nuevos infectados días con día.

En este contexto, el objetivo del presente trabajo es: *Documentar el proceso de entendimiento e identificar las dificultades que presentan los alumnos al ser expuestos a un conjunto de actividades que involucran las nociones de tasa de cambio (derivada).* En particular los obstáculos al distinguir *entre la noción de cambio de una cantidad y su medición.* Se puede intuir o pensar que esta tarea es creada para que los alumnos tengan interés por aprender cálculo, en especial por el tema de razón de cambio.

Ausubel menciona que el aprendizaje por recepción y descubrimiento es significativo, *1. Si el estudiante emplea una actitud de aprendizaje significativo (una disposición para relacionar de manera significativa el nuevo material de aprendizaje con su estructura existente de conocimiento)* y *2. Si la tarea de aprendizaje en sí es potencialmente significativa (consiste en si de un material es razonable o sensible y si puede relacionarse de manera sustancial y no arbitraria con la estructura cognoscitiva del estudiante en cuestión).*

En el aprendizaje por "recepción", el contenido principal de la tarea de aprendizaje simplemente se le presenta al alumno: él únicamente necesita relacionarlo activa y significativamente y retenerlos para el recuerdo o reconocimiento posteriores, o como una base para el aprendizaje del nuevo material relacionado. En el aprendizaje por "descubrimiento" el contenido principal de lo que ha de presentarse se debe descubrir de manera independiente antes de que se pueda asimilar dentro del salón de clase.

Esto indica que los alumnos pueden reponerse de las dificultades, porque ellos pueden relacionar los conocimientos que tenían con lo que se está presentando, se puede comprender que si los educandos toman el trabajo con seriedad y responsabilidad pueden resolver el cuestionario o tareas encomendadas, para esto es indispensable que las tareas sean de interés para los estudiantes y con esto lograr un aprendizaje significativo.

En el trabajo, las preguntas y las representaciones canónicas que se establecieron en el interrogatorio fueron del nivel de los educandos, no se salieron del contexto que los muchachos conocen, pero el ejercicio se presentó de una manera diferente a lo que los estudiantes de nivel medio superior ven o trabajan en sus salones de clase fue, *"esto puede ser significativo"* para ellos porque ahora tienen una nueva visión de ver el tema de variación.

El trabajo es un tanto activo ya que varias preguntas hacen que se planteen interrogantes y lleva a la creación de representaciones en la mente del estudiante como por ejemplo gráficas, representaciones canónicas (recipientes que representan el evento) y modelos matemáticos.

Ausubel menciona que el aprendizaje por *recepción* es un proceso activo que se necesita por lo menos:

a) Del tipo de análisis cognoscitivo necesario para averiguar cuáles aspectos de la estructura cognoscitiva existente son más pertinentes al nuevo material potencialmente significativo.

b) Cierto grado de reconciliación con las ideas existentes.

c) La reformulación del material de aprendizaje en términos de los antecedentes intelectuales idiosincráticos y en el vocabulario de los alumnos en particular.

JUSTIFICACIÓN.

Este trabajo de investigación es para saber cuál o cuáles son las causas de la dificultad del entendimiento en los alumnos del nivel medio superior en el tema de razón de cambio. Al encontrar estas dificultades se podrá actuar para hacer que los estudiantes manejen bien el tema y puedan entender el concepto de razón de cambio en cálculo diferencial.

Sobre esta problemática se han realizado muchos trabajos e investigaciones como también sugerencias didácticas para poder atacar este tema de variación en cálculo diferencial. Es fundamental que se tenga que hacer un instrumento de trabajo en el cual sea importante crear modelos matemáticos para poder explicar, analizar y resolver problemas de la vida real en donde por ejemplo se necesita optimizar el tiempo, una cantidad o una magnitud etc.; es indispensable realizar un proyecto de trabajo con el propósito de ayudar a los estudiantes a que construyan el conocimiento en el tema de razón de cambio en cálculo. Es importante indicar que los problemas que se resolverán deben motivar el estudio del cálculo y lo más crucial, poder trabajar bien el tema de razón de cambio.

> *Ricardo Cantoral Uriza. (1998).*
> *Dice, la expresión cambio se entiende como una modificación de estado, en tanto que el vocablo variación la entendemos como cuantificación de dicho cambio. No obstante, la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos, así como una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos, como: numéricos, variable, constante, paramétricos, función, limite, continuidad, derivada, integral, convergencia, representación e infinito para tener una adecuada construcción de nociones de cambio y variación. (P. 19 – 20)*

Se está viviendo en un mundo lleno de cambios, el cual lleva a buscar y descubrir modelos matemáticos que ayudarán a ver y cuantificar esos cambios que se presentan en la vida diaria, por eso es importante que se trabaje bien el cálculo diferencial en las instituciones escolares.

> *Wenzelburger. (1993)*
> *Dice que el cálculo diferencial se puede reducir en un concepto fundamental, la razón de cambio. Determinar estas razones de cambio significa que dos magnitudes (variables) están conectadas mediante una relación funcional (función) y se puede estudiar el cambio relativo de una de las magnitudes respecto a la otra. (P. 97)*

Por lo tanto, es fundamental conocer por qué los estudiantes del nivel medio superior no logran entender el concepto de razón de cambio y por qué no pueden trabajar bien este tema en aulas de clase. Identificar estos obstáculos podrá ayudar a cambiar en los alumnos su forma de pensar y podrán trabajar mejor el cálculo y en particular el tema de razón de cambio.

ESTUDIO DE CASOS.

Vidal Rojas (2012).
Observo que Orton realizó un estudio cualitativo, a gran escala, para investigar la comprensión estudiantil de los conceptos de diferenciación e integración. Se entrevistaron 110 estudiantes, 55 hombres y 55 mujeres, entre los 16 y 22 años de edad (…)

Los estudiantes presentaron dificultades relacionadas con la tangente como el límite de un conjunto de secantes y con las ideas de razón de cambio de una línea recta en contraste con la razón de cambio de una curva y razón de cambio en un punto en contraste con la razón de cambio sobre un intervalo. Según Orton, el concepto en que se fundamenta la razón de cambio es el concepto de proporcionalidad, que la mayoría de los estudiantes deberían haber aprendido al estudiar gráficas en el álgebra elemental.

Los resultados del estudio sugieren que el concepto de proporcionalidad no es tan elemental como pareciera, para un alto número de estudiantes.

Con base en estos resultados, Orton sugiere diferentes implicaciones para el currículo y para la enseñanza. En primer lugar, los conceptos básicos del cálculo deben ser repasados y reforzados varias veces en el desarrollo de la educación matemática de los estudiantes. Esto a su vez podría significar mayor colaboración entre los colegios de secundaria e instituciones de educación superior. En segundo lugar, la aproximación inicial a los conceptos del cálculo debe ser informal e involucrar exploraciones de carácter numérico y gráfico, Orton sostiene que deben emplearse datos de la vida real. Seguidos de un desarrollo más algebraico de las ideas fundamentales. Debe considerarse, adicionalmente, el papel de la tecnología en estas exploraciones.
(P. 36)

Lo que Vidal Rojas dice de Orton es muy importante porque muchas de las cosas que se ven en cálculo diferencial tratan sobre la razón de cambio y es importante explicarlo de tal manera que los estudiantes comprendan lo que se está resolviendo y se les debe mostrar su aplicación en la vida real y así los estudiantes pondrán más empeño en aprender matemáticas y en especial el cálculo de la razón de cambio. Por ejemplo.

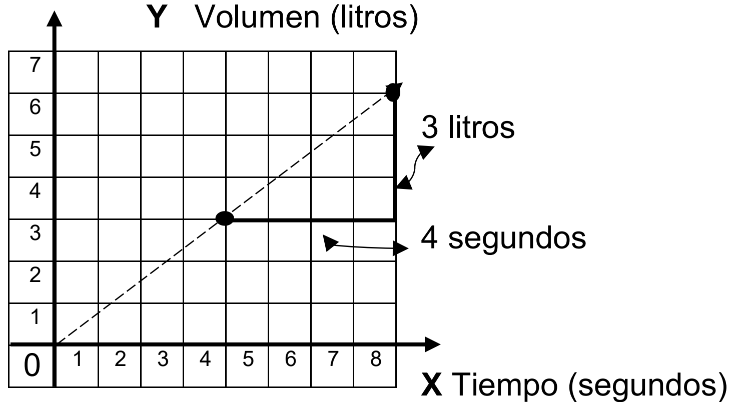
Supongamos que un tanque se está llenando de agua y el volumen en litros de agua en el recipiente después de *t* segundos está dado por la función.

$$V(t) = \frac{3}{4}\,t$$

Derivando tenemos.

$$V^{|}(t) = \frac{3}{4}$$

Esto quiere decir que la pendiente de la función, $\frac{3}{4}$, es o representa la razón de cambio. Es decir que el tanque se está llenado a una razón $\frac{3}{4}$ litros por segundos. Y su gráfica es:



Grafica 1. *Llenado del recipiente (volumen en función del tiempo).*

Como se puede ver, es importante mostrar el tema de razón de cambio de una forma en la que los educandos vean su utilidad en la vida real para lograr captar su interés en el tema y así tendrán un mejor aprendizaje.

La descripción sobre los errores y dificultades que tienen los estudiantes con respecto a la derivada fue el objetivo de las primeras investigaciones realizadas en este tema (Orton, 1983; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Porzio, 1997; entre otros). Orton identifico tres tipos de errores que cometían los alumnos en las tareas de diferenciación y sus aplicaciones:
Estructurales, relacionados con los conceptos implicados.
Arbitrarios, cuando el alumno se comporta arbitrariamente sin tomar los datos del problema.
Manipulación, si bien los conceptos implicados pueden ser comprendidos.

> *Sánchez Matamoros Gloria, García Mercedes, Llinares Salvador. (2008) Dicen que: Uno de los errores que cometieron los alumnos fue que daban el valor de la abscisa cuando se les preguntaba por la razón de cambio en un punto no dado en la tabla y para un valor genérico **X = T** cuando se presentaban funciones lineales en forma de gráfico (…)*
>
> *Como consecuencias de tales resultados, Orton indicó que las dificultades con la idea de razón de cambio y su vinculación al tipo de función lineal o cuadrática podía tener su origen en una comprensión débil sobre el concepto de función.*

> *La información de estas investigaciones destaca la importancia de la relación entre la razón de cambio y el consciente incremental en la comprensión de la derivada, entendida como una cuantificación del cambio. (P.272 – 273)*

Con esto se puede ver, que el estudio del cálculo juega un papel muy importante cuando es inevitable cuantificar o medir algún fenómeno. Su explicación, desde diferentes representaciones y ejemplos, apoya el crecimiento de unos de los procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático, el de visualización y representación.

Las matemáticas juegan un papel relevante cuando es necesario cuantificar o medir cualquier fenómeno y las variaciones que se producen. El cálculo tiene una muy reconocida importancia, porque propicia encontrar las leyes que describen esos cambios, medirlos, cuantificarlos y predecirlos. En específico, la derivada permite cuantificar, describir y predecir la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica de la vida real.

Otro aspecto que resulta muy importante en el desarrollo del pensamiento y en el crecimiento de conocimiento matemático, es el empleo y la utilización de conocimientos asociados a los registros numérico, gráfico, algebraico y verbal. En general, el trabajo de conversión entre diferentes sistemas de representación no es valorados en su importancia y eso lleva a limitaciones en el entendimiento y comprensión en el crecimiento de uno de los estilos de pensamiento, el visual. El conjunto de actividades y tareas que realizan los alumnos en unas situaciones concretas permite dar significado a los conceptos y construir conocimientos matemáticos.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.

- Hasta qué nivel los alumnos lograron identificar el concepto de tasa o razón de cambio en las diferentes representaciones (verbal, gráfica y simbólica).

- Hasta qué punto las actividades propuestas ayudaron a los estudiantes a entender el concepto de razón de cambio.

- Qué tipo de conflictos se presentaron en los alumnos cuando fueron expuestos a las dificultades.

OBJETIVOS.

OBJETIVO GENERAL.

- Diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de variación.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- Exponer a un grupo de estudiantes de nivel medio superior a una serie de ejercicios que involucran el tema de razón de cambio.

- Observar el comportamiento de los alumnos al ser expuesto a esta serie de ejercicios.

- Hacer un análisis de los resultados de los estudiantes para saber hasta qué punto lograron entender o fue entendiendo el tema de razón de cambio.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

ANTECEDENTES HISTÓRICOS.

Isaac Newton (1642 – 1727). Utiliza métodos basados en el movimiento y la dinámica de los cuerpos y así, las variables son notadas como algo que cambia o fluye en el tiempo *(fluente)* y a su derivada o razón de cambio con respecto al tiempo *(fluxión)*. Para Newton la contrariedad del cálculo es el estudio de las relaciones entre *fluentes* y *fluxiones*. En 1671 Newton finiquita su trabajo sobre el método de fluxiones que no es publicado sino hasta el año de 1736 que es posterior a su deceso en 1727.

En su ejemplar *“principios matemáticos de la filosofía natural”*, Newton estudia la dinámica de las partículas y determina las bases de las matemáticas para el cálculo de las razones de cambio por medio de una presunción o creencia geométrica de los límites. Empleando estos pensamientos, desarrolla su teoría de la gravitación y reformula las leyes de Kepler para el movimiento de los cuerpos celestes. En su escrito o libro, Newton manifiesta magnitudes y razones de cambio en términos de cantidades geométricas, tanto de tipo finito como también infinitesimal, tratando deliberadamente de evitar o prescindir el uso del lenguaje algebraico. Esta insinuación de Newton al usar los métodos algebraicos obstaculizó su influencia en el campo de las matemáticas.

> *Newton menciona que: “fluente” es la cantidad variable que se identifica como “función”; “fluxión” es la velocidad o rapidez de la variación de la fluente que se identifica como la “derivada”; al incremento infinitesimal o instantáneo de la fluente se le llama “momento”* que se reconoce como la *“diferencial”*. **(***antología de cálculo realizada en el cecytebc. P. 5).*

En función de esto Newton tiene una mejor idea de exponer sus ideas y poder dar a entender en un futuro el cálculo y sobre todo lo relacionado a la razón de cambio. Newton expresa o expone la idea fundamental del cálculo diferencial mediante concepciones como *fluente* (magnitud fluyente) y *fluxión* (razón de cambio).

Newton concibió o tuvo el método de fluxiones tomando en cuenta a la curva como trayectoria de un punto que fluye y lo nombra *momento* de la cantidad fluente al arco extremadamente muy corto en un momento excesivamente muy pequeño, llamado la razón del momento al tiempo proporcionado, o sea, podemos mencionar que la *fluente* es la cantidad variable que se reconoce o se establece como función; *fluxión* es la velocidad o rapidez de variación de la fluente que se determina como la derivada; al incremento infinitesimal o instantáneo de la *fluente* se le llama momento que se determina como la diferencial.

> *Las ideas básicas del cálculo se encuentran inmersas en el formalismo matemático que imprimen los épsilon y deltas, que no contribuyen en mucho a la verdadera comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo. (Wenzelburger, p. 93, citado por Cardona Aguirre, 2012).*

Posiblemente dio a entender que a través de una aproximación sin tanto formalismo matemático, sino de forma más inconsciente en los conceptos, es posible poder comprender el cálculo y más aun refiriéndonos a la razón de cambio, son los caminos que siguió Newton en su método de *fluxión y fluente.*

Descartes y Fermat crearon casi al mismo tiempo la ide a de que una ecuación podría expresar la dependencia entre dos cantidades variables para distinguir las curvas, como también usaron la idea de los griegos de usar la recta tangente que dejo aceptar la relación de los valores de una función para puntos muy cercanos con los valores de las ordenadas de la recta tangente en los puntos dados y de esto nace la idea del *triángulo diferencial.*

En los trabajos de Descartes y Pierre de Fermat aparece por primera vez las ecuaciones que muestran la dependencia entre dos magnitudes como también la razón entre la diferencia de los valores de las magnitudes en los puntos más cercanos, también se encuentra a la diferencia de los valores correspondientes de magnitudes independientes, dicho de otra manera, *la razón de cambio del incremento de la magnitud de pendiente respecto al incremento de la magnitud independiente.*

Los trabajos de *Pierre de Fermat (1601 – 1665)* hacen uso de las ecuaciones que expresan la dependencia entre dos magnitudes, la razón entre la diferencia de los valores de la magnitud dependiente, o sea, podemos mencionarla como la razón de cambio de la intensificación de la magnitud dependiente con respecto del incremento de la magnitud independiente.

> *Rendon Mesa (2009)*
> *Menciona que los trabajos de Descartes y Fermat llevaron al surgimiento de dos ramas importantes de la matemática. Con el estudio de las razones de diferencias entre magnitudes se dio lugar al estudio de las razones de cambio infinitamente pequeñas y al cálculo diferencial, y con el estudio de las razones de cambio invariantes en el tiempo se dio lugar al surgimiento de la geometría analítica con la caracterización de curvas a través de expresiones algebraicas. Por el primer camino se llegó al concepto de razón de cambio y por el segundo al surgimiento del concepto de pendiente para caracterizar las ecuaciones lineales. (P. 7)*

Fermat primero se basó en descubrir el método general para determinar los máximos y mínimos de la curva, puntos en donde la razón de cambio entre las magnitudes es casi nula. Este método Fermat lo llama *adigualdad*, y fundamentalmente se centra en tomar en cuenta las características o propiedades del comportamiento de las magnitudes representadas y expuestas en una gráfica en valores muy cercanos, incrementando la magnitud independiente.

En sus documentos, Fermat no demostró los pasos que seguía, ni siquiera cuando dividía entre cero. Su trabajo o escrito estaba sustentado o soportado en argumentos pragmáticos más que matemáticos y el solo hecho de que funcionara para solucionar problemas le da credibilidad a su método. Justamente la falta de claridad acerca de las explicaciones de su método y el triunfo de sus resultados obtenidos ocasionó que la comunidad matemática del momento pusiera atención al desarrollo de su técnica.

Expuesto de otra manera matemática, el método de Fermat lo podemos escribir de la siguiente manera: Para encontrar dónde $f(A)$ presenta su máximo, formamos lo siguiente: $f(A)\ y\ f(A+E)$, igualamos ambas expresiones y se tiene: $f(A+E)=f(A)$. Al final quitamos todos los términos que todavía dependen de *E*, o lo que es lo mismo, hacemos que E = 0, entonces podemos decir que se forma la nueva expresión matemática.

$$\frac{f(A+E)-f(A)}{E}=0$$

Torricelli y Roberval también trabajaron la razón de cambio en sus trabajos, ellos decían que la razón de cambio permita encontrar la dirección del cambio de la magnitud en un punto de la curva.

> *Rendon Mesa (2009).*
> *Menciona que hacia 1640, los trabajos de Roberval y Torricelli empezaron a introducir interpretaciones cinemáticas de las curvas estudiadas. Por un lado, identificaban la gráfica como la representación de la dependencia de dos magnitudes físicas y, por otro lado, consideraban la tangente en un punto de la curva como la expresión de la razón de cambio de la magnitud dependiente, respecto a la independiente, razón que permitía identificar la dirección del cambio de la magnitud, en ese punto. Esta última idea se construye en la génesis de la identificación de las relaciones entre la dirección de las tangentes en diferentes puntos de la curva y la caracterización del movimiento en un instante. Con su método Roberval consiguió determinar las tangentes de todas las curvas típicas de la época e introdujo la aceptación de las razones heterogéneas. (P. 9).*

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

MARCO TEÓRICO.

DEFINICION DE RAZÓN DE CAMBIO.

Rendon Mesa Paula A. Medellín. (2009).

*La razón de cambio se define como un "cociente incremental o de diferencias" [26, P. 97]. El cociente es definido como el cambio o diferencia en el eje **Y** dividido por el respectivo cambio en el eje **X**, reconociendo que el cambio se establece hallando la diferencia entre las magnitudes final con la inicial. Utilizando la notación moderna puede escribirse como:* $\frac{\Delta(y)}{\Delta(x)} = \frac{y2-y1}{x2-x1}$ *(P. 16)*

Comprender el concepto de razón de cambio se refiere a la medida en la cual una variable cambia con relación a otra. Se trata de comparar la magnitud de dos variables a partir de sus unidades de cambio. En caso de que las variables no estén relacionadas o conectadas, tendrá una razón de cambio igual a cero. La razón de cambio más frecuente o habitual es la velocidad, que se calcula dividiendo una distancia recorrida por una unidad de tiempo, esto quiere decir que la velocidad se entiende a partir del enlace que se haya entre la distancia y el tiempo. De acuerdo con cómo se modifica la distancia recorrida en el tiempo por el movimiento de un cuerpo, se puede conocer cuál es su velocidad.

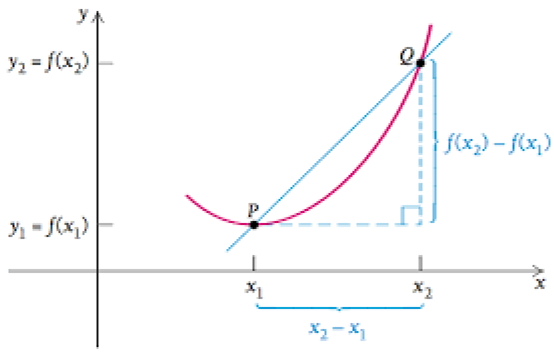
*"La razón de cambio promedio de **Y** respecto a **X**, cuando **X** cambia de* x_1 *a* x_2 *corresponde a la razón de cambio en el valor de salida respecto al cambio en el valor de entrada:* $\frac{y2-y1}{x2-x1}$

Donde $x_1 \neq x_2$

Si se toma la gráfica de la función, se observa que: $\frac{y2-y1}{x2-x1} = \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$

Y que ésta es la pendiente de la recta que va de los puntos $P(x1, y1) a\ Q9x2, y2)$. *La recta que forman los puntos P y Q se llama secante" (Soler, Núñez, y Aranda. 2005. Citado por Cardona Aguirre. 2012).*

:$\frac{\Delta(y)}{\Delta(x)} = \frac{h(x)-h(X)1}{x-x1}$ *"Se denomina razón de cambio promedio o simplemente razón de cambio" (Huertas. 2011. Citado por Cardona Aguirre. 2012).*



Grafica 2. *Representación gráfica de la razón de cambio.*

La pendiente de una función que muestra cantidades reales y medibles es, a menudo, llamada **razón de cambio**. En este caso, la pendiente muestra el cambio de una cantidad **(Y)** por unidad de cambio de otra cantidad **(X)**. Se explica en un ejemplo sencillo.

Patricia tiene un trabajo de medio tiempo limpiando oficinas. Patricia está ahorrando dinero para ir de vacaciones a Disneyland a razón de 25 dólares por semana. Enunciar esta razón de cambio como dinero ahorrado por día y dinero ahorrado por año.

Una semana tiene 7 días y un año tiene 52 semanas. Entonces.

Razón de cambio = $\frac{25\ dólares}{1\ semana} * \frac{1\ semana}{7\ dias} = \frac{25\ dólares}{7\ dias} = \frac{25}{7}\ dólares\ por\ dia = 3.57\ dólares\ por\ dia.$

Razón de cambio = $\frac{25\ dolares}{1\ semana} * \frac{52\ semanas}{1\ año} = 25\ dólares * \frac{52\ semanas}{1\ año} = 1300\ dólares\ por\ año$

La vida de las personas es una formación continua, que se va dando en cualquier tiempo y lugar. El conocimiento es una edificación que se da constantemente y que se va creando en etapas, como por ejemplo la construcción de una casa, que se da de acuerdo con gustos y necesidades que las personas tienen, una de las cosas importantes del aprendizaje está relacionada con tomar en cuenta los conocimientos previos de las personas en este caso de los estudiantes, esto implica la determinación de resolver diversas situaciones o problemas conforme a determinados conocimientos previos que los estudiantes tienen y su correlación con la realidad que lo rodea.

Para Arenas Enrique, Estrada Juan. (2001).
La evolución del pensamiento humano o la cognición ha estado estrechamente vinculada con la creación o utilización de representaciones – verbal, escritura y simbólica- (Donald. 1991. En esta línea, Kaput (1999), señala que la tecnología es una infraestructura representacional que amplía las potencialidades del pensamiento humano, afirmando que estas nuevas herramientas conducen a nuevas maneras de pensar o razonar. Por ejemplo., las gráficas apoyan un rango de formas que es considerablemente más amplio de las que pueden ser expresadas en la forma cerrada del álgebra simbólica y en específico a técnicas de razonamiento particulares. Aquellas, pueden fácilmente apoyar manipulaciones de funciones definidas a trozos, una forma que es extremadamente engorrosa en contexto tradicionales. Además, Kaput señala, que las gráficas están dadas en una forma más democrática, aparecen frecuentemente en periódicos, televisión, presentación de negocios y campañas presidenciales – al menos en términos de lectura e interpretación, como opuestos a la escritura y manipulación algebraica. (P. 1 – 2).

Los alumnos que se incorporan por primera vez a la universidad llegan con cierto grado de interés y esperanza por adquirir conocimientos que sean útiles y que a través de la reflexión y análisis la conviertan en conocimiento, es por ello por lo que se debe impulsar y fortalecer esta situación a través de la ejecución de propuestas didácticas que faciliten el acercamiento a la matemática y en especial al tema de razón de cambio.

Se acentúa la puesta en práctica de un problema donde los alumnos reflejarán el uso de modos de representación visual, simbólico, verbal, y matemático para resolver un ejercicio que se puede representar en la vida real, esto puede llevar a los alumnos a una evolución en su conocimiento y verán de cuántas maneras se puede representar un problema y de cuántas formas se puede atacar para su solución.

La socialización y la buena comunicación puede ser un factor determinante en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas y en especial en cálculo, ya que permite entregar elementos como la seguridad ya que esto facilita la adquisición de conocimientos.

TEORÍA DE AUSUBEL.

> *Para David P. Ausubel, Joseph D. Novak, Helen Hanesian. (1983).*
> *La función de la psicología educativa en la educación de los profesores se basa en la premisa de que existen principios generales del aprendizaje significativo en el salón de clases que se pueden derivar de una teoría razonable acerca de tal aprendizaje. Estos principios pueden ser validados empíricamente y comunicados con eficacia a los aspirantes a profesores. Ellos proporcionan los fundamentos psicológicos para que los profesores descubran por sí mismos los métodos de la enseñanza más eficaces y para que puedan seleccionar con inteligencia los nuevos métodos de enseñanza que constantemente se les obliga a aceptar. Las teorías y métodos de enseñanza válidos deben estar relacionados con la naturaleza del proceso de aprendizaje en el salón de clases y con los factores cognitivos, afectivos y sociales que lo influyen. (P.2).*

La psicología educativa se encarga de entender o estudiar el aprendizaje y el desarrollo de las personas en el campo de la educación, siempre bajo un contexto científico, buscan *maximizar los aprendizajes y el rendimiento* de los alumnos. Estos estudios nos llevan a nuevos razonamientos sobre las estrategias educativas eficaces y los programas de intervención o representación más novedosos. La psicología educativa nos deja aplicar *nuevos modelos, formas y técnicas de enseñanza* en las aulas. Además, permite mostrar a los profesores los *materiales* que se pueden usar y las directrices necesarias para que los alumnos mejoren en su propio desarrollo integral e intelectual.

Entonces la psicología educativa tiene como objetivo fundamental orientar sus esfuerzos científicos y disciplinarios a buscar mejorar la educación, el rendimiento y el razonamiento de los alumnos. Es decir, buscar entender, por un lado, los procesos de desarrollo subjetivo y los diferentes modelos psicológicos del aprendizaje, fundamentar sus propuestas de intervención en el conocimiento que posee sobre el desarrollo humano, el lenguaje, la motivación y la memoria.

> *"los contenidos presentados deben ser potencialmente contenidos <<con sentido>>. Deben ser no arbitrarios y sustancialmente relacionados con las estructuras del conocimiento del aprendiz, y estar dotados de contenidos lógicamente <<significativos>>" (Araujo Joao B, Chadwick Clifton B. 1993. P. 24)*

Ausubel lo que indica es que una persona puede adquirir conocimientos al relacionar la nueva información o material que se va a aprender con elementos de su estructura cognoscitiva, entonces se puede decir que un alumno puede tener un aprendizaje significativo cuando puede encadenar lo que ya sabe con lo que se está aprendiendo.

INVESTIGACIONES REALCIONADAS CON EL TEMA DE RAZÓN DE CAMBIO.

Las investigaciones de razón de cambio se han trabajado de diferentes formas, pero los resultados obtenidos son similares. La gran mayoría de los estudios relacionados al tema de variación se han hecho con estudiantes de nivel bachillerato que ya han tenido algún conocimiento del cálculo diferencial o que ya pasaron en sus respectivas escuelas por el grado en donde se ha estudiado el cálculo diferencial. Algunos autores, muestran que los estudiantes tienen problemas para poder entender la razón de cambio como un cociente incremental y que la razón de cambio involucra la variación de magnitudes y que es necesario medir y comparar.

Simón Mochón (1994) se plantea una pregunta importante que los profesores se hacen *¿Por qué sus alumnos no logran entender ni aplicar las ideas básicas que ellos han tratado de enseñar?* A pesar de las cosas, los investigadores piensan que los alumnos no tienen las herramientas necesarias para poder estudiar un curso de cálculo, en especial con respecto a la variación o razón de cambio, si los educandos no cuentan con los conocimientos suficientes, no podrán comprender que la variación y el cambio son importantes para poder fabricar las ideas fundamentales del cálculo. Mochón en su libro *"Quiero entender el cálculo"* comenta que existen cuatro ideas fundamentales con las cuales se van creando los diferentes conceptos del cálculo.

1. Variación (diferencias y sumas).
2. Aproximaciones sucesivas.
3. Ordenes de magnitud y cantidades despreciables.
4. Procesos infinitos, su tendencia y exactitud.

Como se puede apreciar, en primer lugar, se encuentra la variación (razón de cambio), se evidencia que para poder entender el cálculo hay que poseer una buena escritura para poder comprender los conceptos que se dan y tener un buen nivel de técnicas de graficación, añadiendo también un conocimiento adecuado de funciones y gráficas.

> *Mochón dice que "Las matemáticas deben presentarse en cualquier nivel usando las ilustraciones concretas y que el estudiante debe tener una buena preparación inicial en modelación matemática" (Mochón, Simón. 1994. México).*

Usando un poco las analogías de Mochón, es como si los entrenadores de fútbol desearan que un grupo de personas que practican el fútbol anotaran un gol en el ángulo de la portería, ellos creen que primero se les debe mostrar la técnica para lograrlo, porque sin eso no lograrán fácilmente hacerlo, o sea, la técnica para pararse frente al balón, la manera de golpear el balón, la fuerza que se aplicará para que el tiro salga donde queremos y por último tener en la mente que se puede lograr, es decir la confianza de lograrlo.

Mochón lo que busca en su escrito, es que el cálculo resulte más fácil y con mayor significado, es por eso, que enumeró de esa manera las cuatro ideas mencionadas anteriormente y es ese el motivo por el que quizás la razón de cambio (variación) la puso en primer lugar, eso puede ayudar a que se tengan las herramientas (técnica) suficientes para que se comprenda el cálculo.

Rendon Mesa (2009) elaboró un estudio que denominó *"Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la enseñanza para la comprensión"*, en el cual pensó que la matematización y la relación contextual del concepto de razón de cambio, se involucran entre sí y son la base necesaria para la conceptualización comprensiva. En su trabajo, realizó una serie de preguntas para saber qué tanto los estudiantes entienden por cambio y variación, pero como se menciona en su escrito, hace falta nuevas investigaciones al respecto ya que los resultados obtenidos no son del todo los esperados por el autor.

Las actividades realizadas por Rendon Mesa son variadas, como por ejemplo, el llenado de una tabla donde se les pide a los estudiantes que la llenen para saber cuánto se está pagando por cada litro de gasolina en su automóvil, y los resultados obtenidos por los estudiantes es la existencia de una constante entre las magnitudes, otra de las actividades realizadas por los educandos, es que tienen que manipular un triángulo en uno solo de sus segmentos de recta y dejar la altura constante y con esto calcular el área del triángulo. En los datos mostrados por los alumnos se pudo ver la relación de magnitudes variables y constantes.

Otra de las tareas encomendadas, era que con la ayuda de CABRI, simular un carro en movimiento, en el cual se busca que se entienda el concepto de velocidad que es la razón de cambio entre la distancia y el tiempo, posteriormente graficar el evento. Pero en esta parte del trabajo fue muy distinto a lo anterior, pues en esta ocasión, se pidió graficar y comprobar los resultados en una calculadora graficadora, los datos arrojados por los estudiantes fueron muy distintos a los de la calculadora graficadora y las gráficas realizadas por los alumnos ya que fueron incorrectas, las respuestas de los estudiantes a estas diferencias mencionan que se manejaron mal lo ejes en el plano cartesiano.

> *"El bajo desempeño de los estudiantes en los cursos de cálculo en Norte América sugiere una falta de entendimiento de conceptos como el de la tasa de cambio". (Thompson. 1994. Citado por Enrique Arenas y Juan Estrada. 2001)*

Esa falta de conocimientos la cual mencionan Enrique Arena y Juan Estrada ocasionó que los resultados que se esperaban no fueran obtenidos por los estudiantes ellos no se dieron cuenta que la velocidad y el tiempo es cambiante y ocasionó que no realizaran bien las gráficas.

Enrique Arenas y Juan Estrada (2001) realizaron un experimento con sus estudiantes de cálculo 1 de ciencias básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Se pide a los estudiantes que tienen que resolver un problema a partir de cierta información: *De una pieza de lámina de forma rectangular de 15 cm por 30 cm; construir un canal para el paso de agua de lluvia doblando las paredes formando un ángulo recto.* Los resultados indicaron que los educandos no reconocieron que el problema muestra una variación simultánea de cantidades. Esto deja ver que los estudiantes no se dieron cuenta de que existe una variación entre el ancho y la altura del canal resultante.

Otra actividad encomendada, es que se les da a los alumnos diferentes recipientes los cuales se llenaran con agua (embudos, cónicas, cilíndricas, esféricas, etc.), se les pide dibujar el evento de variación de la altura del nivel de agua conforme se llena el recipiente y que den una explicación de la realización de las gráficas que representan la rapidez de cambio de la altura con respecto al tiempo y otra nueva práctica es, interpretar una gráfica, pero los resultados arrojados por los estudiantes mostraron que a estos les faltó el conocimiento para interpretar la gráfica y el trazo de la misma.

> *"Las dificultades que exhiben los alumnos en los cursos de cálculo se explican por falta de coordinación de imágenes. Una imagen para el autor es un tipo de conocimiento que está construido por fragmentos coordinados de experiencias (cinestésicos, tocar, ver y oír) y son parecidas a un conocimiento figural o metafórico y que tiende a ser altamente idiosincráticas. Pero estas imágenes no siempre están coordinadas. Es el caso de una desconexión entre dos variables que cambian simultáneamente. Es decir, la inhabilidad para imaginar lo que le está sucediendo a una variable (¿Su razón de cambio se incrementa o disminuye?)" (Thompson, P. 119 – 120, 1994, citado por Arenas y Estrada. 2001)*

Los estudiantes mostraron que no entienden el concepto de razón de cambio pues esta idea es importante para la comprensión del cálculo hoy en día.

El conocimiento es una edificación que se da constantemente y que se va creando en etapas, como por ejemplo la construcción de una casa que se da de acuerdo con gustos y necesidades que las personas tienen, una de las cosas importantes del aprendizaje está relacionada en tomar en cuenta los conocimientos previos de las personas en este caso de los estudiantes, esto implica la determinación de resolver diversas situaciones o problemas conforme a determinados conocimientos previos que los estudiantes tienen y su relación con la realidad que los rodea.

Para Arenas Enrique, Estrada Juan (2001).
La evolución del pensamiento humano o la cognición ha estado estrechamente vinculada con la creación o utilización de representaciones -verbal, escritura, visual y simbólica- (Donald. 1991. En esta línea, Kaput (1999) señala que la tecnología es una infraestructura representacional que amplía las potencialidades del pensamiento humano, afirmando que estas nuevas herramientas conducen a nuevas maneras de pensar o razonar. Por ejemplo, las gráficas apoyan un rango de formas que es considerablemente más amplio de las que puedan ser expresadas en la forma cerrada del álgebra simbólica y más específico a técnicas de razonamiento particulares. Aquellas, pueden fácilmente apoyar manipulaciones de funciones definidas a trozos, una forma que es extremadamente engorrosa en contextos tradicionales. Además, Kaput señala, que las gráficas están dadas en una forma más democrática, aparecen frecuentemente en periódicos, televisión, presentación de negocios y campañas presidenciales al menos en términos de lectura e interpretación, como opuestos a la escritura y manipulación algebraica. (P 1 – 2).

Los alumnos que se incorporan por primera vez a la universidad llegan con cierto grado de interés y esperanza por adquirir conocimientos que sean útiles y que a través de la reflexión y el análisis los conviertan en conocimiento, es por ello por lo que se debe impulsar y fortalecer esta situación a través de la ejecución de propuestas didácticas que faciliten el acercamiento a la matemática y en especial al tema de razón de cambio.

Se acentúa la puesta en práctica de un problema donde los alumnos reflejarán el uso de modos de representación visual, simbólica, verbal y matemática para resolver un ejercicio que se puede presentar en la vida real, esto puede llevar a los alumnos a una evolución en sus conocimientos y verán de cuántas maneras se puede presentar un problema y de cuántas formas se puede atacar para su solución.

La socialización y la buena comunicación puede ser un factor determinante en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas y en especial en cálculo ya que permite entregar elementos como la seguridad ya que esto facilita la adquisición de conocimientos.

Las representaciones gráficas propician y favorecen aprendizajes significativos, se dan naturalmente a partir del hecho de que muchas situaciones permiten varias formas de representación gráfica.

Si se acepta que los conceptos matemáticos tienen más de una forma de representación, las prácticas docentes se orientarán a enfatizar y destacar estas formas de representación y lograrán que los alumnos puedan transitar o pasar de una representación a otra de manera fluida.

Miguel Díaz Chávez en su tratado *Conocimientos de los profesores preuniversitarios de cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada (pág. 75 – 90),* realiza su trabajo de tipo cualitativo para documentar los conocimientos que tienen los profesores de nivel bachillerato sobre la interpretación de la derivada. En este trabajo se hace uso de una encuesta en cuanto a la comprensión de la derivada y su significado.

Los datos arrojados por los profesores indicaron que en el cuestionario ninguno contestó adecuadamente la entrevista, sus respuestas no fueron pensadas adecuadamente y existieron diferencias muy grades entre cada respuesta del interrogatorio y en muchos casos fueron incorrectas.

En función de este estudio, los estudiantes no son los culpables de una mala idea de las cosas o una mala interpretación de éstas, sino que los profesores son los causantes de estas deficiencias que existen en los alumnos.

Los profesores mostraron que tienen una idea cuadrada que funciona de manera aislada del uso de la razón de cambio, ellos sólo la utilizan para resolver ejercicios de forma mecánica y esto forma una educación rígida y por consiguiente no sirve para la solución de problemas.

> *Díaz Chávez (2009) dice que:*
> *Ante esta situación se tiene que aceptar que el salón de clases no necesariamente es el lugar donde se construye conocimiento, sino que en muchas ocasiones es un espacio donde se recrean las creencias del profesor, lo cual puede explicar el origen de muchos de los obstáculos que manifiesta el estudiante. (P. 88)*

Los resultados son importantes para saber por qué los estudiantes fallan en los conceptos que tienen de la derivada y de la razón de cambio y qué tanto conocen respecto al tema.

> *"Distinguimos entre creencias y conocimientos, considerando que todo el conocimiento implica creencia, pero no a la inversa, que ambos son términos relativos y no absolutos, que el conocimiento se encuentra en la esfera cognoscitiva del sujeto, mientras la creencia en su esfera volitiva y sensible, que no se puede hablar de una creencia en particular, sino de sistemas de creencias. Así, la estructura del sistema tiene un sustento o estructura lógica, una organización donde existen creencias primitivas y derivadas o periféricas en la cual las primeras forman una base o núcleo y de ellas se derivan otras, integrando conjuntos, donde cada conjunto forma una especie de racimos, donde, tienen lugar entre ellas y el conjunto de racimos forman un sistema del individuo" (Green, 1971; Leatham. 2006, citado por Díaz Chávez. 2009).*

Esto sugiere que los estudiantes siempre les creerán a los docentes ya que existe en los educandos una figura que muestra seguridad en los quehaceres (los profesores), aunque sus conocimientos no sean los adecuados para la enseñanza.

