UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SECUENCIALIDAD Y PROPIEDAD DE FRÉCHET

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

ESMERALDA YAZMIN GARCÍA MORALES

DIRECTOR DE TESIS:
DOCTOR ROBERTO PICHARDO MENDOZA

Cd. Mx. 2022

“El miedo es producto de la imaginación, es un castigo, es el precio de la imaginación.”

Thomas Harris.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi familia y amigos por todo su apoyo y amor incondicional que me han brindado. En particular, a mi madre por todas esas horas de desvelo que ha compartido conmigo, por darme la fuerza y motivación para seguir adelante y sobre todo por siempre estar a mi lado apoyándome en cada uno de mis sueños. También, le agradezco a mi sobrino Henry por darme felicidad cuando más la necesitaba.

De igual manera, quiero agradecer a todos los profesores que me han compartido sus conocimientos, resultando una parte fundamental para mi desarrollo académico y personal. Especialmente quiero agradecer al doctor Roberto Pichardo Mendoza por todo el apoyo que me ha brindado, no solo en el desarrollo de esta tesis, sino a lo largo de toda mi carrera siendo un excelente profesor y persona. Le agradezco infinitamente por todos sus consejos y cada una de las oportunidades académicas que me ha brindado, pero ante todo quiero agradecerle por creer y confiar en mí.

RESUMEN

En este trabajo se estudian las propiedades de Fréchet y secuencialidad a lo largo de cuatro capítulos. En el primero se establecen las nociones y resultados básicos de topología general, así como la notación a emplearse en el resto de los capítulos. Haciendo uso de esta teoría, en el capítulo 2, aparecen los conceptos de espacio secuencial y espacio de Fréchet, seguidos de diversas propiedades que satisfacen éstos. Además, para concluir el capítulo se muestran un par de caracterizaciones de las propiedades de Fréchet y secuencialidad; entre estas, probablemente la más relevante, se define en términos del orden secuencial.

Resulta que algunas implicaciones inversas de las propiedades presentadas en el capítulo 2 no son ciertas y, para constatar esto, a lo largo del capítulo 3 se presentan diversas construcciones de espacios topológicos que funcionan como contraejemplos a tales afirmaciones. Por otra parte, haciendo uso de la relación de contención es posible argumentar que la familia de topologías de un conjunto es una retícula y, con esto en mente, se dedica el final del capítulo al estudio de los ínfimos y supremos de topologías secuenciales y Fréchet.

Un tema interesante y relativamente reciente en topología es el de hiperespacios. El último capítulo está dedicado a las propiedades de Fréchet y secuencialidad enfocadas en hiperespacios, específicamente al comportamiento de estas propiedades cuando se equipa al hiperespacio con algunas topologías diferentes a la de Vietoris.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

Este capítulo está dedicado a la notación que se usará a lo largo de todo el texto, así como a las definiciones y resultados básicos que se emplearán en el trabajo. Todas las notaciones y conceptos topológicos que no se presenten explícitamente aquí, deberán ser entendidos como en [1]. El mismo comentario aplica a la teoría de conjuntos y al texto [5].

El símbolo $\mathbb{N}$ denotará al conjunto de todos los enteros positivos, mientras que ω será empleado para representar los enteros no negativos, es decir, $\omega := \mathbb{N} \cup \{0\}$. En lo que sigue consideraremos a ω como el primer ordinal infinito y, por ende, las expresiones $n \in \omega$ y $n < \omega$ serán equivalentes.

Además nos resultará conveniente pensar a los números naturales como ordinales; en otras palabras, si $n \in \omega$, entonces n será igual al conjunto de todos sus predecesores, esto es, $n = \{m \in \omega : m < n\}$. Por ejemplo, $0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}$, etcétera. De este modo, para cualquier $n \in \omega$ la diferencia $\omega \setminus n$ es el conjunto $\{i \in \omega : i \geqslant n\}$.

Tomando en cuenta lo anterior, si A es un conjunto, utilizaremos el símbolo ${}^{\omega}A$ para denotar a la colección de todas las funciones de ω en A, dicho de otra forma: si $s \in {}^{\omega}A$, entonces $s : \omega \to A$ es una función tal que para cada $n \in \omega$, $s(n) \in A$. Así, ${}^{\omega}A$ es el conjunto de todas las sucesiones en A.

Como es costumbre, dada una sucesión $s \in {}^{\omega}A$ y $n \in \omega$, emplearemos el símbolo s_n para representar al valor $s(n)$ (esto es, el n-ésimo término de la sucesión s).

Si $f : X \to Y$ es una función y A es un subconjunto de X, usaremos el símbolo $f \restriction A$ para denotar la restricción de f al conjunto A. Además, si $B \subseteq Y$, $f[A]$ representará la imagen directa de A bajo f y $f^{-1}[B]$ será la imagen inversa de B bajo f. En el caso particular en que $B = \{b\}$, usaremos la expresión $f^{-1}\{b\}$ en lugar de $f^{-1}[\{b\}]$. Por otra parte, $\operatorname{img} f$, representará la imagen de X bajo f, es decir, $\operatorname{img} f = f[X]$.

Además, si A es un conjunto y κ es un cardinal, utilizaremos el símbolo $[A]^{<\kappa}$ para denotar al conjunto que tiene como elementos a todas las subcolecciones de A con cardinalidad menor a κ, dicho de otra manera, $J \in [A]^{<\kappa}$ si y solo si $J \subseteq A$ y $|J| < \kappa$. En el caso particular en que $\kappa = \omega$, $[A]^{<\omega}$ es la colección de todos los subconjuntos finitos de A.

Cabe mencionar que el símbolo $\mathbb{R}$ representará al conjunto de todos los números reales. Más aún, a menos que se indique lo contrario, siempre que pensemos a $\mathbb{R}$ como espacio topológico entenderemos que está equipado con la topología usual, la cual denotaremos por $\tau_{\mathbb{R}}$.

1.1 Topología

Si X es un espacio topológico, utilizaremos el símbolo τ_X para denotar la topología de X.

Definición 1.1. Si X es un espacio topológico y $x \in X$, definimos $\tau_X(x)$ como

$$\tau_X(x) := \{U \in \tau_X : x \in U\}.$$

Es inmediato que $\tau_X(x)$ es una base local para X en x.

Por otra parte, si X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X, denotaremos la cerradura de A en X como $\operatorname{cl}_X A$ o, si no hay riesgo de confusión con respecto al espacio en el que se está realizando el cálculo de la cerradura, $\overline{A}$. Por último, utilizaremos $\operatorname{int}_X A$ para expresar el conjunto de puntos interiores de A en X y, si es claro en qué espacio se está calculando el interior, prescindiremos del subíndice y simplemente escribiremos $\operatorname{int} A$.

El siguiente resultado es importante porque será usado un par de veces en el último capítulo.

Lema 1.2. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Si $x \in \overline{A}$ y $U \in \tau_X(x)$, entonces $x \in \overline{A \cap U}$.*

Demostración. Observemos que, para cualquier $V \in \tau_X(x)$, $U \cap V \in \tau_X(x)$ y por ende, $V \cap (A \cap U) = A \cap (U \cap V) \neq \emptyset$. □

El lema siguiente se deduce inmediatamente de [3, pág. 124, Corolario 3.1.5].

Lema 1.3. *Sean X compacto y $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ una familia decreciente de subconjuntos cerrados de X. Si $U \in \tau_X$ es tal que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i \subseteq U$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $F_j \subseteq U$.*

Teorema 1.4. *Si X es compacto T_2 y $|X| \leqslant \omega$, entonces X es metrizable.*

Demostración. Si X es finito, se tiene que X es un espacio discreto. Entonces vamos a suponer que X es infinito. Queremos probar que X es primero numerable. Con esto en mente, sea $p \in X$. Tenemos que $|X \setminus \{p\}| = \omega$, así $X \setminus \{p\} = \{x_n : n \in \omega\}$, donde $x_n = x_m$ si y solo si $n = m$.

Por otra parte, dado $n \in \omega$ existen $U_n \in \tau_X(p)$ y $V_n \in \tau_X$ tales que $U_n \cap V_n = \emptyset$ y $\{x_i : i < n\} \subseteq V_n$. Ahora, para toda $n \in \omega$ definamos $F_n := X \setminus \bigcup_{i \leqslant n} V_i$, el cual es un subconjunto cerrado de X que satisface las siguientes propiedades para cada $n \in \omega$.

1. $F_{n+1} \subseteq F_n$.
2. $p \in \bigcap_{i \leqslant n} U_i \subseteq F_n$.
3. $\bigcap_{i \in \omega} F_i = \{p\}$.

Mostraremos a continuación que $\mathcal{B}(p) := \{\mathrm{int}(F_n) : n \in \omega\}$ es una base para X en p. Es claro que $\mathcal{B}(p) \subseteq \tau_X(p)$. Además, si $U \in \tau_X(p)$, se tiene que $\bigcap_{n \in \omega} F_n = \{p\} \subseteq U$ y por el lema 1.3 existe $n \in \omega$ tal que $F_n \subseteq U$, de lo cual deducimos que $p \in \mathrm{int}(F_n) \subseteq U$.

Entonces, para cada $p \in X$ existe $\mathcal{B}(p)$, una base numerable para X en p, así $\bigcup\{\mathcal{B}(p) : p \in X\}$ es una base numerable para τ_X, es decir, X es segundo numerable.

En resumen, X es compacto T_2 y segundo numerable, lo cual implica que es metrizable (esto último puede verificarse en [3, pág. 260, Teorema 4.2.8]). $\square$

Uno de los propósitos de este texto es determinar bajo qué operaciones topológicas se preservan las propiedades de secuencialidad (ver sección 2.1) y Fréchet (ver definición 2.17), para lo cual se requerirán las definiciones presentadas a continuación.

Definición 1.5. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Definimos la *suma topológica* $\bigoplus_{i \in I} X_i$, como el conjunto $X := \bigcup_{i \in I}(X_i \times \{i\})$ equipado con la topología

$$\{U \subseteq X : U \cap (X_i \times \{i\}) \in \tau_{X_i \times \{i\}}\},$$

donde $\tau_{X_i \times \{i\}}$ es la topología producto en $X_i \times \{i\}$ para cada $i \in I$.

Con la notación de la definición previa: notemos que si $U \subseteq X$ y, para cada $i \in I$, denotamos por q_i a la función proyección en la primera coordenada de $X_i \times \{i\}$ en X_i, entonces U es abierto en la suma topológica si y solo si, para cualquier $i \in I$, $q_i[U] \in \tau_{X_i}$.

Considerando la definición 1.5 tenemos lo siguiente.

Definición 1.6. Una propiedad P será llamada *sumable* si para cualquier familia $\{X_i : i \in I\}$ de espacios topológicos que satisfacen la propiedad P se tiene que $\bigoplus_{i\in I} X_i$ satisface P.

1.2 Sucesiones

A lo largo de esta sección pensaremos a X como un espacio topológico.

Si $s \in {}^{\omega}X$, definimos *el conjunto de puntos límite de la sucesión s en X*, $\text{lím}_X s$, como

$$\text{lím}_X s := \{x \in X : \forall U \in \tau_X(x)\ \exists n \in \omega\ (s[\omega \setminus n] \subseteq U)\}.$$

En los casos en los que no haya riesgo de confusión con respecto al espacio, prescindiremos del subíndice y escribiremos simplemente $\text{lím}\, s$.

Es importante observar que el conjunto de puntos límite de una sucesión puede ser vacío. También puede pasar que dicho conjunto consista de más de un elemento (por ejemplo, en un espacio indiscreto con más de un punto). En el caso en que haya exactamente un punto límite adoptaremos una notación particular: si s es una sucesión en el espacio X, el símbolo $x = \text{lím}\, s$ será una abreviatura de la igualdad $\text{lím}\, s = \{x\}$.

Los resultados que siguen son, en su mayoría, de índole técnica y serán empleados en los capítulos subsecuentes.

Lema 1.7. *Si Y es subespacio de X y $s \in {}^{\omega}Y$, entonces $\text{lím}_Y s = Y \cap \text{lím}_X s$.*

Demostración. Sean $x \in \text{lím}_Y s$ y $U \in \tau_X(x)$. Entonces $U \cap Y \in \tau_Y(x)$ y, consecuentemente, existe $m \in \omega$ con $s[\omega \setminus m] \subseteq U \cap Y \subseteq U$, es decir, $x \in \text{lím}_X s$. Además, por definición, $x \in Y$.

Por otro lado, sea $x \in Y \cap \text{lím}_X s$. Dado $U \in \tau_Y(x)$, existe $V \in \tau_X$ con $U = V \cap Y$. Luego, $V \in \tau_X(x)$ y, por ende, hay $m < \omega$ de tal modo que $s[\omega \setminus m] \subseteq V$. Finalmente, la pertenencia $s \in {}^{\omega}Y$ nos da $s[\omega \setminus m] \subseteq V \cap Y = U$, con lo cual $x \in \text{lím}_Y s$. $\square$

Lema 1.8. *Sean* $s \in {}^{\omega}X$*,* $x \in X$ *y* $\{B_i : i \in \omega\}$ *una base local para* X *en* x*. Si sucede que* $s[\omega \setminus n] \subseteq B_n$*, para cada* $n \in \omega$*, entonces* $x \in \operatorname{lím} s$*.*

Demostración. Dado $U \in \tau_X(x)$ existe $n \in \omega$ tal que $B_n \subseteq U$, lo cual implica que $s[\omega \setminus n] \subseteq U$; por lo tanto $x \in \operatorname{lím} s$. □

Lema 1.9. *Sea* X *un espacio topológico tal que para toda* $s \in {}^{\omega}X$ *se tiene que* $|\operatorname{lím} s| \leqslant 1$*. Entonces* X *es un espacio* T_1*.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $y \in \overline{\{x\}}$. Definamos $s \in {}^{\omega}X$ como $s(n) := x$ para toda $n \in \omega$. Es claro que $x \in \operatorname{lím} s$. Ahora probemos que $y \in \operatorname{lím} s$. Si $U \in \tau_X(y)$, entonces se tiene que $U \cap \{x\} \neq \emptyset$, lo cual implica que $s[\omega] = \{x\} \subseteq U$ y así, $y \in \operatorname{lím} s$.

En vista de la hipótesis $|\operatorname{lím} s| \leqslant 1$, deducimos que $x = y$, es decir, $\{x\} = \overline{\{x\}}$ para todo $x \in X$. □

Teorema 1.10. *Si* X *es un espacio primero numerable, entonces* X *es de Hausdorff si y solo si para cada* $s \in {}^{\omega}X$ *se tiene que* $|\operatorname{lím} s| \leqslant 1$*.*

Demostración. Comencemos con la implicación directa: sean $s \in {}^{\omega}X$ y $\{x, y\} \subseteq \operatorname{lím} s$. Entonces, para cualesquiera $U \in \tau_X(x)$ y $V \in \tau_X(y)$ existen $m, n \in \omega$ con $s[\omega \setminus m] \subseteq U$ y $s[\omega \setminus n] \subseteq V$. De este modo, $s_{m+n} \in U \cap V$ y como X es de Hausdorff, se concluye que $x = y$.

Para la implicación restante supongamos que X es primero numerable y no es de Hausdorff. Entonces existen $\{x, y\} \subseteq X$ con $x \neq y$ tales que para todo $U \in \tau_X(x)$ y $V \in \tau_X(y)$ se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$. Por otra parte, por ser X primero numerable existen $\{U_i : i \in \omega\}$ y $\{V_i : i \in \omega\}$ bases locales de x y y, respectivamente.

Para cada $n \in \omega$ definimos $W_n := \bigcap_{i \leqslant n}(U_i \cap V_i)$. Observemos que $\{W_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de abiertos no vacíos con $W_{n+1} \subseteq W_n$ para cada $n \in \omega$, por lo que para cada $n \in \omega$ existe $s_n \in W_n$. Denotemos por s al único elemento de ${}^{\omega}X$ que satisface $s(n) = s_n$, para toda $n \in \omega$. Así, por el lema 1.8, $\{x, y\} \subseteq \operatorname{lím} s$. □

Observe que en la demostración anterior no se usó que X es primero numerable en la prueba de la implicación directa, es decir, para cualquier sucesión en un espacio de Hausdorff se tiene que su conjunto de puntos límite posee, a lo sumo, un elemento.

Definición 1.11. Si $s \in {}^{\omega}X$, definimos el *rango de s* como

$$\operatorname{ran} s := s[\omega] \cup \operatorname{lím} s.$$

A continuación se presentan diversos resultados relacionados con el rango de una sucesión.

Lema 1.12. *Sea X un espacio topológico T_1. Si $s \in {}^{\omega}X$ es tal que $|s[\omega]| < \omega$, entonces $s[\omega] = \operatorname{ran} s$.*

Demostración. Naturalmente, únicamente debemos comprobar que $\operatorname{lím} s \subseteq s[\omega]$. Con esto en mente, sean $x \in X \setminus s[\omega]$ y $U \in \tau_X(x)$. Entonces $V := U \setminus s[\omega]$ es tal que $V \in \tau_X(x)$ y $V \cap s[\omega] = \emptyset$. Por lo tanto $x \notin \operatorname{lím} s$. $\square$

Proposición 1.13. *Sea $s \in {}^{\omega}X$. Si $A \subseteq s[\omega]$ y $x \in \operatorname{lím} s$, entonces $A \cup \{x\}$ es un subconjunto compacto de X. En particular, si $|\operatorname{lím} s| = 1$, el rango de s es un subconjunto compacto de X.*

Demostración. Comencemos por fijar $\mathcal{U} \subseteq \tau_X$, una cubierta para $A \cup \{x\}$. Entonces hay $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \in \tau_X(x)$. Así podemos tomar $m \in \omega$ que satisface $A \cap s[\omega \setminus m] \subseteq s[\omega \setminus m] \subseteq U$. Por otra parte, para cada $i \leqslant m$ con $s_i \in A$ existe $U_i \in \mathcal{U} \cap \tau_X(s_i)$. De esto podemos deducir que $\{U\} \cup \{U_i : i \leqslant m \wedge s_i \in A\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ para $A \cup \{x\}$. $\square$

Corolario 1.14. *Si s es una sucesión convergente en el espacio de Hausdorff X, entonces $\overline{s[\omega]} = \operatorname{ran} s$.*

Demostración. En vista de la proposición previa, $\operatorname{ran} s$ es un subconjunto compacto de X y, en consecuencia, $\operatorname{ran} s$ es un subconjunto cerrado de X que contiene a $s[\omega]$. De este modo, $\overline{s[\omega]} \subseteq \operatorname{ran} s$. Directamente de nuestra definición se deduce que todo elemento de $\operatorname{lím} s$ es un punto de adherencia de $s[\omega]$ y esto nos da la contención restante. $\square$

En los capítulos posteriores se requerirá el concepto de subsucesión, el cual se describe a continuación.

Definición 1.15. Sean $s \in {}^{\omega}X$ y $t \in {}^{\omega}X$. Decimos que t *es subsucesión de s* si existe una función inyectiva $\ell : \omega \to \omega$ tal que $s \circ \ell = t$.

En vista de la definición previa, es inmediato que ser subsucesión es una propiedad transitiva, es decir, si s es una subsucesión de t y t es una subsucesión de u, entonces s es una subsucesión de u.

Cabe mencionar que, tradicionalmente, una subsucesión de la sucesión s es una composición de la forma $s \circ g$, donde g es una función estrictamente creciente de ω en ω. Sin embargo, nuestra noción de subsucesión incluye a la tradicional porque toda función estrictamente creciente $g : \omega \to \omega$ es inyectiva, aunque naturalmente hay funciones inyectivas que no son estrictamente crecientes. No obstante, podemos demostrar lo siguiente.

Lema 1.16. *Sean X, un espacio topológico, y $s \in {}^{\omega}X$. Si t es una subsucesión de s, entonces existe una función estrictamente creciente $g : \omega \to \omega$ de modo que $s \circ g$ es una subsucesión de t.*

Demostración. Empecemos por fijar una función inyectiva $f : \omega \to \omega$ con $t = s \circ f$. Para cada $\ell < \omega$, el hecho de que $f[\ell]$ sea un subconjunto finito de ω, aunado a la inyectividad de f, garantiza que hay $k < \omega$ de tal suerte que $f(k)$ es una cota superior de $f[\ell]$ y $f(k) \notin f[\ell]$.

Lo anterior nos permite definir $e : \omega \to \omega$ de manera recursiva como sigue: $e(0) := 0$ y

$$e(n+1) := \min\{k < \omega : \forall\, i \leqslant e(n)\ (f(i) < f(k))\}, \text{ siempre que } n < \omega.$$

Es inmediato que, para cada $n < \omega$, $e(n) < e(n+1)$ y $f(e(n)) < f(e(n+1))$, esto es, tanto e como $g := f \circ e$ son estrictamente crecientes. El resto es notar que $s \circ g = t \circ e$. □

Más adelante (ver definición 2.10) hablaremos de espacios secuencialmente compactos y el resultado previo muestra que la definición que emplearemos en el presente trabajo coincide con la que aparece mayoritariamente en la literatura especializada.

Lema 1.17. *Sean $A \subseteq X$ y $s \in {}^{\omega}A$ tales que $s[\omega]$ es finito. Entonces s tiene una subsucesión convergente en A.*

Demostración. Por ser $s[\omega]$ finito, existe $x \in A$ tal que $H := \{n < \omega : s_n = x\}$ es infinito y en consecuencia hay una biyección $\ell : \omega \to H$. Entonces $t := s \circ \ell$ es tal que $x \in \lim_A t$. □

Lema 1.18. *Si $t \in {}^{\omega}X$ es una subsucesión de $s \in {}^{\omega}X$, entonces $\operatorname{lím} s \subseteq \operatorname{lím} t$.*

Demostración. Sea $\ell : \omega \to \omega$ una función inyectiva de tal modo que $t = s \circ \ell$. Consideremos $x \in \operatorname{lím} s$ y $U \in \tau_X(x)$. Así existe $m \in \omega$ tal que $s[\omega \setminus m] \subseteq U$. Por otra parte, por ser ℓ inyectiva se tiene que $\ell^{-1}[m] = \{i \in \omega : \ell(i) \in m\}$ es finito; en consecuencia, hay un $k \in \omega$ que satisface $\ell^{-1}[m] \subseteq k$. De aquí se deduce que $(s \circ \ell)[\omega \setminus k] \subseteq s[\omega \setminus m] \subseteq U$. □

Dicho de otra forma, este lema prueba que si s es una sucesión que converge a x, entonces todas las subsucesiones de s también convergen a x.

El siguiente resultado es importante, ya que se empleará en múltiples ocasiones en el capítulo 2.

Lema 1.19. *Si $s, t \in {}^{\omega}X$ satisfacen $t[\omega] \subseteq s[\omega]$ y $|t[\omega]| = \omega$, entonces existe $u \in {}^{\omega}X$ de tal modo que u es subsucesión de s y t.*

Demostración. Bastará con hallar funciones inyectivas $\ell, h : \omega \to \omega$ para las que $s \circ h = t \circ \ell$.

Dado que $|t[\omega]| = \omega$, existe una biyección $f : \omega \to t[\omega]$. Sea $\ell : \omega \to \omega$ tal que $\ell(n) \in t^{-1}\{f(n)\}$ para todo $n < \omega$. Entonces, si $n < m < \omega$, se tiene que $f(n) \neq f(m)$ y en consecuencia, $t^{-1}\{f(n)\}$ es ajeno con $t^{-1}\{f(m)\}$; así $\ell(n) \neq \ell(m)$. En resumen, ℓ es inyectiva.

Por otra parte, como $t[\omega] \subseteq s[\omega]$, existe $h : \omega \to \omega$ tal que $h(n) \in s^{-1}\{t(\ell(n))\}$ para cada $n < \omega$. Además, si $n < m < \omega$, sabemos que $\ell(n) \neq \ell(m)$, más aún, $t(\ell(n)) = f(n) \neq f(m) = t(\ell(m))$ y así, $s^{-1}\{t(\ell(n))\} \cap s^{-1}\{t(\ell(m))\} = \emptyset$, de lo cual podemos concluir que h es inyectiva.

Por último, para todo $n \in \omega$ sabemos que $h(n) \in s^{-1}\{t(\ell(n)\}$, es decir, $(s \circ h)(n) = s(h(n)) = t(\ell(n)) = (t \circ \ell)(n)$. □

1.3 Espacios linealmente ordenados

Suponga que $\leqslant$ es un orden lineal (o total) para el conjunto X. Entonces, *la topología del orden para X dada por* $\leqslant$ es la que tiene por subbase a la colección

$$\{X\} \cup \{(\leftarrow, a) : a \in X\} \cup \{(a, \to) : a \in X\},$$

en donde $(\leftarrow, a) := \{b \in X : b < a\}$ y $(a, \rightarrow) := \{b \in X : b > a\}$. De este modo, cuando nos refiramos a X como *espacio linealmente ordenado* entenderemos que hay un orden lineal $\leqslant$ para el conjunto X y que τ_X coincide con la topología del orden.

Consideremos un ordinal α y equipemos a $\alpha + 1$ con la topología del orden. Entonces, por definición,

$$\{[0, \xi) : \xi < \alpha\} \cup \{(\xi, \alpha] : \xi < \alpha\}$$

es una subbase para $\alpha + 1$. Más aún, tenemos el resultado siguiente.

Lema 1.20. *Si α es un ordinal y β es un punto arbitrario del espacio linealmente ordenado $\alpha + 1$, entonces:*

1. *cuando β es un sucesor ó $\beta = 0$, $\{\beta\}$ es un abierto en $\alpha + 1$; y*

2. *en el caso que β es límite se tiene que $\{(\xi, \beta] : \xi < \beta\}$ es una base local para $\alpha + 1$ en β.*

Demostración. Empecemos por suponer que $\beta = \xi + 1$. Si $\beta = \alpha$, se sigue que $\{\beta\} = (\xi, \alpha] \in \tau_{\alpha+1}$. Por otro lado, la hipótesis $\beta < \alpha$ produce $\beta + 1 \leqslant \alpha$ y así, tanto $[0, \beta + 1)$ como $(\xi, \alpha]$ son abiertos en $\alpha + 1$ y $\{\beta\} = [0, \beta + 1) \cap (\xi, \alpha]$.

Con respecto a $\beta = 0$, el que $\alpha \geqslant 0$ nos da $\alpha + 1 > 0$ y, naturalmente, $\{0\} = [0, 1) \in \tau_{\alpha+1}$. Para el resto del argumento supondremos que β es límite.

Argumentemos ahora que si $\xi < \beta$, entonces $(\xi, \beta]$ es un abierto en $\alpha + 1$. Si sucediese que $\beta = \alpha$, entonces $(\xi, \beta] = (\xi, \rightarrow) \in \tau_{\alpha+1}$. Por otro lado, la condición $\beta < \alpha$ nos lleva a que $\beta + 1 \leqslant \alpha$ y, consecuentemente,

$$(\xi, \beta] = (\xi, \beta + 1) = (\leftarrow, \beta + 1) \cap (\xi, \rightarrow) \in \tau_{\alpha+1}.$$

Sean $m, n \in \omega$ con $m + n > 0$ y fijemos $\{\xi_i : i < m + n\} \subseteq \alpha + 1$. Más aún, dado $i < m + n$, hagamos $U_i := [0, \xi_i)$, siempre que $i < m$, y $U_i := (\xi_i, \alpha]$ cuando $i \geqslant m$. Definamos $U = \bigcap_{i=0}^{m+n-1} U_i$ y supongamos que $\beta \in U$.

Si $m = 0$ y $\xi := \max\{\xi_i : i < n\}$, entonces $\beta \in (\xi, \beta] \subseteq U$. En cambio, si $n = 0$, $\beta \in (0, \beta] \subseteq U$. Finalmente, las hipótesis $m > 0$ y $n > 0$ implican la existencia de $\eta < \alpha + 1$ con

$$(0,\beta] \subseteq \bigcap_{i<m} U_i \qquad \text{y} \qquad (\eta,\beta] \subseteq \bigcap_{i=m}^{m+n-1} U_i;$$

luego, $\beta \in (\eta,\beta] \subseteq U$. □

Note que para cada $n < \omega$, tenemos las igualdades $(n,\omega] = [n+1,\omega] = (\omega+1)\setminus(n+1)$ y así, la colección $\{(\omega+1)\setminus m : m < \omega\}$ es una base local para el espacio linealmente ordenado $\omega+1$ en el punto ω. Una consecuencia de este hecho y el lema de arriba es que $\omega+1$ es un espacio compacto T_2.

