



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Sobre un problema abierto en superficies con  $K^2=6$  y  $p_g=4$

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
HORACIO CASTELLANOS MUÑOA

DIRECTOR  
DR JUAN SALVADOR GARZA LEDESMA  
ITESM

CIUDAD DE MÉXICO 25 DE ABRIL DE 2022.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Presentación</b>	<b>1</b>
§1.1	Notación y convenciones . . . . .	1
§1.2	Resultados básicos . . . . .	3
§1.3	Problemas de móduli . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Superficies con <math>K^2 \leq 6</math> y <math>p_g = 4</math></b>	<b>5</b>
§2.1	Los casos $K^2 = 4$ y $K^2 = 5$ . . . . .	5
§2.1.1	$K^2 = 4$ . . . . .	5
§2.1.2	$K^2 = 5$ . . . . .	6
§2.2	Superficies con $K^2 = 6$ . . . . .	7
§2.2.1	Problemas abiertos . . . . .	8
<b>3</b>	<b>El Programa de Anillos Graduados</b>	<b>9</b>
§3.1	Introducción . . . . .	9
§3.2	Anillos de Gorenstein . . . . .	9
§3.2.1	Teoremas estructurales . . . . .	11
§3.2.2	Factores rodantes . . . . .	12
§3.3	Series de Hilbert . . . . .	12
§3.4	El principio de sección hiperplanar . . . . .	13
§3.5	Ejemplos . . . . .	15
§3.5.1	Una curva semicanónica de género 7 . . . . .	15
§3.5.2	La degeneración $II \rightarrow III_b$ . . . . .	17
§3.6	Nuestro punto de partida . . . . .	21
§3.6.1	Secciones hiperplanares de tipo $I_a$ . . . . .	21
§3.6.2	Secciones hiperplanares de tipo $V_1$ . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Anillos hiperplanares de superficies de tipo <math>V_1</math></b>	<b>23</b>
§4.1	Cubiertas dobles . . . . .	23
§4.2	Geometría de curvas hiperelípticas . . . . .	24
§4.3	Pergaminos normales racionales . . . . .	25
§4.3.1	El conjunto subyacente . . . . .	25
§4.3.2	Polinomios bihomogéneos . . . . .	26
§4.3.3	Grupo de Picard y Teoría de Intersección . . . . .	27
§4.3.4	Construcción geométrica de nuestra curva . . . . .	28
§4.4	El anillo semicanónico . . . . .	28
§4.5	Comentarios finales y trabajo a futuro . . . . .	32

§4.5.1 ¿Qué pasa con el resto de estratos? . . . . .	34
§4.5.2 Extensiones . . . . .	35

<b>Bibliografía</b>	<b>36</b>
---------------------	-----------

# Resumen

En esta tesis se exponen los avances en la clasificación de superficies de tipo general con  $K^2 = 6$  y  $p_g = 4$ . Posteriormente se explica el enfoque de secciones hiperplanares y anillos graduados para el estudio de las mismas; este enfoque ha permitido probar el que hasta el momento es el último resultado obtenido en la clasificación antes mencionada. Por último, se propone una línea de trabajo en este sentido (secciones hiperplanares y anillos graduados) para abordar el principal problema pendiente en la clasificación. Aquí una breve descripción de cada capítulo:

- **Presentación.** Se introducen la notación y el tipo de problemas que abordamos en la tesis. Se citan además los resultados que se utilizarán con mayor frecuencia.
- **Superficies con  $K^2 \leq 6$  y  $p_g = 4$ .** Se hace un resumen de los avances actuales en la clasificación de superficies canónicas con género geométrico 4 y volumen canónico menor o igual a 6. Dichas superficies son necesariamente regulares. Se presenta el principal problema abierto en el caso  $K^2 = 6$ : ¿Es conexo o no el espacio móduli correspondiente,  $\mathcal{M}_{6,4}$ ?
- **El Programa de Anillos Graduados.** Se exponen las generalidades del programa de Reid para el estudio de la geometría birracional de variedades vía álgebra conmutativa. Se hace énfasis en los casos relevantes al problema principal concerniente a superficies con  $K^2 = 6$  y  $p_g = 4$ .
- **Anillos hiperplanares de superficies de tipo  $V_1$ .** Se calcula el anillo de sección hiperplanar de una superficie  $S$  minimal de tipo general con  $K^2 = 6$  y  $p_g = 4$  y tal que  $|K_S|$  tiene dos puntos base simples y define una cubierta doble de  $S$  a un cono en  $\mathbb{P}^3$ . Se conjetura que dichas superficies son degeneraciones de superficies que se obtienen como intersecciones completas de bigrado  $(3, 4)$  en el espacio proyectivo torcido  $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$ . En particular, conjeturamos que el espacio móduli  $\mathcal{M}_{6,4}$  es conexo.

Para la lectura de este trabajo, suponemos de parte del lector o lectora haber cubierto el material estándar de un curso básico de Geometría Algebraica y un curso de Curvas y Superficies Algebraicas.

# Capítulo 1

## Presentación

Todas las superficies consideradas en este trabajo serán proyectivas y sobre  $\mathbb{C}$ . La clasificación de Enriques y Kodaira divide a dichas superficies en cuatro clases según su dimensión de Kodaira  $\kappa = -\infty, 0, 1, 2$ . Las superficies correspondientes a las primeras tres clases son bastante bien entendidas actualmente, mientras que para las **superficies de tipo general** correspondientes a la cuarta clase ( $\kappa = 2$ ) aún existe una enorme cantidad de preguntas abiertas. En la siguiente sección introducimos algunos símbolos y convenciones que nos permitirán abordar una de estas preguntas.

### 1.1. Notación y convenciones

El campo base será siempre el campo de los números complejos  $\mathbb{C}$ , que casi siempre denotaremos simplemente como  $k$ .

Una variedad es un esquema entero, separado y de tipo finito sobre  $k$ . Una curva es una variedad de dimensión 1, una superficie es una variedad de dimensión 2, etc.

Escribiremos  $\mathbb{P}^n$  y  $\mathbb{A}^n$  para denotar a los espacios proyectivo y afín  $n$ -dimensionales sobre  $k$ . Más adelante veremos que es más conveniente considerar encajes en espacios proyectivos con pesos (también llamados en algunas fuentes torcidos); la notación  $\mathbb{P}^n(w_1^{i_1}, \dots, w_s^{i_s})$ , donde  $\sum_{j=1}^s i_j = n + 1$  representa al espacio proyectivo con pesos (e.p.p.) dado por el Proj del anillo  $k[x_0, \dots, x_n]$ , con la graduación inducida por la  $k^\times$ -acción en  $k^{n+1} \setminus \{0\}$  dada por

$$\lambda \cdot (a_0, \dots, a_n) \mapsto (\lambda^{w_1} a_0, \dots, \lambda^{w_1} a_{i_1}, \dots, \lambda^{w_s} a_{n+1-i_s}, \dots, \lambda^{w_s} a_n).$$

Sean  $X$  una variedad no singular,  $Y \subset X$  una hipersuperficie no singular,  $D, D_1, D_2$  divisores en  $X$  y denotemos con  $\mathcal{O}_X(\cdot)$  a la correspondiente gavilla invertible. Se utilizará la siguiente notación:

- $D_1 \sim D_2$  para equivalencia lineal de divisores.
- $H^0(n_1 D_1 + n_2 D_2)$  donde  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ , para escribir de forma abreviada:

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D_1)^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{O}_X(D_2)^{\otimes n_2}),$$

siempre que  $X$  esté clara por el contexto.

- $D|_Y$  o simplemente  $D_Y$  para la restricción del divisor  $D$  a  $Y$ .
- Si  $X = S$  es una superficie,  $D_1 D_2$  denota el número de intersección.
- Si  $X = C$  es una curva,  $\deg(D)$  denota el grado del divisor  $D$ .
- $h^i(D)$  es la dimensión de  $H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$  como  $k$ -espacio vectorial.
- $\chi(D)$  es la característica de Euler de la gavilla  $\mathcal{O}_X(D)$ , es decir,  $\sum_{i=0}^n (-1)^i h^i(D)$ .
- $|D|$  es el sistema lineal en el que se mueve el divisor  $D$ .
- $r(D)$  o simplemente  $r$  si  $D$  está claro por el contexto, es la dimensión geométrica de  $|D|$ , es decir,  $h^0(D) - 1$ .
- $\varphi_D$  es el mapeo racional  $X \xrightarrow{\varphi_D} \mathbb{P}^r$ , en caso de que  $r \geq 1$ .
- $g_d^r$  es un sistema lineal de grado  $d$  y dimensión geométrica  $r$  en una curva.
- $K_X$  es un divisor canónico de  $X$ .
- Si  $X = S$  es una superficie, escribiremos  $p_g = p_g(S) = h^0(K_S)$  para denotar su género geométrico y  $q = q(S) = h^1(K_S)$  para su irregularidad. Si  $X = C$  es una curva, usualmente  $g = g(C) = h^0(K_C)$  denotará su género. Por dualidad de Serre podemos definir de forma equivalente  $p_g = h^2(\mathcal{O}_S)$ ,  $q = h^1(\mathcal{O}_S)$  y de manera similar para el caso de curvas.
- El símbolo  $S^a(x_1, \dots, x_n)$  denota a la  $a$ -ésima potencia tensorial simétrica en las variables  $x_i$ .

**Definición 1.** *Una superficie no singular  $S$  es minimal (también la llamaremos modelo minimal) si no contiene curvas  $E \subset S$  tales que  $E \cong \mathbb{P}^1$  y  $E^2 = -1$  (estas curvas son llamadas **curvas excepcionales de primera clase, o bien  $(-1)$ -curvas**).*

Toda superficie puede obtenerse a partir de un modelo minimal  $S$ , después de una cantidad finita de blowups de puntos no singulares. Más aún, dicho modelo es único si  $\kappa(S) \geq 0$ .

En adelante, cuando nos refiramos a una superficie de tipo general  $X$ , supondremos que se trata de su modelo minimal. En tal caso, el volumen canónico  $K_X^2$  es un invariante birracional, al igual que su género proyectivo  $p_g = h^0(\mathcal{O}_X(K_X)) = h^2(\mathcal{O}_X)$  y su irregularidad  $q = h^1(\mathcal{O}_X)$ . Estos invariantes determinan a los otros invariantes clásicos, por ejemplo, la característica de Euler de la gavilla estructural:  $\chi = 1 - q + p_g$  o la característica topológica de Euler:  $e(X) = 12\chi - K_X^2$ .

## 1.2. Resultados básicos

Aquí recopilamos los resultados que se usarán más adelante con frecuencia. Cuando se trata de resultados estándar, se omite dar referencias específicas para sus pruebas.

**Teorema 1.** (Riemann-Roch para curvas) *Sea  $C$  una curva proyectiva no singular y  $D$  un divisor sobre ella. Entonces*

$$\chi(D) = 1 - g + \deg(D).$$

**Observación 1.** *Utilizando dualidad de Serre, la igualdad del teorema anterior puede escribirse como sigue:*

$$h^0(D) - h^0(K_C - D) = 1 - g + \deg(D).$$

**Teorema 2.** (Fórmula de adjunción) *Sea  $X \subset Y$  una hipersuperficie no singular de una variedad no singular. Entonces:*

$$K_X = (K_Y + X)|_X.$$

**Corolario 2.1.** *Si  $C \subset S$  es una curva no singular en una superficie no singular, entonces*

$$2g - 2 = (K_S + C)C.$$

**Teorema 3.** (Riemann-Roch para superficies) *Para un divisor  $D$  en una superficie  $X$ :*

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}D(D - K_X)$$

Escribiremos simplemente R-R para referirnos al Teorema de Riemann Roch, siendo claro por el contexto si nos referimos a curvas o superficies.

**Teorema 4.** (de desvanecimiento de Kawamata–Viehweg) *Para un haz lineal grande y nef (en particular para un haz amplio)  $L$  en una variedad compleja proyectiva  $X$ . con haz canónico  $K$ :*

$$H^i(X, L \otimes K) \cong 0$$

para  $i \geq 0$ .

**Corolario 4.1.** *Sean  $S$  una superficie regular de tipo general y  $P_n(S)$  su  $n$ -ésimo plurigénero, es decir,  $P_n(S) = h^0(nK_S)$ . Entonces:*

$$P_n(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ p_g & \text{si } n = 1 \\ 1 + p_g + \binom{n}{2}K_S^2 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

**Teorema 5.** (Desigualdad de Debarre) *Una superficie minimal compleja irregular satisface la desigualdad  $K_X^2 \geq 2p_g$ .*

*Demostración.* Véase [Debarre 82], Théorème 6.1. □



**Corolario 5.1.** *Una superficie minimal compleja  $X$  con  $K_X^2 = 6$  y  $p_g = 4$  es regular.*

**Teorema 6.** (El truco del haz libre de Castelnuovo) *Sean  $D, D'$  divisores en una curva  $X$ . Sean  $x_1, x_2 \in H^0(D)$  secciones linealmente independientes y supongamos que el sistema lineal que generan,  $V$ , no tiene puntos base. Entonces el kernel del mapeo*

$$V \otimes H^0(X, D') \rightarrow H^0(X, D + D')$$

*es isomorfo a  $H^0(X, D' - D)$ .*

### 1.3. Problemas de móduli

En su célebre artículo [Bombieri], Bombieri probó que toda superficie minimal de tipo general  $S$  con invariantes  $K_S^2, p_g, q$  fijos es brracional a una superficie normal  $X \subset \mathbb{P}^{P_5(S)-1}$ . Tal superficie  $X$  está unívocamente determinada y es llamada **el modelo canónico** de  $S$ . Geométricamente,  $X$  se obtiene contrayendo a puntos a todas las  $(-2)$ -curvas de  $S$  (esto es, todas las curvas  $E \subset S$  tales que  $E \cong \mathbb{P}^1$  y  $E^2 = -2$ ).