Todos los escritos se realizaron con estudiantes con un grado mínimo de bachillerato y con ensayos para ser resueltos por parte de los alumnos, en todos los trabajos se encontraron puntos que tienen en común y que no necesariamente son los ejercicios, pero en cada uno de ellos se les pedía encontrar la razón de cambio, interpretar esta variación y realizar la gráfica de cada evento y los resultados en la mayoría de los casos fue casi el mismo, los estudiantes no podían interpretar el cambio, como tampoco interpretarlo de forma canónica.

Otra forma que se ha trabajado este tipo de investigación para la razón de cambio es: tratar de entender por qué los alumnos tienen fallas en entender una parte muy importante del cálculo diferencial. En estos documentos se pide a cierto número de individuos (alumnos) que resuelvan un cuestionario, que resuelvan ejercicios donde se pide la realización de algunas gráficas, la interpretación de ciertos modelos matemáticos para su solución o simplemente calcular la razón de cambio teniendo datos de un problema donde se aplica la variación de una cosa con respecto a otra.

La revista latinoamericana de investigación en matemática educativa en su artículo *"La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de las matemáticas",* realizado por los investigadores Gloria Sánchez Matamoros, Mercedes García y Salvador Llinares, señalan que es difícil que los estudiantes de bachillerato puedan comprender la noción de razón de cambio y que muestran muchos problemas para su entendimiento.

> *Entonces se dice que "se encontró que existen tres tipos de equivocaciones que muestran los alumnos de bachillerato y que son:*
>
> - *Estructurales, relacionados con los conceptos implicados.*
> - *Arbitrarios, cuando el alumno se comporta arbitrariamente sin tomar en cuenta los datos del problema.*
> - *Manipulación, si bien los conceptos implicados pueden ser comprendidos"*
>
> *(Orton. 1983; citado por Sánchez Matamoros, Mercedes García y Salvador Llinares. P. 271).*

Orton muestra que los estudiantes tienen problemas en entender los conceptos relacionados a la variación (razón existente entre el incremento de **X** y el incremento de **Y**). Otro de los errores que encontró Orton en los educandos es que son muy apresurados en sus decisiones, no las razonan, y no toman en cuenta los datos que se les dan en los problemas a realizar. Y, por último, es que los alumnos no saben interpretar modelos matemáticos, gráficas y las representaciones icónicas, y con esto, Orton pudo explicar que los estudiantes no dominan el tema de razón de cambio ya sea por la falta de aplicación o de la comprensión de la función.

Orton indicó que las dificultades con la idea de razón de cambio y su vinculación al tipo de función lineal o cuadrática podían tener su origen en una comprensión débil sobre el concepto de función. Esto se da por la falta de conocimientos que existen por parte de los educandos y la mecanización de los cursos que dan los docentes de cálculo en los salones de clase y en especial con el tema de razón de cambio ya que es un tema medular en la comprensión de esta materia.

El trabajo realizado por Oscar Vidal Rojas (2012) el cual enuncio como *"Interpretación de la derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos".* Está basada principalmente en dar definiciones más simples de la derivada y la variación, la tesis es una propuesta didáctica, Vidal Rojas se da cuenta de que en el Bachillerato los estudiantes analizan los conceptos, pero no profundizan en sus aplicaciones.

> *Vidal Rojas (2012). Menciona que los cursos de cálculo diferencial usualmente se centran en textos guías que desarrollan los contenidos sin profundizar ni dar significado a los conceptos, tanto para el grado undécimo como para los primeros semestres de la universidad, los estudiantes enfrentan una serie de dificultades en los diferentes tópicos del cálculo y en particular con la comprensión del concepto de variación. Estas dificultades están relacionadas con: la interpretación geométrica, la interpretación como razón de cambio, el significado de la definición formal, las aplicaciones para modelar fenómenos y situaciones de las otras ciencias, el análisis del comportamiento y variación de gráficas. (P. 1)*

Vidal Rojas muestra el problema que radica en toda la enseñanza de las matemáticas, para él no es correcto dar un tema si al final de éste, cuando ya se mostró todo el procedimiento matemático la aplicación no es vista, la falta de aplicaciones con eventos de la vida real, el análisis de gráficas e interpretaciones icónicas dificulta su entendimiento, y para el tema de razón de cambio es muy importante.

Es importante buscar estrategias como, por ejemplo, definiciones de los temas de cálculo, principalmente con lo relacionado al tema de variación, estos conceptos deben ser bien explicados, utilizando palabras que el lector entienda y cada concepto debe ir acompañado de una serie de ejemplos que expliquen cada definición del tema, como también una serie de problemas que aclaren las explicaciones dadas.

Es importante hacer entender al estudiante que el tema de razón de cambio se tiene que comprender como la medida del cambio de una variable con respecto a otra, como, por ejemplo, la velocidad es la razón de cambio con respecto al tiempo. Hay que señalar que el estudiante debe tener una disciplina de estudio rigurosa en matemáticas, pues tiene que estar analizando, observando, comparando, realizando preguntas y contestar con modelos matemático, gráficas y con representaciones icónicas.

“La forma para empezar a conocer un concepto es: A través de conexiones con otros conceptos (limites o funciones, en el caso de la derivada); a través de los diversos modelos de representación (el gráfico y el analítico en la derivada) y a través de conocer sus diferentes propiedades y procesos. Esta inferencia desde las investigaciones apoya el desarrollo de aproximaciones sistemáticas al estudio de la comprensión y uso de todo lo relativo a la cuantificación del cambio relacional”. (Cantoral y Farfán. P. 292. 1998, mencionados por Sánchez Matamoros, Mercedes García y Salvador Llinares. 2008).

Es posible comprender el tema de razón de cambio y sus aplicaciones si existe una relación entre las gráficas, modelos matemáticos y sus aplicaciones usando palabras que lleguen de manera más fácil a los educandos cuando están en las aulas de sus escuelas. El trabajo realizado por Robinson Alonso Cardona Aguirre (2012), busca reforzar el concepto de razón de cambio dando no sólo una sola definición de variación sino dos, su investigación se basó en buscar en varios autores las explicaciones más accesibles a los estudiantes, en esta tesis (la de Cardona Aguirre) está hecha para estudiantes de bachillerato de grado undécimo (posiblemente de primer año de bachillerato).

La importancia de observar a varios investigadores con relación al tema de razón de cambio es que tienen varios puntos de vista en la definición que dan del tema y cómo se puede trabajar y comprender el concepto de variación, esto permite tener una mejor comunicación con los estudiantes. (Chavellard. 1998, citado por Cardona Aguirre) dice que: *Se puede pasar de un saber sabio a un saber enseñado.*

“Si se realizan una serie de ejercicios en los cuales un estudiante interactúa con ellos como un método activo, el alumno se cuestionará en su propio aprendizaje y entonces se transformará en una persona activa en el desarrollo de su aprendizaje”. (Cardona Aguirre Robinson. 2012. P. 2).

Es posible que con esto se pueda entender la razón de cambio, pero queda una duda ¿se podrá interpretar de forma conceptual? Ya que es importante para poder profundizar en un tema y es trascendental en el manejo de los conceptos en la enseñanza del cálculo, principalmente en lo que se relaciona al concepto de variación. Resulta posiblemente complicado que se aborde el tema de razón de cambio a pesar de que sean bastantes mecánicos al resolver ejercicios y esto los deja muy lejos de comprender el tema de variación y que se hagan de los conceptos de variación.

Los conceptos de razón de cambio son importantes en el proceso de entender el cálculo diferencial. Esta importancia lleva a crear estrategias para que se pueda dar a entender el tema de razón de cambio, como también es trascendental influir en los estudiantes el interés por la investigación y hacerles ver que es importante estudiar los conceptos de la matemática y como dijo Newton.

“Si he conseguido ver más lejos que Descartes ha sido porque me he incorporado sobre los hombros de gigantes”. (Boyer. 1986 y ahora por Cardona Aguirre, 2012. P. 3).

para Cardona Aguirre es importante comprender los conceptos matemáticos, sugiere que hay que ir más haya e investigar en grandes personas que han realizado estudios del tema.

El cálculo es una herramienta importante que se utiliza en muchas áreas como por ejemplo en la ingeniería, en estadística etc. Es por eso por lo que es muy importante que sea analizado y comprendido por los alumnos y, por lo tanto, se requiere de modelación matemática para ayudar a los estudiantes a interpretar, comprender y analizar principalmente en el tema de razón de cambio. Es muy importante también que los alumnos aprendan a interpretar las gráficas.

Cardona Aguirre Robinson A. (2012).
Dice que el desarrollo de los conceptos de la derivada como razón de cambio y sus preconceptos, nos permiten darnos una idea de las diferentes formas en el cual éste se presenta en el aula de clase, de ahí la importancia que tiene el docente en escoger el concepto más apropiado de acuerdo con su contexto para ser enseñado. De estas diferencias entre los conceptos se desarrollaron las actividades partiendo de los preconceptos los cuales deben permitir al estudiante una mejor comprensión y apropiación del concepto de derivada como la razón de cambio, en los cuales se tuvieron en cuenta varios aspectos, lo gráfico, lo conceptual y la resolución de problemas en la vida diaria, en los cuales se presenta variación y cambio. (P. 81 – 82).

El instrumento tiene que despertar en los alumnos la motivación por aprender y estudiar cálculo, en especial el tema de razón de cambio, el instrumento tiene que hacer crecer las actitudes y las aptitudes de los alumnos dentro y fuera del salón de clases. El ejercicio debe facilitar el entendimiento del concepto de variación y debe hacer ver a los alumnos que el tema de razón de cambio se puede encontrar en situaciones de la vida real.

Vidal Rojas Oscar E. (2012).
Nos dice que: Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la educación básica primaria caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico en la educación media del cálculo diferencial e integral. (P. 35).

El saber por qué el tema de variación es complicado para los alumnos dará una perspectiva muy clara de cómo se debe abordar el tema de variación en cálculo diferencial y así sea más comprensible para los educandos.
La materia de cálculo diferencial es muy importante en las instituciones escolares de nivel medio superior y superior porque gracias a ella se pueden resolver problemas de variación o razón de cambio, pero sin embargo el proceso de enseñanza – aprendizaje se ha estado dando de forma mecánica, lo que ocasiona que la solución de problemas se haga de forma muy banal e insignificante.

Hay una correspondencia en la forma en la que se dan las tareas a los alumnos y el proceso que ellos ocupan para realizar estos trabajos para llegar a la solución, por lo que es necesario orientar a los estudiantes para que tengan un pensamiento variacional adecuado, es decir, señalarles didácticamente cómo pueden atacar el tema de razón de cambio y así ellos podrán tener un mejor desempeño académico en la materia de cálculo en especial en tema de variación.

> *Ministerio de Educación Nacional (1998).*
> *El pensamiento variacional es comprendido como un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permiten analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentra como sustrato de ellas. En esta forma se amplía la visión de la variación, por cuanto su estudio se inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes. (P. 72).*

Los métodos que son utilizados en el pensamiento variacional deben impulsar a los estudiantes para resolver problemas de manera más inteligente y además deben impulsar la comprensión de los conceptos de variación o razón de cambio.

El tema de razón de cambio es muy importante en la vida cotidiana ya que se presenta en diferentes situaciones, como por ejemplo en el cambio de temperatura, es importante conocer y manejar este tema porque es una herramienta muy poderosa para solucionar muchas citaciones en nuestra vida diaria.

> *Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, M. R. Ariza Nieves, L. M. (2017, julio-diciembre).*
> *El análisis del cambio instantáneo y el cambio promedio como un proceso de variación, siempre ha estado asociado a procesos de la vida cotidiana y a diversas situaciones de tipo natural, las cuales se describen tanto cualitativa como cuantitativamente. Es de interés del ingeniero conocer cómo se incrementa una situación o cómo decrece un valor, cuál es el valor más pequeño o el más grande, asimismo, describir y cuantificar ha permitido reconocer y dar solución a situaciones problémicas del entorno y a la vez tomar registros numéricos de*

> *dichos cambios (temperatura, lluvias, aumento poblacional, la producción de metales y otros) con el propósito de pronosticar situaciones, analizar y evaluar los resultados. (P.140).*

Muchos de los problemas que los estudiantes pueden presentar puede ser que estén relacionados con la forma en que se presenta el tema de razón de cambio en los salones de clase o tal vez también por el interés que los alumnos tienen por aprender este tema en la materia de cálculo.

> *Padilla Mora E, Quesada Fernández C. Ortiz Hernández L. A. (2019)*
> *Dichas dificultades pueden estar relacionadas con obstáculos de origen didáctico, producto de la forma de la enseñanza del cálculo a nivel universitario, la cual se lleva a cabo con métodos tradicionales que solo se exige del estudiante un dominio algorítmico repetitivo y algebraico; en otros quizá porque la aprehensión del concepto implica procesos poco utilizados por los estudiantes como: la abstracción, el análisis y la demostración. (P. 269).*

Otro de los problemas que se encuentra en la enseñanza del cálculo, pero en particular con el tema de variación, es la forma en que los profesores se preparan para dar el tema, en ocasiones sólo realizan de forma mecánica ejercicios para obtener la derivada de cierta función, pero no profundizan en el tema de razón de cambio es decir lo ven de una manera muy vaga.

> *Comentan que uno de los fenómenos didácticos característicos de la enseñanza del análisis matemático es la "algebrización del cálculo diferencial" que reduce el concepto de derivada a las operaciones algebraicas y trata de forma simplista las ideas específicas del análisis, como la razón de cambo instantánea, obstaculizando la construcción de una comprensión compleja de la derivada.*
>
> *Contreras (2000) plantea que la enseñanza del Cálculo ha sido, a veces, una ampliación de métodos algebraicos y no un estudio de la matemática del cambio, Contreras considera fundamental identificar concepciones de la derivada tales como: concepción de razón de cambio instantáneo, concepción geométrica (asociada históricamente a la idea de pendiente de la tangente de Fermat). Contreras (2000). Citado por: Luna Gonzalez J. Ruiz Chavez O. Lorea Ochoa E. J. Barron Lopez J. V. Salazar Alvarez M. C. (septiembre - diciembre 2013) (P. 5)*

Como se ha mencionado anteriormente, una de las dificultades que se exhibe en el aprendizaje del cálculo y en especial con el tema de razón de cambio es el trabajo mecánico en los salones de clase y abandonan la importancia de los conceptos, como también sus aplicaciones o sea los alumnos no ven la aplicación del tema de variación en la vida real y esto ocasiona que los estudiantes no logren manejar los conceptos del tema de variación.

> Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller. (2008)
> *Los cambios que ocurren en la sociedad, economía, naturaleza, en nuestra vida cotidiana, tienen distintos comportamientos. En matemática se crean modelos abstractos para describir dichos fenómenos y la medición del cambio de esos fenómenos es un aspecto esencial de la variación y el elemento eje en la formación del concepto de derivada. En este sentido, el cálculo diferencial, especialmente el estudio del comportamiento variacional de las funciones resulta fundamental para analizar los cambios que ocurren en los fenómenos y, en consecuencia, para formular dichos modelos. (P. 129)*

Es muy importante conocer las dificultades que los estudiantes tienen para el manejo del tema de razón de cambio ya que es una parte medular para poder comprender y estudiar el cálculo; el estudiante tiene que comprender que el cambio se presenta en nuestra vida diaria y que si logra entender esto podrá verla en su experiencia de cada día.

> *Herbert y Pierce. 2008.*
> *También se identifica como clave el concepto a la comprensión de funciones en matemáticas y a la comprensión de muchas ideas relacionadas con la vida cotidiana [por ejemplo, cuando se describe el cambio cualitativo ("crecí más alto durante el verano") y el cambio cuantitativo ("crecí dos pulgadas en el último año") reconocer que es un objetivo importante en el desarrollo del pensamiento algebraico para poder analizar el cambio en varios contextos y comprender las relaciones y modelar los fenómenos utilizando apropiadamente los instrumentos. En particular, una comprensión conceptual de la tasa de cambio es especialmente crucial para el estudio del cálculo. Los investigadores afirman que la comprensión de temas avanzados como el cálculo "se desarrolla a partir de intuiciones que los niños construyen en sus experiencias diarias con cambios físicos y simbólicos" y que el aprendizaje del cálculo puede ser facilitado por experiencias anteriores que permite a los niños estudiar y representar situaciones que involucran cambio. (P. 432).*

El tema de variación es una idea muy importante en el estudio de las matemáticas y en especial en la materia de cálculo diferencial. Reconocer cuáles son los problemas en la comprensión del tema de la razón de cambio ayudará a transformar a los estudiantes y evolucionará en su pensamiento para poder trabajar el tema de variación y comprender mejor el cálculo.

Los estudiantes que ingresan a la Universidad llegan con un conocimiento muy pobre sobre el concepto de función, es importante que se conozcan cuáles son las causas por las que los alumnos ingresan a la escuela con estas deficiencias.

Carlson. Afirma que los estudiantes ingresan a la universidad con una comprensión deficiente sobre las funciones; así mismo, recogen resultados de algunas investigaciones previas que demostraron que, estudiantes académicamente talentosos tienen dificultad para modelar relaciones funcionales de situaciones que involucran la razón de cambio de una variable cuando ésta varía continuamente en una relación dependiente con otra variable. (Carlson. 2003. Citado ahora por Villa Ochoa J. A. 2010. P. 24)

La importancia de que los estudiantes tengan bien definido el concepto de función es importante ya que esto les ayudará a manejar mejor el tema de razón de cambio.

El valor que tienen los errores que los estudiantes presentan en el tema de razón de cambio se deben tomar con mucha seriedad, errar es parte del aprendizaje ya que gracias a ellos se puede mejorar el proceder del estudio de las cosas, en este caso el tema de variación,

"De modo que los errores deben ser aceptados como parte del proceso de aprender y no como algo necesariamente negativo. Se aprende de los errores, dado que este permite percatarse de forma consciente del mismo y de su erradicación". (Lorena Salazar Solórzano, Leiner Víquez García. 2019. P. 564).

Se reconoce también que muchas de las deficiencias que los estudiantes presentan en el tema de razón de cambio se debe a la carencia de conocimientos previos, es importante se conozca cómo los alumnos manejan el tema de variación y con esto se podrá atacar el problema y plantear mejor la enseñanza del tema de razón de cambio.

Lorena Salazar Solórzano, Leiner Víquez García. 2019
Los errores debido a deficiencias en conocimientos previos son los que se dan en su gran mayoría (errores algebraicos, factorización, ecuaciones, y aspectos relacionados a simplificaciones), lo que lleva a replantear la necesidad de llevar un curso de precálculo que les provea las bases para el curso de cálculo diferencial e integral. Los errores debido a rigidez de pensamiento se dan en su gran mayoría en los problemas de optimización, velocidad y razones de cambio. (P. 568).

Muchos de los problemas que se presentan en el tema de razón de cambio en los estudiantes es debido a la forma en que se dan las ideas para su comprensión, es decir el lenguaje que se usa, los alumnos en muchas ocasiones no entienden el tema de variación por la forma en que se habla del tema ya que muchas palabras puede confundirlos y llegan a perderse en el camino, palabras como por ejemplo función, diferencia, etc. Estas palabras los estudiantes las relacionan con otra cosa y no con el lenguaje de las matemáticas.

Socas Robayna Martin M. (2010).
Otro problema del lenguaje en las Matemáticas es el originado por el lenguaje común. Palabras como, por ejemplo, raíz, potencia, producto, matriz, primo, factor, diferencia, integral, semejante, índice, función, etc., tienen significados diferentes en Matemáticas y en el lenguaje habitual, de modo que el uso de tales palabras puede producir dificultades a causa de la confusión semántica implicada. (P. 3).

La forma de comunicación es una parte importante en la enseñanza del cálculo porque gracias a esto los estudiantes pueden comprender mejor los conceptos que se les da, el lenguaje en las matemáticas puede ser de manera visual, es decir cuando se presenta en los educandos algunas gráficas que puede ser a mano o por computadora y se les pide explicar el fenómeno que representa, puede aparecer de forma simbólica siendo ésta la que es propia de las matemáticas. El lenguaje simbólico matemático está lleno de una simbología y una organización que son propias de ellas (las matemáticas), es muy importante que los profesores trabajen y conozcan el concepto de los símbolos matemáticos porque gracias a esto puede existir una buena comunicación con los estudiantes. Y es precisamente la falta de la comprensión de este lenguaje matemático no deje ver a los alumnos cómo se relacionan y cómo son utilizados en la solución de problemas. También el lenguaje matemático puede presentarse de manera coloquial, es decir cuando se expresa de forma oral o escrita.

Socas Robayna Martin M. (2010).
Nos encontramos, de esta manera, con diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Uno de estos conflictos nace de la ayuda que la lengua común presta a la interpretación de los signos matemáticos. El lenguaje habitual usado en la comunicación puede expresar su significado, aunque se cometan abusos morfosintácticos, tales como roturas de reglas gramaticales o faltas de ortografías. El significado puede ser comunicado por alusión o asociación, sin embargo, el lenguaje de las matemáticas es más preciso, está sometido a reglas exactas, y no comunica su significado, salvo por la interpretación exacta de sus signos. Este conflicto involucrado en el uso del lenguaje ordinario, dentro del contexto matemático, es un conflicto de precisión. (P. 3).

Saber cuáles son las dificultades de los estudiantes en el tema de razón de cambio ayudará a mejorar la práctica docente y mejorará el lenguaje de comunicación con los alumnos.

CAPÍTULO

3

JUSTIFICACION AL DESARROLLO Y DISEÑO DEL INSTRUMENTO.

JUSTIFICACION AL DESARROLLO DEL INSTRUMENTO DE APLICACIÓN A LOS ESTUDIANTES.

La realización del instrumento que se aplicará a los estudiantes tiene esa forma porque se quiere ver cuáles son las causas por las cuales los estudiantes tienen problemas para entender el concepto de razón de cambio, es importante saber desde donde existen esas dificultades en el tema de variación en los alumnos, se tomaron estos temas de arranque *(dominio y rango de una función)* ya que se relacionan mucho con el tema de razón de cambio.

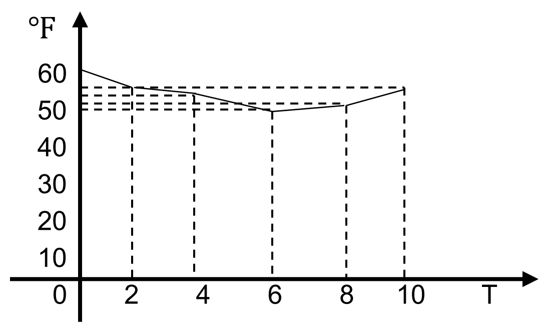
Saber que una función se puede definir como la relación que existe entre dos magnitudes en donde a la primera parte de la función *(conocida como dominio)* le corresponde un único valor de la segunda parte *(llamado rango o contradominio)*. Es primordial.

Por ejemplo.

En la siguiente tabla aparecen las temperaturas $(en\ °\mathrm{F})$ en una ciudad que se registraron cada dos horas. En función de la tabla realiza la gráfica en función del tiempo.

A partir de este ejemplo se puede ver que son muy importantes las funciones por que puede notar que la temperatura está en función del tiempo y con esto lo que se intenta es crear una regla o función que pueda relacionar estos datos.

tiempo	Temperatura °F
0	60
2	58
4	54
6	50
8	55
10	60



Por: Schwartz Abraham (1967).

*Function; domain; range. We are given a set of numbers, which we shall call the domain D, and instructions for associating a numbers **y** with each number **x** of D. The set all numbers **y** associated with numbers **x** of D shall be called the range R. The correspondence thus created between the set D and R shall be called a function (P. 1).*

Traducción.

Por: Schwartz Abraham (1967).

*Función; dominio; rango. Se nos da un conjunto de números, que llamaremos dominio D, e instrucciones para asociar un número **y** con cada número de **x** de D. el conjunto de todos los números **y** asociados con los números **x** de D se llamará rango R. la correspondencia así creada entre los conjuntos D y R se llamará función (P. 1).*

Ahora, la derivada de una función es la razón de cambio de una función en un determinado punto, es decir que tan rápido se está produciendo una variación.

Por: Schwartz Abraham (1967).

*f^1, the derivative function for f. Let function f have domain D. for those **x** of D for which the limit indicated exists,*

$$f^1 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

If we start with the statement $y = f(x)$, the derivative of y with respect to x is also often indicated by dy/dx or df/dx. The definition of the rate of change may be started in the derivative notation. (P. 22, P.23).

Traducción.

Por: Schwartz Abraham (1967).

*f^1 la función derivada de f.Sea la función de f de dominio D. para aquellas **x** de D para los cuales existe el límite indicado,*

$$f^1 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Si comenzamos con el enunciado $y = f(x)$, la derivada de y con respecto a x también suele indicarse como dy/dx o df/dx la definición de tasa de cambio puede establecerse en la notación de derivada. (P. 22, P.23).

Es por eso por lo que cuando se habla de derivada en cálculo se refiere a la razón de cambio en donde se involucra el dominio de una función y es importante que se entienda como se maneja.

Vidal Rojas (2012).

Los matemáticos del siglo XVII y posteriores encontraron que muchos otros problemas, particularmente los que implicaban determinar ***la intensidad del cambio instantáneo*** *de una variable con respecto a otra, también podía resolverse utilizando el mismo concepto. Por lo tanto, a la solución de todos estos problemas se le dio el nombre de* ***derivada*** *la cual se define de la siguiente manera.*

Sea f una función real. La derivada de f es otra función que simbolizaremos por f^1 *(notación actual) y que tal valor en cualquier punto* $x = x_1$ *de su dominio está dado por:* *(P. 22).*

$$f^1 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se podrá notar que el dominio de una función está relacionado con el tema de razón de cambio, es por lo que la dinámica para saber cuáles son los problemas que llevan a los estudiantes a tener dificultades para entender el concepto de variación abarco el tema de dominio y rango de una función.

JUSTIFICACION AL DISEÑO DEL INSTRUMENTO DE APLICACIÓN A LOS ESTUDIANTES.

El instrumento de investigación está compuesto por cuatro reactivos, los primeros tres ejercicios toman el tema de *dominio y rango de la función*. Esta parte del examen es importante ya que se busca ver si los estudiantes pueden obtener los valores para los cuales la función está bien definida *(dominio)* y saber si logran conseguir todos los posibles valores que arroja la función *(rango)* y con esto se den cuenta del concepto de *función* (relación entre dos conjuntos) este camino va adentrando a los alumnos al concepto de razón de cambio y ayudará a resolver problemas relacionados con la variación.

Posteriormente se tiene un problema que puede presentarse en la vida real, con esto primeramente los estudiantes pueden notar que el tema de razón de cambio se presenta en la vida real y que es de gran utilidad.

La función que se escribe para este problema es una función a trozos que describe el recorrido del móvil en el parque de diversiones. Al momento de que los estudiantes realicen la gráfica podrán ver cómo se comporta el móvil al hacer su recorrido, es interesante, porque los estudiantes podrán plasmar el recorrido en papel y lo podrán ver más claramente cómo se comporta el móvil en su trayecto.

La gráfica es de gran importancia para los educandos por que se darán cuenta en que punto o puntos la función no es derivable y en cuales si, se quiere decir, que si en un momento la función no es continua entonces en ese punto la función no es derivable. La interpretación de la gráfica en este caso es esencial. Es por eso por lo que el instrumento cuenta con ese punto.

Un punto con el que cuenta esta parte del ejercicio es *calcular el rango de la función.* Esto ayudará a los estudiantes a saber en cuales puntos de la función existe una relación.

Este camino es un ejemplo para saber en donde existen las dificultades para entender el concepto de razón de cambio. En los libros de cálculo para llegar al tema de variación, se tiene que pasar primero por una serie de temas que van ayudando a entender varios conceptos, como por ejemplo el de función, dominio y rango para posteriormente llegar al tema de razón de cambio ya que ningún tema está separado del otro, este recorrido podrá ayudar a comprender cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes para comprender el tema de variación y en dónde se tiene que trabajar más para poder tener mejores resultados en el tema de razón de cambio.

> *David P. Ausubel, Joseph D. Novak, Helen Hanesian. (1983).*
>
> *Como ya vimos, la esencia del proceso de aprendizaje significativo reside en que las ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario, sino sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe, señaladamente algún aspecto esencial de su estructura de conocimientos (por ejemplo, una imagen, un símbolo ya con significado, un contexto o una proposición).El aprendizaje significativo presupone tanto que el alumno manifiesta una actitud hacia el aprendizaje significativo; es decir, una disposición para relacionar, no arbitraria, sino sustancialmente, el material nuevo con su estructura cognoscitiva, como que el material que aprende es potencialmente significativo para él, especialmente relacionable con su estructura de conocimiento, de modo intencional y no al pie de la letra (P. 56).*

La propuesta didáctica ayudará a saber en qué parte del camino hacia el tema de razón de cambio existen dificultades las cuales llevan a no entender el tema de razón de cambio en los salones de clase de los alumnos del nivel medio superior.

El examen se muestra como una ayuda para los alumnos, porque ellos posiblemente podrán ver y entender que todos los temas en cálculo están ligados para su buen entendimiento y principalmente con el tema de razón de cambio.

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA.

METODOLOGÍA.

La importancia del cálculo es esencial en la actualidad porque muchos estudiantes que estudian por ejemplo ingeniería lo utilizan para resolver problemas utilizando por ejemplo el concepto de derivada, como también es muy importante conocer el concepto de razón de cambio.

> *Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, M. R. Ariza Nieves, L. M. (2017, julio-diciembre).*
> *El estudio de funciones, las formas de representar variables relacionadas y la razón de cambio cumplen un papel importante en la formación de los ingenieros, no solo ahora sino a través de la historia, en la medida en que los dota de herramientas matemáticas para interpretar datos, reconocer cualquier fenómeno y explicar los procesos de cambio. (P. 139).*

La metodología estará basada en resolver cuatro ejercicios relacionados al tema de razón de cambio y que se pueden presentar en la escuela como también en la vida real. Estas tres actividades serán de procedimiento igual, pero con diferente complejidad, el primero es fácil, el segundo medio y el tercero difícil. Todo esto será resuelto por los alumnos en un contexto estático, es decir, en *lápiz y papel.* Ya que esto ayudará a los estudiantes a tener una mejor concentración al desarrollar los trabajos. Los educandos para la solución podrán crear formas canónicas o representaciones icónicas, esto puede apoyar a los estudiantes a entender mejor cómo se puede llegar a la solución del problema y comprender el concepto de razón de cambio, después de terminar de resolver los problemas, los alumnos contestaran un cuestionario de autopercepción, este interrogatorio constará de cuatro preguntas relacionada con los ejercicios que resolvieron.

- *El uso del lápiz y papel suele ser una tradicional alternativa para simplificar el proceso de aprendizaje de las matemáticas, ya que para fundamentar una habilidad especifica en esta ciencia el desarrollo de ejercicios prácticos es indispensable.*
- *Aprender a la distribución espacial puede iniciar desde el uso del lápiz y papel.*
- *El desarrollar ejercicios por etapas como una ecuación o escala son oportunidades donde la mente de un niño forma comportamientos como la orientación al resultado, la exactitud y la atención al detalle.*
- *Cuando un ejercicio se complique el lápiz requerirá ser borrado de su lienzo que en este caso es el papel, actividad que con cada repetición generará pequeñas oportunidades para fortalecer la tolerancia a la frustración.*

- *En muchas ocasiones el entendimiento del método matemático requiere del orden y la forma como se represente gráfica y numéricamente en el papel; Acostumbrar a un niño a seguir una secuencia ordenada en el desarrollo de un ejercicio, permitirá configurar comportamientos y valores como la honestidad, disciplina y la observación.*
- *La hoja y el lápiz siempre estarán por encima de cualquier otro elemento de estudio como una herramienta para el llamado a la concentración, con el desarrollo de ejercicios matemáticos este estado de conciencia se fortalecerá a medida que se practique con mayor constancia.*
- *Escribir y graficar diferentes conceptos y modelos numéricos en el papel, facilitaran la memorización y mecanización de las nociones que se requieran apropiar en el desarrollo del aprendizaje.*
- *La abstracción es una habilidad ligada al desarrollo de diferentes ejercicios matemáticos, que se fortalece con el uso espacial de una hoja y el método con el que se logra la distribución de la información plasmada en el papel.*
- *Registrar detalladamente la secuencia de un ejercicio matemático permitirá asociar diferentes métodos y principios de la ciencia que serán de gran importancia a medida que se intensifica la complejidad de los temas impartidos como parte del proceso formativo.*
- *Las personas con habilidad matemática desarrollan la constancia y paciencia como rasgos de su personalidad.*
- *El lápiz y el papel son un método exacto y difícilmente reemplazable como modelo de verificación de la adherencia a los conocimientos impartidos de la ciencia.*
- *Enfrentarnos a una hoja en blanco siempre será un llamado a la creatividad y recursividad de cualquier ser humano.*
- *Sin lugar a duda, un niño que utiliza herramientas análogas para el desarrollo de cualquier tipo de habilidades académicas será un futuro autodidacta, inquieto por diferentes métodos de aprendizaje.*
- *Estimular el interés por las matemáticas en los niños debe iniciar a temprana edad con métodos prácticos y didácticos que permitan el interés por esta ciencia, es una gran oportunidad de configurar actitudes y comportamientos de gran valor para el adulto del mañana.*

Agüera, P. Ayala, A. De Miguel, R. Fernández, A. Fernández, C. García, A. García, L. Pajuelo, L. Román, L. Soler, M. (30 de Julio de 2021). Importancia del papel y el lápiz en las matemáticas. Aloha mental arithmetic. Recuperado de: https://alohacolombia.co/importancia-del-papel-y-el-lapiz-en-matematicas.

El tema de razón de cambio es un tema muy importante en cálculo diferencial y al usar lápiz y papel puede ayudar a entender mejor la problemática que los estudiantes tienen en el entendimiento del tema de variación, esta actividad puede ser muy importante ya que así se podrá ver dónde o en qué parte del tema de razón de cambio hay que modificar para desarrollar mejor las actividades académicas y que exista un mejor aprendizaje del asunto.

Para la aplicación del trabajo se realizará todo a un grupo del nivel medio superior que ya haya tomado o estén tomando Cálculo Diferencial y que tenga conocimiento del tema de razón de cambio. El proyecto debe ser aplicado a modo de examen dentro de un salón de clase y observado por un profesor calificado en la materia y todo en un contexto estático de lápiz y papel.

Una de las cosas importantes para realización de este estudio es la cantidad de personas que realizaran el trabajo, el número de estudiantes que realizaran el estudio permitirá saber cuáles son las dificultades que tienen los alumnos para entender el tema de razón de cambio, como también dará la seguridad que se desea para entender cuál es la problemática que los educandos tienen para entender el tema de variación en los salones de clase. Es importante entender que la cantidad de personas debe ser representativa para que el estudio para que el objetivo del trabajo se cumpla.

> *Garcia-Garcia José A.; Reding-Bernal A,; López-Alvarenga Juan C. (2013). Durante la realización del estudio, puede haber perdidas de participantes por diversas razones. El tamaño mínimo de muestra necesario para obtener resultados estadísticamente significativos está pensado, de acuerdo con el número de sujetos al final del estudio y no con el inicial, un 10% a 20% de participantes. (P. 221).*

LOGÍSTICA.

El trabajo será resuelto por los estudiantes en dos sesiones de una hora frente al profesor y se aplicará a modo de examen, es decir, los alumnos lo tienen que resolver de forma individual y sin ayuda del profesor, ni de libros o cuadernos de texto, solo podrán utilizar calculadora científica como ayuda.

El profesor sólo observará que los estudiantes resuelvan los ejercicios de forma individual y que los educandos no copien entre ellos para la solución de las tareas. Al finalizar cada sesión los problemas serán entregados para su calificación y análisis.

Para la aplicación de las tareas, se sugiere que en la primera hora o sesión los estudiantes resuelvan los dos primeros ejercicios ya que es tiempo suficiente para su solución y en la siguiente hora la tarea tres y el cuestionario de autopercepción. Pero queda abierto a consideración del profesor, la forma en que se aplicarán los problemas y el cuestionario, es decir el docente puede aplicar los tres problemas en una sola sesión y después resolver el cuestionario, pero eso queda a la opinión del maestro.

Los ejercicios y la encuesta se aplicarán frente al profesor de matemáticas y el docente no podrá contestar dudas del trabajo, pero debe motivar a los alumnos para la realización del ejercicio.

El trabajo del docente aplicador es muy importante ya que siempre debe impulsar a los estudiantes a realizar el trabajo de forma correcta y sincera.

> *Por Ausubel P. David (1978)*
> *El aprendizaje significativo presupone tanto que el alumno manifiesta una actitud hacia el aprendizaje significativo; es decir, una disposición para relacionar, no arbitraria, sino sustancialmente, el material nuevo con su estructura cognoscitiva, como que el material que aprende es potencialmente significativo para él, especialmente relacionable con su estructura de conocimiento, de modo intencional y no al pie de la letra. (P. 56).*

El uso del lápiz y el papel son muy importantes en el desarrollo y educación de los estudiantes y en especial en la materia de cálculo porque gracias a ello se puede aceptar y corregir el trabajo que los estudiantes y profesores hacen y con esto se puede crear una gran motivación por el aprendizaje de las matemáticas, pero en particular con el tema de razón de cambio en cálculo diferencial y entonces así el aprendizaje por el tema de variación puede ser significativo para los alumnos.

Al terminar de resolver los problemas y el cuestionario, se realizará un análisis de lo obtenido y de esta manera saber en dónde se encuentran las dificultades para poder comprender el concepto de razón de cambio.

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA EL ESTUDIO.

NOMBRE__________________________________ FECHA_______

GRUPO______________

NÚMERO DE CUENTA__________________

Calcula la derivada de las siguientes funciones y contesta la pregunta de cada inciso.

1. $f(x) = 5x\,(x^2 + 8x)$

¿Cuál es el dominio de esta función?

2. $h(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$

¿Cuál es el rango de esta función?

3. Una de las atracciones en un parque de diversiones hace su recorrido en 28 segundos. La distancia (en metros) que recorre en función del tiempo (en segundos) está dada por la función:

$$d(t) = \begin{cases} 3\,t^3 & 0 \leq t < 4 \\ 40\,t + \,t^2 & 4 \leq t \leq 14 \\ -\,t^2 + 55\,t + 58 & 14 < t \leq 28 \end{cases}$$

- Haz una gráfica de la función.
- ¿Es una función continua en el intervalo [0, 28]?
- ¿Cuál es el rango de la función?
- ¿Cómo calcularías la razón de cambio instantánea de la distancia con respecto al tiempo?
- ¿Qué función resulta de calcular esa razón de cambio instantánea?
- ¿Cuál es la razón de cambio instantánea cuando t = 5?
- ¿Cómo se interpreta la derivada de esta función?
- ¿Cuál es la velocidad promedio de esta función?

ETAPAS DE PROCEDIMIENTO.

Para la solución de los problemas los alumnos trabajarán con diferentes etapas para su desarrollo como son.

1. Comprensión del problema.
2. Análisis de datos.
3. Aplicación de algoritmos matemáticos.
4. Interpretación de resultados.

En la comprensión del problema. Los estudiantes deben leer con mucha atención el ejercicio e ir imaginando el evento, esto llevará a los educandos a desarrollar un plan para poder resolver el asunto a tratar.
El leer bien el texto lleva a una mejor comprensión de lo que está escrito y a un mejor razonamiento de la situación a la que se está enfrentando, pues de lo que se trata es de encontrar una serie de acciones lógicas que lleve a la construcción de acciones lógicas para que se pueda llegar a la solución del problema.