Lema 1.21. *Sea f una función de $\omega+1$ en X. Entonces, f es continua si y solo si la sucesión $f \restriction \omega$ converge a $f(\omega)$.*

Demostración. Supongamos que f es continua. Si $U \in \tau_X(f(\omega))$, tenemos que $f^{-1}[U] \in \tau_{\omega+1}(\omega)$, y por el párrafo previo a este lema existe $m \in \omega$ tal que $(m,\omega] \subseteq f^{-1}[U]$; en consecuencia, $f[\omega \setminus m] \subseteq U$.

Por otra parte supongamos que $f \restriction \omega$ converge a $f(\omega)$. Consideremos $x \in \omega$. Resulta que $\{x\} \in \tau_{\omega+1}$ y por lo tanto f es continua en x. Ahora sea $U \in \tau_X(f(\omega))$. Por hipótesis existe $n \in \omega$ tal que $f[\omega \setminus n] \subseteq U$ y así $(\omega+1)\setminus n \subseteq f^{-1}[U]$. Entonces f es continua en ω.

□

1.4 Cocientes topológicos

Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $q : X \to Y$ una función suprayectiva. Definimos la *topología cociente en Y dada por q* como

$$\tau_q := \{U \subseteq Y : q^{-1}[U] \in \tau_X\}.$$

Es inmediato que τ_q hace continua a la función q; más aún, esta es la topología más grande en Y con esta propiedad.

Además, si X y Y son espacios topológicos, diremos que $q : X \to Y$ es una función cociente si es suprayectiva y $\tau_Y = \tau_q$.

Por otra parte, diremos que una propiedad es *divisible* si se preserva bajo funciones cociente.

Definición 1.22. Si $\mathcal{D}$ es una partición del espacio topológico X, a la función $q : X \to \mathcal{D}$ que satisface $x \in q(x) \in \mathcal{D}$, para cada $x \in X$, le llamaremos la *proyección natural.*

Observe que, en las circunstancias de la definición de arriba, para cualquier $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ se verifica la igualdad $q^{-1}[\mathcal{A}] = \bigcup \mathcal{A}$ y, en consecuencia, al equipar a $\mathcal{D}$ con la topología cociente dada por q se sigue que un conjunto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$ es abierto en $\mathcal{D}$ si y solo si $\bigcup \mathcal{U} \in \tau_X$.

Finalizamos el presente capítulo con un resultado auxiliar cuya demostración se encuentra en [1, pág. 129, Proposición 4.27].

Proposición 1.23. *Sean X y Y dos espacios topológicos y sea $q : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si q es una función abierta o cerrada, entonces q es una función cociente.*

CAPÍTULO 2: PRIMER ENCUENTRO CON LOS ESPACIOS SECUENCIALES

Como era de esperarse, el primer paso en la historia de la topología fue el hallar la definición correcta de *espacio topológico*. La lista de nombres involucrados en esta búsqueda es impresionante (le recomendamos al interesado la lectura de las páginas 3 a 25 de [10]), pero nuestros intereses nos hacen resaltar al matemático francés Maurice René Fréchet. De modo específico, él propuso y estudió una clase de espacios basada en la convergencia de sucesiones, los L-espacios (actualmente esta terminología es empleada en el estudio de otro tipo de espacios). Grosso modo, dado un conjunto X, se selecciona una familia $\mathcal{S}$ de sucesiones en X y, más aún, para cada $s \in \mathcal{S}$, fijamos un punto $x_s \in X$ (intuitivamente, el límite de la sucesión s) de forma que ciertos axiomas sean satisfechos. Así, si $(X, \mathcal{S})$ es un L-espacio y $A \subseteq X$, se define la cerradura de A como la colección de todos los puntos de la forma x_s, donde $s \in \mathcal{S}$ y todos los términos de s son elementos de A.

Lo anterior sentó las bases del estudio de los espacios que ocupan al presente trabajo.

Sea X un espacio topológico y consideremos $A \subseteq X$. Entonces A será llamado *secuencialmente cerrado* si para cada $s \in {}^{\omega}A$ se tiene que $\lim s \subseteq A$.

A continuación se muestran un par de propiedades que satisfacen los conjuntos secuencialmente cerrados.

Proposición 2.1. *Sea A un subconjunto secuencialmente cerrado del espacio topológico X. Si $s \in {}^{\omega}X$ satisface $\lim s \setminus A \neq \emptyset$, entonces existe $m < \omega$ con $s[\omega \setminus m] \subseteq X \setminus A$.*

Demostración. Verifiquemos la implicación por contrapuesta. Sea $s \in {}^{\omega}X$ de tal modo que para cada $m \in \omega$, $s[\omega \setminus m] \nsubseteq X \setminus A$. Note que esto último es equivalente a que $s^{-1}[A] \setminus m \neq \emptyset$, para cualquier $m < \omega$. Por este motivo, existe $\ell : \omega \to \omega$ de tal modo que $\ell(n) \in s^{-1}[A] \setminus \ell[n]$, siempre que $n < \omega$. Claramente, ℓ es inyectiva y $s \circ \ell : \omega \to A$. Luego, por el lema 1.18, $\lim s \subseteq \lim (s \circ \ell) \subseteq A$. $\square$

Lema 2.2. *Todo subconjunto cerrado de un espacio topológico es secuencialmente cerrado.*

Demostración. Sean X un espacio topológico, A un subconjunto cerrado de X y $s \in {}^{\omega}A$. Ahora consideremos $x \in \lim s$. Entonces para cada $U \in \tau_X$ existe $n \in \omega$ tal que $s[\omega \setminus n] \subseteq U$ y, en consecuencia, $s[\omega \setminus n] \subseteq A \cap U$. En particular $A \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \tau_X$. Por consiguiente $x \in \overline{A} = A$. □

Surge naturalmente la pregunta de si el recíproco del resultado previo es verdadero, es decir, ¿es cierto que los subconjuntos secuencialmente cerrados de un espacio topológico son cerrados? La respuesta a esta pregunta es negativa, tal y como lo demuestra el lema 3.1 (ver capítulo 3). Por lo tanto les asignaremos nombre a los espacios topológicos en los que el recíproco del lema 2.2 es cierto. Éstos son el tema central de este trabajo.

2.1 Espacios secuenciales

Si todos los subconjuntos secuencialmente cerrados de un espacio topológico son cerrados, diremos que dicho espacio es *secuencial*.

De acuerdo a la definición previa, si X es un espacio secuencial y A un subconjunto secuencialmente cerrado de X, resulta que A es secuencial con la topología relativa a X, en otras palabras, todo subespacio secuencialmente cerrado de un espacio secuencial es secuencial. Lo cual nos lleva a la pregunta ¿es "ser secuencial" una propiedad hereditaria? La respuesta es negativa, tal y como se verá en la proposición 3.3, sin embargo, tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.3. *Todo subconjunto abierto o cerrado de un espacio secuencial es un espacio secuencial.*

Demostración. Sean X un espacio secuencial, $U \in \tau_X$ y $A \subseteq U$ secuencialmente cerrado en U. Notemos que $A = ((X \setminus U) \cup A) \cap U$, por lo que basta demostrar que $(X \setminus U) \cup A$ es cerrado en X. Haremos esto empleando que X es secuencial.

Consideremos $s : \omega \to (X \setminus U) \cup A$ y $x \in X$, un punto límite de s en X. Si $x \in X \setminus U$ ya se tiene que $x \in (X \setminus U) \cup A$; de lo contrario $x \in U$. En esta situación $U \in \tau_X(x)$, por lo que existe $m \in \omega$ tal que $s[\omega \setminus m] \subseteq U$. Definiendo $t \in {}^{\omega}A$ como $t_n := s_{n+m}$ para toda $n \in \omega$, se tiene que $x \in \lim_U t$ y por ser A secuencialmente cerrado en U, $x \in A$. Así $\lim_X s \subseteq (X \setminus U) \cup A$ y en consecuencia, $(X \setminus U) \cup A$ es secuencialmente cerrado en X.

Por otra parte, sean F un subconjunto cerrado de X y $E \subseteq F$ secuencialmente cerrado en F. Es inmediato que para toda $s \in {}^{\omega}E$ se tiene que $s \in {}^{\omega}F$. Luego, por el lema 2.2, $\lim_X s \subseteq F$, y en consecuencia (ver lema 1.7), $\lim_F s = \lim_X s$. Ahora empleemos que E es secuencialmente cerrado en F para deducir que $\lim_X \subseteq E$. Por lo tanto E es secuencialmente cerrado en X. $\square$

Hasta este momento solo hemos hablado de la propiedad de secuencialidad en espacios topológicos, sin embargo, es posible extraer esta idea y conceptualizarla en funciones.

Definición 2.4. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$, diremos que f es *secuencialmente continua* si para cualquier $s \in {}^{\omega}X$ se tiene que $f[\lim s] \subseteq \lim (f \circ s)$.

Una pregunta natural es ¿son equivalentes las propiedades de continuidad secuencial y continuidad de funciones? La respuesta a dicha pregunta es negativa, ya que no toda función secuencialmente continua es continua tal y como se muestra en la proposición 3.4; en cambio, el recíproco es verdadero.

Lema 2.5. *Toda función continua es secuencialmente continua.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos y consideremos $f : X \to Y$ continua. Fijemos $s \in {}^{\omega}X$ y tomemos $x \in \lim s$. Entonces, para cada $U \in \tau_Y(f(x))$ se tiene que $f^{-1}[U] \in \tau_X(x)$ y, en consecuencia, existe $n \in \omega$ tal que $s[\omega \setminus n] \subseteq f^{-1}[U]$. Luego, $(f \circ s)[\omega \setminus n] \subseteq U$ y por lo tanto $f(x) \in \lim (f \circ s)$. $\square$

Para que el recíproco del resultado previo sea verdadero es necesaria una hipótesis adicional.

Teorema 2.6. *Sean X y Y espacios topológicos. Si X es secuencial, toda función secuencialmente continua $f : X \to Y$ es continua.*

Demostración. Tomemos B, un subconjunto cerrado de Y. Para probar que $f^{-1}[B]$ es secuencialmente cerrado (y por ende, cerrado en X), sea $s : \omega \to f^{-1}[B]$, arbitraria. Entonces $f \circ s \in {}^{\omega}B$ y, por el lema 2.2 , $f[\lim s] \subseteq \lim (f \circ s) \subseteq B$, es decir, $\lim s \subseteq f^{-1}[B]$.

$\square$

Otra cuestión interesante del tema de funciones es si la secuencialidad se preserva bajo funciones continuas. La respuesta es negativa, como lo muestra la proposición 3.2. En cambio, las funciones cociente (ver sección 1.4) preservan la secuencialidad.

Lema 2.7. *Ser secuencial es una propiedad divisible.*

Demostración. Sean X un espacio secuencial, $q : X \to Y$ una función cociente y A un subconjunto de Y secuencialmente cerrado. Con la idea en mente de probar que $q^{-1}[A]$ es secuencialmente cerrado en X, fijemos $s : \omega \to q^{-1}[A]$. Así $q \circ s \in {}^{\omega}A$ y en consecuencia, $\text{lím}\,(q \circ s) \subseteq A$; más aún, usando el lema 2.5 concluimos que $\text{lím}\, s \subseteq q^{-1}[A]$.

El que X sea secuencial nos garantiza que $q^{-1}[A]$ es cerrado en X y dado que q es cociente, deducimos que A es cerrado. □

Utilizando este lema y la proposición 1.23 tenemos los siguientes corolarios (recuerde que las proyecciones de un producto topológico no vacío a cada uno de sus factores son funciones abiertas y suprayectivas).

Corolario 2.8. *La imagen continua y abierta, o bien, continua y cerrada de un espacio secuencial es secuencial.*

Corolario 2.9. *Si un producto topológico no vacío es secuencial, entonces todos sus factores son secuenciales.*

Observemos que los resultados mostrados previamente garantizan que ser un espacio secuencial es una propiedad topológica.

A continuación, mostraremos una equivalencia en espacios secuenciales de la unicidad de los puntos límites (en caso de existir) de una sucesión. Para esto se requerirá teoría previa.

Definición 2.10. Un espacio topológico X será llamado *numerablemente compacto* si toda cubierta numerable de X posee una subcubierta finita. Por otro lado, diremos que X es *secuencialmente compacto* si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

En virtud de la definición 1.15, nuestro concepto de compacidad secuencial podría diferir, en principio, del concepto que generalmente se usa en la literatura. No obstante, una combinación de los lemas 1.16 y 1.18 asegura que nuestra definición de compacidad secuencial es equivalente a la definición que habitualmente se presenta.

La definición de subsucesión mostrada en este trabajo puede diferir con el concepto que generalmente se usa en la literatura especializada, sin embargo, aplicando los lemas 1.16 y 1.18 es fácil notar que la definición previa de compacidad secuencial es equivalente a la definición que habitualmente se presenta.

La prueba del teorema siguiente se encuentra en [1, pág. 227, Proposición 7.32].

Teorema 2.11. *Sea X un espacio T_1. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *X es numerablemente compacto.*
2. *Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.*
3. *Todo subconjunto infinito numerable de X tiene un punto de acumulación.*

Es conveniente mencionar que, en general, los espacios secuencialmente compactos son numerablemente compactos. En efecto, si X no es numerablemente compacto, $\{U_n : n < \omega\}$ es una cubierta de X sin subcubiertas finitas, y para cada $n < \omega$ fijamos $x_n \in X \setminus \bigcup_{m<n} U_m$, entonces un argumento rutinario muestra que $\{x_n : n < \omega\}$ no tiene subsucesiones convergentes; en especial, X no es secuencialmente compacto. No obstante, en [3, pág. 210, Ejemplo 3.10.38] se puede hallar un espacio compacto de Hausdorff no secuencialmente compacto; en consecuencia, el recíproco de la implicación anterior no se verifica siempre.

No obstante, bajo ciertas hipótesis las propiedades de compacidad secuencial y compacidad numerable son equivalentes.

Lema 2.12. *Sea X un espacio T_1. Si $A \subseteq X$ es secuencial, cerrado y numerablemente compacto, entonces A es secuencialmente compacto. En particular, si X es secuencial y numerablemente compacto, entonces X es secuencialmente compacto.*

Demostración. Sea $s \in {}^{\omega}A$. Cuando $s[\omega]$ es finito, basta aplicar el lema 1.17. Entonces supongamos que $s[\omega]$ es infinito. En esta situación el teorema previo nos garantiza que (recuerde que A es cerrado) existe $x \in A$, punto de acumulación de $s[\omega]$. Con esto en mente definamos $F := \{n \in \omega : s_n = x\}$.

Si F es infinito, hay una biyección $f : \omega \to F$ y en consecuencia $s \circ f$ es una sucesión convergente. En caso contrario, F es finito y por lo tanto existe $k < \omega$ tal que $F \subseteq k$. Considerando esto, mostremos que $s[\omega \setminus k]$ no es secuencialmente cerrado en A. Por ser A secuencial, basta probar que $s[\omega \setminus k]$ no es cerrado en A.

Sea $U \in \tau_A(x)$. Entonces $V := U \setminus (s[k] \setminus \{x\}) \in \tau_A(x)$ y por ser x punto de acumulación de $s[\omega]$, tenemos que

$$\emptyset \neq (V \setminus \{x\}) \cap s[\omega] \subseteq (U \setminus s[k]) \cap s[\omega] \subseteq U \cap (s[\omega] \setminus s[k]) \subseteq U \cap s[\omega \setminus k]$$

y en consecuencia $x \in \overline{s[\omega \setminus k]}$. Además la elección de k garantiza que $x \notin s[\omega \setminus k]$, por ende $s[\omega \setminus k]$ no es cerrado en A.

De este modo, existe $t : \omega \to s[\omega \setminus k]$ tal que $\operatorname{lím} t \nsubseteq s[\omega \setminus k]$ y por el lema 1.12, $|t[\omega]| = \omega$. En vista de la inclusión $t[\omega] \subseteq s[\omega]$, el lema 1.19 nos da u, una subsucesión tanto de s como t. Finalmente, u es convergente porque t lo es. □

Teorema 2.13. *Sea X un espacio secuencial. Para toda $s \in {}^{\omega}X$ se tiene que $|\operatorname{lím} s| < 2$ si y solo si todo subconjunto numerablemente compacto de X es cerrado.*

Demostración. Supongamos que todo subconjunto numerablemente compacto de X es cerrado. En busca de una contradicción, supongamos que existe $s \in {}^{\omega}X$ tal que $|\operatorname{lím} s| > 1$. Entonces hay $x, y \in \operatorname{lím} s$ con $x \neq y$. Por la proposición 1.13, $A := (s[\omega] \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ es numerablemente compacto y por ende cerrado, lo cual contradice el hecho de que $y \in \overline{A} \setminus A$.

Para la implicación recíproca supongamos que toda sucesión en X posee, a lo sumo, un límite. Empezaremos por demostrar un par de propiedades de las sucesiones convergentes en X.

Afirmación 1: El rango de toda sucesión convergente en X es secuencialmente cerrado (y por ende cerrado).

Comencemos por observar que por el lema 1.10, X es T_1. Con esto en mente, sean $s \in {}^{\omega}X$, $y = \operatorname{lím} s$ y $t : \omega \to \operatorname{ran} s$. Si $t[\omega]$ es finito, por el lema 1.12, se tiene que $\operatorname{lím} t \subseteq t[\omega]$. Entonces supongamos que $|t[\omega]| = \omega$ y definamos $H := \{n \in \omega : t_n \neq y\}$. Resulta que H es infinito y en consecuencia existe una biyección $\ell : \omega \to H$. Consideremos

$u = t \circ \ell$ y notemos que $u[\omega] = t[\omega] \setminus \{y\}$. A partir de esta igualdad deducimos la infinitud de $u[\omega]$ y la inclusión $u[\omega] \subseteq s[\omega]$. Así, por el lema 1.19, existe v, subsucesión de s y u. Finalmente, el lema 1.15 nos da $\operatorname{lím} t \subseteq \operatorname{lím} u \subseteq \operatorname{lím} v = \{y\} \subseteq \operatorname{ran} s$.

Afirmación 2: El único punto de acumulación de una sucesión convergente es su punto límite.

Sean $s \in {}^{\omega}X$ y $y = \operatorname{lím} s$. Tomemos $x \in X \setminus \{y\}$. Por ser X T_1, existen $U \in \tau_X(x)$ y $V \in \tau_X(y)$ tales que $y \notin U$ y $x \notin V$. Por otra parte, hay $m < \omega$ que satisface $s[\omega \setminus m] \subseteq V$. Con esto en mente definamos $t \in {}^{\omega}X$ como $t_n := s_{n+m}$. Claramente t es una subsucesión de s y, por ende $\operatorname{lím} t \neq \emptyset$, así la afirmación 1 nos da que

$$\operatorname{ran} t = t[\omega] \cup \{y\} = s[\omega \setminus m] \cup \{y\}$$

es cerrado. Por otro lado, la igualdad $s[\omega] = \operatorname{ran} t \cup s[m]$ implica que $W := V \setminus (\operatorname{ran} t \cup (s[m] \setminus \{x\}))$ es un abierto en X tal que $x \in W$ y $W \cap s[\omega] \subseteq \{x\}$.

Sea $K \subseteq X$ numerablemente compacto. A continuación probaremos que K es secuencialmente cerrado y, en consecuencia, cerrado. Sea $s \in {}^{\omega}K$. Si $s[\omega]$ es finito, por el lema 1.12, $\operatorname{lím} s \subseteq \operatorname{ran} s = s[\omega] \subseteq K$. En caso contrario, el teorema 2.11 nos da $z \in K$ de modo que z es un punto de acumulación del conjunto $s[\omega]$. Ahora, si $y \in \operatorname{lím} s$, la afirmación 2 garantiza que $y = z$ y así, $y \in K$, tal y como se deseaba. $\square$

Corolario 2.14. *Sea X secuencial. Para toda $s \in {}^{\omega}X$ se tiene que $|\operatorname{lím} s| < 2$ si y solo si todo subconjunto secuencialmente compacto de X es cerrado.*

Demostración. Supongamos que X es secuencial y que toda sucesión en X tiene a lo más un punto límite. Mostremos que todo subconjunto secuencialmente compacto es cerrado. Si $K \subseteq X$ es secuencialmente compacto, entonces K es numerablemente compacto y por el teorema 2.13, K es cerrado.

Ahora consideremos X tal que todo subconjunto secuencialmente compacto de X es cerrado y probemos que para toda $s \in {}^{\omega}X$ se tiene que $|\operatorname{lím} s| < 2$. En busca de una contradicción supongamos que existe $s \in {}^{\omega}X$ con $|\operatorname{lím} s| \geqslant 2$, entonces hay $x, y \in \operatorname{lím} s$ tales que $x \neq y$, Definamos $F := (s[\omega] \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ y verifiquemos que es secuencialmente compacto.

Si $t \in {}^{\omega}F$, tenemos dos posibilidades. Cuando $t[\omega]$ es finito, t tiene una subsucesión convergente por el lema 1.17. La otra posibilidad es que $|t[\omega]| = \omega$. En esta situación $H := \{n < \omega : t_n \in t[\omega] \cap (F \setminus \{x\})\}$ es infinito, por ende existe una biyección $\ell : \omega \to H$. Entonces $t[\omega] \setminus \{x\} \subseteq (t \circ \ell)[\omega]$, lo cual implica que $|(t \circ \ell)[\omega]| = \omega$ y además $(t \circ \ell)[\omega] \subseteq F \setminus \{x\} \subseteq s[\omega]$, en consecuencia, por el lema 1.19 existe u subsucesión simultanea de $t \circ \ell$ y s, más aún, u es sucesión de t y $x \in \lim_F u$. Por lo tanto F es secuencialmente compacto pero no es cerrado. $\square$

A diferencia de la compacidad, la compacidad numerable no es una propiedad finito-productiva tal y como se observa en [3, pág. 205, Ejemplo 3.10.19], en donde se muestran dos espacios de Hausdorff numerablemente compactos cuyo producto no es numerablemente compacto. Por esta razón, el resultado siguiente es relevante.

Teorema 2.15. *El producto de dos espacios T_1 numerablemente compactos, donde al menos uno es secuencial, es numerablemente compacto.*

Demostración. Sean X y Y numerablemente compactos y supongamos que X es secuencial. Por el teorema 2.11 basta probar que todo subconjunto infinito numerable de $X \times Y$ tiene un punto de acumulación.

Sea F un subconjunto infinito numerable de $X \times Y$ y fijemos $\{(x_n, y_n) : n < \omega\}$, una enumeración sin repeticiones de F. Ahora, sea $s \in {}^{\omega}X$ dada por $s_n := x_n$. Por el lema 2.12, X es secuencialmente compacto y en consecuencia, existen $x \in X$ y $\ell : \omega \to \omega$, función inyectiva, tales que $x \in \lim (s \circ \ell)$.

Considerando lo anterior definamos $F_Y := \{y_{\ell(n)} : n < \omega\}$. Analizaremos dos posibilidades: F_Y es finito o no lo es. En el primer caso, existe $y \in Y$ tal que

$$|\{n < \omega : y_{\ell(n)} = y\}| = \omega.$$

Verifiquemos que (x, y) es un punto de acumulación de F.

Comencemos por mostrar que $H := \{n < \omega : x_{\ell(n)} = x\}$ es finito. Como ℓ es inyectiva y la enumeración de F no tiene repeticiones, $|\{(x_{\ell(n)}, y_{\ell(n)}) : n \in H\}| = |H|$; además $\{(x_{\ell(n)}, y_{\ell(n)}) : n \in H\} \subseteq \{x\} \times F$ y por lo tanto $|H| < \omega$.

Ahora, sean $U \in \tau_{X\times Y}((x,y))$ y $q_X : X \times Y \to X$, la función proyección en la primera coordenada. Tenemos que $q_X[U] \in \tau_X(x)$ y por la finitud de H, existe $k < \omega$ tal que $(s\circ\ell)[\omega\setminus k] \subseteq q_X[U]\setminus\{x\}$. Además hay $m \in \omega\setminus k$ que satisface $y_{\ell(m)} = y$ y en consecuencia, $(x_{\ell(m)}, y_{\ell(m)}) \in U \setminus \{(x,y)\}$.

Por otra parte, si F_Y es infinito, por ser Y numerablemente compacto existe $y \in Y$, punto de acumulación de F_Y. Probemos que (x,y) es punto de acumulación de F.

Sean $U \in \tau_{X\times Y}((x,y))$ y $q_Y : X \times Y \to Y$, la función proyección en la segunda coordenada. Como $q_X[U] \in \tau_X(x)$, existe $k \in \omega$ tal que $(s \circ \ell)[\omega \setminus k] \subseteq q_X[U]$. Por otro lado, $q_Y[U] \setminus \{y_{\ell(n)} : n < k \text{ y } y_{\ell(n)} \neq y\} \in \tau_Y(y)$, así hay $m \in \omega \setminus k$ tal que $y_{\ell(m)} \in q_Y[U]$. Por lo tanto $(x_{\ell(m)}, y_{\ell(m)}) \in U \setminus \{(x,y)\}$. □

Una pregunta natural es si la secuencialidad es una propiedad productiva, es decir, ¿es cierto que el producto topológico de una familia de espacios secuenciales es secuencial? La respuesta a dicha pregunta es negativa, como se prueba en el teorema 3.9, sin embargo, resulta que la secuencialidad sí se preserva bajo la suma topológica.

Proposición 2.16. *Sean $\mathscr{F} = \{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos y X la suma topológica de $\mathscr{F}$. Entonces X es secuencial si y solo si X_i es secuencial para toda $i \in I$. En particular, ser secuencial es una propiedad sumable (ver definición 1.6).*

Demostración. Supongamos que X es secuencial y sea $i \in I$. Sabemos que $X_i \times \{i\}$ es cerrado en X y que $q : X_i \times \{i\} \to X_i$, la función proyección en la primera coordenada, es un homeomorfismo. Así por el lema 2.3 y el corolario 2.8 tenemos que X_i es secuencial.

Demos ahora por hecho que cada X_i es secuencial y sea A un subconjuto secuencialmente cerrado de X. En vista que cada $X_i \times \{i\}$ es secuencial, basta verificar que $(X_i \times \{i\}) \cap A$ es secuencialmente cerrado en $X_i \times \{i\}$ para todo $i \in I$.

Consideremos $i \in I$, $s : \omega \to (X_i \times \{i\}) \cap A$ y $x \in X_i \times \{i\}$, punto límite de s en $X_i \times \{i\}$. Es inmediato que $s \in {}^{\omega}A$ y por el lema 1.7, $x \in \lim_X s$, de lo cual se deduce que $x \in (X_i \times \{i\}) \cap A$. □

2.2 Espacios de Fréchet

Ahora nos concentraremos en el estudio de una subclase muy importante de la clase de espacios secuenciales.

Definición 2.17. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio de *Fréchet* (estos espacios también suelen ser llamados *de Fréchet-Urysohn*) si para todo $A \subseteq X$ y para cada $x \in \overline{A}$ existe $s \in {}^{\omega}A$ tal que $x \in \lim s$.

Observe que si X es un espacio topológico de tal modo que, para cualesquiera $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A} \setminus A$, existe $s \in {}^{\omega}A$ con $x \in \lim s$, entonces X es de Fréchet.

En la proposición 3.3 se exhibe un espacio secuencial que contiene un subespacio que no es lo es, lo cual no ocurre para los espacios de Fréchet, en otras palabras, en un espacio de Fréchet todo subespacio es de Fréchet.

Proposición 2.18. *Ser Fréchet es una propiedad hereditaria y aditiva. En particular, si una suma topológica es de Fréchet cada sumando es de Fréchet.*

Demostración. Primero probemos que es una propiedad hereditaria. Sean X de Fréchet y $Y \subseteq X$. Si $A \subseteq Y$ y $x \in \mathrm{cl}_Y(A)$, resulta que $x \in \mathrm{cl}_X(A)$ y así existe $s \in {}^{\omega}A$ tal que $x \in \lim_X s$; en consecuencia, $x \in \lim_Y s$. Por lo tanto Y es de Fréchet.

