Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Teoremas de dualidad en C_p-teoría para funciones cardinales topológicas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Javier Alejandro Puga Cañedo

TUTOR

Dr. Fidel Casarrubias Segura

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2022

Qué triste, se oye la lluvia
En los techos de cartón
Qué triste vive mi gente
En las casas de cartón
Viene bajando el obrero
Casi arrastrando los pasos
Por el peso del sufrir
¡Mira que es mucho el sufrir!
¡Mira que pesa el sufrir!

-Alí Primera-

¿Crees que la oscuridad es tu aliada?
Tú simplemente te adaptaste a la oscuridad.
Yo nací en ella, moldeado por ella.
No vi la luz hasta que ya era un hombre,
y por el tiempo en que lo hice,
fue sólo cegador.
Las sombras te traicionan,
porque me pertenecen a mí.

BANE, «*Batman: El caballero de la noche asciende*»

Agradecimientos

Quiero agradecer a ustedes abuelos Javier y Conchita por siempre estar conmigo, por su fuerza, por su valor, por su amor, por sus enseñanzas, sin ello, nada de esto y lo que soy podría haber sido. ¡Gracias!

Madre Paty, gracias, mil gracias, te debo todo. Créeme que ahora comprendo, la importancia de esa bicicleta, esos balones, tantos libros y poco Nintendo. Por ti, todos esos malos momentos (y pasos) se fueron. Tantos años de sudor y sacrificio por hacerme un hombre de bien, ahora ven su fruto al ser plasmados en este escrito. Te amo por ser una guerrera y mi fortaleza día a día.

De igual manera quiero agradecer todo lo que han hecho por mí, a mí hermano Jeronimo y mi papá Alejandro. No menos importantes mis tíos Francisco Cañedo, Miguel Ángel Cañedo, Jorge Cañedo y Arturo Cañedo, todos sus consejos y enseñanzas viven en mí.

Dr. Fidel Casarrubias, le agradezco tanto, a usted le debo toda mi formación matemática. Esa manera tan formal, pulcra y clara de transmitir matemáticas cambiaron mi perspectiva de lo que es hacer matemáticas y el alcance de estas. Agradezco todo el tiempo y calidez que tomo en revisar este trabajo, así como todas las pláticas y consejos que me ha dado.

A todos mis sinodales Dr. Reynaldo Rojas, Dr. Carlos Gerardo Paniagua, Dr. Gerardo Acosta y Dr. Miguel Ángel Corona, por todo el tiempo y comentarios que ayudaron a que este trabajo viera luz, fuera riguroso y agradable a la lectura.

Dra. Leticia Campos Aragón no sabe lo agradecido que estoy por la oportunidad que me ha dado de formar parte de su equipo y desarrollarme profesionalmente, todo el aprendizaje que me ha brindado es muy valioso y ha llevado mi mente a nuevas fronteras. De igual forma agradezco a todo el equipo; Francisco, Eduardo, Andres, David y Lore, todos los momentos compartidos han sido satisfactorios y me han impulsado a ser mejor.

A todos mis amigos Daniel Núñez, Carlos Vilchis, Óscar Gónzalez (a.k.a. Chochos), Ulises Vargas (a.k.a. Mess), Carlos Yonka, Francisco Maradiaga, Daniel Luque, Ulisses Gutierrez, Daniela Saenz, Rafael Cruz, Alejandra Hernandez y Jose Villagómez (espero no haber olvidado a alguno) sin ustedes la facultad habría sido muy aburrida y créanme que cada uno ha contribuido de forma positiva en mí. Finalmente quiero agradecer a la Tora Abi por todo, principalmente el soportarme, eres un gran motor en mi vida.

Índice general

Introducción

El objeto principal de estudio de esta tesis son los espacios de funciones continuas $C_p(X)$ dotados de la llamada «topología de la convergencia puntual». Los espacios $C_p(X)$ son constituidos por todas las funciones continuas valuadas en los reales y definidas en espacios Tychonoff X. Estos espacios topológicos son el objeto de estudio de «la teoría del espacio de funciones continuas dotado de la topología de la convergencia puntual» cuya abreviación coloquial es «C_p-teoría».

Muchas estructuras concurren en los objetos $C_p(X)$. Ellos son grupos topológicos, espacios vectoriales reales topológicos y anillos topológicos. Esta última estructura logra codificar toda la información topológica de un espacio Tychonoff. Este hecho fue demostrado por Nagata en su célebre teorema que muestra que dos espacios de Tychonoff son homeomorfos si y solo si sus correspondientes anillos topológicos son topológicamente isomorfos.

Resulta muy natural preguntarse, y esto debido a que los espacios $C_p(X)$ son, como hemos dicho, espacios topológicos, espacios vectoriales topológicos, y grupos topológicos, si en cada uno de esos casos existen resultados análogos al de Nagata; la respuesta es negativa. Por ejemplo, en 1986 Gul'ko y Khmyleva demostraron que los espacios de funciones $C_p(\mathbb{R})$ y $C_p([0,1])$ son homeomorfos, lo que muestra que no se tiene un resultado análogo al de Nagata para el caso en que $C_p(X)$ sea homeomorfo a $C_p(Y)$.

Este hecho negativo ha resultado en líneas de investigación en la C_p-teoría que buscan identificar propiedades topológicas de los espacios base X que sean «codificadas adecuadamente» por alguna de las restantes estructuras de $C_p(X)$ (la estructura de grupo topológico, la de espacio vectorial topológico, o la de espacio topológico), de manera tal que puedan ser «transmitidas» a un espacio Y en el supuesto que los correspondientes espacios de funciones $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ sean identicos con la estructura topológico-algebráica correspondiente (es decir, ya sea como grupos topológicos, o como espacios vectoriales reales topológicos, o simplemente como espacios topológicos).

En este trabajo con las propiedades que tengan la anterior propiedad en el supuesto en que $C_p(X)$ es solo un espacio topológico.

Evidentemente, si deseamos codificar una propiedad topológica $\mathcal{P}$ con la sóla estructura de espacio topológico de $C_p(X)$, entonces requerimos probar la existencia de una propiedad topológica $\mathcal{Q}$ de modo que: X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si y solo si $C_p(X)$ tiene la propiedad $\mathcal{Q}$. Cuando uno obtiene un resultado de tipo: X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si y solo si $C_p(X)$ tiene la propiedad $\mathcal{Q}$, hemos obtenido un teorema de *dualidad*.

Por ello nos enfocaremos en dar pruebas de teoremas de dualidad que relacionan a funciones cardinales del espacio base con funciones cardinales del espacio de funciones correspondiente. De manera más precisa, daremos demostraciones de los teoremas de dualidad más clásicos de tipo: Para todo espacio Tychonoff X, se tiene que $\theta(C_p(X)) = \phi(X)$, donde ϕ y θ son funciones cardinales topológicas.

El presente está dividido en cuatro capítulos y tres apéndices.

En el primer capítulo desarrollamos en secciones separadas temas básicos de la topología general y algunos otros del ámbito de la C_p-teoría como lo son los temas de calibrees y precalibres y el de mapeos $\mathbb{R}$-cocientes.

En el segundo capítulo nos enfocamos en desarrollar la teoría básica de la C_p-teoría. En este capítulo desarrollamos los temas de las propiedades básicas de los espacios de funciones y las funciones asociadas como lo son las funciones duales y las funciones restricción. También, enunciamos algunas consecuencias del teorema de factorización de Arkhangel'skii, el cual es demostrado en el primer apéndice de este trabajo de tesis.

El tercer capítulo está enteramente dedicado a la prueba del teorema de Nagata; desarrollando las propiedades necesarias del mapeo reflexión.

Finalmente, en el cuarto capítulo se desarrollan las demostraciones de los principales teorema de dualidad para funciones cardinales topológicas en el ámbito de la C_p-teoría.

Como lo hemos mencionado líneas arriba, en el primer apéndice de esta tesis exponemos una demostración del teorema de factorización de Arkhangel'skii. En el segundo apéndice enunciamos algunas definiciones y resultados básicos de la teoría de las funciones cardinales topológicas. En el tercer y último apéndice, enunciamos y demostramos el lema del Δ-sistema, el cual es usado en algunas pruebas de calibres y precalibres que se desarrollan en el capítulo uno.

Se presupone que el lector tiene conocimientos básicos de topología general y de teoría de conjuntos. Dos referencias importantes para estos dos temas son los libros [6] y [9]. Los siguientes textos son buenas referencias en idioma español: [5], [7].

Los materiales de la primera sección del capítulo 1 son tomados de [3]. Las restantes tres secciones del capítulo 1 son basadas en [2]. El capítulo 2 está basado en materiales de [2] y [4]. El capítulo 3 está basado en [4]. Finalmente, el capítulo 4 está basado en materiales tomados de [1], [11] y [10].

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tiene como fin presentar algunos resultados de topología general que nos serán de utilidad en el desarrollo posterior del trabajo. A pesar de que $\emptyset$ es un espacio topológico, a lo largo del escrito todos los espacios con los que se trabajará serán siempre no vacíos.

Es importante mencionar que todos los resultados mostrados en esta tesis son parte de la axiomática ZFC.

Además, la siguiente notación será frecuentemente usada a través de todo el trabajo:

- Sí $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $x \in X$, entonces $\mathcal{T}(x, X) = \{U \in \mathcal{T} : x \in \mathcal{T}\}$.
- Sí X es un espacio topológico, entonces los símbolos $\mathcal{T}(X)$ y/o $\mathcal{T}_X$ denotarán a la topología de X.
- Los símbolos λ y κ denotan cardinales infinitos y $\aleph_0$ denota la cardinalidad de $\mathbb{N}$; ω denota el primer ordinal infinito.
- Dado un conjunto X y un cardinal κ, definimos $[X]^{\leqslant \kappa} = \{A \subseteq X : |A| \leqslant \kappa\}$.
- Dados dos conjuntos X y Y, la notación Y^X denota al conjunto de todas las funciones de X en Y. Y la notación $C(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones continuas de X en Y.
- Si $(X.\mathcal{T})$ es un espacio topológico y $A \subseteq X$, denotamos la cerradura de A en $(X, \mathcal{T})$ como:

(1) $cl_{(X,\mathfrak{T})}(A)$ si queremos referirnos a la topología de X o simplemente $cl_{\mathfrak{T}}(A)$ si es claro quien es el espacio base;

(2) $cl_X(A)$ si queremos hacer referencia del espacio sobre el cual se toma la cerradura, o bien;

(3) $cl(A)$ o $\bar{A}$ si es claro sobre el espacio base que se esta trabajando.

1.1. Espacios completamente regulares

En este trabajo supondremos que el lector tiene algunos conocimientos básicos de topología general. En particular, suponemos que el lector conoce a los espacios T_0, T_1 y T_2. Debido a que en este escrito distinguimos a los espacios Tychonoff de los espacios completamente regulares y a los espacios T_3 de los espacios regulares, a continuación recordamos las definiciones de esos conceptos para que el lector los tenga presentes.

Iniciamos con la noción de espacio completamente regular; la cual es original de Urysohn. El material de esta sección es tomado del trabajo [3].

1.1.1 Definición. Sea $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico, decimos que:

1. X es *completamente regular* si para cualquier subconjunto cerrado F de X y cualquier punto $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f[F] \subseteq \{1\}$.
2. X es *Tychonoff* si X es completamente regular y T_0.
3. X es *regular* si para cualquier subconjunto cerrado F de X y cada $x \in X \setminus F$, existen abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $F \subset V$.
4. $(X, \mathfrak{T})$ es T_3 si es regular y T_0.

También se dice que un espacio Tychonoff es un espacio $T_{3,5}$ o $T_{3\frac{1}{2}}$.

1.1.2 Observación.

1. Todo espacio regular T_0 es un espacio Hausdorff. Efectivamente, si $x \neq y$ por el axioma T_0 existe un abierto U tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Supongamos primero que $x \in U$ y que $y \notin U$. Por ello $x \notin \mathrm{cl}(\{y\})$. Como X es regular, existen abiertos ajenos V y W tales que $x \in V$ y $y \in \mathrm{cl}(\{y\}) \subseteq W$. De manera análoga, si $y \in U$ y $x \notin U$ entonces existen abiertos ajenos V y W tales que $y \in V$ y $x \in \mathrm{cl}(\{x\}) \subseteq W$.
2. Si X es un espacio completamente regular, $F \subseteq X$ es un subconjunto cerrado y $x \notin F$ es arbitrario, entonces existe una función continua

$f : X \to [0,1]$ tal que $f[F] \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$. De esta manera, los subconjuntos $A_1 = f^{-1}[(\frac{1}{2}, 1]]$ y $A_2 = f^{-1}[[0, \frac{1}{2})]$ son subconjuntos abiertos de X, son ajenos y satisfacen que $F \subseteq A_1$ y $x \in A_2$. Con ello podemos concluir que todo espacio completamente regular es un espacio regular; y consecuentemente, todo espacio Tychonoff es un espacio regular y T_0, y por tanto, un espacio T_3.

En relación a las propiedades categóricas de la clase de los espacios completamente regulares y de la clase de los espacios Tychonoff tenemos los siguientes hechos.

1.1.3 Proposición.

(1) Todo subespacio Y de un espacio completamente regular X es un espacio completamente regular.

(2) Todo subespacio Y de un espacio Tychonoff X es un espacio Tychonoff.

(3) La imagen continua de un espacio completamente regular no es necesariamente un espacio completamente regular.

Consecuentemente, la imagen continua de espacios Tychonoff no necesariamente es un espacio Tychonoff.

Demostración. (1) Supongamos que $x \in Y \setminus F$, donde F es un subconjunto cerrado del subespacio Y de X. Por lo que existe un subconjunto cerrado G de X de modo que $G \cap Y = F$. Luego $x \notin G$. Como X es completamente regular, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f[G] \subseteq \{1\}$. Es sencillo verificar que la composición $f \circ i : Y \to [0,1]$, donde $i : Y \to X$ es la función inclusión, es una función continua, y que $(f \circ i)(x) = 0$ y $(f \circ i)[F] \subseteq \{1\}$.

(2) Como el axioma de separación T_0 se hereda por subespacios, esto y el inciso (1) implican que todo subespacio de un espacio Tychonoff es un espacio Tychonoff.

(3) Definamos $(X, \tau) = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ y como $(Y, \theta) = (\mathbb{R}, \theta)$, donde $\theta = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. El espacio (X, τ) es completamente regular porque si F es un cerrado en X y $x \notin F$ entonces la función característica $\chi_F : X \to [0,1]$ es continua, $\chi_F(x) = 0$ y $\chi_F[F] \subseteq \{1\}$; pero el espacio (Y, θ) no es ni siquiera un espacio regular y es imagen continua de X bajo la función identidad. La razón por la que Y no es un espacio regular es porque, por ejemplo, el subconjunto $(-\infty, 0]$ es cerrado en Y pero no existen abiertos ajenos en Y que lo separen del número real 1. ∎

1.1.4 Observación. No obstante a que la imagen continua de un espacio completamente regular no es necesariamente completamente regular, es sencillo demostrar que todo espacio homeomorfo a un espacio completamente regular es completamente regular. Obviamente, esto es también cierto para los espacios Tychonoff. Dejamos los detalles al lector.

Más adelante se probará que la clase de los espacios completamente regulares es cerrada bajo productos. Lo que haremos enseguida es dar una caracterización de la regularidad completa (vea el corolario 1.1.11). Para demostrar esta caracterización usaremos la noción de familia de funciones que genera una topología. A continuación introducimos esta noción.

1.1.5 Definición. Sean (X, τ) un espacio topológico, $\{(Y_j, \tau_j) : j \in J\}$ una colección de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_j : X \to Y_j : j \in J\}$ una familia de funciones. Diremos que la familia de funciones $\mathcal{F}$ *genera la topología* de X si la colección $\{f_j^{-1}(U) : U \in \tau_j,\ j \in J\}$ es una subbase para τ. Si $\mathcal{F}$ genera a la topología de (X, τ) escribiremos $\tau = {}_{\mathcal{F}}\tau$.

Es un hecho fácil de demostrar que si la familia $\mathcal{F}$ genera a la topología de X, entonces todo elemento de $\mathcal{F}$ resulta ser una función continua. De hecho, si $\mathcal{F}$ genera a la topología de X entonces τ es la más pequeña topología en X que hace continua a cada función en $\mathcal{F}$.

1.1.6 Ejemplo. Si $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ es una colección no vacía de espacios topológicos, entonces la topología producto (o de Tychonoff) en el producto cartesiano $\prod_{j\in J} X_j$ es la única topología que es generada por la colección $\delta = \{p_i^{-1}(U) : U \in \tau_i,\ i \in J\}$ como una subbase, donde $p_i : \prod_{j\in J} X_j \to X_i$ es la proyección asociada al factor X_i (para cada $i \in J$), es decir, $p_i(f) = f(i)$ para cada $f \in \prod_{j\in J} X_j$. Así la familia de funciones proyección $\mathcal{F} = \{p_i : \prod_{j\in J} X_j \to X_i : i \in J\}$ es un ejemplo de una familia de funciones que genera una topología (en este caso, a la topología producto $\mathcal{T}$).

Para demostrar nuestra primera caracterización, y a la par llegar a que el producto de espacios completamente regulares es un espacio completamente regular, requeriremos de dos propiedades básicas de familias de funciones que generan topologías. En la demostración de esas propiedades usaremos al máximo y al mínimo de una colección finita de funciones.

Recuerde que si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son funciones entonces se definen a las funciones $\text{máx}\{f, g\}, \text{mín}\{f, g\} : X \to \mathbb{R}$ por medio de las siguientes reglas de asociación:

$$\text{máx}\{f, g\}(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\} \quad \text{y} \quad \text{mín}\{f, g\}(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}.$$

Debido a que

$$\text{máx}\{f, g\} = \tfrac{(f+g)+|f-g|}{2} \quad \text{y} \quad \text{mín}\{f, g\} = \tfrac{(f+g)-|f-g|}{2}$$

es fácil demostrar que si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son funciones continuas entonces también lo son las funciones $\text{máx}\{f, g\}$ y $\text{mín}\{f, g\}$.

1.1.7 Proposición. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Supongamos que la familia $\mathcal{F} = \{f_j : X \to Y_j : j \in J\}$ genera a la topología de X, donde $\{(Y_j, \tau_j) : j \in J\}$ es una familia de espacios topológicos.*

(1) Una función $h : Z \to X$ es continua si y sólo si cada función composición $f_j \circ h$ es continua.

(2) Si la topología de cada espacio Y_j es generada a su vez por una familia de funciones $\mathcal{G}_j$, entonces la familia de funciones composición $\mathcal{H} = \{g \circ f_j : g \in \mathcal{G}_j, j \in J\}$ genera a la topología de (X, τ).

(3) Si cada espacio (Y_j, τ_j) es completamente regular, entonces el espacio (X, τ) es completamente regular.

Demostración. (1) [$\Rightarrow$] Como $\mathcal{F}$ genera a la topología de X, cada función f_j es continua. Por lo tanto, cada función composición $f_j \circ h$ es continua.

[$\Leftarrow$] Como $\mathcal{F}$ genera a la topología de X, la colección $\{f_j^{-1}[U] : U \in \tau_j, j \in J\}$ es una subbase de (X, τ). Así que para verificar la continuidad de h es suficiente demostrar que la siguiente proposición es verdadera:

$$\big(\forall\, j \in J, \forall\, U \in \tau_j\big)\,\big(h^{-1}[f_j^{-1}[U]] \in \tau_Z\big),$$

donde τ_Z denota a la topología de Z. Supongamos entonces que $j \in J$ y que $U \in \tau_j$. Note ahora que como la composición $f_j \circ h$ es continua, obtenemos que $h^{-1}[f_j^{-1}[U]] = (f_j \circ h)^{-1}[U] \in \tau_Z$.

(2) Supongamos que $U \in \tau$ y que $x \in U$ es cualquier elemento. Como la familia $\mathcal{F}$ genera a τ, existen $j_1, \dots, j_n \in J$ y abiertos U_{j_i} de Y_{j_i}, para cada $i = 1, \dots, n$, tales que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_{j_i}^{-1}[U_{j_i}] \subseteq U$. Resulta que $f_{j_i}(x) \in U_{j_i}$ para cada $i = 1, \dots, n$. Como la topología del espacio Y_{j_i} es generada por la correspondiente familia $\mathcal{G}_{j_i}$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe una subcolección $\{g_{k,j_i} : k \in K_{j_i}\}$ de $\mathcal{G}_{j_i}$ y abiertos W_{k,j_i}, en los espacios contradominio de las funciones g_{k,j_i}, para toda $k \in K_{j_i}$ (donde K_{j_i} es un conjunto finito no vacío) de modo que

$$f_{j_i}(x) \in \bigcap_{k \in K_{j_i}} g_{k,j_i}^{-1}[W_{k,j_i}] \subseteq U_{j_i},$$

para toda $i = 1, \ldots, n$. En consecuencia

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{k \in K_{j_i}} (g_{k,j_i} \circ f_{j_i})^{-1}[W_{k,j_i}] \subseteq U.$$

Por lo tanto, la familia de funciones $\mathcal{H}$ genera a la topología de X.

(3) Consideremos un subconjunto cerrado F de (X, τ) y un punto $x \in X \setminus F$. Como $x \in X \setminus F$, F es cerrado y la familia $\mathcal{F}$ genera a τ, existen una cantidad finita de índices $j_1, j_2, \ldots, j_n \in J$ y subconjuntos abiertos U_{j_i} de Y_{j_i} para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $x \in B = \bigcap_{i=1}^{n} f_{j_i}^{-1}[U_{j_i}] \subseteq X \setminus F$. Como $x \in B$, se sigue que $f_{j_i}(x) \in U_{j_i}$ (para toda $i = 1, 2, \ldots, n$). Siendo cada espacio Y_{j_i} un espacio completamente regular, existe una función continua $\phi_i : Y_{j_i} \to [0, 1]$ tal que $\phi_i(f_{j_i}(x)) = 0$ y $\phi_i[Y_{j_i} \setminus U_{j_i}] \subseteq \{1\}$.

Definamos $g_i : X \to [0, 1]$ como la composición $g_i = \phi_i \circ f_{j_i}$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, y definamos $g : X \to [0, 1]$ como la función $g = \max\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Debido a que cada una de las funciones g_i es una función continua, la función g es una función continua. Además, sucede que

$$g(x) = \max\{g_i(x) : i = 1, 2, \ldots, n\} = \max\{\phi_i(f_{j_i}(x)) : i = 1, 2, \ldots, n\} = 0$$

y si $y \in X \setminus B$ entonces $f_{j_i}(y) \notin U_{j_i}$ para alguna i, por lo cual $\phi_i(f_{j_i}(y)) = 1$ para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. En consecuencia, $g(y) = \max\{g_i(y) : i = 1, 2, \ldots, n\} = \max\{\phi_i(f_{j_i}(y)) : i = 1, 2, \ldots, n\} = 1$. Por lo tanto, se ha mostrado la existencia de una función continua $g : X \to [0, 1]$ tal que $g(x) = 0$ y $g(F) \subseteq \{1\}$. Esto es, (X, τ) es un espacio completamente regular. ■

Utilizando la proposición 1.1.7 es simple demostrar los siguientes hechos de espacios completamente regulares. Para el caso de espacios Tychonoff recuerde que la propiedad de ser un espacio T_0 se preserva por productos, por subespacios y por homeomorfismos.

1.1.8 Proposición.

(1) El producto topológico es un espacio completamente regular si y sólo si cada factor es un espacio completamente regular.

(2) El producto topológico es un espacio Tychonoff si y sólo si cada factor es un espacio Tychonoff.

Demostración. (1) Sea $\{(X_j, \tau_j) : j \in J\}$ una colección no vacía de espacios topológicos.

[$\Rightarrow$] Supongamos que el producto topológico $(\prod_{j\in J} X_j, \tau)$ (vea el ejemplo 1.1.6) es un espacio completamente regular. Como estamos suponiendo válido el axioma de elección, podemos fijar un elemento $f \in \prod_{j\in J} X_j$. Consideremos cualquier $j \in J$. Defina

$$Z = \{g : J \to \bigcup_{i\in J} X_j : (\forall\, i \in J \setminus \{j\})(g(i) = f(i)) \;\;\&\;\; g(j) \in X_j\}.$$

Resulta que el conjunto Z con la topología de subespacio respecto del producto topológico $(\prod_{j\in J} X_j, \tau)$ es homeomorfo a (X_j, τ_j). Debido a que $(\prod_{j\in J} X_j, \tau)$ es un espacio completamente regular, por el inciso (1) de la proposición 1.1.3 y la observación 1.1.4, podemos concluir que (X_j, τ_j) es un espacio completamente regular.

[$\Leftarrow$] Supongamos ahora que cada espacio (X_j, τ_j) es un espacio completamente regular. Como la familia de las funciones proyección $\mathcal{F} = \{\pi_i : \prod_{j\in J} X_j \to X_i : i \in J\}$ genera a la topología de $(\prod_{j\in J} X_j, \tau)$ (vea el ejemplo 1.1.6), y dado que cada espacio (X_j, τ_j) es completamente regular, podemos aplicar el inciso (3) de la proposición 1.1.7 para concluir que $(\prod_{j\in J} X_j, \tau)$ es un espacio completamente regular.

(2) Debido a que el producto topológico de una colección de espacios es T_0 si y sólo si cada factor es un espacio T_0, el resultado del inciso (2) es consecuencia de este hecho y del inciso (1). ∎

1.1.9 Observación. Si $f : X \to Y$ es una función entre espacios topológicos y Y es un subespacio topológico de un espacio Z, entonces podemos definir a la función $\overline{f} : X \to Z$ por medio de la regla: $\overline{f}(x) = f(x)$ para cada $x \in X$. Resulta que f es continua si y sólo si $\overline{f}$ es continua. Efectivamente, simplemente note que para cualquier subconjunto V de Z (en particular, para cualquier subconjunto abierto) se tiene que $\overline{f}^{-1}[V] = f^{-1}[V \cap Y]$.

De la definición de la topología producto y de la observación anterior se obtiene lo siguiente.

1.1.10 Proposición. *Supongamos que $\{(X_j, \tau_j) : j \in J\}$ es una colección no vacía de espacios topológicos. Sea $Y \subseteq \prod_{j\in J} X_j$ con la topología de subespacio respecto del producto topológico $\prod_{j\in J} X_j$. Se sigue que una función $f : Z \to Y$ de un espacio Z en el subespacio Y es continua si y sólo si $p_i \circ f$ es continua para cada $i \in J$.*

Demostración. Simplemente aplique el hecho de que la topología producto es la topología generada por la familia de funciones proyección (vea el ejemplo

1.1.6)
$$\mathcal{F} = \{p_i : \prod_{j \in J} X_j \to X_i : i \in J\}$$

y aplique la observación anterior 1.1.9 y el hecho de que la composición de funciones continuas es una función continua. ■

En la demostración del corolario siguiente, en el que se establece una caracterización de los espacios completamente regulares, haremos uso de la observación 1.1.9.

1.1.11 Corolario. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio topológico* (X, τ)*:*

(1) (X, τ) *es un espacio completamente regular;*

(2) la familia de funciones $C(X, [0, 1])$ *genera a la topología de* (X, τ)*;*

(3) la familia de funciones $C^*(X)$ *genera a la topología de* (X, τ)*;*

(4) la familia de funciones $C(X)$ *genera a la topología de* (X, τ)*.*

Demostración.
[(1) ⇒ (2)]. Demostremos primero la siguiente afirmación.

Afirmación. La colección $\mathcal{B} = \{f^{-1}[[0, 1)] : f \in C(X, [0, 1])\}$ es una base para la topología τ.

En efecto. Supongamos que U un abierto no vacío de X y x un punto cualquiera de U. Como X es completamente regular y $x \notin X \setminus U$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f[X \setminus U] \subseteq \{1\}$. Por lo que $x \in f^{-1}[[0, 1)] \subseteq U$. De esta forma, hemos mostrado que la colección $\mathcal{B} = \{f^{-1}[[0, 1)] : f \in C(X, [0, 1))\}$ es una base para la topología de X. ⊠.

Notemos ahora que como la coleción $\mathcal{B} = \{f^{-1}[[0, 1)] : f \in C(X, [0, 1])\}$ es una base para la topología de (X, τ), también lo es la colección

$$\mathcal{D} = \{f^{-1}[U] : f \in C(X, [0, 1]),\ U \subseteq [0, 1] \text{ es abierto en el espacio } [0, 1]\}.$$

Por ello, la familia $C(X, [0, 1])$ genera a la topología de X.

[(2) ⇒ (3)]. Para demostrar que la familia de funciones $C^*(X)$ genera a la topología de X, supongamos que U un abierto no vacío de X y que x es un punto cualquiera de U. Debido a que $C(X, [0, 1])$ genera a la topología de X, existen funciones $f_1, \ldots, f_n \in C(X, [0,1])$ y subconjuntos abiertos $W_1, \ldots, W_n$ de $[0,1]$ tales que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}[W_i] \subseteq U.$$

Fijemos abiertos $V_1, \ldots, V_n$ de la topología usual de $\mathbb{R}$ de modo que $W_i = V_i \cap [0,1]$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Para cada función f_i consideremos a su correspondiente función $\overline{f}_i : X \to \mathbb{R}$ (vea la observacion 1.1.9). Note que como $Im(\overline{f}_i) = \{\overline{f}_i(x) : x \in X\} = \{f_i(x) : x \in X\} \subseteq [0,1]$ para toda i, cada función $\overline{f}_i$ es un elemento de $C^*(X)$. Además es sencillo notar que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{f}_i^{-1}[V_i] = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}[W_i] \subseteq U.$$

De esta manera hemos probado que la colección

$$\delta = \{g^{-1}(V) : g \in C^*(X), V \in \tau_{\mathbb{R}}\}$$

es una subbase de la topología de X; es decir, $C^*(X)$ genera a la topología de X.

[(3) $\Rightarrow$ (4)]. Para demostrar que la familia de funciones $C(X)$ genera a la topología de X, supongamos que U un abierto no vacío de X y que x es un punto cualquiera de U. Debido a que $C^*(X)$ genera a la topología de X, existen funciones $f_1, \ldots, f_n \in C^*(X)$ y subconjuntos abiertos $W_1, \ldots, W_n$ de $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ tales que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}[W_i] \subseteq U.$$

Como $C^*(X) \subseteq C(X)$, lo anterior argumenta que la colección

$$\delta_0 = \{g^{-1}(V) : g \in C(X), V \in \tau_{\mathbb{R}}\}$$

es una subbase de τ; y en consecuencia, $C(X)$ genera a la topología de X.

[(4) $\Rightarrow$ (1)]. Como la topología de X es generada por la familia de funciones $C(X)$, podemos concluir que la topología de X es generada por una familia de funciones cuyos contradominios son espacios completamente regulares (el espacio $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$), el inciso (3) de la proposición 1.1.7 permite concluir que X es un espacio completamente regular. ■

1.2. Redes y su convergencia

En está sección introducimos la convergencia de redes en espacios topológicos generales. Y justificamos el nombre con el que algunos autores se refieren a la topología de subespacio de un producto topológico.

1.2.1 Definición. Una pareja $(A, \leqslant_A)$ en donde A es un conjunto no vacío y $\leqslant_A$ es una relación en A, es un conjunto dirigido si tiene las siguientes propiedades:

1. $\lambda \leqslant_A \lambda$ para toda $\lambda \in A$.
2. Para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in A$ tales que $\lambda_1 \leqslant_A \lambda_2$ y $\lambda_2 \leqslant_A \lambda_3$, se tiene que $\lambda_1 \leqslant_A \lambda_3$.
3. Para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2 \in A$ existe $\lambda_3 \in A$ tal que $\lambda_1 \leqslant_A \lambda_3$ y $\lambda_2 \leqslant_A \lambda_3$.

1.2.2 Ejemplo. Sea X un espacio topológico y consideremos el conjunto $\mathcal{V}(x) = \{V \subseteq X : V \text{ es vecindad de } x \text{ en } X\}$. Así $(\mathcal{V}(x), \leqslant)$ es un conjunto dirigido, donde $U \leqslant V$ si y solo si $V \subseteq U$.

Demostración. (1) Sea $U \in \mathcal{V}(x)$ arbitrario. Como $U \subseteq U$, entonces $U \leqslant U$.

(2) Sean $U, V, W \in \mathcal{V}(x)$ tales que $U \leqslant V$ y $V \leqslant W$. Por lo que $W \subseteq V$ y $V \subseteq U$. Luego por la transitividad de $\subseteq$ se tiene que $W \subseteq U$; por ello $U \leqslant W$, como se quería.

(3) Sean $U, V \in \mathcal{V}(x)$ arbitrarios. Como U y V son vecindades de x, entonces $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$. Además, $U \cap V \subseteq U$ y $U \cap V \subseteq V$, es decir $U \leqslant U \cap V$ y $V \leqslant U \cap V$ como se quería.

Por lo tanto $(\mathcal{V}(x), \leqslant)$ es un conjunto dirigido. ∎

1.2.3 Definición. Una *red en un conjunto* Z es una función $r : \Lambda \to Z$ donde Λ es un conjunto dirigido. Al punto $r(\lambda)$ se le denota x_λ y la expresión «$r : \Lambda \to Z$ es una red» se escribe también $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

1.2.4 Definición. Decimos que una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en un espacio topológico Z converge a un punto $x \in Z$, lo cual representamos escribiendo $x_\lambda \to x$, si para cada vecindad de x en Z existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in V$ para cada $\lambda \geqslant \lambda_0$ (el punto x es llamado *un límite de la red*).

El siguiente resultado nos dice que cualquier espacio topológico (X, τ) está completamente determinado por la convergencia de sus redes.

1.2.5 Proposición. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Por ello $x_0 \in cl_X(A)$ si y solo si existe una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en A que converge a x_0 en X.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Sea $x_0 \in cl_X(A)$ y consideremos el conjunto dirigido $(\mathcal{V}(x_0), \leqslant)$. Como $x_0 \in cl_X(A)$, entonces para cada $V \in \mathcal{V}(x_0)$ se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$. Por lo cual podemos fijar un punto $x_V \in V \cap A$. Consideremos la red $(x_V)_{V\in\mathcal{V}(x_0)}$.

Afirmación. $(x_V)_{V\in\mathcal{V}(x_0)}$ converge a x_0 en X.

En efecto: Sea $U \in \mathcal{V}(x_0)$ arbitrario. Note que para cada $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tal que $U \leqslant V$ entonces $V \subseteq U$. Como $x_V \in V \subseteq U$, entonces $x_V \in U$. Por lo tanto $(x_V)_{V\in\mathcal{V}(x_0)}$ converge a x_0.

[$\Leftarrow$] Supongamos que existe una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en A que converge a x_0 en X. Sea V una vecindad de x_0 en X. Como $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x_0 en X, entonces existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in V$ para cada $\lambda \geqslant \lambda_0$. Dado que $x_\lambda \in A$ y $x_\lambda \in V$, tenemos que $A \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto $x_0 \in cl_X(A)$. ∎

1.2.6 Corolario. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Por ello A es cerrado si y solo si el límite de cada red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en A pertenece a A.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Supongamos que A es cerrado. Sea $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en A que converge a x_0.
Mostremos que $x_0 \in A$. Lo cual es sencillo, ya que por la proposición 1.2.5 como $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x_0, se sigue que $x_0 \in cl_X(A)$. Pero ya que A es cerrado, se tiene que $x_0 \in A$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que el límite de cualquier red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en A pertenece a A. Mostremos que A es cerrado, para ello bastará demostrar que $cl_X(A) \subseteq A$. Con este propósito, sea $x_0 \in cl_X(A)$. Luego por la proposición 1.2.5 existe $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en A tal que converge a x_0. Por la suposición hecha se tiene entonces que $x_0 \in A$, es decir $cl_X(A) \subseteq A$ como se quería. ∎

En el caso de los espacios de funciones Z^X es natural decir que una red de funciones $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ en Z^X (donde X es un conjunto no vacío y Z es un espacio topológico), *converge puntualmente a una función* $f_0 \in Z^X$ si para toda $x \in X$ la red $(f_\alpha(x))_{\alpha\in A}$ converge a $f_0(x)$ en el espacio topológico Z.

Observemos que en la anterior noción de convergencia puntual de una red de funciones no hay (por el momento) una topología inmiscuida para Z^X.

Una pregunta muy natural es entonces la siguiente: ¿existe alguna topología en Z^X en la que la convergencia de redes respecto a esa topología sea equivalente a la convergencia puntual de redes de funciones? La siguiente proposición da una respuesta a este planteamiento.

1.2.7 Proposición. *Existe una única topología en Z^X tal que la convergencia puntual de redes en Z^X coincide con la convergencia en el sentido de esta topología. Esta topología es la topología producto en Z^X.*

Demostración. Primero demostraremos que la convergencia de redes en la topología producto coincide con la convergencia puntual. Supongamos que $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ es una red en Z^X que converge puntualmente a $f_0 \in Z^X$. Demostremos que $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge a f_0 en la topología producto. Sea V una vecindad de f_0 en Z^X arbitraria. Bastará demostrar que existe $\alpha_0 \in A$ tal que $f_\alpha \in V$ para toda $\alpha \geqslant \alpha_0$. Como Z^X esta dotado de la topología producto. Por ello existe un elemento básico típico de Z^X

$$U = \{g \in Z^X : g(x_1) \in V_1, \ldots, g(x_n) \in V_n\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $V_1, \ldots, V_n \in \tau(Z)$. Ahora, como la red $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ en Z^X converge puntualmente a $f_0 \in Z^X$, entonces la red $(f_\alpha(x))_{\alpha\in A}$ en Z converge a $f_0(x) \in Z$ para cada $x \in X$; en particular la red $(f_\alpha(x_i))_{\alpha\in A}$ en Z converge a $f_0(x_i) \in Z$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $(f_\alpha(x_i))_{\alpha\in A}$ converge a $f_0(x_i)$, entonces para cada $V_i \in \tau(f_0(x_i), Z)$ existe $\alpha_i \in A$ tal que $f_\alpha(x_i) \in V_i$ para cada $\alpha \geqslant \alpha_i$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$. Puesto que A es un conjunto dirigido, entonces existe $\alpha_0 \in A$ tal que $\alpha_i \leqslant \alpha_0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Así que si $\alpha \geqslant \alpha_0$, entonces $\alpha_i \leqslant \alpha$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por ello $f_\alpha(x_i) \in V_i$ para toda $\alpha \geqslant \alpha_0$, de lo cual se sigue que $f_\alpha \in U$ para toda $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Por lo tanto $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge a f_0 en la topología producto.

Ahora verifiquemos que si $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ es una red en Z^X que converge a $f_0 \in Z^X$ en la topología producto de Z^X, entonces $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge puntualmente a f_0. Sea $x \in X$ arbitrario y V un abierto en Z tal que $f_0(x) \in V$. Bastará demostrar que existe $\alpha_0 \in A$ tal que $f_\alpha(x) \in V$ para todo $\alpha \geqslant \alpha_0$. Es claro que $U = \{g \in Z^X : g(x) \in V\}$ es un abierto básico de la topología producto de Z^X y tal que $f_0 \in U$. Como $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge a $f_0 \in Z^X$ con la topología producto, entonces existe $\alpha_0 \in A$ tal que $f_\alpha \in U$ para todo $\alpha \geqslant \alpha_0$, es decir existe $\alpha_0 \in A$ tal que $f_\alpha(x) \in V$ para todo $\alpha \geqslant \alpha_0$. Por lo tanto $(f_\alpha(x))_{\alpha\in A}$ converge a $f_0(x)$ en Z.

Por último veamos que la topología producto es única con la anterior propiedad. Supongamos que τ_1 y τ_2 son dos topologías en Z^X tales que la convergencia de redes en (Z^X, τ_i) coincide con la convergencia puntual, para $i \in \{1, 2\}$.

Demostremos que si $B \subseteq Z^X$ ($B \neq \emptyset$), entonces $cl_{\tau_1}(B) = cl_{\tau_2}(B)$.

[$\subseteq$] Sea $f \in cl_{\tau_1}(B)$, entonces por la proposición 1.2.5 existe una red $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ en B tal que converge a f en la topología τ_1. Luego por hipótesis $(f_\alpha(x))_{\alpha \in A}$ converge a $f(x)$ en Z para toda $x \in X$. En consecuencia $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a f en la topología τ_2. Así $f \in cl_{\tau_2}(B)$. Por ello $cl_{\tau_1}(B) \subseteq cl_{\tau_2}(B)$.

[$\supseteq$] Se prueba de manera análoga.

Por lo tanto $cl_{\tau_1}(B) = cl_{\tau_2}(B)$. ∎

No es difícil verificar la siguiente proposición; cuya utilidad se verá reflejada en la prueba del teorema 1.2.9.

1.2.8 Proposición. *Sean X un espacio topológico, $Y \subseteq X$ un subespacio de X, $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red en Y y $x_0 \in Y$. Por ello $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a x_0 en Y si y solo si $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a x_0 en X.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Supongamos que $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a x_0 en Y. Sea V una vecindad de x_0 en X arbitraria. Debemos demostrar que existe $\alpha_0 \in A$ tal que $x_\alpha \in V$ para toda $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Como $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a x_0 en Y y $V \cap Y$ es una vecindad de x_0 en Y existe $\alpha_0 \in A$ tal que $x_\alpha \in V \cap Y$ para toda $\alpha \geqslant \alpha_0$. En particular para cada $\alpha \geqslant \alpha_0$ se tiene que $x_\alpha \in V$. Por ello $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a x_0 en X.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a x_0 en X. Sea V una vecindad de x_0 en Y arbitraria. Por lo que existe U una vecindad de x_0 en X tal que $V = U \cap Y$. Como $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a x_0 en X, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \geqslant \alpha_0$. Así, $x_\alpha \in U \cap Y = V$ para todo $\alpha \geqslant \alpha_0$. ∎

1.2.9 Teorema. *Supongamos que $\emptyset \neq M \subseteq Z^X$. Una red en M converge puntualmente a un elemento $f \in M$ si y solo si converge en M con la topología heredada de la topología producto de Z^X.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Sea $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red en M que converge puntualmente a $f \in M$. Por lo cual para toda $x \in X$ se cumple que $(f_\alpha(x))_{\alpha \in A}$ converge a $f(x)$ en Z. Como $M \subseteq Z^X$ podemos ver que $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ es una red en Z^X que converge puntualmente a f en Z^X. Por la proposición 1.2.7 $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a f en la topología producto de Z^X.

Por ello si equipamos a M con la topología heredada de la topologia producto de Z^X, entonces por la proposición 1.2.8 concluimos que $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a f en M (M con la topología producto heredada de Z^X).

[$\Leftarrow$] Sea $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ una red en M que converge a f en M con la topología producto de Z^X. Así por la proposición 1.2.7 converge puntualmente a f en M. ■

Todo lo anterior motiva la siguiente definición.

1.2.10 Definición. Sea X un conjunto no vacío y Z un espacio topológico. Consideremos $\emptyset \neq M \subseteq Z^X$. *La topología de la convergencia puntual* en M es la topología de subespacio de Z^X, cuando Z^X esta equipado con la topología producto.

Todo lo que hemos desarrollado en páginas anteriores justifica el nombre que le damos en esta definición y con el que en ocasiones se refieren algunos autores a la topología de un producto topológico de Tychonoff y a la topología de sus subespacios.

Por otro lado, se sabe también que la topología producto de Z^X es generada por la familia de todas las funciones proyección. La proyección correspondiente a un punto $x \in X$ asigna a cada función $f \in Z^X$ el punto $f(x)$. En el contexto de espacios de funciones esta función es llamada *función evaluación* y es denotada por $\hat{x}$. Es decir, para cada $x \in X$, $\hat{x} : Z^X \to Z$ es la función definida por la regla: $\hat{x}(f) = f(x)$, para cada $f \in Z^X$.