En el contexto de modelos canónicos, tenemos el siguiente resultado de David Gieseker (para una prueba, véase [Gieseker]):

**Teorema 7.** *Existe un esquema móduli casi proyectivo y grueso para modelos canónicos de superficies de tipo general con volumen canónico y característica topológica de Euler fijos.*

En particular, existe un subesquema que suele denotarse como  $\mathcal{M}_{K_S^2, p_g, q}$  que parametriza las superficies minimales de tipo general con los invariantes numéricos indicados. Por el teorema anterior,  $\mathcal{M}_{K_S^2, p_g, q}$  es un esquema casi proyectivo, en particular, tiene una cantidad finita de componentes irreducibles.

Actualmente, se considera como meta final en la clasificación de superficies de tipo general el describir completamente a  $\mathcal{M}_{K_S^2, p_g, q}$  para una elección plausible de invariantes. En este sentido, la clasificación dista mucho de estar completa.

**Definición 2.** *La tripleta de invariantes brracionales de un modelo minimal  $S$ ,  $(K_S^2, p_g, q)$  es llamada **tipo numérico de  $S$** .*

Si los modelos minimales que estamos estudiando son regulares, omitiremos  $q = 0$  al referirnos al espacio móduli. En el caso que nos interesa, por ejemplo, escribiremos  $\mathcal{M}_{6,4}$  en lugar de  $\mathcal{M}_{6,4,0}$ .

Como se discutirá en el siguiente capítulo, el principal problema abierto acerca de  $\mathcal{M}_{6,4}$  consiste en determinar si tiene dos o una única componente conexa.

## Capítulo 2

### Superficies con $K^2 \leq 6$ y $p_g = 4$

En su libro [Enriques], Enriques aborda el problema de construir superficies cuyo mapeo canónico  $\varphi_{K_S} : S \rightarrow \mathbb{P}^{p_g-1}$  es birracional. En particular dedica un gran esfuerzo al caso en que  $p_g = 4$ . Aquí es importante señalar que, por la desigualdad de Max Noether ( $K_S^2 \geq 2p_g - 4$ ), tenemos  $K_S^2 \geq 4$ . También, por la desigualdad de Debarre, tenemos  $q = 0$  incluso para  $K_S^2 = 7$ .

A partir de este trabajo y hasta la actualidad, muchos autores han buscado no sólo construir las superficies consideradas por Enriques con volúmenes canónicos tan grandes como sea posible, sino completar su clasificación y más aún, describir con detalle  $\mathcal{M}_{K_S^2, p_g, q}$ .

#### 2.1. Los casos $K^2 = 4$ y $K^2 = 5$

Enriques comenzó a estudiar estos casos (véase [Enriques], § 2, Capítulo VIII, pp.268-271), pero  $\mathcal{M}_{4,4}$  y  $\mathcal{M}_{5,4}$  fueron entendidos en los años 70s. A continuación recopilamos los resultados relevantes.

##### 2.1.1. $K^2 = 4$

En este caso, el mapeo canónico  $\varphi_{K_S} : S \rightarrow X \subset \mathbb{P}^3$  es un morfismo de grado dos y  $X$  es una superficie cuadrática irreducible, es decir, una cuadrática no singular o bien un cono cuadrático. Denotemos con los símbolos  $I$  y  $II$  respectivamente, cada uno de estos casos. Es sabido que  $I$  es el caso general y  $\varphi$  es una cubierta doble ramificada sobre una curva  $C$  que es una intersección completa de  $X$  con una superficie séxtica.

El resultado principal, debido a Eiji Horikawa (véase [Horikawa 76]), es el siguiente:

**Teorema 8.**  $\mathcal{M}_{4,4}$  es irreducible, unirracional y de dimensión 42. Su lugar singular es irreducible, de codimensión 1 y corresponde exactamente a las superficies cuya imagen canónica es un cono cuadrático.

En correspondencia con los casos  $I$  y  $II$ , tenemos una estratificación de  $\mathcal{M}_{4,4}$  como una unión de dos estratos localmente cerrados, ambos irreducibles, que también denotaremos con  $I$  y  $II$ . Las dimensiones de estos estratos son 42 y 41, respectivamente. Es común dibujar diagramas resumiendo esta y otra información acerca de los espacios de móduli. Para ello introducimos la siguiente notación:

Sean  $A$  y  $B$  dos estratos localmente cerrados e irreducibles de un espacio móduli  $\mathcal{M}_{K_S^2, p_g, q}$ . Una flecha  $A \rightarrow B$  significa que existe un morfismo plano  $f : \mathcal{X} \rightarrow \Delta$  tal que  $f^{-1}(p_0)$  es una variedad de tipo  $B$  y  $f^{-1}(p)$  es una variedad de tipo  $A$  para  $p \neq p_0$ . Casi siempre  $\Delta \subset k$  es un pequeño disco alrededor de 0 y  $p_0 = 0$ . En otras palabras, la flecha  $A \rightarrow B$  significa que la cerradura del estrato  $A$  intersecta al estrato  $B$ . También se dice que **las variedades de tipo  $B$  son una degeneración de las de tipo  $A$**  o bien que **las variedades de tipo  $A$  son pequeñas deformaciones de las de tipo  $B$** .

Con la notación anterior, el dibujo de  $\mathcal{M}_{4,4}$  es el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} 42 & & I \\ & & \downarrow \\ 41 & & II \end{array}$$

Los números de la izquierda corresponden a la dimensión de cada estrato irreducible.

### 2.1.2. $K^2 = 5$

Este caso es ligeramente más complicado que el anterior, sin embargo es el último en el que se tiene una clasificación completa (completada en el artículo [Reid D-E] de Miles Reid).

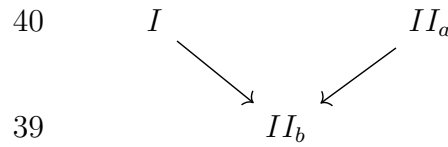
El espacio móduli  $\mathcal{M}_{5,4}$  esta vez tiene tres estratos descritos a continuación:

- $I$  correspondiente a superficies  $S$  tales que  $\varphi_{K_S} : S \rightarrow X \subset \mathbb{P}^3$  es birracional y  $X$  es una quántica.
- $II_a$  correspondiente a superficies  $S$  tales que  $\varphi_{K_S} : S \rightarrow X \subset \mathbb{P}^3$  es un mapeo racional 2 a 1 y  $X$  es una cuadrática no singular.
- $II_b$  correspondiente a superficies  $S$  tales que  $\varphi_{K_S} : S \rightarrow X \subset \mathbb{P}^3$  es un mapeo racional 2 a 1 y  $X$  es un cono cuadrático.

Se tiene además el siguiente teorema:

**Teorema 9.**  $\mathcal{M}_{5,4}$  tiene dos componentes irreducibles, ambos unirracionales de dimensión 40, que se intersectan en una subvariedad de codimensión 1.

Y el siguiente dibujo para  $\mathcal{M}_{5,4}$ :

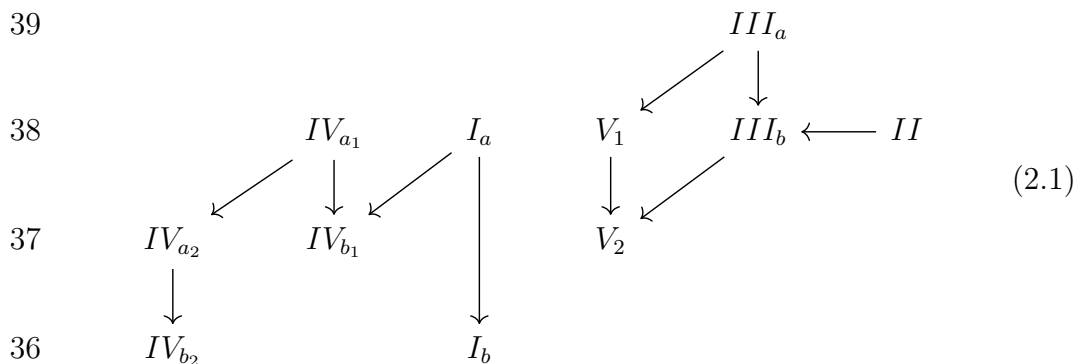


## 2.2. Superficies con $K^2 = 6$

En este caso existen varios problemas abiertos, sin embargo se tiene una estratificación de  $\mathcal{M}_{6,4}$  en 11 estratos, obtenida por Horikawa en su artículo [Horikawa 78]. Para más detalles sobre las descripciones de cada estrato sugerimos revisar el artículo mencionado, nosotros solamente enunciaremos propiedades que caracterizan unívocamente a los estratos que consideraremos en esta tesis:

- $I_a$  este estrato está formado por superficies cuyo sistema canónico no tiene puntos base y cuyo mapeo canónico  $\varphi_{K_S}$  tiene grado 1.
- $II$  lo mismo que en el primer estrato pero con  $\varphi_{K_S}$  de grado 3.
- $III_a$  estas superficies  $S$  tienen mapeo canónico de grado 2, **no admiten un haz de género 2** (esto es, no existen morfismos suprayectivos  $f : S \rightarrow \Delta$  donde  $\Delta \subset k$  es un disco alrededor de 0, con fibras conexas cuya fibra genérica  $f^{-1}(p)$ ,  $p \neq 0$ , es una curva no singular de género 2). Además,  $|K_S|$  tiene dos puntos base no singulares y la imagen canónica  $\varphi_{K_S(S)} \subset \mathbb{P}^3$  es una cuadrática no singular.
- $III_b$  lo mismo que en el estrato anterior, pero con  $|K_S|$  con un solo punto base singular y  $\varphi_{K_S(S)} \subset \mathbb{P}^3$  un cono cuadrático.
- $V_1$  estas superficies **admiten un haz de género 2**, su imagen canónica es un cono cuadrático y  $|K_S|$  tiene dos puntos base no singulares.
- $V_2$  lo mismo que en el estrato anterior, pero  $|K_S|$  tiene un solo punto base singular.

Se sabe además que  $\mathcal{M}_{6,4}$  tiene 4 componentes irreducibles uniracionales cuyas dimensiones (junto con la información conocida hasta la fecha sobre las posibles deformaciones) se muestra en el siguiente diagrama:



### 2.2.1. Problemas abiertos

No se sabe si en el diagrama (4.5.1) aparecen todas las posibles *flechas de deformación*. Tampoco se conocen construcciones explícitas para las superficies en cada uno de los estratos (por ejemplo, presentaciones de sus anillos canónicos). Finalmente, no se sabe si  $\mathcal{M}_{6,4}$  tiene una o dos componentes conexas; se conjetura que existe la degeneración correspondiente a la flecha  $I_a \rightarrow V_1$ , lo cual implicaría que hay sólo una componente.

# Capítulo 3

## El Programa de Anillos Graduados

Este capítulo explica las ideas con las que abordamos los problemas abiertos planteados en la sección §2.2.1.

### 3.1. Introducción

En general, muchos problemas sobre la existencia y clasificación de variedades algebraicas pueden estudiarse mediante encajes en espacios proyectivos, preferiblemente si dichos encajes están definidos en términos de un haz lineal amplio determinado de forma intrínseca. El Programa de Anillos Graduados estudia anillos de la forma

$$R(X, L) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, L^{\otimes n}),$$

donde  $X$  es una variedad propuesta de antemano y  $L$  es un haz lineal amplio sobre ella. Bajo condiciones bastante permisivas (sobre el tipo de singularidades de  $X$  y ciertas relaciones entre  $L$  y  $K_X$ ) el anillo  $R(X, L)$  es de Gorenstein, lo cual hace posible utilizar poderosas herramientas teóricas y computacionales de álgebra conmutativa. Por el lado de la geometría, muchos resultados clásicos de Enriques, Fano, del Pezzo, entre otros, suelen servir de guía e inspiración para el estudio de los anillos graduados que proponemos.

La escuela europea de geometría algebraica ha trabajado intensamente con el enfoque anterior en tiempos recientes, obteniendo numerosos resultados importantes en la construcción y clasificación de curvas, superficies y 3-variedades en el marco de la Teoría de Mori. En particular, el último avance en el problema de clasificación de superficies de tipo general con  $K^2 = 6$  y  $p_g = 4$ , obtenido por Ingrid Bauer, Fabrizio Catanese y Roberto Pignatelli en [BCP], fue gracias al programa de anillos graduados.

### 3.2. Anillos de Gorenstein

Haremos las siguientes convenciones sobre los anillos  $R$  con los que trabajaremos en esta tesis:

1. Serán  $\mathbb{N}$ -graduados, es decir,  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ .
2. La base del anillo será  $k$ , es decir,  $R_0 = \mathbb{C}$ .
3. No requeriremos que  $R$  sea generado sobre  $k$  por  $R_1$ . Geométricamente, esto implica que en general nuestras variedades estarán encajadas en un espacio proyectivo con pesos, algebraicamente esto implica que la codimensión (y por lo tanto el número de ecuaciones que definen la variedad) será más pequeño.

