



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTRUCCIÓN DEL PSEUDOARCO MEDIANTE
LÍMITES PROYECTIVOS DE FRAÏSSÉ

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

MARIO ANDRÉS TINOCO GARZA

ASESOR:

M. EN C. FERNANDO JAVIER NUÑEZ ROSALES

Ciudad Universitaria, Ciudad de México,
Noviembre 2022





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Teoría de continuos y el pseudoarco	3
1.1. Teoría de Continuos	3
1.2. Continuos Indescomponibles	11
1.3. El pseudoarco	14
2. Límites proyectivos de Fraïssé	27
2.1. Definición y algunas propiedades	27
2.2. Existencia de los Límites para un caso especial	33
2.3. Algunas propiedades extra	41
3. El pseudoarco y los límites proyectivos	45
3.1. Gráficas lineales finitas como familia proyectiva	45
3.2. El pseudoarco como límite proyectivo	57
3.3. Resultados sobre este punto de vista	64
3.4. Comentarios finales	73

Capítulo 1

Teoría de continuos y el pseudoarco

Antes de entrar al tema principal de esta tesis (los límites proyectivos) trataremos de conocer un objeto que se puede estudiar a través de los mismos, a saber, el pseudoarco.

En [7] viene la siguiente pregunta. ¿Si un continuo del plano con más de un punto es homogéneo será entonces una curva cerrada simple? La respuesta es no. R. H. Bing mostró en su artículo [3] un ejemplo de que esto no necesariamente es cierto. El objetivo de este capítulo es conocer dicho ejemplo. Existe una definición del pseudoarco mediante métodos de la categoría de Baire, la cual tiene la ventaja de que es más accesible, sin embargo tiene la desventaja de que no pone en evidencia las propiedades clásicas del pseudoarco. Por esta razón utilizamos la definición clásica de Bing.

1.1. Teoría de Continuos

En esta sección nos familiarizaremos con los continuos. Para ello presentamos a continuación algunas definiciones, herramientas y resultados básicos provistos por la teoría de continuos. La ruta seguida aquí es la misma que en [9].

Definición 1.1 *Al espacio topológico X se le llama continuo si es Hausdorff, compacto y conexo.*

Note que nuestra definición no requiere de metrizabilidad, además los continuos tienen una caracterización para su metrizabilidad muy sencilla: Un continuo es metrizable cuando y sólo cuando sea segundo numerable.

Teorema 1.2 *Si un continuo tiene más de un punto entonces tiene al menos tantos puntos como el continuo, 2^ω .*

Prueba: Al ser X compacto y Hausdorff, se obtiene que también es completamente regular. Ahora, si p, q son dos puntos de X entonces existe una función $f: X \rightarrow I$ continua que manda a p en 0 y a q en 1. Al ser f continua se obtiene que $f[X]$ es conexo y por lo tanto es un intervalo que contiene a 0 y a 1, es decir $f[X] = I$. Por último notamos que $|f[X]| \leq |X|$. ■

Observación: Si el continuo es segundo numerable, en particular es un espacio polaco perfecto.

Como ejemplos de continuos tenemos al intervalo unitario I con su topología euclídea, cualquier esfera de dimensión finita y el 2-toro. Para enriquecer nuestros ejemplos probamos el siguiente lema y un teorema subsecuente.

Lema 1.3 *El producto arbitrario de espacios conexos es a su vez conexo.*

Prueba: Probemos el caso sencillo de dos factores. Suponga que X y Y son espacios conexos. Considere dos puntos en $X \times Y$, digamos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . Luego considere el punto (x_1, y_2) . Tenemos un homeomorfismo obvio

$$(\{x_1\} \times Y) \simeq Y,$$

el cual nos asegura que $\{x_1\} \times Y$ es un subespacio conexo y tiene tanto a (x_1, y_1) como a (x_1, y_2) . Análogamente $X \times \{y_2\}$ es un subespacio conexo que tiene a (x_1, y_2) y a (x_2, y_2) . Por lo tanto como $X \times \{y_2\}$ y $\{x_1\} \times Y$ comparten un punto y son conexos, su unión es conexas. Tal unión tiene a (x_1, y_1) y a (x_2, y_2) . Concluimos que $X \times Y$ es conexo. Inductivamente puede comprobarse que cualquier producto finito de espacios conexos es de nuevo conexo.

Probemos ahora el caso infinito. Sea $\kappa \geq \aleph_0$. Suponga que $(X_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ es una familia de espacios conexos. Denotemos

$$Y = \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$$

y tomemos cualquier punto en Y , digamos p . Veremos que su componente conexa $C_Y(p)$ es densa en Y . Tome

$$B = p_{\alpha_0}^{-1}(U_0) \cap \cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_n)$$

un abierto básico no vacío. Seleccione $u_i \in U_i$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$. Forme el punto $q \in Y$ reemplazando las coordenadas α_i de p por los u_i (de nuevo $i \in \{0, \dots, n\}$). Claramente $q \in B$. Luego considere K el conjunto de puntos de Y que tienen exactamente la misma coordenada que p en todos los factores diferentes de $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Tendremos que

$$K \simeq X_{\alpha_0} \times \cdots \times X_{\alpha_n}$$

y por lo tanto, K es conexo. Ahora note que $p, q \in K$ y que de esto se desprende que $q \in C_Y(p) \cap B$. Así $C_Y(p)$ es densa lo que implica que $cl_Y(C_Y(p)) = Y$ y como la cerradura de un conexo es conexa se tiene finalmente lo deseado. ■

Teorema 1.4 *El producto Tychonoff de continuos es un continuo.*

Prueba: Suponga que $(X_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ es una colección de continuos, abreviemos por Y a su producto Tychonoff y denotemos $p_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$ a la proyección al α -ésimo factor. El famoso Teorema de Tychonoff nos garantiza que Y es compacto. Para comprobar la condición de separación Hausdorff, tome dos puntos en Y , digamos x y y . Al ser diferentes, existe algún $\alpha < \kappa$ tal que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Como X_α es un continuo, existen U, V abiertos en X_α disjuntos que separan a x_α y a y_α . Considere $U' := p_\alpha^{-1}(U)$ y $V' := p_\alpha^{-1}(V)$. Es claro que U', V' separan a x y a y . Note que la conexidad viene dada por el lema anterior. ■

Ahora ya tenemos más variedad en los ejemplos. Un continuo famoso es el cubo de Hilbert $[0, 1]^\omega$ y en general los cubos de Tychonoff $[0, 1]^\kappa$. Siguiendo con la idea de tener ejemplos más variados, estudiamos algunas maneras de obtener continuos a partir de otros. Para conseguir este objetivo necesitamos un lema previo.

Lema 1.5 *Si X es compacto, $(F_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ es una colección de subconjuntos cerrados de X cuya intersección está contenida en cierto abierto A entonces existe $J \subseteq \kappa$ finito tal que $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha \subseteq A$.*

Prueba: Tenemos que $X - A \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa} (X - F_\alpha)$ y como A es abierto entonces $X - A$ es cerrado y por lo tanto compacto. Entonces existe una subcobertura $(X - F_{\alpha_i})_{i=0}^m$ finita de $X - A$. Al tomar complementos se obtiene el resultado. ■

Corolario 1.6 (Sura-Bura) *Si X es Hausdorff, $(C_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ es una colección de subespacios compactos y A es un abierto de X que contiene a $C := \bigcap_{\alpha < \kappa} C_\alpha$ entonces hay J un subconjunto finito de κ tal que $\bigcap_{\alpha \in J} C_\alpha \subseteq A$.*

Prueba: Tenemos que $(C_0 \cap C_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ son cerrados de C_0 y además $\bigcap_{\alpha < \kappa} (C_0 \cap C_\alpha) \subseteq A \cap C_0$ entonces por el Lema 1.5 hay $J \subseteq \kappa$ finito tal que $\bigcap_{\alpha \in J} (C_0 \cap C_\alpha) \subseteq C_0 \cap A$. Y así $C_0 \cap \bigcap_{\alpha \in J} C_\alpha \subseteq A$. ■

Es natural preguntarse ¿cómo se comportan las intersecciones de familias de continuos?. Se invita al lector a comprobar que la intersección de dos continuos no necesariamente es un continuo. El siguiente Teorema nos da condiciones suficientes sobre la familia como para asegurar que su intersección sea un continuo. Antes de enunciar dicho Teorema recordamos una definición.

Definición 1.7 *Sea X un conjunto y $(M_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ una familia de subconjuntos de X . Decimos que la familia es **dirigida** si, dada una intersección finita de miembros de la familia, existe un miembro de la misma contenida en dicha intersección.*

Teorema 1.8 *Suponga que X es un espacio Hausdorff y que $(M_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ es una familia dirigida de continuos no vacíos, cada uno con la topología de subespacio heredada por X . Entonces $M = \bigcap_{\alpha < \kappa} M_\alpha$ es un continuo no vacío.*

Prueba: Como $M \subseteq X$ y la propiedad de separación Hausdorff se hereda a cualquier subespacio, tendremos que M es Hausdorff. Luego, como M es una intersección de subconjuntos cerrados de X , será cerrado en X y por lo tanto cerrado en M_0 y por ser este un continuo, tendremos que $M \subseteq M_0$ es compacto. Ahora, como $(M_0 \cap M_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ es una familia de cerrados de M_0 que tiene la propiedad de intersección finita (por ser dirigida) y M_0 es compacto se obtiene que $\emptyset \neq \bigcap_{\alpha < \kappa} (M_0 \cap M_\alpha)$ y esta última intersección es exactamente M .

Por último vamos a verificar la conexidad de M . Si M fuera desconexo, entonces existen A, B cerrados de M no vacíos, ajenos y de tal manera que $M = A \cup B$. Al ser cerrados de M y como M es cerrado en X , A

y B serán cerrados en X y en M_0 . Como M_0 es normal, podemos encontrar A' y B' abiertos de M_0 , ajenos que separen a A y a B (i.e. $A \subseteq A'$ y $B \subseteq B'$). Luego como $(M_0 \cap M_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ son cerrados de M_0 y además $\bigcap_{\alpha < \kappa} (M_0 \cap M_\alpha) = M_0 \cap M = M \subseteq A' \cup B'$ se obtiene por el Lema 1.4 que hay $J \subseteq \kappa$ finito tal que $\bigcap_{\alpha < J} (M_0 \cap M_\alpha) \subseteq A' \cup B'$. Ahora, como la familia es dirigida, hay $\beta < \kappa$ tal que $M_\beta \subseteq \bigcap_{\alpha < J} (M_0 \cap M_\alpha) \subseteq A' \cup B'$. Como M_β es conexo, debe suceder que alguno de $(M_\beta \cap A')$, $(M_\beta \cap B')$ sea vacío, pero esto es imposible por las siguientes dos relaciones: (i) $\emptyset \neq B \subseteq M \cap B' \subseteq M_\beta \cap B'$ y (ii) $\emptyset \neq A \subseteq M \cap A' \subseteq M_\beta \cap A'$. Concluimos que no puede ser que M sea disconexo. ■

Con el Teorema anterior probado podemos acceder a otra herramienta de construcción de continuos: el límite inverso. El siguiente resultado nos da condiciones suficientes sobre la estructura de una gráfica dirigida como para que al tomar su límite inverso obtengamos un continuo no vacío.

Corolario 1.9 *Sea \mathbf{C} una gráfica cuyos vértices sean continuos no vacíos, cuyas aristas sean funciones continuas y que satisfaga que $|\text{aristas}(X_i, X_j)| \leq 1$, para todos los X_i, X_j . Suponga además que es **dirigida**, es decir que si tenemos dos vértices dados, haya alguno en \mathbf{C} que saque aristas hacia los otros dos. Entonces su límite inverso es un continuo no vacío.*

Prueba: Tome \mathbf{C} una gráfica con las condiciones del enunciado. Sabemos que:

$$L := \lim_{\leftarrow} \mathbf{C} \simeq \{x \in \prod_{i \in \mathbf{C}} X_i : \forall (X_i \xrightarrow{f} X_j) \in \mathbf{C} [f \circ p_i(x) = p_j(x)]\}.$$

En donde las p_i son las proyecciones usuales del producto. Como primer paso, definamos $Z_i \subseteq \prod_{i \in \mathbf{C}} X_i$ como el conjunto de puntos que *parcialmente* hacen conmutar al diagrama que caracteriza al límite inverso. Concisamente, serán los $x \in \prod_{i \in \mathbf{C}} X_i$ tales que para cualquier arista $X_i \xrightarrow{f} X_j$ de \mathbf{C} se tenga que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} p_i(x) & \xrightarrow{f} & f(p_i(x)) \\ p_i \uparrow & \nearrow p_j & \\ x & & \end{array}$$

Claramente $L = \bigcap_{i \in \mathbf{C}} Z_i$. Si logramos mostrar que cada Z_i es un continuo y que la familia de los Z_i es dirigida entonces podremos aplicar el Teorema 1.8 y habremos terminado.

Los Z_i son dirigidos: En efecto si X_i, X_j son vértices entonces existe otro vértice X_k con flechas hacia X_i y X_j , digamos $f: X_k \rightarrow X_i$ y $g: X_k \rightarrow X_j$. Mostremos que $Z_k \subseteq Z_i$. El argumento para ver que $Z_k \subseteq Z_j$ es análogo al que se describe a continuación. Tome $x \in Z_k$ y una arista $h: X_i \rightarrow X_m$. Hay que verificar que $p_m(x) = h(p_i(x))$. Consideramos $h \circ f: X_k \rightarrow X_m$. Se tiene que $p_m(x) = (h \circ f)(p_k(x))$. Luego note que $f(p_k(x)) = p_i(x)$ y listo.

Cada Z_i es un continuo: Para mostrar esto denote por Σ_i al conjunto que indexa a los vértices que no reciben ninguna arista que inicie en X_i , junto con i mismo. Note que $\prod_{j \in \Sigma_i} X_j$ es un continuo. Definimos $\phi: \prod_{j \in \Sigma_i} X_j \rightarrow Z_i$ de la siguiente manera:

$$\phi(x)_j = \begin{cases} x_j & \text{si } j \in \Sigma_i \\ f_{i,j}(x_i) & \text{si } j \notin \Sigma_i \end{cases}$$

Aquí $f_{i,j}$ denota la única arista que hay entre X_i y X_j .

Comprobemos que en efecto $\phi(x) \in Z_i$ para todo $x \in \prod_{j \in \Sigma_i} X_j$. Tome $g: X_i \rightarrow X_m$. Hay que ver que $\phi(x)_m = g(\phi(x)_i) = g(x_i)$, pero esto es trivial por la definición de ϕ .

Ahora veamos que ϕ es suprayectiva. Sea $y \in Z_i$ obtenga $x \in \prod_{j \in \Sigma_i} X_j$ como resultado de ignorar las coordenadas de y que no son parte de Σ_i . Entonces inmediatamente se tiene que $\phi(x)_j = x_j = y_j$ siempre que $j \in \Sigma_i$. Como $y \in Z_i$ se tiene que si $j \notin \Sigma_i$, entonces hay una arista $f: X_i \rightarrow X_j$ y así $\phi(x)_j = f(x_i) = f(y_i) = y_j$. Por lo tanto $\phi(x) = y$. Por último veamos que ϕ es continua. Bastará mostrar que para cada $X_k \in \mathbf{C}$ la función $p_k \circ \phi$ es continua. Pero esto es obvio ya que $p_k \circ \phi$ es simplemente la proyección al k -ésimo factor $\pi_k: \prod_{j \in \Sigma_i} X_j \rightarrow X_k$ en el caso de que $k \in \Sigma_i$ y en el caso de que $k \notin \Sigma_i$ entonces esta composición coincide con alguna f del sistema. En ambos casos, es continua y podemos finalmente concluir. Observe que basta garantizar que cada X_i sea no vacío para obtener que cada Z_i sea no vacío y en consecuencia que L sea no vacío. ■

Ya que tenemos estas herramientas disponibles, dedicamos el resto de esta sección a tratar de conocer un poco mejor a los continuos a través del

Teorema de Sierpiński, que nos habla de la restricción, en cuanto a cardinalidad, de las descomposiciones de continuos en subconjuntos cerrados ajenos. Por ejemplo, el cuadrado unitario se puede descomponer en 2^ω subcontinuos propios, ajenos por pares, a saber

$$I^2 = \bigcup_{t \in I} (\{t\} \times I).$$

También se puede descomponer en ω subcontinuos

$$I^2 = \bigcup_{n < \omega} ([1/(n+1), 1/n] \times I) \cup (\{0\} \times I).$$

Note que en ninguna de esas dos descomposiciones se satisface simultáneamente que la descomposición tenga a lo más ω piezas y estas sean ajenas mutuamente. Esto sucede en todos los continuos y es precisamente lo que afirma el Teorema de Sierpiński. Antes de enunciarlo y probarlo necesitamos una definición y dos lemas previos.

Definición 1.10 Sea X un espacio topológico y $p \in X$. El siguiente conjunto recibe el nombre de la **quasicomponente conexa** de p en X :

$$Q_X(p) = \bigcap \{A \subseteq X : A \text{ es abierto, cerrado y tiene a } p\}$$

Convención: A los subconjuntos de un espacio topológico que sean cerrados y abiertos los llamaremos **cerrabiertos**. Elegimos esta abreviación ya que es la *menos fea* entre las demás que son usualmente utilizadas, como *ambiguos*, *aberrados*, *clopens* y *emparejados*.

El siguiente es un resultado visto en los cursos de topología, por lo que nos conformamos con enunciarlo sin su prueba.

Teorema 1.11 Si X es compacto y Hausdorff entonces las componentes conexas coinciden con las quasicomponentes conexas.

Lema 1.12 Suponga que X es un continuo. Tome A un cerrado de X , no vacío y propio. Sea $C_A(x)$ una componente conexa de A para algún $x \in A$. Se afirma que tal componente interseca a ∂A .

Prueba: Por el Teorema 1.11 sabemos que en espacios Hausdorff compactos las componentes coinciden con las quasicomponentes conexas. Si consideramos

$$F = \{B \subseteq A : x \in B \text{ y } B \text{ es cerrabierto en } A\}$$

entonces tendremos que $C_A(x) = \bigcap F$. Ahora, suponga por el contrario que $C_A(x)$ y ∂A no tienen ningún punto en común. Entonces necesariamente debe existir $B_0 \in F$ de tal forma que $B_0 \cap \partial A = \emptyset$. De lo contrario, la familia $F' = \{\partial A \cap B : B \in F\}$ sería una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita en el compacto ∂A (porque F es cerrada bajo intersecciones) y esto implicaría que $\bigcap F' \neq \emptyset$. Lo cual implicaría que $\partial A \cap \bigcap F \neq \emptyset$, contradiciendo nuestra hipótesis. Sea U un abierto en X de tal suerte que $B_0 = U \cap A$. El hecho de que $B_0 \cap \partial A$ es vacío implica que $B_0 \subseteq \text{int}A$ y esto último nos indica que $B_0 = U \cap \text{int}A$; es decir, B_0 es abierto en X . Pero también es cerrado ya que A es cerrado. Por último, como X es conexo debe suceder que $B_0 = X$ y del hecho de que $B_0 \cap \partial A = \emptyset$ se desprende que ∂A es vacío. Lo cual es imposible porque A es cerrado y X es conexo. ■

Lema 1.13 *Suponga que X es un continuo y que $(F_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ es una colección de cerrados en X , al menos dos de ellos no vacíos, ajenos dos a dos y que cubren a X . Entonces para cada $\alpha < \kappa$ existe C un subcontinuo de X no vacío de tal forma que $C \cap F_\alpha = \emptyset$ y al menos dos de los $(C \cap F_\beta)_{\beta \neq \alpha}$ son no vacíos.*

Prueba: El caso donde $F_\alpha = \emptyset$ es trivial. Para el caso donde no es vacío: Tome $\gamma \neq \alpha$ de tal suerte que F_γ no sea vacío. Por la normalidad de X , hay U, V abiertos de X ajenos tales que $F_\alpha \subseteq U$ y $F_\gamma \subseteq V$. Considere $\text{cl}V$. Es claro que $\text{cl}V \cap U = \emptyset$. Si consideramos $x \in F_\gamma$ y $C_{\text{cl}V}(x)$ como su componente conexa. Tendremos que $C_{\text{cl}V}(x)$ es un continuo ajeno a F_α y que además interseca a F_γ . Luego, por el Lema 1.12, tenemos que $C_{\text{cl}V}(x) \cap \partial(\text{cl}V)$ no es vacío. Ahora, como $F_\gamma \subseteq \text{int}(\text{cl}V)$, se sigue que F_γ no puede tener puntos en común con $\partial(\text{cl}V)$. Así que $C_{\text{cl}V}(x)$ interseca algún F_δ con $\delta \neq \gamma$. Luego el hecho de que $C_{\text{cl}V}(x)$ es ajeno a F_α implica que $\delta \neq \alpha$. ■

Teorema 1.14 (Sierpiński) *Un continuo no se puede ver como una unión ajena y numerable de cerrados propios (en particular, de subcontinuos).*

Prueba: Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que X es un continuo y que $(F_n)_{n < \omega}$ es una sucesión de cerrados, ajenos por pares, que

cubren a X , y sin perder generalidad, ninguno de ellos siendo vacío. Para F_0 , existe $C_0 \subset X$ un continuo ajeno a él que interseca a al menos dos de los $(F_n)_{n>0}$. Luego C_0 es un continuo y $(C_0 \cap F_n)_{n>0}$ son ajenos por pares, cerrados en C_0 , cubren a C_0 y además dos de ellos son no vacíos, entonces aplicando de nuevo el lema anterior tenemos que para $(C_0 \cap F_1)$ hay $C_1 \subseteq C_0$ un continuo que lo evade y que interseca a al menos dos de los $(C_0 \cap F_n)_{n>1}$. Luego consideramos C_1 que es un continuo y la familia de cerrados $(C_1 \cap F_n)_{n>1}$. Aplicando el Lema 1.13, para $(C_1 \cap F_2)$ hay $C_2 \subseteq C_1$ un continuo que lo evade y que interseca a al menos dos de los $(C_1 \cap F_n)_{n>2}$. Formalicemos esta descripción mediante un proceso de inducción. Supongamos que tenemos definido C_n . Considere $(C_n \cap F_{n+1})$. Por el Lema 1.13, existe un subcontinuo $C_{n+1} \subseteq C_n$ tal que $C_{n+1} \cap (C_n \cap F_{n+1}) = \emptyset$ y al menos dos de los $(C_{n+1} \cap F_j)_{j>n+1}$ son no vacíos. Esta definición nos da una sucesión decreciente de continuos no vacíos $(C_n)_{n<\omega}$, con la característica de que para cada n se tiene que $C_n \cap F_n = \emptyset$, esto implica que $(\bigcap_{n<\omega} C_n) \cap (\bigcup_{n<\omega} F_n) = \emptyset$, de aquí se concluye que $\bigcap_{n<\omega} C_n = \emptyset$. Por otro lado, del Teorema 1.8 se obtiene que $\bigcap_{n<\omega} C_n \neq \emptyset$, una contradicción. ■

1.2. Continuos Indescomponibles

En esta pequeña sección ofrecemos un breve estudio de lo que son los continuos indescomponibles y los hereditariamente indescomponibles. Para las personas familiarizadas con estos temas sugiero solamente tener presente un par de teoremas de esta sección, el 1.19 y el 1.21, ya que estos serán necesarios en la justificación de un resultado esencial.

