



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO**  
POSGRADO EN CUENCIAS FISICAS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES  
GRAVITACIÓN Y ALTAS ENERGÍAS

PLANOS ANTICOHERENTES Y CÓMPUTO CUÁNTICO HOLONÓMICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
VALENTINA RASCÓN BARAJAS

TUTOR PRINCIPAL  
DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. ELÍAS OKON GURVICH  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

DR. DANIEL EDUARDO SUDARSKY SAOINZ  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

CIUDAD DE MÉXICO, OCTUBRE, 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# 1. Resumen

En el estudio de los estados cuánticos de espín, resaltan dos *categorías* interesantes; los estados coherentes, que son aquellos que maximizan el módulo del vector  $|\langle \mathbf{S} \rangle|$  (valor de expectación de espín), presentando un comportamiento muy similar al de los estados clásicos, y los estados anticoherentes, que son aquellos estados para los cuales este módulo es igual a cero. Estos estados anticoherentes son aquellos para los cuales las propiedades cuánticas como el enredamiento se manifiestan con mayor intensidad.

En años recientes, se ha encontrado que los subespacios  $k$ -dimensionales de estados de espín  $s$  anticoherentes, que son a su vez elementos en el Grassmanniano  $\text{Gr}(k, 2s + 1)$ , pueden ser un punto de partida sólido para la construcción de compuertas lógicas para el cómputo cuántico. Esta construcción está basada en la holonomía de Wilczek-Zee, que adquiere un  $k$ -plano en el espacio de Hilbert después de haber sido transformado de manera cíclica bajo la acción del grupo  $SU(2)$ . La holonomía de Wilczek-Zee es una generalización para el caso abeliano de la fase geométrica, o *fase de Berry*.

Esto revela una aplicación sumamente atractiva para los estados de espín anticoherentes, así como para los subespacios (o  $k$ -planos) anticoherentes. Sin embargo, aún no se tienen herramientas sistemáticas que garanticen la obtención de todos los posibles  $k$ -planos anticoherentes para un cierto espín, además de que se desconocen las características geométricas y topológicas de los subespacios de  $k$ -planos dentro del Grassmanniano. Todo esto genera un espacio abierto para la investigación y es en esta dirección a la que dirigiré mi trabajo de investigación doctoral.

Existen ya avances importantes en el estudio y la caracterización tanto de estados como de  $k$ -planos anticoherentes utilizando como herramienta principal la representación estelar de Majorana de estados cuánticos de espín [1, 19], así como su generalización a modo de *multiconstelaciones* para  $k$ -planos de estados [5]. Se ha encontrado que si bien no todos los estados anticoherentes son invariantes bajo la acción de subgrupos finitos de  $SU(2)$ , los cuales están caracterizados por la teoría de Klein, efectivamente existe una relación entre dichos estados y subgrupos [14].

También se encuentra la Teoría de Morse dentro de las herramientas que podrán ser útiles para el estudio de la topología de estos espacios.

## 2. Antecedentes

### 2.1. Espacios proyectivos y grassmannianos

Dado un espacio vectorial  $n$ -dimensional definido sobre un campo  $F$  (el cual puede ser  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ );  $(V^n, F)$ , se define una relación de equivalencia entre dos elementos del espacio de la siguiente manera <sup>1</sup>

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in F^* \text{ t.q. } y = \lambda x \quad . \quad (1)$$

Geoméricamente esta clase de equivalencia contiene a todos los puntos, excepto el origen  $O$ , que se encuentran sobre una misma recta que pasa por  $O$ .

Al espacio cociente  $V/\sim$  de todas las rectas en el espacio vectorial  $(V^n, F)$  que pasan por el origen se le llama *Espacio Proyectivo Real*  $\mathbb{R}P^n$  o *Complejo*  $\mathbb{C}P^n$ , dependiendo de si el campo son los números reales o los complejos.

Asimismo, al espacio de todos los subespacios  $k$ -dimensionales se le conoce como el *Grassmanniano*  $\text{Gr}(k, n)$  [3]. Los Grassmannianos son variedades (reales o complejas según sea el caso) de dimensión  $k(n - k)$ , de modo que el Espacio Proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^{n-1}$  y el Grassmanniano  $\text{Gr}(1, n)$  son el mismo espacio de dimensión  $n - 1$  compleja o  $2(n - 1)$  real.

#### 2.1.1. Espacio de estados cuánticos

Para describir estados cuánticos de espín  $s$ , podemos utilizar el espacio complejo  $\mathbb{C}^N$ , donde  $N = 2s + 1$ . Sin embargo, si consideramos equivalentes a todos los estados que difieren únicamente por un factor complejo  $\lambda \neq 0$ , entonces el espacio cociente que resulta de esta relación de equivalencia es el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}^N/\sim = \mathbb{C}P^n$ , con  $n = 2s$ .

## 2.2. Estados coherentes y anticoherentes

Es bien sabido que los sistemas cuánticos, y en particular los estados cuánticos de espín, que son sobre los cuales enfocaremos nuestro estudio, presentan una serie de comportamientos altamente no intuitivos de acuerdo a nuestra experiencia como observadores *clásicos*. Algunos de estos comportamientos son la superposición o el enredamiento, cuyo entendimiento ha representado un reto fundamental para el estudio de la mecánica cuántica desde su formulación.

Actualmente se ha encontrado que dentro de los mismos estados cuánticos de espín, existen algunos que se comportan *casi* como si fueran sistemas clásicos; a estos estados se les conoce como *coherentes* y son aquellos que maximizan el módulo del valor de expectación de espín. Éstos son de particular interés en estudios de óptica cuántica y física de radiaciones [15, 16].

---

<sup>1</sup> $F^* = F \setminus \{0\}$

Por el otro lado hay algunos estados cuyas propiedades cuánticas, como las mencionadas anteriormente, se manifiestan con mayor intensidad que en otros, a estos estados se les conoce como *anticoherentes* [19] y son los estados que más nos interesarán para la presente propuesta de investigación.

**Definición 2.1** (Estados Anticoherentes). *Un estado  $|\psi\rangle$  es anticoherente si su vector de polarización se anula;*

$$\langle\psi|\hat{n}\cdot\vec{S}|\psi\rangle=0\quad\forall\hat{n}\quad,\quad(2)$$

donde  $\hat{n}$  es un vector unitario que especifica la dirección a lo largo de la cual se está proyectando el valor de expectación de espín.

Asimismo, existen órdenes superiores de anticoherencia definidos de la siguiente manera:

**Definición 2.2** (Órdenes superiores de anticoherencia). *Un estado  $|\psi\rangle$  es  $t$ -anticoherente si para toda  $k\leq t$ , con  $k,t\in\mathbb{N}$*

1. *El vector de polarización se anula*
2. *Para todo orden  $k\leq t$ , los órdenes superiores de la distribución de probabilidad no dependen de la dirección del vector  $\hat{n}$ , es decir, que son uniformes sobre la esfera unitaria  $S^2$ .*

$$\frac{\partial}{\partial\hat{n}}\langle\psi|(\hat{n}\cdot\vec{S})^k|\psi\rangle=0\quad.\quad(3)$$

### 2.3. Representación estelar de Majorana

En su artículo seminal en 1932 [10], Ettore Majorana propuso una manera de visualizar estados cuánticos de espín, la cual ha mostrado ser una herramienta sumamente útil ya que consta de una visualización geométrica de estos estados, tal que a partir de sus simetrías devela algunas propiedades intrínsecas de los estados mismos, que de otra manera resultan poco evidentes [1, 6, 8, 14].

Partiendo de un espinor  $|\psi\rangle$  de espín  $s$ , expresado en términos de la base de eigenvectores de  $S_z$ ,

$$|\psi\rangle=\sum_{m=-s}^s c_m|s,m\rangle\quad,\quad(4)$$

con  $c_m\in\mathbb{C}$ , se calcula el polinomio de Majorana como

$$p_{|\psi\rangle}(\zeta)=\sum_{m=-s}^s(-1)^{s-m}\sqrt{\binom{2s}{s-m}}c_m\zeta^{s+m}\quad,\quad(5)$$

que por ser genéricamente un polinomio de grado  $2s$  con coeficientes complejos, sabemos que posee  $2s$  raíces complejas que no necesariamente tienen que ser todas distintas entre sí, es decir, pueden

tener multiplicidades.

Cada una de estas raíces puede ser mapeada a la esfera unitaria  $S^2$  por medio de la función inversa de la proyección estereográfica, obteniendo así un conjunto de  $2s$  puntos no ordenados sobre  $S^2$ . A cada uno de estos puntos se le llama *estrella*, y por lo tanto al conjunto de ellos se le da el nombre de *constelación de Majorana*.

Una de las propiedades más atractivas de esta representación para los estados cuánticos de espín, es que si el estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  es rotado bajo la acción de un elemento  $g$  del grupo  $SU(2)$  en la representación correspondiente dada por una matriz  $N \times N$ , su constelación de Majorana rotará rígidamente bajo la acción del mismo  $g$  pero ahora como un elemento de  $SO(3)$ .

### 2.3.1. Constelaciones de Majorana de estados coherentes y anticóherentes

La constelación de Majorana de un estado coherente de espín  $s$ ;  $|n\rangle$ , se ve como  $2s$  estrellas sobre la esfera apuntando todas en la misma dirección  $\hat{n}$ . El ejemplo más inmediato de estado coherente para cualquier espín  $s$  es el estado de máxima proyección de espín a lo largo del eje  $Z$ , es decir  $|\psi_{\max}\rangle = |s, s\rangle$ , ver Figura 1.