Para nuestros propósitos, podemos tomar la siguiente como definición de anillo de Gorenstein:

Sea  $I \subset \mathcal{O}$  un ideal graduado en un anillo graduado regular. Sea  $R = \mathcal{O}/I$ . Consideremos una resolución libre minimal de  $\mathcal{O}$ -módulos:

$$R \leftarrow R_0 \leftarrow R_1 \leftarrow \cdots \leftarrow R_{c-1} \leftarrow R_c \leftarrow 0 \quad (3.1)$$

Entonces  $R$  es un **anillo de Cohen-Macaulay** si  $c = \text{codim}_{\mathcal{O}} I$ . Si  $R$  es Cohen-Macaulay y  $R_c \cong \mathcal{O}(-\ell)$  para algún  $\ell \in \mathbb{Z}$ , entonces  $R$  es un **anillo de Gorenstein**.

**Observación 2.** Si  $R$  es Gorenstein, por dualidad de Serre tenemos un emparejamiento en la resolución (3.1):  $R_{c-i}^{\vee}(-\ell) \cong R_i$ .

En nuestro contexto,  $R$  es de la forma  $R(X, L)$  con  $X$  una variedad proyectiva y  $L$  un divisor de Cartier amplio. En estas circunstancias el siguiente resultado nos da una caracterización sencilla para ser de Cohen-Macaulay y de Gorenstein que puede ser tomada como definición alternativa (para una prueba, véase [Hartshorne DT], Proposición 8.6).

**Proposición 1.** Consideremos el anillo graduado  $R(X, L) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, nL)$ , con  $X$  variedad proyectiva y  $L$  un divisor de Cartier amplio. Entonces:

1.  $R$  es Cohen-Macaulay si y sólo si :

- a)  $h^i(X, nL) = 0$  para todo  $n$  y todo  $i$  con  $0 < i < \dim X$ ,
- b)  $h^0(X, nL) = 0$  para todo  $n < 0$ ,
- c)  $h^{\dim X}(X, nL) = 0$  para  $n \gg 0$ .

2.  $R$  es Gorenstein si y sólo si es Cohen-Macaulay y  $K_X = \ell L$  para algún  $\ell \in \mathbb{Z}$ .

Dada la regularidad de las superficies que nos interesan y por el Teorema de desvanecimiento de Kawamata, se tiene lo siguiente:

**Corolario 9.1.** Sea  $S$  una superficie minimal de tipo general con  $K_S^2 = 6$  y  $p_g = 4$ . Entonces el **anillo canónico**  $R(S, K_S)$  es un anillo de Gorenstein.

### 3.2.1. Teoremas estructurales

Existen teoremas generales de estructura para anillos de Gorenstein en codimensiones 2, 3 y 4 (debidos a Serre, a Buchsbaum y Eisenbud y a Miles Reid, respectivamente) que mencionamos brevemente a continuación:

- En codimensión 2, Serre probó que todo anillo de Gorenstein es una intersección completa (véase [Serre]).
- En codimensión 3 el teorema estructural de Buchsbaum y Eisenbud que puede consultarse en [Buchsbaum-Eisenbud] establece que  $R = \mathcal{O}/I$  es un anillo de Gorenstein de codimensión 3 si y sólo si tiene una resolución libre minimal de la forma:

$$R \leftarrow \mathcal{O} \leftarrow \mathcal{O}^{2m+1} \xleftarrow{\phi} \mathcal{O}^{2m+1} \leftarrow \mathcal{O} \leftarrow 0, \quad (3.2)$$

con  $\phi$  dada por una matriz antisimétrica de  $(2m+1) \times (2m+1)$  cuyos pfaffianos de  $2m \times 2m$  generan a  $I$ . En la inmensa mayoría de casos encontrados hasta la fecha resulta que  $m = 2$ . En este punto es conveniente introducir cierta notación para pfaffianos de  $4 \times 4$  y matrices antisimétricas:

Siempre omitiremos la diagonal de ceros y el bloque triangular inferior de una matriz antisimétrica, así que, por ejemplo, una matriz antisimétrica de  $5 \times 5$  entradas se escribirá como sigue:

$$\phi = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & a_{34} & a_{35} \\ & & & a_{45} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Y escribiremos  $\text{Pf}_i(\phi)$  para denotar al pfaffiano de la submatriz de  $4 \times 4$  obtenida luego de omitir el  $i$ -ésimo renglón y columna de  $\phi$ . Entonces, el resultado de Buchsbaum y Eisenbud dice que, para el caso  $m = 2$ , los generadores del ideal  $I$  (módulo signos  $\pm$ ) son los siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Pf}_1(\phi) &= a_{23}a_{45} - a_{24}a_{35} + a_{25}a_{34}, \\ \text{Pf}_2(\phi) &= a_{13}a_{45} - a_{14}a_{35} + a_{15}a_{34}, \\ \text{Pf}_3(\phi) &= a_{12}a_{45} - a_{14}a_{25} + a_{15}a_{24}, \\ \text{Pf}_4(\phi) &= a_{12}a_{35} - a_{13}a_{25} + a_{15}a_{23}, \\ \text{Pf}_5(\phi) &= a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Más en general, si tomamos una matriz antisimétrica  $M$  de  $m \times m$  entradas  $M_{r,s}$ , denotaremos simplemente con  $ij.k\ell$ , donde  $i < j < k < \ell$ , al pfaffiano de la matriz de  $4 \times 4$  obtenida seleccionando los 4 renglones y las correspondientes columnas según la elección de índices indicada. Precisamente:

$$ij.k\ell = M_{ij}M_{k\ell} - M_{ik}M_{j\ell} + M_{i\ell}M_{jk}. \quad (3.5)$$



- El teorema de estructura en codimensión 4 de Reid, probado en [Reid 4], §2.5, es un resultado análogo al de Buchsbaum y Eisenbud, sin embargo, tal cual está enunciado, (en términos de ciertas *variedades molde* llamadas variedades Spin-Hom), está todavía lejos de ser aplicable en situaciones prácticas.

Para codimensiones superiores (e incluso para codimensión 4), uno depende básicamente de su entendimiento del caso particular que esté estudiando para poder dar una presentación del anillo. Como veremos más adelante, esto ha impuesto una dificultad natural para poder abordar exitosamente los problemas pendientes en clasificación de superficies y variedades de dimensión superior.

### 3.2.2. Factores rodantes

El anillo principal que calcularemos en esta tesis, admite una presentación que diremos que está en **formato de factores rodantes**. Incluimos aquí algunas definiciones como referencia y para conveniencia de la lectora o lector.

Sea  $I$  un ideal en un anillo polinomial  $\mathcal{O}$ . Supongamos que existe una matriz  $A \in \text{Mat}_{2,n}(\mathcal{O})$ ,

$$A = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \end{pmatrix}$$

tal que sus  $\binom{n}{2}$  menores de dos por dos están en  $I$ . Decimos que un elemento  $r_{\binom{n}{2}+1} \in I$  puede rodar respecto a  $A$  si está en el ideal generado por los elementos de su primer renglón. Luego,  $r_{\binom{n}{2}+1}$  es de la forma

$$r_{\binom{n}{2}+1} = \sum_{i=1}^n a_i f_{1i} \quad \text{para algún } a_i \in \mathcal{O}.$$

Llamamos a

$$r_{\binom{n}{2}+2} := \sum_{i=1}^n a_i f_{2i}$$

un **rodamiento** de  $r_{\binom{n}{2}+1}$  respecto a  $A$ . Si  $r_{\binom{n}{2}+2} \in I$  y puede ser rodado nuevamente respecto a  $A$ , diremos que  $r_{\binom{n}{2}+1}$  puede rodarse dos veces, etc. Finalmente, si  $I$  es finitamente generado y el resto de sus generadores  $r_{\binom{n}{2}+2}, \dots, r_{\binom{n}{2}+m}$  son rodamientos sucesivos de  $r_{\binom{n}{2}+1}$  respecto a  $A$ , decimos que  $\mathcal{O}/I$  está en **formato de factores rodantes**.

## 3.3. Series de Hilbert

Para los anillos graduados que consideraremos,  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ , tenemos que  $R_n$  es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita para  $n \geq 1$  (y en particular  $R_0 = k$ ). Escribamos:

$$P_n(R) = \dim_k R_n \quad \text{y} \quad P_R(t) = \sum_{n \geq 0} P_n(R) t^n.$$

La serie de potencias  $P_R(t)$  se llama **serie de Hilbert** de  $R$ . Bajo nuestros supuestos, esta serie es una función racional de  $t$ ; es decir, si

$$R \cong k[x_0, \dots, x_n]/I_R \quad \text{con} \quad \text{wt}(x_i) = a_i$$

entonces  $\prod_{i=1}^n (1 - t^{a_i}) P_R(t)$  es un polinomio en  $t$ , llamado el **numerador de Hilbert** de  $R$ . Este numerador contiene información y *pistas* sobre el álgebra homológica de  $R$ .

## Ejemplos básicos

- Si  $R = k[x_0, \dots, x_n]$  donde cada  $x_i$  tiene peso  $\text{wt}(x_i) = a_i$ , entonces:

$$P_R(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - t^{a_i})}.$$

- Si  $R = k[x_0, \dots, x_n]/(f_d)$  es el anillo de una hipersuperficie de grado  $d$  en el espacio proyectivo torcido  $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ , entonces:

$$P_R(t) = \frac{1 - t^d}{\prod_{i=1}^n (1 - t^{a_i})}.$$

- Si  $R = k[x_0, \dots, x_n]/(f_{d_1}, f_{d_2})$  es el anillo de una intersección completa de bigrado  $(d_1, d_2)$  en el espacio proyectivo torcido  $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ , entonces:

$$P_R(t) = \frac{(1 - t^{d_1})(1 - t^{d_2})}{\prod_{i=1}^n (1 - t^{a_i})}.$$

## 3.4. El principio de sección hiperplanar

Parte central del programa de anillos graduados es el principio de que las propiedades algebraico geométricas de un anillo/variedad están fuertemente relacionadas con la de sus secciones hiperplanares. El ingrediente central formalizando esta idea es el siguiente resultado:

**Teorema 10.** (El principio de sección hiperplanar) *Sea  $R$  un anillo graduado. Sean  $R_d$  su componente de grado  $d$  ( $d \geq 1$ ) y  $x_0 \in R_d$  un elemento que no sea divisor de cero. Existe una sucesión exacta*

$$0 \rightarrow R(-d) \xrightarrow{x_0} R \xrightarrow{\pi} \bar{R} := R/(x_0) \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Y tenemos que:

1. Si  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \bar{R}$  generan  $\bar{R}$  y  $x_1, \dots, x_n \in R$  son tales que  $\pi(x_i) = \bar{x}_i$  para  $1 \leq i \leq n$ . Entonces  $x_0, x_1, \dots, x_n$  generan  $R$ .

2. Supongamos que

$$\bar{R} \cong k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]/(f_1, \dots, f_m). \quad (3.7)$$

Entonces existen relaciones  $F_1, \dots, F_m$  entre los  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , tales que  $\pi(F_i) = f_i$  y  $F_i$  generan al ideal  $\ker ev$ , donde

$$ev: k[x_0, \dots, x_n] \rightarrow R. \quad (3.8)$$

3. Similarmente para las sizigias, es decir, si tenemos una sizigia  $\sigma_i : \sum_{j=1}^m l_j f_j \equiv 0 \in k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ . Entonces existen  $L_j \in k[x_0, \dots, x_n]$  tales que tenemos la siguiente sizigia:

$$\Sigma_i : \sum_{j=1}^m L_j F_j \equiv 0 \in k[x_0, \dots, x_n], \quad (3.9)$$

y  $L_j$  se reduce a  $l_j$  módulo  $x_0$ .

*Demostración.* Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & \mathcal{J} & & \mathcal{I} & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & (x_0) & \longrightarrow & k[x_0, \dots, x_n] & \longrightarrow & k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n] \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R(-d) & \xrightarrow{x_0} & R & \xrightarrow{\pi} & \bar{R} \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

donde las dos sucesiones horizontales son exactas y la flecha punteada es el único morfismo que hace que el diagrama conmute. Sea  $f_{x_0} \in (x_0)$ . Bajo el morfismo punteado,  $f_{x_0}$  es mapeado a  $f \in R_{\deg(f)} = R(-d)_{\deg(f_{x_0})}$ . Este morfismo está bien definido porque  $x_0$  no es un divisor de cero (es decir,  $(x_0) \subset R$  es un  $R$ -módulo libre). Más aún, es un isomorfismo. Se sigue entonces del lema de la serpiente que

$$k[x_0, \dots, x_n] \rightarrow R \quad (3.10)$$

es suprayectivo. En otras palabras,  $R$  es generado por  $x_0$  y las preimágenes de  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  bajo  $\pi$ . Se sigue también que  $\mathcal{I} \cong \mathcal{J}$  como  $k[x_0, \dots, x_n]$ -módulos. Supongamos que  $f_1, \dots, f_m$  generan a  $\mathcal{I}$  sobre  $k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ , entonces  $f_1, \dots, f_m$  son generadores de  $\mathcal{I}$  sobre  $k[x_0, \dots, x_n]$ . Por lo tanto existen  $F_1, \dots, F_m$  que generan a  $\mathcal{J}$  sobre  $k[x_0, \dots, x_n]$ . Ahora, notemos que el isomorfismo  $\mathcal{J} \xrightarrow{\cong} \mathcal{I}$  es simplemente la restricción de  $k[x_0, \dots, x_n] \rightarrow k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ , que está unívocamente determinada por  $x_i \mapsto \bar{x}_i$  para  $1 \leq i \leq n$ , y  $x_0 \mapsto 0$ .

