



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA**

**MECANISMOS RESONANTES DE FLUIDOS VISCOELÁSTICOS EN  
GEOMETRIAS CILÍNDRICAS CON APLICACIÓN A BIO-INGENIERÍA**

**TESIS**

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE**

**INGENIERA QUÍMICO**

**PRESENTA:**

**Yael Sandoval Velazquez**

**DIRECTOR DE TESIS**

**DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA**

**ASESORES**

**DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA**

**M.C. e I. M. CANDIDATO A DOCTOR LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES**

**MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO 12 DE ENERO DEL 2023**





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN  
ESCOLAR  
PRESENTE**

Comunico usted que el alumno Yael Sandoval Velázquez con número de cuenta 315115233 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado en el mes del 18 de enero para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)
Secretario:	Dr. Fausto Calderas García
Suplente:	M.C. Doctorante Luis Antonio Ramírez Torres
Suplente:	Dra. Guadalupe Salinas Juárez

El título de la tesis que se presenta es:

“Mecanismos resonantes de fluidos viscoelásticos en Geometrías cilíndricas con aplicación en Bioingeniería”

## AGRADECIMIENTOS

- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- A la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza agradezco este periodo de preparación académica llena de diferentes experiencias gratificantes, que me permitió convivir con todo tipo de personas con las cuales forme lazos de suma importancia. A la universidad que me brindó el mejor ambiente para mi preparación profesional.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIT) de la UNAM <<IN102823>> <<Modelo Matemático y Simulación Computacional de Fluidos Complejos con Aplicación a Bioingeniería >>Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación en reología y fenómenos de transporte de fluidos complejos del Laboratorio de Investigación 7, Primer Piso, Unidad Multidisciplinaria de Investigación Experimental Zaragoza.
- A la línea de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415).
- A la línea de investigación: Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A mi mamá quien siempre me estuvo apoyando durante toda mi carrera.
- A Estefanía Nava Rivera por siempre darme su ayuda y hacer de mi estancia en la facultad un lugar mejor.

## **DEDICATORIAS**

- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- A la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza agradezco este periodo de preparación académica llena de diferentes experiencias gratificantes, que me permitió convivir con todo tipo de personas con las cuales forme lazos de suma importancia. A la universidad que me brindó el mejor ambiente para mi preparación profesional.

# INDICE

NOMENCLATURA Y SÍMBOLOS .....	7
RESUMEN .....	9
I. Introducción .....	10
1.1 Bioingeniería.....	11
1.2 Bio-reología .....	11
1.3 Reología.....	12
1.4 Permeabilidad .....	13
1.5 Antecedentes .....	14
1.6 Hipótesis de trabajo: .....	17
1.7 Objetivos de la investigación: .....	17
1.8 Distribución del material de esta tesis de licenciatura .....	18
II. Marco teórico .....	19
2.1 Fluido Newtoniano en un capilar .....	20
2.2 Razonamiento matemático.....	20
2.3 Ecuación de continuidad.....	21
2.4 Ecuación de movimiento.....	22
2.5 Flujo Volumétrico.....	25
2.6 Fluido Newtoniano en una corona .....	26
2.7 Modelado matemático.....	26
2.8 Razonamiento matemático.....	27
2.9 Flujo Volumétrico.....	29
2.10 Modelo de Maxwell (En serie) .....	31
2.11 Modelo de Kelvin-Voigt (Paralelo) .....	33
III. Modelado matemático.....	34
3.1 Fluido viscoelástico en un capilar.....	35
3.2 Modelado matemático.....	35
3.3 Flujo Volumétrico.....	40
3.4 Fluido viscoelástico en una corona circular .....	43
3.5 Modelado matemático.....	43
3.6 Flujo Volumétrico.....	45
3.7 Resumen de ecuaciones .....	48
IV. Variables adimensionales .....	49
4.1 Variables adimensionales.....	50

4.2 Vector de onda complejo Beta.....	50
4.3 Función de transferencia adimensional para el capilar. ....	52
4.4 Función de transferencia adimensional para la corona circular. ....	53
V. Simulaciones y análisis de resultados .....	54
Simulaciones en el programa Mathematica .....	55
5.1 Fluido newtoniano en un capilar.....	55
5.2 Fluido newtoniano en una corona circular.....	56
5.3 Fluido viscoelástico (Maxwell) en un capilar.....	58
5.4 Fluido viscoelástico (Maxwell) en una corona circular.....	59
5.5 Aplicaciones a bioingeniería.....	62
VI. Conclusiones y trabajo futuro.....	68
6.1 Aportación al conocimiento.....	69
Referencias .....	70

## NOMENCLATURA Y SÍMBOLOS

$a$	Radio del tubo capilar [m]
$G_0$	Módulo elástico [Pa]
$L$	Longitud del capilar [m]
$p$	Presión [Pa]
$Q_0$	Flujo volumétrico independiente del flujo pulsátil [ $m^3/s$ ]
$r$	Coordenada radial [m]
$z$	Coordenada rectangular [m]
$g$	Gravedad [ $m/s^2$ ]
$V_z$	Velocidad en eje $z$ [m/s]
$O_n$	Operador viscosidad [Pa s]
$I_0$	Función de Bessel modificada de primera especie de orden 0
$K_0$	Función de Bessel modificada de segunda especie de orden 0
$R_1$	Radio menor en la corona circular [m]
$R_2$	Radio mayor en la corona circular [m]
$R_{vena}$	Radio promedio de la vena [m]
$T(\omega)$	Función de transferencia
$De$	Numero de Deborah

### Letras griegas

$\eta$	Función de viscosidad [Pa s]
$\dot{\gamma}_{ji}$	Escalar rapidez de deformación de $i$ respecto a $j$ [1/s]
$\lambda$	Tiempo estructural [s]
$\sigma_{ij}$	Componente $ij$ del tensor de esfuerzos [Pa]
$\theta$	Coordenada angular [1]
$\rho$	Densidad [ $kg/m^3$ ]
$\mu$	Viscosidad [Pa s]
$\omega$	Frecuencia [Rad/s]
$\eta_0$	Función de viscosidad [Pa s]

## Vectores, diadas y tensores

$\mathbf{V}$	Vector velocidad [m/s]
$\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$	Producto diádico del vector velocidad [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]
$\mathbf{D}$	Tensor rapidez de deformación [1/s]
$\mathbf{f}$	Fuerza de cuerpo [N/m <sup>3</sup> ]
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de esfuerzos [Pa]
$\mathbf{W}$	Tensor vorticidad [1/s]
$\nabla \mathbf{V}$	Tensor gradiente del vector velocidad [1/s]
$\nabla \mathbf{V}^T$	Transpuesta del tensor gradiente del vector velocidad [1/s]
$\mathbf{V}$	Vector velocidad [m/s]

## Operadores diferenciales y otros símbolos

$( )^T$	Transpuesta para la matriz $m \times n$ [1]
$\nabla$	Operador gradiente (Nabla) [1/m]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]
$\nabla^2$	Operador Laplaciano [1/m]

## RESUMEN

En este trabajo se analiza el flujo de un líquido complejo viscoso y elástico fluyendo en geometrías cilíndricas deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión pulsátil. Suponiendo que el fluido es incompresible, es decir, su densidad es constante e independiente de la posición y el tiempo, el proceso es isotérmico y que los mecanismos gravitacionales son despreciables, se obtiene una ecuación diferencial parcial que describe los mecanismos inerciales en función de las fuerzas superficiales y volumétricas, en donde se realizan los balances de masa y de momento.

Para deducir una expresión, analítica para el perfil de velocidades, se transforma la ecuación dinámica al espacio de Fourier y se impone que la velocidad en el centro es finita y que en la pared es cero. La ecuación resultante se integra en la sección de área transversal y se obtiene una expresión analítica para el flujo volumétrico de un fluido viscoelástico lineal.

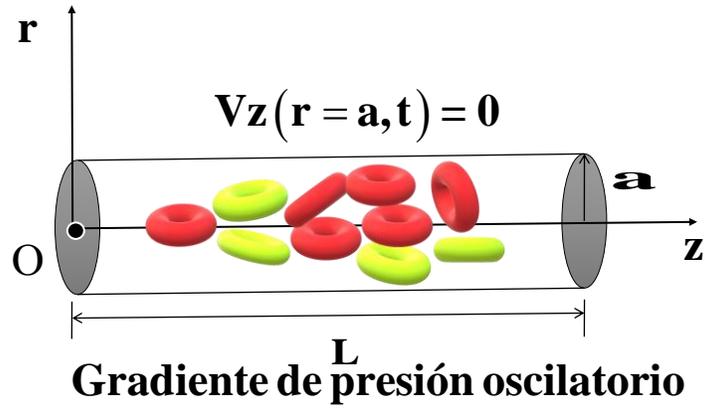
El modelo resultante describe que el flujo volumétrico es el producto de tres importantes contribuciones: (i) La primera de ellas, es el flujo volumétrico Newtoniano que describe la amplitud de las oscilaciones en el medio. (ii) La segunda de ellas, representa la función de transferencia compleja que describe la relación entre la variable de entrada asociada al gradiente de presión pulsátil y el flujo volumétrico y (iii) la fuerza motriz asociada al gradiente de presión pulsátil el cual, varía periódicamente y depende de la frecuencia. La respuesta dinámica depende de un parámetro adimensional Beta el cual, se puede interpretar como el inverso de una velocidad característica en el medio.

Este, describe la dispersión en el sistema, y depende del número de Deborah, operador fluidez y de los mecanismos inerciales. Este resultado es general y puede ser aplicado a cualquier ecuación reológica viscoelástica lineal o fraccionaria del cálculo fraccional. Finalmente, se utilizan datos de un fluido biológico para describir el flujo en una vena del sistema circulatorio humano.

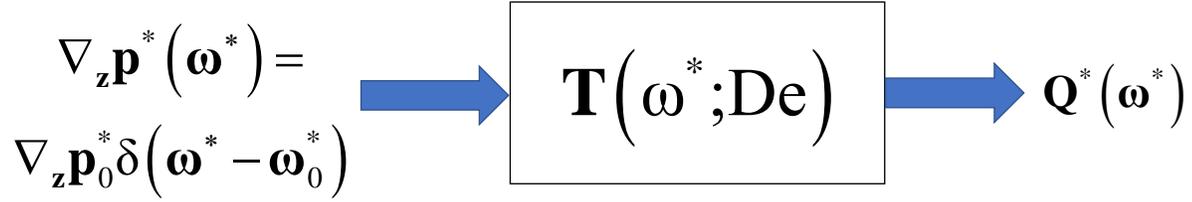
### **Palabras claves:**

Ecuación de Hagen y Poiseuille, Transformada Integral de Fourier, Flujo Pulsátil, Soluciones Analíticas, Sangre humana, Hipercolesterolemia.

# I. Introducción



$$\nabla_z p(t) = \nabla_z p_0 \text{Exp}(i\omega t)$$



## 1.1 Bioingeniería

La bioingeniería es la rama de ingeniería que se encarga de estudiar desde el punto de vista de la ingeniería los procesos biológicos (**Rey 2007**). La bioingeniería es conocida como ingeniería biológica la cual, aplica conceptos basados en ciencias duras y la física para resolver problemas de las ciencias de la vida (**Rey 2007**). Esta rama de la bioingeniería utiliza los conceptos y herramientas de la matemática y física para entender, resolver o elucidar problemas en las ciencias de la salud (**Rey 2007, 2010**). Una de las aplicaciones más importantes es el biomimetismo o biomimesis que es una subdisciplina de la ingeniería biológica que trata de entender la forma en que los organismos vivos como un resultado de un prolongado proceso de pruebas y errores conocido como evolución, han resuelto dificultades en el pasado, y para encontrar formas de resolver problemas similares en sistemas artificiales (**Rey 2007, 2010**). Un ejemplo de biomimetismo es el que se ha estudiado por años y por décadas para la fabricación de hilos de **acero (Chan et al. 2008)**.

Este increíble proceso consiste en 4 procesos fundamentales, los cuales son mencionados a continuación: (i) El primero de estos, es un líquido viscoelástico conformado por nueve proteínas que ya han sido caracterizados bioquímicamente. (ii) El siguiente paso es la transformación de un líquido viscoelástico a un cristal líquido nemático. (iii) El tercer paso, es el de una deshidratación lo que lleva el sistema a un gel biológico y (iv) por último el hilado. Este hilado es expulsado por un extrusor biológico cuyo dado biológico puede ser descrito por una doble exponencial (**Rey et al. 2014**). Este increíble proceso de formación del hilado es acompañado de un gradiente de presión pulsátil por efecto de las contracciones peristálticas de la araña y es un problema complejo, desde el punto de vista reológico debido a la mezcla cinemática de componentes extensionales y cortantes del sistema (**Rey 2007, 2010; Rey et al. 2014**).

## 1.2 Bio-reología

El estudio de la bioreología en sangre ha sido tema de diferentes grupos de investigación a nivel mundial. La solución del flujo sanguíneo incluye las siguientes aproximaciones

- (i) Analíticas: El flujo sanguíneo se describe mediante ecuaciones constitutivas que tratan de describir la relación entre el esfuerzo y la rapidez de deformación del sistema de estudio.
- (ii) Numéricas: El flujo sanguíneo se describe mediante ecuaciones no lineales que imposibilitan, decir expresiones cerradas así que, se recurre a los métodos numéricos para la obtención de resultados.
- (iii) Simulaciones computacionales: En este punto, se utilizan softwares sofisticados con el fin de resolver las ecuaciones no-lineales acopladas en el sistema de estudio.
- (iv) Métodos experimentales: En este punto, se ha empleado técnicas bioquímicas para la caracterización de la sangre, y reométricas para su caracterización en términos de parámetros reológicos medibles,

Otro ejemplo de este tipo, es el flujo sanguíneo en el sistema circulatorio humano (**Medina et al. 2022, Moreno et al. 2015**). Este tipo de sistemas se pueden modelar como un capilar de radio  $r = a$  y longitud finita  $z = L$ . Suponemos, que el capilar es inextensible, es decir inelástico. La sangre humana puede ser modelada como una suspensión la cual, contiene dos contribuciones importantes: (i) El plasma que representa el solvente y (ii) el hematocrito que está compuesto por los eritrocitos y leucocitos. Estos últimos, le confieren sus propiedades no-newtonianas (**Medina et al. 2015**)

Este líquido fluye debido a una bomba biológica llamada corazón y que puede ser interpretada desde el punto de vista de la ingeniería como una válvula de desplazamiento positiva (**Herrera 2009, 2010; Herrera-Valencia et al. 2012, 2017**)

Matemáticamente, este dispositivo puede ser descrito por un gradiente de presión pulsátil, por medio de una función exponencial compleja de variable compleja.

$$\nabla p(t) = \nabla p_0 e^{i\omega t} = \nabla p_0 \cos(\omega t) + \nabla p_0 i \sin(\omega t); i^2 = -1 \quad (1)$$

En la Ec.(1)  $\omega$  es la frecuencia del sistema de estudio.

### 1.3 Reología

La reología se puede definir como la materia que estudia el comportamiento de diferentes fluidos en relación con el esfuerzo al que son sometidas y la deformación que presentan los fluidos (**Bird et al. 1987, 2002**).

En esta ciencia podemos encontrar dos grandes ramas de los tipos de fluidos siendo los fluidos newtonianos y los no newtoniano. Los fluidos newtonianos son aquellos en los que no importa la rapidez con que son deformados, su viscosidad permanece constante (Bird et al. 1987). La ecuación constitutiva que los representa es un modelo tensorial conocido como el modelo de Newton (**Bird et al. 2002**).

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D}; \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \quad (2a, b)$$

En la Ec. (a2)  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor simétrico de segundo orden,  $\mu$  es la viscosidad cortante y  $\mathbf{V}$  es el vector de velocidad (tensor de primer orden). La Ec. (2b)  $\mathbf{D}$  es el tensor de rapidez de deformación (Parte simétrica del tensor gradiente de velocidad). Ejemplos de este tipo de fluidos, son los líquidos de bajo peso molecular como: (i) el agua, (ii) gasolina, (iii) alcohol, etc. Los fluidos no newtonianos por otra parte son los fluidos que no presentan una viscosidad constante en función del tiempo y su ecuación constitutiva de esfuerzo cortante no es lineal (**Bird et al. 2002; Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D}; \eta(\Pi_D) = \sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} \quad (3a, b)$$

En la Ec. (3a) se reemplaza la viscosidad de la Ec. (2) por una función más general, que se llama función viscosidad la cual, depende del segundo invariante del tensor rapidez de deformación. Este invariante es una medida de la magnitud del flujo, y depende de los mecanismos cortantes, extensionales o una mezcla cinemática de los dos mecanismos.

Finalmente, los fluidos viscoelásticos forman parte de los no newtonianos este tipo de materiales presentan tanto propiedades viscosas (medida de la resistencia a las deformaciones) y

elásticas (deformaciones reversibles), es decir que cuando a este tipo de fluidos se le retira el esfuerzo al que fue sometido es capaz de recuperar parte de la deformación, se comportan tanto sólido como líquido y por lo tanto presentan las propiedades de ambas y obedecen tanto la ley de Hooke como la ley de Newton de la viscosidad. Dentro de los modelos que rigen este tipo de fluidos viscoelásticos se encuentra el modelo de Maxwell (interacción polímero), Jeffreys (interacción polímero-solvente) y Burgers (interacción polímero-polímero) (Bird et al. 1987, 2002; Herrera-valencia et al. 2002).

#### 1.4 Permeabilidad

La permeabilidad es la resistencia que presenta un medio para que un líquido fluya a través de él. Esta, se puede clasificar de dos formas:

- a) **Permeabilidad intrínseca:** En esta, el fluido es Newtoniano y solo depende de la geometría y de la porosidad. La ecuación analítica de la permeabilidad se define como:

$$K_N = \frac{\varepsilon_0 a^2}{8} \quad (4)$$

En la Ec. (4) “a” es el radio del capilar que describe el poro. En la Ec. (1) se aplica la teoría del poro promedio. Es decir, todos los poros tienen el mismo radio y no existe como tal una distribución.

- b) **Permeabilidad real o de Darcy:** En esta, el fluido es viscoelástico y depende de la geometría y del fluido. Aquí el fluido está acoplado a la geometría por lo que se tiene la siguiente expresión analítica:

$$K_{NN} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{8} \frac{8i^2}{(\beta a)^2} \left[ 1 - \frac{J_1(\beta a)/\beta a}{J_0(\beta a)} \right] = K_N \cdot f(\beta) \quad (5)$$

En la que el parámetro  $\beta$  es el inverso de una longitud característica que depende de la frecuencia y de un operador de origen viscoso o viscoelástico:

$$\beta a = i^{3/2} \sqrt{\omega} \quad (6)$$

Y para un fluido viscoelástico, se tiene lo siguiente:

$$\beta a = i^{3/2} \sqrt{De^2 \cdot O^X(i\omega) \cdot \omega}; X = \{M, J, B, MM, KV\} \quad (7)$$

En la Ec. (7), M, J, B, MM, KV se refiere a los modelos reológicos de Maxwell, Jeffreys, Burgers, Multimodal de Maxwell y Kelvin-Voigt (Bird et al. 1997, 2002; Caram et al. 2006; Herrera-Valencia et al. 2022)

## 1.5 Antecedentes

Desde un punto de vista reológico, la sangre es un fluido no-newtoniano adelgazante al corte y que, bajo ciertas condiciones biológicas, por ejemplo, con alto contenido de colesterol puede presentar una viscosidad tan alta, que el sistema de flujo puede describir un esfuerzo de cedencia (**Moreno et al. 2015, Tabla 2**). El colesterol alto o hipercolesterolemia, es un padecimiento que puede inducirse por el estilo de vida sedentario, condiciones sociales y genética. Otro tipo de padecimientos han sido estudiados recientemente a consecuencia de los estudios de **Moreno et al. (2015)**.

**Apostodilis y Beris (2015)** estudiaron el efecto del colesterol en triglicéridos en pruebas reométricas o de flujo controlado en estado estacionario. Ellos demostraron que el contenido de colesterol y triglicéridos afecta las propiedades no-newtonianas y la respuesta reológica del sistema biológico. Si, el colesterol aumenta drásticamente, el líquido presenta un esfuerzo de cedencia (**Moreno et al. 2015**).

**Saravia et al. (2022)** estudiaron el efecto de la cirrosis hepática en las propiedades reológicas de la sangre. Ellos demostraron que, en pacientes descompensados, existe un cambio del líquido de No-newtoniano (adelgazamiento) a Newtoniano. En este trabajo ellos caracterizaron el fluido, mediante un modelo empírico (Ley de potencia; Ostwald de Waele).

La consecuencia de tener una contribución alta de colesterol en la sangre, es la de inducir oclusiones en los capilares sanguíneos o una acumulación de colesterol en las paredes vía los puentes de calcio (**Corvera-Poiré y del Rio 2007**).

