



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA QUÍMICA – INGENIERÍA DE PROCESOS

DESPLAZAMIENTO DE UN FLUIDO NEWTONIANO POR UN FLUIDO NO NEWTONIANO
(MICELAR) A TRAVÉS DE UN MEDIO POROSO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
RAFAEL RAMÍREZ CASCO

TUTOR PRINCIPAL
DR. OCTAVIO MANERO BRITO, IIM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, AGOSTO 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo

Secretario: Dr. José Esteban López Aguilar

1er. Vocal: Dr. Octavio Manero Brito

2do. Vocal: Dr. René Osvaldo Vargas Aguilar

3er. Vocal: Dr. Carlos Lira Galeana

Lugar donde se realizó la tesis: Instituto de Investigaciones en Materiales, Universidad Nacional Autónoma de México.

TUTOR DE TESIS:

DR. OCTAVIO MANERO BRITO

FIRMA

Agradecimientos

A mi madre, Erika Casco López y mi mamá Lolita (María Dolores López Pérez)

Porque todo lo bueno que he logrado es gracias a ustedes y todo el amor que me dieron.

A mi tutor, Dr. Octavio Manero Brito

Por darme la oportunidad de realizar este trabajo bajo su supervisión y brindarme todo el apoyo y conocimiento posible para su elaboración.

Al proyecto IN 100620 de DGAPA-UNAM

Por permitir la elaboración de este proyecto.

Al Posgrado de Ingeniería de la UNAM y a la UNAM

Ya que son las instituciones que permiten que todo esto sea posible, y particularmente a la UNAM que me ha dado más de lo que podría haber pedido

A mi padre Rafael Ramírez Agama, y mi papá Rubén (Rubén Casco Muñoz)

Por todas las enseñanzas que me han dado a través de la vida

A la Dra. Maritza Paola López Jiménez

Por ser una gran amiga y alentarme y apoyarme a dar el siguiente paso en mi carrera profesional

A mi Familia que siempre está al pie del cañón

Mis hermanos, Ángel Yerathel Ramírez Casco y Emiliano Ramírez Casco, Mis tías (Nor, Charo, Martha, Carmen, y Leo), mis tíos (Rubi, Miguel y Jorge), mis padrinos (Gilberto y Evelyn), mis primos (Chapis, Jorge, Diego, Babi, Brenda, Viri, Lore, Edgar, Monse, Lalo, Lis, Dani, Elvis, Julio y Lupe), mis sobrinos (Fer, Deko, Regis, Hirving, Mateo, Dani, Damián, Renata, Román, Valeria, Ximena, Sofi, Ale y Frida) ... y los 83 que me faltaron

A los amigos, que también me dio la UNAM

Loci, Tosqui, Ricardo, Mayito, Cés, David, Deivi, Qarla, Bruno, Brau, Beto, Vane y la tía Moni

A mis amigos de Sempra

Carlitos, René, Genaro, Rafa Vic, Sam, Jess y Roger

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

Índice

1. Introducción.....	8
2. Resumen.	12
3. Nomenclatura.....	21
4. Hipótesis.	23
5. Fundamentos y Desarrollo de la Ecuación de Movilidad.....	23
6. Extensión Multifásica de la Ley de Darcy	42
7. Balance de Masa.....	47
8. La Ecuación de Buckley-Leverett.....	51
9. Contribución de las Fuerzas Capilares	65
10. Conclusiones.	88
11. Referencias.	89

Lista de Tablas y Figuras

Figura 1. Dependencia de la relación de fluidedeces respecto a la relación de esfuerzos.....	38
Figura 2. Dependencia de la relación de movilidades respecto a la relación de esfuerzos.....	39
Figura 3. Diagrama del experimento de la Ley de Darcy.....	42
Figura 4. Gráfica de referencia de la permeabilidad relativa de un fluido respecto a la saturación.	45
Figura 5. Gráfica de fracción de flujo contra saturación a diferentes valores de relación de movilidades.	51
Figura 6. Gráfica de la derivada parcial de la fracción de flujo contra la saturación a diferentes valores de relación de movilidades.	54
Figura 7. Gráfica de saturación contra velocidad del fluido a través del medio poroso a diferentes valores de relación de movilidades.	55
Figura 8a. Fracción de flujo y derivada parcial de fracción de flujo con $M=0.3$.	57
Figura 8b. Fracción de flujo y derivada parcial de fracción de flujo con $M=2.5$.	57
Figura 8c. Fracción de flujo y derivada parcial de fracción de flujo con $M=10$.	58
Figura 9. Gráfica de la raíz de saturación única a diferentes valores de M.	59
Figura 10. Gráfica de la pendiente de la tangente a diferentes valores de raíz de saturación única.	59
Tabla 1. Movilidad y pendientes de la recta tangente.	60
Figura 11a. Gráfica de la saturación contra la velocidad antes y después de la implementación del choque con $M=0.3$.....	61
Figura 11b. Gráfica de la saturación contra la velocidad antes y después de la implementación del choque con $M=2.5$.....	61
Figura 11c. Gráfica de la saturación contra la velocidad antes y después de la implementación del choque con $M=10$.....	62
Figura 12. Gráfica de los choques de saturación contra la velocidad a diferentes valores de M ($S_l = 1$, $S_r = 0$, y $\varepsilon = 0$).....	63

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

Tabla 2. Movilidad y puntos en dónde se cumple el criterio de áreas iguales (β).....	67
Figura 13b. Representación del choque de la Figura 13a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=0.3$	70
Figura 13c. Representación del choque de la Figura 13a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=2.5$	70
Figura 13d. Representación del choque de la Figura 13a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=10$	71
Figura 14a. Gráfica de choques de saturación contra distancia a diferentes valores de M ($S_l = 0.6$, $S_r = 0.4$, y $\varepsilon = 0.01$).....	73
Figura 14b. Representación del choque de la Figura 14a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=0.3$	73
Figura 14c. Representación del choque de la Figura 14a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=2.5$	74
Figura 14d. Representación del choque de la Figura 14a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=10$	74
Figura 15a. Gráfica de choques de saturación contra distancia a diferentes valores de M ($S_l = 0.8$, $S_r = 0.2$, y $\varepsilon = 0.05$).....	76
Figura 15b. Representación del choque de la Figura 15a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=0.3$	76
Figura 15c. Representación del choque de la Figura 15a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=2.5$	77
Figura 15d. Representación del choque de la Figura 15a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=10$	77
Figura 16a. Gráfica de choques de saturación contra distancia a diferentes valores de M ($S_l = 0.9$, $S_r = 0.4$, y $\varepsilon = 0.01$).....	80
Figura 16b. Representación del choque de la Figura 16a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=0.3$	80
Figura 16c. Representación del choque de la Figura 16a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=2.5$	81

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

Figura 16d. Representación del choque de la Figura 16a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=10$	81
Figura 17. Gráficas de saturación contra velocidad, sin choques implementados, a diferentes valores de M , representando los límites de saturación de Figura 13a.....	83
Figura 18. Gráficas de saturación contra velocidad, sin choques implementados, a diferentes valores de M , representando los límites de saturación de Figura 14a.....	84
Figura 19. Gráficas de saturación contra velocidad, sin choques implementados, a diferentes valores de M , representando los límites de saturación de Figura 15a.....	85
Figura 20. Gráficas de saturación contra velocidad, sin choques implementados, a diferentes valores de M , representando los límites de saturación de Figura 16a.....	86
Figura 21. Gráfica de saturación contra distancia para diferentes valores de τ ($Sl = 0.9$, $Sr = 0.2$, y $\varepsilon = 0.05$).....	87

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

1. Introducción.

Si bien la transición energética hacia el uso de energías limpias es un hecho instituciones tales como la Agencia Internacional de Energía (AIE) o la consultora McKinsey estiman que al menos 38 MMb/d de petróleo extraído serán necesarios para satisfacer la demanda hasta 2040¹. De igual forma la política energética actual del país sugiere que la fuente de energía principal en los próximos años serán los combustibles fósiles, siendo el petróleo una pieza clave. Debido a lo anterior es necesario garantizar la extracción de este combustible en el futuro de una manera que reduzca al mínimo el impacto ambiental y al menor costo posible de manera que la inversión sea redituable.

La ecuación de Buckley-Leverett es por excelencia la ecuación a la que se recurre para el transporte de fluidos a través de medios porosos. En su concepción² (Buckley, S. E., Leverett, M. C., "*Mechanism of fluid displacement in sands*") fue planteada para fluidos de viscosidad constante, inmiscibles, incompresibles y despreciando las fuerzas capilares. Si bien desde entonces el desplazamiento a través de medio poroso ha sido objeto de estudio, es en épocas relativamente recientes que se ha comenzado a investigar como influirían las características de un fluido no newtoniano al fenómeno. En 1991 Wu, Pruess y Witherspoon³ plantearon la solución al problema de Buckley-Leverett implementando un modelo reológico de ley de potencia el cual introdujeron en la Ley de Darcy para calcular diferentes velocidades de inyección del fluido desplazante; resolviendo las gráficas de fracción de flujo e implementando choques para después compararlos con la solución de un método numérico, demostrando que las diferencias son mínimas. Sin embargo, no introduce formalmente la geometría fractal, la influencia del esfuerzo de corte, las ecuaciones constitutivas aún son dimensionales y no se consideran fuerzas capilares.

En 2006 Zhang, Yu, Wang y Yun⁴ plantean la introducción de la geometría fractal, propuesta por Chang y Yortsos⁵, para describir el yacimiento como un medio poroso e implementando nuevamente como modelo reológico para el fluido desplazante, ley de potencia, encontrando una ecuación de permeabilidad efectiva dependiente de las características geométricas del medio y del valor de la potencia del fluido desplazante en el modelo reológico. Su enfoque es observar como varía la permeabilidad a diferentes valores de porosidad respecto a la dimensión tortuosa y

¹ Di Fiori, L., Kustal, E., y Wilczynski, P. (26 de febrero de 2021). *Global oil supply-and-demand outlook to 2040*. <https://www.mckinsey.com/industries/oil-and-gas/our-insights/global-oil-supply-and-demand-outlook-to-2040>

² Buckley, S. E., Leverett, M. C., "*Mechanism of fluid displacement in sands*", Petrol. Trans. AIME; (1942).

³ Wu, Y., Pruess, K., Witherspoon, P. A., "*Displacement of a Newtonian fluid by a Non-Newtonian Fluid in a Porous Medium*", Transport in Porous Media. 6; (1991) 115-142.

⁴ Zhang, B., Yu, B., Wang, H., "*A fractal analysis of permeability for Power-law fluids in porous media*", Fractals. 14; (2006) 171-177.

⁵ (26) J. Chang, Y.C. Yortsos, "*Pressure transient analysis of fractal reservoirs*", SPE, U. of Southern California, (1990).

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

la potencia del fluido en el modelo reológico, encontrando diferencias más notables en estas últimas.

En 2008 Li, Yu, Chen y Wang⁶ hicieron el mismo ejercicio, pero ahora implementando el modelo reológico de Ellis, obteniendo una ecuación de permeabilidad dependiente de las características geométricas del medio y las características físicas del fluido, igual que en el caso anterior, así como del gradiente de presión. En este caso el enfoque es la variación de la permeabilidad con el gradiente de presión y como se aleja del fluido newtoniano para diferentes fluidos de Ellis.

En un artículo publicado en 2013 Turcio⁷ buscan, como en los casos anteriores, encontrar una ecuación de la permeabilidad efectiva en un medio poroso, pero esta vez utilizando el modelo reológico Bautista-Manero-Puig⁸ (BMP). Dicho modelo es capaz de predecir los comportamientos de los fluidos de los estudios mencionados anteriormente, entre otros como Bingham, Carreau, etcétera, por lo que la ecuación de permeabilidad efectiva encontrada se puede considerar como un modelo general. Lo anterior se comprueba debido a que implementando las características del tipo de fluido se llega a las ecuaciones publicadas en los artículos mencionados previamente.

La ecuación general de permeabilidad obtenida expresada en términos de fluidez en función del esfuerzo y de la geometría del medio fractal es ideal para implementarla en la investigación de transporte a través de medios porosos. En 2010 Carter⁹ presenta su tesis para un modelo de Buckley-Leverett estocástico, sin embargo, los capítulos consultados fueron los primeros cuatro ya que presentan las consideraciones que se realizan para resolver la ecuación de Buckley-Leverett. Este trabajo aborda el origen de las ecuaciones que describen el fenómeno de transporte de fluidos a través de medio poroso; presenta el concepto de relación de movilidades que es la relación de la movilidad del fluido no newtoniano y el fluido newtoniano, que facilita la introducción de las permeabilidades efectivas y las viscosidades en la ecuación de fracción de flujo. Introduce la consideración de la extensión multifásica ley de Darcy que permite relacionar la permeabilidad efectiva con la saturación; describe el procedimiento para convertir un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) a una sola EDP, que es un problema de Riemann, por lo que la solución será a través de la implementación de un choque

⁶ Li, Y., Yu, B., Chen, J., Wang, C., "Analysis of permeability for Ellis fluid flow in fractal porous media", Chemical Engineering Communications. 195; (2008) 1240-1256.

⁷ M. Turcio, J.M. Reyes, R. Camacho, C. Lira-Galeana, R. O. Vargas, O. Manero, "Calculation of effective permeability for the BMP model in fractal porous media". Journal of Petroleum Science and Engineering 103 (2013) 51-60.

⁸ F. Bautista, J.M. de Santos, J.E. Puig, O. Manero, "Understanding thixotropic and anti-thixotropic behavior of viscoelastic micellar solutions and liquid crystalline dispersions. I. The model". Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics, 80 (1999) 93.

⁹ S. J., Carter, "A stochastic Buckley – Leverett Model" The University of Adelaide, Australia (2010), 1-31.

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

como ya se había mencionado para el trabajo de Wu, Pruess y Witherspoon. Sin embargo, este trabajo desprecia la contribución de las fuerzas capilares y no contempla la influencia de las características reológicas de los fluidos en el flujo a través del medio poroso, debido a que su enfoque es la solución matemática. En este documento se aprecia que la ecuación de fracción de flujo será primordial para obtener la solución del problema, y ésta será la que indique los efectos del esfuerzo de corte, la geometría del medio y el gradiente de presión capilar al flujo en el medio poroso.

En 2007 Van Duijn, Peletier y Pop¹⁰ investigaron sobre la solución de la ecuación de Buckley-Leverett considerando la contribución de las fuerzas capilares. Partiendo de la ecuación de conservación original se adopta una expresión para la presión capilar propuesta por Hassanizadeh y Gray¹¹ que además de depender de la saturación, también toma en cuenta efectos dinámicos e histeréticos. Esto hace que la ecuación que describe el fenómeno sea del tipo pseudo-parabólica. La diferencia con la ecuación cuando no se considera capilaridad es la aparición de dos términos de “regularización”, uno de ajuste relacionado con el cambio de variable asociado a un término difusivo y otro constante de tiempo de relajación asociado a un término más complejo. Al final los autores logran demostrar que dichos términos son esenciales para que los choques puedan ser descritos entre sus límites a la izquierda y la derecha de la curva de flujo. Sin embargo, el objeto de interés del presente trabajo no es verificar como influyen estos valores en la solución.

En el mismo artículo se plantean distintos límites a la izquierda y la derecha del choque, y se observa que, dependiendo de los valores de los límites, así como de los términos mencionados anteriormente, los choques suceden de manera diferente y por ende pueden seguir o no la curva de fracción de flujo. Es decir, que además de la condición de Rankine-Hugoniot necesaria cuando no se consideran fuerzas capilares, surgen condiciones de entropía fundamentales para que el choque pueda suceder. Los choques que se obtienen en el artículo muestran siempre la comparativa de su comportamiento sobre la curva de fracción de flujo en los límites de saturación, lo que aporta un panorama de como sucede cada tipo de choque. Este artículo, sin embargo, únicamente plantea choques en donde el límite por la derecha tiene un valor de cero en la saturación, y por ende el límite por la izquierda es más grande. Igualmente, el trabajo no considera la influencia de las propiedades reológicas de los fluidos sobre el comportamiento del choque resultante.

¹⁰ C.J. Van Duijn, L.A. Peletier, J.S. Pop, “A new class of entropy solutions of the Buckley-Leverett equation”. SIAM J. Math. Anal. 39 (2007) 507-533.

¹¹ S.M. Hassanizadeh, W.G. Gray, “Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media”, Water Resour. Res.29 (1993) 3389-3405.

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

En 2010 Spayd y Shearer¹² realizaron un estudio similar al anterior considerando fuerzas capilares llegando a resultados parecidos, sin embargo en este caso los autores definen de una manera explícita los tipos de choque que pueden ocurrir (Lax, subcompresivo y de onda de rarefacción), sus características y logran obtener un diagrama que predice según los límites de saturación a la izquierda y la derecha del choque, el tipo de choque que sucederá fijando los términos de regularización así como la relación de movilidades. Al final plantea una serie de choques, sin embargo, esta vez el valor de saturación a la derecha del choque es mayor que cero y el valor de saturación por lo izquierda ya no siempre es mayor que el de la derecha. Los choques son resueltos mediante la implementación de un método numérico de diferencias finitas. Si bien esta vez se varía el término de regularización asociado a la difusividad, una vez más se fija el valor de relación de movilidades, omitiendo la influencia de las características reológicas del fluido en su movimiento a través del medio poroso.

El presente trabajo de investigación pretende ser una síntesis de las publicaciones mencionadas previamente, desde el planteamiento y desarrollo del modelo reológico, hasta la solución de la ecuación de Buckley-Leverett considerando las fuerzas capilares con la implementación de choques a diferentes valores de saturaciones límite. Sin embargo, a diferencia de los trabajos previos, se considerará que el fluido desplazante es un fluido micelar no newtoniano por lo que la fluidez, la permeabilidad efectiva y la relación de movilidades, siendo esta última la variable clave, dependerá del esfuerzo de corte aplicado en la inyección de la mezcla al medio poroso. Los choques resultantes variarán considerablemente tanto en tipo como en los valores que pueden alcanzar y existirá la posibilidad de manipular la presión de inyección del fluido dependiendo de si se quiere extraer más rápido o en mayor cantidad el fluido de yacimiento. El considerar la relación de movilidades variable utilizando una ecuación general de la viscosidad para transporte de fluidos en medio poroso es algo que no se había estudiado previamente y permite obtener diferentes soluciones para un mismo fluido.

¹² K. Spayd, M. Shearer, "The Buckley-Leverett equation with dynamic capillary pressure". SIAM Journal of Applied Maths, 71 (2011) 1088-1108.

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

2. Resumen.

La primera ecuación empleada en la descripción del flujo bifásico en medio poroso con aplicaciones en la extracción petrolera es la ecuación de Buckley-Leverett. dicha ecuación desarrollada¹³ en 1942 por M. C. Leverett y S. E. Buckley, considera el flujo de dos fluidos inmiscibles, incompresibles y con viscosidades constantes, además de que se desprecian las fuerzas capilares. Desde entonces en los últimos 80 años se han realizado diversos estudios con diferentes tipos de fluidos y diversas consideraciones.

Una de las características que más atención acapara para este tipo de fenómenos es la viscosidad. Hay numerosos trabajos de investigación que utilizan fluidos no newtonianos, por mencionar algunos los fluidos de Ellis¹⁴ o de Ley de potencia¹⁵. De igual manera existen publicaciones que toman en consideración los efectos capilares¹⁶, sin embargo, no se encontró un trabajo integral de lo mencionado anteriormente por lo que este será el propósito del presente trabajo.

En primera instancia se aborda el modelo reológico que se utilizará para determinar la fluidez, el inverso de la viscosidad, a partir de las cuales se calculará la permeabilidad de cada fluido en el medio poroso. Dicho modelo deberá ser capaz de modelar los comportamientos de fluidos que se hayan usado en trabajos previos, tal como el de Ley de potencia. El modelo por el que se opta es el Bautista-Manero-Puig¹⁷ (BMP) debido a que bajo corte simple es capaz de predecir la primera viscosidad Newtoniana a baja rapidez de corte; una segunda viscosidad Newtoniana a rapidez de corte más alta; una región de ley de potencia a rapidez de corte intermedia; un esfuerzo de cedencia cuando la fluidez tiende a cero y muestra comportamiento elástico; y en ciclos de esfuerzo variables. También es capaz de simular comportamientos tixotrópicos y reopécticos. Las ecuaciones constitutivas del modelo son la ecuación de Maxwell convectiva combinada con una ecuación "cinética" que representa la modificación de la estructura del líquido mientras fluye por el medio poroso. La combinación de las ecuaciones mencionadas anteriormente explica la capacidad de dicho modelo de simular diferentes tipos de comportamiento reológico.

¹³ Buckley, S. E., Leverett, M. C., "Mechanism of fluid displacement in sands", Petrol. Trans. AIME; (1942).

¹⁴ Li, Y., Yu, B., Chen, J., Wang, C., "Analysis of permeability for Ellis fluid flow in fractal porous media", Chemical Engineering Communications. 195; (2008) 1240-1256.

¹⁵ Zhang, B., Yu, B., Wang, H., "A fractal analysis of permeability for Power-law fluids in porous media", Fractals. 14; (2006) 171-177 y Wu, Y., Pruess, K., Witherspoon, P. A., "Displacement of a Newtonian fluid by a Non-Newtonian Fluid in a Porous Medium", Transport in Porous Media. 6; (1991) 115-142.

¹⁶ C.J. Van Duijn, L.A. Peletier, J.S. Pop, "A new class of entropy solutions of the Buckley-Leverett equation". SIAM J. Math. Anal. 39 (2007) 507-533 y K. Spayd, M. Shearer, "The Buckley-Leverett equation with dynamic capillary pressure". SIAM Journal of Applied Maths, 71 (2011) 1088-1108.

¹⁷ F. Bautista, J.M. de Santos, J.E. Puig, O. Manero, "Understanding thixotropic and anti-thixotropic behavior of viscoelastic micellar solutions and liquid crystalline dispersions. I. The model". Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics, 80 (1999) 93.

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

Considerando flujo cortante simple, el modelo BMP se simplifica y pasa de ser un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de tensores de esfuerzo y deformación a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de escalares de esfuerzo y velocidad de corte. Sin embargo, el sistema es aún complejo por lo que se procede a resolver el caso en el que se tiene una respuesta elástica muy pequeña y un cambio de la estructura respecto al tiempo despreciable obteniendo la solución de la fluidez en estado estacionario, que puede resolver los casos de adelgazamiento de corte, engrosamiento de corte, Newtoniano y demás comportamientos mencionados previamente. El esfuerzo de cedencia mencionado implica un comportamiento similar al de un sólido en el límite cuando la velocidad de corte tiende a cero, como en el modelo viscoplástico de Bingham.

Es notable que el esfuerzo de cedencia es una característica fundamental en la descripción de los modelos reológicos que puede describir el modelo BMP, por lo que se procede a su cálculo, y se construye una función algebraica en la que la relación de fluidez es dependiente únicamente de la relación del esfuerzo aplicado entre el esfuerzo de cedencia y de las dimensiones del medio fractal. En palabras más simples el esfuerzo es clave para pasar de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales a una ecuación algebraica cuadrática con tres parámetros independientes (fluidez del fluido Newtoniano, fluidez máxima y esfuerzo de cedencia) que pueden ser fácilmente tomados de la curva de flujo en su forma de viscosidad respecto a la velocidad de corte.

A partir de esta función, que engloba distintos tipos de modelos reológicos, y con la formulación de la geometría fractal se procederá a calcular las permeabilidades de los fluidos como lo indica el artículo "*Calculation of effective permeability for the BMP model in fractal porous media*"¹⁸. La geometría fractal propuesta por Mandelbrot en 1997¹⁹ es una rama de la geometría que estudia los fractales que son objetos complejos que no pueden ser descritos por la geometría euclidiana, debido a que es irregular y se repite a diferentes escalas, es decir es auto similar. Un medio poroso entra en la definición de fractal, por lo que se usará este tipo de geometría para describir sus características, de entre las cuales dos serán de gran importancia. La primera es la dimensión de tortuosidad fractal que representa los cambios de dirección que tendrán los capilares que componen al medio poroso, por ejemplo, para capilares rectos la dimensión de tortuosidad fractal es 1. La segunda característica de interés es la dimensión fractal del capilar o poro que "...sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o

¹⁸ M. Turcio, J.M. Reyes, R. Camacho, C. Lira-Galeana, R. O. Vargas, O. Manero, "*Calculation of effective permeability for the BMP model in fractal porous media*". Journal of Petroleum Science and Engineering 103 (2013) 51-60.

¹⁹ B. Mandelbrot, "La geometría fractal de la naturaleza". Metatemas, 1° edición (1997).

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

*de un objeto natural...*²⁰ y tiene un valor mayor a su dimensión topológica o euclidiana.

Se plantea la ecuación del esfuerzo sobre las paredes de los capilares que depende del gradiente de presión a través de la longitud tortuosa en un medio fractal, donde al final se obtendrá un esfuerzo sobre las paredes de los capilares dependientes de las dimensiones de tortuosidad y del poro, del radio y la longitud aparente de los capilares y del gradiente de presión a través de la longitud aparente del poro. Sin embargo, lo que realmente se necesita es el esfuerzo del total de capilares y no el esfuerzo sobre la pared de uno solo, de manera que se integra sobre el número total de poros.

Una vez obtenido el valor de esfuerzo se procede a calcular el flujo volumétrico a través del capilar, que será función del radio del poro y la fluidez, que a su vez también será función del radio. Se propone una función general que relacione la fluidez dependiente del radio con la ecuación de fluidez newtoniana, de manera que se encuentre una expresión de fluidez explícitamente dependiente del radio para este caso específico. Sin embargo, se dejará indicada como función del radio ya que de esta manera permitirá mantener el carácter general de la ecuación hasta encontrar la expresión de permeabilidad.

Se procede a calcular el flujo total a través de todos los poros, integrando el flujo obtenido anteriormente respecto al número total de poros en un rango que abarque desde poro con el radio más grande hasta el poro con el radio más pequeño. Una vez obtenida la ecuación de flujo es posible calcular la velocidad superficial dividiendo entre el área transversal normal a la dirección del flujo, no sin antes realizar el ajuste por la porosidad del medio.

Al final se obtendrá una ecuación de velocidad superficial, dependiente del radio del poro y de la fluidez en función del radio del capilar, a partir de la cual se podrá calcular la permeabilidad de cada fluido en el medio con ayuda de la Ley de Darcy que indica que la velocidad es igual a el valor negativo del producto de la permeabilidad efectiva, la fluidez dependiente del esfuerzo y el gradiente de presión. De esta ley se despeja la permeabilidad efectiva.

Con la expresión de la permeabilidad efectiva general, se nota que es función de la integral de la fluidez respecto al radio del poro a través de todos los valores de radio, ecuación general mencionada previamente, y de la fluidez dependiente del esfuerzo de corte. Debido a que previamente se resolvió el caso newtoniano de la ecuación de fluidez dependiente del radio se encuentra la expresión de la permeabilidad para los fluidos newtonianos, llegando a un resultado idéntico al reportado de la literatura por lo que la ecuación general es válida.

²⁰ E. Henao, R. López, "Geometría fractal y transformada de Fourier" Scientia ET Technica vol XVI num 48 (2011), 269.

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

Para poder encontrar la ecuación de permeabilidad efectiva del fluido no newtoniano (desplazante) se propone una relación entre la fluidez dependiente del radio y la fluidez dependiente del esfuerzo de corte, evidentemente deberá poder expresar el caso newtoniano, de ley de potencia, Bingham, etcétera, para que sea válida. Con esta expresión general de la fluidez dependiente del radio se obtiene la ecuación de la permeabilidad efectiva para el caso no newtoniano.

Debido a la gran cantidad de poros que pueden existir en un yacimiento, la relación entre tamaño de radios simplifica las ecuaciones de permeabilidad para ambos fluidos. Una vez que se tienen las expresiones de permeabilidad pueden calcularse las movilidades de los fluidos. La movilidad es el producto de la permeabilidad por la fluidez, en ambos casos la ecuación es similar, siendo la diferencia que en la del fluido no Newtoniano existe una expresión en la que hay una diferencia de la fluidez dependiente del esfuerzo y la fluidez cuando el esfuerzo de corte es igual al esfuerzo de cedencia, que es una desviación del comportamiento Newtoniano.

Una vez que se han obtenido las movilidades de cada fluido se procede a calcular la relación de la movilidad del fluido desplazado (newtoniano), entre la del fluido desplazante (no newtoniano). Al obtener la ecuación de relación de movilidades se observa que es dependiente de la dimensión de tortuosidad, dimensión fractal, de la relación del fluido newtoniano entre el fluido no newtoniano evaluado en el esfuerzo de cedencia y de la relación de fluidez, dependiente del esfuerzo de corte, entre el fluido no newtoniano evaluado en el esfuerzo de cedencia. De las cuatro variables mencionadas anteriormente, dos se obtienen de la definición del medio y una de las características de los fluidos a condiciones específicas, es decir serán constantes; mientras que para la última se encontró previamente una expresión.

Al tener una expresión general de permeabilidad se pueden definir las características del fluido, aunque se debe establecer que los resultados para cualquier tipo de fluido serán similares. Con esta consideración es posible obtener la curva en forma de "S" de la relación de fluidez contra relación de esfuerzos.

