



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EFFECTO DE DERIVADAS ALTAS EN EL
POTENCIAL INFLATÓNICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

PRESENTA:
MIGUEL ANGEL AMAYA REYES

TUTOR:
DR. ÁNGEL SÁNCHEZ CECILIO



Ciudad Universitaria, Ciudad de México, abril de 2022.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

Dedicado a

Agradecimientos

EFECTO DE DERIVADAS ALTAS EN EL POTENCIAL INFLATÓNICO

Resumen

En este trabajo se estudia el efecto de términos con derivadas superiores en el potencial efectivo de una teoría con un campo escalar del tipo ϕ^3 . Para ello, se calculó el potencial efectivo a 1-lazo de la teoría sin el término con derivadas superiores y, posteriormente, se calculó el mismo potencial tomando en cuenta el término con derivadas superiores. Esto se hizo para comparar ambos resultados. De esta comparación puede notarse que el efecto del término con derivadas altas es de “bajar” el mínimo del potencial con respecto al caso sin éste. Una vez obtenidos estos resultados, se incorpora un baño térmico a la teoría, encontrando así que, a medida que el valor de la temperatura crece, la simetría rota en el potencial se ve restaurada.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	VII
Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Ecuación de Klein-Gordon	3
1.2. Teoría Cuántica de Campos	6
1.2.1. Campo escalar	7
1.2.2. Teoría con derivadas de orden superior	15
2. Potencial Efectivo	17
2.1. Rompimiento Espontáneo de la Simetría	17
2.2. Potencial Efectivo	27
2.3. Potencial Efectivo a 1 Lazo	29
2.3.1. En el Vacío	30
2.3.2. Renormalización	35
3. Efecto de Derivadas Altas en el P. E.	41
3.1. Teoría escalar con derivadas de orden superior en el vacío . . .	41
3.2. Temperatura Finita	45
3.3. Resumación de Poisson	46
4. Resultados y Discusión	51
Bibliografía	61

Introducción

Durante años el ser humano ha intentado explicar, con cierta satisfacción, el inicio y la estructura del Universo como lo conocemos. Entre los diferentes modelos que se han propuesto, el más aceptado actualmente es el del Big Bang, pues encaja adecuadamente con las evidencias observables. Sin embargo, existen características que no pueden obtenerse únicamente con dicho modelo como la homogeneidad y la planicidad del Universo [1].

A estas dificultades se les conoce como el problema de condiciones iniciales ya que, para obtener las características antes mencionadas, la densidad de energía existente y el campo inicial de velocidades debieron cumplir con ciertos valores. Dichos valores no eran obtenidos únicamente mediante el modelo del Big Bang (que contaba con una expansión desacelerada) [2], por ello, era necesario extender el modelo para solucionar este problema. Fue en 1980 que se propuso un periodo de expansión acelerada llamada inflación cósmica, con el cual se satisfacían las condiciones necesarias para un universo plano y homogéneo [3].

La inflación debe ser un periodo en el que la gravedad actúe de forma repulsiva, de tal manera que si se toma la ecuación de Friedmann

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\varepsilon + 3p)a \quad (1)$$

es fácil notar que esta expansión acelerada se logra si

$$(\varepsilon + 3p) < 0. \quad (2)$$

Un buen candidato es un campo escalar, ya que la relación entre su densidad de energía

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3)$$

y presión

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (4)$$

cumple con la Ec. (2) cuando el campo es espacialmente homogéneo (sus derivadas espaciales no contribuyen) y tiene una energía cinética muy pequeña en comparación con su energía potencial. El campo que cumple con las características aquí mencionadas, es uno de los mejores candidatos para dotar al Universo de una etapa de expansión acelerada. A este campo escalar se le ha dado el nombre de inflatón [1].

El problema que se abordará en el presente trabajo de tesis puede ser relevante en el estudio de la física de universo temprano, en particular durante dicho periodo inflacionario [4] en donde, debido a la gran cantidad de energía, campos escalares tienen acceso a escalas muy pequeñas del espacio ($\sim 10^{-35}$ m, escala de Planck) donde los efectos de gravedad cuántica se vuelven importantes [5]. Estos campos, al sondear estas regiones, recolectan información sobre la estructura del espacio, la cual podría tener un efecto importante en la evolución posterior del universo [6] y haber dejado una huella en la radiación cósmica de fondo muy bien definida.

El modelo inflacionario sobre el que se trabaja es el de la inflación tibia, en el cual no es necesario que exista una etapa super fría entre la inflación y el periodo de recalentamiento [7]. De manera que, contrario a lo que proponen los primeros modelos de inflación, existe interacción del campo inflatónico con otros campos durante todo el proceso de expansión. Se propone que el campo inflatónico pasa por una transición de fase durante la cual va decayendo siendo una fuente de radiación que ayuda a mantener el equilibrio térmico durante el periodo inflacionario. En este modelo, el campo inflatónico tiene como ecuación de movimiento la siguiente

$$\ddot{\phi} + (3H + \Gamma)\dot{\phi} + V_{T,\phi} = 0,$$

en donde H es el parámetro de Hubble, $V_{T,\phi}$ es la derivada con respecto de ϕ del potencial efectivo y Γ es el término de fricción asociado a la radiación durante el periodo inflacionario. Para que el modelo de inflación tibia sea válido, es necesario que $\Gamma > 3H$.

Este trabajo de tesis se centra específicamente en el potencial efectivo del campo inflatónico ya que al estudiar los efectos de gravedad cuántica a través de modelos efectivos con derivadas altas, tipo Lee-Wick [8], y ver su efecto en el estado base de la teoría, se busca obtener una observable que nos permita verificar estas teorías.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se abordarán conceptos básicos y herramientas que serán útiles para abordar el problema de cómo surge la idea de utilizar derivadas altas en teoría cuántica de campos.

1.1. Ecuación de Klein-Gordon

Como sabemos, el mundo cuántico se creyó bien descrito durante mucho tiempo por la ecuación de Schrödinger. Esto cambió cuando el mismo Schrödinger intentó unir a la mecánica cuántica con la relatividad especial [9], es decir, describir a partículas cuánticas que viajan con velocidades cercanas a las de la luz. Para ilustrar un poco, veamos brevemente cómo es la transición del Hamiltoniano clásico a la ecuación de Schrödinger.

Partiendo del Hamiltoniano de una partícula libre en mecánica clásica

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (1.1)$$

donde H es el Hamiltoniano, \mathbf{p} es el momento y m la masa de la partícula. Ahora, H y \mathbf{p} se promueven a operadores, esto es ¹

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \hat{H} = i\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{p} &\longrightarrow \hat{\mathbf{p}} = -i\nabla. \end{aligned} \quad (1.2)$$

¹La notación estará dada en unidades naturales $G = \hbar = c = 1$

De esta manera, al sustituir estas expresiones en el Hamiltoniano de la Ec. (1.1) se obtiene la ecuación de Schrödinger para una partícula libre

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t), \quad (1.3)$$

donde $\phi(\mathbf{x}, t)$ es la función de onda de la partícula sobre la cual actúan los operadores \hat{H} y \hat{p} . Esta ecuación sirve para describir partículas a bajas velocidades, pero no puede hacer lo mismo con partículas relativistas, ya que no es invariante de Lorentz y esto puede notarse debido a que las derivadas espaciales y temporales son de diferente orden.

Para el caso relativista debemos tomar la relación de dispersión de una partícula relativista libre con momento p y masa m , esto es

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (1.4)$$

de modo que al usar la Ec. (1.2) en la Ec. (1.4), obtenemos

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = \sqrt{-\nabla^2 + m^2} \phi. \quad (1.5)$$

Pero, de nuevo, esto no es covariante y por si fuera poco, se tiene un operador diferencial dentro de una raíz, algo que no parece muy práctico ya que esa operación no está bien definida [9].

Para evitar estos problemas, se elevan al cuadrado ambos lados de la relación de dispersión en (1.4), obteniendo así

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \quad (1.6)$$

y de nuevo sustituyendo (1.2) en la expresión anterior se obtiene

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2) \phi. \quad (1.7)$$

Esta ecuación puede ser escrita de forma compacta de la siguiente manera ²

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0, \quad (1.8)$$

²Donde se ha empleado la notación relativista $\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$, $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$ y la convención de suma de Einstein $\partial^\mu \partial_\mu = \partial^0 \partial_0 + \partial^1 \partial_1 + \partial^2 \partial_2 + \partial^3 \partial_3$.

La Ec. (1.8) es conocida como la ecuación de Klein-Gordon. Dicha ecuación tiene como solución más simple una onda plana

$$\phi(x, t) = Ne^{-ip \cdot x}, \quad (1.9)$$

la cual describe a una partícula libre relativista con masa m y cuadrimomento $p^\mu = (\pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \vec{p})$.

Esta ecuación fue descartada por un tiempo para describir partículas relativistas debido a que, al momento de incorporar la Ec. (1.6) también se incorporan soluciones con energía negativa

$$p^0 = E = -\sqrt{p^2 + m^2}, \quad (1.10)$$

las cuales no tienen sentido físico para partículas libres. Asimismo se observó que la Ec. (1.8) daba origen a una densidad de probabilidad que no es positiva definida, por lo que la interpretación probabilística de la función de onda ya no podía aplicarse. Para observar esto último, tomemos la ecuación (1.8) y su conjugado, esto es

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi &= 0 \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi^* &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Si cada una de estas ecuaciones las multiplicamos por la izquierda por su campo conjugado, las restamos entre sí e integramos por partes, obtenemos

$$\partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) = 0. \quad (1.12)$$

Si al objeto dentro del paréntesis lo identificamos como la cuadricorriente J^μ , esto es

$$\begin{aligned} J^\mu &\equiv \phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^* \\ &= (j^0, \mathbf{J}) = (\rho, \mathbf{J}), \end{aligned} \quad (1.13)$$

con ρ la densidad de probabilidad y \mathbf{J} la corriente de probabilidad, tenemos que

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.14)$$

la cuál es la ecuación de continuidad.

Una vez obtenida la cuadricorriente J^μ , veamos con detalle la componente j^0 , asociada a la densidad de probabilidad, dada por

$$j^0 = \rho = i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right), \quad (1.15)$$

de modo que al sustituir la solución (1.9), obtenemos

$$\rho = 2|N|^2 E. \quad (1.16)$$

De aquí, podemos observar que la energía, al tener valores tanto positivos como negativos, provoca que ρ no sea positiva definida y, como sabemos, no existen probabilidades negativas y por tanto ρ , o no podía interpretarse como una densidad de probabilidad o había que resolver el problema de las energías negativas [9].

Estos problemas fueron retomados un par años más tarde por Dirac, quien resolvió el problema de que la densidad de probabilidad fuera positiva definida. Sin embargo, el problema de la existencia de estados con energía negativa seguía presente. Para resolver esto Dirac debió darle una interpretación diferente a la que se tenía, proponiendo un mar repleto de partículas con energía negativa al cuál, por principio de exclusión de Pauli, más partículas con energías negativas no pueden acceder. Dicha interpretación, a pesar de haber resuelto los problemas antes mencionados, no era del todo válida, pues estas ideas no podían ser aplicadas a bosones. Sin embargo, estas ideas son las precursoras de la teoría cuántica de campos que se abordará en la siguiente sección [10].

1.2. Teoría Cuántica de Campos

Como ya se mencionó, el mar de Dirac no resolvió del todo los problemas que se tenían hasta el momento al querer unificar la mecánica cuántica con la relatividad especial, esto debido a que aún tenía ciertas inconsistencias físicas al querer integrar las ideas de la relatividad general a la teoría cuántica (para más detalles ver capítulo 1 de la ref. [11]). A partir de estos problemas fue posible entender que, tanto la Ec. (1.8) como la de Dirac no podían describir a una sola partícula relativista ya que se tenían resultados que violaban la causalidad. Con esta premisa nació la teoría cuántica de campos, de la cuál se hará un breve resumen a continuación, enfóndonos al caso particular de una teoría de campo escalar.

1.2.1. Campo escalar

Hoy se sabe que la Ec. (1.8) es una ecuación de movimiento de una teoría que describe a un campo escalar. Sin embargo, para llegar a esa conclusión debió darse un salto conceptual fuerte en el cuál se pasa de considerar a ϕ como la función de onda de una sola partícula a considerarlo como un operador cuántico [12].

Ahora recordemos que para una teoría de campos clásica la acción es

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (1.17)$$

en donde \mathcal{L} es la densidad Lagrangiana de la teoría³.

La dinámica de una teoría de campo está definida por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial_\mu \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (1.18)$$

Para el caso específico que estamos estudiando, se tiene que la acción es

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right], \quad (1.19)$$

cuya ecuación de movimiento es la Ec. (1.8).

A partir de este formalismo puede estudiarse la teoría profundamente. Sin embargo, para dar el salto al mundo cuántico es necesario trabajar en el formalismo Hamiltoniano [13]. Esto se obtiene fácilmente a partir del Lagrangiano mediante una transformada de Legendre de la forma

$$H = \int d^3x \left[\pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \right] = \int d^3x \mathcal{H}, \quad (1.20)$$

con \mathcal{H} es la densidad hamiltoniana y π el momento canónico conjugado a la coordenada generalizada ϕ , cuya definición es

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)}. \quad (1.21)$$

³Para fines prácticos a partir de aquí se le llamará Lagrangiano. También nótese que el Lagrangiano depende únicamente de la primera derivada de la variable ϕ ya que este punto cobrará relevancia en futuras secciones.

Para cuantizar la teoría, el siguiente paso es promover a π y ϕ como operadores

$$\pi \rightarrow \hat{\pi} \quad (1.22)$$

$$\phi \rightarrow \hat{\phi}. \quad (1.23)$$

Al haber promovido el campo a un operador, los coeficientes asociados a la superposición de sus soluciones también serán operadores y estarán asociados a los operadores de creación y aniquilación de la misma manera en la que se hace en mecánica cuántica al cuantizar el oscilador armónico, pero con la función de crear o aniquilar partículas.

En el caso específico del campo de Klein-Gordon la solución general a esa ecuación es una superposición de soluciones tal que el campo cuantizado está dado por

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (1.24)$$

y para el caso del momento conjugado se tiene

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}) = -i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}), \quad (1.25)$$

donde $\omega_{\mathbf{p}}$ no es más que la relación de dispersión de una partícula libre relativista (1.4).

Una vez que se tienen estos dos elementos, siguiendo las ideas de la mecánica cuántica, se postula la relación de conmutación entre ambos como sigue

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{x}') \right] &= \int \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}} \left(\left[\hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{p}'} \right] - \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{-\mathbf{p}'}^\dagger \right] \right) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}')} \\ &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (1.26)$$

en donde se ha reescrito

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \rightarrow \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (1.27)$$

y de analizar la ecuación (1.26) se desprende que [13]

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (1.28)$$

Asimismo se postula que

$$\left[\hat{\phi}_a(\vec{x}), \hat{\phi}_b(\vec{y}) \right] = \left[\hat{\pi}^a(\vec{x}), \hat{\pi}^b(\vec{y}) \right] = 0. \quad (1.29)$$

De esta manera, la teoría de Klein-Gordon queda cuantizada.

