



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
MEDIOS CONTINUOS**

**MECANISMOS DE INESTABILIDAD HIDRODINÁMICA EN INSTRUMENTOS DE
DOBLE CAÑA**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
LUIS FERNANDO RODRIGUEZ ESCOBEDO

TUTOR PRINCIPAL
DR. PABLO LUIS RENDÓN GARRIDO
INSTITUTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA (ICAT)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
Dr. CARLOS MÁLAGA IGUIÑIZ
FACULTAD DE CIENCIAS

DR. JOSÉ FEDERICO HERNÁNDEZ SÁNCHEZ
INSTITUTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA (ICAT)

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO DEL 2023.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En la presente investigación se implementa un modelo que intenta determinar el o los mecanismos que llevan a un flujo dentro de un instrumento de doble caña a la inestabilidad. El canal divergente que forman las dos cañas se modela como un flujo de Jeffery - Hamel. Para emular lo que realmente sucede dentro de las cañas en instrumentos musicales se consideró la aproximación de número de Reynolds tendiendo a infinito y condiciones de frontera con paredes rígidas. A pesar de que dichas aproximaciones no son del todo realistas, el resultado de inestabilidad que se obtiene, aunque muy limitado, sugiere el acoplamiento de la dinámica de las cañas y el flujo como mecanismo de inestabilidad y control del flujo en instrumentos musicales de este tipo.

Índice general

RESUMEN	III
Índice general	IV
Índice de figuras	VI
Agradecimientos	VII
Dedicatoria	VIII
1. Introducción	1
1.1. Instrumentos de doble caña: Estado del arte	1
1.2. Motivación de la investigación	2
1.3. Objetivos	3
1.4. Hipótesis	3
1.5. Enfoque de la investigación	3
2. Estabilidad Hidrodinámica	4
2.1. Teoría de bifurcaciones	5
2.2. Estabilidad lineal	9
2.2.1. Solución de las ecuaciones perturbadas linealizadas	12
2.2.2. Estabilidad de flujos viscosos cuasi-paralelos	14
2.2.3. Criterios de estabilidad para flujo inviscido	18
2.2.4. Estabilidad de flujo viscoso	20
3. Desarrollo de turbulencia	23
3.1. Tipos de flujos turbulentos	23
3.2. Propiedades de los flujos turbulentos	24
3.3. Enfoque de Landau sobre la turbulencia	26
4. Flujo de Jeffery - Hamel	29
4.1. Descripción del flujo	29
4.2. Solución exacta del flujo de Jeffery – Hamel	30

Índice general

4.2.1. Canal divergente	33
4.3. Solución asintótica del flujo de Jeffery - Hamel	37
4.3.1. Caso cuando $\alpha \rightarrow 0$	39
4.3.2. Caso cuando $R_e \rightarrow 0$	40
4.3.3. Caso cuando $R_e \rightarrow \infty$	42
4.4. Análisis de estabilidad lineal del flujo de Jeffery - Hamel	45
5. Aplicación del flujo de Jeffery- Hamel en el mecanismo de doble caña	48
6. Análisis de Resultados y Conclusiones	53
Referencias Bibliográficas	55
7. Apéndice	57
7.1. Ecuaciones de estabilidad lineal para el flujo de Jeffery - Hamel mediante modos con crecimiento temporal	57

Índice de figuras

1.1. Mecanismo de doble caña	1
1.2. Relación no lineal entre la presión y el flujo dentro de la doble caña	2
2.1. Velocidad de una partícula en una dimensión.	6
2.2. Estabilidad de la partícula ante pequeños desplazamientos sobre sus puntos de equilibrio.	7
2.3. Ejemplo de bifurcación: bifurcación tridente	10
2.4. Curvas de estabilidad neutral de la capa límite de Blasius	21
4.1. Flujo de Jeffery - Hamel en dos dimensiones	29
4.2. Pérdida de simetría del Flujo de Jeffery - Hamel	36
4.3. Solución asintótica del flujo de Jeffery- Hamel cuando $R_e \rightarrow 0$	42
4.4. Capa límite en un canal convergente	43
4.5. Variable de reescalamiento dentro de la capa límite	44
5.1. C vs α	51
5.2. C vs K	52

Agradecimientos

Primeramente, a mi asesor el Dr. Pablo Rendón, quien más allá de servir como guía en mi trabajo de investigación y ser una inspiración como investigador, siempre fue comprensivo ante las situaciones que se me presentaron, mostrando su calidad humana. A cada uno de los profesores que a lo largo de la maestría me compartieron parte de sus conocimientos y su pasión por la ciencia, principalmente al Dr. Carlos Málaga. Al posgrado en Ciencias físicas y a la UNAM por otorgarme una educación de excelencia, al CONACYT por los dos años en que fui parte del padrón de beneficiarios de la beca de posgrado nacional, y finalmente al proyecto PAPIIT IN113820, financiado por DGAPA-UNAM por apoyar mi trabajo de investigación.

Dedicatoria

Para Dios y para mi familia.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Instrumentos de doble caña: Estado del arte

En instrumentos musicales de soplo directo, una caña es un tipo de válvula capaz de regular el flujo de aire producido por una diferencia de presiones entre la boquilla del instrumento y la boca del músico. Este principio aplica ya sea para instrumentos de una sola caña, como el clarinete, o para instrumentos de doble caña como el oboe o el fagot. En ambos casos, la fuente de energía para producir sonido es el flujo de aire por sí mismo [3]. Una caña puede ser modelada como una viga elástica con una diferencia de presiones actuando sobre ambos lados de la estructura. En instrumentos de doble caña, el desplazamiento de una caña está limitada por el desplazamiento de la otra, este tipo de condiciones de frontera son llamadas condicionales y producen efectos no lineales en la dinámica de las cañas [3].

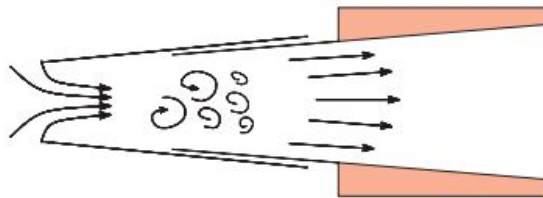


Figura 1.1: Mecanismo de doble caña en instrumentos musicales [12].

El estudio de la producción de sonido en instrumentos de doble caña no ha recibido tanta atención comparada con el entendimiento que se tiene de los instrumentos de una sola caña. Esto se debe principalmente a la complejidad del material, el cual es poroso con propiedades viscoelásticas [8].

En 1999, Nagata y Cole [10] estudiaron numéricamente la estabilidad de un flujo de Poiseuille entre paredes deformables encontrando que per-

1.2. Motivación de la investigación

turbaciones antisimétricas son menos desestabilizadoras que perturbaciones simétricas. Sin embargo, algunas de las primeras investigaciones sobre instrumentos de doble caña fueron llevadas a cabo por Almeida y Vergez [1] quienes estudiaron las características no lineales del sistema compuesto por la doble caña, específicamente la relación no lineal entre la caída de presión en la doble caña y el volumen de fluido que pasa a través de ella. Los resultados experimentales de sus mediciones revelaron que el comportamiento de instrumentos de una sola caña, como el clarinete, e instrumentos de doble caña es similar en el régimen cuasi-estático. Posteriormente, Almeida y Vergez propusieron que la presión dentro de la doble caña es distinta a la presión a la entrada del resonador, estando estas ligadas por una relación no lineal [12].

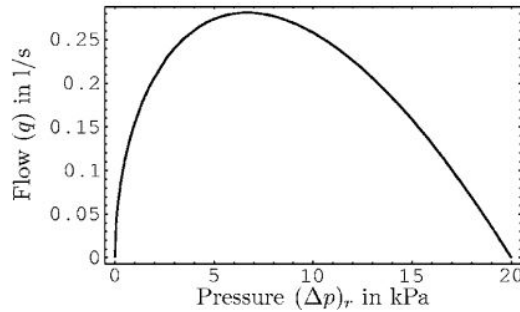


Figura 1.2: Relación no lineal entre la presión y el flujo dentro de la doble caña [12].

Esta relación es parametrizada por un coeficiente que captura la diferencia con modelos anteriores donde no se consideraba la recuperación de presión, tal que cuando este coeficiente es cero se recuperan los resultados de dichos modelos [13]. También Almeida y Vergez predijeron analítica y numéricamente que la auto oscilación en la doble caña puede tener tres posibles comportamientos dependiendo de la magnitud de la relación no lineal antes mencionada. Dos de estos comportamientos presentan histéresis.

1.2. Motivación de la investigación

En instrumentos de una caña el control del flujo se entiende por medio de disipación de energía cinética del chorro formado corriente abajo de la caña

[8]. De igual manera, en instrumentos de doble caña las oscilaciones son auto sostenidas debido a la disipación de energía en el flujo, siendo la turbulencia la manifestación de dicha disipación. La turbulencia es alimentada por mecanismos de disipación lineales y no lineales [8]. Por el momento no se tiene un claro entendimiento sobre dichos mecanismos más allá de las relaciones no lineales estudiadas por Almeida y Vergez [1] [12]. Este es el motivo por el cual en el presente trabajo se tratará de entender dichos mecanismos a partir de un análisis de estabilidad lineal.

1.3. Objetivos

Determinar el o los mecanismos que producen inestabilidades hidrodinámicas en instrumentos de doble caña mediante un modelo de juguete.

Validar cualitativamente el modelo propuesto de acorde a lo esperado según el estado del arte actual.

1.4. Hipótesis

El flujo de aire dentro de un mecanismo de doble caña (canal divergente) es completamente inestable para todo ángulo de apertura.

La interacción entre las cañas y el flujo de aire juega un papel importante a fin de modelar con precisión la inestabilidad lineal del flujo.

1.5. Enfoque de la investigación

Con el fin de determinar el o los mecanismos que producen inestabilidades hidrodinámicas en instrumentos de doble caña, se propone modelar el flujo dentro de la doble caña como un flujo de Jeffery - Hamel. Dicho esto, la investigación solo se enfoca en tratar de entender el inicio de la inestabilidad mas no su propagación. Dada la dificultad matemática que implicaría resolver analíticamente un modelo con condiciones de frontera similares al mecanismo de doble caña (paredes flexibles), se asume un flujo a través de paredes rígidas y a número de Reynolds grande lo cual simplifica la solución aproximada del problema y permite emplear las herramientas matemáticas que se tienen hasta el momento para el análisis de estabilidad lineal del flujo de Jeffery - Hamel.

Capítulo 2

Estabilidad Hidrodinámica

Resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para analizar un determinado flujo puede volverse una tarea muy complicada que en el mejor de los casos involucra la implementación de herramientas matemáticas complejas, desafortunadamente en la gran mayoría de las ocasiones se tiene que hacer uso de métodos numéricos para encontrar una solución a dicho flujo [1]. Se entiende por solución a cualquier flujo definido por un campo vectorial de velocidades y un campo escalar de presiones que satisfacen las ecuaciones de Navier-Stokes. La principal razón por lo cual las ecuaciones de Navier-Stokes son tan complicadas de resolver analíticamente se debe a que el término que modela los efectos inerciales en el flujo es no lineal. Las ecuaciones no lineales son un desafío matemático sin importar el fenómeno físico que modelen, sin embargo, en dinámica de fluidos existe una serie de soluciones analíticas muy conocidas en las cuales se suele despreciar el término inercial ya sea por argumentos de simetría, escalas o por simple intuición de la física del problema.

A pesar de que dichas soluciones, por definición, satisfacen las ecuaciones de Navier - Stokes y cualitativamente describen lo que uno esperaría observar en la naturaleza o al menos en los experimentos, esto no es generalmente posible. En un contexto puramente matemático, esto se debe a que dichas soluciones forman parte de un subconjunto de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas soluciones pueden ser estables o inestables, se dice que una solución es inestable cuando una pequeña perturbación en el sistema crece tanto que dicha solución tiende a una solución secundaria o a la turbulencia [4]. Por otro lado, la solución podría ser estable si la perturbación se amortigua con rapidez, generalmente debido a la presencia de viscosidad. Se puede considerar como perturbación a cada una de las condiciones físicas que se apartan de un flujo ideal como pueden ser la rugosidad de las paredes que confinan un flujo, las ondas acústicas que transfieren energía al fluido o irregularidades en el flujo lejano.

Típicamente, flujos con número de Reynolds grande son inestables y tien-

den a volverse turbulentos rápidamente, ejemplos de este tipo de flujos son: flujos en tuberías, flujos entre paredes, jets y shear layers. Sin embargo, no todos los flujos se vuelven turbulentos una vez son inestables, el ejemplo más conocido es el flujo de Couette el cual hace una transición a una nueva solución conocida como vórtices de Taylor, la cual a su vez puede volverse inestable a cierto número de Reynolds y finalmente desarrollar turbulencia [11].