En el análisis de datos. Los estudiantes realizarán un procedimiento de explorar los datos que se dan en el problema, esto hará que los alumnos puedan acentuar la información que es de mayor utilidad para poder resolver los ejercicios
El análisis de datos lleva a que se pueda tener acumulación de información que pueda ayudar a encontrar las dificultades que existen en el trabajo encomendado, esto ayudará a los educandos a planear bien y poder llegar a la solución del problema.

Aplicación de algoritmos matemáticos. En esta parte los estudiantes buscarán demostrar que el análisis que se hizo es el correcto llevando paso a paso los recursos matemáticos con los que cuentan, todos estos pasos que los alumnos conocen y manejan los llevará a la solución del problema.
La aplicación del algoritmo matemático es esencial y muy importante porque gracias eso los educandos pueden llegar a un resultado en concreto y esta solución se obtiene después de que todo este proceso matemático ha finalizado.

Interpretación de resultados. Al finalizar de resolver los problemas los estudiantes podrán comprender el concepto de variación.
En general, se espera que los alumnos puedan comprender que la razón de cambio se puede entender como la medida en la cual una magnitud cambia con respecto a otra magnitud, es decir que compara dos magnitudes. Los educandos podrán encontrar que una razón de cambio es la velocidad la cual podrán obtener dividiendo una distancia recorrida por una unidad de tiempo, lograrán comprender que la derivada sirve para poder obtener la variación de una variable con respecto a otra.

IMPORTANCIA DEL CUESTIONARIO DE AUTOPERCEPCIÓN.

El cuestionario de autopercepción ayudará a entender cómo los alumnos interpretan y entienden las cosas en las cuales ellos están viviendo, al realizar un cuestionario se podrá entender lo que los estudiantes piensan de los problemas y se conocerá en dónde existen dificultades para poder entender los ejercicios.

Un cuestionario de autopercepción mostrará la idea, las herramientas y las habilidades académicas que tienen los educandos para resolver los problemas de matemáticas. Esto es una ayuda importante porque gracias al cuestionario los alumnos podrán hacer algún cambio en su forma de estudio y mejorar sus habilidades.

> *Montero Lagos P. Devia Saavedra E. Gonzáles Guajardo H. Rojas Puentes C. (1992).*
> *Las autopercepciones para aprender matemáticas corresponden a las visiones que cada uno tiene de sí mismo (autoconcepto) y a las valoraciones que cada uno hace de sus propias autorrepresentaciones (autoestima). Las autopercepciones sobre el aprendizaje matemático pueden expresarse a través de un conjunto de autodescripciones (p. ej., "soy bueno para matemáticas") que permita inferir el sistema categórico de cada persona. Estas categorías corresponden a la organización que tienen las personas de los significados de los datos provenientes de las diversas experiencias relativas al aprendizaje matemático. (P. 30).*

Es muy importante que los estudiantes exhiban su percepción de las cosas especialmente cuando se enfrentan a problemas relacionados con las matemáticas porque de esta manera se podrá mejorar el trabajo docente y se podrá entender mejor cuales son las dificultades que los alumnos perciben de las matemáticas.

CUESTIONARIO DE AUTOPERCEPCIÓN.

Lee y resuelve detalladamente cada una de las siguientes preguntas usando tu autopercepción de los problemas matemáticos que resolviste.

1. Bajo tu autopercepción, clasifica los problemas que resolviste bajo la siguiente escala: Fácil, Medio y Difícil.

   ____
   ____
   ____

2. En función de tu respuesta en la pregunta número 1 de este cuestionario. ¿qué fue lo que se te dificultó de los problemas que resolviste?

   ____
   ____
   ____
   ____

3. Los problemas que resolviste. ¿te ayudaron a entender el concepto de variación o razón de cambio?

   ____
   ____
   ____
   ____

4. En función de tu autopercepción. ¿El tema de razón de cambio es de utilidad en la vida real?

   ____
   ____
   ____
   ____

CAPÍTULO 5

APLICACIÓN DE LA ESTRATEGIA.

APLICACIÓN DE LA ESTRATEGIA.

La aplicación del trabajo se realizará el día 5 de mayo del año 2022 a doce de estudiantes de cálculo 1 del nivel medio superior del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Naucalpan (CCH Naucalpan) de la Universidad Nacional Autónoma de México que ya conocen del tema de razón de cambio, es decir, a alumnos que ya llevaron cálculo diferencial. Este trabajo se resolverá como si fuera un examen y en un contexto estático de lápiz y papel, el profesor sólo será un observador y no podrá ayudar a los educandos a resolver el ejercicio, pero si motivará a los estudiantes a contestarlo de forma correcta, como el proyecto se contestará de forma como un examen, los alumnos no podrán platicar, copiar o pedir ayuda a la hora de realizar la prueba.

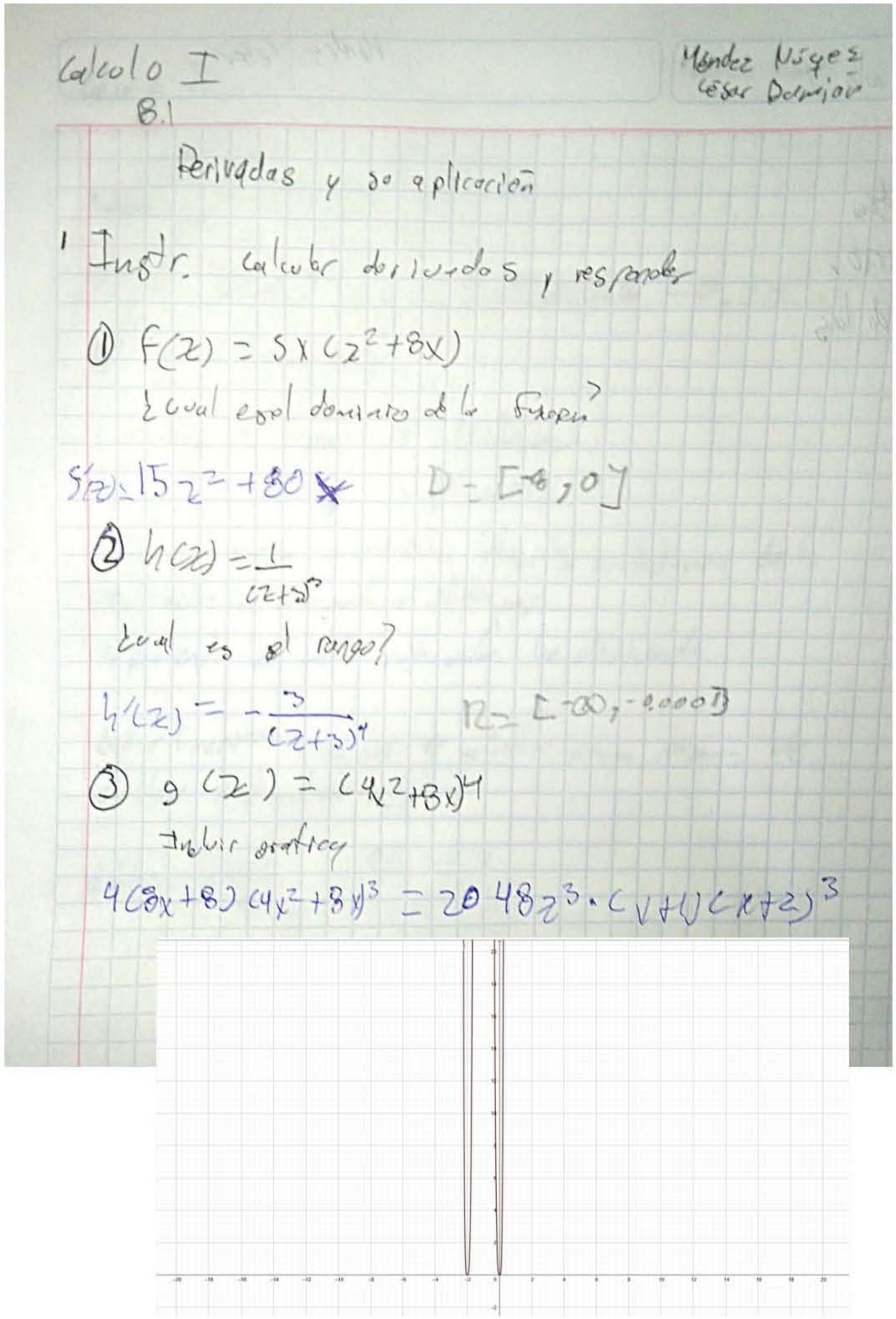
En esta práctica debe de existir una buena colaboración del estudiante y del profesor, lo que significa es que para el desarrollo de este trabajo los estudiantes y el docente debe tomar con mucha responsabilidad el desarrollo de esta prueba y así pueda resultar todo bien.

Para contestar los ejercicios el docente debe ser un motivador, debe fomentar en los alumnos el ímpetu por el querer aprender y así existirá en los estudiantes un deseo de hacer bien las cosas. Antes de contestar el trabajo el profesor debe indicar que se tienen que leer con mucha atención cada reactivo y de esta forma se podrán obtener los resultados esperados.

Para la aplicación de este trabajo, el profesor es el encargado de hacer un ambiente agradable en el cual la regla o norma sea un pensamiento responsable, esto puede ayudar en el salón de clase para que los educandos puedan contestar mejor los ejercicios; dentro del aula es necesario que exista un medio agradable para el aprendizaje del cálculo y en especial sobre el tema de razón de cambio, entonces si se quiere obtener un aprendizaje significativo es muy importante hacer un ambiente de trabajo que aliente el aprendizaje del cálculo.

Como se mencionó anteriormente, el ejercicio se resolverá de dos sesiones de dos horas, en la primera hora se contestarán los dos primeros ejercicios y en la segunda hora el tercer problema y el cuestionario de autopercepción, pero también, como se comentó, queda a criterio del profesor cómo se aplicará el trabajo ya que es la persona correcta que conoce a los estudiantes.

Ejemplo realizado por los estudiantes participantes. Los demás resultados se encontrarán en el capítulo de anexos del trabajo.



Calculo I

8.1

Mendez Nuñez
César Damián

Derivadas y su aplicación

1 Instr. calcular derivadas y responder

① $f(x) = 5x(x^2+8x)$

¿Cual es el dominio de la función?

$f'(x) = 15x^2 + 80x$ $D = [-\infty, 0]$

② $h(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$

¿cual es el rango?

$h'(x) = -\frac{3}{(x+3)^4}$ $R = [-\infty, -0.000]$

③ $g(x) = (4x^2+3x)^4$

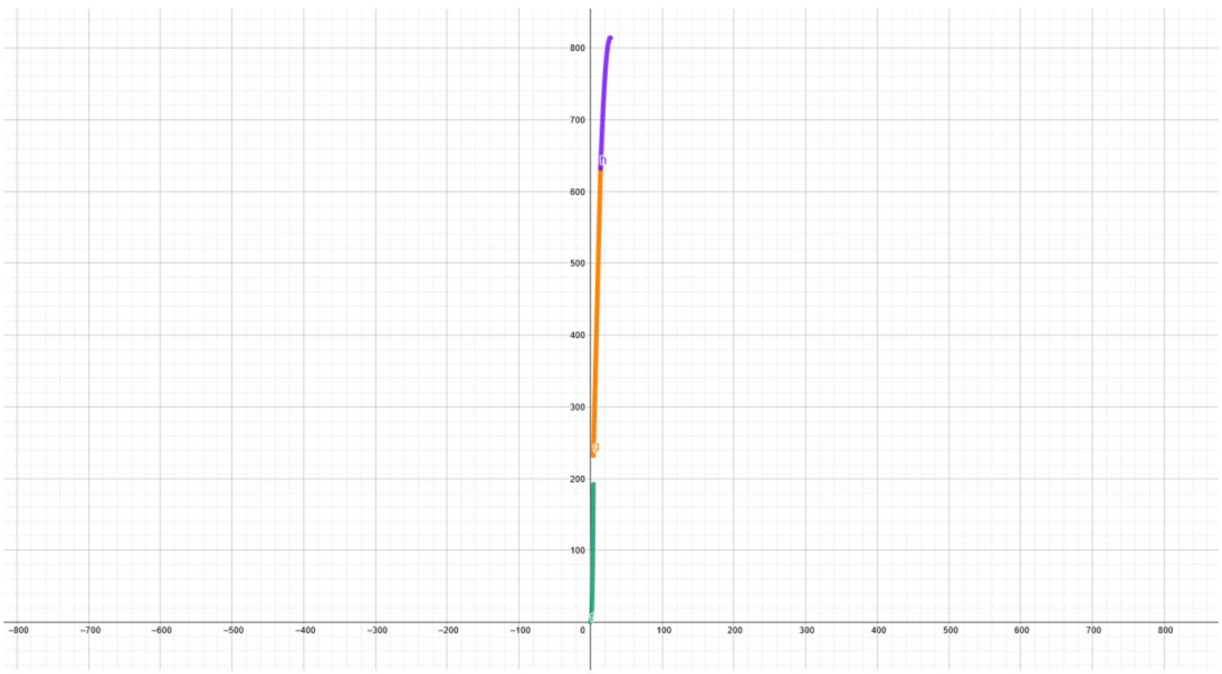
Incluir grafica

$4(8x+3)(4x^2+3x)^3 = 2048x^3 \cdot (x+1)(x+2)^3$

2. Una de las atracciones en un parque de diversiones hace su recorrido en 28 segundos. La distancia (en metros) que recorre en función del tiempo (en segundos) está dada por la función:

$$d(t) = \begin{cases} 3t^3 & 0 \leq t < 4 \\ 40t + 72 & 4 \leq t \leq 14 \\ -t^2 + 55t + 58 & 14 < t \leq 28 \end{cases}$$

- Haz una gráfica de esta función



Calculo I

Problema

¿Es una funcion continua en el intervalo [0, 28]?

NO, hay descontinuidad

¿Cual es el rango de la funcion?

$R = [0, 142)[252, 814]$

¿Como calcularias la razon de cambio instantanea de la distancia con respecto al tiempo?

dependiendo en cada intervalo la derivada

¿Que funcion resulta al calcular esa razon de cambio instantanea?

$$d(t) = \begin{cases} 4t2 & 0 \le t < 4 \\ 40 & 4 \le t \le 14 \\ -2t+55 & 14 \le t \le 28 \end{cases}$$

¿Cual es la razon de cambio instantanea cuando $t = 5$?

$d(t) = \{40 \quad 4 \le t \le 14$

¿Como se interpreta la derivada de esa funcion?

Como intervalo de tiempo y velocidad.

¿Cual es la velocidad promedio?

$$v_p = \frac{814 - 0}{28 - 0} = 29.07\ m/s$$

CUESTIONARIO DE AUTOPERCEPCION.

Lee y resuelve detalladamente cada una de las siguientes preguntas usando tu autopercepción de los problemas matemáticos que resolviste.

1. Bajo tu autopercepción, clasifica los problemas que resolviste bajo la siguiente escala:

Fácil

Medio

Difícil

2. En función de tu respuesta en la pregunta número 1 de este cuestionario. ¿Qué fue lo que se te dificulto de los problemas que resolviste?

R: La dificultad se presenta en los últimos ejercicios de cada tema, pero es normal que la dificultad entre ejercicios suba gradualmente

3. Los problemas que resolviste, ¿te ayudaron a entender el concepto de variación o razón de cambio?

R:si, ayudaron a entender y al final facilita la practica de más ejercicios

4. En función de tu autopercepción, ¿el tema de razón de cambio es de utilidad en la vida real?

R: si y no, hay quienes lo desconocen por completo y no se ven muy afectados pero para otros puede que sea parte de nuestras herramientas de trabajo y lo explotemos

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIÓN.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

El análisis de los resultados que dejaron los alumnos no es para calificar al estudiante y que tengan un número en el examen para medir sus conocimientos que tomó del curso cuando llevó el tema en el salón de clases. Este estudio es para saber dónde los alumnos presentan problemas para entender el concepto de razón de cambio. Tampoco es para realizar una crítica a la persona que resolvió la prueba o al profesor o escuela, los datos obtenidos se utilizarán con fines informativos y es saber dónde existen problemas en los estudiantes para entender y trabajar el tema de variación en el salón de clases.

De un grupo de doce estudiantes al que se le aplicó el examen de investigación, la mayoría trabajaron mal la parte del dominio y el rango de las funciones, se dice la mayoría, porque siete alumnos no realizaron el cálculo del dominio y el rango, dos de ellos sólo calcularon bien o el dominio o el rango de las expresiones matemáticas que se les dio, dos de los estudiantes calcularon mal el dominio y el rango y sólo una persona obtuvo bien el dominio y el rango de las funciones.

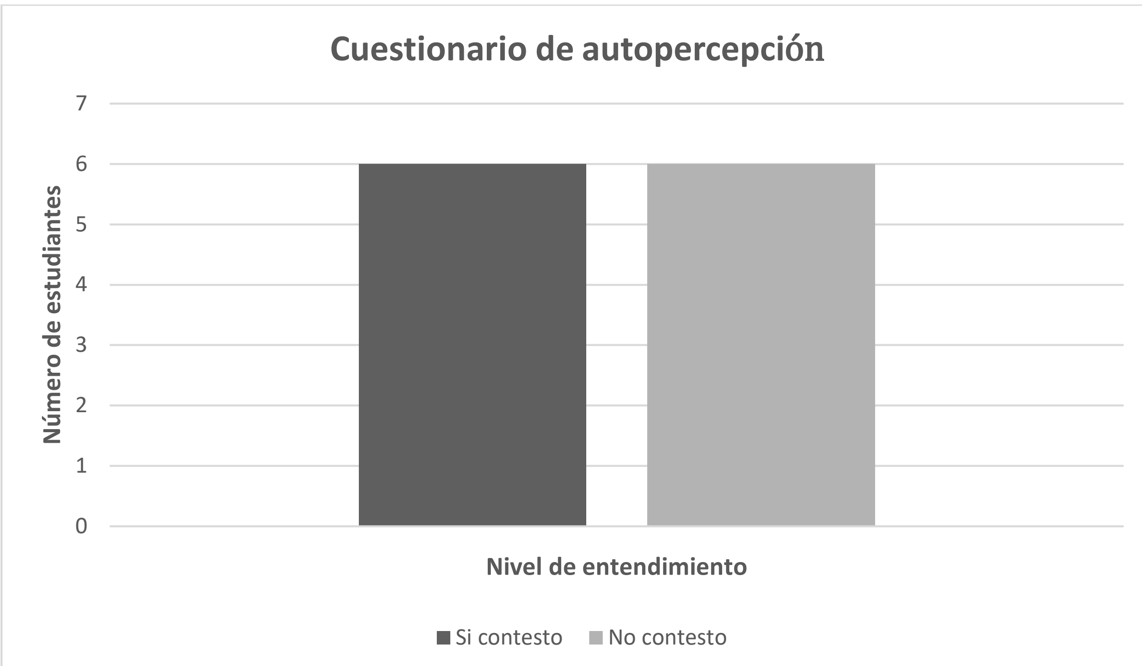
Con respecto a las gráficas, tres de los estudiantes las realizaron con ayuda de una graficadora, dos de los alumnos realizaron una de las gráficas con graficadora y para la otra gráfica desarrollaron tabulaciones y cálculos matemáticos para la creación del dibujo a lápiz, cuatro personas elaboraron todas las gráficas a lápiz con desarrollos matemáticos para apoyar sus resultados, dos de los aplicantes sólo hicieron o la gráfica del parque de diversiones o del ejercicio tres a lápiz faltando una de ellas por hacer en ambos estudiantes.

De las derivadas, sólo una persona no realizó los procesos matemáticos para resolver los ejercicios del examen, sólo escribió los resultados, pero sin desarrollos matemáticos que ayude a ver cómo llegó a estas conclusiones en los ejercicios del trabajo de investigación, soló un alumno solucionó todo el trabajo con procesos matemáticos que acompañan a saber cómo llegó a obtener los resultados en las preguntas del test y los diez educandos restantes, para algunos de los ejercicios hicieron bien las derivadas pero para otras preguntas por copiar mal la función la tarea salió mal.

Del problema, dos estudiantes no resolvieron el problema del parque de diversiones, un alumno lo contestó todo pero mal, sus respuestas no reflejan nada con el tema de razón de cambio, ocho de estas personas, por sus respuestas, tienen la idea del concepto de variación, es decir, no tienen muy claro que la razón de cambio indica la medida en la cual una variable cambia en función de otra, ya que al momento de pedir interpretar la derivada de la función, tienen problemas para expresar su idea del concepto de variación y sólo un alumno contestó todo el trabajo bien siendo muy claro en todos sus resultados.

Analizando todos estos resultados, se puede notar que existen muchas dificultades procedimentales ya que existe una mecanización para el desarrollo de los ejercicios teniendo en cuenta que este estudio se realiza desde una perspectiva de los alumnos en ejercicios aplicados a ellos, no existe una calificación para el trabajo realizado por los educandos sólo se quiere obtener la información que nos indique cuáles son esas dificultades que existen para entender el concepto de variación.

El cuestionario de autopercepción es muy importante porque gracias a esa información podemos ver la dificultad que tiene el tema de razón de cambio en el salón de clase para los estudiantes, como también su importancia en la vida real.



Gráfica. *Realización del cuestionario de autopercepción.*

Seis de los doce estudiantes que contestaron el cuestionario de autopercepción indicaron que el ejercicio no fue muy difícil, algunos mencionan que el procedimiento fue una dificultad para el desarrollo del ejercicio pero que les ayudó a entender el concepto de variación, indican estos alumnos que la materia es de mucha utilidad en la vida real, como por ejemplo algunos mencionan que se puede usar la razón de cambio en cuestiones económicas. Pero sus respuestas a este cuestionario no concuerdan en nada con lo respondido en el test, porque cuando en el cuestionario se les pregunta si el test se les hizo fácil, medio o difícil, la mayoría de los estudiantes dicen que el trabajo se les hizo medio, es decir, no tuvieron mucha dificultad en la realización del examen, como también, cuando se quiere saber qué fue lo que se les dificultó del problema, algunos alumnos manifiestan que no saben qué método aplicar para responder el trabajo y en otros casos sus respuestas son confusas y con relación a saber si el trabajo les ayudó a entender el concepto de variación, no son muy congruentes, pues sus respuestas son desordenadas en la gran mayoría de los estudiantes.

A todo esto, se puede ver que lo que los alumnos muestran una discrepancia entre lo que contestaron en el examen y el cuestionario de autopercepción puesto que toda la información que ofrecieron no es congruente una con la otra.

CONCLUSIÓN.

Este trabajo de investigación está pensado para saber cuáles son las dificultades por la cual los estudiantes no comprenden el tema de razón de cambio en cálculo diferencial, el propósito de los ejercicios es encontrar los problemas en los cuales los alumnos tienen dificultades para entender el concepto de variación o razón de cambio en un contexto estático de lápiz y papel ya que es la manera que por lo general se trabaja en los salones de clase. Puede ser que esto no suceda en la mayoría de los casos en la enseñanza – aprendizaje del cálculo, en especial con el tema de razón de cambio, pero con los resultados de los doce estudiantes se puede ver que es algo que se puede presentar en las aulas de las escuelas y que gracias a esta información se puedan crear propuestas didácticas para atraer la atención y el interés de los alumnos y así pueda existir un aprendizaje significativo y se pueda comprender el tema de razón de cambio en el salón de clases en un contexto estático de lápiz y papel. Entonces, con estos resultados se puede alcanzar a discernir las preguntas de investigación.

- Hasta qué nivel los alumnos lograron identificar el concepto de tasa o razón de cambio en las diferentes representaciones (verbal, gráfica y simbólica).

Los resultados arrojados por los estudiantes se muestran que entienden que para obtener la razón de cambio hay que derivar la función, pero se nota en los documentos, que existe una confusión en la mayoría de los alumnos para poder encontrar la función que resulta de realizar la derivación. En los escritos de los educandos tienen que el error es común en la mayoría de los resultados.

También cómo interpretar la derivada que es lo que se pide en uno de los puntos del tercer ejercicio, los alumnos contestaron de la misma manera dejando ver que para ellos no hay más que esa respuesta a esa pregunta.

- Hasta qué punto las actividades propuestas ayudaron a los estudiantes a entender el concepto de razón de cambio.

Analizando los resultados de los estudiantes se observa que saben lo que necesitan para resolver el problema, pero muestran limitaciones para poder encontrar la función o modelo matemático que les ayude a encontrar la solución del ejercicio y por tal razón no saben interpretar el concepto de razón de cambio más allá que la que se les da en el salón de clase como definición. Y con los avances tecnológicos que existen hoy en día se les hace más fácil utilizar la calculadora graficadora para explicar un evento como el ejercicio que se les dio para resolver que hacerlo por su cuenta y descubrir lo hermoso que es realizar este trabajo a lápiz y papel.

- Qué tipo de dificultades se presentaron en los alumnos cuando fueron expuestos a las dificultades.

Las dificultades que se dejaron ver al realizar el análisis de los resultados del trabajo realizado por los estudiantes fueron *procedimentales y actitudinales.*

Procedimentales. Al revisar los documentos de los alumnos se vio que tienen el mismo desarrollo para el ejercicio y también el mismo error, hubo una realización mecánica del desarrollo y los algoritmos, es decir, que en los estudiantes no se priorizó o no fue importante la comprensión de conceptos matemáticos y esto ocasionó en los educandos concepciones que son acordes con las que son permitidas en matemáticas y principalmente en la materia de cálculo.

Actitudinales. Este es un tema muy extenso para tratar, pero por lo que se mostró por parte de los estudiantes, se notó una falta de interés o gusto por el tema de razón de cambio que posiblemente se debió al tiempo que se utilizó para la enseñanza del tema o por la forma en que se les presentó en el salón de clase por parte del profesor, es por eso que sus respuestas fueron todas de la misma manera y con los mismos errores, no hubo una actitud de profundizar más en el tema de variación más haya que la que se vio en el salón de clase.

Esto lleva a pensar que posiblemente el ejercicio no fue lo suficientemente interesante para el aprendizaje del tema de razón de cambio para los alumnos ya que si se quiere que exista un aprendizaje significativo es importante crear dinámicas en las cuales se pueda atraer la atención de los educandos.

> *Para Ausubel P. David (1978).*
> *Dice que: El aprendizaje significativo presupone tanto que el alumno manifiesta una actitud hacia el aprendizaje significativo; es decir, una disposición para relacionar, no arbitraria, sino sustancialmente, el material nuevo con su estructura cognoscitiva, como que el material que aprende es potencialmente significativo para él, especialmente relacionable con su estructura de conocimiento, de modo intencional y no al pie de la letra. Así pues, independientemente de cuánto significado potencial sea inherente a la proporción especial, si la intención del alumno consiste en memorizar arbitraria y literalmente (como una serie de palabras relacionadas caprichosamente), tanto el proceso de aprendizaje como los resultados de éste serán mecánicos y carentes de significado. Y, a la inversa, sin importar lo significativo que sea la actitud del alumno, ni el proceso ni el*

resultado del aprendizaje serán posiblemente significativos si la tarea del aprendizaje no lo es potencialmente, y si tampoco es relacionable, intencionada y sustancialmente, con su estructura cognoscitiva. (P.56).

Esta información es trascendental porque en función de esto podemos concluir que es muy importante dar a los estudiantes de las escuelas de nivel medio superior ejercicios en los cuales sea de interés y que vean que se pueden utilizar en la vida real, llamar la atención hacia el cálculo y en especial hacia el tema de razón de cambio.

Hay que crear material que sea significativo para el estudiante, hacer ver que el tema de razón de cambio es muy útil como por ejemplo en la economía al minimizar costos, maximizar recurso y calidad, en la geometría al minimizar la cantidad que se va a utilizar para construir un cilindro. Los estudiantes siempre tienen que estar motivados para estudiar en especial el tema de variación y para eso el profesor es la parte importante.

Es importante mencionar que la importancia del profesor en el aprendizaje significativo puede llevar al estudiante a crear saberes significativos considerando sus actitudes y aptitudes.

Finalmente, con relación a los objetivos general y específicos, se cumplieron en su mayoría, ya que sí hubo una propuesta didáctica para conocer cuáles son las dificultades que se presentan en los estudiantes para el entendimiento del concepto de razón de cambio en la materia de cálculo diferencial, el trabajo se aplicó a estudiantes del nivel medio superior que ya conocían el tema de variación y realizando después de ponerlo en práctica un análisis de las respuestas que los alumnos arrojaron al realizar el trabajo y así poder entender cuáles son las causas del no entendimiento del concepto de razón de cambio.

Sin embargo, el realizador de la tesis no pudo observar el comportamiento de los estudiantes al ser expuestos a esta serie de ejercicios y no se pudo documentar esta actitud de los alumnos. El trabajo fue aplicado por otro profesor de matemáticas que domina el tema de razón de cambio, pero para documentar el comportamiento de los estudiantes era primordial la presencia del tesista.

Es de gran importancia mencionar que el trabajo realizado por los doce estudiantes no es representativo ya que la cantidad de alumnos con los que se trabajó no es concluyente, pero si es significativa ya que da la pauta de donde se encuentran algunas de las dificultades en los educandos para entender el tema de razón de cambio y que es lo que se puede hacer para poder trabajar esta problemática e ir mejorando en la enseñanza del tema de variación en el salón de clases. Esto quiere decir que no es algo global pero que sí se puede presentar.

Aun así, el objetivo del trabajo se cumplió ya que se pudo conocer las causas por las cuales los estudiantes de nivel medio superior no comprenden el tema de razón de cambio y cuáles o cuál es la solución para que los alumnos puedan trabajar mejor el tema y puedan llegar a entender el tema de variación y lo importante que es su aplicación en la vida real.

CAPÍTULO 7

PROPUESTA DIDÁCTICA.

PROPUESTA DIDÁCTICA.

Los siguientes ejercicios son una propuesta didáctica que pueden ayudar a entender el concepto de razón de cambio, son una forma de ver el tema de forma diferente puesto que conllevan varios temas que los estudiantes vieron y trabajaron en cursos anteriores, lo que se busca con estas tareas es captar la atención de los alumnos y se den cuenta que el tema de razón de cambio está presente en cualquier tema y en la vida real, estos ejemplos tienen un nivel fácil, medio y difícil, el primero es fácil, el segundo medio y el tercero difícil, pero no certifican que pueden hacer que los estudiantes comprendan el concepto de variación al instante y que lo puedan manejar de una forma más completa, ya que aparte de los problemas se debe fomentar un ambiente agradable de aprendizaje en el salón de clase y hacer que los estudiantes estén dispuestos a aprender cálculo y en especial el tema de razón de cambio, como también entender que todos los temas que se ven en los cursos de matemáticas están relacionados unos con otro y de alguna manera siempre estarán presentes en las dinámicas de aprendizaje que se llevan en las escuelas.

> *Para Ausubel P. David (1983).*
> *Ya hemos señalado la importancia del conocimiento pertinente que existe en la estructura cognoscitiva para la facilitación del aprendizaje significativo. El conocimiento nuevo se vincula intencionada y sustancialmente con los conceptos y proposiciones existentes en la estructura cognoscitiva. (P. 67).*

EJERCICIOS DIDÁCTICOS.

1. **Lee con atención el siguiente problema y contesta lo que se pide**.

   Se lanza una pelota y la trayectoria que esta pelota describe está dada por la función $y = x - 0.025x^2$. Realizar lo siguiente.

   a. Realizar la gráfica del lanzamiento de la pelota.
   b. Obtener el dominio y el rango de la función.
   c. Encontrar la distancia horizontal que recorre la pelota.
   d. Para que valor de x alcanza su altura máxima.
   e. Encontrar la ecuación que expresa la razón de cambio de la altura de la pelota con respecto al cambio horizontal. Resolver la ecuación para $x = 15, \quad x = 35$
   f. ¿Cuál es la razón de cambio de la altura cuando la pelota alcanza su altura máxima?

Solución.

a. Gráfica. $y = x - 0.025x^2$ es una parábola que abre hacia abajo por tener signo negativo.

Igualando a cero la ecuación y factorizando

$x - 0.025x^2 = 0$

$x(1 - 0.025x) = 0$

Tenemos

$x_1 = 0$ ***primera raíz***

$1 - 0.025x = 0$

Despejando x

$1 = 0.025x$

$x = \frac{1}{0.025}$

$x_2 = 40$ ***segunda raíz***

Por simetría, su vértice está en

$V(20, (f(20))$

$f(20) = x - 0.025x^2$

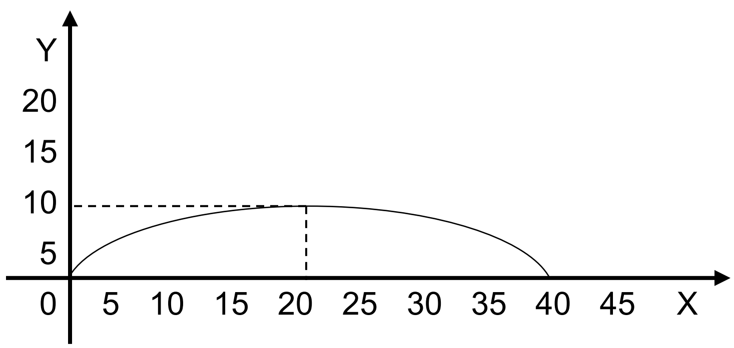
$= 20 - 0.025(20)^2$

$= 20 - 0.025(400)$

$= 20 - 10$

$f(20) = 10$

$v(20, 10)$



b. Dominio y rango

Dominio**: Todos los números Reales** Rango**:** $[\mathbf{10}, -\infty)$

c. La distancia en el punto de impacto es: $\boldsymbol{x = 40}$

d. Por la simetría de la parábola en $x = 20$, su altura máxima es: $\boldsymbol{y = 10}$

e. Derivando la función original

$f(x) = x - 0.025x^2$

$\frac{dy}{dx} = x - 0.025x^2$

$\boldsymbol{f^1 = 1 - 0.05x}$

Las razones de cambio son:

Para $x = 15$

$f^1 = 1 - 0.05(15)$

$f^1 = 1 - 0.75$

$\boldsymbol{f^1 = 0.25}$

Para $x = 35$

$f^1 = 1 - 0.025(35)$

$f^1 = 1 - 1.75$

$\boldsymbol{f^1 = -.75}$

f. $\frac{dy}{dx} = 1 - 0.05x$

$= 1 - 0.05(20)$

$\frac{dy}{dx} = 1 - 1$

$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 0}$ razón de cambio a la altura máxima

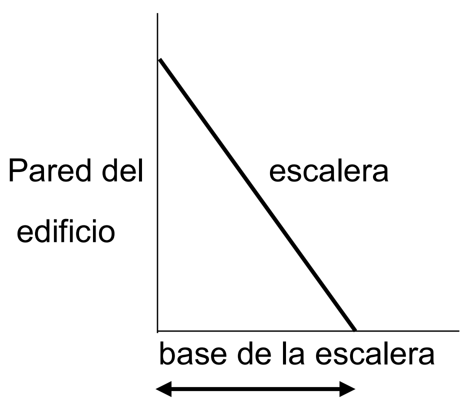
2. Resuelve el siguiente ejercicio y selecciona la respuesta correcta.

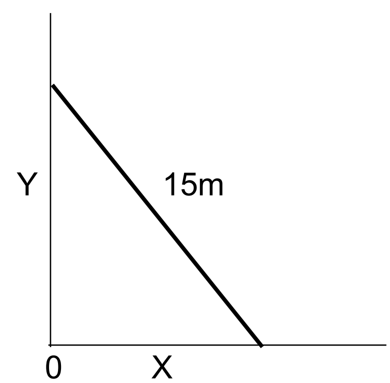
Una escalera de 15 m de largo está recargada en la pared de un edificio. La base de la escalera empieza a resbalarse a razón de 5 m/seg. ¿Cuál es la rapidez con la que se resbala la parte alta de la escalera cuando se encuentra a 10m sobre el suelo?

Respuestas.

a) – 7.5 m/seg
b) – 5.6 m/seg
c) 8.5 m/seg

Solución.





Datos.

X = base de la escalera

Y = altura sobre el suelo

$\frac{dx}{dt} = 5\ m/seg$ razón a la que resbala la escalera

Obtener.

$\frac{dy}{dt} = ?$

Por teorema de Pitágoras

$x^2 + y^2 = c^2$

$x^2 + y^2 = 15^2$

$x^2 + y^2 = 225^2$

Derivando.

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

Despejando $\frac{dy}{dt}$

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$

$\frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{2y}\frac{dx}{dt}$

$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}}$

Fórmula que relaciona las dos razones de cambio

Entonces por teorema de Pitágoras obtener X

$x^2 + y^2 = c^2$

$x^2 + 10^2 = 15^2$

$x^2 + 100^2 = 225^2$

$x^2 = 225 - 100$

$x^2 = 125$

$x = \pm\sqrt{125}$

$x = \pm 11.2$

Sustituyendo en

$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}}$

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -\frac{11.2}{10}(5)$

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -\frac{11.2}{10}(5)$

$\boldsymbol{\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -5.6\, {}^{m}/_{seg}}$

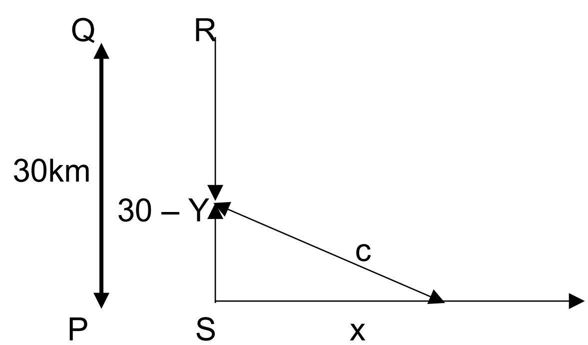
<u>Rapidez a la que resbala la escalera</u>

1. Lee con atención y resuelve el siguiente problema

Una lancha **P** que salió del puerto a las 12 am se encuentra a 30 km al sur de otra lancha **Q**. La lancha **P** se mueve hacia el Este con una velocidad de $20\ \frac{km}{h}$ y la lancha **Q** se mueve hacia el Sur con una velocidad de $24\ \frac{km}{h}$. Calcular la razón de cambio de la distancia que hay entre las dos lanchas a las 12:45 de la tarde.

Datos.

A las 12 am la lancha **P** y la lancha **Q** se encuentran en **S** y **R** y a las 12:45 la lancha **P** se ha movido hacia el Este **X** kilómetros y la lancha **Q** se ha movido hacia el Sur **Y** kilómetros.



C = distancia entre las lanchas.
T = tiempos entre 12:00 y 12:45

$\frac{dx}{dt} = 20\ km/h$

$\frac{dy}{dt} = 24\ km/h$

Obtener: $\frac{dc}{dt} = ?$

Solución.

Por teorema de Pitágoras.

$c^2 = x^2 + y^2$

$c^2 = x^2 + (30 - y)^2$

Derivando con respecto al tiempo.

$c^2 = x^2 + (30 - y)^2$

$2c\frac{dc}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2(30 - y)\frac{dt}{dt}30 - y$

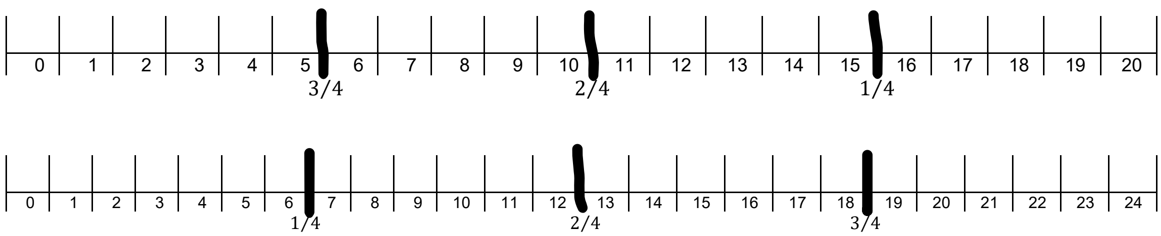
$2c\frac{dc}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} - 2(30 - y)\frac{dt}{dt}$

Dividiendo todo entre dos

$c\frac{dc}{dt} = x\frac{dx}{dt} - (30 - y)\frac{dt}{dt}$

Expresión que relaciona las dos razones de cambio.