Definición 1.15 *Un continuo es **indescomponible** si no se puede ver como la unión de dos subcontinuos propios. Es **hereditariamente indescomponible** si cada uno de sus subcontinuos es indescomponible.*

No es muy fácil proporcionar un ejemplo de un continuo indescomponible y mucho menos lo es de uno hereditariamente indescomponible, por esto mismo dedicamos esta sección a su estudio abstracto. En la siguiente sección expondremos un ejemplo proporcionado por R. H. Bing, mismo que es el objeto de estudio de este texto.

Como ejemplos de continuos descomponibles tenemos al intervalo unitario, las esferas de dimensión finita, el 2-toro y el cuadrado unitario. Note que

es imposible que exista una descomposición *ajena* en dos subcontinuos propios de cualquier continuo, pues esto nos daría una desconexión del espacio total.

Definición 1.16 *Sea X un continuo. Al conjunto $H \subseteq X$ se le llama una **composante** de X si existe un punto $p \in X$ de tal suerte que*

$$H = \bigcup \{M \subseteq X : p \in M \text{ y } M \text{ es un subcontinuo propio de } X\}.$$

Note la omisión de la palabra *conexa* en la definición anterior. Son conceptos distintos.

El cuadrado unitario tiene una única composante, a saber, él mismo y tal composante lo es de todos sus puntos. El intervalo unitario tiene tres composantes, a saber $[0, 1)$ que es composante de 0, $(0, 1]$ composante de 1 y $[0, 1]$ que es composante de cualquier punto interior de $[0, 1]$. Observe que las composantes no siempre son ajenas y que, al menos en estos ejemplos, siempre son densas. Los siguientes resultados, además de utilizarlos en el estudio del pseudoarco, nos muestran el interesante comportamiento de las composantes en continuos indescomponibles.

Lema 1.17 *Si X es un continuo y C es un subcontinuo propio de tal suerte que $X - C$ se puede desconectar como $A \cup B$ (ambos cerrabiertos respecto a $X - C$, ajenos y no vacíos) entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son subcontinuos propios de X .*

Prueba: Primero verifiquemos que $A \cup C$ y $B \cup C$ son cerrados en X . Sea $p \in cl_X(A \cup C)$. Observe que B es abierto en X y que A, B y C son ajenos por pares. Estas dos observaciones implican que no es posible que $p \in B$, por lo tanto, $p \in A \cup C$. De forma análoga se comprueba que $cl_X(B \cup C) \subseteq B \cup C$. Al ser cerrados en un compacto, son también compactos. Probemos ahora la conexidad. Si $A \cup C$ fuera desconexo entonces se puede separar como

$$A \cup C = U \cup V$$

con U, V cerrabiertos ajenos y no vacíos. Por ser C un continuo, necesariamente se tiene que $C \subseteq U$ o $C \subseteq V$, sin perder generalidad, digamos que $C \subseteq V$, esto implica que $U \subseteq A$. Tomemos ahora a

$$Z = V \cup B$$

y notamos que

$$X = (X - C) \cup C = (A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B = U \cup V \cup B = U \cup Z$$

O sea que $X = U \cup Z$ es una desconexión de X , lo cual es imposible. Análogamente se muestra que $B \cup C$ es conexo. ■

Teorema 1.18 *Un continuo X es indescomponible cuando y sólo cuando todos sus subcontinuos propios sean nunca densos.*

Prueba: Vamos a probar solamente que si un subcontinuo propio tiene interior no vacío entonces X es descomponible. La otra parte del resultado queda para el lector. Sea $C \subsetneq X$ un subcontinuo propio de X con interior no vacío. Considere $X - C$; este conjunto puede ser o no conexo. Si es conexo entonces $cl(X - C)$ es un subcontinuo y es propio ya que $int C$ no es vacío. Así las cosas podemos descomponer a X en dos subcontinuos propios, a saber, $cl(X - C)$ y C . Si $X - C$ es desconexo aplique el Lema 1.17 para obtener una descomposición de X . ■

Teorema 1.19 *Las componentes son ajenas en continuos indescomponibles.*

Prueba: Sea X un continuo indescomponible. Supongamos que H es una composante asociada al punto h y que K es una componente asociada al punto k . Si tienen al punto p en común, entonces existe $M_0 \subseteq X$ un subcontinuo propio que tiene tanto a p como a h y $M_1 \subseteq X$ un subcontinuo propio que tiene a p y a k . El Teorema de Categoría de Baire y el Teorema 1.18 nos garantizan que $M = M_0 \cup M_1$ es un subcontinuo propio, y además $h, k \in M$. Ahora, si $C \subseteq X$ es un subcontinuo propio que tiene a h , tendremos que $C \cup M$ es otro subcontinuo propio que tiene a h y a k , por lo tanto $C \subseteq C \cup M \subseteq K$. Esto garantiza que $H \subseteq K$. Análogamente se prueba que $K \subseteq H$. ■

Lema 1.20 *Si X es un continuo segundo numerable entonces cualquier composante de X es la unión de una colección numerable de subcontinuos propios de X .*

Prueba: Tomemos H una composante asociada al punto p . Considere el espacio $X - \{p\}$ y $(U_i)_{i < \omega}$ una base para este espacio de tal forma que ningún U_i sea denso en X . Definimos C_i como la componente conexa de p en $(X - cl U_i)$. Observe que $cl C_i$ es un subcontinuo propio que tiene a p ,

por lo tanto $cl C_i \subseteq H$. Se afirma que $H = \bigcup_{i < \omega} cl C_i$. Tome $x \in H$ y tome C un subcontinuo propio de X que tenga a p y a x . Considere $X - C$ y q en él. Tenemos que $X - C \subseteq X - \{p\}$ y por lo tanto hay $n < \omega$ tal que $q \in U_n \subseteq cl U_n \subseteq X - C$. Así que C_n contiene a p , por lo tanto, $C_n \supseteq C$ y así $x \in C_n \subseteq cl C_n$. ■

Teorema 1.21 *Un continuo indescomponible y segundo numerable tiene más de ω componentes.*

Prueba: Si tuviera ω componentes entonces por el Lema anterior, cada componente se ve como la unión numerable de subcontinuos propios; por el Teorema 1.18 se tiene que cada subcontinuo propio es nunca denso, entonces tendríamos que X es una unión numerable de nunca densos, lo cual, por el Teorema de Categoría de Baire, es imposible. ■

1.3. El pseudoarco

Aquí estudiaremos lo que es el pseudoarco y su construcción clásica. Las construcciones y pruebas aquí presentadas pueden ser encontradas con menor detalle en [3]. A grandes rasgos, lo que se hace es lo siguiente:

1. Construir de manera clásica el pseudoarco.
2. Ver que es hereditariamente indescomponible.
3. Dar una caracterización topológica del pseudoarco (Teorema 1.34).

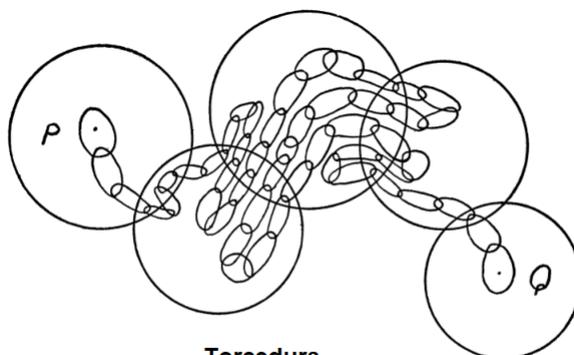
Comenzamos con una lista de definiciones.

Definición 1.22 (Cadena) *Dado un espacio topológico X no vacío, a una colección finita de subconjuntos abiertos de X no vacíos $\{A_1, \dots, A_n\}$ se le llama una cadena si A_i interseca a A_j cuando y sólo cuando $|i - j| \in \{0, 1\}$. Además requerimos que la unión de todos los eslabones de la cadena forme un conjunto conexo. A los A_i 's se les llama los eslabones de la cadena.*

Definición 1.23 (Contención) *Se dice que la cadena E está contenida en la cadena D (que denotaremos abusando de la notación como $E \subseteq D$) cuando cada eslabón de E esté contenido en al menos un eslabón de D .*

Definición 1.24 (Sub-cadena) Una cadena E es subcadena de la cadena D (denotado $E \leq D$) si cada eslabón de E es a su vez un eslabón de D . A la sub-cadena de E constituida por los eslabones entre i y j la denotaremos como $E(i, j)$.

Definición 1.25 (Torcedura) Diremos que una cadena E , contenida en otra cadena D , está torcida en D si siempre que una subcadena $E(i, j)$ interseque a un par de eslabones de D , digamos d_h, d_k , los cuales están separados por al menos 2 eslabones (i.e. $|h - k| > 2$) en sus eslabones inicial e_i y final e_j , respectivamente, se tenga que $E(i, j)$ se puede ver como la unión de 3 sub-cadenas $E(i, r), E(r, s), E(s, j)$ con la peculiaridad de que $(s - r)(j - i) > 0$ y e_r esté contenido en el eslabón adyacente a d_k en $D(h, k)$ y e_s esté contenido en el eslabón adyacente a d_h en $D(h, k)$.



Torcedura

Imagen extraída de [3]

Ahora sí procedemos a construir el pseudoarco y a mostrar que es hereditariamente indescomponible.

El pseudoarco: Sea (\mathbb{R}^2, d) el plano euclídeo con su métrica usual. Tome dos puntos en él, digamos P y Q . Formemos una colección de cadenas $\{C_i\}_{i < \omega}$ desde P hasta Q con las siguientes características:

1. Todo eslabón de cada C_i es un disco abierto.
2. Para todo índice i , la cadena C_{i+1} está torcida en la cadena C_i .
3. Todo eslabón de C_i tiene diámetro menor que $1/(i + 1)$.

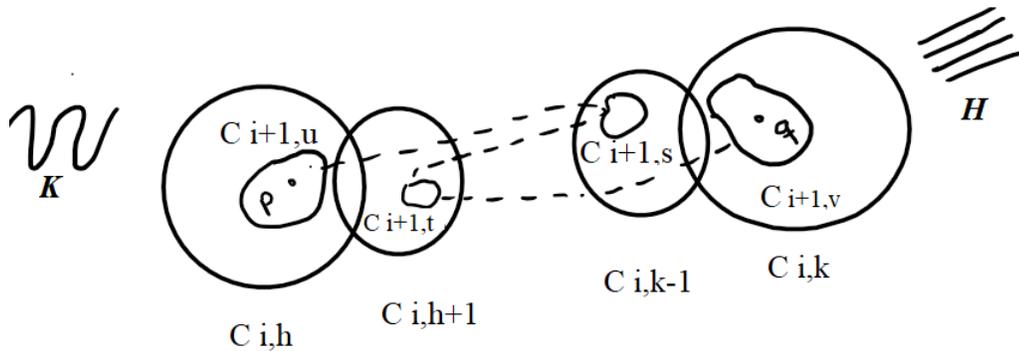
4. Cualquier eslabón en C_{i+1} tiene su cerradura contenida en algún eslabón de C_i .

Si denotamos por C_i^* al resultado de unir las cerraduras de los eslabones de C_i entonces cada C_i^* es un continuo y por el Teorema 1.8 se sigue que $M = \bigcap_{i < \omega} C_i^*$ es un continuo no vacío. Tal continuo recibe el nombre de pseudoarco.

Observación: Este continuo tiene al menos dos puntos, a saber, P y Q .

Teorema 1.26 *El pseudoarco es hereditariamente indescomponible.*

Prueba: Supongamos que esto no es así, es decir, que existe $M' \subseteq M$ un subcontinuo que es descomponible en subcontinuos propios, digamos que $M' = H \cup K$. Tome $p \in M' - H$ y $q \in M' - K$. Existe algún i natural de tal forma que $2/i$ sea más pequeño que $d(p, H)$ y que $d(q, K)$.



Sea $C_{i,h}$ el último eslabón de C_i que tiene a p y $C_{i,k}$ el primero de C_i que tiene a q . Se afirma que $C_{i,h+1}$ interseca a K pero no a H y que $C_{i,k-1}$ interseca a H pero no a K . Probemos que $C_{i,h+1}$ no interseca a H . Si $x \in H \cap C_{i,h+1}$, seleccione $x' \in C_{i,h} \cap C_{i,h+1}$, tendremos que

$$d(x, p) \leq d(x, x') + d(x', p) < 2/(i + 1),$$

lo cual es imposible. El hecho de que $C_{i,h+1}$ interseca a K se puede ver de la siguiente forma. Como M' interseca a $C_{i,h}$ y a $C_{i,k}$ entonces debe intersecar a cualquier eslabón de C_i entre estos dos, en particular a $C_{i,h+1}$ pero $M' = H \cup K$ y ya vimos que no puede tocar a H . Análogamente se muestra que $C_{i,k-1}$ interseca a H pero no a K . Así que hay al menos dos eslabones de C_i entre $C_{i,h}$ y $C_{i,k}$. Luego como la cadena C_{i+1} está torcida en C_i de nuevo podemos hallar el último y primero eslabones de ella que tengan a p y a q respectivamente, digamos que son $C_{i+1,u}$ y $C_{i+1,v}$ y los dos eslabones que son testigos de la torcedura, digamos $C_{i+1,s} \subseteq C_{i,k-1}$ y $C_{i+1,t} \subseteq C_{i,h+1}$; aquí estamos pensando que $s < t$. Luego, K debe intersecar a $C_{i+1,t}$, pues como $C_{i+1,t} \cap M' \neq \emptyset$ podemos seleccionar algún y en este conjunto y entonces y tiene sólo dos opciones: $y \in H$ o $y \in K$. Si $y \notin K$ entonces $y \in H$, pero entonces

$$y \in H \cap C_{i+1,t} \subseteq H \cap C_{i,h+1}$$

lo cual es imposible; así pues K debe intersecar a $C_{i+1,t}$.

Ahora, como K es un continuo y tiene puntos en común con $C_{i+1,u}$ y con $C_{i+1,t}$ también debe intersecar a $C_{i+1,s}$, lo cual es absurdo ya que $C_{i+1,s} \subseteq C_{i,k-1}$. ■

El siguiente Teorema nos da condiciones sobre un par de subconjuntos compactos de un espacio métrico como para que sean homeomorfos. El resultado menciona la noción de *tipo de orden*, si quien lee no está familiarizado con la teoría de ordinales y tipos de órdenes, puede sustituir la palabra *tipo de orden* por *número natural* (con su orden canónico). De hecho para el desarrollo subsecuente del texto sólo necesitamos esta versión más débil.

Teorema 1.27 *Considere M_0 y $M_1 \subseteq (X, d)$ un par de conjuntos compactos. Suponga que $(b_i)_{i < \omega}$ es una sucesión de reales positivos cuya suma es finita y que tenemos un par de colecciones numerables $(X_{0,i})_{i < \omega}$ y $(X_{1,i})_{i < \omega}$ de cubiertas abiertas de M_0 y M_1 , respectivamente, que satisfagan lo siguiente:*

1. *Para cada natural i , el conjunto que indexa $X_{0,i}$ está bien ordenado y su tipo de orden es exactamente el mismo que el del conjunto que indexa $X_{1,i}$.*
2. *Cada abierto de $X_{0,i}$ interseca a M_0 y lo propio para las piezas de $X_{1,i}$.*

3. Cada abierto de $X_{0,i}$ tiene diámetro menor o igual a b_i . Lo mismo para los abiertos de $X_{1,i}$.
4. Si el j -ésimo elemento de $X_{0,i+1}$ interseca al k -ésimo elemento de $X_{0,i}$ entonces la distancia de los k -ésimos elementos de $X_{0,i}$ y de $X_{1,i}$ a los j -ésimos elementos de $X_{0,i+1}$ y $X_{1,i+1}$ es menor a b_i , respectivamente. Lo propio para $X_{1,i}$.

Bajo estas condiciones, existe un homeomorfismo entre M_0 y M_1 .

Prueba: Tome un punto $p \in M_0$. Denotamos por $X_{n,i}(k)$ al k -ésimo elemento de $X_{n,i}$. Defina $Y_{n,i}(k)$ como el conjunto de puntos de X cuya distancia a $X_{n,i}(k)$ es más chica que $b_i + 2(b_{i+1} + \dots)$ y defina $Y_{n,i}$ como la colección de estos $Y_{n,i}(k)$'s. En símbolos:

$$Y_{n,i}(k) = \{x \in X : d(x, X_{n,i}(k)) < b_i + 2(b_{i+1} + \dots)\} \text{ y}$$

$$Y_{n,i} = \{Y_{n,i}(\alpha) : \alpha \in \text{tipo de orden de } X_{n,i}\}.$$

Supongamos que $X_{n,i}(r)$ interseca a $X_{n,i+1}(s)$, entonces por la condición 4 se tendrá que $d(X_{m,i+1}(s), X_{m,i}(r)) < b_i$ (cualquiera que sea $m \in \{0, 1\}$).

Luego, se afirma que $cl(Y_{m,i+1}(s)) \subseteq Y_{m,i}(r)$. En efecto tome $x \in cl(Y_{m,i+1}(s))$. Hay $z \in X_{m,i}(r)$ y $w \in X_{m,i+1}(s)$ tales que $d(z, w) < b_i - \delta$ (para algún $\delta > 0$). Ahora dado $\varepsilon > 0$, tome $y \in Y_{m,i+1}(s)$ de tal suerte que $d(x, y) < \varepsilon$. Para tal y hay $w' \in X_{m,i+1}(s)$ que cumple con que $d(y, w') < b_{i+1} + 2(b_{i+2} + \dots)$. Combinando estos hechos y por la desigualdad del triángulo se obtiene que:

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, w') + d(w', w) + d(w, z) < \\ &< \varepsilon + b_{i+1} + 2(b_{i+2} + \dots) + b_{i+1} + b_i - \delta. \end{aligned}$$

Así $d(x, z) \leq b_i + 2(b_{i+1} + \dots) - \delta < b_i + 2(b_{i+1} + \dots)$ y esto implica que $d(x, X_{m,i}(r)) < b_i + 2(b_{i+1} + \dots)$ y en consecuencia la contención deseada.

De manera análoga, es fácil ver que si $i < j$ y $X_{m,i}(r)$ interseca a $X_{m,j}(s)$ entonces $cl(Y_{m,j}(s)) \subseteq Y_{m,i}(r)$.

Procedemos a definir nuestro candidato a homeomorfismo

$$T: M_0 \rightarrow M_1.$$

Definimos $T(p)$. Suponga que $(X_{0,i}(a_i))_{i < \omega}$ es una secuencia de piezas de las cubiertas donde cada una de ellas tiene a p . Definimos

$$T(p) = \text{el \u00fanico punto en } \bigcap_{i < \omega} Y_{1,i}(a_i).$$

Claro que hay que cerciorarse de algunas cosas antes de proseguir: la primera es que en efecto hay un \u00fanico punto en la mencionada intersecci\u00f3n, la segunda que $T(p)$ no depende de la sucesi\u00f3n $(X_{0,i}(a_i))_{i < \omega}$ y la tercer cosa que hay que ver es que $T(p) \in M_1$.

Veamos la primera. Como $X_{0,i+1}(a_{i+1})$ interseca a $X_{0,i}(a_i)$ entonces

$$cl(Y_{1,i+1}(a_{i+1})) \subseteq Y_{1,i}(a_i) \subseteq cl(Y_{1,i}(a_i)).$$

Por lo tanto hay $q \in \bigcap_{i < \omega} cl(Y_{1,i}(a_i)) = \bigcap_{i < \omega} Y_{1,i}(a_i)$. Luego, q debe ser \u00fanico porque los di\u00e1metros de esta sucesi\u00f3n tienden a cero, debido a la convergencia de su serie.

Veamos la segunda. Si $(X_{0,i}(a'_i))_{i < \omega}$ es otra sucesi\u00f3n de piezas que tiene a p entonces dado $m < \omega$ tenemos que como $p \in X_{0,m}(a'_m) \cap X_{0,m+1}(a_{m+1})$ se sigue que $Y_{1,m}(a'_m) \supseteq cl(Y_{1,m+1}(a_{m+1}))$. Esto es suficiente como para garantizar que ambas sucesiones tienen exactamente la misma intersecci\u00f3n.

Por \u00faltimo revisemos la tercera. Debido a la definici\u00f3n de $Y_{1,i}(k)$ se tiene que

$$d(Y_{1,i}(k), X_{1,i}(k)) < b_i + 2(b_{i+1} + \dots).$$

Como el di\u00e1metro de las piezas de $X_{1,i}$ tiende a cero y adem\u00e1s todas las piezas de cada cubierta intersecan a M_1 , se tendr\u00e1 que $\bigcap_{i < \omega} Y_{1,i}(a_i) \subseteq M_1$.

