



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

H-NÚCLEOS EN DIGRÁFICAS
ASIMÉTRICAS 3-CUASITRANSITIVAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

CARLOS GUADALUPE CEDILLO PONCE

TUTORA

DRA. MARÍA DEL ROCÍO SÁNCHEZ LÓPEZ

2022

CIUDAD DE MÉXICO





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres

Índice general

Introducción	1
Preliminares	4
0.0.1. Definiciones	4
0.0.2. Resultados básicos	8
1. Núcleos y núcleos por trayectorias monocromáticas	10
1.1. Núcleos	10
1.2. Núcleos por trayectorias monocromáticas	12
2. Núcleos en digráficas asimétricas 3-cuasitransitivas m-coloreadas	17
2.1. Resultados Previos	17
2.2. Resultado principal	31
3. Digráficas H-coloreadas y H-núcleos	35
3.1. Definiciones y resultados previos	35
3.2. Resultado principal	51
Conclusión	56
Bibliografía	62

Introducción

Sea D una digráfica. Un subconjunto N de $V(D)$ es un *núcleo* de D si para cualquier par de vértices x y y en N no existe una flecha entre ellos y para todo vértice u en $V(D) \setminus N$ existe un vértice v en N tal que $(u, v) \in F(D)$. El concepto de núcleo tiene su origen en la Teoría de Juegos, fue introducido por von Neumann y Morgenstern en [12] y originalmente fue llamado *solución*. Posteriormente, Berge notó que dicho concepto podía ser aplicado en otros campos de las matemáticas, y con una ligera redefinición de su parte en [2], dio lugar al concepto de núcleo de una digráfica.

La importancia de la teoría de núcleos, como rama de la Teoría de Digráficas, recae en sus múltiples aplicaciones en diversas áreas como Teoría de Juegos, Teoría de las Decisiones, Lógica, Optimización [3], etc.

En [5] Chvátal demostró que el problema de determinar si una digráfica tiene o no núcleo es un problema NP-completo, por lo cual se han buscado condiciones suficientes para garantizar que una digráfica tenga núcleo. Entre los pioneros de esta línea de investigación se encuentran von Neumann, Morgenstern, Richardson, Berge, Duchet, Meyniel, Hortensia Galeana Sánchez, Jacob, entre otros.

Los primeros resultados que exhibieron condiciones para la existencia de un núcleo en una digráfica, tienen sus hipótesis sobre los ciclos de la digráfica. Tal es el caso del teorema de Duchet [6] que dice que si D es una digráfica tal que todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica, entonces D tiene núcleo. Dicho teorema será esencial para la prueba de algunos resultados presentados en esta tesis.

Una de las generalizaciones del concepto de núcleo es el de núcleo por trayectorias mono-

cromáticas en digráficas m -coloreadas, el cual se debe a Hortensia Galeana Sánchez, quien lo introdujo por primera vez en [7]. De este modo, dada una digráfica m -coloreada D , decimos que un subconjunto N de $V(D)$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas si para cualquier par de vértices x y y en N no existe una trayectoria monocromática entre ellos y para todo vértice u en $V(D) \setminus N$ existe un vértice v en N tal que existe una uv -trayectoria monocromática en D . Uno de los resultados clásicos en núcleos por trayectorias monocromáticas es el obtenido por Sands, Sauer y Woodrow en [13], quienes demostraron, en particular, que toda digráfica con un número finito de vértices 2-coloreada, tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Como no es sencillo determinar cuando una digráfica m -coloreada tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, entonces el estudio de este tema se ha centrado, por ejemplo, en operaciones entre dos digráficas o en ciertas familias de digráficas como las digráficas pretransitivas, digráficas cuasitransitivas, digráficas 3-cuasitransitivas, por nombrar algunas. Así mismo se han añadido condiciones monocromáticas o casimonocromáticas a subdigráficas como ciclos, trayectorias y subtorneos con la finalidad de obtener resultados sobre núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas. Recientemente, en [9] Hortensia Galeana Sánchez introdujo el concepto de digráfica de clases de color con la finalidad de encontrar nuevas condiciones que garanticen la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas.

Con el fin de hallar una digráfica auxiliar que preserve toda la información con respecto a las trayectorias monocromáticas entre dos vértices de una digráfica y en la cual además se pueda aplicar la teoría de núcleos ya existente, Hortensia Galeana Sánchez introduce en [8] el concepto de cerradura de una digráfica m -coloreada.

En [10], Hortensia Galeana Sánchez y Eugenia O'Reilly Regueiro estudiaron la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas asimétricas 3-cuasitransitivas agregando condiciones monocromáticas y casimonocromáticas en los ciclos de longitud 3 y 4 contenidos en D . Los resultados obtenidos en dicho artículo se obtienen principalmente mediante el estudio de la cerradura de la digráfica.

Una generalización del concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas es el de H -núcleo, el cual fue introducido por Hortensia Galeana Sánchez y Pietra Delgado Escalan-

te en [4] motivadas por el trabajo de P. Arpin y V. Linek en [1]. De este modo, dada una digráfica H -coloreada D , decimos que un subconjunto N de $V(D)$ es un H -núcleo si para cualquier par de vértices x y y en N no existe una H -trayectoria entre ellos y para todo vértice u en $V(D) \setminus N$ existe un vértice v en N tal que existe una uv - H -trayectoria en D .

Este trabajo está motivado por los resultados obtenidos en [10] por Hortensia Galeana Sánchez y Eugenia O'Reilly Regueiro, consiste de tres capítulos, empezando con un apartado previo a dichos capítulos en el que presentamos algunas definiciones y resultados básicos en la teoría de digráficas, los cuales serán de utilidad a lo largo de este trabajo.

En el primer capítulo se introducirá la definición de núcleo, núcleo por trayectorias monocromáticas y cerradura de una digráfica m -coloreada y demostraremos un teorema que nos permite relacionar los conceptos de núcleo y núcleo por trayectorias monocromáticas a través de la cerradura.

En el segundo capítulo se exponen los resultados obtenidos en [10] por Hortensia Galeana Sánchez y Eugenia O'Reilly Regueiro, sobre la existencia de núcleo por trayectorias monocromáticas en digráficas asimétricas 3-cuasitransitivas m -coloreadas.

En el tercer capítulo se explica el concepto de H -coloración y se presentan definiciones referentes a digráficas H -coloreadas. Posteriormente se introduce el concepto de H -núcleo y se exhiben resultados generalizados a digráficas H -coloreadas de los obtenidos en [10]. Finalmente se presenta una extensión a H -núcleos del resultado principal obtenido en [10].

Preliminares

Este capítulo está dividido en dos secciones. En la primera daremos las definiciones básicas de la Teoría de Digráficas que se usaran a lo largo de este trabajo, en su mayoría acompañadas de ejemplos para una mejor comprensión de las mismas. En la segunda sección enunciaremos algunos resultados básicos que nos serán de utilidad en los capítulos posteriores.

0.0.1. Definiciones

Una **digráfica** D es una pareja ordenada $(V(D), F(D))$ donde $V(D)$ es un conjunto finito y no vacío de objetos, llamados vértices, y $F(D)$ es un conjunto de pares ordenados de vértices, llamados flechas.

Decimos que D es de **orden** p y **tamaño** q si $|V(D)| = p$ y $|F(D)| = q$, respectivamente.

Una forma de representar geoméricamente a una digráfica es dibujando un punto en el plano por cada vértice y una flecha del punto asociado al vértice u hacia el punto asociado al vértice v si la pareja ordenada (u, v) es una flecha en D . En la figura 0-1 podemos ver la representación geométrica de la digráfica D_1 tal que $V(D_1) = \{v, x, y, z, w\}$ y $F(D_1) = \{(x, y), (x, z), (y, w), (y, z), (z, x), (z, y), (v, z)\}$.

Dada una digráfica D , si $(u, v) \in F(D)$, decimos que u y v son **adyacentes**, llamaremos a u el **vértice inicial** y a v el **vértice final** de la flecha; también decimos que la flecha (u, v) **sale** de u y **entra** en v . Además, si $(u, v) \in F(D)$ se dice que u domina a v (o que v es dominado por u).

Dados u y v dos vértices distintos de una digráfica D , decimos que (u, v) es una flecha **simétrica** si (v, u) también pertenece al conjunto de flechas de D . Si $(u, v) \in F(D)$, pero

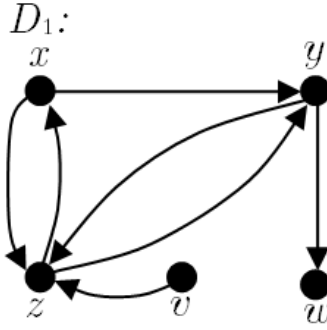
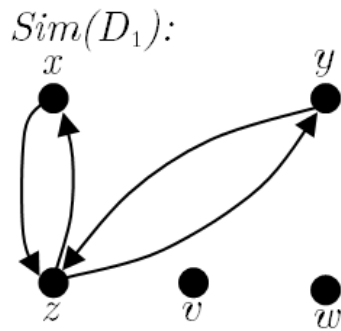


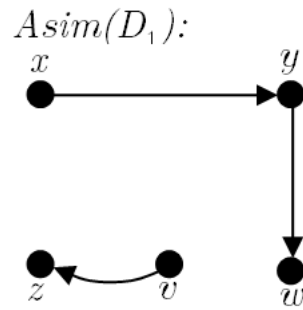
Figura 0-1: Representación geométrica de una digráfica.

$(v, u) \notin F(D)$, entonces (u, v) es **asimétrica**. En la figura 0-1 (x, z) es una flecha simétrica y (y, w) es una flecha asimétrica.

Definimos la **parte simétrica** de D , denotada por $Sim(D)$, como la digráfica tal que $V(Sim(D)) = V(D)$ y $F(Sim(D))$ es el conjunto de todas las flechas simétricas de D . Asimismo, definimos la **parte asimétrica** de D , denotada por $Asim(D)$, como la digráfica tal que $V(Asim(D)) = V(D)$ y $F(Asim(D))$ es el conjunto formado por las flechas asimétricas de D .



(a) Parte simétrica de la digráfica D_1 .



(b) Parte asimétrica de la digráfica D_1 .

Figura 0-2:

Decimos que una flecha de D es un **lazo** si su vértice inicial y final coinciden.

Para todo vértice v en una digráfica D , definimos los siguientes conjuntos: el conjunto de los **vecinos exteriores** de v , denotado por $N_D^+(v)$, definido como $\{u \in V(D) : (v, u) \in F(D)\}$ y el conjunto de los **vecinos interiores** de v , denotado por $N_D^-(v)$, definido como $\{w \in V(D) : (w, v) \in F(D)\}$. Los conjuntos $N_D^+(v)$ y $N_D^-(v)$, son llama-

dos también **exvecindad** e **invecindad** de v , respectivamente. Llamaremos a los vértices de los conjuntos $N_D^+(v)$ y $N_D^-(v)$ **exvecinos** e **invecinos** de v respectivamente. Denotamos por $d_D^+(v)$ a la cardinalidad de $N_D^+(v)$ y por $d_D^-(v)$ a la cardinalidad de $N_D^-(v)$. De acuerdo con estas definiciones previas, en la digráfica D_2 de la figura 0-3 tenemos que $N_{D_2}^+(z) = \{x, v, w\}$ y $N_{D_2}^-(z) = \{w, x\}$, por lo que $d_{D_2}^+(z) = 3$ y $d_{D_2}^-(z) = 2$.

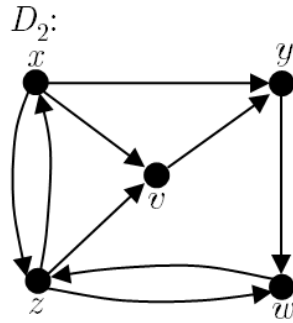


Figura 0-3:

Llamaremos **fuelle** a cualquier vértice D cuyo conjunto de invecinos sea vacío, inversamente, llamamos **pozo** a cualquier vértice de D cuyo conjunto de exvecinos sea vacío.

Decimos que una digráfica H es **subdigráfica** de D si $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$. Si $V(H) = V(D)$ decimos entonces que H es una **subdigráfica generadora** de D . Note que en particular $Sim(D)$ y $Asim(D)$ son subdigráficas generadoras de D , por ejemplo, $Sim(D_1)$ y $Asim(D_1)$ (figura 0-2) son subdigráficas generadoras de D_1 (figura 0-1). Dado un subconjunto X de $V(D)$, llamamos **subdigráfica inducida** por X , denotada por $D(X)$, a la digráfica tal que $V(D(X)) = X$ y $F(D(X)) = \{(u, v) \in F(D) : \{u, v\} \subseteq X\}$.

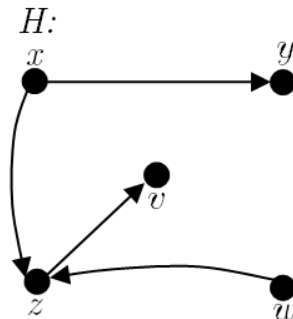


Figura 0-4: Ejemplo de una subdigráfica generadora de D_2 .

Decimos que dos digráficas D y H , son **isomorfas** si existe una función $f : V(D) \rightarrow V(H)$ biyectiva tal que $(u, v) \in F(D)$ si y solo si $(f(u), f(v)) \in F(H)$. En la figura 0-5 podemos ver que las digráficas D y H son isomorfas bajo la función $f : V(D) \rightarrow V(H)$ dada por $f(x) = a, f(y) = b, f(w) = c, f(z) = d$.

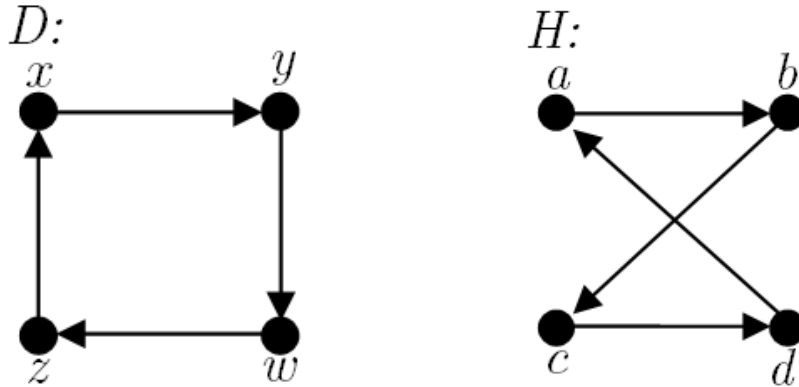


Figura 0-5: Ejemplo de digráficas isomorfas.

Un **camino dirigido** en D es una sucesión finita de vértices, $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, tales que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ para $0 \leq i < n$. La **longitud** del camino dirigido C se define como el número n y se denota por $l(C)$. Si $x_0 = x_n$, entonces decimos que C es un **camino dirigido cerrado**. Sea $\{x_i, x_j\}$, con $0 \leq i < j \leq n$, un subconjunto de $V(C)$ denotamos por (x_i, C, x_j) al camino dirigido $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_j)$. Un **paseo dirigido** es un camino dirigido que no repite flechas. Un **ciclo dirigido** es un camino dirigido de longitud al menos 2 que únicamente repite el primer y último vértice. Denotamos por C_n al ciclo dirigido de orden n . Decimos que D es una digráfica **acíclica** si no contiene ningún ciclo. Una **trayectoria dirigida** es un camino dirigido que no repite vértices.

De ahora en adelante omitiremos la palabra “dirigido” para hacer referencia a cualquier tipo de camino dirigido ya que a lo largo de este escrito solo se trabajará con digráficas.

En ocasiones, para referirnos a un camino, paseo o trayectoria dirigida que comience en el vértice u y termine en el vértice v escribiremos **uv -camino**, **uv -paseo** o **uv -trayectoria**, respectivamente.

Sean $C_1 = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y_0)$ y $C_2 = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_m)$ dos caminos en una digráfica

D , denotaremos por $C_1 \cup C_2$ al camino $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y_0, y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Una digráfica T se dice que es un **torneo** si no tiene flechas simétricas y para cualquier subconjunto $\{u, v\}$ de $V(T)$, con $u \neq v$, se tiene que $(u, v) \in F(T)$ o $(v, u) \in F(T)$.

Una digráfica D es **k -transitiva** si para cualquier subconjunto $\{u, v\}$ de $V(D)$ siempre que hay una uv -trayectoria de longitud k , se tiene que $(u, v) \in F(D)$. De una manera más general decimos que D es **k -cuasitransitiva** si para cualquier subconjunto $\{u, v\}$ de $V(D)$ siempre que hay una uv -trayectoria de longitud k , se tiene que $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$. Si una digráfica es 2-transitiva (2-cuasitransitiva), será simplemente llamada **transitiva (cuasitransitiva)**.

0.0.2. Resultados básicos

Teorema 0.1. Sean D una digráfica y $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(D)$. Si D tiene un uv -camino W , entonces W contiene una uv -trayectoria.

Demostración. Sean $W = (u = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, v = x_n)$ un uv -camino en D y $T = (u = y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, v = y_n)$ un uv -camino contenido en W tal que $l(T) = \min\{L\}$ con $L = \{l(C) : C \text{ es un } uv\text{-camino contenido en } W\}$ (note que $l(W) \in L$). Probaremos por contradicción que T es una uv -trayectoria. Supongamos que para algún subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, con $i < j$, se tiene que $x_i = x_j$; esto implica que $(u = x_0, T, x_i) \cup (x_j, T, x_n = v)$ es un uv -camino de longitud menor que $l(T)$, lo cual no es posible por la elección de T . Por lo tanto, todos los vértices de T son distintos. Así, T es una uv -trayectoria contenida en W . \square

Teorema 0.2. Sea D una digráfica. Si D es acíclica, entonces existe un vértice v en D tal que $d_D^-(v) = 0$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $d_D^-(v) > 0$ para todo vértice v de D . Consideremos a $T = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ una trayectoria de longitud máxima en D . Como $d_D^-(x_0) > 0$, entonces existe u , un vértice de D , tal que $(u, x_0) \in F(D)$. Si u no es un vértice de T , entonces $T' = (u, x_0, x_1, \dots, x_n)$ es una trayectoria de longitud mayor que $l(T)$, lo cual es una contradicción con la elección de T . Supongamos entonces que u es un vértice de T ; es decir, $u = x_j$ para algún j en $\{1, 2, \dots, n\}$; esto implica que $C = (x_0, x_1, \dots, x_{j+1}, x_j = u, x_0)$

es un ciclo en D , lo cual no es posible pues D es acíclica. Por lo tanto, existe un vértice v en D tal que $d_D^-(v) = 0$. \square

Capítulo 1

Núcleos y núcleos por trayectorias monocromáticas

En la primera sección de este capítulo, introduciremos la definición de núcleo de una digráfica, uno de los conceptos con mayor relevancia dentro de la teoría de digráficas. En la segunda sección, daremos la definición de núcleo por trayectorias monocromáticas de una digráfica, el cual veremos que es una generalización de núcleo de una digráfica. Así mismo, en ambas secciones, ejemplificaremos dichos conceptos para facilitar al lector su comprensión, también enunciaremos algunos resultados relacionados con la existencia de núcleos y núcleos por trayectorias monocromáticas en una digráfica.