Con la solución para la relación de fluidez ahora únicamente falta definir las características del medio poroso para resolver la ecuación de movilidad. Se elige un valor de dimensión fractal de poro de 3 para simular una geometría altamente fraccionada y de gran irregularidad, un objeto con una dimensión similar sería una esponja de Menger con un valor de 2.7268^{21} . Se resuelve la ecuación de movilidad para los casos de dimensión de tortuosidad iguala 1, 1.5 y 2, dónde 1 es un capilar recto y conforme aumenta va llenando el volumen, es decir hay más cambios de dirección. Se obtiene la curva de la relación de movilidades dependiente de la relación de esfuerzos, encontrando que tiene un comportamiento inversamente proporcional a la curva de relación de fluideces o directamente proporcional a la curva de relación de viscosidades, es decir tiene un máximo a bajos esfuerzos de

²¹ P. A., Vázquez, "Introducción a la Geometría fractal" Universidad del Bío Bío, Chile (2016), 27.

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

corte, después tiene una disminución en valores próximos al esfuerzo de cedencia y presenta un mínimo en valores altos de esfuerzo de corte. La variación es mínima a distintos valores de dimensión tortuosa, por lo que se opta por capilares rectos. No obstante, los resultados obtenidos en este trabajo serán similares para cualquier tipo de medio poroso.

Antes de poder resolver el flujo a través del medio poroso, se debe encontrar una relación entre la permeabilidad y la concentración, o saturación, de los fluidos. Lo anterior se logrará mediante la implementación de la extensión multifásica de la Ley de Darcy²². Primero se explica el procedimiento de obtención de la Ley de Darcy que indica que el flujo volumétrico es directamente proporcional al área transversal al flujo, a la relación de permeabilidad-viscosidad, y al gradiente de presión. El flux volumétrico (o la velocidad de desplazamiento en el medio poroso) se obtiene dividiendo el flujo entre el área. Muskat y Meres²³ propusieron en su trabajo *Flow Through Porous Media* otorgar ecuaciones de flujo individuales a cada fluido de manera que cada uno dependiera de su propia permeabilidad, fluidez y su propio gradiente de presión.

Como se revisó anteriormente, la permeabilidad efectiva tiene un alto grado de complejidad de cálculo, debido a esto se propone la existencia de la permeabilidad relativa, que es la relación de la permeabilidad efectiva de un fluido entre su permeabilidad crítica bajo ciertas condiciones. Estudios demuestran²⁴ que la permeabilidad relativa es directamente proporcional al cuadrado de la saturación del fluido, y debido a que la saturación para flujos bifásicos es interdependiente, la permeabilidad relativa puede expresarse en términos de la saturación del fluido desplazante.

Las velocidades de desplazamiento a través del medio poroso pasan de expresarse en función de la permeabilidad efectiva a expresarse en función de la permeabilidad crítica, que es constante, y de la permeabilidad relativa, que es función de la saturación. Se define también que la permeabilidad capilar es la resta de la presión ejercida por el fluido desplazado menos la ejercida por el fluido desplazante y es función de la saturación.

Se procede a realizar el balance de masa diferencial del fluido desplazante, en el que no existe generación de masa ni transferencia por difusión. Se obtiene como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. No obstante, las ecuaciones parciales que se encuentran son la de la velocidad a través del medio poroso respecto al espacio y la de la saturación, las cuales son interdependientes. Debido a que las velocidades provienen del flujo a través de la misma área, se dividen entre el flux total obteniendo funciones de fracción de flujo. La fracción de

²² S. J., Carter, "A stochastic Buckley – Leverett Model" The University of Adelaide, Australia (2010), 1-31.

²³ M., Muskat, M. W., Meres, "The flow of heterogeneous fluids through porous media" Physics 7 (1936), 346.

²⁴ T., Ahmed, "Relative Permeability Concepts" Reservoir Engineering Handbook (2019), Cap 5 y R., Wheaton, "Basic Rock and Fluid Properties" Fundamentals of Applied Reservoir Engineering (2016), Num 2.6.2.

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

flujo puede tomar valores mayores a cero, ya que siempre existirá flujo a través del medio, hasta 1 y la suma de las fracciones de flujo de los fluidos desplazante y desplazado es 1. Con la consideración anterior se sustituyen las ecuaciones de las velocidades a través del medio poroso para cada fluido y se despejan los gradientes de presión de manera que sean dependientes de la fracción de flujo del fluido desplazante.

Tomando la consideración de que la presión capilar es la resta de la presión de cada fluido en el medio y derivando parcialmente respecto al espacio, se sustituyen las ecuaciones anteriores obteniendo una función de la presión capilar. De esta función se despeja la fracción de flujo obteniendo una ecuación compuesta de dos partes, una independiente de la fuerza capilar y otra dependiente de él. Estas dos partes también dependen de las permeabilidades relativas, permeabilidades críticas y fludeces de los fluidos newtonianos y no newtonianos. Sin embargo, aún no se tiene una función explícita de la fracción de flujo en la saturación y además no se tiene ecuaciones de permeabilidades relativas o críticas con las que se pueda trabajar, por lo que aquí se recurre a la extensión multifásica de la Ley de Darcy y a la ecuación de relación de movilidades para simplificar la expresión de fracción de flujo en variables conocidas.

Ahora los dos términos que componen a la fracción de flujo dependen únicamente de la relación de movilidades y de la saturación. Aparecerá para la parte relacionada con la fuerza capilar un término extra, pero se abordará en la última parte. Ahora la ecuación de conservación de masa puede expresarse en términos de fracción de flujo, debido a que se expresa en términos de la saturación, logrando pasar de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales a una sola ecuación diferencial parcial, que describe al sistema.

Primero se busca resolver el caso de Buckley–Leverett, únicamente conservando la consideración fuerzas capilares nulas. De esta manera la fracción de flujo solo tiene un término, el cual se grafica para cada valor de relación de movilidades en donde se observa una gran diferencia para cada uno de estos. Primero se expresa en términos adimensionales la ecuación que describe al sistema. El término relacionado con la fuerza capilar es del tipo difusivo respecto a la saturación, multiplicado por la segunda parte de la fracción de flujo, que para este caso particular es cero. De esta manera se obtiene una EDP que se conoce como problema de Riemann²⁵, que en palabras simples tiene la característica de tener soluciones de ondas de choque, es decir cambios abruptos entre sus límites de manera que se evite la discontinuidad de la función y sea diferenciable.

Aplicando la derivada material de la saturación e igualando con la ecuación general se encuentra que la velocidad en el medio poroso será igual a la derivada parcial

²⁵ F. D., Lora-Clavijo, J. P. Cruz-Pérez, F. Siddhartha Guzmán, and J. A. González, "Exact solution of the 1D Riemann problem in Newtonian and relativistic hydrodynamics" *Revista Mexicana de Física*, 59 (2013), 1-2.

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

del primer término de la fracción de flujo, en adelante fracción de flujo indistintamente, respecto a la saturación. Sin embargo, al graficar la saturación contra esta parcial es evidente que no puede ser una función ya que está doblemente valuada en S para el mismo valor de velocidad. Aquí se hace evidente la necesidad de aplicar un choque para resolver el problema de Riemann.

Para saber en que valor de saturación debe aplicarse el choque primero se aplica la condición de tangencia, igualándola con la parcial de fracción de flujo. De esta manera se encontrará una raíz única de la saturación dependiente de la relación de movilidades, que se denominará alfa. Se calcula la pendiente de una recta desde el punto de la condición de tangencia hasta el origen. Con la ecuación de la recta, se calcula el valor de saturación cuando la fracción de flujo es 1 (su valor máximo), y se le denomina la saturación promedio. Graficando, para distintos valores de relación de movilidad, la fracción de flujo, su parcial respecto a la saturación multiplicada por alfa y la recta del punto tangente y el origen, se nota que existe una intersección de estas curvas en alfa.

Graficando alfa contra distintos valores de relación de movilidades se observa que comienza desde una ordenada al origen en el mínimo valor posible de relación de movilidades y aumenta asintóticamente a valores menores a 1. Graficando la pendiente de la recta tangente se observa que disminuye asintóticamente a 1 cuando alfa tiende a 1. Es decir, a mayor relación de movilidades, mayores valores de alfa serán alcanzados, la pendiente irá reduciéndose y la cercanía con la saturación promedio será cada vez menor.

Para encontrar el punto del choque se implementa el criterio de áreas iguales a la parcial de la fracción de flujo respecto a la saturación, buscando que la información del área bajo la curva se conserve, encontrando que el punto de choque es alfa. De esta manera se grafica la saturación contra la rapidez antes y después de aplicar el choque, en donde se observa que ya no se encuentra doblemente valuada. Finalmente se comprueba que este procedimiento es compatible con los criterios²⁶ de Rankine Hugoniot y de entropía de Oleinik, utilizados ampliamente para este tipo de problemas. Se encuentra también que se resolvió el problema con el límite de saturación a la izquierda del choque igual a alfa y el límite de saturación a la derecha del choque igual a cero.

Una vez resuelto el caso en el que no existe fuerza capilar, se considera el caso en el que sí existe. Para esto se implementa el modelo de Hassanizadeh y Gray²⁷ para una nueva expresión de la presión capilar que depende tanto de la presión capilar estática, como en el desarrollo previo, pero además del cambio de saturación respecto al tiempo multiplicado por un factor de tiempo de relajación adimensional.

²⁶ C.J. Van Duijn, L.A. Peletier, J.S. Pop, "A new class of entropy solutions of the Buckley-Leverett equation". SIAM J. Math. Anal. 39 (2007) 507-533.

²⁷ S.M. Hassanizadeh, W.G. Gray, "Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media", Water Resour. Res. 29 (1993) 3389-3405.

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

Debido a esto se debe resolver nuevamente la ecuación general adimensional, realizando un reajuste al segundo término de la fracción de flujo que tiene relación con la fuerza capilar.

Nuevamente se obtiene una ecuación general del fenómeno, similar al problema de Riemann, pero con dos términos extra que involucran a la segunda parte de la fracción de flujo, a un término ϵ relacionado a la difusión y el tiempo de relajación adimensional de Hassanizadeh y Gray. Debido al aumento de complejidad de la ecuación se realiza un cambio de variable conveniente obteniendo una ecuación diferencial ordinaria. Se plantean los límites de saturación a la izquierda y a la derecha del choque, sin embargo, esta vez el límite de la derecha será mayor a cero.

Aplicando los límites previos se aplica el criterio de áreas iguales de manera que se encuentren los valores máximos que se pueden establecer para el límite de saturación a la izquierda del choque. Una vez obtenidos se plantean los distintos tipos de choque²⁸ que son el de rarefacción en donde prácticamente se sigue la curva de la parcial del primer término de fracción de flujo respecto a la saturación; el choque de Lax u ordinario, que presenta una transición suave tanto por la izquierda como por la derecha del choque; y el choque subcompresivo, que es similar al de Lax excepto que solo es diferenciable por la izquierda del choque por lo que es abrupto. Se proporciona una breve descripción del método numérico que se usará para el modelado de los choques, basado en el propuesto por Spayd y Shearer²⁹ en su artículo *The Buckley-Leverett equation with dynamic capillary pressure*.

Finalmente se presentan cuatro casos de tipo de choque con diferentes límites, tiempos de relajación adimensionales y términos relacionados con a la difusión. Se expone un análisis semicuantitativo en el que se discutirá el tipo de choque o choques que presenta, si es que son posibles, y la razón de su comportamiento, así como un análisis de su aplicación práctica en un yacimiento. También se analizará de manera breve la influencia del valor del tiempo de relajación adimensional, sin ser un análisis detallado ya que no es el fin del presente trabajo.

La novedad del presente trabajo de investigación es la implementación de un modelo reológico para la fluidez que incluye diversos tipos de comportamientos (Bingham, Ley de potencia, Newtoniano, Fluido de Ellis) que se implementa para calcular, en conjunto con la geometría fractal, la relación de movilidades de un fluido no newtoniano, que desplaza a un fluido newtoniano, y que será pieza clave en la implementación y comportamiento de los choques que resolverán la ecuación de

²⁸ K. Spayd, M. Shearer, "The Buckley-Leverett equation with dynamic capillary pressure". SIAM Journal of Applied Maths, 71 (2011) 1088-1108.

²⁹ K. Spayd, M. Shearer, "The Buckley-Leverett equation with dynamic capillary pressure". SIAM Journal of Applied Maths, 71 (2011) 1088-1108.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

conservación de la saturación a través de un medio poroso, obteniendo así la velocidad de desplazamiento.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

3. Nomenclatura

Símbolo	Definición
A ,	Área transversal normal a la dirección del flujo
α ,	Raíz de saturación
\underline{D} ,	Parte simétrica del tensor de deformación
D_f ,	Dimensión fractal de los capilares
D_T ,	Dimensión de la tortuosidad fractal
ε ,	Término de viscosidad
ϕ ,	Porosidad
f ,	Fracción de flujo
F ,	Primer componente de la fracción de flujo
$\dot{\gamma}$,	Velocidad de corte
g ,	Constante de aceleración de gravedad
G_0 ,	Módulo de corte
H ,	Segundo componente de la fracción de flujo
η, μ ,	Viscosidad
φ ,	Fluidez
φ_0 ,	Fluidez a velocidades de corte muy bajas
φ_∞ ,	Fluidez a velocidades de corte muy altas
K ,	Constante de conductividad hidráulica
k_0 ,	Constante cinética de modificación estructural
k_c ,	Permeabilidad característica
k_e ,	Permeabilidad efectiva
k_N ,	Permeabilidad del fluido desplazado
k_r ,	Permeabilidad relativa
λ ,	Tiempo característico de formación estructural
\underline{L} ,	Tensor del gradiente de velocidades
L ,	Escala de longitud característica
L_0 ,	Longitud representativa en la dirección del flujo
L_t ,	Longitud tortuosa en la dirección del flujo
M ,	Relación de movilidades / Relación de movilidad (movilidad del fluido desplazante entre el desplazado)
m ,	Pendiente de la recta tangente a la raíz de saturación
M_N ,	Movilidad del fluido desplazado
M_{NN} ,	Movilidad del fluido desplazante (no newtoniano)
N ,	Relación de ajuste del número de poros
N_t ,	Número total de capilares
p ,	Presión del fluido en el capilar

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

Símbolo	Definición
$p_c,$	Presión capilar
$q,$	Flujo volumétrico a través de un capilar
$Q,$	Flujo volumétrico total a través del medio poroso
$r,$	Radio del capilar
$\rho,$	Densidad
$v,$	Velocidad a través del medio poroso
$r_{max},$	Radio máximo de los capilares
$r_{min},$	Radio mínimo de los capilares
$\rho_N,$	Fluidez del fluido desplazado (newtoniano)
$\underline{\sigma},$	Tensor de esfuerzos
$S,$	Saturación
$S_{prom},$	Saturación Promedio
$\sigma_w,$	Esfuerzo de corte en la pared en capilares tortuosos
$\sigma_y,$	Esfuerzo de cedencia
$t,$	Tiempo
$\tau,$	Tiempo de relajación
$\underline{u},$	Velocidad del fluido en el capilar
$v_s,$	Velocidad superficial
$\underline{v},$	Velocidad promedio del fluido
$V_p,$	Volumen total de poros
$V_t,$	Volumen total del medio
$x,$	Concentración actual
$x_s,$	Espacio
$x_0,$	Concentración inicial
$x_\infty,$	Concentración final
$\zeta,$	Radio adimensional

Subíndice	Definición
$i,$	Fluido i
$1,$	Fluido desplazante
$2,$	Fluido desplazado

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

4. Hipótesis.

- Para el desplazamiento de un fluido Newtoniano por un fluido no Newtoniano a través de un medio poroso, que puede describirse mediante la geometría fractal, el valor de relación de movilidades tendrá una variación considerable respecto al esfuerzo de corte aplicado y una variación mínima respecto a las dimensiones del espacio fractal.
- Para la solución del problema de Riemann de la ecuación de conservación de la saturación en donde no se consideran las fuerzas capilares, así como para su extensión en donde se consideran, la relación de movilidades tendrá una influencia determinante en el punto en el que se aplicará el choque, así como el tipo de choque que ocurrirá.
- Existe un valor de relación de movilidades ideal en el cual en la mayoría de los casos se obtiene la mayor velocidad de frente de desplazamiento y un rendimiento de recuperación óptimo.

5. Fundamentos y Desarrollo de la Ecuación de Movilidad.

En el presente trabajo de investigación se utilizará el modelo Bautista-Manero-Puig, en adelante BMP, para calcular la permeabilidad efectiva en medios porosos fractales. Las ecuaciones constitutivas del modelo son la ecuación de Maxwell (1) convectiva combinada con una ecuación cinética de Fredrickson (2), representando la modificación de la estructura del fluido complejo conforme se mueve a través del medio poroso fractal.

El modelo BMP es descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{1}{G_0 \varphi} \underline{\underline{\underline{\nabla}}} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{2}{\varphi} \underline{\underline{\underline{D}}} \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\lambda} (\varphi_0 - \varphi) + k_0 (\varphi_\infty - \varphi) \underline{\underline{\underline{\sigma}}}: \underline{\underline{\underline{D}}} \quad (2)$$

Donde:

- $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$ es el tensor de esfuerzos
- $\underline{\underline{\underline{\nabla}}}$ es la derivada convectiva superior del tensor de esfuerzos
- G_0 es el módulo de corte
- φ es la fluidez, el inverso de la viscosidad η
- $\underline{\underline{\underline{D}}}$ parte simétrica del tensor de deformación
- λ es el tiempo característico de formación estructural
- k_0 es una constante cinética relacionada a la modificación estructural
- φ_0 es la fluidez a velocidades de corte pequeñas
- φ_∞ es la fluidez a velocidades de corte muy altas

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

La derivada convectiva superior de la ecuación (1) es:

$$\underline{\underline{\underline{\nabla}}} = \frac{d\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}{dt} - \left(\underline{\underline{\underline{L}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{L}}}^T \right) \quad (3)$$

Donde:

- $\underline{\underline{\underline{L}}}$ es el tensor del gradiente de velocidades
- $\frac{d\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}{dt}$ es la derivada material del tensor de esfuerzos

Para la velocidad de corte simple unidimensional el tensor gradiente de velocidades, su tensor transpuesto y el tensor de esfuerzos tienen la siguiente estructura:

$$\underline{\underline{\underline{L}}} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\underline{L}}}^T = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Donde:

- $\dot{\gamma}$ es la velocidad de corte, proporcional a la disipación del fluido

Desarrollando:

$$\underline{\underline{\underline{L}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{L}}}^T = L_{ij}\sigma_{jk} + \sigma_{jk}L_{mk}$$

$$\underline{\underline{\underline{L}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{L}}}^T = \begin{pmatrix} L_{1j}\sigma_{j1} & L_{1j}\sigma_{j2} & L_{1j}\sigma_{j3} \\ L_{2j}\sigma_{j1} & L_{2j}\sigma_{j2} & L_{2j}\sigma_{j3} \\ L_{3j}\sigma_{j1} & L_{3j}\sigma_{j2} & L_{3j}\sigma_{j3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{1k}L_{1k} & \sigma_{1k}L_{2k} & \sigma_{1k}L_{3k} \\ \sigma_{2k}L_{1k} & \sigma_{2k}L_{2k} & \sigma_{2k}L_{3k} \\ \sigma_{3k}L_{1k} & \sigma_{3k}L_{2k} & \sigma_{3k}L_{3k} \end{pmatrix}$$

Ya que para $\underline{\underline{\underline{L}}}$ y $\underline{\underline{\underline{L}}}^T$ solo L_{12} y L_{21} son diferentes respectivamente se tiene que:

$$\underline{\underline{\underline{L}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{L}}}^T = \begin{pmatrix} L_{12}\sigma_{21} & L_{12}\sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{12}L_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{22}L_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\underline{L}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{L}}}^T = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}\sigma_{21} & \dot{\gamma}\sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{12}\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ \sigma_{22}\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando que los esfuerzos son simétricos:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma$$

$$\underline{\underline{\underline{L}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{L}}}^T = \begin{pmatrix} 2\dot{\gamma}\sigma_{21} & \dot{\gamma}\sigma_{22} & 0 \\ \dot{\gamma}\sigma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el caso de velocidad de corte simple el tensor deformación es:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$\underline{D} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} + \frac{1}{G_0 \varphi} \left[\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\dot{\gamma}\sigma_{21} & \dot{\gamma}\sigma_{22} & 0 \\ \dot{\gamma}\sigma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{2\dot{\gamma}}{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obteniendo para cada componente las ecuaciones:

$$\sigma_{11} + \frac{1}{G_0 \varphi} \left[\frac{d\sigma_{11}}{dt} - 2\dot{\gamma}\sigma \right] = 0 \quad (3.1)$$

$$\sigma + \frac{1}{G_0 \varphi} \left[\frac{d\sigma}{dt} - \dot{\gamma}\sigma_{22} \right] = \frac{\dot{\gamma}}{\varphi} \quad (3.2)$$

$$\sigma_{22} + \frac{1}{G_0 \varphi} \frac{d\sigma_{22}}{dt} = 0 \quad (3.3)$$

Se demostrará más adelante que:

$$\sigma + \frac{1}{G_0 \varphi} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\dot{\gamma}}{\varphi} \quad (4)$$

Las ecuaciones (1) y (2) se reducen al modelo de Maxwell convectivo cuando $\varphi = \varphi_0$. Estas ecuaciones expresan que los procesos viscoelásticos no lineales contenidos en la ecuación de Maxwell están relacionados con una ecuación de tipo cinética escrita en términos de la fluidez, que tienen un tiempo característico relacionado a la formación de la estructura (λ) y un término relacionado a la modificación de la estructura (k_0) proporcional a la disipación ($\underline{\sigma}$; \underline{D}).

A continuación, se presenta la deducción a partir de la cual se llega a la ecuación de Friederickson (2), esta se realizarán algunas simplificaciones.

Considerar la siguiente reacción reversible, que representa el cambio estructural del fluido de la forma A a la forma B:



Dónde:

- A es el reactivo o la estructura inicial
- B es el producto o la estructura final
- k' es la constante cinética de la reacción de reactivos a productos, igual a $1/\lambda$
- k es la constante cinética de la reacción reversible, igual a k_0

La ecuación cinética que representa la reacción anterior es la siguiente:

$$-\frac{dA}{dt} = k'A - kB$$

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

Para dejar todo en términos del “avance de reacción”:

$$A = x_0 - x$$

$$B = x - x_\infty$$

Dónde:

- x_0 es la configuración inicial del reactivo
- x es la configuración actual del reactivo
- x_∞ es la configuración final del reactivo

Sustituyendo:

$$-\frac{d(x_0 - x)}{dt} = \frac{1}{\lambda}(x_0 - x) - k_0(x - x_\infty)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\lambda}(x_0 - x) - k_0(x - x_\infty)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\lambda}(x_0 - x) + k_0(x_\infty - x)$$

Considerando que la reacción puede ser favorecida hacia los productos por la disipación del fluido, y que en el caso estructural la fluidez es el equivalente de la concentración prácticamente se llega a la ecuación (2):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\lambda}(\varphi_0 - \varphi) + k_0(\varphi_\infty - \varphi)\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}}$$

Desarrollando la doble contracción:

$$\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}} = \sigma_{ij}D_{ij}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}} = \sigma_{11}D_{11} + \sigma_{12}D_{12} + \sigma_{13}D_{13} + \sigma_{21}D_{21} + \sigma_{22}D_{22} + \sigma_{23}D_{23} + \sigma_{31}D_{31} + \sigma_{32}D_{32} + \sigma_{33}D_{33}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}} = \sigma_{11}0 + \sigma_{12}\frac{\dot{\gamma}}{2} + \sigma_{13}0 + \sigma_{21}\frac{\dot{\gamma}}{2} + \sigma_{22}0 + \sigma_{23}0 + \sigma_{31}0 + \sigma_{32}0 + \sigma_{33}0$$

$$\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}} = \sigma_{12}\frac{\dot{\gamma}}{2} + \sigma_{21}\frac{\dot{\gamma}}{2}$$

Entonces:

$$\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}} = \sigma\dot{\gamma}$$

Sustituyendo en (2) se obtiene:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\lambda}(\varphi_0 - \varphi) + k_0(\varphi_\infty - \varphi)\sigma\dot{\gamma} \tag{5}$$

Para un material con una respuesta elástica muy pequeña, es decir si su tiempo de relajación es pequeño, la parte asociada al modelo de Hooke de la ecuación de Maxwell es muy pequeña y puede despreciarse ($\frac{1}{G_0\varphi} \approx 0$). Por lo tanto, se obtiene de la ecuación (3.2):

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$\sigma = \frac{\dot{\gamma}}{\varphi}$$

El cambio de estructura es independiente del tiempo ya que se encuentra en régimen permanente obteniendo:

$$\frac{1}{\lambda}(\varphi_0 - \varphi) + k_0(\varphi_\infty - \varphi)\sigma\dot{\gamma} = 0$$

Expresando la velocidad de corte en función del esfuerzo y sustituyendo en la ecuación cinética de la estructura se obtiene:

$$(\varphi_0 - \varphi) + k_0\lambda(\varphi_\infty - \varphi)\sigma^2\varphi = 0 \tag{6}$$

La ecuación (6) predice comportamiento de adelgazamiento de corte cuando $\varphi_\infty > \varphi_0$, engrosamiento de corte cuando $\varphi_\infty < \varphi_0$ y comportamiento Newtoniano cuando $\varphi_\infty = \varphi_0$. Una región de meseta se predice en los límites de esfuerzos de corte muy altos o bajos, con un comportamiento de ley de potencia en las regiones intermedias de velocidad de corte. Adicionalmente, un esfuerzo de cedencia real se predice cuando $\varphi_0 = 0$. El esfuerzo de cedencia implica un comportamiento similar a un sólido en el límite en el que el esfuerzo de corte se acerca a cero, como en el modelo de Bingham viscoplástico. Una cedencia aparente se predice para valores de φ_0 cercanos a cero. De este modo, con un solo modelo se pueden producir comportamientos de Bingham y ley de potencia.

Sustituyendo σ para los esfuerzos normales para el esfuerzo cortante simple en flujo estacionario en (3.1) y (3.3):

$$\sigma_{11} = \frac{1}{G_0\varphi} 2 \frac{\dot{\gamma}^2}{\varphi}$$

$$\sigma_{22} = 0$$

Sustituyendo el resultado para el esfuerzo normal σ_{22} en la ecuación (3.2) se llega a la ecuación (4) bajo las condiciones mencionadas.

De la ecuación (6), se calcula el esfuerzo cuando $\varphi_0 = 0$, en la región de velocidades de corte muy pequeñas, resultando en:

$$(0 - \varphi) + k_0\lambda(\varphi_\infty - \varphi)\sigma^2\varphi = 0$$

$$k_0\lambda(\varphi_\infty - \varphi)\sigma^2\varphi = \varphi$$

$$k_0\lambda(\varphi_\infty - \varphi)\sigma^2 = 1$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{k_0\lambda(\varphi_\infty - \varphi)}$$

Como se mencionó anteriormente el esfuerzo de cedencia implica que $\varphi_0 = 0$, y además, también implicará que la fluidez a la velocidad de corte aplicada sea prácticamente nula, es decir $\varphi \rightarrow 0$, obteniendo:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{k_0 \lambda (\varphi_\infty - 0)}$$

$$\sigma_y = (k_0 \lambda \varphi_\infty)^{-\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Donde:

- σ_y es el esfuerzo de cedencia.

Resolviendo la ecuación (6) para la fluidez en términos del esfuerzo de cedencia resulta en:

$$\begin{aligned} (\varphi_0 - \varphi) + k_0 \lambda (\varphi_\infty - \varphi) \sigma^2 \varphi &= 0 \\ \varphi_0 - \varphi + k_0 \lambda \varphi_\infty \sigma^2 \varphi - k_0 \lambda \sigma^2 \varphi^2 &= 0 \\ -\varphi_0 + \varphi - k_0 \lambda \varphi_\infty \sigma^2 \varphi + k_0 \lambda \sigma^2 \varphi^2 &= 0 \\ k_0 \lambda \sigma^2 \varphi^2 + (1 - k_0 \lambda \varphi_\infty \sigma^2) \varphi - \varphi_0 &= 0 \end{aligned}$$

De la ecuación (7) se obtiene:

$$\begin{aligned} k_0 \lambda &= \frac{1}{\varphi_\infty \sigma_y^2} \\ k_0 \lambda \varphi_\infty &= \frac{1}{\sigma_y^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación cuadrática y multiplicando por $\frac{1}{\varphi_\infty}$:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \frac{\varphi^2}{\varphi_\infty^2} + \left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2}\right) \frac{\varphi}{\varphi_\infty} - \frac{\varphi_0}{\varphi_\infty} = 0$$

Aplicando la solución para la ecuación cuadrática se obtiene:

$$\frac{\varphi}{\varphi_\infty} = \frac{1}{2 \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2}} \left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} - 1 \right) \pm \left(\left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \right) \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_\infty} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \tag{8}$$

Los tres parámetros independientes (φ_∞ , φ_0 y σ_y) de la ecuación (8) pueden ser evaluados de la curva de flujo misma en la forma de viscosidad contra esfuerzo de corte. La fluidez en la rapidez de deformación cero se extrae de la primera meseta Newtoniana cuando las velocidades de corte son pequeñas y la fluidez a velocidad de corte infinita corresponde a la meseta a altas velocidades de corte. Alternativamente, ambos valores de fluidez pueden ser evaluados de la curva de arrastre de contra tiempo. Cuando el esfuerzo de cedencia se alcanza, la viscosidad tiende a una pendiente de -1 en una gráfica logarítmica. La forma usual con la cual se evalúa el esfuerzo de cedencia considera la meseta exhibida cuando la velocidad de corte tiende a cero en una gráfica del logaritmo de esfuerzo contra logaritmo de velocidad de corte. En este contexto el modelo no contiene parámetros ajustables.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

Los poros son considerados capilares con diferentes diámetros. El cambio en el radio del capilar es tomado en cuenta por la modificación de la tortuosidad a lo largo de las trayectorias del flujo. Aunque existe flujo transitorio en un medio poroso real (trayectorias complejas de expansión-contracción) en este modelo el cambio en la geometría que modifica la trayectoria es considerado como un cambio en la tortuosidad y en las dimensiones fractales. En otras palabras, siguiendo los procedimientos promediados en el presente modelo, el flujo general se considerará estacionario, pero de manera local es intrínsecamente inestable; este estado transitorio es tomado en cuenta localmente por la variación de la tortuosidad o las dimensiones fractales del medio poroso, en una escala de tiempo más corta que la del flujo macroscópico global promediado.