As\u00ed queda definida una funci\u00f3n

$$T: M_0 \rightarrow M_1.$$

Notemos que debido a la topolog\u00eda de M_0 y M_1 , es suficiente comprobar que T es continua y biyectiva como para garantizar que sea un homeomorfismo.

T es continua: Si U es un abierto de M_1 que tiene a $T(p)$ entonces existe cierto $r > 0$ de tal forma que la bola centrada en $T(p)$ de radio r est\u00e1

contenida en U . Tome j suficientemente grande como para que $Y_{1,j}(a_j)$ tenga diámetro menor a $r/2$. Como $T(p) \in \bigcap_{i < \omega} Y_{1,i}(a_i) \subseteq Y_{1,j}(a_j)$, si $x \in Y_{1,j}(a_j)$ entonces

$$d(x, T(p)) \leq r/2 < r.$$

Esto muestra que

$$Y_{1,j}(a_j) \cap M_1 \subseteq B_r(T(p)) \subseteq U.$$

Luego si $z \in X_{0,j}(a_j) \cap M_0$ entonces $T(z) \in Y_{1,j}(a_j)$ y así tenemos que $T[X_{0,j}(a_j) \cap M_0] \subseteq U$ y como $X_{0,j}(a_j)$ es abierto se tendrá que T es continua.

Comprobemos la suprayectividad: Suponga que U es un abierto no vacío de X que interseca a M_1 , digamos que $p \in U \cap M_1$. Tome $j < \omega$ suficientemente grande como para que cualquier pieza de $Y_{1,j}$ que tenga a p se quede contenida en U . Sea $X_{1,j}(r)$ la pieza de la cubierta $X_{1,j}$ que tenga a p . Note que

$$T[X_{0,j}(r) \cap M_0] \subseteq Y_{1,j}(r) \cap M_1 \subseteq U.$$

Por la condición 2, tenemos que $X_{0,j} \cap M_0 \neq \emptyset$ y así $U \cap T[M_0] \neq \emptyset$, es decir $T[M_0]$ es denso en M_1 y al ser M_0 compacto, se tiene que $T[M_0]$ es compacto y en particular cerrado, es decir $T[M_0] = M_1$.

Finalmente veamos que T es inyectiva: Tome x, x' dos puntos distintos en M_0 y suponga que van al mismo punto, es decir $T(x) = T(x')$. Tome $k < \omega$ suficientemente grande como para que ninguna pieza de $Y_{0,k}$ tenga tanto a x como a x' . Sea $X_{1,k}(r)$ la pieza de $X_{1,k}$ que tiene a $T(x)$. Se puede hallar $j > k$ de tal forma que cualquier pieza de $Y_{1,j}$ que tenga a $T(x)$ se quede contenida en $X_{1,k}(r)$. Considere ahora $X_{0,j}(u)$ y $X_{0,j}(v)$ las piezas de $X_{0,j}$ que tengan a x y a x' , respectivamente. Como $Y_{1,j}(u)$ y $Y_{1,j}(v)$ tienen a $T(x)$ y además $X_{1,j}(u) \subseteq Y_{1,j}(u)$ y $X_{1,j}(v) \subseteq Y_{1,j}(v)$ se sigue que $X_{1,j}(u)$ y $X_{1,j}(v)$ son subconjuntos de $X_{1,k}(r)$. Entonces $Y_{0,j}(u), Y_{0,j}(v) \subseteq Y_{0,k}(r)$ y de aquí se desprende que $x, x' \in Y_{0,k}(r)$, lo cual es imposible. ■

Introducimos ahora dos nuevas definiciones de conceptos relacionados al estudio de las cadenas que utilizaremos en un Teorema subsecuente.

Definición 1.28 (Consolidación:) *Una cadena $D \supseteq E$ es consolidación de la cadena E si todo eslabón de D se puede ver como la unión de una sub-colección de E .*

Definición 1.29 (Patrón) Si $A = \{(x_i, y_i) : i = 0, \dots, n\}$ es una colección de pares de números naturales, diremos que la cadena E sigue el patrón A dentro de la cadena D si el x_i -ésimo eslabón de E está contenido en el y_i -ésimo eslabón de D .

Teorema 1.30 Tome dos puntos p y q en el espacio métrico (X, d) y una colección de pares ordenados de números naturales

$$A = \{(1, x_1), (2, x_2), \dots, (n, x_n)\}$$

de tal manera que las x_i estén en orden no decreciente, separadas por a lo más una unidad y $x_1 = h, x_n = k$. Suponga también que $(D_i)_{i < \omega}$ es una sucesión de cadenas desde p hasta q con las siguientes características:

- D_{i+1} está torcida en D_i .
- El diámetro de cada eslabón de D_i es a lo más $\frac{1}{i+1}$.
- La cerradura de cada eslabón de D_{i+1} es un compacto contenido en algún eslabón de D_i .

Entonces podemos encontrar un j suficientemente grande como para que exista una consolidación E de D_j que siga el patrón A en D_1 .

Prueba: Probemos primero que existe $\varepsilon > 0$ de tal suerte que si un conjunto Y interseca a algún eslabón de D_2 y Y tiene diámetro menor a ε entonces Y se queda contenido en algún eslabón de D_1 . Considere el eslabón $D_{2,1} \subseteq D_{1,t}$. Podemos cubrir $cl(D_{2,1})$ con bolas que se queden contenidas en $D_{1,t}$ entonces al extraer una subcubierta finita podemos hallar el mínimo radio r de las bolas en esa subcubierta. Considere la nube N de radio $r/2$ centrada en $cl(D_{2,1})$:

$$N = \bigcup_{x \in cl(D_{2,1})} B_{r/2}(x).$$

Si $x \in N$ entonces $d(x, y) < r/2$, para algún $y \in cl(D_{2,1})$, tal y pertenece a alguna bola de la subcubierta finita, entonces dicha bola deberá incluir a x y así $N \subseteq D_{1,t}$. Así, para cada eslabón de D_2 podemos hallar una nube de cierto radio que lo contenga y se quede contenida en algún eslabón de D_1 que contenga al mencionado eslabón de D_2 . Tome ε como el mínimo de los radios de tales nubes, ese es como el deseado.

Ahora, si los eslabones de cierta cadena tienen diámetro a lo más r , entonces el diámetro de la unión de una subcadena de longitud j será de $j \cdot r$.

Usando esto junto con lo anterior y nuestras hipótesis podemos afirmar que existe un natural m suficientemente grande como para que cualquier subcadena de D_m de longitud 5 que interseque a algún eslabón de $D_2(u, v)$ se quede contenida en un eslabón de $D_1(h, k)$, y en consecuencia obtendremos que cualquier subcadena de longitud 5 de D_m que interseque a $D_{2,u}$ se quede contenida en $D_{1,h}$, y cualquiera de longitud 5 que interseque a $D_{2,v}$ se quede contenida en $D_{1,k}$.

Observemos que el mínimo valor que podría tomar n es $k-h+1$, esto en el caso de que el patrón fuera el más simple posible, es decir, avanzar sin nunca estacionarse en un eslabón. Si este fuera el caso, tome $j > m$ cualquiera. Defina a e_1 como la unión de todos los eslabones de D_j contenidos en la unión de la cadena $D_2(u, v)$ (que denotaremos $D_2^*(u, v)$) y en $D_{1,h}$, e_2 será la unión de los eslabones de D_j contenidos en $D_{1,h+1}$ y en $D_2^*(u, v)$ pero no en $D_{1,h}, \dots$, e_n será la unión de los eslabones de D_j contenidos en $D_{1,k}$ y en $D_2^*(u, v)$ pero no en $D_{1,k-1}$. Esta cadena E satisface lo deseado. Ahora analicemos el patrón que consiste en estacionarse dos veces en $D_{h,1}$ y después seguir avanzando. Por el caso simple anterior, podemos encontrar un número j suficientemente grande como para que una consolidación de D_j siga el patrón $(1, h), (2, h)$ en $D_{1,h}$ y que además siga el patrón $(3, h+1), \dots, (n+1, k)$ en $D_1(h, k)$, esto último de nuevo por el caso especial. Consolidando adecuadamente esta última cadena se obtiene el resultado para este patrón. Observe que cualquier otro patrón es de este estilo, pues las x_i están ordenadas de manera no decreciente y entonces podremos aplicar argumentos similares. ■

Teorema 1.31 *Suponga que M_0 y M_1 son continuos contenidos en un espacio métrico (X, d) , que p_0 y q_0 son puntos distintos en M_0 y p_1 y q_1 son puntos distintos en M_1 ; sea $(b_i)_{i < \omega}$ una sucesión de reales positivos cuyo límite es cero; suponga que $(D_{0,i})_{i < \omega}$ es una sucesión de cadenas que van de p_0 a q_0 con las siguientes características:*

1. $D_{0,i+1}$ está torcida en $D_{0,i}$, esto para todo $i < \omega$.
2. La cerradura de cada eslabón de $D_{n,i+1}$ es un compacto contenido en algún eslabón de $D_{n,i}$.
3. Todo eslabón de $D_{n,i}$ tiene diámetro menor o igual a b_i .

4. $M_0 = \bigcap_{i < \omega} D_{0,i}^*$, donde $D_{0,i}^*$ denota la unión de los eslabones de la cadena $D_{0,i}$.

Y suponga que $(D_{1,i})_{i < \omega}$ es una sucesión de cadenas que van de p_1 a q_1 con las características de la lista anterior pero respecto a M_1 . Bajo estas condiciones se puede hallar un homeomorfismo $T: M_0 \rightarrow M_1$ que lleva a p_0 en p_1 y a q_0 en q_1 .

Prueba: La idea es usar el Teorema 1.27 para dar el homeomorfismo. Tomemos alguna cadena D_{0,k_0} cuyos eslabones tengan diámetro más chico que $1/2$. Definimos $X_{0,0} = D_{0,k_0}$. Definimos $X_{1,0}$ como la consolidación de alguna cadena $D_{1,i}$ de tal suerte que tal consolidación tenga el mismo número de eslabones que $X_{0,0}$. Podemos encontrar alguna cadena $D_{1,j}$ contenida en $X_{1,0}$ cuyos eslabones tengan un diámetro más pequeño que $1/2$. Definimos $X_{1,1} = D_{1,j}$. Considere el patrón A que $X_{1,1}$ sigue en $X_{1,0}$. Por el Teorema 1.30 podemos encontrar una cadena $D_{0,k}$ contenida en $X_{0,0}$ y una consolidación de ella que siga el patrón A en $X_{0,0}$, a tal consolidación la llamamos $X_{0,1}$. Notemos que $X_{0,1}$ y $X_{1,1}$ tienen el mismo tipo de orden por seguir ambas el mismo patrón A . Luego podemos encontrar $X_{0,2}$ otra cadena cuyos eslabones tengan un diámetro menor a $1/4$ que este contenida en $X_{0,1}$. Considere ahora el patrón A' que sigue $X_{0,2}$ en $X_{0,1}$. Podemos encontrar una consolidación de alguna $D_{1,k}$ que siga el patrón A' en $X_{1,1}$. A tal consolidación la llamamos $X_{1,2}$. Tome $X_{1,3}$ una cadena $D_{1,k}$ con eslabones de diámetro menor a $1/4$ y considere el patrón A'' que sigue en $X_{1,2}$. Encuentre una consolidación de alguna $D_{0,k}$ tal que siga el patrón A'' que sigue $X_{1,3}$ en $X_{1,2}$, a tal consolidación la llamamos $X_{0,3}$. Siguiendo este proceso infinitamente podremos hallar una colección de cubiertas $(X_{0,i})_{i < \omega}$ de M_0 y $(X_{1,i})_{i < \omega}$ de M_1 veamos que cumplen las características descritas en el Teorema 1.27. Aquí $b_i = \max\{\text{esl}(X_{0,i}), \text{esl}(X_{1,i})\}$. Donde $\text{esl}(X_{0,i})$ denota el diámetro máximo que alcanzan las piezas de $X_{0,i}$. Es claro que las características 1,2,3 del Teorema 1.27 son satisfechas por esta familia. Veamos sólo la 4. Supongamos que $X_{0,i+1}(j)$ interseca a $X_{0,i}(k)$, entonces $X_{0,i+1}(j)$ sólo puede estar contenido en alguno de estos tres links: $X_{0,i}(k-1)$, $X_{0,i}(k)$, $X_{0,i}(k+1)$ (posiblemente en dos a la vez). Como nuestra construcción *preserva los patrones* tendremos que $X_{1,i+1}(j)$ sólo puede estar contenido en alguno de estos tres links: $X_{1,i}(k-1)$, $X_{1,i}(k)$, $X_{1,i}(k+1)$ (posiblemente en dos a la vez). En cualquier caso se tendrá que la distancia de $X_{1,i+1}(j)$ a $X_{1,i}(k)$ es menor a $\text{esl}(X_{1,i}) \leq b_i$. El homeomorfismo descrito en el Teorema 1.27 cumple lo deseado. ■

Definición 1.32 Considere (X, d) un continuo metrizable. Decimos que X puede ser **encadenado** o que es **encadenable** si dado cualquier $r > 0$ existe una cadena C que cubre a X cuyos eslabones tienen un diámetro menor que r .

Lema 1.33 Suponga que M es un continuo hereditariamente indescomponible y encadenable con más de un punto. Al ser encadenable existe una secuencia de cadenas decreciente $(C_i)_{i < \omega}$ de tal forma que todos los eslabones de C_i tienen diámetro menor a $1/(i + 1)$. Bajo estas condiciones, existe una cadena C_n que está torcida en C_0 .

Prueba: Supongamos que esto no sucede. Tome cualquier natural m , como C_m no está torcida en C_0 , deben de existir eslabones de C_m , digamos $C_{m,i}$ y $C_{m,j}$ junto con eslabones $C_{0,h}$ y $C_{0,k}$ con $k - h > 2$ de tal forma que $C_{m,i} \subseteq C_{0,h}$ y $C_{m,j} \subseteq C_{0,k}$ y satisfaciendo además que si $C_{m,r}$ es un eslabón entre $C_{m,i}$ y $C_{m,j}$ que se encuentre en $C_{1,k-1}$ entonces no existe ningún eslabón de C_m en $C_{1,h+1}$ que también se encuentre entre $C_{m,r}$ y $C_{m,j}$. Al eslabón $C_{m,r}$ se le puede tomar mínimo, en el sentido de que ningún eslabón entre $C_{m,i}$ y $C_{m,r}$ está contenido en $C_{1,k-1}$. Como C_0 tiene un número finito de eslabones, algún par de eslabones de C_0 debe satisfacer lo anterior para una subsucesión infinita de cadenas $(C_m)_{m < \omega}$ (principio del palomar). Llamémosles de nuevo $C_{0,h}$ y $C_{0,k}$. Defina $W_m = C_{m,i} \cup \dots \cup C_{m,r}$ y $V_m = C_{m,r} \cup \dots \cup C_{m,j}$. Observe que tanto los W_m como los V_m forman un sistema dirigido de continuos y por lo tanto $W = \bigcap_{m < \omega} W_m$ y $V = \bigcap_{m < \omega} V_m$ son un par de subcontinuos propios de M . Ahora, por construcción tenemos que $V \cap cl(C_{1,k}) \neq \emptyset$ y $V \cap cl(C_{1,h}) = \emptyset$ y lo propio para W : $W \cap cl(C_{1,h}) \neq \emptyset$ y $W \cap cl(C_{1,k}) = \emptyset$. Así, hemos obtenido un subcontinuo $W \cup V$ que es descomponible en dos subcontinuos propios. Lo cual es absurdo, pues M es hereditariamente indescomponible. ■

Teorema 1.34 Si M y M' son continuos con más de un punto, encadenables y hereditariamente indescomponibles entonces son homeomorfos.

Prueba: Tome una secuencia decreciente de cadenas $(C_n)_{n < \omega}$ en donde la n -ésima cadena tenga todos sus eslabones de diámetro menor a $1/(n + 1)$. Aplicando el Lema anterior podemos encontrar una subsecuencia de cadenas $(C_{n_k})_{k < \omega}$ con la característica adicional de que cada una está torcida en la anterior. Tomemos ahora dos puntos p, q en diferentes componentes de M . Dada una cadena C_n vamos a llamar al conjunto de eslabones que van desde

el primero de C_n que tiene a p hasta el último que tiene a q como la subcadena de C_n que va de p a q . Se afirma que para cualquier $j < \omega$ la subcadena de C_{n_j} que va de p a q cubre a M . Llamemos W_j a la unión de los eslabones de la cadena recién mencionada. Los W_j son una familia dirigida de continuos, por lo tanto su intersección es un subcontinuo de M que contiene a p y a q , es decir, debe ser M . Por lo tanto, podemos suponer sin perder generalidad que la sucesión original $(C_n)_{n < \omega}$ es de cadenas que van de p a q . En resumen obtuvimos una secuencia $(C_n)_{n < \omega}$ de cadenas que satisface ser decreciente, cada una está torcida en la anterior, el diámetro de cualquier eslabón de C_n es menor a $1/(n+1)$, la cerradura de cualquier eslabón de C_n es subconjunto de algún eslabón de C_{n-1} y M es la intersección de la familia que resulta de pegar todos los eslabones de cada cadena. Similarmente podemos obtener $(C'_n)_{n < \omega}$ una familia que satisfaga lo mismo para p', q' puntos en distintas componentes de M' . Por el Teorema 1.31, el resultado queda establecido. ■

Capítulo 2

Límites proyectivos de Fraïssé

En este capítulo estudiamos los límites proyectivos de Fraïssé, un *objeto* relativamente nuevo (vea [6]) que combina las técnicas presentadas por Roland Fraïssé en su construcción de los números racionales (vistos con su estructura de orden) con las ideas de *dualidad*, pues según uno de los autores de [6], las ideas básicas se obtienen a partir de *voltear* todas las flechas presentadas en la construcción original de Fraïssé, con la excepción de que la topología juega aquí un papel fundamental. Debido a esta dualidad y al hecho de que los racionales se obtienen como un límite *directo*, estos límites fueron llamados *proyectivos*, pues en los espacios topológicos, los límites *inversos* se pueden construir como un subespacio de un producto topológico y así las proyecciones actúan como un conjunto de flechas que comunican al límite con las estructuras a partir de las cuales se obtuvo. Lo relevante de los límites es que pueden ser usados para estudiar muchas otras cosas aparte del pseudoarco además de que tienen la propiedad de intercambiar problemas topológicos con problemas de combinatoria finita.

2.1. Definición y algunas propiedades

Definición 2.1 *Partimos de un lenguaje de primer orden \mathcal{L} . Por una \mathcal{L} -estructura nos referimos a una estructura para el lenguaje \mathcal{L} , en el sentido usual de la teoría de modelos*

$$(\mathbb{A}, f_i^{\mathbb{A}}, R_i^{\mathbb{A}}, c_i^{\mathbb{A}})_{i \in I},$$

con ciertos datos adicionales de naturaleza topológica. Requerimos una topología para \mathbb{A} que sea compacta, cero-dimensional, segundo numerable y Haus-

dorff. Y que además las relaciones se interpreten como conjuntos cerrados y las funciones como funciones continuas.

Formalmente, para cada símbolo de función n -ario, $f \in \mathcal{L}$, su interpretación

$$f^{\mathbb{A}}: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}$$

debe ser una función continua, obviamente equipando al producto \mathbb{A}^n con su topología de Tychonoff. Así mismo, para cada símbolo de relación n -ario, $R \in \mathcal{L}$, su interpretación

$$R^{\mathbb{A}} \subseteq \mathbb{A}^n$$

debe ser un subconjunto cerrado.

Estas estructuras recién definidas serán los bloques de construcción para un pre-pseudoarco, cuando el lenguaje conste de una única letra de relación binaria.

Definición 2.2 Por un **epimorfismo** entre dos \mathcal{L} -estructuras \mathbb{A} y \mathbb{B} entenderemos una función continua y suprayectiva

$$f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$$

que abra los símbolos de función y que respete las relaciones. Formalizando, para todo símbolo de función n -ario, $F \in \mathcal{L}$ y toda tupla $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ se debe satisfacer que

$$f(F^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)) = F^{\mathbb{B}}(f(a_1), \dots, f(a_n)).$$

Y para cualquier símbolo de relación n -ario, $R \in \mathcal{L}$ se deben de cumplir las siguientes dos condiciones:

1. Si $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathbb{A}}$ entonces $(f(a_1), \dots, f(a_n)) \in R^{\mathbb{B}}$.
2. Si $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbb{B}}$ entonces existe $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathbb{A}}$ con sus coordenadas tales que $f(a_i) = b_i$, para $i \in \{1, \dots, n\}$. Parafraseando, si una tupla está relacionada en el contradominio entonces existe una tupla hecha de preimágenes que también está relacionada.

Por un **isomorfismo** entendemos un epimorfismo inyectivo.

Observación: Note que debido a la topología de nuestras estructuras los epimorfismos son, en particular, identificaciones cerradas. De hecho, como se puede ver en el siguiente lema, los epimorfismos tienen una caracterización muy similar a las identificaciones.

Lema 2.3 Sean A, B, C \mathcal{L} -estructuras y $f: A \rightarrow C$, $g: B \rightarrow C$, $h: A \rightarrow B$ tales que $f = g \circ h$ y sea h un epimorfismo; entonces g es epimorfismo si y sólo si f lo es.

En un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{f}{\dashrightarrow} & C \\ h\text{-epi} \downarrow & \nearrow g & \\ B & & \end{array}$$

Prueba: Por la observación anterior, basta solamente verificar las condiciones del lenguaje. Suponga que g es epimorfismo y que R, F son símbolos de relación y de función respectivamente. Tome $(\bar{a}) \in A^n$. Veamos que f respeta los símbolos de función:

$$f(F^A(\bar{a})) = g(h(F^A(\bar{a}))) = g(F^B(h(\bar{a}))) = F^C(g \circ h(\bar{a})) = F^C(f(\bar{a}))$$

Ahora, si $\bar{a} \in A^n$ y $\bar{a} \in R^A$ entonces $h(\bar{a}) \in R^B$, entonces $g \circ h(\bar{a}) \in R^C$, es decir $f(\bar{a}) \in R^C$. Ahora si $\bar{y} \in R^C$, hay $\bar{x} \in B$ tal que $g(\bar{x}) = \bar{y}$ y además $\bar{x} \in R^B$, entonces hay $\bar{a} \in A$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{x}$ y $\bar{a} \in R^A$. Por lo tanto $g(h(\bar{a})) = \bar{y}$, es decir $f(\bar{a}) = \bar{y}$ y $\bar{a} \in R^A$. Esto comprueba que la composición de epimorfismos es un epimorfismo.

