



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

TRAYECTORIAS DE PARTÍCULAS DE PRUEBA EN TEORÍAS
RELATIVISTAS CON NO CONSERVACIÓN DE ENERGÍA

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
ADÁN MIGUEL RUBIOL GARCÍA

TUTOR PRINCIPAL:
DR. YURI BONDER GRIMBERG, ICN UNAM

COMITÉ TUTOR:
DR. JOSÉ ALBERTO MARTÍN RUÍZ, INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM
DR. DANIEL EDUARDO SUDARSKY SAIONZ, INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES,
UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., NOVIEMBRE 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo financiero otorgado a través del programa de Becas Nacionales para Estudio de Posgrado, No. CVU: 1084780.

Al programa de Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM por la formación académica y por las oportunidades brindadas.

Al Dr. Yuri Bonder por el todo el apoyo, dedicación y paciencia al dirigir la presente tesis. Es un gran científico y ser humano.

A los miembros del comité tutor: Dr. Alberto y Dr. Sudarsky. A los miembros del jurado: Dra. Nora, Dr. Ulises, Dr. Elías y Dr. Hugo por sus comentarios y observaciones realizadas, así como por el tiempo dedicado.

A mi mamá Marcelina y papá Miguel y hermano Miguel, por todo el cariño y apoyo en mis decisiones.

A todos mis amigos en especial Ana, Mario, Miguel y a mis amigos de la maestría; Alejandro, David, Sergio con quienes seguimos compartiendo buenos momentos dentro y fuera del posgrado.

A quienes han compartido tiempo, y metas conmigo, sin importar el tiempo que haya sido.

Índice

1 Ley de conservación de la Energía	3
1.1 Introducción Histórica	3
1.2 Teorema de Noether	4
1.3 Contexto de Mecánica Cuántica	4
2 Gravedad Unimodular	6
2.1 Antecedentes	6
2.2 Ecuaciones de campo en Gravedad Unimodular	8
2.3 Solución en simetría esférica y en vacío a las ecuaciones de Gravedad Unimodular	12
3 Método de Papapetrou	14
3.1 Descripción del método	14
3.2 Caso de Gravedad Unimodular: Tensor de Energía-Momento no conservado	14
4 Ecuaciones de partículas de prueba y puntuales con pérdida de energía	18
5 Parámetros PPN	22
5.1 Aproximación Post-Newtoniana	22
5.2 Deflexión de la Luz en PPN	23
5.3 Retraso temporal de Shapiro en PPN	25
5.4 Precesión Perihelio PPN	27
5.5 Mediciones de los parámetros PPN	29
6 Órbitas con un potencial de Gravedad Unimodular	30
6.1 Deflexión de la Luz en Gravedad Unimodular	30
6.2 Retraso temporal de Shapiro en Gravedad Unimodular	32
6.3 Precesión del Perihelio en Gravedad Unimodular	34
6.4 Cotas a potencial de Gravedad Unimodular	37
6.4.1 Deflexión	37
6.4.2 Precesión	38
7 Conclusiones	40
A Restricción de la corriente no conservada en simetría esférica y estática	41

1. LEY DE CONSERVACION DE LA ENERGIA

1.1. Introducción Histórica

A lo largo de la historia, la ciencia se ha basado en principios que consideramos se cumplen siempre, en particular y de suma importancia en Física, es el principio de conservación de la Energía. Este capítulo será muy cercano y fuertemente basado en el trabajo de T.Maudlin, E.Okon, y D.Sudarsky [1], para analizar históricamente y filosóficamente este principio fundamental.

Thales de Mileto (548 a. C) consideraba que los elementos fundamentales eran: agua, tierra, aire, fuego [2]. En particular Thales consideraba al agua como sustancia fundamental, por tener formas familiares de sólido, líquido, gas, y parecía conservarse siempre. Algunos otros filósofos se motivaron a postular otros elementos fundamentales diferentes. Pero todos los antiguos presocráticos estuvieron de acuerdo en que las sustancias fundamentales no podían ser creadas o destruidas [3].

De la misma manera la definición de átomo dada por Demócrito como “indivisible” también guarda el requerimiento de que la sustancia fundamental no puede ser creada o destruida. Sólo existen dos posibilidades; la materia hecha de la sustancia fundamental o la nada. De la idea filosófica “la nada sólo puede provenir de la nada” [1], podemos implicar que la generación o destrucción de la sustancia fundamental debería provenir de la única otra cosa que existe que es la nada.

Es importante notar que, si la sustancia fundamental de la que pensamos que están hechas todas las cosas, sufre una violación a su ley de conservación, sería conceptualmente desconcertante. Si existe una sustancia fundamental que adopta diferentes formas o arreglos, la falta de conservación parecería dudosa por mínima e insignificante que sea. Por el contrario, esto no ocurre con las sustancias derivadas, que no sean fundamentales. Podemos considerar el ejemplo de David Albert [4]: “los puños pueden ir y venir a voluntad, el número de puños en el mundo no satisface ninguna ley de conservación. Esto porque cuando se forma un puño, nada fundamentalmente nuevo llega a existir: todo lo que sucede es que los dedos que ya existían se reordenan”.

Mucho después, debido a la famosa ecuación de Einstein [5](1905) $E = mc^2$ la ley de conservación de la energía ya no se consideraba tanto un principio fundamental como lo era la primera ley de la termodinámica. Einstein [6] afirmó: “Se sigue desde la Teoría Especial de la Relatividad que la masa y la energía son manifestaciones de la misma cosa, una concepción un tanto desconocida para el hombre promedio”. Si usamos la explicación de la energía, como la sustancia fundamental, sugiere fuertemente que uno debería esperar que exista una ley de conservación para la energía.

A pesar de lo intuitivamente exitosa de la visión presocrática, algunos ejemplos simples prueban que no se debería considerar la conservación de energía en la clase de leyes inviolables de la naturaleza. Para ver un ejemplo consideremos la “transformación de energía entre sus diferentes formas”, algunas de ellas son: energía cinética, energía potencial gravitacional, etc. Para invalidar el punto de vista presocrática, consideremos el ejemplo de T.Maudlin et al., [1] con la energía cinética: el choque inelástico de dos asteroides de que viajan inercialmente, parte del hielo se derrite, y después de la colisión ambos se mueven juntos. Si al inicio, los dos asteroides se mueven con una cierta velocidad relativa V . En el marco en reposo de alguno de los asteroides, este empezaría con energía cinética 0 y el otro tendría energía cinética $K = \frac{1}{2}mV^2$, después de la colisión ambos se mueven juntos con velocidad $\frac{1}{2}V$ con energía cinética total $\frac{1}{2}K$, pero la energía cinética restante $\frac{1}{2}K$ se usó para fundir el hielo, y todo se originó en el asteroide en movimiento. Por otro lado, en el marco del centro de masa, los dos asteroides se acercan desde direcciones opuestas, cada uno viajando con velocidad $\frac{1}{2}V$ y cada uno con energía cinética $\frac{1}{4}K$, todo lo demás se utiliza para derretir el hielo. Entonces podemos preguntarnos ¿de dónde vino la energía?, ¿quién tiene razón y quién está equivocado?

Según la visión de Newton, existe un marco en reposo absoluto, entonces cada asteroide tendría una velocidad absoluta y única, y su energía cinética sería una función de esa velocidad. Sin embargo, las velocidades absolutas ya no se usan desde hace mucho tiempo y, por lo tanto, las energías cinéticas absolutas fueron desechadas con ello. La “energía que derritió el hielo” no vino de algún asteroide o lugar en particular. Incluso no existe tal cosa como la velocidad absoluta, debemos decir que simplemente no existe tal cosa como la energía cinética. Toda la noción de energía, como sustancia, es una ficción, un vestigio de física antigua. Pero si no existe tal cosa como la energía, entonces ¿por qué se conserva? Ahora revisaremos un nuevo punto de vista.

1.2. Teorema de Noether

Emmy Noether en 1915 demostró que para un sistema cuya dinámica es gobernada por un Lagrangiano, toda simetría diferencial de la acción genera cantidades conservadas para ese sistema [7]. La cantidad “momento lineal” es generada por una simetría traslacional en esa dirección; el “momento angular” con respecto a un eje, es generada por una simetría rotacional alrededor de ese eje; y la “energía” es generada por una simetría traslacional en el tiempo. De esta manera las cantidades conservadas son características matemáticas de las simetrías globales del Lagrangiano.

Recuerde que en el espacio-tiempo Galileano y en el espacio-tiempo de Minkowski hay una infinidad de distintas simetrías temporales globales: una para cada marco inercial global distinto. Entonces, según este punto de vista, hay tantas “energías” diferentes, como simetrías temporales diferentes. Todas las energías son cantidades conservadas obtenidas de una simetría, en este sentido decimos que son reales, e igualmente irreales, ya que ninguna de ellas son magnitudes físicas locales, definidas solamente en un punto del espacio-tiempo. En Relatividad General, normalmente también se considera una infinidad de simetrías temporales, mediante campos de Killing temporales. Por su puesto, para observador inercial, con una cierta 4-velocidad, se puede usar este campo de Killing temporal, para calcular su energía, aunque igualmente podemos usar la cantidad conservada de cualquier otro marco inercial, entonces cualquier pregunta como: ¿de dónde vino la energía?, de cualquier observador inercial, es válida igualmente, ya que todos se refieren a diferentes “energías”.

No obstante, esta infinidad de energías conservadas, construidas a través del teorema de Noether, sufre un cambio cuando en Relatividad General (GR), estudiamos un caso genérico. Debido a que, en un sistema real del universo, siendo cuidadosos, en vez de tener una infinidad de campos de Killing temporales, puede que no exista ninguno. Por consiguiente, si estamos usando la descripción correcta de la naturaleza, por esta razón, no deberíamos esperar que se obtenga algún principio de conservación para la energía, como menciona H. Bondi, E. Curiel [8, 9].

Por otra parte, a pesar de que no tengamos un campo de Killing temporal, todavía se puede tener un tensor de energía-momento conservado $\nabla_a T^{ab} = 0$, pero esto no puede usarse para definir una cantidad global conservada, puesto que; si usamos una 4-corriente $J^b = \nabla_a T^{ab}$, y la contraemos con la 4-velocidad de un observador $u_b J^b$, no obtendríamos una cantidad conservada, porque $J^b = 0$, otra opción es contraer dos veces el tensor de energía-momento con la 4-velocidad $T_{ab} u^a u^b$ y calcular la cantidad $u_c \nabla^c (T_{ab} u^a u^b)$, lo cual no es igual a cero en general. A pesar de esto, podemos cambiar la conservación global de la energía, por una conservación local, puesto que en el mundo real no existen campos de Killing, más bien a diferentes escalas podemos aproximar campos de Killing. Por ejemplo: en el marco de un laboratorio en la tierra, se puede aproximar por el espacio-tiempo de Minkowski, el cual posee una infinidad de vectores de Killing y, por lo tanto, se puede definir una infinidad de energías, a la escala del Sol o de la Tierra se puede aproximar por el espacio tiempo de Schwarzschild y así sucesivamente en distintas escalas.

Como hemos visto, la noción de conservación de energía es, al menos intuitivamente esperada, en la física clásica a lo largo de la historia. Sin embargo, ya que la materia es cuántica, debemos considerar también ese punto de vista.

1.3. Contexto de Mecánica Cuántica

En mecánica cuántica estándar, al realizar mediciones y calcular un valor esperado se interpreta como el promedio de todos los posibles resultados obtenidos al medir copias idénticas del sistema. También recordemos que los operadores Hermitianos que conmutan con el Hamiltoniano se denominan constantes de movimiento. No obstante, todo lo que esto implica es que, durante la evolución unitaria, los valores esperados y las probabilidades, dadas por la regla de Born de dichos operadores, se conservan. Sin embargo, si es que dichas cantidades se conservan, solamente es en promedio y no caso por caso en cada copia del sistema. Además, las mediciones generalmente cambian los valores esperados. Para explorar el problema con más detalle, considere realizar una medición de energía en un sistema S en el estado

$$|\psi\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}} (|E_1\rangle_S + |E_2\rangle_S) ,$$

con $|E_1\rangle_S$ y $|E_2\rangle_S$ eigenestados de S con energías $E_1 \neq E_2$. Inicialmente, el valor esperado de energía es probabilístico $\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$, pero después de la medición es E_1 o E_2 . Es decir, con la medición, el valor esperado de energía salta a E_1 o E_2 . Entonces es difícil de decir que ocurre con la conservación de la energía, porque el sistema evoluciona desde un estado inicial en el que la energía no tiene un valor bien definido a uno final que sí lo tiene.

Todo depende entonces de cómo se interpreta la noción de que la energía inicial no está bien definida. Si uno considera al pie de la letra la interpretación vector propio-valor propio, que sostiene que: “Un sistema físico posee el valor β para una propiedad representada por el operador O si y solo si el estado cuántico asignado al sistema es

un estado propio de O con valor propio β ", entonces la falta de definición de la energía debe tomarse al pie de la letra. Si es así, no está claro cómo evaluar el tema de la conservación: la energía no parece estar conservada, pero tampoco parece estar explícitamente no conservada, como sostiene D.Z. Albert [4].

Alternativamente, se podría tratar de sostener que el sistema siempre tiene un valor de energía bien definido, incluso si el estado no es un estado propio de energía. Sin embargo, tal posición implicaría algún tipo de teoría de variables ocultas, que va más allá del formalismo estándar (algunas teorías de variables ocultas bien desarrolladas es por ejemplo la teoría de la onda piloto).

También en la descripción anterior hemos dejado fuera los aparatos de medición, y podría ser que al incluirlos se restablezca la conservación exacta. Primero hay que preguntarse si en principio es posible dar una descripción cuántica de los aparatos de medición o no. Si la respuesta es no, como sostuvo Bohr [10]: "En el sistema al que se aplica el formalismo de mecánica cuántica, es posible incluir un intermediario en el proceso de medición, pero los instrumentos de medición finales siempre deben describirse completamente en líneas clásicas y, en consecuencia, mantenerse fuera del sistema sujeto a tratamiento mecánico cuántico"; entonces parece que la afirmación de que incluir los aparatos restaura la conservación de la energía no puede evaluarse explícitamente y solo puede asumirse, no probarse.

Von Neumann, en su tratado sobre los fundamentos matemáticos de la teoría cuántica [11], representó el aparato de medición con un solo grado de libertad, cuyo valor estaba correlacionado con el de la variable dinámica que se estaba midiendo. Tal aparato no se deja, en general, en un estado puro definido, y no admite una descripción clásica. Por lo tanto, introdujo un segundo aparato que observa el primero, un tercer aparato, y así sucesivamente, hasta que haya una medición final, que no está descrita por la dinámica cuántica y tiene un resultado definido para el cual la mecánica cuántica solo puede dar predicciones estadísticas. El punto esencial sugerido, pero no probado, es que la introducción de esta secuencia de aparatos es irrelevante: el resultado final es el mismo, independientemente de la ubicación de la transición entre física clásica y la cuántica.

Por otro lado, si, al menos en principio, es posible dar una descripción cuántica de los aparatos de medición, entonces, para tener conservación de energía, lo que se necesitaría es el estado del sistema cerrado S , los aparatos de medición, e incluso el medio ambiente, para tener la misma energía en todas las etapas del proceso de los pasos descrito anteriormente. Esto, sin embargo, sería un problema porque dicho estado tendría que ser un estado propio del hamiltoniano total y, como tal, no podría evolucionar en el tiempo, lo que contradice el hecho de que cosas, como las mediciones, supuestamente sucedieron durante el proceso. Por el contrario, si el estado total no es un estado propio del hamiltoniano total, entonces hay una evolución no trivial, pero la energía total nunca está bien definida, por lo que no se puede decir que la energía se conserva.

Para escapar de esta conclusión, se podría permitir una pequeña incertidumbre energética en el estado inicial, suficiente para permitir una evolución no trivial, y preguntarse si la energía del sistema alguna vez se saldrá del rango de energía permitido por tal incertidumbre. Claramente, durante la evolución unitaria, o incluso en el curso de una medición de energía, esto no ocurrirá. Sin embargo, ¿Qué sucede durante las mediciones de cantidades que no conmutan con el Hamiltoniano? Para responder con rigor a esta pregunta es necesario especificar exactamente cómo funcionan los colapsos cuánticos que conducen la transición de una superposición de estados a un solo estado. Una opción es asumir, como von Neumann, que el colapso es un proceso global, en el sentido que afecta al estado, no sólo del sistema a medir, sino también del aparato de medida. Si, por el contrario, los colapsos de alguna manera sólo afectan al sistema a ser medido, y no el estado global, entonces no está claro qué es exactamente lo que sucede durante una medición y, nuevamente, el tema de la conservación de energía no puede evaluarse explícitamente.

Otro sistema bastante interesante para examinar el tema de la conservación es una situación tipo *EPR* que consta de dos subsistemas A y B , en el estado

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|E_1\rangle_A |E_2\rangle_B + |E_2\rangle_A |E_1\rangle_B \right),$$

con $|E_i\rangle_S$ un estado propio de energía del sistema X con energía E_i (nuevamente, con $E_1 \neq E_2$). Tenga en cuenta que, en tal estado, ni A ni B tienen un valor de energía bien definido, pero que la energía de todo el sistema está bien definida para ser $E_1 + E_2$. Ahora, imagina A y B inicialmente en el origen, con A moviéndose hacia la derecha y B hacia la izquierda. ¿Qué sucede si, después de que los sistemas se hayan separado, medimos la energía de A por ejemplo? Antes de la medición, A no posee un valor de energía bien definido y su valor de expectación de energía es $\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$. Posteriormente, su energía es E_1 o E_2 . El valor esperado de energía vuelve a saltar de $\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ a E_1 o E_2 . Para explicar este salto, se podría intentar argumentar que el aparato que mide A está de alguna manera involucrado en el balance de energía que asegura la conservación de energía. Tenga en cuenta, sin embargo, que la medición de A también induce un salto en la energía de B , pero sin que interactúe con un aparato de medición. Parece, entonces, que si los aparatos de medición ayudan a resolver una aparente violación de la energía, podrían

hacerlo solo de forma no local; esto porque a lo largo de esta última discusión, hemos estado hablando como si, en este escenario, se pudiera especificar cual energía es ubicada en tal o cual región. Sin embargo, en el contexto cuántico, no está claro que ese sea el caso. En el estado $|\psi\rangle_{AB}$ del caso anterior describe una situación en la que la energía total tiene un valor bien definido de $E_1 + E_2$, pero en el que parece imposible precisar dónde se encuentra dicha energía.

Ahora, restringiéndonos al caso de teorías relativistas con no conservación de energía, podríamos argumentar que en situaciones donde no tenemos un campo vectorial de Killing, la ecuación geodésica para partículas de prueba podría no cumplirse, debido a que no tenemos una cantidad conservada llamada “energía”, la cual provenga de una simetría temporal. Dicha ecuación para trayectorias de partículas de prueba, con no conservación de energía, será motivada desde el punto de vista de una teoría alternativa a GR llamada Gravedad Unimodular en el siguiente capítulo.

