Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ciencias

P-extensiones máximas y espacios realcompactos

T E S I S

que para obtener el título de

MATEMÁTICO

P R E S E N T A

Carlos Daniel Velázquez Mendoza

Director de Tesis:

Dr. Alejandro Darío Rojas Sánchez

Ciudad Universitaria, Ciudad de México,
2023

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
   Velázquez
   Mendoza
   Carlos Daniel
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   315256930

2. Datos del tutor
   Dr
   Alejandro Darío
   Rojas
   Sánchez

3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Ángel
   Tamariz
   Mascarúa

4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Alejandro
   Dorantes
   Aldama

5. Datos del sinodal 3
   Dr
   Javier
   Páez
   Cárdenas

6. Datos del sinodal 4
   M. en C.
   Carlos David
   Jiménez
   Flores

7. Datos del trabajo escrito
   P-extensiones máximas y espacios realcompactos
   101 p
   2023

The infinite! No other question has ever moved so profoundly the spirit of man.

David Hilbert

Agradecimientos

Quisiera comenzar agradeciendo a mi familia, en especial a mi madre, quien siempre ha estado apoyándome incondicionalmente a lo largo de mi trayectoria escolar y en mi vida, brindándome de su gran amor y comprensión a lo largo de todos estos años, sin ella no podría estar aquí ahora mismo. A mi tía que ha sido como una segunda madre para mí, me ha brindado su apoyo tanto económico como emocional, su cuidado y la motivación para superarme cada día. A mi padre que a pesar de no haber podido ser parte cercana de mi vida, ha estado motivándome desde pequeño a salir adelante.

Agradezco a mi novia Ruth Itzel García Cadena por haber sido una gran compañera a lo largo de mi carrera, por darme su apoyo emocional y su amor incondicional, por su comprensión y cada gesto de amor. Sin duda es la motivación más grande que he tenido durante este proceso para superar mis adversidades.

Agradezco a los amigos que tuve durante mi trayectoria en la facultad, en especial a Helios Farrell González por sus consejos tanto académicos como personales y a Christian Saúl Villanueva Ocampo por haber estado conmigo durante este proceso.

Quisiera agradecer también a cada profesor y ayudante que marcó una parte importante en mi desarrollo como matemático, sin sus grandes enseñanzas no podría haber desarrollado las herramientas necesarias para superarme profesionalmente. Agradezco en especial a los profesores Alejandro Darío Rojas Sánchez, Javier Páez Cárdenas, Patricia Pellicer Covarrubias, Pierre Michel Bayard, César Hernández Cruz, Hugo Alberto Rincón Mejía, Vinicio Antonio Gómez Gutiérrez, Carlos Eduardo García Reyes, entre otros.

Finalmente, quisiera agradecer a Alejandro Darío Rojas Sánchez de manera particular por su gran amabilidad y paciencia desde el primer curso que tomé con él. Es de las personas más brillantes que he conocido y le agradezco infinitamente el haberme apoyado con este proyecto tan de cerca, ademas de su gran apoyo como profesor, el cual marcó una parte muy importante dentro de mi formación académica. Sin él esto no habría sido posible.

Lista de símbolos

(a, b) Denota el intervalo abierto formado por los números reales entre a y b con $a < b$

$[a, b]$ Denota el intervalo cerrado formado por los números reales entre a y b con $a \leq b$

αX La compactación unipuntual (de Alexandroff) es un espacio Hausdorff localmente compacto X

βX Es la compatación de Stone-Čech de un espacio Tychonoff X

$\bigvee A$ Es el supremo del conjunto A

$\bigwedge A$ Es el ínfimo del conjunto A

$\bigcap_{A \in \mathscr{U}} A$ Es la intersección de los elementos de una familia de conjuntos $\mathscr{U}$

$\bigcap_{i \in J} A_i$ Es la intersección de una familia de conjuntos $\{A_i : i \in J\}$

$\bigcup_{A \in \mathscr{U}} A$ Es la unión de los elementos de una familia de conjuntos $\mathscr{U}$

$\bigcup_{i \in J} A_i$ Es la unión de una familia de conjuntos $\{A_i : i \in J\}$

$\bigoplus_{i \in J} X_i$ Es la suma topológica de una familia de espacios topológicos $\{X_i : i \in J\}$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ El límite de la función f cuando x tiende a x_0

$\prod_{i \in J} A_i$ Es el producto cartesiano de una familia de conjuntos $\{A_i : i \in J\}$

$\gamma_P X$ Es la P-extensión máxima de un espacio X (en caso de que exista)

$\mathbb{N}$ El conjunto de números naturales

$\mathbb{R}$ El conjunto de números reales

$\mathbb{Z}^+$ El conjunto de enteros positivos

$\mathbb{Z}$ El conjunto de números enteros

$\mathscr{P}(X)$ Es el conjunto potencia de X

$\mid A \mid$ Denota la cardinalidad del conjunto A

υX Es la realcompactación de Hewitt de un espacio Tychonoff X

$A \setminus B$ Denota el conjunto diferencia de A y B

$C(X)$ Es el anillo de funciones continuas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ donde X es un espacio topológico

$C(X,Y)$ Es el conjunto de funciones continuas $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos X y Y

$C^*(X)$ Es el anillo de funciones continuas y acotadas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ donde X es un espacio topológico

$coz[X]$ El conjunto de conulos de un espacio topológico X (conjuntos cuyo complemento es un nulo de X)

$E[X]$ Es el conjunto de extensiones de un espacio X

$F(X,Y)$ Es el conjunto de funciónes $f : X \longrightarrow Y$ entre dos conjuntos X y Y

$K[X]$ Es el conjunto de compactaciones de un espacio X

$P[X]$ Es el conjunto de P-extensiones de un espacio X

$X \cong Y$ Significa que los espacios topológicos X y Y son homeomorfos

$Z[X]$ El conjunto de nulos de un espacio topológico X

Índice general

Introducción IX

I P-extensiones 1

1. Extensiones de espacios de Hausdorff 2

1.1. Conceptos preliminares 3

2. P-extensiones máximas 10

2.1. Espacios P-regulares y P-compactos 12

2.2. Caracterizaciones de las propiedades de extensión 16

2.3. Espacios E-compactos 23

2.4. Ejemplos de E-compacidad 27

2.5. Propiedades de extensión Tychonoff 31

II Espacios realcompactos 37

3. Realcompacidad 38

3.1. Espacios realcompactos 39

3.2. Realcompactación de Hewitt 41

4. Propiedades de los espacios realcompactos 54

4.1. Propiedades inducidas por la realcompactación de Hewitt 55

4.2. Realcompacidad y cardinales medibles 70

Apéndice A 88

A. Nociones básicas de Topología de Conjuntos 88

A.1. Conjuntos nulos y espacios Tychonoff 88

A.2. Funciones perfectas 90

A.3. Subespacios C-encajados y C^*-encajados 91

A.4. Otros resultados importantes 93

Apéndice B 95

B. Cardinales medibles 95

B.1. Propiedades básicas de los cardinales medibles 95

Apéndice C 98

C. Espacios paracompactos y metacompactos **98**
C.1. Espacios paracompactos 98
C.2. Espacios metacompactos 100

Bibliografía **101**

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es dar un panorama general de los espacios realcompactos apoyados desde la perspectiva de la teoría de las P-extensiones. La tesis se divide en 2 bloques principales, la parte I que trata sobre las P-extensiones en general y la parte II que trata de los espacios realcompactos. Cada parte está dividida en dos capítulos, siendo un total de 4 capítulos los que componen este trabajo.

En general, a lo largo de la tesis se asumirá que todos nuestros espacios son al menos de Hausdorff y tienen más de un punto. Por espacios Tychonoff se entenderá a aquellos espacios topológicos que son al menos T_0 y completamente regulares. Además, se usará la palabra «espacio» para referirse a un espacio topológico, por lo que en ocasiones diremos «un espacio X» para decir «un espacio topológico X».

Comenzamos definiendo en el Capítulo 1 las extensiones de espacios de Hausdorff X y usamos dicha definición para introducir la retícula de extensiones $E[X]$ con un orden muy particular que nos va a permitir hacer comparaciones entre extensiones de un espacio dado y en ocasiones decidir cuándo dos extensiones deberían considerarse como la misma extensión.

Una vez que se ha trabajado con extensiones en general, se pasa al estudio de las extensiones que tienen una propiedad P en específico. A dichas extensiones las conoceremos como P-extensiones. Veremos para qué tipo de P-extensiones, $P[X]$ que es el conjunto de P-extensiones de un espacio dado X, tiene un máximo en $E[X]$, al cual conoceremos como máximo proyectivo.

Posteriormente recordaremos algunas propiedades básicas de la compactación de Stone-Čech y a partir de ello motivaremos el concepto de P-extensión máxima. En el Capítulo 2, se define de manera formal lo que es una P-extensión máxima y se estudian sus propiedades, se analiza cuándo podemos asegurar que un espacio dado tiene una P-extensión máxima y damos caracterizaciones de ésta.

Como el nombre de este trabajo lo indica, el objetivo, además de estudiar las P-extensiones de un espacio X, es el de estudiar los espacios realcompactos, que orignalmente nacen de tomar una analogía sobre las propiedades de la compactación de Stone-Čech con el anillo de funciones continuas $C(X)$ en vez del anillo de funciones continuas y acotadas $C^*(X)$. En general hay distintos métodos para estudiar las propiedades de la compactación de Stone-Čech, entre ellos, está el estudio de βX a través de los ideales del anillo $C^*(X)$ y el estudio a través de la compactación de Wallman (véanse [1], [4]).

En nuestro caso, a partir de la teoría de P-extensiones, vemos que las propiedades P que son interesantes para nuestro objeto de estudio son aquellas propiedades que son hereditarias a cerrados y productivas. A partir de ello se motivan conceptos como la E-compacidad donde E es un espacio topológico de Hausdorff arbitrario y vemos que en realidad la $[0,1]$-compacidad es la compacidad usual, por lo que al considerar la $\mathbb{R}$-compacidad encontramos la motivación para definir el concepto de espacio realcompacto.

Así como se hace la construcción de la compactación de Stone-Čech de un espacio Tychonoff, nosotros demostraremos que todo espacio Tychonoff tiene una realcompactación máxima a la cual se le conoce con el nombre de *realcompactación de Hewitt* y apoyados en la teoría de las P-extensiones deducimos sus propiedades más importantes, así como propiedades de los espacios realcompactos inducidas a partir de la realcompactación de Hewitt.

A lo largo del desarrollo se puede observar que hay una enorme relación entre la realcompactación de Hewitt y la compactación de Stone-Čech de un espacio dado, de hecho, resulta que la realcompactación de Hewitt, la cual es denotada por υX, en realidad es un subespacio de la compactación de Stone-Čech por lo que dicha teoría nos permite analizar más a fondo a los espacios realcompactos.

Daremos un breve recordatorio de la construcción de la compactación de Wallman para poder apoyarnos en ello y estudiar los espacios realcompactos y las propiedades de υX.

Cabe mencionar que este trabajo está dirigido a lectores que tengan los conocimientos básicos de un primer curso de Topología de Conjuntos. En general, asumimos que el lector conoce lo que es un espacio topológico, los axiomas de separación, propiedades de numerabilidad, resultados básicos sobre espacios de Hausdorff, Tychonoff, normales, etc. así mismo como un conocimiento básico sobre la compactación de Stone-Čech pues de ello nos basaremos para desarrollar la teoría de las P-extensiones y los espacios realcompactos.

De cualquier modo, este trabajo cuenta con 3 apéndices en los cuales se exponen diversos resultados a manera de recordatorio que son usados a lo largo de este trabajo, la mayoría de ellos no cuentan con una prueba pues son parte de los prerrequisitos para leer esta tesis, sin embargo, se deja la referencia de dónde se puede consultar alguna prueba de dichos resultados. Las principales referencias que nos servirán de apoyo son [1], [3] y [5].

En general nos basamos en [1] para desarrollar la teoría principal, sin embargo, también hemos incluido algunos resultados de [2] e incluso ejercicios tanto de [1] como de [2]. En caso de que algún resultado no provenga de dichas obras, se menciona de manera explícita en el texto.

Finalmente cabe mencionar que [4] sirvió de motivación para algunas pruebas encontradas en este texto.

Parte I

P-extensiones

Capítulo 1

Extensiones de espacios de Hausdorff

Dado un espacio topológico arbitrario, podemos preguntarnos por aquellas «propiedades topológicas» que posee. Recordemos que una propiedad topológica es aquella que se preserva bajo homeomorfismos. Como ejemplos de propiedades topológicas tenemos la conexidad, la compacidad, las propiedades de separación de un espacio (conocidas como axiomas de separación), las condiciones de numerabilidad, como primero numerable, segundo numerable, separable, la cardinalidad de un espacio topológico dado, la cantidad de componentes conexas, entre otras.

Sin embargo, hay varios espacios topológicos que no necesariamente disponen de alguna de las propiedades anteriores, por ejemplo, existen espacios topológicos que no son compactos como es el caso de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$. Podemos preguntarnos si a dicho espacio podemos «agregarle» puntos de tal manera que nos quede un espacio compacto. De manera más precisa, podemos preguntarnos si existe un espacio topológico compacto (K, τ_K) y un encaje $h : \mathbb{R} \longrightarrow K$ tal que $h[\mathbb{R}]$ es denso en K.

Esta manera de pensar en que un espacio topológico Y «extiende» a un espacio topológico X se motiva del hecho de que todas las propiedades de interés para la topología son aquellas que se preservan mediante homeomorfismos, por lo que si $h : X \longrightarrow Y$ es un encaje, X y $h[X]$ son homeomorfos y por tanto podemos pensarlos como si fuesen «el mismo espacio».

Como ejemplo podemos tomar al espacio $([0,1], \tau_{\text{usual}|_{[0,1]}})$, $[0,1]$ resulta ser una extensión compacta de $\mathbb{R}$ pues $\mathbb{R} \cong (0,1)$ y $(0,1)$ es denso en $[0,1]$, por lo que podemos encontrar un encaje $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ tal que $h[\mathbb{R}]$ es denso en $[0,1]$ (de hecho podemos pedir que $h[\mathbb{R}] = (0,1)$). A la extensión de un espacio que no es compacto en uno que sí es compacto se le conoce como compactación. Este tema suele abordarse en cursos introductorios o intermedios de Topología de Conjuntos por lo que no se desarrollará en este trabajo y daremos por conocida toda la herramienta que respecta a las compactaciones.

Ahora bien, nosotros podemos extender este concepto de manera más general a otras propiedades topológicas P y preguntarnos acerca de las P-extensiones de un espacio topológico dado, es decir extensiones que tengan dicha propiedad P. Para ello, debemos desarrollar las herramientas sobre las P-extensiones que nos servirán más adelante, cosa que haremos en este primer capítulo.

Como nota importante cabe mencionar que a lo largo de la tesis trabajaremos únicamente con espacios topológicos X que sean al menos de Hausdorff (T_2) y que tengan al menos dos puntos ($|X| > 1$).

Motivados por el concepto de compactación de un espacio dado, surge el concepto más general de extensión de un espacio topológico:

Definición 1.0.1. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que Y es una *extensión* de X, si existe un encaje $h : X \longrightarrow Y$ tal que $h[X]$ es denso en Y.

Como X es homeomorfo a $h[X]$, para la topología dichos espacios son indistinguibles entre sí, así que podemos pensar en que son «el mismo espacio», por lo que en la práctica se suele identificar a X con $h[X]$ y suponer que $X \subseteq Y$.

1.1. Conceptos preliminares

El propósito de esta sección es introducir conceptos básicos de la teoría de extensiones y usar dichos conceptos para estudiar más adelante los espacios realcompactos e introducir el concepto de «realcompactación», para ello definiremos la retícula de extensiones de un espacio topológico X:

$$E[X] =: \{Y : Y \text{ es extensión de } X\}$$

Note que en un principio, $E[X]$ define lo que se le conoce como una *clase*, pero veremos más adelante que en realidad $E[X]$ es un conjunto.

Para desarrollar las herramientas necesarias, se ha tomado como referencia el libro *Extensions and Absolutes of Hausdoff Spaces, Jack R. Porter y R. Grant Woods.*

A lo largo de este trabajo, usaremos la siguiente notación para el conjunto de funciones entre dos conjuntos dados:

Si X y Y son conjuntos, entonces $F(X,Y) =: \{f : X \longrightarrow Y : f \text{ es una función}\}$.

Así como hemos introducido el concepto de extensión de un espacio topológico, podemos pensar en «extender» funciones entre espacios topológicos, lo cual resulta en la siguiente definición:

Definición 1.1.1. Sean X_1 y X_2 espacios topológicos y Y_1 y Y_2 extensiones de los espacios topológicos X_1 y X_2 respectivamente. Sean $f \in F(X_1, X_2)$ y $F \in F(Y_1, Y_2)$. Decimos que F *extiende* a f si $F \restriction_{X_1} = f$. A la función F se le llama *extensión* de f.

Ahora, dada una extensión Y de un espacio topológico X, como podemos pensar a X como subconjunto de Y ($X \subseteq Y$), entonces podemos preguntarnos qué sucede con el conjunto $Y \backslash X$, dicho conjunto suele tener propiedades interesantes por lo que se le dará un nombre específico.

Definición 1.1.2. Si Y es una extensión de X, al espacio $Y \backslash X$ se le llama el *residuo* de X en Y.

Así como hemos adoptado una notación específica para el conjunto de funciones entre dos espacios dados, denotamos de manera especial el conjunto de aquellas funciones que son continuas:

Denotaremos al conjunto de funciones continuas de un espacio topológico X_1 en un espacio topológico X_2 por $C(X_1, X_2)$.

Una vez que tenemos estas definiciones y términología básica, probaremos un pequeño resultado respecto a las extensiones continuas de una función dada, de manera más concreta, probaremos que las extensiones continuas entre dos espacios (de Hausdorff) son únicas.

Proposición 1.1.3. Sean X_1 y X_2 espacios topológicos y Y_1 y Y_2 extensiones de X_1 y X_2 respectivamente. Sea $f \in C(X_1, X_2)$. Si existe $F \in C(Y_1, Y_2)$ extensión de f, entonces F es única.

Demostración. Sean $F_1, F_2 \in C(Y_1, Y_2)$ extensiones de f. Para probar la unicidad de las extensiones de f basta ver que $F_1 = F_2$. La prueba de ésto lo haremos mediante reducción al absurdo. Supongamos que $F_1 \neq F_2$, entonces existe $x \in Y_1$ tal que $F_1(x) \neq F_2(x)$. Como Y_2 es un espacio de Hausdorff, existen U y V abiertos de Y_2, ajenos tales que $F_1(x) \in U$ y $F_2(x) \in V$. Entonces $x \in F_1^{-1}[U] \cap F_2^{-1}[V]$. Por otra parte, recordemos que X_1 es denso en Y_1, por lo que al ser $F_1^{-1}[U] \cap F_2^{-1}[V]$ un abierto no vacío en Y_1 por ser F_1 y F_2 son continuas, $X_1 \cap (F_1^{-1}[U] \cap F_2^{-1}[V]) \neq \varnothing$.

Luego, sea $x_0 \in X_1 \cap (F_1^{-1}[U] \cap F_2^{-1}[V])$, entonces $x_0 \in X_1$ y además $F_1(x_0) \in U$ y $F_2(x_0) \in V$. Pero recordemos que $F_1 \restriction_{X_1} = f = F_2 \restriction_{X_1}$, por lo que $F_1(x_0) = f(x_0) = F_2(x_0)$ con lo cual $x_0 \in f^{-1}[U \cap V] = f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$ lo cual es absurdo y concluye nuestra prueba.

■

Proposición 1.1.4. Si Y es una extensión de X, entonces $|Y| \leq 2^{2^{|X|}}$

Demostración. Para cada $x \in X$, sea $F_x = \{U \cap X : U \in \tau_Y \text{ y } x \in U\}$. Sabemos que dado $x \in X$, F_x es un filtro en X de subconjuntos abiertos.

Definimos $\phi : Y \longrightarrow \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ dada por $\phi(x) = F_x$. Tenemos que ϕ es inyectiva pues dados $x, y \in Y$ con $x \neq y$, como Y es de Hausdorff y X es denso en Y, existen $U \cap X \in F_x$ y $V \cap X \in F_y$ tales que $x \in U$, $y \in V$, $U, V \in \tau_Y$ y $U \cap V = \varnothing$. Luego, $x \notin V$ por lo que $V \cap X \in F_y \backslash F_x$ y por tanto $F_x \neq F_y$, es decir, $\phi(x) \neq \phi(y)$. Como ya vimos, ϕ es inyectiva, por lo que $|Y| \leq |\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))| = 2^{2^{|X|}}$.

■

Ahora daremos la noción de que dos extensiones sean equivalentes, es decir, diremos cuándo dos extensiones pueden considerarse «la misma» para nuestros propósitos.

Definición 1.1.5. Dos extensiones Y_1 y Y_2 de un espacio topológico X se dice que son *equivalentes* si existe un homeomorfismo $h : Y_1 \longrightarrow Y_2$ tal que $h(x) = x$ para toda $x \in X$. Esto se indica mediante la notación $Y_1 \equiv_X Y_2$.

Notemos que la Proposición 1.1.4. nos dice el tamaño máximo que puede tener una extensión de un espacio topológico dado (recordemos que sólo estamos trabajando con espacios de Hausdorff), esta limitación nos dice que la cardinalidad de cualquier extensión Y es a lo más $2^{2^{|X|}}$, es decir, que hay a lo más tantas extensiones como conjuntos de cardinalidad menor o igual a $2^{2^{|X|}}$, por lo que nos limita la cantidad de extensiones que un espacio de Hausdorff puede tener. De ahí, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.1.6. Sea X un espacio topológico. Tenemos que $E[X]$ es un conjunto.

Antes de continuar, haremos una pequeña observación sobre el conjunto $E[X]$.

Nota 1.1.7. Del corolario 1.1.6. y de la Definición 1.1.5. podemos preguntarnos qué sucede con la relación $\equiv_X$ en el conjunto $E[X]$, resulta que dicha relación es una relación de equivalencia lo cual nos permite considerar un sistema completo de representantes de la relación y considerar a $E[X]$ como dicho conjunto. En otras palabras, a partir de ahora, consideraremos sólo extensiones de X de tal modo que no sean equivalentes entre sí y cualquier extensión de X sea equivalente a alguna de $E[X]$. Además pensaremos a las extensiones equivalentes como si fueran la misma extensión.

Ahora que contamos con la definición precisa de $E[X]$ y hemos visto que es un conjunto, podemos preguntarnos si es posible definir alguna relación de orden en $E[X]$ a modo de decir cuándo una extensión «es más grande» que otra. Efectivamente esto es posible y lo dejamos plasmado en la siguiente definición:

Definición 1.1.8. Sea X un espacio topológico y $Y, Z \in E[X]$, decimos que Z es *proyectivamente menor a* Y, denotado $Z \leq Y$, si existe una función continua $f : Y \longrightarrow Z$ tal que $f \restriction_X = id_X$.

Con esta relación de orden definida en $E[X]$, dicho conjunto resulta ser un orden parcial, más aún, es una semiretícula superior completa, esto lo demostraremos a continuación, no sin antes dar la definición de semiretícula superior completa para una mejor comprensión.

Definición 1.1.9. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que X es una semiretícula superior completa si todo subconjunto no vacío de X tiene un supremo en X.

Además daremos un pequeño recordatorio sobre Topología General:

Definición 1.1.10.

(1) Sea X un espacio topológico y $\{X_i \mid i \in J\}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $i \in J$, sea $F_i \subseteq C(X, X_i)$. Sea $F = \bigcup_{i\in J} F_i$. Para cada $i \in J$ y $f \in F_i$ sea X_f homeomorfo a X_i. Sea $Y = \prod_{f\in F} X_f$. La *función evaluación* $e_F \in F(X, Y)$ correspondiente a F se define como $e_F(x) = (f(x))_{f\in F}$ para cada $x \in X$. Dicha función es tal que $\Pi_f \circ e_F = f$ para cada $f \in F$.

(2) La familia F definida arriba, se dice que *separa puntos de cerrados* si para cada $A \subseteq X$ cerrado y cada $p \in X \backslash A$, existen $i \in J$ y $f \in F_i$ tales que $f(p) \notin cl_{X_i}(f[A])$.

Teorema 1.1.11. (Teorema del Encaje) Sea X un espacio topológico y $\{X_i \mid i \in J\}$ una familia de espacios topológicos. Consideremos F_i, F, Y y e_F como en la Definición 1.1.10. Entonces $e_F \in C(X, Y)$ y además si F separa puntos de cerrados, entonces e_F es un encaje.

Una prueba del Teorema 1.1.11. se puede encontrar en [1].

Ahora sí contamos con las herramientas necesarias para probar que $(E[X], \leq)$ es una semiretícula superior completa.

Proposición 1.1.12. Sea X un espacio topológico, tenemos que $(E[X], \leq)$ es una semiretícula superior completa.

Demostración. Primero hay que probar que $(E[X], \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Para ello debemos ver que $\leq$ es una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica. Para ver que es reflexiva, si $Y \in E[X]$, tenemos que $id : Y \longrightarrow Y$ es continua y cumple que $id \restriction_X = id_X$, por lo que $Y \leq Y$. Para la transitividad, consideremos Y, Z, $W \in E[X]$ tales que $Y \leq Z$ y $Z \leq W$, entonces existen $f : Z \longrightarrow Y$ y $g : W \longrightarrow Z$ funciones continuas tales que $f \restriction_X = id_X$ y $g \restriction_X = id_X$. Tomemos $h : W \longrightarrow Y$ dada por $h = f \circ g$, h es continua por ser una composición de funciones continuas, luego, $\forall x \in X$ tenemos que $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = x$ pues $f \restriction_X = id_X$ y $g \restriction_X = id_X$, por lo que $h \restriction_X = id_X$ y por lo tanto $Y \leq W$.

Para finalizar la prueba de que $(E[X], \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, veamos que $\leq$ es antisimétrica. Para ello, sean Y, $Z \in E[X]$ tales que $Y \leq Z$ y $Z \leq Y$. Hay que probar que $Y = Z$, es decir, que $Y \equiv_X Z$ pues estamos trabajando con un sistema completo de representantes. Como $Y \leq Z$ y $Z \leq Y$, existen $f : Z \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones continuas tales que $f \restriction_X = id_X$ y $g \restriction_X = id_X$. Notemos que para $x \in X$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = x$ pues $f \restriction_X = id_X = g \restriction_X$, por lo que $(f \circ g) \restriction_X = id_X = id_Y \restriction_X$ y $(g \circ f) \restriction_X = id_X = id_Z \restriction_X$. Entonces $f \circ g$ es una función continua que coincide con id_Y en X, el cual es denso en Y y además Z es un espacio de Hausdorff, por lo que tenemos que $f \circ g = id_Y$.

De manera análoga tenemos que $g \circ f = id_Z$, por lo que $f = g^{-1}$ y por lo tanto $g : Y \longrightarrow Z$ es un homeomorfismo tal que $g \restriction_X = id_X$, es decir, $Y \equiv_X Z$.

Finalmente, falta ver que todo subconjunto no vacío de $E[X]$ admite un supremo en $E[X]$. Sea $\varnothing \neq S \subseteq E[X]$. Consideremos la familia de funciones $C = \{i_Y : Y \in S\}$, donde $i_Y : X \longrightarrow Y$ es la función inclusión. Tenemos que i_Y es continua para cada $Y \in S$. Definimos pues $e : X \longrightarrow \prod_{Y \in S} Y$ dada por $e(x) = (i_Y(x))_{Y \in S}$ para cada $x \in X$. Notemos que $(\Pi_Y \circ e)(x) = x$ $\forall Y \in S$ donde Π_Y denota la proyección en el factor $Y \in S$.

Sabemos que e es continua pues cada i_Y lo es. Veamos que la familia C separa puntos de cerrados. Sea $A \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus A$. Sea $Y \in S$ arbitrario. Como $Y \in E[X]$, entonces X es un subespacio de Y y como A es cerrado en X, entonces $A = cl_X(A) = cl_Y(A) \cap X$, por lo que $x \notin cl_Y(A) = cl_Y(i_Y[A])$. Por lo tanto C separa puntos de cerrados y por el Teorema 1.1.11. (Teorema del Encaje), $e : X \longrightarrow \prod_{Y \in S} Y$ es un encaje.

Sea $Z = cl_{\prod_{Y \in S} Y}(e[X])$.

Como e es un encaje, tenemos que X es homeomorfo a $e[X]$ y por lo tanto $Z \in E[X]$. Para $Y \in S$, sea $f_Y = \Pi_Y \restriction_Z$ donde $\Pi_Y : \prod_{Y \in S} Y \longrightarrow Y$ es la proyección en Y. Entonces $f_Y : Z \longrightarrow Y$ es una función continua y $f_Y(x) = \Pi_Y(e(x)) = x$ $\forall x \in X$. Así, por definición, tenemos que $Y \leq Z$ para toda $Y \in S$ lo cual prueba que Z es una cota superior de S.

Veamos ahora que es la menor de las cotas superiores de S. Sea W cota superior de S, es decir, $Y \leq W$ $\forall Y \in S$. Basta ver que $Z \leq W$. Para ello, tenemos que si $Y \in S$, al ser W cota superior de S, $Y \leq W$, por lo que por definición, existe una función continua $g_Y : W \longrightarrow Y$ tal que $g_Y \restriction_X = id_X$.

Ahora, sea $h : W \longrightarrow \prod_{Y \in S} Y$ dada por $h(w) = (g_Y(w))_{Y \in S}$, notemos que $\Pi_Y(h(w)) = g_Y(w)$.

Como $\Pi_Y \circ h = g_Y$ es continua para toda $Y \in S$, entonces h es continua (por propiedades del producto topológico). Además, para cada $x \in X$, $(\Pi_Y \circ h)(x) = g_Y(x) = x = (\Pi_Y \circ e)(x)$ para toda $Y \in S$. Así, $h \restriction_X = e \restriction_X$ y además $h[X] = e[X]$.

Como se cumple que

$$h[W] = h[cl_W(X)] \subseteq cl_{\prod_{Y\in S} Y}(h[X]) = cl_{\prod_{Y\in S} Y}(e[X]) = Z$$

entonces $h[W] \subseteq Z$. Por lo tanto $Z \leq W$ y podemos concluir que $Z = \bigvee S$ con $Z \in E[X]$.

■

Así como en los conjuntos parcialmente ordenados que conocemos usualmente, tenemos la noción de «máximo» para $E[X]$:

Definición 1.1.13. Sea $\varnothing \neq Q \subseteq E[X]$. Una extensión $Y \in E[X]$ es un *máximo proyectivo* en Q si $Y \in Q$ y $Z \leq Y$ para toda $Z \in Q$.

Notemos que si Y es un máximo proyectivo de Q, entonces $\bigvee Q \leq Y$ por definición de supremo ya que Y es cota superior de Q, por otra parte, $Y \leq \bigvee Q$ pues $Y \in Q$, por tanto $Y \equiv_X \bigvee Q$ y tenemos que si existe un máximo proyectivo para un subconjunto de extensiones Q, éste es único y es la extensión $\bigvee Q$ donde $\bigvee Q$ existe pues como vimos en la Proposición 1.1.12. $(E[X], \leq)$ es una semiretícula superior completa y $Q \neq \varnothing$.

Con esta nueva definición, podemos preguntarnos si existe un máximo proyectivo en $E[X]$ y en caso de existir, si podemos caracterizarlo. Resulta que la respuesta a esto es menos complicada de lo que el lector podría imaginar en un principio. Tenemos pues la siguiente proposición:

Proposición 1.1.14. Dado un espacio topológico X, el máximo proyectivo de $E[X]$ es X.

Demostración. Sabemos que $X \in E[X]$ pues id_X es un encaje denso de X en X. Por otra parte, para toda $Y \in E[X]$, por definición de extensión, existe un encaje $h_Y : X \longrightarrow Y$ el cual en particular es una función continua, la cual además cumple que $(h_Y) \restriction_X = id_X$ pues estamos identificando a X con $h_Y[X]$, por lo cual $Y \leq X$.

■

Después de desarrollar toda esta herramienta, regresamos al problema inicial de las «propiedades topológicas» y las P-extensiones. Como el lector podrá intuir, no podemos hablar realmente de lo que es una P-extensión aún pues no hemos dado el significado preciso de «propiedad topológica». Para ello haremos uso de la noción de «clase» sin abordar la teoría de clases pues no es el propósito de este trabajo.

Como se mencionó anteriormente, una propiedad topológica es aquella que se preserva bajo homeomorfismos, tales como la compacidad, la conexidad, el ser primero numerable, segundo numerable o los axiomas de separación que cumple un espacio dado. Formalizando esto obtenemos la siguiente definición:

Definición 1.1.15.

1. Sea P una clase de espacios topológicos cerrada bajo homeomorfismos, es decir, si $X \in P$ y X es homeomorfo a Y, entonces $Y \in P$. Dichas clases son conocidas como *repletas*. Decimos que P es una propiedad topológica. Se usarán de forma intercambiable las frases «$X \in P$» y «X tiene la propiedad P». Recordemos que nuestra convención es suponer que todos los espacios topológicos con los que trabajamos son espacios de Hausdorff al menos que se especifique lo contrario, por lo que al decir frases como: «Sea P la propiedad de ser compacto», nos referimos a: «Sea P la clase de espacios topológicos compactos de Hausdorff».

2. Para un espacio topológico X, sea $P[X] =: \{Y \in E[X] : Y \in P\}$. El conjunto $P[X]$ es llamado el conjunto de P-extensiones de X.

Ahora, definiremos lo que significa que una propiedad topológica P sea hereditaria a cerrados y productiva.

Definición 1.1.16. Sea X un espacio topológico y P una propiedad topológica, decimos que:

1. P es hereditaria a cerrados si cada que $X \in P$ y $A \subseteq X$ es cerrado en X, se tiene que $A \in P$.

2. P es productiva si para $U \subseteq P$ tal que U es un conjunto, se tiene que $\displaystyle\prod_{Y \in U} Y \in P$.

Terminamos pues enunciando la siguiente proposición importante.

Proposición 1.1.17. Sea X un espacio topológico y P una propiedad productiva y hereditaria a cerrados. Si $P[X] \neq \varnothing$, entonces $P[X]$ es una semiretícula superior completa de $E[X]$, en particular, $P[X]$ tiene máximo proyectivo.

Demostración. Como $P[X] \subseteq E[X]$, podemos dotarle del mismo orden parcial que a $E[X]$. Para ver que es una semiretícula superior completa, hay que ver que todo subconjunto no vacío de $P[X]$ tiene un supremo en $P[X]$. Sea $\varnothing \neq S \subseteq P[X]$. Sabemos por la Proposición 1.1.12. que S admite un supremo en $E[X]$, es decir, existe $Z \in E[X]$ tal que $Z = \bigvee S$. Como $S \subseteq P[X] \subseteq E[X]$ y Z es cota superior de S en $E[X]$, tenemos que Z es cota superior de S en $P[X]$. Basta ver que $Z \in P[X]$. Notemos que esto en particular probaría que $P[X]$ tiene máximo proyectivo.

En la prueba de la Proposición 1.1.12. vimos que $\bigvee S \equiv_X cl_{\prod_{Y \in S} Y}(e[X])$ donde la función $e : X \longrightarrow \displaystyle\prod_{Y \in S} Y$ se definió en dicha demostración. Como P es una propiedad productiva, por la Definición 1.1.16 (2), sabemos que $\displaystyle\prod_{Y \in S} Y \in P$. Luego, como P es hereditaria a cerrados, por la Definición 1.1.16. (1), se tiene que al ser $cl_{\prod_{Y \in S} Y}(e[X])$ cerrado en $\displaystyle\prod_{Y \in S} Y$, $Z = \bigvee S = cl_{\prod_{Y \in S} Y}(e[X]) \in P$, es decir, $Z \in P[X]$ que es lo que se deseaba.

■

Una vez que hemos desarrollado este material, podemos comenzar a atacar el problema de ver qué sucede cuando P toma el papel de propiedades conocidas para nosotros y otras que posiblemente no sean tan conocidas para el lector, como es el caso de la «realcompacidad», concepto que introduciremos más adelante en el Capítulo 3.

Por el momento, recordemos que si $K = \{Y : Y \text{ es compacto y de Hausdorff}\}$, tenemos el siguiente resultado de nuestros cursos de Topología:

Proposición 1.1.18. Sea X un espacio topológico, entonces $K[X] \neq \varnothing$ si y sólo si X es un espacio de Tychonoff.

A partir de esta proposición, usando la Proposición 1.1.17, tenemos que si X es Tychonoff, entonces $K[X]$ tiene máximo proyectivo, dicha compactación recibe el nombre de compactación de Stone-Čech y se denota como βX, donde $\beta X = \bigvee K[X]$.

El análisis de dichas compactaciones se realiza en un curso de Topología General y nos servirá como motivación para desarrollar herramientas similares para el estudio de las realcompactaciones, una vez hayamos introducido el concepto de espacio realcompacto.

Capítulo 2

P-extensiones máximas

En el capítulo anterior, introdujimos el concepto de P-extensión, analizamos algunas propiedades de las P-extensiones (es decir, del conjunto $P[X]$) y además vimos lo que son los máximos proyectivos de subconjuntos Q de $E[X]$. En esta ocasión, a manera de continuación, seguiremos motivándonos por las propiedades de las compactaciones, en particular de la compactación de Stone-Čech.

Recordemos que $\beta X = \bigvee K[X]$, por lo que βX es el máximo proyectivo de $K[X]$. Por otra parte, se suele pensar a esta compactación como la «compactación máxima» en los cursos de Topología, por lo que nos preguntaremos si es posible abstraer sus caracterizaciones para dar un concepto de «P-extensión máxima» (en el caso de βX, sería la K-extensión máxima) y ver cómo se relaciona con nuestro concepto previo del máximo proyectivo.

Sabemos que la siguiente propiedad caracteriza totalmente a βX:

Proposición 2.0.1. Dado un espacio topológico X de Tychonoff, βX es la única compactación de X en donde X está C^*-encajado. Esta propiedad puede formularse de la siguiente manera:

1. $\beta X \in K[X]$.
2. Si $Y \in K$ y $f \in C(X, Y)$, entonces existe una función $\beta f \in C(\beta X, Y)$ tal que $\beta f \restriction_X = f$.

Por lo que la propiedad de ser la «compactación máxima» es equivalente a los puntos (1) y (2) de la Proposición 2.0.1, de donde podemos abstraer dichas propiedades para las P-extensiones de la siguiente manera:

Definición 2.0.2. Sea P una propiedad topológica. Decimos que un espacio topológico Z es una *P-extensión máxima* de X si:

1. $Z \in P[X]$.
2. Si $Y \in P$ y $f \in C(X, Y)$, entonces existe una función $Pf \in C(Z, Y)$ tal que $Pf \restriction_X = f$.

De la definición anterior, podemos preguntarnos ¿Qué tiene de especial la función Pf? y ¿Por qué hemos decidido llamarla de manera específica así?, esto sucede ya que si tenemos $Z \in P[X]$, $Y \in P$ y $f \in C(X, Y)$ y tenemos dos funciones $g, h \in C(Z, Y)$ tales que $g \restriction_X = f = h \restriction_X$, entonces por ser X denso en Z y Y un espacio de Hausdorff, por la Proposición 1.1.3. tenemos que dichas funciones son iguales y por lo tanto Pf es única.

La siguiente proposición nos da otras propiedades de las P-extensiones máximas:

Proposición 2.0.3. Sea X un espacio topológico. Entonces:

1. Una P-extensión máxima de X es el máximo proyectivo de $P[X]$
2. Si Z_1 y Z_2 son P-extensiones máximas de X, entonces $Z_1 \equiv_X Z_2$

Demostración. Para el inciso (1), tomemos $Z \in P[X]$ una P-extensión máxima de X. Sea $Y \in P[X]$, en particular tenemos que $Y \in P$ y además como $Y \in E[X]$, podemos considerar $i_Y : X \longrightarrow Y$ la función inclusión de X en Y, en particular i_Y es una función continua de X en Y, entonces $i_Y \in C(X,Y)$. Por otra parte, al ser Z una P-extensión máxima, existe $Pf \in C(Z,Y)$ tal que $Pf \restriction_X = i_Y$. Pero en X, $i_Y = id_X$, por lo que $Pf \restriction_X = id_X$, así $Y \leq Z$ y por tanto Z es el máximo proyectivo de $P[X]$.

Para la prueba del inciso (2), sean Z_1 y Z_2 P-extensiones máximas de X. Como Z_1 y Z_2 son unas P-extensiones máximas de X, entonces $Z_1, Z_2 \in P$, esto por la Definición 2.0.2. Por lo que como $Z_1, Z_2 \in P[X] \subseteq E[X]$, entonces existen $f : X \longrightarrow Z_1$ y $g : X \longrightarrow Z_2$ funciones continuas tales que $f \restriction_X = id_X = g \restriction_X$.