Cuando el colesterol se adhiere a las paredes por efecto del calcio depositado estas aumentan su espesor y este fenómeno es conocido como una oclusión periférica mientras que, cuando existe tejido muerto que ocluye el centro del capilar, y la sangre tiene que pasar por el espacio entre el obstáculo y el capilar se conoce como de tipo central oclusión central (**Corvera-Poiré y del Rio 2007**). La oclusión central, puede ser descrita mediante dos tubos concéntricos de radios  $R_1$  y  $R_2$  con  $R_1 < R_2$ . Este tipo de sistema (sangre + colesterol) ha sido caracterizado mediante diferentes ecuaciones constitutivas como son: (i) Newton y (ii) Maxwell (**Del Rio et al. 1998**). Estos modelos han sido resueltos de manera analítica mediante la transformada integral de Fourier y modelando el gradiente de presión por medio de una serie de Fourier compleja (**Del Rio et al. 1998; Del Rio y Castrejon-Pita 2003**).

La herramienta que se ha utilizado para caracterizar la respuesta dinámica lineal del sistema es la permeabilidad estática y dinámica. Este objeto matemático se obtiene al transformar al espacio de Fourier la ecuación dinámica de la velocidad e integrando con respecto a una sección de área transversal (**Ver con detalle Del Rio et al. 1998; Del Rio y Castrejon-Pita 2003**).

La permeabilidad dinámica no solo ha sido estudiada para fluidos viscoelásticos si no también para describir el efecto de la conductividad eléctrica en geometrías cilíndricas en campos magnéticos (**Cuevas et al. 2001**).

**Del Rio et al. (1998)** demostraron que en el régimen de viscoelasticidad lineal la respuesta dinámica lineal entre el gradiente de presión oscilatorio y flujo volumétrico incrementa para valores críticos de la frecuencia. Esta herramienta fue utilizada, para analizar las propiedades viscoelásticas de sangre human fresca.

**Corvera Poire y del Rio (2004)** estudiaron el experimento de una celda de Hele-Shaw para un fluido viscoelástico modelado como un fluido de Maxwell. Este experimento consiste en dos placas paralelas que dentro de estas se encuentra un fluido con viscosidad alta, empujado con un fluido de menor viscosidad la interfaz entre estos fluidos normalmente es inestable y las estructuras que se forman cuando la interfase se desestabiliza se denominan dedos. Encontraron que cuando el dedo se maneja con una frecuencia que maximiza la permeabilidad dinámica también se maximizan las variaciones de amplitud, para el fluido de baja viscosidad la amplitud decae con la frecuencia y para el fluido viscoelástico la amplitud tendrá máximos a las frecuencias que maximizan la permeabilidad.

**Colleparado-Guevara y Corvera Poire (2007)**, investigaron el comportamiento de un fluido viscoelástico que fluye en una geometría cilíndrica donde se van a presentar dos tipos de obstrucción del fluido (central y periférica). La reología y la transferencia de movimiento del fluido viscoelástico es caracterizado por el modelo de Maxwell. En su investigación demuestran que ajustando la frecuencia se puede maximizar la relación entre el gradiente de presión y el flujo volumétrico a través de la permeabilidad dinámica. En particular, se comprueba que el flujo se maximiza en las oclusiones centrales que en las periféricas. El fluido que investigaron con sus resultados teóricos es sangre humana fresca.

**Castro et al. (2008)** estudiaron el flujo y la permeabilidad dinámica en micro-canales de fluidos viscoelásticos con deslizamiento en la pared, i.e. la condición de no deslizamiento no se cumple en la interfase entre el líquido y el sólido. En esta investigación, se dedujo una relación de escalas que obedece la permeabilidad dinámica, cuando no hay deslizamiento en la parte del fluido. Sus resultados demuestran que existe deslizamiento en el sistema, y obtienen un parámetro relacionado con este.

**Flores et al. (2010)** utilizaron el concepto de permeabilidad dinámica para explicar la frecuencia cardíaca en mamíferos. Ellos demostraron que esta se ve afectada por las condiciones geométricas, propiedades reológicas, mecanismos inerciales y viscoelásticos. Analizaron el efecto de la frecuencia sobre un fluido viscoelástico fluyendo en una red de tubos inelásticos. A través de este análisis ellos explican cuales son las frecuencias críticas para una explicación razonable de la frecuencia cardíaca de los mamíferos en reposo. Las observaciones más importantes de este tipo de sistemas, es que la frecuencia cardíaca no está optimizada para transportar sangre en todo el sistema circulatorio. Las frecuencias reales en reposo de los mamíferos ocurren a frecuencia que optimizan el flujo en vasos de radios que corresponden a grandes arterias, que lleva sangre oxigenada rápidamente lejos del corazón, hacia la cabeza y las extremidades. Las frecuencias óptimas obtenidas en su investigación, son utilizadas con los radios de arterias femorales y demuestran que existe una mejor relación con las frecuencias cardíacas observadas en los experimentos. Finalmente, ellos encontraron una relación alométrica teórica entre la frecuencia de flujo óptima y el radio. Sus resultados fueron utilizados para describir la frecuencia cardíaca de diferentes mamíferos entre ratones hasta caballos.

**Flores et al. (2016)** utilizaron la permeabilidad dinámica para analizar un fluido viscoelástico de Maxwell en tubos elásticos y construyeron un esquema numérico para analizar el flujo en el sistema circulatorio del cuerpo humano. Utilizaron datos experimentales para venas y arterias y datos

experimentales reológicos con el fin de describir la respuesta entre el gradiente de presión pulsátil y el flujo volumétrico. Este modelo elástico presenta una solución analítica en el dominio de la frecuencia y se utilizó para la simulación de diferentes tipos de arterias, comparándolas con otras soluciones computacionales. Concluyendo que la frecuencia de pulso arterial en arterias grandes se puede simular con precisión con su modelo, reduciendo el tiempo de cómputo.

**Torres Rojas et al. (2017)** estudiaron el concepto de resonancia de fluidos Newtonianos en tubos elásticos. En este estudio, ellos analizan el efecto de la elasticidad de la geometría y su efecto en **la permeabilidad y la resonancia** del sistema. Su investigación demostró que la permeabilidad de un tubo elástico es siempre mayor que la de un tubo rígido, y que la resonancia depende de los mecanismos disipativos (viscosos), de almacenamiento (elásticos), de relajación (tiempos viscoelásticos de Maxwell) y de las propiedades geométricas y mecánicas de los tubos (módulo de Young) y geométricas (longitudes características).

El concepto de permeabilidad dinámica ha sido modificado introduciendo una función de transferencia compleja la cual, puede ser explicada por una generalización de la fluidez. Está, se describe el producto de la fluidez compleja (reología) multiplicada por una función que depende de un parámetro Beta asociado a la dispersión en el sistema (**Herrera-Valencia et al. 2014, 2018; Nava-Rivera 2022**).

Esta herramienta (función de transferencia compleja) ha sido empleada para describir el complejo comportamiento de las células ciliadas externas, que son las responsables de amplificar el sonido el cuerpo humano (**Herrera-Valencia et al. 2014, 2018; Nava-Rivera 2022**).

El flujo pulsátil ha sido también estudiado en sistemas viscoelástico no-lineales, con diferentes ecuaciones constitutivas las cuales, han sido resueltas mediante técnicas analíticas y numéricas (**Herrera-Valencia et al. 2009, 2010**). Para caracterizar el flujo y la deformación de estos sistemas, se han empleado diferentes ecuaciones empíricas las cuales son mencionadas a continuación: (i) Ley de Potencia, (ii) Ellis, (iii) Reiner-Philipoff, (iv) Bingham, (v) BMP (**Herrera-Valencia et al. 2009, 2010**). Las propiedades materiales se han calculado mediante experimentos reológicos en estado estacionario y no estacionario. Para una revisión de estos modelos se recomienda consultar **Herrera-Valencia et al. (2009), (2010) y (2017)**.

Sin embargo, y a pesar de todos los estudios generados con el concepto de permeabilidad, existe una controversia entre la permeabilidad intrínseca y la permeabilidad real o de Darcy. La intrínseca solo depende de la geometría y la de Darcy depende de la geometría y del medio (fluido). El fluido es caracterizado mediante la ecuación reológica correspondiente. Por lo que, en este trabajo se utilizara la función de transferencia compleja que involucra una generalización de la función fluidez compleja modificada mediante los mecanismos inerciales. Para esto, se analizará la reología mediante un concepto definido en la literatura como operador fluidez complejo definido en el espacio de Fourier y valido solo en el régimen de altas rapideces de deformación (**Herrera Valencia et al. 2022, 2014, 2018**).

Se analizará un fluido viscoelástico de Maxwell en dos geometrías simples, para obtener la función de transferencia compleja en función de la geometría del sistema y propiedades reológicas (**Herrera-Valencia et al. 2022**). La función de transferencia compleja relaciona la variable de entrada

(gradiente de presión transitorio) y variable de salida (flujo volumétrico). El primero de estos sistemas, corresponde a una oclusión periférica la cual, simularía el depósito de colesterol en las arterias y venas. El segundo caso consistirá en una oclusión central. Esta puede ser simulada con dos tubos concéntricos en donde el fluido fluye por el espacio anular del sistema geométrico. Este punto incorporará, el efecto de la oclusión o el porcentaje de oclusión a través de cociente entre  $R_1/R_2$ .

A partir de estos resultados analíticos, se simularán datos de sangre con colesterol mediante una generalización del modelo de Maxwell, conocido como modelo Multimodal de Maxwell (**Moreno et al. 2015**). Esta aplicación se analizará en el contexto de una oclusión periférica y se analizará la norma de la función de transferencia compleja. Para analizar esto, se postulará la siguiente hipótesis de trabajo.

### **1.6 Hipótesis de trabajo:**

Si la respuesta dinámica gradiente de presión-flujo volumétrica es función de la reología, entonces estos serán cuantificables a través de las curvas resonantes del sistema.

Para debatir esta hipótesis, se plantearán los siguientes objetivos de esta tesis a nivel de licenciatura.

### **1.7 Objetivos de la investigación:**

**General:** Estudiar el efecto los mecanismos inerciales, viscoelásticos, geométricos y de la fuerza motriz gradiente de presión transitorio) sobre el flujo volumétrico.

**Particular 1:** Obtener expresiones cerradas, para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, y función de transferencia complejas para un líquido complejo de Maxwell en dos tipos de geometrías: (i) capilar de radio  $r = a$  y longitud  $z = L$  y (ii) cilindros concéntricos de radio  $R_1$  y  $R_2$  con  $R_1 < R_2$ .

**Particular 2:** Proponer un conjunto de variables adimensionales, con el fin de escalar el perfil de velocidades, flujo volumétrico y la función de transferencia compleja, en función de los grupos adimensionales correspondientes.

**Particular 3:** Programar las ecuaciones en el software Mathematica (Licencia UNAM) con el fin de obtener la parte real, imaginaria y la norma de la función de transferencia compleja, en las dos geometrías analizadas.

**Particular 4:** Analizar la respuesta dinámica lineal de datos de sangre humana y obtener las frecuencias críticas resonantes y su relación con las propiedades materiales y su relación con el contenido de colesterol y triglicéridos.

## 1.8 Distribución del material de esta tesis de licenciatura

La organización de este documento se presenta a continuación:

**Capítulo 1:** En la sección 1, se discutieron los preliminares, definiciones básicas, antecedentes, objetivos y marco teórico.

**Capítulo 2:** Marco teórico en donde se ven los elementos básicos esenciales para entender esta investigación: (i) flujo de Poiseuille en un tubo, (ii) flujo de Poiseuille en una corona circular y (iii) ecuación constitutiva de Maxwell.

**Capítulo 3:** Modelado matemático y planteamiento del problema, la modelo constitutiva empleado junto con las restricciones matemáticas, físicas y biológicas del sistema de trabajo, se obtienen las respectivas funciones de transferencia del sistema de estudio.

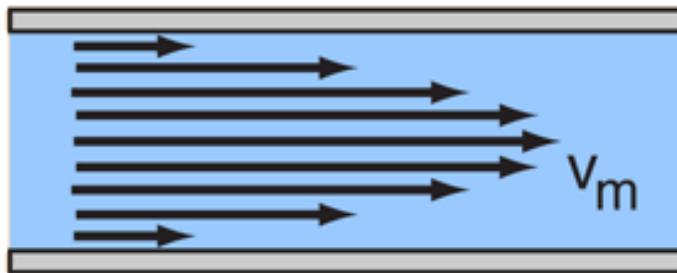
**Capítulo 4:** Obtención de los grupos, variables adimensionales y las respectivas simulaciones en las dos configuraciones de este trabajo. Se analiza su respuesta en función de los mecanismos inerciales, viscosos y elásticos.

**Capítulo 5:** En esta sección presenta la aplicación en sangre humana con colesterol en función de las propiedades materiales. Se obtienen las frecuencias resonantes correspondientes y se analizan en función de la respuesta dinámica.

**Capítulo 6:** En la última sección, se presenta las conclusiones, aportación al conocimiento y el trabajo futuro.

## II. Marco teórico

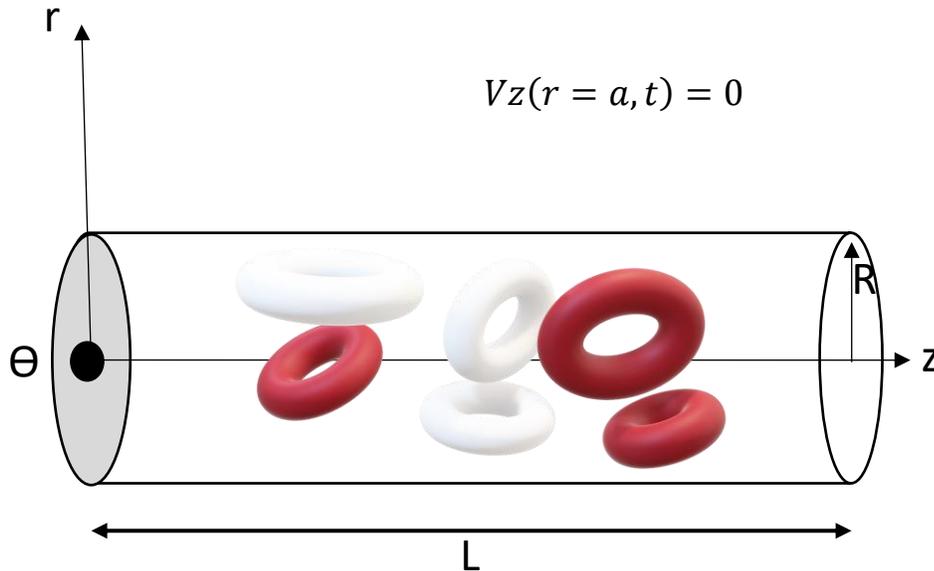
### *Ley de Hagen Poiseuille*



$$Q = \frac{\pi R^4}{8 \eta L} \Delta p$$

## 2.1 Fluido Newtoniano en un capilar

En esta sección se presenta el desarrollo para el cálculo del flujo volumétrico de un fluido newtoniano que fluye a través de un capilar, con un radio  $R$ . La longitud axial del capilar se representa con  $L$ . Se presenta el esquema del estudio.



*Fig. 2.1A Esquema de un fluido newtoniano, isotérmico e incompresible, en un capilar de radio( $R$ ) y Longitud ( $L$ ).*

### Modelado matemático

- Fluido newtoniano.
- Estado estacionario.
- Incompresible.
- Proceso isotérmico.
- Simetría cilíndrica.

### 2.2 Razonamiento matemático

Para el razonamiento de este problema, en primer lugar, se planteó un modelado matemático al cual está sometido nuestro sistema. Partiendo de la ecuación de continuidad y aplicando el modelado matemático, llegamos a la conclusión de que la velocidad en el eje axial  $z$  y está en función del eje radial  $r$ . Una vez concluido lo anterior utilizando la ecuación de movimiento lagrangiana y al aplicarle el tensor de esfuerzos (ley de newton generalizada) podemos llegar a las  $r \Theta z R L$  Fig. 2.1. Esquema de un flujo newtoniano, isotérmico e incompresible, en un capilar de radio( $a$ ) y Longitud ( $L$ ). ecuaciones de Navier Stokes, para los diferentes componentes de las coordenadas cilíndricas, que expresan la rapidez de incremento de momentum de una partícula de flujo ( $\rho DV Dt$ ) igualadas a las fuerzas que actúan sobre el fluido, donde actúan la fuerza superficial dada por el gradiente de presiones, la viscosidad, la tensión superficial y las fuerzas volumétricas causadas por la gravedad.

Aplicando la conclusión anterior  $V_z(r)$ , obtenemos una versión simplificada de la ecuación de Navier Stokes que solo está en función de  $r$  al resolver la ecuación diferencial obtenemos el perfil de velocidades que describe el comportamiento de la velocidad en nuestro sistema de estudio. Una vez obtenido el perfil de velocidades se procede a sacar el flujo volumétrico con una ecuación de flujo transformada por medio de una transformada jacobiana que dejara la expresión en coordenadas cilíndricas, al sustituir el perfil de velocidades en la expresión de flujo volumétrico para coordenadas cilíndricas y resolver la doble integral, obtenemos una expresión conocida como la ecuación de Hagen- Poiseuille.

### 2.3 Ecuación de continuidad

A partir de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -V \cdot \nabla \rho - \rho (\nabla \cdot V) \quad (2)$$

Puesto que hablamos de un flujo incompresible.

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (3)$$

La ecuación adquiere la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \cdot \nabla \rho &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho V r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V \theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V z) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

El vector velocidad para este sistema está dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z(r, \theta, z, t)) \quad (5)$$

Aplicando la expresión para el vector velocidad en la ecuación (3)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial z} (V_z) &= 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 &\Rightarrow V_z \neq V_z(z) \end{aligned} \quad (6)$$

En base a la ecuación (5) podemos razonar que la velocidad ( $V_z$ ) no dependen del eje axial  $z$  y en base a la simetría cilíndrica del sistema, la velocidad no depende de  $\theta$ , también físicamente los perfiles de velocidad ya se encuentran desarrollados, no dependiendo del tiempo. Por ende, podemos concluir que la  $V_z$  solo depende del eje radia  $r$ .

$$V_z = \underbrace{V_z(r, \theta, z, t)}_{\text{No-depende de } z, \theta \text{ y } t} = V_z(r) \quad (7)$$

## 2.4 Ecuación de movimiento

A partir de la ecuación de movimiento lagrangiana, obtenida por medio de un balance de movimiento de la ecuación Cauchy. La ecuación de movimiento Lagrangiana queda de la siguiente manera.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \sigma + \rho g \quad (7)$$

La ecuación constitutiva del tensor de esfuerzos puede ser escrita de la siguiente manera, también conocida como la ley de newton generalizada.

$$\sigma = \dot{\gamma} \mu = -\mu [\nabla V + (\nabla V)^T] \quad (8)$$

Sustituyendo la ecuación (8) en la ecuación (7)

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \{-\mu [\nabla V + (\nabla V)^T]\} + \rho g \quad (9)$$

Aplicando el modelado matemático de densidad y viscosidad constantes.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho g \quad (10)$$

Al descomponer la ecuación (10) en las tres coordenadas.

Para el componente en r.

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \end{aligned} \quad (11)$$

Para la componente en  $\theta$ .

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ & + \mu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right) + \rho g_\theta \end{aligned} \quad (12)$$

Para el componente en z.

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_\theta \end{aligned} \quad (13)$$

Aplicando el modelado matemático en las Ecs. (11-13) con un flujo que se deforma de manera continua e irreversiblemente por un gradiente de presión en la dirección axial.

La Ec. (11) queda de la siguiente manera.

