



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Ciclos hamiltonianos en digráficas  
 $k$ -cuasi-transitivas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

MANUEL ALEJANDRO JUÁREZ CAMACHO



DIRECTOR DE TESIS:  
DR. CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ

CD. MX. 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## 1. Datos del alumno

Apellido paterno	Juárez
Apellido materno	Camacho
Nombre(s)	Manuel Alejandro
Teléfono	55 39 81 49 26
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Posgrado	Maestría en Ciencias Matemáticas
Número de cuenta	306317794

## 2. Datos del tutor

Grado	Dr.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz

## 3. Datos del sinodal 1

Grado	Dra.
Nombre(s)	Amanda
Apellido paterno	Montejano
Apellido materno	Cantoral

## 4. Datos del sinodal 2

Grado	Dra.
Nombre(s)	Ana Paulina
Apellido paterno	Figuroa
Apellido materno	Gutiérrez

## 5. Datos del sinodal 3

Grado	Dr.
Nombre(s)	Juan José
Apellido paterno	Montellano
Apellido materno	Ballesteros

## 6. Datos del sinodal 4

Grado	Dra.
Nombre(s)	María del Rocío
Apellido paterno	Sánchez
Apellido materno	López

## 7. Datos del trabajo escrito

Título	Ciclos hamiltonianos en digráficas $k$ -cuasi-transitivas
Número de páginas	30 p.
Año	2022



*Para mi mamá. Guiaste cada uno de mis logros.*



# Agradecimientos

A todos mis profesores, en particular a Amanda y a César por la gran confianza, paciencia, motivación y apoyo que depositaron en mí.

A todos mis amigos, en particular a Lalo y a Emiliano, sigamos pasando buenos momentos juntos.





# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>1. Definiciones generales</b>	<b>1</b>
1.1. Digráficas, subdigráficas y adyacencia . . . . .	1
1.2. Recorridos y distancias . . . . .	2
1.3. Torneos y generalizaciones . . . . .	3
<b>2. Introducción</b>	<b>5</b>
2.1. Hamiltonicidad . . . . .	5
2.2. Planteamiento del problema . . . . .	7
<b>3. Resultados previos</b>	<b>9</b>
3.1. Resultados clásicos . . . . .	9
3.2. Digráficas $k$ -cuasi-transitivas . . . . .	10
<b>4. Resultados nuevos</b>	<b>13</b>
4.1. Preliminares . . . . .	13
4.2. Resultado Principal . . . . .	18
<b>5. Conclusiones</b>	<b>25</b>
5.1. Conclusiones y futuras líneas de trabajo . . . . .	25
<b>Bibliografía</b>	<b>29</b>



# Capítulo 1

## Definiciones generales

Aún conociendo las bases, es posible que el lector de esta tesis no conozca algún término o notación, y por ese motivo se incluye esta sección. Sin embargo, cualquiera que lo crea pertinente puede saltar inmediatamente al siguiente capítulo y usar este únicamente para consulta. Para cualquier duda también es posible recurrir a [4].

### 1.1. Digráficas, subdigráficas y adyacencia

Una **digráfica**  $D$  es una pareja ordenada  $D = (V(D), A(D))$  donde  $V(D)$  es un conjunto, que para nuestros fines será finito y no vacío, llamado el **conjunto de los vértices** de  $D$ , y  $A(D)$  es un subconjunto de  $(V(D) \times V(D)) \setminus \{(v, v) : v \in V(D)\}$  llamado el **conjunto de las flechas** de  $D$ . Así, todo elemento de  $V(D)$  es un **vértice** y todo elemento de  $A(D)$  una **flecha**. A la cardinalidad del conjunto  $V(D)$  se le llama el **orden** de  $D$  y a la cardinalidad de  $A(D)$  se le conoce como el **tamaño** de  $D$ .

Si  $(u, v) \in A(D)$ , diremos que hay una flecha de  $u$  hacia  $v$  y será denotado por  $u \rightarrow v$ . También nos referiremos a la flecha  $(u, v)$  como  $uv$ . Si  $u \rightarrow v$  o  $v \rightarrow u$ , entonces diremos que  $u$  y  $v$  son **adyacentes**. Usaremos  $u \nrightarrow v$  para indicar que  $uv \notin A(D)$ . Si  $X$  y  $Y$  son subconjuntos de  $V(D)$  denotaremos por  $X \rightarrow Y$  el hecho de que para cualesquiera  $x \in X$  y  $y \in Y$  se tiene que  $x \rightarrow y$ . Si además se tiene que no existe flecha alguna de un vértice de  $Y$  a uno de  $X$  usaremos la notación  $X \mapsto Y$ . Cuando  $X = \{v\}$  escribiremos  $v \rightarrow Y$  en lugar de  $\{v\} \rightarrow Y$ , análogamente con los demás casos semejantes.

Supongamos que  $D$  y  $H$  son digráficas tales que  $V(H) \subseteq V(D)$  y  $A(H) \subseteq A(D)$ , en este caso decimos que  $H$  es una **subdigráfica** de  $D$ . Si además para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  en  $V(H)$  se tiene que  $uv \in A(H)$  si y sólo si

$uv \in A(D)$ , entonces la subdigráfica  $H$  es llamada **subdigráfica inducida**. Es claro que una subdigráfica inducida queda totalmente determinada por la digráfica que la contiene y por su conjunto de vértices. Por lo anterior, si  $H$  es una subdigráfica inducida de  $D$  con  $S = V(H)$  usamos la notación  $H = D[S]$  y diremos que  $H$  es la subdigráfica de  $D$  inducida por  $S$ . Si  $B \subset V(D)$  denotaremos por  $D - B$  a la subdigráfica inducida por  $V(D) - B$ .

Dado un vértice  $v$ , definimos la **exvecindad** de  $v$ , denotado por  $N^+(v)$ , como el conjunto de todos los vértices  $w \in V(D)$  tal que  $vw$  es una flecha de  $D$ . A la cardinalidad del conjunto  $N^+(v)$  la llamamos **exgrado** de  $v$  y es denotada por  $d^+(v)$ . Análogamente  $N^-(v)$ , la **invecindad** de  $v$ , es el conjunto de todos los vértices  $w \in V(D)$  tal que  $wv$  es una flecha de  $D$ , y su cardinalidad es llamada **ingrado** de  $v$ , denotada por  $d^-(v)$ . El **exgrado máximo** de  $D$  es el número  $\Delta_D^+ = \max \{d^+(v) : v \in V(D)\}$  y el **exgrado mínimo** de  $D$  es el número  $\delta_D^+ = \min \{d^+(v) : v \in V(D)\}$ . Análogamente se definen el **ingrado máximo** y el **ingrado mínimo** de  $D$  denotados  $\Delta_D^-$  y  $\delta_D^-$ , respectivamente.

## 1.2. Recorridos y distancias

Un **camino dirigido**  $C$  en una digráfica  $D$  es una sucesión finita de vértices  $(v_0, \dots, v_n)$  tal que  $v_i \rightarrow v_{i+1}$  para todo entero  $i$ , con  $0 \leq i < n$ . Para abreviar omitiremos la palabra *dirigido*. Si  $v_0 = u$  y  $v_n = v$  diremos que  $C$  es un **uv-camino** y que  $u$  y  $v$  son los **extremos** de  $C$ . Si existe un  $uv$ -camino diremos que  $u$  **alcanza** a  $v$ . La **longitud** de  $C$ , denotada por  $\ell(C)$ , es definida como el número  $n$ . Para  $i \leq j$ , también definimos el camino  $v_i C v_j$  como la subsucesión  $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$  del camino  $C$ ; si  $i = 0$  o  $j = n$  podemos escribir únicamente  $C v_j$  o  $v_i C$ , respectivamente.

Si  $C_1 = (v_0, \dots, v_n)$  y  $C_2 = (u_0, \dots, u_m)$  son dos caminos tales que  $v_n = u_0$ , definimos a la concatenación  $C_1 C_2$  como el camino  $C = (v_0, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m)$ . Haremos uso frecuente de construcciones de este tipo de caminos por lo que, para ganar claridad, nos permitiremos escribir expresiones como  $C_1 v_n u_0 C_2$ ,  $v_0 C_1 v_n u_0 C_2 u_m$  o combinaciones de estas notaciones aún cuando sea redundante. Para facilitar la notación, escribiremos  $C_1 u_1$  en lugar de  $C_1(u_0, u_1)$ .

Una **trayectoria dirigida**  $T$  es un camino en el que no se repiten vértices. Al igual que en la definición anterior, omitiremos la palabra *dirigida*. Si  $T$  es un  $uv$ -camino, que también es trayectoria, diremos que es una **uv-trayectoria**. Ya que una trayectoria es un caso particular de camino, las notaciones y definiciones anteriores sobre caminos también son válidas para trayectorias.

Una  $uv$ -trayectoria  $T$  de una digráfica  $D$  tal que no existe, en dicha digráfica, una  $uv$ -trayectoria de longitud estrictamente menor a  $T$  es una **uv-trayectoria**

**de longitud mínima.** La **distancia** de  $u$  hacia  $v$ , denotada por  $d(u, v)$ , es definida como la longitud de una  $uv$ -trayectoria de longitud mínima. Si no existe  $uv$ -trayectoria alguna diremos que  $d(u, v) = \infty$ . Cabe aclarar que no estamos hablando de una distancia en el sentido matemático usual, pues no necesariamente se cumple que  $d(u, v) = d(v, u)$ . El **diámetro** de una digráfica es la máxima de las distancias entre sus vértices y cualquier trayectoria que cumpla dicha distancia es una **trayectoria de longitud máxima**.

Decimos que  $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  es un **ciclo dirigido** si es un camino tal que todos los vértices son distintos excepto  $v_0$  y  $v_n$ ; es decir,  $v_0 = v_n$ . Para abreviar omitiremos la palabra dirigido.

Dada una digráfica  $D$ , para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  en ella podemos definir la relación  $\sim$  tal que  $u \sim v$  si y sólo si existe una  $uv$ -trayectoria y una  $vu$ -trayectoria en  $D$ . Es conocido que  $\sim$  es una relación de equivalencia y por lo tanto induce una partición  $\{C_1, \dots, C_s\}$  de  $V(D)$ . Cada subgráfica inducida por un elemento de tal partición recibe el nombre de **componente fuertemente conexas** (o componente fuerte para abreviar). Claramente en una componente fuerte cada par de vértices se alcanzan entre sí. Si la partición consta de un único elemento, entonces diremos que  $D$  es una **digráfica fuertemente conexas** (o fuerte). Se dice que  $C$  es una **componente fuerte inicial (final)** si para toda  $uv$ -trayectoria ( $vu$ -trayectoria) con  $v \in V(C)$  se tiene que  $u \in V(C)$ .