El esfuerzo de corte en la pared en capilares tortuosos es dado por:

$$\sigma_w = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dL_t} \quad (9)$$

Donde:

- r es el radio del capilar
- p es la presión del fluido en el capilar
- L_t es la longitud tortuosa en la dirección del flujo

La ley de ajuste fractal para la tortuosidad es:

$$L_t = (2r)^{1-D_T} L_0^{D_T} \quad (9.1)$$

Donde:

- L_0 es la longitud representativa a través de la dirección de flujo
- D_T es la dimensión de la tortuosidad fractal ($1 < D_T < 2$) en dos dimensiones, representando los múltiples cambios de dirección de los capilares para el flujo del fluido a través del medio poroso.

Diferenciando la ecuación (9.1) respecto a L_0 :

$$dL_t = D_T (2r)^{1-D_T} L_0^{D_T-1} dL_0 \quad (9.2)$$

Sustituyendo (9.2) en (9):

$$\sigma_w = -\frac{r}{2D_T (2r)^{1-D_T} L_0^{D_T-1}} \frac{dp}{dL_0}$$

$$\sigma_w = -\frac{r^{D_T}}{2^{2-D_T} D_T L_0^{D_T-1}} \frac{dp}{dL_0} \quad (10)$$

Se asume que el medio poroso consiste en un conjunto de capilares, cuyas distribuciones de tamaño y tortuosidad siguen las leyes fractales. La relación de ajuste del número de poros/capilares acumulativa (N), cada uno de radio r es dado por:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$N(L \geq r) = \left(\frac{r_{max}}{r}\right)^{D_f} \quad (10.1)$$

Donde:

- L es una escala de longitud característica
- r_{max} es el radio máximo de los poros o capilares
- D_f es la dimensión fractal del poro o capilar

El número de capilares con tamaños dentro del intervalo r a $r + dr$ es entonces:

$$-dN(r) = D_f r_{max}^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr \quad (10.2)$$

El signo negativo implica que el número de capilares disminuye con el incremento del tamaño de los capilares, tal que $-dN > 0$; Una propiedad de los objetos fractales es que el número de capilares tiende a infinito cuando r tiende a cero. El número total de capilares (N_t), del más pequeño (r_{min}) al mayor (r_{max}) se puede obtener de la siguiente manera:

$$N_t = \left(\frac{r_{max}}{r_{min}}\right)^{D_f} \quad (10.3)$$

D_f puede tomar valores de 1 a 3 y representa la irregularidad y fragmentación del medio poroso.

Si se define una celda unitaria, el esfuerzo total puede ser calculado tomando en cuenta todos los esfuerzos en la pared de cada capilar existente, expresándose de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma &= - \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sigma_w dN(r) \\ \sigma &= - \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{r^{D_T}}{2^{2-D_T}} \frac{1}{D_T L_0^{D_T-1}} \frac{dp}{dL_0} D_f r_{max}^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr \\ \sigma &= - \frac{dp}{dL_0} \frac{2^{D_T-2} D_f L_0^{1-D_T} r_{max}^{D_f}}{D_T} \int_{r_{min}}^{r_{max}} r^{D_T-(D_f+1)} dr \\ \sigma &= - \frac{dp}{dL_0} \frac{2^{D_T-2} D_f L_0^{1-D_T} r_{max}^{D_f}}{D_T (D_T - D_f)} \left(r_{max}^{D_T-D_f} - r_{min}^{D_T-D_f} \right) \\ \sigma &= - \frac{dp}{dL_0} \left[\frac{2^{D_T-2} D_f L_0^{1-D_T} r_{max}^{D_f}}{D_T (D_T - D_f)} \right] \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^{D_T-D_f} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

El flujo volumétrico en capilares tortuosos de radio r puede ser expresado de la siguiente forma:

$$q(r) = - \frac{dp}{dL_0} \varphi(r) \left[\frac{2^{D_T-1} \pi}{D_T L_0^{D_T-1}} r^{D_T-1} \right] \quad (12)$$

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

Es entonces necesario encontrar una ecuación que exprese la fluidez como función del radio. Partiendo de la definición del fluido no newtoniano generalizado en coordenadas cilíndricas:

$$\sigma_{rz} = \frac{\Delta P}{L} \frac{r}{2} = \frac{1}{\varphi(r)} \frac{dv_z}{dr}$$

$$dv_z = \varphi(r) \frac{\Delta P}{2L} r dr$$

Integrando para v_z en el área de flujo transversal, haciendo el cambio de variable de manera conveniente $r \rightarrow \xi$:

$$v_z = \frac{\Delta P}{2L} \int_0^r \varphi(\xi) \xi d\xi$$

Es conocido que la estructura de la ecuación de Poiseuille de flujo volumétrico es:

$$Q = \pi \frac{\varphi R^4 \Delta P}{8 L}$$

Que puede definirse de manera general cómo:

$$Q = \pi \varphi(r) \frac{\Delta P}{L}$$

Despejando la fluidez en función del radio:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{\pi \left(\frac{\Delta P}{L}\right)}$$

De la definición del flujo volumétrico $Q = 2\pi \int_0^r v_z r' dr'$:

$$\varphi(r) = \frac{2\pi \int_0^r v_z r' dr'}{\pi \left(\frac{\Delta P}{L}\right)}$$

Sustituyendo v_z :

$$\varphi(r) = \frac{2\pi \int_0^r \frac{\Delta P}{2L} \int_0^{r'} \varphi(\xi) \xi d\xi r' dr'}{\pi \left(\frac{\Delta P}{L}\right)}$$

Entonces, la fluidez en función de r ($\varphi(r)$) se puede expresar como:

$$\varphi(r) = \int_0^r \left[\int_0^{r'} \xi \varphi(\xi) d\xi \right] r' dr' \tag{13}$$

La ecuación (12) indica que el flux volumétrico decrece debido al camino tortuoso de los capilares. En el caso particular de capilares rectos ($D_T = 1$) y si el fluido es Newtoniano ($\varphi(\xi) = \varphi_N$) las ecuaciones (12) y (13) se reducen a la ecuación de Poiseuille:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$\varphi(r) = \int_0^r \left[\int_0^{r'} \xi \varphi_N d\xi \right] r' dr'$$

$$\varphi(r) = \varphi_N \int_0^r \left[\frac{r'^2}{2} \right] r' dr'$$

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_N r^4}{8}$$

$$q(r) = -\frac{dp}{dL_0} \frac{\varphi_N r^4}{8} \left[\frac{2^{1-1}\pi}{1L_0^{1-1}} r^{1-1} \right]$$

$$q(r) = -\frac{dp}{dL_0} \frac{\pi r^4}{8} \varphi_N \tag{14}$$

El flujo volumétrico total a través de una celda unitaria puede calcularse haciendo Q la suma de cada capilar individual:

$$Q = -\int_{r_{min}}^{r_{max}} q(r) dN(r) \tag{15}$$

Sustituyendo las ecuaciones (10.2) y (12) en (15):

$$Q = -\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dp}{dL_0} \varphi(r) \left[\frac{2^{D_T-1}\pi}{D_T L_0^{D_T-1}} r^{D_T-1} \right] D_f r_{max}^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr$$

$$Q = -\frac{dp}{dL_0} \left[\frac{2^{D_T-1}\pi D_f r_{max}^{D_f}}{L_0^{D_T-1} D_T} \right] \int_{r_{min}}^{r_{max}} \varphi(r) r^{D_T-D_f-2} dr \tag{16}$$

Para calcular la velocidad promedio del flujo en el medio poroso, a la cual se nombrará velocidad superficial, el flujo total debe ser dividido entre el área transversal normal a la dirección de flujo:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\left(\frac{V_t}{L_0}\right)} = \frac{Q}{\left(\frac{V_p}{\phi L_0}\right)} \tag{17}$$

Donde:

- A es el área transversal normal a la dirección del flujo
- V_p es el volumen total de poros
- V_t es el volumen total del sistema
- ϕ es la porosidad $\phi = \frac{V_p}{V_t}$

El volumen total de poros puede determinarse de la siguiente manera:

$$V_p = -\int_{r_{min}}^{r_{max}} \pi r^2 L_t dN$$

$$V_p = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \pi r^2 (2r)^{1-D_T} L_0^{D_T} D_f r_{max}^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr$$

$$V_p = \pi 2^{1-D_T} L_0^{D_T} D_f r_{max}^{D_f} \int_{r_{min}}^{r_{max}} r^2 (r)^{1-D_T} r^{-(D_f+1)} dr$$

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$V_p = \pi 2^{1-D_T} L_0^{D_T} D_f r_{max}^{D_f} \int_{r_{min}}^{r_{max}} r^{2-D_T-D_f} dr$$

$$V_p = \pi D_f r_{max}^{D_f} \frac{2^{1-D_T} L_0^{D_T}}{(3-D_T-D_f)} \left[r_{max}^{3-D_T-D_f} - r_{min}^{3-D_T-D_f} \right]$$

$$V_p = \pi D_f r_{max}^{3-D_T} \frac{2^{1-D_T} L_0^{D_T}}{(3-D_T-D_f)} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right] \quad (18)$$

Por lo tanto, la velocidad superficial es dada por:

$$v = \frac{Q \phi L_0}{V_p}$$

$$v = - \frac{\phi L_0 \left[\frac{dp}{dL_0} \left[\frac{2^{D_T-1} \pi D_f r_{max}^{D_f}}{L_0^{D_T-1} D_T} \right] \right]}{\pi D_f r_{max}^{3-D_T} \frac{2^{1-D_T} L_0^{D_T}}{(3-D_T-D_f)} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \phi(r) r^{D_T-D_f-2} dr$$

$$v = - \frac{dp}{dL_0} \frac{\phi L_0 \left[\frac{2^{D_T-1} \pi D_f r_{max}^{D_f}}{L_0^{D_T-1} D_T} \right]}{\pi D_f r_{max}^{3-D_T} \frac{2^{1-D_T} L_0^{D_T}}{(3-D_T-D_f)} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \phi(r) r^{D_T-D_f-2} dr$$

$$v = - \frac{dp}{dL_0} \frac{2^{2D_T-2} \phi(3-D_T-D_f)}{D_T L_0^{2D_T-2} r_{max}^{3-D_T-D_f}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \phi(r) r^{D_T-D_f-2} dr \quad (19)$$

La ley de Darcy puede ser escrita en términos de la fluidez no-Newtoniana como sigue:

$$v = -k_e \phi(\sigma) \frac{dp}{dL_0} \quad (20)$$

Donde:

- k_e es la permeabilidad efectiva
- $k_e \phi(\sigma)$ es la movilidad no newtoniana

Igualando las ecuaciones (19) y (20) se puede despejar la permeabilidad efectiva:

$$-k_e \phi(\sigma) \frac{dp}{dL_0} = - \frac{dp}{dL_0} \frac{2^{2D_T-2} \phi(3-D_T-D_f)}{D_T L_0^{2D_T-2} r_{max}^{3-D_T-D_f}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \phi(r) r^{D_T-D_f-2} dr$$

$$k_e = \frac{2^{2D_T-2} \phi(3-D_T-D_f)}{D_T L_0^{2D_T-2} r_{max}^{3-D_T-D_f}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{1}{\phi(\sigma)} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \phi(r) r^{D_T-D_f-2} dr \quad (21)$$

La permeabilidad Newtoniana puede ser obtenida como un caso particular cuando

$$\phi(r) = \frac{\phi_N r^4}{8} \text{ y } \phi(\sigma) = \phi_N.$$

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$k_N = \frac{2^{2D_T-2} \phi(3 - D_T - D_f)}{D_T L_0^{2D_T-2} r_{max}^{3-D_T-D_f}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{1}{\varphi_N} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\varphi_N r^4}{8} r^{D_T-D_f-2} dr$$

$$k_N = \frac{2^{2D_T-2} \phi(3 - D_T - D_f)}{8 D_T L_0^{2D_T-2} r_{max}^{3-D_T-D_f}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \int_{r_{min}}^{r_{max}} r^{D_T-D_f+2} dr$$

$$k_N = \frac{2^{2D_T-2} \phi(3 - D_T - D_f)}{8 D_T L_0^{2D_T-2} r_{max}^{3-D_T-D_f}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{r_{max}^{D_T-D_f+3} - r_{min}^{D_T-D_f+3}}{(D_T - D_f + 3)}$$

Se espera que los medios porosos tengan una distribución heterogénea entre el tamaño de los capilares por lo que se espera que la diferencia entre el radio máximo y mínimo de cada poro sea suficiente para poder reducir la ecuación anterior a:

$$k_N = \frac{2^{2D_T-2} \phi(3 - D_T - D_f)}{8 D_T L_0^{2D_T-2} r_{max}^{3-D_T-D_f}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{r_{max}^{D_T-D_f+3}}{(D_T - D_f + 3)}$$

Multiplicando por $\frac{r_{max}^{-D_T}}{r_{max}^{-D_T}} = 1$:

$$k_N = \frac{2^{2D_T-2} \phi(3 - D_T - D_f)}{8 D_T L_0^{2D_T-2} r_{max}^{3-D_T-D_f}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{r_{max}^{3-D_T-D_f} r_{max}^{D_T}}{(D_T - D_f + 3) r_{max}^{-D_T}}$$

$$k_N = \frac{2^{2D_T-2} \phi(3 - D_T - D_f)}{8 D_T L_0^{2D_T-2}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{r_{max}^{2D_T}}{(D_T - D_f + 3)} \quad (22)$$

Para capilares rectos ($D_T = 1$) se obtiene:

$$k_N = \frac{\phi(2-D_f)}{8} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{2-D_f} \right]^{-1} \frac{r_{max}^2}{(4-D_f)} \quad (23)$$

La cual coincide con las reportadas en la literatura para fluidos Newtonianos.

De la ecuación (21) es posible obtener un resultado analítico para la permeabilidad si $\varphi(r)$ en la ecuación (13) se pudiera calcular. Esto puede lograrse proponiendo expresiones para $\varphi(\xi)$ con sentido físico.

Pueden proponerse muchas expresiones basadas en que la fluidez en los poros/capilares alcanzan un mínimo en el centro de su geometría y un máximo en las paredes. La expresión analítica no lineal que cumple con estos límites asume que la fluidez es una función cuadrática respecto a ζ dentro del capilar como sigue:

$$\varphi(\xi) = \varphi_0 + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \zeta^2 \quad (24)$$

Siendo ζ una variable adimensional definida como:

$$\zeta = \frac{r}{r_{max}}$$

Según la ecuación (24) el mínimo en el centro se alcanza con el valor φ_0 . Similarmente, la fluidez alcanza un máximo en las paredes con el valor $\varphi(\sigma)$. La

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

fluidez en la pared requiere el cálculo del esfuerzo en la pared según la ecuación (10). Sustituyendo la ecuación (24) en la ecuación (13) se obtiene $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = \int_0^r \left[\int_0^{r'} \xi(\varphi_0 + (\varphi(\sigma) - \varphi_0)\zeta^2) d\xi \right] r' dr'$$

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_0 r^4}{8} + \int_0^r \left[\int_0^{r'} \xi(\varphi(\sigma) - \varphi_0)\zeta^2 d\xi \right] r' dr'$$

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_0 r^4}{8} + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \int_0^r \left[\frac{r'^2}{2} \left(\frac{r}{r_{max}} \right)^2 \right] r' dr'$$

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_0 r^4}{8} + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \int_0^r \left[\frac{r'^3}{2} \left(\frac{r}{r_{max}} \right)^2 \right] dr'$$

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_0 r^4}{8} + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \frac{r^4}{8} \left(\frac{r}{r_{max}} \right)^2$$

$$\varphi(r) = \frac{r^4}{8} \left(\varphi_0 + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \left(\frac{r}{r_{max}} \right)^2 \right)$$

Sustituyendo la ecuación resultante en (21):

$$k_e = \frac{2^{2D_T-2} \phi(3 - D_T - D_f)}{D_T L_0^{2D_T-2} r_{max}^{3-D_T-D_f}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{1}{\varphi(\sigma)} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left[\frac{r^4}{8} \left(\varphi_0 + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \left(\frac{r}{r_{max}} \right)^2 \right) \right] r^{D_T-D_f-2} dr$$

$$k_e = \frac{2^{2D_T-2} \phi(3 - D_T - D_f)}{D_T L_0^{2D_T-2} r_{max}^{3-D_T-D_f}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{1}{\varphi(\sigma)} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left[\frac{\varphi_0 r^{D_T-D_f+2}}{8} + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \frac{r^{D_T-D_f+4}}{8r_{max}^2} \right] dr$$

Se espera que los medios porosos tengan una distribución heterogénea entre el tamaño de los capilares por lo que se espera que la diferencia entre el radio máximo y mínimo de cada poro sea suficiente para poder reducir la ecuación anterior a:

$$k_e = \frac{2^{2D_T-2} \phi(3-D_T-D_f)}{D_T L_0^{2D_T-2} r_{max}^{3-D_T-D_f}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{1}{\varphi(\sigma)} \left[\frac{\varphi_0 r_{max}^{D_T-D_f+3}}{8(D_T-D_f+3)} + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \frac{r_{max}^{D_T-D_f+5}}{8r_{max}^2(D_T-D_f+5)} \right]$$

$$k_e = \frac{2^{2D_T-2} \phi(3 - D_T - D_f)}{8D_T L_0^{2D_T-2}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{1}{\varphi(\sigma)} \left[\frac{\varphi_0 r_{max}^{2D_T}}{(D_T - D_f + 3)} + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \frac{r_{max}^{2D_T}}{(D_T - D_f + 5)} \right]$$

$$k_e = \frac{2^{2D_T-2} \phi(3-D_T-D_f)}{8D_T L_0^{2D_T-2}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{1}{\varphi(\sigma)} \left[\frac{\varphi_0 r_{max}^{2D_T}}{(D_T - D_f + 3)} + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \frac{r_{max}^{2D_T}}{(D_T - D_f + 5)} \right] \quad (25)$$

Cuando $\varphi(\sigma) \rightarrow \varphi_0$, cerca del centro del capilar, la permeabilidad tiende al comportamiento Newtoniano de la ecuación (22). Cerca de la pared, $\varphi(\sigma)$ tiende a un valor máximo y la permeabilidad disminuye asintóticamente a otro valor constante como una función de la fluidez máxima.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

Utilizando la ecuación (22) de la permeabilidad del fluido newtoniano se calcula la movilidad newtoniana:

$$M_N = k_N \varphi_0$$

$$M_N = \varphi_N \frac{2^{2D_T-2} \phi (3-D_T-D_f)}{8D_T L_0^{2D_T-2}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{r_{max}^{2D_T}}{(D_T-D_f+3)} \quad (26)$$

Utilizando la ecuación (25) de la permeabilidad del fluido no newtoniano se calcula la movilidad no newtoniana:

$$M_{NN} = k_e \varphi(\sigma)$$

$$M_{NN} = \varphi(\sigma) \frac{2^{2D_T-2} \phi (3-D_T-D_f)}{8D_T L_0^{2D_T-2}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{1}{\varphi(\sigma)} \left[\frac{\varphi_0 r_{max}^{2D_T}}{(D_T-D_f+3)} + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \frac{r_{max}^{2D_T}}{(D_T-D_f+5)} \right]$$

$$M_{NN} = \frac{2^{2D_T-2} \phi (3-D_T-D_f)}{8D_T L_0^{2D_T-2}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \left[\frac{\varphi_0 r_{max}^{2D_T}}{(D_T-D_f+3)} + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \frac{r_{max}^{2D_T}}{(D_T-D_f+5)} \right] \quad (27)$$

Obteniendo la relación de la movilidad newtoniana entre la no newtoniana:

$$M = \frac{M_N}{M_{NN}}$$

$$M = \frac{\varphi_N \frac{2^{2D_T-2} \phi (3-D_T-D_f)}{8D_T L_0^{2D_T-2}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \frac{r_{max}^{2D_T}}{(D_T-D_f+3)}}{\frac{2^{2D_T-2} \phi (3-D_T-D_f)}{8D_T L_0^{2D_T-2}} \left[1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_T-D_f} \right]^{-1} \left[\frac{\varphi_0 r_{max}^{2D_T}}{(D_T-D_f+3)} + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \frac{r_{max}^{2D_T}}{(D_T-D_f+5)} \right]}$$

$$M = \frac{\varphi_N \frac{r_{max}^{2D_T}}{(D_T-D_f+3)}}{\left[\frac{\varphi_0 r_{max}^{2D_T}}{(D_T-D_f+3)} + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \frac{r_{max}^{2D_T}}{(D_T-D_f+5)} \right]}$$

$$M = \frac{\frac{\varphi_N}{(D_T-D_f+3)}}{\left[\frac{\varphi_0}{(D_T-D_f+3)} + \frac{(\varphi(\sigma) - \varphi_0)}{(D_T-D_f+5)} \right]}$$

$$M = \frac{\varphi_N}{\left[\varphi_0 + (\varphi(\sigma) - \varphi_0) \frac{(D_T-D_f+3)}{(D_T-D_f+5)} \right]}$$

$$M = \frac{\varphi_N}{\varphi_0} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{\varphi(\sigma) - \varphi_0}{\varphi_0} \right) \frac{(D_T-D_f+3)}{(D_T-D_f+5)}} \right] \quad (28)$$

Para la solución de la ecuación de la fluidez normalizada en el caso de que el esfuerzo de corte sea igual al esfuerzo de cedencia se tiene que:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$\frac{\varphi}{\varphi_{\infty}} = \frac{1}{2} \left[(1-1) \pm \left((1-1)^2 + 4(1) \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_{\infty}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right]$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_{\infty}} = \frac{1}{2} \left[\pm \left(4 \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_{\infty}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right]$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_{\infty}} = \pm \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_{\infty}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = (\varphi_{\infty} \varphi_0)^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

Multiplicando la ecuación (8) por el factor $\frac{\varphi_{\infty}}{\varphi_0}$ se obtiene:

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\varphi_{\infty}}{\varphi_0} \left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} - 1 \right) \pm \left(\left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \right) \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_{\infty}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \tag{30}$$

Se estudiará el caso en el que un fluido newtoniano con una viscosidad 10 veces menor que la de un fluido no newtoniano a esfuerzos nulos ($\sigma = \sigma_y$):

$$\frac{\varphi_N}{\varphi_0} = 10$$

El anterior es un fluido micelar de reología compleja, que el modelo BMP tiene la capacidad de modelar. Dividiendo la ecuación (29) entre φ_0 , tomando en cuenta únicamente la raíz con sentido físico de interés:

$$\frac{\varphi_N}{\varphi_0} = \left(\frac{\varphi_{\infty}}{\varphi_0} \right)^{\frac{1}{2}} = 10$$

Despejando se obtiene el valor de la relación $\frac{\varphi_{\infty}}{\varphi_0}$:

$$\frac{\varphi_{\infty}}{\varphi_0} = 100$$

Con la información anterior se puede solucionar para este caso la ecuación de la fluidez normalizada (30). A continuación, en la **Figura 1** se grafican los valores de fluidez normalizada contra el esfuerzo normalizado:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

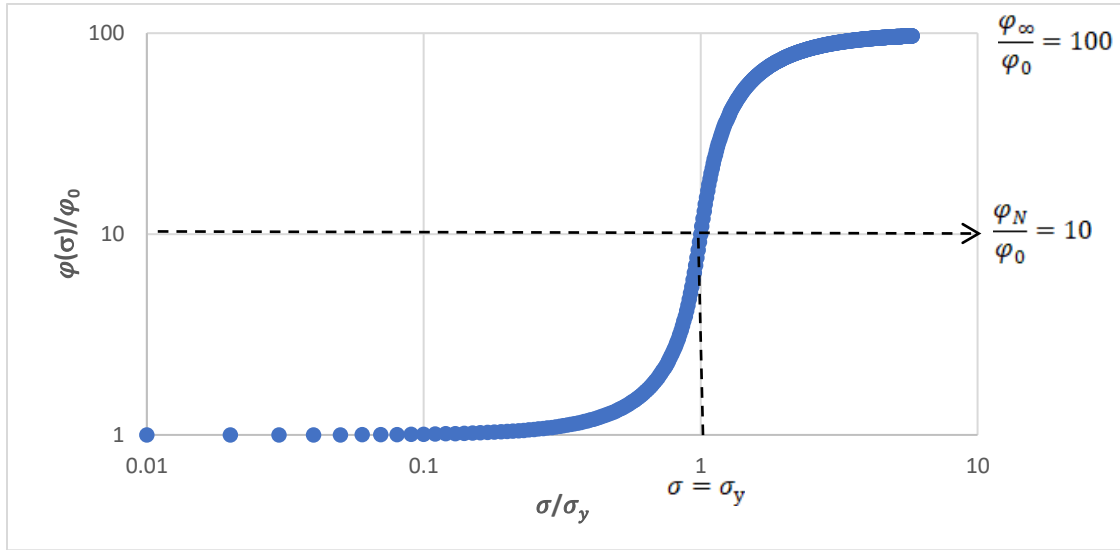


Figura 1. Dependencia de la relación de fluidez respecto a la relación de esfuerzos.

Gráfica de la relación de la fluidez dependiente del esfuerzo entre la fluidez a velocidades de corte muy bajas contra la relación del esfuerzo de corte aplicado entre el esfuerzo de cedencia del fluido no newtoniano. En este caso cuando el esfuerzo aplicado es igual al esfuerzo de cedencia la fluidez del fluido no newtoniano y el fluido newtoniano son iguales y tienen un valor de diez veces la fluidez de cedencia a bajas velocidades de corte.

Para el caso en el que el esfuerzo de corte sea mayor al esfuerzo de cedencia ($\sigma \gg \sigma_y$) entonces la ecuación (30) queda de la siguiente manera:

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\varphi_\infty}{\varphi_0} \left[\frac{\sigma^2}{2 \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2}} \pm \left(\frac{\sigma^4}{\sigma_y^4} + 4 \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \right) \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_\infty} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\varphi_\infty}{\varphi_0} \left[\frac{\sigma^2}{2 \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2}} \pm \left(\frac{\sigma^4}{\sigma_y^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\varphi_\infty}{\varphi_0} \left[\frac{\sigma^2}{2 \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2}} + \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \right]$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\varphi_\infty}{\varphi_0} \left[2 \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \right]$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}$$

El resultado previo concuerda con la información provista en la **Figura 1**, a grandes esfuerzos, y por ende a valores muy altos de velocidad de corte, la fluidez aumenta

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

hasta 100 veces en comparación con esfuerzos pequeños. Cuando el esfuerzo es mucho más pequeño que el esfuerzo de cedencia ($\sigma \ll \sigma_y$) la fluidez es igual a la fluidez cuando las velocidades de corte son cercanas a cero ($\varphi = \varphi_0$) por lo que la ecuación (30) queda como:

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = 1$$

Lo anterior es coincidente con la asíntota que se forma en el valor de 1 para la relación de fluidez en la **Figura 1**.

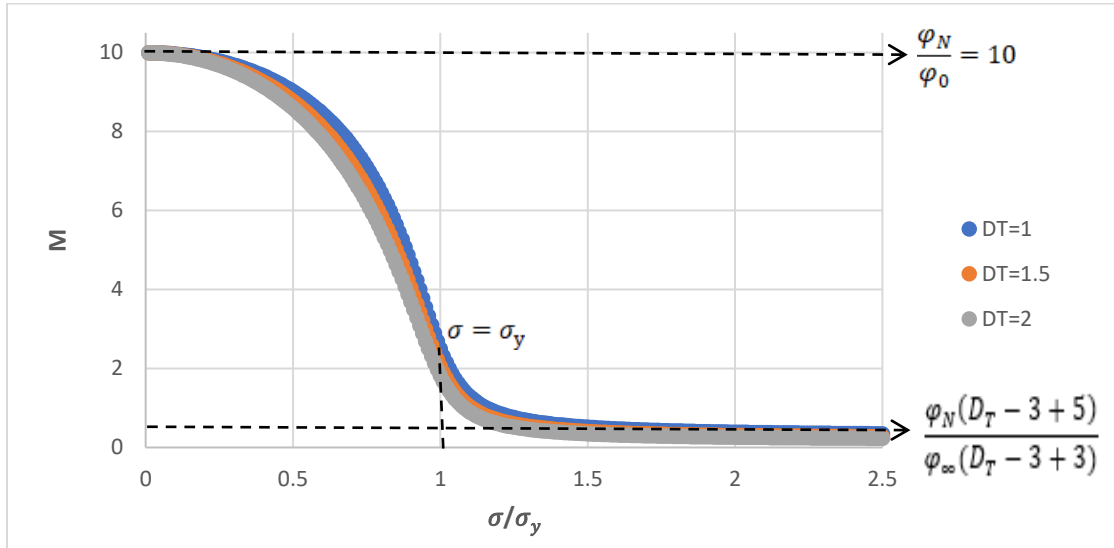


Figura 2. Dependencia de la relación de movilidades respecto a la relación de esfuerzos.