En la siguiente proposición enunciaremos propiedades conocidas de la topología de subespacio de un producto topológico.

1.2.11 Proposición. *Sean X un conjunto no vacío, Z un espacio topológico y $\emptyset \neq M \subseteq Z^X$.*

Si M esta equipado con la topología de la convergencia puntual, entonces:

(1) La topología de M es generada por la familia de funciones evaluación $\hat{x}\restriction_M$, donde $x \in X$.

(2) Los conjuntos de la forma

$$[x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n] := \{g \in M : g(x_1) \in V_1, \ldots, g(x_n) \in V_n\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $V_1, \ldots, V_n \in \tau(Z)$, forman una base para M.

(3) Una función $h : Y \to M$ de un espacio topológico Y a M es continua si y solo si la composición $\hat{x}\restriction_M \circ h$ es continua para toda $x \in X$.

(4) Si Z es un espacio de Tychonoff, entonces M es un espacio Tychonoff.

Demostración. (1) Para demostrar que la familia $\{\hat{x} \restriction_M : x \in X\}$ genera a la topología de M, bastará mostrar que la familia

$$\mathcal{B} := \{\bigcap_{i=1}^n (\hat{x_i} \restriction_M)^{-1}(V_i) : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X \text{ y } V_1, \ldots, V_n \in \tau(Z)\}$$

es base para M.

Primero demostraremos que la familia $\mathcal{B}$ está formada por subconjuntos abiertos de M. Para ello note que dado $V \in \mathcal{B}$

$$V = \bigcap_{i=1}^n (\hat{x_i} \restriction_M)^{-1}(V_i) = \bigcap_{i=1}^n (\hat{x_i}^{-1}(V_i) \cap M)$$

con $n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X$ y $V_1, \ldots, V_n \in \tau(Z)$. Por lo tanto $\mathcal{B} \subseteq \tau(M)$.

Ahora sea $U \in \tau(M)$ y consideremos $f \in U$. Luego $U = V \cap M$ con $V \in \tau(Z^X)$; por ello $f \in V$. Luego existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $W_1, \ldots, W_n \in \tau(Z)$ con $n \in \mathbb{N}$, tales que $f \in \bigcap_{i=1}^n \hat{x_i}^{-1}(W_i) \subseteq V$. Así

$$f \in \left(\bigcap_{i=1}^n \hat{x_i}^{-1}(W_i) \right) \cap M \subseteq V \cap M,$$

esto es $f \in \bigcap_{i=1}^n (\hat{x_i}^{-1}(W_i) \cap M) \subseteq V \cap M = U$ y por ello

$$f \in \bigcap_{i=1}^n (\hat{x_i} \restriction_M)^{-1}(W_i) \subseteq U.$$

Por lo tanto $\mathcal{B}$ es base para M.

(2) Simplemente note que para cada $n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X$ y $V_1, \ldots, V_n \in \tau(Z)$, entonces

$$[x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n] = \bigcap_{i=1}^n (\hat{x_i} \restriction_M)^{-1}(V_i)$$

En efecto, sabemos por definición que

$$[x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n] = \{g \in M : g(x_1) \in V_1, \ldots, g(x_n) \in V_n\}.$$

Por ello $g \in \{g \in M : g(x_1) \in V_1, \ldots, g(x_n) \in V_n\}$ si y solo si $\hat{x_i}(g) \in V_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ si y solo si $g \in (\hat{x_i} \restriction_M)^{-1}(V_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ si y solo si $g \in \bigcap_{i=1}^n (\hat{x_i} \restriction_M)^{-1}(V_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Por lo tanto $[x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n] = \bigcap_{i=1}^n (\hat{x_i} \restriction_M)^{-1}(V_i)$.

(3) $[\Rightarrow]$ Supongamos que $h : Y \to M$ es continua. Sea $x \in X$; como M tiene la topología heredada de Z^X cada función $\hat{x} \restriction_M$ es continua. Luego $\hat{x} \restriction_M \circ h$ es continua para cada $x \in X$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $\hat{x}\restriction_M \circ h$ es continua para cada $x \in X$. Demostraremos que h es continua. Para ello bastará hacer notar que la imagen inversa bajo h de cualquier elemento de la base canónica de M es abierto en Y.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $V_1, \ldots, V_n \in \tau(Z)$, entonces

$$h^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(\hat{x_i}\restriction_M)^{-1}(V_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{n} h^{-1}((\hat{x_i}\restriction_M)^{-1}(V_i)) = \bigcap_{i=1}^{n}((\hat{x_i}\restriction_M)\circ h)^{-1}(V_i).$$

Como $(\hat{x_i}\restriction_M)\circ h$ es continua, tenemos que $((\hat{x_i}\restriction_M)\circ h)^{-1}(V_i)$ es abierto en Y. Por lo tanto $\bigcap_{i=1}^{n}((\hat{x_i}\restriction_M)\circ h)^{-1}(V_i)$ es abierto en Y. Así h es continua.

(4) Sea $F \subseteq M$ cerrado y $x \notin F$. Bastará demostrar que existe $G : M \to \mathbb{R}$ continua tal que $G(x) = 1$ y $G[F] \subseteq \{0\}$. Como $F \subseteq M$ cerrado, entonces $M\backslash F \in \tau(M)$, por ello existen, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $V_1, \ldots, V_n \in \tau(Z)$ para cada $n \in \mathbb{N}$; tales que

$$x \in U = \bigcap_{i=1}^{n}(\hat{x_i}\restriction_M)^{-1}(V_i) \subseteq M\backslash F.$$

Luego $(\hat{x_i}\restriction_M)(x) \in V_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora como Z es completamente regular, existe $\phi_i : Z \to \mathbb{R}$ continua tal que $\phi_i((\hat{x_i}\restriction_M)(x)) = 1$ y $\phi_i[Z\backslash V_i] \subseteq \{0\}$. Definamos $\psi_i = \phi_i \circ (\hat{x_i}\restriction_M) : M \to \mathbb{R}$ la cual es continua pues es composición de funciones continuas y $\Psi = \prod_{i=1}^{n}\psi_i$ que es continua ya que es el producto finito de funciones continuas.

Afirmación. $\Psi(x) = 1$ y $\Psi[F] \subseteq \{0\}$.

En efecto, note que $\psi_i(x) = \phi_i \circ (\hat{x_i}\restriction_M)(x) = \phi_i((\hat{x_i}\restriction_M)(x)) = 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por ello $\Psi(x) = \prod_{i=1}^{n}\psi_i(x) = 1$. $\boxtimes$

Ahora mostremos que $\Psi[F] \subseteq \{0\}$. Para ello dado que $U \subseteq M\backslash F$, entonces $F \subseteq M\backslash U$. Sea

$$z \in M\backslash U = M\backslash\bigcap_{i=1}^{n}(\hat{x_i}\restriction_M)^{-1}(V_i) = \bigcup_{i=1}^{n}(M\backslash(\hat{x_i}\restriction_M)^{-1}(V_i)),$$

entonces $z \in M\backslash(\hat{x_{i_0}}\restriction_M)^{-1}(V_{i_0})$ para algún $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, es decir, $\hat{x_{i_0}}\restriction_M \notin V_{i0}$ para algún $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Como

$$\psi_{i_0}(z) = (\phi_{i_0} \circ (\hat{x_{i_0}}\restriction_M))(z) = \phi_{i_0}((\hat{x_{i_0}}\restriction_M)(z)) = 0$$

y $\Psi(z) = \prod_{i=1}^{n}\psi_i(z) = 0$. En conclusión $\Psi[F] \subseteq \Psi[M\backslash U] \subseteq \{0\}$.

Por lo tanto M es un espacio Tychonoff. ∎

1.3. Espacios vectoriales topológicos

Al hablar de espacios vectoriales topológicos consideraremos dos estructuras; una algebraica de espacio vectorial (para hablar de transformaciones lineales) y otra topológica (para hablar de continuidad). Estas dos estructuras deben ser compatibles; es decir, se tiene un espacio vectorial con una topología asignada que hace que las operaciones de suma y producto por escalares sean continuas.

1.3.1 Definición. Un espacio vectorial $(Z, +, \cdot\,)$ sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$ es un *espacio vectorial topológico sobre* $\mathbb{R}$ si está dotado de una topología que hace continuas a las funciones adición y producto por escalares, es decir, las funciones $+ : Z \times Z \to Z$ y $\cdot : \mathbb{R} \times Z \to Z$ definidas por $(x, y) \mapsto x + y$ y $(r, x) \mapsto r\cdot x$, son funciones continuas.

1.3.2 Definición. Sean X un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ y $\emptyset \neq C \subseteq X$. Decimos que C es *convexo* si

$$\forall x, y \in C(t \in [0, 1] \ y \ tx + (1 - t)y \in C).$$

1.3.3 Definición. Decimos que un espacio vectorial topológico X sobre $\mathbb{R}$ es *localmente convexo* si cada punto de X tiene una base de vecindades formada por conjuntos convexos.

El siguiente lema será muy útil para la proposición 1.3.5.

1.3.4 Lema. *Sea X un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ y sea $x \in X$. La función $T_x : X \to X$ definida por $T_x(y) = x + y$, es un homeomorfismo.*

Demostración. Si $y_1, y_2 \in X$ son tales que $T_x(y_1) = T_x(y_2)$, entonces $x + y_1 = x + y_2$; así $y_1 = y_2$. En consecuencia T_x es inyectiva.
Si $z \in X$ arbitrario, entonces $T_x(z - x) = z$. Por ello T_x es suprayectiva.
Ahora, consideremos la función $\varphi : X \to \{x\} \times X$ definida por:

$$\forall y \in X : \varphi(y) = (x, y).$$

Note que $\varphi = r_x \bigtriangleup id_X$ donde $r_x : X \to X$ es la función $r_x(z) = x$ $(z \in X)$ y $id_X : X \to X$ es la función identidad en X. Como φ es el producto diagonal de una función constante y de la función identidad, φ es una función continua. Debido a que $T_x = + \circ \varphi$ y $+ : X \times X \to X$ es continua, tenemos que T_x es una función continua. Observe que la función inversa de T_x es T_{-x}. Un argumento similar al anterior permite concluir que T_{-x} también es continua. Por lo tanto T_x es un homeomorfismo. ∎

Para subconjuntos B y C de un espacio vectorial topológico X sobre $\mathbb{R}$, definimos $B + C = \{b + c : b \in B,\ c \in C\}$ y $-B := \{-b : b \in B\}$. Si $x \in X$ entonces escribimos $x + B$ en lugar $\{x\} + B$. Note que $x + B = T_x(B)$.

La siguiente propiedad de los espacios vectoriales topológicos sobre $\mathbb{R}$ localmente convexos nos será de gran utilidad posteriormente.

1.3.5 Proposición. *Un espacio vectorial topológico X sobre $\mathbb{R}$ es localmente convexo si y solo si el neutro aditivo* 0 *de X tiene una base de vecindades formada por conjuntos convexos.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Se sigue de la definición de espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ localmente convexo.

[$\Leftarrow$] Sea $\mathcal{B}(0)$ una base de vecindades del 0 en X, tal que U es convexo para todo $U \in \mathcal{B}(0)$.

Sea $x \in X$ arbitrario y considere $\mathcal{B}(x) = \{x + U : U \in \mathcal{B}(0)\}$. Demostremos que $\mathcal{B}(x)$ es base de vecindades de x. Primero note que dado que $U \in \mathcal{B}(0)$ es abierto, entonces por el lema 1.3.4 $T_X(U) = x + U$ es abierto en U. Más aún, debido a que $0 \in U$ se tiene que $x \in x + U$.

Supongamos que $W \in \tau(x, X)$. Bastará demostrar que existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in V \subseteq W$. Como $T_{-x}(W) = -x + W$ es vecindad de 0 (ya que $x \in W$) y debido a que $\mathcal{B}(0)$ es base de vecindades de 0 en X, existe $U \in \mathcal{B}(0)$ tal que $U \subseteq -x + W$. Luego $T_x(U) \subseteq T_x(-x + W)$; es decir, $x + U \subseteq x - x + W = W$. Por lo tanto $x + U \in \mathcal{B}(x)$ y $x + U \subseteq W$.

Por último note que U es convexo para todo $U \in \mathcal{B}(x)$. Efectivamente, como $U \in \mathcal{B}(x)$, existe $V \in \mathcal{B}(0)$ tal que $U = x + V$. Sean $x_1, x_2 \in V$ y $r \in [0, 1]$, entonces $r(x + x_1) + (1 - r)(x + x_2) = rx + rx_1 + (1 - r)x + (1 - r)x_2 = x + rx_1 + (1 - r)x_2$. Dado que V es convexo entonces $rx_1 + (1 - r)x_2 \in V$; y por ello $r(x + x_1) + (1 - r)(x + x_2) = x + rx_1 + (1 - r)x_2 \in x + V = U$. En conclusión x en X tiene una base de vecindades $\mathcal{B}(x)$ formada por conjuntos convexos. Por lo tanto X es localmente convexo. ■

1.3.6 Proposición. *Sean X un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ localmente convexo y Y un subespacio topológico de X. Si Y es un subespacio vectorial de X, entonces Y es localmente convexo.*

Demostración. Debido a que X es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$, las funciones $+ : X \times X \to X$ y $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ son funciones continuas. Se tiene que $+ \restriction_{Y \times Y} : Y \times Y \to Y$ y $\cdot \restriction_{\mathbb{R} \times Y} : \mathbb{R} \times Y \to Y$ son del mismo modo

funciones continuas. De esta forma Y es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$.
Por la proposición 1.3.5 para demostrar que Y es localmente convexo bastará hacer notar que 0 tiene una base de vecindades convexas en Y.
Como X es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ localmente convexo, 0 tiene una base de vecindades convexas $\mathcal{B}(0)$ en X. Definamos $\mathcal{D}(0) = \{Y \cap U : U \in \mathcal{B}(0)\}$. Claramente los elementos de $\mathcal{D}(0)$ son abiertos en Y y contienen a 0.
Supongamos que W es una vecindad abierta de 0 en Y. Por lo que $W = Y \cap V$, donde V es un abierto en X que contiene a 0. Como $\mathcal{B}(0)$ es base de vecindades de 0 en X, existe $U \in \mathcal{B}(0)$ tal que $U \subseteq V$. Por ello $X \cap U \in \mathcal{D}(0)$ y $Y \cap U \subseteq Y \cap V$; es decir, $Y \cap U \subseteq W$.
Por último, sea $U \in \mathcal{B}(0)$. Consideremos $x_1, x_2 \in Y \cap U$ y $r \in [0,1]$. Dado que U es convexo, $rx_1 + (1-r)x_2 \in U$. Además $rx_1 + (1-r)x_2 \in Y$. Por ello, $rx_1 + (1-r)x_2 \in Y \cap U$. Con todo lo anterior hemos mostrado que existe una base de 0 en Y formada por conjuntos convexos. Por lo tanto Y es localmente convexo. ∎

Recuerde que una familia de funciones $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ definidas en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ generan a su topología si la colección $\{f_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \mathcal{T}(Y_\alpha)\}$ es un subbase de la topología $\mathcal{T}$.

1.3.7 Definición. Un espacio vectorial topológico Z sobre $\mathbb{R}$ se llama débil si su topología es generada por la colección

$$\{f : Z \to \mathbb{R} : f \text{ es funcional lineal en } Z\}.$$

Presentamos la siguiente proposición sin demostración.

1.3.8 Proposición. *Todo espacio vectorial topológico débil sobre* $\mathbb{R}$ *es localmente convexo.*

1.3.9 Definición. Un espacio topológico X es conexo por trayectorias si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$, existe una función continua $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

1.4. Calibres y precalibres

Los conceptos de *calibre* y *precalibre* fueron introducidos en 1948 por el matemático ruso N. A. Šanin. En esta sección demostraremos que para que un cardinal regular no numerable sea *calibre* de un producto topológico es suficiente que éste sea *calibre* de cada factor.

1.4.1 Definición. Sea X un espacio topológico y κ un número cardinal infinito.

1. κ es *calibre* de X si para cada $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(X)$ existe $B \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in B\} \neq \emptyset$.
2. κ es *precalibre* de X si para cada $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(X)$ existe $B \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{U_\alpha : \alpha \in B\}$ es una familia centrada (es decir, posee la propiedad de la intersección finita).

Recordemos que dados α y β dos ordinales, α es *cofinal* en β sí y sólo si existe $f \in \beta^\alpha$ tal que para cada $\gamma < \beta$ hay un $\delta < \alpha$ que satisface $\gamma \leqslant f(\delta)$. Se define de este modo la *cofinalidad* de un ordinal α como el primer ordinal que es cofinal con α y es denotada por $cf(\alpha)$.

Es claro que $cf(\alpha) \leqslant \alpha$ para todo ordinal α. Esto da paso a las siguientes definiciones: un ordinal α es *regular* si $cf(\alpha) = \alpha$ y es *singular* si $cf(\alpha) < \alpha$.

Mencionaremos algunos resultados básicos de la teoría de calibres y precalibres. Pero para proceder a ello nos auxiliaremos del siguiente lema de teoría de conjuntos concerniente a cardinales singulares.

1.4.2 Lema ([7]). *Un cardinal infinito κ es singular si y solo si existe un cardinal $\lambda < \kappa$ y una familia $\{S_\xi : \xi < \lambda\}$ de subconjuntos de κ tales que $|S_\xi| < \kappa$ para cada $\xi < \lambda$ y $\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} S_\xi$. El menor número cardinal que satisface esta condición es $cf(\kappa)$.*

1.4.3 Proposición. *Sea X un espacio topológico y κ un número cardinal infinito. Si κ es calibre de X, entonces $cf(\kappa)$ es calibre de X.*

Demostración. Es claro que si $cf(\kappa) = \kappa$, entonces $cf(\kappa)$ es calibre de X. Por ello podemos suponer que $cf(\kappa) < \kappa$, es decir, κ es un cardinal singular. Por el lema 1.4.2 podemos elegir una familia $\{S_\xi : \xi < cf(\kappa)\}$ de subconjuntos de κ tales que $|S_\xi| < \kappa$ para cada $\xi < cf(\kappa)$ y $\kappa = \bigcup_{\xi<cf(\kappa)} S_\xi$.

Podemos además suponer sin pérdida de generalidad que $S_\xi \cap S_\eta = \emptyset$ cuando $\xi \neq \eta$, para ello simplemente renombremos, llamamos $R_0 = S_0$ y para cada $0 < \xi < cf(\kappa)$; $R_\xi = S_\xi \setminus \bigcup_{\eta<\xi} S_\eta$. Ahora sea $\{U_\xi : \xi < cf(\kappa)\} \subseteq \tau^*(X)$.

Bastará demostrar que existe $B \in [cf(\kappa)]^{cf(\kappa)}$ tal que $\bigcap\{U_\xi : \xi \in B\} \neq \emptyset$. Con este fin, definamos $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de tal manera que $G_\alpha = U_\xi$ si $\alpha \in S_\xi$. Así $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(X)$ y como κ es calibre de X, entonces existe $B \in [\kappa]^\kappa$ de tal manera que $\bigcap\{G_\alpha : \alpha \in B\} \neq \emptyset$.

Ahora para cada $\xi < cf(\kappa)$ sea $B_\xi := B \cap S_\xi$; y definamos el conjunto $C = \{\xi < cf(\kappa) : B \cap S_\xi \neq \emptyset\}$. Dado que $|B| = \kappa$ se sigue que $|C| = cf(\kappa)$.

Efectivamente, de lo contrario $B = \bigcup_{\xi \in C} B_\xi$ siendo está una unión de menos de $cf(\kappa)$ subconjuntos de cardinalidad menor estricta que κ contradiciendo el lema 1.4.2, ya que $|B| = \kappa$. Luego para cada $\xi \in C$ elijamos $\alpha_\xi \in B \cap S_\xi$. Claramente la familia $\{G_{\alpha_\xi} : \xi \in C\} \subseteq \{G_\alpha : \alpha \in B\}$; de donde

$$\bigcap \{G_{\alpha_\xi} : \xi \in C\} \neq \emptyset.$$

Por último note que, para cada $\xi \in C$ se tiene que $G_{\alpha_\xi} = U_\xi$. De donde, para la familia $\{U_\xi : \xi < cf(\kappa)\}$ existe $D \in [cf(\kappa)]^{cf(\kappa)}$ de tal manera que $\bigcap\{U_\xi : \xi \in D\} \neq \emptyset$. Por lo tanto $cf(\kappa)$ es calibre de X. ∎

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ diremos que una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es *celular* si $\mathcal{C}$ está formada únicamente de subconjuntos abiertos no vacíos de X y si además $C \cap C' = \emptyset$ para todo par de elementos diferentes $C, C' \in \mathcal{C}$. El número de Suslin o la celuridad de X se define como el siguiente numero cardinal:

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es una familia celular de} X\}.$$

Se dice que un espacio tiene la propiedad de Suslin si $c(X) \leqslant \omega$.

1.4.4 Proposición. *Sean X un espacio topológico y κ un cardinal infinito.*

(1) Si κ es un cardinal regular no numerable que es calibre de X, entonces κ es precalibre de X.

(2) Si κ es un cardinal sucesor infinito que es precalibre de X, entonces $c(X) < \kappa$.

En particular, si ω_1 es precalibre de X, entonces $c(X) = \omega$.

Demostración. (1) Sea $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(X)$. Como κ es calibre de X, existe $B \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in B\} \neq \emptyset$.
Afirmamos que $\{U_\alpha : \alpha \in B\}$ es una familia centrada.
Efectivamente. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in B$. Es claro que $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\} \subseteq \{U_\alpha : \alpha \in B\}$. Además, $\emptyset \neq \bigcap\{U_\alpha : \alpha \in B\} \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$, es decir, $\bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \neq \emptyset$. Con ello podemos concluir que $\{U_\alpha : \alpha \in B\}$ es una familia centrada. Por lo tanto κ es precalibre de X.

(2) Supongamos que κ es un cardinal sucesor infinito que es precalibre de X y que $c(X) \geqslant \kappa$. Como $\kappa = \lambda^+$ para algún λ cardinal infinito y $\lambda^+ > \lambda$, entonces λ no es cota superior de la familia $\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \text{ es familia celular en } X\}$. Así que existe $\mathcal{U} \subseteq \tau^*(X)$ familia celular de X tal que $\lambda < |\mathcal{U}|$. Por lo que $\lambda^+ \leqslant |\mathcal{U}|$. De este modo existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $|\mathcal{V}| = \lambda^+$. Pero entonces κ no

es precalibre de X (observe que $\mathcal{V}$ no es una familia centrada ya que es una familia celular). Esta contradicción nos permite concluir que $c(X) < \kappa$. ■

1.4.5 Proposición. *Supongamos que κ es un cardinal regular no numerable y que $Y \subseteq X = cl_X(Y)$.*

(1) Si κ es calibre de Y, entonces κ es calibre de X.

(2) κ es precalibre de Y si y solo si κ es precalibre de X.

Demostración. (1) Sea $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(X)$. Como Y es denso en X, $U_\alpha \cap Y \neq \emptyset$ para toda $\alpha < \kappa$. Por ello $\{U_\alpha \cap Y : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(Y)$. Ahora como κ es calibre de Y, existe $B \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\bigcap\{U_\alpha \cap Y : \alpha \in B\} \neq \emptyset$. Además es claro que $U_\alpha \cap Y \subseteq U_\alpha$ para toda $\alpha \in B$. Luego $\bigcap\{U_\alpha \cap Y : \alpha \in B\} \subseteq \bigcap\{U_\alpha : \alpha \in B\}$. Como $\bigcap\{U_\alpha \cap Y : \alpha \in B\} \neq \emptyset$ se tiene que $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in B\} \neq \emptyset$. Por lo tanto κ es calibre de X.

(2) [$\Rightarrow$] Supongamos que κ es precalibre de Y. Sea $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(X)$. Así $\{U_\alpha \cap Y : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(Y)$ pues Y es denso en X. Dado que κ es precalibre de Y, existe $B \in [\kappa]^\kappa$ tal que la familia $\{U_\alpha \cap Y : \alpha \in B\}$ es centrada. Es claro que $\{U_\alpha : \alpha \in B\}$ es una familia centrada. Por lo tanto κ es precalibre de X.
[$\Leftarrow$] Supongamos que κ es precalibre de X. Sea $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(Y)$. Así, para cada $\alpha < \kappa$ podemos elegir $V_\alpha \in \tau^*(X)$ tal que $U_\alpha = V_\alpha \cap Y$. Es claro que $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(X)$. Dado que κ es precalibre de X, existe $B \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{V_\alpha : \alpha \in B\}$ es una familia centrada. Considere ahora $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in B$. El conjunto $\bigcap_{i=1}^n V_{\alpha_i}$ es no vacío; por ello $(\bigcap_{i=1}^n V_{\alpha_i}) \cap Y \neq \emptyset$, pues Y es denso en X. Ahora, como $(\bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}) = (\bigcap_{i=1}^n V_{\alpha_i}) \cap Y \neq \emptyset$ y los ordinales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in B$ fueron elegidos arbitrariamente, se tiene que $\{U_\alpha : \alpha \in B\}$ es una familia centrada. Por lo tanto κ es precalibre de Y. ■

Recordemos que dada una colección $\{X_t : t \in T\}$ de espacios topológicos, $X = \prod_{t\in T} X_t$ denota al producto topológico de Tychonoff de los espacios X_t; además si $L \subseteq T$ no vacío, entonces $X_L = \prod_{t\in L} X_t$ y $\pi_L : X \to X_L$ es la proyección asociada a X_L; es decir, $\pi_L(f) = f \restriction_L$ para cada $f \in X$.
Asimismo dirémos que un conjunto $U \subseteq X$ es abierto canónico de X si $U = \prod_{t\in T} U_t$ donde $U_t \in \tau^*(X_\alpha)$ para cada $t \in T$ y $supp(U) = K(U) = \{t \in T : U_t \neq X_t\}$ es un conjunto finito. El conjunto $K(U)$ es algunas veces llamado *soporte de U* o *conjunto de coordenadas no triviales del abierto canónico U*.

1.4.6 Lema. *Sean X un espacio topológico no vacío y κ un cardinal regular no numerable. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) κ *es calibre de* X*;*

(2) para cualquier familia $\{U_a : a \in A\} \subseteq \tau^*(X)$ *donde* A *es un conjunto tal que* $|A| = \kappa$*, existe un conjunto* $B \in [A]^\kappa$ *tal que* $\bigcap\{U_a : a \in B\} \neq \emptyset$*.*

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)] Sean A un conjunto tal que $|A| = \kappa$ y una familia $\{U_a : a \in A\} \subseteq \tau^*(X)$. Fijemos una biyección $\varphi : \kappa \to A$. Definamos $V_\alpha = U_{\varphi(a)}$ para toda $\alpha < \kappa$. Consideremos a la familia $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(X)$. Como κ es calibre de X, existe $C \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\bigcap\{V_\alpha : \alpha \in C\} \neq \emptyset$. Dado que $C \subseteq \kappa$, $B = \varphi[C] \in [A]^\kappa$. Por ello $\bigcap\{U_a : A \in B\} = \bigcap\{U_{\varphi(\alpha)} : \alpha \in C\} = \bigcap\{V_\alpha : \alpha \in C\} \neq \emptyset$.
[(2) $\Leftarrow$ (1)] Basta considerar el conjunto $A = \kappa$ y aplicar la definición calibre a κ. ■

Con todo lo anterior estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de esta sección, que como se mencionó en un principio es debido a Šanin.

1.4.7 Teorema (Šanin)**.** *Sean* κ *un cardinal regular no numerable y* $\{X_t : t \in T\}$ *una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. Si* κ *es calibre de* X_t *para cada* $t \in T$*, entonces* κ *es calibre de* $X = \prod_{t\in T} X_T$*.*

Demostración. Demostremos primero el caso en que T es finito para luego demostrar el caso general en que T es un conjunto cualquiera.

Afirmación. Si κ es calibre de X_{t_1} y X_{t_2}, entonces κ es calibre de $X_{t_1} \times X_{t_2}$.

En efecto. Consideremos un conjunto A tal que $|A| = \kappa$ y $\{U_a : a \in A\} \subseteq \tau^*(X_{t_1} \times X_{t_2})$. Así para cada $a \in A$, existen $V_a \in \tau^*(X_{t_1})$ y $W_a \in \tau^*(X_{t_2})$ tales que $V_a \times W_a \subseteq U_a$. Consideremos la familia $\{V_a : a \in A\} \subseteq \tau^*(X_{t_1})$. Dado que κ es calibre de X_{t_1}, existe $A_1 \in [A]^\kappa$ tal que $\bigcap\{V_a : a \in A_1\} \neq \emptyset$. Como $|A_1| = \kappa$ podemos considerar a la familia $\{W_a : a \in A_1\} \subseteq \tau^*(X_{t_2})$ y dado que κ es calibre de X_{t_2}, entonces existe $A_2 \in [A_1]^\kappa$ tal que $\bigcap\{W_a : a \in A_2\} \neq \emptyset$. Sean $x_1 \in \bigcap\{V_a : a \in A_1\}$ y $x_2 \in \bigcap\{W_a : a \in A_2\}$. Observemos que $x_1 \in \bigcap\{V_a : a \in A_1\} \subseteq \bigcap\{V_a : a \in A_2\}$. Luego $(x_1, x_2) \in \bigcap\{V_a \times W_a : a \in A_2\}$, pero $V_a \times W_a \subseteq U_a$ para toda $a \in A_2$. Por lo tanto $(x_1, x_2) \in \bigcap\{V_a \times W_a : a \in A_2\} \subseteq \bigcap\{U_a : a \in A_2\}$; es decir, $\bigcap\{U_a : a \in A_2\} \neq \emptyset$ con $A_2 \in [A]^\kappa$. Por lo tanto κ es calibre de $X_{t_1} \times X_{t_2}$. ⊠

Es fácil deducir usando la afirmación anterior y el método de inducción matemática que si κ es calibre de $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$, entonces κ es calibre de $\prod_{i=1}^n X_{t_i}$. Usaremos esto a continuación.

Supongamos ahora que T es un conjunto infinito cualquiera. Sean A un conjunto tal que $|A| = \kappa$ y $\{U_a : a \in A\} \subseteq \tau^*(X)$. Así para cada $a \in A$ existe $V_a \in \tau^*(X)$ abierto canónico de X tal que $V_a \subseteq U_a$. Y sea $K(V_a)$ el soporte de V_a para toda $a \in A$. Ahora fijemos una función $f_a \in V_a$ para toda $a \in A$ y consideremos la familia $\{K(V_a) : a \in A\}$. Para esta familia se tienen dos casos:

CASO (1). $|\{K(V_a) : a \in A\}| = \kappa$.

Si $|\{K(V_a) : a \in A\}| = \kappa$, entonces como $|K(V_a)| < \omega$ para toda $a \in A$, por el lema C.0.2 se tiene que existen $S = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq T$ y $B \in [A]^\kappa$ tal que $K(V_a) \cap K(V_b) = S$ para $a, b \in B$ distintos. Como $S \subseteq T$, entonces podemos considerar $X_S = \prod_{i=1}^n X_{s_i}$ y la función proyección asociada a S, $p_S : X \to X_S$ tal que $p_S(f) = f \restriction_S$. Como para cada $a \in B$, el conjunto $V_a \in \tau^*(X)$ y p_S es una función abierta, $p_S(V_a) \in \tau^*(X_S)$ para cada $a \in B$. Por ello podemos considerar a la familia $\{p_S(V_a) : a \in B\} \subseteq \tau^*(X_S)$.

Como $|B| = \kappa$ y dado que κ es calibre de X_t para todo $t \in T$ y $S \subseteq T$, el cardinal κ es calibre de X_{s_i} para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego por la afirmación anterior κ es calibre de X_S. En consecuencia existe $C \in [B]^\kappa$ tal que $\bigcap\{p_S(V_a) : a \in C\} \neq \emptyset$. Considere $y \in \{p_S(V_a) : a \in C\}$. Observemos que $\{K(V_a)\backslash S : a \in C\}$ es ajena por pares. Ahora definamos $x \in X$ de la siguiente manera:

$$x(t) = \begin{cases} y(t) & si \quad t \in S \\ f_a(t) & si \quad t \in K(V_a)\backslash S \text{ para alguna } a \in C \\ f_{a_0}(t) & si \quad t \in T\backslash \bigcup\{K(V_a) : a \in A\} \end{cases}$$

Note que $x \in \bigcap\{V_a : a \in C\}$. Para ello, sea $a \in C$ arbitrario. Observe que $V_a = \prod_{t\in T} W_t^a$ para toda $a \in C$ donde $W_t^a \in \tau^*(X_t)$ y $t \in K(V_a)$ si y solo si $W_t^a \neq X_t$. Por ello se tienen dos casos:

Subcaso (1). $t \in C$.

Si $t \in C$, entonces $x(t) = y(t) \in X_t = W_t^a$, por ello $x \in V_a$ y como a fue elegido arbitrariamente, entonces $x \in \bigcap\{V_a : a \in C\}$.

Subcaso (2). $t \in K(V_a)\backslash S$.

Si $t \in K(V_a)\backslash S$, entonces $x(t) = f_a(t)$, luego como $t \in K(V_a)\backslash S$ se tiene que $W_t^a \neq X_t$. Por ello $f_a(t) \in W_t^a \neq X_t$, entonces $x \in \bigcap\{V_a : a \in C\}$.
Por lo tanto $x \in \bigcap\{V_a : a \in C\} \subseteq \bigcap\{U_a : a \in C\}$; es decir, $\bigcap\{U_a : a \in C\} \neq$

$\emptyset$ de lo cual se sigue que κ es calibre de X como se quería demostrar.

CASO (2). $\mid \{K(V_a) : a \in A\} \mid < \kappa$.

Si $\mid \{K(V_a) : a \in A\} \mid < \kappa$, entonces sea $\delta = \mid \{K(V_a) : a \in A\} \mid$. Por ello existe una función $\varphi : \delta \to \{K(V_a : a \in A\}$ biyectiva. Sea $\lambda < \delta$ y definamos $A_\lambda := \{a \in A : \varphi(\lambda) = K(V_a)\}$, entonces es claro que $A = \bigcup_{\lambda<\delta} A_\lambda$. Ahora como κ es un cardinal regular no numerable y $\delta < \kappa$, existe $\lambda_0 < \delta$ tal que $\mid A_{\lambda_0} \mid = \kappa$. Definamos $C = A_{\lambda_0}$ y sea $\{K(V_c) : c \in C\}$. Considere $c_0 \in C$ y definamos $S = K(V_{c_0})$. Observe que para toda $a, b \in C$, $K(V_a) = S = K(V_b)$, además se sabe que $|S| < \omega$.

Ya que $S \subseteq T$, entonces podemos considerar $X_S = \prod_{i=1}^{n} X_{s_i}$ y la función proyección asociada a S, $p_S : X \to X_S$ tal que $p_S(f) = f \restriction_S$. Como para cada $a \in C$, $V_a \in \tau^*(X)$ y p_S es una función abierta, entonces $p_S(V_a) \in \tau^*(X_S)$ para cada $a \in C$, por ello podemos considerar a la familia $\{p_S(V_a) : a \in C\} \subseteq \tau^*(X_S)$ con $\mid C \mid = \kappa$ y dado que κ es calibre de X_t para todo $t \in T$ y $S \subseteq T$, en particular κ es calibre de X_{s_i} para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Luego por la afirmación anterior κ es calibre de X_S, existe $D \in [C]^\kappa$ tal que $\bigcap\{p_S(V_a) : a \in D\} \neq \emptyset$. Considere $y \in \bigcap\{p_S(V_a) : a \in D\}$ fija. Ahora definamos $x \in X$ de la siguiente manera y fijemos $d_0 \in D$:

$$x(t) = \begin{cases} f_{d_0}(t) & si \quad t \notin S \\ \\ y(t) & si \quad t \in S \end{cases}$$

Note que es evidente que $x \in \bigcap\{V_a : a \in D\}$. Para ello, sea $c \in D$ arbitrario. Observe que $V_c = \prod_{t\in T} W_t^c$ para toda $c \in D$ donde $W_t^c \in \tau^*(X_t)$ y $t \in K(V_c)$ si y solo si $W_t^c \neq X_t$. Por ello se tienen dos casos:

Subcaso (1). $t \in T \setminus S$.

Si $t \in T \setminus S$, entonces $x(t) = f_{d_0}(t) \in X_t = W_t^c$, por ello $x \in V_c$ y como c fue elegido arbitrariamente, entonces $x \in \bigcap\{V_a : a \in D\}$.

Subcaso (2). $t \in S$.

Si $t \in S$, entonces $x(t) = y(t)$, luego como $t \in S$ y $y \in p_S(V_c) = \prod_{s\in S} W_t^c$, entonces $x(t) = y(t) \in W_t^c$. Por ello $x(t) \in W_t^c$, entonces $x \in V_c$ y como c fue elegido arbitrariamente $x \in \bigcap\{V_a : a \in D\}$.

Por lo tanto $x \in \bigcap\{V_a : a \in D\} \subseteq \bigcap\{U_a : a \in D\}$; es decir,

$$\bigcap\{U_a : a \in D\} \neq \emptyset$$

de lo cual se sigue que κ es calibre de X como se quería demostrar. ∎

1.4.8 Proposición. *Sea $\{X_t : t \in T\}$ una familia no vacía de espacios topológicos separables. Por lo que todo cardinal regular no numerable es calibre de $X = \prod_{t\in T} X_t$.*

Demostración. Por el teorema 1.4.7 bastará demostrar que κ es calibre de cada espacio X_t. Para ello, fijemos $t \in T$. Consideremos $D \subseteq X_\alpha = cl_{X_\alpha}(D)$ tal que $|D| \leqslant \omega$ y una familia $\{U_\beta : \beta < \kappa\} \subseteq \tau^*(X_\alpha)$. Para cada $d \in D$, definamos $P_d := \{\beta < \kappa : d \in U_\beta\}$. Supongamos que $\beta < \kappa$. Como D es denso en X_α y $U_\beta \in X_\alpha$, existe $d \in D \cap U_\beta$. Luego $\beta \in \bigcup_{d\in D} P_d$. Por lo anterior $\bigcup_{d\in D} P_d = \kappa$.

Por otro lado como $|D| \leqslant \omega$, existe $d \in D$ tal que $|P_d| = \kappa$. Por ello $d \in \bigcap\{U_\beta : \beta \in P_d\}$ y $|P_d| = \kappa$. Esto último demuestra que κ es calibre de X_t. ■

1.4.9 Corolario. *Sea $\{X_t : t \in T\}$ una familia no vacía de espacios topológicos separables. Por lo que todo cardinal regular no numerable es precalibre de $X = \prod_{t\in T} X_t$.*

En particular, el cardinal ω_1 es precalibre de cualquier producto topológico de espacios separables. Recuerde que precalibre ω_1 implica celularidad numerable.

1.4.10 Corolario. *Sea $\{X_t : t \in T\}$ una familia no vacía de espacios topológicos separables. Por ello $X = \prod_{t\in T} X_t$ tiene la propiedad de Suslin, es decir, $c(X) \leqslant \omega$.*

En particular, para todo conjunto X, el producto topológico $\mathbb{R}^X$ tiene la propiedad de Suslin.

1.5. Mapeos $\mathbb{R}$-cocientes

1.5.1 Definición. Un mapeo continuo $p : X \to Y$ es llamado $\mathbb{R}$-cociente si $p[X] = Y$ y para toda función $\phi : Y \to \mathbb{R}$ se tiene que:

$\phi \circ p : X \to \mathbb{R}$ es continua si y solo si ϕ es continua.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\phi\circ p"'] & Y \arrow[d, "\phi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Es bien conocido que una mapeo $p : X \to Y$ es cociente si y solo si $p[X] = Y$ y para cualquier espacio topológico Z y cualquier mapeo $f : Y \to Z$ se tiene que: si $f \circ p$ es continuo, entonces f es continua. De esto se sigue trivialmente lo siguiente:

1.5.2 Proposición. *Todo mapeo cociente es $\mathbb{R}$-cociente.*

La siguiente proposición muestra que los mapeos $\mathbb{R}$-cocientes tienen una característica similar (en la categoría de los espacios completamente regulares) a la que tienen los mapeos cocientes (en la categoría de los espacios topológicos).

1.5.3 Proposición. *Sean $p : X \to Y$ un mapeo $\mathbb{R}$-cociente, Z un espacio completamente regular y $f : Y \to Z$ una función. Si $f \circ p$ es continua, entonces f es continua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f\circ p"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Demostración. Por un lado sabemos por la proposición 1.1.11 que la topología de Z es generada por la familia $C(Z)$. Sea $\phi \in C(Z)$ un elemento arbitrario, luego como ϕ y $f \circ p$ son continuas, entonces $\phi \circ (f \circ p) : X \to \mathbb{R}$ es continua. Debido a que p es $\mathbb{R}$-cociente y $\phi \circ (f \circ p) = (\phi \circ f) \circ p$ es continua, entonces $\phi \circ f$ es continua. Por la proposición 1.2.11 concluimos que f es continua. ■

1.5.4 Corolario. *Si X es un espacio completamente regular y $p : X \to Y$ es una biyección $\mathbb{R}$-cociente, entonces p es un homeomorfismo.*

Demostración. Por definición de mapeo $\mathbb{R}$-cociente, p es continua. Por lo que bastará demostrar que p^{-1} es continua. Utilizando el hecho que X es completamente regular y que $p^{-1} \circ p = id_X$ es una función continua por la proposición 1.5.3 obtenemos la continuidad de p^{-1}. Por lo tanto p es un homeomorfismo. ■

1.5.5 Proposición. *Si $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ son mapeos $\mathbb{R}$-cocientes, entonces la composición $q \circ p : X \to Z$ es $\mathbb{R}$-cociente.*

Demostración. Dado que $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ son mapeos continuos, entonces $q \circ p : X \to Z$ es un mapeo continuo. Además como $p[X] = Y$ y $q[Y] = Z$, entonces $(q \circ p)[X] = q[p[X]] = q[Y] = Z$. Ahora sea $\phi : Z \to \mathbb{R}$ tal que $\phi \circ (p \circ q)$ es continua. Como $\phi \circ (q \circ p) = (\phi \circ q) \circ p$ y p es $\mathbb{R}$-cociente, entonces $\phi \circ q$ es continua. Luego como q es $\mathbb{R}$-cociente, entonces ϕ es continua. Por lo tanto $q \circ p : X \to Z$ es $\mathbb{R}$-cociente. ■

1.5.6 Proposición. *Si $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ son funciones continuas y la composición $q \circ p : X \to Z$ es $\mathbb{R}$-cociente, entonces q es $\mathbb{R}$-cociente.*

Demostración. Por definición de mapeo $\mathbb{R}$-cociente, $q \circ p$ es sobreyectivo. Por ello q también lo es. Ahora, sea $\phi : Z \to \mathbb{R}$ tal que $\phi \circ q$ es continua. Observemos que $\phi \circ (q \circ p) = (\phi \circ q) \circ p$ es continua ya que $\phi \circ q$ y p lo son. Ahora como $q \circ p$ es $\mathbb{R}$-cociente se tiene que ϕ es continua. Por lo tanto q es $\mathbb{R}$-cociente. ∎

1.5.7 Proposición. *Sean $p : X \to Y$ un mapeo sobreyectivo y continuo, y $A \subseteq X$. Si $p \restriction_A : A \to Y$ es $\mathbb{R}$-cociente, entonces p es $\mathbb{R}$-cociente.*

Demostración. El mapeo inclusión $i_A : A \hookrightarrow X$ y $p : X \to Y$ son funciones continuas. Además $p \restriction_A = p \circ i_A$ es $\mathbb{R}$-cociente. Por la proposición 1.5.6 se tiene que p es $\mathbb{R}$-cociente. ∎

Utilizando la noción de mapeo $\mathbb{R}$-cociente, se define el análogo de un espacio cociente.