Por último, sea  $F_j = f_j + x_0 g_j$  para algún  $g_j \in k[x_0, \dots, x_n]$ . Supongamos que  $\sigma_i : \sum_{j=1}^m l_j f_j \equiv 0$ . Entonces

$$\sum_{j=1}^m l_j F_j \equiv x_0 \sum_{j=1}^m l_j g_j. \quad (3.11)$$

$x_0 \sum_{j=1}^m l_j g_j \in (x_0)$  que, como  $x_0$  no divide a cero, implica  $\sum_{j=1}^m l_j g_j \in \mathcal{J}$ , podemos escribir  $\sum_{j=1}^m l_j g_j = \sum_{j=1}^m h_j F_j$ . Luego  $\Sigma_i : \sum_{j=1}^m L_j F_j \equiv 0$ , donde  $L_j := l_j - x_0 h_j$ .  $\square$

## 3.5. Ejemplos

En esta sección estudiaremos un par de ejemplos para mostrar la filosofía general del programa de anillos graduados.

### 3.5.1. Una curva semicanónica de género 7

Sea  $C$  una curva no singular, proyectiva de género 7 y  $D$  un divisor en  $C$  tal que  $K_C = 2D$  y  $h^0(D) = 3$  (en la Sección §3.6 explicaremos la relevancia de este caso). Por R-R, tenemos  $\deg(K_C) = 12$ , por lo tanto  $\deg D = 6$ .

Supongamos que el sistema lineal  $|D|$  no tiene puntos base. Este sistema define un morfismo  $\varphi_D : C \rightarrow \overline{C} \subset \mathbb{P}^2$  que por razones de grado, a priori, tiene 3 posibilidades:

1.  $\varphi_D$  es birracional y  $\overline{C}$  es una séxtica plana (que por razones de género debe tener 3 puntos dobles simples).
2.  $\varphi_D$  es una cubierta doble y  $\overline{C}$  es una curva elíptica (no puede tratarse de una cúbica singular, pues estas no son proyectivamente normales y  $\overline{C}$  sí lo es, a menos que fuera una curva hiperelíptica, pero esto no es posible pues  $\overline{C}$  debería ser una cónica no singular). Por la fórmula de Riemann-Hurwitz, el divisor de ramificación de  $\varphi_D$  tiene grado 12.
3.  $\varphi_D$  es una cubierta triple y  $\overline{C}$  es una cónica (necesariamente no singular, pues de lo contrario sería reducible). En este caso, cuando  $C$  admite un morfismo 3 a 1 a  $\mathbb{P}^1 \cong \overline{C}$ , se le llama **curva trigonal**.

Puede probarse que los tres casos anteriores en efecto ocurren, pero consideraremos sólo **el primero de ellos**.

Nuestro objetivo es calcular el **anillo semicanónico**  $R(C, D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}_C(nD))$ . El primer paso es conocer las dimensiones  $h^0(nD)$ . Por definición tenemos  $h^0(0) = 1$ ,  $h^0(D) = 3$  y  $h^0(2D) = 7$ . A partir de  $n = 3$  el divisor  $nD$  es **no especial**, esto es,  $h^0(K_C - nD) = 0$  y por R-R tenemos:

$$h^0(nD) = 1 - 7 + \deg(nD) = 6(n - 1).$$

Resumimos lo anterior en la siguiente igualdad:

$$h^0(nD) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 3 & \text{si } n = 1, \\ 7 & \text{si } n = 2, \\ 6(n - 1) & \text{si } n \geq 3. \end{cases} \quad (3.12)$$

Sea  $\{x_1, x_2, x_3\}$  una base de  $H^0(D)$ . Los seis monomios que forman  $S^2(x_1, x_2, x_3) \subset H^0(2D)$  deben ser linealmente independientes sobre  $k$ , pues de lo contrario  $\overline{C} = \varphi_D(C)$  sería una cónica y estaríamos en el caso 3. Dado que  $h^0(2D) = 7$ , necesitamos una sección adicional

$y$  para formar una base de  $H^0(2D)$ .

Para grado 3 tenemos  $h^0(3D) = 12$  y conocemos de antemano a 13 elementos en  $H^0(3D)$ :  $S^3(x_1, x_2, x_3)$  y  $\{x_1y, x_2y, x_3y\}$ . Por lo tanto, deben existir  $a_1, \dots, a_{13} \in k$  tales que:

$$a_1x_1^3 + \dots + a_{10}x_3^3 + a_{11}x_1y + a_{12}x_2y + a_{13}x_3y = 0. \quad (3.13)$$

Más aún, al menos uno de los coeficientes  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  debe ser distinto de cero, pues de lo contrario estaríamos en el caso 2. Supongamos que  $a_{11} \neq 0$ .

En grado 4, tenemos  $h^0(4D) = 18$ . Contamos ya con los 15 elementos base de  $S^4(x_1, x_2, x_3)$ . Entre los 6 elementos base de  $S^1(y) \otimes S^2(x_1, x_2, x_3)$ , podemos descartar a cualquiera que tenga como factor a  $x_1$  por la relación de dependencia lineal del párrafo anterior, quedando a lo mucho 3 elementos linealmente independientes:  $x_2^2y, x_2x_3y, x_3^2y$ . Finalmente tenemos  $y^2 \in H^0(4D)$ . Debe existir entonces una nueva relación de dependencia lineal. Afirmamos que en dicha relación, el coeficiente de  $y^2$  debe ser no nulo; de no ser así, podríamos escribir una ecuación de la forma:

$$b_1x_1^4 + \dots + b_{15}x_3^4 = ax_2^2y + bx_2x_3y + cx_3^2y. \quad (3.14)$$

Dado que  $C$  no es hiperelíptica,  $K_C$  es muy amplio. Claramente  $D$  no es muy amplio (recordemos que  $\varphi_D(C)$  es una séxtica singular). Esto implica que las secciones de  $H^0(K_C)$  (y en particular  $y$ ) separan puntos, mientras que las de  $H^0(D)$  (y por lo tanto las de  $S^d(x_1, x_2, x_3)$ , para  $d \geq 1$ ) no. Pero esto contradice (3.14). Por lo tanto tenemos una relación de la forma:

$$y^2 = b_1x_1^4 + \dots + b_{15}x_3^4 + b_{16}x_2^2y + b_{17}x_2x_3y + b_{18}x_3^2y. \quad (3.15)$$

De aquí se sigue que  $\{x_1^4, \dots, x_3^4, x_2^2y + x_2x_3y + x_3^2y\}$  es una base de  $H^0(4D)$ .

Ahora afirmamos que hemos concluido el cálculo. Para probarlo, veamos primero que no requerimos más generadores para  $R(C, D)$ : sea  $n \geq 4$ . Como  $|D|$  es libre de puntos base, el Teorema 6 (el truco de Castelnuovo) implica que el kernel del mapeo

$$\eta: S^1(x_1, x_2) \otimes H^0(nD) \rightarrow H^0((n+1)D)$$

es isomorfo a  $H^0((n-1)D)$ . Por R-R tenemos  $h^0((n-1)D) = 1 - g(C) + \deg((n-1)D) + h^0(2D - (n-1)D)$ . Como  $n \geq 4$ ,  $h^0(2D - (n-1)D) = 0$ . Luego  $h^0((n-1)D) = 1 - 7 + 6(n-1) = 6(n-2)$ . Por otro lado, también por R-R tenemos  $\dim_{\mathbb{C}}(S^1(x_1, x_2) \otimes H^0(nD)) = 12(n-1)$ . Por lo tanto el rango de  $\eta$  es igual a  $12(n-1) - 6(n-2) = 6n$ , que es la dimensión de  $H^0((n+1)D)$  (véase la ecuación (3.12)). De aquí concluimos que  $\eta$  es suprayectiva y por lo tanto, no necesitamos más secciones para generar a  $R(C, D)$ .

Por lo anterior,  $R(C, D)$  es Gorenstein de codimensión 2. Se sigue del teorema estructural de Serre que  $R(C, D)$  es una intersección completa. Concluimos que:

$$R(C, D) \cong k[x_1, x_2, x_3, y]/(f_3, f_4),$$

donde  $f_3$  y  $f_4$  son las formas homogéneas del grado que indica el índice definidas por las ecuaciones (3.13) y (3.15) respectivamente. Puede verificarse fácilmente que:

$$P_R(t) = \frac{(1-t^3)(1-t^4)}{(1-t)^3(1-t^2)}$$

### 3.5.2. La degeneración $II \rightarrow III_b$

Comencemos por recordar y dar más detalles sobre el significado de estos estratos (recordemos que estamos considerando superficies minimales  $S$  de tipo general con  $K_S^2 = 6$  y  $p_g = 4$ ).

- $II$ :  $|K_S|$  es libre de puntos base y define un morfismo 3 a 1  $\varphi_{K_S} : S \rightarrow \overline{S} \subset \mathbb{P}^3$ , donde  $Q$  es el cono cuadrático dado por una ecuación de la forma  $x_1x_3 = x_2^2$ . En este caso, el pullback del haz de  $\overline{S}$  genera un haz  $|A|$  en  $S$  con  $2A = K_S$ . En general,  $S$  tiene un punto de orbidad de tipo  $\frac{1}{2}(1,1)$  sobre el vértice de  $\overline{S}$ . La restricción de  $A$  a una curva general  $C \in |A|$  da lugar a un divisor  $\mathbb{Q}$ -Cartier  $D = \frac{1}{2}P + Q$  tal que  $2D = P + 2Q$  es un  $g_3^1$ .
- $III_b$ : En este estrato,  $|K_S|$  tiene un punto base singular y  $\overline{S} = \varphi_{K_S}(S)$  es nuevamente un cono cuadrático.  $\varphi_{K_S}$  es una cubierta doble. Nuevamente  $K_S = 2A$  donde  $A$  es el pullback del haz de líneas de  $\overline{S}$ . Tenemos  $A^2 = \frac{3}{2}$ . La curva general  $C \in |A|$  es hiperelíptica y no singular de género 3 y el divisor  $D = A|_C$  es  $\frac{3}{2}P$ , donde  $P$  es un punto de Weierstrass (esto es, un punto de ramificación del morfismo 2 a 1 de  $C$  a  $\mathbb{P}^1$ ). Se sigue que  $|2D| = P + g_2^1$ , es decir,  $|2D|$  es un  $g_3^1$  con un punto base.

La estrategia seguida por Bauer, Catanese y Pignatelli en ambos casos, es construir  $R(C, D)$ . La construcción a partir de estos anillos de  $R(S, K_S)$  es hasta cierto punto, automática.

### El anillo en el caso $II$

Tenemos  $g(C) = 3$ ,  $D = \frac{1}{2}P + Q$  y  $2D$  es un  $g_3^1$ . Se sigue por adjunción que  $K_C = P + 3Q$ . Mostraremos los pasos básicos en el cálculo de  $R(C, D)$ . (para los detalles, sugerimos consultar [BCP]). Aplicando R-R y usando los supuestos, tenemos:

$$h^0(nD) = \begin{cases} 1 & n = 0; \\ 1 & n = 1; \\ 2 & n = 2 & \text{pues } P + 2Q = K_C - Q \text{ es un } g_3^1; \\ 3 & n = 3 & \text{pues } 3D = K_C + \frac{1}{2}P \text{ y } g(C) = 3; \\ \frac{3n}{2} - 2 & \text{si } n \geq 4 \text{ para } n \text{ par;} \\ \frac{3n-1}{2} - 2 & \text{si } n \geq 4 \text{ para } n \text{ impar.} \end{cases}$$

De aquí se sigue que:

$$\begin{aligned} P_R(t) &= 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + 5t^5 + 7t^6 + \dots \\ (1-t^2)P_R(t) &= 1 + t + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 2t^5 + 3t^6 + \sum_{n \geq 7} 3t^n \\ (1-t)(1-t^2)P_R(t) &= 1 + t^3 + t^6. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P_R(t) = \frac{(1-t^9)}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}.$$

Esto sugiere que  $R(C, D) \cong k[x, y, z]/(f_9)$ , con  $\text{wt}(x) = 1$ ,  $\text{wt}(y) = 2$ ,  $\text{wt}(z) = 3$ . Puede probarse que tal es el caso;  $C$  tiene una singularidad de orbidad de tipo  $\frac{1}{2}(1)$  en el punto  $(0 : 1 : 0)$ . El sistema lineal  $|2D| = |P + 2Q|$  es un  $g_3^1$ .

### El anillo en el caso $III_b$

En este caso, nuevamente  $C$  es una curva de género 3 (hiperelíptica), y nos interesa calcular  $R(C, D)$ , donde  $D = \frac{3}{2}P$  con  $P$  un punto de Weierstrass. La estrategia consiste en calcular el anillo  $R = R(C, \frac{1}{2}P)$  para luego obtener su subanillo  $R(C, D)$  tomando la **tercer truncación de Veronese** de  $R(C, \frac{1}{2}P)$ . Esto es, si  $R_d$  es la pieza de grado  $d$  de  $R$ , entonces la pieza de grado  $d$  de  $R(C, D)$  es  $R_{3d}$ .

Es fácil probar que

$$R\left(C, \frac{1}{2}P\right) \cong k[a, b, c]/(c^2 - f_7(a^4, b)),$$

donde  $\text{wt}(a) = 1$ ,  $\text{wt}(b) = 4$ ,  $\text{wt}(c) = 14$ . Es decir,  $C$  es una curva de grado 28 en el plano proyectivo torcido  $\mathbb{P}(1, 4, 14)$ .