1.1. Núcleos

Dada una digráfica D y S un subconjunto de $V(D)$, decimos que S es un conjunto **independiente** si para cualquier subconjunto $\{u, v\}$ de S , $(u, v) \notin F(D)$.

Dada una digráfica D y S un subconjunto de $V(D)$, decimos que S es un conjunto **absorbente** si para todo u en $V(D) \setminus S$ existe v en S tal que $(u, v) \in F(D)$.

Si N es un subconjunto de vértices independiente y absorbente de una digráfica D , entonces decimos que N es un **núcleo** de D . Si D es una digráfica tal que todas sus subdigráficas

inducidas tienen núcleo, decimos entonces que D es **núcleo perfecta**.

En la digráfica D de la figura 1-1 podemos observar que $\{v_3, v_7\}$ es un conjunto independiente, pues no hay flechas entre v_7 y v_3 , y es un conjunto absorbente, pues para cada vértice en $V(D) \setminus N$ hay una flecha hacia algún vértice de N , a saber, (v_1, v_7) , (v_6, v_7) , (v_5, v_7) , (v_2, v_3) , (v_8, v_3) , (v_4, v_3) . Por lo tanto, $\{v_3, v_7\}$ es un núcleo de D .

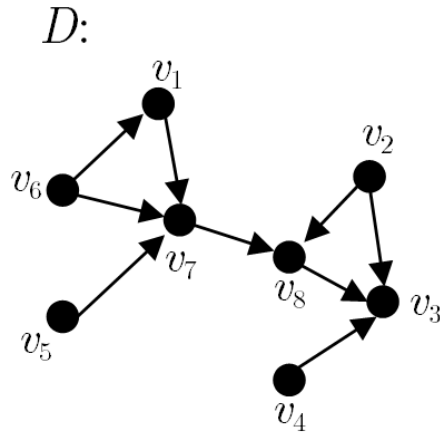


Figura 1-1: Ejemplo de digráfica con núcleo.

Teorema 1.1. (Duchet [6]) Sea D una digráfica. Si todo ciclo de D tiene al menos una flecha simétrica, entonces D tiene un núcleo.

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre $|V(D)|$.

Base de la inducción. Si $|V(D)| = 1$, entonces $V(D) = \{u\}$ y $\{u\}$ es un núcleo de D .

Hipótesis de inducción. Si D' es una digráfica tal que $|V(D')| = n$ y todo ciclo en D' tiene una flecha simétrica, entonces D' tiene núcleo.

Paso inductivo. Sea D una digráfica tal que $|V(D)| = n + 1$ y todo ciclo en D tiene una flecha simétrica.

Consideremos la digráfica $Asim(D)$. Como todo ciclo en D tiene una flecha simétrica, entonces en $Asim(D)$ no hay ciclos, lo que implica (por el teorema 0.2) que existe un vértice v en D tal que $d_{Asim(D)}^-(v) = 0$.

Sea H la subdigráfica inducida por el conjunto $X = V(D) \setminus \{v\}$. Notemos que como H es

una subdigráfica inducida de D , entonces todo ciclo en H también tiene al menos una flecha simétrica, por lo que por hipótesis de inducción H tiene un núcleo, digamos N . Tenemos dos casos para v .

Caso 1. Existe un vértice u en N tal que $(v, u) \in F(D)$.

Puesto que N es un conjunto independiente en H , entonces N es un conjunto independiente en D . Por otro lado, dado que existe un vértice u en N tal que $(v, u) \in F(D)$ y N es un conjunto absorbente en H , entonces N es un conjunto absorbente en D . Por lo tanto, como N es un conjunto independiente y absorbente en D , N es un núcleo de D .

Caso 2. No existe un vértice u en N tal que $(v, u) \in F(D)$.

Consideremos al conjunto $N \cup \{v\}$. Veamos que $N \cup \{v\}$ es un conjunto independiente en D . Ya que N es un conjunto independiente en H y no existe un vértice u en N tal que $(v, u) \in F(D)$, basta probar que no existe un vértice w en N tal que $(w, v) \in F(D)$. Supongamos que existe un vértice w en N tal que $(w, v) \in F(D)$; como $d_{Asim(D)}^-(v) = 0$, entonces (w, v) es una flecha simétrica de D ; es decir, $(v, w) \in F(D)$, lo cual es una contradicción a la suposición de este caso. Por lo tanto, $N \cup \{v\}$ es un conjunto independiente en D . Puesto que N es un conjunto absorbente en H , entonces $N \cup \{v\}$ es un conjunto absorbente en D . Así, como $N \cup \{v\}$ es un conjunto independiente y absorbente en D , se sigue que $N \cup \{v\}$ es un núcleo de D .

Hemos probado que en cualquier caso D tiene núcleo. Por lo tanto, hemos terminado la prueba de este teorema.

□

1.2. Núcleos por trayectorias monocromáticas

Sea D una digráfica, una **m -coloración** de las flechas de D es una función $c : F(D) \longrightarrow \{1, 2, \dots, m\}$, donde $\{1, 2, \dots, m\}$ es el conjunto de colores asignables a las

flechas de D . Si D tiene asociada una m -coloración por flechas, diremos que D es una digráfica m -coloreada. Cuando D sea 1-coloreada simplemente decimos que D es una digráfica **monocromática**. Asimismo se dirá que un camino, paseo, ciclo o trayectoria es monocromático si todas sus flechas son del mismo color.

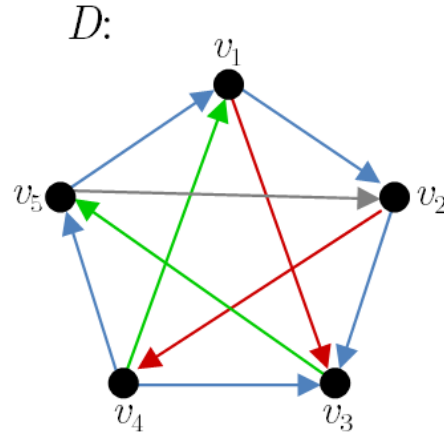


Figura 1-2: Ejemplo de digráfica 4-coloreada.

Teorema 1.2. Sean D una digráfica m -coloreada y $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(D)$. Si D tiene un uv -camino monocromático W , entonces W contiene una uv -trayectoria monocromática.

Demostración. Notemos que W es, en particular, un uv -camino, por lo que por el teorema 0.1 W contiene una uv -trayectoria, digamos T . Como $F(T) \subseteq F(W)$ y todas las flechas de W son del mismo color, entonces todas las flechas de T son del mismo color, es decir, T es una uv -trayectoria monocromática contenida en W . \square

Decimos que una digráfica D es **casimonocromática** si, con a lo más una excepción, sus flechas están coloreadas del mismo color.

Dada una digráfica m -coloreada D y S un subconjunto de $V(D)$, decimos que S es un conjunto **independiente por trayectorias monocromáticas** si para cualquier subconjunto $\{u, v\}$ de S , no existe una uv -trayectoria monocromática en D . Asimismo, decimos que S es un conjunto **absorbente por trayectorias monocromáticas** si para todo u en $V(D) \setminus S$ existe v en S tal que hay al menos una uv -trayectoria monocromática en D .

Si D es una digráfica m -coloreada y N es un subconjunto de $V(D)$ independiente por trayectorias monocromáticas y absorbente por trayectorias monocromáticas, entonces N es llamado **núcleo por trayectorias monocromáticas**. En la digráfica de la figura 1-2, $N = \{v_1\}$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D , pues N es claramente un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas y $(v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$ es una trayectoria monocromática que termina en v_1 y pasa por todos los vértices de $V(D) \setminus N$, por lo que, N es un conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas. De ahora en adelante usaremos **nptm** para abreviar “núcleo por trayectorias monocromáticas”.

Una **multidigráfica** es una digráfica que puede tener **flechas paralelas**; donde dos flechas son paralelas si unen al mismo par de vértices en la misma dirección. En la digráfica de la figura 1-3, entre los vértices v_4 y v_2 hay flechas paralelas.

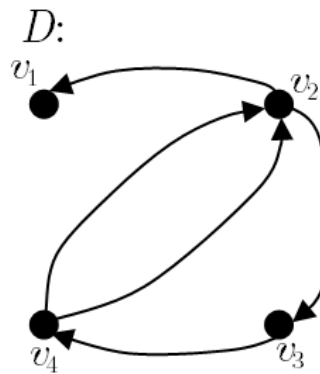


Figura 1-3: Ejemplo de una multidigráfica.

Dada una digráfica m -coloreada D , definimos la **cerradura** de D , denotada por $\mathcal{C}(D)$, como la multidigráfica m -coloreada tal que $V(\mathcal{C}(D)) = V(D)$ y $F(\mathcal{C}(D)) = \{(u, v)_i : \text{hay una } uv\text{-trayectoria monocromática en } D \text{ de color } i\}$, donde $(u, v)_i$ denota una flecha (u, v) con color i (figura 1-4).

Sea D una digráfica m -coloreada. Si la m -coloración asociada a D es tal que cualesquiera dos flechas de D tienen color distinto, entonces es claro que las únicas trayectorias monocromáticas en D son cada una de las flechas de D , por lo que si un subconjunto N de $V(D)$ es núcleo de D , entonces N es nptm de D y viceversa. Por lo tanto, el concepto de nptm de una digráfica

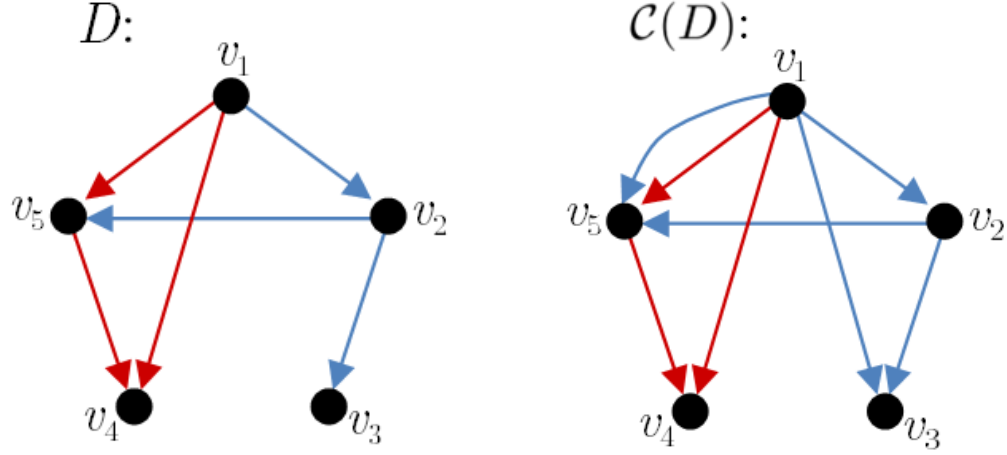


Figura 1-4: Ejemplo de una digráfica y su cerradura.

m -coloreada es una generalización de núcleo de una digráfica.

Ambos conceptos, núcleo y nptm, se relacionan gracias al siguiente resultado.

Teorema 1.3. Sean D una digráfica m -coloreada y N un subconjunto de $V(D)$. N es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D si y solo si N es un núcleo de $\mathcal{C}(D)$.

Demostración. La siguiente observación nos ayudará en la demostración del teorema:

Observación 1. De la definición de cerradura de D se tiene que dados u y v dos vértices de D distintos, se tiene que existe una uv -trayectoria monocromática en D si y solo si $(u, v) \in F(\mathcal{C}(D))$.

Sea N un núcleo por trayectorias monocromáticas de D . Veamos que N es núcleo de $\mathcal{C}(D)$.

Como N es un nptm de D , entonces para cualquier vértice u en $V(D) \setminus N$ existe un vértice v en N tal que existe una uv -trayectoria monocromática en D , esto implica, por la observación 1, que $(u, v) \in F(\mathcal{C}(D))$. Como $V(\mathcal{C}(D)) \setminus N = V(D) \setminus N$, entonces se ha demostrado que para todo vértice u en $V(\mathcal{C}(D)) \setminus N$ existe un vértice v en N tal que $(u, v) \in F(\mathcal{C}(D))$. Por lo tanto, N es un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)$.

Por otro lado, como N es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D , entonces no existen trayectorias monocromáticas entre cualesquiera dos vértices de N en D , esto implica, por la observación 1, que no existen flechas entre cualesquiera dos vértices de N

en $\mathcal{C}(D)$. Por lo tanto, N es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$.

Así, como N es un conjunto independiente y absorbente en $\mathcal{C}(D)$, entonces N es un núcleo de $\mathcal{C}(D)$.

Sea N' un núcleo de $\mathcal{C}(D)$. Veamos que N' es núcleo por trayectorias monocromáticas en D .

Como N' es un núcleo de $\mathcal{C}(D)$, entonces para cualquier vértice u en $V(\mathcal{C}(D)) \setminus N'$ existe un vértice v en N' tal que $(u, v) \in F(\mathcal{C}(D))$, esto implica, por la observación 1, que existe una uv -trayectoria monocromática en D . Como $V(\mathcal{C}(D)) \setminus N' = V(D) \setminus N'$, entonces se ha demostrado que para todo vértice u en $V(D) \setminus N'$ existe un vértice v en N' tal que hay una uv -trayectoria monocromática en D . Por lo tanto, N' es un conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas en D .

Por otro lado, como N' es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$, entonces no existen flechas entre cualesquiera dos vértices de N' en $\mathcal{C}(D)$, esto implica, por la observación 1, que no existen trayectorias monocromáticas entre cualesquiera dos vértices de N' en D . Por lo tanto, N' es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Como N' es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas y absorbente por trayectorias monocromáticas en D , entonces N' es un nptm de D . □

Capítulo 2

Núcleos en digráficas asimétricas

3-cuasitransitivas m -coloreadas

En este capítulo se hace un análisis del artículo *Monochromatic absorbency and independence in 3-quasi-transitive digraphs* escrito por Hortensia Galeana Sánchez y Eugenia O'Reilly Regueiro, en el cual se dan condiciones suficientes para la existencia de núcleos en digráficas asimétricas 3-cuasitransitivas m -coloreadas. Para esto se hace un análisis de la cerradura de una digráfica con tales condiciones.

2.1. Resultados Previos

Lema 2.1. Sean D una digráfica asimétrica 3-cuasitransitiva y $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(D)$ tal que existe una uv -trayectoria T en D , pero no una vu -trayectoria, entonces:

- si $l(T)$ es impar, entonces $(u, v) \in F(D)$ o
- si $l(T)$ es par, entonces existe un vértice w en $V(T)$ tal que (u, w, v) es una trayectoria en D .

Demostración. Supongamos que $T = (u = w_0, w_1, \dots, w_n = v)$. Tenemos dos casos sobre $l(T)$.

Caso 1. $l(T) = 2k + 1$. Probaremos por inducción sobre k que $(u, v) \in F(D)$.

Base de la inducción. Si $k = 0$, entonces $(u, v) \in F(D)$. Si $k = 1$, entonces $T = (u = w_0, w_1, w_2, v = w_3)$. Como D es 3-cuasitransitiva, entonces $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$; dado que por hipótesis no existe la vu -trayectoria en D , entonces $(v, u) \notin F(D)$, por lo que, $(u, v) \in F(D)$.

Hipótesis de inducción. Si $\{x, y\}$ es un subconjunto de $V(D)$ tal que existe una xy -trayectoria en D , digamos T' , no existe una yx -trayectoria en D y $l(T')$ es impar, con $l(T') < 2k + 1$, entonces $(x, y) \in F(D)$.

Paso inductivo. Sean u y v dos vértices distintos de $V(D)$ tales que existe una uv -trayectoria en D , digamos $T = (u = w_0, w_1, \dots, w_{2k+1} = v)$, con $k \geq 2$, y no existe una vu -trayectoria en D . Como $(u = w_0, w_1, w_2, w_3)$ es una trayectoria de longitud 3 y D es 3-cuasitransitiva, entonces $(u, w_3) \in F(D)$ o $(w_3, u) \in F(D)$.

Si suponemos que $(u, w_3) \in F(D)$, entonces $T' = (u = w_0, w_3, \dots, w_n = v)$ es una uv -trayectoria en D , con $l(T') = 2k - 1$, y como no existe una vu -trayectoria en D (por hipótesis), entonces por hipótesis de inducción $(u, v) \in F(D)$.

Supongamos que $(w_3, u) \in F(D)$ y consideremos la trayectoria $Q = (w_2, w_3, \dots, w_n = v)$, cuya longitud es $2k - 1$. Si existe una vw_2 -trayectoria en D , digamos P , entonces $P \cup (w_2, w_3, u = w_0)$ es un vu -camino en D , el cual, por el teorema 0.1, contiene una vu -trayectoria, lo cual no es posible. Supongamos entonces que no existe una vw_2 -trayectoria en D , entonces por hipótesis de inducción se tiene que $(w_2, v) \in F(D)$; esto implica que $(u = w_0, w_1, w_2, w_{2k+1} = v)$ es una uv -trayectoria de longitud 3 en D y dado que D es 3-cuasitransitiva y no existe vu -trayectoria en D , entonces podemos concluir que $(u, v) \in F(D)$.

Caso 2. $l(T) = 2k$. Probaremos por inducción sobre k que existe w en $V(D)$ tal que (u, w, v) es una trayectoria en D .