Por otra parte, sean $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de espacios Fréchet y T la suma topólogica de ésta. Tomemos $A \subseteq T$ y $x \in \mathrm{cl}_T(A)$. Entonces existe $\alpha < \kappa$ con $x \in X_\alpha \times \{\alpha\}$ y así, hay $z \in X_\alpha$ de modo que $x = (z, \alpha)$.

Definamos $B := \{p \in X_\alpha : (p, \alpha) \in A\}$ y mostremos que $z \in \mathrm{cl}_{X_\alpha}(B)$. Sea $U \in \tau_{X_\alpha}(z)$. Notemos que $U \times \{\alpha\} \in \tau_T(x)$ y así $(U \times \{\alpha\}) \cap A \neq \emptyset$, por lo que hay $p \in U$ con $(p, \alpha) \in A$. En consecuencia, $U \cap B \neq \emptyset$.

Por ser X_α Fréchet, existe $s \in {}^{\omega}B$ tal que $z \in \lim_{X_\alpha} s$. Entonces, si definimos $t \in {}^{\omega}T$ como $t_n := (s_n, \alpha)$, se tiene que t es una sucesión en A y $x \in \lim_T t$. Por ende, T es de Fréchet.

Por último observemos que si T es de Fréchet, todos sus subespacios son de Fréchet, en particular $X_\alpha \times \{\alpha\}$ es de Fréchet y éste es homeomorfo a X_α. □

Al inicio de la sección se comentó que los espacios de Fréchet pertenecen a la clase de los espacios secuenciales, esto es porque todo espacio de Fréchet es secuencial, lo cual se verifica a continuación.

Proposición 2.19. *Todo espacio de Fréchet es secuencial.*

Demostración. Sean X un espacio de Fréchet y $A \subseteq X$ secuencialmente cerrado. Probemos que $A = \overline{A}$. Para esto tomemos $x \in \overline{A}$ y fijemos $s \in {}^{\omega}A$ tal que $x \in \lim s$; por ser A secuencialmente cerrado se tiene que $x \in \lim s \subseteq A$. □

Es natural preguntarse si, de hecho, ser de Fréchet y ser secuencial son equivalentes. La respuesta es negativa, tal y como se puede ver en la proposición 3.7.

Proposición 2.20. *Todo espacio topológico primero numerable es de Fréchet.*

Demostración. Suponga que X es un espacio topológico primero numerable, fije $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$. Por ser X primero numerable existe $\{B_i : i \in \omega\}$, base local para X en x. Con esto en mente, sea $n \in \omega$. En vista de que $W_n := \bigcap_{i \leqslant n} B_i$ es un abierto que contiene a x, existe un punto $x_n \in W_n \cap A$. Ahora, definamos $s \in {}^{\omega}A$ mediante $s(n) := x_n$ para cada $n \in \omega$, y observemos que $\{W_n : n \in \omega\}$ es una base local para X en x con $s[\omega \setminus n] \subseteq W_n$ para cada $n \in \omega$. Finalmente, usemos el lema 1.8 para obtener la pertenencia $x \in \lim s$. □

El recíproco de este resultado es falso, como se prueba en la proposición 3.8.

Es importante notar que una modificación rutinaria del argumento dado en la prueba previa muestra que el corolario de abajo es cierto.

Corolario 2.21. *Si X es un espacio topológico que es primero numerable en el punto $x \in X$, entonces, para cualquier $A \subseteq X$ se tiene que $x \in \overline{A}$ si y solo si existe $s \in {}^{\omega}A$ con $x \in \lim s$.*

De las proposiciones 2.19 y 2.20 se deduce inmediatamente el siguiente lema.

Lema 2.22. *Todo espacio primero numerable es secuencial.*

Anteriormente probamos que ser secuencial es una propiedad divisible (ver lema 2.7), sin embargo, ser Fréchet no lo es (ver proposición 3.3). No obstante, podemos trabajar con otro tipo de funciones para garantizar que la imagen de un espacio Fréchet es Fréchet.

Definición 2.23. Sean X y Y dos espacios topológicos. Decimos que una función suprayectiva y continua $f : X \to Y$ es *pseudo-abierta* si para cualesquiera $y \in Y$ y $U \in \tau_X$ tales que $f^{-1}\{y\} \subseteq U$ se tiene que $y \in \operatorname{int} f[U]$.

En vista de la definión previa, toda función continua, suprayectiva y abierta $f : X \to Y$ es pseudo-abierta, ya que para todo $U \in \tau_X$ se tiene que $f[U] \in \tau_Y$, dicho de otra forma, $f[U] = \operatorname{int} f[U]$. Además, si $f : X \to Y$ es pseudo-abierta y $V \subseteq Y$ es tal que $f^{-1}[V] \in \tau_X$, para todo $y \in V$ se tiene que $y \in \operatorname{int} f[f^{-1}[V]] \subseteq V$ y, en consecuencia, $V \in \tau_Y$. Por lo tanto toda función pseudo-abierta es una función cociente.

En la proposición 3.3 se muestra que la propiedad de Fréchet no es divisible, así que, de acuerdo al inciso (2) del lema siguiente, la función cociente que se exhibe en la prueba de la proposición 3.3 no es pseudo-abierta. Es interesante contrastar esta observación con el inciso (1) del mismo lema.

Lema 2.24. *Sea f una función del espacio topológico X en el espacio topológico Y.*

1. *Cuando f es cociente y Y es de Fréchet y T_2, se tiene que f es pseudo-abierta.*

2. *Las funciones pseudo-abiertas preservan la propiedad de Fréchet.*

Demostración. Comencemos por probar (1). Sean $y \in Y$ y $U \in \tau_X$ con la propiedad de que $f^{-1}\{y\} \subseteq U$. En busca de una contradicción supongamos que $y \notin \operatorname{int} f[U]$. En esta situación, $y \in \overline{Y \setminus f[U]}$ y así existe $s : \omega \to Y \setminus f[U]$ tal que $y = \lim s$, más aún, las condiciones $f^{-1}\{y\} \subseteq U$ y $f[X] = Y$ implican que $y \notin s[\omega]$.

Con esto en mente, definamos $F := f^{-1}[s[\omega]]$. Notemos que la continuidad de f nos da $\overline{F} = \overline{f^{-1}[s[\omega]]} \subseteq f^{-1}[\overline{s[\omega]}]$ y de acuerdo al corolario 1.14, $\overline{s[\omega]} = \operatorname{ran} s$. Entonces $\overline{F} \subseteq F \cup f^{-1}\{y\}$. Por otra parte, $s[\omega] \subseteq Y \setminus f[U]$ implica que $F \subseteq f^{-1}[Y \setminus f[U]] \subseteq X \setminus U$ y así, $\overline{F} \subseteq \overline{X \setminus U} = X \setminus U$; por lo tanto $\overline{F} \cap f^{-1}\{y\} \subseteq (X \setminus U) \cap U = \emptyset$. En consecuencia, $\overline{F} \subseteq F$, esto es, F es un subconjunto cerrado de X y por ser f una función cociente se tiene que $s[\omega]$ es cerrado en Y, lo cual contradice el hecho $y \in \overline{s[\omega]} \setminus s[\omega]$.

Ahora mostremos (2). Sean $A \subseteq Y$ y $x \in \overline{A}$. Afirmamos que $f^{-1}\{x\} \cap \overline{f^{-1}[A]} \neq \emptyset$. En caso contrario $f^{-1}\{x\} \subseteq X \setminus \overline{f^{-1}[A]}$ y por ser f pseudo-abierta, $x \in \operatorname{int}(f[X \setminus \overline{f^{-1}[A]}]) \subseteq f[X \setminus f^{-1}[A]] \subseteq Y \setminus A$; en consecuencia, $x \notin \overline{A}$.

Del parrafo anterior inferimos que existe $y \in f^{-1}\{x\} \cap \overline{f^{-1}[A]}$ y consecuentemente hay $s : \omega \to f^{-1}[A]$ tal que $y \in \lim s$. Finalmente, definiendo $t \in {}^{\omega}Y$ como $t_n := f(s_n)$ se tiene que t es una sucesión en A y $x \in \lim t$. □

2.3 Caracterizaciones de la secuencialidad y la propiedad de Fréchet-Urysohn

Comencemos esta sección con un resultado que caracteriza a los espacios secuenciales de Hausdorff X en términos de la familia de funciones continuas del espacio linealmente ordenado $\omega + 1$ en X. Para esto será necesario un concepto nuevo.

Definición 2.25. Sean X y Y espacios topológicos.

1. Denotaremos por $C(X, Y)$ a la colección de todas las funciones continuas de X en Y.

2. Diremos que Y *divide* a X si

$$\{U \subseteq Y : \forall\, f \in C(X, Y)\ (f^{-1}[U] \in \tau_X)\} \subseteq \tau_Y.$$

Teorema 2.26. *Si X un espacio de Hausdorff, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *El espacio X divide al espacio linealmente ordenado $\omega + 1$.*

2. *X es un espacio secuencial.*

3. *Si A es un subconjunto de X con la propiedad de que para toda $s \in {}^{\omega}X$ con $\lim s \neq \emptyset$ se tiene que $A \cap \operatorname{ran}(s)$ es cerrado en X, entonces A es cerrado.*

Demostración. Empecemos por la prueba de que (2) es consecuencia de (1). Sea $A \subseteq X$ secuencialmente cerrado y tomemos $f \in C(\omega + 1, X)$. Por (1), solo debemos probar que $U := f^{-1}[X \setminus A]$ es abierto en $\omega + 1$.

En primer lugar, si $n \in \omega \cap U$, por el lema 1.20, n es un punto interior de U. Si sucediese que $\omega \in U$, entonces (ver lema 1.21) $f \restriction \omega$ sería una sucesión en X que converge a $f(\omega) \notin A$. Por la proposición 2.1, existiría $m < \omega$ tal que $f[\omega \setminus m] \subseteq X \setminus A$, es decir, $(\omega + 1) \setminus m \subseteq U$ y así, ω también sería un punto interior de U.

Supongamos que X es un espacio secuencial y consideremos $A \subseteq X$ como en (3). A continuación probaremos que A es secuencialmente cerrado (y por ende, cerrado). Sea $s \in {}^{\omega}A$. Si $\lim s = \emptyset$, es inmediato que $\lim s \subseteq A$. Demos por hecho, entonces, que $\lim s \neq \emptyset$. Luego, $A \cap \operatorname{ran}(s)$ es un subconjunto cerrado de X. Por otra parte, es inmediato que $s : \omega \to A \cap \operatorname{ran}(s)$, así que por el lema 2.2, $\lim s \subseteq A \cap \operatorname{ran}(s) \subseteq A$.

Finalmente, mostremos que la condición (3) implica (1). Fijemos $U \subseteq X$ tal que para toda $f \in C(\omega + 1, X)$ se tiene que $f^{-1}[U] \in \tau_{\omega+1}$. Vamos a probar que $A := X \setminus U$ es cerrado. Para esto emplearemos (3): sea $s \in {}^{\omega}X$ tal que $\lim s \neq \emptyset$. Como X es de Hausdorff, $\lim s$ consiste de, exactamente, un punto (ver teorema 1.10). Por el lema 1.21, la función $f : \omega + 1 \to X$ dada por $f \restriction \omega = s$ y $f(\omega) \in \lim s$ es una función continua; en consecuencia, $f^{-1}[U] \in \tau_{\omega+1}$.

Definamos $G := A \cap \operatorname{ran}(s)$. Si G es finito, ya tendríamos que es un subconjunto cerrado de X, así que vamos a suponer que G es infinito. En busca de una contradicción, supongamos que $f(\omega) \notin G$. Como $f(\omega) \in \operatorname{ran}(s)$, deducimos que $f(\omega) \in U$ y, en consecuencia, $f^{-1}[U] \in \tau_{\omega+1}(\omega)$. Por el lema 1.20 existe $n < \omega$ tal que $(\omega + 1) \setminus n \subseteq f^{-1}[U]$ y, de esta manera,

$$f^{-1}[A] = f^{-1}[X \setminus U] = (\omega + 1) \setminus f^{-1}[U] \subseteq n;$$

lo cual, aunado a la condición $G \subseteq A$, nos da $G \subseteq f[n]$, una contradicción a la infinitud de G. Entonces, $f(\omega) \in G$.

En aras de concluir la prueba de que G es cerrado en X tomemos $x \in X \setminus G$. Sabemos que $x \neq f(\omega)$ por lo que existen $V, W \in \tau_X$, ajenos, tales que $x \in V$ y $f(\omega) \in W$. Luego, la continuidad de f nos garantiza la existencia de $k \in \omega$ que satisface $f[(\omega+1)\setminus k] \subseteq W$. De lo anterior se deduce que $O := V \setminus (f[k] \setminus \{x\})$ es un abierto en X con $x \in O$ y $O \cap \operatorname{ran}(s) \subseteq \{x\}$. Consecuentemente, $O \setminus \{x\} \subseteq X \setminus \{x\} \subseteq X \setminus G$, es decir, $O \subseteq X \setminus G$. En resumen, todos los puntos de $X \setminus G$ son interiores y por consiguiente G es cerrado.

El resto es aplicar (3) para obtener que A es cerrado. $\square$

A continuación presentamos otro par de caracterizaciones de la secuencialidad, ahora en términos de sumas topológicas (ver definición 1.5) y cocientes (sección 1.4).

Teorema 2.27. *Si X es un espacio topológico, los enunciados siguientes son equivalentes.*

1. *X es secuencial.*

2. *Existen κ, un número cardinal, y $\{L_\alpha : \alpha < \kappa\}$, una familia de espacios topológicos, de tal modo que cada L_α es homeomorfo al rango de una sucesión convergente en la recta real y X es un cociente de la suma $\bigoplus_{\alpha<\kappa} L_\alpha$.*

Demostración. Comprobaremos, en primer término, que (2) es consecuencia de (1). Denotemos por κ a la cardinalidad del conjunto de parejas

$$\{(s,x) : s \in {}^{\omega}X \text{ y } x \in \lim s\}$$

y fijemos $\{(s_\alpha, x_\alpha) : \alpha < \kappa\}$, una enumeración sin repeticiones de esta colección. Para cada $\alpha < \kappa$ sea L_α el espacio topológico que resulta de darle a $s_\alpha[\omega] \cup \{x_\alpha\}$ la topología que tiene por base

$$\{\{s_\alpha(n)\} : n \in \omega\} \cup \{s_\alpha[\omega \setminus n] \cup \{x_\alpha\} : n \in \omega\}.$$

Es inmediato que L_α es de Hausdorff y s_α es una sucesión en L_α que converge a x_α.

Denotemos por T a la suma topológica de $\{L_\alpha : \alpha < \kappa\}$ (ver definición 1.5) y sea $q : T \to X$ la función proyección en la primera coordenada. A continuación probaremos que q es continua.

Sea $x \in T$. Por definición existe $\alpha < \kappa$ tal que $x \in L_\alpha \times \{\alpha\}$. Si x es un punto aislado de $L_\alpha \times \{\alpha\}$, tenemos que $\{x\}$ resulta abierto en T y así q es continua en x. De otra forma, $x = (x_\alpha, \alpha)$ y entonces, para todo $U \in \tau_X(x_\alpha)$ hay $n \in \omega$ tal que $s_\alpha[\omega \setminus n] \subseteq U$; consecuentemente, $(s_\alpha[\omega \setminus n] \cup \{x_\alpha\}) \times \{\alpha\}$ es un abierto de T que contiene a x y es un subconjunto de $q^{-1}[U]$. En resumen, q es continua.

Lo anterior prueba que $\tau_X \subseteq \tau_q$, donde τ_q es la topología cociente dada por q en X, así que solo resta verificar la contención inversa.

Sea $F \subseteq X$ tal que $q^{-1}[F]$ es cerrado en T. En vista de que X es secuencial, para ver que F es cerrado en X basta con verificar que es secuencialmente cerrado

Sean $s \in {}^{\omega}F$ y $x \in \lim s$. Entonces hay $\alpha < \kappa$ tal que $(s,x) = (s_\alpha, x_\alpha)$. Ahora definamos $t \in {}^{\omega}T$ como $t_n := (s_\alpha(n), \alpha)$ y observemos que de la igualdad $q \circ t = s$ se sigue que t es una sucesión en el cerrado $q^{-1}[F]$. En vista de las definiciones de L_α y de T, deducimos que $(x_\alpha, \alpha) \in \text{lím}_T t$ y por el lema 2.2, $(x_\alpha, \alpha) \in q^{-1}[F]$; lo cual implica que $x = q((x_\alpha, \alpha)) \in F$.

Ahora probaremos la implicación restante. En vista de que $\mathbb{R}$ es secuencial y el rango de cualquier sucesión convergente en la recta real es un subconjunto cerrado de ésta, obtenemos que cada L_α es secuencial. Así, por el lema 2.7 y la proposición 2.16, X es secuencial. $\square$

El resultado previo se puede resumir diciendo que un espacio es secuencial si y solo si es el cociente de una suma de sucesiones convergentes. Haciendo uso de esta idea, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.28. *Sea X un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *X es secuencial.*

2. *X es un cociente de un espacio métrico.*

3. *X es un cociente de un espacio primero numerable.*

Demostración. Comencemos suponiendo (1) y probemos (2). Por el teorema 2.27, X es un cociente de una suma topológica de la forma $\bigoplus_{\alpha<\kappa} L_\alpha$, donde L_α es homeomorfo al rango de una sucesión convergente en la recta real. Consecuentemente, L_α es metrizable para todo $\alpha < \kappa$ y, dado que la metrizabilidad se preserva bajo sumas topológicas (ver [3, pág. 258, Teorema 4.2.1]), resulta que que $\bigoplus_{\alpha<\kappa} L_\alpha$ es metrizable.

Es inmediato que (2) implica (3), así que solo resta verificar que (1) es consecuencia de (3). Lo cual se deduce de los lemas 2.7 y 2.22. $\square$

El teorema presentado a continuación muestra una caracterización de los espacios de Fréchet en términos de la propiedad de secuencialidad.

Teorema 2.29. *Un espacio topológico X es de Fréchet si y solo si X es hereditariamente secuencial*

Demostración. En primera instancia, si X es de Fréchet, las proposiciones 2.18 y 2.19 implican que X es hereditariamente secuencial.

Para constatar la implicación restante consideremos X hereditariamente secuencial y verifiquemos que es de Fréchet. Sean $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$. Cuando $x \in A$, la sucesión constante x es un elemento de ${}^{\omega}A$ que tiene a x como límite. Por otra parte, si $x \notin A$, entonces consideramos al subespacio $Y := A \cup \{x\}$ y observamos que, como X es hereditariamente secuencial, Y es un espacio secuencial. Ahora, en vista de que A no es cerrado en Y, la secuencialidad de Y asegura que A no es secuencialmente cerrado en Y; en consecuencia, existen $y \in Y \setminus A$ y $s \in {}^{\omega}A$ con $y \in \lim_Y A$. En estas circunstancias, la pertenencias anteriores y el lema 1.7 nos permiten concluir que $x \in \lim_X A$. $\square$

Ahora veamos una caracterización de los espacios Fréchet de Hausdorff basada en funciones pseudo-abiertas (ver definición 2.23).

Teorema 2.30. *Los enunciados siguientes son equivalentes para cualquier espacio de Hausdorff X.*

1. *X es de Fréchet*

2. *X es imagen pseudo-abierta de una suma topológica de sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Veamos que (2) es consecuencia de (1). Si X es de Fréchet, el lema 2.19 y el teorema 2.27 garantizan la existencia de T, una suma topológica de sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$, y $q : T \to X$, una función cociente, tales que $q[T] = X$. El resto es aplicar el lema 2.24 para concluir que q es pseudo-abierta.

Ahora supongamos (2) y probemos (1). Para esto, demos por hecho que T es una suma topológica de sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$ y que existe una función pseudo-abierta $q : T \to X$. Por la proposición 2.18, T es de Fréchet y así el lema 2.24 implica que X es de Fréchet. $\square$

Finalicemos esta sección con una caracterización de los espacios secuenciales y de Fréchet dada en términos de un nuevo concepto. Esta caracterización resultará de suma importancia, pues será empleada abundantemente en el capítulo 4.

En aras de simplificar la escritura emplearemos la expresión $\alpha \in \mathbf{ON}$ para abreviar la frase *α es un número ordinal.*

Definición 2.31. Sean X un espacio topológico, A un subconjunto de X y $\alpha \in \mathbf{ON}$. Definimos $A_X^{(\alpha)}$, el *α-ésimo derivado secuencial* de A en X, de manera recursiva como sigue:

1. $A_X^{(0)} := A$,
2. si $\alpha := \beta + 1$ para algún ordinal β, $A_X^{(\alpha)} = \bigcup \left\{ \lim s : s \in {}^{\omega}(A_X^{(\beta)}) \right\}$ y
3. si α es un ordinal límite, $A_X^{(\alpha)} := \bigcup_{\beta<\alpha} A_X^{(\beta)}$.

Si es claro en qué espacio se está calculando el α-ésimo derivado secuencial de A, prescindiremos del subíndice y simplemente escribiremos $A^{(\alpha)}$.

Veamos algunas propiedades de los derivados secuenciales.

Lema 2.32. *Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$.*

1. *Si $\beta < \alpha$, entonces $A^{(\beta)} \subseteq A^{(\alpha)}$.*
2. *Para cualquier $B \subseteq A$, $B^{(\alpha)} \subseteq A^{(\alpha)}$.*
3. *$A^{(\beta+\alpha)} = (A^{(\beta)})^{(\alpha)}$.*

Demostración. Argumentaremos los tres incisos por inducción transfinita sobre α. Con el inciso (1) en mente, supongamos que para cada $\gamma < \alpha$ y para todo $\xi < \gamma$ se tiene que $A^{(\xi)} \subseteq A^{(\gamma)}$. Argumentemos a continuación, que

$$\text{para cualquier } \beta < \alpha,\ A^{(\beta)} \subseteq A^{(\alpha)}. \tag{2.1}$$

Si $\alpha = 0$, el enunciado (2.1) es cierto por vacuidad.

Caso 1: $\alpha = \gamma + 1$ para algún γ.

Empecemos por notar que nuestra definición de $A^{(\gamma+1)}$ implica que $A^{(\gamma)} \subseteq A^{(\alpha)}$. De este modo, cuando $\beta = \gamma$, (2.1) se deduce inmediatamente. Por otro lado, si $\beta < \gamma$, empleamos la hipótesis inductiva para obtener las inclusiones $A^{(\beta)} \subseteq A^{(\gamma)} \subseteq A^{(\alpha)}$.

Caso 2: α es un ordinal límite.

Aquí, (2.1) es corolario del inciso (3) de la definición 2.31.

Ahora, mostremos (2). Sean $A, B \subseteq X$ tales que $B \subseteq A$ y supongamos que para todo $\beta < \alpha$ se tiene que $B^{(\beta)} \subseteq A^{(\beta)}$. Si $\alpha = 0$ es evidente que $B^{(0)} \subseteq A^{(0)}$. Ahora, si α es un ordinal límite, $B^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} B^{(\beta)} \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} A^{(\beta)} = A^{(\alpha)}$. Por último, si $\alpha = \beta + 1$, sea $x \in B^{(\alpha)}$. Entonces existe $s : \omega \to B^{(\beta)}$ tal que $x \in \lim s$; por hipótesis de inducción, $B^{(\beta)} \subseteq A^{(\beta)}$ y así $s \in {}^{\omega}(A^{(\beta)})$. En resumen $x \in A^{(\alpha)}$.

Finalmente probemos (3). Supongamos que para todo $\gamma < \alpha$ se tiene que $A^{(\beta+\gamma)} = (A^{(\beta)})^{(\gamma)}$.

En primer lugar, si $\alpha = 0$, es inmediato que $A^{(\beta+0)} = (A^{(\beta)})^{(0)}$. Mientras que si α es un ordinal límite, resulta que $\beta + \alpha$ también es un ordinal límite y por ende,

$$A^{(\beta+\alpha)} = \bigcup_{\gamma<\beta+\alpha} A^{(\gamma)} = \bigcup_{\gamma<\beta} A^{(\gamma)} \cup \bigcup \{A^{(\gamma)} : \beta \leqslant \gamma < \beta + \alpha\};$$

además, por el inciso (1) se tiene que $\bigcup_{\gamma<\beta} A^{(\gamma)} \subseteq A^{(\beta)}$ y así

$$A^{(\beta+\alpha)} = \bigcup \{A^{(\gamma)} : \beta \leqslant \gamma < \beta + \alpha\} = \bigcup_{\gamma<\alpha} A^{(\beta+\gamma)}.$$

Por último, empleando la hipótesis de inducción, $A^{(\beta+\alpha)} = \bigcup_{\gamma<\alpha} (A^{(\beta)})^{(\gamma)} = (A^{(\beta)})^{(\alpha)}$.

Ahora, supongamos que α es el sucesor de algún ordinal γ. Entonces tenemos dos propiedades inmediatas: $(A^{(\beta)})^{(\gamma)} = A^{(\beta+\gamma)}$ y $(\beta + \gamma) + 1 = \beta + \alpha$. Luego,

$$\begin{aligned}(A^{(\beta)})^{(\alpha)} = (A^{(\beta)})^{(\gamma+1)} &= \bigcup \left\{ \lim s : s \in {}^{\omega}((A^{(\beta)})^{(\gamma)}) \right\} \\ &= \bigcup \left\{ \lim s : s \in {}^{\omega}(A^{(\beta+\gamma)}) \right\} = A^{((\beta+\gamma)+1)} = A^{(\beta+\alpha)}.\end{aligned}$$

□

Haciendo uso de las propiedades presentadas previamente tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.33. *Sean A y B subconjuntos del espacio topológico X. Si existe $\beta \in \mathbf{ON}$ tal que $A^{(\beta)} = B^{(\beta)}$, entonces, para cualquier ordinal $\alpha \geqslant \beta$, $A^{(\alpha)} = B^{(\alpha)}$.*

Demostración. Hagamos inducción transfinita sobre α. Supongamos que $\alpha \in \mathbf{ON}$ es tal que $\beta \leqslant \alpha$ y para toda $\gamma \in \mathbf{ON}$ con $\beta \leqslant \gamma < \alpha$ se cumple la igualdad $A^{(\gamma)} = B^{(\gamma)}$. Cuando

$\alpha = \beta$, se sigue que $A^{(\alpha)} = A^{(\beta)} = B^{(\beta)} = B^{(\alpha)}$. Mientras que si α es un ordinal límite,

$$A^{(\alpha)} = \bigcup_{\gamma<\alpha} A^{(\gamma)} = \bigcup_{\gamma<\beta} A^{(\gamma)} \cup \bigcup\{A^{(\gamma)} : \beta \leqslant \gamma < \alpha\}.$$

Además, por el inciso (2) del lema previo, $\bigcup_{\gamma<\beta} A^{(\gamma)} \subseteq A^{(\beta)}$ y $\bigcup_{\gamma<\beta} B^{(\gamma)} \subseteq B^{(\beta)}$. Por ende,

$$A^{(\alpha)} = \bigcup\{A^{(\gamma)} : \beta \leqslant \gamma < \alpha\} = \bigcup\{B^{(\gamma)} : \beta \leqslant \gamma < \alpha\} = \bigcup_{\gamma<\alpha} B^{(\gamma)} = B^{(\alpha)}.$$

Finalmente, si $\alpha = \gamma + 1$ para algún $\gamma \in \mathbf{ON}$, por el inciso (3) del lema previo, $A^{(\gamma+1)} = (A^{(\gamma)})^{(1)} = (B^{(\gamma)})^{(1)} = B^{(\gamma+1)}$. □

Recuerde que el símbolo ω_1 representa al primer ordinal no numerable.

De acuerdo a la definición 2.31 podemos calcular el α-ésimo derivado secuencial de un conjunto para cualquier número ordinal α; sin embargo, basta con concentrarnos en los ordinales menores o iguales a ω_1, ya que los siguientes derivados secuenciales no aportan nada, tal y como se muestra a continuación.