Entonces, aplicando nuevamente la Definición 2.0.2. existen funciones continuas $Pf \in C(Z_1, Z_2)$ y $Pg \in C(Z_2, Z_1)$ tales que $Pf \restriction_X = f$ y $Pg \restriction_X = g$. Ahora, tenemos que dado $x \in X$, $(Pf \circ Pg)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = x$ y $(Pg \circ Pf)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = x$, por lo que $(Pf \circ Pg) \restriction_X = id_X = (Pg \circ Pf) \restriction_X$ y como X es denso en Z_1 y en Z_2, tenemos que $Pf \circ Pg = id_{Z_2}$ y $Pg \circ Pf = id_{Z_1}$. Por lo tanto Pf es un homeomorfismo entre Z_1 y Z_2 tal que $Pf \restriction_X = f \restriction_X = id_X$, por lo que concluimos que $Z_1 \equiv_X Z_2$.

■

Una vez que hemos visto que las P-extensiones máximas, en caso de existir, son únicas, podemos usar una notación específica para ellas:

Definición 2.0.4. La única P-extensión máxima de un espacio topológico X (en caso de que exista), se denota por $\gamma_P X$. Notemos en particular que $\gamma_P X = X$ si y sólo si $X \in P$.

Como ya vimos, si un espacio topológico X tiene una P-extensión máxima, ésta debe ser el máximo proyectivo de $P[X]$, pero... ¿El recíproco será cierto?, es decir, si P es una propiedad topológica tal que $P[X]$ tiene un máximo proyectivo, ¿Necesariamente X tiene una P-extensión máxima?

Responder esta pregunta se escapa de nuestros alcances, pero la respuesta es negativa: existen espacios topológicos X y propiedades topológicas P tales que $P[X]$ tiene un máximo proyectivo pero no existe una P-extensión máxima. Un ejemplo de un espacio y una propiedad con dichas características se puede consultar en [1], página 364.

Este hecho en sí es bastante sorprendente y abre nuevas cuestiones respecto a las P-extensiones máximas, por ejemplo ¿Para qué clase de espacios X y propiedades topológicas P existe una P-extensión máxima?, ¿Cómo se ven dichas P-extensiones?, éstas y más cuestiones serán abordadas en las próximas secciones de este capítulo.

2.1. Espacios P-regulares y P-compactos

Dada una propiedad topológica P, sabemos que no siempre un espacio topológico X tiene una P-extensión, luego, aquellos espacios que sí tienen una P-extensión cumplen que se pueden encajar de manera densa en un espacio topológico con la propiedad P, por lo que es necesaria dicha condición para al menos considerar que un espacio dado tenga una P-extensión.

Por otro lado, esta condición de que un espacio se encaje de manera densa en un P-espacio (espacio topológico con la propiedad P) se puede hacer un poco menos estricta, pidiendo que se encaje como subespacio de un producto de espacios con la propiedad P. De aquí se motivan las siguientes definiciones:

Definición 2.1.1. Sea P una propiedad topológica. Un espacio topológico X es llamado *P-regular* (respectivamente, *P-compacto*) si es homeomorfo a un subespacio (respectivamente, un subespacio cerrado) de un producto de espacios cada uno con la propiedad P. La clase de espacios P-regulares (respectivamente, P-compactos) se denota por $Reg(P)$ (respectivamente, $K(P)$).

Como en toda definición, sería bueno considerar algunos ejemplos a manera de ilustrar este nuevo concepto. Comencemos recordando el siguiente resultado:

Teorema 2.1.2. (del encaje de Tychonoff). Sea X un espacio Tychonoff, entones existe un encaje $e : X \longrightarrow [0,1]^C$ donde $C = C(X, [0,1])$.

Para ilustrar la Definición 2.1.1. consideremos la propiedad de ser homeomorfo al intervalo $[0,1]$ y llamémosle P.

Veremos qué sucede con $Reg(P)$ y $K(P)$. El Teorema 2.1.2. nos dice que todo espacio Tychonoff se encaja como subespacio de un producto de espacios homeomorfos a $[0,1]$ (en realidad se encaja como subespacio de un producto de copias de $[0,1]$), por lo que la clase de espacios Tychonoff está contenida en $Reg(P)$.

Ahora, si tenemos un espacio X que sea P-regular, por la Definición 2.1.1. tenemos que X se encaja como subespacio de un producto de espacios homeomorfos a $[0,1]$. Nosotros sabemos que $[0,1]$ es un espacio Tychonoff y la propiedad de ser un espacio Tychonoff es una propiedad topológica productiva y hereditaria, por lo que X resulta ser un espacio Tychonoff. Entonces concluimos que $Reg(P)$ es la clase de todos los espacios Tychonoff.

En el caso de $K(P)$, tenemos que $K(P)$ es la clase de todos los espacios compactos de Hausdorff, pues si tenemos un espacio X tal que X es compacto y de Hausdorff, entonces es normal y por lo tanto Tychonoff, entonces por el Teorema 2.1.2. , X se encaja en un producto $[0,1]^C$ y de hecho al ser compacto, su imagen será un subespacio cerrado en $[0,1]^C$ por lo que será P-compacto.

Por otra parte, si X es P-compacto, entonces X es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto de espacios homeomorfos a $[0,1]$. Dichos espacios homeomorfos a $[0,1]$ son compactos pues $[0,1]$ es compacto y además su producto será un espacio compacto y de Hausdorff pues la compacidad es una propiedad productiva (por el Teorema de Tychonoff) y ser de Hausdorff también es una propiedad productiva. Luego, X será compacto y de Hausdorff pues ser compacto es una propiedad hereditaria a cerrados y la propiedad de Hausdorff es hereditaria en general.

Después de este pequeño ejemplo, continuamos dando un criterio que nos permite determinar cuándo un espacio topológico es P-regular.

Este criterio es bastante técnico pero nos será de utilidad más adelante.

Teorema 2.1.3. Sea P una propiedad topológica y sea X un espacio topológico. Entonces:

1. Supongamos que $\{X_i : i \in J\}$ es una familia de espacios topológicos cada uno de los cuales es un producto finito de espacios con la propiedad P y supongamos que $\bigcup_{i\in J} C(X, X_i)$ separa puntos de cerrados en X. Para cada $i \in J$ y $f \in C(X, X_i)$, sea X_f homeomorfo a X_i. Entonces la función evaluación $e : X \longrightarrow \prod_{f\in\bigcup_{i\in J} C(X,X_i)} X_f$ dada por $e(x) = (f(x))_{f\in\bigcup_{i\in J} C(X,X_i)}$ es un encaje y por lo tanto X es P-regular.

2. Sea X P-regular, entonces existe una familia de espacios topológicos $\{X_i : i \in J\}$ tales que cada uno de ellos es un producto finito de P-espacios y tal que la familia de funciones $\bigcup_{i\in J} C(X, X_i)$ separa puntos de cerrados en X.

Demostración. Para probar el inciso (1), sea $C = \bigcup_{i\in J} C(X, X_i)$. Luego, por hipótesis, C separa puntos de cerrados en X, por lo que aplicando el Teorema 1.1.11. obtenemos que la función $e : X \longrightarrow \prod_{f\in\bigcup_{i\in J} C(X,X_i)} X_f$ es un encaje. Ahora, notemos que para cada $f \in \bigcup_{i\in J} C(X, X_i)$, X_f es un producto finito de P-espacios, por lo que el producto $\prod_{f\in\bigcup_{i\in J} C(X,X_i)} X_f$ sería un producto de P-espacios con lo cual concluimos que X es P-regular.

Finalmente, para el inciso (2), como X es P-regular, existe una familia de espacios topológicos $\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ con la propiedad topológica P de tal modo que X se encaja en $\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$, por lo que podemos pensar en X como un subespacio de $\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$, es decir, $X \subseteq \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$.

Buscamos que cada factor de nuestra familia sea un producto finito de P-espacios, por lo que consideraremos $W = \{F \subseteq I : F \neq \varnothing \text{ y } F \text{ es finito}\}$ y proponemos $\{X_F : F \in W\}$ donde para cada $F \in W$, $X_F = \prod_{\alpha\in F} Y_\alpha$. Notemos que cada X_F es un producto finito de P-espacios. Veamos si la familia $\bigcup_{A\in F} C(X, X_A)$ separa puntos de cerrados. Sean $A \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus A$, con $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}$.

Como A es cerrado en X, $X \setminus A$ es abierto en X y como X tiene la topología de subespacio, tenemos que $X \setminus A = U \cap X$ con U abierto en el producto $\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$. Luego, como $x \in X \setminus A$ y $X \setminus A \subseteq U$, entonces $x \in U$. Por definición de la topología producto, existe $F \subseteq I$ finito y no vacío tal que $x \in \bigcap_{\alpha\in F} \Pi_\alpha^{-1}[V_\alpha] \subseteq U$ donde V_α es abierto en Y_α, ya que las preimágenes de abiertos bajo las proyecciones forman una subbase para la topología producto.

Sea $V = \bigcap_{\alpha\in F} \Pi_\alpha^{-1}[V_\alpha]$. Como $V \subseteq U$, entonces $V \cap A \subseteq U \cap A \subseteq A$ y además como $A \subseteq X$, $V \cap A \subseteq U \cap A \subseteq U \cap X = X \setminus A$, de donde concluimos que $V \cap A \subseteq A$ y $V \cap A \subseteq X \setminus A$. Por lo tanto $V \cap A = \varnothing$.

Definimos $f_F = \Pi_F \restriction_X$ donde $\Pi_F : \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha\in F} Y_\alpha$ es la proyección en el producto de los factores determinados por el conjunto de índices F. Recordemos que $\prod_{\alpha\in F} Y_\alpha = X_F$. Sabemos que $f_F \in C(X, X_F)$ pues las proyecciones son funciones continuas. Por otro lado, $f_F(x) \in \prod_{\alpha\in F} V_\alpha$ pues $x \in \bigcap_{\alpha\in F} \Pi_\alpha^{-1}[V_\alpha]$. El conjunto $\prod_{\alpha\in F} V_\alpha$ es abierto en $\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ pues cada V_α es abierto en Y_α con $\alpha \in F$.

Luego, si $f_F[A] \cap \prod_{\alpha\in F} V_\alpha \neq \varnothing$, entonces existe $y \in A$ tal que $f_F(y) \in f_F[A] \cap \prod_{\alpha\in F} V_\alpha$. Supongamos que $y = (y_\alpha)_{\alpha\in I}$, luego, como $f_F(y) \in \prod_{\alpha\in F} V_\alpha$, $y_\alpha \in V_\alpha$ para toda $\alpha \in F$, Por lo tanto, $y \in \Pi_\alpha^{-1}[V_\alpha]$ para toda $\alpha \in F$, es decir, $y \in \bigcap_{\alpha\in F} \Pi_\alpha^{-1}[V_\alpha]$. Pero A y $\bigcap_{\alpha\in F} \Pi_\alpha^{-1}[V_\alpha]$ son ajenos, por lo cual esto no es posible. Con lo que concluimos que $f_F[A] \cap \prod_{\alpha\in F} V_\alpha = \varnothing$ y por tanto $f_F(x) \notin cl_{X_F} f_F[A]$ lo cual nos dice que $\bigcup_{A\in F} C(X, X_A)$ separa puntos de cerrados que es lo que se quería demostrar.

■

Finalizamos esta sección enunciando más propiedades de las clases $Reg(P)$ y $K(P)$ respecto a P:

Proposición 2.1.4. Sea P una propiedad topológica. Entonces:

1. $P \subseteq K(P) \subseteq Reg(P)$
2. $Reg(K(P)) = Reg(P)$
3. $K(K(P)) = K(P)$
4. $Reg(Reg(P)) = Reg(P)$
5. $K(Reg(P)) = Reg(P)$

Demostración.

1. Sea $X \in P$, tenemos que X se encaja como subespacio cerrado de sí mismo y además tiene la propiedad P, por lo que de acuerdo a la Definición 2.1.1. tenemos que $X \in K(P)$.

   Ahora, si $X \in K(P)$, X se encaja como subespacio cerrado de un producto de P-espacios, en particular, se encaja como subespacio de un producto de P-espacios, por lo que $X \in Reg(P)$.

   Por lo tanto $P \subseteq K(P) \subseteq Reg(P)$.

2. Sea $X \in Reg(K(P))$, entonces X se encaja como subespacio de un producto de $K(P)$-espacios. Cada $K(P)$-espacio a su vez se encaja como subespacio cerrado de un producto de P-espacios, usando la función producto definida a partir los encajes obtenidos y realizando las composiciones correspondientes, obtenemos que X se encaja como un subespacio de un producto de P-espacios. Por lo tanto, $Reg(K(P)) \subseteq Reg(P)$.

   Ahora, sea $X \in Reg(P)$. Entonces X se encaja como subespacio de un producto de P-espacios. Por el inciso (1) de la Proposición 2.1.4, sabemos que cada P-espacio es un $K(P)$ espacio, por lo que X se encaja como subespacio de un producto de $K(P)$-espacios. Por lo tanto $X \in Reg(K(P))$ y concluimos que $Reg(P) \subseteq Reg(K(P))$

3. Sea $X \in K(K(P))$, entonces X se encaja como subespacio cerrado de un producto de $K(P)$-espacios. Por otra parte, recordemos que cada $K(P)$-espacio, por definición, se encaja como subespacio cerrado de un producto de P-espacios.

   Usando la función producto definida a partir los encajes cerrados obtenidos para obtener un encaje cerrado y realizando las composiciones correspondientes, obtenemos que X se encaja como subespacio cerrado de un producto de P-espacios, por lo tanto $X \in K(P)$ y concluimos que $K(K(P)) \subseteq K(P)$.

Para la contención recíproca, aplicamos el inciso (1) de la Proposición 2.1.4. y obtenemos que $K(P) \subseteq K(K(P))$.

4. Sea $X \in Reg(Reg(P))$. Entonces X se encaja como subespacio de un producto de $Reg(P)$-espacios, cada uno de los cuales a su vez se encaja como subespacio de un producto de P-espacios. Usando la función producto definida a partir los encajes obtenidos y realizando las composiciones correspondientes obtenemos que X se encaja como subespacio de un producto de P-espacios, es decir, $X \in Reg(P)$.

   Por lo tanto, $Reg(Reg(P)) \subseteq Reg(P)$.

   Por otra parte, aplicando el inciso (1) de la Proposición 2.1.4. obtenemos que $Reg(P) \subseteq Reg(Reg(P))$.

5. Sea $X \in K(Reg(P))$, entonces X se encaja como subespacio cerrado de un producto de $Reg(P)$-espacios. Pero cada uno de estos $Reg(P)$-espacios se encaja como subespacio de un producto de P-espacios. Usando la función producto definida a partir los encajes obtenidos y realizando las composiciones correspondientes, obtenemos que X se encaja como subespacio de P-espacios, es decir, $X \in Reg(P)$ y por lo tanto $K(Reg(P)) \subseteq Reg(P)$.

   La contención recíproca se obtiene aplicando el inciso (1) de la Proposición 2.1.4. con la cual tenemos que $Reg(P) \subseteq K(Reg(P))$.

■

2.2. Caracterizaciones de las propiedades de extensión

Retomando el problema de determinar cuándo un espacio topológico tiene una P-extensión máxima, tenemos que una condición necesaria es que dicho espacio topológico sea P-regular, esto se sigue de que un espacio con al menos una P-extensión puede encajarse como subespacio de un P-espacio.

La condición de ser P-regular no es una condición suficiente para que un espacio dado tenga una P-extensión máxima, pero a partir de esto podemos preguntarnos qué sucede si ahora vamos cambiando la propiedad P buscando aquellas propiedades que cumplan lo siguiente: que la mayoría de espacios topológicos tengan una P-extensión máxima. Esto motiva el estudio del tema presentado en esta sección y la siguiente definición:

Definición 2.2.1. Una propiedad topológica P se llama una *propiedad de extensión* si cada espacio P-regular tiene una P-extensión máxima.

El objetivo de esta sección es poder caracterizar las propiedades topológicas que son propiedades de extensión.

En la Definición 1.1.16. definimos las propiedades topológicas productivas y hereditarias a cerrados. De acuerdo a la Proposición 1.1.17. dichas propiedades cumplen que $P[X]$ tiene un máximo proyectivo si $P[X] \neq \varnothing$.

En el siguiente teorema veremos cómo se relacionan estas propiedades con las propiedades de extensión y para ello es conveniente tener en mente los resultados expuestos en el Apéndice A.2. sobre funcioens perfectas.

Lema 2.2.2. Las propiedades de extensión son hereditarias a cerrados y productivas.

Demostración. Sea P una propiedad de extensión. Si X es un espacio con la propiedad topológica P y A es un subespacio cerrado de X, consideremos la función inclusión $i : A \longrightarrow X$. Como P es una propiedad de extensión y A es P-regular, de acuerdo a la Definición 2.2.1. tenemos que $\gamma_P A$ existe y por la Definición 2.0.2. existe una función $Pi \in C(\gamma_P A, X)$ tal que $Pi \restriction_A = i$.

Ahora, por la continuidad de Pi tenemos lo siguiente:

$$Pi[\gamma_P A] = Pi[cl_{\gamma_P A}(A)] \subseteq cl_X i[A] = A$$

de donde la última igualdad se da puesto que A es cerrado en X.

Notemos que lo anterior nos dice que $Pi[\gamma_P A \setminus A] \subseteq Pi[\gamma_P A] \subseteq A$, por lo que $Pi[\gamma_P A \setminus A] \subseteq A$. Por otra parte, tenemos que $Pi \in C(\gamma_P A, X)$, A es denso en $\gamma_P A$ y $Pi \restriction_A = i$ es una función perfecta de A en $Pi \restriction_A [A] = i[A] = A$ pues sería la función identidad de A en A (con A considerado con la misma topología en ambos casos).

Aplicando la Proposición A.2.5. obtenemos que $Pi[\gamma_P A \setminus A] \subseteq X \setminus Pi[A] = X \setminus A$. Entonces tenemos que $Pi[\gamma_P A \setminus A] \subseteq A$ y $Pi[\gamma_P \setminus A] \subseteq X \setminus A$ lo cual nos dice que $Pi[\gamma_P A \setminus A] = \varnothing$ y por lo tanto $\gamma_P A \setminus A = \varnothing$, es decir, $A = \gamma_P A$. Esto último nos dice que A tiene la propiedad P, por lo que P es hereditaria a cerrados.

Para ver que P es productiva, sea $\{X_i : i \in J\}$ una familia de P-espacios y consideremos $X = \prod_{i \in J} X_i$. Para ver que X tiene la propiedad P, basta ver como arriba que $\gamma_P X = X$, la cual existe pues P es una propiedad de extensión y X es P-regular al ser un producto de P-espacios.

Consideremos la familia de proyecciones de X en X_i, $\{\Pi_i : i \in J\}$. Tenemos que para cada $i \in J$, $\Pi_i \in C(X, X_i)$, por lo que existe una función continua $P\Pi_i : \gamma_P X \longrightarrow X_i$ tal que $P\Pi_i \restriction_X = \Pi_i$. Definimos $f : \gamma_P X \longrightarrow X$ dada por $f(x) = (P\Pi_i(x))_{i \in J}$. Notemos que $\Pi_i \circ f = P\Pi_i$ para toda $i \in J$. Como cada función $P\Pi_i \in C(\gamma_P X, X_i)$, tenemos que $f \in C(\gamma_P X, X)$. Más aún, notemos que $f \restriction_X = id_X$, ya que si $(x_i)_{i \in J} \in X$, entonces tenemos que

$$f((x_i)_{i \in J}) = (P\Pi_i((x_i)_{i \in J}))_{i \in J} = (\Pi_i((x_i)_{i \in J}))_{i \in J} = (x_i)_{i \in J}.$$

Como $f \in C(\gamma_P X, X)$, X es denso en $\gamma_P X$ y $f \restriction_X = id_X$ es una función perfecta en su imagen podemos aplicar la Proposición A.2.5. y entonces tenemos que $f[\gamma_P X \setminus X] \subseteq X \setminus f[X] = X \setminus X = \varnothing$. Por lo tanto $\gamma_P X \setminus X = \varnothing$ y entonces $X = \gamma_P X$, es decir, $X \in P$. Concluimos así que P es productiva.

$\blacksquare$

Ahora sí, procedemos a enunciar el teorema que nos relaciona las nociones de que una propiedad sea hereditaria a cerrados y productiva con la noción de ser una propiedad de extensión:

Teorema 2.2.3. Sea P una propiedad topológica. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. P es hereditaria a cerrados y productiva
2. P es una propiedad de extensión
3. $P = K(P)$

Demostración. Primero veamos que (1) y (3) son equivalentes. Supongamos pues que P es hereditaria a cerrados y productiva. Hay que probar que $P = K(P)$. Sea $X \in K(P)$, entonces X se encaja como subespacio cerrado de un producto de P-espacios, es decir, existe una familia $\{Y_i : i \in J\}$ de P-espacios y un encaje $e : X \longrightarrow \prod_{i \in J} Y_i$ tal que $e[X]$ es cerrado en $\prod_{i \in J} Y_i$.

Como P es productiva, $\prod_{i \in J} Y_i \in P$. Por otro lado, como P es hereditaria a cerrados, $e[X] \in P$ pues $e[X]$ es cerrado en $\prod_{i \in J} Y_i$.

Esto prueba que X tiene la propiedad P y como X fue arbitrario en $K(P)$, entonces tenemos que $K(P) \subseteq P$.

Por otro lado, usando el inciso (1) de la Proposición 2.1.4. tenemos que $P \subseteq K(P)$. Por lo tanto $P = K(P)$.

Con esto hemos visto que (1) implica (3), veamos ahora que (3) implica (1).

Supongamos que $P = K(P)$. Veamos que P es productiva y hereditaria a cerrados. Para ver que es productiva, tomamos una familia $\{X_i : i \in J\}$ de P-espacios y consideramos $Y = \prod_{i \in J} Y_i$.

Notemos que Y se encaja en Y y además es cerrado en sí mismo, por lo que $Y \in K(P)$. Pero como $K(P) = P$, $Y \in P$ y por lo tanto P es productiva.

Finalmente, veamos que P es hereditaria a cerrados. Sea $X \in P$ y $A \subseteq X$ cerrado en X. Tenemos que A se encaja en X mediante la función inclusión $i : A \longrightarrow X$ con $i[A] = A$ el cual es cerrado en X. De aquí obtenemos que $A \in K(P)$ pues X es un P-espacio. Luego, usando que $K(P) = P$, tenemos que $A \in P$. Concluimos pues que P es hereditaria a cerrados.

Por otra parte, aplicando el Lema 2.2.2. obtenemos que (2) implica (1).

Para finalizar, debemos probar que (1) implica (2).

Sea $X \in Reg(P)$, veamos que X tiene una P-extensión máxima. Sea S un conjunto de cardinalidad $2^{2^{|X|}}$. Consideremos $F = \{Y \in P : Y \subseteq S\}$. Tenemos que F es un conjunto pues F está limitado por la cantidad de subconjuntos que tiene S y la cantidad de topologías que se le pueden asignar a S, es decir, está limitado por la cantidad de elementos de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(S))$. Para cada $Y \in F$ y cada $f \in C(X, Y)$, sea Y_f un espacio homeomorfo a Y.

Sea $M = \prod_{Y \in F, f \in C(X,Y)} Y_f$. Como $X \in Reg(P)$, por el Teorema 2.1.3. inciso (2), existe una familia de espacios topológicos $\{X_i : i \in J\}$ y un conjunto $\{f_i : i \in J\}$ de funciones tales que $f_i \in C(X, X_i)$ para toda $i \in J$, además cada X_i es un producto finito de P-espacios y la familia $\{f_i : i \in J\}$ separa puntos de cerrados de X.

Por hipótesis, sabemos que P es productiva, luego, como cada X_i con $i \in J$ es un producto finito de P-espacios, X_i es un P-espacio. Por otro lado, al ser P-hereditaria a cerrados, tenemos que $cl_{X_i} f_i[X]$ es un P-espacio.

Definamos $W_i = cl_{X_i} f_i[X]$.

Por la Proposición 1.1.4, tenemos que al ser W_i una extensión de $f_i[X]$,

$$|W_i| \leq 2^{2^{|f_i[X]|}}$$

Por otra parte, sabemos que f_i restringida a su imagen es suprayectiva, por lo que $|X| \geq |f_i[X]|$ y por lo tanto obtenemos que:

$$|W_i| \leq 2^{2^{|f_i[X]|}} \leq 2^{2^{|X|}}$$

de donde se sigue que cada W_i es homeomorfo a algún miembro de la familia F. Esto último se da dado que habría una biyección entre W_i y algún subconjunto de S, luego, podemos asignarle una topología a dicho subconjunto de S de modo que sean homeomorfos. Por otra parte, como la familia $\{f_i : i \in J\}$ separa puntos de cerrados de X, entonces $\bigcup_{Y \in F} C(X, Y)$ separa puntos de cerrados de X.

Aplicando el Teorema 1.1.11. (Teorema del Encaje), la función evaluación $e : X \longrightarrow M$ dada por $e(x) = (f(x))_{f \in C(X,Y), Y \in F}$ es un encaje de X en M.

Como $e : X \longrightarrow M$ es un encaje, podemos identificar a X con $e[X]$. Probaremos primero que $e[X]$ tiene una P-extensión máxima. El hecho de que X tenga una P extensión máxima se deberá a que dichos espacios son homeomorfos. Entonces, si $Y \in F$ y $f \in C(X, Y)$, tendremos que $\Pi_f \restriction_{e[X]}$ se puede pensar como una función en X que cumple $\Pi_f(e(x)) = f(x)$ para toda $x \in X$.

Sea $Z \in P$, es decir, Z es un P-espacio y sea $g \in C(X, Z)$. Como P es hereditaria a cerrados, $cl_Z g[X]$ tiene la propiedad P. Por otra parte, tenemos las siguientes desigualdades:

$$|cl_Z[(g \circ e)[X]]| \leq 2^{2^{|(g \circ e)[X]|}} \leq 2^{2^{|X|}}$$

de donde la primer desigualdad se da por la Proposición 1.1.4.

Entonces existe $W \in F$ y un homeomorfismo $h : cl_Z[g[X]] \longrightarrow W$ (por las razones mencionadas anteriormente para W_i). Por otro lado, tenemos que $h \circ g \in C(X, W)$, por lo que $h^{-1} \circ \Pi_{h \circ g} \in C(M, Z)$ donde $\Pi_{h \circ g}$ es la proyección de M en W.

Sea $\tilde{g} = (h^{-1} \circ \Pi_{h \circ g}) \restriction_{cl_M e[X]}$. Entonces $\tilde{g} \in C(cl_M e[X], Z)$ y si $x \in X$, $\tilde{g}(e(x)) = (h^{-1} \circ \Pi_{h \circ g})(x) = g(x)$. Por lo tanto $\tilde{g}$ es una extensión continua de g a $cl_M e[X]$. Como P es hereditaria a cerrados y productiva, $cl_M e[X] \in P$ y por lo tanto es la P-extensión máxima de $e[X]$, es decir de X (ya que son homeomorfos).

∎

De la Definición 2.0.2. y el Teorema 2.2.3. tenemos que si P es una propiedad de extensión y $X, Y \in Reg(P)$, entonces se cumple que si $f \in C(X, Y)$, entonces existe $Pf \in C(\gamma_P X, \gamma_P Y)$ tal que $Pf \restriction_X = f$.

Por otra parte, podemos preguntarnos si dada una propiedad topológica P, existirá una propiedad de extensión Q que contenga a P y más aún, que sea la más pequeña con esta propiedad.

Primero analicemos ¿Qué propiedades de exensión conocemos que contengan a P?. Por la Proposición 2.1.4. inciso (1) tenemos que $P \subseteq K(P) \subseteq Reg(P)$, es decir, $K(P)$ es una propiedad que contiene a P.

¿Será $K(P)$ una propiedad de extensión? por la Proposición 2.1.4. inciso (3), también sabemos que $K(K(P)) = K(P)$, lo cual por el Teorema 2.2.3. sabemos que es equivalente a que $K(P)$ sea una propiedad de extensión. Más aún ¿Será esta la mínima propiedad de extensión que contiene a P? dicho de otra manera debería cumplirse lo siguiente:

1. $K(P)$ es una propiedad de extensión y $P \subseteq K(P)$
2. Si Q es una propiedad de extensión tal que $P \subseteq Q$, entonces $K(P) \subseteq Q$

El punto (1) es lo que acabamos de comentar. Para ver si se cumple el punto (2), sea Q una propiedad de extensión tal que $P \subseteq Q$. Sea $X \in K(P)$, entonces existe una familia de espacios topológicos $\{X_i : i \in J\}$ con la propiedad P y existe un encaje $e : X \longrightarrow \prod_{i \in J} X_i$ tal que $e[X]$ es cerrado en $\prod_{i \in J} X_i$. En particular, como $P \subseteq Q$, para toda $i \in J$ se cumple que $X_i \in Q$, por lo tanto $X \in K(Q)$. Pero Q es una propiedad de extensión, por lo que aplicando el Teorema 2.2.3. obtenemos que $Q = K(Q)$ y por lo tanto $X \in Q$, es decir, concluimos que $K(P) \subseteq Q$.

Ahora, notemos que se cumple lo siguiente: Si X es P-regular, entonces X tiene una $K(P)$-extensión máxima.

Esto se puede ver como sigue:

Sea $X \in Reg(P)$. Aplicando la Proposición 2.1.4. tenemos que $Reg(K(P)) = Reg(P)$ y luego $X \in Reg(K(P))$. Como vimos en el punto (2), $K(P)$ es una propiedad de extensión, por lo que X tiene una $K(P)$-extensión máxima.

Hemos demostrado pues la siguiente proposición:

Proposición 2.2.4. Sea P una propiedad topológica, entonces $K(P)$ es una propiedad de extensión que contiene a P y es la más pequeña de las propiedades de extensión que contiene a P. Más aún, todo espacio $X \in Reg(P)$ tiene una $K(P)$ extensión máxima, es decir, $\gamma_{K(P)}X$ existe.

Ahora, daremos un criterio para determinar cuándo una extensión P-compacta de un espacio P-regular X es $\gamma_{K(P)}X$.

Teorema 2.2.5. Sea P una propiedad topológica, $X \in Reg(P)$ y $T \in K(P)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $T \equiv_X \gamma_{K(P)}X$
2. Si Y es un P-espacio y $f \in C(X, Y)$, entonces existe una función continua $\tilde{f} : T \longrightarrow Y$ tal que $\tilde{f} \restriction_X = f$

Demostración. Para demostrar que (1) implica (2), nos basaremos en la Definición 2.0.2. que nos da la definición de $K(P)$-extensión máxima. Como $T \equiv_X \gamma_{K(P)}X$, entonces se cumplen los siguientes puntos:

1. $T \in K(P)[X]$
2. Si $Y \in K(P)$ y $g \in C(X, Y)$, entonces existe una función $K(P)g \in C(T, Y)$ tal que $K(P)g \restriction_X = g$

Sea pues $Y \in P$ y $f \in C(X, Y)$, veamos que f tiene una extensión continua $\tilde{f}$ de T en Y. Por la Proposición 2.1.4. sabemos que $P \subseteq K(P)$. Como $Y \in P \subseteq K(P)$ y $f \in C(X, Y)$, entonces usando el inciso (2) de nuestras hipótesis, obtenemos que existe una función $K(P)f \in C(T, Y)$ tal que $K(P)f \restriction_X = f$. Nombramos $\tilde{f} = K(P)f$ y obtenemos el resultado deseado.

Finalmente, veamos que (2) implica (1).

Debemos ver que $T \equiv_X \gamma_{K(P)}X$, por lo que usaremos la Definición 2.0.2. nuevamente. Sea $Z \in K(X)$ y $g \in C(X, Z)$. Si podemos encontrar una $\tilde{g} \in C(T, Z)$ tal que $\tilde{g} \restriction_T = g$, entonces tendríamos lo deseado. Como Z es P-compacto, existe una familia de espacios topológicos con la propiedad P, digamos, $\{P_i : i \in J\}$ y un encaje $h : Z \longrightarrow \prod_{i \in J} P_i$ tal que $h[Z]$ es cerrado en $\prod_{i \in J} P_i$.

Para cada $i \in J$, consideremos $\Pi_i : \prod_{i \in J} P_i \longrightarrow P_i$ la proyección en el i-ésimo factor. Así mismo, sabemos que para cada $i \in J$, $\Pi_i \circ h \circ g \in C(X, P_i)$, así, por hipótesis, existe $k_i \in C(T, P_i)$ tal que $k_i \restriction_X = \Pi_i \circ h \circ g$.

Definimos $k : T \longrightarrow \prod_{i \in J} P_i$ dada por $k(x) = (k_i(x))$. Sea $W = \prod_{i \in J} P_i$. Como $k_i \in C(T, P_i)$ para toda $i \in J$, tenemos que $k \in C(T, W)$ y además como $k_i \restriction_X = \Pi_i \circ h \circ g$, tenemos que $k \restriction_X = h \circ g$.

Luego, $k[T] = k[cl_T(X)] \subseteq cl_W(h[Z]) = h[Z]$ pues $h[Z]$ es cerrado en W. Por otra parte, podemos considerar $h^{-1} : h[Z] \longrightarrow Z$ pues $h : Z \longrightarrow \prod_{i \in J} P_i$ es un encaje y podemos definir $\tilde{g} \in C(T, Z)$ dada por $\tilde{g} = h^{-1} \circ k$. Finalmente notemos que $\tilde{g} \restriction_X = h^{-1} \circ h \circ g = g$ por lo que $\tilde{g}$ es la extensión continua de g buscada. Por lo tanto $T \equiv_X \gamma_{K(P)} X$.

■

Recordemos que la Proposición 2.0.1. fue nuestra motivación inicial para la definición de P-extensión máxima, la cual recordemos nos dice lo siguiente:

βX es la única compactación de X en donde X está C^*-encajado.

Del mismo modo que generalizamos este concepto, podemos generalizar el de tener un subespacio C-encajado (o C^*-encajado) en un espacio dado.

El lector puede referirse al Apéndice A.3. para mayor información sobre los subespacios C-encajados y C^*-encajados.

Nuestra definición quedaría como sigue:

Definición 2.2.6. Sea P una propiedad topológica. Un subespacio X de un espacio Y, está P-encajado en Y si cada que $Z \in P$ y $f \in C(X, Z)$, se tiene que existe $F \in C(Y, Z)$ tal que $F \restriction_X = f$.

Ahora, a manera de ilustración, supongamos que $P = \{X : X \text{ es homeomorfo a } \mathbb{R}\}$. Aplicando la Definición 2.2.6. a esta P en particular, obtenemos que X está P-encajado en Y si para cada espacio Z homeomorfo a $\mathbb{R}$ y cada $f \in C(X, Z)$, se tiene que existe $F \in C(Y, Z)$ tal que $F \restriction_X = f$. En particular, esto es equivalente a que para cada $f \in C(X, \mathbb{R})$, existe $F \in C(Y, \mathbb{R})$ tal que $F \restriction_X = F$, es decir, estar P-encajado sería equivalente a estar C-encajado, donde P es la propiedad de ser homeomorfo a $\mathbb{R}$.

De manera totalmente análoga, obtenemos que estar C^*-encajado es lo mismo que estar P-encajado con P la propiedad de ser homeomorfo a $[0, 1]$.

Con esta nueva terminología el Teorema 2.2.5. se lee como sigue:

Teorema 2.2.5. Sea P una propiedad topológica. Entonces la extensión P-compacta máxima de un espacio P-regular X es la única extensión P-compacta de X en la cual X está P-encajado.

lo cual es una generalización directa de la propiedad que ya conocíamos sobre βX.

Del Teorema 2.2.5. podemos obtener la siguiente caracterización de la P-compacidad:

Corolario 2.2.7. Sea P una propiedad topológica y X un espacio P-regular. Las siguientes son equivalentes:

1. X es P-compacto
2. Si T es una extensión P-regular de X y $p \in T \setminus X$, entonces existe un P-espacio Y y una función $f \in C(X, Y)$ tal que f no puede ser extendida de manera continua a una función $\tilde{f} \in C(X \cup \{p\}, Y)$.

Demostración. Primero demostraremos que (1) implica (2). Supongamos que (2) no se cumple, es decir, existe una extensión P-regular T de X y un punto $p \in T \setminus X$ tal que para todo P-espacio Y y toda función $f \in C(X,Y)$, f se puede extender a una función continua $\tilde{f} \in C(X \cup \{p\}, Y)$.

Sea $S = \gamma_{K(P)}(X \cup \{p\})$. Como $p \notin X$, $X \subsetneq S$ y por tanto S es una $K(P)$-extensión propia de X. Ahora tomemos un P-espacio Y y una función $f \in C(X,Y)$, entonces existe $\tilde{f} \in C(S,Y)$ tal que $\tilde{f} \restriction_X = f$. Por el Teorema 2.2.5. obtenemos que $S \equiv_X \gamma_{K(P)}X$ y por lo tanto X está propiamente contenido en $\gamma_{K(P)}X$, por lo que no puede ser P-compacto. Por lo tanto (1) no se cumple.

Ahora probaremos que (2) implica (1). Si X no es P-compacto, entonces $\gamma_{K(P)}X$ contiene propiamente a X, por lo que existe $p \in \gamma_{K(P)}X \setminus X$. Sabemos además que $\gamma_{K(P)}X$ es P regular ya que $K(P) \subseteq Reg(P)$ y además por el Teorema 2.2.5. tenemos que si Y es un P-espacio y $f \in C(X,Y)$, entonces existe una función continua $\tilde{f} : \gamma_{K(P)}X \longrightarrow Y$ tal que $\tilde{f} \restriction_X = f$, en particular, para cada $f \in C(X,Y)$ existe $f' : (X \cup \{p\}, Y)$ tal que $f' \restriction_X = f$ lo cual contradice nuestra hipótesis.

$\blacksquare$

Con el Corolario 2.2.7. damos por terminada esta sección.

2.3. Espacios E-compactos

Supongamos que nos dan un espacio topológico de Hausdorff E.

¿Cómo encontramos una propiedad topológica P_E tal que E es P_E-compacto?. Si P_E es tal propiedad, entonces todo espacio P_E-regular tiene una extensión $K(P_E)$-máxima, esto por la Proposición 2.2.4.

Como E debe ser P_E-regular por ser P_E-compacto, cada subespacio de un producto de copias de E debe ser P_E-regular. Llamemos a esos espacios E-completamente regulares.

El Teorema 2.2.3. nos dice, entre otras cosas, que toda propiedad hereditaria a cerrados y productiva es una propiedad de extensión, por lo que tenemos que la clase de subespacios cerrados de productos de copias de E es una propiedad de extensión.

De hecho, es la propiedad de extensión más pequeña a la cual E pertenece dado que cualquier propiedad de extensión que contenga a E, debe contener productos de copias de E por ser productiva y además subespacios cerrados de dichos productos por ser hereditaria a cerrados.

Llamaremos a esta propiedad de extensión E-compacidad.

Se sigue que cada espacio E-completamente regular tiene una extensión E-compacta máxima.

Formalizando estas nociones damos la siguiente definición:

Definición 2.3.1. Sea E un espacio topológico, y sea $P_E = \{X : X \text{ es homeomorfo a } E\}$. Un espacio X se llama *E-completamente regular* si X es P_E-regular y se llama *E-compacto* si es P_E-compacto. Una propiedad de extensión P que es P_E-compacidad para algún espacio topológico E se llama una *propiedad de extensión simplemente generada.*

Podemos observar que un espacio es E-completamente regular (respectivamente, E-compacto) si y sólo si es homeomorfo a un subespacio (respectivamente, subespacio cerrado) de alguna potencia de E.

También nos gustaría mencionar que nombrar el término «E-completamente regular» como «E-regular» sería lo más natural de acuerdo a nuestro desarrollo y terminología previa, sin embargo, se suele adoptar más dicho nombre en la literatura puesto que algunas propiedades tendrán relación con los espacios Tychonoff, los cuales sabemos que son espacios que cumplen una propiedad conocida como ser «completamente regular» tal como se menciona al inicio de este trabajo.

Ahora, como mencionábamos anteriormente, todo espacio E-completamente regular tiene una extensión E-compacta máxima, eso lo dejaremos plasmado en la siguiente proposición:

Proposición 2.3.2. Sea E un espacio topológico. Entonces todo espacio X E-completamente regular tiene una extensión E-compacta máxima y ésta se denota por $\gamma_E X$

Demostración. Sea X un espacio E-completamente regular. Por la Definición 2.3.1. sabemos que como X es E-completamente regular, entonces X es P_E regular donde P_E está definido como $P_E = \{X : X \text{ es homeomorfo a } E\}$. Por la Proposición 2.2.4. $K(P_E)$ es una propiedad de extensión y como $X \in Reg(P_E)$, entonces X tiene una $K(P_E)$-extensión máxima, es decir, una extensión E-compacta máxima, la cual ya sabemos que es única y justifica nuestra elección de denotarla por $\gamma_E X$.

