



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA**

---

**“MECANISMOS INERCIALES, VISCOELÁSTICOS Y DEL SOLVENTE  
APLICADOS A LA DESCRIPCIÓN DEL FLUJO PULSÁTIL EN UN LÍQUIDO DE  
JEFFREYS”**

**TESIS**

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERA QUÍMICA**

**PRESENTA:**

**NADYA ADELA ESTRADA LUGO**

**DIRECTOR DE TESIS**

**DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA**

**ASESORES**

**DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA**

**M.C. LUIS ANTONIO RAMIREZ TORRES**

**MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO 07 DE FEBRERO DEL 2023**



**FES  
ZARAGOZA**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN  
ESCOLAR  
PRESENTE**

Comunico usted que la alumna Nadya Adela Estrada Lugo con número de cuenta (417132811) de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado en el mes de febrero de 2023 para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)
Secretario:	Dr. Fausto Calderas García
Suplente:	M.C. Doctorante Luis Antonio Ramírez Torres
Suplente:	Dra. Guadalupe Salinas Juárez

El título de la tesis que se presenta es: “Mecanismos inerciales, viscoelásticos y del solvente aplicados a la descripción del flujo pulsátil en un líquido de Jeffreys”

Opción de Titulación:	Tesis convencional
Director de tesis:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Asesor de tesis:	Dr. Fausto Calderas García
Asesor de tesis:	M.C. Doctorante Luis Antonio Torres Ramírez

## AGRADECIMIENTOS

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM <<IN102823>> <<Modelado Matemático Y Simulación Computacional De Fluidos Complejos Con Aplicación A Bioingeniería >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte L7 PP (UMIEZ) por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación en Reología y Fenómenos de Transporte de la UMIEZ por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la línea de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415) del Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia, por todas las observaciones realizadas a este trabajo de investigación.
- A la línea de investigación: Reología Teórica y Experimental de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619), del Dr. Fausto Calderas García por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la carrera de Ingeniería Química de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- Facultad de Estudios Superiores Zaragoza agradezco mi gran universidad que me abrió las puertas al conocimiento, a un sin fin de gratas experiencias, dónde me permitió conocer a mis grandes profesores y a mis mejores amigos hoy colegas. Mi universidad donde pude adquirir grandes conocimientos para mi desarrollo profesional.

## **DEDICATORIA.**

A mis amados padres, Felipe y Veronica, a quienes les agradezco todo, quienes con su amor y dedicación me llenaron de fuerza e inspiración para forjarme y no permitir que me rindiera con cada palabra de aliento que me brindaban, convirtiéndose en mi mejor apoyo y pieza fundamental de este éxito.

A mi hermano y hermanas, Diego, Marilyn y Vero, quienes me han ofrecido sus mejores consejos y sobre todo me brindaron apoyo incondicional, siendo fuente de gran inspiración con el ejemplo que cada uno me da, convirtiéndose en un gran soporte para continuar con mis proyectos.

A mi Luisito, mi gran amor, quien ha hecho de este ciclo una maravillosa etapa, dándome fuerza y aliento para enfrentar y lidiar con cada momento, que con su amor y cariño me ha llenado de inspiración para ser mi mejor versión dentro y fuera de la universidad.

A mi fiel compañero Titch, que cada día en el que yo estudiaba estuvo ahí, especialmente en días de desvelos haciendo de esos momentos menos densos con su inocencia y contagiando su alegría en mi.

A mi asesor, el Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia, quien confió en mí, que con su dedicación, paciencia y gentileza me ha instruido a lo largo de este proyecto, quien me compartió grandes lecciones académicas y valiosas enseñanzas de vida.

A mis amigos y compañeros, quienes hicieron de mi estancia en la universidad una etapa memorable.

A mis sinodales, quienes me brindaron el espacio, atención y apoyo dentro del laboratorio de reología de fenómenos de transporte L7 PP (UMIEZ).

A Dios, la vida y el universo, por todo lo que me ha dado, por bendecirme con personas tan maravillosas y darme fuerza y sabiduría para llegar a donde he llegado.

## Nomenclatura

### Vectores y tensores

$\sigma$	Tensor de esfuerzo viscoelástico [Pa]
$V$	Vector de velocidad [m/s]
$G$	Vector de aceleración de la gravedad [m/s <sup>2</sup> ]

### Variables dimensionales

$a$	Radio del capilar [m]
$C$	Constante de integración [1]
$L$	Longitud del capilar [m]
$Q$	Flujo volumétrico [ m <sup>3</sup> ]
$r$	Coordenada radial [m]
$t$	Tiempo [s]
$V_z$	Velocidad axial [ m s <sup>-1</sup> ]

### Variables adimensionales: letras griegas

$(r, \phi, z)$	Coordenadas cilíndricas [m, 1, m]
$Q(t)$	Velocidad del flujo volumétrico [ m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup> ]
$\rho$	Densidad [Kg/m <sup>3</sup> ]
$\dot{\gamma}$	Rapidez de deformación [1/s]
$\lambda_0$	Tiempo de relajación de Maxwell [s]
$\lambda_j$	Tiempo de Jeffreys [s]
$\eta_s$	Viscosidad del solvente [Pa· s]
$\eta_p$	Viscosidad del polímero [Pa · s]
$\eta_0$	Viscosidad Total [Pa · s]

### Operadores Matemáticos

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$	Operador Nabla [1/m]
$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla$	Derivada material [1/s]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]

### Números adimensionales

Deborah [1]

$\lambda_J$  Jeffreys [1]

### Variables adimensionales

$\beta$  Parámetro beta [1]

$T(i\omega)$  Función de transferencia compleja [1]

$\dot{O}'_n$  Operador viscosidad de Jeffreys [1]

$\dot{\omega}$  Frecuencia adimensional con un tiempo [1]

$\dot{O}'_n(i\omega)$  Operador viscosidad de Jeffreys [1]

## **Glosario**

Deformación:	Es el cambio de la posición de una coordenada de un sistema con respecto a otra coordenada.
Esfuerzo:	Es la fuerza tangencial aplicada a una determinada área
Esfuerzo en la pared:	Es el esfuerzo cortante evaluado en la frontera del sistema (pared).
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (rapidez de deformación y esfuerzo).
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley de Newton aplicada a un medio contino.
Ecuación de Hagen y Poiseuille:	Es la ecuación que relaciona el flujo volumétrico con el gradiente de presión.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Fluido:	Es aquel sistema físico que al aplicársele un esfuerzo cortante este se deforma continua e irreversiblemente.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante, independiente de la posición y del tiempo.
Fluido newtoniano:	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
Fluido no-newtoniano:	Fluido que su viscosidad depende de la rapidez con la que es deformado.
Fluido viscoelástico:	Es aquel fluido que tiene una contribución viscosa y otra elástica.
Flujo volumétrico:	Volumen de fluido que pasa por unidad de tiempo.
Flujo oscilatorio:	Es el flujo que se origina cuando una fuerza periódica lo deforma continua e irreversiblemente.
Flujo cortante:	Flujo en el cual una fuerza tangencial deforma continua e irreversiblemente.

Flujo pulsátil:	Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.
Función de transferencia:	Función que relaciona la variable de entrada y la variable de salida en un sistema dinámico.
Función estocástica:	Función probabilística que evoluciona en el tiempo.
Gradiente:	Operador matemática espacial que físicamente describe los cambios de la propiedad respecto al espacio.
Modelo de Jeffreys:	Ecuación reológica viscoelástica lineal que acopla en paralelo la contribución del esfuerzo del solvente y el esfuerzo del polímero.
Modelo de Maxwell:	Ecuación constitutiva que describe el estado viscoelástico de un sistema en el régimen de rapidezces de deformación bajas (viscoelasticidad lineal).
Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido.
Sangre:	Fluido biológico conformado por un solvente el cual es el plasma y un polímero que es el hematocrito.
Número de Reynolds:	Número adimensional que relaciona los mecanismos inerciales entre los mecanismos viscosos y describe las transiciones de flujo laminar a turbulento en un sistema físico.
Perfil de velocidad:	La distribución de las velocidades dentro de un sistema en función de la coordenada radial.
Rapidez de deformación:	Es la derivada temporal de la deformación de un fluido.
Reología:	Ciencia que estudia la deformación y el flujo de materia cuando es sometida a un esfuerzo.
Tensor de esfuerzos:	Es una matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en el cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control.
Tiempo de relajación:	Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo de deformación.
Tiempo de retardo:	Es el tiempo que le lleva al sistema para alcanzar un estado de equilibrio y que depende de la razón entre la viscosidad del solvente y viscosidad total del sistema (polímero +solvente).

- Velocidad promedio: Es la velocidad axial promedio a través del área de sección transversal de flujo.
- Viscoelasticidad lineal: Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta respuestas viscosas y elásticas.
- Viscoelasticidad no lineal: Es la región a medias y altas deformaciones, en donde el fluido presenta respuestas viscosas y elásticas.
- Viscosidad: Es una medida de la resistencia a fluir de un material.

<b>INDICE</b>	
<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	ii
<b>DEDICATORIA</b> .....	iii
<b>RESUMEN</b> .....	1
<b>CAPITULO I. INTRODUCCIÓN</b> .....	2
1.1 Preliminares.....	3
1.2 Fluido newtoniano.....	3
1.3 Fluidos no-newtonianos.....	3
1.4 Velocidad de fase y velocidad de grupo.....	4
1.5 Definición de flujo pulsátil.....	5
1.6 Permeabilidad estática y dinámica.....	5
1.7 Antecedentes.....	7
1.8 Hipótesis.....	13
1.9 Objetivos de la investigación:.....	14
<b>1.9.1 General</b> .....	14
<b>1.9.2 Particulares</b> .....	14
1.10 Distribución del material.....	14
1.11 Diagrama de bloques.....	16
<b>CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO</b> .....	17
2.1. Fluido Newtoniano en un capilar de radio $r=a$ y $z=L$ .....	18
2.2 Razonamiento matemático.....	19
2.3 Ecuaciones teóricas.....	19
<b>2.3.1 Ecuación de continuidad</b> .....	19
<b>2.3.2 Ecuación de movimiento</b> .....	20
<b>2.3.3 Perfil de velocidades</b> .....	21
<b>2.3.4 Cálculo de la presión en el sistema</b> .....	22
<b>2.3.5 Flujo Volumétrico</b> .....	24
2.4. Flujo volumétrico de un fluido Newtoniano en una corona circular.....	25
2.5 Razonamiento matemático.....	26
<b>2.5.1 Flujo Volumétrico</b> .....	28
2. 6 Ecuación constitutiva de Jeffreys (deducción).....	30
<b>2.6.1 Definiendo las variables físicas implicadas</b> .....	31
<b>CAPÍTULO III. MODELADO MATEMÁTICO</b> .....	33
3.1 Modelado matemático del modelo viscoelástico lineal.....	34

<b>3.1.1 Función de transferencia de un fluido viscoelástico lineal en un capilar</b> .....	34
3.2 Transformada de Fourier .....	36
<b>3.2.1 Cálculo de perfil de velocidades</b> .....	36
<b>3.2.2 Cálculo de las condiciones de frontera para un tubo</b> .....	39
<b>3.2.3 Flujo volumétrico.</b> .....	40
3.3 Fluido viscoelástico en una corona circular.....	43
3.4 Modelado matemático .....	43
<b>3.4.1 Perfil de velocidades de una corona circular</b> .....	44
<b>3.4.2 Flujo volumétrico</b> .....	46
<b>CAPÍTULO IV. VARIABLES, GRUPOS Y ECUACIONES ADIMENSIONALES ..</b>	<b>50</b>
4.1 Variables adimensionales .....	52
4.2 Grupos adimensionales.....	53
4.3 Ecuaciones adimensionales .....	53
<b>4.3.1 Ecuaciones adimensionales capilar</b> .....	53
<b>4.3.2 Variables adimensionales de corona circular</b> .....	54
<b>CAPÍTULO V. SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE RESULTADOS .....</b>	<b>55</b>
5.1 Modelo newtoniano de un capilar.....	56
5.2 Modelo viscoelástico de un capilar.....	57
<b>5.2.1 Con efecto de la viscoelasticidad</b> .....	57
<b>5.2.2 Con efecto del solvente <math>\lambda J</math></b> .....	61
5.3 Modelo viscoelástico de una corona circular.....	65
<b>5.3.1 Con efecto de la viscoelasticidad</b> .....	65
<b>5.3.3 Con efecto de la geometría</b> .....	71
5.4 Conclusiones. ....	76
5.5 Trabajo futuro.....	84
<b>Bibliografías</b> .....	<b>85</b>

## **RESUMEN**

En esta investigación se analiza el flujo de un líquido viscoelástico (modelo de Jeffrey) fluyendo en geometrías cilíndricas. En particular, contiene como casos particulares a los modelos de Maxwell, Kelvin Voigt y Newton. Suponiendo estado no estacionario, fluido incompresible, proceso isotérmico, efectos gravitacionales despreciables y que el líquido se deforma continua e irreversiblemente por un gradiente de presión transitorio se obtuvieron expresiones analíticas para el perfil de velocidades, esfuerzo en la pared, función de transferencia y función de transferencia compleja la cual relaciona el esfuerzo en la pared y flujo volumétrico. Se obtuvieron simulaciones para la parte real, parte imaginaria y la norma de la función de transferencia compleja. La parte real despliega las clásicas curvas resonantes y picos secundarios controlados por las propiedades viscoelásticas del material. La parte imaginaria describe las clásicas curvas anti-resonantes tipo dientes de sierra descritas en la literatura. Los mecanismos resonantes están dominados por las fuerzas viscosas, viscoelásticas, solvente y dispersivas asociadas a las diferencias a la velocidad de fase y la velocidad de grupo. Finalmente se obtienen predicciones para un líquido viscoelástico biológico (sangre con colesterol alto) y se mencionan las principales características para que se den las curvas resonantes. Este trabajo representa un paso más en la búsqueda de alternativas amigables basadas en bioingeniería y que puedan ser empleadas como una alternativa para enfermedades emergentes.

**Palabras claves.** Fluidos viscoelásticos, modelo de Jeffrey, función de transferencia, transformada de Fourier, operador reológico, sangre humana, hipercolesterolemia.

## CAPITULO I. INTRODUCCIÓN



*Ilustra la relación del gradiente de presión (variable de entrada) y flujo volumétrico (variable de salida) en estado dinámico*

## **1.1 Preliminares**

A lo largo de este capítulo se darán a conocer los elementos necesarios para introducir al lector a los temas tratados en este trabajo a nivel licenciatura. Donde en el punto 1.2 se desarrolla brevemente los fluidos newtonianos seguido del punto 1.3 donde se tratan los fluidos no newtonianos cuya característica principal radica en la variación de su densidad. En el punto 1.4 se desarrolla la velocidad de fase y velocidad de grupo, mismos que se relacionan directamente con la disipación del comportamiento del fluido. Siguiendo con el desarrollo de este capítulo en el punto 1.5 se plantea el flujo pulsátil reflejando un cambio mediante un gradiente de presión con el fin de obtener una modificación en el flujo volumétrico con respecto a dicho gradiente de presión. En el punto 1.6 se desarrolla la permeabilidad intrínseca para fluidos newtonianos seguido de la permeabilidad real, para fluidos viscosos. En la sección 1.7 se establecen puntos que anteceden a este trabajo. En el 1.8 se desarrolla la hipótesis de este trabajo para posteriormente en el 1.9 definir los objetivos de esta investigación. Finalmente se establece en el 1.10 la distribución que se consideró para el desarrollo de este trabajo a nivel licenciatura.

## **1.2 Fluido newtoniano.**

Un fluido newtoniano es un fluido en el que el deslizamiento relativo de los elementos del fluido a medida que se mueven entre sí es proporcional al esfuerzo cortante del fluido (**González-Guillen 2022**). Fluidos tales como los gases, agua líquida y los líquidos conformados por moléculas simples (amoníaco, alcohol, benceno, queroseno, cloroformo, butano, etc.) hacen referencia a fluidos newtonianos (**González-Guillen 2022**). Cuando existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante aplicado y la velocidad de deformación nos referimos a la ley de Newton misma que es aplicada a un fluido newtoniano (**González-Guillen 2022**).

## **1.3 Fluidos no-newtonianos**

A diferencia de los fluidos newtonianos, la relación entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación resulta no lineal para fluidos no-newtonianos, esto quiere decir que en dichos fluidos no hay presencia de proporcionalidad entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación (**González-Guillen 2022**). Otra característica de estos fluidos son las diferentes propiedades, la más característica de estos es la elasticidad (**González-Guillen 2022**). Algunos ejemplos de estos fluidos son: suspensiones densas, lodos, lodos, emulsiones,

soluciones de polímeros de cadena larga, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pinturas, entre otros (**González-Guillen 2022**). La elasticidad es una de las principales características de los fluidos no newtonianos, aunado a esto encontramos los fluidos viscoelásticos los cuales se caracterizan por tener un comportamiento disipativo, como la viscosidad, y una propiedad capaz de restablecer el fluido ante ciertos esfuerzos. Uno de los modelos más simples de fluidos viscoelásticos es el llamado modelo de Maxwell (**del Río et al 2002**).

#### 1.4 Velocidad de fase y velocidad de grupo

La dispersión se define como la propiedad que hace que la velocidad de propagación de una onda superficial dependa de su frecuencia o período. Las ondas superficiales se dispersan debido a las profundidades de desplazamiento alcanzadas en diferentes períodos de tiempo (**Aguilar-Velázquez 2018**). La dispersión en ondas superficiales se debe a la profundidad con la que se desplazan las ondas en distintos periodos, donde su velocidad de propagación será mayor cuando haya mayor profundidad de dispersión (**Aguilar-Velázquez 2018**). El comportamiento dependiente entre la frecuencia o el período de la velocidad se muestra en la curva de dispersión (**Aguilar-Velázquez 2018**). Dentro de la dispersión se encuentran dos tipos de curvas: velocidad de grupo o velocidad de fase (**Aguilar-Velázquez 2018**). Donde específicamente la velocidad de grupo  $V_g$  se define como la velocidad a la que viaja una onda, misma que actúa como envolvente de otro grupo de ondas portadoras (**Aguilar-Velázquez 2018**). Estas ondas portadoras cubiertas por el envolvente se desplazan a una velocidad  $V_f$ , mejor conocida como velocidad de fase (**Aguilar-Velázquez 2018**).

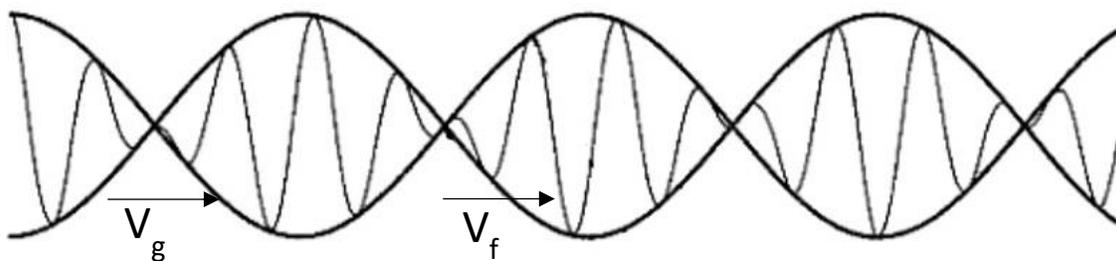


Figura 1.1. Representación esquemática del movimiento de una onda que fluye a tiempos diferentes, donde  $V_g$  ilustra la velocidad de grupo y  $V_f$  la velocidad fase.

La expresión matemática que describe la velocidad de fase se escribe de la siguiente forma:

$$V_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (1.1)$$

Por otro lado, la velocidad de grupo queda expresada de la siguiente manera:

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}} \quad (1.2)$$

### 1.5 Definición de flujo pulsátil

El estudio de la reología de sistemas pulsátiles ha sido un tema recurrente en la investigación en fluidos newtonianos y no-newtonianos (**Bird et al. 1977**). La idea principal es la de modificar el gradiente de presión con el fin de obtener una modificación en el flujo volumétrico con respecto a aquel gradiente de presión constante (**Herrera-Valencia et al. 2014, 2017, 2019; Del Rio et al. 1998**). La Ecuación básica para describir el flujo pulsátil está dada en términos de una exponencial compleja:

$$\nabla p(t) = \nabla p_0 \text{Exp}(i\omega t) \quad (1.3)$$

La Ec. (1.3) representa el gradiente de presión oscilatorio en función del tiempo,  $\omega$  es la frecuencia angular,  $t$  es el tiempo del sistema. La meta es observar cual es el efecto de la Ec. (1.3) en el flujo volumétrico (**Herrera-Valencia et al. 2014, 2017, 2019; Del Rio et al. 1998**).

Este trabajo de licenciatura versa en el estudio de flujo pulsátil en fluidos no newtonianos en el régimen de viscoelasticidad lineal con inercia modelados con la ecuación constitutiva de Jeffrey, la cual acopla la contribución del solvente y la del polímero. El objetivo fundamental de esta investigación de licenciatura es deducirá una expresión analítica en estado transitorio del flujo pulsátil de un líquido viscoelástico fluyendo en geometrías cilíndricas (capilar de radio  $r=a$  y longitud  $z=L$ , y corona circular de radios  $R_1=R_2$  y longitud  $z=L$ ), mediante el concepto de función de transferencia compleja.

### 1.6 Permeabilidad estática y dinámica.

La permeabilidad estática es una medida de la resistencia que presenta un fluido a ser deformado continua e irreversiblemente a través de un medio (**del Rio 2002**). En el caso de la permeabilidad estática, esta depende exclusivamente de la porosidad y del radio del tubo, de la siguiente manera:

$$K = \frac{\epsilon_0 a^2}{8} \quad (1.4)$$

En la ecuación de la permeabilidad  $\epsilon_0$  es la porosidad del material,  $a$  es el radio promedio del poro. En esta aproximación se supone que todos los orificios tienen el mismo diámetro.

Es claro que, la permeabilidad intrínseca no depende del fluido y solamente de características geométricas del medio (**del Rio 2002**). Por otra parte, la permeabilidad de Darcy o real depende del fluido. Para un fluido newtoniano con inercia

$$K = \frac{\varepsilon_0 a^2}{8} \cdot \frac{8i^2}{(\beta a)^2} \left[ 1 - \frac{2J_1(\beta a)/(\beta a)}{J_0(\beta a)} \right] \quad (1.5)$$

Es obvio, que la permeabilidad dinámica o de Darcy contiene como caso especial la permeabilidad estática o intrínseca y depende del parámetro beta. Este parámetro tiene unidades de inverso de longitud y es una medida de las propiedades dispersivas del medio (**Herrera-Valencia et al. 2022**). Para un fluido newtoniano el parámetro beta, es función de la frecuencia y se puede expresar de la siguiente manera:

$$\beta a = i^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\rho a^2}{\mu}} \omega \quad (1.6)$$

Es claro que para un fluido newtoniano el parámetro beta depende de la densidad, del radio del capilar y la viscosidad del medio (**Herrera-Valencia et al. 2022**). Para un fluido viscoelástico, será función del modelo constitutivo con el que se esté caracterizando el flujo y la reología del sistema.

$$\beta = i^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\rho a^2}{\eta_0}} \omega O_{\phi}^x \quad (1.7)$$

En donde x representa el nombre l ecuación constitutiva que se esté empleando ejemplo M, Maxwell, J Jeffreys, K Kelvin-Voigt.

En la ecuación anterior. El parámetro beta depende de la ecuación constitutiva que se esté utilizando para caracterizar el líquido complejo, es decir:

$$O_{\phi}^x = \frac{1}{O_{\eta}} \quad (1.8)$$

El operador fluidez es el inverso del operador viscosidad y depende de la derivada temporal del sistema (**Herrera-Valencia et al. 2022**). Ejemplo de esto, el modelo de Maxwell cuyo operador, sería el siguiente:

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} = \eta_0$$

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma = \eta_0 \dot{\gamma}$$

$$\frac{\sigma}{\dot{\gamma}} = O_\eta^M = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\frac{\sigma}{\dot{\gamma}} = O_\eta^M = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 Dt} \quad (1.9)$$

transformando el operador viscosidad de Maxwell mediante el formalismo de Fourier se reduce a:

$$\frac{\sigma}{\dot{\gamma}} = O_\eta^M = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 i\omega} \quad (1.10)$$

Las ecuaciones que se han deducido en esta subsección son punto de partida en este trabajo de investigación y versan sobre la permeabilidad dinámica de fluidos complejos en diferentes situaciones de flujo o bilógicas. En particular, en este estudio se caracterizará el flujo y la reología mediante el modelo constitutivo de Jeffrey (**Herrera-Valencia 2022**). Este modelo acopla la contribución del solvente y la contribución del polímero.

$$O_\eta^J(Dt) = \eta_0 \frac{1 + \lambda_J Dt}{1 + \lambda_0 Dt} \quad (1.11)$$

La ecuación anterior es el operador de Jeffrey el cual es el punto de partida del trabajo de tesis y será escalado para encontrar los respectivos grupos adimensionales que describan las fuerzas macroscópicas que describen al sistema. Este modelo será utilizado en las dos configuraciones antes descritas que son capilar y corona circular (**Herrera-Valencia 2022**).