Base de la inducción. Si $k = 1$, entonces (u, w, v) es la uv -trayectoria buscada. Si $k = 2$, entonces como D es 3-cuasitransitiva, se tiene que para las trayectorias $(u = w_0, w_1, w_2, w_3)$ y $(w_1, w_2, w_3, w_4 = v)$, $(w_0, w_3) \in F(D)$ o $(w_3, w_0) \in F(D)$, asi-

mismo, $(w_1, w_4) \in F(D)$ o $(w_4, w_1) \in F(D)$, respectivamente. Si $(w_3, w_0) \in F(D)$, entonces $(w_4, w_1) \notin F(D)$, de otra manera $(v = w_4, w_1, w_2, w_3, w_0 = u)$ es una vu -trayectoria en D , lo cual no es posible. Por lo tanto, $(w_1, w_4) \in F(D)$ implica que $(u = w_0, w_1, w_4 = v)$ es la trayectoria buscada. Si $(w_0, w_3) \in F(D)$, entonces $(u = w_0, w_3, w_4 = v)$ es la trayectoria deseada.

Hipótesis de inducción. Si $\{x, y\}$ es un subconjunto de $V(D)$ tal que existe una xy -trayectoria en D , digamos T' , no existe una yx -trayectoria en D y $l(T')$ es par, con $l(T') < 2k$, entonces existe w' tal que (x, w', y) es una trayectoria en D .

Paso inductivo. Sean u y v dos vértices distintos de $V(D)$ tales que existe una uv -trayectoria en D , digamos $T = (u = w_0, w_1, \dots, w_{2k} = v)$, con $k \geq 3$, y no existe una vu -trayectoria en D .

Como D es 3-cuasitransitiva, para la trayectoria $(w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3})$, con $0 \leq i \leq 2k - 3$, se tiene que $(w_i, w_{i+3}) \in F(D)$ o $(w_{i+3}, w_i) \in F(D)$. Si existe alguna i en $\{0, 1, \dots, 2k - 3\}$ tal que $(w_i, w_{i+3}) \in F(D)$, entonces $T' = (u = w_0, T, w_i) \cup (w_i, w_{i+3}) \cup (w_{i+3}, T, w_{2k} = v)$ es una uv -trayectoria de longitud $2k - 2$ y ya que asumimos que no existe una vu -trayectoria en D , entonces, por hipótesis de inducción, existe w en $V(D)$ tal que (u, w, v) es la trayectoria buscada.

Supongamos que para toda i en $\{0, 1, \dots, 2k - 3\}$ se tiene que $(w_{i+3}, w_i) \in F(D)$; entonces $(v = w_n, w_{n-3}, w_{n-2}, w_{n-1}, w_{n-4}, w_{n-3}, w_{n-2}, \dots, w_1, w_2, w_3, w_0 = u)$ es un vu -camino en D el cual, por el teorema 0.1, contiene una vu -trayectoria, lo que es una contradicción a nuestra hipótesis, con lo que habríamos terminado la prueba.

□

Lema 2.2. Sean D una digráfica m -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva tal que todo C_4 es monocromático y $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(D)$ tal que existe una uv -trayectoria monocromática T en D , pero no una vu -trayectoria monocromática, entonces:

- $(u, v) \in F(D)$ o
- existe un vértice w en $V(T)$ tal que (u, w, v) es una trayectoria en D .

Demostración. Supongamos que $T = (u = w_0, w_1, \dots, w_n = v)$ es una uv -trayectoria monocromática de longitud mínima en D .

Notemos que si $n = 1$, entonces $(u, v) \in F(D)$ y si $n = 2$, entonces $T = (u = w_0, w_1, w_2 = v)$ es la trayectoria buscada. Por otro lado, si $n = 3$, como D es 3-cuasitransitiva, entonces $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$; dado que por hipótesis no existe la vu -trayectoria monocromática en D , debe suceder que $(u, v) \in F(D)$.

Para probar el lema para $n \geq 4$ procederemos por contradicción. Supongamos que $(u, v) \notin F(D)$ y no existe w en $V(T)$ tal que (u, w, v) es una trayectoria en D .

Afirmación: Para cualquier par de vértices distintos w_i y w_j de T , con $0 \leq i \leq n - 2$ y $n \geq j \geq i + 2$, se tiene que $(w_i, w_j) \notin F(D)$; es decir, si existe la flecha entre w_i y w_j , esta debe ser (w_j, w_i) . Haremos la prueba de esta afirmación por inducción sobre i .

Base de la inducción. Haremos la base de la inducción para $i = 0$ e $i = 1$.

Supongamos que $i = 0$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe alguna $j \geq 2$ tal que $(w_0, w_j) \in F(D)$. Sea $m = \text{máx}\{j : (w_0, w_j) \in F(D)\}$. Como $(u = w_0, w_n = v) \notin F(D)$, entonces $m \neq n$; y puesto que no existe w en $V(T)$ tal que (u, w, v) es una trayectoria en D , entonces $m \neq n - 1$. Por lo tanto, si consideramos la trayectoria $(w_0, w_m, w_{m+1}, w_{m+2})$ y como D es 3-cuasitransitiva, entonces $(w_0, w_{m+2}) \in F(D)$ o $(w_{m+2}, w_0) \in F(D)$. Dado que $m = \text{máx}\{j : (w_0, w_j) \in F(D)\}$, entonces $(w_{m+2}, w_0) \in F(D)$, lo que implica que $P = (u = w_0, w_m, w_{m+1}, w_{m+2}, w_0 = u)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático. Por lo tanto, tenemos que $(u = w_0, P, w_{m+2}) \cup (w_{m+2}, T, w_n = v)$ es una uv -trayectoria monocromática en D de longitud menor que $l(T)$, lo cual no es posible, pues asumimos que T es una uv -trayectoria monocromática de longitud mínima en D . Por lo tanto, para $2 \leq j \leq n$,

$(w_0, w_j) \notin F(D)$.

Supongamos que $i = 1$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe alguna $j \geq 3$ tal que $(w_1, w_j) \in F(D)$. Sea $m = \max\{j : (w_1, w_j) \in F(D)\}$, puesto que no existe w en $V(T)$ tal que (u, w, v) es una trayectoria en D , entonces $m \neq n$. Si $m = n - 1$, como D es 3-cuasitransitiva, entonces para la trayectoria $(u = w_0, w_1, w_m = w_{n-1}, w_n = v)$ se tiene que $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$. Puesto que asumimos que $(u, v) \notin F(D)$, entonces $(v, u) \in F(D)$, lo cual no es posible, pues por hipótesis no existe la vu -trayectoria monocromática. Por lo tanto $m \leq n - 2$.

Por lo anterior, tenemos que $(w_1, w_m, w_{m+1}, w_{m+2})$ es una trayectoria de longitud 3 en D y como D es 3-cuasitransitiva, $(w_1, w_{m+2}) \in F(D)$ o $(w_{m+2}, w_1) \in F(D)$. Dado que $m = \max\{j : (w_1, w_j) \in F(D)\}$, entonces $(w_{m+2}, w_1) \in F(D)$, lo que implica que $(w_1, w_m, w_{m+1}, w_{m+2}, w_1)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático. Por lo tanto, $(u = w_0, w_1, w_m) \cup (w_m, T, w_n = v)$ es una uv -trayectoria monocromática de longitud menor que $l(T)$, lo cual no es posible, pues asumimos que T es una uv -trayectoria monocromática de longitud mínima. Por lo tanto, para $3 \leq j \leq n$, $(w_1, w_j) \notin F(D)$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que para cualquier par de vértices distintos w_i y w_j de T , con $0 \leq i < k \leq n - 2$ y $n \geq j \geq i + 2$, se tiene que $(x_i, x_j) \notin F(D)$.

Paso inductivo. Sea $i = k$, con $2 \leq k \leq n - 2$. Supongamos que existe alguna $j \geq k + 2$ tal que $(w_k, w_j) \in F(D)$. Sea $m = \max\{j : (w_k, w_j) \in F(D)\}$.

Si $m = n$, entonces $(w_k, w_n) \in F(D)$. Como $k \geq 2$ y D es 3-cuasitransitiva, entonces para la trayectoria $(w_{k-2}, w_{k-1}, w_k, w_n)$ debe haber una flecha entre w_{k-2} y w_n , la cual, por hipótesis de inducción, debe ser (w_n, w_{k-2}) . Puesto que $Q = (w_{k-2}, w_{k-1}, w_k, w_n, w_{k-2})$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático, entonces $(u = w_0, T, w_{k-2}) \cup (w_{k-2}, Q, w_n = v)$ es una uv -trayectoria monocromática de longitud menor que $l(T)$, lo cual es una contradicción, pues T es una uv -trayectoria monocromática de longitud mínima.

Si $m = n - 1$, entonces $(w_k, w_{n-1}) \in F(D)$. Como $k \geq 2$ y D es 3-cuasitransitiva, entonces para la trayectoria $(w_{k-1}, w_k, w_{n-1}, w_n)$ debe haber una flecha entre w_{k-1} y w_n , la cual, por hipótesis de inducción, debe ser (w_n, w_{k-1}) . Puesto que $R = (w_{k-1}, w_k, w_{n-1}, w_n, w_{k-1})$ es un

C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático, entonces $(u = w_0, T, w_{k-1}) \cup (w_{k-1}, R, w_n = v)$ es una uv -trayectoria monocromática de longitud menor que $l(T)$, lo cual es una contradicción, pues T es una uv -trayectoria monocromática de longitud mínima.

Finalmente, si $m \leq n - 2$, como D es 3-cuasitransitiva, para la trayectoria $(w_k, w_m, w_{m+1}, w_{m+2})$ debe haber una flecha entre w_k y w_{m+2} . Dado que $m = \max\{j : (w_k, w_j) \in F(D)\}$, entonces $(w_{m+2}, w_k) \in F(D)$, lo que implica que $S = (w_k, w_m, w_{m+1}, w_{m+2}, w_k)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático. Por lo tanto, $(u = w_0, T, w_k) \cup (w_k, w_m) \cup (w_m, T, w_n = v)$ es una uv -trayectoria monocromática de longitud menor que $l(T)$, lo cual es una contradicción, pues T es una uv -trayectoria monocromática de longitud mínima. Con esto hemos terminado la prueba por inducción de la afirmación.

Como D es 3-cuasitransitiva, para la trayectoria $(w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3})$, con $0 \leq i \leq n - 3$, se tiene que $(w_i, w_{i+3}) \in F(D)$ o $(w_{i+3}, w_i) \in F(D)$. Por la afirmación debe suceder que $(w_{i+3}, w_i) \in F(D)$, lo que implica que para cada i en $\{0, 1, \dots, n - 3\}$, hay un C_4 en D de la forma $(w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}, w_i)$, el cual es monocromático (por hipótesis). Por lo tanto:

$$(v = w_n, w_{n-3}, w_{n-2}, w_{n-1}, w_{n-4}, w_{n-3}, w_{n-2}, \dots, w_1, w_2, w_3, w_0 = u)$$

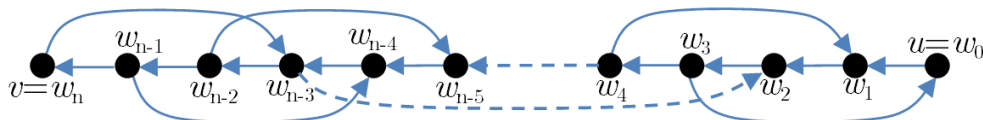


Figura 2-1:

es un vu -camino monocromático en D (figura 2-1), el cual, por el teorema 1.2, contiene una vu -trayectoria monocromática, lo que es una contradicción a nuestra hipótesis.

Por lo tanto, $(u, v) \in F(D)$ o existe w en $V(D)$ tal que (u, w, v) es una trayectoria en D . \square

Corolario 2.1. Si D es una digráfica m -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva tal que todo C_4 es monocromático y $\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ es un ciclo asimétrico en $\mathcal{C}(D)$, entonces existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria en D de longitud 1 o 2 para toda i en $\{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Demostración. Sea i en $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. Como $(x_i, x_{i+1}) \in F(\mathcal{C}(D))$, entonces, por definición de cerradura, existe la $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en D . Como $(x_{i+1}, x_i) \notin F(\mathcal{C}(D))$, entonces no existe la $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática en D . Por lo tanto, por el lema 2.2 existe la $x_i x_{i+1}$ -trayectoria en D de longitud 1 o 2. \square

Lema 2.3. Sea D una digráfica m -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva tal que todo C_4 es monocromático y todo C_3 es casimonocromático. Supongamos que existe un ciclo asimétrico en $\mathcal{C}(D)$, digamos γ , entonces $l(\gamma) \geq 4$.

Demostración. Como γ es un ciclo asimétrico en $\mathcal{C}(D)$, entonces $l(\gamma) \geq 3$. Procediendo por contradicción supongamos que $l(\gamma) = 3$ y digamos que $\gamma = (x, y, z, x)$. Por el corolario 2.1, como D es una digráfica m -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva tal que todo C_4 es monocromático, existen una xy -trayectoria, una yz -trayectoria y una zx -trayectoria, cada una de longitud 1 o 2, a las que llamaremos R, S y T , respectivamente. Consideremos los siguientes casos.

Caso 1. R, S y T son de longitud 1.

En este caso $R \cup S \cup T = (x, y, z, x)$ es un ciclo en D que, por hipótesis, es casimonocromático, es decir, tiene al menos 2 flechas del mismo color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que (x, y) y (y, z) son del mismo color, esto implica que (x, y, z) es una xz -trayectoria monocromática en D , por lo que $(x, z) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no es posible, pues γ es asimétrico (figura 2-2).

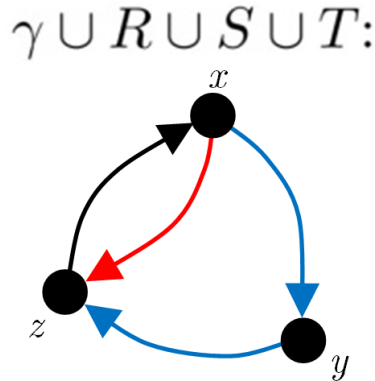


Figura 2-2:

Caso 2. La longitud de una de las trayectorias, R , S o T , es 2 y la longitud de las trayectorias restantes es 1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que S y T son de longitud 1 y R es de longitud 2.

En este caso existe un vértice x_0 en D tal que $R = (x, x_0, y)$. Así $\alpha = R \cup S \cup T = (x, x_0, y, z, x)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático, por lo que existe una trayectoria monocromática entre cualesquiera dos vértices de α , en particular hay una xz -trayectoria en D . Por lo tanto, $(x, z) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no es posible, pues γ es asimétrico (figura 2-3).

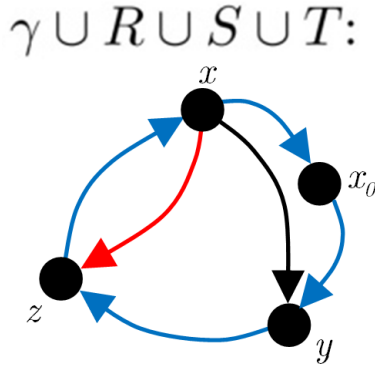


Figura 2-3:

Caso 3. La longitud de una de las trayectorias, R , S o T , es 1 y la longitud de las trayectorias restantes es 2. Sin pérdida de generalidad, supongamos que R y S son de longitud 2 y T es de longitud 1.

En este caso existe un vértice y_0 en D tal que $S = (y, y_0, z)$. Así, $S \cup T = (y, y_0, z, x)$ es una yx -trayectoria de longitud 3 en D y como D es 3-cuasitransitiva, entonces $(x, y) \in F(D)$ o $(y, x) \in F(D)$. Si $(y, x) \in F(D)$, entonces $(y, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual es una contradicción, pues γ es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$. Por otro lado, si $(x, y) \in F(D)$, entonces $\beta = (y, y_0, z, x, y)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático. De este modo, existe una trayectoria monocromática entre cualesquiera dos vértices de β , en particular hay una xz -trayectoria en D . Por lo tanto, $(x, z) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual también es una contradicción (figura 2-4).

$\gamma \cup R \cup S \cup T:$

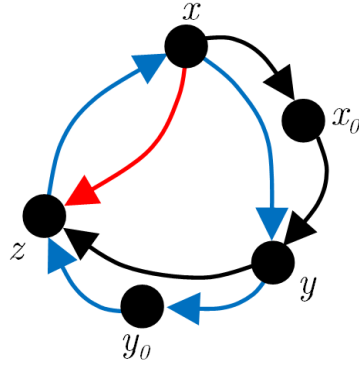


Figura 2-4:

Caso 4. R , S y T son de longitud 2.

En este caso existen x_0 , y_0 y z_0 vértices de D tales que $R = (x, x_0, y)$, $S = (y, y_0, z)$ y $T = (z, z_0, x)$. Note que $x_0 \neq y_0$ y $y_0 \neq z_0$ ya que $\{(x_0, y), (y, y_0)\} \subseteq F(D)$, $\{(y_0, z), (z, z_0)\} \subseteq F(D)$ y D es asimétrica. Así, (x, x_0, y, y_0) es una xy_0 -trayectoria de longitud 3 y como D es 3-cuasitransitiva, se tiene que $(x, y_0) \in F(D)$ o $(y_0, x) \in F(D)$. Si $(x, y_0) \in F(D)$, entonces $\alpha' = (x, y_0, z, z_0, x)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático, por lo que existe una trayectoria monocromática entre cualesquiera dos vértices de α' , en particular hay una xz -trayectoria en D . Por lo tanto, $(x, z) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual es una contradicción (figura 2-5 (a)). Por otro lado, si suponemos que $(y_0, x) \in F(D)$, entonces $\beta' = (x, x_0, y, y_0, x)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático, por lo que, existe una trayectoria monocromática entre cualesquiera dos vértices de β' , en particular hay una yx -trayectoria en D . Por lo tanto, $(y, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual también es una contradicción (figura 2-5 (b)).