2.1. Teoría de bifurcaciones

En general, los campos de velocidad y de presión dependen del número de Reynolds y podría haber más de una solución estacionaria para el mismo valor de R_e . Cuando variamos R_e ocurre un cambio cualitativo del conjunto de soluciones para un determinado flujo estacionario, a este comportamiento se le conoce como **bifurcación** [6].

Para introducir el tema supondremos que queremos encontrar la posición de una partícula que se mueve en una dimensión, cuando $t \rightarrow \infty$. Además, su velocidad se describe por la siguiente ecuación no lineal:

$$\frac{dx}{dt} = \cos(x) \quad (2.1)$$

Con condición inicial $x(0) = x_0$. Usando el método de variables separables para resolver [2.1], se llega al resultado:

$$\text{LN}|\text{SEC}(x) + \text{TAN}(x)| = t + c$$

E imponiendo la condición inicial se obtiene:

$$t = \text{LN} \left| \frac{\text{SEC}(x) + \text{TAN}(x)}{\text{SEC}(x_0) + \text{TAN}(x_0)} \right|$$

Por lo tanto, cuando $t \rightarrow \infty$, se debe cumplir que $\text{SEC}(x) + \text{TAN}(x) \rightarrow \infty$, o expresado de otra manera,

2.1. Teoría de bifurcaciones

$$\frac{1}{\cos(x)} + \frac{\text{SEN}(x)}{\cos(x)} \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

Lo cuál es válido para todo $\cos(x) = 0$, por lo tanto x acepta valores $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$...

El problema se presenta cuando asignamos arbitrariamente un valor a x_o , por ejemplo, $x_o = 2\pi$. En este caso la partícula podría estar en $x = \frac{3\pi}{2}$ ó $x = \frac{5\pi}{2}$ cuando $t \rightarrow \infty$. El objetivo ahora es determinar en cuál de los dos puntos se localizará la partícula, y para lograrlo basta con hacer un análisis gráfico, sin necesidad de resolver ninguna ecuación diferencial. El método es el siguiente:

Para el caso de nuestra partícula, graficamos [2.1](#):

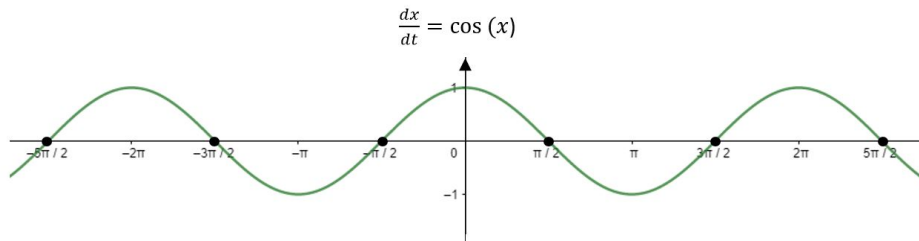


Figura 2.1: Velocidad de una partícula en una dimensión cuya función es el coseno de su posición.

Los puntos donde $f(x) = \frac{dx}{dt} = 0$ se llaman puntos fijos, pues en estos puntos la partícula tiene velocidad cero, se encuentra en un estado estacionario. Si la partícula se encuentra en $x_o = 2\pi$, se moverá hacia su derecha tendiendo a $\frac{5\pi}{2}$, ya que en la región $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ la velocidad es positiva (figura [2.2](#)).

El análisis más importante es sin duda averiguar que pasa cuando aplicamos un desplazamiento (perturbación), ϵ , a la partícula en el punto fijo $x = \frac{5\pi}{2}$. Vemos en la figura [2.2](#) que al perturbar infinitesimalmente hacia la izquierda o hacia la derecha la partícula tenderá a recuperar su posición de equilibrio, se dice entonces que $x = \frac{5\pi}{2}$ es un punto fijo (estado estacionario) estable. Por el contrario, al perturbar en $x = \frac{3\pi}{2}$ la partícula tenderá a alejarse de

2.1. Teoría de bifurcaciones

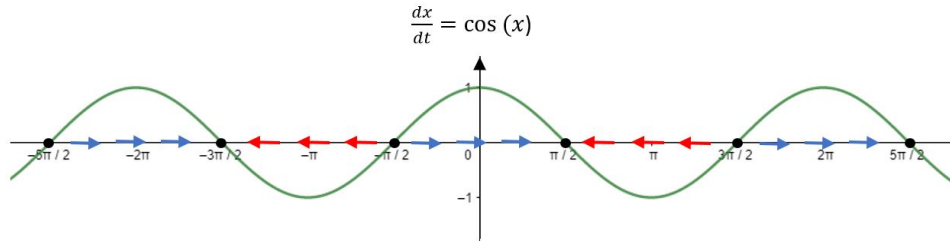


Figura 2.2: Estabilidad de la partícula ante pequeños desplazamientos sobre sus puntos de equilibrio.

su punto de equilibrio, se dice que $x = \frac{3\pi}{2}$ es un punto fijo inestable¹.

Este análisis se puede hacer de manera analítica, sin necesidad de graficar, para cualquier EDO no lineal de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.3)$$

Los puntos fijos, x_f , son aquellos que cumplen la condición $f(x_f) = 0$. Por otro lado, determinar si un punto fijo es estable o inestable es menos trivial. Empezamos imponiendo que $x = x_f + \epsilon$ y estudiamos la evolución de ϵ en el tiempo:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_f}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = f(x) = f(x_f + \epsilon)$$

Expandiendo en series de Taylor $f(x_f + \epsilon)$ para $\epsilon \ll 1$:

$$\frac{d\epsilon}{dt} \approx f(x_f) + f'(x_f)(\epsilon + x_f - x_f)$$

Por construcción $f(x_f) = 0$, por lo tanto:

¹El sistema siempre buscará posicionarse en puntos de equilibrio estables

$$\frac{d\epsilon}{dt} \approx \epsilon f'(x_f) \quad (2.4)$$

Resolviendo [2.4](#) se obtiene:

$$\epsilon(t) = \epsilon_o e^{f'(x_f)t} \quad (2.5)$$

En conclusión, la estabilidad **lineal** de un punto fijo la determina el signo da la derivada evaluada en ese punto.

Haciendo uso de lo anterior podemos finalmente aterrizar al tema de bifurcaciones: Cuando tenemos una EDO no lineal de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) \quad (2.6)$$

Siendo λ un parámetro del sistema, el comportamiento del sistema dinámico cambiará drásticamente para pequeñas variaciones de λ , al punto donde ocurre esta transición se le llama bifurcación. Un caso particular de [2.6](#) ocurre cuando

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - x^3 \quad (2.7)$$

Los puntos fijos corresponden a las raíces de la ecuación $x_f(\lambda - x_f^2) = 0$, sin embargo, dado que λ no tiene un valor fijo, tendremos tres casos:

- $\lambda > 0$
 $x_f(\sqrt{\lambda} - x_f)(\sqrt{\lambda} + x_f) = 0 \rightarrow x_{f1} = 0, x_{f12} = \sqrt{\lambda}, x_{f3} = -\sqrt{\lambda}$
- $\lambda = 0$
 $x_f^3 = 0 \rightarrow x_{f1} = x_{f2} = x_{f3} = 0$
- $\lambda < 0$ ²
 $x_f = 0$

² $x_f(\lambda - x_f^2)$ no se puede factorizar

2.2. Estabilidad lineal

Se determina la estabilidad para cada caso evaluando $f'(x) = \lambda - 3x^2$ en los puntos fijos:

- $\lambda > 0$
 $f'(x_f = 0) = \lambda > 0 \rightarrow$ inestable
 $f'(x_f = \sqrt{\lambda}) = -2\lambda < 0 \rightarrow$ estable
 $f'(x_f = -\sqrt{\lambda}) = -2\lambda < 0 \rightarrow$ estable
- $\lambda = 0$
 $f'(x_f = 0) = \lambda = 0 \rightarrow$ débilmente inestable³
- $\lambda < 0$
 $f'(x_f = 0) = \lambda < 0 \rightarrow$ estable

Para valores negativos de λ el sistema es estable en $x_f = 0$, sin embargo, cuando toma valores positivos el sistema se vuelve inestable y su configuración cambia adquiriendo un nuevo estado estable. Este enunciado se representa mediante un diagrama de bifurcación (figura [2.3](#))

A este tipo de bifurcación se le conoce como tridente. Existen otro tipo de bifurcaciones, como la de punto de retorno, bifurcación transcítica, bifurcación Hopf, entre otras [\[6\]](#).

Los modelos algebraicos son muy simples, sin embargo, ilustran y son relevantes para entender conceptos importantes en hidrodinámica, ya que representan asintóticamente las propiedades locales de muchas inestabilidades y bifurcaciones de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes [\[6\]](#).

2.2. Estabilidad lineal

Para un sistema existe un conjunto X_1, \dots, X_j de parámetros característicos, los elementos de este conjunto forman un espacio tal que existe un lugar geométrico que separa los estados estables de los inestables, a esta separación se le conoce como estabilidad marginal del sistema [\[4\]](#). La estabilidad

³La inestabilidad no es capturada analizando la estabilidad lineal

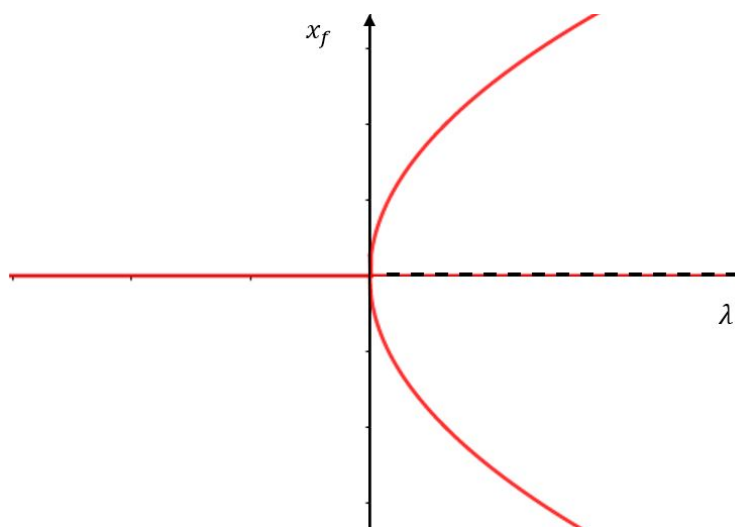


Figura 2.3: Bifurcación tridente: Las líneas sólidas representan puntos fijos estables, mientras que las líneas punteadas puntos fijos inestables

marginal en el espacio X_1, \dots, X_j se define por la ecuación:

$$\sum X_1, \dots, X_j = 0 \quad (2.8)$$

Entonces, para sistemas hidrodinámicos podemos pasar de estados estables a inestables cuando uno de los parámetros toma cierto valor crítico manteniendo el resto de los parámetros constantes. Los estados de estabilidad marginal en sistemas disipativos pueden clasificarse en aperiódicos u oscilatorios según como sus perturbaciones crecen o amortiguan. En el primer caso, la transición de estabilidad a inestabilidad se da por medio de un estado de estabilidad marginal que presenta patrones de movimiento estacionarios. Por otro lado, cuando la amplitud de las perturbaciones crece o decrece de manera oscilatoria, el estado marginal de transición presenta movimientos oscilatorios a cierta frecuencia característica. Si al establecerse la inestabilidad se forman patrones estacionarios se dice que prevalece el principio de intercambio de estabildades, en cambio, si se establecen movimientos oscilatorios se dice que hay sobre-estabilidad [4].

2.2. Estabilidad lineal

Las teorías de estabilidad en dinámica de fluidos suelen ser matemáticamente muy complejas, factor que disminuye el ritmo en el desarrollo de avances en esta área de estudio [11]. Dentro de los múltiples métodos que existen para estudiar la estabilidad de un fluido estacionario se encuentra el análisis de estabilidad lineal, el cual se realiza de manera metódica. La teoría de estabilidad lineal se basa en tomar una solución de las ecuaciones de Navier Stokes, $\rho_o(x, y, z)$, $\vec{u}_o(x, y, z)$ y $p_o(x, y, z)$, e imponerle una perturbación que puede deberse a cualquiera de los factores mencionados anteriormente. Matemáticamente, estas perturbaciones se modelan sumando a nuestra solución un campo de velocidades, densidad y presión de orden de magnitud $\epsilon \ll 1$.

$$\rho = \rho_o + \epsilon\rho', \quad \vec{u} = \vec{u}_o + \epsilon\vec{u}', \quad p = p_o + \epsilon p'$$

$\rho(x, y, z)$, $\vec{u}(x, y, z)$ y $p(x, y, z)$ son los campos de densidad, velocidades y presiones “totales” respectivamente, mientras que ρ' , \vec{u}' y p' son sus respectivas perturbaciones las cuales tienen dependencia espacial y temporal. Sustituyendo los campos totales en la ecuación de momento de Navier-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\vec{u}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{f} \quad (2.9)$$

Y agrupando los términos por orden de magnitud podemos identificar a orden 1 la ecuación del flujo base:

$$\rho_o\vec{u}_o \cdot \nabla\vec{u}_o = -\nabla p_o + \mu\nabla^2\vec{u}_o, \quad (2.10)$$

Una ecuación de orden ϵ^2 la cual por construcción de la teoría de estabilidad lineal es despreciable y finalmente la ecuación de orden ϵ :

$$\frac{\partial\vec{u}'}{\partial t} + \vec{u}_o \cdot \nabla\vec{u}' + \vec{u}' \cdot \nabla\vec{u}_o = -\frac{\nabla p'}{\rho_o} + \nu\nabla^2\vec{u}' \quad (2.11)$$

La cual describe la evolución espacial y temporal de las perturbaciones. Claramente [2.11] es una ecuación lineal con coeficientes que dependen de las coordenadas espaciales a través del flujo base (el cual es estacionario). Bajo una perspectiva física, [2.11] sugiere que la evolución temporal de las perturbaciones se debe a la presencia de mecanismos lineales que ocurren por el solo hecho de que exista un flujo base [6].