1.5.8 Definición. Sean X un espacio, Y un conjunto y $p : X \to Y$ un mapeo sobreyectivo. La topología $\mathbb{R}$-cociente en Y es la más fuerte de todas las topologías completamente regulares en Y que hacen continuo al mapeo p. El conjunto Y con la topología $\mathbb{R}$-cociente es llamado espacio $\mathbb{R}$-cociente de X con respecto al mapeo p.

Por supuesto debemos de probar que la topología $\mathbb{R}$-cociente existe. Esto se sigue de la siguiente proposición.

1.5.9 Proposición. *Sea $p : X \to Y$ un mapeo sobreyectivo del espacio $(X, \mathcal{T}(X))$ en el conjunto Y. La topología $\mathbb{R}$-cociente en Y es la topología generada por la familia*

$$\mathcal{F} = \{\phi \in \mathbb{R}^Y : \phi \circ p \text{ es continua}\}$$

Demostración. Denotemos con $\mathcal{T}$ a la topología generada por $\mathcal{F}$. Como los contradominios de los elementos de $\mathcal{F}$ son espacios completamente regulares, el inciso 3 de la proposición 1.1.7 nos dice que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio completamente regular. Por definición de $\mathcal{F}$, la composición $\phi \circ p$ es continua para cada $\phi \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ genera a $\mathcal{T}$, lo anterior implica que $p : (X, \mathcal{T}(X)) \to (Y, \mathcal{T})$ es continua. Así, la topología generada por $\mathcal{F}$ es una topología completamente regular en Y que hace continua a $p : X \to Y$.

Observe que lo anterior implica que $p : (X, \tau(X)) \to (Y, \mathcal{T})$ es un mapeo $\mathbb{R}$-cociente porque si para $\phi \in \mathbb{R}^Y$ sucede que $\phi \circ p : (X, \mathcal{T}(X)) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$

es continua, entonces $\phi \in \mathcal{F}$ por la definición de $\mathcal{F}$. Lo que implica que $\phi : (Y, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ porque $\mathcal{T}$ es generada por $\mathcal{F}$.

Supongamos ahora que θ es una topología en Y completamente regular que hace continua a $p : (X, \mathcal{T}(X)) \to (Y, \theta)$. Como esta última función es igual a la composición de las funciones $p : (X, \mathcal{T}(X)) \to (Y, \mathcal{T})$ y $\mathrm{id}_Y : (Y, \mathcal{T}) \to (Y, \theta)$, siendo $p : (X, \mathcal{T}(X)) \to (Y, \mathcal{T})$ un mapeo $\mathbb{R}$-cociente y (Y, θ) completamente regular, por la proposicón 1.5.3 podemos concluir que $\mathrm{id}_Y : (Y, \mathcal{T}) \to (Y, \theta)$ es continua. Lo que permite concluir que $\theta \subseteq \mathcal{T}$. Por lo tanto, $\mathcal{T}$ es la topología más fuerte en Y y además completamente regular, que hace continua a p. Por lo tanto, la topología $\mathbb{R}$-cociente en Y es la topología generada por $\mathcal{F}$. ∎

1.5.10 Corolario. *Si $p : X \to Y$ es un mapeo, $p[X] = Y$ y la topología de Y coincide con la topología $\mathbb{R}$-cociente con respecto a p, entonces el mapeo p es $\mathbb{R}$-cociente.*

Demostración. Por definición de topología $\mathbb{R}$-cociente, p es continuo. Además, si $\phi : Y \to \mathbb{R}$ es tal que $\phi \circ p$ es continua entonces ϕ pertenece a la familia de funciones que generan la topología de Y. Por lo tanto, ϕ es continua. ∎

1.5.11 Proposición. *Sean X y Y dos espacios, con Y completamente regular, y sea $f : X \to Y$ un mapeo sobreyectivo y continuo. Por lo que existen:*

(1) un espacio completamente regular Z,

(2) un mapeo $\mathbb{R}$-cociente $p : X \to Z$; y

(3) una biyección continua $i : Z \to Y$

tales que $f = i \circ p$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[d, "i"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea Z el espacio $\mathbb{R}$-cociente de X con respecto al mapeo f y sea $p : X \to Z$ dada por $p(x) = f(x)$ para toda $x \in X$. Por definición de topología $\mathbb{R}$-cociente Z es completamente regular. Por el corolario 1.5.11, p es un mapeo $\mathbb{R}$-cociente. Sea $i = id_Z : Z \to Y$. Ya que Z está equipado con la más fuerte de las topologías completamente regulares en Y que hacen continuo al mapeo f, tenemos que i es continua. Además $f = i \circ p$. ∎

Capítulo 2

Los espacios $C_p(X, Z)$

2.1. Definición y propiedades básicas.

La topología de la convergencia puntual debe ser la determinada por la convergencia puntual de sus funciones: $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo punto x. Es fácil notar, sin embargo, que un intento de definir el operador clausura en el conjunto $C(X)$ utiliza precisamente la noción de sucesión convergente, que en la mayoría de los casos no conduce a una topología natural en $C(X)$. Este es un fenómeno bastante general en topología y análisis funcional: más alla de simplificar los objetos, el lenguaje de las sucesiones convergentes no es suficiente.

Es importante notar ahora que la definición 1.2.10 de la *topología de la convergencia puntual* en algún subespacio M de Z^X no depende de alguna topología en X; pero resulta que en los casos más interesantes la definición del conjunto M dependerá de la topología de X. Por ejemplo, en este trabajo consideraremos conjuntos M del tipo $C(X, Z) = \{f \in Z^X : f$ es función continua$\}$ donde X y Z son espacios topológicos. El conjunto $C(X, Z)$ equipado con la *topología de la convergencia puntual* sera denotado por $C_p(X, Z)$. El siguiente corolaraio nos proporciona una caracterización para la llamada *base canónica* de $C_p(X, Z)$.

2.1.1 Corolario. *Sea $\mathcal{B}$ una base para el espacio Z.*

(1) La familia

$$\{[x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X \text{ y } O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{B}\}$$

es una base para el espacio $C_p(X, Z)$.

(2) Si $f_0 \in C_p(X,Z)$, entonces los conjuntos de la forma

$$[f_0, x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] = \{g \in C_p(X,Z) : g(x_1) \in O_1, \ldots, g(x_n) \in O_n\},$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{B}$ con $f_0(x_1) \in O_1 \ldots, f_0(x_n) \in O_n$, constituyen una base local para $C_p(X,Z)$ en el punto f_0.

Demostración. (1) Sean $U \in \tau(C_p(X,Z))$ y $f \in U$. Por ello existe $V = [x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n]$ donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $V_1, \ldots, V_n \in \tau(Z)$ tal que $f \in V \subseteq U$. Ahora dado que $f \in V$, entonces $f(x_1) \in V_1, \ldots, f(x_n) \in V_n$ y como $\mathcal{B}$ es base para el espacio Z existen $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{B}$ tales que $f(x_1) \in O_1 \subseteq V_1, \ldots, f(x_n) \in O_n \subseteq V_n$. Por ello $f \in [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] \subseteq V \subseteq U$. Por lo tanto la familia

$$\{[x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X \text{ y } O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{B}\}$$

es una base para el espacio $C_p(X,Z)$.

(2) Sea $f_0 \in C_p(X,Z)$ arbitrario y W una vecindad de f_0 en $C_p(X,Z)$. Por lo cual hay $A \in \tau(C_p(X,Z))$ tal que $f_0 \in A \subseteq W$. Como $A \in \tau(C_p(X,Z))$, entonces existe $[x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] \subseteq A$ donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{B}$, además $f_0 \in [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] \subseteq A \subseteq W$, por ello $[f_0, x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] \subseteq W$. Por lo tanto los conjuntos de la forma

$$[f_0, x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] = \{g \in C_p(X,Z) : g(x_1) \in O_1, \ldots, g(x_n) \in O_n\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{B}$ con $f_0(x_1) \in O_1, \ldots, f_0(x_n) \in O_n$, constituyen una base local para $C_p(X,Z)$ en el punto f_0. ■

De ahora en adelante, denotaremos con $C_p(X)$ al espacio $C_p(X, \mathbb{R})$. Note que como $\mathbb{R}$ es un espacio Tychonoff, entonces el espacio $C_p(X)$ también es un espacio Tychonoff.

2.1.2 Corolario. *Si $f_0 \in C_p(X)$, entonces los conjuntos de la forma*

$$[f_0, x_1, \ldots, x_n; \epsilon] = \{g \in C_p(X) : |f_0(x_1) - g(x_1)| < \epsilon, \ldots, |f_0(x_n) - g(x_n)| < \epsilon\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\epsilon > 0$, forman una base local para $C_p(X)$ en el punto f_0.

Demostración. Supongamos que $f_0 \in U$ donde $U \in \tau(C_p(X))$. Por ello existe $V \in \tau(C_p(X))$ abierto canónico de $C_p(X)$ tal que $f_0 \in V \subseteq U$, donde $V = [x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n]$ con $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $V_1, \ldots, V_n \in \tau(\mathbb{R})$.

Como $V_1, \ldots, V_n \in \tau(\mathbb{R})$ y $f(x_1) \in V_1, \ldots, f(x_n) \in V_n$. Se sigue que existen $\epsilon_1 > 0, \ldots, \epsilon_n > 0$ tales que

$$(f_0(x_1) - \epsilon_1, f_0(x_1) + \epsilon_1) \subseteq V_1, \ldots, (f_0(x_n) - \epsilon_1, f_0(x_n) + \epsilon_1) \subseteq V_n.$$

Ahora sea $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$, entonces $f_0 \in [f_0, x_1, \ldots, x_n; \epsilon] \subseteq V \subseteq U$. Por último notemos que $[f_0, x_1, \ldots, x_n; \epsilon] \in \tau(C_p(X))$ porque

$$[f_0, x_1, \ldots, x_n; \epsilon] = [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n]$$

donde $O_1 = (f_0(x_1) - \epsilon_1, f_0(x_1) + \epsilon_1), \ldots, O_n = (f_0(x_n) - \epsilon_n, f_0(x_n) + \epsilon_n)$ ■

Las bases descritas en los corolarios anteriores son usualmente llamadas *bases canónicas*, y sus elementos conjuntos *abiertos canónicos.*

Como podemos notar, la estructura topológica de Z induce una topología en $C(X, Z)$. Ahora demostraremos que si Z tiene además una estructura algebraica, está también induce de manera natural una estructura algebraica en $C_p(X, Z)$.

2.1.3 Proposición. *Si Z es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ (respectivamente anillo topológico, grupo topológico), entonces $C_p(X, Z)$ es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ (respectivamente anillo topológico, grupo topológico).*

Demostración. Para cada $f, g \in Z^X$ definimos a las funciones $f + g$ y $r \cdot f$ (con $r \in \mathbb{R}$) mediante

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$$

para cada $x \in X$. Ahora definamos

1. La función adición $\hat{+} : Z^X \times Z^X \to Z^X$ por medio de la regla: $\hat{+}(f, g) = f + g$, y
2. la función producto por escalares $\hat{\cdot} : \mathbb{R} \times Z^X \to Z^X$ por medio de la regla: $\hat{\cdot}(r, f) = r \cdot f$.

Es fácil demostrar que estas operaciones binarias dan a Z^X una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Afirmación 1. La función $\hat{+}$ es continua cuando Z^X está equipado con la topología producto.

En efecto. Sea $x \in X$ arbitrario. Considere a las funciones

1. $\gamma_x : Z^X \times Z^X \to Z$ dada por: $\gamma_x(f,g) = f(x)$.
2. $\delta_x : Z^X \times Z^X \to Z$ dada por: $\delta_x(f,g) = g(x)$.

Note que $\gamma_x = \hat{x} \circ \pi_1$, es decir γ_x es la composición del mapeo proyección correspondiente al primer factor de $Z^X \times Z^X$, seguido del mapeo evaluación $\hat{x}$. Por la proposición 1.2.11, γ_x es continua. De manera semejante se justifica la continuidad de δ_x. Por lo anterior, $\gamma_x \vartriangle \delta_x \in C(Z^X \times Z^X, Z \times Z)$. Evidentemente $\hat{x} \circ \hat{+} = + \circ (\gamma_x \vartriangle \delta_x)$. Utilizando esto último se tiene que $\hat{x} \circ \hat{+}$ es continua. Por lo tanto $\hat{+}$ es continua. $\boxtimes$

Afirmación 2. La topología producto en Z^X hace continua a la función $\hat{\cdot}$.

En efecto. Sea $x \in X$. Definimos

$$\psi_x : \mathbb{R} \times Z^X \to Z \text{ dada por medio de } \psi_x(r,f) = f(x).$$

Esta función es continua porque es la composición del mapeo proyección correspondiente al segundo factor de $\mathbb{R} \times Z^X$, seguido del mapeo evaluación $\hat{x}$. Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times Z^X \to \mathbb{R}$ la proyección al primer factor del producto $\mathbb{R} \times Z^X$. Observe que $\hat{x} \circ \hat{\cdot} = \cdot \circ (\pi_1 \vartriangle \psi_x)$. Por ello se tiene que $\hat{x} \circ \hat{\cdot}$ es continua. Por lo tanto $\hat{\cdot}$ es continua. $\boxtimes$

El conjunto $C_p(X,Z)$ es cerrado con respecto a la adición y el producto por escalares ya que para cualesquiera $f,g \in C_p(X,Z)$ y $r \in \mathbb{R}$ sucede que, $\hat{+}(f,g) = + \circ (f \vartriangle g)$ y $\hat{\cdot}(r,f) = \cdot \circ (r_X \vartriangle f)$, donde r_X es la función constante cuyo valor en todos los puntos de X es igual a r. Así, $C_p(X,Z)$ es un subespacio vectorial de Z^X. Obtenemos en consecuencia que

$$\hat{+} \restriction_{Cp(X,Z) \times Cp(X,Z)} : C_p(X,Z) \times C_p(X,Z) \to C_p(X,Z)$$

y

$$\hat{\cdot} \restriction_{\mathbb{R} \times C_p(X,Z)} : \mathbb{R} \times C_p(X,Z) \to C_p(X,Z)$$

son funciones continuas. $\blacksquare$

Con todo lo anterior podemos demostrar que si Z es localmente convexo, entonces $C_p(X,Z)$ también lo es.

2.1.4 Teorema. *Si Z es un espacio localmente convexo, entonces $C_p(X,Z)$ es localmente convexo.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}(0_Z)$ una base local de vecindades de 0_Z en Z (esto porque Z es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$) formada por conjuntos convexos. Sea $\bar{0} \in Z^X$ la función $\bar{0} : X \to Z$ dada por $\bar{0}(x) = 0_Z$ para todo $x \in X$, entonces $\bar{0} \in Z^X$ es el origen de Z^X.

Ahora sea B una vecindad de $\bar{0}$ en Z^X, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $W_1, \ldots, W_n \in \tau(Z)$ tales que $\bar{0} \in [x_1, \ldots, x_n; W_1, \ldots, W_n] \subseteq B$, por ello, W_i es vecindad de 0_Z en Z para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ luego existe $V_i \in \mathcal{B}(0_Z)$ tal que $0_Z \in V_i \subseteq W_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto $[x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n] \in \mathcal{B}(\bar{0})$ y

$$[x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n] \subseteq [x_1, \ldots, x_n; W_1, \ldots, W_n] \subseteq B.$$

Por último, sea $U \in \mathcal{B}(\bar{0})$, entonces $U = [x_1, \ldots, x_n; V_1, \ldots, V_n]$ con $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{B}(0_z)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos $f, g \in U$ y $r \in [0, 1]$. Sea $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, por ello, $f(x_{i_0}), g(x_{i_0}) \in V_{i_0}$, dado que $V_{i_0} \in \mathcal{B}(0_Z)$ se tiene que V_{i_0} es un conjunto convexo. Por ello $rf(x_{i_0}) + (1-r)g(x_{i_0}) = [rf + (1-r)g](x_{i_0}) \in V_{i_0}$, lo cual implica que $rf + (1-r)g \in U$. Así hemos probado que $\bar{0} \in Z^X$ tiene una base de vecindades formada por conjuntos convexos. Luego por la proposición 1.3.5 se sigue que Z^X es localmente convexo, más aún por la proposición 2.1.3 sabemos que $C_p(X, Z)$ es subespacio vectorial de Z^X y por lo tanto por la proposición 1.3.6 $C_p(X, Z)$ es localmente convexo. ■

2.1.5 Proposición. *Si Z es un espacio vectorial topológico débil sobre $\mathbb{R}$, entonces $C_p(X, Z)$ es un espacio vectorial topológico débil sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración. Por un lado sabemos por la proposición 1.2.11 que la topología de $C_p(X, Z)$ es generada por la familia $\{\hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)} : x \in X\}$. Por otro lado como Z es un espacio vectorial topológico débil sobre $\mathbb{R}$, entonces su topología es generada por la familia $\{\phi \in \mathbb{R}^Z : \phi \text{ es funcional lineal en } Z\}$.

Afirmación 1. $\phi \circ \hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)} : C_p(X, Z) \to \mathbb{R}$ es funcional lineal real en $C_p(X, Z)$ para toda $\phi \in \mathbb{R}^Z$ y $x \in X$.

En efecto. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C_p(X, Z)$ arbitrarios. Así

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)})(\lambda f + g) &= \phi(\hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)} (\lambda f + g)) \\
&= \phi((\lambda f + g)(x)) = \phi(\lambda f(x) + g(x)) \\
&= \lambda\phi(f(x)) + \phi(g(x)) \\
&= \lambda\phi(\hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)} (f)) + \phi(\hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)} (g)) \\
&= \lambda(\phi \circ \hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)})(f) + (\phi \circ \hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)})(g)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi \circ \hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)}$ es funcional lineal real en $C_p(X, Z)$ para toda $\phi \in \mathbb{R}^Z$ y $x \in X$. ⊠

Por lo anterior bastará demostrar que

$$\{\phi \circ \hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)} \in \mathbb{R}^{C_p(X,Z)} : \phi \in \mathbb{R}^Z \text{ y } x \in X\}$$

genera la topología de $C_p(X,Z)$.

Afirmación 2. El conjunto

$\{\bigcap_{i=1}^n (\phi_i \circ \hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)})^{-1}[V_i] \,:\, n \in \mathbb{N},\, \phi_i \circ \hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)} \in \mathbb{R}^{C_p(X,Z)},\, V_1,\dots,V_n \in \tau(\mathbb{R})\}$

es base para $C_p(X,Z)$.

En efecto. Sea $U \in \tau(C_p(X,Z))$ y consideremos $f \in U$. Dado que la topología de $C_p(X,Z)$ es generada por la familia $\{\hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)} : x \in X\}$, existen $W_1,\dots,W_n \in \tau(Z)$ con $n \in \mathbb{N}$ tales que $f \in \bigcap_{i=1}^n (\hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)})^{-1}[W_i] \subseteq U$. Así para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ se tiene que $\hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)} (f) \in W_i$, y dado que la topología de Z es generada por la familia $\{\phi \in \mathbb{R}^Z : \phi$ es funcional lineal en $Z\}$ se sigue que existen $V_1^i,\dots,V_m^i \in \tau(\mathbb{R})$ con $m \in \omega\backslash 1$ tales que $\hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)} (f) \in \bigcap_{j=1}^m \phi_j^{-1}[V_j^i] \subseteq W_i$. Ahora observemos que

$$f \in (\hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)})^{-1}[\bigcap_{j=1}^m \phi_j^{-1}[V_j^i]] \subseteq (\hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)})^{-1}[W_i]$$

para cada $i \in \{1,\dots,n\}$. Por lo tanto,

$$f \in \bigcap_{i=1}^n (\hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)})^{-1}[\bigcap_{j=1}^m \phi_j^{-1}[V_j^i]] \subseteq \bigcap_{i=1}^n (\hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)})^{-1}[W_i] \subseteq U.$$

Finalmente basta notar que

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^n (\hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)})^{-1}[\bigcap_{j=1}^m \phi_j^{-1}[V_j^i]] &= \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^m (\hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)})^{-1}[\phi_j^{-1}[V_j^i]] \\ &= \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^m (\phi_j \circ \hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)})^{-1}[V_j^i]\end{aligned}$$

Así $f \in \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^m (\phi_j \circ \hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)})^{-1}[V_j^i] \subseteq \bigcap_{i=1}^n (\hat{x}_i \restriction_{C_p(X,Z)})^{-1}[W_i] \subseteq U$. ■

2.2. La densidad $C_p(X,Z)$ en Z^X y sus implicaciones

Debido a que $C_p(X,Z)$ es un subespacio de Z^X es natural preguntar cómo está «colocado» este subconjunto en Z^X. En este sentido es que uno se pregunta bajo qué condiciones $C_p(X,Z)$ es un subconjunto denso de Z^X. El siguiente resultado proporciona una condición suficiente.

2.2.1 Teorema. *Si Z es conexo por trayectorias, entonces el espacio $C_p(X,Z)$ es denso en Z^X.*

Demostración. Sea $[x_1,\dots,x_n;V_1,\dots,V_n]$ un abierto canónico de Z^X arbitrario, donde $x_1,\dots,x_n\in X$ y $V_1,\dots,V_n\in\tau(Z)$. Demostraremos que

$$[x_1,\dots,x_n;V_1,\dots,V_n]\cap C_p(X,Z)\neq\emptyset.$$

Fijemos puntos arbitrarios $z_1\in V_1,\dots,z_n\in V_n$. Si demostramos que:

1. Existe $\phi:\mathbb{R}\to Z$ continua tal que $\phi(i)=z_i$ para toda $i\in\{1,\dots,n\}$; y

2. existe $g:X\to\mathbb{R}$ continua tal que $g(x_i)=i$ para toda $i\in\{1,\dots,n\}$.

Obtendremos que $f=\phi\circ g\in C_p(X,Z)$ y $f(x_i)=z_i\in V_i$ para toda $i\in\{1,\dots,n\}$, es decir $f\in C_p(X,Z)\cap[x_1,\dots,x_n;V_1,\dots,V_n]$.

Demostración de 1. Sea $I=[0,1]$. Como Z es conexo por trayectorias para cada $k\in\{1,\dots,n-1\}$ existe $\lambda_k:I\to Z$ continua tal que $\lambda_k(0)=z_k$ y $\lambda_k(1)=z_{k+1}$. Considere $\alpha_k:[k,k+1]\to I$ dado por $\alpha_k(r)=r-k$ para todo $r\in[k,k+1]$. Entonces $\phi_k=\lambda_k\circ\alpha_k:[k,k+1]\to Z$ es continua y, $\phi_k(k)=\lambda_k(\alpha_k(k))=\lambda_k(0)=z_k$ y $\phi_k(k+1)=z_{k+1}$. Sean $\delta:(-\infty,1]\to Z$ dada por $\delta(r)=z_1$ para todo $r\in(-\infty,1]$ y $\psi:[n,\infty)\to Z$ dada por $\psi(r)=z_n$ para toda $r\in[n,\infty)$. Definamos $\phi:\mathbb{R}\to Z$ mediante

$$\phi(r)=\begin{cases}\delta(r) & si \quad r\in(-\infty,1]\\ \phi_k(r) & si \quad r\in[k,k+1]\\ \psi(r) & si \quad r\in[n,\infty)\end{cases}$$

Observe que ϕ es una función continua. Además si $i\in\{1,\dots,n-1\}$ sucede entonces que $\phi(i)=\phi_i(i)=z_i$. Por otra parte $\phi(n)=\psi(n)=z_n$. ⊠

Demostración de 2. Como X es un espacio Tychonoff, para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ existe $g_i:X\to[0,1]$ continua tal que $g_i(x_i)=1$ y $g_i(x_j)=0$ si $i\neq j$. Dado que $C_p(X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $g_i\in C_p(X)$ para toda $i\in\{1,\dots,n\}$, esto implica que

$$g:=1+\textstyle\sum_{i=1}^n(i-1)g_i\in C_p(X).$$

Además $g(x_i)=1+(i-1)g_i(x_i)=i$ para toda $i\in\{1,\dots,n\}$. ⊠

Por todo lo anterior se tiene que $f=\phi\circ g\in C_p(X,Z)\cap[x_1,\dots,x_n;V_1,\dots,V_n]$, es decir, $[x_1,\dots,x_n;V_1,\dots,V_n]\cap C_p(X,Z)\neq\emptyset$. Por lo tanto $C_p(X,Z)$ es denso en Z^X. ■

Como $\mathbb{R}$ es conexo por trayectorias obtenemos lo siguiente:

2.2.2 Corolario. *Para todo espacio X, $C_p(X)$ es un subespacio denso del producto topológico $\mathbb{R}^X$.*

2.2.3 Observación. En la demostración de la proposición 2.2.1 hemos, de hecho, demostrado algo ligeramente más fuerte:

> Si Z es un espacio conexo por trayectorias, entonces la familia $\{f \in Z^X : cl_Z(f[X])$ es compacto en $Z\}$ es denso en Z^X.

Efectivamente, en el contexto de la proposición 2.2.1, $cl_Z(f[X]) \subseteq \phi([1, n])$, donde f y ϕ son las funciones construidas en la demostración de la proposición anterior. Dado que $cl_Z(f[X]) \subseteq \phi([1, n])$, entonces $cl_Z(f[X])$ es compacto en Z. $\boxtimes$

En particular, la anterior observación 2.2.3 implica lo siquiente:

2.2.4 Proposición. $C_p^b(X) = \{f \in \mathbb{R}^X : f$ *es función continua y acotada* $\}$ *es denso en* $\mathbb{R}^X$

El siguiente resultado relacionado a los espacios $C_p(X, \mathbb{D})$ nos dá una condición suficiente para su densidad en $\mathbb{D}^X$; el símbolo $\mathbb{D}$ denota al espacio discreto $\{0, 1\}$. Recordemos que un espacio es *cero-dimensional* si tiene una base de conjuntos cerado-abiertos.

2.2.5 Proposición. *Si* X *es un espacio cero-dimensional y* T_1*, entonces* $C_p(X, \mathbb{D})$ *es denso en* $\mathbb{D}^X$.

Demostración. Sean $f \in \mathbb{D}^X$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$ arbitrarios. Como X es un espacio cero-dimensional, entonces X tiene una base de conjuntos cerrado-abiertos. Además como X es T_1 existen $U_1, \ldots, U_n$ cerrado-abiertos tales que $x_1 \in U_1, \ldots, x_n \in U_n$ y la familia $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es ajena por pares. Definamos $U_{n+1} = X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$ y note que $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$. Si $U_{n+1} \neq \emptyset$, elegimos $y \in U_{n+1}$ y definimos $g : X \to \mathbb{D}$ por medio de:

$$g(x) = \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x \notin U_i \text{ para toda } i \in \{1, \ldots, n\} \\ f(y) & \text{si } x \in U_{n+1}. \end{cases}$$

Es claro que $g \restriction_{\{x_1,\ldots,x_n\}} = f \restriction_{\{x_1,\ldots,x_n\}}$.

Afirmación. $g \in C(X, \mathbb{D})$.

En efecto. Bastará demostrar que $g^{-1}(\{0\})$ y $g^{-1}(\{1\})$ son conjuntos abiertos en X. Para ello note que $g^{-1}(\{0\}) = \bigcup\{U_i : f(x_i) = 0 \text{ con } i \in \{1, \ldots, n, n+1\}\}$ el cual es un conjunto abierto en X, del mismo modo $g^{-1}(\{1\}) = \bigcup\{U_i : f(x_i) = 1 \text{ con } i \in \{1, \ldots, n, n+1\}\}$ es un conjunto abierto en X. Por lo tanto $g \in C(X, \mathbb{D})$. $\boxtimes$

Como consecuencia de ello, para cualquier colección $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\epsilon > 0$ hemos encontrado $g \in C_p(X, \mathbb{D})$ tal que $g \restriction_{\{x_1,\ldots,x_n\}} = f \restriction_{\{x_1,\ldots,x_n\}}$ y por ello $|f(x_i) - g(x_i)| = 0 < \epsilon$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Esto demuestra que $g \in [f, x_1, \ldots, x_n; \epsilon]$ lo que implica que $f \in cl(C_p(X, \mathbb{D}))$. Por lo tanto $C_p(X, \mathbb{D})$ es denso en $\mathbb{D}^X$. ∎

2.3. Precalibres en $C_p(X)$

Todo lo concerniente a calibres y precalibres desarrollado en el capítulo de preliminares se aplicará ahora para demostrar varias propiedades de los espacios de funciones continuas $C_p(X)$.

2.3.1 Corolario. *Todo cardinal regular no numerable es precalibre de $C_p(X)$. En particular $c(C_p(X)) = \omega$.*

Demostración. Por la proposición 1.4.8 sabemos que todo cardinal regular no numerable κ es calibre de $\mathbb{R}^X$, más aún por la proposición 1.4.4 se tiene que κ es precalibre de $\mathbb{R}^X$. Por otro lado sabemos que $C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$ por el teorema 2.2.1 ya que $\mathbb{R}$ es conexo por trayectorias , luego por la proposición 1.4.5 se tiene que κ es precalibre de $C_p(X)$. Además como ω_1 es precalibre de $C_p(X)$ por la proposición 1.4.4 se tiene que $c(C_p(X)) = \omega$. Por lo tanto, todo cardinal regular no numerable es precalibre de $C_p(X)$ y $c(C_p(X)) = \omega$. ∎

Un espacio topológico es *Lindelöf* o tiene la propiedad de *Lindelöf* si toda cubierta abierta tiene una subcubierta a lo más numerable. Enseguida, recordamos al lector la definición de espacio paracompacto.

2.3.2 Definición. Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. $\mathcal{U}$ es una familia *localmente finita* si, para cada $x \in X$, existe $W \in \tau(x, X)$ tal que $|\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\}| < \aleph_0$.
2. Diremos que la familia $\mathcal{V}$ es un *refinamiento* de la familia $\mathcal{U}$ si:

    a) $\bigcup \mathcal{V} = X$; y

    b) para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ de tal manera que $V \subseteq U$.

    Si adicionalmente $\mathcal{V} \subseteq \tau$, diremos que $\mathcal{V}$ es un *refinamiento abierto* de $\mathcal{U}$.

2.3.3 Definición. Un espacio topológico X es un espacio *paracompacto* si cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

Es común incluir en la definición de espacio paracompacto al axioma de separación T_2; la razón de ello es que se desea que todo espacio paracompacto sea un espacio T_4. En este trabajo no requerimos que los espacios paracompactos sean espacios Hausdorff (c.f. 2.3.3). Sin embargo, enfatizaremos en cuáles demostraciones es necesario hacer uso del axioma T_2.

Todo espacio discreto X es un espacio paracompacto puesto que la cubierta abierta $\mathcal{V} = \{\{x\} : x \in X\}$ refina a cualquier cubierta de X.

Asimismo, la clase de espacios paracompactos contiene a la clase de espacios compactos porque toda subcubierta finita de una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de un espacio compacto X es un refinamiento abierto localmente finito de la cubierta $\mathcal{U}$.

El siguiente resultado es una ligera generalización de esto último. Recuérdese que en este trabajo distinguimos a los espacios regulares de los espacios T_3; es decir, un espacio T_3 es un espacio regular T_0.

2.3.4 Proposición. *Todo espacio Lindelöf regular es un espacio paracompacto.*

Demostración. Supongamos que (X,τ) es un espacio Lindelöf regular y supongamos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X.

Para cada $x \in X$ fijemos un elemento $U_x \in \mathcal{U}$ de modo que $x \in U_x$. Por ser X es un espacio regular, para cada $x \in X$ podemos fijar un abierto V_x de modo que $x \in V_x \subseteq cl(V_x) \subseteq U_x$.

Como X es Lindelöf, existen una subcubierta a lo más numerable $\{V_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$ de la cubierta $\{V_x : x \in X\}$.

Definamos

$$W_n = \begin{cases} U_{x_1} & \text{si } n = 1, \\ U_{x_n} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} cl(V_{x_i}) & \text{si } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Afirmación. $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ localmente finito.

Demostración de la afirmación. Es claro que cada W_n es un abierto de X. Por otro lado, también es claro que para cada $n \in \mathbb{N}$, el elemento $U_{x_n} \in \mathcal{U}$ es tal que $W_n \subseteq U_{x_n}$. Además, si $x \in X$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $x \in cl(V_{x_n})$. De esta manera podemos definir $m = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in cl(V_{x_n})\}$. Note que entonces $x \in W_m$ y por ello, $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de X. Consecuentemente, es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$.

Verifiquemos que $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita. Supongamos que $x \in X$ es cualquier elemento. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ de modo que $x \in V_{x_m}$. Note que $V_{x_m} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} cl(V_{x_i})$. Observemos que $\{i \in \mathbb{N} : V_{x_m} \cap W_i\} \subseteq \{1, \ldots, m+1\}$. Así $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita. $\boxtimes$

Por lo tanto, X es paracompacto. ■

No todo espacio paracompacto es Lindelöf, por ejemplo, el espacio discreto $D(\mathfrak{c})$ de cardinalidad $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ es un espacio paracompacto que no es Lindelöf.

Un corolario importante que obtenemos a partir de saber que todos los espacios de funciones $C_p(X)$ tienen la propiedad de Suslin es que para espacios de este tipo, las propiedades topológicas paracompacidad y Lindelöf coinciden. Esto es corolario del siguiente resultado más general.

2.3.5 Proposición. *Si X es un espacio regular que tiene la propiedad de Suslin, entonces X es Lindelöf si y sólo si X es paracompacto*

Demostración. Podemos suponer que X es infinito puesto que todo espacio finito T_1 es discreto y por ello compacto. Además, por la proposición anterior, resta demostrar que si X es paracompacto, entonces es Lindelöf.

Afirmación. Si X es paracompacto y $c(X) \leqslant \omega$, entonces X es Lindelöf.

Demostración de la afirmación. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Dado que X es paracompacto, podemos elegir un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$. Demostaremos que $\mathcal{V}$ es a lo más numerable.

Sea

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{C} \subseteq \tau \setminus \{\emptyset\} : \text{ es celular } \ \& \ (\forall\, C \in \mathcal{C})(|\{A \in \mathcal{V} : A \cap C \neq \emptyset\}| < \aleph_0)\}.$$

Observe que $\mathcal{G} \neq \emptyset$. En efecto, fijemos un $x \in X$ como $\mathcal{V}$ es localmente finita, existe $U_x \in \tau$ tal que $x \in U_x$ y $|\{V \in \mathcal{V} : V \cap U_x \neq \emptyset\}| < \aleph_0$. Resulta que $\mathcal{C} = \{U_x\} \in \mathcal{G}$.

Consideremos ahora al conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{G}, \subseteq)$. No es difícil mostrar que toda cadena en $(\mathcal{G}, \subseteq)$ tiene una cota superior en $(\mathcal{G}, \subseteq)$. Por el lema de Zorn, podemos fijar un elemento maximal $\mathcal{F}$ en $(\mathcal{G}, \subseteq)$. Debido a que $c(X) \leqslant \omega$, tenemos que $|\mathcal{F}| \leqslant \aleph_0$. Sea $\mathcal{F} = \{H_1, \ldots, H_n, \ldots\}$ una enumeración para $\mathcal{F}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$\mathcal{V}_n = \{W \in \mathcal{V} : W \cap H_n \neq \emptyset\}.$$

Entonces $\mathcal{V} \setminus \{\emptyset\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ En efecto, sea $W \in \mathcal{V} \setminus \{\emptyset\}$ cualquiera. Si $W \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$, entonces $W \subseteq$ int $(X \setminus \bigcup H_n)$. Dado que $W \neq \emptyset$, podemos elegir $x_0 \in W$. Sea V un abierto que contiene a x_0 tal que $|\{A \in \mathcal{V} : A \cap V \neq \emptyset\}| < \aleph_0$. Así la familia $\mathcal{F} \cup \{V \cap W\}$ es un elemento de $(\mathcal{G}, \subseteq)$ que contiene propiamente a $\mathcal{F}$; lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{V} \setminus \{\emptyset\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$. De donde, $\mathcal{V}$ es a lo más numerable. ∎

2.3.6 Corolario. *Para cada espacio Tychonoff X, el espacio de funciones $C_p(X)$ es de Lindelöf si y sólo si es paracompacto.*

Un espacio es completo en el sentido de Dieudonné (o Dieudonné-completo) si es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto de espacios metrizables. Por otro lado, un espacio es realcompacto si es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto $\mathbb{R}^X$ de rectas reales. Es evidente que todo espacio realcompacto es Dieudonné-completo. Se sabe que en la clase de espacios con la propiedad de Suslin, el recíproco es cierto (vea [10, Problema 458]). Como todo espacio de funciones $C_p(X)$ tiene la propiedad de Suslin, el siguiente corolario es inmediato de esto último.

2.3.7 Corolario. *Para todo X Tychonoff, $C_p(X)$ es Dieudonné-completo si y sólo si es realcompacto.*

2.3.8 Definición. Un espacio topológico X es *perfectamente κ-normal* si la cerradura de todo conjunto abierto no vacío es un conjunto nulo; es decir un conjunto de la forma $f^{-1}(\{0\})$ donde $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua.

Los espacios *perfectamente κ-normales* fueron introducidos en 1980 por el matemático ruso Evgeny Vital'evich Shchepin. Ahora mostraremos las implicaciones que tiene el hecho de que $C_p(X)$ sea denso en $\mathbb{R}^X$ en relación a la perfecta κ-normalidad.

Primero mostraremos que la perfecta κ-normalidad se preserva por subespacios densos.

2.3.9 Proposición. *Sean X un espacio topológico y $Y \subseteq X = cl_X(Y)$. Si X es perfectamente κ-normal, entonces Y es perfectamente κ-normal.*

Demostración. Sea $U \in \tau^*(Y)$ arbitrario. Como $U \in \tau^*(Y)$, existe $V \in \tau^*(X)$ tal que $V \cap Y = U$. Dado que X es perfectamente κ-normal, existe $f \in C(X)$ tal que $cl_X(V) = f^{-1}(\{0\})$.
Por otro lado, como Y es denso en X, $cl_Y(U) = cl_X(V \cap Y) = cl_X(V) \cap Y = f^{-1}(\{0\}) \cap Y$. Definamos $g = f \restriction_Y$. Claramente $g \in C(Y)$ y por ello $cl_Y(U) = g^{-1}(\{0\})$. Por lo tanto Y es perfectamente κ-normal. ∎

Ahora veremos que $\mathbb{R}^X$ siempre es κ-normal.

2.3.10 Proposición. *Sea X un conjunto no vacío. Entonces el producto $\mathbb{R}^X$ es perfectamente κ-normal.*

Demostración. Sea $U \in \tau^*(\mathbb{R}^X)$. Considere a la familia

$$\mathcal{A} := \{\gamma \subset \mathbb{R}^X : \gamma \text{ es familia celular de abiertos canónicos no vacíos contenidos en U } \}.$$

Note que $\mathcal{A}$ es no vacío. Efectivamente, dado $x \in U$ existe V abierto canónico no vacío de $\mathbb{R}^X$ tal que $x \in V \subseteq U$, por ello $\{V\} \in \mathcal{A}$ ya que por vacuidad $\{V\}$ es una familia celular.

Consideremos ahora al conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{A}, \subseteq)$. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una cadena en $(\mathcal{A}, \subseteq)$. Se afirma que $\bigcup \mathcal{C}$ es cota superior de $\mathcal{C}$ y además $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$. En efecto. Es claro que $\bigcup \mathcal{C}$ es cota superior de $\mathcal{C}$. Ahora mostremos que es una familia celular. Sean $A, B \in \bigcup \mathcal{C}$ con $A \neq B$, dado que $A, B \in \bigcup \mathcal{C}$ entonces existen $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tales que $A \in C_1$ y $B \in C_2$. Luego como $\mathcal{C}$ es una $\subseteq$-cadena en $\mathcal{A}$, se tiene que $C_1 \subseteq C_2$ o $C_2 \subseteq C_1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $C_1 \subseteq C_2$. De esto se sigue que $A, B \in C_2$; y dado que C_2 es una familia celular y $A \neq B$, tenemos que $A \cap B = \emptyset$. En conclusión, $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$ y es cota superior de $\mathcal{C}$. Por el lema de Zorn existe γ una familia celular no vacía maximal de abiertos canónicos de $\mathbb{R}^X$ contenidos en U.

Note que como $c(\mathbb{R}^X) = \omega$, se tiene que $\mid \gamma \mid \leqslant \omega$. Además $\bigcup \gamma \subseteq U$ y $cl(\bigcup \gamma) = cl(U)$. En efecto. Bastará demostrar que $cl(U) \subseteq cl(\bigcup \gamma)$, pues $\bigcup \gamma \subseteq U$ y por ello $cl(\bigcup \gamma) \subseteq cl(U)$. Supongamos por el contrario que existe $x \in cl(U) \backslash cl(\bigcup \gamma)$. Como $x \notin cl(\bigcup \gamma)$, entonces existe $W \in \tau^*(x, \mathbb{R}^X)$ tal que $W \cap (\bigcup \gamma) = \emptyset$. Por otro lado, como $x \in cl(U)$, tenemos que $W \cap U \neq \emptyset$. Dado que $W \cap U \in \tau^*(\mathbb{R}^X)$ se tiene que hay $V \in \tau^*(\mathbb{R}^X)$ abierto canónico no vacío en $\mathbb{R}^X$ tal que $V \subseteq W \cap U$. Entonces $V \cap (\bigcup \gamma) = \emptyset$, luego $\gamma \cup \{V\} \in \mathcal{A}$ y $\gamma \subsetneq \gamma \cup \{V\}$ lo cual contradice la maximalidad de la familia γ. Por lo tanto $cl(\bigcup \gamma) = cl(U)$.

Ahora sea $L = \{K(V) : V \in \gamma\}$. Por lo anterior es claro que $\mid L \mid \leqslant \omega$. Sea $p_L : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^L$ la proyección asociada a L, sabemos que p_L es una función continua, abierta y sobreyectiva. Además $\bigcup \gamma = p_L^{-1}(p_L(\bigcup \gamma))$. Es claro que $\bigcup \gamma \subseteq p_L^{-1}(p_L(\bigcup \gamma))$, por ello bastará demostrar que $p_L^{-1}(p_L(\bigcup \gamma)) \subseteq \bigcup \gamma$. Sea $x \in p_L^{-1}(p_L(\bigcup \gamma))$, entonces $p_L(x) \in p_L(\bigcup \gamma)$ por ello existe $y \in \bigcup \gamma$ tal que $p_L(x) = p_L(y)$.

Pero como $y \in \bigcup \gamma$, existe $V \in \gamma$ tal que $y \in V$ y $p_L(x) = p_L(y)$. Como $K(V) \subseteq L$ lo anterior implica que $p_{K(V)}(x) = p_{K(V)}(y) \in p_{K(V)}(V)$ por lo cual $x \in V$. De donde se sigue que $p_L^{-1}(p_L(\bigcup \gamma)) \subseteq \bigcup \gamma$. Por lo tanto $\bigcup \gamma = p_L^{-1}(p_L(\bigcup \gamma))$.

Más aún se afirma que dado que $\bigcup \gamma = p_L^{-1}(p_L(\bigcup \gamma))$, entonces $cl(U) = cl(\bigcup \gamma) = p_L^{-1}(cl(p_L(\bigcup \gamma)))$. Efectivamente, dado que $\bigcup \gamma = p_L^{-1}(p_L(\bigcup \gamma))$ y $p_L^{-1}(p_L(\bigcup \gamma)) \subseteq p_L^{-1}(cl(p_L(\bigcup \gamma)))$ se tiene que $cl(\bigcup \gamma) \subseteq p_L^{-1}(cl(p_L(\bigcup \gamma)))$. Ahora mostremos que $p_L^{-1}(cl(p_L(\bigcup \gamma))) \subseteq cl(\bigcup \gamma)$. Para ello sea

$$y \in p_L^{-1}(cl(p_L(\bigcup \gamma)))$$

cualquier elemento, entonces $p_L(y) \in cl(p_L(\bigcup \gamma))$. Sea W una vecindad abierta de y en $\mathbb{R}^X$. Claramente $p_L(y) \in p_L(W)$ y dado que p_L es una función abierta, entonces $p_L(W) \in \tau(\mathbb{R}^L)$. Por otro lado como $p_L(y) \in cl(p_L(\bigcup \gamma))$, entonces $p_L(W) \cap p_L(\bigcup \gamma) \neq \emptyset$.