■

Introduciremos una noción que nos permitirá determinar cuándo un espacio es E-completamente regular:

Definición 2.3.3. Sean X y E espacios topológicos. Un subconjunto A de X se llama *E-abierto* si $A = f^{-1}[V]$ donde V es un subconjunto abierto de alguna potencia finita de E, E^n, con $n \in \mathbb{N}$ y $f \in C(X, E^n)$.

El siguiente teorema nos da dos caracterizaciones de los espacios E-completamente regulares.

Teorema 2.3.4. Sean X y E espacios topológicos. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. X es E-completamente regular
2. Para cada subconjunto cerrado A de X y cada punto $p \in X \setminus A$, existe un entero positivo $n \in \mathbb{N}$ y $f \in C(X, E^n)$ tal que $f(p) \notin cl_{E^n}(f[A])$, es decir, la familia $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X, E^n)$ separa puntos de cerrados.
3. Los subconjuntos E-abiertos de X forman una base para los conjuntos abiertos de X.

Demostración. Notemos que el enunciado «X es E-completamente regular» es equivalente al enunciado «X es P_E-regular», esto por la Definición 2.3.1. donde sabemos que P_E es el conjunto dado por $P_E = \{X : X \text{ es homeomorfo a } E\}$.

Luego, como la propiedad P_E es ser homeomorfo a E, usando el Teorema 2.1.3. tenemos que X es P_E regular si y sólo si existe una familia de espacios topológicos $\{P_i : i \in J\}$ tales que cada uno de ellos es un producto finito de espacios homeomorfos a E y $\bigcup_{i\in J} C(X, X_i)$ separa puntos de cerrados de X.

Finalmente, notemos que esto último es equivalente a que la familia $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X, E^n)$ separa puntos de cerrados de X. Por lo tanto (1) y (2) son equivalentes.

Veamos pues que (2) y (3) son equivalentes.

Supongamos primero que se cumple (2) y demostremos (3). Sea W un subconjunto abierto de X y $p \in W$. Entonces $X \setminus W$ es cerrado en X y $p \in X \setminus (X \setminus W)$, por lo que usando nuestra hipótesis, es decir, el enunciado (2), tenemos que existe un entero positivo $n \in \mathbb{N}$ y una función $f \in C(X, E^n)$ tal que $f(p) \notin cl_{E^n}(f[X \setminus W])$.

Sabemos que $E^n \setminus (cl_{E^n} f[X \setminus X])$ es abierto en E^n, por lo que aplicando la Definición 2.3.3. de subconjunto E-abierto, tenemos que $V = f^{-1}[E^n \setminus (cl_{E^n} f[X \setminus W])]$ es un subconjunto E-abierto de X. Tenemos que $f(p) \notin cl_{E^n} f[X \setminus W]$, por lo que $p \in V$. Ahora, veamos que $V \subseteq W$.

Sea $x \in V$, como $V = f^{-1}[E^n \setminus (cl_{E^n} f[X \setminus W])]$, entonces $f(x) \in E^n \setminus (cl_{E^n} f[X \setminus W])$, por lo que si $x \notin W$, entonces $x \in X \setminus W$, por lo que $f(x) \in f[X \setminus W] \subseteq cl_{E^n} f[X \setminus W]$ lo cual no es posible. Por lo tanto $x \in W$ y concluimos que $V \subseteq W$ con $p \in V$. Por lo tanto la familia de subconjuntos E-abiertos de X forma una base para los abiertos de X.

Finalmente veamos que (3) implica (2). Supongamos que se cumple (3), para ver que se cumple (2), tomemos A un subconjunto cerrado de X y un punto $p \in X \setminus A$. Como A es cerrado en X, entonces $X \setminus A$ es abierto en X. Como la familia de conjuntos E-abiertos forma una base para los abiertos de X, tenemos que existe un E-abierto W tal que $p \in W \subseteq X \setminus A$. Como W es E-abierto, por la Definición 2.3.3, existe $n \in \mathbb{N}$ y existe $V \subseteq E^n$ abierto en E^n tal que $W = f^{-1}[V]$.

Por lo tanto, $p \in f^{-1}[V] \subseteq X \setminus A$, por lo que $f(p) \in V \subseteq E^n \setminus f[A]$ y por lo tanto $f(p) \notin cl_{E^n} f[A]$ ya que V es un abierto de E^n que contiene a $f(p)$ y es ajeno a $f[A]$.

■

En general, no es posible dar una equivalencia donde el entero positivo del Teorema 2.3.4. sea $n = 1$, es decir, no basta con pedir que la familia $C(X, E)$ separe puntos de cerrados. No nos centraremos en analizar esto por el momento ya que no está dentro de nuestros propósitos y alcances, pero hay casos donde esto sí es suficiente y los analizaremos posteriormente.

La caracterización de la extensión P-compacta máxima de un espacio P-regular dada en el Teorema 2.2.5. y la caracterización de P-compacidad del Corolario 2.2.7. se pueden extender al caso donde P-compacidad es E-compacidad para algún espacio topológico E de la siguiente manera:

Teorema 2.3.5. Sean X y E espacios topológicos tales que X es E-completamente regular. Entonces:

1. Una extensión E-compacta T es equivalente a $\gamma_E X$ si y sólo si para cada $f \in C(X, E)$, existe $\tilde{f} \in C(T, E)$ tal que $\tilde{f} \restriction_X = f$.
2. X es E-compacto si y sólo si para cada extensión E-completamente regular T de X y cada punto $p \in T \setminus X$, existe $f \in C(X, E)$ tal que f no se puede extender de manera continua a $\tilde{f} \in C(X \cup \{p\}, E)$.

Demostración.

1. Este inciso está inspirado en el Teorema 2.2.5. por lo cual lo usaremos para su prueba.

   Recordemos primero que, por la Definción 2.3.1. tenemos que una extensión es E-compacta si es una $K(P_E)$-extensión donde P_E es la propiedad de ser homeomorfo a E. Por otra parte, sabemos que $\gamma_{K(P_E)} X = \gamma_E X$, por lo que el Teorema 2.2.5. aplicado en este caso quedaría como sigue:

   $T \equiv_X \gamma_{K(P_E)} X$ si y sólo si para todo $Y \in P_E$ y $f \in C(X, Y)$, existe $\tilde{f} : T \longrightarrow Y$ tal que $\tilde{f} \restriction_X = f$

   como P_E es la propiedad de ser homeomorfo a E, esto es equivalente a:

   $T \equiv_X \gamma_E X$ si y sólo si para toda $f \in C(X, E)$ existe $\tilde{f} : T \longrightarrow E$ tal que $\tilde{f} \restriction_X = f$

2. De manera análoga y como se comentó anteriormente, este inciso se inspira en el Corolario 2.2.7. por lo que usando nuevamente la Definición 2.3.1. tenemos que X es E-compacto si y sólo si X es P_E compacto. Usando el Corolario 2.2.7. tenemos lo siguiente:

X es P_E compacto si y sólo si para cada T extensión P_E regular de X y cada $p \in T \setminus X$ existe un P_E espacio Y y una función $f \in C(X, Y)$ tal que f no puede ser extendida de manera continua a $\tilde{f} \in C(X \cup \{p\}, Y)$

y usando que P_E es la propiedad de ser homeomorfo a E y la Definición 2.3.1. esto sería equivalente a:

X es E-compacto si y sólo si para cada extension T que sea E-completamente regular y cada punto $p \in T \setminus X$, existe una función $f \in C(X, E)$ tal que f no se puede extender de manera continua a $\tilde{f} \in C(X \cup \{p\}, E)$

lo cual concluye ambas pruebas.

■

Finalmente, como el lector podrá intuir, también daremos una definición análoga a la de estar P-encajado y es como sigue:

Definición 2.3.6. Un subespacio X de un espacio topológico Y se dice que está E-***encajado*** en Y si para cada $f \in C(X, Y)$, existe $\tilde{f} \in C(Y, E)$ tal que $\tilde{f} \restriction_X = f$.

2.4. Ejemplos de E-compacidad

Comenzamos esta sección con algunas cosas que quedaron pendientes, una de ellas fue: ver qué sucede con la E-compacidad y con la E-regularidad completa cuando E es un espacio topológico en específico. De hecho, después de la prueba del Teorema 2.3.4. se mencionó que no bastaba pedir que la familia $C(X,E)$ separe puntos de cerrados para que esto sea equivalente a que X sea E-completamente regular, pero resulta que en algunos casos particulares esto sí resulta suficiente, lo cual analizaremos en el siguiente teorema:

Teorema 2.4.1. Si E es $\mathbb{R}$, $[0,1]$, $\mathbb{N}$ o $\{0,1\}$, entonces las siguientes son equivalentes para un espacio X:

1. X es E-completamente regular.
2. $C(X,E)$ separa puntos de cerrados de X.
3. La familia $\{f^{-1}[V] : V \text{ es abierto en } E \text{ y } f \in C(X,E)\}$ forma una base para los conjuntos abiertos de X.

Demostración. Tenemos que (2) implica (1) se da por el Teorema 2.3.4. tomando $n=1$. Para ver que (1) implica (2), iremos tomando distintos casos:

1. Si $E=\mathbb{N}$, entonces E^n es homeomorfo a E para toda $n \in \mathbb{N}$. Como X es E-completamente regular, la familia $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X,E^n)$ separa puntos de cerrados de X. Veamos pues que $C(X,E)$ separa puntos de cerrados de X.

   Sea A un subconjunto cerrado de X y $p \in X \setminus A$. Como la familia $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X,E^n)$ separa puntos de cerrados de X, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y $f \in C(X,E^n)$ tal que $f(p) \notin cl_{E^n}(f[A])$.

   Sabemos que E^n es homeomorfo a E, entonces existe un homeomorfismo $h : E^n \longrightarrow E$.

   Consideremos la función $g = h \circ f$. Tenemos que $g \in C(X,E)$. Por otra parte, como $f(p) \notin cl_{E^n}(f[A])$ entonces existe un abierto $W \subseteq E^n$ tal que $f(p) \in W$ y $W \cap f[A] = \varnothing$. Tenemos que $h[W] \subseteq E$ es abierto en E pues h es un homeomorfismo y en particular es una función abierta. Además, $g(p) = h(f(p)) \in h[W]$ y tenemos que

   $$h[W] \cap g[A] = h[W] \cap h[f[A]] = h[W \cap f[A]] = h[\varnothing] = \varnothing$$

   de donde la igualdad $h[W] \cap h[f[A]] = h[W \cap f[A]]$ se da puesto que h es biyectiva.

   Esto nos dice que $g(p) \notin cl_E(g[A])$ y por lo tanto la familia $C(X,E)$ separa puntos de cerrados de X.

2. Si E es $\mathbb{R}$ o $[0,1]$, como X es E-completamente regular, por el Teorema 2.3.4. la familia $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X,E^n)$ separa puntos de cerrados de X. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado de X y sea $p \in X \setminus A$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y una función $f \in C(X,E^n)$ tal que $f(p) \notin cl_{E^n}(f[A])$.

   Como E es $\mathbb{R}$ o $[0,1]$, sabemos que existe una métrica d en E^n compatible con la topología de E^n tal que $d(x,y) \leq 1$ para cualesquiera $x,y \in E^n$. Definimos $g : E^n \longrightarrow E$ dada por

$g(y) = d(y, cl_{E^n}(f[A]))$. Sabemos que g está bien definida pues $cl_{E^n}(f[A])$ es cerrado en E^n. Tenemos que $g \circ f \in C(X, E)$. Notemos además que $g[f[A]] = \{0\}$ pues g manda a todos los puntos en $f[A]$ al 0. Entonces, $cl_E((g \circ f)[A]) = \{0\}$ y como $f(p) \notin cl_{E^n}(f[A])$, entonces $d(f(p), cl_{E^n} f[A]) > 0$, es decir, $g(f(p)) \neq 0$. Por lo tanto $(g \circ f)(p) \notin cl_E((g \circ f)[A])$ lo cual nos permite concluir que $C(X, E)$ separa puntos de cerrados.

3. Finalmente, tomemos el caso en que $E = \{0, 1\}$. Supongamos que X es E-regular, entonces por el Teorema 2.3.4. la familia $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C(X, E^n)$ separa puntos de cerrados de X. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado de X y $p \notin X \setminus A$.

   Como la familia $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C(X, E^n)$ separa puntos de cerrados de X, tenemos que existen $n \in \mathbb{N}$ y $f \in C(X, E^n)$ tales que $f(p) \notin cl_{E^n}(f[A])$. Consideremos la función $g : E^n \longrightarrow E$ dada por:

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in cl_{E^n}(f[A]) \\ 0 & \text{si } y \notin cl_{E^n}(f[A]) \end{cases}$$

   Tenemos que $g \circ f \in C(X, E)$ pues g es continua ya que E^n es discreto y f es continua por hipótesis.

   Por otra parte, $g[f[A]] = \{1\}$ pues $g(y) = 1$ para toda $y \in f[A]$, por lo que $cl_E((g \circ f)[A]) = \{1\}$. Pero, como $f(p) \notin f[A]$, $g(f(p)) = 0$, entonces $(g \circ f)(p) \notin cl_E((g \circ f)[A])$, por lo que $C(X, E)$ separa puntos de cerrados de X.

Finalmente, concluimos la prueba demostrando que (2) y (3) son equivalentes.

Para ver que (2) implica (3), supongamos que $C(X, E)$ separa puntos de cerrados de X y sea $U \subseteq X$ un abierto de X. Sea $p \in U$. Como U es abierto en X, entonces $X \setminus U$ es cerrado y además tenemos que $p \notin X \setminus U$. Como la familia $C(X, E)$ separa puntos de cerrados, tenemos que existe $f \in C(X, E)$ tal que $f(p) \notin cl_E(f[X \setminus U])$. Consideremos $V = E \setminus cl_E(f[X \setminus U])$, tenemos que V es abierto en E por ser el complemento de un cerrado y además $W = f^{-1}[V]$ es E-abierto en X. Además, $f \in W$ pues $f(p) \in V$, luego, si $x \in W$, entoncces $f(x) \in V = E \setminus cl_E(f[X \setminus U])$.

Por otra parte, si $x \notin U$, entonces $x \in X \setminus U$ y por lo tanto $f(x) \in f[X \setminus U] \subseteq cl_E(f[X \setminus U])$ lo cual es una contradicción, la cual vino de suponer que $x \notin U$. Por lo tanto, $x \in U$ y concluimos que $W \subseteq U$. De lo anterior obtenemos que $p \in W \subseteq U$ donde W es E-abierto en X y U es un abierto de X arbitrario. Por lo tanto la familia $\{f^{-1}[V] : V \text{ es abierto en } E \text{ y } f \in C(X, E)\}$ forma una base para los abiertos de X.

Veamos que (3) implica (2). Supongamos que la familia $\{f^{-1}[V] : V \text{ es abierto en } E \text{ y } f \in C(X, E)\}$ forma una base para los abiertos de X.

Sea $A \subseteq X$ cerrado y $p \in X \setminus A$. Como A es cerrado en X, entonces $X \setminus A$ es abierto en X. Luego, como la famlia $\{f^{-1}[V] : V \text{ es abierto en } E \text{ y } f \in C(X, E)\}$ forma una base para los abiertos de X, existe $W \in \{f^{-1}[V] : V \text{ es abierto en } E \text{ y } f \in C(X, E)\}$ tal que $p \in W \subseteq X \setminus A$ donde W es de la forma $f^{-1}[V]$ para algún $V \subseteq E$ abierto y alguna función $f \in C(X, E)$.

Como $p \in f^{-1}[V]$, entonces $f(p) \in V$ y además, si $V \cap f[A] \neq \varnothing$, entonces existe $y \in V \cap f[A]$ tal que $y = f(x)$ para algún $x \in A$. Como $f(x) \in V$, entonces $x \in f^{-1}[V] = W$. Por lo tanto

$x \in W \cap A$ lo cual no es posible pues $W \subseteq X \setminus A$. Finalmente tenemos que $V \cap f[A] = \varnothing$ con $f(p) \in V$ y V abierto en E, por lo tanto $f(p) \notin cl_E(f[A])$ con lo cual concluimos que $C(X, E)$ separa puntos de cerrados.

■

Ahora, nos interesa dar una caracterización para los espacios Tychonoff a partir de las nociones de $\mathbb{R}$-completamente regular y $[0, 1]$-completamente regular.

De hecho, la siguiente caracterización justifica en cierto modo el uso del nombre E-completamente regular en vez del nombre E-regular.

Teorema 2.4.2. Las siguientes proposiciones son equivalentes para un espacio topológico X:

1. X es $\mathbb{R}$-completamente regular.
2. X es $[0, 1]$-completamente regular.
3. X es Tychonoff.

Demostración. Por el Teorema 2.4.1. para ver que (1) y (2) son equivalentes, basta ver que $C(X, [0, 1])$ separa puntos de cerrados si y sólo si $C(X, \mathbb{R})$ separa puntos de cerrados.

Supongamos que $C(X, [0, 1])$ separa puntos de cerrados, sea $A \subseteq X$ cerrado y $p \in X \setminus A$. Entonces existe una función $f \in C(X, [0, 1])$ tal que $f(p) \notin cl_{[0,1]}(f[A])$. Sabemos que $cl_{[0,1]}(f[A]) = [0, 1] \cap cl_{\mathbb{R}}(f[A])$ y como $[0, 1]$ es cerrado en $\mathbb{R}$, $cl_{\mathbb{R}}(f[A]) \subseteq [0, 1]$ y así $cl_{[0,1]}(f[A]) = cl_{\mathbb{R}}(f[A])$. Luego, tomando a la misma f pero con contradominio en $\mathbb{R}$ (es decir, componiendo con la inclusión de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$), tenemos que $f \in C(X, \mathbb{R})$ y además $f(p) \notin cl_{\mathbb{R}}(f[A])$. Por lo tanto $C(X, \mathbb{R})$ separa puntos de cerrados.

Supongamos ahora que $C(X, \mathbb{R})$ separa puntos de cerrados y sea $A \subseteq X$ cerrado con $p \in X \setminus A$. Como $C(X, \mathbb{R})$ separa puntos de cerrados, entonces existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $f(p) \notin cl_{\mathbb{R}}(f[A])$. Sabemos que $(0, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$, entonces existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \longrightarrow (0, 1)$.

Consideremos la función $g = h \circ f \in C(X, [0, 1])$. Como $f(p) \notin cl_{\mathbb{R}}(f[A])$, existe $W \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que $f(p) \in W$ y $W \cap f[A] = \varnothing$. Sabemos que $h(f(p)) \in h[W]$ el cual es abierto en $(0, 1)$ pues h es un homeomorfismo y además es abierto en $[0, 1]$ pues $(0, 1)$ es un subconjunto abierto de $[0, 1]$.

Por otro lado, $h[W] \cap g[A] = h[W] \cap h[f[A]] = h[W \cap f[A]] = h[\varnothing] = \varnothing$ de donde $h[W] \cap h[f[A]] = h[W \cap f[A]]$ se da puesto que h es biyectiva.

Por lo tanto $f(p) \notin cl_{[0,1]}(g[A])$, con lo que llegamos a que $C(X, [0, 1])$ separa puntos de cerrados de X.

Para concluir nuestra prueba, demostraremos que (1) y (3) son equivalentes. Para ello es conveniente tener en cuenta la Definición A.1.1. de espacio Tychonoff.

Notemos que de dicha definición, basta demostrar que ser $\mathbb{R}$-completamente regular es equivalente a: «Para cada subconjunto A cerrado de X y cada punto $p \in X \setminus A$, existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $A \subseteq f^{-1}[\{0\}]$ y $f(p) = 1$».

Supongamos primero que X es $\mathbb{R}$-completamente regular, entonces por el Teorema 2.4.1. $C(X,\mathbb{R})$ separa puntos de cerrados de X. Sea $A \subseteq X$ cerrado en X y $p \in X \setminus A$. Como $C(X,\mathbb{R})$ separa puntos de cerrados de X, existe $f \in C(X,\mathbb{R})$ tal que $f(p) \notin cl_{\mathbb{R}}(f[A])$.

Como $\mathbb{R}$ es Tychonoff, existe $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $cl_{\mathbb{R}}(f[A]) \subseteq g^{-1}[\{0\}]$ y $g(f(p)) = 1$. Consideremos $h = g \circ f$, tenemos que si $x \in A$, entonces $f(x) \in f[A]$ y por lo tanto $g(f(x)) = 0$ y luego $A \subseteq g^{-1}[\{0\}]$. Por otro lado, $h(p) = g(f(p)) = 1$.

Ahora, si se cumple que: «Para cada subconjunto A cerrado de X y cada punto $p \in X \setminus A$, existe $f \in C(X,\mathbb{R})$ tal que $A \subseteq f^{-1}[\{0\}]$ y $f(p) = 1$», como $A \subseteq f^{-1}[\{0\}]$, tenemos que $f[A] \subseteq \{0\}$ por lo que $cl_{\mathbb{R}}(f[A]) \subseteq \{0\}$ y luego $f(p) \notin cl_{\mathbb{R}}(f[A])$, por lo que $C(X,\mathbb{R})$ separa puntos de cerrados de X.

■

Para terminar con los ejemplos presentados en esta sección, analizaremos los espacios $[0,1]$-compactos y veremos que resultan ser una clase de espacios que ya conocíamos previamente.

Teorema 2.4.3.

1. Los espacios $[0,1]$-compactos son precisamente los espacios compactos.
2. La extensión $[0,1]$-compacta máxima de un espacio Tychonoff X es la compactación de Stone-Čech βX.

Demostración.

1. Si X es un espacio $[0,1]$-compacto, tenemos que X se encaja como subespacio cerrado de un producto de espacios homeomorfos a $[0,1]$. En particular, por el Teorema de Tychonoff, tenemos que el producto de espacios compactos es compacto y sabemos que el ser compacto se hereda a subespacios cerrados, por lo que X es compacto.

   Recíprocamente, si tenemos un espacio compacto X, como estamos suponiendo que todos nuestros espacios son de Hausdorff, tenemos que X resulta ser T_4, en particular es Tychonoff y por el Teorema 2.4.2. X es $[0,1]$-completamente regular. Por la Proposición 2.3.2. X tiene una extensión $[0,1]$-compacta máxima por ser $[0,1]$-completamente regular. Dicha extensión es $\gamma_{[0,1]}X$. Pero X es cerrado en $\gamma_{[0,1]}X$ por ser compacto y $\gamma_{[0,1]}X$ ser de Hausdorff, por lo que al ser denso en dicho espacio, tenemos que $X = \gamma_{[0,1]}X$, es decir, X es $[0,1]$-compacto.

2. Si X es un espacio Tychonoff, sabemos por el Teorema 2.4.2. que X es $[0,1]$-completamente regular. Luego, por la Proposición 2.3.2, X tiene una extensión $[0,1]$-compacta máxima.

   Por el inciso (1) del Teorema 2.4.3. que acabamos demostrar, la clase de los espacios $[0,1]$ compactos, $K(P_{[0,1]})$, coincide con la de los espacios compactos $K = \{X : X \text{ es compacto de Hausdorff}\}$, entonces son la misma propiedad topológica. Consecuentemente, $\gamma_{[0,1]}X$ sería la K-extensión máxima de X y por la Proposición 2.0.1. con la que comenzamos este capítulo, tenemos que βX es la K-extensión máxima de X, por lo tanto $\gamma_{[0,1]} \equiv_X \beta X$.

■

2.5. Propiedades de extensión Tychonoff

En esta nueva sección, desarrollaremos las propiedades básicas de cierto tipo de propiedades de extensión. Dichas propiedades son interesantes puesto que como veremos más adelante, $\gamma_P X$ tendrá una expresión explícita bastante amigable.

Comenzamos la sección dando la definición de dichas propiedades de extensión en las cuales está inspirado el nombre de esta sección.

Definición 2.5.1. Una propiedad de extensión Tychonoff es una propiedad de extensión tal que $Reg(P)$ es la clase de todos los espacios topológicos Tychonoff.

Ahora, daremos un lema que nos permitirá desarrollar algunas propiedades.

Lema 2.5.2. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f \in C(X,Y)$. Sean A y B subespacios de X y Y respectivamente tales que $A = f^{-1}[B]$. Entonces:

1. A es homeomorfo a un subespacio cerrado de $X \times B$.

2. Si P es una propiedad de extensión y $X, B \in P$, entonces $A \in P$.

Demostración.

1. Como $A = f^{-1}[B]$ y nos piden ver que A es homeomorfo a un subespacio cerrado de $X \times B$, entonces podemos considerar una función $h : A \longrightarrow X \times B$ de tal manera que en la primer coordenada dejemos a A fijo y en la segunda usemos la función f. Podemos considerar a h definida como $h(x) = (x, f(x))$. Veamos primero si h es un encaje:

   h es continua pues la función f es tal que $f \in C(X,Y)$. Falta ver que es inyectiva. Sean $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$. Entonces $(x, f(x)) = (y, f(y))$, por lo que $x = y$ y concluimos que h es inyectiva. Como h es una función continua e inyectiva, concluimos que h es un encaje de A en $X \times B$. Nos faltaría ver que $h[A]$ es cerrado en $X \times B$.

   Consideremos la función $g : X \times B \longrightarrow Y \times B$ dada por $g(x,y) = (f(x), y)$. Tenemos que g es continua pues f es continua. Como Y es Hausdorff, la diagonal $D = \{(y,y) : y \in Y\}$ es un subconjunto cerrado de $Y \times Y$. Luego, $D' = D \cap (Y \times B)$ sería cerrado en $Y \times B$, pero $D' = D \cap Y = \{(y,y) : y \in B\}$, por lo que $\{(y,y) : y \in B\}$ es cerrado en $Y \times B$. Como g es continua, $g^{-1}[D']$ es cerrado en $X \times B$.

   Finalmente, notemos que si probamos que $g^{-1}[D'] = h[A]$ habremos acabado.

   Sea $(x,y) \in g^{-1}[D']$. Entonces $g(x,y) \in D' = \{(y,y) : y \in B\}$. Como $g(x,y) = (f(x), y)$ tenemos que $f(x) = y$ con $y \in B$, es decir, $x \in f^{-1}[B] = A$. Por lo tanto $y = f(x)$ con $x \in A$, es decir, $(x,y) \in h[A]$.

   Ahora, supongamos que $(x,y) \in h[A]$, entonces $y = f(x)$ con $x \in A$. Como $A = f^{-1}[B]$, tenemos que $f(x) \in B$, por lo que $g(x,y) = (f(x), y) = (y,y)$ con $y \in B$. Por lo tanto $(x,y) \in g^{-1}[D']$ que es lo que queríamos demostrar.

2. Si P es una propiedad de extensión tal que X y B tienen la propiedad P, por el Teorema 2.2.3. sabemos que P es hereditaria a cerrados y productiva. Luego, como X y B tienen la propiedad P, $X \times B$ tiene la propiedad P y por el inciso (1) del Lema 2.5.2. que acabamos de demostrar, A es homeomorfo a un subespacio cerrado de $X \times B$, por lo que A tiene la propiedad P.

■

Continuamos dando otro lema donde analizamos el comportamiento de las P-extensiones hereditarias a cerrados bajo las funciones perfectas, continuas y sobreyectivas y bajo cierto tipo de productos.

Para ello, consideramos importante tener presente la definición de función perfecta, la cual suele verse en un curso de Topología de Conjuntos, pero de cualquier modo, el lector la puede consultar en el Apéndice A.2. siendo la Definición A.2.1.

Enunciaremos un recordatorio que relaciona la compactación de Stone-Čech, βX, con las funciones perfectas:

Teorema 2.5.3. Sean X y Y espacios Tychonoff y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. f es perfecta.
2. Si $\alpha X \in K[X]$, $\delta X \in K[Y]$ y existe $F \in C(\alpha X, \delta Y)$ tal que $F \restriction_X = f$, entonces $F^{-1}[Y] = X$, es decir, $F[\alpha X \setminus X] = \delta Y \setminus Y$.
3. $(\beta f)^{-1}[Y] = X$, es decir, $\beta f[\beta X \setminus X] = \beta Y \setminus Y$ donde $\beta f : \beta X \longrightarrow \beta Y$ es la función asociada a las compactaciones de Stone-Čech que extiende a f.

Una vez hecho este recordatorio, procederemos a enunciar el lema:

Lema 2.5.4. Sea P una propiedad topológica hereditaria a cerrados de espacios Tychonoff. Los siguientes son equivalentes:

1. Si X y Y son espacios Tychonoff y $f : X \longrightarrow Y$ es una función perfecta, continua y suprayectiva donde Y tiene la propiedad P, entonces X tiene la propiedad P.
2. Si X tiene la propiedad P y K es un espacio topológico compacto, entonces $X \times K$ tiene la propiedad P.

Demostración. Veamos que (2) implica (1). Sean X y Y espacios Tychonoff y $f : X \longrightarrow Y$ una función perfecta, continua y suprayectiva tal que Y tiene la propiedad P. Por la Proposición 2.0.1. sabemos que al ser X y Y espacios Tychonoff, existe una extensión continua de f, $\beta f : \beta X \longrightarrow \beta Y$ tal que $\beta f \restriction_X = f$.

Por el Teorema 2.5.3. tenemos que dicha función βf cumple que $(\beta f)^{-1}[Y] = X$ pues f es una función perfecta, continua y suprayectiva.

Como Y tiene la propiedad P y βX es compacto, por hipótesis $\beta X \times Y$ tiene la propiedad P. Luego, como $(\beta f)^{-1}[Y] = X$ donde $\beta f \in C(\beta X, \beta Y)$, por el Lema 2.5.1. tenemos que X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\beta X \times Y$ y como P es una propiedad topológica hereditaria a cerrados, X tiene la propiedad P.

Ahora veamos que (1) implica (2). Supongamos que X tiene la propiedad P y K es un espacio topológico compacto. Consideremos la proyección $\Pi_X : X \times K \longrightarrow X$. Sabemos que Π_X es continua y suprayectiva, si probamos que Π_X es perfecta, entonces aplicando la hipótesis tendríamos que $X \times K$ tiene la propiedad P puesto que X la tiene.

Veamos pues que Π_X es perfecta. De acuerdo a la Definición A.2.1. lo primero que hay que ver es que las fibras de Π_X son subconjuntos compactos. Sea $x \in X$, tenemos que $\Pi_X^{-1}[\{x\}] = \{x\} \times K$ el cual es compacto pues K es compacto y $\{x\}$ es compacto. Por lo tanto sólo resta ver que Π_X es una función cerrada.

Sea $A \subseteq X \times K$ cerrado y sea $x \in X \setminus \Pi_X[A]$. Como $x \notin \Pi_X[A]$, para cada $y \in K$, tenemos que $(x, y) \notin A$. Como A es cerrado en $X \times K$, tenemos que para cada $y \in Y$ existen $U_y \subseteq X$ y $V_y \subseteq K$ abiertos en X y K respectivamente tales que $(x, y) \in U_y \times V_y \subseteq (X \times K) \setminus A$.

Notemos que $\{V_y : y \in K\}$ es una cubierta abierta de K y como K es compacto existen $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n} \in \{V_y : y \in K\}$ tales que $K = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Definimos $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Tenemos que U es abierto en X por ser una intersección finita de abiertos en X y además $x \in U$. Si existe $w \in U \cap \Pi_X[A]$, entonces $\Pi_X(w, y) = w$ para alguna $y \in K$ tal que $(w, y) \in A$. Como $y \in K$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in V_{y_i}$.

Por otra parte, como $w \in U \subseteq U_{y_i}$, tenemos que $(w, y) \in U_{y_i} \times V_{y_i} \subseteq (X \times K) \setminus A$, lo cual contradice que $(w, y) \in A$. Por lo tanto tenemos que $U \cap \Pi_X[A] = \varnothing$, con lo cual tenemos que $U \subseteq X \setminus \Pi_X[A]$ y por lo tanto $X \setminus \Pi_X[A]$ es abierto en X, es decir, $\Pi_X[A]$ es cerrado en X que es lo que queriamos demostrar.

De lo anterior se sigue que Π_X es una función perfecta, continua y suprayectiva, por lo que $X \times K$ tiene la propiedad P.

$\blacksquare$

Sabemos que la compacidad se preserva bajo preimágenes de funciones perfectas y continuas. Si nos preguntamos qué sucede con las propiedades de extensión P, el siguiente lema nos dice cuándo una propiedad de extensión P se preserva bajo preimágenes de funciones continuas y perfectas a cierta clase de espacios.

Lema 2.5.5. Sea P una propiedad de extensión y $Y \in P$, sea $X \in \mathit{Reg}(P)$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función perfecta, continua y suprayectiva. Entonces $X \in P$.

Demostración. Como P es una propiedad de extensión y X es P-regular, X tiene una P-extensión máxima, $\gamma_P X$. Por la Definición 2.0.2. existe $Pf : \gamma_P X \longrightarrow Y$ tal que $Pf \restriction_X = f$. Luego, por la Proposición A.2.5. como X es denso en $\gamma_P X$ y $Pf \restriction_X = f$ es una función perfecta, entonces $Pf[\gamma_P X \setminus X] \subseteq Y \setminus Pf[X] = Y \setminus Y = \varnothing$ donde hemos usado que $Pf[X] = f[X] = Y$ pues $Pf \restriction_X = f$ y f es suprayectiva. Por lo tanto $\gamma_P X \setminus X = \varnothing$ y luego tenemos que X tiene la propiedad P.

$\blacksquare$

Algo que tenemos que considerar es que la preimagen de un espacio P-regular Y bajo una función $f : X \longrightarrow Y$ perfecta y continua no necesariamente nos da un espacio P-regular. No consideraremos un contraejemplo por el momento pero es bueno tenerlo en mente como un «dato cultural».

El siguiente resultado muestra que las propiedades de extensión son cerradas bajo intersecciones arbitrarias.

Lema 2.5.6. Sea P una propiedad topológica hereditaria a cerrados y productiva y consideremos $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de subespacios de un espacio Z. Si cada X_α tiene P, entonces $\bigcap_{\alpha \in J} X_\alpha$ tiene P.

Demostración. Consideremos $X = \prod_{\alpha} X_\alpha$ y sea $Y = \bigcap_{\alpha \in J} X_\alpha$. Consideremos $h \in F(Y, X)$ dada por $h(y) = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$ donde $y_\alpha = y$ para toda $\alpha \in J$. Tenemos que h es inyectiva pues está totalmente determinada por cada $y \in Y$. Consideremos $\Pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ la proyección en la coordenada α-ésima. Tenemos que dada $y \in Y$, $(\Pi_\alpha \circ h)(y) = \Pi_\alpha(h(y)) = \Pi_\alpha((y_\alpha)_{\alpha \in J}) = y$ pues $y_\alpha = y$ para toda $\alpha \in J$. Luego, $\Pi_\alpha \circ h = id_Y$ y por propiedades de la topología producto concluimos que h es una función continua.

Sospechamos que h debe ser un encaje por la forma en la que está definida, ya sabemos que es inyectiva y continua, por lo que si h es una función abierta tendremos lo que deseamos. En efecto esto sucede y lo demostraremos.

Sea $V \subseteq Y$ abierto en Y, entonces existe $W \subseteq Z$ abierto en Z tal que $V = W \cap Y$. Tenemos que probar que $h[V]$ es abierto en $h[Y]$. Esto sucede puesto que se da la siguiente igualdad:

$$h[Y] \cap \Pi_{\alpha_0}^{-1}[W \cap X_{\alpha_0}] = h[V]$$

donde $\alpha_0 \in J$ está fijo. Para ver que efectivamente se da dicha igualdad, tomemos un elemento $h(y) \in h[Y] \cap \Pi_{\alpha_0}^{-1}[W \cap X_{\alpha_0}]$ con $y \in Y$. Como $h(y) \in \Pi_{\alpha_0}^{-1}[W \cap X_{\alpha_0}]$, tenemos que $y = \Pi_{\alpha_0}(h(y)) \in W \cap X_{\alpha_0}$. Pero ya sabíamos que $y \in Y$ pues $h(y) \in h[Y]$, luego, $y \in W \cap Y = V$, es decir, $h(y) \in h[V]$.

Recíprocamente, dado $h(y) \in h[V]$ con $y \in V$, tenemos que al ser $V = W \cap Y$ donde $Y = \bigcap_{\alpha \in J} X_\alpha$ se cumple que $y \in W \cap X_{\alpha_0}$ y por lo tanto $y = \Pi_{\alpha_0}(h(y)) \in W \cap X_{\alpha_0}$ de donde concluimos que $h(y) \in \Pi_{\alpha_0}^{-1}[W \cap X_{\alpha_0}]$ y por lo tanto $h(y) \in h[Y] \cap \Pi_{\alpha_0}^{-1}[W \cap X_{\alpha_0}]$.

Finalmente, de la igualdad

$$h[Y] \cap \Pi_{\alpha_0}^{-1}[W \cap X_{\alpha_0}] = h[V]$$

se concluye que $h[V]$ es abierto en $h[Y]$ pues $\Pi_{\alpha_0}^{-1}[W \cap X_{\alpha_0}]$ es abierto en X ya que es preimagen de un subconjunto abierto de X_{α_0} bajo una función continua.

Por lo tanto, h es un encaje y Y es homeomorfo a $h[Y]$. Si demostramos que $h[Y]$ es cerrado en X, habremos acabado pues P es una propiedad productiva y hereditaria a cerrados.

Sea $z \in X \setminus h[Y]$. Tenemos que los elementos de $h[Y]$ son precisamente aquellos cuyas coordenadas son iguales entre sí (y por tanto dichas coordenadas serán elementos de Y pues estarán en cada X_α). Entonces, como $z \notin h[Y]$, existen $\alpha \in J$ y $\beta \in J$ tales que $\alpha \neq \beta$ y $\Pi_\alpha(z) \neq \Pi_\beta(z)$. Como recordaremos, estamos trabajando únicamente con espacios de Hausdorff, por lo que Z es un espacio de Hausdorff, entonces existen U y V subconjuntos abiertos de Z tales que $\Pi_\alpha(z) \in U$ y $\Pi_\beta(z) \in V$ y $U \cap V = \varnothing$. Por lo que $z \in \Pi_\alpha^{-1}[U \cap X_\alpha] \cap \Pi_\beta^{-1}[V \cap X_\beta] \subseteq X \setminus h[Y]$ de donde la última igualdad se da puesto que si tuviéramos $\Pi_\alpha^{-1}[U \cap X_\alpha] \cap \Pi_\beta^{-1}[V \cap X_\beta] \cap h[Y] \neq \varnothing$, entonces existiría $w \in \Pi_\alpha^{-1}[U \cap X_\alpha] \cap \Pi_\beta^{-1}[V \cap X_\beta]$ tal que $w = h(y)$ para alguna $y \in Y$. Luego, por definición de h, Π_α y Π_β, tendríamos que $\Pi_\alpha(h(y)) = y = \Pi_\beta(h(y))$, por lo que $y \in U \cap X_\alpha \cap V \cap X_\beta$ lo cual es absurdo ya que U y V son ajenos.

Con esto concluimos la prueba de que $h[Y]$ es cerrado y por lo tanto tenemos que $Y \in P$ ya que P es productiva y hereditaria a cerrados por hipótesis.

■

Después de haber enunciado y demostrado diversos lemas bastante técnicos, estamos listos para enunciar y demostrar el teorema más importante (y de hecho, el único) de esta última sección. Dicho teorema responde a una de las preguntas hechas al inicio de este capítulo: ¿Cómo se ve una P-extensión máxima?

A pesar de que el teorema que probaremos no responderá esta pregunta de manera general, lo hará para cierto tipo de propiedades de extensión, justamente aquellas que cumplen ser propiedades de extensión Tychonoff, es decir, aquellas que cumplen que $Reg(P)$ es la clase de todos los espacios Tychonoff.

Teorema 2.5.7. Sea X un espacio Tychonoff. Si P es una propiedad de extensión tal que $Reg(P)$ es la clase de todos los espacios Tychonoff, entonces $\gamma_P X$ es un subespacio denso de βX dado por

$$\gamma_P X = \bigcap \{T : X \subseteq T \subseteq \beta X \wedge T \in P\}$$

Demostración. Sea X un espacio Tychonoff. Definimos $S = \bigcap \{T : X \subseteq T \subseteq \beta X \wedge T \in P\}$. Para ver que S está bien definido, primero notaremos que todo espacio compacto K tiene la propiedad P:

Si K es compacto, entonces K es Tychonoff (pues K es un espacio compacto de Hausdorff y por lo tanto es T_4 el cual implica ser Tychonoff). Luego, por hipótesis, $Reg(P)$ es la clase de todos los espacios Tychonoff, por lo que K es P-regular.

Sabemos que todo espacio P-regular tiene una P-extensión máxima pues P es una propiedad de extensión, por lo que existe $\gamma_P K$ y contiene a K como un subespacio denso. Pero $\gamma_P X$ es un espacio de Hausdorff, por lo que K es cerrado en $\gamma_P K$ al ser compacto. Al ser K denso en $\gamma_P K$, concluimos que $K = \gamma_P K$ y por lo tanto K tiene la propiedad P.