2. GRAVEDAD UNIMODULAR

2.1. Antecedentes

La interpretación de la energía oscura es uno de los grandes problemas de física actual [12], ya que el efecto gravitatorio del vacío cuántico se espera que sea equivalente a una constante cosmológica efectiva [13]. Según la visión estándar, ésta provocará una expansión acelerada del universo. Sin embargo, simples estimaciones de su valor esperado son muy grandes, superando el valor observado entre 60 y 120 órdenes de magnitud [14, 15]; una contradicción con las observaciones. Esto indica una profunda discrepancia entre GR y teoría cuántica de campos, un problema importante para la física teórica [16].

Para la pregunta ¿Cuáles son los efectos gravitatorios de la energía del vacío? una de las propuestas para resolver el problema, resumido por Weinberg [15], es el uso de las ecuaciones de Einstein sin traza en lugar de las ecuaciones de campo estándar de Einstein. Si se adoptan estas ecuaciones libres de traza, la energía del vacío no tiene efecto gravitatorio. Esto no determina un valor único para la constante cosmológica efectiva, pero resuelve la enorme discrepancia entre la teoría y la observación.

En esta sección, vemos que las ecuaciones de Einstein sin traza son una alternativa viable a las ecuaciones de campo de GR, con la mejora de que, a diferencia de ecuaciones de campo de Einstein, no sufren la discrepancia crucial con los resultados estándar de teoría cuántica de campos, que implican un valor muy grande para la energía del vacío. Ahora la dinámica gravitacional clásica está codificada en las ecuaciones de campo de Relatividad General con constante cosmológica Λ

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = T_{ab}, \quad (1)$$

donde $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$ es el tensor de Einstein, R_{ab} es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci, y g_{ab} es la métrica. También, para cualquier espacio-tiempo se cumple las leyes de conservación

$$\nabla^a G_{ab} = 0, \quad (2)$$

además, de lo anterior se garantiza la conservación del tensor de energía momento

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \quad (3)$$

En aplicaciones cosmológicas, suponemos que el tensor métrico toma la forma espacialmente homogénea e isotrópica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Sigma^2,$$

donde $a(t)$ es un factor de escala universal dependiente del tiempo y $d\Sigma^2$ es la métrica de un espacio-tiempo de dimensión 3 con curvatura constante $k = -1, 0, 1$. Consideremos la cuadrivelocidad para la materia $u^\alpha = \delta_0^\alpha$, normalizada $u^\alpha u_\alpha = -1$ (recuerde que los índices latinos a, b, c, \dots , son índices abstractos que denotan el tipo de tensor y los índices griegos $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ son índices de componentes de vectores). Debido a las simetrías de la métrica, el tensor energía-momento de la materia necesariamente es un fluido perfecto:

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + pg_{ab}, \quad (4)$$

donde la densidad de materia-energía ρ , y la presión de materia isotrópica p , con respecto al marco en reposo, están relacionadas a través de una ecuación de estado $p = p(\rho)$. Considerando el tensor de energía momento (4) y su

conservación (3) obtenemos la ecuación

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (5)$$

En términos de componentes (1) obtenemos la ecuación de Raychaduri

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3p) + \Lambda, \quad (6)$$

y la ecuación de Friedmann

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -3\frac{k}{a^2} + 8\pi\rho + \Lambda. \quad (7)$$

Las ecuaciones, (5), (6), (7), no son independientes ya que podemos obtener cualquiera de ellas a partir de las restantes. La ecuación (6) tiene información de la atracción gravitacional, puesto que muestra que el término $\rho + 3p$ es la densidad de masa gravitacional activa. Luego, la ecuación de estado para el vacío está dada por

$$p_{vac} = -\rho_{vac}, \quad (8)$$

lo cual conduce a una densidad negativa

$$\rho_{vac} + 3p_{vac} = -2\rho_{vac}, \quad (9)$$

donde podemos representar los efectos del vacío como un fluido con ecuación de estado dada por (8) o como una constante cosmológica efectiva

$$\Lambda_{vac} = 8\pi\rho_{vac}. \quad (10)$$

El problema es que, en teoría cuántica de campos, el vacío es como un conjunto infinito de osciladores, cada uno con energía oscilatoria de punto cero $\frac{1}{2}\hbar\omega_k$, da un valor divergente para la energía de vacío E_{vac} . Para resolver esta divergencia es necesario realizar una regularización de energía; así, la densidad de energía de vacío es estimada por Weinberg [15], es del orden

$$\langle \rho_{vac} \rangle \cong 2 \times 10^{71} GeV^4, \quad (11)$$

mientras que el valor de la constante cosmológica medida, determinada a través de observaciones astronómicas, es del orden de

$$\rho_{obs} \cong 10^{-47} GeV^4. \quad (12)$$

Entonces existe una gran diferencia entre la densidad de energía del vacío y el valor observado para la constante cosmológica, esto indica una discrepancia entre GR y la Teoría Cuántica de Campos. Una posibilidad es que las ecuaciones de campo de la Relatividad General no son las ecuaciones efectivas para la descripción de las interacciones gravitacionales. Tomando en consideración este último punto, una de las propuestas hechas por la comunidad es tomar como ecuaciones efectivas a las ecuaciones de Einstein sin traza, las cuales son

$$R_{ab} - \frac{1}{4}Rg_{ab} = 8\pi\left(T_{ab} - \frac{1}{4}Tg_{ab}\right), \quad (13)$$

como veremos, en esta teoría no existe discrepancia entre los valores ρ_{obs} y $\langle \rho_{vac} \rangle$. Al modelo cuyas ecuaciones de campo son las ecuaciones (13) se le conoce como Gravedad Unimodular, este modelo ha sido ampliamente explorado e inclusive fue estudiado por Einstein [17].

Luego, la identidad de Bianchi al ser una propiedad geométrica se satisface independientemente de las ecuaciones de campo; así $\nabla_a G^{ab} \equiv 0$. Por otro lado, la conservación del tensor de energía-momento en este contexto ya no es una consecuencia de (2); debido a esto, en gran parte de los trabajos relacionados con Gravedad Unimodular se suele considerar $\nabla_a T^{ab} \equiv 0$ como una *condición adicional*, aunque se puede analizar las consecuencias de tener la no conservación $\nabla_a T^{ab} \neq 0$ [18].

Por otro lado, este modelo no tiene el problema de la constante cosmológica puesto que el estado base no afecta la curvatura del espacio-tiempo; en efecto, para un fluido perfecto la fuente de materia está dada por el tensor sin traza

$$T_{ab} - \frac{1}{4}Tg_{ab} = (\rho + p) \left(u_a u_b + \frac{1}{4}g_{ab} \right), \quad (14)$$

note que la materia sólo aparece en las ecuaciones de campo en el término $\rho + p$ el cual, por la ecuación (8), es cero en vacío.

Ahora, tomando la derivada covariante de (13)

$$\nabla^a \left(R_{ab} - \frac{1}{4}Rg_{ab} \right) = 8\pi \nabla^a \left(T_{ab} - \frac{1}{4}Tg_{ab} \right), \quad (15)$$

luego usamos (2) y la condición adicional (3) para obtener

$$\nabla_b (R + 8\pi T) = 0.$$

Resolviendo lo anterior

$$R + 8\pi T \equiv 4\tilde{\Lambda}. \quad (16)$$

donde $\tilde{\Lambda}$ es una constante de integración. Luego, empleamos (16), y eliminamos T de (13), se obtiene que

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \tilde{\Lambda}g_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (17)$$

Es decir, se obtiene una ecuación de campo similar a (1) pero con una constante cosmológica efectiva $\tilde{\Lambda}$ que no guarda relación alguna con $\Lambda_{vacío}$. Dada la ecuación (17), se suele decir que se recupera la descripción de la Relatividad General. Sin embargo, esta proposición no es del todo correcta por dos razones. La primera es que considerando la descripción que se ha dado hasta ahora de Gravedad Unimodular, existe una indeterminación de las soluciones en cuanto al número de ecuaciones en componentes e incógnitas, $g_{\mu\nu}$ (nueve y diez respectivamente); lo cual será resuelto al imponer una restricción sobre $\sqrt{-g}$, por lo que esta ecuación también debería resolverse. Mientras que la segunda razón es que, para la deducción de la ecuación (15), se impuso el hecho de que $\nabla^a T_{ab} \equiv 0$; es decir, Relatividad General (GR) y Gravedad Unimodular (GU) son equivalentes bajo el supuesto de que la divergencia del tensor de energía-momento es cero. Sin embargo, haciendo uso de la acción de materia, se mostrará que la ley de conservación que se sigue en GU no es $\nabla^a T_{ab} \equiv 0$, por lo cual dicha proposición en general no es cierta. Precisamente, en este trabajo exploraremos GU partiendo de una acción.

2.2. Ecuaciones de campo en Gravedad Unimodular

Sea (M, g_{ab}) un espacio-tiempo de dimensión 4 en GU, con la siguiente acción

$$S[g^{ab}, \lambda, \phi] = \int \frac{1}{2\kappa} (R\sqrt{-g} + \lambda(\sqrt{-g} - \tilde{f})) d^4x + S_M[g^{ab}, \phi], \quad (18)$$

con g^{ab} la métrica inversa de g_{ab} , λ un multiplicador de Lagrange, g es el determinante de las componentes de g_{ab} , $\kappa = 8\pi$, \tilde{f} es una función suave no dinámica (es en realidad una densidad escalar). La acción de materia es

$$S_M[g^{ab}, \phi] = \int \mathcal{L}_M(g^{ab}, \phi) \sqrt{-g} d^4x,$$

\mathcal{L}_M es la densidad lagrangiana de materia y ϕ describe colectivamente a los campos de materia. Ahora, si hacemos la variación de S respecto a g^{ab} y λ obtenemos

$$\delta S_M[g^{ab}, \lambda, \phi] = \int \frac{1}{2\kappa} \left(\delta R_{ab} g^{ab} \sqrt{-g} + R_{ab} \delta g^{ab} \sqrt{-g} + R \delta \sqrt{-g} + \lambda \delta \sqrt{-g} + (\sqrt{-g} - \tilde{f}) \delta \lambda \right) d^4x + \delta S_M,$$

además se usa el hecho de que \tilde{f} es una función no dinámica y también usando el hecho de que $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}$, tenemos

$$\delta S_M[g^{ab}, \lambda, \phi] = \int \frac{1}{2\kappa} \left\{ \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} - \frac{1}{2} \lambda g_{ab} \right) \delta g^{ab} \sqrt{-g} + \delta R_{ab} g^{ab} \sqrt{-g} - (\sqrt{-g} - \tilde{f}) \delta \lambda \right\} d^4x + \delta S_M,$$

luego para el segundo término usamos que

$$\delta R_{ab} = \nabla_c(\delta\Gamma_{ba}^c) - \nabla_b(\delta\Gamma_{ca}^c),$$

y también

$$\nabla_a v^a = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a(\sqrt{-g} v^a).$$

Así

$$\int \frac{1}{2\kappa} \delta R_{ab} g^{ab} \sqrt{-g} d^4x = \int \partial_c \left(\frac{1}{2\kappa} g^{ab} \delta\Gamma_{ba}^c - \frac{1}{2\kappa} g^{ac} \delta\Gamma_{ba}^b \right) d^4x. \quad (19)$$

Lo anterior es entonces la integral de una divergencia, si usamos el teorema de Gauss podemos expresar como una integral de borde. En este trabajo consideraremos que el espacio-tiempo no tiene frontera por lo tanto los términos de borde se anularán. Por otro lado

$$\delta S_M = \int -\frac{\sqrt{-g}}{2} T_{ab} \delta g^{ab} d^4x, \quad (20)$$

con

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}_M(g^{ab}, \phi) \sqrt{-g})}{\delta g^{ab}}. \quad (21)$$

Sustituyendo (21) en (20) obtenemos

$$\delta S_M[g^{ab}, \lambda, \phi] = \int \frac{1}{2\kappa} \left\{ R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} - \frac{1}{2} \lambda g_{ab} - \kappa T_{ab} \right\} \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^4x + \int \frac{1}{2\kappa} (\sqrt{-g} - \tilde{f}) \delta \lambda d^4x.$$

Después imponemos $\delta S = 0$ obtenemos

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} - \frac{1}{2} \lambda g_{ab} = \kappa T_{ab}, \quad (22)$$

$$\sqrt{-g} = \tilde{f}, \quad (23)$$

tomando la traza de (22) obtenemos

$$\lambda = -\frac{1}{2}(\kappa T + R),$$

donde $T := g^{ab} T_{ab}$. Podemos reescribir las ecuaciones como

$$R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab} = \kappa \left(T_{ab} - \frac{1}{4} T g_{ab} \right), \quad (24)$$

$$\sqrt{-g} = \tilde{f}, \quad (25)$$

son las ecuaciones de campo en GU. Note que (24) es una ecuación sin traza por lo que en términos de componente son nueve ecuaciones, mientras que la ecuación (25) es una ecuación de restricción, entonces esta familia de modelos el elemento de volumen es fijo. En este trabajo consideramos que solamente los objetos dinámicos transforman bajo difeomorfismos. Ya que \tilde{f} es no dinámico, no transforma bajo difeomorfismos. Como consecuencia de este hecho, la acción (18), no será invariante bajo todos los difeomorfismos, como en GR. En vez de ello, sólo será invariante bajo un sub conjunto de ellos. Para notar este último hecho, primero consideremos un espaciotiempo en vacío; es decir, S_M no aparece en la ecuación (18). Así, la acción está dada por

$$S[g_{ab}, \lambda] = \int \left(R \sqrt{-g} + \lambda (\sqrt{-g} - \tilde{f}) \right) d^4x. \quad (26)$$

Luego consideramos la variación de $S[g^{ab}, \lambda]$ bajo difeomorfismo, entonces

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(\delta R_{ab} g^{ab} \sqrt{-g} + R_{ab} \sqrt{-g} \delta g^{ab} + \delta(\sqrt{-g} - \tilde{f}) + \lambda \delta \sqrt{-g} \right) d^4x, \\ &= \int \left(\left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} - \frac{1}{2} \lambda g_{ab} \right) \delta g^{ab} \sqrt{-g} + \delta \lambda (\sqrt{-g} - \tilde{f}) \right) d^4x + \int \partial_c \left(g^{ab} \delta C_{ba}^c - g^{ac} \delta C_{ba}^b \right) d^4x, \end{aligned}$$

donde usamos de nuevo (19) y que $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab}$. Así la segunda integral es un término de borde, ya que nuestro espacio-tiempo no tiene borde dicho término es cero.

Luego, reescribimos las variaciones como

$$\delta g^{ab} = \mathcal{L}_\xi g^{ab} = -2\nabla^{(a}\xi^{b)}, \quad (27a)$$

$$\delta\lambda = \mathcal{L}_\xi\lambda = \xi^a\nabla_a\lambda. \quad (27b)$$

Substituyendo las ecuaciones (27) obtenemos

$$\delta S = \int \left((R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} - \frac{1}{2}\lambda g_{ab})\sqrt{-g}(-2\nabla^{(a}\xi^{b)}) + \xi^a\nabla_a\lambda(\sqrt{-g} - \tilde{f}) \right) d^4x. \quad (28)$$

$$= \int \left(-2G_{ab}\nabla^a\xi^b\sqrt{-g} + \lambda g_{ab}\nabla^a\xi^b\sqrt{-g} + \xi^a\nabla_a\lambda\sqrt{-g} - \xi^a\nabla_a\lambda\tilde{f} \right) d^4x, \quad (29)$$

donde usamos que G_{ab} y g_{ab} son tensores simétricos. Además debemos notar que

$$-2G_{ab}\nabla^a\xi^b\sqrt{-g} = -\nabla^a(2G_{ab}\xi^b)\sqrt{-g} + \cancel{\nabla^a G_{ab}\xi^b\sqrt{-g}} = -\nabla^a(2G_{ab}\xi^b)\sqrt{-g}.$$

También

$$\lambda g_{ab}\nabla^a\xi^b\sqrt{-g} + \xi^a\nabla_a\lambda = \lambda\nabla_a\xi^a\sqrt{-g} + \xi^a\nabla_a\lambda\sqrt{-g} = \nabla_a(\lambda\xi^a)\sqrt{-g},$$

De lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int -\xi^a\nabla_a\lambda\tilde{f}d^4x, \\ &= \int \cancel{-\nabla_a\left(\lambda\frac{\tilde{f}}{\sqrt{-g}}\xi^a\right)\sqrt{-g}d^4x} + \int \lambda\nabla_a\left(\frac{\tilde{f}}{\sqrt{-g}}\xi^a\right)\sqrt{-g}d^4x, \\ &= \int \lambda\nabla_a\left(\frac{\tilde{f}}{\sqrt{-g}}\xi^a\right)\sqrt{-g}d^4x, \end{aligned}$$

el primer término se anula por ser un término de borde. Luego, on-shell obtenemos

$$\delta S = \int \lambda\nabla_a\xi^a\sqrt{-g}d^4x.$$

Es decir, que $\delta S = 0$ si y sólo si $\nabla_a\xi^a = 0$, la acción S (18) sólo es invariante bajo difeomorfismos a lo largo de vectores con divergencia igual a cero.