Suponga ahora que f , es decir la composición, es un epimorfismo, veamos que la segunda flecha que es parte de la composición debe ser un epimorfismo. De nuevo iniciamos viendo que preserva las operaciones;

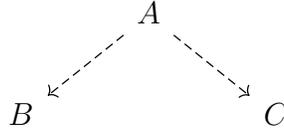
$$g(F^B(\bar{b})) = g(F^B(h(\bar{a}))) = g(h(F^A(\bar{a}))) = f(F^A(\bar{a})) = F^C(f(\bar{a})) = F^C(g(\bar{b}))$$

Similarmente comprobamos para letras de relación. ■

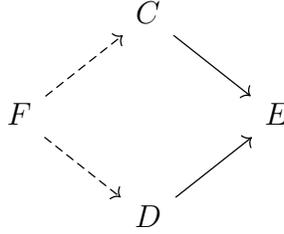
Pasemos ahora a las definiciones principales. Para comodidad de quién lee, presentamos un diagrama con cada definición, pues considero que es más fácil de digerir cualquier cosa mediante un dibujo.

Definición 2.4 (Familia Projectiva) Una colección Δ de \mathcal{L} -estructuras es una familia projectiva de Fraïssé si:

(F1) Para cualquier par de estructuras B, C en Δ existe una tercera A en Δ y epimorfismos desde A hacia B y C . Si vemos a la familia como categoría, esto sería la condición de techo.



(F2) Si $C, D, E \in \Delta$ y $f_{C,E}, f_{D,E}$ son epimorfismos desde C y D (resp.) hacia E entonces hay $F \in \Delta$ y epimorfismos $f_{F,C}, f_{F,D}$ desde F hacia C, D respectivamente tales que $f_{D,E} \circ f_{F,D} = f_{C,E} \circ f_{F,C}$. Note que esta propiedad es la dual a la propiedad de extensión en los límites clásicos.



Definición 2.5 (Límite Projectivo) Dada una familia Δ de \mathcal{L} -estructuras, decimos que \mathbb{L} es un límite projectivo para Δ si es una \mathcal{L} -estructura y además:

(L1) **Universalidad Projectiva** Cualquier objeto en Δ se ve como imagen de \mathbb{L} bajo algún epimorfismo.

$$\mathbb{L} \overset{\exists \text{ epi}}{\dashrightarrow} \forall D$$

(L2) Para cualquier A espacio topológico discreto y finito y cualquier función continua $f: \mathbb{L} \rightarrow A$ existe $D \in \Delta$, un epimorfismo $g: \mathbb{L} \rightarrow D$ y una función (solamente función) $f': D \rightarrow A$ tal que $f = f' \circ g$. Parafraseando: Las funciones continuas a discretos finitos se factorizan a

través de un epimorfismo y una función.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{L} & \xrightarrow{\forall} & A \\
 \exists \text{ epi} \downarrow \text{---} & \nearrow \text{---} & \\
 D & & \exists \text{ func.}
 \end{array}$$

(L3) Ultrahomogeneidad Proyectiva Para cualquier $D \in \Delta$ y cualquier par de epimorfismos $f, g: \mathbb{L} \rightarrow D$ existe un isomorfismo $h: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ tal que $g \circ h = f$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{L} & \xrightarrow{\exists \simeq} & \mathbb{L} \\
 \searrow \forall \text{ epi} & & \swarrow \forall \text{ epi} \\
 & D &
 \end{array}$$

Las personas familiarizadas con los límites de Fraïssé podrán notar que las propiedades **(L1)** y **(L3)** de un límite proyectivo son las *duales* a los límites normales. La propiedad **(L2)** puede parecer extraña pero conforme avancemos en el texto nos daremos cuenta de que esta propiedad es una especie de *diccionario* que nos permite traducir problemas topológicos a problemas de combinatoria finita.

A partir de este momento estaremos con un lenguaje arbitrario pero fijo, a menos que se especifique lo contrario, así, cuando se encuentre con *morfismo* o *estructura* deberá leerse como \mathcal{L} -morfismo y \mathcal{L} -estructura y análogo para todo lo demás.

Definimos ahora el útil concepto de refinar una cubierta mediante un morfismo y vemos que los límites proyectivos satisfacen una propiedad de refinamiento muy poderosa.

Definición 2.6 (Refinamiento) Decimos que un epimorfismo $f: A \rightarrow B$ refina una cubierta \mathcal{U} de A si cada fibra de f está contenida en al menos una pieza de \mathcal{U} .

Lema 2.7 Dada una familia Δ de estructuras, si una estructura \mathbb{D} satisface (L2) entonces para cualquier cubierta abierta \mathcal{U} de \mathbb{D} existe un epimorfismo $\phi: \mathbb{D} \rightarrow D$ hacia alguna estructura $D \in \Delta$ que refina a \mathcal{U} .

Prueba: Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de \mathbb{D} , como \mathbb{D} es cero-dimensional, cada pieza de nuestra cubierta puede ser a su vez, cubierta por cerrabiertos, entonces tenemos una cubierta de cerrabiertos de nuestro espacio \mathbb{D} con la peculiaridad de que cada pieza de esta nueva cubierta está contenida en alguna pieza de la cubierta \mathcal{U} (la refina). Al ser \mathbb{D} compacto, existe una subcubierta (de esta nueva cubierta) finita, digamos $\{C_0, \dots, C_n\}$. Defina

$$C'_0 = C_0$$

y

$$C'_n = C_n - \bigcup_{i < n} C_i.$$

La nueva colección $\{C'_0, \dots, C'_n\}$ es una cubierta ajena por pares, que refina a \mathcal{U} y además cada pieza de ella es aberrada. Equipamos a $\{C'_0, \dots, C'_n\}$ con la topología discreta y definimos

$$f: \mathbb{D} \rightarrow \{C'_i : i = 0, \dots, n\}$$

dada por

$$x \mapsto \text{el único } C'_i \text{ que lo tiene.}$$

Claramente f es continua, luego por (L2), hay en Δ alguna estructura D , un epimorfismo $\phi: \mathbb{D} \rightarrow D$ y una función $f': D \rightarrow \{C'_i\}_{i=0}^n$ tales que $f = f' \circ \phi$. Se afirma que ϕ refina \mathcal{U} . En efecto; Si $d \in D$ y si $x \in \phi^{-1}(d)$ entonces $f(x) = C_{i_0}$, es decir $x \in C_{i_0}$ (para algún i_0 que sólo depende de d). ■

Lema 2.8 *Suponga que Δ es una familia proyectiva de Fraïssé y suponga que \mathbb{D} es un límite proyectivo de Fraïssé para esta familia, entonces para cualesquiera $D, E \in \Delta$ y epimorfismos $\phi: E \rightarrow D$, $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow D$ existe un epimorfismo $\xi: \mathbb{D} \rightarrow E$ tal que $\phi \circ \xi = \varphi$.*

Prueba: Por la universalidad proyectiva existe $f: \mathbb{D} \rightarrow E$ un epimorfismo, al componer con ϕ obtenemos $\phi \circ f$ un epimorfismo hacia D . Por la ultrahomogeneidad proyectiva existe $i: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ un isomorfismo tal que $\phi \circ f \circ i = \varphi$. Tome $\xi = f \circ i$. ■

2.2. Existencia de los Límites para un caso especial

Claro que hasta ahora nada nos garantiza que existan los límites proyectivos de Fraïssé. El siguiente teorema, nos da condiciones suficientes sobre Δ como para que exista un **único** límite proyectivo para Δ . Usaremos esto para dar una construcción alternativa del pseudoarco. La prueba de dicho resultado es un poco larga y por eso hemos reservado una sección exclusivamente para ella.

Teorema 2.9 (Existencia y Unicidad) *Si una familia Δ proyectiva de Fraïssé es numerable y con cualquier estructura en ella siendo finita entonces se puede encontrar un único límite de Fraïssé para ella.*

Prueba: Enumeramos $\Delta = \{A_0, A_1, \dots\}$. Veamos primero que podemos encontrar una *secuencia genérica* de estructuras $(D_n)_{n < \omega}$ en Δ junto con epimorfismos $\pi_n: D_{n+1} \rightarrow D_n$ que satisfaga el siguiente par de condiciones:

1. Cualquier estructura en Δ es imagen bajo epimorfismo de algún D_n .
2. Si $f: D_n \rightarrow B$ y $g: A \rightarrow B$ son epimorfismos (con $A, B \in \Delta$) entonces existe D_m ($m > n$) y un epimorfismo $h: D_m \rightarrow A$ que satisface $g \circ h = f \circ \pi_n^m$. Donde π_n^m es la composición de los π 's que hay entre D_m y D_n .

En efecto, la siguiente construcción es una simple dualización del caso original estudiado por Fraïssé, la cual puede ser leída en [5]. Primero considere cualquier biyección $\pi: \omega \times \omega \rightarrow \omega$ que satisfaga que $\pi(x, y) \geq x$. Definimos de manera recursiva nuestra secuencia. Defina D_0 como cualquier estructura en Δ . Si se tiene definida D_i para $i \leq k$ hacemos lo siguiente para obtener D_{k+1} ;

A cada diagrama de la siguiente forma (donde los objetos pertenecen a Δ y las flechas son epimorfismos)

$$\begin{array}{ccc} & & D_k \\ & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

se le puede asignar un único par (k, j) de números naturales de tal suerte que este par ordenado recupere la situación descrita en el diagrama, es decir,

el diagrama anterior es exactamente el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & & D_k \\ & & \downarrow f_{k,j} \\ X_{k,j} & \xrightarrow{g_{k,j}} & Y_{k,j} \end{array}$$

Tome (i, j) de tal forma que $\pi(i, j) = k$. Como $i \leq \pi(i, j) = k$ entonces sí tenemos definido quién es D_i y consideramos el siguiente diagrama codificado por (i, j) :

$$\begin{array}{ccc} & & D_i \\ & & \downarrow f_{i,j} \\ X_{i,j} & \xrightarrow{g_{i,j}} & Y_{i,j} \end{array}$$

que por **(F2)** se puede completar a

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & D_i \\ \downarrow z & & \downarrow f_{i,j} \\ X_{i,j} & \xrightarrow{g_{i,j}} & Y_{i,j} \end{array}$$

Luego, considere el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ & \searrow h & \\ D_k & \xrightarrow{\pi_i^k} & D_i \end{array}$$

De nuevo por **(F2)** se puede completar a:

$$\begin{array}{ccccc} B & \overset{a}{\dashrightarrow} & A & & \\ & \searrow b & & \searrow h & \\ & & D_k & \xrightarrow{\pi_i^k} & D_i \end{array}$$

Para algún B y b . Al elegir un B y b de este estilo y llamarles D_{k+1} y π_k se completa nuestra definición recursiva. Esta construcción satisface lo deseado pues si nos encontramos con el diagrama codificado por (r, m) entonces

tendremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} D_{\pi(r,m)+1} & \longrightarrow & D_r \\ \downarrow & & \downarrow f_{r,m} \\ X_{r,m} & \xrightarrow{g_{r,m}} & Y_{r,m} \end{array}$$

Ahora defina $\mathbb{D} = \varprojlim (D_n, \pi_n) \subseteq \prod_{n < \omega} D_n$. Denotamos por p_n la proyección de \mathbb{D} hacia el n -ésimo factor. Comprobemos que \mathbb{D} es cero-dimensional, segundo numerable, compacto y Hausdorff. Lo Hausdorff es obvio. La compacidad viene dada del hecho de que \mathbb{D} es cerrado en $\prod_{n < \omega} D_n$ (que es compacto debido al Teorema de Tychonoff y porque cada D_n lo es). Al ser un producto numerable de espacios segundo numerables, se tiene que $\prod_{n < \omega} D_n$ es segundo numerable y en consecuencia también lo es \mathbb{D} . Y como las proyecciones son continuas se puede obtener una base de cerrabiertos para $\prod_{n < \omega} D_n$ a partir de la colección de bases de cerrabiertos para cada D_n y así \mathbb{D} es cero-dimensional.

Ahora, como queremos que \mathbb{D} sea una \mathcal{L} -estructura y ya tenemos la parte topológica, sólo debemos encargarnos de dotarla de estructura para el lenguaje.

Letras de relación: Tome $R \in \mathcal{L}$ una letra relacional de m entradas. Para $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{D}^m$ imponemos la siguiente condición:

$$(x_1, \dots, x_m) \in R^{\mathbb{D}} \Leftrightarrow \forall n < \omega, (p_n(x_1), \dots, p_n(x_m)) \in R^{D_n}$$

Hay que comprobar que esta es una relación cerrada en \mathbb{D}^m . Si $x^j = (x_1^j, \dots, x_m^j)$ es una sucesión contenida en $R^{\mathbb{D}}$ que tiende hacia $x = (x_1, \dots, x_m)$ entonces $x_i^j \rightarrow x_i$, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, lo cual implica que $p_n(x_i^j)$ tiende hacia $p_n(x_i)$ cuando $j \rightarrow \infty$, para todo natural n . Y esto último indica que $(p_n(x_1^j), \dots, p_n(x_m^j)) \rightarrow (p_n(x_1), \dots, p_n(x_m))$ y como sabemos que R^{D_n} sí es cerrada, se tendrá que $(p_n(x_1), \dots, p_n(x_m)) \in R^{D_n}$ y así $(x_1, \dots, x_m) \in R^{\mathbb{D}}$. Bastó usar sucesiones por la 2-numerabilidad de la topología.

Letras de función: Tome ahora f una letra funcional de m entradas. Para cada natural n se puede formar la siguiente función

$$h_n: \mathbb{D}^m \rightarrow D_n$$

con regla de correspondencia

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto f^{D_n}(p_n(x_1), \dots, p_n(x_m)).$$

Claramente h_n es continua para todo $n < \omega$ y entonces la función inducida que hace conmutar al siguiente diagrama (algunas personas la llaman *producto diagonal*) también será continua:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \prod_{n < \omega} D_n & & \\
 & \swarrow p_0 & \uparrow & \searrow p_k & \\
 D_0 & & \dots & & D_k \quad \dots \\
 & \swarrow h_0 & \uparrow & \searrow h_k & \\
 & & \mathbb{D}^m & &
 \end{array}$$

Esta será nuestra interpretación para $f^{\mathbb{D}}$. Observe que el contradominio no es el adecuado a simple vista, pero unas pocas líneas de cálculos muestran que el rango de $f^{\mathbb{D}}$ está contenido en \mathbb{D} .

Ahora sí, ya podemos decir que \mathbb{D} es una \mathcal{L} -estructura con todas las de la ley. Resta encargarnos de ver que en efecto \mathbb{D} cumple las características descritas en L1-L3.

L1: Se afirma que $p_n: \mathbb{D} \rightarrow D_n$ es un epimorfismo. La continuidad es obvia y la suprayectividad viene del hecho de que cada π_n es suprayectiva.

Ahora tome R una letra de relación con m entradas. Vamos a probar la parte de las preimágenes, la otra debería ser clara. Tome $(y_1, \dots, y_m) \in R^{D_n}$. Como $\pi_n: D_{n+1} \rightarrow D_n$ sí es un epimorfismo, existen $x^1 = (x_1^1, \dots, x_m^1) \in R^{D_{n+1}}$ tales que $\pi_n(x_1^1) = y_1$, $\pi_n(x_2^1) = y_2$, etc. Como $\pi_{n+1}: D_{n+2} \rightarrow D_{n+1}$ también es un epimorfismo, existe $x^2 = (x_1^2, \dots, x_m^2) \in R^{D_{n+2}}$ tal que $\pi_{n+1}(x_1^2) = x_1^1$ y etcétera. Luego defina $x^{-1} = (\pi_{n-1}(y_1), \dots, \pi_{n-1}(y_m))$ etcétera. Luego forme z_1 como la función de elección que toma las coordenadas 1 de las x^n, x^{-n} y la y_1 . Claramente $p_n(z_1) = y_1$. Forme z_2, \dots, z_m de manera similar. Claramente $p_n(z_2) = y_2$, $p_n(z_3) = y_3$ y etcétera. Y por construcción $(z_1, \dots, z_m) \in R^{\mathbb{D}}$.

Para los símbolos de funciones es obvio por la definición de $f^{\mathbb{D}}$ y el diagrama anterior.

Concluimos que $p_n: \mathbb{D} \rightarrow D_n$ es un epimorfismo, para cada natural n . Observe ahora que se obtiene fácilmente L1, pues si $A \in \Delta$ entonces por nuestra construcción arriba, hay un epimorfismo $g: D_n \rightarrow A$ y entonces $g \circ p_n: \mathbb{D} \rightarrow A$ es un epimorfismo.

L2: Afirmación: Suponga que $A, B \subseteq \mathbb{D}$ son cerrados ajenos no vacíos. Entonces existe un D_n que los separa, es decir, hay $n < \omega$ tal que $p_n[A]$ y $p_n[B]$ son ajenos. Si esto no sucediera entonces existen unas sucesiones $(y_n)_{n < \omega} \subseteq A$ y $(z_n)_{n < \omega} \subseteq B$ tales que $p_n(y_n) = p_n(z_n)$. Al darle la métrica discreta a cada D_n podemos metrizar \mathbb{D} con una métrica d que mida qué tan diferentes son los puntos en \mathbb{D} respecto a sus entradas. Con esta métrica encontramos que $d(y_n, z_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como A es cerrado, entonces es compacto y existe $y \in A$ un punto de acumulación para $(y_n)_{n < \omega}$. Tal punto de acumulación lo es también de $(z_n)_{n < \omega}$, lo cual es imposible, pues esto implicaría que A y B no son ajenos. Observe que esto tiene una generalización para un número finito de cerrados ajenos; si $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{D}$ son cerrados ajenos no vacíos entonces existe $N_0 < \omega$ tal que $p_{N_0}(A_i) \cap p_{N_0}(A_j) = \emptyset$ si $i \neq j$. Para ver esto, considere el conjunto de índices $\{n_{i,j} : p_{n_{i,j}} \text{ separa a } A_i, A_j\}$ y tome M_0 cualquier número natural más grande a su máximo. Tal p_{M_0} cumplirá lo deseado.

Como consecuencia de esta afirmación se puede probar fácilmente L2 (cosa que hacemos enseguida) y además obtenemos que si $f: \mathbb{D} \rightarrow F$ es continua con $F \in \Delta$ entonces existe un natural n y una función $g: D_n \rightarrow F$ tal que $f = g \circ p_n$.

Prueba de (L2): Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un espacio discreto, finito y $f: \mathbb{D} \rightarrow A$ una función continua. La siguiente es una colección finita de cerrados ajenos por pares (quizás algunos de ellos vacíos)

$$\{A_i = f^{-1}(a_i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

Entonces hay $N < \omega$ tal que $p_N(A_i) \cap p_N(A_j) = \emptyset$ si $i \neq j$. Con esta condición podemos definir $g: D_N \rightarrow A$ de la siguiente manera: para $x \in D_N$, tome $y \in p_N^{-1}(x)$ y aplíquelo f , lo obtenido será $g(x)$. Esta es una buena definición ya que $p_N^{-1}(x)$ está contenido en un único A_i , pues si $y_1 \in p_N^{-1}(x) \cap A_j$ y $y_2 \in p_N^{-1}(x) \cap A_i$ entonces $x \in p_N(A_j) \cap p_N(A_i)$, lo cual implica que $i = j$. Note que por su definición, g satisface que $f = g \circ p_N$.

L3: Para verificar que \mathbb{D} cumple L3 necesitamos un resultado preliminar: Si $\chi: D_n \rightarrow D_k$, con $n > k$, es un epimorfismo entonces existe $\psi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ un isomorfismo de tal forma que $\chi \circ p_n = p_k \circ \psi$.

Para probar esto construya una secuencia usando las propiedades de $(D_n, \pi_n)_{n < \omega}$ que se vea de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & & D_{k_2} & \xrightarrow{\alpha_1} & D_{n_1} & \xrightarrow{\chi_1} & D_{k_1} & \xrightarrow{\alpha_0} & D_{n_0} & \xrightarrow{\chi_0} & D_{k_0} \\ & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ & & & & \pi_{k_1}^{k_2} & & \pi_{n_0}^{n_1} & & \pi_{k_0}^{k_1} & & \end{array}$$

Es decir, tal que

$$\forall i < \omega \quad \pi_{k_i}^{k_{i+1}} = \chi_i \circ \alpha_i$$

y

$$\forall i < \omega \quad \pi_{n_i}^{n_{i+1}} = \alpha_i \circ \chi_{i+1}.$$

En donde $n_0 = n$, $k_0 = k$, $\chi_0 = \chi$ y las n 's y k 's satisfagan que $k_{i+1} \geq n_i > k_i$.