## 1.7 Antecedentes

La mayoría de los trabajos en permeabilidad dinámica se han centrado en el estudio de medios porosas (**del Rio y de Haro 1988**). Estos trabajos describen la permeabilidad dinámica en medios porosos y su aplicación en sangre fresca humana (**del Rio y de Haro 1988**). Por otra parte, estudiaron la permeabilidad dinámica del flujo de un líquido viscoelástico en micro-canales. Ellos encontraron que esta herramienta sirve para caracterizar el flujo en micro-dispositivos y que aplicando la condición de no deslizamiento esta falla, en el orden de nanómetros entre la interfase del sólido y líquido. De igual manera **Castro M. et al (2008)**, llevaron a cabo el estudio la caracterización de la permeabilidad dinámica de fluidos en micro-canales **Bravo Gutiérrez et al. (2008)**; **Hernández-Machado y Corvera-Poire (2008)**. En contribución al estudio de las respuestas dinámicas, específicamente en fluidos newtonianos y maxwellianos **Castrejón-Pita et al. (2003)** plantean la respuesta de

dichos fluidos respecto a la parte dinámica de tal fluido. Siguiendo con el análisis de fluidos en micro-canales se consideró el estudio de **Corvera E. y Hernández E. (2010)** donde lleva a cabo la estratificación inducida por frecuencia en micro-fluidos viscoelásticos. Por otra parte, **Cuevas y del Rio (2001)** llevó a cabo el estudio la permeabilidad dinámica dentro de fluidos conductores eléctricos en bajos campos magnéticos en conductores anulares.

**Herrera Valencia et al. (2022)** estudió las oclusiones centrales y periféricas mediante una modificación a la permeabilidad dinámica. Ese trabajo consistió en utilizar la función de transferencia que es una generalización de la permeabilidad dinámica, la cual describe la variable de entrada gradiente de presión y la variable de salida flujo volumétrico en función de las propiedades materiales del fluido **Herrera Valencia et al. (2022)**. Para caracterizar el flujo y la reología del sistema de estudio **Herrera Valencia et al. (2022)** propuso un modelo multimodal de Maxwell de tres modos. Ellos demostraron que en oclusiones periféricas el sistema muestra un pico resonante asociado con el tiempo reométrico de **Maxwell**, mientras que para una frecuencia crítica él es dominado por un tren de picos secundario-asociados a la distribución de tiempos en el sistema de estudio **Herrera Valencia et al. (2022)**. Es claro que, en las oclusiones centrales, el efecto de la geometría juega un papel preponderante. El concepto de función de transferencia compleja ha sido utilizado para estudiar la respuesta dinámica oscilatoria en fluidos electro-reológicos que permiten escribir la flexo-electricidad de las células ciliadas externas que son dispositivos biológicos que amplifican el sonido en el oído humano (**Abou-Dakka et al.2012; Herrera-Valencia 2014, 2018**).

El modelo desarrollado por **Abou-Dakka et al. (2012)** acopla dos fases viscoelásticas y una fase sólida-elástica. Ellos demostraron que para que haya resonancia debe de haber un contraste entre las fases líquidas, la membrana sólida flexo eléctrica debe ser deformable bajo un campo eléctrico y finalmente se necesita la máxima viscosidad de los fluidos para que el dispositivo pueda amplificar el sonido, este modelo es un oscilador armónico forzado que es simétrico matemáticamente en la parte de la curvatura promedio y del campo eléctrico (**Abou-Dakka et al. 2012**). En este trabajo los mecanismos inerciales no son incluidos, es decir estamos en el régimen de bajos números de Reynolds (**Abou-Dakka et al. 2012**).

**Herrera Valencia y Rey (2014)** abordaron el mismo problema incluyendo los mecanismos inerciales. Estos mecanismos inerciales permiten obtener funciones de Bessel las cuales depende de un parámetro beta que puede ser considerado como un vector de onda que se

propaga en el medio, este parámetro beta depende del número adimensional de Deborah que es una relación entre los mecanismos inerciales y los mecanismos viscoelásticos, depende de la inercia y del operador fluidez que está determinado por la ecuación constitutiva de Maxwell (**Herrera Valencia y Rey 2014**). En este trabajo ellos proponen un modelo mecánico que describa al fluido a través de resortes, que está interpretado mediante un émbolo. Por otra parte, aplicando el formalismo de Fourier ellos deducen una expresión analítica para la función de transferencia, la cual presenta varios picos resonantes y anti-resonantes secundarios. Ellos describen todo el proceso global a través de un diagrama de bloques (**Herrera Valencia y Rey 2014**).

**Herrera Valencia y Rey (2018)** estudiaron el mismo modelo, pero, incorporando los efectos o mecanismos del solvente (newtoniano) con la ecuación constitutiva que describe el flujo y la reología del sistema de estudio. Los resultados mostraron que al aumentar el solvente la resonancia decrece (**Herrera Valencia y Rey 2018**). Con este modelo propuesto se expande el espacio de números adimensionales de 4 a 7 en donde el efecto del solvente está determinado por un cociente entre la viscosidad del fluido newtoniano entre la viscosidad total (**Herrera Valencia y Rey 2018**).

Por otra parte, en la mayoría de los fluidos se ha asumido la hipótesis de incompresibilidad, es decir que la densidad es constante, que no dependen de la posición y del tiempo (**Lombard et al. 2020**). En este estudio ellos presentan un modelo viscoelástico en donde la densidad es variable. En este trabajo ellos caracterizan el fluido en dos geometrías diferentes, capilar y corona circular, el modelo que implementan para describir la transferencia de momento en el sistema es el modelo de Maxwell (**Lombard et al. 2020**). Una de las aplicaciones más importantes de la permeabilidad dinámica en fluidos viscoelásticos es la relacionada con los medios porosos **de Haro et al. (1996)**, ellos trabajaron la permeabilidad estática y dinámica con la teoría del poro promedio. La permeabilidad estática es aquella que no depende del fluido y solo de las características de medio, mientras que la permeabilidad dinámica depende tanto del medio y del fluido. Para caracterizar el gradiente de presión ellos proponen un tren gaussiano de pulsos y una serie de Fourier (**de Haro et al. 1996**).

Todos los trabajos antes mencionados invocan la hipótesis de no deslizamiento en la pared, es decir no invoca la hipótesis de no deslizamiento en la pared. Sin embargo, este autor

**Muralevla (2021).** Estudia la resonancia en fluidos viscoelásticos tomando en cuenta el deslizamiento en la pared.

**Torres-Herrera (2021)** estudia la permeabilidad dinámica en rendijas y microcanales utilizando el concepto de permeabilidad dinámica en este trabajo utiliza la transformada integral Fourier, serie de Fourier, diferencias finitas y métodos asintóticos para deducir expresiones analíticas para la permeabilidad dinámica en dos dimensiones, es decir el efecto de la permeabilidad dinámica, es función de la geometría y de las propiedades viscoelásticas con las que se caracteriza el sistema (**Torres-Herrera 2021**). Este trabajo fue analizado a través de simulaciones graficas en comsol multifisic.

**Torres-Herrera y Corvea-Poiré (2018)** utiliza en microtubos los perfiles de velocidad a través de las frecuencias de vibración. En este trabajo obtienes presiones analíticas y numéricas para los perfiles de velocidad y flujo volumétrico en función de las propiedades inerciales, longitudes características, viscosidad de bulto, viscoelasticidad y fuerza motriz periódica (**Torres-Herrera y Corvea-Poiré 2018**). Su trabajo contribuye en obtener una expresión de permeabilidad más realista tomando en cuenta la geometría y que no se realiza ninguna aproximación geométrica (**Torres-Herrera y Corvea-Poiré 2018**).

**Torres Rojas et al. (2017)** estudia la resonancia en microtubos elásticos de fluidos no newtonianos. En particular ellos caracterizan la transferencia de momento en fluidos de Maxwell. En este trabajo ellos deducen dos expresiones analíticas para la resonancia del fluido y para a resonancia de la geometría en particular, la ecuación que describe la resonancia de la geometría es un oscilador armónico simple el cual depende de las propiedades del medio y las características de los tubos elásticos (en particular, las propiedades materiales como el modelo de Young, la longitud característica radia, axial, etc) (**Torres Rojas et al. 2017**).

**Tsiklauri y Beresnev (2006)**, estudian el efecto de la bomba en el flujo de líquidos viscoelástico fluyendo en tuberías en capilares. Su contribución resulta en un análisis de la forma de la onda asociada al flujo pulsátil con la que se caracteriza el gradiente de presión pulsátil.

Las aplicaciones de la permeabilidad son bastas, i.e., esta es una aplicación fundamental en la ciencia de la ingeniería química. Un ejemplo, es la de los medios porosos, aquí es de vital importancia la aplicación de la permeabilidad dinámica a fluidos

viscoelásticos lineales en donde, las deformaciones son pequeñas y el gradiente de presión es oscilatoria (**del Rio et al. 1998**).

Muchos autores han sugerido emplear la permeabilidad dinámica para describir la relación de la sangre en el sistema cardiovascular (**Del Rio et al. 1988**). Por ejemplo, la sangre es una suspensión que transporta por arrastre minerales y estos se adhieren a las paredes por efecto del calcio que se encuentra en las paredes. Este problema ocasiona obstrucciones llamadas oclusiones periféricas y centrales (**Corvera et al. 2010**). En este tipo de problemas, se utiliza sangre fresca y los datos experimentales se obtiene por mediciones reométricos. La investigación de **Corvera et al. (2010)** ilustra que, en las oclusiones centrales, la frecuencia característica para alcanzar el máximo es mayor y esto es un efecto geométrico.

Otras aproximaciones, han empleado venas elásticas para describir la resonancia de fluidos viscoelásticos. **Flores et al. (2010)** utilizaron la permeabilidad dinámica con el fin de obtener expresiones analíticas de la velocidad y el flujo volumétrico en función de las propiedades materiales. Además, desarrollan expresiones para calcular la permeabilidad dinámica en una red vascular (**Flores et al. 2010**).

Por otra parte, esta herramienta (Permeabilidad dinámica) ha sido utilizado, para describir la frecuencia cardiaca en mamíferos (**Corvera-Poire et al. 2016**). Esta herramienta sirvió para analizar la frecuencia cardiaca en diferentes mamíferos y su relación con las constricciones del sistema de estudio.

Por otra parte, algunos autores, han estudiado la elasticidad del fluido y de la geometría en términos de la permeabilidad dinámica y estos fenómenos están ligados a las propiedades del material que se esté analizando (**Flores et al. 2010**).

El flujo sanguíneo pulsátil en el árbol arterial sistémico se genera por la contracción del ventrículo izquierdo (VI). La onda del pulso se propaga en el árbol arterial distendiendo y contrayendo los vasos sanguíneos (p.ej, produce el pulso que se puede sentir en la muñeca) y produce cambios en la presión arterial y el flujo en el tiempo y el espacio (**Flores et al. 2010**). Estos cambios están determinados por las propiedades físicas del sistema cardiovascular, algunas de las cuales están alteradas por la enfermedad; p.ej, contracción del corazón, rigidez arterial y resistencia vascular periférica (**Flores et al. 2010**). Por lo tanto, las formas de los contornos de presión y flujo (también llamadas ondas de pulso) medidas en

un sitio arterial determinado contienen información valiosa sobre la funcionalidad del sistema cardiovascular (**Flores et al. 2010**). Sin embargo, aún no está claro cuál es el papel relativo de las propiedades físicas del corazón, las arterias grandes y los vasos sanguíneos más pequeños en la generación de ondas de pulso arterial en condiciones normales o con enfermedades como la hipertensión (**Flores et al. 2010**).

La descripción del flujo sanguíneo en un sistema cardiovascular representa un problema difícil y sólo parcialmente entendido. Debido a su importancia intrínseca, ha recibido mucha atención de ambos, el fisiológico y las comunidades de dinámica de fluidos. Los estudios tradicionales han considerado el flujo pulsátil de un fluido newtoniano a través de una red de vasos en el que la elasticidad de los vasos se ha tomado como punto clave en la descripción (**Zamir 1998; Flores et al. 2010**). Dichos estudios se refieren básicamente a la descripción de perfiles de velocidad. Entre estos estudios, se ha encontrado que la reflexión de ondas en el sistema cardiovascular puede mejorar, en lugar de impedir el flujo, y por lo tanto puede ser una razón para la naturaleza ramificada del árbol arterial (**Zamir 1998; Flores et al. 2010**).

Analizando un fluido newtoniano, el cual obedece a la hipótesis de Navier en microcanales sujetos a gradientes de presión no estacionarios. En particular, hemos calculado analíticamente la permeabilidad dinámica, que contiene la información de la respuesta del fluido a un gradiente de presión dinámico. Hemos encontrado que, en ausencia de deslizamiento, las permeabilidades dinámicas de dos micro canales obedecen a una relación de escala que se rompe cuando hay deslizamiento (**Castro 2007**).

Este resultado puede ser útil para determinar experimentalmente la ausencia o presencia de deslizamiento en un sistema (**Castro 2007**). Además, si existe un deslizamiento, esto podría proporcionar una forma de estimar experimentalmente la longitud del deslizamiento y probar la validez de la hipótesis de Navier en situaciones dinámicas (**Castro 2007**).

Sin embargo, y a pesar de todos los esfuerzos en la caracterización de estos sistemas en términos de la permeabilidad estática y dinámica existe una ausencia de modelos o de metodologías generales que permitan expandir este tipo de trabajos a modelos viscoelásticos lineales generalizados. Precisamente, esta investigación a nivel licenciatura tiene como

objeto cubrir estas deficiencias. Los puntos más destacados del mismo se mencionan a continuación:

a) se presenta una metodología general basada en un operador fluidez (inverso de la viscosidad que caracteriza el sistema y puede ser expandido a cualquier ecuación constitutiva lineal y fraccionaria desde el punto de vista de cálculo fraccional). Este modelo generaliza las propuestas escritas en los antecedentes

b) segundo para caracterizar la reología transferencia de momento y flujo se ocupa del modelo constitutivo de Jeffrey el cual toma en cuenta las contribuciones del solvente y las del polímero. este modelo contiene como casos particulares a: (i) Newton, (ii) Maxwell (iii) Kelvin-Voigt.

c) esta metodología permite contrastar los datos experimentales que se obtiene en flujo oscilatorio con el modelo multimodal de Maxwell y aplicado a diferentes patologías como: (i) hipercolesterolemia, (ii) cirrosis hepática, (iii) el estudio de la mucosidad en las vías respiratorias a través del estudio de la interfase gas-liquido en problemas de mucosidad en la garganta y patologías asociadas de los coronavirus sars-covd-2.

Finalmente, existe una gran discusión la literatura científica acerca de la permeabilidad dinámica, intrínseca de estos sistemas dinámicos lineales por lo que, es necesario responder acerca de esto. Debido a esto, se plantea la siguiente hipótesis la cual será debatida con el objetivo general y los particulares.

## **1.8 Hipótesis**

Si, el efecto de incorporar un ruido al gradiente de presión pulsátil modifica el flujo volumétrico pulsátil, entonces este cambio será cuantificable a través de la función de transferencia compleja, propiedades materiales y geométricas del medio a través de los mecanismos inerciales viscosos, viscoelásticos de bulto y geométricos del sistema. Para debatir esta hipótesis, se plantean los siguientes objetivos, los cuales son mencionados a continuación:

## **1.9 Objetivos de la investigación:**

### **1.9.1 General**

Analizar el efecto del gradiente de presión pulsátil sobre el flujo volumétrico de un líquido viscoelástico fluyendo en geometrías cilíndricas (capilar y corona circular), caracterizado por una ecuación constitutiva reológica que acople la contribución del esfuerzo del solvente y la del polímero (Jeffrey). Obtener la función de transferencia en el espacio de Fourier (compleja), que relacione el gradiente de presión (variable de entrada) con el flujo volumétrico (variable de salida), en función de los mecanismos inerciales, viscoelásticos y del solvente.

### **1.9.2 Particulares**

P.1: Obtener un modelo, una ecuación diferencial parcial que describa los cambios de la velocidad en función de los mecanismos inerciales viscoelásticos y del solvente asociado con el fluido

P.2: Aplicar el formalismo de Fourier para obtener la función de transferencia compleja que describa la relación entre las variantes de entrada (gradiente de presión) y las variables de salida (flujo volumétrico).

P.3: Obtener expresiones analíticas para la velocidad axial, flujo volumétrico, función de transferencia compleja

P.4: Programar los respectivos resultados teóricos en el lenguaje de Wolfram Mathematica (licencia UNAM) con el fin de simular la respuesta real e imaginaria de las dos geometrías estudiadas.

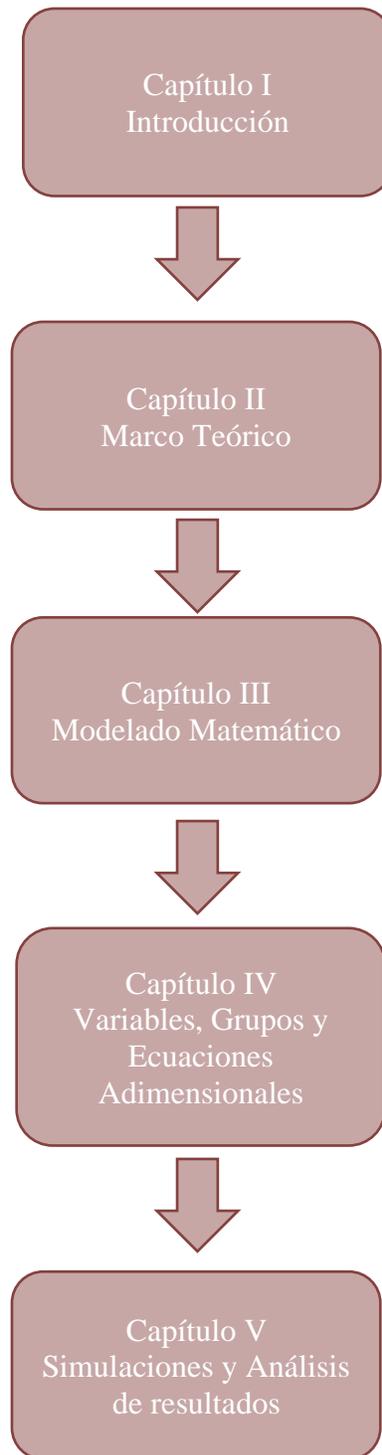
P.5: Aplicar los resultados teóricos a un fluido modelo.

### **1.10 Distribución del material**

Dentro del capítulo I se presenta las definiciones importantes de la función de transferencia, las aplicaciones más importantes y se analizan las investigaciones más importantes de estos sistemas, se presentan los antecedentes hipótesis y objetivos. En el capítulo II se deduce la ecuación de Hagen y Poiseuille para geometrías cilíndricas. Por otra parte, se deduce la ecuación constitutiva de Jeffrey y se analizan casos particulares de este modelo matemático. En la tercera sección se ilustra el problema físico junto con las

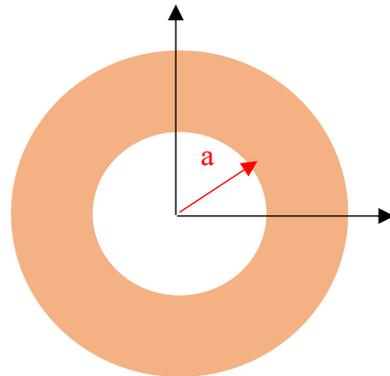
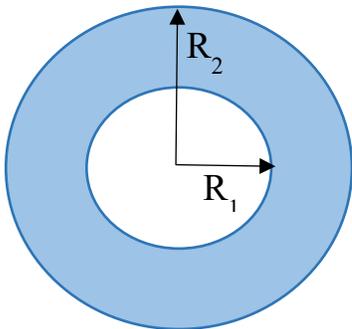
ecuaciones teóricas de continuidad, transporte y reológica. Se establecen las condiciones de frontera junto con las interpretaciones físicas. En el capítulo IV se presenta el modelado matemático en el cual se obtiene la generalización del capítulo II es decir, se analiza un fluido en estado no estacionario, viscoelástico y con contribución del solvente. En este sistema se obtienen expresiones cerradas para la velocidad en el espacio de Fourier y el flujo volumétrico en función de la frecuencia. Los resultados son expresados en termino de funciones de Bessel de orden cero y de primer orden. A partir de esto, se obtiene la función de transferencia que describe al sistema viscoelástico con interacciones entre el solvente y los mecanismos inerciales. Por último, se analiza de la misma manera la geometría de corona circular y se obtiene una expresión cerrada para la función de transferencia compleja del sistema de cilindros concéntricos. En el capítulo V se presentan las simulaciones y casos particulares de los modelos deducidos en los dispositivos de estudio. El primer caso es el newtoniano, seguido del modelo viscoelástico de Maxwell y finalmente el modelo de esta tesis Jeffreys. En el capítulo VI se dan las contribuciones al conocimiento, conclusiones y trabajo futuro. Finalmente, en los apéndices se presentan los pasos intermedios en las deducciones de las ecuaciones más importantes de este trabajo.

### 1.11 Diagrama de bloques.



*Figura 1.2. Ilustra el diagrama de bloques y la secuencia de esta tesis a nivel de licenciatura.*

## CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO



*Ilustra la geometría cilíndrica de un capilar ( $r = a$ ) y una corona circular ( $r = R_1 ; r = R_2$ ) sobre la que se desarrolla este trabajo de tesis nivel licenciatura.*

En este capítulo se presentarán los elementos mínimos que permitirán al lector entender las bases del presente trabajo a nivel licenciatura. En 2.1 se describirá la ecuación de Hagen y Poiseuille en un capilar de radio  $r=a$  y longitud  $z=L$  (Herrera Valencia et al. 2022). En la sección 2.2, se presentará la deducción del flujo de Poiseuille en una corona circular es decir dos tubos concéntricos de radio  $R1$  y  $R2$ , con  $R1 < R2$  y longitud  $z=L$  (Herrera Valencia et al. 2022). En 2.3 se presentará la deducción del modelo de Jeffreys y se analizaran diferentes casos asintóticos del mismo (Bird et al 1987; Bird et al. 2002; Macosko 1994).

### 2.1. Fluido Newtoniano en un capilar de radio $r=a$ y $z=L$

En esta sección se presenta el desarrollo para el cálculo del flujo volumétrico de un fluido newtoniano que fluye a través de un capilar, con un radio  $a$ . La longitud axial del capilar se representa con  $L$ . Se presenta el esquema del estudio.

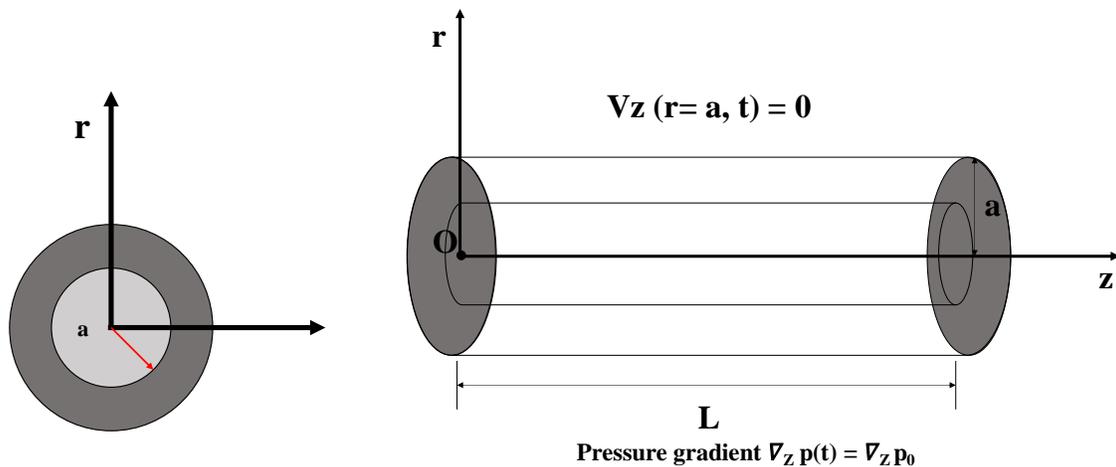


Figura. 2.1. Esquema de un flujo newtoniano, isotérmico e incompresible, en un capilar de radio( $a$ ) y Longitud ( $L$ )

Modelado matemático

- Flujo newtoniano.
- Estado estacionario.
- Incompresible
- Proceso isotérmico
- Simetría cilíndrica.

## 2.2 Razonamiento matemático

Para el razonamiento de este problema, en primer lugar, se planteó un modelado matemático al cual está sometido nuestro sistema. Partiendo de la ecuación de continuidad y aplicando el modelado matemático, llegamos a la conclusión de que la velocidad en el eje axial  $z$  y está en función del eje radial  $r$  (Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022). Una vez concluido lo anterior utilizando la ecuación de movimiento lagrangiana y al aplicarle el tensor de esfuerzos (ley de Newton generalizada) podemos llegar a las ecuaciones de Navier Stokes (Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022), para los diferentes componentes de las coordenadas cilíndricas, que expresan la rapidez de incremento de momentum de una partícula de flujo ( $\rho DV Dt$ ) igualadas a las fuerzas que actúan sobre el fluido, donde actúan la fuerza superficial dada por el gradiente de presiones, la viscosidad, la tensión superficial y las fuerzas volumétricas causadas por la gravedad. Aplicando la conclusión anterior  $V_z(r)$ , obtenemos una versión simplificada de la ecuación de Navier Stokes que solo está en función de  $r$  al resolver la ecuación diferencial obtenemos el perfil de velocidades que describe el comportamiento de la velocidad en nuestro sistema de estudio (Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022; Macosko 1994). Una vez obtenido el perfil de velocidades se procede a sacar el flujo volumétrico con una ecuación de flujo transformada por medio de una transformada jacobiana que dejara la expresión en coordenadas cilíndricas, al sustituir el perfil de velocidades en la expresión de flujo volumétrico para coordenadas cilíndricas y resolver la doble integral, obtenemos una expresión conocida como la ecuación de Hagen- Poiseuille (Herrera Valencia et al. 2022).