Hasta este punto, se sabe que las excitaciones del campo ϕ en el vacío dan lugar a la creación y aniquilación de partículas y antipartículas. Ahora, hay que definir un objeto que nos de información acerca de dichas excitaciones del sistema. Estos objetos son los propagadores. Para hablar de éstos, debe definirse el estado base de la teoría en turno, $|\Omega\rangle$, de tal manera que

$$\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle, \quad (1.30)$$

es el valor esperado del campo ϕ en el estado base de la teoría.

Debe notarse que para el caso de una teoría libre se tiene que el estado base es el vacío y es denotado como $|0\rangle$.

Un aspecto importante que se debe conocer en una teoría de campo son los procesos de dispersión, los cuales, se pueden estudiar por medio de la matriz **S**. Los coeficientes de dicha matriz están relacionados con las funciones de correlación de n -puntos [12]. Así, toda la información de una teoría está codificada en un conjunto de correladores con ordenamiento temporal [11]

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \left[\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \right] | \Omega \rangle, \quad (1.31)$$

que no son más que la amplitud de probabilidad de que una partícula sea creada en el estado base de la teoría en el punto x_n , interactúe con el sistema y sea absorbido por el mismo en el punto x_1 y ver si el sistema permanece en su estado base.

En la Ec. (1.31), $T[\phi(x_1)\dots\phi(x_n)]$ se refiere al producto temporalmente ordenado, el cuál nos permite tomar en cuenta el momento en el que cada evento ocurre. Es decir, toma en cuenta todas las permutaciones entre los campos de tal forma que ningún proceso viole la causalidad, esto es, siguiendo el orden en el que ocurren. Matemáticamente, el producto temporalmente ordenado de dos campos escalares se define de la siguiente manera

$$T \left[\hat{\phi}(x^0) \hat{\phi}(y^0) \right] = \begin{cases} \hat{\phi}(x^0) \hat{\phi}(y^0) & x^0 > y^0 \\ \hat{\phi}(y^0) \hat{\phi}(x^0) & x^0 < y^0 \end{cases}, \quad (1.32)$$

tal que se asegura que los primeros campos estén a la derecha y los últimos a la izquierda.

Así, el propagador está dado por

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \langle \Omega | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | \Omega \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle \Omega | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | \Omega \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle \Omega | \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x) | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Esto último en el caso de una teoría con interacciones, pues recordemos que en el caso de una teoría libre se escribe $|0\rangle$ en lugar de $|\Omega\rangle$ en ambos costados. El primer término de la última igualdad en la Ec. (1.33) se refiere al caso en que y^0 es anterior a x^0 , es decir, se crea una partícula en y^0 y se propaga hasta x^0 , en donde se aniquila. El segundo término se refiere al caso contrario. Así, se tiene que, en general

$$G(x, y) = \langle 0 | T \left[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \right] | 0 \rangle = i\Delta_F(y - x). \quad (1.34)$$

Existe otro formalismo para llevar a cabo la segunda cuantización de una teoría, el formalismo de integral de trayectoria, en el cual se constituye la funcional generatriz $Z[J]$ como la amplitud de transición para que el sistema pase del vacío a vacío, es decir, que, en presencia de una fuente, el sistema comience con cero partículas y termine con cero partículas. Por otro lado, J es la fuente auxiliar que nos ayuda a excitar al sistema. Dicha funcional generatriz se define de la siguiente manera [9]

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \left(S[\phi] + \int d^4x J\phi(x) \right) \right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \{ iS[\phi] \}}, \quad (1.35)$$

donde $S[\phi]$ es la acción dada por la Ec. (1.17) y J es una fuente del campo ϕ . Cabe destacar que esta funcional generatriz es fundamental, ya que, al tener el significado que se mencionó arriba, a partir de ella puede calcularse el propagador completo (incluyendo diagramas conectados y desconexos) de la teoría estudiada. Antes de escribir la expresión para el propagador hay que evidenciar algunos artilugios matemáticos que nos ayudarán también más adelante [14].

Primero, hay que notar que

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \left[i \int d^4y \mathcal{L}_0(\phi, \partial\phi) + i \int d^4y \phi(y) J(y) \right] = \phi(x). \quad (1.36)$$

Así, podemos afirmar que

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left\{ i \int d^4y \mathcal{L}_0(\phi, \partial\phi) + i \int d^4y \phi(y) J(y) \right\} = \phi(x) \exp \left\{ i \int d^4y \mathcal{L}_0(\phi, \partial\phi) + i \int d^4y \phi(y) J(y) \right\}. \quad (1.37)$$

De esta manera, podemos escribir una expresión para el propagador en términos de $Z(J)$, como

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (1.38)$$

Entonces, para el caso de una teoría libre se tiene que

$$\frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = \langle 0 | T [\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n)] | 0 \rangle, \quad (1.39)$$

en donde

$$Z_0[J] = \exp \left[-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right]. \quad (1.40)$$

La teoría para un campo escalar libre nos es útil como introducción a la teoría cuántica de campos, sin embargo, muy pocos de estos casos -o ninguno- se presenta en el mundo real [9]. Lo que nos interesa es estudiar cómo interactúan los campos entre sí. Esto a su vez puede complicarse tanto como uno desee pero puede elegirse la manera más sencilla de abordar el problema: la teoría de perturbaciones.

En teoría de perturbaciones el primer paso para describir teorías con interacciones consiste en separar el Lagrangiano (o Hamiltoniano) en dos partes: una describiendo a la teoría libre y otra que contiene a los términos de interacción, de tal manera que la evolución temporal de los estados está dada mayormente por la parte que describe las interacciones, mientras que la de los operadores se debe a \mathcal{H}_0 [9]. También hay que tener en cuenta que al agregar estas interacciones, no solo se modifica la forma en la que se trate la teoría, sino que también la masa de las partículas creadas -y aniquiladas- será diferente [9] y, como se mencionó en la sección anterior, el estado base de la teoría deja de ser el mismo que aquel para la teoría libre.

Para mostrar cómo funciona la teoría de perturbaciones, trabajaremos con el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I. \quad (1.41)$$

En este punto es importante recordar la definición de S que se dio en la Ec. (1.17), que en este caso no cambia a pesar del término con interacciones. Por otro lado, si uno utiliza esa definición en la Ec. (1.35), en el caso de una teoría libre ($\mathcal{L}_I = 0$) se tiene

$$Z_0[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\{-i \int [\frac{1}{2}\phi(\square + m^2 - i\varepsilon)\phi - \phi J] dx\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp[-i \int \frac{1}{2}\phi(\square + m^2 - i\varepsilon)\phi dx]}, \quad (1.42)$$

que es equivalente a la Ec. (1.40) y de las cuáles ya vimos cómo calcular su propagadores. A partir de aquí, la meta en esta sección es saber cómo expresar a $Z[J]$ en términos de $Z_0[J]$ para poder utilizar los procedimientos vistos anteriormente para calcular propagadores.

Como vimos en la Ec. (1.38), para hacer este tipo de cálculos es necesario derivar con respecto de J , lo cual es más fácil hacer con la Ec. (1.40) por lo que debemos buscar una expresión parecida a esa pero para el caso de una teoría con interacciones. Para ello, habrá que hacer algunas adecuaciones a la notación. De esta manera, reescribimos la ecuación (1.35) de la siguiente manera

$$Z[J] = \frac{\mathcal{Z}[J]}{\mathcal{Z}[0]}, \quad (1.43)$$

escrita de esta forma, podemos trabajar únicamente con el numerador, que es la parte que depende de la fuente J , ya que es fácil notar que el denominador es la misma funcional $\mathcal{Z}[J]$ cuando $J = 0$.

Ahora, utilizando la definición en la Ec. (1.17) en \mathcal{Z} , se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_I(\phi)) + i \int d^4x J\phi \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I(\phi) \right] \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0(\phi) + J\phi) \right]. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Debe notarse que en la última línea de la Ec. (1.44) se ha separado $\mathcal{Z}[J]$ en dos partes. La segunda de ellas es idéntica a la funcional generatriz (sin normalizar) de una teoría libre $\mathcal{Z}_0[J]$, la cual puede observarse en el numerador de la Ec. (1.42).

Para continuar es necesario observar que la primera exponencial en la Ec. (1.44) nada tiene que ver con J , por lo que hay que utilizar la Ec. (1.37) para

calcular los propagadores como se muestra en la Ec. (1.38). De esta manera

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I(\phi) \right] \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0(\phi) + J\phi) \right] \\
&= \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0(\phi) + J\phi) \right] \quad (1.45) \\
&= \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] \mathcal{Z}_0[J].
\end{aligned}$$

La única manera de tratar con el término de interacción es mediante una serie de potencias en la constante de acoplamiento λ . A esto se le llama teoría de perturbaciones.

Así, podemos escribir a $\mathcal{Z}[J]$ de la siguiente manera

$$\mathcal{Z}[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right\}^n \mathcal{Z}_0[J]. \quad (1.46)$$

Como ejemplo, podemos tomar a una teoría con $\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$. Sustituyendo este \mathcal{L}_I en (1.45), se tiene

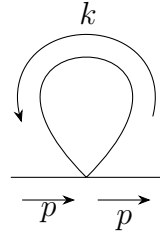
$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[J] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right)^4 \right\}^n \mathcal{Z}_0[J] \\
&= \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 dz + O(g^2) \right] \exp \left[-\frac{i}{2} J(x) \Delta_F(x-y) J(y) dx dy \right] \mathcal{Z}_0[0] \quad (1.47)
\end{aligned}$$

Usando esta expansión perturbativa para la teoría ϕ^4 , las reglas de Feynman en el espacio de momentos son las siguientes [12]

1. Por cada propagador $\begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \end{array} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$;
2. Por cada vértice $\begin{array}{c} \longrightarrow \bullet \longleftarrow \longleftarrow \longleftarrow \end{array} = -i\lambda$;
3. Por cada punto externo $x \bullet \begin{array}{c} \longleftarrow \\ p \end{array} = e^{-ip \cdot x}$;
4. Imponer la conservación del momento en cada uno de los vértices;

5. Integrar entre cada momento indeterminado: $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$;
6. Dividir por el factor de simetría.

De tal forma que la primera corrección al propagador de la teoría se puede representar diagramáticamente y, haciendo uso de las reglas de Feynman, asociarle una expresión analítica



$$= -i\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.48)$$

Haciendo un conteo de potencias de k en la expresión anterior, puede observarse que ésta diverge en la región en donde k tiende a infinito. Por lo tanto, la integral en la Ec. (1.48) es divergente. A estas divergencias se les conoce como divergencias ultravioleta y son usuales cuando se trabaja con teorías de campos que describen objetos puntuales que llevan características físicas como masa, momento y energía, e interactúan en un punto. En el espacio de posiciones, dichas divergencias provienen del límite de distancias pequeñas, es decir, cuando dos o más vértices coinciden en el espacio-tiempo [14]. Como se verá más adelante, estas divergencias pueden ser eliminadas reinterpretando y ajustando algunos parámetros en el Lagrangiano. A este último proceso se le llama renormalización.

Específicamente, en este trabajo se abordará una corrección a un lazo, en el cual las integrales sobre k no convergen para k 's muy grandes, por lo que será necesario regularizarlas y posteriormente renormalizarlas para poder estudiar esta región.

La divergencia ultravioleta en la Ec. (1.48) se controla introduciendo un corte de energía Λ . También pueden controlarse con la prescripción de Pauli-Villars, la cual consiste en hacer el siguiente reemplazo

$$\frac{i}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{i}{p^2 - m^2} - \frac{i}{p^2 - M^2}, \quad (1.49)$$

donde M^2 es una escala de energía muy grande comparada con m [12]. Esta forma de regularizar la teoría rompe con la hermiticidad de las interacciones,

no conserva la probabilidad y por lo tanto viola la unitariedad.

Lee y Wick en 1969 propusieron una camino para lidiar con este comportamiento ultravioleta, la idea fue simplemente promover el término $\frac{i}{p^2 - M^2}$, de la propuesta de Pauli-Villars, a un grado de libertad de la teoría. Esta idea modifica radicalmente el propagador de la teoría que ahora será de la forma $\frac{i}{p^2 - \frac{p^4}{M^2} - m^2 + i\varepsilon}$, por lo tanto, el comportamiento ultravioleta ahora es $\frac{1}{p^4}$ y no $\frac{1}{p^2}$ como se tenía antes.

La forma del nuevo propagador sugiere que la teoría fundamental ahora depende de órdenes superiores de derivadas del campo, tal como se ilustra en la siguiente sección.

1.2.2. Teoría con derivadas de orden superior

Hasta este punto, se han mencionado teorías que, a lo más, tienen derivadas de primer orden, para las cuales sabemos calcular sus ecuaciones de Euler-Lagrange. Sin embargo, en este trabajo nos interesa estudiar una teoría que cuenta con términos de derivadas de segundo orden, por lo que debemos definir cuáles son las ecuaciones de E-L para teorías de este tipo. Para esto, debe notarse que una teoría tal tendrá una acción

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu^2 \phi). \quad (1.50)$$

Ahora, minimizando la acción $\delta S = 0$, de tal manera que

$$S = \int [\tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L}] = 0 \quad (1.51)$$

con

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu(\phi + \delta\phi), \partial^2(\phi + \delta\phi)), \quad (1.52)$$

se procede a hacer una expansión de Taylor sobre la variación y se obtiene

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^2 \phi)} \partial^2(\delta\phi) \right] \delta\phi = 0. \quad (1.53)$$

Por último, si integramos por partes tres veces y, con ayuda del teorema de la divergencia, se obtiene la siguiente ecuación

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) + \partial^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^2 \phi)} \right) \right] = 0. \quad (1.54)$$

De esta manera, hemos obtenido que las ecuaciones de E-L para una teoría con términos de derivadas de segundo orden son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) + \partial^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^2 \phi)} \right) = 0 \quad (1.55)$$

Una teoría con derivadas de orden superior sería, por ejemplo, una con densidad Lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2M^2} (\partial^2 \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{g}{n!} \phi^n, \quad (1.56)$$

la cual es conocida como una teoría de Lee-Wick (L-W).

En esta teoría el comportamiento en el sector ultravioleta encuentra solución ya que el propagador modificado (1.57) por los términos extras ahora, en lugar de tener un solo polo como en la teorías anteriores, tiene dos, los cuales pueden observarse en la e. (6) de la ref. [15]; uno de ellos está asociado al campo de estudio y el otro a un campo de L-W masivo [8]. Es decir, el término cinético extra es el regulador de la teoría, ahora promovido como un grado libertad extra de la misma

$$G(p) = \frac{i}{-\frac{p^4}{M^2} + p^2 - m_{eff}^2}, \quad (1.57)$$

de donde observamos que si $M \rightarrow \infty$, esta expresión se reduce al propagador del campo escalar ya conocido.