Si  $\hat{n} = (\theta, \phi) \in S^2$  su proyección estereográfica sobre el plano complejo se puede expresar como  $\zeta = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi}$ . Utilizando ésto, es posible encontrar una expresión general para cualquier estado coherente de espín  $s$  apuntando en la dirección  $\hat{n}$  como [5]

$$|n\rangle = \frac{1}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^s} \sum_{m=-s}^s \sqrt{\binom{2s}{s-m}} \zeta^{s-m} |s, m\rangle \quad , \quad (6)$$

asimismo, considerando que si  $\zeta$  corresponde a la proyección estereográfica de  $\hat{n}$  entonces  $-1/\bar{\zeta}$  es la proyección de  $-\hat{n}$ , calculando directamente el producto interno  $\langle -n|\psi\rangle$ , se puede observar que es proporcional al polinomio de Majorana  $P_{|\psi\rangle}(\zeta)$ . Este hecho será utilizado en la siguiente sección como primera motivación para generalizar la representación estelar de Majorana para  $k$ -planos en  $\mathcal{H}$ .

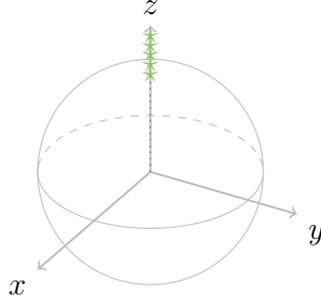


Figura 1: En el caso, por ejemplo, de espín 2, la constelación del estado coherente  $|2, 2\rangle$  son 4 estrellas en el polo norte (en la figura las estrellas que se encuentran en el mismo punto, se ilustran una encima de otra).

Por otro lado, para los estados anticoherentes, la constelación de Majorana corresponde a  $2s$  puntos que *tienden* a distribuirse de la manera “más homogénea” posible. Un caso muy particular de esto para espines  $s = 2, 3, 4, 6, 10$ , es cuando las estrellas de la constelación de Majorana coinciden con los vértices de los sólidos platónicos: tetrahedro, octahedro, cubo, icosaedro y dodecahedro, respectivamente. Sin embargo, los estados mencionados anteriormente, conocidos también como *estados perfectos* no son los únicos estados anticoherentes que se pueden tener; el siguiente caso de estados anticoherentes para cualquier espín arbitrario  $s \geq 3$ , son aquellos estados cuyas constelaciones consisten en dos grupos de  $s$  estrellas distribuidas homogéneamente a lo largo de dos círculos meridianales y equidistantes al plano ecuatorial. Estas constelaciones coinciden con los vértices de un prisma  $s$ -agonal y los espinores son de la siguiente forma [19]:

$$|\psi_{ac}\rangle = e^{i\alpha} \sqrt{\frac{s+1}{6s}} |s\rangle + \sqrt{\frac{2s-1}{3s}} |0\rangle + e^{i\alpha} \sqrt{\frac{s+1}{6s}} |-s\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad . \quad (7)$$

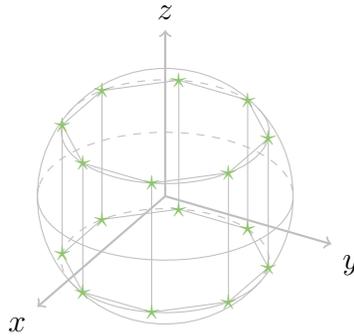


Figura 2: Constelación de Majorana del estado anticoherente  $|\psi_{ac}\rangle = (2/\sqrt{5}, 0, 1, 0, 0, 1)$ , obtenida de la ecuación (7) con  $s = 8$  y  $\alpha = 0$ , la cual consiste en dos grupos de 8 estrellas distribuidas homogéneamente a lo largo de dos círculos meridianales equidistantes al plano ecuatorial.

Con lo dicho hasta ahora, resulta tentador afirmar que todos los estados anticoherentes tienen constelaciones que son invariantes bajo la acción de algún subgrupo finito de  $SO(3)$ , de los cuales se hablará un poco más en la sección 2.10, sin embargo, esto no es verdad ya que existen casos de estados anticoherentes cuya representación estelar sólo tiene un eje de simetría (condición que no necesariamente garantiza la anticoherencia del estado) o incluso que no poseen ninguna simetría. En [2] se discute sobre algunos de estos estados, y a continuación mencionamos un ejemplo.

**Ejemplo:** Un estado de espín  $s = 5/2$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} (2, 0, \sqrt{5}, 0, 0, \sqrt{5}) \quad (8)$$

El cual puede comprobarse fácilmente que satisface la ecuación (2) y por lo tanto es un estado anticoherente. Su polinomio de Majorana es (módulo un factor de reescalamiento)

$$p_{|\psi\rangle}(\zeta) = \frac{2\zeta^5}{\sqrt{5}} + \sqrt{10}\zeta^3 - 1 \quad (9)$$

y su constelación de Majorana se muestra a continuación en la Figura 3;

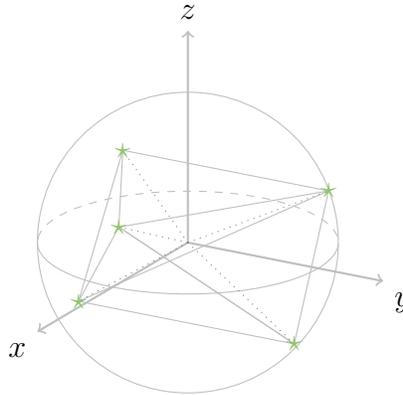


Figura 3: Constelación de Majorana del estado anticoherente  $|\psi\rangle = 1/\sqrt{14}(2, 0, \sqrt{5}, 0, 0, \sqrt{5})$ , la cual no permanece invariante bajo la acción de ningún subgrupo finito de  $SO(3)$ .

Si bien no todos los estados anticoherentes tienen simetrías rotacionales, sí existe una relación entre las simetrías de las constelaciones y la anticoherencia de los estados que vale la pena ser explotada y se discutirá más adelante. Estas relaciones entre las simetrías de los estados anticoherentes y las de sus constelaciones son un ejemplo clásico de la gran utilidad de la representación estelar de Majorana para visualizar geoméricamente propiedades cuánticas de los estados como la anticoherencia o el enredamiento [11].

## 2.4. Multiconstelaciones, representación de Majorana para $k$ -planos en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$

Con la motivación de la utilidad que tiene la representación estelar de Majorana para estados cuánticos de espín, resulta natural buscar una representación de la misma naturaleza para  $k$ -planos en  $\mathcal{H}$ . Esta generalización consiste en realidad de un conjunto de constelaciones al cual se le nombra *multiconstelación*. A continuación describiremos brevemente el proceso mediante el cual se llegó a la definición de las multiconstelaciones, de modo que pueda notarse el por qué una sola constelación no es suficiente como representación para un  $k$ -plano.

Partiendo del hecho de que la constelación de Majorana de un estado  $|\psi\rangle$  se obtiene a partir de las raíces de un polinomio  $p_{|\psi\rangle}(\zeta)$  el cual, como se mencionó en la sección 2.3.1, es proporcional al producto interno  $\langle -n|\psi\rangle$ , entonces, nos gustaría tener una manera de representar planos como vectores de algún espacio, así como la definición de un *plano coherente en la dirección  $\hat{n}$* , para después poder definir un producto interno entre planos y de esa manera obtener un nuevo polinomio de Majorana que represente ahora a un  $k$ -plano.

Una forma de identificar un  $k$ -plano  $\Psi$  en un espacio  $N$  dimensional, es a través de su base generadora  $\{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$ . Sin embargo, considerando que existe una infinidad de bases que generan el mismo plano, será importante tener una forma de definir y representar los  $k$ -planos que sea independiente de la base que se elija.

Un  $k$ -plano no sólo puede ser definido por una infinidad de bases distintas, sino que también, al sumar a un vector de la base múltiplos de los otros vectores, el plano permanece igual, por lo que la base del espacio de  $k$ -planos debe estar dada por un producto antisimetrizado de los vectores de la base del plano. De modo que un  $k$ -plano puede ser representado como un punto en el espacio vectorial  $\mathbb{C}^{\binom{N}{k}}$  cuya base es el producto tensorial antisimétrico *wedge* de los vectores de base del espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ .

**Por ejemplo**, para el caso de estados de espín  $s = 3/2$  el espacio de Hilbert es  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^4$  cuya base está dada por un conjunto ortonormal de 4 vectores  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  y los 2-planos en este espacio pueden describirse como puntos en  $\mathbb{C}^{\binom{4}{2}} = \mathbb{C}^6$ , cuya base es ahora  $\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}$ , donde

$$e_{ij} = e_i \wedge e_j = \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) \quad . \quad (10)$$

Entonces, un  $k$ -plano  $\Psi$  en el espacio de Hilbert  $N$ -dimensional puede verse como un vector en  $\mathbb{C}^{\binom{N}{k}}$

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \wedge \dots \wedge |\psi_k\rangle = \sum_{\vec{I}} \Psi^{\vec{I}} e_{\vec{I}} \quad (11)$$

con  $\vec{I} = (i_1, \dots, i_k)$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$ . Es importante resaltar que no cualquier combinación lineal de los  $e_{\vec{I}}$  representan un  $k$ -plano, es necesario que tal combinación sea factorizable, es decir, que pueda verse como el producto wedge de estados, como se muestra en la ecuación (11), y no necesariamente como una combinación lineal de estos productos. Esta condición se cumple si los coeficientes  $\Psi^{\vec{I}}$  satisfacen las llamadas *relaciones de Plücker*:

$$\sum_{m=1}^{k+1} (-1)^m \Psi^{(i_1 \dots i_{k-1}, j_m)} \Psi^{(j_1 \dots \hat{j}_m \dots j_{k+1})} = 0 \quad (12)$$

para todos los multiíndices  $\vec{I} = (i_1 \dots i_{k-1})$  y  $\vec{J} = (j_1 \dots j_{k+1})$ , donde el *hat* sobre el índice  $j_m$  indica la omisión del mismo.

El mapeo antes descrito manda marcos que definen planos en  $\mathcal{H}$  a puntos en  $\mathbb{C}^{\binom{N}{k}}$ , de modo que al encajamiento del Grassmanniano  $\text{Gr}(k, N)$  en  $\mathbb{C}P^{\binom{N}{k}}$ , se le conoce como *encajamiento de Plücker*.