## 2.3 Ecuaciones teóricas.

### 2.3.1 Ecuación de continuidad

A partir de la ecuación de continuidad (Bird et al. 2002).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (2.1)$$

En la Ec. (2.1),  $\mathbf{V}$  es la velocidad del sistema. Desarrollando la divergencia del producto del campo escalar y vectorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (2.2)$$

Puesto que hablamos de un flujo incompresible.

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.3)$$

La Ec. (2.3) adquiere la siguiente forma.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho V r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V \theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V z) = 0 \quad (2.4)$$

El vector velocidad para este sistema está dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{V} (V_r, V_\theta, V_z) = (V_z(r, \theta, z, t)) \quad (2.5)$$

De la Ec. (2.5), se induce que las componentes radial y angular del vector velocidad son cero por lo que aplicando la Ec. (2.5) en la Ec. (2.4) se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} (V_z) = 0 \quad (2.6)$$

La Ec. (2.6) se reduce a la siguiente expresión

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow V_z \neq V_z(z) \quad (2.7)$$

Con base a la Ec. (2.7) podemos razonar que la velocidad ( $V_z$ ) no dependen del eje axial  $z$  y en base a la simetría cilíndrica del sistema, la velocidad no depende de  $\theta$ , también físicamente los perfiles de velocidad ya se encuentran desarrollados, no dependiendo del tiempo. Por ende, podemos concluir que la  $V_z$  solo depende del eje radial  $r$ .

$$V_z = V_z(r, \theta, z, t) = V_z(r) \quad (2.8)$$

$$V_z(r, \theta, z, t) \Rightarrow \text{No depende de } z, \theta \text{ y } t \quad (2.9)$$

### 2.3.2 Ecuación de movimiento

A partir de la ecuación de movimiento lagrangiana, obtenida por medio de un balance de movimiento de la ecuación Cauchy (**Bird et al. 2002**). La ecuación de movimiento Lagrangiana queda de la siguiente manera.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma + \rho g \quad (2.10)$$

La ecuación constitutiva del tensor de esfuerzos puede ser escrita de la siguiente manera, también conocida como la ley de Newton generalizada (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**).

$$\sigma = 2\mu D = \mu[\nabla V + (\nabla V)^T] \quad (2.11)$$

Sustituyendo la Ec. (11) en la Ec. (10)

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu[\nabla V + (\nabla V)^T]) + \rho g \quad (2.12)$$

Aplicando el modelado matemático de densidad y viscosidad constantes.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu[\nabla^2 V + \nabla(\nabla \cdot V)] + \rho g \quad (2.13)$$

En la Ec. (2.13) se utilizó la hipótesis que el proceso es isotérmico y por lo tanto la viscosidad no depende de la posición por lo tanto es constante y por linealidad sale del operador gradiente (**Bird et al. 2002**). Es importante notar, que el gradiente de la divergencia del campo vectorial es cero debido exclusivamente a que el fluido es incompresible y por lo tanto el campo de velocidades es solenoidal, es decir, su densidad no cambia.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho g \quad (2.14)$$

La Ec. (2.13) es la famosa ecuación de Navier-Stokes que es válida para un fluido newtoniano incompresible e isotérmico (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022**). La Ec. (2.13) es punto de partida para todos los desarrollos de este trabajo en particular, en este capítulo se aplicará a la descripción del flujo de Hagen y Poiseuille (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022**).

Al descomponer la Ec. (2.13) en las tres coordenadas cilíndricas se tiene la siguiente información (**Bird et al. 2002**).

Para el componente en r.

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \quad (2.15)$$

Para el componente en  $\theta$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + V_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \quad (2.16)$$

Para el componente en z

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (2.17)$$

### 2.3.3 Perfil de velocidades

Aplicando las restricciones en las Ecs. (2.15 a 2.17) con un flujo que se deforma de manera continua e irreversiblemente por un gradiente de presión en la dirección axial.

La Ec. (2.15) queda de la siguiente manera.

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \Rightarrow p = p(r) \quad (2.18)$$

La Ec. (16) adquiere la siguiente forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \Rightarrow p \neq p(\theta) \quad (2.19)$$

La ecuación del componente en z toma la siguiente forma. Puesto que el gradiente de presión solo depende de z.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \quad (2.20)$$

Puesto que se tiene derivada de presión en función de z y la derivada de Vz en función de r. La Ec. (2.20) se iguala una constante para desacoplar las ecuaciones diferenciales.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = \lambda \quad (2.21)$$

De la Ec. (2.21) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} &= \lambda \\ \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] &= \lambda \end{aligned} \quad (2.22)$$

### 2.3.4 Cálculo de la presión en el sistema

Resolviendo la ecuación diferencial, Ec. (2.20) por variables separables se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^{p_L} dp &= \int_0^L \lambda dz \\ p_{p_0}^{p_L} &= \lambda z \Big|_0^L \\ (p_L - p_0) &= \lambda (L - 0) \\ \frac{(p_L - p_0)}{L} &= \lambda \\ \frac{\Delta p}{L} &= \lambda \end{aligned} \quad (2.23)$$

Entonces nuestra Ec. (2.23) queda planteada de la siguiente manera

$$\frac{\Delta p}{L} = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \quad (2.23)$$

Resolviendo la ecuación diferencial a partir del método de variables separables.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{L\mu} &= \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) \\ \int \frac{\Delta p r}{L\mu} dr &= \int d \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) \\ \frac{\Delta p r^2}{2L\mu} + C_1 &= r \frac{dv_z}{dr} \\ \frac{\Delta p r^2}{2L\mu r} + \frac{C_1}{r} &= \frac{dv_z}{dr} \end{aligned}$$

$$\int \frac{\Delta p r}{2L\mu} dr + \int \frac{C_1}{r} dr = \int dV_z$$

$$\frac{\Delta p r^2}{4L\mu r} + C_1 \ln(r) + C_2 = V_z \quad (2.24)$$

La Ec. (24) describe el perfil de velocidades para un fluido newtoniano que se deforma en consecuencia de un gradiente de presiones (**Herrera Valencia et al. 2022**). Para encontrar las constantes, 1 y 2, establecimos las siguientes condiciones de frontera. La velocidad en los límites del capilar es cero (C.F.1) y la velocidad en el centro es la  $V_{\text{máx}}$ .

$$\text{C.F.1 } V_z(r=a)=0 \quad (2.25)$$

$$\text{C.F.2 } V_z(r=0)=V_{\text{máx}} \quad (2.26)$$

Aplicando las condiciones de frontera a la Ec. (2.24) se tiene lo siguiente.

$$\frac{\Delta p (0)^2}{4L\mu r} + (0) \ln(a) + C_2 = V_{\text{max}} \quad (2.27)$$

Puesto que en la Ec (2.21) tenemos un  $\ln(0) = -\infty$ , significando esto que la velocidad en el centro del tubo es infinita. Esto no tiene un sentido físico puesto que la velocidad en el centro la velocidad máxima y es finita (**Bird et al. 2002**). Siendo este el caso la única solución para este problema es igualar la  $C_1$  a cero. Obteniendo una ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta p R^2}{4L\mu} + (0)\ln(a) + C_2 = 0$$

$$\frac{\Delta p R^2}{4L\mu} + C_2 = 0 \quad (2.28)$$

Siendo nuestra  $C_2$  igual a:

$$-\frac{\Delta p a^2}{4L\mu} = C_2 \quad (2.29)$$

Para obtener la velocidad máxima es de la siguiente manera cuando  $r=0$ .

$$V_{\text{max}} = C_2 = -\frac{\Delta p a^2}{4L\mu} \quad (2.30)$$

Sustituyendo las constantes en la Ec. (2.24):

$$\frac{\Delta p r^2}{4L\mu} - \frac{\Delta p a^2}{4L\mu} = V_z$$

$$V_z = \frac{\Delta p}{4L\mu} (-a^2 + r^2)$$

$$V_z(r) = -\frac{\Delta p a^2}{4L\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \quad (2.31)$$

La Ec. (2.31) ya es nuestro perfil de velocidades para un capilar, con fluido newtoniano deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión.

### 2.3.5 Flujo Volumétrico.

Para obtener el flujo volumétrico en un capilar partiremos de la siguiente ecuación escrita para coordenadas cilíndricas (**Herrera Valencia et al. 2022**).

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) r dr d\theta \quad (2.32)$$

Al sustituir el perfil de velocidades de la Ec. (2.31) en la Ec. (2.32).

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( \frac{-\Delta p a^2}{4L\mu} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right) r dr d\theta \quad (2.33)$$

Comenzaremos resolviendo la primera integral definida con respecto a  $r$  y sacando las constantes de la integral.

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p a^2}{4L\mu} \int_0^a \left( r - \frac{r^3}{a^2} \right) dr d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p a^2}{4L\mu} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2} \right) \Big|_0^a d\theta \quad (2.34)$$

Evaluando la integral definida con los límites de integración y simplificando la expresión.

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p a^2}{8L\mu} \left( a^2 - \frac{a^4}{2a^2} \right) d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p a^2}{8L\mu} \left( a^2 - \frac{a^2}{2} \right) d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p a^2}{8L\mu} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p a^2}{8L\mu} \left( \frac{1}{2} \right) d\theta \quad (2.35)$$

Después procedemos a resolver la integral definida con respecto a  $\theta$  y simplificamos la expresión.

$$Q = \frac{-\Delta p a^2}{8L\mu} \left( \frac{1}{2} \right) \theta \Big|_0^{2\pi} \quad (2.36)$$

Evaluando y simplificando la expresión nos queda de la siguiente forma.

$$Q = \frac{-\Delta p a^4}{8L\mu} \left( \frac{1}{2} \right) 2\pi$$

$$Q = \frac{-\pi \Delta p a^4}{8L\mu}$$

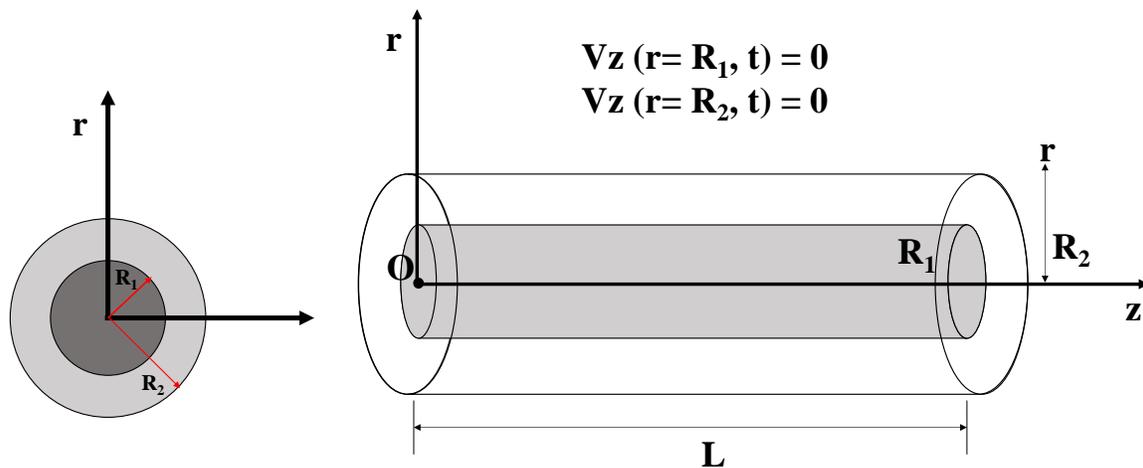
$$Q = \frac{-\pi (p_0 - p_L) a^4}{8L\mu} \quad (2.37)$$

La Ec. (2.37) es la ecuación para calcular el flujo volumétrico de un fluido newtoniano en un capilar deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión (**Herrera Valencia et al. 2022**). Esta ecuación también es conocida como la ecuación de Hagen-

Poiseuille, que describe la relación del flujo volumétrico y un gradiente de presión (Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022; Macosko 1994).

#### 2.4. Flujo volumétrico de un fluido Newtoniano en una corona circular

En esta sección se analizará y obtendrá el flujo volumétrico de un fluido newtoniano que fluye a través de una corona circular debido a la influencia de un gradiente de presión (Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022; Macosko 1994). La corona tiene un radio mayor ( $R_1$ ) y un radio menor ( $R_2$ ), con una longitud característica axial ( $L$ ) (Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022; Macosko 1994).



*Fig. 2.2. Esquema de un flujo newtoniano, isotérmico e incompresible, en una corona circular de radio menor ( $R_1$ ), radio mayor ( $R_2$ ) y Longitud ( $L$ ).*

##### Modelado matemático

- Flujo newtoniano.
- Estado estacionario.
- Incompresible.
- Proceso isotérmico.
- Simetría cilíndrica.
- La velocidad va en dirección  $z$  y por ende está en función de la coordenada radial  $r$ .
- El fluido se deforma a causa de un gradiente de presiones, en la dirección axial  $z$ .

## 2.5 Razonamiento matemático

Para el razonamiento de este problema, se planteó un modelado matemático al cual está sometido nuestro sistema. Partiendo del perfil de velocidades general del capilar ya que el fluido es el mismo, así como también el modelado matemático al que se somete nuestro sistema, causando que la velocidad se comporte de igual manera que la de un capilar solo que en esta ocasión se le aplicaran al perfil de velocidades general diferentes condiciones de frontera puesto que el fluido newtoniano, fluiría en el ánulo formado por los cilindros concéntricos (**Herrera Valencia et al. 2022**). Una vez obtenido el perfil de velocidades particular se procede a sacar el flujo volumétrico con una ecuación de flujo transformada por medio de una transformada jacobiana que dejara la expresión en coordenadas cilíndricas, al sustituir el perfil de velocidades en la expresión de flujo volumétrico para coordenadas cilíndricas y resolviendo la doble integral con diferentes límites de integración, obtenemos de igual manera una expresión que describe el flujo volumétrico de una corona circular (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022; Macosko 1994**).

Puesto que el fluir de un fluido newtoniano en una corona circular se comporta de la misma manera que en el capilar, podemos partir de la siguiente ecuación (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022**).

$$V_z = \frac{\Delta p r^2}{4L\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (2.38)$$

Se calcularán las constantes de la Ec. (2.38) con las siguientes condiciones de frontera. Cuando hablamos de la velocidad en el radio menor ( $R_1$ ) hablamos de que es igual a cero puesto que es la pared, este mismo hecho aplica para el radio mayor ( $R_2$ ).

$$\text{C.F.1 } V_z(r=R_1) = 0$$

$$\text{C.F.2 } V_z(r=R_2) = 0$$

Sustituyendo las condiciones de frontera en la Ec. (2.38) se obtiene lo siguiente:

$$0 = \frac{\Delta p R_1^2}{4L\mu} + C_1 \ln(R_1) + C_2 \quad (2.39)$$

$$0 = \frac{\Delta p R_2^2}{4L\mu} + C_1 \ln(R_2) + C_2 \quad (2.40)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones restando la Ec. (2.39) menos la Ec. (2.40).

$$0 = -\frac{\Delta p R_2^2}{4L\mu} + \frac{\Delta p R_1^2}{4L\mu} + C_1 \ln(R_1) - C_1 \ln(R_2)$$

$$0 = \frac{\Delta p}{4L\mu} (R_1^2 - R_2^2) + C_1 (\ln(R_1) - \ln(R_2))$$

$$\frac{\Delta p}{4L\mu} (R_1^2 - R_2^2) = C_1 \left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)$$

$$C_1 = \frac{\Delta p (R_1^2 - R_2^2)}{4L\mu \left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} \quad (2.41)$$

Para obtener la  $C_2$  sustituimos la  $C_1$  en la Ec. (2.39) y despejamos  $C_2$ .

$$0 = \frac{\Delta p R_1^2}{4L\mu} + \left( \frac{\Delta p (R_1^2 - R_2^2)}{4L\mu \left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} \right) \ln(R_1) + C_2$$

$$C_2 = -\frac{\Delta p R_1^2}{4L\mu} - \frac{\Delta p}{4L\mu} \left( \frac{\ln(R_1)(R_2^2 - R_1^2)}{\left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} \right)$$

$$C_2 = -\frac{\Delta p}{4L\mu} \left( \frac{\ln(R_1)(R_2^2 - R_1^2)}{\left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} + R_1^2 \right) \quad (2.43)$$

Sustituir ambas constantes en la ecuación (2.38) para encontrar el perfil de velocidades.

$$V_Z = \frac{\Delta p r^2}{4L\mu} + \left( \frac{\Delta p (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} \right) \ln(r) - \frac{\Delta p}{4L\mu} \left( \frac{\ln(R_1)(R_2^2 - R_1^2)}{\left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} - \frac{\Delta p}{4L\mu} R_1^2 \right)$$

$$V_Z = \frac{\Delta p r^2}{4L\mu} - \frac{\Delta p}{4L\mu} R_1^2 + \left( \frac{\Delta p (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} \right) \ln(r) - \frac{\Delta p}{4L\mu} \left( \frac{\ln(R_1)(R_2^2 - R_1^2)}{\left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} \right)$$

$$V_Z = \frac{\Delta p}{4L\mu} (r^2 - R_1^2) + \left( \frac{\Delta p (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} \right) (\ln(r) - \ln(R_1))$$

$$V_Z = \frac{\Delta p}{4L\mu} (r^2 - R_1^2) \left( \frac{\Delta p (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} \right) \left( \ln \left( \frac{r}{R_1} \right) \right)$$

$$V_Z = \frac{-\Delta p}{4L\mu} \left( (R_1^2 - r^2) - \left( \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} \right) \left( \ln \left( \frac{r}{R_1} \right) \right) \right)$$

$$V_Z = \frac{-\Delta p}{4L\mu} \left( (R_1^2 - r^2) + \left( \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} \right) \left( \ln \left( \frac{r}{R_1} \right) \right) \right)$$

$$V_Z = \frac{-\Delta p R_1^2}{4L\mu} \left( \left( 1 - \frac{r^2}{R_1^2} \right) + \left( \frac{\left( 1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right)}{\left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} \right) \left( \ln \left( \frac{r}{R_1} \right) \right) \right) \quad (2.44)$$

La Ec. (2.44) es el perfil de velocidades para una corona circular con un fluido newtoniano impulsado por un gradiente de presiones (**Bird et al. 2002**).

### 2.5.1 Flujo Volumétrico.

Para encontrar el flujo volumétrico en el ánulo de la corona circular, se utiliza la siguiente integral de superficie, se utiliza la transformada jacobiana para transformar en coordenadas cilíndricas (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022**).

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R Vz(r)rdrd\theta \quad (2.45)$$

Puesto que sabemos que el perfil de velocidades no está en función del ángulo podemos sacarlo como constante de la siguiente manera.

$$Q = \int_0^R Vz(r)rdr \int_0^{2\pi} d\theta \quad (2.46)$$

Al integrar con respecto al ángulo obtenemos lo siguiente.

$$Q = \int_0^R Vz(r)rdr(\theta_0^{2\pi}) \quad (2.47)$$

Al evaluar los límites de integración con respecto al ángulo nos queda de la siguiente manera:

$$Q = 2\pi \int_0^R Vz(r)rdr \quad (2.48)$$

Ahora sustituimos el perfil de velocidades en la Ec. (2.48).

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{-\Delta p R_1^2}{4L\mu} \left( \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \left(\frac{\left(1 - \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right)}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right)}\right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) \right) r dr \quad (2.49)$$

Simplificando la expresión y sacando las constantes de la integral, obtenemos:

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^2}{4L\mu} \int_{R_1}^{R_2} \left( \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \left(\frac{\left(1 - \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right)}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right)}\right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) \right) r dr \quad (2.50)$$

Para escalar la ecuación diferencial y simplificar con números adimensionales, se divide los límites de integración entre  $R_1$ , la expresión del perfil de velocidades y la diferencial con respecto  $r$ .

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^2}{4L\mu} \int_{\frac{R_1}{R_1}}^{\frac{R_2}{R_1}} \left( \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \left(\frac{\left(1 - \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right)}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right)}\right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) \right) \left(\frac{r}{R_1}\right) \left(\frac{dr}{R_1}\right) \quad (2.51)$$

Para no alterar la igualdad en la ecuación se multiplicará todo por  $R_1^2$

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \int_1^{\frac{R_2}{R_1}} \left( \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \left(\frac{\left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right)}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right)}\right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) \right) \left(\frac{r}{R_1}\right) \left(\frac{dr}{R_1}\right) \quad (2.52)$$

De la Ec. (2.49) podemos obtener los siguientes cambios de variable.

$$R = \frac{R_2}{R_1}$$

$$K = \frac{r}{R_1}$$

Al aplicar los anteriores cambios de variable a la Ec. (2.49) queda de la siguiente forma:

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \int_1^R \left( (1 - K^2) + \left(\frac{(1 - (R^2))}{\left(\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right)}\right) (\ln(K)) \right) K dK$$

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \int_1^R \left( (K - K^3) + \left(\frac{(1 - (R^2))}{\left(\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right)}\right) (\ln(K)K) \right) dK \quad (2.53)$$

Multiplicando la ecuación por (-1/-1) para invertir  $\ln(1/R)$ .

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \int_1^R \left( (K - K^3) + \frac{-1}{-1} \left(\frac{(1 - (R^2))}{\left(\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right)}\right) (\ln(K)K) \right) dK$$

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \int_1^R \left( (K - K^3) - \left(\frac{(1 - (R^2))}{\left(\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right)}\right) (\ln(K)K) \right) dK$$

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \int_1^R \left( (K - K^3) - \left(\frac{(1 - (R^2))}{\ln(R)}\right) (\ln(K)K) \right) dK$$

Una vez integrada la ecuación se obtiene el siguiente resultado

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \left\{ \left(\frac{K^2}{2} - \frac{K^4}{4}\right)_1^R - \left(\frac{1 - R^2}{\ln(R)}\right) \left(\frac{2R^2 \ln(K)}{4} - \frac{K^2}{4}\right) \Big|_1^R \right\} \quad (2.54)$$

Aplicando los límites de integración y factorizando la expresión

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \left\{ \left[ \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{R^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) \right] \left(\frac{1 - R^2}{\ln(R)}\right) \left( \left(\frac{2R^2 \ln(R)}{4} - \frac{2R^2 \ln(1)}{4}\right) - \left(\frac{R^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right) \right) \right\}$$

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \left[ \frac{R^2}{2} - \frac{1}{4} - \frac{R^4}{4} - \left(\frac{1 - R^2}{\ln(R)}\right) \left(\frac{2R^2 \ln(R)}{4} - \frac{R^2}{4} + \frac{1}{4}\right) \right]$$

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \left[ \frac{2R^2}{4} - \frac{R^4}{4} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1 - R^2}{\ln(R)}\right) \left(\frac{2R^2 \ln(R)}{4} - \frac{R^2}{4} + \frac{1}{4}\right) \right]$$

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{16L\mu} \left[ 2R^2 - R^4 - 1 - \left(\frac{1 - R^2}{\ln(R)}\right) (2R^2 \ln(R) - R^2 + 1) \right] \quad (2.55)$$

Para simplificar más la expresión se procede a realizar el siguiente cambio de variable

Donde:

$$I = 2R^2 - R^4 - 1 + \left(\frac{1-R^2}{\ln(R)}\right) (2R^2 \ln(R) - R^2 - 1) \quad (2.56)$$

Entonces con el cambio de variable I, toma la siguiente forma

$$Q = \frac{-\pi \Delta p R_1^4}{8L\mu} I \quad (2.57)$$

La ecuación (2.57) es la ecuación de flujo volumétrico de un fluido newtoniano que fluye a través del área del ánulo en una corona circular, que fluye a causa del gradiente de presiones **(Bird et al. 2002; Herrera Valencia 2022; Macosko 1994)**.