Por ello podemos elegir $x \in W$ de tal manera que $p_L(x) \in p_L(\bigcap \gamma)$. Pero como $p_L(x) \in p_L(\bigcap \gamma)$, entonces existen $V \in \gamma$ y $z \in V$ tales que $p_L(x) = p_L(z)$. Luego $x \in V$, efectivamente bastará hacer notar que para cada $\alpha \in K(V)$ se tiene que $p_\alpha(x) \in p_\alpha(V)$. Por el hecho de que $K(V) \subseteq L$ y $p_L(x) = p_L(z)$, se tiene que $p_\alpha(x) \in p_L(V)$ para cada $\alpha \in K(V)$ (pues $p_\alpha(z) \in p_L(V)$). Por lo tanto $x \in V \cap W \subseteq (\bigcup \gamma) \cap W$. Como W fue una vecindad abierta arbitraria de y en $\mathbb{R}^X$, todo lo anterior implica que $y \in cl(\bigcup \gamma)$. Por lo tanto $cl(U) = cl(\bigcup \gamma) = p_L^{-1}(cl(p_L(\bigcup \gamma)))$.

Por último notemos que como $|L| \leqslant \omega$ y $\mathbb{R}$ es un espacio topológico metrizable, entonces $\mathbb{R}^L$ es un espacio metrizable. Y afirmamos que $cl(p_L(\bigcup \gamma)) = g^{-1}(\{0\})$ donde $g \in C(\mathbb{R}^X)$. En efecto. Definamos $g : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ por medio de:

$$\forall x \in \mathbb{R}^X : g(x) = d(x, p_L(\bigcup \gamma)) := \inf\{d(x,b) : b \in p_L(\bigcup \gamma)\}.$$

Es sabido que $g \in C(\mathbb{R}^X)$, más aún es claro que $g^{-1}(\{0\}) = cl(p_L(\bigcup \gamma))$. Por ello $p_L^{-1}(cl(p_L(\bigcup \gamma))) = p_L^{-1}(g^{-1}(\{0\})) = (g \circ p_L)^{-1}(\{0\})$; es decir, $cl(U) = (g \circ p_L)^{-1}(\{0\})$.
Por lo tanto $\mathbb{R}^X$ es perfectamente κ-normal. ∎

Es claro ya que todo espacio $C_p(X)$ es un espacio perfectamente κ-normal.

2.3.11 Corolario. *Para todo espacio topológico X, $C_p(X)$ es perfectamente κ-normal.*

Demostración. Como $\mathbb{R}$ con su topología usual es conexo por trayectorias, entonces por el teorema 2.2.1 $C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$. Y por el teorema 2.3.10 se sigue que $\mathbb{R}^X$ es perfectamente κ-normal, por lo tanto por la proposición 2.3.9 $C_p(X)$ es perfectamente κ-normal. ∎

2.4. El mapeo dual

Si X, Y y Z son conjuntos no vacíos (en particular, espacios topológicos) y $p : X \to Y$ es una función entre X y Y, se define el *mapeo dual asociado a p como la función $p^* : Z^Y \to Z^X$ cuya regla es $p^*(f) = f \circ p$, para toda $f \in Z^Y$.* En esta sección demostraremos algunas propiedades básicas del mapeo dual asociado a una función. La primera de éstas establece que el mapeo dual es siempre un mapeo continuo.

2.4.1 Proposición. *Para toda función entre conjuntos $p : X \to Y$ y todo espacio topológico Z, el mapeo dual asociado p^* es un mapeo continuo.*

Demostración. Basta verificar que para toda $x \in X$, la composición $\hat{x} \circ p^*$ es continua. Sean $x \in X$ y $f \in Z^Y$ arbitrarios. Se sigue que $(\hat{x} \circ p^*)(f) = (f \circ p)(x) = f(y) = \hat{y}(f)$, con $y = p(x) \in Y$. Por lo tanto $\hat{x} \circ p^*$ es igual al mapeo evaluación en Z^Y determinado por $y = p(x)$. De esta forma $\hat{x} \circ p^*$ es continuo (porque $\hat{y}$ lo es). ■

2.4.2 Observación. Es importante notar que si Z tiene alguna estructura algebraica, entonces p^* es un homomorfismo entre las correspondientes estructuras algebraicas en Z^Y y Z^X; en particular, si Z es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$, entonces p^* es una transformación lineal.

Demostración. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f_1, f_2 \in Z^Y$. Así $p^*(\alpha f_1 + f_2) = (\alpha f_1 \circ p) + (f_2 \circ p) = \alpha p^*(f_1) + p^*(f_2)$. Por lo tanto $p^*(\alpha f_1 + f_2) = \alpha p^*(f_1) + p^*(f_2)$, es decir p^* es una transformación lineal. ■

2.4.3 Proposición. *Si $p : X \to Y$ y $q : Y \to T$ son funciones entre conjuntos, entonces $(q \circ p)^* = p^* \circ q^*$.*

Demostración. Sea $f \in Z^T$ arbitraria. Es cierto que $(p^* \circ q^*)(f) = p^*(f \circ q) = (f \circ q) \circ p = f \circ (q \circ p) = (q \circ p)^*(f)$. Así $(p^* \circ q^*)(f) = (q \circ p)^*(f)$. ■

Enseguida demostramos algunas otras propiedades del mapeo dual.

2.4.4 Proposición. *Sean X, Y y Z espacios topológicos y sea $p : X \to Y$ una función continua, entonces:*

(1) $p^*[C_p(Y, Z)] \subseteq C_p(X, Z)$.

(2) Si $p[X]$ es denso en Y y Z es Hausdorff, entonces el mapeo dual asociado $p^* : C_p(Y, Z) \to C_p(X, Z)$ es inyectivo.

(3) Si $p[X] = Y$, entonces $p^* : C_p(Y, Z) \to C_p(X, Z)$ es un homeomorfismo de $C_p(Y, Z)$ en $p^*[C_p(Y, Z)]$.

(4) *Si $p : X \to Y$ es un mapeo $\mathbb{R}$-cociente, entonces $p^*[C_p(Y,Z)]$ es cerrado en $C_p(X,Z)$.*

Demostración. (1) Debido a que la composición de funciones continuas es continua, si p es continua entonces $p^*[C_p(Y,Z)]$ está contenido en $C_p(X,Z)$.

(2) Sean $f_1, f_2 \in C_p(Y,Z)$ tales que $p^*(f_1) = p^*(f_2)$. Supongamos para generar una contradicción que existe $y \in Y$ tal que $f_1(y) \neq f_2(y)$.Como Z es Hausdorff existen $U_1, U_2 \in \tau^*(Z)$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $f_1(y) \in U_1$, $f_2(y) \in U_2$. Luego ${f_1}^{-1}[U_1] \cap {f_2}^{-1}[U_2] \in \tau(y,Y)$. Dado que $p[X]$ es denso en Y, entonces, existe $z \in p[X] \cap ({f_1}^{-1}[U_1] \cap {f_2}^{-1}[U_2])$. Así, $z \in p[X]$, $f_1(z) \in U_1$ y $f_2(z) \in U_2$, por ello existe $x \in X$ tal que $p(x) = z$. Pero

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= f_1(p(x)) = f_1 \circ p(x) \\
&= p^*(f_1)(x) = p^*(f_2)(x) \\
&= f_2 \circ p(x) = f_2(p(x)) \\
&= f_2(z).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción.

(3) Primero mostremos que p^* es una función inyectiva. Para ello sean $f_1, f_2 \in C_p(Y,Z)$ tales que $p^*(f_1) = p^*(f_2)$. Note que como $Y = p[X]$, entonces para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $p(x) = y$. Así $p^*(f_1)(x) = p^*(f_2)(x)$, es decir, $f_1(y) = f_2(y)$. Por lo tanto p^* es inyectivo, es decir, $p^* : C_p(Y,Z) \to p^*[C_p(Y,Z)]$ es una función biyectiva. Basta demostrar que $(p^*)^{-1} : p^*[C_p(Y,Z)] \to C_p(Y,Z)$ es una función continua. Efectivamente, sea $y \in Y$ arbitrario. Como $p[X] = Y$, entonces existe $x \in X$ tal que $p(x) = y$. Ahora tomemos $g \in p^*[C_p(Y,Z)]$ cualquiera, por ello existe $f \in C_p(Y,Z)$ tal que $p^*(f) = g$. De está manera

$$\begin{aligned}
(\hat{y} \restriction_{C_p(Y,Z)} \circ (p^*)^{-1})(g) &= \hat{y} \restriction_{C_p(Y,Z)} (g \circ p^{-1}) \\
&= \hat{y} \restriction_{C_p(Y,Z)} (f) = f(y) \\
&= f(p(x)) = g(x) \\
&= \hat{x} \restriction_{p^*[C_p(Y,Z)]} (g)
\end{aligned}$$

Por ello $\hat{y} \restriction_{C_p(Y,Z)} \circ (p^*)^{-1} = \hat{x} \restriction_{p^*[C_p(Y,Z)]}$, donde $\hat{x} \restriction_{p^*[C_p(Y,Z)]}$ es continua en $p^*[C_p(Y,Z)]$, de lo que se sigue que $\hat{y} \restriction_{C_p(Y,Z)} \circ (p^*)^{-1}$ es una función continua en $p^*[C_p(Y,Z)]$. Por lo tanto por la proposición 1.2.11 $(p^*)^{-1}$ es una función continua en $p^*[C_p(Y,Z)]$. Con todo lo anterior se concluye que $p^* : C_p(Y,Z) \to C_p(X,Z)$ es un homeomorfismo de $C_p(Y,Z)$ en $p^*[C_p(Y,Z)]$.

(4) Primero demostraremos dos afirmaciones.

Afirmación 1. Para cada $f \in C_p(X, Z)$, $f \in p^*[C_p(Y, Z)]$ si y sólo si existe $g \in Z^Y$ tal que $f = g \circ p$.

Demostración de la afirmación 1. Sea $f \in C_p(X, Z)$ arbitraria.
[$\Rightarrow$] Si $f \in p^*[C_p(Y, Z)] \subseteq C_p(X, Z)$, entonces $f = p^*(g) = g \circ p$ para alguna $g \in C_p(Y, Z)$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que existe $g \in Z^Y$ tal que $f = g \circ p$. Bastará demostrar que $f \in p^*[C_p(Y, Z)]$. Como por hipótesis $f \in C_p(X, Z)$, se sigue por la proposición 2.4.3 que g es continua. $\boxtimes$

Afirmación 2. Para toda $f \in C_p(X, Z)$. Existe $g \in Z^Y$ tal que $g \circ p = f$ si y sólo si f es constante en $p^{-1}[\{y\}]$ para toda $y \in Y$.

Demostración de la afirmación 2.

[$\Rightarrow$] Sea $f \in C_p(X, Z)$ arbitraria. Supongamos que existe $g \in Z^Y$ tal que $g \circ p = f$. Sean $y \in Y$ cualquiera y $x_1, x_2 \in p^{-1}[\{y\}]$. Luego $p(x_1) = y = p(x_2)$, además

$$\begin{gathered} f(x_1) = (g \circ p)(x_1) = g(p(x_1)) = g(y) \text{ y} \\ f(x_2) = (g \circ p)(x_2) = g(p(x_2)) = g(y) \end{gathered}$$

Por lo tanto $f(x_1) = f(x_2)$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que f es constante en $p^{-1}[\{y\}]$ para toda $y \in Y$. Como p es $\mathbb{R}$-cociente, entonces $p[X] = Y$. Por ello $p^{-1}[\{y\}]$ es no vacío para toda $y \in Y$. Ahora definamos la siguiente función

$$g : Y \to Z \text{ dada por: } g(y) = f(x) \text{ donde } x \in p^{-1}[\{y\}].$$

Sean $x \in X$ y $y = p(x)$. En consecuencia $x \in p^{-1}[\{y\}]$ y $(g \circ p)(x) = g(y) = f(x)$. Por lo tanto $g \circ p = f$. $\boxtimes$

Notemos que de las afirmaciones anteriores se tiene lo siguiente: para toda $f \in C_p(X, Z)$, f es constante en $p^{-1}[\{y\}]$ para toda $y \in Y$ si y sólo si para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$; si $p(x_1) = p(x_2)$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$. Por lo tanto,

$p^*[C_p(Y, Z)] = \{f \in C_p(X, Z) :$ para cualesquiera $x_1, x_2 \in X;$ si $p(x_1) = p(x_2),$ entonces $f(x_1) = f(x_2)\} = \bigcap\{F_{x_1,x_2} : x_1, x_2 \in X \text{ y } p(x_1) = p(x_2)\}$,

donde $F_{x_1,x_2} = \{f \in C_p(X, Z) : f(x_1) = f(x_2)\} = \{f \in C_p(X, Z) : \hat{x_1}(f) = \hat{x_2}(f)$ para todo $x_1, x_2 \in X\}$. Pero los conjuntos F_{x_1,x_2} son cerrados para toda $x_1, x_2 \in X$ pues las funciones evaluación $\hat{x_1}, \hat{x_2}$ son continuas. Por lo tanto $p^*[C_p(Y, Z)]$ es cerrado en $C_p(X, Z)$. $\blacksquare$

Debemos notar que los recíprocos de los incisos (2) y (3) de la proposición anterior (2.4.4) no son en general ciertos. Para ello primero observemos los siguientes hechos generales:

- Si X es un espacio conexo arbitrario, entonces $C_p(X, \mathbb{D}) = \{0_X, 1_X\}$ donde 0_X y 1_X son las funciones constantes de valor 0 y 1 respectivamente, definidas sobre X.
- Si $p : X \to Y$ es una función continua entre espacios conexos X y Y, entonces $p^* : C_p(Y, \mathbb{D}) \to C_p(X, \mathbb{D})$ es biyectivo.
  Efectivamente. Note que $p^*(0_Y) = 0_Y \circ p = 0_X$ y $p^*(1_Y) = 1_Y \circ p = 1_X$.
- Como $C_p(Y, \mathbb{D})$ es un espacio discreto (note que $C_p(X, \mathbb{D})$ también lo es), podemos concluir que p^* es un homeomorfismo.

Con estas herramientas mostremos, por ejemplo, estamos en condiciones para mostrar que efectivamente dichos incisos no son en general ciertos.

- Consideremos al mapeo inclusión $i : (0, 1) \hookrightarrow \mathbb{R}$. Se tiene que

  $$i^* : C_p(\mathbb{R}, \mathbb{D}) \to C_p((0, 1), \mathbb{D})$$

  es inyectivo. Sin embargo, $(0, 1)$ no es denso en $\mathbb{R}$.
- Sea $p : (0, 4) \to (0, 2)$ dada por $p(x) = 1$, para toda $x \in (0, 4)$. Notemos que $p^* : C_p((0, 2), \mathbb{D}) \to C_p((0, 4), \mathbb{D})$ es inmersión, pero $p[(0, 4)] = \{1\}$, es decir, p no es sobreyectiva.

Por otro lado, es notable que cuando sustituimos al espacio $\mathbb{D}$ por el espacio usual de los números reales $\mathbb{R}$, los recíprocos de los incisos (2), (3) y (4) sí son ciertos. Esto se establece en la siguiente proposición.

2.4.5 Proposición. *Sean X y Y espacios topológicos.*

(1) Sea $p : X \to Y$ una función arbitraria. Se tiene que:

$$p \text{ es continuo si y sólo si } p^*[C_p(Y)] \subseteq C_p(X).$$

(2) Sea $p : X \to Y$ un mapeo continuo. Por ello son equivalentes:

a*) $p^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ es un homeomorfismo de $C_p(Y)$ en $p^*[C_p(Y)]$;*

b*) $p[X] = Y$.*

(3) Sea $p : X \to Y$ un mapeo continuo y sobreyectivo. Así:

$$p^*[C_p(Y)] \text{ es denso en } C_p(X) \text{ si y sólo si } p \text{ es inyectiva.}$$

Demostración.
(1) [$\Rightarrow$] Es claro.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $p^*[C_p(Y)] \subseteq C_p(X)$. Como Y es completamente regular por la proposición 1.1.11 su topología es generada por $C_p(Y)$. Sean $f \in C_p(Y)$ y $U \in \tau^*(\mathbb{R})$. Bastará demostrar que $p^{-1}[f^{-1}[U]] \in \tau(X)$. En efecto, como $f \in C_p(Y)$, entonces $p^*(f) = f \circ p \in C_p(X)$. Por ello $(f \circ p)^{-1}[U] \in \tau(X)$, pero

$$(f \circ p)^{-1}[U] = (p^{-1} \circ f^{-1})[U] = p^{-1}[f^{-1}[U]]$$

Por lo tanto p es continua.

(2) [$(a) \Rightarrow (b)$] Supongamos que $p^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ es un homeomorfismo de $C_p(Y)$ en $p^*[C_p(Y)]$ y $p[X] \neq Y$. Consideremos $y_0 \in Y \backslash p[X]$ y

$$U = \{g \in C_p(Y) : |g(y_0)| < 1\} = (\hat{y_0} \restriction_{C_p(Y)})^{-1}[(-1, 1)]$$

Como U es abierto en $C_p(Y)$, entonces se tiene que $p^*[U]$ es abierto en $p^*[C_p(Y)]$. Por el corolario 2.1.2, existen $n \in \omega$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\delta > 0$ tales que

$$p^*[C_p(Y)] \cap \{f \in C_p(X) : |f(x_i)| < \delta \text{ con } i \in \{1, \ldots, n\}\} \subseteq p^*[U].$$

Como Y es Tychonoff, existe $g_0 \in C_p(Y)$ tal que $g_0[\{p(x_1), \ldots, p(x_n)\}] \subseteq \{0\}$ y $g_0(y_0) = 1$. De esta manera, $g_0 \notin U$; pero además

$$p^*(g_0) \in p^*[C_p(Y)] \cap \{f \in C_p(X) : |f(x_i)| < \delta \text{ con } i \in \{1, \ldots, n\}\} \subseteq p^*[U].$$

Por lo tanto $p^*(g_0) \in p^*[U]$, lo que implica que existe $h \in U$ tal que $p^*(g_0) = p^*(h)$ lo cual contradice la inyectividad de p^*.

[$(b) \Rightarrow (a)$] Vea la proposición 2.4.4.

(3) [$\Rightarrow$] Supongamos que p no es inyectiva. Por lo que existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$ y $p(x_1) = p(x_2)$. Considere

$$\begin{aligned} U &= (\hat{x_1} \restriction_{C_p(X)})^{-1}[(0, \infty)] \cap (\hat{x_2} \restriction_{C_p(X)})^{-1}[(-\infty, 0)] \\ &= \{f \in C_p(X) : f(x_1) > 0 \text{ y } f(x_2) < 0\} \end{aligned}$$

Notemos que $U \in \tau(C_p(X))$, pues $(\hat{x_1} \restriction_{C_p(X)})^{-1}[(0, \infty)] \in \tau(C_p(X))$ y $(\hat{x_2} \restriction_{C_p(X)})^{-1}[(-\infty, 0)] \in \tau(C_p(X))$, más aún $U \neq \emptyset$ ya que X es Tychonoff. Además sí $g \in p^*[C_p(Y)]$, entonces existe $f \in C_p(Y)$ tal que $g = p^*(f) = f \circ p$. Luego

$$\begin{aligned} g(x_1) &= p^*(f)(x_1) = (f \circ p)(x_1) \\ &= f(p(x_1)) = f(p(x_2)) \\ &= (f \circ p)(x_2) = p^*(f)(x_2) \\ &= g(x_2). \end{aligned}$$

Por ello $g \notin U$. En conclusión $U \subseteq C_p(X) \backslash p^*[C_p(Y)]$, es decir, $p^*[C_p(Y)] \cap U = \emptyset$. Por lo tanto $p^*[C_p(Y)]$ no es denso en $C_p(X)$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que p es inyectiva. Observemos que $p^* : \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$ es una función sobreyectiva. Efectivamente, sea $g \in \mathbb{R}^X$ arbitraria, entonces

$$p^*(g \circ p^{-1}) = (g \circ p^{-1}) \circ p = g \circ (p^{-1} \circ p) = g.$$

Luego sabemos por la proposición 2.2.1 que $C_p(Y)$ es denso en $\mathbb{R}^Y$. Como $p^* : \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$ es una función continua y sobreyectiva, entonces $p^*[C_p(Y)]$ es denso en $p^*[\mathbb{R}^Y] = \mathbb{R}^X$. Por lo tanto $p^*[C_p(Y)]$ es denso en $C_p(X)$. ■

Los siguientes dos resultados son consecuencia interesantes.

2.4.6 Corolario.

(1) Sea $p : X \to Y$ un mapeo. Si $p^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ es un homeomorfismo, entonces p es un homeomorfismo.

(2) Sea $p : X \to Y$ un mapeo continuo y sobreyectivo. Luego la imagen $p^*[C_p(Y)]$ es cerrada en $C_p(X)$ si y sólo si p es $\mathbb{R}$-cociente.

Demostración. (1) Dado que $p^*[C_p(Y)] = C_p(X)$ por la proposición 2.4.5, p es continua. Luego como p^* es un homeomorfismo de $C_p(Y)$ en $p^*[C_p(Y)] = C_p(X)$ por la proposición 2.4.5 se tiene que $p[X] = Y$. Por lo anterior p es continua y sobreyectiva, más aún $p^*[C_p(Y)] = C_p(X)$, es decir $p^*[C_p(Y)]$ es denso en $C_p(X)$, entonces por la proposición 2.4.5 p es inyectiva. Así, p es continua y biyectiva. Mostremos por último que p^{-1} es contina. Efectivamente, sea $p^{-1} : Y \to X$ la función inversa de p. Utilizando la proposición 2.4.3 y el hecho de que $(id_X)^* = id_{C_p(X)}$ obtenemos lo siguiente:

$$(id_X)^* = (p^{-1} \circ p)^* = p^* \circ (p^{-1})^*,$$

entonces

$$(p^*)^{-1} \circ (id_X)^* = (p^*)^{-1} \circ p^* \circ (p^{-1})^*.$$

Por lo tanto $(p^*)^{-1} = (p^{-1})^*$. Luego como p^* es un homeomorfismo, $(p^*)^{-1} = (p^{-1})^* : C_p(X) \to C_p(Y)$. Por lo tanto por la proposición 2.4.5, p^{-1} es continua.

(2) [$\Rightarrow$] Supongamos que $p^*[C_p(Y)]$ es cerrado en $C_p(X)$. Por la proposición 1.5.11, existen un espacio completamente regular X_1, $p_0 : X \to X_1$ un mapeo $\mathbb{R}$-cociente y $p_1 : X_1 \to Y$ una biyección continua tales que $p = p_1 \circ p_0$. De la proposición 2.4.3 se tiene que:

$$p^* = {p_0}^* \circ {p_1}^* \tag{2.1}$$

Como p_1 es biyectiva por la proposición 2.4.5 ${p_1}^*[C_p(Y)]$ es denso en $C_p(X_1)$, además ya que $p_0[X] = X_1$ por la proposición 2.4.5 ${p_0}^* : C_p(X_1) \to C_p(X)$ es un homeomorfismo de $C_p(X_1)$ en ${p_0}^*[C_p(X_1)]$, obtenemos que $p^*[C_p(Y)]$ es denso en ${p_0}^*[C_p(X_1)]$. Dado que por hipótesis $p^*[C_p(Y)]$ es cerrado en $C_p(X)$, se tiene que

$$p^*[C_p(Y)] = {p_0}^*[C_p(X_1)] \tag{2.2}$$

Ahora, sea $(p_o^{-1}) \restriction_{{p_0}^*[C_p(X_1)]}$: ${p_0}^*[C_p(X_1)] \to C_p(X_1)$. Aplicando $(p_o^{-1}) \restriction_{{p_0}^*[C_p(X_1)]}$ a ambos lados de 2.1 obtenemos

$$(p_o^{-1}) \restriction_{{p_0}^*[C_p(X_1)]} \circ p^* = p_1^* \tag{2.3}$$

Finalmente si aplicamos $(p_o^{-1}) \restriction_{{p_0}^*[C_p(X_1)]}$ en ambos lados de 2.2 y utlizando 2.3 se tiene que ${p_1}^*[C_p(Y)] = C_p(X_1)$. Por la proposición 2.4.5 ${p_1}^*$ es un homeomorfismo entre ${p_1}^*[C_p(Y)]$ y $C_p(X_1)$, por lo tanto ${p_1}^*$ es un homeomorfismo. Luego por la proposición 2.4.6 p_1 es un homeomorfismo. Así $p_1 \circ p_1^{-1} = id_Y$ y como id_Y es un mapeo $\mathbb{R}$-cociente por la proposición 1.5.6 p_1 es $\mathbb{R}$-cociente. Por lo tanto como $p = p_1 \circ p_0$ por la proposición 1.5.5 se sigue que p es $\mathbb{R}$-cociente.

[$\Leftarrow$] Vea la proposición 2.4.4.

■

2.5. Dos aplicaciones del mapeo dual

2.5.1 Proposición. *Si X es un espacio topológico cualquiera, entonces existe Y un espacio cero-dimensional Hausdorff tal que $C_p(X, \mathbb{D}) \cong C_p(Y, \mathbb{D})$.*

Demostración. Definamos la siguiente relación $\sim$ en X:

$$x_1 \sim x_2 \text{ si y sólo si } f(x_1) = f(x_2) \text{ para cualquier } f \in C(X, \mathbb{D})$$

Es fácil notar que $\sim$ es una relación de equivalencia en X. Ahora definamos $Y = \{[x] : x \in X\}$ donde $[x]$ es la clase de equivalencia de x respecto de $\sim$ y sea $\pi : X \to Y$ definida como; $\pi(x) = [x]$ para cada $x \in X$ (es decir, la proyección canónica de X en Y). Ahora para cada $f \in C(X, \mathbb{D})$ definamos $\varphi_f : Y \to \mathbb{D}$ por medio de $\varphi_f(y) = f(x)$ para toda $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $\pi(x) = [x] = y$. Notemos que φ_f es bien definida. Efectivamente, basta notar que el valor $\varphi_f(y)$ esta bien definido para toda $y \in Y$. Esto sucede si y sólo si $f(z) = f(x)$ para cualesquiera $x, z \in y$. Si $x, z \in y$, entonces $x \sim y$ y por ello $f(x) = f(z)$. Por lo tanto el valor $\varphi_f(y)$ esta bien definido. Más aún φ_f es única para cada $f \in C(X, \mathbb{D})$ con la propiedad que $f = \varphi_f \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "\varphi_f"] \\ & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

En efecto, supongamos que existe $h : Y \to \mathbb{D}$ tal que $f = h \circ \pi$. Consideremos ahora $w \in Y$ arbitraria, entonces existe $x \in X$ tal que $\pi(x) = [x] = w$. Luego $h(w) = h(\pi(x)) = f(x) = \varphi_f(\pi(x)) = \varphi_f(w)$. Por lo tanto $h = \varphi_f$. Ahora definamos $\mathcal{G} := \{\varphi_f : f \in C(X,\mathbb{D})\}$ y consideremos a Y con la topología débil inducida por la familia $\mathcal{G}$, es decir, $(Y, {}_{\mathcal{G}}\tau)$.

Afirmación 1. $\pi : X \to (Y, {}_{\mathcal{G}}\tau)$ es continua.

En efecto. Sabemos que una subbase para la topología ${}_{\mathcal{G}}\tau$ es la familia

$$\{\varphi_f^{-1}[W] : f \in C(X,\mathbb{D}) \text{ y } W \in \tau(\mathbb{D})\}$$

luego la familia

$$\mathcal{B} = \{\textstyle\bigcap_{i=1}^n \varphi_{f_i}^{-1}[W_i] : n \in \mathbb{N}, f_i \in C(X,\mathbb{D}), W_i \in \tau(\mathbb{D}) \text{ para todo } i \in \{1,\dots,n\}\}$$

es base para Y con la topología ${}_{\mathcal{G}}\tau$. Para mostrar la continuidad de π, sea $x \in X$ arbitrario y consideremos $U \in {}_{\mathcal{G}}\tau$ tal que $\pi(x) = [x] = y \in U$. Como $\mathcal{B}$ es base para $(Y, {}_{\mathcal{G}}\tau)$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$, $f_1,\dots,f_n \in C(X,\mathbb{D})$ y $W_1,\dots,W_n \in \tau(\mathbb{D})$ tales que $y \in \bigcap_{i=1}^n \varphi_{f_i}^{-1}[W_i] \subseteq U$. Consideremos ahora $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}[W_i] \in \tau(X)$. Bastará demostrar que $x \in \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}[W_i]$ y $\pi[\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}[W_i]] \subseteq U$. Para ello primero notemos que por definición de φ_{f_i}, se tiene que $\varphi_{f_i}(y) = f_i(x) \in W_i$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$. Por ello $x \in \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}[W_i]$. Ahora sea $w \in \pi[\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}[W_i]]$, entonces $w = \pi(z)$ donde $z \in \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}[W_i]$. Luego por la definición de φ_{f_i} se tiene que $\varphi_{f_i}(w) = f_i(w) \in W_i$, por ello $w \in \varphi_{f_i}^{-1}[W_i]$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$. Por lo anterior $w = \pi(z) \in \bigcap_{i=1}^n \varphi_{f_i}^{-1}[W_i] \subseteq U$, es decir $\pi[\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}[W_i]] \subseteq U$. Por lo tanto $\pi : X \to (Y, {}_{\mathcal{G}}\tau)$ es continua. ⊠

Afirmación 2. $\mathcal{G} = C(Y,\mathbb{D})$.

En efecto. Es claro que $\mathcal{G} \subseteq C(Y,\mathbb{D})$, pues Y tiene la topología más pequeña que hace continuas a las funciones de Y en $\mathbb{D}$. Por otra parte si $h \in C(Y,\mathbb{D})$, entonces $f = h \circ \pi \in C(X,\mathbb{D})$, pero dado que φ_f es la única función tal que $f = \varphi_f \circ \pi$, por ello, $h = \varphi_f$, luego $C(Y,\mathbb{D}) \subseteq \mathcal{G}$. Por lo tanto $\mathcal{G} = C(Y,\mathbb{D})$. ⊠

Ahora consideremos π^* el mapeo dual de π, es decir

$$\pi^* : C_p(Y, \mathbb{D}) \to C_p(X, \mathbb{D}) \text{ dada por } \pi^*(h) = h \circ \pi.$$

Afirmación 3. $\pi^* : C_p(Y, \mathbb{D}) \to C_p(X, \mathbb{D})$ es un homeomorfismo entre $C_p(Y, \mathbb{D})$ y $C_p(X, \mathbb{D})$.

Observe que la inversa de π^* es la función

$$(\pi^*)^{-1} : C_p(X, \mathbb{D}) \to C_p(Y, \mathbb{D})$$

dada por $(\pi^*)^{-1}(f) = \varphi_f$.

En efecto. Ya sabemos que π^* es continua. Mostremos que π^* es biyectivo. Sean $f, g \in C_p(Y, \mathcal{D})$ tales que $\pi^*(f) = \pi^*(g)$, es decir, $f \circ \pi = g \circ \pi$. Considere $z \in Y$ arbitrario, luego existe $x \in X$ tal que $z = \pi(x) = [x]_\sim$. Así que $f(z) = f(\pi(x)) = (g \circ \pi)(x) = g(\pi(x)) = g(z)$. Esto es $g = f$. Por lo tanto π^* es inyectivo. Luego sea $h \in C_p(X, \mathbb{D})$ arbitraria, sabemos que $\varphi_h \in C_p(Y, \mathbb{D})$ es la única función tal que $\varphi_h \circ \pi = h$. Así $\pi^*(\varphi_h) = h$. Por lo tanto π^* es sobreyectivo. Con la anterior se tiene que π^* es biyectivo. Por otro lado sabemos por la proposición 2.4.1 que π^* es continuo. Por último mostremos que π^* es un mapeo abierto. Para esto notemos que

$$\pi^*([z_1, \ldots, z_n; U_1, \ldots, U_n]) = [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n]$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $\pi(x_1) = z_1, \ldots, \pi(x_n) = z_n \in Y$ y $U_1, \ldots, U_n \in \tau(\mathbb{D})$. Sea $f \in \pi^*([z_1, \ldots, z_n; U_1, \ldots, U_n])$, entonces $f = \pi^*(g)$ para alguna

$$g \in [z_1, \ldots, z_n; U_1, \ldots, U_n].$$

Ahora sea $x_i \in X$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, luego $f(x_i) = \pi^*(g)(x_i) = (g \circ \pi)(x_i) = g(\pi(x_i)) = g(z_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, pero $g(z_i) \in U_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por ello $f \in [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n]$. Por lo tanto $\pi^*([z_1, \ldots, z_n; U_1, \ldots, U_n]) \subseteq [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n]$. Ahora sea

$$g \in [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n].$$

Bastará demostrar que $\varphi_g \in [z_1, \ldots, z_n; U_1, \ldots, U_n]$, pues φ_g es la única función con la propiedad que $g = \varphi_g \circ \pi = \pi^*(g)$. Así sí $z_i \in Y$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, se sigue que $\varphi_g(z_i) = \varphi_g(\pi(x_i)) = (\varphi_g \circ \pi)(x_i) = g(x_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, pero $g(x_i) \in U_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así $\varphi_g \in [z_1, \ldots, z_n; U_1, \ldots, U_n]$, por lo tanto

$$[x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n] \subseteq \pi^*([z_1, \ldots, z_n; U_1, \ldots, U_n]).$$

Con todo lo anterior se tiene que π^* es un mapeo abierto. Concluimos que $\pi^* : C_p(Y, \mathbb{D}) \to C_p(X, \mathbb{D})$ es un homeomorfismo entre $C_p(Y, \mathbb{D})$ y $C_p(X, \mathbb{D})$. ⊠

Por último mostremos que Y es un espacio cero-dimensional Hausdorff.

Afirmación 4. Y es un espacio cero-dimensional.

En efecto. Sabemos que Y esta dotado de la topología débil inducida por la familia $\mathcal{G}$ (por otro lado por la afirmación 2 sabemos que $\mathcal{G} = C(Y, \mathbb{D})$) por ello una subbase para la topología ${}_{\mathcal{G}}\tau = {}_{C(Y,\mathbb{D})}\tau$ es la familia

$$\{\varphi_f^{-1}[W] : f \in C(X, \mathbb{D}) \text{ y } W \in \tau(\mathbb{D})\}$$

luego la familia

$$\{\bigcap_{i=1}^n \varphi_{f_i}^{-1}[W_i] : n \in \mathbb{N}, f_i \in C(X, \mathbb{D}), W_i \in \tau(\mathbb{D}) \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

es base para Y con la topología ${}_{C(Y,\mathbb{D})}\tau$. Como $\varphi_{f_i} \in C(Y, \mathbb{D})$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\varphi_{f_i}^{-1}[W_i] \in \tau(Y)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, por ello $\bigcap_{i=1}^n \varphi_{f_i}^{-1}[W_i] \in \tau(Y)$. Mostremos que $\bigcap_{i=1}^n \varphi_{f_i}^{-1}[W_i]$ es cerrado en Y, para ello mostremos que $Y \backslash (\bigcap_{i=1}^n \varphi_{f_i}^{-1}[W_i]) \in \tau(Y)$. Notemos que

$$Y \backslash \bigcap_{i=1}^n \varphi_{f_i}^{-1}[W_i] = \bigcup_{i=1}^n (Y \backslash \varphi_{f_i}^{-1}[W_i]) = \bigcup_{i=1}^n \varphi_{f_i}^{-1}[\mathbb{D} \backslash W_i],$$

luego $\bigcup_{i=1}^n \varphi_{f_i}^{-1}[\mathbb{D} \backslash W_i] \in \tau(Y)$. Por lo anterior $\bigcap_{i=1}^n \varphi_{f_i}^{-1}[W_i]$ es cerrado en Y, es decir, $(Y, {}_{\mathcal{G}}\tau)$ tiene una base formada por conjuntos cerrado-abiertos. Por lo tanto $(Y, \mathcal{G}\tau)$ es un espacio cero-dimensional. ⊠

Afirmación 5. Y es un espacio Hausdorff.

En efecto. Sean $y, z \in Y$ tales que $y \neq z$. Dado que π es sobreyectiva, entonces existen $x_0, x_1 \in X$ tales que $\pi(x_0) = [x_0]_\sim = y$ y $\pi(x_1) = [x_1]_\sim = z$. Se sigue que $x_0 \nsim x_1$, luego por la definición de $\sim$ se tiene que existe $f \in C(X, \mathbb{D})$ tal que $f(x_0) \neq f(x_1)$. Por ello $\varphi_f(z) \neq \varphi_f(y)$. Luego existen $U_1, U_2 \in \tau(\mathbb{D})$ tales que $\varphi_f(y) \in U_1$ y $\varphi_f(z) \in U_2$ con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Luego $y \in \varphi_f^{-1}[U_1]$ y $z \in \varphi_f^{-1}[U_2]$ con $\varphi_f^{-1}[U_1] \cap \varphi_f^{-1}[U_2] = \emptyset$. Por lo tanto Y es un espacio Hausdorff. ⊠

Por lo tanto hemos demostrado que existe Y un espacio cero-dimensional Hausdorff tal que $C_p(X, \mathbb{D}) \cong C_p(Y, \mathbb{D})$. ■

En páginas posteriores, mostraremos que la estructura algebraica que tiene el espacio $\mathbb{D}$ (el cual es un grupo topológico) induce la misma estructura algebraica en $C_p(X, \mathbb{D})$. La observación 2.4.2 nos dice que el mapeo dual respeta esa estructura algebraica. De esta manera, el mapeo dual π^* es también un isomorfismo de grupos algebraicos. Esto hace que π^* sea un isomorfismo topológico (un homeomorfismo que además es un isomorfismo) entre los grupos topológicos $C_p(X, \mathbb{D})$ y $C_p(Y, \mathbb{D})$.

Obviamente, todo lo hecho para los espacios de funciones $C_p(X, \mathbb{D})$ puede hacerse para los espacios de funciones $C_p(X)$.

2.5.2 Definición. Si (X, τ) es un espacio topológico, definimos la relación $\simeq$ para puntos de X de la siguiente forma:

$$x \simeq y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \text{ para cada } f \in C(X) = C((X, \tau)).$$

La siguiente proposición tiene las propiedades más básicas de la relación $\simeq$.

2.5.3 Proposición.

(1) $\simeq$ *es una relación de equivalencia en* X.

(2) Cada función $g \in C(X)$ *es constante en cada clase de equivalencia* $[x]$ *bajo la relación* $\simeq$.

(3) Defina $X_{C(X)} = \{[x] : x \in X\}$. *Supongamos que* $\pi : X \to X_{C(X)}$ *es la proyección natural asociada a* $X_{C(X)}$, *esto es,* $\pi(x) = [x]$ *para cada* $x \in X$.

Entonces, para cada función $f \in C(X)$, *existe una única función*

$$\varphi_f : X_{C(X)} \to \mathbb{R}$$

tal que $f = \varphi_f \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & X_{C(X)} \arrow[d, "\varphi_f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(4) Defina $\mathcal{G} = \{g(f) : f \in C(X)\}$ *y sea* $_{\mathcal{G}}\tau$ *la única topología en* $X_{C(X)}$ *que es generada por la colección*

$$\delta = \{g(f)^{-1}[V] : f \in C(X) \ \& \ V \in \tau_{\mathbb{R}}\}$$

como una subbase. Así el espacio topológico $Y = (X_{C(X)}, {}_{\mathcal{G}}\tau)$ *es un espacio Tychonoff.*

Demostración.
(1) Es claro que para cada $x \in X$, siempre sucede que $f(x) = f(x)$ para toda $f \in C(X)$. Es decir, $x \simeq x$. Además, si $x \simeq y$ entonces para cada $f \in C(X)$ se tiene que $f(x) = f(y)$. Es claro que esto implica que $f(y) = f(x)$ para toda $f \in C(X)$. Finalmente, si $x \simeq y$ y $y \simeq z$ entonces $f(x) = f(y)$ para

toda $f \in C(X)$ y $g(y) = g(z)$ para toda $g \in C(X)$. Así, para toda $h \in C(X)$ sucede que $h(x) = h(y)$ y $h(y) = h(z)$. En consecuencia, $h(x) = h(z)$ para cada $h \in C(X)$. Es decir, $x \simeq z$.

(2) Sea $g \in C(X)$ y $y, z \in [x]$. Por lo que $y \simeq z$. Luego, $h(y) = h(z)$ para cada $h \in C(X)$. En particular, $g(y) = g(z)$. Esto muestra que g es constante en $[x]$.

(3) Definamos $\varphi_f : X_{C(X)} \to \mathbb{R}$ por medio $\varphi_f([x]) = f(x)$ para cada $[x] \in X_{C(X)}$. Por el inciso (2), la función φ_f es bien definida. Más aún, si $x \in X$ es cualquier elemento, entonces $(\varphi_f \circ \pi)(x) = g(f)(\pi(x)) = \varphi_f([x]) = f(x)$; es decir, $f = \varphi_f \circ \pi$.

Para demostrar que φ_f es única, suponga que $h : X_{C(X)} \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f = h \circ \pi$. Considere un elemento cualquiera $[x]$ de $X_{C(X)}$. Tenemos que $h([x]) = h(\pi(x)) = (h\circ\pi)(x) = f(x) = (\varphi_f\circ\pi)(x) = \varphi_f(\pi(x)) = \varphi_f([x])$. Por lo tanto, $h = \varphi_f$. De esta manera hemos demostrado que φ_f es la única función con la propiedad de que $f = \varphi_f \circ \pi$.

(4) Debido a que la topología ${}_{\mathcal{G}}\tau$ es generada por funciones cuyos contradominios son espacios completamente regulares, por 1.1.7, el espacio $(X_{C(X)}, {}_{\mathcal{G}}\tau)$ es completamente regular. De esta manera, resta demostrar que es un espacio T_0.

Para demostrar esto último, supongamos que $[x], [y] \in X_{C(X)}$ son puntos diferentes de $X_{C(X)}$. Como $x \in [x], y \in [y]$ y $[x] \neq [y]$, tenemos que $x \not\simeq y$. Por ello existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) \neq f(y)$. De esta forma existen abiertos ajenos U, V de $\mathbb{R}$ tales que $f(x) \in U$ y $f(y) \in V$. Como $f = \varphi_f \circ \pi$, tenemos que $[x] \in \varphi_f^{-1}(U) \in {}_{\mathcal{G}}\tau$ y $[y] \notin \varphi_f^{-1}(U)$. De esta forma, hemos probado que $(X_{C(X)}, {}_{\mathcal{G}}\tau)$ es T_0. ∎

2.5.4 Definición. El espacio topológico $Y = (X_{C(X)}, {}_{\mathcal{G}}\tau)$ es conocido como la *Tychonoficación* del espacio (X, τ).

Inspirados en lo hecho para el caso de los espacios $C_p(X, \mathbb{D})$, puede demostrarse que el mapeo proyección $\pi : X \to Y$ es un mapeo continuo y que su mapeo dual asociado es un homeomorfismo. Dejamos los detalles al lector.