Para obtener una ley de conservación de GU, debemos considerar que la acción de GU en vacío sólo es invariante bajo difeomorfismos con divergencia igual a cero; entonces S_M debe ser invariante sólo bajo este tipo de difeomorfismos. Entonces para tales variaciones

$$0 = \delta S_M = \int \frac{\delta(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\delta g^{ab}}\delta g^{ab}d^4x + \int \frac{\delta(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\delta\phi}\delta\phi d^4x.$$

Luego, suponemos que ϕ satisface las ecuaciones de campo para la materia. Por lo tanto $\delta(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})/\delta\phi = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{\delta(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\delta g^{ab}}\delta g^{ab}d^4x, \\ &= \int -\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{ab}\delta g^{ab}d^4x, \end{aligned}$$

donde usamos el tensor de energía-momento canónico (21). Luego usando la expresión (27), podemos expresarlo en términos del campo vectorial sin divergencia

$$0 = \int \sqrt{-g}T_{ab}\nabla^a\xi^b d^4x. \quad (30)$$

Para poder obtener una ley de conservación de (30), el campo debe ser completamente arbitrario; y dado que elegimos campos sin divergencia, ξ^a en (30) no lo es. Sin embargo, podemos expresar ξ^a en términos de un campo completamente arbitrario a través de

$$\xi^a = \epsilon^{abcd} \nabla_b \alpha_{cd} . \quad (31)$$

Donde ϵ^{abcd} es el símbolo de Levi-Civita y α_{cd} es un tensor antisimétrico genérico. Veamos que el campo ξ^a tiene divergencia igual a cero ya que

$$\begin{aligned} \nabla_a \xi^a &= \nabla_a (\epsilon^{abcd} \nabla_b \alpha_{cd}) , \\ &= \epsilon^{abcd} \nabla_a \nabla_b \alpha_{cd} , \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \alpha_{cd} , \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} (R_{abc}{}^e \alpha_{ed} + R_{abd}{}^e \alpha_{ce}) , \\ &= \epsilon^{abcd} R_{[abc]}{}^e \alpha_{ed} , \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Luego con ayuda de (31) reescribimos

$$\begin{aligned} 0 &= \int \sqrt{-g} T_{ab} \nabla^a (\epsilon^{bcde} \nabla_c \alpha_{de}) d^4x , \\ &= \int \nabla^a (T_{ab} \epsilon^{bcde} \nabla_c \alpha_{de}) \sqrt{-g} d^4x - \int \nabla^a T_{ab} \epsilon^{bcde} \nabla_c \alpha_{de} \sqrt{-g} d^4x , \\ &= - \int \nabla_c (\nabla^a T_{ab} \epsilon^{bcde} \alpha_{de}) \sqrt{-g} d^4x + \int \nabla_c (\nabla^a T_{ab} \epsilon^{bcde}) \alpha_{de} \sqrt{-g} d^4x , \\ &= \int \epsilon^{abcd} \nabla_d \nabla^e T_{ec} \alpha_{ab} \sqrt{-g} d^4x , \end{aligned} \quad (32)$$

donde en múltiples ocasiones se usó que los términos de borde son cero. Dado que α_{ab} es un tensor arbitrario, tenemos

$$\epsilon^{abcd} \nabla_d \nabla^e T_{ec} = 0 . \quad (33)$$

la ecuación (33) es precisamente la ley de conservación de GU, la cual puede interpretarse como el rotacional de la divergencia de T_{ab} es cero. Claramente, la ley de conservación de GR, $\nabla^a T_{ab} = 0$ es un caso particular de la ecuación (33) puesto que la materia tiene mayor “libertad” en GU. En este sentido, decimos que es una teoría más grande que GR. Queda claro que dada la ecuación en general, a pesar de que la constricción siempre puede resolverse, GU no es equivalente a GR.

Una manera natural de estudiar la no conservación del tensor de energía-momento, es definir la corriente

$$J_a \equiv \nabla^b T_{ba} , \quad (34)$$

en el caso de GR $J_a = 0$, y para $J_a \neq 0$ estudiaremos teorías que violan la conservación de energía. Ya vimos que insertando la solución general $\xi^a = \epsilon^{abcd} \nabla_b \alpha_{cd}$ para una 2-forma α_{cd} arbitraria. Deducimos que el requisito de que la acción es invariante bajo difeomorfismos que conservan el volumen ($\delta S_m = 0$) implica en el lenguaje de formas diferenciales [19] $dJ = 0$. Para espaciotiempos simplemente conexos, esta condición se reduce a que existe un campo escalar Φ tal que

$$J = d\Phi , \quad (35)$$

con d , derivada exterior y por lo tanto

$$dJ = d^2 \Phi = 0 , \quad (36)$$

Entonces, si la acción de la materia es solo invariante bajo difeomorfismos que conservan el volumen, entonces J introducirá desviaciones de la GR. Explícitamente en el lenguaje de formas diferenciales para un campo escalar $\Phi = \Phi(t, r, \theta, \phi)$ la expresión (35) es

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} d\phi, \\ &= J_t dt + J_r dr + J_\theta d\theta + J_\phi d\phi, \end{aligned}$$

es decir

$$J_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}. \quad (37)$$

Y la expresión (36) explícitamente es

$$\begin{aligned} dJ &= \left(\frac{\partial J_r}{\partial t} - \frac{\partial J_t}{\partial r} \right) dt \wedge dr + \left(\frac{\partial J_\theta}{\partial t} - \frac{\partial J_t}{\partial \theta} \right) dt \wedge d\theta + \left(\frac{\partial J_\phi}{\partial t} - \frac{\partial J_t}{\partial \phi} \right) dt \wedge d\phi \\ &\quad + \left(\frac{\partial J_\theta}{\partial r} - \frac{\partial J_r}{\partial \theta} \right) dr \wedge d\theta + \left(\frac{\partial J_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial J_\theta}{\partial \phi} \right) d\theta \wedge d\phi + \left(\frac{\partial J_r}{\partial \phi} - \frac{\partial J_\phi}{\partial r} \right) d\phi \wedge dr, \\ dJ &= 0, \end{aligned}$$

en el último paso se usó (37) y que las parciales conmutan. Con $dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu$, $x^\mu = r, \theta, \phi$ y \otimes producto tensorial. Observamos que la corriente que definimos en (34), con la que estudiaremos violaciones a la conservación de energía, debe cumplir el requisito (37), es decir, es el gradiente de un potencial Φ , en ese sentido, decimos que las violaciones de la conservación de energía y momento están permitidas en GU siempre que sean integrables resolviendo (37). A Φ (37) le llamaremos potencial de GU.

2.3. Solución en simetría esférica y en vacío a las ecuaciones de Gravedad Unimodular

En este trabajo posteriormente estudiaremos partículas de prueba en presencia de un campo gravitacional en la región exterior de un cuerpo muy masivo como el Sol. En vista de esto, usaremos coordenadas (t, r, θ, ϕ) tipo Schwarzschild [20], y analizaremos el resultado demostrado en [21] en este, se resuelve las ecuaciones de GU (24) en simetría esférica y en vacío ($T_{ab} = 0$)

$$R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab} = 0, \quad (38)$$

partiendo del elemento de línea en simetría esférica más general

$$ds^2 = -A(T, r) dT^2 + 2B(T, r) dT dr + C(T, r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

donde A, B, C, son funciones de tipo C^2 arbitrarias. Considerando una transformación de coordenadas de la forma $T \rightarrow +\tilde{h}(T, r)$ con \tilde{h} una función C^2 que nos ayude a prescindir del término $dT dr$, después se puede simplificar a

$$ds^2 = -e^{m(T, r)} dT^2 + e^{n(T, r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (39)$$

con ν y λ se relacionan con A, B, C y h a través de una ecuación diferencial. Luego, empleando la métrica (39), podemos resolver las ecuaciones de GU en vacío (38), obtenemos los siguientes resultados

$$\frac{\dot{n}}{r} = 0, \quad (40)$$

$$m' = -n', \quad (41)$$

donde la prima sobre las funciones denota derivada con respecto a r y el punto derivada con respecto a t . Resolviendo (40)

$$n = n(r), \quad (42)$$

usando este último resultado para resolver (41)

$$m(T, r) = \alpha(T) - n(r), \quad (43)$$

si se usan (42), (43) para simplificar las ecuaciones de GU en vacío (38) en vacío.

$$n'' - n'^2 - 2\frac{e^n - 1}{r^2} = 0 ,$$

cuya solución es

$$n(r) = -\ln\left(kr^2 + \frac{c}{r} + 1\right) , \quad (44)$$

con c y k constantes. Entonces usando (42), (43), (44) para reescribir el elemento de línea (39) obtenemos

$$ds^2 = -e^{\alpha(T)} \left(1 - \frac{2M}{r} + \Lambda r^2\right) dT^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) ,$$

considerando un cambio de coordenadas, $t = t(T)$, de la forma $t(T) = \int \exp(\alpha(T)/2) dt + cte$, podemos a su vez reescribir lo anterior como:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (45)$$

$$f(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \Lambda r^2\right) , \quad (46)$$

$$h(r) = \frac{1}{f(r)} . \quad (47)$$

Este último resultado significa que cualquier solución esféricamente simétrica y en vacío a las ecuaciones de GU (38) es un espacio-tiempo estático. Además, de (45) obtenemos las siguientes soluciones a las ecuaciones de GU en simetría esférica y en vacío;

1. Métrica de Schwarzschild-De Sitter con $M = 0$, $\Lambda > 0$.
2. Schwarzschild-Anti-de Sitter con $M = 0$, $\Lambda < 0$.
3. Schwarzschild con $M \neq 0$, $\Lambda = 0$.

Esto debido a que las ecuaciones generales de GU (24) son equivalentes a las ecuaciones de GR [21] con constante cosmológica siendo ahora una constante de integración (22), obtenemos entonces el resultado consistente.

En general no se conoce la trayectoria de una partícula de prueba y puntual en GU. En este trabajo deduciremos dicha trayectoria con el método del próximo capítulo.

3. MÉTODO DE PAPAPETROU

3.1. Descripción del método

Resolver las ecuaciones generales de movimiento en GR es un problema sumamente complicado, debido a que, debemos determinar la trayectoria y simultáneamente determinar el efecto gravitacional que este cuerpo genera [22]. Una primera aproximación es suponer que una de las partículas es muy pequeña a comparación del resto, de modo que su efecto gravitacional puede ser despreciado. A este tipo de partículas les llamaremos partículas de prueba y el objetivo será encontrar su ecuación de movimiento en presencia de un campo gravitacional (generado por el resto de los cuerpos) y violación a la conservación de la energía y momento.

3.2. Caso de Gravedad Unimodular: Tensor de Energía-Momento no conservado

Para resolver las ecuaciones de movimiento, con no conservación del tensor de energía momento, al igual que en GR, una primera aproximación es considerar *partículas de prueba* cuyo efecto gravitacional es despreciable a comparación del resto.

El método de Papapetrou [22] consiste en suponer que la partícula de prueba es pequeña y está descrita por un tensor de energía momento $T^{\alpha\beta}$ cuyo soporte espacial es mucho menor que el radio característico del campo gravitacional y la curvatura que genera puede ser despreciada respecto al espacio-tiempo de fondo. Al evolucionar la partícula formará un “tubo de mundo”, en el espacio 4-dimensional. Dentro del tubo de mundo se escoge una curva tipo temporal arbitraria, con coordenadas X^μ , que representará a la partícula. Para obtener resultados sin ambigüedad se hará la aproximación de partícula puntual. Este consiste en suponer que el tensor de energía-momento de la partícula será distinto de cero sólomente en una bola de radio R , centrada en X^μ y cuando tomamos el límite $R \rightarrow 0$ se obtendrá la aproximación deseada, ver Figura 1.

Después se realizará una aproximación multipolar, que considera la estructura interna de la partícula. Por simplicidad se considera la expansión a orden cero, es decir el caso monopolar, que corresponde a una partícula puntual, sin momento angular intrínseco.

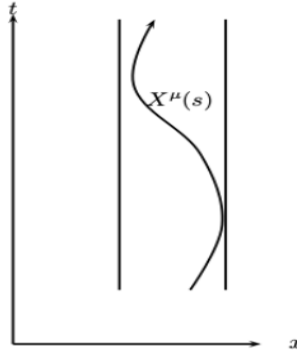


Figura 1: Diagrama de espacio-tiempo del método de Papapetrou: una partícula forma un “tubo de mundo”, en el espacio 4-dimensional, dentro del tubo de mundo se escoge una curva tipo temporal arbitraria, con coordenadas X^μ , que representa a la partícula.

Podemos escribir las hipótesis anteriormente mencionadas, de la siguiente manera

1. Se conoce la métrica de fondo g_{ab} .
2. Se tiene la no conservación $\nabla_a \tau^{ab} = \tilde{j}^b$, con la densidad $\tilde{j}^b = \sqrt{-g} \nabla_a T^{ab}$, $\tau^{ab} = \sqrt{-g} T^{ab}$ y T^{ab} es el tensor de energía momento de la partícula.
3. Escogemos coordenadas x^μ , tales que $x^0 = t$ es la coordenada temporal. Además si $X^\alpha = X^\alpha(t)$, denota la posición de la partícula, entonces $\tau^{\mu\nu}$ será diferente de cero solo en una bola de radio R centrada en X^α y al tomar el límite $R \rightarrow 0$ se obtendrá la aproximación deseada.
4. Si se define $\delta x^\alpha = x^\alpha - X^\alpha$ y se consideran integrales tridimensionales (en hipersuperficies Σ_t de coordenadas de t constante), entonces, $\int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha\beta} \neq 0$, $\int_{\Sigma_t} \delta x^\mu \tau^{\alpha\beta} = \int_{\Sigma_t} \delta x^\mu \delta x^\nu \tau^{\alpha\beta} = 0$, siempre que aparezca un factor δx^α o más.

De la hipótesis 2, se derivan las ecuaciones de movimiento de una partícula monopolar. La ecuación dinámica se escribe en la forma

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} &= \nabla_\alpha (\sqrt{-g} T^{\alpha\beta}), \\
&= \nabla_\alpha (\sqrt{-g}) T^{\alpha\beta} + \sqrt{-g} \nabla_\alpha T^{\alpha\beta}, \\
&= \partial_\alpha (\sqrt{-g}) T^{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\mu}^\mu \sqrt{-g} T^{\alpha\beta} + \sqrt{-g} \nabla_\alpha T^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{48}$$

Al usar $\Gamma_{\alpha\mu}^\mu = \partial_\alpha \ln \sqrt{-g}$ en (48), obtenemos $\tilde{j}^\beta = \sqrt{-g} \nabla_\alpha T^{\alpha\beta}$, por otro lado al substituir

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial_\alpha T^{\alpha\beta} + T^{\nu\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha + T^{\alpha\nu} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta,$$

en (48) obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} &= \partial_\alpha (\sqrt{-g}) T^{\alpha\beta} - \cancel{\sqrt{-g} \Gamma_{\alpha\mu}^\mu T^{\alpha\beta}} + \sqrt{-g} \partial_\alpha T^{\alpha\beta} + \cancel{\sqrt{-g} \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha T^{\nu\beta}} + \sqrt{-g} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta T^{\alpha\nu}, \\
&= \partial_\alpha (\sqrt{-g} T^{\alpha\beta}) + \sqrt{-g} T^{\alpha\nu} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta, \\
\tilde{j}^\beta &= \partial_\alpha \tau^{\alpha\beta} + \tau^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\beta.
\end{aligned} \tag{49}$$

La ecuación de no conservación puede ser escrita como

$$x^{(\alpha} \partial_\gamma \tau^{\nu)\gamma} + x^{(\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\nu)} \tau^{\mu\beta} = x^{(\alpha} \tilde{j}^{\nu)},$$

donde simetrizamos lo anterior y luego sumando a ambos lados la densidad tensorial simétrica $\tau^{(\alpha\nu)} = \tau^{\alpha\nu}$

$$\tau^{(\alpha\nu)} + x^{(\alpha} \partial_\gamma \tau^{\nu)\gamma} + x^{(\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\nu)} \tau^{\mu\beta} = x^{(\alpha} \tilde{j}^{\nu)} + \tau^{(\alpha\nu)},$$

introduciendo una delta de Kronecker se obtiene

$$\frac{\partial x^{(\alpha}}{\partial x^\gamma} \tau^{\nu)\gamma} + x^{(\alpha} \partial_\gamma \tau^{\nu)\gamma} = x^{(\alpha} \tilde{j}^{\nu)} + \tau^{(\alpha\nu)} - x^{(\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\nu)} \tau^{\mu\beta},$$

simplificando

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} (x^{(\alpha} \tau^{\nu)\gamma}) = x^{(\alpha} \tilde{j}^{\nu)} + \tau^{\alpha\nu} - x^{(\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\nu)} \tau^{\mu\beta}, \tag{50}$$

Integrando la expresión (49), con dv el elemento de volumen de coordenadas 3-dimensional de Σ_t

$$\int_{\Sigma_t} \frac{\partial \tau^{\beta\alpha}}{\partial x^\alpha} dv = - \int_{\Sigma_t} \Gamma_{\mu\nu}^\beta \tau^{\mu\nu} dv + \int_{\Sigma_t} \tilde{j}^\beta dv,$$

al desarrollar la integral del lado izquierdo se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_t} \frac{\partial \tau^{\beta\alpha}}{\partial x^\alpha} dv &= \int_{\Sigma_t} \frac{\partial \tau^{\beta 0}}{\partial t} dv + \int_{\Sigma_t} \frac{\partial \tau^{\beta i}}{\partial x^i} dv, \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta 0} dv + \int_{\partial \Sigma_t} n_i \tau^{\beta i} dv.
\end{aligned}$$

En el paso anterior se usa el teorema de la divergencia, y entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta 0} dv = - \int_{\Sigma_t} \Gamma_{\mu\nu}^\beta \tau^{\mu\nu} dv + \int_{\Sigma_t} \tilde{j}^\beta dv, \tag{51}$$

integrando la expresión (50)

$$\int_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (x^{(\alpha} \tau^{\nu)\gamma}) dv = \int_{\Sigma_t} x^{(\alpha} \tilde{j}^{\nu)} dv + \int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha\nu} dv - \int_{\Sigma_t} x^{(\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\nu)} \tau^{\mu\beta} dv,$$

desarrollando la integral del lado izquierdo se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (x^{(\alpha} \tau^{\nu)\gamma}) dv &= \int_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial t} (x^{(\alpha} \tau^{\nu)0}) dv + \int_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial x^i} (x^{(\alpha} \tau^{\nu)i}) dv, \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} x^{(\alpha} \tau^{\nu)0} + \int_{\partial\Sigma_t} \tau^{\nu\alpha} dv + \int_{\partial\Sigma_t} x^{(\alpha} n_i \tau^{\nu)i} dv, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} x^{(\alpha} \tau^{\nu)0} = \int_{\Sigma_t} x^{(\alpha} \tilde{j}^{\nu)} dv + \int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha\nu} dv - \int_{\Sigma_t} x^{(\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\nu)} \tau^{\mu\beta} dv. \quad (52)$$

Las expresiones anteriores se expanden como $x^\alpha = X^\alpha + \delta x^\alpha$, a orden 0 en δx^α .

