



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA CIVIL-HIDRÁULICA

OPCIONES PARA MEJORAR OPERACIONES EN EL SISTEMA
CERRO DEL JUDÍO-CERRO DE LA ESTRELLA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
JOSÉ LUIS SALINAS ESTÉVEZ

TUTOR:
DR. RAFAEL BERNARDO CARMONA PAREDES
INSTITUTO DE INGENIERÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., DICIEMBRE 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*“[Mi] sueño [...] es ser grande en todas partes
y pequeño al lado de [mis] padres”*

Agradecimiento

A mis padres por su ternura, apoyo y protección. No imagino una fuente de cariño más grande que ellos.

Al Mtro. Alejandro Sánchez Huerta por su ejemplo y constante estímulo. Su calidad humana es sorprendente.

Al Dr. Rafael Carmona por su total confianza en mí.

Al Dr. Ramón Domínguez y la Dra. Maritza L. Arganis por ser un pilar del presente trabajo.

Al resto del grupo de Hidromecánica del Instituto de Ingeniería: el Mtro. Eduardo Rodal y la Mtra. Libia Carmona. Su apoyo ha sido clave durante mi recorrido académico.

A los miembros del jurado por el tiempo que han dedicado en mí.

Contenido

Capítulo 1. Introducción	17
1. 1. El agua en la Ciudad de México.....	17
1. 1. 1. Obras hidráulicas en la época prehispánica	18
1. 1. 2. Obras hidráulicas en la época colonial	19
1. 1. 3. Obras hidráulicas en los siglos XIX y XX	20
1. 1. 4. Obra hidráulica moderna	21
1. 1. 5. Agua disponible en la Ciudad de México	22
1. 2. Infraestructura para distribución de agua potable en la Ciudad de México	23
1. 3. Uso eficiente del agua en las grandes ciudades	25
Capítulo 2. Descripción del sistema de distribución de agua analizado.....	28
2. 1. Descripción del sistema	28
2. 1. 1. Elementos del sistema.....	28
2. 1. 2. Instrumentación y telemetría en componentes del sistema	30
2. 1. 3. Plantas de bombeo	31
2. 1. 3. 1. PB Xotepingo.....	31
2. 1. 3. 2. Rebombeo Estrella	34
2. 2. Descripción de la operación actual de las plantas de bombeo	36
2. 2. 1. Curvas de los sistemas.....	36
2. 2. 1. 1. PB Xotepingo.....	36
2. 2. 1. 2. Rebombeo Estrella	38
2. 2. 2. Datos de operación obtenidos de la plataforma Maestro Aditum.....	40
2. 2. 2. 1. PB Xotepingo.....	41
2. 2. 2. 2. Rebombeo Estrella	41
2. 2. 3. Comparación de datos teóricos y reales.....	42
2. 2. 3. 1. PB Xotepingo.....	42
2. 2. 3. 2. Rebombeo Estrella	43
2. 3. Consecuencias económicas de la operación actual de las plantas de bombeo	44

Capítulo 3. Optimización de los costos de bombeo.....	46
3. 1. Aspectos generales de la optimización	46
3. 2. Tipos de métodos de optimización	47
3. 2. 1. Programación lineal	47
3. 2. 2. Programación no lineal	48
3. 2. 3. Programación dinámica	48
3. 2. 4. Algoritmos genéticos.....	50
Capítulo 4. Programación dinámica aplicada a la optimización de plantas de bombeo	52
4. 1. Paso 1. Definición de las etapas	53
4. 2. Paso 2. Separación de variables.....	53
4. 3. Paso 3. Definición de ecuación de estado	54
4. 4. Paso 4. Función objetivo	55
4. 4. 1. Beneficios de bombear un volumen k de agua (bn)	55
4. 4. 1. 1. Ganancias de bombear un volumen de agua y costo por agua no bombeada	58
4. 4. 1. 2. Costo de energía eléctrica empleada	58
4. 5. Planta de bombeo Xotepingo.....	63
4. 5. 1. Curva H-Q de las bombas	63
4. 5. 2. Curva η -Q de las bombas	65
4. 6. Rebombeo Estrella.....	66
4. 6. 1. Curva H-Q de las bombas	66
4. 6. 2. Curva η -Q de las bombas	68
4. 6. 3. Posibles costos por desabasto de agua en el cárcamo	70
4. 6. 4. Posibles costos por exceso de agua en el cárcamo	71
4. 7. Ejemplo demostrativo de la programación dinámica.....	74
4. 7. 1. Paso 1. Determinación de los beneficios asociados a cada etapa	76
4. 7. 1. 1. Etapa 1	76
4. 7. 2. Paso 2. Determinación del beneficio acumulado para cada año en cada una de las etapas	82
4. 7. 2. 1. Año 50	83

4. 8. Uso de la programación dinámica en las plantas de bombeo del sistema analizado.....	92
4. 8. 1. Paso 1. Determinación de los beneficios asociados a cada etapa	92
4. 8. 1. 1. Estados de los cárcamos.....	92
4. 8. 1. 2. Posibles extracciones en los cárcamos	94
4. 8. 1. 3. Posibles ingresos en los cárcamos.....	102
4. 8. 1. 4. Cálculo de beneficios para el máximo estado del cárcamo y mínima extracción	107
4. 8. 2. Paso 2. Determinación del beneficio acumulado para cada año en cada una de las etapas	109
4. 8. 2. 1. Cálculo de beneficios totales	112

Capítulo 5. Uso de herramientas computacionales para la minimización de costos de operación de plantas de bombeo..... 119

5. 1. Código de calibración para el ejemplo demostrativo de programación dinámica.....	120
5. 1. 1. Paso 1.....	121
5. 1. 2. Paso 2. Determinación del beneficio acumulado para cada año en cada una de las etapas	124
5. 1. 3. Resultados del código.....	129
5. 2. Código de Matlab para la determinación de volúmenes de bombeo que minimicen costos de operación en las plantas de bombeo del sistema Cerro del Judío-Cerro de la Estrella	132
5. 3. Resultados	139
5. 3. 1. Resultados de optimización en la PB Xotepingo.....	140
5. 3. 2. Resultados de optimización en el Rebombeo Estrella	142

Capítulo 6. Comportamiento de los cárcamos de bombeo 145

6. 1. Código utilizado para la determinación de volúmenes en los tanques de succión.....	146
6. 1. 1. Volúmenes mínimos permisibles en los tanques de succión	149
6. 1. 1. 1. PB Xotepingo.....	149
6. 1. 1. 2. Rebombeo Estrella	151
6. 2. Resultados del comportamiento del cárcamo	155
6. 2. 1. PB Xotepingo.....	155

6. 2. 2. Rebombeo Estrella	157
Capítulo 7. Conclusiones.....	159
Capítulo 8. Referencias.....	167
Capítulo 9. Anexos	171
9. 1. Anexo 1. Volúmenes bombeados, en m ³ , cada hora en PB Xotepingo durante el periodo representativo.....	171
9. 2. Anexo 2. Volúmenes bombeados, en m ³ , cada hora en el Rebombeo Estrella durante el periodo representativo	175
9. 3. Anexo 3. Beneficios asociados a cada estado y cada extracción de las diferentes etapas, PB Xotepingo.....	178
9. 4. Anexo 4. Beneficios asociados a cada estado y cada extracción de las diferentes etapas, Rebombeo Estrella	181
9. 5. Anexo 5. Código PB Xotepingo.....	184
9. 6. Anexo 6. Código Rebombeo Estrella	196

Índice de figuras

Figura 2.1 Inicio de la conducción. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019.....	29
Figura 2.2. Continuación de la conducción. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019	29
Figura 2.3. PB Xotepingo. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019	31
Figura 2.4. Curva característica H-Q de las curvas Fairbanks Morse instaladas en la PB Xotepingo. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019	32
Figura 2.5. Curva correspondiente a los datos de placa: H=32 m y Q=843 lps	33
Figura 2.6. Curva H-Q trazada en el plano original del fabricante. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019	33
Figura 2.7. Cárcamo de succión y bombas del Rebombero Estrella. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019	34
Figura 2.8. Curvas características de las bombas de un solo paso. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019	34
Figura 2.9. Curva correspondiente a los datos de placa: H=70 m y Q=1 m ³ /s	35
Figura 2.10. Curva H-Q trazada en el plano original del fabricante	35
Figura 2.11. Curvas en paralelo y curva del sistema en PB Xotepingo	38
Figura 2.12. Curvas en paralelo y curva del sistema en Rebombero Estrella	40
Figura 2.13. Registros de caudal en el periodo de tiempo representativo en PB Xotepingo	41
Figura 2.14. Registros de caudal en el periodo de tiempo representativo en Rebombero Estrella	42
Figura 2.15. Punto de operación con una bomba PB Xotepingo	43
Figura 4.1. Gasto por alcaldía en renta de pipas en el periodo comprendido entre 2016 y 2021	56
Figura 4.2. Gasto anual de SACMEX por renta de pipas. Fuente: METRÓPOLI, 2022	57
Figura 4.3. Tasa de inflación promedio anual. Fuente: STATISTA, 2022	59
Figura 4.4. Potencias y eficiencias en motor y bomba	61
Figura 4.5. Polinomio de ajuste para la curva H-Q de las bombas de PB Xotepingo	64
Figura 4.6. Curva de eficiencia de las bombas utilizadas en PB Xotepingo	65
Figura 4.7. Polinomio de ajuste para la curva H-Q de las bombas del Rebombero Estrella	67
Figura 4.8. Curva de eficiencia de las bombas utilizadas en Rebombero Estrella ..	69
Figura 4.9. Gráfica de dos horas de caudal bombeado en PB Xotepingo	96
Figura 4.10. Gráfica de cuatro minutos de caudal bombeado en Rebombero Estrella	99
Figura 4.11. Histograma de frecuencia de ingresos a PB Xotepingo, etapa 1	103
Figura 4.12. Probabilidades de ingresos a PB Xotepingo, etapa 1	104
Figura 4.13. Probabilidades de ingresos a PB Xotepingo, etapa 2	104

Figura 4.14. Probabilidades de ingresos a PB Xotepingo, etapa 3	105
Figura 4.15. Probabilidades de ingresos al Rebombero Estrella, etapa 1	106
Figura 4.16. Probabilidades de ingresos al Rebombero Estrella, etapa 2	106
Figura 4.17. Probabilidades de ingresos al Rebombero Estrella, etapa 3	107
Figura 5.1. Definición de estados, salidas, ingresos y probabilidades	121
Figura 5.2. Cálculo de los beneficios para cada estado y salida del ejemplo demostrativo.....	122
Figura 5.3. Asignación de probabilidades a los ingresos y cálculo de los beneficios de cada extracción	123
Figura 5.4. Definición de número máximo de iteraciones y número de etapas. ..	124
Figura 5.5. Cálculo de los estados al final de la etapa analizada	125
Figura 5.6. Cálculo de B, año 50 etapa 2	125
Figura 5.7. Cálculo de B, año 50 etapa 1	127
Figura 5.8. Cálculo de B, año menor al máximo establecido, etapa 2.....	128
Figura 5.9. Cálculo de B, año menor al máximo establecido, etapa 1.....	128
Figura 5.10. Valores de ϕ para ambas etapas	129
Figura 5.11. Beneficios máximos totales, año 50.....	130
Figura 5.12. Beneficios máximos totales, año 49.....	130
Figura 5.13. Beneficios máximos totales, año 46 y 45	131
Figura 5.14. Definición de estados, salidas e ingresos en PB Xotepingo.....	132
Figura 5.15. Definición de probabilidades de ingreso en las diferentes etapas, PB Xotepingo	133
Figura 5.16. Cálculo de ϕ , etapa 1 PB Xotepingo	134
Figura 5.17. Asignación de probabilidades a los beneficios y cálculo de ϕ , etapa 1	135
Figura 5.18. Asignación de número máximo de iteraciones, variables de estado y control y probabilidades de cada etapa.....	136
Figura 5.19. Cálculo del estado final durante el proceso iterativo	136
Figura 5.20. Beneficios totales, N=10, etapa 3.....	137
Figura 5.21. Beneficios totales, N=10, etapa 2.....	137
Figura 5.22. Beneficios totales, N=10, etapa 1	138
Figura 5.23. beneficios totales, N<Nmax, etapa 3.....	139
Figura 6.1. Definición de las extracciones PB Xotepingo, etapa 1	146
Figura 6.2. Ingresos a PB Xotepingo durante el periodo representativo	147
Figura 6.3. Solicitud del día a analizar	147
Figura 6.4. Asignación de volumen de salida	148
Figura 6.5. Recomendaciones de velocidad de campana del HI.....	149
Figura 6.6. Medidas de cárcamos de bombeo rectangulares.....	150
Figura 6.7. Límites de volumen en el cárcamo de PB Xotepingo	152
Figura 6.8. Límites de volumen en el cárcamo del Rebombero Estrella.....	152
Figura 6.9. Definiciones de las extracciones PB Xotepingo, etapa 2	153
Figura 6.10. Definición de las extracciones PB Xotepingo, etapa 3	154

Figura 6.11. Instrucción para graficar los volúmenes calculados cada hora del día	154
Figura 6.12. Comportamiento del cárcamo PB Xotepingo, cárcamo lleno	156
Figura 6.13. Comportamiento gráfico del cárcamo PB Xotepingo, cárcamo lleno	156
Figura 6.14. Comportamiento del cárcamo PB Xotepingo, cárcamo a la mitad ..	157
Figura 6.15. Comportamiento del cárcamo del rebombeo estrella, cárcamo lleno	158
Figura 6.16. Comportamiento del cárcamo del Rebombeo Estrella, cárcamo a la mitad	158
Figura 7.1. Curva H-Q PB Xotepingo, vel. Reducida.....	160
Figura 7.2. Puntos de operación Rebombeo Estrella, vel. reducida 11%.....	162
Figura 7.3. Puntos de operación Rebombeo Estrella, vel. reducida 4%.....	163
Figura 7.4. Puntos de operación Rebombeo Estrella, vel. reducida 13%.....	163
Figura 7.5. Curvas características de bomba propuesta en el Rebombeo Estrella	164
Figura 9.1. Volúmenes, por hora, que ingresaron a PB Xotepingo	174
Figura 9.2. Volúmenes, por hora, que ingresaron al Rebombeo Estrella	177

Índice de tablas

Tabla 1.1 Infraestructura de agua potable de SACMEX. Fuente: SACMEX, 2018	24
Tabla 2.1. Principales puntos del sistema analizado	30
Tabla 4.1. Lecturas de eficiencia para algunos valores de gasto de la curva H-B, Xotepingo	65
Tabla 4.2. Lecturas de eficiencia para algunos valores de gasto de la curva H-B, Rebombero Estrella.....	68
Tabla 4.3. Probabilidades de ingreso para cada etapa del ejemplo demostrativo.	75
Tabla 4.4. Procedimiento para el cálculo de Φ	76
Tabla 4.5. Cálculo de ϕ para $i=4$ y $k=1$	80
Tabla 4.6. Cálculo de ϕ para $i=4$ y $k=2$	80
Tabla 4.7. Cálculo de ϕ para $i=4$ y $k=3$	81
Tabla 4.8. Cálculo de ϕ para $i=4$ y $k=1$	81
Tabla 4.9. Cálculo de ϕ para $i=4$ y $k=2$	81
Tabla 4.10. Cálculo de ϕ para $i=4$ y $k=3$	81
Tabla 4.11. Resultados del cálculo de las ϕ para ambas etapas con todos los estados y extracciones.....	82
Tabla 4.12. B^* y k^* . Año 50, segunda etapa.....	83
Tabla 4.13. Cálculo genérico para los beneficios	84
Tabla 4.14. Cálculo de B para $i=4$ y $k=1$. Año 50, primera etapa	88
Tabla 4.15. Cálculo de B para $i=4$ y $k=2$. Año 50, primera etapa	88
Tabla 4.16. Cálculo de B para $i=4$ y $k=3$. Año 50, primera etapa	89
Tabla 4.17. B^* y k^* . Año 50, primera etapa	89
Tabla 4.18. B^* y k^* corregidos. Año 50, primera etapa.....	89
Tabla 4.19. B^* y k^* . Año 49, segunda etapa.....	90
Tabla 4.20. B^* y k^* corregidos. Año 49, segunda etapa	90
Tabla 4.21. B^* y k^* . Año 49, primera etapa	90
Tabla 4.22. B^* y k^* corregidos. Año 49, primera etapa.....	91
Tabla 4.23. Comparación de B^* y k^* de ambas etapas del año 47 y 46.....	91
Tabla 4.24. Política óptima de operación	92
Tabla 4.25. estados en el cárcamo de PB Xotepingo.....	93
Tabla 4.26. Estados en el cárcamo del Rebombero Estrella.....	94
Tabla 4.27. Ejemplo de registros de caudal bombeado en PB Xotepingo.....	95
Tabla 4.28. Adiciones hechas a los registros de caudal de PB Xotepingo	95
Tabla 4.29. Ejemplo de cálculo de volumen en diferentes horas de registro en PB Xotepingo	97
Tabla 4.30. Resumen de los volúmenes obtenidos para la hora 00:00 a 00:59 en PB Xotepingo	97
Tabla 4.31. Extracciones en PB Xotepingo	98
Tabla 4.32. Ejemplo de registros de caudal bombeado en Rebombero Estrella	99

Tabla 4.33. Ejemplo de cálculo de volumen en diferentes horas de registro en Rebombero Estrella.....	100
Tabla 4.34. Resumen de los volúmenes obtenidos para la hora 00:00 a 00:59 en Rebombero Estrella.....	101
Tabla 4.35. Extracciones en Rebombero Estrella.....	102
Tabla 4.36. Cálculo del beneficio para PB Xotepingo en la etapa 1, extracción de 100 m ³ y estado inicial del cárcamo de 1900 m ³	108
Tabla 4.37. Cálculo del beneficio para el Rebombero Estrella en la etapa 1, extracción de 100 m ³ y estado inicial del cárcamo de 1500 m ³	109
Tabla 4.38. Proceso para determinar los beneficios totales en cada uno de los días y etapas.....	111
Tabla 4.39. B* y k*. Día 100 tercera etapa, PB Xotepingo	113
Tabla 4.40. Ejemplo de cálculo de beneficio total. PB Xotepingo, día 100 etapa 2	115
Tabla 4.41. B* y k*. Día 100 tercera etapa, Rebombero Estrella.....	116
Tabla 4.42. Ejemplo de cálculo de beneficio total. Rebombero Estrella, día 100 etapa 2	118
Tabla 5.1. Resultados optimización PB Xotepingo, etapa 3.....	140
Tabla 5.2. Resultados optimización PB Xotepingo, etapa 2.....	141
Tabla 5.3. Resultados optimización PB Xotepingo, etapa 1	142
Tabla 5.4. Resultados optimización Rebombero Estrella, etapa 3	143
Tabla 5.5. Resultados optimización Rebombero Estrella, etapa 2	143
Tabla 5.6. Resultados optimización Rebombero Estrella, etapa 1	144
Tabla 7.1. Gastos de operación con dos bombas diferentes en paralelo.....	165
Tabla 7.2. Gastos de operación con una bomba grande y dos chicas	165
Tabla 9.1. Valores de ϕ . Etapa 1 PB Xotepingo.....	178
Tabla 9.2. Valores de ϕ . Etapa 2 PB Xotepingo.....	179
Tabla 9.3. Valores de ϕ . Etapa 3 PB Xotepingo.....	180
Tabla 9.4. Valores de ϕ . Etapa 1 Rebombero Estrella	181
Tabla 9.5. Valores de ϕ . Etapa 2 Rebombero Estrella	182
Tabla 9.6. Valores de ϕ . Etapa 3 Rebombero Estrella	183

Capítulo 1. Introducción

La gestión de los recursos hídricos es uno de los temas centrales en cualquier agenda a nivel internacional. Debido a la complejidad que representa, diversos actores han planteado los retos y dificultades, pero también los aciertos y las oportunidades para promover una gestión integrada en donde intervengan varios actores interesados y converjan temáticas de interés (Millán-Baquedano, 2020).

Para superar los grandes y complejos desafíos en materia de agua, es primordial direccionar recursos, sumar voluntades, capacidades para hacer frente a la necesidad que la población enfrenta en la distribución de este recurso y mejorar la infraestructura necesaria para administrar responsablemente el uso del agua y sus servicios conexos.

El mantenimiento, operación y desarrollo de la infraestructura hidráulica requiere una importante cantidad de recursos económicos, por lo que a lo largo de la historia se han explorado diversos mecanismos para operar adecuadamente la infraestructura, cada uno de ellos asociado a retos particulares (González-Villarreal & Arriaga-Medina, 2020).

1. 1. El agua en la Ciudad de México

La Ciudad de México, una de las urbes más pobladas del mundo, edificada a 2240 metros sobre el nivel del mar, aparece como un conjunto de edificios, calles, autos y anuncios; el concreto, el vidrio y el asfalto dominan el paisaje. El agua de repente se volvió casi imperceptible a los ojos y oídos humanos. Durante los últimos años se ha construido una ciudad cada vez alejada de la naturaleza. Aquí, como en otras partes del mundo, la cultura urbana se aleja progresivamente de los contextos naturales que la rodean.

En 500 años, la Ciudad de México ha sufrido uno de los cambios urbanísticos y ecológicos más radicales del planeta. La transformación fue resultado del encuentro entre dos mundos, una conjunción de culturas antagónicas que a partir del siglo XVI dio origen al mestizaje a costa de suprimir la civilización lacustre (Legorreta, 2006).

El diseño de Tenochtitlán estaba basado en una planeación cuidada que resultaba en un conjunto urbano ambientalmente equilibrado: cinco lagos (Xaltocan,

Zumpango, Texcoco, Xochimilco y Chalco) constituían el principal ingrediente de este paisaje y lo hacían único.

1. 1. 1. Obras hidráulicas en la época prehispánica

El rápido crecimiento de los habitantes en la Ciudad de México-Tenochtitlán demandó por parte de sus gobernantes la búsqueda de alternativas que permitieran abastecer de agua a su población, por lo que en el año 1381 se construyó un acueducto de madera que permitiera aprovechar el agua de los manantiales de Chapultepec y transportarla a donde era demandada por los habitantes, sin embargo, debido a su trayecto y mala construcción, esta obra fue destruida.

La siguiente gran obra hidráulica construida en México-Tenochtitlán fue el albarradón de Nezahualcóyotl en 1446. Ésta tenía la finalidad de evitar inundaciones en la ciudad cuando el nivel del lago de Texcoco aumentaba. Los materiales que constituían el albarradón eran madera, piedra y barro. Su construcción se asemejaba a una cerca con un muro de mampostería que permitía contener el flujo de agua del lago de Texcoco en épocas de lluvias y verter el agua en época de estiaje. Esta obra hidráulica cubría una longitud total de 16 km: desde el cerro de Atzacualco hasta Iztapalapa (SACMEX, 2012).

Al encontrarse completamente establecido el imperio mexica, fue necesario controlar el suministro de agua mediante la construcción de un acueducto en 1466. Esta obra iniciaba en los manantiales del Bosque de Chapultepec y concluía en el centro de la actual Ciudad de México. El acueducto contaba con un canal alterno en todo su trayecto que permitía realizar el mantenimiento necesario. Posteriormente, algunos tramos de este acueducto fueron destruidos por Hernán Cortés para impedir el suministro de agua potable a Tenochtitlán.

Fue hasta 1486 que se realizó otra obra hidráulica importante en Tenochtitlán. A solicitud de Ahuizótl se construyó un nuevo acueducto que condujo agua desde Coyoacán hasta el centro de Tenochtitlán. En 1499 se presentaron eventos hidrometeorológicos de gran intensidad que provocaron el desbordamiento del acueducto. Este evento incentivó a la construcción de un nuevo albarradón más cercano a Tenochtitlán.

El desarrollo de infraestructura en la época prehispánica estuvo enfocado principalmente en la conducción de agua dulce desde territorios con disponibilidad de este recurso hasta el centro de Tenochtitlán, así como en realizar obras que permitieran disminuir los daños asociados a las eventuales inundaciones derivadas de precipitaciones extremas.

1. 1. 2. Obras hidráulicas en la época colonial

Durante la colonización, bajo el mandato de Hernán Cortés, se mandaron derribar algunas obras con el objetivo de que los barcos españoles pudieran transitar durante la batalla.

Después de la conquista, México continuó creciendo sin que los españoles comprendieran el papel que jugaban los canales, las acequias, los albarradones y sus compuertas en el entorno hídrico de la ciudad. Realizaron actividades en la tierra que derivaron en un incremento en la erosión del suelo y la sedimentación en los lagos, disminuyendo con ello su capacidad de almacenamiento. Con el transcurso de los años, estos cambios hicieron cada vez más notorio que el aumento de las lluvias traía consigo también un aumento en los niveles de los ríos y arroyos que desembocaban en los lagos. A la vez que los canales y acequias conducían caudales mayores (SACMEX, 2012)

Ya constituida la Nueva España, los niveles en los cuerpos de agua preocupó a la población, por lo tanto, se construyó una obra de protección: el albarradón de San Lázaro, asimismo, se presentaron iniciativas para regular el agua, conservando una parte para la agricultura y usos domésticos.

Posteriormente se construyó un acueducto que condujo el agua del manantial Santa Fe a la Ciudad de México, sin embargo, a consecuencia de las fuertes tormentas, sufrió daños. Esta obra no fue la única perjudicada, la ciudad nuevamente sufrió inundaciones graves como producto de los eventos hidrometeorológicos extremos. Con el objetivo de disminuir los efectos negativos del agua, el virrey Luis de Velasco puso su mayor interés en la construcción del Tajo de Nochistongo, una obra para el desagüe del Valle de México.

Después de presentarse eventos extremos de precipitación que derivaron en trágicas consecuencias para la Ciudad de México debidas a la mala construcción de obras de desagüe, se sentaron las bases para la construcción del Canal del Desagüe (SACMEX, 2012). Al tiempo que se llevaban a cabo las obras de desagüe en la cuenca de la Ciudad de México, se construyó un acueducto desde los manantiales de Chapultepec hasta la fuente conocida como Salto del Agua. Hasta 1860 el agua llegaba por un acueducto de donde la tomaban los distribuidores encargados del reparto de agua a las zonas periféricas. El agua no era potable y tampoco se distribuía de forma domiciliaria.

A pesar de los pocos avances observados en materia de infraestructura hidráulica durante gran parte de tiempo posterior a la guerra de independencia, algunas personas propusieron alternativas para evacuar las aguas de la Ciudad de México y así prevenir daños en la salud por causa de las aguas residuales.

1. 1. 3. Obras hidráulicas en los siglos XIX y XX

Continuando con la búsqueda de un proyecto de desagüe general y permanente que contribuyera a evitar las inundaciones en la Ciudad de México, y reconociendo que las obras existentes hasta el momento eran insuficientes para drenar los gastos máximos, en 1856 la Junta Menor de las Obras del Drenaje publicó una convocatoria en la cual invitaba a todos los peritos a la presentación de un proyecto que considerara (SACMEX, 2012):

- El control y conducción de las aguas que escurrieran en la cuenca y las que ya estaban almacenadas previamente. Esto con el objetivo de que la ciudad y su vecindad permanecieran sin riesgo de inundación.
- Liberar obstáculos en el alcantarillado que impidiera el libre tránsito de las aguas y así tener una corriente continua que aminorara los trabajos de limpieza y mantenimiento periódicos.
- Construir el mayor número de canales de transporte y comunicación en todas las direcciones, principalmente en las rutas de comercio, tanto a los puertos como a todo al interior de la república.
- Aprovechar la mayor cantidad de agua proveniente de las precipitaciones para el desarrollo y crecimiento de la agricultura de riego en la cuenca del Valle de México.

La propuesta ganadora fue la de construir un canal principal de desagüe para el control de las inundaciones, lo que actualmente es el Gran Canal de Desagüe. Una vez que se determinó como mejor alternativa la construcción de la estructura pionera del Gran Canal de Desagüe, en 1866 comienzan formalmente los trabajos. Fue hasta 1867 que se autorizó el proyecto definitivo del Gran Canal de Desagüe, sin embargo, los trabajos se suspendieron debido a la Guerra de Reforma. La ejecución de esta obra fue retomada posteriormente por el presidente Porfirio Díaz. El arranque de los trabajos del Gran Canal se postergó hasta 1885 (Lesser-Illades & Cortés-Pérez, 1998).

Por otro lado, los dos acueductos, el de Chapultepec y el de Santa Fe, abastecieron de agua a la Ciudad de México durante todo el periodo colonial y hasta finales del siglo XIX, cuando el agotamiento de los manantiales hizo necesaria la búsqueda de nuevas fuentes de abastecimiento que permitieran cubrir la demanda de agua y mejorar la calidad de la misma, ya que durante esa época las redes de distribución se encontraban bastante deterioradas, lo que propiciaba variaciones en la presión y diversas fugas de agua. Por tal motivo, era necesario llevar a cabo estudios que permitieran determinar nuevas fuentes de abastecimiento y la creación de infraestructura hidráulica óptima. La proyección y ejecución de dicho proyecto inició con la identificación de los manantiales La Noria, Santa Cruz y San Luis, todos ellos ubicados en Xochimilco (Bernández-de la Granja, 2012).

El siguiente paso del proyecto era la construcción de un acueducto que condujera el agua proveniente de Xochimilco. En 1905 inició la construcción del acueducto que conduciría el agua hasta las redes centrales de distribución de la ciudad, adicionalmente, se construyó la planta de bombeo La Condesa y las obras para tender la nueva red de tuberías encargadas de la distribución secundaria (Bernández-de la Granja, 2012).

Ante la permanente necesidad de suministrar agua para consumo humano a la Ciudad de México con nuevas fuentes de abastecimiento y reducir el impacto de la extracción del agua del subsuelo, se inició la construcción de un sistema que trajera agua proveniente fuera de la cuenca del Valle de México. Se construyó un acueducto de 62 km de longitud para conducir 4 m³/s de agua desde una cuenca vecina (SACMEX, 2012).

En 1929 se comenzaron a controlar los picos de las avenidas de todos los ríos del poniente a través de la construcción de diferentes presas como Tecamachalco, San Joaquín, la derivadora del Tornillo, Becerra, Tacubaya, Mixcoac El Capulín y, además, se entubó el río Consulado y el río La Piedad, también se construyeron los túneles Mixcoac-Becerra y Becerra-Tacubaya. Dieciocho años después se detonó la elaboración de un Plan de Control Fluvial que derivó en el inicio de la construcción del nuevo túnel de Tequixquiac con una capacidad de 60 m³/s (SACMEX, 2012).

1. 1. 4. Obra hidráulica moderna

A la capacidad de desalojo de drenaje de las obras ya construidas (Tajo de Nochistongo, El Gran Canal y el Nuevo Túnel de Tequixquiac) se añadió un sistema de plantas de bombeo que permitieran elevar las aguas residuales y pluviales de los colectores al canal de desagüe.

A finales de la década de los años 60 se continuó con la entubación de diversos canales, obras de rectificación y renivelación de la red de drenaje para compensar el hundimiento y seguir soportando la capacidad de conducción, sin embargo, dichas acciones también resultaron insuficientes, por lo tanto, debía construirse un sistema de drenaje lo suficientemente profundo para que, por más que se hundiera la ciudad, éste no dejara de funcionar adecuadamente (SACMEX, 2012).

Respecto al agua potable, para incrementar el abastecimiento a la Ciudad de México, se inició en 1976 la construcción del Sistema Cutzamala, esto derivado del agotamiento de los recursos hídricos de la cuenca de Lerma y de la constante extracción de agua del subsuelo en la ciudad que derivó en el hundimiento de ésta. Este proyecto consistía en el aprovechamiento de siete presas localizadas en la cuenca alta del río Lerma (Santos-Téllez et al., 2021).

Uno de los retos principales de este sistema fue el bombeo del agua desde la cota 1600 msnm, en el punto más bajo del sistema, hasta la cota 2702 msnm en el punto más alto, además de requerir vencer pérdidas por fricción en los 127 km de trayecto para conducir el agua hasta el punto final (Santos-Téllez et al., 2021). En 1992, año en el que fue concluida la última etapa de construcción del Sistema Cutzamala, éste contaba con:

- 7 presas principales
- 334.4 km de canalizaciones primarias para el agua, distribuidas en 218 km de acueductos por tubería metálica y de concreto, 43.9 km de túneles y 72.5 km de canales abiertos
- 6 plantas de bombeo que consumían gran cantidad de energía eléctrica
- Una planta potabilizadora con capacidad de 19 m³/s

Mientras era construido el Sistema Cutzamala, se consideró necesario contar con una conducción que diera flexibilidad a la distribución de agua proveniente del Cutzamala, surgiendo así los proyectos del Macrocircuito y el Acuaférico (SACMEX, 2012).

1. 1. 5. Agua disponible en la Ciudad de México

Es a través del Sistema Cutzamala y de las obras de almacenamiento y distribución de agua complementarias que la población de la Ciudad de México disfruta del vital líquido, en promedio, 320 litros al día por habitante, lo que implica que el abastecimiento de agua potable a la ciudad es de 31.2 m³/s (SEDEMA, 2016):

- 9 m³/s se extraen del Sistema Cutzamala
- 2.1 m³/s del sistema de pozos en Barrientos, ubicado en el Estado de México
- 0.6 m³/s de la planta de bombeo La Caldera
- 4 m³/s del río Lerma
- 0.9 m³/s del Sistema Chiconautla
- 14.6 m³/s de los manantiales y pozos ubicados en la Ciudad de México

El agua que se extrae del subsuelo en la Ciudad de México representa 8.1 puntos porcentuales por encima del promedio nacional de agua que se consume de origen subterráneo (IMTA, 2019). México cuenta con 282 acuíferos, de los cuales 101 se encuentran sobreexplotados (Ortega-Font, 2011).

En México llueve cada año aproximadamente 722.5 mm de agua (CONAGUA, 2021). De esta cantidad, se estima que 73.2% se evapotranspira, otro 22.1% se incorpora a ríos o arroyos y el 4.7% restante se infiltra al subsuelo y recarga los acuíferos que son explotados para distintos usos. Para la Ciudad de México se

registra una precipitación media anual de 708 mm (1051 millones de m³) (SEMARNAT, 2021), de esa cantidad 72% se evapotranspira, 4% se recupera en las aguas superficiales, 14% se escurre y 11% se infiltra para la recarga de acuíferos. El agua del escurrimiento y la recarga del subsuelo representa el líquido naturalmente disponible para los habitantes de la ciudad. (Ortega-Font, 2011).

La extracción de agua para la Zona Metropolitana de la Ciudad de México es de 2922 hm³/año, lo que significaría que se está rebasando la disponibilidad natural de los acuíferos en un 173%. Del total del agua extraída para la Ciudad de México, 67% proviene de fuentes propias de la ciudad, el 21% se importa de otras cuencas como los sistemas Lerma y Cutzamala y el 12% proviene de aguas de rehúso (Ortega-Font, 2011).

Del total del agua extraída para consumo en la Ciudad de México, el 48.4% del agua es empleada para uso agrícola, 45.3% para abastecimiento público, 4.5% para uso industrial y 1.8% para la generación de energía eléctrica en plantas termoeléctricas (SEMARNAT, 2010).

En la Ciudad de México se obtienen 1,072,783,000 m³ de agua cada año. El costo unitario de cada litro es de \$2.02 MXN. El porcentaje de agua suministrada con respecto a la producida es del 66% y el costo unitario del m³ de agua suministrado es de \$3.08 MXN. El precio promedio del m³ de agua en la Ciudad de México es de \$5.45 MXN e incluye abasto, suministro, desalojo y saneamiento (Ortega-Font, 2011).

Para que los habitantes de la ciudad puedan disponer del agua en sus hogares, son necesarias cinco etapas en el abastecimiento: captación, conducción, tratamiento, almacenamiento de agua y, finalmente, distribución del recurso.

Cuando el agua ya ha sido tratada, ésta se almacena para que sea repartida a través de las redes de distribución. Éstas suelen estar compuestas por plantas de bombeo, tuberías principales y secundarias y accesorios que permitan el control del flujo. Todo este esfuerzo que implica el abastecimiento doméstico de agua potable significa una serie de costos, principalmente en infraestructura necesaria para el traslado y distribución del agua.

1. 2. Infraestructura para distribución de agua potable en la Ciudad de México

La demanda de agua potable se atiende empleando fuentes internas y externas. El suministro promedio anual en la última década es de 31.4 m³ /s, con un mínimo de 29.3 m³ /s y un máximo de 33.6 m³ /s. El área de servicio de la Ciudad de México

abarca casi 11000 kilómetros de líneas de distribución y 243 tanques de almacenamiento, con una capacidad total de 1.5 millones de metros cúbicos. El agua proviene de todas las fuentes individuales que entran al sistema de distribución común (National Research Council, 1995).

La cobertura de suministro de agua potable en la Ciudad de México es del 98% de los habitantes; el restante 2% no cuenta con el servicio por medio de la red debido a que se trata de asentamientos en situación irregular que son abastecidos por tanques cisterna (pipas) y mediante la captación de agua de lluvia. En la Tabla 1.1 se muestra la infraestructura del sistema de agua potable con la que cuenta el SACMEX (SACMEX, 2018).

Tabla 1.1 Infraestructura de agua potable de SACMEX. Fuente: SACMEX, 2018

Instalación	Cantidad
Pozos totales	884
Pozos en la CDMX	450
Pozos del Sistema Lerma	395
Pozos del Sistema Chiconautla	39
Plantas de bombeo	268
Plantas potabilizadoras	58
Estaciones de cloración	15
Tanques de almacenamiento	357
Líneas de conducción y acueductos	732 km
Red primaria	1274 km
Red secundaria	11972 km
Subestaciones eléctricas	23
Líneas eléctricas de alta tensión	2589 km
Manantiales	69
Trifurcaciones	10
Dispositivos de cloración	448
Cámara de válvulas	1
Garzas para pipas de agua potable	33

La macromedición es muy importante para el control de las entregas de agua en bloque a la Ciudad de México, la regulación de presiones en la red primaria, una mejor distribución de caudales y para la operación de puntos críticos del sistema de drenaje con base en la información de intensidad de precipitación registrada en tiempo real, que se obtiene en la CDMX y su zona conurbada mediante instalaciones en los puntos estratégicos de los sistemas de agua potable y drenaje. Los parámetros medidos son: caudal, volumen, presión, nivel de almacenamiento y la altura e intensidad de la precipitación pluvial (SACMEX, 2018).

1. 3. Uso eficiente del agua en las grandes ciudades

El entorno geográfico de la zona metropolitana y numerosos acontecimientos históricos y políticos crearon las circunstancias propicias para que la Ciudad de México concentre la relevancia económica del país a través del comercio, los servicios financieros, transporte, turismo, entre otros (Asuad-Sanén, n.d.) y, esto, a su vez, ha favorecido el rápido crecimiento de la población en la zona metropolitana, principalmente la expansión en áreas urbanas, áreas residenciales y en asentamientos no planificados en áreas periféricas a las urbanizadas (SACMEX, 2012).

Los gobiernos han prestado atención al crecimiento poblacional proporcionando los servicios públicos domiciliarios de agua potable, alcantarillado sanitario, tratamiento de aguas residuales, entre otros; sin embargo, dicho crecimiento poblacional, el desarrollo urbano y la disminución de las zonas de recarga natural del acuífero de la cuenca del Valle de México han provocado una sobreexplotación desmedida del mismo. Algunas de las consecuencias más visibles son los hundimientos y grietas en la ciudad, la alteración de la calidad del agua y una oferta menor a la demanda.

Las acciones que se han llevado a cabo para ofrecer un servicio de calidad en el abastecimiento y distribución de agua potable no son suficientes para asegurar el desarrollo sostenible de la ciudad en materia hídrica.

Una correcta administración del recurso no sólo considera el desarrollo permanente de infraestructura y el otorgamiento de servicios de calidad a la población, sino que requiere además de una gestión eficiente que permita minimizar al máximo las pérdidas de volumen a lo largo de la red (SACMEX, 2012).