Gráfica de la relación de movilidad del fluido newtoniano (desplazado) entre el fluido no newtoniano (desplazante, micelar) contra la relación del esfuerzo de corte aplicado entre el esfuerzo de cedencia del fluido no newtoniano a diferentes valores de dimensión de tortuosidad fractal.

Una vez que se obtiene la solución para la relación de fluidez respecto a la relación de esfuerzos es posible calcular con la ecuación (28) la relación de movilidad. En la **Figura 2** se grafica la relación de movilidad contra la relación de esfuerzos. Para esto fueron consideradas una dimensión fractal del poro de 3 ($D_f = 3$) y 3 escenarios de dimensión de la tortuosidad fractal ($D_T = (1, 1.5, 2)$). Se fija $D_f = 3$ debido a que se busca simular una geometría altamente fraccionada y de gran irregularidad; el objeto geométrico fractal que más se asimila a este valor es la esponja de Menger o Tapete de Sierpinski en 3D con $D_f = 2.7268$, que en pocas palabras es un cubo con múltiples “perforaciones” o poros.

Del razonamiento previo para la **Figura 1** se sabe que en el caso en el que la relación de esfuerzos tienda a 0 ($\sigma \ll \sigma_y$) la relación de fluidez tiende a 1, por lo que la ecuación (28) se reduce a:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$M = \frac{\varphi_N}{\varphi_0} = 10$$

Para el caso en el que la relación de esfuerzos es 1 ($\sigma = \sigma_y$) la relación de fluidez toma un valor de 10 ($\frac{\varphi_N}{\varphi_0} = \frac{\varphi(\sigma)}{\varphi_0} = 10$), por lo que la ecuación (28) expresa lo siguiente:

$$M = \frac{\varphi_N}{\varphi_0} \left[\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\varphi_N}{\varphi_0} - 1 \right) \frac{(D_T - 3 + 3)}{(D_T - 3 + 5)} \right]} \right]$$

Sí $D_T = 1$; $M = \frac{10}{4} = 2.5$

Sí $D_T = 1.5$; $M = \frac{35}{17} \approx 2.05$

Sí $D_T = 2$; $M = \frac{20}{11} \approx 1.818$

Para el caso en el que la relación de esfuerzos tiende a valores considerables ($\sigma \gg \sigma_y$) la relación de fluidez toma valores de 100 ($\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0} = \frac{\varphi(\sigma)}{\varphi_0} = 100$), por lo que la ecuación (28) toma el siguiente valor:

$$M = \frac{\varphi_N(D_T - 3 + 5)}{\varphi_\infty(D_T - 3 + 3)}$$

Sí $D_T = 1$; $M = \frac{5}{17} \approx 0.2941$

Sí $D_T = 1.5$; $M = \frac{35}{152} \approx 0.2303$

Sí $D_T = 2$; $M = \frac{20}{11} \approx 0.1980$

El razonamiento previo concuerda con lo que describe la **Figura 2**. Cuando la relación de esfuerzos tiende a cero existe una asíntota en el valor de permeabilidad $M = 10$, que es el valor de la relación de fluidez del fluido newtoniano y el no newtoniano lo que quiere decir que a bajos esfuerzos lo que se estará desplazando a través de los poros será el fluido no newtoniano en su mayoría.

Después de dicha asíntota se observa la disminución abrupta de la relación de movilidad, donde se puede observar que cuando el esfuerzo de corte se iguala al esfuerzo de cedencia dicha relación toma valores de 1.818 y 2.5, dependiendo del valor de dimensión de tortuosidad fractal (D_T), es decir la movilidad del fluido newtoniano pasa de ser 10 veces mayor a ser solo el doble de la movilidad del fluido no newtoniano. En pocas palabras se aprecia que el fluido no newtoniano comienza a tener un mayor desplazamiento a través del medio poroso.

Cuando la relación de esfuerzos crece considerablemente se presenta una nueva asíntota, cuyos valores dependerán del valor de dimensión de tortuosidad fractal

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

(D_T) , que varía entre 0.3 y 0.2 aproximadamente. En este caso el fluido no newtoniano tiene una mayor movilidad en el medio poroso que el Newtoniano.

Si bien se sabe que $D_T = 1$ describe a una línea recta, debido a que los resultados de relación de movilidad M no varían significativamente en el rango $D_T = (1, 1.5, 2)$ en adelante los próximos cálculos se harán fijando $D_T = 1$.

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

6. Extensión Multifásica de la Ley de Darcy

El flujo de dos o más fluidos inmiscibles que fluyen a través de un medio poroso está gobernado por la permeabilidad de cada uno. La permeabilidad dependerá de la saturación, o lo que es lo mismo la concentración, de los fluidos. Numerosos estudios dan soporte a la propuesta de que, dentro de ciertos límites, la permeabilidad relativa es independiente de la viscosidad y el flujo, por lo que la saturación es la única variable independiente de la permeabilidad.

La ley de Darcy es una correlación experimental que describe el flujo homogéneo de agua a través de un medio poroso en una sola dimensión, que se expresa como:

$$Q = K \frac{h_3 - h_4}{L} A \quad (31)$$

Donde:

- Q es el flujo volumétrico del agua a través del medio poroso
- L es la longitud del medio poroso perpendicular a la dirección del flujo del agua
- A es el área del medio poroso transversal a la dirección del flujo
- $h_3 - h_4$ es la diferencia de la cabeza hidrostática
- K es una constante de proporcionalidad denominada conductividad hidráulica

La **Figura 3** representa gráficamente el experimento realizado por Henry Darcy en 1856 para deducir la ley que lleva su nombre:

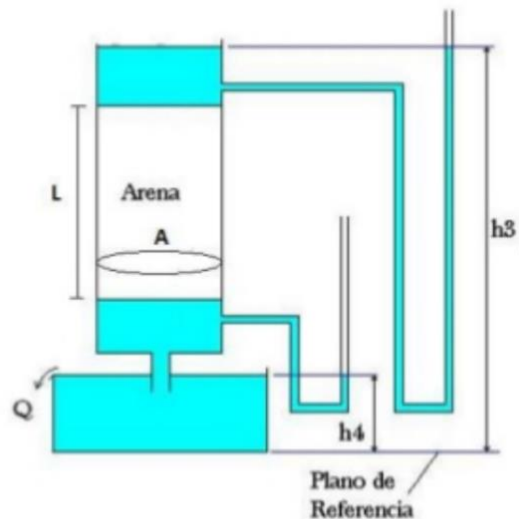


Figura 3. Diagrama del experimento de la Ley de Darcy.

Diagrama que ejemplifica el experimento que se llevó a cabo para obtener la Ley de Darcy. Tomado de Myrianjack, "Ley de Darcy", Escuela superior politécnica de Chimborazo; (2020).

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

(<https://www.studocu.com/ec/document/escuela-superior-politecnica-de-chimborazo/genesis-y-morfologia-de-suelos/ley-de-darcy-ley-de-darcy/8557007>)

El término $\frac{(h_3-h_4)}{L}$ se denomina gradiente hidráulico. Se puede observar la dirección del flujo es de mayor a menor altura hidrostática, es decir es contraria al gradiente de altura respecto a la longitud del cilindro:

$$\frac{(h_3-h_4)}{L} = -\frac{\partial h}{\partial z}$$

Sustituyendo en la ecuación (31):

$$Q = -KA \frac{\partial h}{\partial z} \quad (32)$$

En un medio poroso, para un fluido normal a la superficie, tiene sentido que el flujo sea directamente proporcional a la permeabilidad del medio, su densidad y la fuerza de la gravedad, y sea inversamente proporcional a la viscosidad del fluido. Basado en lo anteriormente mencionado se propone la siguiente expresión para la conductividad hidráulica (K):

$$K(k, \rho, g, \mu) = \frac{k\rho g}{\mu}$$

- k es la permeabilidad efectiva del medio poroso
- ρ es la densidad del fluido
- g es la constante de aceleración gravitacional
- μ es la viscosidad del fluido

Sustituyendo en ecuación (32):

$$Q = -\left(\frac{k\rho g}{\mu}\right) A \frac{\partial h}{\partial z}$$

Arreglando términos:

$$Q = -\frac{k}{\mu} A \frac{\partial \rho g h}{\partial z}$$

$$Q = -A \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (33)$$

donde p es la presión del fluido. Se observa que aparece el gradiente de presión en la dirección z , pero se puede extender a las tres dimensiones (∇p) para el flujo volumétrico en medio poroso. Para obtener el flux volumétrico se debe dividir el flujo volumétrico entre el área transversal. A partir de la ecuación (33) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\underline{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad (34)$$

Una correlación sencilla para la ley de Darcy, como la mostrada en la ecuación (34) fue propuesta en la publicación de Muskat y Meres *Flow Through Porous Media*, la cual otorga ecuaciones de flujo individuales a cada fluido como se puede apreciar en las siguientes ecuaciones:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$\underline{u}_1 = -\frac{k_1}{\mu_1} \nabla p_1 \quad (35)$$

$$\underline{u}_2 = -\frac{k_2}{\mu_2} \nabla p_2 \quad (36)$$

- \underline{u}_i es el flux volumétrico
- k_i es la permeabilidad efectiva
- μ_i es la viscosidad
- ∇p_i es el gradiente de presión en el capilar de cada fluido

Los subíndices servirán en adelante para distinguir al fluido desplazante (subíndice 1, fluido no newtoniano) del fluido desplazado (subíndice 2, fluido newtoniano).

Para que la ecuación (34) coincida con la ecuación de Bernoulli es necesario restar la energía potencial del fluido en todas las direcciones (ρg_i). Añadiendo dicho término se obtiene:

$$\underline{u} = -\frac{k}{\mu} (\nabla p - \rho g_i) \quad (37)$$

Se observa en la ecuación (37) que los causantes del desplazamiento a través del medio poroso son la diferencia de presión en el medio y la fuerza debida a la masa de los fluidos. Sin embargo, para este caso en particular el gradiente de presión será el término de mayor magnitud y por lo tanto el que dictará la expresión de \underline{u} , siendo ρg_i despreciable.

Los flux volumétricos de cada fluido son dependientes de su permeabilidad efectiva, de su viscosidad o fluidez y de su densidad; para este caso de estudio la permeabilidad efectiva es dependiente de la fluidez y ambas son variables. No es difícil notar que tanto \underline{u}_1 como \underline{u}_2 son las velocidades de desplazamiento de cada fluido a través del medio poroso. La velocidad de desplazamiento en medio poroso debe estar relacionada con la porosidad del medio, la concentración o saturación del fluido y la velocidad promedio del fluido, y debe ser menor que esta última debido a la naturaleza del medio. Las relaciones que se proponen para las velocidades de desplazamiento a través de un medio poroso son:

$$\underline{u}_1(\phi, S_1, \underline{v}_1) = \phi S_1 \underline{v}_1 \quad (38)$$

$$\underline{u}_2(\phi, S_2, \underline{v}_2) = \phi S_2 \underline{v}_2 \quad (39)$$

- ϕ es la porosidad del medio
- S_i es la saturación o concentración del fluido
- \underline{v}_i es la velocidad promedio del fluido

La extensión de la ley de Darcy para el caso multifásico es aceptable, siempre y cuando las permeabilidades efectivas a una saturación dada sean independientes del gradiente de presión. Sin embargo, el cálculo de las permeabilidades efectivas es complicado ya que dependerán de la viscosidad del fluido, su saturación, las características del medio y la relación del fluido con el medio.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

La variable independiente de la permeabilidad efectiva más importante experimentalmente es la saturación. Debido a lo anterior es más sencillo trabajar con permeabilidades relativas, que se expresan de la siguiente manera:

$$k_{r1} = \frac{k_1}{k_{c1}} \tag{40}$$

$$k_{r2} = \frac{k_2}{k_{c2}} \tag{41}$$

- k_{ri} es la permeabilidad relativa del fluido i
- k_{ci} es la permeabilidad característica del fluido i

Las gráficas de permeabilidad relativa contra saturación para fluidos multifásicos tienen la forma típica de la **Figura 4**.

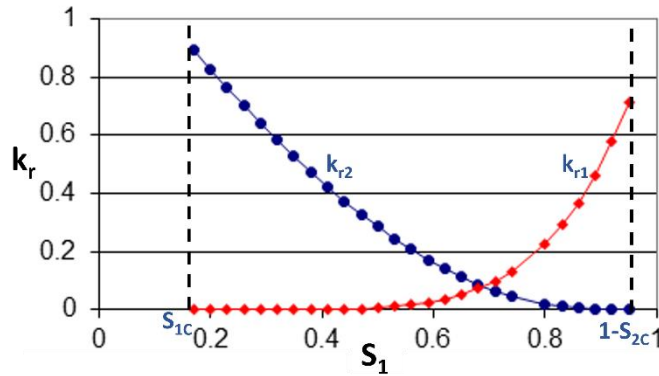


Figura 4. Gráfica de referencia de la permeabilidad relativa de un fluido respecto a la saturación.

Gráfica de referencia para el comportamiento semi - cuadrático de la permeabilidad relativa de un fluido respecto a la saturación de sus componentes. Obtenida de Kantzas, A., Bryan, J., Taheri, S., “*Fundamentals of Fluid Flow in Porous Media*”, Perminc; (2015) Chapter 2 (<https://perminc.com/resources/fundamentals-of-fluid-flow-in-porous-media/>)

Se observa que existen límites de saturación. S_{1c} es el límite de saturación mínima del fluido 1, considerando que está mojando; $1 - S_{2c}$ es la saturación máxima que el fluido 1 puede alcanzar siendo S_{2c} la saturación mínima del fluido 2. La permeabilidad solo es posible entre los límites mencionados, por lo que el flujo de fluidos multifásicos solo será posible dentro de estos intervalos. De la **Figura 4** se nota que la dependencia de la permeabilidad relativa es cuadrática respecto a la saturación, por lo que se propone la siguiente ecuación para representarla:

$$k_{r1} = \alpha S_1^2 \tag{42}$$

$$k_{r2} = \alpha(1 - S_1)^2 \tag{43}$$

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

El balance de materia de la mezcla es descrito por la siguiente ecuación, debido a que solo habrá dos fluidos dentro del pozo:

$$S_1 + S_2 = 1 \tag{44}$$

Sustituyendo las ecuaciones (40) y (41) en las (35) y (36) y considerando una sola dimensión se obtienen las siguientes expresiones para las velocidades de desplazamiento en medio poroso:

$$u_1 = -\frac{k_{r1}k_{c1}}{\mu_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} \right) \tag{45}$$

$$u_2 = -\frac{k_{r2}k_{c2}}{\mu_2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} \right) \tag{46}$$

En adelante se asumirá que las densidades y las viscosidades de los fluidos son constantes. Se considerará que la presión capilar es dependiente únicamente de la saturación:

$$p_2 - p_1 = p_c(S_1) \tag{47}$$

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

7. Balance de Masa

Considerando el balance de masa diferencial general del sistema del fluido desplazante, tomando en cuenta que no existe transferencia de masa por difusión ni generación:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \underline{v}_1 \cdot \nabla S_1 = 0 \quad (48)$$

Despejando S_1 de (38) y sustituyendo en (48) se obtiene:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \underline{v}_1 \cdot \nabla \left(\frac{u_1}{\phi \underline{v}_1} \right) = 0 \quad (49)$$

Para una sola dimensión la expresión se reduce a:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \underline{v}_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_1}{\phi \underline{v}_1} \right) = 0 \quad (50)$$

Siendo ϕ y \underline{v}_1 constantes la expresión se reduce a:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (51)$$

Obteniendo la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \phi \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0 \quad (52)$$

Bajo el mismo razonamiento para el fluido desplazado se llega a la misma ecuación:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \phi \frac{\partial S_2}{\partial t} = 0 \quad (53)$$

Las ecuaciones (52) y (53) forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Es necesario reducir este sistema a una sola ecuación diferencial parcial, por lo que se define la siguiente variable:

$$u = u_1 + u_2 \quad (54)$$

donde u es la suma de los flujos de los fluidos a través del medio poroso considerando que el área por la que pasan es la misma $Au = Au_1 + Au_2$.

Considerando que el fluido siempre estará en movimiento entonces u no puede ser cero, lo que permite definir fracciones de flujo de la siguiente manera:

$$f_1 = \frac{u_1}{u} \quad (55)$$

$$f_2 = \frac{u_2}{u} = 1 - f_1 \quad (56)$$

Sustituyendo (55) y (56) en (45) y (46):

$$f_1 u = - \frac{k_{r1} k_{c1}}{\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial x}$$

$$(1 - f_1) u = - \frac{k_{r2} k_{c2}}{\mu_2} \frac{\partial p_2}{\partial x}$$

Desarrollando para el gradiente de presión:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = -\frac{\mu_1 f_1 u}{k_{r1} k_{c1}} \quad (57)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = -\frac{\mu_2(1-f_1)u}{k_{r2} k_{c2}} \quad (58)$$

Derivando parcialmente respecto a x la presión capilar descrita en la ecuación (47) se obtiene:

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial p_c(S_1)}{\partial x} \quad (59)$$

Restando la ecuación (58) de la ecuación (57) se obtiene la expresión de la derivada parcial de la presión capilar:

$$\frac{\partial p_c(S_1)}{\partial x} = \frac{\mu_1 f_1 u}{k_{r1} k_{c1}} - \frac{\mu_2(1-f_1)u}{k_{r2} k_{c2}}$$

Desarrollando para despejar la fracción del flujo 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_c(S_1)}{\partial x} &= -\frac{\mu_2(1-f_1)u}{k_{r2} k_{c2}} + \frac{\mu_1 f_1 u}{k_{r1} k_{c1}} \\ \frac{\partial p_c(S_1)}{\partial x} &= \frac{\mu_2 u}{k_{r2} k_{c2}} f_1 + \frac{\mu_1 u}{k_{r1} k_{c1}} f_1 - \frac{\mu_2 u}{k_{r2} k_{c2}} \\ \frac{\partial p_c(S_1)}{\partial x} + \frac{\mu_2 u}{k_{r2} k_{c2}} &= \left(\frac{\mu_2 u}{k_{r2} k_{c2}} + \frac{\mu_1 u}{k_{r1} k_{c1}} \right) f_1 \\ \frac{1}{\left(\frac{\mu_2 u}{k_{r2} k_{c2}} + \frac{\mu_1 u}{k_{r1} k_{c1}} \right)} \frac{\partial p_c(S_1)}{\partial x} + \frac{\frac{\mu_2 u}{k_{r2} k_{c2}}}{\left(\frac{\mu_2 u}{k_{r2} k_{c2}} + \frac{\mu_1 u}{k_{r1} k_{c1}} \right)} &= f_1 \\ \frac{1}{u \left(\frac{\mu_2}{k_{r2} k_{c2}} + \frac{\mu_1}{k_{r1} k_{c1}} \right)} \frac{\partial p_c(S_1)}{\partial x} + \frac{\frac{\mu_2}{k_{r2} k_{c2}}}{\left(\frac{\mu_2}{k_{r2} k_{c2}} + \frac{\mu_1}{k_{r1} k_{c1}} \right)} &= f_1 \end{aligned}$$

Expresando la ecuación en términos de fluidez:

$$\begin{aligned} f_1(S_1) &= \frac{\frac{1}{k_{r2} k_{c2} \varphi_2}}{\left(\frac{1}{k_{r2} k_{c2} \varphi_2} + \frac{1}{k_{r1} k_{c1} \varphi_1} \right)} + \frac{1}{u} \frac{1}{\left(\frac{1}{k_{r2} k_{c2} \varphi_2} + \frac{1}{k_{r1} k_{c1} \varphi_1} \right)} \frac{\partial p_c(S_1)}{\partial x} \\ f_1(S_1) &= \frac{1}{\left(1 + \frac{k_{r2} k_{c2} \varphi_2}{k_{r1} k_{c1} \varphi_1} \right)} + \frac{1}{u} \frac{k_{r2} k_{c2} \varphi_2}{\left(1 + \frac{k_{r2} k_{c2} \varphi_2}{k_{r1} k_{c1} \varphi_1} \right)} \frac{\partial p_c(S_1)}{\partial x} \end{aligned}$$

Al final se obtiene para la fracción de flujo 1, dependiente de la saturación del fluido 1, la siguiente expresión:

$$f_1(S_1) = \frac{1}{\left(1 + \frac{k_{r2}(1-S_1)k_{c2}\varphi_2}{k_{r1}(S_1)k_{c1}\varphi_1} \right)} + \frac{1}{u} \frac{k_{r2}(1-S_1)k_{c2}\varphi_2}{\left(1 + \frac{k_{r2}(1-S_1)k_{c2}\varphi_2}{k_{r1}(S_1)k_{c1}\varphi_1} \right)} \frac{\partial p_c(S_1)}{\partial x} \quad (60)$$

La siguiente relación que aparece en el denominador se puede definir, utilizando las ecuaciones (42) y (43) y la relación de movilidad $M = \frac{k_{c2}\varphi_2}{k_{c1}\varphi_1}$, como sigue:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$\frac{k_{c2}\varphi_2 k_{r2}(1-S_1)}{k_{c1}\varphi_1 k_{r1}(S_1)} = M \frac{(1-S_1)^2}{S_1^2} \quad (61)$$

Sustituyendo (61) en (60):

$$f_1(S_1) = \frac{1}{\left(1+M\frac{(1-S_1)^2}{S_1^2}\right)} + \frac{\alpha k_{c2}}{u} \frac{(1-S_1)^2 \varphi_2}{\left(1+M\frac{(1-S_1)^2}{S_1^2}\right)} \frac{\partial p_c(S_1)}{\partial x}$$

Considerando $\alpha k_{c2} = k$:

$$f_1(S_1) = \frac{1}{\left(1+M\frac{(1-S_1)^2}{S_1^2}\right)} + \frac{k}{u} \frac{(1-S_1)^2 \varphi_2}{\left(1+M\frac{(1-S_1)^2}{S_1^2}\right)} \frac{\partial p_c(S_1)}{\partial x} \quad (62)$$

La expresión de $f_1(S_1)$ puede separarse en dos partes como sigue:

$$f_1(S_1) = F(S_1) + H(S_1) \frac{\partial S_1}{\partial x} \quad (63)$$

donde:

$$F(S_1) = \frac{1}{\left(1+M\frac{(1-S_1)^2}{S_1^2}\right)} \quad (64)$$

$$H(S_1) = \frac{k}{u} \frac{(1-S_1)^2 \varphi_2}{\left(1+M\frac{(1-S_1)^2}{S_1^2}\right)} \frac{\partial p_c(S_1)}{\partial S_1} \quad (65)$$

Ahora la dependencia del flujo fraccional respecto de la saturación del fluido 1 es explícita; a su vez la saturación es claramente dependiente del tiempo y del espacio ($S_1 = S_1(x, t)$). Existen para los componentes de la ecuación de flujo fraccional $F(S_1)$ y $H(S_1)$ un término variable además de la saturación, el cuál es la relación de movilidad, sin embargo, se pueden utilizar valores para M en los distintos casos abordados al final de la primera parte.

Despejando la velocidad de desplazamiento en medio poroso del fluido 1 de la ecuación (55) y sustituyéndola en la ecuación (51) se obtiene:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{f_1}{\phi} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (66)$$

Sumando las ecuaciones (53) y (53): $\phi \frac{\partial}{\partial t} (S_1 + S_2) + \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_2) = 0$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (67)$$

Tomando en cuenta que la saturación total es constante e igual a la unidad como lo establece la ecuación (44) se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (68)$$

Sustituyendo (68) en (66):

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \quad (69)$$

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

Sustituyendo (63) en (69): $\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left(F(S_1) + H(S_1) \frac{\partial S_1}{\partial x} \right) = 0$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \left[\frac{dF(S_1)}{dS_1} \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H(S_1) \frac{\partial S_1}{\partial x} \right) \right] = 0 \quad (70)$$

La ecuación (70) es una ecuación diferencial parcial que únicamente depende de S_1 y sus derivadas parciales respecto al espacio y el tiempo.

8. La Ecuación de Buckley-Leverett

Una solución de la ecuación (70) fue propuesta por Buckley y Leverett, quienes consideraron el flujo horizontal y unidimensional de dos fluidos inmiscibles, incompresibles y con valores de fluidez constantes, en donde además la fuerza capilar era despreciable. Aplicando este último criterio en la ecuación (70) es fácil notar que el término $H(S_1)$ es nulo, obteniendo:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{dF(S_1)}{dS_1} \frac{\partial S_1}{\partial x} = 0 \quad (71)$$

Graficando la fracción de flujo para la solución de Buckley-Leverett, $F(S_1)$ ecuación (64), contra la saturación del fluido 1 tomando en cuenta los tres valores de M obtenidos en previamente, con relaciones de esfuerzo características y considerando $D_T = 1$, se obtiene la **Figura 5**.

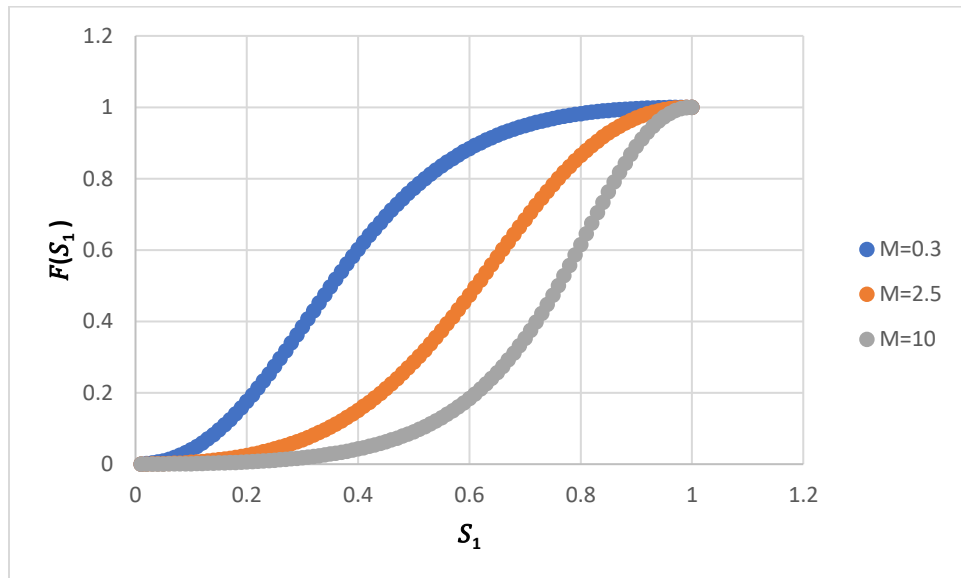


Figura 5. Gráfica de fracción de flujo contra saturación a diferentes valores de relación de movilidades.

Gráfica de la fracción de flujo del fluido desplazante, a través del medio poroso, contra la saturación del fluido desplazante a diferentes valores de relación de movilidades.

Se observa que la dependencia de la fracción de flujo respecto a la saturación varía de manera considerable respecto al valor de M y por ende respecto a la relación de esfuerzos. En la solución original propuesta por Buckley-Leverett considera que las fluideces son constantes así entonces lo será la relación de esfuerzos y finalmente M, por lo que en ese escenario solo se obtendría una curva en la **Figura 5**.

Para hacer la ecuación (70) adimensional, se proponen las siguientes variables de espacio y tiempo adimensionales:

$$x_{dim} = \frac{x}{L} \quad (72)$$

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$t_{dim} = \frac{ut}{\phi L} \quad (73)$$

- x_{dim} y t_{dim} son el espacio y el tiempo adimensionales.

Sustituyendo en (71):

$$\frac{\partial S_1}{\partial \left(\frac{\phi L t_{dim}}{u} \right)} + \frac{u}{\phi} \left[\frac{\partial F(S_1)}{\partial (L x_{dim})} + \frac{\partial}{\partial (L x_{dim})} \left(H(S_1) \frac{\partial S_1}{\partial (L x_{dim})} \right) \right] = 0$$

$$\frac{u}{L\phi} \frac{\partial S_1}{\partial t_{dim}} + \frac{u}{L\phi} \left[\frac{\partial F(S_1)}{\partial x_{dim}} + \frac{\partial}{\partial x_{dim}} \left(H(S_1) \frac{\partial S_1}{\partial (L x_{dim})} \right) \right] = 0$$

El análisis dimensional de $H(S_1)$ involucra unidades de longitud dividido entre una longitud característica. En adelante se representarán las variables dimensionales sin el subíndice "dim"; y la saturación del fluido 1 simplemente con la letra S como sigue:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F(S)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0 \quad (73.1)$$

Desarrollando el último término:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F(S)}{\partial x} + H \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F(S)}{\partial x} + H \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial H}{\partial S} = 0$$

Considerando que:

1. Los cambios de concentración respecto a la distancia serán considerablemente pequeños, y el último término tiene este factor elevado al cuadrado.
2. Que los cambios de la presión capilar respecto a la saturación serán considerablemente pequeños, y el último término los considera.