Un  **$k$ -rey** en una digráfica es un vértice  $v$  tal que  $d(v, u) \leq k$  para todo  $u \in V(D)$ .

Los siguientes términos se explican y definen en la introducción como parte del desarrollo del tema, sin embargo aquí ayudarán para una rápida consulta.

Una **trayectoria hamiltoniana** de una digráfica  $D$  es, como su nombre lo indica, una trayectoria de  $D$ , con la particularidad de que pasa por todos los vértices de  $D$ . Análogamente se define un **ciclo hamiltoniano**. Si una digráfica posee una trayectoria hamiltoniana diremos que es **trazable** y si tiene un ciclo hamiltoniano diremos que es **hamiltoniana**. Finalmente, una digráfica es **pancíclica** si tiene ciclos de todas las longitudes entre tres y el orden de  $D$ .

### 1.3. Torneos y generalizaciones

Un **torneo** es una digráfica en la cuál hay exactamente una flecha entre cada par de vértices. Por otra parte, una digráfica es **semicompleta** si entre cualquier par de vértices hay al menos una flecha, pudiendo tener flechas en ambas direcciones entre un mismo par de vértices. Claramente todo torneo es una digráfica semicompleta.

Una propiedad que los torneos cumplen trivialmente es que para cualquier trayectoria de longitud dos se tiene que los extremos son adyacentes. Es justamente esta propiedad la que define a la siguiente generalización: decimos que una digráfica  $D$  es **cuasi-transitiva** si para todo  $x, y, z \in V(D)$  tal que  $x \rightarrow y$  y  $y \rightarrow z$  se tiene que  $x \rightarrow z$  o  $z \rightarrow x$ . En [6] J. Bang-Jensen y J. Huang presentaron uno de los principales resultados sobre digráficas cuasi-transitivas, una caracterización recursiva de las mismas.

Análogamente, si un torneo tiene una trayectoria de longitud  $k$  se tiene que los extremos son adyacentes. Esta idea tan natural fue recientemente introducida y estudiada por Hortensia Galeana Sánchez y César Hernández Cruz en [13] dando lugar al siguiente concepto: una digráfica  $D$  es  **$k$ -cuasi-transitiva** si para cualquier  $uv$ -trayectoria de longitud  $k$  en  $D$  se tiene que los extremos son adyacentes. Bajo esta definición se tiene que las digráficas cuasi-transitivas son las mismas que las 2-cuasi-transitivas.

# Capítulo 2

## Introducción

### 2.1. Hamiltonicidad

Una de las tantas contribuciones del matemático irlandés William Rowan Hamilton fue un sencillo juego que se volvería un problema clásico en la Teoría de Gráficas. El juego se desarrolla por turnos, de forma competitiva entre dos jugadores y, de manera muy simplificada, consiste en encontrar una sucesión de vértices adyacentes en un dodecaedro que los recorra a todos sin repetir, salvo el primer vértice que también debe de ser el último.

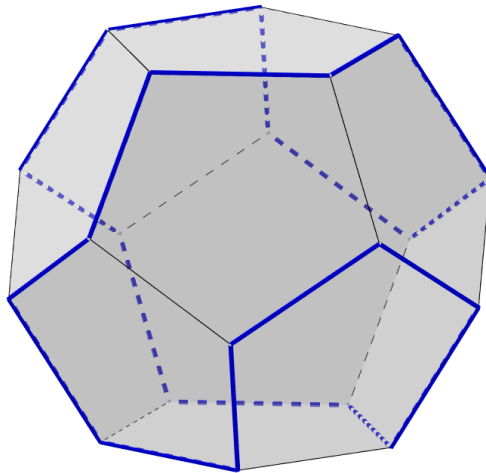


Figura 2.1: Recorrido en el juego de Hamilton.

En Teoría de Gráficas la representación más común y natural de un dodecaedro consiste en tomar los vértices y aristas del dodecaedro como los



respectivos conjuntos de vértices y aristas de una gráfica. Esta representación es perfecta para trasladar el juego de Hamilton a la Teoría de Gráficas pues se traduce simplemente en encontrar, en la gráfica descrita del dodecaedro o en cualquier otra gráfica, un ciclo que pase por todos los vértices. Si una gráfica posee dicho ciclo se dice que es *hamiltoniana*. El problema de decidir si una gráfica es hamiltoniana o no, es un problema NP-completo, al igual que el problema análogo en digráficas: decidir si una digráfica es hamiltoniana; es decir, si tiene o no un ciclo dirigido que pase por todos los vértices.

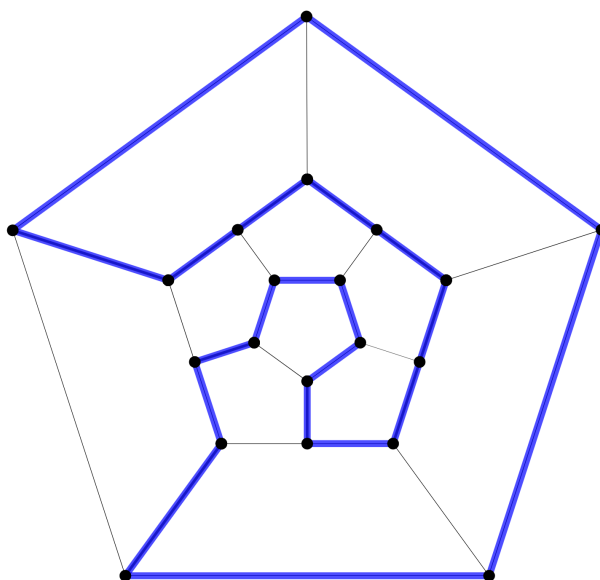


Figura 2.2: Ciclo hamiltoniano en la gráfica del dodecaedro.

Como mencionamos en la sección anterior, únicamente estudiaremos digráficas y el único tipo de caminos, trayectorias y ciclos que usaremos serán dirigidos por lo que omitiremos la palabra «dirigidos» al hablar de ellos.

Un problema ampliamente estudiado en Teoría de gráficas es decidir si en una familia de digráficas cada elemento es o no hamiltoniano. Aquí, el término *familia* se refiere a un conjunto de elementos descritos en su totalidad por una o varias propiedades; es decir, dicho problema se traduce en decidir si un conjunto de propiedades son una condición suficiente para asegurar que una digráfica es hamiltoniana.

Si una digráfica tiene una trayectoria que pase por todos los vértices se dice que es *trazable* o que tiene una *trayectoria hamiltoniana*, claramente ser hamiltoniana implica ser trazable. Además, si una digráfica tiene ciclos de todos los tamaños entre 3 y el número total de vértices se dice que es *pancíclica*,

claramente toda digráfica pancíclica también es hamiltoniana.

## 2.2. Planteamiento del problema

Un *torneo* es una digráfica en la que entre cada par de vértices hay exactamente una flecha. La familia de los torneos es quizás la familia de digráficas más estudiada pues cumple una enorme cantidad de propiedades e incluso varias conjeturas sobre digráficas han podido ser probadas únicamente en torneos. Algunos resultados en torneos sobre los tipos de problemas mencionados anteriormente son:

**Teorema 2.1.** (Rédei [18]) *Todo torneo es trazable.*

**Teorema 2.2.** (Camion [7]) *Todo torneo fuerte es hamiltoniano.*

**Teorema 2.3.** (Harary, Moser [10]) *Todo torneo fuerte es pancíclico.*

Es fácil notar que una digráfica que no es *fuerte* tiene al menos dos vértices que no se alcanzan entre sí y entonces no podría ser hamiltoniana. Por lo anterior ser *fuerte* es una propiedad necesaria o inherente en las familias de digráficas en las que se pretenda estudiar problemas hamiltonianos o pancíclicos, lo cual se refleja en los teoremas anteriores.

En esta tesis abordaremos cómo se trasladan estos tres teoremas a una generalización de los torneos, las digráficas *k-cuasi-transitivas*.<sup>1</sup> Comenzaremos por el análisis del artículo *Hamiltonian paths in k-quasi-transitive digraphs* [22] en donde las autoras Ruixia Wang y Hui Zhang generalizan el Teorema 2.1 presentando el siguiente resultado:

**Teorema 2.4.** ([22]) *Sea  $k$  un entero par,  $k \geq 4$ , y  $D$  una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva fuertemente conexa. Si  $D$  tiene diámetro al menos  $k + 2$ , entonces  $D$  tiene una trayectoria hamiltoniana.*

El hecho de que en la familia de las digráficas *k-cuasi-transitivas* cada miembro posea una trayectoria hamiltoniana es una característica relevante, sin embargo la intención de Wang y Zhang en [22] era demostrar que cada miembro posee un ciclo hamiltoniano, lo cual dejan como problema abierto:

**Problema 2.5.** *¿Toda digráfica  $k$ -cuasi-transitiva con  $k$  par, fuerte y con diámetro al menos  $k + 2$  es hamiltoniana?*

---

<sup>1</sup>Decimos que una digráfica  $D$  es *k-cuasi-transitiva*, con  $k \geq 2$  un entero, si para toda *uv-trayectoria* de longitud  $k$  en  $D$  se cumple que hay una flecha entre  $u$  y  $v$ .

El objetivo inicial de esta tesis era dar respuesta afirmativa a esta pregunta a través de una generalización del Teorema 2.2, y dicho objetivo fue cumplido exitosamente, pero a través de una generalización del Teorema 2.3; es decir, damos respuesta afirmativa a dicha pregunta y presentamos un resultado más fuerte que el buscado por Ruixia Wang y Hui Zhang. Cabe mencionar que la demostración de dicho resultado es constructiva por lo cual también estudiaremos la complejidad del algoritmo arrojado.