Por el momento las ecuaciones obtenidas son válidas, a cualquier orden de expansión multipolar. La aproximación que toma en cuenta la estructura interna viene del desarrollo

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = {}_0\Gamma_{\mu\nu}^\beta + {}_0\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\beta}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha + \dots, \quad (53)$$

el subíndice 0 significa que está evaluando en X^α . Substituyendo esta serie de potencias en (51) y usando la aproximación de orden 0 de δx^α

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta 0} dv = -{}_0\Gamma_{\mu\nu}^\beta \int_{\Sigma_t} \tau^{\mu\nu} dv + \int_{\Sigma_t} \tilde{j}^\beta dv. \quad (54)$$

sustituyendo de nuevo (53) en la expresión (52), y usando de nuevo la aproximación monopolar en los símbolos de Christoffel

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} x^{(\alpha} \tau^{\nu)0} = \int_{\Sigma_t} x^{(\alpha} \tilde{j}^{\nu)} dv + \int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha\nu} dv - {}_0\Gamma_{\mu\beta}^{(\nu} \int_{\Sigma_t} x^{\alpha)} \tau^{\mu\beta} dv, \quad (55)$$

simplificando la notación ${}_0\Gamma_{\mu\beta}^{\nu)} = \Gamma_{\mu\beta}^{\nu)}$. También evaluamos en $x^\alpha = X^\alpha(t) + \delta x^\alpha$ y usamos el hecho que despreciamos las expresiones con factores δx^α como $\int_{\Sigma_t} \delta x^\mu \tau^{\alpha\beta} = 0$. Así,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} X^{(\alpha} \tau^{\nu)0} = \int_{\Sigma_t} X^{(\alpha} \tilde{j}^{\nu)} dv + \int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha\nu} dv - \Gamma_{\mu\beta}^{(\nu} \int_{\Sigma_t} X^{\alpha)} \tau^{\mu\beta} dv,$$

usamos la regla de Liebniz

$$\frac{dX^{(\alpha}}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\nu)0} + X^{(\alpha} \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\nu)0}}_{(54)} = X^{(\alpha} \int_{\Sigma_t} \tilde{j}^{\nu)} dv + \int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha\nu} dv - X^{(\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\nu)} \int_{\Sigma_t} \tau^{\mu\beta} dv,$$

en el segunda expresión usamos (54)

$$\frac{dX^{(\alpha}}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\nu)0} - \underbrace{X^{(\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\nu)} \int_{\Sigma_t} \tau^{\mu\beta} dv}_{(54)} + \underbrace{X^{(\alpha} \int_{\Sigma_t} \tilde{j}^{\nu)} dv}_{(54)} = \underbrace{X^{(\alpha} \int_{\Sigma_t} \tilde{j}^{\nu)} dv}_{(54)} + \int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha\nu} dv - \underbrace{X^{(\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\nu)} \int_{\Sigma_t} \tau^{\mu\beta} dv}_{(54)},$$

y restamos los términos subrayados a ambos lados de la igualdad se sigue la cantidad

$$\int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha\nu} dv = \frac{dX^{(\alpha}}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\nu)0}. \quad (56)$$

definiendo el vector tangente $u^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\lambda}$, con λ el parámetro afín a lo largo de X^α , $u^0 = \frac{dt}{d\lambda}$ y

$$M^{\alpha\nu} = \int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha\nu} dv, \quad (57)$$

reescribimos el lado derecho de (56), usando (57), como

$$\frac{dX^\alpha}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\nu 0} dv = \frac{dX^\alpha}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\nu 0} dv ,$$

la expresión (56) toma la forma

$$M^{\alpha\nu} = u^{(\alpha} M^{\nu)0} , \quad (58)$$

con $\nu = 0$ es

$$M^{\alpha 0} = \frac{u^\alpha M^{00} + u^0 M^{\alpha 0}}{2} ,$$

despejando la componente $\alpha 0$

$$M^{\alpha 0} = \frac{u^\alpha}{2 - u^0} M^{00} , \quad (59)$$

donde $u^0 = dt/d\lambda \in (0, 1]$. Usando (59) en (58) obtenemos

$$\begin{aligned} M^{\alpha\nu} &= m u^\alpha u^\nu , \\ m &= \frac{M^{00}}{2 - u^0} , \end{aligned} \quad (60)$$

Luego usamos la relación (57) en la expresión (54)

$$\frac{d}{dt}(M^{\alpha 0}) + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha (M^{\mu\nu}) = \int_{\Sigma_t} \tilde{j}^\alpha dv ,$$

usando (60) en lo anterior

$$\frac{d}{dt}(m u^0 u^\alpha) + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha m u^\mu u^\nu = \int_{\Sigma_t} \tilde{j}^\alpha dv ,$$

desarrollando y dividiendo entre m

$$\frac{u^\alpha}{m} \frac{d}{dt} (m u^0) + u^0 \frac{d u^\alpha}{dt} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta u^\mu u^\nu = \frac{1}{m} \int_{\Sigma_t} \tilde{j}^\alpha dv , \quad (61)$$

dado que $u^0 = dt/d\lambda$ podemos reescribir lo anterior como

$$\frac{u^\alpha}{m u^0} \frac{d}{d\lambda} (m u^0) + u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = J^\alpha , \quad (62)$$

donde usamos que $u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = \frac{d u^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta u^\mu u^\nu$ y $J^\alpha = (1/m) \int \tilde{j}^\alpha dv$. Multiplicando lo anterior por u_α

$$-\frac{1}{m u^0} \frac{d}{d\lambda} (m u^0) = J^\alpha u_\alpha ,$$

donde se usa el hecho de que $u^\alpha u_\alpha = -1$ por lo tanto $u_\alpha (u^\mu \nabla_\mu u^\alpha) = 0$. Luego sustituyendo u^0

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m} \frac{d\lambda}{dt} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dt}{d\lambda} m \right) &= J^\alpha u_\alpha , \\ -\frac{1}{m} \frac{dm}{d\lambda} &= J^\alpha u_\alpha , \end{aligned} \quad (63)$$

sustituyendo (63) en (62) obtenemos

$$\begin{aligned} u^\beta \nabla_\beta u^\alpha &= J_\perp^\alpha , \\ J_\perp^\alpha &= J^\beta (\delta_\beta^\alpha + u^\alpha u_\beta) , \end{aligned} \quad (64)$$

con J_{\perp}^{α} las componentes de la proyección de J^{α} ortogonal a u^{α} . Este último resultado será usado posteriormente y es un tipo de ecuación para partículas puntuales y de prueba sin conservación de energía.

Sin embargo es importante observar que en cualquier expresión de la forma

$$u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\nu} = J_{\perp}^{\nu}(t, r, \theta, \phi), \quad (65)$$

donde el lado derecho de (65) es una corriente arbitraria, automáticamente J_{\perp}^{ν} será ortogonal a u^{ν} , ya que del simple requisito cinemático $u^{\mu}\nabla_{\mu}(u_{\nu}u^{\nu}) = 0$ [18] se sigue

$$\begin{aligned} u_{\nu}(u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\nu}) &= 0, \\ u_{\nu}J_{\perp}^{\nu} &= 0. \end{aligned}$$

Posteriormente estos resultados se utilizarán como un paso intermedio del procedimiento de aproximación a la no conservación del tensor de energía-momento. Por ejemplo, sí consideremos un pequeño planeta giratorio que se mueve alrededor del Sol. En la primera aproximación, se tratará como una partícula monopolar. En el siguiente paso se tiene en cuenta el espín (su momento angular respecto al centro de masa), que trata al planeta como una partícula polo-dipolo; [22]. También hay términos multipolares superiores que se pueden considerar de manera similar. La justificación de este procedimiento radica en el hecho de que la importancia de los multipolos superiores disminuye rápidamente cuando la partícula es muy pequeña; esto es así porque los términos adicionales correspondientes a un multipolo de orden n contendrán el factor $(R/r)^n$, con r la coordenada radial, y R el radio de la bola.

En este trabajo estudiaremos partículas de prueba en presencia de un campo gravitacional debido al Sol. En virtud de esto, usaremos coordenadas tipo Schwarzschild. Como ya vimos, cualquier solución a las ecuaciones de GU en simetría esférica y en vacío debe ser un espacio-tiempo estático. Por lo tanto, buscamos la corriente más general $J_{\perp}^{\alpha}(t, r, \theta, \phi)$ compatible con todas las simetrías de un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico, con 4 vectores de Killing $\xi = T, \ell_x, \ell_y, \ell_z$, tal que $\mathcal{L}_{\xi}J_{\perp} = 0$, dicha corriente se deduce en el apéndice A y está dada por

$$J_{\perp}^a = J^t(r) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + J^r(r) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a. \quad (66)$$

4. ECUACIONES DE PARTÍCULAS DE PRUEBA Y PUNTUALES CON PÉRDIDA DE ENERGÍA

En este capítulo se consideran el caso de partícula puntual (que corresponde a una partícula monopolar, sin momento angular intrínseco) y de prueba (cuyo efecto gravitacional es despreciable a comparación del resto de cuerpos), con pérdidas de energía debidas a la no conservación del tensor de energía-momento deducida en la expresión (64). Posteriormente, usaremos la cantidad conservada asociada al momento angular ℓ , la norma de la cuadrivelocidad y una serie de pasos algebraicos para encontrar una ecuación en términos de la energía cinética y un potencial efectivo. De la expresión (64)

$$\frac{du^a}{d\lambda} + \Gamma_{cd}^a u^c u^d = J_{\perp}^a(r), \quad (67)$$

donde recordemos que u^a es perpendicular a la corriente J_{\perp}^a .

$$J_{\perp}^a(r)u_a = 0. \quad (68)$$

El objetivo es desacoplar las ecuaciones de partículas puntuales con pérdidas de energía, para un espacio-tiempo esféricamente simétrico y estático cuya métrica sea (45)

$$\ddot{t} + \frac{f'(r)}{f(r)} \dot{r}\dot{t} = J^t(r), \quad (69)$$

$$\ddot{r} + \frac{f'(r)}{2h(r)} \dot{t}^2 + \frac{h'(r)}{2h(r)} \dot{r}^2 - \frac{r}{h(r)} \dot{\theta}^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{h(r)} \dot{\phi}^2 = J^r(r), \quad (70)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (71)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\phi} + 2 \cot \theta \dot{\theta}\dot{\phi} = 0. \quad (72)$$

Para esto recordemos que para un campo de Killing k^a el cambio respecto al parámetro afín λ de la cantidad $u_a k^a$ es

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (u_a k^a) &= u^b \nabla_b (u_a k^a) , \\ &= (u^b \nabla_b u_a) k^a + \cancel{u_a u^b \nabla_b k^a} \rightarrow 0 , \\ &= J_a k^a , \end{aligned}$$

donde el segundo término es cero por la ecuación de Killing, y en el primero se usa (64).

De la expresión anterior se sigue que la cantidad $\ell = \ell_z = u_a (\partial_\phi)^a$ es conservada, debido a que $j^\phi = 0$. Por lo tanto escribimos

$$\ell = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} .$$

Por otro lado, como la métrica tiene simetría esférica escogemos el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$. Se tiene entonces que

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{r^2} . \quad (73)$$

Resulta que podemos hacer un análisis de *potencial efectivo* pues la tangente a la curva tiene norma constante, es decir

$$\begin{aligned} u^a \nabla_a (u^b u_b) &= 2u_b u^a \nabla_a u^b , \\ &= 2u_b J_\perp^b , \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Por lo tanto usamos la norma de la cuadrivelocidad

$$g_{ab} u^a u^b = -\kappa ,$$

donde $\kappa = 1$ con geodésicas tipo tiempo, $\kappa = 0$ tipo nulo. Se tiene

$$-f(r)\dot{t}^2 + h(r)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\left(\frac{\ell}{r^2}\right)^2 = -\kappa , \quad (74)$$

usando la cantidad conservada (73) obtenemos

$$\dot{t} = \frac{1}{f(r)^{1/2}} \left[\kappa + h(r)\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right]^{1/2} . \quad (75)$$

Derivando la expresión (74) respecto al parámetro afín

$$-f'(r)\dot{r}\dot{t}^2 - f(r)2\dot{t}\ddot{t} + h'(r)\dot{r}\dot{r}^2 + h(r)2\dot{r}\ddot{r} - \frac{2\ell^2}{r^3}\dot{r} = 0 , \quad (76)$$

despejamos \ddot{t}

$$\ddot{t} = -\frac{f'(r)}{2f(r)}\dot{r}\dot{t} + \frac{h'(r)}{2f(r)}\frac{\dot{r}^3}{\dot{t}} + \frac{h(r)}{f(r)}\frac{\dot{r}\ddot{r}}{\dot{t}} - \frac{\ell^2}{r^3 f(r)}\frac{\dot{r}}{\dot{t}} , \quad (77)$$

sustituyendo la expresión de \ddot{t} (77) en la ecuación de partículas de prueba y puntuales con pérdidas de energía para t (69) obtenemos

$$\frac{f'(r)}{2f(r)}\dot{r}\dot{t} + \frac{h'(r)}{2f(r)}\frac{\dot{r}^3}{\dot{t}} + \frac{h(r)}{f(r)}\frac{\dot{r}\ddot{r}}{\dot{t}} - \frac{\ell^2}{r^3 f(r)}\frac{\dot{r}}{\dot{t}} = J^t , \quad (78)$$

Ahora usaremos la expresión (68) que nos dice que J_\perp^a es ortogonal a la cuadrivelocidad u^a .

$$-f(r)J^t\dot{t} + h(r)J^r\dot{r} = 0 ,$$

y despejamos J^t

$$J^t = \frac{h(r)}{f(r)} \frac{\dot{r}}{\dot{t}} J^r . \quad (79)$$

Substituyendo (79) en (78) y simplificando

$$\frac{f'(r)}{2h(r)} \dot{t}^2 + \frac{h'(r)}{2h(r)} \dot{r}^2 + \ddot{r} - \frac{\ell^2}{h(r)r^3} = J^r .$$

Usamos (75) en esta última expresión

$$\ddot{r} + \frac{f'(r)}{2f(r)h(r)} \left(\kappa + h(r)\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) + \frac{h'(r)}{2h(r)} \dot{r}^2 - \frac{\ell^2}{h(r)r^3} = J^r , \quad (80)$$

por otro lado de la ecuación de partículas de prueba y puntuales con pérdida de energía para \ddot{r} (70) con $\theta = \frac{\pi}{2}$ y usando la cantidad conservada (73) se llega a

$$\ddot{r} + \frac{f'(r)}{2h(r)} \dot{t}^2 + \frac{h'(r)}{2h(r)} \dot{r}^2 - \frac{r}{h(r)} \left(\frac{\ell}{r^2} \right)^2 = J^r(r) ,$$

en la cual, substituyendo la cantidad (75), se recupera la expresión obtenida en (80).

Por lo tanto, tenemos sólomente una ecuación para r , la ecuación (80), que se puede reescribir como

$$\ddot{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{h'(r)}{h(r)} \right) \dot{r}^2 + \frac{f'(r)}{2h(r)f(r)} \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) - \frac{\ell^2}{h(r)r^3} = J^r(r) , \quad (81)$$

observamos que el segundo término del lado izquierdo de (81) corresponde a una fuerza de fricción, la cual no consideraremos en este trabajo, por lo tanto para resolver la ecuación (81) consideramos espacios-tiempo, esféricamente simétricos y estáticos, que cumplen una condición que siempre se cumple en GU [21], la cual es (47): $h(r) = 1/f(r)$, y por lo tanto se satisface

$$\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{h'(r)}{h(r)} = 0 .$$

Por otro lado, multiplicando (81) por $h(r)f(r)\dot{r}$ simplificamos y usando la identidad $\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2}f(r) \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) \right) = \frac{1}{2}f'(r) \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) - \frac{\ell^2}{r^3}f'(r)$ obtenemos

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{2}f(r)h(r)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}f(r) \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) \right] = -f(r)h(r)j^r(r)\dot{r} ,$$

De nuevo sí consideramos las hipótesis que siempre se satisfacen en GU (46): $h(r) = 1/f(r)$, y (37): $j^r(r) = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}$, con Φ el potencial del que se deriva j^μ

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}f(r) \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) \right] = -\frac{d\Phi(r(\lambda))}{d\lambda} ,$$

entonces

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}f(r) \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) + \frac{d\Phi(r(\lambda))}{d\lambda} \right] = 0 ,$$

obtenemos la expresión

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}f(r) \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) + \Phi(r) = E ,$$

con E una constante, que interpretamos como la cantidad conservada en GU, pero no proveniente de un campo de Killing temporal, como lo sería la energía en GR. Para coincidir con la notación estandar restamos $1/2$ a ambos lados

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}f(r) \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} + \Phi(r) = \mathcal{E} , \quad (82)$$

con

$$\mathcal{E} = E - \frac{1}{2}, \quad (83)$$

Entonces con $\kappa = 1$ podemos escribir una ecuación que se parece al de una partícula de masa $m = 1$, unidimensional de la forma

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{ef}(r) = \mathcal{E},$$

donde

$$\begin{aligned} V_{ef}(r) &= \frac{1}{2}f(r) \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2}, \\ &= -\frac{M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^3} + \Phi(r). \end{aligned} \quad (84)$$

Es importante notar que si tuviéramos un campo vectorial de Killing $T = (\partial/\partial t)^a$, tendríamos una cantidad conservada $e = f(r)\dot{t}$ y por lo tanto, recuperamos la cantidad estandar usada en libros [23]. Esta expresión (84) puede verse como una perturbación al potencial efectivo de GR. Posteriormente esto servirá para calcular posibles desviaciones al valor predicho en mediciones de experimentos como Deflexión de la luz, Retraso temporal de Shapiro y Precesión del Perihelio.

5. PARÁMETROS PPN

5.1. Aproximación Post-Newtoniana

En esta sección hablaremos del formalismo que se usará para acotar los parámetros de un potencial de GU. Usando las cotas experimentales de los parámetros post Newtonianos. La aproximación posnewtoniana se basa en la suposición de que los campos gravitatorios dentro y alrededor de los cuerpos son débiles y que los movimientos de la materia son lentos en comparación con la velocidad de la luz. Esto significa que uno puede caracterizar el sistema en cuestión por un pequeño parámetro ϵ , dado por

$$\epsilon \approx (v/c)^2 \approx GM/rc^2 \approx p/\rho c^2, \quad (85)$$

donde v , M y r denotan la velocidad característica, la masa, y tamaño del sistema respectivamente; p y ρ son la presión y densidad características dentro de los cuerpos; G y c son la constante gravitacional de Newton y la velocidad de la luz, respectivamente. Luego se incorpora esta aproximación a los métodos, para resolver las ecuaciones de campo de GR. Sin embargo, esta no es la forma más útil para los cálculos reales, para los cálculos posnewtonianos, una forma mucho más útil es la conjunto de las llamadas ecuaciones de Einstein relajadas:

$$\square h^{\alpha\beta} = -16\pi(G/c^4)\tau^{\alpha\beta},$$

Donde $\square \equiv -\partial^2/\partial(ct)^2 + \nabla^2$, es el operador de onda de espacio-tiempo plano, $h^{\alpha\beta}$ es un “potencial gravitacional”, dado por $h^{\alpha\beta} \equiv \eta^{\alpha\beta} - (g)^{1/2}g^{\alpha\beta}$, donde $g = \det(g_{\alpha\beta})$, y escogemos un sistema de coordenadas que cumple $\partial h_{\alpha\beta}/\partial x_\beta = 0$, $x_0 = ct$. Como asumimos que la gravedad es débil, el campo $h_{\alpha\beta}$ es “pequeño”.

La aproximación post-newtoniana ha sido eficaz como herramienta para interpretar pruebas experimentales. Esto se debe a que, podemos estudiar una gran variedad de teorías de gravitación, pues resulta que solo un conjunto de coeficientes numéricos en la expresión posnewtoniana para la métrica varían de una teoría a otra. De este modo uno puede abarcar una amplia gama de teorías alternativas, simplemente introduciendo parámetros arbitrarios en lugar de los coeficientes numéricos. Esta idea se remonta a Eddington en 1922, pero la parametrización post-newtoniana PPN fue completamente desarrollado por Nordtvedt y por Will en el período 1968–1972 [24, 25, 26]. El marco contiene diez parámetros: γ , relacionado con la cantidad de curvatura espacial generada por la masa; β , relacionado con el grado de no linealidad en el campo gravitacional; también existen ξ , α_1 , α_2 y α_3 que determinan si la teoría predice que los experimentos gravitacionales locales podrían producir resultados que dependen de la ubicación o la velocidad del marco de referencia; y finalmente ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 y ζ_4 , que describen si la teoría tiene leyes apropiadas de conservación del tensor de energía-momento. En GR, $\gamma = 1$, $\beta = 1$, y el resto de parámetros desaparecen. Para una exposición completa del marco PPN ver [27].