A las 12:45 las lanchas se han movido 45 min y su velocidad es de 20 km/h y 24 km/h, en $3/4$ de tiempo recorrieron $3/4$ de su distancia. Entonces.



X = 5

Y = 18

30 – Y = 12

Sustituyendo en el teorema de Pitágoras.

$c^2 = x^2 + (30 - y)^2$

$c^2 = 5^2 + 12^2$

$c^2 = 25 + 144$

$c = \pm\sqrt{25 + 144}$

$c = \pm\sqrt{169}$

$c = \pm\ 13$

Sustituyendo valores en.

$c\frac{dc}{dt} = x\frac{dx}{dt} - (30 - y)\frac{dt}{dt}$

$c\frac{dc}{dt} = x\frac{dx}{dt} - (30 - y)\frac{dt}{dt}$

$13\frac{dc}{dt} = 5(20) - 12(24)$

$13\frac{dc}{dt} = 100 - 288$

$13\frac{dc}{dt} = -88$

$\frac{dc}{dt} = -\frac{88}{13}$

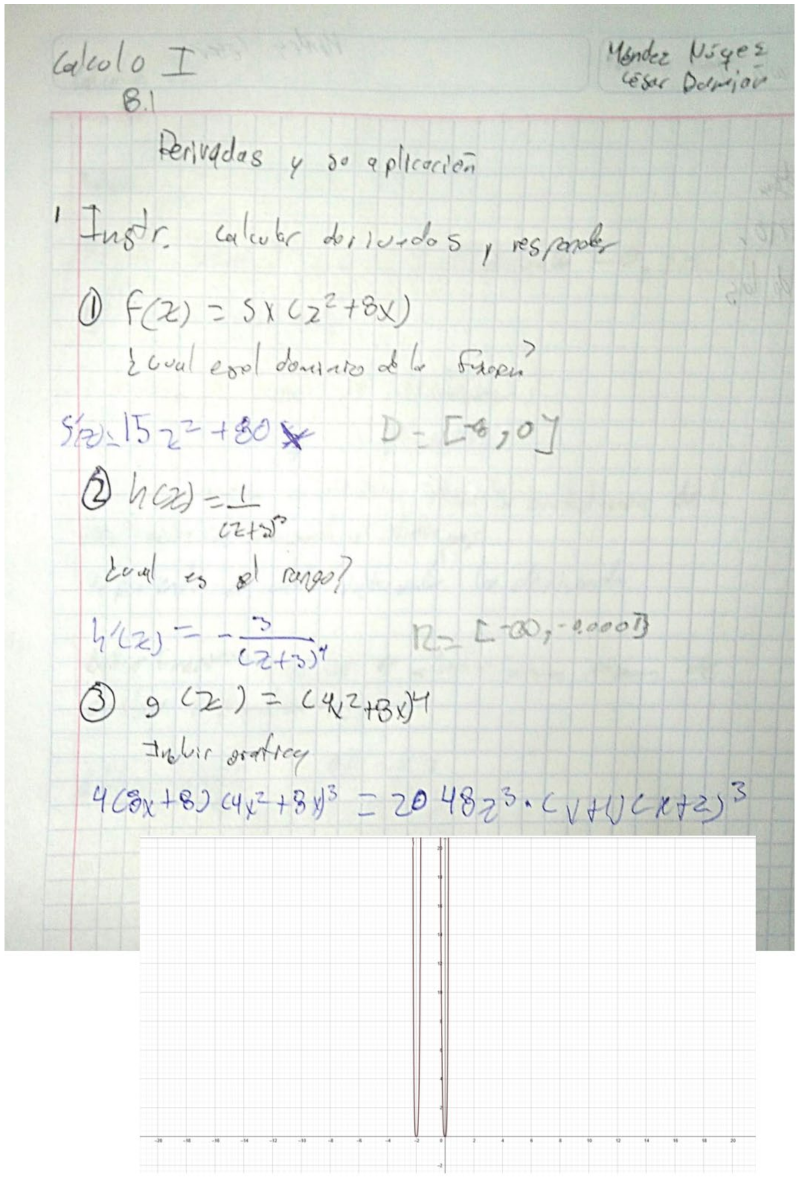
$\boldsymbol{\frac{dc}{dt} = -22.5\ km/h}$

Distancia entre las lanchas

Nota: El signo negativo indica que la distancia entre las lanchas disminuyó.

Anexos

Evidencia 1. Evidencia del trabajo realizado en el salón de clase.



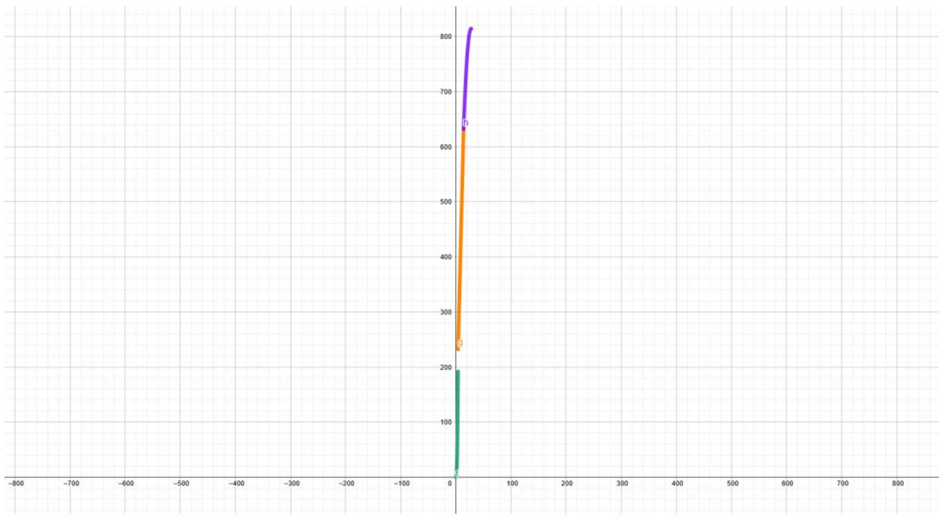
Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***

Se muestra la forma de cómo contestó y graficó la primera del trabajo

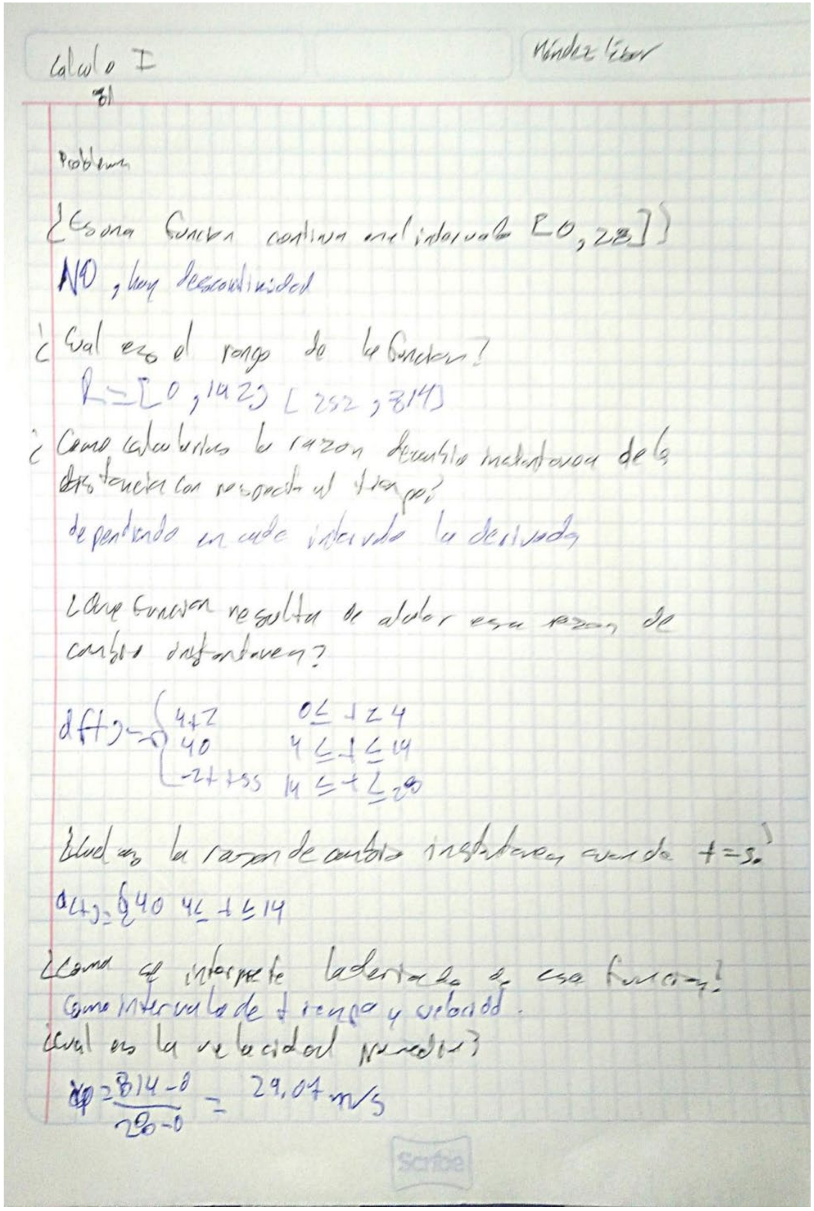
2. Una de las atracciones en un parque de diversiones hace su recorrido en 28 segundos. La distancia (en metros) que recorre en función del tiempo (en segundos) está dada por la función:

$$d(t) = \begin{cases} 3t^3 & 0 \leq t < 4 \\ 40t + 72 & 4 \leq t \leq 14 \\ -t^2 + 55t + 58 & 14 < t \leq 28 \end{cases}$$

- Haz una gráfica de esta función



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Elaboración de la gráfica para el problema del parque de diversiones.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Cálculos matemáticos para obtener los puntos de discontinuidad y continuidad de la función como también la obtención de la razón de cambio en el problema.

CUESTIONARIO DE AUTOPERCEPCION.

Lee y resuelve detalladamente cada una de las siguientes preguntas usando tu autopercepción de los problemas matemáticos que resolviste.

1. Bajo tu autopercepción, clasifica los problemas que resolviste bajo la siguiente escala:

Fácil

Medio

Difícil

2. En función de tu respuesta en la pregunta número 1 de este cuestionario. ¿Qué fue lo que se te dificulto de los problemas que resolviste?

R: La dificultad se presenta en los últimos ejercicios de cada tema, pero es normal que la dificultad entre ejercicios suba gradualmente

3. Los problemas que resolviste, ¿te ayudaron a entender el concepto de variación o razón de cambio?

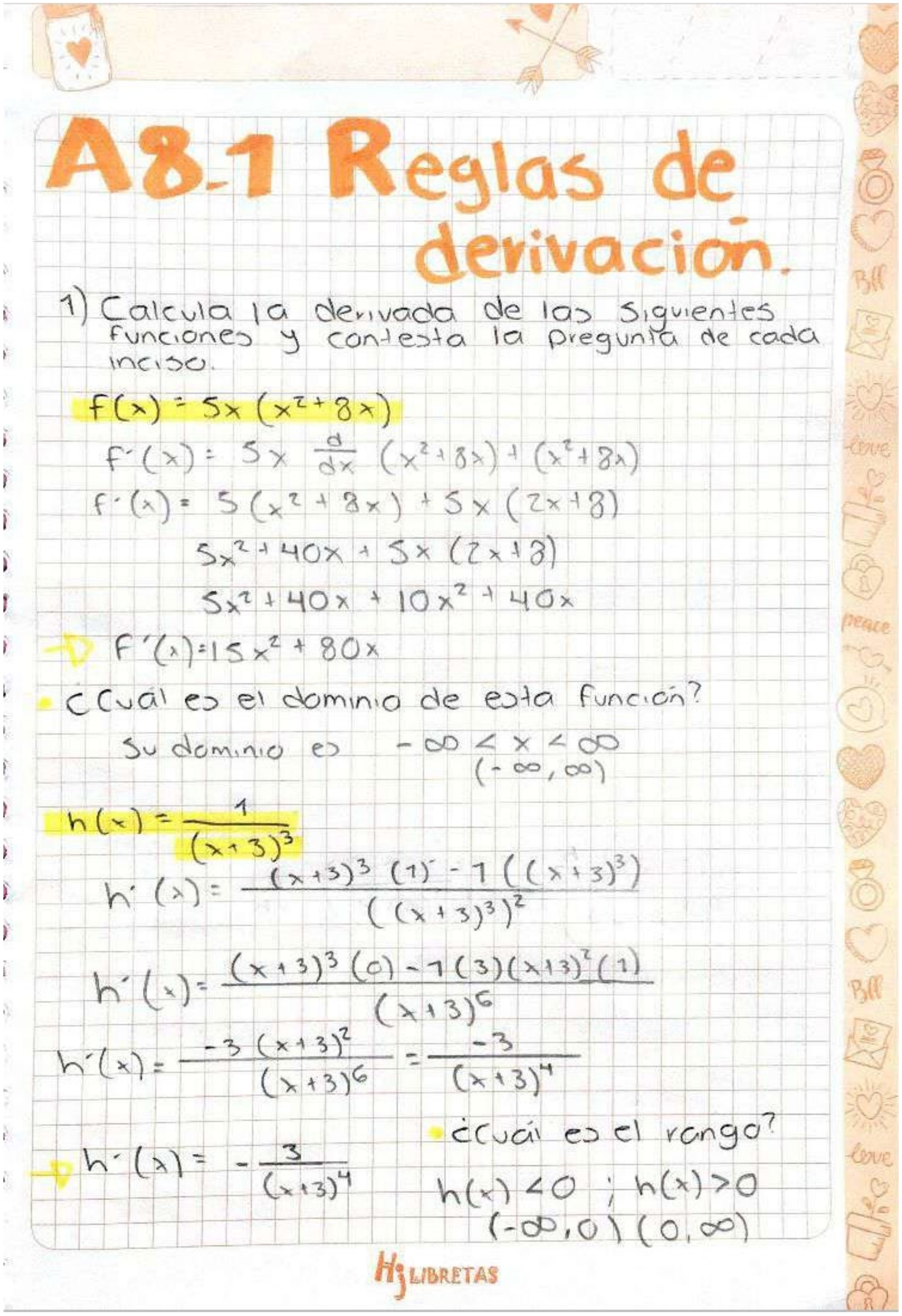
R:si, ayudaron a entender y al final facilita la practica de más ejercicios

4. En función de tu autopercepción, ¿el tema de razón de cambio es de utilidad en la vida real?

R: si y no, hay quienes lo desconocen por completo y no se ven muy afectados pero para otros puede que sea parte de nuestras herramientas de trabajo y lo explotemos

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del cuestionario de autopercepción

Evidencia 2. Evidencia del trabajo realizado en el salón de clase.



A8.1 Reglas de derivacion.

1) Calcula la derivada de las siguientes funciones y contesta la pregunta de cada inciso.

$f(x) = 5x\,(x^2+8x)$

$f'(x) = 5x \frac{d}{dx}(x^2+8x) + (x^2+8x)$

$f'(x) = 5(x^2+8x) + 5x(2x+8)$

$5x^2+40x+5x(2x+8)$

$5x^2+40x+10x^2+40x$

$\Rightarrow F'(x) = 15x^2+80x$

- ¿Cuál es el dominio de esta función?

Su dominio es $-\infty < x < \infty$

$(-\infty, \infty)$

$h(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$

$h'(x) = \frac{(x+3)^3\,(1)' - 1\,((x+3)^3)'}{((x+3)^3)^2}$

$h'(x) = \frac{(x+3)^3\,(0) - 1(3)(x+3)^2(1)}{(x+3)^6}$

$h'(x) = \frac{-3\,(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{-3}{(x+3)^4}$

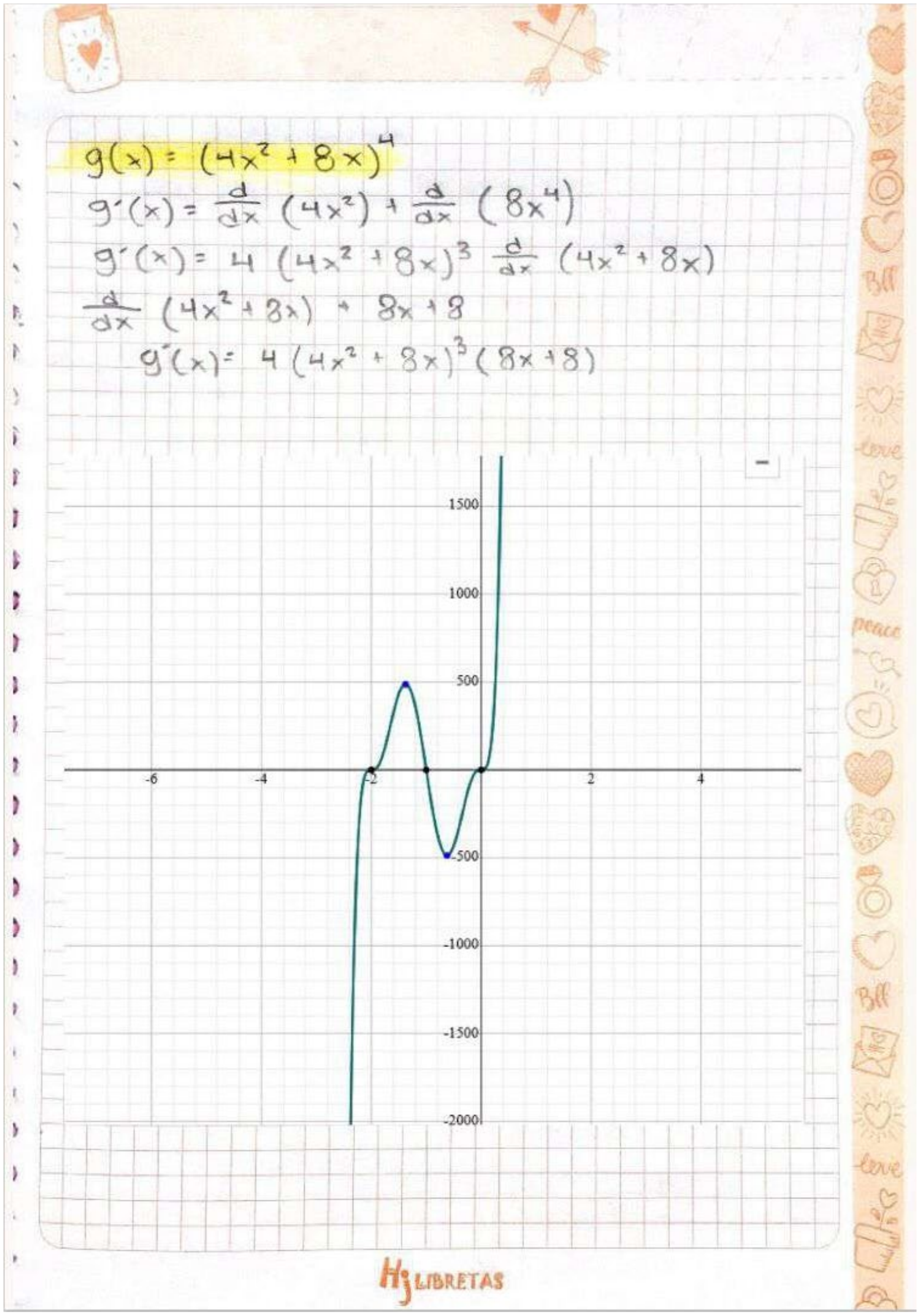
$\Rightarrow h'(x) = -\frac{3}{(x+3)^4}$

- ¿Cuál es el rango?

$h(x) < 0$; $h(x) > 0$

$(-\infty, 0)\ (0, \infty)$

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del primer y segundo reactivo de la primera parte del trabajo



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Elaboración del tercer reactivo y la gráfica que muestra el comportamiento de los tres reactivos de la primera parte del trabajo.

2. Una de las atracciones en un parque de diversiones hace su recorrido en 28 segundos. La distancia (en metros) que recorre en función del tiempo (en segundos) está dada por la función:

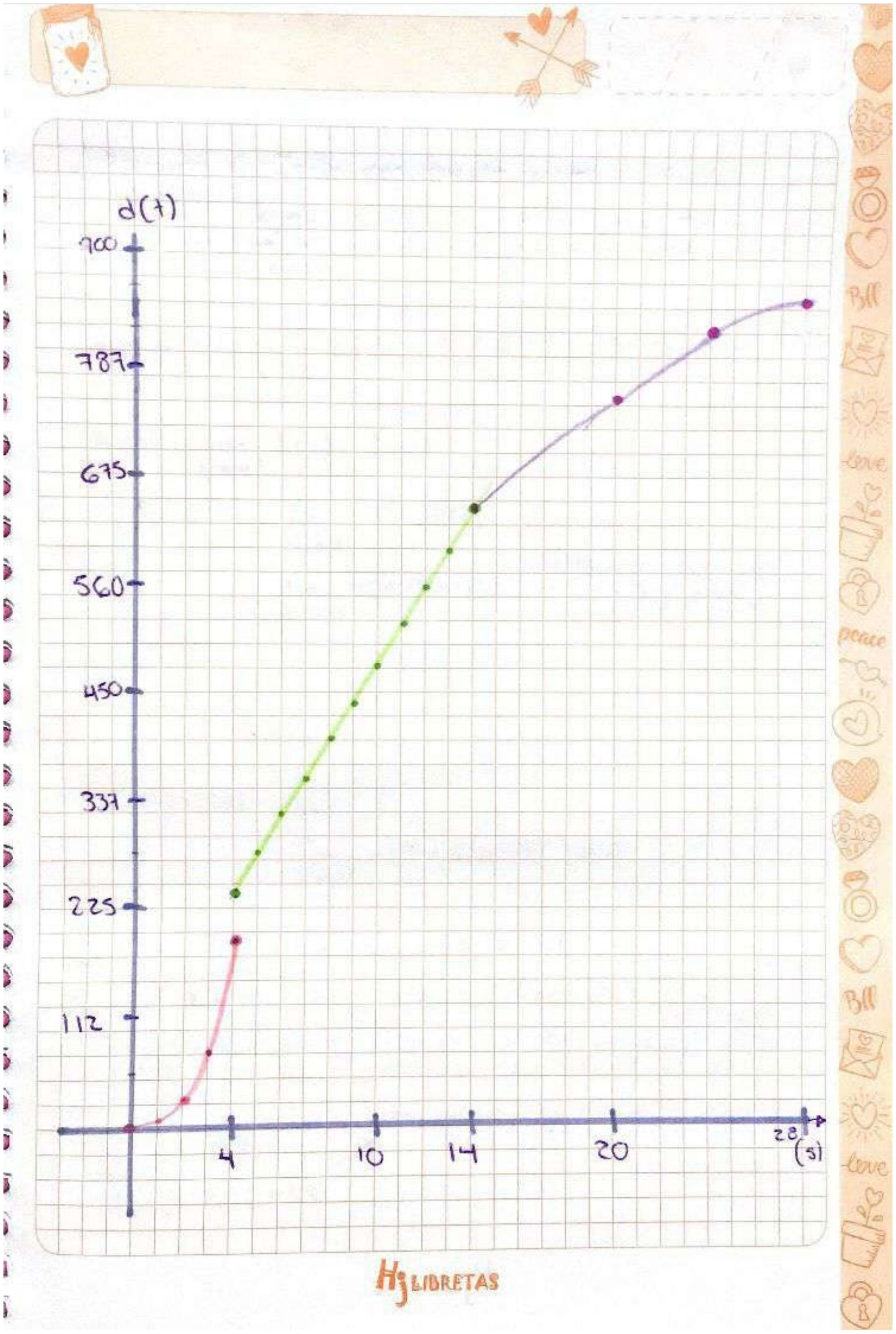
$$d(t) = \begin{cases} 3t^3 & 0 \le t \le 4 \\ 40t + 72 & 4 \le t \le 14 \\ -t^2 + 55t + 58 & 14 \le t \le 28 \end{cases}$$

a) Graficar

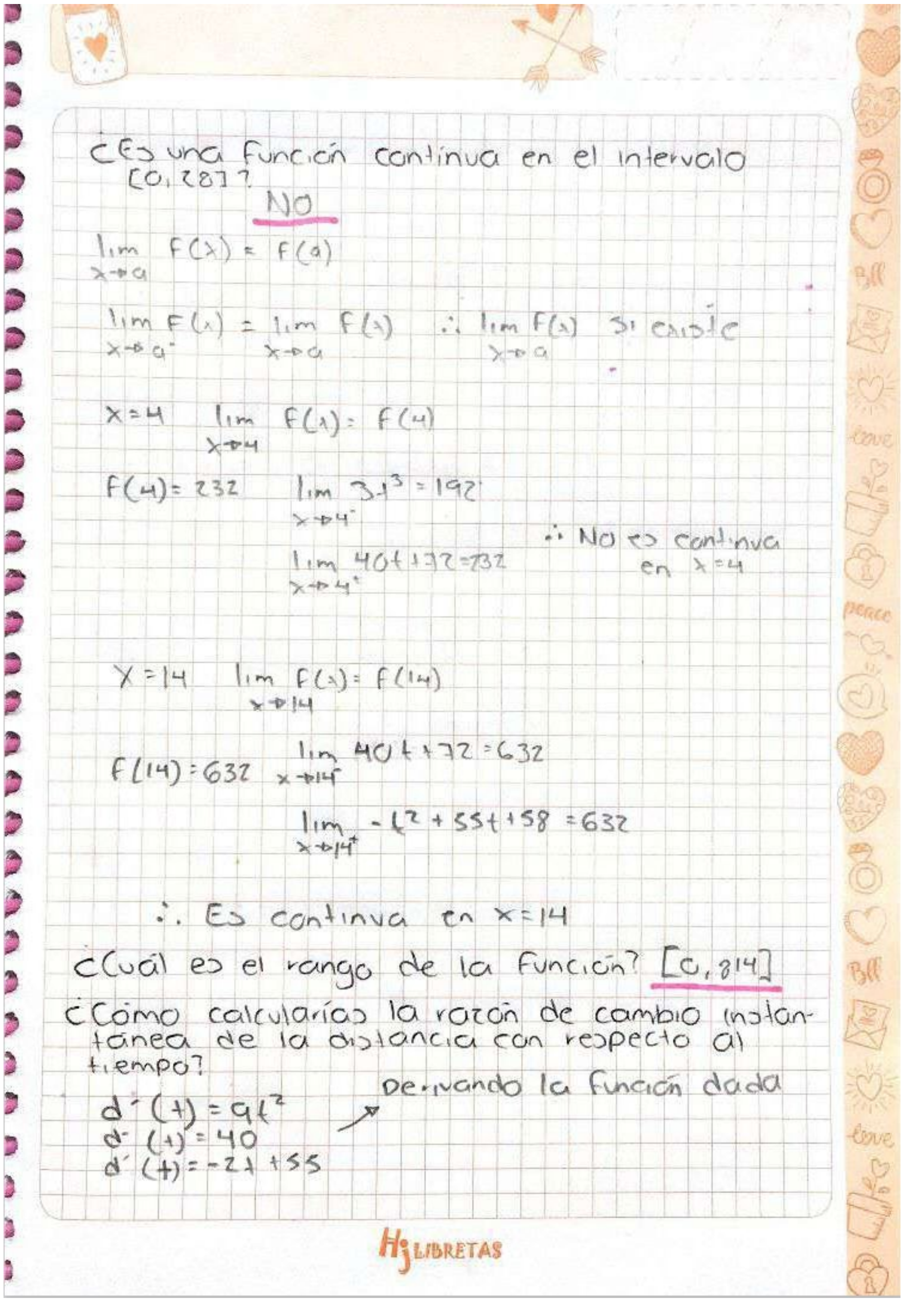
t	$3t^3$	$40t + 72$	$-t^2 + 55t + 58$
0	0		
1	3		
2	24		
3	81		
4	192	232	
5		272	
6		312	
7		352	
8		392	
9		432	
10		472	
11		512	
12		552	
13		592	
14		632	632
15			658
16			682
17			704
18			724
19			742
20			758
21			772
22			784
23			794
24			802
25			808
26			812
27			814
28			814

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***

Tabla de valores para la realización de la gráfica del problema del parque de diversiones.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Gráfica del comportamiento de la trayectoria del juego mecánico del parque de diversiones.



¿Es una función continua en el intervalo $[0, 28]$?

NO

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$ $\therefore \lim_{x \to a} f(x)$ si existe

$x = 4$ $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$

$f(4) = 232$ $\lim_{x \to 4^-} 3t^3 = 192$

$\lim_{x \to 4^+} 40t + 72 = 232$

$\therefore$ No es continua en $x = 4$

$x = 14$ $\lim_{x \to 14} f(x) = f(14)$

$f(14) = 632$ $\lim_{x \to 14^-} 40t + 72 = 632$

$\lim_{x \to 14^+} -t^2 + 55t + 158 = 632$

$\therefore$ Es continua en $x = 14$

¿Cuál es el rango de la función? $[0, 814]$

¿Cómo calcularías la razón de cambio instantánea de la distancia con respecto al tiempo?

$d'(t) = 9t^2$

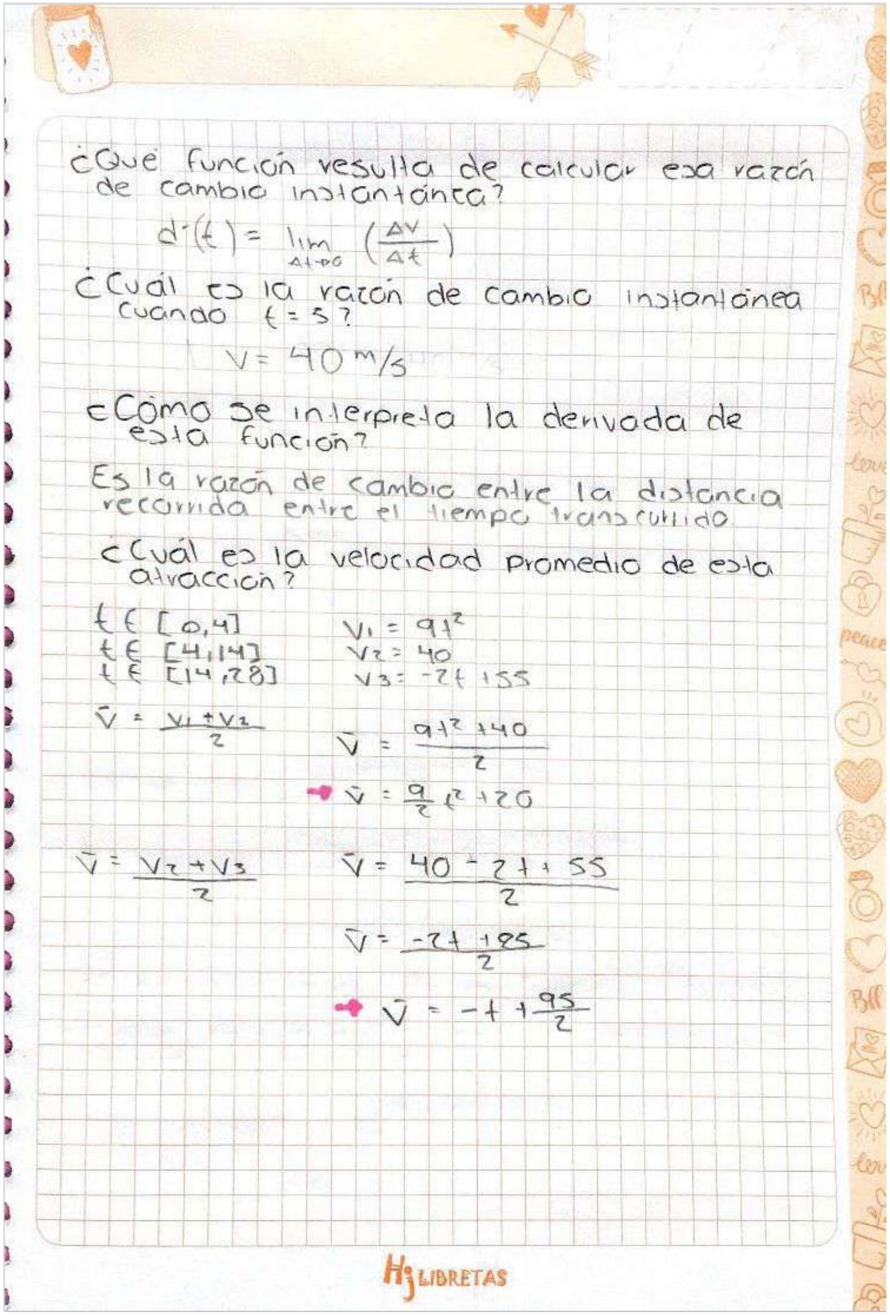
$d'(t) = 40$

$d'(t) = -2t + 55$

Derivando la función dada

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***

Cálculos matemáticos para obtener los puntos de continuidad y discontinuidad de la función del juego mecánico como también adquirir la razón de cambio en este ejercicio.



¿Qué función resulta de calcular esa razón de cambio instantánea?

$$d'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$$

¿Cuál es la razón de cambio instantánea cuando $t = 5$?

$$v = 40\ m/s$$

¿Cómo se interpreta la derivada de esta función?

Es la razón de cambio entre la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido

¿Cuál es la velocidad promedio de esta atracción?

$t \in [0,4]$ $\quad v_1 = 9t^2$

$t \in [4,14]$ $\quad v_2 = 40$

$t \in [14,28]$ $\quad v_3 = -2t + 55$

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} \qquad \bar{v} = \frac{9t^2 + 40}{2}$$

$$\bar{v} = \frac{9}{2}t^2 + 20$$

$$\bar{v} = \frac{v_2 + v_3}{2} \qquad \bar{v} = \frac{40 - 2t + 55}{2}$$

$$\bar{v} = \frac{-2t + 95}{2}$$

$$\bar{v} = -t + \frac{95}{2}$$

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Finalización de los cálculos matemáticos para llegar a la solución del problema del juego mecánico por medio de la razón de cambio.

CUESTIONARIO DE AUTOPERCEPCION.

Lee y resuelve detalladamente cada una de las siguientes preguntas usando tu autopercepción de los problemas matemáticos que resolviste.

1. Bajo tu autopercepción, clasifica los problemas que resolviste bajo la siguiente escala:

   Fácil   Medio   Difícil

2. En función de tu respuesta en la pregunta número 1 de este cuestionario. ¿Qué fue lo que se te dificulto de los problemas que resolviste?

   R: Comprender el procedimiento después de derivar para saber la razón de cambio inmediato

3. Los problemas que resolviste, ¿te ayudaron a entender el concepto de variación o razón de cambio?

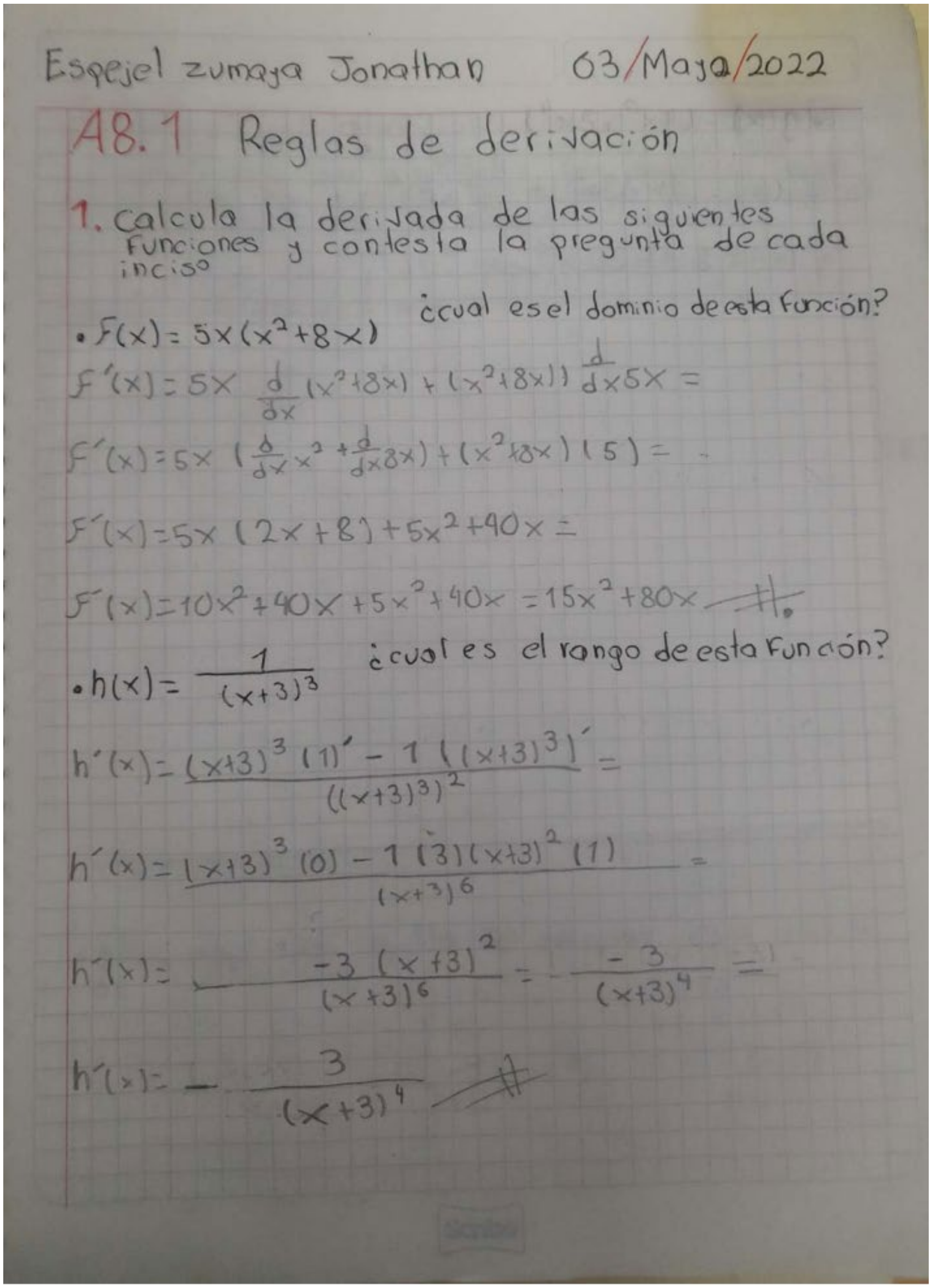
   R: Si, ahora puedo identificar estos conceptos después de ponerlos en práctica en estos problemas.

4. En función de tu autopercepción, ¿el tema de razón de cambio es de utilidad en la vida real?

   R: Considero que si, ya que nos puede ayudar a analizar circunstancias económicas y en ámbitos físicos como en este ejemplo se pudo observar.

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del cuestionario de autopercepción

Evidencia 3. Evidencia del trabajo realizado en el salón de clase.



Espejel zumaya Jonathan 03/Mayo/2022

A8.1 Reglas de derivación

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones y contesta la pregunta de cada inciso

- $f(x) = 5x(x^2+8x)$ ¿cual es el dominio de esta función?

$f'(x) = 5x \frac{d}{dx}(x^2+8x) + (x^2+8x)\frac{d}{dx}5x =$

$f'(x) = 5x\left(\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}8x\right) + (x^2+8x)(5) =$

$f'(x) = 5x(2x+8) + 5x^2 + 40x =$

$f'(x) = 10x^2 + 40x + 5x^2 + 40x = 15x^2 + 80x$ //.

- $h(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$ ¿cual es el rango de esta función?