De lo anterior, βX (la cual existe pues X es Tychonoff), tiene la propiedad P, por lo que $\beta X \in \{T : X \subseteq T \subseteq \beta X \wedge T \in P\}$ de donde obtenemos que S está bien definido.

Por el Teorema 2.2.3. tenemos que al ser P una propiedad de extensión, es hereditaria a cerrados y productiva, luego, por el Lema 2.5.6. la intersección de la familia $\{T : X \subseteq T \subseteq \beta X \wedge T \in P\} \subseteq P$ tiene la propiedad P. Veamos ahora que $\gamma_P X \equiv_X S$. Para ello usaremos la Definición 2.0.2. Sea Y un espacio topológico con la propiedad P y $f \in C(X, Y)$. Hay que ver que f tiene una extensión continua $Pf \in C(S, Y)$.

Definimos $W = \bigcap\{M : f[X] \subseteq M \subseteq Y \wedge M \in P\}$. Sabemos que $f[X] \subseteq Y$ y que Y tiene la propiedad P, por lo que W está bien definido. Además, $W \in P$ por el Lema 2.5.6.

Afirmamos que $cl_Y f[X] = W$. Si no fuera el caso, existiría $p \in W \setminus cl_Y f[X]$. Sabemos que Y es P-regular (pues $Y \in P$) y por lo tanto es Tychonoff, así que βY existe y tiene P. Como P es una propiedad hereditaria a cerrados, $cl_{\beta Y} f[X]$ tiene la propiedad P y además $p \notin cl_{\beta Y} f[X]$ ya que $cl_Y f[X] = Y \cap cl_{\beta Y} f[X]$ y tenemos que $p \in W \subseteq Y$, de donde tenemos que $p \notin cl_{\beta Y} f[X]$.

Como W y $cl_{\beta Y} f[X]$ son subespacios de βY con la propiedad P, entonces por el Lema 2.5.6. tenemos que $W \cap cl_{\beta Y} f[X]$ tiene la propiedad P y además $f[X] \subseteq W \cap cl_{\beta Y} f[X] \subseteq Y$. Entonces hemos encontrado un subespacio con la propiedad P que contiene a $f[X]$ y está contenido en Y, que además no tiene al punto p (pues $p \notin cl_{\beta Y} f[X]$), tenemos que esto contradice que $p \in W = \bigcap\{M : f[X] \subseteq M \subseteq Y \wedge M \in P\}$. Así, tenemos que $f[X]$ es denso en W.

Por propiedades de la compactación de Stone-Čech, sabemos que f se extiende a una función continua y suprayectiva $\beta f \in C(\beta X, \beta W)$. Por otra parte, se cumple que $X \subseteq (\beta f)^{-1}[W] \subseteq \beta X$ pues $f[X] \subseteq W \subseteq \beta W$ y por lo tanto $(\beta f)^{-1}[f[X]] \subseteq (\beta f)^{-1}[W] \subseteq (\beta f)^{-1}[\beta W] = \beta X$. Pero sabemos que $\beta f \restriction_X = f$, por lo que $(\beta f)^{-1}[f[X]] = f^{-1}[f[X]]$ y por lo tanto $X \subseteq (\beta f)^{-1}[f[X]]$ con lo que concluimos que $X \subseteq (\beta f)^{-1}[W] \subseteq \beta X$.

Sabemos que $\beta f : \beta X \longrightarrow \beta W$ es una función perfecta, por lo que usando las propiedades de las funciones perfectas, al ser $f[X]$ denso en W, $\beta f \restriction_{(\beta f)^{-1}[W]}$ es una función perfecta de $(\beta f)^{-1}[W]$ en W. Aplicando el Lema 2.5.4. inciso (1) tenemos que $(\beta f)^{-1}[W]$ tiene la propiedad P. Por otra parte, sabíamos que $X \subseteq (\beta f)^{-1}[W] \subseteq \beta X$, por lo que $S \subseteq (\beta f)^{-1}[W]$ y por lo tanto $\beta f \restriction_S$ es una extensión continua de f tal que $\beta f \restriction_S [S] \subseteq \beta f \restriction_S [(\beta f)^{-1}[W]] \subseteq W \subseteq Y$. Por lo tanto, podemos tomar $Pf = \beta f \restriction_S \in C(S, Y)$ y tenemos que $S \equiv_X \gamma_P X$.

Por lo tanto,

$$\gamma_P X = \bigcap\{T : X \subseteq T \subseteq \beta X \wedge T \in P\}$$

■

Notemos que todo este desarrollo fue posible gracias a la existencia de βX cuando X es un espacio Tychonoff. Una vez hemos desarrollado toda esta herramienta, podemos regresar a nuestro enfoque principal: presentar y estudiar los espacios realcompactos. Dichos espacios resultarán ser Tychonoff, por lo que todos los resultados de este capítulo, en particular de esta sección, serán válidos para dichos espacios.

Una vez dicho esto, concluimos el estudio de las P-extensiones y por lo tanto damos término a este capítulo.

Parte II

Espacios realcompactos

Capítulo 3

Realcompacidad

Nuestra motivación inicial fueron las extensiones de los espacios de Hausdorff y entre ellas analizamos las extensiones con alguna propiedad P.

Entre dichas propiedades P está la compacidad K, de la cual ya sabemos bastantes cosas e incluso sabemos que hay extensiones compactas para espacios Tychonoff, entre ellas la compactación de Stone-Čech. Antes de introducir la compactación de Stone-Čech uno estudia la compacidad a detalle. Lo que haremos nosotros en este capítulo será introducir una nueva propiedad topológica conocida como «realcompacidad».

Durante nuestro estudio de los espacios compactos en un curso de Topología General, analizamos sus propiedades y posteriormente introducimos otros tipos de compacidad, como la pseudocompacidad, los espacios paracompactos, metacompactos, etc. y vemos la relación entre dichos conceptos tanto con la compacidad como con los axiomas de separación, las propiedades de numerabilidad, etc. por lo que el propósito de este capítulo y del Capítulo 4 será justamente abordar todos estos problemas pero ahora con los espacios realcompactos.

3.1. Espacios realcompactos

Comenzamos esta sección dando la definición de «espacio realcompacto».

Definición 3.1.1. Un espacio X es realcompacto si X se encaja como un subespacio cerrado en alguna potencia de $\mathbb{R}$.

La Definición 3.1.1. nos recuerda a un concepto visto en el Capítulo 2, de manera más específica, recordemos que si tenemos un espacio de Hausdorff E y consideramos la siguiente propiedad $P_E = \{X : X \text{ es homeomorfo a } E\}$, un espacio X es E-compacto si es P_E-compacto (esto por la Definición 2.3.1.) y por la Definición 2.1.1. es P_E-compacto si se encaja como un subespacio cerrado de un producto de espacios con la propiedad P_E (en este caso, esto quedaría como «se encaja como un subespacio cerrado de un producto de espacios homeomorfos a E»). Retomando este concepto, notemos que si $E = \mathbb{R}$, entonces los espacios realcompactos son precisamente los espacios $\mathbb{R}$-compactos, por lo que ya tenemos a nuestra disposición varias propiedades de ellos, las cuales enlistaremos a continuación:

Proposición 3.1.2. Todo espacio compacto es realcompacto.

Demostración. Sea K un espacio topológico compacto. Como K es compacto y de Hausdorff, tenemos que K resulta ser Tychonoff. Aplicando el Teorema 2.4.2. tenemos que X es $\mathbb{R}$-completamente regular.

Por la Proposición 2.3.2. K tiene una extensión $\mathbb{R}$-compacta máxima, a saber, $\gamma_{\mathbb{R}}K$. Por otra parte, K es cerrado en $\gamma_{\mathbb{R}}K$ por ser compacto y $\gamma_{\mathbb{R}}K$ de Hausdorff, luego, al ser denso en dicho espacio, tenemos que $K = \gamma_{\mathbb{R}}K$, es decir, K es $\mathbb{R}$-compacto y por lo tanto realcompacto.

■

Proposición 3.1.3. Si X es realcompacto, entonces X es Tychonoff.

Demostración. Sea X un espacio realcompacto. Sabemos que X es $\mathbb{R}$-compacto y por lo tanto $\mathbb{R}$-completamente regular (esto se sigue de la Definición 2.3.1. y de la Proposición 2.1.4. inciso (1)).

Por el Teorema 2.4.2. todo espacio $\mathbb{R}$-completamente regular es Tychonoff. Por lo tanto X es Tychonoff.

■

Proposición 3.1.4. La realcompacidad es una propiedad productiva y hereditaria a cerrados.

Demostración. Sabemos que la realcompacidad es la propiedad $K(P_{\mathbb{R}})$ donde $P_{\mathbb{R}}$ es la propiedad dada por $P_{\mathbb{R}} = \{X : X \text{ es homeomorfo a } \mathbb{R}\}$. Por la Proposición 2.2.4. $K(P_{\mathbb{R}})$ es una propiedad de extensión y por el Teorema 2.2.3. $K(P_{\mathbb{R}})$ es una propiedad hereditaria a cerrados y productiva, es decir, la realcompacidad es hereditaria a cerrados y productiva.

■

De la Proposición 3.1.4. obtenemos varios corolarios apoyados en los lemas del Capítulo 2 sección 2.5.

Corolario 3.1.5. Si X es realcompacto y K es compacto, entonces $X \times K$ es realcompacto.

Demostración. Sea X un espacio realcompacto y sea K un espacio compacto. Por la Proposición 3.1.2. tenemos que K es realcompacto y por la Proposición 3.1.4. obtenemos que $X \times K$ es realcompacto ya que dicha proposición nos dice que la realcompacidad es productiva.

■

Corolario 3.1.6. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, perfecta y suprayectiva con Y un espacio realcompacto, entonces X es realcompacto.

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, perfecta y suprayectiva tal que Y es realcompacto. Por la Proposición 3.1.4. la realcompacidad es hereditaria a cerrados y productiva y además por la Proposición 3.1.3. todos los espacios realcompactos son Tychonoff, entonces aplicando el Lema 2.5.4. obtenemos que X es realcompacto.

■

Proposición 3.1.7. Sea X un espacio. Si $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia de subespacios realcompactos de X, entonces $A = \bigcap\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$ es realcompacto.

Demostración. Por la Proposición 3.1.4. la realcompacidad es una propiedad hereditaria a cerrados y productiva. Luego, si X es un espacio y $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia de subespacios realcompactos de X, tenemos por el Lema 2.5.6. que $A = \bigcap\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$ es realcompacto.

■

Por otra parte, la Proposición 3.1.4. tiene como corolario lo siguiente:

Corolario 3.1.8. Si X es realcompacto, Y es un espacio de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces para cada $B \subseteq Y$ tal que B es realcompacto se tiene que $f^{-1}[B]$ es realcompacto.

Demostración. Consideremos la función $f \restriction_{f^{-1}[B]} : f^{-1}[B] \longrightarrow B$ y la gráfica de la función $f \restriction_{f^{-1}[B]}$ que es el conjunto $G(f \restriction_{f^{-1}[B]}) = \{(x, f \restriction_{f^{-1}[B]} (x)) : x \in f^{-1}[B]\}$. Por la Proposición A.4.3. tenemos que $G(f \restriction_{f^{-1}[B]}) = \{(x, f \restriction_{f^{-1}[B]} (x)) : x \in f^{-1}[B]\}$ es cerrado en $X \times B$ pues B es un espacio de Hausdorff (ya que Y lo es) y $f \restriction_{f^{-1}[B]}$ es continua.

Por otro lado, si suponemos que X y B son realcompactos, tenemos que $X \times B$ es realcompacto, esto por la Proposición 3.1.4. y como $G(f \restriction_{f^{-1}[B]})$ es cerrado en $X \times B$, por la Proposición 3.1.4. tenemos que $G(f \restriction_{f^{-1}[B]})$ es realcompacto.

Ahora, consideremos la función $h : f^{-1}[B] \longrightarrow G(f \restriction_{f^{-1}[B]})$ dada por $h(x) = (x, f \restriction_{f^{-1}[B]} (x))$. h es un homeomorfismo y luego tenemos que $f^{-1}[B]$ es realcompacto.

■

3.2. Realcompactación de Hewitt

Sabiendo que la realcompacidad es una propiedad de extensión pues vimos en la Proposición 3.1.4. que es una propiedad productiva y hereditaria a cerrados, podemos afirmar que todo espacio $\mathbb{R}$-completamente regular tiene asociada una realcompactación máxima.

Más aún, el Teorema 2.4.2. nos dice que un espacio es $\mathbb{R}$-completamente regular si y sólo si es Tychonoff, por lo que podemos afirmar que todo espacio Tychonoff tiene asociada una realcompactación máxima. Dicha realcompactación es conocida como la realcompactación de Hewitt y se denota por υX. El objetivo de esta sección es dar algunas propiedades de υX así como describirlo como espacio de Z-ultrafiltros.

Para poder caracterizar a υX como espacio de Z-ultrafiltros conviene mucho que hagamos una muy breve descripción (sin pruebas) de cómo se define βX como espacio de Z-ultrafiltros. Comenzaremos pues definiendo los términos necesarios y haciendo los recordatorios pertinentes.

Definición 3.2.1. A la realcompactación máxima asociada a un espacio Tychonoff se le conoce como *realcompactación de Hewitt* y se le denota como υX.

Lo primero que hacíamos para obtener una expresión explícita de βX era definir la compactación de Wallman, y para ello definiremos primero los L-filtros y L-ultrafiltros, de donde la definición de L es como sigue:

Definición 3.2.2. Sea X un conjunto. Una familia $L \subseteq P(X)$ es un anillo de conjuntos si:

1. $X, \varnothing \in L$
2. Si $A, B \in L$ entonces $A \cap B \in L$
3. Si $A, B \in L$ entonces $A \cup B \in L$

Como ejemplos de anillos de conjuntos tenemos:

1. $L = \mathscr{P}(X)$
2. Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces τ es un anillo de conjuntos
3. Si X es un espacio topológico, entonces $L = Z[X]$ es un anillo de conjuntos, donde $Z[X]$ se define como $Z[X] = \{Z \subseteq X : \text{existe } f \in C(X, \mathbb{R}) \text{ tal que } Z = f^{-1}[\{0\}]\}$, es decir, el conjunto de nulos de X.

El tercer ejemplo es muy importante pues nos permitirá definir lo que son los Z-ultrafiltros. Para ello, primero daremos la definición de L-filtro y L-ultrafiltro.

Definición 3.2.3. Sea X un conjunto y $L \subseteq \mathscr{P}(X)$ un anillo de conjuntos. Decimos que $\mathscr{F} \subseteq L$ es un L-filtro si:

1. $\varnothing \notin \mathscr{F}$ y $\mathscr{F} \neq \varnothing$
2. Si $A, B \in \mathscr{F}$, entonces $A \cap B \in \mathscr{F}$
3. Si $A \in \mathscr{F}$ y $B \in L$ es tal que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathscr{F}$

Decimos que $\mathscr{U} \subseteq L$ es un L-ultrafiltro si $\mathscr{U}$ es un L-filtro maximal.

Ahora daremos la definición de Z-filtro y Z-ultrafiltro con base en lo anterior:

Definición 3.2.4. Sea X un espacio topológico, decimos que:

1. $\mathscr{F} \subseteq Z[X]$ es un Z-filtro si es un $Z[X]$-filtro
2. $\mathscr{F} \subseteq Z[X]$ es un Z-ultrafiltro si es un $Z[X]$-ultrafiltro

Notemos que en la definición anterior, hemos tomado las definiciones de L-filtro y L -ultrafiltro con $L = Z[X]$.

Recordemos que βX se puede ver como la compactación de Wallman asociada a $Z[X]$, para ello continuaremos definiendo lo que es una base de Wallman y la compactación de Wallman.

Definición 3.2.5. Sea X un espacio topológico, $L \subseteq \mathscr{P}(X)$, decimos que L es una base de Wallman si cumple que:

1. L es un anillo
2. L es una base de cerrados para X
3. Para toda $A \in L$ y para toda $x \in X \setminus A$ existe $B \in L$ tal que $x \in B \subseteq X \setminus A$
4. Para cualesquiera $A, B \in L$ tales que $A \subseteq X \setminus B$, existen $C, D \in L$ tales que $A \subseteq X \setminus C \subseteq D \subseteq X \setminus B$

Y recordemos un importante resultado:

Proposición 3.2.6. Si X es Tychonoff, entonces $L = Z[X]$ es una base de Wallman.

Definiremos ahora la compactación de Wallman $W_L X$:

Definición 3.2.7. Sea X un espacio topológico y $L \subseteq \mathscr{P}(X)$ una base de Wallman. Definimos

$$W_L X =: \{\mathscr{U} \subseteq L : \mathscr{U} \text{ es un } L\text{-ultrafiltro}\}$$

y para cada $A \in L$ definimos

$$S(A) =: \{\mathscr{U} \in W_L X : A \in \mathscr{U}\}$$

Observación 3.2.8. Tenemos que $\{S(A) : A \in L\}$ forma una base de cerrados para alguna topología en $W_L X$. Consideraremos a $W_L X$ con dicha topología de ahora en adelante.

Para que nuestro nombre de «compactación de Wallman» tenga sentido, recordemos que:

Proposición 3.2.9. Si X es un espacio topológico y L es una base de Wallman en X, entonces $W_L X$ es un espacio compacto de Hausdorff.

y además este otro resultado que nos dice que X es denso en $W_L X$, por lo que efectivamente $W_L X \in K[X]$:

Teorema 3.2.10. (Frink-Wallman) Sea X un espacio topológico y L una base de Wallman en X, entonces:

1. $e : X \longrightarrow W_L X$ es un encaje denso donde $e(x) = U_x$ con $U_x = \{A \in L : x \in A\}$
2. Para $A, B \in L$, $cl_{W_L X}(e[A \cap B]) = cl_{W_L X}(e[A]) \cap cl_{W_L X}(e[B])$

Finalmente recordemos el importantísimo teorema que nos permite obtener una expresión explícita de βX en base a las compactaciones de Wallman, dicho resultado es posible gracias a que $Z[X]$ es una base de Wallman:

Teorema 3.2.11. Si X es un espacio Tychonoff, entonces $\beta X \equiv_X W_{Z[X]}X$.

Con todo lo anteriormente mencionado, tendríamos que la expresión explícita de βX a partir de Z-ultrafiltros queda como sigue:

Observación 3.2.12. Sea X un espacio topológico Tychonoff, entonces tenemos que:

$$\beta X = \{\mathscr{U} \subseteq Z[X] : \mathscr{U} \text{ es un } Z\text{-ultrafiltro}\}$$

y el Teorema 3.2.10. nos diría básicamente que $X \subseteq \beta X$ se ve de la siguiente manera:

$$X = \{U_x : x \in X\}$$

con $U_x = \{Z \in Z[X] : x \in Z\}$.

Además tendríamos que $\{S(Z) : Z \in Z[X]\}$ sería una base de cerrados para βX.

Por otra parte, tenemos unos resultados que no probaremos pues son parte del desarrollo de la teoría de la compactación de Stone-Čech:

Proposición 3.2.13. $\beta X \setminus X$ es el conjunto de Z-ultrafiltros libres en X.

Proposición 3.2.14. Sea X un espacio Tychonoff. Si para $p \in \beta X$ definimos $A^p = \{Z \in Z[X] : p \in cl_{\beta X} Z\}$, tenemos que:

1. $W_{Z[X]}X = \{A^p : p \in \beta X\}$ donde A^p es un Z-ultrafiltro en X para cada $p \in \beta X$
2. $\{cl_{\beta X} Z : Z \in Z[X]\}$ es una base de cerrados para βX
3. Para $Z \in Z[X]$, $cl_{\beta X} Z = Z \cup \{A \in \beta X \setminus X : Z \in A\}$

Proposición 3.2.15. Sean X y Y espacios de Tychonoff y sea $f \in C(X, Y)$, sea $\mathscr{U} \in \beta X \setminus X$ y $F = \{Z \in Z[Y] : f^{-1}[Z] \in \mathscr{U}\}$. Entonces:

1. F es un Z-filtro en Y
2. F está contenido en un único Z-ultrafiltro $f_{\mathscr{U}}$ en Y
3. $|\bigcap\limits_{Z \in F} cl_{\beta Y} Z| = 1$
4. $\beta f(\mathscr{U}) = f_{\mathscr{U}}$ y $\{f_{\mathscr{U}}\} = \bigcap\{cl_{\beta Y} Z : Z \in Z[Y] \wedge f^{-1}[Z] \in \mathscr{U}\}$

Una vez que hemos terminado de describir βX en términos de Z-ultrafiltros, continuaremos con el estudio de υX.

Daremos una caracterización de υX para espacios Tychonoff, pero para ello requerimos primero introducir el concepto de «propiedad de intersección numerable».

Definición 3.2.16. Sea X un espacio Tychonoff y $\mathscr{U} \subseteq Z[X]$ un Z-ultrafiltro. Decimos que $\mathscr{U}$ tiene la propiedad de intersección numerable (abreviado como P.I.N.) si todo subconjunto numerable de $\mathscr{U}$ tiene intersección no vacía.

Consideremos la siguiente equivalencia de que un Z-ultrafiltro tenga la P.I.N.

Proposición 3.2.17. Sea X un espacio Tychonoff y $\mathscr{U} \subseteq Z[X]$ un Z-ultrafiltro. Entonces $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N. si y sólo si la intersección de todo subconjunto numerable de $\mathscr{U}$ pertenece a $\mathscr{U}$.

Demostración. Sea $\mathscr{U} \subseteq Z[X]$ un Z-ultrafiltro con la P.I.N. y $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{U}$. Como $U_n \in Z[X]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $U_n = f_n^{-1}[\{0\}]$.

Consideremos la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2}$. Notemos que $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y además, dado $x \in \mathbb{R}$, $0 < e^{-x^2} \leq 1$ por propiedades de la función exponencial. Por otra parte, multiplicando por $-\frac{1}{2}$ la desigualdad anterior, obtenemos que $-\frac{1}{2} \leq -\frac{e^{-x^2}}{2} < 0$ y sumando $\frac{1}{2}$ obtenemos que $0 \leq -\frac{e^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$. Concluimos entonces que para toda $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $0 \leq h(x) < \frac{1}{2}$.

Por otra parte, $h(x) = 0$ si y sólo si $-\frac{e^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2} = 0$ si y sólo si $\frac{e^{-x^2}}{2} = \frac{1}{2}$ si y sólo si $e^{-x^2} = 1$ si y sólo si $-x^2 = 0$ si y sólo si $x = 0$ donde hemos usado que la función exponencial es inyectiva.

Por lo que tenemos que $h(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $g_n = h \circ f_n$. Notemos que $g_n \in C(X, \mathbb{R})$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y además $|g_n(x)| \leq \frac{1}{2}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $x \in X$. De la desigualdad anterior, obtenemos que $|g_n^n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $x \in X$. Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, por la prueba M de Weierstrass, tenemos que la serie de funciones g_n^n converge uniformemente en X y como cada g_n^n es continua, tenemos que la serie de funciones converge a una función continua.

Definimos $g = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n^n$, tenemos que $g \in C(X, \mathbb{R})$ y además $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n^n(x)$ para toda $x \in X$.

Afirmamos que $g^{-1}[\{0\}] = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Tenemos que si $x \in \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, entonces $f_n(x) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. entonces $h(f_n(x)) = 0$ pues $h(y) = 0$ si y sólo si $y = 0$. Entonces $g_n(x) = 0$ y así, $g(x) = 0$. Por lo tanto $x \in g^{-1}[\{0\}]$. Concluimos que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq g^{-1}[\{0\}]$.

Para ver la otra contención, sea $x \in g^{-1}[\{0\}]$, entonces $g(x) = 0$ y por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n^n(x) = 0$.

Como cada término de esta serie es un número no negativo, es decir, $g_n^n(x) \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos que $g_n^n(x) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que $g_n(x) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de g_n, tenemos que $h(f_n(x)) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Pero sabemos que $h(y) = 0$ si y sólo si $y = 0$, por lo que $f_n(x) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Entonces tenemos que $g^{-1}[\{0\}] \subseteq \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ y por lo tanto $g^{-1}[\{0\}] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ de lo cual se sigue que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n \in Z[X]$. Por hipótesis $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \varnothing$. Si tenemos que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n \notin \mathscr{U}$, entonces podemos considerar $\mathscr{W} = \mathscr{U} \cup \{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n\}$ el cual sería un Z-filtro pues se cumplirían las 3 condiciones de la Definición 3.2.3. en particular, la segunda se cumple puesto que $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N. y la primera se cumple puesto que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \varnothing$. Así, $\mathscr{W}$ es un Z-filtro que contiene propiamente a $\mathscr{U}$ lo cual no es posible puesto que $\mathscr{U}$ es un Z-ultrafiltro (es maximal respecto a la contención). Esta contradicción surge de suponer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n \notin \mathscr{U}$ y por lo tanto tenemos que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n \in \mathscr{U}$.

Ahora, para la implicación recíproca, notemos que si suponemos que la intersección de todo subconjunto numerable de $\mathscr{U}$ pertenee a $\mathscr{U}$, entonces la intersección de todo subconjunto numerable de $\mathscr{U}$ es no vacía ya que $\varnothing \notin \mathscr{U}$ por el inciso (1) de la Definición 3.2.3. de donde concluimos que $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.

■

Ahora que hemos dado esta caracterización de los Z-ultrafiltros con la P.I.N. procedemos a enunciar un teorema que nos dará una equivalencia de ser la realcompactación de Hewitt y una expresión explícita de dicha realcompactación en términos de Z-ultrafiltros.

Teorema 3.2.18. Sea X un espacio Tychonoff. Entonces se cumple que:

1. υX es la única realcompactación de X donde X está C-encajado
2. $\upsilon X = X \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \mathscr{U} \text{ tiene la P.I.N.}\}$

Demostración.

1. Sabemos que si X es un espacio Tychonoff, $\upsilon X = \gamma_{\mathbb{R}} X$. Por el Teorema 2.4.2. sabemos que X es $\mathbb{R}$-completamente regular por ser Tychonoff y por el Teorema 2.3.5. sabemos que $T \equiv_X \gamma_{\mathbb{R}} X$ si y sólo si para cada $f \in C(X, \mathbb{R})$, existe $\tilde{f} \in C(T, \mathbb{R})$ tal que $\tilde{f} \upharpoonright_X = f$, es decir, $T \equiv_X \gamma_{\mathbb{R}} X$ si y sólo si X está C-encajado en T (esto por la Definición 2.2.7.).

2. Sea $T = X \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \mathscr{U} \text{ tiene la P.I.N.}\}$. Por el inciso (1) del Teorema 3.2.18. (inciso que acabamos de demostorar), es suficiente ver que toda función $f \in C(X, \mathbb{R})$ tiene una extensión continua a T y que T es realcompacto. El hecho de que X es denso en T se sigue de que $cl_T(X) = cl_{\beta X}(X) \cap T = \beta X \cap T = T$ pues X es denso en βX y $T \subseteq \beta X$.

   Sea $f \in C(X, \mathbb{R})$. Sabemos que $\mathbb{R}$ es localmente compacto y que todo espacio localmente compacto que no es compacto admite una compactación por un punto, por lo que existe $\alpha\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{p\}$ donde $p \notin \mathbb{R}$ y $\alpha\mathbb{R} \in K[\mathbb{R}]$. Como $\alpha\mathbb{R}$ es compacto, por la Proposición 2.0.1. tenemos que existe $\alpha f : \beta X \longrightarrow \alpha\mathbb{R}$ continua tal que $\alpha f \upharpoonright_X = f$.

Por la Proposición 3.2.15. si $\mathscr{U} \in \beta X \setminus X$, entonces $\alpha f(\mathscr{U}) = \bigcap\{Z \in Z[\alpha\mathbb{R}] : f^{-1}[Z] \in \mathscr{U}\}$.

Sabemos que $(\alpha f)[X] = f[X] \subseteq \mathbb{R}$, por lo que si para todo $\mathscr{U} \in \beta X \setminus X$ tal que $\alpha f(\mathscr{U}) = p$ tenemos que $\mathscr{U} \notin T$ tendremos que $(\alpha f)[T] \subseteq \mathbb{R}$ y de ahí podremos construir la extensión continua deseada. Sea $\mathscr{U} \in \beta X \setminus X$ un Z-ultrafiltro tal que $\alpha f(\mathscr{U}) = p$. Como $p \notin \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $p \notin [-n, n] \in Z[\mathbb{R}]$ (donde lo último se da pues todo subconjunto cerrado de un espacio métrico es un nulo, esto por la Proposición A.1.5.). Consecuentemente tenemos que $f^{-1}[[-n, n]] \notin \mathscr{U}$.

Por otra parte, tenemos que $p \in \alpha\mathbb{R} \setminus (-n, n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y como $\alpha\mathbb{R} \setminus (-n, n)$ es cerrado en $\alpha\mathbb{R}$ el cual es un espacio métrico, tenemos que $\alpha\mathbb{R} \setminus (-n, n) \in Z[\alpha\mathbb{R}]$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo que $f^{-1}[\alpha\mathbb{R} \setminus (-n, n)] \in \mathscr{U}$. Pero, como $p \notin f[X]$ ya que $f[X] \subseteq \mathbb{R}$ y $p \notin \mathbb{R}$, tenemos que $f^{-1}[\alpha\mathbb{R} \setminus (-n, n)] = f^{-1}[\mathbb{R} \setminus (-n, n)]$.

Por otra parte,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[\mathbb{R} \setminus (-n, n)] = f^{-1}[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus (-n, n)] = f^{-1}[\mathbb{R} \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n))] = f^{-1}[\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}] = \varnothing$$

por lo tanto $\mathscr{U}$ no tiene la P.I.N. y luego $\mathscr{U} \notin T$. Como $\mathscr{U} \in \beta X \setminus X$ era arbitrario tal que $\alpha f(\mathscr{U}) = p$, tenemos que todo Z-ultrafiltro que no está en X y va a dar a p no puede pertenecer a T. Por lo tanto $(\alpha f)[T] \subseteq \mathbb{R}$ y $(\alpha f)\restriction_T \in C(T, \mathbb{R})$ es la extensión continua de f a T buscada.

Finalmente veamos que T es realcompacto. Para ello, consideremos nuevamente la compactación por un punto de $\mathbb{R}$, $\alpha\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{p\}$ con $p \notin \mathbb{R}$. Sea $\mathscr{U} \in \beta X \setminus T$. Como $\mathscr{U} \notin T$, tenemos que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro que no tiene la P.I.N.

Entonces existe $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{U}$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n = \varnothing$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $Z_{n+1} \subseteq Z_n$ para toda $n \in \mathbb{R}$ pues en caso de que no estén anidados de esa manera, podemos ir tomando intersecciones finitas para formar una nueva sucesión anidada (recordemos que la intersección finita o numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo).

Aplicando una técnica similar a la usada en la prueba de la Proposición 3.2.17. para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que existe $f_n \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $f_n[X] \subseteq [0, \frac{1}{2^n}]$ y existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ cumple que $f \in C(X, \mathbb{R})$ y además $f^{-1}[\{0\}] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n = \varnothing$. Definimos $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \frac{1}{f(x)}$. Notemos que h está bien definida pues $f^{-1}[\{0\}] = \varnothing$.

Como $\alpha\mathbb{R}$ es compacto, por la Proposición 2.0.1. existe $\alpha h \in C(\beta X, \alpha\mathbb{R})$ tal que $\alpha h\restriction_X = h$.

Ahora afirmamos que $\alpha h(\mathscr{U}) = p$. Supongamos pues que esto no suede, entonces existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha h(\mathscr{U}) = r$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $r \geq 0$. Como $X = h^{-1}[[r-1, r+1]] \cup h^{-1}[\mathbb{R} \setminus (r-1, r+1)]$ por el Teorema 3.2.15. tenemos que $h^{-1}[[r-1, r+1]] \in \mathscr{U}$. Sabemos que $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{1}{r+1}$.

Por otro lado, $Z_m \in \mathscr{U}$ y como $h^{-1}[[r-1, r+1]] \in \mathscr{U}$ tenemos por la Definición 3.2.3. que $Z_m \cap h^{-1}[[r-1, r+1]] \neq \varnothing$ pues $\mathscr{U}$ es un Z-ultrafiltro, en particular es un L-filtro con $L = Z[X]$.

Sea $y \in Z_m \cap h^{-1}[[r-1, r+1]]$, entonces $y \in \bigcap\limits_{n \leq m} Z_n$ y por lo tanto

$$0 < f(y) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f_n(y)}{2^n} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{1}{r+1}$$

y por lo tanto $h(y) = \frac{1}{f(y)} > r+1$ lo cual contradice que $h(y) \in [r-1, r+1]$.

Dicha contradicción viene de suponer que $\alpha h(\mathscr{U}) \neq p$. Por lo tanto debe suceder que $\alpha h(\mathscr{U}) = p$ con lo que hemos probado que si $\alpha h(\mathscr{W}) \in \mathbb{R}$, entonces $\mathscr{W} \neq \mathscr{U}$, por lo que se cumple que $(\alpha h)^{-1}[\mathbb{R}] \subseteq \beta X \setminus \{\mathscr{U}\}$. De la contención $(\alpha h)^{-1}[\mathbb{R}] \subseteq \beta X \setminus \{\mathscr{U}\}$ podemos deducir que:

$$\bigcap\{(\alpha f)^{-1}[\mathbb{R}] : f \in C(X, \alpha R)\} \subseteq (\alpha h)^{-1}[\mathbb{R}] \subseteq \beta X \setminus \{\mathscr{U}\}$$

Tomando en cuenta que $\mathscr{U} \in \beta X \setminus T$ era arbitrario, tenemos que:

$$\bigcap\{(\alpha f)^{-1}[\mathbb{R}] : f \in C(X, \alpha R)\} \subseteq \bigcap_{\mathscr{U} \in \beta X \setminus T} \beta X \setminus \{\mathscr{U}\} = \beta X \setminus \left(\bigcup_{\mathscr{U} \in \beta X \setminus T} \{\mathscr{U}\} \right) = T$$

Por otra parte, anteriormente vimos en esta prueba que si $f \in C(X, \alpha\mathbb{R})$, entonces la función $\alpha f : \beta X \longrightarrow \alpha\mathbb{R}$ cumple que $(\alpha f)[T] \subseteq \mathbb{R}$, por lo que $T \subseteq (\alpha f)^{-1}[\mathbb{R}]$. Como esto se cumple para toda $f \in C(X, \alpha\mathbb{R})$, tenemos que

$$T \subseteq \bigcap\{(\alpha f)^{-1}[\mathbb{R}] : f \in C(X, \alpha\mathbb{R})\}$$

Luego, concluimos que $T = \bigcap\{(\alpha f)^{-1}[\mathbb{R}] : f \in C(X, \alpha\mathbb{R})\}$.

Como $(\alpha f) \restriction_{(\alpha f)^{-1}[\mathbb{R}]} : (\alpha f)^{-1}[\mathbb{R}] \longrightarrow \mathbb{R}$ es perfecta, continua y suprayectiva, para cada $f \in C(X, \alpha\mathbb{R})$ tenemos por el Corolario 3.1.6. que $(\alpha f)^{-1}[\mathbb{R}]$ es realcompacto para cada $f \in C(X, \alpha\mathbb{R})$. Por último, por la Proposición 3.1.7. la intersección de una familia de subespacios realcompactos es realcompacto, por lo que T es realcompacto.

Por lo tanto $T \equiv_X \upsilon X$.

■

En la prueba anterior hemos usado que $\mathbb{R}$ es realcompacto, lo cual se da puesto que $\mathbb{R}$ se encaja en $\mathbb{R}^2$ mediante la función $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h(x) = (x, 0)$ donde $h[\mathbb{R}] = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ el cual es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

El Teorema 3.2.18. nos da una caracterización para la realcompactación de Hewitt υX mediante Z-ultrafiltros, el teorema básicamente nos dice que υX es X junto con los Z-ultrafiltros en el residuo de X respecto a βX que tienen la propiedad de intersección numerable. Este resultado también nos dice que podemos trabajar con υX como un subespacio de βX y apoyarnos en lo que ya conocemos sobre βX para poder estudiarlo con mayor profundidad.

Basándonos en el Teorema 3.2.18. podemos dar una caracterización de los espacios realcompactos:

Corolario 3.2.19. Sea X un espacio topológico Tychonoff, entonces X es realcompacto si y sólo si cada Z-ultrafiltro en X con la P.I.N. es un Z-ultrafiltro principal.

Demostración. Recordemos que por el Teorema 3.2.10. y el Teorema 3.2.11. podemos pensar a X como el subespacio de βX que consiste en todos los Z-ultrafiltros principales en X, es decir, $X = \{\mathscr{U}_x : x \in X\}$ donde $\mathscr{U}_x = \{Z \in Z[X] : x \in Z\}$. Sabemos que X es realcompacto si y sólo si $\upsilon X \setminus X = \varnothing$ y por el Teorema 3.2.18. esto es equivalente a que $\{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\}= \varnothing$. Notemos que esto último es equivalente a que cada Z-ultrafiltro en X con la P.I.N. pertenece a X, es decir, cada Z-ultrafiltro en X con la P.I.N. es un Z-ultrafiltro principal.

■

Finalmente, antes de terminar con nuestro primer acercamiento a la realcompactación de Hewitt υX, nos gustaría enunciar y demostrar un par de resultados:

Proposición 3.2.20. Si X es un espacio Tychonoff y $Z \in Z[X]$, entonces $cl_{\upsilon X} Z = Z \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\}$

Demostración. Sea X un espacio Tychonoff y $Z \in Z[X]$. Como υX es un subespacio de βX, podemos ver a $cl_{\upsilon X}(Z)$ como $cl_{\upsilon X}(Z) = cl_{\beta X}(Z) \cap \upsilon X$.

Por el Teorema 3.2.18. tenemos que $\upsilon X = X \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\}$, entonces $cl_{\upsilon X}(Z) = cl_{\beta X}(Z) \cap (X \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\})$ de donde obtenemos las siguiente igualdad:

$$cl_{\upsilon X}(Z) = (cl_{\beta X}(Z) \cap X) \cup (cl_{\beta X}(Z) \cap \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \mathscr{U} \text{ tiene la P.I.N.}\})$$

y usando la Proposición 3.2.14. tenemos que $cl_{\beta X}(Z) = Z \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z \in \mathscr{U}\}$ por lo que obtenemos que:

$$cl_{\upsilon X}(Z) = ((Z \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z \in \mathscr{U}\}) \cap X) \cup ((Z \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z \in \mathscr{U}\}) \cap \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \mathscr{U} \text{ tiene la P.I.N.}\})$$

y desarrollando lo anterior obtenemos que:

$$cl_{\upsilon X}(Z) = (Z \cap X) \cup (\{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z \in \mathscr{U}\} \cap X) \cup (Z \cap \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \mathscr{U} \text{ tiene la P.I.N.}\}) \cup (\{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z \in \mathscr{U}\} \cap \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \mathscr{U} \text{ tiene la P.I.N.}\})$$

De donde esto implica que:

$$cl_{\upsilon X}(Z) = Z \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \mathscr{U} \text{ tiene la P.I.N. y } Z \in \mathscr{U}\}$$

pues $Z \cap X = Z$ ya que $Z \subseteq X$, $\{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z \in \mathscr{U}\} \cap X = \varnothing$ y $Z \cap \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\} = \varnothing$.

■

Proposición 3.2.21. Si $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto numerable de $Z[X]$ entonces:

$$cl_{\upsilon X}[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_{\upsilon X}(Z_n)$$

Demostración. Por la Proposición 3.2.20. sabemos lo siguiente:

1. $cl_{\upsilon X}[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n] = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n\right) \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\}$
2. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_{\upsilon X}(Z_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Z_n \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\})$

por lo que basta ver que los conjuntos que describen a $cl_{\upsilon X}[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n]$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_{\upsilon X}(Z_n)$ son iguales.

Para la primer contención, consideremos un punto $p \in cl_{\upsilon X}[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n]$, entonces p cumple que $p \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n\right) \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\}$.

Por lo que $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ o $p \in \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\}$. Si $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n$, entonces $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Z_n \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\})$ y por lo tanto $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Z_n \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\})$.

Si $p \in \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\}$, entonces existe $\mathscr{U} \in \beta X \setminus X$ tal que $p = \mathscr{U}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N. En particular, como $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{U}$ y los Z-ultrafiltros son cerrados bajo supraconjuntos, tenemos que $Z_n \in \mathscr{U}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Z_n \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\})$.

En ambos casos concluimos que $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Z_n \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\})$ y por (1) y (2) tenemos que $cl_{\upsilon X}[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_{\upsilon X} Z_n$.

Veamos ahora la otra contención. Sea $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_{\upsilon X} Z_n$. Por (2), $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Z_n \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\})$.

Si tenemos que $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ habremos acabado, por lo que supongamos que esto no sucede. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p \notin Z_m$. Como $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Z_n \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\})$ y $p \notin Z_m$, entonces $p \in \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z_m \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\}$ y luego existe $\mathscr{U} \in \beta X \setminus X$ tal que $p = \mathscr{U}$, $Z_m \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.