En las ecuaciones [2.10] y [2.11] no se han considerado fuerzas de cuerpo como lo pueden ser las debidas a campos gravitatorios, magnéticos o eléctricos⁴. El mismo procedimiento de linealización se hace para la ecuación de continuidad, tal que:

$$\nabla \cdot \vec{u}_o = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}' = 0 \quad (2.13)$$

Además de linealizar las ecuaciones de N-S y de continuidad, en ocasiones es necesario proceder de la misma manera con las ecuaciones de balance de energía y balance de masa para flujo compresible [4]; por ejemplo, la ecuación de balance de energía es importante en casos donde en la inestabilidad interviene un gradiente de temperatura.

2.2.1. Solución de las ecuaciones perturbadas linealizadas

La solución natural para la ecuación lineal [2.11] es una de la forma:

$$f(x, y, z)e^{ict} \quad (2.14)$$

Es decir, una solución armónica. Una solución de este tipo es muy conveniente, ya que la estabilidad del flujo queda determinada únicamente por el valor de la exponencial, modela el comportamiento periódico que suponemos para ciertas simetrías y evadimos el problema de asignar condiciones iniciales a las perturbaciones.

⁴Se puede argumentar también que las fuerzas de cuerpo están incluidas en el término del gradiente de presión.

2.2. Estabilidad lineal

Por ejemplo, si consideramos un flujo básico en dirección x tal que la velocidad en esa dirección depende únicamente de la coordenada y , la puede modelarse como una onda viajera en modos normales [6] cuya amplitud depende de y , es decir, la parte real de

$$v' = \hat{v}(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \alpha ct)} \quad (2.15)$$

Donde la amplitud $\hat{v}(y)$ es una función compleja, α y β son los números de onda en dirección x y z respectivamente y el número total de onda tiene magnitud $k = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$.

Por otra parte, la velocidad de onda, C , es un número complejo cuya importancia física es evidente cuando lo separamos en sus partes reales y e imaginarias:

$$C = C_r + iC_i \quad (2.16)$$

Sustituyendo 2.16 en 2.15, se obtiene que:

$$v' = \hat{v}(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \alpha C_r t)} e^{\alpha C_i t} \quad (2.17)$$

A partir de esta ecuación, C_r es la velocidad de fase y C_i , asumiendo $\alpha > 0$, es la cantidad que determina la estabilidad del flujo de la siguiente manera:

$C_i < 0$: Flujo estable

$C_i > 0$: Flujo inestable

$C_i = 0$: Flujo neutralmente estable

Este tipo de análisis de estabilidad lineal, cuando C es complejo, es llamado análisis de estabilidad temporal [6]. Otro tipo de análisis, el cual no será parte de este trabajo, es el de estabilidad temporal donde $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$.

2.2.2. Estabilidad de flujos viscosos cuasi-paralelos

Se adimensionaliza la ecuación de momento de Navier-Stokes [2.9](#) con la distancia L , velocidad, V , presión ρV^2 y tiempo L/V , donde L y V caracterizan el flujo, de tal manera que obtenemos la ecuación adimensional:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} \quad (2.18)$$

Donde $Re = \frac{\rho V L}{\mu}$, la solución y las coordenadas espaciales y temporales son adimensionales.

En presencia de un flujo base unidireccional cuya amplitud varía perpendicularmente a las paredes:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = u_o(z) \hat{i} + \vec{u}'(\vec{x}, t) \quad (2.19)$$

$$p(\vec{x}, t) = p_o(\vec{x}, t) + p'(\vec{x}, t) \quad (2.20)$$

Asumimos que las perturbaciones son de orden de magnitud ϵ . Ahora, sustituyendo [2.19](#) y [2.20](#) en [2.18](#) obtenemos la ecuación lineal que describe la evolución espacial y temporal de las perturbaciones:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_o \frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{u}' + w' \frac{du_o}{dz} \hat{i} = -\nabla p' + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u}' \quad (2.21)$$

Cabe señalar que en la ecuación para flujo básico unidireccional en coordenadas cartesianas no aparece el término inercial $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ ya que es un término de segundo orden.

Por razones que ya se han discutido, es justificado aproximar la perturbación como una solución oscilatoria, en esta ocasión de la forma:

$$u'(\vec{x}, t) = \hat{u}(z) e^{i(\alpha x + \beta y - \alpha c t)} \quad (2.22)$$

2.2. Estabilidad lineal

$$p'(\vec{x}, t) = \hat{p}(z)e^{i(\alpha x + \beta y - \alpha ct)} \quad (2.23)$$

Donde $C = C_r + iC_i$ y αC_r es la frecuencia de oscilación de una onda con velocidad de fase $\frac{\alpha C_r}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$ con razón de crecimiento αC_i .

Se sustituyen [2.22](#) y [2.23](#) en las ecuaciones de balance de momento y continuidad, como resultado tenemos las siguientes tres ecuaciones:

$$i\alpha(u_o - C)\hat{u} + Du_o\hat{w} = -i\alpha\hat{p} + \frac{1}{Re}(D^2 - (\alpha^2 + \beta^2))\hat{u} \quad (2.24)$$

$$i\alpha(u_o - C)\hat{v} = -i\beta\hat{p} + \frac{1}{Re}(D^2 - (\alpha^2 + \beta^2))\hat{v} \quad (2.25)$$

$$i\alpha(u_o - C)\hat{w} = -D\hat{p} + \frac{1}{Re}(D^2 - (\alpha^2 + \beta^2))\hat{w} \quad (2.26)$$

$D = \frac{d}{dz}$. En un canal con paredes rígidas se deben cumplir las condiciones $\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = D\hat{w}$ en $Z = Z_1$ y $Z = Z_2$.

El sistema [2.24](#) - [2.26](#) se puede cambiar de uno de tres dimensiones a uno de dos dimensiones mediante la siguiente transformación [\[11\]](#):

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \\ \tilde{\alpha}\tilde{u} &= \alpha\hat{u} + \beta\hat{v} \\ \tilde{p} &= \hat{p} \\ \tilde{w} &= \hat{w} \\ \tilde{C} &= C \\ \tilde{\alpha}\tilde{Re} &= \alpha Re \end{aligned}$$

Entonces:

$$i\tilde{\alpha}(u_o - \tilde{C})\tilde{u} + Du_o\tilde{w} = -i\tilde{\alpha}\tilde{p} + \frac{1}{Re}(D^2 - \tilde{\alpha}^2)\tilde{u} \quad (2.27)$$

$$i\tilde{\alpha}(u_o - \tilde{C})\tilde{w} = -D\tilde{p} + \frac{1}{Re}(D^2 - \tilde{\alpha}^2)\tilde{w} \quad (2.28)$$

2.2. Estabilidad lineal

$$i\tilde{\alpha}\tilde{u} + D\tilde{w} \quad (2.29)$$

En $Z = Z_1$ y $Z = Z_2$,

$$\tilde{u} = \tilde{w} = 0$$

Dicha transformación se llama transformación de Squire [11] y dado que $\tilde{\alpha} \geq \alpha \implies \tilde{R}_e \leq R_e$, implica que para obtener el mínimo Reynolds crítico es suficiente considerar solo perturbaciones en dos dimensiones. Como consecuencia de la transformación de Squire, aplicando la ecuación de continuidad, podemos modelar la estabilidad del flujo mediante la función de corriente, Ψ , reduciendo el sistema a una sola ecuación.

Por lo tanto, si consideramos un flujo bidimensional incompresible es posible suponer:

$$\hat{u} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (2.30)$$

$$\hat{w} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.31)$$

Proponiendo Ψ en modos normales:

$$\Psi = \phi(z)e^{i(\tilde{\alpha}x - \tilde{\alpha}ct)} \quad (2.32)$$

Sustituimos en [2.30] y [2.31]:

$$\tilde{u} = D\phi e^{i(\tilde{\alpha}x - \tilde{\alpha}ct)} \quad (2.33)$$

$$\tilde{w} = -i\tilde{\alpha}\phi e^{i(\tilde{\alpha}x - \tilde{\alpha}ct)} \quad (2.34)$$

2.2. Estabilidad lineal

Entonces, sustituyendo \tilde{u} y \tilde{w} en el sistema [2.27](#) - [2.28](#) se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones para resolver $\phi(z)$, la amplitud de la función de corriente:

$$i\tilde{\alpha}(u_o - \tilde{C})D\phi - i\alpha D u_o \phi = -i\tilde{\alpha}\tilde{p} + \frac{1}{\tilde{R}_e}(D^2 - \tilde{\alpha}^2)D\phi \quad (2.35)$$

$$-(i\tilde{\alpha})^2(u_o - \tilde{C})\phi = -D\tilde{p} - \frac{i\tilde{\alpha}}{\tilde{R}_e}(D^2 - \tilde{\alpha}^2)\phi \quad (2.36)$$

Multiplicando [2.36](#) por $-i\tilde{\alpha}$ y sustituyendo $-i\tilde{\alpha}\tilde{p}$ de [2.35](#):

$$-i\tilde{\alpha}^3(u_o - \tilde{C})\phi = -i\tilde{\alpha}(u_o - \tilde{C})D^2\phi + i\tilde{\alpha}D^2u_o\phi + \frac{1}{\tilde{R}_e}(D^2 - \tilde{\alpha}^2)\phi \quad (2.37)$$

Finalmente, dividiendo [2.37](#) entre $i\tilde{\alpha}$ y despejando el tercer término del segundo miembro, se obtiene la ecuación ordinaria con coeficientes variables complejos:

$$\frac{1}{i\tilde{\alpha}\tilde{R}_e}(D^2 - \tilde{\alpha}^2)^2\phi = (u_o - \tilde{C})(D^2 - \tilde{\alpha}^2)\phi - D^2u_o\phi \quad (2.38)$$

Con condiciones de frontera $\phi = D\phi = 0$ en $Z = Z_1$ y $Z = Z_2$. [2.38](#) es conocida como ecuación de Orr-Sommerfeld [\[6\]](#), la cual corresponde a la ecuación de vorticidad en dos dimensiones. Para flujos cuyo Reynolds es muy grande, caso inviscido, despreciamos el lado izquierdo de la ecuación de Orr-sommerfeld y obtenemos la ecuación de Rayleigh [\[6\]](#):

$$(u_o - \tilde{C})(D^2 - \tilde{\alpha}^2)\phi - D^2u_o\phi = 0 \quad (2.39)$$

Con condición de frontera $\phi = 0$ en $Z = Z_1$ y $Z = Z_2$.

En adelante, **por simplicidad en la escritura**, Se omitirán las tildes sobre C y α en las ecuaciones [2.38](#) y [2.39](#).