Sin embargo, uno puede darse cuenta de que el propagador del campo L-W tiene un signo erróneo, el cuál lleva a normas negativas en el espacio de Hilbert, y esto a su vez tiene como resultados energías y probabilidades negativas [15]. Esto quiere decir que el campo de L-W no vive en el mismo espacio de Hilbert que el campo original, es decir, son modos fantasmas. Lee y Wick dieron la interpretación de que estos campos poseen una masa pesada y tienen que decaer en partículas en la capa de masa. También puede verse que el propagador modificado en el límite en el que se tienen altas energías tiene términos que van como p^4 , lo que ayuda “mejorar” el comportamiento de la teoría en este rango, reduciendo el grado de divergencia en las correcciones radiativas [16].

Capítulo 2

Potencial Efectivo

El potencial efectivo juega un papel importante en la teoría cuántica de campos ya que este, al incorporar correcciones radiativas, nos ayuda a conocer el estado base de la teoría así como a estudiar sus repercusiones sobre posibles observables, como la masa de las partículas. En este capítulo, en el marco del mecanismo de Higgs, estudiamos el potencial de Higgs a nivel árbol, así como su corrección a un lazo dentro de la teoría estándar (sin derivadas de orden superior).

2.1. Rompimiento Espontáneo de la Simetría¹

Consideremos un campo escalar complejo con densidad Lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \\ &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(|\phi|)\end{aligned}\tag{2.1}$$

con $|\phi| = \phi^\dagger \phi$, $\lambda > 0$ y $m^2 > 0$. En este análisis el término de masa lo trabajamos como un término de interacción dentro del potencial, al cual podemos asociarle el diagrama de Feynman [12]

$$-\text{X}-\tag{2.2}$$

Ahora, escribimos

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma(x) + i\chi(x)),\tag{2.3}$$

¹Esta sección sigue de cerca las notas mostradas en [17].

en donde $\sigma(x)$ y $\chi(x)$ son campos reales. Sustituyendo (2.3) en (2.1), obtenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi) - \frac{1}{2} m^2 (\sigma^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{16} (\sigma^2 + \chi^2)^2, \quad (2.4)$$

en donde podemos observar que esta densidad Lagrangiana describe dos campos escalares reales de Klein-Gordon que interactúan entre ellos y consigo mismos. Esto último surge de analizar el último término de (2.4), conocido como el término de interacción.

Los Lagrangianos en las ecs. (2.1) y (2.4), además de ser equivalentes, también son invariantes ante las transformaciones globales del tipo

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi' = e^{-i\theta} \phi, \\ \phi^\dagger &\longrightarrow \phi'^\dagger = e^{i\theta} \phi^\dagger, \end{aligned}$$

en donde θ es un parámetro real. A este tipo de transformaciones se les conoce como transformaciones de simetría interna. Para verificar dicha simetría, basta con insertar las transformaciones de la Ec. (??) en cualquiera de los dos Lagrangianos de las ecs. (2.1) y (2.4). Por comodidad, las insertaremos en la Ec. (2.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \partial_\mu (e^{i\theta} \phi^\dagger) \partial^\mu (e^{-i\theta} \phi) - m^2 (e^{i\theta} \phi^\dagger) (e^{-i\theta} \phi) - \frac{\lambda}{4} [(e^{i\theta} \phi^\dagger) (e^{-i\theta} \phi)]^2 \\ &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

en donde las derivadas no actúan sobre las exponenciales debido a que θ es un parámetro constante independiente de las coordenadas espaciotemporales. Una vez mostrada esta propiedad del Lagrangiano, observemos que el Hamiltoniano de esta teoría es de la forma

$$H = \int d^3x \left[\pi^\dagger \pi + \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \right], \quad (2.6)$$

del cual podemos observar que, para configuraciones con campo constante. Dado que el mínimo de energía del sistema coincide con el mínimo del potencial, la localización de este punto la encontramos usando que

$$\frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger} = 0 = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (2.7)$$

es decir,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \phi} &= \left[m^2 + \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi) \right] \phi^\dagger = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger} &= \left[m^2 + \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi) \right] \phi = 0,\end{aligned}$$

o en términos de los campos σ y χ , tenemos

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0 = \frac{\partial V}{\partial \chi}, \quad (2.8)$$

de donde se desprenden

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \sigma} &= \left[m^2 + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \chi^2) \right] \sigma = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \chi} &= \left[m^2 + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \chi^2) \right] \chi = 0.\end{aligned}$$

De lo anterior podemos observar que al ser una suma de dos términos positivos, pues $\lambda > 0$ y $m^2 > 0$, las condiciones en la Ec. (2.7) y la Ec. (2.8) solo se cumplen cuando

$$\phi_c = \phi_c^\dagger = 0, \quad \text{o equivalentemente} \quad \sigma_c = \chi_c = 0, \quad (2.9)$$

donde el subíndice c denota un campo clásico.

Ahora, de mecánica clásica sabemos que una perturbación alrededor del mínimo de un potencial es estable si la curvatura del potencial es positiva, lo cual se cumple para este caso, pues $\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} > 0$ y $\frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} > 0$.

De la mecánica cuántica sabemos que el estado base de la teoría se define de tal manera que

$$\phi_c = \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = 0, \quad \phi_c^\dagger = \langle 0 | \phi^\dagger(x) | 0 \rangle = 0, \quad (2.10)$$

$$\text{o,} \quad \sigma_c = \langle 0 | \sigma(x) | 0 \rangle = 0, \quad \chi_c = \langle 0 | \chi(x) | 0 \rangle = 0. \quad (2.11)$$

y una teoría de perturbaciones desarrollada alrededor de un estado tal es estable.

Existen otras elecciones de parámetros λ y m^2 en las cuales el vacío no es tan simple, por ejemplo, consideremos una Lagrangiana parecida a (2.1) pero con un signo cambiado en el término de masa, esto es

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (2.12)$$

la cual, en términos de los campos σ y χ , tiene la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi) + \frac{1}{2} m^2 (\sigma^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{16} (\sigma^2 + \chi^2)^2. \quad (2.13)$$

Estas dos densidades Lagrangianas son, al igual que las ecs. (2.1) y (2.4), invariantes bajo transformaciones de fase globales de la Ec. (??). Este cambio de signo no afecta la simetría de la teoría.

Para analizar con detalle el efecto del cambio de signo en el término de masa del Lagrangiano, empecemos notando que de la teoría descrita por la Ec. (2.12), si se hace $\lambda = 0$ y se calculan las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} &= m^2 \phi, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi^\dagger)} &= \partial^\mu \phi, \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi^\dagger)} \right) &= m^2 \phi - \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0, \end{aligned}$$

de modo que la ecuación de movimiento para esta teoría es

$$(\square - m^2) \phi(x) = 0. \quad (2.14)$$

Si ahora reemplazamos $\square = (i\hat{k}^\mu)^2$, con $\hat{k}^\mu = i\partial^\mu$, es fácil notar que la relación de dispersión para esta teoría es

$$\begin{aligned} \Rightarrow k^2 + m^2 &= 0 \\ \Rightarrow m^2 &= -k^2, \end{aligned}$$

de modo que para una partícula con energía k_0 y momento $\mathbf{k} = 0$ le corresponde a una masa imaginaria. Además, para una partícula con momento

$\mathbf{k} \neq 0$ tendrá como consecuencia inmediata que el grupo de velocidades para el movimiento de dicha partícula excederá la velocidad de la luz ($c = 1$)

$$\frac{\partial k^0}{\partial |\mathbf{k}|} = \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} > 1 \quad (2.15)$$

lo cual nos llevaría a una reformulación completa de la física.

Debido a todos estos problemas, el término en el Lagrangiano con el signo cambiado en m^2 no puede identificarse como un término de masa, sin embargo, este termino podemos tratarlo como un término del potencial de la teoría en la Ec. (2.12), tal como lo hicimos antes, esto es

$$V = -m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (2.16)$$

Los puntos extremos de este potencial los encontramos analizando el punto en el cual la derivada se anula, de donde obtenemos, en términos de σ y χ ,

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = -m^2 \sigma + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \chi^2) \sigma = \sigma \left[-m^2 + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \chi^2) \right] = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \chi} = -m^2 \chi + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \chi^2) \chi = \chi \left[-m^2 + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \chi^2) \right] = 0. \quad (2.18)$$

De las ecs. (2.17) y (2.18) observamos que ahora hay dos conjuntos de soluciones para estas ecuaciones, uno de ellos

$$\sigma_c = 0 = \chi_c, \quad (2.19)$$

que sería la misma que en el caso en que no se cambia de signo al término de masa. El segundo conjunto que obtenemos es

$$-m^2 + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \chi^2) = 0, \quad (2.20)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 + \chi^2 = \frac{4m^2}{\lambda}. \quad (2.21)$$

En esta última ecuación, si fijamos a $\chi_c = 0$, obtenemos

$$\sigma_c = \pm \frac{2m}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.22)$$

Para determinar si los valores extremos que encontramos del potencial corresponden con un máximo o mínimo verdadero, analicemos las segundas derivadas de (2.16). Primero, utilizando la solución (2.19), obtenemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = -m^2, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} = -m^2, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial \phi} = 0. \quad (2.25)$$

Y para la solución (2.22), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} &= -m^2 + \frac{3\lambda}{4} \left(\frac{2m}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 = -m^2 + 3m^2 = m^2 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} &= -m^2 + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{2m}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 = -m^2 + m^2 = 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial \chi} &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Así nos damos cuenta que, de las dos soluciones, la dada por la Ec. (2.19) corresponde a un máximo local, mientras que la dada por la Ec. (2.22) es mínimo verdadero de este potencial, es decir, el mínimo está en

$$2\phi_c^\dagger \phi_c = \sigma^2 + \chi^2 = \frac{4m^2}{\lambda}. \quad (2.27)$$

Para conocer el valor del potencial en los puntos extremos, insertamos las soluciones de las ecs. (2.19) y (2.21) en la Ec. (2.16), obteniendo

$$\begin{aligned} V(\sigma_c = \chi_c = 0) &= 0 \\ V(\sigma^2 + \chi^2 = \frac{4m^2}{\lambda}) &= -\frac{m^2}{2} \left(\frac{4m^2}{\lambda} \right) + \frac{\lambda}{16} \left(\frac{4m^2}{\lambda} \right)^2 \\ &= -\frac{2m^4}{\lambda} + \frac{m^4}{\lambda} = -\frac{m^4}{\lambda}, \end{aligned}$$

y, efectivamente, la segunda solución nos lleva a una menor energía. Todo este comportamiento puede verse de manera más sencilla en la fig. 2.1, en donde podemos notar, tanto por la gráfica como por la Ec. (2.21), el

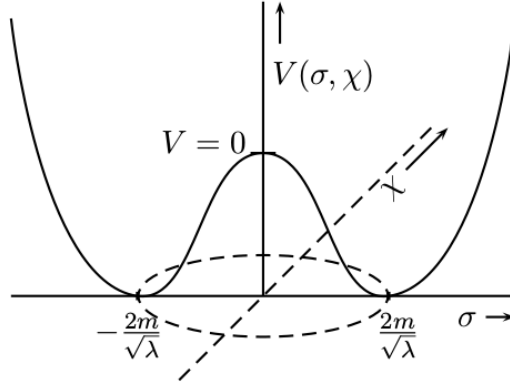


Figura 2.1: Gráfica del potencial de la ecuación (2.16). (Imagen extraída de [17].)

verdadero mínimo es un círculo de radio $2m/\sqrt{\lambda}$, del cual cada punto es un mínimo verdadero del potencial, es decir, hay una infinidad de mínimos sobre este círculo y todos ellos están relacionados por una transformación como la de la Ec. (??). Como la teoría tiende a localizarse en el punto de menor energía potencial, al elegir un punto de entre todos estos para describir a la teoría alrededor de dicho punto mediante teoría de perturbaciones, se está rompiendo la simetría espontáneamente. Es importante notar que la acción de la teoría es invariante ante estas transformaciones pero el estado base de ésta no. Esto puede ser contrastado con el caso en donde un término de interacción en el Hamiltoniano rompe la simetría explícitamente [17]. En una teoría cuántica de campos, dicho rompimiento puede ser introducido de la siguiente manera.

Como hemos dicho antes, cualquier elección del mínimo en el potencial se traduce en las propiedades del vacío de dicha teoría. Por ejemplo, si se elige el mínimo de la Ec. (2.27) de tal forma que corresponda al punto

$$\sigma_c = \frac{2m}{\sqrt{\lambda}}, \quad \chi_c = 0,$$

entonces, en una teoría cuántica de campos esto corresponderá a

$$\langle 0|\sigma(x)|0\rangle = \frac{2m}{\sqrt{\lambda}}, \quad \langle 0|\chi(x)|0\rangle = 0. \quad (2.28)$$

Para analizar con detalle la simetría del estado base de la teoría, recordemos

que según el teorema de Noether, una carga conservada Q es generadora de transformaciones de simetría infinitesimales, las cuales pueden ser expresadas por medio de conmutadores, en este caso

$$-i\epsilon [Q, \sigma(x)] = \delta\sigma(x) = \epsilon\chi(x), \quad (2.29)$$

$$-i\epsilon [Q, \chi(x)] = \delta\chi(x) = -\epsilon\sigma(x). \quad (2.30)$$

Entonces al tomar el valor de expectación del vacío de cada uno de los campos transformados infinitesimalmente por la carga Q , tenemos

$$\langle 0 | \delta\chi(x) | 0 \rangle = -i\epsilon \langle 0 | [Q, \chi(x)] | 0 \rangle = -\epsilon \langle 0 | \sigma(x) | 0 \rangle = -\frac{2m}{\sqrt{\lambda}}\epsilon, \quad (2.31)$$

lo cual implica que

$$Q|0\rangle \neq 0. \quad (2.32)$$

Esto muestra de forma explicita que en este caso el vacío de la teoría no es invariante bajo las transformaciones de simetría dadas, a pesar de que el Hamiltoniano de la teoría lo es, es decir

$$[Q, H] = 0. \quad (2.33)$$

Como Q no aniquila al vacío de esta teoría, denotamos esto como sigue

$$Q|0\rangle = |\chi\rangle. \quad (2.34)$$

Con esto, junto con la Ec. (2.33), podemos ver cuál es la energía del estado base

$$\begin{aligned} [Q, H] |0\rangle &= (QH - HQ)|0\rangle = QH|0\rangle - HQ|0\rangle \\ &= QE_0|0\rangle - H|\chi\rangle = E_0|\chi\rangle - H|\chi\rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\Rightarrow H|\chi\rangle = E_0|\chi\rangle, \quad (2.36)$$

en donde E_0 es la energía del vacío $|0\rangle$. Esta última ecuación nos muestra que el estado $|\chi\rangle$ está degenerado ya que éste y el vacío tienen la misma energía, lo que podría hacernos pensar que este también podría ser un vacío de la teoría, pero si se interpreta de esa manera hay un problema: dicho estado no

es normalizable

$$\begin{aligned}
\langle \chi | \chi \rangle &= \langle 0 | QQ | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \int_{-\infty}^{\infty} d^3x j^0(\mathbf{x}, t) Q | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \int_{-\infty}^{\infty} d^3x e^{iP \cdot px} J^0(0) e^{-iP \cdot px} Q | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \int_{-\infty}^{\infty} d^3x e^{iP \cdot px} J^0(0) Q e^{-iP \cdot px} | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \int_{-\infty}^{\infty} d^3x J^0(0) Q | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | J^0(0) Q | 0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \longrightarrow \infty,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

en donde se utilizó el hecho de que Q , al no depender de las coordenadas, cumple que

$$[P^\mu, Q] = 0, \tag{2.38}$$

junto con la propiedad del vacío de la teoría en la cual

$$P^\mu | 0 \rangle = 0. \tag{2.39}$$

Entonces, como $|\chi\rangle$ no es normalizable, no puede ser interpretado como otro vacío de la teoría. Este análisis también nos sirve para mostrar que el operador

$$U(\theta) = e^{-i\theta Q} \tag{2.40}$$

no actúa unitariamente en el espacio de Hilbert, ya que, como vimos, la carga Q no existe cuando hay un rompimiento espontáneo de la simetría. Cuando esto pasa, el operador (2.40) conduce a un estado fuera del espacio de Hilbert [17].