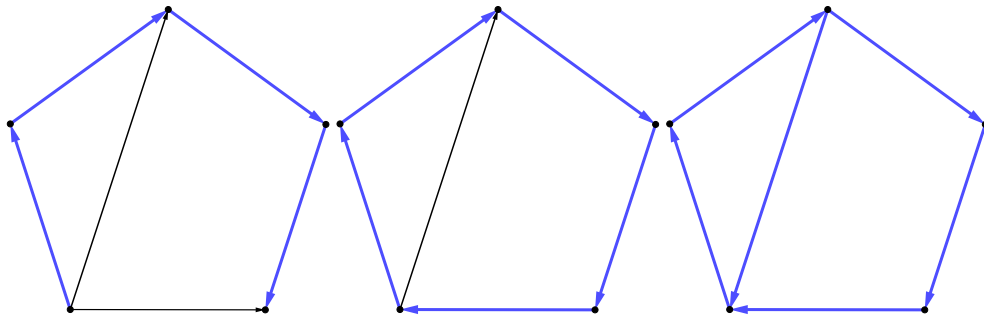


Figura 2.3: Ejemplo de una digráfica trazable, una hamiltoniana y una pancíclica

# Capítulo 3

## Resultados previos

### 3.1. Resultados clásicos

En esta sección enunciaremos algunos teoremas y lemas ya conocidos así como consecuencias inmediatas de estos. Dichos resultados serán usados como apoyo para la demostración de los teoremas que serán presentados en la siguiente sección. Varias de estas herramientas fueron desarrolladas en el artículo [22] debido a que para llegar al Teorema 2.4 las autoras estudiaron la estructura general de las digráficas  $k$ -cuasi-transitivas.

Comencemos por ver cómo se trasladan los teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 de la familia de los torneos a la familia de las digráficas semicompletas. Esta labor fue realizada por Bang-Jensen y Gutin en [3], donde además se presenta un amplio compendio de resultados en digráficas, tanto clásicos como nuevos.

**Teorema 3.1.** ([3]) *Toda digráfica semicompleta es trazable.*

**Lema 3.2.** ([3]) *Toda digráfica semicompleta fuerte con al menos 3 vértices contiene un torneo fuerte generador.*

Como consecuencia inmediata del lema anterior, junto con el Teorema 2.2 y el Teorema 2.3, obtenemos los siguientes dos teoremas:

**Teorema 3.3.** *Toda digráfica semicompleta fuerte es hamiltoniana.*

**Teorema 3.4.** *Toda digráfica semicompleta fuerte es pancíclica.*

**Observación 3.5.** ([3]) *Toda digráfica semicompleta tiene una única componente fuerte inicial y una única componente fuerte terminal.*

El siguiente lema no es más que la abstracción de un procedimiento usado en varias demostraciones, generalmente para obtener una contradicción al suponer que un ciclo es de longitud máxima en una digráfica y encontrando uno de longitud mayor.

**Lema 3.6.** *Sea  $D$  una digráfica con un ciclo  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $u \in V(D)$ . Si  $u$  es adyacente a todo vértice de  $C$  y además  $u$  tiene invecinos y exvecinos en  $C$ , entonces existe un ciclo  $C_1$  tal que  $V(C_1) = V(C) \cup \{u\}$ .*

**Demostración:** Basta observar que hay un índice  $i$  tal que, módulo  $n$ ,  $x_i \rightarrow u$  y  $u \rightarrow x_{i+1}$ . El ciclo buscado es  $(x_i, u, x_{i+1})Cx_i$ .  $\square$

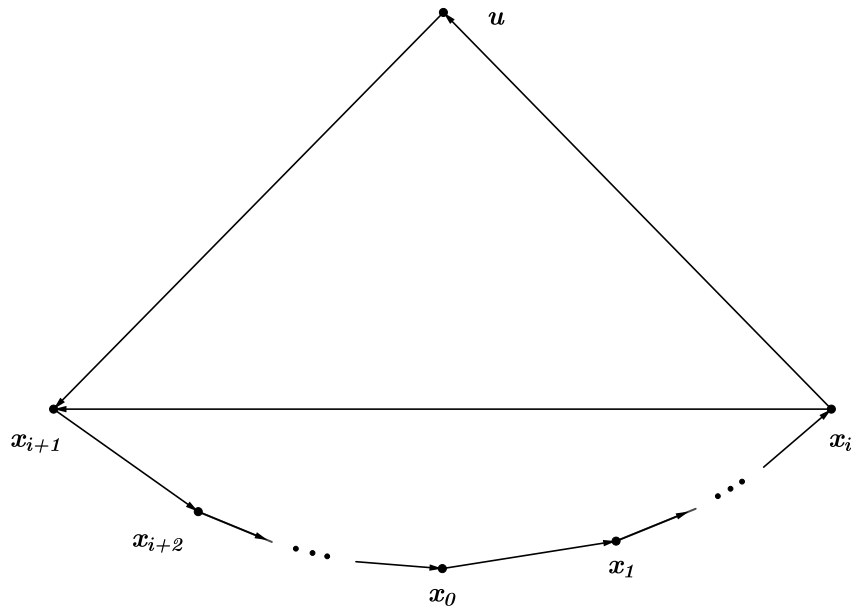


Figura 3.1: Ciclo encontrado en el Lema 3.6

## 3.2. Digráficas $k$ -cuasi-transitivas

Los siguientes lemas hablan sobre la estructura de las digráficas  $k$ -cuasi-transitivas. Recordemos que nuestro objetivo principal es dar solución al Pro-

lema 2.5 el cuál fue planteado en [22] por lo que no es de extrañar que hagamos referencia a varios resultados de dicho artículo. El primero de ellos nos dice que en una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva fuerte, cualquier ciclo suficientemente largo domina o es dominado por cualquier vértice.

**Lema 3.7.** ([20]) *Sea  $k$  un entero mayor o igual a 2 y  $D$  una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva fuerte. Si  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  es un ciclo de longitud  $n \geq k$  en  $D$ , entonces para cualquier  $x \in V(D) - V(C)$  se tiene que  $x$  es adyacente a algún vértice de  $V(C)$ .*

El siguiente resultado es bastante útil, ya que no sólo garantiza que en una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva fuerte cualquier trayectoria de longitud mínima entre sus extremos, suficientemente larga, tiene adyacencias bastante bien estructuradas respecto a los vértices fuera de la misma.

**Lema 3.8.** ([22]) *Sea  $k$  un entero par con  $k \geq 4$  y  $D$  una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva fuerte. Supongamos que  $P = (x_0, x_1, \dots, x_{k+1}, x_{k+2})$  es una  $x_0x_{k+2}$ -trayectoria de longitud mínima en  $D$ . Entonces, para todo vértice  $v \in V(D) - V(P)$ , si  $v$  tiene invecinos y exvecinos en  $P$ , se tiene que  $v$  es adyacente a todo vértice de  $V(P)$  o  $\{x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\} \mapsto v \mapsto \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ .*

En el Lema 3.9, se observa que en una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva, el conjunto de vértices de una trayectoria, suficientemente larga y de longitud mínima entre sus extremos, debe inducir una digráfica semicompleta fuertemente conexa.

**Lema 3.9.** ([22]) *Sea  $k$  un entero par con  $k \geq 4$  y  $D$  una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva. Supongamos que  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  es una  $x_0x_n$ -trayectoria de longitud mínima en  $D$  con  $n \geq k + 2$ . Entonces  $D[V(P)]$  es una digráfica semicompleta y  $x_j \rightarrow x_i$  para todo  $i$  y  $j$  tal que  $1 < i + 1 < j \leq n$ .*

Finalmente, el Lema 3.10 puede ser pensado como la contraparte del Lema 3.9, pero respecto a los vértices que están fuera de la trayectoria.

**Lema 3.10.** ([22]) *Sea  $k$  un entero par con  $k \geq 4$  y  $D$  una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva fuerte. Supongamos que  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  es una  $x_0x_n$ -trayectoria de longitud mínima en  $D$  con  $n \geq k + 2$ . Entonces  $D[V(D) - V(P)]$  es una digráfica semicompleta.*

Detengámonos a analizar cómo se entrelazan estos últimos resultados. Los Lemas 3.8, 3.9 y 3.10 plantean que, dada una digráfica  $D$  y una trayectoria  $P$  como en las hipótesis del Lema 3.8, entonces  $V(D)$  admite una partición  $(V(P), V(D) - V(P))$  donde, según los Lemas 3.9 y 3.10, cada parte induce una

digráfica semicompleta y además el Lema 3.8 nos indica el comportamiento de algunos de los vértices en  $V(D) - V(P)$  con respecto a  $P$ , en concreto, el de los vértices que tienen invecinos y exvecinos en  $V(P)$  pero ¿qué sucede con los demás? Por el Lema 3.7 sabemos que todo vértice  $x$  en  $V(D) - V(P)$  tiene invecinos o exvecinos en  $V(P)$  pero no necesariamente ambos; es decir, podría suceder que  $x$  tenga únicamente invecinos o únicamente exvecinos. El artículo [22] no ignora del todo esta observación y, aunque no lo enuncia como un resultado en sí mismo, menciona la respuesta a esta pregunta como parte de la demostración del Lema 3.10. Ya que será de gran utilidad, el siguiente lema plasma dicho resultado:

**Lema 3.11.** ([22]) *Sea  $k$  un entero par con  $k \geq 4$  y  $D$  una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva fuerte. Supongamos que  $P = (x_0, x_1, \dots, x_{k+1}, x_{k+2})$  es una  $x_0x_{k+2}$ -trayectoria de longitud mínima en  $D$ . Entonces para todo vértice  $v \in V(D) - V(P)$ , si  $v$  tiene únicamente invecinos o únicamente exvecinos en  $V(P)$ ,  $v$  es adyacente a todo vértice de  $V(P)$ .*

Con estos resultados ya se observa bastante de la estructura en las digráficas  $k$ -cuasi-transitivas y con esto bastó para que en [22] demostraran el Teorema 2.4.

Por último, usaremos un resultado, acerca de la teoría de *reyes*, el cual parece no estar ligado al tema que estamos abordando, sin embargo resultó ser crucial en la construcción de los ciclos que buscábamos.