2.2.3. Criterios de estabilidad para flujo inviscido

La ecuación Rayleigh es dos órdenes menor en derivadas que la ecuación de Orr- Sommerfeld, lo que la hace manejable para determinar los criterios de estabilidad en flujos cuasi-paralelos. A continuación, se muestran cuatro criterios de estabilidad que resultan de trabajar con la ecuación de Rayleigh [6](#):

- Teorema de punto de inflexión de Rayleigh:

Reescribimos [2.39](#) de la siguiente forma:

$$\phi'' - \alpha^2 \phi - \frac{u_o''}{u_o - C} \phi = 0$$

Ahora, suponiendo condición de inestabilidad, $C_i \geq 0$, multiplicando la ecuación por el complejo conjugado de ϕ e integrando por partes desde Z_1 hasta Z_2 se llega a la ecuación:

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \{|D\phi|^2 + \alpha^2\} dz + \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{u_o''}{u_o - C} |\phi|^2 dz = 0$$

Dado que $C = C_r + C_i$, se puede separar la anterior ecuación en parte real:

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \{|D\phi|^2 + \alpha^2 |\phi|^2 + \frac{u_o''(u_o - C_r)}{|u_o - C|^2} |\phi|^2\} dz = 0 \quad (2.40)$$

Y parte imaginaria:

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \frac{u_o''(u_o - C_r)}{|u_o - C|^2} |\phi|^2 dz = 0 \quad (2.41)$$

2.2. Estabilidad lineal

Para que se cumpla la última igualdad u_o'' debe de cambiar de signo dentro del dominio (Z_1, Z_2) , es decir, **una condición necesaria de inestabilidad es que la velocidad básica tenga un perfil con un punto de inflexión.**

- Teorema de Fjørtoft

De la ecuación [2.40](#):

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \frac{u_o''(u_o - C_r)}{|u_o - C|^2} |\phi|^2 dz = - \int_{Z_1}^{Z_2} \{|D\phi|^2 + \alpha^2 |\phi|^2\} dz < 0 \quad (2.42)$$

Definiendo Z_s como el punto donde $u_o'' = 0$, tal que $u_s = u_o(Z_s)$, añadimos un cero a [2.42](#):

$$(C_r - u_s) \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{u_o''}{|u_o - C|^2} |\phi|^2 dz = 0 \quad (2.43)$$

Por lo tanto,

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \frac{u_o''(u_o - u_s)}{|u_o - C|^2} |\phi|^2 dz < 0 \quad (2.44)$$

Lo cual se satisface solo si $u_o''(u_o - u_s) \leq 0$. Resumiendo, **una condición necesaria para inestabilidad es que $u_o''(u_o - u_s) \leq 0$ en algún punto del dominio (Z_1, Z_2) , siendo Z_s el punto donde $u_o'' = 0$ con $u_s = u_o(Z_s)$.**

- $u_{o,min} < C_r < u_{o,max}$

De la ecuación [2.42](#), $u_o''(u_o - C_r) < 0$ si:

$$u_o = u_{o,max} \longrightarrow u_o' = 0, u_o'' < 0, \implies u_{o,max} > C_r$$

2.2. Estabilidad lineal

$$u_o = u_{o,min} \longrightarrow u'_o = 0, u''_o > 0, \implies u_{o,min} < C_r$$

Es decir, siempre que $C_i \neq 0$, $u_{o,min} < C_r < u_{o,max}$.

Finalmente, queda para el lector investigar la demostración del teorema del semicírculo de Howard [6], la cual involucra la ecuación de la función adjunta ϕ^* en forma autoadjunta. El teorema establece la siguiente relación:

$$\left[C_r - \frac{1}{2}(u_{o,min} + u_{o,max}) \right]^2 + C_i^2 \leq \left[\frac{1}{2}(u_{o,min} - u_{o,max}) \right]^2 \quad (2.45)$$

2.2.4. Estabilidad de flujo viscoso

En un flujo inviscido, las fuerzas de inercia y de presión se mantienen siempre equilibradas. La ecuación de Bernoulli nos dice que ante el aumento de velocidad debido a una perturbación se producirá un gradiente de presión que desestabilizará el flujo. Si se añade viscosidad al problema, uno esperaría que aparezca una fuerza retardante que estabilice el flujo. Aunque esto sucede para flujos con número de Reynolds bajos, en ocasiones un pequeño aumento en la viscosidad puede desestabilizar al flujo debido a la difusión de esfuerzos cortantes. Este efecto puede verse en los problemas de Stokes cuando un plato oscila o se desliza desde el reposo. Un ejemplo de inestabilidad inducida por viscosidad es el problema de capa límite de Blasius [11]. Una gráfica en el espacio de frecuencia y número de Reynolds se muestra en la figura 2.4:

Esta curva divide el plano en regiones de estabilidad e inestabilidad. El flujo es estable para cualquier número de onda siempre que el número de Reynolds sea lo suficientemente bajo. Este efecto de estabilización ocurre debido a un amortiguamiento viscoso [11]. Similarmente, cuando $Re \rightarrow \infty$, por el teorema del punto de inflexión de Rayleigh, el flujo se vuelve completamente estable para todo α . Sobre la curva de estabilidad marginal se encuentra un rango de números de onda que son inestables, estas ondas son llamadas *ondas Tollmien-Schlichting* (ondas TS) [11].

El punto con número de Reynolds más bajo en la curva de neutralidad es el llamado punto crítico. La capa límite de Blasius de espesor δ^* tiene

2.2. Estabilidad lineal

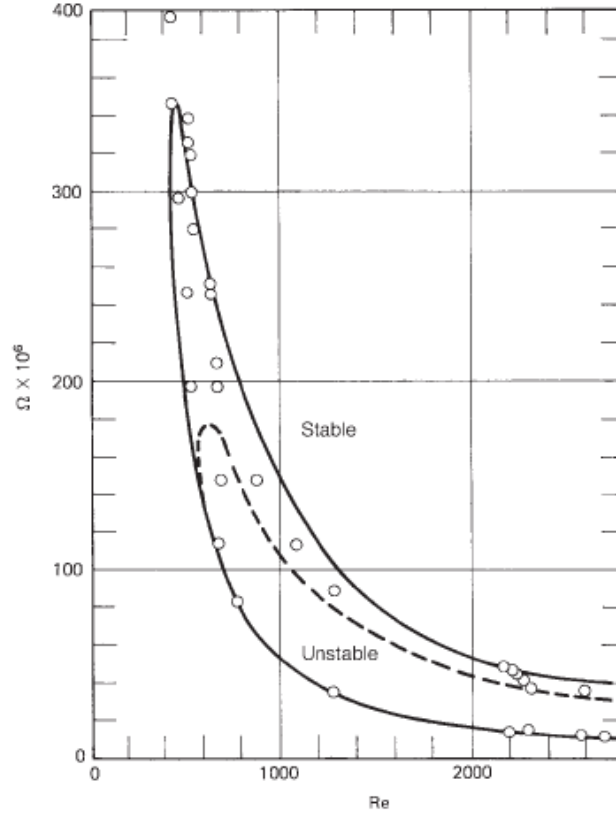


Figura 2.4: Curvas de estabilidad neutral de la capa límite de Blasius [11]

un número de Reynolds crítico, $Re_{c} = U\delta^*/\nu = 520$, tal que, bajo cualquier número de Reynolds menor a Re_{c} la capa es estable. En el punto en que se alcanza el número de Reynolds crítico, la capa límite es inestable cuando $\alpha\delta^* = 0,30$, siendo α el número de onda y longitud de onda $L = 2\pi/\alpha = 2\pi\delta^*/0,3 \approx 18\delta^*$ [11]. Por otro lado, la capa límite es siempre estable bajo números de onda pequeños, sin embargo, cuando esta crece, el número de Reynolds también aumenta y los números de onda se hacen más grandes. En principio la estabilidad regresa cuando $Re \rightarrow \infty$, sin embargo, la capa límite nunca alcanza este punto porque la inestabilidad se convierte en flujo turbulento [11].

Las capas límite sujetas a un gradiente de presión adverso deben tener

2.2. Estabilidad lineal

un punto de inflexión. El teorema de *Fjørt* nos dice que este tipo e perfiles de velocidad tienen presentan mecanismos de inestabilidad inviscida [6]. Las ondas TS son inestables bajo estos mecanismos. Es relevante mencionar el hecho de que, en este contexto, los gradientes de presión negativos rápidamente promueven la **transición a turbulencia**.

Capítulo 3

Desarrollo de turbulencia

La inestabilidad en un flujo tendrá tres posibles resultados: otro flujo básico laminar, algún mecanismo de intercambio de estabilidad o un flujo turbulento. Los flujos turbulentos contienen fluctuaciones de velocidad auto – sostenibles en adición al flujo principal. Las ecuaciones que gobiernan las propiedades promediadas (en el tiempo) de los flujos turbulentos no conforman un sistema cerrado, para su solución se requiere asumir ciertas propiedades ad-hoc al flujo específico [11]. Estas propiedades se miden experimentalmente y se correlacionan con el incremento en el número de Reynolds.

3.1. Tipos de flujos turbulentos

Los flujos turbulentos se pueden clasificar en tres grupos: flujos en red, capas de mezclado y capas entre paredes (canales, capas límite) [11].

- Turbulencia en red:

Es un tipo especial de turbulencia que viola la definición de turbulencia, ya que no es autosustentada. Suponiendo que una red de cilindros es colocada perpendicularmente al flujo uniforme, el flujo turbulento se genera cuando los vórtices generados interactúan a lo largo de la corriente posterior a la red de cilindros. La turbulencia existe sin preferencia de dirección y decae tan lentamente que las variaciones en la dirección del flujo son despreciadas en el proceso de decaimiento.

- Capas de mezclado:

Son regiones turbulentas dentro de un reservorio no turbulento de presión constante. Esto incluye no solamente la típica capa de mezclado entre dos

fluidos que se mueven a distintas velocidades sino también a chorros y estelas. En este tipo de flujos, una región de transición precede a la turbulencia. Se cree que estos flujos desarrollan características universales a distancias lejos del origen. Cuando un flujo turbulento desarrolla dependencia solo de cantidades locales, como el valor de la velocidad del flujo básico, se dice que es auto-similar.

- Turbulencia entre paredes:

La presencia de una pared tiene un efecto dominante en el proceso de producción de turbulencia, se podría decir que la pared determina las características del flujo turbulento. Por otro lado, la región central del flujo tiene poca influencia en el proceso de producción de turbulencia.

3.2. Propiedades de los flujos turbulentos

No existe una definición universal para un flujo turbulento, sin embargo, atribuirle ciertas características es la manera más sencilla para determinar lo que es turbulencia.

Los flujos turbulentos poseen fluctuaciones de velocidad en todas direcciones (3D) cuya intensidad varía en el rango del 10 al 30 por ciento de la velocidad del flujo principal (básico) [11]. El historial de la velocidad en algún punto del espacio luce como una señal aleatoria, sin embargo, existe una estructura atribuida a las fluctuaciones de velocidad, estas estructuras son espaciales y se conocen como *eddies*. Los remolinos (un término aproximado en español para eddies) persisten por un corto periodo de tiempo y suelen tomar la forma de vórtices, chorros u hongos [11]. Pequeños remolinos existen dentro de otros más grandes y a su vez, pequeñas estructuras contienen en su interior estructuras aún más pequeñas. Un flujo turbulento se caracteriza porque el tamaño de los remolinos se distribuye de manera continua, por lo tanto, un flujo cuyas irregularidades están limitadas a un espectro de frecuencias discretas no corresponde a un flujo turbulento.

La turbulencia en un flujo es auto – sustentada [11]. Sucede que procesos que no están bien definidos generan más turbulencia y mantienen movimientos irregulares. Una vez iniciada la turbulencia, esta se perpetúa a sí misma sin

3.2. Propiedades de los flujos turbulentos

disminuir, por lo tanto, los mecanismos de transición y la inestabilidad original no juegan un papel fundamental en la sustentación de la turbulencia. Los mecanismos de auto - sustentación son distintos en flujos libres y flujos entre paredes.

Otra característica de los flujos turbulentos es que su respectivo flujo básico presenta un gradiente en el perfil de velocidades. Estas capas de corte deben existir para que la turbulencia sea auto – sustentada [11].

Así como el movimiento aleatorio de las moléculas en un gas es responsables de la difusión de la viscosidad, de la temperatura y de la masa, un remolino en un flujo turbulento es capaz de transportar fluido desde una región con bajo momento (lineal y angular) y depositarlo en una región de intenso momento [11]. Aunque el proceso real es mucho más complicado que eso, es claro que la turbulencia tiende a mezclar el fluido lo cual conlleva efectos difusivos.

Todo flujo turbulento involucra procesos que modifican el tamaño de los remolinos (se usa remolino para hablar de cualquier estructura en el fluido). No se conoce mucho sobre estos mecanismos, pero no hay duda de que es una de las principales características de la turbulencia [11]. Los remolinos involucran estructuras a escalas cada vez más pequeñas tal que, en algún punto, las fuerzas viscosas se vuelven sumamente relevantes. Estas tienden a destruir los remolinos más pequeños lo que determina el límite de que tan pequeña puede ser una estructura en el dominio turbulento.

La última característica de los flujos turbulentos es que son difusivos al igual que cualquier flujo con viscosidad, sin embargo, el flujo turbulento es mucho más disipativo debido a que las estructuras a pequeña escala presentan intensos gradientes de velocidad [11]. La energía disipada por los remolinos pequeños es mucho mayor que aquella disipada por remolinos grandes. Ya que los remolinos tienden a destruirse a si mismos, el proceso de cambio de escala que produce remolinos pequeños es necesariamente un elemento de la auto – sustentación.