La sucesión $(\chi_i)_{i < \omega}$ induce una función ψ de \mathbb{D} en \mathbb{D} mediante la siguiente colección de funciones $f_j: \mathbb{D} \rightarrow D_j$ (representadas por el diagrama cuyos triangulos son conmutativos):

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathbb{D} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \downarrow & & \swarrow \\ \chi_{i+1} \circ p_{n_{i+1}} = f_{k_{i+1}} & & & & f_{k_{i+1}-1} & & \chi_i \circ p_{n_i} = f_{k_i} \\ \dots D_{k_{i+1}} & \xrightarrow{\pi_{k_{i+1}-1}^{k_{i+1}}} & D_{k_{i+1}-1} & \xrightarrow{\pi_{k_{i+1}-2}^{k_{i+1}-1}} & D_{k_{i+1}-2} & \xrightarrow{\pi_{k_{i+1}-3}^{k_{i+1}-2}} & \dots \longrightarrow D_{k_i} \end{array}$$

Es decir, $\psi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tiene la siguiente propiedad:

$$\forall j < \omega \quad p_j \circ \psi = f_j.$$

Análogamente utilizando a las α_i se obtiene una colección $(g_j)_{j < \omega}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ y esta induce otra función $\psi': \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$. Además, se tiene la propiedad análoga a ψ , a saber:

$$\forall j < \omega \quad p_j \circ \psi' = g_j.$$

Hay que ver que ψ es un isomorfismo, esto lo hacemos comprobando $\psi' \circ \psi = 1_{\mathbb{D}}$. En efecto, por las propiedades de arriba se obtienen las siguientes igualdades:

$$p_{n_i}(\psi'(\psi(x))) = g_{n_i}(\psi(x)) = \alpha_i \circ p_{k_{i+1}}(\psi(x)) = \alpha_i \circ f_{k_{i+1}}(x) =$$

$$\alpha_i(\chi_{i+1}(p_{n_{i+1}}(x))) = \pi_{n_i}^{n_{i+1}}(p_{n_{i+1}}(x)) = p_{n_i}(x).$$

Y de esto se puede concluir que $\psi' \circ \psi = 1_{\mathbb{D}}$. Similarmente se prueba que $\psi \circ \psi' = 1_{\mathbb{D}}$. Verificar que ψ es un epimorfismo es fácil tomando en cuenta que todas las flechas aquí presentadas son epimorfismos.

Ahora sí podemos probar L3. Suponga que $\phi_1: \mathbb{D} \rightarrow D$ y $\phi_2: \mathbb{D} \rightarrow D$ son epimorfismos hacia alguna estructura en Δ . En la parte correspondiente a la afirmación para L2 podemos encontrar que existen dos naturales n_1 y n_2 (sin pérdida de generalidad podemos suponer que $n_2 > n_1$) y dos funciones $g_1: D_{n_1} \rightarrow D$ y $g_2: D_{n_2} \rightarrow D$ tales que $\phi_1 = g_1 \circ p_{n_1}$ y $\phi_2 = g_2 \circ p_{n_2}$. Por el Lema 2.3, se obtiene que g_1 y g_2 deben ser epimorfismos. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D_{n_2} & & \\ & \searrow^{g_2} & \\ D_{n_1} & \xrightarrow{g_1} & D \end{array}$$

Por la propiedad 2 de nuestra familia (D_n) lo podemos completar al siguiente diagrama (donde $m > n_2$):

$$\begin{array}{ccccc} D_m & \xrightarrow{\pi_{n_2}^m} & D_{n_2} & & \\ & \searrow^{\xi} & & \searrow^{g_2} & \\ & & D_{n_1} & \xrightarrow{g_1} & D \end{array}$$

Y por el resultado preliminar para L3 se puede completar a:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{p_m} & D_m & \xrightarrow{\pi_{n_2}^m} & D_{n_2} & & \\ \downarrow \psi & & & \searrow^{\xi} & & \searrow^{g_2} & \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{p_{n_1}} & D_{n_1} & \xrightarrow{g_1} & D & & \end{array}$$

Donde ψ es un isomorfismo. Combinando todo lo anterior se obtiene lo deseado.

Finalmente probemos que \mathbb{D} es única respecto a isomorfismos. Supongamos que \mathbb{D}_0 y \mathbb{D}_1 se comportan como límites para Δ . Tomemos una base de cerrabiertos $(U_n^0)_{n < \omega}$ en \mathbb{D}_0 y otra de la misma naturaleza en \mathbb{D}_1 , digamos

$(U_n^1)_{n < \omega}$.

Realizamos la siguiente construcción: Tome $D_0 \in \Delta$. Existen $\phi_0^0: \mathbb{D}_0 \rightarrow D_0$ y $\phi_0^1: \mathbb{D}_1 \rightarrow D_0$ epimorfismos. Considere la cubierta abierta $\{(\phi_0^1)^{-1}(d) : d \in D_0\}$ de \mathbb{D}_1 . Podemos encontrar una estructura $D_1 \in \Delta$ y un epimorfismo $\phi_1^1: \mathbb{D}_1 \rightarrow D_1$ que refine a dicha cubierta. Luego, podemos construir una función $\psi_0: D_1 \rightarrow D_0$ de tal forma que $\phi_0^1 = \psi_0 \circ \phi_1^1$. Luego podemos encontrar $\phi_1^0: \mathbb{D}_0 \rightarrow D_1$ tal que $\phi_0^0 = \psi_0 \circ \phi_1^0$. Considere ahora la cubierta $\{(\phi_1^0)^{-1}(d) \cap U_1^0, (\phi_1^0)^{-1}(d) \cap (U_1^0)^c : d \in D_1\}$. Podemos encontrar $\phi_2^0: \mathbb{D}_0 \rightarrow D_2$ un epimorfismo que refine a tal cubierta y por lo tanto se puede definir un epimorfismo $\psi_1: D_2 \rightarrow D_1$ tal que $\phi_1^0 = \psi_1 \circ \phi_2^0$. Luego, se puede encontrar $\phi_2^1: \mathbb{D}_1 \rightarrow D_2$ tal que $\phi_1^1 = \psi_1 \circ \phi_2^1$.

Continuando con este proceso indefinidamente se obtienen unas estructuras $(D_n)_{n < \omega} \subset \Delta$ y unos epimorfismos $(\phi_n^0: \mathbb{D}_0 \rightarrow D_n)_{n < \omega}$, $(\phi_n^1: \mathbb{D}_1 \rightarrow D_n)_{n < \omega}$ y $(\psi_n: D_{n+1} \rightarrow D_n)_{n < \omega}$ que satisfacen las siguientes tres propiedades:

1. $\phi_n^0 = \psi_n \circ \phi_{n+1}^0$ y $\phi_n^1 = \psi_n \circ \phi_{n+1}^1$.
2. ϕ_{2n}^0 refina la cubierta $\{U_n^0, (U_n^0)^c\}$.
3. ϕ_{2n+1}^1 refina la cubierta $\{U_n^1, (U_n^1)^c\}$.

Bajo estas condiciones podemos definir $\phi: \mathbb{D}_0 \rightarrow \mathbb{D}_1$ (que resultará ser un isomorfismo) de la siguiente forma:

Dado $x \in \mathbb{D}_0$. Veamos que existe algún $y \in \mathbb{D}_1$ tal que $\phi_n^1(y) = \phi_n^0(x)$ para todo $n < \omega$. En efecto, para $n < \omega$ definimos

$$C_n := (\phi_n^1)^{-1}(\phi_n^0(x)).$$

Cada uno de estos C_n es cerrado y no vacío y además esta secuencia es decreciente respecto a la contención. Entonces existe $y \in \bigcap_{n < \omega} C_n$, es decir y satisface lo deseado.

Veamos ahora que y es único. En efecto, si y, y' satisfacen lo anterior y son distintos entonces hay algún $i < \omega$ tal que U_i^1 tiene a y pero no a y' . Luego por el punto 3. sobre las ϕ_n^1 y el hecho de que $y \in U_i^1$ tendremos que

$(\phi_{2i+1}^1)^{-1}(\phi_{2i+1}^1(y)) \subset U_i^1$ y esto implica que $y' \in U_i^1$ lo cual es absurdo. Así las cosas, podemos definir para $x \in \mathbb{D}_0$:

$$\phi(x) = \text{el único } y \text{ recién descrito.}$$

Procedemos ahora a explorar las características de esta función ϕ .

ϕ es suprayectiva. Para ver esto, realice el proceso análogo en la definición de $\phi(x)$ pero para $y \in \mathbb{D}_1$.

ϕ es inyectiva. Suponga que $x \neq x' \in \mathbb{D}_0$. Existe algún $i < \omega$ tal que U_i^0 tiene a x pero no a x' . Esto implica que $(\phi_{2i}^0)^{-1}\phi_{2i}^0(x) \subset U_i^0$ y por lo tanto que $\phi_{2i}^0(x) \neq \phi_{2i}^0(x')$. Ahora recuerde que $\phi(x)$ satisface que $\phi_{2i}^1(\phi(x)) = \phi_{2i}^0(x)$ y también tenemos que $\phi(x')$ satisface que $\phi_{2i}^1(\phi(x')) = \phi_{2i}^0(x')$. Combinando estas cosas se obtiene que $\phi_{2i}^1(\phi(x)) \neq \phi_{2i}^1(\phi(x'))$. Esto es suficiente para garantizar que $\phi(x) \neq \phi(x')$.

Veamos ahora que ϕ es continua. Tome $F \subseteq \mathbb{D}_1$ un cerrado. Observe que

$$\phi^{-1}(F) \subseteq \bigcap_{n < \omega} (\phi_n^0)^{-1}(\phi_n^1(F)).$$

Se afirma que tal contención es en realidad una igualdad. En efecto, tome $x \in \mathbb{D}_0$ que satisfaga la siguiente relación para cada natural n : $\phi_n^0(x) \in \phi_n^1(F)$. Esto implica que hay $z_n \in F$ tal que $\phi_n^0(x) = \phi_n^1(z_n)$. Si $\phi(x) \notin F$ entonces podemos encontrar un U_i^1 ajeno a F que tenga a $\phi(x)$. Luego tendríamos que la fibra correspondiente a $\phi_{2i+1}^1(\phi(x))$ está contenida en U_i^1 , pero recuerde que hay $z_{2i+1} \in F$ tal que $\phi_{2i+1}^0(x) = \phi_{2i+1}^1(z_{2i+1}) = \phi_{2i+1}^1(\phi(x))$ y entonces tendríamos que $z_{2i+1} \in F \cap U_i^1$, lo cual es imposible. Así tenemos la contención deseada y la igualdad mencionada. De ella se desprende que $\phi^{-1}(F)$ es cerrado. Por la topología de \mathbb{D}_0 y \mathbb{D}_1 se obtiene automáticamente que es un homeomorfismo.

Lo único que resta es confirmar que ϕ respeta la estructura del lenguaje pero esto es sencillo. ■

2.3. Algunas propiedades extra

Las siguientes afirmaciones serán de vital importancia para probar los Teoremas de Mioduszewski, de hecho estos teoremas serán la interpretación

de estas afirmaciones en un contexto adecuado.

Lema 2.10 *Sea Δ una familia de \mathcal{L} -estructuras topológicas con cada estructura en ella de tamaño finito. Suponga que D es una \mathcal{L} -estructura topológica que además tiene la característica de que cualquier cubierta abierta de ella se puede refinar mediante un epimorfismo hacia una estructura en Δ , entonces existe una sucesión $(D_n)_{n < \omega}$ de estructuras en Δ y unos epimorfismos $\phi_n: D \rightarrow D_n$, $\psi_n: D_{n+1} \rightarrow D_n$ de tal forma que para cualquier $i < \omega$ se satisface que $\psi_n \circ \phi_{n+1} = \phi_n$ y que además cualquier cubierta abierta de D es refinada mediante un ϕ_n .*

Prueba: Fije una base B para D hecha de cerrabiertos y de tamaño ω . Notemos que dada una cubierta abierta $(U_i)_{i < \kappa}$, (κ un cardinal) de D , esta se puede refinar mediante una cubierta finita hecha de cerrabiertos, los cuales serán ajenos por pares (esto debido a que las estructuras en Δ son discretas). Sin perder generalidad podemos suponer que tales cerrabiertos pertenecen a la base B . Mediante este proceso, a cada cubierta abierta se le asigna otra, finita y más fina, ajena por pares y hecha de cerrabiertos de la base. Notemos que sólo puede haber una cantidad numerable de cubiertas de este tipo, así que podemos enumerarlas: $(\mathcal{U}_n)_{n < \omega}$. A continuación describimos un proceso inductivo el cual terminará la prueba.

Para la cubierta \mathcal{U}_0 existe un epimorfismo $\phi_0: D \rightarrow D_0$ que la refina. Luego, considere la cubierta $\{U \cap \phi_0^{-1}(x) : U \in \mathcal{U}_0, x \in D_0\}$, podemos hallar $\phi_1: D \rightarrow D_1$ un epimorfismo que refine esta cubierta. Luego, si $y \in D_1$, existe un único $x \in D_0$ y un único $U \in \mathcal{U}_0$ tales que

$$\phi_1^{-1}(y) \subseteq U \cap \phi_0^{-1}(x).$$

Si definimos $\psi_0(y) = x$ tendremos que $\psi_0 \circ \phi_1 = \phi_0$ y por el Lema 2.3 se obtendrá que ψ_0 es un epimorfismo. Considere ahora la cubierta $\{U \cap \phi_1^{-1}(x) : U \in \mathcal{U}_1, x \in D_1\}$, encontramos $\phi_2: D \rightarrow D_2$ que la refine, etcétera. Realizamos un proceso análogo en cada natural y así, terminaremos encontrando $\phi_n: D \rightarrow D_n$, para cualquier $n < \omega$ y también las ψ_n correspondientes. Observe que cada ϕ_{n+1} refina a \mathcal{U}_n y por la construcción de $(\mathcal{U}_n)_{n < \omega}$ la familia de las ϕ_n refinará a cualquier cubierta abierta de D . ■

Teorema 2.11 *Si D se comporta como en el lema anterior respecto a la familia Δ y \mathbb{D} es el límite proyectivo de Δ entonces hay un epimorfismo de \mathbb{D} en D .*

Prueba: Fijemos $(D_n)_{n < \omega}$, $\{\phi_n: D \rightarrow D_n\}_{n < \omega}$ y $\{\psi_n: D_{n+1} \rightarrow D_n\}_{n < \omega}$ como en el lema anterior. En virtud del Lema 2.8, se puede conseguir

$$\{\phi'_n: \mathbb{D} \rightarrow D_n\}_{n < \omega}$$

una familia de epimorfismos tales que

$$\psi_n \circ \phi'_{n+1} = \phi'_n.$$

Si $x \in \mathbb{D}$, defina $C_n = \phi_n^{-1}(\phi'_n(x))$. Cada C_n es cerrado y no vacío y además $C_{n+1} \subseteq C_n$ por lo tanto hay $y \in \bigcap_{n < \omega} C_n$ y además este debe ser único por la propiedad de las ϕ_n de refinar cubiertas y lo Hausdorff de D . Mediante este proceso queda definida $f: \mathbb{D} \rightarrow D$. La prueba de que f es un epimorfismo es una copia de la dada más arriba cuando probamos que los límites son únicos salvo isomorfismo. ■

Capítulo 3

El pseudoarco y los límites proyectivos

En este capítulo combinamos lo que se ha trabajado en los dos anteriores, a grandes rasgos lo que se hace es lo siguiente:

1. Definir una familia de gráficas lineales finitas.
2. Verificar que dicha familia es proyectiva.
3. Obtener el límite proyectivo de esta familia, al cual llamamos un *pre-pseudoarco* y denotamos por \mathbb{P} .
4. Verificar que \mathbb{P} tiene una relación de equivalencia natural $R^{\mathbb{P}}$.
5. Probar que $\mathbb{P}/R^{\mathbb{P}}$ es el pseudoarco utilizando la caracterización de Bing.
6. Obtener los teoremas de Mioduszewski utilizando esta caracterización del pseudoarco.

3.1. Gráficas lineales finitas como familia proyectiva

En esta sección presentamos los *bloques de construcción* de un pre-pseudoarco. Este pre-pseudoarco será el límite proyectivo de la familia de gráficas lineales finitas. Note usted que al hablar del límite de estas gráficas tenemos que asegurarnos primero que tales gráficas forman una familia proyectiva de

Fraïssé; este es el objetivo de esta sección. Aunque parece sencillo, este objetivo presenta algunas dificultades técnicas, las cuales son abordadas aquí. Las técnicas para probar **(F1)** y **(F2)** respecto a esta familia no son relevantes en el desarrollo posterior del texto, por lo que recomiendo omitir la lectura de esta sección a menos que le interese asegurarse que en efecto las gráficas lineales finitas son una familia proyectiva.

Definición 3.1 (GLF) *Por una **gráfica lineal finita** nos referiremos a un conjunto A con al menos dos elementos equipado con una relación binaria R que satisfaga las siguientes condiciones:*

1. R es reflexiva.
2. R es simétrica.
3. Cualquier elemento en A está relacionado con, a lo mucho, 3 elementos. (Incluido él mismo).
4. Hay en A exactamente dos elementos que están relacionados con menos de 3 elementos.
5. Para cualesquiera $a, b \in A$ existe una lista finita a_0, \dots, a_n de elementos en A tal que $a_0 = a$, $a_n = b$ y $a_i R a_{i+1}$, con $0 \leq i \leq n - 1$.

A los puntos de la gráfica que satisfagan el punto 4 les llamaremos los extremos de la gráfica.

Definamos por recursión una relación en cada natural $n = \{0, \dots, n - 1\}$ mayor o igual a 2. Sobre $\{0, 1\}$ defina $R_2 = \{(0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)\}$. Es claro que $(2, R_2)$ es una gráfica lineal finita. Ahora si se tiene definida R_n definimos R_{n+1} sobre n , de la siguiente forma: $R_{n+1} = R_n \cup \{(n, n), (n-1, n), (n, n-1)\}$. Así conseguimos el objetivo planteado y es fácil mostrar que (n, R_n) es una GLF. En lo siguiente, por gráfica nos referiremos a una gráfica lineal finita.

El siguiente resultado es fácil de probar y se deja al lector:

Proposición 3.2 *Toda gráfica lineal finita es isomorfa (isomorfismo de gráficas) a un único (n, R_n) .*

Con el resultado anterior, dada cualquier gráfica (G, R) podemos pensarla enumerada:

$$G = \{g_0, \dots, g_n\}$$

3.1. GRÁFICAS LINEALES FINITAS COMO FAMILIA PROYECTIVA 47

de forma tal que g_i esté R -relacionado con g_j si y solamente si $|i - j| \leq 1$. Observe que hay dos posibles enumeraciones que satisfacen esto, las cuales dependen de los extremos de la gráfica.

Fijemos ahora $\mathcal{L}_0 = \{R\}$ un lenguaje con un único símbolo de relación binaria. Si (G, R_G) es una gráfica lineal finita, podemos darle la topología discreta, que en este caso resultará ser compacta, Hausdorff, cero-dimensional y segundo numerable; además observe que R_G será cerrada y así, naturalmente, (G, R_G) es una \mathcal{L}_0 -estructura. Denotemos por Δ_0 al conjunto de todas las gráficas lineales finitas de la forma (n, R_n) con la \mathcal{L}_0 -estructura recién definida para ellas.

Teorema 3.3 Δ_0 es una familia proyectiva de Fraïssé.

Prueba: Vamos a probar aquí únicamente F1. Para probar F2 necesitaremos un poco de trabajo extra y lo obtendremos como consecuencia de algunos otros resultados que desarrollaremos más abajo. Sean A y B dos gráficas lineales finitas. Si son del mismo tamaño entonces son isomorfas por la Proposición 3.2 y el resultado es obvio. Si A es más grande que B entonces por la Proposición 3.2 podemos escribir $A = \{a_0, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_0, \dots, b_m\}$ con $m < n$. Defina $f: A \rightarrow B$ como:

$$f(a_i) = \begin{cases} b_i & \text{si } i \leq m \\ b_m & \text{si } i \geq m. \end{cases}$$

Veamos que f es un epimorfismo. Claramente por la topología en A y B es continua. Si a_i está relacionado con a_j entonces $|i - j| \leq 1$. Si tanto i como j son menores o iguales que m entonces $f(a_i) = b_i$ y $f(a_j) = b_j$ y como $|i - j| \leq 1$ se tendrá que b_i está relacionado con b_j . Si alguno de ambos es mayor que m entonces el otro índice es a lo menos m . Es decir $j, i \geq m$ y así $f(a_i) = b_m = f(a_j)$. Ahora si b_i está relacionado con b_j entonces $|i - j| \leq 1$. Además $i, j \leq m$, entonces note que a_i está relacionado con a_j y se tiene que $f(a_i) = b_i$ y $f(a_j) = b_j$. Así f es un epimorfismo y podemos concluir que Δ_0 cumple F1. ■

Para probar F2 es suficiente trabajar únicamente con gráficas de la forma (n, R_n) , esto gracias a la Proposición 3.2.

Definición 3.4 Dada una gráfica (n, R_n) , a $I \subseteq n$ lo llamamos **intervalo** cuando sea un conjunto no vacío distinto de n y además este sea conexo, como en el punto 5 de la definición de gráfica lineal finita.

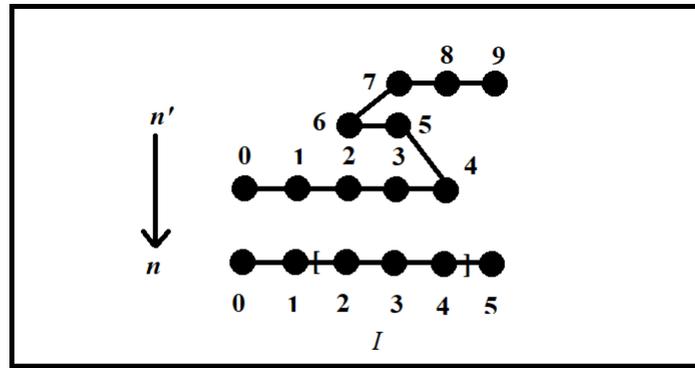
Definición 3.5 Dada una gráfica (n, R_n) e $I \subseteq n$ un intervalo, definimos una función $f_{n,I}: (n', R_{n'}) \rightarrow (n, R_n)$ (en donde $n' = n + 2(|I| - 1)$) de la siguiente manera:

$$f_{n,I}(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq \text{máx } I \\ 2 \text{ máx } I - i & \text{si } \text{máx } I < i < 2 \text{ máx } I - \text{mín } I \\ i - 2(|I| - 1) & \text{si } 2 \text{ máx } I - \text{mín } I \leq i \end{cases}$$

A $(n', f_{n,I})$ lo llamamos el **doblamiento** de n sobre I .