Como $p = \mathscr{U}$ con $\mathscr{U} \in \beta X \setminus X$ y además $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(Z_n \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\})$ con $Z_n \subseteq X$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $p \in \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\}$ por lo que $Z_n \in \mathscr{U}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N. por la Proposición 3.2.17. tenemos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{U}$, por lo tanto $p \in \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\} \subseteq cl_{\upsilon X}[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n]$.

Por lo tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_{\upsilon X}(Z_n) \subseteq cl_{\upsilon X}[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n]$.

$\blacksquare$

Proposición 3.2.22. Si T es una realcompactación de X tal que

$$cl_T[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_T(Z_n)$$

para todo subconjunto numerable $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $Z[X]$, entonces $T \equiv_X \upsilon X$.

Demostración.

Por el Teorema 3.2.18. basta ver que T cumple que X está C-encajado en T. Para ello demostraremos primero que X está C^*-encajado en T. Para ver esto, usaremos el Teorema A.3.7. que se encuentra en el Apéndice A. Podemos usar dicho teorema pues X es denso en T ya que T es una realcompactación de X. Sean $Z_1, Z_2 \in Z[X]$ tales que $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$.

Veamos que $cl_T(Z_1) \cap cl_T(Z_2) = \varnothing$. Sabemos que $\{Z_1, Z_2\}$ es un subconjunto numerable de $Z[X]$, luego, por hipótesis, $cl_T[Z_1 \cap Z_2] = cl_T(Z_1) \cap cl_T(Z_2)$ pero $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$, entonces $cl_T(Z_1) \cap cl_T(Z_2) = \varnothing$, por lo que aplicando el Teorema A.3.7. tenemos que X está C^*-encajado en T.

Finalmente, para ver que X está C-encajado en T, aplicaremos la Proposición A.3.6. del Apéndice A.

Veamos que X está completamente separado en T de cualquier nulo de T ajeno a X. Sea $Z \in Z[T]$ tal que $Z \cap X = \varnothing$. Entonces existe $f_Z \in C(T, [0,1])$ tal que $f_Z^{-1}[\{0\}] = Z$. Si tuviéramos que $Z \neq \varnothing$, entonces existe $z \in Z$ tal que $f_Z(z) = 0$. Como $Z \cap X = \varnothing$, $f_Z(x) > 0$ para toda $x \in X$. Entonces tenemos que $(f_Z \restriction_X)^{-1}[\{0\}] = \varnothing$.

Luego, por la Proposición A.1.6. tenemos que $Z_n = (f_Z \restriction_X)^{-1}[[0, \frac{1}{n}]] \in Z[X]$. Por hipótesis $cl_T[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_T Z_n$.

Esta igualdad resulta en:

$$cl_T[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (f_Z \restriction_X)^{-1}[[0, \frac{1}{n}]]] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_T(f_Z \restriction_X)^{-1}[[0, \frac{1}{n}]]$$

de donde $cl_T[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (f_Z \restriction_X)^{-1}[[0, \frac{1}{n}]]] = cl_T((f_Z \restriction_X)^{-1}[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]]) = cl_T((f_Z \restriction_X)^{-1}[\{0\}]) = \varnothing$.

Por otra parte, dado $U \subseteq T$ abierto tal que $z \in U$, como $z \in f_Z^{-1}[[0, \frac{1}{n})]$ pues $f_Z(z) = 0$, tenemos que $U \cap f_Z^{-1}[[0, \frac{1}{n})] \neq \varnothing$ y como $U \cap f_Z^{-1}[[0, \frac{1}{n})]$ es abierto en T, al ser X denso tenemos que $U \cap f_Z^{-1}[[0, \frac{1}{n})] \cap X \neq \varnothing$. Por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$\varnothing \neq U \cap f_Z^{-1}[[0, \frac{1}{n})] \cap X \subseteq U \cap f_Z^{-1}[[0, \frac{1}{n}]] \cap X = U \cap (f_Z \restriction_X)^{-1}[[0, \frac{1}{n}]]$$

donde $n \in \mathbb{N}$ es arbitraria, por lo tanto $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_T(f_Z \restriction_X)^{-1}[[0, \frac{1}{n}]]$ lo cual no es posible pues dicho conjunto es vacío.

Nuestra contradicción surge de suponer que $Z \neq \varnothing$, por lo tanto $Z = \varnothing$ y Z está completamente separado de X en T. Por la Proposición A.3.6. tenemos que X está C-encajado en T y por el Teorema 3.2.18. $T \equiv_X \upsilon X$.

■

Posteriormente, combinando la Proposición 3.2.21. y la Proposición 3.2.22. obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.2.23. υX es la única realcompactación de X que cumple lo siguiente:

$$cl_{\upsilon X}[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_{\upsilon X} Z_n$$

para todo subconjunto numerable $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $Z[X]$.

Finalmente, antes de terminar con esta sección (y con este capítulo), daremos un teorema que resulta bastante útil a la hora de trabajar con los espacios que están entre X y υX. Dicho resultado está inspirado en los resultados proporcionados en [4] por lo que el lector puede consultar dicha referencia para más información sobre el tema.

Teorema 3.2.24. Sean X y T espacios Tychonoff tales que X es denso en T. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X está C-encajado en T
2. $X \subseteq T \subseteq \upsilon X$
3. $\upsilon T = \upsilon X$

Demostración. Veamos que (1) y (3) son equivalentes:

Si X está C-encajado en T, como T está C-encajado en υT, por la Proposición A.3.2. tenemos que X está C-encajado en υT. Luego, como X es denso en T y T es denso en υT, tenemos que X es denso en υT y por lo tanto υT es una realcompactación de X en la cual X está C-encajado, por lo que usando el Teorema 3.2.18. tenemos que $\upsilon T = \upsilon X$.

Luego, si tenemos que $\upsilon T = \upsilon X$, tenemos que X está C-encajado en υT. Sea pues $f \in C(X, \mathbb{R})$, entonces existe $\upsilon f \in C(\upsilon T, \mathbb{R})$ tal que $\upsilon f \restriction_X = T$. Consideremos $\upsilon f \restriction_T \in C(T, \mathbb{R})$. Tenemos pues que $(\upsilon f \restriction_T) \restriction_X = \upsilon f \restriction_X = f$, por lo que X está C-encajado en T. Por lo tanto (1) y (3) son equivalentes.

Ahora veamos que (2) y (3) son equivalentes:

Supongamos que $X \subseteq T \subseteq \upsilon X$, entonces $\upsilon X = cl_{\upsilon X}(X) \subseteq cl_{\upsilon X}(T) \subseteq \upsilon X$ pues X es denso en υX, por lo que $cl_{\upsilon X}(T) = \upsilon X$ y luego T es denso en υX. Además, dada $f \in C(T, \mathbb{R})$, $f \restriction_X \in C(X, \mathbb{R})$, por lo que existe $\upsilon(f \restriction_X) \in C(\upsilon X, \mathbb{R})$ tal que $\upsilon(f \restriction_X) \restriction_X = f \restriction_X$. Luego, $\upsilon(f \restriction_X) \restriction_T$ y f son funciones en $C(T, \mathbb{R})$ que restringidas a X, el cual es denso en T, coinciden, por lo que usando la Proposición 1.1.3. (unicidad de las extensiones continuas), tenemos que $\upsilon(f \restriction_X) \restriction_T = f$ por lo que T está C-encajado en υX.

Como T es denso en υX y está C encajado en υX, por el Teorema 3.2.18. tenemos que $\upsilon X = \upsilon T$.

Finalmente, si suponemos que $\upsilon T = \upsilon X$, como X es denso en T tenemos que $X \subseteq T$ y desde luego $T \subseteq \upsilon T = \upsilon X$, por lo que $X \subseteq T \subseteq \upsilon X$. Por lo tanto (2) y (3) son equivalentes con lo que concluimos la prueba.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Propiedades de los espacios realcompactos

Durante el Capítulo 3, empezamos definiendo lo que es un espacio realcompacto y dando algunas propiedades de dichos espacios las cuales resultaron ser consecuencias inmediatas de las propiedades de los espacios E-compactos analizados en el Capítulo 2. Este capítulo tiene como finalidad dar algunas propiedades que no son consecuencia inmediata de ello y que son propiedades mas intrínsecas de la realcompacidad.

Dichas propiedades se pueden obtener más fácilmente gracias a que υX se puede pensar como un subespacio de βX.

4.1. Propiedades inducidas por la realcompactación de Hewitt

Comenzamos esta sección demostrando que todo espacio Tychonoff y Lindelöf es realcompacto.

Proposición 4.1.1. Todo espacio Tychonoff y Lindelöf es realcompacto.

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ un Z-ultrafiltro libre. Como cada $Z \in \mathscr{U}$ es cerrado (pues los elementos de $Z[X]$ son cerrados), tenemos que para cada $Z \in \mathscr{U}$, $X \setminus Z$ es abierto en X. Luego, tenemos que al ser $\mathscr{U}$ un Z-ultrafiltro libre y cada $Z \in \mathscr{U}$ es cerrado, tenemos que $\bigcap\limits_{Z\in\mathscr{U}} Z = \varnothing$.

Entonces $\bigcup\limits_{Z\in\mathscr{U}} (X \setminus Z) = X \setminus \left(\bigcap\limits_{Z\in\mathscr{U}} Z \right) = X \setminus \varnothing = X$. Por lo tanto, $\{X \setminus Z : Z \in \mathscr{U}\}$ es una cubierta abierta de X.

Como X es un espacio de Lindelöf, tenemos que existe una subcubierta numerable de $\{X \setminus Z : Z \in \mathscr{U}\}$ tal que $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus Z_n)$ donde $Z_n \in \mathscr{U}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, de lo anterior tenemos que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus Z_n) = \varnothing$, por lo que $\mathscr{U}$ no tiene la P.I.N.

Hemos probado pues que todo Z-ultrafiltro libre no tiene la P.I.N., esto es equivalente a que todo Z-ultrafiltro en X con la P.I.N. es un Z-ultrafiltro principal. Por el Corolario 3.2.19. concluimos que X es realcompacto.

■

Ahora, daremos un ejemplo donde aplicamos este resultado para encontrar un espacio realcompacto:

Ejemplo 4.1.2. La recta de sorgenfrey S es un espacio realcompacto.

Demostración. Recordemos que la recta de sorgenfrey es el espacio topológico $S = (\mathbb{R}, \tau_{\text{sor}})$ donde τ_{sor} es la topología generada por la base $\mathscr{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$.

Veamos que S es un espacio de Lindelöf, es decir, que toda cubierta abierta de S tiene una subcubierta numerable. Como S está definido en base a $\mathscr{B}$, dado que cada abierto es una unión de elementos de la base, basta ver que toda cubierta abierta formada por elementos de $\mathscr{B}$ tiene una subcubierta numerable.

Sea $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{B}$ tal que $\mathscr{V}$ es una cubierta abierta de S. Por la definición de $\mathscr{B}$, tenemos que $\mathscr{V}$ tiene la siguiente forma: $\mathscr{V} = \{[a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, i \in J\}$. Consideremos el conjunto $W = \bigcup\limits_{i\in J} (a_i, b_i)$.

Si se diera el caso de que $W = \mathbb{R}$, tendríamos que el conjunto

$$\mathscr{V}^* = \{(a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, i \in J\}$$

sería una cubierta abierta de $\mathbb{R}$ con la topología usual y como $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ es Lindelöf, $\mathscr{V}^*$ tendría una subcubierta numerable de $\mathbb{R}$ y por consecuencia $\mathscr{V}$ tendría una subcubierta numerable de S.

Podemos suponer pues que $W \subsetneq \mathbb{R}$. Entonces dado $x \in \mathbb{R} \setminus W$, tenemos que al ser $\bigcup \mathscr{V} = \mathbb{R}$, entonces existe $i_x \in J$ tal que $x \in [a_{i_x}, b_{i_x})$. Pero $x \notin W$, entonces $x \notin (a_{i_x}, b_{i_x})$ por lo que $x = a_{i_x}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ con la topología usual, existe $q_x \in (a_{i_x}, b_{i_x})$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus W$, existe $q_x \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q_x$, $q_x \in (a_{i_x}, b_{i_x})$ y $x = a_{i_x}$ con $i_x \in J$.

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \setminus W \longrightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = q_x$. Afirmamos que f es inyectiva.

Sean $x, y \in \mathbb{R} \setminus W$, tales que $x \neq y$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x < y$.

Tenemos que $f(x) = q_x$ con $i_x \in J$ tal que $q_x \in (a_{i_x}, b_{i_x})$ y $x = a_{i_x}$ y $f(y) = q_y$ con $i_y \in J$ tal que $q_y \in (a_{i_y}, b_{i_y})$ y $y = a_{i_y}$. Como $x \neq y$ y $y \notin W$, tenemos que $y \neq a_{i_x}$, $a_{i_x} = x < y$ y además $y \notin (a_{i_x}, b_{i_x})$, por lo que $q_x < b_{i_x} \leq y < q_y$, en particular $q_x < q_y$.

Por lo tanto $f(x) \neq f(y)$ y entonces f es inyectiva. De esto obtenemos que $|\mathbb{R} \setminus W| \leq |\mathbb{Q}| = \omega$.

Consecuentemente $\mathbb{R} \setminus W$ es numerable. Entonces existe un subconjunto numerable de $\mathscr{V}$ que cubre a $\mathbb{R} \setminus W$. Por otro lado, W es abierto en $\mathbb{R}$ con la topología usual, por lo que dicho espacio es Lindelöf (recordemos que todo subespacio de $\mathbb{R}$ es segundo numerable y por lo tanto Lindelöf). Entonces existe una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{V}$ que cubre a W. Uniendo ambas cantidades numerables de elementos de $\mathscr{V}$ que cubren tanto a $\mathbb{R} \setminus W$ y a W, tenemos que $\mathscr{V}$ tiene una subcubierta numerable de S.

De lo anterior, S es Lindelöf y ya sabemos que S es Tychonoff, entonces por la Proposición 4.1.1. S es realcompacto.

$\blacksquare$

Ahora, veamos que sucede con el plano de Sorgenfrey $S \times S$.

Ejemplo 4.1.3. El plano de Sorgenfrey $S \times S$ es un espacio realcompacto, no normal y que no es Lindelöf.

Demostración. Tenemos que $S \times S$ es separable pues $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso en $S \times S$. Además, el conjunto $D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ es cerrado en $S \times S$ y además D es discreto pues para cada $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $\{(x, -x)\} = ([x, x + 1) \times [-x, -x + 1)) \cap D$, por lo que usando el Lema de Jones (Teorema A.4.1.) tenemos que $S \times S$ no es normal.

Ahora, sabemos que $S \times S$ es regular, si fuese Lindelöf por la Proposición A.4.2. tendríamos que $S \times S$ sería normal lo cual no es posible. Por lo tanto $S \times S$ no es Lindelöf. Por otra parte, como S es realcompacto y la realcompacidad es una propiedad productiva, $S \times S$ es realcompacto.

$\blacksquare$

Como consecuencia del Ejemplo 4.1.3. tenemos que no todo espacio realcompacto es normal y no todo espacio realcompacto es Lindelöf.

Continuamos con nuestro estudio de las propiedades de los espacios realcompactos enunciando un teorema algo técnico que nos dará una caracterización de los elementos de $\beta X \setminus \upsilon X$.

Teorema 4.1.4. Sea X un espacio Tychonoff y $p \in \beta X$. Las siguientes son equivalentes:

1. $p \in \beta X \setminus \upsilon X$
2. Existe $S \in Z[\beta X]$ tal que $p \in S$ y $S \cap X = \varnothing$
3. Existe G un subconjunto de βX de tipo G_δ tal que $p \in G$ y $G \cap X = \varnothing$

Demostración. Veamos primero que (1) implica (2). Sea $p \in \beta X \setminus \upsilon X$. Por la Proposición 3.2.14. podemos pensar a p como $A^p = \{Z \in Z[X] : p \in cl_{\beta X} Z\}$ y A^p es un Z-ultrafiltro en X. Como $A^p \notin \upsilon X$, por el Teorema 3.2.18. tenemos que A^p no tiene la P.I.N.

Entonces, existe $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A^p$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n = \varnothing$. Por la Proposición 2.0.1. tenemos que X está C^*-encajado en βX, por lo que de acuerdo a la Proposición A.3.9. X está Z-encajado en βX. Entonces, por la Definición A.3.8. para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $S_n \in Z[\beta X]$ tal que $S_n \cap X = Z_n$. Como S_n es cerrado en βX para cada $n \in \mathbb{N}$ y además $Z_n \subseteq S_n$, entonces $cl_{\beta X}(Z_n) \subseteq S_n$. Como $Z_n \in A^p$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \in cl_{\beta X}(Z_n) \subseteq S_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Por otra parte, si $S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$, tenemos que como cada $S_n \in Z[\beta X]$ y la intersección numerable de subconjuntos nulos nos da un subconjunto nulo (por la Proposición A.1.7.), tenemos que $S \in Z[\beta X]$.

Por lo tanto, S cumple que $p \in S$, $S \in Z[\beta X]$ y además $S \cap X = \varnothing$ que es lo que se nos pedía, de donde $S \cap X = \varnothing$ se cumple pues $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n = \varnothing$.

Veamos ahora que (2) implica (1). Supongamos que existe $S \in Z[\beta X]$ tal que $p \in S$ y $S \cap X = \varnothing$.

Como $S \in Z[\beta X]$, entonces existe $f \in C(\beta X, \mathbb{R})$ tal que $S = f^{-1}[\{0\}]$. Entonces $\beta X \setminus S = f^{-1}[\mathbb{R}\setminus\{0\}]$. Tenemos que $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ es Lindelöf pues $\mathbb{R}$ es segundo numerable, luego $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ es segundo numerable y por lo tanto Lindelöf. Por la Proposición 4.1.1. tenemos que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es realcompacto. Luego, como la función f es continua y su dominio es un conjunto compacto, por la Proposición A.2.2. tenemos que f es una función perfecta.

Por la Proposición A.2.4. la función $f \restriction_{f^{-1}[\mathbb{R}\setminus\{0\}]}$ es una función perfecta de $f^{-1}[\mathbb{R} \setminus S]$ en $\mathbb{R} \setminus S$, luego, por el Corolario 3.1.6. usando que $\mathbb{R}\setminus S$ es realcompacto, obtenemos que $\beta X\setminus S = f^{-1}[\mathbb{R}\setminus\{0\}]$ es realcompacto.

Como $S \cap X = \varnothing$, tenemos que $X \subseteq \beta X \setminus S \subseteq \beta X$ y como $\beta X \setminus S$ es realcompacto, por el Teorema 2.5.7. tenemos que $\upsilon X \subseteq \beta X \setminus X$. Como $p \in S$, se sigue que $p \notin \upsilon X$ y luego $p \in \beta X \setminus \upsilon X$.

Finalmente veamos que (2) y (3) son equivalentes:

Primero supongamos que se cumple (2) y demostremos que (3) se cumple. Supongamos que existe $S \in Z[\beta X]$ tal que $p \in S$ y $S \cap X = \varnothing$. Como $S \in Z[\beta X]$, por definición de conjunto nulo tenemos que existe $f \in C(\beta X, \mathbb{R})$ tal que $S = f^{-1}[\{0\}]$. Como $\{0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ donde $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ es abierto para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})]$ donde $f^{-1}[(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})]$ es abierto en βX para toda $n \in \mathbb{N}$ pues f es continua.

Por lo tanto S es de tipo G_δ en βX y concluimos que (3) se cumple.

Ahora, supongamos que se cumple (3) y veamos que se cumple (2). Entonces por (3) existe G un subconjunto de βX de tipo G_δ tal que $p \in G$ y $G \cap X = \varnothing$. Como G es un subconjunto de tipo G_δ, existe una familia numerable de abiertos de βX, $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que U_n es abierto en βX, tenemos que $\beta X \setminus U_n$ es cerrado en βX para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, como βX es Tychonoff, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in C(\beta X, \mathbb{R})$ tal que $p \in f_n^{-1}[\{0\}]$ y $\beta X \setminus U_n \subseteq f_n^{-1}[\{1\}]$. Notemos que como $\beta X \setminus U_n \subseteq f_n^{-1}[\{1\}]$, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n^{-1}[\{0\}] \cap (\beta X \setminus U_n) \subseteq f_n^{-1}[\{0\}] \cap f_n^{-1}[\{1\}] = \varnothing$. Por lo tanto $f_n^{-1}[\{0\}] \subseteq U_n$.

Lo anterior nos dice que $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}[\{0\}] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = G$. Sea $S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}[\{0\}]$, como $G \cap X = \varnothing$, tenemos que $S \cap X = \varnothing$ y además $S \in Z[X]$ por la Proposición A.1.7. que nos dice que las intersecciones numerables de conjuntos en $Z[\beta X]$ nos da un conjunto en $Z[\beta X]$.

Con esto concluimos la prueba del Teorema 4.1.4.

■

El Teorema 4.1.4. tiene como consecuencia los siguientes corolarios:

Corolario 4.1.5. Sea X un espacio Tychonoff, entonces X es realcompacto si y sólo si para cada $p \in \beta X \setminus X$ existe $S \in Z[\beta X]$ tal que $p \in S$ y $S \cap X = \varnothing$.

Demostración. Primero supongamos que X es realcompacto, entonces $X = \upsilon X$. Por el Teorema 4.1.4. tenemos que si $p \in \beta X \setminus \upsilon X = \beta X \setminus X$, entonces existe $S \in Z[\beta X]$ tal que $p \in S$ y $S \cap X = \varnothing$.

Ahora supongamos que para cada $p \in \beta X \setminus X$ existe $S \in Z[\beta X]$ tal que $p \in S$ y $S \cap X = \varnothing$. Sea $p \in \upsilon X$, para ver que X es realcompacto basta ver que $p \in X$. Como $\upsilon X \subseteq \beta X$ tenemos que $p \in \beta X$.

Si $p \notin X$, entonces $p \in \beta X \setminus X$ y por hipótesis existe $S \in Z[\beta X]$ tal que $p \in S$ y $S \cap X = \varnothing$.

Luego, por el Teorema 4.1.4. tenemos que $p \in \beta X \setminus \upsilon X$ lo cual es una contradicción a que $p \in \upsilon X$.

Por lo tanto $p \in X$ y $\upsilon X \subseteq X$.

Por lo tanto X es realcompacto.

■

Corolario 4.1.6. Si X es realcompacto, entonces todo subconjunto de tipo F_σ de X es realcompacto.

Demostración. Supongamos que X es realcompacto y sea $A \subseteq X$ un conjunto F_σ. Como A es F_σ, tenemos que existe una colección $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos cerrados de X tal que $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Consideremos la función $i : F \longrightarrow cl_{\beta X}(F)$ tal que $i(x) = x$, tenemos que i es un encaje de F en $cl_{\beta X}(F)$.

Como $cl_{\beta X}(F)$ es compacto, i admite una extensión continua $\beta i : \beta F \longrightarrow cl_{\beta X}(F)$ (esto por la caracterización de la compactación de Stone-Čech dada en la Proposición 2.0.1.).

Sea $p \in \beta F \setminus F$. Como F es denso en βF y $\beta i \restriction_F = i$ donde $i : F \longrightarrow i[F] = F$ es una función perfecta y sobreyectiva, usando el Teorema A.2.5. tenemos que $\beta i[\beta F \setminus F] \subseteq cl_{\beta X}(F) \setminus F$. Por lo tanto $\beta i(p) \in cl_{\beta X}(F) \setminus F$.

Tenemos dos posibilidades, que $\beta i(p) \in X$ o que $\beta i(p) \notin X$:

1. Para la primer posibilidad, si $\beta i(p) \in X$, como $\beta i(p) \in cl_{\beta X}(F)$ y $cl_X(F) = cl_{\beta X}(F) \cap X$, entonces $\beta i(p) \in cl_X(F)$ por lo que $\beta i(p) \in cl_X(F)$.

   Como A_n es cerrado para toda $n \in \mathbb{N}$ y X es Tychonoff, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $Z_n \in Z[X]$ tal que $\beta i(p) \in Z_n$ y $Z_n \cap A_n = \varnothing$. Por la Proposición A.1.7. tenemos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in Z[X]$ y además sabemos que X está C^*-encajado en βX, por lo que usando la Proposición A.3.9. tenemos que X está Z-encajado en βX y por la Definición A.3.8. tenemos que existe $S \in Z[\beta X]$ tal que $S \cap X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n$.

   Por otro lado, como $cl_{\beta X}(F) \in Z[cl_{\beta X}(F)]$ (es la preimagen de la función constante 0), por la Proposición A.1.7. tenemos que $S \cap cl_{\beta X}(F) \in Z[cl_{\beta X}(F)]$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $Z_n \cap A_n = \varnothing$, por lo que $(S \cap cl_{\beta X}(F)) \cap F = S \cap F = S \cap X \cap F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$ de donde hemos usado que $cl_{\beta X}(F) \cap F = F$ y $F = X \cap F$ pues $F \subseteq X$.

   De lo anterior, como $S \cap cl_{\beta X}(F) \in Z[cl_{\beta X}(F)]$ y βi es continua, usando la Proposición A.1.6. tenemos que $(\beta i)^{-1}[S \cap cl_{\beta X}(F)] \in Z[\beta F]$ y además tenemos que $p \in \beta i^{-1}[S \cap cl_{\beta X}(F)]$.

   Ahora, si $x \in (\beta i)^{-1}[S \cap cl_{\beta X}(F)] \cap F$, tenemos que $\beta i(x) \in S \cap cl_{\beta X}(F)$ y $x \in F$. Como $\beta i \restriction_F = i$, tenemos que $\beta i(x) = x \in F$, por lo que $\beta i(x) \in (S \cap cl_{\beta X}(F)) \cap F$ lo cual no es posible. Concluimos pues que $(\beta i)^{-1}[S \cap cl_{\beta X}(F)] \cap F = \varnothing$, $p \in (\beta i)^{-1}[S \cap cl_{\beta X}(F)]$ y además $(\beta i)^{-1}[S \cap cl_{\beta X}(F)] \in Z[\beta F]$.

2. Para la segunda posibilidad, si tenemos que $\beta i(p) \notin X$, entonces $\beta i(p) \in \beta X \setminus X$ y como X es realcompacto, usando el Corolario 4.1.5. tenemos que existe $S \in Z[\beta X]$ tal que $\beta i(p) \in S$ y $S \cap X = \varnothing$.

   Tenemos que $S \cap cl_{\beta X}(F) \in Z[cl_{\beta X}(F)]$ pues $Z \in Z[\beta X]$ y como βi es continua, usando la Proposición A.1.6. tenemos que $(\beta i)^{-1}[S \cap cl_{\beta X}(F)] \in Z[\beta F]$.

   Sabemos que $S \cap X = \varnothing$, por lo que

$$(S \cap cl_{\beta X}(F)) \cap F = S \cap (cl_{\beta X}(F) \cap F) = S \cap F = S \cap (X \cap F) = (S \cap X) \cap F = \varnothing$$

.

Esto tiene como consecuencia lo siguiente: si existiera $x \in (\beta i)^{-1}[S \cap cl_{\beta X}(F)] \cap F$, tendríamos que $\beta i(x) \in S \cap cl_{\beta X}(F)$ y $x \in F$, como $\beta i \restriction_F = i$, $\beta i(x) = x \in F$ y luego $\beta i(x) \in (S \cap cl_{\beta X}(F)) \cap F$ lo cual no es posible. Por lo tanto $(\beta i)^{-1}[S \cap cl_{\beta X}(F)] \cap F = \varnothing$.

De lo anterior, tenemos lo siguiente: $(\beta i)^{-1}[S \cap cl_{\beta X}(F)] \in Z[\beta F]$, $p \in (\beta i)^{-1}[S \cap cl_{\beta X}(F)]$ y además $(\beta i)^{-1}[S \cap cl_{\beta X}(F)] \cap F = \varnothing$.

De las posibilidades (1) y (2), tenemos que para cada $p \in \beta F \setminus F$, existe $Z \in Z[\beta F]$ tal que $p \in Z$ y $Z \cap F = \varnothing$, por lo que el Corolario 4.1.5. nos permite concluir que F es realcompacto.

■

Luego, el Corolario 4.1.6. nos permite obtener el siguiente corolario:

Corolario 4.1.7. Si X es realcompacto, entonces para todo $C \in coz[X]$, C es realcompacto.

Demostración. Para un repaso sobre lo que es el conjunto $coz[X]$ referimos al lector a la Definición A.1.3. del Apéndice A.1.

Ahora procederemos con la prueba.

Sea $C \in coz[X]$, entonces existe $Z \in Z[X]$ tal que $C = X \setminus Z$. Tenemos que existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $Z = f^{-1}[\{0\}]$ y por lo tanto $C = f^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$.

Sabemos que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}) = \{0\}$, por lo que $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus (\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n})) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R} \setminus (-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}))$ donde $\mathbb{R} \setminus (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ es cerrado para toda $n \in \mathbb{N}$.

Concluimos pues que $C = f^{-1}[\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R} \setminus (-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}))]$ y por lo tanto C es un cojunto F_σ, aplicando el Corolario 4.1.6. obtenemos que C es realcompacto.

■

Como hemos estado trabajando con los conjuntos de $Z[X]$, $Z[\beta X]$, entre otros, suena natural preguntarse si hay alguna relación entre los subconjuntos nulos de X y los de υX.

Para responder dicha pregunta, primero enunciaremos y demostraremos un lema:

Lema 4.1.8. Si $Z \in Z[\upsilon X]$ es tal que $Z \neq \varnothing$, entonces $Z \cap X \neq \varnothing$.

Demostración. Sea $Z \in Z[\upsilon X]$ tal que $Z \neq \varnothing$. Sabemos que $X \subseteq \upsilon X \subseteq \beta X$. Si $f : \upsilon X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, tenemos que $f \restriction_X : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y acotada. Usando que X está C^*-encajado en βX, tenemos que existe $g : \beta X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada tal que $g \restriction_X = f \restriction_X$. Entonces, en particular esto nos dice que $(g \restriction_{\upsilon X}) \restriction_X = f \restriction_X$ y como X es denso en υX y $\mathbb{R}$ es Hausdorff entonces $g \restriction_{\upsilon X} = f$. Lo cual nos dice que g es una extensión continua y acotada de f por lo que υX está C^*-encajado en βX.

Como υX está C^*-encajado en βX, por la Proposición A.3.9. tenemos que υX está Z-encajado en βX. Por la Definición A.3.8. (definición de estar Z-encajado), tenemos que para $Z \in Z[\upsilon X]$, existe $T \in Z[\beta X]$ tal que $Z = (\upsilon X) \cap T$. Notemos que $Z \cap X = ((\upsilon X) \cap T) \cap X = X \cap T$ pues $X \subseteq \upsilon X$.

Sabemos que $Z \neq \varnothing$ y como $Z = (\upsilon X) \cap T$, entonces $(\upsilon X) \cap T \neq \varnothing$. Entonces existe $p \in (\upsilon X) \cap T$.

Si tuviéramos que $Z \cap X = \varnothing$, entonces $X \cap T = \varnothing$ y además, sabemos que $p \in (\upsilon X) \cap T \subseteq T$ por lo que $p \in T$ donde $T \in Z[\beta X]$, entonces por el Teorema 4.1.4. tenemos que $p \in \beta X \setminus \upsilon X$ lo cual es una contradicción pues ya sabemos que $p \in \upsilon X$.

Por lo tanto tenemos que $Z \cap X \neq \varnothing$, que es lo que queríamos demostrar.

■

Ahora sí, damos el resultado que relaciona $Z[X]$ con $Z[\upsilon X]$:

Teorema 4.1.9. Sea $\phi : Z[X] \longrightarrow Z[\upsilon X]$ dada por $\phi(Z) = cl_{\upsilon X}(Z)$. Entonces ϕ es un isomorfismo de retículas. Más aún, $cl_{\upsilon X}(Z \cap X) = Z$ para cada $Z \in Z[\upsilon X]$ y si $\mathscr{U} \in \upsilon X \setminus X$ y $Z \in Z[\upsilon X]$, entonces $\mathscr{U} \in Z$ si y sólo si $Z \cap X \in \mathscr{U}$ ($\mathscr{U}$ denota un Z-ultrafiltro).

Demostración. Lo primero que nos preguntamos cuando definimos una función de este tipo es... ¿Está bien definida?, por lo que es lo primero que demostraremos.

Sea $Z \in Z[X]$, tenemos que probar que $cl_{\upsilon X}(Z) \in Z[\upsilon X]$. Entonces existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $Z = f^{-1}[\{0\}]$. Como X está C-encajado en υX (por el Teorema 3.2.18.), tenemos que existe $\upsilon f : \upsilon X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\upsilon f \restriction_X = f$.

Afirmarmos que $cl_{\upsilon X}(Z) = (\upsilon f)^{-1}[\{0\}]$: Sea $p \in cl_{\upsilon X}(Z)$. Como $p \in cl_{\upsilon X}(Z)$, existe un conjunto dirigido D no vacío y una red $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ tal que $x_\alpha \in Z$ para toda $\alpha \in D$ y $x_\alpha \to p$. Entonces, como υf es continua, tenemos que $\upsilon f(x_\alpha) \to \upsilon f(p)$.

Como $x_\alpha \in Z \subseteq X$ para toda $\alpha \in J$ y $\upsilon f \restriction_X = f$, tenemos que $\upsilon f(x_\alpha) = f(x_\alpha) = 0$ para toda $\alpha \in D$ pues $Z = f^{-1}[\{0\}]$. Luego, tenemos que $\upsilon f(x_\alpha) \to 0$ y como $\mathbb{R}$ es Hausdorff, la red $(f(x_\alpha))_{\alpha \in D}$ converge a un único punto en $\mathbb{R}$, por lo que $\upsilon f(p) = 0$ y por lo tanto $p \in (\upsilon f)^{-1}[\{0\}]$.

Para la otra contención, tomemos $p \in (\upsilon f)^{-1}[\{0\}]$ y supongamos que $p \notin cl_{\upsilon X}(Z)$. Adoptaremos la notación dada en la Definición A.1.2. para aligerar la lectura, es decir, haremos $f^{-1}[\{0\}] = Z(f)$ y $(\upsilon f)^{-1}[\{0\}] = Z(\upsilon f)$.

Como $p \in \upsilon X \setminus cl_{\upsilon X}(Z(f))$ y υX es Tychonoff, existe $g \in C(\upsilon X, \mathbb{R})$ tal que $g(p) = 0$ y $cl_{\upsilon X}(Z(f)) \subseteq g^{-1}[\{1\}]$. Como $p \in Z(\upsilon f)$ entonces $\upsilon f(p) = 0$, por lo que $p \in Z(g) \cap Z(\upsilon f)$ y además $Z(g) \cap Z(\upsilon f) \in Z[\upsilon X]$. Por otro lado, $(Z(g) \cap Z(\upsilon f)) \cap X = Z(g) \cap Z(f) = \varnothing$ pues $Z(g) \cap cl_{\upsilon X} Z(f) = \varnothing$ y además $Z(\upsilon f) \cap X = Z(f)$ ya que $\upsilon f \restriction_X = f$. Tenemos que $(Z(g) \cap Z(\upsilon f)) \cap X = \varnothing$ es una contradicción pues contradice el Lema 4.1.8. que nos dice que al ser $Z(g) \cap Z(\upsilon f) \neq \varnothing$ con $Z(g) \cap Z(\upsilon f) \in Z[\upsilon X]$ deberíamos tener $(Z(g) \cap Z(\upsilon f)) \cap X \neq \varnothing$.

Por lo tanto $p \in cl_{\upsilon X}(Z)$ y luego $cl_{\upsilon X}(Z) = Z(\upsilon f)$, es decir, $cl_{\upsilon X}(Z) \in Z[\upsilon X]$, por lo que ϕ

está bien definida.

Ahora, para ver que ϕ es un isomorfismo entre las retículas $Z[X]$ y $Z[\upsilon X]$ hay que ver 3 cosas:

1. ϕ es inyectiva: Sean $Z(f), Z(g) \in Z[X]$ donde $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ y $Z(f) \neq Z(g)$.

   Supongamos sin pérdida de generalidad que $Z(f) \not\subseteq Z(g)$. Como $Z(f) \not\subseteq Z(g)$, entonces existe $p \in Z(f)$ tal que $p \notin Z(g)$. Como X está C-encajado en υX, existen $\upsilon f, \upsilon g : \upsilon X \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\upsilon f \restriction_X = f$ y $\upsilon g \restriction_X = g$. Por lo desarrollado anteriormente en esta prueba, sabemos que $Z(\upsilon f) = cl_{\upsilon X}(Z(f))$ y $Z(\upsilon g) = cl_{\upsilon X}(Z(g))$. Si tuviéramos que $\phi(Z(f)) = \phi(Z(g))$, entonces tendríamos que $cl_{\upsilon X}(Z(f)) = cl_{\upsilon X}(Z(g))$ y por lo tanto $Z(\upsilon f) = Z(\upsilon g)$.

   Como $p \in Z(f)$, entonces $f(p) = 0$ y además $Z(f) \subseteq X$ y $\upsilon f \restriction_X = f$, entonces $\upsilon f(p) = 0$ y luego $p \in Z(\upsilon f)$. Por otro lado, sabemos que $Z(\upsilon f) = Z(\upsilon g)$, por lo que $p \in Z(\upsilon g)$ y entonces $\upsilon g(p) = 0$. Además, como sabemos que $p \in X$ y $\upsilon g \restriction_X = g$, tenemos que $g(p) = \upsilon g(p) = 0$ por lo que $p \in Z(g)$ lo cual contradice que $p \notin Z(g)$.

   Por lo tanto, concluimos que $\phi(Z(f)) \neq \phi(Z(g))$ y obtenemos que ϕ es inyectiva.

2. ϕ es suprayectiva: Sea $Z \in Z[\upsilon X]$, digamos que $Z = f^{-1}[\{0\}]$ para alguna $f \in C(\upsilon X, \mathbb{R})$.

   Si consideramos $f \restriction_X$, entonces $(f \restriction_X)^{-1}[\{0\}] = f^{-1}[\{0\}] \cap X = Z(f) \cap X$. Sabemos por otra parte, que $\upsilon(f \restriction_X) = f$ por la unicidad de las extensiones continuas donde $\upsilon(f \restriction_X)$ es la extensión continua de la función $f \restriction_X$ a υX la cual existe pues X está C-encajado en υX.

   Por otra parte, considerando lo desarrollado al inicio de esta prueba, nosotros sabemos que $cl_{\upsilon X}(Z(f) \cap X) = cl_{\upsilon X}(Z(f \restriction_X)) = Z(\upsilon(f \restriction_X)) = Z(f)$, luego, $\phi(Z(f) \cap X) = Z(f) = Z$ y por lo tanto ϕ es suprayectiva.

   Notemos además que hemos probado lo siguiente: para cada $Z \in Z[\upsilon X]$, $cl_{\upsilon X}(Z \cap X) = Z$.

3. ϕ y ϕ^{-1}preservan el orden, es decir, si $Z(f), Z(g) \in Z[X]$ con $f, g \in C(X, \mathbb{R})$, entonces $Z(f) \subseteq Z(g)$ si y sólo si $\phi(Z(f)) \subseteq \phi(Z(g))$:

   Sean $Z(f), Z(g) \in Z[X]$ tales que $f, g \in C(X, \mathbb{R})$.

   Supongamos primero que $Z(f) \subseteq Z(g)$. Por propiedades de la cerradura, sabemos que la cerradura preserva contenciones, entonces $cl_{\upsilon X}(Z(f)) \subseteq l_{\upsilon X}(Z(g))$ y por lo tanto tenemos que $\phi(Z(f)) \subseteq \phi(Z(g))$.

   Ahora, supongamos que $\phi(Z(f)) \subseteq \phi(Z(g))$.

   Por cómo está definida ϕ, tenemos que $cl_{\upsilon X}(Z(f)) \subseteq cl_{\upsilon X}(Z(g))$. Sea $p \in Z(f)$. Entonces $p \in cl_{\upsilon X}(Z(f))$ y como $cl_{\upsilon X}(Z(f)) \subseteq cl_{\upsilon X}(Z(g))$, tenemos que $p \in cl_{\upsilon X}(Z(g))$. Entonces existe un conjunto dirigido D tal que D es no vacío y una red $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ tal que $x_\alpha \in Z(g)$

para toda $\alpha \in D$ y $x_\alpha \to p$.

Como $x_\alpha \in Z(g)$ para toda $\alpha \in D$, tenemos que $g(x_\alpha) = 0$ para toda $\alpha \in D$. Como g es continua, $g(x_\alpha) \to g(p)$, pero como $g(x_\alpha) = 0$ para toda $\alpha \in D$, tenemos que $g(x_\alpha) \to 0$.

Al ser único el límite de convergencia de redes en $\mathbb{R}$ (pues es un espacio de Hausdorff), tenemos que $g(p) = 0$. Por lo tanto $p \in Z(g)$ y concluimos que $Z(f) \subseteq Z(g)$.