**Teorema 3.12.** ([9]) *Sea  $k$  un entero par,  $k \geq 4$ , y  $D$  una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva con una única componente inicial  $C$ . Al menos una de las siguientes afirmaciones se cumple:*

1. *Todo vértice en  $C$  es un  $(k + 1)$ -rey.*
2. *Hay tres vértices  $u_1, u_2, u_3 \in V(C)$  tal que  $u_1$  es un  $(k + 1)$ -rey,  $u_2$  es un  $(k + 2)$ -rey,  $u_2 \rightarrow u_1$ ,  $d(u_2, u_3) = k + 2$  y  $u_3$  es un 2-rey en  $D$ . Además, todo vértice a distancia  $k + 2$  de  $u_2$  es un 3-rey.*

Cabe mencionar que el estudio de *reyes* en digráficas  $k$ -cuasi-transitivas no es casualidad pues estos fueron ampliamente estudiados en torneos, siendo el siguiente el resultado principal:

**Teorema 3.13.** ([15]) *Si  $T$  es un torneo, entonces cada vértice de exgrado máximo en  $T$  es un 2-rey.*

# Capítulo 4

## Resultados nuevos

En esta sección mostramos resultados originales, tanto nuestro resultado principal como aquellos que, junto a los de la sección anterior, nos servirán como herramientas para demostrarlo.

### 4.1. Preliminares

Iniciaremos con un análisis estructural de las digráficas  $k$ -cuasi-transitivas.

**Lema 4.1.** *Sea  $k$  un entero par,  $k \geq 4$ , y  $D$  una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva fuertemente conexa con diámetro al menos  $k+2$ . También, sea  $P = (x_0, x_1, \dots, x_{k+1}, x_{k+2})$  una  $x_0x_{k+2}$ -trayectoria tal que  $d(x_0, x_{k+2}) = k+2$ . Entonces  $D$  es semicompleta o  $V(D)$  acepta una partición<sup>1</sup> de la forma  $(V(P), A_P, B_P, I_P, O_P)$  donde:*

1.  $A_P = \{x \in V(D) - V(P) : x \text{ no es adyacente a algún vértice en } P\}$ ,
2.  $B_P = \{x \in V(D) - (V(P) \cup A_P) : x \text{ tiene invecinos y exvecinos en } P\}$ ,
3.  $I_P = \{x \in V(D) - V(P) : x \text{ tiene únicamente invecinos en } P\}$ .
4.  $O_P = \{x \in V(D) - V(P) : x \text{ tiene únicamente exvecinos en } P\}$  y

Además:

5. Si  $x \in A_P$ ,  $\{x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\} \mapsto x \mapsto \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ ,

---

<sup>1</sup>Estamos usando el término partición en el sentido usual salvo por que permitiremos que las partes puedan ser vacías, esto a falta de un mejor término. Nuestro desarrollo no se verá afectado por este abuso del lenguaje pues únicamente lo usamos por la estructura que esto proporciona y no por la teoría que se desprende al respecto.



6.  $V(P) \cup A_P \mapsto I_P$ ,
7.  $O_P \mapsto V(P) \cup A_P \cup I_P$  y
8. Si  $B_P = \emptyset$ , entonces  $O_P, I_P = \emptyset$ .

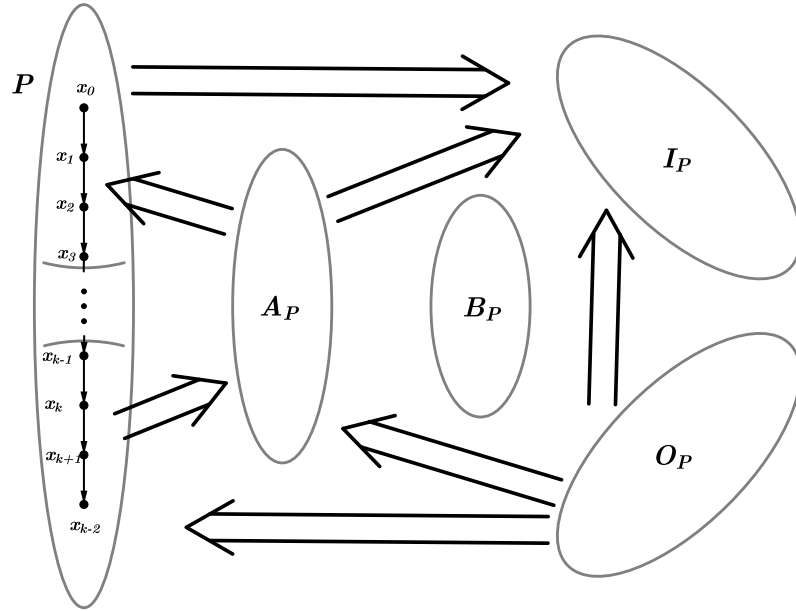


Figura 4.1: Estructura descrita en el lema 4.1

**Demostración:** Veamos que  $(V(P), A_P, B_P, I_P, O_P)$  es una partición. De la definición de  $B_P$  se sigue que dicho conjunto es ajeno a  $A_P$  y del Lema 3.11 que  $O_P \cup I_P$  es ajeno a  $A_P$ . Además, de las definiciones de  $O_P$ ,  $I_P$  y  $B_P$  tenemos que estos conjuntos no se intersectan entre sí. Finalmente, de el Teorema 3.8 se sigue que todo vértice de  $V(D) - V(P)$  con invecinos y exvecinos en  $P$  se encuentra en  $A_P$  o en  $B_P$ , por lo tanto  $V(P) \cup A_P \cup B_P \cup O_P \cup I_P = V(D)$ .

Si  $x \in A_P$ , entonces  $\{x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\} \mapsto x \mapsto \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  es otra manera de escribir parte del Lema 3.8.

Ahora veamos que  $V(P) \cup A_P \mapsto I_P$ . Según el Lema 3.11  $V(P) \mapsto I_P$  y por los Lemas 3.10 y 3.9 tanto  $D[V(P)]$  como  $D[V(D) - V(P)]$  son digráficas

semicompletas. Ya que  $A_P, I_P \subset V(D) - V(P)$  se tiene que todo vértice de  $A_P$  es adyacente a todo vértice de  $I_P$ . Supongamos que existe  $a \in A_P$  y  $w \in I_P$  tal que  $w \rightarrow a$  y sea  $x_i \in V(P)$  tal que  $x_i$  no es adyacente a  $a$ . Por el Lema 3.8, tenemos que  $i \geq 4$ . Ya que  $P$  es una trayectoria de longitud mínima entre sus extremos, y que  $D[V(P)]$  es semicompleta, se tiene que  $Q = x_i P x_{k+2} x_0 P x_{i-4}$  es una trayectoria de longitud  $k - 2$  y, por lo tanto,  $Qwa$  es una trayectoria de longitud  $k$ , lo cual implica que  $a$  y  $x_i$  son adyacentes, una contradicción. Por lo tanto  $A_P \mapsto I_P$ .

Por el principio de dualidad,  $O_P \mapsto V(P) \cup A_P$ . Ahora, si existe  $v \in O_P$  y  $w \in I_P$  tal que  $w \rightarrow v$  tenemos que  $(x_0, w, v, x_{k+2})$  es una trayectoria de longitud tres, contradiciendo que  $d(x_0, x_{k+2}) = k + 2 \geq 6$ . Esto, sumado a que  $I_P$  y  $O_P$  son subdigráficas de la digráfica semicompleta  $V(D) - V(P)$ , implica que  $O_P \mapsto I_P$ .

Finalmente, ya que  $D$  es fuertemente conexa, si  $I_P \neq \emptyset$ , existe una  $wv$ -trayectoria con  $w \in I_P$  y  $v \notin I_P$ , en particular si  $w'$  es el último vértice de  $I_P$  en dicha trayectoria y  $v'$  el vértice que le sigue a  $w'$  se tiene que  $w' \rightarrow v'$  y  $v' \notin I_P$ . Ya que  $V(P) \cup A_P \cup O_P \mapsto I_P$  se tiene que  $v' \in B_P$ ; es decir,  $B_P \neq \emptyset$ . Por el principio de dualidad llegamos a la misma conclusión si  $O_P \neq \emptyset$ .  $\square$

El siguiente resultado es sumamente importante, pues mostró el camino que debíamos seguir para responder la conjetura de Wang y Zhang. Este resultado es una consecuencia inmediata de el Teorema 3.12.

**Lema 4.2.** *Sea  $k$  un entero par,  $k \geq 4$ . Si  $D$  es una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva con diámetro al menos  $k + 2$ , entonces  $D$  tiene una  $wv$ -trayectoria tal que  $d(u, v) = k + 2$  y  $v$  es un 2-rey de  $D$ .*

**Demostración:** Ya que  $D$  tiene diámetro al menos  $k + 2$ , entonces no todos los vértices de  $D$  son  $(k + 1)$ -reyes y, por la segunda afirmación de el Teorema 3.12, existe la trayectoria buscada.  $\square$

Los siguientes tres lemas son construcciones muy específicas que usaremos más adelante.

**Lema 4.3.** *Sea  $D$  una digráfica,  $P$  una  $v_0 v_r$ -trayectoria de  $D$  y  $T$  una subdigráfica semicompleta de  $D$ . Si para cada  $u \in V(T)$  se cumple:*

1.  $u$  es adyacente todo vértice  $v \in V(P)$ ,
2.  $u$  tiene exvecinos e invecinos en  $P$ ;
3.  $(v_r, u, v_0)$  no es una trayectoria en  $D$ ;

entonces existe una  $v_0v_r$ -trayectoria  $Q$  tal que  $V(Q) = V(P) \cup V(T)$ .

**Demostración:** Sean  $P = (v_0, v_1, \dots, v_r)$  y  $V(T) = \{u_0, u_1, \dots, u_s\}$ . Para todo vértice  $u_i$  de  $T$  definamos  $v_{\sigma(i)}$  como el vértice con menor subíndice en  $P$  tal que  $v_{\sigma(i)} \rightarrow u_i$  y  $u_i \rightarrow v_{\sigma(i)+1}$ . Veamos que  $v_{\sigma(i)}$  está bien definido. Supongamos que  $v_{\sigma(i)}$  no existe para algún  $u_i$ , entonces, siempre que  $v_j \rightarrow u_i$  con  $j < r$  se tiene que  $v_{j+1} \rightarrow u_i$  y siempre que  $u_i \rightarrow v_j$  con  $j > 0$  se tiene que  $u_i \rightarrow v_{j-1}$ . Debido a esto, y a que por hipótesis  $u_i$  tiene exvecinos e invecinos en  $P$ , se concluye que  $v_r \rightarrow u_i$  y  $u_i \rightarrow v_0$ , lo cual contradice que  $(v_r, u_i, v_0)$  no es una trayectoria en  $D$ . Por lo tanto, dado  $u_i \in V(T)$ , se tiene que  $v_{\sigma(i)}$  está bien definido.