## 2. 6 Ecuación constitutiva de Jeffreys (deducción).

Lo descrito en esta sección nos va a permitir construir los elementos para entender la función de transferencia compleja incorporando los mecanismos inerciales, viscoelásticos, solvente y visco-plasto de los materiales complejos que se describirán en las siguientes secciones **(Bird et al. 2002; Herrera Valencia 2022; Macosko 1994)**.

$$\sigma_T = \sigma_S + \sigma_p \quad (2.58)$$

La contribución asociada al solvente se modela como un fluido Newtoniano, es decir, satisface la siguiente ecuación analítica

$$\sigma_S = \eta_s \dot{\gamma} \quad (2.59)$$

La contribución asociada del polímero es caracterizada con la ecuación constitutiva de Maxwell. La cual, se expresa de la siguiente manera **(Bird et al. 2002; Macosko 1994)**

$$\sigma_p + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t} \sigma_p = \eta_p \dot{\gamma}$$

$$(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}) \sigma_p = \eta_p \dot{\gamma}$$

$$\sigma_p = \frac{\eta_p \dot{\gamma}}{1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\sigma_T = \eta_s \dot{\gamma} + \frac{\eta_p \dot{\gamma}}{1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}) \left\{ \sigma_T = \eta_s \dot{\gamma} + \frac{\eta_p \dot{\gamma}}{1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}} \right\}$$

$$\left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_T = \eta_s \left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\gamma} + \eta_p \dot{\gamma}$$

$$\left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_T = \eta_s \dot{\gamma} + \eta_s \lambda p \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} + \eta_p \dot{\gamma} \quad (2.60)$$

Reagrupando la Ec. (2.60)

$$\left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_T = \eta_s \dot{\gamma} + \eta_p \dot{\gamma} + \eta_s \lambda p \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \quad (2.61)$$

Factorizando la rapidez de deformación resulta:

$$\left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_T = (\eta_s + \eta_p) \dot{\gamma} + \eta_s \lambda p \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \quad (2.62)$$

Factorizando la viscosidad total

$$\left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_T = (\eta_s + \eta_p) \left( \dot{\gamma} + \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} \lambda p \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \right) \quad (2.63)$$

### 2.6.1 Definiendo las variables físicas implicadas

Tiempo de retardo del material (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022; Macosko 1994**):

$$\lambda_J = \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} \lambda p \quad (2.64)$$

depende de las viscosidades del solvente, polímero y del tiempo de relajación de Maxwell

Viscosidades del total (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022; Macosko 1994**) se define como la suma de las viscosidades del solvente y polímero:

$$\eta_0 = \eta_s + \eta_p \quad (2.65)$$

Tiempo del polímero (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022; Macosko 1994**):

$$\lambda p = \lambda_0 \quad (2.66)$$

tiempo de relajación del modelo de Jeffreys es el tiempo del polímero

Esfuerzo total

$$\sigma_T = \sigma \quad (2.67)$$

Sustituyendo las variables físicas implicadas planteadas anteriormente en la Ec. (2.63) se tiene la ecuación constitutiva reológica de Jeffreys (**Herrera Valencia et al. 2022**).

$$\left(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma = (\eta_0) \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\gamma} \quad (2.68)$$

La Ec. (2.68) contiene como casos particulares los modelos de Maxwell y de Newton (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022**).

$$\lambda_J = 0 \rightarrow \text{Maxwell} \quad (2.69)$$

$$\lambda_0 = \lambda_J = 0 \rightarrow \text{Newton} \quad (2.70)$$

2.6.2 Definiendo el operador viscosidad de Jeffreys:

$$O_\eta^J = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} = \eta_0 \frac{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}} \quad (2.71)$$

La expresión general para esfuerzo total está dada por la siguiente expresión:

$$\sigma = 2O_\eta^J \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) D \quad (2.72)$$

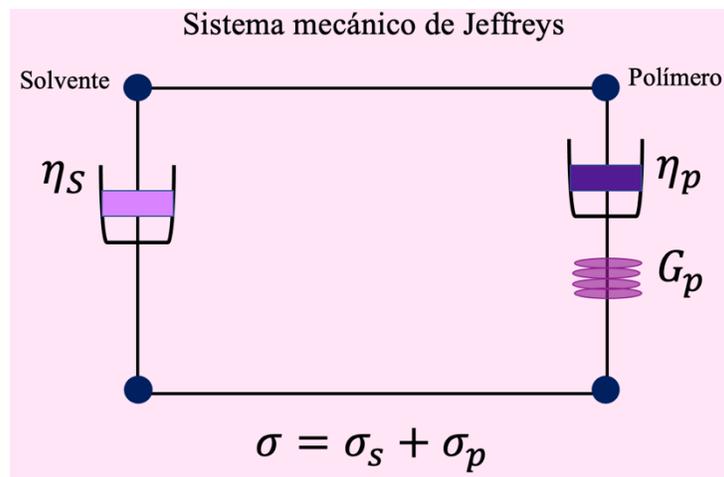
Sustituyendo la expresión general para esfuerzo total Ec (2.72) en la ecuación de movimiento o segunda forma de Cauchy.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot 2O_\eta^J \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) D \quad (2.73)$$

Derivado de la sustitución obtenemos la Ec (2.73), dicha ecuación será fundamental para el desarrollo de este trabajo. Esta se puede expresar como una expresión modificada de Navier Stocks (**Herrera Valencia et al. 2022**).

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + O_\eta^J \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 V \quad (2.74)$$

### CAPÍTULO III. MODELADO MATEMÁTICO



*Representación del sistema mecánico de la ecuación constitutiva de Jeffreys analizada en esta tesis*

### 3.1 Modelado matemático del modelo viscoelástico lineal

#### 3.1.1 Función de transferencia de un fluido viscoelástico lineal en un capilar

Fluido viscoelástico en un capilar. En esta sección se realizará el desarrollo pertinente para la obtención de la función transferencia de masa en un capilar, por el que fluirá un fluido viscoelástico (Jeffreys) que se deforma de manera continua e irreversiblemente en la dirección axial, causado por la fuerza motriz suministrada de un gradiente de presiones, obteniendo una ecuación que describa el flujo volumétrico de dicho sistema (Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022; Macosko 1994).

Para realizar este cálculo, se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema:

- Líquido no-Newtoniano viscoelástico lineal (Jeffreys)
- Líquido incompresible (volumen constante)
- El proceso se lleva a cabo en estado no estacionario: La velocidad y la presión dependen del tiempo (presión pulsátil).

El fluido se deforma continua e irreversiblemente, debido a un gradiente de presión pulsátil en la dirección axial (Herrera Valencia et al. 2022).

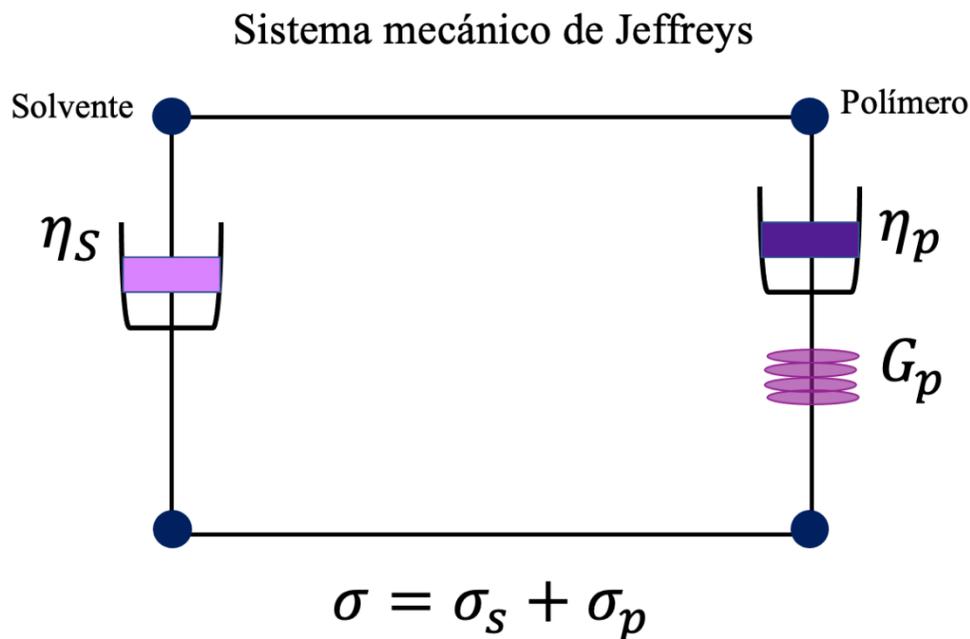


Figura 3.1. Ilustra las tres configuraciones mecánicas en este sistema de uso: (i) Newtoniano, (ii) Maxwell, y (iii) Kelvin-Voigt.

- Los mecanismos gravitacionales se desprecian con respecto al gradiente de presión pulsátil y los mecanismos viscoelásticos lineales ya que el capilar ( $a \ll L$ ) se encuentra en posición horizontal (**Bird et al. 2002**).
- Existe simetría angular (cilíndrica)

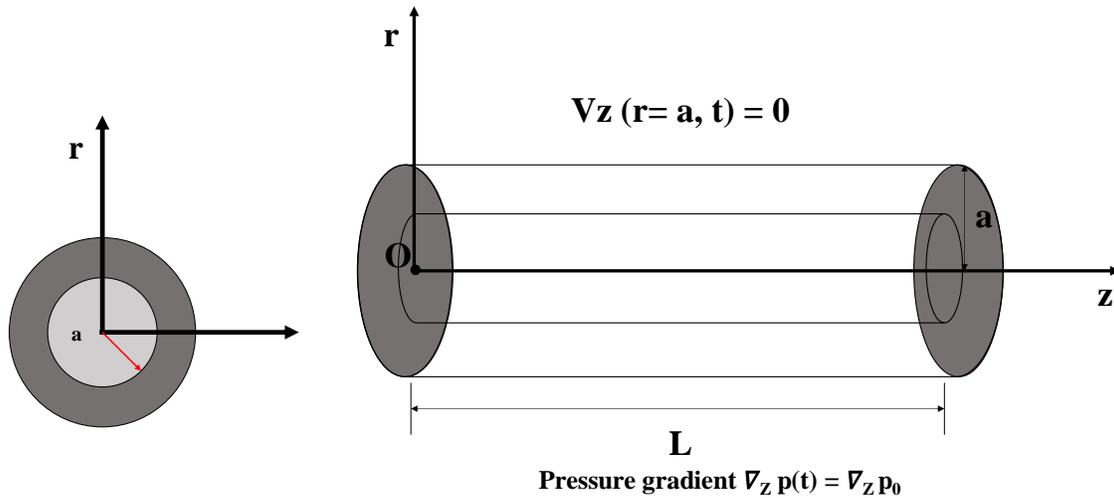


Figura 3.2. Esquema de un fluido viscoelástico (Jeffreys), isotérmico e incompresible, en un capilar de radio( $a$ ) y Longitud ( $L$ ).

Partiendo de la ecuación de continuidad (Balance de masa sin reacción química; **Bird et al. 2002**).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (3.1)$$

La ecuación de movimiento (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022**):

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \sigma + \rho g \quad (3.2)$$

Considerando que se trata de un tubo horizontal, las fuerzas gravitacionales se desprecian

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \sigma + \rho g \quad (3.3)$$

Posteriormente resulta se obtiene la siguiente expresión analítica

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma \quad (3.4)$$

Ecuación constitutiva de Jeffreys

$$\left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma = (\eta_0) \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\gamma} \quad (3.5)$$

Definiendo el operador viscosidad de Jeffreys:

$$O_{\eta}^J = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} = \eta_0 \frac{1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}} \quad (3.6)$$

La expresión general para esfuerzo total está dada por la siguiente expresión:

$$\sigma = 2O_{\eta}^J \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) D \quad (3.7)$$

Sustituyendo la expresión general para esfuerzo total Ec (3.7) en la ecuación de movimiento o segunda forma de Cauchy (3.4) (**Bird et al. 2002**).

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot 2O_{\eta}^J \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) D \quad (3.8)$$

Derivado de la sustitución obtenemos la Ec (3.8), dicha ecuación será fundamental para el desarrollo de este trabajo, esto debido a que será punto de partida para los próximos cálculos. Esta se puede expresar como una expresión modificada de Navier Stokes (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022**).

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + O_{\eta}^J \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 V \quad (3.9)$$

Considerando las condiciones de proceso se identifica que se trata un flujo unidireccional, por lo que el vector velocidad sólo tiene una componente en la dirección axial. Y por continuidad, éste depende de la coordenada radial (r) y de la variable temporal (t). Aplicando las condiciones del proceso la Ec. (3.9) adquiere la siguiente forma cerrada.

$$\rho \frac{\partial Vz}{\partial t} = -\nabla_z p + O_{\eta}^J \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Vz}{\partial r}\right) \quad (3.10)$$

## 3.2 Transformada de Fourier

### 3.2.1 Cálculo de perfil de velocidades

Para realizar la Ec. (3.10) se aplica la transformada de Fourier, ya que la ecuación diferencial parcial describe las variaciones de velocidad por efectos del espacio tiempo (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al 2022**).

Aplicando el operador de Fourier ( $i\omega$ ) a cada uno de los términos equivalentes a  $\frac{\partial}{\partial t}$ :

$$\rho i\omega Vz(\omega r) = -\nabla_z p(\omega) + \frac{O_{\eta}^J(i\omega)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Vz}{\partial r}\right) \quad (3.11)$$

Desarrollando:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Vz(\omega, r)}{\partial r}\right) - \frac{\rho i\omega}{O_{\eta}^J(i\omega)} Vz(\omega, r) = \nabla_z p(\omega) \quad (3.12)$$

Resolveremos la ecuación diferencial tomando en cuenta el cambio de variable respecto a

$$\beta^2 = \frac{\rho i \omega}{o_{\eta}^J(i\omega)}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_Z(\omega, r) = \frac{1}{o_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \quad (3.13)$$

Desarrollando la derivada del producto en la Ec. (3.13)

$$\frac{1}{r} \left( r \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2} + (1) \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_Z(\omega, r) = \frac{1}{o_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \quad (3.14)$$

Para la solución de la Ec. (3.14) se considera el siguiente criterio:

$$V_Z(\omega, r) = V_{HZ} + V_{pz} \quad (3.15)$$

en donde se tiene que si  $V_Z(\omega, r)$  se igualada a cero (0) representará la solución homogénea  $V_{HZ}$ , mientras que la solución particular ( $V_{pz}$ ) resultará cuando  $V_Z(\omega, r)$  es igualada a una constante.

Abriendo paso a la solución homogénea se igualará la Ec. (3.14) a cero (0) resulta la expresión:

$$\left\{ \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2} + \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_Z(\omega, r) = 0 \right\} \quad (3.16)$$

Multiplicando la Ec. (3.16) por  $r^2$ , para obtener la ecuación de Bessel, queda de la siguiente forma:

$$r^2 \left\{ \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2} + \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_Z(\omega, r) = 0 \right\} \quad (3.17)$$

Resolviendo la Ec. (3.17) se obtiene la ecuación de Bessel modificada.

$$\left( r^2 \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} \right) - r^2 \beta^2 V_Z(\omega, r) = 0 \quad (3.18)$$

Considerando la forma de la ecuación de Bessel modificada, la cual se describe como:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (3.19)$$

Dando solución a dicha ecuación resulta:

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \quad (3.20)$$

Donde:

$J_n$  = Es una función de Bessel de primera especie de orden n.

$Y_n$  = Es una función de Bessel de segunda especie de orden n.

Para llevar la Ec. (3.18) a la forma de Bessel procedemos a realizar los siguientes pasos.

Paso 1.  $-1 = i^2$

$$\left( r^2 \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} \right) - i^2 r^2 \beta^2 V_Z(\omega, r) = 0 \quad (3.21)$$

Agrupando los respectivos términos de la Ec. (3.21)

$$r^2 \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} + (ir\beta)^2 V_Z(\omega, r) = 0 \quad (3.22)$$

Posterior al primer sumando y segundo se les multiplica por un 1 particular quedando la ecuación de la siguiente manera.

$$\frac{(i\beta)^2}{(i\beta)^2} r^2 \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2} + \frac{(i\beta)}{(i\beta)} r \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} + (ir\beta)^2 V_Z(\omega, r) = 0 \quad (3.23)$$

Se ordena la ecuación de tal manera que quede de la siguiente manera.

$$(i\beta r)^2 \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2 (i\beta r)^2} + (i\beta r) \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r (i\beta r)} + (ir\beta)^2 V_Z(\omega, r) = 0 \quad (3.24)$$

Aplicando el cambio de variable donde  $i\beta r = x$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$(x)^2 \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2 (x)^2} + (x) \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r (x)} + (x)^2 V_Z(\omega, r) = 0 \quad (3.25)$$

Aplicando los respectivos cambios en la Ec. (3.25) para asemejarla a la ecuación de Bessel

$$(x)^2 \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2 (x)^2} + (x) \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r (x)} + (x^2 - 0^2) V_Z(\omega, r) = 0 \quad (3.26)$$

La solución homogénea es igual a la expresión siguiente, la cual es la solución de la ecuación de Bessel (**Bird et al. 2002; Macosko 1994, Herrera Valencia et al. 2022**)

$$V_Z(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x) \quad (3.27)$$

La solución de Bessel de la Ec. (3.27) puede ser escrita como la función de Bessel de 1er y 2da especie (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**).

$$V_Z(\omega, r) = C_1 I_0(i\beta r) + C_2 K_0(i\beta r) \quad (3.28)$$

Donde:

$I_0$  = Es la función de Bessel modificada de primera especie de orden 0

$K_0$  = Es la función de Bessel modificada de segunda especie de orden 0

Obteniendo la solución particular, partiendo de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} p \right) - i^2 \beta^2 V_Z(\omega, r) p = \frac{1}{O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) \quad (3.29)$$

Definiendo los siguientes parámetros:

$$Vp = A ; A = V_Z \quad (3.30)$$

Sustituyendo dichos parámetros en la Ec. (3.29) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} A \right) + i^2 \beta^2 A = \frac{1}{O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) \quad (3.31)$$

Al derivar una cte., la cual es igual a cero, y teniendo que  $-1=i^2$  resulta:

$$i^2\beta^2 A = \frac{1}{O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) \quad (3.32)$$

Despejando A en la Ec. (3.32) para obtener la solución particular, queda de la siguiente forma.

$$A = \frac{1}{i^2\beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) \quad (3.33)$$

Para obtener la solución general, la cual resulta de la suma de la solución homogénea más la particular, se sustituirán para obtener la solución general.

$$Vz(\omega, r) = C_1 I_0(\beta r) + C_2 K_0(\beta r) + \frac{1}{i^2\beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) \quad (3.34)$$

### 3.2.2 Cálculo de las condiciones de frontera para un tubo

Resolveremos las respectivas ecuaciones para encontrar  $C_1$  y  $C_2$  estableciendo las siguientes condiciones de frontera, refiriéndonos a las paredes del tubo donde la velocidad en z es igual a cero y cuando nos encontramos en el centro del tubo la velocidad en z es la máxima o finita

$$C.F. 1 \quad r = a \quad Vz = 0$$

$$C.F.2 \quad r = 0 \quad Vz = Vz_{max} = \text{Finita}$$

Una vez evaluadas las condiciones de frontera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$C_1 I_0(\beta a) + C_2 K_0(\beta a) + \frac{1}{i^2\beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) = 0 \quad (3.35)$$

$$C_1 I_0(\beta 0) + C_2 K_0(\beta 0) + \frac{1}{i^2\beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) = 0 \quad (3.36)$$

Donde la Ec. (3.36) tenemos que  $K_0(0) = -\infty$  ya que la ecuación es finita igualaremos  $C_2=0$  para cumplir la condición de frontera.

$$C_1 I_0(\beta a) + \frac{1}{i^2\beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) = 0 \quad (3.37)$$

Obteniendo mediante un despeje  $C_1$  de la Ec. (3.35)

$$C_1 = -\frac{1}{i^2\beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \frac{\nabla z p(\omega)}{I_0(\beta a)} \quad (3.38)$$

Aplicando el efecto de una ecuación finito respecto a  $C_2$ , tenemos que:

$$C_2 = 0 \quad (3.39)$$

Sustituyendo  $C_1$  y  $C_2$  en la Ec. (3.34) calculada anteriormente se obtiene la siguiente expresión:

$$Vz(\omega, r) = \frac{1}{i^2\beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) - \frac{1}{i^2\beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta a)} \quad (3.40)$$

Obtenemos el perfil de velocidades con inercia para un fluido viscoelástico que fluye por un gradiente de presiones en la dirección z, en sistema cilíndrico horizontal (**Bird et al. 2002; Macosko 1994; Herrera Valencia et al 2022**).

$$V_z(\omega, r) = \frac{1}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \left( 1 - \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta a)} \right) \quad (3.41)$$

### 3.2.3 Flujo volumétrico.

Flujo volumétrico en un capilar con mecanismos inerciales. La expresión para calcular el flujo volumétrico en un capilar de radio  $r = a$  y longitud  $z = L$ , se puede expresar como la doble integral del producto interno del vector de velocidad y la diferencial de superficie, como ya se mencionó (**Bird et al. 2002; Macosko 1994; Herrera Valencia et al 2022**). El vector velocidad solo tiene componente axial z y el vector unitario que describe la sección de área transversal es el vector unitario en la dirección z (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al 2022**).

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) r dr d\theta \quad (3.42)$$

Considerando que  $V_z(r)$  no depende del ángulo ( $\theta$ ) sale de la integral como constante e integramos respecto al ángulo ( $\theta$ ).

$$Q = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V_z(r) r dr \quad (3.43)$$

Aplicando los límites de integración para ángulo ( $\theta$ )

$$Q = \theta_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) r dr \quad (3.44)$$

Resolviendo queda finalmente como:

$$Q = 2\pi \int_0^a V_z(r) r dr \quad (3.45)$$

Obteniendo la Ec. (3.45), se sustituye el perfil de velocidades en la ecuación que expresa el flujo volumétrico y sacamos de la integral las constantes.

$V_z(r, \omega)$  en  $Q(\omega)$

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{1}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \int_0^a \left( 1 - \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta a)} \right) r dr \quad (3.46)$$

Evaluando respecto a los límites de integración:

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{1}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \left\{ \frac{r^2}{2} \Big|_0^a - \int_0^a \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta a)} r dr \right\} \quad (3.47)$$

Donde resulta, como solución de la integral, lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \left( \frac{a^2}{2} - \frac{1}{I_0(\beta a)} \int_0^a I_0(\beta r) r dr \right) \quad (3.48)$$

Aplicando el cambio de variable  $\beta=1$  en la Ec. (3.48)

$$Q(\omega) = \frac{2\pi}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \left( \frac{a^2}{2} - \frac{1}{\beta^2 I_0(\beta a)} \int_0^{a\beta} I_0\left(\frac{\beta r}{x}\right) \beta r dr \beta \right) \quad (3.49)$$

Aplicando un cambio de variable más de  $\beta r = x$

$$Q(\omega) = \frac{2\pi}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \left( \frac{a^2}{2} - \frac{1}{\beta^2 I_0(\beta a)} \int_0^{a\beta} I_0(x) x dx \right) \quad (3.50)$$

De las definiciones de las propiedades de las funciones de Bessel (**Herrera Valencia et al. 2022; Macosko 1994**)

$$\frac{d}{dx} [I_1(x) \cdot x] = I_0(x) \cdot x \quad (3.51)$$

Aplicando la propiedad de la función de Bessel en la Ec. (3.50).

$$- \frac{1}{\beta^2 I_0(\beta a)} \int_0^{a\beta} \frac{d}{dx} [I_1(x) \cdot x] dx \quad (3.52)$$

Resolviendo la integral respecto a los límites de integración:

$$- \frac{1}{\beta^2 I_0(\beta a)} [I_1(x) \cdot x]_0^{a\beta} \quad (3.53)$$

Obteniendo la siguiente ecuación derivado de la solución de la integral de la ecuación (3.50):

$$Q = \frac{2\pi}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \left[ \frac{a^2}{2} - \frac{1}{\beta^2 I_0(\beta a)} I_1(a\beta) \cdot a\beta \right] \quad (3.54)$$

Factorizando  $\frac{a^2}{2}$  de la Ec. (3.54)

$$Q = \frac{2\pi}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \frac{a^2}{2} \left[ 1 - \frac{2I_1(a\beta) \cdot a\beta}{a^2 \beta^2 I_0(\beta a)} \right] \quad (3.55)$$

Simplificando la Ec. (3.55)

$$Q = \frac{\pi \nabla_{zp}(\omega) a^2}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \left[ 1 - \frac{2I_1(a\beta)}{a\beta I_0(\beta a)} \right] \quad (3.56)$$

Para formar  $a\beta$  (parámetro adimensional)

$$Q = \frac{\pi a^2 \nabla_{zp}(\omega) a^2}{i^2 a^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \left[ 1 - \frac{2I_1(a\beta)}{a\beta I_0(\beta a)} \right] \quad (3.57)$$

Agrupando términos:

$$Q = \frac{\pi a^4 \nabla_{zp}(\omega) a^2}{i^2 (a\beta)^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \left[ 1 - \frac{2I_1\left(\frac{a\beta}{\beta a}\right)}{I_0(\beta a)} \right] \quad (3.58)$$

Multiplicando y dividiendo entre 8 la Ec. (3.58) para formar el fluido newtoniano

$$Q = \frac{\pi a^4 8 \nabla z p(\omega) a^2}{8 i^2 (a\beta)^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \left[ 1 - \frac{2I_1 \left( \frac{a\beta}{\beta a} \right)}{I_0(\beta a)} \right] \quad (3.59)$$

Multiplicando por  $\eta_0$ . Obtenemos la siguiente ecuación, donde la función de transferencia depende de  $(\omega)$ .

$$Q = \frac{\pi a^4}{8 \eta_0} \left[ \frac{8 \eta_0}{(a\beta)^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \left[ 1 - \frac{2I_1 \left( \frac{a\beta}{\beta a} \right)}{I_0(\beta a)} \right] \right] \nabla z p(\omega) \quad (3.60)$$

Donde es posible definir que:

$$T(\omega) = \frac{8 \eta_0}{(a\beta)^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \left[ 1 - \frac{2I_1 \left( \frac{a\beta}{\beta a} \right)}{I_0(\beta a)} \right] \quad (3.61)$$

Aplicando cambio de variable cuando  $\beta a = \alpha$

$$T(\omega) = \frac{8 \eta_0}{(\alpha)^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \left[ 1 - \frac{2I_1 \left( \frac{\alpha}{\alpha} \right)}{I_0(\alpha)} \right] \quad (3.62)$$

Dando forma modelo particular podemos decir que

$$Q = \frac{\pi a^4}{8 \eta_0} T(\omega) \nabla z p(\omega) \quad (3.62)$$

Así obtenemos la ecuación que describe el flujo volumétrico de un fluido viscoelástico donde podemos observar que  $T(\omega)$  es la función transferencia de un fluido viscoelástico y toda la demás expresión es la ecuación de Hagen-Poiseuille para un fluido newtoniano (**Bird et al. 2002; Macosko 1994; Herrera Valencia et al 2022**).

### 3.3 Fluido viscoelástico en una corona circular.

En esta sección vamos a analizar y obtener el flujo volumétrico, de un fluido viscoelástico que fluye a través de una corona circular debido a la fuerza motriz causada por el gradiente presión (Bird et al. 2002; Macosko 1994; Herrera Valencia et al. 2022). La corona tiene un radio mayor ( $R_2$ ) y un radio menor ( $R_1$ ), con una longitud característica axial ( $L$ ).