Se omite el último término obteniendo:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F(S)}{\partial x} = -H \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad (74)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F(S)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad (75)$$

- ε se denomina generalmente término de viscosidad

La ecuación (75) es una ecuación conservativa que representa el fenómeno de transporte de masa a través de medio poroso, con un término difusivo. Aplicando la regla de la cadena al segundo término de la ecuación (75) se obtiene:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad (76)$$

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

Representando con un subíndice el término respecto al que se está realizando la derivada parcial la representación de la ecuación (75) se obtiene:

$$S_t + F(S)_x = \varepsilon S_{xx} \quad (77)$$

Realizando el tratamiento mencionado en el párrafo anterior en la ecuación (76) se obtiene:

$$S_t + F_S S_x = \varepsilon S_{xx} \quad (78)$$

La ecuación que describía el problema planteado por Buckley y Leverett no consideraba la presión capilar ($\varepsilon = 0$). Aplicando este criterio a la ecuación (78) se obtiene:

$$S_t + F_S S_x = 0 \quad (79)$$

La ecuación de conservación (79) involucra un problema de Riemann. Una de las particularidades de estas ecuaciones diferenciales parciales, en adelante EDP, es que sus soluciones son aproximadas debido a que es una función que presenta una discontinuidad en el dominio de interés. Para resolver esta ecuación de manera que describa lo que ocurre en la naturaleza se plantearán “*ondas de choque*”, es decir la solución en algún punto presentará un cambio abrupto de manera que se evite la discontinuidad de la función y sea diferenciable.

Desarrollando la derivada material de S en una sola dimensión del espacio se obtiene:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial S}{\partial x} \quad (80)$$

Igualando (79) y (80):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F(S)}{\partial S} = r \quad (81)$$

La ecuación (81) establece que la velocidad del fluido a través del medio poroso es igual al cambio de flujo respecto a la concentración de sus componentes. A esta velocidad en adelante se le identificará como r. Integrando la ecuación (81) en un intervalo entre 0 y t:

$$x = \frac{\partial F}{\partial S} t \quad (82)$$

Realizando la derivada parcial de la fracción de flujo respecto a la saturación:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = 2M \frac{S-S^2}{(S^2+M(1-S)^2)^2} \quad (83)$$

La gráfica de la ecuación (83) para los distintos valores de movilidad se presenta en la **Figura 6**:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

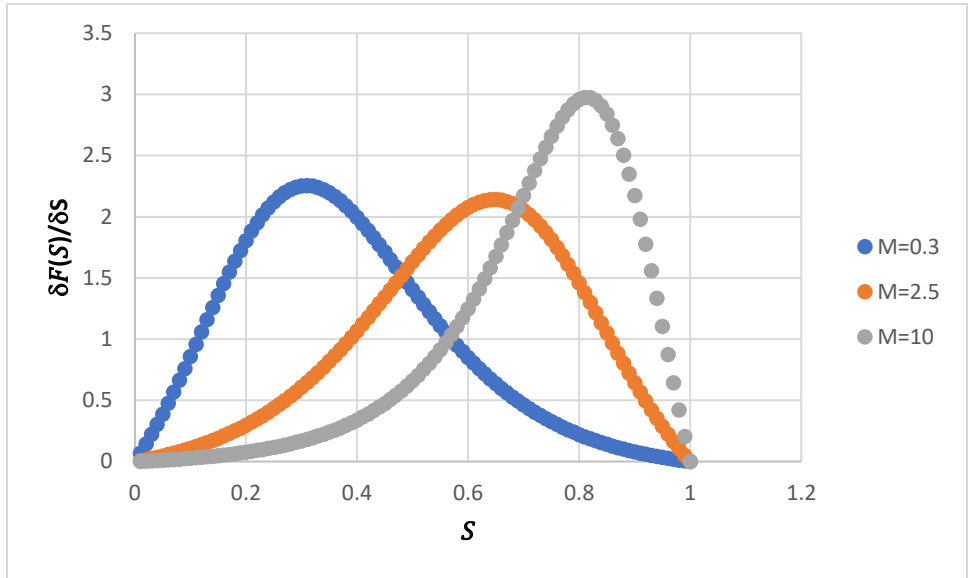


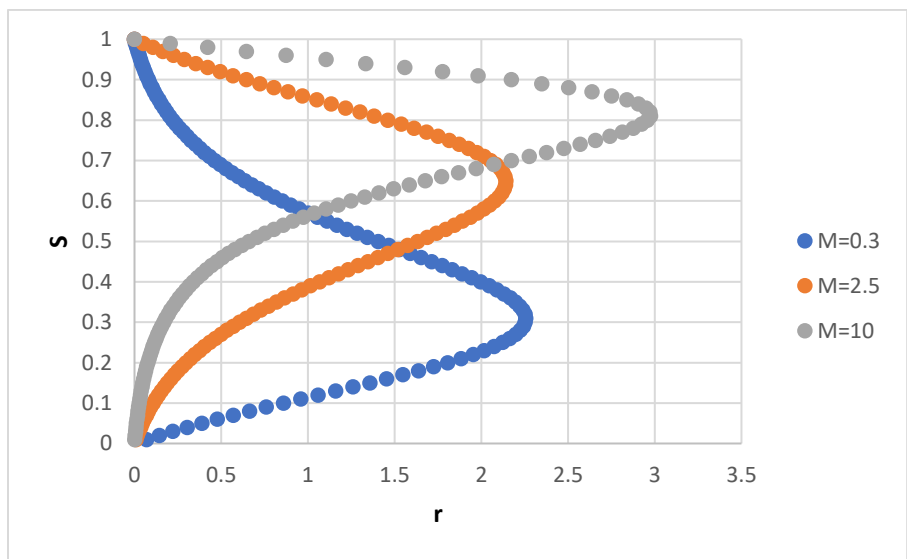
Figura 6. Gráfica de la derivada parcial de la fracción de flujo contra la saturación a diferentes valores de relación de movilidades.

Gráfica de la derivada parcial de la fracción de flujo respecto a la saturación contra la saturación del fluido desplazante a diferentes valores de relación de movilidades.

La **Figura 6** muestra que para la velocidad a través del medio poroso existe un máximo en una saturación determinada del fluido desplazante para diferentes valores de relación de movilidad. Sin embargo, la realidad muestra que el fenómeno que ocurre es diferente. Sustituyendo (83) en (82):

$$x = 2M \frac{s-s^2}{(s^2+M(1-s)^2)^2} t \tag{84}$$

Graficando saturación contra r se obtiene la **Figura 7**:



Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

Figura 7. Gráfica de saturación contra velocidad del fluido a través del medio poroso a diferentes valores de relación de movilidades.

Gráfica de la saturación del fluido desplazante contra la velocidad del fluido a través del medio poroso a diferentes valores de relación de movilidades. Es notable que la saturación está doblemente valuada para un mismo valor de velocidad, por lo que no cumple con uno de ellos criterios para ser función.

La **Figura 7** hace evidente que $S(x, t)$ no es una función diferenciable y antes de que la ecuación (82) pueda ser aplicada se deberá plantear el choque. Se debe definir una discontinuidad de la saturación en un punto x_f , pero de tal manera que con esta modificación el área bajo la curva no se vea afectada, ya que es la característica que permitirá llegar a la solución del problema.

Aplicando la condición de tangente se obtiene:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{F(S)}{S} \quad (85)$$

Sustituyendo las ecuaciones (64) y (83) en (85) se obtiene su raíz única a la que se denominará α , que es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente y $F(S)$ siendo:

$$2M \frac{\alpha - \alpha^2}{(\alpha^2 + M(1 - \alpha)^2)^2} = \frac{1}{\alpha \left(1 + M \frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha^2}\right)}$$

$$2M \frac{\alpha - \alpha^2}{\alpha^4 \left(1 + M \frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha^2}\right)^2} = \frac{1}{\alpha \left(1 + M \frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha^2}\right)}$$

$$\frac{\alpha^2 - \alpha^3}{\alpha^4 \left(1 + M \frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha^2}\right)} = \frac{1}{2M}$$

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha^2 \left(1 + M \frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha^2}\right)} = \frac{1}{2M}$$

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha^2 + M(1 - \alpha)^2} = \frac{1}{2M}$$

$$2M - 2M\alpha = \alpha^2 + M(1 - \alpha)^2$$

$$2M - 2M\alpha = \alpha^2 + M - 2M\alpha + M\alpha^2$$

$$(1 + M)\alpha^2 = M$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{M}{M+1}} \quad (86)$$

Para el trazo de la recta tangente es necesario calcular su pendiente, desde el origen:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$m = \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha - 0} = \frac{F(\alpha)}{\alpha} \quad (87)$$

Obteniendo:

$$F(\alpha) = m\alpha$$

$$m = \frac{1}{\alpha + \alpha M \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2}}$$

Sabiendo que $\frac{M}{\alpha^2} = M + 1$:

$$m = \frac{1}{\alpha + \alpha(M+1)(1-\alpha)^2}$$

Multiplicando el denominador y el numerador por $\alpha + 1$:

$$m = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + \alpha + \alpha^2(M+1)(1-\alpha)^2 + \alpha(M+1)(1-\alpha)^2}$$

Aplicando $\alpha^2(M+1) = M$:

$$m = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + \alpha + M(1-\alpha)^2 + \alpha M(1-\alpha)^2 + \alpha(1-\alpha)^2}$$

Desarrollando polinomios del denominador:

$$m = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + \alpha + M - 2M\alpha + M\alpha^2 + \alpha M - 2M\alpha^2 + M\alpha^3 + \alpha - 2\alpha^2 + \alpha^3}$$

$$m = \frac{\alpha + 1}{(M+1)\alpha^2 + (M+1)\alpha^3 - 2(M+1)\alpha^2 + \alpha + M - 2\alpha M + \alpha M + \alpha}$$

Aplicando nuevamente $\alpha^2(M+1) = M$:

$$m = \frac{\alpha + 1}{M + M\alpha - 2M + \alpha + M - 2\alpha M + \alpha M + \alpha}$$

$$m = \frac{\alpha + 1}{2M - 2M + 2\alpha M - 2\alpha M + \alpha + \alpha}$$

Resultando:

$$m = \frac{\alpha + 1}{2\alpha} \quad (88)$$

Para la recta del punto tangente a la concentración que se alcanza cuando la fracción de flujo es 1 se llamará saturación promedio (S_{prom}). Calculando este valor con la ecuación de la recta:

$$S_{prom} = \frac{1}{m} \quad (89)$$

Colocando en una misma gráfica para los diferentes valores de movilidad la fracción de flujo, la derivada parcial de la fracción de flujo respecto a la saturación y la recta del punto tangente, teniendo como abscisa la saturación y colocando la derivada de la fracción de flujo en el eje secundario, se obtienen las **Figuras 8a, 8b y 8c**:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

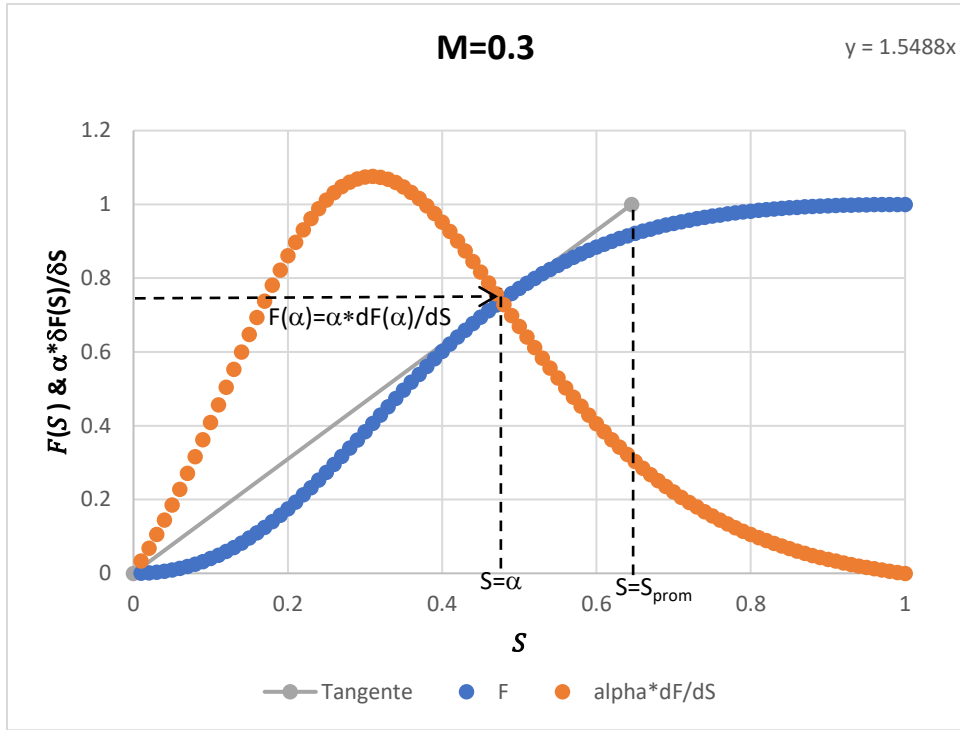


Figura 8a. Fracción de flujo y derivada parcial de fracción de flujo con $M=0.3$.

Gráfica de la fracción de flujo y su derivada parcial respecto a la saturación, multiplicada por su raíz única, contra la saturación cuando la relación de movilidades es 0.3. La intersección evidentemente será la raíz única, y también se ubica el valor de saturación promedio.

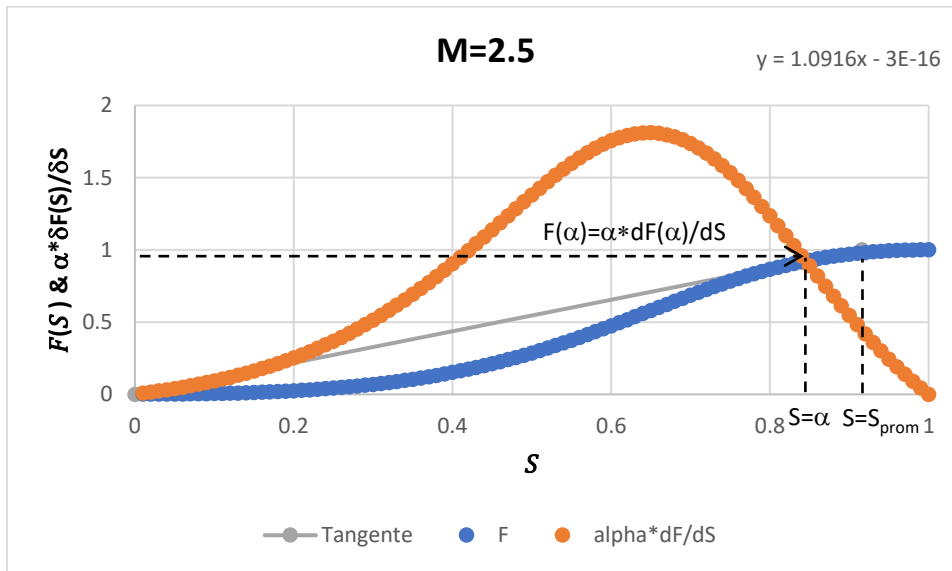


Figura 8b. Fracción de flujo y derivada parcial de fracción de flujo con $M=2.5$.

Gráfica de la fracción de flujo y su derivada parcial respecto a la saturación, multiplicada por su raíz única, contra la saturación cuando la relación de movilidades es 2.5. La intersección evidentemente será la raíz única, y también se ubica el valor de saturación promedio.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

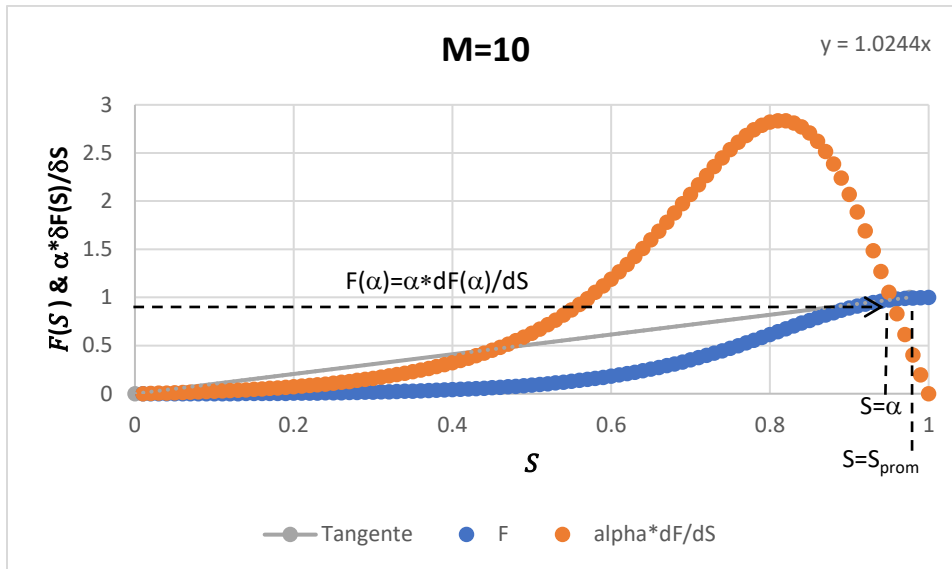
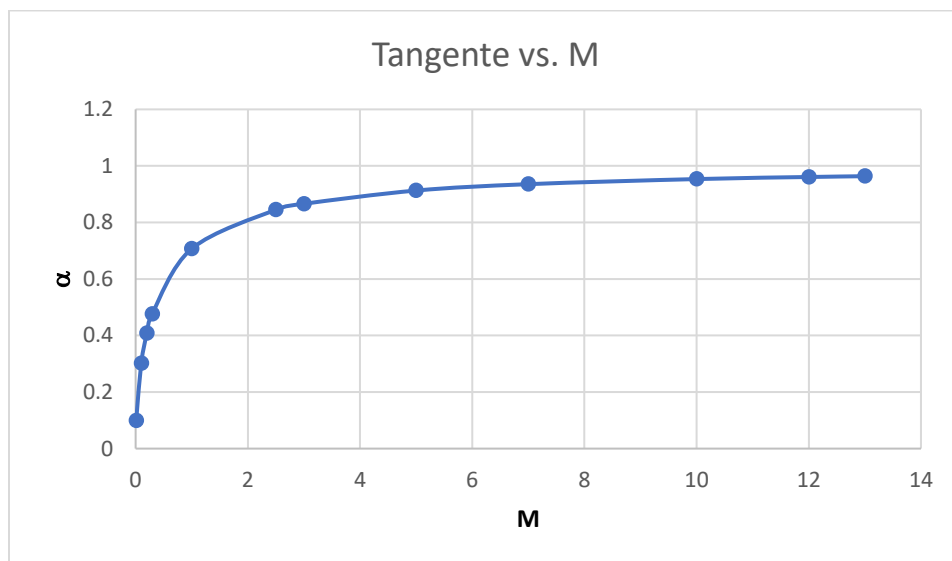


Figura 8c. Fracción de flujo y derivada parcial de fracción de flujo con M=10.

Gráfica de la fracción de flujo y su derivada parcial respecto a la saturación, multiplicada por su raíz única, contra la saturación cuando la relación de movilidades es 10. La intersección evidentemente será la raíz única, y también se ubica el valor de saturación promedio.

De las **Figuras 8a, 8b y 8c** se aprecia que mientras mayor sea la movilidad el punto de tangencia se acerca más al punto de saturación promedio; de igual forma se aprecia que la abscisa del punto de tangencia disminuye su pendiente cuando la relación de movilidad aumenta, como se aprecia en las ecuaciones de las rectas tangentes en las esquinas superiores de las figuras.

A continuación, se presentan las gráficas que ejemplifican a detalle dichos fenómenos, en la **Figura 9** se presenta la variación de α respecto a M , mientras que en la **Figura 10** se presenta la variación de la pendiente respecto a α .



Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

Figura 9. Gráfica de la raíz de saturación única a diferentes valores de M .

Gráfica de la raíz de saturación única a diferentes valores de relación de movilidades. Se observa que incrementa hasta llegar a una asíntota cuyo valor no alcanza la unidad, es decir la mezcla nunca está totalmente compuesta por el fluido desplazante. Se observan valores de M mayores a 10 para ejemplificar, sin embargo, de la Figura 2 se sabe que esta variable tiene límites.

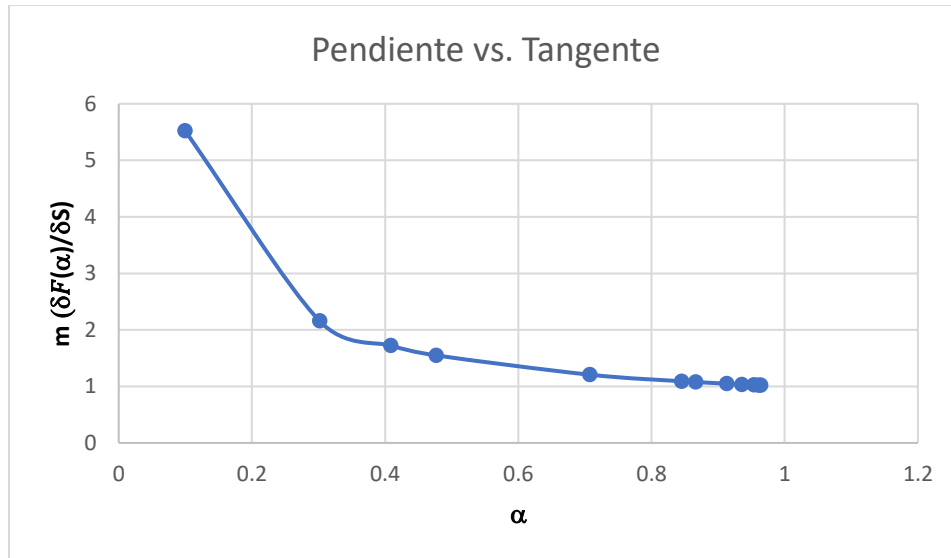


Figura 10. Gráfica de la pendiente de la tangente a diferentes valores de raíz de saturación única.

Gráfica de la pendiente de la recta tangente al punto de intersección de la fracción de flujo y su derivada parcial respecto a la saturación, multiplicada por su raíz única, trazada desde el origen a diferentes valores de raíz de saturación única. Se observa que tiende a ser una línea recta conforme la raíz se acerca a 1.

Con base en la **Figura 2** se sabe que la relación de movilidades disminuye mientras la relación de esfuerzos y la de fluidez aumentan. Esto quiere decir que entre más viscoso sea el fluido desplazante tendrá una mayor capacidad de empuje sobre el fluido desplazado implicando que existan esfuerzos pequeños. En la **Figura 9** se aprecia en que valores de saturación del fluido desplazante se aplicará el choque a diferentes valores de M , mientras menor sea M se requerirá una mayor "dilución" de fluido desplazante para que el choque pueda ocurrir, esto implica pequeños valores de viscosidad por lo que serán necesarios altos valores de esfuerzo de corte. A valores altos de M se llega a una asíntota en α menor a 1, en el que existe únicamente el líquido desplazante con altos valores de viscosidad.

En la **Figura 10** se observa el efecto del aumento de la relación de movilidad: la pendiente del punto tangente en el que se realiza el choque tiende a 1 (45°).

En el presente caso de estudio al final de la sección 1 se definieron 3 valores de M con condiciones de esfuerzos y fluideces específicas para cada uno. A continuación, en la **Tabla 1** se presenta la relación de dichos valores de M , el valor de α , las saturaciones promedio y su pendiente correspondiente:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

M	α	S_{prom}	m
0.3	0.476	0.645	1.55
2.5	0.845	0.916	1.09
10	0.953	0.976	1.02

Tabla 1. Movilidad y pendientes de la recta tangente.

Como se mencionó previamente se deberá definir un punto a partir de cual se modifique $\frac{\partial F}{\partial S}$ de manera que no presente el problema de no diferenciabilidad de la **Figura 7**, pero sin que haya una modificación en el área bajo la curva ya que es la información de utilidad para resolver la ecuación de conservación. Aplicando a la ecuación de derivada parcial de la fracción de flujo respecto a la saturación el criterio de áreas iguales, definiendo un rectángulo de base S_f y altura $\frac{\partial F(S_*)}{\partial S}$, e igualando a la integral de la derivada parcial en la misma zona de la base del rectángulo:

$$\frac{\partial F(S_*)}{\partial S} = \frac{1}{S_f} \int_0^{S_f} \frac{\partial F(S)}{\partial S} dS \quad (90)$$

Si $S_* = \alpha$ y sabiendo que $\frac{\partial F(S_*)}{\partial S} = m$ se puede sustituir la ecuación (87) en (90) obteniendo:

$$\frac{F(\alpha)}{\alpha} = \frac{F(S_f)}{S_f} \quad (91)$$

Por lo tanto:

$$\alpha = S_f \quad (92)$$

Es en este valor de concentración en el que se sucederá el choque y se obtendrán las soluciones de $S(x, t)$. A continuación, en las **Figuras 11a, 11b y 11c** se presentan los choques de saturación contra la velocidad para cada valor de M y su comparación con su comportamiento según la ecuación (81) (**Figura 7**).

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

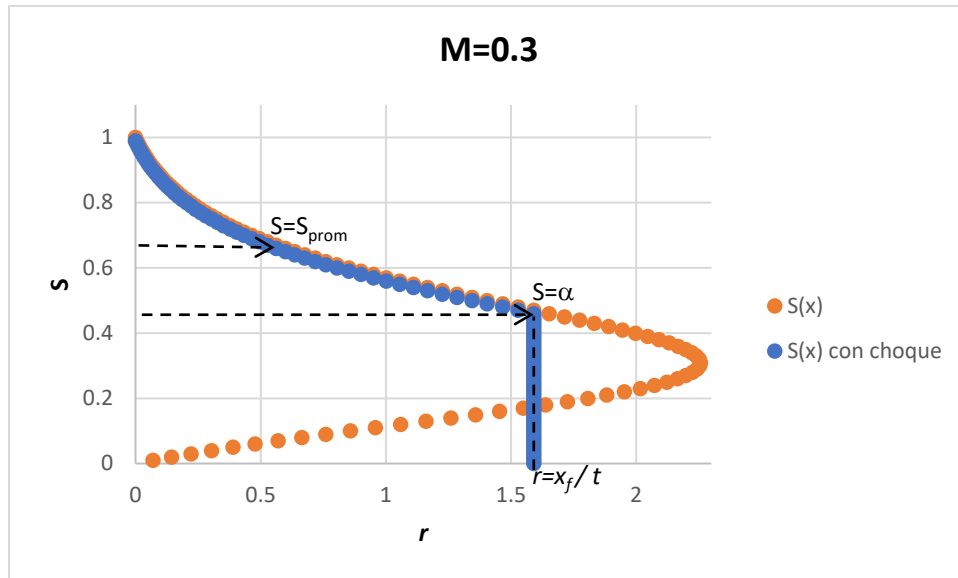


Figura 11a. Gráfica de la saturación contra la velocidad antes y después de la implementación del choque con $M=0.3$.

Gráfica del comportamiento de la saturación, antes y después de la implementación del choque, contra la velocidad de desplazamiento a través del medio poroso con un valor de relación de movilidades de 0.3. Se aprecia que para este caso el choque ocurre en la raíz de saturación única.

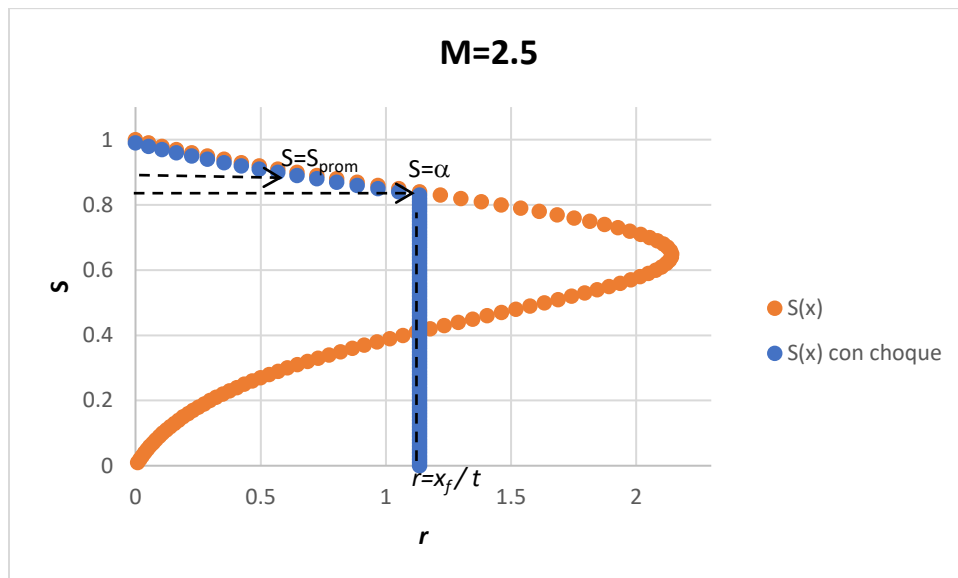


Figura 11b. Gráfica de la saturación contra la velocidad antes y después de la implementación del choque con $M=2.5$.