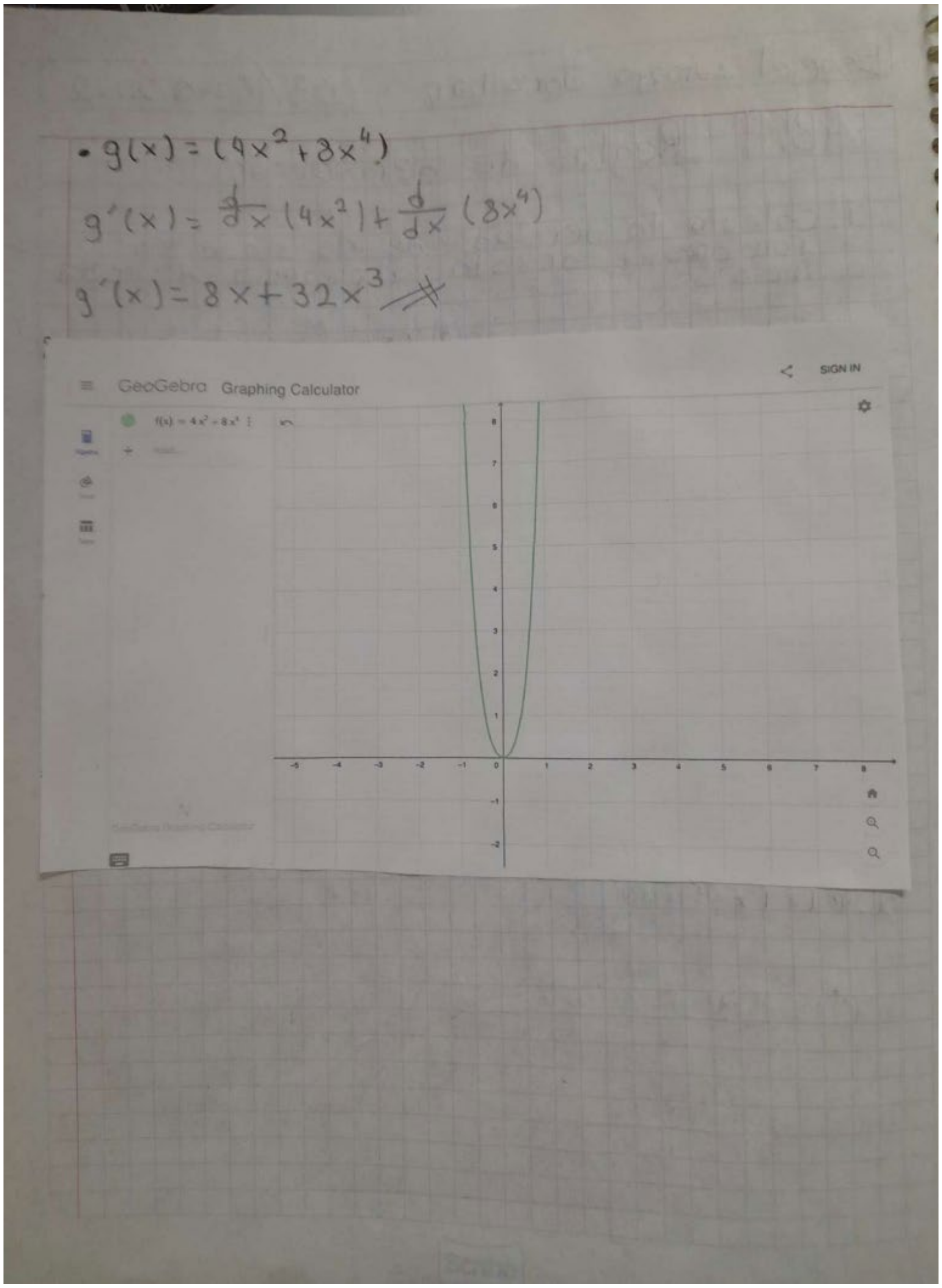
$h'(x) = \frac{(x+3)^3(1)' - 1((x+3)^3)'}{((x+3)^3)^2} =$

$h'(x) = \frac{(x+3)^3(0) - 1(3)(x+3)^2(1)}{(x+3)^6} =$

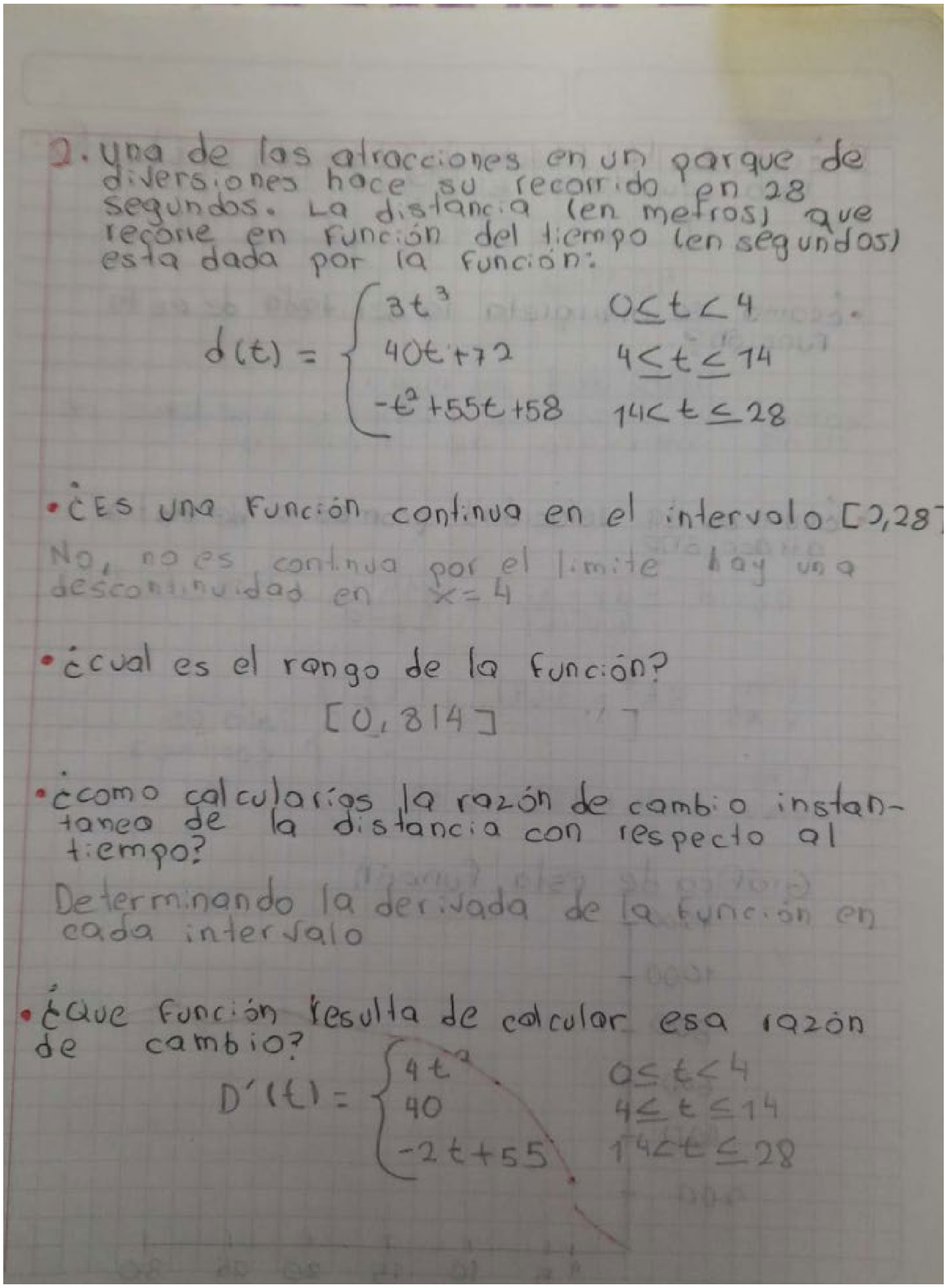
$h'(x) = \frac{-3(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{-3}{(x+3)^4} =$

$h'(x) = -\frac{3}{(x+3)^4}$ //

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del reactivo uno y dos de la primera parte del trabajo.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del tercer reactivo y la gráfica que representa el evento del ejercicio.



2. Una de las atracciones en un parque de diversiones hace su recorrido en 28 segundos. La distancia (en metros) que recorre en función del tiempo (en segundos) esta dada por la función:

$$d(t) = \begin{cases} 3t^3 & 0 \leq t < 4 \\ 40t+72 & 4 \leq t \leq 14 \\ -t^2+55t+58 & 14 < t \leq 28 \end{cases}$$

• ¿Es una función continua en el intervalo [0,28]

No, no es continua por el limite hay una descontinuidad en $x=4$

• ¿cual es el rango de la función?

[0, 814]

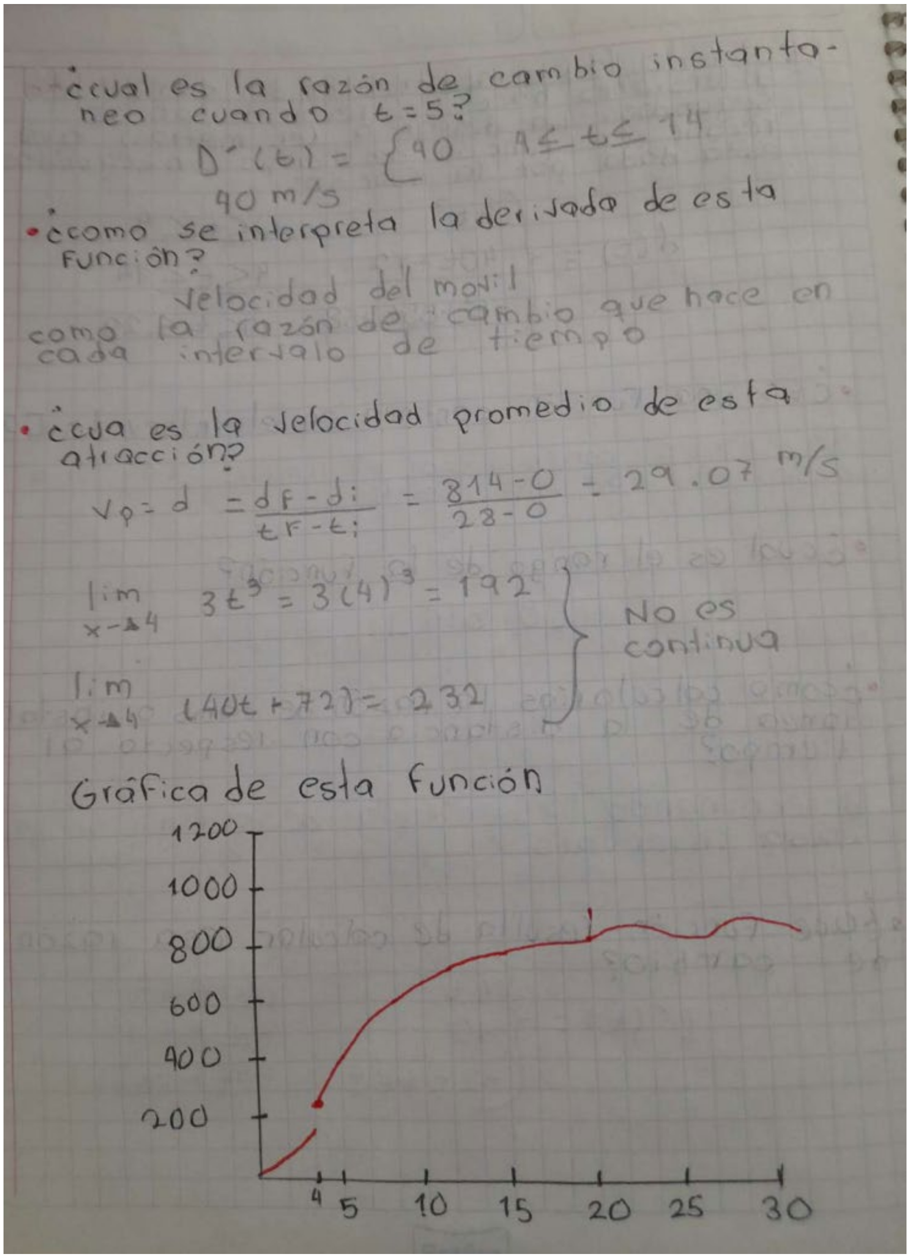
• ¿como calcularías la razón de cambio instantaneo de la distancia con respecto al tiempo?

Determinando la derivada de la función en cada intervalo

• ¿Que función resulta de calcular esa razón de cambio?

$$D'(t) = \begin{cases} 4t^2 & 0 \leq t < 4 \\ 40 & 4 \leq t \leq 14 \\ -2t+55 & 14 < t \leq 28 \end{cases}$$

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Cálculos matemáticos para obtener la razón de cambio del problema del juego mecánico, también los puntos de discontinuidad y continuidad, así como el dominio de la función.



¿cual es la razón de cambio instantaneo cuando $t=5$?

$$D'(t) = \begin{cases} 40 & 4 \leq t \leq 14 \end{cases}$$

40 m/s

• ¿como se interpreta la derivada de esta función?

velocidad del movil

como la razón de cambio que hace en cada intervalo de tiempo

• ¿cua es la velocidad promedio de esta atracción?

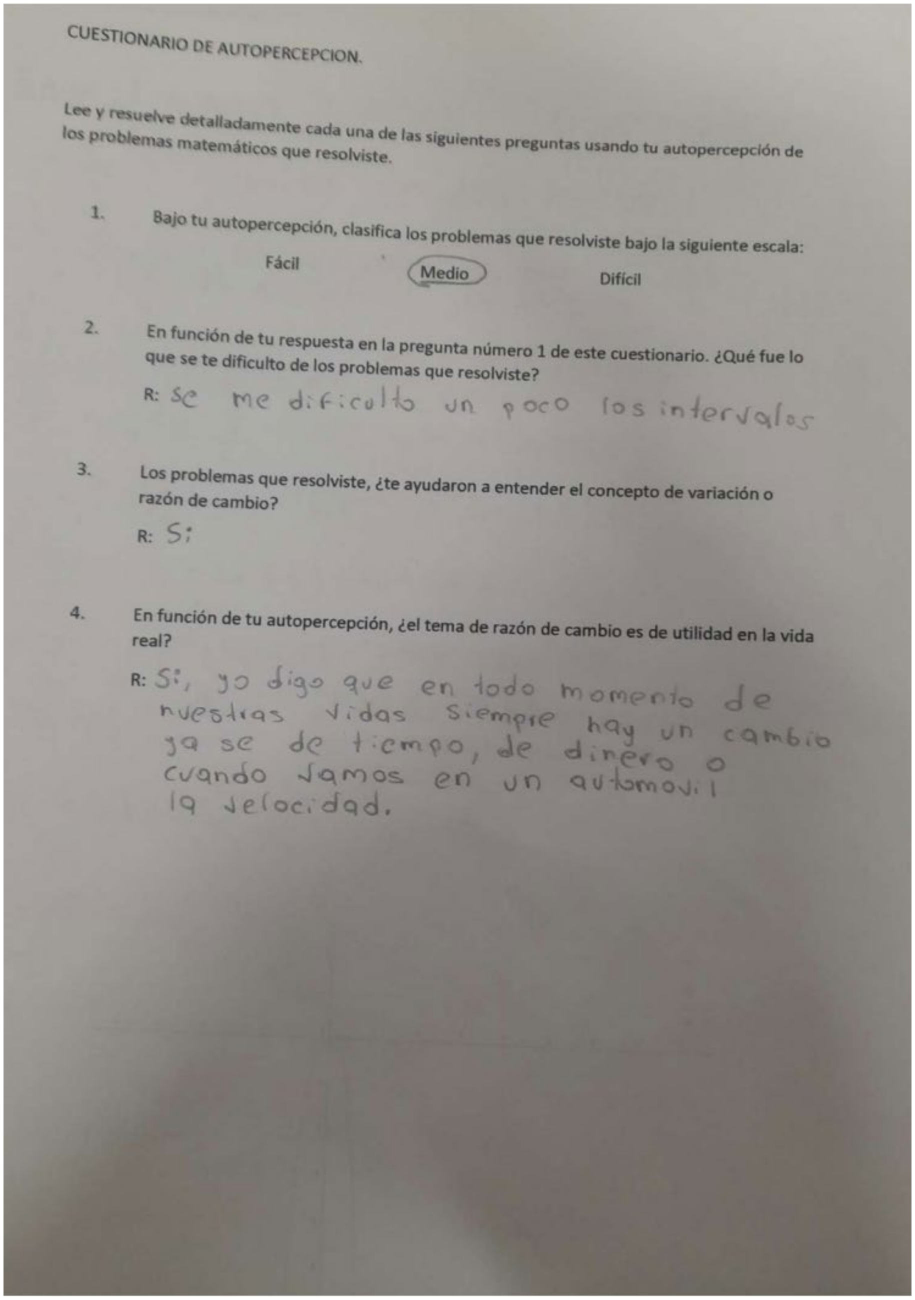
$$V_p = d = \frac{d_f - d_i}{t_f - t_i} = \frac{814-0}{28-0} = 29.07 \text{ m/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 4} 3t^3 = 3(4)^3 = 192 \\ \lim_{x \to 4} (40t + 72) = 232 \end{array}\right\} \text{No es continua}$$

Gráfica de esta función

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***

Continuación de los cálculos matemáticos para llegar a la solución del problema de aplicación y su representación gráfica.



CUESTIONARIO DE AUTOPERCEPCION.

Lee y resuelve detalladamente cada una de las siguientes preguntas usando tu autopercepción de los problemas matemáticos que resolviste.

1. Bajo tu autopercepción, clasifica los problemas que resolviste bajo la siguiente escala:

   Fácil   Medio   Difícil

2. En función de tu respuesta en la pregunta número 1 de este cuestionario. ¿Qué fue lo que se te dificulto de los problemas que resolviste?

   R: se me dificulto un poco los intervalos

3. Los problemas que resolviste, ¿te ayudaron a entender el concepto de variación o razón de cambio?

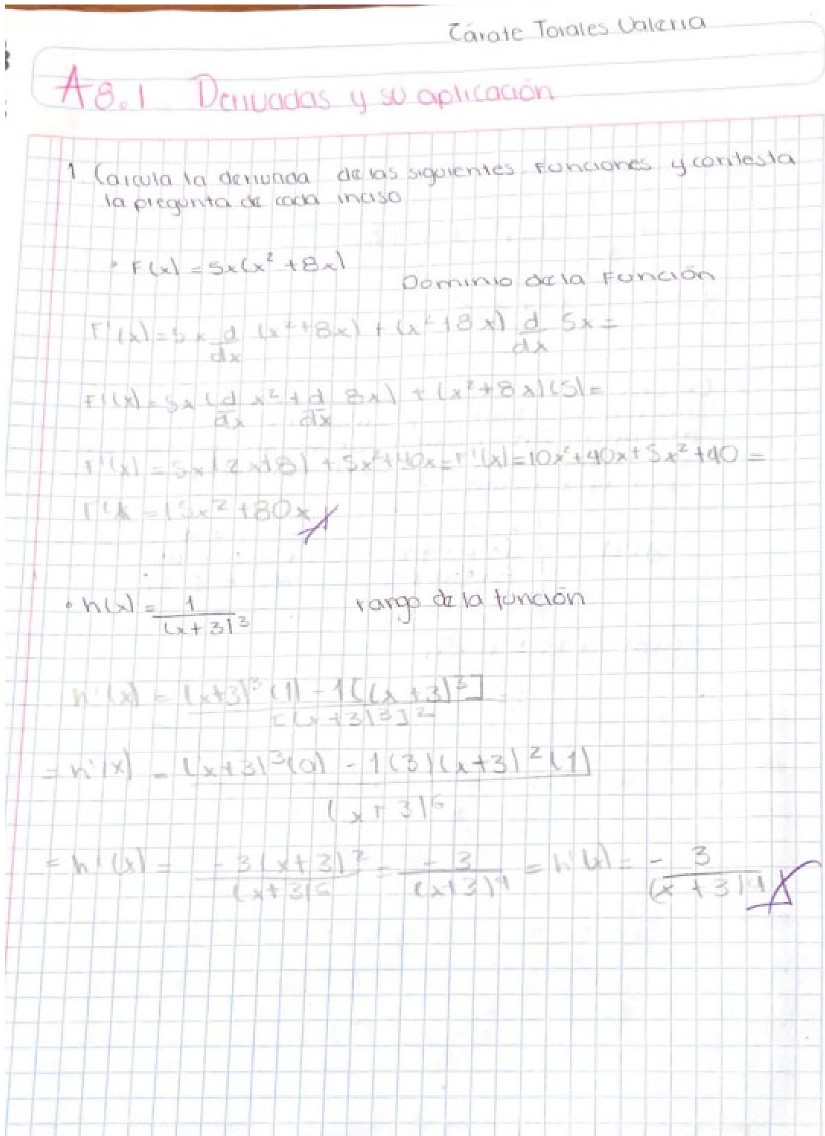
   R: Si

4. En función de tu autopercepción, ¿el tema de razón de cambio es de utilidad en la vida real?

   R: Si, yo digo que en todo momento de nuestras vidas siempre hay un cambio ya se de tiempo, de dinero o cuando vamos en un automovil la velocidad.

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del cuestionario de autopercepción

Evidencia 4. Evidencia del trabajo realizado en el salón de clase.



Zárate Torales Valeria

A8.1 Derivadas y su aplicación

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones y contesta la pregunta de cada inciso

• $F(x) = 5x(x^2+8x)$ Dominio de la función

$F'(x) = 5x \frac{d}{dx}(x^2+8x) + (x^2+8x)\frac{d}{dx}5x =$

$F'(x) = 5x\left(\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}8x\right) + (x^2+8x)(5) =$

$F'(x) = 5x(2x+8) + 5x^2+40x = F'(x) = 10x^2+40x+5x^2+40 =$

$F'(x) = 15x^2+80x$

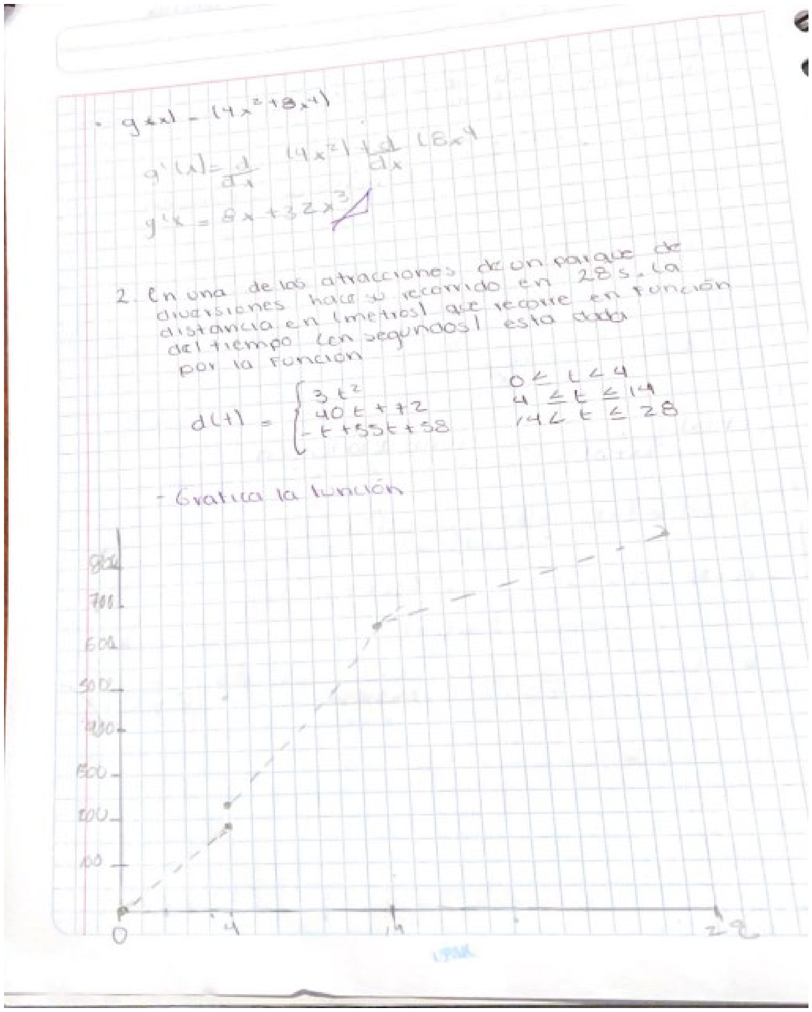
• $h(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$ rango de la función

$h'(x) = \frac{(x+3)^3(1) - 1[(x+3)^3]}{[(x+3)^3]^2}$

$= h'(x) = \frac{(x+3)^3(0) - 1(3)(x+3)^2(1)}{(x+3)^6}$

$= h'(x) = \frac{-3(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{-3}{(x+3)^4} = h'(x) = \frac{-3}{(x+3)^4}$

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del reactivo uno y dos de la primera parte del trabajo.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del tercer reactivo de la primera parte del trabajo y gráfica del problema de aplicación del juego mecánico.

- ¿Es una función continua en el intervalo (0, 28)?

  No

¿Cuál es el rango de la función?

(0, 814)

- ¿Cómo calcularías la razón de cambio instantanea de la distancia con respecto al tiempo?

  Aplicando la función de derivada

- ¿Qué función resulta de calcular esa razón de cambio instantanea?

  $d'(t) =$ velocidad metros

- ¿Cuál es la razón de cambio instantania cuando $t = 5$?

  $d'(5) = 40$ m/s

- ¿Cómo se interpreta la derivada de esta función?

  $\text{razón de cambio} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$

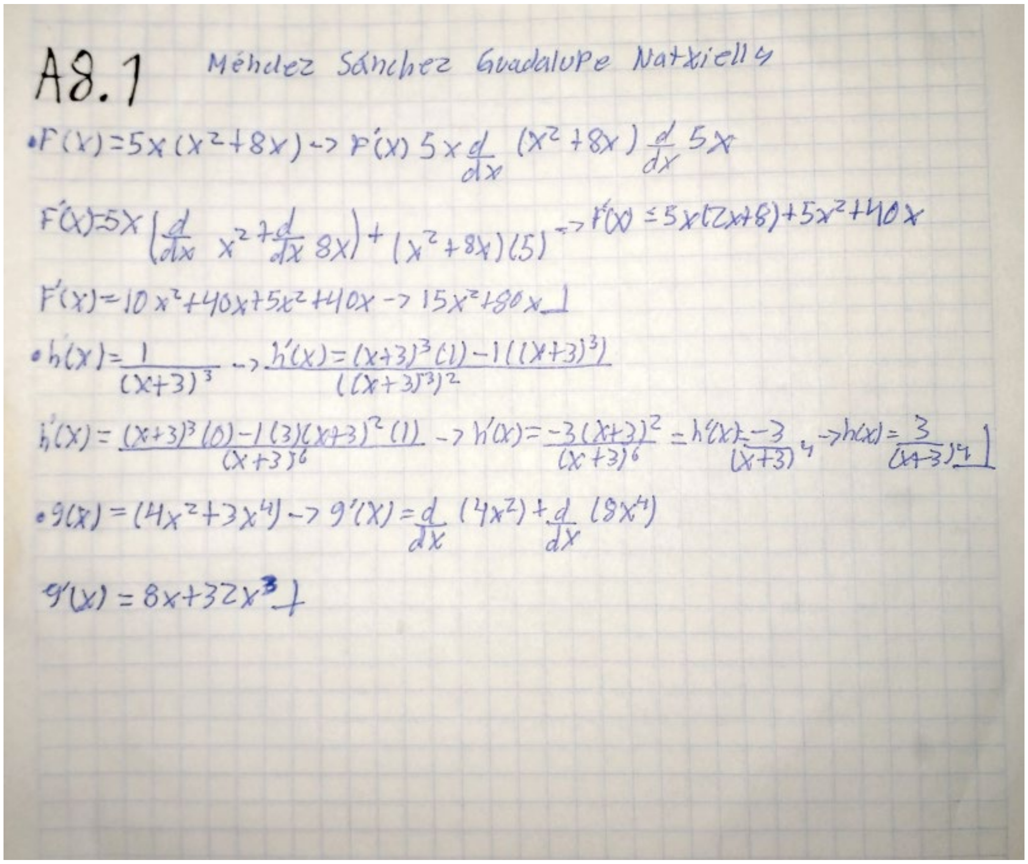
- ¿Cuál es la velocidad promedio de esta atracción?

  $(0, 14) = 9/2\, t^2 + 20$

  $(14, 28) = -t + 95/2$

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Cálculos matemáticos para obtener la discontinuidad y continuidad, rango de la función y razón de cambio del ejercicio del parque de diversiones.

Evidencia 5. Evidencia del trabajo realizado en el salón de clase.



A8.1 Méndez Sánchez Guadalupe Natxielly

• $F(x)=5x(x^2+8x) \rightarrow F'(x)\ 5x\frac{d}{dx}(x^2+8x)\frac{d}{dx}5x$

$F'(x)=5x\left(\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}8x\right)+(x^2+8x)(5) \rightarrow F'(x)=5x(2x+8)+5x^2+40x$

$F'(x)=10x^2+40x+5x^2+40x \rightarrow 15x^2+80x$

• $h(x)=\frac{1}{(x+3)^3} \rightarrow h'(x)=\frac{(x+3)^3(1)-1((x+3)^3)}{((x+3)^3)^2}$

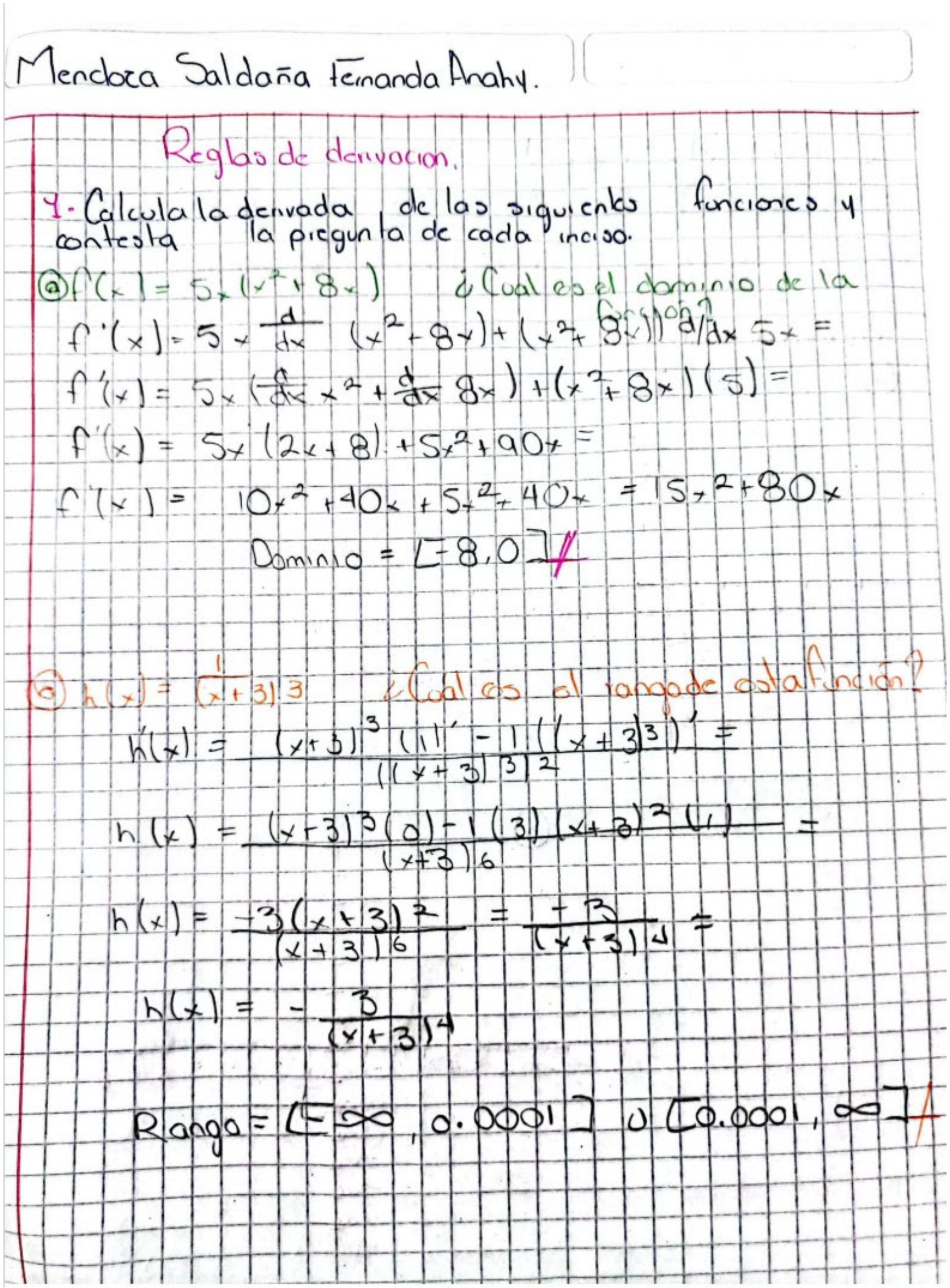
$h'(x)=\frac{(x+3)^3(0)-1(3)(x+3)^2(1)}{(x+3)^6} \rightarrow h'(x)=\frac{-3(x+3)^2}{(x+3)^6}=h'(x)=\frac{-3}{(x+3)^4} \rightarrow h(x)=\frac{3}{(x+3)^4}$

• $g(x)=(4x^2+3x^4) \rightarrow g'(x)=\frac{d}{dx}(4x^2)+\frac{d}{dx}(8x^4)$

$g'(x)=8x+32x^3$

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del reactivo uno y dos de la primera parte del trabajo.

Evidencia 6. Evidencia del trabajo realizado en el salón de clase.



Mendoza Saldaña Fernanda Anahy.

Reglas de derivacion.

1.- Calcula la derivada de las siguientes funciones y contesta la pregunta de cada inciso.

ⓐ $f(x) = 5x(x^2+8x)$ ¿Cual es el dominio de la funcion?

$f'(x) = 5x \frac{d}{dx}(x^2+8x) + (x^2+8x)\, d/dx\, 5x =$

$f'(x) = 5x\left(\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}8x\right) + (x^2+8x)(5) =$

$f'(x) = 5x(2x+8) + 5x^2 + 40x =$

$f'(x) = 10x^2 + 40x + 5x^2 + 40x = 15x^2 + 80x$

Dominio $= [-8, 0]$ //

ⓒ $h(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$ ¿Cual es el rango de esta función?

$h'(x) = \frac{(x+3)^3(1)' - 1((x+3)^3)'}{((x+3)^3)^2} =$

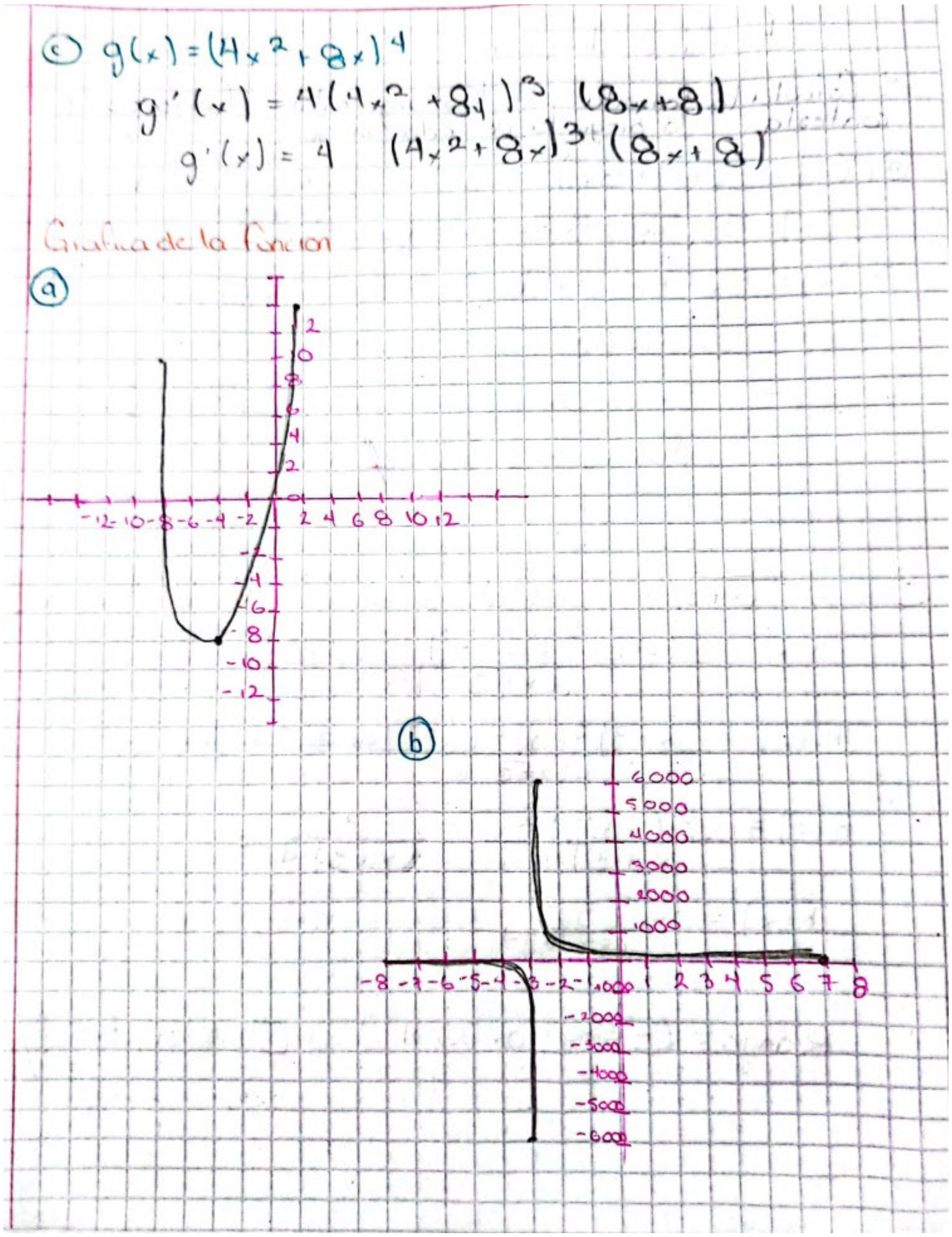
$h'(x) = \frac{(x+3)^3(0) - 1(3)(x+3)^2(1)}{(x+3)^6} =$

$h'(x) = \frac{-3(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{-3}{(x+3)^4} =$

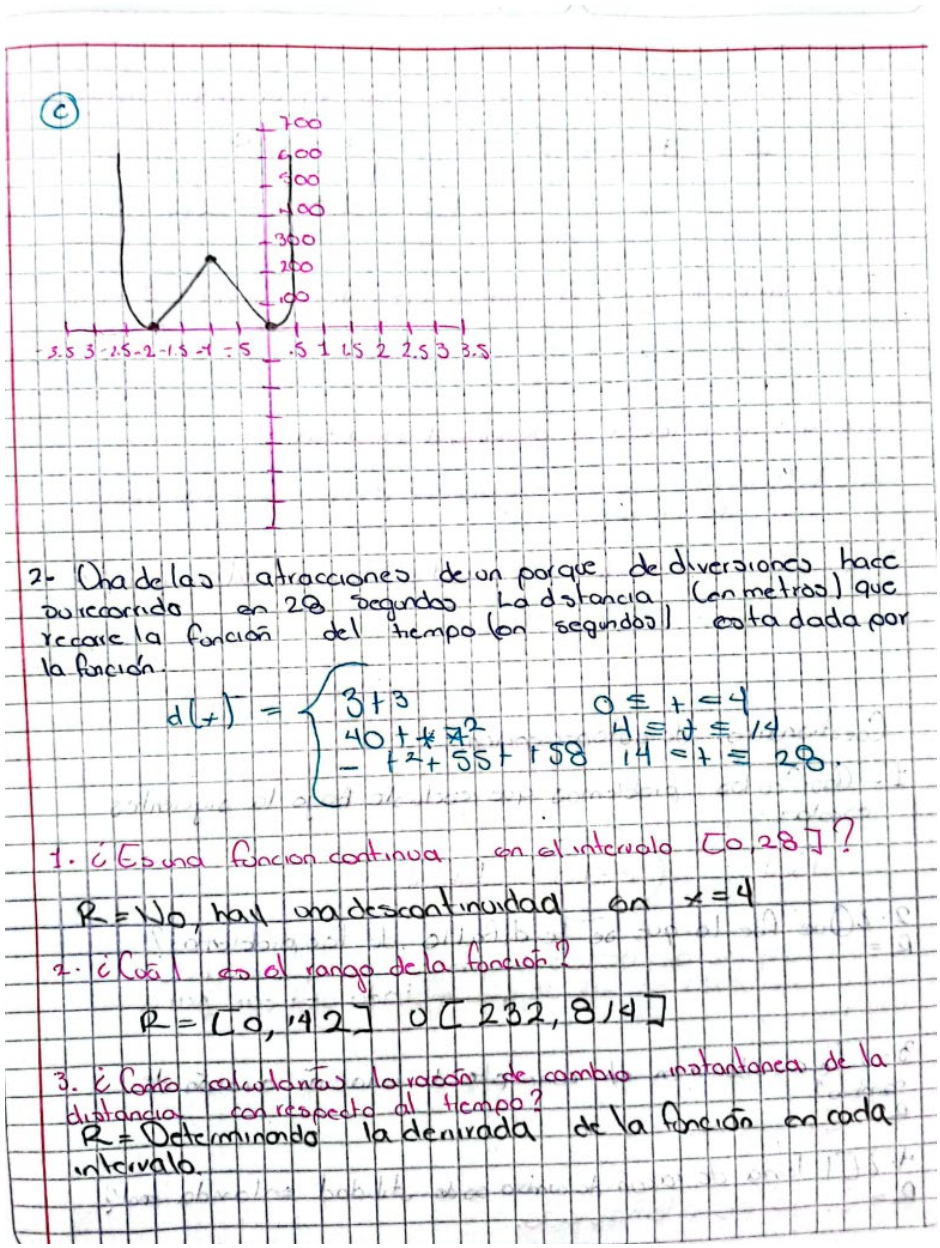
$h'(x) = -\frac{3}{(x+3)^4}$

Rango $= [-\infty, 0.0001] \cup [0.0001, \infty]$ //

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del reactivo uno y dos de la primera parte del trabajo.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del tercer reactivo de la primera parte del trabajo y gráficas de los dos primeros ejercicios.