Las técnicas de uso eficiente del agua en las ciudades se pueden clasificar en cinco grupos: medición, detección y reparación de fugas, sistemas tarifarios, reglamentación y comunicación y, finalmente, educación (Arreguín-Cortés, 1991).

La medición en las ciudades es necesaria en dos niveles: macro y micro. La macromedición se refiere a la cuantificación de los caudales captados, conducidos y distribuidos. Esta actividad es fundamental para la planeación, diseño, construcción, operación, mantenimiento y administración de los sistemas operadores de agua potable y alcantarillado. La micromedición tiene por objeto cuantificar periódicamente el consumo de agua de cada usuario con fines de facturación, de asegurar que los consumos sean racionales y para mantener un equilibrio adecuado entre la producción y la demanda del agua (Quiroz-Félix, 2004).

La macromedición es fundamental en un organismo operador ya que permite obtener variables como caudales, presiones y niveles en puntos significativos de los sistemas de agua (Fuentes-Barrera, 2009); generar información que permita evaluar

el equilibrio en el suministro de agua en las diferentes zonas y analizar la homogeneidad de presiones en las redes de distribución; evaluar las condiciones hidráulicas reales de funcionamiento del sistema y generar información para la planeación y ejecución de los programas de mantenimiento tanto preventivo como correctivo en las líneas de conducción, redes de distribución, instalaciones y equipos electromecánicos, plantas de potabilización y tanques de almacenamiento, sin embargo, un problema común relacionado con la macromedición es la poca utilización de los datos obtenidos para la operación de los sistemas.

En cuanto a la micromedición, ésta permite la racionalización de los recursos hídricos, optimización de los recursos disponibles en los sistemas a través de la dictaminación de inversión en la incrementación de cobertura de agua potable, así como en la generación de información sobre el comportamiento del consumo de las diferentes categorías de consumidores (Arreguín-Cortés, 1991).

Las pérdidas en los sistemas de agua potable se deben principalmente a la infiltración en los vasos de almacenamiento y regulación, a las fugas en las redes y tomas domiciliarias y tomas clandestinas. En la red, las fugas pueden presentarse como consecuencia de roturas debidas al agrietamiento transversal, aplastamiento o agrietamiento longitudinal, mientras que en las tomas domiciliarias las fallas usualmente presentadas son por rajaduras, perforación, cortes o piezas flojas. La detección y reparación de fugas pueden derivar en un uso más eficiente de los recursos existentes, al poder ampliar la cobertura o diferir la construcción de obra nueva, así como el mejoramiento financiero al reducirse los costos de potabilización y bombeo (Arreguín-Cortés, 1991).

Históricamente los costos del agua han sido subsidiados en gran parte por los gobiernos, sin embargo, cada vez es más difícil con estos esquemas de financiamiento y se trata de establecer políticas tarifarias que involucren más al consumidor. Al cobrar adecuadamente a los usuarios, el consumo de agua se hace eficiente, pues tiende a disminuir el volumen de agua usado y se evita el desperdicio. El ajuste de tarifas es un proceso indispensable debido al cambio en los costos de los insumos. Si no se planifica y establece una política en ese sentido, las tarifas quedan sujetas a circunstancias ajenas al organismo operador (Solís, 2005).

En general, los reglamentos para hacer más eficiente el uso del agua son restrictivos y tienen efecto en el ahorro del líquido, pueden ser de mediano o largo plazo o aplicables sólo durante las épocas de escasez. Para que todo programa de uso eficiente del agua tenga éxito debe contar con la participación ciudadana y para ello es necesario establecer acciones de comunicación y educación.

La sostenibilidad de los recursos hídricos no sólo se limita al uso eficiente del agua, sino a la óptima utilización de todos los factores involucrados en el uso y distribución del recurso, entre ellos, la infraestructura necesaria para el abastecimiento: líneas de conducción, plantas de bombeo, entre otros.

A su vez, el uso óptimo de la infraestructura no sólo se limita a aprovechar la capacidad instalada de las estructuras, equipos electromecánicos y accesorios, sino también al uso apropiado y óptimo de los recursos económicos empleados en la operación de dichos elementos. Economizar en la operación de infraestructura hidráulica permite trasladar el capital ahorrado en políticas o acciones que deriven en un uso sostenible del agua.

Al optimizar el capital de un mecanismo utilizado perpetuamente, como lo es el bombeo en las ciudades, los recursos económicos racionalizados pueden derivar en un monto considerablemente alto y, por lo tanto, el organismo encargado del abastecimiento de agua potable y saneamiento puede enfocar el capital, económico y humano, a la construcción de infraestructura hidráulica que contribuya al desarrollo integral sustentable de las ciudades.

Optimizar el proceso de bombeo en una de las líneas primarias de agua potable en la Ciudad de México permite que la institución encargada de prestar servicios públicos de suministro de agua pueda tomar decisiones clave para estandarizar los procesos y así contribuir al aumento de la productividad, reducir errores humanos al mínimo, ser capaces de tener mayor velocidad de respuesta ante los cambios y mejorar el manejo de la información sensible.

Actualmente el Sistema de Aguas de la Ciudad de México cuenta con equipo de instrumentación y telemetría que permite registrar y conocer información para el correcto manejo de los recursos hidráulicos en la ciudad. Utilizar dichos datos de forma práctica permite no solo tener conocimiento de los registros históricos, sino desarrollar técnicas que permitan ser más eficientes en el uso de los recursos, no solo materiales, sino intelectuales y aprovechar al máximo la inversión.

Capítulo 2. Descripción del sistema de distribución de agua analizado

A través del análisis de la operación actual de las plantas de bombeo PB Xotepingo y Rebombeo Estrella, ambas localizadas en una línea de conducción primaria de abastecimiento de agua potable en la Ciudad de México, se pretende conocer opciones para mejorar el funcionamiento del sistema teniendo en cuenta el suministro constante del agua en la zona y sectores que dependen del sistema, así como la disminución del costo de la energía eléctrica consumida en el bombeo, buscando la optimización de recursos económicos.

2. 1. Descripción del sistema

2. 1. 1. Elementos del sistema

Las plantas de bombeo Xotepingo y Rebombeo Estrella se localizan dentro del acueducto que constituye el distribuidor Poniente-Oriente que tiene una longitud total aproximada de 12.5 km, implementado con tubería de acero con diámetro de 48". El acueducto recibe agua de los Sistemas Cutzamala y Lerma e inicia en el punto denominado Trifurcación del Cerro del Judío, en la alcaldía Magdalena Contreras. A lo largo de su recorrido entrega agua en ruta a los tanques Mimosa, Lienzo, Cao y a la derivación Cerro del Hombre, llegando a la planta de bombeo Xotepingo, donde se le introduce carga para continuar hasta el pie del Cerro de la Estrella, donde se ubica la planta denominada Rebombeo Estrella, para poder llegar a los tanques de distribución del Cerro de la Estrella, en Iztapalapa (Domínguez-Mora et al., 2019)

La Figura 2.1 y Figura 2.2 muestran algunos puntos del sistema en la ruta de la línea de conducción. Aproximadamente en el cadenamiento 12+500, el acueducto llega a la PB Xotepingo en la elevación 2240 msnm y ésta le agrega carga al agua para continuar su recorrido al Rebombeo Estrella en el cadenamiento 18+200 en la elevación 2244 msnm (Domínguez-Mora et al., 2019).



Figura 2.1 Inicio de la conducción. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019

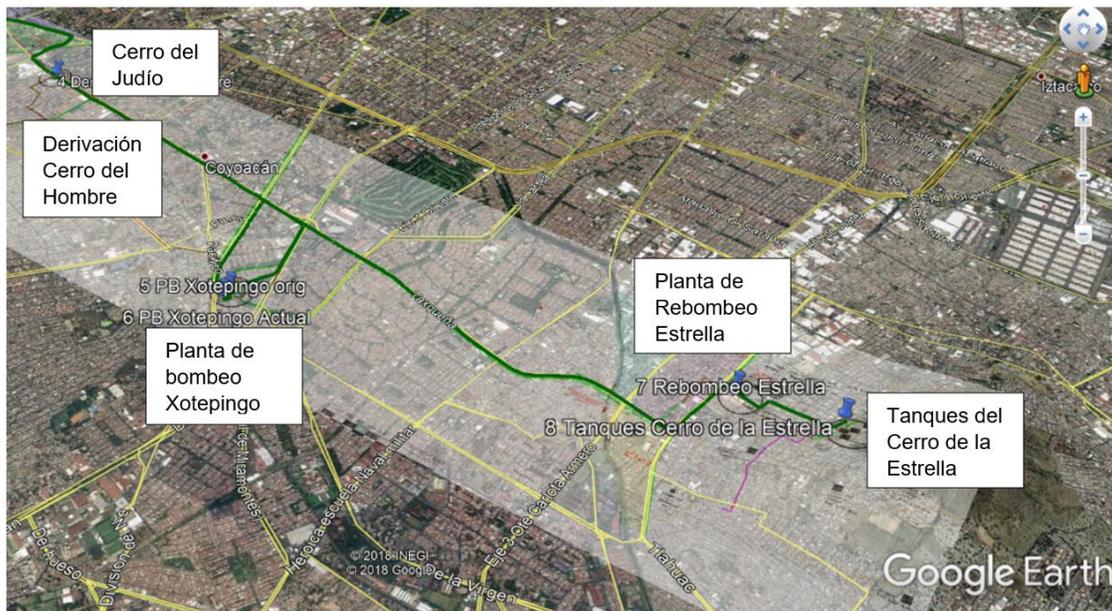


Figura 2.2. Continuación de la conducción. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019

El acueducto, en las condiciones actuales, conduce un caudal medio de $2 \text{ m}^3/\text{s}$. El trazo está fuertemente influenciado por las principales avenidas y calles a través de las cuales se desarrolla. Éste se ha ido conformando aprovechando la utilización de líneas y estructuras previamente existentes que fueron adaptadas (Domínguez-Mora et al., 2019).

A pesar de que el punto de inicio del acueducto está en la cota 2,543.34 msnm que está muy por arriba de los puntos de entrega, éste opera como canal para poder derivar el agua a baja presión. La distribución a los tanques normalmente se practica mediante tandeo con una periodicidad de 24 horas, por lo que cada tanque requiere de la operación manual de válvulas que lo alimentan. Esto hace que el caudal de operación del acueducto varíe a lo largo del día. La Tabla 2.1 presenta, a manera de resumen, los principales puntos a lo largo de la conducción, cabe señalar que los cadenamientos son aproximados (Domínguez-Mora et al., 2019).

Tabla 2.1. Principales puntos del sistema analizado

Acueducto de 48" (1.22 m)			
Principales puntos	Cadenamiento	Elevación	Distancia al siguiente punto
	m	msnm	m
Trifurcación del Judío	0	2543.34	1520
Tanque Mimosa	1+520	2468.79	1310
Tanque Lienzo	2+830	2408.00	970
Tanque Cao	3+800	2555.00	2450
Jardín del arte	6+250	2284.50	2150
Cerro del Hombre	8+400	2253.00	4100
Planta Xotepingo	12+500	2240.00	5700
Rebombero Estrella	18+200	2244.00	1000
Tanques Cerro de la estrella	19+200	2294.27	
		Suma	19+200

2. 1. 2. Instrumentación y telemetría en componentes del sistema

El Sistema de Aguas de la Ciudad de México realiza un monitoreo de algunas variables en ciertos puntos de la red. Dicho monitoreo se realiza en tiempo real en las plantas de bombeo Xotepingo y Cerro de la Estrella a través de instrumentación local.

La macromedición de agua se convierte en una herramienta fundamental para contribuir al mejoramiento tecnológico, administrativo y económico de los órganos encargados de la gestión del recurso hídrico (Fuentes-Barrera & Guerrero-Erazo, 2009).

Actualmente las políticas para el subsector de agua potable se están orientando a que los organismos operadores tiendan a manejarse con autosuficiencia técnica y financiera, para lograr lo anterior es necesario partir desde el conocimiento de los caudales o volúmenes entregados por los diferentes elementos que conforman las redes de abastecimiento. De lo anterior se desprende la importancia de contar con una adecuada infraestructura de macromedición, basada en una correcta selección e instalación de equipos macromedidores, a través de los cuales puede obtenerse información necesaria para realizar los balances hidráulicos del sistema, conocer el comportamiento hidráulico en tiempo real para tomar decisiones operativas sobre el manejo del agua y apoyar la formulación de políticas que permitan optimizar los recursos hídricos y económicos para eficientizar la infraestructura ya existente o la planeación de nueva (CONAGUA, 2007)

Debido a la importancia que conserva la macromedición en las principales líneas de distribución de agua, el Sistema de Aguas de la Ciudad de México monitorea valores de gasto y presión en algunos elementos de dichas redes a través de la plataforma Maestro Aditum. En la descarga de la planta de bombeo Xotepingo y el Rebombéo Estrella, el gasto se obtiene a través de medidores tipo Annubar, así como en la llegada de la planta Xotepingo (Domínguez-Mora et al., 2019).

2. 1. 3. Plantas de bombeo

2. 1. 3. 1. PB Xotepingo

La planta de bombeo Xotepingo cuenta con ocho bombas iguales instaladas en paralelo, de tipo vertical, de un paso. El arreglo permite la alimentación desde un tanque de succión común (ver Figura 2.3).



Figura 2.3. PB Xotepingo. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019

Cada bomba de esta planta fue diseñada para operar con carga de 32 m, gasto de 0.843 m³/s, velocidad de giro de 1,170 rpm y potencia de 500 hp.

Las dimensiones del tanque de succión son 8 m*34 m con un tirante de 7 m, por lo tanto, el volumen del cárcamo es muy cercano a los 1900 m³ (Domínguez-Mora et al., 2019). La curva característica H-Q proporcionada por el fabricante de las bombas actualmente utilizadas, se muestra en la Figura 2.4.

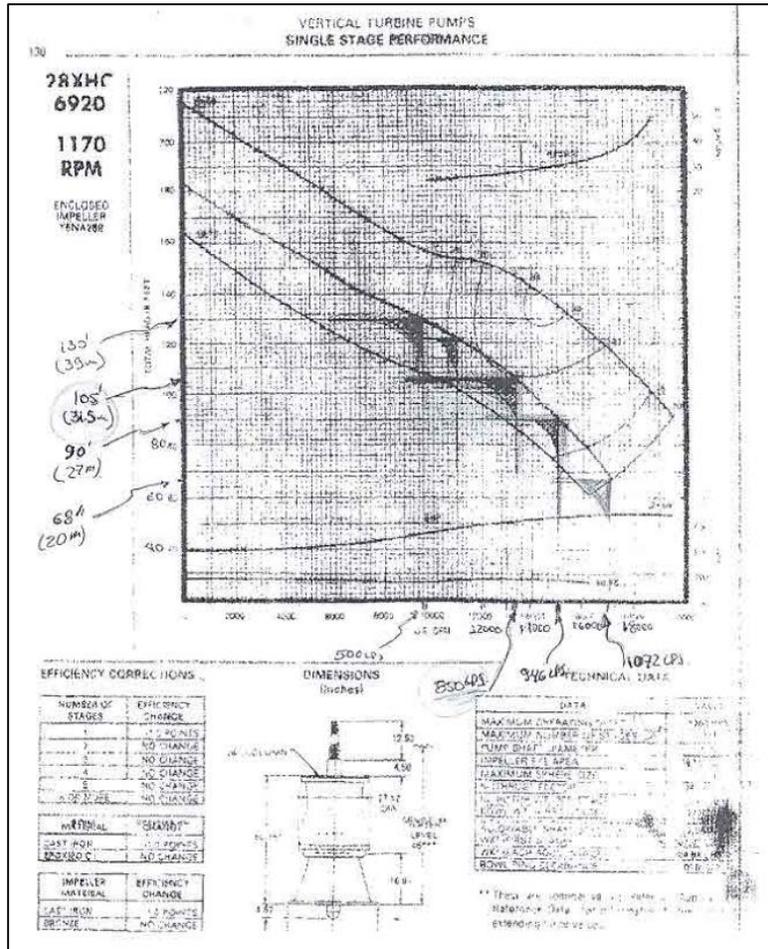


Figura 2.4. Curva característica H-Q de las curvas Fairbanks Morse instaladas en la PB Xotepingo. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019

De la Figura 2.4 se observa que ninguna de las curvas proporciona los datos de diseño. En la Figura 2.5 se presenta la curva calculada a partir de la curva original del fabricante Fairbanks-Morse (curva intermedia de la Figura 2.4), estimando mediante las ecuaciones de afinidad un recorte del 0.9 del diámetro máximo para proporcionar los datos de placa.

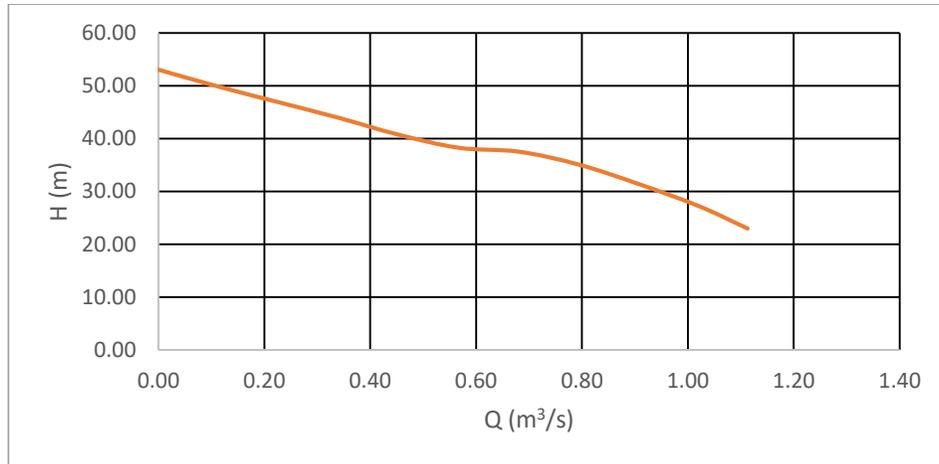


Figura 2.5. Curva correspondiente a los datos de placa: $H=32$ m y $Q=843$ lps

Si se traza en el plano de las curvas características originales proporcionadas por el fabricante la curva H-Q del impulsor recortado al 90%, se obtiene la Figura 2.6, de donde es posible leer la eficiencia para diferentes puntos de la curva con el impulsor recortado.

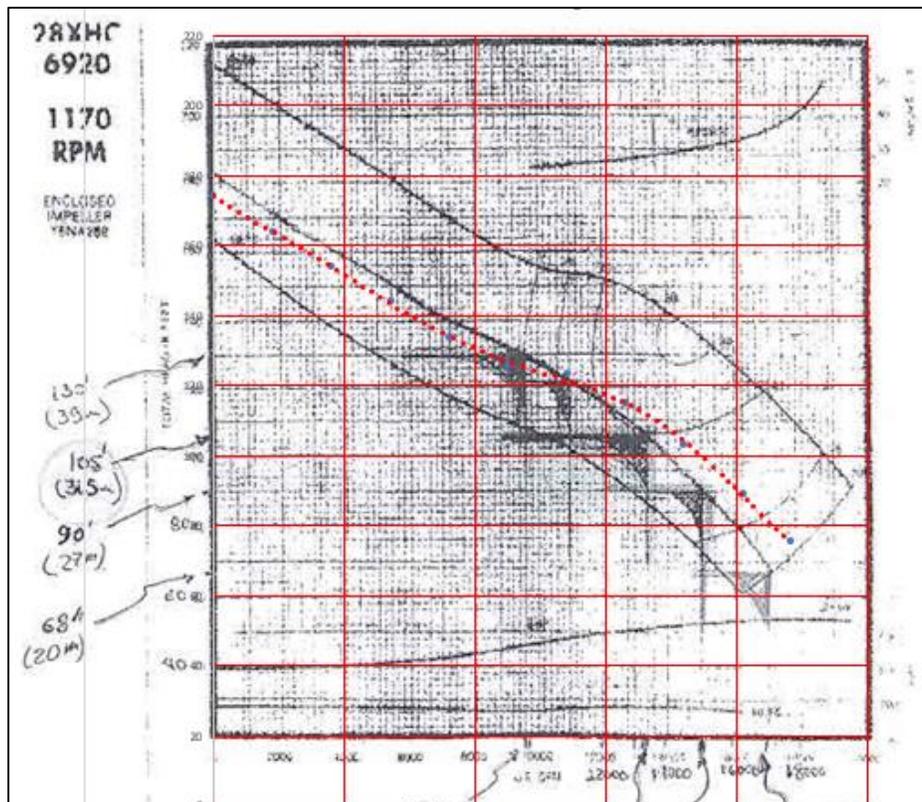


Figura 2.6. Curva H-Q trazada en el plano original del fabricante. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019

2. 1. 3. 2. Rebombéo Estrella

El Rebombéo Estrella cuenta con cinco bombas verticales en paralelo instaladas en lata. Las bombas se alimentan desde un tanque de succión común (ver Figura 2.7).



Figura 2.7. Cárcamo de succión y bombas del Rebombéo Estrella. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019

Los datos de placa de las bombas indican una carga de 70 m (con dos pasos), gasto de $1.0 \text{ m}^3/\text{s}$, velocidad de giro de 1,170 rpm y potencia de 1,250 hp. Las dimensiones del tanque de succión son, en la base, $10.5 \text{ m} \times 28.9 \text{ m}$ con un tirante de 5 m, por lo tanto, el volumen del cárcamo es muy cercano a los 1500 m^3 (Domínguez-Mora et al., 2019). La Figura 2.8 muestra la curva para un solo paso de impulsión según el fabricante.

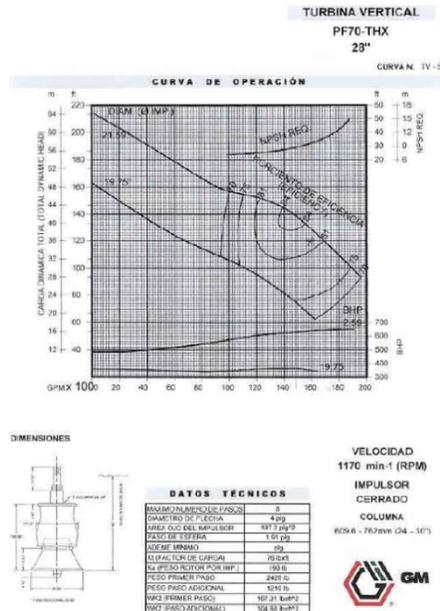


Figura 2.8. Curvas características de las bombas de un solo paso. Fuente: Domínguez-Mora et al., 2019

De la Figura 2.8 se observa que ninguna de las curvas proporciona los datos de diseño. En la Figura 2.9 se presenta la curva calculada a partir de la curva original del fabricante estimando mediante las ecuaciones de afinidad un recorte del 0.96 del diámetro máximo para proporcionar los datos de placa.

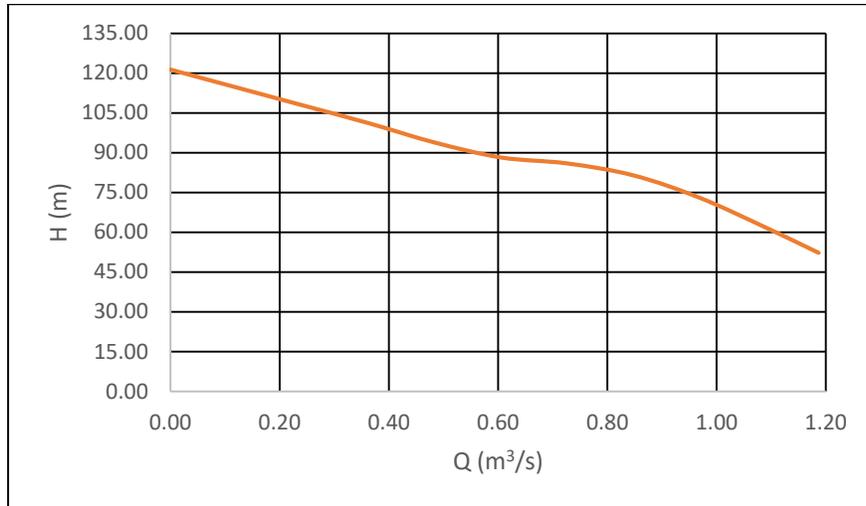


Figura 2.9. Curva correspondiente a los datos de placa: $H=70$ m y $Q=1$ m³/s

La figura anterior corresponde a la curva H-Q de la bomba con el impulsor recortado al 96% y con dos pasos de impulsión, sin embargo, si se grafica la curva H-Q de un solo impulsor en el mismo plano que las curvas características proporcionadas por el fabricante, se obtiene la Figura 2.10.

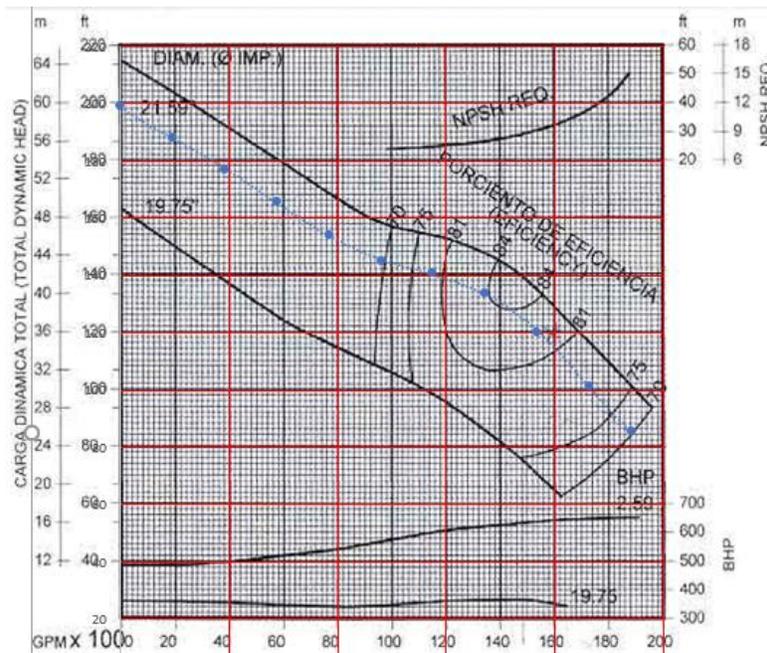


Figura 2.10. Curva H-Q trazada en el plano original del fabricante

2. 2. Descripción de la operación actual de las plantas de bombeo

2. 2. 1. Curvas de los sistemas

La curva resistente del sistema representa los puntos de altura de elevación total que se presentan en el sistema a diferentes caudales desde cero hasta el valor máximo que puede operar el o los equipos de bombeo.

2. 2. 1. 1. PB Xotepingo

Debido a que la carga estática entre la planta de bombeo Xotepingo y el Rebombeo Estrella es de cuatro metros según las elevaciones obtenidas de Google Earth, la Planta de Bombeo Xotepingo adiciona carga al agua para vencer las pérdidas, principalmente por fricción, y conducirla hasta el Rebombeo Estrella, es decir, la carga de bombeo prácticamente debe emplearse para vencer la pérdida de carga del tramo que tiene una longitud de 5700 m con una tubería de acero de 48”.

La carga que se requiere bombear en función del gasto para vencer la carga estática y las pérdidas debidas a la fricción puede obtenerse a partir de la expresión:

$$H_{sis} = He + \left(f * \frac{L}{D} \right) * \frac{Q^2}{2gA^2} \quad [1]$$

Donde:

He es la carga estática entre la planta de bombeo Xotepingo y el rebombeo Estrella, en m

f es el factor de fricción empleado en la ecuación de Darcy-Weisbach, adimensional

L es la longitud del conducto, en m

D es el diámetro del conducto, en m

g es la aceleración debida a la gravedad, en m/s²

A es el área de la sección transversal de la tubería, en m²

Domínguez-Mora et al., (2019) realizaron mediciones in situ donde, a través de registros de caudal y presión, se determinó el factor de fricción en el tramo de tubería que conecta ambas plantas de bombeo del sistema analizado. El factor de fricción que se utiliza es de 0.022. Tomando los datos del tramo aguas abajo de Xotepingo se construye la ecuación que representa la curva del sistema:

$$H_{sis} = 4 + \left(0.022 * \frac{5700}{48 * 0.0254} \right) * \frac{Q^2}{2 * 9.81 * \left(\frac{\pi * (48 * 0.0254)^2}{4} \right)^2} \quad [2]$$

Simplificando:

$$H_{sis} = 4 + 3.846Q^2 \quad [3]$$

Si se sustituyen diferentes valores de gasto (desde cero hasta 3.3 m³/s) en la expresión de la curva del sistema, se obtienen diferentes puntos que pueden ser representados por la curva amarilla de la Figura 2.11.

La PB Xotepingo, al contar con diferentes equipos de bombeo, puede también tener diferentes gastos de operación. Para determinar dichos valores se construye en el mismo plano de la Figura 2.11 la curva equivalente de la bomba al trabajar con uno, dos y tres equipos en paralelo.

La curva azul de la Figura 2.11 representa la operación con un solo equipo (misma curva de la Figura 2.5). Cuando opera más de una bomba, para la construcción de la curva es necesario fijar la carga y multiplicar el gasto de la curva de una bomba por el número de equipos trabajando, de forma que, para la realización de la curva con dos bombas en paralelo, para cada valor de carga se multiplica su correspondiente valor de gasto por dos, obteniéndose así la curva naranja de la Figura 2.11. Al operar tres bombas en paralelo, la curva se construye multiplicando el valor de gasto, correspondiente a cada valor de carga de la curva de una sola bomba, por tres, obteniéndose así la curva gris de la Figura 2.11.

Si se grafican en un mismo plano la curva del sistema y las curvas H-Q de una, dos y tres bombas en paralelo se obtiene la Figura 2.11.

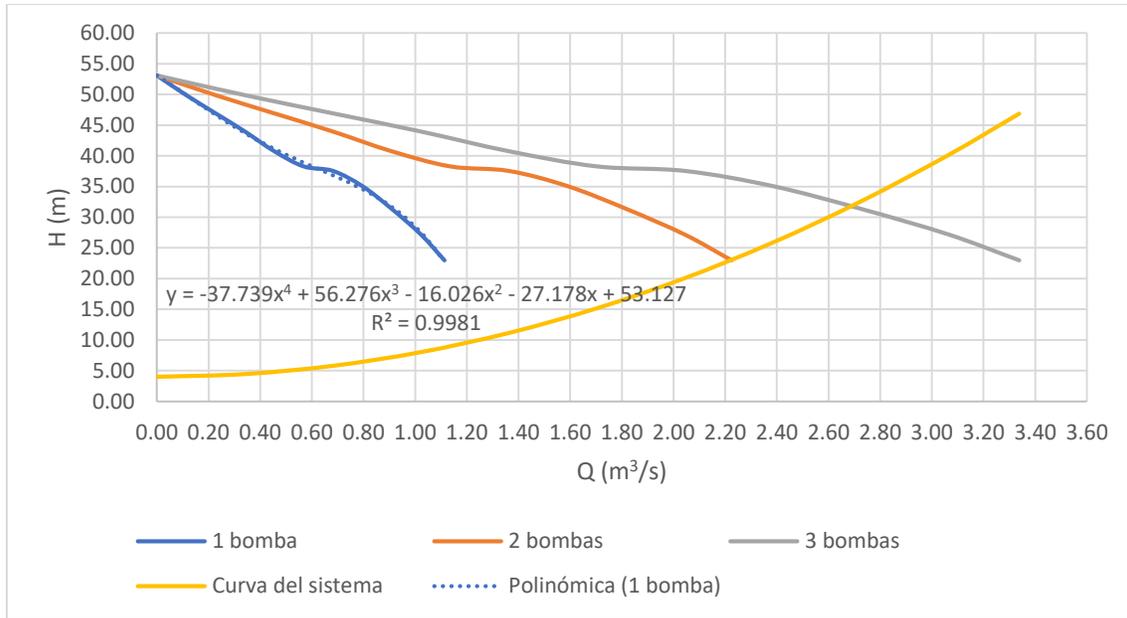


Figura 2.11. Curvas en paralelo y curva del sistema en PB Xotepingo

Si se ajusta un polinomio de cuarto grado a la curva H-Q de una bomba, se obtiene una ecuación que describe el comportamiento de un equipo (ver Figura 2.11). Esta ecuación posteriormente será utilizada en este estudio para la formulación de una función que permita disminuir los costos de operación de las plantas de bombeo.

2. 2. 1. 2. Rebombeo Estrella

El Rebombeo Estrella es el encargado de conducir el agua a los tanques Estrella localizados en el Cerro de la Estrella para su posterior distribución a gravedad. La carga estática que enfrenta esta planta es de 50 m más el tirante que tengan los tanques del Cerro de la Estrella. El máximo tirante que pueden tener es de 6 m.

Si se considera que la tubería que conecta al Rebombeo Estrella con los tanques ubicados en el Cerro de la Estrella tiene las mismas características que la tubería PB Xotepingo-Rebombeo Estrella, es decir, diámetro de 48" y un factor de fricción de 0.022 en una tubería de 1000 m de longitud, y se considera que los tanques del Cerro de la Estrella no se encuentran completamente llenos sino a una altura promedio de 4 m, la carga estática a vencer es de 54 m.

Dado que las descargas de las bombas ubicadas en el Rebombeo Estrella cuentan con válvulas check instaladas en cada uno de los equipos, la ecuación que describe el comportamiento del sistema se ve afectada por el número de bombas que estén en funcionamiento por la consecuente operación de las válvulas check. De acuerdo con Domínguez-Mora et al., (2019), la pérdida de carga medida es de 6 m a 1 m³/s, de modo que la carga que se requiere bombear para este tramo se estima en función del número de equipos en operación.

Tomando los datos del tramo aguas abajo del Rebombío Estrella se construye la ecuación que representa la curva del sistema con una sola bomba en funcionamiento:

$$H_{sis} = 54 + \left(0.022 * \frac{1000}{48 * 0.0254}\right) * \frac{Q^2}{2 * 9.81 * \left(\frac{\pi * (48 * 0.0254)^2}{4}\right)^2} + \frac{6 * Q^2}{(1^2)} \quad [4]$$

Con lo que se obtiene:

$$H_{sis} = 54 + 6.6748Q^2 \quad [5]$$

La curva del sistema para dos bombas en funcionamiento se puede representar como:

$$H_{sis} = 54 + \left(0.022 * \frac{1000}{48 * 0.0254}\right) * \frac{Q^2}{2 * 9.81 * \left(\frac{\pi * (48 * 0.0254)^2}{4}\right)^2} + \frac{6 * Q^2}{(2^2)} \quad [6]$$

Es decir

$$H_{sis} = 54 + 2.1748Q^2 \quad [7]$$

La curva del sistema para tres bombas en funcionamiento se puede representar como:

$$H_{sis} = 54 + \left(0.022 * \frac{1000}{48 * 0.0254}\right) * \frac{Q^2}{2 * 9.81 * \left(\frac{\pi * (48 * 0.0254)^2}{4}\right)^2} + \frac{6 * Q^2}{(3^2)} \quad [8]$$

Esto es:

$$H_{sis} = 54 + 1.3415Q^2 \quad [9]$$

Al hacer un procedimiento análogo al de PB Xotepingo para la obtención de las curvas de dos y tres equipos de bombeo, se obtienen las curvas naranja y gris respectivamente.

Si se grafican en un mismo plano las tres diferentes curvas del sistema y las curvas H-Q de una, dos y tres bombas en paralelo se obtiene la Figura 2.12.

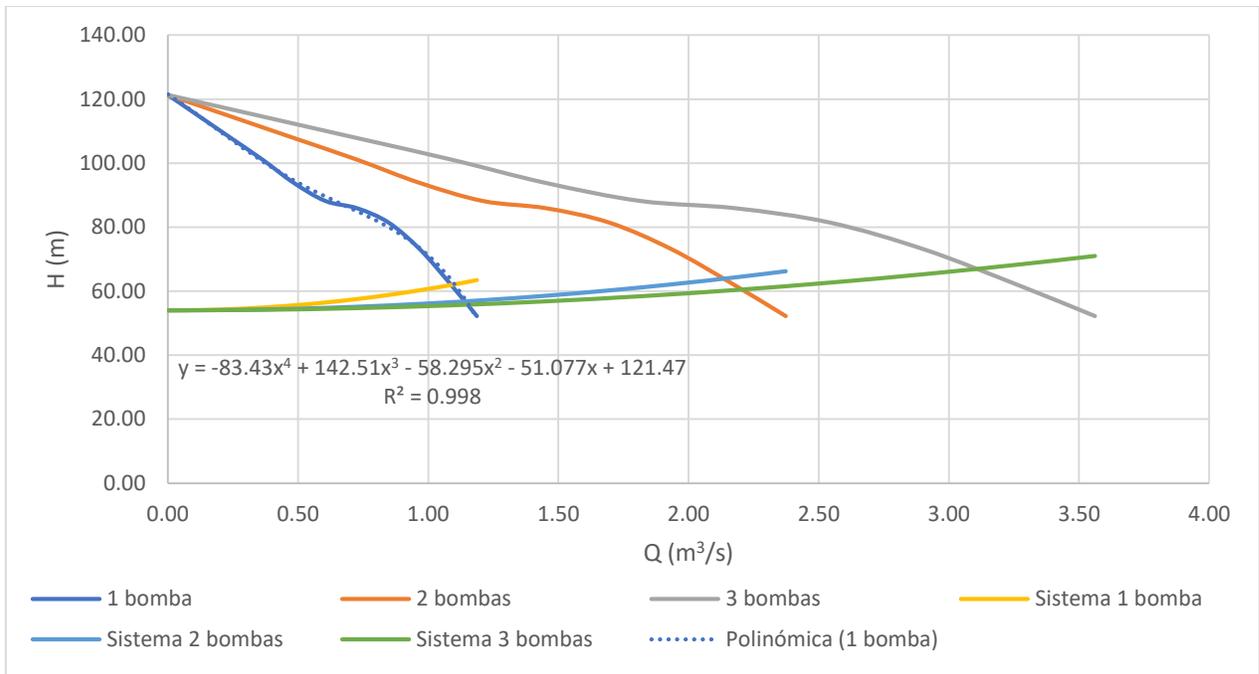


Figura 2.12. Curvas en paralelo y curva del sistema en Rebombero Estrella

Si se ajusta una curva polinómica de cuarto grado a la curva H-Q de una bomba, se obtiene la ecuación que se muestra en el gráfico anterior y que describe el funcionamiento de la bomba instalada de acuerdo con los criterios de diseño. Esta expresión es utilizada posteriormente para la determinación de la función que permita minimizar los costos de operación de la planta.

Los posibles gastos de operación determinados a partir de la intersección de las curvas resistentes del sistema con las curvas características H-Q en ambas plantas de bombeo, son los obtenidos a partir de los datos de las placas de las bombas, sin embargo, los caudales realmente bombeados con uno y dos equipos en ambas plantas pueden tener variaciones respecto a los valores teóricos.

2. 2. 2. Datos de operación obtenidos de la plataforma Maestro Aditum

La plataforma Maestro Aditum registra en tiempo real los caudales bombeados en las plantas Xotepingo y Estrella.

Si se toma el funcionamiento de las bombas en el periodo de tiempo comprendido entre el 8 de marzo y el 7 de abril de 2021 como un comportamiento representativo de las plantas, es posible determinar la actividad real de los equipos de bombeo en las instalaciones.

2. 2. 2. 1. PB Xotepingo

La medición de caudal se realiza cada hora, usualmente entre el minuto 37 y 42, sin embargo, para el periodo de tiempo analizado existen otros minutos en los cuales también se tomó registro de caudal.

De acuerdo con los 761 registros que se tienen en el intervalo de tiempo definido como representativo, el máximo valor de gasto que se tiene registrado que salió de la planta de bombeo Xotepingo es de 1822.87 lps, mientras que el menor gasto es de 483.18 lps.

Si se grafican los valores a lo largo del periodo seleccionado, se obtiene la Figura 2.13, de la que se observa que el gasto bombeado no es constante, es decir, sufre variaciones importantes. Dichas variaciones, representadas por crestas y valles en la gráfica, se deben al paro y arranque de los equipos de bombeo, asimismo, se observa que en la planta operan máximo dos bombas que, de acuerdo con los datos de diseño, tendrían la capacidad de enviar un gasto de 2.23 m³/s.