Proposición 2.34. *Sean $\alpha \in \mathbf{ON}$ y A un subconjunto del espacio topológico X. Si $\alpha \geqslant \omega_1$, entonces $A^{(\alpha)} = A^{(\omega_1)}$.*

Demostración. Nuestro argumento será por inducción transfinita sobre α. Supongamos que para todo $\beta \in \mathbf{ON}$, con $\omega_1 \leqslant \beta < \alpha$, se tiene que $A^{(\beta)} = A^{(\omega_1)}$. Naturalmente, cuando $\alpha = \omega_1$, se tiene la conclusión trivialmente.

Si α es un ordinal límite, nuestra hipótesis inductiva nos da la cadena de igualdades:

$$A^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} A^{(\beta)} = \bigcup_{\beta<\omega_1} A^{(\beta)} \cup \bigcup\{A^{(\beta)} : \omega_1 \leqslant \beta < \alpha\} = A^{(\omega_1)} \cup A^{(\omega_1)} = A^{(\omega_1)}.$$

Ahora, demos por hecho que existe $\beta \in \mathbf{ON}$ tal que $\alpha = \beta + 1$ y tomemos $x \in A^{(\alpha)}$. Sabemos que existe $s : \omega \to A^{(\beta)}$ con $x \in \operatorname{lím} s$. Por otra parte, el que $\omega_1 < \alpha$ nos da la desigualdad $\omega_1 \leqslant \beta$ y en consecuencia, $A^{(\beta)} = A^{(\omega_1)}$. Por lo tanto para cada $n < \omega$ existe $\gamma_n < \omega_1$ de forma que $s_n \in A^{(\gamma_n)}$. Finalmente, al definir $\gamma := \sup\{\gamma_n : n < \omega\}$ se tiene que $\gamma < \omega_1$ y $s[\omega] \subseteq A^{(\gamma)}$; en especial, $x \in A^{(\gamma+1)} \subseteq A^{(\omega_1)}$. En virtud de que el argumento anterior demuestra la inclusión $A^{(\alpha)} \subseteq A^{(\omega_1)}$, únicamente resta invocar el inciso (1) del lema 2.32 para obtener la igualdad $A^{(\alpha)} = A^{(\omega_1)}$ $\square$

El inciso (2) del lema 2.32 muestra que, para cualquier $\alpha \in \mathbf{ON}$, el α-ésimo derivado secuencial se preserva bajo la contención de conjuntos; algo similar ocurre para subespacios y funciones continuas como se prueba a continuación.

Lema 2.35. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq Y \subseteq X$. Si α es un ordinal, entonces*

$$A_Y^{(\alpha)} \subseteq A_X^{(\alpha)}. \tag{2.2}$$

Demostración. Con la intención de usar inducción transfinita, fijemos $\alpha \in \mathbf{ON}$ tal que para cada $\beta < \alpha$ se satisface que $A_Y^{(\beta)} \subseteq A_X^{(\beta)}$.

En primer lugar, si $\alpha = 0$, (2.2) es inmediata. Por otro lado, si α es un ordinal límite, $A_Y^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} A_Y^{(\beta)} \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} A_X^{(\beta)} = A_X^{(\alpha)}$. Finalmente supongamos que $\alpha = \beta + 1$ para algún $\beta \in \mathbf{ON}$. Sea $x \in A_Y^{(\alpha)}$; en consecuencia existe $s : \omega \to A_Y^{(\beta)}$ con la propiedad de que $x \in \lim_Y s$. Luego, el hecho de que $\lim_Y s \subseteq \lim_X s$ (ver lema 1.7) aunado a la contención $A_Y^{(\beta)} \subseteq A_X^{(\beta)}$ nos dan $x \in A_X^{(\alpha)}$. $\square$

Lema 2.36. *Sean X y Y espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ es secuencialmente continua, entonces para cualesquiera $A \subseteq X$ y $\alpha \in \mathbf{ON}$ se tiene que $f[A^{(\alpha)}] \subseteq (f[A])^{(\alpha)}$.*

Demostración. Sea $A \subseteq X$ y hagamos inducción transfinita sobre α. Supongamos que para todo $\beta < \alpha$ se satisface $f[A^{(\beta)}] \subseteq (f[A])^{(\beta)}$.

Si $\alpha = 0$, es inmediato que $f[A^{(0)}] \subseteq (f[A])^{(0)}$. Ahora, si α es un ordinal límite, $f[A^{(\alpha)}] = f[\bigcup_{\beta<\alpha} A^{(\beta)}] = \bigcup_{\beta<\alpha} f[A^{(\beta)}] \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha}(f[A])^{(\beta)} = (f[A])^{(\alpha)}$.

Por último, demos por sentado que $\alpha = \beta + 1$ para algún $\beta \in \mathbf{ON}$. Si $y \in f[A^{(\alpha)}]$, entonces existe $x \in A^{(\alpha)}$ tal que $f(x) = y$. Por otra parte, hay $s : \omega \to A^{(\beta)}$ con la propiedad de que $x \in \lim s$. Nuestra hipótesis inductiva nos da $f[A^{(\beta)}] \subseteq (f[A])^{(\beta)}$ y, en consecuencia, $f \circ s$ es una sucesión en $(f[A])^{(\beta)}$ de modo que $y = f(x) \in \lim (f \circ s)$. En otras palabras, $y \in (f[A])^{(\alpha)}$. $\square$

El siguiente resultado establece la relación que existe entre la cerradura de un conjunto y la cerradura del α-ésimo derivado secuencial de dicho conjunto.

Lema 2.37. *Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $\alpha \in \mathbf{ON}$. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *$A^{(\alpha)}$ es cerrado en X.*
2. *$A^{(\alpha)} = \overline{A}$.*

Demostración. Es evidente que (1) es consecuencia de (2), así que solo resta probar que (1) implica (2). Probemos, empleando inducción transfinita, que para cualquier ordinal β, $A^{(\beta)} \subseteq \overline{A}$, en particular $A^{(\alpha)} \subseteq \overline{A}$. Fijemos, pues, $\beta \in \mathbf{ON}$ de modo que $A^{(\xi)} \subseteq \overline{A}$, siempre que $\xi < \beta$.

Si $\beta = 0$, $A^{(\beta)} = A \subseteq \overline{A}$. Ahora, si β es un ordinal límite, por el inciso (3) de la definición 2.31 ya se tiene lo deseado. Por último, supongamos que $\beta = \gamma + 1$ y sea $x \in A^{(\beta)}$. Fijemos $s : \omega \to A^{(\gamma)}$ con $x \in \lim s$. La desigualdad $\gamma < \alpha$ y la hipótesis inductiva implican que $s[\omega] \subseteq A^{(\gamma)} \subseteq \overline{A}$. De este modo, argumentos rutinarios muestran que x es un punto de adherencia de $\overline{A}$, esto es, $x \in \overline{A}$. Finalmente el inciso (1) del lema 2.32 nos da la contención $\overline{A} \subseteq A^{(\alpha)}$, lo cual concluye la prueba. □

Dentro de la prueba del lema anterior se demostró que para cualquier $\alpha \in \mathbf{ON}$ el α-ésimo derivado secuencial de un conjunto está contenido en la cerradura de dicho conjunto, es decir, la cerradura de un conjunto contiene a todos los derivados secuenciales del conjunto en cuestión. Además por el inciso (1) de la definición 2.31, todo conjunto esta contenido en sus derivados secuenciales, por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.38. *Si A es un subconjunto de un espacio topológico X y $\alpha \in \mathbf{ON}$, entonces los siguientes son enunciados son ciertos.*

1. *Cuando A es cerrado, $A^{(\alpha)}$ es cerrado.*
2. *La inclusión $\overline{A} \subseteq A^{(\alpha)}$ implica que $A^{(\alpha)}$ es cerrado.*

Para el resto de la tesis, adoptaremos la costumbre usada en el análisis matemático y emplearemos el símbolo ∞ para denotar un objeto que satisface $\infty \notin \mathbf{ON}$ y, para cualquier $\alpha \leqslant \omega_1$, se tiene que $\alpha < \infty$ y $\infty + \alpha = \infty$.

Definición 2.39. Sean X un espacio topológico. Definimos el *orden secuencial de* X, $\mathrm{os}(X)$, como

$$\mathrm{os}(X) := \mathrm{mín}\,(\{\infty\} \cup \{\alpha \leqslant \omega_1 : \forall A \subseteq X(A^{(\alpha)} = \overline{A})\}).$$

Observe que si $\alpha \leqslant \omega_1$, entonces, gracias al lema 2.37, se tiene que $\mathrm{os}(X) \leqslant \alpha$ si y solo si, para cualquier $A \subseteq X$, $A^{(\alpha)}$ es un subconjunto cerrado de X. De esto se deduce inmediatamente que $\mathrm{os}(X) = 0$ es equivalente a que X sea un espacio discreto.

Teorema 2.40. *Si X es un espacio topológico, entonces X es secuencial si y solo si* $\mathrm{os}(X) \leqslant \omega_1$.

Demostración. Comencemos suponiendo que X es secuencial. Sea A un subconjunto de X y verifiquemos que $A^{(\omega_1)}$ es cerrado. Por el lema 2.37 y la secuencialidad de X basta probar que $A^{(\omega_1)}$ es secuencialmente cerrado.

Sean $s : \omega \to A^{(\omega_1)}$ y $x \in \mathrm{lím}\, s$. De acuerdo a la definición 2.31, para cada $n < \omega$ existe $\beta_n \in \omega_1$ tal que $s_n \in A^{(\beta_n)}$. Así, definamos $\alpha := \sup\{\beta_n : n < \omega\}$ para obtener $\alpha < \omega_1$. Por el inciso (1) del lema 2.32, $s[\omega] \subseteq A^{(\alpha)}$ y en consecuencia $x \in A^{(\alpha+1)} \subseteq A^{(\omega_1)}$.

Ahora supongamos que $\mathrm{os}(X) \leqslant \omega_1$ y mostremos que X es secuencial. Sea $A \subseteq X$ secuencialmente cerrado. Mostremos, usando inducción transfinita, que para todo $\alpha \leqslant \omega_1$, $A^{(\alpha)} = A$. Fijemos $\alpha \leqslant \omega_1$ tal que $A^{(\beta)} = A$ para cada $\beta < \alpha$.

Si $\alpha = 0$, por el inciso (1) de la definición 2.31, ya se tiene lo deseado. Ahora, si α es un ordinal límite, $A^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} A^{(\beta)} = \bigcup_{\beta<\alpha} A = A$. Por último, supongamos que $\alpha = \beta + 1$ para algún $\beta \in \mathbf{ON}$ y sea $x \in A^{(\alpha)}$. Entonces existe $s : \omega \to A^{(\beta)}$ tal que $x \in \mathrm{lím}\, s$. De la hipótesis de inducción se deduce que $s \in {}^{\omega}A$ y, en consecuencia, $x \in \mathrm{lím}\, s \subseteq A$.

Finalmente, el hacer $\alpha := \mathrm{os}(X)$ nos da $\alpha \leqslant \omega_1$ y, por ende, $A = A^{(\alpha)} = \overline{A}$. □

La proposición 3.3 otorga un espacio X que es secuencial y tiene un subespacio Y que no es secuencial. Entonces el teorema 2.40 implica que $\mathrm{os}(X) \leqslant \omega_1 < \infty = \mathrm{os}(Y)$. Sin embargo, añadir una restricción al conjunto $Y \subseteq X$ garantiza la desigualdad $\mathrm{os}(Y) \leqslant \mathrm{os}(X)$ tal y como se prueba a continuación.

Teorema 2.41. *Si F y G son, respectivamente, un subconjunto cerrado y un subconjunto abierto del espacio topológico X, entonces el subespacio $Y := F \cap G$ satisface las propiedades* *siguientes.*

1. *Para todo* $A \subseteq Y$ *y* $\alpha \in \mathbf{ON}$*,* $A_Y^{(\alpha)} = Y \cap A_X^{(\alpha)}$*.*

2. $\operatorname{os}(Y) \leqslant \operatorname{os}(X)$*.*

Demostración. Para probar (1), hagamos inducción transfinita sobre α. Supongamos que para todo $\beta < \alpha$, $A_Y^{(\beta)} = Y \cap A_X^{(\beta)}$. Si $\alpha = 0$, por el inciso (1) de la definición 2.31 es inmediato que $A_Y^{(0)} = Y \cap A_X^{(0)}$. Ahora, si α es un ordinal límite,

$$A_Y^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} A_Y^{(\beta)} = \bigcup_{\beta<\alpha} (Y \cap A_X^{(\beta)}) = Y \cap \bigcup_{\beta<\alpha} A_X^{(\beta)} = Y \cap A_X^{(\alpha)}.$$

Finalmente, demos por hecho que $\alpha = \beta + 1$ para algún $\beta \in \mathbf{ON}$. Hagamos $L := A_X^{(\beta)}$ y $M := A_Y^{(\beta)}$. Por la hipótesis de inducción, $Y \cap L = M$. Por otro lado $L \subseteq \operatorname{cl}_X A \subseteq F$ y entonces resulta que $M = Y \cap L = (F \cap G) \cap L = G \cap (F \cap L) = G \cap L$.

Con lo anterior en mente, mostremos que

$$Y \cap \bigcup \{\operatorname{lím}_X s : s \in {}^{\omega}M\} = Y \cap \bigcup \{\operatorname{lím}_X s : s \in {}^{\omega}L\}. \tag{2.3}$$

La contención de izquierda a derecha se deduce de la inclusión $M \subseteq L$. Ahora, sean $s \in {}^{\omega}L$ y $x \in Y \cap \operatorname{lím}_X s$. En particular, $x \in G$ y así $G \in \tau_X(x)$; por ende existe $m < \omega$ tal que $s[\omega \setminus m] \subseteq G$, más aún, $s[\omega \setminus m] \subseteq G \cap L = M$. Definiendo $t \in {}^{\omega}M$ como $t_n := s_{n+m}$ para cada $n < \omega$, se tiene que $x \in \operatorname{lím}_X t$, lo cual concluye la prueba de (2.3).

Finalicemos nuestra prueba de (1) haciendo uso del lema 1.7,

$$\begin{aligned} A_Y^{(\alpha)} &= \bigcup \{\operatorname{lím}_Y s : s \in {}^{\omega}M\} = \bigcup \{Y \cap \operatorname{lím}_X s : s \in {}^{\omega}M\} \\ &= Y \cap \bigcup \{\operatorname{lím}_X s : s \in {}^{\omega}M\} = Y \cap \bigcup \{\operatorname{lím}_X s : s \in {}^{\omega}L\} \\ &= Y \cap A_X^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Ahora mostremos (2). Si $\operatorname{os}(X) = \infty$, no hay nada que hacer. Entonces supongamos que existe $\delta \leqslant \omega_1$ tal que $\delta = \operatorname{os}(X)$y fijemos $B \subseteq Y$. Por el inciso (1), $B_Y^{(\delta)} = Y \cap B_X^{(\delta)} = Y \cap \operatorname{cl}_X B = \operatorname{cl}_Y B$ y en consecuencia, $\operatorname{os}(Y) \leqslant \delta$. □

El inciso (1) del resultado previo muestra que, bajo ciertas restricciones sobre el subespacio $Y \subseteq X$, el α-ésimo derivado secuencial calculado en Y coincide con la intersección de Y con el α-ésimo derivado secuencial calculado en X; sin embargo, cuando Y es un subespacio cerrado de X es indiferente calcular el α-ésimo derivado secuencial en X o en Y, tal y como lo muestra el siguiente corolario.

Corolario 2.42. *Sean X un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Si Y es cerrado en X, entonces para cualesquiera $A \subseteq Y$ y $\alpha \in \mathbf{ON}$ se satisface que $A_Y^{(\alpha)} = A_X^{(\alpha)}$.*

Demostración. Por el inciso (2) del lema 2.32, $A_X^{(\alpha)} \subseteq Y_X^{(\alpha)} \subseteq \mathrm{cl}_X(Y) = Y$ y esto, aunado al teorema 2.41, nos da $A_Y^{(\alpha)} = A_X^{(\alpha)} \cap Y = A_X^{(\alpha)}$. □

Concluimos la sección con una caracterización de los espacios de Fréchet dada en términos del orden secuencial.

Teorema 2.43. *X es de Fréchet si y solo si $\mathrm{os}(X) \leqslant 1$.*

Demostración. Si X es de Fréchet y $A \subseteq X$, para todo $x \in \overline{A}$ existe $s \in {}^{\omega}A$ tal que $x \in \mathrm{lím}\, s$ y por ende $x \in A^{(1)}$. Ahora, si $\mathrm{os}(X) \leqslant 1$ y $A \subseteq X$, entonces $\overline{A} = A^{(1)}$; consecuentemente, X es de Fréchet. □

CAPÍTULO 3: EJEMPLOS

En este capítulo presentaremos propiedades que no necesariamente satisfacen los espacios secuenciales. Antes de comenzar, conviene establecer mediante un ejemplo que no cualquier espacio topológico es secuencial.

Lema 3.1. *El espacio linealmente ordenado $\omega_1 + 1$ (ver sección 1.3) posee subconjuntos secuencialmente cerrados que no son cerrados.*

Demostración. Nuestro objetivo es demostrar que $A := [0, \omega_1)$ es un subconjunto secuencialmente cerrado de $\omega_1 + 1$ que no es cerrado. Por un lado, A es secuencialmente cerrado porque, si $s \in {}^{\omega}A$, es inmediato que $s[\omega] \subseteq [A]^{\leqslant \omega}$ y en consecuencia, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $s[\omega] \subseteq [0, \alpha]$. De esta manera, el lema 2.2 implica las relaciones $\lim s \subseteq [0, \alpha] \subseteq [0, \omega_1) = A$. Por otro lado, A no es cerrado pues si $U \in \tau_{\leqslant}(\omega_1)$, el lema 1.20 produce $\beta < \omega_1$ tal que $(\beta, \omega_1] \subseteq U$; por consiguiente, $\beta + 1 \in U \cap A$ y así, $\omega_1 \in \overline{A} \setminus A$. □

El corolario 2.8 garantiza que la imagen continua y abierta, o bien, continua y cerrada, de un espacio secuencial también lo es. El siguiente resultado muestra que la restricción de que la función sea abierta o cerrada es imposible de remover.

Proposición 3.2. *La imagen continua de un espacio secuencial no necesariamente es secuencial.*

Demostración. Consideremos a los espacios topológicos $X := \omega_1 + 1$, con τ_X la topología discreta, y $Y := \omega_1 + 1$ con su topología del orden. Así X es primero numerable, más aún, utilizando el lema 2.22 tenemos que X es un espacio secuencial. Ahora, si $f : X \to Y$ es la función identidad, entonces f claramente es continua y, por el lema 3.1, su imagen no es secuencial. □

La proposición 2.18 prueba que la propiedad de Fréchet es hereditaria, algo que no ocurre para la secuencialidad. Más aún, en el teorema 2.29 vimos que la secuencialidad hereditaria es equivalente a la propiedad de Fréchet. Para verificar que la secuencialidad no es una propiedad hereditaria, construiremos un espacio secuencial que admite un subespacio sin esta propiedad por medio de un subespacio de $\mathbb{R}^2$ y una función cociente (ver sección 1.4).

Proposición 3.3. *Existen espacios topológicos X y Y de modo que Y es primero numerable y X es un cociente de Y que posee un subespacio que no es secuencial. En particular, ser secuencial no es una propiedad hereditaria y ser Fréchet no es una propiedad divisible.*

Demostración. Primero definamos $t : \omega \to \mathbb{R}$ como $t(n) := 2^{-n}$ para cada $n < \omega$. Con esto en mente, consideremos $Y_1 := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{0\}$ y $Y_2 := \operatorname{ran}(t) \times \{1\}$. Ahora, si consideramos a $Y := Y_1 \cup Y_2$ como subespacio del espacio euclidiano $\mathbb{R}^2$, entonces la primero numerabilidad de este último garantiza que Y también tiene esta propiedad.

Por otra parte, tomemos X como el conjunto de números reales y $q : Y \to X$ como la función proyección en la primera coordenada. Como q es suprayectiva, podemos definir τ_X como la topología cociente en X dada por q. A continuación mostraremos que el subespacio $Z := X \setminus t[\omega]$ de X no es secuencial. Queremos probar que $A := Z \setminus \{0\}$ es secuencialmente cerrado en Z pero no es cerrado en Z.

Empecemos por argumentar que si $s \in {}^{\omega}A$, entonces $0 \notin \operatorname{lím}_Z s$. Dado $n < \omega$, definamos $E_n := \{i < \omega : t_{n+1} < s_i < t_n\}$. Supongamos, primeramente, que E_m es infinito para algún $m < \omega$.

El empleo de argumentos rutinarios muestra que $U_1 := (0, t_{m+1}) \times (-\infty, \frac{1}{2})$ y $U_2 := (-1, t_{m+1}) \times (\frac{1}{2}, \infty)$ son abiertos en $\mathbb{R}^2$ que satisfacen

$$q^{-1}[[0, t_{m+1})] = (U_1 \cup U_2) \cap Y.$$

En otras palabras, $[0, t_{m+1}) \in \tau_X(0)$. Sin embargo la infinitud de E_m implica que, para cualquier $k < \omega$, existe $i \in E_m \setminus k$ y así, $s_i \notin [0, t_{m+1})$. De este modo, $0 \notin \operatorname{lím}_Z s$.

Ahora, en caso de que cada E_n sea finito, se sigue que existen $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ con

$$t_{n+1} < a_n < b_n < t_n \qquad \text{y} \qquad s[E_n] \subseteq [a_n, b_n].$$

Por ende, los conjuntos $V := \bigcup_{n=0}^{\infty} (b_{n+1}, a_n)$, $V_1 := V \times (-\infty, \frac{1}{2})$ y $V_2 := (-1, a_0) \times (\frac{1}{2}, \infty)$ cumplen que $V_1 \cup V_2 \in \tau_{\mathbb{R}^2}$ y $q^{-1}[\{0\} \cup V] = (V_1 \cup V_2) \cap Y$. En consecuencia, $\{0\} \cup V \in \tau_X(0)$.

Además, las inclusiones $s[\omega] \subseteq A \subseteq X \setminus \operatorname{ran}(t)$ implican que $s[\omega]$ y $\{0\} \cup V$ son ajenos. Nuevamente, $0 \notin \lim_Z s$.

Lo anterior nos permite concluir que $\lim_Z s \subseteq A$. Así A es secuencialmente cerrado en Z.

Con la intención de argumentar que A no es cerrado en Z, mostraremos que $0 \in \overline{A}$. Para esto, sea $V \in \tau_Z(0)$ y fijemos $U \in \tau_X(0)$ con $V = U \cap Z$. Entonces $U_2 := q^{-1}[U] \cap Y_2$ es un abierto en Y_2 que contiene al punto $(0, 1)$ y en consecuencia, existe $m < \omega$ tal que $t[\omega \setminus m] \times \{1\} \subseteq U_2$; luego, $(t_m, 1) \in U_2$ y así, $t_m = q(t_m, 1) \in U$.

De este modo, $U_1 := q^{-1}[U] \cap Y_1$, es un abierto en Y_1, que tiene a $(t_m, 0)$ como elemento. Por ende, existe $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $(a, 0) \in U_1 \setminus (t[\omega] \times \{0\})$. Se sigue que $a \notin \operatorname{ran}(t)$ y $a = q(a, 0) \in U$, es decir, $a \in U \setminus \operatorname{ran}(t) = (U \cap Z) \cap A = V \cap A$. □

En $\mathbb{R}^n$ la continuidad de funciones puede ser definida a través de sucesiones. Haciendo uso de esta idea surge el concepto de continuidad secuencial (ver definición 2.4), sin embargo, para espacios arbitrarios es falso que la continuidad secuencial sea equivalente a la continuidad tal y como se verifica a continuación.

Proposición 3.4. *Existen funciones secuencialmente continuas que no son continuas.*

Demostración. Consideremos al espacio linealmente ordenado $\omega_1 + 1$ y definamos $f : \omega_1 + 1 \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < \omega_1 \\ 1 & \text{si } x = \omega_1. \end{cases}$$

Probemos que f es secuencialmente continua. Sean $s \in {}^{\omega}X$ y $x \in \lim s$. Se tienen las siguientes posibilidades.

Caso 1: $x < \omega_1$. Como $[0, \omega_1)$ es un abierto que contiene a x, existe $n \in \omega$ tal que $s[\omega \setminus n] \subseteq [0, \omega_1)$; en consecuencia, $(f \circ s)[\omega \setminus n] = \{0\}$ y así, $f(x) = 0 \in \lim (f \circ s)$.

Caso 2: $x = \omega_1$. Hagamos $\alpha := \sup(s[\omega] \cap [0, \omega_1))$. Como $\alpha < \omega_1$, hay $m \in \omega$ de tal forma que $s[\omega \setminus m] \subseteq (\alpha, \omega_1]$. Consecuentemente, $s[\omega \setminus m] = \{\omega_1\}$ y esto, a su vez, nos da $(f \circ s)[\omega \setminus m] = \{1\}$. En conclusión, $f(x) = 1 \in \lim (f \circ s)$.

Por último observemos que el conjunto $f^{-1}\{0\} = [0, \omega_1)$ no es un subconjunto cerrado de $\omega_1 + 1$ (ver la prueba del lema 3.1). Por lo tanto $f : X \to \mathbb{R}$ es secuencialmente continua y no es continua. $\square$

Para los resultados subsecuentes se requerirá notación previa, la cual se muestra a continuación.

Definición 3.5. Para cualesquiera $n, m \in \omega$, definamos el siguiente subconjunto del producto cartesiano $\omega \times (\omega + 1)$ (ver figura 1)

$$V_n^m := \{n\} \times ((\omega + 1) \setminus m).$$

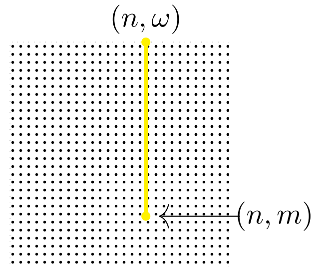

Figura 1. V_n^m es el conjunto de puntos sombreado de amarillo.

A continuación, haciendo uso de esta definición, construiremos un espacio topológico que resultará importante para los resultados subsecuentes.

Lema 3.6. *Sean $X := (\omega \times (\omega + 1)) \cup \{p\}$ y p el par ordenado (ω, ω). Para cualesquiera $n \in \omega$ y $f \in {}^{\omega}\omega$, definamos (ver figura 2)*

$$B(n, f) := \{p\} \cup \bigcup_{i=n}^{\infty} V_i^{f(i)}.$$

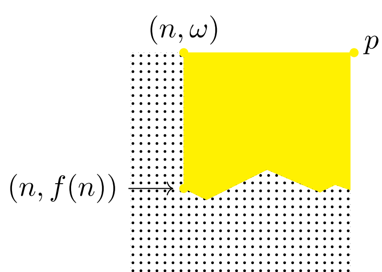

Figura 2. $B(n, f)$ es el conjunto de puntos sombreado de amarillo.

Entonces, la colección

$$\mathcal{B} := \{\{x\} : x \in \omega \times \omega\} \cup \{V_n^m : n, m \in \omega\} \cup \{B(n, f) : n \in \omega \text{ y } f \in {}^{\omega}\omega\},$$

es base para alguna topología en X. Al espacio resultante le llamaremos (en consonancia con el ejemplo 26, p. 54, de [9]) la **modificación de Arens-Fort** *y los elementos de $\mathcal{B}$ recibirán por nombre básicos canónicos.*

Demostración. Es claro que $X = B(0, \overline{0}) \in \mathcal{B}$, donde $\overline{0}$ es la función constante cero de ω en ω. Por lo tanto $X = \bigcup \mathcal{B}$.

Ahora sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$. Se tienen las siguientes posibilidades.

Caso 1: $x \in \omega \times \omega$. Entonces $\{x\} \in \mathcal{B}$ y $\{x\} \subseteq B_1 \cap B_2$.

Caso 2: $x \in \omega \times \{\omega\}$. En esta situación existe $n \in \omega$ tal que $x = (n, \omega)$. Esto implica que hay $m \in \omega$ con $x \in V_n^m \subseteq B_1 \cap B_2$.