La teoría de GR es consistente con las pruebas experimentales en el sistema solar. PPN es la forma estándar en que las predicciones de diferentes teorías se parametrizan de manera sistemática [23]. Supongamos que tenemos otra teoría que predice que las partículas de prueba se mueven sobre geodésicas en ese espacio-tiempo. La geometría fuera del Sol sería esféricamente simétrica, pero diferiría de la métrica Schwarzschild. Las diferencias relevantes para pruebas se pueden resumir en algunos parámetros PPN. La métrica más general, estática y esféricamente simétrica se puede poner en la forma.

$$ds^2 = -f(r)(cdt)^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

se usa la parametrización

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2r} + 2(\beta - \gamma) \left(\frac{GM}{c^2r}\right)^2, \quad (86)$$

$$h(r) = 1 + 2\gamma \left(\frac{GM}{c^2r}\right). \quad (87)$$

Después usamos las cantidades conservadas

$$e = \dot{t}f(r),$$

$$\ell = r^2 \sin^2\theta \dot{\phi},$$

luego usamos el plano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\dot{t} = \frac{e}{f(r)}, \quad (88)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{r^2}. \quad (89)$$

Ahora con la cantidad.

$$-f(r)c^2\dot{t}^2 + h(r)\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = -\kappa ,$$

substituimos los valores $\dot{t}, \dot{\phi}$,

$$-\frac{e^2c^2}{f(r)} + h(r)\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} = -\kappa ,$$

entonces para trayectorias que usan partículas de prueba y puntuales de materia usamos

$$\dot{r}^2 = \frac{e^2}{c^2} \frac{1}{f(r)h(r)} - \frac{1}{h(r)} \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) , \quad (90)$$

por otro lado

$$\dot{r}^2 = \ell^2 \frac{1}{f(r)h(r)} \left[\frac{e^2c^2}{\ell^2} - \frac{f(r)}{\ell^2} \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) \right] . \quad (91)$$

Para trayectorias que usan luz escogemos $\kappa = 0$ y el parámetro de impacto $b = \ell/ec$, obtenemos

$$\dot{r} = \ell \frac{1}{(f(r)h(r))^{1/2}} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} f(r) \right]^{1/2} . \quad (92)$$

Usamos la parametrización PPN (86), (87), manteniendo hasta términos lineales en $\epsilon \approx GM/rc^2$

$$f(r)h(r) \approx 1 + 2\frac{GM}{c^2r}(\gamma - 1) , \quad (93)$$

Ahora realizaremos las integrales necesarias para la deflexión de la luz, retraso temporal de Shapiro y precesión del Perihelio.

5.2. Deflexión de la Luz en PPN

Para obtener el ángulo de deflexión de la luz usamos (89), (92)

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\lambda} &= \frac{\ell}{r^2} , \\ \frac{dr}{d\lambda} &= \ell \frac{1}{(f(r)h(r))^{1/2}} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} f(r) \right]^{1/2} . \end{aligned}$$

Encontramos de la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dr} &= \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr} , \\ &= \frac{d\phi}{d\lambda} \bigg/ \frac{dr}{d\lambda} , \\ &= \frac{1}{r^2} (f(r)h(r))^{1/2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} f(r) \right]^{-1/2} . \end{aligned}$$

El ángulo de deflexión es 2 veces el ángulo barrido de ∞ hasta r_1 por la simetría del problema como se ve en la Figura 2.

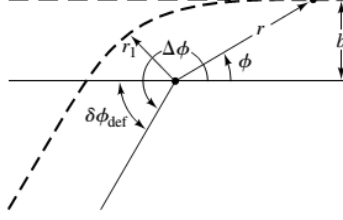


Figura 2: Deflexión de la luz debido a una estrella. El rayo de luz tiene un parámetro de impacto b , y se acerca hasta un radio de menor aproximación o punto de retorno r_1 . Figura obtenida de la referencia [23].

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} (f(r)h(r))^{1/2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} f(r) \right]^{-1/2}.$$

Ahora usamos (93), (86) para obtener

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left(1 + 2 \frac{GM}{c^2 r} (\gamma - 1) \right)^{1/2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} \right) \right]^{-1/2},$$

donde r_1 es la raíz menor de la ecuación cúbica $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} \right) = 0$. Entonces r_1 es el radio más cercano a la estrella en la trayectoria.

Introduciendo el cambio de variable $r = \frac{b}{w}$, $\frac{dr}{r^2} = -\frac{dw}{b}$, con $w_1 = \frac{b}{r_1}$ obtenemos

$$\Delta\phi = 2 \int_{w_1}^0 -\frac{dw}{b} \left(1 + 2 \frac{GM}{c^2 b} (\gamma - 1) w \right)^{1/2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{w^2}{b^2} \left(1 - 2 \frac{GM}{c^2 b} w \right) \right]^{-1/2},$$

factorizamos b , e invertimos el orden la integral

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{w_1} dw \left(1 + 2 \frac{GM}{c^2 b} (\gamma - 1) w \right)^{1/2} \left[1 - w^2 \left(1 - 2 \frac{GM}{c^2 b} w \right) \right]^{-1/2},$$

factorizamos en el término entre corchetes

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{w_1} dw \left(1 + 2 \frac{GM}{c^2 b} (\gamma - 1) w \right)^{1/2} \left(1 - 2 \frac{GM}{c^2 b} w \right)^{-1/2} \left[\left(1 - 2 \frac{GM}{c^2 b} w \right)^{-1} - w^2 \right]^{-1/2},$$

y se realiza expansión de Taylor $(1+x)^n \approx 1+nx$, con $x = \frac{2GM}{c^2} w$.

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 2 \int_0^{w_1} dw \left(1 + \frac{GM}{c^2 b} (\gamma - 1) w \right) \left(1 + \frac{GM}{c^2 b} w \right) \left[\left(1 + 2 \frac{GM}{c^2 b} w \right) - w^2 \right]^{-1/2}, \\ &= 2 \int_0^{w_1} dw \left(1 + \frac{GM}{c^2 b} \gamma w \right) \left[\left(1 + 2 \frac{GM}{c^2 b} w \right) - w^2 \right]^{-1/2}, \end{aligned}$$

simplificando con $G = c = 1$ se obtiene $w_1 = \frac{M}{b} + \frac{\sqrt{M^2 + b^2}}{b}$ es la raíz mayor del factor $1 + \frac{2M}{b} w - w^2 = 0$.

Integrando obtenemos

$$\Delta\phi = \pi + \frac{(\gamma + 1) 4M}{2 b},$$

reinsertando factores de G y c , el ángulo de deflexión $\delta\phi = \Delta\phi - \pi$ es

$$\delta\phi_{defPPN} = \frac{(\gamma + 1) 4GM}{2 c^2 b}. \quad (94)$$

5.3. Retraso temporal de Shapiro en PPN

Ahora calculamos el retraso temporal en la señal de un radar, que va de la Tierra a un satélite y rebota (pasando rasante al Sol), para ello usamos (75), (92) obtenemos

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{e}{f(r)},$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{\ell c}{(f(r)h(r))^{1/2}} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} f(r) \right]^{1/2}.$$

Encontramos de la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr}, \\ &= \frac{dt}{d\lambda} \bigg/ \frac{dr}{d\lambda}, \\ &= \frac{e}{\ell c} (f(r)h(r))^{1/2} f(r)^{-1} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} f(r) \right]^{-1/2}, \end{aligned}$$

calculamos el tiempo transcurrido desde un radio r_1 de menor acercamiento hasta un radio arbitrario r

$$t(r, r_1) = \int_{r_1}^r dr \frac{1}{b} (f(r)h(r))^{1/2} f(r)^{-1} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} f(r) \right]^{-1/2}.$$

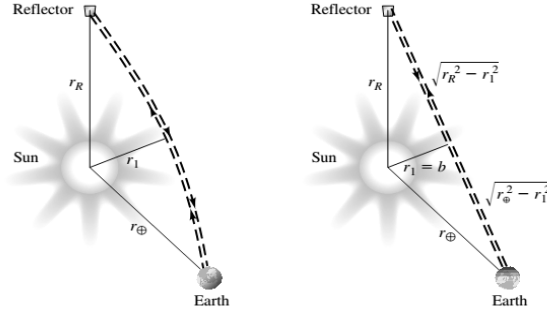


Figura 3: Experimento de retraso de Shapiro. Las ondas de radar se envían desde la Tierra de radio r_{\oplus} hasta un objeto reflector de radio r_R distante. La señal pasa cerca del Sol hasta igualar el parámetro de impacto $b = r_1$. Se desvía debido a la deflexión y entonces hay un exceso de retraso de tiempo entre el envío y el retorno por encima de lo que se esperaría si las señales se propagaran a lo largo de líneas rectas en el espacio-tiempo plano como se muestra en la figura de la derecha. Figura tomada de la referencia [23].

Obtenemos el tiempo de viaje de la señal desde el radio r_1 hasta uno arbitrario r (Ver Figura 3). Ahora usamos substituyendo $f(r)h(r)$ de (93), y $f(r)$ de (86)

$$t(r, r_1) = \int_{r_1}^r dr \frac{1}{b} \left(1 + 2 \frac{GM}{c^2 r} (\gamma - 1) \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right]^{-1/2},$$

factorizando en el término entre corchetes

$$t(r, r_1) = \int_{r_1}^r \frac{1}{b} \left(1 + 2 \frac{GM}{c^2 r} (\gamma - 1) \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-3/2} \left[\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2},$$

expandimos en Taylor $(1+x)^n \approx 1+nx$, con $x = \frac{2GM}{c^2 r}$

$$t(r, r_1) = \int_{r_1}^r \frac{1}{b} \left(1 + \frac{GM}{c^2 r} (\gamma - 1) \right) \left(1 + \frac{3GM}{c^2 r} \right) \left[\left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2},$$

expandimos el numerador hasta términos lineales en x

$$t(r, r_1) = \int_{r_1}^r \frac{1}{b} \left(1 + \frac{GM}{c^2 r} (2 + \gamma) \right) \left[\left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2} . \quad (95)$$

Lo anterior puede escribir en una integral de GR más una corrección debido a los parámetros PPN.

$$t(r, r_1) = \int_{r_1}^r \frac{1}{b} \left(1 + \frac{3GM}{c^2 r} \right) \left[\left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2} \\ + \int_{r_1}^r \frac{1}{b} \left(\frac{GM}{c^2 r} (\gamma - 1) \right) \left[\left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2} . \quad (96)$$

Después de integrar (95), con $G = c = 1$, usamos que r_1 satisface

$$\left(1 + \frac{2M}{r} \right) \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r_1^2} ,$$

sustituimos

$$b \approx r_1 + M ,$$

en (96), obtenemos

$$t(r, r_1) = \sqrt{r^2 - r_1^2} + (\gamma + 1)M \left[\log \left[\frac{r + \sqrt{r^2 - r_1^2}}{r_1} \right] + \left(\frac{r - r_1}{r + r_1} \right)^{1/2} \right] .$$

Usando las coordenadas radial de Schwarzschild con centro en el Sol; de la Tierra r_{\oplus} y radio de reflexión r_R , el tiempo total de viaje para una señal de radar es

$$\Delta t_{total} = 2t(r_{\oplus}, r_1) + 2t(r_R, r_1) .$$

El tiempo de exceso de viaje es Δt_{total} menos el efecto Newtoniano, es decir

$$\Delta t_{excesoPPN} = \Delta t_{total} - 2\sqrt{r_{\oplus}^2 - r_1^2} - 2\sqrt{r_R^2 - r_1^2} , \\ = 2(\gamma + 1)M \left[\log \left[\frac{r_{\oplus} + \sqrt{r_{\oplus}^2 - r_1^2}}{r_1} \right] + \log \left[\frac{r_R + \sqrt{r_R^2 - r_1^2}}{r_1} \right] + \left(\frac{r_{\oplus} - r_1}{r_{\oplus} + r_1} \right)^{1/2} + \left(\frac{r_R - r_1}{r_R + r_1} \right)^{1/2} \right] , \\ = 2(\gamma + 1)M \left[\log \left[\frac{r_{\oplus} + \sqrt{r_{\oplus}^2 (1 - \frac{r_1^2}{r_{\oplus}^2})}}{r_1} \right] + \log \left[\frac{r_R + \sqrt{r_R^2 (1 - \frac{r_1^2}{r_R^2})}}{r_1} \right] + \left(\frac{1 - \frac{r_1}{r_{\oplus}}}{1 + \frac{r_1}{r_{\oplus}}} \right)^{1/2} + \left(\frac{1 - \frac{r_1}{r_R}}{1 + \frac{r_1}{r_R}} \right)^{1/2} \right] .$$

Si usamos la aproximación $\frac{r_1}{r_{\oplus}} \ll 1$, $\frac{r_1}{r_R} \ll 1$, el tiempo de exceso toma la forma

$$\Delta t_{excesoPPN} = 2(\gamma + 1)M \left[\log \left[\frac{2r_{\oplus}}{r_1} \right] + \log \left[\frac{2r_R}{r_1} \right] + 1 \right] , \\ = 2(\gamma + 1)M \left[\log \left[4 \frac{r_{\oplus} r_R}{r_1^2} \right] + 1 \right] ,$$

reinsertando factores de G,c, encontramos el resultado buscado

$$\Delta t_{excesoPPN} = \frac{(\gamma + 1) 4GM}{2 c^3} \left[\log \left[\frac{4r_{\oplus} r_R}{r_1^2} \right] + 1 \right] . \quad (97)$$

5.4. Precesión Perihelio PPN

Para calcular el precesión en el perihelio de Mercurio usaremos (89) y la expresión (90) con $\kappa = c^2$ e insertando factores de c^2 calculamos

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\ell}{r^2},$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \left[c^2 e^2 \frac{1}{f(r)h(r)} - \frac{1}{h(r)} \left(c^2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) \right]^{1/2}.$$

con τ el tiempo propio. Encontramos de la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dr} &= \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dr}, \\ &= \frac{d\phi}{d\tau} \bigg/ \frac{dr}{d\tau}, \\ &= \frac{\ell}{r^2} \left(1 + 2\gamma \left(\frac{GM}{c^2 r} \right) \right)^{1/2} \left[c^2 e^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} - \left(c^2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) \right]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Así calculamos el ángulo barrido desde un radio menor r_1 hasta un radio mayor r_2 (ver Figura 4).

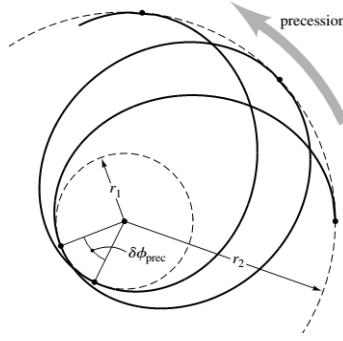


Figura 4: El planeta se mueve de un radio mínimo r_1 a un radio máximo r_2 y vuelve al radio mínimo. Sin embargo, a diferencia de la elipse Kepleriana de Teoría gravitacional Newtoniana, la órbita no se cierra y su periodo ya no es el mismo. La posición angular avanza ligeramente en cada retorno por un ángulo llamado de precesión del perihelio para un planeta alrededor del Sol. Figura tomada de la referencia [23].

$$\Delta\phi = 2\ell \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left(1 + \gamma \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \left[c^2 e^2 \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right)^{-1} - \left(\frac{\ell^2}{r^2} + c^2 \right) \right]^{-1/2},$$

expandiendo en Taylor $(1+x)^n \approx 1+nx$, con $x = \frac{2GM}{c^2 r}$

$$\Delta\phi = 2\ell \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left(1 + \gamma \frac{MG}{c^2 r} \right) \left[c^2 e^2 \left(1 + \frac{2MG}{c^2 r} + \frac{4M^2 G^2}{c^4 r^2} \right) - \left(\frac{\ell^2}{r^2} + c^2 \right) \right]^{-1/2},$$

donde mantenemos hasta términos hasta orden $1/c^2$. También hacemos el cambio de variable $u = 1/r$, entonces $\frac{dr}{r^2} = -du$. Así las raíces del denominador cumplen $r_1 < r_2$, entonces $u_1 = 1/r_1 > u_2 = 1/r_2$.

$$\Delta\phi = 2 \int_{u_2}^{u_1} du \left(1 + \gamma \frac{MGu}{c^2} \right) \left[\frac{c^2 e^2}{\ell^2} \left(1 + \frac{2MGu}{c^2} + \frac{4M^2 G^2 u^2}{c^4} \right) - \left(u^2 + \frac{c^2}{\ell^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (98)$$

donde las raíces son

$$u_{\pm} = \frac{c^2 e^2 GM}{c^2 \ell^2 - 4e^2 G^2 M^2} \pm \frac{\sqrt{c^6 e^2 \ell^2 - c^6 \ell^2 - 3c^4 e^4 G^2 M^2 + 4c^4 e^2 G^2 M^2}}{c^2 \ell^2 - 4e^2 G^2 M^2},$$

nombramos las raíces del denominador (98) $u_1 = u_+$, $u_2 = u_-$, por lo tanto se puede reescribir (98) como

$$\Delta\phi = 2 \int_{u_2}^{u_1} \left(1 + \gamma \frac{MGu}{c^2} \right) [(u_1 - u)(u - u_2)]^{-1/2} ,$$

y expandiendo hasta orden lineal en GM/ℓ^2 tenemos que el promedio de las raíces

$$\frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{c^2 e^2 GM}{c^2 \ell^2 - 4G^2 M^2} = \frac{GM}{\ell^2} , \quad (99)$$

usamos que $e^2 \approx 1$ y recordemos que en GR para una elipse que no cierra con excentricidad $|\epsilon| < 1$, semieje mayor a , el parámetro $p = a(1 - \epsilon^2) = \frac{\ell^2}{GM}$, podemos corregir el periodo del primer término de (98) como en [23]

$$\begin{aligned} T_{PPN} &= \frac{2\pi}{1 - \frac{2GM}{c^2 p'}} , \\ &\approx 2\pi \left(1 + \frac{2GM}{c^2 p'} \right) , \\ &= 2\pi \left(1 + (2 + \gamma - \beta) \left(\frac{GM}{c\ell} \right)^2 \right) . \end{aligned}$$

donde el parámetro p' en PPN, K.Thorne obtuvo que [28] $p' = \frac{2}{2 + \gamma - \beta} \frac{\ell^2}{GM}$, se sigue que la integral corregida es

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \left(1 + (2 + \gamma - \beta) \left(\frac{GM}{c\ell} \right)^2 \right) \underbrace{2 \int_{u_2}^{u_1} du [(u_1 - u)(u - u_2)]^{-1/2}}_{=2\pi} \\ &\quad + 2\gamma \frac{GM}{c^2} \underbrace{\int_{u_2}^{u_1} u du [(u_1 - u)(u - u_2)]^{-1/2}}_{=\frac{\pi GM}{\ell^2}} , \end{aligned}$$

para evaluar la primera integral usamos el cambio de variable

$$x = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} ,$$

entonces

$$2 \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{(u_1 - u)(u - u_2)}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2 \int_0^{\pi/2} 2d\theta = 2\pi ,$$

la cual se integró con el cambio de variable $x = \sin^2 \theta$.