2- Una de las atracciones de un parque de diversiones hace su recorrido en 28 segundos. La distancia (en metros) que recorre la función del tiempo (en segundos) está dada por la función.

$$d(t) = \begin{cases} 3t^3 & 0 \leq t \leq 4 \\ 40t + \cancel{7t^2} & 4 \leq t \leq 14 \\ -t^2 + 55t + 58 & 14 \leq t \leq 28. \end{cases}$$

1. ¿Es una función continua en el intervalo [0,28]?

R= No, hay una descontinuidad en $x=4$

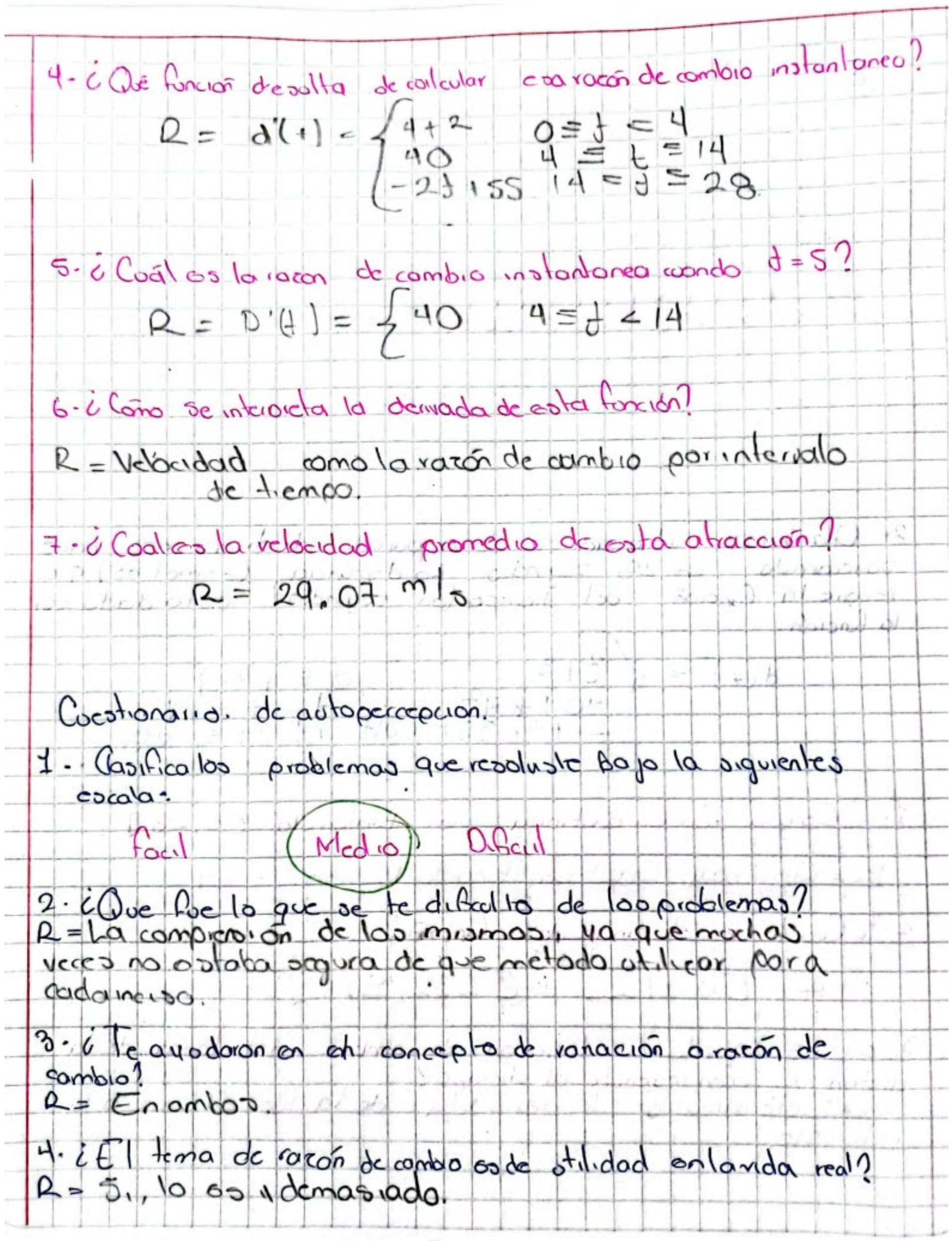
2. ¿Cuál es el rango de la función?

R= $[0,142] \cup [232,814]$

3. ¿Cómo calcularías la razón de cambio instantánea de la distancia con respecto al tiempo?

R= Determinando la derivada de la función en cada intervalo.

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Gráfica del tercer ejercicio de la primera parte del trabajo e iniciación de los cálculos matemáticos para llegar a obtener la razón de cambio del ejercicio.


4- ¿Qué función resulta de calcular esa razón de cambio instantáneo?

$$R = d'(t) = \begin{cases} 4t+2 & 0 \leq t \leq 4 \\ 40 & 4 \leq t \leq 14 \\ -2t+55 & 14 \leq t \leq 28 \end{cases}$$

5- ¿Cuál es la razón de cambio instantánea cuando $t = 5$?

$$R = D'(t) = \{ 40 \quad 4 \leq t < 14$$

6- ¿Cómo se interpreta la derivada de esta función?

R = Velocidad como la razón de cambio por intervalo de tiempo.

7- ¿Cuál es la velocidad promedio de esta atracción?

R = 29.07 m/s

Cuestionario de autopercepción.

1- Clasifica los problemas que resolviste bajo la siguientes escala:

Fácil Medio Difícil

2- ¿Qué fue lo que se te dificultó de los problemas?
R = La comprensión de los mismos, ya que muchas veces no estaba segura de qué método utilizar para cada inciso.

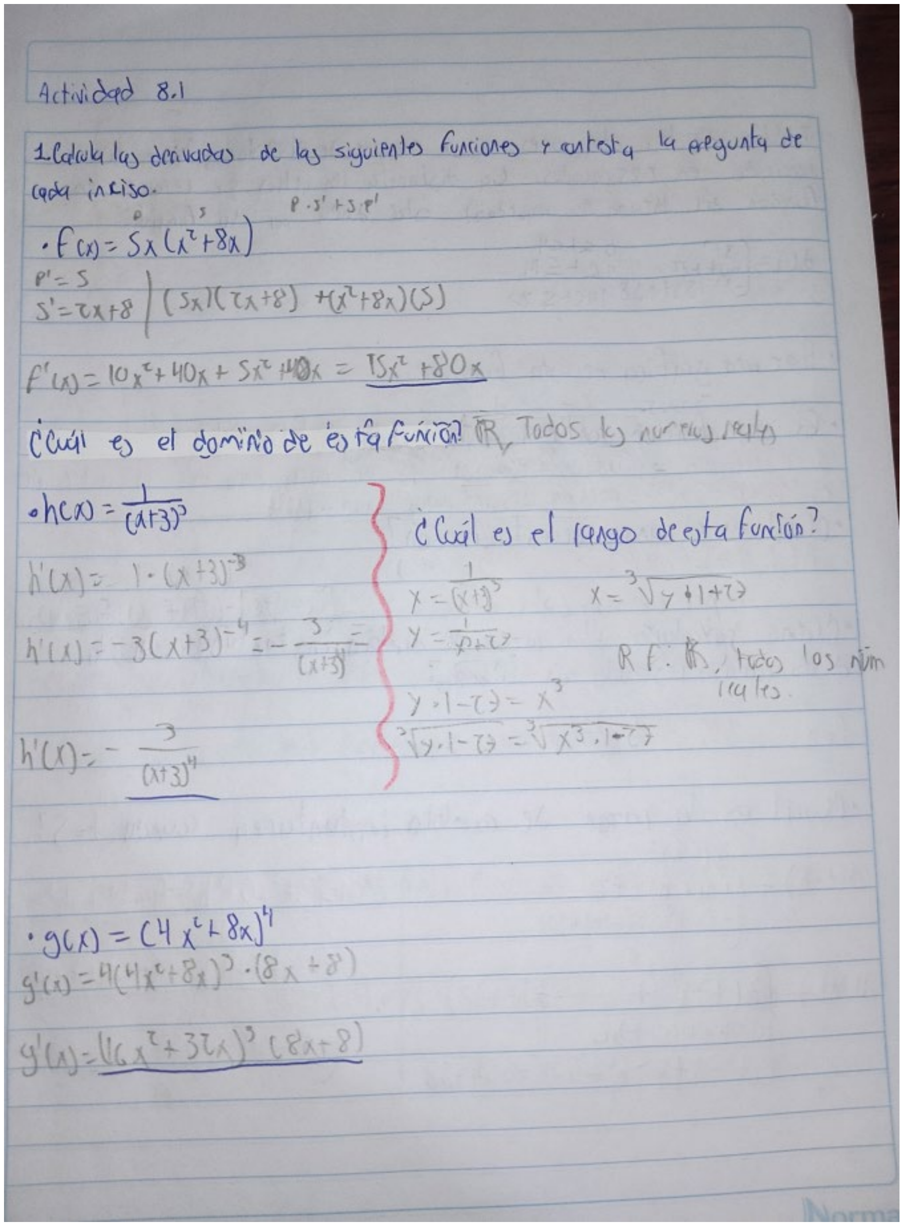
3- ¿Te ayudaron en el concepto de variación o razón de cambio?
R = En ambos.

4- ¿El tema de razón de cambio es de utilidad en la vida real?
R = Sí, lo es demasiado.

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***

Continuación de los cálculos matemáticos y solución del problema del parque de diversiones. También está la solución del cuestionario de autopercepción.

Evidencia 7. Evidencia del trabajo realizado en el salón de clase.


Actividad 8.1

1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y contesta la pregunta de cada inciso.

• $f(x) = 5x(x^2+8x)$

$p' = 5$

$s' = 2x+8$ | $(5x)(2x+8) + (x^2+8x)(5)$

$f'(x) = 10x^2+40x+5x^2+40x = 15x^2+80x$

¿Cuál es el dominio de esta función? ℝ, Todos los números reales

• $h(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$

$h'(x) = 1\cdot(x+3)^{-3}$

$h'(x) = -3(x+3)^{-4} = -\frac{3}{(x+3)^4}$

$h'(x) = -\frac{3}{(x+3)^4}$

¿Cuál es el rango de esta función?

R F: ℝ, todos los núm reales.

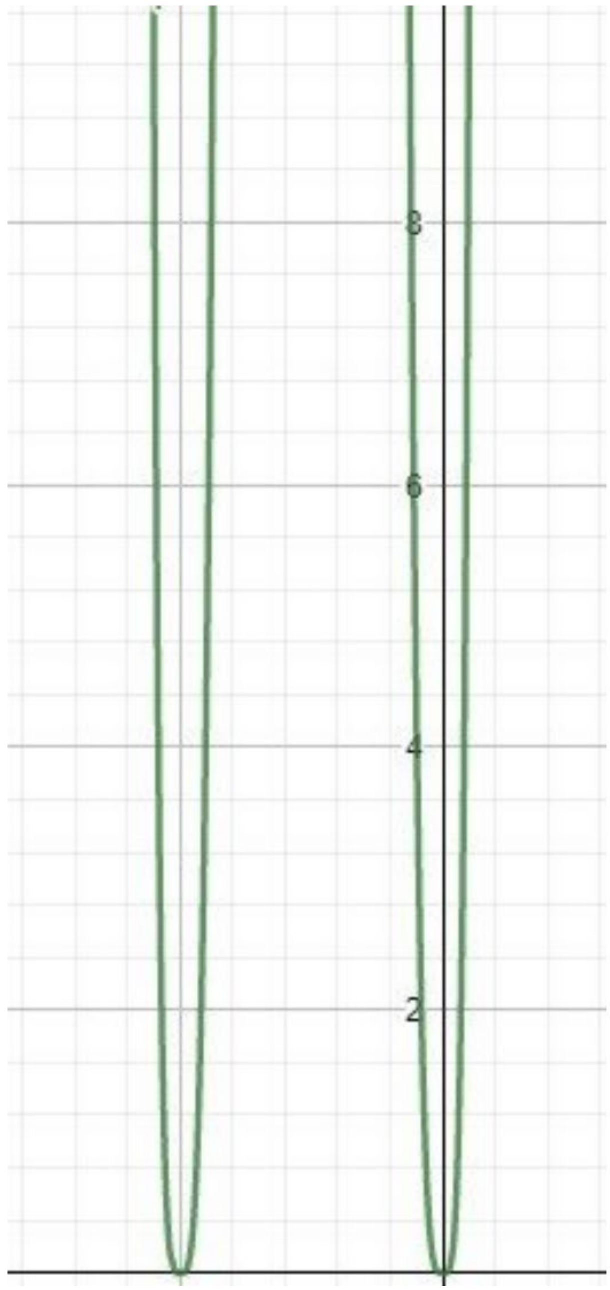
• $g(x) = (4x^2+8x)^4$

$g'(x) = 4(4x^2+8x)^3\cdot(8x+8)$

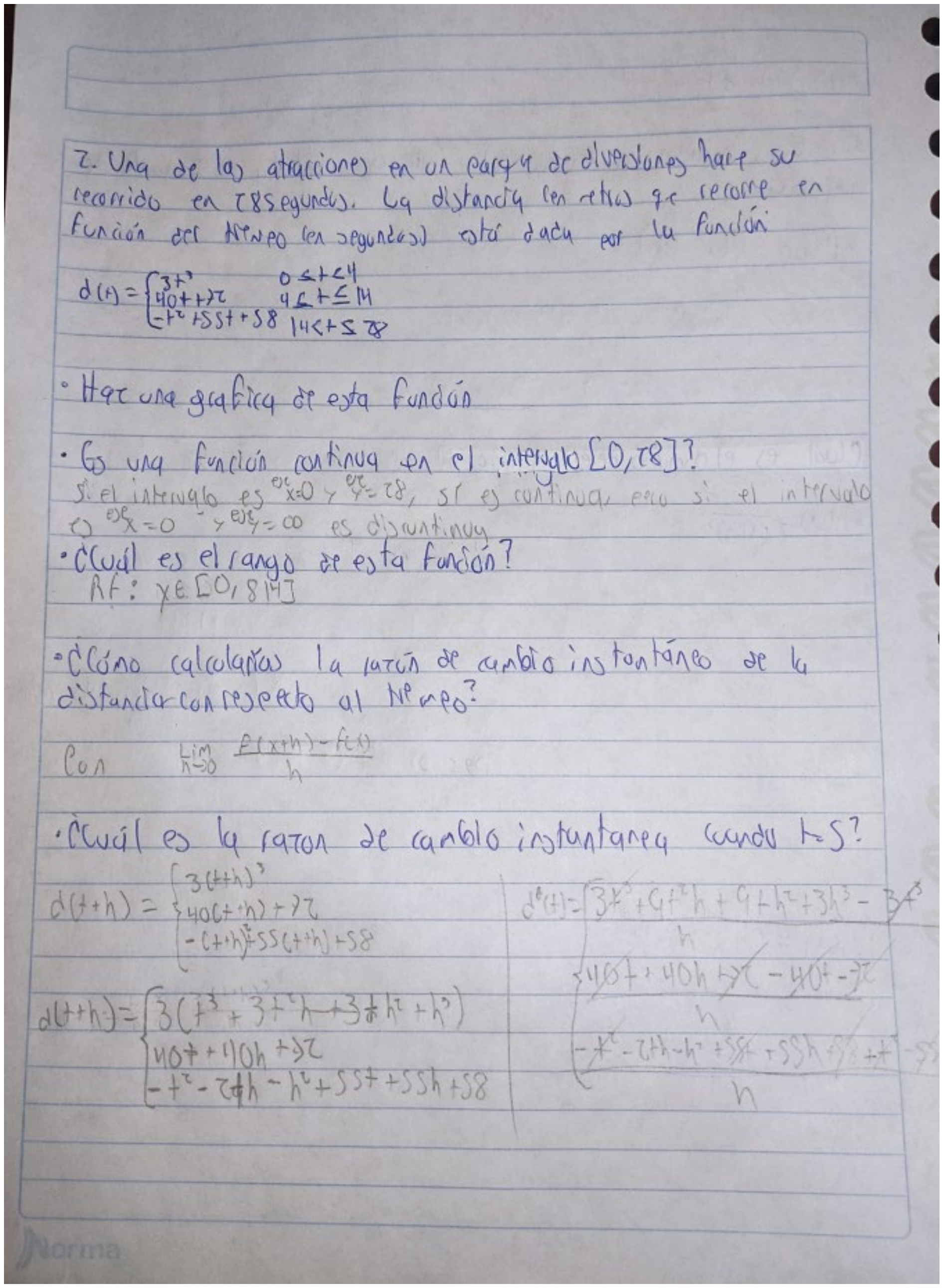
$g'(x) = (16x^2+32x)^3(8x+8)$

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***

Solución matemática de los tres primeros reactivos de la primera parte del trabajo.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Gráfica representativa de la primera parte del trabajo



2. Una de las atracciones en un parque de diversiones hace su recorrido en 28 segundos. La distancia (en metros) que recorre en función del tiempo (en segundos) está dada por la función

$$d(t)=\begin{cases}3t^3 & 0\le t<4\\ 40t+72 & 4\le t\le 14\\ -t^2+55t+58 & 14<t\le 28\end{cases}$$

• Haz una gráfica de esta función

• Es una función continua en el intervalo [0,28]?

Si el intervalo es de x=0 y de y=28, si es continua, pero si el intervalo es de x=0 y de y=∞ es discontinua

• ¿Cuál es el rango de esta función?

Rf: $y\in[0, 814]$

• ¿Cómo calcularías la razón de cambio instantáneo de la distancia con respecto al tiempo?

Con $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

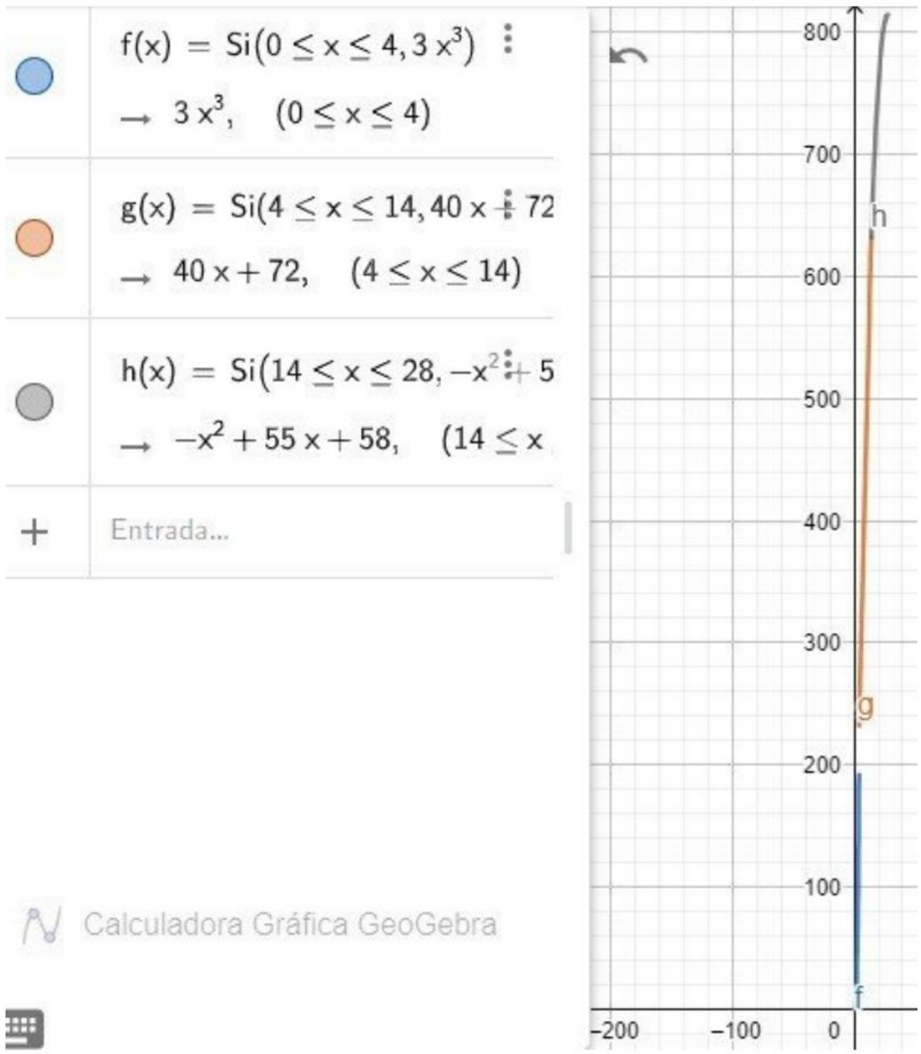
• ¿Cuál es la razón de cambio instantánea cuando t=5?

$$d(t+h)=\begin{cases}3(t+h)^3\\ 40(t+h)+72\\ -(t+h)^2+55(t+h)+58\end{cases}$$

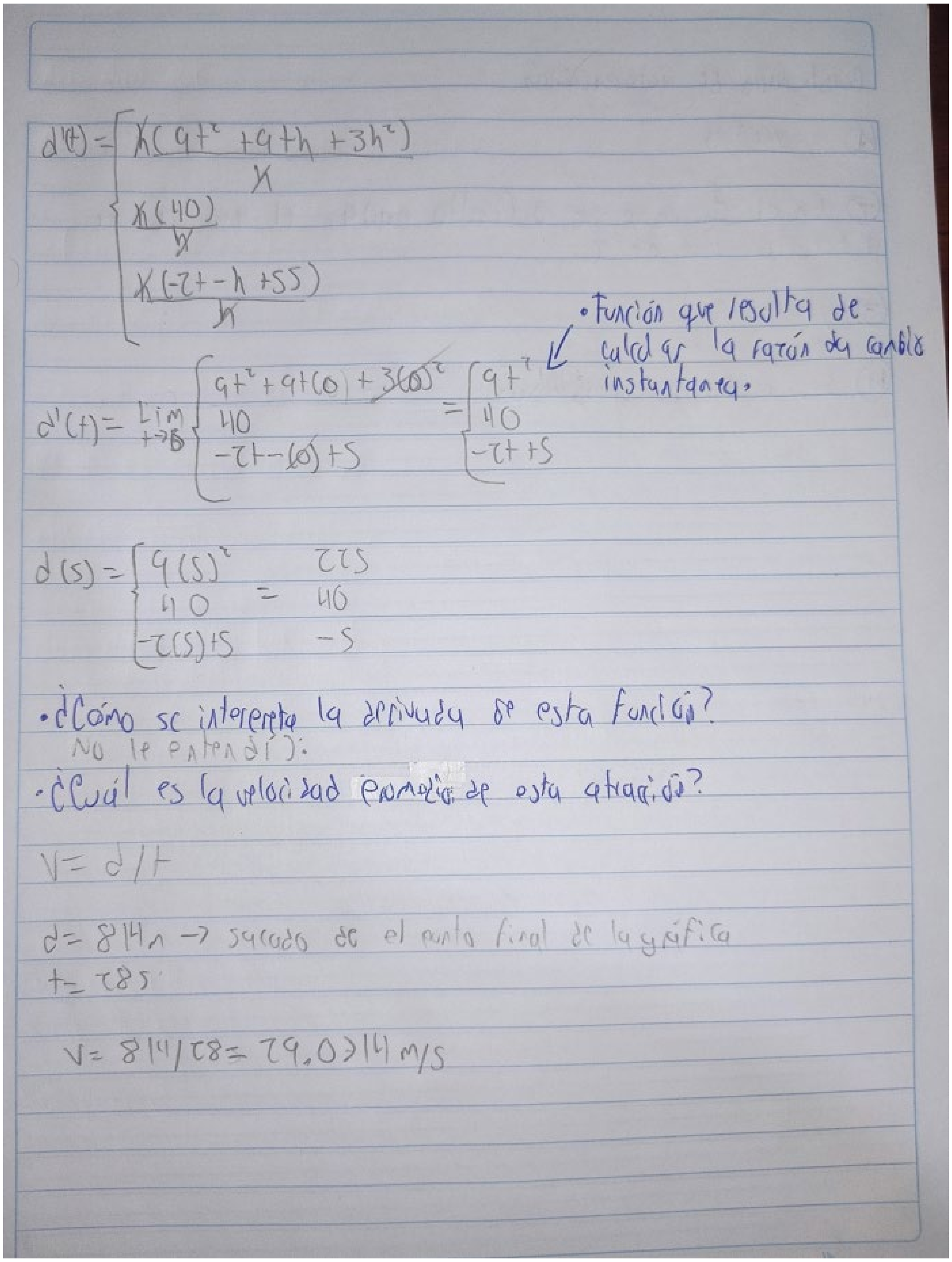
$$d(t+h)=\begin{cases}3(t^3+3t^2h+3th^2+h^3)\\ 40t+40h+72\\ -t^2-2th-h^2+55t+55h+58\end{cases}$$

$$d'(t)=\begin{cases}\frac{3t^3+9t^2h+9th^2+3h^3-3t^3}{h}\\ \frac{40t+40h+72-40t-72}{h}\\ \frac{-t^2-2th-h^2+55t+55h+58+t^2-55t-58}{h}\end{cases}$$

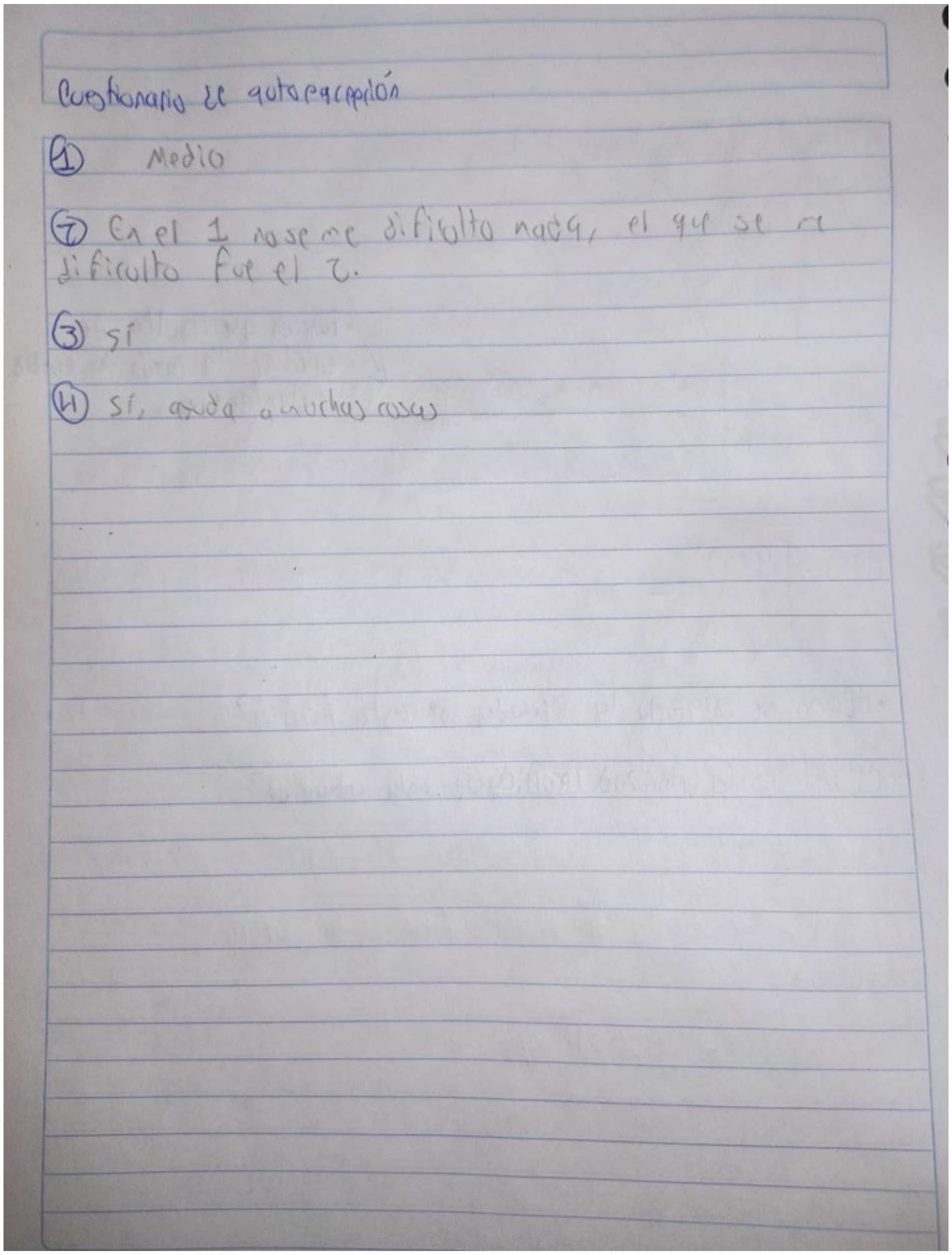
Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Cálculos matemáticos para obtener los puntos de discontinuidad y continuidad, rango de la función y la razón de cambio en el problema del juego mecánico.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Gráfica que representa el evento de la trayectoria del juego mecánico de la segunda parte del trabajo.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Cálculo de la función resultante al obtener la razón de cambio.



Cuestionario de autopercepción

① Medio

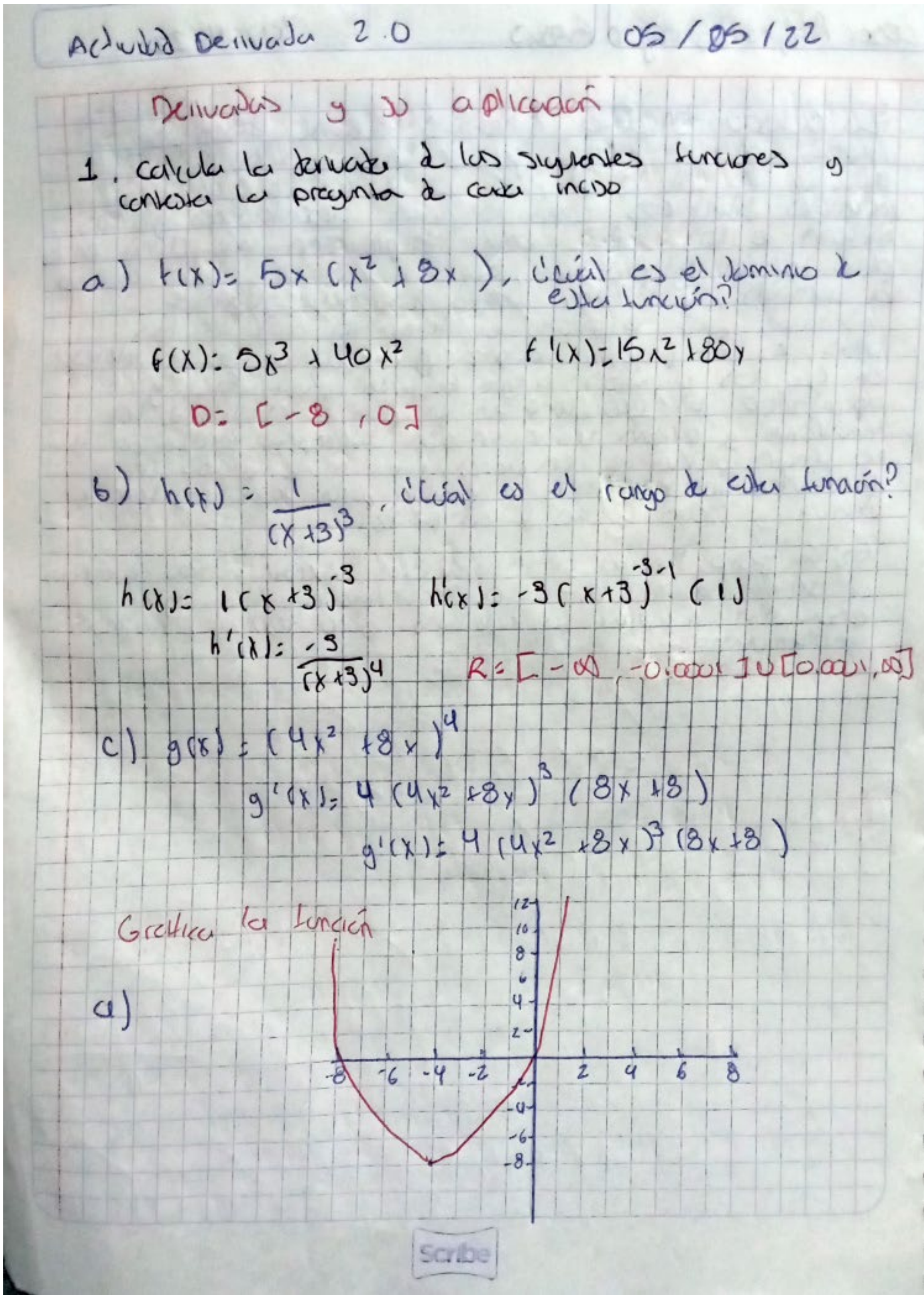
② En el 1 no se me dificulto nada, el que se me dificulto fue el 2.

③ sí

④ sí, ayuda a muchas cosas

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del cuestionario de autopercepción.

Evidencia 8. Evidencia del trabajo realizado en el salón de clase.


Actividad Derivada 2.0 05/05/22

Derivadas y su aplicación

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones y contesta la pregunta de cada inciso

a) $f(x) = 5x(x^2 + 8x)$, ¿Cuál es el dominio de esta función?

$f(x) = 5x^3 + 40x^2$ $f'(x) = 15x^2 + 80x$

$D = [-8, 0]$

b) $h(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$, ¿Cuál es el rango de esta función?

$h(x) = 1(x+3)^{-3}$ $h'(x) = -3(x+3)^{-3-1}(1)$

$h'(x) = \frac{-3}{(x+3)^4}$ $R = [-\infty, -0.0001] \cup [0.0001, \infty]$

c) $g(x) = (4x^2 + 8x)^4$

$g'(x) = 4(4x^2 + 8x)^3(8x + 8)$

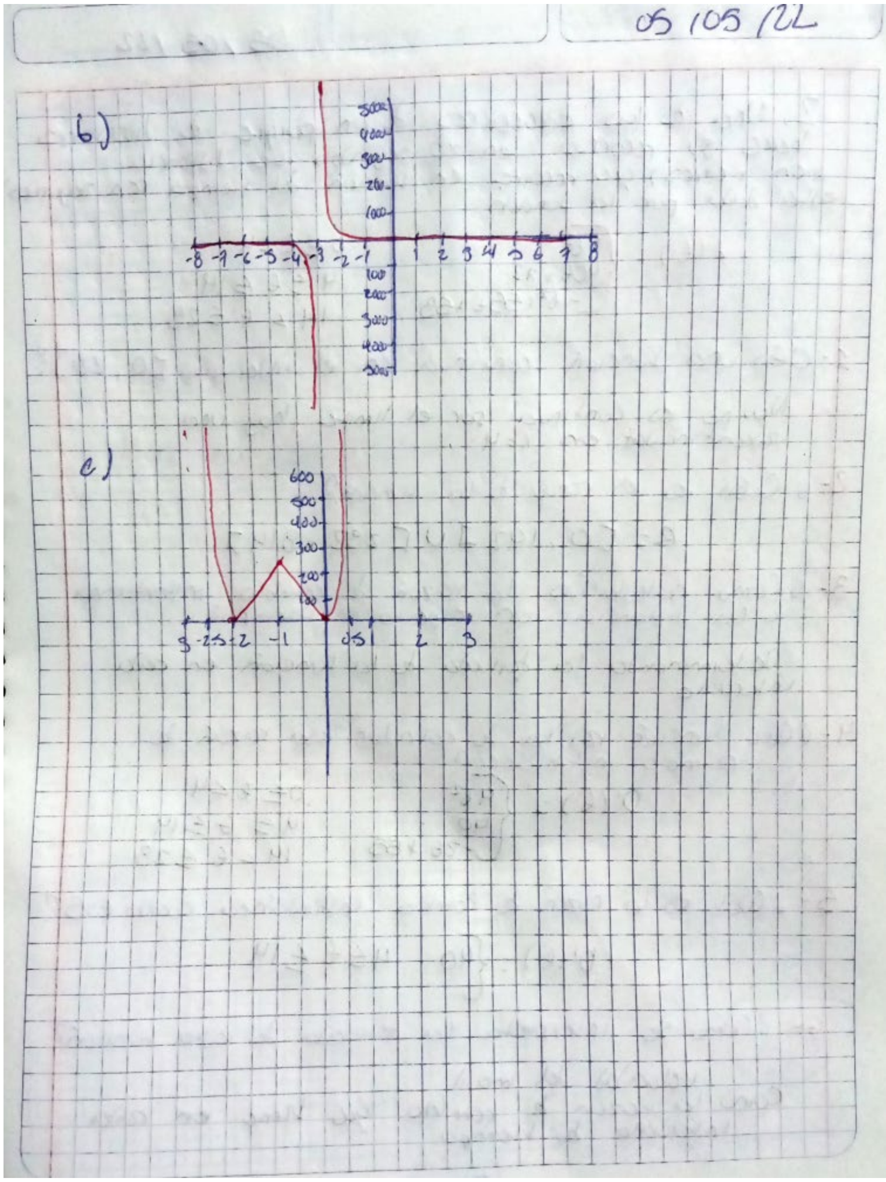
$g'(x) = 4(4x^2 + 8x)^3(8x + 8)$

Grafica la función

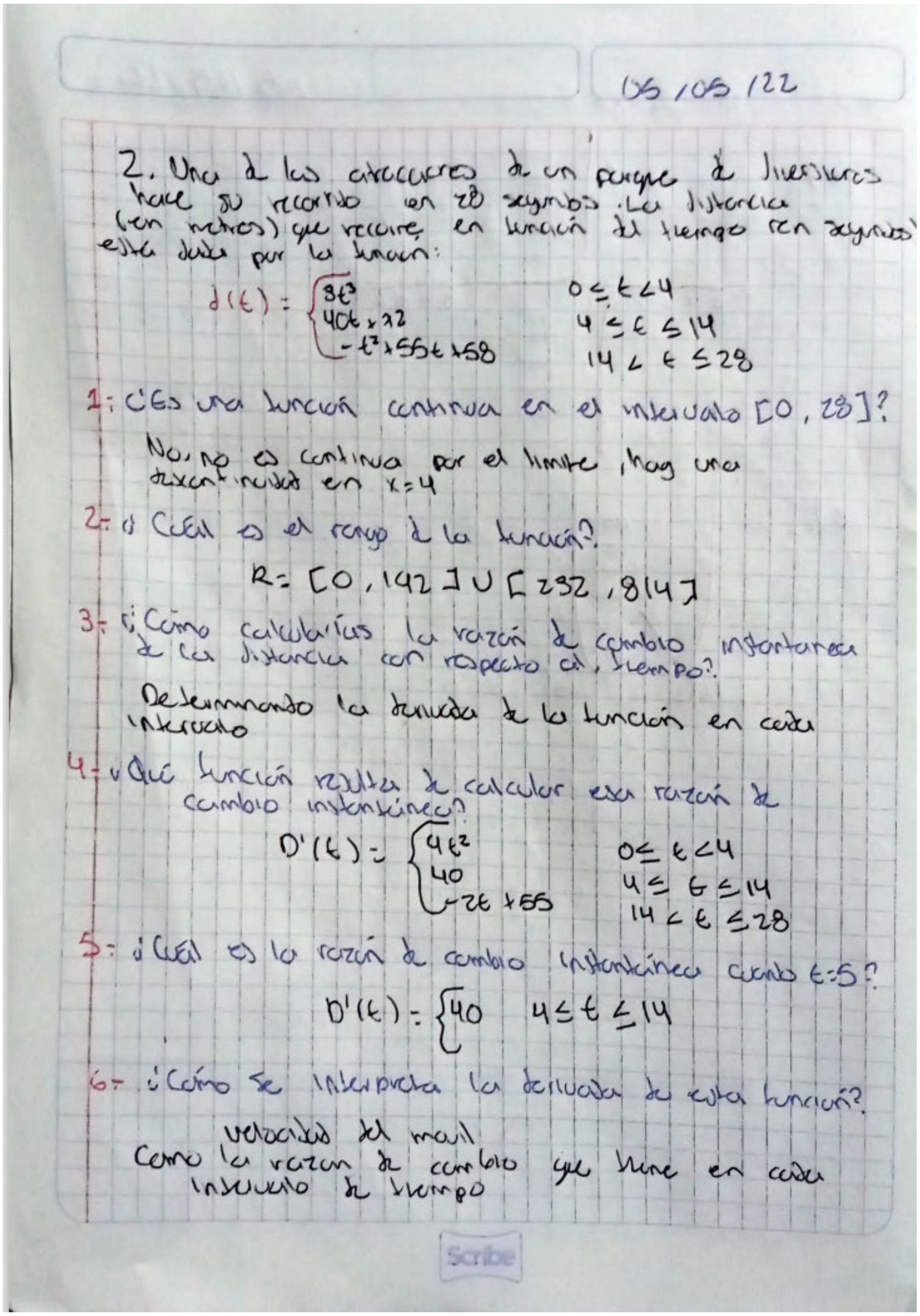
a)

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***

Solución matemática de los tres primeros reactivos de la primera parte del trabajo y gráfica del primer inciso de esta primera parte.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Gráfica de los incisos dos y tres de la primera parte del trabajo.