Tomando la tercer truncación de Veronese, tenemos que  $R(C, D)$  requiere 6 generadores:

$$x = a^3, \quad y = a^2b, \quad z = ab^2, \quad t = b^3, \quad u = ac, \quad v = bc$$

de grados 1,2,3,4,5,6 respectivamente. Tenemos 6 relaciones tautológicas que son los menores  $2 \times 2$  de la siguiente matriz:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} x & y & z & u \\ y & z & t & v \end{pmatrix}.$$

Escribiremos dichos menores de manera compacta de la siguiente forma:

$$\bigwedge^2 \mathcal{A} \tag{3.16}$$

y tres relaciones que se deducen a partir de  $c^2 = f_7(a^4, b)$ . Estas relaciones definen ecuaciones de la forma:

$$u^2 = [a^2 f_7], \quad uv = [ab f_7], \quad v^2 = [b^2 f_7],$$

los corchetes en la expresión  $[a^2 f_7]$  significan que escribimos a los monomios  $a^{30}, a^{26}b, \dots, a^2b^7$  en términos de  $x, y, z, t$  y similarmente para las otras expresiones. Esta operación suele llamarse **rendering** en inglés. Podemos agrupar los términos en  $f_7$  como sigue:

$$f_7 = a^{28} + a^{24}b + \dots + a^4b^6 + b^7 = aA + b^4B$$

donde  $A = A_9, B = B_4 \in k[x, y, z, t]$ , lo cual permite escribir las últimas tres ecuaciones así:

$$r_7 = 0, \quad r_8 = 0, \quad r_9 = 0 \quad (3.17)$$

donde

$$r_7 = -u^2 + xA + z^2B, \quad r_8 = -uv + yA + ztB, \quad r_9 = -v^2 + zA + t^2B. \quad (3.18)$$

Como primer conclusión, tenemos:

$$R(C, D) \cong k[x, y, z, t, u, v] / \left( \bigwedge^2 \mathcal{A}, r_7, r_8, r_9 \right). \quad (3.19)$$

Es claro que  $R(C, D)$  es Gorenstein de codimensión 4. Obsérvese además que (3.19) está en formato de factores rodantes. Esta clase de anillos ha sido ampliamente estudiada por Reid y su escuela. Puede verificarse que  $R(C, D)$  también admite una presentación de la forma:

$$k[x, y, z, t, u, v] / (\mathbf{Pf}_4 M), \quad (3.20)$$

donde  $\mathbf{Pf}_4 M$  denota a los pfaffianos de  $4 \times 4$  de la siguiente matriz antisimétrica:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & z & x & y & u \\ & t & y & z & v \\ & & u & v & A \\ & & & 0 & Bz \\ & & & & Bt \end{pmatrix} \quad \text{de pesos} \quad \text{wt}(M) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ & 4 & 2 & 3 & 6 \\ & & 5 & 6 & 9 \\ & & & 4 & 7 \\ & & & & 8 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

El bloque superior derecho de  $3 \times 3$  de  $M$  es simétrico respecto a su diagonal principal. Además el bloque de  $3 \times 3$  de la esquina inferior derecha es  $B$  por el bloque de las mismas dimensiones pero de la esquina superior izquierda. Estas propiedades de simetría hacen que de las 15 entradas de  $M$ , sólo 9 sean independientes. Esto a la vez implica que el ideal generado por los 15 pfaffianos de  $4 \times 4$  en realidad es generado sólo por 9 de ellos (que son las 9 relaciones que aparecen en la presentación de factores rodantes (3.19)).

Las principales ventajas de esta presentación sobre la de factores rodantes, son las siguientes:

1. Esta última es **flexible**; esto significa que al deformar las entradas de la matriz  $M$  y por lo tanto los generadores del ideal de relaciones, uno también deforma sus sizigias, lo cual a la vez implica que uno obtiene en automático una familia plana de anillos.
2. Aunque esto no siempre ocurre, en este caso tenemos una entrada  $(M_{1,2})$  de grado 0. Esto permite escribir la siguiente familia de anillos:

$$R_\lambda = k[x, y, z, t, u, v] / (\mathbf{Pf}_4 M_\lambda), \quad (3.22)$$

con  $\lambda \in \Delta \subset k$  donde  $\Delta$  es un disco alrededor de 0 y

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & z & x & y & u \\ & t & y & z & v \\ & & u & v & A \\ & & & B\lambda & Bz \\ & & & & Bt \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$



Por construcción,  $R_0$  (el anillo de la fibra singular de la familia) corresponde a una sección hiperplanar de una superficie del estrato  $III_b$ . Más adelante mostraremos que en la fibra general (cuando  $\lambda \in k^\times$ ) 3 de los 9 pfaffianos no redundantes de  $M_\lambda$  eliminan a las variables  $t, u, v$ , obteniéndose un anillo de una sección hiperplanar de una superficie del estrato  $II$ .

La estrategia utilizada en este ejemplo ha sido empleada con éxito para resolver problemas similares en muy diversos contextos (por ejemplo para el estudio de ciertas 3-variedades de Fano, o para superficies de tipo general con otros tipos numéricos).

A continuación mostraremos con más detalle el cálculo del ideal  $(\mathbf{Pf}_4 M_\lambda)$  de la presentación (3.22).

Dada una matriz antisimétrica  $M$  con  $2k \times 2k$  entradas  $m_{ij}$ , su pfaffiano es:

$$\text{Pf}M = \sum'_{\sigma \in S_{2k}} \prod_{i=1}^k m_{\sigma(2i-1)\sigma(2i)}$$

$S_{2k}$  es el grupo simétrico y el símbolo  $\sum'$  significa que sólo estamos tomando una aparición de cada factor repetido. La antisimetría hace que cada término aparezca  $2^k \cdot k!$  veces, de manera que el pfaffiano tiene

$$\frac{2k!}{2^k k!} = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$$

términos. Así, un pfaffiano  $4 \times 4$  es de la forma

$$\text{Pf}_{12,34} = m_{12}m_{34} - m_{13}m_{24} + m_{14}m_{23}.$$

Es común utilizar la notación  $ij.kl$  para denotar (salvo cambio de signo<sup>1</sup>.) el pfaffiano  $\text{Pf}_{ij,kl}$ .

Así las cosas, los 15 pfaffianos que generan el ideal  $(\mathbf{Pf}_4 M_\lambda)$  se muestran a continuación (divididos en 3 grupos):

$$I : \begin{cases} 12.34 : \lambda u - zy + tx \\ 12.35 : \lambda v - z^2 + ty \\ 12.45 : \lambda^2 B - xz + y^2 \\ 12.36 : \lambda A - zv + tu \end{cases}$$

$$II : \begin{cases} 13.45 : \lambda Bz - yv + zu = 12.46 \\ 14.56 : xBt - yBz + B\lambda u = B \cdot 12.34 \\ 23.45 : tB\lambda - yv + uz = 12.56 \\ 23.46 : tBz - yA + uv = 13.56 \\ 24.56 : yBt - Bz^2 + B\lambda v = B \cdot 12.35 \\ 34.56 : uBt - vBz + B\lambda A = B \cdot 12.46 \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>En nuestro contexto no nos interesa el signo de ningún pfaffiano, pues no afecta al generar el ideal del anillo graduado. Véase también §3.2.1

$$III : \begin{cases} 12.46 : \lambda Bz - xv + yu \\ 12.56 : \lambda Bt - yv + zu \\ 13.46 : Bz^2 - xA + u^2 \\ 13.56 : Btz - yA + uv \\ 23.56 : Bt^2 - zA + v^2 \end{cases}$$

Como se vio anteriormente, el caso  $\lambda = 0$  corresponde a una sección hiperplanar del anillo canónico de una superficie del estrato  $III_b$ . Si  $\lambda \neq 0$ , los primeros dos pfaffianos del grupo  $I$  claramente permiten eliminar  $u$  y  $v$  en términos de  $x, y, z, t$ . Para una elección general de coeficientes del polinomio de grado 4  $B$ , el término  $t$  debe aparecer acompañado de algún coeficiente no nulo, por lo que el pfaffiano 12.45 permite eliminar  $t$  también. El anillo de la fibra general,  $R_t$ , es generado entonces por sólo 3 generadores. Finalmente en lo referente al grupo  $I$ , el pfaffiano 12.36 define a la ecuación de grado 9 que define a la curva plana correspondiente a la fibra general de la familia de anillos  $R_\lambda$ .

Como ejercicio, puede verificarse que todos los pfaffianos del grupo  $III$  están en el ideal  $(I)$  (esto es, el ideal generado por los pfaffianos del grupo  $I$ ). Por ejemplo,  $\lambda \cdot 12.46 = z \cdot 12.45 - x \cdot 12.35 + y \cdot 12.34$ , lo cual implica  $12.46 \in (I)$ .

Finalmente, es claro que  $(II)$  está contenido en el ideal generado por  $I$  y  $III$ . Por lo tanto,  $R_{\lambda \neq 0}$  define un anillo de codimensión 1 (una curva de grado nueve en el plano proyectivo torcido  $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ , que corresponde a una superficie del estrato  $II$ ).

## 3.6. Nuestro punto de partida

El principal obstáculo para avanzar en el problema de clasificación es la falta de ejemplos concretos (debido a la complejidad de los cálculos involucrados) que impliquen trabajar con anillos de codimensión mayor que 4. La experiencia ha mostrado que no es necesario prestar mucha atención a la dimensión de la variedad que estamos considerando (insistimos en que el lector o lectora puede verificar que el cálculo para mostrar la existencia de la degeneración  $II \rightarrow III_b$  de superficies es el mismo que en el que describimos en la sección anterior para curvas). Teniendo en cuenta lo anterior propondremos una estrategia para atacar el problema de buscar la degeneración

$$I_a \rightarrow V_1.$$

### 3.6.1. Secciones hiperplanares de tipo $I_a$

Sea  $S$  una superficie minimal con  $K_S^2 = 6$ ,  $p_g = 4$  y correspondiente al estrato  $I_a$ . Consideremos una curva canónica general  $C \in |K_S|$ . Dado que  $|K_S|$  no tiene puntos base, por el Teorema de Bertini podemos suponer que  $C$  es no singular. Por adjunción, tenemos

$$K_C = (2K_S)|_C.$$

Esto implica que  $D = K_S|_C$  es un divisor semicanónico en  $C$  (es decir  $2D = K_C$ ). Además de que:

$$2g(C) - 2 = 2K_S^2.$$

Por lo tanto  $g(C) = 7$ .

Más aún, de la regularidad de  $S$  se sigue que  $h^0(D) = h^0(K_S) - 1 = 3$ .

Finalmente, como  $S$  está en el estrato  $I_a$ ,  $\varphi_D(C)$  debe ser una séxtica plana. Se sigue entonces que  $R(C, D)$  es precisamente el anillo que calculamos en §3.5.1:

$$R(C, D) \cong k[x_1, x_2, x_3, y]/(f_3, f_4)$$

### 3.6.2. Secciones hiperplanares de tipo $V_1$

Sea ahora  $S$  una superficie minimal con  $K_S^2 = 6$ ,  $p_g = 4$  y correspondiente al estrato  $V_1$ . Si bien esta vez  $|K_S|$  tiene un par de puntos base, estos son simples, por lo que nuevamente podemos usar el Teorema de Bertini para suponer que  $C$  es no singular. Nuevamente tenemos:

- $g(C) = 7$ .
- $K_S|_C = D$  es un divisor semicanónico.
- $h^0(D) = 3$ .

La diferencia respecto al caso anterior es que esta vez el hecho de que  $|K_S|$  tenga un par de puntos base y la imagen canónica de  $S$  sea una superficie cuadrática implica que  $|D| = P_1 + P_2 + 2g_2^1$ , donde  $P_1, P_2$  son puntos base y  $\varphi_D: C \rightarrow \mathbb{P}^2$  mapea a  $C$  (2 a 1) a una cónica no singular. En particular,  $C$  es una curva hiperelíptica.

En el siguiente capítulo calcularemos  $R(C, D)$  para este caso. Mostraremos que  $R(C, D)$  es un anillo de Gorenstein de codimensión 6.

## Capítulo 4

# Anillos hiperplanares de superficies de tipo $V_1$

En este capítulo,  $C$  es una curva proyectiva no singular de género 7 y  $D$  es un divisor en  $C$  tal que  $D = P_1 + P_2 + D'$ , donde  $P_1, P_2$  son los puntos base del sistema lineal  $|D|$  que es un  $g_6^2$ . En particular  $|D'|$  es un  $g_4^2$  libre de puntos base. Más aún,  $|D'| = 2g_2^1$ . Nuestro propósito es calcular  $R(C, D)$ .

### 4.1. Cubiertas dobles

En esta sección reunimos algunos resultados bien conocidos acerca de **cubiertas dobles finitas**. En general, dado un esquema  $X$ , una cubierta doble finita es un  $X$ -esquema

$$Y \xrightarrow{\pi} X$$

tal que el  $\mathcal{O}_X$ -álgebra  $\pi_*\mathcal{O}_Y$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo localmente libre de rango 2.

**Proposición 2.** *Supongamos que  $1 + 1 \in \mathcal{O}_X$  es invertible. Sea  $Y \xrightarrow{\pi} X$  una cubierta doble finita. Entonces*

$$\pi_*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{L}^{-1},$$

donde  $\mathcal{L}^{-1}$  es el cokernel del mapeo estructural  $\mathcal{O}_X \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_Y$ .