3.3. Enfoque de Landau sobre la turbulencia

Dada una perturbación de la forma $u' = A(t)f(x, y, z) = cte \cdot e^{(\omega_i t - i\omega_r t)} f(x, y, z)$, cuando el flujo alcanza un número de Reynolds crítico ($R_e = R_{e,c}$), se vuelve inestable con frecuencia imaginaria igual a cero. Al momento que $R_e > R_{e,c}$, (muy próximo), $\omega_r \gg \omega_i > 0$. En éste caso u' , toma la forma:

$$\vec{u}' = A(t)f(x, y, z) \quad (3.1)$$

donde $f(x, y, z)$ y la amplitud, $A(t)$, funciones complejas. Por otro lado, la ecuación 3.1 solo es válida en la aproximación lineal cuando $A(t)$ es muy pequeña, es decir, en tiempos muy pequeños posterior al inicio de la inestabilidad [9]:

$$A(t) = cte \cdot e^{(\omega_i t - i\omega_r t)} \quad (3.2)$$

El módulo de la amplitud es finito, es decir, aumenta hasta un cierto límite. Como podría esperarse, $|A|$ es pequeño y tiende asintóticamente a [9]

$$|A|_{max}^2 = 2\omega_i/\alpha \quad (3.3)$$

donde α es una constante que puede tomar valores positivos o negativos y ω_i es una función del número de Reynolds cuya expansión alrededor de $R_{e,c}$ está dada por $\omega_i = cte \cdot (R_e - R_{e,c})$.⁵ Sustituyendo ésta expansión en 3.3:

$$|A|_{max} \sim \sqrt{R_e - R_{e,c}} \quad (3.4)$$

Entonces, para números de Reynolds ligeramente mayores al valor crítico:

⁵por definición $\omega_i(R_{e,c}) = 0$.

3.3. Enfoque de Landau sobre la turbulencia

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_o + f(x, y, z)e^{-i(\omega_r t + \beta_1)} \quad (3.5)$$

Donde $f(x, y, z)$ es una función compleja de las coordenadas y β_1 una fase inicial. Cuando $R_e - R_{e,c}$ es muy grande, el flujo ya no se puede expresar como [3.5](#), ahora es simplemente periódico con fase $\phi_1 = \omega_r t + \beta_1$ y su desarrollo en serie de Fourier es de la forma [9](#):

$$\vec{u}(t) = \sum_p A_p(x, y, z)e^{-i\phi_1 p} \quad (3.6)$$

Para cada p entero positivo y negativo. Se debe mencionar que la fase $\phi_1 = \omega_r t + \beta_1$ se determina únicamente mediante las condiciones iniciales en el instante que se produce el flujo. En este caso, dado que la fase inicial permanece arbitraria, se dice que el flujo tiene un grado de libertad [9](#). Cuando aumenta aún más el número de Reynolds, después de un tiempo el flujo [3.5](#) se hace inestable y se forma un nuevo flujo

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_o + \vec{u}_2 \quad (3.7)$$

Donde $\vec{u}_o = \vec{u}_o(x, y, x, t)$ y la corrección \vec{u}_2 se obtiene a partir de un nuevo análisis de estabilidad lineal al sustituir [3.7](#) en las ecuaciones de Navier-Stokes. Como resultado se llega a una ecuación lineal con coeficientes dependientes del tiempo y las coordenadas espaciales (de período $2\pi/\omega_r$). La solución de dicha ecuación es de la forma:

$$\vec{u}_2 = H(x, y, z, t)e^{-i\omega t}$$

Donde $H(x, y, z, t)$ tiene periodo $2\pi/\omega_r$ y $\omega = \omega_{r,2} + i\gamma_2$, por lo tanto cuando $\gamma_2 > 0$ se desarrolla nuevamente una inestabilidad cuyo resultado es un nuevo flujo cuasi periódico de frecuencias ω_r y $\omega_{r,2}$. De acuerdo al planteamiento anterior, que el flujo esté caracterizado por dos periodos distintos implica que ahora existen dos cantidades arbitrarias, es decir, dos grados de libertad. Siguiendo la misma lógica, cuánto más aumenta el número de Reynolds,

3.3. Enfoque de Landau sobre la turbulencia

más frecuencias características (y periodos) aparecen y de acuerdo a [3.4], el margen de números de Reynolds entre apariciones de frecuencias sucesivas disminuye de tamaño y aparecen estructuras cada vez de menor tamaño [9]. **Cuando el flujo estacionario inicial llega a esta condición se dice que paso de laminar a turbulento [9].**

Capítulo 4

Flujo de Jefferyy - Hamel

Un modelo que puede aproximar cualitativamente las inestabilidades hidrodinámicas en mecanismos de doble caña es el flujo de Jefferyy-Hamel [11]. El flujo de Jefferyy Hamel es una de las pocas soluciones exactas que se tiene para flujos viscosos. Consiste en un flujo estacionario entre dos paredes planas que se intersectan formando un ángulo α .

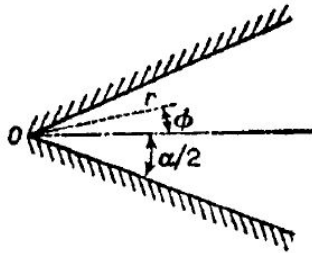


Figura 4.1: Flujo de Jefferyy-Hamel en dos dimensiones [9].

4.1. Descripción del flujo

Es conveniente estudiar el sistema en coordenadas cilíndricas r, z, ϕ , midiendo el ángulo ϕ a partir del eje de simetría entre los dos planos, y el eje z a lo largo de la línea de intersección de las paredes (saliendo del plano). Podemos considerar el flujo en dos dimensiones si asumimos que a lo largo del eje z las placas son demasiado largas en comparación a sus otras dimensiones y además, no existe un gradiente de presión que pueda perturbar al flujo en esa dirección. Suponiendo que el flujo es totalmente radial, es decir:

$$v_\phi = v_z = 0, v_r = v(r, \phi)$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas se reducen a:

$$v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \phi} = \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (4.3)$$

4.2. Solución exacta del flujo de Jeffery – Hamel

De la ecuación [4.3](#) vemos que el producto rv depende únicamente del ángulo, Landau definió la función:

$$F(\phi) = \frac{rv}{6\nu} \quad (4.4)$$

Sustituyendo [4.4](#) en [4.2](#) y multiplicando la ecuación por r :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \phi} = \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial rv}{\partial \phi} = \frac{12\nu^2}{r^2} \frac{dF}{d\phi} \quad (4.5)$$

Integrando ambos miembros de la ecuación respecto a ϕ :

$$\frac{P}{\rho} = \frac{12\nu^2}{r^2} F + g(r) \quad (4.6)$$

Derivamos parcialmente respecto a r la ecuación resultante,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{24\nu^2}{r^3} F + g' \quad (4.7)$$

4.2. Solución exacta del flujo de Jeffery – Hamel

Donde g' es la derivada total de g respecto a r . Ahora, sustituimos [4.7](#) en [4.1](#):

$$v \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{24\nu^2}{r^3} F - g' + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (4.8)$$

Sustituimos $v = \frac{6\nu F}{r}$ y desarrollamos las derivadas parciales:

$$-\frac{36\nu^2 F^2}{r^3} = \frac{24\nu^2 F}{r^3} - g' + \frac{12\nu^2 F}{r^3} + \frac{6\nu^2 F''}{r^3} - \frac{6\nu^2 F}{r^3} - \frac{6\nu^2 F}{r^3} \quad (4.9)$$

Donde F'' es la doble derivada total de F respecto a ϕ . Simplificando:

$$-36F^2 = 24F - \frac{r^3}{\nu^2} g' + 6F''$$

Finalmente,

$$F'' + 4F + 6F^2 = \frac{r^3}{6\nu^2} g' \quad (4.10)$$

Dado que el miembro izquierdo de [4.10](#) depende solo de ϕ , mientras que el miembro izquierdo lo hace solo de r , la única solución para que se cumpla la igualdad es que ambos miembros sean constantes. Llamemos a esa constante $2C_1$. De igualar el miembro izquierdo de [4.10](#) con la constante propuesta, tenemos la ecuación no lineal:

$$F'' + 4F + 6F^2 = 2C_1 \quad (4.11)$$

Una forma de convertir [4.11](#) en una ODE de primer grado es multiplicar toda la ecuación por F' . Esta operación nos permite agrupar dentro del operador

4.2. Solución exacta del flujo de Jeffery – Hamel

derivada, de la siguiente manera:

$$F'F'' + 4F'F + 6F'F^2 = 2C_1F' \quad (4.12)$$

Expresado en una notación más conveniente,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\phi}(F'^2) + \frac{6}{3} \frac{d}{d\phi}(F^3) + \frac{4}{2} \frac{d}{d\phi}(F^2) - 2C_1 \frac{d}{d\phi}(F) = 0 \quad (4.13)$$

Integrando el resultado:

$$\frac{1}{2}F'^2 + 2F^3 + 2F^2 - 2C_1F - 2C_2 = 0 \quad (4.14)$$

Partiendo de esta ecuación es posible derivar una expresión que relacione implícitamente F con ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\frac{dF}{d\phi} \right)^2 &= -F^3 - F^2 + C_1F + C_2 \\ \frac{1}{2} \frac{dF}{d\phi} &= \pm \sqrt{-F^3 - F^2 + C_1F + C_2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Despejando ϕ

$$2\phi = \pm \int \frac{dF}{\sqrt{-F^3 - F^2 + C_1F + C_2}} + C_3 \quad (4.16)$$

$F = F(\phi)$ puede expresarse mediante funciones elípticas, por otro lado, las constantes C_1, C_2, C_3 se determinan con las condiciones de frontera. La condición de no deslizamiento en las paredes:

$$v(\pm \frac{\alpha}{2}) = \frac{6\nu F(\pm \frac{\alpha}{2})}{r} = 0 \quad (4.17)$$

Para $r \neq 0$:

$$F(\pm \frac{\alpha}{2}) = 0 \quad (4.18)$$

La otra condición de frontera está determinada por la conservación del flujo de masa Q a través de cualquier sección de radio constante.

$$Q = \rho \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} v r d\phi = 6\nu\rho \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} F d\phi \quad (4.19)$$

Q puede ser positivo o negativo. Si $Q > 0$ tenemos flujo en un canal divergente, por lo tanto, la línea de intersección de los planos es una fuente. Por otro lado, se denomina flujo en un canal convergente si $Q < 0$, la línea de corte es un sumidero [9]. El cociente $|Q|/\nu\rho$ es adimensional y juega el papel del número de Reynolds [9]. Para propósitos de este trabajo de investigación solo es de interés el caso divergente gracias a que modela la situación en el que un chorro de aire, alimentado por el soplo de una persona, ingresa por el mecanismo de doble caña de algún instrumento.

4.2.1. Canal divergente

Para analizar la solución de 4.16 asumiremos que el flujo es simétrico respecto al plano $\phi = 0$, es decir, si

$$F(\phi) = F(-\phi) \quad (4.20)$$

Para el flujo divergente la velocidad (radial) es positiva:

4.2. Solución exacta del flujo de Jeffery – Hamel

$$v(\phi) = \frac{6\nu}{r}F(\phi) > 0 \quad (4.21)$$

$$F(\phi) > 0 \quad (4.22)$$

Además asumiremos que la velocidad aumenta monótonamente desde $F(\pm\frac{\alpha}{2}) = 0$ hasta $F = F_o > 0$ en $\phi = 0$, como resultado,

$$F_o = F(0) = \max(|F|) \quad (4.23)$$

Por simetría, $\frac{dF}{d\phi} = 0$ en $\phi = 0$, entonces:

$$\frac{dF}{d\phi}|_{\phi=0} = \pm 2\sqrt{-F_o^3 - F_o^2 + C_1F_o + C_2} = 0 \quad (4.24)$$

F_o es un cero de la expresión cúbica bajo el radical de la ecuación [4.15](#), entonces

$$-F_o^3 - F_o^2 + C_1F_o + C_2 = 0 \quad (4.25)$$

Despejando C_1 :

$$C_1 = F_o^2 + F_o - q \quad (4.26)$$

$q = \frac{C_2}{F_o}$. Por consiguiente, podemos escribir de la siguiente forma:

$$-F^3 - F^2 + C_1F + C_2 = -F^3 - F^2 + (F_o^2 + F_o - q)F + F_o = (F_o - F)(F^2 + (1 + F_o)F + q) \quad (4.27)$$

Finalmente,

$$2\phi = \pm \int_{F_o}^F \frac{dF}{\sqrt{(F_o - F)(F^2 + (1 + F_o)F + q)}} \quad (4.28)$$

Las constantes F_o y q pueden determinarse mediante la siguiente condición para α :

$$\alpha = \int_0^{F_o} \frac{dF}{\sqrt{(F_o - F)(F^2 + (1 + F_o)F + q)}} \quad (4.29)$$

Partiendo de la condición [4.19](#) y de la definición del número de Reynolds,

$$\frac{1}{6}R_e = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} F d\phi \quad (4.30)$$

Obtenemos:

$$\frac{1}{6}R_e = \int_0^{F_o} \frac{F dF}{\sqrt{(F_o - F)(F^2 + (1 + F_o)F + q)}} \quad (4.31)$$

α incrementa monótonamente cuando q disminuye y toma su valor máximo cuando $q = 0$:

$$\alpha_{max} = \int_0^{F_o} \frac{dF}{\sqrt{F(F_o - F)(F + F_o + 1)}} \quad (4.32)$$

El máximo $R_e = R_{e,max}$ corresponde al valor máximo de F_o , entonces, utilizando las sustituciones $k^2 = F_o/(1 + 2F_o)$, $F = F_o \cos^2 x$, podemos encontrar

4.2. Solución exacta del flujo de Jeffery – Hamel

una relación entre α y $R_{e,max}$:

$$\alpha = 2\sqrt{1-2k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\text{sen}^2x}} \quad (4.33)$$

$$R_{e,max} = -6\alpha \frac{1-k^2}{1-2k^2} + \frac{12}{\sqrt{1-2k^2}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\text{sen}^2x} dx \quad (4.34)$$

Se concluye que el flujo simétrico para un ángulo de apertura dado es posible únicamente cuando R_e no supere un valor definido. $R_{e,max} \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow \pi$ y tiende a infinito como $18,8/\alpha$ cuando $\alpha \rightarrow 0$.