Gráfica del comportamiento de la saturación, antes y después de la implementación del choque, contra la velocidad de desplazamiento a través del medio poroso con un valor de relación de movilidades de 2.5. Se aprecia que para este caso el choque ocurre en la raíz de saturación única.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

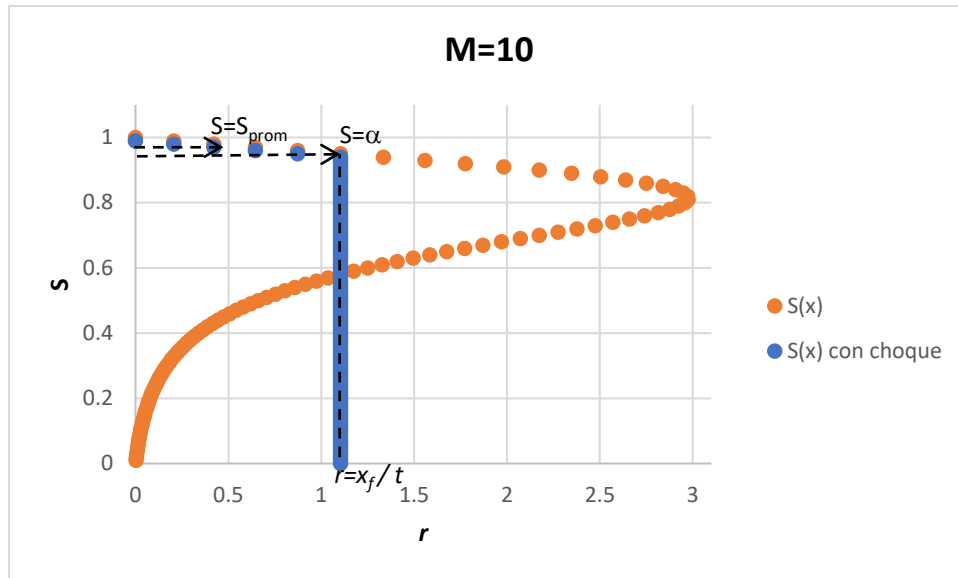


Figura 11c. Gráfica de la saturación contra la velocidad antes y después de la implementación del choque con $M=10$.

Gráfica del comportamiento de la saturación, antes y después de la implementación del choque, contra la velocidad de desplazamiento a través del medio poroso con un valor de relación de movilidades de 10. Se aprecia que para este caso el choque ocurre en la raíz de saturación única.

Ubicando todas las distribuciones de saturación con el choque aplicado en un mismo gráfico a diferentes valores de M se obtiene la **Figura 12**.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

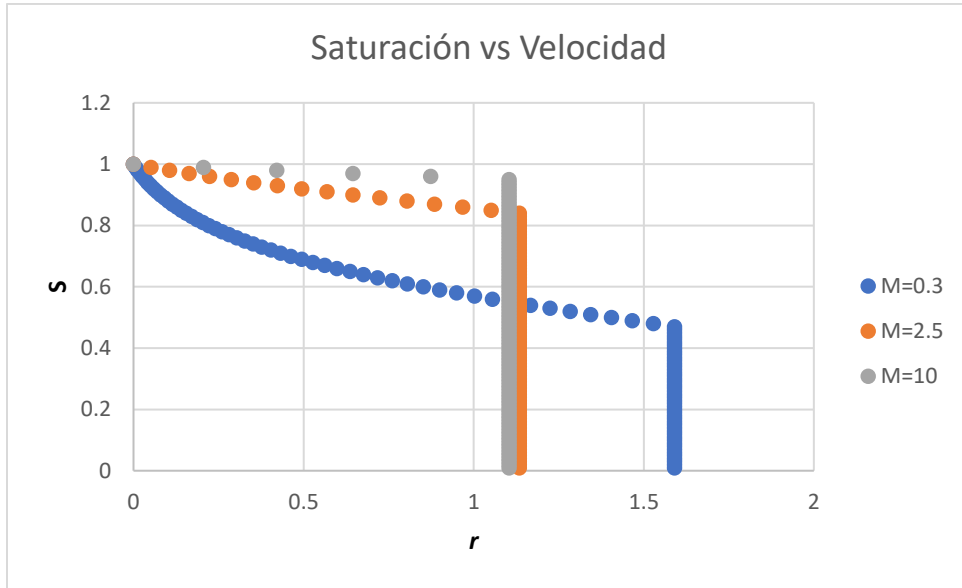


Figura 12. Gráfica de los choques de saturación contra la velocidad a diferentes valores de M ($S_l = 1$, $S_r = 0$, y $\varepsilon = 0$).

Gráfica de los choques implementados para describir el cambio de la saturación respecto a la velocidad de desplazamiento a través del medio poroso a diferentes valores de relación de movilidades. Poseen las siguientes características: $S_l = 1$ y $S_r = 0$.

De las **Figuras 11a, 11b y 11c** se aprecia que mientras M aumenta, el valor de α se acerca al valor de S_{prom} , teniendo un comportamiento asintótico en 1 en grandes magnitudes de M tal como se aprecia en la **Figura 9**. Sin embargo, es necesario destacar que tal como se aprecia en la **Figura 2** M tiene límites fijos, es decir no tiende a infinito y tampoco a cero, por lo tanto, el escenario en donde $\alpha = S_{prom} = 1$ es aquel en el que el fluido desplazante “no tendría movimiento” en el medio.

De las mismas figuras también se aprecia que el valor máximo de velocidad al que se tiende mientras M incrementa es 1, tal como se aprecia en la **Figura 10**, sin embargo, se llegaría al caso mencionado en el párrafo anterior en el que el fluido desplazante no podría fluir en el medio.

Cuando se comparan los tres perfiles de choque en la **Figura 12** se observa claramente que el aumento de la relación de movilidades disminuye el valor máximo de la velocidad que se puede alcanzar en el medio poroso, es decir que mientras mayor sea el esfuerzo de corte aplicado aumentará la fluidez, reduciendo así la relación de movilidad y permitiendo que el fluido se desplace a mayor velocidad a través del medio poroso. Debido a esto si se desea obtener un perfil S vs. r determinado para un fluido desplazante no newtoniano específico deberán controlarse los esfuerzos de corte.

En términos prácticos la manera en la que se controlarán los esfuerzos de corte del fluido desplazante será a través de la presión de las bombas de inyección al medio

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

poroso, mientras más grande sea la relación de movilidades requerida menor deberá ser el diferencial de la presión de inyección.

Se denominará en adelante S_l al valor de la saturación a la izquierda del choque y S_r al valor de la saturación a la derecha del choque, siendo las condiciones de frontera:

$$S(x, t) = S_l = S_f ; x < rt \quad (93)$$

$$S(x, t) = S_r = 0 ; x > rt \quad (94)$$

Calculando el valor del pendiente justo antes y después de que el choque ocurra se obtiene la condición de Rankine Hugoniot:

$$r = \frac{dx}{dt} = \frac{F(S_l) - F(S_r)}{S_l - S_r} \quad (95)$$

Sustituyendo en (95) las condiciones (93) y (94)

$$\frac{F(S_l) - F(S_r)}{S_l - S_r} = \frac{F(S_f)}{S_f} \quad (96)$$

Es decir, el criterio de tangencia implementado en la ecuación (87) coincide con la condición de Rankine-Hugoniot cuando $S_f = \alpha$. Para conocer los valores que puede tomar S_f , y de manera que la ecuación de conservación (78) tenga una solución que refleje la realidad del problema se necesita aplicar la condición de entropía de Oleinik que establece:

$$\frac{F(S_l) - F(S)}{S_l - S} \geq \frac{F(S_l) - F(S_r)}{S_l - S_r} \quad (97)$$

Sustituyendo, considerando que $S = \alpha$:

$$\frac{F(S_f) - F(\alpha)}{S_f - \alpha} \geq \frac{F(S_f)}{S_f} \quad (98)$$

Esto conlleva a que:

$$\alpha \geq S_f \quad (99)$$

Por lo tanto, la condición de Rankine-Hugoniot confirma que el criterio del punto tangente que fue adoptado es correcto, mientras que la condición de entropía de Oleinik garantiza que se cumpla el criterio de áreas en la definición del choque.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

9. Contribución de las Fuerzas Capilares

Hassanizadeh y Gray proponen que la presión capilar puede describirse de la siguiente manera:

$$P_c(S) = p_c(S) - \tau \frac{\partial S}{\partial t} \quad (100)$$

- $p_c(S)$ es la presión capilar estática.
- τ es un tiempo de relajación adimensional.

Definiendo $h(S)$, sustituyendo en ecuación (71) y resolviendo para obtener la forma adimensional de la ecuación de conservación se obtiene:

$$h(S) = \frac{k}{u} \frac{(1-S_1)^2 \varphi_2}{\left(1 + M \frac{(1-S_1)^2}{S_1^2}\right)} \quad (101)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F(S)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h(S) \frac{\partial P_c(S)}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F(S)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h(S) \frac{\partial P_c(S)}{\partial x} \right) = 0 \quad (102)$$

Sustituyendo (100) en (102):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F(S)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[h(S) \frac{\partial}{\partial x} \left(p_c(S) - \tau \frac{\partial S}{\partial t} \right) \right] = 0 \quad (103)$$

Desarrollando (103):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F(S)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[h(S) \frac{\partial p_c(S)}{\partial x} - h(S) \tau \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} \right] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F(S)}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[h(S) \frac{\partial S}{\partial x} - h(S) \tau \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} \right] \quad (104)$$

La ecuación es consistente dado que cuando $\tau = 0$ se obtiene la ecuación (73.1), considerando el cambio de la definición de $H(S)$. La presión capilar en equilibrio generalmente es una función decreciente y suave de la saturación, por simplicidad se establecerá que:

$$p_c(S) = -S \quad (105)$$

Sustituyendo (105) en (104) se obtiene:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[h(S) \frac{\partial S}{\partial x} + h(S) \tau \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} \right] \quad (106)$$

Es importante definir como influirá τ en las nuevas soluciones para la ecuación (106). Se enfocará el análisis en la relación del valor por la izquierda de la saturación antes del choque S_l y τ . Uno de los parámetros de regularización que ha sido objeto de estudio para este tipo de fenómenos es el siguiente:

$$A_\varepsilon(S) = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \delta \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} \quad (107)$$

Realizando una analogía entre (106) y (107), se propone la siguiente ecuación como el problema a resolver de Buckley-Leverett considerando capilaridad:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[h(S) \left(\varepsilon \frac{\partial S}{\partial x} + \varepsilon^2 \tau \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} \right) \right] \quad (108)$$

Se establece la existencia de una función:

$$\tau = \tau(S_l) \quad (109)$$

Definida en:

$$\alpha < S_l < \beta \quad (110)$$

De manera que (110) pueda tener una solución de onda de choque, donde:

$$\tau(S_l) \rightarrow \tau_* > 0 ; S_l \rightarrow \alpha \quad (111)$$

$$\tau(S_l) \rightarrow \infty > 0 ; S_l \rightarrow \beta \quad (112)$$

Se observa que τ es un parámetro de bifurcación, cuando $0 < \tau \leq \tau_*$ se adopta la condición (111), y en el caso en que $S_r = 0$ y $\tau = 0$ se reduce a la solución discutida en previamente; para el caso en el que $\tau > \tau_*$ la situación cambia debido que tanto la condición de Rankine-Hugoniot como la condición de entropía cambian sus valores de S_l y S_r , dando paso a nuevos tipos de ondas de choque. Se propone la siguiente variable para encontrar una solución de onda:

$$S = S(\bar{x}) \quad (113)$$

$$\bar{x} = \frac{x-rt}{\varepsilon} \quad (114)$$

Sustituyendo (113) y (114) en (108) y desarrollando se obtiene:

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[h \left(\varepsilon \frac{\partial S}{\partial \bar{x}} + \varepsilon^2 \tau \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{x}^2} \right) \right] \quad (115)$$

Las derivadas parciales de \bar{x} de respecto a t y x son:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = -\frac{r}{\varepsilon} \quad (116)$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \quad (117)$$

Sustituyendo de (116) y (117) en (115):

$$-r \frac{\partial S}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} = h \left[\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{x}^2} - r\tau \frac{\partial^3 S}{\partial \bar{x}^3} \right] \quad (118)$$

Aplicando las siguientes condiciones de frontera:

$$S(-\infty) = S_l \quad (119)$$

$$S(\infty) = S_r \quad (120)$$

Integrando (118) en (\bar{x}, ∞) :

$$-r(S - S_r) + [F(S) - F(S_r)] = h \left[\frac{\partial S}{\partial \bar{x}} - r\tau \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{x}^2} \right] \quad (121)$$

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

La definición de las condiciones de frontera (119) y (120), así como los valores de ε y τ darán forma a la solución, es decir, la onda de choque. Se analiza caso previo:

$$S_l > 0 \quad (122)$$

$$S_r = 0 \quad (123)$$

Estableciendo que:

$$S_l < \beta \quad (124)$$

Ahora se implementa el criterio de áreas iguales que establece que:

$$\int_0^\beta \left[F(S) - \frac{F(\beta)}{\beta} S \right] dS = 0 \quad (125)$$

La ecuación (125) describe una línea recta que va del origen $(F(\beta), \beta)$ que tenga la misma área bajo la curva que $\int_0^\beta F(S) dS$. Resolviendo dicha integral mediante Wolfram-Alpha® se obtiene que:

$$\int_0^\beta F(S) dS = \frac{M \log[M(1-\beta)^2 + \beta^2] + M\beta + (M-1)\sqrt{M} \tan^{-1}\left[\frac{M(\beta-1)+\beta}{\sqrt{M}}\right] + \beta}{(M+1)^2} - \frac{M \log[M] + (M-1)\sqrt{M} \tan^{-1}\left[\frac{-M}{\sqrt{M}}\right]}{(M+1)^2} \quad (126)$$

Sustituyendo (125) en (126):

$$\frac{M \log[M(1-\beta)^2 + \beta^2] + M\beta + (M-1)\sqrt{M} \tan^{-1}\left[\frac{M(\beta-1)+\beta}{\sqrt{M}}\right] + \beta}{(M+1)^2} - \frac{M \log[M] + (M-1)\sqrt{M} \tan^{-1}\left[\frac{-M}{\sqrt{M}}\right]}{(M+1)^2} - \frac{\beta}{2(1+M(1-\beta)^2)} = 0 \quad (127)$$

Existen múltiples raíces de β (α se encuentra dentro de la integral en donde $\beta \geq \alpha$). A continuación, se presenta la **Tabla 2**, con los distintos valores de β para cada movilidad:

M	β
0.3	1.328
2.5	0.971
10	1.043

Tabla 2. Movilidad y puntos en dónde se cumple el criterio de áreas iguales (β).

Sustituyendo (123) en (121) se obtiene:

$$-rS + F(S) = h \left[\frac{\partial S}{\partial \bar{x}} - r\tau \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{x}^2} \right] \quad (128)$$

Aplicando la condición de Rankine-Hugoniot en (128):

$$F(S) - \frac{F(S_l)}{S_l} S = h \left[\frac{\partial S}{\partial \bar{x}} - \tau \frac{F(S_l)}{S_l} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{x}^2} \right] \quad (129)$$

Multiplicando (129) por $\frac{\partial S}{\partial \bar{x}}$:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$\left[F(S) - \frac{F(S_l)}{S_l} S \right] \frac{\partial S}{\partial \bar{x}} = h \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \tau \frac{F(S_l)}{S_l} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial S}{\partial \bar{x}} \right] \quad (130)$$

Integrando sobre R se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\int_0^{S_l} \left[F(S) - \frac{F(S_l)}{S_l} S \right] dS = - \int_R h \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} < 0 \quad (131)$$

Comparando (125) y (131) se determina que para las condiciones específicas (122) y (123):

$$\beta > S_l \quad (132)$$

Es evidente que en el escenario práctico los valores de saturación a la izquierda y a la derecha del choque no siempre serán como se establece en los límites (93) y (94), por lo que será necesario el análisis de diferentes casos. Se definirán los diversos tipos de ondas de choques que serán de utilidad. No obstante, primero hay que dejar claro que un choque de S_l a S_r con velocidad r solo es admisible si existe una solución tal que:

$$S(-\infty) = S_l; S(+\infty) = S_r; \frac{dS}{dx}(\pm\infty) = 0 \quad (133)$$

La ecuación (133) enuncia que existirá un valor de saturación inicial S_l y uno final S_r , que no tendrán variación una vez sean alcanzados. Entre estos dos valores de saturación se presentarán los choques de interés que definirán la velocidad a la que el fluido podrá desplazarse a través del medio.

Un choque de Lax es una onda de choque que satisface la condición de entropía de Lax siguiente:

$$\frac{F(S_r)}{S_r} \leq r \leq \frac{F(S_l)}{S_l} \quad (134)$$

La condición de entropía de Lax (134) establece que la velocidad converge desde ambos lados del choque en forma no abrupta. Cuando el choque es abrupto entre los valores límite se denomina subcompresivo. Por último, una onda de rarefacción es una transición suave entre S_l y S_r con las características:

$$S(x, t) = S_l; \text{ Si } x < \frac{\partial F}{\partial S}(S_l)t \quad (135)$$

$$S(x, t) = S(x, t); \text{ Si } \frac{\partial F}{\partial S}(S_l)t \leq x \leq \frac{\partial F}{\partial S}(S_r)t \quad (136)$$

$$S(x, t) = S_r; \text{ Si } x > \frac{\partial F}{\partial S}(S_r)t \quad (137)$$

En otras palabras, la onda de rarefacción sigue en la transición entre las saturaciones límite a la función de la solución original $F(S)$.

A continuación, se analizarán de manera semicuantitativa 4 casos en donde se plantean distintos tipos de choque modificando las definiciones de S_l , S_r , y ε , considerando siempre $\tau = 1$, pero a diferentes valores de relación de movilidad M . El código de solución numérica de los choques fue programado con apoyo del Dr.

Transporte en Medios Porosos Fractales Alumno: Rafael Ramírez Casco

René Vargas en Fortran implementando un el esquema de diferencias finitas basado en el propuesto por Spayd y Shearer³⁰. El código se usó para resolver la ecuación (108) que describe este modelo. Los cálculos se hicieron en el intervalo de $-2 \leq x \leq 4$, con $\Delta x = h = 0.002$ para las ondas de rarefacción y los subcompresivos, y $h = 0.005$ para el resto. Todas las soluciones se muestran en $t = 1$, con $\Delta t = k = 0.1(\Delta x)^2$.

Los resultados de los choques mostrados en las **Figuras 13a y 14a**, para $M = 2.5$ son similares a los presentados por Spayd y Shearer³¹ en las Figuras 5.1 a y b para $M = 2$, validando así cualitativamente el código.

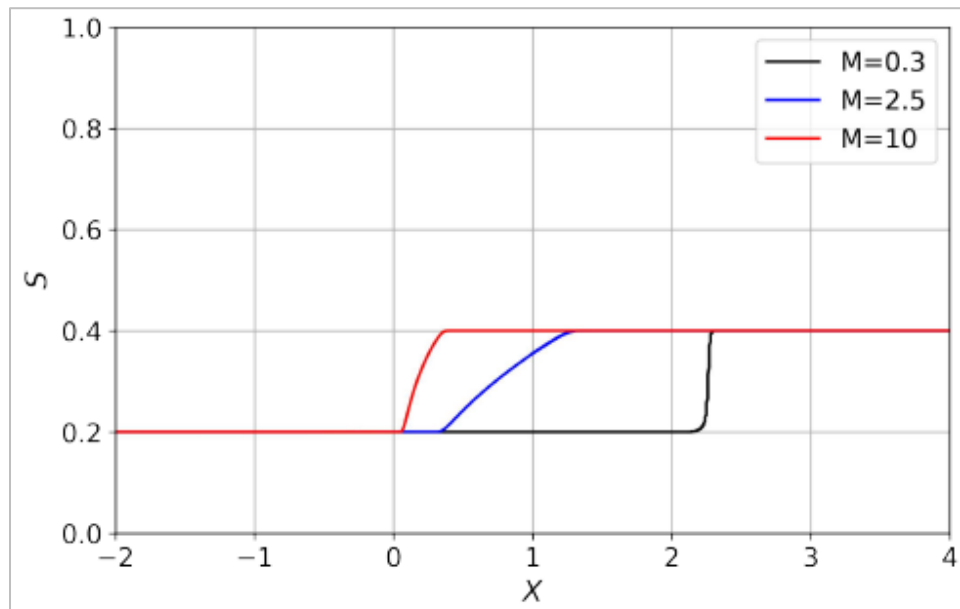


Figura 13a. Gráfica de choques de saturación contra distancia a diferentes valores de M ($S_l = 0.2$, $S_r = 0.4$, y $\varepsilon = 0.01$).

Gráfica de los choques de saturación contra la distancia en el medio poroso a diferentes valores de relación de movilidades. A diferencia del primer caso aquí la saturación por la derecha no es cero y se toman en cuenta las fuerzas capilares. El perfil de velocidades se puede apreciar en la transición de la saturación por la derecha y la izquierda del choque. En general poseen las siguientes características: $S_l = 0.2$, $S_r = 0.4$, y $\varepsilon = 0.01$.

³⁰ K. Spayd, M. Shearer, "The Buckley-Leverett equation with dynamic capillary pressure". SIAM Journal of Applied Maths, 71 (2011) 1088-1108.

³¹ K. Spayd, M. Shearer, "The Buckley-Leverett equation with dynamic capillary pressure". SIAM Journal of Applied Maths, 71 (2011) 1088-1108.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

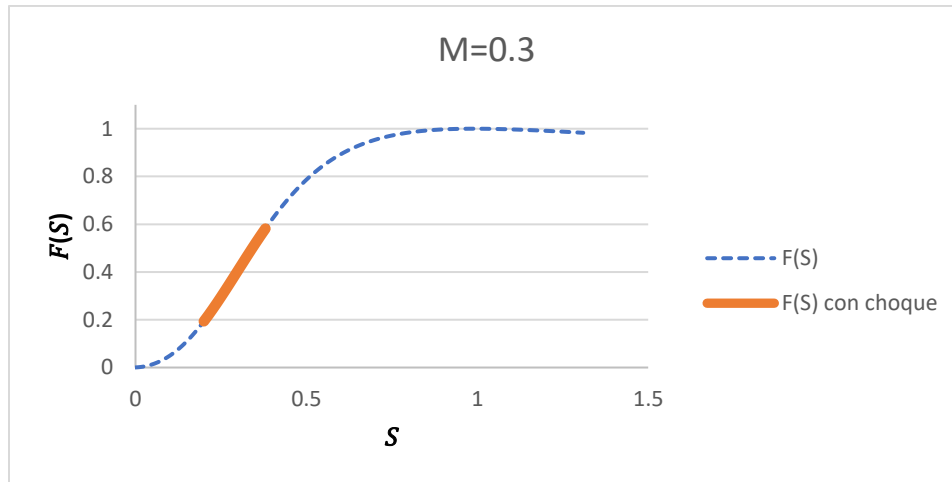


Figura 13b. Representación del choque de la Figura 13a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=0.3$.

Representación gráfica de como ocurre el choque de la Figura 13a con una relación de movilidades de 0.3 sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación.

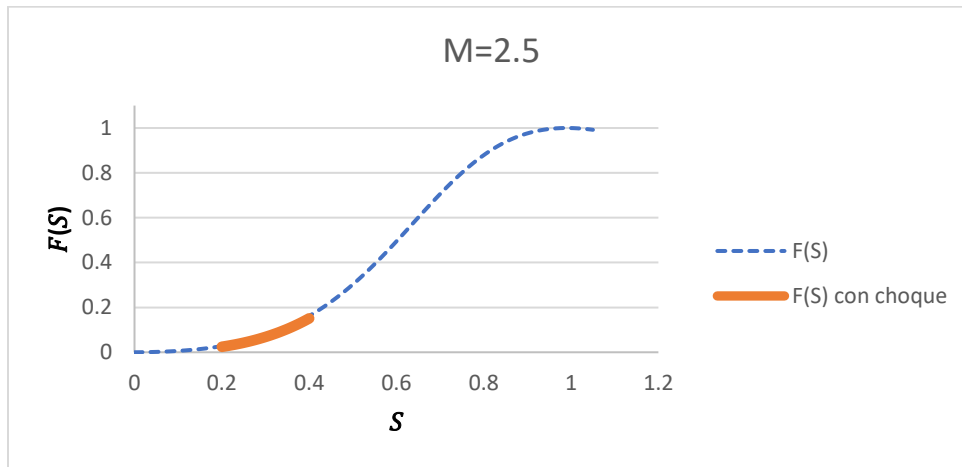


Figura 13c. Representación del choque de la Figura 13a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=2.5$.

Representación gráfica de como ocurre el choque de la Figura 13a con una relación de movilidades de 2.5 sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación.

Transporte en Medios Porosos Fractales Alumno: Rafael Ramírez Casco

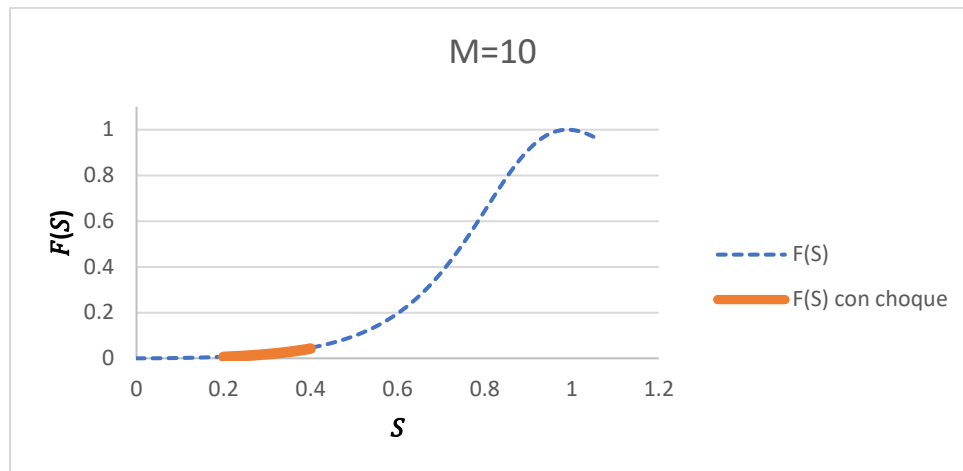


Figura 13d. Representación del choque de la Figura 13a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=10$.

Representación gráfica de como ocurre el choque de la Figura 13a con una relación de movilidades de 10 sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación.

La **Figura 13a** presenta un conjunto de choques, en donde $S_l = 0.2$, $S_r = 0.4$, y $\varepsilon = 0.01$, para distintos valores de relación de movilidad ($M = 0.3, M = 2.5$ y $M = 10$). Para todos los casos $S_r > 0$.

- Para el caso en el que $M = 0.3$ se presenta un choque subcompresivo.
- Para los casos en los que $M = 2.5$ y $M = 10$ se presentan ondas de rarefacción.
- Para el caso en el que $M = 10$ se presenta onda de rarefacción.

En las **Figuras 13c** y **13d** se observa que la transición de S_l a S_r ocurre siguiendo la función $F(S)$, lo cual es característico de una onda de rarefacción, cumpliendo con los criterios (135), (136) y (137). Para el caso en el que $M = 0.3$ la transición a través del espacio es abrupta mediante una pendiente infinita, **Figura 13b**, lo cual es característico de un choque subcompresivo. Para este conjunto de choques cuando disminuye M existe una transición en la naturaleza de las ondas de rarefacción a choques subcompresivos.

Mientras menor es la relación de movilidad (muy altos valores de fluidez y esfuerzo de corte), la velocidad del frente que puede alcanzarse (cuando sucede el choque) aumentará notablemente, ya que cuando $M = 10$ el choque es prácticamente inmediato fijando una velocidad de frente menor que cuando $M = 0.3$, es decir si se desea alcanzar la mayor velocidad de desplazamiento dentro del medio se necesitará una gran potencia en la inyección del fluido desplazante de manera que se alcancen grandes esfuerzos de corte.

Basándose en la máxima velocidad que se puede alcanzar dentro del medio poroso se podría suponer que tener una relación de esfuerzos $M = 0.3$ sería ideal para la

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

extracción del aceite, sin embargo, se debe tener en cuenta que a bajos valores de M la viscosidad del fluido desplazante puede ser menor a la viscosidad del fluido desplazado ($\mu_1 < \mu_2$ o $\varphi_1 > \varphi_2$) lo que propicia el fenómeno conocido como “*fingering*” que es una inestabilidad en la mecánica de los fluidos que ocurre cuando las viscosidades de los fluidos desplazante y desplazado cumplen con dicha característica.

Otro aspecto importante que tomar en cuenta es la naturaleza del choque ($S_r > S_l$) que indica el aumento de concentración del fluido desplazante lo cual implica que no existe una recuperación del fluido desplazado. Esto es más evidente cuando se analizan los valores de $F(S)$ y su dirección en las **Figuras 13b, 13c y 13d**.

Mientras menor es el valor de relación de movilidad M el rango de valores de $F(S)$ es mayor, es decir el fluido desplazante tiene mayor presencia en el flujo por lo que se recupera menos fluido del yacimiento. Bajo este criterio el caso en el que $M = 10$ será en el que el fluido desplazado tenga mayor participación en el flujo.