*Demostración.* Sean  $U \subset X$  un abierto y  $y \in \mathcal{O}_Y(\pi^{-1}(U))$ . Multiplicar por  $y$  define un morfismo

$$\pi_*\mathcal{O}_Y(U) \xrightarrow{y} \pi_*\mathcal{O}_Y(U),$$

que, después de elegir una base para  $\pi_*\mathcal{O}_Y(U)$ , está representado por una matriz

$$M_y \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathcal{O}_X(U)).$$

Como  $1 + 1 = 2 \in \mathcal{O}_X$  es invertible, tenemos un mapeo bien definido

$$\pi_*\mathcal{O}_Y(U) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_X(U), \quad y \mapsto \frac{1}{2} \text{Traza}(M_y).$$

Este mapeo da, por construcción, una escisión para la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \rightarrow 0.$$

□

El resultado anterior es cierto para cualquier  $d$ -cubierta finita siempre que  $d$  sea invertible en  $\mathcal{O}_X$ . En particular es cierto para  $\mathbb{C}$ -variedades. El caso de nuestro interés (cubiertas dobles de curvas complejas no singulares) permite interpretaciones adicionales. Tenemos una involución natural

$$\iota : Y \longrightarrow Y,$$

(un automorfismo de grado 2) tal que  $\pi \circ \iota = \pi$ . Entonces

$$\pi_* \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{L}^{-1}$$

viene de la descomposición de los eigenspacios de  $\iota$ . La estructura de álgebra en  $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{L}^{-1}$  está dada por un mapeo de multiplicación

$$\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_X,$$

es decir, una sección del haz lineal  $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ . Un divisor  $B \subset X$  tal que  $\mathcal{O}_X(B) \cong \mathcal{L}^{\otimes 2}$  debe ser entonces la imagen bajo  $\pi$  del lugar invariante de  $\iota$ , esto es, el divisor de ramificación de la cubierta. En particular,  $\mathcal{O}_X(B)$  es un cuadrado perfecto en  $\text{Pic}(X)$ .

## 4.2. Geometría de curvas hiperelípticas

En esta sección discutimos los resultados acerca de curvas hiperelípticas que necesitaremos para calcular el anillo semicanónico  $R(C, D)$  (para un tratamiento más general, recomendamos [Reid D-E], §4).

Consideremos una cubierta doble  $\pi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ . Escribiremos  $B$  y  $R$  para denotar a los divisores de ramas y ramificación respectivamente y  $\iota : C \longrightarrow C$  para la involución hiperelíptica. Como  $h^0(K_C) = 7$ , la fórmula de Riemann-Hurwitz nos da

$$2 \cdot 7 - 2 = \deg(R) - 2 \cdot 2,$$

es decir,  $\pi$  está ramificada en 16 puntos  $Q_1, \dots, Q_{16} \in \mathbb{P}^1$  (necesariamente distintos, pues  $C$  es no singular). Estos puntos se levantan a 16 puntos de ramificación  $P_1, \dots, P_{16} \in C$  que son precisamente los puntos  $P_i$  tales que  $h^0(2P_i) = 2$ , esto es,  $|2P_i| = g_2^1$  (estos son los llamados puntos de Weierstrass de la curva hiperelíptica  $C$ ).

**Proposición 3.** 1. El divisor de ramificación de  $\pi$ ,  $R := \sum_{i=1}^{16} P_i$ , satisface  $|R| = 8g_2^1$ .

2. El sistema lineal canónico  $|K_C|$  es  $(g(C) - 1)g_2^1 = 6g_2^1$ .

*Demostración.* Una ecuación afín de  $C$  es de la forma  $y^2 = \bar{f}_{16}(t)$ , donde  $\bar{f}_{16}$  es un polinomio de grado 16 con igual número de raíces distintas. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que este polinomio no tiene término constante. En tal parche afín, la

función racional  $t^8/y$  tiene un divisor de ceros igual a 8 veces un punto de Weierstrass contado dos veces y divisor de polos igual a los 16 puntos de Weierstrass juntos. De aquí se sigue la primer parte del resultado.

Utilizando el mismo modelo plano afín, es claro que cualquier 1-forma en  $C$  puede escribirse como  $p(t)dt/y$ , donde  $p(t)$  es un polinomio de grado a lo más 6. De aquí se sigue la segunda parte. Más aún, una base del espacio de 1-formas está dada por  $\{dt/y, tdt/y, \dots, t^6dt/y\}$ . Se sigue que el mapeo canónico  $\varphi_{K_C} : C \rightarrow \mathbb{P}^6$  no es un encaje, sino el mapeo hiperelíptico  $\pi$  seguido del sexto encaje de Veronese de  $\mathbb{P}^1$  en  $\mathbb{P}^6$ .  $\square$

**Proposición 4.** *Sea  $P \in C$  un punto de Weierstrass. Entonces*

$$R(C, 2P) \cong k[t_1, t_2, y]/(y^2 - f_{16}(t_1, t_2)),$$

donde  $\deg(t_1) = \deg(t_2) = 1$ ,  $\deg(y) = 8$  y  $f_{16}$  es una forma homogénea de grado 16 que define el lugar de ramas  $Q_j \in \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(H^0(C, 2P))$ ;  $1 \leq j \leq 16$ .

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 3 y de la teoría general de cubiertas dobles (véase la Proposición 2), que la descomposición de  $\pi_*\mathcal{O}_C$  en las  $\pm 1$ -eigengavillas de  $\iota$  es:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-8);$$

la estructura de álgebra está dada por el polinomio  $f_{16}$ . Este define un mapeo de multiplicación

$$f_{16} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-16) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}.$$

El cálculo se sigue inmediatamente; tenemos, para cualquier  $n \geq 1$ :

$$H^0(C, 2nP) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) \oplus H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n-8)).$$

Por lo tanto, todos los generadores de  $R$  en grado  $n$  para  $1 \leq n \leq 7$ , vienen de  $S^n(t_1, t_2)$ , donde  $\{t_1, t_2\}$  es una base de  $H^0(C, g_2^1) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))$  y el último generador necesario es de grado 8:  $y$ , que está en la  $-1$  eigengavilla de la involución y satisface  $y^2 = f_{16}(t_1, t_2)$ .  $\square$

### 4.3. Pergaminos normales racionales

Toda curva hiperelíptica está contenida de forma natural en un **pergamino normal racional de dimensión 2**. Este tipo de variedades aparece en prácticamente todas las áreas de estudio en geometría algebraica y permite experimentar e ilustrar geoméricamente muchos conceptos interesantes. Es por ello que dedicaremos una breve sección a discutirlos en términos elementales.

#### 4.3.1. El conjunto subyacente

Sea  $a \in \mathbb{N}$ . Denotamos al grupo multiplicativo  $k^\times$  como  $\mathbb{G}_m$ . Definimos el pergamino  $\mathbb{F}_a$  como el cociente  $(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{A}^2 \setminus \{0\})$  módulo una acción de  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ . Tomemos

coordenadas  $(t_1, t_2; x_1, x_2)$  para  $(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{A}^2 \setminus \{0\})$  y  $(\lambda, \mu)$  para  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ . La acción está definida como sigue:

$$(\lambda, 1) \cdot (t_1, t_2; x_1, x_2) \mapsto (\lambda t_1, \lambda t_2; x_1, \lambda^{-a} x_2);$$

$$(1, \mu) \cdot (t_1, t_2; x_1, x_2) \mapsto (t_1, t_2; \mu x_1, \mu x_2)$$

Observemos que la razón  $(t_1 : t_2)$  es invariante bajo la acción de  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ , por lo que la proyección al primer factor define un morfismo  $\pi : \mathbb{F}_a \rightarrow \mathbb{P}^1$ :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}) & \longrightarrow & \mathbb{F}_a \\ \downarrow p_1 & & \downarrow \pi \\ (\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Es útil almacenar la información anterior en la siguiente **matriz de acción** de  $\mathbb{F}_a$ :

$$\begin{array}{cccc} & t_1 & t_2 & x_1 & x_2 \\ \lambda & \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ \mu & & & & \end{array}$$

Usaremos la notación  $(t_1 : t_2; x_1 : x_2)$  para referirnos a la órbita de  $(t_1, t_2; x_1, x_2)$  bajo la acción, es decir, al punto en  $\mathbb{F}_a$ . Por ejemplo, en  $\mathbb{F}_2$  tenemos  $(1 : 2; 3 : 4) = (2 : 4; 3 : 1) = (1 : 2; -6 : -8)$ , etc.

**Observación 3.** Por definición  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , que es una superficie bien conocida, por lo que en lo subsecuente supondremos que  $a \geq 1$ .

### 4.3.2. Polinomios bihomogéneos

Las funciones racionales en  $\mathbb{F}_a$  son cocientes de polinomios bihomogéneos, que son eigenfunciones de la acción de  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ . Por ejemplo, el espacio  $S^1(t_1, t_2)$  de polinomios homogéneos de grado 1 en  $t_1, t_2$  y grado 0 en  $x_1, x_2$  es bidimensional, con base  $\{t_1, t_2\}$  y el radio  $t_1 : t_2$  define el morfismo de proyección  $\pi : \mathbb{F}_a \rightarrow \mathbb{P}^1$ .

En general, para cualquier bigrado  $(d, e)$  con  $d \in \mathbb{Z}$ ,  $e \in \mathbb{N}$  tenemos:

- Si  $e = 0$ , entonces  $d \geq 0$  y el espacio de polinomios bihomogéneos de bigrado  $(d, 0)$  es  $k$  si  $d = 0$  y  $S^d(t_1, t_2)$  si  $d \geq 1$ .
- Si  $e \geq 1$ , el espacio de polinomios bihomogéneos de bigrado  $(d, e)$  es

$$S^d(t_1, t_2)x_1^e \oplus S^{d+a}(t_1, t_2)x_1^{e-1}x_2 \oplus \cdots \oplus S^{d+ea}(t_1, t_2)x_2^e$$

**Observación 4.** Puede encajarse  $\mathbb{F}_a \hookrightarrow \mathbb{P}^N$  mediante razones de polinomios bihomogéneos de bigrado  $(0, e)$  con  $e$  suficientemente grande. La construcción es análoga a la del encaje de Segre  $\mathbb{P}^{l-1} \times \mathbb{P}^{m-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{lm-1}$ .

## Ejemplo

El ejemplo básico es  $\mathbb{F}_1$ . La matriz de acción es:

$$\begin{array}{c} \lambda \\ \mu \end{array} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Una base para el espacio de polinomios bihomogéneos de bigrado  $(0, 1)$  es:

$$\{t_1x_2, t_2x_2, x_1\}.$$

La razón de estos monomios define un morfismo  $f : \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ ;  
 $(t_1 : t_2; x_1 : x_2) \mapsto (t_1x_2 : t_2x_2 : x_1)$ . Es fácil ver que esto es el blowup de  $(0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^2$ .

### 4.3.3. Grupo de Picard y Teoría de Intersección

Notemos que cualesquiera dos fibras de la proyección  $\pi : \mathbb{F}_a \rightarrow \mathbb{P}^1$  son linealmente equivalentes como divisores en  $\mathbb{F}_a$ . En efecto, cada una de estas fibras  $L_1, L_2$  es el conjunto de ceros en  $\mathbb{F}_a$  de un par de formas lineales  $\ell_1, \ell_2 \in S^1(t_1, t_2)$ ; como es usual, denotaremos esto escribiendo  $L_i = (\ell_i)$ . Claramente  $\ell_1/\ell_2$  es una función con un cero y un polo simples en  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente, lo cual prueba nuestra afirmación:  $L_1 \sim L_2$ . Denotaremos con  $L \in \text{Pic}(\mathbb{F}_a)$  a la clase de las fibras de  $\pi$ .

Ahora consideremos  $B = (x_1)$ . Llamaremos a  $B$  la **sección negativa** de  $\mathbb{F}_a$  y abusando de la notación, usaremos el mismo símbolo para referirnos a su clase en  $\text{Pic}(\mathbb{F}_a)$ .

**Proposición 5.** *Con la notación previa, tenemos:*

$$\text{Pic}(\mathbb{F}_a) \cong \mathbb{Z}L \oplus \mathbb{Z}B.$$

*Demostración.* Notemos primero que  $L$  y  $B$  son linealmente independientes: en efecto, un polinomio bihomogéneo con divisor de ceros  $\alpha L$  tiene bigrado  $(\alpha, 0)$ , mientras que un polinomio bihomogéneo con divisor de ceros  $\beta B$  tiene bigrado  $(-a\beta, \beta)$ , por lo cual no puede existir una función racional en  $k(\mathbb{F}_a)$  con divisor  $\alpha L - \beta B$  a menos que  $\alpha = \beta = 0$ . Consideremos ahora una subvariedad de codimensión 1,  $X \subset \mathbb{F}_a$ .  $X$  debe ser el conjunto de ceros de un polinomio bihomogéneo en  $(t_1, t_2; x_1, x_2)$  de bigrado  $(d, e)$ , digamos  $f_{d,e}$ . Entonces  $f_{d,e}/(t_1^{d+ae}x_2^e)$  es una función racional bien definida, con divisor de ceros  $X$  y divisor de polos  $(d+ae)L + eB$ . De aquí se sigue el resultado.  $\square$

**Observación 5.** *Con la notación anterior, tenemos:*

$$K_{\mathbb{F}_a} \sim (-2 - a)L - 2B.$$

Calculemos ahora la teoría de intersección de  $\mathbb{F}_a$ . Por la proposición anterior, basta calcular  $L^2$ ,  $LB$  y  $B^2$ :

- Si  $(t_1 : t_2) \neq (t'_1 : t'_2)$ , es claro que  $\{(t_1 : t_2; x_1 : x_2)\} \cap \{(t'_1 : t'_2; x_1 : x_2)\} = \emptyset$ . Por lo tanto  $L^2 = 0$ .