A un ojo quisquilloso puede ocurrírsele preguntar si en efecto las tres opciones dadas en la regla de $f_{n,I}$ son suficientes para cubrir todos los casos de algún $x \in n'$. Y en efecto así es; para probarlo puede uno darse cuenta de que $|I| = \text{máx } I - \text{mín } I + 1$ y que se tiene la siguiente desigualdad: $\text{máx } I \leq 2 \text{ máx } I - \text{mín } I < n + 2(|I| - 1) = n'$, y se da la igualdad únicamente cuando I consista de un solo punto. Note además que cuando I tiene un único punto $f_{n,I}$ se vuelve la identidad.

Ejemplo gráfico de cómo se ve un doblamiento.



Doblamiento de n sobre el intervalo I

Procedemos ahora a probar algunas propiedades básicas de los doblamientos.

Teorema 3.6 *Los doblamientos son epimorfismos.*

Prueba: Por lo dicho respecto a los intervalos unipuntuales, podemos asumir que $|I| \geq 2$. La parte de la continuidad es obvia, probemos la suprayectividad y que respetan la estructura de la gráfica. Para cualquier

3.1. GRÁFICAS LINEALES FINITAS COMO FAMILIA PROYECTIVA 49

$i \leq \text{máx } I$ es clara la suprayectividad. Si $\text{máx } I < i < n$ entonces observe que $j = i + 2(|I| - 1) < n + 2(|I| - 1) = n'$, es decir $j \in n'$ y además $j = i + 2(|I| - 1) > \text{máx } I + \text{máx } I - \text{mín } I = 2 \text{máx } I - \text{mín } I$, lo cual implica que $f_{n,I}(j) = j - 2(|I| - 1) = i$.

Ahora, si i está relacionado con j entonces ya sabemos que $|i - j| \leq 1$, el caso donde $i = j$ es obvio que $f_{n,I}$ preserva la relación, así que asumamos que $|i - j| = 1$, con esto en mente entonces es suficiente tratar con i e $i + 1$ únicamente. Tenemos los siguientes subcasos:

1. $i < i + 1 \leq \text{máx } I$
2. $i = \text{máx } I < i + 1$
3. $\text{máx } I < i < i + 1 < 2 \text{máx } I - \text{mín } I$
4. $i < i + 1 = 2 \text{máx } I - \text{mín } I$
5. $2 \text{máx } I - \text{mín } I = i < i + 1$

En cualquiera de ellos, siguiendo la regla de correspondencia de $f_{n,I}$ y haciendo unas pocas cuentas se verifica fácilmente que $|f_{n,I}(i) - f_{n,I}(i + 1)| \leq 1$. Así que $f_{n,I}$ sí preserva de ida la estructura relacional. Supongamos ahora que i está relacionado con j en n . De nuevo, para no trivializar las cosas, suponga que $j \neq i$. Si $i, j \leq \text{máx } I$ el resultado es obvio. Si $i \geq \text{máx } I$ entonces $i + 1 > \text{máx } I$ y así $f_{n,I}(j) = i + 1$ con $j = (i + 1) + 2(|I| - 1)$, luego $j - 1 = i + 2(|I| - 1) = \text{máx } I + 2(\text{máx } I - \text{mín } I) = \text{máx } I - \text{mín } I + 2 \text{máx } I - \text{mín } I \geq 2 \text{máx } I - \text{mín } I$; por lo tanto $f_{n,I}(j - 1) = (j - 1) - 2(|I| - 1) = ((i + 1) + 2(|I| - 1) - 1) - 2(|I| - 1) = i$, en resumen $f_{n,I}(j) = i + 1$ y $f_{n,I}(j - 1) = i$. Esto completa la prueba. ■

Lema 3.7 *Si (f, n') es el doblamiento de n sobre I entonces f es inyectiva fuera de $f^{-1}(I)$. Además se tienen las siguientes contenciones:*

$$\begin{aligned} f([0, \text{máx } I]) &\subseteq [0, \text{máx } I] \\ f((\text{máx } I, 2 \text{máx } I - \text{mín } I)) &\subseteq (\text{mín } I, \text{máx } I) \\ f([2 \text{máx } I - \text{mín } I, n' - 1]) &\subseteq [\text{mín } I, n - 1] \end{aligned}$$

Prueba: Las contenciones son cuestión de cuentas y lo de la inyectividad se desprende de tales contenciones. ■

Lema 3.8 Si (f, n') es el doblamiento de n sobre I entonces existen 3 subintervalos contenidos en $f^{-1}(I)$ maximales H, J, K en cada uno de los cuales f se comporta de manera inyectiva.

Prueba: Tome a tales intervalos como

1. $H = [\text{mín } f^{-1}(I), \text{mín } f^{-1}(I) + |I| - 1] = [\text{mín } I, \text{máx } I]$
2. $J = [\text{mín } f^{-1}(I) + |I| - 1, \text{mín } f^{-1}(I) + 2(|I| - 1)] = [\text{máx } I, 2 \text{máx } I - \text{mín } I]$
3. $K = [\text{mín } f^{-1}(I) + 2(|I| - 1), \text{máx } f^{-1}(I)] = [2 \text{máx } I - \text{mín } I, \text{máx } I + 2(|I| - 1)]$

Claramente tienen las características requeridas. ■

Proposición 3.9 Si $J \subset n$ es un intervalo ajeno al intervalo I y (f, n') es el doblamiento de n sobre I entonces $f^{-1}(J)$ es un intervalo en n' .

Prueba: El hecho de que f sea epimorfismo y que además sea inyectiva fuera de I , como afirma el Lema 3.7, es suficiente como para concluir. ■

Introducimos ahora el concepto de doblar sobre varios intervalos disjuntos:

Definición 3.10 Suponga que I_1, \dots, I_n son subintervalos de m , ajenos entre sí. Decimos que (M, f) es el doblamiento de m sobre I_1, \dots, I_n si f se puede factorizar como

$$f = f_1 \circ \dots \circ f_k$$

Donde $f_i: n_i \rightarrow n_{i-1}$ es el doblamiento de n_{i-1} sobre el intervalo $(f_1 \circ \dots \circ f_{i-1})^{-1}(I_i)$, $n_k = M$, $n_0 = m$ y $f_1: n_1 \rightarrow n_0$ es el doblamiento de n_0 sobre el intervalo I_1 .

Teorema 3.11 Si (M, f) es el doblamiento de m sobre I_1, \dots, I_n y se reetiquetan los intervalos entonces el doblamiento obtenido con ese nuevo orden es exactamente (M, f) .

Prueba: Se deja al lector. ■

3.1. GRÁFICAS LINEALES FINITAS COMO FAMILIA PROYECTIVA 51

Lema 3.12 Sean $A, B \in \Delta_0$ y $\phi: B \rightarrow A$ un epimorfismo. Suponga que $J \subset A$ es un subintervalo propio y (\hat{A}, f_A) el doblamiento de A sobre J . Entonces existe $\hat{B} \in \Delta_0$ junto con epimorfismos $\pi: \hat{B} \rightarrow B$ y $\hat{\phi}: \hat{B} \rightarrow \hat{A}$ tales que $\phi \circ \pi = f_A \circ \hat{\phi}$.

Prueba: Esto es obvio si $|J| = 1$, así que supongamos que $|J| \geq 2$. Considere $\phi^{-1}(J)$; tal subconjunto de B se puede partir en intervalos maximales ajenos no adyacentes I_1, \dots, I_n . Podemos ahora formar (\hat{B}, π) el doblamiento de B sobre I_1, \dots, I_n . Luego, por el Lema 3.8 existen tres subintervalos maximales contenidos en $f_A^{-1}(J)$ en donde f_A es inyectiva, llamemos J_{min} al que contiene a mín $f_A^{-1}(J)$, J_{max} al que contiene a máx $f_A^{-1}(J)$ y J_{mit} al que no contiene a ninguno de estos puntos mencionados. Definimos $I_{i,min}, I_{i,mit}, I_{i,max}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ de manera similar usando el doblamiento (\hat{B}, π) y a los I_1, \dots, I_n . Procedemos ahora a definir $\hat{\phi}: \hat{B} \rightarrow \hat{A}$, esto lo hacemos por varios casos y subcasos.

Si $b \in \hat{B} - (\phi \circ f_B)^{-1}(J)$ entonces $\hat{\phi}(b) = a$, donde a es el único punto de \hat{A} tal que $f_A(a) = \phi \circ f_B(b)$, es único por el Lema 3.7.

Si $b \in f_B^{-1}(\phi^{-1}(J))$ entonces $f_B(b)$ pertenece a un único I_{i_0} . Dividimos ahora esta situación en tres posibles subcasos.

1. Ningún extremo de I_{i_0} va a dar a máx J bajo ϕ : Consideramos $\phi(f_B(b)) \in J$, sabemos que existe un único $a \in J_{min}$ tal que $f_A(a) = \phi(f_B(b))$ definimos $\hat{\phi}(b) = a$.

2. Ningún extremo de I_{i_0} va a dar a mín J bajo ϕ : Consideramos $\phi(f_B(b)) \in J$, sabemos que existe un único $a \in J_{max}$ tal que $f_A(a) = \phi(f_B(b))$ definimos $\hat{\phi}(b) = a$.

3. Los extremos de I_{i_0} van a dar a los extremos de J . Supongamos primero que mín I_{i_0} va a dar a mín J bajo ϕ . Definimos

$$\hat{\phi}(b) = \begin{cases} \text{el único } a \text{ en } J_{min} \text{ tal que } f_A(a) = \phi(f_B(b)), & \text{cuando } b \in I_{i_0,min} \\ \text{el único } a \text{ en } J_{mit} \text{ tal que } f_A(a) = \phi(f_B(b)), & \text{cuando } b \in I_{i_0,mit} \\ \text{el único } a \text{ en } J_{max} \text{ tal que } f_A(a) = \phi(f_B(b)), & \text{cuando } b \in I_{i_0,max} \end{cases}$$

Si mín I_{i_0} va a dar a máx J bajo ϕ . Definimos

$$\hat{\phi}(b) = \begin{cases} \text{el único } a \text{ en } J_{min} \text{ tal que } f_A(a) = \phi(f_B(b)), & \text{cuando } b \in I_{i_0,max} \\ \text{el único } a \text{ en } J_{mit} \text{ tal que } f_A(a) = \phi(f_B(b)), & \text{cuando } b \in I_{i_0,mit} \\ \text{el único } a \text{ en } J_{max} \text{ tal que } f_A(a) = \phi(f_B(b)), & \text{cuando } b \in I_{i_0,min} \end{cases}$$

Probemos que $\hat{\phi}$ es un epimorfismo que satisface lo deseado. Por su definición, es obvio que $\phi \circ \pi = f_A \circ \hat{\phi}$. Verifiquemos que respeta el lenguaje.

Dados i e $i + 1 \in \hat{B}$ existen estos subcasos:

1. $i, i + 1 \in \hat{B} - (\phi \circ f_B)^{-1}(J)$.
2. $i \in \hat{B} - (\phi \circ f_B)^{-1}(J)$ e $i + 1 \in f_B^{-1}(I_{i_0})$.
3. $i, i + 1 \in f_B^{-1}(I_{i_0})$
4. $i \in f_B^{-1}(I_{i_0})$ e $i + 1 \in \hat{B} - (\phi \circ f_B)^{-1}(J)$

Note que el caso donde $i \in f_B^{-1}(I_{i_0})$ e $i + 1 \in f_B^{-1}(I_{i_1})$ con $i_0 \neq i_1$ no puede darse.

Caso 1: Sabemos que $\phi \circ f_B(i)$ está relacionado con $\phi \circ f_B(i + 1)$, entonces existen $a, a' \in \hat{A}$ que están relacionados entre sí y que además satisfacen que $f_A(a) = \phi \circ f_B(i)$ y $f_A(a') = \phi \circ f_B(i + 1)$. Por definición $\hat{\phi}(i) = a$ y $\hat{\phi}(i + 1) = a'$.

Caso 2: Aquí necesariamente se tiene que $f_B(i + 1)$ es un extremo de I_{i_0} . Dividimos de nuevo en los posibles subcasos:

SC1: Ningún extremo de I_{i_0} va a dar a máx J bajo ϕ . En este caso se tendrá que $\phi \circ f_B(i + 1) = \text{mín } J$, por lo tanto $\hat{\phi}(i + 1) = \text{mín } J$ y entonces $\hat{\phi}(i) = \text{mín } J - 1$.

SC2: Ningún extremo de I_{i_0} va a dar a mín J bajo ϕ . Este caso es análogo a SC1.

SC3: Los extremos de I_{i_0} van a dar a los extremos de J de manera sobreyectiva. Sabemos que $f_B(i + 1)$ es un extremo de I_{i_0} . Note que $f_B(i + 1) \neq \text{máx } I_{i_0}$, pues de lo contrario, se tendría que $i + 1 = \text{máx}(I_{i_0,min})$ y en consecuencia se obtendría que $i \in I_{i_0,min}$. Entonces $f_B(i + 1) = \text{mín } I_{i_0}$. Ahora, si $\phi(\text{mín } I_{i_0}) = \text{mín } J$ entonces $\hat{\phi}(i + 1) = \text{mín } J$ y entonces como $\phi \circ f_B(i) = \text{mín } J - 1$ se tendrá que $\hat{\phi}(i) = \text{mín } J - 1$. El caso donde $\phi(\text{mín } I_{i_0}) = \text{máx } J$ es análogo. El caso 3 y 4 deberían ser claros a partir de los dos anteriores. Ya vimos que $\hat{\phi}$ respeta la relación *de ida*; dejamos para el lector comprobar que la respeta *de regreso*. ■

3.1. GRÁFICAS LINEALES FINITAS COMO FAMILIA PROYECTIVA 53

Finalmente probamos un Teorema del cual será consecuencia (F2).

Teorema 3.13 *Suponga que $D, C \in \Delta_0$ y además que $|D| > |C|$. Si $\phi: D \rightarrow C$ es un epimorfismo entonces existe $D' \in \Delta_0$ de tamaño menor a D , junto con epimorfismos $\pi': D \rightarrow D'$ y $\phi': D' \rightarrow C$ que satisfacen el siguiente par de condiciones:*

1. $\phi = \phi' \circ \pi'$.
2. Para cualquier epimorfismo $\psi': F' \rightarrow D'$ se puede encontrar $F \in \Delta_0$ junto con un par de epimorfismos $\psi: F \rightarrow D$ y $\pi: F \rightarrow F'$ tales que $\pi' \circ \psi = \psi' \circ \pi$.

Condensamos esta información en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 \exists F & \dashrightarrow & D & \xrightarrow{\phi} & C \\
 \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\
 F' & \xrightarrow{\forall} & D' & &
 \end{array}$$

Prueba: Si $\alpha: X \rightarrow Y$ es un epimorfismo, lo llamaremos *simple* cuando satisfaga que si dos puntos en X están relacionados y tienen la misma imagen bajo α entonces son en realidad el mismo punto; un epimorfismo simple no permite *degenerar* aristas. Probemos primero el Teorema para el caso donde ϕ es simple. Afirmamos que existe una estructura D' , de tamaño menor a D junto con un subintervalo $J \subset D'$ y epimorfismos $\alpha_1: \hat{D}' \rightarrow D$, $\alpha_2: D \rightarrow D'$, $\phi': D' \rightarrow C$ de tal forma que $\alpha_2 \circ \alpha_1 = f_{D'}$ y $\phi = \phi' \circ \alpha_2$. Claro que aquí $f_{D'}$ es el doblamiento de D' sobre J . Resumimos en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 \hat{D}' & \dashrightarrow^{\alpha_1} & D & \xrightarrow{\phi \text{ simple}} & C \\
 \searrow & & \downarrow \alpha_2 & \nearrow \phi' & \\
 & & D' & &
 \end{array}$$

Si se logra probar esto, se tendría probado el Teorema en el caso de que ϕ fuera simple (¿por qué?). Procedemos a probar esta afirmación. Consideramos la colección de todos los subintervalos propios $I \subset D$ que sean maximales respecto a hacer inyectiva a ϕ . De todos ellos, existe alguno (varios quizás) que tiene longitud mínima, digamos J_1 . Tenemos dos posibles casos para J_1 .

Caso 1: Ningún extremo de J_1 coincide con algún extremo de D . En este caso, podemos hallar dos intervalos adyacentes a J_1 , ajenos entre sí, de tamaño $|J_1| - 1$ en los cuales ϕ sea inyectiva, llamamos a estos J_0 y J_2 . Tome $D' = D - 2(|J_1| - 1)$ con la estructura $R_{D'}$. Definimos $g: D \rightarrow D'$ como sigue:

$$g(i) = \begin{cases} i, & 0 \leq i \leq \text{mín } J_1 \\ 2 \text{ mín } J_1 - i, & \text{mín } J_1 < i \leq \text{máx } J_1 \\ i - 2(|J_1| - 1), & \text{máx } J_1 < i \leq \text{máx } D \end{cases}$$

Observe que (D, g) es el doblamiento de D' sobre $J := g(J_1)$ y que $D' < D$. Entonces podemos tomar $\alpha_2 = f_{D'}$, α_1 como la identidad en D y ϕ' definida por la siguiente regla: Dado $i \in D'$, considere su preimagen $f_{D'}^{-1}(i)$, tome cualquier j en dicha preimagen y aplique ϕ . Definimos $\phi'(i) = \phi(j)$. Claro que hay que verificar que esta sea una buena definición; esto lo logramos constatando que ϕ es constante en fibras de $f_{D'}$. En efecto, si $i \in D' - J$ entonces $g^{-1}(i) \cap g^{-1}(J) = \emptyset$, luego como g es el doblamiento sobre J , se tendrá que $g^{-1}(i)$ tiene un único punto. Ahora si $i \in J$, entonces $|g^{-1}(i) \cap J_k| \leq 1$, con $k = 0, 1, 2$. Entonces, si $y_0, y_1, y_2 \in g^{-1}(i)$, cada $y_k \in J_k$ se deben satisfacer las siguientes igualdades:

$$y_0 = 2 \text{ mín } J_1 - y_1 = y_2 - 2(|J_1| - 1) = i.$$

Y así

$$\begin{aligned} y_0 &= i, \\ y_1 &= 2 \text{ mín } J_1 - i \text{ y} \\ y_2 &= 2(|J_1| - 1) + i. \end{aligned}$$

Y el hecho de que ϕ sea simple garantiza que si $M = \text{máx } J_1$ y $m = \text{mín } J_1$ entonces para cualquier natural k se tiene que: $\phi(M + k) = \phi(M - k)$ y $\phi(m - k) = \phi(m + k)$, siempre y cuando $M + k, m - k \in J_2, J_0$, respectivamente. Esto es suficiente para probar lo deseado. Dejamos al lector probar que ϕ' es un epimorfismo. Y obviamente por su definición se tiene la conmutatividad deseada.

Caso 2: Algún extremo de J_1 coincide con algún extremo de D . Note que debido al tamaño de J_1 , no pueden coincidir sus dos extremos con los dos extremos de D . Sin perder generalidad, supongamos que $\text{mín } J_1 = \text{mín } D = 0$. De nuevo, podemos encontrar un subintervalo $J_2 \subset D$ de tamaño $|J_1| - 1$

3.1. GRÁFICAS LINEALES FINITAS COMO FAMILIA PROYECTIVA 55

adyacente a J_1 en el cual ϕ sea inyectiva. Tome $D' = D - (|J_1| - 1)$, claramente $D' < D$. Definimos $\alpha_2: D \rightarrow D'$ de la siguiente manera:

$$\alpha_2(i) = \begin{cases} \text{máx } J_1 - i, & 0 \leq i \leq \text{máx } J_1 \\ i - \text{máx } J_1, & \text{máx } J_1 < i \leq \text{máx } D. \end{cases}$$

Defina $J := \alpha_2(J_1)$. Note que J es un subintervalo propio de D' . Luego, tome $\hat{D}' = D + |J_1| - 1$ y defina $\alpha_1: \hat{D}' \rightarrow D$ de la siguiente forma:

$$\alpha_1(i) = \begin{cases} \text{máx } J_1 - i, & 0 \leq i \leq \text{máx } J_1 \\ i - \text{máx } J_1, & \text{máx } J_1 < i \leq \text{máx } \hat{D}'. \end{cases}$$

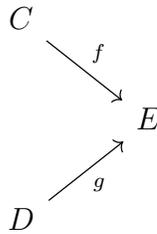
Claramente α_1 y α_2 factorizan el doblamiento de D sobre J . Por último, defina ϕ' de manera análoga al caso anterior. Comprobar que ϕ' es un epimorfismo bien definido es similar al caso anterior. Esto finaliza la prueba para cuando ϕ es simple. Ahora si ϕ no es simple, digamos que $x, x + 1$ son dos puntos distintos, relacionados que van al mismo punto bajo ϕ . Defina $D' = D - 1$, tome $\pi: D \rightarrow D'$ como

$$\pi(i) = \begin{cases} i, & i \leq x \\ i - 1, & i \geq x + 1. \end{cases}$$

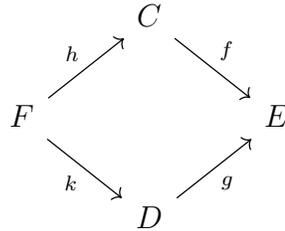
Luego, definimos $\phi': D' \rightarrow C$ como antes: Dado $x \in D'$, tome cualquier $y \in \pi^{-1}(x)$ y aplique ϕ , definimos $\phi'(x) = \phi(y)$. Claramente es un epimorfismo y π, ϕ' factorizan ϕ . Comprobar lo restante es fácil con esta π particular. ■

Corolario 3.14 Δ_0 *satisface* F2.

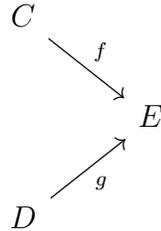
Prueba: Procedemos por inducción sobre el cardinal de $|D|$. Suponga que $|D| = 1$ y se tiene el siguiente diagrama en Δ_0 , en donde las flechas son epimorfismos.