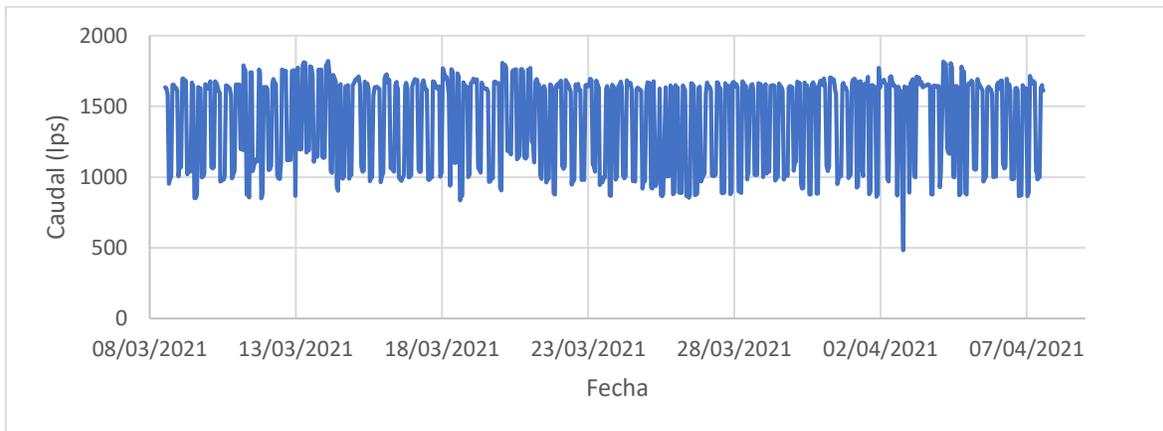


Figura 2.13. Registros de caudal en el periodo de tiempo representativo en PB Xotepingo

2. 2. 2. 2. Rebombeo Estrella

Los registros de caudal a la salida del Rebombeo Estrella se realizan cada 30 segundos y, en algunos casos, cada minuto. El máximo valor de gasto de los 84705 datos que se tienen registrados en el periodo de tiempo tomado como representativo es de 2510.45 lps y el menor valor de caudal es de 352.36 lps. Al graficar los valores de caudal a lo largo del tiempo se obtiene la Figura 2.14. De ahí se observa que, al igual que en la PB Xotepingo, el gasto descargado no se mantiene constante debido a las maniobras de paro y arranque de los equipos de bombeo.

De la gráfica del comportamiento de gasto y del máximo valor de caudal bombeado se observa que el número máximo de bombas que operan son tres. De acuerdo con los datos de diseño, el caudal que pueden enviar tres bombas en paralelo en el Rebombero Estrella es de 3.15 m³/s.

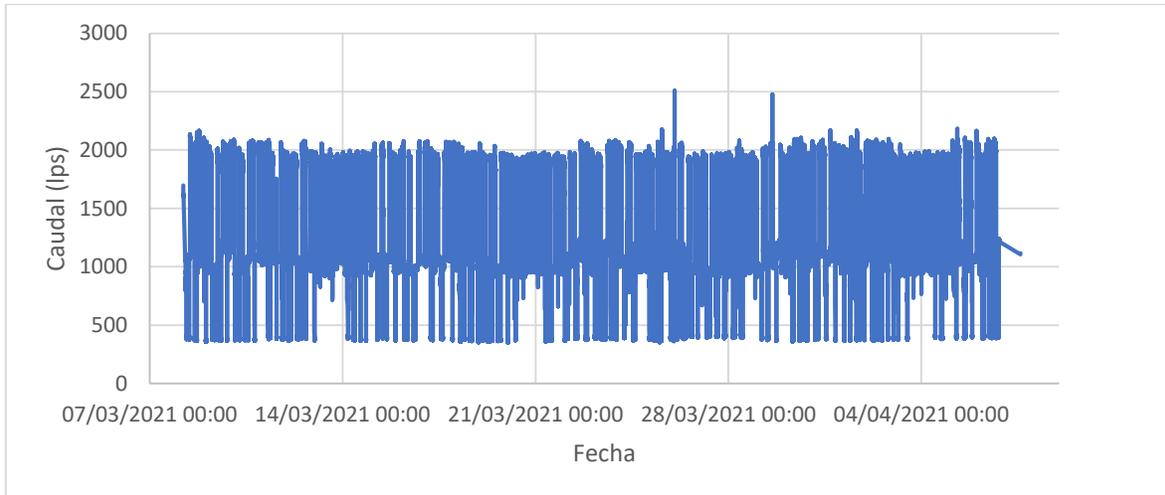


Figura 2.14. Registros de caudal en el periodo de tiempo representativo en Rebombero Estrella

2. 2. 3. Comparación de datos teóricos y reales

A pesar de que las plantas de bombeo tienen equipos que cumplen con las características de diseño mostradas en las placas, los gastos entregados, según los registros de instrumentación y telemetría, tienen un desfase respecto a los gastos de operación obtenidos a partir de las gráficas de los subsistemas y de las curvas características de las plantas de bombeo.

2. 2. 3. 1. PB Xotepingo

Del total de registros de caudal que se tiene de la plataforma Maestro Aditum, más del 90% de datos se encuentra en dos rangos de clase. El 36% de valores, es decir 276, tienen un valor entre 800 lps y 1100 lps y el 55% tiene un valor comprendido entre 1600 lps y 1800 lps.

Los datos de gasto comprendidos entre 800 y 1100 lps corresponden al caudal proporcionado por un solo equipo de bombeo, mientras que los valores del intervalo 1600-1800 lps corresponden al gasto total proporcionado por dos bombas en paralelo.

De acuerdo con la Figura 2.15, el gasto de operación con un solo equipo de bombeo es de 1350 lps, mientras que el gasto de operación con dos equipos en

funcionamiento es de 2230 lps. Si se compara el caudal de operación de una bomba con el caudal registrado a la salida de la planta que proporciona un solo equipo, se observa que existe una diferencia de 450 lps en promedio. Al comparar los valores de caudal con dos equipos en funcionamiento, la diferencia que existe en el caudal bombeado entre el gasto de operación teórico y los valores medidos es de 530 lps.

La diferencia entre los gastos teóricos y los caudales reales con uno y dos equipos en funcionamiento pueden deberse al estado actual de las bombas. Periódicamente, el Sistema de Aguas de la Ciudad de México realiza mantenimiento al equipo electromecánico que compone la planta y en algunos ejercicios presupuestales de la Ciudad de México se designan partidas para la sustitución de algunas bombas, por lo tanto, aunque los valores de gasto teóricos y medidos no son iguales, se utilizará posteriormente la expresión teórica que describe el comportamiento de las bombas para la determinación de la función objetivo que minimice los costos de operación, ya que al realizarse el mantenimiento y/o la sustitución de los equipos es muy probable que los gastos enviados se aproximen a los caudales teóricos obtenidos.

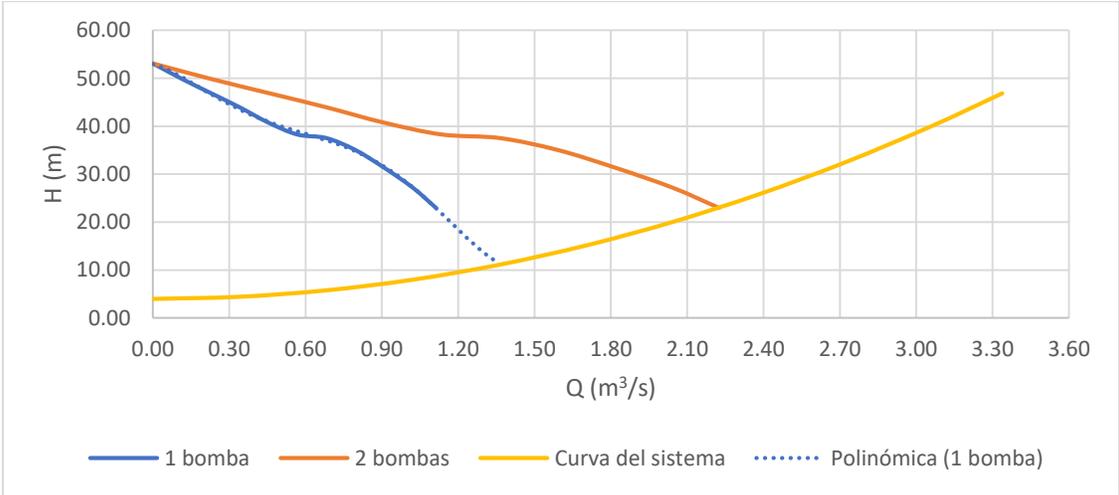


Figura 2.15. Punto de operación con una bomba PB Xotepingo

2. 2. 3. 2. Rebombeo Estrella

En el Rebombeo Estrella, de los 84707 registros que se tienen, más del 94% se concentra en tres rangos de clase. El valor de 6776 datos, el 8% del conjunto total, se encuentran entre 350 y 500 lps. En la Figura 2.12 se observa que, al operar una sola bomba, el gasto de operación sería superior a 1000 lps. Estos valores registrados que se encuentran en el rango de clase de 350-500 lps corresponden a los paros totales de las bombas. En las mediciones realizadas en 2019 en la planta se observó que durante el paro total de los equipos, los medidores tipo Annubar aun registraban valores de caudal, por lo tanto, dichos valores corresponden a los registros de gasto durante el paro de los equipos y su posterior arranque.

El 60% de los valores registrados pertenecen al rango de clase 850-1200 lps. Si se observa la Figura 2.12, el punto de operación del rebombeo Estrella con un equipo en funcionamiento es muy cercano a 1300 lps, es decir, el gasto medido es menor al gasto teórico que debe entregar la bomba.

Aproximadamente el 27% del total de registros pertenece al rango de 1850 a 2200 lps. De acuerdo con la Figura 2.12, el gasto de operación con dos bombas en funcionamiento debe oscilar los 2300 lps. Al operar uno y dos equipos en paralelo, el caudal realmente proporcionado es menor al teórico obtenido al graficar las curvas H-Q en paralelo y la curva del sistema en el mismo plano. Este comportamiento puede asemejarse al recorte adicional del impulsor o a la disminución en la velocidad de giro de los equipos, sin embargo, dado que no se tienen datos de que existan recortes adicionales al impulsor, se utilizará la ecuación polinómica que describe el comportamiento de la bomba (ver Figura 2.12) para la posterior determinación de la política óptima de la planta. Asimismo, es posible que los equipos electromecánicos actuales se reemplacen por nuevos si existen las partidas presupuestales necesarias, por lo tanto, aunque el comportamiento real de las bombas difiere al comportamiento teórico, la expresión que describe este último será la utilizada para el análisis de la optimización de los costos en la planta.

2.3. Consecuencias económicas de la operación actual de las plantas de bombeo

La Figura 2.13 y Figura 2.14 muestran la variación del gasto en las plantas de bombeo durante el tiempo considerado como el representativo de su comportamiento. De dichas graficas se observa que existen numerosas maniobras de paro y arranque.

Estas operaciones se llevan a cabo debido a que el caudal de entrada a las plantas no es constante y, dado que los cárcamos de bombeo no poseen suficiente capacidad de regulación, es necesario apagar y prender las bombas tan pronto se vacíe y se llenen los tanques de succión.

Dichas maniobras pueden traer consecuencias importantes en la operación del sistema. Por un lado, el desgaste de las piezas y los elementos mecánicos que, con el paso del tiempo deben sustituirse y, por otro lado, el consumo de energía eléctrica, producto de las maniobras de constantes paros y arranques. Cada vez que el motor es arrancado, éste consume hasta siete veces la corriente nominal del motor, derivando en fluctuaciones bruscas en la red eléctrica y problemas mecánicos ocasionados por el alto torque de arranque del motor, así como altos costos en la facturación (Gerencia Electricidad UEN, 2022).

La energía requerida en la distribución de agua es a menudo el mayor componente energético y, por lo tanto, representa un costo alto en un sistema de suministro. Para minimizar el costo de operación de las plantas de bombeo es necesario optimizar una función que involucre el caudal y la carga hidráulica, siendo esta última una función del agua bombeada (Ramos-Arzola et al., 2017).

Capítulo 3. Optimización de los costos de bombeo

3. 1. Aspectos generales de la optimización

En la búsqueda de soluciones a los problemas que enfrenta el hombre cada día, la meta de optimalidad y eficiencia inspira a científicos, matemáticos e ingenieros para dar solución a dichos problemas. Desde el surgimiento de las computadoras, los métodos de optimización han ido cobrando mayor importancia al permitir la manipulación de grandes cantidades de datos, y así permitir dar solución a problemas que anteriormente podrían ser considerados intratables. Los métodos de optimización son fundamentales en la ingeniería y planeación modernas, ya que apoyan los complejos procesos de toma de decisiones.

La optimización es básica para cualquier problema que implique elegir entre diferentes opciones para obtener la mejor alternativa. La optimalidad pretende hallar una solución óptima a un problema expresado en términos matemáticos donde existen diferentes soluciones posibles. En general, para establecer qué tan buena es cada una de las alternativas se utiliza una función objetivo, que se debe maximizar o minimizar, según sea el caso (Jaramillo-Jaramillo, 2008).

Para poder llegar a una decisión óptima es necesario contar con información completa sobre el conjunto de todas las posibles elecciones y el beneficio asociado a cada una de ellas. Con esta información es posible elegir la decisión que tenga el mayor beneficio o menor costo, según sea el caso. La calidad de la solución obtenida depende en primera instancia de un buen planteamiento del problema y de su formulación matemática (Boroni et al., 2006).

Para tomar la mejor alternativa se tiene que asignar un peso o un costo a cada opción de acuerdo con la importancia que tenga cada uno de estos criterios para la persona que toma la decisión, por lo tanto, la formulación de la función que se quiere optimizar y que refleje realmente el criterio de decisión deseado es de suma importancia, ya que la calidad de la solución obtenida depende del planteamiento de la función objetivo.

3. 2. Tipos de métodos de optimización

De acuerdo con sus características, los métodos de optimización pueden clasificarse de diferentes formas. En términos generales, se pueden distinguir dos grandes grupos: métodos determinísticos y métodos probabilísticos o heurísticos.

El primer grupo comprende los métodos que se basan en decisiones determinísticas para llegar a una solución, es decir, alcanzan la solución ejecutando una cantidad finita de operaciones. Los métodos determinísticos son generalmente más fáciles y rápidos de implementar, pero pueden tener en cuenta todos los elementos necesarios y adecuados en los modelos (Jaramillo-Jaramillo, 2008).

Por otro lado, los métodos probabilísticos, como su nombre lo indica, son aquellos que se basan en probabilidades y variables estocásticas para encontrar una solución aproximada a un problema. Dicha aproximación es por lo general lo suficientemente buena para ser utilizada en los problemas prácticos cotidianos. Es decir, las condiciones propias del problema no plantean exigencias más allá de la calidad de la solución encontrada. Los algoritmos heurísticos son técnicas de aproximación que se han utilizado desde los comienzos de la investigación de operaciones para resolver difíciles problemas combinatorios (Ríos-Insua et al., 2004).

A lo largo del tiempo el interés de la comunidad científica para resolver problemas de optimización combinatoria aumentó, de modo que los métodos de optimización fueron ganando popularidad y se desarrollaron algunos que permiten determinar la solución óptima de un problema combinatorio (Gendrau, 2003).

3. 2. 1. Programación lineal

La programación lineal es un método de optimización para problemas donde tanto la función objetivo como las restricciones del problema pueden ser expresadas en forma de funciones lineales. Un problema de programación lineal es un problema de optimización que debe cumplir con las siguientes características (Winston, 2005):

- Se intenta maximizar o minimizar, según sea el caso, una función lineal de las variables de decisión. La función que se quiere optimizar se llama función objetivo.
- Los valores de las variables de decisión deben satisfacer un conjunto de restricciones. Cada restricción debe ser una ecuación o una desigualdad lineales.
- Se relaciona una restricción de signo con cada variable

- Hay certeza sobre todos los parámetros, es decir, se conoce con certeza el valor de todos los coeficientes o la contribución de todas las variables de decisión sobre la función objetivo y las restricciones

El algoritmo Simplex es un método determinístico para resolver problemas cotidianos que pueden ser planteados fácilmente de forma lineal, sin embargo, la gran mayoría de los problemas que se presentan de forma habitual tienen una complejidad mayor, de forma que es difícil expresarlos a través de ecuaciones lineales y, por lo tanto, el método simplex de la programación lineal pierde utilidad ante los desafíos cotidianos de optimización.

3. 2. 2. Programación no lineal

En la programación lineal se analizan problemas donde el objetivo es optimizar una función lineal sujeta a restricciones lineales, sin embargo, en muchos problemas de optimización en ingeniería, la función objetivo es una función no lineal o bien, algunas de las restricciones son funciones no lineales. A este tipo de problemas de optimización se les llama problemas de programación no lineal y un problema de este tipo puede expresarse como (Jaramillo-Jaramillo, 2008):

$$\max z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad [10]$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_1 \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_1 \end{aligned}$$

La región factible de soluciones para el problema de programación no lineal es el conjunto de puntos x_1, x_2, \dots, x_n que satisfacen las m restricciones del problema, asimismo, las funciones f y g pueden ser expresiones no lineales.

3. 2. 3. Programación dinámica

En la vida cotidiana existe una serie de problemas cuyas soluciones pueden ser expresadas recursivamente en términos matemáticos y, posiblemente, la forma más natural de resolverlos es mediante un algoritmo recursivo, sin embargo, el tiempo de ejecución de la solución recursiva es extremadamente tardado y, por lo tanto, impráctico (Jaramillo-Jaramillo, 2008).

Una forma de poder resolver este tipo de problemas es dividirlo en pequeños subproblemas los cuales también pueden resolverse de forma recursiva para combinar finalmente las soluciones y así resolver el problema original. El inconveniente de este procedimiento se presenta cuando los subproblemas no son independientes de forma que la solución recursiva de estos no resulta eficiente por la repetición de cálculos que conlleva (Sterling & Coulbeck, 2015). Es en estos casos cuando la programación dinámica ofrece un método de solución eficiente.

La eficiencia de esta técnica consiste en resolver los subproblemas una sola vez guardando sus soluciones. La solución de problemas mediante esta técnica se basa en el llamado principio de optimalidad enunciado por Bellman en 1957 y que dice: “En una secuencia de decisiones óptimas, toda subsecuencia ha de ser también óptima”.

La programación dinámica se utiliza para resolver diversos problemas de optimización. Por lo general, esta técnica llega a la solución trabajando hacia atrás, partiendo del final del problema hacia el principio, por lo que un problema enorme e inmanejable se convierte en una serie de problemas más pequeños y manejables. Proporciona un procedimiento sistemático para encontrar la combinación de decisiones que maximice la efectividad total, al descomponer el problema en etapas, las que pueden ser completadas por una o más formas (estados), y enlazando cada etapa a través de cálculos recursivos. Los problemas de programación dinámica cumplen en general con las siguientes características (Winston, 2005):

- Es posible dividir el problema en etapas y se requiere una decisión en cada una de éstas.
- Las decisiones que se toman en una etapa dependen del estado obtenido en otras etapas
- La decisión tomada en cualquier etapa describe el modo como el estado en la etapa actual se transforma en el estado de la siguiente etapa.
- Dado el estado actual, la solución óptima para cada una de las etapas restantes no tiene que depender de los estados ya alcanzados o de las decisiones previas.
- El procedimiento de solución se inicia al encontrar la política óptima para la última etapa.
- Se dispone de una relación recursiva que identifica la política óptima para la etapa n dada la política óptima para la etapa $n+1$
- El procedimiento de solución está diseñado para encontrar una política óptima para el problema completo.

La programación dinámica es un enfoque general para la solución de problemas en los que es necesario tomar decisiones en etapas sucesivas. Las decisiones tomadas en una etapa condicionan la evolución futura del sistema, afectando a las situaciones en las que el sistema se encontrará en el futuro (denominadas estados), y a las decisiones que se plantearán en el futuro (Xiangtao & Xiaohua, 2013).

Conviene resaltar que el modelado de problemas de programación dinámica no sigue una forma estándar. Así, para cada problema, es necesario especificar cada uno de los componentes que caracterizan un problema de programación dinámica. El procedimiento general de resolución de estas situaciones se divide en el análisis recursivo de cada una de las etapas del problema, en orden inverso, es decir comenzando por la última y pasando en cada iteración a la etapa antecesora. El análisis de la primera etapa finaliza con la obtención del óptimo del problema (Jaramillo-Jaramillo, 2008).

Dadas las ventajas de la programación dinámica en problemas de optimización, se utiliza esta técnica para la determinación de una política óptima en la operación de los equipos de bombeo ubicados en las plantas que se encuentran dentro del sistema Cerro del Judío-Cerro de la Estrella que minimicen los costos de operación a través de maximizar los beneficios de la puesta en marcha de los equipos electromecánicos, es decir, para determinar la política óptima se debe precisar cuáles tienen que ser los volúmenes de agua bombeados. En el problema de optimización de las plantas de bombeo, se busca minimizar los costos de operación tomando en cuenta el suministro constante de agua. En el problema se involucra la mayor cantidad de variables que afecten las secuencias de decisiones en el método y, en consecuencia, la política de operación.

3. 2. 4. Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos son algoritmos matemáticos de optimización de propósito general basados en mecanismos naturales de selección y genética, proporcionando excelentes soluciones a problemas complejos con gran número de parámetros (Ruíz-Lizama, 2014). Son considerados una herramienta muy poderosa de optimización que puede ser usada para resolver un gran número de problemas difíciles con gran eficiencia y exactitud, basándose en la genética natural y la teoría de la evolución de Darwin. Los algoritmos genéticos usan operadores probabilísticos, en vez de los típicos operadores determinísticos

En la naturaleza los individuos de una población compiten entre sí en la búsqueda de recursos tales como comida, agua y refugio. Aquellos individuos que tienen más éxito en sobrevivir tienen mayor probabilidad de generar un gran número de descendientes. Esto significa que los genes de los individuos mejor adaptados se propagarán en sucesivas generaciones hacia un número de individuos creciente. La combinación de buenas características provenientes de diferentes ancestros puede a veces producir descendientes superiores, cuya adaptación es mucho mayor que la de cualquiera de sus ancestros. De esta manera, las especies evolucionan

logrando unas características cada vez mejor adaptadas al entorno en el que viven (Jaramillo-Jaramillo, 2008).

Los algoritmos genéticos usan una analogía directa con el comportamiento natural. Trabajan con una población de individuos, cada uno de los cuales representa una solución factible a un problema dado. A cada individuo se le asigna un valor o puntuación, relacionado con la calidad de dicha solución. En la naturaleza esto equivaldría al grado de efectividad de un organismo para competir por unos determinados recursos. Cuanto mayor sea la adaptación de un individuo al problema, mayor será la probabilidad de que el mismo sea seleccionado para reproducirse, cruzando su material genético con otro individuo seleccionado de igual forma. Este cruce producirá nuevos individuos, descendientes de los anteriores, los cuales comparten algunas de las características de sus padres. Cuanto menor sea la adaptación de un individuo, menor será la probabilidad de que dicho individuo sea seleccionado para la reproducción, y por tanto de que su material genético se propague en sucesivas generaciones (Moradi-Jalal et al., 2004).

De esta manera se produce una nueva población de posibles soluciones, la cual reemplaza a la anterior y verifica la interesante propiedad de que contiene una mayor proporción de buenas características en comparación con la población anterior. Así a lo largo de las generaciones las buenas características se propagan a través de la población favoreciendo el cruce de los individuos mejor adaptados. Si el algoritmo genético ha sido bien diseñado, la población converge hacia una solución óptima del problema. Cuando los algoritmos genéticos se utilizan para problemas de optimización se debe tener cuidado debido a que pueden tardar mucho en converger o no converger en absoluto, dependiendo en cierta medida de los parámetros y operadores que se utilicen como el tamaño de la población, número de generaciones, operadores de cruce, entre otros (Jaramillo-Jaramillo, 2008).

Capítulo 4. Programación dinámica aplicada a la optimización de plantas de bombeo

Con base en las características de las plantas de bombeo y de los equipos mecánicos determinadas anteriormente, se define la metodología de optimización aplicada a las plantas de bombeo del sistema Cerro del Judío-Cerro de la Estrella.

La programación dinámica brinda la teoría matemática necesaria para la toma secuencial de decisiones bajo incertidumbre y brinda una regla de decisión que señala cómo actuar en cada estado a medida que ocurren determinadas acciones inciertas en cada etapa. Los parámetros usados en la programación dinámica pueden ser estocásticos o determinísticos. En el primer caso, uno o más parámetros del problema pueden ser modelados a través de datos aleatorios que puede asociarse a una distribución de probabilidad, en cambio, los parámetros determinísticos no están asociados al azar, es decir, están completamente determinados por sus condiciones iniciales (Kairong et al., 2012).

Con base en las lecturas de caudal registrado a la entrada de los tanques de succión y la salida en las plantas de bombeo durante el periodo considerado como representativo, es posible observar que no existe una correlación directa entre ambos conjuntos de datos, es decir, para un rango de clase, las frecuencias de sus histogramas son distintas a la entrada y salida del cárcamo de succión, por lo que es necesario utilizar la técnica de programación dinámica estocástica que asocia probabilidades a los datos de entrada.

Para poder usar la técnica de optimización es necesario definir cada uno de los elementos de ésta. La etapa representa un periodo de tiempo, por lo tanto, para poder tener una política óptima es necesario establecer una norma que permita comparar distintas políticas y así decir cuál es la mejor. Esa norma de comparación es la función objetivo, es decir, la relación matemática entre las variables de decisión.

Para efectuar la programación dinámica, y de acuerdo con las características generales de este método, se siguen los pasos (Domínguez-Mora & Arganis-Juárez, 2021):

1. Definir las etapas de decisión secuencial
2. Separar las variables del problema en variables de estado y de control. Las primeras definen el estado en el que se encuentra el sistema antes y después de la decisión, mientras que las variables de control son aquellas con las cuales se toma la decisión.
3. Definir una ecuación de estado del sistema que relacione las variables de estado con las de decisión.
4. Establecer una función objetivo que permita evaluar la contribución de cada etapa en la meta fijada.

4. 1. Paso 1. Definición de las etapas

Dado que la operación de las plantas de bombeo puede ser muy variable dependiendo de las condiciones que se tengan en la llegada de caudal, se optó por escoger un intervalo de tiempo que permita adecuar el manejo del sistema en caso de existir una modificación sustancial en el volumen de agua que recibe el cárcamo, no obstante, este tiempo no debe ser excesivamente corto de modo que no permita la manipulación de la maquinaria.

Los registros de caudales a la entrada del tanque varían a lo largo del día, por lo tanto, se propone plantear tres etapas en el día con base en los turnos de los operadores.

La etapa 1 corresponde de las 24:00 a las 7:59 horas

La etapa 2 corresponde de las 8:00 a las 15:59 horas

La etapa 3 corresponde de las 16:00 a las 23:59 horas

En cada una de las etapas el comportamiento que se tiene registrado de los ingresos es diferente respecto a las otras.

4. 2. Paso 2. Separación de variables

Al aplicar la programación dinámica a una planta de bombeo, las variables de estado pueden ser representadas por los niveles de almacenamiento en los tanques de succión, ya que definen el comportamiento de los cárcamos de donde se quiere extraer una determinada cantidad de agua, mientras que las variables de decisión son los volúmenes de agua suministrados por el equipo o equipos de bombeo, es decir, la cantidad de agua que es bombeada y que sale del cárcamo.

4. 3. Paso 3. Definición de ecuación de estado

Una expresión que relaciona las variables de control y de estado es la ecuación de continuidad en los cárcamos, ya que involucra el almacenamiento inicial de la estructura con las posibles extracciones.

La ecuación de continuidad en los cárcamos, aplicada a un intervalo de tiempo, se expresa de la siguiente forma (Domínguez-Mora & Arganis-Juárez, 2021):

$$V_j = V_i + VI_j - VS_j \quad [11]$$

Donde:

- V_j volumen de agua en el cárcamo al final del intervalo de tiempo
- V_i volumen de agua en el cárcamo al inicio del intervalo de tiempo
- VI_j volumen de agua que ingresa en el intervalo de tiempo
- VS_j volumen de agua que sale en el intervalo de tiempo

Los cárcamos de bombeo que se encuentran en el sistema tienen un volumen útil que se puede dividir en un determinado número de intervalos (Domínguez-Mora & Arganis-Juárez, 2021). De acuerdo con las características físicas de las estructuras y de los ingresos y egresos de caudal, se propone que los volúmenes se dividan en intervalos de 100 m³. Al hacer la discretización, es posible escribir la ecuación anterior de la siguiente forma (Domínguez-Mora & Arganis-Juárez, 2021):

$$j = i + x - k \quad [12]$$

Donde:

- j volumen en el cárcamo al final de la etapa considerada
- i volumen en el cárcamo al inicio de la etapa
- x volumen de ingreso al cárcamo en el intervalo de tiempo
- k volumen de extracción al cárcamo en el intervalo de tiempo

Si se consideran las variables de la ecuación de continuidad de forma discreta, entonces el beneficio de una etapa depende directamente del volumen extraído k y del almacenamiento j al final de la etapa.

4. 4. Paso 4. Función objetivo

El objetivo de utilizar la técnica de programación dinámica para determinar las condiciones óptimas de operación es disminuir los costos, por lo tanto, se debe definir el beneficio asociado a la operación en cada etapa y, la suma de dichos beneficios en todas las etapas se debe maximizar. Por otro lado, en cada etapa existe la posibilidad de que se presente un desbaste o un exceso de agua en el cárcamo de bombeo, lo cual traería consecuencias negativas y, por lo tanto, disminución en los beneficios. La función objetivo, se puede formular de la siguiente manera:

$$FO = \sum_{n=1}^N (\text{Beneficios de bombear un volumen } k \text{ de agua} \\ - \text{Posibles costos por desabasto de agua en el cárcamo} \\ - \text{Posibles costos por exceso de agua en el cárcamo}) \quad [13]$$

A continuación se describen cada una de las partes que conforman la función objetivo.

4. 4. 1. Beneficios de bombear un volumen k de agua (b_n)

Los beneficios, de manera simplificada, pueden expresarse como el ahorro de bombear una determinada cantidad de agua y no tener la necesidad de adquirir el líquido a través de otros medios particulares de distribución de agua potable como tanques cisterna.

A dicho beneficio debe restarse la cantidad de agua no bombeada, es decir, la que permanece en los cárcamos y que pudo ser utilizada para el abastecimiento. Al no entregar un determinado volumen de agua, puede haber un costo asociado al consumo de tanques cisterna en ciertos puntos que demandan el consumo del líquido. Entre 2016 y 2021 las alcaldías que conforman la Ciudad de México destinaron un total de 968 millones 263 mil 248.87 pesos para la renta de pipas para abastecer agua a sus demarcaciones. Asimismo, el Sistema de Aguas de la Ciudad de México destinó un total de 450 millones 960 mil 702.84 MXN, lo que significa que entre las alcaldías y el SACMEX la cifra total de recursos gastados para la renta de pipas de distribución de agua entre 2016 y 2021 fue de mil 479 millones 224 mil MXN. En el caso de las alcaldías, la que reportó más gastos fue Tlalpan, que en seis años gastó 720 millones 756 mil 876.47 MXN. La Figura 4.1 muestra una

comparativa de los recursos destinados a la renta de pipas en las 16 alcaldías (METRÓPOLI, 2022).

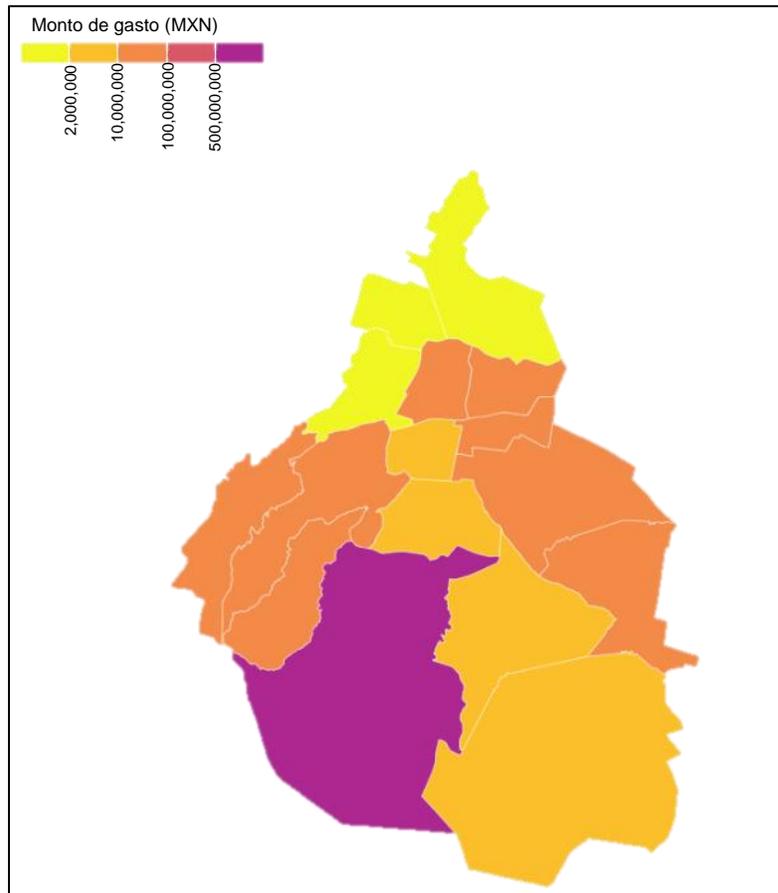


Figura 4.1. Gasto por alcaldía en renta de pipas en el periodo comprendido entre 2016 y 2021

En el caso del SACMEX, se observa una tendencia a gastar anualmente cada vez más en pipas, mientras en 2016 se asignó un recurso de 37 millones 48 mil 338.74 MXN, en 2021 fueron 223 millones 896 mil 741 MXN (ver Figura 4.2), por lo tanto, es necesario considerar el costo asociado a la distribución de pipas por parte de SACMEX en caso de no existir disponibilidad de agua en los cárcamos de bombeo para la distribución (METRÓPOLI, 2022).

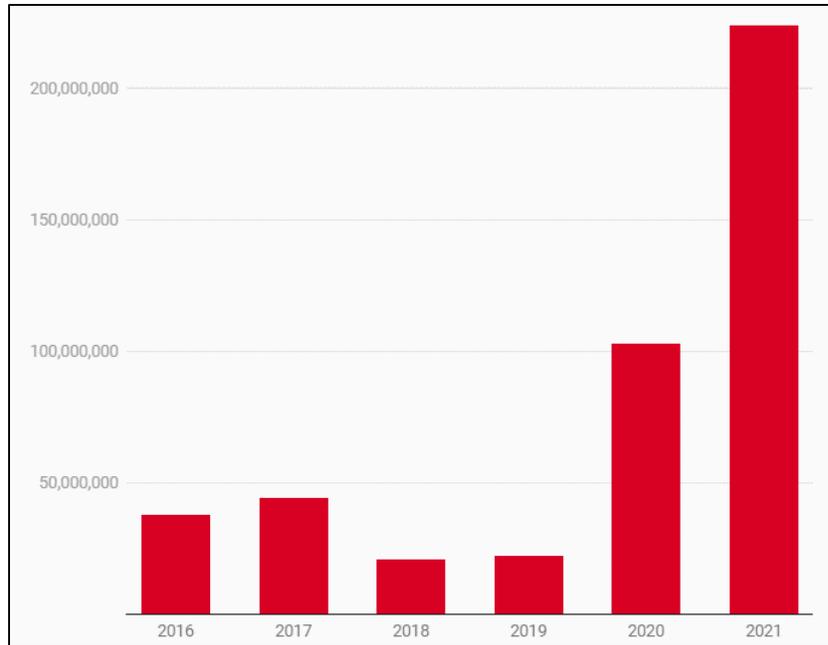


Figura 4.2. Gasto anual de SACMEX por renta de pipas. Fuente: METRÓPOLI, 2022

Finalmente, al beneficio obtenido del suministro de un volumen de agua debe sustraerse el costo de operación de las turbomáquinas, de forma que el beneficio de extraer un volumen k de agua al cárcamo queda representado como:

$$\begin{aligned}
 b_n = & \text{Ganancias de bombear un volumen de agua} \\
 & - \text{Costo por agua no bombeada} \\
 & - \text{Costo de energía eléctrica empleada}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

El beneficio derivado del agua bombeada está directamente relacionado con el volumen que se extrae del cárcamo, es decir, la variable k y, el costo producido por el agua no bombeada está directamente relacionado con el volumen de agua que no se utilizó y que permanece en el cárcamo al final de la etapa de análisis, es decir, la variable j . Al beneficio también debe restarse el costo de la energía eléctrica consumida para bombear el volumen k de agua. El beneficio en cada etapa depende de las siguientes variables:

$$\begin{aligned}
 b_n = & \text{Ganancias de bombear un volumen de agua}(k) \\
 & - \text{Costo por agua no bombeada}(j) \\
 & - \text{Costo de energía eléctrica empleada}(k)
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

La expresión anterior está en términos de variables discretizadas de volumen, sin embargo, el rendimiento, producto del suministro de agua, está directamente relacionado con el caudal. Para ser consistentes con los intervalos de volumen utilizados en los cárcamos de bombeo, se propone calcular el volumen suministrado de agua por las plantas de bombeo en un intervalo de una hora, de este modo, los

volúmenes bombeados son consistentes con los intervalos presentes en los cárcamos.

Para determinar el costo de cada una de las partes que conforman el beneficio de bombear un volumen de agua, es necesario tener un referente económico mediante el cual puedan determinarse los costos de cada una de estas partes.

4. 4. 1. 1. Ganancias de bombear un volumen de agua y costo por agua no bombeada

Las ganancias de bombear un determinado volumen de agua y el costo por mantener el líquido en el cárcamo de bombeo fácilmente pueden representarse a través de los costos asociados al abastecimiento de agua a través de los tanques cisterna, comúnmente conocidos como pipas de agua.

De acuerdo con el Gobierno de México (PROFECO, 2021), el costo de un tanque cisterna en abril de 2021 registró un precio promedio nacional de \$1,079 MXN con un volumen de 10,000 litros. En la Ciudad de México, el precio de las pipas con el mismo volumen de agua varía dependiendo de la alcaldía y la distancia que debe recorrer el vehículo para llegar al destino. La PB Xotepingo y el Rebombéo Estrella se ubican en la zona suroriente dentro de la Ciudad de México donde el negocio de pipas para el abasto de agua potable se ha ido incrementando considerablemente en los últimos años.

Durante junio de 2021, en la alcaldía Iztapalapa, zona oriente de la Ciudad de México, la microempresa Agua Potable Diana ofreció servicio de entrega de pipas a las colonias de la alcaldía. Una pipa de 10 mil litros tuvo un costo de \$1,100 MXN, por otro lado, la suministradora Agua Potable Manantial de Reyes ofreció la misma cantidad de volumen a un precio de \$1,300 MXN (EL FINANCIERO, 2021).

Si se toman en cuenta el rango de precio de las suministradoras particulares de agua y el precio promedio nacional registrado en 2021, el costo de un tanque cisterna de 10 mil litros (10 m^3) puede redondearse a \$1,100 MXN.

Con base en el precio establecido para las pipas y los volúmenes de agua discretizados es posible determinar el costo asociado a las ganancias de bombear un volumen k de agua y el costo por el agua no bombeada.

4. 4. 1. 2. Costo de energía eléctrica empleada

Finalmente, para obtener el último rubro de b_n , es decir el costo de la energía eléctrica empleada para proveer un determinado volumen de agua, es necesario conocer el precio del kilowatt-hora que paga SACMEX a la Comisión Federal de Electricidad (CFE) como proveedor de un servicio público.