Para evaluar la segunda integral definimos

$$v = (u_1 - u)(u - u_2) ,$$

y diferenciamos

$$2u du = (u_1 + u_2) du - dv ,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{u_2}^{u_1} \frac{u du}{\sqrt{(u_1 - u)(u - u_2)}} &= \frac{(u_1 + u_2)}{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{(u_1 - u)(u - u_2)}} + \frac{1}{2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{\sqrt{v}} , \\ &= \frac{\pi}{2} (u_1 + u_2) , \\ &= \pi \frac{GM}{\ell^2} , \end{aligned}$$

el último término es cero ya que en $u_1, u_2, v_1 = v_2 = 0$ y usamos (99). El ángulo barrido es entonces

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 2\pi \left(1 + (2 + \gamma - \beta) \left(\frac{GM}{c\ell} \right)^2 \right) + 2\pi\gamma \left(\frac{GM}{c\ell} \right)^2, \\ &= 2\pi + (2 + 2\gamma - \beta)2\pi \left(\frac{GM}{c\ell} \right)^2,\end{aligned}$$

y el ángulo de precesión es $\delta\phi = \Delta\phi - 2\pi$

$$\delta\phi_{precPPN} = \frac{1}{3}(2 + 2\gamma - \beta)6\pi \left(\frac{GM}{c\ell} \right)^2. \quad (100)$$

5.5. Mediciones de los parámetros PPN

Históricamente, la deflexión de la luz por el Sol, fue de las primeras pruebas de GR en 1919, realizada por Eddington [29] y sus colaboradores, su método se basaba en observar y fotografiar al Sol con una región del cielo, antes y después de un Eclipse Solar, entonces la posición angular de una estrella se desplaza del centro del disco Solar, y con esto pueden medir el ángulo de deflexión. Debido a las fluctuaciones en la refracción atmosférica, estas mediciones dependían mucho de las condiciones ambientales y tenían un 30 de precisión. A pesar de las dificultades, las mejores observaciones de 1922 dieron resultados consistentes con $\gamma = 1$ con precisión del 5% [23].

Actualmente, se pueden hacer mediciones mucho mejores con radiotelescopios colocados en la Tierra, separados en una línea y apuntado hacia una fuente de radio como un cuásar distante, a este método se le llama: "long-baseline interferometry" (LBI) [28]. Debido a que la luz Solar, no interfiere tanto en la banda de ondas de radio (a comparación de la luz visible), se pueden hacer observaciones de fuentes de radio con mucha mayor precisión. Además, la interferometría de radio proporciona una resolución angular mucho mejor que los instrumentos ópticos. Las primeras mediciones se realizaron en 1995 con un grupos de cúasares como los grupos: 3C273, 3C279, 3C48 [30], y los grupos 0111+02, 0119+11, 0116+08 [31]. Aún más, en 2004 [32] se analizaron casi 2 millones de VLBI, de observaciones de 541 fuentes de radio, realizadas por 87 sitios VLBI arrojaron el siguiente resultado [33]

$$\gamma - 1 = (-0.8 \pm 1.2) \times 10^{-4}. \quad (101)$$

Otra cantidad importante es el retraso temporal de una señal de radar, en su viaje de ida y vuelta, enviada desde la Tierra a un satélite (pasando rasante al Sol). Fué descubierto por Irwin Shapiro [34] en 1964. Las primeras mediciones se realizaron en la misión Viking a Marte en 1977 [35], la señal de radar re recibía desde un módulo de aterrizaje Viking en Marte, dado que no se tiene acceso la una señal "newtoniana", es necesario medir las variaciones en los tiempos de viaje de ida y vuelta a medida que llega al satélite y buscar el comportamiento logarítmico del tiempo como en (97). La mejor configuración para medir el retraso temporal se da en la conjunción superior: cuando Marte, el Sol y la Tierra se encuentran alineados. Entonces el tiempo de máximo retraso es $\Delta t_{exceso} = 247\mu s$ de un tiempo de viaje total $\Delta t_{total} = 2.51 \times 10^3 s = 41 \text{ min}$ [36]. Es por eso que las primeras mediciones de γ requerían de mayor precisión en las órbitas para ver el efecto. En 2003 se informó una mejora significativa usando el seguimiento de la nave espacial Cassini, mientras se dirigía a Saturno [37], se reportó el resultado

$$\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}. \quad (102)$$

Finalmente para medir la precesión del perihelio se suele observar Mercurio, debido a que es el planeta más cercano al Sol y su órbita tiene la mayor precesión. Sin embargo, la comparación de la predicción de GR con la observación es complicada, debido a que hay que considerar que el eje de rotación de la Tierra está precesando con respecto a un marco inercial, y que el Sol no es exactamente esférico, induce un efecto del mismo orden que efectos relativistas [23]. Este había sido un problema sin resolver en la mecánica clásica durante más de medio siglo, desde 1859. El valor moderno de la precesión es de 43 segundos de arco por siglo. El desplazamiento del perihelio en PPN, depende de la parámetros β, γ en (100), las mediciones más recientes provienen de la sonda espacial Messenger que orbitó Mercurio en 2011 [36], mejorando significativamente. Es importante mencionar que se utiliza desde un principio la medición de Cassini en γ (obtenida del retraso de Shapiro (102)), entonces estos análisis arrojan la siguiente medición

$$\beta - 1 = (-4.1 \pm 7.8) \times 10^{-5}. \quad (103)$$

6. ÓRBITAS CON UN POTENCIAL DE GRAVEDAD UNIMODULAR

En esta sección usamos la expresión obtenida en (82) para el potencial efectivo de partículas de prueba y puntuales con pérdidas de energía provenientes del potencial de GU

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}f(r) \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) - \frac{c^2}{2} + \frac{\Phi(r)}{c^2} = E - \frac{c^2}{2},$$

hasta aquí dicho potencial de GU es general. Donde dividimos Φ entre c^2 para que los efectos sean del mismo orden de GR. Así podemos obtener para trayectorias que usan partículas de prueba y puntuales de materia

$$\dot{r}^2 = 2E - f(r) \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) - 2\frac{\Phi(r)}{c^2}. \quad (104)$$

Para trayectorias de luz usamos $\kappa = 0$ se sigue

$$\dot{r}^2 = \ell^2 \left[\frac{1}{b^2} - \frac{f(r)}{r^2} - 2\frac{\Phi(r)}{c^2\ell^2} \right], \quad (105)$$

donde se define el parámetro de impacto $b^2 = \ell^2/2E$. De la expresiones (90) con $h = 1/f$ en GR se obtiene

$$\dot{r}^2 = e^2 - f(r) \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right),$$

comparado con (104), cuando $\Phi(r) = 0$, obtenemos que $E = e^2/2$.

6.1. Deflexión de la Luz en Gravedad Unimodular

Ahora buscamos estudiar trayectorias de luz que pasan cerca de una estrella, entonces el efecto gravitacional del potencial de GU debe desaparecer cuando $r \rightarrow \infty$. Nuestra propuesta es expresar $\Phi(r)$ en el caso de partículas de luz como

$$\Phi_{\text{luz}}(r) = \frac{b_2}{r^2} + \frac{b_3}{r^3}, \quad (106)$$

con b_2, b_3 constantes. Es importante notar que la expansión de $\Phi(r)$ en (106) se realizó como un polinomio hasta orden $1/r^3$ dado que coincide con la expansión del potencial efectivo (84) de GR, por lo tanto, los máximos y mínimos de dicho potencial no se ven afectados. Entonces con las cantidades (105) y (89)

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\lambda} &= \frac{\ell}{r^2}, \\ \frac{dr}{d\lambda} &= \ell \left[\frac{1}{b^2} - \frac{f(r)}{r^2} - 2\frac{\Phi_{\text{luz}}(r)}{c^2\ell^2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Encontramos de la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dr} &= \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr}, \\ &= \frac{d\phi}{d\lambda} \bigg/ \frac{dr}{d\lambda}, \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{f(r)}{r^2} - 2\frac{\Phi(r)}{c^2\ell^2} \right]^{-1/2}, m \end{aligned}$$

así la integral del ángulo de deflexión es

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{f(r)}{r^2} - 2\frac{\Phi_{\text{luz}}(r)}{\ell^2} \right]^{-1/2}, \quad (107)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{2}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{f(r)}{r^2} - 2\frac{\Phi_{\text{luz}}(r)}{c^2\ell^2} \right]^{-1/2}, \\ &= \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{2}{r^2} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{b^2} - V_{\text{luz}}(r)}}, \end{aligned} \quad (108)$$

donde definimos el potencial

$$V_{\text{luz}}(r) = \frac{f(r)}{r^2} + \frac{2\Phi_{\text{luz}}(r)}{c^2\ell^2}. \quad (109)$$

Luego calculamos los puntos críticos $\frac{\partial V_{\text{luz}}}{\partial r} = 0$, por lo tanto

$$r_0 = \frac{3(GM\ell^2 - b_3)}{2b_2 + c^2\ell^2}$$

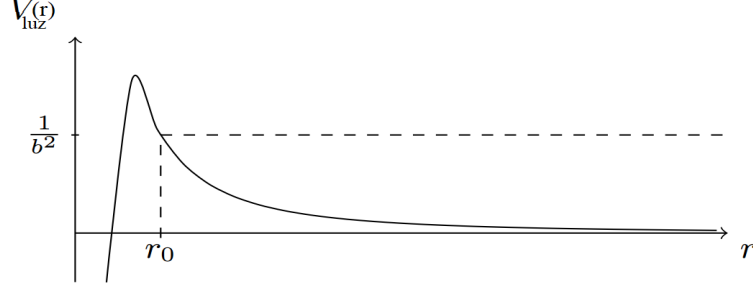


Figura 5: Potencial efectivo para trayectorias nulas, en función de la coordenada radial. Se supone que los parámetros de no conservación son tales que la forma del potencial no se altera en comparación con el caso de conservación de energía. Para un b dado, existe un radio de máxima aproximación, r_0 , donde $\frac{1}{b^2} = V_{\text{luz}}(r_0)$.

Aquí observamos que tenemos un punto de retorno positivo $r_0 > 0$. Si se cumple

$$2b_2 + c^2\ell^2 > 0, \quad (110)$$

$$(GM\ell^2 - b_3) > 0. \quad (111)$$

Porteriormente usamos que en el punto de retorno cumple (Ver Figura 5)

$$\frac{1}{b^2} = V_{\text{luz}}(r_0). \quad (112)$$

Podemos escribir

$$b = \frac{c\ell r_0}{\sqrt{c^2\ell^2 f(r_0) + 2r_0^2 \Phi_{\text{luz}}(r_0)}},$$

expandiendo

$$b = \frac{c\ell r_0^{3/2}}{\sqrt{r_0(2b_2 + c^2\ell^2) + 2b_3 - 2GM\ell^2}}, \quad (113)$$

lo que sustituimos en (108)

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \int_{r_0}^{\infty} \frac{2 dr}{r^2 \sqrt{\frac{f(r_0)}{r_0^2} - \frac{f(r)}{r^2} + \frac{2}{c^2\ell^2} [\Phi_{\text{luz}}(r_0) - \Phi_{\text{luz}}(r)]}}, \\ &= \int_{r_0}^{\infty} dr \sqrt{\frac{4c^2\ell^2 r_0^3}{r(r r_0(r - r_0)(r + r_0)(2b_2 + c^2\ell^2) + 2b_3(r^3 - r_0^3) + 2GM\ell^2(r_0^3 - r^3))}}}. \end{aligned}$$

Realizamos una expansión de Taylor para $1/c^2$ desde orden 0 hasta orden 1

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \int_{r_0}^{\infty} \frac{2 dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}}} \\ &+ \frac{1}{c^2} \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{\left\{ \frac{2M}{r_0^3} - \frac{2M}{r^3} - \frac{2}{\ell^2} [\Phi_{\text{luz}}(r_0) - \Phi_{\text{luz}}(r)] \right\}}{r^2 \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{3/2}}, \end{aligned}$$

expandiendo

$$\Delta\phi = \int_{r_0}^{\infty} dr \left(\sqrt{\frac{4r_0^2}{r^4 - r^2 r_0^2}} + 2\sqrt{\frac{r_0^2}{r^4 - r^2 r_0^2}} \frac{(rr_0 b_2(r+r_0) + b_3(r^2 + rr_0 + r_0^2) - GM\ell^2(r^2 + rr_0 + r_0^2))}{c^2 \ell^2 r r_0 (r+r_0)} \right), \quad (114)$$

la integral se puede realizar con el cambio de variable

$$r = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{1}{r_0} - \frac{1}{2} \frac{1}{r_0} \sin \psi},$$

y con el jacobiano

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{2r_0 \cos \psi}{(\sin \psi - 1)^2},$$

observamos que cuando $\psi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ entonces $r \rightarrow r_0$ y cuando $\psi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ entonces $r \rightarrow \infty$. Después realizamos la expansión para $1/c$ desde orden 0 a orden 2, obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta\phi = & - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos \psi}{\sqrt{(3 - \sin \psi)(\sin \psi + 1)}} \\ & + \frac{\cos \psi [7GM\ell^2 - 7b_3 - 6r_0 b_2 + \sin \psi (2b_2 r_0 + \sin \psi (GM\ell^2 - b_3) + 4b_3 - 4GM\ell^2)]}{c^2 \ell^2 r_0 (3 - \sin \psi)^{3/2} (\sin \psi + 1)^{1/2}} d\psi, \end{aligned}$$

entonces

$$\Delta\phi = \pi - \frac{\pi b_2 r_0 + 4b_3 - 4GM\ell^2}{c^2 \ell^2 r_0}.$$

Definiendo el ángulo de deflexión $\delta_{defGU}\phi = \Delta\phi - \pi$

$$\delta\phi_{defGU} = \frac{4(GM\ell^2 - b_3)}{c^2 \ell^2 r_0} - \frac{\pi b_2}{c^2 \ell^2}. \quad (115)$$

6.2. Retraso temporal de Shapiro en Gravedad Unimodular

Ahora calculamos el retraso temporal en la señal de un radar, que va de la Tierra a un satélite y rebota (pasando rasante al Sol) en GU, para ello usamos la expresión de \dot{t} (75) con $\kappa = 0$, y que en GU siempre se cumple $h(r) = 1/f(r)$ tenemos

$$\dot{t}^2 = \frac{1}{f(r)} \left[\frac{1}{f(r)} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right].$$

luego sustituimos (105)

$$\dot{r}^2 = \ell^2 \left[\frac{1}{b^2} - \frac{f(r)}{r^2} - 2 \frac{\Phi_{luz}(r)}{c^2 \ell^2} \right],$$

en \dot{t}^2 para obtener

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\lambda} &= \frac{\ell}{f(r)} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{2\Phi_{luz}(r)}{c^2 \ell^2} \right)^{1/2}, \\ \frac{dr}{d\lambda} &= \ell \left[\frac{1}{b^2} - \frac{f(r)}{r^2} - 2 \frac{\Phi_{luz}(r)}{c^2 \ell^2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Encontramos de la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr} , \\ &= \frac{dt}{d\lambda} \bigg/ \frac{dr}{d\lambda} , \\ &= \frac{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{2\Phi_{\text{luz}}(r)}{c^2 \ell^2}\right)^{1/2}}{f(r) \left[\frac{1}{b^2} - \frac{f(r)}{r^2} - 2\frac{\Phi_{\text{luz}}(r)}{c^2 \ell^2}\right]^{1/2}} . \end{aligned}$$

Calculamos el tiempo, transcurrido desde un radio r_0 de menor acercamiento hasta un radio arbitrario r

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r dr \frac{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{2\Phi_{\text{luz}}(r)}{c^2 \ell^2}}}{f(r) \sqrt{\frac{1}{b^2} - V_{\text{luz}}(r)}} . \quad (116)$$

De nuevo usamos nuestra propuesta (106) de $\Phi_{\text{luz}}(r)$ como una expansión de $1/r$ de orden 2 hasta orden 3. Además, usamos nuevamente (109), y que el punto de retorno cumple la relación (112) para despejar

$$b = \frac{c r_0^{3/2}}{\sqrt{r_0 (2b_2 + c^2 \ell^2) + 2b_3 - 2GM\ell^2}} ,$$

lo que sustituimos en (116). Calculamos el integrando y hacemos una expansión de Taylor para $1/c$ desde orden 0 hasta orden 3

$$t(r, r_0) = \frac{1}{c} \int_{r_0}^R dr \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} + \frac{\ell^2 M (r - r_0)(2r + 3r_0) + r r_0^4 [\Phi_n(r) - \Phi_n(r_0)]}{c^3 \ell^2 (r^2 - r_0^2)^{3/2}} ,$$

expandiendo

$$\begin{aligned} t(r, r_0) &= \int_{r_0}^r dr \frac{r}{c \sqrt{(r - r_0)(r + r_0)}} + \frac{r_0 (b_1 r r_0 - b_3) + GM\ell^2 (2r + 3r_0)}{c^3 \ell^2 \sqrt{r - r_0} (r + r_0)^{3/2}} , \\ &= \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{c} + \left(\sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \right) \left[\frac{2 \tanh^{-1} (b_1 r_0^2 + 2GM\ell^2) - (b_1 r_0^2 + b_3 - GM\ell^2)}{c^3 \ell^2} \right] . \end{aligned}$$

Lo anterior es el tiempo de ida de una señal luminosa, desde un radio correspondiente al punto de retorno r_0 hasta un radio arbitrario r . Después de simplificar

$$\begin{aligned} t(r, r_0) &= \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{c} + \frac{1}{c^3 \ell^2} \left(\log \left[\sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} + 1 \right] - \log \left[1 - \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \right] \right) (b_1 r_0^2 + 2GM\ell^2) \\ &\quad - \left(\sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \right) \left(\frac{b_1 r_0^2 + b_3 - GM\ell^2}{c^3 \ell^2} \right) , \end{aligned}$$

Posteriormente, calculamos el tiempo de ida y vuelta; transcurrido desde la salida de la señal en la tierra; con radio de Schwarzschild r_{\oplus} , luego pasa por un radio del Sol r_0 , y sigue su viaje hasta un satélite de radio r_{sat} , entonces el viaje de ida es $r_{\oplus} \Rightarrow r_0 \Rightarrow r_{\text{sat}}$, después se suma al viaje de vuelta con el orden inverso $r_{\text{sat}} \Rightarrow r_0 \Rightarrow r_{\oplus}$, por lo tanto

$$\Delta t_{\text{tot}} = 2t(r_{\oplus}, r_0) + 2t(r_{\text{sat}}, r_0) .$$

Si restamos las expresiones Newtonianas del tiempo de viaje total Δt_{tot} y consideramos únicamente efectos de GR y posiblemente de Gravedad Unimodular, obtenemos el exceso de tiempo como

$$\Delta t_{\text{excesoGU}} = \Delta t_{\text{tot}} - \frac{2}{c} \left(\sqrt{r_{\oplus}^2 - r_0^2} + \sqrt{r_{\text{sat}}^2 - r_0^2} \right) ,$$

desarrollando

$$\begin{aligned} \Delta t_{excesoGU} = & \frac{2}{c^3 l^2} \left\{ \left(\log \left[\sqrt{\frac{r_{sat} - r_0}{r_0 + r_{sat}}} + 1 \right] - \log \left[1 - \sqrt{\frac{r_{sat} - r_0}{r_0 + r_{sat}}} \right] \right) (b_1 r_0^2 + 2GMl^2) \right. \\ & + \left(\log \left[\sqrt{\frac{r_{\oplus} - r_0}{r_0 + r_{\oplus}}} + 1 \right] - \log \left[1 - \sqrt{\frac{r_{\oplus} - r_0}{r_0 + r_{\oplus}}} \right] \right) (b_1 r_0^2 + 2GMl^2) \\ & \left. - (b_1 r_0^2 + b_3 - GMl^2) \sqrt{\frac{r_{sat} - r_0}{r_{sat} + r_0}} + (b_1 r_0^2 + b_3 - GMl^2) \sqrt{\frac{r_{\oplus} - r_0}{r_0 + r_{\oplus}}} \right\}, \end{aligned}$$

simplificando

$$\Delta t_{excesoGU} = \frac{4GM \left(\log \left(\frac{4r_{sat} r_{\oplus}}{r_0^2} \right) + 1 \right)}{c^3} - \frac{4b_3}{c^3 l^2}.$$

Como podemos ver no existe ningún coeficiente de $\Phi_{luz}(r)$ ya sea b_2 o b_3 en la parte logarítmica de la expresión anterior, a diferencia de la expresión de (97) en que la parte de PPN sólo tiene efecto en la parte logarítmica. Por lo tanto en este caso no podemos comparar con PPN.