Como en cada uno de los casos anteriores llegamos a una contradicción, podemos concluir que $l(\gamma) \geq 4$. □

Sea D una digráfica m -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva tal que todo C_4 es monocromático. Si $\gamma = (y_0, y_1, \dots, y_l, y_{l+1} = y_0)$ es un ciclo asimétrico en $\mathcal{C}(D)$, entonces por el corolario 2.1 existe una $y_i y_{i+1}$ -trayectoria en D , digamos T_i , de longitud a lo más 2 para toda

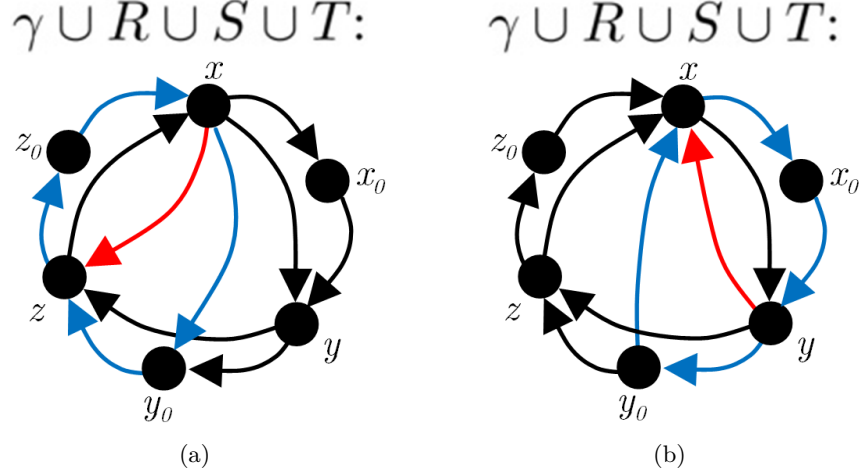


Figura 2-5:

i en $\{0, 1, \dots, l\}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que T_i es de longitud mínima para toda i en $\{0, 1, \dots, l\}$. Decimos que

$$\gamma' = \bigcup_{i=1}^l T_i$$

es un **camino cerrado en D asociado a γ** .

Lema 2.4. Sea D una digráfica m -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva tal que todo C_4 es monocromático y todo C_3 es casimonocromático. Supongamos que existe un ciclo asimétrico $\gamma = (y_0, y_1, \dots, y_l, y_0)$ en $\mathcal{C}(D)$ y consideremos γ' un camino cerrado en D asociado a γ .

Si $\gamma' = \bigcup_{i=1}^l T_i = (x_0 = y_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$, entonces $(x_0, x_{2k+1}) \in F(D)$ para toda k , con $1 \leq 2k+1 < n$. Más aún, se cumple lo mismo para cualquier vértice x_i de γ' que también esté en γ , con $0 \leq i \leq n$.

Demostración. Haremos primero las siguientes observaciones.

Observación 1: Si x y y son vértices de D tales que $(x, y) \in F(D)$, entonces $x \neq y$. Esto se sigue del hecho que D no tiene lazos.

Observación 2: Si x , y y z son vértices de D tales que $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq F(D)$, entonces $x \neq z$. Esto se sigue de la asimetría de D , pues si $x = z$, entonces $\{(x = z, y), (y, z = x)\} \subseteq F(D)$, es decir, (y, x) sería una flecha simétrica en D .

Observación 3: Para todo i en $\{0, 1, \dots, l\}$ se tiene existe una única j tal que T_j inicia en y_i . Esto se sigue del hecho que γ solo repite el primero y último vértice y de la definición de T_j .

Observación 4: Si $\{x_i, x_j\}$ es un subconjunto de $V(\gamma')$, con $0 \leq i < j < n - 2$, tal que (x_i, x_j) es una flecha de D y $x_i = y_r$ es el vértice inicial de T_k para algún r en $\{0, 1, \dots, l\}$, entonces $x_i \neq x_{j+2}$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $x_i = x_{j+2}$. Notemos que como $j < n - 2$, entonces x_{j+3} existe y es distinto a x_i , pues de no ser así tendríamos que $(x_i = x_{j+2}, x_{j+3})$ sería un lazo en D , lo cual contradice al hecho de que D no tiene lazos. Por otro lado, como $l((x_i, \gamma', x_{j+2})) = (j + 2) - i > 2$, entonces existe algún s en $\{0, 1, \dots, l\}$ tal que $\{x_{j+2}, x_{j+3}\} \subseteq V(T_s)$ y $s \neq r$ (recordemos que $l(T_k) \leq 2$ y $\gamma' = \bigcup_{i=1}^l T_i = (x_0 = y_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$), por lo que de la observación 3 se tiene que x_{j+2} no puede ser vértice inicial de T_s . Por lo tanto, por definición de γ' , tenemos que $T_s = (y_s = x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3} = y_{s+1})$ (figura 2-6).

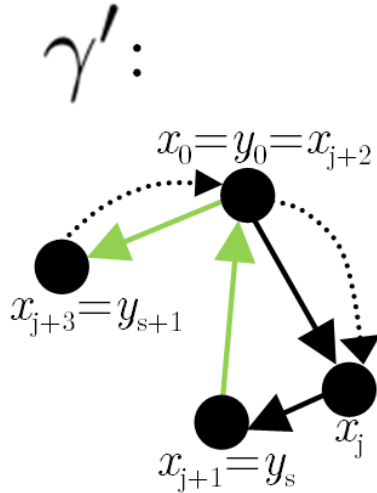


Figura 2-6: T_s en γ' . T_s es la trayectoria resaltada en color verde.

Notemos que $x_j \neq x_{j+3}$, pues en caso contrario la flecha $(x_{j+3} = y_{s+1}, y_s = x_{j+1})$ estaría en D y por lo tanto en $\mathcal{C}(D)$, lo cual no es posible pues (y_s, y_{s+1}) es una flecha de γ y γ no tiene flechas simétricas. Así, por las observaciones 1 y 2, se tiene que $(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3})$ es una $x_j x_{j+3}$ -trayectoria de longitud 3 y dado que D es una digráfica 3-cuasitransitiva,

entonces $(x_j, x_{j+3}) \in F(D)$ o $(x_{j+3}, x_j) \in F(D)$. Si $(x_{j+3}, x_j) \in F(D)$, entonces $\alpha_1 = (x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, x_j)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático (figura 2-7 (a)). Por lo tanto, en particular $(y_{s+1} = x_{j+3}, x_{j+1} = y_s)$ es una flecha de $F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no es posible, pues (y_s, y_{s+1}) es una flecha de γ y γ es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$. Si $(x_j, x_{j+3}) \in F(D)$, entonces $\tau_1 = (x_{j+1}, x_{j+2}, x_j, x_{j+3})$ es una $x_{j+1}x_{j+3}$ -trayectoria de longitud 3 en D (figura 2-7 (b)) y dado que D es una digráfica 3-cuasitransitiva, entonces $(x_{j+1}, x_{j+3}) \in F(D)$ o $(x_{j+3}, x_{j+1}) \in F(D)$. Si $(x_{j+3}, x_{j+1}) \in F(D)$, entonces $(y_{s+1} = x_{j+3}, x_{j+1} = y_s)$ es una flecha de $F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no es posible, pues (y_s, y_{s+1}) es una flecha de γ y γ es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$. Si $(y_s = x_{j+1}, x_{j+3} = y_{s+1}) \in F(D)$, entonces por definición de γ' , x_{j+2} no podría ser un vértice de γ' , lo cual es una contradicción.

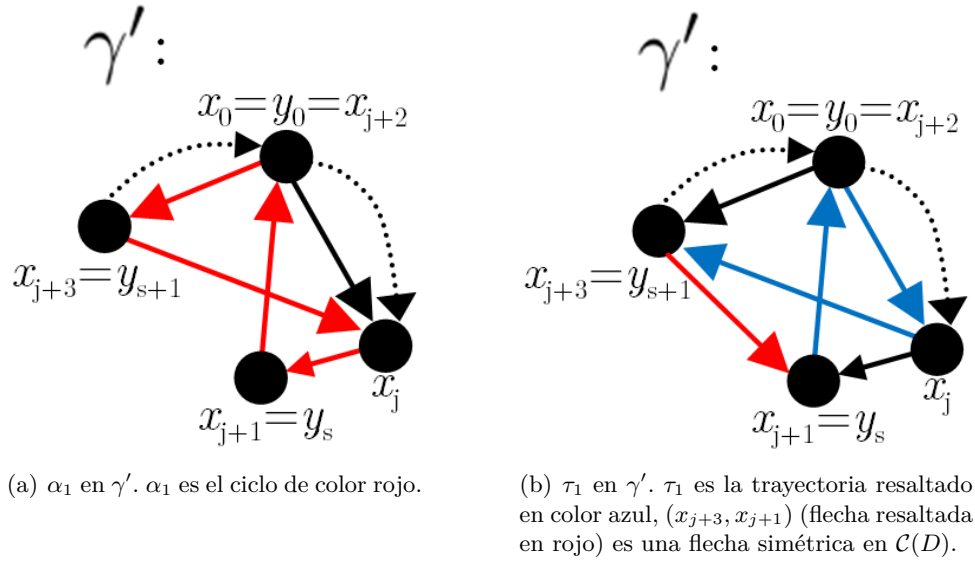


Figura 2-7:

Por lo tanto, como en cualquier caso llegamos a una contradicción, $x_i \neq x_{j+2}$.

Continuaremos con la prueba del lema procediendo por inducción sobre k , con $k \geq 0$.

Base de la inducción. Haremos la base de la inducción para $k = 0$ y $k = 1$.

Si $k = 0$, entonces $(x_0, x_{2k+1}) = (x_0, x_1)$, la cual por definición de γ' es una flecha de D .

Sea $k = 1$. Veamos que $(x_0, x_3) \in F(D)$.

Por las observaciones 1, 2 y 4, se tiene que (x_0, x_1, x_2, x_3) es una trayectoria de longitud 3 en D y como D es 3-cuasitransitiva, $(x_0, x_3) \in F(D)$ o $(x_3, x_0) \in F(D)$. Si $(x_3, x_0) \in F(D)$, entonces $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_0)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático, lo que implica que (x_1, x_0) y (x_2, x_0) son flechas simétricas en $\mathcal{C}(D)$, lo cual no es posible, pues por definición de γ' se tiene que $x_1 = y_1$ o $x_2 = y_1$, por lo que, al menos una de estas flechas está en γ y γ es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$. Por lo tanto, $(x_0, x_3) \in F(D)$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que $(x_0, x_{2k+1}) \in F(D)$ para toda k tal que $0 \leq k < m < \frac{n-1}{2}$.

Paso inductivo. Sea $k = m$, con $2 < m < \frac{n-1}{2}$. Demostraremos que $(x_0, x_{2m+1}) \in F(D)$.

Por hipótesis de inducción, se tiene que $(x_0, x_{2m-1}) \in F(D)$, por lo que, por las observaciones 1, 2 y 4, tenemos que x_0, x_{2m-1}, x_{2m} y x_{2m+1} son vértices de γ' distintos entre sí, lo que implica que $(x_0, x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1})$ es una x_0x_{2m+1} -trayectoria de longitud 3 en D y como D es 3-cuasitransitiva, $(x_0, x_{2m+1}) \in F(D)$ o $(x_{2m+1}, x_0) \in F(D)$. Supongamos que $(x_{2m+1}, x_0) \in F(D)$, esto implica que $\varepsilon_1 = (x_0, x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1}, x_0)$ es un C_4 en D que, por hipótesis es monocromático (figura 2-8).

Dado que $|V(T_i)| \leq 3$, para toda i en $\{0, 1, \dots, l\}$, tenemos dos casos para el conjunto $\{x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1}\}$: que los vértices de dicho conjunto sean suficientes para formar alguna T_i contenida en γ' o que ninguna T_i contenida en γ' se pueda formar únicamente con tales vértices.

Caso 1. Existe algún r en $\{0, 1, \dots, l\}$ tal que $V(T_r)$ es un subconjunto de $\{x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1}\}$.

En este caso se tiene que $\{y_r, y_{r+1}\}$ es un subconjunto de $V(\varepsilon_1)$ y como ε_1 es un ciclo monocromático, entonces existe una trayectoria monocromática entre cualesquiera dos vértices de ε_1 ; es decir, existe una $y_{r+1}y_r$ -trayectoria monocromática en D , lo que implica que (y_r, y_{r+1}) es una flecha simétrica de $\mathcal{C}(D)$, lo cual no es posible, pues (y_{r+1}, y_r) es una flecha de γ y γ es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$.

Caso 2. Para todo r en $\{0, 1, \dots, l\}$, se tiene que $V(T_r)$ no es un subconjunto de $\{x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1}\}$.

Note que en este caso, por definición de γ' , no puede existir s en $\{0, 1, \dots, l\}$ tal que T_s

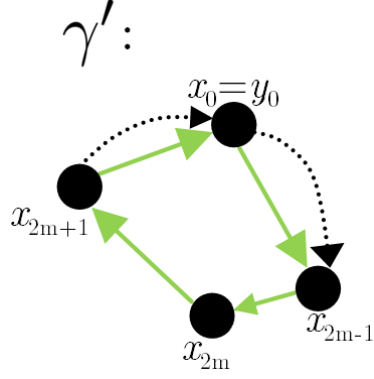


Figura 2-8: ε_1 en γ' . ε_1 es el ciclo de color verde.

inicie en x_{2m-1} o termine en x_{2m+1} , por lo que existe algún p en $\{0, 1, \dots, l\}$ tal que $T_p = (y_p = x_{2m-2}, x_{2m-1}, x_{2m} = y_{p+1})$ y $T_{p+1} = (x_{2m} = y_{p+1}, x_{2m+1}, x_{2m+2} = y_{p+2})$.

Luego, por la observación 3 se tiene que $x_{2m+1} \neq x_{2m-2}$ y como $(x_0, x_{2m-3}) \in F(D)$ (por hipótesis de inducción), entonces $(x_{2m+1}, x_0, x_{2m-3}, x_{2m-2})$ es una $x_{2m+1}x_{2m-2}$ -trayectoria de longitud 3 en D y como D es 3-cuasitransitiva, entonces $(x_{2m+1}, x_{2m-2}) \in F(D)$ o $(x_{2m-2}, x_{2m+1}) \in F(D)$. Si $(x_{2m+1}, x_{2m-2}) \in F(D)$, entonces $\varepsilon_2 = (x_{2m-2}, x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1}, x_{2m-2})$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático (figura 2-9 (a)), por lo que $(y_{p+1} = x_{2m}, x_{2m-2} = y_p)$ es una flecha simétrica en $F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no es posible pues $(y_p, y_{p+1}) \in F(\gamma)$ y γ es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$. Por otro lado, si $(x_{2m-2}, x_{2m+1}) \in F(D)$, entonces $\varepsilon_3 = (x_{2m+1}, x_0, x_{2m-3}, x_{2m-2}, x_{2m+1})$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático (figura 2-9 (b)). Como ε_3 interseca a ε_1 en la flecha (x_{2m+1}, x_0) , entonces ε_1 y ε_3 son del mismo color, por lo que que hay una $x_{2m}x_{2m-2}$ -camino monocromático en D ; a saber, $(x_{2m}, x_{2m+1}, x_0, x_{2m-3}, x_{2m-2})$ (figura 2-9 (b)), el cual, por el teorema 1.2, contiene una $x_{2m}x_{2m-2}$ -trayectoria monocromática, lo que implica que (x_{2m}, x_{2m-2}) es una flecha simétrica en $F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no es posible, pues $(x_{2m-2}, x_{2m}) \in F(\gamma)$ y γ es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$.

Como en cualquier caso llegamos a una contradicción, podemos concluir que $(x_0, x_{2m+1}) \in F(D)$.

Para ver que el lema se cumple para cualquier vértice x_i de γ' que también está en γ , con

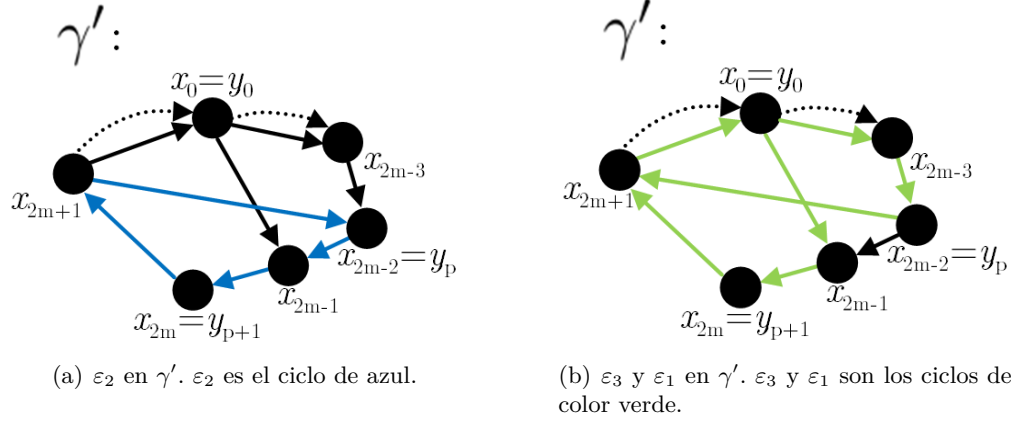


Figura 2-9:

$0 \leq i \leq n$; basta reetiquetar los vértices de γ' de manera que el ciclo empiece en x_i .

□

2.2. Resultado principal

Teorema 2.1. Si D es una digráfica m -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva tal que todo C_4 es monocromático y todo C_3 es casimonocromático, entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración. Demostraremos que todo ciclo en $\mathcal{C}(D)$ tiene al menos una flecha simétrica. Esto nos llevará concluir que $\mathcal{C}(D)$ tiene un núcleo por el teorema 1.1 y así por el teorema 1.3, D tendrá un nptm. Supongamos entonces que $\mathcal{C}(D)$ tiene al menos un ciclo asimétrico.

Sean $\gamma = (y_0, y_1, \dots, y_l, y_0)$ un ciclo asimétrico en $\mathcal{C}(D)$ y $\gamma' = (x_0 = y_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$ un camino cerrado en D asociado a γ . Notemos que por el lema 2.4, $(x_0, x_{2j+1}) \in F(D)$ para toda j tal que $1 \leq 2j + 1 < n$ y por el lema 2.3, $l(\gamma) \geq 4$. Tenemos dos casos para n .

Caso 1. n es impar.