La CFE establece en el acervo histórico tarifario de 2017 que cuando el organismo encargado de llevar a cabo el suministro de agua potable a través de bombeo no haga uso del servicio, cubrirá como mínimo el cargo de \$361.91 MXN, sin embargo, el cargo adicional por la energía consumida por cada kiloWatt-hora para el mes de abril, fecha que se considera representativa del comportamiento de las plantas de bombeo analizadas, es de \$1.984 MXN (CFE, 2017).

Debido a que las últimas tarifas publicadas por CFE correspondientes al servicio para bombeo de aguas potables o negras de servicio público son del 2017, es necesario actualizar el costo del kilowatt-hora al 2022. Como la inflación es el aumento sostenido y generalizado de los precios de los bienes y servicios de una economía a lo largo del tiempo, puede utilizarse este referente para la actualización del precio de la unidad de medida de la energía utilizada por las plantas de bombeo.

La evolución anual de la tasa de inflación en México puede observarse en la Figura 4.3. Con base en dichas tasas se actualiza el costo del kWh para el 2022 con operaciones simples:

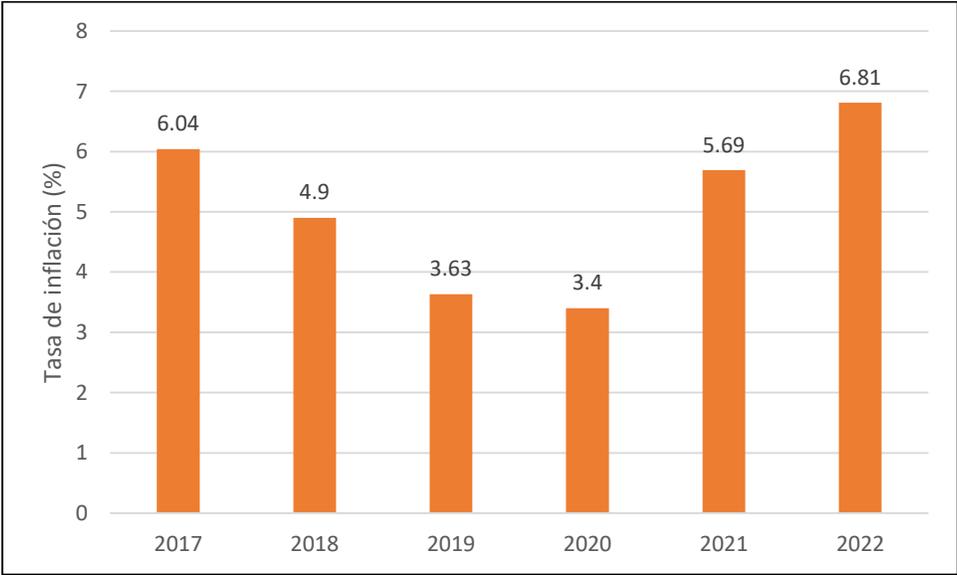


Figura 4.3. Tasa de inflación promedio anual. Fuente: STATISTA, 2022

$$\begin{aligned} \text{Costo kWh}_{2017} &= \$1.948 * 1.0604 = \$2.066 \text{ MXN} \\ \text{Costo kWh}_{2018} &= \$2.066 * 1.049 = \$2.167 \text{ MXN} \\ \text{Costo kWh}_{2019} &= \$2.167 * 1.0363 = \$2.246 \text{ MXN} \\ \text{Costo kWh}_{2020} &= \$2.246 * 1.0340 = \$2.322 \text{ MXN} \\ \text{Costo kWh}_{2021} &= \$2.322 * 1.0569 = \$2.454 \text{ MXN} \\ \text{Costo kWh}_{2022} &= \$2.454 * 1.0681 = \$2.621 \text{ MXN} \end{aligned}$$

Al usarse la inflación promedio anual como un índice para el aumento de los servicios públicos, el costo del kilowatt-hora aumenta a \$2.621 MXN. Si se toma en cuenta una condición un poco más desfavorable, el costo de la unidad de medida de la energía eléctrica podría redondearse a \$3.00 MXN y así tomar en cuenta posibles costos no considerados en el cálculo del precio actualizado.

Con base en los costos de los tanques cisterna, el precio actualizado del kilowatt-hora y los intervalos utilizados de una hora para uniformizar las variables, es posible desarrollar cada uno de los rubros que componen el beneficio de bombear un volumen k de agua.

El ahorro desprendido del suministro de agua a través de la red se puede obtener a partir de multiplicar el volumen de agua enviado, en m^3 , por el costo de un m^3 de agua según los precios de los tanques cisterna, es decir, el precio de una pipa de agua es de \$1,100 MXN y entrega un volumen de 10 mil litros, por lo tanto:

$$\text{Ganancias de bombear un volumen de agua}(k) = \$1100 * \frac{k(m^3)}{10 m^3} \quad [16]$$

$$\text{Ganancias de bombear un volumen de agua}(k) = \$110 * k \quad [17]$$

De forma análoga, para determinar el costo de agua no bombeada, es necesario hacer uso del costo promedio de las pipas que transportan un volumen de $10m^3$:

$$\text{Costo por agua no bombeada}(j) = \$1100 * \frac{j(m^3)}{10 m^3} \quad [18]$$

$$\text{Costo por agua no bombeada}(j) = \$110 * j \quad [19]$$

Finalmente, para determinar el costo de la energía eléctrica empleada es necesario hacer uso del precio actualizado de la unidad de medida de la energía eléctrica. Esta energía, en la práctica, se mide en kilowatts-hora, es decir, una medida de potencia (kW) por una medida de tiempo (h), por lo tanto, si se considera que el precio del kWh es de \$3 MXN, el costo de la energía eléctrica empleada para suministrar una cantidad de agua se puede expresar como:

$$\text{Costo de energía eléctrica empleada}(k) = \$3 * P_e(kW) * 1 h \quad [20]$$

La potencia eléctrica utilizada por las plantas de bombeo al entregar un volumen k de agua puede obtenerse a través de la potencia hidráulica y la eficiencia global del conjunto motor-bomba (ver Figura 4.4).

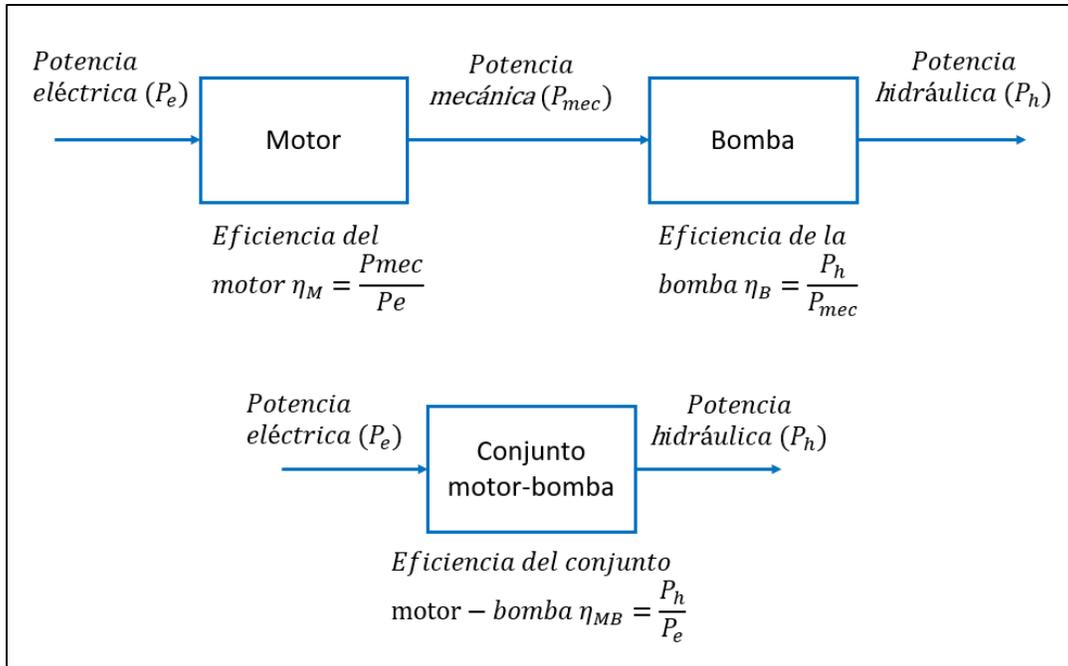


Figura 4.4. Potencias y eficiencias en motor y bomba

De la definición de eficiencia del conjunto motor-bomba, es posible despejar la potencia eléctrica:

$$P_e = \frac{P_h}{\eta_{MB}} \quad [21]$$

Dado que la unidad comercial de la energía eléctrica es el kilowatt-hora, es necesario expresar la potencia eléctrica y las demás potencias en kilowatts. La potencia hidráulica que entrega una bomba se define como el producto del peso específico del agua por el gasto y carga de bombeo.

Como las variables que intervienen en la ecuación de estado son variables de volumen, es necesario expresar el gasto en términos de esta magnitud. En ingeniería, el caudal se define como la cantidad de fluido (volumen) que circula por unidad de tiempo en un determinado sistema, por lo tanto, para expresar el gasto en términos de volumen es necesario utilizar un intervalo de tiempo. Si el intervalo de tiempo considerado para la obtención de volúmenes a partir de gastos es de una hora, la potencia hidráulica que entrega un equipo de bombeo puede expresarse en función de la cantidad k de agua que sale en una hora, es decir:

$$P_h = \frac{\gamma \left[\frac{kN}{m^3} \right] * \frac{k [m^3]}{3600 [s]} * H(k)}{1000} \quad [22]$$

Donde:

P_h es la potencia hidráulica, en kW

γ es el peso específico del agua, 9.81 kN/m³

k es el volumen de agua que sale del cárcamo de bombeo y que envía la bomba en una hora, en m³

$H(k)$ es la carga que entrega la bomba, en m. Dicha carga está en función del gasto que circule por la bomba

Una vez obtenida la potencia hidráulica en términos de las variables de volumen discretizadas, la potencia eléctrica se puede expresar como:

$$P_e(kW) = \frac{9.81 * \frac{k}{3600} * H(k)}{\eta_{MB}} \quad [23]$$

Es posible calcular la eficiencia del conjunto motor-bomba como el producto de la eficiencia del motor y la eficiencia de la bomba. Esta última varía en función del gasto que circule por el equipo o, si se utilizan variables de volumen, la eficiencia de la bomba depende del volumen k de agua que salga del cárcamo, por lo tanto, la potencia eléctrica se puede escribir como:

$$P_e(kW) = \frac{9.81 * \frac{k}{3600} * H(k)}{\eta_e * \eta_b(k)} \quad [24]$$

Si se simplifican los valores constantes, la potencia eléctrica se reescribe:

$$P_e(kW) = \frac{0.002725 * k * H(k)}{\eta_e * \eta_b(k)} \quad [25]$$

Finalmente, el costo de la energía eléctrica empleada para suministrar un volumen k de agua se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{Costo de energía eléctrica empleada}(k) = \$3 * \frac{0.002725 * k * H(k)}{\eta_e * \eta_b(k)} * 1 h \quad [26]$$

Al simplificar los valores constantes, la expresión se reescribe como:

$$\text{Costo de energía eléctrica empleada}(k) = \frac{0.008175 * k * H(k)}{\eta_e * \eta_b(k)} \quad [27]$$

Donde:

k es el volumen de agua que sale del cárcamo de bombeo y que envía la bomba en una hora, en m³

$H(k)$ es la carga que entrega la bomba, en m. Dicha carga está en función del gasto que circule por la bomba

η_e es la eficiencia del motor eléctrico

$\eta_b(k)$ es la eficiencia de la bomba en función del gasto, o volumen, que circule por la bomba

En la expresión del costo de la energía eléctrica empelada interviene la carga y la eficiencia de la bomba utilizada en cada una de las plantas de bombeo. Dado que los equipos electromecánicos no son iguales en ambas plantas, es necesario definir la expresión de carga y eficiencia para las bombas utilizadas.

4. 5. Planta de bombeo Xotepingo

4. 5. 1. Curva H-Q de las bombas

La Figura 2.5 muestra la curva H-Q del impulsor recortado al 90% que proporciona los datos de placa de las bombas utilizadas en la PB Xotepingo. Si a los puntos con los que se construyó dicha curva se ajusta un polinomio, es posible obtener una expresión que describa el comportamiento de la bomba, es decir, qué carga proporciona en función del gasto que circula por el equipo.

Al ajustar un polinomio de cuarto grado se obtiene la línea de tendencia que se muestra en la Figura 4.5, donde se observa que el coeficiente de correlación es suficientemente cercano a la unidad, lo que indica un buen ajuste entre los puntos medidos y el polinomio calculado.

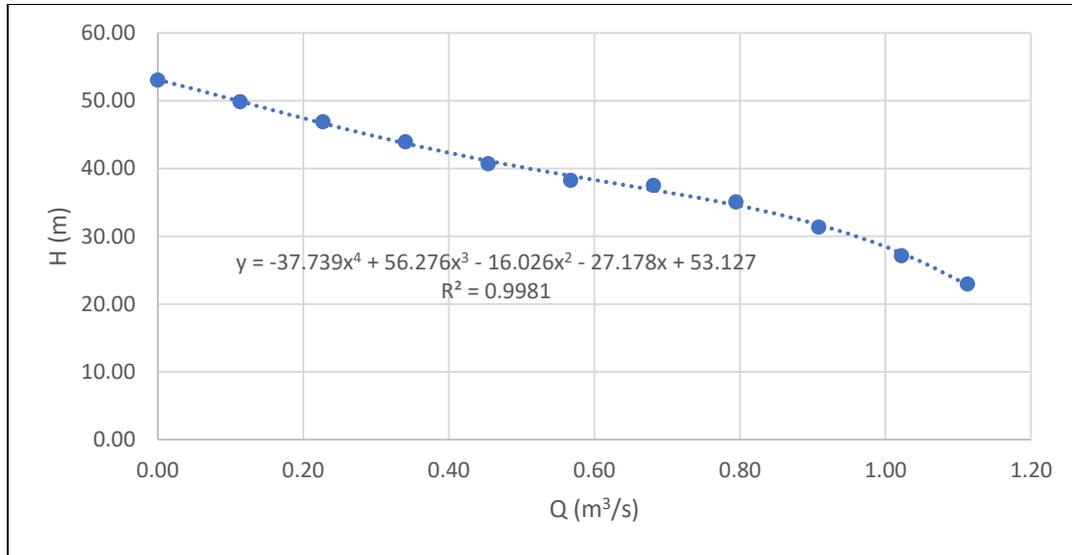


Figura 4.5. Polinomio de ajuste para la curva H-Q de las bombas de PB Xotepingo

Por lo tanto, la expresión que describe qué carga proporciona la bomba al agua en función del gasto puede escribirse como:

$$H(m) = -37.739Q^4 + 56.276Q^3 - 16.026Q^2 - 27.178Q + 53.127 \quad [28]$$

Donde:

$H(m)$ es la carga de bombeo, en m

Q es el gasto que circula por la bomba, en m^3/s

Como se mencionó con anterioridad, para hacer uso de la programación dinámica es necesario establecer variables de estado y decisión a lo largo de las diferentes etapas, por lo tanto, es necesario escribir la ecuación H-Q en función de los volúmenes discretizados.

Para obtener la expresión de la potencia hidráulica en términos de la variable discretizada k , es necesario utilizar el intervalo de tiempo de una hora y así poder reescribir el gasto en función del volumen. Si se utiliza el mismo intervalo de tiempo, la ecuación de H-Q se escribe como:

$$H(m) = -37.739 \left(\frac{k}{3600}\right)^4 + 56.276 \left(\frac{k}{3600}\right)^3 - 16.026 \left(\frac{k}{3600}\right)^2 - 27.178 \left(\frac{k}{3600}\right) + 53.127 \quad [29]$$

Donde:

k es el volumen de agua que sale del cárcamo de bombeo y que envía la bomba en una hora, en m^3

4. 5. 2. Curva η -Q de las bombas

La Figura 2.6 muestra la curva característica H-Q de las bombas utilizadas en la planta. Dicha curva se construyó a partir de las leyes de afinidad para un recorte al 90% del impulsor de mayor tamaño. Al graficar la curva en el mismo plano de las curvas características que proporciona el fabricante, es posible leer los valores de eficiencia para diferentes valores de gasto (ver Tabla 4.1).

Tabla 4.1. Lecturas de eficiencia para algunos valores de gasto de la curva H-B, Xotepingo

Gasto (gpm)	Gasto (m ³ /s)	Eficiencia (%)	Eficiencia (1)
9400	0.593	65	0.65
10398	0.656	70	0.70
11698	0.738	75	0.75
13996	0.883	75	0.75
16801	1.060	65	0.65

Con base en las lecturas de la Tabla 4.1, se grafica el gasto en m³/s (columna 2) y la eficiencia en número decimal (columna 4) para obtener un polinomio ajustado que describa el comportamiento de la eficiencia de la bomba. La Figura 4.6 muestra el polinomio de ajuste con un coeficiente de correlación suficientemente bueno.

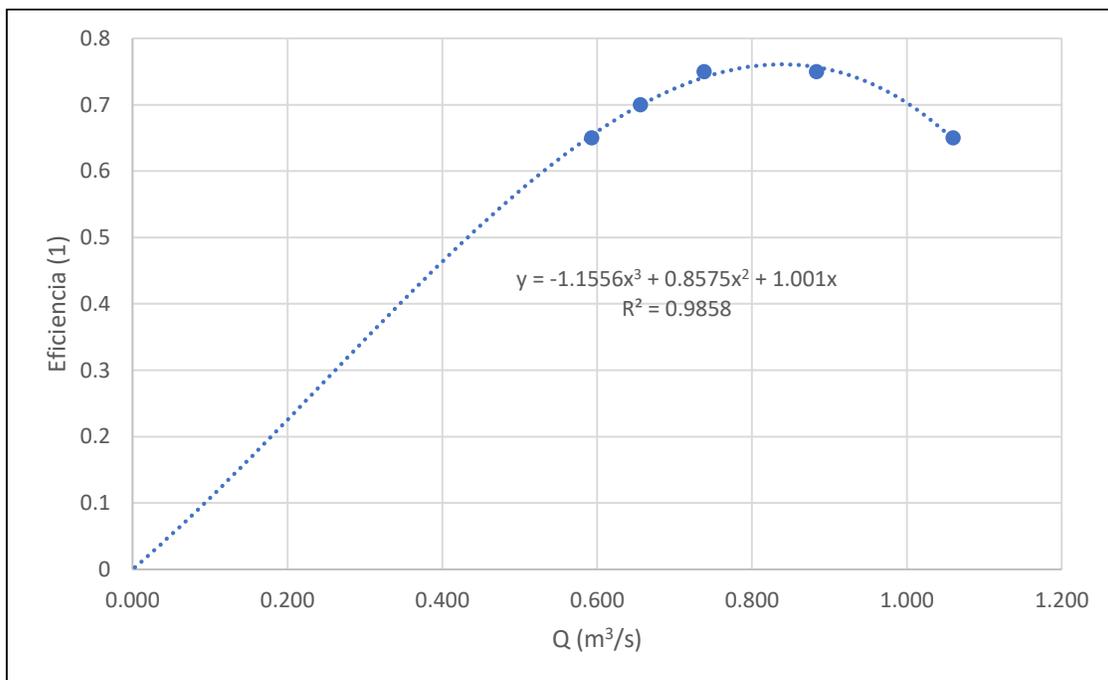


Figura 4.6. Curva de eficiencia de las bombas utilizadas en PB Xotepingo

La curva de ajuste tiene una muy buena aproximación con los valores de eficiencia leídos, por lo tanto, la expresión que describe la eficiencia de las bombas utilizadas en la PB Xotepingo puede escribirse como:

$$\eta_B(1) = -1.1556Q^3 + 0.8575Q^2 + 1.001Q \quad [30]$$

Donde:

η_B es la eficiencia de la bomba, adimensional
 Q es el gasto que circula por la bomba, en m³/s

Asimismo, es necesario obtener una expresión de la eficiencia en términos de las variables de estado discretizadas. Si se toma el intervalo de tiempo de una hora, es posible reescribir la ecuación de eficiencia como:

$$\eta_B(1) = -1.1556 \left(\frac{k}{3600} \right)^3 + 0.8575 \left(\frac{k}{3600} \right)^2 + 1.001 \left(\frac{k}{3600} \right) \quad [31]$$

Donde:

k es el volumen de agua que sale del cárcamo de bombeo y que envía la bomba en una hora, en m³

4. 6. Rebombeo Estrella

4. 6. 1. Curva H-Q de las bombas

La Figura 2.10 muestra la curva H-Q del impulsor recortado en el mismo plano de las curvas originales. Con los puntos con los que se construyó dicha curva se hace un ajuste de un polinomio de cuarto grado para así obtener una ecuación de la carga que proporciona la bomba en función del gasto.

La línea de tendencia obtenida a partir de ajustar un polinomio se muestra en la Figura 4.7, donde se observa que la expresión se ajusta de forma adecuada a los valores de carga y gasto, ya que el coeficiente de correlación es muy cercano a la unidad.

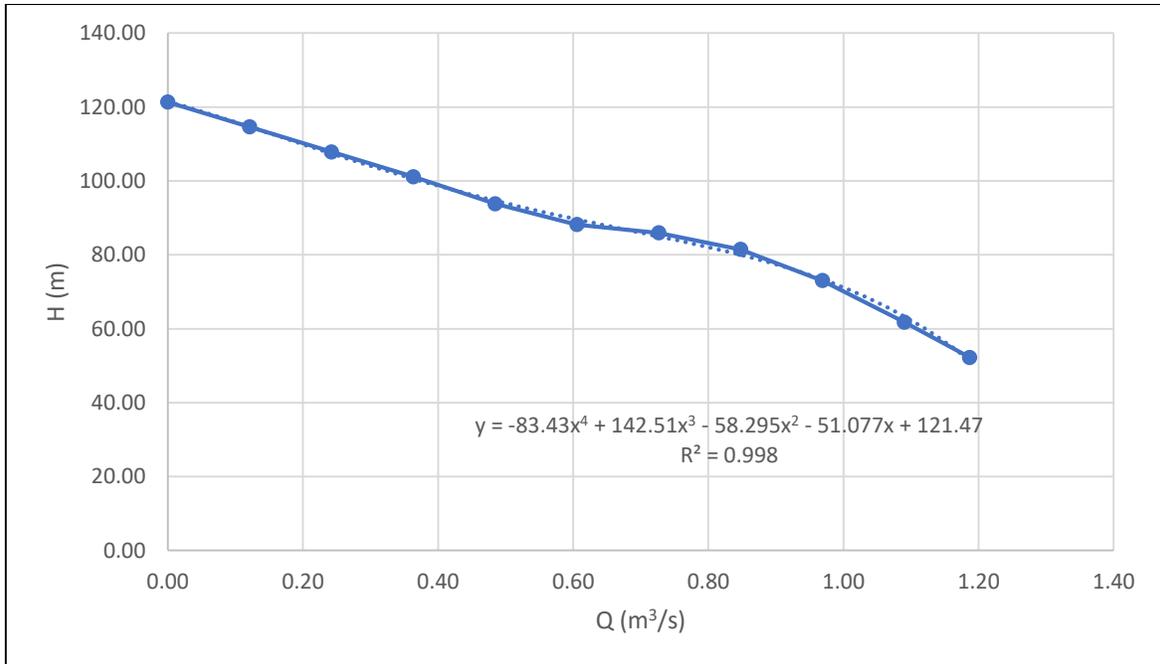


Figura 4.7. Polinomio de ajuste para la curva H-Q de las bombas del Rebombero Estrella

De modo que la expresión que muestra el comportamiento de la carga en función del gasto se escribe como:

$$H(m) = -83.43Q^4 + 142.51Q^3 - 58.295Q^2 - 51.077Q + 121.47 \quad [32]$$

Donde:

$H(m)$ es la carga de bombeo, en m

Q es el gasto que circula por la bomba, en m^3/s

De forma análoga a la expresión de H-Q de las bombas utilizadas en PB Xotepingo, es necesario expresar dicha ecuación utilizando las variables de estado, en este caso, la variable k , ya que representa el volumen de agua que sale del cárcamo y está directamente relacionada con el gasto que circula por la bomba, por lo tanto, si se hace uso del mismo intervalo de tiempo (una hora), la expresión H-Q se puede reescribir como:

$$H(m) = -83.43 \left(\frac{k}{3600} \right)^4 + 142.51 \left(\frac{k}{3600} \right)^3 - 58.295 \left(\frac{k}{3600} \right)^2 - 51.077 \left(\frac{k}{3600} \right) + 121.47 \quad [33]$$

Donde:

k es el volumen de agua que sale del cárcamo de bombeo y que envía la bomba en una hora, en m^3

4. 6. 2. Curva η -Q de las bombas

En la Figura 2.10 se muestra la curva del impulsor recortado al 96% para que se ajustara a los datos de placa de las bombas utilizadas en el Rebombero Estrella, dicha curva discontinua ya considera los dos pasos de impulsión de cada uno de los equipos. Cuando una bomba se compone de varios pasos, en general, la curva de eficiencia se mantiene constante. En algunos casos el fabricante indica si es necesario considerar una reducción de 0.5 o 1 punto porcentual de eficiencia por cada paso de impulsión adicional a uno, sin embargo, debido a que la reducción en la eficiencia es muy pequeña conforme aumenta el número de pasos, se considera que, para la bomba con dos pasos de impulsión, la eficiencia permanece constante, es decir, es la misma que con un solo paso.

Si de la Figura 2.10 se lee la eficiencia para algunos valores de gasto, se obtienen las parejas de datos que se muestran en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2. Lecturas de eficiencia para algunos valores de gasto de la curva H-B, Rebombero Estrella

Gasto (gpm)	Gasto (m³/s)	Eficiencia (%)	Eficiencia (1)
9827	0.62	70	0.7
10778	0.68	75	0.75
11888	0.75	81	0.81
13631	0.86	84	0.84
14424	0.91	84	0.84
16009	1.01	81	0.81
18069	1.14	75	0.75
18862	1.19	70	0.7

Con base en gasto, en m³/s, y la eficiencia como número decimal, se grafican los puntos y se ajusta un polinomio de tercer grado. La Figura 4.8 muestra los puntos leídos de eficiencia para determinados valores de gasto y la curva de ajuste, también se muestra la ecuación y el coeficiente de correlación.

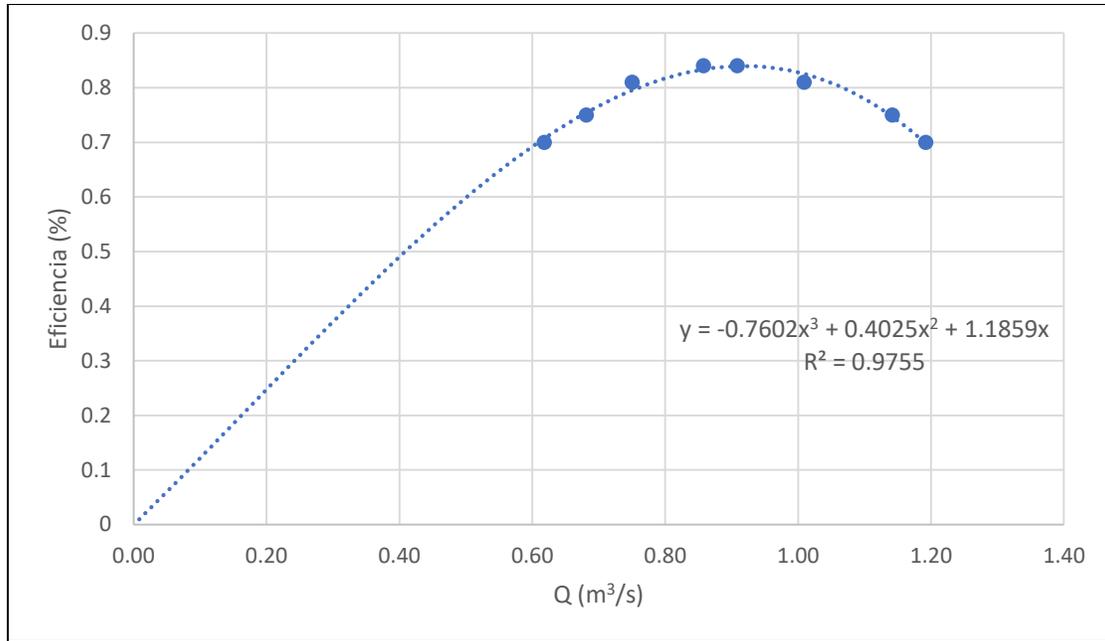


Figura 4.8. Curva de eficiencia de las bombas utilizadas en Rebombeo Estrella

Al ser el coeficiente de correlación de la Figura 4.8 muy cercano a la unidad, la expresión que describe el comportamiento de la eficiencia en función del gasto es:

$$\eta_B(1) = -0.7602Q^3 + 0.4025Q^2 + 1.1859Q \quad [34]$$

Donde:

- η_B es la eficiencia de la bomba, adimensional
- Q es el gasto que circula por la bomba, en m³/s

Al ser necesario escribir la ecuación de la eficiencia en términos de variables de estado, se toma el intervalo de tiempo de una hora, es decir, 3600 segundos, por lo tanto, la ecuación se puede expresar, en términos de volumen, como:

$$\eta_B(1) = -0.7602 \left(\frac{k}{3600} \right)^3 + 0.4025 \left(\frac{k}{3600} \right)^2 + 1.1859 \left(\frac{k}{3600} \right) \quad [35]$$

4. 6. 3. Posibles costos por desabasto de agua en el cárcamo

Los costos asociados a los déficits pueden expresarse en función de cuánto se debe invertir en la compra de tanques cisterna para abastecer de agua determinados sectores. El desabasto ocurre cuando en el cárcamo no hay agua que pueda ser bombeada, por lo tanto, el déficit se presenta cuando el estado del cárcamo de succión de las plantas de bombeo, al final del intervalo de tiempo analizado, es menor al mínimo estado inicial que puede tener el tanque de succión.

$$\begin{aligned} & \text{Costos por desabasto de agua en el cárcamo} \\ & = \frac{\text{Precio de una pipa} * \text{Volumen faltante}}{\text{Volumen de una pipa}} \end{aligned} \quad [36]$$

En términos de las variables de estado discretizadas, el déficit de volumen al final de un intervalo de tiempo, es decir una hora, se calcula como:

$$\text{Volumen faltante} = |j - i_{min}| \quad [37]$$

Donde:

j es el estado del cárcamo al final de la hora analizada, en m^3
 i_{min} es el mínimo estado físicamente posible que puede tener el cárcamo de succión, en m^3

En la expresión del volumen faltante es necesario emplear el valor absoluto de la diferencia de los estados j e i_{min} , ya que el estado j puede ser un número negativo, mientras que i_{min} puede ser un número positivo o cero. Si no se utiliza el valor absoluto de la diferencia de estados, al calcular el costo por desabasto de agua en el cárcamo se podría obtener un número negativo, lo que implicaría una ganancia en lugar de un desembolso.

Si se utiliza el costo promedio de un tanque cisterna con un volumen de $10 m^3$, la expresión para calcular el costo por desabasto de agua en el cárcamo, en términos de las variables de estado discretizadas, es:

$$\text{Costos por desabasto de agua en el cárcamo} = \frac{\$1100 * |j - i_{min}|}{10 m^3} \quad [38]$$

$$\text{Costos por desabasto de agua en el cárcamo} = 110 \left[\frac{\$}{m^3} \right] * |j - i_{min}| \quad [39]$$

4. 6. 4. Posibles costos por exceso de agua en el cárcamo

Los costos asociados al posible exceso de agua en los cárcamos de bombeo están directamente relacionados con el estado final del tanque de succión después del intervalo analizado. Asimismo, el costo del superávit de agua puede expresarse en función de cuánto dinero se desperdicia si el agua se derrama y, esto ocurre, si el estado final del tanque de succión es mayor que el máximo estado físico que puede tener. En términos de las variables discretizadas, el costo por derrame en el cárcamo puede expresarse como:

$$\begin{aligned} & \text{Costos por exceso de agua en el cárcamo} \\ &= \frac{\text{Precio de una pipa} * \text{Volumen sobrante}}{\text{Volumen de una pipa}} \end{aligned} \quad [40]$$

En términos de las variables de estado discretizadas, el posible volumen sobrante al final de un intervalo de tiempo se puede escribir como:

$$\text{Volumen sobrante} = j - i_{m\acute{a}x} \quad [41]$$

Donde:

j es el estado del cárcamo al final de la hora analizada, en m^3
 i_{min} es el máximo estado físicamente posible que puede tener el cárcamo de succión, en m^3

De forma análoga a la obtención de los posibles costos por desbaste, para los costos de un posible derrame de agua en el cárcamo se utiliza el precio promedio de las pipas, por lo tanto, la ecuación se escribe:

$$\text{Costos por exceso de agua en el cárcamo} = \frac{\$1100 * (j - i_{m\acute{a}x})}{10 m^3} \quad [42]$$

$$\text{Costos por exceso de agua en el cárcamo} = 110 \left[\frac{\$}{m^3} \right] * (j - i_{m\acute{a}x}) \quad [43]$$

Una vez obtenidas cada una de las partes que componen el beneficio de bombear un volumen de agua, es posible expresar la función objetivo. En dicha función se buscan maximizar los beneficios de bombear el agua a lo largo de diferentes días, es decir, se busca tener el máximo provecho en todo el tiempo que se bombea un determinado volumen de agua, por lo tanto, la función objetivo se expresa como:

$$FO = \sum_{n=1}^N \left[110k - 110j - \frac{3 * 9.81 * \frac{k}{3600} * H(k)}{\eta_e * \eta_b(k)} - (110 * |j - i_{min}|) - (110 * (j - i_{max})) \right] \quad [44]$$

Donde:

- j estado del cárcamo al final de la etapa analizada
- k volumen extraído en la etapa analizada
- i estado inicial del cárcamo de bombeo en la etapa analizada
- $H(k)$ carga proporcionada por una bomba en la planta de bombeo, en función del volumen extraído k
- $\eta_b(k)$ eficiencia de la bomba, en función del volumen extraído k
- η_e eficiencia del motor eléctrico que, por fines prácticos, se considera 0.95
- N periodos de tiempo analizados, días

Una vez obtenida la función objetivo, la programación dinámica estocástica se resuelve con un proceso hacia atrás definiendo un número de periodos en los que se va a realizar el proceso para el cálculo de beneficios suponiéndolos nulos al final del periodo de análisis. El beneficio total, para la programación dinámica estocástica, se obtiene con la expresión (Domínguez-Mora & Arganis-Juárez, 2021):

$$B_n^k(i) = \sum P_n^k(i, j) [b_n^k(i, j, k) + B_{*n+1}(j)] \quad [45]$$

Si se desarrolla el producto de la ecuación, se obtiene:

$$B_n^k(i) = \sum P_n^k(i, j) * b_n^k(i, j, k) + P_n^k(i, j) * B_{*n+1}(j) \quad [46]$$

La primera parte de la expresión anterior se refiere al beneficio de la función objetivo afectado por probabilidades asociadas a los ingresos en el cárcamo de bombeo. Como se consideran que las probabilidades de ingreso son las mismas para los diferentes periodos de análisis, la ecuación se puede reescribir como:

$$B_n^k(i) = \phi_n^k(i) + \sum P_n^k(i, j) * B_{*n+1}(j) \quad [47]$$

La segunda parte de la expresión anterior se calcula como el beneficio óptimo acumulado a lo largo de las etapas analizadas, es decir, el valor máximo. El beneficio acumulado en la última etapa y el último periodo analizado, es el máximo valor de la función objetivo en la última etapa analizando todos los posibles ingresos y extracciones, es decir, la primera parte de la ecuación anterior.

Por lo tanto, para poder determinar la política óptima, es necesario calcular los beneficios asociados a las tres diferentes etapas establecidas previamente para los días de análisis (N) en cada una de las plantas de bombeo.

El beneficio se calcula a partir de la función objetivo, obteniendo, para un estado inicial del cárcamo (i), una salida de agua (k) y un ingreso de volumen (x) las ganancias de bombear un volumen de agua, el costo por el agua que no se bombeó y el costo de la energía eléctrica utilizada.

Para cada uno de los estados del cárcamo se analiza la posibilidad de que en cada uno de ellos se extraiga un diferente volumen k . Para cada extracción se debe analizar la posibilidad de que ingrese al cárcamo un determinado volumen de agua x , sin embargo, dado que los ingresos de agua a los cárcamos son variables, se tiene que obtener la probabilidad de que se presente dicho ingreso.

Para cada estado inicial del cárcamo, cada salida y cada ingreso, se calcula el estado del cárcamo al final de la hora analizada a través de la ecuación de continuidad. Si el resultado del estado final es un número físicamente imposible, éste se debe corregir. Una vez calculado el estado al final del periodo analizado, se obtiene la ganancia de bombear un volumen de agua, el costo por el agua no bombeada, costo de la energía eléctrica empleada, el posible desabasto de agua, así como el posible exceso empleando las variables de estado necesarias, es decir, i , j y k . El beneficio asociado a cada ingreso de cada salida de un estado inicial debe multiplicarse por la probabilidad de que se presente ese ingreso.

Una vez obtenida la probabilidad de cada ingreso, ésta se multiplica por el beneficio de la respectiva entrada. La suma de los productos de beneficio, asociado a cada ingreso, por su probabilidad de ocurrencia, es el beneficio de todas las posibles entradas para una determinada extracción en un estado inicial del cárcamo. Este proceso debe repetirse para todos los estados iniciales del cárcamo y, en cada uno de estos estados, analizar cada una de las posibles salidas o extracciones de volumen, asimismo, en cada salida debe analizarse la posibilidad de que se presenten todos los ingresos de los cuales se tiene conocimiento. Para un determinado estado y para cada una de las salidas de agua se obtiene un valor numérico, éste es el beneficio asociado a cada una de las extracciones.

Los beneficios de cada etapa, estado y salida se utilizan posteriormente para el proceso recursivo hacia atrás de la programación dinámica, donde es necesario asociar para el análisis de cada día en cada etapa, el beneficio correspondiente a dicha etapa en cada una de las salidas. El proceso recursivo hacia atrás de la programación dinámica establece que el cálculo inicia con el último periodo de tiempo analizado.

En esta segunda parte del cálculo, dado que se busca maximizar el beneficio, se debe comparar este valor entre cada una de las salidas para un mismo estado y se debe elegir el máximo, es decir, para un estado inicial del cárcamo se tienen n

posibles extracciones, al analizar el beneficio de todas las extracciones para un estado inicial se escoge el máximo valor, éste está asociado a una extracción, por lo tanto, para un estado inicial se tiene un máximo beneficio que corresponde a una salida. Este proceso debe realizarse para todos los estados iniciales y salidas de cada una de las etapas y así obtener la política óptima de operación, es decir, determinar cuál debe ser la salida de agua en función del estado inicial que se tenga a través de la búsqueda del máximo beneficio.

4. 7. Ejemplo demostrativo de la programación dinámica

Para esclarecer el inicio del cálculo en la programación dinámica se usa el ejemplo de encontrar la política óptima de una presa, escenario que puede asemejarse a las plantas de bombeo del sistema analizado. El periodo de análisis es de años y cada uno de estos se dividen en dos etapas, es decir, los años en los que se va a analizar el funcionamiento de la presa tienen dos etapas: sequías (al inicio del año) y temporada de lluvias (al final del año). El tiempo en el cual se hace el análisis es de $N=50$, es decir, se analizan 50 años, lo que corresponde a la vida útil promedio de una presa (Alegría-Díaz, 2010).

El primer paso que se debe realizar es la obtención, para cada una de las etapas, de los beneficios asociados a cada uno de los estados iniciales de la presa y cada una de las posibles extracciones.