2.5.5 Proposición. *El mapeo dual $\pi^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ asociado a la proyección natural $\pi : X \to Y$ es un homeomorfismo.*

Al igual que en el caso de espacios de funciones de tipo $C_p(X, \mathbb{D})$, la estructura algebraica que tiene el espacio $\mathbb{R}$ (el cual es un anillo topológico y y un espacio vectorial topológico real) induce la misma estructura algebraica en $C_p(X, \mathbb{R})$. De nuevo, la observación 2.4.2 nos dice que el mapeo dual π^* es un isomorfismo de anillos algebraicos y un isomorfismo de espacios vectoriales. Esto hace que, en particular, π^* sea un isomorfismo topológico (un homeomorfismo que además es un isomorfismo) entre los anillos topológicos $C_p(X)$ y $C_p(Y)$.

2.6. El mapeo restricción

Si X es un subespacio de Y, entonces la función inclusión $i_X : X \to Y$ tiene asociado al mapeo dual $r_X := {i_X}^* : C_p(Y, Z) \to C_p(X, Z)$. Este mapeo es llamado *mapeo restricción* debido a que la composición ${i_X}^*(f) = f \circ i_X$ es la restricción de una función $f : Y \to Z$ al subespacio X. La imagen del *mapeo restricción*, que es el conjunto de todas las restricciones a X de todas las funciones continuas $f : Y \to Z$, será denotado por $C_p(Y|X, Z)$. En otras palabras $C_p(Y|X, Z) = r_X[C_p(Y, Z)]$.

Observación. Es fácil notar que el *mapeo de restricción* $r_Y : C_p(X, Z) \to C_p(Y, Z)$ coincide con la restricción a $C_p(X, Z)$ de la proyección del producto Z^X a su subproducto Z^Y (es decir, $r_Y = \pi \restriction_{C_p(X,Z)}$ donde $\pi : Z^X \to Z^Y$ es el mapeo proyección).

En la siguiente proposición enunciamos algunas propiedades básicas del mapeo restricción.

2.6.1 Proposición.

(1) El mapeo restricción $r_X : C_p(Y, Z) \to C_p(X, Z)$ es sobreyectivo si y sólo si toda $f \in C(X, Z)$ tiene una extensión continua $g : Y \to Z$.

(2) En particular, $r_X : C_p(Y) \to C_p(X)$ es sobreyectivo si y sólo si X esta C-encajado en Y.

(3) $r_X : C_p(Y) \to C_p(X)$ es sobreyectivo si Y es normal y X es un subespacio cerrado Y, o bien, si X es un subespacio compacto de Y.

(4) Si X es un subespacio denso de Y, entonces el mapeo restricción $r_X : C_p(Y, Z) \to C_p(X, Z)$ es inyectivo.

(5) Sea X un subespacio de Y. El mapeo restricción $r_X : C_p(Y) \to C_p(X)$ es inyectivo si y sólo si X es denso en Y.

Demostración. Los incisos (1), (2) y (3) son sencillos de demostrar y por ello son dejados al lector.

(4) Sean $f_1, f_2 \in C_p(Y, Z)$ tales que $r_X(f_1) = r_X(f_2)$. Supongamos para generar una contradicción que existe $y \in Y$ tal que $f_1(y) \neq f_2(y)$. Como Z

es Hausdorff existen $U_1, U_2 \in \tau^*(Z)$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $f_1(y) \in U_1$, $f_2(y) \in U_2$. Así ${f_1}^{-1}[U_1] \cap {f_2}^{-1}[U_2] \in \tau(y,Y)$. Dado que X es denso en Y, entonces existe $z \in X \cap ({f_1}^{-1}[U_1] \cap {f_2}^{-1}[U_2])$. Así $z \in X$, $f_1(z) \in U_1$ y $f_2(z) \in U_2$, pero $f_1 \restriction_X = f_2 \restriction_X$ implica que $f_1(z) = f_2(z)$. Por lo tanto $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ lo cual es contradictorio.

(5) [$\Rightarrow$] Supongamos que X no es denso en Y. Sea $y_0 \in Y \setminus \mathrm{cl}_Y(X)$, como Y es Tychonoff, existe $f_0 \in C_p(Y)$ tal que $f_0[\mathrm{cl}_Y(X)] \subseteq \{0\}$ y $f_0(y_0) = 1$. Ahora consideremos a la función $0_Y : Y \to \mathbb{R}$ dada por $0_Y(y) = 0$, para todo $y \in Y$. Entonces $f_0, 0_Y \in C_p(Y)$ y además $f_0 \neq 0_Y$. Más aún $r_X(f_0) = f_0 \restriction_X = 0_Y \restriction_X = r_X(0_Y)$. Por lo tanto r_X no es inyectiva.

[$\Leftarrow$] Vea el inciso (4). ∎

El siguiente resultado parece ser específico para los espacios de funciones con valores reales. Sin embargo en 2.6.3 y en 2.6.4 veremos que este puede ser enunciado para otros espacios de funciones.

2.6.2 Proposición. *Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Luego Y es cerrado en X si y sólo si el mapeo restricción $r_Y : C_p(X) \to C_p(X|Y)$ es abierto.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Supongamos que Y es un subconjunto cerrado de X y supóngase que U es un abierto de $C_p(X)$. Debemos probar que para todo $g \in r_Y(U)$ existe un abierto B de $C_p(Y)$ tal que $g \in B \cap r_Y(C_p(X)) \subseteq \pi_Y(U)$.

Consideremos un elemento cualquiera $g \in r_Y(U)$. Entonces existe $f \in U$ tal que $f \restriction Y = r_Y(f) = g$. Como U es abierto en $C_p(X)$, podemos fijar una vecindad abierta básica $W = [f; y_1, \ldots, y_n; \epsilon]$ de f en $C_p(X)$ de modo que $f \in W \subseteq U$.

Tenemos los siguientes dos casos:

Caso (A). $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y$.

Si $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y$ entonces podemos considerar a la vecindad abierta básica $B = [f \restriction Y; y_1, \ldots, y_n; \epsilon]$ de $f \restriction Y = g$ en $C_p(Y)$. Resulta que

$$g \in B \cap r_Y(C_p(X)) \subseteq \pi_Y(U).$$

Efectivamente, como $g = r_Y(f) = f \restriction Y$ se tiene que $g \in B \cap r_Y(C_p(X))$. Por otro lado, si $h \in B \cap r_Y(C_p(X))$ entonces existe $k \in C_p(X)$ tal que $r_Y(k) = h \in B$. Como $h \in B$, $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y$ y $k \restriction Y = h$, obtenemos que

$$|k(y_i) - f(y_i)| = |h(y_i) - f \restriction Y(y_i)| < \epsilon \text{ para toda } i = 1, \ldots, n.$$

Esto muestra que $k \in W \subseteq U$. Por lo tanto, $h = r_Y(k) \in \pi_Y(U)$, y por ello podemos concluir que $B \cap r_Y(C_p(X)) \subseteq r_Y(U)$. Esto termina la demostración para el caso (A).

Caso (B). Existe $l \in \mathbb{N}$, con $1 \leqslant l < n$, tal que $\{y_1, \ldots, y_l\} \subseteq Y$ y $\{y_{l+1}, \ldots, y_n\} \subseteq X \setminus Y$.

En este caso afirmamos que al considerar a la vecindad básica abierta $B = [r_Y(f); y_1, \ldots, y_l; \epsilon]$ de $g = r_Y(f)$ en $C_p(Y)$ se tiene que

$$g \in [r_Y(f); y_1, \ldots, y_l; \epsilon] \cap r_Y(C_p(X)) \subseteq \pi_Y(U).$$

Efectivamente, es claro que $g = r_Y(f) \in [r_Y(f); y_1, \ldots, y_l; \epsilon] \cap r_Y(C_p(X))$. Supongamos entonces que $h \in [r_Y(f); y_1, \ldots, y_l; \epsilon] \cap r_Y(C_p(X))$ es un elemento cualquiera. Como $h \in r_Y(C_p(X))$ existe $k \in C_p(X)$ tal que $h = r_Y(k) = k \restriction Y$.

Ahora, dado que X es Tychonoff, $Y \subseteq X$ es cerrado y $\{y_{l+1}, \ldots, y_n\} \subseteq X \setminus Y$, podemos elegir una función continua $\psi : X \to \mathbb{R}$ de tal manera que $\psi(Y) \subseteq \{0\}$ y $\psi(y_j) = f(y_j) - k(y_j)$, para cada $j = l+1, \ldots, n$. Por lo que $\psi + k$ es una función en $C_p(X)$ que tiene las siguientes dos propiedades:

1. $r_Y(k+\psi) = (k+\psi) \restriction Y = k \restriction Y + \psi \restriction Y = k \restriction Y = h$.
2. $k + \psi \in W = [f; y_1, \ldots, y_n; \epsilon] \subseteq U$ puesto que

$$|(k+\psi)(y_i) - f(y_i)| = \begin{cases} |(k+\psi)(y_i) - f(y_i)| & \text{si } i = 1, \ldots, l \\ |(k+\psi)(y_i) - f(y_i)| & \text{si } i = l+1, \ldots, n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |k(y_i) - f(y_i)| & \text{si } i = 1, \ldots, l \\ |k(y_i) + (f(y_i) - k(y_i)) - f(y_i)| & \text{si } i = l+1, \ldots, n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |k \restriction Y(y_i) - f \restriction Y(y_i)| & \text{si } i = 1, \ldots, l \\ |f(y_i) - f(y_i)| & \text{si } i = l+1, \ldots, n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |h(y_i) - \pi_Y(f)(y_i)| & \text{si } i = 1, \ldots, l \\ 0 & \text{si } i = l+1, \ldots, n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} < \epsilon & \text{si } i = 1, \ldots, l \\ 0 & \text{si } i = l+1, \ldots, n \end{cases}$$

Entonces $h \in r_Y(U)$. Consecuentemente,

$$[r_Y(f); y_1, \ldots, y_l; \epsilon] \cap r_Y(C_p(X)) \subseteq r_Y(U).$$

Esto termina la demostración en el caso (B).

En ambos casos hemos probado que existe un abierto B de $C_p(X)$ de modo que $g \in B \cap r_Y(C_p(X)) \subseteq r_Y(U)$. Como g es un elemento cualquiera de $r_Y(U)$, concluimos que $r_Y(U)$ es un subconjunto abierto de $r_Y(C_p(X))$.

Por lo tanto, $r_Y : C_p(X) \to r_Y(C_p(X))$ es una función abierta.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $r_Y : C_p(X) \to r_Y(C_p(X))$ es una función abierta pero que $\overline{Y} \setminus Y \neq \emptyset$. Fijemos un punto $x \in \overline{Y} \setminus Y$. Consideremos a los siguientes subconjuntos abiertos básicos (no vacíos) de $C_p(X)$:

$$U = [x; (0, 2)] \quad \& \quad V = [x; (3, 5)].$$

Como U y V son abiertos no vacíos en $C_p(X)$, aplicando la hipótesis podemos concluir que $\pi_Y(U)$ y $r_Y(V)$ son abiertos no vacíos en $r_Y(C_p(X))$.

Afirmación. $r_Y(U) \cap r_Y(V) = \emptyset$.

Demostración de la afirmación. Supongamos por el contrario que existe $f \in r_Y(U) \cap r_Y(V)$. Por ello existen funciones continuas $h \in U$ y $k \in V$ tales que $h \restriction Y = r_Y(h) = f = r_Y(k) = k \restriction Y$. Así $h - k \in C_p(X)$ y $h(x) - k(x) \neq 0$ (porque $h(x) \neq k(x)$ ya que $h(x) \in (0, 2)$ y $k(x) \in (3, 5)$). Como $h - k$ es continua, $A = (h - k)^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$ es abierto en X y además $x \in A$. Como $x \in \overline{Y}$, se tiene que $A \cap Y \neq \emptyset$. Por lo que existe $y \in A \cap Y$. Como $y \in A$, $h(y) - k(y) \neq 0$. Pero $y \in Y$ implica que $r_Y(h)(y) = h(y) \neq k(y) = r_Y(k)(y)$; lo que contradice que $r_Y(h) = r_Y(k)$. Esta contradicción muestra que $r_Y(U) \cap r_Y(V) = \emptyset$. $\boxtimes$.

Para finalizar mostremos que $r_Y(U)$ es un subconjunto denso de $r_Y(C_p(X))$. En efecto, bastará demostrar que para cualquier abierto básico no vacío $[y_1, \ldots, y_n; U_1, \ldots, U_n]$ de $C_p(Y)$ sucede que

$$\big([y_1, \ldots, y_n; U_1, \ldots, U_n] \cap r_Y(C_p(X))\big) \cap r_Y(U) \neq \emptyset.$$

Para ello fijemos puntos $r_i \in U_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Como X es Tychonoff, existe una función continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(y_i) = r_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y $\phi(x) = 1{,}999$. En consecuencia $\phi \in U$ y además

$$\phi \restriction Y \in \big([y_1, \ldots, y_n; U_1, \ldots, U_n] \cap r_Y(C_p(X))\big) \cap r_Y(U).$$

Por lo tanto, $r_Y(U)$ es un subconjunto denso de $r_Y(C_p(X))$.

Para finalizar dése cuenta que esto último contradice la afirmación anterior, porque siendo $r_Y(V)$ un abierto no vacío de $r_Y(C_p(X))$ necesariamente debe ocurrir por la densidad de $\pi_Y(U)$ que $r_Y(U) \cap r_Y(V) \neq \emptyset$. Esta contradicción muestra que necesariamente Y es cerrado en X. ∎

Con un argumento similar a la demostración de 2.6.2 se demuestran los siguientes resultados.

2.6.3 Proposición. *Sea Y un subespacio de X donde X es un espacio topológico. Y es cerrado en X si y sólo si el mapeo restricción $r_Y : C_p(X, [0,1]) \to C_p(X|Y, [0,1])$ es abierto.*

2.6.4 Proposición. *Sea Y un subespacio de X donde X es un espacio topológico. Luego Y es cerrado en X si y sólo si el mapeo restricción $r_Y : C_p^b(X) \to C_p^b(X|Y)$ es abierto*

Es necesaria una modificación del argumento para probar la versión de la proposición 2.6.2 para espacios con rango en $\mathbb{D}$. Sin embargo, no haremos la prueba aquí y damos el resultado sin demostración.

2.6.5 Proposición. *Sea Y un subespacio de X donde X es un espacio cero-dimensional Hausdorff. Luego Y es cerrado en X si y sólo si el mapeo restricción $r_Y : C_p(X, \mathbb{D}) \to C_p(X|Y, \mathbb{D})$ es abierto.*

2.7. Teoremas de factorización

Dadas dos funciones $f : X \to Z$ y $p : X \to Y$ decimos que f se factoriza a través de p si existe una función $g : Y \to Z$ tal que $f = g \circ p$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

El estudio de factorizaciones de funciones continuas definidas sobre productos topológicos o sobre subconjuntos de ellos tuvo sus inicios desde la introducción de la topología producto hecha por Tychonoff. Uno de los primeros teoremas de factorización fue obtenido por Mibu quien demostró que toda función continua de valores reales $f : X \to \mathbb{R}$ definida en un producto $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ de espacios compactos Hausdorff depende de un número contable de coordenadas, es decir, existe $B \subseteq A$ con $|B| \leqslant \omega$ y existe una función continua

$g : p_B(X) \to \mathbb{R}$ tal que $f = g \circ p_B$, donde $p_B : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in B} X_\alpha$ es la proyección de X sobre su cara o subproducto $\prod_{\alpha\in B} X_\alpha$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p_B"] \arrow[dr, "f"'] & p_B(X) \subseteq \prod_{\alpha\in B} X_\alpha \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

La idea de esta sección es enunciar y demostrar varios teoremas de factorización de funciones continuas cuyos dominios son espacios de funciones continuas. En esos teoremas de factorización las funciones restricción juegan un papel importante así como el siguiente teorema de factorización debido a Arkhangel'skii, y cuya demostración presentamos en el apéndice B.

2.7.1 Teorema (de factorizacion de Arhangel'skii)**.** *Sean* $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos,* κ *un número cardinal infinito,* $X := \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *y* S *es un subespacio denso de* X*.*

Si $hd(\prod_{\alpha\in C} X_\alpha) \leqslant \kappa$ *para cada* $C \subseteq A$ *con* $|C| \leqslant \kappa$*, entonces para toda función continua* $f : S \to Y$ *de* S *en un espacio* Y *con* $\chi(Y) \leqslant \kappa$*,*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "p_B"] \arrow[dr, "f"'] & p_B(S) \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

existen $B \subseteq A$ *con* $|B| \leqslant \kappa$ *y una función continua* $g : p_B(S) \to Y$ *con la propiedad de que* $f(s) = g(p_B(s))$ *para toda* $s \in S$*, es decir* $f = g \circ p_B \restriction_S$*.*

A continuación veremos el primero de los teoremas de factorización.

2.7.2 Teorema. *Sea* $\kappa \geqslant \omega$*,* Z *un espacio conexo por trayectorias tal que* $nw(Z) \leqslant \kappa$ *y* T *un espacio topológico con* $\chi(T) \leqslant \kappa$*. Por lo que para todo espacio topológico* X *y toda función continua* $f : C_p(X,Z) \to T$*, existen* $A \in [X]^{\leqslant\kappa}$ *y una función continua* $g : C_p(X|A,Z) \to T$

$$\begin{tikzcd} C_p(X,Z) \arrow[r, "r_A"] \arrow[dr, "f"'] & C_p(X|A,Z) \arrow[d, "g"] \\ & T \end{tikzcd}$$

tales que $f = g \circ r_A$ *donde* $r_A : C_p(X,Z) \to C_p(X|A,Z)$ *es el mapeo restricción.*

Demostración. Dado que Z es un espacio topológico conexo por trayectorias por el teorema 2.2.1 $C_p(X,Z) \subseteq Z^X = \mathrm{cl}_{Z^X}(C_p(X,Z))$. Ahora demostremos que $hd(\prod_{x\in C} Z_x) \leqslant \kappa$ para cada $C \in [X]^{\leqslant\kappa}$. Efectivamente, por un lado sabemos que $Z_x = Z$ para cada $x \in C$, además como $nw(Z) \leqslant \kappa$ por el teorema A.1.10 $nw(\prod_{x\in C} Z_x) \leqslant \kappa$ para cada $C \in [X]^{\leqslant\kappa}$, pero por el corolario A.1.13 $hd(\prod_{x\in C} Z_x) \leqslant nw(\prod_{x\in C} Z_x) \leqslant \kappa$. Por lo tanto $hd(\prod_{x\in C} Z_x) \leqslant \kappa$ para todo $C \in [X]^{\leqslant\kappa}$. Entonces por el teorema B.0.3 se tiene que para toda $f \in \mathcal{C}(C_p(X,Z),T)$ con $\chi(T) \leqslant \kappa$, existen $A \in [X]^{\leqslant\kappa}$ y $g \in \mathcal{C}(p_A[C_p(X,Z)],T)$ tal que $f = g \circ p_A \restriction_{C_p(X,Z)}$. Por último observemos que $g \circ p_A \restriction_{C_p(X,Z)} = g \circ r_A$, para ello sea $h \in C_p(X,Z)$ arbitraria, entonces,

$$(g \circ p_A \restriction_{C_p(X,Z)})(h) = g(p_A \restriction_{C_p(X,Z)} (h)) = g(h \restriction_A) = g(r_A(h)) = (g \circ r_A)(h)$$

Por lo tanto $f = g \circ r_A$. ∎

2.7.3 Corolario. *Sea $\kappa \geqslant \omega$, T un espacio topológico con $\chi(T) \leqslant \kappa$. Para todo espacio X y $f : C_p(X) \to T$ una función continua, existe $A \in [X]^{\leqslant\kappa}$ y una función continua $g : C_p(X|A) \to T$*

$$\begin{tikzcd} C_p(X) \arrow[r, "r_A"] \arrow[dr, "f"'] & C_p(X|A) \arrow[d, "g"] \\ & T \end{tikzcd}$$

tales que $f = g \circ r_A$ donde $r_A : C_p(X) \to C_p(X|A)$ es el mapeo restricción.

Demostración. Basta observar que $\mathbb{R}$ es un espacio topológico conexo por trayectorias y por el teorema 2.2.1 $C_p(X) \subseteq \mathbb{R}^X = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^X}(C_p(X))$, además $nw(\mathbb{R}) \leqslant \omega \leqslant \kappa$. Aplique ahora el teorema 2.7.2. ∎

2.7.4 Corolario. *Sea $\kappa \geqslant \omega$, T un espacio topológico con $\chi(T) \leqslant \kappa$. Para todo espacio X y $f : C_p(X,[0,1]) \to T$ una función continua, existen $A \in [X]^{\leqslant\kappa}$ y una función continua $g : C_p(X|A,[0,1]) \to T$*

$$\begin{tikzcd} C_p(X,[0,1]) \arrow[r, "r_A"] \arrow[dr, "f"'] & C_p(X|A,[0,1]) \arrow[d, "g"] \\ & T \end{tikzcd}$$

tales que $f = g \circ r_A$ donde $r_A : C_p(X,[0,1]) \to C_p(X|A,[0,1])$ es el mapeo restricción.

Demostración. Basta observar que $[0,1]$ es un espacio topológico conexo por trayectorias y por el teorema 2.2.1

$$C_p(X,[0,1]) \subseteq [0,1]^X = \mathrm{cl}_{[0,1]^X}(C_p(X,[0,1])),$$

además $nw([0,1]) \leqslant \kappa$. Con ello simplmente basta aplicar una idea similar a la demostración del teorema 2.7.2. ■

Un argumento similar a los anteriores y utilizando el hecho de que $C_p^b(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$ da la demostración de la siguiente versión del teorema de factorización.

2.7.5 Teorema. *Sea $\kappa \geqslant \omega$, T un espacio topológico con $\chi(T) \leqslant \kappa$. Para todo espacio X y $f : C_p^b(X) \to T$ una función continua, existen $A \in [X]^{\leqslant\kappa}$ y una función continua $g : C_p^b(X|A) \to T$*

$$\begin{tikzcd} C_p^b(X) \arrow[r, "r_A"] \arrow[dr, "f"'] & C_p^b(X|A) \arrow[d, "g"] \\ & T \end{tikzcd}$$

tales que $f = g \circ r_A$ donde $r_A : C_p^b(X) \to C_p^b(X|A)$ es el mapeo restricción.

Finalmente utilizando la proposición 2.2.5 obtenemos el teorema siguiente:

2.7.6 Teorema. *Sea $\kappa \geqslant \omega$, T un espacio topológico con $\chi(T) \leqslant \kappa$. Para todo espacio cero-dimensional X y $f : C_p(X,\mathbb{D}) \to T$ una función continua, existen $A \in [X]^{\leqslant\kappa}$ y una función continua $g : C_p(X|A,\mathbb{D}) \to T$*

$$\begin{tikzcd} C_p(X,\mathbb{D}) \arrow[r, "r_A"] \arrow[dr, "f"'] & C_p(X|A,\mathbb{D}) \arrow[d, "g"] \\ & T \end{tikzcd}$$

tales que $f = g \circ r_A$ donde $r_A : C_p(X,\mathbb{D}) \to C_p(X|A,\mathbb{D})$ es el mapeo restricción.

2.8. Operaciones topológicas y espacios de funciones

En esta sección mostraremos las relaciones que tiene el functor $C_p(\cdot, Y)$ y las construcciones de productos topológicos y sumas topológicas.

2.8.1 Teorema. *Para cualquier espacio Y y cualquier familia no vacía de espacios topológicos $\{X_t : t \in T\}$ se tiene que:*

$$C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y) \cong \prod_{t\in T} C_p(X_t, Y).$$

Demostración. Para cada $t \in T$ definamos la siguiente función:

$$\pi_t : C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y) \to C_p(X_t, Y) \text{ dada por } \pi_t(f) = f \restriction_{X_t}$$

Observación. $f \restriction_{X_t} = f \circ i_{X_t}$ donde $i_{X_t} : X_t \to \bigoplus_{t\in T} X_t$ esta dada por $i_{X_t}(x) = x$ para toda $x \in X_t$.

Demostremos que para cada $t \in T$, π_t es continua. Para ello sea $U = [x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n]$ un abierto canónico de $C_p(X_t, Y)$ donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X_t$ y $O_1, \ldots, O_n \in \tau(Y)$.

Afirmación 1. $\pi_t{}^{-1}[U] = \{f \in C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y) : f(x_1) \in O_1, \ldots, f(x_n) \in O_n\} = W$.

Efectivamente.
[$\subseteq$] Sea $h \in \pi_t{}^{-1}[U]$ cualquiera. Se sigue que $h \in C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y)$, además $\pi_t{}^{-1}(h) \in U$, es decir, $h \restriction_{X_t} \in U$. Por ello $h(x_1) \in O_1, \ldots, h(x_n) \in O_n$. Por lo tanto $h \in W$.
[$\supseteq$] Sea $f \in W$. Luego $\pi_t(f) \in C_p(X_t, Y)$, $f \restriction_{X_t} (x_1) \in O_1, \ldots, f \restriction_{X_t} (x_n) \in O_n$. Por lo tanto $f \in \pi_t{}^{-1}[U]$. Así π_t es continua, para toda $t \in T$. ⊠

Definamos ahora la función

$$\varphi : C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y) \to \prod_{t\in T} C_p(X_t, Y) \text{ dada por } \varphi(f)(t) = \pi_t(f)$$

Afirmación 2. φ es continua.

Efectivamente. Sea $p_t : \prod_{t\in T} C_p(X_t, Y) \to C_p(X_t, Y)$ la proyección natural asociada a t. Luego $(p_t \circ \varphi)(f) = p_t(\varphi(f)) = \varphi(f)(t) = \pi_t(f)$, es decir, $p_t \circ \varphi = \pi_t$ es continua. Por lo tanto φ es continua. ⊠

Afirmación 3. φ es inyectiva.

Efectivamente. Sean $f, g \in C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y)$ tales que $f \neq g$. Entonces existe $x \in \bigoplus_{t\in T} X_t$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Pero como $x \in \bigoplus_{t\in T} X_t$, entonces hay $t \in T$ tal que $x \in X_t$. Por ello $f \restriction_{X_t} \neq g \restriction_{X_t}$, es decir, $\pi_t(f) \neq \pi_t(g)$. Por lo tanto $\varphi(f) \neq \varphi(g)$. ⊠

Afirmación 4. φ es sobreyectiva.

Efectivamente. Sea $g \in \prod_{t\in T} C_p(X_t, Y)$. Definamos

$$f : \bigoplus_{t\in T} X_t \to Y \text{ por medio de } f(x) = g(t)(x) \text{ donde } x \in X_t.$$

Claramente $\varphi(f) = g$. Además, dado $U \in \tau^*(X)$ cualquiera, entonces $f^{-1}[U] \in \tau(\bigoplus_{t\in T} X_t)$. Por lo tanto $f \in C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y)$. Así φ es sobreyectiva. ⊠

Afirmación 5. $\varphi^{-1} : \prod_{t\in T} C_p(X_t, Y) \to C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y)$ es continua.

Efectivamente. Mostremos que para toda $x \in \bigoplus_{t\in T} X_t$, $\hat{x} \restriction_{C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y)} \circ\varphi^{-1} : \prod_{t\in T} C_p(X_t, Y) \to Y$ es continua. Sea $x \in \bigoplus_{t\in T} X_t$, entonces existe $t \in T$ tal que $x \in X_t$. Luego

$$\begin{aligned} (\hat{x} \restriction_{C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y)} \circ\varphi^{-1})(f) &= \hat{x} \restriction_{C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y)} (\varphi^{-1}(f)) \\ &= \varphi^{-1}(f)(x) = f(t)(x) = p_t(f)(x) \\ &= \hat{x} \restriction_{C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y)} \circ p_t(f) \end{aligned}$$

donde $\hat{x} \restriction_{C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y)} \circ p_t$ es continua. Por ello $\hat{x} \restriction_{C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y)} \circ\varphi^{-1}$ es continua. Así φ^{-1} es continua. ⊠

Por todas las anteriores afirmaciones podemos concluir que $C_p(\bigoplus_{t\in T} X_t, Y) \cong \prod_{t\in T} C_p(X_t, Y)$ ■

2.8.2 Teorema. *Para cualquier espacio X y cualquier familia no vacía de espacios topológicos $\{Y_t : t \in T\}$ se tiene que:*

$$C_p(X, \prod_{t\in T} Y_t) \cong \prod_{t\in T} C_p(X, Y_t).$$

Demostración. Definamos

$$\varphi : C_p(X, \textstyle\prod_{t\in T} Y_t) \to \prod_{t\in T} C_p(X, Y_t) \text{ dada por: } \varphi(f) = \varphi(f)(t) = p_t \circ f \\ (t \in T).$$

donde $p_t : \prod_{t\in T} Y_t \to Y_t$ es la proyección natural asociada a t.

Afirmación 1. φ es inyectiva.

Efectivamente. Sean $f, g \in C_p(X, \prod_{t\in T} Y_t)$ tales que $f \neq g$. Entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Luego como $f(x), g(x) \in \prod_{t\in T} Y_t$, existe $t \in T$ tal que $f(x)(t) \neq g(x)(t)$. Por ello $(p_t \circ f)(x) = f(x)(t) \neq (p_t \circ g)(x) = g(x)(t)$. Así $p_t \circ f \neq p_t \circ g$. Así $\varphi(f) \neq \varphi(g)$, lo que implica que φ es inyectiva ⊠

Afirmación 2. φ es sobreyectiva.

Efectivamente. Sea $g \in \prod_{t\in T} C_p(X, Y_t)$ arbitraria. En consecuencia para cada $t \in T$, $g(t) \in C_p(X, Y_t)$. Sea $f \in C_p(X, \prod_{t\in T} Y_t)$ definida por medio de $f(x)(t) = g(t)(x)$. Claramente $\varphi(f) = g$ y por lo tanto φ es sobreyectiva. ⊠

Afirmación 3. φ es continua.

Efectivamente. Basta demostrar que para toda $t \in T$, $\pi_t \circ \varphi$ es continua. Fijemos $t \in T$ y consideremos $g \in C_p(X, \prod_{t\in T} Y_t)$ cualquiera y

$$U = [x_1, \ldots, x_n; O_{t_1}, \ldots, O_{t_n}]$$

un abierto canónico cualquiera de $C_p(X,Y_t)$, donde $n\in\mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n\in X$ y $O_{t_1},\dots,O_{t_n}\in\tau^*(Y_t)$. Note que $(\pi_t\circ\varphi)(g)\in U$. Así

$$W=[x_1,\dots,x_n;{p_t}^{-1}[O_{t_1}],\dots,{p_t}^{-1}[O_{t_n}]]$$

es un abierto canónico de $C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)$, además $g\in W$. Más aún $(\pi_t\circ\varphi)[W]\subseteq U$. Así $\pi_t\circ\varphi$ es continua, para cada $t\in T$ y por lo tanto φ es continua. ⊠

Afirmación 4. $\varphi^{-1}:\prod_{t\in T}C_p(X,Y_t)\to C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)$ es continua.

Efectivamente. Bastará demostrar que para todo $x\in X$ y toda $t\in T$ $\hat{x}\restriction_{C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)}\circ\varphi^{-1}$ es continua. Pero dado que

$$\hat{x}\restriction_{C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)}\circ\varphi^{-1}:\prod_{t\in T}C_p(X,Y_t)\to\prod_{t\in T}Y_t$$

esto es equivalente a demostrar que $p_t\circ\hat{x}\restriction_{C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)}\circ\varphi^{-1}$ es continua, para toda $x\in X$ y toda $t\in T$. Con este fin, observemos lo siguiente

$$\begin{aligned} p_t\circ\hat{x}\restriction_{C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)}\circ\varphi^{-1}(f) &= p_t\circ(\hat{x}\restriction_{C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)}\circ\varphi^{-1}(f))\\ &= p_t(\varphi^{-1}(f)(x))=\varphi^{-1}(f)(x)(t)=f(t)(x)\\ &= \hat{x}\restriction_{C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)}\circ\pi_t(f)\end{aligned}$$

Así $p_t\circ\hat{x}\restriction_{C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)}\circ\varphi^{-1}=\hat{x}\restriction_{C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)}\circ\pi_t$, donde $\hat{x}\restriction_{C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)}\circ\pi_t$ es continua. Por lo tanto $p_t\circ\hat{x}\restriction_{C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)}\circ\varphi^{-1}$ es continua, así $\hat{x}\restriction_{C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)}\circ\varphi^{-1}$ es continua. Por ello φ^{-1} es continua. ⊠

Por lo tanto por todo lo anterior $C_p(X,\prod_{t\in T}Y_t)\cong\prod_{t\in T}C_p(X,Y_t)$. ∎

2.8.3 Corolario. *Sea κ un número cardinal infinito (dotado con la topología discreta). Luego para todo espacio X se satisface que*

$$C_p(X\times\kappa)\cong C_p(X,\mathbb{R}^\kappa)\cong C_p(X)^\kappa.$$

2.8.4 Proposición. *Si $Z_1\subseteq Z$, entonces $C_p(X,Z_1)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X,Z)$. Más aún, si Z_1 es cerrado en Z, entonces $C_p(X,Z_1)$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $C_p(X,Z)$.*

Demostración. Claramente la función $i_{Z_1}:Z_1\hookrightarrow Z$, induce la función $i_{Z_1}^X:Z_1^X\to Z^X$ que es un encaje (es decir, $i_{Z_1}^X[Z_1^X]\cong Z_1^X$). Ahora si Z_1 es cerrado en Z, se sigue que Z_1^X es cerrado en Z^X, más aún $C_p(X,Z_1)=Z_1^X\cap C_p(X,Z)$. ∎

2.8.5 Corolario. *Sea X un espacio topológico. Así cada uno de los espacios $C_p(X)$, $C_p^b(X)$ y $C_p(X,[0,1])$ es homeomorfo a un subespacio del otro.*

Capítulo 3

El teorema de Nagata

En este capítulo demostramos el clásico teorema de Jun-iti Nagata que muestra que toda la información topológica de un espacio Tychonoff X está codificada en la estructura topológico-algebraica del anillo topológico $C_p(X)$.

Para la prueba de este importante resultado, que es base de muchas líneas de investigación en la C_p-teoría estableceremos la definición y propiedades más importantes del mapeo reflexión.

En todo este capítulo estaremos suponiendo que todos los espacios son Tychonoff no vacíos.

3.1. El mapeo reflexión

Sea $A \subseteq C_p(X, Z)$ con la topología de subespacio; sabemos que para todo a cada $x \in X$ le corresponde la función mapeo evaluación $\hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)}: C_p(X, Z) \to Z$ definida por $\hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)} (f) = f(x)$ para cada $f \in C_p(X, Z)$. En particular para cada $f \in A$, $\hat{x} \restriction_A (f) = (\hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)} \circ i_A)(f) = \hat{x} \restriction_{C_p(X,Z)} (f) = f(x)$, es decir $\hat{x} \restriction_A (f) = f(x)$. Y sabemos que el mapeo evaluación es continuo (y genera la topología de $C_p(X, Z)$). Por lo tanto, tenemos la función:

$$\Phi_{XA} : X \to C_p(A, Z) \text{ definida por:}$$
$$\forall x \in X : \Phi_{XA}(x) = \hat{x} \restriction_A$$

a la cual llamaremos *mapeo reflexión*.
Las siguientes propiedades se siguen inmediatamente de las definiciones del mapeo reflexión y el producto diagonal de una familia de funciones.

3.1.1 Proposición. *Sea $A \subseteq C_p(X, Z)$ con la topología de subespacio. Por ello el mapeo reflexión $\Phi_{XA} : X \to C_p(A, Z)$ coincide con el producto diagonal $\triangle A : X \to Z^A$.*

Demostración. Sea $x \in X$ arbitrario, entonces $\Phi_{XA}(x) = \hat{x} \restriction_A$. Ahora consideremos $f \in A$ arbitraria, así $\Phi_{XA}(x)(f) = \hat{x} \restriction_A (f) = f(x)$. Por otro lado $\triangle A(x)(f) = \pi_A(\triangle A(x)) = f(x)$, donde $\pi_A : A \to Z$ es la proyección en la coordenada f. Por lo tanto $\Phi_{XA}(x) = \triangle A(x)$, por lo que $\Phi_{XA} = \triangle A$. ∎

3.1.2 Corolario. *El mapeo reflexión $\Phi_{XA} : X \to C_p(A, Z)$ es continuo.*

Demostración. Por la proposición 3.1.1 sabemos que $\Phi_{XA} = \triangle A$, y dado que $A \subseteq C_p(A, Z)$ se sigue que $\triangle A$ es continuo. Por lo tanto $\Phi_{XA} : X \to C_p(A, Z)$ es continuo. ∎

3.1.3 Corolario. *El mapeo reflexión $\Phi_{XA} : X \to C_p(A, Z)$ es inyectivo si y sólo si A separa puntos de X.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Supongamos que A no separa puntos. En consecuencia existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ tal que para toda $f \in A$, $f(x) = f(y)$. Por ello $\hat{x} \restriction_A (f) = \hat{y} \restriction_A (f)$. Por lo tanto Φ_{XA} no es inyectivo.
[$\Leftarrow$] Supongamos que Φ_{XA} no es inyectiva. Luego existen $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ y $\Phi_{XA}(x) = \Phi_{XA}(y)$, por lo que $\hat{x} \restriction_A = \hat{y} \restriction_A$. Así, dada $f \in A$, entonces $\hat{x} \restriction_A (f) = f(x) = f(y) = \hat{y} \restriction_A (f)$. Por lo tanto A no separa puntos. ∎

3.1.4 Corolario. *Sea $\Phi_{XA} : X \to C_p(A, Z)$ el mapeo reflexión. Por ello $X \cong \Phi_{XA}[X]$ si y sólo si A genera la topología de X.*

3.1.5 Corolario. *Sea $\Phi_{XC_p(X)} : X \to C_p(C_p(X))$ el mapeo reflexión. Así $X \cong \Phi_{XC_p(X)}[X]$.*

3.1.6 Proposición. *Sea $\Phi_{XA} : X \to C_p(A, Z)$ el mapeo reflexión. Si $p : X \to \Phi_{XA}[X]$ esta definida por medio de $p(x) = \Phi_{XA}(x)$ para toda $x \in X$, entonces $p^*[C_p(\Phi_{XA}[X], Z)]$ es un subespacio que contiene al conjunto A y es homeomorfo a $C_p(\Phi_{XA}[X], Z)$.*

Demostración. Sea $f \in A$, bastará demostrar que $f = p^*(h)$ para alguna $h \in C_p(\Phi_{XA}[X], Z)$. Así definamos $\widehat{f} : C_p(A, Z) \to Z$ como $\widehat{f}(g) = g(f)$, para toda $g \in C_p(A, Z)$.
Afirmación. $f = (\widehat{f} \restriction_{\Phi_{XA}[X]}) \circ p$.

En efecto. Sea $x \in X$ arbitrario, entonces

$$\begin{aligned}(\widehat{f} \restriction_{\Phi_{XA}[X]}) \circ p &= (\widehat{f} \restriction_{\Phi_{XA}[X]})(p(x)) \\ &= (\widehat{f} \restriction_{\Phi_{XA}[X]})(\Phi_{XA}(x)) \\ &= (\Phi_{XA}(x))(f) = \widehat{x} \restriction_{A} (f) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Por lo tanto $A \subseteq p^*[C_p(\Phi_{XA}[X], Z)]$. ⊠
Por la proposición 2.4.4, se sigue que $p^*[C_p(\Phi_{XA}[X], Z)]$ es homeomorfo a $C_p(\Phi_{XA}[X], Z)$. ∎

3.2. El dual de $C_p(X)$

Ahora denotaremos por $\widehat{X}$ a la imagen el mapeo reflexión $\Phi_{XC_p(X)} : X \to C_p(C_p(X))$, es decir, $\widehat{X} = \Phi_{XC_p(X)}[X]$. Así $\widehat{X} \subseteq C_p(C_p(X))$, por ello

$$\begin{aligned}\widehat{X} &= \{f \in C_p(C_p(X)) : \exists x \in X \text{ tal que } \Phi_{XC_p(X)}(x) = f\} \\ &= \{f \in C_p(C_p(X)) : \exists x \in X \text{ tal que } \hat{x} \restriction_{C_p(X)} = f\}.\end{aligned}$$

Más aún dado que $C_p(X)$ es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$ se sigue que, toda $f \in \widehat{X}$ es una *funcional lineal multiplicativa.* Efectivamente, como $f \in \widehat{X}$, entonces existe $x \in X$ tal que $\hat{x} \restriction_{C_p(X)} = f$. Ahora sean $h, g \in C_p(X)$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces $f(h+rg) = \hat{x} \restriction_{C_p(X)} (h+rg) = (h+rg)(x) = h(x)+(rg)(x) = h(x) + r(g(x)) = \hat{x} \restriction_{C_p(X)} (h) + r(\hat{x} \restriction_{C_p(X)} (g)) = f(h) + rf(g)$. Ahora $f(h\cdot g) = \hat{x} \restriction_{C_p(X)} (h\cdot g) = (h\cdot g)(x) = h(x)\cdot g(x) = (\hat{x} \restriction_{C_p(X)} (h))\cdot (\hat{x} \restriction_{C_p(X)} (g)) = f(h)\cdot f(g)$

Como $C_p(C_p(X))$ es un espacio vectorial topológico y por el corolario 3.1.5 $X \cong \widehat{X} \subseteq C_p(C_p(X))$, cabe preguntarnos cuál es el mínimo subespacio vectorial topológico del espacio $C_p(C_p(X))$ que contiene a $\widehat{X}$. Con el propósito de contestar esta pregunta, denotemos por $L_p(X)$ al subespacio topológico de $C_p(C_p(X)$ generado por por $\widehat{X}$, es decir, $L_p(X) = \langle \widehat{X} \rangle$, recordando nuestros cursos de Álgebra Lineal sabemos que:

$$L_p(X) = \{\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}; f_1, \ldots, f_n \in \widehat{X}; n \in \omega \backslash 1\}$$

Es claro que toda $\varphi \in L_p(X)$ es funcional lineal y además $\varphi \in C_p(C_p(X))$.

3.2.1 Proposición. $L_p(X)$ *es el conjunto de todas las funcionales lineales continuas definidas sobre el espacio vectorial topológico* $C_p(X)$

Demostración. Sea $\phi : C_p(X) \to \mathbb{R}$ una funcional lineal continua arbitraria. Dado que ϕ es funcional lineal, se sigue que $\phi(\overline{0}) = 0 \in (-1,1)$, usando la continuidad de ϕ, obtenemos que $\phi^{-1}[(-1,1)] \in \tau(\overline{0}, C_p(X))$. Por ello, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\epsilon > 0$ con $n \in \omega \setminus 1$ tales que $\overline{0} \in [\overline{0}; x_1, \ldots, x_n; \epsilon] \subseteq \phi^{-1}[(-1,1)]$, más aún $\phi([\overline{0}; x_1, \ldots, x_n; \epsilon]) \subseteq (-1,1)$. Por otro lado como X es Tychonoff, existen $f_i \in C_p(X)$ tales que $f_i(x_i) = 1$ y $f_i[\{x_j : j \neq i\}] \subseteq \{0\}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Afirmación 1. Si $h \in C_p(X)$ tal que $h(x_i) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\phi(h) = 0$.
Efectivamente. Como $h(x_i) = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $k(h(x_i)) = 0$, por ello, $(kh)(x_i) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así $|(kh)(x_i)| = 0 < \epsilon$, por lo cual $kh \in [\overline{0}; x_1, \ldots, x_n; \epsilon]$, lo cual implica que $\phi(kh) \in (-1,1)$. Luego $k\phi(h) \in (-1,1)$, es decir $|k\phi(h)| < 1$. Por lo tanto $|\phi(h)| < \frac{1}{k}$, así $\phi(h) = 0$. $\boxtimes$
Afirmación 2. $\phi(f) = (\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n)(f)$, para toda $f \in C_p(X)$.
Efectivamente. Sea $f \in C_p(X)$ arbitraria. Definamos lo siguiente:

1. $\phi(f_i) = \lambda_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.
2. $g = f - (f(x_1)f_1 + \cdots + f(x_n)f_n)$.