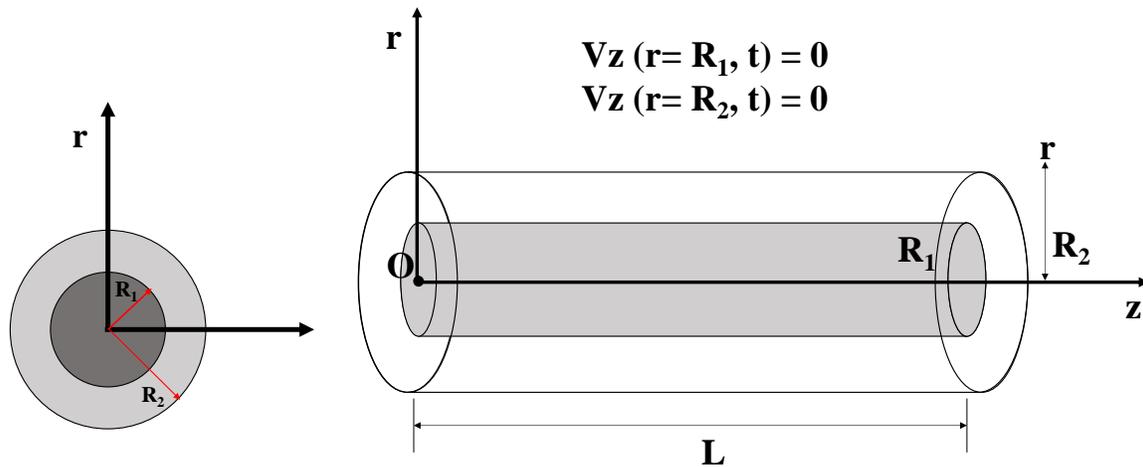


Figura 3.3. Esquema de un fluido viscoelástico, isotérmico e incompresible, en una corona circular de radio menor ( $R_1$ ), radio mayor ( $R_2$ ) y Longitud ( $L$ ).

### 3.4 Modelado matemático

- Fluido no newtoniano, fluido viscoelástico.
- Estado no estacionario, la velocidad y la presión dependen del tiempo (flujo pulsátil).
- Incompresible.
- Proceso isotérmico.
- Simetría cilíndrica.
- La velocidad va en dirección  $z$  y por ende está en función de la coordenada radial  $r$ .
- El fluido se deforma a causa de un gradiente de presiones, en la dirección axial  $z$ .
- Los mecanismos gravitacionales son despreciables puesto que el capilar se encuentra horizontal y su radio es muy pequeño.

### 3.4.1 Perfil de velocidades de una corona circular

Partiendo del perfil de velocidades general obtenido para el fluido viscoelástico en un capilar obtenido anteriormente.

$$V_z(\omega, r) = C_1 I_0(\beta r) + C_2 K_0(\beta r) + \frac{1}{i^2 \beta^2 O_1^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) \quad (3.63)$$

Establecemos las condiciones de frontera para el sistema a realizar:

$$\text{C.F.1 } V_z(r=R_1) = 0$$

$$\text{C.F.2 } V_z(r=R_2) = 0$$

Cuando nos encontramos en la pared del radio menor ( $R_1$ ) la velocidad es igual a cero lo mismo aplica cuando nos encontramos en la pared del radio mayor.

Aplicando las condiciones de frontera en la Ec. (3.63) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$0 = C_1 I_0(\beta R_1) + C_2 K_0(\beta R_1) + A \quad (3.64)$$

$$-(0 = C_1 I_0(\beta R_1) + C_2 K_0(\beta R_1) + A) \quad (3.65)$$

Restando respecto las Ecs. (3.64) y (3.65):

$$(C_1 I_0(\beta R_1) + C_2 K_0(\beta R_1) + A) - (-C_1 I_0(\beta R_2) - C_2 K_0(\beta R_2) - A) \quad (3.66)$$

Resolviendo y agrupando la Ec. (3.66):

$$0 = C_1 (I_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_2)) + C_2 (K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)) \quad (3.67)$$

Despejando  $C_2$  de la Ec. (3.67), obtenemos:

$$C_2 = \frac{C_1 (I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1))}{(K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2))} \quad (3.68)$$

Sustituyendo  $C_2$  (expresada en la Ec. (3.68)) en la Ec. (3.64) resulta:

$$0 = C_1 I_0(\beta R_1) + \frac{C_1 (I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1))}{(K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2))} K_0(\beta R_1) + A \quad (3.69)$$

Factorizando  $C_1$  de la Ec. (3.69):

$$0 = C_1 \left( \frac{I_0(\beta R_1)(K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)(K_0(\beta R_2) + K_0(\beta R_1)(I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1)K_0(\beta R_2)))}{(K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2))} \right) + A \quad (3.70)$$

Eliminando términos de la Ec. (3.70):

$$0 = C_1 \left[ \frac{I_0(\beta R_2)(K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)(K_0(\beta R_2)))}{(K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2))} \right] + A \quad (3.71)$$

Se despeja A y nos queda como:

$$-A = C_1 \left[ \frac{I_0(\beta R_2)(K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)(K_0(\beta R_2)))}{(K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2))} \right] \quad (3.71)$$

Despejando  $C_1$  de la Ec. (86), obtenemos:

$$C_1 = \left[ \frac{(K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2))}{I_0(\beta R_2)(K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)(K_0(\beta R_2)))} \right] (-A) \quad (3.72)$$

Donde A tiene la información del gradiente de presión en el sistema de estudio, la fuerza que de forma continua e irreversiblemente en el fluido.

Sustituyendo  $C_1$  expresada en la Ec. (3.72) en  $C_2$  expresada en la Ec. (3.68)

$$C_2 = \left[ \frac{(K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2))}{I_0(\beta R_2)K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)(K_0(\beta R_2))} \right] \frac{I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1)}{(K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2))} \quad (3.73)$$

Simplificando la Ec. (88)

$$C_2 = \frac{(I_0(\beta R_2) - C_1 I_0(\beta R_1))}{I_0(\beta R_2)K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)K_0(\beta R_2)} (-A) \quad (3.74)$$

Aplicando un cambio de variable:

$$C_1 = C_3 (-A) \quad (3.75)$$

Donde  $C_3$  se define como:

$$C_3 = \frac{(K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2))}{I_0(\beta R_2)K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)K_0(\beta R_2)} \quad (3.76)$$

Y la Ec. (3.76) se puede expresar como:

$$C_3 = -AC_4 \quad (3.77)$$

Donde  $C_4$  se define como:

$$C_4 = \left[ \frac{I_0(\beta R_2) - C_1 I_0(\beta R_1)}{I_0(\beta R_2)K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)K_0(\beta R_2)} \right] \quad (3.78)$$

Sustituyendo  $C_1$  y  $C_2$  en Ec. (3.63)  $V_z(\omega, r)$  para encontrar el perfil de velocidades de un fluido viscoelástico que fluye a través de una corona circular, impulsada por el gradiente de presiones.

$$V_z(\omega, r) = C_3 I_0(\beta r)(-A) + C_4 K_0(\beta r)(-A) - (-A) \quad (3.79)$$

### 3.4.2 Flujo volumétrico

Se encontrará una expresión que describa el flujo volumétrico del sistema, partiendo de la siguiente integral superficial (**Herrera Valencia et al. 2022**).

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} V_z(r) r dr d\theta \quad (3.80)$$

Como se puede observar  $V_z(r)$  no depende del ángulo  $\theta$ , entonces para fines de la solución de la integral respecto a  $d\theta$  sale de la integral como constante, así que resulta lo siguiente:

$$Q = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} V_z(r) r dr \quad (3.81)$$

Evaluando respecto a los límites de integración respecto a  $d\theta$

$$Q = \theta_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} V_z(r) r dr \quad (3.82)$$

Resolviendo respecto a los límites de integración resulta:

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} V_z(r) r dr \quad (3.83)$$

Sustituimos el perfil de velocidades expresado en la Ec. (3.63) en la Ec. (3.83)

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} C_3 I_0(\beta r)(-A) + C_4 K_0(\beta r)(-A) - (-A) r dr \quad (3.84)$$

Resolviendo la integral de la ecuación resulta lo siguiente:

$$Q = 2\pi \left[ \int_{R_1}^{R_2} C_3 I_0(\beta r)(-A) r dr + \int_{R_1}^{R_2} C_4 K_0(\beta r)(-A) - (-A) r dr \right] \quad (3.85)$$

Factoriza y sacando de la integral la constante:

$$Q = 2\pi \left[ C_3(-A) \int_{R_1}^{R_2} I_0(\beta r) r dr + C_4(-A) \int_{R_1}^{R_2} K_0(\beta r) r dr - (-A) \int_{R_1}^{R_2} r dr \right] \quad (3.86)$$

Escalamos las integrales multiplicando por  $\frac{\beta^2}{\beta^2} = 1$ , lo que hicimos en la integral, de igual

forma escalamos los límites de integración, y queda de la siguiente manera:

$$Q = 2\pi \left[ \frac{C_3(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} I_0(\beta r) r \beta dr \beta + \frac{C_4(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} K_0(\beta r) r \beta dr \beta - (-A) \int_{R_1}^{R_2} r dr \right] \quad (3.87)$$

Realizamos el siguiente cambio de variable para  $\beta r = x$  y despejando la ecuación queda de la siguiente manera:

$$Q = 2\pi \frac{C_3(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} I_0(x) x dx \frac{C_4(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} K_0(x) x dx - (-A) \int_{R_1}^{R_2} r dr \quad (3.88)$$

Aplicamos las propiedades de las funciones de Bessel

$$\frac{d}{dx} (I_1(x) x) = I_0(x) x \quad (3.89)$$

$$\frac{d}{dx} (K_1(x) x) = K_0(x) x \quad (3.90)$$

Sustituimos las propiedades en la ecuación de flujo en la Ec. (3.88):

$$Q = 2\pi \frac{C_3(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} \frac{d}{dx} I_1(x) \cdot x \frac{C_4(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} \frac{d}{dx} K_1(x) \cdot x - (-A) \int_{R_1}^{R_2} r dr \quad (3.91)$$

Resolviendo las integrales, quedan de la siguiente forma

$$Q = 2\pi \left[ \frac{C_3(-A)}{\beta^2} (I_1(x) \cdot x)_{R_1\beta}^{R_2\beta} + \frac{C_4(-A)}{\beta^2} (K_1(x) \cdot x)_{R_1\beta}^{R_2\beta} - (-A) \frac{r^2}{2} \Big|_{R_1}^{R_2} \right] \quad (3.92)$$

Evaluando los límites de integración:

$$Q = 2\pi \left[ \frac{C_3(-A)}{\beta^2} [I_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta - I_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta] + \frac{C_4(-A)}{\beta^2} [(K_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta - K_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta) - (-A) \left( \frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right)] \right] \quad (3.93)$$

Simplificando la Ec. (3.93)

$$Q = 2\pi (-A) \left[ \frac{C_3}{\beta^2} [I_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta - I_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta] + \frac{C_4}{\beta^2} [K_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta - K_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta] + \left( \frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right) \right] \quad (3.94)$$

Factorizamos  $R_2^2$  de la Ec. (3.94):

$$Q = 2\pi \frac{-\nabla z p(\omega) R_2^2}{i^2 \beta^2 O_\eta^J(i\omega)} \left[ \frac{2C_3}{\beta} \left[ I_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - I_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2} \right] + \frac{2C_4}{\beta} \left[ K_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - K_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2} \right] + \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) \right] \quad (3.95)$$

Se debe hacer similar a la ecuación de Hagen-Poiseuille por lo que se multiplicará por  $\frac{R_2^2}{R_2^2} = 1$ , por  $\frac{8}{8} = 1$  y por ultimo se multiplicará por  $\frac{\eta_0}{\eta_0} = 1$ . Una vez aplicado las respectivas

operaciones resultará como:

$$Q = \frac{\pi R_2^4}{8\eta_0} \left\{ \frac{16\eta_0 C_3}{R_2^2 i^2 \beta^2 O_\eta^J(i\omega)} \left[ \frac{I_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - I_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2}}{\beta} \right] + C_4 \left[ \frac{K_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - K_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2}}{\beta} \right] + \frac{8\eta_0 C_3}{R_2^2 i^2 \beta^2 O_\eta^J(i\omega)} \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) \right\} (-\nabla z p(\omega)) \quad (3.96)$$

Haciendo un cambio de variable como  $T_C(\omega)$  respecto a las definiciones de los términos dentro del corchete las definimos.

$$T_C(\omega) = \frac{16\eta_0 C_3}{R_2^2 i^2 \beta^2 O_\eta^J(i\omega)} \left\{ C_3 \left[ \frac{I_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - I_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2}}{\beta} \right] + C_4 \left[ \frac{K_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - K_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2}}{\beta} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) \right\}$$

$$T_c(\omega) = T_C(\omega) \eta_0 = \frac{8i^2}{(\dot{\beta})^2 O_\eta^{J*}(i\omega)} \left\{ 2C_3 \left[ \frac{I_1(\dot{\beta}) - I_1(R\dot{\beta}) \cdot \dot{\beta}}{\dot{\beta}} \right] + 2C_4 \left[ \frac{K_1(\dot{\beta}) \cdot \frac{1}{R_2} - K_1(R\dot{\beta}) \cdot \dot{\beta}}{\dot{\beta}} \right] + \frac{1}{2} (R^2 - 1) \right\} \quad (3.97)$$

Finalmente, la ecuación para el flujo volumétrico queda de la de la siguiente manera.

$$Q = \frac{\pi R_2^4}{8\eta_0} T_C(\omega) (-\nabla z p(\omega)) \quad (3.98)$$

Donde  $T_C(\omega)$  es la función de transferencia del fluido viscoelástico que fluye por la corona circular, y toda la demás expresión es la ecuación de Hagen-Poiseuille para un fluido newtoniano (Bird et al. 2002; Macosko 1994; Herrera Valencia et al 2022).

#### CAPÍTULO IV. VARIABLES, GRUPOS Y ECUACIONES ADIMENSIONALES

$$De = \frac{t_{material}}{t_{observación}} \frac{\lambda_{material}}{\lambda_{observación}} \left\{ \begin{array}{l} De \gg 1 \text{ Sólido} \\ De = \text{Viscoelástico} \\ De \rightarrow 0 \text{ Líquido} \end{array} \right.$$

En este capítulo se harán adimensionales las ecuaciones dinámicas del sistema con el fin de introducir grupos adimensionales que describan la física del sistema. En el punto número uno se propondrán las variables adimensionales características con las cuales serán punto de partida para las simulaciones correspondientes, las variables escaladas serán la función de transferencia, la frecuencia, el operador viscosidad y el parámetro beta. En este punto, el sistema de Jeffrey contiene dos grupos adimensionales característicos asociados a la viscoelasticidad del material y a los mecanismos del solvente.

#### A) Variables adimensionales

Este tipo de variables se refiere a la función de transferencia compleja, frecuencia, parámetro beta, operador viscosidad o fluidez.

Entre las variables adimensionales se encuentra:

- I) Viscosidad
- II) Longitud característica radial ( $r=a$ )
- III) Tiempo característico newtoniano
- IV) Tiempo característico viscoelástico

#### B) Grupos adimensionales

Los grupos adimensionales que se obtendrán serán los siguientes:

- I) Número de Deborah De. Relaciona los mecanismos viscoelásticos del material con la inercia del fluido (**Bird et al. 2002; Macosko 1994; Herrera Valencia et al. 2022**).
- II) Cociente de tiempos característicos asociados al retardo y al tiempo de relajación de maxwell. Está asociado a los mecanismos del solvente y del polímero respectivamente (**Bird et al. 2002; Macosko 1994; Herrera Valencia et al. 2022**).

#### C) Ecuaciones adimensionales

En estas ecuaciones encontramos la serie de funciones adimensionales, en donde se emplearán como punto de partida de los métodos numéricos (**Bird et al. 2002; Macosko 1994; Herrera Valencia et al. 2022**). Donde las ecuaciones adimensionales que resulten serán elemento de partida para el desarrollo de los métodos numéricos de:

- I) Funciones de transferencia compleja y el parámetro beta

Esfuerzo:  $\sigma [=] Pa$

Rapidez de deformación:  $\dot{\gamma} = \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial r} [=] \frac{1}{s}$

Tiempo de relajación de Maxwell:  $\lambda_0 [=] s$

Tiempo de Jeffreys:  $\lambda_J [=] s$

Viscosidad del solvente:  $\eta_s [=] Pa \cdot s$

Viscosidad del polímero:  $\eta_p [=] Pa \cdot s$

Viscosidad Total:  $\eta_0 [=] Pa \cdot s$

Frecuencia:  $\omega = \frac{rad}{s} \rightarrow Rad \text{ adimensional}$

Tiempo de relación de Jeffreys:  $\lambda_J = \left( \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} \right) \lambda_0$

o bien  $\lambda_J = \left( \frac{\eta_s}{\eta_0} \right) \lambda_0$

\* *nota*:  $\lambda_J \ll \lambda_0$

#### 4.1 Variables adimensionales

Como parte de este inciso se presentarán las variables dimensionales que permitirán simplificar el proceso y así poder introducir grupos adimensionales dentro del sistema (**Bird et al. 1987; Herrera Valencia et al. 2022**).

1. Operador viscosidad de Jeffreys adimensional

$$\dot{O}_\eta^J = \frac{O_\eta^J}{\eta_0} \quad (4.1)$$

2. La frecuencia se hará adimensional con un tiempo

$$\dot{\omega} = \lambda_0 \cdot \omega \quad (4.2)$$

3. Operador viscosidad adimensional de Jeffreys en el espacio de las frecuencias

$$\hat{O}_\eta^J = \frac{1 + \frac{\lambda_J}{\lambda_0}(i\omega)}{1 + (i\omega)} \quad (4.3)$$

## 4.2 Grupos dimensionales

Resulta de combinar ciertas variables características en las ecuaciones fundamentales.

1. Número de Deborah. Relaciona las propiedades viscoelásticas del material, el cual se define de la siguiente manera (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**):

$$De = \frac{\sqrt{\frac{a^2 \rho}{G_0}}}{\lambda_0} \quad (4.4)$$

2. Número de Jeffreys. Este segundo número adimensional relaciona un cociente de tiempos característicos del material, de forma física dichos tiempos se encuentran asociados a los mecanismos de retardo (solvente) y viscoelásticos del sistema. Este número adimensional se expresa de la siguiente manera (**Bird et al. 1987; Herrera Valencia et al. 2022**):

$$\hat{\lambda}_J = \frac{\lambda_J}{\lambda_0} \quad (4.5)$$

## 4.3 Ecuaciones dimensionales

### 4.3.1 Ecuaciones dimensionales capilar

1. Funciones de transferencia adimensional.

La función de transferencia compleja será escalada con una fluidez característica la cual será la fluidez a baja rapidez de deformación (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022**).

$$\hat{T}(\omega) = \hat{O}_\phi^J(i\omega) \frac{8i^2}{(\hat{\beta})^2} \left[ 1 - 2 \frac{I_1(\hat{\beta})}{I_0(\hat{\beta})} \right] \quad (4.6)$$

2. Parámetro Beta.

El parámetro beta será escalado con una longitud característica. Esta longitud característica será el radio del capilar (**Bird et al. 2002; Herrera Valencia et al. 2022; Macosko 1994**).

$$\beta = i^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{De^2 \dot{\omega}}{O_{\eta}^J(i\omega)}} \quad (4.7)$$

3. Función fluidez

Será escalado con una fluidez característica del sistema, dicha fluidez será la función de Jeffrey (**Bird et al. 1987; Herrera Valencia et al. 2022**).

$$\dot{O}_{\Phi}^J = \frac{1 + (i\omega)}{1 + \frac{\lambda_j}{\lambda_0}(i\omega)} \quad (4.8)$$

### 4.3.2 Variables adimensionales de corona circular

1. Funciones de transferencia adimensional

$$\dot{T}_C(\omega) = \dot{O}_{\Phi}^J \frac{8i^2}{\beta^2(i\omega)} \left\{ 2C3 \left[ \frac{I_1(\beta) - I_1(R\beta) \cdot \beta}{\beta} \right] + 2C4 \left[ \frac{K_1(\beta) \frac{1}{R^2} - K_1(R\beta) \cdot \beta}{\beta} \right] + \frac{1}{2} (R^2 - 1) \right\} \quad (4.9)$$

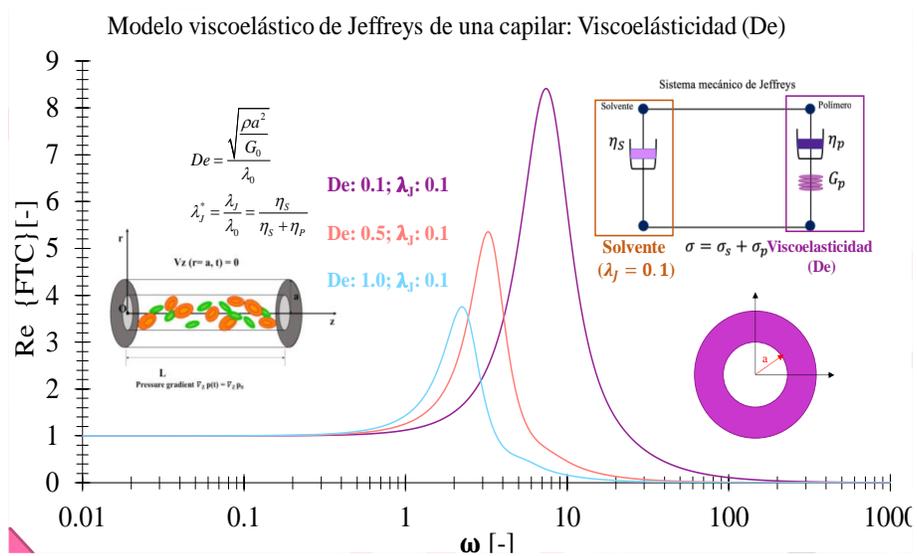
2. Parámetro beta

$$\beta = i^{\frac{3}{2}} \sqrt{De^2 \dot{\omega} \dot{O}_{\Phi}^J(i\omega)} \quad (4.10)$$

3. Función fluidez

$$\dot{O}_{\Phi}^J = \frac{1 + (i\omega)}{1 + \frac{\lambda_j}{\lambda_0}(i\omega)} \quad (4.11)$$

## CAPÍTULO V. SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE RESULTADOS



*Ejecución de simulación en Mathematica versión 13.0 de fluido viscoelástico de una geometría cilíndrica*

## 5.1 Modelo newtoniano de un capilar.

### Modelo newtoniano de un capilar

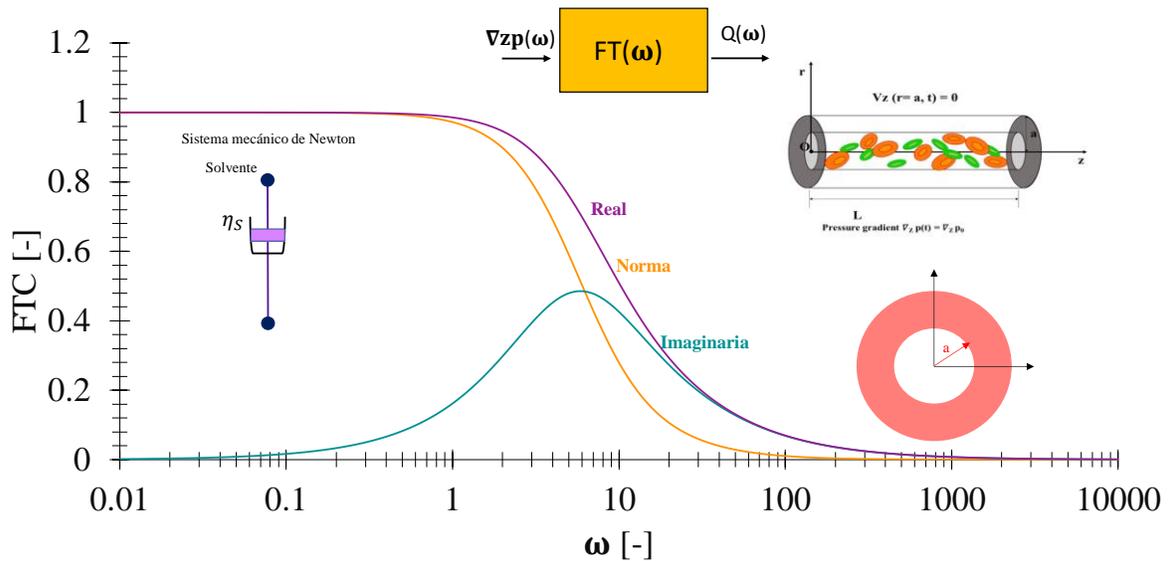


Figura 5.1. Ilustra la parte real, imaginaria y norma de la función de transferencia (FTC) vs frecuencia ( $\omega$ ) para una geometría de capilar.

En la Fig.5.1, se ilustra el comportamiento de un fluido newtoniano de una geometría de tipo capilar en relación con la función de transferencia compleja vs frecuencia. Se observa un comportamiento asintótico a frecuencias bajas de la norma y de parte real de la función de transferencia compleja. A una frecuencia crítica, se observa un comportamiento monótono creciente a frecuencias moderadas, mientras que, a frecuencias altas el sistema tiende a un comportamiento asintótico a cero. Esto quiere decir que la respuesta que tiene el sistema con la frecuencia es muy pequeña mientras que a frecuencias bajas y moderadas el sistema presenta un comportamiento no constante. En la parte imaginaria se observa el clásico comportamiento resonante o de campana de gauss asociada a la disipación. es claro que el efecto elástico es el que nos presenta la parte resonante.