- Sean  $(t_1 : t_2) \in \mathbb{P}^1$  un punto fijo y  $L_0$  la fibra correspondiente. Es claro que  $L_0 \cap B = \{(t_1 : t_2; 1 : 0)\}$ . Por lo tanto  $LB = 1$ .
- Por último, consideremos la curva  $\mathcal{C} = (x_1)$ . Es claro que, como divisores,  $\mathcal{C} \sim aL + B$  y es claro también que  $(x_1) \cap (x_2) = \emptyset$ . Es decir  $B(aL + B) = 0$ . Por los incisos anteriores, se sigue que:  $B^2 = -a$ .

#### 4.3.4. Construcción geométrica de nuestra curva

Consideremos el pergamino  $\mathbb{F}_8$  y el sistema lineal  $|8L + B|$ . Tenemos:

$$H^0(\mathbb{F}_8, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_8}(8L + B)) = S^8(t_1, t_2)x_2 \oplus S^0(t_1, t_2)x_1$$

y por lo tanto un morfismo  $\varphi_{8L+B} : \mathbb{F}_8 \rightarrow \overline{\mathbb{F}_8} \subset \mathbb{P}^9$  dado por

$$(t_1 : t_2; x_1 : x : 2) \mapsto (t_1^8 x_2 : t_1^7 t_2 x_2 : \cdots : t_2^8 x_2 : x_1).$$

De aquí es claro que  $\overline{\mathbb{F}_8}$  es isomorfo al encaje del plano proyectivo torcido  $\mathbb{P}(1, 1, 8)$  en  $\mathbb{P}^9$ . Podemos construir nuestra curva  $C$  como un divisor en  $\mathbb{F}_8$  de manera que el sistema lineal  $|L|$  de  $\mathbb{F}_8$  se restrinja al  $g_2^1$  que hace de  $C$  una curva hiperelíptica. Necesitamos entonces  $LC = 2$ , lo que implica que  $C \sim \alpha L + 2B$  para algún  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Tenemos  $K_{\mathbb{F}_8} \sim -10L - 2B$ . Entonces, por adjunción:

$$K_C \sim ((\alpha - 10)L)|_C.$$

Como  $g(C) = 7$ ,  $\deg(K_C) = 12$ . Por lo tanto:

$$(\alpha - 10)L(\alpha L + 2B) = 12.$$

Se sigue que  $C \sim 16L + 2B$ . En particular  $K_C = (6L)|_C$ .

Obsérvese que lo discutido en esta subsección da una prueba (un tanto más geométrica) de la segunda parte de la Proposición 3 y de la Proposición 4.

### 4.4. El anillo semicanónico

El resultado principal de esta sección es la obtención de una presentación del anillo semicanónico  $R(C, D)$  en el Teorema 11. Es bien sabido (véase [ACGH], p.288) que un divisor efectivo como el de nuestra situación:  $D = P_1 + P_2 + D'$  donde los  $P_i$  son los puntos base del sistema lineal  $|D|$  y  $|D'| = 2g_2^1$ , está formado por puntos de Weierstrass de la curva hiperelíptica  $C$ . Recordemos la notación  $R = \sum_{i=1}^{16} P_i$  para el divisor de ramificación de la cubierta doble  $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$  y sean

$$u : \mathcal{O}_C \hookrightarrow \mathcal{O}_C(P_1 + P_2), \quad v : \mathcal{O}_C \hookrightarrow \mathcal{O}_C\left(\sum_{i=3}^{16} P_i\right)$$

las secciones constantes.

Como cualesquiera dos puntos en  $\mathbb{P}^1$  pueden mapearse con una proyectividad a cualesquiera otros dos puntos, no hay pérdida de generalidad si elegimos una base  $\{t_1, t_2\}$  para  $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) \cong H^0(C, \frac{1}{2}D')$  tal que la forma de grado 2 que define a los puntos rama  $\pi(P_1)$  y  $\pi(P_2)$  esté dada por:

$$u^2 = t_1 t_2.$$

Es decir, estamos suponiendo que:

$$\varphi_D(P_1) = (1 : 0), \quad \varphi_D(P_2) = (0 : 1)$$

y como todos los puntos rama deben ser distintos entre sí, la forma de grado 14 que define al resto del lugar de ramificación,  $v^2 = g_{14}(t_1, t_2)$ , debe tener coeficientes no nulos en los términos  $t_1^{14}$  y  $t_2^{14}$  (para garantizar que no se anule en  $(1 : 0)$  ni en  $(0 : 1)$ ). Luego, en general podemos escribir:

$$g_{14} = t_1^{14} + \sum_{i=1}^{14} a_i t_1^{14-i} t_2^i,$$

donde  $a_{14} \neq 0$ . Por supuesto, debemos requerir que  $g_{14}$  tenga raíces distintas. Esto sin embargo, no jugará un papel importante cuando demos una presentación del anillo  $R(C, D)$ .

Como  $h^0(D) = 3$ , requerimos de 3 generadores en grado 1. Tenemos

$$H^0(C, D) \cong uH^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2)),$$

así que escogeremos la siguiente base:

$$x_1 := ut_1^2, \quad x_2 := ut_1 t_2, \quad x_3 := ut_2^2.$$

En grado 2, tenemos  $2D = K_C$  y, por la Proposición 3,  $|K_C| \sim 6g_2^1$ . Por lo tanto podemos construir una base para  $H^0(C, 2D)$  a partir de cualquier base de  $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(6))$ .

Elegiremos  $S^6(t_1, t_2)$ , pues esto tendrá la ventaja de simplificar la manera en que escribiremos las relaciones tautológicas que satisfacen los generadores de  $R(C, D)$ . Sean

$$\begin{aligned} w_1 &:= t_1^6, \\ w_2 &:= t_1^5 t_2, \\ w_3 &:= t_1^4 t_2^2, \\ w_4 &:= t_1^3 t_2^3, \\ w_5 &:= t_1^2 t_2^4, \\ w_6 &:= t_1 t_2^5, \\ w_7 &:= t_2^6, \end{aligned}$$

Obsérvese que:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= t_1^5 t_2 & x_1 x_2 &= t_1^4 t_2^2 & x_2^2 &= t_1^3 t_2^3 \\ x_1 x_3 &= t_1^3 t_2^3 & x_3^2 &= t_1 t_2^5 & x_2 x_3 &= t_1^2 t_2^4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, basta elegir como nuevos generadores en grado 2:  $y_1 = t_1^6$ ,  $y_2 = t_2^6$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} w_1 &= y_1, \\ w_2 &= x_1^2, \\ w_3 &= x_1x_2, \\ w_4 &= x_1x_3 = x_2^2, \quad (\text{esta es la ecuación de la cónica } \overline{C} = \varphi_D(C)) \\ w_5 &= x_2x_3, \\ w_6 &= x_3^2, \\ w_7 &= y_2. \end{aligned}$$

Ahora elijamos generadores para  $H^0(C, 3D)$ . Consideremos el divisor  $\tilde{D} := \sum_{i=3}^{16} P_i - 2D'$ . Tenemos  $\mathcal{O}(D) \cong \mathcal{O}(\tilde{D})$ , pues ambos divisores están formados por la misma cantidad de puntos de Weierstrass. Más aún, utilizando la notación de la Proposición 4, tenemos que el producto por la función racional  $y/t_1^8$  induce un isomorfismo:

$$\mathcal{O}_C(D) \cong \mathcal{O}_C(D').$$

Ahora,  $\pi_*\mathcal{O}_C(D)$  tiene una  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -acción unívocamente determinada por la compatibilidad con la inclusión  $\mathcal{O}_C \hookrightarrow \mathcal{O}_C(P_1 + \dots + P_{16})$ . Es claro que la  $+1$ -eigengavilla es isomorfa a  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)u$  y que  $y/t_1^8$  está en el  $-1$ -eigenespacio (y por lo tanto multiplicar por ella intercambia las  $\pm$ -eigengavillas). De aquí se sigue que:

$$\pi_*(\mathcal{O}_C(D)) \cong u\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus v\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-4).$$

Tensando con  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6) \cong \pi_*(\mathcal{O}_C(K_C))$  y tomando cohomología, tenemos:

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(3D)) \cong uS^8(t_1, t_2) \oplus vS^2(t_1, t_2). \quad (4.1)$$

Ya tenemos generadores para el primer sumando directo de (4.1). Por lo tanto sólo requerimos 3 nuevos generadores en grado 3 para obtener una base de  $H^0(C, 3D)$ . Los elegiremos de la siguiente manera:

$$z_1 := vt_1^2, \quad z_2 := vt_1t_2, \quad z_3 := vt_2^2.$$

Es claro que tenemos las siguientes relaciones tautológicas (que podemos interpretar diciendo que la razón  $(t_1 : t_2)$  se preserva):

$$\bigwedge^2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 & z_1 & z_2 \\ x_2 & x_3 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 & y_2 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

sin embargo, es fácil ver que el ideal generado por estos  $\binom{10}{2} = 45$  menores es exactamente igual al generado por los siguientes  $\binom{6}{2} = 15$  menores:

$$\bigwedge^2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1 & x_3^2 & z_1 & z_2 \\ x_2 & x_3 & x_1^2 & y_2 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Es fácil también verificar que  $S^4(x_1, x_2, x_3) \oplus S^2(y_1, y_2) \oplus S^1(x_1, x_2, x_3) \otimes S^1(z_1, z_2, z_3)$  basta para generar a  $H^0(C, 4D)$ . Luego, utilizando el mismo argumento que aplicamos en

§3.5.1 concluimos que no se requieren generadores extra. En particular,  $R(C, D)$  es Gorenstein de codimensión 6.

Podemos hacer un *rendering* de la ecuación:

$$v^2 = t_1^{14} + \sum_{i=1}^{14} a_i t_1^{14-i} t_2^i$$

para obtener el siguiente generador del ideal de relaciones de  $R(C, D)$ :

$$-z_1^2 + y_1^2 \left( y_1 + \sum_{i=1}^6 a_i w_{i+1} \right) + x_2^4 \left( \sum_{j=1}^6 a_{j+6} w_{i+1} \right) + x_2^2 x_3^2 (a_{13} w_6 + a_{14} w_7).$$

Finalmente, podemos rodar factores respecto a la matriz de relaciones tautológicas para obtener las últimas 4 relaciones:

$$-z_1 z_2 + y_1 x_1^2 \left( y_1 + \sum_{i=1}^6 a_i w_{i+1} \right) + x_2^3 x_3 \left( \sum_{j=1}^6 a_{j+6} w_{i+1} \right) + x_2 x_3^3 (a_{13} w_6 + a_{14} w_7),$$

$$-z_2^2 + x_1^4 \left( y_1 + \sum_{i=1}^6 a_i w_{i+1} \right) + x_2^2 x_3^2 \left( \sum_{j=1}^6 a_{j+6} w_{i+1} \right) + x_3^4 (a_{13} w_6 + a_{14} w_7),$$

$$-z_2 z_3 + x_1^3 x_2 \left( y_1 + \sum_{i=1}^6 a_i w_{i+1} \right) + x_2 x_3^3 \left( \sum_{j=1}^6 a_{j+6} w_{i+1} \right) + y_2 x_3^2 (a_{13} w_6 + a_{14} w_7),$$

$$-z_3^2 + x_1^2 x_2^2 \left( y_1 + \sum_{i=1}^6 a_i w_{i+1} \right) + x_3^4 \left( \sum_{j=1}^6 a_{j+6} w_{i+1} \right) + y_2^2 (a_{13} w_6 + a_{14} w_7).$$

Resumimos nuestros resultados en el siguiente teorema:

**Teorema 11.** *Sea  $C$  una curva no singular de género 7 que admite un sistema lineal  $|D|$  con dos puntos base distintos,  $P_1, P_2$  y tal que:*

1.  $|D| = P_1 + P_2 + P_3 + 2g_2^1$ .
2.  $2D = K_C$ .

Entonces el anillo semicanónico  $R := R(C, D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, nD)$  admite una presentación de factores rodantes. Tenemos:

$$R(C, D) \cong k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3]/I,$$

con generadores de grados 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3 respectivamente, y el ideal  $I$  está generado minimalmente por:

- Los 15 menores de  $2 \times 2$  de la matriz  $A$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1 & x_3^2 & z_1 & z_2 \\ x_2 & x_3 & x_1^2 & y_2 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

- Las siguientes 5 relaciones de factores rodantes respecto a  $A$ :

$$\begin{aligned}
& -z_1^2 + y_1^2 \left( y_1 + \sum_{i=1}^6 a_i w_{i+1} \right) + x_2^4 \left( \sum_{j=1}^6 a_{j+6} w_{i+1} \right) + x_2^2 x_3^2 (a_{13} w_6 + a_{14} w_7). \\
& -z_1 z_2 + y_1 x_1^2 \left( y_1 + \sum_{i=1}^6 a_i w_{i+1} \right) + x_2^3 x_3 \left( \sum_{j=1}^6 a_{j+6} w_{i+1} \right) + x_2 x_3^3 (a_{13} w_6 + a_{14} w_7), \\
& -z_2^2 + x_1^4 \left( y_1 + \sum_{i=1}^6 a_i w_{i+1} \right) + x_2^2 x_3^2 \left( \sum_{j=1}^6 a_{j+6} w_{i+1} \right) + x_3^4 (a_{13} w_6 + a_{14} w_7), \\
& -z_2 z_3 + x_1^3 x_2 \left( y_1 + \sum_{i=1}^6 a_i w_{i+1} \right) + x_2 x_3^3 \left( \sum_{j=1}^6 a_{j+6} w_{i+1} \right) + y_2 x_3^2 (a_{13} w_6 + a_{14} w_7), \\
& -z_3^2 + x_1^2 x_2^2 \left( y_1 + \sum_{i=1}^6 a_i w_{i+1} \right) + x_3^4 \left( \sum_{j=1}^6 a_{j+6} w_{i+1} \right) + y_2^2 (a_{13} w_6 + a_{14} w_7);
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
w_1 &= y_1, \\
w_2 &= x_1^2, \\
w_3 &= x_1 x_2, \\
w_4 &= x_1 x_3 = x_2^2, \\
w_5 &= x_2 x_3, \\
w_6 &= x_3^2, \\
w_7 &= y_2;
\end{aligned}$$

sujetas a las condiciones:

1.  $a_{14} \neq 0$ .
2. El polinomio  $1 + \sum_{i=1}^{14} a_i t^i$  tiene 14 raíces distintas.