Por último, para todos los casos $F(S)$ va en aumento lo que implica que cada vez se recupera menos fluido desplazado. Debido a lo anterior no resultaría práctico en ningún caso en el que se busque extraer fluido desplazado implementar este tipo de choques, sin embargo, si lo que se busca es almacenar el fluido desplazado este tipo de choques sería de utilidad siendo el caso ideal en el que $M = 2.5$, ya que se obtiene la mayor velocidad de frente de desplazamiento a través del medio poroso y es en el que hay mayor presencia del fluido desplazante en el flujo (lo que implica que el fluido desplazado se queda en el medio poroso); Además no corre riesgo de que ocurra el fenómeno de “*fingering*”.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

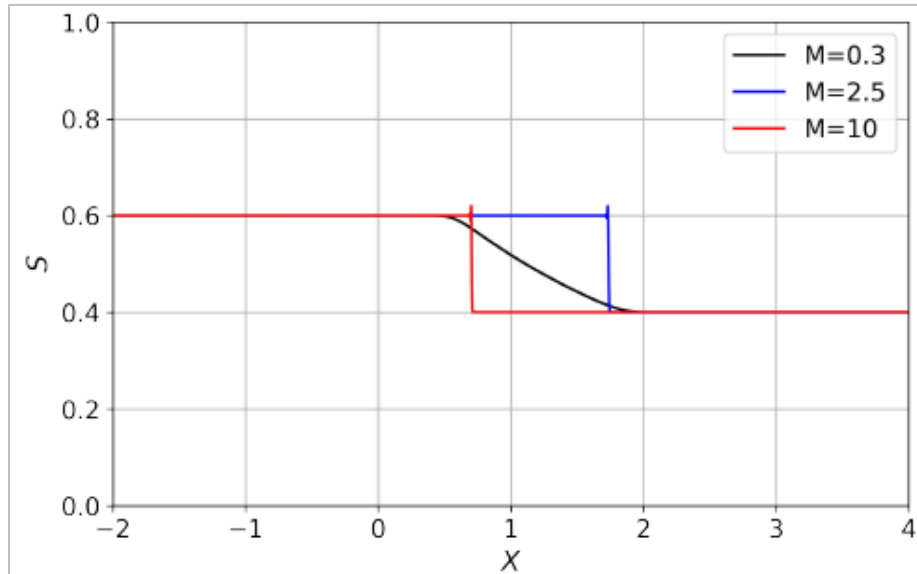


Figura 14a. Gráfica de choques de saturación contra distancia a diferentes valores de M ($S_l = 0.6$, $S_r = 0.4$, y $\varepsilon = 0.01$).

Gráfica de los choques de saturación contra la distancia en el medio poroso a diferentes valores de relación de movilidades. La saturación por la derecha no es cero y se toman en cuenta las fuerzas capilares. El perfil de velocidades se puede apreciar en la transición de la saturación por la derecha y la izquierda del choque. En general poseen las siguientes características: $S_l = 0.6$, $S_r = 0.4$, y $\varepsilon = 0.01$.

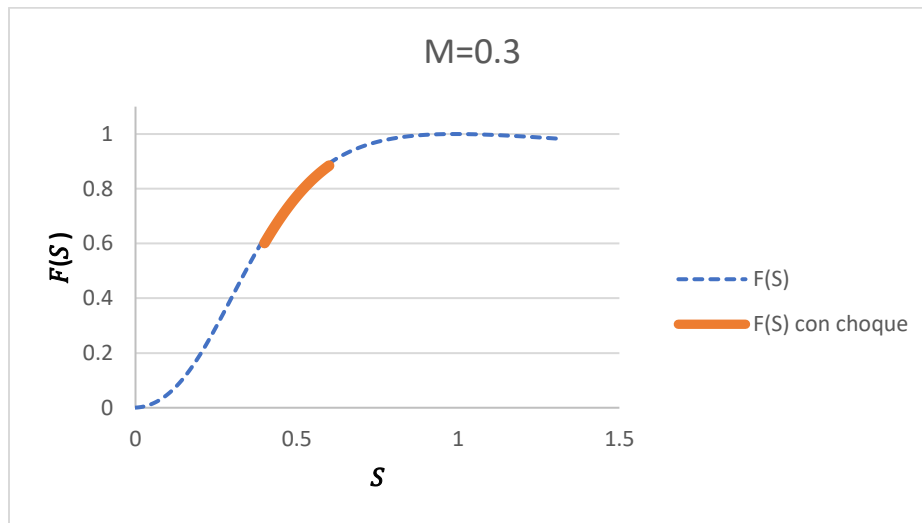


Figura 14b. Representación del choque de la Figura 14a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=0.3$.

Representación gráfica de como ocurre el choque de la Figura 14a con una relación de movilidades de 0.3 sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

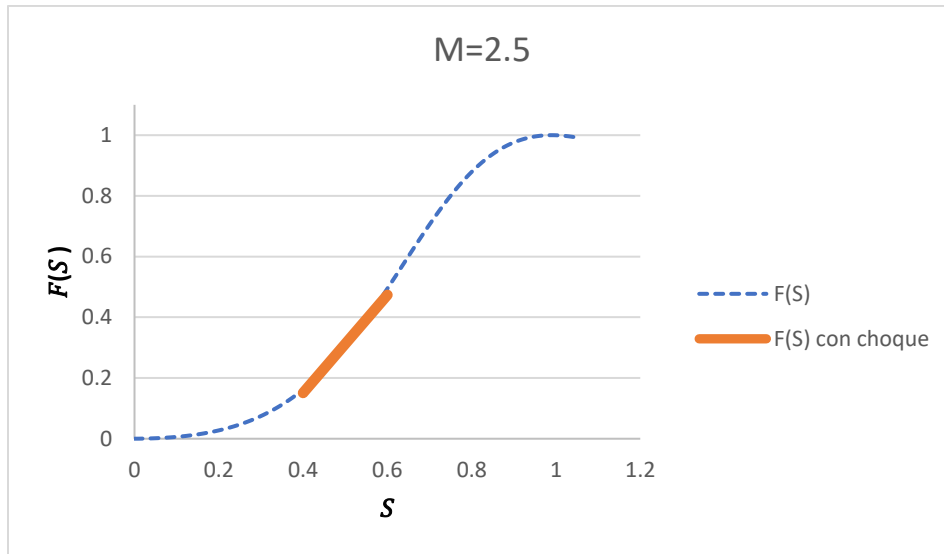


Figura 14c. Representación del choque de la Figura 14a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=2.5$.

Representación gráfica de como ocurre el choque de la Figura 14a con una relación de movilidades de 2.5 sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación.

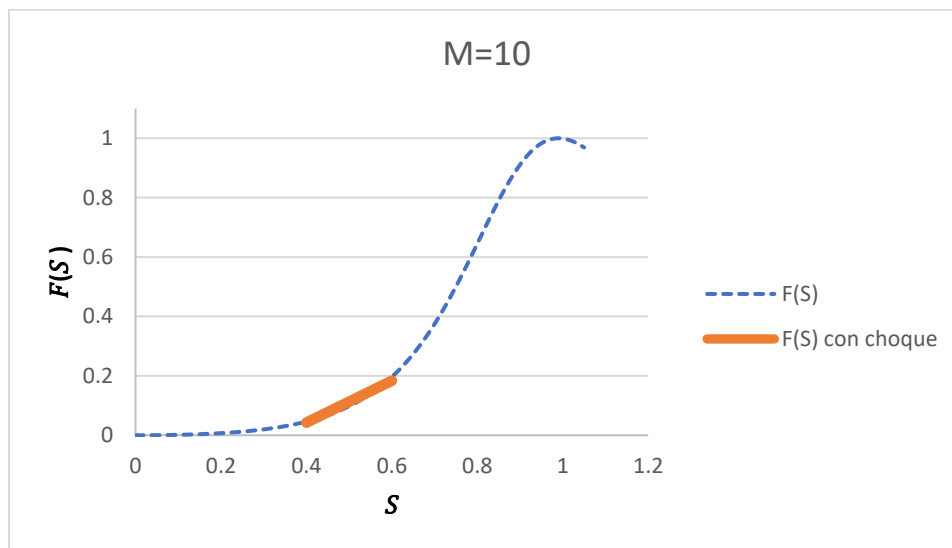


Figura 14d. Representación del choque de la Figura 14a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=10$.

Representación gráfica de como ocurre el choque de la Figura 14a con una relación de movilidades de 10 sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación.

La **Figura 14a** presenta un conjunto de choques, en donde $S_l = 0.6$, $S_r = 0.4$, y $\varepsilon = 0.01$, para distintos valores de relación de movilidad ($M = 0.2$, $M = 2$ y $M = 10$). Para todos los casos $S_r > 0$.

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

- Para el caso en el que $M = 0.3$ se presenta una onda de rarefacción.
- Para los casos en el que $M = 2.5$ y $M = 10$ se presentan choques de Lax.

Lo que diferenciará gráficamente a un choque de Lax de uno subcompresivo, es que los de Lax presentan en los límites S_l y S_r pequeñas “oscilaciones” que indican que la transición no es abrupta sino convergente, cumpliendo con el criterio (134).

En la **Figura 14b** se observa que la onda de rarefacción sigue, como en el caso anterior, la forma de la ecuación de fracción de flujo entre los límites S_l y S_r , sin embargo, en las **Figuras 14c y 14d** el choque ya no sigue la forma de $F(S)$ sino que es una recta de pendiente r . Para valores cercanos a $M = 0.3$ los choques serán suaves mientras que a valores mayores la suavidad irá siendo cada vez menor, sin llegar a ser un cambio abrupto (choque subcompresivo).

Mientras menor sea el valor de relación de movilidad (valores muy altos de fluidez y esfuerzo de corte aplicados sobre el fluido desplazante) mayor será la velocidad de frente que puede alcanzarse, sin embargo, comparando los casos $M = 0.3$ y $M = 2.5$ la diferencia es mínima.

Respecto al rendimiento de extracción del fluido desplazado los casos $M = 2.5$ y $M = 10$ son en los que el fluido desplazante disminuye considerablemente su fracción de flujo $F(S)$, siendo $M = 10$ el mejor en este aspecto.

Para $M = 10$ se requerirá de un menor gradiente de presión para lograr el esfuerzo requerido. En $M = 2.5$ y $M = 0.3$ se alcanzan las velocidades máximas de desplazamiento, sin embargo, puede descartarse el choque de $M = 0.3$ debido a que existe la posibilidad de que ocurra el “fingering”.

La decisión del valor de M dependerá de si se quiere extraer el fluido de yacimiento a una velocidad muy alta o con un gran rendimiento; así como de la tecnología disponible para la inyección del fluido desplazante.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

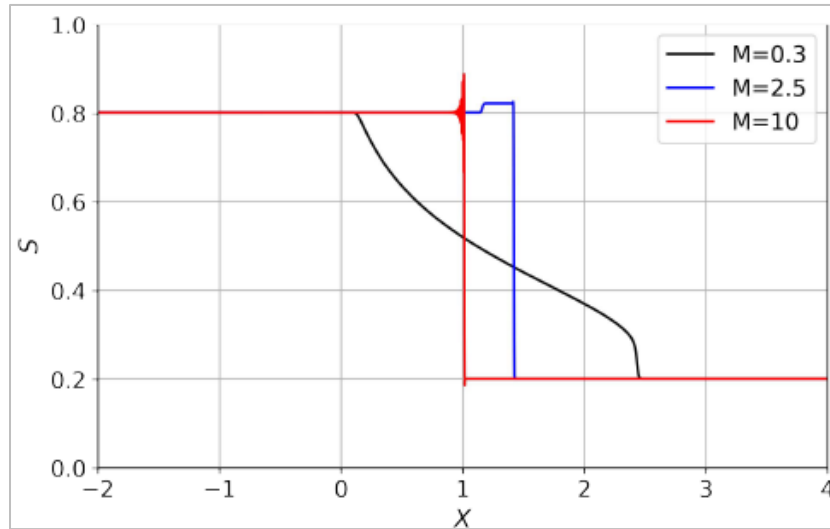


Figura 15a. Gráfica de choques de saturación contra distancia a diferentes valores de M ($S_l = 0.8$, $S_r = 0.2$, y $\varepsilon = 0.05$).

Gráfica de los choques de saturación contra la distancia en el medio poroso a diferentes valores de relación de movilidades. La saturación por la derecha no es cero y se toman en cuenta las fuerzas capilares. El perfil de velocidades se puede apreciar en la transición de la saturación por la derecha y la izquierda del choque. En general poseen las siguientes características: $S_l = 0.8$, $S_r = 0.2$, y $\varepsilon = 0.05$.

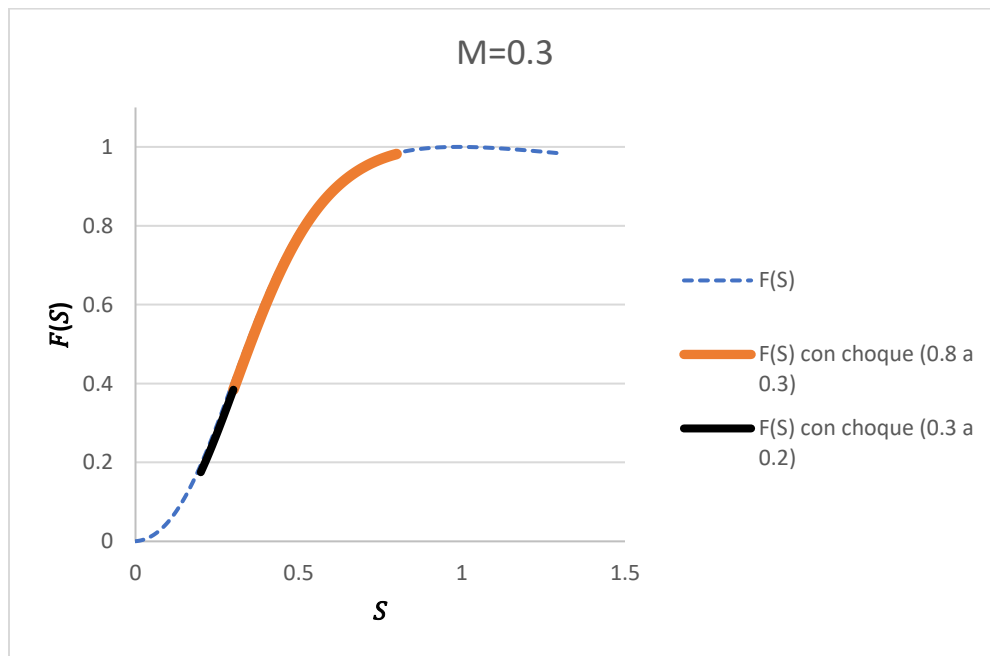


Figura 15b. Representación del choque de la Figura 15a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=0.3$.

Representación gráfica de como ocurre el choque de la Figura 15a con una relación de movilidades de 0.3 sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

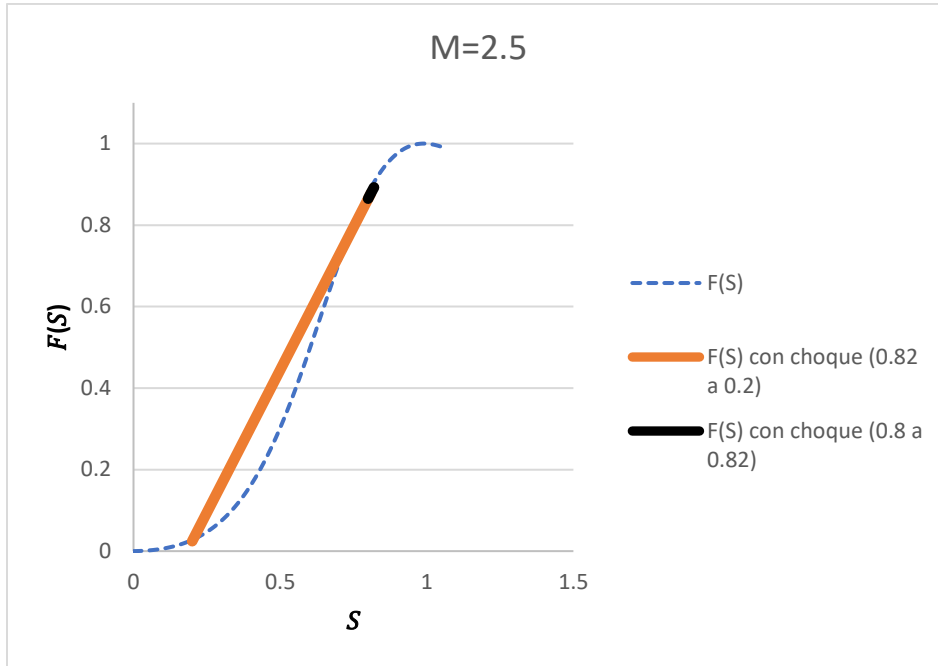


Figura 15c. Representación del choque de la Figura 15a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=2.5$.

Representación gráfica de como ocurre el choque de la Figura 15a con una relación de movilidades de 2.5 sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación.

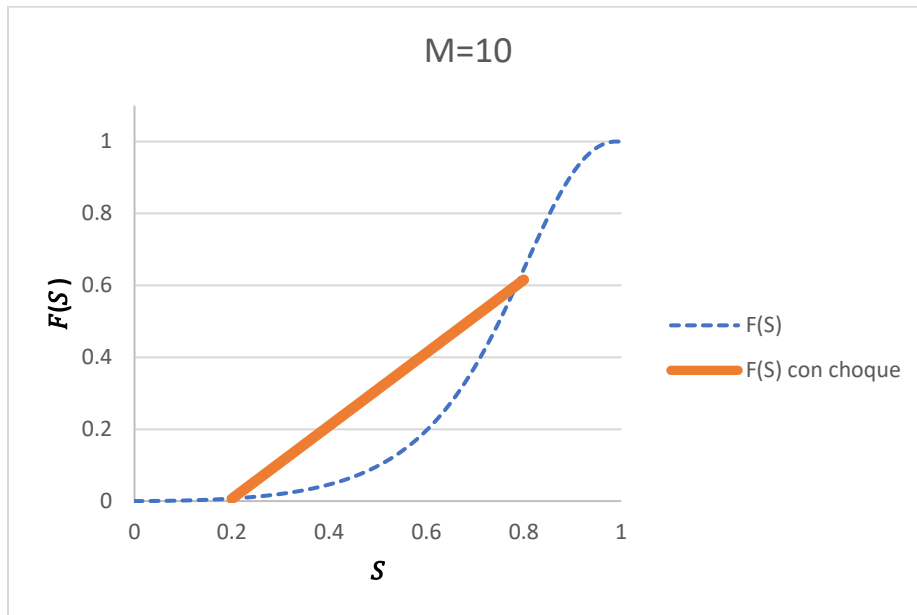


Figura 15d. Representación del choque de la Figura 15a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=10$.

Representación gráfica de como ocurre el choque de la Figura 15a con una relación de movilidades de 10 sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación.

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

La **Figura 15a** presenta un conjunto de choques, en donde $S_l = 0.8$, $S_r = 0.2$, y $\varepsilon = 0.05$, para distintos valores de relación de movilidad ($M = 0.2, M = 2$ y $M = 10$). Para todos los casos $S_r > 0$.

- Para el caso en el que $M = 0.35$ se presenta una onda de rarefacción seguido de un choque en cierto punto.
- Para el caso en el que $M = 2.5$ se presenta un pequeño subcompresivo de aumento de saturación; seguido de un choque de Lax de reducción de saturación.
- Para el caso en el que $M = 10$ se presenta un choque de Lax.

En la **Figura 15b** la velocidad será definida por la pendiente de la curva de fracción de flujo en el tramo $(F(S_l), S_l)$ a $(F(S), S \sim 0.35)$, para que posteriormente en el tramo $(F(S), S \sim 0.35)$ a $(F(S_r), S_r)$ ocurra un choque subcompresivo. Este fenómeno es similar a los resultados de la **Figura 11**. Lo que sucede es que la función $\frac{\partial F}{\partial S}$ tiene la capacidad de representar el comportamiento de la velocidad en el intervalo $\{(F(S_l), S_l), (F(S), S \sim 0.35)\}$, cumpliendo las condiciones de Rankine-Hugoniot, las de entropía y sin llegar a la parte dónde tiene dos valores en S , sin embargo, posterior a $(F(S), S \sim 0.35)$ esta capacidad se pierde y es el punto ideal para la implementación del choque.

Para la **Figura 15c** existe una recta de aumento en la saturación de $(F(S_l), S_l)$ a $(F(S), S \sim 0.82)$ que representa un choque subcompresivo, seguido de una disminución mediante una recta en la saturación de $(F(S), S \sim 0.82)$ a $(F(S_r), S_r)$ representando un choque de Lax. El aumento inicial de $(F(S_l), S_l)$ a $(F(S), S \sim 0.82)$ es necesario para cumplir con las condiciones bajo las que el choque puede ocurrir.

Para la **Figura 15d** existe únicamente una recta entre $(F(S_l), S_l)$ y $(F(S_r), S_r)$, cumpliendo con los criterios de un choque de Lax.

En este caso mientras menor sea la relación de movilidad M (gran fluidez y esfuerzo de corte) mayor será la velocidad de frente que se puede alcanzar en el medio poroso, sin embargo, se debe resaltar que la curva de rarefacción favorece el "fingering" debido a que $M = 0.35$ implica que la viscosidad del fluido desplazante es menor a la del desplazado.

A medida que M aumenta se obtienen cada vez menores valores de $F(S)$ cuando $S = S_r$, como en los casos anteriores, lo que implica que a mayor M mayor extracción de fluido de yacimiento, sin embargo, en este caso la diferencia de $F(S_r)$ cuando $M = 2.5$ y $M = 10$ es mínima.

El aumento en la saturación del fluido desplazante de $S_l = 0.8$ a $S \sim 0.82$ en el caso en el que $M = 2.5$ implica que durante este tramo habrá una retención en el medio del fluido desplazado, por lo que se deberá garantizar que la longitud sea suficientemente larga para que el choque no termine aquí.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

En este caso el choque ideal será en el $M = 2.5$ debido a que se alcanza la mayor velocidad de frente de extracción y la diferencia del rendimiento de la extracción es mínima con respecto a la de $M = 10$, sin embargo, se deberá garantizar que la longitud del medio sea lo suficientemente grande para que no se quede en el choque subcompresivo comprendido en $(F(S_l), S_l)$ a $(F(S), S \sim 0.35)$.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

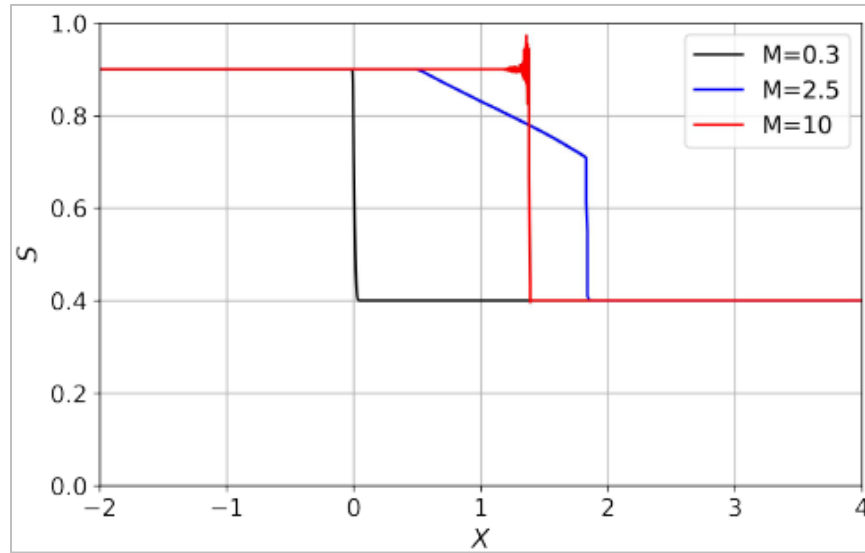


Figura 16a. Gráfica de choques de saturación contra distancia a diferentes valores de M ($S_l = 0.9$, $S_r = 0.4$, y $\varepsilon = 0.01$).

Gráfica de los choques de saturación contra la distancia en el medio poroso a diferentes valores de relación de movilidades. La saturación por la derecha no es cero y se toman en cuenta las fuerzas capilares. El perfil de velocidades se puede apreciar en la transición de la saturación por la derecha y la izquierda del choque. En general poseen las siguientes características: $S_l = 0.9$, $S_r = 0.4$, y $\varepsilon = 0.01$.

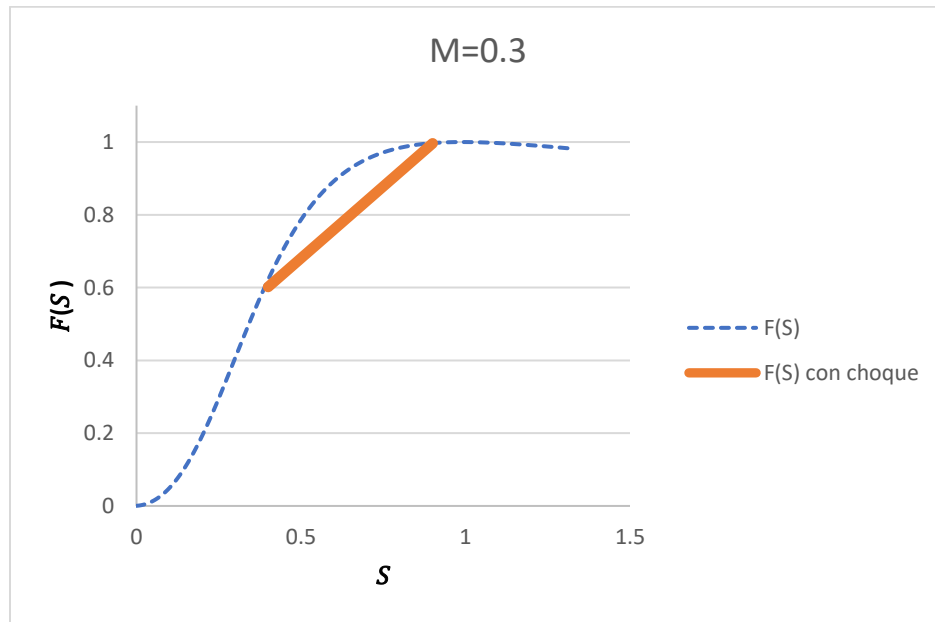


Figura 16b. Representación del choque de la Figura 16a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=0.3$.

Representación gráfica de como ocurre el choque de la Figura 16a con una relación de movilidades de 0.3 sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

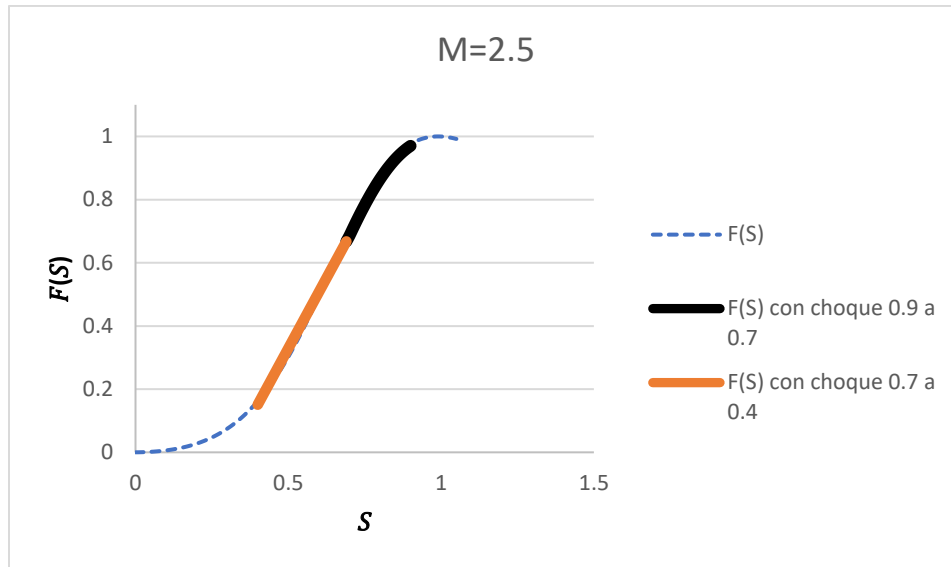


Figura 16c. Representación del choque de la Figura 16a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=2.5$.

Representación gráfica de como ocurre el choque de la Figura 16a con una relación de movilidades de 2.5 sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación.

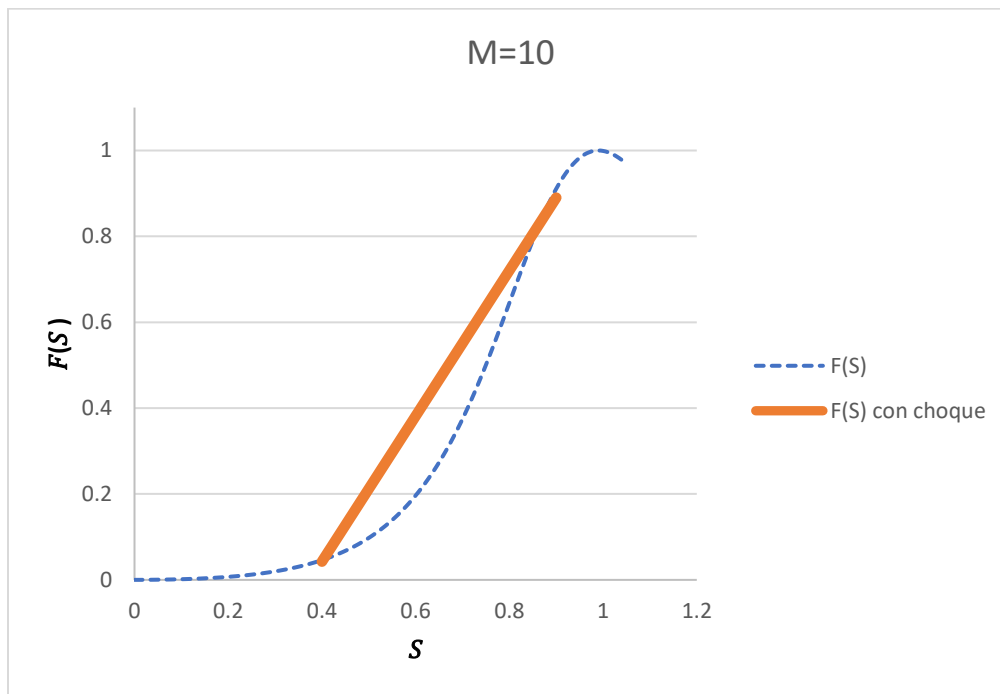


Figura 16d. Representación del choque de la Figura 16a sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación para $M=10$.