Finalmente, dado que dos bases distintas (o *marcos*) que generan el mismo  $k$ -plano, digamos,  $V = \{v_i\}$  y  $W = \{w_j\}$  (que pueden verse también como vectores en el espacio de Plücker:  $|V\rangle = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  y análogamente para  $|W\rangle$ ) están conectadas a través de una matriz invertible  $M \in GL(k, \mathbb{C})$ ;  $V = MW$ , al cambiar de base por medio de la matriz  $M$ , este cambio se ve reflejado en las componentes de los vectores en el espacio de Plücker como  $V^{\vec{I}} = \det(M)W^{\vec{I}}$ . Esto significa que todas las posibles bases que generan al mismo  $k$ -plano pertenecen a una recta en  $\mathbb{C}^{\binom{N}{k}}$  y por lo tanto, el plano como objeto geométrico puede verse como un punto en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^{\binom{N}{k}-1}$ .

Lo siguiente es definir un producto interno entre marcos. Dados dos marcos  $V$  y  $W$ , podemos definir el producto interno entre ellos como

$$\langle V, W \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, w_1 \rangle & \dots & \langle v_1, w_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_k, w_1 \rangle & \dots & \langle v_k, w_k \rangle \end{pmatrix}, \quad (13)$$

el cual coincide con el producto interno hermitiano  $\langle V|W \rangle = \sum_{\vec{I}} \bar{V}^{\vec{I}} W^{\vec{I}}$  entre los vectores  $|V\rangle$  y  $|W\rangle$  en el espacio de Hilbert  $\mathbb{C}^{\binom{N}{k}}$ .

Finalmente, podemos definir el producto interno entre planos  $\Psi = [V]$  y  $\Phi = [W]$  de modo que no dependa de la elección de las bases como

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \frac{|\langle V, W \rangle|}{\sqrt{\langle V, V \rangle} \sqrt{\langle W, W \rangle}}. \quad (14)$$

Continuamos con la generalización del polinomio de Majorana para  $k$ -planos, definiendo un plano coherente de espín  $s$  que apunta en la dirección  $\hat{n}$ . Como hemos mencionado anteriormente, los

estados coherentes son aquellos que maximizan el valor de expectación del espín a lo largo de la dirección  $\hat{n}$ , entonces, definimos el valor de expectación de espín de un  $k$ -plano  $\Psi$  como un vector en  $\mathbb{R}^3$ ;  $\langle \mathbf{S} \rangle_{\Psi}$ , cuyas componentes  $\langle S_i \rangle_{\Psi}$  con  $i = 1, 2, 3$  son

$$\langle S_i \rangle_{\Psi} = \text{tr} \begin{pmatrix} \langle \psi_1 | S_i | \psi_1 \rangle & \dots & \langle \psi_1 | S_i | \psi_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_k | S_i | \psi_1 \rangle & \dots & \langle \psi_k | S_i | \psi_k \rangle \end{pmatrix}, \quad (15)$$

donde  $\{\psi_i\}$  es una base ortonormal del  $k$ -plano  $\Psi$ .

Con estas definiciones, se llegó al siguiente teorema [5]:

**Teorema 2.1** (Planos coherentes). *La relación entre planos coherentes y puntos sobre la esfera  $S^2$  es 1 a 1, y es que dado un vector  $\hat{n} \in S^2$  se puede definir el plano coherente  $\Pi_n$  a lo largo de esta dirección como*

$$\Pi_n = \{|n, s\rangle, |n, s-1\rangle, \dots, |n, s-k+1\rangle\}, \quad (16)$$

del cual el valor máximo para el módulo del valor expectación de espín  $|\langle \mathbf{S} \rangle_{\Pi_n}| = \frac{k}{2}(2s+1-k)$

Ahora, de manera análoga a como se describió en la sección 2.3.1, es posible definir un *polinomio principal*  $p_{\Psi}(\zeta)$  proporcional ahora al producto interno  $\langle \Pi_{-n}, \Psi \rangle$ , utilizando las definiciones de  $k$ -plano,  $k$ -plano coherente y producto interno mencionadas anteriormente en esta sección.

En este punto, pareciera que la generalización del polinomio, y por lo tanto la constelación de Majorana para  $k$ -planos está satisfactoriamente definida. Sin embargo, hay un problema fundamental; la relación entre  $k$ -planos y polinomios principales **no** es 1 a 1, de hecho, el número de planos que comparten polinomio principal crece conforme aumenta el valor  $s$  del espín y la dimensión  $k$  de los planos de acuerdo al siguiente teorema [5]

**Teorema 2.2.** *El número de planos distintos generados por  $k$  estados de espín  $s$  que comparten el mismo polinomio principal está dado por*

$$Q(s, k) = \frac{1!2! \dots (k-1)!}{\tilde{k}!(\tilde{k}+1)! \dots (2s)!} (k\tilde{k})! \quad , \quad (17)$$

donde  $\tilde{k} = N - k$ .

Aunque el polinomio principal no resultó ser una generalización adecuada de representación estelar para  $k$ -planos en  $\mathcal{H}$ , sí es un punto de partida para definir una nueva representación estelar de estos objetos, y el procedimiento es el siguiente;

Dado que el espacio donde viven los  $k$ -planos es un  $\mathbb{C}^{\binom{N}{k}} = \wedge^k \mathbb{C}^N$  entonces la representación  $D^{(s,k)}(g)$  de los elementos  $g \in SU(2)$  que actúan sobre los elementos del espacio consiste en matrices  $\binom{N}{k} \times \binom{N}{k}$

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \wedge \cdots \wedge |\psi_k\rangle \mapsto D^{(s)}(g) |\psi_1\rangle \wedge \cdots \wedge D^{(s)}(g) |\psi_k\rangle \equiv D^{(s,k)}(g) |\Psi\rangle \quad (18)$$

donde  $D^{(s)}(g)$  es la representación irreducible  $N$ -dimensional de  $g$ . Ahora, por tratarse de un espacio que es el producto wedge de  $k$  espacios de Hilbert, sabemos que la matriz  $D^{(s,k)}(g)$  puede, bajo un cambio de coordenadas adecuado, verse como una matriz *Block Diagonal* (BD) cuyos bloques corresponden a representaciones irreducibles del elemento correspondiente  $g \in SU(2)$ , es decir  $D^{(j)}(g)$  con  $j = 0, \dots, s_{\max}$ , con  $s_{\max} = s + (s - 1) + \cdots + (s - (k - 1)) = \frac{1}{2}k\tilde{k}$ . Entonces, dada la matriz de cambio de coordenadas  $M$  tenemos que

$$MD^{(s,k)}(g)M^{-1} = D_{BD}^{(s,k)}(g) \equiv \bigoplus_{j=0}^{s_{\max}} m_j^{(s,k)} D^{(j)}(g) \quad (19)$$

donde  $m_j^{(s,k)}$  son las multiplicidades de los bloques  $D^{(j)}(g)$  correspondientes.

Bajo este mismo cambio de base también se puede reescribir el vector  $|\Psi\rangle$  obteniendo un nuevo vector  $|\Psi\rangle_{BD}$  tal que sus componentes se pueden entender como *bloques* de espinores que corresponden a los bloques que aparecen en  $D_{BD}^{(s,k)}(g)$ . A cada uno de estos espinores que componen al vector  $|\Psi\rangle$ , se le puede encontrar su constelación de Majorana, y al conjunto de todas se le conoce como la *multiconstelación* del plano  $|\Psi\rangle$ .

Un punto importante es que al mirar a  $|\Psi\rangle$  como un vector compuesto por bloques de espinores de espín  $j = 0, \dots, s_{\max}$ , por ser un vector normalizado perdemos la normalización de cada uno de los bloques, así como posibles fases internas entre ellos. Para recuperar esta información, en [5] se propone un algoritmo para calcular unas cantidades complejas  $z^{(j)}$  que comparan al estado obtenido como bloque dentro de  $|\Psi\rangle$  con el estado normalizado que corresponde canónicamente a la misma constelación de Majorana.

A estas cantidades  $z^{(j)}$  se les ordena como componentes de un *pseudo espinor*, se obtiene su representación estelar de Majorana a la cual se le llama *constelación espectadora* y se grafica junto con la *multiconstelación*. El vector cuyas componentes son los  $z^{(j)}$  es un pseudo espinor ya que al rotar el estado  $|\Psi\rangle$  y por lo tanto, rotar todos los espinores que lo conforman, la constelación de Majorana de los  $z^{(j)}$  permanece invariante.

**Ejemplo:** Un 2-plano en el espacio de Hilbert de estados de espín 2

En [6] se expone el caso del plano generado por el estado tetrahédrico y su estado antipodal, que por tratarse de un 2-plano en el espacio de Hilbert de estados de espín  $s = 2$ , la dimensión del espacio de Plücker es  $\binom{5}{2} = 10$ . Al descomponer la representación de un elemento  $g \in SU(2)$  en bloques irreducibles, se encontró que la descomposición consiste en dos bloques; uno de espín 3 y otro de espín 1;

$$D^{(2,2)}(g) = D^{(3)}(g) \oplus D^{(1)}(g) \quad (20)$$

y el vector en el espacio de Plücker es el siguiente

$$|\Pi_{\text{tet}}\rangle = \frac{1}{3}((-\sqrt{2}, 0, 0, \sqrt{5}, 0, 0, \sqrt{2}), (0, 0, 0)) \quad . \quad (21)$$

Dado que el espinor correspondiente al bloque de espín 1 es cero, entonces en este caso es fácil identificar al espinor observador como

$$|\psi_{\text{obs}}\rangle = (1, 0) \quad . \quad (22)$$

Finalmente, al mapear estos espinores a sus constelaciones de Majorana, se encontró que la multiconstelación correspondiente al plano generado por  $|\psi_{\text{tet}}\rangle$  y  $|\psi_{\text{tet ant}}\rangle$  es la que se muestra a continuación en la Figura 4:

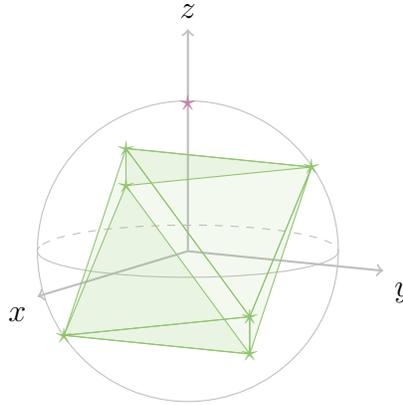


Figura 4: Multiconstelación del plano  $|\Pi_{\text{tet}}\rangle$  que consiste en la constelación del espinor  $|\psi_1\rangle = \frac{1}{3}(-\sqrt{2}, 0, 0, \sqrt{5}, 0, 0, \sqrt{2})$  de espín 3 (verde) y del pseudo espinor  $|\psi_{\text{obs}}\rangle = (1, 0)$  (morado). No se visualiza ninguna constelación correspondiente al espinor de espín 1 ya que éste resultó ser cero.