Claramente $g \in C_p(X)$. Fijemos $i \in \{1, \ldots, n\}$, así

$$\begin{aligned} g(x_i) &= f(x_i) - (f(x_1)f_1(x_i) + \cdots + f(x_i)f_i(x_i) + \cdots + f(x_n)f_n(x_i)) \\ &= f(x_i) - f(x_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces por la afirmación 1 se tiene que $\phi(g) = 0$. Por lo cual

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(f - (f(x_1)f_1 + \cdots + f(x_n)f_n)) \\ &= \phi(f) - (\phi(f_1)f(x_1) + \cdots + \phi(f_n)f(x_n)) \\ &= \phi(f) - (\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)) \\ &= \phi(f) - (\lambda_1(\hat{x_1} \restriction_{C_p(X)} (f)) + \cdots + \lambda_n(\hat{x_n} \restriction_{C_p(X)} (f))) \\ &= \phi(f) - (\lambda_1 \widehat{f_1} + \cdots + \lambda_n \widehat{f_n})(f). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi(f) = (\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n)(f)$. $\boxtimes$
Dado que $f \in C_p(X)$ fue elegido arbitrariamente, se sigue que $\phi = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$. Por lo tanto $\phi \in L_p(X)$. ∎

Nuevamente haciendo alusión a nuestros cursos de Álgebra Lineal, recordemos que el *dual de un espacio vectorial* V, está defindo como el conjunto de todas las funcionales lineales definidas sobre V y es denotado por V^*. Con esto en mente, definimos el *dual (algebraico) de L un espacio vectorial topológico*, como el conjunto de todas las funcionales lineales definidas sobre L equipado de la topología débil, este es denotado por L^* y el *dual topológico* como el conjunto de todas las funcionales lineales continuas definidas sobre L equipado de la topología débil (es decir, la topología de la convergencia puntual), este es denotado por L'.

3.2.2 Corolario. $L_p(X) = (C_p(X))'$

3.2.3 Lema. $\widehat{X}$ *es base del espacio* $L_p(X)$.

Demostración. Ya sabemos por definición que $\langle \widehat{X} \rangle = L_p(X)$. Bastará demostrar que $\widehat{X}$ es un conjunto linealmente independiente. Para ello sean $f_1, \ldots, f_n \in \widehat{X}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ con $n \in \omega \backslash 1$.
Supongamos que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = \widehat{0}$, donde $\widehat{0} : C_p(X) \to \mathbb{R}$ dada por $\widehat{0}(f) = 0$ para toda $f \in C_p(X)$. Como X es Tychonoff existen $g_i \in C_p(X)$ tal que $g_i(x_i) = 1$ y $g_i[\{x_j : i \neq j\}] \subseteq \{0\}$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora fijemos $i \in \{1, \ldots, n\}$ de manera arbitraria, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \widehat{0}(g_i) \\ &= (\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n)(g_i) \\ &= \lambda_1(f_1(g_i)) + \cdots + \lambda_n(f_n(g_i)) \\ &= \lambda_1(\hat{x_1} \restriction_{C_p(X)} (f_g)) + \cdots + \lambda_n(\hat{x_n} \restriction_{C_p(X)} (g_i)) \\ &= \lambda_1 g_i(x_1) + \cdots + \lambda_i g_i(x_i) + \cdots + \lambda_n g_i(x_n) \\ &= \lambda_i \end{aligned}$$

Finalmente, como $i \in \{1, \ldots, n\}$ fue elegido de manera arbitraria concluimos que $\lambda_i = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, lo cual demuestra que efectivamente $\widehat{X}$ es un conjunto linealmente independiente. ■

Como $L_p(X) \subseteq C_p(C_p(X))$, si consideramos el mapeo reflexión $\Phi_{C_p(X)L_p(X)} : C_p(X) \to C_p(L_p(X))$, sabemos que este es continuo. Más aún, si fijamos $f \in C_p(X)$ y consideramos $g_1, g_2 \in L_p(X)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, observemos que:

$$\begin{aligned} \Phi_{C_p(X)L_p(X)}(f)(\alpha g_1 + \beta g_2) &= (\alpha g_1 + \beta g_2)(f) \\ &= (\alpha g_1)(f) + (\beta g_2)(f) \\ &= \alpha(g_1(f)) + \beta(g_2(f)) \\ &= \alpha(\Phi_{C_p(X)L_p(X)}(f)(g_1)) + \beta(\Phi_{C_p(X)L_p(X)}(f)(g_2)) \end{aligned}$$

es decir, $\Phi_{C_p(X)L_p(X)}(f)$ es una funcional lineal en $L_p(X)$. Así $\Phi_{C_p(X)L_p(X)}[C_p(X)] \subseteq L_p(X)' \subseteq C_p(L_p(X))$ y dado que $X \subseteq L_p(X)$, podemos considerar el mapeo reflexión $r_X : C_p(L_p(X)) \to C_p(X)$, note que $r_X \circ \Phi_{C_p(X)L_p(X)} = id_{C_p(X)}$

En párrafos anteriores se hizo evidente que toda $f \in \widehat{X}$ es una funcional lineal multiplicativa continua, pero podemos ir aún más lejos.

3.2.4 Proposición. *$\widehat{X}$ es el conjunto de todas las funcionales lineales multiplicativas continuas definidas sobre el espacio vectorial topológico $C_p(X)$.*

Demostración. Sea $\rho : C_p(X) \to \mathbb{R}$ una funcional lineal multiplicativa continua. Dado que ρ es funcional lineal continua, entonces por la proposición 3.2.1 existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $\widehat{f_1}, \ldots, \widehat{f_n} \in \widehat{X}$ con $n \in \omega\backslash 1$ tal que $\rho = \lambda_1 \widehat{f_1} + \cdots + \lambda_n \widehat{f_n}$. Supongamos que $f_i \neq f_j$ si $i \neq j$ y $\lambda_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Asimismo supongamos que $n > 1$. Como X es Tychonoff, existen $g_1, g_2 \in C_p(X)$ tales que $g_1(x_1) = 1, g_1[\{x_j : j \in \{1, \ldots, n\}\backslash\{1\}\}] \subseteq \{0\}$ y $g_2(x_2) = 1, g_2[\{x_j : j \in \{1, \ldots, n\}\backslash\{2\}\}] \subseteq \{0\}$.
Así

$$\begin{aligned}
\rho(g_1) &= (\lambda_1 \widehat{f_1} + \cdots + \lambda_n \widehat{f_n})(g_1) \\
&= \lambda_1(\widehat{f_1}(g_1)) + \cdots + \lambda_n(\widehat{f_n}(g_1)) \\
&= \lambda_1(\hat{x_1} \restriction_{C_p(X)} (g_1)) + \cdots + \lambda_n(\hat{x_n} \restriction_{C_p(X)} (g_1)) \\
&= \lambda_1 g_1(x_1) + \cdots + \lambda_n g_1(x_n) \\
&= \lambda_1
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\rho(g_2) &= (\lambda_1 \widehat{f_1} + \cdots + \lambda_n \widehat{f_n})(g_2) \\
&= \lambda_1(\widehat{f_1}(g_2)) + \cdots + \lambda_n(\widehat{f_n}(g_2)) \\
&= \lambda_1(\hat{x_1} \restriction_{C_p(X)} (g_2)) + \cdots + \lambda_n(\hat{x_n} \restriction_{C_p(X)} (g_2)) \\
&= \lambda_1 g_2(x_1) + \lambda_2 g_2(x_1) + \cdots + \lambda_n g_2(x_n) \\
&= \lambda_2
\end{aligned}$$

por lo cual $\rho(g_1) \cdot \rho(g_2) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.
Ahora fijemos $i \in \{1, \ldots, n\}$ de manera arbitraria, entonces

$$(g_1 \cdot g_2)(x_i) = \begin{cases} 1 \cdot 0 & si \quad i = 1 \\ 0 \cdot 1 & si \quad i = 2 \\ 0 \cdot 0 & si \quad i \in \{1, \ldots, n\}\backslash\{1, 2\} \end{cases}$$

es decir, $(g_1 \cdot g_2)(x_i) = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además

$$\begin{aligned}
\rho(g_1 \cdot g_2) &= (\lambda_1 \widehat{f_1} + \cdots + \lambda_n \widehat{f_n})(g_1 \cdot g_2) \\
&= \lambda_1(\widehat{f_1}(g_1 \cdot g_2)) + \cdots + \lambda_n(\widehat{f_n}(g_1 \cdot g_2)) \\
&= \lambda_1(\hat{x_1} \restriction_{C_p(X)} (g_1 \cdot g_2)) + \cdots + \lambda_n(\hat{x_n} \restriction_{C_p(X)} (g_1 \cdot g_2)) \\
&= \lambda_1(g_1 \cdot g_2)(x_1) + \cdots + \lambda_n(g_1 \cdot g_2)(x_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por ello $\rho(g_1) \cdot \rho(g_2) \neq \rho(g_1 \cdot g_2)$, lo cual contradice el hecho que ρ es multiplicativa.
Así $n = 1$, entonces $\rho = \lambda \widehat{f}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\widehat{f} \in \widehat{X}$.
Sea $h \in C_p(X)$ definida como $h(x) = 1$ para toda $x \in X$. Por lo que $h \cdot h = h$, luego $\rho(h) = (\lambda \widehat{f})(h) = \lambda(\widehat{f}(h)) = \lambda(\hat{x} \restriction_{C_p(X)} (h)) = \lambda(h(x)) = \lambda$, pero dado que $\rho(h \cdot h) = \rho(h) \cdot \rho(h) = \lambda \cdot \lambda$, se tiene $\lambda = \lambda \cdot \lambda$ lo cual implica que $\lambda = 1$.
Por lo tanto $\rho = \widehat{f}$, es decir $\rho \in \widehat{X}$. ■

3.3. El Teorema de Jun-iti Nagata

Uno de los resultados más sobresalientes referente a los espacios de funciones $C_p(X)$, fue demostrado por Jun-iti Nagata el cual nos dice que, la estructura topológica de un espacio Tychonoff X está completamente determinada por la estructura de anillo topológico que posee $C_p(X)$. En esta sección probaremos este interesante resultado.

3.3.1 Teorema (Nagata)**.** *X es homeomorfo a Y si y sólo si $C_p(X)$ es topológicamente isomorfo a $C_p(Y)$.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Supongamos que X es homeomorfo a Y, entonces existe $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Luego por el inciso 3 de la proposición 2.4.4; $h^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ es un encaje (es decir, $h^*[C_p(Y)] \cong C_p(Y)$) ya que $h \in C_p(X, Y)$ y $h[X] = Y$. En consecuencia bastará mostrar que $h^*[C_p(Y)] = C_p(X)$ y h^* es un homomorfismo de anillos.
Sea $g \in C_p(X)$ cualquiera. Como $h^{-1} \in C_p(Y, X)$, entonces $g \circ h^{-1} \in C_p(Y)$, así $h^*(g \circ h^{-1}) = (g \circ h^{-1}) \circ h = g \circ (h^{-1} \circ h) = g \circ id_X = g$. Por lo tanto $C_p(Y) \cong h^*[C_p(Y)] = C_p(X)$.

Ahora sean $f_1, f_2 \in C_p(Y)$ y $r \in \mathbb{R}$. Luego

$$\begin{aligned} h^*(f_1 \Box f_2) &= (f_1 \Box f_2) \circ h \\ &= (f_1 \circ h) \Box (f_2 \circ h) \\ &= h^*(f_1) \Box h^*(f_2) \text{ donde } \Box = \{+, \cdot\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $C_p(X)$ es topológicamente isomorfo a $C_p(Y)$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $C_p(X)$ es topológicamente isomorfo a $C_p(Y)$, entonces existe $\phi : C_p(X) \to C_p(Y)$ un isomorfismo topológico. Así $\phi^* : C_p(C_p(Y)) \to C_p(C_p(X))$ es un isomorfismo topológico (ver la construcción anterior). Como $\widehat{Y} \subseteq C_p(C_p(Y))$, entonces $\phi^* \restriction_{\widehat{Y}}: \widehat{Y} \to \phi^*[\widehat{Y}]$ es un homeomorfismo y dado que $X \cong \widehat{X}$ y $Y \cong \widehat{Y}$. Por ello bastará demostrar que $\phi^*[\widehat{Y}] = \widehat{X}$.
Sea $\psi \in \phi^*[\widehat{Y}]$, entonces existe $\widehat{f} \in \widehat{Y}$ tal que $\psi = \phi^*(\widehat{f}) := \widehat{f} \circ \phi \in C_p(C_p(X))$, demostraremos que ψ es una funcional lineal multiplicativa. Para ello, sean $f_1, f_2 \in C_p(X)$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \psi(r \cdot f_1 + f_2) &= (\widehat{f} \circ \phi)(r \cdot f_1 + f_2) \\ &= \widehat{f}(\phi(r \cdot f_1 + f_2)) \\ &= \widehat{f}(r \cdot \phi(f_1) + \phi(f_2)) \\ &= r \cdot \widehat{f}(\phi(f_1)) + \widehat{f}(\phi(f_2)) \\ &= r \cdot (\widehat{f} \circ \phi)(f_1) + (\widehat{f} \circ \phi)(f_2) \\ &= r \cdot \psi(f_1) + \psi(f_2) \end{aligned}$$

Por lo cual ψ es lineal.
Por otro lado

$$\begin{aligned} \psi(f_1 \cdot f_2) &= (\widehat{f} \circ \phi)(f_1 \cdot f_2) \\ &= \widehat{f}(\phi(f_1 \cdot f_2)) \\ &= \widehat{f}(\phi(f_1) \cdot \phi(f_2)) \\ &= \widehat{f}(\phi(f_1)) \cdot \widehat{f}(\phi(f_2)) \\ &= ((\widehat{f} \circ \phi)(f_1)) \cdot ((\widehat{f} \circ \phi)(f_2)) \\ &= \psi(f_1) \cdot \psi(f_2) \end{aligned}$$

así ψ es multiplicativa. Por lo tanto $\psi \in \widehat{X}$, lo cual implica que $\phi^*[\widehat{Y}] \subseteq \widehat{X}$.
Ahora sea $\widehat{f} \in \widehat{X}$, como $\phi : C_p(X) \to C_p(Y)$ es un isomorfismo topológico se tiene que $\phi^{-1} \in C_p(C_p(Y), C_p(X))$, así $\widehat{f} \circ \phi^{-1} \in C_p(C_p(Y))$ y $\phi^*(\widehat{f} \circ \phi^{-1}) =$

$(\widehat{f}\circ\phi^{-1})\circ\phi=\widehat{f}$. Sean $g_1,g_2\in C_p(Y)$ y $r\in\mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}(\widehat{f}\circ\phi^{-1})(r\cdot g_1+g_2) &= \widehat{f}(\phi^{-1}(r\cdot g_1+g_2))\\ &= \widehat{f}(r\cdot\phi^{-1}(g_1)+\phi^{-1}(g_2))\\ &= r\cdot\widehat{f}(\phi^{-1}(g_1))+\widehat{f}(\phi^{-1}(g_2))\\ &= r\cdot(\widehat{f}\circ\phi^{-1})(g_1)+(\widehat{f}\circ\phi^{-1})(g_2)\end{aligned}$$

es decir, $\widehat{f}\circ\phi^{-1}$ es funcional lineal. Luego

$$\begin{aligned}(\widehat{f}\circ\phi^{-1})(g_1\cdot g_2) &= \widehat{f}(\phi^{-1}(g_1\cdot g_2))\\ &= \widehat{f}(\phi^{-1}(g_1)\cdot\phi^{-1}(g_2))\\ &= \widehat{f}(\phi^{-1}(g_1))\cdot\widehat{f}(\phi^{-1}(g_2))\\ &= (\widehat{f}\circ\phi^{-1})(g_1)\cdot(\widehat{f}\circ\phi^{-1})(g_2)\end{aligned}$$

es decir, $\widehat{f}\circ\phi^{-1}$ es multiplicativa.
Por lo tanto $\widehat{f}\in\phi^*[\widehat{Y}]$, lo cual implica que $\widehat{X}\subseteq\phi^*[\widehat{Y}]$.
Por lo tanto X es homeomorfo a Y. ■

Capítulo 4

Propiedades t-invariantes y teoremas de dualidad

Sabemos que el análisis de la estructura de anillo topológico de $C_p(X)$ tiene como uno de sus principales resultados el siguiente teorema:

Teorema de Nagata. Sean X y Y espacios de Tychonoff. Si los anillos topológicos $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son topológicamente isomorfos entonces los espacios X y Y son homeomorfos.

Debido a que los espacios $C_p(X)$ son espacios topológicos, espacios vectoriales topológicos, y grupos topológicos, es natural preguntar si en cada uno de esos casos existen resultados análogos al de Nagata. La respuesta es negativa. Por ejemplo, en 1986 Gul'ko y Khmyleva demostraron que los espacios de funciones $C_p(\mathbb{R})$ y $C_p([0,1])$ son homeomorfos, lo que muestra que no se tiene un resultado análogo al de Nagata para el caso en que $C_p(X)$ sea homeomorfo a $C_p(Y)$.

Esto ha motivado la creación de una línea de investigación en la teoría de los espacios de funciones con la topología de la convergencia puntual, en la cual, el siguiente problema general es fundamental.

Problema. Supóngase que X y Y son espacios de Tychonoff, que $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica, y que existe un «buen mapeo» ξ de $C_p(X)$ sobre $C_p(Y)$. ¿Si X tiene la propiedad $\mathcal{P}$, tiene entonces Y la propiedad $\mathcal{P}$?

El teorema de Nagata muestra que la respuesta al anterior problema es afirmativa, para cualquiera que sea la propiedad $\mathcal{P}$, si ξ es un isomorfismo topológico entre anillos topológicos $C_p(X)$ y $C_p(Y)$. Y el resultado de Gulko y

Khmyleva muestra que la respuesta es negativa cuando ξ es un homeomorfismo y $\mathcal{P}$ es la propiedad de ser un espacio compacto.

En este contexto de esta línea de estudio de los espacios $C_p(X)$, la siguiente terminología es muy usada.

4.0.1 Definición. Sean X y Y espacios Tychonoff. Diremos que X *es t-equivalente a Y* si existe un homeomorfismo $\xi : C_p(X) \to C_p(Y)$. Si éste es el caso se acostumbra escribir $X \sim^t Y$.

Es fácil notar que si X es homeomorfo a Y entonces $X \sim^t Y$. Y el resultado de Gulko y Khmyleva muestra que esta implicación no es reversible. Sin embargo, nos podemos preguntar cuáles propiedades topológicas que posee X son «transmitidas» a Y cuando existe un homeomorfismo entre $C_p(X)$ y $C_p(Y)$.

4.0.2 Definición. Diremos que una propiedad $\mathcal{P}$ es *preservada por t-equivalencia*, o que es *t-invariante*, si $X \sim^t Y$ y X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ implican que Y también tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Una forma de probar que una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es t-invariante es encontrar otra propiedad topológica $\mathcal{Q}$ de modo que:

X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si y sólo si $C_p(X)$ tiene la propiedad $\mathcal{Q}$.

Cuando uno obtiene un resultado de tipo: X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si y sólo si $C_p(X)$ tiene la propiedad $\mathcal{Q}$, se dice que se ha mostrado un teorema de *dualidad*.

En este capítulo enunciaremos y daremos las pruebas de varios resultados clásicos de tipo: Para todo espacio Tychonoff X, se tiene que $\theta(C_p(X)) = \phi(X)$, donde ϕ y θ son funciones cardinales topológicas.

4.1. Algunas dualidades elementales

En esta sección demostraremos teoremas de dualidad que involucran a las funciones cardinales peso, carácter, pseudocarácter, densidad e i-peso. Iniciamos con el teorema de dualidad para el peso.

4.1.1 Teorema. *Para cualquier espacio infinito X, se satisface* $\chi(C_p(X)) = w(C_p(X)) = |X|$

Demostración. Por A.1.4 sabemos que $\chi(C_p(X)) \leqslant w(C_p(X))$ y por la monotonía de la función cardinal peso se tiene que

$$\chi(C_p(X)) \leqslant w(C_p(X)) \leqslant w(\mathbb{R}^X) \leqslant |X| \cdot \omega = |X|,$$

es decir, $\chi(C_p(X)) \leqslant w(C_p(X)) \leqslant |X|$

Por lo anterior bastará demostrar que $|X| \leqslant \chi(C_p(X))$. Para ello supongamos que $\chi(C_p(X)) < |X|$. Sea $f \equiv 0 \in C_p(X)$ y fijemos $\mathcal{B}_f$ una base local de f en $C_p(X)$ tal que $|\mathcal{B}_f| = \chi(f, C_p(X))$. En consecuencia $|\mathcal{B}_f| \leqslant \chi(C_p(X)) < |X|$; por ello $|\mathcal{B}_f| < |X|$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que todos los elementos de $\mathcal{B}_f$ son vecindades abiertas canónicas de f en $C_p(X)$. Como cada $U \in \mathcal{B}_f$ es de la forma $U = [f; x_1, \ldots, x_n; \epsilon]$, donde $n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in C_p(X)$ y $\epsilon > 0$, podemos definir $K(U) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ para cada $U \in \mathcal{B}_f$.

Definamos ahora $Y := \bigcup\{K(U) : U \in \mathcal{B}_f\}$ y note que $|Y| < |X|$. Por ello existe $x^* \in X\backslash Y$ y consideremos $V = [f; x^*; 1] \in \tau(C_p(X))$ y $W = [f; x_1, \ldots, x_n; \epsilon] \in \mathcal{B}_f$ arbitrario. Luego, como $K(W) \subseteq Y \subseteq X\backslash\{x^*\}$ y X es Tychonoff, entonces existe $g \in C_p(X)$ tal que $g(x^*) = 1$ y $g(x_i) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así obtenemos que $g \in W\backslash V$, es decir, $W\backslash V \neq \emptyset$ lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{B}_f$ es una base de f en $C_p(X)$. ■

El siguiente teorema de dualidad es debido a Arkhangel'skii e involucra al peso de red.

4.1.2 Teorema (Arhangel'skii)**.** *Para todo espacio infinito X, se satisface que $nw(C_p(X)) = nw(X)$.*

Demostración. Primero demostraremos que $nw(C_p(X)) \leqslant nw(X)$.

Fijemos $\mathcal{N}_X$ una red en X tal que $|\mathcal{N}_X| = nw(X)$ y una base numerable $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$.

Para cada subconjunto finito $\{N_1, \ldots, N_k\}$ de $\mathcal{N}_X$ y todo subconjunto finito $\{U_1, \ldots, U_k\}$ de $\mathcal{B}$ definimos

$$[N_1, \ldots, N_k; U_1, \ldots, U_k] = \{f \in C_p(X) : f[N_i] \subseteq U_i, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

y sea

$$\mathcal{N}_{C_p(X)} = \{[N_1, \ldots, N_k; U_1, \ldots, U_k] : \{N_1, \ldots, N_k\} \subseteq \mathcal{N}_X \text{ y } \{U_1, \ldots, U_k\} \subseteq \mathcal{B}\}$$

Afirmación 1. $\mathcal{N}_{C_p(X)}$ es una red en $C_p(X)$.

En efecto. Sea $f_0 \in C_p(X)$ y $[f_0; x_1, \ldots, x_k; \epsilon]$ una vecindad canónica de f_0 en $C_p(X)$. Como $f_0(x_i) \in (f_0(x_i) - \epsilon, f_0(x_i) + \epsilon) \in \tau(\mathbb{R})$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existe $U_i \in \mathcal{B}$ tal que $f_0(x_i) \subseteq U_i \subseteq (f_0(x_i) - \epsilon, f_0(x_i) + \epsilon)$. Debido a que f_0 es continua existe $V_i \in$

$\tau(x_i, X)$ tal que $f_0(x_i) \in f_0[V_i] \subseteq U_i \subseteq (f_0(x_i) - \epsilon, f_0(x_i) + \epsilon)$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como $\mathcal{N}_X$ es una red para X, se tiene que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existe $N_i \in \mathcal{N}_X$ tal que $x_i \in N_i \subseteq V_i$. Así

$$f_0(x_i) \in f_0[N_i] \subseteq f_0[V_i] \subseteq U_i \subseteq (f_0(x_i) - \epsilon, f_0(x_i) + \epsilon)$$

para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Todo esto nos permite concluir que

$$f_0 \in [N_1, \ldots, N_k; U_1, \ldots, U_k] \subseteq [f_0; x_1, \ldots, x_k; \epsilon]. \quad \boxtimes$$

Basta demostrar que $|\mathcal{N}_{C_p(X)}| \leqslant nw(X)$. Para ello definamos a la función

$$H : \mathcal{N}_{C_p(X)} \to \bigcup_{k\in\mathbb{N}} ({\mathcal{N}_X}^k \times \mathcal{B}^k) \text{ por medio de la regla:}$$

$$H([N_1, \ldots, N_k; U_1, \ldots, U_k]) = (N_1, \ldots, N_k; U_1, \ldots, U_k)$$

Claramente H es una función inyectiva, por lo cual

$$|\mathcal{N}_{C_p(X)}| \leqslant |\bigcup_{k\in\mathbb{N}} ({\mathcal{N}_X}^k \times \mathcal{B}^k)| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |{\mathcal{N}_X}^k \times \mathcal{B}^k| = \omega \cdot |{\mathcal{N}_X}^k| = nw(X).$$

Usando lo que acabamos de demostrar y la proposición A.1.12, tenemos que:

$$nw(X) \leqslant nw(C_p(C_p(X))) \leqslant nw(C_p(X)).$$

Por lo tanto $nw(C_p(X)) = nw(X)$. ∎

4.1.3 Definición. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_1 y $A \subseteq X$ es no vacío, el *pseudocarácter de A en X* es el número cardinal:

$$\psi(A, X) = \min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subseteq \tau \;\&\; \cap\mathcal{U} = A\}.$$

Cuando $A = \{x\}$, escribiremos $\psi(x, X)$ en lugar de $\psi(\{x\}, X)$.

Si X es un espacio T_1, entonces definimos el *pseudocarácter* de X como el número cardinal $\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$.

4.1.4 Nota.

1. Notemos que si $A = X$ entonces la colección $\mathcal{U} = \{X\}$ es tal que $\mathcal{U} \subseteq \tau$ y $A = \cap\mathcal{U}$. Por otro lado, si X es T_1 y $\emptyset \neq A \subsetneq X$ entonces la colección $\mathcal{U} = \{X \setminus \{y\} : y \in X \setminus A\} \subseteq \tau$ es tal que $A = \cap\mathcal{U}$.

   Todo lo anterior muestra que para cualquier espacio X T_1 y cualquier subconjunto no vacío A de X, la colección $\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subseteq \tau \;\&\; \cap\mathcal{U} = A\}$ es no vacía, y por ello, el mínimo de este conjunto siempre existe.

2. Si X y Y son espacios T_1 y $f : X \to Y$ es una condensación, entonces para todo $\emptyset \neq A \subseteq X$, $\psi(A, X) \leqslant \psi(f[A], Y)$.

   Consecuentemente, $\psi(X) \leqslant \psi(Y)$.

En la siguiente definición introducimos algunas otras funciones cardinales que son dominadas por el peso de red.

4.1.5 Definición.

1. El *número diagonal* de un espacio T_1 X es el número cardinal

$$\Delta(X) = \psi(\Delta_X, X \times X),$$

   donde $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$. Aquí, $X \times X$ tiene la topología producto.

2. Definimos el *i-peso de un espacio Tychonoff* X como el número cardinal

$$iw(X) = \min\{\kappa : \text{ existen } Y \text{ Tychonoff con } w(Y) \leqslant \kappa$$
$$\& \ f : X \to Y \text{ condensación } \}.$$

Si (X, τ) es un espacio Tychonoff cualquiera entonces la función $id_X : (X, \tau) \to (X, \tau)$ es una condensación. Consecuentemente, para cualquier espacio Tychonoff X siempre ocurre que $iw(X) \leqslant w(X)$. En el inciso (2) de la siguiente proposición se mejora esta desigualdad.

4.1.6 Lema.

(1) Si X es un espacio T_1 entonces $\psi(X) \leqslant \Delta(X)$.

(2) Para todo espacio Tychonoff X se tiene que

$$\Delta(X) \leqslant iw(X) \leqslant nw(X).$$

Demostración. (1) Sea $\mathcal{W}$ una colección de abiertos de $X \times X$ tal que $\Delta_X = \bigcap\mathcal{W}$ y $|\mathcal{W}| = \psi(\Delta_X, X \times X)$. Considere un elemento cualquiera $x \in X$. Como $(x, x) \in \Delta_X$, tenemos que $(x, x) \in W$ para todo $W \in \mathcal{W}$. Por la definición de la topología producto en $X \times X$, podemos fijar un abierto $U(W)$ de X de modo que $x \in U(W)$ y además $U(W) \times U(W) \subseteq W$. Resulta entonces que $\mathcal{U} = \{U(W) : W \in \mathcal{W}\}$ es una colección de abiertos de X. Es fácil probar que $\bigcap\mathcal{U} = \{x\}$ y que $|\mathcal{U}| \leqslant |\mathcal{W}| = \psi(\Delta_X, X \times X)$. Consecuentemente, $\psi(x, X) \leqslant \psi(\Delta_X, X \times X)$. Como $x \in X$ es arbitrario, $\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) : x \in X\} \leqslant \psi(\Delta_X, X \times X) = \Delta(X)$.

(2) Supongamos que X es un espacio Tychonoff. Primero demostraremos la desigualdad

$$\Delta(X) \leqslant iw(X).$$

Dividiremos esta prueba en los casos: cuando $iw(X)$ es finito y cuando es infinito.

Supongamos primero que $iw(X)$ es finito. Fije un espacio Tychonoff Y y una condensación $f : X \to Y$ tales que $w(Y) = iw(X)$. Dése cuenta que como $iw(X)$ es un número cardinal finito, $w(Y)$ es finito, entonces Y es un espacio Tychonoff finito; y por ello es un espacio discreto finito. Como f es una condensación, esto implica que X también es un espacio discreto finito de la misma cardinalidad que Y. Por esto, X y Y son homeomorfos y $|X| = w(X) = w(Y)$. Debido a que X es discreto, $X\times X$ también lo es. Ahora observe que la colección $\mathcal{U} = \{\Delta_X\}$ es una colección de abiertos de $X \times X$ tal que $\bigcap\mathcal{U} = \Delta_X$. Luego, $\Delta(X) = \psi(\Delta_X, X\times X) \leqslant |\mathcal{U}| \leqslant |X| = w(Y) = iw(X)$.

Consideremos ahora el caso en que $iw(X) = \kappa$ es infinito. Fije de nuevo un espacio Tychonoff Y y una condensación $f : X \to Y$ de modo que $w(Y) = iw(X) = \kappa$.

Es fácil darse cuenta que $w(Y \times Y) \leqslant \kappa \cdot \kappa = \kappa$. Consecuentemente,

$$L(Y \times Y \setminus \Delta_Y) \leqslant nw(Y \times Y \setminus \Delta_Y) \leqslant w(Y \times Y \setminus \Delta_Y) \leqslant \kappa.$$

Para cada elemento $z \in Y \times Y \setminus \Delta_Y$, por la regularidad de $Y \times Y$, podemos fijar un abierto U_z de $Y \times Y$ de modo que[1]

$$z \in U_z \subseteq \overline{U}_z \subseteq Y \times Y \setminus \Delta_Y.$$

Entonces la colección $\mathcal{U} = \{U_z : z \in Y \times Y \setminus \Delta_Y\}$ es una cubierta abierta de $Y \times Y \setminus \Delta_Y$. Como $L(Y \times Y \setminus \Delta_Y) \leqslant \kappa$, existe una subcolección $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ de cardinalidad a lo más κ tal que

$$Y \times Y \setminus \Delta_Y \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V.$$

Pero es claro que $\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{V}} \overline{V} \subseteq Y \times Y \setminus \Delta_Y$. Así que

$$Y \times Y \setminus \Delta_Y = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} \overline{V},$$

[1]Recuerde que en todo espacio Hausdorff Y su diagonal Δ_Y es un subespacio cerrado de $Y \times Y$.

lo que implica a su vez que:

$$\Delta_Y = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} (Y \times Y \setminus \overline{V}).$$

Como la cardinalidad de $\mathcal{V}$ es menor o igual que κ, lo anterior implica que

$$\psi(\Delta_Y, Y \times Y) \leqslant \kappa.$$

Obsérvese ahora que como f es una condensación también lo es la función $f \times f : X \times X \to Y \times Y$ definida por $(f \times f)(x, z) = (f(x), f(z))$. Además $(f \times f)(\Delta_X) = \Delta_Y$. Luego, por el inciso (2) de la nota 4.1.4,

$$\Delta(X) = \psi(\Delta_X, X \times X) \leqslant \psi(\Delta_Y, Y \times Y) \leqslant \kappa.$$

Por lo tanto, $\Delta(X) \leqslant iw(X)$.

Demostremos ahora la desigualdad $iw(X) \leqslant nw(X)$. De nuevo distinguiremos los casos cuando $nw(X)$ es un número cardinal finito y cuando no lo es.

Supongamos primero que $nw(X) < \aleph_0$. Entonces por el lema A.1.14 X es un espacio Tychonoff finito, y por ello, es discreto. Motivo por el que $nw(X) = |X| = w(X)$. Además, ya observamos que $iw(X) \leqslant w(X)$. Por lo tanto, si $nw(X) < \aleph_0$ entonces $iw(X) \leqslant nw(X)$ (de hecho, $iw(X) = w(X) = nw(X)$[2]).

Consideremos ahora el caso cuando $nw(X) = \kappa$ es un número cardinal infinito. Fije una red $\mathcal{N}$ en X de modo que $|\mathcal{N}| = nw(X) = \kappa$.

Afirmación. Existe $\mathcal{F} \subseteq C(X, [0, 1])$ con $|\mathcal{F}| \leqslant \kappa$ y que separa los puntos de X (esto es, para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$).

Demostración de la afirmación. Defina $\mathcal{B} = \{(N, M) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : (\exists\, f_{(N,M)} \in C(X, [0, 1])\,)\ (f_{(N,M)}[N] \subseteq [0, \frac{1}{3}) \quad \& \quad f_{(N,M)}[M] \subseteq (\frac{2}{3}, 1])\}$. Veamos primero que $\mathcal{B} \neq \emptyset$: Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$[3]. Como X es Tychonoff, existe $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. En conseciencia $x \in f^{-1}[[0, \frac{1}{3})]$ y $y \in f^{-1}[(\frac{2}{3}, 1]]$. Como $f^{-1}[[0, \frac{1}{3})]$ y $f^{-1}[(\frac{2}{3}, 1]]$ son abiertos en X y $\mathcal{N}$ es una red, existen N y M en $\mathcal{N}$ tales que $x \in N \subseteq f^{-1}[[0, \frac{1}{3})]$ y $y \in M \subseteq f^{-1}[(\frac{2}{3}, 1]]$. Por ello $f[N] \subseteq [0, \frac{1}{3})$ y $f[M] \subseteq (\frac{2}{3}, 1]$. Luego, $(N, M) \in \mathcal{B}$ lo que muestra que $\mathcal{B}$ es no vacío.

[2]Porque toda condensación de un compacto a un espacio Hausdorff es un homeomorfismo.

[3]Debido a que $nw(X)$ es infinito, X también lo es.

Fijemos, para cada $(N, M) \in \mathcal{B}$ una única función $f_{(N,M)} \in C(X, [0, 1])$ tal que $f_{(N,M)}[N] \subseteq [0, \frac{1}{3})$ y $f_{(N,M)}[M] \subseteq (\frac{2}{3}, 1]$. Definamos

$$\mathcal{F} = \{f_{(N,M)} : (N, M) \in \mathcal{B}\}.$$

Es claro que $\mathcal{F} \subseteq C(X, [0, 1])$ y que $|\mathcal{F}| \leqslant |\mathcal{B}| \leqslant |\mathcal{N} \times \mathcal{N}| = \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Verifiquemos que $\mathcal{F}$ separa los puntos de X: sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como X es Tychonoff, existe $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Se sigue que $x \in f^{-1}[[0, \frac{1}{3})]$ y $y \in f^{-1}[(\frac{2}{3}, 1]]$. Como $f^{-1}[[0, \frac{1}{3})]$ y $f^{-1}[(\frac{2}{3}, 1]]$ son abiertos en X y $\mathcal{N}$ es una red, existen N y M en $\mathcal{N}$ tales que $x \in N \subseteq f^{-1}[[0, \frac{1}{3})]$ y $y \in M \subseteq f^{-1}[(\frac{2}{3}, 1]]$. Por ello $f[N] \subseteq [0, \frac{1}{3})$ y $f[M] \subseteq (\frac{2}{3}, 1]$. Luego, $(N, M) \in \mathcal{B}$. Consideremos a la correspondiente función $f_{(N,M)}$. Por definición de $\mathcal{F}$, tenemos que $f_{(N,M)} \in \mathcal{F}$. Resulta que $f_{(N,M)}(x) \in f_{(N,M)}(N) \subseteq [0, \frac{1}{3})$ y $f_{(N,M)}(y) \in f_{(N,M)}(M) \subseteq (\frac{2}{3}, 1]$, y por ello $f_{(N,M)}(x) \neq f_{(N,M)}(y)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ separa los puntos de X. $\boxtimes$

Para finalizar, consideremos a la familia $\mathcal{F}$ de la afirmación anterior. Y tomemos al producto diagonal $\Delta\mathcal{F}$ de la familia $\mathcal{F}$:

$$\Delta\mathcal{F} : X \to [0, 1]^{\mathcal{F}},$$

esto es, $\Delta\mathcal{F}(x)(g) = g(x)$ para toda $x \in X$ y toda $g \in \mathcal{F}$. Como cada elemento de $\mathcal{F}$ es una función continua, $\Delta\mathcal{F}$ es una función continua. En efecto, debido a que $\Delta\mathcal{F}$ tiene como contradominio al producto topológico $[0, 1]^{\mathcal{F}}$, para mostrar la continuidad de $\Delta\mathcal{F}$ es suficiente mostrar que cada composición $\pi_g \circ \Delta\mathcal{F}$ es continua, donde $\pi_g : [0, 1]^{\mathcal{F}} \to [0, 1]$ es la proyección asociada a la coordenada $g \in \mathcal{F}$; pero dése cuenta que $\pi_g \circ \Delta\mathcal{F} = g$ la cual es una función continua.

Por otro lado, debido a que $\mathcal{F}$ separa los puntos de X, la función $\Delta\mathcal{F}$ es inyectiva. Efectivamente, considere un par de elementos de X diferentes, x y y. Como $\mathcal{F}$ separa los puntos de X, podemos fijar una función $g \in \mathcal{F}$ de modo que $g(x) \neq g(y)$. Luego, por la definición del producto diagonal, $\Delta\mathcal{F}(x)(g) = g(x) \neq g(y) = \Delta\mathcal{F}(y)(g)$. Consecuentemente, las funciones $\Delta\mathcal{F}(x)$ y $\Delta\mathcal{F}(y)$ son diferentes; y esto permite concluir la inyectividad de $\Delta\mathcal{F}$.

Por todo lo anterior, $f = \Delta\mathcal{F} : X \to \Delta\mathcal{F}[X]$ es una condensación. Además, como el espacio $\Delta\mathcal{F}[X]$ es un subespacio de $[0, 1]^{\mathcal{F}}$, él es Tychonoff y además $w(\Delta\mathcal{F}[X]) \leqslant w([0, 1]^{\mathcal{F}}) \leqslant \kappa$. Por lo tanto, $iw(X) \leqslant w(\Delta\mathcal{F}[X]) \leqslant nw(X)$. ■

4.1.7 Lema. *La función cardinal iw es monótona en la clase de espacios Tychonoff.*

Demostración. Sean X un espacio de Tychonoff y Y un subespacio topológico de X. Supongamos que $\kappa = iw(X)$ y fijemos un espacio de Tychonoff Z y una condensación $f : X \to Z$ de modo que $w(Z) = \kappa$. Es fácil probar que $g = f \restriction Y : Y \to f[Y]$ es una condensación, y tanto Y como $f[Y]$ son espacios Tychonoff. Así $iw(Y) \leqslant w(f[Y]) \leqslant w(Z)$. Por lo tanto, $iw(Y) \leqslant iw(X)$.

■

4.1.8 Proposición. *Para todo espacio de Tychonoff infinito X, se tiene que*

$$d(X) = \psi(C_p(X)) = \Delta(C_p(X)) = iw(C_p(X)).$$

Demostración. Suponga que X es un espacio Tychonoff. Aplicando el lema 4.1.6, tenemos que

$$\psi(C_p(X)) \leqslant \Delta(C_p(X)) \leqslant iw(C_p(X)).$$

Así que bastará demostrar que $iw(C_p(X)) \leqslant d(X)$. Para esto, suponga que $Y \subseteq X$ es un subespacio denso tal que $|Y| = d(X) \leqslant \aleph_0$ (como X es un espacio Hausdorff infinito por el teorema de Póspišil –vea A.1.14– no puede ocurrir que $d(X) < \aleph_0$). En consecuencia $\pi_Y : C_p(X) \to \pi_Y(C_p(X))$ es una condensación. Observe ahora que $\pi_Y(C_p(X))$ es un espacio Tychonoff y que $w(\pi_Y(C_p(X))) \leqslant w(C_p(Y)) = |Y| = d(X)$. Por tanto, $iw(C_p(X)) \leqslant d(X)$. ■

4.1.9 Proposición. *Para todo espacio de Tychonoff infinito X, se tiene que*

$$iw(X) = d(C_p(X)).$$

Demostración. Debido a que; X es homeomorfo a un subespacio de $C_p(C_p(X))$, iw es monótona, y a la proposición anterior, se tiene que

$$iw(X) \leqslant iw(C_p(C_p(X))) = d(C_p(X)).$$

De esta forma bastará demostrar que $d(C_p(X)) \leqslant iw(X)$.

Supongamos que $\kappa = iw(X)$. Por lo que podemos fijar un espacio Tychonoff Y y una condensación $f : X \to Y$ de modo que $w(Y) = \kappa$. Como $f : X \to Y$ es suprayectiva, $f^* : C_p(Y) \to f^*(C_p(Y))$ es un homeomorfismo, y dado que f es una condensación, $f^*(C_p(Y))$ es un subespacio denso de $C_p(X)$. Se sigue que,

$$d(C_p(X)) \leqslant d(f^*(C_p(Y))) \leqslant nw(f^*(C_p(Y))) = nw(C_p(Y)) = nw(Y) \leqslant w(Y).$$

Por lo tanto, $d(C_p(X)) \leqslant iw(X)$. ■

Algunos corolarios inmediatos son los siguientes:

4.1.10 Corolario. *$C_p(X)$ es un espacio separable si y sólo si X se condensa sobre un espacio segundo-numerable.*

Cuando X tiene la topología discreta toda función $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua, de esta manera $\mathbb{R}^X = C_p(X)$. En la demostración del corolario siguiente se hace uso de este hecho.

4.1.11 Corolario. *$\mathbb{R}^X$ es separable si y sólo si $|X| \leqslant \mathfrak{c}$.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Es claro que si X es finito, entonces $|X| < \mathfrak{c}$ y por ello $|X| \leqslant \mathfrak{c}$.

Supongamos entonces que X es infinito. Si dotamos a X con la topología discreta, $C_p(X) = \mathbb{R}^X$. Así que aplicando la proposición 4.1.9 tenemos que

$$iw(X) = d(C_p(X)) = d(\mathbb{R}^X) = \aleph_0.$$

Entonces el espacio $(X, \mathcal{P}(X))$ se condensa sobre un espacio Tychonoff segundo-numerable; es decir, existen un espacio Tychonoff segundo numerable Y y una condensación $f : X \to Y$. Dado que Y es segundo-numerable, $nw(Y) \leqslant \aleph_0$. Aplicando ahora A.1.14, $|Y| \leqslant 2^{nw(X)} \leqslant 2^{\aleph_0}$. Como f una condensación, f es función biyectiva. Así $|X| = |Y|$. Luego $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$.