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \Rightarrow p \neq p(r) \quad (14)$$

La ecuación (12) adquiere la siguiente forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow p \neq p(\theta) \quad (15)$$

La ecuación del componente en z toma la siguiente forma. Puesto que el gradiente de presión solo depende de z.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right) \quad (16)$$

Puesto que se tiene derivada de presión en función de z y la derivada de Vz en función de r. La Ec. (16) se iguala una constante para desacoplar las ecuaciones diferenciales.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right) = \lambda \quad (17)$$

Resolviendo la ecuación diferencial por variables separables.

$$\int_{p_L}^{p_0} dp = \int_0^L \lambda dz$$

$$p_{p_L}^{p_0} = \lambda z_0^L$$

$$(p_0 - p_L) = \lambda(L - 0)$$

$$\frac{(p_0 - p_L)}{L} = \lambda$$

$$\frac{\Delta p}{L} = \lambda \quad (18)$$

Entonces nuestra Ec. (17) queda planteada de la siguiente manera

$$\frac{\Delta p}{L} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right) \quad (19)$$

Resolviendo la ecuación diferencial a partir del método de variables separables.

$$\frac{\Delta p r}{L \mu} = \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_z}{dr} \right)$$

$$\int \frac{\Delta p r}{L \mu} dr = \int d \left( r \frac{dV_z}{dr} \right)$$

$$\frac{\Delta p r^2}{2L \mu} + C1 = r \frac{dV_z}{dr}$$

$$\frac{\Delta p r^2}{2L \mu r} + \frac{C1}{r} = \frac{dV_z}{dr}$$

$$\int \frac{\Delta p r}{2L\mu} dr + \int \frac{C1}{r} dr = \int dV_z$$

$$\frac{\Delta p r^2}{4L\mu} + C1 \ln(r) + C2 = V_z \quad (20)$$

La Ec. (20) describe el perfil de velocidades para un fluido newtoniano que se deforma en consecuencia de un gradiente de presiones. Para encontrar las constantes, 1 y 2, establecimos las siguientes condiciones de frontera. La velocidad en los límites del pailar es cero (C.F.1) y la velocidad en el centro es la  $V_{max}$ .

$$C.F.1 \quad V_z(r=R)=0$$

$$C.F.2 \quad V_z(r=0)=V_{max}$$

Aplicando las condiciones de frontera a la ecuación (20) se tiene lo siguiente.

$$\frac{\Delta p 0^2}{4L\mu} + C1 \ln(0) + C2 = V_{max} \quad (21)$$

Puesto que en la Ec. (21) tenemos un  $\ln(0) = -\infty$ , significando esto que la velocidad  $V_z(0)$  en el centro del tubo es infinita. Esto no tiene un sentido físico puesto que la velocidad en el centro la velocidad máxima y es finita. Siendo este el caso la única solución para este problema es igualar la  $C1$  a cero. Obteniendo una ecuación de la siguiente manera

$$\frac{\Delta p R^2}{4L\mu} + (0) \ln(R) + C2 = 0$$

$$\frac{\Delta p R^2}{4L\mu} + C2 = 0 \quad (22)$$

Siendo nuestra  $C2$  igual a.

$$-\frac{\Delta p R^2}{4L\mu} = C2 \quad (23)$$

Para obtener la velocidad máxima es de la siguiente manera cuando  $r=0$ .

$$V_{max} = C2 = -\frac{\Delta p R^2}{4L\mu} \quad (24)$$

Sustituyendo las constantes en la Ec. (20).

$$\frac{\Delta p r^2}{4L\mu} - \frac{\Delta p R^2}{4L\mu} = V_z$$

$$V_z = \frac{\Delta p}{4L\mu} (-R^2 + r^2)$$

$$V_z = \frac{-\Delta p R^2}{4L\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (25)$$

La Ec. (25) es nuestro perfil de velocidad axial para un capilar de radio  $R$  y longitud  $z = L$  con fluido newtoniano deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión constante (**Bird et al. 1987, 2002, Herrera-valencia et al. 2022**).

## 2.5 Flujo Volumétrico.

Para obtener el flujo volumétrico en un capilar partiremos de la siguiente ecuación escrita para coordenadas cilíndricas.

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R Vz(r)rdrd\theta \quad (26)$$

Sustituir el perfil de velocidades de la ecuación (25) en la ecuación (26).

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ \frac{-\Delta p R^2}{4L\mu} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right] rdrd\theta \quad (27)$$

Comenzaremos resolviendo la primera integral definida con respecto a  $r$  y sacando las constantes de la integral.

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p R^2}{4L\mu} \int_0^R \left[ \left( r - \frac{r^3}{R^2} \right) \right] drd\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p R^2}{4L\mu} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right) \Big|_0^R d\theta \quad (28)$$

Evaluando la integral con los límites de integración y simplificando la expresión.

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p R^2}{8L\mu} \left( R^2 - \frac{R^4}{2R^2} \right) d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p R^2}{8L\mu} \left( R^2 - \frac{R^2}{2} \right) d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p R^4}{8L\mu} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p R^4}{8L\mu} \left( \frac{1}{2} \right) d\theta \quad (29)$$

Después procedemos a resolver la integral definida con respecto a  $\theta$  y simplificamos la expresión.

$$Q = \frac{-\Delta p R^4}{8L\mu} \left( \frac{1}{2} \right) \theta \Big|_0^{2\pi} \quad (30)$$

Evaluando y simplificando la expresión nos queda de la siguiente forma.

$$Q = \frac{-\Delta p R^4}{8L\mu} \left( \frac{1}{2} \right) 2\pi$$

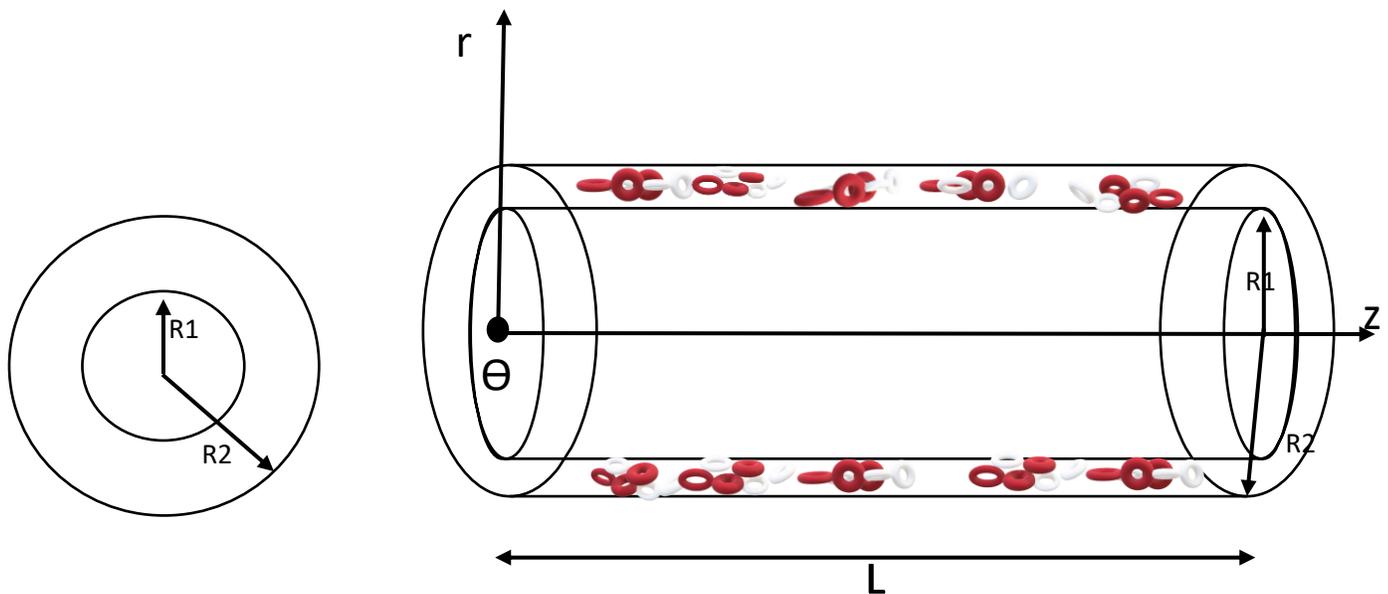
$$Q = \frac{-\pi \Delta p R^4}{8L\mu}$$

$$Q = \frac{-\pi(p_0 - p_L)R^4}{8L\mu} \quad (31)$$

La Ec. (31) ya es la ecuación para calcular el flujo volumétrico de un fluido newtoniano en un capilar impulsado por una diferencia de presiones. Esta ecuación también es conocida como la ecuación de Hagen- Poiseuille, que describe la relación del flujo volumétrico y el gradiente de presión (**Bird et al. 1987, 2002, Herrera-valencia et al. 2022**)

## 2.6 Fluido Newtoniano en una corona

En esta sección se analizará y obtendrá el flujo volumétrico de un fluido newtoniano que fluye a través de una corona circular debido a la influencia de un gradiente de presión. La corona tiene un radio mayor ( $R_2$ ) y un radio menor ( $R_1$ ), con una longitud característica axial ( $L$ ).



*Fig. 2.2A Esquema de un fluido newtoniano, isotérmico e incompresible, en una corona circular de radio menor ( $R_1$ ), radio mayor ( $R_2$ ) y Longitud ( $L$ ).*

## 2.7 Modelado matemático

- Fluido newtoniano.
- Estado estacionario.
- Incompresible.
- Proceso isotérmico.
- Simetría cilíndrica.
- La velocidad va en dirección z y por ende está en función de la coordenada radial r.
- El fluido se deforma a causa de un gradiente de presiones, en la dirección axial z.

## 2.8 Razonamiento matemático

Para el razonamiento de este problema, se planteó un modelado matemático al cual está sometido nuestro sistema. Partiendo del perfil de velocidades general del capilar ya que el fluido es el mismo, así como también el modelado matemático al que se somete nuestro sistema, causando que la velocidad se comporte de igual manera que la de un capilar solo que en esta ocasión se le aplicaran al perfil de velocidades general diferentes condiciones de frontera puesto que el fluido newtoniano, fluiría en el anulo formado por los cilindros concéntricos. Una vez obtenido el perfil de velocidades particular se procede a sacar el flujo volumétrico con una ecuación de flujo transformada por medio de una transformada jacobiana que dejara la expresión en coordenadas cilíndricas, al sustituir el perfil de velocidades en la expresión de flujo volumétrico para coordenadas cilíndricas y resolviendo la doble integral con diferentes límites de integración, Obtenemos de igual manera una expresión que describe el flujo volumétrico de una corona circular

Puesto que el fluir de un fluido newtoniano en una corona circular se comporta de la misma manera que en el capilar, podemos partir de la siguiente ecuación.

$$V_z = \frac{\Delta p r^2}{4L\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (32)$$

Se calcularán las constantes de la Ec. (32) con las siguientes condiciones de frontera. Cuando hablamos de la velocidad en el radio menor ( $R_1$ ) hablamos de que es igual a cero puesto que es la pared, este mismo hecho aplica para el radio mayor ( $R_2$ ).

$$\text{C.F.1 } V_z(r=R_1)=0$$

$$\text{C.F.2 } V_z(r=R_2)=0$$

Sustituyendo las condiciones de frontera en la ecuación (1) se obtiene lo siguiente.

$$0 = \frac{\Delta p R_1^2}{4L\mu} + C_1 \ln(R_1) + C_2 \quad (33)$$

$$0 = \frac{\Delta p R_2^2}{4L\mu} + C_1 \ln(R_2) + C_2 \quad (34)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones restando la Ec. (33) de la Ec. (34).

$$0 = -\frac{\Delta p R_2^2}{4L\mu} + \frac{\Delta p R_1^2}{4L\mu} + C_1 \ln(R_1) - C_1 \ln(R_2)$$

$$0 = \frac{\Delta p}{4L\mu} (R_1^2 - R_2^2) + C_1 (\ln(R_1) - \ln(R_2))$$

$$\frac{-\Delta p}{4L\mu} (R_1^2 - R_2^2) = C_1 \left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)$$

$$C_1 = \frac{\Delta p (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left( \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right)} \quad (35)$$

Para obtener la  $C_2$  sustituimos  $C_1$  en la Ec. (33) y despejamos  $C_2$ .

$$0 = \frac{\Delta p R_1^2}{4L\mu} + \left( \frac{\Delta p (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left( \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) \ln(R_1) + C_2$$

$$C_2 = -\frac{\Delta p R_1^2}{4L\mu} - \frac{\Delta p}{4L\mu} \left( \frac{\ln(R_1)(R_2^2 - R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right)$$

$$C_2 = -\frac{\Delta p}{4L\mu} \left( \frac{\ln(R_1)(R_2^2 - R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} + R_1^2 \right) \quad (36)$$

Al sustituir ambas constantes  $C_1$  y  $C_2$  en la Ec. (32) para encontrar el perfil de velocidades.

$$V_Z = \frac{\Delta p r^2}{4L\mu} + \left( \frac{\Delta p (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left( \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) \ln(r) - \frac{\Delta p \ln(R_1)(R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left( \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} - \frac{\Delta p}{4L\mu} R_1^2$$

$$V_Z = \frac{\Delta p r^2}{4L\mu} - \frac{\Delta p}{4L\mu} R_1^2 + \left( \frac{\Delta p (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left( \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) \ln(r) - \frac{\Delta p \ln(R_1)(R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left( \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)}$$

$$V_Z = \frac{\Delta p}{4L\mu} (r^2 - R_1^2) + \left( \frac{\Delta p (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left( \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) (\ln(r) - \ln(R_1))$$

$$V_Z = \frac{\Delta p}{4L\mu} (r^2 - R_1^2) + \left( \frac{\Delta p (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left( \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) \left( \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right)$$

$$V_Z = \frac{-\Delta p}{4L\mu} \left( (R_1^2 - r^2) - \left( \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right) \left( \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right) \right)$$

$$V_Z = \frac{-\Delta p}{4L\mu} \left( (R_1^2 - r^2) + \left( \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right) \left( \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right) \right)$$

$$V_Z = \frac{-\Delta p R_1^2}{4L\mu} \left( \left( 1 - \frac{r^2}{R_1^2} \right) + \left( \frac{(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2})}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right) \left( \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right) \right) \quad (37)$$

La Ec. (37) es el perfil de velocidades axial para una corona circular de un fluido newtoniano deformado continuamente por un gradiente de presión (**Herrera-Valencia et al. 2022**)

## 2.9 Flujo volumétrico.

Para encontrar el flujo volumétrico en el anulo de la corona circular, se utiliza la siguiente integral de superficie, se utiliza la transformada jacobiana para transformar en coordenadas cilíndricas.

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R Vz(r)rdrd\theta \quad (38)$$

Puesto que sabemos que el perfil de velocidades no está en función del ángulo podemos sacarlo como constante de la siguiente manera.

$$Q = \int_0^R Vz(r)rdr \int_0^{2\pi} d\theta \quad (39)$$

Al integrar con respecto al ángulo obtenemos lo siguiente.

$$Q = \int_0^R Vz(r)rdr (\theta_0^{2\pi}) \quad (40)$$

Al evaluar los límites de integración con respecto al ángulo nos queda de la siguiente manera.

$$Q = 2\pi \int_0^R Vz(r)rdr \quad (41)$$

Ahora sustituimos el perfil de velocidades en la Ec. (41).

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{-\Delta p R_1^2}{4L\mu} \left( \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \left(\frac{(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2})}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right)}\right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) \right) r dr \quad (42)$$

Simplificando la expresión y sacando las constantes de la integral, obtenemos.

$$Q = \frac{-\Delta p 2\pi R_1^2}{4L\mu} \int_{R_1}^{R_2} \left( \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \left(\frac{(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2})}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right)}\right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) \right) r dr \quad (43)$$

Para escalar la ecuación diferencial y simplificar con números adimensionales, se divide los límites de integración entre  $R_1$ , la expresión del perfil de velocidades y la diferencial con respecto  $r$ .

$$Q = \frac{-\Delta p 2\pi R_1^2}{4L\mu} \int_{\frac{R_1}{R_1}}^{\frac{R_2}{R_1}} \left( \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \left(\frac{(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2})}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right)}\right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) \right) \frac{r}{R_1} \frac{dr}{R_1} \quad (44)$$

Para no alterar la igualdad en la ecuación se multiplicará todo por  $R_1^2$ .

$$Q = \frac{-\Delta p 2\pi R_1^4}{4L\mu} \int_1^{\frac{R_2}{R_1}} \left( \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \left(\frac{(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2})}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right)}\right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) \right) \frac{r}{R_1} \frac{dr}{R_1} \quad (45)$$

De la Ec. (45) podemos obtener los siguientes cambios de variable.

$$R = \frac{R2}{R1}$$

$$K = \frac{r}{R1}$$

Al aplicar los anteriores cambios de variable a la Ec. (45) queda de la siguiente forma.

$$Q = \frac{-\Delta p 2\pi R1^4}{4L\mu} \int_1^R \left( (1 - K^2) + \left( \frac{(1-R^2)}{\left(\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right)} \right) (\ln(K)) \right) K dK$$

$$Q = \frac{-\Delta p 2\pi R1^4}{4L\mu} \int_1^R \left( (K - K^3) + \left( \frac{(1-R^2)}{\left(\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right)} \right) (\ln(K)K) \right) dK \quad (46)$$

Multiplicando la ecuación por (-1/-1) para invertir el Ln(1/R).

$$Q = \frac{-\Delta p 2\pi R1^4}{4L\mu} \int_1^R \left( (K - K^3) + \frac{-1}{-1} \left( \frac{(1-R^2)}{\left(\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right)} \right) (\ln(K)K) \right) dK$$

$$Q = \frac{-\Delta p 2\pi R1^4}{4L\mu} \int_1^R \left( (K - K^3) - \left( \frac{(1-R^2)}{\left(\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right)} \right) (\ln(K)K) \right) dK$$

$$Q = \frac{-\Delta p 2\pi R1^4}{4L\mu} \int_1^R \left( (K - K^3) - \left( \frac{(1-R^2)}{\left(\ln(R)\right)} \right) (\ln(K)K) \right) dK \quad (47)$$

Una vez integrada la ecuación se obtiene el siguiente resultado.

$$Q = \frac{-\Delta p 2\pi R1^4}{4L\mu} \left\{ \left( \frac{K^2}{2} - \frac{K^4}{4} \right)_1^R - \left( \frac{(1-R^2)}{\left(\ln(R)\right)} \right) \left( \frac{2K^2 \ln(K)}{4} - \frac{K^2}{4} \right)_1^R \right\} \quad (48)$$

Aplicando los límites de integración y factorizando la expresión.

$$Q = \frac{-\Delta p 2\pi R1^4}{4L\mu} \left\{ \left[ \left( \frac{R^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) - \left( \frac{R^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) \right] - \left( \frac{(1-R^2)}{\left(\ln(R)\right)} \right) \left( \left( \frac{2R^2 \ln(R)}{4} - \frac{2R^2 \ln(1)}{4} \right) - \left( \frac{R^2}{4} - \frac{1^2}{4} \right) \right) \right\}$$

$$Q = \frac{-\Delta p 2\pi R1^4}{4L\mu} \left[ \frac{R^2}{2} - \frac{1}{4} - \frac{R^4}{4} - \left( \frac{(1-R^2)}{\left(\ln(R)\right)} \right) \left( \frac{2R^2 \ln(R)}{4} - \frac{R^2}{4} + \frac{1}{4} \right) \right]$$

$$Q = \frac{-\Delta p 2\pi R 1^4}{4L\mu} \left[ \frac{2R^2}{4} - \frac{R^4}{4} - \frac{1}{4} - \left( \frac{(1-R^2)}{\ln(R)} \right) \left( \frac{2R^2 \ln(R)}{4} - \frac{R^2}{4} + \frac{1}{4} \right) \right]$$

$$Q = \frac{-\Delta p 2\pi R 1^4}{16L\mu} \left[ 2R^2 - R^4 - 1 - \left( \frac{(1-R^2)}{\ln(R)} \right) (2R^2 \ln(R) - R^2 + 1) \right] \quad (49)$$

Para simplificar más la expresión se procede a realizar el siguiente cambio de variable.

Donde:

$$I = 2R^2 - R^4 - 1 + \left( \frac{(1-R^2)}{\ln(R)} \right) (2R^2 \ln(R) - R^2 - 1) \quad (50)$$

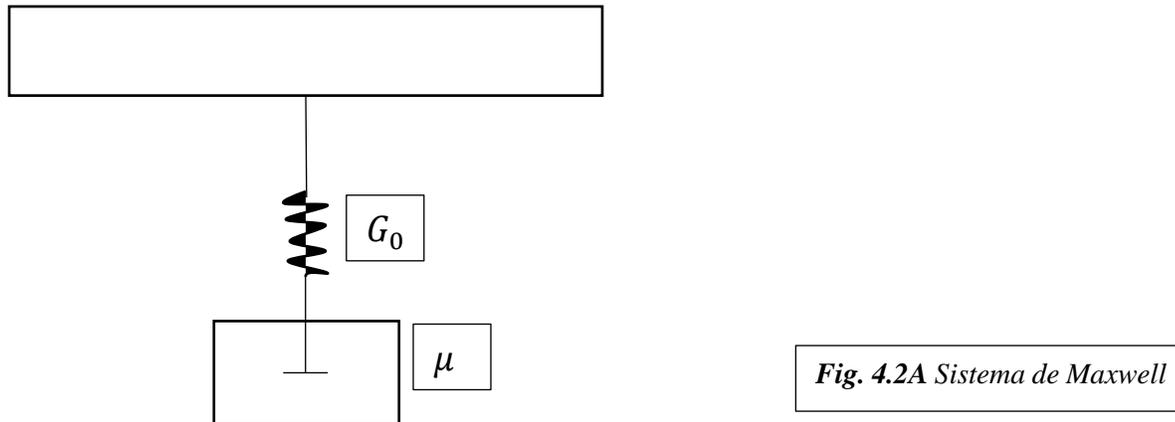
Entonces, con el cambio de variable I nuestra ecuación toma la siguiente forma.

$$Q = \frac{-\Delta p \pi R 1^4}{8L\mu} I \quad (52)$$

La Ec. (52) es el de flujo volumétrico de un fluido newtoniano que fluye a través del área del anulo en una corona circular, deformada continua e irreversiblemente a causa de un gradiente de presión constante (Bird et al. 1987, 2002, Herrera-valencia et al. 2022)

## 2.10 Modelo de Maxwell (En serie)

En esta sección se presenta la deducción mecánica del modelo de Maxwell el cual, consiste en un fluido viscoelástico. La parte de elástica se representa con un resorte mientras que, embolo representa la contribución viscosa.