Caso 3: $x = p$. En consecuencia existen $n_1, n_2 < \omega$ y $f_1, f_2 \in {}^\omega\omega$ tales que $B_1 = B(n_1, f_1)$ y $B_2 = B(n_2, f_2)$.

Por otro lado, observemos que si $n, m \in \omega$ y $f, g \in {}^\omega\omega$ son tales que $n \leqslant m$ y $f(k) \leqslant g(k)$, para cada $k < \omega$, por definición se tiene que $B(m, g) \subseteq B(n, f)$. De este modo, $x \in B(n_1 + n_2, f_1 + f_2) \subseteq B_1 \cap B_2$. $\square$

El espacio presentado previamente es secuencial pero no Fréchet, lo cual se verifica a continuación. Así, las propiedades de secuencialidad y Fréchet no son equivalentes.

Proposición 3.7. *Si X es la modificación de Arens-Fort (ver lema 3.6), entonces los siguientes enunciados son verdaderos.*

1. $\mathrm{os}(X) = 2$ *(así, por los teoremas 2.40 y 2.43, X es secuencial pero no de Fréchet).*

2. *Si $A := \omega \times \omega$ y $Y := A \cup \{p\}$, entonces $A_X^{(2)} \cap Y \neq A_Y^{(2)}$ (compárese con el lema 2.35).*

Demostración. En aras de simplificar nuestra notación, para cualesquiera $E \subseteq X$ y $i \in \{0, 1\}$ usaremos los símbolos $\overline{E}$ y $E^{(i)}$ para denotar a $\mathrm{cl}_X E$ y a $E_X^{(i)}$, respectivamente.

Afirmación 1: $p \in \overline{A} \setminus A^{(1)}$.

La pertenencia $p \in \overline{A}$ es consecuencia inmediata de que, para cualesquiera $n \in \omega$ y $f \in {}^\omega\omega$, tenemos la relación $(n, f(n)) \in B(n, f) \cap A$.

Ahora probemos que ninguna sucesión en A converge a p. Sea $s \in {}^\omega A$ y, para toda $k \in \omega$, definamos $C_k := \{k\} \times \omega$. Tenemos dos casos.

Caso 1: Existe $k \in \omega$ tal que $|\{n \in \omega : s_n \in C_k\}| = \omega$. En esta circunstancia, $B(k+1, \overline{0}) \in \tau_X(p)$ y, para cada $m \in \omega$, hay $n \in \omega \setminus m$ con $s_n \in C_k$, esto es, $s_n \notin B(k+1, \overline{0})$.

Caso 2: Para todo $k \in \omega$, $|\{n \in \omega : s_n \in C_k\}| < \omega$. Sea $k < \omega$, arbitrario. Observe que nuestra hipótesis aquí implica que $s^{-1}[C_k]$, la imagen inversa de C_k bajo la función s, es un conjunto finito. Ahora definamos $A_k := \{n < \omega : (k, n) \in s[\omega]\}$ y tomemos $n \in A_k$. Se sigue que hay $\ell(n) \in \omega$ con $s_{\ell(n)} = (k, n)$ y, por ende, tenemos dos cosas: primero, $\ell(n) \in s^{-1}[C_k]$ y, segundo, si $m \in A_k \setminus \{n\}$, entonces $\ell(m) \neq \ell(n)$.

Naturalmente, lo anterior se resume diciendo que, para cada $k < \omega$, hay una función inyectiva de A_k en $s^{-1}[C_k]$ y, por ende, A_k también es un conjunto finito. Empleemos esta información para definir $f : \omega \to \omega$ mediante $f(k) := \sup(A_k) + 1$, siempre que $k \in \omega$. Observe que si $k \in \omega$ y $n \in A_k$, entonces $n < f(k)$ y, consecuentemente, $(k, n) \notin V_k^{f(k)}$; en particular, $(k, n) \notin B(0, f)$.

Verifiquemos que $B(0, f) \cap s[\omega] = \emptyset$. Para esto, sea $\ell \in \omega$, arbitrario. En vista de que $s_\ell \in A = \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$, existe $k < \omega$ con $s_\ell \in C_k$, esto es, hay $n \in \omega$ con $s_\ell = (k, n)$. Naturalmente, $n \in A_k$ y, por lo dicho en el párrafo previo, $s_\ell \notin B(0, f)$.

Notemos que la afirmación 1 implica que $\operatorname{os}(X) \geqslant 2$ (ver la definición 2.39)

Afirmación 2: $\operatorname{os}(X) \leqslant 2$.

Sea $E \subseteq X$. A continuación argumentemos que $\overline{E} \subseteq E^{(2)}$ (esto aunado al lema 2.37 y al inciso (2) del lema 2.38 nos darían la desigualdad $\operatorname{os}(X) \leqslant 2$).

Dado $x \in \overline{E}$, tenemos tres posibilidades.

Caso 1: $x \in \omega \times \omega$. En esta situación resulta que $\{x\} \in \tau_X$. Entonces el hecho de que $x \in \overline{E}$ implica que $x \in E$ y por el inciso (1) del lema 2.32, $x \in E^{(2)}$.

Antes de analizar los casos restantes definamos, para cualesquiera $j \in \{0, 1\}$ y $\ell < \omega$, los conjuntos

$$I_j := \{n < \omega : (n, \omega) \in E^{(j)}\} \qquad \text{y} \qquad E_\ell := \{i < \omega : (\ell, i) \in E\}.$$

Afirmación 2.1: Si $|E_\ell| = \omega$, entonces $\ell \in I_1$.

Por la infinitud de E_ℓ existe una función $f : \omega \to E_\ell$ estrictamente creciente y suprayectiva. Ahora, definamos $s \in {}^\omega E$ como $s_n := (\ell, f(n))$ para cada $n < \omega$ y argumentemos que $(\ell, \omega) \in \lim s$.

Sea U un básico canónico de X con $(\ell, \omega) \in U$ y fijemos $m < \omega$ con $V_\ell^m \subseteq U$. Por ser f estrictamente creciente, $f(m) \geqslant m$ y en consecuencia, $s[\omega \setminus f(m)] \subseteq V_\ell^m \subseteq U$.

Emplearemos la afirmación 2.1 para los casos restantes de nuestra prueba.

Caso 2: Existe $k < \omega$ tal que $x = (k, \omega)$. En primer lugar, si $x \in E$, por el inciso (1) del lema 2.32, $x \in E^{(2)}$. Para el resto del argumento demos por hecho que $x \notin E$.

Ahora, mostremos que E_k no está acotado (y en consecuencia, $|E_k| = \omega$). En efecto, si $n < \omega$, la condición $V_k^{n+1} \in \tau_X(x)$ implica que $V_k^{n+1} \cap E \neq \emptyset$, es decir, hay $i \in \omega \setminus (n+1)$ que satisface $(k, i) \in E$.

Luego, la afirmación 2.1 nos da $x \in E^{(1)} \subseteq E^{(2)}$.

Caso 3: $x = p$. Dada la inclusión $E \subseteq E^{(2)}$ (lema 2.32), daremos por hecho que $p \notin E$.

En primera instancia, supongamos que $|I_0| = \omega$. Así, existe una función $f : \omega \to I_0$ estrictamente creciente y suprayectiva. Consideremos $s \in {}^\omega E$ dada por $s_n := (f(n), \omega)$ (recuerde que, por definición, $E^{(0)} = E$) y argumentemos que $p \in \operatorname{lím} s$. Dados $m < \omega$ y $g \in {}^\omega\omega$, el hecho de que f es estrictamente creciente nos da $f(m) \geqslant m$ y en consecuencia, $s[\omega \setminus f(m)] \subseteq B(m, g)$.

Para finalizar el presente caso, demos por hecho que $|I_0| < \omega$ y fijemos $k < \omega$ con $I_0 \subseteq k$. En busca de una contradicción supongamos que $|I_1| < \omega$ y definamos $m := \sup(I_1) + 1$. Para cada $\ell \in \omega \setminus m$, la afirmación 2.1 nos da $|E_\ell| < \omega$ y en consecuencia, existe $f : \omega \to \omega$ tal que $E_\ell \subseteq f(\ell)$, siempre que $\ell \in \omega \setminus m$. Mostremos que $B(k, f) \cap E = \emptyset$ (y, por ende, que $p \notin \overline{E}$, la contradicción buscada).

Sea $y \in B(k, f)$. Si $y = p$, es inmediato que $y \notin E$. Por otra parte, si existe $n \in \omega \setminus k$ con $y = (n, \omega)$, tenemos que $n \notin I_0$; equivalentemente, $y \notin E$. Finalmente, si hay $n \in \omega \setminus k$ y $i \in \omega \setminus f(n)$ tales que $y = (n, i)$, se sigue que $i \notin E_n$, es decir, $y \notin E$.

Así, $|I_1| = \omega$ y consecuentemente existe una función $f : \omega \to I_1$ estrictamente creciente y suprayectiva. Definamos $s : \omega \to E^{(1)}$ como $s_n := (f(n), \omega)$ para toda $n < \omega$ y argumentemos que $p \in \operatorname{lím} s$. Sean $m < \omega$ y $g \in {}^\omega\omega$ arbitrarios. Nuestra elección de f nos da $f(m) \geqslant m$ y en consecuencia, $s[\omega \setminus f(m)] \subseteq U$. Lo anterior concluye la prueba del inciso (1). A continuación mostraremos (2).

Según la afirmación 1, para toda $s \in {}^\omega A$ se tiene que $p \notin \operatorname{lím}_X s$, lo cual, aunado al lema 1.7, implica que $A_Y^{(1)} = A$. Ahora invoquemos el inciso (3) del lema 2.32 para obtener las igualdades, $A_Y^{(2)} = (A_Y^{(1)})_Y^{(1)} = A_Y^{(1)} = A$.

Por otra parte, el inciso (1) de la presente proposición garantiza que $A_X^{(2)} = \mathrm{cl}_X\, A$ y en la afirmación 1 se mostró que $p \in \mathrm{cl}_X\, A = A_X^{(2)}$. Por lo tanto $p \in (A_X^{(2)} \cap Y) \setminus A_Y^{(2)}$. $\square$

Supongamos que X es un subespacio denso de $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Z} \subseteq X$ (aquí, $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros). Entonces, $\mathcal{D} := \{\{x\} : x \in X \setminus \mathbb{Z}\} \cup \{\mathbb{Z}\}$ es una partición de X, así que podemos equipar a esta colección con la topología generada por la proyección natural $q : X \to \mathcal{D}$ (ver sección 1.4). En lo que sigue usaremos el símbolo $X/\mathbb{Z}$ para referirnos al espacio topológico resultante. Además, emplearemos en varias ocasiones que, si $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $X/\mathbb{Z}$, entonces $q^{-1}[\mathcal{A}] = \bigcup \mathcal{A}$.

Proposición 3.8. *Hay espacios de Fréchet que no son primero numerables.*

Demostración. Mostraremos que $X/\mathbb{Z}$ no es primero numerable. Específicamente, verificaremos que ninguna colección $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \tau_{X/\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ es base local para $X/\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$. Con esto en mente, fijemos $n \in \mathbb{N}$ y observemos que $\mathbb{Z} = q^{-1}\{\mathbb{Z}\} \subseteq q^{-1}[\mathcal{A}_n] = \bigcup \mathcal{A}_n$ y además, como $X/\mathbb{Z}$ tiene la topología cociente dada por q resulta que $q^{-1}[\mathcal{A}_n] = \bigcup \mathcal{A}_n \in \tau_X$; luego, podemos elegir $x_n \in X$ con $x_n \in (n, n+1) \cap \bigcup \mathcal{A}_n$. Claramente, $U := \mathbb{R} \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ que satisface $\mathbb{Z} \subseteq U = q^{-1}[q[U]]$ y, en consecuencia, $q[U] \in \tau_{X/\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$. Sin embargo, dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $q(x_n) \in \mathcal{A}_n \setminus q[U]$.

Ahora argumentemos que $X/\mathbb{Z}$ es de Fréchet. Para esto, sean $\mathcal{A} \subseteq X/\mathbb{Z}$ y $x \in \overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$ arbitrarios. Analizaremos dos casos.

Primero, supongamos que $x \neq \mathbb{Z}$. En vista del corolario 2.21, solo debemos probar que hay una base local numerable para $X/\mathbb{Z}$ en x. Con este objetivo en mente, nuestra hipótesis garantiza que hay $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ con $x = \{t\}$. Entonces, fijemos $\mathcal{B}$, una base numerable para $\mathbb{R}$ en t, de tal modo que $\bigcup \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Esto tiene como consecuencia que, para cada $B \in \mathcal{B}$, $q^{-1}[q[B]] = B$; en consecuencia, $\{q[B] : B \in \mathcal{B}\}$ es un subconjunto numerable de $\tau_{X/\mathbb{Z}}(x)$. Para finalizar este caso, sea $\mathcal{U} \in \tau_{X/\mathbb{Z}}(x)$ arbitrario. Como $\bigcup \mathcal{U} \in \tau_{\mathbb{R}}(t)$, existe $B \in \mathcal{B}$ con $B \subseteq \bigcup \mathcal{U} = q^{-1}[\mathcal{U}]$ y, por ende, $q[B] \subseteq \mathcal{U}$.

Únicamente resta mostrar que si $\mathbb{Z} \in \overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$, entonces hay una sucesión en $\mathcal{A}$ que converge a $\mathbb{Z}$.

Empecemos por demostrar que $\mathbb{Z} \cap \overline{\bigcup \mathcal{A}} \neq \emptyset$. Nuestro argumento será por contradicción: hagamos $U := \mathbb{R} \setminus \overline{\bigcup \mathcal{A}}$ y supongamos que $\mathbb{Z} \subseteq U$. Entonces, $\mathbb{Z} \in q[U]$ y $q^{-1}[q[U]] = U$, así que $q[U] \in \tau_{X/\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$. Por ende, debe existir $a \in \mathcal{A} \cap q[U]$. Como $\mathbb{Z} \notin \mathcal{A}$, hay $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ con $a = \{t\}$ y, en particular, $t \in \bigcup \mathcal{A}$. Luego, $t \notin U$ y en vista de que $t \notin \mathbb{Z}$, deducimos que $a \notin q[U]$; el absurdo deseado.

Fijemos $m \in \mathbb{Z} \cap \overline{\bigcup \mathcal{A}}$. El que $\mathbb{R}$ sea primero numerable implica que hay $s : \omega \to \bigcup \mathcal{A}$ con $m \in \lim s$. Por otro lado, la igualdad $\bigcup \mathcal{A} = q^{-1}[\mathcal{A}]$ garantiza que $q \circ s$ es una sucesión en $\mathcal{A}$. Finalmente, el lema 2.5 nos da $\mathbb{Z} = q(m) \in \lim (q \circ s)$. □

Resulta que las propiedades de Fréchet y secuencialidad no se preservan bajo la topología producto tal y como se muestra a continuación.

Teorema 3.9. *Existen dos espacios Fréchet cuyo producto no es secuencial. En particular, ni la secuencialidad ni la propiedad de Fréchet son productivas.*

Demostración. Convengamos en usar paréntesis angulados para representar parejas ordenadas, esto es, $\langle x, y \rangle$ denotará al par cuya primera entrada es x y que tiene a y como segunda coordenada. Además, cuando a y b sean números reales con $a < b$, el símbolo (a, b) será el intervalo con extremos a y b.

Equipemos a $\mathbb{Q}$ con la topología que hereda de $\mathbb{R}$ y establezcamos notación que emplearemos en nuestro argumento: $Y := \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $q : \mathbb{Q} \to Y$ será la proyección natural, $X := \mathbb{Q} \times Y$ y la función $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to X$ estará dada por $f(x, y) := \langle x, q(y) \rangle$. Dado que $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, del teorema 3.8 se deduce que Y es de Fréchet.

Con la idea en mente de hallar un subconjunto de X que sea secuencialmente cerrado, pero no cerrado, definamos, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $v_n := \dfrac{\sqrt{2}}{n^2 + 1}$ y F_n como el cerrado euclideano de la figura 3. Además U_n denotará el interior euclideano de F_n. Entonces, el hacer $U := (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n$ nos da un abierto en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

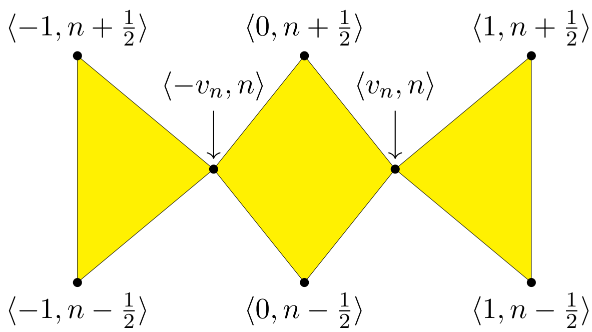

Figura 3.

Observe que la función de ω en $\mathbb{R}$ dada por $n \mapsto v_n$ es una sucesión de números irracionales que converge a 0 en el espacio euclideano $\mathbb{R}$.

Finalmente, sean $A := f[U]$ y $B := X \setminus A$. Dado que X es el producto de dos espacios de Fréchet, únicamente tenemos que comprobar que B es un subconjunto secuencialmente cerrado de X que no es cerrado.

Como $\langle 0, 0\rangle \in U_0$, deducimos que $f(0,0) = \langle 0, \mathbb{Z}\rangle \in A$.

Afirmación 1. $\langle 0, \mathbb{Z}\rangle \notin \operatorname{int}_X A$.

Sean $V \in \tau_{\mathbb{Q}}(0)$ y $W \in \tau_Y(\mathbb{Z})$, arbitrarios. Argumentemos que $V \times W \nsubseteq A$.

Primeramente, fijemos $V^+, W^+ \in \tau_{\mathbb{R}}$ de modo que $V = V^+ \cap \mathbb{Q}$ y $q^{-1}[W] = W^+ \cap \mathbb{Q}$. La condición $0 \in V^+$ nos da $k \in \omega$ con $v_k \in V^+$. En vista de que $\mathbb{Z} \in W$, obtenemos las relaciones $k \in \mathbb{Z} \subseteq q^{-1}[W]$ y en consecuencia, $V^+ \times W^+$ es un abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que tiene como elemento a $\langle v_k, k\rangle$.

Observemos a continuación que el hacer $G := ((0,1) \times (k, k+\frac{1}{2})) \setminus F_k$ nos garantiza que $G \cap (V^+ \times W^+)$ es un abierto no vacío en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Fijemos, entonces, $\langle a, b\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, un punto en esta intersección. De la pertenencia $\langle a, b\rangle \in V \times q^{-1}[W]$ se desprende que $f(a,b) \in V \times W$. Para terminar, verifiquemos que $f(a,b) \notin A$.

Nuestra elección de G produce $\langle a, b\rangle \notin U$ y $b \notin \mathbb{Z}$. Por otro lado, si $\langle c, d\rangle$ es un elemento de $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ con $f(c,d) = f(a,b)$, entonces, por definición de f, se sigue que $c = a$ y $q(d) = q(b)$; de esta última igualdad deducimos que $d \in q(d) = \{b\}$, es decir, $d = b$. En resumen, $f(a,b)$ no es un elemento de $f[U]$, tal y como se requería.

Lo anterior prueba que A no es abierto en X y en consecuencia, B no es cerrado.

Con la intención de mostrar que B es secuencialmente cerrado, fijemos $t \in {}^{\omega}B$. Existen

$t^0 \in {}^{\omega}\mathbb{Q}$ y $t^1 \in {}^{\omega}Y$ tales que $t_n = \langle t_n^0, t_n^1 \rangle$ para todo $n < \omega$. En busca de una contradicción supongamos que existe $z = \langle x, y \rangle \in \lim t \cap A$. Note que la continuidad de las proyecciones correspondientes nos da $x = \lim t^0$ y $y \in \lim t^1$.

Consideremos dos posibilidades.

Caso 1: $y \neq \mathbb{Z}$.

En esta situación, hay $b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ que satisface $y = \{b\}$. Con la idea en mente de corroborar que $\langle x, b \rangle \in U$, usemos la hipótesis $z \in A$ para hallar $\langle c, d \rangle \in U$ con $f(c, d) = z$. Luego, $c = x$ y $d \in q(d) = \{b\}$, es decir, $\langle x, b \rangle = \langle c, d \rangle \in U$.

Como U es abierto en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, existen $V, W \in \tau_{\mathbb{Q}}$ tales que $\langle x, b \rangle \in V \times W \subseteq U$ y $W \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Consecuentemente, $q[W] \in \tau_Y$ y así, $f[V \times W] = V \times q[W] \in \tau_X(z)$. Naturalmente, esto nos lleva a que hay $n < \omega$ tal que $t[\omega \setminus n] \subseteq f[V \times W] \subseteq f[U] = A$, una evidente contradicción a la igualdad $A \cap B = \emptyset$.

Caso 2: $y = \mathbb{Z}$.

Definamos $H := \{n < \omega : t_n^1 = \mathbb{Z}\}$ y comencemos por suponer que $|H| = \omega$.

Como $\langle x, \mathbb{Z} \rangle = z \in A$, existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $\langle x, b \rangle \in U$ y por ende es posible hallar $V, W \in \tau_{\mathbb{Q}}$ con $\langle x, b \rangle \in V \times W \subseteq U$. Además, como $x = \lim t^0$, la infinitud de H nos garantiza que existe $n \in \omega$ tal que $t_n^0 \in V$ y $t_n^1 = \mathbb{Z}$; luego, $\langle t_n^0, b \rangle \in V \times W$ y consecuentemente $t_n = \langle t_n^0, t_n^1 \rangle = \langle t_n^0, \mathbb{Z} \rangle = f(t_n^0, b) \in f[V \times W] \subseteq f[U] = A$, lo cual es imposible.

Entonces, supongamos que $|H| < \omega$.

Afirmación 2. Existe una sucesión u en $\mathbb{Q}$ que converge a un número entero y de tal modo que $q \circ u$ es una subsucesión de t^1.

Por la finitud de H hay $m < \omega$ tal que $t^1[\omega \setminus m] \cap \{\mathbb{Z}\} = \emptyset$. Entonces definamos $\bar{t} : \omega \to Y \setminus \{\mathbb{Z}\}$ como $\bar{t}_n = t^1(n + m)$ para todo $n < \omega$. Observemos dos cosas: primero, que la condición $\mathbb{Z} \in \lim t^1$ implica que $\bar{t}$ converge a $\mathbb{Z}$ y, segundo, que existe $a : \omega \to \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ con $\bar{t}_n = \{a_n\}$ para cada $n < \omega$.

Con esto en mente, para cada $k \in \mathbb{Z}$ definamos $E_k := \{n \in \omega : k < a_n < k + 1\}$. Argumentemos que hay $k \in \mathbb{Z}$ tal que E_k es infinito.

En busca de una contradicción, supongamos que $|E_k| < \omega$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{Z}$ existen $b_k, c_k \in \mathbb{Q}$ con la propiedad de que $k < c_k < a_n < b_k < k + 1$, siempre que $n \in E_k$. Así, definamos $V := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (b_k, c_{k+1}) \cap \mathbb{Q}$. Resulta que $q[V]$ es un abierto en Y que tiene a $\mathbb{Z}$ como elemento y es ajeno con $\bar{t}[\omega]$, una contradicción al hecho de que $\mathbb{Z}$ es un límite de $\bar{t}$. .

Por lo anterior, hay $k \in \mathbb{Z}$ tal que E_k es infinito y en consecuencia existe una función inyectiva $\ell_0 : \omega \to E_k$. Así, $a \circ \ell_0$ es una sucesión en el compacto $[k, k+1]$ y por ende podemos fijar una función inyectiva $\ell_1 : \omega \to \omega$ de modo que $a \circ \ell_0 \circ \ell_1$ sea una sucesión convergente en $[k, k+1]$.

Hagamos $u := a \circ \ell_0 \circ \ell_1$. En vista de la igualdad $q \circ a = \bar{t}$, deducimos que $q \circ u$ es una subsucesión de t^1. Denotemos por r al límite de u y, en busca de un absurdo, supongamos que $r \notin \{k, k+1\}$. Fijemos $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $k < r_1 < r < r_2 < k+1$. De esta manera, el poner $F := [r_1, r_2] \cap \mathbb{Q}$, nos da $q^{-1}[Y \setminus q[F]] = ((-\infty, r_1) \cup (r_2, \infty)) \cap \mathbb{Q}$ y en consecuencia, $q[F]$ es cerrado en Y. Por otra parte, existe $n < \omega$ que satisface $u[\omega \setminus n] \subseteq (r_1, r_2)$ y por ende $(q \circ u)[\omega \setminus n] \subseteq q[F]$. A partir de lo expuesto en la sección 1.4 se deduce que q es continua y de este modo, $\mathbb{Z} \in \lim (q \circ u) \subseteq q[F]$, lo que es imposible. Por lo tanto $r \in \mathbb{Z}$.

Según la afirmación 2, existen $u \in {}^{\omega}\mathbb{Q}$ y $\ell : \omega \to \omega$ de manera que u converge a algún entero r, ℓ es inyectiva y $q \circ u = t^1 \circ \ell$. Entonces, $\langle t^0 \circ \ell, u \rangle$ es una sucesión en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ que converge a $\langle x, r \rangle$. A partir de la hipótesis $z \in A$ deducimos la existencia de un punto $\langle c, d \rangle \in U$ con $f(c, d) = z$, es decir, $c = x$ y $q(d) = \mathbb{Z}$; así, $d \in \mathbb{Z}$ y $\langle x, d \rangle \in U$. Luego, un vistazo a nuestra definición de U, en conjunción con la relación $x \notin \{(-1)^i v_m : i < 2 \ \wedge \ m < \omega\}$, nos revela que, de hecho, $\{x\} \times \mathbb{Z} \subseteq U$ y, en especial, $\langle x, r \rangle \in U$.

De los dos párrafos anteriores se desprende que existe $n < \omega$ con $\langle (t^0 \circ \ell)(n), u(n) \rangle \in U$ y, consecuentemente, $f((t^0 \circ \ell)(n), u(n)) \in A$, lo que contradice el hecho de que

$$f((t^0 \circ \ell)(n), u(n)) = \langle (t^0 \circ \ell)(n), (t^1 \circ \ell)(n) \rangle = (t \circ \ell)(n) \in B.$$

□

3.1 Ínfimos y supremos

Para los resultados presentados en esta sección será necesaria teoría relacionada con retículas. Hagamos un repaso.

Dado un conjunto X, definimos $\Sigma(X)$ como la colección conformada por todas las topologías en X. Por otra parte, si $\tau, \sigma \in \Sigma(X)$ decimos que τ es *más fina* que σ si $\sigma \subseteq \tau$, y esta relación será denotada por $\sigma \leqslant \tau$. Naturalmente, esto hace de $\Sigma(X)$ un conjunto parcialmente ordenado. Más aún, argumentos rutinarios pueden ser usados para verificar que si $\sigma, \tau \in \Sigma(X)$, entonces $\sigma \cap \tau$ es una topología en X que resulta ser más fina que cualquier cota inferior de $\{\sigma, \tau\}$ en $\Sigma(X)$, esto es, $\sigma \cap \tau$ es el ínfimo de $\{\sigma, \tau\}$ (ver [7, §2.1]). Por otro lado, si denotamos por $\sigma \vee \tau$ a la topología que tiene por base a la colección

$$\{U \cap V : U \in \sigma \ \wedge \ V \in \tau\},$$

entonces $\sigma \vee \tau$ es el supremo de $\{\sigma, \tau\}$. En resumen, $\Sigma(X)$ es una retícula (ver [7, §2.3]).

Para lo que sigue, convengamos en decir que una topología σ es Fréchet (respectivamente, secuencial) si el espacio topológico correspondiente es Fréchet (respectivamente, secuencial).

A continuación verifiquemos que la propiedad de Fréchet no se preserva bajo ínfimos.

Teorema 3.10. *El ínfimo de dos topologías de Fréchet no necesariamente es de Fréchet.*

Demostración. Sea $X := (\omega \times (\omega + 1)) \cup \{p\}$, con $p = (\omega, \omega)$. Para todo $n < \omega$, definamos $H_n := ((\omega \setminus n) \times \{\omega\}) \cup \{p\}$. La figura 4 ilustra cómo se ve el subconjunto H_n de X.