## 2.5. Fases geométricas

La evolución temporal de un sistema cuántico cerrado está dada por la ecuación de Schrödinger

$$\hat{H}(\mathbf{R}(t)) |\psi(t)\rangle = i\hbar \dot{|\psi(t)\rangle} \quad , \quad (23)$$

donde  $\hat{H}$  es un hamiltoniano que depende de un conjunto de parámetros  $\mathbf{R}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Berry [4] encontró que si la curva  $C$  en el espacio de parámetros  $\mathcal{M}$ , obtenida por la evolución adiabática del sistema es una curva cerrada, es decir  $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0)$ , y el estado original es eigenestado del hamiltoniano no degenerado, el estado original y el estado final coinciden salvo por un factor de fase

$$|\psi(T)\rangle = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt E_n(\mathbf{R}(t)) \right\} \exp \{i\gamma_n(C)\} |\psi(0)\rangle \quad , \quad (24)$$

donde  $E_n(\mathbf{R}(t))$  son las eigenenergías del hamiltoniano  $\hat{H}(t)$

$$\hat{H}(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle = E_n(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle \quad . \quad (25)$$

El primer factor exponencial en la ecuación (24) es la ya conocida fase dinámica que adquiere el sistema debido a la evolución hamiltoniana. La aportación de Berry se concentra en el segundo factor exponencial al cual se le conoce como *factor de fase geométrica*, que depende únicamente de la curva  $C \in \mathcal{M}$  y es independiente de la parametrización de la misma. El término  $\gamma_n(C)$  está definido como

$$\gamma_n(C) = i \oint_C \langle n(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}(t)) \rangle \cdot d\mathbf{R} \quad , \quad (26)$$

donde se considera que el conjunto de parámetros  $\mathbf{R}(t)$  varía lo suficientemente lento como para poder aproximar la evolución del sistema como adiabática. Utilizando el teorema de Stokes, Berry demuestra que  $\gamma_n(C)$  es cero si el área encerrada por la curva  $C$  es nula.

Posteriormente en el trabajo de Mukunda y Simon [13], se explora el caso de curvas abiertas en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$ , cerrándolas al unir los puntos extremos de la curva con una geodésica y mostrando así que para el caso de la evolución a lo largo de una curva geodésica abierta, la fase geométrica de Berry es igual a cero; asimismo, la generalización provista por Mukunda y Simon incluye también los casos en los que la evolución del hamiltoniano, y por lo tanto del sistema, es no-adiabática. De manera que la fase geométrica se puede expresar como una diferencia de dos términos llamados *fase total* y *fase dinámica* de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varphi_g &= \varphi_{\text{tot}} - \varphi_{\text{dyn}} \\ &= \arg \langle \psi(0) | \psi(T) \rangle - i \int \langle \psi(t) | \partial_t | \psi(t) \rangle dt \quad . \end{aligned} \quad (27)$$

En el caso más general, es posible que el hamiltoniano  $\hat{H}(\mathbf{R}(t))$  tenga degeneraciones y por lo tanto a cada nivel de energía ya no corresponda únicamente un estado sino un conjunto de ellos, el cual se representa por un  $k$ -plano en el espacio de Hilbert o bien, un punto en el Grassmanniano  $\text{Gr}(k, N)$ . Este caso es analizado y caracterizado por Wilczek y Zee.

## 2.6. Holonomía de Wilczek-Zee

Como se describió en la sección anterior, la holonomía que conecta un estado  $|\psi(0)\rangle$  con  $|\psi(T)\rangle$  que es el estado obtenido después de transformar al sistema a trazando una curva cerrada en el espacio de parámetros  $\mathbf{R}(t)$  del hamiltoniano que produce la evolución, es un factor de fase, y por lo tanto una matriz que pertenece al grupo  $U(1)$ , el cual es el único grupo unitario abeliano.

Wilczek y Zee [17] estudiaron el caso general de esta situación, que corresponde a cuando el Hamiltoniano permite tener  $k$  estados degenerados ( $|\phi_i\rangle$  con  $i = 1, \dots, k$ ) en un mismo nivel de energía, los cuales generan un  $k$ -plano en el espacio de Hilbert.

En este caso, la holonomía entre una base  $\{|\phi_i(0)\rangle\}$  del plano original y  $\{|\phi_i(T)\rangle\}$  del plano transformado, donde los  $|\phi_i(t)\rangle$  evolucionan de acuerdo a la ecuación de Schrödinger, se da a través de una matriz  $U_g \in U(k)$ , la cual, al igual que en el caso abeliano se obtiene como la diferencia entre una fase total y una fase dinámica

$$U_g = U_{\text{tot}} U_{\text{dyn}}^{-1} \quad , \quad (28)$$

donde la fase total corresponde a la parte unitaria de la descomposición polar de la matriz  $Q$  con elementos

$$Q_{ij} = \langle \phi_i(0) | \phi_j(T) \rangle \quad , \quad (29)$$

de modo que

$$Q = U_{\text{tot}} P \quad , \quad (30)$$

donde  $P$  es una matriz hermitiana y no-negativa.

Por otro lado, la generalización de la fase dinámica se obtiene a través de la llamada *conexión de Wilczek-Zee*, que es una matriz  $k \times k$  anti-hermitiana y se calcula a partir de una base ortonormal de vectores  $|\phi_i(t)\rangle$  para el  $k$ -plano en cuestión como

$$A_{ij}(t) = \langle \phi_i(t) | \dot{\phi}_j(t) \rangle \quad . \quad (31)$$

Una vez teniendo la matriz  $A$ , se puede expresar la fase a  $U_{\text{dyn}}$  de manera simbólica como la integral *path-ordered*

$$U_{\text{dyn}} = \text{P exp} \int_0^t A(\tau) d\tau \quad , \quad (32)$$

donde  $\text{P}$  es el operador de ordenamiento, que es una matriz unitaria  $k \times k$  que transforma a los vectores en el  $k$ -plano de estados degenerados en el  $n$ -ésimo nivel de energía del hamiltoniano.

## 2.7. Cómputo cuántico holonómico

El cómputo cuántico nace en la década de 1980 con la promesa de proveer máquinas con un poder de cómputo superior al que tienen las actuales que funcionan a través de la dinámica clásica de los circuitos que las componen [7].

Así como el *bit* es la unidad fundamental para el cómputo clásico, el *qubit* es la unidad fundamental en el cómputo cuántico, haciendo que las computadoras cuánticas sean sistemas de multi-*qubits* los cuales evolucionan por medio de la acción de operadores unitarios, de modo que un algoritmo cuántico queda especificado por una secuencia de operadores  $U_1, U_2, \dots$ , etc. La pregunta natural que surge para este punto es ¿cómo se definen, o cómo se *construyen* los operadores unitarios que funcionen como compuertas lógicas para el cómputo cuántico?

En [18], Zanardi y Rasetti proponen que las fases geométricas (holonomías no-abelianas) de Wilczek-Zee definidas en (26) pueden desempeñar un buen papel como compuertas lógicas cuánticas, ya que al no depender de la parametrización de las curvas en el espacio de parámetros, la holonomía correspondiente, como operador unitario, resulta tener “inmunidad” ante reparametrizaciones de la curva. Esto es un primer acercamiento para desarrollar un método que permita construir compuertas lógicas para el cómputo cuántico.

Dada una conexión  $A$  y dado el conjunto de todas las curvas cerradas en el espacio de parámetros  $\mathcal{M}$  definido como

$$L_{\lambda_0} \equiv \{C : [0, T] \rightarrow \mathcal{M} \mid C(0) = C(T) = \lambda_0\} \quad , \quad (33)$$

al conjunto de operadores  $U_g$  definidos como en (26) con  $C \in L(\lambda_0)$ , se le llama *grupo de holonomía* de la conexión  $A$ , y es un subgrupo de  $U(k)$ , con  $k$  la dimensión del eigenspacio ( $k$ -plano en  $\mathcal{H}$ ) del hamiltoniano  $\hat{H}(\mathbf{R}(t))$ .

Un resultado de [18] es que en el caso de las conexiones asociadas con las fases geométricas no-abelianas de Wilczek-Zee (i.e.  $A$  definidas como en (31)), el grupo de holonomía  $\text{Hol}(A)$  es exactamente  $U(k)$ , esto garantiza que los operadores  $U_g \in \text{Hol}(A) = U(k)$ , proveen una forma de desarrollar cómputo cuántico universal, es decir, que cualquier operación puede ser aproximada por medio de una secuencia de operadores  $U_g$ .

El problema con esta propuesta es que aún cuando las holonomías  $U_g$  no dependan de la parametrización de las curvas  $C \in L_{\lambda_0}$ , sí son sensibles a perturbaciones de las mismas, lo cual hace que los operadores no sean estables.

## 2.8. Cómputo cuántico toponómico

En la sección anterior se mencionó la ventaja de utilizar elementos de  $\text{Hol}(A)$  para implementar compuertas lógicas para el cómputo cuántico, resaltando que una ventaja de estos operadores es su “inmunidad” ante reparametrizaciones, la cual no termina de dar a los operadores la estabilidad

suficiente como para ser buenos candidatos a ser compuertas lógicas.