Sea  $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  la partición de  $V(T)$  inducida por la relación de equivalencia  $\sim$ , donde  $u_i \sim u_j$  si y sólo si  $\sigma(i) = \sigma(j)$ , y tomemos  $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\}$ , un conjunto completo de representantes de dicha relación. Ahora, para todo  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  existe  $P_j$ , una trayectoria hamiltoniana de la subdigráfica semicompleta inducida en  $T$  por la clase de equivalencia  $C_j$ . Por la definición de  $C_j$ , se tiene que  $v_{\sigma(i_j)} \rightarrow C_j$  y  $C_j \rightarrow v_{\sigma(i_j)+1}$ , por lo tanto podemos tomar una  $v_{\sigma(i_j)}v_{\sigma(i_j)+1}$ -trayectoria  $Q_j$  tal que  $V(Q_j) = C_j \cup \{v_{\sigma(i_j)}, v_{\sigma(i_j)+1}\}$ , basta con iniciar en  $v_{\sigma(i_j)}$  e inmediatamente recorrer la trayectoria  $P_j$  completa para luego terminar en  $v_{\sigma(i_j)+1}$ .

Una vez definidos todos los vértices y trayectorias anteriores la trayectoria buscada es  $Q = v_0Pv_{\sigma(i_1)}Q_1v_{\sigma(i_1)+1}Pv_{\sigma(i_2)}Q_2v_{\sigma(i_2)+1} \cdots Q_kv_{\sigma(i_k)+1}Pv_r$ .  $\square$

**Lema 4.4.** Sean  $P = (u_0, \dots, u_r)$  y  $Q = (v_0, \dots, v_s)$  dos trayectorias ajenas de una digráfica  $D$ . Si se cumple:

1. Para cualesquiera  $u \in V(P)$  y  $v \in V(Q)$  se tiene que  $u$  y  $v$  son adyacentes;
2.  $N^-(v_0) \cap P \neq \emptyset$  y  $N^+(u_r) \cap Q \neq \emptyset$ ;

entonces existe una  $u_0v_s$ -trayectoria  $R$  tal que  $V(R) = V(P) \cup V(Q)$ .

**Demostración:** Para todo vértice  $v_i$  en  $Q$  que cumple  $N^-(v_i) \cap P \neq \emptyset$  definimos  $\sigma(i)$  como el mayor entero tal que  $u_{\sigma(i)} \rightarrow v_i$ . Observemos que si  $N^-(v_i) \cap P \neq \emptyset$ , entonces  $v_i \rightarrow u_j$  para todo  $j$  tal que  $\sigma(i) < j \leq r$ , también observemos que por hipótesis  $\sigma(0)$  está definido y que  $u_r = u_{\sigma(l)}$  para algún entero  $l$ . Sea  $\sigma(i_0), \dots, \sigma(i_k)$  la sucesión construida de la siguiente manera:  $i_0 = 0$ ,  $\sigma(i_k) = r$  y, para todo entero  $j$  tal que  $0 \leq j < k$ , sea  $i_{j+1}$  el menor entero mayor a  $i_j$  tal que  $\sigma(i_{j+1}) > \sigma(i_j)$ . Observemos que

$\sigma(i_0), \dots, \sigma(i_k)$  e  $i_0, \dots, i_k$  son sucesiones estrictamente crecientes. Por último, con  $j$  tal que  $0 \leq j < k$  en el mismo intervalo, definamos  $Q_j$  como la  $u_{\sigma(i_j)}u_{\sigma(i_j)+1}$ -trayectoria  $u_{\sigma(i_j)}v_{i_j}Qv_{i_{(j+1)}-1}u_{\sigma(i_j)+1}$  y  $P_j$  como la trayectoria  $u_{\sigma(i_j)+1}Pu_{\sigma(i_{j+1})}$ . Cabe señalar que  $Q_j$  efectivamente es una trayectoria pues claramente  $u_{\sigma(i_j)} \rightarrow v_{i_j}$  y además  $v_{i_{(j+1)}-1}$  es el vértice anterior a  $v_{i_{(j+1)}}$  en la trayectoria  $Q$  por lo que no hay un vértice  $w$  en  $P$  con subíndice mayor al de  $u_{\sigma(i_j)}$  tal que  $w \rightarrow v_{i_{(j+1)}-1}$ , en particular se tiene que  $v_{i_{(j+1)}-1} \rightarrow u_{\sigma(i_j)+1}$ .

Una vez definido lo anterior, para construir la trayectoria buscada basta tomar  $R = u_0Pu_{\sigma(i_0)}Q_0P_0Q_1P_1 \dots Q_{k-1}P_{k-1}u_{\sigma(i_k)}v_{i_k}Qv_s$ .  $\square$

**Lema 4.5.** *Sea  $D$  una digráfica semicompleta y  $u \in V(D)$ . Entonces  $D$  tiene una trayectoria hamiltoniana  $P = (u_0, \dots, u_n)$  donde  $u = u_i$  y si  $i < j$ , entonces  $u_j$  no pertenece a la misma componente fuertemente conexa que  $u_i$ .*

**Demostración:** La demostración será por inducción sobre el número de componentes fuertes.

Si  $D$  tiene una única componente fuerte, entonces  $D$  misma es una digráfica fuertemente conexa y, por el Lema 3.4,  $D$  tiene un ciclo hamiltoniano  $C$ . En este caso basta con tomar la trayectoria  $vCu$ , donde  $v$  es el vértice siguiente a  $u$  en el ciclo  $C$ .

Para el paso inductivo supongamos que  $D$  tiene más de una componente fuerte y sea  $C_i$  la componente fuerte inicial. Tomemos  $P_i = (v_0, \dots, v_{n_i})$ , una trayectoria hamiltoniana de  $C_i$ , y  $P_j = (w_0, \dots, w_{n_j})$ , una trayectoria hamiltoniana de  $D - C_i$ . Ya que  $C_i$  es componente inicial de  $D$ , entonces  $C_i \mapsto D - C_i$  por lo que  $P_iv_{n_i}w_0P_j$  es una trayectoria hamiltoniana de  $D$ . Si  $u \in C_i$ , entonces, por la base de inducción, podemos suponer que  $u = v_{n_i}$  y por lo tanto  $P_iv_{n_i}w_0P_j$  es la trayectoria buscada. Por último, supongamos que  $u \notin C_i$ , en este caso recordemos que la inducción la estamos realizando sobre el número de componentes fuertes por lo que podemos aplicar la hipótesis de inducción en  $D - C_i$ . Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que en  $P_j = (w_0, \dots, w_{n_j})$  el vértice  $u$  cumple las condiciones buscadas en la digráfica  $D - C_i$  y ya que  $C_i \mapsto D - C_i$ , entonces  $P_iv_{n_i}w_0P_j$  las cumple en la digráfica  $D$ .  $\square$

**Corolario 4.6.** *Sea  $D$  una digráfica semicompleta y  $u$  un vértice en la componente final de  $D$ . Entonces  $D$  tiene una trayectoria hamiltoniana cuyo último vértice es  $u$ .*

**Demostración:** Por el lema anterior, existe una trayectoria  $P = (u_0, \dots, u_n)$  donde  $u = u_i$  y si  $i < j$ , entonces  $u_j$  no pertenece a la misma componente fuertemente conexa que  $u_i$ . Si  $i < n$ , entonces  $u_n$  no pertenecen a la

componente final, lo cuál es una contradicción pues claramente, al estar  $u$  en la componente final, todos los demás vértices lo alcanzan. Por lo tanto  $i = n$ .

Por fin, con este resultado ya tenemos listas todas las herramientas necesarias para abordar la panciclicidad de las digráficas  $k$ -cuasi-transitivas.

## 4.2. Resultado Principal

El siguiente teorema, además de ser el resultado principal de esta tesis, también es el resultado principal de [14].

**Teorema 4.7.** *Si  $k > 4$  es un entero par y  $D$  una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva fuertemente conexa con diámetro al menos  $k + 2$ , entonces  $D$  es pancíclica.*

**Demostración:** La demostración será por construcción. Ya que  $D$  tiene diámetro al menos  $k + 2$ ,  $D$  tiene una  $x_0x_{k+2}$ -trayectoria  $P = (x_0, x_1, \dots, x_{k+1}, x_{k+2})$  tal que  $d(x_0, x_{k+2}) = k + 2$ . Por el Lema 4.2, podemos suponer que  $x_{k+2}$  es un 2-rey de  $D$ .

Si  $D$  es semicompleta, entonces, inmediatamente del Lema 3.4, tenemos que  $D$  es pancíclica; así que en el resto de la demostración supondremos que  $D$  no es semicompleta, debido a esto  $V(D)$  tiene una partición de la forma  $(V(P), A_P, B_P, I_P, O_P)$  tal y como se describe en el Lema 4.1. Para fines prácticos denotaremos estos conjuntos simplemente por  $A, B, I$  y  $O$ .

Por el Lema 3.9,  $D[V(P)]$  es una digráfica semicompleta fuerte de orden  $k + 3$ , por lo que es pancíclica. Por lo tanto basta con encontrar ciclos de todas las longitudes entre  $k + 4$  y el número total de vértices para concluir la demostración.

El Lema 3.10 indica que  $D[V(D) - V(P)]$  es una digráfica semicompleta y por lo tanto cualquier subdigráfica de ella también lo es. Entonces, si  $S$  es un subconjunto no vacío de  $D[V(D) - V(P)]$ , por el Lema 3.1,  $D[S]$  tiene una trayectoria hamiltoniana, a la que llamamos  $Q_S$ . Es claro que si  $A = \emptyset$ , entonces  $D$  es semicompleta, por lo tanto supondremos que  $A \neq \emptyset$ . Sea  $Q_A = (a_0, a_1, \dots, a_\gamma)$ .

Si  $B = \emptyset$ , entonces, por la última afirmación de el Lema 4.1, también  $I$  y  $O$  lo son. Además, ese mismo lema nos dice que si  $x \in A$  entonces  $\{x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\} \mapsto x \mapsto \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ . En este caso es sencillo construir los ciclos que estamos buscando, pues si  $S$  es cualquier subconjunto no vacío de  $A$  y  $Q_S = (s_0, \dots, s_j)$ , observamos que  $Px_{k+2}s_0Q_Sx_0$  es un ciclo de longitud  $|S| + |P| = |S| + k + 3$  y por lo tanto  $D$  es pancíclica en este caso.