Un campo tal que una transformación infinitesimal conduce a un valor de expectación del vacío diferente de 0 es llamado campo de Goldstone [17] y en nuestro caso, este campo es el campo χ el cual, como podemos ver en (2.31), su variación tiene un valor de expectación en el vacío diferente de cero.

De todo este análisis también podemos notar que las segundas derivadas del potencial con respecto a las variables del campo nos dan los parámetros de masa para las partículas de la teoría, y de la Ec. (2.26), podemos ver que en el caso en que exista un rompimiento espontáneo de la simetría, uno de los

campos adquiere una masa de $\sqrt{2}m$ mientras que el otro permanece sin masa. Esto último en contraste con la teoría libre (sin el término de interacción) en la cual nos arrojaba la existencia de taquiones.

También notamos en la fig. 2.1 que las oscilaciones alrededor del círculo del mínimo corresponden a la creación de partículas sin masa, mientras que la partícula masiva se crea al tener oscilaciones ortogonales al círculo en cualquiera de sus puntos. Cuantitativamente, esto puede observarse si elegimos las soluciones (2.28)

$$\langle \sigma \rangle = \langle 0 | \sigma(x) | 0 \rangle = \frac{2m}{\sqrt{\lambda}}, \quad \langle \chi \rangle = \langle 0 | \chi(x) | 0 \rangle = 0, \quad (2.41)$$

y cambiamos las variables

$$\begin{aligned} \sigma(x) &\longrightarrow \sigma(x) + \langle \sigma \rangle = \sigma(x) + \frac{2m}{\sqrt{\lambda}} \\ \chi(x) &\longrightarrow \chi(x) + \langle \chi \rangle = \chi(x) \end{aligned} \quad (2.42)$$

de tal forma que los nuevos campos tienen valores de expectación

$$\langle 0 | \sigma(x) | 0 \rangle = 0 = \langle 0 | \chi(x) | 0 \rangle \quad (2.43)$$

Con el cambio dado en (2.42), la densidad Lagrangiana toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi) + \frac{1}{2} m^2 \left(\left(\sigma + \frac{2m}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 + \chi^2 \right) \\ &\quad - \frac{\lambda}{16} \left(\left(\sigma + \frac{2m}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 + \chi^2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi) - m^2 \sigma + \frac{m^4}{\lambda} - \frac{m\sqrt{\lambda}}{2} \sigma (\sigma^2 + \chi^2) \\ &\quad - \frac{\lambda}{16} (\sigma^2 + \chi^2)^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

De esta última ecuación podemos ver que con la perturbación alrededor del mínimo verdadero, el campo σ adquiere una masa de $\sqrt{2}m$, mientras que el campo χ no adquiere masa. Esto es conocido como el teorema de Goldstone, el cual dice

Teorema 1. El rompimiento espontáneo de la simetría en una teoría invariante de Lorentz con un espacio métrico de Hilbert positivo definido, da origen a partículas sin masa llamadas bosones de Goldstone.

2.2. Potencial Efectivo

Como se vio en la sección anterior, el estudio del mínimo del potencial es de gran ayuda para estudiar el estado base de un campo y el rompimiento de la simetría del mismo, en el cual $\phi_0 \neq 0$. Pero para estudiar más a fondo dicho mínimo existe una herramienta con la que pueden incorporarse correcciones cuánticas para observar qué tan estable es este mínimo. Dicha herramienta, es el potencial efectivo. Una simetría que está rota espontáneamente a nivel clásico puede ser restaurada o una simetría que no está rota al mismo nivel puede ser espontáneamente rota debido a efectos cuánticos [18].

En la sección anterior se utilizó una teoría de prueba con $\mathcal{L}_I = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$ para ilustrar de una manera gráfica el rompimiento espontánea de la simetría, pero a partir de aquí, nos enfocaremos en teorías con términos de interacción de la forma

$$\mathcal{L}_I = -\frac{g}{3!}\phi^3. \quad (2.45)$$

Ahora, considerando una teoría de este tipo en presencia de una fuente tenemos, que la acción que la describe es

$$S^J = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3 + J\phi \right] = S + \int d^4x J\phi, \quad (2.46)$$

de donde podemos identificar al potencial nivel árbol²

$$V^0 = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g}{3!}\phi^3. \quad (2.47)$$

La ecuación de Euler-Lagrange de este campo es

$$(\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\phi + \frac{g}{2}\phi^2 - J = 0, \quad (2.48)$$

y su funcional generadora es

$$Z[J] \equiv e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar}S^J}, \quad (2.49)$$

donde $W[J]$ es la funcional generadora de las funciones de Green conectadas. Al definirla como en la Ec. (2.49), se está haciendo a un lado la contribución

²Nótese que hemos cambiado el signo del primer término como lo hicimos en la sección anterior, de modo que este término no puede ser identificado como un término de masa.

de los diagramas disconexos que existen en la teoría, de tal forma que [18]

$$\left. \frac{\delta^n W}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} = (i\hbar)^{n-1} \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle^c, \quad (2.50)$$

donde el superíndice c denota que hablamos de las funciones de Green conectadas.

Para el caso de un solo punto, tenemos que

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle_J = \phi_c(x), \quad (2.51)$$

donde ϕ_c es el valor esperado del campo ϕ en el vacío.

De esta última ecuación, podemos observar que si se apaga la fuente, este valor sería constante, pero en general es una funcional de J .

Lo que nos interesa en este caso es una funcional con la que podamos trabajar en términos de ϕ_c que contenga toda la información sobre el estado base de la teoría. Esto se logra trabajando con la acción efectiva, la cuál es una transformada de Legendre de $W[J]$ definida de la siguiente forma

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J \phi_c, \quad (2.52)$$

donde $\Gamma[\phi_c]$ es la acción efectiva, la cuál es el equivalente cuántico de la acción clásica [D. Gross]. De la Ec. (2.52) podemos observar fácilmente que

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_c} = -J(x). \quad (2.53)$$

Con la acción efectiva, la condición de rompimiento de la simetría se expresa de forma simple como

$$\left. \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_c} \right|_{\phi_c=v \neq 0} = 0. \quad (2.54)$$

Existen varias formas de expandir y trabajar con la acción efectiva, sin embargo, la que se utilizará para nuestro propósito es la expansión en potencias del momento que se ve de la siguiente manera [18]

$$\Gamma[\phi_c] = \int d^4x \left[-V_{eff}(\phi_c) + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_c \partial^\mu \phi_c + \dots \right], \quad (2.55)$$

donde el primer término, al ser parte de la expansión de la acción efectiva, se le llama potencial efectivo, el cuál contiene correcciones cuánticas a todos

los órdenes en teoría de perturbaciones al potencial clásico y los puntos suspensivos denotan las derivadas de orden superior, las cuales trataremos más adelante.

Como vimos anteriormente, cuando la fuente J se apaga, $\phi_c(x) = \phi$, que en el caso de una simetría rota, es una constante diferente de 0 y todas las derivadas de ese objeto son nulas. Así, resolviendo (2.55) nos quedamos con $V_{eff}(\phi)$ para trabajar, reduciéndose a

$$\Gamma[\phi] = \Omega V_{eff}[\phi], \quad (2.56)$$

donde Ω es una constante relacionada con el volumen de espacio tiempo. En este formalismo es claro que el mínimo de la acción efectiva coincidirá con el mínimo del potencial, es decir

$$\frac{\partial V_{eff}(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (2.57)$$

el cual contiene la información del estado base de la teoría en la cual estamos interesados.

2.3. Potencial Efectivo a 1 Lazo

En la sección anterior, se mencionó que el potencial efectivo contiene las correcciones cuánticas al potencial clásico, al cual, de ahora en adelante le llamaremos potencial a nivel árbol, V^0 . Sin embargo, el estudio del potencial efectivo no es tan trivial como en el caso del potencial a nivel árbol, pues este contiene correcciones cuánticas a todos los órdenes. El estudio del potencial efectivo puede hacerse por medio de teoría de perturbaciones a diferentes órdenes de aproximación. La expansión perturbativa es conveniente, entre otras cosas, porque relaciona los lazos de los diferentes diagramas de Feynman de la teoría con una expansión en potencias de \hbar [18], de esta manera, basta con hacer esta última expansión para obtener nuestro potencial. Para los efectos de nuestro trabajo, nos limitamos al caso del potencial a un lazo, V^1 . En este caso, nuestro potencial se verá de la siguiente manera

$$V = V^0 + \hbar V^1. \quad (2.58)$$

En la siguiente sección, siguiendo de cerca la referencia [18], mostramos las ideas centrales alrededor del cálculo del potencial a 1-lazo en el vacío.

2.3.1. En el Vacío

Para el caso en el vacío, tomamos la ecuación de Euler-Lagrange para la acción en (2.46)

$$\left. \frac{\delta S^J(\phi)}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi=\phi_0} = 0, \quad (2.59)$$

donde ϕ_0 representa una solución a dicha ecuación. Ahora expandimos el campo alrededor de su solución clásica como sigue

$$\phi(x) = \phi_0 + \sqrt{\hbar} \chi, \quad (2.60)$$

y lo sustituimos en la acción clásica, obteniendo

$$\begin{aligned} S^J(\phi) &= S^J(\phi_0 + \sqrt{\hbar} \chi) \\ &= S^J(\phi_0) + \sqrt{\hbar} \int d^4x \chi(x) \left. \frac{\delta S^J(\phi)}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi=\phi_0} \\ &\quad + \frac{\hbar}{2} \int d^4x d^4y \chi(x) \left. \frac{\delta^2 S^J(\phi)}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi=\phi_0} \chi(y) + \dots \end{aligned} \quad (2.61)$$

Observemos que el término lineal en χ se cancela ya que la derivada en él es justamente la ecuación de E-L (2.59), y los tres puntos al final representan los términos con potencias superiores de \hbar que por ahora no nos interesan. Con esta observación en mente, la acción (2.61) se reduce a

$$S^J(\phi) = S^J(\phi_0) - \frac{\hbar}{2} \int d^4x d^4y \chi(x) G^{-1}(x, y) \chi(y), \quad (2.62)$$

donde hemos definido

$$G^{-1}(x, y) = - \left. \frac{\delta^2 S^J(\phi)}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi_0} = - \left. \frac{\delta^2 S(\phi)}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi_0}. \quad (2.63)$$

La última igualdad de esta ecuación se da debido a que si observamos la acción en la Ec. (2.46), podemos notar que el término de la fuente es lineal en ϕ , por lo tanto al momento de aplicarle una segunda derivada en esta variable, simplemente se cancela y no contribuye.

Ahora, si se sustituye la Ec. (2.60) en la Ec. (2.49), tenemos que

$$\begin{aligned}
Z[J] &= e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} \\
&= \int \mathcal{D}\chi e^{\frac{i}{\hbar}S^J(\phi_0 + \sqrt{\hbar}\chi)} \\
&= e^{\frac{i}{\hbar}S^J(\phi_0)} \int \mathcal{D}\chi e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \chi(x) G^{-1}(x,y) \chi(y)} \\
&= e^{\frac{i}{\hbar}S^J(\phi_0)} [\det(G^{-1})]^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Teniendo en cuenta la igualdad entre la primer y la última línea, podemos conocer $W[J]$, esto es

$$\begin{aligned}
W[J] &= S^J(\phi_0) + \frac{\hbar}{i} \ln[\det(G^{-1})]^{-\frac{1}{2}} \\
&= S^J(\phi_0) + \frac{i\hbar}{2} \text{Tr} \ln(G^{-1}).
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Ahora, si observamos la última expresión de la acción en la Ec. (2.46), podemos observar que la ecuación de Euler-Lagrange para ésta es la siguiente

$$\frac{\delta S^J}{\delta \phi(x)} = \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} + J(x) = 0, \tag{2.66}$$

de donde tenemos que

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} = -J(x). \tag{2.67}$$

Así, si queremos pasar a la acción efectiva, podemos escribir

$$\begin{aligned}
S(\phi_c) &\approx S(\phi_0 + \phi_1) \\
&= S(\phi_0) + \int d^4x \phi_1 \left. \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi_0} \\
&= S(\phi_0) - \int d^4x \phi_1(x) J(x),
\end{aligned} \tag{2.68}$$

en donde se hizo una expansión en el campo ϕ_c alrededor de su valor clásico en potencias de \hbar , con ϕ_1 la corrección al campo a primer orden en \hbar . Los términos de orden superior los hemos despreciado.