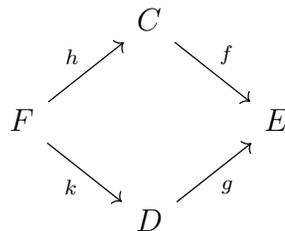
En este caso, es trivial encontrar F junto con epimorfismos k, h tales que commute el siguiente diagrama:



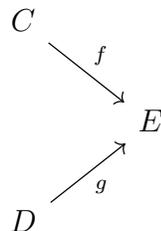
Suponga ahora que para cualquier diagrama:



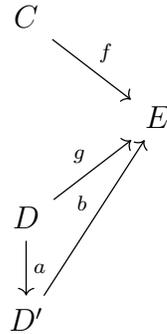
En donde $|D| \leq n$ se puede completar a:



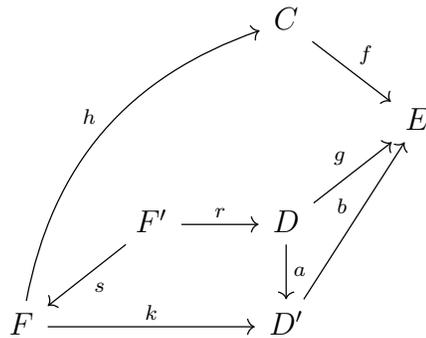
Mostremos que cualquier diagrama del estilo anterior que tenga a $|D| = n + 1$ se puede completar como dice **(F2)**. En efecto, tome $D \in \Delta_0$ tal que $|D| = n + 1$ y suponga que se tiene el siguiente diagrama:



Por el Teorema 3.13 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:



Como $|D'| < |D|$ entonces, por hipótesis de inducción, existen $h: F \rightarrow C$ y $k: F \rightarrow D'$ epimorfismos tales que $f \circ h = b \circ k$, por el Teorema 3.13 aplicado a k se obtiene que existen $r: F' \rightarrow D$ y $s: F' \rightarrow F$ tales que $k \circ s = a \circ r$. En un diagrama:



Finalmente, tome por completación de f, g a $g \circ r, f \circ (h \circ s)$, respectivamente. ■

3.2. El pseudoarco como límite proyectivo

El Teorema 2.9, junto con la extensa sección 3.1 nos garantiza que Δ_0 tiene un único límite proyectivo al cual denotaremos por \mathbb{P} . En lo que sigue, a pesar de que \mathbb{P} está caracterizado por su propiedad universal, utilizaremos la construcción particular para un límite de Fraïssé que hicimos en el capítulo 2. A este objeto \mathbb{P} se le llama un pre-pseudoarco, la razón de esto viene dada por los siguientes teoremas.

Teorema 3.15 $R^{\mathbb{P}}$ es una relación de equivalencia con a lo más dos puntos en cada clase de equivalencia.

Prueba:

Reflexividad: Fije $x \in \mathbb{P}$. Como $R^{\mathbb{P}}$ es cerrada en $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$, si logramos mostrar que (x, x) es un punto de acumulación de $R^{\mathbb{P}}$, tendremos que $(x, x) \in R^{\mathbb{P}}$. Tome $U \times V$ un aberrado básico que tenga a (x, x) . Podemos considerar $A = U \cap V$ y obtener que $(x, x) \in A \times A \subseteq U \times V$. Luego, considere la cubierta abierta $\{A, \mathbb{P} - A\}$. Por el Lema 2.7, podemos encontrar $\phi: \mathbb{P} \rightarrow P$ un epimorfismo que refina a $\{A, \mathbb{P} - A\}$. Ahora, como R^P tiene estructura de gráfica lineal finita, se tendrá que $(\phi(x), \phi(x)) \in R^P$, por lo tanto existen $y, y' \in \mathbb{P}$ preimágenes de $\phi(x)$ que están $R^{\mathbb{P}}$ -relacionadas y además $\{y, y'\} \subseteq A$. Así que $(y, y') \in (A \times A) \cap R^{\mathbb{P}} \subseteq (U \times V) \cap R^{\mathbb{P}}$. Concluimos que $(x, x) \in R^{\mathbb{P}}$.

Simetría: Suponga que $(x, y) \in R^{\mathbb{P}}$. De nuevo mostraremos que $(y, x) \in cl R^{\mathbb{P}}$. Dados U, V cerrabierto básicos, ajenos entre sí, que contengan a y y a x respectivamente, consideramos la cubierta abierta $\{U, V, \mathbb{P} - (U \cup V)\}$. De nuevo podemos encontrar $\phi: \mathbb{P} \rightarrow P$ un epimorfismo que refine a esta cubierta. Como $(x, y) \in R^{\mathbb{P}}$ entonces $(\phi(x), \phi(y)) \in R^P$ y en consecuencia $(\phi(y), \phi(x)) \in R^P$, así que se pueden encontrar $z \in \phi^{-1}(\phi(y))$ y $w \in \phi^{-1}(\phi(x))$ tales que $(z, w) \in R^{\mathbb{P}}$. Finalmente note que $(z, w) \in (U \times V) \cap R^{\mathbb{P}}$.

La transitividad será consecuencia de la restricción para la cardinalidad de las clases. Si una clase $[x]$ tiene más de 2 elementos, digamos x, y, z , donde $xR^{\mathbb{P}}y$ y $xR^{\mathbb{P}}z$ entonces de nuevo tome U, V, W cerrabierto ajenos entre sí que tengan a cada uno de estos puntos, respectivamente. Tome $\phi: \mathbb{P} \rightarrow P$ un epimorfismo que refine $\{U, V, W, \mathbb{P} - (U \cup V \cup W)\}$. Note que $\phi(x), \phi(y), \phi(z)$ deben ser distintos entre sí y que además $\phi(y), \phi(z)$ son los R^P -vecinos de $\phi(x)$. Tome ahora una estructura P' junto con un epimorfismo $\varphi: P' \rightarrow P$ tal que haya en P' algunos puntos Y, X, X', Z relacionados de la siguiente manera:

$$Y R^{P'} X, X R^{P'} X', X' R^{P'} Z$$

que además satisfagan $\varphi(X) = \varphi(X') = \phi(x)$, $\varphi(Y) = \phi(y)$ y $\varphi(Z) = \phi(z)$ y sean los únicos que satisfacen esto. Luego, por el Lema 2.5 habrá $\gamma: \mathbb{P} \rightarrow P'$ tal que $\varphi \circ \gamma = \phi$. Notemos ahora que $\varphi(\gamma(x)) = \phi(x)$, por lo tanto $\gamma(x) = X$ o $\gamma(x) = X'$. También tendremos que $\gamma(y) = Y$ y que $\gamma(z) = Z$. Luego como γ conserva la relación, tendremos que $\gamma(x)R^{P'}Y$ y $\gamma(x)R^{P'}Z$. Pero ni X ni

X' pueden satisfacer esto, lo cual es absurdo, pues $\gamma(x)$ sólo puede tomar estos dos valores. ■

Ya empieza a ser observable la comodidad y poder que nos otorga lo *manejable* que es la familia de epimorfismos entre gráficas lineales finitas.

El Teorema anterior nos da derecho a considerar el espacio cociente $\mathbb{P}/R^{\mathbb{P}}$. Deseamos mostrar que este espacio es el pseudoarco, para lograr esto utilizaremos el Teorema 1.34. Pero antes necesitamos algunos resultados de topología general que a veces no son cubiertos en los cursos de topología básica o que son olvidados por estudiantes distraídos, este es el caso de quien escribió esto, así que sería altanero de mi parte no incluirlo. Un tratamiento mucho mejor escrito de los siguientes temas puede ser encontrado en [4].

Teorema 3.16 (Caracterización de Kuratowski para los compactos)

Un espacio K es compacto si y sólo si para cualquier espacio X , la proyección $\pi_X: X \times K \rightarrow X$ es cerrada.

Prueba: Supongamos que K es compacto y X es un espacio topológico arbitrario. Tomemos un cerrado $F \subseteq X \times K$. Supongamos que $x \notin \pi_X(F)$. Entonces para cualquier $k \in K$ se tendrá que $(x, k) \notin F$. Como F es cerrado, podemos encontrar para cada punto (x, k) un abierto $A_k = O_k \times U_k$ que lo aisle de F . Así $(A_k)_{k \in K}$ es una cubierta abierta de $\{x\} \times K$, por lo tanto podremos encontrar una subcubierta finita $(A_{k_i})_{i=0}^n$ de $\{x\} \times K$. Luego considere el siguiente abierto: $O = \bigcap_{i=0}^n \pi_X(A_{k_i})$. Note que $x \in O$ y además $O \cap \pi_X(F) = \emptyset$. Esto muestra que cualquier punto en la cerradura de $\pi_X(F)$ necesariamente pertenece a $\pi_X(F)$. Se concluye que $\pi_X(F)$ es cerrado.

Supongamos ahora que, para cualquier espacio topológico X , las proyecciones $\pi_X: X \times K \rightarrow X$ resultan cerradas. Mostremos que K es compacto. Tome una familia $(F_\alpha)_{\alpha < \kappa} \subseteq K$ de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Tome a ∞ un punto que no pertenezca a K . Sobre $Y = K \cup \{\infty\}$ definimos una topología de la siguiente forma: Por sub-básicos tomaremos a cualquier subconjunto de K (hacemos discreto a K dentro de Y) y a los de la forma $F_\alpha \cup \{\infty\}$. Abreviamos $K' = cl_{Y \times K} \{(x, x) : x \in K\}$. Tenemos que $\pi_Y(K')$ es un cerrado de Y que contiene a K . Ahora observe que ∞ es un punto de acumulación de K en Y y que por lo tanto $\infty \in \pi_Y(K')$,

lo cual implica que existe un punto de la forma (∞, u) perteneciente a K' . Considere ahora cualquier U abierto de K que tenga a u y cualquier F_α de la familia; tendremos que $(\infty, u) \in (F_\alpha \cup \{\infty\}) \times U$ y entonces existe $(y, y) \in (F_\alpha \cup \{\infty\}) \times U$, con $y \in K$. Es decir, cualquier vecindad U de u y cualquier F_α tienen intersección no vacía. Esto implica que $u \in \bigcap_{\alpha < \kappa} F_\alpha$. ■

Teorema 3.17 *Si R es una relación de equivalencia sobre el espacio X entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- i. La proyección estándar $p: X \rightarrow X/R$ es cerrada.*
- ii. Para cualquier abierto A de X la unión de las clases de equivalencia contenidas en A es abierta.*

Prueba:

i. \Rightarrow ii. Tome A un abierto no vacío. Tenemos que A^c es cerrado y entonces también lo es $p(A^c)$, pero esto sucede solamente cuando $p^{-1}p(A^c)$ sea cerrado. Ahora sólo note que $p^{-1}p(A^c) = \bigcup\{[x]_R : [x]_R \not\subseteq A\}$ y esto es justamente el complemento de la unión de las clases de equivalencia contenidas en A .

ii. \Rightarrow i. Tome $F \subseteq X$ un cerrado. Tenemos que F^c es abierto y entonces la unión de todas las clases de equivalencia contenidas en él es abierta, por lo tanto la unión de las clases que intersecan a F es cerrada, pero esto es simplemente $p^{-1}p(F)$. Concluimos que $P(F)$ es cerrado. ■

Recordamos ahora un par de definiciones y una proposición relacionada a ellas que, para procurar la brevedad del texto, enunciaremos sin demostración.

Definición 3.18 *Dado un espacio topológico X definimos su **peso** como*

$$w(X) = \text{mín}\{|B| : B \text{ es base de } X\}.$$

*Definimos el **peso de sus redes** como*

$$nw(X) = \text{mín}\{|N| : N \text{ es una red en } X\}.$$

*Aquí por **red** nos referimos a cualquier colección N de subconjuntos de X que cumpla que para cualquier punto x y cualquier vecindad U de x , exista $M \in N$ tal que $x \in M \subseteq U$.*

Proposición 3.19 *Si X es compacto y Hausdorff entonces su peso y el peso de sus redes coincide.*

Prueba: Vea [4] Teorema 3.1.19. ■

Proposición 3.20 *Si X, Y son espacios compactos Hausdorff y $f: X \rightarrow Y$ es continua y sobreyectiva entonces $w(Y) \leq w(X)$.*

Prueba: Por ser Y compacto y Hausdorff tenemos que $w(Y) = nw(Y)$, donde $nw(Y)$ denota el peso de las redes sobre Y . Luego si B es una base de X tal que $|B| = w(X)$ se tendrá que $\{f(U) : U \in B\}$ es una red en Y . Así $nw(Y) \leq w(X)$. ■

Ahora sí podemos continuar con las ideas principales del texto.

Lema 3.21 *Suponga que D es una \mathcal{L}_0 -estructura en la cual R^D es una relación de equivalencia y de tal manera que cada cubierta abierta de D pueda ser refinada mediante un epimorfismo hacia alguna gráfica, entonces D/R^D es un continuo encadenable.*

Prueba: Probemos primero que D/R^D es un continuo metrizable y después que es encadenable. Aquí y en el resto de esta sección p denotará la proyección al cociente cuando no haya posibilidad de confusión.

D/R^D es Hausdorff: Note que $p: D \rightarrow D/R^D$ es cerrada debido a la siguiente igualdad y el Teorema de Kuratowski para compactos: $p^{-1}p(F) = \pi_1((D \times F) \cap R)$. Dadas dos clases distintas tendremos que son compactas debido a que R^D es cerrada. Podemos hallar dos abiertos ajenos que las separen, en virtud del Teorema 3.17, la unión de las clases de equivalencia contenidas en esos abiertos nos dará un par de abiertos R^D -saturados ajenos.

Es compacto: Por ser una imagen continua de un compacto.

Es metrizable: Como ya es compacto y Hausdorff, bastará mostrar que es segundo numerable, lo cual es inmediato debido a la Proposición 3.20.

Es conexo: Si no fuera así, habría $C \subset D/R^D$ un aberrado no vacío y distinto a D/R^D , entonces $p^{-1}(C), p^{-1}(C^c)$ serían un par de cerrabiertos no vacíos que cubren D , por lo tanto, existiría un epimorfismo $\phi: D \rightarrow n$ hacia alguna gráfica que refinaría dicha cubierta. Luego, como $\phi(p^{-1}(C)) \cup \phi(p^{-1}(C^c))$ cubre n , debe de haber un par de puntos $x, y \in \phi(p^{-1}(C)), \phi(p^{-1}(C^c))$,

respectivamente, que estén relacionados. Entonces existen preimágenes bajo ϕ de dichos puntos las cuales están relacionadas, digamos x', y' , respectivamente. Tendremos que $x' \in p^{-1}(C)$ y $y' \in p^{-1}(C^c)$ y así $p(x') = p(y') \in C \cap C^c$, lo cual sería imposible.

Es encadenable: Tomemos d una métrica compatible con la topología en D/R^D . Dado $r > 0$ se puede encontrar una cubierta con bolas de radio r de D/R^D , digamos $\{B_i\}_{i=0}^n$. Considere la cubierta abierta de D , $\{p^{-1}(B_i)\}_{i=0}^n$; hay un epimorfismo hacia alguna gráfica $\phi: D \rightarrow m$ que refine nuestra cubierta. Note que para cualquier $i, j \in m$ se tiene que iRj si y sólo si $p(\phi^{-1}(i)) \cap p(\phi^{-1}(j)) \neq \emptyset$. Al tomar un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño podremos asegurarnos de que la nube de radio ε alrededor de cada $p(\phi^{-1}(i))$ esté contenida en alguna bola de radio r . La condición sobre los índices en m nos asegura que estas nubes tienen la propiedad de intersección que define a las cadenas y el hecho de que estén contenidas en las bolas de radio r nos da que su diámetro es más chico que r . Concluimos que D/R^D es encadenable. ■

Nos encontramos ya en condiciones de probar que obtuvimos al pseudoarco a partir del cociente del pre-pseudoarco.

Definición 3.22 Sea D una \mathcal{L}_0 -estructura. Decimos que $X \subseteq D$ es R -conectado si no se puede separar en dos cerrados ajenos no vacíos A, B tales que para cualquier $a \in A$ y cualquier $b \in B$ no se tenga que $aR^D b$ ni $bR^D a$.

Teorema 3.23 $\mathbb{P}/R^{\mathbb{P}}$ es un continuo con más de un punto, encadenable y hereditariamente indescomponible.

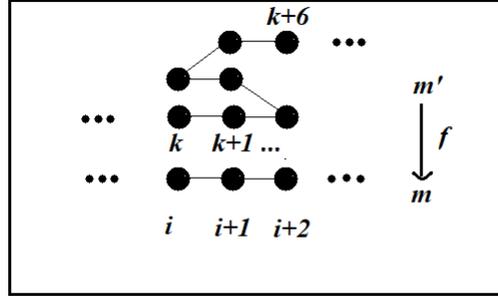
Prueba: Tiene más de un punto porque $|\mathbb{P}| \geq \omega$ y las clases de equivalencia de $R^{\mathbb{P}}$ tienen a lo mucho dos puntos. Como consecuencia del Lema 3.21, tenemos que es un continuo encadenable. Sólo restará mostrar que es hereditariamente indescomponible. Supongamos que X es un subcontinuo de $\mathbb{P}/R^{\mathbb{P}}$ que es descomponible en dos subcontinuos propios, digamos $X = X_1 \cup X_2$. Abreviamos

$$F_1 = p^{-1}(X_1), \quad F_2 = p^{-1}(X_2) \quad \text{y} \quad F = p^{-1}(X),$$

donde $p: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}/R^{\mathbb{P}}$ es la proyección estándar. Si $C \cup D$ es una R -separación de F entonces $p(F) = p(C) \cup p(D) = X$ sería una separación de X , pero esto no puede ser ya que X es conexo. Análogamente podemos mostrar que

F_1 y F_2 son R -conectados. Note también que son R -saturados y que tienen algún punto en común, ya que X_1 y X_2 tienen algún punto en común. Se afirma que $F_1 \subseteq F_2$ o al revés. Si esto no fuera así, podemos encontrar $x_1 \in F_1 - F_2$ y $x_2 \in F_2 - F_1$. Ahora, podemos encontrar unos cerrabiertos ajenos A, B tales que $x_1 \in A$, $F_2 \subseteq B$, luego la unión de todas las clases de equivalencia contenidas en B es un abierto O que además es R -saturado y contiene a F_2 , luego para cualquier punto $y \in F_2$, se puede hallar un aberrado V_y que se quede contenido en O y al ser F_2 compacto hay un número finito de V_y 's que lo cubren, así $F_2 \subseteq \bigcup_{i=0}^m V_{y_i} \subseteq O$.

Resumiendo: se pudo hallar un par de cerrabiertos U_1, U_2 tales que $x_1 \in U_1$, $F_2 \subseteq U_2$, son ajenos y además son R -ajenos, *i.e.* para todo punto $y_1 \in U_1$ y todo punto $y_2 \in U_2$ no se cumple que $R^{\mathbb{P}}(y_1, y_2)$. De una manera similar se encuentran otros cerrabiertos V_1, V_2 que satisfagan que $F_1 \subseteq V_1$, $x_2 \in V_2$ y que además sean R -ajenos. Ahora, considere el álgebra sobre \mathbb{P} generada por $\{U_1, U_2, V_1, V_2\}$, el conjunto de átomos de esta álgebra forma una partición sobre \mathbb{P} a la cual podemos refinar mediante un epimorfismo hacia alguna gráfica, digamos $\phi: \mathbb{P} \rightarrow m$. Afirmamos que $\phi(F_1)$ es R -conectado. De lo contrario se puede separar en dos cerrabiertos S, T R -ajenos no vacíos. Y así la restricción de $\phi^{-1}(S), \phi^{-1}(T)$ a F_1 mostraría que F_1 no es R -conectado. Similarmente se prueba que $\phi(F), \phi(F_2)$ son R -conectados. Luego, es fácil ver que $\phi(x_1)$ no es un R -vecino de nadie en $\phi(F_2)$ y lo mismo para $\phi(x_2)$ y $\phi(F_1)$. Entonces $\phi(F_1) - \phi(F_2)$ y $\phi(F_2) - \phi(F_1)$ son no vacíos. Note también que su intersección es no vacía. El hecho de que F, F_1 y F_2 sean R -conectados nos asegura que $\phi(F), \phi(F_1)$ y $\phi(F_2)$ son intervalos y entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad (al componer, si es necesario, con algún otro epimorfismo adecuado) que $\phi(F) = \{i, i+1, i+2\}$. Esto junto con lo dicho respecto a las diferencias de las imágenes de las F_i implica que $\phi(F_1) = \{i, i+1\}$ y $\phi(F_2) = \{i+1, i+2\}$. Ya por último tome una gráfica m' junto con un epimorfismo $f: m' \rightarrow m$ que sea vea de la siguiente manera:



Por el Lema 2.8 existe un epimorfismo $\psi: \mathbb{P} \rightarrow m'$ tal que $\phi = f \circ \psi$. Observe ahora que $k+4, k \in \psi(F_1)$ pero esto es imposible ya que entonces $a_2 \in \phi(F_1)$ por la R -conexidad de $\psi(F_1)$. ■

3.3. Resultados sobre este punto de vista

En esta sección nos encargamos de sacarle jugo a nuestra construcción del pseudoarco probando dos Teoremas importantes debidos a Mioduszewski y poniendo en evidencia que problemas topológicos pueden ser traducidos a problemas combinatorios vía nuestra construcción.

Definición 3.24 Una \mathcal{L}_0 -estructura se llama **especial** si refina cualquiera de sus cubiertas abiertas mediante un epimorfismo hacia alguna estructura en Δ_0 y si además R^D es una relación de equivalencia con a lo mucho dos puntos en cada clase de equivalencia.