Una vez obtenidos los beneficios de cada etapa, cada estado inicial y cada salida, se inicia el proceso recursivo de la programación dinámica. Es decir, el cálculo inicia en el año 50, donde se considera que después de esos años de vida, la presa ya no tiene mayores rendimientos, por lo tanto, los beneficios del año 50, en la etapa 2 (último periodo del año en análisis), corresponden a los máximos valores de beneficio de cada estado inicial de la presa para la misma etapa. Para encontrar la óptima operación del año 50 en la etapa 1, se deben considerar los beneficios óptimos $B_{n+1}(j)$ calculados previamente correspondientes a la etapa analizada, es decir, la etapa 1. Posteriormente, para determinar la política óptima de la presa en el año 49 en la etapa 2, se deben considerar los beneficios asociados a los diferentes estados calculados en la etapa 2. Este proceso se repite hasta que, al comparar los incrementos en los beneficios para las mismas etapas en diferentes años, los valores sean iguales o muy similares, por lo tanto, el cálculo no necesariamente se tiene que hacer hasta el año uno.

El problema de encontrar la política óptima en la presa del ejemplo consiste en definir las extracciones k para cada época del año. Las salidas se deben determinar

en función del almacenamiento al inicio de la etapa (i) y de la función de distribución de los ingresos en la época del año analizada, de forma que se maximicen los beneficios.

La función objetivo que busca maximizarse está dada por la expresión:

$$FO = \sum_{n=1}^N [b_n^k(i, j) - \text{Costo por derrame} - \text{Costo por déficit}] \quad [48]$$

Donde:

$b_n^k(i, j)$ es el beneficio de extraer un determinado volumen de agua

El beneficio en una etapa cualquiera está dada por la expresión:

$$b_n^k(i, j) = 2k(i + j) - 2 * \text{derrame} - 1 * \text{déficit} \quad [49]$$

Para el ejemplo, la presa se divide en cuatro estados, el año en dos etapas y la extracción máxima es igual a tres. Las probabilidades ingreso en cada etapa se muestran en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3. Probabilidades de ingreso para cada etapa del ejemplo demostrativo

Ingresos	1	2	3	4
Etap 1	0.3	0.4	0.2	0.1
Etap 2	0.1	0.2	0.4	0.3

Dado que se tiene todos los datos necesarios, es posible utilizar la expresión de la programación dinámica para determinar la política óptima de operación.

La ecuación de la técnica utilizada se divide en dos partes, por lo tanto, el cálculo también puede dividirse en dos grandes pasos: el cálculo de los beneficios asociados a cada etapa y la determinación del beneficio acumulado para cada año en cada una de las etapas (proceso recursivo hacia atrás).

4. 7. 1. Paso 1. Determinación de los beneficios asociados a cada etapa

Para cada uno de los estados iniciales de la presa y para cada una de las posibles extracciones debe analizarse la posibilidad de que se presenten todos los ingresos. Los beneficios asociados a cada uno de los estados y cada una de las salidas se determina con la primera parte de la ecuación de la programación dinámica:

$$\phi_n^k(i) = \sum P_n^k(i, j) b_n^k(i, j) \quad [50]$$

Donde:

- n es la etapa que se está analizando
- i es el estado de la presa al inicio de la etapa
- j es el estado de la presa al final de la etapa
- k es el valor de la extracción

A continuación se muestra el cálculo de ϕ para las dos etapas, los cuatro estados iniciales de la presa y las tres extracciones:

4. 7. 1. 1. Etapa 1

Para el cálculo de ϕ en la primera etapa se deben considerar todos los posibles estados iniciales de la presa y las extracciones, es decir, se va a calcular $\phi_1^k(i)$.

Estado inicial $i=4$

En este proceso del cálculo se considera el estado 4, por lo tanto, se determinan los valores de $\phi_1^k(4)$.

Extracción $k=1$

Si se considera una extracción con un valor de 1, se va a obtener el valor de $\phi_1^1(4)$. Por facilidad, el cálculo se realiza haciendo uso de la Tabla 4.4.

Tabla 4.4. Procedimiento para el cálculo de ϕ

1	2	3	4	5	6	7	8
x	j_i	Derrame	Déficit	j_{i+1}	b	Prob	$\phi_n^k(i)$
1							
2							
3							
4							

En la columna 1 se escriben todos los posibles ingresos.

En la columna 2 se calcula el estado al final de la etapa. Este valor se obtiene con la expresión de continuidad en el embalse (ecuación 12).

En la columna 3 se identifica si hay derrame en el embalse. Si el valor de j es mayor al máximo estado permisible de la presa, entonces sí hay derrame y éste se calcula como:

$$Derrame = j - 4 \quad [51]$$

En la columna 4 se verifica si hay déficit. Éste se presenta si el valor calculado de j es menor al mínimo estado permisible en la presa, es decir 1, y se calcula como:

$$Déficit = 1 - j \quad [52]$$

En la columna 5 se escribe el estado final de la presa considerando los derrames y déficits que pudieran existir. En el supuesto de que en la columna 2 se obtuviera un valor de 5, existiría un derrame con valor de 1 y, en esta columna se escribiría el estado final que se tiene físicamente en la presa, es decir, 4. Generalizando, si en la columna 2 se obtiene un valor mayor al máximo estado permisible, entonces en esta columna se escribe el máximo estado permisible de la presa. En caso de que en la columna 2 se obtuviera un valor menor al mínimo estado permisible físicamente, en esta columna se escribe el mínimo estado que se puede presentar en el embalse.

En la columna 6 se calcula el beneficio con la ecuación:

$$b_k(i, j) = 2k(i + j_{i+1}) - 2(derrame) - 1(déficit) \quad [53]$$

En la columna 7 se escriben las probabilidades de que se presenten los diferentes valores de ingreso. Se debe tener cuidado de escribir las probabilidades correspondientes a la etapa analizada.

En la columna 8 se obtiene el valor de ϕ como la suma de los productos del valor del beneficio asociado a un determinado ingreso por su probabilidad de que se presente.

A continuación se realizan los cálculos para los diferentes valores de ingreso:

$x=1$

- Columna 2:

Se obtiene el valor del estado al final de la etapa (ecuación 12) considerando un ingreso igual a 1:

$$j = 4 + 1 - 1 \\ j = 4$$

- Columna 3:

Como el valor de j calculado en la columna 2 es igual al máximo estado del embalse, entonces no hay derrame (ecuación 51). En esta columna se escribe cero.

- Columna 4:

El valor de j obtenido en la columna 2 es mayor al mínimo estado de la presa, por lo tanto, no hay déficit (ecuación 52). Se escribe cero en esta columna.

- Columna 5:

Dado que el valor de j que se obtuvo no supera el máximo estado de la presa que se puede presentar físicamente, entonces en esta columna se escribe el mismo valor obtenido en la columna 2.

- Columna 6:

Se obtiene el beneficio asociado al ingreso analizado sustituyendo los valores en la ecuación 53:

$$b = 2 * 1 * (4 + 4) - 2(0) - 1(0)$$

$$b = 16$$

- Columna 7:

De acuerdo con la Tabla 4.3, la probabilidad de que se presente el ingreso con valor de uno durante la primera etapa es de 0.3.

- Columna 8:

El valor de la columna 8 se puede obtener hasta haber calculado los diferentes valores de ingreso, por lo tanto, el procedimiento realizado para el cálculo de los valores de las diferentes columnas se repite para todos los ingresos empleando las ecuaciones correspondientes.

$x=2$

- Columna 2:

$$j = 4 + 2 - 1$$

$$j = 5$$

- Columna 3:

$$j > 4 \rightarrow Derrame = 5 - 4 = 1$$

- Columna 4:

$$j > 1 \rightarrow Déficit = 0$$

- Columna 5:

$$j > 4 \rightarrow j_{i+1} = 4$$

- Columna 6:

$$b = 2 * 1 * (4 + 4) - 2(1) - 1(0)$$

$$b = 14$$

- Columna 7:

$$Prob = 0.4$$

x=3

- Columna 2:

$$j = 4 + 3 - 1$$

$$j = 6$$

- Columna 3:

$$j > 4 \rightarrow Derrame = 6 - 4 = 2$$

- Columna 4:

$$j > 1 \rightarrow Déficit = 0$$

- Columna 5:

$$j > 4 \rightarrow j_{i+1} = 4$$

- Columna 6:

$$b = 2 * 1 * (4 + 4) - 2(2) - 1(0)$$

$$b = 12$$

- Columna 7:

$$Prob = 0.2$$

x=4

- Columna 2:

$$j = 4 + 4 - 1$$

$$j = 7$$

- Columna 3:

$$j > 4 \rightarrow Derrame = 7 - 4 = 3$$

- Columna 4:

$$j > 1 \rightarrow \text{Déficit} = 0$$

- Columna 5:

$$j > 4 \rightarrow j_{i+1} = 4$$

- Columna 6:

$$b = 2 * 1 * (4 + 4) - 2(3) - 1(0)$$

$$b = 10$$

- Columna 7:

$$\text{Prob} = 0.1$$

Con base en los datos obtenidos de b y sus respectivas probabilidades, se calcula $\phi_1^1(4)$, es decir, el valor de la columna 8 de la Tabla 4.4 empleando la ecuación 50.

$$\phi_1^1(4) = 16 * 0.3 + 14 * 0.4 + 12 * 0.2 + 10 * 0.1$$

$$\phi_1^1(4) = 13.8$$

El resumen del cálculo de ϕ $i=4$ y $k=1$ se muestra en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5. Cálculo de ϕ para $i=4$ y $k=1$

x	j_i	Derrame	Déficit	j_{i+1}	b	Prob	$\phi_1^1(4)$
1	4	0	0	4	16	0.3	13.8
2	5	1	0	4	14	0.4	
3	6	2	0	4	12	0.2	
4	7	3	0	4	10	0.1	

Para las demás extracciones ($k=2$ y 3) en el máximo estado del embalse y considerando todos los posibles ingresos, se hace un procedimiento análogo al mostrado para $k=1$. Los resultados para dichas extracciones se muestran de forma resumida en la Tabla 4.6 y Tabla 4.7 respectivamente.

Tabla 4.6. Cálculo de ϕ para $i=4$ y $k=2$

x	j_i	Derrame	Déficit	j_{i+1}	b	Prob	$\phi_1^2(4)$
1	3	0	0	3	28	0.3	30
2	4	0	0	4	32	0.4	
3	5	1	0	4	30	0.2	
4	6	2	0	4	28	0.1	

Tabla 4.7. Cálculo de ϕ para $i=4$ y $k=3$

x	j_i	Derrame	Déficit	j_{i+1}	b	Prob	$\phi_1^3(4)$
1	2	0	0	2	36	0.3	41.8
2	3	0	0	3	42	0.4	
3	4	0	0	4	48	0.2	
4	5	1	0	4	46	0.1	

Para los demás valores de estado inicial en la etapa 1, considerando todas las extracciones e ingresos, el procedimiento que se debe realizar es el mismo al ya descrito con anterioridad. El cálculo de ϕ para la etapa 1 se repite para la etapa 2, solamente se cambian las probabilidades para los diferentes ingresos. Las probabilidades de esta segunda etapa se encuentran en la Tabla 4.3. La Tabla 4.8,

Tabla 4.9 y

Tabla 4.10 muestran el cálculo resumido de ϕ para el estado inicial máximo y $k=1$, 2 y 3 respectivamente. El cálculo para los demás estados, considerando todas las extracciones y posibles ingresos, es análogo al ya comentado.

Tabla 4.8. Cálculo de ϕ para $i=4$ y $k=1$

x	j_i	Derrame	Déficit	j_{i+1}	b	Prob	$\phi_2^1(4)$
1	4	0	0	4	16	0.1	12.2
2	5	1	0	4	14	0.2	
3	6	2	0	4	12	0.4	
4	7	3	0	4	10	0.3	

Tabla 4.9. Cálculo de ϕ para $i=4$ y $k=2$

x	j_i	Derrame	Déficit	j_{i+1}	b	Prob	$\phi_2^2(4)$
1	3	0	0	3	28	0.1	29.6
2	4	0	0	4	32	0.2	
3	5	1	0	4	30	0.4	
4	6	2	0	4	28	0.3	

Tabla 4.10. Cálculo de ϕ para $i=4$ y $k=3$

x	j_i	Derrame	Déficit	j_{i+1}	b	Prob	$\phi_2^3(4)$
1	2	0	0	2	36	0.1	45
2	3	0	0	3	42	0.2	
3	4	0	0	4	48	0.4	
4	5	1	0	4	46	0.3	

Una vez obtenidas las ϕ para ambas etapas y para todos los estados y extracciones, éstas se pueden resumir como lo muestra la Tabla 4.11. En dicha tabla se observa que, en ambas etapas para todos los estados de la presa, el máximo beneficio se obtiene para el máximo valor de extracción, es decir, cuando k tiene un valor de 3.

Tabla 4.11. Resultados del cálculo de las ϕ para ambas etapas con todos los estados y extracciones

Estado	k	$\phi_n^k(i)$	
		Etapla 1	Etapla 2
4	1	13.8	12.2
	2	30.0	29.6
	3	41.8	45
3	1	12.6	11.8
	2	23.8	25.8
	3	30.6	35.4
2	1	9.8	10.6
	2	16.4	19.6
	3	20.1	23.9
1	1	6.2	7.8
	2	9.3	11.9
	3	11.6	13.4

Con los valores obtenidos de ϕ es posible calcular el beneficio total acumulado en cada etapa.

4. 7. 2. Paso 2. Determinación del beneficio acumulado para cada año en cada una de las etapas

El proceso se inicia en orden cronológico descendente, es decir, con el año 50 en la etapa 2, posteriormente se calcula la etapa 1 con los datos de la etapa 2 del año 50, después se calculan los beneficios de la etapa 2 del año 49 y así sucesivamente. El beneficio total de cada etapa de año se obtiene con la ecuación 47.

Es importante recordar que los beneficios después del año 50, que es la vida útil de la presa, se consideran nulos, por lo tanto, para la segunda etapa del año 50 la expresión se simplifica. A continuación se realizan los cálculos para determinar los beneficios de cada etapa.

4. 7. 2. 1. Año 50

Etapa 2

El beneficio después de la vida útil de la presa se considera nulo, es decir, $B_{n+1}^*(j) = 0$, por lo tanto, la expresión para el cálculo del beneficio de esa etapa se simplifica a $B_n^k(i) = \phi_n^k(i)$. Como ya se obtuvieron anteriormente los datos de ϕ y se identificaron los máximos valores y su correspondiente extracción, el máximo beneficio que se puede obtener en la etapa 2 del año 50 para los diferentes estados de la presa son los valores máximos de la última columna de la Tabla 4.11, a estos valores se les debe asociar su correspondiente valor de extracción, es decir, para el estado máximo de la presa ($i=4$) en la segunda etapa, el beneficio máximo es 45, dicho valor se obtuvo con una extracción máxima ($k=3$); para el estado 3 en la segunda etapa, el máximo beneficio es 35.4 con una extracción máxima; para el estado 2 en la misma etapa, el máximo beneficio obtenido fue de 23.9 con una extracción máxima y, finalmente, en el estado 1, el máximo beneficio fue de 13.4 con la extracción $k=3$.

Con base en los máximos beneficios asociados a la segunda etapa del año 50 para los diferentes estados del embalse, se calculan los beneficios para la etapa anterior, es decir, la primera del año 50. Para ese cálculo se denominan a los beneficios de la segunda etapa del año 50 como B^* y, por otro lado, k^* a su extracción asociada a cada estado de la presa (ver Tabla 4.12).

Tabla 4.12. B^* y k^* . Año 50, segunda etapa

i	k*	B* (i)
4	3	45.00
3	3	35.40
2	3	23.90
1	3	13.40

Etapa 1

Para el cálculo del beneficio en esta etapa para todos los estados se utiliza la ecuación 47 y, dado que ya se tiene los valores de $B_{n+1}^*(j)$ que corresponden a los máximo beneficios de la etapa 2 del año 50, se calculan dichos beneficios a partir de los valores de la Tabla 4.12 y de los valores de ϕ correspondientes a la etapa analizada, al estado y a la extracción.

A continuación se realiza el cálculo de los beneficios para los diferentes estados y extracciones.

Estado inicial $i=4$

Extracción $k=1$

Para facilitar los cálculos se utiliza la Tabla 4.13.

Tabla 4.13. Cálculo genérico para los beneficios

1	2	3	4	5	6	7	8
x	j	j_{i+1}	$B^*(j_{i+1})$	Prob	$(\text{Prob})(B^*)$	Benef. de esa etapa	B
1							
2							
3							
4							

En la columna 1 se escriben todos los ingresos posibles que se pueden tener en el embalse.

En la columna 2 se calcula el estado de la presa al final de la etapa analizada para los diferentes valores de ingreso con la ecuación de continuidad (ecuación 12).

En la tercera columna se corrige el valor obtenido en la columna anterior teniendo en cuenta la capacidad física del embalse, es decir, si en la columna 2 se obtiene un número mayor a 4 (que es el estado máximo permisible de la presa), en la columna 3 se debe escribir el valor de 4. Si el valor calculado en la columna dos es menor a uno (mínimo estado permisible en el embalse), entonces en la columna 3 se escribe 1, de forma resumida:

$$\text{si } j > 4 \rightarrow j_{i+1} = 4 \quad [54]$$

$$\text{si } j < 1 \rightarrow j_{i+1} = 1 \quad [55]$$

En la cuarta columna se escribe el máximo beneficio que se obtuvo en la etapa siguiente, es decir, B^* . Para este caso específico, los máximos beneficios de la etapa 2 del año 50 según el estado j_{i+1} correspondiente.

En la columna 5 se escriben las probabilidades asociadas a los diferentes ingresos para la etapa analizada.

En la sexta columna se realiza el producto de la probabilidad de ingreso por el valor de B^* correspondiente.

En la columna 7 se escribe el beneficio de esa etapa según el estado analizado y su extracción, es decir, se anota el valor de ϕ que corresponda. Por ejemplo, en la etapa 1 para $i=4$ y $k=1$ se escribe el valor de $\phi_1^1(4)$ que, según la Tabla 4.11, es 13.8.

Finalmente, en la columna 8, se calcula el beneficio total para esa etapa según el estado analizado y su extracción. Este valor se obtiene de realizar la suma de los valores de la columna 6 y 7.

A continuación se realiza el cálculo para los diferentes valores de ingreso:

$x=1$

- Columna 2:

Se obtiene, con la ecuación 12, el valor del estado al final de la etapa considerando un ingreso igual a 1:

$$j = 4 + 1 - 1$$
$$j = 4$$

- Columna 3:

Como el valor de j calculado en la columna 2 es igual al máximo estado del embalse, entonces este valor permanece en la columna 3 (ecuaciones 54 y 55).

- Columna 4:

De la Tabla 4.12 se observa que el máximo beneficio para el estado 4 es 45, por lo tanto, se escribe este valor en la columna.

- Columna 5:

De la Tabla 4.3 se observa que la probabilidad de que se presente un ingreso igual a 1 en la primera etapa es 0.3, por lo tanto, se escribe este valor.

- Columna 6:

Se obtiene el producto de la probabilidad de que se presente un ingreso igual a 1 por el beneficio escrito en la columna 4:

$$Prob * B^* = 0.3 * 45$$
$$Prob * B^* = 13.5$$

- Columna 7:

El beneficio de la primera etapa correspondiente a un estado $i=4$ y $k=1$ es 13.8 (ver Tabla 4.11). Este valor sólo se escribe una vez en la columna, ya que es independiente del valor de ingreso, sólo depende de la etapa analizada, el estado y la extracción.

- Columna 8:

El valor de esta columna se calcula hasta que se hayan obtenido todos los valores de la Tabla 4.13 para los diferentes ingresos. En cada ingreso, el valor de cada columna se calcula empleando las ecuaciones correspondientes.

x=2

- Columna 2:

$$\begin{aligned}j &= 4 + 2 - 1 \\j &= 5\end{aligned}$$

- Columna 3:

$$j > 4 \rightarrow j_{i+1} = 4$$

- Columna 4:
Según la Tabla 4.12, $B^*(4)$:

$$B^*(4) = 45$$

- Columna 5:
De acuerdo con la Tabla 4.3, la probabilidad de que se presente un ingreso igual a 2 en esta etapa es:

$$P(x = 2) = 0.4$$

- Columna 6:

$$\begin{aligned}Prob * B^* &= 0.4 * 45 \\Prob * B^* &= 18\end{aligned}$$

- Columna 7:
Dado que el beneficio asociado a esta etapa para $i=4$ y $k=1$ ya se escribió anteriormente, no es necesario que se repita, ya que para calcular el beneficio total este valor sólo se debe sumar una vez.

x=3

- Columna 2:

$$\begin{aligned}j &= 4 + 3 - 1 \\j &= 6\end{aligned}$$

- Columna 3:

$$j > 4 \rightarrow j_{i+1} = 4$$

- Columna 4:
Según la Tabla 4.12, $B^*(4)$:

$$B^*(4) = 45$$

- Columna 5:
De acuerdo con la Tabla 4.3, la probabilidad de que se presente un ingreso igual a 3 en esta etapa es:

$$P(x = 3) = 0.2$$

- Columna 6:

$$\begin{aligned} Prob * B^* &= 0.2 * 45 \\ Prob * B^* &= 9 \end{aligned}$$

- Columna 7:
Dado que el beneficio asociado a esta etapa para $i=4$ y $k=1$ ya se escribió anteriormente, no es necesario que se repita.

$x=4$

- Columna 2:

$$\begin{aligned} j &= 4 + 4 - 1 \\ j &= 7 \end{aligned}$$

- Columna 3:

$$j > 4 \rightarrow j_{i+1} = 4$$

- Columna 4:

$$B^*(4) = 45$$

- Columna 5:
La probabilidad de que se presente un ingreso igual a 2 en esta etapa es:

$$P(x = 4) = 0.1$$

- Columna 6:

$$\begin{aligned} Prob * B^* &= 0.1 * 45 \\ Prob * B^* &= 4.5 \end{aligned}$$

- Columna 7:
No es necesario que se repita el valor ya escrito anteriormente en esta columna.
- Columna 8
Como ya se obtuvieron todos los valores de la Tabla 4.13 para los diferentes ingresos, es posible calcular el beneficio $B_n^k(i)$ sumando los valores de la columna 6 y el dato de la columna 7 según la ecuación de la programación dinámica (ecuación 47).

$$B_1^1(4) = 13.5 + 18 + 9 + 4.5 + 13.8$$

$$B_1^1(4) = 58.8$$

El resumen del cálculo de $B_1^1(4)$, es decir el beneficio para la etapa 1 con $i=4$ y $k=1$, se muestra en la Tabla 4.14.

Tabla 4.14. Cálculo de B para $i=4$ y $k=1$. Año 50, primera etapa

x	j	j_{i+1}	$B^*(j_{i+1})$	Prob	(Prob)(B^*)	Benef. de esa etapa	B
1	4	4	45	0.3	13.5	13.8	58.8
2	5	4	45	0.4	18		
3	6	4	45	0.2	9		
4	7	4	45	0.1	4.5		

Como el cálculo es similar para las demás extracciones con el mismo estado, sólo se presentan las tablas resumen con los resultados.

Extracción $k=2$

Tabla 4.15. Cálculo de B para $i=4$ y $k=2$. Año 50, primera etapa

x	j	j_{i+1}	$B^*(j_{i+1})$	Prob	(Prob)(B^*)	Benef. de esa etapa	B
1	3	3	35.4	0.3	10.62	30	72.12
2	4	4	45	0.4	18		
3	5	4	45	0.2	9		
4	6	4	45	0.1	4.5		

Extracción $k=3$

Tabla 4.16. Cálculo de B para $i=4$ y $k=3$. Año 50, primera etapa

x	j	j_{i+1}	$B^*(j_{i+1})$	Prob	$(\text{Prob})(B^*)$	Benef. de esa etapa	B
1	2	2	23.9	0.3	7.17	41.8	76.63
2	3	3	35.4	0.4	14.16		
3	4	4	45	0.2	9		
4	5	4	45	0.1	4.5		

Ya que se calcularon los beneficios para el estado $i=4$ contemplando todas las posibles extracciones, se observa que el máximo beneficio de este estado es el valor de 76.63 que corresponde a una extracción óptima de 3, es decir, con esa extracción se obtuvo el máximo beneficio en el estado cuatro, de forma que B^* y k^* para el estado $i=4$ son 76.63 y 3 respectivamente.

El cálculo resumido mostrado en la Tabla 4.14, Tabla 4.15 y Tabla 4.16 debe hacerse para los demás estados iniciales contemplando todas las extracciones e ingresos y, de cada estado, se debe seleccionar el máximo beneficio con su correspondiente extracción.

La Tabla 4.17 muestra los valores de B^* y k^* de la primera etapa del año 50, es decir, los máximos valores de beneficio que se obtuvieron para los diferentes estados iniciales de la presa, así como la extracción óptima asociada a estos beneficios.

Tabla 4.17. B^* y k^* . Año 50, primera etapa

i	k^*	B^*
4	3	76.63
3	2	58.63
2	1	44.63
1	1	31.36

Con el objetivo de no acumular números muy grandes y rectificar para los años anteriores ($N=49, 48, 47$, etc) que el valor de B^* sea el mismo para las etapas correspondientes, al valor de B^* de la Tabla 4.17 se le resta el mínimo valor de esa columna, es decir, 31.36, de modo que los valores de B^* para la etapa 1 del año 50 son los que se muestran en la Tabla 4.18.

Tabla 4.18. B^* y k^* corregidos. Año 50, primera etapa

i	k^*	B^*
4	3	$76.63-31.36=45.27$
3	2	$58.63-31.36=27.27$
2	1	$44.63-31.36=13.27$
1	1	$31.36-31.36=0$

El procedimiento para obtener los beneficios totales debe hacerse para las demás etapas de los años restantes. Para determinar los beneficios de la segunda etapa del año 49, deben utilizarse los beneficios calculados (B^*) en la primera etapa del año 50; si se desean calcular los beneficios de la primera etapa del año 49, entonces son necesarios los valores de B^* de la segunda etapa del año 49.

La Tabla 4.19 muestra los valores de B^* y k^* de la segunda etapa del año 49, es decir, los máximos valores de beneficio que se obtuvieron para los diferentes estados iniciales de la presa, así como la extracción óptima asociada a estos beneficios.

Tabla 4.19. B^ y k^* . Año 49, segunda etapa*

i	k^*	B^*
4	3	83.47
3	2	64.27
2	1	49.07
1	1	34.943

Al igual que para la primera etapa del año 50, al valor de B^* de la Tabla 4.19 se le resta el mínimo valor de esa columna, es decir, 34.943, de modo que los valores de B^* para la etapa 2 del año 49 son los que se muestran en la Tabla 4.20.

Tabla 4.20. B^ y k^* corregidos. Año 49, segunda etapa*

i	k^*	B^*
4	3	48.527
3	2	29.327
2	1	14.127
1	1	0

La Tabla 4.21 muestra los valores de B^* y k^* de la primera etapa del año 49, es decir, los máximos valores de beneficio que se obtuvieron para los diferentes estados iniciales de la presa, así como la extracción óptima asociada a estos beneficios.

Tabla 4.21. B^ y k^* . Año 49, primera etapa*

i	k^*	B^*
4	2	72.767
3	1	55.367
2	1	40.327
1	1	22.569

Si al valor de B^* de la Tabla 4.21 se le resta el mínimo valor de esa columna, es decir, 22.569, los valores de B^* para la etapa 1 del año 49 son los que se muestran en la Tabla 4.22.

Tabla 4.22. B^* y k^* corregidos. Año 49, primera etapa

i	k^*	B^*
4	2	50.1981
3	1	32.7981
2	1	17.7581
1	1	0

Los valores de la Tabla 4.22 se deben comparar con los de la Tabla 4.18 que corresponden a las B^* y k^* de la primera etapa del año 50. Dado que los valores de beneficio no son los mismos, se debe seguir realizando el procedimiento hasta que los valores de B^* sean muy similares para la primera etapa de los años N y $N+1$, lo mismo sucede con la etapa 2, los valores de B^* deben ser los mismos o muy similares en los años N y $N+1$, cuando esto suceda se habrá encontrado la política óptima de la presa.

El procedimiento se realiza para las diferentes etapas de los diferentes años y se comparan los resultados. Es hasta el año 47 y 46 donde al comparar sus respectivas etapas, los beneficios son prácticamente iguales (ver Tabla 4.23), por lo tanto, el cálculo se detiene.

Tabla 4.23. Comparación de B^* y k^* de ambas etapas del año 47 y 46

i	Segunda etapa				Primera etapa			
	Año 47		Año 46		Año 47		Año 46	
	k^*	B^*	k^*	B^*	k^*	B^*	k^*	B^*
4	3	48.956	3	48.9567	2	50.327	2	50.327
3	2	29.756	2	29.7567	1	32.927	1	32.927
2	1	14.556	1	14.5567	1	17.887	1	17.887
1	1	0	1	0	1	0	1	0

De forma resumida, la política óptima se encuentra en la Tabla 4.24, en ella se muestran las extracciones que se tienen que realizar a la presa en las diferentes etapas del año dependiendo del estado inicial del embalse para poder obtener los máximos beneficios.

Tabla 4.24. Política óptima de operación

Estado	Etapa	
	1	2
4	2	3
3	1	2
2	1	1
1	1	1

4. 8. Uso de la programación dinámica en las plantas de bombeo del sistema analizado

Una vez ejemplificado el uso de la programación dinámica para el caso de encontrar la política óptima de una presa y determinada la función objetivo para maximizar los beneficios de operar las plantas de bombeo ubicadas en el sistema Cerro del Judío-Cerro de la Estrella, es posible entrar con el cálculo de los dos pasos para la solución de la ecuación de la programación dinámica (ecuación 47).

4. 8. 1. Paso 1. Determinación de los beneficios asociados a cada etapa

Para cada uno de los estados iniciales del cárcamo de bombeo en cada una de las plantas y para cada una de las posibles extracciones debe analizarse la posibilidad de que se presenten todos los ingresos. Los beneficios asociados a cada uno de los estados y cada una de las salidas se determina con la primera parte de la ecuación de la programación dinámica (ecuación 50).

4. 8. 1. 1. Estados de los cárcamos

Los estados del cárcamo, tanto iniciales (i) como finales (j), son los posibles volúmenes que puede tener. En la definición de la ecuación de estado se determinó que, por practicidad, se utilizan intervalos de 100 m^3 para las variables de estado y control.

Dado que las dimensiones de las estructuras en las dos plantas de bombeo son diferentes, el número de estados para cada uno de los cárcamos también serán diferentes.

PB Xotepingo

Las dimensiones del cárcamo permiten que el volumen de esta estructura sea muy cercano a los 1900 m³, por lo tanto, si este volumen se divide en intervalos iguales de 100 m³ para tener variables de estado y control discretizadas, se tienen 19 estados (ver Tabla 4.25).

Tabla 4.25. estados en el cárcamo de PB Xotepingo

Estado	Volumen (m³)	
1	0	99.9
2	100	199.9
3	200	299.9
4	300	399.9
5	400	499.9
6	500	599.9
7	600	699.9
8	700	799.9
9	800	899.9
10	900	999.9
11	1000	1099.9
12	1100	1199.9
13	1200	1299.9
14	1300	1399.9
15	1400	1499.9
16	1500	1599.9
17	1600	1699.9
18	1700	1799.9
19	1800	1900

Los estados mostrados en la Tabla 4.25 son los que puede tener el cárcamo al inicio de una hora de análisis y al final de dicha hora, no pueden existir estados menores o mayores a los ya mostrados, ya que eso representaría algo físicamente imposible.

Rebombeo Estrella

Las dimensiones del cárcamo ubicado en el Rebombeo Estrella son tales que el máximo volumen permitido es de 1500 m³, por lo tanto, los estados que puede tener la estructura al inicio y final de la hora analizada son los que se muestran en la Tabla 4.26.

Tabla 4.26. Estados en el cárcamo del Rebombero Estrella

Estado	Volumen (m ³)	
1	0	99.9
2	100	199.9
3	200	299.9
4	300	399.9
5	400	499.9
6	500	599.9
7	600	699.9
8	700	799.9
9	800	899.9
10	900	999.9
11	1000	1099.9
12	1100	1199.9
13	1200	1299.9
14	1300	1399.9
15	1400	1500

Dichos estados son los que exclusivamente puede tener el cárcamo. Es físicamente imposible que tenga un estado menor a 1 o mayor a 15.

4. 8. 1. 2. Posibles extracciones en los cárcamos

PB Xotepingo

La Figura 2.13 muestra un registro de los caudales bombeados en la PB Xotepingo. Dado que las variables de estado y control utilizadas son volúmenes discretizados, es necesario transformar los gastos a las variables que deben ser utilizadas en la programación dinámica para el caso del bombeo.

Para la formulación de la función objetivo se utilizó un intervalo de una hora para dejar dicha ecuación en función de volúmenes, ya que la carga y eficiencia de la bomba debían escribirse en términos de volumen y no de gasto, por lo tanto, para ser consistentes con el tiempo utilizado, es necesario realizar un análisis de los valores de gastos que se tienen en el registro para el tiempo considerado como el representativo y así determinar qué volúmenes salieron del cárcamo en cada una de las horas del día.

Los valores de los caudales que fueron bombeados en PB Xotepingo se registraron en el minuto 38 o 39, aproximadamente, de cada hora. La Tabla 4.27 muestra un pequeño ejemplo de los registros que se tienen.

Tabla 4.27. Ejemplo de registros de caudal bombeado en PB Xotepingo

Fecha y Hora	Gasto (l/s)
07/04/2021 07:38	1038.26843
07/04/2021 06:39	1667.41077
07/04/2021 05:38	1680.53577
07/04/2021 04:39	1664.71643
07/04/2021 03:39	1662.89404

Como se quieren obtener los volúmenes que salieron en una hora y no se tienen registros al inicio y final de cada hora, se hacen algunas adiciones en los datos para poder obtener los volúmenes. Al inicio y final de cada hora, si no se tienen registros de caudal, se suponen que los valores son los mismos que los registrados en el minuto 39 o 38. Al hacer estas adiciones, se tiene posibilidad de sacar el volumen en una hora completa. La Tabla 4.28 muestra las adiciones que se hicieron a algunos de los registros de caudal de la PB Xotepingo.

Tabla 4.28. Adiciones hechas a los registros de caudal de PB Xotepingo

	1	2
1	Fecha y Hora	Gasto (l/s)
2	07/04/2021 07:59	1038.26843
3	07/04/2021 07:38	1038.26843
4	07/04/2021 07:00	1038.26843
5	07/04/2021 06:59	1667.41077
6	07/04/2021 06:39	1667.41077
7	07/04/2021 06:00	1667.41077
8	07/04/2021 05:59	1680.53577
9	07/04/2021 05:38	1680.53577
10	07/04/2021 05:00	1680.53577
11	07/04/2021 04:59	1664.71643
12	07/04/2021 04:39	1664.71643
13	07/04/2021 04:00	1664.71643
14	07/04/2021 03:59	1662.89404
15	07/04/2021 03:39	1662.89404
16	07/04/2021 03:00	1662.89404

Los valores añadidos en la Tabla 4.28 son los que se encuentran resaltados con diferentes colores. Para la hora comprendida entre las 7:00 y 7:59 solamente se tiene un registro con valor de 1038.268 lps (1.038 m³/s), por lo tanto, se supone que este registro es constante para la hora 7:00 y 7:59. Estos valores se añaden para las horas ya mencionadas. El renglón 2 y 4 de la columna 1 muestra las horas

añadidas, mientras que los mismos renglones de la columna 2 muestran los valores de caudal agregados. Este procedimiento se realiza para todos los registros que se tienen. En la Tabla 4.28 se muestran, remarcados con color, los renglones 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16 que corresponden a las horas añadidas para el cálculo de sólo cinco volúmenes que salieron del cárcamo.

Al tener datos del inicio y fin de cada hora es posible graficar los valores como se muestran en la Figura 4.9. Los tres primeros puntos corresponden a las extracciones de las 6:00 a las 6:59 horas. Al ser el eje vertical el caudal y el eje horizontal un eje de tiempo, es posible determinar el volumen bombeado por la planta en una hora como el área bajo la curva de la hora correspondiente (ver área sombreada de la Figura 4.9). Esta área, al ser rectangular, puede calcularse como el producto de la distancia entre dos puntos de una misma hora y multiplicar este valor por la magnitud del gasto.



Figura 4.9. Gráfica de dos horas de caudal bombeado en PB Xotepingo

Dado que se quiere calcular el volumen de cada hora y no el total que se tiene durante todo el tiempo de registro, es necesario que, al inicio del cálculo de cada hora, el volumen acumulado sea cero y, posteriormente, se sumen los valores obtenidos durante toda la hora. Al llegar a la siguiente hora, el volumen acumulado nuevamente vuelve a ser cero. La Tabla 4.29 muestra un ejemplo del cálculo del volumen acumulado para cada hora del registro de gastos bombeados en la planta.

Tabla 4.29. Ejemplo de cálculo de volumen en diferentes horas de registro en PB Xotepingo

Fecha y Hora	Gasto (l/s)	Volumen (m ³)	Volumen acumulado en función del gasto (m ³)
07/04/2021 07:59	1038.26843	3737.76636	0
07/04/2021 07:38	1038.26843	3737.76636	1308.187
07/04/2021 07:00	1038.26843	3737.76636	3675.470
07/04/2021 06:59	1667.41077	6002.67876	0
07/04/2021 06:39	1667.41077	6002.67876	2001.266
07/04/2021 06:00	1667.41077	6002.67876	5902.634
07/04/2021 05:59	1680.53577	6049.92876	0
07/04/2021 05:38	1680.53577	6049.92876	2117.959
07/04/2021 05:00	1680.53577	6049.92876	5949.097
07/04/2021 04:59	1664.71643	5992.97915	0
07/04/2021 04:39	1664.71643	5992.97915	1997.790
07/04/2021 04:00	1664.71643	5992.97915	5893.096
07/04/2021 03:59	1662.89404	5986.41855	0
07/04/2021 03:39	1662.89404	5986.41855	1995.574
07/04/2021 03:00	1662.89404	5986.41855	5886.645

Una vez obtenidos los volúmenes para cada una de las horas del conjunto de registros que se tiene, los valores se resumen en tablas y se ordenan por etapas. La Tabla 4.30 muestra un compendio de los volúmenes calculados para la hora 00:00-00:59 de todos los días donde se tiene registro. Los volúmenes obtenidos para todas las horas y todos los días del periodo considerado como representativo se muestran en el Anexo 1.

Tabla 4.30. Resumen de los volúmenes obtenidos para la hora 00:00 a 00:59 en PB Xotepingo

Fechas 00:00 am - 00:59 am	Volumen (m ³) en función del gasto (l/s)	Fechas 00:00 am - 00:59 am	Volumen (m ³) en función del gasto (l/s)	Fechas 00:00 am - 00:59 am	Volumen (m ³) en función del gasto (l/s)
07/04/2021	3062.942	28/03/2021	5806.249	18/03/2021	6264.953
06/04/2021	5904.966	27/03/2021	5625.999	17/03/2021	5913.930
05/04/2021	5891.735	26/03/2021	5750.775	16/03/2021	5996.894
04/04/2021	3289.034	25/03/2021	5913.110	15/03/2021	5976.699
03/04/2021	5888.382	24/03/2021	5810.771	14/03/2021	6339.596
02/04/2021	5915.642	23/03/2021	5828.712	13/03/2021	6156.820
01/04/2021	5907.216	22/03/2021	5903.415	12/03/2021	5751.419
31/03/2021	5845.226	21/03/2021	6272.451	11/03/2021	5813.180
30/03/2021	3695.776	20/03/2021	3207.813	10/03/2021	5826.591
29/03/2021	5801.384	19/03/2021	5918.574	09/03/2021	3866.746

Al hacer un análisis de todos los volúmenes calculados para cada hora, se determinó que el máximo volumen bombeado fue de 6452.98 lps en la hora 2:00-2:59 del 14 de marzo. Dado que las variables de estado se expresaron de forma discretizada en la ecuación de estado, es necesario que las extracciones se escriban de la misma forma, es decir, en intervalos de 100 m³ y, como el volumen máximo bombeado fue mayor a 6400 m³, existirán 65 posibles extracciones. La Tabla 4.31 muestra las salidas de volumen que puede haber en la planta de bombeo y su correspondiente volumen.