Un siguiente paso para la construcción de mejores operadores, o bien, de operadores *más robustos*, es el propuesto en [6] por el grupo de investigación al cual pretendo incorporarme durante mis estudios de doctorado, en el cual mostraron que si se considera en particular a los  $k$ -planos anticoherentes, es decir, generados por estados  $|\phi_i\rangle$  tales que para todo  $i, j = 1, \dots, k$  y para todo  $\hat{n}$  satisfacen la ecuación

$$\langle \phi_i | \hat{n} \cdot \vec{S} | \phi_j \rangle = 0 \quad , \quad (34)$$

si la evolución del plano consiste únicamente en rotaciones en el espacio físico, es decir, bajo la acción de elementos del grupo  $SU(2)$ , la holonomía ya no depende de una curva en el espacio de parámetros del hamiltoniano, sino de su clase de equivalencia en el grupo fundamental, es decir, todas aquellas curvas que pueden deformarse unas en las otras de manera continua, o lo que es lo mismo, que existe una homotopía que las conecta. Ésto puede verse de manera natural de la representación de Mukunda y Simon para la fase geométrica, considerando que la evolución temporal de los estados cuánticos está dada por la acción de un operador unitario

$$|\phi(t)\rangle = U |\phi(0)\rangle \quad (35)$$

Ahora, considerando que la evolución de los estados consiste en rotaciones de los mismos, y por lo tanto está dada por la acción de elementos del grupo  $SU(2)$ , el término  $A(t)$  en la expresión de la fase dinámica asociada a la holonomía no-abeliana definida en (32) se puede desarrollar de la siguiente manera

$$A_{ij}(t) = \langle \phi_i(t) | \dot{\phi}_j(t) \rangle = \langle \phi_i(0) | U^\dagger \partial_t U | \phi_j(0) \rangle = \langle \phi_i(0) | U^{-1} \dot{U} | \phi_j(0) \rangle \quad , \quad (36)$$

donde  $U$  son operadores unitarios, y por tratarse de elementos de  $SU(2)$  que es un grupo de Lie, sabemos que el producto

$$\left. \begin{array}{l} U^{-1} \dot{U} \\ \dot{U} U^{-1} \end{array} \right\} \in \mathfrak{su}(2) \quad (37)$$

y por lo tanto

$$U^{-1} \dot{U} = \vec{m} \cdot \vec{S} \quad (38)$$

para algún vector  $\vec{m} \in \mathbb{R}^3$ .

Si además, el  $k$ -plano generado por la base ortonormal  $|\phi_i(t)\rangle$  es anticoherente entonces tenemos que para todas las entradas  $A_{ij}(t)$  de la conexión de Wilczek-Zee son

$$\langle \phi_i(0) | \vec{m} \cdot \vec{S} | \phi_j(0) \rangle = 0 \quad (39)$$

y por lo tanto

$$U_{\text{dyn}} = P \exp \int_0^t A(\tau) d\tau = I_k \quad , \quad (40)$$

donde  $I_k$  representa a la matriz identidad de dimensión  $k$ . En este caso la holonomía  $U_g$  resultante es igual a  $U_{\text{tot}}$  la cual depende únicamente de la topología de la curva a partir de la cual se calcula, lo que la hace aún más estable que en el caso genérico mencionado en la sección anterior.

Este resultado hace evidente la utilidad y el interés de trabajar sobre puntos en el Grassmanniano  $\text{Gr}(k, N)$  que representan  $k$ -planos antioherentes del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

## 2.9. Teoría de Morse

La Teoría de Morse [12] es un método para estudiar la topología de una variedad a través de funciones diferenciables definidas sobre la misma, llamadas *funciones de Morse*.

El método consiste en definir una función  $f_M : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  suave sobre  $M^n$ , la cual es una función de Morse si todos sus puntos críticos son no-degenerados esto es, todos los puntos  $p_i$  tales que todas las derivadas direccionales evaluadas en estos puntos se anulan

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(p_i) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad . \quad (41)$$

y que la matriz hessiana de segundas derivadas evaluada en  $p_i$  es invertible

$$\det(H_f(p_i)) \neq 0 \quad . \quad (42)$$

Con ayuda del Lema de Morse, el cual enunciaremos a continuación, podemos asignar un índice a cada punto crítico no-degenerado de la función de Morse.

**Lema 2.1** (de Morse). *Dada una función de Morse  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y dado un punto crítico no degenerado  $p_i$  de  $f$ , existen coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  en la vecindad de  $p_i$  tales que la función  $f$  en estas coordenadas adquiere la siguiente forma:*

$$f = -(x^1)^2 - (x^2)^2 - \dots - (x^{\lambda_i})^2 + (x^{\lambda_i+1})^2 + \dots + (x^n)^2 + c \quad (43)$$

donde  $c$  es una constante.

Al número  $\lambda_i$  correspondiente al número de coordenadas que aparecen con signo negativo en la forma estándar dada por el Lema de Morse, se le conoce como índice de Morse correspondiente al punto crítico  $p_i$ . Éste índice también puede calcularse como el número de eigenvalores negativos de la matriz hessiana  $H_f(p_0)$ .

Lo siguiente que nos resulta relevante resaltar es que si una función  $f_M$  definida sobre la variedad  $M^n$  es de Morse, sus puntos críticos  $p_i$  están aislados y por lo tanto, si  $M^n$  es compacta, el número de puntos críticos es finito.

En Teoría de Morse, a la vecindad alrededor del punto  $p_i$  se le llama *asa* (o *handle*) y el índice de Morse en  $p_i$  nos proporciona una noción de la “forma” de la variedad en dicho punto, ya que nos indica en qué direcciones la función crece y en qué direcciones decrece.

Las asas se caracterizan por el índice de Morse y la dimensión de la variedad de acuerdo a la siguiente definición

**Definición 2.3** (Asas o *handles*). *Una  $k$ -asa  $m$ -dimensional es una variedad diferenciable y contractible, definida por el producto cartesiano*

$$h_k = D^k \times D^{m-k} \tag{44}$$

donde  $D^k$  es una bola  $k$ -dimensional.

De modo que la vecindad alrededor de un punto crítico  $p_i$  con índice  $\lambda_i$  constituye una  $\lambda_i$ -asa  $n$ -dimensional.

A continuación se ilustra como ejemplo las posibles *handles* que pueden haber en un espacio de 2 dimensiones.

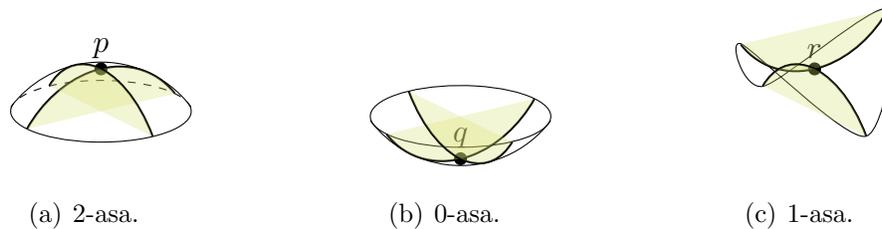


Figura 5:  $k$ -asas 2-dimensionales

Las fronteras de las  $k$ -asas de la variedad pueden ser unidas unas con otras por medio de difeomorfismos, “reconstruyendo” así una variedad que es difeomorfa a la original  $M^n$ . Esto implica que los puntos críticos de la función de Morse, junto con sus respectivos índices, están íntimamente relacionados con la topología de la variedad  $M^n$ . En particular se puede obtener la característica de Euler  $\chi(M)$  de la variedad a partir de las  $k$ -asas,  $h_k$ , en las cuales se descompone de la siguiente forma [12]:

$$\chi(M^n) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda C_\lambda \quad , \tag{45}$$

donde  $C_\lambda$  es el número de puntos críticos con índice  $\lambda$ .

Asimismo, la Teoría de Morse también provee una herramienta para estudiar los grupos de homología de una variedad a través de la llamada *desigualdad de Morse*;

**Teorema 2.3** (Desigualdad de Morse). *Sea  $f_M : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse definida sobre una variedad compacta  $M^n$ . Para el número de puntos críticos  $p_\lambda$  con índice de Morse  $\lambda$  y el número de Betti  $\lambda$ -dimensional  $b_\lambda(M)$ , la siguiente desigualdad es válida;*

$$p_\lambda \geq b_\lambda(M) \quad (46)$$

**Definición 2.4** (Números de Betti). *Dada una variedad  $M$ , el  $k$ -ésimo número de Betti;  $b_k$ , se define como*

$$b_k = \dim(H_k(M)) \quad (47)$$

*Donde  $H_k(M)$  es el  $k$ -ésimo grupo de homología de la variedad, es decir, el conjunto de ciclos de dimensión  $k$  que no son fronteras de nada. Otra forma de decir esto es que  $H_k(M)$  es el conjunto de huecos  $k$ -dimensionales en la variedad.*

## 2.10. Teoría de Klein y polinomios invariantes

Como menciona Zimba en [19], una posible estrategia para encontrar estados anticoherentes de espín  $s$  es utilizando su representación estelar de Majorana, resultando que las constelaciones de estos estados se ven como estrellas distribuidas de la manera *más homogénea* posible sobre la esfera unitaria.

Por otro lado, si el estado tiene alguna simetría rotacional, esto implica que el valor de expectación del espín se encuentra a lo largo del eje de rotación. Así, si el estado tiene más de una simetría rotacional, entonces necesariamente debe ser un estado anticoherente, ya que la única manera en que el valor de expectación pueda estar a lo largo de dos o más ejes simultáneamente es siendo igual a cero. Ésto a su vez implica que la constelación de Majorana correspondiente es invariante bajo un subgrupo finito de  $SO(3)$  [14].

Felix Klein [9] caracterizó todos estos subgrupos finitos de  $SU(2)$  clasificándolos en dos familias, la primera conformada por los grupos cíclicos, que corresponden al grupo de simetrías de un  $n$ -ágono regular y los grupos dihédricos, es decir, los grupos de simetrías de los prismas cuyas tapas son  $n$ -ángonos regulares. Y por otro lado en la segunda familia están los grupos poliédricos que corresponden a los grupos de simetrías correspondientes a los sólidos platónicos: tetrahedro, octahedro (cuyas simetrías son las mismas que del cubo) e icosahedro (que comparte simetrías con el dodecahedro).