Consideremos los vértices x_0, x_n, x_{n-1} y x_{n-2} . Notemos que como n es impar, $n - 2$ también es impar, por lo que $(x_0, x_{n-2}) \in F(D)$. Así, por las observaciones 1 y 2 del lema anterior, se tiene que x_0, x_n, x_{n-1} y x_{n-2} son vértices de γ' distintos entre sí, lo que

implica que $(x_0, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_0)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático (figura 2-10). Por lo tanto, (x_0, x_n) y (x_0, x_{n-1}) son flechas simétricas de $\mathcal{C}(D)$, lo cual no es posible, pues al menos una de las flechas, (x_0, x_n) o (x_0, x_{n-1}) , está en $F(\gamma)$ (pues $x_n = y_l$ o $x_{n-1} = y_l$) y γ es asimétrico.

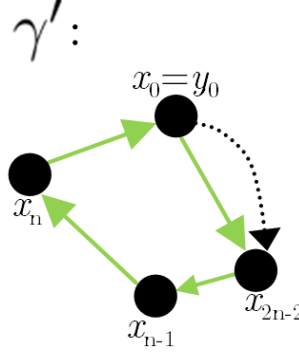


Figura 2-10: β_1 en γ' . β_1 es el ciclo de color verde.

Caso 2. n es par. Demostraremos que si n es par, entonces x_n está en γ y las flechas (x_{n-1}, x_n) y (x_n, x_0) son del mismo color. Para esto nos serán de utilidad las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1: $(x_{n-2}, x_0) \in F(D)$.

Como $n \geq 4$ (por el lema 2.3 y porque n es par), entonces existe el vértice x_{n-3} en $V(\gamma')$ y como $n-3$ es impar se tiene que $(x_0, x_{n-3}) \in F(D)$ (por el lema 2.4). Luego, por las observaciones 1 y 2 del lema anterior se tiene que x_0, x_n, x_{n-1} y x_{n-2} son vértices de γ' distintos entre sí, lo que implica que $(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_0)$ es una $x_{n-2}x_0$ -trayectoria de longitud 3 y dado que D es 3-cuasitransitiva, se tiene que $(x_0, x_{n-2}) \in F(D)$ o $(x_{n-2}, x_0) \in F(D)$. Si $(x_0, x_{n-2}) \in F(D)$, entonces $\beta_2 = (x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_0, x_{n-2})$ es un C_4 en D que, por hipótesis, es monocromático (figura 2-11). Por lo tanto, (x_0, x_n) y (x_0, x_{n-1}) son flechas simétricas de $\mathcal{C}(D)$, lo cual no es posible, pues al menos una de las flechas, (x_0, x_n) o (x_0, x_{n-1}) , está en $F(\gamma)$ (pues $x_n = y_l$ o $x_{n-1} = y_l$) y γ es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$. Por lo tanto, $(x_{n-2}, x_0) \in F(D)$.

Afirmación 2. $x_n = y_l$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $x_n \neq y_l$. Por definición de γ' te-

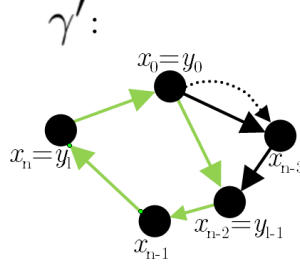


Figura 2-11: β_2 en γ' . β_2 es el ciclo de color verde.

nemos que $x_{n-1} = y_l$, esto implica que $(x_{n-1} = y_l, y_0 = x_0) \in F(\gamma)$; pero, como $(x_0, x_{n-1}) \in F(D)$, pues $n-1$ es impar y por el lema 2.4, entonces $(x_0, x_{n-1}) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no es posible pues γ es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$. Por lo tanto, $x_n = y_l$.

Consideremos $C_3 = (x_0, x_{n-1}, x_n, x_0)$, el cual, por hipótesis, es casi-monocromático.

Afirmación 3. Las únicas flechas de C_3 del mismo color son (x_{n-1}, x_n) y (x_n, x_0) .

Si las flechas (x_0, x_{n-1}) y (x_{n-1}, x_n) son del mismo color, entonces (x_0, x_{n-1}, x_n) es una x_0x_n -trayectoria monocromática, lo que implica que $(x_0, x_n) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no es posible, pues por la afirmación 2 $x_n = y_l$, de modo que $(x_n = y_l, y_0 = x_0) \in F(\gamma)$, y γ es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$.

Supongamos que (x_n, x_0) y (x_0, x_{n-1}) son del mismo color. Esto implica que (x_n, x_0, x_{n-1}) es una x_nx_{n-1} -trayectoria monocromática, por lo que $(x_n, x_{n-1}) \in F(\mathcal{C}(D))$, de donde $x_{n-1} \neq y_{l-1}$, pues en caso contrario (x_{n-1}, x_n) sería una flecha simétrica de γ , lo cual no es posible. Por lo tanto, $x_{n-2} = y_{l-1}$, por definición de γ' .

Como D es 3-cuasitransitiva, entonces para la trayectoria $\tau_1 = (x_{n-2}, x_0, x_{n-1}, x_n)$ (recuerde que, por la afirmación 1, $(x_{n-2}, x_0) \in F(D)$) se tiene que $(x_n, x_{n-2}) \in F(D)$ o $(x_{n-2}, x_n) \in F(D)$. Si $(x_{n-2}, x_n) \in F(D)$, entonces x_{n-1} no debería pertenecer a $V(\gamma')$ (por definición de γ'), ya que $x_n = y_l$ y $x_{n-2} = y_{l-1}$, lo cual es una contradicción. Si $(x_n, x_{n-2}) \in F(D)$, entonces (x_n, x_{n-2}) es una flecha en $\mathcal{C}(D)$, lo cual no es posible

pues $(x_{n-2} = y_{l-1}, y_l = x_n) \in F(\gamma)$ y γ es asimétrico (figura 2-12).

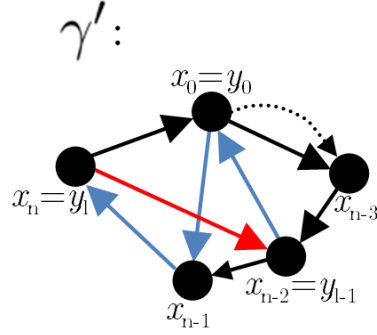


Figura 2-12: τ_1 en γ' . τ_1 es la trayectoria resaltada en color azul, (x_n, x_{n-2}) (flecha resaltada en color rojo) es una flecha simétrica en $\mathcal{C}(D)$.

Por lo anterior, podemos concluir que las únicas flechas de \mathcal{C}_3 del mismo color son (x_{n-1}, x_n) y (x_n, x_0) .

Por lo tanto, por la afirmación 2 tenemos que x_n está en los vértices de γ y por la afirmación 3 se tiene que las flechas (x_{n-1}, x_n) y (x_n, x_0) son del mismo color. Reetiquetando los vértices haciendo que x_n tome el lugar de x_0 y siguiendo el mismo argumento probaríamos que x_{n-1} está en γ y que las flechas (x_{n-2}, x_{n-1}) y (x_{n-1}, x_n) son del mismo color, lo que implica que (x_{n-2}, x_{n-1}) , (x_{n-1}, x_n) y (x_n, x_0) son del mismo color. Siguiendo este procedimiento, como γ' es finito, podemos probar que $V(\gamma') = V(\gamma)$ y que γ' es monocromático. Por lo tanto, γ es simétrico en $\mathcal{C}(D)$, lo cual es una contradicción.

Como en ambos casos llegamos a una contradicción, podemos concluir que todo ciclo en $\mathcal{C}(D)$ tiene una flecha simétrica, lo que implica por el teorema 1.1 que $\mathcal{C}(D)$ tiene un núcleo. Por lo tanto, por el teorema 1.3, D tiene un nptm.

□

Capítulo 3

Digráficas H -coloreadas y H -núcleos

En este capítulo se presenta la definición de H -coloración de una digráfica, la cual es una generalización de m -coloración de una digráfica m -coloreada. Así mismo presentaremos la definición de H -núcleo de una digráfica H -coloreada, la cual haremos notar que es una generalización de núcleo por trayectorias monocromáticas de una digráfica m -coloreada. Demostraremos que si D es una digráfica H -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva tal que ningún C_4 en D tiene H -obstrucciones y todo C_3 en D tiene a lo más 2 H -obstrucciones, entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas, lo cual es una extensión al resultado principal obtenido en el capítulo 2.

3.1. Definiciones y resultados previos

A partir de esta sección consideraremos H una digráfica posiblemente con lazos.

Sean D y H digráficas. Una **H -coloración** de las flechas de D es una función $c : F(D) \rightarrow V(H)$. Decimos que D es una **digráfica H -coloreada** si tiene asociada una H -coloración de sus flechas.

Sean D una digráfica H -coloreada y $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ un camino (trayectoria) en D , decimos que C es un **H -camino** (**H -trayectoria**) si $(c(x_0, x_1), c(x_1, x_2), \dots, c(x_{n-1}, x_n))$ es un camino en H y decimos que x_i , con $0 \leq i \leq n$, es una **H -obstrucción** de C si $(c(x_{i-1(\text{mod } n)}, x_i)$,

$c(x_i, x_{i+1(\text{mod } n)}) \notin A(H)$. En ocasiones, para referirnos a un camino o trayectoria que comience en el vértice u y termine en el vértice v escribiremos uv - H -camino y uv - H -trayectoria, respectivamente.

Notemos que no es cierto que todo uv - H -camino contiene una uv - H -trayectoria. En la digráfica de la figura 3-1 podemos ver que $C = (v, z, y, x, z, w)$ es un vw - H -camino, pero la única vw -trayectoria contenida en C es (v, z, w) , la cual no es una vw - H -trayectoria, pues en H no hay flecha del vértice rojo al vértice verde. En este caso z es una H -obstrucción de C .

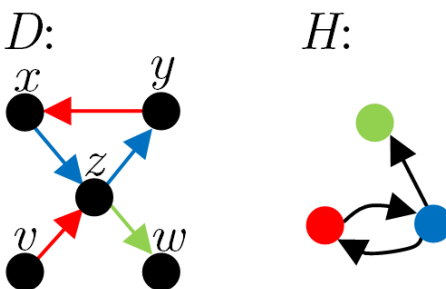


Figura 3-1:

Dada D una digráfica H -coloreada y S un conjunto de vértices de D , decimos que S es **H -independiente** si para cualquier subconjunto $\{u, v\}$ de S , no existe uv - H -trayectoria en D . Decimos que S es **H -absorbente** si para todo u en $V(D) \setminus S$ existe v en S tal que hay al menos una uv - H -trayectoria en D .

Si D es una digráfica H -coloreada y N un conjunto de vértices de D H -independiente y H -absorbente, entonces N es llamado **H -núcleo** de D .

Dada una digráfica H -coloreada D , definimos la **H -cerradura** de D , denotada por $HC(D)$, como la digráfica tal que $V(HC(D)) = V(D)$ y para cualquier subconjunto $\{u, v\}$ de $V(D)$ se tiene que $(u, v) \in F(HC(D))$ si y solo si existe una uv - H -trayectoria en D .

Sean H una digráfica tal que $V(H) = \{1, 2, \dots, m\}$ y $A(H) = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (m, m)\}$ y D una digráfica H -coloreada. En este caso decimos que D está m -coloreada y además las H -trayectorias son trayectorias monocromáticas. Por lo tanto, si un subconjunto N de $V(D)$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas, entonces N es un H -núcleo de D y viceversa. Así, el concepto de H -núcleo de una digráfica H -coloreada es una generalización del concepto

de núcleo por trayectorias monocromáticas de una digráfica m -coloreada.

Análogamente al caso monocromático, los conceptos de núcleo y H -núcleo, se pueden relacionar mediante el siguiente resultado.

Teorema 3.1. Sean D una digráfica H -coloreada y N un subconjunto de $V(D)$. N es un H -núcleo de D si y solo si N es un núcleo de $HC(D)$.

Demostración. De la definición de H -cerradura de D se tiene que.

Observación 1. Dados u y v dos vértices de D distintos, se tiene que existe una uv - H -trayectoria en D si y solo si $(u, v) \in F(HC(D))$.

Sea N un H -núcleo. Veamos que N es núcleo de $HC(D)$.

Como N es un H -núcleo de D , entonces para cualquier vértice u en $V(D) \setminus N$ existe un vértice v en N tal que hay una uv - H -trayectoria en D , esto implica, por la observación 1, que $(u, v) \in F(HC(D))$. Como $V(HC(D)) \setminus N = V(D) \setminus N$, entonces se ha demostrado que para todo vértice u en $V(HC(D)) \setminus N$ existe un vértice v en N tal que $(u, v) \in F(HC(D))$. Por lo tanto, N es un conjunto absorbente en $HC(D)$.

Por otro lado, como N es H -independiente en D , entonces no existen H -trayectorias entre cualesquiera dos vértices de N en D , esto implica, por la observación 1, que no existen flechas entre cualesquiera dos vértices de N en $HC(D)$. Por lo tanto, N es un conjunto independiente en $HC(D)$.

Así, como N es un conjunto independiente y absorbente en $HC(D)$, entonces N es núcleo de $HC(D)$.

Sea N' un núcleo de $HC(D)$. Veamos que N' es H -núcleo en D .

Como N' es un núcleo de $HC(D)$, entonces para cualquier vértice u en $V(HC(D)) \setminus N'$ existe un vértice v en N' tal que $(u, v) \in F(HC(D))$, esto implica, por la observación 1, que existe una uv - H -trayectoria en D . Como $V(HC(D)) \setminus N' = V(D) \setminus N'$, entonces se ha demostrado que para todo vértice u en $V(D) \setminus N'$ existe un vértice v en N' tal que hay una uv - H -trayectoria en D . Por lo tanto, N' es H -absorbente en D .

Por otro lado, como N' es un conjunto independiente en $HC(D)$, entonces no existen flechas entre cualesquiera dos vértices de N' en $HC(D)$, esto implica, por la observación 1, que no existen H -trayectorias entre cualesquiera dos vértices de N' en D . Por lo tanto, N' es H -independiente en D .

Como N' es H -independiente y H -absorbente en D , entonces N' es H -núcleo de D . \square

Lema 3.1. Sea D una digráfica H -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva tal que ningún C_4 en D tiene H -obstrucciones. Si $\{u, v\}$ es un subconjunto de $V(D)$ tal que existe una uv - H -trayectoria de longitud impar en D pero no existe una vu - H -trayectoria en D , entonces $(u, v) \in F(D)$.

Demostración. Haremos la prueba de este teorema por contradicción. Supongamos que $(u, v) \notin F(D)$. Sea $T = (u = w_0, w_1, \dots, w_{2r+1} = v)$, con $r > 0$, una uv - H -trayectoria de longitud impar tal que para toda uv - H -trayectoria T' de longitud impar, se tiene que $l(T') \geq l(T)$.

Si $r = 1$; es decir, $T = (u = w_0, w_1, w_2, w_3 = v)$, entonces como D es 3-cuasitransitiva, se tiene que $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$ y dado que $(u, v) \notin F(D)$, debe suceder que $(u, v) \in F(D)$, lo cual no es posible, pues por hipótesis no existe la vu - H -trayectoria. Por lo tanto, $r \geq 2$.

Afirmación 1: Sea i en $\{0, 1, \dots, 2r - 2\}$, entonces $(w_i, w_{2j+1+i}) \notin F(D)$ para toda j tal que $i + 3 \leq 2j + 1 + i \leq 2r + 1$, es decir, si existe la flecha entre w_i y w_{2j+1+i} esta debe ser (w_{2j+1+i}, w_i) .

Haremos la prueba de esta afirmación por inducción sobre i .

Base de la inducción. Haremos la base de la inducción para $i = 0$ e $i = 1$.

Supongamos que $i = 0$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe alguna j tal que $(w_0, w_{2j+1}) \in F(D)$ y $2j + 1 \geq 3$. Sea $m = \max\{j : (w_0, w_{2j+1}) \in F(D)\}$. Como $(u = w_0, w_{2r+1} = v) \notin F(D)$, entonces $m < r$, lo que implica que $2m + 1 + 1 \leq 2r + 1$. Consideremos la trayectoria $(w_0, w_{2m+1}, w_{2m+2}, w_{2(m+1)+1})$, como D es 3-cuasitransitiva, se tiene que $(w_0, w_{2(m+1)+1}) \in F(D)$ o $(w_{2(m+1)+1}, w_0) \in F(D)$. Dado que $m = \max\{j : (w_0, w_{2j+1}) \in F(D)\}$, entonces $(w_0, w_{2(m+1)+1}) \notin F(D)$, lo que implica que $(w_{2(m+1)+1}, w_0) \in F(D)$. Por lo tanto, $P = (w_0, w_{2m+1}, w_{2m+2}, w_{2(m+1)+1}, w_0)$ es

un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones, en particular w_{2m+1} no es una H -obstrucción de P , es decir, $(c(w_0, w_{2m+1}), c(w_{2m+1}, w_{2m+2})) \in F(H)$. Así, $(u = w_0, w_{2m+1}) \cup (w_{2m+1}, T, w_{2r+1} = v)$ es una uv - H -trayectoria en D de longitud impar menor que $l(T)$, lo cual no es posible, pues asumimos que no existe uv - H -trayectoria de longitud impar menor que $l(T)$. Por lo tanto, para toda j tal que $3 \leq 2j + 1 \leq 2r + 1$, se tiene que $(w_0, w_{2j+1}) \notin F(D)$.

Supongamos que $i = 1$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe alguna j tal que $(w_1, w_{2j+2}) \in F(D)$ y $2j + 2 \geq 4$. Sea $m = \text{máx}\{j : (w_1, w_{2j+2}) \in F(D)\}$, note que $2m + 2$ es par, por lo que $2m + 2 < 2r + 1$.