De los puntos (1), (2) y (3) concluimos que ϕ es un isomorfismo entre las retículas $Z[X]$ y $Z[\upsilon X]$ pues toda función biyectiva que preserva el orden (entre dos retículas) cuya inversa también preserva el orden debe preservar ínfimos y supremos.

Para acabar con esta prueba, demostraremos que para $\mathscr{U} \in \upsilon X \setminus X$ y $Z \in Z[\upsilon X]$ se cumple que $\mathscr{U} \in Z$ si y sólo si $Z \cap X \in \mathscr{U}$.

Sean $\mathscr{U} \in \upsilon X \setminus X$ y $Z \in Z[\upsilon X]$. Como $Z \in Z[\upsilon X]$, tenemos que existe $f \in C(\upsilon X, \mathbb{R})$ tal que $Z = Z(f)$. Por otro lado, recordemos que $f = \upsilon(f \restriction_X)$ donde $\upsilon(f \restriction_X)$ es la extensión continua de la función $f \restriction_X$ a υX. Entonces, como $Z = Z(f) = Z(\upsilon(f \restriction_X))$, usando un procedimiento análogo al presentado al inicio de la prueba, tenemos que $Z(\upsilon(f \restriction_X)) = cl_{\upsilon X}(Z(f \restriction_X))$.

Por lo tanto $Z(f) = cl_{\upsilon X}(Z(f \restriction_X))$ y recordando que $Z(f \restriction_X) = Z(f) \cap X$, tenemos que $Z(f) = cl_{\upsilon X}(Z(f) \cap X)$. Entonces, como $\mathscr{U} \in \upsilon X \setminus X$, por el Teorema 3.2.18. tenemos que $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N. (propiedad de intersección numerable) y luego, por la Proposición 3.2.20. tenemos que $\mathscr{U} \in cl_{\upsilon X}(Z(f) \cap X)$ si y sólo si $Z(f) \cap X \in \mathscr{U}$ y esto es equivalente a que $\mathscr{U} \in Z$ si y sólo si $Z \cap X \in \mathscr{U}$ que es lo que queríamos demostrar.

■

Una vez demostrado este teorema, analizaremos qué sucede cuando a un espacio realcompacto X, le agregamos un subconjunto de $\beta X \setminus X$:

Teorema 4.1.10. Sea X un espacio realcompacto y $S \subsetneq \beta X \setminus X$. Definamos $Y = X \cup S$. Tenemos que si Y es pseudocompacto, entonces S es denso en $\beta X \setminus X$.

Demostración. Comencemos por recordar que un espacio topológico W es pseudocompacto si toda función $f \in C(W, \mathbb{R})$ está acotada.

Ahora, supongamos que S no es denso en $\beta X \setminus X$. Como S no es denso en $\beta X \setminus X$, tenemos que existe $U \subseteq \beta X$ tal que $U \neq \varnothing$ y $U \subseteq (\beta X \setminus X) \setminus S$. Como U es abierto en $\beta X \setminus X$, tenemos que $U = V \cap (\beta X \setminus X) = V \setminus X$ para algún $V \subseteq \beta X$ abierto en βX.

Sea $p \in V \setminus X$. Como βX es Tychonoff, existe una función $h : \beta X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(p) = 0$ y $\beta X \setminus V \subseteq h^{-1}[\{1\}]$.

Luego, tenemos que $p \in h^{-1}[\{0\}] \subseteq V$ pues $h^{-1}[\{0\}] \cap (\beta X \setminus V) \subseteq h^{-1}[\{0\}] \cap h^{-1}[\{1\}] = \varnothing$.

Por otro lado, como X es realcomapcto y $p \in \beta X \setminus X$, por el Corolario 4.1.5. tenemos que existe $Z \in Z[\beta X]$ tal que $p \in Z$ y $Z \cap X = \varnothing$.

Entonces $p \in h^{-1}[\{0\}] \cap Z \in Z[\beta X]$, por lo que existe $f \in C(\beta X, \mathbb{R})$ tal que $Z(f) = h^{-1}[\{0\}] \cap Z$.

Definimos $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(y) = \frac{1}{f(y)}$. Tenemos que g está bien definida pues se cumple que:

$$Z(f) = h^{-1}[\{0\}] \cap Z \subseteq V \cap (\beta X \setminus X) = V \setminus X \subseteq (\beta X \setminus X) \setminus S = \beta X \setminus Y$$

ya que $Z \subseteq \beta X \setminus X = \varnothing$ y $h^{-1}[\{0\}] \subseteq V$. Por otra parte, como $p \in Z(f)$, $f(p) = 0$. Como Y es denso en βX pues $X \subseteq Y$ y X es denso en βX, tenemos que $p \in cl_{\beta X} Y$, por lo que existe un conjunto dirigido no vacío D y una red $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ tal que $x_\alpha \in Y$ para toda $\alpha \in D$ y además $x_\alpha \to p$. Como f es continua, $f(x_\alpha) \to f(p)$, pero $f(p) = 0$, entonces $f(x_\alpha) \to 0$.

Como $f(x_\alpha) \to 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_n \in D$ tal que $|f(x_{\alpha_n})| < \frac{1}{n}$ para toda $\alpha \geq \alpha_n$. Como D es un conjunto dirigido, podemos tomar a α_n de tal manera que $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que la sucesión $(f(x_{\alpha_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 donde $x_{\alpha_n} \in Y$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que g es una función no acotada en Y.

Por lo tanto Y no es pseudocompacto.

■

El Teorema 4.1.10. nos da una condición para encontrar subespacios densos en $\beta X \setminus X$ y dicha condición está relacionada con la pseudocompacidad, por lo que podemos preguntarnos cuál es la relación entre los espacios pseudocompactos con los espacios realcompactos y los espacios compactos.

De hecho, se puede obtener una caracterización para espacios Tychonoff de la pseudocompacidad en términos de la realcompactación de Hewitt y la compactación de Stone-Čech como lo muestra el siguiente resultado:

Teorema 4.1.11. Sea X un espacio topológico Tychonoff. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\upsilon X = \beta X$
2. X es pseudocompacto
3. Para cada $Z \in Z[\beta X]$ tal que $Z \neq \varnothing$, $Z \cap X \neq \varnothing$

Demostración.
Primero veremos que (1) y (2) son equivalentes. Supongamos que $\upsilon X = \beta X$. Sea $f \in C(X, \mathbb{R})$, veamos que f está acotada. Como X está C-encajado en υX, tenemos que existe $\upsilon f : \upsilon X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\upsilon f) \restriction_X = f$. Por otro lado, sabemos que $\upsilon X = \beta X$, entonces $\upsilon f : \beta X \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple que υf está acotada pues βX es compacto, por lo que existe $M > 0$, $M \in \mathbb{R}$ tal que $\upsilon f[\beta X] \subseteq [-M, M]$.

Entonces $f[X] = (\upsilon f) \restriction_X [X] \subseteq (\upsilon f) \restriction_X [\beta X] \subseteq [-M, M]$. Por lo tanto f está acotada y concluimos que X es pseudocompacto.

Ahora, supongamos que X es pseudocompacto. Para ver que $\upsilon X = \beta X$ como ya sabemos que $\upsilon X \subseteq \beta X$, basta probar que $\beta X \setminus \upsilon X = \varnothing$. Supongamos que $\beta X \setminus \upsilon X \neq \varnothing$.

Entonces existe $p \in \beta X \setminus \upsilon X$ y por el Teorema 4.1.4. existe $S \in Z[\beta X]$ tal que $p \in S$ y $S \cap X = \varnothing$. Como $S \in Z[\beta X]$ tenemos que $S = Z(f)$ para alguna $f \in C(\beta X, \mathbb{R})$ y como $p \in S$, tenemos que $f(p) = 0$.

Tenemos que $f(x) \neq 0$ para toda $x \in X$ pues $S \cap X = \varnothing$. Definimos $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{1}{|f(x)|}$. Tenemos que g está bien definida pues f no se anula en X y además g es continua pues f es continua, luego, $g \in C(X, \mathbb{R})$. Pero X es pseudocompacto, entonces g está acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $g[X] \subseteq [-M, M]$.

Luego, como $cl_{\beta X}(X) = \beta X$ y $p \in \beta X$, tenemos que existe un conjunto dirigido no vacío D y una red $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ tal que $x_\alpha \to p$ con $x_\alpha \in X$ para toda $\alpha \in D$.

Por otro lado, como $f \in C(\beta X, \mathbb{R})$, tenemos que $f(x_\alpha) \to f(p)$ y como $f(p) = 0$, $f(x_\alpha) \to 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_n \in D$ tal que $|f(x_{\alpha_n})| < \frac{1}{n}$ para toda $\alpha \in D$ tal que $\alpha \geq \alpha_n$. Como D es un conjunto dirigido (superiormente), podemos suponer que $\alpha_n \leq \alpha_m$ para $n \leq m$. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} |f(x_{\alpha_n})| = 0$.

De acá concluimos que $\lim_{x\to 0^+} g(x_{\alpha_n}) = \infty$, es decir, g no está acotada lo cual contradice que X es pseudocompacto.

Por lo tanto $\upsilon X = \beta X$.

Ahora, veamos que (1) y (3) son equivalentes:

Supongamos primero que $\upsilon X = \beta X$, sea $Z \in Z[\beta X]$ tal que $Z \neq \varnothing$. Como $\upsilon X = \beta X$, tenemos que $Z[\beta X] = Z[\upsilon X]$ por lo que $Z \in Z[\upsilon X]$. Luego, como $Z \neq \varnothing$, por el Lema 4.1.8. tenemos que $Z \cap X \neq \varnothing$ que es lo que queríamos probar.

Ahora, supongamos que se cumple (3), es decir, que para cada $Z \in Z[\beta X]$ tal que $Z \neq \varnothing$, se tiene que $Z \cap X \neq \varnothing$. Como $\upsilon X \subseteq \beta X$, basta probar que $\beta X \setminus \upsilon X = \varnothing$. Supongamos que esto no sucede, entonces existe $p \in \beta X \setminus \upsilon X$. Por el Teorema 4.1.4. tenemos que existe $S \in Z[\beta X]$ tal que $p \in S$ y $S \cap X = \varnothing$, lo cual contradice (3).

Por lo tanto $\upsilon X = \beta X$.

■

Recordemos que un espacio numerablemente compacto es aquel en el que toda cubierta abierta numerable tiene una subcubierta finita y un espacio Lindelöf es aquel donde toda cubierta abierta tiene una subcubierta numerable, por lo que tenemos que todo espacio topológico que sea numerablemente compacto y Lindelöf debe ser compacto.

Haciendo una analogía, podemos obtener un resultado similar para espacios realcompactos y pseudocompactos, el cual dejaremos plasmado en el siguiente teorema:

Teorema 4.1.12. Sea X un espacio Tychonoff. Entonces X es realcompacto y pseudocompacto si y sólo si X es compacto.

Demostración. Primero supongamos que X es realcompacto y pseudocompacto.

Entonces $\upsilon X = X$ pues X es realcompacto y por el Teorema 4.1.11. tenemos que $\upsilon X = \beta X$

pues X es Tychonoff y pseudocompacto, por lo que $X = \beta X$ y por lo tanto X es compacto.

Luego, si X es compacto, sabemos que todo espacio compacto es pseudocompacto «pues cualquier función continua con dominio compacto está acotada» y además compacidad implica realcompacidad por la Proposición 3.1.2.

Por lo tanto X es pseudocompacto y realcompacto.

$\blacksquare$

A manera de comparación enunciamos el siguiente resultado el cual fue discutido brevemente antes de enunciar el Teorema 4.1.12.

Recordatorio 4.1.13. Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y sólo si X es numerablemente compacto y Lindelöf.

Notemos que el Teorema 4.1.12. mejora al resultado del Recordatorio 4.1.13. pues todo espacio numerablemente compacto es pseudocompacto y como vimos en la Proposición 4.1.1. todo espacio Tychonoff y Lindelöf es realcompacto.

Ya tenemos algunos ejemplos de espacios realcompactos como la recta de Sorgenfrey, el plano de Sorgenfrey y en general los espacios Tychonoff que son Lindelöf.

Ahora que contamos con el Teorema 4.1.12. dicho resultado nos dará ejemplos de espacios que no son realcompactos a partir de las propiedades de pseudocompacidad y compacidad.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1.14. El espacio $[0, \omega_1)$ con la topología del orden no es realcompacto.

Demostración. Sabemos que el espacio $[0, \omega_1)$ es un espacio pseudocompacto que no es compacto. Si dicho espacio fuese realcompacto, por el Teorema 4.1.12. tendríamos que $[0, \omega_1)$ sería compacto, lo cual no es posible.

Por lo tanto $[0, \omega_1)$ no es realcompacto.

$\blacksquare$

Ahora, notemos que $[0, \omega_1]$ es un espacio compacto (y por lo tanto realcompacto) que contiene a $[0, \omega_1)$ el cual no es realcompacto, por lo que la realcompacidad no es una propiedad hereditaria.

Podemos preguntarnos en qué casos sí resulta ser hereditaria, es decir, qué condiciones debe cumplir un espacio X para que ésto suceda.

La respuesta a esta interrogante se da en las siguientes proposiciones:

Lema 4.1.15. Sea X un espacio topológico Tychonoff y $A, B \subseteq X$ tales que A es realcompacto y B es compacto. Entonces $A \cup B$ es realcompacto.

Demostración. Supongamos que $A \cup B$ no es realcompacto. Entonces existe $p \in \upsilon(A \cup B) \setminus (A \cup B)$.

Como $A \cup B$ es denso en $\upsilon(A \cup B)$, entonces se cumple que:

$$p \in cl_{\upsilon(A \cup B)}(A \cup B) = cl_{\upsilon(A \cup B)}(A) \cup cl_{\upsilon(A \cup B)}(B) = (cl_{\upsilon(A \cup B)}A) \cup B$$

donde hemos usado que al ser B compacto, $cl_{\upsilon(A \cup B)}B = B$, por lo que $p \in cl_{\upsilon(A \cup B)}A$.

Primero veamos que A está C-encajado en $A \cup \{p\}$. Sea $f \in C(A, \mathbb{R})$. Como $\upsilon(A \cup B)$ es Tychonoff y $p \notin B$ donde K es cerrado existe $g \in C(\upsilon(A \cup B), \mathbb{R})$ tal que $p \in V \subseteq cl_{\upsilon(A \cup B)}(V) \subseteq g^{-1}[\{1\}]$ donde $V \subseteq \upsilon(A \cup B)$ es abierto y $B \subseteq g^{-1}[\{0\}]$. Consideremos la función $h : A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$h(x) = \begin{cases} (g \restriction_A)(x) f(x) & \text{si } x \in cl_{A \cup B}(A) \\ 0 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Luego, si $x \in cl_{A \cup B}(A) \cap B \subseteq B$, tenemos que $(g \restriction_A)(x) f(x) = 0$ pues $g(x) = 0$ ya que $x \in B$, por lo que las funciones que definen a h valen lo mismo en $cl_{A \cup B}(A) \cap B$, son continuas y además $cl_{A \cup B}(A) \cap B$ y B son cerrados en el dominio de h que es $A \cup B$, por lo que concluimos que h es continua.

Por el Teorema 4.2.18. sabemos que $A \cup B$ está C-encajado en $\upsilon(A \cup B)$ por lo que existe $\upsilon h : \upsilon(A \cup B) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\upsilon h) \restriction_{(A \cup B)} = h$.

Consideremos la función $\tilde{f} : A \cup \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \upsilon h(x) & \text{si } x \in (A \cup \{p\}) \cap cl_{\upsilon(A \cup B)} V \\ f(x) & \text{si } x \in (\upsilon(A \cup B) \setminus V) \cap (A \cup \{p\}) \end{cases}$$

Notemos que $((A \cup \{p\}) \cap (cl_{\upsilon(A \cup B)}(V))) \cap (\upsilon(A \cup B) \setminus V) \cap (A \cup \{p\})) = (Fr_{\upsilon(A \cup B)}(V)) \cap (A \cup \{p\}) = (Fr_{\upsilon(A \cup B)}(V)) \cap A$ de donde la penúltima igualdad se da pues V es abierto en $\upsilon(A \cup B)$ y la última igualdad se da puesto que $p \notin Fr_{\upsilon(A \cup B)}(V)$ dado que $p \in V$.

Para $x \in (Fr_{\upsilon(A \cup B)}(V)) \cap A \subseteq cl_{A \cup B}(A)$, tenemos que $\upsilon h(x) = h(x) = (g \restriction_A)(x) f(x) = f(x)$ pues $(g \restriction_A)(x) = 1$ ya que $x \in Fr_{\upsilon(A \cup B)}(V) \subseteq g^{-1}[\{1\}]$.

Luego, las funciones continuas que componen a $\tilde{f}$ coinciden en $((A \cup \{p\}) \cap (cl_{\upsilon(A \cup B)}(V))) \cap (\upsilon(A \cup B) \setminus V) \cap (A \cup \{p\}))$ y además dichos conjuntos son cerrados en $A \cup \{p\}$, por lo que concluimos que $\tilde{f}$ es continua en $A \cup \{p\}$.

Notemos ahora que para $x \in A$, si $x \in cl_{\upsilon(A \cup B)}(V)$, entonces $x \in A \cap (cl_{\upsilon(A \cup B)}(V)) = cl_{A \cup B}(A)$ y por lo tanto $\tilde{f}(x) = \upsilon h(x) = (g \restriction_A)(x) f(x) = f(x)$ ya que $g \restriction_A (x) = 1$ considerando que $cl_{\upsilon(A \cup B)}(V) \subseteq g^{-1}[\{1\}]$ y $x \in cl_{\upsilon(A \cup B)}(B)$.

Por otro lado, si $x \notin cl_{\upsilon(A \cup B)}(V)$, entonces $x \notin V$, por lo que $x \in (\upsilon(A \cup B) \setminus V) \cap (A \cup \{p\})$ y luego $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Tenemos pues que $\tilde{f} \restriction_A = f$ y por lo tanto A está C-encajado en $A \cup \{p\}$.

Luego, notemos que A es denso en $A \cup \{p\}$ pues $p \in cl_{\upsilon(A \cup B)}(A)$ y además $A \cup \{p\}$ es denso en $\upsilon(A \cup \{p\})$, por lo que A es denso en $\upsilon(A \cup \{p\})$. Además, como $A \cup \{p\}$ está C-encajado en $\upsilon(A \cup \{p\})$, por la Proposición A.3.2. concluimos que A está C-encajado en $\upsilon(A \cup \{p\})$ y por el Teorema 4.2.18. tendríamos que $\upsilon(A \cup \{p\}) = \upsilon A$, es decir, $p \in \upsilon A \setminus A$ por lo que A no sería realcompacto, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\upsilon(A \cup B) \setminus (A \cup B) = \varnothing$ y tenemos que $A \cup B$ es realcompacto.

■

Teorema 4.1.16. Sea X un espacio topológico Tychonoff. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X es hereditariamente realcompacto
2. Para cada $x \in X$, el espacio $X \setminus \{x\}$ es realcompacto
3. Cualquier espacio Tychonoff Y para el cual exista una función continua $f : Y \longrightarrow X$ tal que $f^{-1}[\{x\}]$ es compacto para toda $x \in X$ debe ser realcompacto
4. Cualquier espacio Tychonoff Y para el cual exista una función continua e inyectiva $f : Y \longrightarrow X$ debe ser realcompacto

Demostración. Tenemos que (1) implica (2) pues para cada $x \in X$, $X \setminus \{x\}$ es un subespacio de X y si X es hereditariamente realcompacto tendríamos que $X \setminus \{x\}$ es realcompacto.

Veamos ahora que (2) implica (3). Sea Y un espacio Tychonoff y supongamos que existe una función continua $f : Y \longrightarrow X$ tal que $f^{-1}[\{x\}]$ es compacto para toda $x \in X$. Notemos que X es realcompacto pues dado $x \in X$, $X \setminus \{x\}$ es realcomapcto por nuestra hipótesis (2) y por la Lema 4.1.15. tenemos que al ser $\{x\}$ compacto, $X = (X \setminus \{x\}) \cup \{x\}$ es realcompacto.

Luego, como la realcompacidad es en realidad la $\mathbb{R}$-compacidad, tenemos por la Definición 2.0.2. que existe $\upsilon f : \upsilon Y \longrightarrow X$ continua tal que $\upsilon f \restriction_Y = f$.

Sea $x \in X$, como $X \setminus \{x\}$ es realcompacto, por el Corolario 3.1.8. tenemos que $(\upsilon f)^{-1}[X \setminus \{x\}]$ es realcompacto pues υY es realcompacto y X es de Hausdorff. Luego, por hipótesis $f^{-1}[\{x\}]$ es compacto, por lo que aplicando la Lema 4.1.15. tenemos que $(\upsilon f)^{-1}[X \setminus \{x\}] \cup f^{-1}[\{x\}]$ es realcompacto.

Como $(\upsilon f)^{-1}[X \setminus \{x\}] \cup f^{-1}[\{x\}]$ es realcompacto y $Y \subseteq (\upsilon f)^{-1}[X \setminus \{x\}] \cup f^{-1}[\{x\}] \subseteq \upsilon Y$, por el Teorema 3.2.24. tenemos que $\upsilon Y = (\upsilon f)^{-1}[X \setminus \{x\}] \cup f^{-1}[\{x\}]$. Entonces no existe $y \in \upsilon Y \setminus Y$ tal que $\upsilon f(y) = x$. Como $x \in X$ era arbitrario, ningún punto de x es imagen de algún punto en $\upsilon Y \setminus Y$ bajo la función υf, es decir, $\upsilon f[\upsilon Y \setminus Y] = \varnothing$, por lo que tenemos que $\upsilon Y \setminus Y = \varnothing$ y por lo tanto Y es realcompacto.

Ahora, veamos que (3) implica (4):

Supongamos que se cumple (3), es decir, supongamos que se cumple que cualquier espacio Tychonoff Y para el cual existe una función continua $f : Y \longrightarrow X$ tal que $f^{-1}[\{x\}]$ es compacto para toda $x \in X$ debe ser realcompacto y demostremos que se cumple (4).

Sea Y un espacio Tychonoff y sea $f : Y \longrightarrow X$ una función continua e inyectiva. Como f es inyectiva, tenemos que para cada $x \in X$, $|f^{-1}[\{x\}]| \leq 1$, por lo que $f^{-1}[\{x\}]$ es compacto por ser finito. Por nuestra hipótesis (3), concluimos que Y es realcompacto.

Finalmente, veamos que (4) implica (1):

Supongamos que para cualquier espacio Tychonoff Y tal que existe una función $f : Y \longrightarrow X$ continua e inyectiva, se debe cumplir que Y es realcompacto.

Veamos que X es hereditariamente realcompacto. Sea $A \subseteq X$. Supongamos que τ_X es la topología de X y consideremos $\tau_Y = \tau_X \cup \{U \cap A, U \cap (X \setminus A), U \cup A, U \cup (X \setminus A) : U \in \tau_X\}$. Tenemos que τ_Y es una topología en X tal que (X, τ_Y) es Tychonoff y además, la topología relativa de A respecto a τ_X coincide con la topología relativa de A respecto a τ_Y, es decir, $(\tau_X) \restriction_A = (\tau_Y) \restriction_A$, esto se debe a que:

$$\{W \cap A : W \in \tau_Y\} = \{U \cap A, U \cap (X \setminus A) \cap A, (U \cup A) \cap A, (U \cup (X \setminus A)) \cap A : U \in \tau_X\} = \{U \cap A : U \in \tau_X\}$$

Luego, como $\tau_X \subseteq \tau_Y$, la función $id : (X, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ es una función continua y además es inyectiva, por lo que usando la hipótesis (4), tenemos que (X, τ_Y) es realcompacto.

Como $X \setminus A = \varnothing \cup (X \setminus A) \in \tau_Y$, tenemos que A es cerrado en (X, τ_Y), por lo que usando la Proposición 3.1.4. sabemos que la realcompacidad se hereda a cerrados, luego, $(A, (\tau_Y) \restriction_A)$ es realcompacto y como $(\tau_Y) \restriction_A = (\tau_X) \restriction_A$, tenemos que A es realcompacto como subespacio de (X, τ_X), es decir, X es hereditariamente realcompacto.

$\blacksquare$

Con el Teorema 4.1.16. hemos obtenido una caracterización de los espacios hereditariamente realcompactos, entre dichas caracterizaciones, podemos notar que todo espacio que sea preimagen de una función continua e inyectiva de un espacio hereditariamente realcompacto debe ser hereditariamente realcompacto.

4.2. Realcompacidad y cardinales medibles

Hemos visto que varias propiedades de los espacios realcompactos se pueden obtener a partir de nuestro conocimiento sobre la realcompactación de Hewitt. En esta sección, abordaremos otras propiedades de los espacios realcompactos que en esta ocasión estarán relacionadas con el concepto de cardinal medible.

Comenzaremos pues definiendo lo que es un cardinal medible, dicha noción tiene como base la definición de conjunto Ulam-medible.

Definición 4.2.1. Sea X un conjunto. Una medida de Ulam para X es una función $\mu : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \{0,1\}$ tal que

1. $\mu(X) = 1$
2. Para toda $p \in X$, $\mu(\{p\}) = 0$
3. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una sucesión de conjuntos ajenos dos a dos, entonces se cumple que $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

A un conjunto para el cual exista una medida de Ulam, diremos que es Ulam-medible.

Ahora que hemos definido a los conjuntos Ulam-medibles, daremos la definición de cardinal medible:

Definición 4.2.2. Sea κ un cardinal, decimos que κ es un cardinal medible si es un conjunto Ulam-medible.

Una pregunta natural que surge es: ¿Bajo qué condiciones un cardinal es medible? ¿Hay alguna caracterización de los cardinales medibles con base en nociones conocidas? La respuesta a estas preguntas se da en el siguiente teorema, del cual daremos una prueba en el Apéndice B.

Teorema 4.2.3. Un cardinal κ es medible si y sólo si existe un ultrafiltro libre con la P.I.N. (propiedad de intersección numerable) en κ.

Este resultado es bastante sorprendente pues nos caracteriza a los cardinales medibles con base en ultrafiltros con la P.I.N. por lo que podemos ver que tiene cierta relación con lo que hemos estado trabajando, esto se debe a que el Teorema 3.2.18. nos dice que υX en realidad se puede ver como $X \cup \{\mathscr{U} \in \beta X \setminus X : \mathscr{U}$ tiene la P.I.N.$\}$ lo cual nos permitó obtener el Corolario 3.2.19. que caracteriza a los espacios realcompactos en base a los Z-ultrafiltros con la P.I.N.

Es importante notar que esta caracterización de los espacios realcompactos se da con base en Z-ultrafiltros, mientras que el Teorema 4.2.3. nos habla simplemente de ultrafiltros (recordemos que un ultrafiltro es un L-ultrafiltro donde $L = \mathscr{P}(X)$).

Ahora bien, nos podemos preguntar ¿En qué espacios sucede que $Z[X] = \mathscr{P}[X]$?, resulta que en los espacios discretos ésto sucede y nos permite obtener el siguiente teorema:

Teorema 4.2.4. Sea X un espacio discreto. El espacio X es realcompacto si y sólo si $|X|$ no es medible.

Demostración. Sea X un espacio discreto. Tenemos por el Corolario 3.2.19. que X es realcompacto si y sólo si cada Z-ultrafiltro en X con la P.I.N. es un ultrafiltro principal. Como $Z[X] = \mathscr{P}(X)$, tenemos que esto es equivalente a: X es realcompacto si y sólo si cada ultrafiltro con la P.I.N. es un ultrafiltro principal.

Recordemos ahora que los ultrafiltros libres son precisamente aquellos que no son ultrafiltros principales, por lo que lo anterior sería equivalente a: X es realcompacto si y sólo si no existe un ultrafiltro libre con la P.I.N., por lo que aplicando el Teorema 4.2.3. tenemos que X es realcompacto si y sólo si $|X|$ no es medible.

■

Hasta ahora, no hemos analizado qué sucede con la suma topológica de espacios realcompactos, esto se debe a que aún no contábamos con las herramientas necesarias, entre ellas, el concepto de cardinal medible.

El siguiente teorema nos da una caracterización para determinar cuándo una suma topológica de espacios realcompactos es realcompacta.

Teorema 4.2.5. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces se cumple que: $\bigoplus\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ es realcompacto si y sólo si para cada $\alpha \in J$, X_α es realcompacto y J es realcompacto como espacio discreto.

Demostración. Sabemos que $\bigoplus\limits_{\alpha\in J} X_\alpha = \bigoplus\limits_{\alpha\in J}(X_\alpha \times \{\alpha\})$.

Como $X_\alpha \neq \varnothing$ para toda $\alpha \in J$, tenemos que para cada $\alpha \in J$, existe $x_{0_\alpha} \in X_\alpha$.

Para cada $\alpha \in J$ consideremos la función $\phi_\alpha : X_\alpha \times \{\alpha\} \longrightarrow \prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha \times J$ cuya regla de correspondencia es $\phi(x_\alpha, \alpha) = (\phi_\alpha, \alpha)$ donde $x_\alpha \in X_\alpha$ y $\phi_\alpha : J \longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ cumple que:

$$\phi_{x_\alpha}(\beta) = \begin{cases} x_{0_\beta} & \text{si } \beta \neq \alpha \\ x_\alpha & \text{si } \beta = \alpha \end{cases}$$

Veamos primero que cada ϕ_α es continua:

Sea $\alpha \in J$. Sabemos por propiedades de la topología producto, que basta probar que al componer ϕ_α con cada proyección, obtenemos una función continua. Comencemos considerando la proyección a J, $\Pi_J : \prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha \times J \longrightarrow J$. Tenemos que $\Pi_J \circ \phi_\alpha : X_\alpha \times \{\alpha\} \longrightarrow J$ está dada por $(\Pi_J \circ \phi_\alpha)(x_\alpha, \alpha) = \alpha$ y luego, como J es discreto, basta ver que ϕ_α regresa a cada elemento de la base $\{\{\beta\} : \beta \in J\}$ en un subconjunto abierto de $\prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha \times J$.

Sea $\beta \in J$, si $\alpha \neq \beta$, entonces $(\Pi_J \circ \phi_\alpha)^{-1}[\{\beta\}] = \varnothing$ y si $\alpha = \beta$, entonces se tiene que $(\Pi_J \circ \phi_\alpha)^{-1}[\{\beta\}] = X_\alpha \times \{\alpha\}$. En ambos casos, tenemos que $(\Pi_J \circ \phi_\alpha)^{-1}[\{\beta\}]$ es abierto en $X_\alpha \times \{\alpha\}$, por lo que $\Pi_J \circ \phi_\alpha$ es continua.

Ahora, para $\beta \in J$, consideremos la proyección en X_β, $\Pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \times J \longrightarrow X_\beta$. La composición $\Pi_\beta \circ \phi_\alpha : X_\alpha \times J \longrightarrow X_\beta$ está dada como sigue:

$$(\Pi_\beta \circ \phi_\alpha)(x_\alpha, \alpha) = \begin{cases} x_{0_\beta} & \text{si } \beta \neq \alpha \\ x_\alpha & \text{si } \beta = \alpha \end{cases}$$

de donde como α y β están fijas, tenemos que dicha composición o es la función constante x_{0_β} o es la función que a (x_α, α) lo manda a x_α, que sería la proyección de $X_\alpha \times \{\alpha\}$ en X_α. En cualquier caso, $\Pi_\beta \circ \phi_\alpha$ es una función continua.

Como $\alpha \in J$ era arbitrario, concluimos que ϕ_α es continua para toda $\alpha \in J$, luego, como $\{X_\alpha \times \{\alpha\} : \alpha \in J\}$ es una cubierta abierta de abiertos ajenos dos a dos de $\bigoplus_{\alpha\in J}(X_\alpha \times \{\alpha\})$, por la Proposición A.4.5. tenemos que la función $\nabla_{\alpha\in J}\phi_\alpha : \bigoplus_{\alpha\in J}(X_\alpha \times \{\alpha\}) \longrightarrow \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \times J$ es una función continua.

Por otro lado, dado $\alpha \in J$, tenemos que para $Z_\alpha \subseteq X_\alpha$ cerrado en X_α, $\phi_\alpha[Z_\alpha \times \{\alpha\}] = \prod_{\beta\neq\alpha}\{x_{0_\beta}\} \times Z_\alpha \times \{\alpha\}$ el cual es cerrado en $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha \times J$. Por lo que ϕ_α es una función cerrada.

Además, si consideramos la familia $\{\phi_\alpha[X_\alpha \times \{\alpha\}] : \alpha \in J\}$, dicha familia es localmente finita, pues dado $((x_\alpha)_{\alpha\in J}, \beta) \in \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \times J$, tenemos que $\phi_\alpha[X_\alpha \times \{\alpha\}] \cap (\prod_{\alpha\in J} X_\alpha \times \{\beta\}) \neq \varnothing$ si y sólo si $\alpha = \beta$, por lo que existe un abierto que contiene a $((x_\alpha)_{\alpha\in J}, \beta)$ e interseca a una cantidad finita de elementos de dicha familia (en realidad, interseca a lo más a uno de ellos).

Por la Proposición A.4.6. tenemos que $\nabla_{\alpha\in J}\phi_\alpha$ es una función cerrada.

Luego, la regla de correspondencia para $(x_\alpha, \alpha) \in X_\alpha \times \{\alpha\}$ es como sigue: $\nabla_{\alpha\in J}\phi_\alpha(x_\alpha, \alpha) = (\phi_{x_\alpha}, \alpha)$ la cual desde luego es una función inyectiva (para $\alpha \neq \beta$ las segundas coordenadas de $\nabla_{\alpha\in J}\phi_\alpha(x_\alpha, \alpha)$ y $\nabla_{\alpha\in J}\phi_\alpha(x_\beta, \beta)$ serían distintas, por lo que $\nabla_{\alpha\in J}\phi_\alpha$ en realidad es un encaje de $\bigoplus_{\alpha\in J}(X_\alpha \times \{\alpha\})$ en $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha \times J$ tal que $\nabla_{\alpha\in J}\phi_\alpha[\bigoplus_{\alpha\in J}(X_\alpha \times \{\alpha\})]$ es cerrado en $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha \times J$.

Concluimos pues que $\bigoplus_{\alpha\in J}(X_\alpha \times \{\alpha\})$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha \times J$.

Ahora, si tenemos que cada X_α es realcompacto y J como espacio discreto es realcompacto, como la realcompacidad es una propiedad productiva (esto por la Proposición 3.1.4.), tenemos que $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha \times J$ es realcompacto y como $\bigoplus_{\alpha\in J}(X_\alpha \times \{\alpha\})$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de dicho producto, por la Proposición 3.1.4. obtenemos que $\bigoplus_{\alpha\in J}(X_\alpha \times \{\alpha\})$ es realcompacto y por lo tanto $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in J}(X_\alpha \times \{\alpha\})$ es realcompacto.

Finalmente, si suponemos que $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es realcompacto, entonces $\bigoplus_{\alpha\in J}(X_\alpha \times \{\alpha\})$ es realcompacto. Como la realcompacidad es hereditaria a cerrados (Proposición 3.1.4.) y cada $X_\alpha \times \{\alpha\}$ es cerrado en $\bigoplus_{\alpha\in J}(X_\alpha \times \{\alpha\})$, tenemos que $X_\alpha \times \{\alpha\}$ es realcompacto. Por otra parte, $X_\alpha \times \{\alpha\}$ es homeomorfo a X_α, por lo que X_α es realcompacto y además, $\nabla_{\alpha\in J}\phi_\alpha[\bigoplus_{\alpha\in J}(X_\alpha \times \{\alpha\})] = U \times J$ con $U \subseteq \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ cerrado, por lo que $U \times J$ es realcompacto y por lo tanto J es realcompacto ya que J es homeomorfo a $\{(x_{0_\alpha})_{\alpha\in J}\} \times J$ el cual es cerrado en $U \times J$.

Por lo tanto $\bigoplus\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ es realcompacto si y sólo si X_α es realcompacto para cada $\alpha \in J$ y J es realcompacto como espacio discreto.

■

Como corolario del Teorema 4.2.5. tenemos lo siguiente:

Corolario 4.2.6. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces se cumple que: $\bigoplus\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ es realcompacto si y sólo si para cada $\alpha \in J$, X_α es realcompacto y $|J|$ no es medible.

Demostración. Por el Teorema 4.2.4. si consideramos a J como un espacio discreto, J es realcompacto si y sólo si $|J|$ no es medible. Luego, el resultado se sigue aplicando el Teorema 4.2.5.

■

El Corolario 4.2.6. nos dice cuándo una suma topológica de espacios realcompactos es un espacio realcompacto. Podemos dar un resultado similar pero en este caso con las realcompactaciones de Hewitt de los espacios involucrados.

Teorema 4.2.7. Si κ es un cardinal no medible, entonces

$$\upsilon\left(\bigoplus_{\alpha<\kappa} X_\alpha\right) = \bigoplus_{\alpha<\kappa} \upsilon X_\alpha$$

Demostración. Podemos considerar a κ con la topología discreta. Por el Teorema 4.2.4. como κ no es medible tenemos que κ es realcompacto visto como espacio discreto.

Sabemos que $\bigoplus\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ se define como $\bigoplus\limits_{\alpha<\kappa}(X_\alpha \times \{\alpha\})$ en caso de que la familia $\{X_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ esté formada por conjuntos que no necesariamente son ajenos dos a dos.

Consideremos la función $\phi : \bigoplus\limits_{\alpha<\kappa}(X_\alpha \times \{\alpha\}) \longrightarrow \kappa$ dada por $\phi(x_\alpha, \alpha) = \alpha$ donde tenemos que $(x_\alpha, \alpha) \in X_\alpha \times \{\alpha\}$ para un único $\alpha < \kappa$.

.

Tenemos que $\{\{\alpha\} : \alpha \in \kappa\}$ es una base para κ visto como espacio discreto, por lo que para cada $\alpha \in \kappa$, tenemos que $\phi^{-1}[\{\alpha\}] = X_\alpha \times \{\alpha\}$ el cual es abierto en $\bigoplus\limits_{\alpha<\kappa}(X_\alpha \times \{\alpha\})$.

Por lo tanto ϕ es continua y como κ es realcompacto, por el Teorema 3.2.18. sabemos que existe una función continua $\upsilon\phi : \upsilon\left(\bigoplus\limits_{\alpha<\kappa}(X_\alpha \times \{\alpha\})\right) \longrightarrow \kappa$ tal que $(\upsilon\phi)\restriction_{\bigoplus_{\alpha<\kappa}(X_\alpha\times\{\alpha\})} = \phi$.

Sea $X = \bigoplus\limits_{\alpha<\kappa}(X_\alpha \times \{\alpha\})$. Afirmamos que $cl_X(\phi^{-1}[\{\alpha\}]) = \upsilon(X_\alpha \times \{\alpha\})$ para toda $\alpha \in \kappa$.

Tenemos que $X_\alpha \times \{\alpha\} = \phi^{-1}[\{\alpha\}]$ es denso en $cl_X(\phi^{-1}[\{\alpha\}])$, por lo que por el Teorema 3.2.18. sólo nos faltaría ver que $X_\alpha \times \{\alpha\}$ está C-encajado en $cl_X(\phi^{-1}[\{\alpha\}])$ donde $cl_X(\phi^{-1}[\{\alpha\}])$

es realcompacto por ser un subconjunto cerrado de υX el cual es realcompacto (Proposición 3.1.4.).

Sean $\alpha \in \kappa$ y $f : X_\alpha \times \{\alpha\} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Definimos $f_\alpha = f$. Para cada $\beta \neq \alpha$ y toda $x_\beta \in X_\beta$ consideremos $f_\beta(x_\beta, \beta) = 0$, es decir, f_β es la función constante 0.

Sabemos que para cada $\beta \in \kappa$, $X_\beta \times \{\beta\}$ es abierto en X y además dichos abiertos son ajenos dos a dos y forman una cubierta abierta de X. Aplicando la Proposición A.4.5. tenemos que la función combinación $\triangledown_{\beta<\kappa} f_\beta : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y además cumple que $(\triangledown_{\beta<\kappa} f_\beta) \restriction_{X_\alpha \times \{\alpha\}} = f$.

Como $\triangledown_{\beta<\kappa} f_\beta \in C(X, \mathbb{R})$, tenemos que existe una función $\upsilon(\triangledown_{\beta<\kappa} f_\beta) \in C(\upsilon X, \mathbb{R})$ tal que $\upsilon(\triangledown_{\beta<\kappa} f_\beta) \restriction_X = \triangledown_{\beta<\kappa} f_\beta$.

Podemos notar que si $g = \upsilon(\triangledown_{\beta<\kappa} f_\beta) \restriction_{cl_{\upsilon X}(X_\alpha \times \{\alpha\})}$, entonces $g \restriction_{X_\alpha \times \{\alpha\}} = f$, por lo que $X_\alpha \times \{\alpha\}$ está C-encajado en $cl_{\upsilon X}(X_\alpha \times \{\alpha\}) = cl_{\upsilon X}(\phi^{-1}[\{\alpha\}])$.