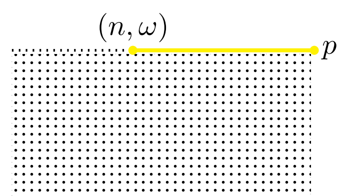

Figura 4.

En base a lo anterior y a la definición 3.5, consideremos las colecciones

$$\mathcal{C} := \{\{x\} : x \in X \setminus \{p\}\} \cup \{H_n : n < \omega\} \text{ y}$$
$$\mathcal{D} := \{\{x\} : x \in X \setminus (\omega \times \{\omega\})\} \cup \{V_n^m : n, m \in \omega\}.$$

Observemos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son colecciones numerables que resultan ser bases para topologías en X, a las cuales llamaremos σ y η, respectivamente. Así, (X, σ) y (X, η) son primero numerables y por la proposición 2.20, son de Fréchet.

Por otra parte, sea (X,τ) la modificación de Arens-Fort (ver lema 3.6) y verifiquemos que $\tau = \sigma \cap \eta$ (observe que, en vista de la proposición 3.7, esta igualdad finaliza la prueba de nuestro teorema). Con la intención de mostrar que $\tau \leqslant \sigma \cap \eta$ fijemos B, un básico canónico de τ. Tenemos tres posibilidades.

Caso 1: Existe $x \in \omega \times \omega$ que satisface $B = \{x\}$. Es inmediato que $B \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ y en consecuencia, $B \in \sigma \cap \eta$.

Caso 2: Hay $n, m \in \omega$ tales que $B = V_n^m$. Por definición $p \notin V_n^m$, lo cual implica que $V_n^m \in \sigma$.

Caso 3: $B = B(n, f)$ para ciertos $n \in \omega$ y $f \in {}^{\omega}\omega$. En vista de que $\{p\}$ y $V_i^{f(i)}$ son elementos de $\mathcal{D}$ para cada $i \in \omega \setminus n$, deducimos que $B \in \eta$. Además, si $x \in B \setminus \{p\}$, resulta que $\{x\}$ es un elemento de σ con $x \in \{x\} \subseteq B$. Por último observemos que $p \in H_n \subseteq B$ y, en consecuencia, $B \in \sigma$.

Ahora, mostremos que $\sigma \cap \eta \leqslant \tau$. Sean $U \in \sigma \cap \eta$ y $x \in U$. En primera instancia, si $x \in \omega \times \omega$, es claro que $\{x\} \in \tau$ y $x \in \{x\} \subseteq U$; entonces, para el resto de la prueba supongamos que $x \notin \omega \times \omega$. Tenemos dos casos.

Caso 1: $x = (n, \omega)$ para algún $n < \omega$. Como $U \in \eta$, existe $m < \omega$ tal que $x \in V_n^m \subseteq U$.

Caso 2: $x = p$. El hecho de que $U \in \sigma$ implica que hay $m < \omega$ con la propiedad de que $H_m \subseteq U$. Luego, para cada $k \in \omega \setminus m$, las relaciones $(k, \omega) \in H_m \subseteq U \in \eta$ implican que existe $f(k) \in \omega$ con $(k, \omega) \in V_k^{f(k)} \subseteq U$. Definamos $f(k) = 0$, siempre que $k < m$, para obtener $f \in {}^{\omega}\omega$ de modo que $p \in B(m, f) \subseteq U$. $\square$

A continuación argumentaremos que la propiedad de Fréchet tampoco se preserva bajo supremos, en otras palabras, el supremo de dos topologías Fréchet no es necesariamente Fréchet. Esto también ocurre para la secuencialidad, es decir, en general el supremo de dos topologías secuenciales no es secuencial. Para esto requeriremos de un concepto nuevo.

Definición 3.11. Si $\tau \in \Sigma(X)$, definimos la *modificación secuencial de* τ como

$$^{\#}\tau := \{X \setminus A : A \text{ es secuencialmente cerrado en } (X,\tau)\}.$$

Es una prueba rutinaria (y por ende la omitiremos) mostrar que $^{\#}\tau \in \Sigma(X)$. Note que, por definición, (X,τ) es secuencial si y solo si $\tau = {}^{\#}\tau$. Además, como todo cerrado en (X,τ) es secuencialmente cerrado (ver lema 2.2), se sigue que que $\tau \leqslant {}^{\#}\tau$. Por todo lo anterior, (X,τ) es secuencial si y solo si ${}^{\#}\tau \leqslant \tau$.

Teorema 3.12. *En general, el supremo de dos topologías de Fréchet (secuenciales) no es de Fréchet (secuencial).*

Demostración. Sea $X := (\omega \times \omega) \cup \{p\}$, con $p = (\omega, \omega)$. Lo que haremos a continuación será definir dos topologías en X que sean de Fréchet (así, aplicando el lema 2.19 resultarán ser secuenciales) y cuyo supremo no sea secuencial.

Empecemos por definir, para cualesquiera $n < \omega$ y $f \in {}^{\omega}\omega$,

$$M_n := ((\omega \setminus n) \times \omega) \cup \{p\} \qquad \text{y} \qquad N_f := \textstyle\bigcup_{k<\omega}(\{k\} \times (\omega \setminus f(k))) \cup \{p\}.$$

Luego, argumentos rutinarios muestran que las colecciones

$$\mathcal{A} := \{\{x\} : x \in X \setminus \{p\}\} \cup \{M_n : n < \omega\} \text{ y}$$
$$\mathcal{B} := \{\{x\} : x \in X \setminus \{p\}\} \cup \{N_f : f \in {}^{\omega}\omega\}.$$

son bases para topologías en X, a las que denotaremos por τ y σ, respectivamente. Además, el hecho de que $\mathcal{A}$ sea numerable nos garantiza que (X,τ) es primero numerable y, consecuentemente (ver la proposición 2.20), (X,τ) es de Fréchet.

Afirmación: (X,σ) es de Fréchet.

En primera instancia, para todo $A \subseteq X$ denotemos por $\overline{A}$ a la cerradura de A en (X,σ). Sean $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A} \setminus A$.

En vista de que $\{y\} \in \sigma$ para todo $y \in X \setminus \{p\}$, deducimos que la condición $x \in \overline{A} \setminus A$ implica que $x = p$. Con esto en mente, para cada $\ell < \omega$ definamos $E_\ell := \{n < \omega : (\ell, n) \in A\}$ y verifiquemos que existe $k < \omega$ con la propiedad de que $|E_k| = \omega$.

En busca de una contradicción, supongamos que para toda $\ell < \omega$ se satisface que $|E_\ell| < \omega$. Así, existe $f \in {}^{\omega}\omega$ tal que $E_\ell \subseteq f(\ell)$ para cada $\ell < \omega$; en consecuencia, N_f es una vecindad de p en (X,σ) que es ajena con A, un absurdo.

Por lo tanto, hay $k < \omega$ con la propiedad de que $|E_k| = \omega$ y en consecuencia, existe una función estrictamente creciente $g : \omega \to E_k$. Definamos $s \in {}^{\omega}A$ como $s_n := (k, g(n))$, para todo $n < \omega$. Mostremos, para finalizar la prueba de nuestra afirmación, que $p \in \operatorname{lím}_{\sigma} s$.

Sea $h \in {}^{\omega}\omega$. Como $h(k) < \omega$ y g es estrictamente creciente, existe $m < \omega$ de modo que $h(k) \leqslant g(m)$. Con la idea en mente de probar la inclusión $s[\omega \setminus m] \subseteq N_h$, fijemos $i \in \omega \setminus m$. Ya que $m \leqslant i$, al ser g estrictamente creciente, se tienen las desigualdades $h(k) \leqslant g(m) \leqslant g(i)$ y por ende, $s_i \in \{k\} \times (\omega \setminus h(k)) \subseteq N_h$.

Argumentemos ahora que $\eta := \tau \vee \sigma$ no es secuencial. Empecemos por notar que para cualesquiera $n < \omega$ y $f \in {}^{\omega}\omega$, $(n, f(n))$ es un elemento de $M_n \cap N_f$ distinto de p, es decir, $M_n \cap N_f \neq \{p\}$. En vista de que la colección $\{M_n \cap N_f : n < \omega \text{ y } f \in {}^{\omega}\omega\}$ es una base para (X, η) en p, esto nos garantiza que p no es un punto aislado de (X, η).

Finalmente verifiquemos que p es un punto aislado de $(X, {}^{\#}\eta)$ para concluir que $\eta \neq {}^{\#}\eta$, es decir, que (X, η) no es secuencial. Comprobaremos que, en (X, η), ninguna sucesión en $\omega \times \omega$ converge a p y consecuentemente, $X \setminus \{p\}$ es secuencialmente cerrado.

En la afirmación 1 de la proposición 3.7 se probó que ninguna sucesión en $\omega \times \omega$ converge a p en la modificación de Arens-Fort; en otras palabras, para cualquier $s : \omega \to \omega \times \omega$ existen $n < \omega$ y $f \in {}^{\omega}\omega$ con la propiedad de que para cada $m < \omega$ se tiene que $s[\omega \setminus m] \nsubseteq B(n, f)$ (ver lema 3.6). Esto, aunado a la igualdad $B(n, f) \cap X = M_n \cap N_f$, nos garantiza que s no converge a p en (X, η), tal y como queríamos. $\square$

Finalizamos esta sección mostrando que a diferencia de la propiedad de Fréchet (ver teorema 3.10) la secuencialidad sí se preserva bajo ínfimos, es decir, el ínfimo de una familia arbitraria de topologías secuenciales es secuencial. Este resultado requerirá de un lema previo.

Lema 3.13. *Si $\tau, \sigma \in \Sigma(X)$ son tales que $\sigma \leqslant \tau$, entonces ${}^{\#}\sigma \leqslant {}^{\#}\tau$.*

Demostración. Sea $U \in {}^{\#}\sigma$. A continuación argumentaremos que $X \setminus U$ es secuencialmente cerrado en (X, τ) y en consecuencia, $U \in {}^{\#}\tau$.

Fijemos $s : \omega \to X \setminus U$ y $x \in \operatorname{lím}_{\tau} s$. Dado que τ es más fina que σ, $x \in \operatorname{lím}_{\sigma} s$ y por ser $X \setminus U$ secuencialmente cerrado en (X, σ), deducimos que $x \in X \setminus U$. $\square$

Antes del presentar el último resultado de este capítulo observemos que si $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de topologías en X, entonces argumentos rutinarios muestran que $\bigcap \mathcal{F}$ es una topología en X que resulta ser el ínfimo de $\mathcal{F}$ en $\Sigma(X)$. Por otro lado, el ínfimo de $\emptyset$

en $\Sigma(X)$ es la topología discreta en X.

Teorema 3.14. *El ínfimo de una familia arbitraria de topologías secuenciales es secuencial.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} \subseteq \Sigma(X)$ una familia de topologías secuenciales y denotemos por σ al ínfimo de esta colección. Entonces, para cada $\tau \in \mathcal{F}$ se satisface $\sigma \leqslant \tau$ y por el lema 3.13, ${}^{\#}\sigma \leqslant {}^{\#}\tau$; por otra parte, al ser (X, τ) secuencial, resulta que $\tau = {}^{\#}\tau$. En resumen, ${}^{\#}\sigma$ es una cota inferior de $\mathcal{F}$ en $\Sigma(X)$ y, consecuentemente, ${}^{\#}\sigma \leqslant \sigma$. $\square$

CAPÍTULO 4: HIPERESPACIOS

En 1905 Dimitrie Pompeiu introdujo en su tesis doctoral la noción de distancia entre subconjuntos compactos del plano euclidiano (ver [8]). Posteriormente, en 1914, siguiendo esta idea Felix Hausdorff define una métrica sobre la colección de los subconjuntos compactos no vacíos de un espacio métrico arbitrario. Actualmente esta métrica es conocida como la métrica de Hausdorff. Esta definición dio origen al estudio de espacios cuyos elementos son conjuntos, los llamados hiperespacios.

Existen diversas topologías que pueden ser definidas sobre un hiperespacio, una de estas topologías que será empleada a lo largo de este capítulo es la topología de Fell, que fue definida por James Michael Gardner Fell en el año de 1962 (ver [4]) para el desarrollo de diversos resultados en C^*-álgebras.

En este capítulo se desarrollarán diversos resultados referentes a las propiedades de secuencialidad y Fréchet en hiperespacios, para lo cual se requerirá teoría previa.

En primer lugar, X siempre será pensando como un espacio topológico. Con esto en mente, $K(X)$ será la familia conformada por todos los subconjuntos compactos de X y $CL^*(X)$ será la colección de todos los subconjutos cerrados de X, es decir,

$$CL^*(X) := \{C \subseteq X : X \setminus C \in \tau_X\}.$$

Mientras que $CL(X)$ representará la colección de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X; dicho de otro forma,

$$CL(X) := CL^*(X) \setminus \{\emptyset\}.$$

En las ocasiones en que sea claro quién es el espacio X, simplemente escribiremos CL^* y CL, dando por entendido que nos referimos a $CL^*(X)$ y $CL(X)$, respectivamente.

Por otra parte, si A es un subconjunto de X, definimos a los conjuntos A^- y A^+ como

$$A^- := \{C \in CL^*(X) : C \cap A \neq \emptyset\} \qquad \text{y} \qquad A^+ := \{C \in CL^*(X) : C \subseteq A\}.$$

Observemos que para todo $A \subseteq X$ se tiene que $\emptyset \notin A^-$, es decir, $A^- \subseteq CL(X)$.

La prueba del resultado siguiente es un cálculo rutinario y por este motivo la omitiremos.

Lema 4.1. *Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de subconjuntos del espacio X, entonces*

$$\left(\bigcap \mathcal{A}\right)^+ = \bigcap \{A^+ : A \in \mathcal{A}\}.$$

Dicho esto, $CL^*_-(X)$ es el espacio topológico que resulta de dotar a $CL^*(X)$ con la topología que tiene por subbase a

$$\{U^- : U \in \tau_X\} \cup \{CL^*(X)\}.$$

Además, emplearemos el símbolo $CL_-(X)$ para referirnos al espacio que se obtiene de equipar a $CL(X)$ con la topología que hereda de $CL^*_-(X)$. De este modo, la colección $\{U^- : U \in \tau_X\}$ resulta ser una subbase para $CL_-(X)$.

Observemos que $CL^*(X)$ es la única vecindad abierta de $\emptyset$ en $CL^*_-(X)$. De este hecho se deduce el siguiente resultado.

Lema 4.2. *Si $\mathcal{A} \subseteq CL^*(X) \setminus \{\emptyset\}$, entonces $\emptyset \in \mathcal{A}^{(1)}_{CL^*_-(X)}$.*

Demostración. Fijemos $A \in \mathcal{A}$ y notemos que, al definir $s \in {}^\omega\mathcal{A}$ como la sucesión constante A, se satisface que $\emptyset \in \lim_{CL^*_-} s$, lo cual concluye la prueba. $\square$

Enseguida definiremos otra topología en el conjunto $CL^*(X)$ y para esto se requerirá de un nuevo concepto.

Definición 4.3. Sea C un subconjunto de X. Decimos que C es *co-compacto* si tiene complemento compacto, es decir, $X \setminus C \in K(X)$. Con esto en mente, $CK(X)$ es la colección de todos los subconjuntos co-compactos de X.

Con estos antecedentes, $CL^*_+(X)$ representará al espacio topológico que resulta de dotar a $CL^*(X)$ con la topología que tiene por subbase a $\{C^+ : C \in CK(X)\}$. Mientras que el símbolo $CL_+(X)$ será usado para representar al espacio que consiste de equipar a $CL(X)$

con la topología heredada de $CL^*_+(X)$ y así, la colección $\{W^+ \setminus \{\emptyset\} : W \in CK(X)\}$ es una subbase para $CL_+(X)$. La topología $\tau_{CL_+(X)}$ será llamada la topología de los co-compactos en $CL(X)$.

Con el propósito de de construir una base para $CL^*_+(X)$, argumentemos a continuación que la propiedad de co-compacidad es cerrada bajo intersecciones.

Lema 4.4. *Sean C_0 y C_1 subconjuntos co-compactos de X y $U \in \tau_X$. Entonces los siguientes enunciados son verdaderos.*

1. *$C_0 \cap C_1$ es co-compacto.*

2. *$C_0 \cup U$ es co-compacto.*

Demostración. La prueba de (1) se reduce a emplear las Leyes de De Morgan y recordar que la unión finita de subconjuntos compactos es, nuevamente, un subconjunto compacto.

Con respecto a (2), observemos que $X \setminus (C_0 \cup U) = (X \setminus C_0) \cap (X \setminus U)$, es decir, $X \setminus (C_0 \cup U)$ es cerrado en $X \setminus C_0$ y por ende compacto. $\square$

Una consecuencia inmediata del primer inciso del resultado previo y del lema 4.1 es que la colección $\{C^+ : C \in CK(X)\}$ es, de hecho, una base para $CL^*_+(X)$. Además, observemos que para todo $C \in CK(X)$ resulta que $\emptyset \in C^+$. De esto se deduce el siguiente resultado.

Lema 4.5. *Si $s : \omega \to CL^*_+(X)$ es la sucesión constante $\emptyset$, entonces $\lim s = CL^*(X)$.*

Por otra parte, definimos $CL^*_F(X)$ como el espacio topológico generado al darle a $CL^*(X)$ la topología que tiene por subbase a (note que $X^+ = CL^*(X)$ y $X \in CK(X)$)

$$\{U^- : U \in \tau_X\} \cup \{C^+ : C \in CK(X)\}.$$

Esta topología es conocida como la *topología de Fell* en $CL^*_F(X)$. Es costumbre pedir que X sea Hausdorff para definir dicha topología (véase, por ejemplo, [6]), pero nosotros no lo haremos. Además, $CL_F(X)$ representará al espacio que resulta de equipar a $CL(X)$ con la topología que hereda de $CL^*_F(X)$.

Con la idea en mente de producir una base para la topología de Fell, tomemos $\mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}$ y $C \in CK(X)$. Entonces definimos

$$[\mathcal{U} : C] := \{A \in CL_F^*(X) : A \subseteq C \wedge \forall U \in \mathcal{U}(U \cap A \neq \emptyset)\}.$$

Lema 4.6. *La colección* $\{[\mathcal{U} : C] : \mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega} \wedge C \in CK(X)\}$ *es una base para* $CL_F^*(X)$*.*

Demostración. Veamos, en primer término, que si $\mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}$ y $C \in CK(X)$, entonces $[\mathcal{U} : C]$ es un subconjunto abierto de CL_F^*. Si resulta que $\mathcal{U} = \emptyset$, entonces $[\mathcal{U} : C] = C^+$. En caso contrario, $\mathcal{U} \neq \emptyset$ y en esta situación $[\mathcal{U} : C] = C^+ \cap \bigcap\{U^- : U \in \mathcal{U}\}$.

Tomemos $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1 \in [\tau_X]^{<\omega}$ y $C_0, C_1 \in CK(X)$, arbitrarios. De acuerdo al lema 4.4, $C_0 \cap C_1 \in CK(X)$. Por otro lado, argumentos rutinarios muestran que

$$[\mathcal{U}_0 : C_0] \cap [\mathcal{U}_1 : C_1] = [\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1 : C_0 \cap C_1].$$

Entonces, el paso final de nuestro argumento es notar que, para cualesquiera $U \in \tau_X$ y $C \in CK(X)$, se tienen las igualdades $U^- = [\{U\} : X]$ y $C^+ = [\emptyset : C]$. $\square$

Observemos que de acuerdo a la definición del supremo de dos topologías (ver sección 3.1), el resultado anterior muestra que $CL_F^*(X)$ es el supremo de CL_-^* y CL_+^*.

El siguiente resultado será empleado ampliamente en la sección 4.1.

Lema 4.7. *Sea* $\mathscr{H} \in \{CL_+^*(X), CL_F^*(X)\}$*. Los siguientes enunciados son verdaderos.*

1. *La colección* $\mathcal{B} := \{C^+ : C \in CK(X)\}$ *es una base local para* $\mathscr{H}$ *en* $\emptyset$*.*

2. *Si* $\mathcal{A} \subseteq CL^*(X)$*, entonces* $\mathrm{cl}_{\mathscr{H}}(\mathcal{A}) \setminus \{\emptyset\} \subseteq \mathrm{cl}_{\mathscr{H}}(\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})$

Demostración. Mostremos (1). En primera instancia, si $\mathcal{B} = \tau_{CL_+^*}$ y por ende, $\mathscr{H} = CL_+^*$, es inmediato que $\mathcal{B}$ es una base local para $\mathscr{H}$ en $\emptyset$. Para el resto de la prueba supongamos que $\mathscr{H} = CL_F^*$.

Sean $\mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}$ y $C \in CK(X)$ tales que $\emptyset \in [\mathcal{U} : C]$. Entonces $\mathcal{U} = \emptyset$ pues, en caso contrario, existiría $U \in \mathcal{U}$ de modo que $U \cap \emptyset \neq \emptyset$, lo cual es imposible. En consecuencia, $[\mathcal{U} : C] = [\emptyset : C] = C^+$.

Ahora verifiquemos (2). Fijemos $A \in \mathrm{cl}_{\mathscr{H}}(\mathcal{A}) \setminus \{\emptyset\}$ y $\mathcal{U} \in \tau_{\mathscr{H}}(A)$. Como $A \neq \emptyset$, resulta que $A \in X^- \in \tau_{\mathscr{H}}$ y así, $\emptyset \neq (\mathcal{U} \cap X^-) \cap \mathcal{A} = \mathcal{U} \cap (\mathcal{A} \cap X^-) = \mathcal{U} \cap (\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})$. $\square$

Lema 4.8. *Si $\mathscr{H} \in \{CL_F^*(X), CL_+^*(X)\}$ y $f : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ está definida como $f(A,B) := A \cup B$, entonces f es continua.*

Demostración. Notemos que si A, B y U son subconjuntos de X, entonces el enunciado $(A \cup B) \cap U \neq \emptyset$ equivale a la disyunción $A \cap U \neq \emptyset$ o $B \cap U \neq \emptyset$. Luego, para cualesquiera $A, B \in CL^*$ y $U \in \tau_X$,

$$f^{-1}[U^-] = (U^- \times CL^*) \cup (CL^* \times U^-).$$

Similarmente, el que la condición $A \cup B \subseteq C$ sea equivalente a la conjunción $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$ implica que, para cualquier $C \in CK(X)$,

$$f^{-1}[C^+] = C^+ \times C^+$$

y esto finaliza nuestra prueba. $\square$

La función presentada en el resultado previo habla de la unión de dos subconjuntos cerrados arbitrarios de X. Para el propósito de este capítulo resultará importante fijar un subconjunto unipuntual de X y unirlo con subconjuntos cerrados de X. Con esto en mente se tienen los siguientes conceptos.

Definición 4.9. Sea X un espacio T_1. Para cualquier punto $x \in X$, denotaremos por ψ_x a la función de $CL^*(X)$ en $CL(X)$ dada por $\psi_x(A) := A \cup \{x\}$. Se deduce del lema 4.8 que si $\mathscr{H} \in \{CL_F^*(X), CL_+^*(X)\}$, entonces $\psi_x : \mathscr{H} \to \mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}$ es continua.

Definición 4.10. Si $x \in X$, $U \in \tau_X$ y $\mathscr{A} \subseteq CL^*(X)$, definimos

1. $\mathcal{C}_U := (X \setminus U)^+ = \{A \in CL^*(X) : A \cap U = \emptyset\}$ y

2. $\mathcal{A}_x := \{A \cup \{x\} : A \in \mathcal{A}\}$.

Notemos que, cuando X es T_1, resulta que $\mathcal{A}_x = \psi_x[\mathcal{A}]$ y $\mathcal{A}_x \subseteq CL(X)$. Además, como un argumento rutinario muestra que $\mathcal{C}_U = CL * \setminus U^-$, el conjunto $\mathcal{C}_U$ es cerrado en $CL *_F (X)$.

Haciendo uso de las definiciones anteriores se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.11. *Si X es un espacio T_1, $x \in X$ y $U \in \tau_X(x)$, entonces la función $\varphi_x := \psi_x \restriction \mathcal{C}_U$ es un encaje de $\mathcal{C}_U$ en $CL^*_F(X)$ con imagen cerrada.*

Demostración. Claramente, φ_x es continua y nuestra definición de $\mathcal{C}_U$ nos garantiza que también es inyectiva. Así que solo resta probar que es una función abierta sobre su imagen para concluir que φ_x es, en verdad, un encaje.

Tomemos $\mathscr{W}$, un abierto de CL^*_F, y sea $A \in \mathscr{W} \cap \mathcal{C}_U$. Verifiquemos que existe $\mathscr{V} \in \tau_{CL^*_F}$ tal que

$$\varphi_x(A) \in \mathscr{V} \cap \operatorname{img} \varphi_x \subseteq \varphi_x[\mathscr{W} \cap \mathcal{C}_U]. \tag{4.1}$$

Sabemos que hay $n < \omega$, $\{W_i : i < n\} \subseteq \tau_X$ y $C \in CK(X)$ que satisfacen

$$A \in [\{W_i : i < n\} : C] \subseteq \mathscr{W}.$$

Para cada $i < n$ definamos $V_i := W_i \setminus \{x\}$. En vitud de que $C \cup U \in CK(X)$ (véase lema 4.4), la colección $\mathscr{V} := [\{V_i : i < n\} : C \cup U]$ es un básico de CL^*_F. Afirmamos que $\mathscr{V}$ satisface (4.1).

Es claro que $\varphi_x(A) \in \operatorname{img} \varphi_x$; además $A \subseteq C$ y $x \in U$, lo cual implica que $\varphi_x(A) \subseteq C \cup U$. Por otra parte, la condición $A \in \mathcal{C}_U$ y nuestra elección de $\{W_i : i < n\}$ nos da $x \notin A$ y $A \cap W_i \neq \emptyset$, siempre que $i < n$. Luego, para cada $i < n$, $\varphi_x(A) \cap V_i \neq \emptyset$.

Ahora, tomemos $B \in \mathscr{V} \cap \operatorname{img} \varphi_x$. Sea $D \in \mathcal{C}_U$ con $B = \varphi_x(D)$. Dado $i < n$, la pertenencia $B \in \mathscr{V}$ nos da $\emptyset \neq B \cap V_i = B \cap (W_i \setminus \{x\})$ y así, $D \cap W_i \neq \emptyset$. Además, las relaciones $B \subseteq C \cup U$ y $D \cap U = \emptyset$ implican que $D \subseteq C$ y, en consecuencia, $D \in \mathscr{W} \cap \mathcal{C}_U$.

Finalmente, probemos que $\operatorname{img} \varphi_x = (CL^* \setminus (U \setminus \{x\})^-) \cap (CL^* \setminus (X \setminus \{x\})^+)$. Observe que esto concluye la prueba porque el conjunto de la derecha es cerrado en CL^*_F.

Sea $B \in \mathcal{C}_U$. Como $B \cap U = \emptyset$, deducimos que $\varphi_x(B) \cap (U \setminus \{x\}) = \emptyset$, es decir, $\varphi_x(B) \notin (U \setminus \{x\})^-$. Por otro lado, $x \in \varphi_x(B)$ implica que $\varphi_x(B) \nsubseteq X \setminus \{x\}$, o sea,

$\varphi_x(B) \notin (X \setminus \{x\})^+$.

Por último, si $A \in (CL^* \setminus (U \setminus \{x\})^-) \cap (CL^* \setminus (X \setminus \{x\})^+)$, la condición $A \notin (U \setminus \{x\})^- \cup (X \setminus \{x\})^+$ produce $A \cap U \subseteq \{x\}$ y $A \nsubseteq X \setminus \{x\}$, esto es, $A \cap U = \{x\}$. Así, x es un punto aislado del conjunto cerrado A y, de esta forma, $A \setminus \{x\}$ es un subconjunto cerrado de X que es ajeno con U. De todo lo anterior se deduce que $A \setminus \{x\} \in \mathcal{C}_U$ y $\varphi_x(A \setminus \{x\}) = A$.

□

A partir de este momento supondremos que el lector está familiarizado con el material que inicia en la definición 2.31 y finaliza en el teorema 2.43.