Consideremos la trayectoria $(w_0, w_1, w_{2m+2}, w_{2(m+1)+1})$, como D es 3-cuasitransitiva se tiene que $(w_0, w_{2(m+1)+1}) \in F(D)$ o $(w_{2(m+1)+1}, w_0) \in F(D)$. Por la base de la inducción para $i = 0$ se tiene que $(w_0, w_{2(m+1)+1}) \notin F(D)$, lo que implica que $(w_{2(m+1)+1}, w_0) \in F(D)$. Por lo tanto, $P_1 = (w_0, w_1, w_{2m+2}, w_{2(m+1)+1}, w_0)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones, en particular w_1 y w_{2m+2} no son H -obstrucciones de P_1 ; es decir, $\{(c(w_0, w_1), c(w_1, w_{2m+2})), (c(w_1, w_{2m+2}), c(w_{2m+2}, w_{2(m+1)+1}))\} \subseteq F(H)$. Así, $(u = w_0, w_1, w_{2m+2}) \cup (w_{2m+2}, T, w_{2r+1} = v)$ es una uv - H -trayectoria de longitud impar menor que $l(T)$, lo cual no es posible, pues asumimos que no existe uv - H -trayectoria de longitud impar menor que $l(T)$. Por lo tanto, para toda j tal que $4 \leq 2j + 2 \leq 2r + 1$, se tiene que $(w_1, w_{2j+2}) \notin F(D)$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que para toda i en $\{0, 1, \dots, k\}$, con $k < 2r - 2$, se cumple que $(w_i, w_{2j+1+i}) \notin F(D)$ para toda j tal que $i + 3 \leq 2j + 1 + i \leq 2r + 1$.

Paso inductivo. Sea $i = k$, con $2 \leq k \leq 2r - 2$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe alguna j tal que $(w_k, w_{2j+1+k}) \in F(D)$ y $2j + 1 + k \geq k + 3$. Sea $m = \text{máx}\{j : (w_k, w_{2j+1+k}) \in F(D)\}$.

Afirmación 2: $2m + 1 + k < 2r + 1$.

Tenemos dos casos para k

Caso 1. k es impar.

Note que en este caso $2m + 1 + k$ es par, por lo que $2m + 1 + k < 2r + 1$.

Caso 2. k es par.

Note que en este caso $2m + 1 + k$ es impar. Si $2m + 1 + k = 2r + 1$, entonces como $k \geq 2$ y D es 3-cuasitransitiva, para la trayectoria $(w_{k-2}, w_{k-1}, w_k, w_{2r+1})$ debe haber una flecha entre w_{k-2} y w_{2r+1} . Luego, por hipótesis de inducción sobre el vértice w_{k-2} , se tiene que $(w_{2r+1}, w_{k-2}) \in F(D)$, lo que implica que $Q = (w_{k-2}, w_{k-1}, w_k, w_{2r+1}, w_{k-2})$ es un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones, en particular w_k no es una H -obstrucción en Q ; es decir, $(c(w_{k-1}, w_k), c(w_k, w_{2r+1})) \in F(H)$. Así, $(u = w_0, T, w_k) \cup (w_k, w_{2r+1} = v)$ es una uv - H -trayectoria de longitud impar menor que $l(T)$, lo cual es una contradicción, pues asumimos que no existe uv - H -trayectoria de longitud impar menor que $l(T)$. Por lo tanto, $2m + 1 + k < 2r + 1$.

Como $2m + 1 + k < 2r + 1$, entonces $(w_{k-1}, w_k, w_{2m+1+k}, w_{2m+2+k})$ es una trayectoria de longitud 3 en D y dado que D es 3-cuasitransitiva, debe haber una flecha entre w_{k-1} y w_{2m+2+k} . Por hipótesis de inducción sobre w_{k-1} , se tiene que $(w_{2m+2+k}, w_{k-1}) \in F(D)$, lo que implica que $R = (w_{k-1}, w_k, w_{2m+1+k}, w_{2m+2+k}, w_{k-1})$ es un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones, en particular w_k y w_{2m+1+k} no son H -obstrucciones en R ; es decir, $\{(c(w_{k-1}, w_k), c(w_k, w_{2m+1+k})), (c(w_k, w_{2m+1+k}), c(w_{2m+1+k}, w_{2m+2+k}))\} \subseteq F(H)$. Así, $(u = w_0, T, w_k) \cup (w_k, w_{2m+1+k}) \cup (w_{2m+1+k}, T, w_{2r+1} = v)$ es una uv - H -trayectoria de longitud impar menor que $l(T)$, lo cual es una contradicción, pues asumimos que no existe uv - H -trayectoria de longitud impar menor que $l(T)$.

Por lo tanto, para toda i en $\{0, 1, \dots, 2r - 2\}$, se tiene que $(w_i, w_{2j+1+i}) \notin F(D)$ para toda j tal que $i + 3 \leq 2j + 1 + i \leq 2r + 1$.

Sea i en $\{3, 4, \dots, 2r + 1\}$. Como D es 3-cuasitransitiva, entonces para la trayectoria $(w_{i-3}, w_{i-2}, w_{i-1}, w_i)$, se tiene que $(w_i, w_{i-3}) \in F(D)$ o $(w_{i-3}, w_i) \in F(D)$. Por la afirmación 1 debe suceder que $(w_i, w_{i-3}) \in F(D)$, lo que implica que para cada i en $\{3, 4, \dots, 2r + 1\}$ hay un C_4 en D ; a saber, $W_i = (w_i, w_{i-3}, w_{i-2}, w_{i-1}, w_i)$, el cual no tiene H -obstrucciones

(por hipótesis). Por lo tanto, en particular para los ciclos W_i y W_{i-2} , con i en $\{5, 6, \dots, n\}$, se tiene que w_{i-3} no es una obstrucción en W_i y w_{i-2} no es una obstrucción en W_{i-2} ; es decir, $(c(w_i, w_{i-3}), c(w_{i-3}, w_{i-2}))$ y $(c(w_{i-3}, w_{i-2}), c(w_{i-2}, w_{i-5}))$ son flechas de H (figura 3-2). Por lo tanto, $(v = w_{2r+1}, w_{2r-2}, w_{2r-1}, w_{2r-4}, w_{2r-3}, w_{2r-6}, w_{2r-5}, \dots, w_7, w_4, w_5, w_2, w_3, w_0 = u)$ (figura 3-3) es una vu - H -trayectoria en D , lo que es una contradicción a nuestra hipótesis.

Por lo tanto, $(u, v) \in F(D)$. □

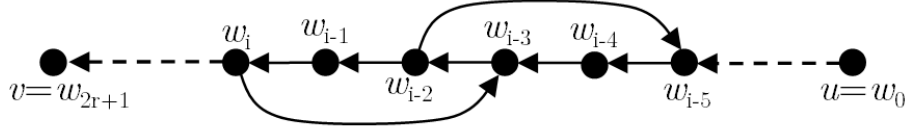


Figura 3-2:

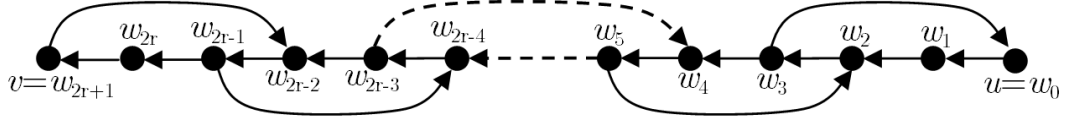


Figura 3-3:

Corolario 3.1. Sean D una digráfica H -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva y $\gamma = (y_0, y_1, \dots, y_l, y_{l+1} = y_0)$ un ciclo asimétrico en $HC(D)$. Supongamos que:

1. Todo C_4 en D no tiene H -obstrucciones.
2. Para i en $\{0, 1, \dots, l\}$, si existe una $y_i y_{i+1}$ - H -trayectoria en D de longitud par, entonces existe una $y_i y_{i+1}$ -trayectoria en D , digamos T , tal que $l(T) \leq 2$.

Entonces existe una $y_i y_{i+1}$ -trayectoria en D de longitud 1 o 2 para toda i en $\{0, 1, \dots, l\}$.

Demostración. Sea i en $\{0, 1, \dots, l\}$. Como $(y_i, y_{i+1}) \in F(HC(D))$, se tiene que, por definición de H -cerradura, existe una $y_i y_{i+1}$ - H -trayectoria en D , digamos T . Si $l(T)$ es par, entonces por hipótesis existe una $y_i y_{i+1}$ -trayectoria en D , digamos T' , tal que $l(T') \leq 2$. Como $(y_{i+1}, y_i) \notin F(HC(D))$ (ya que γ es asimétrico), entonces no existe una $y_{i+1} y_i$ - H -trayectoria en

D . Por lo que, si $l(T)$ es impar, por el lema 3.1, se tiene que $(y_i, y_{i+1}) \in F(D)$. Por lo tanto, existe una $y_i y_{i+1}$ -trayectoria en D de longitud 1 o 2 para toda i en $\{0, 1, \dots, l\}$. \square

Lema 3.2. Sea D una digráfica H -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva y $\gamma = (y_0, y_1, \dots, y_l, y_{l+1} = y_0)$ un ciclo asimétrico en $HC(D)$. Supongamos que:

1. Todo C_4 en D no tiene H -obstrucciones.
2. Todo C_3 tiene a lo más dos H -obstrucciones.
3. Para i en $\{0, 1, \dots, l\}$, si existe una $y_i y_{i+1}$ - H -trayectoria en D de longitud par, entonces existe una $y_i y_{i+1}$ -trayectoria en D , digamos T , tal que $l(T) \leq 2$.

Entonces $l(\gamma) \geq 4$.

Demostración. Como γ es un ciclo asimétrico en $HC(D)$, entonces $l(\gamma) \geq 3$. Supongamos que $l(\gamma) = 3$ y $\gamma = (x, y, z, x)$. Por el corolario 3.1 existen una xy -trayectoria, una yz -trayectoria y una zx -trayectoria de longitud 1 o 2 a las que llamaremos R , S y T , respectivamente. Tenemos tres casos para las longitudes de R , S y T .

Caso 1. R , S y T son de longitud 1.

En este caso $R \cup S \cup T = (x, y, z, x)$ es un C_3 en D que, por hipótesis, tiene a lo más dos H -obstrucciones. Sin pérdida de generalidad, supongamos que y no es una H -obstrucción, esto implica que (x, y, z) es una xz - H -trayectoria en D , por lo que $(x, z) \in F(HC(D))$, lo cual no es posible, pues γ es asimétrico (figura 3-4).

Caso 2. La longitud de una de las trayectorias, R , S o T , es 2 y la longitud de las trayectorias restantes es 1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que S y T son de longitud 1 y R es de longitud 2.

En este caso existe un vértice x' en D tal que $R = (x, x', y)$. Así, $\alpha = R \cup S \cup T = (x, x', y, z, x)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones, por lo que existe una H -trayectoria entre cualesquiera dos vértices

$\gamma \cup R \cup S \cup T:$

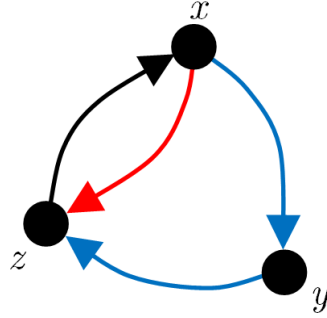


Figura 3-4:

de α . En particular, existe una xz - H -trayectoria en D , por lo que, $(x, z) \in F(HC(D))$, lo cual no es posible, pues γ es asimétrico (figura 3-5).

$\gamma \cup R \cup S \cup T:$

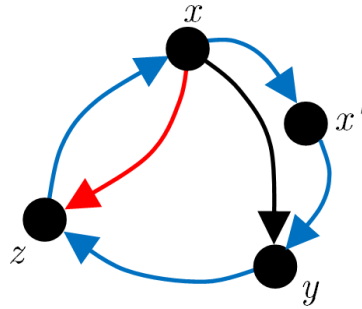


Figura 3-5:

Caso 3. La longitud de una de las trayectorias, R , S o T es 1 y la longitud de las trayectorias restantes es 2. Sin pérdida de generalidad, supongamos que R y S son de longitud 2 y T es de longitud 1.

En este caso existe un vértice y' en D tal que $S = (y, y', z)$. Así $S \cup T = (y, y', z, x)$ es una yx -trayectoria de longitud 3 en D y como D es 3-cuasitransitiva, entonces $(x, y) \in F(D)$ o $(y, x) \in F(D)$. Si $(y, x) \in F(D)$, entonces $(y, x) \in F(HC(D))$, lo cual es una contradicción, pues $HC(D)$ asimétrica. Por otro lado, si $(x, y) \in F(D)$, entonces $\beta = (y, y', z, x, y)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones, por lo

que existe una H -trayectoria entre cualesquiera dos vértices de β . En particular, existe una xz - H -trayectoria en D , por lo que $(x, z) \in F(HC(D))$, lo cual también es una contradicción (figura 3-6).

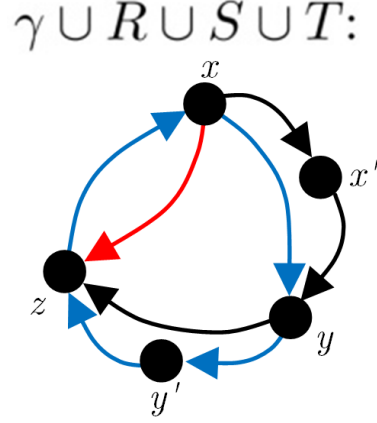


Figura 3-6:

Caso 4. R , S y T son de longitud 2.

En este caso existen x' , y' y z' vértices de D tales que $R = (x, x', y)$, $S = (y, y', z)$ y $T = (z, z', x)$. Note que $x' \neq y'$ y $y' \neq z'$ ya que $\{(x', y), (y, y')\} \subseteq F(D)$, $\{(y', z), (z, z')\} \subseteq F(D)$ y D es asimétrica. Así, (x, x', y, y') es una xy' -trayectoria de longitud 3 y como D es 3-cuasitransitiva, entonces $(x, y') \in F(D)$ o $(y', x) \in F(D)$. Si $(x, y') \in F(D)$, entonces $\alpha' = (x, y', z, z', x)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones, por lo que existe una H -trayectoria entre cualesquiera dos vértices de α' . En particular, existe una xz - H -trayectoria en D , por lo que $(x, z) \in F(HC(D))$, lo cual es una contradicción, pues $HC(D)$ es asimétrica y $(z, x) \in F(HC(D))$ (figura 3-7 (a)). Por otro lado, si suponemos que $(y', x) \in F(D)$, entonces $\beta' = (x, x', y, y', x)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones, por lo que existe una H -trayectoria entre cualesquiera dos vértices de β' . En particular, existe una yx - H -trayectoria en D , por lo que $(y, x) \in F(HC(D))$, lo cual también es una contradicción (figura 3-7 (b)).

Como en cada uno de los casos anteriores llegamos a una contradicción, podemos concluir que

1. Todo C_4 en D no tiene H -obstrucciones.
2. Todo C_3 tiene a lo más dos H -obstrucciones.
3. Para i en $\{0, 1, \dots, l\}$, si existe una $y_i y_{i+1}$ - H -trayectoria en D de longitud par, entonces existe una $y_i y_{i+1}$ -trayectoria en D , digamos T , tal que $l(T) \leq 2$.

Si $\gamma' = \bigcup_{i=1}^l T_i = (x_0 = y_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$ es un camino cerrado en D H -asociado a γ , entonces $(x_0, x_{2k+1}) \in F(D)$ para toda k , con $1 \leq 2k + 1 < n$. Más aún, se cumple lo mismo para cualquier vértice x_i , de γ' que también esté en γ , con $0 \leq i \leq n$.

Demostración. Haremos primero las siguientes observaciones.

Observación 1: Si x y y son vértices de D tales que $(x, y) \in F(D)$, entonces $x \neq y$. Esto se sigue del hecho que D no tiene lazos.

Observación 2: Si x, y y z son vértices de D tales que $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq F(D)$, entonces $x \neq z$. Esto se sigue de la asimetría de D , pues si $x = z$, entonces $\{(x = z, y), (y, z = x)\} \subseteq F(D)$, es decir, (y, x) sería una flecha simétrica en D .

Observación 3: Para todo i en $\{0, 1, \dots, l\}$, se tiene que existe una única j tal que T_j inicia en y_i . Esto se sigue del hecho que γ solo repite el primero y último vértice y de la definición de T_j .

Observación 4: Si $\{x_i, x_j\}$ es un subconjunto de $V(\gamma')$, con $0 \leq i < j < n - 2$, tal que (x_i, x_j) es una flecha de D y $x_i = y_k$ es el vértice inicial de T_k para algún k en $\{0, 1, \dots, l\}$, entonces $x_i \neq x_{j+2}$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $x_i = x_{j+2}$. Notemos que como $j < n - 2$, entonces x_{j+3} existe y es distinto a x_i , pues de no ser así tendríamos que $(x_i = x_{j+2}, x_{j+3})$ sería un lazo en D , lo cual contradice al hecho de que D no tiene lazos. Como $l((x_i, \gamma', x_{j+2})) = (j + 2) - i > 2$, entonces existe algún s en $\{0, 1, \dots, l\}$ tal que $\{x_{j+2}, x_{j+3}\} \subseteq V(T_s)$ y $s \neq k$ (recordemos que $l(T_k) \leq 2$ y $\gamma' = \bigcup_{i=1}^l T_i = (x_0 = y_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$), por lo que de la observación 3 se tiene que x_{j+2} no puede ser vértice inicial de T_s .

Por lo tanto, por definición de γ' , tenemos que $T_s = (y_s = x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3} = y_{s+1})$ (figura 3-8).

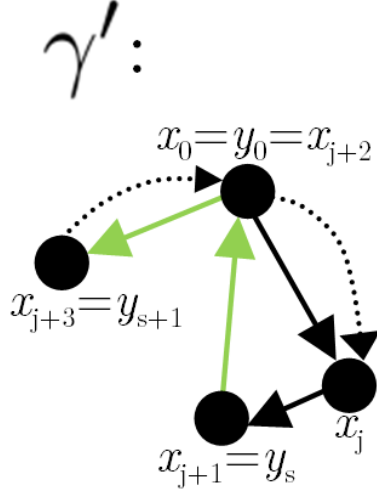


Figura 3-8: T_s en γ' . T_s es la trayectoria resaltada en color verde.