Una vez hecho todo lo anterior, ya contamos con todo los elementos para calcular la acción efectiva a orden \hbar , esto es

$$\begin{aligned}\Gamma[\phi_c] &= W[J] - \int d^4x \phi_c J(x) \\ &= S(\phi_0) + \int d^4x \phi_0 J + \frac{i\hbar}{2} \ln(G^{-1}) - \int d^4x (\phi_0 + \phi_1) J \\ &= S(\phi_c) + \frac{i\hbar}{2} \ln(G^{-1}).\end{aligned}\quad (2.69)$$

Ahora, recordando que

$$\Gamma[\phi_c] = -\Omega V_{eff}(\phi_c), \quad (2.70)$$

tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}-\Omega V_{eff}(\phi_c) &= -\Omega S(\phi_c) + \frac{i\hbar}{2} \ln(G^{-1}) \\ &= -\Omega V^0 + \frac{i\hbar}{2} \ln(G^{-1}),\end{aligned}\quad (2.71)$$

de donde se sigue

$$V_{eff}(\phi_c) = V^0 - \Omega^{-1} \frac{i\hbar}{2} \ln(G^{-1}). \quad (2.72)$$

En esta última ecuación podemos identificar al segundo término como la primera corrección cuántica al potencial a nivel árbol. Dicha corrección recibe el nombre de potencial a un lazo y lo denotaremos como

$$V^{(1)} = -\Omega^{-1} \frac{i\hbar}{2} \ln(G^{-1}) \quad (2.73)$$

Ahora, para calcular debidamente estas correcciones, debemos notar algunas cosas: si suponemos que $\phi_c \sim \phi_0$ entonces podemos usar la Ec. (2.63) para calcular G^{-1} ; también podemos ver que la forma de G^{-1} obtenida mediante esta ecuación, debido a las derivadas en la expresión, no es diagonal en el espacio en el que se encuentra, que es el de posiciones; y por último, podemos prever que sí es diagonal en el espacio de momentos, así que se debe pasar de un espacio a otro. Esto último puede hacerse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\ln(G^{-1})] &= \int d^4x \langle x | \ln(G^{-1}) | x \rangle \\ &= \int d^4x d^4k d^4k' \langle x | k \rangle \langle k | \ln(G^{-1}) | k' \rangle \langle k' | x \rangle \\ &= \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(G^{-1}) = \Omega \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(G^{-1}).\end{aligned}\quad (2.74)$$

Sustituyendo la Ec. (2.74) en la Ec. (2.73) obtenemos la siguiente expresión para el potencial a 1-lazo

$$V^{(1)}(\phi_c) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln G^{-1}. \quad (2.75)$$

Como ejemplo, calcularemos el potencial a 1-lazo para la acción en la Ec. (2.46), pero antes, calcularemos el valor esperado v de nuestro campo con el potencial dado por

$$V^{tree} = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{g}{3!}\phi^3. \quad (2.76)$$

Para encontrar a v , seguimos las ideas desarrolladas previamente, esto es

$$\frac{dV}{d\phi} = 0 = -\mu^2\phi + \frac{g}{2}\phi^2,$$

reacomodando términos tenemos

$$\left(-\mu^2 + \frac{g}{2}\phi\right)\phi = 0,$$

de donde tenemos dos puntos críticos

$$\phi = 0 \quad \text{y} \quad -\mu^2 + \frac{g}{2}\phi_0 = 0 \quad (2.77)$$

Tomando la ecuación de la derecha, despejamos a ϕ_0 , obteniendo

$$\phi_0 = \frac{2\mu^2}{g} \equiv v. \quad (2.78)$$

Una vez que sabemos el valor de ϕ_0 , realizamos el cálculo de G^{-1} como sigue

$$\begin{aligned} G^{-1}(x, y) &= - \left. \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right|_{\phi_0=v} \\ &= - \int d^4z \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(z)\partial^\mu\phi(z) + \frac{1}{2}\mu^2\phi(z)^2 - \frac{g}{3!}\phi(z)^3 \right] \\ &= - \int d^4z \left\{ -\delta^4(z-y)\partial_\mu\partial^\mu\delta^4(z-x) + \mu^2\delta^4(z-x)\delta^4(z-y) - g\phi_0\delta^4(z-x)\delta^4(z-y) \right\} \\ &= [\partial_\mu\partial^\mu - \mu^2 + g\phi_0] \delta^4(x-y) \\ &= [\partial_\mu\partial^\mu - \mu^2 + gv] \delta^4(x-y), \end{aligned} \quad (2.79)$$

donde en la segunda línea se ha integrado por partes y se ha eliminado el término de superficie por condiciones de frontera.

Ahora, si identificamos al término de masa como

$$m_{eff}^2 = -\mu^2 + gv, \quad (2.80)$$

tenemos que

$$G^{-1}(x, y) = (\partial_\mu \partial^\mu + m_{eff}^2) \delta^4(x - y). \quad (2.81)$$

De esta manera, y gracias al teorema de Parceval, nuestro propagador en el espacio de momentos es

$$G^{-1}(k, k') = (-k^2 + m_{eff}^2) \delta^4(k - k'). \quad (2.82)$$

Ya que conocemos a G^{-1} , sustituimos la Ec. (2.82) en la Ec. (2.75) de modo que el potencial efectivo a 1-lazo de esta teoría se reduce a calcular la siguiente expresión.

$$V^{(1)} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln(-k^2 + m_{eff}^2). \quad (2.83)$$

Notemos que el propagador para esta teoría es similar al propagador de la teoría libre, la diferencia entre estos dos es únicamente que en el caso de una teoría con interacción, obtenemos un término de masa compuesto por dos términos tal como se muestra en la Ec. (2.80). Este término de masa se denomina masa efectiva.

El cálculo de la integral en la Ec. (2.83) puede realizarse por diferentes métodos, uno de ellos lo mostramos a continuación.

Partiendo de la Ec. (2.83), hacemos una rotación de Wick, $k^0 \Rightarrow ik_4$, de tal manera que la métrica se vuelve Euclidiana, esto es

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln(-k^2 + m_{eff}^2) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln(k_E^2 + m_{eff}^2), \end{aligned} \quad (2.84)$$

donde $k_E^2 = k_4^2 + \mathbf{k}^2$.

Dado que el integrando no depende de los ángulos, usando coordenadas hiperesféricas la integración angular es directa, de modo que la integral se reduce a

$$V^{(1)} = \frac{2\pi^2}{2(2\pi)^4} \int_0^\infty k_E^3 dk_E \ln(k_E^2 + m_{eff}^2). \quad (2.85)$$

Como esta integral es divergente, la regularizamos mediante la introducción de un corte ultravioleta Λ como sigue

$$\begin{aligned}
V^{(1)} &= \frac{2\pi^2}{2(2\pi)^4} \int_0^\Lambda k_E^3 dk_E \ln(k_E^2 + m_{eff}^2) \\
&= \frac{1}{128\pi^2} \left[-k^4 + 2k^2 m_{eff}^2 + 2(k^4 - m_{eff}^4) \ln(k^2 + m_{eff}^2) \right] \Big|_0^\Lambda \\
&= \frac{1}{128\pi^2} \left[\Lambda^4 - 2\Lambda^2 m_{eff}^2 + 2(m_{eff}^4 - \Lambda^4) \ln(\Lambda^2 + m_{eff}^2) - 2m_{eff}^4 \ln(m_{eff}^2) \right].
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Ahora, para extraer la parte finita del resultado anterior, expandimos en serie alrededor de $\Lambda \rightarrow \infty$ a segundo orden, obteniendo

$$V^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{2} \Lambda^2 m_{eff}^2 + \frac{m_{eff}^4}{4} \left(\ln\left(\frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2}\right) - \frac{1}{2} \right) \right], \tag{2.87}$$

donde hemos ignorado los términos en Λ que no van acompañados por la masa efectiva, pues son constantes que solo suben o bajan el potencial pero no modifican su forma.

Podemos observar que este resultado contiene términos divergentes. Para resolver este problema, buscamos aislar estas divergencias, de tal forma que no haya términos del tipo Λm_{eff} , ya que, si observamos la ecuación (2.80), la masa efectiva está asociada al campo, el cuál queremos aislar de las divergencias. Para lograr esto, debemos renormalizar agregando contra términos que se encarguen de estas divergencias.

2.3.2. Renormalización

Como vimos, la Ec. (2.87) tiene términos divergentes asociados al campo, lo que imposibilita que nuestro resultado sea una cantidad medible. La renormalización nos ayuda a expresar estos resultados en términos de cantidades medibles. Como ejemplo, volvemos a una teoría descrita por el lagrangiano

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_0 \partial^\mu \varphi_0 + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi_0^2 - \frac{g_0}{3!} \varphi_0^3, \tag{2.88}$$

en donde a las variables con el subíndice 0 se les llama variables desnudas. Para continuar con este tratamiento, debemos notar que las divergencias en

la Ec. (2.87) son generadas desde la teoría libre, es decir, aún si quitamos el término de interacción en la Ec. (2.88), dichas divergencias seguirían ahí. Esto se debe a que en la teoría cuántica de campos, al describir objetos con características físicas como masa o carga, se piensa que son puntuales, y como estas características están relacionadas con energía, entonces es de esperar que estas cantidades sean divergentes para objetos puntuales.

Las ideas detrás de la renormalización consisten en pensar que las observables físicas se obtienen al comparar, de modo que los valores divergentes se cancelan en la comparación.

Volviendo a la renormalización, escribamos a nuestro campo renormalizado como [19]

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{Z}}, \quad (2.89)$$

donde \sqrt{Z} también es una cantidad divergente, de tal forma que el cociente es finito. Reescribiendo en términos del campo renormalizado, el Lagrangiano de nuestra teoría se ve de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_0 = Z \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + Z \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 - Z^{3/2} \frac{g_0}{3!} \varphi^3. \quad (2.90)$$

Ahora si le sumamos un cero como el siguiente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{g}{3!} \varphi^3 - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{g}{3!} \varphi^3, \quad (2.91)$$

donde m^2 y λ son cantidades finitas, entonces podemos reescribir la ecuación (2.90) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{g}{3!} \varphi^3 \\ &+ \frac{1}{2} (Z - 1) \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} (Z m_0^2 - m^2) \varphi^2 - \frac{1}{3!} (Z^{3/2} g_0 - g) \varphi^3. \end{aligned} \quad (2.92)$$

De aquí, podemos observar que el segundo renglón de la Ec. (2.92) es casi igual que el primero, salvo por los términos entre paréntesis, que tiene que ver con el factor de renormalización Z y las variables desnudas. Dichos términos al renombrarlos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \delta Z &= Z - 1, \\ \delta m^2 &= Z m_0^2 - m^2, \\ \delta g &= Z^{3/2} g_0 - g, \end{aligned} \quad (2.93)$$

nos permiten reescribir la Ec. (2.92) como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{g}{3!} \varphi^3 \\ & + \frac{\delta Z}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{\delta m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\delta g}{3!} \varphi^3. \end{aligned} \quad (2.94)$$

A las cantidades δZ , δm^2 y δg se les denomina contratérminos, los cuales contienen todas las divergencias.

Los primeros tres términos de la Ec. (2.94) se dice que son el Lagrangiano renormalizado \mathcal{L}_{ren} básico y a los últimos tres se les conoce como el Lagrangiano de contratérminos \mathcal{L}_{ct} [19], de forma que el Lagrangiano desnudo puede escribirse como

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{ct}. \quad (2.95)$$

Esta ecuación nos indica que la parte finita se puede obtener de comparar dos cantidades infinitas

$$\mathcal{L}_{ren} = \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{ct}. \quad (2.96)$$

De igual forma que el Lagrangiano, el potencial también puede escribirse

$$\begin{aligned} V_0 &= V_{ren} + V_{ct} \\ V_{ren} &= V_0 - V_{ct} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Como puede observarse, este proceso de renormalización es equivalente a agregar a mano un contratérmino por cada término con cantidades desnudas presente en el potencial al mismo orden en teoría de perturbaciones.

Así, tomando en cuenta la forma del potencial efectivo, tenemos que

$$V_{eff,ren} = V^0 + V^{(1)} - V_{ct}. \quad (2.98)$$

Para el caso que estamos estudiando tenemos que el potencial con contratérminos es, de acuerdo a la Ec. (2.87)

$$\begin{aligned} V_{eff,ren} = & \frac{g}{3!} v^3 - \frac{\mu^2}{2} v^2 + \frac{\delta g}{3!} v^3 + \frac{\delta \mu^2}{2} v^2 + \frac{\delta \alpha}{1!} v \\ & + \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{2} \Lambda^2 m_{eff}^2 + \frac{m_{eff}^2}{4} \ln \left(\frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} \right) - \frac{1}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.99)$$

donde se ha introducido el contratérmino $\delta \alpha$ para eliminar la divergencia con el término lineal en el campo y así llevar a cabo el proceso completo

de renormalización del potencial efectivo. Esto es un hecho conocido para la teoría ϕ^3 [20].

Si bien en la Ec. (2.98) los contratérminos se restan, en la Ec. (2.99) los hemos sumado. El signo no tiene mayor relevancia pues los términos δg , $\delta\mu^2$ y $\delta\alpha$ pueden contener un signo. El punto central es que la combinación con los contratérminos da origen a una cantidad finita.

Como los contratérminos contienen información que desconocemos de la región ultravioleta, para determinar su comportamiento en esa región debemos establecer un conjunto de condiciones que satisface el potencial en algún punto relevante. Un punto interesante es el mínimo del potencial, donde podemos exigir lo siguiente

$$V'_{eff} \left(\frac{2\mu^2}{g} \right) = 0, \quad (2.100)$$

$$V''_{eff} \left(\frac{2\mu^2}{g} \right) = \mu^2, \quad (2.101)$$

$$V'''_{eff} \left(\frac{2\mu^2}{g} \right) = g, \quad (2.102)$$

donde la primera ecuación fija la localización del mínimo del potencial, la segunda fija la concavidad y la última fija el valor de la constante de interacción en este punto.

Sustituyendo el valor de m_{eff} de la Ec. (2.80) en la Ec. (2.99), resolvemos el sistema de ecuaciones de las ecs. (2.100)-(2.102) para δg , $\delta\mu^2$ y $\delta\alpha$, obteniendo

$$\delta g = -\frac{g^3}{32\pi^2\mu^2} \quad (2.103)$$

$$\delta\mu^2 = \frac{1}{32\pi^2} [2g^2 \ln(\Lambda) - g^2 \ln(\mu^2) + g^2] \quad (2.104)$$

$$\delta\alpha = \frac{1}{32\pi^2} [-g\Lambda^2 - g\mu^2 \ln(\Lambda^2) + g\mu^2 \ln(\mu^2)] \quad (2.105)$$

Finalmente estos valores junto con el valor de m_{eff} lo sustituimos en (2.99),

obteniendo

$$\begin{aligned}
V_{eff,ren} = & -\frac{g^3}{192\pi^2\mu^2}v^3 - \frac{1}{64\pi^2}g^2v^2\ln(\mu^2) + \frac{1}{64\pi^2}g^2v^2\ln(gv - \mu^2) + \frac{g^2}{128\pi^2}v^2 \\
& + \frac{g}{6}v^3 + \frac{1}{64\pi^2}g\mu^2v + \frac{1}{32\pi^2}g\mu^2v\ln(\mu^2) - \frac{1}{32\pi^2}g\mu^2v\ln(gv - \mu^2) \\
& + \frac{1}{64\pi^2}\mu^4\ln(gv - \mu^2) - \frac{\mu^4}{128\pi^2} - \frac{\mu^2}{2}v^2
\end{aligned} \tag{2.106}$$

En este resultado, podemos observar que nuestro campo v ha sido aislado de todas las divergencias, que están asociadas al valor Λ . De esta manera, podemos eliminar los términos divergentes, pues ya no afectan a nuestro resultado asociado al campo v . Reacomodando este resultado sin los términos divergentes, tenemos

$$\begin{aligned}
V_{eff} = & \frac{1}{6}gv^3 \left(1 - \frac{g^2}{32\pi^2\mu^2}\right) - \frac{\mu^2}{2}v^2 \left[1 - \frac{g^2}{64\pi^2\mu^2} \left(1 + 2\ln\left(\frac{gv - \mu^2}{\mu^2}\right)\right)\right] \\
& + \frac{1}{64\pi^2}g\mu^2v \left(1 - 2\ln\left(\frac{gv - \mu^2}{\mu^2}\right)\right) + 1 + \frac{1}{128\pi^2}\mu^4 (2\ln(gv - \mu^2) - 1),
\end{aligned} \tag{2.107}$$

siendo éste último el potencial efectivo a 1-lazo de la teoría

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3, \tag{2.108}$$

que es el que nos interesa.