Lema 4.12. *Sean X un espacio T_1, $x \in X$, $U \in \tau_X(x)$ y $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{C}_U$. Entonces, para cada $\alpha \leqslant \omega_1$,*

$$(\mathscr{A}^{(\alpha)})_x = (\mathscr{A}_x)^{(\alpha)},$$

donde los derivados secuenciales se calculan en $CL_F^*(X)$.

Demostración. Por el teorema 4.11, $\operatorname{img} \varphi_x$ es un subconjunto cerrado de CL_F^* y además $\mathscr{A}_x = \varphi_x[\mathscr{A}] \subseteq \operatorname{img} \varphi_x$. En consecuencia, el corolario 2.42 nos permite deducir que el α-ésimo derivado de $\mathscr{A}_x$ en $\operatorname{img} \varphi_x$ coincide con el α-ésimo derivado de $\mathscr{A}_x$ en CL_F^*. Por otra parte, el lema 2.36 nos garantiza la inclusión

$$(\mathscr{A}^{(\alpha)})_x = \varphi_x[\mathscr{A}^{(\alpha)}] \subseteq (\varphi_x[\mathscr{A}])^{(\alpha)} = (\mathscr{A}_x)^{(\alpha)}.$$

Similarmente, por el teorema 4.11, $\varphi_x^{-1} : \operatorname{img} \varphi_x \to CL_F^*$ es continua y, por el lema 2.36,

$$\varphi_x^{-1}[(\mathscr{A}_x)^{(\alpha)}] \subseteq (\varphi_x^{-1}[\mathscr{A}_x])^{(\alpha)} = \mathscr{A}^{(\alpha)}.$$

Finalmente, el tomar imágenes directas bajo φ_x en sendos lados nos da la inclusión restante.

□

4.1 Estrechez numerable

Decimos que el espacio topológico X tiene *estrechez numerable* si para todo $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$ existe $B \in [A]^{\leqslant\omega}$ tal que $x \in \overline{B}$, es decir,

$$\overline{A} = \bigcup\{\overline{B} : B \in [A]^{\leqslant\omega}\}.$$

Lema 4.13. *Todo espacio secuencial tiene estrechez numerable.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio secuencial y fijemos $A \subseteq X$. Hagamos $H := \bigcup\{\overline{B} : B \in [A]^{\leqslant\omega}\}$ y notemos que $H \subseteq \overline{A}$. Entonces solo resta probar que $\overline{A} \subseteq H$. Para esto mostremos que H es secuencialmente cerrado.

Fijemos $s \in {}^{\omega}H$ arbitraria. Sabemos que para toda $n < \omega$ hay $B_n \in [A]^{\leqslant\omega}$ con la propiedad que $s_n \in \overline{B}_n$. Con esto en mente definamos $B := \bigcup_{n<\omega} B_n$. Es inmediato que $B \in [A]^{\leqslant\omega}$ y $s_n \in \overline{B}_n \subseteq \overline{B}$ para cada $n < \omega$. Así, aplicando el lema 2.2, $\text{lím}\, s \subseteq \overline{B} \subseteq H$.

Por último, en vista de que A está claramente contenido en H se satisface la inclusión $\overline{A} \subseteq \overline{H}$. De esta manera, como H es secuencialmente cerrado en el espacio secuencial X, la contención previa se transforma en $\overline{A} \subseteq H$ y, en consecuencia, obtenemos la igualdad $\overline{A} = H$. □

Por otra parte, diremos que X es de *Lindelöf* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.

El propósito de la presente sección es probar que si $CL(X)$ con la topología de Fell o la de los co-compactos es secuencial, entonces X es de Lindelöf. Comenzaremos por desarrollar resultados previos que nos permitirán llegar a dicha conclusión.

Lema 4.14. *Suponga que X es un espacio de Hausdorff no compacto y que*

$$\mathscr{H} \in \{CL_F(X), CL_+(X), CL_F^*(X), CL_+^*(X)\}.$$

Si $\mathscr{H}$ tiene estrechez numerable, entonces existe $Y \in [X]^{\leqslant\omega}$ tal que $\overline{Y} \notin K(X)$.

Demostración. Como X es no compacto, X resulta ser infinito; en particular hay $x_0, x_1 \in X$ tales que $x_0 \neq x_1$. Ahora, fijemos $U_0 \in \tau_X(x_0)$ y $U_1 \in \tau_X(x_1)$ con la propiedad de que

$U_0 \cap U_1 = \emptyset$, y definamos $F_0 := \overline{U}_0$ y $F_1 := X \setminus U_0$. Observemos que, para cada $i \in \{0,1\}$, F_i es cerrado en X y $x_{1-i} \notin F_i$.

Por otra parte, como X no es compacto y $X = F_0 \cup F_1$, existe $i \in \{0,1\}$ tal que F_i no es compacto. Probemos que $\{x_{1-i}\}$ es punto de adherencia de $Z := \{\{x_{1-i}, y\} : y \in F_i\}$ en el espacio $\mathscr{H}$. Tenemos cuatro posibilidades.

Caso 1: $\mathscr{H} = CL_F$.

Sean $\mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}$ y $C \in CK(X)$ tales que $\{x_{1-i}\} \in [\mathcal{U} : C]$. Como F_i es un cerrado no compacto, $F_i \nsubseteq X \setminus C$, es decir, hay $y \in F_i \cap C$. Luego, $\{x_{1-i}, y\} \subseteq C$ y en consecuencia, $\{x_{1-i}, y\} \in [\mathcal{U} : C] \cap Z$.

Caso 2: $\mathscr{H} = CL_+$.

Ya que la topología de CL_F es más fina que la de CL_+, el caso 1 implica que $\{x_{1-i}\} \in \operatorname{cl}_{CL_F} Z \subseteq \operatorname{cl}_{CL_+} Z$.

Caso 3: $\mathscr{H} = CL_F^*$.

Por ser CL_F subespacio de CL_F^*, del caso 1 se deduce que $\{x_{1-i}\} \in \operatorname{cl}_{CL_F^*} Z$.

Caso 4: $\mathscr{H} = CL_+^*$.

Como CL_+ es subespacio de CL_+^*, el caso 2 implica que $\{x_{1-i}\} \in \operatorname{cl}_{CL_+^*} Z$.

Entonces, por la estrechez numerable de $\mathscr{H}$, existe $Y \in [F_i]^{\leqslant\omega}$ con la propiedad que $\{x_{1-i}\}$ es punto de adherencia de $\{\{x_{1-i}, y\} : y \in Y\}$.

En busca de una contradición, supongamos que $\overline{Y}$ es compacto. En esta situación, $(X \setminus \overline{Y})^+ \cap \mathscr{H} \in \tau_{\mathscr{H}}(\{x_{1-i}\})$ y en consecuencia, existe $y \in Y$ que satisface $\{x_{1-i}, y\} \in (X \setminus \overline{Y})^+$, esto es, $y \in X \setminus \overline{Y}$, lo cual es imposible. En conclusión, $\overline{Y}$ no es compacto y esto concluye la prueba. $\square$

Enseguida, argumentemos que si X es T_2 y $CL(X)$ con la topología de los co-compactos (respectivamente, de Fell) tiene estrechez numerable entonces $CL^*(X)$ con la topología de los co-compactos (respectivamente, de Fell) también tiene estrechez numerable.

Lema 4.15. *Dado X, un espacio de Hausdorff, hagamos*

$$\mathscr{H}_0 := CL_F(X),\ \mathscr{H}_1 := CL_+(X),\ \mathscr{G}_0 := CL_F^*(X) \text{ y } \mathscr{G}_1 := CL_+^*(X).$$

Si $\mathscr{H}_i$, con $i \in \{0,1\}$, tiene estrechez numerable, entonces $\mathscr{G}_i$ también tiene estrechez numerable.

Demostración. Fijemos $i \in \{0,1\}$. Tomemos $\mathcal{A} \subseteq CL^*$ y $A \in \mathrm{cl}_{\mathscr{G}_i}(\mathcal{A}) \setminus \{\emptyset\}$. En esta situación, el inciso (2) del lema 4.7 implica la pertenencia $A \in \mathrm{cl}_{\mathscr{H}_i} \mathcal{A}$ y en consecuencia, existe $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{\leqslant\omega}$ tal que $A \in \mathrm{cl}_{\mathscr{H}_i} \mathcal{B} \subseteq \mathrm{cl}_{\mathscr{G}_i} \mathcal{B}$.

Para el resto de la prueba consideraremos que $\emptyset \in \mathrm{cl}_{\mathscr{G}_i} \mathcal{A}$. Si X es compacto, $\emptyset$ es cocompacto y como $\emptyset^+ = \{\emptyset\}$, se sigue que $\{\emptyset\}$ es abierto en $\mathscr{G}_i$ y por ende, $\emptyset \in \mathcal{A}$. Definiendo $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$, resulta que $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{\leqslant\omega}$ y $\emptyset \in \mathrm{cl}_{\mathscr{G}_i} \mathcal{B}$.

Ahora supongamos que X no es compacto. Por el lema 4.14, hay $Y \in [X]^{\leqslant\omega}$ con la propiedad de que $\overline{Y} \notin K(X)$. Fijemos $y \in Y$ y definamos

$$\mathcal{A}^y := \{A \in \mathcal{A} : y \notin A\}.$$

Afirmamos que $\emptyset \in \mathrm{cl}_{\mathscr{G}_i} \mathcal{A}^y$.

Con el inciso (1) del lema 4.7 en mente, tomemos $C \in CK(X)$. Como $X \setminus \{y\} \in CK(X)$, el inciso (1) del lema 4.4 nos da $C \setminus \{y\} = C \cap (X \setminus \{y\}) \in CK(X)$ y por ende, $(C \setminus \{y\})^+ \in \tau_{\mathscr{G}_i}(\emptyset)$. Entonces, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subseteq C \setminus \{y\}$ y en consecuencia, $A \in \mathcal{A}^y \cap C^+$, lo cual prueba nuestra afirmación.

Empleemos la continuidad de ψ_y (ver definición 4.9) para obtener (recuerde la definición 4.10)

$$\{y\} = \psi_y(\emptyset) \in \psi_y[\mathrm{cl}_{\mathscr{G}_i} \mathcal{A}^y] \subseteq \mathrm{cl}_{\mathscr{H}_i}(\psi_y[\mathcal{A}^y]) = \mathrm{cl}_{\mathscr{H}_i}(\mathcal{A}^y)_y.$$

Ahora, la estrechez numerable de $\mathscr{H}_i$ nos da $\mathcal{B}^y \in [\mathcal{A}^y]^{\leqslant\omega}$ con la propiedad de que $\{y\} \in \mathrm{cl}_{\mathscr{H}_i}(\mathcal{B}^y)_y$.

En resumen, para cada $y \in Y$ existe $\mathcal{B}^y$, un subconjunto numerable de $\mathcal{A}^y$, de forma que $\{y\} \in \mathrm{cl}_{\mathscr{H}_i}(\mathcal{B}^y)_y$

Finalmente, hagamos $\mathcal{B} := \bigcup\{\mathcal{B}^y : y \in Y\}$ (notemos que $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{\leqslant\omega}$) y verifiquemos que $\emptyset \in \mathrm{cl}_{\mathscr{G}_i} \mathcal{B}$.

Nuevamente, con el inciso (1) del lema 4.7 presente, sea $C \in CK(X)$. En vista de que $\overline{Y}$ es un cerrado no compacto, se tiene que $C \cap \overline{Y} \neq \emptyset$. Por ser X de Hausdorff resulta que $C \in \tau_X$ y en consecuencia, $C \cap Y \neq \emptyset$. Fijemos, pues, $y \in C \cap Y$ para obtener que C^+ es una vecindad abierta de $\{y\}$ en $\mathscr{H}_i$; luego, $C^+ \cap (\mathcal{B}^y)_y \neq \emptyset$, es decir, hay $A \in \mathcal{B}^y$ tal que $A \cup \{y\} \in C^+$. En conclusión, $A \in C^+ \cap \mathcal{B}^y \subseteq C^+ \cap \mathcal{B}$. □

El siguiente resultado establece una condición suficiente sobre $CL^*(X)$ con la topología de los co-compactos o de Fell para poder deducir que X es de Lindelöf.

Lema 4.16. *Sea $\mathscr{H} \in \{CL_+^*(X), CL_F^*(X)\}$. Si $\mathscr{H}$ tiene estrechez numerable, entonces X es de Lindelöf.*

Demostración. Tomemos $\mathcal{U}$, una cubierta abierta de X. Definamos $\mathcal{A} := \{X \setminus \bigcup \mathcal{V} : \mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}\}$ y mostremos que $\emptyset \in \operatorname{cl}_{\mathscr{H}} \mathcal{A}$.

Sea $C \in CK(X)$. Como $X \setminus C \in K(X)$ y $X \setminus C \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, obtenemos $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ tal que $X \setminus C \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Así, $X \setminus \bigcup \mathcal{V}$ es un elemento de $\mathcal{A} \cap C^+$. Luego, el inciso (1) del lema 4.7 nos da lo deseado.

Por la estrechez numerable de $\mathscr{H}$ existe $\{\mathcal{V}_n : n < \omega\} \subseteq [\mathcal{U}]^{<\omega}$ de modo que $\emptyset$ es punto de adherencia de $\{X \setminus \bigcup \mathcal{V}_n : n < \omega\}$ en $\mathscr{H}$. Solo nos resta verificar que $X \subseteq \bigcup_{n<\omega}(\bigcup \mathcal{V}_n)$.

Consideremos $x \in X$. Tenemos que $X \setminus \{x\} \in CK(X)$ y por ende, $(X \setminus \{x\})^+ \in \tau_{\mathscr{H}}(\emptyset)$. De esta manera, hay $m < \omega$ tal que $X \setminus \bigcup \mathcal{V}_m \in (X \setminus \{x\})^+$ y en consecuencia, $x \in \bigcup \mathcal{V}_m \subseteq \bigcup_{n<\omega}(\bigcup \mathcal{V}_n)$. □

Con toda la teoría desarrollada previamente resulta sencillo mostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.17. *Sean X, un espacio de Hausdorff, y $\mathscr{H} \in \{CL_+^*(X), CL_F^*(X)\}$. Si $\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}$ es secuencial, entonces X es de Lindelöf.*

Demostración. Por lema 4.13, $\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}$ tiene estrechez numerable, así que el lema 4.15 implica que $\mathscr{H}$ también posee esta propiedad. Finalmente, por el lema 4.16, X es de Lindelöf. □

4.2 Orden secuencial

Para esta sección es necesario familiarizarse con la definición 2.39.

Teorema 4.18. *Si X es un espacio topológico T_1, los siguientes enunciados son verdaderos.*

1. *Cuando $|X| > 1$, $\operatorname{os}(CL_-^*(X)) = \operatorname{os}(CL_-(X))$.*

2. *La condición $|X| = 1$ implica que $\operatorname{os}(CL_-(X)) = 0$ y $\operatorname{os}(CL_-^*(X)) = 1$.*

Demostración. Comecemos por suponer $|X| > 1$ y verifiquemos la desigualdad

$$\operatorname{os}(CL^*_-(X)) \leqslant \operatorname{os}(CL_-(X)). \tag{4.2}$$

En primer lugar, si $\operatorname{os}(CL_-) = \infty$, la desigualdad (4.2) es inmediata. Para el resto de la prueba supongamos que existe $\alpha \leqslant \omega_1$ tal que $\alpha = \operatorname{os}(CL_-)$ y verifiquemos que para todo $\mathcal{A} \subseteq CL^*$,

$$\operatorname{cl}_{CL^*_-} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{(\alpha)}_{CL^*_-}. \tag{4.3}$$

Antes de iniciar nuestro argumento, note que de (4.3) y el inciso (2) del lema 2.38 se deduce que $\mathcal{A}^{(\alpha)}_{CL^*_-}$ es cerrado en CL^*_- y como $\mathcal{A}$ fue arbitrario, ya tendríamos $\operatorname{os}(CL^*_-) \leqslant \alpha$.

Regresando a (4.3), analicemos dos casos.

Caso 1: $\mathcal{A} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Si $\mathcal{A} = \emptyset$, es inmediato que $\mathcal{A}$ es cerrado. Ahora supongamos que $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$ y argumentemos que $CL^* \setminus \mathcal{A} = X^-$. En efecto, si $A \in X^-$, entonces $A \cap X \neq \emptyset$ y en consecuencia, $A \neq \emptyset$, lo cual implica que $A \notin \mathcal{A}$. Por otro lado, si $A \in CL^* \setminus \mathcal{A}$, resulta que A es un cerrado no vacío de X y por ende $A \in X^-$.

Finalmente, por el inciso (1) del lema 2.32 y la desigualdad $\alpha \geqslant 0$, tenemos (4.3).

Caso 2: $\mathcal{A} \notin \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Para cualesquiera $\mathcal{B} \subseteq CL^*$, $\mathcal{C} \subseteq CL$ y $\beta \in \mathbf{ON}$, hagamos

$$\mathcal{B}^{(\beta)} := \mathcal{B}^{(\beta)}_{CL^*_-} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{C}^{[\beta]} := \mathcal{C}^{(\beta)}_{CL_-}.$$

Mostremos enseguida que $(\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})^{(1)} = \mathcal{A}^{(1)}$.

Por el inciso (2) del lema 2.32, basta verificar que $\mathcal{A}^{(1)} \subseteq (\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})^{(1)}$. Sea $A \in \mathcal{A}^{(1)}$. Comencemos por suponer que $A \neq \emptyset$. En esta situación, $X^- \in \tau_{CL^*_-}(A)$. Además, sabemos que existe $s \in {}^{\omega}\mathcal{A}$ que satisface que $A \in \operatorname{lím} s$ y en consecuencia, hay $m < \omega$ tal que $s[\omega \setminus m] \subseteq X^-$. Definiendo $t : \omega \to \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$ como $t_n := s_{n+m}$ para cada $n < \omega$, resulta que $A \in \operatorname{lím} t$.

Por otro lado, si $A = \emptyset$, la hipótesis del caso que estamos analizando nos da $\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\} \neq \emptyset$ y por el lema 4.2, $\emptyset \in (\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})^{(1)}$.

En vista de lo anterior, el corolario 2.33 produce la igualdad $(\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})^{(\alpha)} = \mathcal{A}^{(\alpha)}$.

Además, por el caso 1, $\{\emptyset\}$ es cerrado en CL^*_- y, por ende, CL es un abierto en CL^*_-; así, aplicando el inciso (1) del teorema 2.41,

$$(\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})^{[\alpha]} = (\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})^{(\alpha)} \cap CL = \mathcal{A}^{(\alpha)} \cap CL; \tag{4.4}$$

además, nuestra elección de α garantiza que

$$(\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})^{[\alpha]} = \mathrm{cl}_{CL_-}(\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}) = \mathrm{cl}_{CL^*_-}(\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}) \cap CL. \tag{4.5}$$

Entonces, de (4.4) y (4.5) se obtiene la igualdad $\mathcal{A}^{(\alpha)} \cap CL = \mathrm{cl}_{CL^*_-}(\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}) \cap CL$.

A continuación argumentemos que $\mathrm{cl}_{CL^*_-}(\mathcal{A}) \cap CL \subseteq \mathcal{A}^{(\alpha)} \cap CL$. Sean $A \in \mathrm{cl}_{CL^*_-}(\mathcal{A}) \cap CL$ y $\mathcal{U} \in \tau_{CL^*_-}(A)$. Como $A \neq \emptyset$, resulta que $\mathcal{V} := \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\} \in \tau_{CL^*_-}(A)$ y por ende, $\emptyset \neq \mathcal{V} \cap \mathcal{A} \subseteq \mathcal{U} \cap (\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})$; en otras palabras, A es un punto de adherencia de $\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$ en CL^*_-. Luego, solo nos resta invocar la igualdad presentada al final del párrafo previo.

Con la idea en mente de probar que $\alpha \geqslant 1$, mostremos que CL_- no es un espacio discreto. Para esto notemos que, si $z \in X$, $n < \omega$ y $\{U_i : i < n\} \subseteq \tau_X$ son tales que $\{z\} \in \bigcap_{i<n} U_i^-$, entonces para cada $i < n$ se satisface la pertenencia $z \in X \cap U_i$, lo cual implica que $X \in U_i^-$ y, en consecuencia, garantiza que $\{X\} \cap \bigcap_{i<n} U_i^- \neq \emptyset$. Esto demuestra que todo $z \in X$ cumple que $\{z\}$ es un punto de adherencia de $\{X\}$. De esta forma, la condición $|X| > 1$ garantiza que $\{X\}$ no es cerrado en CL_-; en especial, CL_- no es un espacio discreto.

Además, aplicando el lema 4.2 y el inciso (1) del lema 2.32 obtenemos la inclusión $\emptyset \in \mathcal{A}^{(1)} \subseteq \mathcal{A}^{(\alpha)}$ y en consecuencia, $\mathrm{cl}_{CL^*_-} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{(\alpha)}$.

Finalmente, observemos que $CL(X)$ es un abierto de $CL^*_-(X)$ y así, el inciso (2) del teorema 2.41 aunado a la desigualdad (4.2) implican la igualdad buscada.

Ahora probemos (2). Observemos que, como $CL = \{X\}$, CL_- es un espacio discreto; en especial, $\mathrm{os}(CL_-) = 0$. Por otra parte, sea $\mathcal{A} \subseteq CL^*$. Si $\mathcal{A} \in \{CL^*, \{\emptyset\}, \emptyset\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(0)}_{CL^*_-}$ es cerrado en CL^*_-. Cuando $\mathcal{A} = \{X\}$, el lema 4.2 nos da $\emptyset \in \mathcal{A}^{(1)}_{CL^*_-}$ y por ende, $\mathcal{A}^{(1)}_{CL^*_-} = CL^*_-$. En conclusión, $\mathrm{os}(CL^*_-) = 1$. □

Lema 4.19. *Sean X un espacio T_1 y $\mathscr{H} \in \{CL^*_+(X), CL^*_F(X)\}$. Si D es un subconjunto* *infinito numerable de X sin puntos de acumulación, entonces cualquier función biyectiva $s : \omega \to [D]^1$ es una sucesión en $\mathscr{H}$ que converge a $\emptyset$.*

Demostración. Sea $s : \omega \to [D]^1$ una función biyectiva y argumentemos que $\emptyset \in \text{lím}_{\mathscr{H}} s$. Con el inciso (1) del lema 4.7 en mente supongamos, en busca de una contradicción, que $C \in CK(X)$ es tal que para toda $k < \omega$ existe $n_k \in \omega \setminus k$ con la propiedad de que $s(n_k) \notin C^+$, es decir, $s(n_k) \subseteq X \setminus C$.

Definamos $E := \bigcup \{s(n_k) : k < \omega\}$ y observemos que $E \subseteq D$. Por ende, E no tiene puntos de acumulación en X, en otras palabras, E es un subespacio discreto y cerrado de X. Por otra parte, notemos que $E \subseteq X \setminus C$ y en consecuencia, E es compacto en X. Lo anterior implica que $|E| < \omega$, que contradice la inyectividad de s. □

El siguiente resultado (haciendo uso del lema anterior) establece cual es la relación que existe entre el orden secuencial de $CL_+(X)$ y el orden secuencial de $CL_+^*(X)$.

Teorema 4.20. *Si X un espacio de Hausdorff, entonces*

$$\text{os}(CL_+^*(X) \leqslant \text{os}(CL_+(X)) + 1. \tag{4.6}$$

Demostración. En primer lugar, si $\text{os}(CL_+) = \infty$, (4.6) es inmediata. Para el resto de la prueba supongamos que hay $\alpha \leqslant \omega_1$ con la propiedad de que $\alpha = \text{os}(CL_+)$ y mostremos que para todo $\mathcal{A} \subseteq CL^*$, $\text{cl}_{CL_+^*} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{CL_+^*}^{(\alpha+1)}$. Esto nos permitirá aplicar el inciso (2) del lema 2.38 para obtener que el $(\alpha+1)$-ésimo derivado secuencial de cualquier subconjunto de CL^* es cerrado en CL_+^* y en consecuencia, $\text{os}(CL_+^*) \leqslant \alpha + 1$.

Sea $\mathcal{A} \subseteq CL^*$. Observemos que si $\emptyset \in \mathcal{A}$, el lema 4.5 y el inciso (1) del lema 2.32 implican que $CL^* = \mathcal{A}_{CL_+^*}^{(1)} \subseteq \mathcal{A}_{CL_+^*}^{(\alpha+1)}$. Para el resto del argumento demos por hecho que $\emptyset \notin \mathcal{A}$ y, con la intención de simplificar nuestra notación, para cada $\beta \in \mathbf{ON}$ definamos

$$\mathcal{A}^{(\beta)} := \mathcal{A}_{CL_+^*}^{(\beta)} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{A}^{[\beta]} := \mathcal{A}_{CL_+}^{(\beta)}.$$

Observemos que la elección de α garantiza la igualdad $\mathcal{A}^{[\alpha]} = \text{cl}_{CL_+} \mathcal{A} = \text{cl}_{CL_+^*}(\mathcal{A}) \cap CL$. Además, por el lema 2.35 tenemos que $\mathcal{A}^{[\alpha]} \subseteq \mathcal{A}^{(\alpha)}$ y en consecuencia,

$$\text{cl}_{CL_+^*}(\mathcal{A}) \cap CL \subseteq \mathcal{A}^{(\alpha)}. \tag{4.7}$$

En caso de que $\emptyset \notin \mathrm{cl}_{CL_+^*} \mathcal{A}$ o $\emptyset \in \mathcal{A}^{(\alpha)}$, se sigue de (4.7) que $\mathrm{cl}_{CL_+^*} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{(\alpha)}$ y, más aún, el inciso (1) del lema 2.32 nos llevaría a la inclusión $\mathrm{cl}_{CL_+^*} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{(\alpha+1)}$. Entonces, para el resto de la prueba supongamos que $\emptyset \in \mathrm{cl}_{CL_+^*}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}^{(\alpha)}$. Mostraremos a continuación que $\mathcal{A}^{(\alpha)} = CL$.

La inclusión de izquierda a derecha es corolario de nuestra hipótesis $\emptyset \notin \mathcal{A}^{(\alpha)}$. Solo resta verificar que $CL \subseteq \mathcal{A}^{(\alpha)}$. Sean $A \in CL$ y $V \in CK(X)$ tales que $A \in V^+$. Como $\emptyset \in \mathrm{cl}_{CL_+^*} \mathcal{A}$ (véase lema 4.2), la pertenencia $V^+ \in \tau_{CL_+^*}(\emptyset)$ nos da $\emptyset \neq V^+ \cap \mathcal{A}$. Por otro lado, las relaciones $\emptyset \notin \mathcal{A}^{(\alpha)}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(0)} \subseteq \mathcal{A}^{(\alpha)}$ nos garantizan que $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cap CL$. Con todos estos antecedentes, $\emptyset \neq (V^+ \cap CL) \cap \mathcal{A}$. En consecuencia, $A \in \mathrm{cl}_{CL_+} \mathcal{A} = \mathcal{A}^{[\alpha]} \subseteq \mathcal{A}^{(\alpha)}$.

Probemos ahora que X no es compacto. En busca de una contradicción supongamos que $X \in K(X)$. En esta situación, $\emptyset \in CK(X)$ y por ende $\emptyset^+ = \{\emptyset\} \in \tau_{CL_+^*}(\emptyset)$. Por lo tanto el hecho de que $\emptyset \in \mathrm{cl}_{CL_+^*} \mathcal{A}$ implica que $\emptyset \in \mathcal{A}$, lo cual es absurdo.

Por otra parte, como $\mathrm{os}(CL_+) \neq \infty$, de la definición 2.39 y el teorema 2.40 se deduce que CL_+ es secuencial. Así, aplicando el teorema 4.17 obtenemos que X es de Lindelöf y por ende, X no es numerablemente compacto (en caso contrario, X sería compacto). De esta manera, existe $D \subseteq X$ infinito numerable y sin puntos de acumulación en X (véase teorema 2.11).

Finalmente, la infinitud de D nos da una función biyectiva $s : \omega \to [D]^1$, y por el lema 4.19 resulta que $\emptyset \in \lim_{CL_+^*} s$; así la igualdad $\mathcal{A}^{(\alpha)} = CL$ implica que $\emptyset \in \mathcal{A}^{(\alpha+1)}$ y en consecuencia, $CL^* = \mathcal{A}^{(\alpha+1)}$, lo cual, naturalmente, nos permite concluir que $\mathrm{cl}_{CL_+^*} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{(\alpha+1)}_{CL_+^*}$, tal y como se afirmó. $\square$

A continuación, argumentemos que en espacios de Hausdorff la secuencialidad de $CL_F(X)$ implica la secuencialidad de $CL_F^*(X)$.