Notemos que $x_j \neq x_{j+3}$, pues en caso contrario la flecha $(x_{j+3} = y_{s+1}, y_s = x_{j+1})$ estaría en D y por lo tanto en $HC(D)$, lo cual no es posible pues (y_s, y_{s+1}) es una flecha de γ y γ no tiene flechas simétricas. Así, por las observaciones 1 y 2, se tiene que $(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3})$ es una $x_j x_{j+3}$ -trayectoria de longitud 3 en D y dado que D es una digráfica 3-cuasitransitiva, entonces $(x_j, x_{j+3}) \in F(D)$ o $(x_{j+3}, x_j) \in F(D)$. Si $(x_{j+3}, x_j) \in F(D)$, entonces $\alpha_1 = (x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, x_j)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones (figura 3-9 (a)). En particular $(y_{s+1} = x_{j+3}, x_{j+1} = y_s)$ es una flecha de $F(HC(D))$, lo cual no es posible, pues (y_s, y_{s+1}) es una flecha de γ y γ es asimétrico en $HC(D)$. Si $(x_j, x_{j+3}) \in F(D)$, entonces $\tau_1 = (x_{j+1}, x_{j+2}, x_j, x_{j+3})$ es una $x_{j+1} x_{j+3}$ -trayectoria de longitud 3 (figura 3-9 (b)) y dado que D es una digráfica 3-cuasitransitiva, entonces $(x_{j+1}, x_{j+3}) \in F(D)$ o $(x_{j+3}, x_{j+1}) \in F(D)$. Si $(x_{j+3}, x_{j+1}) \in F(D)$, entonces $(y_{s+1} = x_{j+3}, x_{j+1} = y_s)$ es una flecha de $F(HC(D))$, lo cual no es posible, pues (y_s, y_{s+1}) es una flecha de γ y γ es asimétrico en $HC(D)$. Si $(y_s = x_{j+1}, x_{j+3} = y_{s+1}) \in F(D)$, entonces, por definición de γ' , $x_{j+2} = Y_k$ no podría ser un vértice de γ' , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, como en cualquier caso llegamos a una contradicción, $x_i \neq x_{j+2}$.

Continuaremos con la prueba del lema, procediendo por inducción sobre k , con $k \leq 0$.

Base de la inducción. Haremos la base de la inducción para $k = 0$ y $k = 1$.

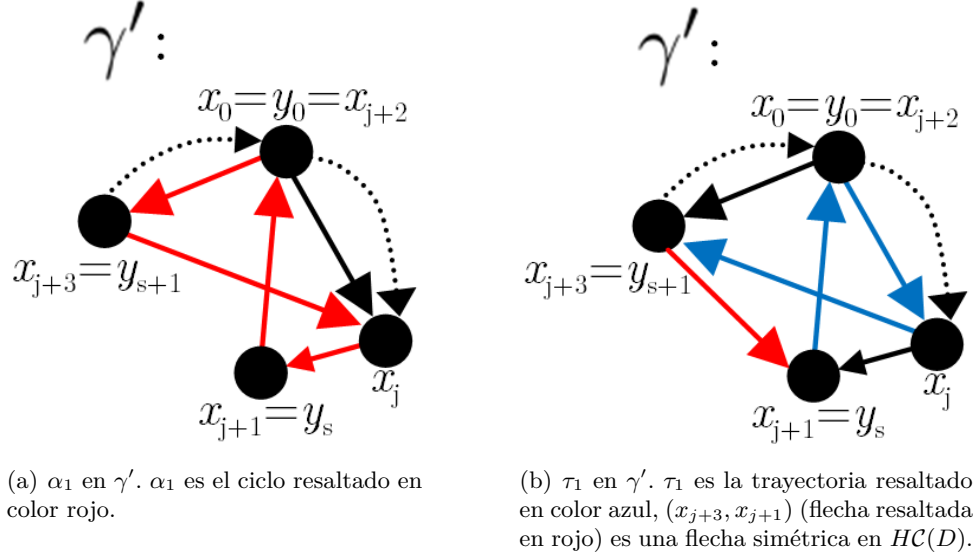


Figura 3-9:

Si $k = 0$, entonces $(x_0, x_{2k+1}) = (x_0, x_1)$, la cual por definición de γ' es una flecha de D .

Sea $k = 1$. Veamos que $(x_0, x_3) \in F(D)$.

Por la afirmación 1 y por las observaciones 1 y 2, se tiene que (x_0, x_1, x_2, x_3) es una trayectoria de longitud 3 en D y como D es 3-cuasitransitiva, $(x_0, x_3) \in F(D)$ o $(x_3, x_0) \in F(D)$. Si $(x_3, x_0) \in F(D)$, entonces $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_0)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones, lo que implica que (x_1, x_0) y (x_2, x_0) son flechas simétricas en $HC(D)$, lo cual no es posible, pues por definición de γ' se tiene que $x_1 = y_1$ o $x_2 = y_1$, por lo que al menos una de estas flechas está en γ y γ es asimétrico en $HC(D)$. Por lo tanto, $(x_0, x_3) \in F(D)$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que $(x_0, x_{2k+1}) \in F(D)$ para toda k tal que $0 \leq k < m < \frac{n-1}{2}$.

Paso inductivo. Sea $k = m$, con $2 < m < \frac{n-1}{2}$. Demostraremos que $(x_0, x_{2m+1}) \in F(D)$.

Por hipótesis de inducción, se tiene que $(x_0, x_{2m-1}) \in F(D)$, por lo que, por las observaciones 1, 2 y 4, tenemos que x_0, x_{2m-1}, x_{2m} y x_{2m+1} son vértices de γ' distintos entre sí, lo que implica que $(x_0, x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1})$ es una x_0x_{2m+1} -trayectoria de longitud 3 en D y como D es 3-cuasitransitiva, $(x_0, x_{2m+1}) \in F(D)$ o $(x_{2m+1}, x_0) \in F(D)$. Supongamos que $(x_{2m+1}, x_0) \in F(D)$, esto implica que $\varepsilon_1 = (x_0, x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1}, x_0)$ es un C_4 en D que, por

hipótesis, no tiene H -obstrucciones (figura 3-10).

Dado que $|V(T_i)| \leq 3$, para toda i en $\{0, 1, \dots, l\}$, tenemos dos casos para el conjunto $\{x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1}\}$: que los vértices de dicho conjunto sean suficientes para formar alguna T_i contenida en γ' o que ninguna T_i contenida en γ' se pueda formar únicamente con tales vértices.

Caso 1. Existe algún r en $\{0, 1, \dots, l\}$ tal que $V(T_r)$ es un subconjunto de $\{x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1}\}$.

En este caso se tiene que $\{y_r, y_{r+1}\}$ es un subconjunto de $V(\varepsilon_1)$ y como ε_1 no tiene obstrucciones, entonces existe una H -trayectoria entre cualesquiera dos vértices de ε_1 ; es decir, existe una $y_{r+1}y_r$ - H -trayectoria en D , lo que implica que (y_r, y_{r+1}) es una flecha de $HC(D)$, lo cual no es posible, pues (y_{r+1}, y_r) es una flecha de γ y γ es asimétrico en $HC(D)$.

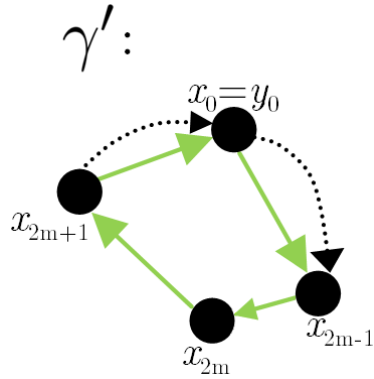


Figura 3-10: ε_1 en γ' . ε_1 es el ciclo resaltado en color verde.

Caso 2. Para todo r en $\{0, 1, \dots, l\}$, se tiene que $V(T_r)$ no es un subconjunto de $\{x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1}\}$.

Note que en este caso, por definición de γ' , no puede existir s en $\{0, 1, \dots, l\}$ tal que T_s inicie en x_{2m-1} o termine en x_{2m+1} , por lo que existe algún p en $\{0, 1, \dots, l\}$ tal que $T_p = (y_p = x_{2m-2}, x_{2m-1}, x_{2m} = y_{p+1})$ y $T_{p+1} = (x_{2m} = y_{p+1}, x_{2m+1}, x_{2m+2} = y_{p+2})$.

Luego, por la observación 3 se tiene que $x_{2m+1} \neq x_{2m-2}$ y como $(x_0, x_{2m-3}) \in F(D)$ (por hipótesis de inducción), entonces $(x_{2m+1}, x_0, x_{2m-3}, x_{2m-2})$ es una $x_{2m+1}x_{2m-2}$ -trayectoria de longitud 3 en D y como D es 3-cuasitransitiva, entonces

$(x_{2m+1}, x_{2m-2}) \in F(D)$ o $(x_{2m-2}, x_{2m+1}) \in F(D)$. Si $(x_{2m+1}, x_{2m-2}) \in F(D)$, entonces $\varepsilon_2 = (x_{2m-2}, x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1}, x_{2m-2})$ es un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones (figura 3-11 (a)), por lo que $(y_{p+1} = x_{2m}, x_{2m-2} = y_p) \in F(HC(D))$ lo cual no es posible, pues $(y_p, y_{p+1}) \in F(\gamma)$ y γ es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$. Por otro lado, si $(x_{2m-2}, x_{2m+1}) \in F(D)$, entonces $\varepsilon_3 = (x_{2m+1}, x_0, x_{2m-3}, x_{2m-2}, x_{2m+1})$ es un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones (figura 3-11 (b)). Por lo tanto, como ε_2 y ε_1 no tienen H -obstrucciones y ambos ciclos comparten la flecha (x_{2m+1}, x_0) , entonces $(x_{2m}, x_{2m+1}, x_0, x_{2m-3}, x_{2m-2})$ es una $x_{2m}x_{2m-2}$ - H -trayectoria en D (figura 3-11 (b)), lo que implica que $(y_{p+1} = x_{2m}, x_{2m-2} = y_p) \in F(HC(D))$, lo cual no es posible, pues $(y_p = x_{2m-2}, x_{2m} = y_{p+1}) \in F(\gamma)$ y γ es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$.

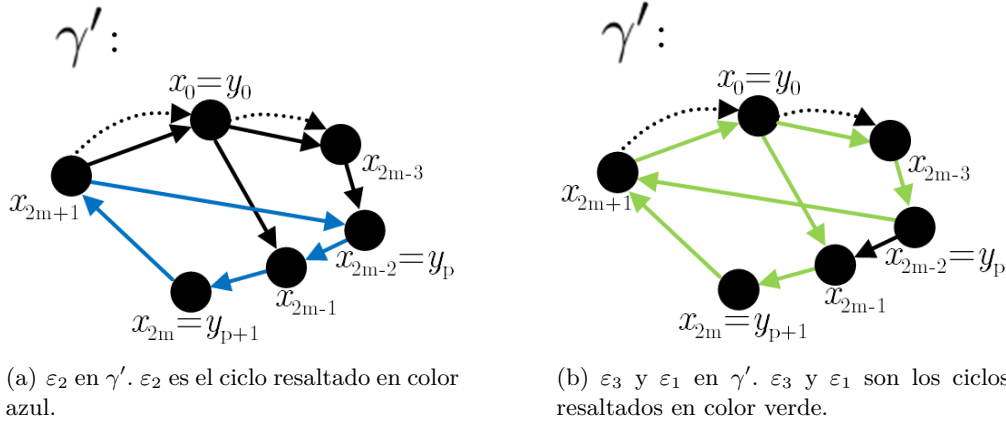


Figura 3-11:

Como en cualquier caso llegamos a una contradicción, podemos concluir que $(x_0, x_{2m+1}) \in F(D)$.

Para ver que el lema se cumple para cualquier vértice x_i de γ' que también está en γ , con $0 \leq i \leq n$; basta reetiquetar los vértices de γ' de manera que el ciclo empiece en x_i .

□

3.2. Resultado principal

Teorema 3.2. Sea D es una digráfica H -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva. Supongamos que:

1. Todo C_4 en D no tiene H -obstrucciones.
2. Todo C_3 tiene a lo más dos H -obstrucciones.
3. Si $\gamma = (y_0, y_1, \dots, y_l, y_{l+1} = y_0)$ es un ciclo asimétrico en $HC(D)$ tal que existe una $y_i y_{i+1}$ - H -trayectoria en D de longitud par, con $0 \leq i \leq l$, entonces existe una $y_i y_{i+1}$ -trayectoria en D , digamos T , tal que $l(T) \leq 2$,

entonces D tiene H -núcleo.

Demostración. Demostraremos que todo ciclo en $HC(D)$ tiene al menos una flecha simétrica. Esto nos llevará a concluir que $HC(D)$ tiene un núcleo por el teorema 1.1, así por el lema 3.1, D tendrá un H -núcleo. Supongamos entonces que $HC(D)$ tiene al menos un ciclo asimétrico.

Sean $\gamma = (y_0, y_1, \dots, y_l, y_{l+1} = y_0)$ un ciclo asimétrico en $HC(D)$ y $\gamma' = (x_0 = y_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$ un camino cerrado en D asociado a γ . Notemos que por el lema 3.3, $(x_0, x_{2j+1}) \in F(D)$ para toda j tal que $1 \leq 2j+1 < n$ y por el lema 3.2, $l(\gamma) \geq 4$. Tenemos dos casos para n .

Caso 1. n es impar.

Consideremos los vértices x_0, x_n, x_{n-1} y x_{n-2} . Notemos que como n es impar, $n-2$ también es impar, por lo que $(x_0, x_{n-2}) \in F(D)$. Así, por la observación 1 y 2 del lema anterior, se tiene que x_0, x_n, x_{n-1} y x_{n-2} son vértices de γ' distintos entre sí, lo que implica que $\beta_1 = (x_0, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_0)$ es un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones (figura 3-12). Por lo tanto, (x_0, x_n) y (x_0, x_{n-1}) son flechas de $F(HC(D))$, lo cual no es posible, pues al menos una de las flechas, (x_0, x_n) o (x_0, x_{n-1}) , está en $F(\gamma)$ (pues $x_n = y_l$ o $x_{n-1} = y_l$) y γ es asimétrico.

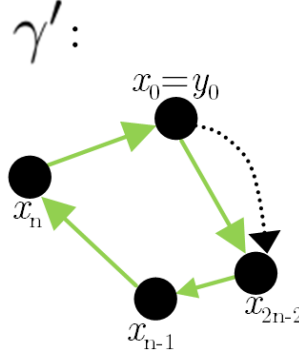


Figura 3-12: β_1 en γ' . β_1 es el ciclo resaltado en color verde.

Caso 2. n es par. Demostraremos que si n es par, entonces x_n está en γ y $(c(x_{n-1}, x_n), c(x_n, x_0))$ es una flecha de H . Para esto nos serán de utilidad las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1: $(x_{n-2}, x_0) \in F(D)$.

Como $n \geq 4$ (por el lema 3.2 y porque n es par), entonces existe el vértice x_{n-3} en $V(\gamma')$ y como $n-3$ es impar se tiene que $(x_0, x_{n-3}) \in F(D)$ (por el lema 3.3). Así, por las observaciones 1 y 2 del lema anterior se tiene que x_0, x_n, x_{n-1} y x_{n-2} son vértices de γ' distintos entre sí, lo que implica que $(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_0)$ es una $x_{n-2}x_0$ -trayectoria de longitud 3 y dado que D es 3-cuasitransitiva, se tiene que $(x_0, x_{n-2}) \in F(D)$ o $(x_{n-2}, x_0) \in F(D)$. Si $(x_0, x_{n-2}) \in F(D)$, entonces $\beta_2 = (x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_0, x_{n-2})$ es un C_4 en D que, por hipótesis, no tiene H -obstrucciones (figura 3-13). Por lo tanto, (x_0, x_n) y (x_0, x_{n-1}) son flechas de $F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no es posible, pues al menos una de las flechas, (x_0, x_n) o (x_0, x_{n-1}) , está en $F(\gamma)$ (pues $x_n = y_l$ o $x_{n-1} = y_l$) y γ es asimétrico en $HC(D)$. Por lo tanto, $(x_{n-2}, x_0) \in F(D)$.

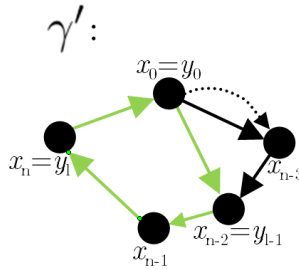


Figura 3-13: β_2 en γ' . β_2 es el ciclo resaltado en color verde.

Afirmación 2. $x_n = y_l$

Procediendo por contradicción, supongamos que $x_n \neq y_l$. Por definición de γ' tenemos que $x_{n-1} = y_l$, esto implica que $(x_{n-1} = y_l, y_0 = x_0) \in F(\gamma)$ pero, como $(x_0, x_{n-1}) \in F(D)$, pues $n - 1$ es impar y por el lema 3.3, entonces $(x_0, x_{n-1}) \in F(HC(D))$, lo cual no es posible pues γ es asimétrico en $HC(D)$. Por lo tanto $x_n = y_l$.

Consideremos $C_3 = (x_0, x_{n-1}, x_n, x_0)$, el cual, por hipótesis, tiene a lo más dos H -obstrucciones.

Afirmación 3. x_n no es una H -obstrucción de C_3 .

Si x_{n-1} no es una H -obstrucción de C_3 , entonces (x_0, x_{n-1}, x_n) es una x_0x_n - H -trayectoria, lo que implica que $(x_0, x_n) \in F(C(D))$, lo cual no es posible, pues por la afirmación 2 $(x_n = y_l, y_0 = x_0) \in F(\gamma)$, y γ es asimétrico en $C(D)$.

Si x_0 no es una H -obstrucción de C_3 , entonces (x_n, x_0, x_{n-1}) es una x_nx_{n-1} - H -trayectoria, por lo que $(x_n, x_{n-1}) \in F(HC(D))$, de donde $x_{n-1} \neq y_{l-1}$, pues en caso contrario (x_{n-1}, x_n) sería una flecha simétrica de γ , lo cual no es posible. Por lo tanto, $x_{n-2} = y_{l-1}$.

Como D es 3-cuasitransitiva, entonces para la trayectoria $\tau_1 = (x_{n-2}, x_0, x_{n-1}, x_n)$ (recordemos que por la afirmación 1 $(x_{n-2}, x_0) \in F(D)$) se tiene que $(x_n, x_{n-2}) \in F(D)$ o $(x_{n-2}, x_n) \in F(D)$. Si $(x_{n-2}, x_n) \in F(D)$, entonces x_{n-1} no debería pertenecer a $V(\gamma')$ (por definición de γ'), ya que $x_n = y_l$ y $x_{n-2} = y_{l-1}$, lo cual es una contradicción. Si $(y_l = x_n, x_{n-2} = y_{l-1}) \in F(D)$, entonces $(y_l, y_{l-1}) \in F(C(D))$, lo cual no es posible pues $(y_{l-1}, y_l) \in F(\gamma)$ y γ es asimétrico (figura 3-14).