Un polihedro regular está caracterizado por el número de vértices  $V$ , de bordes  $E$  y de caras  $F$ . Bajo una rotación que deja al polihedro invariante, es decir, un elemento del grupo de simetrías

correspondiente  $G$  los vértices se permutan entre sí, y lo mismo ocurre con los puntos medios de los bordes y los centros de las caras. Ésto nos da 3 órbitas de la acción de  $G$  sobre  $S^2$ .

Sabemos que  $SU(2)$  actúa sobre  $\mathbb{C}^2$  por medio de matrices  $2 \times 2$  transformando un espinor  $(z, w)^T$  en  $(z', w')^T$  de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + bw \\ \bar{a}w - \bar{b}z \end{pmatrix} \quad (48)$$

con  $a, b \in \mathbb{C}$  y  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

Asimismo, esta transformación de las componentes  $z$  y  $w$  de un espinor en  $\mathbb{C}^2$  se puede mapear al espacio de polinomios homogéneos en dos variables  $z$  y  $w$ , el cual es un espacio de dimensión infinita generado por

$$\{1, z, w, z^2, zw, w^2, \dots\} \quad (49)$$

Luego, los polinomios homogéneos de grado  $p$  en dos variables pueden ser mapeados al espacio de polinomios en una sola variable  $\zeta = \frac{z}{w}$  dividiendo todo el polinomio entre  $w^d$  donde  $d$  es la potencia más alta de la variable  $w$  en el polinomio original.

Entonces, dados los vértices de un polihedro, se puede definir un polinomio  $h_1(\zeta)$  cuyas raíces sean precisamente las proyecciones estereográficas de los vértices sobre el plano complejo. Esto garantiza que el polinomio  $h_1(\zeta)$  será invariante bajo la acción del grupo de simetría correspondiente al polihedro. Algo análogo se puede hacer para definir polinomios  $h_2(\zeta)$  y  $h_3(\zeta)$  con los puntos medios de los bordes y los centros de las caras, respectivamente.

Los polinomios homogéneos  $h_1, h_2$  y  $h_3$  generan entonces el álgebra de polinomios invariantes bajo la acción de un subgrupo finito  $G$  de  $SU(2)$ .

Un resultado interesante mostrado por Pereira y Paddock [14] que vincula los grados de estos polinomios invariantes ( $\deg(h_i)$ ) con subespacios de estados anticoherentes es:

*Siempre que existan soluciones no negativas para  $u, v, w$  de*

$$u \cdot \deg(h_1) + v \cdot \deg(h_2) + w \cdot \deg(h_3) = 2s \quad (50)$$

*los polinomios  $h_1^u, h_2^v, h_3^w$  generan un subespacio de estados anticoherentes de espín  $s$ .*

### 3. Justificación

En [6], así como en la sección 2.8 se expuso la utilidad de usar  $k$ -planos anticoherentes del espacio de estados cuánticos para definir operadores unitarios  $U_g$  como fases geométricas de Wilczek-Zee, los cuales pueden ser utilizados como compuertas lógicas robustas y por lo tanto estables, para el cómputo cuántico.

Durante la revisión del artículo para su publicación, los encargados de la misma preguntaron a los autores **si existía una manera sistemática de localizar  $k$ -planos anticoherentes en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de espín  $s$  arbitrario**. A lo que los autores respondieron que por el momento no la hay. Ésto abre lugar al objetivo principal que quisiera buscar durante mis estudios de doctorado.

Encontrar esta manera sistemática de definir  $k$ -planos anticoherentes también podría **dar información sobre el número de los  $k$ -planos anticoherentes que hay en  $\mathcal{H}$  para cada espín  $s$** .

## 4. Objetivos

- Investigar la topología del subespacio de  $\mathcal{H}$  de estados anticoherentes, en particular su conexidad. En caso de ser un subespacio conexo, su dimensión, y en caso de no serlo la dimensión de sus componentes, si es la misma en todas las componentes o no.
- En caso de que el espacio de estados anticoherentes no sea conexo, por la discusión realizada anteriormente en torno a los resultados de [14], es de gran interés saber si en cada componente del espacio se encuentra un estado simétrico, de modo que al conocer todos estos estados, lo cual es relativamente sencillo, podemos averiguar si éstos estados pueden ser transformados por medio de deformaciones continuas en estados anticoherentes sin simetrías. De esta manera, podríamos conocer todos los estados en una componente del espacio disconexo.
- Encontrar un método sistemático para identificar cuántos  $k$ -planos anticoherentes con simetrías rotacionales existen en  $\mathcal{H}$  para un espín  $s$  arbitrario, así como una manera de calcularlos, ya que éstos son los  $k$ -planos de interés para el cómputo cuántico toponómico.
- Estudiar las compuertas lógicas para el cómputo cuántico que se pueden construir para cada  $k$ -plano anticoherente encontrado.
- Encontrar una forma de *traducir* la condición de anticoherencia para  $k$ -planos a sus representaciones como vectores en el espacio de Plücker o como multiconstelaciones.

## 5. Metodología

Dado que uno de los objetivos principales es conocer más sobre la topología del subespacio de  $k$ -planos anticoherentes, por el momento hay dos propuestas para obtener esta información que son las siguientes:

Primero partir de estados anticoherentes simétricos y buscar transformaciones continuas que, pasando siempre por estados anticoherentes, puedan mandar un estado simétrico a otro que se mantenga anticoherente pero que carezca de toda simetría, como en el ejemplo mostrado en la sección 2.3.

La segunda propuesta es definiendo una función de Morse en  $\text{Gr}(k, N)$  que se anule sobre la subvariedad de  $k$ -planos anticonherentes en el Grassmanniano, que *detecte* planos anticonherentes y por medio de las desigualdades de Morse, a través de los grupos de homología de ésta variedad se podría obtener una cota inferior para el número de  $k$ -planos anticonherentes.

Para ambas propuestas, es primordial estar antes bien familiarizados con la teoría, poder identificar con cierto grado de intuición los  $k$ -planos anticonherentes y la forma en que se representan ya sea como vectores en un espacio, o como multiconstelaciones.

Mathematica es un programa sumamente útil para la visualización de constelaciones y multiconstelaciones, y será desde luego una herramienta que utilizaré durante mi investigación.

## 6. Avances y plan a corto plazo

Como mencioné anteriormente, una propuesta para iniciar mi investigación es investigar la topología del subespacio de  $k$ -planos anticonherentes en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  desde la Teoría de Morse, definiendo una función de Morse  $f_\pi : \text{Gr}(k, N) \rightarrow \mathbb{R}$  que detecte  $k$ -planos anticonherentes en el espacio  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$  como

$$f_\pi = \sum_{m=1}^3 \sum_{i,j=1}^k |\langle \phi_i | S_m | \phi_j \rangle|^2 \quad (51)$$

donde los  $|\phi_i\rangle$  son los elementos de la base ortonormal que genera al plano en cuestión.

Será útil poder expresar esta función directamente en términos de matrices de densidad que representen a los  $k$ -planos que queremos estudiar;  $\rho \in \text{Gr}(k, N)$ , donde

$$\rho = \sum_{j=1}^k |\phi_j\rangle \langle \phi_j| \quad , \quad (52)$$

para lo cual será necesario definir una nueva matriz de densidad  $\mathcal{S}$  de los operadores de espín  $S_i$  como se muestra a continuación:

Notemos que es posible expresar a los generadores de rotaciones  $S_i$  como vectores columna, expandiéndolos en términos de una base hermitiana y ortonormal, de acuerdo al producto interno

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(AB) \quad (53)$$

del álgebra de Lie  $\mathfrak{u}(N)$ , que es el espacio de los operadores hermitianos que actúan sobre  $\mathbb{C}^N$ .

Un ejemplo particular de esto es el caso de espín  $s = 1/2$ , en el cual el espacio de los operadores hermitianos que actúan sobre  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  es  $\mathfrak{u}(2)$  y una base ortonormal y hermitiana para este espacio es  $\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ , donde  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli. Entonces tenemos que los vectores columna correspondientes a los operadores  $S_i$  son

$$|S_1\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |S_2\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |S_3\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

ya que

$$S_1 = \frac{1}{2}\sigma_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \frac{1}{2}\sigma_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \frac{1}{2}\sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (55)$$

Entonces, una vez habiendo expresado los operadores  $S_i$  como vectores columna  $|S_i\rangle$ , podemos ahora definir la matriz de densidad

$$\mathcal{S} = \sum_{i=m}^3 |S_m\rangle \langle S_m| \quad (56)$$

que en el ejemplo que estamos mostrando con espín  $s = 1/2$ , es

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

Habiendo definido las matrices de densidad  $\rho$  que representan a los  $k$ -planos y a la matriz  $\mathcal{S}$ , podemos desarrollar la ecuación (51) de modo que  $f_\pi$  quede expresada en términos de estas matrices:

$$\begin{aligned}
f_\pi &= \sum_{m=1}^3 \sum_{i,j=1}^k |\langle \phi_i | S_m | \phi_j \rangle|^2 \\
&= \sum_{m=1}^3 \sum_{i,j=1}^k \langle \phi_j | S_m^\dagger | \phi_i \rangle \langle \phi_i | S_m | \phi_j \rangle \\
&= \sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^k \langle \phi_j | S_m \rho S_m | \phi_j \rangle \\
&= \sum_{m=1}^3 \text{tr} \left( \sum_{j=1}^k |\phi_j\rangle \langle \phi_j| S_m \rho S_m \right) \\
&= \sum_{m=1}^3 \text{tr}(\rho S_m \rho S_m) \\
&= \sum_{m=1}^3 \rho_{\alpha\beta} (S_m)_{\beta\gamma} \rho_{\gamma\delta} (S_m)_{\delta\alpha} \\
&= \sum_{m=1}^3 \rho_{\alpha\beta} \rho_{\delta\gamma}^T (S_m)_{\beta\gamma} (S_m)_{\delta\alpha} \\
&= \sum_{m=1}^3 (\rho \otimes \rho^T)_{\alpha\delta} (S_m)_{\beta\gamma} (\bar{S}_m)_{\alpha\delta} \\
&= \sum_{m=1}^3 (\rho \otimes \rho^T)_{\alpha\delta} (\mathcal{S}_m)_{\beta\gamma} \alpha\delta \\
&= \text{tr}[(\rho \otimes \rho^T) \mathcal{S}]
\end{aligned} \tag{58}$$

Sabemos que los  $k$ -planos anticoherentes, que son los puntos en  $\text{Gr}(k, N)$  donde  $f_\pi$  se anula, corresponden a puntos críticos ya que la función es semidefinida positiva. Esto significa que los índices de Morse correspondientes a estos puntos críticos serán todos iguales a cero, y por lo tanto, a través de la desigualdad de Morse están relacionados con el número de Betti  $b_0(\text{Gr}(k, N))$ .