Ahora veamos el caso en que  $B \neq \emptyset$ . Suponiendo que  $I$  y  $O$  también son no vacíos, sean  $Q_I = (v_0, v_1, \dots, v_\lambda)$  y  $Q_O = (u_0, u_1, \dots, u_\kappa)$  las respectivas trayectorias hamiltonianas de  $D[I]$  y de  $D[O]$ . Recordemos que  $x_{k+2}$  es un 2-rey de  $D$  y que, por definición,  $O \mapsto V(P)$ , por lo que existe  $w_1$  tal que  $x_{k+2} \rightarrow w_1 \rightarrow u_0$ . Claramente  $w_1 \in B$  pues, según el Lema 4.1,  $O \mapsto V(P) \cup A \cup I$ . Por otra parte, el Lema 4.1 también indica que  $V(P) \cup A \cup O \mapsto I$ , esto, aunado a que  $D$  es fuertemente conexa, implica que si  $P'$  es una  $v_\lambda x_0$ -trayectoria y  $w_2$  es el primer vértice de esta trayectoria que no pertenece a  $I$ , entonces  $w_2 \in B$ . Si  $v \rightarrow w_2$  es la flecha en la trayectoria  $P'$  que termina en  $w_2$ , entonces  $v$  está en la componente final de  $D[I]$  pues  $v_\lambda$  lo alcanza y  $v_\lambda$  es un vértice en la componente final. Finalmente, por el Corolario 4.6, y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $v = v_\lambda$ ; es decir,  $Q_I$  es una trayectoria hamiltoniana de  $I$  tal que  $v_\lambda \rightarrow w_2$ , donde  $w_2 \in B$ . Si  $w_1 = w_2$ , entonces  $(x_0, v_\lambda, w_2 = w_1, u_0, x_{k+2})$  es una trayectoria de longitud 4, lo cual no es posible pues  $d(x_0, x_{k+2}) = k + 2 > 6$ . Análogamente, si  $w_2 \rightarrow w_1$ , entonces  $d(x_0, x_{k+2}) = 5$ , por lo tanto  $w_1 \rightarrow w_2$ . Notemos que las elecciones de  $w_1$  y de  $w_2$  son mutuamente independientes por lo que podremos elegir uno aún cuando el otro no exista; es decir, en los casos en que  $I = \emptyset$  u  $O = \emptyset$ .

En este punto es conveniente explicar la estructura que tendrá el resto de la demostración. La idea central se muestra en la figura 4.2 y radica en construir una trayectoria similar a  $Px_{k+2}w_1u_0Q_Ou_\kappa a_0Q_Aa_\gamma v_0Q_Iv_\lambda w_2$ , la cual contiene a todos los vértices de  $V(P)$ ,  $A$ ,  $I$ ,  $O$  y dos de  $B$ . Veremos cómo incluir el resto de los vértices de  $B$  en diferentes secciones de esta trayectoria y luego construiremos un ciclo hamiltoniano. Después de esto trabajaremos los casos en los que  $I$  u  $O$  son conjuntos vacíos y finalmente generalizaremos la construcción para encontrar ciclos de todas las demás longitudes.

Sea  $B_1 = \{w \in B : (x_{k+2}, w, x_0) \text{ no es una trayectoria en } D\} - \{w_1, w_2\}$ . Observemos que  $P$  y  $D[B_1]$  cumplen las hipótesis del Lema 4.3 por lo que existe una  $x_0x_{k+2}$ -trayectoria  $P_1$  tal que  $V(P_1) = V(P) \cup B_1$ . Por otra parte, sean  $B_2 = B - B_1$  y  $Q_{B_2} = (q_0, \dots, q_\delta)$ . Ahora, ya que  $w_1 \rightarrow w_2$  podemos usar el Lema 4.5 y suponer que en  $Q_{B_2}$  el vértice  $w_2$  aparece después de  $w_1$  y por lo tanto  $w_2 \neq q_0$ . Observamos también que, por la definición de  $B_1$  y de  $B_2$ ,  $x_{k+2} \rightarrow B_2 - \{w_1, w_2\} \rightarrow x_0$ . Para el caso en que  $O = \emptyset$ , entonces  $w_1$  no existe por lo que omitiremos restar dicho vértice en la definición de  $B_1$  y en la observación anterior. Haremos lo mismo con  $w_2$  en caso de que  $I = \emptyset$ .

Si  $I, O \neq \emptyset$  definimos  $q_r \in B_2$  como el vértice con subíndice mayor, pero anterior a  $w_2$ , en  $Q_{B_2}$ , tal que  $q_r \rightarrow u$  para algún  $u \in O$ , notemos que  $q_r$  existe pues  $w_1$  cumple las condiciones para serlo salvo, quizás, por ser el de mayor subíndice. Definamos también a  $q_s$  como el vértice de menor subíndice en  $Q_{B_2}$ , pero mayor a  $q_r$ , tal que  $v \rightarrow q_s$  para algún  $v \in I$ , análogamente,  $q_s$  también

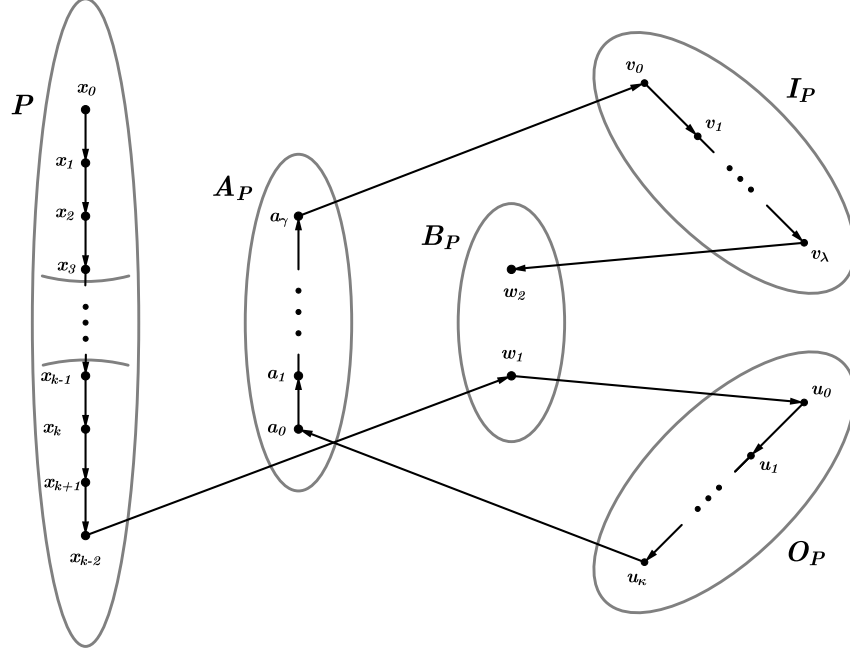


Figura 4.2: Estructura inicial de la construcción del ciclo hamiltoniano

existe pues  $w_2$  cumple las condiciones para serlo salvo, quizás, por ser el de menor subíndice. Ahora,  $Q_{B_2 q_r}$  y  $Q_O$  cumplen las hipótesis del Lema 4.4 por lo que existe una  $q_0 u_\kappa$ -trayectoria, a la que llamaremos  $Q_3$ , cuyo conjunto de vértices es  $V(Q_{B_2 q_r}) \cup O$ . De forma similar, y usando el mismo lema, existe una  $v_0 q_\delta$ -trayectoria, a la que llamaremos  $Q_4$ , cuyo conjunto de vértices es  $I \cup V(q_s Q_{B_2})$ . Si  $I = \emptyset$  y  $O \neq \emptyset$ , entonces definimos a  $q_r$  como el vértice con subíndice mayor en  $Q_{B_2}$  tal que  $q_r \rightarrow u$  para algún  $u \in O$  y tomamos  $q_{s-1} = q_\delta$ . Observamos que, definido así, no hay diferencia alguna en la construcción de  $Q_3$ , aunque no habrá trayectoria  $Q_4$ . Si  $I \neq \emptyset$  y  $O = \emptyset$  definimos a  $q_s$  como el vértice con subíndice menor en  $Q_{B_2}$  tal que  $v \rightarrow q_s$  para algún  $v \in I$  y  $q_{r+1} = q_0$ . De la misma forma, bajo esta definición de  $q_s$  no hay diferencia en la construcción de  $Q_4$ , pero no habrá trayectoria  $Q_3$ . En todos los casos se tiene que  $O \rightarrow \{q_{r+1}, \dots, q_{s-1}\} \rightarrow I$ , más aún,  $\{q_{r+1}, \dots, q_{s-1}\} \subset B_2 - \{w_1, w_2\}$  por lo que  $x_{k+2} \rightarrow \{q_{r+1}, \dots, q_{s-1}\} \rightarrow x_0$ . Notemos también que  $B = B_1 \cup B_2$  y que  $B_2 = \{q_0, \dots, q_\delta\}$  por lo que todo vértice de  $B$  está en  $V(P_1)$ ,  $V(Q_3)$ ,  $V(Q_4)$  o

en  $\{q_{r+1}, \dots, q_{s-1}\}$ , aún cuando en sus respectivos casos  $V(Q_3)$  y  $V(Q_4)$  sean conjuntos vacíos.

Sea  $C = A \cup \{q_{r+1}, \dots, q_{s-1}\}$  y sea  $Q_C = \{c_0, \dots, c_\epsilon\}$  la trayectoria hamiltoniana de  $D[C]$ . Por el Lema 4.1 y por la conclusión lo anterior se tiene que  $O \rightarrow C \rightarrow I$ . Observemos que en todos los casos las trayectorias  $P_1$ ,  $Q_3$ ,  $Q_4$  y  $Q_C$  son ajenas.