[$\Leftarrow$] Sabemos, por el teorema de Hewitt-Mardeciz-Pondiczery (A.1.11), que $|X| \leqslant \mathfrak{c}$ implica $d(\mathbb{R}^X) \leqslant \aleph_0$ porque $\mathbb{R}^X$ es un producto de espacios separable de a lo más $2^{\aleph_0}$-factores (todos homeomorfos a $\mathbb{R}$). ■

4.1.12 Corolario. *Si X y Y son espacios topológicos Tychonoff infinitos tales que $X \sim^t Y$ entonces*

(1) $nw(X) = nw(Y)$;

(2) $d(X) = d(Y)$;

(3) $iw(X) = iw(Y)$;

(4) $|X| = |Y|$.

Aunque los siguientes resultados no son teoremas de dualidad, ellos proporcionan interesantes consecuencias relacionadas con dos funciones cardinales del espacio dominio X.

4.1.13 Proposición. *Si $K \subseteq C_p(X)$ es un subespacio compacto tal que $\chi(K, C_p(X)) \leqslant \omega$, entonces $|X| \leqslant \omega$.*

Demostración. Sea $K \subseteq C_p(X)$ un subespacio compacto tal que

$$\chi(K, C_p(X)) \leqslant \omega.$$

Sea $\mathcal{U}$ una base local de K en $C_p(X)$ con la propiedad que $|\mathcal{U}| = \chi(K, C_p(X))$, así $\mathcal{U} = \{O_n : n \in \omega\}$ donde O_n es una vecindad de K en $C_p(X)$ para toda $n \in \omega$. Fijemos $m \in \omega$. Para cada $f \in K$, existe $U_f = [f; x_1, \ldots, x_r; \epsilon]$ vecindad abierta canónica de f en $C_p(X)$ tal que $f \in U_f \subseteq O_m$. Por lo anterior es claro que $\{U_f : f \in K\}$ es una cubierta abierta de K, luego como K es compacto se tiene que hay $\{U_{f_1}, \ldots, U_{f_k}\} \subseteq \{U_f : f \in K\}$ con $k \in \omega$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{f_i} \subseteq O_m$. Ahora consideremos $A_m = \bigcup_{i=1}^k supp(U_{f_i})$ y definamos $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$, note que $|A| \leqslant \omega$ por ello es suficiente demostrar que $A = X$. Es claro por como se definio A que $A \subseteq X$, bastará demostrar que $X \subseteq A$. Para ello supongamos lo contrario, por lo cual, existe $x \in X \backslash A$. Consideremos la función evaluación $\hat{x} \restriction_{C_p(X)}: C_p(X) \to \mathbb{R}$ la cual es continua, así $\hat{x} \restriction_K$ es continua, más aún $\hat{x} \restriction_K [K]$ es acotado en $\mathbb{R}$, es decir, existe $r > 0$ tal que $\hat{x} \restriction_K [K] \subseteq (-r, r)$. Así $|f(x)| < r$ para toda $f \in K$, entonces $[x; (-r, r)]$ es una vecindad abierta de K en $C_p(X)$. Por ello existe $n \in \omega$ tal que $K \subseteq O_n \subseteq [x; (-r, r)]$, en consecuencia $\bigcup_{i=1}^k U_{f_i} \subseteq [x; (-r, r)]$. Todo esto implica que $[x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] \subseteq [x; (-r, r)]$ aunque $x \notin supp([x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n])$, es decir, $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$. Y como X es Tychonoff, existe $g \in C_p(X)$ tal que $g(x) = r$ y $g(x_i) \in O_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, por lo cual $g \in (\bigcup_{i=1}^k U_{f_i}) \backslash [x; (-r, r)]$, es decir, $\bigcup_{i=1}^k U_{f_i} \nsubseteq [x; (-r, r)]$, lo cual es una contradicción. Es decir, $X \subseteq A$. Entonces $X = A$ y por ello $|X| \leqslant \omega$. ∎

4.1.14 Proposición. *Si $K \subseteq C_p(X)$ es un subespacio compacto tal que $\psi(K, C_p(X)) \leqslant \omega$, entonces $d(X) \leqslant \omega$.*

Demostración. Sea $K \subseteq C_p(X)$ un subespacio compacto tal que

$$\psi(K, C_p(X)) \leqslant \omega.$$

Sea $\mathcal{U}$ una pseudobase de K en $C_p(X)$ con la propiedad que $|\mathcal{U}| = \psi(K, C_p(X))$, así $\mathcal{U} = \{O_n : n \in \omega\}$ donde O_n es una vecindad de K en $C_p(X)$ para toda $n \in \omega$, como $C_p(X)$ es un espacio homogéneo podemos suponer que dada $u \in K$ es de la forma $u \equiv 0$. Fijemos $m \in \omega$. Para cada $f \in K$, existe $U_f = [f; x_1, \ldots, x_r; \epsilon]$ vecindad abierta canónica de f en $C_p(X)$ tal que $f \in U_f \subseteq O_m$. Por lo anterior es claro que $\{U_f : f \in K\}$ es una cubierta abierta de K, luego como K es compacto se tiene que hay $\{U_{f_1}, \ldots, U_{f_k}\} \subseteq$

$\{U_f : f \in K\}$ con $k \in \omega$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{f_i} \subseteq O_m$. Ahora consideremos $A_m = \bigcup_{i=1}^{k} supp(U_{f_i})$ y definamos $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, note que $|A| \leqslant \omega$ por ello es suficiente demostrar que $cl_X(A) = X$.
Es claro por como se definio A que $cl_X(A) \subseteq X$, bastará demostrar que $X \subseteq cl_X(A)$. Para ello supongamos lo contrario, por lo cual, existe $x \in X \backslash cl_X(A)$. Consideremos la función evaluación $\hat{x} \restriction_{C_p(X)}: C_p(X) \to \mathbb{R}$ la cual es continua, así $\hat{x} \restriction_K$ es continua, más aún $\hat{x} \restriction_K [K]$ es acotado en $\mathbb{R}$, es decir, existe $r > 0$ tal que $\hat{x} \restriction_K [K] \subseteq (-r, r)$. Así $|f(x)| < r$ para toda $f \in K$. Como X es Tychonoff, existe $g \in C_p(X)$ tal que $g(x) = r$ y $g[cl_X(A)] \subseteq \{0\}$ por lo cual $g \notin K$, sin embargo $g \restriction_{cl_X(A)} = u \restriction_{cl_X(A)}$ implica que $g \in \bigcap \mathcal{U}$, lo cual es una contradicción, ya que $\bigcap \mathcal{U} = K$, es decir, $X \subseteq cl_X(A)$. Por lo tanto $cl_X(A) = X$ y $|A| \leqslant \omega$. ■

4.2. El teorema de Arhangel'skii-Pytkeev.

En esta sección demostraremos el famoso teorema de Arhangel'skii-Pytkeev, el cual establece la dualidad entre $l^*(X)$ (el *grado de Lindelöf* de las potencias finitas de un espacio X) y la *estrechez* de $C_p(X)$.

Es natural preguntarse si hay alguna relación de dualidad entre el grado de Lindelöf de $C_p(X)$ y alguna función cardinal importante de X. Aunque son conocidas algunas relaciones de esta índole, todavía el día de hoy no existe ningún teorema de dualidad que relacione al grado de Lindelöf de $C_p(X)$ con alguna función cardinal de X.

Recordemos que un espacio topológico X es *Lindelöf* si de cualquier cubierta abierta es posible extraer una subcubierta numerable.

4.2.1 Definición. Un espacio topológico es κ-*Lindelöf* si toda cubierta abierta tiene una subcubierta de cardinalidad a lo más κ

En este sentido un espacio topológico es *Lindelöf si y sólo si es* ω-*Lindelöf.*

4.2.2 Definición. Sea X un espacio topológico, el *grado de lindelöf* es el número cardinal

$$l(X) = \text{mín}\{\kappa \geqslant \omega : X \text{ es } \kappa\text{-}Lindel\ddot{o}f\}$$

4.2.3 Definición. Sea X un espacio topológico. Se dice que una familia $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$, es ω-cubierta de X, si para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ finito, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subseteq U$

Dada una cubierta $\mathcal{U}$ de un espacio X^n, diremos que una familia $\mathcal{V} \subseteq \tau(X)$ es $\mathcal{U}$-*pequeña*, si para cualesquiera $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ (no necesariamente distintos), existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_1 \times \ldots \times V_n \subseteq U$.

4.2.4 Teorema. *Las siguientes propiedades son equivalentes para todo espacio Tychonoff X y todo cardinal inifnito κ:*

(1) Toda ω-cubierta de X tiene una ω-subcubierta de cardinalidad a lo más κ

(2) $l(X^n) \leqslant \kappa$ para todo κ.

Demostración.
[(2) $\Rightarrow$ (1)] Supongamos que para todo cardinal infinito κ se tiene que $l(X^n) \leqslant \kappa$. Tomemos $\mathcal{U}$ una ω-cubierta de X arbitraria. Ahora para cada $n \in \omega \backslash 1$ definamos $\mathcal{U}_n = \{U^n : U \in \mathcal{U}\}$,y notemos que $\mathcal{U}_n$ es una cubierta de X^n. Para ello es fácil observar que $\bigcup_{n\in\omega\backslash 1} \mathcal{U}_n \subseteq X^n$, por otro lado, tomemos $(x_1, \ldots, x_2) \in X^n$ y como $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ es finito, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subseteq U$ y así $(x_1, \ldots, x_n) \in U^n$. Por lo tanto $\bigcup_{n\in\omega\backslash 1} \mathcal{U}_n = X^n$. Dado que $l(X^n) \leqslant \kappa$, podemos garantizar que existe una familia $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\bigcup\{U^n : U \in \mathcal{V}_n\} = X^n$ y $|\mathcal{V}_n| \leqslant \kappa$ para toda $n \in \omega\backslash 1$. Consideremos $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\omega\backslash 1} \mathcal{V}_n$, es claro que $|\mathcal{V}| \leqslant \kappa$ basta demostrar que $\mathcal{V}$ es una ω-cubierta de X. En efecto, si tomamos un conjunto finito $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$, entonces $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ y por ello existe $U \in \mathcal{V}$ con $x \in U^n$. Como consecuencia $x_i \in U$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y por lo tanto $A \subseteq U$ lo cual demuestra que $\mathcal{V}$ es una ω-cubierta de X.
[(1) $\Rightarrow$ (2)] Supongamos que toda ω-cubierta de X tiene una ω-subcubierta de cardinalidad a lo más κ. Fijemos $n \in \omega\backslash 1$ y demostremos que $l(X^n) \leqslant \kappa$. Para ello tomemos γ una cubierta abierta de X^n y consideremos la familia

$$\delta = \{\bigcup \mu : \mu \text{ es una familia } \gamma\text{-pequeña y finita}\}.$$

Afirmamos que δ es una ω-cubierta de X. En efecto, sea $A \in [X]^{\leqslant\omega}$. Consideremos $\mathcal{A} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in A \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\}$, es claro que $\mathcal{A}$ es finito; luego, dada $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ elegimos $U_i \in \tau(x_i, X)$ de tal manera que $U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq G$ para alguna $G \in \gamma$. Sea $\mathcal{V} = \{U_1 \times \cdots \times U_n : U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq G \text{ para alguna } G \in \gamma\}$, luego para cada $x \in A$, sea $\mathcal{U}_x = \{U \in \tau(x, X) : U \text{ es factor de algún } U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{V}\}$; se sigue que $\mathcal{U}_x$ es finito y además $U_x = \bigcap_{x\in A} \mathcal{U}_x \in \tau(X)$. Por lo tanto $\mu = \{U_x : x \in A\}$ es una familia γ-pequeña y finita, y además como $A \subseteq \bigcup \mu$ se deduce que δ es una ω-cubierta de X. Con ello, se sigue que por hipótesis existe $\delta' \subseteq \delta$ una ω-subcubierta tal que $|\delta'| \leqslant \kappa$. Luego por definición de δ, para cada $U \in \delta'$ existe un conjunto μ_U γ-pequeño tal que $U = \bigcup \mu_U$; por lo tanto, existe una familia finita $\gamma_U \subseteq \gamma$ tal que, para cualesquiera $W_1, \ldots, W_n \in \mu_U$ se tiene que $W_1 \times \cdots \times W_n \subseteq G$ para algún

$G \in \gamma_U$. Luego la familia $\gamma' = \bigcup\{\gamma_U : U \in \delta'\}$ satisface las condiciones $\gamma' \subseteq \gamma$ y $|\gamma'| \leqslant \kappa$; así para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $U_i \in \mu_U$ tal que $x_i \in U_i$. Por ello existe $G \in \gamma_U$ que satisface $U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq G$ de donde $x \in G \subseteq \bigcup \gamma'$; por lo tanto $l(X^n) \leqslant \kappa$. ■

4.2.5 Definición.

1. La *estrechez* de un espacio topológico X, denotada por $t(X)$ es el número cardinal $t(X) := \sup\{t(x, X) : x \in X\}$, donde

   $t(x, X) = \text{mín}\{\kappa \geqslant \omega : \big(\forall C \subseteq X\, \forall x \in \operatorname{cl}_X(C)\big)\, \big(\exists B \in [C]^{\leqslant\kappa}\big)\, \big(x \in \operatorname{cl}_X(B)\big)\}$.

2. Dada una función cardinal Φ, definimos Φ^* como: $\Phi^*(X)$ =sup$\{\Phi(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$.

4.2.6 Teorema (Arhangel'skii-Pytkeev)**.** *Para todo espacio Tychonoff X, se satisface que $t(C_p(X)) = l^*(X)$*

Demostración. Primero demostraremos que $t(C_p(X)) \leqslant \sup\{l(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Sean $\kappa = \sup\{l(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$ y $A \in \mathcal{P}(C_p(X))$ tal que $u \in cl_{C_p(X)}(A)$, donde $u \equiv 0 \in C_p(X)$.

Afirmación 1. Para toda $n \in \mathbb{N}$, la familia $\gamma_n := \{g^{-1}[(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})] : g \in A\}$ es una ω-cubierta de X.

En efecto. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y consideremos un subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq X$. Como $u \in cl_{C_p(X)}(A)$, entonces existe $h \in [u; x_1, \ldots, x_k; \frac{1}{m}] \cap F$. Por ello $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq h^{-1}[(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m})]$. ⊠

Como $l(X^n) \leqslant \kappa$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por la proposición 4.2.4 existe una ω-cubierta $\mu \subseteq \gamma_n$ tal que $|\mu| \leqslant \kappa$. Por ello existe $B_n \subseteq A$ tal que $|B_n| \leqslant \kappa$ y la familia $\{f^{-1}[(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})] : f \in B_n\}$ es una ω-cubierta de X. Sea $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Claramente $|B| \leqslant \kappa$, solo falta mostrar que $u \in cl_{C_p(X)}(B)$. Sean $x_1, \ldots, x_k \in X$ y $\epsilon > 0$, por la propiedad Arquimediana de los números reales existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Como $\{f^{-1}[(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})] : f \in B_n\}$ es una ω-cubierta de X, entonces existe $f \in B_n$ tal que $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq f^{-1}[(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})]$. Por ello $|f(x_i)| < \frac{1}{n} < \epsilon$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por ello $f \in [u; x_1, \ldots, x_k; \epsilon] \cap B$. Por lo tanto $u \in cl_{C_p(X)}(B)$, con lo cual concluimos que $t(C_p) \leqslant \kappa$.

Ahora demostremos que $\sup\{l(X^n) : n \in \mathbb{N}\} \leqslant t(C_p(X))$, para ello hagamos $t(C_p(X)) = \lambda$ y consideremos γ una ω-cubierta de X; así por la proposición 4.2.4 bastará hallar una ω-subcubierta $\mu \subseteq \gamma$ que cumpla que $|\mu| \leqslant \lambda$.

Para ello consideremos el siguiente conjunto $D = \{f \in C_p(X) : f^{-1}[\mathbb{R}\backslash\{0\}] \subseteq U$ para alguna $U \in \gamma$.

Notemos que D es denso en $C_p(X)$. En efecto, sean $W = [x_1, \ldots, x_n : U_1, \ldots, U_n]$ un abierto canónico de $C_p(X)$ y fijemos $h \in W$. Como γ es una ω-cubierta de X, para el conjunto $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ existe $U \in \gamma$ tal que $F \subseteq U$. Luego como X es Tychonoff, existe $g \in C_p(X)$ tal que $g(x_i) = h(x_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $g[X\backslash\{0\}] \subseteq \{0\}$. Se sigue que $g \in W \cap D$. Por lo tanto D es denso en $C_p(X)$.

Dado que $C_p(X) = cl_{C_p(X)}(D)$, se sigue que $1 \in cl_{C_p(X)}(D)$ y como por hipótesis $t(C_p(X)) = \lambda$, se sigue que hay $B \in [D]^{\leqslant\lambda}$ tal que $1 \in cl_{C_p(X)}(B)$. Ahora para cada $f \in B$ fijemos un elemento $U_f \in \gamma$ para el cual $f^{-1}[\mathbb{R}\backslash\{0\}] \subseteq U_f$.

Entonces el conjunto $\mu = \{U_f : f \in B\}$ es una ω-subcubierta $\mu \subseteq \gamma$ tal que $|\mu| \leqslant \lambda$. Efectivamente, es claro que $|\mu| \leqslant |B| \leqslant \lambda$. Así que consideremos $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$, como $1 \in cl_{C_p(X)}(B)$, existe $f \in B$ tal que $f \in [1; x_1, \ldots, x_n; \frac{1}{2}]$. Luego se tiene que $F \subseteq f^{-1}[\mathbb{R}\backslash\{0\}] \subseteq U_f$. Por lo tanto $\sup\{l(X^n) : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \lambda$. ∎

4.2.7 Corolario. *Si X y Y son espacios topológicos Tychonoff infinitos tales que $X \sim^t Y$, entonces $l^*(X) = l^*(Y)$.*

Aunque el siguiente resultado no es un teorema de dualidad, este nos proporciona una interesante e importante relación entre la estrechez del espacio dominio X y el grado de Lindelöf de $C_p(X)$. Como dijimos líneas atras, aún hoy día no se conoce ningún teorema de dualidad que relacione al grado de Lindelöf de $C_p(X)$ con alguna función cardinal del espacio dominio X. En este sentido, el siguiente teorema de Asanov es un clásico resultado que dá una relación de desigualdad o dominancia.

4.2.8 Teorema (Asanov)**.** *Para todo espacio Tychonoff X, se satisface que $t(X^n) \leqslant l(C_p(X))$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y sea $l(C_p(X)) = \kappa$. Para demostrar que $t(X^n) \leqslant \kappa$, tomemos $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ y $A \subseteq X^n$ tal que $\vec{x} \in cl_{X^n}(A)$. Bastará demostrar que hay $B \in [A]^{\leqslant\kappa}$ que satisface $\vec{x} \in cl_{X^n}(B)$. Con este fin, elijamos $O_i \in \tau(x_i, X)$ de tal manera que $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $x_i \neq x_j$ y $O_i = O_j$ si $x_i = x_j$ con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$; dado que $O = O_1 \times \cdots \times O_n \in \tau(\vec{x}, X^n)$ y $\vec{x} \in cl_{X^n}(O \cap A)$, se puede suponer que $A \subseteq O$. Note que el conjunto $\mathcal{U} = \{f \in C_p(X) : f(x_i) = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}\}$ es cerrado, así $l(\mathcal{U}) \leqslant \kappa$. Ahora dado $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in A$, llamemos $U_{\vec{y}} = \{g \in C_p(X) : g(y_i) > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Sí $f \in \mathcal{U}$, se tiene que $U_i = f^{-1}[(0, \infty)] \in \tau(x_i, X)$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, dado que $\vec{x} \in cl_{X^n}(A)$, existe $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in A \cap (U_1 \times \cdots \times U_n)$. Por lo tanto $f(z_i) > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y así $f \in U_{\vec{z}}$. Esto demuestra que $\mathcal{U} \subseteq \bigcup_{\vec{y} \in A} U_{\vec{y}}$. Luego la desigualdad $l(\mathcal{U}) \leqslant \kappa$ implica que hay $B \in [A]^{\leqslant \kappa}$ tal que $\mathcal{U} \subseteq \bigcup_{\vec{y} \in B} U_{\vec{y}}$. Para demostrar que $\vec{x} \in cl_{X^n}(B)$, tomemos $V = V_1 \times \cdots \times V_n \in \tau(\vec{x}, X^n)$; puede suponerse sin pérdida de generalidad que $V_i \subseteq O_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y que $V_i = V_j$ si $x_i = x_j$. Dado que X es Tychonoff, existe $h \in \mathcal{U}$ tal que $h[X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} V_i] \subseteq \{0\}$; por lo tanto $h \in U_{\vec{y}}$ para alguna $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in B$. Tenemos que $h(y_i) > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, de lo cual se sigue que $y_i \in V_j \subseteq O_j$ para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como $\vec{y} \in A$ implica que $y_i \in O_i$. tenemos que $y_i \in O_i \cap O_j$; luego como $O_i \cap O_j = \emptyset$ cuando $x_i \neq x_j$, se sigue que $x_i = x_j$ y así $V_i = V_j$ por lo que $y_i \in V_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto $\vec{y} \in (V_1 \times \cdots \times V_n) \cap B$; es decir $\vec{x} \in cl_{X^n}(B)$.
■

4.3. Teorema de dualidad para s^*

En esta sección demostraremos el teorema de dualidad que establece que para todo espacio Tychonoff infinito $s^*(X) = s^*(C_p(X))$.

4.3.1 Definición. La amplitud (spread) de espacio topológico X es el número cardinal $s(X) = \sup\{D \subseteq X : D \text{ es discreto}\}$

4.3.2 Teorema. $s(X \times X) \leqslant s(C_p(X)) \leqslant s^*(X)$ *para todo espacio Tychonoff infinito* X.

Demostración. Sea $s(C_p(X)) = \kappa$; primero demostraremos que $s(X) \leqslant \kappa$. Para ello supongamos lo contrario, lo cual implica que existe $D \subseteq X$ discreto tal que $|D| = \kappa^+$. Ahora para cada $d \in D$, fijemos un abierto U_d en X con la propiedad que $U_d \cap D = \{d\}$. Dado que $d \notin X \backslash U_d$ y X es Tychonoff, existe $f_d \in C_p(X, [0,1])$ tal que $f_d(d) = 1$ y $f_d[X \backslash U_d] \subseteq \{0\}$. Sea el conjunto $O_d = \{f \in C_p(X) : f(d) > 0\}$, claramente $O_d = (\hat{d} \restriction_{C_p(X)})^{-1}[(0, \infty)]$ por lo que O_d es abierto en $C_p(X)$. Más aún $f_d \in O_d$ para toda $d \in D$. Definamos $F = \{f_d : d \in D\}$.

Afirmación 1. $F \subseteq C_p(X)$ discreto.

En efecto. Sea $d \in D$ y sea $a \in D \backslash \{d\}$, entonces $d \notin U_a$ (si $d \in U_a$, entonces $d = a$ ya que $U_a \cap D = \{a\}$, pero $d \neq a$) por este motivo $d \in X \backslash U_a$. Así $f_a(d) = 0$, lo que implica que $f_a \notin O_d$ por lo que $O_d \cap F = \{f_d\}$ para todo $d \in D$. Por lo tanto $F \subseteq C_p(X)$ discreto. ⊠

Ahora consideremos la función $\gamma : D \to F$ definida como $\gamma(d) = f_d$ para toda $d \in D$. Observemos que γ es una función sobreyectiva y por la afirmación 1 inyectiva. En consecuencia $|D| = |F| = \kappa^+$ siendo está una contradicción, ya que $s(C_p(X)) = \kappa$. Por lo tanto $s(X) \leqslant s(C_p(X))$.

Ahora demostraremos que $s(X \times X) \leqslant \kappa$. Para ello supongamos lo contrario, por lo que existe $E \subseteq X \times X$ discreto tal que $|E| = \kappa^+$. Sabemos que $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$ es homeomorfo a X, por lo que se mostro anteriormente se tiene que $s(\Delta) \leqslant \kappa$. Así $|E \cap \Delta| \leqslant \kappa$, por lo que $|E \backslash \Delta| = \kappa^+$, es decir, tenemos que $D = E \backslash \Delta \subseteq (X \times X) \backslash \Delta$ discreto tal que $|D| = \kappa^+$. Para cada $d = (x, y) \in D$, fijemos $U_d \in \tau(x, X)$ y $V_d \in \tau(y, X)$, así $U_d \times V_d \in \tau(d, X \times X)$ con la propiedad que $(U_d \times V_d) \cap D = \{d\}$. Como $x \neq y$ y X es Hausdorff, se tiene que $U_d \cap V_d = \emptyset$ para cada $d \in D$, más aún ya que $x \notin X \backslash U_d$ y $y \notin X \backslash V_d$ y X es Tychonoff existen $g_d, h_d \in C_p(X, [0, 1])$ tales que $g_d(x) = h_d(y) = 1$ y $\{g_d[X \backslash U_d], h_d[X \backslash V_d]\} \subseteq \{\{0\}\}$. Sea $f_d = g_d - h_d$, note que $f_d(x) = 1$, $f_d(y) = -1$ y consideremos $O_d = \{f \in C_p(X) : f(x) > 0$ y $f(y) < 0\}$. Observemos que $O_d = (\hat{x} \restriction_{C_p(X)})^{-1}[(0, \infty)] \cap (\hat{y} \restriction_{C_p(X)})^{-1}[(-\infty, 0)]$, motivo por el que O_d es un subconjunto abierto de $C_p(X)$, más aún $f_d \in O_d$ para toda $d \in D$, así definimos $F' = \{f_d : d \in D\}$.

Afirmación 2. $F' \subseteq C_p(X)$ discreto.

En efecto. Sea $a \in D \backslash \{d\}$, entonces $d \notin U_a \times V_a$, así $x \notin U_a$ y $y \notin V_a$. Como $x \notin U_a$, $f_a(x) = g_a(x) - h_a(x) < 0$, por otro lado como $y \notin V_a$, $f_a(y) = g_a(y) - h_a(y) > 0$. Por lo tanto $f_a \notin O_d$ y por tanto $O_d \cap D = \{d\}$. ⊠

Ahora consideremos la función $\mu : D \to F'$ definida como $\mu(d) = f_d$ para toda $d \in D$. Observemos que μ es una función sobreyectiva y por la afirmación 2 inyectiva. En consecuencia $|D| = |F'| = \kappa^+$ siendo está una contradicción, ya que $s(C_p(X)) = \kappa$. Por lo tanto $s(X \times X) \leqslant s(C_p(X))$.

Por último, para demostrar que $s(C_p(X)) \leqslant s^*(X)$.

Supongamos que $s^*(X) = \kappa$ y $s(C_p(X)) \geqslant \kappa$. Esto implica que existe $F \subseteq C_p(X)$ discreto tal que $|F| = \kappa^+$, luego para cada $f \in F$ fijemos un abierto canónico $O_f \in \tau(f, C_p(X))$ con la propiedad que $O_f \cap F = \{f\}$. Dado que O_f es una vecindad abierta canónica de f, podemos suponer sin pérdida de generalidad que este es de la forma $O_f = [f; x_1^f, \ldots, x_{n(f)}^f; \frac{1}{m(f)}]$ donde $x_1^f, \ldots, x_{n(f)}^f \in X$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ $(i, j \in \{1, \ldots, n(f)\})$ y $m(f) \in \omega \backslash \{0\}$. Luego para toda $f \in F$, notemos que $f^{-1}[U_{1(f)}^f] \times \cdots \times f^{-1}[U_{n(f)}^f] \in \tau(X^n)$, así consideremos $x_f = (x_{1(f)}^f, \ldots, x_{n(f)}^f) \in X^n$ para toda $f \in F$ y definamos $D = \{x_f : f \in F\}$.

Afirmación 3. $D \subseteq X^n$ discreto.

En efecto. Sea $g \in F\backslash\{f\}$, entonces $f \notin O_g$, así $f(x_i^g) \notin U_i^g$ para todo $i \in \{1(g), \ldots, n(g)\}$, esto implica que $x_i^g \notin f^{-1}[U_i^g]$ para todo $i \in \{1(g), \ldots, n(g)\}$. Así $x_g \notin f^{-1}[U_{1(g)}^g] \times \cdots \times f^{-1}[U_{n(g)}^g]$ y por lo tanto $(f^{-1}[U_{1(g)}^g] \times \cdots \times f^{-1}[U_{n(g)}^g]) \cap D = \{x_f\}$. ⊠

Ahora consideremos la función $\varsigma : F \to D$ definida como $\varsigma(f) = x_f$ para toda $f \in F$. Observemos que ς es una función sobreyectiva y por la afirmación 3 inyectiva. En consecuencia $|F| = |D| = \kappa^+$ siendo está una contradicción, ya que $s^*(X) = \kappa$. Por lo tanto $s(C_p(X)) \leqslant s^*(X)$. ∎

A continuación introducimos un espacio topológico importante que será vital en el siguiente teorema. Sea κ un número cardinal infinito, para cada $\alpha < \kappa$ consideremos los conjuntos $I_\alpha = (0, 1] \times \{\alpha\}$ y $J(\kappa) = (\bigcup_{\alpha<\kappa} I_\alpha) \cup \{0\}$. Para todo $(t, \alpha), (s, \beta) \in J(\kappa)$, defininimos

$$\rho((t,\alpha),(s,\beta)) = \begin{cases} |t-s| & si \quad \alpha = \beta \\ \\ t+s & si \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

El espacio $(J(\kappa), \rho)$ es un espacio métrico completo, este espacio es conocido con el nombre de *erizo métrico de κ-espinas de Kowalsky*

También, dado un espacio topológico X, definimos el conjunto

$$\Delta_{ij}^n(X) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n : x_i = x_j\}$$

para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$. El conjunto

$$\Delta_n(X) = \bigcup \{\Delta_{ij}^n(X) : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

es llamado la *n-diagonal* de X.

4.3.3 Teorema. *Para todo espacio Tychonoff infinito X y todo $n \in \omega$, se satisface que $s(X^n) \leqslant s(C_p(X, J(n))) \leqslant s(C_p(X) \times C_p(X))$*

Demostración. Dividiremos la demostración en varias afirmaciones.

Afirmación 1. Si $n \geqslant 2$, entonces

$$s(Z^n) = s(Z^n \backslash \Delta_n(Z)),$$

para todo espacio Z

En efecto. Es claro que $Z^n \backslash \Delta_n(Z) \subseteq Z^n$ y por la monotonía de la función s se tiene que $s(Z^n \backslash \Delta_n(Z)) \leqslant s(Z^n)$, por ello bastá demostrar que $s(Z^n) \leqslant s(Z^n \backslash \Delta_n(Z))$.

Procedemos por inducción sobre n. Si $n = 2$ consideremos el primer mapeo proyección $p_1 : Z^2 \to Z$, dado que dicho mapeo es continuo y suprayectivo se sigue que $p_1 \restriction_{Z^2 \backslash \Delta_2(Z)}: Z^2 \backslash \Delta_2(Z) \to Z$ lo es también y por ello se tiene que $s(Z) \leqslant s(Z^2 \backslash \Delta_2(Z))$. Además, sabemos que $\Delta_2(Z) \cong Z$, así $s(\Delta_2(Z)) = s(Z) \leqslant s(Z^2 \backslash \Delta_2(Z))$, más aún $Z^2 = (Z^2 \backslash \Delta_2(Z)) \cup \Delta_2(Z)$. De esta manera, si $s(Z^2 \backslash \Delta_2(Z)) = \kappa$, entonces $s(\Delta_2(Z)) \leqslant \kappa$, en consecuencia se tiene que $s(Z^2) = s((Z^2 \backslash \Delta_2(Z)) \cup \Delta_2(Z)) \leqslant s(Z^2 \backslash \Delta_2(Z)) + s(\Delta_2(Z)) \leqslant \kappa + \kappa = \kappa$. Por lo tanto $s(Z^2) \leqslant s(s(Z^2 \backslash \Delta_2(Z))$.

Ahora supongamos que $s(Z^n) \leqslant s(Z^n \backslash \Delta_n(Z))$ para todo $n \leqslant m$. Sea

$$s(Z^{m+1} \backslash \Delta_{m+1}(Z)) = \kappa$$

y consideremos el mapeo $p_m : Z^{m+1} \to Z^m$ dado por $p_m(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) = (x_1, \ldots, x_m)$ para todo $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) \in Z^{m+1}$, claramente p_m es continuo y sobreyectivo, por ello $p_m \restriction_{Z^{m+1} \backslash \Delta_{m+1}(Z)}: Z^{m+1} \backslash \Delta_{m+1}(Z) \to Z^m$ lo es también y por ello se tiene que $s(Z^m) \leqslant s(Z^{m+1} \backslash \Delta_{m+1}(Z))$ y por la hipótesis de inducción $s(Z^m) \leqslant s(Z^m \backslash \Delta_m(Z)) \leqslant \kappa$.

Luego observe que $\Delta_{ij}^{m+1}(Z) \cong \Delta_2(Z) \times Z^{m-1}$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, además $\Delta_2(Z) \cong Z$, entonces $\Delta_{ij}^{m+1}(Z) \cong Z^m$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ y como $\Delta_{m+1}(Z) = \bigcup \{\Delta_{ij}^{m+1}(Z) : 1 \leqslant i < j \leqslant m+1\}$, se sigue que $s(\Delta_{m+1}(Z)) \leqslant s(Z^m)$. Finalmente, como $Z^{m+1} = \Delta_{m+1}(Z) \cup (Z^{m+1} \backslash \Delta_{m+1}(Z))$, por ello

$$\begin{aligned} s(Z^{m+1}) &= s(\Delta_{m+1}(Z) \cup (Z^{m+1} \backslash \Delta_{m+1}(Z))) \\ &\leqslant s(\Delta_{m+1}(Z)) + s(Z^{m+1} \backslash \Delta_{m+1}(Z)) \\ &\leqslant \kappa + \kappa = \kappa. \end{aligned}$$

Por lo tanto $s(Z^{m+1}) \leqslant s(Z^{m+1} \backslash \Delta_{m+1}(Z))$ ⊠

Ahora demostremos que $s(X^n) \leqslant s(C_p(X, J(n)))$. Para ello supongamos que $s(C_p(X, J(n))) = \kappa$ y que $s(X^n) > \kappa$. Dado que $s(X^n) > \kappa$, entonces existe $D \subseteq X^n$ discreto tal que $|D| = \kappa^+$, por la afirmación 1, sin pérdida de generalidad supongamos que $D \subseteq X^n \backslash \Delta_n(X)$. Sea $\{d_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ una enumeración de D, donde $d_\alpha = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ para todo $\alpha < \kappa^+$. Ahora, para cada $\alpha < \kappa^+$ elijamos los conjuntos $U_1^\alpha, \ldots, U_n^\alpha$ de tal manera que:

(1) $U_i^\alpha \in \tau(x_i^\alpha, X)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

(2) Si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$, entonces $\mathrm{cl}_X(U_i^\alpha) \cap \mathrm{cl}_X(U_j^\alpha) = \emptyset$

(3) $W_\alpha \cap D = \{d_\alpha\}$ donde $W_\alpha = U_1^\alpha \times \cdots \times U_n^\alpha$

Ahora llamemos $V_\alpha = \bigcup_{i=1}^{n} U_i^\alpha$ para toda $\alpha < \kappa^+$. Por (1) sabemos que $U_i^\alpha \in \tau(x_i^\alpha, X)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego por ser X Tychonoff, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ hay $f_i^\alpha \in C_p(X, [0,1])$ tal que: $f_i^\alpha(x_i^\alpha) = 1$ y $f_i^\alpha[X \setminus U_i^\alpha] \subseteq \{0\}$. Ahora definamos para cada $\alpha < \kappa^+$ la función $g_\alpha : X \to J(n)$ como:

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in X \setminus V_\alpha \\ \\ (f_i^\alpha(x), i) & si \quad x \in V_\alpha \end{cases}$$

Afirmación 2. $g_\alpha \in C_p(X, J(n))$ para toda $\alpha < \kappa^+$.

En efecto. Para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, consideremos $\xi_k : [0,1] \to I_k \cup \{0\}$ definida como:

$$\xi_k(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t = 0 \\ \\ (t, k) & si \quad t \in (0,1] \end{cases}$$

Es claro que ξ_k es continua para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$. Más aún $\xi_k \circ f_k^\alpha$ es continua para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Para demostrar la continuidad de g_α, fijemos un elemento cualquiera $x \in X$. Por (2) la familia $\mathcal{U}_\alpha = \{U_1^\alpha, \ldots, U_n^\alpha\}$ es discreta. En consecuencia existe un abierto U de X con $x \in U$ tal que U intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{U}_\alpha$, digamos que a U_k^α. Resulta que $g_\alpha \restriction_U = \xi_k \circ f_k^\alpha \restriction_U$. Por ello $g_\alpha \restriction_U$ es continua. Como U es abierto y $x \in U$, podemos concluir que g_α es continua en x. Por lo tanto $g_\alpha \in C_p(X, J(n))$ para toda $\alpha < \kappa^+$. ⊠

Ahora consideremos $F = \{g_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$. Definamos $\zeta : D \to F$, como $\zeta(d_\alpha) = g_\alpha$ para toda $\alpha < \kappa^+$. Se afirma que ζ es biyectiva. Efectivamente, es claro que ζ es sobreyectiva, para ver la inyectividad tomemos $\alpha, \beta < \kappa^+$ con $\alpha \neq \beta$. Así $d_\alpha \notin W_\beta$, entonces existe $r \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_r^\alpha \notin U_r^\alpha$. Por ello $g_\alpha(x_r^\alpha) = (1, r) \in I_r$, más aún $g_\beta(x_r^\alpha) \notin I_r$ porque ${g_\beta}^{-1}[I_r] \subseteq U_r^\beta$. Por lo tanto $g_\alpha \neq g_\beta$, es decir ζ es biyectiva y en consecuencia $|D| = |F| = \kappa$. Finalmente notemos que F es discreto, para ello consideremos $\alpha < \kappa^+$ cualquiera y tomemos el conjunto $O_\alpha = \{f \in C_p(X, J(n)) : f(x_k^\alpha) \in I_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}\}$, es claro que $O_\alpha = (\widehat{x_k^\alpha} \restriction_{C_p(X, J(n))})^{-1}[I_k]$ por lo cual O_α es abierto en $C_p(X, J(n))$ y además $g_\alpha \in O_\alpha$ para toda $\alpha < \kappa^+$. Tomemos $\alpha, \beta < \kappa^+$ con $\alpha \neq \beta$, entonces $d_\alpha \notin W_\beta$, entonces existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_j^\alpha \notin U_j^\beta$. Por ello $g_\beta(x_j^\alpha) \notin I_j$ porque ${g_\beta}^{-1}[I_j] \subseteq U_j^\beta$, como consecuencia $g_\beta \notin O_\alpha$. Esto muestra que $O_\alpha \cap E = \{g_\alpha\}$ para toda $\alpha < \kappa^+$. Por lo tanto hay $F \in [C_p(X, J(n))]^{\kappa^+}$ discreto, lo cual contradice el hecho de que $s(C_p(X, J(n))) = \kappa$.

Por lo tanto $s(X^n) \leqslant s(C_p(X, J(n)))$.

Ahora demostremos que $s(C_p(X, J(n))) \leqslant s(C_p(X) \times C_p(X))$, para ello observemos la siguiente propiedad del erizo métrico de n-espinas.

Afirmación 3. $J(n)$ se encaja en $\mathbb{R}^2$ para todo $n \in \omega$.

En efecto. Definamos $\gamma : J(n) \to \mathbb{R}^2$ como:

$$\gamma(x) = \begin{cases} (0,0) & si \quad x \in \{0\} \\ \\ (t, kt) & si \quad x = (t,k) \in I_k \end{cases}$$

para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Observe que si $x, y \in I_k$, se tiene lo siguiente: $d(\gamma(x), \gamma(y)) \leqslant (n+1) \cdot \rho(x, y)$.
En efecto. Se tienes dos casos:

CASO 1. $x \in I_k \cup \{0\}$, $y \in I_m \cup \{0\}$ con $k \neq m$.

Si $x \in I_k \cup \{0\}$, $y \in I_m \cup \{0\}$ con $k \neq m$, entonces $d(\gamma(x), \gamma(y)) \leqslant d(\gamma(x), (0,0)) + d((0,0), \gamma(y)) = t\sqrt{1+k^2} + s\sqrt{1+m^2}$. Se sigue que si $k \leqslant n$ y $m \leqslant n$,entonces $\sqrt{1+k^2} < n+1$ y $\sqrt{1+m^2} < n+1$, así $d(\gamma(x), \gamma(y)) < (n+1)(s+t) = (n+1)\rho(x, y)$.

CASO 2. $x, y \in I_k \cup \{0\}$.

Si $x, y \in I_k \cup \{0\}$, se tiene que $d(\gamma(x), \gamma(y)) = |t-s|\sqrt{1+k^2} = (n+1) \cdot |t-s| = (n+1)\rho(x, y)$.

En consecuencia se tiene que $\gamma : J(n) \to \mathbb{R}^2$ es continua, más aún es claro que γ es inyectiva y por lo tanto $J(n) \cong \gamma[J(n)]$. $\boxtimes$

Se sigue por la afirmación 3 que $C_p(X, J(n)) \subseteq C_p(X, \mathbb{R}^2)$. Luego

$$s(C_p(X, J(n))) \leqslant s(C_p(X, \mathbb{R}^2)),$$

dado que $C_p(X, \mathbb{R}^2) \cong C_p(X) \times C_p(X)$, se tiene que $s(C_p(X, \mathbb{R}^2)) = s(C_p(X) \times C_p(X))$. Por lo tanto $s(C_p(X, J(n))) \leqslant s(C_p(X) \times C_p(X))$. ■

4.3.4 Corolario. *Para todo espacio Tychonoff infinito X,*

$$s^*(X) = s^*(C_p(X)).$$

Demostración. Sea X_i una copia homeomorfa de X para toda $i \in \mathbb{N}$. Por ello $C_p(X)^n$ es homeomorfo a $C_p(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)$. Sea $Y_n = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo que Y^k es una unión finita de espacios homeomorfos a X^k para toda $k \in \mathbb{N}$. Como s no se incrementa en uniones finitas, se tiene que $s(Y_n^k) \leqslant s(X^k) \leqslant s^*(X)$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Se sigue que $s^*(Y_n) \leqslant s^*(X)$ para toda $n \in N$. Aplicando ahora el teorema anterior (4.3.2) tenemos que $s(C_p(X)^n) = s(C_p(Y_n)) \leqslant s^*(C_p(Y_n)) \leqslant s^*(Y_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $s^*(C_p(X)) \leqslant s^*(X)$.

Por otra parte, por 4.3.3, $s(X^n) \leqslant s(C_p(X) \times C_p(X)) \leqslant s^*(C_p(X))$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Consecuentemente, $s^*(X) \leqslant s^*(C_p(X))$.

Por lo tanto, $s^*(X) = s^*(C_p(X))$. ■

4.3.5 Corolario. *Si X y Y son espacios topológicos Tychonoff infinitos tales que $X \sim^t Y$, entonces $s^*(X) = s^*(Y)$.*

Apéndice A

Funciones cardinales topológicas

A.1. Definiciones y resultados básicos

En este apéndice introducimos las funciones cardinales. Las funciones cardinales tratan de extender varios conceptos bien conocidos de la Topología General tales como ser primero y segundo numerable o separable. En este sentido, estás nos permiten formular, generalizar y demostrar resultados de esta índole de una manera concisa y elegante. Por otro lado, estas nos permiten realizar comparaciones cuantitativas entre algunas propiedades topológicas. Por ejemplo, un resultados bastante conocido es que todo espacio segundo numerable es separable, sin embargo en teoría de funciones cardinales el «recíproco» de dicho resultado establece que un espacio regular y separable tiene una base de cardinalidad no mayor a $2^{\aleph_0}$. En resumen, la presencia de las funciones cardinales ha sido un factor que ha unificado varios aspectos de la Topología General y que ha motivado la creación y desarrollo de nuevas ramas de ésta.