05/05/22

2. Una de las atracciones de un parque de diversiones hace su recorrido en 28 segundos. La distancia (en metros) que recorre, en función del tiempo (en segundos) está dada por la función:

$$d(t) = \begin{cases} 3t^3 & 0 \leq t < 4 \\ 40t + 72 & 4 \leq t \leq 14 \\ -t^2 + 55t + 58 & 14 < t \leq 28 \end{cases}$$

1: ¿Es una función continua en el intervalo $[0, 28]$?

No, no es continua por el limite, hay una discontinuidad en $x = 4$

2: ¿Cuál es el rango de la función?

$$R = [0, 192] \cup [232, 814]$$

3: ¿Cómo calcularías la razón de cambio instantanea de la distancia con respecto al tiempo?

Determinando la derivada de la función en cada intervalo

4: ¿Qué función resulta de calcular esa razón de cambio instantánea?

$$D'(t) = \begin{cases} 9t^2 & 0 \leq t < 4 \\ 40 & 4 \leq t \leq 14 \\ -2t + 55 & 14 < t \leq 28 \end{cases}$$

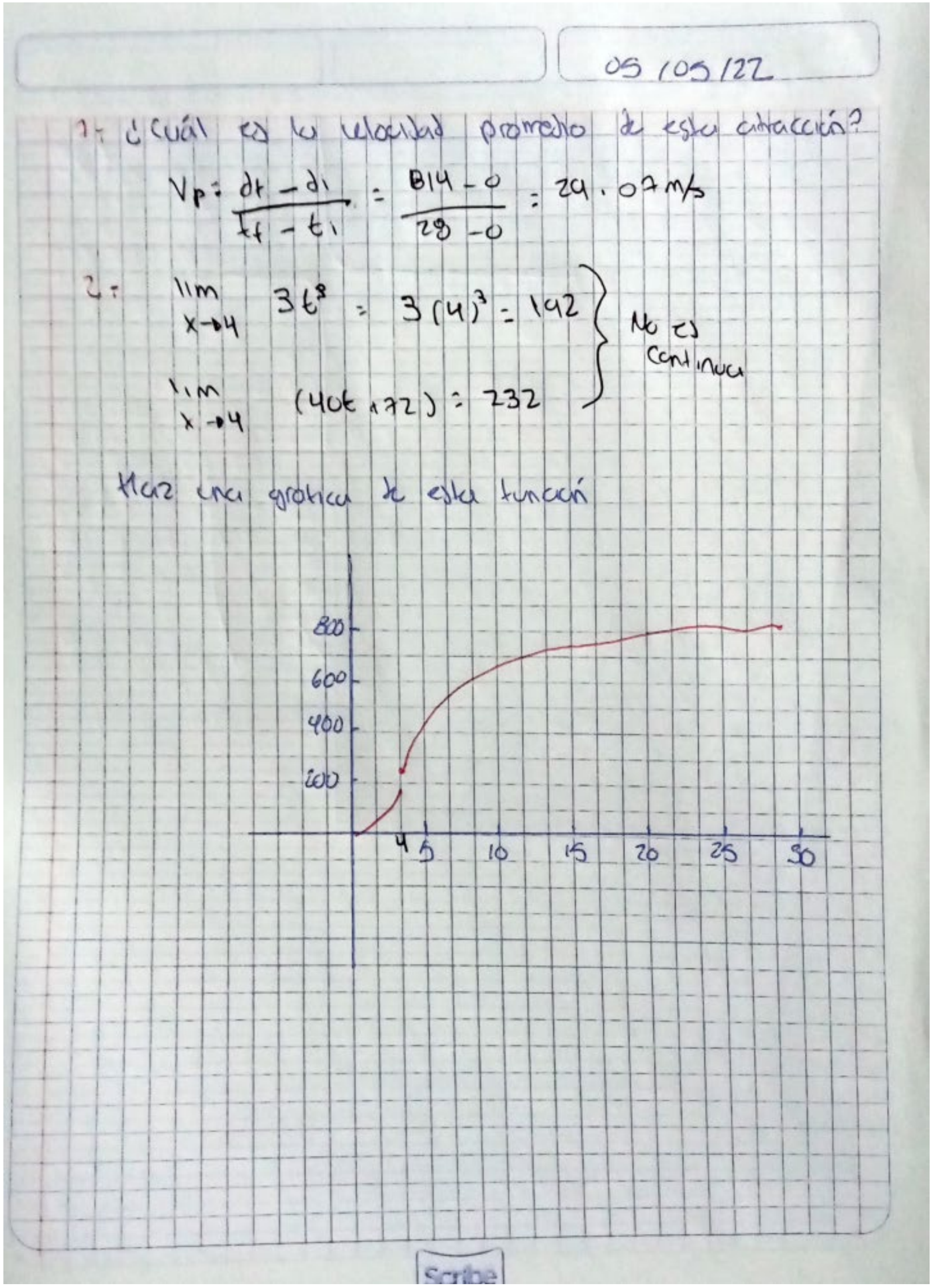
5: ¿Cuál es la razón de cambio instantánea cuando $t = 5$?

$$D'(t) = \{ 40 \quad 4 \leq t \leq 14$$

6: ¿Cómo se interpreta la derivada de esta función?

velocidad del movil
Como la razon de cambio que tiene en cada intervalo de tiempo

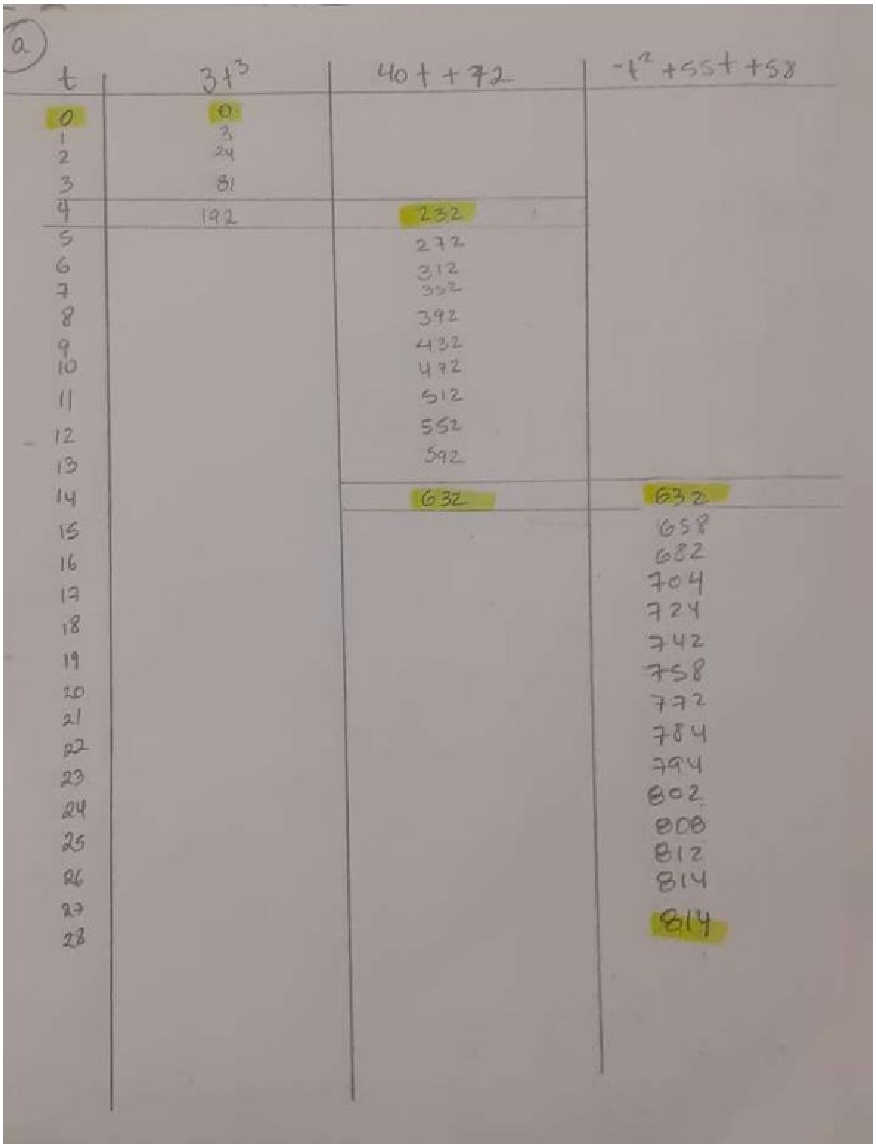
Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución matemática para obtener la razón de cambio del juego mecánico del parque de diversiones.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***

Finalización de los cálculos matemáticos del problema de aplicación y su representación gráfica que representa el recorrido del juego mecánico de la segunda parte del trabajo de investigación.

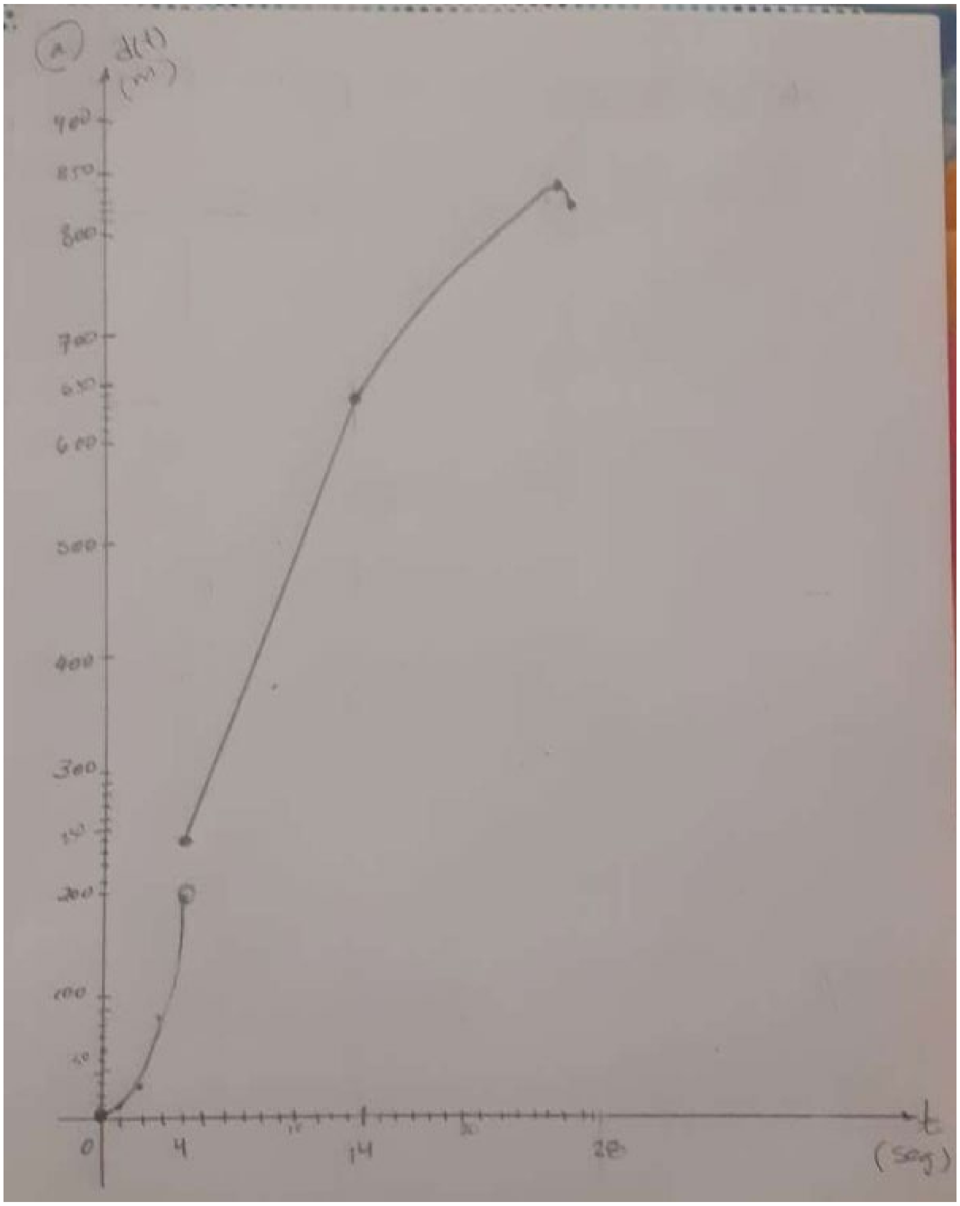
Evidencia 9. Evidencia del trabajo realizado en el salón de clase.



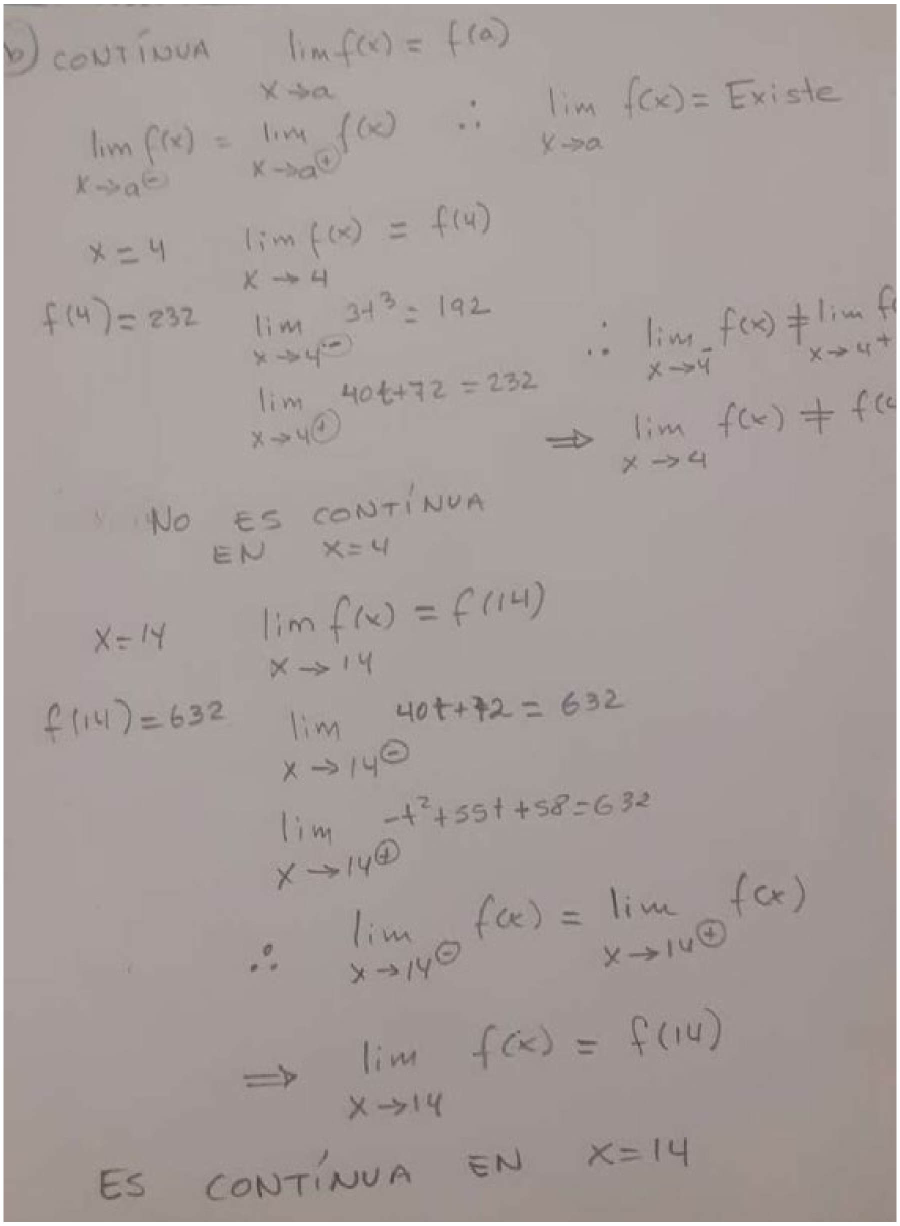
a

t	$3t^3$	$40t+72$	$-t^2+55t+58$
0	0		
1	3		
2	24		
3	81		
4	192	232	
5		272	
6		312	
7		352	
8		392	
9		432	
10		472	
11		512	
12		552	
13		592	
14		632	632
15			658
16			682
17			704
18			724
19			742
20			758
21			772
22			784
23			794
24			802
25			808
26			812
27			814
28			814

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Tabulación para obtener la gráfica del juego mecánico.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Gráfica que muestra el recorrido del móvil del problema del juego de parque de diversiones.



b) CONTÍNUA $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\lim_{x \to a^{-}} f(x) = \lim_{x \to a^{+}} f(x)$ ∴ $\lim_{x \to a} f(x)$ = Existe

$x = 4$ $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$

$f(4) = 232$ $\lim_{x \to 4^{-}} 3t^3 = 192$ ∴ $\lim_{x \to 4^{-}} f(x) \neq \lim_{x \to 4^{+}} f$

$\lim_{x \to 4^{+}} 40t+72 = 232$ $\Rightarrow \lim_{x \to 4} f(x) \neq f($

NO ES CONTÍNUA
EN $x = 4$

$x = 14$ $\lim_{x \to 14} f(x) = f(14)$

$f(14) = 632$ $\lim_{x \to 14^{-}} 40t+72 = 632$

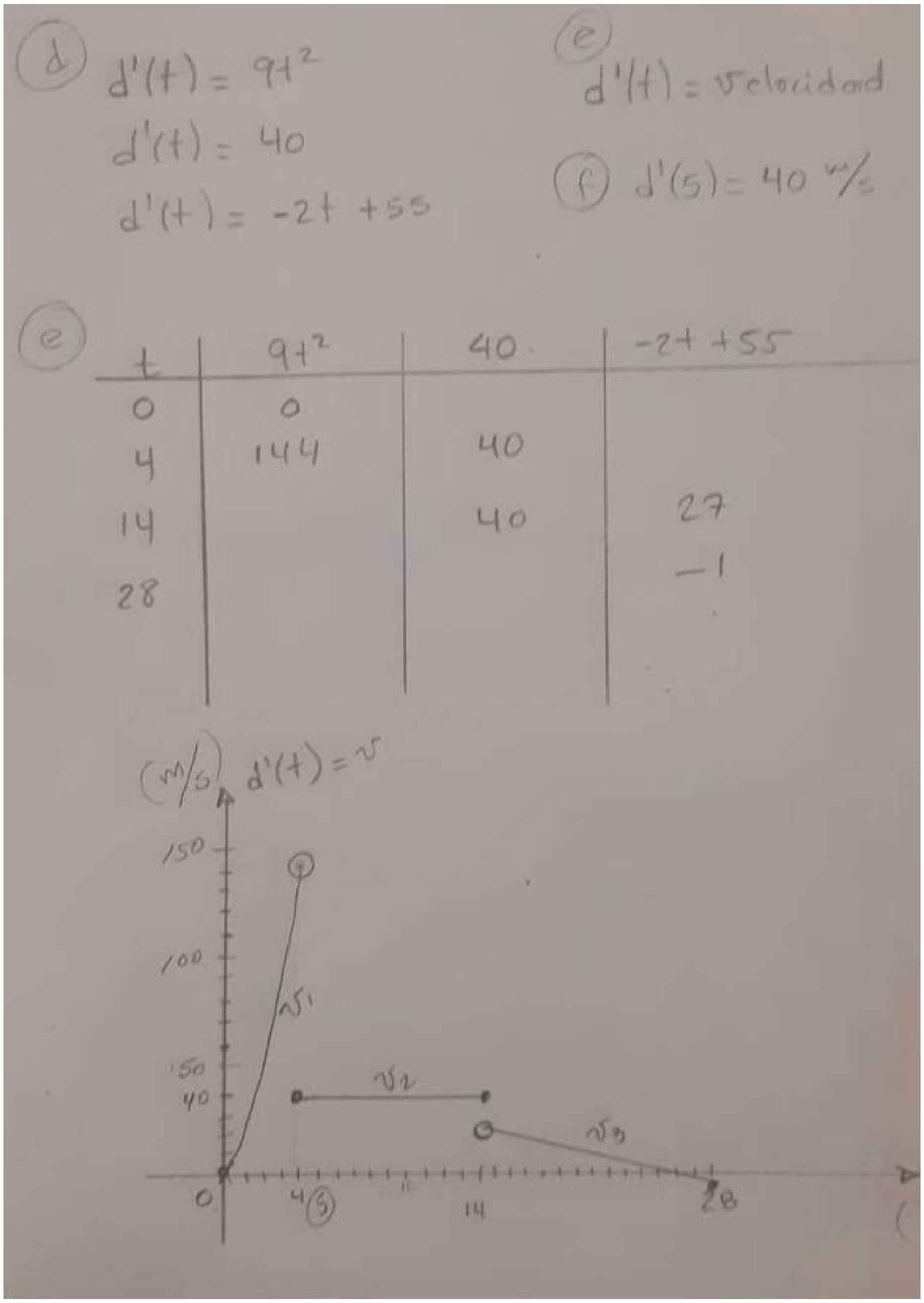
$\lim_{x \to 14^{+}} -t^2+55t+58 = 632$

∴ $\lim_{x \to 14^{-}} f(x) = \lim_{x \to 14^{+}} f(x)$

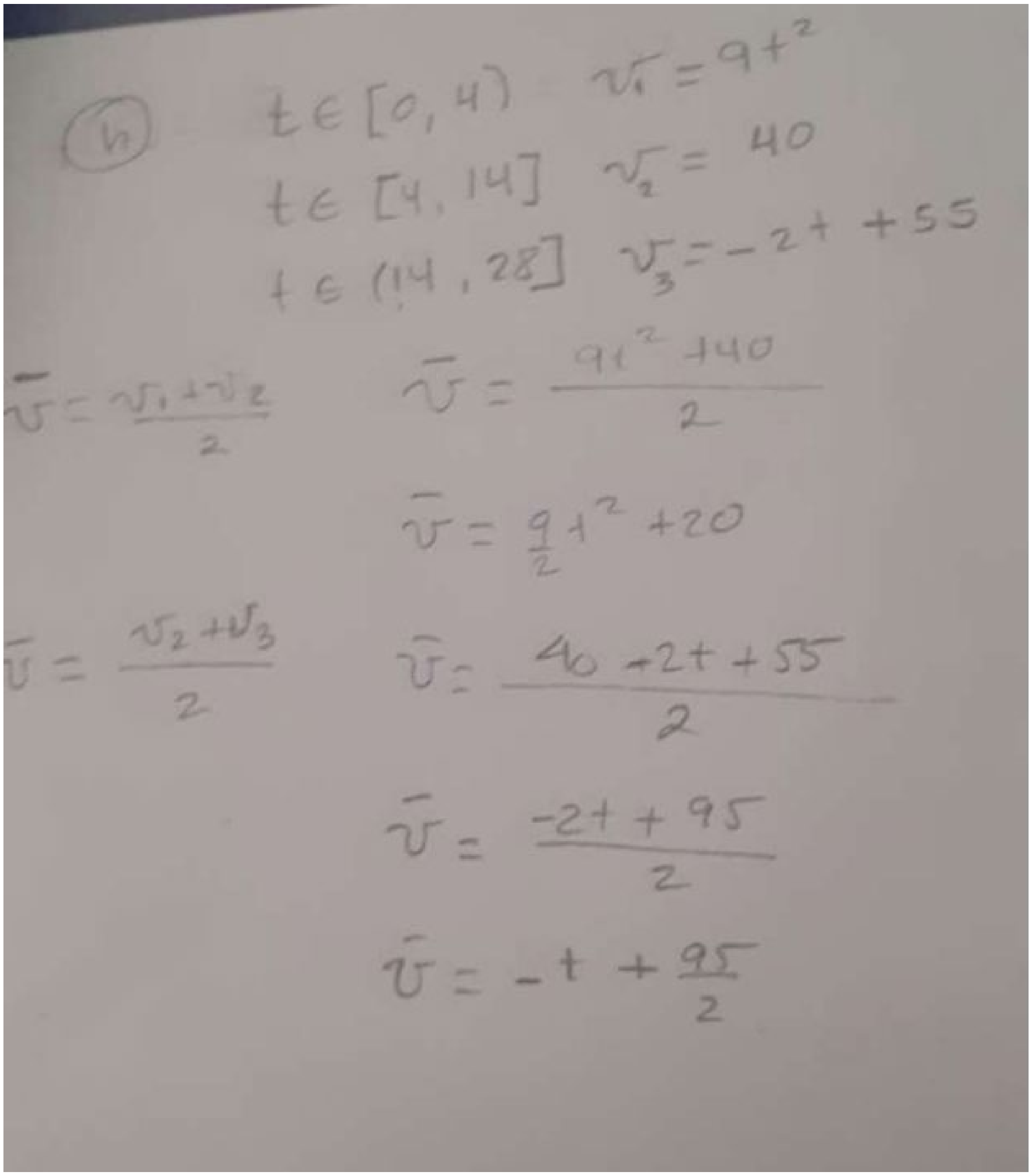
$\Rightarrow \lim_{x \to 14} f(x) = f(14)$

ES CONTÍNUA EN $x = 14$

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Cálculos matemáticos para obtener los puntos de continuidad y discontinuidad del juego mecánico.

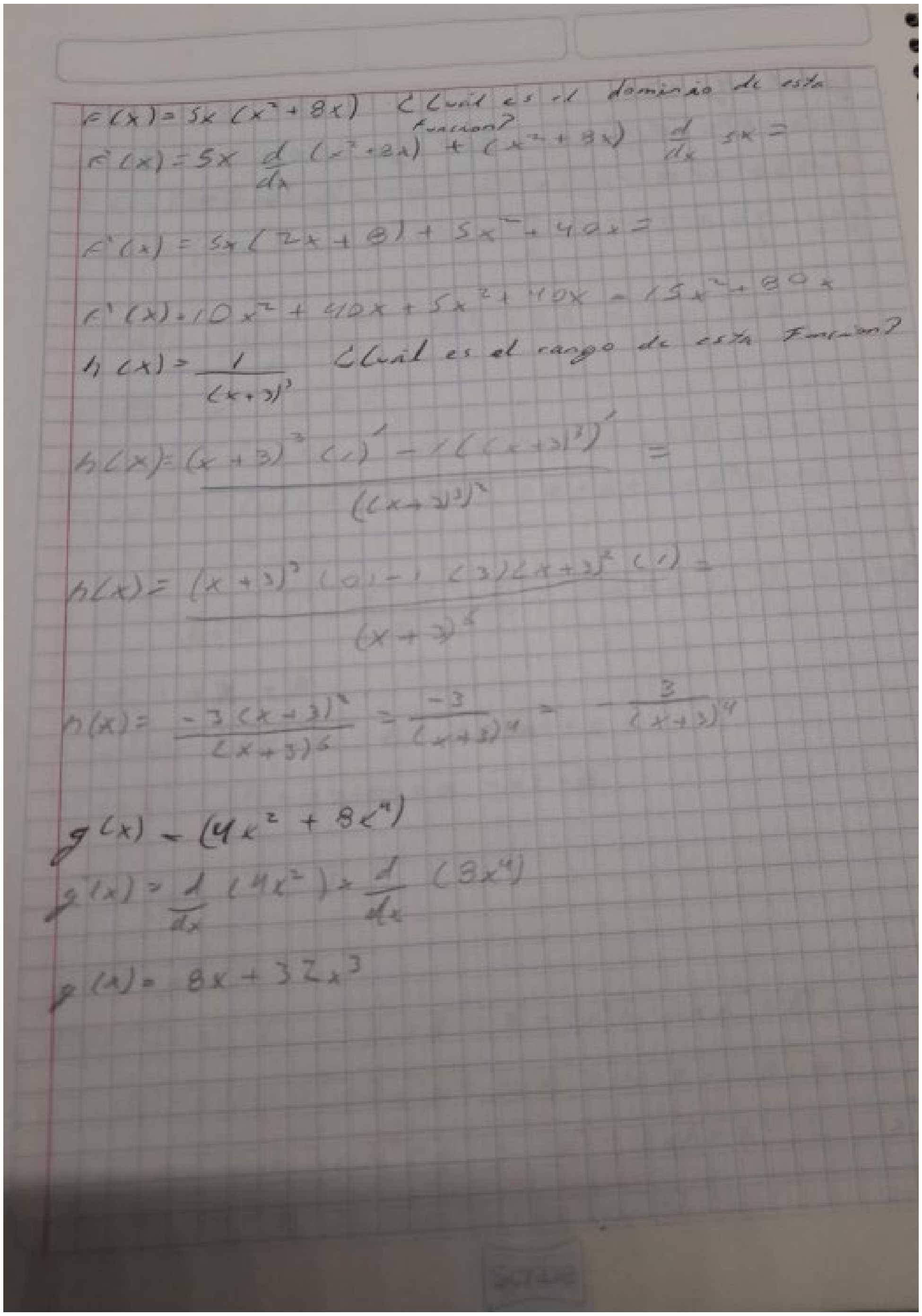


Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Tabulación y gráfica del problema de la segunda parte del trabajo relacionada con el juego mecánico.

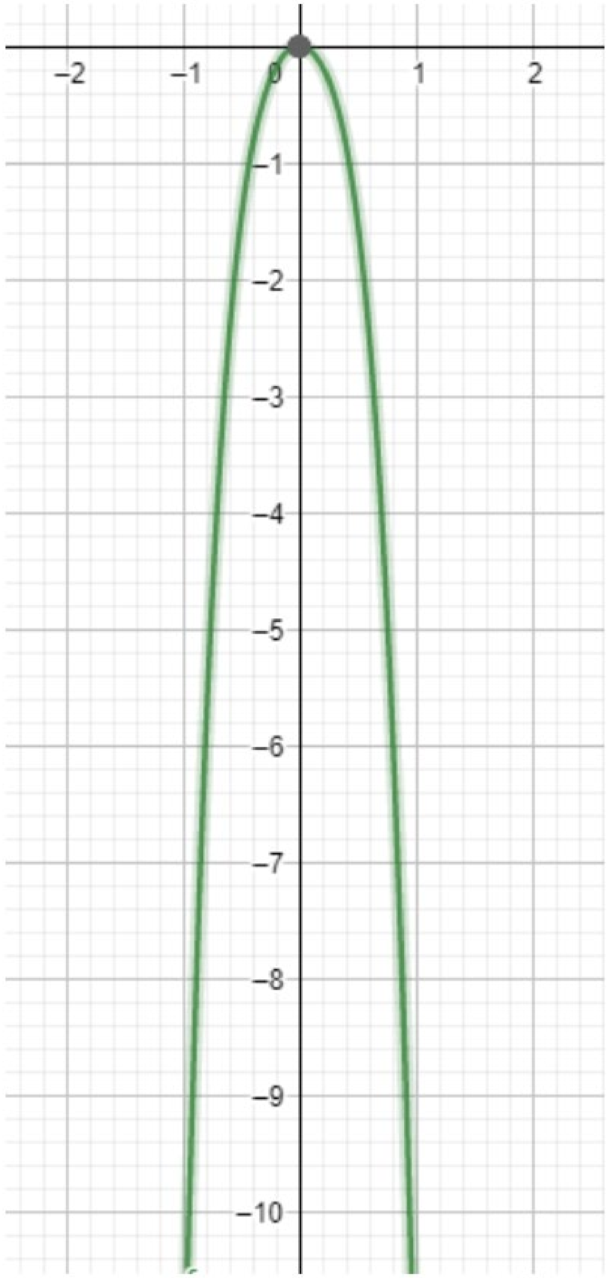


Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Continuación de los cálculos matemáticos del problema del juego mecánico del parque de diversiones.

Evidencia 10. Evidencia del trabajo realizado en el salón de clase.

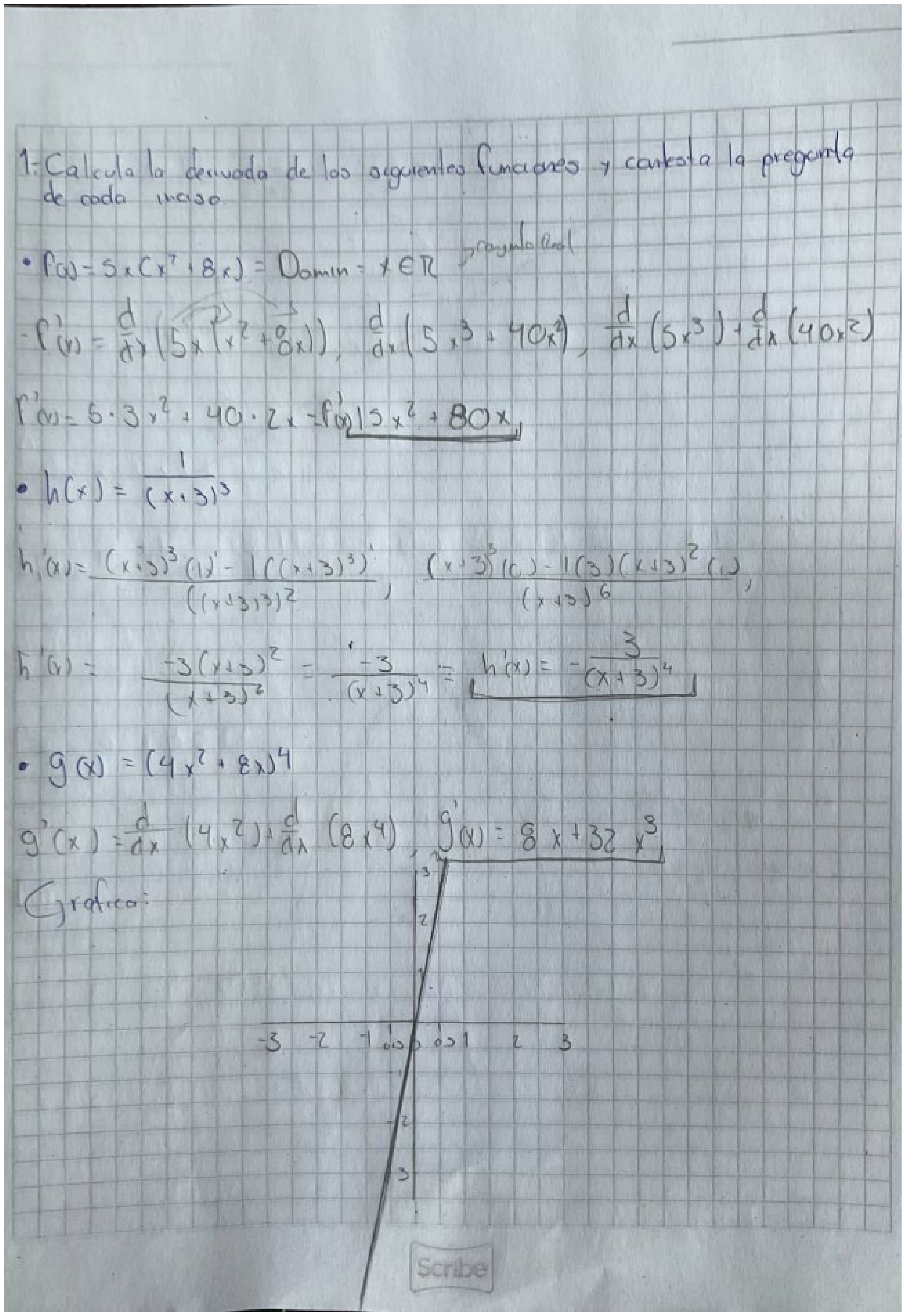


Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución de los tres primeros reactivos de la primera parte del trabajo.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Gráfica representativa de alguna de las funciones de la primera parte de la tesis.

Evidencia 11. Evidencia del trabajo realizado en el salón de clase.


1.- Calcula la derivada de las siguientes funciones y contesta la pregunta de cada inciso.