## 5.2 Modelo viscoelástico de un capilar.

### 5.2.1 Con efecto de la viscoelasticidad Variando Deborah parte real

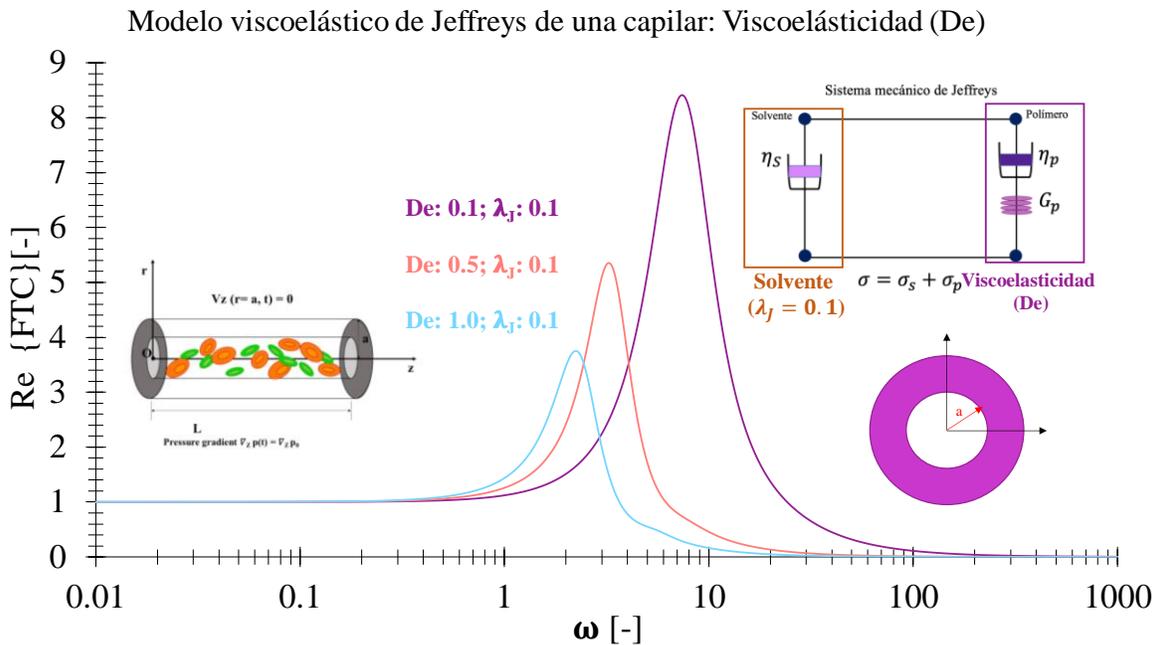


Figura 5.2. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores del número adimensional de Deborah (De) para una geometría capilar. En esta simulación en particular, se empleó un valor para el número adimensional de Jeffreys mantiene un valor de  $\lambda_J = 0.1$

En la Fig. 5.2, se representa la función de transferencia compleja la cual, describe la relación o el cociente entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión pulsátil. A frecuencias bajas la relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión es constante e independiente de la frecuencia. Esto quiere decir que la relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión es una función lineal de la frecuencia. A un esfuerzo crítico, la función de transferencia compleja (FTC) presenta un comportamiento monótono creciente hasta un valor crítico en donde exhibe un máximo a una frecuencia resonante característica.

Es importante notar, que el máximo está determinado por una serie de mecanismos acoplados a las fuerzas inerciales, viscoelásticas y del solvente. A una frecuencia mayor a la resonante, el sistema presenta un comportamiento monótono decreciente y que asintóticamente tiende a cero.

Es importante resaltar, que el efecto del Deborah es decrecer las curvas resonantes y por lo tanto se infiere que un mecanismo más viscoelástico tiene un efecto negativo en el contexto de la función de transferencia compleja. Esto quiere decir que para obtener la máxima respuesta el fluido debe de ser viscoelástico sin embargo la elasticidad no contribuye al aumento de la resonancia en el sistema.

### Variando Deborah parte imaginaria.

### Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos

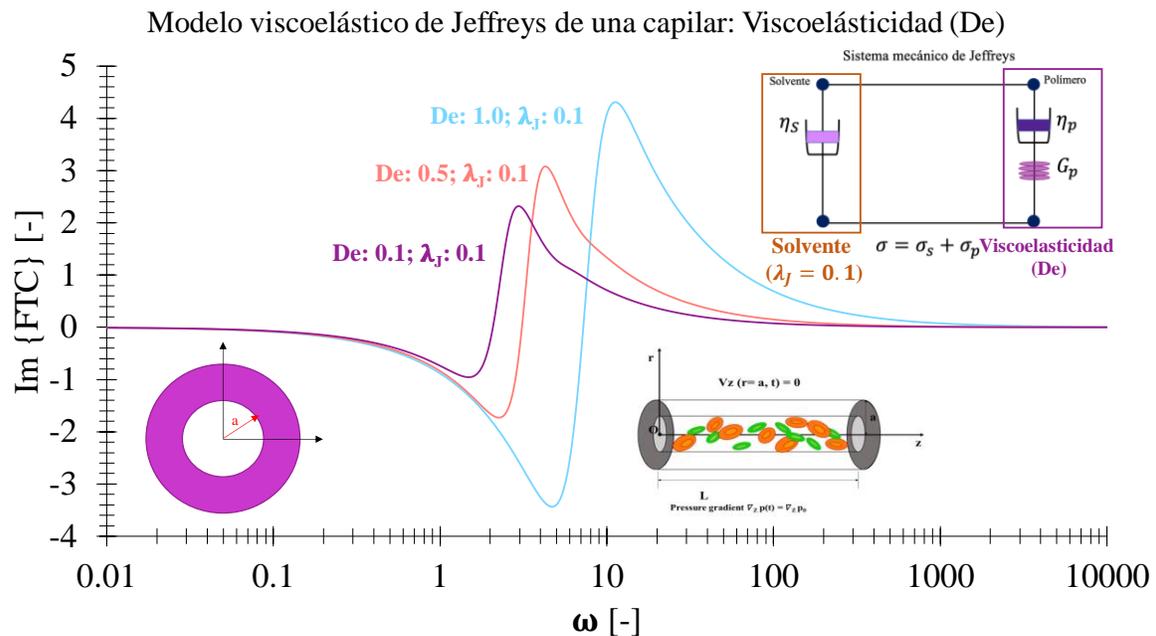


Figura 5.3. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores del número adimensional de Deborah (De) para una geometría capilar. En esta simulación en particular, se empleó un valor para el número adimensional de Jeffreys mantiene un valor de  $\lambda_J = 0.1$

A frecuencias bajas el comportamiento es constante cercana a cero. A una frecuencia en particular el sistema muestra un comportamiento monótono decreciente hasta un valor mínimo anti-resonante. En este valor mínimo el sistema se basa en un acoplamiento entre las propiedades inerciales y viscoelásticas del sistema. Nótese, que para una frecuencia mayor a la anti-resonante el sistema muestra una transición tipo diente de sierra hasta un valor máximo resonante. Este tipo de transiciones son muy comunes en los sistemas eléctricos y

transformaciones de fase de primer orden. Es importante resaltar que el máximo se debe a un acoplamiento muy fuerte entre las propiedades inerciales viscoelásticas del solvente. A una frecuencia crítica mayor a la resonante el sistema muestra un comportamiento monótono decreciente, el cual se aproxima a un valor asintótico que tiende a cero. El efecto del Deborah es amplificar o disminuir la anti-resonancia y resonancia en el sistema de estudio y se exhibe en la Fig. 5.3 una traslación por efecto de los mecanismos asociados al solvente. Un hecho importante de estas curvas es que la anchura el máximo y el mínimo de las curvas resonantes y anti-resonantes están controladas por las propiedades materiales a través de los numero adimensionales.

### Variando Deborah norma.

### Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos

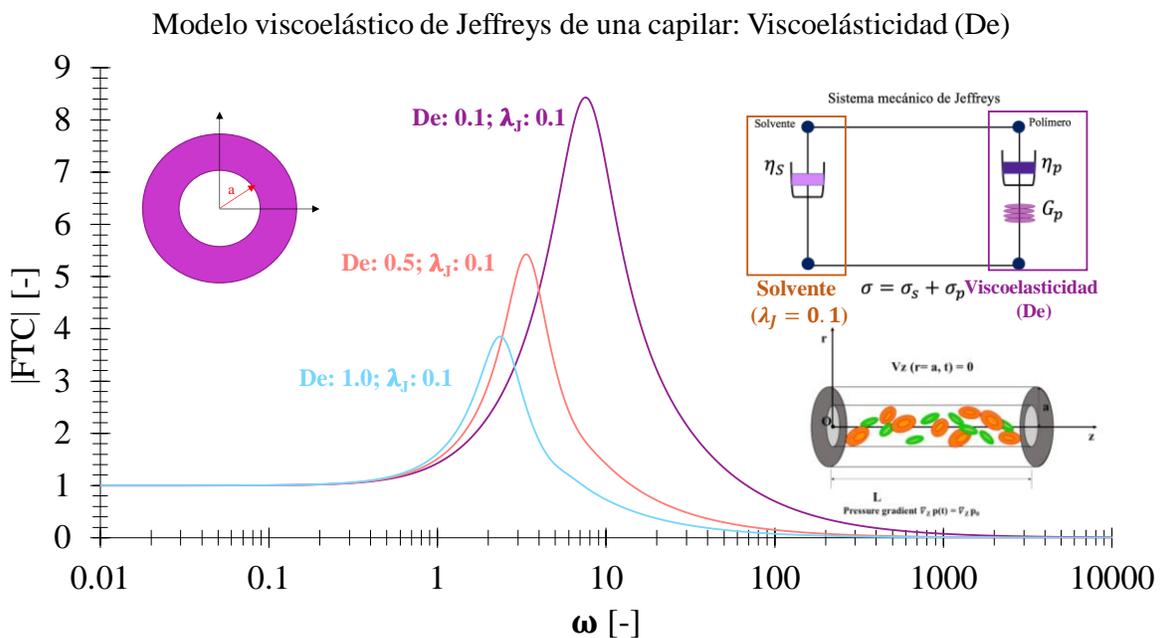


Figura 5.4. Ilustra la norma de la función de transferencia compleja vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores del número adimensional de Deborah (De) para una geometría capilar. En esta simulación en particular, se empleó un valor para el número adimensional de Jeffreys mantiene un valor de  $\lambda_J = 0.1$

En la Fig. 5.4 se ilustra la norma de la función de transferencia compleja vs frecuencia en función de la viscoelasticidad a través del número adimensional de Deborah. A bajas frecuencias, la relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión resulta constante, esto quiere decir que, es independiente de la frecuencia.

A una frecuencia crítica la función de transferencia presenta un comportamiento monótono creciente hasta un valor crítico en donde la resonancia es máxima. A frecuencias mayores que la crítica, el sistema decrece monótonamente asintóticamente hasta un valor cercano a cero. Es importante comentar que el valor del Deborah controla la localización del máximo en las curvas resonantes, es decir, que a valores pequeños del número de Deborah los mecanismos viscoelásticos dominan sobre los mecanismos inerciales y se presenta la mayor respuesta dinámica del sistema. Por el contrario, cuando el tiempo de relajación de Maxwell decrece el sistema es dominado por las fuerzas inerciales y el valor de la resonancia decrece y este se desfasa a menores valores en la frecuencia. En conclusión, el Deborah controla la localización del máximo en las curvas resonantes y está determinado por un acoplamiento físico entre la inercia, propiedades geométricas, elasticidad de bulto del fluido y los mecanismos de relajación de Maxwell.

## 5.2.2 Con efecto del solvente $\lambda_J$ Variando $\lambda_J$ parte real.

### Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos

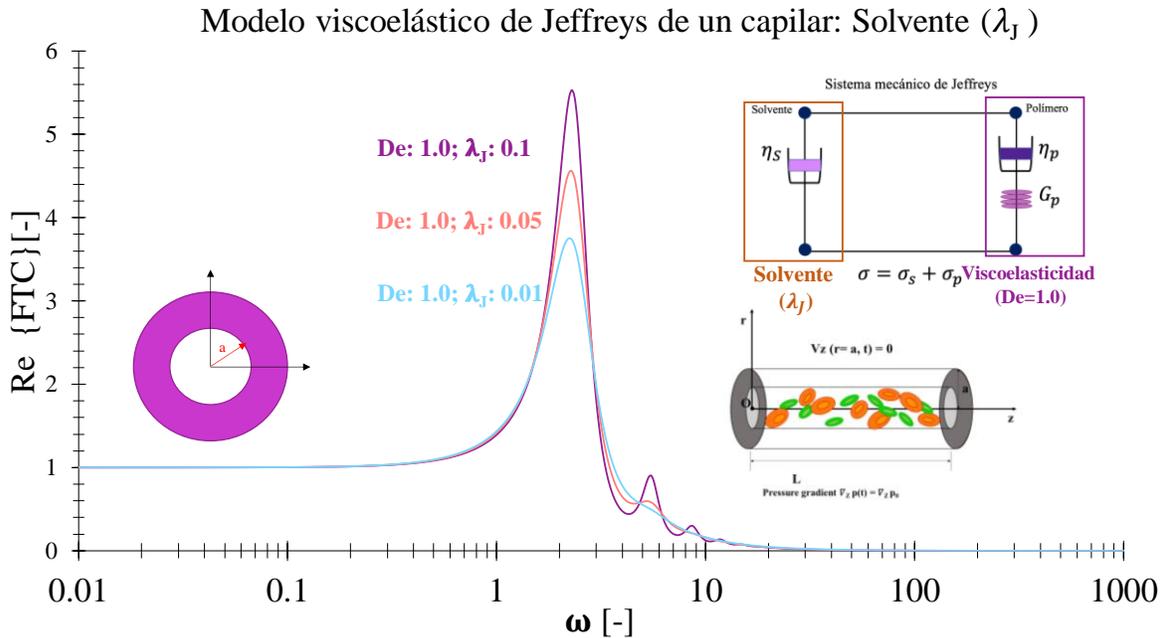


Figura 5.5. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores del número adimensional de Jeffreys ( $\lambda_J$ ) para una geometría capilar. En esta simulación en particular, se empleó un valor para el número adimensional de Deborah de  $De= 1.0$

En la Fig. 5.5 se observa que a bajas frecuencias el comportamiento de la función de transferencia es constante, es decir, que la relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión no cambia con la frecuencia. A una frecuencia crítica el sistema, muestra un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo de finido a una frecuencia resonante. Este valor máximo está asociado a un acoplamiento entre los mecanismos inerciales viscoelásticos y del solvente. Nótese que para valores mayores a la frecuencia resonante el sistema muestra un comportamiento monótono decreciente, y que para valores característicos el sistema despliega un tren secundario de picos. A una frecuencia crítica, el sistema tiende asintóticamente a valores que se aproximan asintóticamente a cero. Es importante resaltar que siempre hay flujo en el sistema y que el comportamiento de la

frecuencia está relacionado con la respuesta del gradiente de presión y el flujo volumétrico. Otro hecho importante es que el valor de  $J$  modifica el máximo resonante es decir que entre más valor tenga  $J$  produce un efecto negativo en el contexto de la resonancia en el sistema. Físicamente, al incrementar el solvente se compite con la contribución viscoelástica del polímero por lo que decrece la curva resonante

### Variando $\lambda_j$ parte imaginaria.

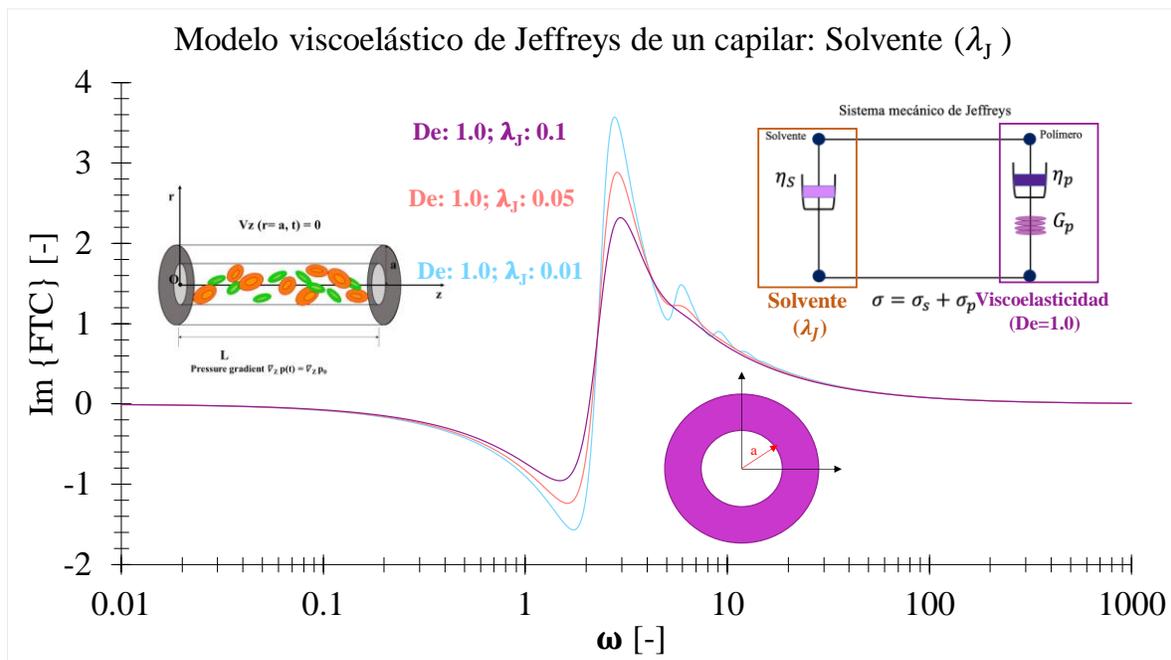


Figura 5.6. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja (FTC) vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores del número adimensional Jeffreys ( $\lambda_j$ ) para una geometría capilar. En esta simulación en particular, se empleó un valor para el número adimensional de Deborah de  $De= 1.0$

La Fig. 5.6 es muy parecida la Fig. 5.3 en la descripción matemática y física. A frecuencias bajas el comportamiento es constante cercana a cero. A una frecuencia en particular, el sistema muestra un comportamiento monótono decreciente hasta un valor mínimo anti-resonante. En este valor mínimo, la parte imaginaria de la FTC se basa en un acoplamiento entre las propiedades inerciales, viscoelásticas y del solvente. Nótese, que para una

frecuencia mayor a la anti-resonante este, exhibe una transición tipo diente de sierra hasta a un valor máximo resonante. Este tipo de transiciones son muy comunes en los sistemas eléctricos y transformaciones de fase de primer orden en termodinámica (ref). Es importante resaltar, que el máximo está asociado a una competencia entre los mecanismos que describen la física del sistema (inerciales, viscoelásticos y solventes). A una segunda frecuencia crítica mayor a la resonante, el dispositivo despliega un comportamiento monótono decreciente, el cual se aproxima a un valor asintótico que tiende a cero. El efecto del número  $J$  el cual describe la competencia entre los mecanismos asociados al solvente y al polímero es el de disminuir los mecanismos resonantes y anti-resonantes en la Fig. 5.6.

### Variando $\lambda_j$ norma.

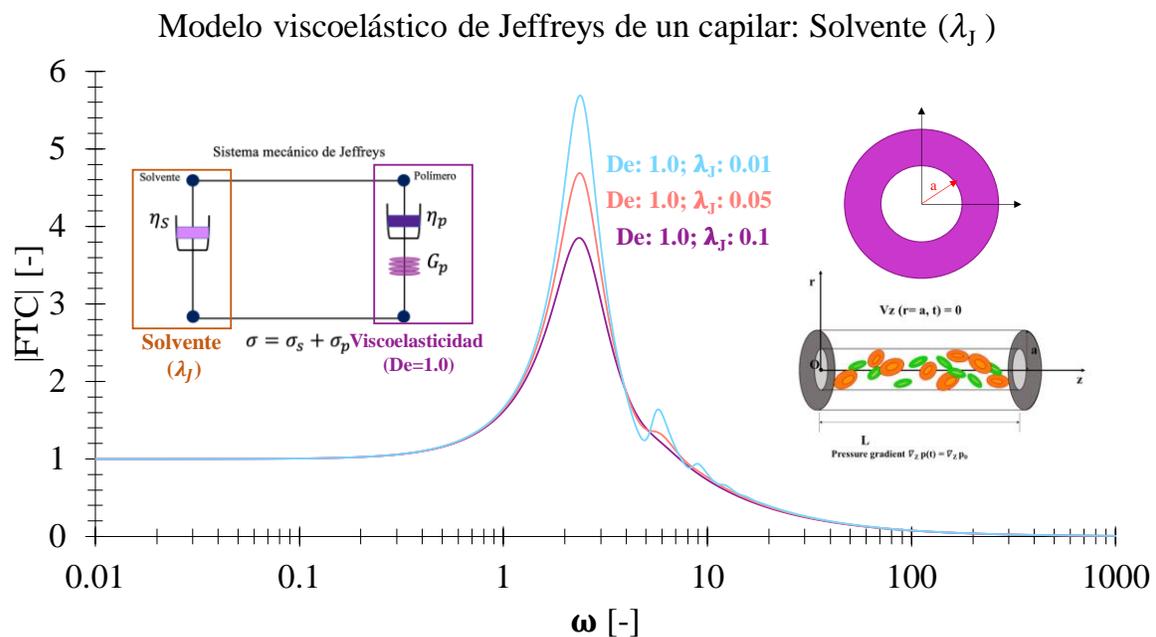


Figura 5.7. Ilustra la norma de la función de transferencia compleja (FTC) vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores del número adimensional del solvente ( $\lambda_j$ ) para una geometría capilar. En esta simulación en particular, se empleó un valor para el número adimensional de Deborah de  $De= 1.0$

La Fig. 5.7 ilustra la norma de la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional  $\lambda_j$  asociado al solvente en el sistema. Básicamente, el comportamiento es similar al de las otras simulaciones, es decir, a bajas frecuencias es constante, a moderadas es monótono creciente hasta un valor máximo, y para un valor de frecuencia crítica mayor al resonante, se observa un comportamiento monótono decreciente seguido de un tren de resonancias secundarias que colapsan en un comportamiento asintótico a cero. Físicamente, la descripción del sistema es parecida a las demás simulaciones, es decir, el máximo está determinado por un acoplamiento de todos los fenómenos que intervienen en este sistema como son: (i) viscosos, (ii) viscoelásticos, (iii) del solvente, (iv) inerciales y (v) dispersivos asociados a la diferencia entre las velocidades de fase y de grupo.

Nótese, que el efecto del número adimensional  $\lambda_j$  asociada a la competencia entre los mecanismos del solvente y viscoelásticos controla el valor del máximo resonante en la función de transferencia compleja. Un valor de  $\lambda_j=0$  se reduce al comportamiento del modelo viscoelástico de Maxwell mientras que un valor de  $\lambda_j=0.5$  representa la mayor contribución de los mecanismos asociados al solvente y esto tiene que ver, con que las dos viscosidades del solvente y la del polímero son iguales.

### 5.3 Modelo viscoelástico de una corona circular.

#### 5.3.1 Con efecto de la viscoelasticidad.

#### Variando Deborah parte real.

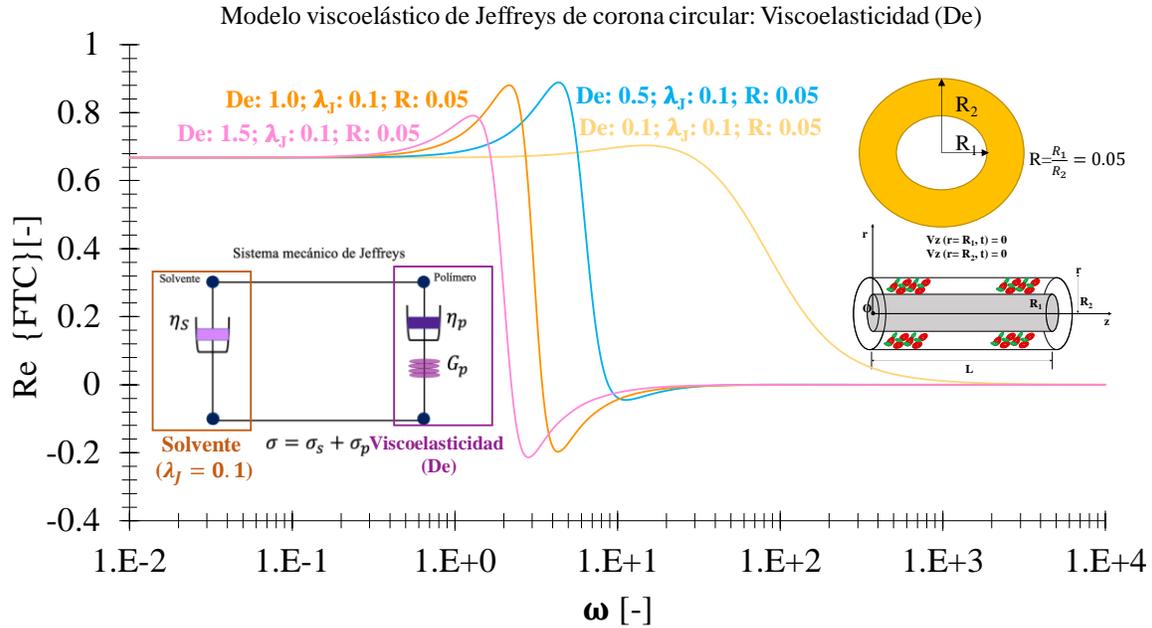


Figura 5.8. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja (FTC) vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores del número adimensional de Deborah ( $De$ ) para una corona circular. En esta simulación en particular, se emplearon valores para el número adimensional de Jeffreys  $\lambda_j = 0.1$  y un radio de  $R = 0.05$ .