Planteamos una ecuación para el sistema en serie de maxwell que es igual a la sumatoria de las deformaciones viscosas y elásticas.

$$\gamma = \gamma_v + \gamma_e \quad (53)$$

Derivamos toda la expresión, de la siguiente manera.

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_v}{dt} + \frac{d\gamma_e}{dt} \quad (54)$$

La  $\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}$  es la rapidez de deformación.

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_v + \frac{d\gamma_e}{dt} \quad (55)$$

Para la anterior expresión tenemos las siguientes ecuaciones

$$\sigma_v = \mu\gamma_v \quad (56)$$

$$\sigma_e = \dot{\gamma}_e G_0 \quad (57)$$

Puesto que el esfuerzo va a ser el mismo.

$$\sigma_v = \sigma_e = \sigma$$

De la Ec. (19) despejamos la rapidez de deformación.

$$\gamma_v = \frac{\sigma}{\mu} \quad (58)$$

De la Ec. (20) diferenciamos y despejamos  $\frac{d\gamma_e}{dt}$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{d\dot{\gamma}_e}{dt} G_0 \\ \frac{d\dot{\gamma}_e}{dt} &= \frac{d\sigma}{dt} \frac{1}{G_0} \end{aligned} \quad (59)$$

Las Ecs. (58) y (59) las sustituimos en la Ec. (55) y reacomodando términos.

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{\sigma}{\mu} + \frac{1}{G_0} \frac{d\sigma}{dt} \\ \mu\dot{\gamma} &= \sigma + \frac{\mu}{G_0} \frac{d\sigma}{dt} \end{aligned} \quad (60)$$

En la Ec. (60) el tiempo de relajación de Maxwell se puede escribir como el cociente entre la viscosidad y el módulo elástico de corte:

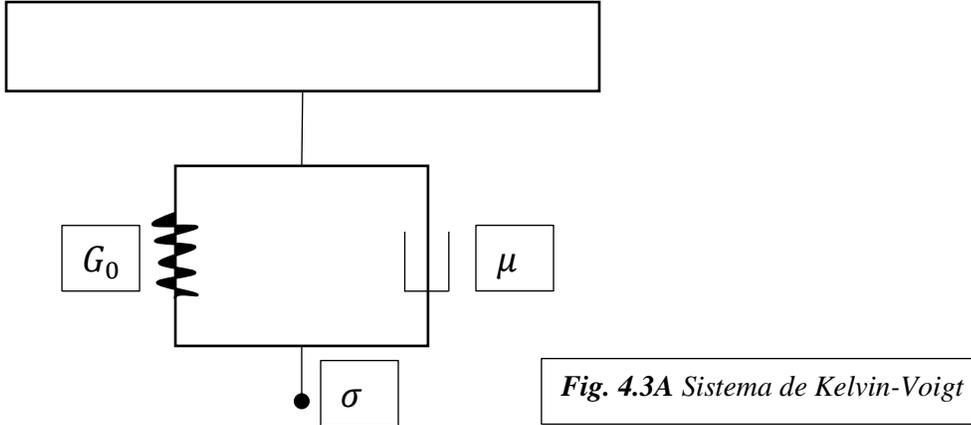
$$\lambda_0 = \frac{\mu}{G_0} \quad (61)$$

Entonces, la Ec. (60) representa el modelo viscoelástico de Maxwell

$$\mu\dot{\gamma} = \sigma + \lambda_0 \frac{d\sigma}{dt} \quad (62)$$

## 2.11 Modelo de Kelvin-Voigt (Paralelo)

En esta sección se presenta la deducción mecánica del modelo de Kelvin-Voigt el cual, consiste en un fluido viscoelástico. La parte de elástica se representa con un resorte mientras que, embolo representa la contribución viscosa.



Planteamos una ecuación para el sistema de Kelvin-Voigt (Siendo también conocido como un sistema de Maxwell en serie), que es igual a la sumatoria de los esfuerzos viscosos y elásticos.

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v \quad (63)$$

Para la Ec. (63) requerimos de las siguientes expresiones.

$$\sigma_e = G_0 \gamma_e \quad (64)$$

$$\sigma_v = \mu \dot{\gamma}_v \quad (65)$$

Puesto que la deformación va a ser la misma tenemos.

$$\gamma_e = \gamma_v = \gamma$$

Sustituimos la Ec. (64) y (65) en la Ec. (63), también aplicamos la anterior condición.

$$\begin{aligned} \sigma &= G_0 \gamma_e + \mu \dot{\gamma}_v \\ \sigma &= G_0 \gamma + \mu \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (66)$$

Diferenciamos la Ec. (66).

$$\frac{d\sigma}{dt} = G_0 \frac{d\gamma}{dt} + \mu \frac{d\dot{\gamma}}{dt} \quad (67)$$

La derivada de la deformación con respecto al tiempo es una rapidez de deformación y se expresa con  $\dot{\gamma}$ .

$$\frac{d\sigma}{dt} = G_0 \dot{\gamma} + \mu \frac{d\dot{\gamma}}{dt} \quad (68)$$

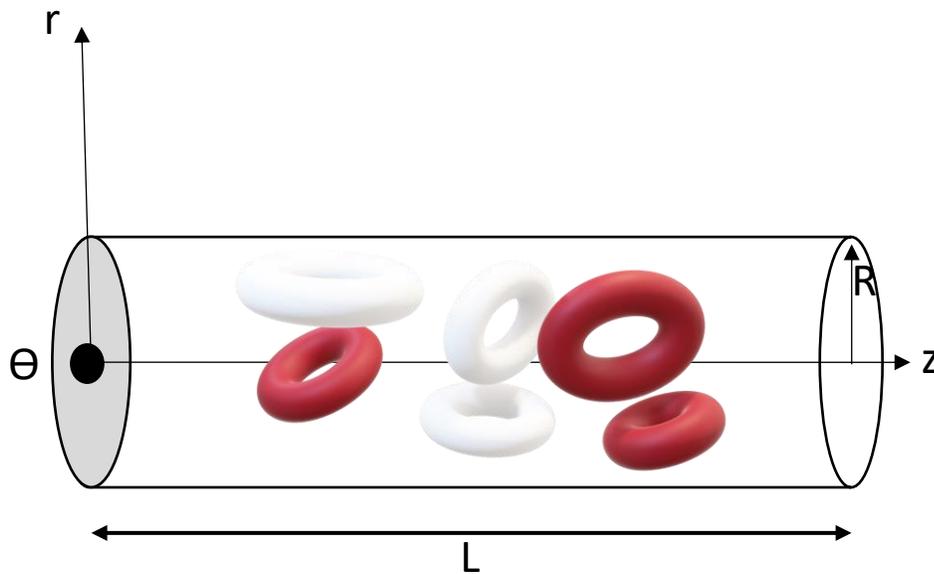
La Ec. (68) representa el modelo de Kelvin-Voigt.

**III. Modelado matemático**



### 3.1 Fluido viscoelástico en un capilar

En esta sección se realizará el desarrollo pertinente para la obtención de la función transferencia de masa en un capilar, por el que fluirá un fluido viscoelástico (Maxwell) que se deforma de manera continua e irreversiblemente en la dirección axial, causado por la fuerza motriz suministrada de un gradiente de presiones, obteniendo una ecuación que describa el flujo volumétrico de dicho sistema.



*Fig. 3.1A Esquema de un fluido viscoelástico (Maxwell), isotérmico e incompresible, en un capilar de radio(R) y Longitud (L).*

### 3.2 Modelado matemático

- Fluido no newtoniano, viscoelástico (Maxwell).
- Fluido incompresible.
- Estado no estacionario, la velocidad y presión dependen del tiempo (flujo pulsátil).
- El fluido se deforma de manera continua e irreversiblemente en la dirección axial a causa de un gradiente de presiones.
- Los mecanismos gravitacionales son despreciables puesto que el capilar se encuentra horizontal y su radio es muy pequeño.
- Proceso isotérmico.
- Simetrías cilíndricas.

Partiendo de la ecuación de movimiento lagrangiana.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma + \rho g \quad (1)$$

Al ser un tubo horizontal las fuerzas gravitacionales, no influyen en gran medida.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma \quad (2)$$

El tensor de esfuerzo puede ser escrito de la siguiente manera.

$$\sigma = On \frac{\partial Vz}{\partial r} \quad (3)$$

Sustituimos el tensor de esfuerzos en la Ec. (2).

$$\begin{aligned} \rho \frac{DV}{Dt} &= -\nabla p + \nabla \cdot \left( On \frac{\partial Vz}{\partial r} \right) \\ \rho \frac{DV}{Dt} &= -\nabla p + On \nabla \cdot \nabla (Vz) \\ \rho \frac{DV}{Dt} &= -\nabla p + On \nabla^2 (Vz) \end{aligned} \quad (4)$$

Al descomponer la Ec. (4) en las tres coordenadas.

Para el componente en r.

$$\rho \left( \frac{\partial Vr}{\partial t} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + On \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rVr) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Vr}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 Vr}{\partial z^2} \right] \quad (5)$$

Para la componente en  $\Theta$ .

$$\rho \left( \frac{\partial V\theta}{\partial t} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + On \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial Vr}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V\theta}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

Para el componente en z.

$$\rho \left( \frac{\partial Vz}{\partial t} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + On \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial Vz}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Vz}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 Vz}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

Aplicando el modelado matemático la ecuación queda de la siguiente manera.

$$\rho \frac{\partial Vz(r,t)}{\partial t} = -\nabla p(t) + On \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial Vz(r,t)}{\partial r} \right) \right) \quad (8)$$

Para resolver la anterior Ec. (8) aplicaremos la transformada de Fourier, puesto que la ecuación diferencial parcial que describe las variaciones de la velocidad por efectos del espacio y el tiempo.

$$\mathcal{F} \left\{ \rho \frac{\partial Vz(r,t)}{\partial t} = -\nabla p(t) + On \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial Vz(r,t)}{\partial r} \right) \right) \right\} \quad (9)$$

Aplicando Fourier a cada termino queda de la siguiente manera.

Al primer término puesto que es una derivada parcial con respecto al tiempo Fourier aplica sobre la ecuación.

$$\mathcal{F}\left\{\rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t}\right\} = \rho(i\omega)V_z(r, \omega) \quad (10)$$

Al segundo y tercer termino puesto que las derivadas están en función de variables de espacio salen como constantes puesto que Fourier solo aplica a los términos que estén en función del tiempo.

$$\mathcal{F}\{-\nabla p(t)\} = -\nabla \mathcal{F}\{p(t)\} = -\nabla p(\omega) \quad (11)$$

Para el tercer termino.

$$\mathcal{F}\left\{On\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r}\right)\right)\right\} = n\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\mathcal{F}\{V_z(r,t)\} = On\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z(r,\omega)}{\partial r}\right)\right) \quad (12)$$

Quedando la Ec. (9) una vez aplicado Fourier y dividiendo todo entre la viscosidad la ecuación queda de la siguiente manera.

$$\rho(i\omega)V_z(r, \omega) = -\nabla p(\omega) + On\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z(r,\omega)}{\partial r}\right)\right) \quad (13)$$

$$\frac{\rho(i\omega)}{On(i\omega)}V_z(r, \omega) = \frac{-\nabla p(\omega)}{On(i\omega)} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z(r,\omega)}{\partial r}\right)\right) \quad (14)$$

Despejando el gradiente de presión.

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z(r,\omega)}{\partial r}\right)\right) - \frac{\rho(i\omega)}{On(i\omega)}V_z(r, \omega) = \frac{\nabla p(\omega)}{On(i\omega)} \quad (15)$$

Se hace un cambio de variable para simplificar la expresión con el fin de obtener una ecuación de Bessel donde:

$$\beta^2 = \frac{\rho(i\omega)}{On(i\omega)}$$

Quedando la ecuación de la siguiente manera.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z(r,\omega)}{\partial r}\right) - \beta^2 V_z(r, \omega) = \frac{\nabla p(\omega)}{On(i\omega)} \quad (16)$$

Se procede a hacer la derivada del producto.

$$\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial^2 V_z(r,\omega)}{\partial r^2} + \frac{\partial V_z(r,\omega)}{\partial r}\right) - \beta^2 V_z(r, \omega) = \frac{\nabla p(\omega)}{On(i\omega)} \quad (17)$$

Para resolver la Ec. (16) se encontrará una solución homogénea más una particular de la siguiente manera.

$$V_z(r,\omega) = V_{hz} + V_{pz} \quad (18)$$

Primero procederemos a encontrar la solución homogénea igualando la ecuación a cero dejando la expresión de la siguiente manera.

$$\frac{1}{r} \left( r \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial r^2} + \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_Z(r, \omega) = 0 \quad (19)$$

Se multiplica por  $r^2$  para obtener la ecuación de Bessel.

$$r^2 \left\{ \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial r^2} + \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_Z(r, \omega) \right\} = 0$$

$$\left( r^2 \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial r^2} + r \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} \right) - r^2 \beta^2 V_Z(r, \omega) = 0 \quad (20)$$

La función de Bessel tiene la siguiente forma

$$\boxed{x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0} \quad (21)$$

Y su solución es de la siguiente forma.

$$\boxed{y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)} \quad (22)$$

Donde:

$J_n$  = Es una función de Bessel de primera especie de orden n.

$Y_n$  = Es una función de Bessel de segunda especie de orden n.

Así que para que nuestra Ec. (20) adquiera la forma de Bessel procedemos a realizar los siguientes pasos:

Primero el  $-1 = i^2$

$$\left( r^2 \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial r^2} + r \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} \right) + i^2 r^2 \beta^2 V_Z(r, \omega) = 0$$

$$r^2 \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial r^2} + r \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} + (i\beta)^2 V_Z(r, \omega) = 0 \quad (23)$$

Después al primer sumando y segundo se les multiplica por un uno particular quedando la ecuación de la siguiente manera.

$$\frac{(i\beta)^2}{(i\beta)^2} r^2 \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial r^2} + \frac{i\beta}{i\beta} r \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} + (i\beta)^2 V_Z(r, \omega) = 0 \quad (24)$$

Acomodamos la ecuación (24) de tal manera que quede de la siguiente manera.

$$(i\beta r)^2 \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial (i\beta r)^2} + i\beta r \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial i\beta r} + (i\beta r)^2 V_Z(r, \omega) = 0 \quad (25)$$

Ahora se procede a realizar el siguiente cambio de variable.

$$x = i\beta r$$

Aplicando el cambio de variable y escalando la ecuación queda.

$$x^2 \frac{\partial^2 V_z(r, \omega)}{\partial x^2} + x \frac{\partial V_z(r, \omega)}{\partial x} + x^2 V_z(r, \omega) = 0 \quad (26)$$

Para que la ecuación (26) sea semejante a la ecuación de Bessel.

$$x^2 \frac{\partial^2 V_z(r, \omega)}{\partial x^2} + x \frac{\partial V_z(r, \omega)}{\partial x} + (x^2 - 0^2) V_z(r, \omega) = 0 \quad (27)$$

Entonces la solución homogénea es igual a lo siguiente. Que es la solución de la ecuación de Bessel.

$$V_z(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$$

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(i\beta r) + C_2 Y_0(i\beta r) \quad (28)$$

La solución de Bessel de la Ec. (28) puede ser escrita como la solución de Bessel modificada.

$$V_z(r, \omega) = C_1 I_0(\beta r) + C_2 K_0(\beta r) \quad (29)$$

Donde:

$I_0$  = Es la función de Bessel modificada de primera especie de orden 0.

$K_0$  = Es la función de Bessel modificada de segunda especie de orden 0.

Ahora se buscará la solución particular, para este caso la ecuación se igualará a una constante.

$$V_z = A = cte \quad (30)$$

Sustituyendo esta constante en la ecuación (16).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \beta^2 A = \frac{\nabla p(\omega)}{On(i\omega)} \quad (31)$$

Al derivar una cte. es igual a cero y el  $-1 = i^2$ .

$$i^2 \beta^2 A = \frac{\nabla p(\omega)}{On(i\omega)} \quad (32)$$

Despejamos A de la Ec. (32) para obtener la solución particular.

$$A = \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \quad (32)$$

Como sabemos la solución general es la solución homogénea más la particular, que hemos obtenido previamente las sustituimos para obtener la solución general.

$$V_z(r, \omega) = C_1 I_0(\beta r) + C_2 K_0(\beta r) + \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \quad (33)$$

Ahora procederemos a encontrar las  $C_1$  y  $C_2$  estableciendo las siguientes condiciones de frontera, cuando nos encontramos en las paredes del tubo la velocidad en z es igual a cero y cuando nos encontramos en el centro del tubo la velocidad en z es la máxima o pues finita.

$$C.F.1 \quad V_z(r=R)=0$$

$$C.F.2 \quad V_z(r=0)=V_{zmax} = \text{finita}$$

Evaluando las condiciones de frontera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$C1I_0(\beta R) + C2K_0(\beta R) + \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} = 0 \quad (34)$$

$$C1I_0(\beta 0) + C2K_0(\beta 0) + \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} = 0 \quad (35)$$

En la Ec. (35) tenemos  $K_0(0) = -\infty$  y puesto que sabemos que la ecuación es finita igualaremos  $C2=0$  para cumplir la condición de frontera. Entonces de la Ec. (34) podemos despejar  $C1$ .

$$C1I_0(\beta R) + \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} = 0$$

$$C1 = - \frac{1}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left( \frac{\nabla p(\omega)}{I_0(\beta R)} \right) \quad (36)$$

Ahora sustituimos las constantes en la ecuación (33).

$$V_z(r,\omega) = \left( \frac{-1}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left( \frac{\nabla p(\omega)}{I_0(\beta R)} \right) \right) I_0(\beta r) + \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \quad (37)$$

Ahora solo factorizamos y simplificamos la expresión.

$$V_z(r,\omega) = \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left( 1 - \left( \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta R)} \right) \right) \quad (38)$$

La Ec. (38) es el perfil de velocidades con inercia para un fluido viscoelástico que fluye por un gradiente de presiones en la dirección  $z$ , en simetría cilíndrica (**Herrera-Valencia et al. 2022**)

### 3.3 Flujo volumétrico.

Ahora para encontrar el flujo volumétrico, se utiliza la siguiente integral superficial transformada con la transformada jacobiana para un sistema cilíndrico.

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R V_z(r) r dr d\theta \quad (39)$$

Como podemos observar  $V_z(r)$  no depende del ángulo ( $\Theta$ ) entonces sale de la integración como constante eh integramos.

$$Q = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R V_z(r) r dr$$

$$Q = \theta_0^{2\pi} \int_0^R V_z(r) r dr$$

$$Q = 2\pi \int_0^R Vz(r)rdr \quad (40)$$

Una vez obtenida la Ec. (40) procedemos a sustituir el perfil de velocidades en la ecuación para el flujo volumétrico y sacamos de la integral lo que es constante.

$$Q = 2\pi \int_0^R \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left(1 - \left(\frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta R)}\right)\right) r dr$$

$$Q = 2\pi \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \int_0^R \left(1 - \left(\frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta R)}\right)\right) r dr$$

$$Q = 2\pi \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \int_0^R r - \left(\frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta R)}\right) r dr \quad (41)$$

Integrando la ecuación queda de la siguiente manera.

$$Q = 2\pi \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^R - \int_0^R \left(\frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta R)}\right) r dr\right)$$

$$Q = 2\pi \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{I_0(\beta R)} \int_0^R I_0(\beta r) r dr\right) \quad (42)$$

Ahora vamos a escalar la ecuación (42) multiplicando y dividiendo a  $\beta^2 / \beta^2 = 1$ .

$$Q = 2\pi \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{\beta^2 I_0(\beta R)} \int_0^{\beta R} I_0(\beta r) \beta r d\beta r\right) \quad (43)$$

También escalamos los límites de integración.

Ahora realizaremos el siguiente cambio de variable  $\beta r = x$ .

$$Q = 2\pi \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{\beta^2 I_0(x)} \int_0^{\beta R} I_0(x) x dx\right) \quad (44)$$

Tenemos la siguiente propiedad de las funciones de Bessel.

$$\boxed{\frac{d}{dx} (I_1(x) \cdot x) = I_0(x) \cdot x} \quad (45)$$

Aplicamos la propiedad de la función de Bessel en nuestra Ec. (44) y la operamos.

$$Q = 2\pi \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{\beta^2 I_0(x)} \int_0^{\beta R} \frac{d}{dx} (I_1(x) \cdot x) dx\right)$$

$$Q = 2\pi \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{\beta^2 I_0(x)} (I_1(x) \cdot x) \Big|_0^{\beta R}\right)$$

$$Q = 2\pi \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{1}{\beta^2 I_0(\beta R)} (I_1(\beta R) \cdot \beta R) \right) \quad (46)$$

Factorizamos  $\frac{R^2}{2}$  de la expresión.

$$Q = 2\pi \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \frac{R^2}{2} \left( 1 - \frac{2}{R^2 \beta^2 I_0(\beta R)} (I_1(\beta R) \cdot \beta R) \right)$$

$$Q = \frac{\pi R^2 \nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left( 1 - \frac{2I_1(\beta R)}{R\beta I_0(\beta R)} \right) \quad (47)$$

Para hacerla similar a la ecuación de Hagen- Poiseuille vamos a multiplicar por  $\frac{R^2}{R^2} = 1$ , por  $\frac{8}{8} = 1$  y por último se multiplicará por  $\frac{\eta_0}{\eta_0} = 1$ . Dejando la ecuación de la siguiente manera.