6.3. Precesión del Perihelio en Gravedad Unimodular

En esta sección buscamos estudiar trayectorias de partículas de prueba y puntuales de materia, que pasan cerca de una estrella, entonces el efecto gravitacional del potencial de GU debe desaparecer cuando $r \rightarrow \infty$. Nuestra propuesta también es expresar $\Phi(r)$ en el caso de partículas de materia como

$$\Phi_{mat}(r) = \frac{b'_1}{r} + \frac{b'_2}{r^2} + \frac{b'_3}{r^3}, \quad (117)$$

con b'_1, b'_2, b'_3 constantes. Es importante notar que la expansión de $\Phi_{mat}(r)$ en (117) se realizó como un polinomio $1/r$ desde orden 1 hasta orden 3, dado que coincide con la expansión del potencial efectivo (84) de GR y, por lo tanto, los máximos y mínimos del potencial efectivo no se ven afectados.

Ahora calcularemos la precesión de perihelio de Mercurio, dicho planeta se mueve de un radio mínimo (respecto al Sol) o perihelio r_1 a un radio máximo r_2 y vuelve al radio mínimo. A diferencia de la elipse Newtoniana, la órbita no se cierra y la posición angular avanza ligeramente en cada retorno por un ángulo llamado de precesión del perihelio para un planeta alrededor del Sol (ver Figura 4). Para calcular la precesión en el perihelio de Mercurio usaremos (89) y la expresión (104) con $\kappa = c^2$, e insertando factores de c^2 tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{\ell}{r^2}, \\ \frac{dr}{d\tau} &= \left[2E - c^2 - f(r) \left(\frac{\ell^2}{r^2} + c^2 \right) - 2 \frac{\Phi_{mat}(r)}{c^2} + c^2 \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

con τ el tiempo propio. De la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dr} &= \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dr}, \\ &= \frac{d\phi}{d\tau} \bigg/ \frac{dr}{d\tau}, \\ &= \frac{\ell}{r^2} \left[2E - c^2 - f(r) \left(\frac{\ell^2}{r^2} + c^2 \right) - 2 \frac{\Phi_{mat}(r)}{c^2} + c^2 \right]^{-1/2}, \end{aligned}$$

así calculamos, el ángulo barrido desde un radio r_1 a un radio r_2 y de regreso

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 2 \int_{r_1}^{r_2} dr \frac{\ell}{r^2} \left[2E - c^2 - f(r) \left(\frac{\ell^2}{r^2} + c^2 \right) - 2 \frac{\Phi_{mat}(r)}{c^2} + c^2 \right]^{-1/2}, \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{2\ell^2}{r^4} \right)^{1/2} \left[E - \frac{c^2}{2} - \frac{1}{2} f(r) \left(\frac{\ell^2}{r^2} + c^2 \right) - \frac{\Phi_{mat}(r)}{c^2} + \frac{c^2}{2} \right]^{-1/2} \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left(\frac{2\ell^2}{r^4 (E - V_{mat}(r))} \right)}, \end{aligned}$$

Entonces el potencial efectivo es

$$V_{\text{mat}}(r) = \frac{1}{2}f(r) \left(c^2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) + \frac{\Phi_{\text{mat}}(r)}{c^2} - \frac{c^2}{2}, \quad (118)$$

luego encontramos los puntos críticos $\frac{\partial V_{\text{mat}}(r)}{\partial r} = 0$, los cuales son

$$r = \frac{-2b'_2 - c^2\ell^2 \pm \sqrt{(c^2\ell^2 + 2b'_2)^2 - 4(c^2GM - b'_1)(3GM\ell^2 - 3b'_3)}}{2(b'_1 - c^2GM)},$$

Para tener soluciones en los reales se requiere

$$c^2\ell^2 + 2b'_2 > 0, \quad (119)$$

$$c^2GM - b'_1 > 0, \quad (120)$$

$$GM\ell^2 - b'_3 > 0, \quad (121)$$

$$(c^2\ell^2 + 2b'_2)^2 > 12(c^2GM - b'_1)(GM\ell^2 - b'_3). \quad (122)$$

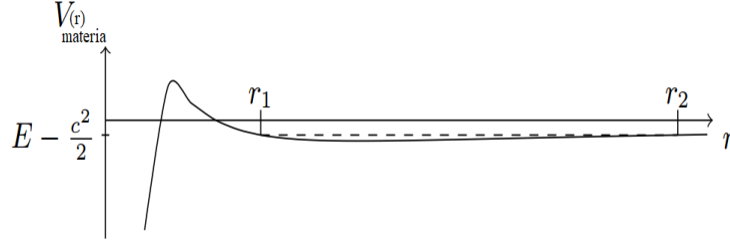


Figura 6: $V_{\text{materia}}(r)$ en función de r . Cuando $E - c^2/2 < 0$, el potencial admite órbitas que están contenidas entre r_1 y r_2 .

Aquí observamos que tenemos dos radios $r_1 = r_-$ y $r_2 = r_+$. Usando que en el punto de retorno cumple (Ver Figura 6)

$$E - \frac{c^2}{2} = V_{\text{mat}}(r_1)$$

$$E - \frac{c^2}{2} = V_{\text{mat}}(r_2),$$

Y despejando para E y ℓ^2 en término de los puntos de retorno r_1 y r_2 y GM , c^2 .

$$E = \frac{r_1^2 f(r_2) (c^2 - 2\Phi_{\text{mat}}(r_1)) + f(r_1) (c^4 f(r_2) (r_2^2 - r_1^2) - r_2^2 (c^2 - 2\Phi_{\text{mat}}(r_2)))}{2c^2 (r_2^2 f(r_1) - r_1^2 f(r_2))},$$

$$= \frac{-4GM(b'_1 r_1 + b'_2) + 2c^2 (b'_1 r_1 r_2 + 2GM^2(r_1 + r_2) + GM (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2))}{2c^4 r_1 r_2 (r_1 + r_2) - 4c^2 GM (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}$$

$$+ \frac{-4b'_1 GM r_2 - 2b'_3 c^2 + c^6 r_1 r_2 (r_1 + r_2) - c^4 (r_1 + r_2) (2GM(r_1 + r_2) + r_1 r_2)}{2c^4 r_1 r_2 (r_1 + r_2) - 4c^2 GM (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)},$$

$$\ell^2 = \frac{c^2 [f(r_2) - f(r_1)] + \frac{2}{c^2} [\Phi_{\text{mat}}(r_2) - \Phi_{\text{mat}}(r_1)]}{\frac{f(r_1)}{r_1^2} - \frac{f(r_2)}{r_2^2}},$$

$$= -\frac{2 (r_1 r_2 (r_1 r_2 (b'_1 - c^2 GM) + b'_2 (r_1 + r_2)) + b'_3 (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2))}{c^2 r_1 r_2 (r_1 + r_2) - 2GM (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}.$$

Substituyendo estas últimas expresiones de E y ℓ^2 podemos expandir en $1/c^2$ desde orden 0 hasta orden 1

$$\begin{aligned} \Delta\phi = & 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr \sqrt{r_1 r_2}}{r \sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}} \\ & + \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{2M[r(r_1+r_2) + r_1 r_2]}{c^2 r^2 \sqrt{r_1 r_2} (r-r_1)^{1/2} (r-r_2)^{1/2}} - \frac{\sqrt{r_1 r_2} (r_1+r_2)}{c^2 M} \frac{r \Phi_{\text{mat}}(r)}{(r-r_1)^{3/2} (r-r_2)^{3/2}} \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{r_1 r_2} (r_1+r_2)}{c^2 M (r_1-r_2)} \frac{r_1 \Phi_{\text{mat}}(r_1)}{(r-r_1)^{3/2} (r-r_2)^{1/2}} - \frac{\sqrt{r_1 r_2} (r_1+r_2)}{c^2 M (r_1-r_2)} \frac{r_2 \Phi_{\text{mat}}(r_2)}{(r-r_1)^{1/2} (r-r_2)^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

realizamos el cambio de variable

$$r = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \sin(\psi) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)},$$

con jacobiano

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{2r_1 r_2 (r_2 - r_1) \cos(\psi)}{((r_1 - r_2) \sin(\psi) + r_1 + r_2)^2}.$$

Notamos que cuando $\psi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ entonces $r \rightarrow r_1$ y también se cumple que cuando $\psi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ implica $r \rightarrow r_2$. Luego simplificamos el integrando con $r_1 = a(1-\epsilon)$, $r_2 = a(1+\epsilon)$. Después del cambio de variable y substituir $\Phi_{\text{mat}}(r)$ obtenemos

$$\Delta\phi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2 + \frac{2(a(\epsilon^2 - 1)(b'_2 - 3GM^2) + \epsilon \sin(\psi)(a(\epsilon^2 - 1)GM^2 + b'_3) - 3b'_3)}{a^2 c^2 (\epsilon^2 - 1)^2 GM} \right],$$

integrando lo anterior

$$\Delta\phi = 2\pi + \frac{2\pi(a(\epsilon^2 - 1)(3GM^2 - b'_2) - 3b'_3)}{a^2 c^2 (\epsilon^2 - 1)^2 GM},$$

considerando el ángulo de deflexión

$$\begin{aligned} \delta\phi_{\text{precGU}} &= \Delta\phi - 2\pi \\ &= \frac{2\pi(a(\epsilon^2 - 1)(3GM^2 - b'_2) - 3b'_3)}{a^2 c^2 (\epsilon^2 - 1)^2 GM}, \end{aligned}$$

expandiendo

$$\delta\phi_{\text{precGU}} = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-\epsilon^2)} - \frac{6\pi b'_3}{c^2 a^2 (1-\epsilon^2)^2 GM} - \frac{2\pi b'_2}{c^2 a(1-\epsilon^2)GM}. \quad (123)$$

notemos que cuando $b'_1 = b'_2 = b'_3 = 0$, recuperamos el ángulo de deflexión de GR.

6.4. Cotas a potencial de Gravedad Unimodular

6.4.1. Deflexión

En esta sección obtendremos, restricciones a las constantes b_2, b_3 del potencial $\Phi_{luz}(r)$ mediante las órbitas de deflexión y el valor experimental del parámetro γ de PPN en (101). Para obtener ℓ , partimos de la relación (105)

$$\frac{\dot{r}^2}{\ell^2} = \left[\frac{1}{b^2} - \frac{f(r)}{r^2} - 2\frac{\Phi(r)}{c^2\ell^2} \right],$$

con la condición que la velocidad de la luz es nula $r \rightarrow \infty, \dot{r} \rightarrow 1$. Entonces en esta región

$$\ell = \pm b.$$

Debido a que las cotas se obtienen con rayos de luz muy cerca de la superficie del Sol, entonces, el parámetro de impacto se escoge igual al radio del Sol

$$b = R_\odot, \quad (124)$$

por lo tanto

$$\ell = \pm R_\odot, \quad (125)$$

con estas últimas igualdades, la expresión (94) para el ángulo de deflexión de PPN es entonces

$$\delta\phi_{PPN} = (\gamma + 1)\frac{2GM_\odot}{c^2R_\odot},$$

comparando esta expresión con la correspondiente de GU (115) con $r_0 = b = R_\odot$

$$\delta\phi_{defGU} = \frac{4(GM_\odot\ell^2 - b_3)}{c^2\ell^2R_\odot} - \frac{\pi b_2}{c^2\ell^2}.$$

Igualando el ángulo de deflexión de PPN y de GU

$$\delta\phi_{PPN} = \delta\phi_{defGU},$$

susbtituyendo el valor del momento angular (125), y parámetro de impacto (124)

$$(\gamma + 1)\frac{2GM_\odot}{c^2R_\odot} = \frac{4(GM_\odot R_\odot^2 - b_3)}{c^2R_\odot^3} - \frac{\pi b_2}{c^2R_\odot^2},$$

podemos obtener

$$(\gamma - 1)\frac{2GM_\odot}{c^2R_\odot} = \frac{4(GM_\odot R_\odot^2 - b_3)}{c^2R_\odot^3} - \frac{\pi b_2}{c^2R_\odot^2} - \frac{4GM_\odot}{c^2R_\odot},$$

simplificando

$$\begin{aligned} (\gamma - 1)2GM_\odot &= -4\frac{b_3}{R_\odot^2} - \pi\frac{b_2}{R_\odot}, \\ \gamma - 1 &= -\frac{2}{GM_\odot R_\odot} \left(\frac{b_3}{R_\odot} + \frac{\pi}{4}b_2 \right). \end{aligned} \quad (126)$$

Luego usamos las cotas experimentales de PPN (101)

$$\begin{aligned} (-0.8 - 1.2) \times 10^{-5} &< \gamma - 1 < (-0.8 + 1.2) \times 10^{-5}, \\ -2 \times 10^{-4} &< \gamma - 1 < 4 \times 10^{-5}. \end{aligned} \quad (127)$$

Para simplificar usamos que en unidades geométricas $G = c = 1$, por lo tanto, el factor para convertir la unidad geometrizada de masa m a unidades de SI en kg , multiplicamos por el factor c^2G^{-1} . Entonces la masa solar en unidades geométricas es

$$M_\odot = 1.989 \times 10^{30} kg \frac{1 m}{1.3466 \times 10^{27} kg} = 1477.05 m.$$

Obtenemos la relación entre la masa Solar y el radio Solar en unidades geométricas

$$\begin{aligned} R_{\odot} &= 6.957 \times 10^8 m \frac{M_{\odot}}{1477.05 m} , \\ R_{\odot} &= 480234 M_{\odot} , \\ R_{\odot} &\approx 5 \times 10^5 M_{\odot} . \end{aligned} \tag{128}$$

Usando esta relación (126) y las desigualdades (127)

$$-2 \times 10^{-4} < -\frac{2}{M_{\odot} R_{\odot}} \left(\frac{b_3}{R_{\odot}} + \frac{\pi}{4} b_2 \right) < 4 \times 10^{-5} ,$$

simplificando usando (128) obtenemos

$$-250 < -10^{-5} \frac{b_3}{M_{\odot}^3} - 4 \frac{b_2}{M_{\odot}^2} < 50 ,$$

finalmente

$$-50 < 10^{-5} \frac{b_3}{M_{\odot}^3} + 4 \frac{b_2}{M_{\odot}^2} < 250 , \tag{129}$$

6.4.2. Precesión

En esta sección obtendremos, restricciones a las constantes b'_1 , b'_2 , b'_3 del potencial $\Phi_{mat}(r)$ mediante las órbitas de perihelio de Mercurio y los valores experimentales de los parámetros γ , β de PPN. Obtuvimos que

$$\begin{aligned} \delta\phi_{precGU} &= \frac{6\pi GM_{\odot}}{c^2 a(1-\epsilon^2)} - \frac{6\pi b'_3}{c^2 a^2(1-\epsilon^2)^2 GM_{\odot}} - \frac{2\pi b'_2}{c^2 a(1-\epsilon^2) GM_{\odot}} , \\ &= \frac{6\pi GM_{\odot}}{c^2 a(1-\epsilon^2)} \left[1 - \frac{b'_2}{3G^2 M_{\odot}^2} - \frac{b'_3}{a(1-\epsilon^2)G^2 M_{\odot}^2} \right] . \end{aligned}$$

En este caso usamos el ángulo de precesión de GR es 43 segundos de arco por siglo

$$\begin{aligned} \delta\phi_{precGR} &= \frac{6\pi GM_{\odot}}{c^2 a(1-\epsilon^2)} , \\ &= 43'' \end{aligned}$$

comparando el ángulo de precesión de PPN (100)

$$\delta\phi_{precPPN} = \frac{6\pi GM_{\odot}}{a(1-\epsilon^2)c^2} \frac{(2+2\gamma-\beta)}{3} , \tag{130}$$

$$= 43'' \left(1 + \frac{2(\gamma-1) - (\beta-1)}{3} \right) . \tag{131}$$

Igualando el ángulo de PPN y de GU

$$\delta\phi_{precPPN} = \delta\phi_{precGU} ,$$

obtenemos

$$\frac{2(\gamma-1) - (\beta-1)}{3} = - \left[\frac{b'_2}{3G^2 M_{\odot}^2} + \frac{b'_3}{a(1-\epsilon^2)G^2 M_{\odot}^2} \right] . \tag{132}$$

Luego usamos el valor experimental de $\gamma-1$ (102) y el de $\beta-1$ llegamos a (103)

$$\frac{2(\gamma-1) - (\beta-1)}{3} = (2.8 \pm 4.1) \times 10^{-5} ,$$

y obtenemos las siguientes desigualdades

$$-1.3 \times 10^{-5} < \frac{2(\gamma-1) - (\beta-1)}{3} < 6.9 \times 10^{-5} ,$$

substituyendo (132)

$$-1.3 \times 10^{-5} < - \left[\frac{b'_2}{3G^2 M_\odot^2} + \frac{b'_3}{a(1-\epsilon^2)G^2 M_\odot^2} \right] < 6.9 \times 10^{-5} ,$$

En este caso usamos el ángulo de precesión de GR es 43 segundos de arco por siglo

$$\begin{aligned} \delta\phi_{precGR} &= \frac{6\pi GM_\odot}{c^2 a(1-\epsilon^2)} , \\ &= 43'' \frac{1^\circ}{3600''} \frac{\pi rad}{180^\circ} , \end{aligned}$$

despejando el parámetro $a(1-\epsilon^2)$

$$a(1-\epsilon^2) = 9.04 \times 10^4 \frac{GM}{c^2} , \quad (133)$$

por lo tanto

$$-1.3 \times 10^{-5} < - \left[\frac{b'_2}{3G^2 M_\odot^2} + \frac{1}{9.04 \times 10^4} \frac{b'_3 c^2}{G^3 M_\odot^3} \right] < 6.9 \times 10^{-5} ,$$

para simplificar usamos unidades geométricas $G = c = 1$ y multiplicamos por 9.04×10^4

$$-11.7 \times 10^{-1} < - \left[(3 \times 10^4) \frac{b'_2}{M_\odot^2} + \frac{b'_3}{M_\odot^3} \right] < 62 \times 10^{-1} ,$$

finalmente llegamos a

$$-6.2 < (3 \times 10^4) \frac{b'_2}{M_\odot^2} + \frac{b'_3}{M_\odot^3} < 1.1 . \quad (134)$$

Como podemos observar en estas últimas expresiones (129), (134) los coeficientes de GU, los coeficientes b_n son proporcionales a M_\odot^n con $n = 1, 2, 3$, y reinsertando factores de G y c , proporcional $G^n M_\odot^n / c^n$, lo que significa que el efecto del potencial de GU tiene un efecto mucho menor al del potencial efectivo de GR. El coeficiente b_1 se comporta como una masa M_\odot .