Cuando $R_e > R_{e,max}$, la hipótesis del flujo simétrico resulta sin justificar, pues aparece un flujo asimétrico respecto al plano ϕ en el cual el perfil de velocidad tiene un máximo y un mínimo [9]. Cuando R_e aumenta aún más, aparece una solución simétrica con un mínimo y dos máximos, por consiguiente, cuando $R_e \rightarrow \infty$ el número de máximos y mínimos alternativos aumenta sin límite, de modo que no existe una solución límite definida. En todas las soluciones existen regiones tanto de flujo hacia adentro como hacia afuera. En el momento que $R_e > R_{e,max}$, el flujo resulta inestable y se produce un flujo no estacionario o turbulento [9].

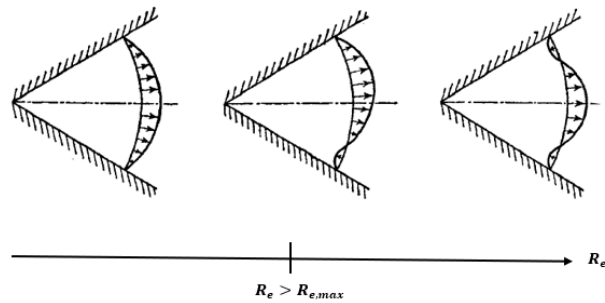


Figura 4.2: Pérdida de simetría del Flujo de Jeffery - Hamel [9].

4.3. Solución asintótica del flujo de Jeffery - Hamel

Como veremos más adelante, el análisis de estabilidad lineal del flujo de Jeffery – Hamel es matemáticamente muy complejo de abordar, por lo que una aproximación asintótica de la solución será muy útil para estudiar los casos límites del número de Reynolds y de α . Para obtener la solución asintótica es conveniente partir de la condición de continuidad [4.3](#) y a partir de ella definir la variable:

$$f(\phi) = rv_r \quad (4.35)$$

Sustituyendo [4.35](#) en las ecuaciones de momento radial y angular tenemos:

$$-\frac{\rho f^2}{r^3} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\mu}{r^3} f'' \quad (4.36)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{2\mu}{r^2} f' = 0 \quad (4.37)$$

Donde f' es la primera derivada de f respecto a la variable angular. Ahora, multiplicando [4.36](#) por $\frac{\partial}{\partial \phi}$ y [4.37](#) por $\frac{\partial}{\partial r}$:

$$-\frac{2\rho}{r^3} f f' = -\frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \phi} + \frac{\mu}{r^3} f''' \quad (4.38)$$

$$-\frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \phi} - \frac{4\mu}{r^3} f' = 0 \quad (4.39)$$

Restando [4.39](#) de [4.38](#):

4.3. Solución asintótica del flujo de Jeffery - Hamel

$$-\frac{2\rho}{r^3} f f' = \frac{\mu}{r^3} f''' + \frac{4\mu}{r^3} f'$$

$$2\rho f f' + \mu f''' + 4\mu f' = 0 \quad (4.40)$$

Con el fin de adimensionalizar la ecuación [4.40](#) definimos una velocidad radial característica del flujo:

$$u_0 \equiv \frac{f(0)}{r} \equiv \frac{c_0}{r} \quad (4.41)$$

Donde c_0 es una constante real. Entonces,

$$v_r^* \equiv \frac{v_r}{u_0} = \frac{f(\phi)/r}{c_0/r} = \frac{f(\phi)}{c_0} \equiv F(\eta) \quad (4.42)$$

siendo $\eta \equiv \frac{\phi}{\alpha}$ y v_r^* adimensional. Finalmente, adimensionalizando [4.40](#):

$$F''' + 2\alpha R_e F F' + 4\alpha^2 F' = 0 \quad (4.43)$$

Donde $R_e \equiv \frac{c_0 \alpha}{\nu} = \frac{u_0 r \alpha}{\nu}$, con condiciones de frontera (flujo simétrico , no deslizamiento):

$$v_r(\alpha) = 0 \rightarrow u_0 F(1) = 0 \rightarrow F(1) = 0 \quad (4.44)$$

$$\frac{dF}{d\eta} = 0 \quad (4.45)$$

$$v_r(0) = u_0 \rightarrow u_0 F(0) = u_0 \rightarrow F(0) = 1 \quad (4.46)$$

4.3.1. Caso cuando $\alpha \rightarrow 0$

Resolver [4.43](#) mediante una aproximación asintótica para los casos en que $\alpha \rightarrow 0$, $R_e \rightarrow 0$ y $R_e \rightarrow \infty$ resulta ser sencillo y mas importante aún, permite encontrar explícitamente el campo de velocidades. Para el primer caso se propone como solución una expansión de F de la forma:

$$F = F_0 + \alpha F_1 + \alpha^2 F_2 + \dots \quad (4.47)$$

Sustituyendo [4.47](#) en [4.43](#):

$$F_0''' + \alpha F_1' + 2R_e \alpha^2 F_0 F_0' + 2R_e \alpha F_1 F_0' + 2R_e \alpha F_0 F_1' + 2R_e \alpha^2 F_1 F_1' + \dots = 0 \quad (4.48)$$

Además, sustituyendo [4.47](#) en [4.44](#) - [4.46](#):

$$F(0) = F_0(0) + \alpha F_1(0) + \dots = 1$$

$$F'(0) = F_0'(0) + \alpha F_1'(0) + \dots = 0$$

$$F(1) = F_0(1) + \alpha F_1(1) + \dots = 0$$

Agrupando los términos a orden cero tanto en la ecuación que gobierna al flujo como en las condiciones de frontera, obtenemos una ecuación para la solución a orden cero:

$$F_0''' = 0 \quad (4.49)$$

Con condiciones de frontera:

$$F_0(0) = 1$$

$$F_0'(0) = 0$$

$$F_0(1) = 0$$

La ecuación [4.49](#) tiene una solución analítica muy sencilla:

$$F_0 = C_1\eta^2 + C_2\eta + C_3 \quad (4.50)$$

Tal que, aplicando las condiciones de frontera:

$$F_0(0) = C_3 = 1$$

$$F_0'(0) = C_2 = 0$$

$$F_0(1) = C_1 + 1 = 0 \rightarrow C_1 = -1$$

La solución a orden cero es:

$$F_0 = 1 - \eta^2 \quad (4.51)$$

***En los tres casos de aproximación asintótica, las soluciones mayores a orden cero resultan muy complicadas de implementar analíticamente para el estudio de estabilidad lineal, por lo que para propósitos de este trabajo nos quedaremos con la solución a orden cero.**

4.3.2. Caso cuando $R_e \rightarrow 0$

Por otro lado, cuando se presenta un flujo en que $R_e \rightarrow 0$, análogamente a lo hecho cuando $\alpha \rightarrow 0$, proponemos la siguiente expansión de F :

$$F = F_0 + R_e F_1 + R_e^2 F_2 + \dots \quad (4.52)$$

4.3. Solución asintótica del flujo de Jeffery - Hamel

Sustituyendo [4.52](#) en [4.43](#) :

$$F_0''' + R_e F_1''' + 4\alpha^2 F_0' + 4R_e \alpha^2 F_1' + \dots = 0 \quad (4.53)$$

A orden cero,

$$F_0''' + 4\alpha^2 F_0' = 0 \quad (4.54)$$

Proponiendo una solución en modos normales, se obtienen los valores propios $\lambda = 0, 2i\alpha, -2i\alpha$, como resultado:

$$F_0 = C_1 + C_2 e^{2i\alpha\eta} + C_3 e^{-2i\alpha\eta} \quad (4.55)$$

Aplicando las condiciones de simetría y no deslizamiento sobre las paredes:

$$F_0'(0) = 2i\alpha(C_2 - C_3) = 0 \rightarrow C_2 = C_3$$

$$F_0(1) = C_1 + 2C_2 \text{Cos}(2\alpha) = 0 \rightarrow C_1 = -2C_2 \text{Cos}(2\alpha)$$

$$F_0(0) = 2C_2[1 - \text{Cos}(2\alpha)] = 1 \rightarrow C_2 = -\frac{1}{2[1 - \text{Cos}(2\alpha)]}$$

Finalmente, sustituyendo las constantes en [4.55](#) y aplicando la identidad trigonométrica para ángulo doble del coseno:

$$F_0 = -\frac{1}{2} \text{Csc}^2(\alpha) [\text{Cos}(2\alpha) - \text{Cos}(2\alpha\eta)] \quad (4.56)$$

De la gráfica [4.3](#) vemos que $F \approx F_o \sim 1 - \eta^2$, es decir, a ángulos y números de Reynolds pequeños las soluciones son iguales, lo cual tiene sentido dado que al disminuir el ángulo de apertura entre las placas, el caudal disminuye al igual que lo hace el número de Reynolds, existe una relación directamente proporcional entre ambos números.

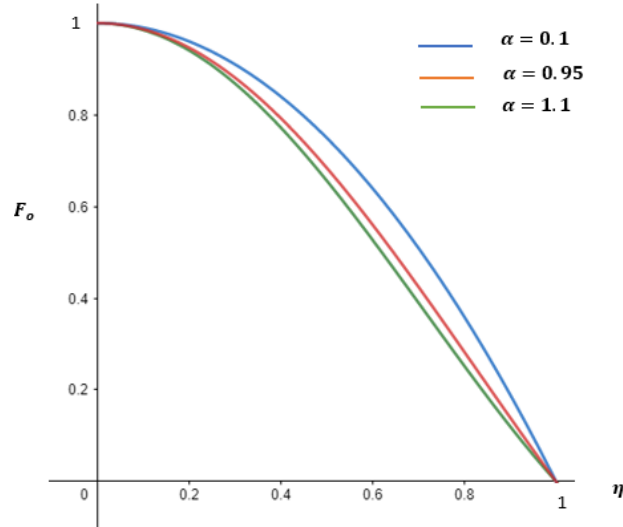


Figura 4.3: Solución asintótica $R_e \rightarrow 0$ a diferentes ángulos α .

4.3.3. Caso cuando $R_e \rightarrow \infty$

Reescribiendo la ecuación [4.43](#):

$$\frac{1}{R_e} F''' + 2\alpha F F' + \frac{4\alpha^2}{R_e} F' = 0 \quad (4.57)$$

Para números de Reynolds muy grandes definimos $\frac{1}{R_e} = \epsilon \ll 1$. Podemos entonces reescribir nuevamente la ecuación [4.57](#) como:

$$\epsilon F''' + 2\alpha F F' + 4\alpha^2 \epsilon F' = 0 \quad (4.58)$$

Ya que el término con mayor grado en su derivada, el primero, es de orden ϵ , la ecuación [4.58](#) describe un problema del tipo capa límite. Muy cerca de las paredes [4.58](#) se aproxima a $2\alpha F F' = 0$ cuya solución es $F(\eta) = 1$ considerando condiciones de frontera.

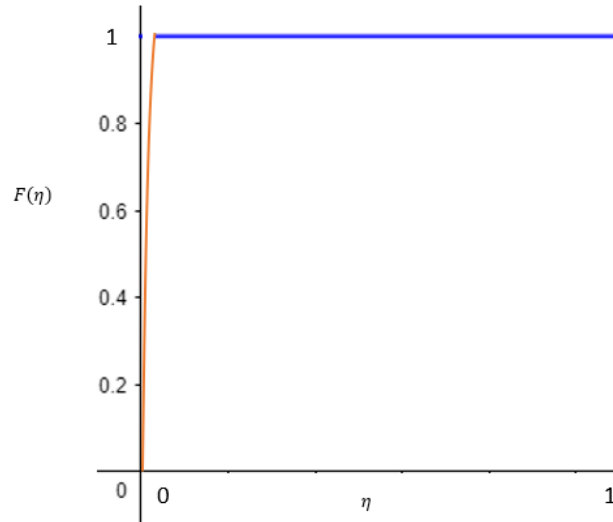


Figura 4.4: Capa límite en un canal convergente.