Tabla 4.31. Extracciones en PB Xotepingo

Extracciones (k)	Volúmenes (m ³)		Extracciones (k)	Volúmenes (m ³)		Extracciones (k)	Volúmenes (m ³)	
1	0	99.9	23	2200	2299.9	45	4400	4499.9
2	100	199.9	24	2300	2399.9	46	4500	4599.9
3	200	299.9	25	2400	2499.9	47	4600	4699.9
4	300	399.9	26	2500	2599.9	48	4700	4799.9
5	400	499.9	27	2600	2699.9	49	4800	4899.9
6	500	599.9	28	2700	2799.9	50	4900	4999.9
7	600	699.9	29	2800	2899.9	51	5000	5099.9
8	700	799.9	30	2900	2999.9	52	5100	5199.9
9	800	899.9	31	3000	3099.9	53	5200	5299.9
10	900	999.9	32	3100	3199.9	54	5300	5399.9
11	1000	1099.9	33	3200	3299.9	55	5400	5499.9
12	1100	1199.9	34	3300	3399.9	56	5500	5599.9
13	1200	1299.9	35	3400	3499.9	57	5600	5699.9
14	1300	1399.9	36	3500	3599.9	58	5700	5799.9
15	1400	1499.9	37	3600	3699.9	59	5800	5899.9
16	1500	1599.9	38	3700	3799.9	60	5900	5999.9
17	1600	1699.9	39	3800	3899.9	61	6000	6099.9
18	1700	1799.9	40	3900	3999.9	62	6100	6199.9
19	1800	1899.9	41	4000	4099.9	63	6200	6299.9
20	1900	1999.9	42	4100	4199.9	64	6300	6399.9
21	2000	2099.9	43	4200	4299.9	65	6400	6500
22	2100	2199.9	44	4300	4399.9			

Rebombeo Estrella

Al igual que en la PB Xotepingo, es necesario expresar los caudales bombeados como volúmenes para ser consistentes con las variables de la ecuación de estado y la programación dinámica. En el Rebombeo Estrella se registraron, dos veces por minuto, los caudales bombeados. Los valores se capturaron alrededor del segundo 12 y 50 de cada minuto. La Tabla 4.32 muestra un ejemplo de los registros que se tienen.

Tabla 4.32. Ejemplo de registros de caudal bombeado en Rebombeo Estrella

Fecha y Hora	Gasto (l/s)
06/04/2021 07:59	944.810547
06/04/2021 07:59	944.593994
06/04/2021 07:58	948.925964
06/04/2021 07:58	948.377869
06/04/2021 07:57	941.544312
06/04/2021 07:57	941.340332
06/04/2021 07:56	959.475281
06/04/2021 07:56	988.815979
06/04/2021 07:55	981.285278
06/04/2021 07:55	984.71228

Al tener los valores de caudal bombeado cada 30 segundos, no es necesario, como en PB Xotepingo, hacer alguna adición de fechas y datos, con los valores de caudal que se tienen es posible determinar el volumen que salió de la planta cada hora. Si se grafican estos valores como se muestra en la Figura 4.10 el volumen que sale de la planta cada hora se obtiene como el área bajo la curva de cada hora. Al igual que en PB Xotepingo, al inicio del cálculo de volumen de cada hora, el volumen acumulado es cero y, posteriormente, los volúmenes que se calculan se van sumando hasta que termina la hora. Al iniciar una hora nueva, el volumen acumulado nuevamente vuelve a ser cero.

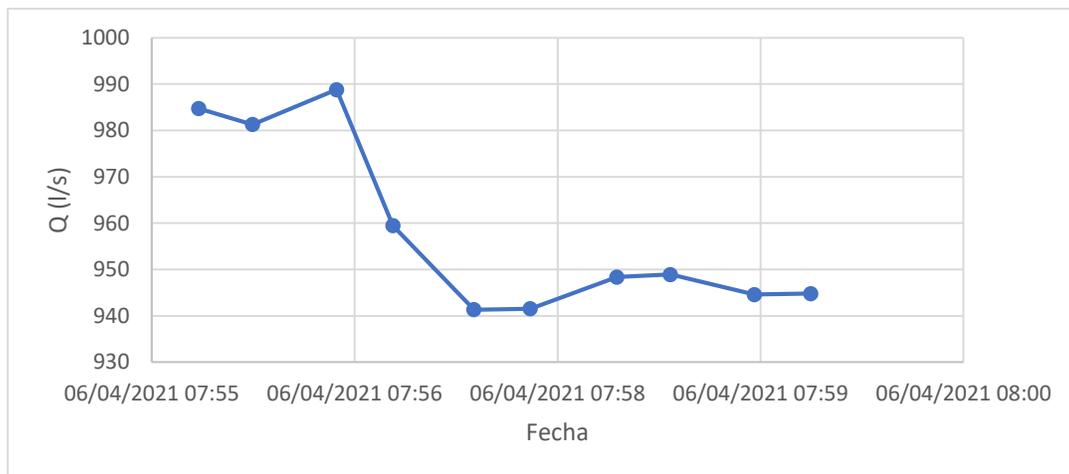


Figura 4.10. Gráfica de cuatro minutos de caudal bombeado en Rebombeo Estrella

Dado que en la Figura 4.9, correspondiente a los registros con adiciones de horas y valores de caudal en PB Xotepingo, se tenían valores constantes para cada hora, el volumen se obtenía fácilmente como el área de un rectángulo. En el caso de la Figura 4.10 no se tienen valores constantes de gasto, por lo tanto, el área entre cada uno de los puntos se puede obtener como el área de un trapecio, donde las dos bases corresponden a los valores de caudal y la altura del trapecio está

representada por el tiempo entre dos registros. De forma que el área comprendida entre dos registros consecutivos se obtiene como:

$$\text{Área} = \frac{(\text{Caudal 1} + \text{Caudal 2}) * \text{Tiempo entre registros}}{2} \quad [56]$$

El tiempo entre los registros está expresado en días y los caudales en lps. Como se desean obtener los volúmenes en m³, es necesario hacer transformaciones a los valores de caudal para que tengan las unidades correctas, de forma que la expresión utilizada para el cálculo del área entre dos registros es:

$$\text{Área} = 0.5 * (Q_i + Q_{i+1}) * (t_{i+1} - t_i) * 86.4 \quad [57]$$

Donde:

Q_i es el valor de caudal registrado en el instante i, en lps

Q_{i+1} es el valor de caudal registrado posterior al instante i, en lps

t_i es la hora y fecha en que se registró el caudal Q_i , en horas

t_{i+1} es la hora y fecha en que se registró el caudal Q_{i+1} , en horas

Con base en la expresión anterior y los registros que se tienen, se realiza el cálculo de los volúmenes acumulados cada hora. La Tabla 4.33 muestra el cálculo del volumen para dos horas.

Tabla 4.33. Ejemplo de cálculo de volumen en diferentes horas de registro en Rebombeco Estrella

Fecha y Hora	Gasto (l/s)	Volumen (m ³) en función del gasto (l/s)
06/04/2021 07:59	944.810547	0
06/04/2021 07:59	944.593994	22.673
06/04/2021 07:58	948.925964	56.447
06/04/2021 07:58	948.377869	78.040
...
06/04/2021 07:01	1005.53595	5353.83351
06/04/2021 07:01	990.492065	5390.69516
06/04/2021 07:00	992.657104	5415.11169
06/04/2021 07:00	980.356812	5450.89526
06/04/2021 06:59	994.918335	0
06/04/2021 06:59	986.882751	35.3810945
06/04/2021 06:58	988.622986	58.0342186
06/04/2021 06:58	961.258667	94.029034
...
06/04/2021 06:01	1071.56787	2981.08546
06/04/2021 06:01	1065.55347	3006.76511
06/04/2021 06:00	1070.69568	3045.21973
06/04/2021 06:00	1073.30847	3071.98333

Con base en la Tabla 4.33 se observa que el 6 de abril, de las 7:00 a 7:59, se bombeó un volumen de 5450.90 m³, mientras que en el periodo comprendido entre las 6:00-6:59 del mismo día se bombeó un volumen de 3071.98 m³. Este procedimiento se realiza para todas las horas del periodo tomado como representativo.

Una vez obtenidos los volúmenes para cada una de las horas del conjunto de registros que se tiene, los valores se resumen en tablas y se ordenan por etapas. La Tabla 4.34 muestra un compendio de los volúmenes calculados para la hora 00:00-00:59 de todos los días donde se tiene registro. Los volúmenes obtenidos para todas las horas del periodo considerado como representativo se muestran en el Anexo 2.

Tabla 4.34. Resumen de los volúmenes obtenidos para la hora 00:00 a 00:59 en Rebombéo Estrella

Fechas 00:00 am - 00:59 am	Volumen (m³) en función del gasto (l/s)	Fechas 00:00 am - 00:59 am	Volumen (m³) en función del gasto (l/s)	Fechas 00:00 am - 00:59 am	Volumen (m³) en función del gasto (l/s)
06/04/2021	6471.458	27/03/2021	4887.233	17/03/2021	5778.600
05/04/2021	5447.161	26/03/2021	4770.685	16/03/2021	5021.511
04/04/2021	4152.745	25/03/2021	5281.039	15/03/2021	5820.435
03/04/2021	4782.391	24/03/2021	5500.300	14/03/2021	5809.215
02/04/2021	4838.199	23/03/2021	4799.529	13/03/2021	5063.467
01/04/2021	4546.671	22/03/2021	5646.985	12/03/2021	5717.606
31/03/2021	4944.356	21/03/2021	6768.020	11/03/2021	3921.228
30/03/2021	3948.490	20/03/2021	3428.373	10/03/2021	6133.727
29/03/2021	4976.575	19/03/2021	5101.318	09/03/2021	3282.753
28/03/2021	5102.603	18/03/2021	3859.169		

Si se comparan todos los volúmenes que salieron de la planta en todos los días durante todas las horas, se observa que el máximo volumen bombeado fue de 7025.5 m³ el 8 de marzo de las 19:00 a 19:59 horas, por lo tanto, es posible que el cárcamo tenga una extracción máxima de esa magnitud. Si se expresan las posibles salidas del tanque de succión de forma discretizada, es decir, en intervalos de 100 m³, se tienen 71 extracciones posibles. La Tabla 4.35 muestra dichas extracciones y su correspondiente volumen.

Tabla 4.35. Extracciones en Rebombero Estrella

Extracciones (k)	Volúmenes (m ³)		Extracciones (k)	Volúmenes (m ³)		Extracciones (k)	Volúmenes (m ³)	
1	0	99.9	25	2400	2499.9	49	4800	4899.9
2	100	199.9	26	2500	2599.9	50	4900	4999.9
3	200	299.9	27	2600	2699.9	51	5000	5099.9
4	300	399.9	28	2700	2799.9	52	5100	5199.9
5	400	499.9	29	2800	2899.9	53	5200	5299.9
6	500	599.9	30	2900	2999.9	54	5300	5399.9
7	600	699.9	31	3000	3099.9	55	5400	5499.9
8	700	799.9	32	3100	3199.9	56	5500	5599.9
9	800	899.9	33	3200	3299.9	57	5600	5699.9
10	900	999.9	34	3300	3399.9	58	5700	5799.9
11	1000	1099.9	35	3400	3499.9	59	5800	5899.9
12	1100	1199.9	36	3500	3599.9	60	5900	5999.9
13	1200	1299.9	37	3600	3699.9	61	6000	6099.9
14	1300	1399.9	38	3700	3799.9	62	6100	6199.9
15	1400	1499.9	39	3800	3899.9	63	6200	6299.9
16	1500	1599.9	40	3900	3999.9	64	6300	6399.9
17	1600	1699.9	41	4000	4099.9	65	6400	6499.9
18	1700	1799.9	42	4100	4199.9	66	6500	6599.9
19	1800	1899.9	43	4200	4299.9	67	6600	6699.9
20	1900	1999.9	44	4300	4399.9	68	6700	6799.9
21	2000	2099.9	45	4400	4499.9	69	6800	6899.9
22	2100	2199.9	46	4500	4599.9	70	6900	6999.9
23	2200	2299.9	47	4600	4699.9	71	7000	7100
24	2300	2399.9	48	4700	4799.9			

4. 8. 1. 3. Posibles ingresos en los cárcamos

Para poder obtener los beneficios asociados a cada estado y cada salida de los cárcamos, es necesario obtener los volúmenes de agua que pueden ingresar a cada una de las plantas y las probabilidades de que estos se presenten.

Dado que los tanques de succión en ambas plantas de bombeo no tienen una gran capacidad de regulación, todo el caudal que entra es bombeado. En determinadas circunstancias el bombeo es detenido para que el tirante en las estructuras aumente, pero, posteriormente, el agua acumulada durante el paro de los equipos es enviada, por lo tanto, no hay una retención importante en los cárcamos, de modo que es posible considerar que los registros que se tienen de salida corresponden a los ingresos en las plantas de bombeo.

PB Xotepingo

En esta planta se tiene instrumentación a la llegada del cárcamo y en el bombeo. Al tanque de succión no sólo llega el caudal proveniente de la línea de conducción derivada del Cerro del Judío, hay pozos en la vecindad de la planta y de estos se extrae un caudal que se dirige a PB Xotepingo para después bombearse, de modo que aunque se tiene registro del caudal a la entrada, este gasto no considera la aportación de los pozos, por lo tanto, es más apropiado considerar que los registros que se tienen a la salida corresponden al conjunto de agua que entra a la PB Xotepingo, considerando la línea de conducción proveniente del Cerro del Judío y los pozos cercanos a la planta. Por lo tanto, los posibles ingresos, discretizados en intervalos de 100 m^3 , son los mismos que se muestran en la Tabla 4.31.

Para determinar la política óptima de operación de las plantas de bombeo, el día se dividió en tres etapas considerando los turnos de los operadores. Dado que el cálculo, para encontrar la operación óptima, debe hacerse para las diferentes etapas del día, es necesario obtener las probabilidades asociadas a los diferentes ingresos de volumen de agua al cárcamo en cada una de esas etapas.

Probabilidades de ingreso etapa 1

La primera etapa comprende desde las 00:00 a las 7:59 horas. En este periodo de tiempo es posible que se presenten cada uno de los ingresos ya mencionados, sin embargo, no con la misma frecuencia. Para determinar la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los ingresos se hace un histograma de frecuencia con los valores de volumen que entraron al cárcamo en la etapa analizada.

Con el objetivo de ser consistente con las variables de volumen discretizadas, los intervalos de clase son volúmenes de 100 m^3 , desde 0 hasta 6500 m^3 . La Figura 4.11 muestra la frecuencia con la que se presentaron diferentes volúmenes (eje horizontal) durante la primera etapa.

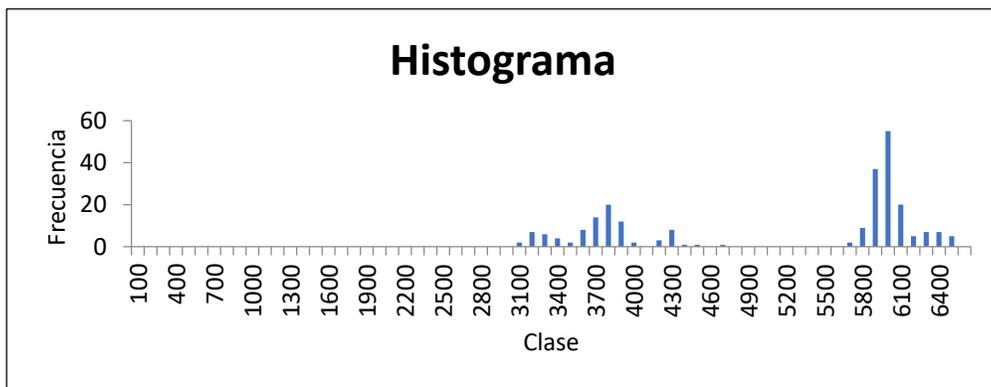


Figura 4.11. Histograma de frecuencia de ingresos a PB Xotepingo, etapa 1

En la primera etapa existe un total de 238 datos, por lo tanto, para obtener la probabilidad de que se presenten cada uno de los ingresos, se divide la frecuencia de los intervalos de clase entre el total de datos que se tienen para la etapa 1. Al hacer dicho cálculo, se obtienen las probabilidades para los diferentes ingresos (ver Figura 4.12).

Con base en estas probabilidades, es posible obtener los beneficios asociados a cada estado inicial del cárcamo y a cada una de las posibles salidas. Al realizar la suma de todas las columnas de la Figura 4.12, el resultado es igual a la unidad.

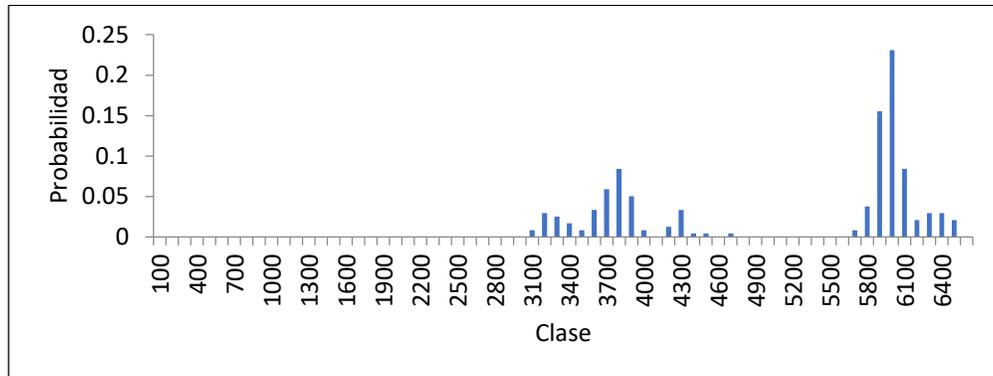


Figura 4.12. Probabilidades de ingresos a PB Xotepingo, etapa 1

Probabilidades de ingreso etapa 2

De forma análoga al procedimiento realizado para la primera etapa, se obtiene el histograma de frecuencia para los 237 valores de la segunda etapa y, a partir de éste, se obtienen las probabilidades de ocurrencia de cada uno de los ingresos en el periodo de tiempo comprendido de las 8:00 a 15:59 horas. La Figura 4.13 muestra las probabilidades asociadas a los ingresos en intervalos de 100 m³. Al igual que en la etapa 1, al sumar las columnas se obtiene la unidad.

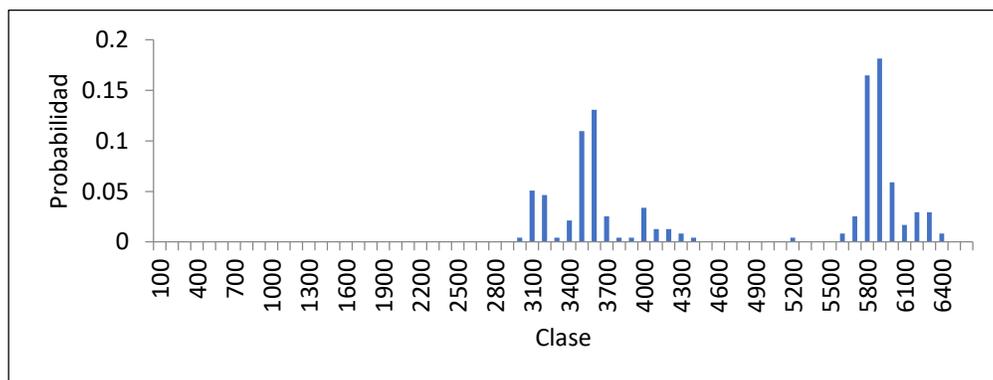


Figura 4.13. Probabilidades de ingresos a PB Xotepingo, etapa 2

Probabilidades de ingreso etapa 3

La tercera etapa comprende de las 16:00 a las 23:59 horas. Para determinar la probabilidad de que se presenten cada uno de los ingresos en este periodo de tiempo, se hace un histograma de frecuencia con los 239 datos que se tienen. La Figura 4.14 muestra las probabilidades de cada uno de los ingresos. La suma de todas las probabilidades resulta en la ocurrencia de todos los eventos.

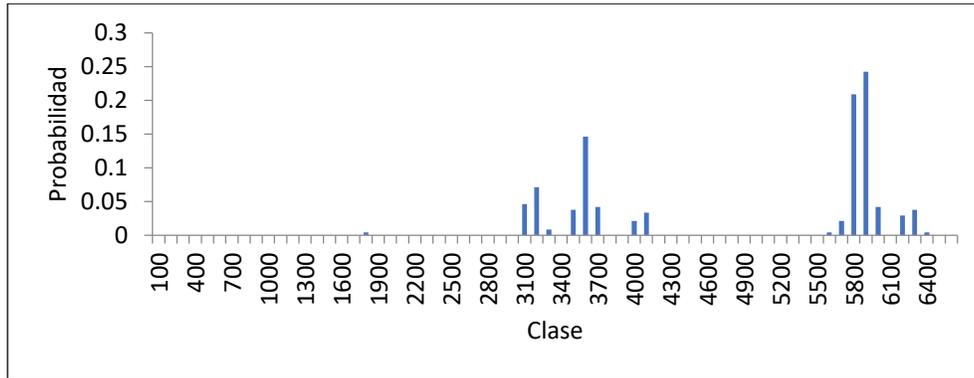


Figura 4.14. Probabilidades de ingresos a PB Xotepingo, etapa 3

Rebombero Estrella

A diferencia de los registros que se tienen en PB Xotepingo, en el Rebombero Estrella solamente se cuenta con instrumentación en el bombeo de la planta, es decir, a la salida, por otro lado, dado que no existe una gran capacidad de regulación en el cárcamo de bombeo, todo el volumen de agua que entra, sale posteriormente, de modo que considerar los registros que se tienen a la salida como caudales a la entrada es una suposición válida.

Las probabilidades de ingreso para las diferentes etapas se obtuvieron de forma análoga a las obtenidas en PB Xotepingo, salvo que en el Rebombero Estrella los ingresos que pueden existir van de los 0 a los 7100 m³ en un intervalo de una hora.

Probabilidades de ingreso etapa 1

Para la primera etapa se tiene un registro de 233 valores. Con estos datos se obtienen las probabilidades de ingreso de los diferentes intervalos de volúmenes que se muestran en la Figura 4.15.

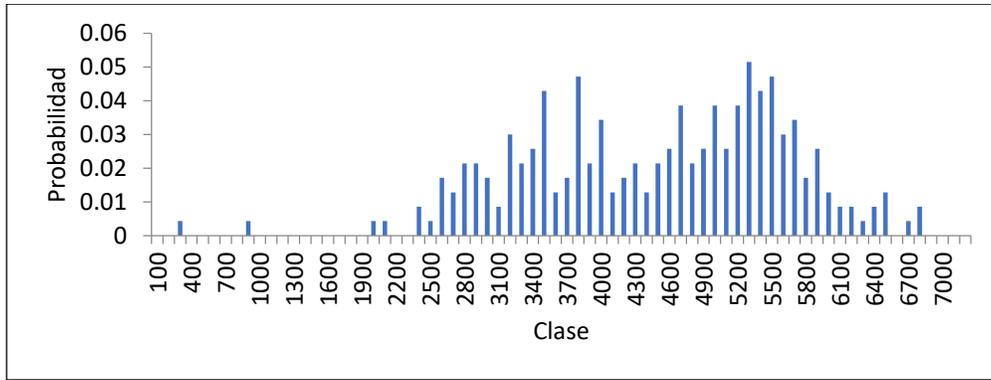


Figura 4.15. Probabilidades de ingresos al Rebombero Estrella, etapa 1

Probabilidades de ingreso etapa 2

En la etapa 2 se cuenta con un registro de 241 datos de volúmenes. Con base en la frecuencia de ocurrencia de los diferentes ingresos se obtienen las probabilidades mostradas en la Figura 4.16.

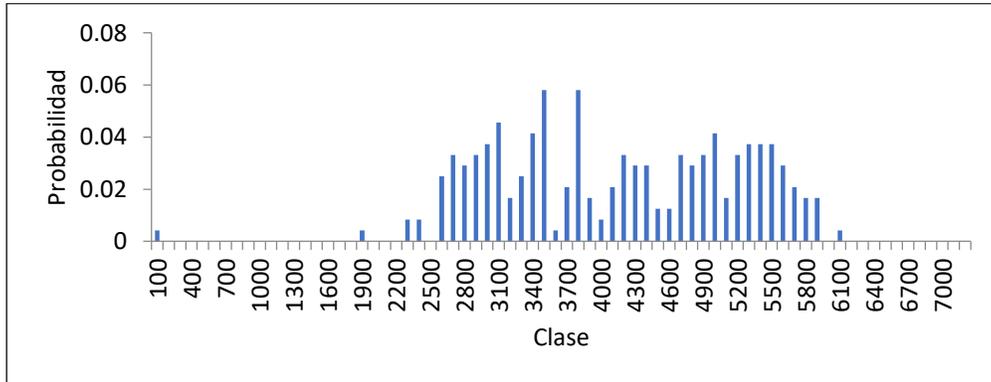


Figura 4.16. Probabilidades de ingresos al Rebombero Estrella, etapa 2

Probabilidades de ingreso etapa 3

En esta etapa se analizaron 235 datos y se obtuvieron las probabilidades de la Figura 4.17.

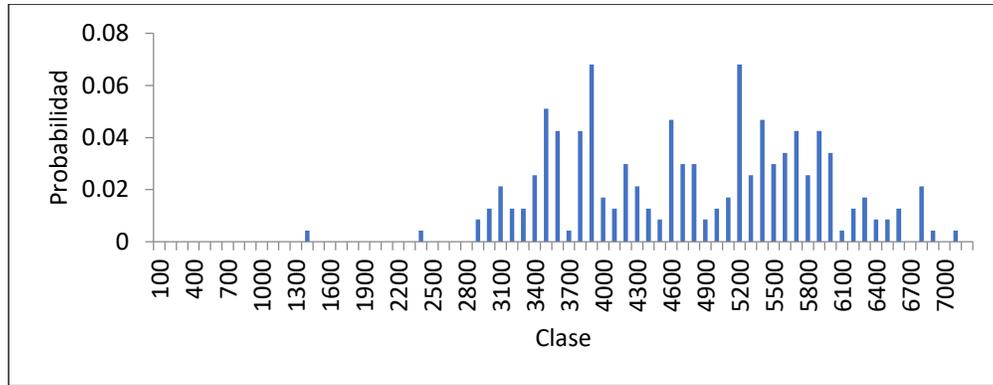


Figura 4.17. Probabilidades de ingresos al Rebombero Estrella, etapa 3

Una vez definidos los estados iniciales, las posibles extracciones y los ingresos de cada etapa con su respectiva probabilidad, es posible determinar el beneficio asociado a cada estado y a cada salida tomando en cuenta todos los ingresos. El cálculo que se debe realizar es muy parecido al que se muestra en la Tabla 4.4, sin embargo, existen algunos cambios que deben considerarse.

4. 8. 1. 4. Cálculo de beneficios para el máximo estado del cárcamo y mínima extracción

PB Xotepingo

Dado que para obtener el beneficio asociado de bombear un volumen de agua intervienen la carga de bombeo y la eficiencia de la bomba, es necesario calcular estos valores para cada una de las salidas. Como la carga y eficiencia de la bomba dependen únicamente de la salida del cárcamo, el valor será constante para un determinado valor de extracción (ver columna 6 y 7 de la Tabla 4.36). La eficiencia del motor usualmente es un número cercano a la unidad, por lo tanto, por fines prácticos, se propone que tenga un valor de 0.95 (ver columna 8 de la Tabla 4.36). Los beneficios asociados a cada uno de los ingresos se calculan con base en la función objetivo determinada con anterioridad, donde interviene el derrame (columna 3), déficit (columna 4) y el estado del cárcamo al final de la hora analizada con un volumen físicamente posible (columna 5). Una vez calculados los beneficios asociados a cada ingreso (columna 9), estos se multiplican por la probabilidad de que se presenten cada uno de ellos (columna 10). La suma de los valores de la columna 11 es el beneficio asociado al estado inicial de 1900 m³ en el cárcamo con una extracción de 100 m³ (columna 12).

El beneficio calculado, para las condiciones iniciales propuestas, es negativo, es decir, es una pérdida económica, ya que al hacer el cálculo con el máximo estado inicial del cárcamo y solamente extraer 100 m³ de agua por hora, se tiene un gran volumen de agua desperdiciada, ya que durante esa hora van a existir ingresos de caudal en la planta de bombeo.

Tabla 4.36. Cálculo del beneficio para PB Xotepingo en la etapa 1, extracción de 100 m³ y estado inicial del cárcamo de 1900 m³

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	j _i	Derr	Déf	j _{i+1}	H (k)	η_B	η_M	Beneficio	Prob	b*Prob	$\phi_{100}^{100}(1900)$
100	1900	0	0	1900	52.361	0.028	0.95	-199584.179	0	0	-755823.675
200	2000	100	0	1900	52.361	0.028	0.95	-210584.179	0	0	
300	2100	200	0	1900	52.361	0.028	0.95	-221584.179	0	0	
400	2200	300	0	1900	52.361	0.028	0.95	-232584.179	0	0	
...	
6200	8000	6100	0	1900	52.361	0.028	0.95	-870584.179	0.021	-18289.584	
6300	8100	6200	0	1900	52.361	0.028	0.95	-881584.179	0.029	-25928.946	
6400	8200	6300	0	1900	52.361	0.028	0.95	-892584.179	0.029	-26252.476	
6500	8300	6400	0	1900	52.361	0.028	0.95	-903584.179	0.021	-18982.861	

El cálculo mostrado en la Tabla 4.36 debe repetirse para cada uno de los estados iniciales que puede tener el cárcamo en la planta y cada una de las posibles extracciones definidas previamente, esto para cada una de las tres etapas, es decir, se tendrían 3704 tablas adicionales a la Tabla 4.36 y en cada una de ellas, para cada estado y cada salida, debe analizarse la posibilidad de que existan 65 diferentes ingresos. Debido a que los cálculos que deben hacerse son muy extensos y repetitivos, se utiliza un programa que permita escribir el código que realice los cálculos necesarios. El procedimiento utilizado para la determinación de los beneficios a cada estado y a cada salida de cada una de las etapas se muestra en el capítulo 5, sin embargo, los valores de Φ para cada una de las etapas en la PB Xotepingo se muestran en el Anexo 3.

Rebombeo Estrella

Para determinar el beneficio asociado al estado inicial del cárcamo en 1500 m³ tomando en cuenta una salida de 100 m³ en una hora, el cálculo que se debe realizar es muy similar al mostrado en la Tabla 4.36. Se debe tener cuidado en analizar todos los posibles ingresos que, para esta planta, son intervalos de 100 m³ hasta 7100 m³, asimismo, se debe calcular la carga de bombeo y la eficiencia correctamente, es decir, con la expresión correspondientes y no con las ecuaciones utilizadas en PB Xotepingo, ya que las bombas utilizadas en las plantas son diferentes.

La Tabla 4.37 muestra el cálculo que se hizo para obtener el beneficio asociado para el estado inicial del cárcamo de 1500 m³ con una extracción de 100 m³, considerando todos los posibles ingresos a la planta. Al hacer el cálculo, el beneficio obtenido es un número negativo, lo que implica una pérdida económica, esto debido a que el cárcamo, para la hora de análisis, se encuentra en el estado inicial máximo

y la extracción que tiene es mínima, de apenas 100 m³ en una hora, además, recibe ingresos durante esa hora, lo que implica que hay una cantidad fuerte de derrames de agua y, por lo tanto, pérdidas.

Tabla 4.37. Cálculo del beneficio para el Rebombeo Estrella en la etapa 1, extracción de 100 m³ y estado inicial del cárcamo de 1500 m³

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	j _i	Derr	Déf	j _{i+1}	H (k)	η_B	η_M	Beneficio	Prob	b*Prob	$\phi_{100}^{100}(1500)$
100	1500	0	0	1500	120.009	0.033	0.95	-157107.211	0.000	0.000	-639926.947
200	1600	100	0	1500	120.009	0.033	0.95	-168107.211	0.000	0.000	
300	1700	200	0	1500	120.009	0.033	0.95	-179107.211	0.004	-768.700	
400	1800	300	0	1500	120.009	0.033	0.95	-190107.211	0.000	0.000	
...	
6800	8200	6700	0	1500	120.009	0.033	0.95	-894107.211	0.009	-7674.740	
6900	8300	6800	0	1500	120.009	0.033	0.95	-905107.211	0.000	0.000	
7000	8400	6900	0	1500	120.009	0.033	0.95	-916107.211	0.000	0.000	
7100	8500	7000	0	1500	120.009	0.033	0.95	-927107.211	0.000	0.000	

El cálculo mostrado en la Tabla 4.37 debe repetirse para cada una de las etapas y en cada una de ellas analizar todos los estados iniciales que puede tener el cárcamo y las extracciones, es decir, se tendrían que hacer 3194 tablas adicionales a la Tabla 4.37 y, en cada una de ellas, analizar los 71 posibles ingresos que se presentarían en el cárcamo del Rebombeo Estrella.

Obtener los beneficios asociados a cada etapa, cada estado inicial y cada salida es una tarea complicada por la cantidad de operaciones que se tienen que realizar, por lo tanto, se opta por utilizar un programa computacional que facilite los cálculos. El cálculo para realizar este procedimiento en cada una de las plantas de bombeo se muestra en el capítulo 5, sin embargo, los cálculos de ϕ para cada una de las etapas en el Rebombeo Estrella se muestran en el Anexo 4.

4. 8. 2. Paso 2. Determinación del beneficio acumulado para cada año en cada una de las etapas

Una vez determinados los beneficios asociados a cada uno de los estados iniciales de los cárcamos y cada una de las salidas, para las tres diferentes etapas, es posible determinar el beneficio total que se tiene a lo largo de diferentes días. El beneficio debe calcularse en orden cronológico descendente ya que se considera que después del último día de análisis, los beneficios son nulos, por ejemplo, si se desea

analizar un total de 100 días en las plantas de bombeo, el día 101 tendría beneficios nulos, por lo que el beneficio total del día 100 en la última etapa del día, es decir la etapa 3, se simplificaría a tener el máximo beneficio para cada uno de los estados de la etapa 3, dicho valor está asociado a una determinada extracción.

Para el análisis de la etapa inmediata anterior del mismo día de análisis, es decir la etapa 2 del día 100, el beneficio total se debe obtener en función de los beneficios calculados para la etapa 3 del mismo día, es decir, si para el análisis de la etapa 2 al cabo de una hora se obtiene un determinado estado en el cárcamo, se puede asegurar que se va a obtener el máximo beneficio que se calculó en la etapa 3 (B^*) si se le extrae el volumen asociado a dicho beneficio (k^*), además, a ese beneficio que se puede asegurar que se va a tener, se debe sumar el beneficio actual que se tenga para el estado del cárcamo, de modo que la expresión para calcular el beneficio total a lo largo de los días para las diferentes etapas se simplifica a la ecuación 69.

Si se desea analizar el día 100 pero en la etapa 1, se debe tener en cuenta que con total seguridad, si se extraen unos determinados volúmenes de agua calculados en la etapa 2 del día 100 (k^*) dependiendo del estado que se tenga en el cárcamo, se pueden obtener los beneficios máximos que se calcularon en la etapa 2 del mismo día (B^*), sin olvidar que a ese valor debe sumarse el máximo beneficio actual que se tiene de extraer un volumen de agua si el cárcamo se encuentra en un estado cualquiera. De forma que el cálculo de los beneficios totales debe hacerse en orden cronológico descendente para determinar, en función del estado en el que se encuentre el cárcamo, cuál es la extracción que propicia que se tenga el máximo beneficio. La Tabla 4.38 muestra un ejemplo del proceso en orden cronológico descendente que se tiene que seguir para determinar los máximos beneficios de cada estado en cada etapa de los diferentes días de análisis.

Tabla 4.38. Proceso para determinar los beneficios totales en cada uno de los días y etapas

Día	Etapas	B^*_{n+1}	k^*_{n+1}	ϕ	$B=B^*_n$	$k=k^*_n$
100	3	Máximos beneficios de la etapa 1 del día 101: nulos	-----	Máximo valor de beneficio, para la etapa 3, de cada uno de los estados	$B^*_{n+1} + \phi$	Extracciones con las que el valor de ϕ de la etapa 3 es el mayor para cada uno de los estados
	2	Se obtiene en función del estado que tenga el cárcamo al final de la hora de análisis. El valor corresponde a ϕ del día 100 de la etapa 3 según el estado que se tenga	Extracciones con las que se obtiene el máximo beneficio total para cada uno de los estados en la etapa 3 del día 100	Beneficio asociado al estado y extracción que provocarán que se tenga el máximo beneficio según la etapa de análisis	$B^*_{n+1} + \phi$	Extracciones con las que B será mayor para cada uno de los estados del cárcamo
	1	Se obtiene en función del estado que tenga el cárcamo al final de la hora de análisis. El valor corresponde a B del día 100 de la etapa 2 según el estado que se tenga	Extracciones con las que se obtiene el máximo beneficio total para cada uno de los estados en la etapa 2 del día 100	Beneficio asociado al estado y extracción que provocarán que se tenga el máximo beneficio según la etapa de análisis	$B^*_{n+1} + \phi$	Extracciones con las que B será mayor para cada uno de los estados del cárcamo
99	3	Se obtiene en función del estado que tenga el cárcamo al final de la hora de análisis. El valor corresponde a B del día 100 de la etapa 1 según el estado que se tenga	Extracciones con las que se obtiene el máximo beneficio total para cada uno de los estados en la etapa 1 del día 100	Beneficio asociado al estado y extracción que provocarán que se tenga el máximo beneficio según la etapa de análisis	$B^*_{n+1} + \phi$	Extracciones con las que B será mayor para cada uno de los estados del cárcamo
	2	Se obtiene en función del estado que tenga el cárcamo al final de la hora de análisis. El valor corresponde a B del día 99 de la etapa 3 según el estado que se tenga	Extracciones con las que se obtiene el máximo beneficio total para cada uno de los estados en la etapa 3 del día 99	Beneficio asociado al estado y extracción que provocarán que se tenga el máximo beneficio según la etapa de análisis	$B^*_{n+1} + \phi$	Extracciones con las que B será mayor para cada uno de los estados del cárcamo
	1	Se obtiene en función del estado que tenga el cárcamo al final de la hora de análisis. El valor corresponde a B del día 99 de la etapa 2 según el estado que se tenga	Extracciones con las que se obtiene el máximo beneficio total para cada uno de los estados en la etapa 2 del día 99	Beneficio asociado al estado y extracción que provocarán que se tenga el máximo beneficio según la etapa de análisis	$B^*_{n+1} + \phi$	Extracciones con las que B será mayor para cada uno de los estados del cárcamo

4. 8. 2. 1. Cálculo de beneficios totales

Con base en el procedimiento descrito en la Tabla 4.38, se determina la extracción óptima para cada estado en cada una de las etapas de los diferentes días de análisis para que se obtenga el máximo beneficio total.

PB Xotepingo

El cálculo inicia en orden cronológico descendente. Para el análisis de la operación óptima de las plantas de bombeo se propone un tiempo de estudio de 100 días, lo que significa que en el día 101 los beneficios se consideran nulos, es decir, cuando se realiza el cálculo para el día 100, B_{n+1}^* tiene un valor nulo, por lo tanto, en ese día de análisis, en la última etapa, es decir la etapa 3, los beneficios totales se simplifican al máximo valor de cada uno de los estados que puede tener el cárcamo de bombeo, es decir, el máximo valor de cada una de las columnas de los valores de ϕ de la etapa 3 ($B_n^k(i) = \Phi_n^k(i)$)

En la Tabla 9.3 del Anexo 3 se presentan los beneficios de todos los estados con cada una de las posibles salidas. En dicha tabla se resaltan en color amarillo los máximos beneficios para cada uno de los estados.