Y recíprocamente, cualquier curva de la forma  $\text{Proj } R(C, D)$  para un anillo como el descrito anteriormente, es una curva con las condiciones establecidas en este teorema.

## 4.5. Comentarios finales y trabajo a futuro

Sea  $\mathcal{O} = k[x_1, x, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3]$ . Actualmente sabemos que  $R(C, D) = \mathcal{O}/I$  tiene una resolución libre minimal de la forma:

$$R \leftarrow \mathcal{O} \leftarrow \mathcal{O}^{20} \leftarrow \mathcal{O}^{64} \leftarrow \mathcal{O}^{90} \leftarrow \mathcal{O}^{64} \leftarrow \mathcal{O}^{20} \leftarrow \mathcal{O} \leftarrow 0.$$

Pensamos que los números de Betti de esta resolución son tan ubicuos en codimensión 6 como  $(1, 5, 5, 1)$  y  $(1, 9, 16, 9, 1)$  lo son en codimensión 3 y 4 respectivamente.

Se conocen además un par de ejemplos de familias planas de anillos de Gorenstein de codimensión 6 que admiten pequeñas deformaciones a anillos de codimensión menor. Es probable que a partir de dichos ejemplos podamos construir una **variedad molde** que permita resolver nuestro problema. La degeneración  $II \rightarrow III_b$ , al igual que muchas otras

degeneraciones a anillos de Gorenstein en codimensión 4, han sido obtenidas utilizando como variedad molde el encaje de Segre de  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  como una sección lineal (no genérica) de la grassmanniana  $\text{Grass}(2, 6)$ .

Conjeturamos que la degeneración  $I_a \rightarrow V_1$  en efecto, ocurre. Por supuesto hace falta imponer ciertas condiciones sobre los coeficientes que definen el anillo  $R(C, D)$ ; por razones de dimensión, una superficie general del estrato  $V_1$  no puede deformarse a una del estrato  $I_a$ .

Es posible tomar una cantidad relativamente pequeña de coeficientes no nulos en el polinomio

$$1 + \sum_{i=1}^{14} a_i t^i$$

del Teorema 11 para garantizar que existen 14 raíces no nulas. Consideremos el siguiente ejemplo concreto:

$$R = k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3]/I,$$

con  $\text{wt}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3) = (1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3)$  e  $I$  generado por

$$\bigwedge^2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1 & x_3^2 & z_1 & z_2 \\ x_2 & x_3 & x_1^2 & y_2 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

más las 5 relaciones de factor rodante:

$$\begin{aligned} z_1^2 - y_1^3 - x_1 x_2 y_2^2, \\ z_1 z_2 - y_1^2 x_1^2 - x_2^2 y_2^2, \\ z_2^2 - y_1 x_1^4 - x_2 x_3 y_2^2, \\ z_2 z_3 - x_1^6 - x_3^2 y_2^2, \\ z_3^2 - x_1^5 x_2 + -y_2^3. \end{aligned}$$

El siguiente código de Magma (véase [BCP-Magma]) comprueba que  $R$  satisface las condiciones del Teorema 11:

```
RRgr<x1,x2,x3,y1,y2,z1,z2,z3> :=
PolynomialRing(Rationals(), [1,1,1,2,2,3,3,3]);
A:= Matrix(RRgr,2,6, [x1,x2,y1,x3^2,z1,z2,x2,x3,x1^2,y2,z2,z3]);
A0:= Minors(A,2);
I0:=Ideal(A0);
I1:=Ideal([
y1^3+x1*x2*y2^2-z1^2,
y1^2*x1^2+x2^2*y2^2-z1*z2,
y1*x1^4+x2*x3*y2^2-z2^2,
x1^6+x3^2*y2^2-z2*z3,
x1^5*x2+y2^3-z3^2
]);
I:=I1+I0;
X:=Scheme(Proj(RRgr), I);
Dimension(X);
```

```

IsReduced(X);
IsIrreducible(X);
C:=Curve(X);
Genus(C);

```

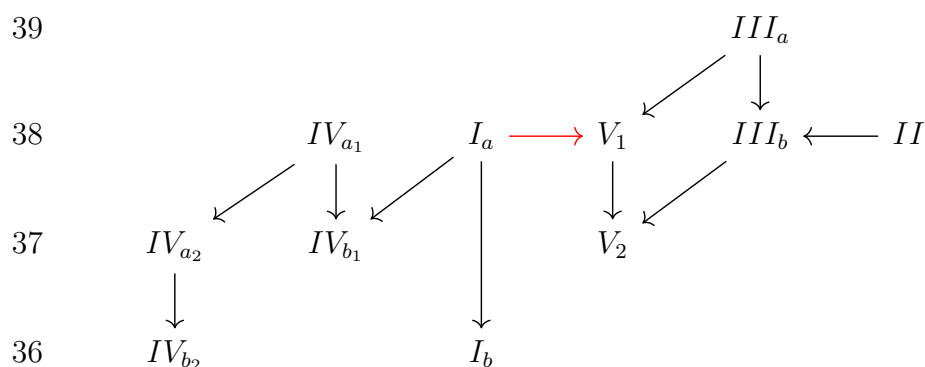
$R$  tiene la ventaja de que todas sus relaciones son binomios o trinomios. Es posible que exista un formato pfaffiano para presentar este tipo de anillo. Más aún, podemos deformar algunas de las relaciones binomiales de  $R$  utilizando un parámetro afín  $t \in \Delta \subset k$ , donde  $\Delta$  es un disco alrededor de 0, como sigue:

$$\begin{aligned}
& -x_2^2 + x_1x_3 + ty_2, \\
& -x_3^3 + x_2y_2 + tz_3, \\
& -x_2x_3^2 + x_1y_2 + tz_1, \\
& x_1^2x_2 - x_3y_1 + tz_2, \\
& x_1^3 - x_2y_1 + tx_2^3, \\
& -x_1^2x_3^2 + y_1y_2 + t(y_1^2 + x_3^4).
\end{aligned}$$

El lector o lectora puede verificar que, cuando  $t$  es invertible, las relaciones anteriores eliminan a las variables  $y_2, z_1, z_2, z_3$  y deforman a las relaciones  $x_1^3 - x_2y_1, -x_1^2x_3^2 + y_1y_2 \in I$  a un par de formas homogéneas de grados 3 y 4 respectivamente que definen un ideal de intersección completa correspondiente a una curva canónica de una superficie del estrato  $I_a$ . Es muy probable que el formato pfaffiano al que hicimos referencia exista, y permita deformar fácilmente las otras 14 relaciones de  $I$ .

#### 4.5.1. ¿Qué pasa con el resto de estratos?

Hemos emprendido el cálculo del anillo semicanónico correspondiente al estrato  $V_1$  por su relación con el principal problema abierto en el caso  $K_S^2 = 6, p_g = 4$ , pero como mencionamos anteriormente, incluso considerando la flecha que conjeturamos (marcada con rojo en la siguiente figura), no se sabe si existen flechas de degeneración adicionales a las que mostramos enseguida:



Es por ello que sugerimos emprender el estudio del resto de estratos utilizando las técnicas del Programa de Anillos Graduados.

### 4.5.2. Extensiones

De comprobarse nuestras conjeturas, no sólo la extensión al caso de superficies sería prácticamente automática, sino que podríamos construir también familias planas de 3-variedades de Calabi-Yau (por adjunción, dichas 3-variedades están polarizadas por un divisor amplio dado por las superficies regulares de tipo general que estamos considerando). Proponemos por supuesto, estudiar dichas extensiones en el corto plazo; buena parte del interés de Juan Garza y Miles Reid por el estudio de superficies canónicas regulares, es precisamente motivado por el estudio de 3-variedades de Calabi-Yau. La célebre conjetura de Reid acerca de la existencia de una infinidad de familias de deformación de 3-variedades complejas de Calabi-Yau se debe a su experiencia construyendo superficies regulares de tipo general.



# Bibliografía

- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris, *Geometry of algebraic curves. Volume I*. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 267, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Arbarello-Sernesi] E. Arbarello, E. Sernesi. *Petri's Approach to the Study of the Ideal Associated to a Special Divisor*. *Inventiones mathematicae*, Vol. 49, 99-119, 1978.
- [BHPV] W.P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*, 4, Springer, Berlin, 2004.
- [BCP] Bauer, I., Catanese, F., Pignatelli, R.: *The moduli space of surfaces with  $K^2 = 6$  and  $p_g = 4$* . *Mathematische Annalen* 336(2). 2006.
- [BCP-Magma] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, *J. Symbolic Comput.*, 24, 235–265, 1997. Online calculator available at: <http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/>
- [Bruns-Herzog] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*. Cambridge studies in advanced mathematics, Vol. 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [Bombieri] E. Bombieri, *Canonical models of surfaces of general type*. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 42, 171-219, 1973.
- [Buchberger] B. Buchberger, F. Winkler, *Gröbner Bases and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Buchsbaum-Eisenbud] D. Buchsbaum, D. Eisenbud, *Algebra structures for finite free resolutions and some structure theorems for ideals of codimension 3*. *American Journal of Mathematics* 99 no. 3, 447-485, 1977.
- [Catanese] F. Catanese, *Homological Algebra and Algebraic Surfaces*. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. 62, 1, 3-56, 1997.
- [Debarre 82] O. Debarre, *Inégalités numériques pour les surfaces de type général*. *Bull. Soc. Math. France* 110, no. 3, 319-342, 1982.
- [Debarre 83] O. Debarre, *Addendum: Numerical inequalities for surfaces of general type*. *Bull. Soc. Math. France* 111, no. 3, 301-302, 1983.

- [Enriques] F. Enriques, *Le Superficie Algebriche*. Zanichelli, Bologna, 1949.
- [Franchetta] A. Franchetta, *Su alcuni esempi di superficie canoniche*. Rend. Sem. Mat. Roma 3, 23–28. 1939.
- [Gieseker] D. Gieseker, *Global moduli for surfaces of general type*. Invent. Math. 43 no. 3, 233–282, 1977.
- [Hartshorne AG] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Hartshorne DT] R. Hartshorne, *Deformation Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 257, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Horikawa 76] E. Horikawa, *Algebraic surfaces of general type with small  $c_1^2$  I*. Ann. of Math. (2) **104**, no. 2, 357–387 (1976).
- [Horikawa 78] E. Horikawa, *Algebraic surfaces of general type with small  $c_1^2$  III*. Invent. Math. 47 (1978), no. 3, 209–248.
- [Kodaira] K. Kodaira, *On characteristic systems of families of surfaces with ordinary singularities in a projective space*. Amer. J. of Math. 87, 227–256, 1965.
- [Kuranishi] M. Kuranishi, *Deformations of compact complex manifolds*. Presses de l'Universite de Montreal, 1969.
- [Lichtenbaum-Schlessinger] S. Lichtenbaum, M. Schlessinger, *The Cotangent Complex of a Morphism*, Trans. A.M.S. 128, 41–70, 1967.
- [Matsumura] Matsumura, H., *Commutative algebra*, second edition, Mathematics Lecture Note Series, Vol. 56, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980.
- [Maxwell] E. A. Maxwell, *Regular canonical surfaces of genus three and four*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 23, 306–310, 1937.
- [Miyaoka] Y. Miyaoka, *On the Chern numbers of surfaces of general type*. Invent. Math. 42, 225–237, 1977.
- [Reid PC] M. Reid, *Chapters on algebraic surfaces*. Complex algebraic geometry (Park City, Ut, 1993), IAS/Park City Mathematics Series, Vol. 8, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [Reid 4] M. Reid, *Goreinstein in codimension 4: the general structure theory*, Algebraic geometry in east Asia-Taipei 2011, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 65, Math. Soc. Japan, pp 201–227, Tokyo, 2015.
- [Reid GR&BG] M. Reid, *Graded rings and birational geometry*. Proc. of algebraic geometry symposium (Kinosaki, Oct. 2000), K. Ohno (Ed.), 1–72.

- [Reid D-E] M. Reid, *Infinitesimal view of extending a hyperplane section-deformation theory and computer algebra*. Algebraic geometry (L'Aquila, 1988), LNM 1417, 214-286, Springer Verlag.
- [Serre] J.P. Serre, *Sur les Modules Projectifs*, Seminaire Dubreil, 1960.
- [Yau] S. T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I*. Comm. Pure Appl. Math. 31, no.3, 339-411, 1978.