Un método directo para evitar la singularidad en la aproximación asintótica consiste en definir una variable de reescalamiento [11], ζ . Uno puede definir esta variable de reescalamiento asumiendo que $\zeta = M(1 - \eta)$ siendo M una constante de amplificación. Se cumple que los términos de 4.57 son del mismo orden de magnitud cuando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} M^3 &\sim 2\alpha M \\ M &\sim \sqrt{2Re\alpha} \sim \sqrt{Re\alpha} \end{aligned}$$

Finalmente, definimos la variable de reescalamiento como:

$$\zeta = \sqrt{Re\alpha}(1 - \eta) \tag{4.59}$$

Aplicando el reescalamiento en la ecuación 4.57 obtenemos la siguiente EDO con derivadas respecto a ζ :

4.3. Solución asintótica del flujo de Jeffery - Hamel

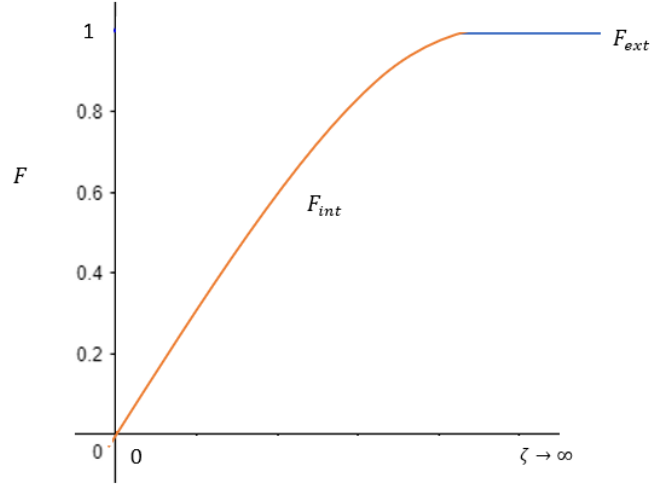


Figura 4.5: Variable de reescalamiento dentro de la capa límite .

$$\frac{d^3 F}{d\zeta^3} - 2F \frac{dF}{d\zeta} + \frac{4\alpha}{Re} \frac{dF}{d\zeta} = 0 \quad (4.60)$$

Con condiciones de frontera:

$$F(0) = 0$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} F(\zeta) = 1$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} = 0$$

Cuya solución es:

$$F_{int}(\zeta) = 3 \tanh^2\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctanh}\sqrt{\frac{2}{\zeta}}\right) - 2 \quad (4.61)$$

F_{int} es la solución al interior de la capa límite, mientras que $F = 1 = F_{ext}$ es la solución lejos de la capa límite. En este caso, F_{int} , por condiciones de

continuidad, es aplicable a todo el dominio del flujo. A este procedimiento se le conoce como asymptotic matching [11], el cual básicamente busca forzar la continuidad entre dos o más soluciones, las cuales están definidas en regiones del dominio distintas.

El resultado 4.61 aplica para flujos convergentes, caso en el que se forma una capa límite cerca de las paredes. Cuando el canal es divergente, para números de Reynolds muy grandes, el flujo se comporta inviscido, es decir, solo tomamos la solución exterior a la capa límite.

4.4. Análisis de estabilidad lineal del flujo de Jeffery - Hamel

Para el flujo de Jeffery – Hamel existe una infinidad de soluciones para cada par de valores de R_e y α [6]. Se ha demostrado que la solución principal del flujo de Jeffery- Hamel, la cual es simétrica y se convierte en un flujo de Poiseuille cuando $\alpha = 0$, presenta una bifurcación tridente subcrítica con rotura de simetría cuando el número de Reynolds incrementa para valores fijos de α distintos de cero [6].

Existen diversas dificultades para resolver el problema de estabilidad en el flujo de Jeffery- Hamel debido a que al separar las variables espaciales de la temporal [6] y por lo tanto reducir el problema de estabilidad lineal a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, es una tarea muy complicada. Un intento de análisis de estabilidad lineal de manera convencional”se muestra en el **Apéndice A**, donde se hace evidente lo complicado que resulta resolver las ecuaciones resultantes.

Eagles (1966), mediante la aproximación de flujo casi paralelo y empleando modos normales con crecimiento temporal en el límite cuando $\alpha \rightarrow 0$, investigó la estabilidad del flujo de Jeffery- Hamel resolviendo la ecuación de Orr- Sommerfeld [6] [7] . Encontró que un incremento de α partiendo de $\alpha = 0$ tiene un efecto desestabilizador que se debe al cambio de perfil de velocidad del flujo básico.

Por otro lado, Banks se cuestionó el uso de modos normales con crecimiento temporal sin excluir las regiones correspondientes a $r = 0, \infty$ [2]. Dean (1934) encontró una ecuación lineal separable cuyos modos crecen espacial-

4.4. Análisis de estabilidad lineal del flujo de Jeffery - Hamel

mente en dos dimensiones, tomando modos de la función de corriente de la forma [5]:

$$\psi'(r, \phi) = \Re[r^\lambda \Phi(\phi)] \quad (4.62)$$

Donde r y ϕ son las coordenadas polares y λ , Φ se determinan a partir de la solución del problema de valores propios. Los modos crecen o decrecen como $\exp[\Re(\lambda)\log(r)]$. Tomando $\psi = \Psi + \psi'$, donde Ψ es la función de corriente del flujo básico, y linealizando la ecuación de vorticidad para pequeñas perturbaciones se obtiene la llamada ecuación de Dean [5]:

$$\Phi^{IV} + [\lambda^2 + (\lambda - 2)^2]\Phi'' + \lambda^2(\lambda - 2)^2\Phi = R_e [(\lambda - 2)\Psi'(\Phi'' + \lambda^2\Phi) - 2\Psi''\Phi' - \lambda\Psi'''\Phi] \quad (4.63)$$

La parte real de λ arroja el ritmo de crecimiento o decaimiento de los modos como función de la distancia, r . Como condición de estabilidad espacial, según Banks, se debe cumplir que $\Re(\lambda) \leq 0$ para todos los modos normales pertenecientes a una familia y $\Re(\lambda) \geq 2$ para los modos normales pertenecientes a la otra familia, para Ψ, R_e y α dados [5]. Este es un criterio de inestabilidad útil para perturbaciones en estado estacionario en dos dimensiones, sin embargo, no proporciona información acerca de la evolución temporal de las perturbaciones.

McAlpine y Drazin (1998) resolvieron de forma asintótica la ecuación linealizada de la vorticidad para perturbaciones en estado no estacionario cuando r es muy grande, tomando modos de la forma [5]:

$$\psi'(r, \phi, t) = \Re\{\exp[ik(\alpha^{-1}\log(r) - ct/\alpha^r r^2)]f(\eta)\} \quad (4.64)$$

Donde $y = \phi/\alpha$. La solución [4.64] satisface la ecuación de vorticidad linealizada únicamente cuando $r \rightarrow \infty$ para valores fijos de t , y . Se cumple entonces que:

4.4. Análisis de estabilidad lineal del flujo de Jeffery - Hamel

$$f^{IV} - [k^2 + (k + 2i\alpha)^2]f'' + k^2(k + 2i\alpha)^2 f =$$

$$iR_e\{[(k + 2i\alpha)u_o - kc](f'' - k^2 f) - ku_o''f + 2i\alpha u_o'f' + 4i\alpha kc(k + i\alpha)f\} \quad (4.65)$$

Donde las derivadas se hacen respecto a η . Además $u_o(\eta) = \alpha \frac{d\Psi(\theta)}{d\theta}$ y las condiciones de frontera son:

$$f(\pm 1) = f'(\pm 1) = 0 \quad (4.66)$$

McAlpine y Drazin resolvieron la ecuación [4.65](#) con condiciones de frontera [4.66](#) numéricamente para algunos casos, confirmando la influencia que tiene la convergencia de un canal como mecanismo de desestabilización del flujo.

Capítulo 5

Aplicación del flujo de Jeffery- Hamel en el mecanismo de doble caña

La ecuación generalizada de Orr- Sommerfeld obtenida por McAlpine y Drazin y la baja densidad del aire sugieren aproximar el número de Reynolds tendiendo a infinito. Bajo esta hipótesis, el problema de estabilidad se reduce a resolver el segundo miembro de la ecuación [4.65](#):

$$[(k + 2i\alpha)u_o - kc](f'' - k^2 f) - ku_o''f + 2i\alpha u_o'f' + 4i\alpha kc(k + i\alpha)f = 0 \quad (5.1)$$

Para un canal divergente en el que $R_e \rightarrow \infty$, $F = F_{ext} = 1$, el flujo básico es la velocidad característica del flujo, es decir, la velocidad al centro del canal la cual varía como $u_o = v_o/r$. Para simplificar la solución del problema, cuando $r \rightarrow \infty$ se asumirá una velocidad radial constante, v_o , al centro del canal. Entonces, la ecuación para determinar la estabilidad lineal del flujo es:

$$[(k + 2i\alpha)v_o - kc](f'' - k^2 f) + 4i\alpha kc(k + i\alpha)f = 0 \quad (5.2)$$

Agrupando los términos por orden de derivadas:

$$[(k + 2i\alpha)v_o - kc]f'' - [k^2(k + 2i\alpha)v_o - k^3c + 4i\alpha kc(k + i\alpha)]f = 0$$

$$f'' - \frac{[k^2(k + 2i\alpha)v_o - k^3c + 4i\alpha kc(k + i\alpha)]}{[(k + 2i\alpha)v_o - kc]}f = 0 \quad (5.3)$$

Proponiendo $f \sim e^{m\eta}$, se obtiene la siguiente ecuación para m :

$$m^2 = \frac{[k^2(k + 2i\alpha)v_o - k^3c + 4i\alpha kc(k + i\alpha)]}{[(k + 2i\alpha)v_o - kc]} \quad (5.4)$$

$$= \frac{k^3v_o + 2i\alpha k^2v_o - k^3c + 4i\alpha k^2c - 4\alpha^2kc}{kv_o + 2i\alpha v_o - kc} \quad (5.5)$$

$$= \frac{(k^3v_o - 4\alpha^2kc - k^3c) + i(2\alpha k^2v_o + 4\alpha k^2c)}{(kv_o - kc) + i(2\alpha v_o)} \quad (5.6)$$

$$= \frac{(k^3v_o - 4\alpha^2kc - k^3c)(kv_o - kc) + (2\alpha k^2v_o + 4\alpha k^2c)(2\alpha v_o)}{(kv_o - kc)^2 + (2\alpha v_o)^2}$$

$$+ i \frac{(2\alpha k^2v_o + 4\alpha k^2c)(kv_o - kc) - (k^3v_o - 4\alpha^2kc - k^3c)(2\alpha v_o)}{(kv_o - kc)^2 + (2\alpha v_o)^2} \quad (5.7)$$

La ecuación [5.7](#) tiene la forma:

$$m^2 = A + iB$$

Según ciertos valores que adquieran de A y B, la evolución espacial de las perturbaciones tomará distinto comportamiento. La condición de inestabilidad, es decir, de crecimiento exponencial para la magnitud de la perturbación, aparece cuando $A > 0$ y $B = 0$. A partir de la última igualdad:

$$\frac{(2\alpha k^2v_o + 4\alpha k^2c)(kv_o - kc) - (k^3v_o - 4\alpha^2kc - k^3c)(2\alpha v_o)}{(kv_o - kc)^2 + (2\alpha v_o)^2} = 0 \quad (5.8)$$

$$(2\alpha k^2v_o + 4\alpha k^2c)(kv_o - kc) - (k^3v_o - 4\alpha^2kc - k^3c)(2\alpha v_o) = 0$$

$$4\alpha k^3 v_o c + 8\alpha^3 k v_o c - 4\alpha k^3 c^2 = 0 \quad (5.9)$$

Finalmente, c como función del ángulo alfa y del número de onda, toma los siguientes valores:

$$c = 0 \quad (5.10)$$

$$c = kv_o + \frac{2\alpha^2 v_o}{k} \quad (5.11)$$

Los resultados anteriores muestran que, para todo ángulo de apertura entre las cañas, asumiendo números de Reynolds grandes, C es siempre positivo, es decir, el flujo siempre desarrolla inestabilidad espacial. Este resultado no explica cómo el flujo se vuelve inestable cerca de la fuente, sin embargo, muestra la naturaleza inestable del canal divergente por el hecho de tener un ángulo de apertura diferente de cero.