La Fig. 5.8. se ilustra la parte real de la función de transferencia compleja vs la frecuencia en función del número adimensional de Deborah asociado a la parte viscoelástica para una geometría tipo corona circular. Nótese que cuando el número de Deborah es muy pequeño, es decir,  $De = 0.1$  el sistema se comporta de una manera o se aproxima al comportamiento newtoniano y solamente se observa un máximo local seguido de una curva de relajación. Es importante resaltar que el mínimo local es un efecto de las propiedades viscoelásticas del material y que en el caso de una viscosidad constante sin elasticidad el sistema muestra un comportamiento de relajación.

## Variando Deborah parte imaginaria.

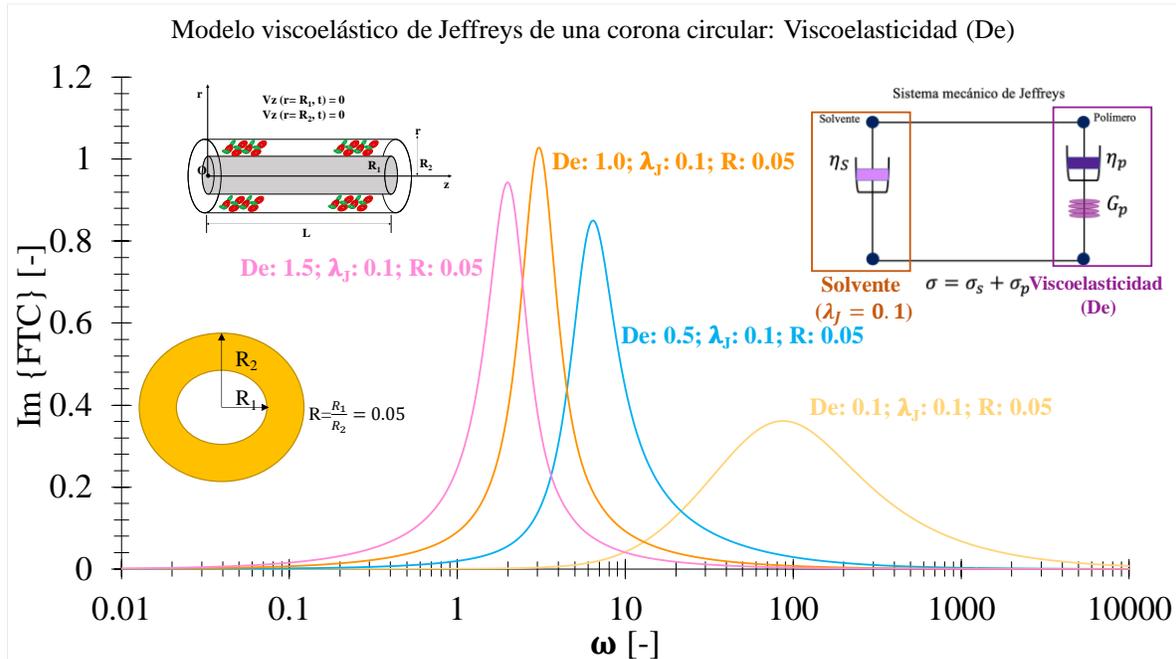


Figura 5.9. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja (FTC) vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores del número adimensional de Deborah (De) para una corona circular. En esta simulación en particular, se emplearon valores para el número adimensional de Jeffreys  $\lambda_j = 0.1$  y un radio de  $R = 0.05$ .

En la Fig. 5.9 se ilustra la función de transferencia vs frecuencia para diferentes valores del número de Deborah y un tiempo de retardo adimensional de 0.1 y una relación geométrica de 0.1. En todos los casos, se observa el clásico comportamiento resonante asociado a la parte imaginaria que es característico en los procesos disipativos. Es importante resaltar que cuando el Deborah es muy pequeño ( $De = 0.1$ ) el sistema se comporta más como la clásica respuesta newtoniana. La curva resonante se desplaza a mayores frecuencias y el mínimo resonante decrece considerablemente. Es importante resaltar, el efecto de los mecanismos viscoelásticos incrementa la resonancia y el máximo se obtiene a menores valores en la frecuencia. Es importante resaltar que el máximo valor de la resonancia se obtiene en Deborah igual a uno es decir que el sistema se comporta de una manera viscoelástica. El segundo punto importante es que al aumentar la elasticidad el material decrece su resonancia

y que para valores menores a uno en el Deborah se obtiene también una disminución en las curvas resonantes.

### Variando Deborah norma.

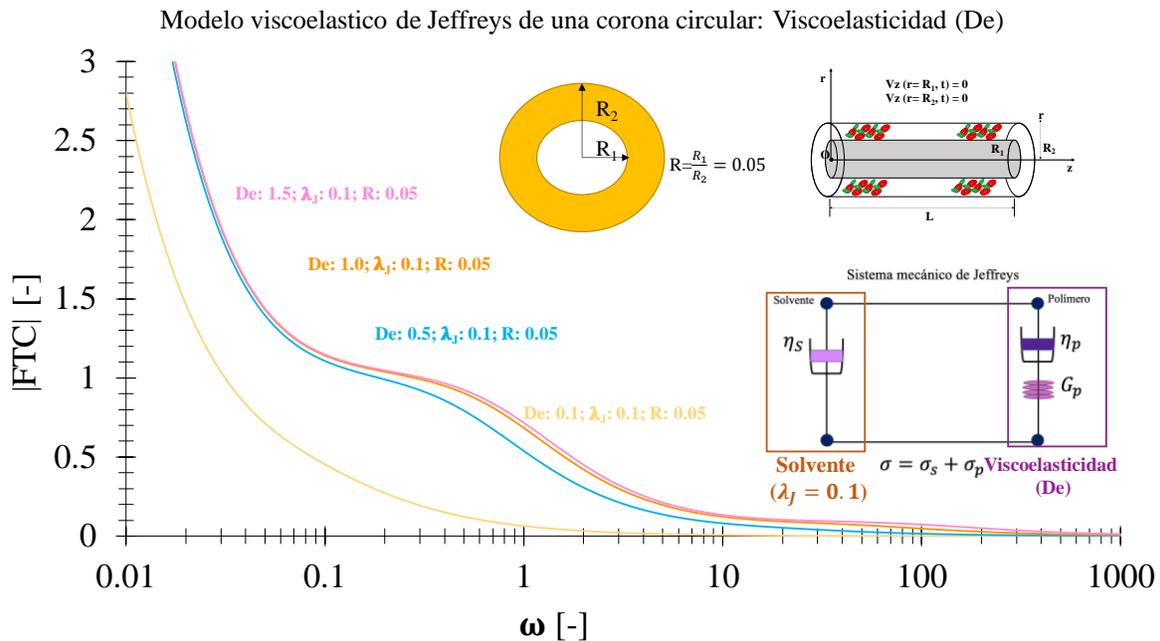


Figura 5.10. Ilustra la norma de la función de transferencia compleja (FTC) vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores del número adimensional de Deborah (De) para una corona circular. En esta simulación en particular, se emplearon valores para el número adimensional de Jeffreys  $\lambda_j=0.1$  y un radio de  $R=0.05$ .

En la Fig. 5.10 se grafica la norma de la función de transferencia compleja vs frecuencia en función del número adimensional de Deborah el cual relaciona las propiedades viscoelásticas del material. Como se muestra en la simulación, para todos los valores del número de Deborah, la función de transferencia muestra un comportamiento monótono decreciente en toda la ventana de observación y este comportamiento se hace más pronunciado cuando el número de Deborah decrece, es decir cuando los efectos inerciales son menos significativos que los mecanismos viscoelásticos. Es claro, que en esta simulación no se observa ningún comportamiento resonante y que el efecto dominante es el asociado a los mecanismos de relajación. Por último, el valor de R utilizado en las simulaciones es el de  $R=0.05$ , un tiempo de retardo adimensional de 0.1 y el Deborah varió de 0.1 a 1.5.

### 5.3.2 Con efecto del solvente

#### Variando el solvente $\lambda_J$ parte real.

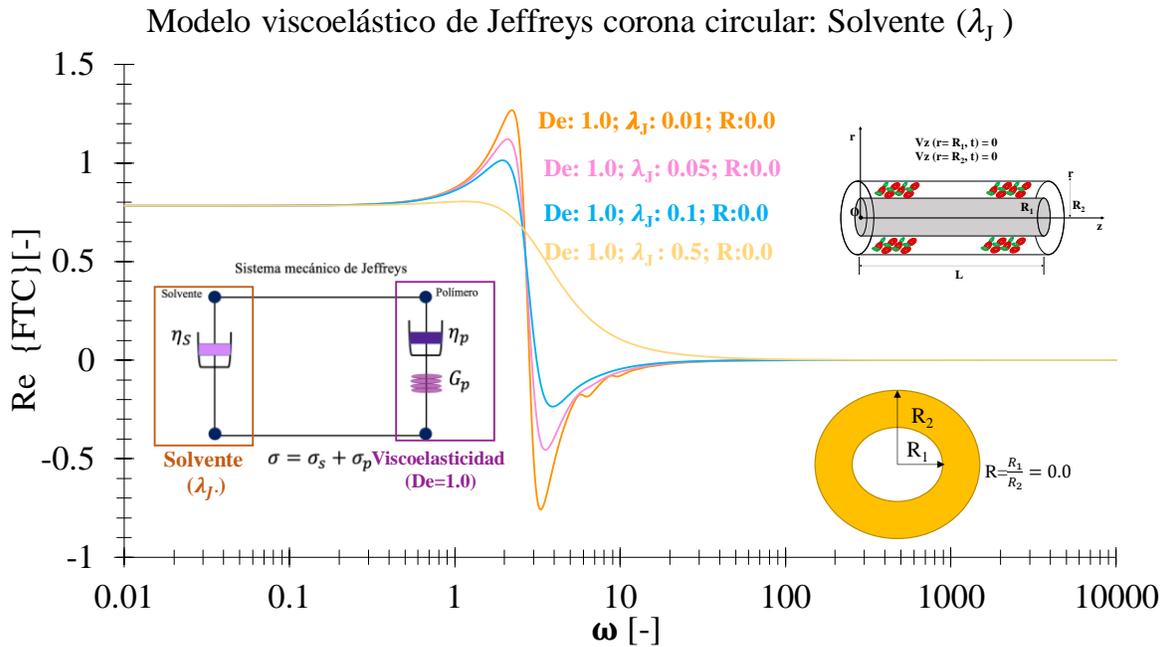


Figura 5.11. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja (FTC) vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores del número adimensional de Jeffreys ( $\lambda_J$ ) para una corona circular. En esta simulación en particular, se emplearon valores para el número adimensional de Deborah  $De=1.0$  y un radio de  $R=0.0$ .

En esta simulación, se observa que a bajas frecuencias el comportamiento es independiente de la frecuencia (constante). En particular, a una frecuencia característica, se observa un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo resonante. La física antes discutida en las figuras previas se mantiene en esta simulación, es decir, el máximo está determinado por un acoplamiento entre todos los mecanismos: (i) viscosos, (ii) inerciales, (iii) viscoelásticos o de relajación de Maxwell, (iv) dispersivos y finalmente (v) del solvente. Es importante resaltar que en el máximo se encuentra la mayor energía asociada a la resonancia por lo que, el sistema tiende a tener la máxima respuesta en esta frecuencia específica asociada a las propiedades materiales. Por una parte, y en concordancia con las demás simulaciones existe una transición de mayor a menor resonancia inducida por la frecuencia. A frecuencias altas se presenta un comportamiento anti-resonante en donde el sistema,

presenta la mínima energía asociada, a un posible cambio en el gradiente de presión que induce un perfil de velocidades negativo y posiblemente este, se relacione con el mínimo valor de la función de transferencia. Por último, a frecuencias altas el comportamiento es nuevamente independiente de la frecuencia y por lo tanto constante.

**Variando el solvente  $\lambda_J$  parte imaginaria.**

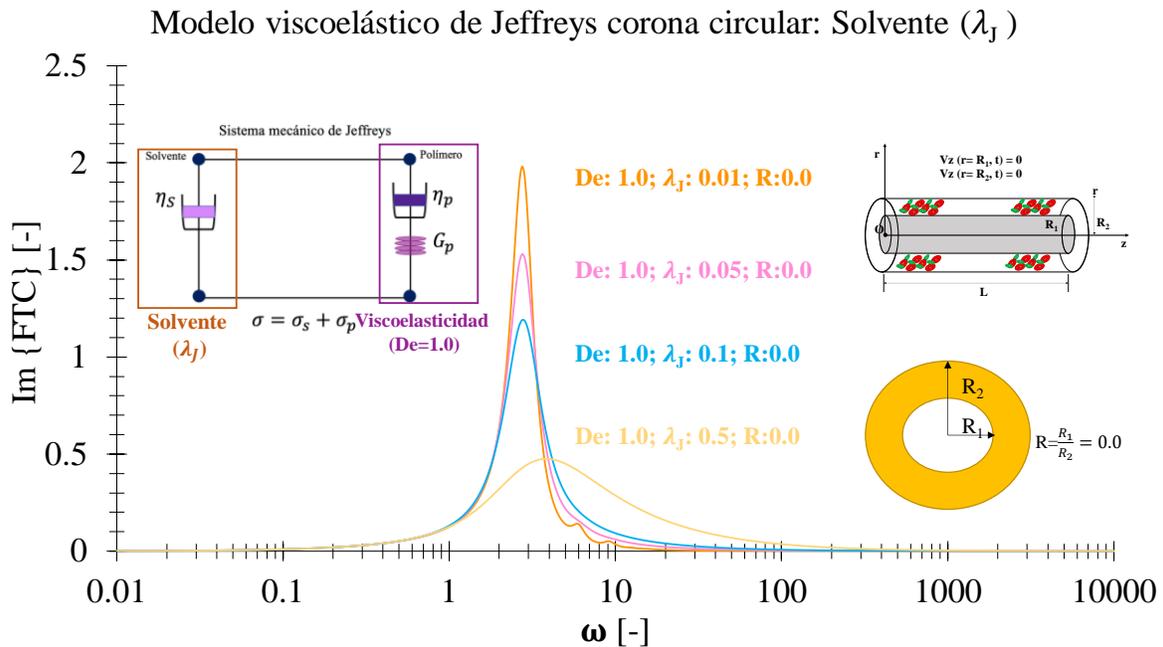


Figura 5.12. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja (FTC) vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores del número adimensional de Jeffreys ( $\lambda_J$ ) para una corona circular. En esta simulación en particular, se emplearon valores para el número adimensional de Deborah  $De=1.0$  y un radio de  $R=0.0$

La Fig. 5.12 Representa la parte imaginaria de la FTC vs frecuencia en función del número de Jeffreys asociado al solvente para una geometría tipo corona circular. Se observa, que a bajas frecuencias el comportamiento de la parte imaginaria de la función de transferencia compleja es independiente de la frecuencia. En particular, a una frecuencia específica, se observa un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo a una frecuencia resonante. Este valor del máximo resonante es un acoplamiento entre todos los mecanismos

descritos en esta investigación, es decir, solvente, viscosos, viscoelásticos, inerciales y dispersivos. Por otra parte, se observa que existe una transición de mayor a menor resonancia inducida por la frecuencia. Cuando el solvente es bajo se presentan frecuencias específicas dando a notar un cambio que va acompañado de un tren de frecuencias secundarias seguido de un comportamiento asintótico que se desvanece a frecuencias altas. Nótese, que a frecuencias específicas se observa un comportamiento tipo dientes de sierra el cual está relacionado con discontinuidades en la parte imaginaria de la función de transferencia compleja.

### Variando el solvente $\lambda_J$ norma.

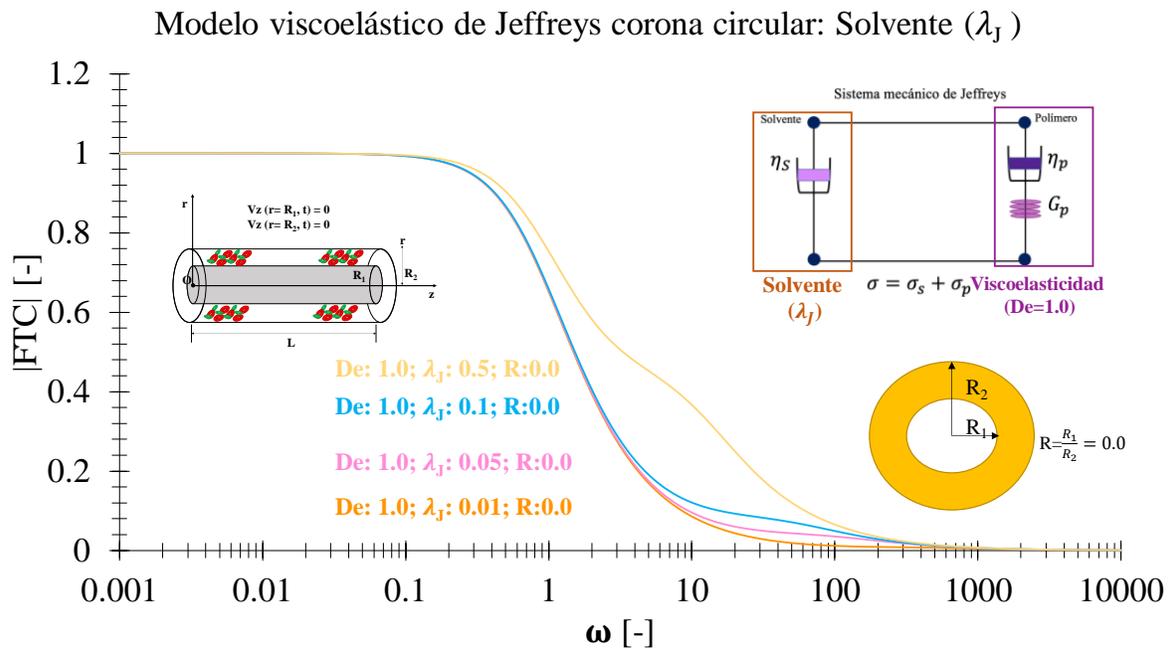
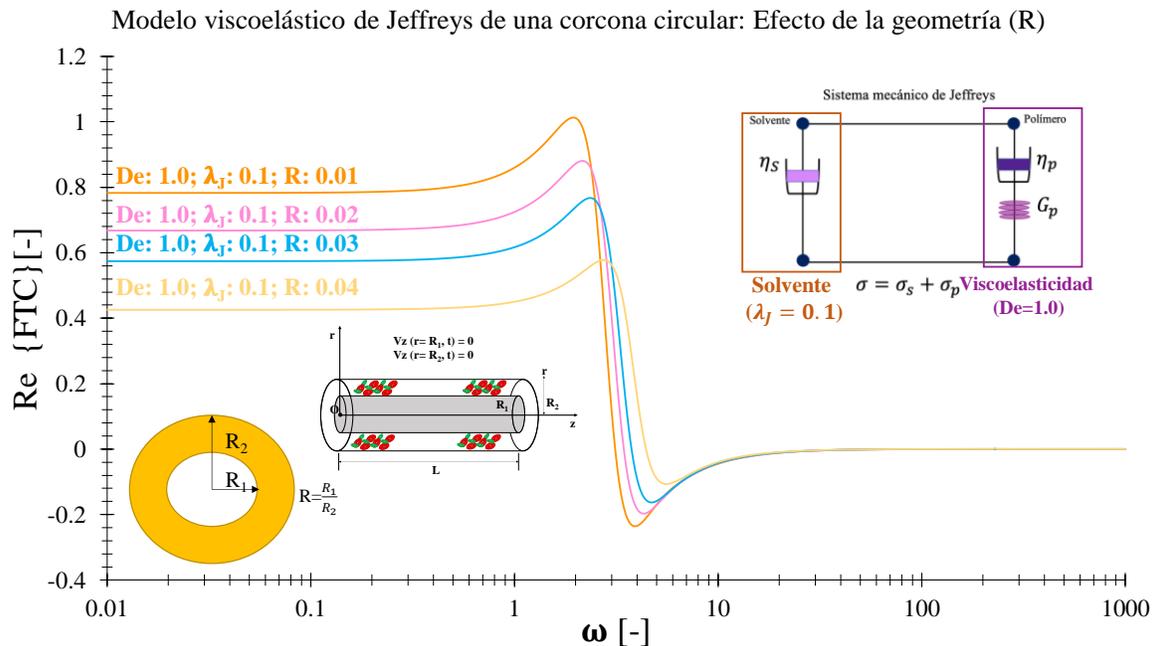


Figura 5.13. Ilustra la norma de la función de transferencia compleja (FTC) vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores del número adimensional de Jeffreys ( $\lambda_J$ ) para una corona circular. En esta simulación en particular, se emplearon valores para el número adimensional de Deborah  $De=1.0$  y un radio de  $R=0.0$

En la Fig. 5.13 se ilustra la norma de la función de transferencia vs frecuencias en función del número adimensional de Jeffrey  $\lambda_J$  el cual, es una medida de los mecanismos del solvente en el sistema. A frecuencias bajas la función de transferencia no depende de la frecuencia angular y a un valor específico de esta, las simulaciones muestran un comportamiento

monótono decreciente. Es importante resaltar, que a un segunda frecuencia característica el sistema tiende asintóticamente a valores cercanos a cero. Nótese que en el máximo valor del número de Jeffreys de  $\lambda_J=0.5$  el sistema relaja con diferentes cambios de pendiente los cuales, están asociados a una competencia entre los mecanismo inerciales, elásticos de bulto, viscoelásticos de relajación de Maxwell, dispersivos y finalmente del solvente. Un comentario importante, es que en todas las simulaciones se ha demostrado que el efecto del solvente es negativo en el contexto de la máxima respuesta dinámica del sistema.

### 5.3.3 Con efecto de la geometría Variando el radio parte real.



En la figura 5.14. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja (FTC) vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores de radio (R) de para una corona circular. En esta simulación en particular, se emplearon valores para el número adimensional de Deborah  $De=1.0$  y un Jeffreys  $\lambda_J=1.0$

A frecuencias bajas, la respuesta de la FTC es constante e independiente de la frecuencia ( $\omega \ll 1$ ). A una frecuencia crítica el sistema experimenta un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo resonante ( $\omega_M$ ). A una frecuencia crítica mayor a la máxima, la FTC despliega un comportamiento monótono decreciente hasta un valor anti

resonante mínimo. A un segundo valor crítico mayor que la resonancia del mínimo, este experimenta un comportamiento monótono creciente en donde, a valores de frecuencias altos, el comportamiento es constante.

Físicamente la función de transferencia nos da la relación entre el flujo y el gradiente de presión y de acuerdo con el modelo de Jeffreys existe una zona de máximo flujo y otra de mínimo flujo. Desde el punto de vista reológico este efecto es una consecuencia de los mecanismos del solvente y el polímero.

Geométricamente, el efecto de la razón entre los radios afecta la curva en desplazarla hacia estados de mayor flujo por lo que matemáticamente se considera una traslación de la función que representa el sistema de estudio.

Desde un punto de vista biológico significa que existen zonas en donde el sistema de estudio presenta la máxima permeabilidad asociada al flujo y zonas donde existe la mínima permeabilidad desde un punto de vista médico esto podría estar asociado con problemas de obstrucciones centrales debido a un alto contenido de colesterol que se adhiere a las paredes por efecto del calcio.

## Variando el radio parte imaginaria.

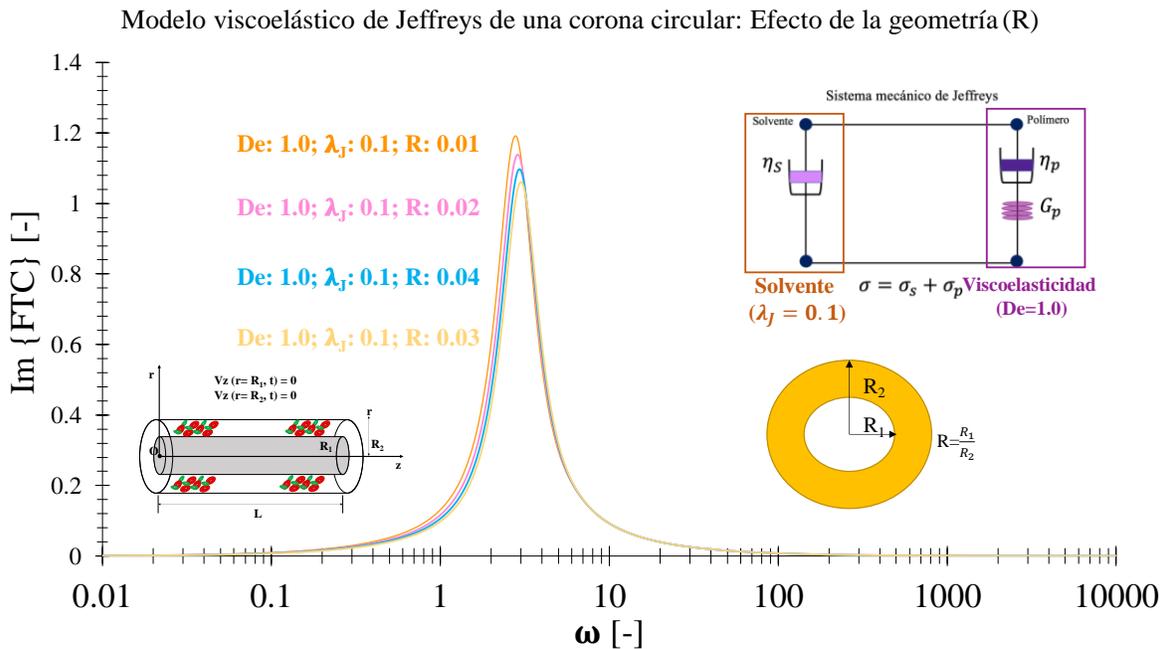


Figura 5.15. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja (FTC) vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores de radio (R) de para una corona circular. En esta simulación en particular, se emplearon valores para el número adimensional de Deborah  $De=1.0$  y un Jeffreys  $\lambda_j=1.0$

En la Fig. 5.15 se ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia para diferentes valores de la razón geométrica R, en el caso de una corona circular. Es importante recordar que cuando R tiende a cero, el sistema se aproxima al de un capilar, es decir, la oclusión es mínima en el sistema. En contraste, cuando R se aproxima a uno el sistema está completamente ocluido. A bajas frecuencias el sistema muestra un comportamiento constante independiente de la frecuencia, y para una frecuencia específica el sistema muestra un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo resonante en donde existe una competencia entre todos los mecanismos y propiedades intrínsecas del sistema. A un valor de frecuencia mayor al resonante, la parte imaginaria de la función de transferencia compleja muestra un comportamiento monótono decreciente y que tiende a cero asintóticamente. Nótese que existen dos conclusiones importantes de esta simulación: a) un sistema más ocluido induce a que la resonancia decrezca y b) un sistema más ocluido alcanza

su valor máximo resonante a valores mayores de frecuencia en la frecuencia angular, es decir, existe una traslación hacia valores mayor en la frecuencia angular. Es importante comentar que a pesar de que un sistema ocluido presenta menores resonancias estas no parecen decrecer drásticamente por efecto de la geometría, en este punto, se necesitan datos experimentales que corroboren lo encontrado en este trabajo de investigación a nivel de licenciatura.