Por lo tanto, como x_0 y x_{n-1} son H -obstrucciones de C_3 , podemos concluir que x_n no es una H -obstrucción de C_3 .

Por lo tanto, en la afirmación 3 hemos demostrado que si n es par, entonces $x_n = y_l$ y $(c(x_{n-1}, x_n), c(x_n, x_0))$ es una flecha de H . Reetiquetando los vértices haciendo que x_n tome el lugar de x_0 y siguiendo el mismo argumento probaríamos que $x_{n-1} = y_{l-1}$ y que

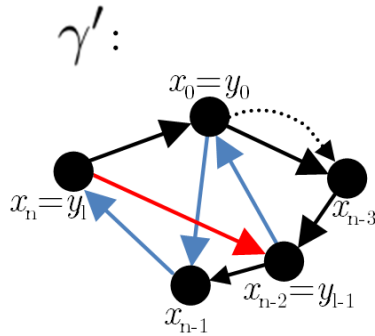


Figura 3-14: τ_1 en γ' . τ_1 es la trayectoria resaltada en color azul, (x_n, x_{n-2}) (flecha resaltada en color rojo) es una flecha simétrica en $HC(D)$.

$(c(x_{n-2}, x_{n-1}), c(x_{n-1}, x_n))$ es una flecha de H , lo que implica que $(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_0)$ es una H -trayectoria en D . Siguiendo este procedimiento, como γ' es finito, podemos probar que $\gamma' = \gamma$ y que γ' es un H -ciclo. Por lo tanto, γ es simétrico en $HC(D)$, lo cual es una contradicción.

Como en ambos casos llegamos a una contradicción, podemos concluir que todo ciclo en $HC(D)$ tiene una flecha simétrica, lo que implica por el teorema 1.1 que $HC(D)$ tiene un núcleo. Por lo tanto, por el teorema 3.1 D tiene un H -núcleo. \square

Haremos notar que para la prueba que hemos realizado del resultado principal de esta tesis, a partir del corolario 3.1, es necesaria la hipótesis que asegura la existencia de una $y_i y_{i+1}$ -trayectoria en D de longitud menor a 2 cuando la $y_i y_{i+1}$ - H -trayectoria es de longitud par.

Sea D la digráfica H -coloreada mostrada en la figura 3-15.

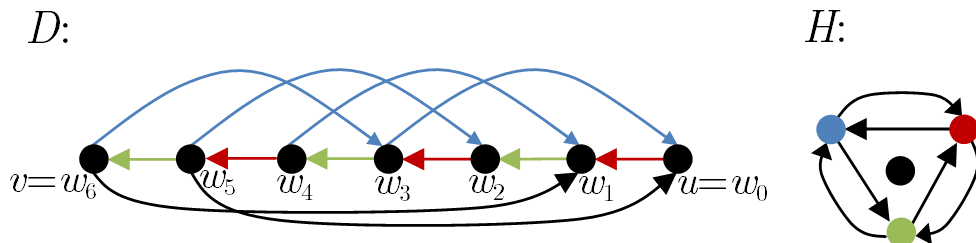


Figura 3-15:

Es fácil ver que D es 3-cuasitransitiva, asimétrica, que no contiene ningún C_3 y que ningún

C_4 en D tiene H -obstrucciones, que $(u = w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 = v)$ es una uv - H -trayectoria de longitud par y que no existe una vu - H -trayectoria en D , sin embargo, no existe ninguna uv -trayectoria de longitud menor o igual que 2.

Conclusión

Comenzamos nuestro estudio sobre la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas asimétricas 3-cuasitransitivas m -coloreadas, trabajo de Hortensia Galeana Sánchez y Eugenia O'Reilly Regueiro [10]. Hicimos un análisis de las condiciones que se exponen en este trabajo para asegurar la existencia del núcleo por trayectorias monocromáticas en tales digráficas, para posteriormente dar una generalización de dichas condiciones en digráficas H -coloreadas, lo cual nos condujo a obtener, como resultado original en esta tesis, el teorema 3.2, el cual afirma lo siguiente:

Si D es una digráfica H -coloreada asimétrica 3-cuasitransitiva, tal que:

1. Todo C_4 en D no tiene H -obstrucciones.
2. Todo C_3 tiene a lo más dos H -obstrucciones.
3. Si $\gamma = (y_0, y_1, \dots, y_l, y_{l+1} = y_0)$ es un ciclo asimétrico en $HC(D)$ tal que existe una $y_i y_{i+1}$ - H -trayectoria en D de longitud par, con $0 \leq i \leq l$, entonces existe una $y_i y_{i+1}$ -trayectoria en D , digamos T , tal que $l(T) \leq 2$,

entonces D tiene H -núcleo.

Dicho teorema es una generalización del resultado obtenido en [10].

Cabe mencionar que existen otros resultados sobre la existencia de H -núcleos en digráficas 3-cuasitransitivas. Tal es el caso del resultado expuesto por Marco Antonio López Ortiz y María del Rocío Sánchez López en [11], el cual mencionaremos a continuación no sin antes dar las definiciones necesarias para comprenderlo.

Dada una digráfica H -coloreada D , llamaremos **digráfica de clases de color** de D , denotada por $\mathcal{C}_C(D)$, a la digráfica tal que $V(\mathcal{C}_C(D)) = \{x \in V(H) : c(a) = x \text{ para algún } a \text{ en } F(D)\}$ y para x y y vértices de $\mathcal{C}_C(D)$ se tiene que $(x, y) \in F(\mathcal{C}_C(D))$ si y solo si existen u, v y w vértices de D tales que $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$ y $c(u, v) = x$ y $c(v, w) = y$.

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada, $u \in V(D)$. Definimos $\xi^+(\mathbf{u}) = \{c(u, v) : (u, v) \in F(D)\}$.

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada, $\{C_1, \dots, C_p\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$. Definimos $B_i = \{a \in F(D) : c(a) \in C_i\}$.

Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Decimos que D tiene la **propiedad \aleph** si existe $\{C_1, \dots, C_p\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ que cumple:

1. $\mathcal{C}_C(D)[C_i]$ es una subdigráfica de $H[C_i]$ para todo i en $\{1, \dots, p\}$.
2. Para cualquier vértice u en $V(D)$ existe C_i un elemento de la partición de tal forma que $\xi^+(u) \subseteq C_i$.
3. Si T es una H -trayectoria, entonces existe C_i , elemento de la partición, tal que T está contenido en $D[B_i]$.

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada, $\{C_1, \dots, C_p\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ y G una subdigráfica de D . Decimos que G tiene la **propiedad Ξ** si existe C_i elemento de la partición tal que los colores de todas las flechas de G , con excepción de a lo más una, están en C_i .

Llamaremos \bar{T}_4 a la digráfica tal que $V(\bar{T}_4) = \{x, y, z, w\}$ y $F(\bar{T}_4) = \{(z, x), (x, y), (y, w), (z, w)\}$ (figura 3-16).

Teorema 3.3. Sean H una digráfica, D una digráfica 3-cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph . Si cada C_3 , C_4 , y T_4 contenido en D tiene la propiedad Ξ , entonces $HC(D)$ es una digráfica núcleo perfecta.

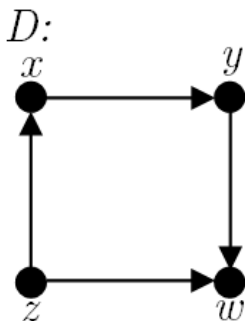


Figura 3-16:

Corolario 3.2. Sean H una digráfica, D una digráfica 3-cuasitransitiva H -coloreada con la propiedad \aleph . Si cada C_3 , C_4 , y T_4 contenido en D tiene la propiedad Ξ , entonces D tiene H -núcleo.

Aún cuando este resultado tiene algunas hipótesis en común con el resultado principal obtenido en esta tesis, haremos notar que no son equivalentes, ni sucede que uno implique al otro, mediante una digráfica que cumpla las hipótesis que requiere el resultado obtenido por Marco Antonio López y María del Rocío Sánchez López pero no las del obtenido en este trabajo y viceversa.

Veamos primero que el corolario 3.2 no implica el teorema 3.2.

Sea D una digráfica H coloreada como en la figura 3-17.

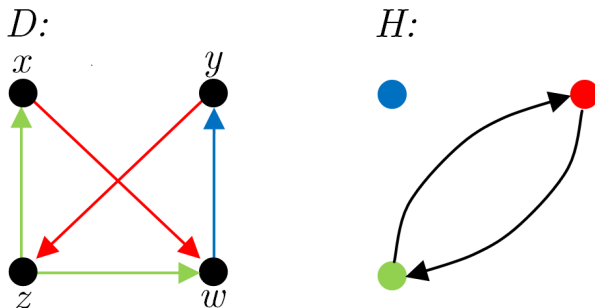


Figura 3-17:

Es fácil ver que D es 3-cuasitransitiva y que su digráfica de clases de color es la digráfica representada en la figura 3-18.

Sea $\{C_1 = \{\bullet, \bullet\}, C_2 = \{\bullet\}\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$, entonces:

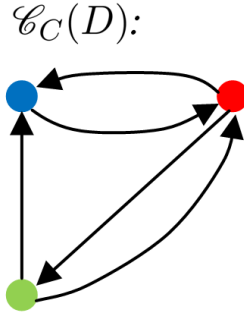


Figura 3-18:

1. $\mathcal{C}_C(D)[C_1] = H[C_1]$ y $\mathcal{C}_C(D)[C_2] = H[C_2]$ son las digráficas de la figura 3-19.



Figura 3-19:

2. $\xi^+(x) = \{\bullet\}$ es un subconjunto de C_1 , $\xi^+(y) = \{\bullet\}$ es un subconjunto de C_1 , $\xi^+(z) = \{\bullet\}$ es un subconjunto de C_1 y $\xi^+(w) = \{\bullet\}$ es un subconjunto de C_2 .
3. $D[B_1]$ y $D[B_2]$ son las digráficas de la figura 3-20. Las únicas H -trayectorias de D de longitud mayor a uno son $T_1 = (y, z, x, w)$, $T_2 = (y, z, x)$, $T_3 = (z, x, w)$, $T_4 = (y, z, w)$, las cuales están contenidas en $D[B_1]$.

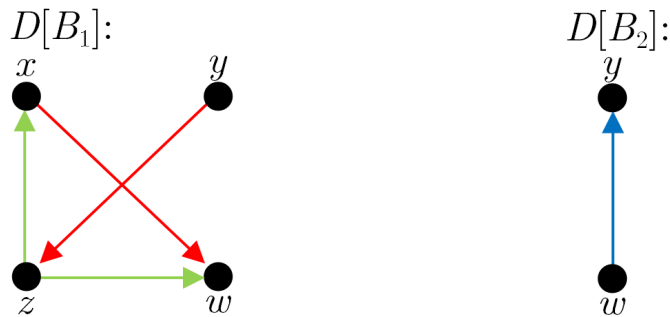


Figura 3-20:

Por lo tanto, D cumple la propiedad \aleph .

Notemos que el único ciclo de longitud 4 contenido en D es (y, z, x, w, y) , el cual tiene 3 de sus flechas H -coloreadas con los colores de C_1 , a saber $\{(y, z), (z, x), (x, w)\}$; el único ciclo de

longitud 3 contenido en D es (y, z, w, y) , el cual tiene dos de sus flechas H -coloreadas con los colores de C_1 , a saber $\{(y, z), (z, w)\}$, y D no contiene ningún \bar{T}_4 . Por lo tanto, D cumple la propiedad Ξ .

Por lo anterior, tenemos que D cumple con las hipótesis del corolario 3.2, por lo que D tiene H -núcleo, a saber, $\{w\}$. Es fácil ver que $\{w\}$ es H -núcleo de D , pues claramente es H -independiente ya tiene un único vértice y (y, z, x, w) es una H -trayectoria que pasa por todos los vértices de D y termina en w , lo que implica que $\{w\}$ es H -absorbente.

Notemos que D no cumple con las hipótesis del teorema 3.2 pues (y, z, x, w, y) es un ciclo de longitud 4 contenido en D que tiene 2 H -obstrucciones, a saber, w y y .

Por lo tanto, el corolario 3.2, no implica el teorema 3.2.

Veamos ahora que el teorema 3.2, no implica el corolario 3.2.

Sea D la digráfica H -coloreada de la figura 3-21.

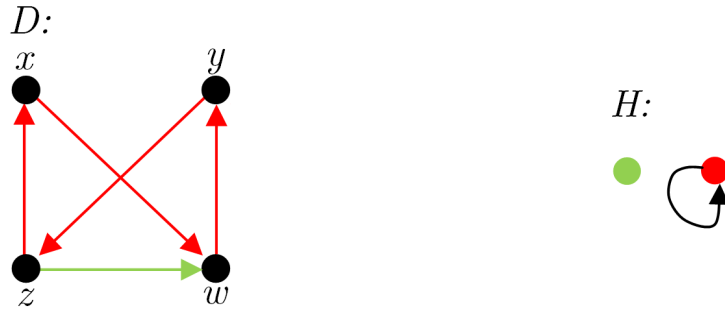


Figura 3-21:

Es fácil ver que D es asimétrica y 3-cuasitransitiva, que no tiene trayectorias de longitud par mayor que 2, que el único ciclo de longitud 4 contenido en D es $P_1 = (y, z, x, w, y)$ y que $P_2 = (y, z, w, z)$ es el único ciclo de longitud 3. Como P_1 no tiene H -obstrucciones y P_2 tiene solo dos H -obstrucciones, a saber, z y w , entonces D cumple con las hipótesis del teorema 3.2, por lo que D tiene H -núcleo, a saber, $\{w\}$. Es fácil ver que $\{w\}$ es H -núcleo de D , pues claramente es H -independiente ya tiene un único vértice y (y, z, x, w) es una H -trayectoria que pasa por todos los vértices de D y termina en w , lo que implica que $\{w\}$ es H -absorbente.

Veamos que D no cumple con las hipótesis del teorema 3.2. Note que $V(\mathcal{C}_C(D))$ solo tiene 2 particiones, a saber, $\{\{\bullet\}, \{\bullet\}\}$ y $\{\{\bullet, \bullet\}\}$.

Como $\xi^+(z) = \{\bullet, \bullet\}$, entonces si consideramos a $\{\{\bullet\}, \{\bullet\}\}$ como partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$, no se cumple el segundo punto de la propiedad \aleph .

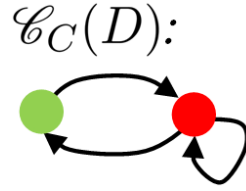


Figura 3-22:

Si consideramos a $\{\{\bullet, \bullet\}\}$ como partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$, entonces $\mathcal{C}_C(D) = \mathcal{C}_C(D)[\{\{\bullet, \bullet\}\}]$ y como $\mathcal{C}_C(D)$ no está contenida en H , entonces no se cumple el punto uno de la propiedad \aleph (figura 3-22).

Por lo tanto D no cumple con las hipótesis del corolario 3.2, por lo que podemos concluir que el teorema 3.2 no implica el corolario 3.2.

Por último, con base en este trabajo, podemos formularnos las siguientes preguntas: ¿Qué características debe tener una digráfica 3-cuasitransitiva para asegurar la existencia de una $y_i y_{i+1}$ -trayectoria en D de longitud menor a 2 cuando la $y_i y_{i+1}$ - H -trayectoria es de longitud par en el corolario 3.1? ¿Qué condiciones son necesarias para garantizar la existencia de un H -núcleo en una digráfica k -transitiva? Si removemos la condición de asimetría en la hipótesis de nuestro resultado principal ¿Se seguiría cumpliendo la existencia del H -núcleo en la digráfica? En la figura 3-15 exhibimos una digráfica que nos muestra el por qué para la prueba que se realizó del resultado principal de esta tesis necesitamos agregar la hipótesis que asegura la existencia de la $y_i y_{i+1}$ -trayectoria en D de longitud menor a 2 cuando la $y_i y_{i+1}$ - H -trayectoria es de longitud par, sin embargo dicha gráfica tiene núcleo, a saber $\{v\}$, por lo que surge la siguiente pregunta: ¿Es removible dicha hipótesis? Y de ser así ¿Cuál sería la estrategia para demostrar el teorema 3.2?

Bibliografía

- [1] P. Arpin, V. Linek, Reachability problems in edge-colored digraphs, *Discrete Mathematics*, 307 (2007) 2276-2289.
- [2] C. Berge, Vers une generale des jeux pitionnels, R. Henn, O. Moeschlin (Eds.), *Mathematical Economics and Game Theory, Essays in honor of Oskar Mongerstern, Lecture Notes in Economics*, vol. 141, Springer, Berlin (1977), pp. 13-24.
- [3] J. A. Bondy, U.S.R Murty, *Graph Theory*, Springer, Berlin (2008). 14.
- [4] E. Casas-Bautista, H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, Cycles and transivity by monochromatic paths in arc-coloured digraphs, *Graphs and Combinatorics* 12 (2015) 104-112.
- [5] V. Chvátal, On the computational complexity of finding a kernel, Report CRM300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1973. 15.
- [6] P. Duchet, Graphes Novau-Parfaits, *Ann. Discrete Math.* 9 (1980) 93-101. 16.
- [7] H. Galeana-Sánchez, Kernels in edge coloured digraphs, *Discrete Math*, 184 (1998) 87-99. 19, 20.
- [8] H. Galeana-Sánchez, On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments, *Discrete Math.* 156 (1996) 103-112. 20.
- [9] H. Galeana Sánchez, Kernels by monochromatic paths and the color-class digraph, *Discuss. Graph Theory* 31, 273-281 (2011).

- [10] H. Galeana-Sánchez, E. O'Reilly-Regueiro, Monochromatic absorbency and independence in 3-quasi-transitive digraphs, 2011.
- [11] M. A. López-Ortiz, *H*-núcleos en digráficas cuasitransitivas y 3-cuasitransitivas (tesis de licenciatura). Universidad Nacional Autónoma de México, México (2018).
- [12] J. von Neumann and O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1944. 13, 15.
- [13] B. Sands, N. Sauer and R. Woodrow, On monochromatic paths in edge coloured digraphs, J. Combin. Theory (B) 33 (1982) 271-275. iv, 16, 17, 104.