Finalmente observamos que los requerimientos del potencial de GU que describe partículas de materia $\Phi_{mat}(r)$ (122) y fotones $\Phi_{luz}(r)$ (111) parecen sugerir que tiene las mismas propiedades y por lo tanto $b'_1 = b_1 = 0$, $b'_2 = b_2$, $b'_3 = b_3$. No obstante, esto no ayuda a restringir mas dichos coeficientes.

7. CONCLUSIONES

Una de las maneras de explorar teorías modificadas de la gravedad es violando algunos principios de la Física que creemos que son válidos. Uno de ellos es el principio de conservación de energía. En la introducción de dio una visión histórica sobre la naturaleza de la energía y su posible no conservación. Este último punto proviene de que la energía no está bien definida durante la medición en un sistema cuántico, y se argumenta que la conservación de la energía de la materia podría tener que ser abandonada en las teorías de la gravedad que son menos incompatibles con la mecánica cuántica.

Posteriormente, en el capítulo 2 estudiamos una de las teorías de gravedad modificada, de la que se puede derivar una posible no conservación de energía, esta es la teoría de GU, escrita por primera vez por Einstein [17] en 1919. GU modifica GR al imponer una restricción de que la métrica del espacio-tiempo, tiene determinante fijo. Esto tiene el efecto de reducir la simetría de norma de una invariancia bajo todos los difeomorfismos del espacio-tiempo en GR, a la invariancia solo bajo difeomorfismos que preservan este elemento de volumen fijo, cuya versión infinitesimal está dada por campos vectoriales con divergencia igual a cero. Y en las ecuaciones de campo, la constante cosmológica, es un multiplicador de Lagrange en lugar de un parámetro de lagrangiana. Una de las diferencias importantes de GU es que el tensor de energía-momento cumple una condición de conservación más general que puede interpretarse como que, el rotacional de la divergencia del tensor de energía momento es cero. Claramente, la ley de conservación de GR, en que la divergencia del tensor de energía-momento es cero, es un caso particular. En espacio-tiempos simplemente conexos, esta condición se reduce a escribir la divergencia del tensor de energía momento, es decir, la corriente igual al gradiente de un campo escalar arbitrario, dependiente de las coordenadas, dicho campo Φ lo llamamos el potencial de GU.

Luego, con el método de Papapetrou del Capítulo (3) se estudió partículas puntuales con la estructura interna más simple, es decir, partículas de prueba y puntuales. Inspirados en dicho método y en propuestas que pueden consultarse en [18], podemos obtener una ecuación para dichas partículas con pérdidas de energía, debidas a la divergencia distinta de cero del tensor de energía-momento en (65), obtenemos que el vector de corriente es ortogonal al vector tangente. Como un trabajo futuro podemos considerar el método de Papapetrou al siguiente nivel de aproximación con espín intrínseco de la partícula.

Después usamos los resultados de la referencia [21] y debido a que buscamos comparar con experimentos de trayectorias de partículas que pasan cerca del Sol, nos enfocamos solo en la solución tipo Schwarzschild de GU en vacío y con simetría esférica (las otras soluciones estáticas son las métricas de De Sitter, Anti-de Sitter). En virtud de esto, y que el vector de corriente en GU solamente depende de la coordenada radial, entonces podemos integrar la ecuación para partículas puntuales con pérdidas de energía, y obtenemos una expresión para el potencial efectivo (82). La cual es simplemente el potencial efectivo de GR más un potencial escalar de GU que solo depende de la coordenada radial. Debido a esto podemos proponer Φ como una expansión en términos de un polinomio de $1/r$ hasta orden 3 con coeficientes constantes dado en (109), ya que así la estructura de máximos y mínimos del potencial efectivo de GR no se ve afectada. En principio usamos una expansión distinta para partículas de luz (109) y de materia (117), con distintos coeficientes, para la expansión del potencial de GU. Y podemos usar un método analítico para calcular deflexión de luz 6.1, retraso de Shapiro , y precesión del perihelio 6.3 resultando en pequeñas desviaciones de las mismas cantidades en GR; así podemos poner cotas a los coeficientes del potencial de GU. Dichas cotas se pueden poner comparando el formalismo de PPN. Es importante resaltar que en retraso de Shapiro, el potencial de GU solamente tiene efecto en la parte no logarítmica, pero en los resultados experimentales se desprecian los términos no logarítmicos de PPN, entonces no se puede usar para acotar el coeficiente del potencial de GU. Por otro lado debido a que en principio los coeficientes del potencial de GU deben ser pequeños podemos suponer que el potencial para partículas de luz y materia tiene las mismas propiedades, y podemos obtener cotas globales al potencial Φ en términos de las cotas de PPN.

Como trabajo futuro sería importante comparar con el modelo fenomenológicos de [18] en dicho modelo la corriente es proporcional al espín intrínseco de la partícula y al escalar de curvatura de Ricci. Sin embargo, en nuestro caso podríamos considerar la corriente proporcional a otro escalar de curvatura distinto de cero en vacío; como la raíz cuadrada del escalar de Kretschmann [20], siendo esto proporcional a $1/r^3$, de nuevo esto no afecta la estructura de máximos y mínimos del potencial efectivo de GR. Y realizar también el método de Papapetrou al siguiente orden, es decir, con espín manteniendo la no conservación de energía, ya que parece factible encontrar alguna otra restricción al potencial de GU.

A. RESTRICCIÓN DE LA CORRIENTE NO CONSERVADA EN SIMETRÍA ESFÉRICA Y ESTÁTICA

De la métrica dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (135)$$

cuyos símbolos de Christoffel son

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^t &= \frac{1}{2} \frac{f'(r)}{f(r)} (\delta_a^r \delta_b^t + \delta_a^t \delta_b^r), \\ \Gamma_{ab}^r &= \frac{f'(r)}{2h(r)} \delta_a^t \delta_b^t + \frac{h'(r)}{2h(r)} \delta_a^r \delta_b^r - \frac{r}{h(r)} \delta_a^\theta \delta_b^\theta - \frac{r \sin^2\theta}{h(r)} \delta_a^\phi \delta_b^\phi, \\ \Gamma_{ab}^\theta &= \frac{1}{r} (\delta_a^r \delta_b^\theta + \delta_b^r \delta_a^\theta) - \sin\theta \cos\theta \delta_a^\theta \delta_b^\phi, \\ \Gamma_{ab}^\phi &= \frac{1}{r} (\delta_a^r \delta_b^\phi + \delta_a^\phi \delta_b^r) + \cot\theta (\delta_a^\theta \delta_b^\phi + \delta_a^\phi \delta_b^\theta). \end{aligned}$$

Por ser esféricamente simétrica y estática (135) tiene los siguientes vectores Killing

$$\begin{aligned} \ell_z &= \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a, \\ \ell_x &= \cos\phi \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^a - \cot\theta \sin\phi \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a, \\ \ell_y &= -\sin\phi \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^a - \cot\theta \cos\phi \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a, \\ T &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a, \end{aligned}$$

cuya álgebra es

$$\begin{aligned} [\ell_x, \ell_y] &= \ell_z, \\ [\ell_y, \ell_z] &= \ell_x, \\ [\ell_z, \ell_x] &= \ell_y, \\ [T, \ell_x] &= 0, \\ [T, \ell_y] &= 0, \\ [T, \ell_z] &= 0. \end{aligned}$$

Por un lado anteriormente obtuvimos una ecuación similar de la forma

$$u^b \nabla_b u^a = J_\perp^a(t, r, \theta, \phi),$$

ahora buscamos el vector de corriente más general que tiene los mismos vectores de Killing que la métrica esféricamente simétrica.

$$J_\perp^a(t, r, \theta, \phi) = A(t, r, \theta, \phi) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + B(t, r, \theta, \phi) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a + C(t, r, \theta, \phi) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^a + D(t, r, \theta, \phi) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a,$$

Por hipótesis suponemos que el vector j^a tiene las mismas simetrías de la métrica. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_T P = \left[\frac{\partial}{\partial t}, J_\perp \right], \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t}, A \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + B \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) + C \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) + D \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right], \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{\partial B}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial C}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial D}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t} = 0,$$

se sigue

$$J_{\perp}^a(r, \theta, \phi) = A(r, \theta, \phi) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + B(r, \theta, \phi) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a + C(r, \theta, \phi) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^a + D(r, \theta, \phi) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a,$$

Similarmente

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}_{\ell_z} J_{\perp} &= \left[\frac{\partial}{\partial \phi}, J_{\perp} \right], \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \phi}, A \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + B \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) + C \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) + D \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right], \\ &= \frac{\partial A}{\partial \phi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{\partial B}{\partial \phi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial C}{\partial \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial D}{\partial \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial A}{\partial \phi} = \frac{\partial B}{\partial \phi} = \frac{\partial C}{\partial \phi} = \frac{\partial D}{\partial \phi} = 0,$$

se sigue

$$J_{\perp}^a(r, \theta) = A(r, \theta) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + B(r, \theta) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a + C(r, \theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^a + D(r, \theta) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a.$$

Ahora usamos la condición

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}_{\ell_x} J_{\perp} &= [\ell_x, J_{\perp}] \\ &= \cos \phi \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{\partial B}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial C}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial D}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right) \\ &\quad - \left(C \csc^2 \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} - D \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - D \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ &= \cos \phi \frac{\partial C}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + \cos \phi \frac{\partial B}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) + \left(\cos \phi \frac{\partial C}{\partial \theta} + D \sin \phi \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \left(\cos \phi \frac{\partial D}{\partial \theta} - C \csc^2 \theta \sin \phi + D \cot \theta \cos \phi \right) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right), \end{aligned}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \cos \phi \frac{\partial C}{\partial \theta} &= 0, \\ \cos \phi \frac{\partial B}{\partial \theta} &= 0, \end{aligned}$$

de los cuales obtenemos $A = A(r)$, $B = B(r)$.

De los otros coeficientes obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} \cos \phi \frac{\partial C}{\partial \theta} + D \sin \phi &= 0, \\ D &= -\cot \phi \frac{\partial C}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial D}{\partial \theta} &= -\cot \phi \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2}, \end{aligned}$$

del último coeficiente

$$\cos \phi \frac{\partial D}{\partial \theta} - C \csc^2 \theta \sin \phi + D \cot \theta \cos \phi = 0,$$

substituyendo $D, \frac{\partial D}{\partial \theta}$, en lo anterior y simplificando

$$\cos \phi \cot \phi \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} - C \csc^2 \theta \sin \phi + \cot \phi \cot \theta \cos \phi \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} = 0 ,$$

usando separación de variables $C = C_1(\theta)C_2(r)$

$$C_1(\theta, \phi) = k_1 \cos \theta [(\ln(\cos(\theta/2)) - \ln(\sin(\theta/2))) \tan \phi] - k_2 \sin \theta [(\ln(\cos(\theta/2)) - \ln(\sin(\theta/2))) \tan \phi] ,$$

entonces

$$\begin{aligned} D(\theta, \phi) &= -\cot(\phi)C_2(r)\frac{\partial C_1(\theta, \phi)}{\partial \theta} , \\ &= -C_2(r)\frac{k_1}{2} \cos \theta [(\ln(\cos(\theta/2)) - \ln(\sin(\theta/2))) \tan \phi] \\ &\quad - C_2(r)\frac{k_2}{2} \sin \theta [(\ln(\cos(\theta/2)) - \ln(\sin(\theta/2))) \tan \phi] (\cot \theta/2 + \tan \theta/2) , \end{aligned}$$

por lo tanto

$$J_{\perp}^a = A(r) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + B(r) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a + C_1(\theta, \phi)C_2(r) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^a - \cot(\phi)C_2(r)\frac{\partial C_1(\theta, \phi)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a ,$$

ya que previamente demostramos que se debe cumplir $[\frac{\partial}{\partial \phi}, J_{\perp}] = 0$ necesitamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1(\theta, \phi)}{\partial \phi} &= 0 , \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \left(-\cot \phi \frac{\partial C_1(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) &= 0 , \end{aligned}$$

podemos ver que la única forma de cumplir las condiciones es hacer $k_1 = k_2 = 0$, es decir $C_1(\theta, \phi) = 0$. Finalmente

$$J_{\perp}^a = J^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + J^r \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a ,$$

con $J^t = A(r)$, $J^r = B(r)$.

REFERENCIAS

- [1] T. Maudlin, E. Okon, and D. Sudarsky. On the status of conservation laws in physics: Implications for semiclassical gravity. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 69:67–81, 2020.
- [2] E. N. Hiebert. *Historical Roots of the Principle of Conservation of Energy*. 1962.
- [3] R. B. Lindsay. The concept of energy and its early historical development. *Foundations of Physics*, 1:383–393, 1971.
- [4] D. Z. Albert. *Quantum Mechanics and Experience*. 1992.
- [5] A. Einstein. English translation: On the electrodynamics of moving bodies. *The Principle of Relativity (London: Methuen)*.
- [6] A. Einstein. Transcription of an einstein lecture downloaded from https://sites.pitt.edu/~jdnorton/teaching/HPS_0410/chapters/E=mcsquared/voice1.mp3.
- [7] E. Noether. English translation: Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics*.
- [8] H. Bondi. Conservation and non-conservation in general relativity. *Proceedings of the Royal Society A*, (427:1873), 1990.
- [9] E. Curiel. On geometric objects, the non-existence of a gravitational stress-energy tensor, and the uniqueness of the einstein field equation. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, (66:90–102), 2019.
- [10] N. Bohr. New theories in physics. *International Institute of International Co-operation*, (num.155):pp. 11–45, 1939.
- [11] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, 1955.
- [12] J.P. Uzan. Dark energy, gravitation and the copernican principle. In *Dark Energy: observational and theoretical approaches*, Edited by P. Ruiz-Lapuente (Cambridge: Cambridge University Press, 2010).
- [13] Y. B. Zel'dovich. Cosmological constant and elementary particles. *JETP Lett.*, 6(3):316–328, 1967.
- [14] S. M. Carroll. The cosmological constant. *Living Rev. Rel.*, 4(3):1–56, 2001.
- [15] S. Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23, 1989.
- [16] S. M. Carroll. Wolfgang Pauli and modern physics. *Space Sci. Rev.*, 148(3):25–36, 2009.
- [17] A. Einstein. English translation: Do gravitational fields play an essential part in the structure of elementary particles of matter? *The Principle of Relativity (London: Methuen)*.
- [18] D. Sudarsky A. Perez. Black holes, planckian granularity, and the changing cosmological 'constant'. *Gen Relativ Gravit* 53, 40 (2021).
- [19] M.Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Bris tol and Philadelphia, 2003.
- [20] Robert M Wald. General relativity. *Chicago, University of Chicago Press, 1984, 504 p*, 1984.
- [21] J. Emmanuel Herrera Flores. *Protocolo de candidatura al Doctorado en Ciencias Físicas*. PCF, 2020.
- [22] A. Papapetrou. Spinning test-particles in general relativity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, (Volume 209):248–258, 1951.
- [23] James B. Hartle. *Gravity: An introduction to Einstein's general relativity*. AAPT, 2003.
- [24] Clifford M. Will M. E. Pati. Post-newtonian gravitational radiation and equations of motion via direct integration of the relaxed einstein equations. *Foundations. Phys Rev D*, 62(124015):1–28, 2000.
- [25] Clifford M. Will. Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. ii. Parametrized post-newtonian hydrodynamics and the Nordtvedt effect. *Astrophys J*, 163:611–628, 1971.

- [26] Clifford M. Will and K. Nordtvedt. Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity. i. preferred-frame theories and an extended ppn formalism. *Astrophys J*, 177:757–774, 1972.
- [27] Clifford M. Will. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [28] C. Misner, K. Thorne, and J. Wheeler. *Gravitation*. Princeton U. Press, 2003.
- [29] C.Davidson F.W. Dyson, A. Eddington. A determination of the deflection of light by the sun’s gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, vol. 220, num. 571-581, pp. 291–333, 1920.*
- [30] D.E. Lebach, B.E. Corey, I.I. Shapiro, M. I.Ratner, J. C.Webber, A.E.E. Rogers, J. L. Davis, and T. A. Herring. Measurement of the solar gravitational deflection of radio waves using very-long-baseline interferometry. *Phys. Rev. Lett*, 75(4):1439–1442, 1995.
- [31] E. Fomalont, S. Kopeikin, G.Lanyi, and J.Benson. Progress in measurements of the gravitational bending of radio waves using the VLBA. *Astrophys. J*, 699(2):1395–1402, 2009.
- [32] Clifford M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev Relativ*, 17(4):757–774, 2014.
- [33] S. S. Shapiro, J. L. Davis, D. E. Lebach, and J. S. Gregory. Measurement of the solar gravitational deflection of radio waves using geodetic very-long-baseline interferometry data, 1979–1999. *Phys. Rev. Lett.*, 92(2):121–134, 2004.
- [34] I. I. Shapiro. Fourth test of general relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 13:789–791, Dec 1964.
- [35] R. D. Reasenberg, I.I. Shapiro, and et al. Viking relativity experiment: Verifiation of signal retardation by solar gravity. *Astrophys. J. Lett.*, 234(2):L219–L221, 1979.
- [36] J.Laskar H. Manche A. K. Verma, A.Fienga and M. Gastineau. Use of messenger radioscience data to improve planetary ephemeris and to test general relativity. *Astron. Astrophys.*, 561(115):300–313, 2014.
- [37] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the cassini spacecraft. *Nature*, 425(6):374–376, 2003.