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta_0} \left[ \frac{8\eta_0}{i^2 (R\beta)^2 On(i\omega)} \left( 1 - \frac{2I_1(\beta R)/R\beta}{I_0(\beta R)} \right) \right] \nabla p(\omega) \quad (48)$$

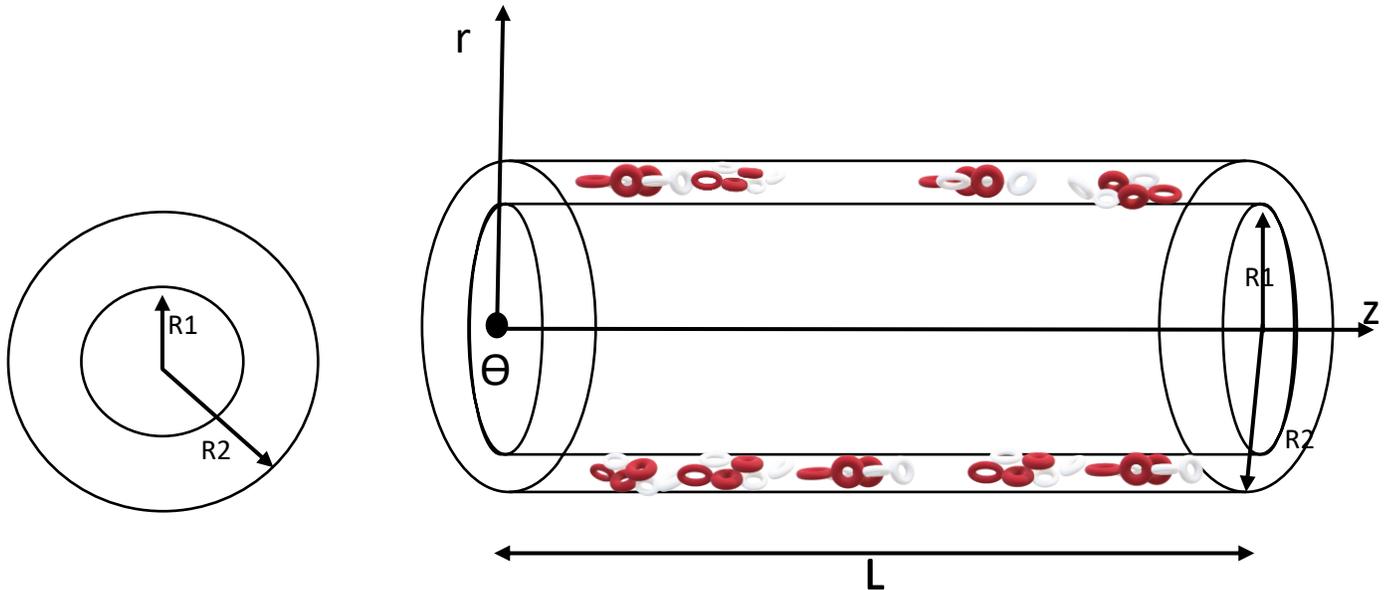
Todo el término lo vamos a escribir como  $T(\omega) = \frac{8\eta_0}{i^2 (R\beta)^2 On(i\omega)} \left( 1 - \frac{2I_1(\beta R)/R\beta}{I_0(\beta R)} \right)$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta_0} T(\omega) \nabla p(\omega) \quad (49)$$

Así obtenemos la ecuación de Hagen y Poiseuille que describe el flujo volumétrico de un fluido visco elástico donde podemos observar que  $T(\omega)$  es la función transferencia de un fluido viscoelástico y toda la demás expresión es la ecuación de Hagen- Poiseuille para un fluido newtoniano (**Herrera-Valencia et al. 2022; Nava-Rivera 2022**)

### 3.4 Fluido viscoelástico en una corona circular

En esta sección vamos a analizar y obtener el flujo volumétrico, de un fluido viscoelástico que fluye a través de una corona circular debido a la fuerza motriz causada por el gradiente presión. La corona tiene un radio mayor ( $R_2$ ) y un radio menor ( $R_1$ ), con una longitud característica axial ( $L$ ).



*Fig. 3.2A Esquema de un fluido viscoelástico, isotérmico e incompresible, en una corona circular de radio menor ( $R_1$ ), radio mayor ( $R_2$ ) y Longitud ( $L$ ).*

### 3.5 Modelado matemático

- Fluido no newtoniano, fluido viscoelástico.
- Estado no estacionario, la velocidad y la presión dependen del tiempo (flujo pulsátil).
- Incompresible.
- Proceso isotérmico.
- Simetría cilíndrica.
- La velocidad va en dirección  $z$  y por ende está en función de la coordenada radial  $r$ .
- El fluido se deforma a causa de un gradiente de presiones, en la dirección axial  $z$ .
- Los mecanismos gravitacionales son despreciables puesto que el capilar se encuentra horizontal y su radio es muy pequeño.

Partiendo del perfil de velocidades general obtenido para el fluido viscoelástico en un capilar obtenido en la Ec. (33)

$$V_z(r, \omega) = C_1 I_0(\beta r) + C_2 K_0(\beta r) + \frac{\nabla p(\omega)}{i^2 \beta^2 \Omega n(i\omega)} \quad (50)$$

Establecemos nuevas condiciones de frontera para el sistema a estudiar que son las siguientes, cuando nos encontramos en la pared del radio menor ( $R_1$ ) la velocidad es igual a cero lo mismo aplica cuando nos encontramos en la pared del radio mayor.

$$\text{C.F.1 } V_z(r=R1)=0$$

$$\text{C.F.2 } V_z(r=R2)=0 \quad (51)$$

Aplicando las condiciones de frontera Ec. (51), en la Ec. (50) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones. Para resolver el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas, se restará la Ec. (53) a la Ec. (52)

$$0=C1I_0(\beta R1) + C2K_0(\beta R1)+A \quad (52)$$

$$-1(0=C1I_0(\beta R2) + C2K_0(\beta R2)+A) \quad (53)$$

Obteniéndose, la siguiente expresión

$$0=C1(I_0(\beta R1) - C1I_0(\beta R2)) + C2(K_0(\beta R1) - K_0(\beta R2)) \quad (54)$$

Despejando de la Ec. (54) la constante C2 obtenemos:

$$C2 = \frac{C1(I_0(\beta R2)-C1I_0(\beta R1))}{K_0(\beta R1)-K_0(\beta R2)} \quad (55)$$

Si se sustituye la Ec. (55) en la Ec. (52), se obtiene la siguiente expresión:

$$0=C1I_0(\beta R1) + \left( \frac{C1(I_0(\beta R2)-C1I_0(\beta R1))}{K_0(\beta R1)-K_0(\beta R2)} \right) K_0(\beta R1)+A$$

y

$$0=C1I_0(\beta R1) + \frac{C1(I_0(\beta R2)K_0(\beta R1)-C1I_0(\beta R1))K_0(\beta R1)}{K_0(\beta R1)-K_0(\beta R2)} +A \quad (56)$$

Simplificando la Ec. (54), se tiene:

$$0 = \frac{C1I_0(\beta R1)K_0(\beta R1)-C1I_0(\beta R1)K_0(\beta R2)+C1(I_0(\beta R2)K_0(\beta R1)-C1I_0(\beta R1))K_0(\beta R1)}{K_0(\beta R1)-K_0(\beta R2)} +A \quad (57)$$

Factorizamos C<sub>1</sub> de la Ec. (57)

$$0=C1 \left( \frac{I_0(\beta R2)K_0(\beta R1)-I_0(\beta R1)K_0(\beta R2)}{K_0(\beta R1)-K_0(\beta R2)} \right) +A$$

$$C1 = \frac{-A}{\frac{I_0(\beta R2)K_0(\beta R1)-I_0(\beta R1)K_0(\beta R2)}{K_0(\beta R1)-K_0(\beta R2)}}$$

$$C1 = -A \frac{(K_0(\beta R1)-K_0(\beta R2))}{I_0(\beta R2)K_0(\beta R1)-I_0(\beta R1)K_0(\beta R2)} \quad (58)$$

Donde A tiene la información del gradiente de presión (fuerza motriz) que de forma continua e irreversiblemente el fluido. Ahora para encontrar C2 sustituimos la C1 en la Ec. (55).

$$C2 = \left( \frac{-A(K_0(\beta R1) - K_0(\beta R2))}{I_0(\beta R2)K_0(\beta R1) - I_0(\beta R1)K_0(\beta R2)} \right) \frac{(I_0(\beta R2) - C1I_0(\beta R1))}{K_0(\beta R1) - K_0(\beta R2)} \quad (59)$$

Simplificar la Ec. (59)

$$C2 = -A \left( \frac{(I_0(\beta R2) - C1I_0(\beta R1))}{I_0(\beta R2)K_0(\beta R1) - I_0(\beta R1)K_0(\beta R2)} \right) \quad (60)$$

Definiendo la variable:

$$C1 = -AC3 \quad (61)$$

Donde:

$$C3 = \frac{(K_0(\beta R1) - K_0(\beta R2))}{I_0(\beta R2)K_0(\beta R1) - I_0(\beta R1)K_0(\beta R2)}$$

$$C2 = -AC4 \quad (62)$$

Donde:

$$C4 = \frac{(I_0(\beta R2) - I_0(\beta R1))}{I_0(\beta R2)K_0(\beta R1) - I_0(\beta R1)K_0(\beta R2)}$$

Por último, solo sustituiremos C1 y C2 en la Ec. (50) para encontrar el perfil de velocidades de un fluido viscoelástico que fluye a través de una corona circular deformado por un gradiente de presión transitorio (**Herrera-Valencia et al. 2022**)

$$Vz(r, \omega) = C3I_0(\beta r)(-A) + C4K_0(\beta r)(-A) - (-A) \quad (63)$$

### 3.6 Flujo volumétrico.

Ahora procederemos a encontrar una expresión que describa el flujo volumétrico de nuestro sistema partiendo de la siguiente integral superficial.

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{R1}^{R2} Vz(r) r dr d\theta \quad (64)$$

Como podemos observar  $Vz(r)$  no depende del ángulo ( $\Theta$ ) entonces sale de la integración como constante eh integramos.

$$Q = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R1}^{R2} Vz(r) r dr$$

$$Q = \theta_0^{2\pi} \int_{R1}^{R2} Vz(r) r dr$$

$$Q = 2\pi \int_{R1}^{R2} Vz(r) r dr \quad (65)$$

Sustituimos el perfil de velocidades en la Ec. (63).

$$Q = 2\pi \int_{R1}^{R2} (C3I_0(\beta r)(-A) + C4K_0(\beta r)(-A) - (-A)) r dr$$

$$Q = 2\pi \left[ \int_{R_1}^{R_2} C3 I_0(\beta r)(-A)r dr + \int_{R_1}^{R_2} C4 K_0(\beta r)(-A)r dr - \int_{R_1}^{R_2} (-A)r dr \right] \quad (66)$$

Ahora solo factorizamos y sacamos de la integral todo lo que sea constante.

$$Q = 2\pi \left[ C3(-A) \int_{R_1}^{R_2} I_0(\beta r)r dr + C4(-A) \int_{R_1}^{R_2} K_0(\beta r)r dr - (-A) \int_{R_1}^{R_2} r dr \right] \quad (67)$$

Escalamos las integrales multiplicando por  $\beta^2/\beta^2 = 1$ , como escalamos una integral también se escalan sus límites de integración de la siguiente manera.

$$Q = 2\pi \left[ \frac{C3(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} I_0(\beta r)r\beta dr\beta + \frac{C4(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} K_0(\beta r)r\beta dr\beta - (-A) \int_{R_1}^{R_2} r dr \right] \quad (68)$$

Realizamos el siguiente cambio de variable.

$$\beta r = x$$

Dejando nuestra ecuación de la siguiente manera.

$$Q = 2\pi \left[ \frac{C3(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} I_0(x)x dx + \frac{C4(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} K_0(x)x dx - (-A) \int_{R_1}^{R_2} r dr \right] \quad (69)$$

Aplicamos la siguiente propiedad de las funciones de Bessel

$$\boxed{\frac{d}{dx} (I_1(x).x) = I_0(x).x} \quad (70)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} (K_1(x).x) = K_0(x).x} \quad (71)$$

Sustituimos las propiedades en la ecuación del flujo.

$$Q = 2\pi \left[ \frac{C3(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} \frac{d}{dx} (I_1(x).x) + \frac{C4(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} \frac{d}{dx} (K_1(x).x) - (-A) \int_{R_1}^{R_2} r dr \right] \quad (72)$$

Operando las integrales el resultado queda de la siguiente manera.

$$Q = 2\pi \left[ \frac{C3(-A)}{\beta^2} (I_1(x).x)_{R_1\beta}^{R_2\beta} + \frac{C4(-A)}{\beta^2} K_1(x).x_{R_1\beta}^{R_2\beta} - (-A) \frac{r^2}{2} \Big|_{R_1}^{R_2} \right] \quad (73)$$

Evaluando los límites de integración.

$$Q = 2\pi \left[ \frac{C3(-A)}{\beta^2} [I_1(R_2\beta).R_2\beta - I_1(R_1\beta).R_1\beta] + \frac{C4(-A)}{\beta^2} [K_1(R_2\beta).R_2\beta - K_1(R_1\beta).R_1\beta] - (-A) \left( \frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right) \right]$$

$$Q = 2\pi(-A) \left[ \frac{C3}{\beta^2} [I_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta - I_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta] + \frac{C4}{\beta^2} [K_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta - K_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta] + \left( \frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} \right) \right] \quad (74)$$

Factorizamos  $R2^2$ .

$$Q = 2\pi \frac{-\nabla p(\omega) R_2^2}{i^2 \beta^2 On(i\omega) 2} \left[ \frac{2C3}{\beta} \left[ I_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - I_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2} \right] + \frac{2C4}{\beta} \left[ K_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - K_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2} \right] + \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) \right] \quad (75)$$

Para hacerla similar a la ecuación de Hagen- Poiseuille vamos a multiplicar por  $\frac{R2^2}{R2^2} = 1$ , por  $\frac{8}{8} = 1$  y por último se multiplicará por  $\frac{\eta_0}{\eta_0} = 1$ . Dejando la ecuación de la siguiente manera.

$$Q = \frac{\pi R_2^4}{8\eta_0} \left\{ \frac{16\eta_0 C3}{R_2^2 i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left[ \frac{I_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - I_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2}}{\beta} \right] + \frac{16\eta_0 C4}{R_2^2 i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left[ \frac{K_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - K_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2}}{\beta} \right] + \frac{8\eta_0}{R_2^2 i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) \right\} (-\nabla p(\omega)) \quad (76)$$

A todo el término dentro de los corchetes le llamaremos  $T_C(\omega)$ .

$$T_C(\omega) = \frac{16\eta_0 C3}{R_2^2 i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left[ \frac{I_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - I_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2}}{\beta} \right] + \frac{16\eta_0 C4}{R_2^2 i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left[ \frac{K_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - K_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2}}{\beta} \right] + \frac{8\eta_0}{R_2^2 i^2 \beta^2 On(i\omega)} \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) \quad (77)$$

Reescribiendo la ecuación queda el flujo volumétrico de la siguiente manera.

$$Q = \frac{\pi R_2^4}{8\eta_0} T_C(\omega) (-\nabla p(\omega)) \quad (78)$$

Donde  $T_C(\omega)$  es la función de transferencia del fluido viscoelástico que fluye por la corona circular, y toda la demás expresión es la ecuación de Hagen- Poiseuille para un fluido newtoniano.

**Nota:** La función de Transferencia para un fluido viscoelástico en los modelos del capilar y la corona circular, vistos en este capítulo Fueron representadas mediante las funciones de Bessel modificadas de primera ( $I_n$ ) y de segunda especie ( $K_n$ ). En dichas funciones de transferencia para ambos modelos también pueden usarse las funciones de Bessel de primera especie ( $J_n$ ) y de segunda especie ( $Y_n$ ), de tal manera que se obtiene las siguientes ecuaciones:

### 3.7 Resumen de ecuaciones

En esta sección se presenta un resumen de las ecuaciones obtenidas en esta sección.

#### A) Capilar de radio $R$ y longitud $z = L$

$$Q(\omega) = \frac{\pi R^4}{8\eta_0} T(\omega) (-\nabla p(\omega))$$

Función de transferencia compleja para el capilar de radio  $r = R$  y longitud  $z = L$

$$T(\omega) = 8i^2 \frac{\eta_0}{(R\beta)^2 O_n(i\omega)} \left( 1 - 2 \frac{J_1(R\beta(\omega))/R\beta(\omega)}{J_0(R\beta(\omega))} \right)$$

#### B) Corona circular de radio $R_1$ y $R_2$ , $R_1 < R_2$ y longitud $L$

$$Q(\omega) = \frac{\pi R_2^4}{8\eta_0} T(\omega) (-\nabla p(\omega))$$

Función de Transferencia para la Corona Circular no Modificada.

$$T(\omega) = 8i^2 \frac{\eta_0}{(R_2\beta)^2 O_n(i\omega)} \left\{ 2C_3(\omega) \left( \frac{J_1(R_2\beta) - J_1(R_1\beta) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{R_2\beta} \right) + 2C_4(\omega) \left( \frac{Y_1(R_2\beta) - Y_1(R_1\beta) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{R_2\beta} \right) - \left[ 1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \right] \right\}$$

Donde:

$$C_3(\omega) = \frac{Y_0(R_1\beta) - Y_0(R_2\beta)}{Y_0(R_1\beta)J_0(R_2\beta) - Y_0(R_2\beta)J_0(R_1\beta)}$$

y

$$C_4(\omega) = \frac{J_0(R_2\beta) - J_0(R_1\beta)}{Y_0(R_1\beta)J_0(R_2\beta) - Y_0(R_2\beta)J_0(R_1\beta)}$$

Las expresiones analíticas deducidas dependen de:

- Propiedades geométricas
- Operador fluidez (inverso de la viscosidad) que describe las propiedades reológicas y depende de las propiedades materiales de la ecuación constitutiva que se emplee.
- Funciones especiales de Bessel de primera especie de ordenes cero y primero.
- Fuerza motriz asociado al gradiente de presión transitorio.

Las ecuaciones deducidas en este trabajo, son la base para entender las oclusiones periféricas y centrales en sangre humana con colesterol las cuales, serán modeladas por la ecuación constitutiva de Maxwell multimodal (Bird et al. 1997, 2002; Moreno et al. 2015; Herrera-Valencia et al. 2022; Nava-Rivera 2022)

#### IV. Variables adimensionales

De

#### 4.1 Variables adimensionales

Los objetivos principales de esta es proponer un conjunto de variables dimensionales con el fin de escalar el operador viscosidad, la función de transferencia compleja, el parámetro Beta asociado a la longitud de onda de las funciones de Bessel.

Este escalamiento permite:

1. Simplificar las ecuaciones teóricas para facilitar las simulaciones en el programa Matemática.
2. Nos permite acotar el espacio de soluciones donde se encuentran nuestras ecuaciones teóricas.
3. Obtener números adimensionales que describen la física y los mecanismos macroscópicos del sistema.