Por otro lado, sabemos que bajo la acción del grupo  $SU(2)$ , la anticoherencia de los  $k$ -planos permanece invariante. Por lo tanto la acción de  $SU(2)$  define toda una órbita continua puntos críticos para la función  $f_\pi$ . Esto nos dice que estos puntos críticos no son aislados y tendríamos que descartar a  $f_\pi$  como posible función de Morse. Sin embargo, queremos averiguar si es posible reexpresar la función de modo que esté ahora definida como  $f_\pi : \text{Gr}(k, N)/SU(2) \rightarrow \mathbb{R}$ , de modo que toda la órbita de bases ortonormales que difieren por una rotación que deja al plano invariante colapsa a un solo punto en este nuevo espacio. De ser así, encontrar sus puntos críticos, ver si son aislados y en caso de serlo analizarlos utilizando Teoría de Morse.

Paralelamente, se planea investigar sobre la topología de  $\text{Gr}(k, N)/SU(2)$ , en particular su número de Betti ( $b_0$ ), el cual a través de la desigualdad de Morse podría darnos información sobre el número

de componentes desconexas que conforman a la subvariedad de  $k$ -planos anticoherentes en un  $\mathcal{H}$  de espín  $s$  arbitrario.

Aquí vale la pena resaltar que el hecho de que un  $k$ -plano anticoherente tenga simetrías rotacionales, no necesariamente implica que los estados que lo generan posean las mismas simetrías. Un ejemplo de esto es el 2-plano en el espacio de estados de espín 2 generado por el estado tetrahédrico  $|\psi\rangle_{\text{tet}}$  orientado de manera que una de las estrellas esté ubicada en el polo norte, y su estado antipodal  $|\psi_{\text{tet}'}\rangle$ , es decir, el estado obtenido al reflejar el tetrahedro respecto al plano  $xy$  y luego rotar alrededor del eje  $z$  por un ángulo  $\pi$ .

Podemos ahora, visualizar las constelaciones de Majorana de estos dos estados anticoherentes distintos;  $|\psi_{\text{tet}}\rangle$  y  $|\psi_{\text{tet}'}\rangle$ , como se muestra en la Figura 6:

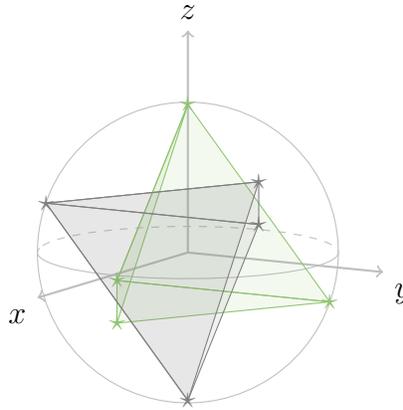


Figura 6: Constelaciones de Majorana de  $|\psi\rangle_{\text{tet}}$  (verde) y el estado antipodal  $|\psi\rangle_{\text{tet}'}$  (gris) [5, 6].

En este caso, es fácil ver que una rotación respecto al eje  $y$  por un ángulo  $\pi$ , intercambia ambas constelaciones. Sin embargo, el 2-plano anticoherente generado por estos dos estados, sigue siendo el mismo incluso después de la transformación.

Este ejemplo también ilustra la utilidad de la representación estelar de Majorana ya que es evidente que la rotación permuta los estados, por lo tanto ninguno de ellos es invariante bajo la transformación, pero el plano generado por ambos sí permanece invariante, ya que la permutación entre los elementos de la base no cambia al plano.

Además, con esto podemos ver que paralelamente al estudio de los  $k$ -planos anticoherentes, también es relevante continuar con el estudio del espacio de estados anticoherentes, respecto al cual aún hay preguntas importantes, como el hecho de que la topología de la subvariedad de  $\mathbb{C}P^n$  de estados anticoherentes es aún desconocida. Además de que es importante tener en cuenta que si bien un conjunto de estados anticoherentes linealmente independientes no necesariamente generan un plano anticoherente, todos los estados que pertenezcan a un plano anticoherente son anticoherentes.

Un primer acercamiento al problema de encontrar estados anticoherentes para un espín  $s$  arbitrario

y que además es consistente con los resultados de Zimba en [19], es el discutido por Pereira y Paddock en [14] y consiste en afirmar que todos los estados cuya representación estelar de Majorana presente al menos dos ejes de simetría distintos es anticohérente, como es el caso de los estados *perfectos*, es decir, los estados cuyas estrellas coinciden con los vértices de los sólidos platónicos. Sin embargo, este resultado dista mucho de ser una respuesta completa para la búsqueda y la caracterización de los estados anticohérentes y los espacios que forman, ya que si bien los estados simétricos son anticohérentes, no todos los estados anticohérentes son simétricos. Incluso, los estados simétricos consisten únicamente en una colección de medida cero (ya que dado un estado simétrico anticohérente cualquiera, toda su órbita bajo la acción de  $SU(2)$  también lo es) en el espacio de estados anticohérentes.

Particularmente, dado que se puede encontrar de manera sistemática a los estados simétricos, conocer la conectividad del subespacio de estados anticohérentes nos permitirá saber si partiendo de un estado simétrico podemos o no, mediante una transformación continua que no altere la anticohérentia, obtener cualquier estado anticohérente.

Otro posible caso es que, si el subespacio de estados anticohérentes no es conexo, la pregunta que surge es si en cada componente disconexa hay al menos un estado simétrico, de manera que mediante el proceso que se acaba de describir, se pueda obtener cualquier otro estado anticohérente.

Mirando el caso particular de estados de espín  $s = 2$ , sabemos que estos estados son representados por constelaciones de 4 estrellas y en particular, el estado tetrahédrico,  $|\psi\rangle_{\text{tet}}$ , el estado que consiste en 4 estrellas formando un cuadrado sobre el ecuador de la esfera,  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$ , definido para un espín  $s$  arbitrario como

$$|\psi\rangle_{\text{GHZ}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|s, s\rangle + |s, -s\rangle) \quad , \quad (59)$$

y el estado representado por dos estrellas en el polo norte y dos estrellas en el polo sur,  $|s = 2, m = 0\rangle$  son estados anticohérentes.

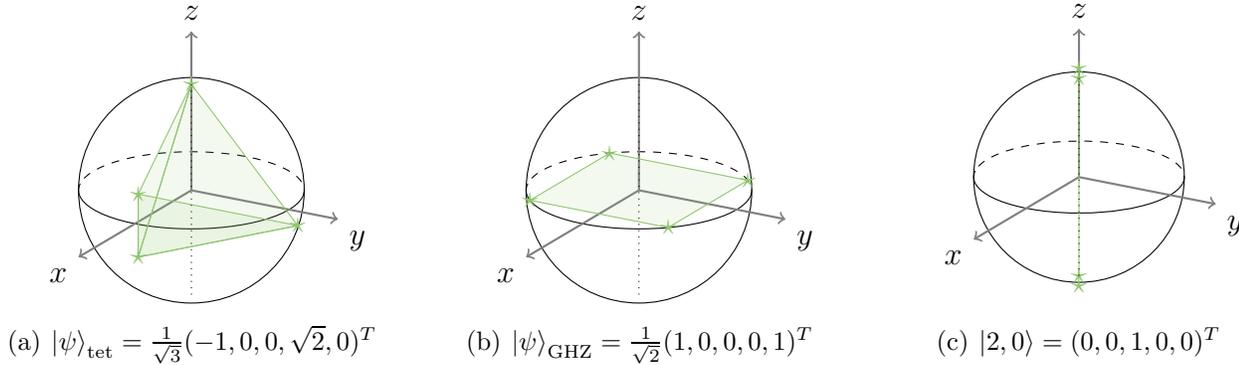


Figura 7: Tres estados anticohérentes de espín  $s = 2$

En este caso, considerando que cualquier rotación rígida de las constelaciones no altera la anti-coherencia del mismo, podemos identificar que es posible transformar de manera continua el estado  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$  en  $|2, 0\rangle$  pasando únicamente por estados anticohérentes durante el proceso.

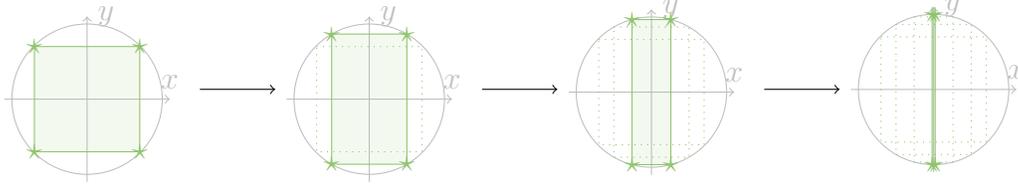


Figura 8: Transformación continua de  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$  en  $|\psi\rangle_{\text{ant}} = e^{-i\pi/2S_x} |2, 0\rangle$  pasando únicamente por estados anticohérentes.

Asimismo, podemos llevar el estado tetrahédrico al estado de dos puntos antipodales pasando únicamente por estados anticohérentes como se muestra a continuación en la Figura 9.