Día 100

Etapas 3

Como ya se obtuvieron anteriormente los valores de ϕ (Anexo 3) y se identificaron los máximos valores y su correspondiente extracción, el máximo beneficio que se puede obtener en la etapa 3 del día 100 para los diferentes estados del cárcamo son los valores máximos de cada una de las columnas de la Tabla 9.3, a estos valores se les debe asociar su correspondiente valor de extracción, es decir, para el estado máximo del cárcamo ($i=1900$) en la tercera etapa, el beneficio máximo es 558829.75, dicho valor se obtuvo con una extracción $k=5800$; para el estado 1800 en la misma etapa, el máximo beneficio es 561545.23 con una extracción de 5800 m^3 en una hora; para el estado 1700, el máximo beneficio obtenido fue de 563524.31 con el mismo valor de extracción. Para todos los estados de la etapa 3, el máximo beneficio se obtiene cuando sale del cárcamo un volumen de 5800 durante una hora (ver Tabla 4.39).

Con base en los máximos beneficios asociados a la tercera etapa del día 100 para los diferentes estados del cárcamo, se calculan los beneficios para la etapa anterior, es decir, la segunda etapa del mismo día. Para ese cálculo se denominan a los beneficios de la tercera etapa como B_{n+1}^* y, por otro lado, k_{n+1}^* a su extracción asociada a cada estado de la presa.

Tabla 4.39. B^* y k^* . Día 100 tercera etapa, PB Xotepingo

i	k*	B*
1900	5800	558829.748
1800	5800	561545.229
1700	5800	563524.309
1600	5800	565503.388
1500	5800	567482.468
1400	5800	569461.547
1300	5800	571440.627
1200	5800	573419.706
1100	5800	575398.786
1000	5800	577377.865
900	5800	579356.945
800	5800	581336.024
700	5800	583315.104
600	5800	585294.183
500	5800	587273.263
400	5800	589252.342
300	5800	591231.422
200	5800	593118.451
100	5800	594545.229

Etapa 2

Para el cálculo del beneficio total en esta etapa para todos los estados, se utiliza la ecuación 47 y, dado que ya se tiene los valores de $B_{n+1}^*(j)$ que corresponden a los máximo beneficios de la etapa 3 del día 100, se calculan dichos beneficios a partir de los valores de la Tabla 4.39 y de las ϕ correspondientes a la etapa analizada, al estado y a la extracción.

A continuación se realiza el cálculo de los beneficios para los diferentes estados y extracciones.

Estado inicial $i=1900$

Extracción $k=100$

Para realizar los cálculos de los beneficios totales en los días y etapas diferentes se utiliza el modelo de la Tabla 4.13. Aquí se deben considerar los 19 posibles estados iniciales del cárcamo y en cada uno de estos, las 65 posibles extracciones, así como los ingresos con sus respectivas probabilidades de ocurrencia.

A continuación se muestra un ejemplo de los cálculos que deben realizarse para obtener el máximo beneficio considerando todos los ingresos, extracción mínima ($k=100 \text{ m}^3$) y máximo estado inicial del cárcamo ($i=1900 \text{ m}^3$). Los números de las columnas que se encuentra en el procedimiento descrito están referidos a los mostrados en la Tabla 4.13.

- Columna 1:

Solo se muestra el cálculo considerando un ingreso mínimo a la planta de bombeo, es decir, $x=100$

- Columna 2:

Se obtiene el valor del estado al final de una hora de análisis en la etapa 2, con la ecuación de continuidad (ecuación 12), considerando que el cárcamo tiene el máximo estado inicial, la salida de agua en una hora de 100 m^3 y el ingreso de agua igual a 100 m^3 .

$$j = 1900 + 100 - 100$$

$$j = 1900$$

- Columna 3:

Como el valor de j calculado en la columna 2 es igual al máximo estado del cárcamo y es físicamente posible, entonces este valor permanece en la columna 3.

- Columna 4:

De la Tabla 4.39 se observa que el máximo beneficio para el estado 1900 es 558829.748, por lo tanto, se escribe este valor en la columna.

- Columna 5:

De la Figura 4.13 se observa que la probabilidad de que se presente un ingreso igual a 100 en la segunda etapa es nula, por lo tanto, se escribe cero en esta columna para el ingreso analizado.

- Columna 6:

Se obtiene el producto de la probabilidad de que se presente un ingreso igual a 100 por el beneficio escrito en la columna 4:

$$Prob * B^* = 0 * 558829.748$$

$$Prob * B^* = 0$$

- Columna 7:

El beneficio de la segunda etapa correspondiente a un estado $i=1900$ y $k=100$ es -715778.26 (ver Tabla 9.2). Este valor sólo se escribe una vez en la columna, ya que es independiente del valor de ingreso, sólo depende de la etapa analizada, el estado y la extracción.

- Columna 8:

El valor de esta columna se calcula hasta que hayan obtenido todos los valores de la Tabla 4.13 para los diferentes ingresos.

El procedimiento que se debe realizar para los demás ingresos se mostró para el ejemplo demostrativo de la presa, por lo tanto, para el máximo estado inicial del cárcamo y la mínima salida de agua en la segunda etapa se tiene un beneficio total de -156948.512 (ver Tabla 4.40).

Tabla 4.40. Ejemplo de cálculo de beneficio total. PB Xotepingo, día 100 etapa 2

1	2	3	4	5	6	7	8
x	j	j_{i+1}	$B^*(j_{i+1})$	Prob	$(Prob)(B^*)$	Benef. de esa etapa	B
100	1900	1900	558829.748	0.000	0	-715778.26	-156948.51
200	2000	1900	558829.748	0.000	0		
300	2100	1900	558829.748	0.000	0		
...		
6300	8100	1900	558829.748	0.030	16505.52		
6400	8200	1900	558829.748	0.008	4715.86		
6500	8300	1900	558829.748	0.000	0		

El beneficio obtenido en la Tabla 4.40 solamente corresponde a un estado inicial del cárcamo de succión y una salida. Como en PB Xotepingo se tienen 15 estados iniciales posibles y 65 opciones de extracción, se deben realizar, solamente para la segunda etapa del día 100, 1234 tablas adicionales a la Tabla 4.40. Para la primera etapa del día 100 se deben realizar otras 1235 tablas, por lo tanto, como el cálculo es recursivo y muy extenso, se opta por desarrollar un código en una plataforma de programación y cálculo numérico que permite obtener los resultados de forma prácticamente inmediata. El desarrollo del código se muestra en el capítulo 5.

Rebombeo Estrella

El procedimiento para obtener los beneficios totales en los diferentes días durante todas las etapas es muy similar al ya mostrado para PB Xotepingo, sólo se debe tener en cuenta los diferentes estados iniciales que tiene el cárcamo, las extracciones y los ingresos con sus respectivas probabilidades de ocurrencia.

Como el procedimiento ya se describió anteriormente para PB Xotepingo, para el Rebombeo Estrella solamente se muestra el resumen de algunos cálculos.

Día 100

Etapa 3

Como el día 100 es el último día de análisis y la tercera etapa es la última del día, los beneficios totales corresponden a los máximos valores de cada uno de los estados que se muestran en la Tabla 9.6 del Anexo 4. Para el máximo estado del cárcamo, el máximo beneficio que se tiene es de 919366.778 con una extracción $k=5500 \text{ m}^3$ en una hora, para el estado $i=1800$, el máximo beneficio que se obtiene es también con una extracción de 5500 m^3 . Si se obtiene el máximo valor de cada

uno de los estados del cárcamo (columnas de la Tabla 9.6), se observa que el máximo beneficio se va a obtener, para todos los estados, con una extracción de 5500 m³.

Para los cálculos de los beneficios totales del mismo día en la segunda etapa, se utilizan los valores de beneficio de la tercera etapa (B^*_{n+1}) y su correspondiente extracción (k^*_{n+1}) para cada uno de los estados (ver Tabla 4.41).

Tabla 4.41. B^* y k^* . Día 100 tercera etapa, Rebombero Estrella

i	k*	B*
1500	5500	919366.778
1400	5500	922877.416
1300	5500	925732.735
1200	5500	928119.969
1100	5500	930226.352
1000	5500	932145.501
900	5500	933034.863
800	5500	933268.905
700	5500	932847.629
600	5500	932239.118
500	5500	931349.756
400	5500	930085.926
300	5500	927324.224
200	5500	924000.82
100	5500	919647.629

Etapa 2

El procedimiento para determinar los beneficios de cada uno de los estados de esta etapa, considerando en cada uno de ellos todas las salidas, es muy similar al mostrado en la Tabla 4.40, sólo que para el Rebombero Estrella debe considerarse que el máximo estado permisible en el cárcamo es de 1500 m³ y la máxima salida de 7100 m³.

A continuación se muestra, para el Rebombero Estrella, un resumen de los cálculos realizados para la obtención del beneficio total correspondiente al máximo estado inicial del cárcamo y la mínima extracción, considerando todos los posibles ingresos de agua a la planta de bombeo. Los cálculos solamente se detallan para el mínimo ingreso.

Estado inicial i=1500

Extracción k=100

- Columna 1:

Se usa el ingreso mínimo a la planta de bombeo, $x=100$

- Columna 2:

Se calcula el estado final del cárcamo, con la ecuación de continuidad (ecuación 12), en una hora de análisis en la etapa 2 considerando el máximo estado inicial del cárcamo y la mínima extracción e ingreso:

$$j = 1500 + 100 - 100$$

$$j = 1500$$

- Columna 3:

Como el valor de j calculado en la columna 2 es igual al máximo estado del cárcamo y es físicamente permisible, entonces este valor permanece en la columna 3.

- Columna 4:

De la Tabla 4.41 se observa que el máximo beneficio para el estado 1500 es 919366.778, por lo tanto, se escribe este valor en la columna.

- Columna 5:

De la Figura 4.16 se observa que la probabilidad de que se presente un ingreso igual a 100 en la segunda etapa es 0.0042.

- Columna 6:

Se obtiene el producto de la probabilidad de que se presente un ingreso igual a 100 por el beneficio escrito en la columna 4:

$$Prob * B^* = 0.0042 * 919366.78$$

$$Prob * B^* = 3814.8$$

- Columna 7:

El beneficio de la segunda etapa correspondiente a un estado $i=1500$ y $k=100$ es -588854.24 (ver Tabla 9.5).

Si se consideran todos los ingresos para la salida mínima cuando se tiene el máximo estado, el beneficio es el que se muestra en la columna 8 de la Tabla 4.42. El procedimiento debe realizarse para todas las salidas de cada uno de los estados, es decir, se tendrían que realizar 1064 tablas como la mostrada en Tabla 4.42 solamente para la etapa 2 del día 100 y 1065 tablas para la etapa 1 del día 100. Si se considera un análisis de 100 días se deben hacer 106500 tablas. Como el cálculo es muy extenso y repetitivo, se recurre al programa Matlab para la escritura del código que permita la obtención de los beneficios para cada una de las plantas en cada una de las etapas de todos los estados, así como los beneficios acumulados.

Tabla 4.42. Ejemplo de cálculo de beneficio total. Rebombeo Estrella, día 100 etapa 2

1	2	3	4	5	6	7	8
x	j	j_{i+1}	$B^*(j_{i+1})$	Prob	$(Prob)(B^*)$	Benef. de esa etapa	B
100	1500	1500	919366.778	0.0041	3814.80	-588854.24	330512.54
200	1600	1500	919366.778	0	0		
300	1700	1500	919366.778	0	0		
...		
6900	8300	1500	919366.778	0	0		
7000	8400	1500	919366.778	0	0		
7100	8500	1500	919366.778	0	0		

Capítulo 5. Uso de herramientas computacionales para la minimización de costos de operación de plantas de bombeo

Con base en el procedimiento descrito en el capítulo 4 para la obtención de la política óptima de las plantas de bombeo, resulta clara la conveniencia de hacer uso de entornos matemáticos que permitan realizar cálculos complejos y extensos.

Elegir el entorno más adecuado de acuerdo con las necesidades particulares del problema puede ser una tarea no evidente, sin embargo, las razones para escoger el modo de realizar un tipo de cálculo y la plataforma, sin duda dependen del volumen de operaciones, la disponibilidad de procedimientos analíticos o numéricos para realizarlas, entre otros.

El hecho de que algunos de los problemas ingenieriles no sean fácilmente abordables hace que las posibilidades de hacer el cálculo de forma precisa sean escasas.

Matlab es un código orientado al cálculo numérico pensado para resolver problemas reales en diversos campos científicos y tecnológicos. La diferencia con otros entornos puede ser inapreciable si se pretenden resolver problemas sencillos, pero la diferencia es clara si la complejidad computacional del problema a resolver es alta.

En las últimas décadas se ha producido un fenómeno destacable: la aparición de grandes códigos de cálculo orientados a distintas áreas de la ingeniería, capaces de resolver problemas de modo muy simple para el científico o el ingeniero, ya que estos códigos incorporan interfaces de usuario que minimizan la necesidad de programar. Estos códigos son verdaderas cajas negras donde el usuario solo puede manipular datos y resultados, pero en los que muchas veces ignora completamente las técnicas de cálculo utilizadas.

En un nivel intermedio, se sitúan los entornos de cálculo, como Matlab, que contienen agradables interfaces de usuario, pero al mismo tiempo poseen lenguajes de alto nivel con un número elevado de procedimientos preprogramados que ponen en práctica las técnicas básicas del cálculo numérico (Moreno, 2000).

Matlab es un entorno de computación y desarrollo de aplicaciones totalmente integrado orientado para llevar a cabo proyectos en donde se encuentren implicados

elevados cálculos matemáticos y la visualización gráfica de los mismos. Matlab se utiliza ampliamente en cálculos numéricos, desarrollo de algoritmos, modelado, simulación y prueba de prototipos, análisis de datos, exploración y visualización de graficas. Es un instrumento computacional simple de usar, versátil y de gran poder para aplicaciones numéricas (Mogrovejo-Delgado, 2019).

Tenido en cuenta las virtudes y utilidades de Matlab, se hace uso de esta herramienta para escribir el código que permita determinar, en función de los estados iniciales de los cárcamos de bombeo, las extracciones que deben existir, es decir, el volumen de agua que debe ser bombeado para que se minimicen los costos de operación o bien, se maximicen los beneficios de operar las plantas.

Para el código de las plantas de bombeo se propone desarrollar, en primera instancia, el código del ejemplo demostrativo y, si los resultados obtenidos con Matlab son los mismos que los determinados en el capítulo 4, reescribir el código para ambas plantas de bombeo, es decir, se busca calibrar el código.

5. 1. Código de calibración para el ejemplo demostrativo de programación dinámica

En el capítulo 4 se desarrollaron los cálculos para la determinación de la política óptima de una presa de dos etapas, cuatro estados y tres salidas. Con el objetivo de sistematizar y calibrar un código que permita determinar la operación de plantas de bombeo que minimicen los costos, se hace uso de Matlab para determinar la política optima del ejemplo demostrativo para, posteriormente, reescribir el código para la PB Xotepingo y Rebombeo Estrella con las adecuaciones necesarias.

En el ejemplo, antes de entrar directamente con los cálculos de los beneficios y el proceso recursivo de la programación dinámica, se identificaron los estados, las extracciones, los ingresos y sus probabilidades de ocurrencia. La Figura 5.1 muestra cómo se definieron cada uno de estos elementos en forma de vectores renglón con las letras i , k y x para los estados, salidas e ingresos respectivamente. Por otro lado, en la Figura 5.1 se muestran las probabilidades de los ingresos en cada una de las etapas. Dichas probabilidades se definieron como matrices de 4×2 , donde los renglones de la primera columna son los diferentes valores de ingreso y los renglones de la segunda columna son las probabilidades asociadas a dichos ingresos.

```

5      %Definición de estados en el embalse (i):
6      for a=1:1:4
7          i(a)=a;
8      end
9
10     %Definición de los egresos (k):
11     for b=1:1:3
12         k(b)=b;
13     end
14
15     %Definición de los ingresos (x):
16     for c=1:1:4
17         x(c)=c;
18     end
19
20     %Probabilidades de ingreso Etapa 1
21     petapa1=[1 0.3
22             2 0.4
23             3 0.2
24             4 0.1];
25
26     %Probabilidades de ingreso Etapa 2
27     petapa2=[1 0.1
28             2 0.2
29             3 0.4
30             4 0.3];

```

Figura 5.1. Definición de estados, salidas, ingresos y probabilidades

Una vez determinadas las matrices y vectores necesarios, se escribe el algoritmo de dos grandes pasos de la programación dinámica.

5. 1. 1. Paso 1

En cada etapa, es necesario obtener los beneficios asociados a cada estado y a cada salida considerando todos los ingresos. El procedimiento utilizado se muestra en la Tabla 4.4, asimismo, el cálculo, para el máximo estado del embalse y la mínima extracción del ejemplo demostrativo, se muestra en la Tabla 4.5.

Para determinar cada uno de los valores de ϕ se hace un proceso iterativo utilizando ciclos anidados *for* (ver Figura 5.2). En el primero de ellos intervienen los estados, es decir, el cálculo se realiza para cada uno de ellos. En el segundo ciclo se involucran las extracciones, es decir, como este segundo ciclo está dentro del primero, para un valor del estado del cárcamo, se deben hacer los cálculos para todos los valores de extracciones. En el tercer ciclo se toman en cuenta todos los ingresos, es decir, para un valor de estado inicial y un valor de salida, se deben

tomar en cuenta todos los ingresos que pueden entrar al embalse. Con dichos valores se calcula el estado final del embalse con la ecuación de continuidad (línea 42 de la Figura 5.2).

Es posible que al calcular el estado final del embalse se obtenga un resultado físicamente imposible, por lo tanto, se debe verificar que el resultado se encuentre dentro del intervalo de estados que puede tener la presa y, en caso de que no sea así, corregir el valor. Dicha verificación se hace con el uso de un condicional y se calcula si hay derrame o déficit en el embalse. Hay derrame de agua en la presa si el estado calculado al final de la etapa es mayor que el máximo estado físicamente posible, si hay, éste se calcula como la diferencia del estado de la presa al final del análisis menos el máximo estado físicamente permisible.

Por otro lado, se analiza si hay presencia de déficit en el embalse con otro condicional, es decir, si el estado calculado al final de la etapa es menor que el mínimo estado físicamente permisible sí hay déficit y éste se obtiene como la diferencia del mínimo estado que puede tener la presa menos el estado que se calculó. En caso de que no haya derrame o déficit, se les asigna un valor nulo a estas variables.

Calculado el déficit y el derrame, se verifica que el estado del embalse al final de la etapa analizada sea físicamente posible. En caso de que tenga un estado menor al mínimo permitido, es decir, en caso de que haya déficit, se le asigna el mínimo estado que realmente puede tener la presa. En caso contrario, si hay derrames, se le asigna al estado final calculado el máximo valor físicamente posible.

```

32 %Cálculo de phi Etapa 1
33
34 %Cálculo de Déficit, Derrame, j y j corregida para diferentes valores
35 %de estado (en orden decreciente) y diferentes valores de salida (en
36 %orden creciente)
37
38 for d=i(1,end):i(1,1)-i(1,2):i(1,1)
39 for e=k(1,1):k(1,2)-k(1,1):k(1,end)
40
41     for f=x(1,1):x(1,2)-x(1,1):x(1,end)
42         j(f)=d+f-e;
43         if j(f)>i(1,end)
44             Derrame(f)=j(f)-i(1,end);
45         else
46             Derrame(f)=0;
47         end
48         if j(f)<i(1,1)
49             Deficit(f)=i(1,1)-j(f);
50         else
51             Deficit(f)=0;
52         end
53
54         %Corrección de las j con base en derrames y défcits
55         if j(f)<i(1,1)
56             j(f)=i(1,1);
57         else
58             if j(f)>i(1,end)
59                 j(f)=i(1,end);
60             end
61         end
62
63         %Cálculo del beneficio de cada ingreso para los valores de estados y extracciones
64         b(f)=2*e*(d+j(f))-2*Derrame(f)-1*Deficit(f);

```

Figura 5.2. Cálculo de los beneficios para cada estado y salida del ejemplo demostrativo

Con los valores del estado al inicio y al final del análisis y la extracción, se calcula el beneficio asociado a cada ingreso y, una vez que se tiene, debe multiplicarse por la probabilidad correspondiente. Dado que ya se tienen las probabilidades en matrices definidas previamente, nuevamente se hace uso de ciclos *for* para empear las probabilidades con los ingresos. En la Figura 5.3 se muestra cómo en el primer ciclo *for* interviene el número de ingresos que se está analizando, es decir, para cada valor de ingreso se va a hacer otro ciclo donde se analiza cada una de las probabilidades de la etapa en curso. Si el valor de ingreso, determinado en el primer ciclo *for*, es igual al valor de ingreso del segundo ciclo *for*, entonces se asigna la probabilidad correspondiente, en caso de que los ingresos no sean los mismos, no se asigna valor de probabilidad.

Una vez que se asigna la probabilidad, ésta se multiplica por el beneficio determinado anteriormente (ver línea 74 de la Figura 5.3). Como se tienen tantos beneficios como ingresos, para un solo valor de extracción y un estado inicial del embalse, el valor del producto del beneficio por su probabilidad se almacena en un vector que tiene tantos elementos como número de ingresos. La suma de dichos productos es el valor del beneficio asociado a un estado inicial de la presa cuando se extrae un determinado volumen de agua. Este proceso se repite para cada uno de los estados y para todas las extracciones.

```

68 %Aquí se comparan los valores de los estados del vector de probabilidades y
69 %los valores de los ingresos para asignar las probabilidades a los ingresos
70 for g=1:size(x,2)
71     for h=1:size(petapa1,1)
72         if x(g)==petapa1(h)
73             P(g)=petapa1(h,2); %Esto es el vector de probabilidades de la etapa 1 asignado a los ingresos
74             Mult(g)=P(g)*b(g);
75             phietapa1(e,(5-d))=sum(Mult,2);%Puse el 5 para acomodar los vectores en el orden
76                                     %que yo quería. Los renglones son los valores de k
77                                     %(en orden ascendente) y las columnas son los valores
78                                     %de i (en orden decreciente: 4,3,2,1)
79         end
80     end
81 end
82 end
83 end

```

Figura 5.3. Asignación de probabilidades a los ingresos y cálculo de los beneficios de cada extracción

El proceso mostrado en la Figura 5.2 y Figura 5.3 corresponde únicamente al cálculo de los valores de Φ para la primera etapa, sin embargo, el proceso es análogo para la segunda etapa.

5. 1. 2. Paso 2. Determinación del beneficio acumulado para cada año en cada una de las etapas

En Matlab se escribe el número máximo de iteraciones que se van a realizar. Este número es equivalente, para el ejemplo demostrativo, a la vida útil en años de la presa (ver Figura 5.4). Por otro lado, es necesario definir las etapas en las cuales se va a realizar el cálculo, así como los estados, las salidas y los ingresos nuevamente (ver Figura 5.4).

```
136      %Aquí empieza el cálculo recursivo
137
138      Nmax=50;
139      etapas=[1,2];
140
141      for a=1:1:4
142          estados(a)=a;
143      end
144
145      for b=1:1:3
146          salidas(b)=b;
147      end
148
149      for c=1:1:4
150          ingresos(c)=c;
151      end
```

Figura 5.4. Definición de número máximo de iteraciones y número de etapas.

Para hacer el proceso recursivo de atrás hacia adelante se plantean diversos ciclos *for*. En el primero se analizan todos los años de la vida útil, empezando en orden cronológico descendente, es decir, del año 50 hacia atrás. En ese año se deben hacer dos análisis, correspondientes a las etapas, dicha instrucción se encuentra dentro del segundo ciclo *for* (ver línea 156 de la Figura 5.5). Para cada uno de los años y etapas deben analizarse todos los estados (línea 158), asimismo, para cada estado deben proponerse todas las extracciones y en cada una de ellas todos los ingresos, calcular el estado de la presa al final de la etapa y corregirlo si es necesario para que no se encuentre el valor fuera de los límites físicamente aceptables.

```

154 for N=50:-1:1
155
156     for e=size(etapas,2):-1:1
157
158         for i=size(estados,2):-1:1
159
160             for k=1:1:size(salidas,2)
161                 for x=1:1:size(ingresos,2)
162                     j(x,k,i,e,N)=i+x-k;
163                     %Correcciones de los valores de j
164                     if j(x,k,i,e,N)<1
165                         j(x,k,i,e,N)=1;
166                     end
167
168                     if j(x,k,i,e,N)>estados(1,end)
169                         j(x,k,i,e,N)=estados(1,end);
170                     end
171                 end
172             end

```

Figura 5.5. Cálculo de los estados al final de la etapa analizada

En el código de Matlab, si durante el proceso iterativo el cálculo se está realizando para el último año en la etapa 2, los beneficios totales son los máximos valores de ϕ de dicha etapa para cada uno de los estados, a dichos valores se asocia una extracción con la cual se obtienen los máximos beneficios. Dichos valores se acomodan en una matriz de cuatro renglones y tres columnas. En la primera columna se escriben todos los estados físicamente posibles que puede tener el embalse, en la segunda columna las extracciones de agua que se tendrían que hacer a la presa, dependiendo del estado que tenga, para que se obtenga el máximo beneficio, dicho valor se escribe en la última columna. La instrucción para determinar los beneficios totales del último año en la etapa 2 se muestran en la Figura 5.6.

```

174 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Etapa 2, N=50 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
175 if e==size(etapas,2) && N==Nmax
176     [val,idx]=max(phieta2,[],1);
177     B(:, :, i, e, N)=[fliplr(estados)', [idx;val].'];
178 end

```

Figura 5.6. Cálculo de B, año 50 etapa 2

Cuando se analiza el último año en la primera etapa, el procedimiento que se debe hacer es diferente al realizado para la segunda etapa del mismo año. Para este caso se introducen otros ciclos *for*. En el primero se analizan todas las posibles salidas, en el segundo ciclo todos los ingresos y en el tercero se define una nueva variable que tenga el mismo número de estados que el embalse. Para cada estado, salida e ingreso se calcula, en ciclos anteriores, el valor del estado del embalse al final de la etapa, dependiendo de este valor, se va a asignar un beneficio acumulado, es decir,

el beneficio del año 50 y etapa 2 que corresponda con el valor de estado final calculado para la etapa 1 (ver línea 187 y 188 de la Figura 5.7). Para asignar los beneficios correspondientes a la etapa 2 (B^*_{n+1}), cada uno de los estados finales calculados en la etapa 1, se busca dentro los estados que se obtuvieron para el año 50 en la etapa 2, aquel estado que corresponda al estado final calculado en la etapa 1 tiene un beneficio asociado, dicho valor se asigna a una nueva variable (ver línea 192 de la Figura 5.7).

Una vez asignado el beneficio B^*_{n+1} , se asigna la probabilidad de que se presente dicho valor debido al ingreso que se tiene en la presa, la probabilidad debe multiplicarse por el beneficio acumulado asignado previamente (línea 193). Como para cada extracción de cada salida se tienen cuatro posibles ingresos, existen cuatro diferentes productos de beneficios por su probabilidad. Finalmente, se asigna el beneficio de la etapa 1 (ϕ etapa 1) asociado cada ingreso y cada salida.

El nuevo valor del beneficio total para una determinada salida de un estado es la suma de los cuatro diferentes productos obtenidos y el valor de ϕ correspondiente, a dicho valor se le asigna el nombre de *Bnueva* (B^*_n), por lo tanto, para un estado, van a existir tres valores de *Bnueva*. Este cálculo se realiza para todas las salidas de todos los estados en la etapa 1.

Una vez que se tienen todos los valores de *Bnueva*, se selecciona el mayor para cada estado, dicho valor va a tener asociada una extracción. Con el objetivo de no acumular números grandes en el proceso iterativo, de la selección de los beneficios totales máximos que hicieron para todos los estados, se selecciona el menor y dicho valor se resta a todos los valores máximos de *Bnueva* que se seleccionaron para cada estado, de modo que un beneficio total, asociado a un estado, tiene un valor nulo.

Los beneficios máximos totales y sus correspondientes extracciones y estados se ordenen en una matriz de cuatro renglones y tres columnas. La primera columna corresponde a los estados, la segunda columna a las salidas con las cuales se obtuvo el máximo beneficio total (k^*_n) y en la tercera columna se escribe el valor de dicho beneficio (B^*_n). A este arreglo se le nombra *Bajustada* y los valores de los beneficios asociados a cada estado se usan para el cálculo de los beneficios totales para el año 49 en la segunda etapa.

```

180 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Etapa 1, N=50 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
181 if N==Nmax && e==1
182 %Aquí solamente obtengo Bast para la etapa 1 del año 50 con
183 %base en las B obtenidas previamente en un ciclo for
184 for z=1:1:3 %Número de vectores que tiene la matriz j
185     for a=1:1:4 %renglones de j
186         for b=1:1:4 %renglones de b
187             c=j(a,z,i,1,50); %defino una nueva variable como el valor único de j
188             d=B(b,1,i,2,50); %defino una nueva variable como el valor único de B
189             if c==d %Comparo ambos valores para ver si son iguales
190                 Bast(a,z,i,e,N)=B(b,3,4,2,50);
191                 Prob=petapal(a,2);
192                 X=Bast(a,z,i,e,N);
193                 ProbxBast(a,z,i,e,N)=Prob*X;
194                 %Se escribe el beneficio asociado a la etapa 1 de cada k y de cada i
195                 M=ProbxBast(:,z,i,e,N); %todos los renglones, k=1, i=1
196                 P=phietapal(z,5-i);%k=1, i=1 pero i=1 está en la cuarta columna
197                 Bnueva(z,i)=sum(M)+P;
198                 [val,idx]=max(Bnueva,[],1);
199                 Bajustada(:, :, e, N)=[estados', [idx;val-min(val)]];
200             end
201         end
202     end
203 end
204 end
205 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Figura 5.7. Cálculo de B, año 50 etapa 1

Cuando el cálculo se hace para años menores al máximo establecido, es necesario dividir el procedimiento dependiendo de la etapa que se esté analizando, sin embargo, en cualquiera de los dos casos, el código es similar a lo detallado con anterioridad.

Para un valor de estado, salida e ingreso, se determina un valor de estado al final de la etapa analizada. Dependiendo del valor de estado que se tenga, se debe asignar un valor de beneficio acumulado. Si se analiza el año 49 en la etapa 2, los valores de beneficio que se debe utilizar, según los estados calculados, son los que se determinaron en la etapa 1 del año 50 (línea 215 de la Figura 5.8), es decir, los beneficios obtenidos en la etapa 1 del año inmediatamente posterior al que se está analizando. Una vez asignados los beneficios correspondientes, también se deben establecer las probabilidades de que se presente dicho beneficio derivado del ingreso que se tiene en la etapa de análisis, posteriormente, calcular el producto del beneficio acumulado por la probabilidad, fijar el beneficio de que se tenga una salida en un estado (valor de ϕ de la etapa 1) y, finalmente, sumar los cuatro diferentes productos y ϕ de la etapa 1 para obtener el beneficio total cuando se tiene una extracción para un estado, a dicho valor se le nombra también *Bnueva*. Este procedimiento se repite para cada una de las salidas de todos los estados, es decir, en el año 49 en la etapa 1, se tienen 12 diferentes beneficios totales: tres para cada estado, ya que en cada estado se tienen tres diferentes salidas.

Para cada estado, se selecciona el beneficio total máximo y su correspondiente salida. De los cuatro beneficios máximos que se tienen, se selecciona el menor y dicho valor se resta a los demás beneficios máximos, para ordenar finalmente en una matriz los beneficios asociados a los estados y sus respectivas salidas. Esos valores de beneficio se utilizan para el año 49 en la primera etapa.

```

208         if N<Nmax && e==2
209             for z=1:1:3 %Número de vectores que tiene la matriz j
210                 for a=1:1:4 %renglones de j
211                     for b=1:1:4 %renglones de b
212                         c=j(a,z,i,2,N); %defino una nueva variable como el valor único de j
213                         d=Bajustada(b,1,1,N+1); %defino una nueva variable como el valor único de B
214                         if c==d %Comparo ambos vlores para ver si son iguales
215                             Bast(a,z,i,e,N)=Bajustada(b,3,1,N+1);
216                             Prob=petapa2(a,2);
217                             X=Bast(a,z,i,e,N);
218                             ProbxBast(a,z,i,e,N)=Prob*X;
219                             %Voy a intentar escribir el beneficio asociado
220                             %a la etapa 1 de cada k y de cada i
221                             M=ProbxBast(:,z,i,e,N); %todos los renglones, k=1, i=1
222                             P=phietapa2(z,5-i);
223                             Bnueva(z,i)=sum(M)+P;
224                             [val,idx]=max(Bnueva,[],1);
225                             Bajustada(:,e,N)=[estados',[idx;val-min(val)]]';
226                         end
227                     end
228                 end
229             end
230         end

```

Figura 5.8. Cálculo de B, año menor al máximo establecido, etapa 2

Cuando el análisis se hace para la segunda etapa en años menores al año máximo establecido, el procedimiento que se debe realizar es muy similar al ya descrito anteriormente y que se encuentra resumido en la Figura 5.8, sin embargo, los beneficios acumulados que se empleen en este análisis deben corresponder a los obtenidos en la etapa 2 del año que se está analizando, asimismo, las probabilidades que se asignen deben corresponder a la etapa de análisis así como los valores de ϕ que se asignen. Las instrucciones establecidas en Matlab para estas condiciones se muestran en la Figura 5.9.

```

234         if N<Nmax && e==1
235             for z=1:1:3 %Número de vectores que tiene la matriz j
236                 for a=1:1:4 %renglones de j
237                     for b=1:1:4 %renglones de b
238                         c=j(a,z,i,1,N); %defino una nueva variable como el valor único de j
239                         d=Bajustada(b,1,2,N); %defino una nueva variable como el valor único de B
240                         if c==d %Comparo ambos vlores para ver si son iguales
241                             Bast(a,z,i,e,N)=Bajustada(b,3,2,N);
242                             Prob=petapa1(a,2);
243                             X=Bast(a,z,i,e,N);
244                             ProbxBast(a,z,i,e,N)=Prob*X;
245                             %Voy a intentar escribir el beneficio asociado
246                             %a la etapa 1 de cada k y de cada i
247                             M=ProbxBast(:,z,i,e,N); %todos los renglones, k=1, i=1
248                             P=phietapa1(z,5-i);%k=1, i=1
249                             Bnueva(z,i)=sum(M)+P;
250                             [val,idx]=max(Bnueva,[],1);
251                             Bajustada(:,e,N)=[estados',[idx;val-min(val)]]';
252                         end
253                     end
254                 end
255             end
256         end

```

Figura 5.9. Cálculo de B, año menor al máximo establecido, etapa 1

En el código escrito en Matlab para el ejemplo demostrativo ya se contemplan todas las posibilidades de análisis.

5. 1. 3. Resultados del código

Al correr el código escrito en Matlab se obtienen dos resultados fundamentales: las matrices de ϕ para cada una de las etapas y las matrices de los beneficios totales para cada etapa en cada año que se realiza el cálculo.

El primer resultado que se obtienen son los valores de ϕ para cada etapa. En dichas matrices, las columnas son los estados ordenados de forma decreciente, mientras que los renglones son las extracciones, ordenadas de forma creciente.

```
phietapa1 =  
  
    13.8000    12.6000     9.8000     6.2000  
    30.0000    23.8000    16.4000     9.3000  
    41.8000    30.6000    20.1000    11.6000  
  
phietapa2 =  
  
    12.2000    11.8000    10.6000     7.8000  
    29.6000    25.8000    19.6000    11.9000  
    45.0000    35.4000    23.9000    13.4000
```

Figura 5.10. Valores de ϕ para ambas etapas

Los siguientes resultados que se tienen son los beneficios totales a lo largo de los años en las diferentes etapas. La Figura 5.11 muestra los máximos beneficios del año 50 (columna 3) asociados a los diferentes estados (columna 1) con sus respectivas extracciones (columna 2) para ambas etapas.

Bajustada (:, :, 1, 50) =		
1.0000	1.0000	0
2.0000	1.0000	13.2700
3.0000	2.0000	27.2700
4.0000	3.0000	45.2700
Bajustada (:, :, 2, 50) =		
4.0000	3.0000	45.0000
3.0000	3.0000	35.4000
2.0000	3.0000	23.9000
1.0000	3.0000	13.4000

Figura 5.11. Beneficios máximos totales, año 50

La Figura 5.12 muestra los resultados de extracciones y beneficios para el año 49 en ambas etapas. Si se comparan los beneficios del año 49 y 50 para la misma etapa, se observa que hay diferencias grandes entre sus valores, por lo tanto, el cálculo recursivo debe seguir hasta que los valores de beneficio entre dos años consecutivos para la misma etapa sean muy similares o iguales.

Bajustada (:, :, 1, 49) =		
1.0000	1.0000	0
2.0000	1.0000	17.7581
3.0000	1.0000	32.7981
4.0000	2.0000	50.1981
Bajustada (:, :, 2, 49) =		
1.0000	1.0000	0
2.0000	1.0000	14.1270
3.0000	2.0000	29.3270
4.0000	3.0000	48.5270

Figura 5.12. Beneficios máximos totales, año 49

La Figura 5.13 muestra que es hasta el año 46 y 45 cuando los valores de beneficio, para la misma etapa, son iguales, por lo tanto, ya no es necesario hacer más iteraciones debido a que ya se obtuvo la política óptima de la presa.

Cuando la presa se encuentre en la etapa 1 y su estado inicial sea 1, debe existir una extracción igual a 1 para que se obtengan los máximos beneficios; si el estado

inicial del embalse es 2, debe salir de la presa un volumen de agua equivalente a una extracción $k=1$; si el estado inicial es igual a 3, se debe extraer un volumen $k=1$ y, finalmente, si el estado inicial es el máximo, debe haber una extracción $k=2$ para que se tengan los máximos beneficios.

Para la etapa 2, la política óptima se muestra también en la Figura 5.13. Las segundas columnas son las extracciones que se tienen que hacer dependiendo del estado inicial (columnas 1) para que se tenga el máximo beneficio.

Bajustada(:, :, 1, 46) =			Bajustada(:, :, 1, 45) =		
1.0000	1.0000	0	1.0000	1.0000	0
2.0000	1.0000	17.8870	2.0000	1.0000	17.8870
3.0000	1.0000	32.9270	3.0000	1.0000	32.9270
4.0000	2.0000	50.3270	4.0000	2.0000	50.3270
Bajustada(:, :, 2, 46) =			Bajustada(:, :, 2, 45) =		
1.0000	1.0000	0	1.0000	1.0000	0
2.0000	1.0000	14.5567	2.0000	1.0000	14.5567
3.0000	2.0000	29.7567	3.0000	2.0000	29.7567
4.0000	3.0000	48.9567	4.0000	3.0000	48.9567

Figura 5.13. Beneficios máximos totales, año 46 y 45

Al obtener la política óptima haciendo uso de Matlab, ésta se compara con la obtenida de forma manual. Como los resultados son exactamente iguales, es posible afirmar que el código escrito para la obtención de la política óptima de la presa es correcto, de forma que éste puede ser adaptado para el caso de estudio de las dos plantas de bombeo localizadas en el sistema Cerro del Judío-Cerro de la Estrella.

5. 2. Código de Matlab para la determinación de volúmenes de bombeo que minimicen costos de operación en las plantas de bombeo del sistema Cerro del Judío-Cerro de la Estrella

El código necesario para poder determinar cuál debe ser la extracción que debe existir en el cárcamo de bombeo en función de la cantidad de agua que tenga el tanque de succión, es muy similar al escrito para el ejemplo demostrativo. Es necesario hacer algunas modificaciones importantes, sin embargo, la estructura general puede fácilmente adaptarse al caso de estudio.

En Matlab es necesario definir cuáles son los estados físicamente permitidos en el cárcamo, las salidas y los ingresos. Como se decidió utilizar para todas estas variables intervalos de volumen de 100 m^3 , los ciclos *for* se escriben de tal forma que las variables estén conformadas por múltiplos de 100 hasta su respectivo límite máximo, en el caso de los estados 1900 m^3 y para las salidas e ingresos 6500 m^3 , esto para la PB Xotepingo (ver Figura 5.14). En el caso del Rebombeo Estrella, el límite máximo del cárcamo de bombeo es 1500 m^3 , mientras que los egresos e ingresos tienen un valor máximo de 7100 m^3 .