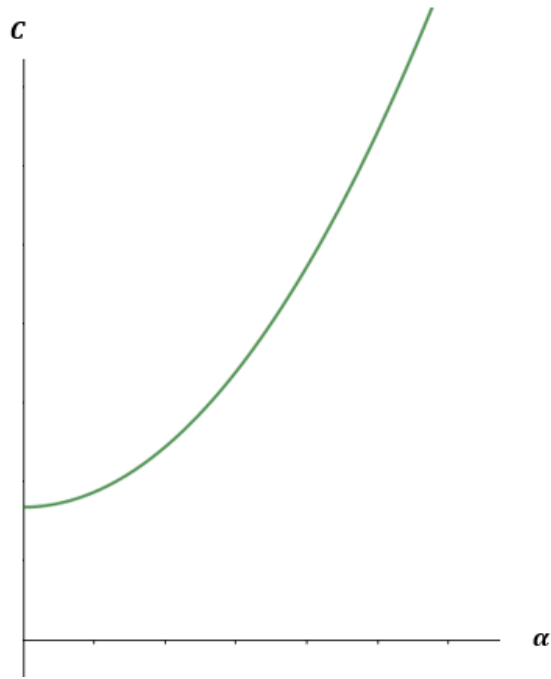


Figura 5.1: C vs α : Desarrollo de inestabilidad espacial en función del ángulo de apertura entre las cañas.

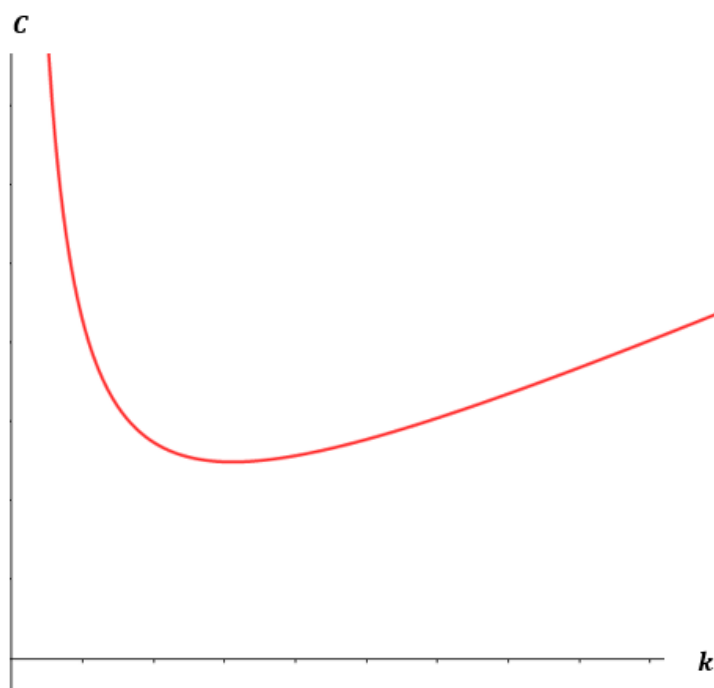


Figura 5.2: C vs K : Cuando K tiende a cero la condición de inestabilidad se indetermina.

Capítulo 6

Análisis de Resultados y Conclusiones

El análisis de estabilidad realizado es claramente muy limitado, puesto que no se obtiene una expresión para la parte imaginaria de c , lo cual determinaría la evolución temporal de las perturbaciones. A pesar de ello, el enfoque dado a la solución de la ecuación de estabilidad de McAlpine - Drazin permite tener un criterio de estabilidad espacial dado por [5.11](#). El flujo es inestable para todo ángulo α y $r \rightarrow \infty$, especialmente cuando el número de onda es muy grande. Por otro lado, cuando el número de onda es muy pequeño la condición de inestabilidad se indetermina. Una interpretación posible a esta situación podría ser que, para longitudes de onda tendiendo a infinito el flujo es estable. Esta interpretación tiene sentido si asumimos que la longitud de onda tendiendo a infinito se debe a que el largo de las cañas es mucho más grande comparado a la apertura entre estas y como resultado el ángulo α tiende a cero. Bajo esa circunstancia, el flujo dentro de las cañas se comporta parecido a un flujo inviscido entre placas paralelas infinitas.

Tras asumir que $r \rightarrow \infty$, $R_e \rightarrow \infty$ y condición de no deslizamiento en paredes rígidas, el mecanismo de inestabilidad está relacionado al hecho de que las cañas no sean paralelas, pero sobre todo que estas sean de longitud finita. La longitud de las cañas es un factor importante para determinar las propiedades mecánicas de las cañas y, por lo tanto, del desplazamiento de estas, por lo que el mecanismo que lleva a un flujo a ser inestable se debe a un acoplamiento entre la dinámica de las cañas y el flujo.

Dicho esto, el presente trabajo solo confirma la necesidad de contar con modelos fiables que acoplen el análisis de estabilidad lineal con condiciones de frontera regidas por la dinámica de las cañas. Realizar dicho análisis de manera analítica resulta muy complicado, ya que como se discutió previamente, las ecuaciones que determinan la estabilidad se complican al punto que no se pueden resolver. Así mismo, la ecuación propuesta por McAlpine -Drazin se limita solo a modelar paredes rígidas.

Para futuras investigaciones sobre el presente trabajo es conveniente que se relaje la condición de número de Reynolds tendiendo a infinito pues, bajo esta aproximación, la condición de no deslizamiento en las paredes pierde veracidad para un flujo divergente. Aún más complicado sería desarrollar una solución analítica para la inestabilidad para distancias cercanas a la fuente. Un modelo como este implica un reto matemático demasiado complejo el cual anula la posibilidad de aplicar parte de los desarrollos que se tienen hasta el momento para determinar la estabilidad lineal en un flujo de Jeffery – Hamel.

Referencias Bibliográficas

- [1] André Almeida, Christophe Vergez, and René Caussé. Quasistatic non-linear characteristics of double-reed instruments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 121(1):536–546, 2007.
- [2] WHH Banks, PG Drazin, and MB Zaturka. On perturbations of jeffery-hamel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 186:559–581, 1988.
- [3] Antoine Chaigne and Jean Kergomard. *Acoustics of musical instruments*. Springer, 2016.
- [4] Subrahmanyan Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Corporation, 2013.
- [5] PG Drazin. Flow through a diverging channel: instability and bifurcation. *Fluid Dynamics Research*, 24(6):321, 1999.
- [6] Philip G Drazin. *Introduction to hydrodynamic stability*, volume 32. Cambridge university press, 2002.
- [7] PM Eagles. The stability of a family of jeffery–hamel solutions for divergent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 24(1):191–207, 1966.
- [8] A Hirschberg. Aero-acoustics of wind instruments. *Mechanics of musical instruments*, 1995.
- [9] Lev Davidovich Landau, Evgenii Mikhailovich Lifshitz, VB Berestetskii, and LP Pitaevskii. *Mecánica de fluidos*. Reverté, 2021.
- [10] M Nagata and TR Cole. On the stability of plane poiseuille flow between compliant boundaries. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 22, 1999.
- [11] Ronald L Panton. *Incompressible flow*. John Wiley & Sons, 2013.

Referencias Bibliográficas

- [12] Christophe Vergez, André Almeida, René Causse, and Xavier Rodet. Toward a simple physical model of double-reed musical instruments: influence of aero-dynamical losses in the embouchure on the coupling between the reed and the bore of the resonator. *Acta Acustica united with Acustica*, 89(6):964–973, 2003.
- [13] APJ Wijnands. Effect of a pipe neck downstream of a double reed. In *Proc. Int. Symp. Musical Acoustics, Dourdan, France, 1995*, 1995.

Capítulo 7

Apéndice

7.1. Ecuaciones de estabilidad lineal para el flujo de Jeffery - Hamel mediante modos con crecimiento temporal

Perturbación de las ecuaciones de Navier – Stokes en coordenadas polares en dos dimensiones, asumiendo flujo de Jeffery - Hamel:

$$v_r = U + v'_r$$

$$v_\phi = v'_\phi$$

$$p = p_0 + p'$$

v'_r, v'_ϕ y p' son pequeñas perturbaciones al flujo básico p_0, U . Conservando solo los términos lineales:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v'_r}{\partial t} + \rho U \frac{\partial v'_r}{\partial r} + \rho v'_r \frac{\partial U}{\partial r} + \rho \frac{v'_\phi}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} = \\ - \frac{\partial p'}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 v'_r}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial v'_r}{\partial r} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial v'_\phi}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v'_\phi}{\partial t} + \rho U \frac{\partial v'_\phi}{\partial r} + \rho U \frac{v'_\phi}{r} = \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \phi} + \mu \frac{\partial^2 v'_\phi}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial v'_\phi}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2} v'_\phi + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 v'_\phi}{\partial^2 \phi} + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial v'_r}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (7.2)$$

multiplicando [7.1](#) por $\frac{\partial}{\partial \phi}$, [7.2](#) por $\frac{\partial}{\partial r}$ y restando ambos resultados se obtiene:

7.1. Ecuaciones de estabilidad lineal para el flujo de Jeffery - Hamel mediante modos con crecimiento temporal

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial^2 v'_r}{\partial t \partial \phi} + \rho \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{\partial v'_r}{\partial r} + \rho U \frac{\partial^2 v'_r}{\partial r \partial \phi} + \rho v'_r \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \phi} + \rho \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial v'_r}{\partial \phi} \\
& + \rho \frac{v'_\phi}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\rho}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{\partial v'_\phi}{\partial \phi} - \rho r \frac{\partial^2 v'_\phi}{\partial t \partial r} - \rho \frac{\partial v'_\phi}{\partial t} - \rho r U \frac{\partial^2 v'_\phi}{\partial r^2} \\
& - \rho v'_\phi \frac{\partial U}{\partial r} - \rho U \frac{\partial v'_\phi}{\partial r} = \mu \frac{\partial^3 v'_r}{\partial r^2 \partial \phi} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial^2 v'_r}{\partial r \partial \phi} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial v'_r}{\partial \phi} \\
& + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^3 v'_r}{\partial \phi^3} - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 v'_\phi}{\partial \phi^2} - \mu r \frac{\partial^3 v'_\phi}{\partial \phi^3} - 2\mu \frac{\partial^2 v'_\phi}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial v'_\phi}{\partial r} \\
& - \frac{\mu}{r^2} v'_\phi - \frac{\mu}{r} \frac{\partial^3 v'_\phi}{\partial \phi^2 \partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial^2 v'_r}{\partial \phi \partial r}
\end{aligned}$$

Proponiendo solución en modos normales:

$$v'_r = \widehat{v}_r(\phi) e^{ikr+st} \quad (7.3)$$

$$v'_\phi = \widehat{v}_\phi(\phi) e^{ikr+st} \quad (7.4)$$

Sustituyendo [7.3](#) y [7.4](#) en la ecuación perturbada:

$$\begin{aligned}
& \rho s \frac{d\widehat{v}_r}{d\phi} + i\rho k \frac{\partial U}{\partial \phi} \widehat{v}_r + i\rho k U \frac{d\widehat{v}_r}{d\phi} + \rho \widehat{v}_r \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \phi} + \rho \frac{\partial U}{\partial r} \frac{d\widehat{v}_r}{d\phi} + \frac{\rho v_\phi}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \\
& + \frac{\rho}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{d\widehat{v}_\phi}{d\phi} - i\rho r s k \widehat{v}_\phi - \rho s \widehat{v}_\phi + \rho k^2 r U \widehat{v}_\phi - \rho \frac{\partial U}{\partial r} \widehat{v}_\phi - i\rho U k \widehat{v}_\phi = \\
& -\mu k^2 \frac{d\widehat{v}_r}{d\phi} + i \frac{k\mu}{r} \frac{d\widehat{v}_r}{d\phi} + \frac{\mu}{r^2} \frac{d\widehat{v}_r}{d\phi} + \frac{\mu}{r^2} \frac{d^3 \widehat{v}_r}{d\phi^3} - \frac{\mu}{r^2} \frac{d^2 \widehat{v}_\phi}{d\phi^2} + i\mu r k^3 \widehat{v}_\phi + 2\mu k^2 \widehat{v}_\phi \\
& + i \frac{\mu k}{r} \widehat{v}_\phi - \frac{\mu}{r^2} \widehat{v}_\phi - i \frac{\mu k}{r} \frac{d^2 \widehat{v}_\phi}{d\phi^2} - i \frac{2\mu k}{r} \frac{d\widehat{v}_r}{d\phi}
\end{aligned} \quad (7.5)$$

Por otro lado, perturbando la ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v'_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (v'_\phi) = 0$$

7.1. Ecuaciones de estabilidad lineal para el flujo de Jeffery - Hamel mediante modos con crecimiento temporal

$$\frac{\partial}{\partial r}(v'_r) + \frac{v'_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}(v'_\phi) = 0 \quad (7.6)$$

Sustituyendo [7.3](#) y [7.4](#) en [7.6](#):

$$ik\hat{v}_r + \frac{\hat{v}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{v}_\phi}{d\phi} = 0$$

$$\hat{v}_r = -\frac{1}{1 + ikr} \frac{d\hat{v}_\phi}{d\phi} \quad (7.7)$$

Encontrar un resultado para las perturbaciones, y principalmente determinar la estabilidad lineal del flujo de Jeffery - Hamel resulta muy complicado siguiendo este camino, es por esta razón que los resultados de McAlpine y Drazin son tan importantes.