#### 4.2 Vector de onda complejo Beta

La primera variable que se va a definir es la concerniente al parámetro Beta que tiene unidades de inverso de longitud el cual, se hará adimensional con la longitud característica R.

$$R\beta = R \left( \sqrt{\frac{\rho i \omega}{On(i\omega)}} \right) \quad (1)$$

Operando R y factorizando i de la expresión anterior.

$$R\beta = \left( \sqrt{\frac{R^2 \rho i \omega}{On(i\omega)}} \right)$$
$$R\beta = I^{1/2} \left( \sqrt{\frac{R^2 \rho \omega}{On(i\omega)}} \right) \quad (2)$$

Al realizar el análisis de dimensiones.

$$R\beta = I^{1/2} \left( \sqrt{\frac{R^2 \rho \omega}{On(i\omega)}} \right) [=] \sqrt{\frac{kg \cdot m^2}{m^3 \cdot \frac{kg \cdot m \cdot s}{m^2 \cdot s^2}} \frac{1}{s}} [=] \sqrt{\frac{1}{m} \frac{m^2}{m} \frac{1}{s}} [=] \sqrt{\frac{m^2 \cdot s}{m^2 \cdot s}} [=] 1 \text{ (Adimensional)}$$

En la ecuación anterior tenemos un tiempo característico de maxwell descrito de la siguiente manera.

$$T_c = \frac{R^2 \rho}{On(i\omega)} \quad (3)$$

Sustituimos en la ecuación (2).

$$R\beta = I^{3/2} (\sqrt{T_c \omega}) \quad (4)$$

La variable adimensional Beta se puede escribir de la siguiente manera.

$$\beta^* = R\beta = I^{3/2} \left( \sqrt{\frac{R^2 \rho \omega}{On(i\omega)}} \right) \quad (5)$$

Para adimensionar los términos se procede a escalar la ecuación de la siguiente manera.

$$\beta^* = I^{3/2} \left( \sqrt{\frac{\frac{R^2 \rho \omega}{On(i\omega)}}{\frac{n_0}{n_0}}} \right) \quad (6)$$

El término  $\frac{On(i\omega)}{n_0} = On^*$  es una variable adimensional que introducimos a la expresión de  $\beta^*$ .

$$\beta^* = I^{3/2} \left( \sqrt{\frac{R^2 \rho \omega}{n_0 On^*}} \right) \quad (7)$$

Ahora volvemos a escalar la ecuación.

$$\beta^* = I^{3/2} \left( \sqrt{\frac{R^2 \rho \omega \lambda}{\lambda n_0 On^*}} \right) \quad (8)$$

Obtenemos un segundo término adimensional  $\omega^* = \omega \lambda$ .

$$\beta^* = I^{3/2} \left( \sqrt{\frac{R^2 \rho \omega^*}{\lambda n_0 On^*}} \right) \quad (9)$$

La viscosidad a bajo corte ( $n_0$ ) es igual al módulo elástico de corte ( $G_0$ ) por el tiempo de relajación de Maxwell ( $\lambda$ ).

$$n_0 = G_0 \lambda \quad (10)$$

Sustituimos la ecuación (10) en la ecuación (9) y reacomodando.

$$\beta^* = I^{3/2} \left( \sqrt{\frac{R^2 \rho \omega^*}{G_0 \lambda^2 On^*}} \right)$$

$$\beta^* = I^{3/2} \left( \sqrt{\left( \frac{\sqrt{\frac{R^2 \rho}{G_0}}}{\lambda} \right)^2 \frac{\omega^*}{On^*}} \right) \quad (11)$$

El término  $\sqrt{\frac{R^2 \rho}{G_0}} = T_c$ , es igual a un tiempo característico

$$\beta^* = I^{3/2} \left( \sqrt{\left(\frac{T_c}{\lambda}\right)^2 \frac{\omega^*}{\rho n^*}} \right) \quad (12)$$

Es entonces cuando encontramos el número de Déborah.

$$De = \frac{\lambda}{T_c} \quad (13)$$

Quedando nuestra ecuación de la siguiente manera completamente adimensional.

$$\beta^* = I^{3/2} \left( \sqrt{\left(\frac{1}{De}\right)^2 \frac{\omega^*}{\rho n^*}} \right) \quad (14)$$

La Ec. (14) de esta sección representa la variable adimensional asociada a Beta y depende del número de Deborah, frecuencia y del operador viscosidad con el cual se este caracterizando al fluido viscoelástico en el sistema.

### 4.3 Función de transferencia adimensional para el capilar.

A partir del siguiente modelo de función de transferencia podemos adimensional, haciendo uso de los siguientes parámetros adimensionales.

$$\frac{T(\omega)}{\varphi_0} = 8i^2 \frac{1}{(R\beta)^2 \frac{\rho n(i\omega)}{\rho_0}} \left( 1 - 2 \frac{J_1(R\beta(\omega))/R\beta(\omega)}{J_0(R\beta(\omega))} \right) \quad (15)$$

En la Ec. (15) reconocemos las siguientes variables adimensionales para la función de transferencia compleja, vector de onda  $\beta$  y operador viscosidad  $O_\eta(i\omega)$

$$\frac{T(\omega)}{\varphi_0} = T^*(\omega)$$

$$R\beta = \beta^*$$

$$\frac{\rho n(i\omega)}{\rho_0} = O_n^*(i\omega)$$

$$\omega \lambda_0 = \omega^*$$

Utilizando los anteriores grupos adimensionales tenemos la siguiente función de transferencia adimensional.

$$T^*(\omega^*) = 8i^2 \frac{1}{(\beta^*)^2 O_n^*(i\omega^*)} \left( 1 - 2 \frac{J_1(\beta^*(\omega^*))/\beta^*(\omega^*)}{J_0(\beta^*(\omega^*))} \right) \quad (16)$$

La Ec. (16) representa la función de transferencia compleja adimensional de nuestro sistema de estudio.

#### 4.4 Función de transferencia adimensional para la corona circular.

A partir del siguiente modelo de función de transferencia, podemos adimensionar haciendo uso de grupos adimensionales.

$$\frac{T(\omega)}{\varphi_0} = 8i^2 \frac{1}{(R_2\beta)^2 \frac{O_n(i\omega)}{n_0}} \left\{ 2C_3(\omega) \left( \frac{J_1(R_2\beta) - J_1\left(\frac{R_1}{R_2}, R_2\beta\right)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{R_2\beta} \right) + \right. \\ \left. 2C_4(\omega) \left( \frac{Y_1(R_2\beta) - Y_1\left(\frac{R_1}{R_2}, R_2\beta\right)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{R_2\beta} \right) - \left[ 1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \right] \right\} \quad (17)$$

$$C_3(\omega) = \frac{Y_0(R_2\beta) - Y_0\left(\frac{R_1}{R_2}, R_2\beta\right)}{Y_0\left(\frac{R_1}{R_2}, R_2\beta\right)J_0(R_2\beta) - Y_0(R_2\beta)J_0\left(\frac{R_1}{R_2}, R_2\beta\right)}$$

$$C_4(\omega) = \frac{J_0(R_2\beta) - J_0\left(\frac{R_1}{R_2}, R_2\beta\right)}{Y_0\left(\frac{R_1}{R_2}, R_2\beta\right)J_0(R_2\beta) - Y_0(R_2\beta)J_0\left(\frac{R_1}{R_2}, R_2\beta\right)}$$

De la misma manera que en el capilar, se tiene para la corona circular las siguientes variables adimensionales, para la función de transferencia compleja, el vector de onda complejo  $\beta$ , el operador viscosidad  $O_n(i\omega)$  y la razón de radios  $R$ .

$$\frac{T(\omega)}{\varphi_0} = T^*(\omega)$$

$$R_2\beta = \beta^*$$

$$\frac{O_n(i\omega)}{n_0} = O_n^*(i\omega)$$

$$\omega\lambda_0 = \omega^*$$

$$\frac{R_1}{R_2} = R^*$$

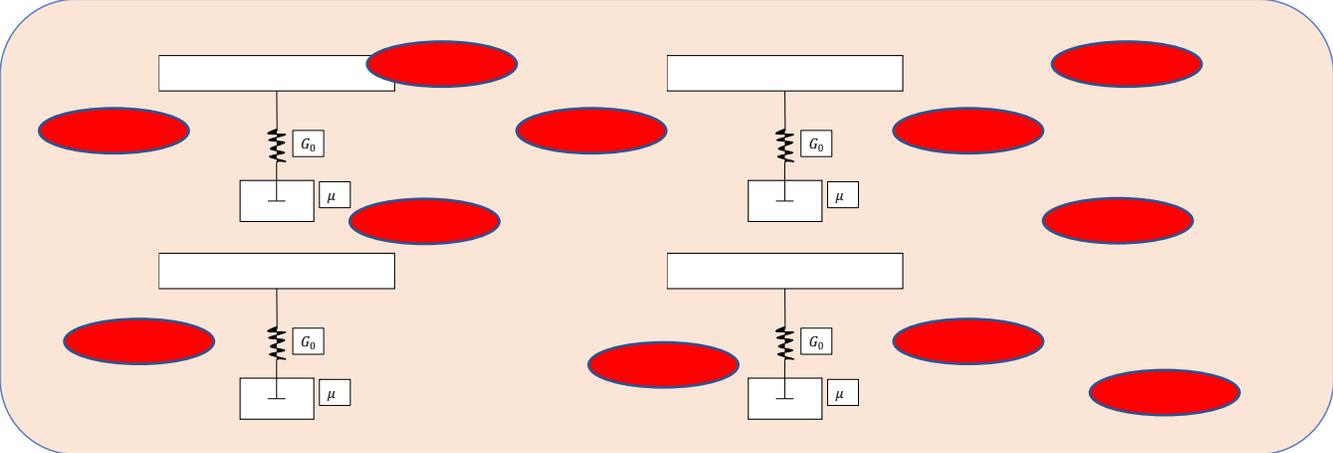
Aplicando los anteriores grupos adimensionales obtenemos la siguiente modelo adimensional para una corona circular.

$$T^*(\omega) = 8i^2 \frac{1}{(\beta^*)^2 O_n^*(i\omega)} \left\{ 2C_3(\omega) \left( \frac{J_1(\beta^*) - J_1(R^*, \beta^*)(R^*)}{\beta^*} \right) + \right. \\ \left. 2C_4(\omega) \left( \frac{Y_1(\beta^*) - Y_1(R^*, \beta^*)(R^*)}{\beta^*} \right) - [1 - (R^*)^2] \right\} \quad (18)$$

$$C_3(\omega) = \frac{Y_0(\beta^*) - Y_0(R^*, \beta^*)}{Y_0(R^*, \beta^*)J_0(\beta^*) - Y_0(\beta^*)J_0(R^*, \beta^*)}$$

$$C_4(\omega) = \frac{J_0(\beta^*) - J_0(R^*, \beta^*)}{Y_0(R^*, \beta^*)J_0(\beta^*) - Y_0(\beta^*)J_0(R^*, \beta^*)}$$

**V. Simulaciones y análisis de resultados**

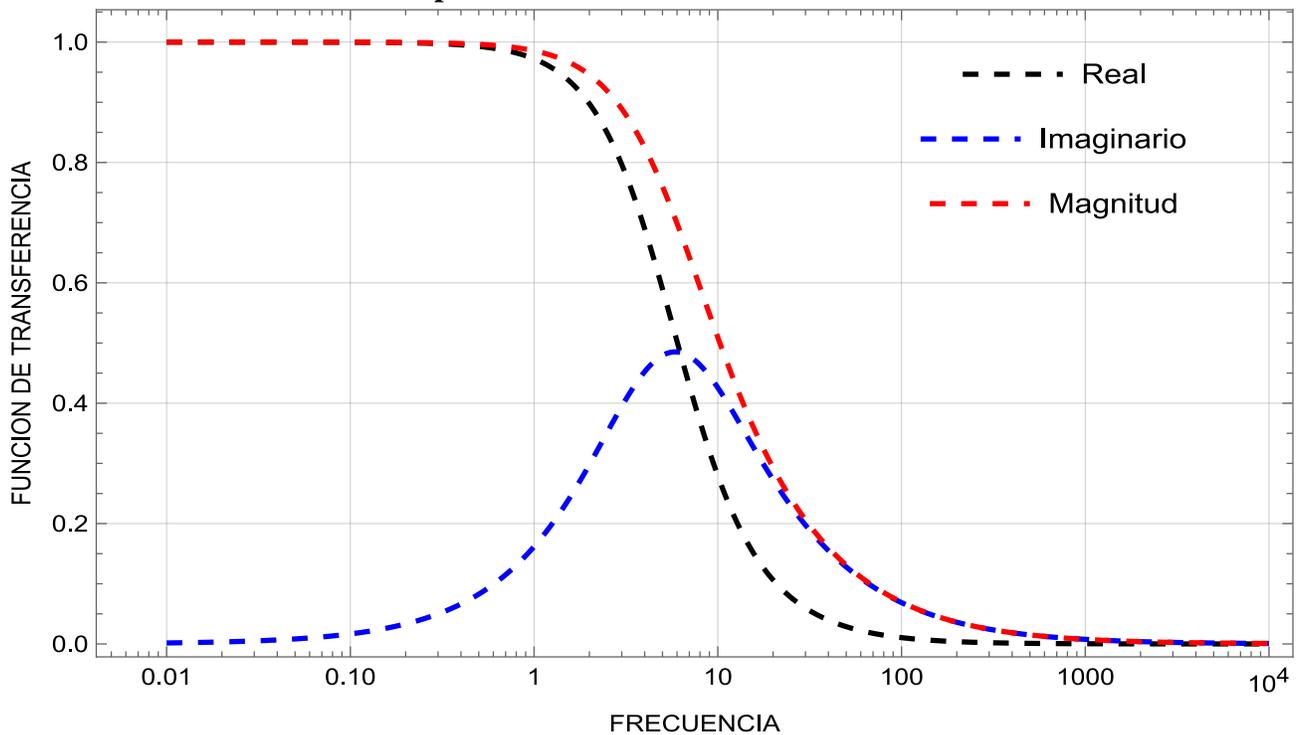


En esta sección, se presentan los resultados de los resultados teóricos trabajados en la presente tesis de licenciatura. En la primera parte de este trabajo, se discutirán las variables adimensionales que son punto de partida en las simulaciones. En la segunda parte, se presentan las simulaciones realizadas en el programa de Wolfram Mathematica Licencia UNAM. Los resultados son discutidos desde un punto de vista matemático y físico.

### Simulaciones en el programa Mathematica

En la siguiente sección se presentan los resultados más importantes del programa de servicio social. La programación se hizo en el programa de Mathematica 12.2, el cual se cuenta con la licencia en la FESZ-UNAM.

#### 5.1 Fluido newtoniano en un capilar



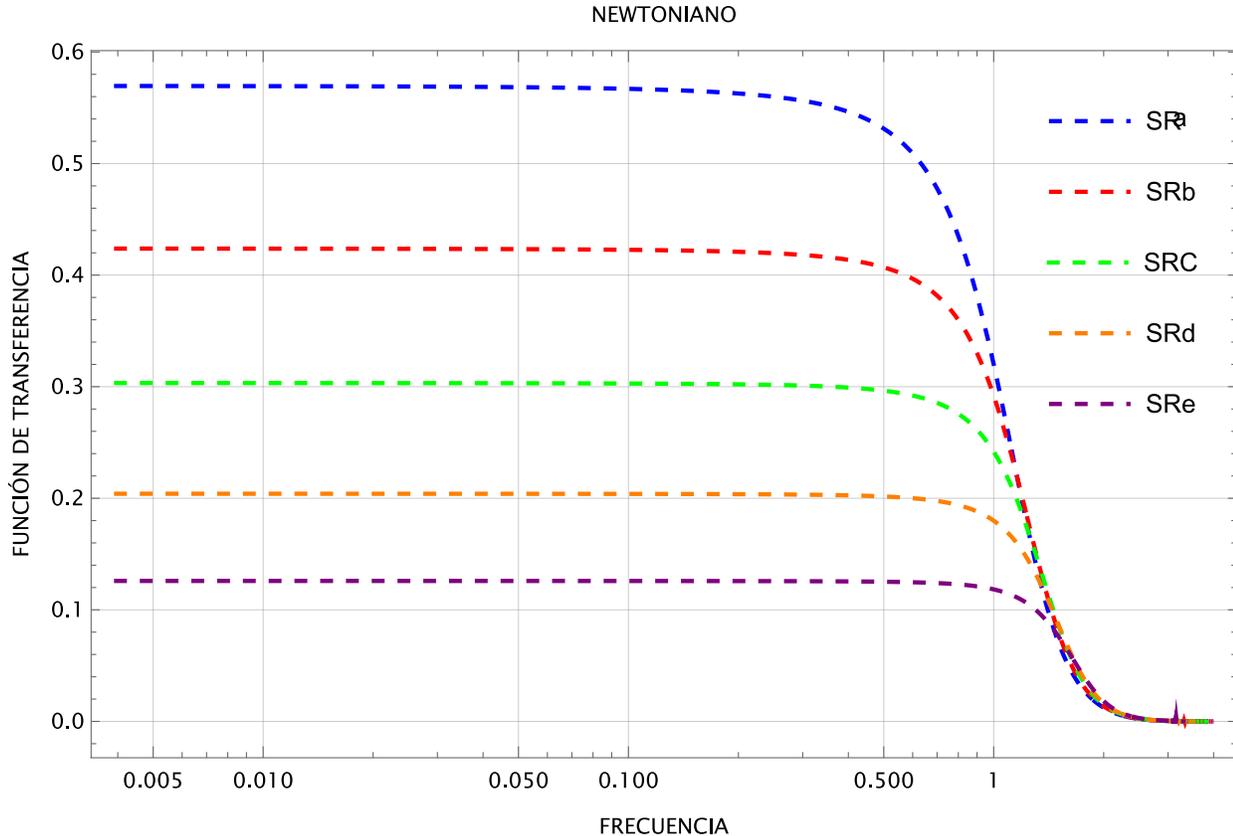
*Fig. 5.1A Grafica las contribuciones real, imaginaria y magnitud de la función de transferencia vs frecuencia, para un líquido newtoniano.*

En la Fig. 5.1A, se puede observar la parte real, imaginaria y magnitud de la función de transferencia compleja para un capilar de radio= $R$  y Longitud característica  $Z=L$ . La parte real de la función de transferencia describe un comportamiento monótono decreciente de un valor crítico hasta un segundo valor crítico, seguido de un comportamiento asintótico hasta un valor de cero.

Físicamente la parte real es la energía que se almacena (elasticidad), la relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión es constante, a frecuencias moderadas, el flujo decrece hasta un valor asintótico a cero.

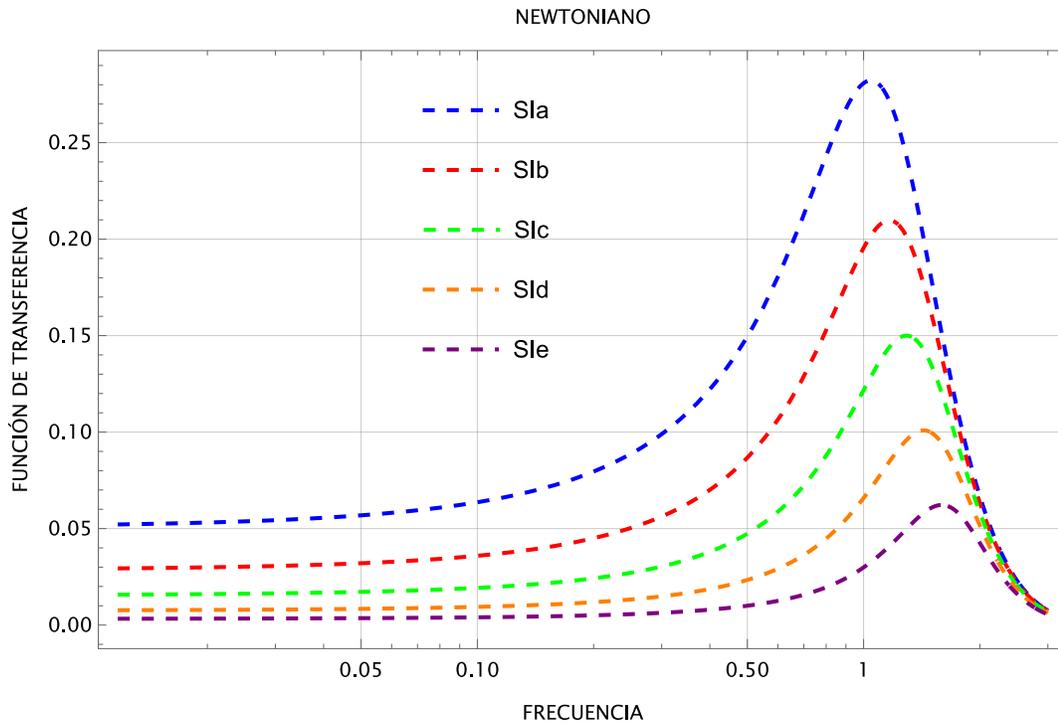
La parte imaginaria de la función de transferencia físicamente representa la energía que se disipa, esta muestra un comportamiento resonante. A bajas frecuencias este es casi constante e independiente de la frecuencia. Después se puede observar un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo. Este valor máximo es conocido como resonancia y se puede interpretar como la máxima energía liberada en el sistema u oscilatorio. La frecuencia a la que se lleva esta vibración se le conoce como la frecuencia resonante. A una frecuencia mayor de la frecuencia resonante decrece de manera monótona hasta un valor asintótico que se aproxima a cero.

## 5.2 Fluido newtoniano en una corona circular



**Fig. 5.2A** Parte real de la función de transferencia vs frecuencia para una corona circular que presenta diferentes radios, donde fluye un fluido newtoniano.

En la Fig. 5.2A se observa la parte real (energía elástica) de la función de transferencia compleja para una corona circular de radio mayor  $R_2$  y radio menor  $R_1$  y una longitud característica  $L$ . El gráfico nos muestra el comportamiento de la función de transferencia cuando se varía la relación de radios ( $R=R_1/R_2$ ), podemos observar un comportamiento monótono decreciente de un valor crítico hasta un segundo valor crítico donde se encuentran el flujo de los diferentes radios siendo estas prácticamente iguales y con una tendencia a cero.