Por el Teorema 3.2.18. concluimos que para cada $\alpha \in \kappa$, $cl_{\upsilon X}(\phi^{-1}[\{\alpha\}]) = \upsilon(X_\alpha \times \{\alpha\})$.

Finalmente, afirmamos que para cada $\alpha \in \kappa$ se tiene que $(\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}] = cl_{\upsilon X}(\phi^{-1}[\{\alpha\}])$. Sea $\alpha \in \kappa$, sabemos que $(\upsilon\phi) \restriction_X = \phi$, por lo que $\phi^{-1}[\{\alpha\}] = (\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}] \cap X$. Luego, tenemos que $\phi^{-1}[\{\alpha\}] \subseteq (\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}]$ por lo que $cl_{\upsilon X}(\phi^{-1}[\{\alpha\}]) \subseteq (\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}]$ ya que al ser $\upsilon\phi$ continua y $\{\alpha\}$ cerrado en κ, tenemos que $(\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}]$ es cerrado en υX.

Ahora, tenemos que si $p \in (\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}]$ y $U \subseteq \upsilon X$ es un abierto de υX tal que $p \in U$, entonces $p \in U \cap (\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}]$ y por lo tanto $U \cap (\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}]$ es un abierto no vacío de υX, ya que $\{\alpha\}$ es abierto en κ y $\upsilon\phi$ es continua. Al ser X denso en υX, tenemos que $(U \cap (\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}]) \cap X \neq \varnothing$, es decir, $U \cap ((\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}] \cap X) \neq \varnothing$ y por lo tanto $U \cap \phi^{-1}[\{\alpha\}] \neq \varnothing$.

Concluimos que $p \in (cl_{\upsilon X}\phi^{-1}[\{\alpha\}])$ y por lo tanto $cl_{\upsilon X}(\phi^{-1}[\{\alpha\}]) = (\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}]$.

Ya habíamos visto anteriormente que $cl_{\upsilon X}(\phi^{-1}[\{\alpha\}]) = \upsilon(X_\alpha \times \{\alpha\})$ para toda $\alpha \in \kappa$, por lo que $(\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}] = \upsilon(X_\alpha \times \{\alpha\})$ para toda $\alpha \in \kappa$.

Para cada $\alpha \in \kappa$ tenemos que $(\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}]$ es abierto en υX ya que $\{\alpha\}$ es abierto en κ pues κ es discreto y además $\upsilon\phi$ es continua, por lo que $\{(\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}] : \alpha \in \kappa\}$ es una cubierta abierta de υX de conjuntos ajenos dos a dos, por lo que concluimos que $\upsilon X = \bigoplus\limits_{\alpha<\kappa} (\upsilon\phi)^{-1}[\{\alpha\}] = \bigoplus\limits_{\alpha<\kappa} \upsilon(X_\alpha \times \{\alpha\})$.

Para concluir con la prueba, recordemos que para cada $\alpha \in \kappa$, $X_\alpha \times \{\alpha\}$ es homeomorfo a X_α, por lo que $\bigoplus\limits_{\alpha<\kappa} \upsilon(X_\alpha \times \{\alpha\}) = \bigoplus\limits_{\alpha<\kappa} \upsilon X_\alpha$ y finalmente obtenemos que $\upsilon\left(\bigoplus\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha\right) = \bigoplus\limits_{\alpha<\kappa} \upsilon X_\alpha$ que es lo que se quería demostrar.

■

Ya hemos visto qué sucede con la realcompacidad bajo ciertos tipos de preimágenes, más concretamene, vimos que la realcompacidad se preserva bajo preimágenes continuas y perfectas pero, ¿Qué ocurre con las imágenes directas?

Esto lo respondemos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2.8. La realcompacidad no se preserva bajo imágenes continuas.

Demostración. Por el Ejemplo 4.1.14. tenemos que $[0, \omega_1) = \omega_1$ es un espacio que no es realcompacto.

Luego, si consideramos el espacio $(\omega_1, \mathscr{P}(\omega_1))$, tenemos que $|\omega_1| \leq 2^{\aleph_0}$ por lo que usando la Proposición B.1.4., la Proposición B.1.5. y la Proposición B.1.6. tenemos que $|\omega_1|$ no es medible y por el Teorema 4.2.4. tenemos que $(\omega_1, \mathscr{P}(\omega_1))$ es realcompacto.

Consideremos ahora la función $id_{\omega_1} : (\omega_1, \mathscr{P}(\omega_1)) \longrightarrow (\omega_1, \tau_{\leq})$ donde id_{ω_1} es la función identidad y $\tau_{\leq}$ es la topología del orden que usualmente se define en ω_1.

Tenemos que $id_{\omega_1} : (\omega_1, \mathscr{P}(\omega_1)) \longrightarrow (\omega_1, \tau_{\leq})$ es continua pues el dominio de esta función es un espacio discreto, además el dominio de esta función es un espacio realcompacto pero como ya mencionamos anteriormente, su imagen no es un espacio realcompacto por el Ejemplo 4.1.14.

■

Podemos ir más allá de lo mostrado en el Ejemplo 4.2.8. y mostrar que de hecho, la realcompacidad no se preserva ni siquiera si agregamos la hipótesis de que la función sea abierta como muestra nuestro próximo ejemplo:

Ejemplo 4.2.9. Existe un espacio normal, no realcompacto, que es imagen de un espacio realcompacto bajo una función abierta y continua.

Demostración. Consideremos nuevamente el espacio $\omega_1 = [0, \omega_1)$ y para cada $\alpha < \omega_1$ definimos $X_\alpha = [0, \alpha]$.

Tenemos que X_α es un espacio compacto, por lo que usando el Teorema 4.1.12. tenemos que X_α es realcompacto. Sabemos que $X_\alpha \times \{\alpha\}$ es homeomorfo a X_α por lo que $X_\alpha \times \{\alpha\}$ también resulta ser realcompacto.

Luego, por el Corolario 4.2.6. el espacio $\bigoplus_{\alpha<\omega_1} X_\alpha = \bigoplus_{\alpha<\omega_1} (X_\alpha \times \{\alpha\})$ es realcompacto pues $|\omega_1|$ no es un cardinal medible y además $X_\alpha \times \{\alpha\}$ es realcompacto para toda $\alpha < \omega_1$.

Para cada $\alpha < \omega_1$ definimos la función $\phi_\alpha : X_\alpha \times \{\alpha\} \longrightarrow [0, \omega_1)$ dada por $\phi_\alpha(x_\alpha, \alpha) = x_\alpha$. Tenemos que ϕ_α es continua pues $\phi_\alpha = \Pi_{\{\alpha\}} \circ i_{[0,\omega_1)}$ donde $\Pi_{\{\alpha\}} : X_\alpha \times \{\alpha\} \longrightarrow X_\alpha$ es la proyección en $\{\alpha\}$ y $i_{[0,\omega_1)} : [0, \alpha] \longrightarrow [0, \omega_1)$ es la inclusión.

Ahora, dado $\gamma \in (0, \alpha)$, tenemos que $\phi_\alpha[[0.\gamma)] = [0, \gamma)$ y $\phi_\alpha[(\gamma, \alpha]] = (\gamma, \alpha] = (\gamma, \alpha + 1)$ donde $\alpha + 1 < \omega_1$ pues ω_1 es un ordinal límite. Pero $[0, \gamma)$ y $(\gamma, \alpha + 1)$ son ambos abiertos en ω_1, por lo que $\phi_\alpha[[0.\gamma)]$ y $\phi_\alpha[(\gamma, \alpha]]$ son abiertos en ω_1.

Luego, si $\gamma, \delta \in [0, \alpha]$ con $\gamma < \delta$, tenemos que $\phi_\alpha[(\gamma, \delta)] = (\gamma, \delta)$ el cual también es abierto en ω_1.

Por lo tanto γ_α es una función abierta y como cada $X_\alpha \times \{\alpha\}$ es abierto en $\bigoplus_{\alpha<\omega_1} (X_\alpha \times \{\alpha\})$ concluimos por la Proposición A.4.5. que la función $\nabla_{\alpha<\omega_1} \phi_\alpha : \bigoplus_{\alpha<\omega_1} (X_\alpha \times \{\alpha\}) \longrightarrow [0, \omega_1)$ es continua y por la Proposición A.4.6. tenemos que $\nabla_{\alpha<\omega_1}\phi_\alpha$ es una función abierta.

Finalmente, hay que ver que la imagen de dicha función efectivamente es ω_1.

Sea $\alpha \in [0,\omega_1)$. Como ω_1 es un ordinal límite, tenemos que $\alpha+1<\omega_1$ y por lo tanto $(\alpha,\alpha+1) \in X_{\alpha+1}\times\{\alpha+1\} \subseteq \bigoplus_{\alpha<\omega_1}(X_\alpha\times\{\alpha\})$ cumple que $\nabla_{\alpha<\omega_1}\phi_\alpha(\alpha,\alpha+1)=\alpha$, por lo tanto $\nabla_{\alpha<\omega_1}\phi_\alpha[\bigoplus_{\alpha<\omega_1}(X_\alpha\times\{\alpha\})]=\omega_1$ y concluimos lo que se nos pedía ya que $\bigoplus_{\alpha<\omega_1}(X_\alpha\times\{\alpha\})$ es un espacio normal cuya imagen bajo una función continua y abierta no es un espacio realcompacto.

■

Sin embargo, no todo son malas noticas pues la realcompacidad sí se preserva bajo cierto tipo de funciones:

Proposición 4.2.10. Si X es un espacio realcompacto y Y es un espacio Tychonoff tal que existe una función $f: X \longrightarrow Y$ continua, abierta, perfecta y suprayectiva, entonces Y es realcompacto.

Demostración. Sea $p \in \beta Y\setminus Y$. Como Y es Tychonoff, podemos considerar $\beta f:\beta X\longrightarrow \beta Y$ tal que $\beta f\restriction_X = f$. Por el Teorema 2.5.3. como $f: X\longrightarrow Y$ es continua, suprayectiva y perfecta, tenemos que $\beta f[\beta X\setminus X]=\beta Y\setminus Y$ y como $p\in\beta Y\setminus Y$, tenemos que existe $q\in\beta X\setminus X$ tal que $\beta f(q)=p$.

Como $q\in \beta X\setminus X$, por el Corolario 4.1.5. existe $S\in Z[\beta X]$ tal que $q\in S$ y $S\cap X=\varnothing$.

Luego, como la función $f: X\longrightarrow Y$ es cerrada por ser una función perfecta y abierta por hipótesis, aplicando la Proposición A.4.7. tenemos que $\beta f:\beta X\longrightarrow\beta Y$ es una función abierta y cerrada.

Tenemos que $S\in Z[\beta X]$, entonces existe $g:\beta X\longrightarrow[0,1]$ tal que $g^{-1}[\{0\}]=S$ y además, como $\beta f:\beta X\longrightarrow \beta Y$ es una función abierta y cerrada, tenemos por la Proposición A.4.8. que la función $h:\beta Y\longrightarrow[0,1]$ dada por $h_*(y)=\operatorname{ínf}\{g(x): x\in(\beta f)^{-1}[\{y\}]\}$ está bien definida y es continua.

Notemos que $q\in(\beta f)^{-1}[\{p\}]$ y además $q\in S$, por lo que $g(q)=0$ y por lo tanto $h_*(p)=0$ ya que g está acotada inferiormente por 0. Entonces $p\in(h_*)^{-1}[\{0\}]\in Z[\beta Y]$

Por otra parte, sea $Z=(h_*)^{-1}[\{0\}]$, sabemos que $Z\in Z[\beta Y]$ y que $p\in Z$.

Dado $y\in Y$, por el Teorema 2.5.3. tenemos que $(\beta f)^{-1}[Y]=X$, por lo que $(\beta f)^{-1}[\{y\}]\subseteq X$ y luego, como $S\cap X=\varnothing$, tenemos que $g(x)>0$ para toda $x\in(\beta f)^{-1}[\{y\}]$.

Como $(\beta f)^{-1}[\{y\}]$ es compacto y g es continua, g alcanza su mínimo en dicho conjunto, por lo que $\operatorname{ínf}\{g(x): x\in(\beta f)^{-1}[\{y\}]\}=\operatorname{mín}\{g(x): x\in(\beta f)^{-1}[\{y\}]\}>0$, es decir, $h_*(y)>0$. Por lo tanto, tenemos que $Z\cap Y=\varnothing$ con $p\in Z$ y $Z\in Z[\beta Y]$, por lo que el Corolario 4.1.5. nos permite concluir que Y es realcompacto.

■

Ya hemos dado varias caracterizaciones de los espacios realcompactos y hemos visto bajo qué tipo de funciones se preservan dichos espacios, por lo que retomaremos nuestro trabajo con la realcompactación de Hewitt.

Lo que haremos a continuación es ver qué sucede con la realcompactación de Hewitt del producto de dos espacios dados. Podemos preguntarnos si sucede que $\upsilon(X \times Y) = \upsilon X \times \upsilon Y$. En general para la compactación de Stone-Čech esto no siempre sucede, de hecho, se puede demostrar que si X y Y son infinitos, entonces $\beta(X \times Y) = \beta X \times \beta Y$ si y sólo si $X \times Y$ es pseudocompacto y en cuanto a la realcompactación de Hewitt, si X y Y son infinitos y $X \times Y$ es pseudocompacto, entonces $\upsilon(X \times Y) = \upsilon X \times \upsilon Y$. Esto se menciona como dato cultural al lector pues el análisis de dichos resultados se escapa de los propósitos de este trabajo, sin embargo, se puede encontrar más información al respecto en [6] que resulta una valiosa fuente de información sobre el tema.

Para los propósitos y alcances de nuestro trabajo, probaremos un resultado que nos habla sobre la realcompactación de Hewitt del producto de dos espacios, donde uno de ellos tiene varias restricciones. El teorema que nos interesa es bastante complicado de demostrar directamente, por lo que nos apoyaremos de una serie de lemas que enunciaremos y demostraremos primero para que la prueba de dicho teorema sea lo más concisa posible.

Lema 4.2.11. Sean X y Y espacios Tychonoff. Si $X \times Y$ está C^*-encajado en $\upsilon X \times \upsilon Y$, entonces $X \times Y$ está C-encajado en $\upsilon X \times \upsilon Y$.

Demostración. Supongamos que $X \times Y$ está C^*-encajado en $\upsilon X \times \upsilon Y$.

Por la Proposición A.3.6. basta ver que $X \times Y$ está completamente separado en $\upsilon X \times \upsilon Y$ de cualquier $Z \in Z[\upsilon X \times \upsilon Y]$ ajeno a $X \times Y$.

Sea $Z \in Z[\upsilon X \times \upsilon Y]$ tal que $Z \cap (X \times Y) = \varnothing$. Como $Z \in Z[\upsilon X \times \upsilon Y]$, entonces existe $g : \upsilon X \times \upsilon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $Z = g^{-1}[\{0\}]$. Si existe $(p, q) \in Z$, tenemos que $g(p, q) = 0$. Definimos $h : \upsilon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(y) = (p, y)$.

Tenemos que h es continua pues la función $i_{\upsilon Y} : \upsilon Y \longrightarrow \upsilon X \times \upsilon Y$ dada por $i_{\upsilon Y}(y) = (p, y)$ es continua. Entonces, $h^{-1}[\{0\}] \in Z[\beta Y]$ y además podemos notar que $q \in h^{-1}[\{0\}]$. Por el Lema 4.1.8. tenemos que $h^{-1}[\{0\}] \cap Y \neq \varnothing$.

Sea $y_0 \in h^{-1}[\{0\}] \cap Y$, entonces $y_0 \in Y$ y además $0 = h(y_0) = g(p, y_0)$.

Ahora, sea $j : \upsilon X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $j(x) = g(x, y_0)$. Tenemos que j es continua y luego $j^{-1}[\{0\}] \in Z[\upsilon X]$. Como $p \in j^{-1}[\{0\}]$ pues $g(p, y_0) = 0$ y $j^{-1}[\{0\}] \in Z[\upsilon X]$, usando el Lema 4.1.8. tenemos que $j^{-1}[\{0\}] \cap X \neq \varnothing$, por lo que existe $x_0 \in j^{-1}[\{0\}] \cap X$.

Como $x_0 \in j^{-1}[\{0\}] \cap X$, tenemos que $x_0 \in X$ y además $0 = j(x_0) = g(x_0, y_0)$.

Por lo tanto $g(x_0, y_0) = 0$ con $(x_0, y_0) \in X \times Y$, lo cual es una contradicción pues $g^{-1}[\{0\}] = Z$ y sabemos que $Z \cap (X \times Y) = \varnothing$.

Esta contradicción vino de suponer que $Z \neq \varnothing$, por lo que $Z = \varnothing$ y tenemos que Z y $X \times Y$ están completamente separados en $\upsilon X \times \upsilon Y$ (la función constante 0 sirve para separar a dichos conjuntos por ejemplo).

Por la Proposición A.3.6. concluimos que $X \times Y$ está C-encajado en $\upsilon X \times \upsilon Y$.

■

Lema 4.2.12. Sea X un espacio topológico y K un espacio compacto. Supongamos que $f \in C(X \times K, \mathbb{R})$. Sea $x \in X$ fijo y definimos $f_x : K \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_x(y) = f(x,y)$ para cada $y \in K$. Entonces la función $\phi : X \longrightarrow C(K,\mathbb{R})$ dada por $\phi(x) = f_x$ es continua donde $C(K,\mathbb{R})$ se considera con la norma $\|.\|_\infty$.

Demostración. Notemos primero que dado $x \in X$ fijo, la función f_x es continua pues la función $i_K : K \longrightarrow X \times K$ dada por $i_K(y) = (x,y)$ es continua. Por lo tanto ϕ está bien definida.

Sea $x_0 \in X$. veamos que ϕ es continua en x_0. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua, para cada $y \in K$, f es continua en (x_0, y). Entonces, para cada $y \in K$, existen $U(y)$ y $V(y)$ abiertos en X y K respectivamente tales que $(x_0,y) \in U(y) \times V(y)$ y si $(p,q) \in U(y) \times V(y)$, entonces $|f(x_0,y) - f(p,q)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tenemos que la familia $\{V(y) : y \in K\}$ es una cubierta abierta de K, por lo que al ser K compacto, existen $y_1, \ldots, y_n \in K$ tales que $K = \bigcup_{i=1}^{n} V(y_i)$. Consideremos $U = \bigcap_{i=1}^{n} U(y_i)$. Al ser U una intersección finita de abiertos en X, tenemos que U es abierto en X.

Notemos que $x_0 \in U$. Por otro lado, si $x \in U$, entoncces $x \in U(y_i)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Luego, si $y \in K$, entonces existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in V(y_j)$. Por otra parte, tenemos lo siguiente:

$$|f_{x_0}(y) - f_x(y)| = |f_{x_0}(y) - f_{x_0}(y_j) + f_{x_0}(y_j) - f_x(y)|$$

de donde la parte derecha de la igualdad se puede ver como

$$|f_{x_0}(y) - f_{x_0}(y_j) + f_{x_0}(y_j) - f_x(y)| = |f(x_0,y) - f(x_0,y_j) + f(x_0,y_j) - f(x,y)|$$

aplicando la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$|f(x_0,y) - f(x_0,y_j) + f(x_0,y_j) - f(x,y)| \leq |f(x_0,y) - f(x_0,y_j)| + |f(x_0,y_j) - f(x,y)|$$

y finalmente recordando que

$$|f(x_0,y) - f(x_0,y_j)| + |f(x_0,y_j) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

concluimos que $|f_{x_0}(y) - f_x(y)| < \varepsilon$ de donde hemos usado que $|f(x_0,y) - f(x_0,y_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pues $(x_0,y), (x_0,y_j) \in U(y_j) \times V(y_j)$ y además usamos que $|f(x_0,y_j) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pues tenemos que $(x_0,y_j), (x,y) \in U(y_j) \times V(y_j)$ ya que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U(y_i) \subseteq U(y_j)$.

Como $y \in K$ era arbitrario, concluimos que $\sup\{|f_{x_0}(y) - f_x(y)| : y \in K\} \leq \varepsilon$, es decir, $\|f_{x_0} - f_x\| \leq \varepsilon$ y consecuentemente $\|\phi(x_0) - \phi(x)\| \leq \varepsilon$ para toda $x \in U$.

Por lo tanto ϕ es continua en x_0 y como $x_0 \in X$ era arbitrario, concluimos que ϕ es continua en X.

■

Continuamos enunciando un lema que no podremos demostrar hasta haber desarrollado un par de herramientas más, por lo que lo tomaremos como verdadero y lo probaremos más adelante.

Lema 4.2.13. Sea X un espacio Tychonoff y sea K un espacio compacto. Si $|K|$ no es medible, entonces $C(K, \mathbb{R})$ es realcompacto.

Procederemos a enunciar otro lema en el cual nos resultará útil el Lema 4.2.13.

Lema 4.2.14. Sean X Tychonoff y K un espacio compacto. Si $|K|$ no es medible, entonces existe $\phi^* : \upsilon X \longrightarrow C(K, \mathbb{R})$ continua tal que $\phi^* \restriction_X = \phi$ donde ϕ está definida para $f \in C(X \times K, \mathbb{R})$ fija como en el Lema 4.2.12.

Demostración. Tenemos por el Lema 4.2.13. que $C(K, \mathbb{R})$ es realcompacto y por el Teorema 3.2.18. tenemos que X está C-encajado en υX, por lo que al ser $\phi : X \longrightarrow C(K, \mathbb{R})$ continua, obtenemos que existe $\phi^* : \upsilon X \longrightarrow C(K, \mathbb{R})$ continua tal que $\phi^* \restriction_X = \phi$.

■

Lema 4.2.15. Sean X Tychonoff, K un espacio compacto de cardinalidad $|K|$ no medible y $f \in C(X \times K, \mathbb{R})$. Consideremos a $\phi \in C(X, C(K, \mathbb{R}))$ definida como en el Lema 4.2.12. Entonces la función $f^{\#} : \upsilon X \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f^{\#}(x, y) = (\phi^*(x))(y)$ es una extensión continua de f. En este caso, ϕ^* es la extensión continua de ϕ obtenida en el Lema 4.2.14.

Demostración. Primero veamos que $f^{\#} \restriction_{X \times K} = f$.

Sea $(x, y) \in X \times K$. Tenemos que $\phi^*(x) = \phi(x)$ pues $\phi^* \restriction_X = \phi$. Luego, por el Lema 4.2.12. tenemos que $\phi(x)(y) = f_x(y) = f(x, y)$, por lo que $(\phi^*(x))(y) = f(x, y)$, por lo tanto $f^{\#}(x, y) = f(x, y)$ y concluimos que $f^{\#} \restriction_{X \times K} = f$.

Ahora veamos que $f^{\#}$ es continua.

Sean $(p, y) \in \upsilon X \times K$ y $\varepsilon > 0$. Por el Lema 4.2.14. tenemos que ϕ^* es continua en υX, por lo que existe $U \subseteq \upsilon X$ abierto tal que $p \in U$ y si $q \in U$, entonces $\|\phi^*(p) - \phi^*(q)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por otra parte, sabemos que $\phi^*(p) : K \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en y, por lo que existe $V \subseteq K$ abieto tal que $y \in V$ y si $z \in V$, entonces $|(\phi^*(p))(y) - (\phi^*(p))(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tenemos que $U \times V$ es abierto en $\upsilon X \times K$ y que $(p, y) \in U \times V$. Sea $(q, z) \in U \times V$. Como $q \in U$, tenemos que $\|\phi^*(p) - \phi^*(q)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ por lo que $|(\phi^*(p))(z) - (\phi^*(q))(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por otra parte, tenemos que

$$|(\phi^*(p))(y) - (\phi^*(q))(z)| = |(\phi^*(p))(y) - (\phi^*(p))(z) + (\phi^*(p))(z) - (\phi^*(q))(z)|$$

aplicando la desigualdad del triángulo se cumple que

$$|(\phi^*(p))(y) - (\phi^*(p))(z) + (\phi^*(p))(z) - (\phi^*(q))(z)| \leq |(\phi^*(p))(y) - (\phi^*(p))(z)| + |(\phi^*(p))(z) - (\phi^*(q))(z)|$$

y finalmente recordemos que

$$|(\phi^*(p))(y) - (\phi^*(p))(z)| + |(\phi^*(p))(z) - (\phi^*(q))(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donde hemos usado que $|(\phi^*(p))(y) - (\phi^*(p))(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pues $y, z \in V$ y además usamos que $|(\phi^*(p))(z) - (\phi^*(q))(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pues $p, q \in U$.

Por lo tanto $f^\#$ es continua y concluimos que $f^\#$ es una extensión continua de f.

■

Lema 4.2.16. Si X es un espacio Tychonoff y K es un espacio compacto tal que $|K|$ no es medible, entonces $\upsilon(X \times K) = (\upsilon X) \times K$.

Demostración. Sabemos que $X \times K$ es denso en $(\upsilon X) \times K$ pues X es denso en υX y además por la Proposición 3.1.4. $(\upsilon X) \times K$ es realcompacto.

Entonces $(\upsilon X) \times K$ es una realcompactación de $X \times K$. Luego, por el Lema 4.2.15. como K es compacto y $|K|$ no es medible, tenemos que $X \times K$ está C-encajado en $(\upsilon X) \times K$ pues toda función $f \in C(X \times K, \mathbb{R})$ tiene una extensión continua $f^\# \in C(\upsilon X \times K, \mathbb{R})$.

Finalmente, por el Teorema 3.2.18. tenemos que $\upsilon(X \times K) = (\upsilon X) \times K$ pues $\upsilon(X \times K)$ es la única realcompactación de $X \times K$ en la cual $X \times K$ está C-encajado.

■

Una vez que tenemos todas estas herramientas, estamos preparados para enunciar y demostrar un teorema que generaliza el Lema 4.2.16. el cual solamente nos va a pedir que uno de los factores sea realcompacto, localmente compacto y de cardinalidad no medible.

Este nuevo teorema será una generalización del Lema 4.2.16. pues como bien sabemos, por la Proposición 3.1.2. tenemos que todo espacio compacto es realcompacto y ya sabemos que todo espacio compacto es localmente compacto (en espacios Hausdorff, donde las distintas definiciones de localmente compacto coinciden entre sí).

Teorema 4.2.17. Si Y es realcompacto, localmente compacto y de cardinalidad no medible y X es Tychonoff, entonces

$$\upsilon(X \times Y) = \upsilon X \times Y$$

Demostración. Primero hay que ver que $X \times Y$ está C-encajado en $\upsilon X \times Y$.

Sea $f \in C(X \times Y)$ y sea $y \in Y$. Como Y es localmente compacto, existe una vecindad $K(y)$ de y tal que $K(y)$ es compacto. Como $f \in C(X \times Y)$ tenemos que la restricción de f a $X \times K(y)$ es continua, por lo que $f \restriction_{X \times K} \in C(X \times K, \mathbb{R})$.

Como la $|Y|$ no es medible y $|K(y)| \leq |Y|$ para toda $y \in Y$, por la Proposición B.1.4. tenemos que $|K(y)|$ no es medible para toda $y \in Y$. Luego, por el Lema 4.2.16. tenemos que

$\upsilon(X \times K(y)) = \upsilon X \times K(y)$ por lo que existe $g_y \in C(\upsilon X \times K(y))$ tal que $g_y \restriction_{X \times K(y)} = f \restriction_{X \times K(y)}$.

Notemos que si $y_1, y_2 \in Y$ son tales que $K(y_1) \cap K(y_2) \neq \varnothing$, entonces tenemos que

$$g_{y_1} \restriction_{X \times (K(y_1) \cap K(y_2))} = f \restriction_{X \times (K(y_1) \cap K(y_2))} = g_{y_2} \restriction_{X \times (K(y_1) \cap K(y_2))}$$

y como $X \times (K(y_1) \cap K(y_2))$ es denso en $\upsilon X \times (K(y_1) \cap K(y_2))$, por la Proposición 1.1.3. que nos dice que la extensión de una función continua es única (entre espacios Hausdorff), tenemos que $g_{y_1} \restriction_{\upsilon X \times (K(y_1) \cap K(y_2))} = g_{y_2} \restriction_{\upsilon X \times (K(y_1) \cap K(y_2))}$.

Entonces, las funciones de la familia $\{g_y : \upsilon X \times K(y) \longrightarrow \mathbb{R} : y \in Y\}$ son compatibles, por lo que usando la Definición A.4.4. tenemos que la función combinación $\nabla_{y \in Y} g_y : \upsilon X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ está bien definida.

Como para cada $y \in Y$, $K(y)$ es una vecindad compacta de y, tenemos que existe $V(y)$ abierto en Y tal que $y \in V(y) \subseteq K(y)$. Entonces, del mismo modo las funciones de la familia $\{(g_y) \restriction_{\upsilon X \times V(y)} : \upsilon X \times V(y) \longrightarrow \mathbb{R} : y \in Y\}$ son compatibles y la función combinación $\nabla_{y \in Y}(g_y \restriction_{\upsilon X \times V(y)}) : \upsilon X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ está bien definida.

Como cada $V(y)$ es abierto en Y, por la Proposición A.4.5. la función $\nabla_{y \in Y}(g_y \restriction_{\upsilon X \times V(y)}) : \upsilon X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y además podemos notar que $\nabla_{y \in Y}(g_y \restriction_{\upsilon X \times V(y)})$ es una extensión continua de f, por lo que $X \times Y$ está C-encajado en $\upsilon X \times Y$.

Luego, como Y es realcompacto, por la Proposición 3.1.4. tenemos que $\upsilon X \times Y$ es realcompacto y como X es denso en υX, tenemos que $X \times Y$ es denso en $\upsilon X \times Y$, por lo que usando el Teorema 3.2.18. concluimos que que $\upsilon(X \times Y) = \upsilon X \times Y$.

■

Finalmente, antes de concluir con este trabajo, introduciremos un último concepto el cual nos va a ayudar a demostrar el Lema 4.2.13. el cual ha quedado pendiente. No sólo eso, consideramos que aún no contamos con una amplia gama de espacios realcompactos, por lo que la meta de nuestros próximos resultados será ampliar de manera considerable nuestro repertorio de espacios realcompactos, apoyados en la noción de cardinal medible.

Haremos un pequeño recordatorio del concepto de refinamiento de una cubierta abierta, pues será en la próxima definición que haremos.

Recordatorio 4.2.18. Sea X un espacio topológico y sean $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ cubiertas abiertas de X. Decimos que $\mathscr{V}$ es un refinamiento de $\mathscr{U}$ si para cada $V \in \mathscr{V}$, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $V \subseteq U$.

La noción que introduciremos es la siguiente:

Definición 4.2.19. Un espacio topológico X es θ-refinable si dada una cubierta abierta $\mathscr{C}$ de X, existe una sucesión $\{\mathscr{C}_i : i \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas abiertas de X, cada una de las cuales es un refinamiento de $\mathscr{C}$, tales que para cada $x \in X$, existe $i_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\{C \in \mathscr{C}_{i_x} : x \in C\}| < \aleph_0$$

Antes de enunciar nuestro siguiente lema, enunciaremos un resultado cuya prueba puede consultarse en [1].

Proposición 4.2.20. Sea X un espacio topológico, $Y \in E[X]$, Z un espacio compacto y $f \in C(X,Z)$. Entonces existe una función continua $F : Y \longrightarrow Z$ tal que $F \restriction_X = f$ si y sólo si para cada par de subconjuntos cerrados B y C de Z, tales que $B \cap C = \varnothing$, se tiene que $cl_Y(f^{-1}[B]) \cap cl_Y(f^{-1}[C]) = \varnothing$.

El próximo lema que vamos a enunciar es bastante técnico y ocupa la noción de conjuntos completamente separados. Ya hemos usado esta noción en varias ocasiones a lo largo de este trabajo, sin embargo, en caso de que el lector guste tener presente la definición, dicha definición se encuentra en el Apéndice A, es la Definición A.3.3.

Lema 4.2.21. Sea $\mathscr{F}$ una colección de subconjuntos cerrados de un espacio X con la siguiente propiedad: si $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}$, entonces $\bigcup \mathscr{F}_0$ y $\bigcup(\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_0)$ están completamente separados en X. Si $|\mathscr{F}|$ no es medible y si $p \in \beta X \setminus \bigcup\{cl_{\beta X} F : F \in \mathscr{F}\}$, entonces existe $f \in C(\beta X, \mathbb{R})$ tal que $f(p) = 0$, $f[\bigcup \mathscr{F}] \subseteq (0,1]$ y $f[\beta X] \subseteq [0,1]$.

Demostración. Supongamos que $|\mathscr{F}|$ no es medible y sea $p \in \beta X \setminus \bigcup\{cl_{\beta X} F : F \in \mathscr{F}\}$.

Tenemos dos posibilidades: $p \notin cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F})$ o $p \in cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F})$. En el caso de la primer posibilidad, si tenemos que $p \notin cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F})$, entonces como βX es un espacio Tychonoff, tenemos que existe $f \in C(\beta X, [0,1])$ tal que $f(p) = 0$ y $f[cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F})] \subseteq \{1\}$. En particular se cumple que $f[\bigcup \mathscr{F}] \subseteq (0,1]$ y que $f[\beta X] \subseteq [0,1]$.

Ahora, supongamos que $p \in cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F})$. Consideremos al conjunto $\mathscr{F}$ como un espacio topológico con la topología discreta. Como $|\mathscr{F}|$ no es medible, por el Teorema 4.2.4. tenemos que $\mathscr{F}$ es un espacio realcompacto.

Consideremos la función $\phi : \bigcup \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}$ dada por $\phi(x) = F_x$ donde $F_x \in \mathscr{F}$ es tal que $x \in F_x$. Desde luego, lo primero que hay que ver es que efectivamente ϕ está bien definida:

Sea $x \in \bigcup \mathscr{F}$, entonces existe $F_x \in \mathscr{F}$ tal que $x \in F_x$. Consideremos $\mathscr{F}_0 = \{F_x\}$, por hipótesis sabemos que $\bigcup \mathscr{F}_0$ y $\bigcup(\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_0)$ están completamente separados en X. En particular $\bigcup \mathscr{F}_0$ y $\bigcup(\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_0)$ son conjuntos ajenos, por lo que para toda $F \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_0$, tenemos que $F \subseteq \bigcup(\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_0)$ y además $F_x \subseteq \bigcup \mathscr{F}_0$, por lo que $F \cap F_x = \varnothing$ y por lo tanto para toda $F \in \mathscr{F}$ tal que $F \neq F_x$, tenemos que $x \notin F$, por lo que F_x es el único elemento de $\mathscr{F}$ que contiene a x. Por lo tanto ϕ está bien definida. Ahora, sean B y C subconjuntos cerrados de $\beta \mathscr{F}$ y consideremos la función $i \circ \phi$ donde $i : \mathscr{F} \longrightarrow \beta \mathscr{F}$ es la función inclusión.

Notemos que $(i \circ \phi)^{-1}[B] = \phi^{-1}[i^{-1}[B]] = \phi^{-1}[B \cap \mathscr{F}] = \bigcup\limits_{F \in B \cap \mathscr{F}} F$ y de manera análoga, $(i \circ \phi)^{-1}[C] = \phi^{-1}[i^{-1}[C]] = \phi^{-1}[B \cap \mathscr{F}] = \bigcup\limits_{F \in C \cap \mathscr{F}} F$ de donde las últimas igualdades se deducen de que los puntos que van a dar a los cerrados en $B \cap \mathscr{F}$ (a los de $C \cap \mathscr{F}$ respectivamente) son justamente los puntos que están en la unión de los cerrados que componen a $B \cap \mathscr{F}$ ($C \cap \mathscr{F}$ respectivamente). Como $B \cap \mathscr{F}$ y $C \cap \mathscr{F}$ son ajenos y además están contenidos en $\mathscr{F}$ tenemos por hipótesis que los conjuntos $\bigcup\limits_{F \in B \cap \mathscr{F}} F$ y $\bigcup\limits_{F \in C \cap \mathscr{F}} F$ están completamente separados en X.

Por lo tanto $(i \circ \phi)^{-1}[B]$ y $(i \circ \phi)^{-1}[C]$ están completamente separados en X. Por el Teorema A.4.9. tenemos que $cl_{\beta X}(i \circ \phi)^{-1}[B] \cap cl_{\beta X}(i \circ \phi)^{-1}[C] = \varnothing$. Por la Proposición 4.2.20. tenemos que existe una función continua $\kappa : cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F}) \longrightarrow \beta\mathscr{F}$ tal que $\kappa \restriction_{\bigcup \mathscr{F}} = i \circ \phi$.

Por otra parte, tomemos $F \in \mathscr{F}$, como estamos pensando a $\mathscr{F}$ como espacio discreto, tenemos que $\{F\}$ es abierto y cerrado en F, por lo que usando la Proposición A.4.10. tenemos que $cl_{\beta\mathscr{F}}\{F\} = \{F\}$ es abierto y cerrado en $\beta\mathscr{F}$.

Como $\kappa \restriction_{\bigcup \mathscr{F}} = \phi$, tenemos que $\kappa[(\bigcup \mathscr{F}) \setminus F] \subseteq \beta\mathscr{F} \setminus \{F\}$ pues ϕ manda a los elementos de $\mathscr{F}$ al único elemento de $\mathscr{F}$ que los contiene y desde luego los elementos de $(\bigcup \mathscr{F}) \setminus F$ no pueden tener a F como su imagen.

Por lo que tenemos que $(\bigcup \mathscr{F}) \setminus F \subseteq \kappa^{-1}[\beta\mathscr{F} \setminus \{F\}]$ y como $\{F\}$ es abierto en $\beta\mathscr{F}$, tenemos que $\kappa^{-1}[\beta\mathscr{F} \setminus \{F\}]$ es cerrado en $cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F})$ pues κ es una función continua. Luego, $\kappa^{-1}[\beta\mathscr{F} \setminus \{F\}]$ es un cerrado que contiene a $(\bigcup \mathscr{F}) \setminus F$, entonces $cl_{\beta X}[\bigcup \mathscr{F} \setminus F] \subseteq \kappa^{-1}[\beta\mathscr{F} \setminus \{F\}]$.

Además, si tomamos a $\mathscr{F}_0 = \{F\} \subseteq \mathscr{F}$, tenemos por hipótesis que los conjuntos $\bigcup \mathscr{F}_0 = F$ y $\bigcup(\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_0) = (\bigcup \mathscr{F}) \setminus F$ están completamente separados en X, por lo que aplicando el Teorema A.4.9. obtenemos que $cl_{\beta X}(F) \cap cl_{\beta X}((\bigcup \mathscr{F}) \setminus F) = \varnothing$.

Por otra parte, sabemos que $(\bigcup \mathscr{F}) \setminus F) \cup F = \bigcup \mathscr{F}$, de donde obtenemos que

$$cl_{\beta X}((\bigcup \mathscr{F}) \setminus F) \cup cl_{\beta X}(F) = cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F})$$

y entonces $cl_{\beta X}((\bigcup \mathscr{F}) \setminus F) = cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F}) \setminus cl_{\beta X} F$.

Concluimos que $cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F}) \setminus cl_{\beta X}(F) \subseteq \kappa^{-1}[\beta\mathscr{F} \setminus \{F\}]$ y por lo tanto $\kappa^{-1}[\{F\}] \subseteq cl_{\beta X}(F)$. De esto, recordando que $p \in \beta X \setminus \bigcup\{cl_{\beta X}(F) : F \in \mathscr{F}\}$ y que $p \in cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F})$, tenemos que $p \notin \kappa^{-1}[\{F\}]$ y luego $\kappa(p) \notin \{F\}$, es decir, $\kappa(p) \in \beta\mathscr{F} \setminus \{F\}$.

Como $\mathscr{F}$ es realcompacto, por el Corolario 4.1.5. tenemos que existe $S \in Z[\beta\mathscr{F}]$ tal que $p \in S$ y $S \cap \mathscr{F} = \varnothing$. Dado que $S \in Z[\beta\mathscr{F}]$, tenemos que existe $g \in C(\beta\mathscr{F}, [0,1])$ tal que $S = Z(g)$.

Ahora, consideremos $g \circ \kappa \in C(cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F}), [0,1])$. Notemos que $\kappa[\bigcup \mathscr{F}] \subseteq \mathscr{F}$ pues $\kappa \restriction_{\bigcup \mathscr{F}} = i \circ \phi$, además, tenemos que $Z(g) \cap \mathscr{F} = \varnothing$, entonces $g[\kappa[\bigcup \mathscr{F}]] \subseteq (0,1]$, es decir, $(g \circ \kappa)[\bigcup \mathscr{F}] \subseteq (0,1]$ y $(g \circ \kappa(p)) = 0$ ya que $\kappa(p) \in Z(g)$.

Por el Teorema A.3.10. tenemos que $cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F})$ está C^*-encajado en βX pues βX es un espacio normal (es compacto y Hausdorff), por lo que existe $f \in C(\beta X, [0,1])$ tal que $f \restriction_{cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F})} = g \circ \kappa$.