Ya que  $x_{k+2} \rightarrow w_1$ ,  $x_{k+2} \rightarrow B_2 - \{w_1, w_2\} \rightarrow x_0$  y  $w_2 \neq q_0$ , entonces  $x_{k+2} \rightarrow q_0$ . Finalmente, por todo lo anterior, podemos afirmar que si  $I, O \neq \emptyset$ , entonces  $P_2 = P_1 x_{k+2} q_0 Q_3 u_\kappa c_0 Q_C c_\epsilon v_0 Q_4 q_\delta$  es una trayectoria hamiltoniana. Si  $q_\delta \rightarrow x_0$ , entonces completamos un ciclo hamiltoniano. En caso contrario  $x_0 \rightarrow q_\delta$  y ya que  $q_\delta \in B$ , entonces existe  $x_i \in V(P)$  tal que  $q_\delta \rightarrow x_i$ , con  $i > 0$ . Por otra parte, ya que  $x_0 q_\delta x_i P x_{k+2}$  no puede ser una trayectoria de longitud menor a  $k + 2$ , pues  $d(x_0, x_{k+2}) = k + 2$ , entonces  $i \in \{1, 2\}$ . Si  $i = 2$  tenemos que  $C = x_2 P_2 q_\delta x_2$  es un ciclo tal que cada vértice de este ciclo es adyacente a  $x_1$ , además  $x_{k+2} \rightarrow x_1 \rightarrow x_2$  y, por el Lema 3.6, existe otro ciclo  $C_1$  tal que  $V(C_1) = V(C) \cup \{x_1\}$ . Análogamente podemos crear un nuevo ciclo donde incluyamos a  $x_0$ ; análogamente se demuestra el caso en que  $i = 1$ . En ambos casos hemos construido un ciclo hamiltoniano en  $D$ .

Para el caso en que  $I = \emptyset$  y  $O \neq \emptyset$  basta con tomar la trayectoria  $P_1 x_{k+2} q_0 Q_3 u_\kappa c_0 Q_C c_\epsilon$  y ya que  $c_\epsilon \in C \subset A \cup B_2$ , entonces  $c_\epsilon \rightarrow x_0$  por lo que podemos formar un ciclo hamiltoniano. Si  $I \neq \emptyset$  y  $O = \emptyset$ , recordemos que  $C = A \cup \{q_{r+1}, \dots, q_{s-1}\}$ , por lo que  $x_{k+2} \rightarrow C$  y con esto en mente es claro que en efecto  $P_1 x_{k+2} c_0 Q_C c_\epsilon v_0 Q_4 q_\delta$  es una trayectoria y para encontrar el ciclo que buscamos basta trabajar el caso en que  $q_\delta \rightarrow x_0$  y el caso contrario tal y como lo hicimos antes. Si  $I, O = \emptyset$  basta con tomar el ciclo  $P_1 x_{k+2} c_0 Q_C c_\epsilon x_0$ . Por lo anterior podemos afirmar que, si  $k > 4$  es un entero par y  $D$  una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva fuertemente conexa con diámetro al menos  $k + 2$ , entonces  $D$  es hamiltoniana.

Para encontrar ciclos de las demás longitudes recordemos que si  $I \neq \emptyset$ , entonces la trayectoria  $Q_I = (v_0, v_1, \dots, v_\lambda)$  fue elegida de tal forma que es una trayectoria hamiltoniana de  $I$  tal que  $v_\lambda \rightarrow w_2$  donde  $w_2 \in B$ , además  $V(P) \cup A \cup O \mapsto I$  por lo que si  $i \in \{0, \dots, \lambda - 1\}$ , entonces  $D - \{v_0, \dots, v_i\}$  también es fuertemente conexa. Análogamente, si  $O \neq \emptyset$ ,  $Q_0 = (u_0, u_1, \dots, u_\kappa)$  y  $j \in \{1, \dots, \kappa\}$ , entonces  $D - \{u_j, \dots, v_\kappa\}$  también es fuertemente conexa. Por último, es claro que  $D - I$ ,  $D - O$  y, si  $S \subset B$ ,  $D - (S \cup I \cup O)$  también son digráficas fuertemente conexas. Todas estas digráficas además de ser fuertemente conexas son  $k$ -cuasi-transitivas y contienen a  $P$ ; es decir, tienen diámetro  $k + 2$ , por lo que son hamiltonianas. Esto, sumado a que ya vimos el caso en que  $B = \emptyset$ , implica que  $D$  es pancíclica.  $\square$



El siguiente corolario es un producto derivado de la demostración del Teorema 4.7. La idea es simplemente analizar en cuánto tiempo podemos hacer la construcción descrita en dicha demostración.

**Corolario 4.8.** *Si  $k > 4$  es un entero par y  $D$  una digráfica  $k$ -cuasi-transitiva fuertemente conexa con diámetro al menos  $k + 2$ , entonces un ciclo hamiltoniano de  $D$  puede ser encontrado en tiempo polinomial.*

**Demostración:** Seguiremos cada paso de la construcción de la demostración del Teorema 4.7 para ver que cada paso toma un tiempo polinomial en ser realizado. No nos preocuparemos por optimizar el tiempo de ejecución.

Sea  $n$  el orden de  $D$  y  $m$  su tamaño. Primero, necesitamos elegir los vértices  $x_0$  y  $x_{k+2}$  tal que  $d(x_0, x_{k+2}) = k + 2$  y  $x_{k+2}$  es un 2-rey de  $D$ . Podemos hacer esto en el tiempo  $O(n^2 + nm)$  realizando una búsqueda BFS desde cada vértice de  $D$ . Una vez localizados estos vértices ya contamos con la trayectoria  $P$ .

A continuación necesitamos encontrar la partición descrita en el Lema 4.1. Esto se puede hacer explorando la vecindad de cada vértice en  $V(D) - V(P)$ , lo que se puede hacer en el tiempo  $O(n^2)$ . Durante la prueba, un número constante de veces necesitamos encontrar un camino hamiltoniano en una digráfica semicompleta, lo que se puede hacer en el tiempo  $O(n \log n)$  (ver [11]).

El vértice  $w_1$  se puede encontrar intersecando la vecindad de  $u_0$  y la vecindad de  $x_{k+2}$ , lo cual se puede realizar en tiempo  $O(n)$ . La  $v_\lambda x_0$ -trayectoria  $P'$ , junto con el vértice  $w_2$ , se puede encontrar realizando una búsqueda BFS con raíz en  $v_\lambda$ , lo que lleva tiempo  $O(n + m)$ . Para garantizar que  $v_\lambda \rightarrow w_2$ , basta con encontrar un ciclo hamiltoniano en la componente fuerte terminal de  $D[I]$ , lo que se puede hacer en el tiempo  $O(n^2)$  (ver [19] para un algoritmo de orden  $O(n + m)$  para encontrar las componentes fuertes de una digráfica y [16] para un algoritmo de tiempo  $O(n^2)$  para encontrar un ciclo hamiltoniano en un torneo fuerte); se puede usar un argumento similar para mostrar que cada aplicación del Lema 4.5 requiere tiempo  $O(n^2)$ .

El conjunto  $B_1$  también se puede encontrar mediante la intersección de la vecindad de  $x_0$  y la vecindad de  $x_{k+2}$ , lo que, de nuevo, se puede hacer en el tiempo  $O(n)$ .

Cada aplicación del Lema 4.3 toma, como máximo, tiempo  $O(n^2 \log n)$ . Se necesita tiempo  $O(n^2)$  para calcular  $\sigma$  para cada vértice en  $T$ , tiempo  $O(n \log n)$  para encontrar  $V(T) / \sim$  junto con un conjunto completo de representantes simplemente ordenando  $V(T)$  de acuerdo con el valor de  $\sigma$ , y tiempo  $O(n^2 \log n)$  para encontrar los caminos hamiltonianos para todas las clases de equivalencia.

Cada aplicación del Lema 4.4 requiere tiempo como máximo  $O(n^2)$ . Nuevamente, se necesita tiempo  $O(n^2)$  para calcular  $\sigma$ , y se necesita el mismo tiempo para calcular la secuencia  $\sigma(i_0), \dots, \sigma(i_k)$ . Finalmente, cada aplicación del Lema 3.6 requiere tiempo  $O(n)$ .  $\square$



# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Conclusiones y futuras líneas de trabajo

Desde la introducción de las digráficas  $k$ -cuasi-transitivas en [13], su análisis enfocado en  $k$ -reyes presentado en [9], y el estudio sobre propiedades hamiltonianas de [22] y de este trabajo, se hace evidente que las digráficas  $k$ -cuasi-transitivas fuertes, con  $k$  par y diámetro al menos  $k + 2$  son muy similares a las digráficas semicompletas. Otra muestra de ello es la existencia de 2-reyes y el ser pancíclicas.

Sin embargo, los resultados anteriores no aplican a todas las digráficas  $k$ -cuasi-transitivas, pues su estudio se ha visto dividido siempre entre los casos de  $k$  par o  $k$  impar y en varias ocasiones dando resultados más débiles o ninguno para el caso impar.

También son de particular interés las digráficas  $k$ -cuasi-transitivas con diámetro  $k + 1$  o  $k$ , los cuáles no han sido estudiados a fondo, en casi nungún ámbito, debido a que pedir que el diámetro sea al menos  $k + 2$  arroja una gran cantidad de información ya que la existencia de una trayectoria mínima de longitud  $k + 2$  sumada a la definición de  $k$ -cuasi-transitividad produce una gran cantidad de flechas y ciclos, más en el caso par que en el impar (lo cual también explica la distinción entre ambos casos). Por otra parte no son de tanto interés los casos de digráficas con diámetro menor a  $k$  pues podrían no tener ninguna trayectoria de longitud  $k$  y por lo tanto no hacer uso de la propiedad de ser  $k$ -cuasi-transitiva, e incluso suponiendo que sí las tiene, el enfoque del uso de trayectorias de longitud mínima no podría aprovecharse. Es importante notar que los casos antes mencionados (digráficas  $k$ -cuasi-transitivas de diámetro  $k$  o  $k + 1$ ) pueden ser fuertes y no hamiltonianas como se muestra en las Figuras 5.1 y 5.2 .