A.1.1 Definición. Una función cardinal es una función [1] Φ definida en la clase de los espacios topológicos que toma valores en la clase de todos los cardinales y asigna a todo espacio topológico X un número cardinal $\Phi[X]$ tal que $\Phi[X] = \Phi[Y]$ para cualquier par de espacios X y Y homeomorfos.

El ejemplo más simple de una función cardinal es la cardinalidad misma de un espacio X. Sin embargo, en el estudio de funciones cardinales estamos

[1]Esto es un abuso de lenguaje, pues una función no puede estar definida en la clase de todos los espacios topológicos, ya que estos no forman un conjunto.

interesados en espacios que son infinitos, motivo por el cual obligamos a que las funciones cardinales sólo tomen valores infinitos. Quizá las funciones cardinales más conocidas son el peso, la densidad y la celularidad de un espacio X, cuyas definiciones se presentan a continuación

A.1.2 Definición.

1. El *peso* de un espacio topológico X es el número cardinal

$$\mathrm{w}(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base de } X\}$$

2. La *densidad* de un espacio topológico X es el número cardinal

$$\mathrm{d}(X) = \text{mín}\{|D| : D \subseteq X = \mathrm{cl}_X(D)\}$$

La siguiente función cardinal proporciona información de las bases locales en los espacios topológicos.

A.1.3 Definición. Sea X un espacio topológico.

1. Dado $x \in X$, el *carácter* de X *en el punto* x es el número cardinal infinito:

$$\chi(X, x) = \text{mín}\{|\mathcal{B}(x)| : \mathcal{B}(x) \text{ es base local para } x\} + \omega$$

2. El *carácter* del espacio X es el número cardinal

$$\chi(X) = \sup\{\chi(X, x) : x \in X\}.$$

A continuación mostraremos la relación que hay entre las funciones cardinales peso y carácter, dicha relación muestra que el peso domina al carácter.

A.1.4 Proposición. *Para todo espacio topológico se satisface:* $\chi(X) \leqslant w(X)$.

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base de X tal que $|\mathcal{B}| = \mathrm{w}(X)$. Fijemos $x \in X$ de manera arbitraria y definamos: $\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$. Claramente $\mathcal{B}_x$ es una base local para x en X. Así por definición de $\chi(X, x)$, se tiene que:

$$\chi(X, x) \leqslant |\mathcal{B}_x| \leqslant w(X).$$

Por ello se sigue que $\mathrm{w}(X)$ es cota superior del conjunto $\{\chi(X, x) : x \in X\}$, y como $\chi(X)$ es el supremo de dicho conjunto, se concluye que $\chi(X) \leqslant w(X)$. ■

Recordemos que una familia $\mathcal{V} \subseteq \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$ se llama *familia celular* si para cualesquiera $V, W \in \mathcal{V}$ con $V \neq W$ se satisface que $V \cap W = \emptyset$, así definimos la siguiente función cardinal.

A.1.5 Definición. La celularidad de un espacio topológico X es el número cardinal

$$\mathrm{c}(X) = \sup\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es una familia celular en } X\}$$

Si $\mathrm{c}(X) = \aleph_0$, decimos que X satisface la *condición de cadena contable* (*ccc*) o que tiene la *propiedad de Souslin*. Es inmediato que $c(X) \leqslant d(X) \leqslant w(X)$.

La noción de espacio de *Lindelöf* se puede generalizar de la siguiente manera, dado un cardinal $\kappa \geqslant \omega$ si de toda cubierta abierta de un espacio X es posible extraer una subcubierta abierta de cardinalidad a lo más κ decimos que dicho espacio es *κ-Lindelöf*. Esta noción da lugar a una nueva función cardinal, *el número de Lindelöf* de un espacio X.

A.1.6 Definición. El número de Lindelöf de un espacio topológico X es el número cardinal

$$\mathrm{l}(X) = \mathrm{mín}\{\kappa \geqslant \omega : X \text{ es } \kappa\text{-Lindelöf}\}$$

A continuación describiremos varias funciones cardinales relativas a propiedades de bases y bases locales o similares.

A.1.7 Definición. Una familia $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una red para el espacio topológico X, si para cada $U \subseteq X$ abierto y $x \in U$ existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$.

Una *red* es casi lo mismo que una *base*; la diferencia consiste en que los miembros de la *red* no son abiertos necesariamente. En particular, toda *base* es una *red*. Un ejemplo de una *red* para un espacio X es $\{\{x\} : x \in X\}$. Es sencillo demostrar que un espacio con una red numerable es separable. El recíproco es falso, para ello basta considerar la *recta de Sorgenfrey*.

A.1.8 Definición. El peso red de un espacio topológico X es el número cardinal

$$\mathrm{nw}(X) := \mathrm{mín}\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ es red para } X\} + \omega$$

A.1.9 Definición. La densidad hereditaria de un espacio topológico X es el número cardinal

$$\mathrm{hd}(X) := \sup\{\mathrm{d}(Y) : Y \subseteq X\}$$

A.1.10 Teorema. *Sean $\{X_\alpha : \alpha \in C\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos y $\kappa \geqslant \omega$, donde $|C| \leqslant \kappa$.*
Si $nw(X_\alpha) \leqslant \kappa$ para todo $\alpha \in C$, entonces $nw(\prod_{\alpha \in C} X_\alpha) \leqslant \kappa$.

Demostración. Para cada $\alpha \in C$, sea $\mathcal{N}_\alpha \subseteq \mathcal{P}(X_\alpha)$ una red para X_α tal que $|\mathcal{N}_\alpha|= \mathrm{nw}(X_\alpha)$. Así consideremos la familia

$$\mathcal{N} := \{\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[P_i] : P_i \in \mathcal{N}_{\alpha_i} \text{ para cada } i \in \{1,\dots,n\}\}$$

Afirmación 1. $\mathcal{N}$ es una red para $\prod_{\alpha\in C} X_\alpha$.

En efecto. Sea $U \subseteq \prod_{\alpha\in C} X_\alpha$ abierto no vacío y $f \in U$. Por ello existe $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_i] \subseteq \prod_{\alpha\in C} X_\alpha$ tal que $f \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_i] \subseteq U$, donde $U_i \subseteq X_{\alpha_i}$ abierto y además $f(\alpha_i) \in U_i$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$.

Como $U_i \subseteq X_{\alpha_i}$ abierto y $f(\alpha_i) \in U_i$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, existe $P_i \in \mathcal{N}_{\alpha_i}$ tal que $f(\alpha_i) \in P_i \subseteq U_i$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$. Más aún note que $\pi_{\alpha_i}^{-1}[P_i] \subseteq \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_i]$, por ello

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[P_i] \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_i] \subseteq U.$$

Por lo tanto $\mathcal{N}$ es una red para $\prod_{\alpha\in C} X_\alpha$. ⊠

Ahora comprobemos que $|\mathcal{N}| \leqslant \kappa$, para ello sea $\mathcal{T}$ un conjunto de cardinalidad κ. Como $|\mathcal{N}_\alpha| \leqslant |\mathcal{T}|$ para cada $\alpha \in C$, existe una función $i_\alpha : \mathcal{N}_\alpha \to \mathcal{T}$ inyectiva para cada $\alpha \in C$. Así definamos la siguiente función

$$g : \mathcal{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{I}^n \times \mathcal{T}^n) \text{ dada por}$$

$$\forall \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[P_i] \in \mathcal{N} : g(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[P_i]) := (\alpha_1,\dots,\alpha_n; i_{\alpha_1}(P_1),\dots,i_{\alpha_n}(P_n))$$

Claramente g es una función inyectiva, más aún la cardinalidad de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{I}^n \times \mathcal{T}^n)$ no excede a κ. Efectivamente

$$|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{I}^n \times \mathcal{T}^n)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mathcal{I}^n \times \mathcal{T}^n| \leqslant \omega \cdot |\mathcal{I}^n \times \mathcal{T}^n| \leqslant \omega \cdot \kappa \cdot \kappa = \kappa.$$

De ello podemos concluir que $|\mathcal{N}| \leqslant \kappa$.
Por lo tanto $\mathrm{nw}(\prod_{\alpha\in C} X_\alpha) \leqslant \kappa$. ■

Para el caso de la densidad enunciamos el siguiente resultado cásico (remitimos al lector al arículo [8] para una demostración).

A.1.11 Teorema (Hewitt-Mardeciz-Pondiczery)**.** *Sea κ un cardinal infinito y sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia no vacía de espacios topológicos. Si $d(X_\alpha) \leqslant$*

κ y $|A| \leqslant 2^\kappa$, entonces $d(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha) \leqslant \kappa$.

A.1.12 Proposición. *Para todo espacio topológico X no vacío, las propiedades siguientes se satisfacen:*

(1) Para todo $Y \subseteq X$, $nw(Y) \leqslant nw(X)$.

(2) $d(X) \leqslant nw(X)$

Demostración. (1) Sea $\mathcal{N}$ una red para X, con la propiedad $|\mathcal{N}| = nw(X)$. Con ello consideremos a la siguiente familia de subconjuntos de Y

$$\mathcal{N}_Y := \{N \cap Y : N \in \mathcal{N}\}.$$

Note que $\mathcal{N}_Y$ es una red para Y.
Efectivamente. Sean $U \in \tau(Y)$ y $y \in U$. Como $U \in \tau(Y)$ y Y tiene la topología de subespacio respecto a X, entonces existe $V \in \tau(X)$ tal que $U = V \cap Y$. Luego como $y \in U$, entonces $y \in V$ y $y \in Y$, por ello existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $y \in N \subseteq V$.
Por lo tanto $y \in N \cap Y \subseteq V \cap Y = U$, es decir $\mathcal{N}_Y$ es red para Y.
Ahora definamos la siguiente función

$$\Phi : \mathcal{N}_Y \to \mathcal{N} \text{ dada por}$$
$$\forall (N \cap Y) \in \mathcal{N}_Y : \Phi(N \cap Y) := N$$

Observe que Φ es una función inyectiva, para ello sean $(N_1 \cap Y), (N_2 \cap Y) \in \mathcal{N}_Y$ tales que $\Phi(N_1 \cap Y) = \Phi(N_2 \cap Y)$, entonces $N_1 = N_2$. Así $N_1 \cap Y = N_2 \cap Y$, es decir Φ es inyectiva.
Por lo tanto $|\mathcal{N}_Y| \leqslant |\mathcal{N}| = nw(X)$.
Así por definición de peso red $nw(Y) \leqslant |\mathcal{N}_Y| \leqslant |\mathcal{N}| = nw(X)$.

(2) Sea $\mathcal{N}$ una red para X, con la propiedad $|\mathcal{N}| = nw(X)$. Para cada $N \in \mathcal{N}\backslash\{\emptyset\}$ fijemos $x_N \in N$, y denotemos al conjunto de estos por

$$\mathcal{D} := \{x_N : N \in \mathcal{N}\backslash\{\emptyset\}\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{D}$ es denso en X.
Efectivamente. Sea $U \in \tau^*(X)$ arbitrario, entonces existe $x \in U$. Como $\mathcal{N}$ es red para X, entonces existe $N \in \mathcal{N}\backslash\{\emptyset\}$ tal que $x \in N \subseteq U$. Por ello $x \in \mathcal{D}$ y así $x \in \mathcal{D} \cap U$.
Por lo tanto $\mathcal{D}$ es denso en X.
Ahora de manera natural podemos definir la siguiente función

$$\Psi : \mathcal{D} \to \mathcal{N} \text{ dada por:}$$
$$\forall x_N \in \mathcal{D} : \Psi(x_N) := N$$

Es fácil observar que Ψ es una función inyectiva. Para ello sean $x_{N_1}, x_{N_2} \in \mathcal{D}$ tales que $\Psi(x_{N_1}) = \Psi(x_{N_2})$, entonces $N_1 = N_2$. Luego por definición de $\mathcal{D}$ se tiene que $x_{N_1} = x_{N_2}$.
Por lo tanto Ψ es inyectiva, así $|\mathcal{D}| \leqslant |\mathcal{N}| = nw(X)$.
Por todo lo anterior y la definición de densidad $d(X) \leqslant |\mathcal{D}| \leqslant nw(X)$.

Por ello queda completamente demostrada nuestra proposición. ■

A.1.13 Corolario. *Para todo espacio topológico X se satisface $hd(X) \leqslant nw(X)$*

Demostración. Por la proposición A.1.12 tenemos que para todo espacio topológico X no vacío y todo subespacio Y de X

$$d(Y) \leqslant nw(Y) \leqslant nw(X)$$

Es decir, $nw(X)$ es cota superior del conjunto $\{d(Y) : Y \subseteq X\}$ y como $hd(X)$ es el supremo de este conjunto, tenemos que $hd(X) \leqslant nw(X)$; con lo cual queda demostrado el colorario. ■

La siguiente proposición proporciona dos interesantes cotas para la cardinalidad de espacios T_0 y espacios Hausdorff.

A.1.14 Proposición.

(1) Si X es un espacio T_0 entonces $|X| \leqslant 2^{nw(X)}$.

(2) (Póspišil) *Si X es un espacio T_2 entonces $|X| \leqslant 2^{2^{d(X)}}$.*

Demostración. (1) Fijemos una red $\mathcal{N}$ de modo que $|\mathcal{N}| = nw(X)$. Para cada $x \in X$, definamos $\mathcal{N}_x = \{N \in \mathcal{N} : x \in N\}$. Es claro que $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{N}$ y por ello $\mathcal{N}_x \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ para cada $x \in X$. De esta manera $\phi : X \to \mathcal{P}(\mathcal{N})$ definida por $\phi(x) = \mathcal{N}_x$ $(x \in X)$ es una función bien definida.

Verifiquemos que ϕ es inyectiva. Supongamos que $x, y \in X$ son elementos diferentes. Como X es T_0, existe un abierto U de modo que $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Si $x \in U$ entonces $y \notin U$. Por ser $\mathcal{N}$ una red en X existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$. Luego, $N \in \mathcal{N}_x$ y $N \notin \mathcal{N}_y$. En consecuencia $\phi(x) \neq \phi(y)$. Si ocurre que $y \in U$ entonces $x \notin U$. Y como $\mathcal{N}$ una red en X existe $M \in \mathcal{N}$ tal que $y \in M \subseteq U$. Luego, $M \in \mathcal{N}_y$ y $M \notin \mathcal{N}_x$. Así, se sigue que $\phi(x) \neq \phi(y)$. Por lo tanto ϕ es inyectiva.

Como ϕ es inyectiva, $|X| \leqslant |\mathcal{P}(\mathcal{N})| = 2^{nw(X)}$.

(2) Considere un subconjunto denso $D \subseteq X$ de modo que $d(X) = |D|$. Para cada $x \in X$ definimos $\mathcal{D}_x = \{E \subseteq D : x \in \operatorname{cl}_X(E)\}$. Resulta que

$\phi : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$ definida por

$$\phi(x) = \mathcal{D}_x$$

es una función bien definida. Más aún, como X es Hausdorff, ϕ es inyectiva (la inyectividad de ϕ implica que $|X| \leqslant 2^{2^{d(X)}}$). Efectivamente, suponga que $x, y \in X$ son elementos diferentes. Entonces existen abiertos ajenos U, V tales que $x \in U$ y $y \in V$. Como D es denso en X, $\operatorname{cl}_X(U) = \operatorname{cl}_X(D \cap U)$ y $\operatorname{cl}_X(V) = \operatorname{cl}_X(D \cap V)$. Por la forma en que fueron seleccionados los abiertos U y V, $x \in \operatorname{cl}_X(U) = \operatorname{cl}_X(D \cap U)$ pero $y \notin \operatorname{cl}_X(U) = \operatorname{cl}_X(D \cap U)$. Esto implica que $D \cap U \in \mathcal{D}_x \setminus \mathcal{D}_y$. De esta manera, $\phi(x) \neq \phi(y)$. ■

Apéndice B

El teorema de factorización de Arhangel'skii

Ahora formularemos el teorema de factorización de espacios de funciones, pero para la prueba de este utilizaremos un teorema de factorización debibo al matemático ruso Alexander Vladimirovich Arhangel'skii publicado en el año 1982 en el artículo «Factorization theorems and function spaces: stability and monolithicity».

Antes de enunciar y probar dicho teorema definamos que es una factorización y una propiedad de esta.

B.0.1 Definición. Dadas dos funciones $f : X \to Z$ y $p : X \to Y$ decimos que f se factoriza a través de p si existe una función $g : Y \to Z$ tal que $f = g \circ p$.

B.0.2 Proposición. *f se factoriza a través de p si y sólo si para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ si $p(x_1) = p(x_2)$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Sean $x_1, x_2 \in X$ arbitrarios tales que $p(x_1) = p(x_2)$. Luego $g(p(x_1)) = g(p(x_2))$ ya que g es función. Por lo tanto $f(x_1) = f(x_2)$.

[$\Leftarrow$] Sea $y \in Y$, se tienen dos casos.

CASO (1). $y \in Y \backslash p[X]$. Si $y \in Y \backslash p[X]$, entonces fijemos $z \in Z$. Y definamos $g : Y \to Z$ por medio de $g(y) = z$ para toda $y \in Y \backslash p[X]$. Luego es claro que $f = g \circ p$, pues $f(x) = z = g(y)$.

CASO (2). $y \in p[X]$. Si $y \in p[X]$, entonces existe $x \in X$ tal que $y = p(x)$ y definamos $g(y) = f(x)$. ■

B.0.3 Teorema (de factorizacion de Arhangel'skii)**.** *Sean $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos, κ un número cardinal infinito y $X := \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.*

Si S es un subespacio denso de X tal que $hd(\prod_{\alpha\in C} X_\alpha) \leqslant \kappa$ para cada $C \in [A]^{\leqslant\kappa}$, entonces para toda función continua $f : S \to Y$ con $\chi(Y) \leqslant \kappa$, existen $B \in [A]^{\leqslant\kappa}$ y una funcón continua $g : p_B(S) \to Y$ con la propiedad de que $f(s) = g(p_B(s))$ para toda $s \in S$, es decir $f = g \circ p_B \restriction_S$.

Demostración. Para cada $s \in S$, sea $y = f(s)$. Como $\chi(Y) \leqslant \kappa$, podemos fijar una base local $\mathcal{B}_y$ de y en Y tal que $|\mathcal{B}_y| \leqslant \kappa$.

Como $f : S \to Y$ es continua, para cada $W \in \mathcal{B}_y$ fijemos $U(W)$ abierto canónico en X tal que $s \in U(W)$ y $f[U(W) \cap S] \subseteq W$. Con lo anterior definamos $\gamma_s = \{U(W) : W \in \mathcal{B}_y\}$, es claro que $|\gamma_s| \leqslant \kappa$ ya que para cada $U \in \gamma_s$ se tiene que $s \in U$ y exite W vecindad de y en Y tal que $f[U \cap S] \subseteq W$.

Ahora para cada $s \in S$ definamos $L_s = \bigcup\{K(U) : U \in \gamma_s\}$, es claro que $L_s \subseteq A$ y además por lo anterior $|L_s| \leqslant \kappa$.

Por recursión matemática construiremos una sucesión $\{S_i : i \in \omega\}$ de subconjuntos de S y una sucesión $\{L_i : i \in \omega\}$ de subconjuntos de A tales que para cada $i \in \omega$, $|L_i| \leqslant \kappa$, $L_i \subseteq L_{i+1}$, $|S_i| \leqslant \kappa$ y $S_i \subseteq S_{i+1}$. Sea $s_0 \in S$ fijo y arbitrario y consideremos $S_0 = \{s_0\}$ y $L_0 = \emptyset$. Definamos $L_1 = L_0 \cup (\bigcup\{L_s : s \in S_0\})$, es claro que $L_1 = \bigcup\{L_{s_0}\} = L_{s_0}$ y $L_1 \subseteq A$, además $|L_1| \leqslant \kappa$ ya que $|L_{s_0}| \leqslant \kappa$, es decir $L_1 \in [A]^{\leqslant\kappa}$. Por ello $hd(\prod_{\alpha\in L_1} X_\alpha) \leqslant \kappa$, dado que p_{L_1} es continua y sobreyectiva; más aún S es denso en X de lo cual se tiene que $p_{L_1}[S]$ es denso en $\prod_{\alpha\in L_1} X_\alpha$.

Como $hd(\prod_{\alpha\in L_1} X_\alpha) \leqslant \kappa$, entonces $d(p_{L_1}(S)) \leqslant \kappa$, por ello existe $Z \subseteq p_{L_1}[S]$ denso en $p_{L_1}[S]$ tal que $|Z| \leqslant \kappa$. Ahora para cada $z \in Z$ fijemos $s_z \in S$ tal que $p_{L_1}(s_z) = z$ y definamos $S^1 = \{s_z : z \in Z\}$, es claro que $|S^1| \leqslant \kappa$ y además $p_{L_1}(S^1) = Z$. Luego como $p_{L_1}[S]$ es denso en $\prod_{\alpha\in L_1} X_\alpha$ y $p_{L_1}[S^1]$ es denso en $p_{L_1}[S]$, se tiene que $p_{L_1}[S^1]$ es denso $\prod_{\alpha\in L_1} X_\alpha$. Sea $S_1 = S_0 \cup S^1$, es claro por lo anterior que $|S_1| \leqslant \kappa$, esto termina el primer paso de construcción.

Supongamos que para $k \in \omega\backslash 1$ los conjuntos S_k y L_k tales que $|S_k| \leqslant \kappa$, $|L_k| \leqslant \kappa$, $L_i \subseteq L_{i+1}$ y $S_i \subseteq S_{i+1}$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$ han sido definidos. Sea $L_{k+1} = L_k \cup (\bigcup\{L_s : s \in S_k\})$ por la suposición hecha y dado que $|L_s| \leqslant \kappa$ para toda $s \in S$, se sigue que $|L_{k+1}| \leqslant \kappa$ y además $L_{k+1} \subseteq A$, es decir $L_{k+1} \in [A]^{\leqslant\kappa}$. Por ello $hd(\prod_{\alpha\in L_{k+1}} X_\alpha) \leqslant \kappa$, dado que $p_{L_{k+1}}$ es continua y sobreyectiva; más aún S es denso en X por lo que $p_{L_{k+1}}[S]$ es denso en $\prod_{\alpha\in L_{k+1}} X_\alpha$.

Como $hd(\prod_{\alpha\in L_{k+1}} X_\alpha) \leqslant \kappa$, entonces $d(p_{L_{k+1}}[S]) \leqslant \kappa$ y por ello existe $Z \subseteq p_{L_{k+1}}[S]$ denso en $p_{L_{k+1}}[S]$ tal que $|Z| \leqslant \kappa$. Ahora para cada $z \in Z$ fijemos $s_z \in S$ tal que $p_{L_{k+1}}(s_z) = z$ y definamos $S^{k+1} = \{s_z : z \in Z\}$, es claro que $|S^{k+1}| \leqslant \kappa$ y además $p_{L_{k+1}}[S^{k+1}] = Z$. Luego como $p_{L_{k+1}}[S]$ es denso en $\prod_{\alpha\in L_{k+1}} X_\alpha$ y $p_{L_1}[S^{k+1}]$ es denso en $p_{L_{k+1}}[S]$, por ello $p_{L_{k+1}}[S^{k+1}]$ es denso $\prod_{\alpha\in L_{k+1}} X_\alpha$. Sea $S_{k+1} = S_k \cup S^{k+1}$, es claro por lo anterior que $|S_{k+1}| \leqslant \kappa$. Ya construidas las sucesiones $\{S_i : i \in \omega\}$ y $\{L_i : i \in \omega\}$, sean $L = \bigcup_{k\in\omega} L_k$ y $S^* = \bigcup_{k\in\omega} S_k$. Note que $|L| \leqslant \kappa$ y $|S^*| \leqslant \kappa$, además $L \subseteq A$ y $S^* \subseteq S$, es decir $L \in [A]^{\leqslant\kappa}$ y $S^* \in [S]^{\leqslant\kappa}$.

La siguiente afirmación es sencilla de demostrar.

Afirmación 1. Si $B \subseteq L$ finito, entonces $B \subseteq L_i$ para algún $i \in \omega$.

Afirmación 2. Si $s \in S^*$y W es vecindad de $f(s)$ en Y, entonces existe un abierto canónico U de X tal que $s \in U$, $K(U) \subseteq L$ y $f[U] \subseteq W$.

En efecto. Como $s \in S^*$, entonces existe $k \in \omega\backslash 1$ tal que $s \in S_k$. Luego como W es vecindad de $f(s)$ en Y y $S_k \subseteq S$, existe $U(W) \in \gamma_s$ tal que $f[U(W)] \subseteq W$. Además $K(U(W)) \subseteq L_{k+1} \subseteq L$. ⊠

Ahora demostremos que $p_L[S^*]$ es denso en $p_L[S]$. Como S es denso en X, entonces $p_L[S]$ es denso en $p_L[X] = X_L$ y $S^* \subseteq S$, bastará demostrar que $p_L[S^*]$ es denso en X_L.

Para ello hay que mostrar que si U es un abierto canónico de X y $K(U) \subseteq L$, entonces $U \cap S^* \neq \emptyset$. Efectivamente, sea U abierto canónico no vacío de X tal que $K(U) \subseteq L$. Como $K(U)$ es finito, entonces por la *Afirmación 1* existe $k \in \omega\backslash 1$ tal que $K(U) \subseteq L_k$. Ya que $p_{L_k}[S^k]$ es denso en X_{L_k}, se tiene que cualquier abierto no vacío de X_{L_k} tiene intersección no vacía con $p_{L_k}[S^k]$. Luego existe $s \in S^k \subseteq S^*$ tal que $p_L(s) \in p_L[U]$. Así $s \in U$ y por ello $U \cap S^* \neq \emptyset$. Por lo tanto $p_L[S^*]$ es denso en $p_L[X] = X_L$.

Afirmación 3. Si U es un conjunto abierto en X y $s \in S$ son tales que $p_L(s) \in p_L[U]$, entonces $f(s) \in \mathrm{cl}_Y(f[U \cap S])$.

En efecto. Supongamos para crear una contradicción que $f(s) \notin \mathrm{cl}_Y(f[U\cap S])$. Por ello existe una vecindad W de $f(s)$ en Y tal que $W \in \mathcal{B}_{f(s)}$ y además $W \cap f[U \cap S] = \emptyset$, más aún por la regularidad de Y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathrm{cl}_Y(W) \cap \mathrm{cl}_Y(f[U \cap S]) = \emptyset$.

Ahora dado que f es una función continua y $W \in \mathcal{B}_{f(s)}$, entonces existe $U_1 \in \gamma_s$ abierto canónico en X con $s \in U_1$ y tal que $f[U_1 \cap S] \subseteq W$. Sabemos además que p_L es una función abierta, luego $p_L[U] \cap p_L[U_1]$ es abierto en X_L, además $p_L[U] \cap p_L[U_1] \neq \emptyset$ ya que $p_L(s) \in p_L[U] \cap p_L[U_1]$. Dado que $p_L[S^*] \subseteq X_L = \mathrm{cl}_{X_L}(p_L[S^*])$, entonces existe $s_0 \in S^*$ tal que $p_L(s_0) \in p_L[U] \cap p_L[U_1]$.

Subafirmación. $f(s_0) \in \mathrm{cl}_Y(f[U \cap S])$.

En efecto. Supongamos para crear una contradicción que $f(s_0) \notin \mathrm{cl}_Y(f[U \cap S])$, por ello existe $W_0 \in \mathcal{B}_{f(s_0)}$ tal que $f[U \cap S] \cap W_0 = \emptyset$. Dado que $W_0 \in \mathcal{B}_{f(s_0)}$, entonces existe $U_0 \in \gamma_{s_0}$ abierto canónico no vacío de X tal que $f[U_0 \cap S] \subseteq W_0$. Por ello se tiene que

$$f[U \cap S] \cap f[U_0 \cap S] \subseteq f[U \cap S] \cap W_0 = \emptyset$$

pero $f[U \cap U_0 \cap S] \subseteq f[U \cap S] \cap f[U_0 \cap S] = \emptyset$, luego $f[U \cap U_0 \cap S] = \emptyset$. En consecuencia $U \cap U_0 \cap S = \emptyset$ y como $S \subseteq X = \mathrm{cl}_X(S)$, entonces $U \cap U_0 = \emptyset$. Observe que esto es imposible, ya que $K(U_0) \subseteq L$ y por ello $U_0 = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha^0$. Así dada $r \in X$, sea $\beta \in A$ y definamos

$$r(\beta) = \begin{cases} r(\beta) & si \quad \beta \notin K(U_0) \\ s_0(\beta) & si \quad \beta \in K(U_0) \end{cases}$$

de este modo $r \in U_0$, además es tal que $p_L(r) = p_L(s_0)$. Luego como $p_L(s_0) \in p_L[U] \cap p_L[U_1]$, entonces existe $m \in U$ tal que $p_L(m) = p_L(s_0)$, lo cual es una contradicción pues $U \cap U_0 = \emptyset$. Esto demuestra que $f(s_0) \in \mathrm{cl}_Y(f[U \cap S])$, lo cual termina la *Subafirmación 1.* $\boxdot$

Subafirmación 2. $f(s_0) \in \mathrm{cl}_Y(f[U_1 \cap S])$.

En efecto. Supongamos para crear una contradicción que $f(s_0) \notin \mathrm{cl}_Y(f[U_1 \cap S])$, por ello existe $W_1 \in \mathcal{B}_{f(s_0)}$ tal que $f[U_1 \cap S] \cap W_1 = \emptyset$. Dado que $W_1 \in \mathcal{B}_{f(s_0)}$, entonces existe $U_2 \in \gamma_{s_0}$ abierto canónico no vacío de X tal que $f[U_2 \cap S] \subseteq W_1$. Por ello se tiene que

$$f[U_1 \cap S] \cap f[U_2 \cap S] \subseteq f[U_1 \cap S] \cap W_1 = \emptyset$$

pero $f[U_1 \cap U_2 \cap S] \subseteq f[U_1 \cap S] \cap f[U_2 \cap S] = \emptyset$, luego $f[U_1 \cap U_2 \cap S] = \emptyset$. Por ello $U_1 \cap U_2 \cap S = \emptyset$ y como $S \subseteq X = \mathrm{cl}_X(S)$, entonces $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Observe que esto es imposible, ya que $K(U_2) \subseteq L$ y por ello $U_2 = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha^2$. Así dada $r \in X$, sea $\beta \in A$ y definamos

$$r(\beta) = \begin{cases} r(\beta) & si \quad \beta \notin K(U_2) \\ s_0(\beta) & si \quad \beta \in K(U_2) \end{cases}$$

de este modo $r \in U_2$, además es tal que $p_L(r) = p_L(s_0)$. Luego como $p_L(s_0) \in p_L[U] \cap p_L[U_1]$, entonces existe $m \in U_1$ tal que $p_L(m) = p_L(s_0)$, lo cual es una contradicción pues $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Esto demuestra que $f(s_0) \in \mathrm{cl}_Y(f[U_1 \cap S])$, lo cual termina la *Sub afirmación 2.* $\boxdot$

Por último es claro que $\mathrm{cl}_Y(f[U_1 \cap S]) \subseteq \mathrm{cl}_Y(W)$, por ello

$$\mathrm{cl}_Y(f[U_1 \cap S]) \cap \mathrm{cl}_Y(f[U \cap S]) \subseteq \mathrm{cl}_Y(W) \cap \mathrm{cl}_Y(f[U \cap S]) = \emptyset$$

así $\mathrm{cl}_Y(f[U_1 \cap S]) \cap \mathrm{cl}_Y(f[U \cap S]) = \emptyset$, pero $f(s_0) \in \mathrm{cl}_Y(f[U_1 \cap S]) \cap \mathrm{cl}_Y(f[U \cap S])$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f(s) \in \mathrm{cl}_Y(f[U \cap S])$, esto termina finalmente la *Afirmación 3*. $\boxtimes$

Con todo lo anterior procedamos a demostrar que f se factoriza a través de $p_L \restriction_S$, así por la proposición B.0.2 bastará demostrar que para cualesquiera $s_1, s_2 \in S$ si $p_L(s_1) = p_L(s_2)$, entonces $f(s_1) = f(s_2)$. Antes de ello hagamos la siguiente observación.

Observación. Para cualquier vecindad W de s_1 en S, $f(s_2) \in \mathrm{cl}_Y(f[W])$.

Efectivamente. Sea W vecindad de s_1 en S arbitraria, entonces existe U abierto en X tal que $s_1 \in U$ y $U \cap S = W$. Como $s_2 \in S$ y $p_L(s_1) = p_L(s_2) \in p_L[U]$, entonces por la *Afirmación 3* se sigue que $f(s_2) \in \mathrm{cl}_Y(f[U \cap S])$. Pero $\mathrm{cl}_Y(f[U \cap S] = \mathrm{cl}_Y(f[W])$. Por lo tanto $f(s_2) \in \mathrm{cl}_Y(f[W])$. $\boxminus$

Con esto procedamos a demostrar lo anterior, para ello supongamos para crear una contradicción que $f(s_1) \neq f(s_2)$. Como Y es Hausdorff existen A y B abiertos ajenos en Y tales que $f(s_1) \in A$ y $f(s_2) \in B$. Ya que f es continua en s_1, entonces existe W abierto en S tal que $s_1 \in W$ y $f[W] \subseteq A$, así $f[W] \cap B \subseteq A \cap B = \emptyset$ de lo cual se sigue que $f[W] \cap B = \emptyset$.

Esto último implica que $f(s_2) \notin \mathrm{cl}_Y(f[W])$ lo cuál es una contradicción a la observación hecha anteriormente. Por lo tanto $f(s_1) = f(s_2)$, es decir f se factoriza a través de $p_L \restriction_S$. Ahora definamos la función $g : p_L[S] \to Y$ por medio de la regla

$$g(s_1) = f(s) \text{ donde } s_1 = p_L(S).$$

es claro que g esta bien definida por lo anterior, además $g \circ p_L \restriction_S = f$. Por último demostremos que g es continua. Sea $s \in S$, definamos $s_L = p_L(s)$ y $y = f(s) = g(s_L)$. Hay que demostrar que si W es una vecindad de y en Y, entonces existe una vecindad V de s_L en X_L tal que $g[V \cap p_L[S]] \subseteq W$. Sea W una vecindad abierta arbitraria de y en Y, fijemos una vecindad abierta W_1 de y en Y tal que $y \in W_1 \subseteq \mathrm{cl}_Y(W_1) \subseteq W$.

Como f es continua existe un abierto canónico U en X tal que $s \in U$ y $f[U \cap S] \subseteq W_1$, entonces $V = p_L[U]$ es una vecindad de s_L en X_L. Sea $z \in g[V \cap p_L[S]] \subseteq W$, entonces existe $s' \in S$ tal que $p_L(s') \in V \cap p_L[S]$ y $g(p_L(s') = z$. Note que $p_L(s') \in V$, entonces por la *Afirmación 3* $f(s') \in \mathrm{cl}_Y(f[U \cap S])$. Pero $f[U \cap S] \subseteq W_1$, así $\mathrm{cl}_Y(f[U \cap S]) \subseteq \mathrm{cl}_Y(W_1) \subseteq W$, por ello $f(s') \in W$. Por lo tanto $z \in W$, ya que $f(s') = z$. ■

Apéndice C

Lema del Δ-sistema

Este apéndice tiene como función mostrar un resultado muy importante de la teoría de conjuntos, que parece no tener relación con la topología general. Sin embargo, la relación es más que estrecha, ya que este surgió al momento que Šanin demostró que la propiedad ser *calibre*, es una propiedad productiva. Los alcances de este resultado son de gran escala tanto en la teoría de conjuntos como en la topología general.

C.0.1 Lema. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, la proposición Δ_n es verdadera; donde*

Δ_n: *Para toda familia $\mathcal{A}$ de cardinalidad ω_1 y formada por conjuntos de cardinalidad n, existe una familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de cardinalidad ω_1 y un conjunto finito F (posiblemente vacío) de modo que $F = A \cap B$ para todos $A, B \in \mathcal{B}$ diferentes.*

Demostración. Haremos la prueba por inducción matemática.

Supóngase que $n = 1$ y que $\mathcal{A}$ es una familia de cardinalidad ω_1 de conjuntos de cardinalidad uno. Como cada elemento de $\mathcal{A}$ es de cardinalidad uno, si dos elementos de $\mathcal{A}$ son diferentes entonces son ajenos. Esto sugiere definir $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ y $F = \emptyset$. Estos dos conjuntos muestra que Δ_1 es verdadera.

Supongamos ahora que la proposición Δ_n es verdadera y que $\mathcal{A}$ es una familia de cardinalidad ω_1 de conjuntos de cardinalidad $n + 1$.

Afirmación. Existe una familia maximal $\mu \subseteq \mathcal{A}$ respecto de la contención y con la propiedad de que cualesquiera dos elementos diferentes de μ son ajenos.

Demostración de la afirmación: Definamos

$$\mathcal{G} = \{\mu_0 \subseteq \mathcal{A} : (\forall A, B \in \mu_0)(A \neq B \to A \cap B = \emptyset)\}$$

Obsérvemos que como $\mathcal{A}$ es infinita, podemos fijar un elemento $A \in \mathcal{A}$. Por ello $\mu = \{A\} \in \mathcal{G}$. Así, $\mathcal{G}$ es no vacía. Es fácil demostrar que si $\{\mu_\alpha : \alpha \in J\}$ es una cadena en $(\mathcal{G}, \subseteq)$ entonces $\bigcup_{\alpha \in J} \mu_\alpha \in \mathcal{G}$ y además es una cota superior para $\{\mu_\alpha : \alpha \in J\}$ en $(\mathcal{G}, \subseteq)$. De esta manera, por el principio de maximalidad de Hausdorff, $(\mathcal{G}, \subseteq)$ tiene por lo menos un elemento maximal μ. Note que μ tiene las propiedades requeridas en la afirmación. ⊠

Fijemos una familia maximal μ como en la afirmación anterior. Si $|\mu| = \omega_1$ definamos $\mathcal{B} = \mu$ y a $F = \emptyset$; es claro que estos dos conjuntos muestran que Δ_{n+1} es verdadera. Si $|\mu| \neq \omega_1$ entonces $|\mu| < \omega_1$. Obsérvese que como μ es maximal, para cada $P \in \mathcal{A}$ existe $Q \in \mu$ tal que $P \cap Q \neq \emptyset$[1]. De esta manera, si definimos para cada $Q \in \mu$, a la familia $\mathcal{A}_Q = \{P \in \mathcal{A} : P \cap Q \neq \emptyset$, se tiene que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{Q \in \mu} \mathcal{A}_Q.$$

Como $|\mathcal{A}_Q| = \omega_1$ y $|\mu| < \omega_1$, existe $Q \in \mu$ tal que $|\mathcal{A}_Q| = \omega_1$. Supongamos que $Q = \{q_1, \ldots, q_{n+1}\}$. Definamos, para cada $i = 1, \ldots, n+1$, a la colección $\mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{A}_Q : q_i \in A\}$. Por ello

$$\mathcal{A}_Q = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i.$$

Como $|\mathcal{A}_Q| = \omega_1$, existe $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ de modo que $\mathcal{A}_i$ tiene cardinalidad ω_1. En consecuencia la colección $\mathcal{C} = \{P \setminus \{q_i\} : P \in \mathcal{A}_i\}$ tiene cardinalidad ω_1 y esta formada por conjuntos de cardinalidad n. Debido a que Δ_n es verdadera, existe $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ de cardinalidad n y un conjunto finito G tales que $A \cap B = G$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}_0$ con $A \neq B$. Defina $\mathcal{B} = \{C \cup \{q_i\} : C \in \mathcal{C}_0\}$ y $F = G \cup \{q_i\}$. Claramente los conjuntos $\mathcal{B}$ y F muestran que Δ_{n+1} es una proposición verdadera.

Por el método de inducción matemática, Δ_n es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

C.0.2 Lema (Lema de la Raíz Común o lema de Šanin)**.** *Si $\mathcal{A}$ es una familia no numerable de conjuntos finitos entonces existen:*

[1]De lo contrario, existiría $P \in \mathcal{A}$ para el cual $P \cap Q \neq \emptyset$ para todo $Q \in \mu$. Luego la colección $\mu_0 = \mu \cup \{P\} \in \mathcal{G}$ y $\mu \subsetneq \mu_0$, lo cual contradice que μ es maximal.

1. *una subfamilia* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{A}$ *de cardinalidad* ω_1 *y*
2. *un conjunto finito* F *(posiblemente vacío)*

tales que $A \cap B = F$ *para cada* $A, B \in \mathcal{B}$ *distintos.*

Demostración. Observe primero que como $\mathcal{A}$ es no numerable, existe una subcolección de $\mathcal{A}$ de cardinalidad ω_1. De esta manera, podemos suponer que $\mathcal{A}$ tiene cardinalidad ω_1. Por otra parte, como $\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{A \in \mathcal{A} : |A| = n\}$. Debe existir $n \in \mathbb{N}$ de modo que $|\{A \in \mathcal{A} : |A| = n\} = \omega_1$. Por esta razón podemos suponer que todos los elementos de $\mathcal{A}$ tienen la misma cardinalidad finita $n \in \mathbb{N}$. Por el inciso (1), existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de cardinalidad ω_1 y un conjunto finito F tales que $A \cap B = F$ siempre que $A, B \in \mathcal{B}$ sean elementos diferentes. Esto muestra que (2) es verdadera. ■

Bibliografía

[1] A. V. Arkhangel'skii, *Topological Function Spaces*, Kluwer Academic Publishers. 1992.

[2] A. V. Arkhangel'skii, O. G. Okunev, *Function Spaces with the Topology of Pointwise Convergence*, Manuscrito.

[3] F. Casarrubias Segura, Capítulo 2: *Espacios cartesianos generalizados*, Topología y sus aplicaciones 7. Colección manuales y textos. Serie ciencias exactas. Dirección General de Publicaciones. BUAP. Año 2019. ISBN: 978-607-525-645-0.

[4] F. Casarrubias Segura, *Notas del curso «Topología General».* Curso de maestría. Posgrado en Ciencias Matemáticas. UNAM. Manuscrito. Año 2019.

[5] F. Casarrubias Segura, A. Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología General*, Aportaciones matemáticas Textos 37, nivel medio, Instituto de Matemáticas, UNAM. 1ra. Edición. Mayo 2019.

[6] R. Engelking, *General Topology*, Traslated from the polish by the author Second Edition, Sigma Series in Pure Mathematics, 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[7] F. Hernández, *Teoría de Conjuntos (Una Introducción)*, Sociedad Matemática Mexicana vol. 13 de la serie TEXTOS, Tercera edición. 2011.

[8] R. Hodel, *Cardinal Functions. I.* Handbook of set-theoretic topology, 1-61, North-Holland, Amsterdan, 1984.

[9] T. Jech, *Set Theory.* The third millennium edition, revised and expanded. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[10] V.V., Tkachuk, *A C_p-Theory Problem Book.* Topological and Function Spaces. Problem books in mathematics. Springer, New York, 2011.

[11] V.V., Tkachuk, *A C_p-Theory Problem Book*. Special Features of Function Spaces. Problem books in mathematics. Springer, Cham, 2014.

[12] S. Willard, *General Topology*. Reprint of the 1970 original [Addison-Wesley, Reading, MA]. Dover Publications, Inc, Mineola, NY, 2004.