### Variando el radio norma.

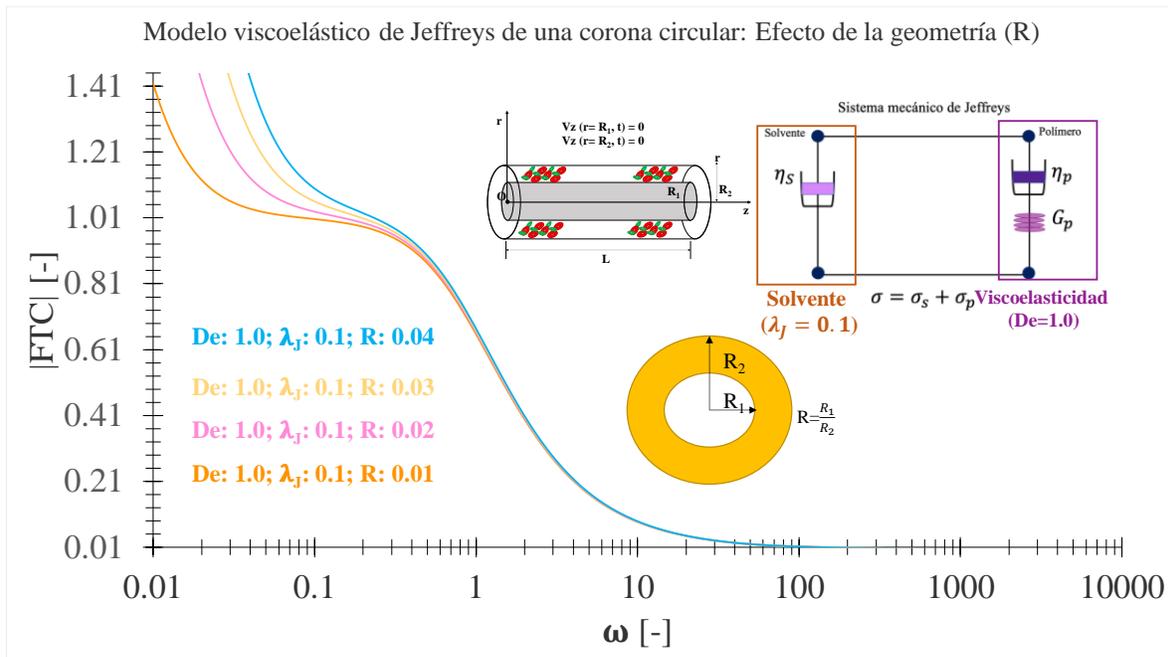


Figura 5.16. Ilustra la norma de la función de transferencia compleja (FTC) vs frecuencia ( $\omega$ ) para diferentes valores de radio (R) de para una corona circular. En esta simulación en particular, se emplearon valores para el número adimensional de Deborah  $De=1.0$  y un Jeffreys  $\lambda_J=1.0$

En la Fig. 5.16, se ilustra la norma de la función de transferencia vs frecuencia en función de la geometría a través de la razón de radios R, en una geometría tipo corona circular. Es importante recordar que cuando R se acerca a cero, el sistema se aproxima al de un capilar de radio  $R_2$  y longitud  $z=L$ . Por otra parte, cuando R se aproxima a uno, el sistema se encuentra completamente ocluido y el espacio anular prácticamente decrece a cero. En las simulaciones de la figura 5.15 se tiene un valor de Deborah de 1.0 lo que implica, que existe una competencia entre los mecanismos inerciales y viscoelásticos. El valor del

número de Jeffreys es de 0.1 lo que implica que la viscosidad del polímero es mucho mayor que la viscosidad del solvente. Es importante notar que el efecto geométrico induce en todos los casos curvas de relajación y que cuando el área de sección transversal de la corona circular es mayor el sistema relaja a mayores frecuencias, mientras que cuando el sistema se encuentra tiene mayor área de sección transversal el sistema relaja a menores frecuencias del proceso.

#### 5.4 Conclusiones.

En este trabajo se analizó el flujo pulsátil de un fluido viscoelástico fluyendo en dos tipos de geometrías. La primera de ellas es la geometría de un capilar de radio  $R=a$  y longitud  $z=L$ . La segunda geometría es una corona circular de radios  $R_1$  y  $R_2$  y longitud  $z=L$ , la cual puede ser visualizada mediante dos cilindros concéntricos. Para describir la transferencia de momento y reología del sistema se utilizó el modelo constitutivo de Jeffrey el cual, consiste en dos contribuciones asociadas al polímero y al solvente. La configuración mecánica que describe estas dos contribuciones es un modelo de Maxwell en paralelo con un fluido Newtoniano. El resultado de esta ecuación es un modelo constitutivo que contiene tres parámetros materiales llamados: (i) tiempo de relajación de Maxwell, (ii) viscosidad total y (iii) tiempo de retardo asociado al solvente.

Asumiendo estado no estacionario, fluido incompresible, proceso isotérmico, mecanismos gravitacionales despreciables, flujo unidireccional y que el sistema es deformado continua y reversiblemente con un gradiente de presión transitorio, se obtuvo una ecuación diferencial que describe los cambios de la velocidad en función de la posición y el tiempo. Las condiciones de frontera utilizadas para resolver la ecuación diferencial parcial son: a) no deslizamiento en la pared b) simetría del flujo en el centro del sistema.

Para resolver la ecuación diferencial parcial no homogénea se utilizó el formalismo de Fourier el cual consiste en aplicar la transformada integral de Fourier a las derivadas parciales temporales. Al resolver la ecuación diferencial en el espacio de las frecuencias se obtuvo una ecuación diferencial de Bessel modificada no homogénea. La solución de esta ecuación diferencial es una combinación lineal de funciones de Bessel de primer y segunda especie de orden cero y un término constante que depende de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión transitorio, del operador fluidez y del inverso del cuadrado del parámetro beta. Este parámetro beta en el caso newtoniano es una función compleja de la frecuencia mientras que, en el caso de un fluido viscoelástico la física y dinámica lineal de este está determinada por el número de Deborah que cuantifica los mecanismos viscoelásticos del fluido de estudio. Por otra parte, es muy importante mencionar que el número beta está relacionado con el operador fluidez y por lo tanto de las propiedades materiales, números adimensionales que describan la ecuación constitutiva con la que se caracteriza el líquido complejo.

En particular, el fluido de estudio es un líquido de Jeffrey el cual contiene dos números adimensionales los cuales son: el número de Deborah y el número de retardo asociado a las propiedades del solvente. Aplicando esto a la ecuación dinámica obtenemos el perfil de velocidades como función de la coordenada radial  $R$  y la frecuencia. La solución queda en términos de funciones de Bessel de orden cero y al integrar el perfil de velocidades con respecto a la sección de área transversal se obtiene el flujo volumétrico. El flujo volumétrico de un fluido viscoelástico se puede expresar como un múltiplo del fluido newtoniano y este no es otra cosa que la función de transferencia compleja la cual se puede interpretar como una generalización del operador fluidez modificado por los mecanismos inerciales del sistema.

Para analizar las bondades de nuestro sistema se consideraron dos casos pertinentes asociados al fluido newtoniano y al fluido viscoelástico de Jeffrey ambos, fueron analizados en dos geometrías: capilar y corona circular. Para analizar la respuesta dinámica con la frecuencia se estudiaron la parte real e imaginaria de cada sistema en función del número de Deborah y del tiempo de retardo o número adimensional de Jeffrey. En el caso del fluido newtoniano se analizaron la parte real, imaginaria y la norma (magnitud).

La programación se hizo en el paquete computacional de **Wolfram Mathematica versión 12.3 licencia UNAM**. Este programa se basa en una estructura matemática por objetos similar al lenguaje de programación de lenguaje C. Wolfram Language (el lenguaje de programación de Mathematica) es un lenguaje de programación multi-paradigma desarrollado por Wolfram Research, que sirve como el principal idioma de interfaz para Mathematica 1 y Wolfram Programming Cloud. Está diseñado para ser lo más general posible, con énfasis en computación simbólica, programación funcional y programación basada en reglas.

Las principales conclusiones la respuesta real e imaginaria en el fluido newtoniano se resumen a continuación: a) En la parte real la respuesta de la función de transferencia es una curva que está dominada por los mecanismos de relajación y b) La respuesta imaginaria despliega la clásica curva resonante asociada a la parte imaginaria de los procesos disipativos. Finalmente, la norma está dominada por los mecanismos de relajación en el fluido. **Es decir, en el fluido newtoniano no existe resonancia debido a que el fluido necesita la parte elástica para recuperarse y presentar esa resonancia.**

## **Newtoniano**

### a) capilar real

Las conclusiones de la función de transferencia (parte real) para el fluido newtoniano son las siguientes: i) a bajas y altas frecuencias muestra dos mesetas en donde la función de transferencia es constante, ii) y a moderadas frecuencias la función de transferencia muestra un comportamiento en donde los mecanismos que dominan la función de transferencia son los procesos de relajación.

### b) capilar imaginario

Las conclusiones de la función de transferencia compleja (parte imaginaria) para el fluido newtoniano se puede numerar a continuación: i) el sistema muestra la típica curva resonante tipo campana de Gauss y ii) este tipo de respuesta está dominada por los mecanismos disipativos

### c) corona circular real

Las conclusiones más importantes de la función de transferencia compleja (real) para la corona circular, se resumen a continuación: i) todas las curvas están dominadas por los procesos de relajación, y ii) el efecto geométrico de la oclusión central es la de disminuir la respuesta relajante del sistema.

### d) Corona circulas imaginario

Las conclusiones más importantes de la función de transferencia compleja (parte imaginaria) son las que se resumen a continuación: i) el sistema despliega las clásicas curvas tipo diente de sierra es decir curvas discontinuas que muestran una parte anti-resonante y otra resonante. ii) estos procesos disipan energía, pero la parte negativa de estos sistemas se puede deber a un contra flujo asociado al perfil de velocidades.

## **Líquido de Jeffrey**

### a) capilar real.

#### Viscoelasticidad (número de Deborah)

Las conclusiones más importantes de la geometría capilar para un líquido de Jeffrey son las siguientes: i) en todos los casos se despliegan curvas resonantes que son modificadas a través de la viscoelasticidad del material y a el número de Deborah. Cuando el tiempo viscoelástico es mucho mayor que el tiempo inercial el sistema muestra una curva resonante bien definida y al aumentar esta, la curva se desfasa hacia mayores valores de frecuencia. Es decir, el sistema al ser más viscoelástico necesita mayor frecuencia para alcanzar la máxima disipación.

#### Solvente (número de Jeffrey)

Es importante resaltar que la contribución de los mecanismos del solvente compite con la parte viscoelástica del polímero por lo que, se obtiene una resonancia menor debido a que el sistema está más diluido. Es un hecho, que en términos de los mecanismos resonantes el efecto del solvente tiene una contribución negativa para la máxima vibración del sistema.

### b) capilar imaginario.

En la geometría capilar el sistema muestra curvas resonantes y anti-resonantes asociadas a la parte imaginaria del sistema de estudio. Estas curvas se conocen como curvas dientes de sierra y son representativas de discontinuidades en los sistemas resonantes. Un hecho importante de estas simulaciones es que al aumentar la viscoelasticidad de la materia se observa un aumento en los mínimos y en los máximos de la curva no monotónica. Esto implica que el máximo, la anchura y la frecuencia en la cual los sistemas alcanzan la resonancia anti-resonancia es una combinación de mecanismos inerciales por la densidad, la longitud característica radial, los mecanismos reológicos a través de la viscosidad, elasticidad y mecanismos de retardo a través de la contribución del solvente. Nótese, que el máximo resonante asociado a la parte real es aproximadamente el doble de la contribución imaginaria.

c) corona circular real

En esta geometría, se observa que a frecuencias bajas la FTC es constante e independiente de la frecuencia. A una frecuencia crítica, se observa un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo resonante, seguido de una transición de estados de mayor a menor resonancia. Estos, están determinado con un acoplamiento entre los mecanismos: i) inerciales, ii) viscoelásticos, iii) y del solvente. Es importante resaltar, que, a partir de una frecuencia mayor a la resonante, el sistema despliega un comportamiento monótono decreciente seguido, de un tren de resonancias secundarias. Por otra parte, a una segunda frecuencia crítica el sistema despliega un comportamiento constante en donde la función de transferencia compleja es independiente de la frecuencia asociada al tiempo de proceso. Este comportamiento se repite en general en todas las simulaciones y el cambio de estos parámetros se deben principalmente a los números de Deborah y Jeffrey. Podemos inducir que la función de transferencia relaciona el gradiente de presión y el flujo volumétrico y su comportamiento está determinado mediante la inercia y las propiedades reológicas asociadas a la ecuación constitutiva con la cual se caracterice la transferencia de momento y reología del sistema de estudio. En particular, este trabajo versa en el modelo constitutivo de Jeffrey el cual, tiene una configuración mecánica en paralelo, es decir, la viscoelasticidad del polímero es independiente de las contribuciones newtonianas del solvente. Todos estos efectos muestran que el modelo de Jeffrey posee la física necesaria para describir estos sistemas en donde el esfuerzo total es la contribución de los sistemas independientes asociados a las dinámicas del líquido polimérico y del solvente.

d) corona circular imaginaria

La parte imaginaria de la FTC de la corona circular presenta matemáticamente un comportamiento resonante y difiere de la parte real en el comportamiento anti-resonante. Por otra parte, este tipo de comportamientos son clásicos de los sistemas disipativos, es decir, aquellos sistemas en los cuales la transformación de la energía es irreversible (fricción entre fluidos, calentamiento eléctrico, etc). Sin embargo, estas curvas resonantes están controladas por los mecanismos viscoelásticos y del solvente asociados a los procesos irreversibles. Es importante notar, que en la respuesta imaginaria no se observan cascadas resonantes y el

efecto de la geometría a través del factor  $R$ , induce una disminución en la resonancia de estos sistemas no newtonianos. Este tipo de comportamiento puede ser un primer acercamiento para modelar sistemas biológicos en donde se presentan obstrucciones debido a alguna patología o algún trastorno alimenticio que en los tiempos actuales son considerados una pandemia a nivel mundial es decir obesidad, hiperglucemia, hipoglucemia, hipercolesterolemia, cirrosis hepática y cáncer.



Mecanismos inerciales, viscoelásticos y del solvente aplicados a la descripción del flujo pulsátil en un líquido de Jeffreys.



Dispersión  
 $V_p \neq V_g \neq 1$ ; hay dispersión fluido no newtoniano

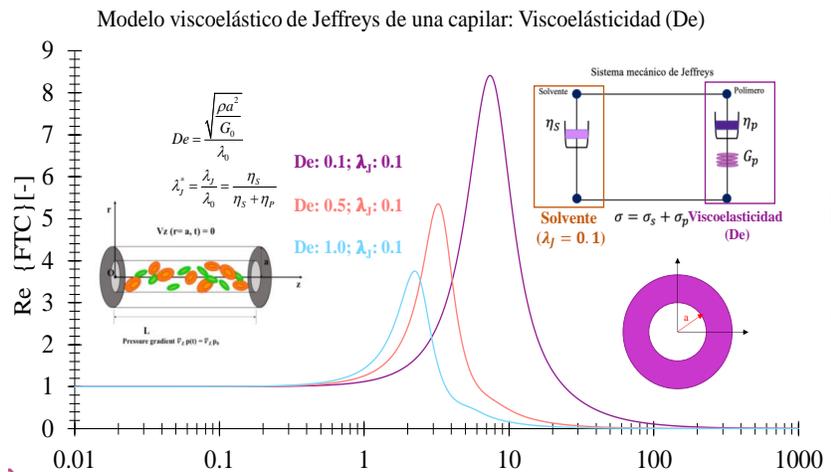
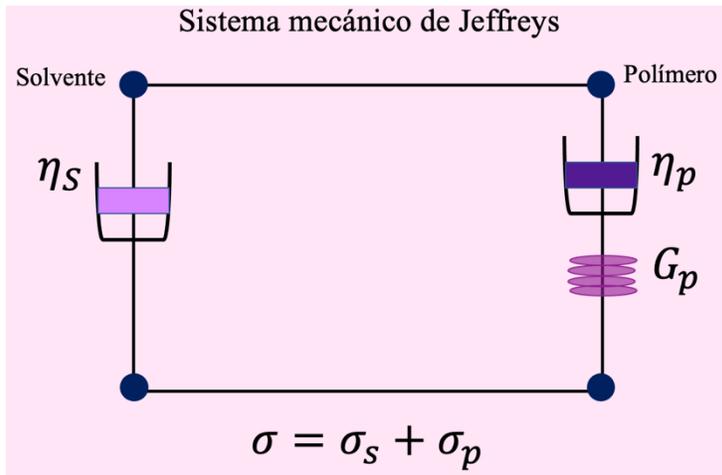


Figura 5.17. Resumen gráfico del trabajo desarrollado de esta tesis de licenciatura.

De manera general observamos que la función de transferencia compleja en ambos sistemas depende de las propiedades geométricas del medio a través de la función de radiografía.

En general para los dos sistemas los mecanismos resonantes son funciones de:

a) Inercia, viscosidad, elasticidad, solvente y fuerzas dispersivas inducidas por el vector de onda beta.

Respecto al operador fluidez beta, lo que nos permite generalizar este trabajo para cualquier fluido viscoelástico lineal incluyendo el modelo multimodal de Maxwell.

La relación al modelo de estudio el cual es el mecanismo viscoelástico de Jeffreys tiene como característica que contiene dentro de su expresión dos puntos adimensionales los cuales son: el Deborah (De) y el número adimensional de Jeffrey  $\lambda_J$ .

Tenemos la geometría la cual es representada mediante una función de transferencia compleja la cual tiene una entrada y una salida y el fluido que mueve esa relación, está representado mediante el sistema mecánico de Jeffreys conformado de un solvente y un polímero, el cual es la mejor aproximación a la realidad, que hablando específicamente de la sangre el solvente está representado por el plasma y el polímero se encuentra mediante el hematocrito. Además de lo descrito anteriormente se considera el mecanismo de dispersión, el cual compromete a las oscilaciones, mismas que se deben a diferentes velocidades entre las funciones de Bessel, esto quiere decir que una onda se propaga y envuelve a las demás ondas, ya que se analiza el flujo transitorio en el espacio de Fourier se comprometen los mecanismos inerciales y del solvente ( $\lambda_J$ ), viscoelástico ( $\lambda_0$ ) o bien tiempo de relajación de Maxwell y la inercia a través del producto de la densidad por  $i\omega$  esto se analiza en el número adimensional de Deborah, el cual relaciona tiempo inercial/ y el tiempo viscoelástico.

La resonancia tiene que ver con un efecto entre los mecanismos viscoelásticos inerciales y del solvente y además con una propagación de las ondas ( $V_p$  y  $V_g$ )

## 5.5 Trabajo futuro.

Una continuación natural de este trabajo es entender este tipo de sistemas al régimen de viscoelasticidad no lineal por medio de diferentes ecuaciones constitutivas, que contengan información adicional de los mecanismos elásticos y comportamientos complejos como son: i) adelgazamiento al corte, engrosamiento al corte, tixotropía, reopexia, flujo bandeado, primera y segunda diferencia de esfuerzos normales. Otro camino natural de este trabajo sería caracterizar diferentes fluidos biológicos y materia blanda en general mediante datos reométricos extraídos de pruebas en estado estacionario no estacionario con diferentes geometrías. En este punto se puede calcular la respuesta del flujo volumétrico vs gradiente de presión con datos de sangre humana fresca, con diferentes concentraciones de colesterol o enfermedades como la cirrosis hepática. Por otra parte, el estudio de este tipo de fluidos variando la geometría debido a cambios en el diámetro del flujo presentarían transiciones de flujo cortante a extensional lo que implicaría que el sistema de ecuaciones se tiene que resolver mediante métodos numéricos sofisticados como son: i) diferencias finitas, métodos de Galerkin, elemento finito, volumen finito e híbridos.

Finalmente, este trabajo demuestra que el modelo de Jeffrey posee la física necesaria para representar y describir suspensiones y fluidos complejos como la sangre. Esta investigación representa un esfuerzo en la búsqueda constante de ecuaciones reológicas que utilicen los fenómenos de transporte como herramienta de carácter organizacional y que empleen las matemáticas como un lenguaje común para describir la naturaleza física de los sistemas.

## **Bibliografías**

Aguilar-Velázquez MJ. (2018) Análisis e inversión 1-D de curvas de dispersión de velocidad de fase de ondas superficiales. Ingeniería Geofísica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 Dynamics of polymeric liquids, vol. New York: John Wiley & Sons.

Bird, R.B., Stewart E. & Lighfoot E.N. 2002 Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.

Bravo-Gutierrez ME, Hernández-Machado A, Corvera-Poire E (2008). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannel. Phys. Rev. Lett. 101, 224501.

Bravo-Gutierrez ME, Castro M, Hernández-Machado A, Corvera-Poiré E (2011). Controlling viscoelastic flow in microchannels with slip. Langmuir 27, 2075-2079.

González-Guillen IH. (2022) Predicción Del Coeficiente De Transferencia De Masa De Un Fluido No Newtoniano Inelástico Durante Una Ultrafiltración Para La Purificación De Aloe Vera. Ingeniería Química, Facultad de estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.

Hernández-Machado A, Corvera-Poire E (2008). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannel. Phys. Rev. Lett. 101, 224501.

Castrejón-Pita J, Del Rio. J, Castrejón-Pita A, Huelsz G (2003). Experimental observation of dramatic differences in the dynamic response of Newtonian and Maxwellian fluids. Phys. Rev. E 68, 046301 (2003).

Castro M, Bravo-Gutierrez ME, Hernández-Machado A, Corvera-Poire E (2008). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannel. *Phys. Rev. Lett.* 101, 224501.

Corvera-Poire E, Hernández-Machado E (2010). Frequency-induced stratification in viscoelastic microfluidics. *Langmuir* 26, 15084-15086 (2010)

Cuevas S, del Rio JA (2001) Dynamic permeability of electrical conducting fluids under magnetic fields in annular ducts. *Phys. Rev. E* 64, 016313.

Del Rio JA, De Haro ML, Castrejón-Pita JR (1998). Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. *Phys. Rev. E* 58 6323.

Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Calderas García F, Ramírez-Torres LA, Ortiz Bautista D, Soriano-Correa C, Nuñez-Ramírez DM, Medina-Torres L, Hernández Abad VJ (2022). Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos: Flujo pulsátil de sangre humana. UNAM, FES Zaragoza, agosto 2022. ISBN: 978-607-30-6436-1.

Herrera-Valencia EE, Rey AD (2014). Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. *Phil. Trans. R. Soc. A.* 372: 20130369/1-28.

Herrera EE, Calderas F, Chavez AE, Manero O, Mena B (2009). Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. *Rheol. Acta* 48 779-800.

Herrera EE, Calderas F, Chávez AE, Manero O (2010). Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165 174-183.

Lombard J, Pagonabarraga I, Poiré EC (2020). Dynamic response of a compressible binary fluid mixture. *Phys. Rev. Fluids* 5, 064201.

Lopez de Haro M, del Rio JA, Whitaker S (1996). Flow of Maxwell fluids in a porous media. *Transp. Porous Media* 25, 167.

Macosko CW, *Rheology: Principles, Measurement and Applications* (Wiley, Germany 1994).

Muralev L (2021). Viscoplastic flow in a pipe of a complex cross section with stick-slip at the wall. *Phys. Fluids* 33, 073107.

Torres Herrera U (2021). Dynamic permeability of fluids in rectangular and square microchannels: Shift and coupling of viscoelastic bidimensional resonances. *Phys. Fluids* 33, 012016.

Torres-Herrera U, Corvea-Poiré E (2018). An analytical framework to determine flow velocities with nanotubes from their vibration frequencies. *Phys. Fluids* 30, 122001

Torres Rojas AM, Pagonabarraga, Corvera-Poiré (2017). Resonances of Non-Newtonian fluids in elastomeric microtubes. *Phys. Fluids* 29, 122003.

Tsiklauri D, Beresnev I (2006). Non-Newtonian effects in the peristaltic flow of a Maxwell fluid. *Phys. Rev.* 73, 029901.

Wolfram Research, Inc., *Mathematica (Licencia UNAM) Version 13*, Champaign, IL., 2020.