En el siguiente capítulo extenderemos todas las ideas presentadas hasta aquí para explorar el efecto de las derivadas altas y un baño térmico en el potencial efectivo a 1-lazo.

Capítulo 3

Efectos de Derivadas Altas en el Potencial Efectivo

En este capítulo se calculan los propagadores de una teoría que incorpora términos con derivadas de orden superior en una teoría escalar en el vacío para estudiar sus efectos en el comportamiento del potencial efectivo. Al final del capítulo, usando el formalismo de tiempo imaginario, se extienden estas ideas incorporando los efectos de temperatura en el potencial efectivo.

3.1. Teoría escalar con derivadas de orden superior en el vacío

Consideremos una extensión simple de la teoría descrita por la Ec. (2.45) dada por [8]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2M^2} (\partial^2 \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{g}{3!} \phi^3, \quad (3.1)$$

de donde podemos identificar el potencial

$$V^{tree} = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{g}{3!} \phi^3, \quad (3.2)$$

cuyo mínimo se localiza en

$$\phi_0 = \frac{2\mu^2}{g} = v. \quad (3.3)$$

Ahora, para calcular el potencial efectivo a un 1-lazo es necesario que contemos con la forma explícita del propagador de esta teoría, el cual calculamos fácilmente usando la ecuación (2.65), esto es

$$\begin{aligned}
G^{-1}(x, y) &= - \left. \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right|_{\phi_0} \\
&= - \int d^4 z \left[\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right] \\
&= - \int d^4 z \left[\delta^4(z-y)\square\delta^4(z-x) - \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \left(\frac{1}{2M^2} (\partial^2\phi(z))^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta^4(z-y)\mu^2\delta^4(z-x) - \delta^4(z-y)g\phi(z)\delta^4(z-x) \right].
\end{aligned} \tag{3.4}$$

El segundo término de la expresión anterior es la contribución del término con derivada alta. Dado que este término no lo hemos calculado antes, lo calculamos con detalle a continuación

$$\begin{aligned}
& - \int d^4 z \left(- \frac{1}{2M^2} \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} (\partial^2\phi(z))^2 \right) \\
&= \frac{1}{2M^2} \int d^4 z \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} [(\partial_\mu\partial^\mu\phi(z)) (\partial_\nu\partial^\nu\phi(z))] \\
&= \frac{1}{2M^2} \int d^4 z \frac{2\delta}{\delta\phi(x)} \left[\left(\partial_\mu\partial^\mu \frac{\delta\phi(z)}{\delta\phi(y)} \right) (\partial_\nu\partial^\nu\phi(z)) \right] \\
&= \frac{1}{M^2} \int d^4 z \frac{\delta}{\delta\phi(x)} [(\partial_\mu\partial^\mu\delta^4(z-y)) (\partial_\nu\partial^\nu\phi(z))] \\
&= \frac{1}{M^2} \int d^4 z [(\partial_\mu\partial^\mu\delta^4(z-y)) (\partial_\nu\partial^\nu\delta^4(z-x))].
\end{aligned}$$

De esta última expresión, integramos por partes, obteniendo

$$\begin{aligned}
& - \int d^4 z \left(- \frac{1}{2M^2} \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} (\partial^2\phi(z))^2 \right) \\
&= \frac{1}{M^2} \int d^4 z [\delta^4(z-y) (\partial^\mu\partial_\mu\partial_\nu\partial^\nu\delta^4(z-x))] \\
&= \frac{1}{M^2} \partial^\mu\partial_\mu\partial_\nu\partial^\nu\delta^4(x-y) \\
&= \frac{1}{M^2} \square^2\delta^4(x-y).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

3.1. TEORÍA ESCALAR CON DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR EN EL VACÍO 43

Esta última ecuación es la modificación al propagador proveniente del término con derivadas de orden superior, el cuál agregamos a (2.82), de modo que el propagador de esta teoría es de la forma

$$\begin{aligned} G^{-1} &= - \int d^4z \left(-\square \delta^4(z-x) - \frac{1}{M^2} \square^2 \delta^4(z-x) + \mu^2 \delta^4(z-x) - g\phi \delta^4(z-x) \right) \delta^4(z-y) \\ &= \left(\frac{\square^2}{M^2} + \square - \mu^2 + g\phi \right) \delta^4(x-y). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Esta función de Green en el espacio de momentos es

$$G^{-1}(k, k') = \left(\frac{k^4}{M^2} - k^2 - \mu^2 + g\phi \right) \delta^4(k - k'). \quad (3.7)$$

Una vez que conocemos la función de Green en el espacio de momentos, lo sustituimos en el potencial efectivo a 1-lazo de la Ec. (2.75), obteniendo

$$V^{(1)} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left(\frac{k^4}{M^2} - k^2 + m_{eff}^2 \right), \quad (3.8)$$

donde

$$m_{eff}^2 \equiv -\mu^2 + gv \quad (3.9)$$

Para trabajar con una expresión con la que estemos familiarizados, factorizamos el polinomio dentro del logaritmo en (3.8) como sigue

$$\begin{aligned} \frac{k^4}{M^2} - k^2 + m_{eff}^2 &= \frac{1}{M^2} \left[\left(k^2 - \frac{1}{2} \left(M^2 - M\sqrt{M^2 - 4m_{eff}^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. \otimes \left(k^2 - \frac{1}{2} \left(M^2 + M\sqrt{M^2 - 4m_{eff}^2} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ya que obtuvimos esto, podemos reescribir la Ec. (3.8) de la siguiente manera

$$V^{(1)} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left[\frac{\left(k^2 - \frac{1}{2} \left(M^2 - M\sqrt{M^2 - 4m_{eff}^2} \right) \right) \left(k^2 - \frac{1}{2} \left(M^2 + M\sqrt{M^2 - 4m_{eff}^2} \right) \right)}{M^2} \right].$$

Esta manera de escribir el potencial nos permite separarlo en dos términos, esto es

$$\begin{aligned}
V^{(1)} = & -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln \left(k^2 - \frac{1}{2} \left(M^2 - M \sqrt{M^2 - 4m_{eff}^2} \right) \right) \\
& - \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln \left(k^2 - \frac{1}{2} \left(M^2 + M \sqrt{M^2 - 4m_{eff}^2} \right) \right) + \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln(M^2).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Haciendo una rotación de Wick en cada una de las integrales, obtenemos

$$V^{(1)} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln(-k_E^2 - m_a^2) + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln(-k_E^2 - m_b^2) - \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln(M^2), \tag{3.12}$$

donde

$$\begin{aligned}
m_a^2 &= \frac{1}{2} \left(M^2 - M \sqrt{M^2 - 4m_{eff}^2} \right) \\
m_b^2 &= \frac{1}{2} \left(M^2 + M \sqrt{M^2 - 4m_{eff}^2} \right).
\end{aligned}$$

De aquí, podemos desechar el último término ya que, por un lado, tenemos el logaritmo de una constante, y por otro lado, tenemos una integral divergente que no está asociada a nuestro campo v .

Volviendo a la ecuación (3.12), notemos que las integrales sobre k_E son muy parecidas a las que se hicieron en las secciones anteriores salvo las masas así que ya sabemos cómo calcularlas. De esta manera, el resultado final es

$$\begin{aligned}
V^{(1)} = & \frac{1}{3!} g v^3 \left[1 + g^2 \frac{3M^3}{16m_\mu^5 \pi^2} \left(\ln \left(\frac{M + m_\mu}{M - m_\mu} \right) - \frac{m_\mu(M^2 + 8\mu^2)}{6M\mu^2} \right) \right] \\
& - \frac{\mu^2}{2} v^2 \left[1 - g^2 \frac{M^5 - 16M^3 \mu^2}{32m_\mu^5 \pi^2 \mu^2} \left(\ln \left(\frac{M + m_\mu}{M - m_\mu} \right) + \frac{24m_\mu \mu^2}{M^3 - 16M\mu^2} \right) \right] \\
& + g v \frac{M^2}{32\pi^2} \left[\frac{(M^2 - 8\mu^2)(M^2 + 2\mu^2)}{m_\mu^4} + \frac{\ln \left(\frac{1}{64}(M^4 - M^2 m_\mu^2) \right)}{2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{M(m_\mu^4 - 4m_\mu^2 \mu^2 + 24\mu^2)}{2m_\mu^5} \ln \left(\frac{M + m_\mu}{M - m_\mu} \right) \right] \\
& + \frac{(1 - 4 \ln(2) + 2 \ln(m_a^2))m_a^4 + (1 - 4 \ln(2) + 2 \ln(m_b^2))m_b^4}{128\pi^2},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde ya hemos llevado a cabo el proceso de regularización y renormalización con las condiciones mostradas en las ecs. (2.100)-(2.102). Además, hemos introducido la notación

$$m_\mu^2 = M^2 - 4\mu^2. \quad (3.14)$$

Con la Ec. (3.13) concluimos el cálculo que incorpora los efectos de derivadas de orden superior en el potencial efectivo a 1-lazo en el vacío. En la siguiente sección extenderemos todas las ideas hasta aquí presentadas al cálculo del potencial efectivo a 1-lazo a temperatura finita, el cuál es relevante en el escenario de inflación tibia, tal como se menciona en la introducción, y es la parte medular de este trabajo de tesis.

3.2. Temperatura Finita

Para estudiar cómo se comporta el potencial (3.12) cuando se encuentra dentro de un baño térmico debemos considerar una teoría de campos a $T \neq 0$. Existen dos formulaciones de la teoría térmica de campos ampliamente usadas en la comunidad: la formulación de tiempo real y la formulación de tiempo imaginario [18]. Dado que la teoría de tiempo imaginario es muy parecida a la teoría cuántica de campos en el vacío adoptaremos esa formulación para incorporar los efectos de la temperatura en el potencial. En este formalismo de tiempo imaginario (también conocido como formalismo de Matsubara) es posible establecer una serie de reglas que permiten transitar de las expresiones obtenidas en el vacío a expresiones que contemplan el baño térmico (para mayores detalles véase el capítulo 3 de [21]), por ejemplo

$$K^\mu K_\mu \rightarrow \omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi^4)} \rightarrow iT \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \equiv \int_\beta, \quad (3.15)$$

donde $\omega_n = 2\pi Tn$, la frecuencia de Matsubara y T es la temperatura. Aplicando estas reglas a la Ec. (2.85) podemos obtener la expresión del potencial efectivo a 1-lazo a temperatura finita, esto es

$$V_T^{(1)} = \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \omega_p^2), \quad (3.16)$$

con $\omega_p^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

Para hacer la suma sobre las frecuencias de Matsubara, derivamos la ecuación anterior con respecto a ω_p y usamos la identidad

$$T \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_p^2} = \frac{1}{2\omega_p} + \frac{n(\omega_p)}{\omega_p}, \quad (3.17)$$

con $n(\omega_p)$ la distribución de Bose-Einstein.

Una vez hecha la suma, integramos con respecto a ω_p , obteniendo

$$V_T^{(1)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\omega_p}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_p}) \right] \quad (3.18)$$

donde $\beta \equiv \frac{1}{T}$. El primer término en esta expresión corresponde a la contribución del vacío (pues no hay T), mientras que el segundo término corresponde a la contribución del baño térmico.

Una vez que sabemos cómo incorporar la temperatura al potencial, ahora debemos incorporar las derivadas altas a este mismo, lo cual es una tarea simple si se toma en cuenta que las derivadas que estamos considerando permiten una descomposición del potencial en dos términos de vacío como se muestra en la ecuación (3.11). Por lo tanto, el potencial efectivo a 1-lazo con derivadas de orden superior a temperatura finita tendrá la forma

$$V_T^{(1)} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\omega_{k_a}}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_{k_a}}) + \frac{\omega_{k_b}}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_{k_b}}) \right], \quad (3.19)$$

de esta ecuación podemos identificar a los términos con ω_k como los términos del potencial efectivo en el vacío, ya que éstos no dependen de la temperatura. En lo siguiente, nos vamos a centrar en los términos logarítmicos ya que estos contienen la contribución del baño térmico al potencial.

3.3. Resumación de Poisson

La Ec. (3.19) muestra explícitamente todas las contribuciones al potencial efectivo a 1-lazo, sin embargo, no es posible llevar a cabo de forma analítica la integral que resta por hacer, por lo que debemos recurrir a alguna aproximación que nos permita conocer el efecto de la temperatura. El tipo de aproximación que se emplea está determinado por las distintas escalas físicas involucradas, en nuestro caso m_a , m_b y T . Ahora dentro del escenario

de la inflación tibia, se asume que el baño térmico tiene una temperatura $T \gg m_{ligera}$, de modo que la aproximación que debemos hacer es de alta temperatura.

Para extraer de forma simple la contribución de alta temperatura del potencial, usualmente se recurre al método llamado resumación de Poisson, el cual describimos a continuación para una masa genérica m .

Partiendo de la ecuación (3.16), tenemos

$$V^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{\beta} \ln(\omega_n^2 + \omega_k^2) = \frac{1}{2} \int dm^2 \int_{\beta} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_k^2} \frac{d\omega_k^2}{dm^2} \quad (3.20)$$

Ahora, como $\omega_k^2 = \vec{k}^2 + m^2$, la expresión anterior se reduce a

$$V^{(1)} = \frac{1}{8\pi^2 T^2} \int dm^2 \int_{\beta} \frac{1}{n^2 + \left(\frac{\omega_k}{2\pi T}\right)^2}, \quad (3.21)$$

donde hemos usado que $\omega_n = 2\pi T n$. Al usar la identidad

$$\frac{1}{a} = \int_0^{\infty} ds e^{-sa}, \quad (3.22)$$

en la Ec. (3.21), la reescribimos como sigue

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= \frac{1}{8\pi^2 T^2} \int dm^2 \int_{\beta} \int_0^{\infty} ds \left[e^{-sn^2} e^{-s\left(\frac{\omega_k}{2\pi T}\right)^2} \right] \\ &= \frac{T}{8\pi^2 T^2} \int \int \int_0^{\infty} dm^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} ds \sum_n e^{-sn^2} e^{-s\left(\frac{\omega_k}{2\pi T}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Usando la resumación de Poisson [22]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-kn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{k}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{k}}$$

en la expresión obtenida para nuestro potencial en la Ec. (3.23), tenemos

$$V^{(1)} = \frac{\beta}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_0^{\infty} dm^2 d^3 k \frac{ds}{\sqrt{s}} \sum_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{s}} e^{-s\left(\frac{\omega_k}{2\pi T}\right)^2}. \quad (3.24)$$

Observemos que cuando $n = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
V^{(1)} &= \frac{\beta}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_0^\infty dm^2 d^3k \frac{ds}{\sqrt{s}} e^{-s(\frac{\omega_k}{2\pi T})^2} \\
&= \frac{\beta}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int dm^2 d^3k \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} T}{\omega_k} \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2},
\end{aligned} \tag{3.25}$$

el cual, al no depender de la temperatura, podemos identificarla como la contribución del potencial a un lazo en el vacío.