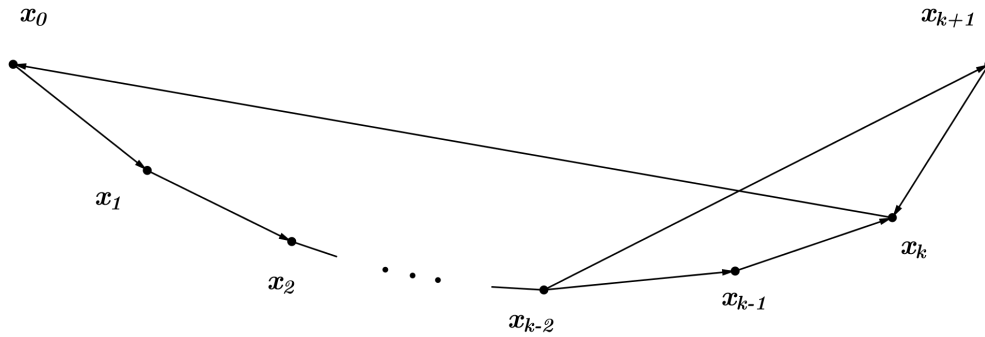


Figura 5.1: Digráfica  $k$ -cuasi-transitiva fuerte con diámetro  $k$  y no hamiltoniana

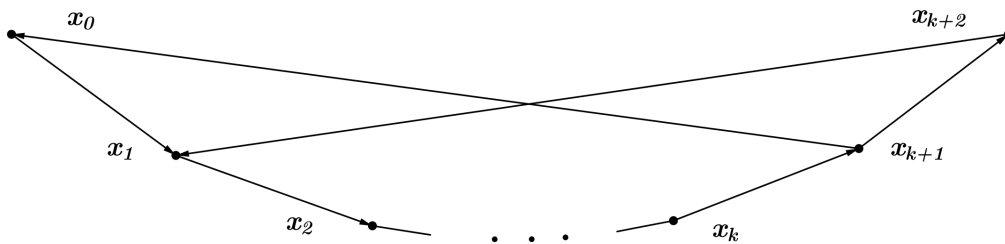


Figura 5.2: Digráfica  $k$ -cuasi-transitiva fuerte con diámetro  $k + 1$  y no hamiltoniana

Por lo anterior, algunas líneas de trabajo posibles con respecto a la familia de digráficas  $k$ -cuasi-transitivas son: existencia de ciclos hamiltonianos para el caso  $k$  impar, encontrar condiciones suficientes y necesarias para determinar la existencia de ciclos hamiltonianos o trayectorias hamiltonianas para cualquier caso de diámetro menor a  $k + 2$  y, también en este caso, estudiar a fondo su estructura general.

Finalmente cabe mencionar que todos los resultados mostrados en esta tesis fueron publicados por los autores (director de tesis y tesista) en [14] pero para nuestra sorpresa, poco antes de publicar dicho artículo, Wang propuso en [23] un contraejemplo a nuestro resultado principal. Ella afirmó que para cualquier  $k \geq 6$ , una digráfica que contiene una  $x_0x_{k+2}$ -trayectoria de longitud mínima de longitud  $k + 2$  y dos vértices adicionales  $u$  y  $v$  tales que  $u \rightarrow v$ ,  $\{x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\} \rightarrow v \rightarrow \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  y  $x_{k+1} \rightarrow u \rightarrow \{x_0, \dots, x_k, x_{k+2}\}$  no es hamiltoniana, sin embargo  $Px_{k+1}ux_{k+2}vx_0$  es un ciclo hamiltoniano en

dicha digráfica por lo que la construcción que se propone no es un contraejemplo (además de que en esta tesis hemos demostrado que no existen contraejemplos). Este error pudo ser pasado por alto en las debidas revisiones de dicho artículo debido a que este se centra en estudiar ciclos hamiltonianos en casos particulares de digráficas  $k$ -cuasi-transitivas y solo al final dedica un pequeño espacio al contraejemplo mencionando que es fácil notar que no es hamiltoniano.

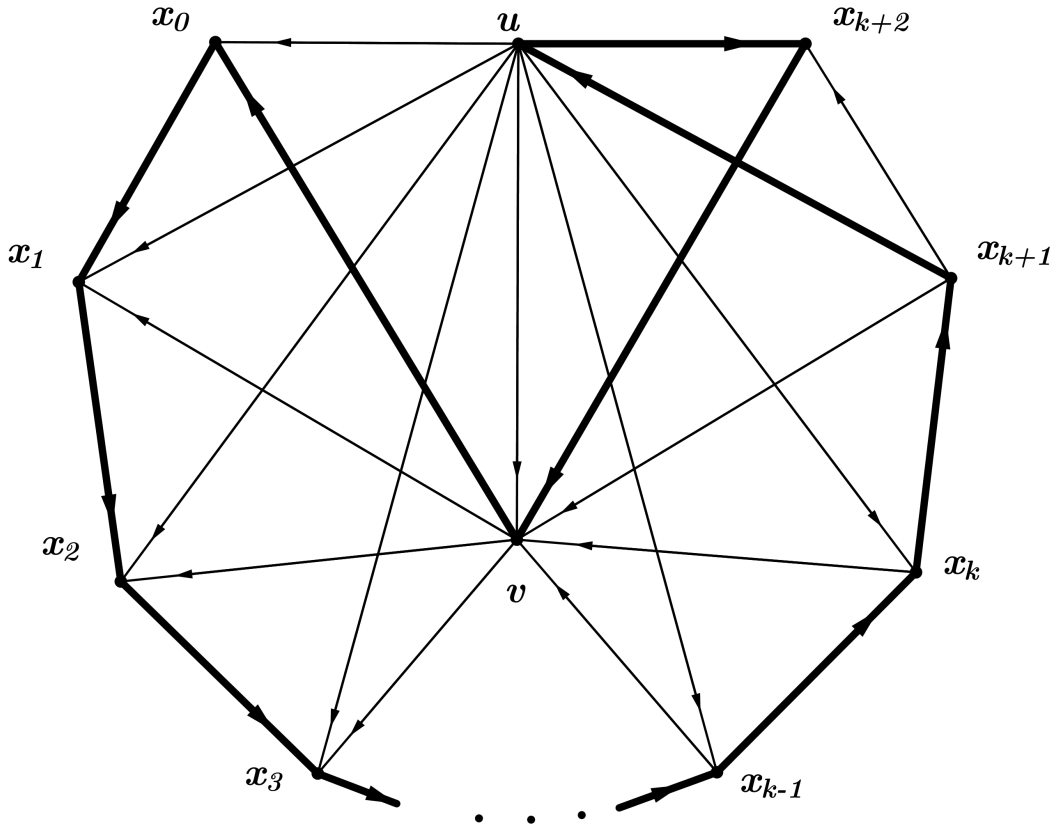


Figura 5.3: Construcción propuesta en [23] y un ciclo hamiltoniano en ella.



# Bibliografía

- [1] J. Alva-Samos and C. Hernández-Cruz,  $k$ -quasi-transitive digraphs of large diameter, *Journal of Graph Theory* 96(3) (2021).
- [2] J. Bang-Jensen, Locally Semicomplete Digraphs and Generalizations. In J. Bang-Jensen and G. Gutin (eds) *Classes of Directed Graphs*. Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham (2018).
- [3] J. Bang-Jensen and G. Gutin (eds), *Classes of Directed Graphs*. Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham (2018).
- [4] J. Bang-Jensen and G. Gutin, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag 2000.
- [5] J. Bang-Jensen and F. Havet, Tournaments and Semicomplete Digraphs. In J. Bang-Jensen and G. Gutin (eds) *Classes of Directed Graphs*. Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham (2018)
- [6] J. Bang-Jensen and J. Huang, Quasi-transitive digraphs, *Journal of Graph Theory* 20 (1995) 141-161.
- [7] P. Camion. Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 249(1959) 2151-2152.
- [8] H. Galeana-Sánchez and C. Hernández-Cruz, Quasi-Transitive Digraphs and Their Extensions. In J. Bang-Jensen and G. Gutin (eds) *Classes of Directed Graphs*. Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham (2018).
- [9] H. Galeana-Sánchez, C. Hernández-Cruz and M. A. Juárez-Camacho, On the existence and number of  $(k + 1)$ -kings in  $k$ -quasi-transitive digraphs, *Discrete Mathematics* 313 (2013) 2582-2591.
- [10] F. Harary, L. Moser. The theory of round robin tournaments, *American Mathematical Monthly*, 73(3) (1966) 231-246.



- [11] P. Hell and M. Rosenfeld, The complexity of finding generalized paths in tournaments, *Journal of Algorithms* 4(4) (1983) 303-309.
- [12] C. Hernández-Cruz and J. Alva-Samos,  $k$ -quasi-transitive digraphs of large diameter, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 62 (2017) 213-218.
- [13] C. Hernández-Cruz and H. Galeana-Sánchez,  $k$ -kernels in  $k$ -transitive and  $k$ -quasi-transitive digraphs, *Discrete Mathematics* 312 (2012) 2522-2530.
- [14] C. Hernández-Cruz and M. A. Juárez-Camacho, Pancyclicity in strong  $k$ -quasi-transitive digraphs of large diameter, *Discrete Mathematics* 408 (2021) 126319.
- [15] H. G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies: III The condition for a score structure, *Bull. Math. Biophys.*, 15(1953) 143-148.
- [16] Y. Manoussakis, A linear time algorithm for finding hamiltonian cycles in tournaments, *Discrete Appl. Math.* 36 (1992) 199-202.
- [17] J. W. Moon, On subtournaments of a tournament, *Canadian Mathematical Bulletin* 9 (1966) 297-301.
- [18] L. Rédei, Ein kombinatorischer Satz, *Acta Litt. Szeged* 7 (1934) 39-43.
- [19] R. E. Tarjan, Depth-first search and linear graph algorithms, *SIAM J. Comput.* 1 (2) (1972) 146-160.
- [20] R. Wang and W. Meng,  $k$ -kings in  $k$ -quasi-transitive digraphs, *Journal of Graph Theory* 79(1) (2015) 55-62.
- [21] R. Wang,  $(k + 1)$ -kernels and the number of  $k$ -kings in  $k$ -quasi-transitive digraphs, *Discrete Mathematics* 338(1) (2015) 114-121.
- [22] R. Wang and H. Zhang, Hamiltonian paths in  $k$ -quasi-transitive digraphs, *Discrete Mathematics* 339(8) (2016) 2094-2099.
- [23] R. X. Wang, Hamilton cycle problem in strong  $k$ -quasi-transitive digraphs with large diameter, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, (2021) 685-690.
- [24] A. Yeo, Semicomplete Multipartite Digraphs. In J. Bang-Jensen and G. Gutin (eds) *Classes of Directed Graphs*. Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham (2018).

- [25] Z.-B. Zhang, X. Zhang, G. Gutin, and D. Lou, Hamiltonicity, pancyclicity and full cycle extendability in multipartite tournaments, *Journal of Graph Theory* In Press (2020) <https://doi.org/10.1002/jgt.22606>