Finalmente, notemos que $f[\beta X] \subseteq [0,1]$, $f[\bigcup \mathscr{F}] = (g \circ \kappa)[\bigcup \mathscr{F}] \subseteq (0,1]$ pues $\bigcup \mathscr{F} \subseteq cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F})$ y $f \restriction_{cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F})} = g \circ \kappa$ y además $f(p) = (g(\kappa(p)) = 0$ ya que $p \in cl_{\beta X}(\bigcup \mathscr{F})$, por lo que f cumple con lo que se nos pide.

■

Hemos acabado pues de demostrar este lema bastante técnico el cual nos va a permitir demostrar una poderosa herramienta que nos dirá cuándo un espacio θ-refinable es realcompacto.

Recordando la Definición 4.2.19. de espacio θ-refinable, tenemos que dicha definición involucra el concepto de refinamiento de una cubierta abierta, por lo que haremos el recordatorio de lo que esto significa antes de enunciar nuestro teorema.

Y el teorema que probaremos es el siguiente:

Teorema 4.2.22. Sea X un espacio normal θ-refinale. Si X no tiene subespacios discretos de cardinalidad medible, entonces X es realcompacto.

Demostración. Sea $p \in \beta X \setminus X$. Nos apoyaremos en el Corolario 4.1.5. para probar que X es realcompacto. Para ello, debemos encontrar $S \in Z[\beta X]$ tal que $p \in S$ y $S \cap X = \varnothing$.

Para cada $x \in X$, sabemos que $p \neq x$, por lo que usando que βX es un espacio de Hausdorff, tenemos que existe $V_x \subseteq \beta X$ abierto tal que $x \in V_x$ y $p \notin cl_{\beta X}(V_x)$.

Notemos que si $U_x = V_x \cap X$, entonces U_x es un abierto en X tal que $x \in U_x$ y además cumple que $cl_{\beta X}(U_x) \subseteq cl_{\beta X}(V_x)$, por lo que $p \notin cl_{\beta X}(U_x)$. Entonces $p \notin \bigcup_{x\in X} cl_{\beta X}(U_x)$ y por lo tanto $p \notin \beta X \setminus \left(\bigcup_{x\in X} cl_{\beta X}(U_x) \right)$.

Sea $\mathscr{U} = \{U_x : x \in X\}$, tenemos que $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de X y como X es θ-refinable, por la Definición 4.2.19. tenemos que existe una sucesión $\{\mathscr{V}_i : i \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas abiertas de X, cada una de las cuales es un refinamiento de $\mathscr{U}$ y además dicha sucesión cumple que para cada $x \in X$, existe $i_x \in \mathbb{N}$ tal que $\{V \in \mathscr{V}_{i_x} : x \in V\}$ es finito.

Sea $i \in \mathbb{N}$ fijo.

Construiremos inductivamente una familia de funciones $\{f_{i,j} : j \in \mathbb{N}\} \subseteq C(\beta X, \mathbb{R})$ que cumplan lo siguiente:

1. $f_{i,j}(p) = 0$ y $f_{i,j}[\beta X] \subseteq [0,1]$ para cada $j \in \mathbb{N}$
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $x \in X$ y $|\{V \in \mathscr{V}_i : x \in V\}| = k$, entonces existe $s \in \{1,\dots,k\}$ tal que $f_{i,s}(x) > 0$

Dicha familia de funciones nos permitirá construir el $S \in Z[\beta X]$ deseado y construiremos la familia de funciones de manera inductiva.

Base de inducción: Definimos primero $f_{i,1} \equiv 0$, es decir, $f_{i,1}$ es la función constante 0.

Hipótesis de inducción: Supongamos que hemos construido una familia de funciones $\{f_{i,j} : j \leq n\} \subseteq C(\beta X, \mathbb{R})$ tales que:

1. $f_{i,j}(p) = 0$ para cada $j \leq n$ y $f_{i,j}[\beta X] \subseteq [0,1]$
2. Si $k \leq n$, $x \in X$ y $|\{V \in \mathscr{V}_i : x \in V\}| = k$, entonces existe $s \in \{1,\dots,k\}$ tal que $f_{i,s}(x) > 0$

Sea $[\mathscr{V}_i]^{n+1} = \{Q \subseteq \mathscr{V}_i : |Q| = n+1\}$.

Para cada $Q \in [\mathscr{V}_i]^{n+1}$ definimos $F_Q = \bigcap_{1 \leq j \leq n} Z(f_{i,j} \restriction_X) \setminus \left(\bigcup_{V \in \mathscr{V}_i \setminus Q} V \right)$.

Afirmamos que $\{F_Q : Q \in [\mathscr{V}_i]^{n+1}\}$ es una familia localmente finita de subconjuntos cerrados de X. Tenemos que efectivamente para cada $Q \in [\mathscr{V}_i]^{n+1}$, F_Q es cerrado en X pues $\bigcap_{1 \leq j \leq n} Z(f_{i,j} \restriction_X)$ es cerrado en X por ser una intersección de cerrados y luego, $X \setminus \left(\bigcup_{V \in \mathscr{V}_i \setminus Q} V \right)$ es cerrado en X pues $\bigcup_{V \in \mathscr{V}_i \setminus Q} V$ es abierto en X por ser una unión de abiertos en X, por lo que $\bigcap_{1 \leq j \leq n} Z(f_{i,j} \restriction_X) \cap \left(X \setminus \left(\bigcup_{V \in \mathscr{V}_i \setminus Q} V \right) \right) = \bigcap_{1 \leq j \leq n} Z(f_{i,j} \restriction_X) \setminus \left(\bigcup_{V \in \mathscr{V}_i \setminus Q} V \right)$ es cerrado en X.

Probaremos, que para cada $x \in X$, existe una vecindad N_x de x tal que $N_x \cap F_Q \neq \varnothing$ para a lo más un $Q \in [\mathscr{V}_i]^{n+1}$. Esto nos dirá en particular que si $Q_1 \neq Q_2$, entonces $F_{Q_1} \cap F_{Q_2} = \varnothing$. Sea $x \in X$ y supongamos primero que $|\{V \in \mathscr{V}_i : x \in V\}| > n$. Sea $Q_0 = \{V_s : 1 \leq s \leq n+1\} \subseteq \mathscr{V}_i$ una familia de elementos de $\mathscr{V}_i$ tal que $x \in V_s$ para toda $s \in \{1, \ldots, n+1\}$. Esto lo podemos hacer pues estamos suponiendo que hay más de n elementos de $\mathscr{V}_i$ que tienen al punto x.

Definimos $N_x = \bigcap_{1 \leq s \leq n+1} V_s$. Tenemos que $x \in N_x$ y N_x es abierto en X, por ser una intersección finita de abiertos, por lo que N_x es una vecindad de x. Si tenemos que $N_x \cap F_Q \neq \varnothing$ para algún $Q \in [\mathscr{V}_i]^{n+1}$, entonces existe $y \in N_x \cap \left(\bigcap_{1 \leq j \leq n} Z(f_{i,j} \restriction_X) \setminus \left(\bigcup_{V \in \mathscr{V}_i \setminus Q} V \right) \right)$ y y cumple que $y \notin V$ para toda $V \in \mathscr{V}_i \setminus Q$. Además sabemos que $y \in N_x = \bigcap_{1 \leq s \leq n+1} V_s$ con $V_s \in \mathscr{V}_i$ para toda $s \in \{1, \ldots, n+1\}$, por lo que debemos tener que $V_s \in Q$ para toda $s \in \{1, \ldots, n+1\}$, es decir, $Q_0 \subseteq Q$.

Como $|Q_0| = n + 1 = |Q|$ y además $Q_0 \subseteq Q$, entonces debemos tener que $Q_0 = Q$, por lo que N_x interseca a lo más a un F_Q.

Ahora, supongamos que $|\{V \in \mathscr{V}_i : x \in V\}| \leq n$, entonces por nuestra hipótesis de inducción, existe $s \leq n$ tal que $f_{i,s}(x) > 0$. Pero $F_Q \subseteq Z(f_{i,s} \restriction_X)$ para toda $Q \in [\mathscr{V}_i]^{n+1}$, por lo que $f_{i,s}^{-1}[(0, \infty)]$ es una vecindad de x ajena a F_Q para toda $Q \in [\mathscr{V}_i]^{n+1}$.

Concluimos pues que $\{F_Q : Q \in [\mathscr{V}_i]^{n+1}\}$ es una familia localmente finita de subconjuntos cerrados en X.

Sea $\mathscr{F} = \{F_Q : Q \in [\mathscr{V}_i]^{n+1}\}$. Notemos que $|\mathscr{F}|$ no es medible, pues como vimos anteriormente, cada $x \in X$ tiene una vecindad N_x tal que $N_x \cap F_Q \neq \varnothing$ para a lo más un $Q \in [\mathscr{V}_i]^{n+1}$, entonces a partir de esto y usando que $\mathscr{V}_i$ es una cubierta abierta de X, podemos construir un subespacio discreto D de X tal que $|D| = |\mathscr{F}|$ y por hipótesis X no contiene subespacios discretos de cardinalidad medible.

Sea $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}$. Tenemos que $\bigcup \mathscr{F}_0$ y $\bigcup(\mathscr{F}_0 \setminus \mathscr{F})$ son conjuntos cerrados ajenos pues la familia $\mathscr{F}$ es localmente finita y recordemos que la unión de cualquier familia de subconjuntos cerrados de una familia localmente finita nos da un conjunto cerrado (Proposición C.1.5.).

Como X es normal, por el Teorema A.3.10. tenemos que $\bigcup \mathscr{F}_0$ y $\bigcup(\mathscr{F}_0 \setminus \mathscr{F})$ están completamente separados en X. Entonces, por el Lema 4.2.21. tenemos que existe $f_{i,n+1} \in C(\beta X, \mathbb{R})$ tal que $f_{i,n+1}[\beta X] \subseteq [0,1]$, $f_{i,n+1}(p) = 0$ y $f_{i,n+1}[\bigcup \mathscr{F}] \subseteq (0,1]$, es decir, si $x \in \bigcup_{Q \in [\mathscr{V}_i]^{n+1}} F_Q$, entonces $f_{i,n+1}(x) > 0$, por lo que se satisface la primer condición que definirá a nuestra familia de funciones definida de manera inductiva.

Ahora, supongamos que $k \leq n+1$ y sea $x \in X$. Supongamos que $|\{V \in \mathscr{V}_i : x \in V\}| = k$.

Si $k \leq n$, entonces por hipótesis de inducción, existe $s \leq n$ tal que $f_{i,s}(x) > 0$.

Si $k = n+1$, sea $Q_0 = \{V \in \mathscr{V}_i : x \in V\}$. Tenemos que $Q_0 \in [\mathscr{V}_i]^{n+1}$. Si tuviéramos que existe $s \leq n$ tal que $f_{i,s}(x) > 0$, entonces nuestra segunda condición se satisfacería, por lo que podemos suponer que no existe $s \leq n$ tal que $f_{i,s}(x) > 0$, es decir, supongamos que $f_{i,s}(x) = 0$ para toda $s \leq n$. Como $F_{Q_0} = \bigcap_{1 \leq j \leq n} Z(f_{i,j} \restriction_X) \setminus \left(\bigcup_{V \in \mathscr{V}_i \setminus Q_0} V \right)$ y sabemos que $x \in Z(f_{i,s} \restriction_X)$ para toda $s \leq n$ y que x pertenece a lo más a un $Q \in [\mathscr{V}_i]^{n+1}$, a saber, Q_0, entonces tenemos que $x \in F_{Q_0}$, por lo que se satisface que $f_{i,n+1}(x) > 0$ por la forma en que $f_{i,n+1}$ está definida.

Con lo anterior concluimos la definición inductiva de nuestra familia de funciones $\{f_{i,j} : j \in \mathbb{N}\} \subseteq C(\beta X, \mathbb{R})$ para $i \in \mathbb{N}$ fija que cumple lo siguiente:

1. $f_{i,j}(p) = 0$ y $f_{i,j}[\beta X] \subseteq [0,1]$ para cada $j \in \mathbb{N}$
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $x \in X$ y $|\{V \in \mathscr{V}_i : x \in V\}| = k$, entonces existe $s \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $f_{i,s}(x) > 0$

En general, como $i \in \mathbb{N}$ era arbitraria, hemos obtenido una familia de funciones $\{f_{i,j} : i,j \in \mathbb{N}\} \subseteq C(\beta X, \mathbb{R})$ tal que:

1. $f_{i,j}(p) = 0$ y $f_{i,j}[\beta X] \subseteq [0,1]$ para cada $i,j \in \mathbb{N}$
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $x \in X$ y $|\{V \in \mathscr{V}_i : x \in V\}| = k$, entonces existe $s \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $f_{i,s}(x) > 0$

Definimos $f : \beta X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(q) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{i+j}} f_{i,j}(q)$. Notemos que para $i,j \in \mathbb{N}$, como $f_{i,j}[\beta X] \subseteq [0,1]$, tenemos que $|\frac{1}{2^{i+j}} f_{i,j}(q)| \leq \frac{1}{2^{i+j}}$ para toda $q \in \beta X$.

Tenemos que f está bien definida pues sabemos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ converge absolutamente y por lo tanto cualquier reordenamiento de dicha serie converge, por lo que usando la prueba M de Weierstrass la serie de funciones que define a f converge uniformemente en βX, por lo que f está bien definida y además es continua ya que cada $f_{i,j}$ es una función continua.

Notemos que $f(p) = 0$ pues $f_{i,j}(p) = 0$ para cada $i,j \in \mathbb{N}$ y si $x \in X$, entonces existe $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $|\{V \in \mathscr{V}_n : x \in V\}| \leq m$ y $f_{n,m}(x) > 0$, por lo que $f(x) > 0$ para toda $x \in X$.

Finalmente notemos que $S = Z(f)$ cumple que $S \in Z[\beta X]$, $p \in S$ y $S \cap X = \varnothing$, por lo que usando el Corolario 4.1.5. concluimos que X es realcompacto.

$\blacksquare$

A pesar de que la prueba del Teorema 4.2.22. resultó bastante laboriosa, nos permite obtener una amplia gama de espacios realcompactos, esto se debe a que varias clases ya conocidas de espacios resultan ser θ-refinables.

En el Apéndice C se incluye una pequeña introducción a los espacios métricos, paracompactos y metacompactos y entre los resultados presentados ahí, se menciona que todo espacio métrico es paracompacto, todo espacio paracompacto es metacompacto (de hecho es normal y metacompacto) y todo espacio metacompacto es θ-refinable, lo que nos permite obtener el siguiente corolario:

Corolario 4.2.23. Todo espacio X que sea paracompacto o métrico o normal metacompacto y que en ningún caso contenga subespacios discretos de cardinalidad medible debe ser realcompacto.

Demostración. Supongamos que X es paracompacto o métrico o normal metacompacto y que no contiene subespacios discretos de cardinalidad medible.

Haremos la prueba distinguiendo cada caso:

1. *Caso 1:* Si X es un espacio métrico, por el Teorema C.1.7. tenemos que X es paracompacto y por el Teorema C.2.2. tenemos que X es metacompacto. Finalmente, por el Teorema C.2.3. tenemos que X es θ-refinable y como todo espacio métrico es normal, dado que X no tiene subespacios discretos de cardinalidad medible concluimos que X es realcompacto.

2. *Caso 2:* Si X es paracompacto, por el Teorema C.1.8. tenemos que X es normal, por el Teorema C.2.2. tenemos que X es metacompacto y por el Teorema C.2.3. tenemos que X es θ-refinable. Por lo tanto, usando el Teorema 4.2.22. obtenemos que X es realcompacto ya que no contiene subespacios discretos de cardinalidad medible.

3. *Caso 3:* Si X es normal y metacompacto, por el Teorema C.2.3. tenemos que X es θ-refinable y por el Teorema 4.2.22. X es realcompacto.

■

Concluimos este trabajo demostrando el Lema 4.2.13. el cual quedó pendiente por falta de herramientas para demostrarlo.

Lema 4.2.13. Sea X un espacio Tychonoff y sea K un espacio compacto. Si $|K|$ no es medible, entonces $C(K,\mathbb{R})$ es realcompacto.

Demostración. Sabemos que $C(K,\mathbb{R})$ es un espacio métrico con la métrica inducida por la norma $\|.\|_\infty$, por lo que basta ver que no contiene subespacios discretos de cardinalidad medible. Tenemos que $|C(K,\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|^{|K|} = (2^{\aleph_0})^{|K|} = 2^{(\aleph_0|K|)}$.

Por la Proposición B.1.6. sabemos que $\aleph_0$ es un cardinal no medible y por la Proposición B.1.7. tenemos que $\aleph_0|K|$ es un cardinal no medible. Finalmente, por la Proposición B.1.5. tenemos que $2^{(\aleph_0|K|)}$ es un cardinal no medible, es decir, $|C(K,\mathbb{R})|$ no es medible, por lo que no puede contener subespacios discretos de cardinalidad medible. Finalmente por el Corolario 4.2.23. concluimos que $C(K,\mathbb{R})$ es realcompacto.

■

Apéndice A

Nociones básicas de Topología de Conjuntos

Para el material presentado en este apéndice se ha tomado nuevamente como referencia el libro *Extensions and Absolutes of Hausdoff Spaces, Jack R. Porter y R. Grant Woods.*

Al ser material de recordatorio, no se presentarán las pruebas de los resultados involucrados pues se pueden encontrar en [1].

Hay algunos resultados en el Apéndice A que no se han extraído directamente de [1], se mencionará a la hora de presentarlos la referencia donde se puede consultar una prueba de ellos. De cualquier modo, la mayoría de resultados fueron extraídos de [1], [2], [3] y [5] que son buenas referencias para un primer curso de Topología General.

A.1. Conjuntos nulos y espacios Tychonoff

Recordaremos la definición de espacio Tychonoff y daremos la noción de subconjunto nulo de un espacio X.

Definición A.1.1. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio Tychonoff si se cumple que:

1. X es T_0
2. Para cada $A \subseteq X$ cerrado y cada punto $x \in X \setminus A$, existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $f[A] \subseteq \{0\}$ y $f(p) = 1$

Nota: En la definición anterior, se puede pedir que $f \in C(X, [0,1])$

Ahora, presentamos a los conjuntos nulos.

Definición A.1.2. Sea X un espacio topológico y $Z \subseteq X$, decimos que Z es un (sub)conjunto nulo de X si existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $Z = f^{-1}[\{0\}]$. Al conjunto $f^{-1}[\{0\}]$ se le suele denotar también por $Z(f)$ y al conjunto de todos los nulos de X se le denota como $Z[X]$.

Definición A.1.3. Sea X un espacio topológico y $C \subseteq X$, decimos que X es un (sub)conjunto co-nulo de X si $C = X \setminus Z(f)$ para algúna función $f \in C(X, \mathbb{R})$. Al conjunto $X \setminus Z(f)$ se le suele denotar como $coz(f)$ y al conjunto de todos los co-nulos de X se le denota como $coz[X]$.

Tenemos la siguiente proposición que relaciona a los nulos con los espacios Tychonoff:

Proposición A.1.4. Las siguientes proposiciones son equivalentes para un espacio X:

1. X es Tychonoff
2. $Z[X]$ es una base de cerrados para X
3. $coz[X]$ es una base de abiertos para X

Proposición A.1.5. Si M es un espacio métrico, entonces todo subconjunto cerrado de M es un subconjunto nulo de M.

Proposición A.1.6. Sean X y Y espacios topológicos y $f \in C(X, Y)$. Sea $Z \in Z[Y]$. Entones $f^{-1}[Z] \in Z[X]$.

Proposición A.1.7. Sea X un espacio topológico. Entonces:

1. $Z[X]$ es cerrado bajo intersecciones finitas y numerables
2. $coz[X]$ es cerrado bajo uniones finitas y numerables

A.2. Funciones perfectas

En esta sección recordamos la noción de función perfecta y algunos resultados sobre funciones perfectas, dichos resultados son importantes para el desarrollo de algunas secciones del Capítulo 2.

Definición A.2.1. Sean X y Y espacios topológicos y $f \in F(X,Y)$, decimos que:

1. f es una función compacta si $f^{-1}[\{y\}]$ es un conjunto compacto para toda $y \in Y$
2. f es una función perfecta si es una función compacta y cerrada

Tenemos los siguientes resultados sobre las funciones perfectas:

Proposición A.2.2. Las funciones continuas con dominio compacto son perfectas.

Proposición A.2.3. La composición de funciones perfectas es una función perfecta.

Proposición A.2.4. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función perfecta.

1. Si $A \subseteq X$ es cerrado, entonces $f \restriction_A$ es una función perfecta (pensada como función en Y o como función en $f[A]$)
2. Si $B \subseteq Y$, entonces $f \restriction_{f^{-1}[B]}$ es una función perfecta de $f^{-1}[B]$ a B

Teorema A.2.5. Sean X y Y espacios topológicos. Si $f \in C(X,Y)$, $S \subseteq X$ es denso en X y $f \restriction_S$ es una función perfecta de S en $f[S]$, entonces $f[X \setminus S] \subseteq Y \setminus f[S]$.

A.3. Subespacios C-encajados y C^*-encajados

La noción de estar C-encajado y C^*-encajado resultará de vital importancia a lo largo de todo el trabajo, tanto para dar caracterizaciones de la compactación de Stone-Čech βX como de la real-compactación de Hewitt υX, por lo que consideramos que merece su propia sección con algunos resultados.

Definición A.3.1. Sea $A \subseteq X$. Decimos que A está C-encajado (respectivamente C^*-encajado) en X si para cada $f \in C(A, \mathbb{R})$ continua (respectivamente continua y acotada), existe $\tilde{f} \in C(X, \mathbb{R})$ tal que f es continua (respectivamente continua y acotada) y además cumple que $\tilde{f} \restriction_A = f$.

Tenemos la siguiente proposición:

Proposición A.3.2. Sea X un espacio topológico. Entonces se cumple que:

1. Todo subespacio C-encajado en X está C^*-encajado en X.
2. Si A está C^*-encajado (respectivamente, C-encajado) en B y B está C^*-encajado (respectivamente, C-encajado) en X, entonces A está C^*-encajado (respectivamente, C-encajado) en X.

Ahora definiremos otra noción importante para el estudio de estos subespacios:

Definición A.3.3. Sean A y B subconjuntos de un espacio topológico X. Decimos que A y B están completamente separados en X si existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ continua y acotada tal que $f[X] \subseteq [0, 1]$, $f[A] \subseteq \{0\}$ y $f[B] \subseteq \{1\}$. Decimos que f separa completamente a A y B en X.

Proposición A.3.4. Dos subespacios A y B de un espacio X están completamente separados en X si y sólo si existen $Z_1, Z_2 \in Z[X]$ ajenos tales que $A \subseteq Z_1$ y $B \subseteq Z_2$.

Teorema A.3.5. (Teorema de extensión de Urysohn). Un subespacio S de un espacio topológico X está C^*-encajado si y sólo si cualesquiera dos subconjuntos de S completamente separados en S están completamente separados en X.

Proposición A.3.6. Sea S un subespacio C^*-encajado de un espacio X. Entonces S está C-encajado en X si y sólo si S está completamente separado en X de cualquier conjunto nulo $Z \in Z[X]$ ajeno a S.

El siguiente resultado requiere de la teoría de la compactación de Stone-Čech para su prueba, pero lo enunciamos en esta sección puesto que su enunciado sólo requiere conocer lo de las secciones A.1. y A.3.

Teorema A.3.7. Sea X un espacio Tychonoff y $S \subseteq X$ denso en X. Entonces el subconjunto S está C^*-encajado en X si y sólo si para cualesquiera $Z_1, Z_2 \in Z[X]$ tales que $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ se tiene que $cl_X(Z_1) \cap cl_X(Z_2) = \varnothing$.

Definición A.3.8. Un subespacio S de un espacio topológico X está Z-encajado en X si para cada $Z \in Z[S]$, existe $T \in Z[X]$ tal que $Z = S \cap T$.

y enunciamos un resultado importante respecto a los subespacios Z-encajados que relaciona este concepto con el de estar C^*-encajado:

Proposición A.3.9. Si S es un subespacio de X que está C^*-encajado en X, entonces S está Z-encajado en X.

Además, tenemos este importante teorema que nos caracteriza a los espacios normales:

Teorema A.3.10. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un espacio X:

1. X es normal
2. Los subconjuntos cerrados y ajenos en X están completamente separados en X
3. Cada subconjunto cerrado de X está C^*-encajado en X
4. Cada subconjunto cerrado de X está C-encajado en X

A.4. Otros resultados importantes

Acá mencionaremos algunos otros resultados importantes sin profundizar en los temas que tratan dichos resultados. El lector notará que no hay una relación específica entre los resultados de esta sección, puesto que en su mayoría sólo están a manera de recordatorio y son resultados que se ven en un curso de Topología General.

Teorema A.4.1. (Lema de Jones) Sea X un espacio topológico normal y separable. Entonces para cualquier subconjunto D de X que sea cerrado y discreto, tenemos que $2^{|D|} \leq 2^{\omega}$

Una prueba del Teorema A.4.1. se puede encontrar en [3].

Proposición A.4.2. Todo espacio topológico regular y Lindelöf es normal.

Proposición A.4.3. Sea X un espacio topológico y Y un espacio de Hausdorff. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.

A continuación introduciremos una noción que nos facilitará la definición de algunas funciones a lo largo de la tesis y además un par de resultados cuyas pruebas se pueden encontrar en [2].

Definición A.4.4. Sea X un espacio topológico, $\{A_i\}_{i\in J}$ una cubierta del espacio topológico X y $\{f_i : A_i \longrightarrow Y : i \in J\}$ una familia de funciones.

1. Decimos que que las funciones son compatibles si para cualesquiera $i, j \in J$ tenemos que $f_i \restriction_{A_i \cap A_j} = f_j \restriction_{A_i \cap A_j}$
2. Si las funciones de la familia $\{f_i : A_i \longrightarrow Y : i \in J\}$ son compatibles, definimos la función combinación asociada a la familia de funciones $\{f_i : A_i \longrightarrow Y : i \in J\}$ denotada como sigue: $\triangledown_{i\in J} f_i : X \longrightarrow Y$, la cual estará dada por $\triangledown_{i\in J} f_i(x) = f_i(x)$ cuando $x \in A_i$

Proposición A.4.5. Si $\{U_i : i \in J\}$ es una cubierta abierta de X y $\{f_i : U_i \longrightarrow Y : i \in J\}$ es una familia de funciones continuas compatibles, entonces la función combinación $\triangledown_{i\in J} f_i : X \longrightarrow Y$ es una función continua.

Proposición A.4.6. Sea X un espacio topológico y $\{A_i : i \in J\}$ una cubierta de X. Sea $\{f_i : A_i \longrightarrow Y\}$ una familia de funciones compatibles tales que $\triangledown_{i\in J} f_i$ es una función continua. Si f_i es abierta (cerrada y la familia $\{f_i[A_i] : i \in J\}$ es localmente finita), entonces $\triangledown_{i\in J} f_i$ es abierta (cerrada).

Proposición A.4.7. Sean X y Y espacios Tychonoff. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, abierta y cerrada, entonces $\beta f : \beta X \longrightarrow \beta Y$ es una función abierta y cerrada.

Proposición A.4.8. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función abierta y cerrada, entonces para cada función continua $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que esté acotada en todas las fibras de f, las reglas de correspondencia $g^*(y) = \sup\{g(x) : x \in f^{-1}[\{y\}]\}$ y $g_*(y) = \inf\{g(x) : x \in f^{-1}[\{y\}]\}$ definen funciones continuas de Y en $\mathbb{R}$.

El siguiente teorema es bastante importante para el estudio de la compactación de Stone-Čech, por lo que lo dejamos enunciado acá a manera de referencia para futuros usos. La prueba de dicho teorema se puede encontrar en [1].

Teorema A.4.9. La compactación de Stone-Čech βX de un espacio Tychonoff X es la única compactación de X (salvo equivalencias) con las siguientes propiedades:

1. βX es el máximo proyectivo de $K[X]$
2. X está C^*-encajado en βX
3. Toda función continua de X a un espacio compacto K tiene una extensión continua βX
4. Si $Z_1, Z_2 \in Z[X]$, entonces $cl_{\beta X} Z_1 \cap cl_{\beta X} Z_2 = cl_{\beta X}(Z_1 \cap Z_2)$
5. Si $Z_1, Z_2 \in Z[X]$ cumplen que $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$, entonces $cl_{\beta X}(Z_1) \cap cl_{\beta X}(Z_2) = \varnothing$
6. Conjuntos completamente separados en X tienen cerraduras ajenas en βX
7. Cada punto de βX es el límite de un único Z-ultrafiltro en X (visto como una base de filtro en βX)

También tenemos este otro resultado importante sobre βX que se usa en el texto. Su prueba se puede encontrar en [2].

Proposición A.4.10. Sea X un espacio Tychonoff. Si $A \subseteq X$ es abierto y cerrado en X, entonces $cl_{\beta X}(A)$ es abierto y cerrado en βX.

Apéndice B

Cardinales medibles

En este apéndice, demostramos el Teorema 4.2.3. y enunciamos otros resultados sobre cardinales medibles cuyas pruebas se pueden consultar en [4].

B.1. Propiedades básicas de los cardinales medibles

Comenzamos introduciendo nuevamente los conceptos de la sección 4.2. sobre cardinales medibles.

Definición B.1.1. Sea X un conjunto. Una medida de Ulam para X es una función $\mu : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \{0{,}1\}$ tal que

1. $\mu(X) = 1$
2. Para toda $p \in X$, $\mu(\{p\}) = 0$
3. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una sucesión de conjuntos ajenos dos a dos, entonces se tiene que $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

A un conjunto para el cual exista una medida de Ulam, diremos que es Ulam-medible.

Notemos que en realidad las medidas de Ulam definen una medida en el espacio de medida $(X, \mathscr{P}(X))$ (en el sentido usual del Análisis y la Teoría de la Medida), por lo que las medidas de Ulam cumplen todas las propiedades de las medidas usuales. Es importante tener en cuenta esto, pues usaremos las medidas de Ulam como si de medidas usuales se tratase a lo largo de la prueba del Teorema 4.2.3.

Ahora que hemos definido a los conjuntos Ulam-medibles, daremos la definición de cardinal medible:

Definición B.1.2. Sea κ un cardinal, decimos que κ es un cardinal medible si es un conjunto Ulam-medible.

Ahora sí, demostraremos el Teorema 4.2.3.

Teorema B.1.3. Un cardinal κ es medible si y sólo si existe un ultrafiltro libre con la P.I.N. (propiedad de intersección numerable) en κ.

Demostración. Primero supongamos que tenemos un cardinal κ que es medible. Entonces, por la Definición B.1.2. y la Definición B.1.1. existe una medida de Ulam en κ, $\mu : \mathscr{P}(\kappa) \longrightarrow \{0,1\}$.

Definimos $\mathscr{U} = \{A \subseteq \kappa : \mu(A) = 1\}$. Afirmamos que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro libre con la P.I.N.

Notemos pues lo siguiente:

1. $\mathscr{U} \neq \varnothing$ pues $\kappa \in \mathscr{U}$ ya que $\mu(\kappa) = 1$.
2. Si $A, B \in \mathscr{U}$ con $A \subseteq B$, entonces $1 = \mu(A) \leq \mu(B) \leq 1$ por lo que $B \in \mathscr{U}$.
3. Si $A, B \in \mathscr{U}$, entonces $\mu(A) = 1$ y $\mu(B) = 1$. Luego, tenemos que $1 = \mu(A) \leq \mu(A \cup B) \leq 1$ por lo que $\mu(A \cup B) = 1$ y además, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) = 2 - \mu(A \cap B)$. Por lo que concluimos que $1 = 2 - \mu(A \cap B)$, es decir, $\mu(A \cap B) = 1$.

   Por lo tanto $A \cap B, A \cup B \in \mathscr{U}$.

De los puntos (1), (2) y (3) usando la Definición 3.2.3. tenemos que $\mathscr{U}$ es un filtro en κ.

Ahora, para ver que es un ultrafiltro, recordemos que una de las condiciones que nos permiten asegurar que un filtro en realidad es un ultrafiltro es que para cualquier subconjunto de κ, se tiene que el conjunto o su complemento están en $\mathscr{U}$.

Sea pues $A \subseteq \kappa$. Entonces $\mu(A) = 1$ ó $\mu(\kappa \setminus A) = 1$ pues se cumple que $\mu(A) + \mu(\kappa \setminus A) = 1$.

Por lo tanto $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro.

Si tuviéramos que existe $p \in \bigcap \mathscr{U}$, entonces tendríamos que $\{p\} \in \mathscr{U}$ pues $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, pero por la Definición B.1.1. tendríamos que $\mu(\{p\}) = 0$, lo cual contradice que $\{p\} \in \mathscr{U}$.

Por lo tanto $\bigcap \mathscr{U} = \varnothing$ y luego $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro libre.

Finalmente, para ver que $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N., sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{U}$, como $\mathscr{U}$ es un filtro, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{U}$.

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{U}$. Notemos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ y además $B_{n+1} \subseteq B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por propiedades de las medidas, tenemos que $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = 1$, por lo que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{U}$ y luego $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$.

Por lo tanto $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N.

Ahora supongamos que existe un ultrafiltro libre $\mathscr{U}$ en κ con la P.I.N. y veamos que κ es medible.

Definimos $\mu : \mathscr{P}(\kappa) \longrightarrow \{0,1\}$ dada por

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \in \mathscr{U} \\ 0 & \text{si } A \notin \mathscr{U} \end{cases}$$

Veamos que μ es una medida de Ulam para κ:

1. $\kappa \in \mathscr{U}$, por lo que $\mu(\kappa) = 1$
2. Si $p \in \kappa$, entonces como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro libre, $\bigcap \mathscr{U} = \varnothing$, por lo que $p \notin \bigcap \mathscr{U}$ y como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, $\{p\} \notin \mathscr{U}$, por lo que $\mu(\{p\}) = 0$
3. Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ es una sucesión de conjuntos ajenos dos a dos. Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \in \mathscr{U}$, notemos que para $n \neq m$, $A_n \notin \mathscr{U}$ pues $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ es una sucesión de conjuntos ajenos dos a dos y tendríamos que si $A_n \in \mathscr{U}$ para $n \neq m$, entonces por propiedades de los filtros, $\varnothing = A_m \cap A_n \in \mathscr{U}$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, para $n \neq m$, $A_n \notin \mathscr{U}$.

   Como $A_m \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, entonces $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{U}$ por lo que $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$ y como $A_n \in \mathscr{U}$ si y sólo si $n = m$, tenemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 1$.

   Por otro lado, si $A_n \notin \mathscr{U}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(A_n) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y luego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$. Por otro lado, como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro y $A_n \notin \mathscr{U}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos que $\kappa \setminus A_n \in \mathscr{U}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y como $\mathscr{U}$ tiene la P.I.N. tenemos que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \kappa \setminus A_n \in \mathscr{U}$, por lo que $\kappa \setminus (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathscr{U}$, es decir, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \notin \mathscr{U}$ y por lo tanto $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$.

   En ambos casos, concluimos que $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

De los puntos (1), (2) y (3), concluimos que μ es una medida de Ulam para κ y por lo tanto κ es un cardinal medible.

■

Los siguientes resultados no se probarán, sin embargo, se puede encontrar una prueba de ellos en [4] como se mencionó al inicio de este apéndice.

Proposición B.1.4. Todo cardinal menor que un cardinal que no es medible, no es medible.

Proposición B.1.5. Si κ no es medible, entonces 2^κ no es medible.

Proposición B.1.6. $\aleph_0$ no es medible.

Proposición B.1.7. Si κ es un cardinal no medible y $\{\alpha_i : i \in \kappa\}$ es una familia de cardinales no medibles, entonces la suma $\sum\limits_{i\in\kappa} \alpha_i$ no es medible. En particular, si α y κ son cardinales no medibles, entonces $\alpha\kappa$ no es medible.

Apéndice C

Espacios paracompactos y metacompactos

En este apéndice introducimos las nociones básicas sobre los espacios paracompactos y metacompactos con la finalidad de que el lector tenga un mejor entendimiento del material presentado después del Teorema 4.2.22.

El material presentado en este apéndice se puede encontrar en [5] así como las pruebas de los resultados aquí presentados.

C.1. Espacios paracompactos

Los espacios paracompactos fueron introducidos por Dieudonné en 1944 como una generalización natural de los espacios compactos de tal manera que conservaran una estructura que les permitiera tener varias de las características de los espacios compactos. La noción de espacio paracompacto ganó popularidad después de que A. H. Stone demostrara que todo espacio métrico es paracompacto, que es el resultado central de esta sección.

Comenzamos definiendo la terminología necesaria para trabajar con dichos espacios.

Definición C.1.1. Si $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ son cubiertas abiertas de un espacio X, decimos que $\mathscr{V}$ es un refinamiento de $\mathscr{U}$ si para cada $V \in \mathscr{V}$, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $V \subseteq U$.

Definición C.1.2. Una colección $\mathscr{U}$ de subconjuntos de un espacio X es localmente finita si para cada $x \in X$, existe una vecindad N_x de x tal que $|\{U \in \mathscr{U} : U \cap N_x\}| < \aleph_0$.

Definición C.1.3. Una colección $\mathscr{U}$ de subconjuntos de un espacio X es punto finita si para cada $x \in X$, $|\{U \in \mathscr{U} : x \in U\}| < \aleph_0$.

Como propiedades de las colecciones localmente finitas tenemos las siguientes:

Proposición C.1.4. Si $\{A_i : i \in J\}$ es una familia de conjuntos localmente finita, entonces la familia $\{cl_X(A_i) : i \in J\}$ es localmente finita.

Proposición C.1.5. Si $\{A_i : i \in J\}$ es una colección localmente finita de subconjuntos de

X, entonces $\bigcup_{i\in J} cl_X A_i = cl_X \left(\bigcup_{i\in J} A_i\right)$, en particular, la unión de una familia localmente finita de subconjuntos cerrados en X es un conjunto cerrado en X.

Ahora, daremos la definición de espacio paracompacto:

Definición C.1.6. Sea X un espacio de Hausdorff. Decimos que X es paracompacto si para toda cubierta abierta $\mathscr{U}$ de X, existe un refinamiento (de subconjuntos abiertos) localmente finito $\mathscr{V}$ de $\mathscr{U}$.

Luego, enunciamos el teorema de A. H. Stone que nos sirvió de motivación al inicio de esta sección.

Teorema C.1.7. Todo espacio métrico es paracompacto.

Finalmente enunciamos un resultado que será de vital importancia para ver que todo espacio paracompacto que no contiene subespacios discretos de cardinalidad medible es realcompacto.

Teorema C.1.8. Todo espacio paracompacto es normal.

C.2. Espacios metacompactos

En la sección C.1. introdujimos los espacios paracompactos: un espacio paracompacto es aquel en el cual toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto localmente finito, en general, si sustituimos la condición de ser localmente finito y ponemos la condición de ser punto finito, obtenemos la siguiente definición:

Definición C.2.1. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es metacompacto si toda cubierta abierta admite un refinamiento abierto punto finito.

Como resultado inmediato de la definición obtenemos el siguiente teorema:

Teorema C.2.2. Todo espacio topológico paracompacto es metacompacto.

Finalmente, demostraremos que todo espacio metacompacto es θ-refinable.

Teorema C.2.3. Todo espacio metacompacto es θ-refinable.

Demostración. Sea X un espacio metacompacto y sea $\mathscr{C}$ una cubierta abierta de X. Como X es metacompacto, existe un refinamiento abierto punto finito $\mathscr{V}$ de $\mathscr{C}$. Como $\mathscr{V}$ es una colección punto finita, por la Definición C.1.3. para cada $x \in X$, $|\{V \in \mathscr{V} : x \in V\}| < \aleph_0$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos $\mathscr{V}_i = \mathscr{V}$. Entonces $\{\mathscr{V}_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de X tales que cada una es un refinamiento de $\mathscr{C}$ y para cada $x \in X$, existe $i_x \in \mathbb{N}$ tal que $|\{V \in \mathscr{V}_{i_x} : x \in V\}| < \aleph_0$.

Por lo tanto, usando la Definición 4.2.19. concluimos que X es θ-refinable.

■

Bibliografía

[1] Porter, J.R., Woods, R.G., *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer-Verlag, U.S.A., New York, 1988.

[2] Engelking, Ryszard., *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[3] Casarrubias Segura Fidel, Tamariz Mascarúa Ángel., *Elementos de Topología General*, México: Instituto de Matemáticas, UNAM; 2015.

[4] Gillman, Leonard., Meyer, Jerison., *Rings of Continuous Functions*, D. Van Nostrand Company, Inc, U.S.A., New York, 1960.

[5] Willard, Stephen., *General Topology*, Reading, Mass. :Addison-Wesley Pub. Co., 1970.

[6] W. W. Comfort., *On the Hewitt realcompactification of a product space*, Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968), 107-118. MR 222846, DOI 10.1090/S0002-9947-1968-0222846-1