Representación gráfica de como ocurre el choque de la Figura 16a con una relación de movilidades de 10 sobre la gráfica de fracción de flujo contra saturación.

Transporte en Medios Porosos Fractales

Alumno: Rafael Ramírez Casco

La **Figura 16a** presenta un conjunto de choques, en donde $S_l = 0.9$, $S_r = 0.4$, y $\varepsilon = 0.01$, para distintos valores de relación de movilidad ($M = 0.2, M = 2$ y $M = 10$). Para todos los casos $S_r > 0$.

- Para el caso en el que $M = 0.3$ el choque no puede ocurrir.
- Para el caso en el que $M = 2.5$ se presenta una onda de rarefacción, seguido de un choque subcompresivo.
- Para el caso en el que $M = 10$ se presenta un choque de Lax.

Para este conjunto el comportamiento de la velocidad de frente que puede alcanzarse para $M = 0.3$ es prácticamente nula, es decir aquí no existirá desplazamiento. Lo anterior es debido a que incumple el criterio de entropía y no entra en ninguna de las categorías de choque existentes, es decir el choque no es físicamente posible. Esto es más entendible gráficamente mediante el criterio de áreas iguales (125) ya que es fácil apreciar que la recta propuesta en la **Figura 16b** no tendrá la capacidad de abarcar el área bajo la curva de la fracción de flujo.

Podría suponerse que un choque como el que se representa en la **Figura 15c** ayudaría a que el choque sucediera en estas condiciones, sin embargo, si se observa en la **Figura 16b** se podrá notar que iniciar de cualquier valor $F(S) > F(S_l)$ dará un resultado similar. También podría proponerse la implementación de un choque como los propuestos en las **Figuras 11 o 15b**, pero de cualquier forma se incumplen los criterios necesarios para la ocurrencia del choque.

En el caso en el que $M = 2.5$ en la **Figura 16a** se observa que el comportamiento es el mismo que el de las **Figuras 11 o 15b**, y es el caso en el que se alcanza la mayor velocidad de frente. Para $M = 10$ se presenta un choque de Lax, si bien la velocidad de frente que puede alcanzar es menor que la de $M = 2.5$, habrá una mayor recuperación al final de fluido desplazado tal como se aprecia en la fracción de flujo en la **Figura 16d**.

En conclusión, para este caso el choque no será posible para $M = 0.3$, y la relación de movilidades dependerá si se requiere mayor velocidad de producción ($M = 2.5$) o mayor cantidad de producción ($M = 10$).

Para todos los conjuntos de choque analizados en las **Figuras 11, 13a, 14a, 15a y 16a** el choque ideal sucede cuando la relación de movilidades es $M = 2.5$ para este caso particular de estudio que cumple con las características físicas y del medio descritas en un inicio (el fluido desplazante es un fluido micelar tal que $\varphi_1 = 10\varphi_2$ cuando $\sigma = \sigma_{y,1}$, con un medio poroso de características $D_T = 1$ y $D_f = 3$). Sin embargo, para el caso general el choque ideal sucederá cuando la fluidez del fluido desplazante sea mayor que la del fluido desplazado cumpliendo que el esfuerzo aplicado sea igual al esfuerzo de cedencia del fluido desplazante, independientemente de las características del medio poroso:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

$$\left\{ M \left(\frac{\varphi_1 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{y,1}} \right)}{\varphi_2 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{y,1}} \right)} \right); \varphi_1 > \varphi_2, \sigma = \sigma_{y,1} \right\} \quad (138)$$

La gráfica de S vs. r representada en la **Figura 7** puede dar un indicio de cómo se dará el choque respecto a su dirección y tipo. Como se mencionó $S(r)$ no puede ser considerada una función, y debido a ello es necesaria la implementación del choque, sin embargo, en cuestión de dirección del cambio de concentración existen 2 casos $S_r < S_l$ y $S_r > S_l$, de disminución y aumento respectivamente. La parte de la curva de saturación que va de S_l a S antes de llegar al máximo en la velocidad será la que puede implementarse para explicar el fenómeno $S_r < S_l$. La parte de la curva de saturación que va de S en el valor máximo de r hasta S_r se podrá implementar para los casos en los que $S_r > S_l$.

Lo anterior es más claro en el ejemplo del caso de la **Figura 13a** en la que $S_r > S_l$:

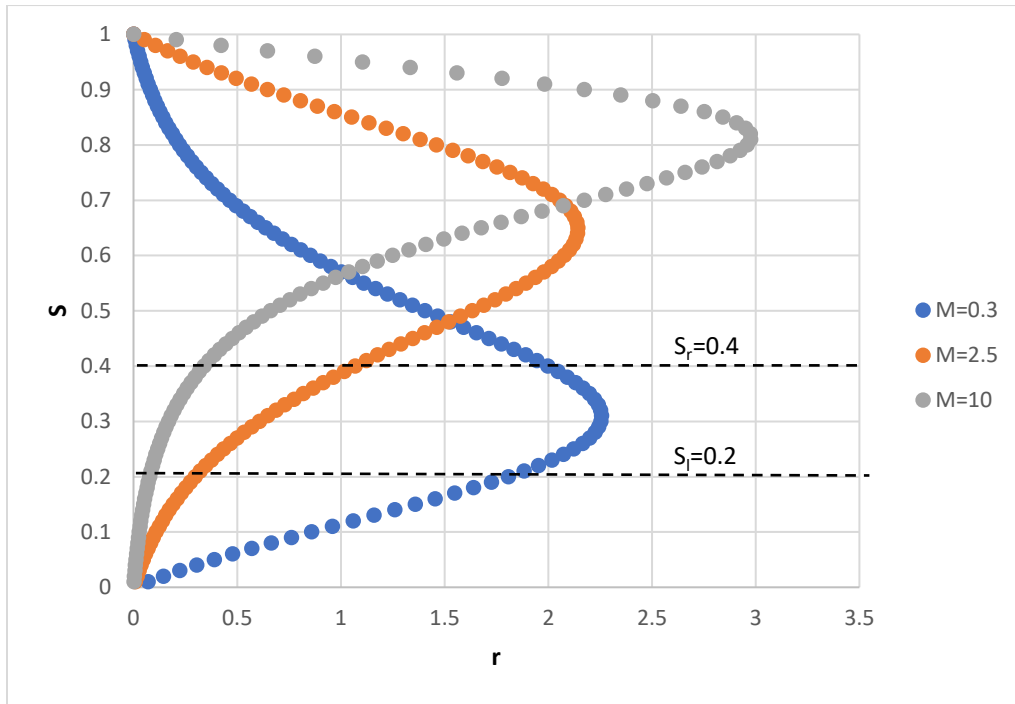


Figura 17. Gráficas de saturación contra velocidad, sin choques implementados, a diferentes valores de M , representando los límites de saturación de Figura 13a.

Gráficas de saturación contra velocidad de desplazamiento a través del medio poroso a diferentes valores de relación de movilidades, representando los límites de saturación de la **Figura 13a**.

La **Figura 17** explica porque los choques de la **Figura 13a** toman esa dirección y que parte de la gráfica es la que siguen como curvas de rarefacción para los casos en los que $M = 2.5$ y $M = 10$; también se observa que para el caso en el que $M =$

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

0.3 el intervalo de saturaciones no interseca el lado correcto de la función $S(r)$ y de ahí surge el choque subcompresivo.

Como se verá más adelante el hecho de que la curva $S(r)$ exista en cierto intervalo no será suficiente para que el choque sea de rarefacción u ocurra siquiera, es necesario aplicar los criterios de definición de choque.

Otro ejemplo en el que es posible implementar la **Figura 7** de manera que se determine si en la transición de S_l a S_r se puede hacer uso de la función $S(r)$ es en los choques representados en la **Figura 14a**. Para los casos $M = 0.3$, $M = 2.5$ y $M = 10$ los choques resultaron ser de rarefacción para el primero y de Lax para los dos últimos:

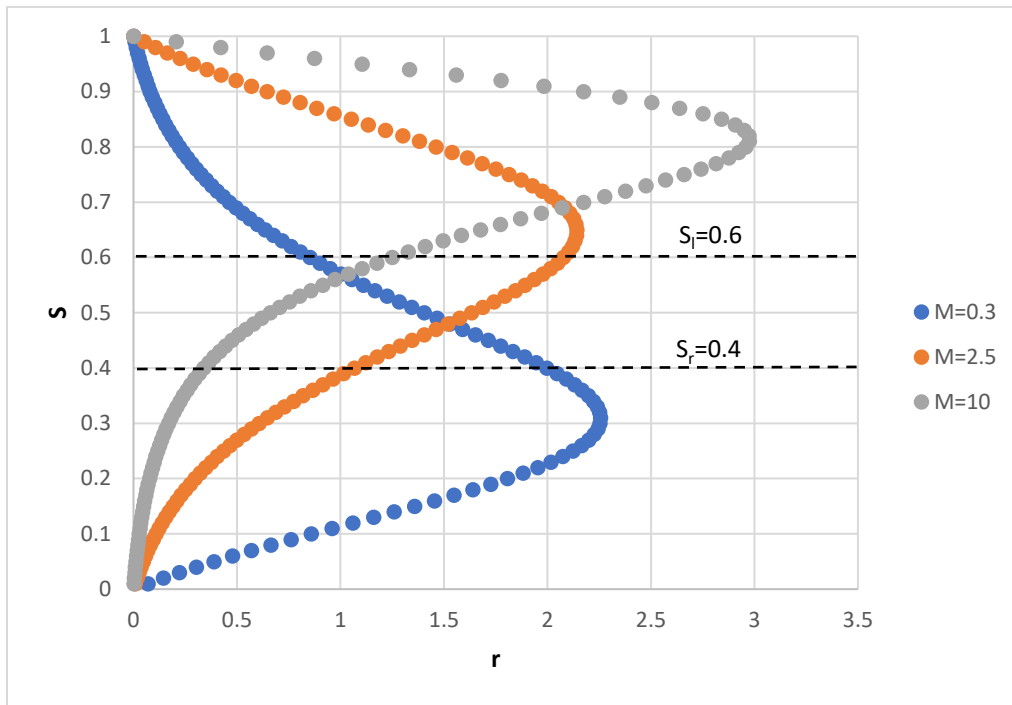


Figura 18. Gráficas de saturación contra velocidad, sin choques implementados, a diferentes valores de M , representando los límites de saturación de Figura 14a.

Gráficas de saturación contra velocidad de desplazamiento a través del medio poroso a diferentes valores de relación de movilidades, representando los límites de saturación de la Figura 14a.

La **Figura 18** deja en claro que para el caso en el que $S_r < S_l$ el único choque en el que se puede hacer uso de la parte correcta de la función $S(r)$ es aquel en el que $M = 0.3$ y debido a esto es de rarefacción, mientras que en los casos $M = 2.5$ y $M = 10$ deben implementarse choques de Lax debido a que en el intervalo S_r a S_l no se interseca la parte de disminución de concentración de la función $S(r)$.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

El conjunto de choques de la **Figura 15a** tiene una tendencia a alejarse de la rarefacción conforme aumenta el valor de M , y esto es debido a que la parte correcta de $S(r)$ de la transición de S_l a S_r cada vez va saliendo de este intervalo:

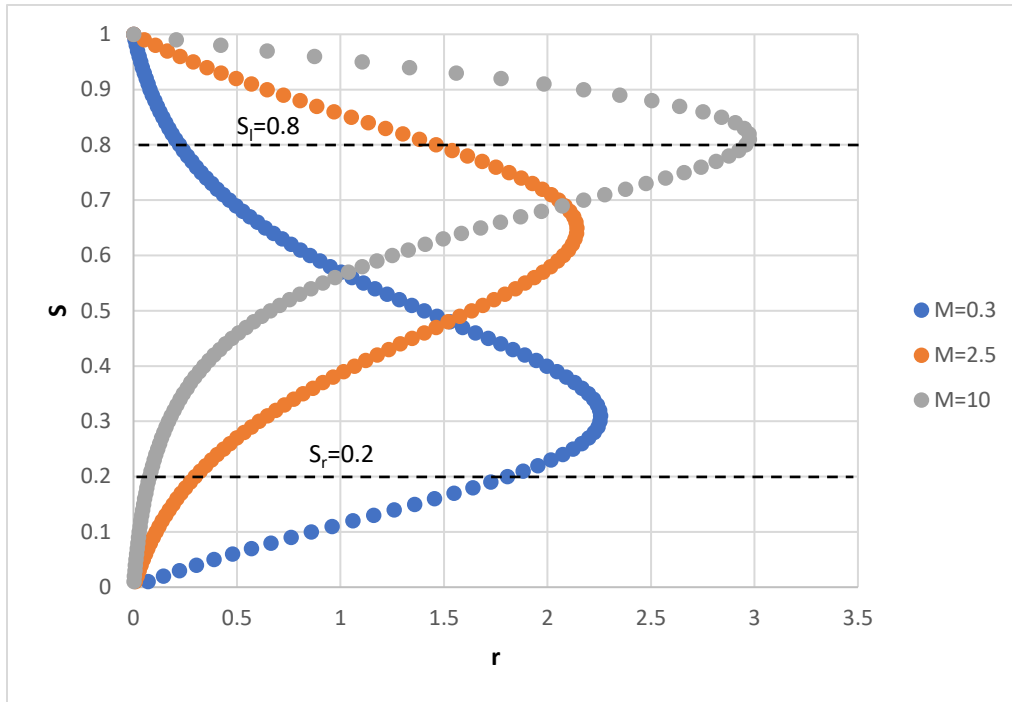


Figura 19. Gráficas de saturación contra velocidad, sin choques implementados, a diferentes valores de M , representando los límites de saturación de Figura 15a.

Gráficas de saturación contra velocidad de desplazamiento a través del medio poroso a diferentes valores de relación de movilidades, representando los límites de saturación de la Figura 15a.

En la **Figura 18** demuestra que para este intervalo de saturaciones cuando $M = 0.3$ es posible implementar una onda de rarefacción hasta $S \sim 0.35$, pero posteriormente habría que implementar un choque subcompresivo, tal como se realizó en la **Figura 11**. El caso de $M = 2.5$ es especial ya que aparentemente la gráfica indica que sería muy similar al de $M = 0.3$, sin embargo, los criterios de indican que lo ideal es un aumento de saturación mediante un choque subcompresivo para que después exista otro choque de Lax tal como lo indica la **Figura 15a**, lo cual demuestra que la aplicación de los criterios es primordial. Por último, para $M = 10$ se observa que no se interseca el lado ideal de la función $S(r)$ por lo que sucede un choque de Lax.

El conjunto de choques de la **Figura 16a** para los casos $M = 2.5$ y $M = 10$ no es muy diferente a los vistos anteriormente, sin embargo, para $M = 0.3$ el choque no ocurre:

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

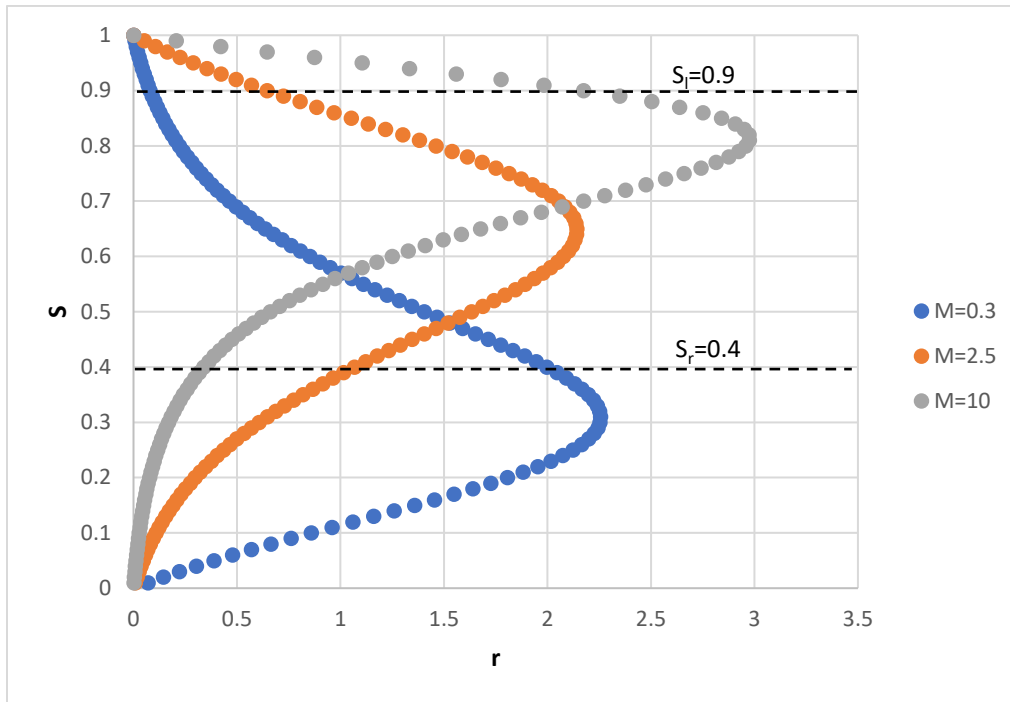


Figura 20. Gráficas de saturación contra velocidad, sin choques implementados, a diferentes valores de M , representando los límites de saturación de Figura 16a.

Gráficas de saturación contra velocidad de desplazamiento a través del medio poroso a diferentes valores de relación de movilidades, representando los límites de saturación de la Figura 16a.

La **Figura 20** expone que para $M = 10$ solo una parte de la región adecuada de $S(r)$ entra en el intervalo de saturaciones y los criterios demuestran que el choque a ocurrido es de Lax. Para $M = 2.5$ nuevamente ocurre un choque mixto de rarefacción y subcompresivo como se ha visto anteriormente y lo demuestra esta misma figura. Sin embargo, para el caso $M = 0.3$ de la **Figura 20** podría suponerse que el choque sería de rarefacción, pero los criterios demuestran que realmente bajo las condiciones descritas el choque no ocurrirá, lo que una vez más alerta sobre la importancia de los criterios que se han descrito para definición de choques.

Transporte en Medios Porosos Fractales Alumno: Rafael Ramírez Casco

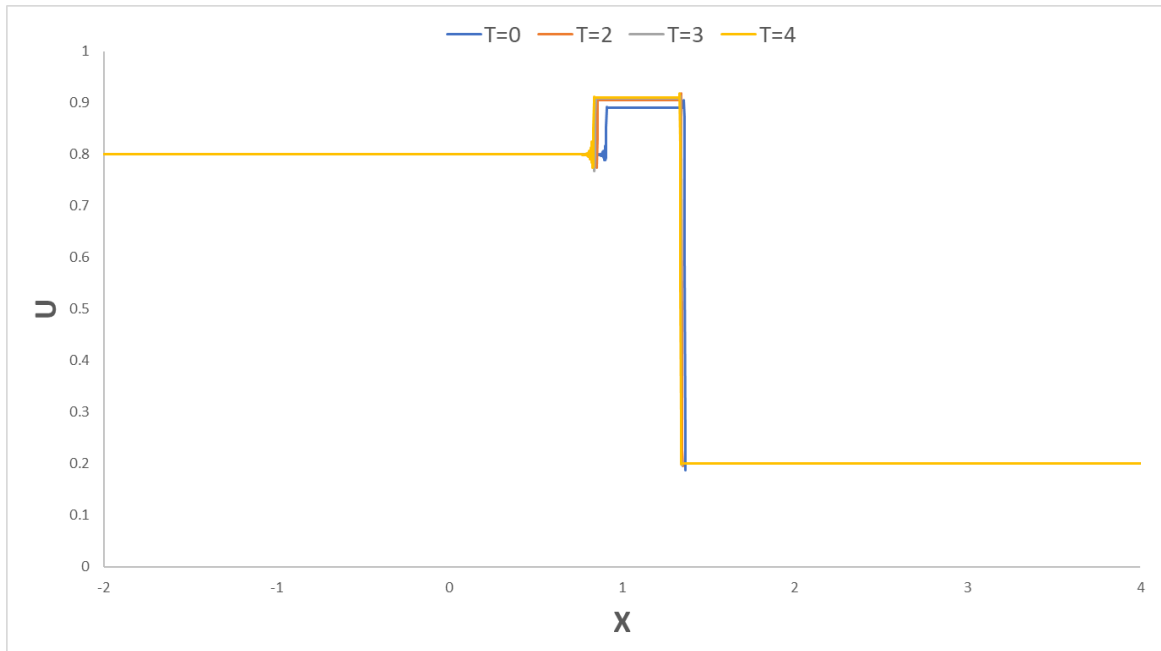


Figura 21. Gráfica de saturación contra distancia para diferentes valores de τ ($S_l = 0.9$, $S_r = 0.2$, y $\varepsilon = 0.05$).

Gráfica de saturación contra distancia para diferentes valores de τ con las siguientes características $S_l = 0.9$, $S_r = 0.2$, y $\varepsilon = 0.05$.

Por último, se hizo una revisión cualitativa con ayuda de la simulación numérica de la influencia de τ para la solución de la ecuación (108) para el choque presentado por Spayd y Shearer³² en la Figura 5.2 a de características $S_l = 0.8$, $S_{intermedia} = 0.9$, $S_r = 0.2$, y $\varepsilon = 0.05$. Los resultados se pueden ver en la **Figura 21**, que evidencia que el efecto del valor de τ es pequeño e influenciará tanto en la saturación intermedia del choque como en la velocidad de frente que se podrá alcanzar en el medio poroso; además las diferencias de resultados para valores $\tau > 0$ es prácticamente nula. Se debe tomar en cuenta únicamente para la **Figura 21** $U = S$ en el eje de las ordenadas.

³² K. Spayd, M. Shearer, "The Buckley-Leverett equation with dynamic capillary pressure". SIAM Journal of Applied Maths, 71 (2011) 1088-1108.

10. Conclusión.

- a) Se comprueba la hipótesis a) para el desplazamiento de un fluido Newtoniano por un fluido no Newtoniano (micelar) a través de un medio poroso, que puede describirse mediante la geometría fractal, el valor de relación de movilidades tendrá una variación considerable respecto al esfuerzo de corte aplicado. Si bien existen modelos fractales más complejos³³ el planteado en el presente trabajo provee una descripción más simple. El uso del modelo BMP permite la introducción al modelo de un fluido micelar de reología compleja como el fluido desplazante, que permite mejorar la cantidad de fluido desplazado obtenido mientras se incrementa el esfuerzo de corte aplicado.
- b) Se comprueba la hipótesis b) para la solución del problema de Riemann de la ecuación de conservación de la saturación en donde no se consideran las fuerzas capilares, así como para su extensión en donde se consideran, la relación de movilidades tendrá una influencia determinante en donde se aplicará el choque, así como el tipo de choque que ocurrirá. Es decir, a diferentes relaciones de movilidades los choques que ocurran y en dónde ocurran serán distintos.
- c) Se comprueba la hipótesis c) existe un valor de relación de movilidades “*ideal*” en el cual en la mayoría de los casos se obtiene la mayor velocidad de frente de desplazamiento y un rendimiento de recuperación óptimo. Este valor es para el caso particular del presente caso de estudio $M = 2.5$ y para el caso general $\left\{ M \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{y,1}} \right) \right); \varphi_1 > \varphi_2, \sigma = \sigma_{y,1} \right\}$.

³³ M.C. Worther, and D.K. Sunada “*Exact Integral Solutions for Two Phase Flow*”, Water Res. Res., Vol. 26, No. 3, 399-413, March (1990) y Andersen, P.O., Nesvik, E.K., and D.C.S. Standnes “*Analytical Solutions for Forced and Spontaneous Imbibition Accounting for Viscous Coupling*”, J. Pet. Sci & Eng. 186 (2020), 106717

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

11. Referencias.

- (1) Buckley, S. E., Leverett, M. C., "*Mechanism of fluid displacement in sands*", Petrol. Trans. AIME; (1942).
- (2) Li, Y., Yu, B., Chen, J., Wang, C., "*Analysis of permeability for Ellis fluid flow in fractal porous media*", Chemical Engineering Communications. 195; (2008) 1240-1256.
- (3) Zhang, B., Yu, B., Wang, H., "*A fractal analysis of permeability for Power-law fluids in porous media*", Fractals. 14; (2006) 171-177.
- (4) Wu, Y., Pruess, K., Witherspoon, P. A., "*Displacement of a Newtonian fluid by a Non-Newtonian Fluid in a Porous Medium*", Transport in Porous Media. 6; (1991) 115-142.
- (5) C.J. Van Duijn, L.A. Peletier, J.S. Pop, "*A new class of entropy solutions of the Buckley-Leverett equation*". SIAM J. Math. Anal. 39 (2007) 507-533.
- (6) K. Spayd, M. Shearer, "*The Buckley-Leverett equation with dynamic capillary pressure*". SIAM Journal of Applied Maths, 71 (2011) 1088-1108.
- (7) F. Bautista, J.M. de Santos, J.E. Puig, O. Manero, "*Understanding thixotropic and anti-thixotropic behavior of viscoelastic micellar solutions and liquid crystalline dispersions. I. The model*". Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics, 80 (1999) 93.
- (8) M. Turcio, J.M. Reyes, R. Camacho, C. Lira-Galeana, R. O. Vargas, O. Manero, "*Calculation of effective permeability for the BMP model in fractal porous media*". Journal of Petroleum Science and Engineering 103 (2013) 51-60.
- (9) B. Mandelbrot, "*La geometría fractal de la naturaleza*". Metatemas, 1° edición (1997).
- (10) E. Henao, R. López, "*Geometría fractal y transformada de Fourier*" Scientia ET Technica vol XVI num 48 (2011), 269.
- (11) P. A., Vázquez, "*Introducción a la Geometría fractal*" Universidad del Bío Bío, Chile (2016), 27.
- (12) S. J., Carter, "*A stochastic Buckley – Leverett Model*" The University of Adelaide, Australia (2010), 1-31.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

- (13) M., Muskat, M. W., Meres, “*The flow of heterogeneous fluids through porous media*” *Physics* 7 (1936), 346.
- (14) T., Ahmed, “*Relative Permeability Concepts*” *Reservoir Engineering Handbook* (2019), Cap 5.
- (15) R., Wheaton, “*Basic Rock and Fluid Properties*” *Fundamentals of Applied Reservoir Engineering* (2016), Num 2.6.2.
- (16) F. D., Lora-Clavijo, J. P. Cruz-Pérez, F. Siddhartha Guzmán, and J. A. González, “Exact solution of the 1D Riemann problem in Newtonian and relativistic hydrodynamics” *Revista Mexicana de Física*, 59 (2013), 1-2.
- (17) S.M. Hassanizadeh, W.G. Gray, “*Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media*”, *Water Resour. Res.*29 (1993) 3389-3405.
- (18) Sheng, J.J. “*Status of Surfactant EOR Technology*”, *Petroleum*, Vol. 1, Issue 2, June (2015), 97-105.
- (19) Manrique, E., Thomas R.C., Ravikiran, M., Izadi, M., Lantz, J. Romeo and V. Alvarado “*EOS: Current Status and Opportunities*”, presented at the SPE IOR Symposium, Tulsa, OK; April (2010).
- (20) Ghannam, M.T., Mohamed, Y.E.S., Abdulrazag, Y.Z., Nabil, E. “*Thixotropic Assessment of Some EOR used Polymers*”, *Int. J. of Eng. Res. & Tech.*, (2020).
- (21) McWorther, and D.K. Sunada “*Exact Integral Solutions for Two Phase Flow*”, *Water Res. Res.*, Vol. 26, No. 3, 399-413, March (1990).
- (22) Andersen, P.O., Nesvik, E.K., and D.C.S. Standnes “*Analytical Solutions for Forced and Spontaneous Imbibition Accounting for Viscous Coupling*”, *J. Pet. Sci & Eng.* 186 (2020), 106717.
- (23) Shmid, K.S., Alyafei, N., Geiger, S., and M.J. Blunt “*Analytical Solutions for Spontaneous Imbibition: Fractional Flow Theory and Experimental Analysis*”, *SPE J.* (2016).
- (24) O. Manero, F. Bautista, J.F.A. Soltero, J.E. Puig et al., “*Dynamics of worm-like micelles: the Cox-Merz rule*”. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 106 (2002) 1-15.

Transporte en Medios Porosos Fractales
Alumno: Rafael Ramírez Casco

- (25) K. Holmberg, "*Novel surfactants, preparation, applications and biodegradability*", Marcel Dekker, Inc., New York, (1998).
- (26) J. Chang, Y.C. Yortsos, "*Pressure transient analysis of fractal reservoirs*", SPE, U. of Southern California, (1990).
- (27) M.C. Worther, and D.K. Sunada "*Exact Integral Solutions for Two Phase Flow*", Water Res. Res., Vol. 26, No. 3, 399-413, March (1990).
- (28) Andersen, P.O., Nesvik, E.K., and D.C.S. Standnes "*Analytical Solutions for Forced and Spontaneous Imbibition Accounting for Viscous Coupling*", J. Pet. Sci & Eng. 186 (2020), 106717
- (29) Kantzas, A., Bryan, J., Taheri, S., "*Fundamentals of Fluid Flow in Porous Media*", Perminc; (2015) Chapter 2, <https://perminc.com/resources/fundamentals-of-fluid-flow-in-porous-media/>
- (30) Myrianjack, "*Ley de Darcy*", Escuela superior politécnica de Chimborazo; (2020), <https://www.studocu.com/ec/document/escuela-superior-politecnica-de-chimborazo/genesis-y-morfologia-de-suelos/ley-de-darcy-ley-de-darcy/8557007> .