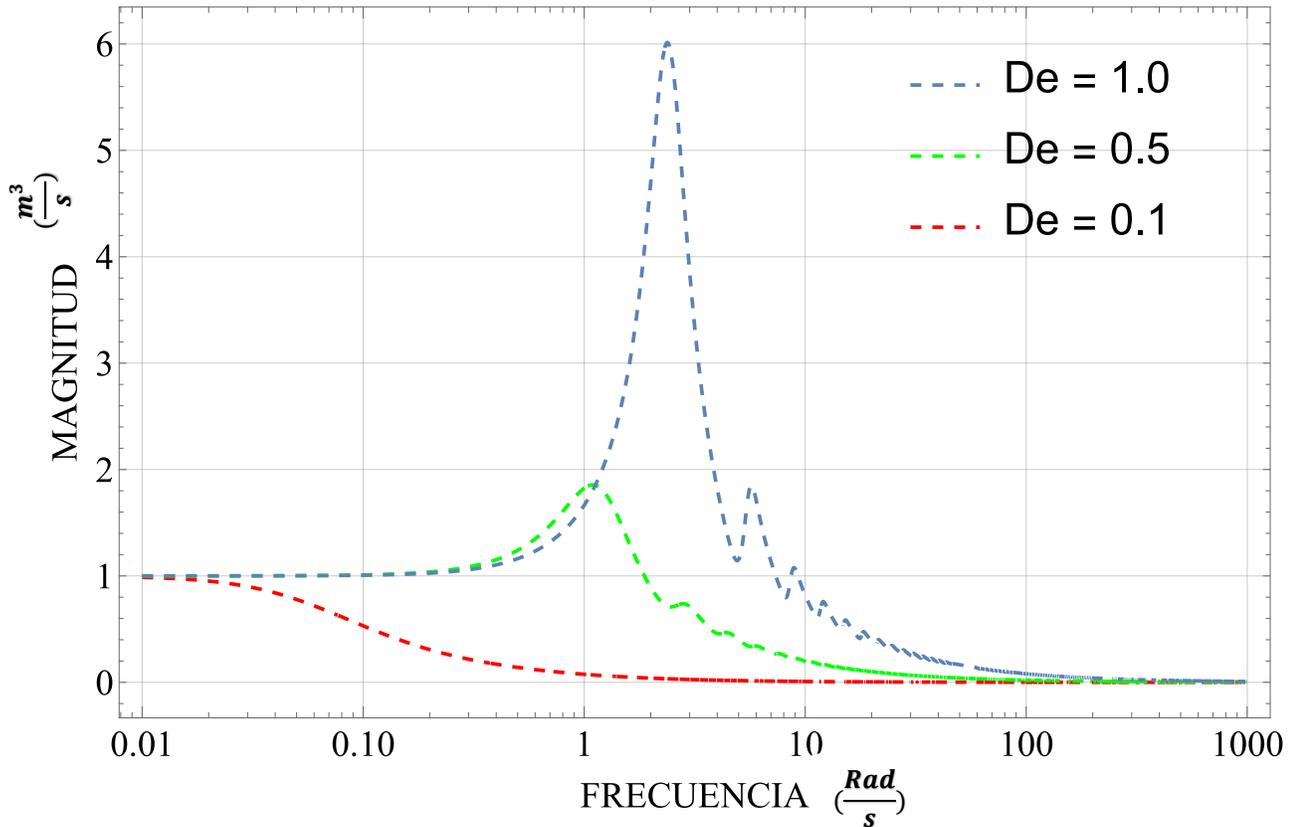


**Fig. 5.2B** Parte imaginaria de la función de transferencia vs frecuencia para una corona circular que presenta diferentes radios, donde fluye un fluido newtoniano.

En la Fig.5.2B se observa la parte imaginaria (energía que se disipa) para diferentes radios, esta tiene un comportamiento constante y casi lineal a frecuencias bajas hasta que se aproxima a un punto crítico donde crece de manera monótona hasta un segundo punto crítico siendo este el máximo punto presente y es donde se encuentra la frecuencia resonante, posterior a este punto se observa una que decreció monótonamente para todos los radios hasta aproximarse a cero.

### 5.3 Fluido viscoelástico (Maxwell) en un capilar

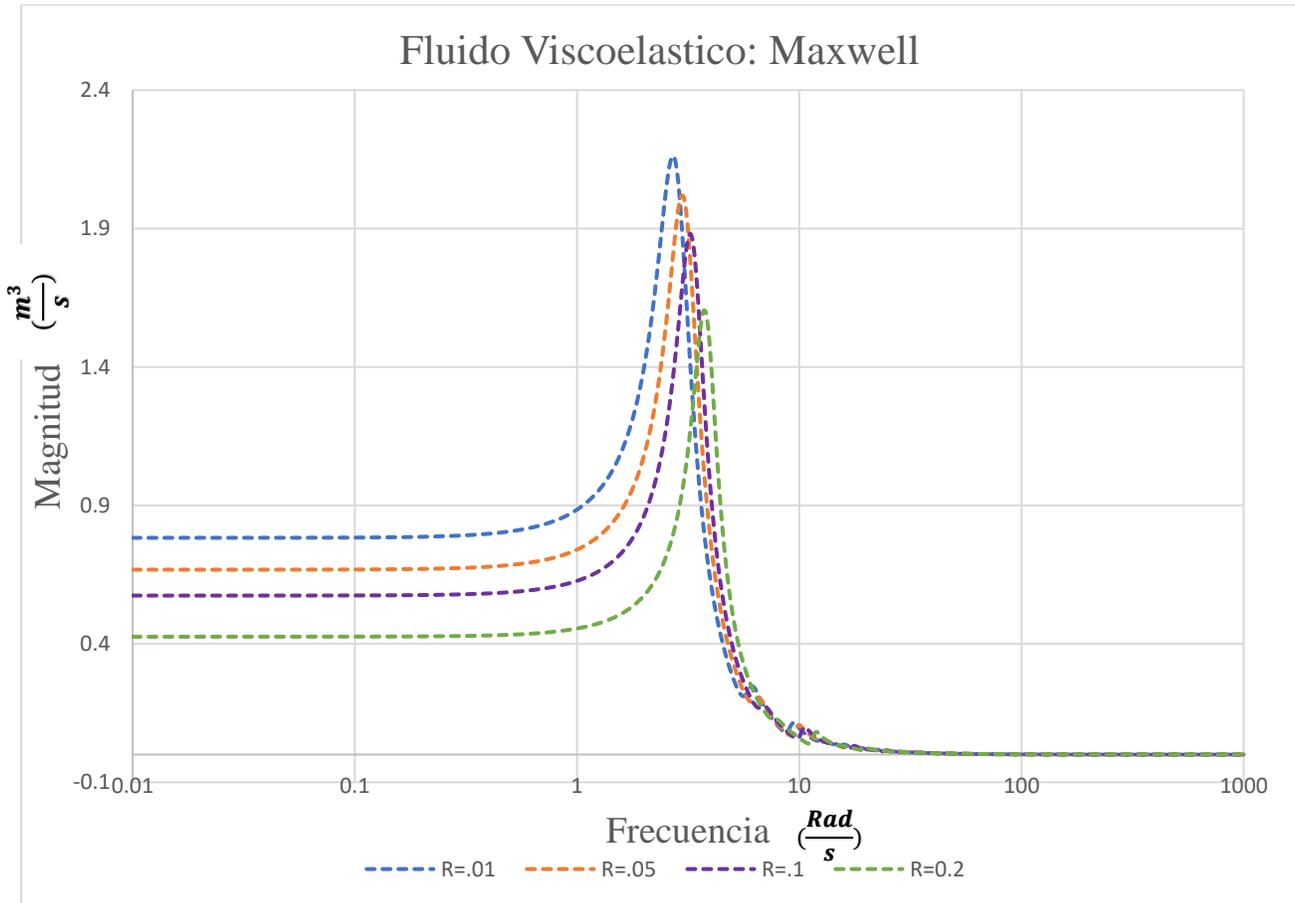
Fluido viscoelástico: Maxwell



**Fig. 5.3A** Contribuciones de la función de transferencia vs frecuencia para una corona circular que presenta diferentes radios, donde fluye un fluido newtoniano.

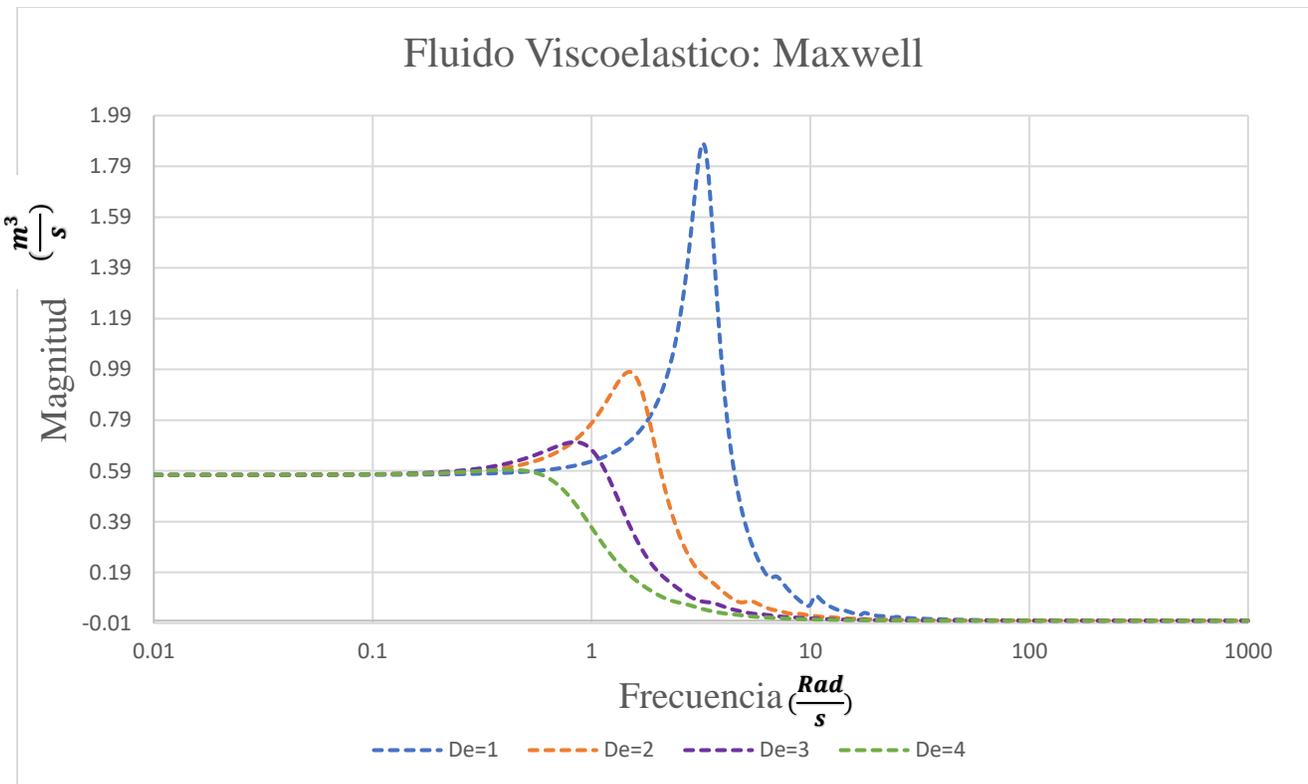
En la Fig. (5.3A) se graficó la magnitud de un fluido viscoelástico lineal de Maxwell contra una frecuencia, en este caso se varió el número de Deborah para la función de transferencia que describe el modelo de Maxwell en un capilar. Se puede observar un comportamiento constante a frecuencias bajas para números de Deborah mayor o igual a .5, para estos casos cuando la función de transferencia presenta un valor crítico de frecuencia, esta sufre de un crecimiento monótono creciente hasta un valor máximo se puede observar que la recuperación es mayor cuando el número de Deborah es igual 1. A frecuencias mayores ala frecuencia critica se observa un comportamiento decreciente constante hasta un valor aproximado a cero.

### 5.4 Fluido viscoelástico (Maxwell) en una corona circular



**Fig. 5.4A** Contribuciones de la función de transferencia vs frecuencia para una corona circular que presenta un radio mayor( $R_2$ ) y un radio menor( $R_1$ ), donde fluye un fluido viscoelástico de Maxwell variando el radio.

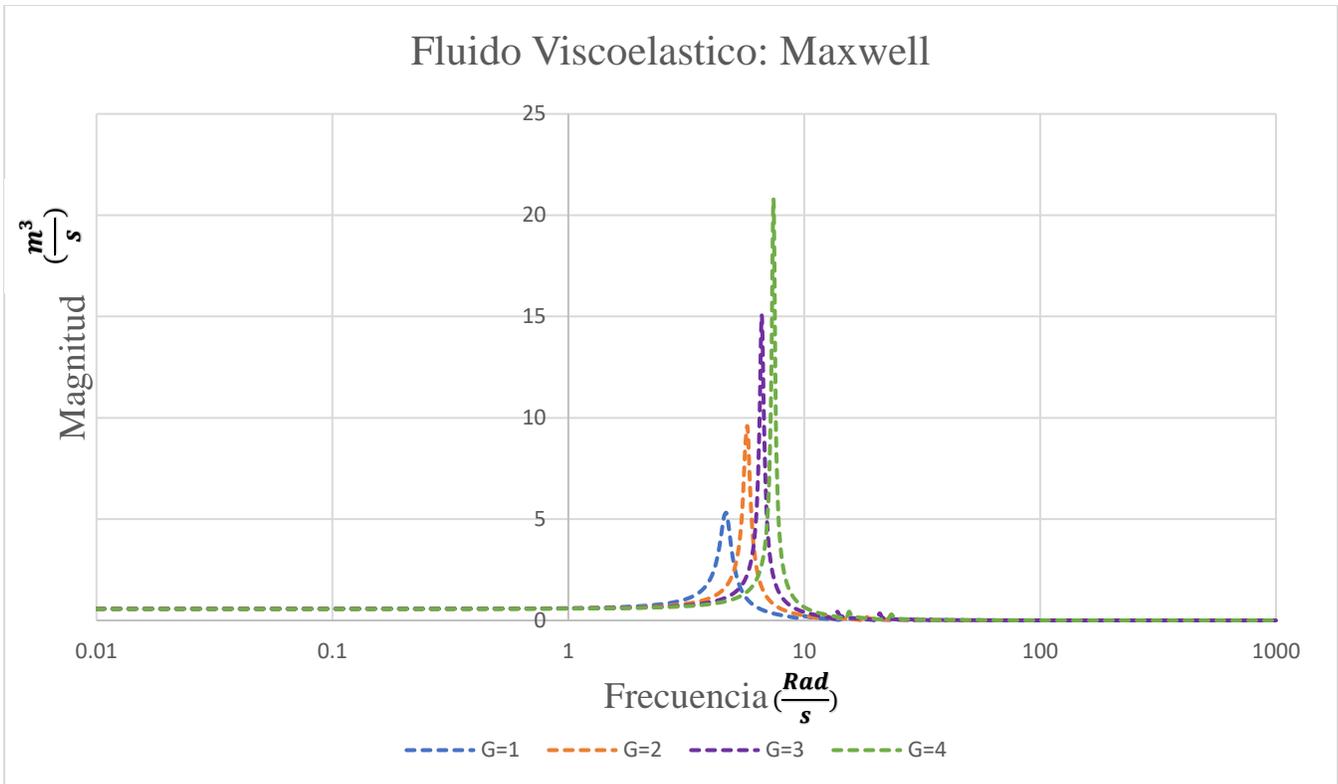
En la Fig. (5.4A) se grafica la función de transferencia para un fluido viscoelástico en este caso se varían los radios. Se puede observar un comportamiento asintótico lineal para todos los radios a frecuencias bajas, después se presenta un crecimiento monótono de un punto crítico, asociado a un punto máximo siendo este la frecuencia de resonancia, hasta decrecer de manera monótona hasta llegar a cero.



**Fig. 5.4A** Contribuciones de la función de transferencia vs frecuencia para una corona circular que presenta un radio mayor( $R_2$ ) y un radio menor( $R_1$ ), donde fluye un fluido viscoelástico de Maxwell variado el Deborah.

A frecuencias bajas la magnitud de la función de transferencia es constante e independiente de la frecuencia (estado estacionario). Para un valor crítico de frecuencia, la función experimenta un crecimiento monótono creciente hasta un valor máximo asociado a la resonancia del sistema. Este valor resonante este asociado a un acoplamiento entre las propiedades inerciales viscoelásticas del sistema. A una frecuencia mayor a la crítica, el sistema muestra un comportamiento monótono decreciente hasta un valor mínimo asintótico que se aproxima a cero.

- A) El efecto del Deborah es el de aumentar el valor máximo de las curvas resonantes.
- B) La frecuencia resonante aumenta conforme los mecanismos inerciales aumentan.
- C) Las curvas resonantes en la geometría de la corona circular presentan un menor aumento que las del capilar.
- D) Es importantes notar que el efecto de la geometría se puede cuantificar a través de la razón geométrica de radios.
- E) Finalmente, el efecto resonante es una combinación de propiedades geométricas, materiales y reológicas a través de la ecuación constitutiva que se está empleando.



**Fig. 5.4C** Contribuciones de la función de transferencia vs frecuencia para una corona circular que presenta un radio mayor( $R_2$ ) y un radio menor( $R_1$ ), donde fluye un fluido viscoelástico de Maxwell variado el módulo elástico.

En la Fig. (5.4C) se grafica la función de transferencia variando su módulo elástico. Se puede observar un mismo comportamiento igual en todos los casos a frecuencias bajas una vez llegado al punto de resonancia se pueden observar un comportamiento monótono creciente y decreciente, pero a diferentes frecuencias, este crecimiento se asocia a la resonancia. Todos los casos decrecen hasta igualarse a cero.

## 5.5 Aplicaciones a bioingeniería

En esta sección, se presentan predicciones teóricas con datos reométricos provenientes de la literatura. Para obtener las simulaciones, se ocuparon datos experimentales de pacientes con un contenido de colesterol bajo en la sangre. Los pacientes fueron hombres con características fisiológicas parecidas, es decir edad, y masa corporal. La sangre extraída fue de 50 pacientes y estas se obtuvieron de hospital Centro Médico de la Ciudad de México. Las pruebas reométricas se realizaron en el IIM de materiales y fueron supervisadas por el Dr. Fausto Calderas García. Para una discusión detallada de los protocolos experimentales de reometría en sangre con colesterol consultar la referencia básica de Moreno et al. (2015).

Las pruebas experimentales reométricas fueron:

- A) Prueba de flujo: Es una prueba destructiva en la cual se pone la muestra en el palto y se deforma continua e irreversiblemente generando un flujo homogéneo o reométrico. Es importante destacar, que esta prueba es destructiva del material.
- B) Prueba de flujo oscilatorio de baja amplitud: Es una prueba de tipo mecánico en la cual se coloca la muestra en el palto inferior y se hace oscilar a bajas amplitudes. La respuesta del material, a bajas frecuencias es la de un fluido y altas frecuencias la de un sólido.
- C) Los datos experimentales fueron ajustados mediante un modelo de Maxwell Multimodal. En particular, el número de Modos utilizados para representar los módulos de pérdida y almacenamiento  $G''$  y  $G''$  son tres los cuales, incluyen al reométrico o de cruce.

## 5.6 Ecuaciones teóricas para los ajustes

En esta sección se presentan el modelo multimodal de Maxwell el cual es un sistema mecánico que se puede expresar como una serie de elementos de Maxwell en paralelo, y tiene la siguiente configuración:

$$O\eta(i\omega) = \frac{\eta_{01}}{1+\lambda_{01}(i\omega)} + \frac{\eta_{02}}{1+\lambda_{02}(i\omega)} + \frac{\eta_{03}}{1+\lambda_{03}(i\omega)} = \frac{G_{01}\lambda_{01}}{1+\lambda_{01}(i\omega)} + \frac{G_{02}\lambda_{02}}{1+\lambda_{02}(i\omega)} + \frac{G_{03}\lambda_{03}}{1+\lambda_{03}(i\omega)}$$

Si se define la viscosidad a corte bajo como la suma de todos los modos, es decir:

$$\eta_0 = G_{01}\lambda_{01} + G_{02}\lambda_{02} + G_{03}\lambda_{03}$$

Si se definen las siguientes variables adimensionales

$$O^*\eta(i\omega) = \frac{O\eta(i\omega)}{G_{01}\lambda_{01}}$$

$$\eta_{0k}^* = \frac{\eta_{0k}}{\eta_{01}} = \frac{\eta_{0k}}{G_{01}\lambda_{01}}; k = 1, 2, 3$$

$$\lambda_{02}^* = \frac{\lambda_{02}}{\lambda_{01}}$$

$$\omega^* = \lambda_{01}\omega$$

Por lo que el operador viscosidad queda definido como:

$$O^* \eta(i\omega^*) = \frac{1}{1+(i\omega^*)} + \frac{\eta_{02}^*}{1+\lambda_{02}^*(i\omega^*)} + \frac{\eta_{03}^*}{1+\lambda_{03}^*(i\omega^*)}$$

Por lo que el parámetro  $\beta^*$  en forma adimensional toma la forma:

$$\beta^* = i^{3/2} \sqrt{De^2 \cdot \omega^* \cdot O_\phi^*(i\omega^*)} = \sqrt{\frac{De^2 \cdot \omega^*}{O_\eta^*(i\omega^*)}}$$

En donde el número de Deborah, para este sistema se define como:

$$De = \frac{\sqrt{\rho R_{vena}^2 / G_{01}}}{\lambda_{01}}$$

Finalmente, las ecuaciones para la función de transferencia compleja tanto para el capilar como la corona circulas permanecen iguales y el único cambio es en el número de Deborah. La densidad de la sangre como suspensión es de  $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$  y el radio promedio de una vena es de  $R = 1\text{mm} = 1 \times 10^{-3}\text{m}$ . Para una arteria el radio oscila entre 0.02 cm y 0.35 cm.