Para resolver esta integral escribimos explícitamente a ω_k e introducimos un corte ultravioleta Λ , obteniendo

$$\begin{aligned}
V^{(1)} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{2} = \frac{4\pi}{2(2\pi)^3} \int k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk \\
&= \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} + \frac{\Lambda^2 m^2}{16\pi^2} + \frac{m^4}{128\pi^2} - \frac{m^6}{128\pi^2 \Lambda^2} - \frac{m^4 \ln(\Lambda)}{32\pi^2} - \frac{m^4 \log(2)}{32\pi^2} + \frac{m^4 \log(m^2)}{64\pi^2},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

el cual coincide con la ecuación (2.87) si identificamos a la masa genérica m con m_{eff} .

Ahora, para $n \neq 0$, volvemos a la ecuación (3.24) e integramos sobre la masa m , obteniendo

$$\begin{aligned}
V_T^{(1)} &= \frac{\beta}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_0^\infty dm^2 d^3k \frac{ds}{\sqrt{s}} \sum_{n \neq 0} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{s}} e^{-s(\frac{\omega_k}{2\pi T})^2} \\
&= -\frac{\beta}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{4\pi^2 T^2}{(2\pi)^3} \sum_{n \neq 0} \int_0^\infty \int \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} d^3k \left[e^{-\frac{n^2 \pi^2}{s}} e^{-s(\frac{\omega_k}{2\pi T})^2} \right].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Ahora, dado que las integrales sobre los momentos son del tipo gaussiano, las integrales son inmediatas, resultando

$$V_T^{(1)} = -\frac{T\pi^{1/2}}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n \neq 0} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} (4\pi^3 T^2)^{3/2} \left[e^{-\frac{n^2 \pi^2}{s}} e^{-s\frac{m^2}{4\pi^2 T^2}} \right], \tag{3.28}$$

el cual, una vez simplificado, se reduce a

$$V_T^{(1)} = -\frac{\pi^2 T^4}{2} \sum_{n \neq 0} \int_0^\infty ds s^{-2-1} e^{-s\frac{m^2}{4\pi^2 T^2} - \frac{n^2 \pi^2}{s}}. \tag{3.29}$$

Esta última expresión puede simplificarse si utilizamos la siguiente identidad [23]

$$\int_0^\infty ds s^{-\nu-1} e^{-\gamma s - \frac{\delta}{s}} = 2 \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu \left(2\sqrt{\delta\gamma} \right), \quad (3.30)$$

en donde K_ν son las funciones de Bessel, de modo que, utilizando y sustituyendo valores de (3.29) en (3.30), obtenemos

$$\begin{aligned} V_T^{(1)} &= -\frac{\pi^2 T^4}{2} \sum_{n \neq 0} 2 \left(\frac{4n^2 \pi^4 T^2}{m^2} \right)^{-1} K_2 \left(2\sqrt{n^2 \pi^2 \frac{m^2}{4\pi^2 T^2}} \right) \\ &= -\frac{T^2 m^2}{4\pi^2} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} K_2 \left(\frac{nm}{T} \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Esta última ecuación nos permite conocer fácilmente el comportamiento del potencial en la región de alta temperatura ($T \gg m$), pues el comportamiento de la función Bessel en esa región es

$$K_2(x) \approx \frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}. \quad (3.32)$$

Por lo tanto, el potencial en la región de alta temperatura es

$$\begin{aligned} V_T^{(1)} &= \frac{T^2 m^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \left[\frac{2T^2}{(nm)^2} - \frac{1}{2} \right] \\ &= -\frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m^2 T^2}{24}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde debemos recordar que m es pequeña en comparación con T .

Si la masa y la temperatura tuvieran una jerarquía distinta, por ejemplo $T \ll m_{eff}$, entonces la aproximación debe ser de baja temperatura pero, al igual que el caso de alta temperatura, el comportamiento en esta región se obtiene del comportamiento de la función Bessel en esa misma región, esto es

$$K_2(x) \approx_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \quad (3.34)$$

Por lo tanto, el potencial efectivo en esta región es

$$V_T^{(1)} = -\frac{m^2 T^2 \sqrt{\frac{T}{m}} L_{i\frac{5}{2}} \left(e^{-\frac{m}{T}} \right)}{\sqrt{32\pi^3}} \quad (3.35)$$

Una vez que tenemos claro el comportamiento del potencial en estas dos regiones de interés, lo que sigue es incorporar las derivadas de orden superior. Esto último es muy simple si tomamos en cuenta la Ec. (3.19) en donde hay dos términos que difieren entre ellos solo por las masas. Este punto es importante pues, si analizamos con detalle a cada una de las masas, tenemos que $m_b^2 \gg m_a^2$. Dado que $m_b^2 \approx M^2$, con M la escala que regula el término con derivadas altas, la cual esperamos que sea muy grande en comparación con cualquier otra escala, entonces el potencial efectivo a 1-lazo con efectos térmicos que contempla esta masa debe ser aproximado con (3.35), mientras que el potencial que involucra a la masa m_a debe ser aproximado con (3.33). Por lo tanto

$$V_T^{(1)} \approx -\frac{m_b^2 T^2 \sqrt{\frac{T}{m_b}} Li_{\frac{5}{2}}\left(e^{-\frac{m_b}{T}}\right)}{\sqrt{32\pi^3}} - \frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m_a^2 T^2}{24}, \quad (3.36)$$

Con esto, damos por concluido el estudio de la temperatura en el potencial efectivo en una teoría con derivadas de orden superior. En el siguiente capítulo analizamos con detalle el efecto de las derivadas de orden superior y la temperatura en el potencial efectivo a 1-lazo.

Capítulo 4

Resultados y Discusión

Como uno de los principales resultados de esta tesis es el cálculo del potencial a 1-lazo en una teoría escalar con derivadas de orden superior a temperatura finita, comenzamos con escribir a detalle este potencial, el cual está dado por

$$V_{eff} = V_{tree} + V_{0,HD}^{(1)} + V_{T,HD}^{(1)}, \quad (4.1)$$

donde

$$\begin{aligned} V_{tree} + V_{0,HD}^{(1)} = & \frac{1}{3!} g v^3 \left[1 + g^2 \frac{3M^3}{16m_\mu^5 \pi^2} \left(\ln \left(\frac{M + m_\mu}{M - m_\mu} \right) - \frac{m_\mu(M^2 + 8\mu^2)}{6M\mu^2} \right) \right] \\ & - \frac{\mu^2}{2} v^2 \left[1 - g^2 \frac{M^5 - 16M^3\mu^2}{32m_\mu^5 \pi^2 \mu^2} \left(\ln \left(\frac{M + m_\mu}{M - m_\mu} \right) + \frac{24m_\mu\mu^2}{M^3 - 16M\mu^2} \right) \right] \\ & + g v \frac{M^2}{32\pi^2} \left[\frac{(M^2 - 8\mu^2)(M^2 + 2\mu^2)}{m_\mu^4} + \frac{\ln \left(\frac{1}{64}(M^4 - M^2 m_\mu^2) \right)}{2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{M(m_\mu^4 - 4m_\mu^2\mu^2 + 24\mu^2)}{2m_\mu^5} \ln \left(\frac{M + m_\mu}{M - m_\mu} \right) \right] \\ & + \frac{(1 - 4 \ln(2) + 2 \ln(m_a^2))m_a^4 + (1 - 4 \ln(2) + 2 \ln(m_b^2))m_b^4}{128\pi^2}, \end{aligned}$$

y

$$V_T^{(1)} = -\frac{m_b^2 T^2 \sqrt{\frac{T}{m_b}} L_{i\frac{5}{2}} \left(e^{-\frac{m_b}{T}} \right)}{\sqrt{32\pi^3}} - \frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m_a^2 T^2}{24}$$

con

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{1}{2} \left(M^2 - M \sqrt{M^2 - 4m_{eff}^2} \right) \\ m_b^2 &= \frac{1}{2} \left(M^2 + M \sqrt{M^2 - 4m_{eff}^2} \right) \\ m_\mu^2 &= M^2 - 4\mu^2. \end{aligned}$$

Para analizar el comportamiento del potencial así como el comportamiento de cada uno de los términos que intervienen en su cálculo, usaremos la siguiente cantidad

$$\Delta V_x = \frac{V_x(v) - V_x(0)}{V_{tree}(0) - V_{tree}\left(\frac{2\mu^2}{g}\right)} + 1, \quad (4.2)$$

donde x indica a qué tipo de potencial nos referimos.

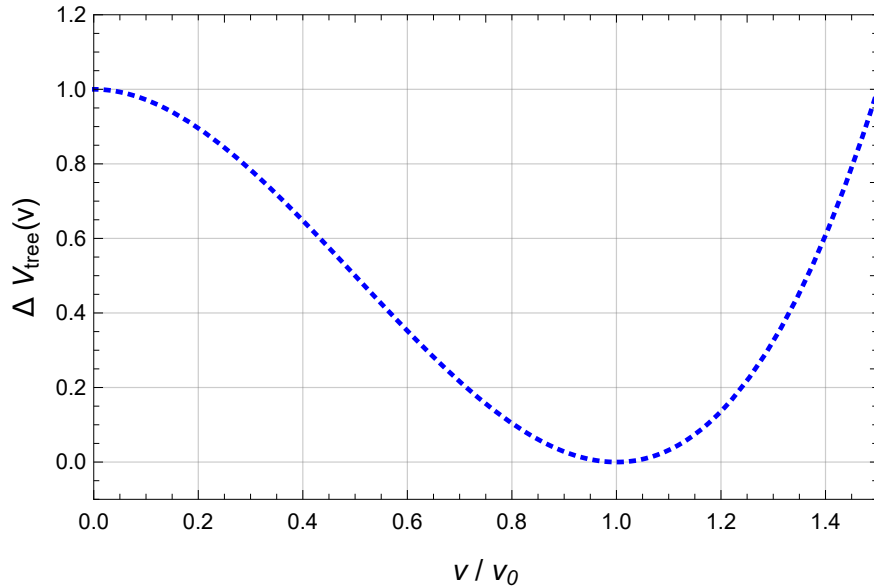


Figura 4.1: Gráfica de la Ec. (4.2) como función de v/v_0 para el caso del potencial a nivel árbol(tree).

En la figura 4.1 se grafica la Ec. (4.2) como función de v/v_0 para el caso $x = tree$, cuyo potencial está dado por la Ec. (3.2). En ella podemos observar que la distancia del máximo al origen es 1, mismo valor que tiene

la distancia horizontal del mínimo al origen. Como este es el potencial sin ningún tipo de corrección o agente nuevo, nos servirá de referencia para estudiar el efecto de los diversos términos incluidos en el potencial de la ecuación (4.1).

En la fig. 4.2 se grafica ΔV_{tree} y ΔV_{eff} , con el potencial de la Ec. (2.107),

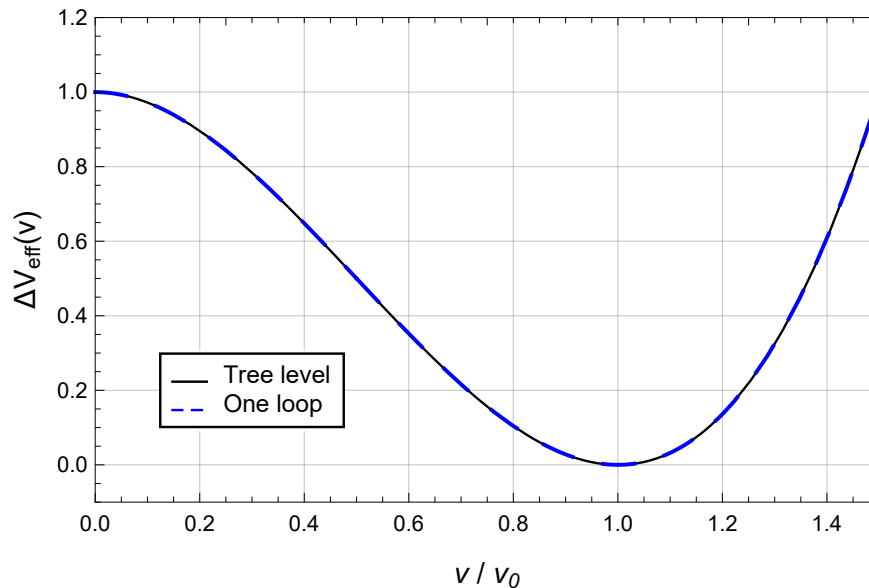


Figura 4.2: Comparación del potencial a nivel árbol y el potencial efectivo a 1-lazo dado por la Ec. (2.107) como función de v/v_0 tomando $\mu = \frac{1}{2}$ y $g = \frac{1}{10}$.

como función de v/v_0 tomando $\mu = \frac{1}{2}$ y $g = \frac{1}{10}$. En esta gráfica se muestra el efecto de la corrección cuántica a un lazo en el potencial efectivo, sin embargo, el efecto es muy pequeño para observarse simplemente superponiendo las gráficas. Para apreciar mejor el efecto, en la fig. 4.3 graficamos la diferencia $\Delta V_{eff} - \Delta V_{tree}$, y observamos que la curva, al encontrarse por encima del eje horizontal, nos indica que la corrección cuántica a 1-lazo tiende a “subir” el mínimo del potencial.

Es importante puntualizar que, hasta este punto, el potencial aún no incluye efectos de derivadas altas.

Al observar que en la fig. 4.2 las correcciones cuánticas a 1-lazo son pequeñas, es de esperar que el efecto de las derivadas de orden superior también sean pequeñas. Tomando en cuenta lo anterior, en la fig. 4.4 se muestra el comportamiento del potencial de la Ec. (4.1) a $T = 0$ con respecto del potencial a nivel árbol para distintos valores de la escala de energía μ .

Como esta curva está por encima del eje horizontal, podemos decir que la corrección cuántica a 1-lazo con derivada de orden superior tiende a “subir” el potencial. También se observa que al aumentar la escala de energía M , que regula al término con derivada alta, el potencial tiende asintóticamente al valor del potencial sin la contribución de derivada alta, lo cual se deduce de comparar las fig. 4.3 y 4.4.