Teorema 4.21. *Si X es un espacio de Hausdorff y $\mathrm{os}(CL_F(X)) \leqslant \omega_1$, entonces $\mathrm{os}(CL_F^*(X)) \leqslant \omega_1$.*

Demostración. Con la intención de simplificar la notación, para cualesquiera $\mathcal{A} \subseteq CL^*$, $\mathcal{B} \subseteq CL$ y $\alpha \in \mathbf{ON}$ definamos

$$\mathcal{A}^{(\alpha)} := \mathcal{A}^{(\alpha)}_{CL_F^*} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B}^{[\alpha]} := \mathcal{B}^{(\alpha)}_{CL_F}.$$

Este es buen momento para hacer una observación que emplearemos un par de veces en el transcurso de la prueba: la hipótesis $\operatorname{os}(CL_F) \leqslant \omega_1$, en conjunción con el lema 2.37 y el inciso (1) del lema 2.32, nos garantiza que

$$\text{para cualquier } \mathcal{B} \subseteq CL,\ \operatorname{cl}_{CL_F} \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^{[\omega_1]}. \tag{4.8}$$

A continuación verifiquemos que para todo $\mathcal{A} \subseteq CL^*$ se satisface $\operatorname{cl}_{CL_F^*} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{(\omega_1)}$ y en concecuencia, aplicando el inciso (2) del lema 2.38, ya tendríamos que $\operatorname{os}(CL_F^*) \leqslant \omega_1$.

Sea $\mathcal{A} \subseteq CL^*$, aplicando (4.8) obtenemos que

$$\operatorname{cl}_{CL_F^*}(\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}) \cap CL = \operatorname{cl}_{CL_F}(\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}) \subseteq (\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})^{[\omega_1]}. \tag{4.9}$$

Además, el lema 2.35 y el inciso (2) del lema 2.32 nos dan $(\mathcal{A}\setminus\{\emptyset\})^{[\omega_1]} \subseteq (\mathcal{A}\setminus\{\emptyset\})^{(\omega_1)} \subseteq \mathcal{A}^{(\omega_1)}$. Esto aunado al inciso (2) del lema 4.7 y (4.9) implica que $\operatorname{cl}_{CL_F^*}(\mathcal{A}) \setminus \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{A}^{(\omega_1)}$. Por lo tanto solo nos resta comprobar que si $\emptyset \in \operatorname{cl}_{CL_F^*} \mathcal{A}$, entonces $\emptyset \in \mathcal{A}^{(\omega_1)}$.

En primer lugar, observemos que si $\emptyset \in \mathcal{A}$, el inciso (1) del lema 2.32 nos da $\emptyset \in \mathcal{A}^{(\omega_1)}$. Entonces, para el resto de la argumentación demos por hecho que $\emptyset \in \operatorname{cl}_{CL_F^*}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}$.

Verifiquemos ahora que X no es compacto. En efecto, si X fuese compacto, se tendría que $\emptyset^+ = \{\emptyset\} \in \tau_{CL_F^*}$ y en vista de que $\emptyset$ es un punto de adherencia de $\mathcal{A}$ en CL_F^*, deduciríamos que $\emptyset \in \mathcal{A}$, lo cual es absurdo.

Ahora, el teorema 2.40 implica que CL_F es secuencial y así, aplicando el teorema 4.17, obtenemos que X es de Lindelöf. Luego, el que X no sea compacto nos permite concluir que X no es numerablemente compacto.

Por lo anterior, existe $D \subseteq X$ infinito numerable y sin puntos de acumulación en X (véase teorema 2.11). Naturalmente, podemos fijar una función biyectiva $s : \omega \to [D]^1$ y asegurar, por el lema 4.19 que $\emptyset \in \lim_{CL_F^*} s$. Tenemos dos posibilidades.

Caso 1: $s[\omega] \subseteq \operatorname{cl}_{CL_F} \mathcal{A}$.

De (4.8) se deduce que $s[\omega] \subseteq \mathcal{A}^{[\omega_1]}$. Entonces, para cada $n < \omega$ hay $\alpha_n < \omega_1$ que satisface $s_n \in \mathcal{A}^{[\alpha_n]}$. Definiendo $\alpha := \sup\{\alpha_n : n < \omega\}$, resulta que $\alpha < \omega_1$ y $s[\omega] \subseteq \mathcal{A}^{[\alpha]}$; más aún, por el lema 2.35 se tiene $s[\omega] \subseteq \mathcal{A}^{(\alpha)}$ y por ende, $\emptyset \in (\mathcal{A}^{(\alpha)})^{(1)}$. Por último, aplicando los incisos (1) y (3) del lema 2.32, deducimos que $\emptyset \in (\mathcal{A}^{(\alpha)})^{(1)} = \mathcal{A}^{(\alpha+1)} \subseteq \mathcal{A}^{(\omega_1)}$.

Caso 2: Hay $n < \omega$ con la propiedad que $s_n \notin \operatorname{cl}_{CL_F} \mathcal{A}$.

En esta situación existen $\mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}$ y $C \in CK(X)$ tales que $s_n \in [\mathcal{U} : C]$ y $[\mathcal{U} : C] \cap \mathcal{A} = \emptyset$, es decir, para cada $A \in \mathcal{A}$ hay $U \in \mathcal{U}$ que satisface $A \cap U = \emptyset$ o $A \nsubseteq C$.

Definamos $\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq C\}$, observemos que $\mathcal{B} := C^+ \cap \mathcal{A}$ y ya que C^+ es abierto en CL_F^*, el lema 1.2 nos da $\emptyset \in \operatorname{cl}_{CL_F^*} \mathcal{B}$. Esta última pertenencia implica que $\mathcal{U} \neq \emptyset$, ya que en caso contrario, $\mathcal{B} = \emptyset$ y así, $\emptyset \in \operatorname{cl}_{CL_F^*} \mathcal{B} = \emptyset$.

Por otra parte, sabemos que hay $d \in D$ con la propiedad que $s_n = \{d\}$. Dicho esto, hagamos $V := \bigcap \mathcal{U}$. La pertenencia $s_n \in [\mathcal{U} : C]$ implica que $V \in \tau_X(d)$. Además, si $B \in \mathcal{B}$, tenemos que $B \subseteq C$ y como $B \in \mathcal{A}$, concluimos que $B \cap V = \emptyset$. En consecuencia, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}_V$ (ver definición 4.10) y así el lema 4.12 nos da $(\mathcal{B}_d)^{(\omega_1)} = (\mathcal{B}^{(\omega_1)})_d$.

Ahora, (4.8) implica que $\operatorname{cl}_{CL_F}(\mathcal{B}_d) \subseteq (\mathcal{B}_d)^{[\omega_1]}$. En virtud de que $\emptyset \in \operatorname{cl}_{CL_F^*} \mathcal{B}$, la continuidad de φ_d (ver teorema 4.11) nos da $s_n = \varphi_d(\emptyset) \in \operatorname{cl}_{CL_F}(\mathcal{B}_d)$. En resumen, de acuerdo al lema 2.35,

$$s_n \in (\mathcal{B}_d)^{[\omega_1]} \subseteq (\mathcal{B}_d)^{(\omega_1)} = (\mathcal{B}^{(\omega_1)})_d.$$

De este modo existe $B \in \mathcal{B}^{(\omega_1)}$ tal que $s_n = B \cup \{d\}$, lo cual garantiza que $B \in \{\emptyset, \{d\}\}$. Por otro lado, las inclusiones $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}_V \subseteq CL^* \setminus V^-$ producen las relaciones $\mathcal{B}^{(\omega_1)} \subseteq \operatorname{cl}_{CL_F^*} \mathcal{B} \subseteq CL^* \setminus V^-$. Esto y el hecho de que $\{d\} \in V^-$ nos permite deducir que $B = \emptyset$.

Por último, el inciso (2) del lema 2.32 nos da $\emptyset \in \mathcal{B}^{(\omega_1)} \subseteq \mathcal{A}^{(\omega_1)}$. $\square$

Enseguida, mostremos que bajo ciertas restricciones del espacio X se tiene que $\mathcal{H} \in \{CL_-^*(X), CL_+^*(X), CL_F^*\}$ es secuencial si y solo si $\mathcal{H} \setminus \{\emptyset\}$ es secuencial, es decir, el añadir o remover el subconjunto vacío no altera la secuencialidad del hiperespacio.

Teorema 4.22. *Los enunciados siguientes son ciertos para cualquier espacio X.*

1. *Si X es T_1, la secuencialidad de $CL_-(X)$ equivale a la de $CL_-^*(X)$.*

2. *Cuando X es de Hausdorff y $\mathscr{H} \in \{CL_+^*(X), CL_F^*(X)\}$, se tiene que $\mathscr{H}$ es secuencial si y solo si $\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}$ es secuencial.*

Demostración. Antes de comenzar la prueba cabe mencionar que utilizaremos la equivalencia a la secuencialidad presentada en el teorema 2.40.

Sea X un espacio T_1. Verifiquemos (1). Si $\mathrm{os}(CL_-) \leqslant \omega_1$, del teorema 4.18 se deduce que $\mathrm{os}(CL^*_-) \neq \infty$. Mientras que si CL^*_- es secuencial, la igualdad $CL = X^-$ junto con el lema 2.3 nos da la secuencialidad de CL_-.

Ahora, demos por hecho que X es de Hausdorff y mostremos (2). En vista de los teoremas 4.20 y 4.21, la condición $\mathrm{os}(\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}) \leqslant \omega_1$ implica que $\mathrm{os}(\mathscr{H}) \leqslant \omega_1 + 1$ y esta desigualdad, a su vez, nos garantiza (ver definición 2.39) que $\mathscr{H}$ es secuencial.

Para el resto de la prueba demos por hecho que $\mathscr{H}$ es secuencial y argumentemos que $\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}$ también lo es. Tenemos dos posibilidades.

Caso 1: $\mathscr{H} = CL^*_F$.

En esta situación, $\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\} = X^-$ y en consecuencia, por el lema 2.3, $\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}$ es secuencial.

Caso 2: $\mathscr{H} = CL^*_+$.

Mostraremos que para todo $\mathcal{A} \subseteq CL$, $\mathrm{cl}_{CL_+} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{(\omega_1)}_{CL_+}$. Así, utilizando el inciso (2) del lema 2.38 obtendríamos que CL_+ es secuencial.

Para cualesquiera $\mathcal{B} \subseteq CL$ y $\alpha \in \mathbf{ON}$ definamos

$$\mathcal{B}^{(\alpha)} := \mathcal{B}^{(\alpha)}_{CL^*_+} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B}^{[\alpha]} := \mathcal{B}^{(\alpha)}_{CL_+}.$$

Comencemos por verificar que

$$\text{para cualesquiera } \mathcal{A} \subseteq CL \text{ y } \alpha \in \mathbf{ON}, \text{ si } \emptyset \notin \mathcal{A}^{(\alpha)}, \text{ entonces } \mathcal{A}^{(\alpha)} = \mathcal{A}^{[\alpha]}. \tag{4.10}$$

Emplearemos inducción transfinita sobre α, es decir, demos por hecho que α es un ordinal de modo que para cualesquiera $\mathcal{A} \subseteq CL$ y $\beta < \alpha$, si $\emptyset \notin \mathcal{A}^{(\beta)}$, se tiene la igualdad $\mathcal{A}^{(\beta)} = \mathcal{A}^{[\beta]}$.

Sea $\mathcal{A} \subseteq CL$ con $\emptyset \notin \mathcal{A}^{(\alpha)}$. El inciso (1) del lema 2.32 nos da que $\emptyset \notin \mathcal{A}^{(\beta)}$ para todo $\beta < \alpha$. Cuando $\alpha = 0$, (4.10) es inmediata. Si α es un ordinal límite, $\mathcal{A}^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}^{(\beta)} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}^{[\beta]} = \mathcal{A}^{[\alpha]}$. Por último, asumamos que $\alpha = \beta+1$, para algún $\beta < \alpha$. Por el lema 2.35 basta probar que $\mathcal{A}^{(\alpha)} \subseteq \mathcal{A}^{[\alpha]}$. Sea $A \in \mathcal{A}^{(\alpha)}$. Por definición, existe $s : \omega \to \mathcal{A}^{(\beta)}$ de forma que $A \in \mathrm{lím}_{CL^*_+} s$. Dado que $\emptyset \notin \mathcal{A}^{(\alpha)}$, se sigue que $A \in \mathrm{lím}_{CL_+} s$. Además, la hipótesis inductiva nos garantiza que s es una sucesión en $\mathcal{A}^{[\beta]}$ y, consecuentemente, $A \in \mathcal{A}^{[\alpha]}$.

Ahora, fijemos $\mathcal{A} \subseteq CL$. Notemos que si $\emptyset \notin \mathcal{A}^{(\omega_1)}$, la desigualdad $\mathrm{os}(CL^*_+) \leqslant \omega_1$ (recuerde que, por hipótesis, CL^*_+ es secuencial) aunada a (4.10) nos da $\mathrm{cl}_{CL_+} \mathcal{A} \subseteq \mathrm{cl}_{CL^*_+} \mathcal{A} \subseteq$

$\mathcal{A}^{[\omega_1]}$. Entonces, para el resto de la prueba supongamos que $\emptyset \in \mathcal{A}^{(\omega_1)}$.

Hagamos $\alpha := \min\{\beta < \omega_1 : \emptyset \in \mathcal{A}^{(\beta)}\}$ y observemos que la relación $\mathcal{A} \subseteq CL$ nos da $\alpha > 0$. Si α fuese un ordinal límite, la condición $\emptyset \in \mathcal{A}^{(\alpha)}$ implicaría la existencia de $\beta < \omega_1$ con $\emptyset \in \mathcal{A}^{(\beta)}$, una contradicción directa a la minimalidad de α. Por ende, existe $\gamma < \alpha$ tal que $\alpha = \gamma + 1$.

Así, hay $s : \omega \to \mathcal{A}^{(\gamma)}$ con la propiedad de que $\emptyset \in \lim_{CL_+^*} s$ y por nuestra definición de α, $\emptyset \notin \mathcal{A}^{(\gamma)}$. Luego, de (4.10) obtenemos que s es una sucesión en $\mathcal{A}^{[\gamma]}$. Dicho esto, verifiquemos que $CL \subseteq \mathcal{A}^{[\alpha]}$.

Sea $A \in CL$. En vista de que $s : \omega \to \mathcal{A}^{[\gamma]}$, únicamente debemos convencernos de que $A \in \lim_{CL_+} s$. Para esto, sea $U \in CK(X)$ con $A \in U^+$. Naturalmente, $\emptyset \in U^+$ y, por ende, hay $n < \omega$ de modo que $s[\omega \setminus n] \subseteq U^+ \cap \mathcal{A}^{[\gamma]} \subseteq U^+ \cap CL$.

Finalmente, arribamos a las relaciones $\operatorname{cl}_{CL_+} \mathcal{A} \subseteq CL \subseteq \mathcal{A}^{[\alpha]} \subseteq \mathcal{A}^{[\omega_1]}$, tal y como se anunció al principio del caso 2. $\square$

Para finalizar esta sección, demostraremos un par de resultados referentes a la propiedad de Fréchet en hiperespacios.

Teorema 4.23. *Sean X un espacio topológico T_1 y $\mathscr{H} \in \{CL_+^*(X), CL_F^*(X)\}$. Si X posee un subconjunto compacto con interior no vacío y $\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}$ es de Fréchet, entonces $\mathscr{H}$ también es de Fréchet.*

Demostración. De acuerdo al teorema 2.43, basta mostrar que $\operatorname{os}(\mathscr{H}) \leqslant 1$. Para esto argumentemos que para todo $\mathcal{A} \subseteq CL^*$ se tiene que $\operatorname{cl}_{\mathscr{H}} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{(1)}_{\mathscr{H}}$ y en consecuencia por el inciso (2) del lema 2.38 y el lema 2.37, ya tendríamos que $\mathscr{H}$ es de Fréchet.

Para cualesquiera $\mathcal{A} \subseteq CL^*$ y $\mathcal{B} \subseteq CL$ definamos

$$\mathcal{A}^{(1)} := \mathcal{A}^{(1)}_{\mathscr{H}} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}^{[1]} := \mathcal{B}^{(1)}_{\mathscr{H}\setminus\{\emptyset\}}.$$

Dicho esto, sean $\mathcal{A} \subseteq CL^*$ y $A \in \operatorname{cl}_{\mathscr{H}} \mathcal{A}$. En primera instancia supongamos que $A \neq \emptyset$. Tenemos dos posibilidades.

Caso 1: $\mathscr{H} = CL_+^*$.

Si $\emptyset \in \mathcal{A}$, del lema 4.5 se deduce que $CL^* = \mathcal{A}^{(1)}$. Ahora, si $\emptyset \notin \mathcal{A}$, el hecho de que $A \neq \emptyset$ implica que $A \in \operatorname{cl}_{CL_+} \mathcal{A}$ y por ser CL_+ de Fréchet, existe $s \in {}^{\omega}\mathcal{A}$ tal que

$A \in \lim_{CL_+} s \subseteq \lim_{CL_+^*} s$. Por lo tanto $A \in \mathcal{A}^{(1)}$.

Caso 2: $\mathscr{H} = CL_F^*$.

Como $A \neq \emptyset$, el inciso (2) del lema 4.7 implica que $A \in \mathrm{cl}_{CL_F}(\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})$ y al ser CL_F de Fréchet, $\mathrm{cl}_{CL_F}(\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}) = (\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})^{[1]}$. Finalmente, aplicando el lema 2.35 y el inciso (2) del lema 2.32 obtenemos que $A \in (\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})^{[1]} \subseteq (\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\})^{(1)} \subseteq \mathcal{A}^{(1)}$.

Para el resto de la prueba demos por hecho que $A = \emptyset$.

Por hipótesis existen $K \in K(X)$ y $x \in X$ tales que $x \in \mathrm{int}(K)$. Definamos $\mathcal{B} := \mathcal{A} \cap (X \setminus K)^+$ y observemos que, por ser $(X \setminus K)^+$ abierto en $\mathscr{H}$, el lema 1.2 implica que $A \in \mathrm{cl}_{\mathscr{H}} \mathcal{B}$. Además, como ψ_x es continua (ver definición 4.9),

$$\{x\} = \psi_x(\emptyset) \in \mathrm{cl}_{\mathscr{H}} \psi_x[\mathcal{B}] \subseteq \mathrm{cl}_{\mathscr{H}} \mathcal{B}_x$$

y por ser $\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}$ de Fréchet, hay $s : \omega \to \mathcal{B}_x$ que satisface $\{x\} \in \lim_{\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}} s$.

Por otra parte, para toda $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $B \subseteq X \setminus K$. En particular, $x \notin B$. Entonces, el definir $t_n := s_n \setminus \{x\}$ para toda $n < \omega$ nos produce $t \in {}^{\omega}\mathcal{B}$.

Por último, argumentaremos que $\emptyset \in \lim_{\mathscr{H}} t$. Con la idea de usar el inciso (1) del lema 4.7, sea $C \in CK(X)$ y definamos $D := C \cup \mathrm{int}(K)$. Es inmediato que $x \in D$ y por el inciso (2) del lema 4.4, $D \in CK(X)$; en consecuencia, $D^+ \cap CL \in \tau_{\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}}(\{x\})$.

Por lo tanto existe $m < \omega$ tal que para toda $n \in \omega \setminus m$ se tiene que $s_n \subseteq D$; lo cual, aunado al hecho de que $t_n \subseteq s_n$ para cada $n < \omega$, implica que $t[\omega \setminus m] \subseteq D^+$. Además, para cada $n \in \omega \setminus m$ se tiene que $t_n \subseteq X \setminus K$ y por ende $t_n \cap \mathrm{int}(K) = \emptyset$. Así, $t[\omega \setminus m] \subseteq C^+$. $\square$

El corolario subsecuente es un análogo al teorema 4.22, pero con la propiedad de Fréchet.

Corolario 4.24. *Los enunciados siguientes son verdaderos para cualquier espacio X.*

1. *Si X es T_1, $CL_-(X)$ es de Fréchet si y solo si $CL_-^*(X)$ es de Fréchet.*
2. *Si $\mathscr{H} \in \{CL_+^*(X), CL_F^*(X)\}$ y X tiene un subconjunto compacto con interior no vacío, entonces $\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}$ es de Fréchet si y solo si $\mathscr{H}$ es de Fréchet.*

Demostración. Cabe mencionar que a lo largo de la prueba se usará la equivalencia de la propiedad de Fréchet presentada en el lema 2.43.

Comencemos por suponer que X es T_1 y argumentemos (1). Si CL_-^* es de Fréchet, el lema 2.18 nos da que CL_- es de Fréchet. Ahora, si CL_- es de Fréchet, aplicando el teorema 4.18 obtenemos que $\mathrm{os}(CL_-^*) \leqslant 1$, es decir, CL_-^* es de Fréchet.

Por último, verifiquemos (2). Demos por hecho que $\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}$ es de Fréchet. De acuerdo al teorema 4.23, resulta que $\mathscr{H}$ es de Fréchet. Mientras que si $\mathscr{H}$ es de Fréchet, por el lema 2.18, $\mathscr{H} \setminus \{\emptyset\}$ también es de Fréchet. $\square$

Como se mencionó al inicio del capítulo, la topología de $CL_F^*(X)$ es el supremo de las topologías de $CL_-^*(X)$ y $CL_+^*(X)$, por lo que es natural preguntarse si existe alguna implicación sobre $CL_-^*(X)$ y $CL_+^*(X)$ cuando $CL_F^*(X)$ es de Fréchet. La respuesta a esta pregunta se muestra a continuación.

Teorema 4.25. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Si $CL_F^*(X)$ es de Fréchet, entonces $CL_+^*(X)$ y $CL_-^*(X)$ son de Fréchet.*

Demostración. A continuación argumentemos que CL_+^* es Fréchet. Sean $\mathcal{A} \subseteq CL^*$ y $A \in \mathrm{cl}_{CL_+^*} \mathcal{A}$. Definamos $\mathcal{B} := \{B \in CL^* : \exists D \in \mathcal{A}(D \subseteq B)\}$ y mostremos que $A \in \mathrm{cl}_{CL_F^*} \mathcal{B}$.

Con lo anterior en mente, fijemos $\mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}$ y $C \in CK(X)$ tales que $A \in [\mathcal{U} : C]$. En particular $C^+ \in \tau_{CL_+^*}(A)$, lo cual implica que existe $D \in \mathcal{A}$ tal que $D \in C^+$. Ahora, sea $B = A \cup D$. Observemos que $B \in \mathcal{B}$ y el hecho que $A \subseteq C$, aunado a que $D \subseteq C$ implican que $B \in C^+$. Además para toda $U \in \mathcal{U}$ se tiene que $A \in U^-$, es decir, $\emptyset \neq A \cap U \subseteq B \cap U$ y por ende, $B \in [\mathcal{U} : C] \cap \mathcal{B}$.

Por ser CL_F^* de Fréchet, existe $t \in {}^\omega\mathcal{B}$ tal que $A \in \lim_{CL_F^*} t$, y por la selección de $\mathcal{B}$, para cada $n < \omega$ hay $s_n \in \mathcal{A}$ con la propiedad de que $s_n \subseteq t_n$, así $s \in {}^\omega\mathcal{A}$. Finalmente, verifiquemos que $A \in \lim_{CL_+} s$.

Sea $C \in CK(X)$ tal que $A \in C^+$, observemos que C^+ es un abierto de CL_F^+ y por ende, existe $m < \omega$ que satisface $s[\omega \setminus m] \subseteq C^+$, es decir, para cada $n \in \omega \setminus m$ se satisface $s_n \subseteq C$; lo cual, sumado al hecho de que $t_n \subseteq s_n$ para toda $n < \omega$, nos da $t[\omega \setminus m] \subseteq C^+$.

Ahora, verifiquemos que CL_-^* es de Fréchet. Sean $\mathcal{A} \subseteq CL^*$ y $A \in \mathrm{cl}_{CL_-^*} \mathcal{A}$. Consideremos $\mathcal{B} := \{B \in CL^* : \exists D \in \mathcal{A}(B \subseteq D)\}$ y argumentemos que $A \in \mathrm{cl}_{CL_F^*} \mathcal{B}$. Para esto, tomemos $\mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}$ y $C \in CK(X)$ tales que $A \in [\mathcal{U} : C]$.

Si $\mathcal{U} = \emptyset$, por ser X de Hausdorff, resulta que $C \in \tau_X$ y en consecuencia, $C^- \in \tau_{CL^*_-}(A)$. Así, hay $D \in \mathcal{A}$ que satisface $D \cap C \neq \emptyset$, es decir, existe $x \in D \cap C$. Es claro que $\{x\} \in \mathcal{B} \cap C^+ = \mathcal{B} \cap [\mathcal{U} : C]$. Para el resto de la argumentación supongamos que $\mathcal{U} \neq \emptyset$.

Como $A \subseteq C$, para cada $U \in \mathcal{U}$ se satisface que $A \cap (U \cap C) = A \cap U \neq \emptyset$ y por ende, $\mathcal{W} := \bigcap\{(U \cap C)^- : U \in \mathcal{U}\} \in \tau_{CL^*_-}(A)$. En consecuencia, existe $D \in \mathcal{A}$ tal que $D \in \mathcal{W}$. Luego, para cada $U \in \mathcal{U}$ hay $x_U \in D \cap (U \cap C)$. De esta forma, $\{x_U : U \in \mathcal{U}\}$ es un elemento de $\mathcal{B} \cap [\mathcal{U} : C]$.

Así, por ser CL^*_F de Fréchet, hay $t \in {}^\omega\mathcal{B}$ que satisface $A \in \lim_{CL^*_F} t$ y por la definición de $\mathcal{B}$, para toda $n < \omega$ existe $s_n \in \mathcal{A}$ con $t_n \subseteq s_n$. En consecuencia, $s \in {}^\omega\mathcal{A}$. Verifiquemos que $A \in \lim_{CL^*_-} s$.

Sea $U \in \tau_X$ tal que $A \in U^-$. Naturalmente, $U^- \in \tau_{CL^*_F}(A)$ y por la convergencia de t, hay $m < \omega$ tal que $t[\omega \setminus m] \subseteq U^-$, es decir, para todo $n \in \omega \setminus m$ se tiene que $t_n \cap U \neq \emptyset$ y por ende, $s_n \cap U \neq \emptyset$. Finalmente, $s[\omega \setminus m] \subseteq U^-$. $\square$

El teorema previo también es cierto cuando se sustituye la propiedad de Fréchet por la secuencialidad, sin embargo, la prueba de tal resultado está fuera del alcance de este trabajo por lo le sugerimos al lector interesado en esta demostración consultar [2, pág. 269, Proposición 3.5].

BIBLIOGRAFÍA

[1] F. Casarrubias Segura y Á. Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología General*, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2015.

[2] C. Constantini, L. Holá y P. Vitolo, *Tightness, character and related properties of hyperspace topologies*, Topology and its Applications, 142, pp. 245-292, 2004.

[3] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[4] J. Fell, *A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space*, Proc. Amer. Math. Soc., 13, pp. 472-476, 1962.

[5] F. Hernández Hernández, *Teoría de Conjuntos*, segunda edición, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 13, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2003.

[6] Z. Li, *Selection principles of the Fell topology and the Vietoris topology*, Topology and its Applications, 212, pp. 90-104, 2016.

[7] R. Pichardo Mendoza y Á. Tamariz Mascarúa, *Álgebras booleanas y espacios topológicos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 40, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2017.

[8] D. Pompeiu, *Sur la continuité des fonctions de variables complexes* Ann. Fac. Sci. de Toulouse, pp. 265-315, 1905.

[9] A. Steen y A. Seebach, *Counterexamples in topology*, Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York, United States, 1970.

[10] L. M. Villegas, A. Sestier y J. Olivares, *Lecturas básicas en topología general*, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 28, Sociedad Matemática Mexicana, 2000.