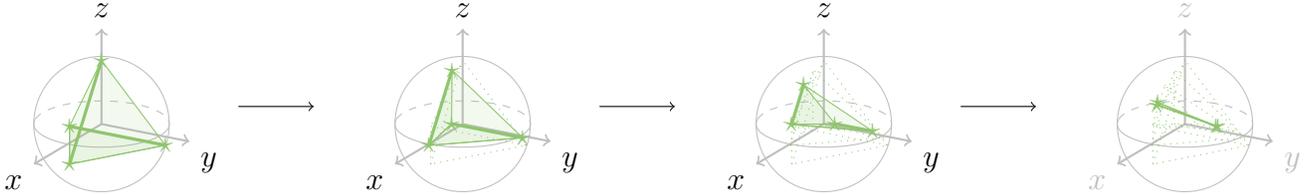


Figura 9: Transformación continua de  $|\psi\rangle_{\text{tet}}$  en  $|\psi\rangle_{\text{ant}}$  pasando únicamente por estados anticohérentes, la cual consiste en elegir dos pares de estrellas las cuales se acercan entre sí sobre la esfera en la dirección de la arista del tetrahedro que las une.

Para poder afirmar que efectivamente, en los dos casos mencionados antes la transformación de los estados quedó contenida en todo momento en el espacio de estados anticohérentes, considerando que cada estrella en la constelación de Majorana está definida por el vector  $\hat{n}_i$ , con  $i = 1, \dots, 2s$ , que indica su orientación sobre la esfera, hemos propuesto el siguiente lema:

**Lema 6.1.** *Si un estado es invariante bajo la inversión de todas las estrellas  $\hat{n}_i \rightarrow -\hat{n}_i$  que conforman su constelación de Majorana, entonces es anticohérente*

La demostración de este lema consistiría en una generalización al caso de  $s = 1/2$ , en el cual la representación de Majorana corresponde a una sola estrella. Sabemos que la inversión en la dirección  $\hat{n}$  donde está localizada la estrella a la dirección  $-\hat{n}$  invierte el valor de expectación del estado. Se espera entonces que, al transformar un estado de espín  $s$  representado por  $2s$  estrellas apuntando en direcciones  $\hat{n}_i$ , al estado representado por estrellas apuntando en dirección  $-\hat{n}_i$ , tendremos que nuevamente el valor de expectación del nuevo estado es el inverso del valor de expectación del estado original.

Un paso intermedio en dicha generalización es demostrar que esta propiedad se cumple para todos

los estados GHZ definidos como en la ecuación (59) de espín par, cuyas representaciones de Majorana consisten en un número par de estrellas distribuidas homogéneamente sobre el círculo ecuatorial de la esfera unitaria, y por lo tanto en el punto antipodal de todas las estrellas de la constelación se encuentra otra estrella de la constelación y por lo tanto la inversión de estrellas  $\hat{n}_i \rightarrow -\hat{n}_i$  deja a la constelación invariante.

Partiendo de estas ideas, la demostración completa del Lema 6.1 es de las primeras cosas que pienso realizar durante mi doctorado.

En el caso de la transformación de  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$  a  $|\psi\rangle_{\text{ant}}$ , esta invarianza bajo inversiones de las estrellas es evidente, mientras que en el caso ilustrado en la Figura 9, podemos ver que la anticoherencia se mantiene ya que en cada momento del proceso, la constelación invertida es igual a la original, reflejada respecto al plano paralelo a ambas aristas y luego rotada respecto al eje  $z$  por un ángulo  $\pi/2$ .

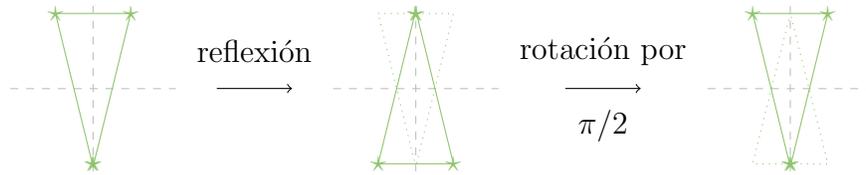


Figura 10: Demostración gráfica de que la constelación homotópica a  $|\psi\rangle_{\text{tet}}$  (verde) es invariante bajo una reflexión respecto al plano paralelo a ambas aristas seguida de una rotación respecto al eje ortogonal a dicho plano por un ángulo  $\pi/2$ .

De modo que los estados  $|\psi\rangle_{\text{GHZ}}$ ,  $|\psi\rangle_{\text{tet}}$  y  $|2, 0\rangle$  pertenecen al mismo componente conexo del espacio de estados anticoherentes. La pregunta natural que surge ahora es; ¿Hay algún otro estado anticoherente de espín  $s = 2$  tal que no pueda ser llevado de manera continua a ninguno de los estados mencionados anteriormente, pasando únicamente por estados anticoherentes a lo largo del proceso?

En resumen, el plan de trabajo para el inicio de mi doctorado es investigar específicamente la conectividad de la subvariedad de  $k$ -planos anticoherentes, y los posibles caminos para llevar a cabo esta investigación son, por un lado utilizando la Teoría de Morse y por el otro lado buscando curvas que conecten los estados anticoherentes conocidos y que permanezcan siempre contenidas en la subvariedad de estados anticoherentes.

## 7. Plan general del proyecto

La teoría que involucra el trabajo que propongo realizar tiene muchos elementos que se relacionan unos con otros de maneras sumamente no triviales, como por ejemplo el encajamiento del Grassmanniano  $\text{Gr}(k, N)$  en el espacio de Plücker  $\mathbb{C}^{\binom{N}{k}}$ . Para poder manejar la teoría con solidez, es

importante hacer varios cálculos explícitos que revelen cualquier detalle técnico que pueda aparecer a lo largo del proceso.

Es por esto que planeo iniciar mi doctorado trabajando directamente con ejemplos específicos que si bien no llevarían a resultados nuevos, me permitirán tener un mejor dominio de la teoría.

Entre los cálculos explícitos que planeo realizar, está el graficar multiconstelaciones para casos específicos y conocidos de  $k$ -planos anticonherentes. Ésto con la expectativa de que al estar más familiarizada con el comportamiento de los objetos involucrados, podría encontrar una manera de caracterizar los planos anticonherentes a través de sus multiconstelaciones o de su representación como vector columna en el espacio  $\mathbb{C}^{\binom{N}{k}}$ . Esto es algo que hasta el momento no se ha encontrado, por lo que podría ser un primer resultado de mi proyecto.

En una siguiente etapa, quisiera encontrar una manera de expresar la función  $f_\pi$  de la ecuación (51) como una función cuyo dominio sea el espacio cociente  $\text{Gr}(k, N)/SU(2)$ . Esperaríamos que en este caso, los puntos críticos (mínimos) de la función sí sean aislados y por lo tanto la función pueda ser tratada como función de Morse.

En caso de ser así, explotar todas las herramientas de la Teoría de Morse para obtener información respecto a la topología del espacio de  $k$ -planos anticonherentes.

Conforme avance en mi investigación, mi plan es poco a poco integrar todos los elementos teóricos que están expuestos en este escrito, más cualquier otro que pueda encontrar en el transcurso de mi doctorado, todo esto con el fin de hallar una manera sistemática de definir planos anticonherentes en cualquier espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de espín arbitrario  $s$  lo cual será de suma utilidad para definir compuertas lógicas estables para el cómputo cuántico como fases geométricas de Wilczek-Zee.

## Referencias

- [1] D. Baguette and J. Martin. Anticoherence measures for pure spin states. *Physical Review A*, 96(3), 2017.
- [2] E. Bannai and M. Tagami. A note on anticoherent spin states. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(34):342002, aug 2011.
- [3] I. Bengtsson and K. Życzkowski. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, 2006.
- [4] M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *A Half-century of Physical Asymptotics and Other Diversions: Selected Works By Michael Berry*, pages 72–84, 2017.
- [5] C. Chryssomalakos, E. Guzmán-González, L. Hanotel, and E. Serrano-Ensástiga. Stellar Representation of Multipartite Antisymmetric States. *Communications in Mathematical Physics*, 381(2):735–764, 2021.
- [6] C. Chryssomalakos, L. Hanotel, E. Guzmán-González, and E. Serrano-Ensástiga. Toponomic Quantum Computation. (3):1–5, 2022.
- [7] D. P. DiVincenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte der Physik*, 48(9-11):771–783, 2000.
- [8] L. Hanotel. *Geometry of multipartite quantum systems*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2022.
- [9] F. Klein and G. Morrice. *Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree*. Dover Books. S. Dover Publications, 1956.
- [10] E. Majorana. Atomi orientati in campo magnetico variabile. *Il Nuovo Cimento*, 9:43–50, 1932.
- [11] J. Martin, O. Giraud, P. A. Braun, D. Braun, and T. Bastin. Multiqubit symmetric states with high geometric entanglement. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 81(6), 2010.
- [12] Y. Matsumoto. *An Introduction to Morse Theory (Translations of Mathematical Monographs, Vol. 208)*. American Mathematical Society, 2001.
- [13] N. Mukunda and R. Simon. Quantum kinematic approach to the geometric phase. I. General Formalism. *Annals of Physics*, 228(2):205–268, 1993.
- [14] R. Pereira and C. Paul-Paddock. Anticoherent subspaces. *Journal of Mathematical Physics*, 58(6):1–10, 2017.

- [15] A. Perelomov. *Generalized Coherent States and their Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [16] A. M. Perelomov. Coherent states for arbitrary Lie group. *Communications in Mathematical Physics*, 26(3):222–236, 1972.
- [17] F. Wilczek and A. Zee. Appearance of gauge structure in simple dynamical systems. *Physical Review Letters*, 52(24):2111–2114, 1984.
- [18] P. Zanardi and M. Rasetti. Holonomic quantum computation. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 264(2-3):94–99, 1999.
- [19] J. Zimba. “ Anticoherent ” Spin States via the Majorana Representation. 10(10):143–156, 2006.