Esta última observación nos permite concluir que el efecto de las derivadas de orden superior en el potencial efectivo a 1-lazo es de “bajar” el potencial con respecto al caso en el que no se consideran las derivadas de orden superior en el mismo, tal como se muestra en la figura 4.5.

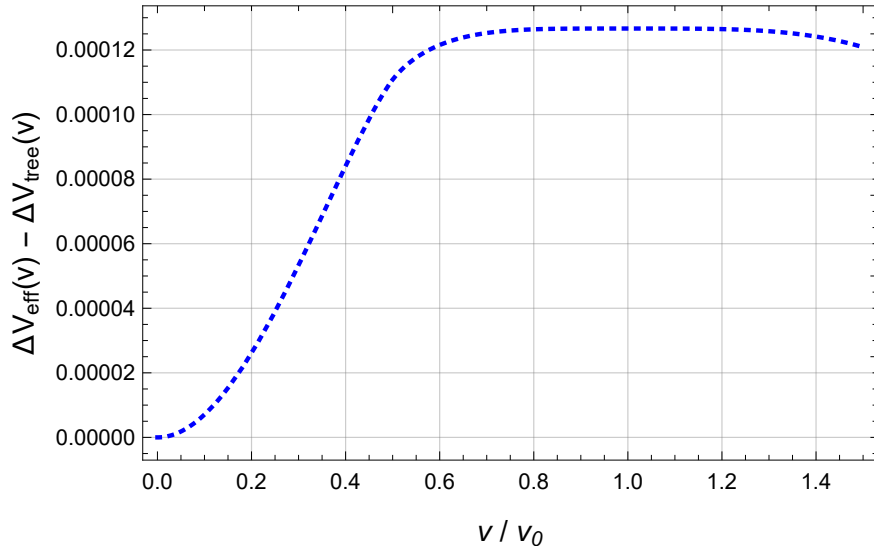


Figura 4.3: Diferencia ΔV_{eff} y ΔV_{tree}

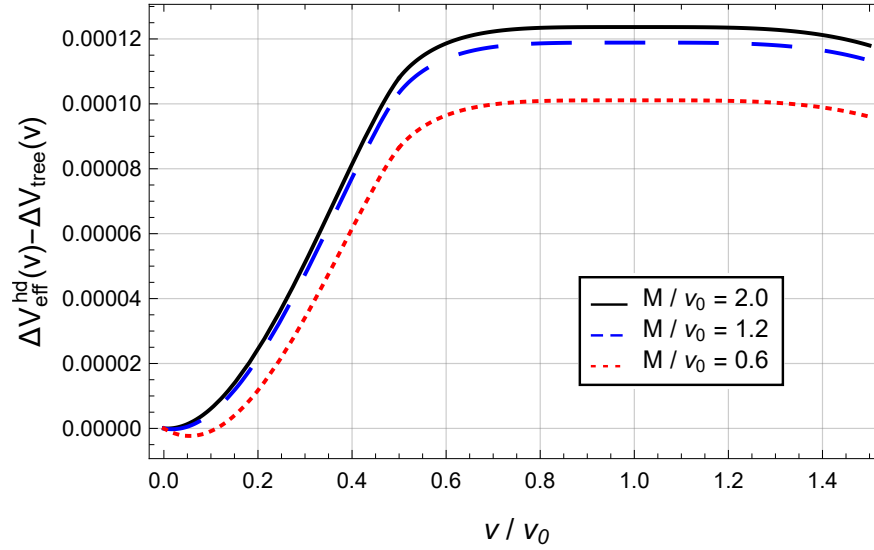


Figura 4.4: Diferencia del potencial con derivadas altas y el potencial a nivel árbol, para distintos valores de M/v_0 .

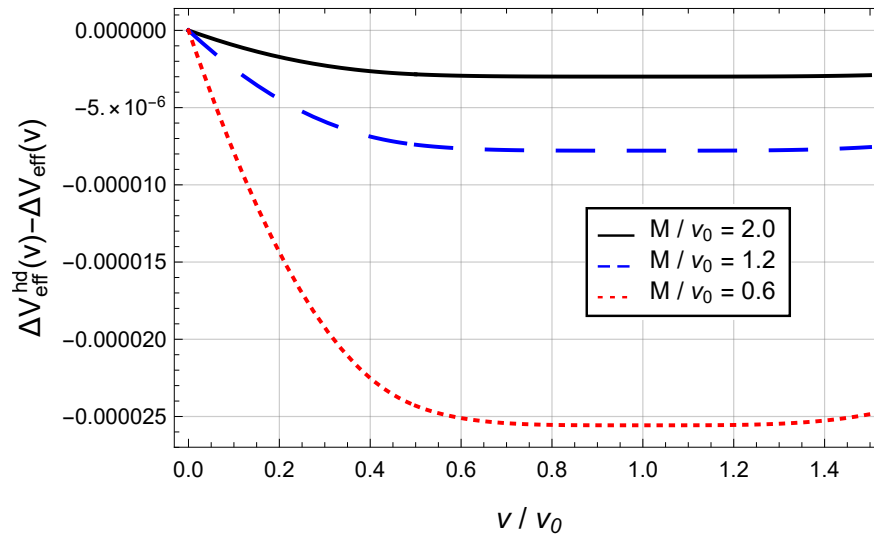


Figura 4.5: Diferencia del potencial con derivadas de orden superior de la Ec. (4.1) a $T = 0$ y el potencial efectivo a 1-lazo de la Ec. (2.107). A medida que aumenta M/v_0 , el efecto de la derivada de orden superior disminuye.

En la figura 4.6 se muestra el comportamiento del potencial a 1-lazo de la Ec. (4.1) para distintos valores de la temperatura. La incorporación de la temperatura en este potencial se realiza agregando la Ec. (3.33) a la Ec. (2.107), pues el formalismo de tiempo imaginario así lo permite (véase la sección **Resumación de Poisson**). El efecto de la temperatura en el potencial es el de “subir” el mínimo de este, tendiendo a restaurar la simetría. Finalmente, en la figura 4.7 se muestra el comportamiento del potencial

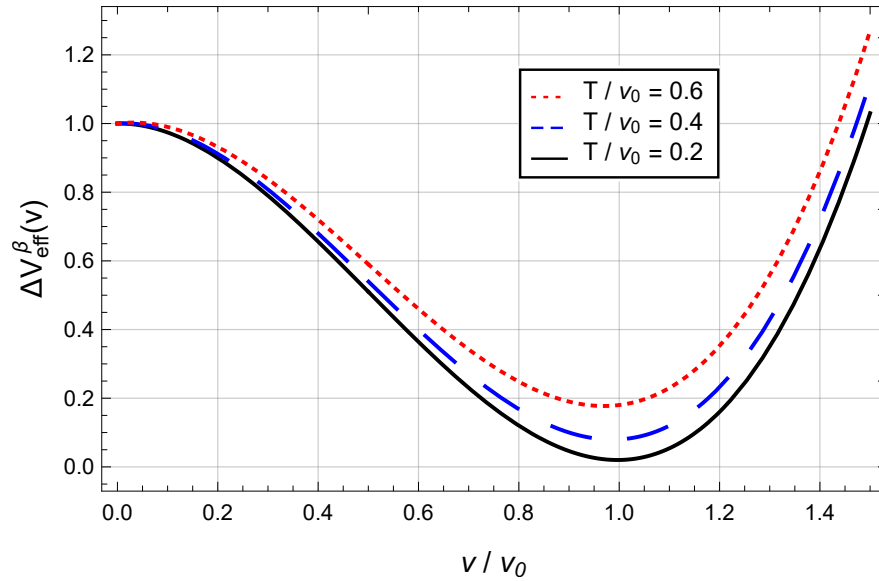


Figura 4.6: Potencial efectivo a 1-lazo de la Ec. (2.107) en un baño térmico para diferentes valores de T .

efectivo de la Ec. (4.1) para distintos valores de la temperatura. Se observa que al aumentar el valor de la temperatura, el mínimo de la teoría disminuye su profundidad, lo cuál es un indicador una restauración de la simetría.

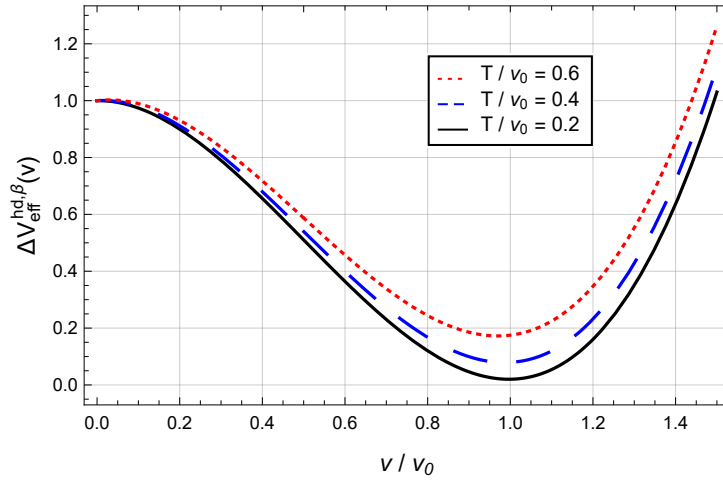


Figura 4.7: Comparación del potencial efectivo con términos de derivadas de orden superior en un baño térmico para diferentes valores de temperatura.

Al igual que en el caso de $T = 0$, el efecto de las derivadas de orden superior es muy pequeño para apreciarse superponiendo las gráficas. Para hacer visible el efecto, en la figura (4.8) se grafica la diferencia del potencial con derivadas de orden superior y el potencial sin estas derivadas para un valor fijo de la temperatura ($T/v_0 = 0.8$) y un valor fijo de $\mu/v_0 = 2$. Debido a que esta curva está por debajo de la horizontal, podemos concluir que el efecto de las derivadas altas en el potencial efectivo a temperatura finita es bajar el mínimo del potencial.

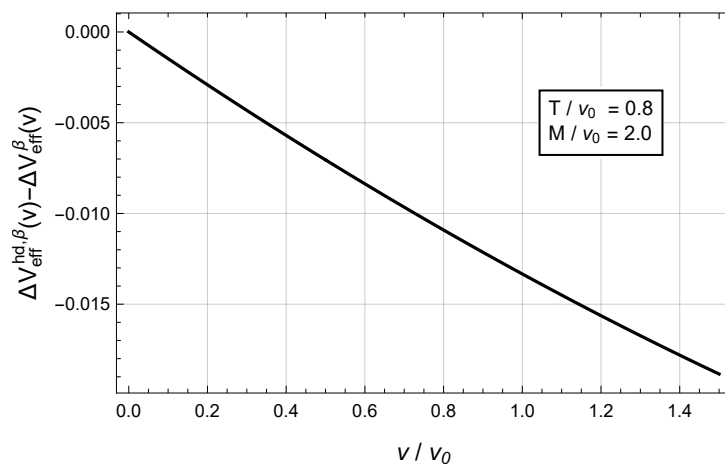


Figura 4.8: Diferencia del potencial efectivo a 1-lazo a temperatura finita con y sin derivadas de orden superior.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudió el efecto de derivadas de orden superior en el potencial efectivo de un campo escalar a temperatura finita. Para ello se calcularon el potencial efectivo de una teoría del tipo ϕ^3 , las correcciones radiativas derivadas de su expansión a un lazo y se agregaron términos con derivadas superiores para regularizar la teoría. De tal manera que nos fue posible comparar el efecto que tienen estas modificaciones en dicho potencial, en particular, de los términos con derivadas altas. Lo que se observó fue que los términos de derivadas altas tienen a bajar el mínimo del potencial efectivo con respecto al caso en el que no se incluyen estos términos adicionales. Se encontró que al aumentar la temperatura, el mínimo del potencial efectivo con derivadas altas tiende a subir con la temperatura, lo cual indica que los efectos de temperatura en el potencial es el de restaurar la simetría, de tal manera que la evolución térmica del universo temprano está directamente relacionada con la simetría del potencial efectivo. Esto último también nos indica que la inclusión de los términos con derivadas de orden superior no modifica este comportamiento que se observa en la teoría escalar sin estos términos.

Se observó que el efecto de las derivadas de orden superior en el potencial depende del cociente M/v_0 , donde M es una escala de energía y v_0 es el mínimo de potencial. Entre más grande es este cociente, la contribución de las derivadas es menor.

Bibliografía

- [1] Viatcheslav Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press, 2005.
- [2] Mark Trodden and Sean M Carroll. Introduction to cosmology. In *Particle Physics And Cosmology: The Quest for Physics Beyond the Standard Model (s)(TASI 2002)*, pages 703–793. World Scientific, 2004.
- [3] Delia Perlov and Alex Vilenkin. *Cosmology for the Curious*. Springer, 2017.
- [4] Edward W Kolb and Michael S Turner. The early universe. *Nature*, 294(5841):521–526, 1981.
- [5] Ian G Moss. Primordial inflation with spontaneous symmetry breaking. *Physics Letters B*, 154(2-3):120–124, 1985.
- [6] Gabriella Piccinelli, Ángel Sánchez, Alejandro Ayala, and Ana Julia Mizher. Warm inflation in the presence of magnetic fields. *Physical Review D*, 90(8):083504, 2014.
- [7] Arjun Berera. Warm inflation. *Physical Review Letters*, 75(18):3218, 1995.
- [8] Benjamín Grinstein, Donal O’Connell, and Mark B Wise. The lee-wick standard model. *Physical Review D*, 77(2):025012, 2008.
- [9] Tom Lancaster and Stephen J Blundell. *Quantum field theory for the gifted amateur*. OUP Oxford, 2014.
- [10] James D Bjorken and Sidney D Drell. *Relativistic quantum mechanics*. McGraw-Hill, 1965.

- [11] Luis Alvarez-Gaumé and Miguel A Vázquez-Mozo. *An invitation to quantum field theory*, volume 839. Springer Science & Business Media, 2011.
- [12] Michael E Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [13] Michele Maggiore. *A modern introduction to quantum field theory*, volume 12. Oxford university press, 2005.
- [14] Alberto Güijosa. *Notas del curso: Teoría Cuántica de Campos*. <http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes/indice.htmlcampos>, 2007.
- [15] Stephen William Hawking and Thomas Hertog. Living with ghosts. *Physical Review D*, 65(10):103515, 2002.
- [16] R Turcati and MJ Neves. Probing features of the lee-wick quantum electrodynamics. *Advances in High Energy Physics*, 2014, 2014.
- [17] Ashok Das. *Lectures on quantum field theory*. World Scientific, 2008.
- [18] Ashok Das. *Finite temperature field theory*. World scientific, 1997.
- [19] John C Collins. Renormalization. 1987.
- [20] Mark Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [21] Michel Le Bellac. *Thermal field theory*. Cambridge University Press, 2000.
- [22] Michael Stone and Paul Goldbart. *Mathematics for physics: a guided tour for graduate students*. Cambridge University Press, 2009.
- [23] Izrail Solomonovich Gradshteyn and Iosif Moiseevich Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.