Teorema 3.25 Si D_0, D_1 son estructuras especiales, $\phi: D_0 \rightarrow D_1$ es un epimorfismo, $p_i: D_i \rightarrow D_i/R^{D_i}$ ($i = 0, 1$) denotan las proyecciones canónicas a los cocientes entonces la función ϕ^* que hace conmutar al diagrama de abajo está bien definida y es continua, más aún, si ϕ es un isomorfismo, entonces ϕ^* es un homeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc}
 D_0 & \xrightarrow{\phi} & D_1 \\
 \downarrow p_0 & & \downarrow p_1 \\
 D_0/R^{D_0} & \xrightarrow{\phi^*} & D_1/R^{D_1}
 \end{array}$$

Prueba: Es fácil definir ϕ^* y ver que la definición que se le ocurra es una buena definición. Para ver que ϕ^* es continua tome un abierto U en D_1/R^{D_1} , como el diagrama conmuta bastará ver que $(p_1 \circ \phi)^{-1}(U)$ es abierto pero esto es obvio. Si ϕ es isomorfismo y ϕ^{-1} denota su inversa entonces bastará verificar que $(\phi^{-1})^*$ es inversa de ϕ^* y esto es obvio. ■

Definición 3.26 Sea $\delta > 0$. En un espacio métrico compacto y encadenable (X, d) decimos que la cadena $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ es δ -fina si:

- C1. $d(e_i, e_j) > \delta$ si $|i - j| > 1$.
- C2. En cada e_i hay algun x tal que $d(x, \bigcup_{j \neq i} e_j) > \delta$.
- C3. Cualquier $A \subseteq X$ con diámetro menor a δ está contenido en algún eslabón de E .

Una cadena se llamará fina si es δ -fina para algún δ .

Observación: La condición 3 indica que cada cadena fina es, en particular, una cubierta.

Lema 3.27 Si (X, d) es un continuo encadenable entonces cualquiera de sus cubiertas puede ser refinada mediante una cadena fina, más aún, la cerradura de cualquier eslabón de dicha cadena se queda contenida en alguna pieza de la cubierta.

Prueba: Es una sencilla aplicación del número de Lebesgue. ■

Lema 3.28 Si X es un continuo encadenable entonces existe una \mathcal{L}_0 -estructura especial C tal que C/R^C es homeomorfo a X .

Prueba: Vamos a construir inductivamente una sucesión $(C_n)_{n < \omega}$ de cadenas con las siguientes características:

1. La cerradura de cualquier eslabón de C_{n+1} está contenida en algún eslabón de C_n .
2. $\text{esl}(C_n) < 1/n$.
3. C_n es fina.
4. Si $C_{n+1,i} \subseteq C_{n,k}$, $C_{n+1,j} \subseteq C_{n,l}$ y $|k - l| > 1$ entonces $|i - j| > 2$.

5. Para cada eslabón $C_{n,k}$, existe otro en C_{n+1} que se queda contenido en $C_{n,k}$ y que no interseca a ningún otro eslabón de C_n .

Tome C_0 como cualquier cadena fina. Si tenemos construida la cadena C_n podemos construir la C_{n+1} de la siguiente forma: Digamos que la cadena C_n es δ -fina. Tomamos

$$0 < r < \min\{1/2(n+1), \delta/6\}.$$

Cubrimos X con un número finito de bolas de radio r , digamos B_1, \dots, B_m . Por el Lema 3.27 podemos encontrar cierta cadena fina que refine a esta cubierta, a esta cadena la llamamos C_{n+1} . Veamos que satisface las condiciones necesarias.

1. Considere la cerradura $cl C_{n+1,i}$ de cualquier eslabón de C_n . Como C_n refina en cerradura a la cubierta B_1, \dots, B_m , entonces hay cierto m_0 de tal forma que $cl C_{n+1,i} \subseteq B_{m_0}$. Debido a que $diam(cl B_{m_0}) \leq \delta/3$, se obtiene que $cl B_{m_0} \subseteq C_{n,k_0}$ para algún k_0 y entonces $cl C_{n+1,i} \subseteq C_{n,k_0}$.
2. Por construcción se tiene que cualquier eslabón $C_{n+1,i}$ de C_n tiene diámetro menor a $2r$ y $2r$ es menor que $1/(n+1)$ y que $\delta/3$.
3. Este punto es claro.
4. Si $|l - k| > 1$, $C_{n+1,i} \subseteq C_{n,k}$ y $C_{n+1,j} \subseteq C_{n,l}$ entonces observe que ninguno de los tres siguientes casos puede tener lugar: $i = j$, $i+1 = j$, $i+2 = j$. Los primeros dos no son posibles ya que $C_{n,k}$ y $C_{n,l}$ son ajenos. Si se diera el tercer caso entonces podemos encontrar $x \in C_{n+1,i} \cap C_{n+1,i+1}$ y $y \in C_{n+1,j} \cap C_{n+1,i+1}$. Se tendrá que $d(x, y) < \delta/3$ y en consecuencia que $d(C_{n,k}, C_{n,l}) \leq \delta/3 < \delta$, lo cual es imposible ya que C_n es δ -fina.
5. Tome algún $x \in C_{n,k}$ que satisfaga $C2$. en la definición de cadena δ -fina, es decir

$$d(x, \bigcup_{l \neq k} C_{n,l}) > \delta$$

Habrà cierto $C_{n+1,i}$ que tenga a x . Este $C_{n+1,i}$ satisface lo deseado. Recursivamente queda definida nuestra sucesión de cadenas $(C_n)_{n < \omega}$ deseada.

Ahora a cada C_n le asociamos una \mathcal{L}_0 -estructura: si $C_n = \{C_{n,1}, \dots, C_{n,k}\}$ tomamos por conjunto subyacente a $X_n = \{1, \dots, k\}$ y decimos que $iR^{X_n}j$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$. Además le ponemos la topología discreta a cada X_n . Definimos una sucesión de funciones:

$$\phi_n: X_{n+1} \rightarrow X_n,$$

$$i \mapsto \text{mín}\{k : cl C_{n+1,i} \subseteq C_{n,k}\}.$$

Claramente esta función está bien definida y además es suprayectiva debido a las características de $(C_n)_{n < \omega}$. Veamos que es un epimorfismo.

Si $iR^{X_{n+1}}j$ entonces $|i - j| \leq 1$. Tenemos además que $C_{n+1,i} \subseteq C_{n,\phi_n(i)}$ y que $C_{n+1,j} \subseteq C_{n,\phi_n(j)}$ y como $C_{n+1,i} \cap C_{n+1,j} \neq \emptyset$ se sigue que $C_{n,\phi_n(i)} \cap C_{n,\phi_n(j)} \neq \emptyset$, es decir $|\phi_n(i) - \phi_n(j)| \leq 1$. Ahora si $k, k' \in X_n$ y además $|k - k'| \leq 1$ entonces por la condición 5 existe $i \in X_{n+1}$ tal que $C_{n+1,i} \subseteq C_{n,k}$ y no interseca a ningún otro eslabón de C_n , también existe $i' \in X_{n+1}$ tal que $C_{n+1,i'} \subseteq C_{n,k'}$ y no interseca a ningún otro eslabón de C_n . Tome el máximo eslabón que se quede contenido en $C_{n,k}$ y el mínimo contenido en $C_{n,k'}$, los índices de estos eslabones satisfacen que ϕ evaluada en ellos da por resultado k, k' y es obvio que están $R^{X_{n+1}}$ -relacionados.

Formamos ahora el límite inverso de las ϕ_n :

$$C = \lim_{\leftarrow} (\phi_n, X_n)$$

Equipamos a C con una relación R^C . Decimos que $x, y \in C$ están R^C -relacionados si para cada natural n sus proyecciones x_n y y_n están R^{X_n} -relacionadas.

Se afirma que C es una \mathcal{L}_0 -estructura especial. El argumento para revisar la parte de la topología es idéntico al usado en el Teorema 2.9. Para cerciorarnos de la parte del lenguaje, basta revisar que R^C es de equivalencia con cada clase de ella sin más de dos puntos, que es lo que hacemos a continuación. Es fácil notar, que R^C es reflexiva y simétrica, debido a su sencilla definición. La transitividad será consecuencia de la restricción para la cardinalidad de las clases. Supongamos que hay x, y, z distintitos entre sí tales que:

$$xR^C y \quad \text{y} \quad yR^C z$$

Para hacer un poco simple la notación denotaremos por y_n a la proyección del límite inverso evaluada en y . Se afirma que hay un natural m tal que

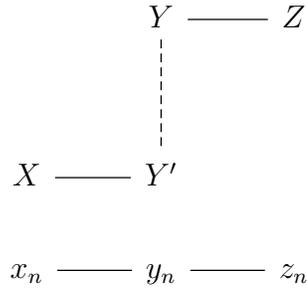
si $n \geq m$ entonces $\phi_n^{-1}(y_n)$ contiene a y_{n+1} junto con un $R^{X_{n+1}}$ -vecino de y_{n+1} distinto de él mismo. En efecto, supongamos sin perder generalidad que $x_n \leq y_n \leq z_n$, entonces hay $Z, Y, Y', X \in X_{n+1}$ tales que

$$ZR^{X_{n+1}}Y \text{ y } Y'R^{X_{n+1}}X$$

Y además cumplen las siguientes ecuaciones:

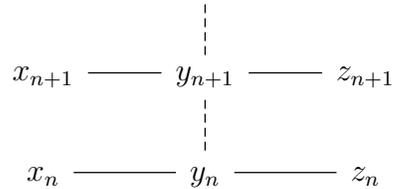
$$\begin{aligned} \phi_n(Z) &= z_n \\ \phi_n(Y) &= \phi_n(Y') = y_n \\ \phi_n(X) &= x_n \end{aligned}$$

Por la condición 4. de nuestras cadenas, tendremos que $Y \neq Y'$ y esto junto con la restricción de los diámetros de los eslabones de C_{n+1} respecto a la *finura* de C_n indica que el único dibujo genérico de esta situación es el siguiente:



Sabemos que y_{n+1} debe pertenecer a la parte punteada, así que analizaremos lo que no puede suceder en esta parte para un número infinito de n 's.

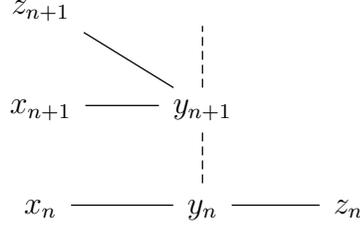
Para ningún n se puede dar el siguiente diagrama



Pues esto implicaría que $d(C_{n+1, x_{n+1}}, C_{n+1, z_{n+1}}) < \delta$, con δ siendo el tesigo de la finura de la cadena C_{n+1} .

Por otro lado, sólo para un número finito de n 's se puede dar el siguiente

diagrama:



Pues si esto fuera cierto para un número infinito de n 's, se tendría que $x = z$. Así pues, existe cierto $m < \omega$ tal que si $n \geq m$ entonces se satisface que y_{n+1} tiene un $R^{X_{n+1}}$ -vecino distinto de él mismo que está en $\phi_n^{-1}(y_n)$. Ahora, como $x \neq z$ entonces hay cierto $m' < \omega$ tal que si $n \geq m'$ entonces $x_n \neq z_n$. Si tomamos $M = \max\{m, m'\}$ se obtendrá que siempre que $n \geq M$ entonces $x_n \neq z_n$ y además y_n tiene un R^{X_n} -vecino que bajo ϕ_{n-1} va a dar a y_{n-1} . Combinando estos hechos se obtiene que $x = y$ o $z = y$, lo cual contradice nuestra suposición de que x, y, z eran distintos entre sí.

Ahora se afirma que C/R^C es homeomorfo a X . Como primer paso, definimos una regla de correspondencia $f: C \rightarrow X$, haciendo

$$f(x) = \text{el único punto en } \bigcap_{n < \omega} cl C_{n, x_n}.$$

Esta es una buena definición debido a que $esl(C_n)$ tiende a cero cuando n es grande y a que $(cl C_{n, x_n})_{n < \omega}$ es decreciente. Para ver que es continua, tome $r > 0$, podemos encontrar un n suficientemente grande como para que la siguiente relación sea satisfecha

$$f(x) \in cl C_{n, x_n} \subseteq B_r(f(x))$$

Luego, como $p_n: C \rightarrow X_n$ es continua, hay cierto abierto $U \subseteq C$ tal que

$$p_n(U) \subseteq \{x_n\}$$

Observe que si $y \in U$ entonces $y_n = x_n$ y así $f(y) \in cl C_{n, x_n}$, es decir $f(U) \subseteq B_r(f(x))$. Observemos que f es suprayectiva, pues si $y \in X$ entonces uno puede considerar el conjunto de todas las secuencias finitas (de cualquier longitud)

$$(a_0, \dots, a_n)$$

Con $a_i \in X_i$ que cumplan que $y \in C_{i,a_i}$ y que $\phi_i(a_{i+1}) = a_i$. Al darle estructura de orden parcial mediante la relación de *extensión* de secuencias, se obtiene un árbol que es de ramificación finita y de altura ω , entonces por el Lema de König (hijo), habrá una rama de longitud ω de tal árbol, digamos x , tal x cumplirá con $f(x) = y$.

Por último verifiquemos que las clases de equivalencia de R^C coinciden con las fibras de f . De no ser así, habría $xR^C y$ tales que $f(x) \neq f(y)$ y entonces se podría encontrar un n tal que $C_{n,x_n} \cap C_{n,y_n} = \emptyset$ lo cual se traduce a que x_n no está R^{X_n} -relacionado a y_n , pero esto contradice el hecho de que $xR^C y$. Recíprocamente, si $f(x) = f(y)$ entonces

$$\bigcap_{n < \omega} cl C_{n,x_n} = \bigcap_{n < \omega} cl C_{n,y_n}.$$

Y de aquí se sigue que para cada n se tiene que $f(x) \in C_{n,x_n} \cap C_{n,y_n}$, lo cual implica que x_n está R^{X_n} -relacionado con y_n . Concluimos que $xR^C y$. Finalmente, consideramos el siguiente diagrama conmutativo, en donde h es la función obvia

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & X \\ p \downarrow & \nearrow h & \\ C/R^C & & \end{array}$$

Como p y f son identificaciones (f por ser cerrada), necesariamente h es una identificación y además es biyectiva, entonces es un homeomorfismo. ■

Sólo necesitamos un último lema para probar los Teoremas de Mioduszewski.

Lema 3.29 *Supongamos que (X, d) es un continuo encadenable y que $f, g: \mathbb{P}/R^{\mathbb{P}} \rightarrow X$ son funciones continuas y suprayectivas, entonces, dado $r > 0$, podemos hallar un isomorfismo $\phi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ tal que $d(f(x), g(\phi^*(x))) < r$. Pictórica-*

mente, el cuadrado inferior conmuta salvo r .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{P} & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & \mathbb{P} \\
 \downarrow p & & \downarrow p \\
 \mathbb{P}/R^{\mathbb{P}} & \xrightarrow{\phi^*} & \mathbb{P}/R^{\mathbb{P}} \\
 \downarrow f & & \downarrow g \\
 X & \xrightarrow{1} & X
 \end{array}$$

Prueba: Para la prueba de este resultado iremos dibujando las flechas mencionadas para que sea fácil de seguir el argumento. Cubrimos X con bolas de radio menor a $r/2$, digamos B_1, \dots, B_n . Esta cubierta puede ser refinada, en virtud del Lema 3.27, por una cadena δ -fina, llamémosle $C = \{C_1, \dots, C_m\}$. Observemos que el diámetro de cada eslabón C_i de C es menor a r . Ahora, como $f \circ p$ y $g \circ p$ son uniformemente continuas entonces por el Lema 2.7 podemos encontrar un par de epimorfismos hacia un par de g.l.f., digamos

$$A \xleftarrow{a} \mathbb{P} \xrightarrow{b} B$$

tales que cualquier fibra de a , bajo $f \circ p$ va a dar a un conjunto de diámetro menor a δ y cualquier fibra de b bajo $g \circ p$ va a dar a un conjunto de diámetro también menor a δ . Póngale ahora estructura de gráfica a C (en realidad a sus índices) de la manera usual, es decir al conjunto

$$C' = \{1, \dots, m\}$$

dele la relación canónica descrita en la Sección 3.1 y defina un par de funciones F, G

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{a} & \mathbb{P} & & \mathbb{P} & \xrightarrow{b} & B \\
 \downarrow F & & \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow G \\
 & & \mathbb{P}/R^{\mathbb{P}} & & \mathbb{P}/R^{\mathbb{P}} & & \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \\
 C' & & X & & X & & C'
 \end{array}$$

mediante las siguientes reglas de correspondencia:

$$F(x) = \text{mín}\{k : f \circ p(a^{-1}(x)) \subseteq C_k\}$$

$$G(x) = \min\{k : g \circ p(b^{-1}(x)) \subseteq C_k\}.$$

Estas son buenas definiciones debido a que C es δ -fina y además es suprayectiva ya que, por ejemplo si $k \in \{1, \dots, m\}$ entonces hay $x_k \in C_k$ tal que $d_X(x_k, \bigcup_{i \neq k} C_i) > \delta$; para cualquier $y \in (g \circ p)^{-1}(x)$ se va a satisfacer que $G(b(y)) = k$.

Afirmamos que F y G son epimorfismos. Para ver esto, notemos que debido a nuestra favorable situación de la suprayectividad y la *simpleza* de nuestras estructuras, bastará mostrar que G preserva *de ida* la relación (para F es análogo). Tome pues $xR^B y$. Como b es epimorfismo, hay $zR^{\mathbb{P}} w$ preimágenes bajo b de x y de y respectivamente. De aquí se sigue que $g \circ p(z) = g \circ p(w)$ y entonces $g \circ p(b^{-1}(x)) \cap g \circ p(b^{-1}(y)) \neq \emptyset$, como este par de conjuntos tienen diámetro menor a δ se tendrá que $G(x)$ dista de $G(y)$ en a lo sumo una unidad, comprobando así lo afirmado.

Así las cosas, por la propiedad **(L3)** para \mathbb{P} , hay un isomorfismo ϕ que completa el diagrama y en consecuencia podemos considerar el homeomorfismo ϕ^* inducido:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xleftarrow{a} & \mathbb{P} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P} & \xrightarrow{b} & B \\ & & \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow G \\ & & \mathbb{P}/R^{\mathbb{P}} & \xrightarrow{\phi^*} & \mathbb{P}/R^{\mathbb{P}} & & \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \\ & & X & & X & & \\ & & & & & & \downarrow G \\ & & & & & & C' \end{array}$$

Verifiquemos que satisface lo deseado. Si $[x] \in \mathbb{P}/R^{\mathbb{P}}$ entonces tome un representante de esa clase, digamos x , sabemos que $\phi^*([x]) = p(\phi(x))$, nos interesa estimar la siguiente distancia:

$$d_X(f \circ p(x), g \circ p(\phi(x))).$$

Con este propósito, note que $F \circ a(x) = G \circ b \circ \phi(x) = k$, entonces C_k contiene a los siguientes conjuntos

$$f \circ p(a^{-1}(a(x)))$$

y

$$g \circ p(b^{-1}(b \circ \phi(x))).$$

Ahora observe que $x \in a^{-1}(a(x))$ y que $\phi(x) \in b^{-1}(b \circ \phi(x))$. Entonces $f \circ p(x)$ y $g \circ p(\phi(x))$ pertenecen a C_k . ■

Finalmente, probamos los teoremas de Mioduszewski.

Teorema 3.30 (Mioduszewski 1) *Cualquier continuo encadenable es una imagen continua del Pseudoarco.*

Prueba: Por el Lema 3.28, todo continuo encadenable es homeomorfo a un cociente C/R^C , con C siendo una \mathcal{L}_0 -estructura especial. Por el Teorema 2.11, existe un epimorfismo

$$\phi: \mathbb{P} \rightarrow C$$

el cual induce una función suprayectiva y continua

$$\phi^*: \mathbb{P}/R^{\mathbb{P}} \rightarrow C/R^C$$

■

Teorema 3.31 (Mioduszewski 2) *Cualquier par de funciones continuas suprayectivas del pseudoarco hacia un continuo encadenable se pueden acercar arbitrariamente mediante un homeomorfismo del pseudoarco.*

Prueba: Esto es simplemente el Lema 3.29. ■

3.4. Comentarios finales

Las aplicaciones de este método no terminan aquí, la teoría de Fraïssé ha demostrado ser un campo fructífero de las matemáticas, pues puede ser adecuada para estudiar la dinámica de ciertos grupos polacos (vea [1]) y producir nuevos espacios compactos a partir de familias de estructuras finitas (vea [2]). Conservando la útil técnica de cambiar problemas topológicos por problemas de combinatoria finita. También justifica el hecho de que varias construcciones que en principio parecen ser diferentes, produzcan el mismo objeto; por ejemplo las descripciones de Bing, Knaster y Moise de lo que más tarde fue probado ser el mismo objeto, el pseudoarco. O las diferentes construcciones del cubo de Menger. Estas producen los mismos objetos porque pueden ser vistas simplemente como los límites de la secuencia **genérica** de la familia de gráficas lineales finitas y de las gráficas finitas conexas, respectivamente (vea esta tesis y [8]).

Bibliografía

- [1] Dana Bartošová y Aleksandra Kwiatkowska. «Universal minimal flow of the homeomorphism group of the Lelek fan». En: *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(10):6995–7027 (2019).
- [2] Gianluca Basso. «Compact Metrizable Structures via Projective Frassé Theory With an Application to the Study of Fences». En: *Bulletin of Symbolic Logic* 26.3-4 (2020), págs. 299-300.
- [3] RH Bing. «A homogeneous indecomposable plane continuum». En: *Duke Mathematical Journal* 15.3 (1948), págs. 729-742.
- [4] Ryszard Engelking. *General Topology*. Heldermann Verlag Berlin, 1989.
- [5] Wilfrid Hodges y col. *Model theory*. Cambridge University Press, 1993.
- [6] Trevor Irwin y Sławomir Solecki. «Projective Frassé limits and the pseudo-arc». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 358.7 (2006), págs. 3077-3096.
- [7] Bronislaw Knaster y Kazimierz Kuratowski. *Principia Mathematicae*. Vol. 1. Duke University Press, 1920.
- [8] Aristotelis Panagiotopoulos y Sławomir Solecki. «A combinatorial model for the Menger curve». En: *Journal of Topology and Analysis* (2020), págs. 1-27.
- [9] Ángel Tamariz Mascarúa y Fidel Casarrubias Segura. *Elementos de Topología General*. Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, 2012.