• $f(x) = 5x(x^2 + 8x)$ = Domin = $x \in \mathbb{R}$ → conjunto Real

$f'(x) = \frac{d}{dx}(5x(x^2 + 8x))$, $\frac{d}{dx}(5x^3 + 40x^2)$, $\frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}(40x^2)$

$f'(x) = 5 \cdot 3x^2 + 40 \cdot 2x = f'(x)\ \underline{15x^2 + 80x}$

• $h(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$

$h'(x) = \frac{(x+3)^3(1)' - 1((x+3)^3)'}{((x+3)^3)^2}$, $\frac{(x+3)^3(0) - 1(3)(x+3)^2(1)}{(x+3)^6}$,

$h'(x) = \frac{-3(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{-3}{(x+3)^4} = \underline{h'(x) = -\frac{3}{(x+3)^4}}$

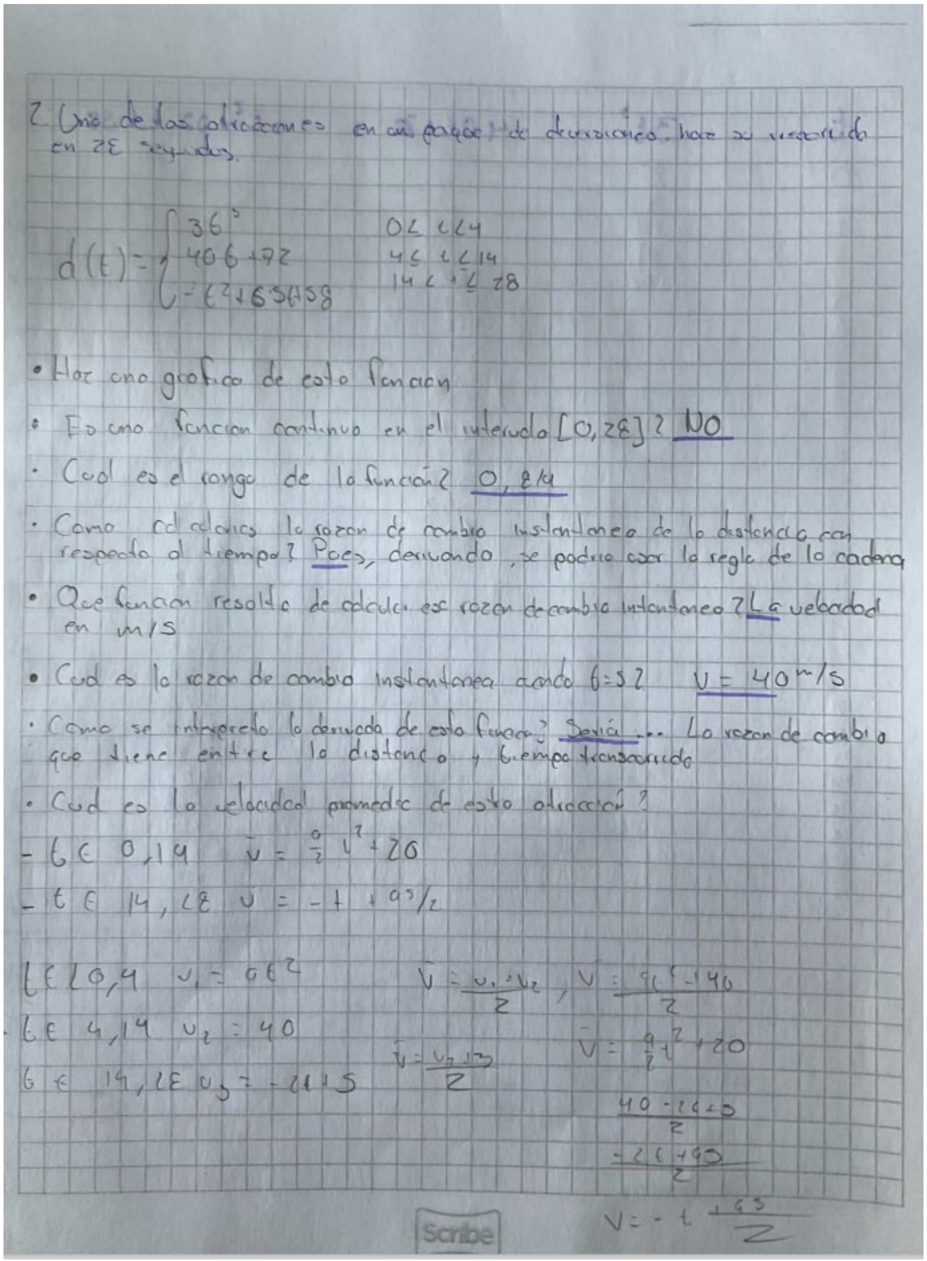
• $g(x) = (4x^2 + 8x)^4$

$g'(x) = \frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(8x^4)$, $\underline{g'(x) = 8x + 32x^3}$

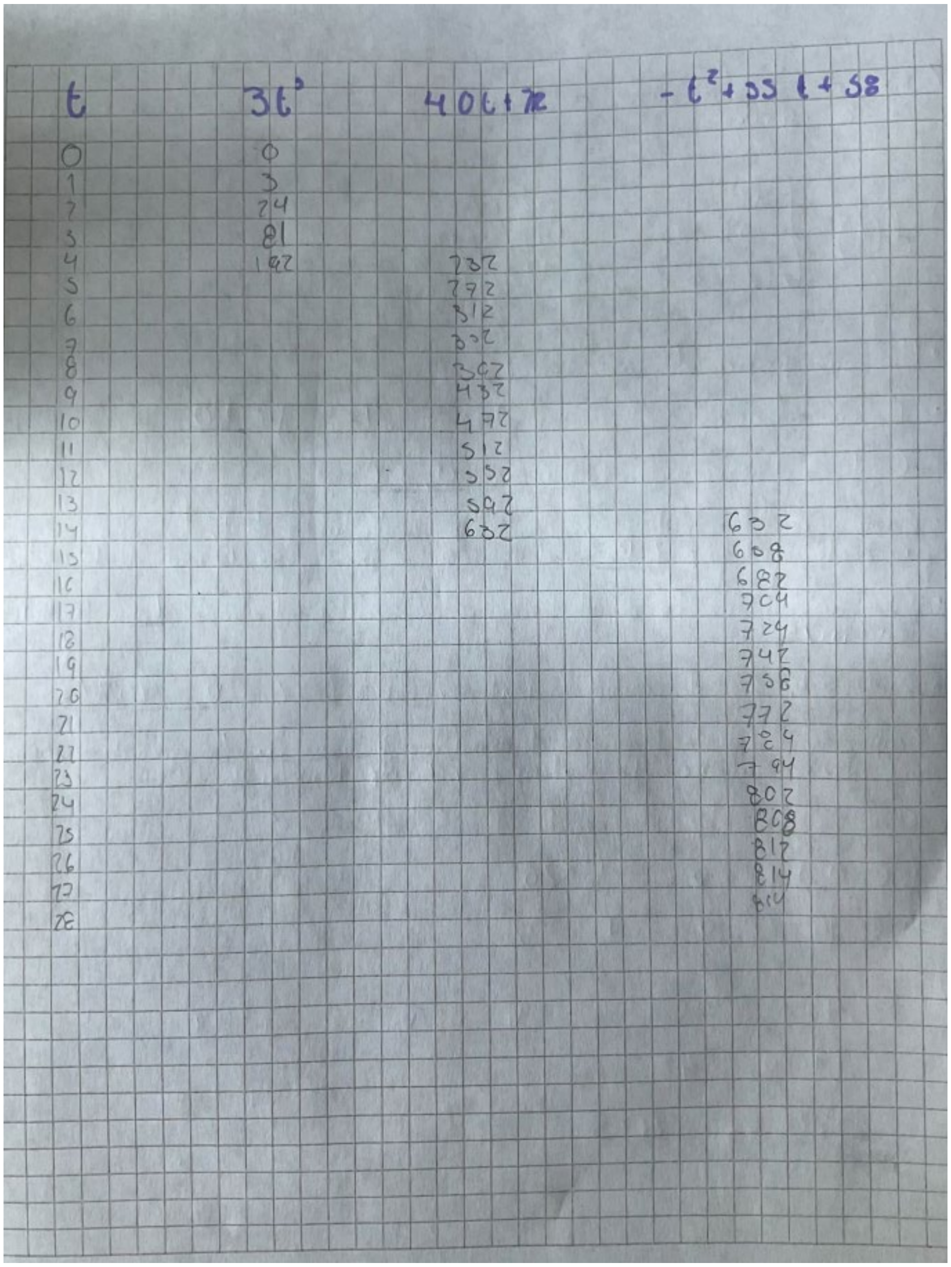
Grafica:

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***

Solución de los tres primeros reactivos de la primera parte del trabajo y gráfica de algunos de los tres primeros ejercicios.

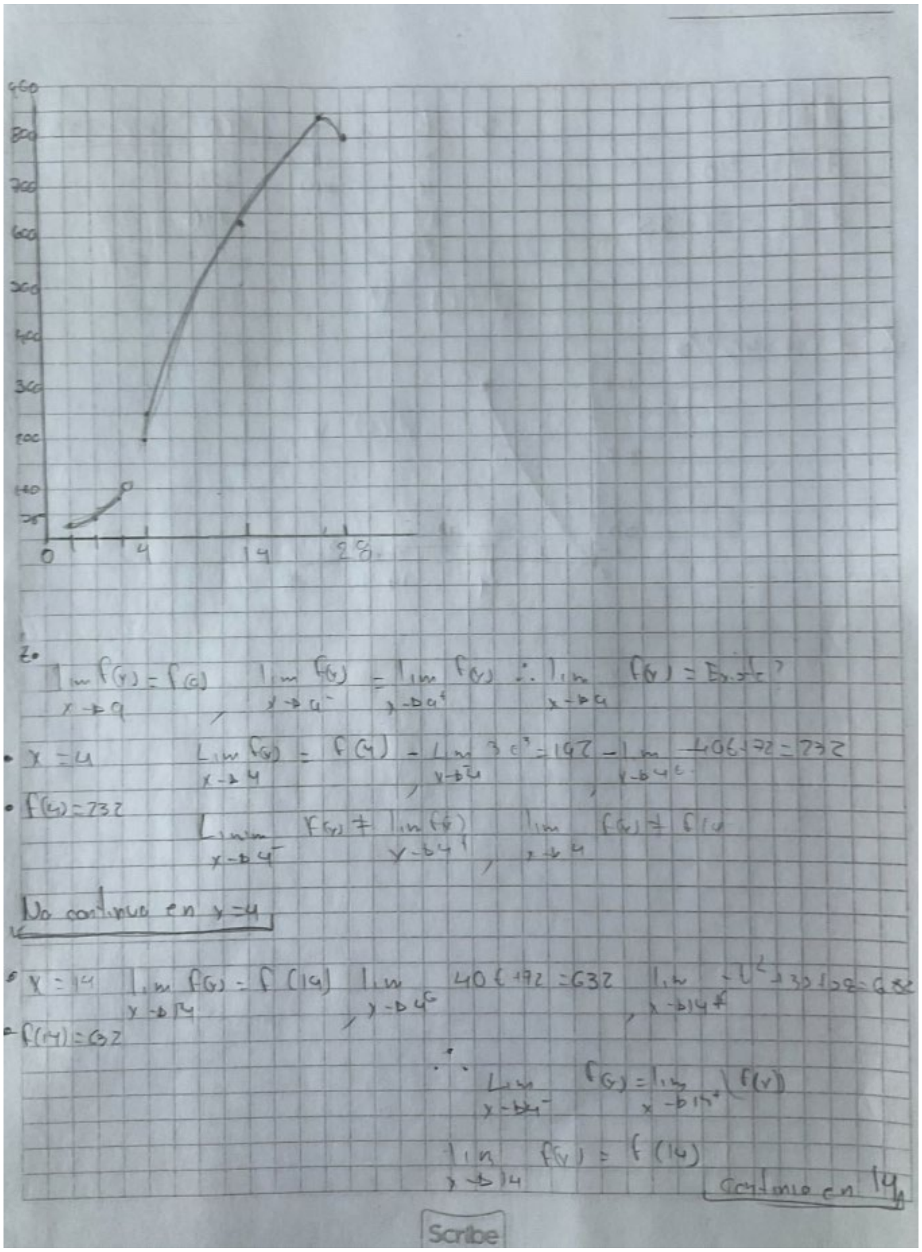


Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Cálculos para obtener la razón de cambio en el ejercicio del parque de diversiones.

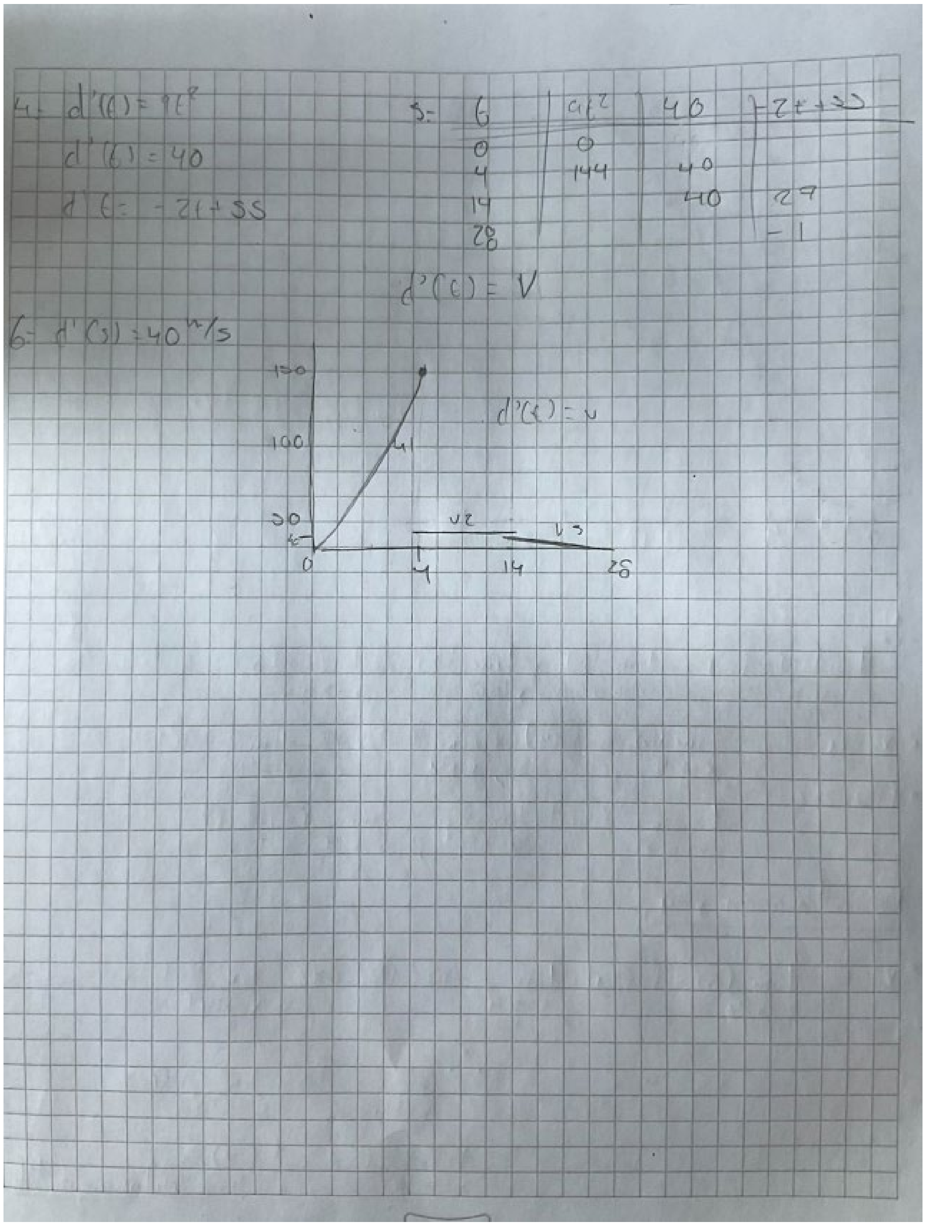


t	$3t^3$	$40t+72$	$-t^2+55t+58$
0	0		
1	3		
2	24		
3	81		
4	192	232	
5		272	
6		312	
7		352	
8		392	
9		432	
10		472	
11		512	
12		552	
13		592	
14		632	632
15			658
16			682
17			704
18			724
19			742
20			758
21			772
22			784
23			794
24			802
25			808
26			812
27			814
28			814

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Tabulación para la realización de la gráfica representativa del juego mecánico.

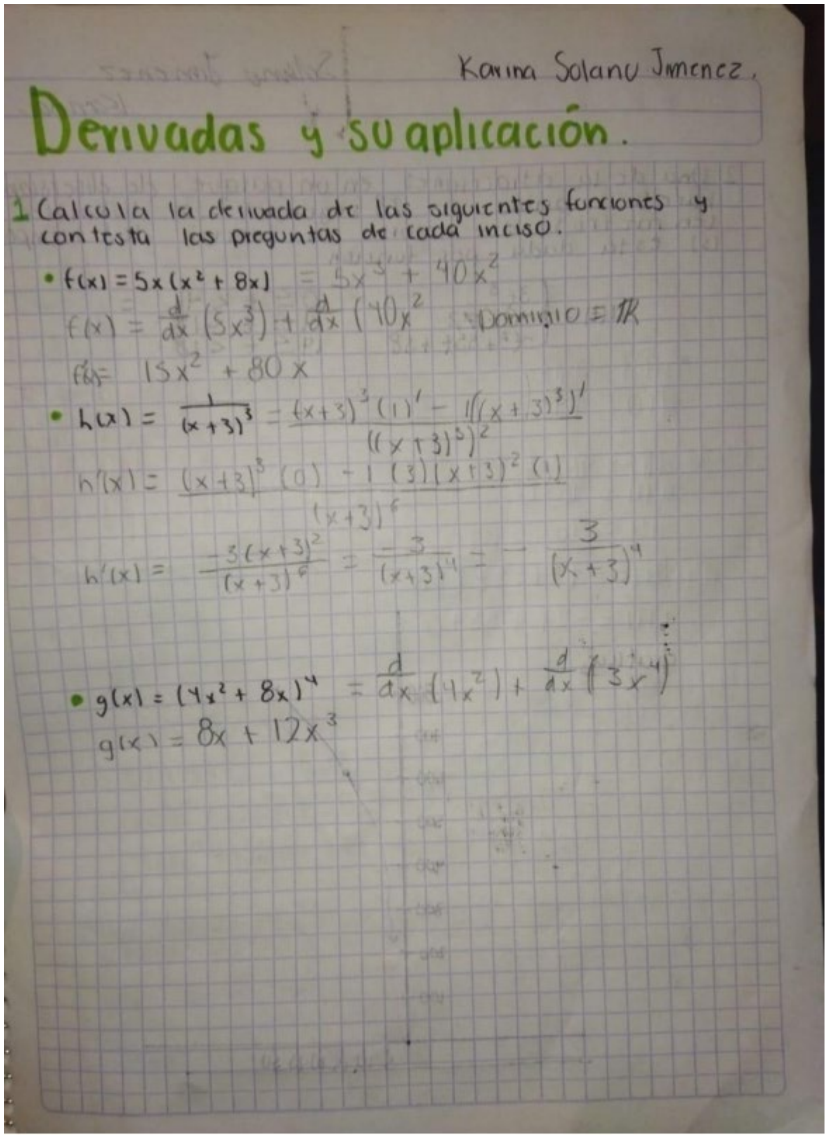


Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Gráfica y cálculo de los puntos de continuidad y discontinuidad de la función del juego mecánico.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del segundo ejercicio del trabajo de investigación y gráfica que representa el recorrido del móvil en el juego mecánico.

Evidencia 12. Evidencia del trabajo realizado en el salón de clase.



Karina Solano Jiménez.

Derivadas y su aplicación.

1 Calcula la derivada de las siguientes funciones y contesta las preguntas de cada inciso.

- $f(x) = 5x(x^2 + 8x) = 5x^3 + 40x^2$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}(40x^2)$ Dominio = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^2 + 80x$

- $h(x) = \frac{1}{(x+3)^3} = \frac{(x+3)^3(1)' - 1((x+3)^3)'}{((x+3)^3)^2}$

$h'(x) = \frac{(x+3)^3(0) - 1(3)(x+3)^2(1)}{(x+3)^6}$

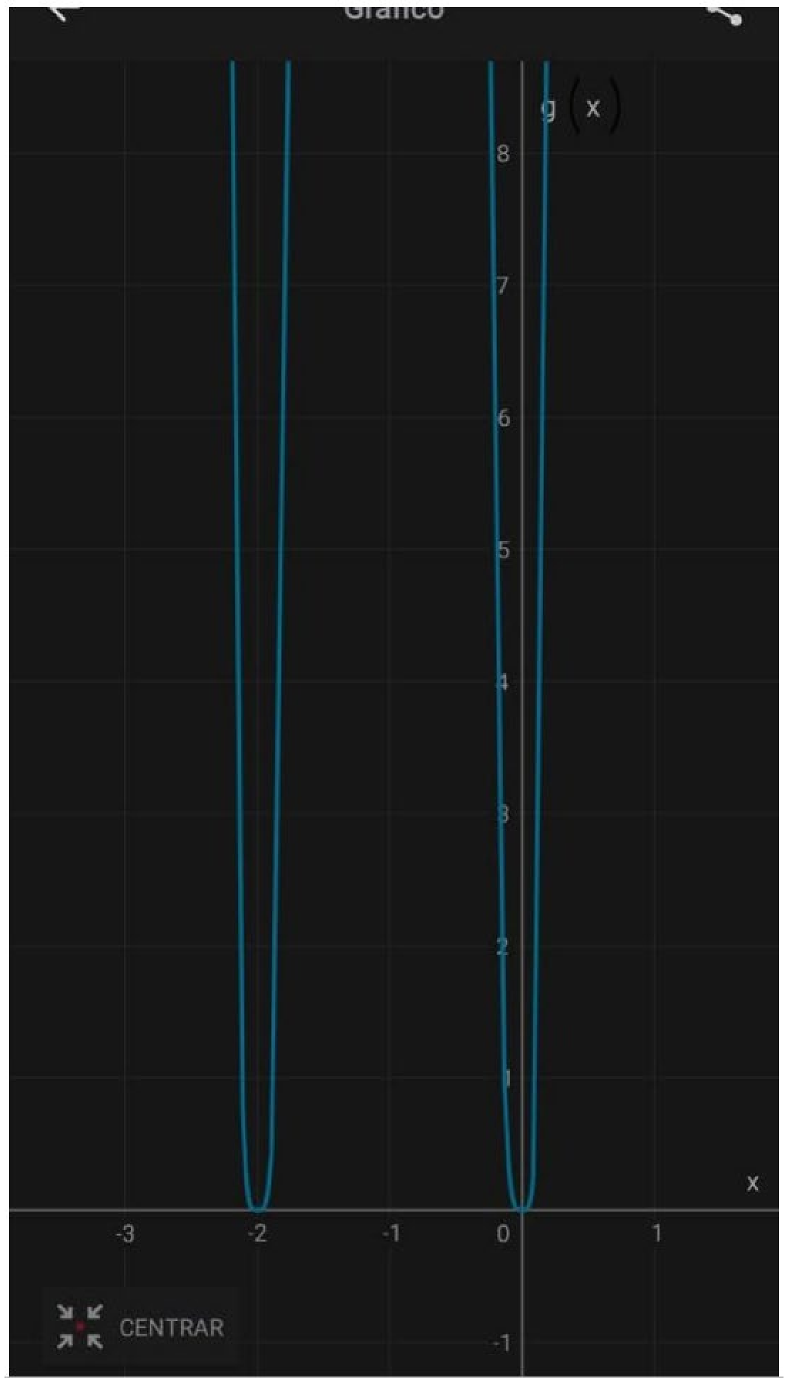
$h'(x) = \frac{-3(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{-3}{(x+3)^4} = -\frac{3}{(x+3)^4}$

- $g(x) = (4x^2 + 8x)^4 = \frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(3x^4)$

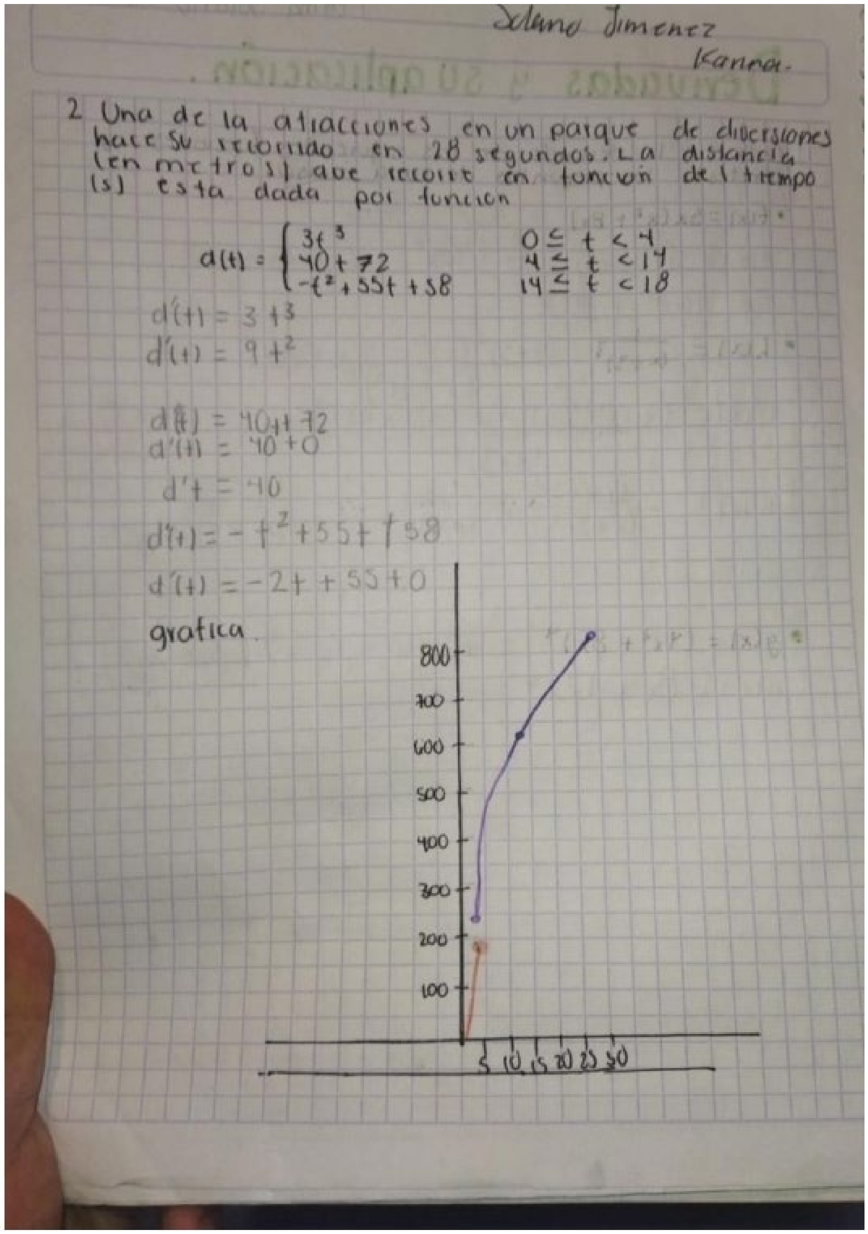
$g'(x) = 8x + 12x^3$

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***

Solución de los tres primeros ejercicios de la primera parte de trabajo de investigación.



Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Gráfica representativa de alguno de los resultados de la primera parte del trabajo.


Solano Jimenez Karina.

2 Una de la atracciones en un parque de diversiones hace su recorrido en 28 segundos. La distancia (en metros) que recorre en función del tiempo (s) esta dada por funcion

$$d(t) = \begin{cases} 3t^3 & 0 \leq t < 4 \\ 40t + 72 & 4 \leq t < 14 \\ -t^2 + 55t + 58 & 14 \leq t < 18 \end{cases}$$

$d'(t) = 3t^3$

$d'(t) = 9t^2$

$d(t) = 40t + 72$

$d'(t) = 40 + 0$

$d't = 40$

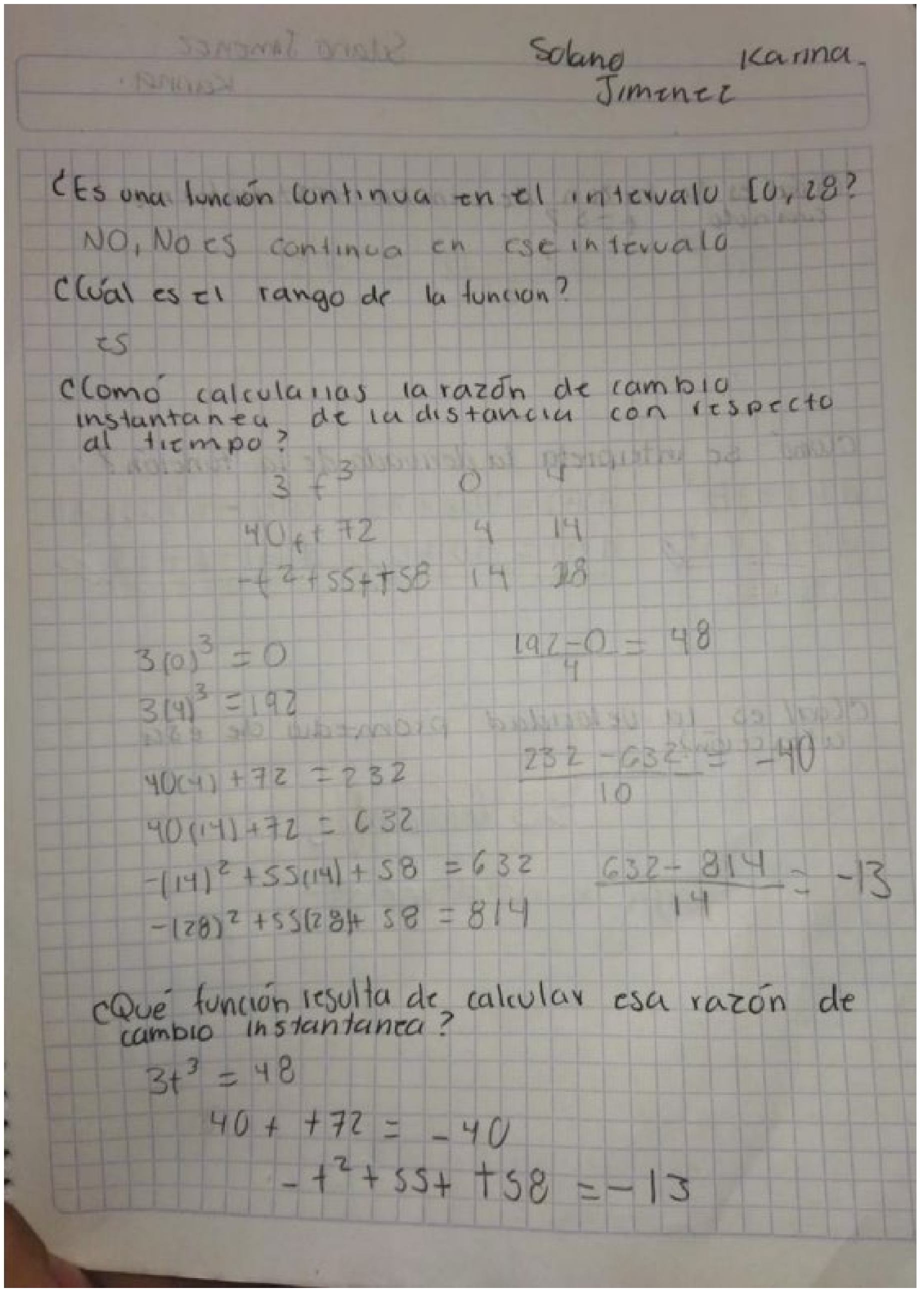
$d(t) = -t^2 + 55t + 58$

$d'(t) = -2t + 55 + 0$

grafica.

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***

Derivación de la función del problema del juego de parque de diversiones y gráfica representativa del evento.


Solano Karina
Jimenez

¿Es una función continua en el intervalo [0, 28?

NO, No es continua en ese intervalo

¿Cuál es el rango de la función?

es

¿Cómo calcularías la razón de cambio instantanea de la distancia con respecto al tiempo?

$3t^3$	0	4
$40t+72$	4	14
$-t^2+55t+58$	14	28

$3(0)^3 = 0$

$3(4)^3 = 192$

$\frac{192-0}{4} = 48$

$40(4)+72 = 232$

$40(14)+72 = 632$

$\frac{232-632}{10} = -40$

$-(14)^2+55(14)+58 = 632$

$-(28)^2+55(28)+58 = 814$

$\frac{632-814}{14} = -13$

¿Qué función resulta de calcular esa razón de cambio instantanea?

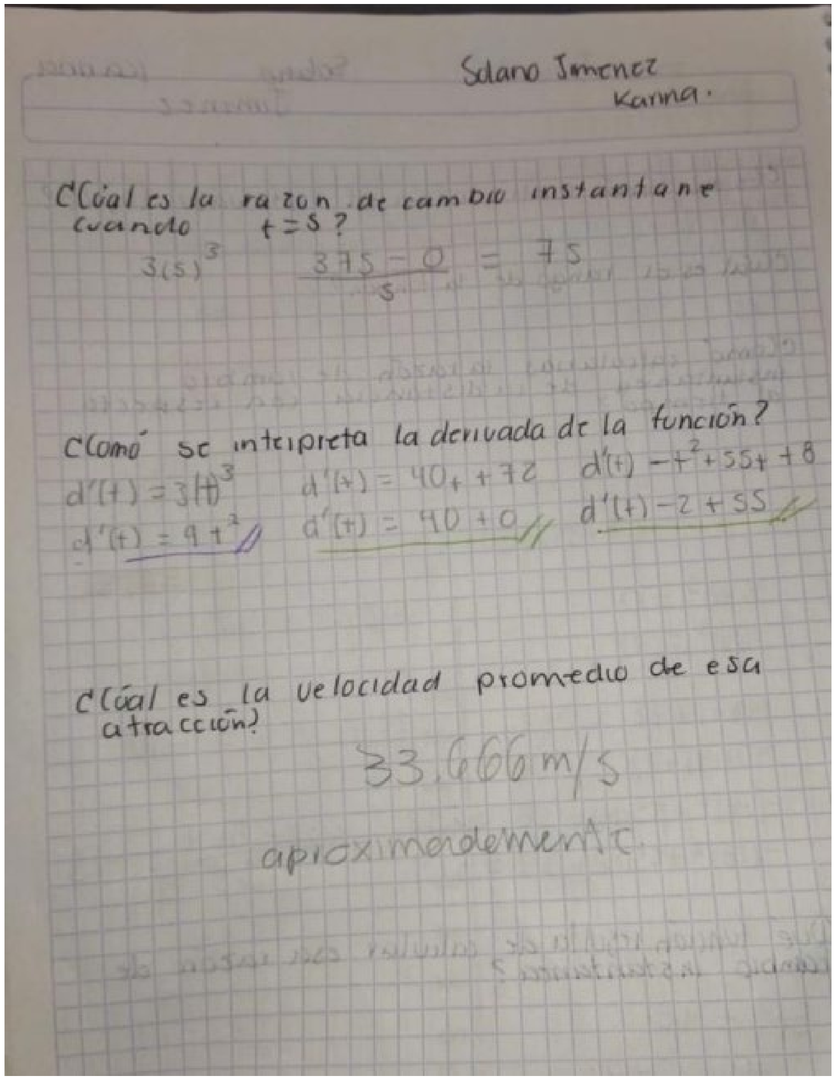
$3t^3 = 48$

$40t+72 = -40$

$-t^2+55t+58 = -13$

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***

Puntos de discontinuidad y continuidad de la función como el cálculo de la razón de cambio en el ejercicio.



Solano Jimenez
Karina.

¿Cuál es la razón de cambio instantane
cuando $t=5$?

$3(5)^3 \quad \frac{375-0}{5} = 75$

¿Cómo se interpreta la derivada de la función?

$d'(t) = 3(t)^3 \quad d'(t) = 40t + 72 \quad d'(t) -t^2+55t+8$

$d'(t) = 9t^2 \quad d'(t) = 40+0 \quad d'(t) -2t+55$

¿Cuál es la velocidad promedio de esa atracción?

33.666 m/s

aproximadamente.

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución del problema del juego mecánico.

CUESTIONARIO DE AUTOPERCEPCION.

Lee y resuelve detalladamente cada una de las siguientes preguntas usando tu autopercepción de los problemas matemáticos que resolviste.

1. Bajo tu autopercepción, clasifica los problemas que resolviste bajo la siguiente escala:

Fácil Medio Difícil

2. En función de tu respuesta en la pregunta número 1 de este cuestionario.

¿Qué fue lo que se te dificulto de los problemas que resolviste?

R: A veces se me olvidan las fórmulas, pero después me acuerdo y las resuelvo

3. Los problemas que resolviste, ¿te ayudaron a entender el concepto de variación o razón de cambio?

R: si se me hizo más fácil de entender y comprender.

4. En función de tu autopercepción, ¿el tema de razón de cambio es de utilidad en la vida real?

R: para mi carrera probablemente, pero no me veo usándolo en la vida cotidiana-

Fuente. ***Elaboración propia del estudiante.***
Solución al cuestionario de autopercepción.

BIBLIOGRAFIA.

Araujo Joao B, Chadwick Clifton B., (1993) "*Tecnología educacional, teorías de la instrucción". España.*

Agüera, P. Ayala, A. De Miguel, R. Fernández, A. Fernández, C. García, A. García, L. Pajuelo, L. Román, L. Soler, M. (30 de Julio de 2021). Importancia del papel y el lápiz en las matemáticas. Aloha mental arithmetic. Recuperado de: https://alohacolombia.co/importancia-del-papel-y-el-lapiz-en-matematicas.

Arenas Enrique, Estrada Juan., (2001) *"Primer foro de la enseñanza de las matemáticas para ingenieros" "El aprendizaje de las matemáticas con base en un ambiente de representaciones dinámicas". México.*

Ausubel David P. (1978) *"Psicología educativa un punto de vista cognoscitivo" México.*

Ausubel David P. (1983) *"Psicología educativa un punto de vista cognoscitivo".* México.

Cantoral Uriza Ricardo., (1998) *"Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional".* México.

Cardona Aguirre Robinson A., (2012) *"Una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio a estudiantes de grado undécimo"*. Bogotá, Colombia.

Cecytbc., (año) "*Antología de cálculo".* Baja California, México.

Díaz Chávez Miguel., (2009) *"Conocimiento de los profesores preuniversitarios de cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada".* México.

Garcia-Garcia José A.; Reding-Bernal A,; López-Alvarenga Juan C. (2013). *"Cálculo del tamaño de la muestra en investigación en educación médica".* Revista en educación matemática 2(8):217-224. Recuperado de: https://www.elsevier.es/es-revista-investigacion-educacion-media-343-pdf-S2007505713727157

Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, M. R. Ariza Nieves, L. M. (2017) "*Identificación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica".* Revista Científica General José María Córdova. Bogotá. Colombia. Educación Vol. 15. Número 20.

Luna González Juan, Ruiz Chávez Oscar, Loera Ochoa Eduardo J. Barrón López José V. Salazar Álvarez María C. (2013) *"Comprensión del concepto de la derivada como razón de cambio".* Ciudad Juárez. México.

Salazar Solórzano L, Víquez García L. (2019) *"Errores recurrentes en exámenes de cálculo diferencial".* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Costa Rica. Vol. 32. Número 2.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998) *"Lineamientos curriculares en matemáticas".* Bogotá, Colombia.

Montero Lagos P. Devia Saavedra E. Gonzáles Guajardo H. Rojas Puentes C. (1992) *"Autopercepciones generales y específicas para aprender matemática: Una nueva mirada a una controversia"* Revista de educación matemática. Diciembre 1992, P. 30 – 41. Recuperado de: www.revista-de-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol4/vol4-3/vol4-3-3.pdf

Padilla Mora E, Quesada Fernández C. Ortiz Hernández L. A. (2019) *"Principales errores en el aprendizaje del cálculo en estudiantes de formación inicial en la educación a distancia".* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Costa Rica. Vol. 32. Número 1.

Rendon Mesa Paula A., (2009) *"Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la enseñanza para la comprensión".* Medellín.

García M.; Llinares S.; Sánchez Matamoros G. (2008) *"La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de las matemáticas".* Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. México.

Engler A.; Müller D.; Müller.; Vrancken S. (2008) "*Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados".* Argentina. Santa Fe.

Mochón Simón., (1994) *"Quiero entender el cálculo".* México.

Schwartz Abraham., (1967) *"Calculus and Analytic Geometry".* New York. EE.UU.

Socas Robayna Martin. M. (2007). "*Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico"*. INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM

Vidal Rojas Oscar E., *"interpretación de la noción de la derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos*". Bogotá. Colombia. (2012). Estudio de casos: http://ec.europa.eu/europeaid/avluation/methodology/examples/too_cas_res_es.pdf.

Villa Ochoa Jhony A. (2010) *"La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren".* Medellín.

Wenzelburger E. *"Introducción a los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral - una propuesta didáctica".* Revista de educación matemática, 5(5), 93 – 123. Recuperado de:

http://www.revista – educación – matemática. Org.mx/descargas/vol. 5/vol. 5 – 3/ vol. 5 – 3 – 6. Pdf.

https://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/t/riid4/unidad2/proyectodeinvestigacion/objetivos.