Para un contenido de bajo colesterol en sangre humana con pacientes de condiciones genéticas similares, la ecuación constitutiva que representa el comportamiento viscoso y elástico, es el modelo de Maxwell Multimodal de tres modos. Los valores reométrico obtenidos en esta simulación están definidos como: (i)  $G_{01} = 28.5 \text{ Pa}$ , (ii)  $G_{02} = 0.37 \text{ Pa}$ , (iii)  $G_{03} = 0.01 \text{ Pa}$ , para los tiempos viscoelásticos de Maxwell, se tiene lo siguiente:  $\lambda_{01} = 0.0052 \text{ s}$ ,  $\lambda_{02} = 0.03 \text{ s}$ ,  $\lambda_{03} = 0.79 \text{ s}$ . El número de Deborah para estos valores queda definido como:

$$De = \frac{\sqrt{\rho R_{vena}^2 / G_{01}}}{\lambda_{01}} = \frac{\sqrt{\left(1053 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(1 \times 10^{-3} \text{ m}\right)^2}}{(28.5\text{Pa}) \cdot 0.0052\text{s}} = 36.9648 \cong 37$$

Para un valor de 0.02 cm el número de Deborah, tiene el siguiente valor analítico:

$$De = \frac{\sqrt{\rho R_{vena}^2 / G_{01}}}{\lambda_{01}} = \frac{\sqrt{\left(1053 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(2 \times 10^{-4} \text{ m}\right)^2}}{(28.5\text{Pa}) \cdot 0.0052\text{s}} = 0.2337 \cong 0.234$$

Para un valor de 0.35 cm el número de Deborah, tiene el siguiente valor analítico:

$$De = \frac{\sqrt{\rho R_{\text{vena}}^2 / G_{01}}}{\lambda_{01}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1053 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) (35 \times 10^{-4})^2}}{(28.5 \text{Pa})}}{0.0052 \text{s}} = 4.09 \cong 4.1$$

Entonces, los valores adimensionales de la viscosidad son:

$$\eta_{02}^* = \frac{\eta_{02}}{G_{01} \lambda_{01}} = \frac{(0.37 \text{Pa})(0.03 \text{s})}{(28.5 \text{Pa})(0.0052 \text{s})} = 0.07489$$

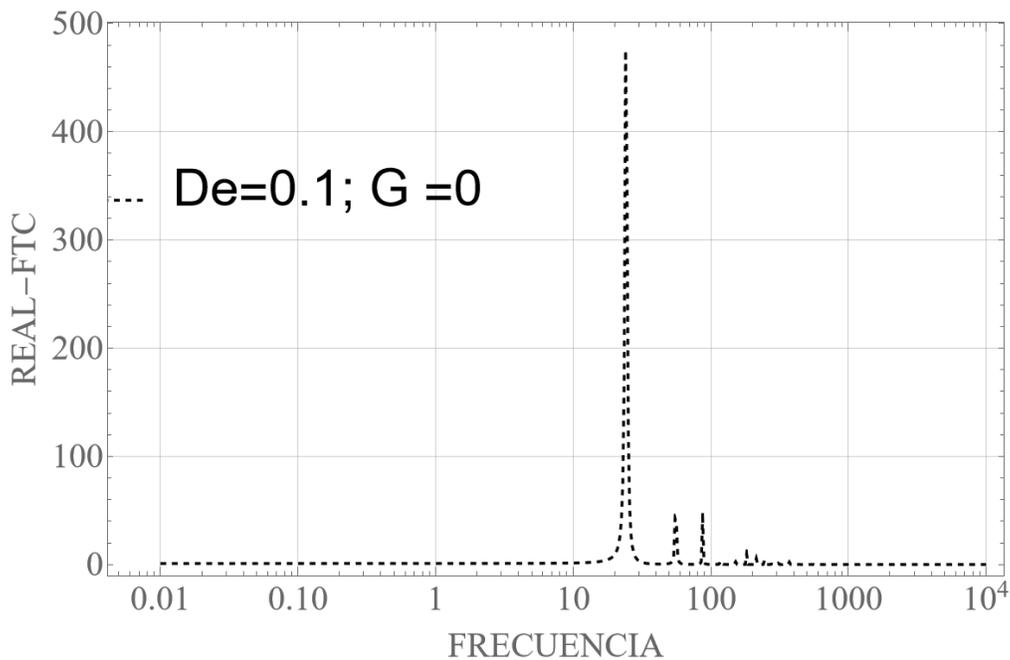
$$\eta_{03}^* = \frac{\eta_{03}}{G_{01} \lambda_{01}} = \frac{(0.01 \text{Pa})(0.79 \text{s})}{(28.5 \text{Pa})(0.0052 \text{s})} = 0.0533$$

Y los valores adimensionales de los tiempos de relajación son:

$$\lambda_{02}^* = \frac{\lambda_{02}}{\lambda_{01}} = \frac{0.03}{0.0052} = 5.769 \cong 5.77$$

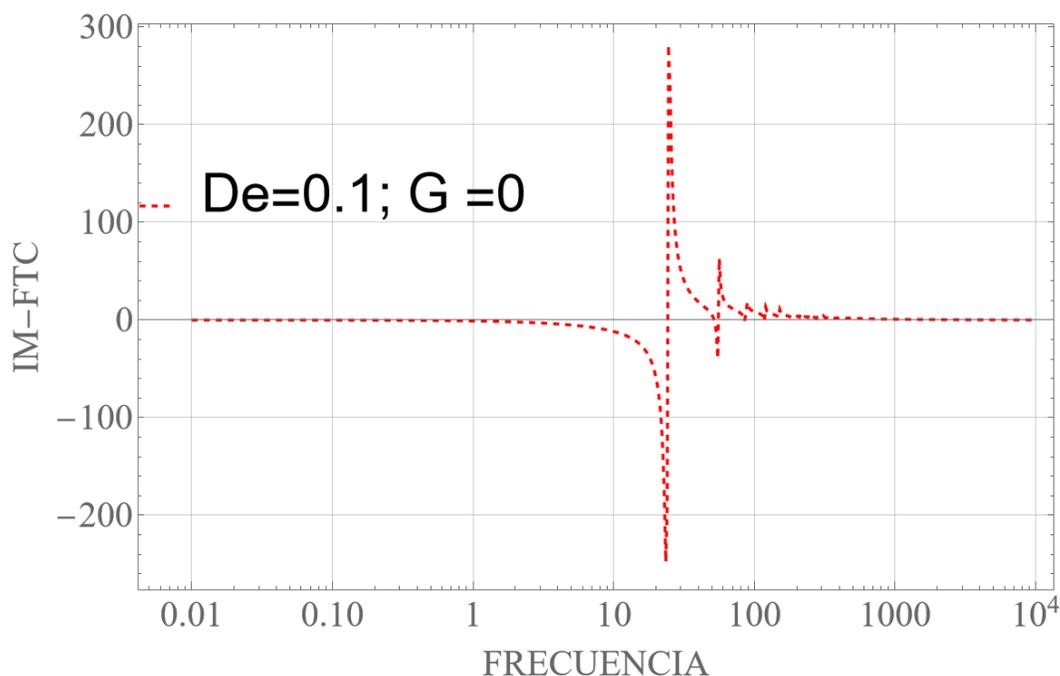
$$\lambda_{03}^* = \frac{\lambda_{03}}{\lambda_{01}} = \frac{0.079}{0.0052} = 15.1923 \cong 15.2$$

Los valores numéricos se sustituyen en el operador viscosidad y fluidez, por lo que se tiene la siguiente expresión:

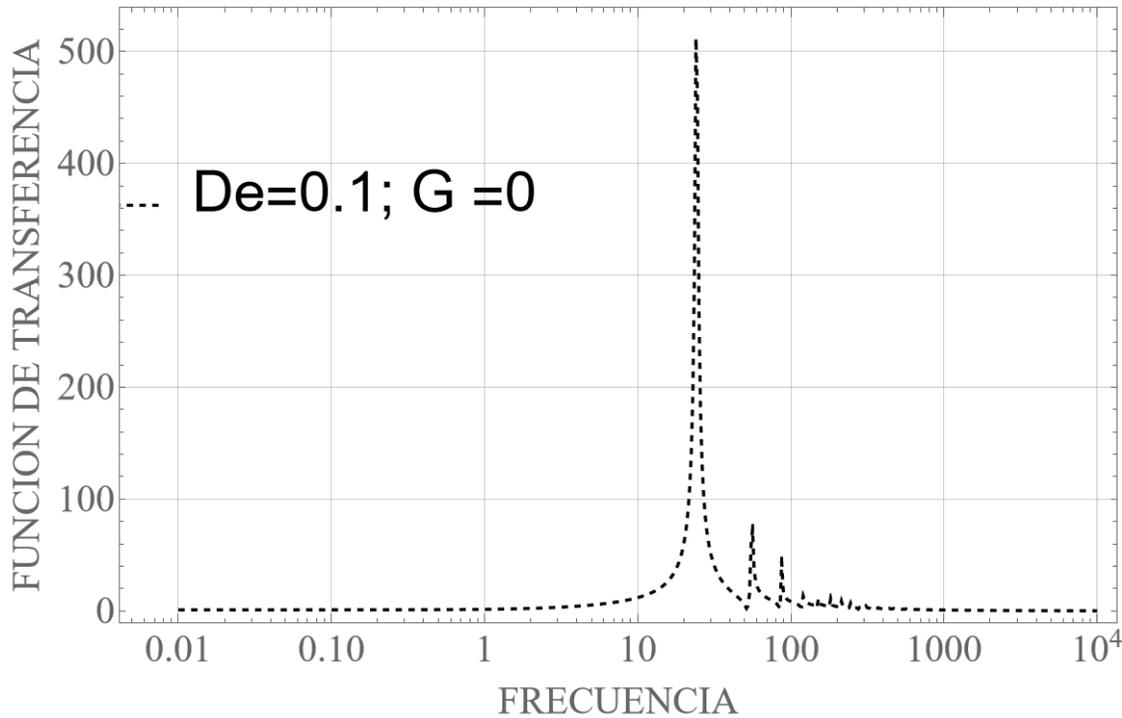


**Fig. 5.5A** Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia. Los valores utilizados en la simulación son  $De = 0.1$ .

En la Fig. (5.5.A) se ilustran las simulaciones de la función de transferencia real vs frecuencia. Los datos alimentados al modelo multimodal de Maxwell permiten obtener un valor de Deborah del orden de  $De = 0.1$ . Se observa que la respuesta real de la función de transferencia compleja es la de tres modos resonantes en las cuales existe la máxima respuesta del sistema en función del gradiente de presión oscilatorio. La máxima curva resonante, está asociada con el tiempo de relajación reométrico del sistema y las resonancias secundarias implican los tiempos de ajuste del modelo de Maxwell multimodal. Este hecho implica que, las propiedades materiales determinan la respuesta entre el gradiente de presión y el flujo volumétrico en el espacio de Fourier. Es claro que existe a moderadas y altas frecuencias una serie de resonancias asociadas a las funciones de Bessel. En este punto, se necesitan datos experimentales que permitan evidenciar el efecto de los tiempos y módulos elásticos de corte en las curvas resonantes.



**Fig. 5.5B** Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia. Los valores utilizados en la simulación son  $De = 0.1$ .



**Fig. 5.5C.** Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia. Los valores utilizados en la simulación son  $De = 0.1$ .

En la Fig. (5.5B) se ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia para sangre con contenido de colesterol. Aquí el número de  $De = 0.1$  es decir, las propiedades viscoelásticas del material son dominantes en comparación con los mecanismos inerciales. Se observan las clásicas curvas discontinuas resonantes y anti-resonantes. Se pueden observar tres picos fundamentales, uno de los cuales es dominante y está asociada al tiempo reométrico de Maxwell. De la misma manera, cuando se aumenta la frecuencia se observa un tres de curvas discontinuas las cuales disminuyen conforme la frecuencia aumenta.

En la Fig. (5.5C) se analiza la norma de la función de transferencia compleja. Esta, se define como la magnitud de la función de transferencia compleja por lo que:

$$|T(\omega)| = \sqrt{(\text{Re}[T(\omega)])^2 + (\text{Im}[T(\omega)])^2}$$

En esta simulación el número de Deborah  $De = 0.1$ . Se observa que existe un pico dominante cuyo valor es cercano a 500 y para una frecuencia crítica decrece hasta un valor mínimo y para una segunda frecuencia crítica se observa el mismo patrón de curvas secundarias. Es claro, que en esta ventana de observación hay tres curvas dominantes las cuales indican que este sistema puede ser caracterizado por tres modos. Es claro que existe una ventana en la cual se presentan las curvas resonantes, las cuales se pueden calcular aproximadamente tomando los inversos de las frecuencias. Por ejemplo, en este caso:  $\omega_1 = 1/\lambda_1 = 192.308 \cong 200$ ,  $\omega_2 = 1/\lambda_2 = 33.33 \cong 34$ ,  $\omega_3 = 1/\lambda_3 = 1.2658 \cong 1.27$ .

De acuerdo con los resultados establecidos se tiene las siguientes observaciones parciales:

- a) El número de picos dominantes este asociado a los tiempos de relajación del modelo multimodal de Maxwell.
- b) El tiempo reométrico o el de cruce es el que domina las resonancias en el sistema.
- c) Las propiedades geométricas juegan un papel importantísimo, en la descripción de las resonancias del sistema. Esto puede obtenerse directamente del número de Deborah, por lo que se tiene los siguiente:

$$R_{\text{vena}} = De \frac{\lambda_{01}}{\sqrt{\rho / G_{01}}}$$

Este modelo nos permitiría analizar el radio del capilar en función del número de Deborah, y las propiedades materiales del sistema asociados al tiempo de relajación, la densidad del líquido y el módulo de corte elástico.

En el sexto y último capítulo, se presenta las conclusiones, aportaciones de este trabajo y el trabajo futuro.

**VI. Conclusiones y trabajo futuro**



## 6.1 Aportación al conocimiento

En este trabajo se analizó el flujo de un líquido complejo viscoso y elástico fluyendo en geometrías cilíndricas deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión pulsátil. Suponiendo que el fluido es incompresible, es decir, su densidad es constante e independiente de la posición y el tiempo, el proceso es isotérmico y que los mecanismos gravitacionales son despreciables, se obtiene una ecuación diferencial parcial que describe los mecanismos inerciales en función de las fuerzas superficiales y volumétricas, en donde se realizan los balances de masa y de momento.

Para deducir una expresión, analítica para el perfil de velocidades, se transforma la ecuación dinámica al espacio de Fourier y se impone que la velocidad en el centro es finita y que en la pared es cero. La ecuación resultante se integra en la sección de área transversal y se obtiene una expresión analítica para el flujo volumétrico de un fluido viscoelástico lineal.

El modelo resultante describe que el flujo volumétrico es el producto de tres importantes contribuciones: (i) La primera de ellas, es el flujo volumétrico Newtoniano que describe la amplitud de las oscilaciones en el medio. (ii) La segunda de ellas, representa la función de transferencia compleja que describe la relación entre la variable de entrada asociada al gradiente de presión pulsátil y el flujo volumétrico y (iii) la fuerza motriz asociada al gradiente de presión pulsátil el cual, varía periódicamente y depende de la frecuencia.

La respuesta dinámica depende de un parámetro adimensional Beta el cual, se puede interpretar como el inverso de una velocidad característica en el medio. Este, describe la dispersión en el sistema, y depende del número de Deborah, operador fluidez y de los mecanismos inerciales. Este resultado es general y puede ser aplicado a cualquier ecuación reológica viscoelástica lineal o fraccionaria del cálculo fraccional.

Finalmente, se utilizan datos de un fluido biológico para describir el flujo en una vena del sistema circulatorio humano.

## Referencias

1. Aimee M, Torres Rojas I, Pagonabarraga, Corvera-Poire E (2017). Resonances of Newtonian fluids in elastomeric microtubes, *Phys. Fluids* 29, 122003.
2. Apostodilis AJ, Beris A (2015). The effect of cholesterol and triglycerides on the steady state shear rheology of blood. *Rheol. Acta* 55: 497-509.
3. Bird RB, Armstrong RC, Hassager O (1987) Dynamics of polymeric liquids, vol. 1. New York: John Wiley & Sons.
4. Bird RB, Stewart E, Lighfoot EN (2002) Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.
5. Caram Y, Bautista F, Puig JE, Manero O (2005). On the rheological modelling of associative polymers. *Rheol Acta* 46(1):45-47.
6. Castro M, Bravo-Gutiérrez, ME, Hernández-Machado A, Corvera-Poiré E (2008). Dynamic Characterization of permeabilities and flows in microchannels. *Phys. Rev. Lett.* 101, 224501.
7. Chan NJA, Gu D, Tan S, Fu Q, Geoffrey Pattison T, O' Connor AJ, Qiao GG (2020), Spider-silk inspired polymeric networks by harnessing the mechanical potential of  $\beta$ -sheets through network guided assembly. *Nature Comm.* 11, (1630).
8. Collepardo-Guevara R, Corvera Poiré E (2007) Controlling viscoelastic flow tuning frequency during occlusions, *Physical Review E*, 76, 02630.
9. Corvera-Poiré E, del Rio JA (2004) Viscoelastic fingering with a pulsed pressure signal. *J. Phys.; Condes. Matter* 16 S2055
10. Cuevas S, Del Rio JA (2001) Dynamical permeability of electrically conducting fluids under magnetic fields in annular ducts. *Phys. Rev. E.* 64, 016313/1-7.
11. Currie, I.G, 1974 *Fundamental Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill Press.
12. Del Rio JA, De Haro ML, Castrejón-Pita JR (1998). Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. *Phys. Rev. E.* 58 (5) 6323.
13. Del Río JA, Castrejón Pita JR (2003). Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos. *Rev. Mex. Fis.* 49(1), 74-85.
14. Flores J, Alastruey J, Corvera-Poire E (2016). A Novel Analytical Approach to Pulsatile Blood Flow in the Arterial Network. *Annals of Biomedical Engineering*, 44(10), 3047-3068.

15. Flores J, Corvera Poire E, del Río J A, López De Haro M (2010). A plausible explanation for heart rates in mammals. Elsevier, 265(1), 599–603.
16. Herrera-Valencia EE, Rey AD (2014) Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. *Phil. Trans. R. Soc. A.* 372: 20130369/1-28.
17. Herrera EE, Calderas F, Chavez AE, Manero O, Mena B (2009) Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. *Rheol. Acta* 48 779-800.
18. Herrera EE, Calderas F, Chavez AE, Manero O (2010) Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165 174-183.
19. Medina-Torres L, Calderas F, Ramirez-Torres LA, Nuñez-Ramirez DM, Navarrete Castro, Bernard-Bernard MJ (2022). Rheological behavior of blood in Wistar rats with different total cholesterol levels. *Korea-Australian Rheology Journal* (2022) 34: 349-358.
20. Middleman, S. *Fundamentals of polymer Processing*, McGraw-Hill.
21. Moreno L, Calderas F, Sánchez-Olivares G, Medina-Torres L, Sánchez-Solis A, Manero O (2015). Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood. *Korea-Austr Rheol J.* 27: 1-10.
22. Nava-Rivera E (2022). *Membrana flexo-eléctricas fluctuantes en medios viscoelásticos: generación de flujo y transmisión de fuerza*. Tesis de licenciatura, facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.
23. Rey AD (2010), *Liquid Crystal models of biological materials and processes*, 2010, 6, 3402-3429.
24. Rey AD (2007), *Capillary models for liquid crystals fibers, membranes, films, and drops*, *Soft Matter*, 2007, 3, 1349-1368
25. Saravia Aldana CA, Medina-Torres L, Calderas F, Ramirez-Torres LA, Nuñez-Ramirez DM, Herrera-Valencia EE, Bernard-Bernard MJ, Manero O (2022). Hemorheological and biochemical study in patients with liver cirrhosis. *Phys Fluids*, 34, 041907
26. Torres Rojas AM, Pagonabarraga I, Corvera Poiré E (2017). Resonances of Newtonian fluids in elastomeric microtubes. *Physics of Fluids*, 29(1).