```
4 %Etapa 1: 24 a 7:59 hrs
5 %Etapa 2: 8 a 15:59 hrs
6 %Etapa 3: 16 a 23:59 hrs
7
8 %Definición de estados del cárcamo de bombeo (i):
9 for a=100:100:1900
10     i(a/100)=a;
11 end
12
13 %Definición de los egresos (k):
14 for b=100:100:6500
15     k(b/100)=b;
16 end
17
18 %Definición de los ingresos (x):
19 for c=100:100:6500
20     x(c/100)=c;
21 end
```

Figura 5.14. Definición de estados, salidas e ingresos en PB Xotepingo

Posteriormente se definen las probabilidades asociadas a los ingresos en cada una de las etapas definidas. Como se tienen 65 posibles intervalos de ingreso para la PB Xotepingo, entonces se tienen 65 probabilidades para cada una de las etapas. En la Figura 5.15 sólo se muestran algunas probabilidades de la PB Xotepingo de las tres diferentes etapas. En el caso del Rebombeo Estrella se tendrían 71 probabilidades asociadas a 71 ingresos para cada etapa.

23	%Probabilidades de ingreso Etapa 1	90	%Probabilidades de ingreso Etapa 2	157	%Probabilidades de ingreso Etapa 3
24	petapa1=[100 0	91	petapa2=[100 0	158	petapa3=[100 0
25	200 0	92	200 0	159	200 0
26	300 0	93	300 0	160	300 0
27	400 0	94	400 0	161	400 0
28	500 0	95	500 0	162	500 0
29	600 0	96	600 0	163	600 0
30	700 0	97	700 0	164	700 0
31	800 0	98	800 0	165	800 0
32	900 0	99	900 0	166	900 0

Figura 5.15. Definición de probabilidades de ingreso en las diferentes etapas, PB Xotepingo

Una vez que se tienen las probabilidades de los ingresos, se hace el cálculo de los beneficios asociados a cada estado y cada salida, es decir los valores de ϕ para las diferentes etapas. De acuerdo con el capítulo 4, los beneficios, para cualquiera de las dos plantas de bombeo que conforman el sistema analizado, están dados por la expresión de la ecuación 44.

Por lo tanto, para determinar el beneficio de cada estado y cada salida, es necesario calcular el estado, o volumen del cárcamo de bombeo, al finalizar una hora de análisis contemplando todos los posibles ingresos, derrames y déficits. En la Figura 5.16 se muestra cómo se calcula el estado final del cárcamo utilizando la ecuación de continuidad. Con base en dicho resultado se determina si hay exceso o falta de agua en el cárcamo. Hay derrame si el estado final calculado es mayor al estado máximo que puede tener físicamente el cárcamo, en cambio, hay déficit si el estado final calculado es menor al estado mínimo que puede tener físicamente el tanque de succión. En caso de que se obtenga un valor físicamente inadmisibles en el estado final del cárcamo, este valor se debe corregir (ver línea 245 a 252 de la Figura 5.16). En la línea 255 de la misma figura se muestra el cálculo de la carga de bombeo en función de la extracción que exista en el cárcamo de bombeo. Como la extracción es un volumen, este valor se debe dividir entre 3600 para así obtener un gasto y, en función de éste, determinar la carga de bombeo con la expresión correspondiente a las bombas utilizadas en cada una de las plantas del sistema analizado. Una vez calculada la carga, se determina el beneficio con base en el estado final del cárcamo, la extracción que existió, la carga de bombeo, derrames, déficits y la eficiencia de la bomba, ésta última se calcula en función de la extracción que se está analizando y con la expresión correspondiente a la planta analizada.

```

229 for d=i(1,end):i(1,1)-i(1,2):i(1,1)
230 for e=k(1,1):k(1,2)-k(1,1):k(1,end)
231
232     for f=x(1,1):x(1,2)-x(1,1):x(1,end)
233         j(f/100)=d+f-e;
234         if j(f/100)>i(1,end)
235             Derrame(f/100)=j(f/100)-i(1,end);
236         else
237             Derrame(f/100)=0;
238         end
239         if j(f/100)<i(1,1)
240             Deficit(f/100)=i(1,1)-j(f/100);
241         else
242             Deficit(f/100)=0;
243         end
244
245         %Corrección de las j con base en derrames y déficits
246         if j(f/100)<i(1,1)
247             j(f/100)=i(1,1);
248         else
249             if j(f/100)>i(1,end)
250                 j(f/100)=i(1,end);
251             end
252         end
253         %Cálculo de la carga de la bomba en función del volumen que se
254         %extraiga
255         H=-37.739*(e/3600)^4+56.276*(e/3600)^3-16.026*(e/3600)^2-27.178*(e/3600)+53.127;
256
257         %Cálculo del beneficio de cada ingreso para los valores de estados y extracciones
258         b(f/100)=110*e-110*j(f/100)-((3*9.81*(e/3600)*H)/(0.95*(-1.1556*(e/3600)^3+0.8575*(e/3600)^2+1.001
259
260     end

```

Figura 5.16. Cálculo de ϕ , etapa 1 PB Xotepingo

Durante cada una de las etapas existen diversas probabilidades de que se presenten cada uno de los ingresos, por lo tanto, el beneficio calculado previamente para cada uno de los ingresos y que se muestra en la Figura 5.16, debe multiplicarse por la probabilidad de que se presente ese ingreso con el cual fue calculado el beneficio, dicha asignación se hace a través de ciclos *for*, donde se comparan los estados del vector de probabilidades y los valores de los ingresos para así asignar las probabilidades (ver Figura 5.17).

Una vez asignada la probabilidad, ésta se multiplica por el beneficio correspondiente y finalmente se suman dichos productos, resultando un valor de beneficio para una salida de un estado inicial. Los valores de ϕ se acomodan en una matriz donde las columnas son los estados, en orden decreciente, y los renglones son las salidas, en orden creciente (ver Figura 5.17).

```

262 %Aquí se comparan los valores de los estados del vector de probabilidades y
263 %los valores de los ingresos para asignar las probabilidades a los ingresos
264 for g=1:size(x,2)
265     for h=1:size(petapa1,1)
266         if x(g)==petapa1(h)
267             P(g)=petapa1(h,2); %Esto es el vector de probabilidades de la etapa 1 asignado a los ingresos
268             Mult(g)=P(g)*b(g);
269             phietapa1(e/100,(2000-d)/100)=sum(Mult,2);%Puse el 2000 para acomodar los vectores en el orden
270                 %que yo quería. Los renglones son los valores de k
271                 %(en orden ascendente) y las columnas son los valores
272                 %de i (en orden decreciente: 1900,1800,...,100)
273         end
274     end
275 end

```

Figura 5.17. Asignación de probabilidades a los beneficios y cálculo de ϕ , etapa 1

El procedimiento para el cálculo de ϕ de la etapa 1 mostrado en la Figura 5.16 y Figura 5.17 debe repetirse para las demás etapas de la misma planta de bombeo teniendo cuidado en asignar correctamente las probabilidades de los ingresos. En el caso de la otra planta de bombeo, el procedimiento es muy similar, sin embargo, se debe tener especial cuidado en utilizar la expresión adecuada para el cálculo de la carga de bombeo y la eficiencia de la bomba, así como emplear las probabilidades adecuadas a cada etapa.

Una vez calculados los beneficios asociados a cada salida de cada uno de los estados, se obtienen los beneficios totales en orden cronológicamente descendente. Para empezar dicho análisis se establece el número máximo de días en los cuales se van a hacer las iteraciones. Anteriormente se definió un límite máximo de 100 días, sin embargo, basta con colocar un número con el cual se tenga la seguridad de que la solución converge. Al hacer el análisis se observó que al poner un límite máximo de 10 días se llega a una solución, además, se reduce considerablemente el tiempo en el que la computadora hace el cálculo, optimizando así tiempo de análisis y reduciendo la demanda de memoria a la computadora, de forma que el número máximo de días en los cuales se hace el análisis es 10 (ver línea 395 de la Figura 5.18).

Por practicidad, nuevamente se definen los vectores de las variables de estado y control, así como las probabilidades de ingreso de las tres etapas. En la Figura 5.18 se muestra un arreglo matricial de 3x65 para definir las probabilidades de ingreso en PB Xotepingo. El primer renglón representa las probabilidades de la primera etapa, el segundo renglón las correspondientes a la segunda etapa y la última fila representa las probabilidades de la tercera etapa. En el caso del Rebombeo Estrella, las probabilidades también se asignan como un arreglo matricial de 3*71, ya que en esa planta existen 71 posibles intervalos de ingreso de volumen al tanque de succión.


```

428 %%%%%%%%%Aquí sólo estoy haciendo lo de la etapa 3 de N=10%%%%%%%%
429 if e==size(etapas,2) && N==Nmax
430     [val,idx]=max(phietapa3,[],1);
431     B(:, :, i, e, N)=[fliplr(estados)', [idx;val].'];
432 end

```

Figura 5.20. Beneficios totales, N=10, etapa 3

En caso de que el cálculo se encuentre en el día máximo de análisis y en la etapa 2, se deben calcular los estados finales del cárcamo para cada ingreso, cada salida y cada estado. Con base en el estado final calculado, se asigna el beneficio correspondiente calculado en la etapa inmediata anterior, es decir, los beneficios totales calculados para el día 10 en la etapa 3, así como la probabilidad de que se presente un determinado ingreso durante la probabilidad analizada. Ambos valores, la probabilidad y el beneficio acumulado (B^*_{n+1}), deben multiplicarse y sumarse al valor de beneficio asociado de que se tenga una salida en un determinado estado inicial (ϕ). La suma de esos valores es el beneficio total y se tendrán tantos beneficios totales como el producto de estados iniciales por las salidas que puede haber del cárcamo.

Una vez calculados los beneficios totales asociados a cada salida de cada estado para la etapa analizada, se obtienen los máximos valores para cada uno de los estados, ya que se busca maximizar el beneficio. Dichos beneficios se ordenen en una matriz de tres columnas: en la primera se colocan los estados, en la segunda las extracciones con las cuales se tienen los máximos beneficios y en la tercera el valor de dichos beneficios, restando a cada uno de ellos el mínimo valor de los máximos beneficios para así no acumular número excesivamente grandes. El procedimiento descrito se muestra en la Figura 5.21.

```

438 if N==Nmax && e==2
439     %Aquí solamente obtengo Bast para la etapa 2 de N=Nmax con
440     %base en las B obtenidas previamente en un ciclo for
441     for z=1:1:65 %Número de vectores que tiene la matriz j
442         for a=1:1:65 %renglones de j
443             for b=1:1:19 %Número de estados que tiene el cárcamo
444                 c=j(a,z,i,2,Nmax); %defino una nueva variable como el valor único de j
445                 d=B(b,1,i,3,Nmax); %defino una nueva variable como el valor único de B
446                 if c==d %Comparo ambos valores para ver si son iguales
447                     Bast(a,z,i,e,N)=B(b,3,19,3,Nmax);
448                     Prob=probetapas(2,a);
449                     X=Bast(a,z,i,e,N);
450                     ProbxBast(a,z,i,e,N)=Prob*X;
451                     %Voy a intentar escribir el beneficio asociado
452                     %a la etapa 1 de cada k y de cada i
453                     M=ProbxBast(:,z,i,e,N); %todos los renglones, k=1, i=1
454                     P=phietapa2(z,20-i);
455                     Bnueva(z,i)=sum(M)+P;
456                     [val,idx]=max(Bnueva,[],1);
457                     Bajustada(:, :, e, N)=[estados', [idx;val-min(val)].'];
458                 end
459             end
460         end

```

Figura 5.21. Beneficios totales, N=10, etapa 2

Si el cálculo se encuentra en el día 10 en la etapa 1, el procedimiento que se debe hacer es muy similar al mostrado en la Figura 5.21, sólo se debe tener cuidado que, al calcular los estados finales del cárcamo, se asignen los beneficios correspondientes a la etapa inmediata calculada anteriormente, es decir, los beneficios totales obtenidos en la etapa 2 del día 10. Asimismo, se debe tener cuidado en asignar las probabilidades correctamente, es decir, las probabilidades que correspondan a la etapa analizada, así como el valor de ϕ correspondiente. Para obtener los beneficios totales el procedimiento es similar al ya descrito y se muestra en la Figura 5.22.

```

468         if N==Nmax && e==1
469             %Aquí solamente obtengo Bast para la etapa 2 de N=Nmax(32850) con
470             %base en las B obtenidas previamente en un ciclo for
471             for z=1:1:65 %Número de vectores que tiene la matriz j
472                 for a=1:1:65 %renglones de j
473                     for b=1:1:19 %Número de estados
474                         c=j(a,z,i,1,Nmax); %defino una nueva variable como el valor único de j
475                         d=Bajustada(b,1,2,Nmax); %defino una nueva variable como el valor único de B
476                         if c==d %Comparo ambos valores para ver si son iguales
477                             Bast(a,z,i,e,N)=Bajustada(b,3,2,Nmax);
478                             Prob=probetapas(1,a);
479                             X=Bast(a,z,i,e,N);
480                             ProbxBast(a,z,i,e,N)=Prob*X;
481                             M=ProbxBast(:,z,i,e,N); %todos los renglones, k=1, i=1
482                             P=phietapa1(z,20-i);
483                             Bnueva(z,i)=sum(M)+P;
484                             [val,idx]=max(Bnueva,[],1);
485                             Bajustada(:, :, e, N)=[estados', [idx;val-min(val)]]';
486                         end
487                     end
488                 end
489             end
490         end

```

Figura 5.22. Beneficios totales, N=10, etapa 1

Para días menores al máximo establecido, el cálculo es muy similar al mostrado. Si la etapa que se analiza es la 3, los beneficios acumulados que se tienen que asignar en función del estado final calculado son los determinados para la etapa 1 del día inmediato anterior analizado, por ejemplo, si el cálculo se encuentra en la etapa 3 del día 8, los beneficios acumulados que se deben colocar en el código son los correspondientes a la etapa 1 del día inmediato anterior analizado, es decir el día 9 (ver línea 503 de la Figura 5.23). En caso de que el cálculo se haga para la etapa 2 y 1 de un día menor al máximo, los beneficios acumulados que se deben colocar, según el resultado que se tenga del estado del cárcamo al final del análisis, son aquellos que se obtuvieron en la etapa 3 y 2, respectivamente, del día de análisis. Asimismo, se debe tener cuidado en colocar el vector de probabilidades adecuado (ver línea 504 de la Figura 5.23) así como los beneficios correspondientes a la etapa analizada y asociados a cada estado inicial y salida (ϕ) (ver línea 510 de la Figura 5.23).

```

496     if N<Nmax && e==3
497         for z=1:1:65 %Número de vectores que tiene la matriz j
498             for a=1:1:65 %renglones de j
499                 for b=1:1:19 %renglones de b
500                     c=j(a,z,i,3,N); %defino una nueva variable como el valor único de j
501                     d=Bajustada(b,1,1,N+1); %defino una nueva variable como el valor único de B
502                     if c==d %Comparo ambos vlores para ver si son iguales
503                         Bast(a,z,i,e,N)=Bajustada(b,3,1,N+1);
504                         Prob=probetapas(3,a);
505                         X=Bast(a,z,i,e,N);
506                         ProbxBast(a,z,i,e,N)=Prob*X;
507                         %Voy a intentar escribir el beneficio asociado
508                         %a la etapa 1 de cada k y de cada i
509                         M=ProbxBast(:,z,i,e,N);
510                         P=phietapa3(z,20-i);
511                         Bnueva(z,i)=sum(M)+P;
512                         [val,idx]=max(Bnueva,[],1);
513                         Bajustada(:,z,e,N)=[estados',[idx;val-min(val)]];
514                     end
515                 end
516             end
517         end
518     end

```

Figura 5.23. beneficios totales, $N < N_{max}$, etapa 3

El procedimiento descrito para obtener las extracciones en función del volumen que tenga el cárcamo de bombeo (Figura 5.14 a Figura 5.23) corresponden al código escrito para la PB Xotepingo. El procedimiento para el Rebombeo Estrella es muy similar debido a que se consideraron las mismas etapas, la principal diferencia radica en el número de estados que puede tener el cárcamo, las salidas, ingresos y las probabilidades asociadas a estos últimos, así como la expresión para determinar la carga de bombeo y la eficiencia de las bombas utilizadas.

Los códigos completos que permiten determinar la política que minimice costos de operación para PB Xotepingo y el Rebombeo Estrella se encuentran en el Anexo 5 y Anexo 6 respectivamente.

5. 3. Resultados

Con base en los códigos descritos, es posible correr el programa y así determinar cuál debe ser la extracción, en volumen, que minimice los costos de operación en las plantas de bombeo que conforman el sistema analizado.

Al ejecutar el programa se obtienen arreglos matriciales con tres columnas, la primera de ellas tiene todos los estados del cárcamo, en la segunda se presenta cuál debe ser la extracción, para el estado correspondiente, para que se tenga el máximo beneficio, cuyo valor aparece en la tercera columna.

Cada arreglo matricial representa el análisis de una etapa de un día. A continuación se muestran los resultados para cada una de las plantas de bombeo.

5. 3. 1. Resultados de optimización en la PB Xotepingo

Al hacer la corrida del programa se observa que los resultados convergen en el día 5 para todas las etapas. La Tabla 5.1 muestra, para cada uno de los estados iniciales del cárcamo, cuál debe ser la extracción para que se maximicen los beneficios. Los valores de beneficio del día 6 y 5 difieren un poco, sin embargo, si se observan y se comparan los beneficios del día 5 y 4, éstos son exactamente los mismos, por lo tanto, es posible afirmar que, para la etapa 3 (16:00 a 23:59 horas), se encontró la política óptima de operación de la PB Xotepingo. Esta política está resumida en las columnas *Estados* y *Extracción* de la Tabla 5.1. Establece que si el cárcamo tiene un volumen inicial entre 0-1099.9 m³, durante una hora se deben extraer entre 5700 y 5800 m³ pero, si el volumen del cárcamo está entre 1100-1900 m³, se debe extraer del tanque de succión, por una hora, un volumen entre 6400 y 6500 m³. Los intervalos de extracción de 100 m³ se deben a que se plantearon desde un inicio dichas condiciones para el empleo de la técnica de programación dinámica.

Tabla 5.1. Resultados optimización PB Xotepingo, etapa 3

Etapa 3					
Estados		Extracción	Beneficio total		
			Día 6	Día 5	Día 4
0	99.9	5800	3.0126	3.0125	3.0125
100	199.9	5800	3.3996	3.3995	3.3995
200	299.9	5800	3.7042	3.704	3.704
300	399.9	5800	3.9552	3.955	3.955
400	499.9	5800	4.125	4.1249	4.1249
500	599.9	5800	4.1201	4.12	4.12
600	699.9	5800	3.9175	3.9174	3.9174
700	799.9	5800	3.5992	3.5991	3.5991
800	899.9	5800	3.232	3.232	3.232
900	999.9	5800	2.8395	2.8395	2.8395
1000	1099.9	5800	2.4301	2.43	2.43
1100	1199.9	6500	2.1158	2.1157	2.1157
1200	1299.9	6500	2.1109	2.1108	2.1108
1300	1399.9	6500	1.9083	1.9082	1.9082
1400	1499.9	6500	1.59	1.5899	1.5899
1500	1599.9	6500	1.2229	1.2228	1.2228
1600	1699.9	6500	0.8303	0.8303	0.8303
1700	1799.9	6500	0.4209	0.4209	0.4209
1800	1900	6500	0	0	0

Para la etapa 2, que comprende el periodo entre las 8:00-15:59 horas, se encontró la política que se muestra en la Tabla 5.2. Al igual que para la etapa 3, los valores de los beneficios tienden a ser iguales entre el día 6 y 5, sin embargo, si se comparan los beneficios del día 5 y 4, los valores son exactamente los mismos, por lo tanto, es hasta la sexta iteración que se encuentra la política óptima. Esta indica que independientemente del volumen inicial que tenga el cárcamo en ese periodo de tiempo, cada hora debe extraerse un volumen entre 5700 y 5800 m³.

Tabla 5.2. Resultados optimización PB Xotepingo, etapa 2

Etapa 2					
Estados		Extracción	Beneficio total		
			Día 6	Día 5	Día 4
0	99.9	5800	2.8502	2.8501	2.8501
100	199.9	5800	3.0012	3.0011	3.0011
200	299.9	5800	3.0656	3.0656	3.0656
300	399.9	5800	3.0704	3.0703	3.0703
400	499.9	5800	3.0121	3.012	3.012
500	599.9	5800	2.8786	2.8785	2.8785
600	699.9	5800	2.688	2.6879	2.6879
700	799.9	5800	2.4639	2.4638	2.4638
800	899.9	5800	2.2251	2.2251	2.2251
900	999.9	5800	1.9778	1.9778	1.9778
1000	1099.9	5800	1.7535	1.7535	1.7535
1100	1199.9	5800	1.5837	1.5836	1.5836
1200	1299.9	5800	1.4212	1.4212	1.4212
1300	1399.9	5800	1.2129	1.2128	1.2128
1400	1499.9	5800	0.9843	0.9842	0.9842
1500	1599.9	5800	0.7419	0.7419	0.7419
1600	1699.9	5800	0.4809	0.4808	0.4808
1700	1799.9	5800	0.2152	0.2152	0.2152
1800	1900	5800	0	0	0

La política óptima para la primera etapa del día, es decir de las 00:00 a las 7:59 horas, se muestra en la Tabla 5.3. Ésta indica que, durante ese periodo de tiempo, independientemente del volumen que tenga el cárcamo, cada hora se debe extraer un volumen entre 6400 y 6500 m³.

Tabla 5.3. Resultados optimización PB Xotepingo, etapa 1

Etapa 1					
Estados		Extracción	Beneficio total		
			Día 6	Día 5	Día 4
0	99.9	6500	0	0	0
100	199.9	6500	1.057	1.057	1.057
200	299.9	6500	2.0518	2.0518	2.0518
300	399.9	6500	2.9826	2.9826	2.9826
400	499.9	6500	3.8648	3.8648	3.8648
500	599.9	6500	4.5677	4.5677	4.5677
600	699.9	6500	4.7834	4.7834	4.7834
700	799.9	6500	4.6495	4.6495	4.6495
800	899.9	6500	4.4011	4.4011	4.4011
900	999.9	6500	4.0992	4.0992	4.0992
1000	1099.9	6500	3.7614	3.7615	3.7615
1100	1199.9	6500	3.3944	3.3944	3.3944
1200	1299.9	6500	3.0083	3.0083	3.0083
1300	1399.9	6500	2.6115	2.6115	2.6115
1400	1499.9	6500	2.2102	2.2103	2.2103
1500	1599.9	6500	1.8146	1.8146	1.8146
1600	1699.9	6500	1.4329	1.4329	1.4329
1700	1799.9	6500	1.0569	1.0569	1.0569
1800	1900	6500	0.672	0.6721	0.6721

5.3.2. Resultados de optimización en el Rebombéo Estrella

Al ejecutar el código escrito para el Rebombéo Estrella se obtuvieron los volúmenes que deben extraerse cada hora, durante las diferentes etapas del día, en función del volumen de agua que tenga el tanque de succión y así poder minimizar los costos de operación a través de maximizar los beneficios de poner en funcionamiento los equipos de bombeo. Si los beneficios de cada etapa se comparan entre los días 8 y 7 se observa que los valores son los mismos (ver Tabla 5.4), sin embargo, si se comparan los valores de los beneficios entre el día 9 y 8 se observan ligeras diferencias, por lo tanto, la política óptima para cada una de las etapas se alcanza en la cuarta iteración. La Tabla 5.4 muestra la política óptima del Rebombéo Estrella para la tercera etapa del día, es decir de las 16:00-23:59 horas. Dicha política consiste en extraer entre 5400 y 5500 m³ de agua cada hora, independientemente del volumen de agua que inicialmente tenga el cárcamo.

Tabla 5.4. Resultados optimización Rebombéo Estrella, etapa 3

Etapa 3					
Estados		Extracción	Beneficio total		
			Día 9	Día 8	Día 7
0	99.9	5500	0	0	0
100	199.9	5500	0.626	0.6282	0.6282
200	299.9	5500	1.1552	1.1622	1.1622
300	399.9	5500	1.641	1.6471	1.6471
400	499.9	5500	2.0267	2.0303	2.0303
500	599.9	5500	2.387	2.3918	2.3918
600	699.9	5500	2.7255	2.7277	2.7277
700	799.9	5500	3.0481	3.0491	3.0491
800	899.9	5500	3.3241	3.3249	3.3249
900	999.9	5500	3.5629	3.5597	3.5597
1000	1099.9	5500	3.715	3.7124	3.7124
1100	1199.9	5500	3.8298	3.8179	3.8179
1200	1299.9	5500	3.9247	3.9136	3.9136
1300	1399.9	5500	3.9465	3.9372	3.9372
1400	1500	5500	3.8871	3.8811	3.8811

La Tabla 5.5 muestra las extracciones de agua que se deben hacer al cárcamo de succión de las 8:00-15:59 horas. Al igual que para la etapa 3, durante la etapa 2 deben salir entre 5400 y 5500 m³ de agua cada hora sin importar el estado inicial que se tenga en la planta de bombeo.

Tabla 5.5. Resultados optimización Rebombéo Estrella, etapa 2

Etapa 2					
Estados		Extracción	Beneficio total		
			Día 9	Día 8	Día 7
0	99.9	5500	0	0	0
100	199.9	5500	0.8887	0.8889	0.8889
200	299.9	5500	1.7107	1.711	1.711
300	399.9	5500	2.4644	2.4649	2.4649
400	499.9	5500	3.1544	3.1549	3.1549
500	599.9	5500	3.8061	3.8066	3.8066
600	699.9	5500	4.3805	4.3808	4.3808
700	799.9	5500	4.8877	4.8879	4.8879
800	899.9	5500	5.3344	5.3344	5.3343
900	999.9	5500	5.7109	5.7106	5.7106
1000	1099.9	5500	6.0477	6.0471	6.0471
1100	1199.9	5500	6.3473	6.3462	6.3462
1200	1299.9	5500	6.5838	6.5823	6.5823
1300	1399.9	5500	6.7565	6.755	6.755
1400	1500	5500	6.8597	6.8579	6.8579

Finalmente, para la etapa 1, de las 00:00 a las 7:59 horas, la Tabla 5.6 muestra que si el cárcamo tiene un volumen entre 0 y 799.9 m³, se deben extraer cada hora entre 5900 y 6000 m³, pero si el cárcamo tiene un volumen que oscile entre 800 y 1500 m³, cada hora debe salir del cárcamo un volumen entre 6900 y 7000 m³ de agua.

Tabla 5.6. Resultados optimización Rebombéo Estrella, etapa 1

Etapa 1					
Estados		Extracción	Beneficio total		
			Día 9	Día 8	Día 7
0	99.9	6000	0	0	0
100	199.9	6000	0.0756	0.0756	0.0756
200	299.9	6000	0.1441	0.1441	0.1441
300	399.9	6000	0.2042	0.2042	0.2042
400	499.9	6000	0.2574	0.2574	0.2574
500	599.9	6000	0.305	0.305	0.305
600	699.9	6000	0.3453	0.3453	0.3453
700	799.9	6000	0.3799	0.3799	0.3799
800	899.9	7000	0.4172	0.4172	0.4172
900	999.9	7000	0.5215	0.5215	0.5215
1000	1099.9	7000	0.6245	0.6245	0.6245
1100	1199.9	7000	0.726	0.726	0.726
1200	1299.9	7000	0.8255	0.8255	0.8255
1300	1399.9	7000	0.9212	0.9212	0.9212
1400	1500	7000	1.0141	1.0141	1.0141

Con base en los resultados de extracción obtenidos para cada una de las etapas del día en cada una de las plantas de bombeo, es posible simular el comportamiento que éstas pueden tener.

Capítulo 6. Comportamiento de los cárcamos de bombeo

En el capítulo anterior se determinaron cuáles son las extracciones, en volumen, que tienen que existir en los cárcamos de bombeo para poder maximizar los beneficios. Con dichos valores de extracciones y con los registros que se tienen, a través de la instrumentación y telemetría, de las entradas en los tanques convertidos en volumen y que se encuentran en el Anexo 1 y Anexo 2, es posible determinar el comportamiento de los tanques cada hora, es decir, cuál es el volumen que permanece en los cárcamos durante las diferentes horas del día.

Dado que se tiene registro de ingreso de agua a las plantas de bombeo cada hora por 31 días, es posible determinar el comportamiento de los cárcamos durante ese periodo de tiempo. Las variables que intervienen el cálculo son los ingresos de agua, las salidas y el volumen inicial del cárcamo.

Un factor determinante para conocer el volumen que permanece en los tanques a lo largo de un día es el volumen inicial de agua que tiene la estructura. En función de este dato se sabe cuál debe ser la primera salida, valor obtenido a través de la programación dinámica, de forma que los resultados subsecuentes dependen del volumen que tiene el cárcamo al inicio del análisis, es decir, en la primera hora: de las 00:00 a las 00:59.

Determinar el volumen de los tanques es una tarea sencilla, ya que el resultado se obtiene con la ecuación de estado utilizada en la programación dinámica, sin embargo, dado que se tienen 31 días de datos de ingreso en cada uno de los cárcamos, existe la posibilidad de que se quiera analizar cada uno de esos días. Por otro lado, el cárcamo de la PB Xotepingo tiene 19 estados, por lo tanto, si se desea analizar el comportamiento del cárcamo durante un día, existen 19 diferentes posibilidades de iniciar el cálculo, es decir, se tienen 570 oportunidades. En el caso del Rebombeo Estrella, el tanque de succión tiene 15 posibles estados, de forma que, si se quiere analizar un solo día, de los 30 en los cuáles se tiene registro de ingreso, existen 450 posibilidades de iniciar el cálculo.

Dadas las condiciones del problema, se hace uso de la plataforma Matlab para escribir dos nuevos códigos, uno para cada planta de bombeo, en donde se pueda determinar fácilmente el volumen del cárcamo cada hora del día seleccionado por el usuario.

6. 1. Código utilizado para la determinación de volúmenes en los tanques de succión

La parte medular del código es el cálculo de la ecuación de continuidad para cada una de las horas que componen el día. Para hacer uso de dicha ecuación es necesario tener como datos iniciales del problema los valores de las extracciones.

Como las salidas son diferentes para cada una de las tres etapas, el código se divide en tres partes. En la primera de ellas se colocan las extracciones correspondientes a la primera etapa del día (ver Figura 6.1).

```
24 %Extracciones para la primera etapa solamente
25
26 extraccion=[6500
27 6500
28 6500
29 6500
30 6500
31 6500
32 6500
33 6500
34 6500
35 6500
36 6500
37 6500
38 6500
39 6500
40 6500
41 6500
42 6500
43 6500
44 6500];
```

Figura 6.1. Definición de las extracciones PB Xotepingo, etapa 1

Una vez definidas las salidas para esa primera etapa, se escribe un arreglo matricial donde se coloquen todos los ingresos de agua, en volumen, que tuvo la PB Xotepingo cada hora durante los treinta días que conforman el periodo representativo. Las columnas de la matriz representan las horas del día, mientras que los renglones cada uno de los días del mes analizado (ver Figura 6.2). Dado que no se tienen registros de todas las horas del 8 de marzo ni el 7 de abril, esos días no se toman en cuenta para realizar una simulación del comportamiento del cárcamo, de modo que el cálculo del volumen puede realizarse para los días donde se tenga registro completo de ingreso de cada hora, es decir, del 9 de marzo al 6 de abril.

46	%Las columnas de la matriz de ingresos representan las horas del								
47	% día, los renglones representan los días del mes								
48	ingreso=	3866.746	3787.844	6003.980	6007.296	5891.619	5958.254	3671.068	
49		5826.591	5941.688	3796.071	3755.499	3784.811	5936.220	5808.555	5820.625
50		5813.180	5863.246	4240.234	4232.758	4661.894	6240.964	6219.919	3099.938
51		5751.419	3712.448	3734.793	3829.420	5900.936	5999.000	5908.903	5879.077
52		6156.820	6281.991	4243.114	4230.621	4237.364	6351.542	6416.330	6404.423
53		6339.596	6374.714	6452.975	6132.598	3701.511	3641.876	6101.677	6016.130
54		5976.699	5972.945	6035.085	6056.510	5824.509	3816.527	3675.465	3697.827
55		5996.894	6086.164	6110.918	5907.054	5968.753	3760.517	3809.492	3705.523
56		5913.930	5991.197	5950.404	5974.473	3733.362	3670.259	3679.191	5878.973
57		6264.953	6151.612	6019.934	6052.544	5913.309	5605.150	3328.114	6242.528
58		5918.574	6004.155	5975.741	5910.341	5984.763	3774.319	3714.112	3649.038
59		3207.813	6400.746	6302.982	6352.706	6280.278	4190.433	4203.007	4197.567
60		6272.451	4429.563	4396.915	3905.063	5938.781	5996.952	5888.036	5854.890
61		5903.415	5954.974	3816.769	3746.761	3804.985	5973.130	5905.306	5864.331
62		5828.712	6005.206	5966.361	3860.178	3821.791	3678.105	5958.878	5865.995
63		5810.771	5855.555	5928.003	5803.059	3591.714	3511.198	3558.324	5961.272
64		5913.110	5846.137	5889.197	3274.137	3257.042	5938.252	4288.074	3319.015
65		5750.775	5783.774	3152.995	3153.701	3158.077	5835.349	5777.064	5717.365
66		5625.999	5909.495	5806.485	5807.319	5705.114	3581.260	3566.846	3573.869
67		5806.249	5868.366	5790.598	3178.168	3199.391	3138.503	5938.981	5887.378
68		5801.384	5867.349	3625.058	3743.346	3674.522	5831.160	5827.771	5842.942
69		3695.776	3873.412	3929.148	5933.215	5906.348	5902.994	3371.747	3254.483
70		5845.226	6011.227	5799.230	3817.460	3691.828	3800.959	6035.135	6025.161
71		5907.216	5988.954	6003.274	5939.902	3275.794	3315.646	5931.590	5943.061
72		5915.642	5932.269	5976.491	5906.950	5856.386	3490.857	3429.959	6040.287
73		5888.382	5939.082	5992.800	3570.827	3535.156	6062.728	6031.119	6025.091

Figura 6.2. Ingresos a PB Xotepingó durante el periodo representativo

Para calcular el comportamiento del cárcamo en un periodo de 24 horas se pregunta al usuario qué día se quiere analizar, teniendo en cuenta que, si se escoge el primer día, éste es el 9 de marzo. También existe la posibilidad de analizar el comportamiento del tanque de succión con los máximos o mínimos valores de volúmenes que entraron a la estructura cada hora (ver Figura 6.3). Asimismo, se pregunta cuál es volumen inicial del cárcamo.

```

80 dia=input("¿Qué día desea analizar?\n" + ...
81 "Escoger un número del 1-29 (siendo el día 1 el 9 de marzo), si desea calcular un día del mes, o bien,\n"+ ...
82 "el 30 si desea calcular los máximos o 31 si desea calcular los mínimos:");
83 volinicial=input("¿Cuál es el estado inicial? Escoger un número del 0-1900 v=");

```

Figura 6.3. Solicitud del día a analizar

En función de la cantidad de agua que tenga el tanque de succión al iniciar el análisis, se determina cuál es el primer valor de salida que se debe tomar, esto a través de los condicionales mostrados en la Figura 6.4.

```

87  □ for i=1:8
88      if volinicial>=0 && volinicial<=99.9
89          salida=extraccion(1,1);
90      elseif volinicial>=100 && volinicial<=199.9
91          salida=extraccion(2,1);
92      elseif volinicial>=200 && volinicial<=299.9
93          salida=extraccion(3,1);
94      elseif volinicial>=300 && volinicial<=399.9
95          salida=extraccion(4,1);
96      elseif volinicial>=400 && volinicial<=499.9
97          salida=extraccion(5,1);
98      elseif volinicial>=500 && volinicial<=599.9
99          salida=extraccion(6,1);
100     elseif volinicial>=600 && volinicial<=699.9
101         salida=extraccion(7,1);
102     elseif volinicial>=700 && volinicial<=799.9
103         salida=extraccion(8,1);
104     elseif volinicial>=800 && volinicial<=899.9
105         salida=extraccion(9,1);
106     elseif volinicial>=900 && volinicial<=999.9
107         salida=extraccion(10,1);
108     elseif volinicial>=1000 && volinicial<=1099.9
109         salida=extraccion(11,1);
110     elseif volinicial>=1100 && volinicial<=1199.9
111         salida=extraccion(12,1);
112     elseif volinicial>=1200 && volinicial<=1299.9
113         salida=extraccion(13,1);
114     elseif volinicial>=1300 && volinicial<=1399.9
115         salida=extraccion(14,1);

```

Figura 6.4. Asignación de volumen de salida

Al tener el valor de volumen inicial y salida, así como el día que se quiere simular, es posible utilizar la ecuación de continuidad. El valor de ingreso se toma de la matriz definida anteriormente (ver Figura 6.2) a partir del día seleccionado y la primera hora de análisis, es decir de las 00:00 a las 00:59.

Se debe tener cuidado que al calcular el volumen que permanece en el cárcamo, éste no sea más chico que el mínimo permitido para que la estructura tenga el tirante de agua suficiente y así evitar problemas de vorticidad y, al mismo tiempo, se debe cuidar que el cárcamo tenga suficiente cantidad de agua para que no se presenten problemas de cavitación. En caso de que el volumen calculado sea mayor al máximo volumen físicamente permitido en el cárcamo, éste se debe corregir y se tiene que colocar el máximo valor que puede tener la estructura.

6. 1. 1. Volúmenes mínimos permisibles en los tanques de succión

Para determinar cuál debe ser el volumen mínimo permisible en los cárcamos se debe determinar el tirante necesario para que no existan problemas de vorticidad y, con este valor, rectificar que no haya problemas de cavitación.

6. 1. 1. 1. PB Xotepingo

La sumergencia mínima se calcula a partir del diámetro de campana y el número de Froude. Este último se obtiene con la expresión:

$$F_D = \frac{V_c}{(g * D_c)^{0.5}} \quad [58]$$

Donde:

V_c es la velocidad de campana, en m/s

D_c es el diámetro de la campana de succión, en m

Dado que no se conocen los diámetros de las campanas en las plantas, se hace uso de las recomendaciones del Hydraulic Institute (HI) para determinar dicho valor de acuerdo con las sugerencias de la Figura 6.5.

Q (m ³ /s)	$V_c = \frac{Q}{A_c} = \frac{4Q}{\pi(D_c)^2}$ (m/s)
$Q < 0.315$	$0.6 \leq V_c \leq 2.7$
$0.315 \leq Q < 1.26$	$0.9 \leq V_c \leq 2.4$
$Q \geq 1.26$	$1.2 \leq V_c \leq 2.1$

Figura 6.5. Recomendaciones de velocidad de campana del HI

Para las bombas de la PB Xotepingo se utiliza el gasto de placa, es decir, 0.843 m³/s y una velocidad de campana de 1.7 m/s, por lo tanto, el diámetro de campana se calcula como:

$$D_c = \sqrt{\frac{4 * 0.843}{\pi * 1.7}} \quad [59]$$

Al hacer el cálculo, el diámetro obtenido es de 0.795 m. Con este valor es posible calcular el número de Froude. Si se realizan las operaciones necesarias, el resultado del número adimensional es 0.609. A partir de ambos valores se obtiene la sumergencia mínima con la expresión recomendada por Hecker:

$$S_{min} = D_c(1 + 2.3F_D) \quad [60]$$

$$S_{min} = 0.795(1 + 2.3 * 0.609)$$

$$S_{min} = 1.91 \text{ m}$$

Con el valor de la sumergencia mínima se puede determinar el tirante, desde la base del cárcamo, para que no se presenten problemas de vorticidad. La Figura 6.6 muestra que al valor de sumergencia se debe sumar una distancia desde la base del tanque hasta el inicio de la campana (C). El intervalo sugerido, según el HI, va de 0.24 m a 0.4 m, por lo tanto, si se toma un valor de $C=0.29$ m, valor comprendido dentro de los límites recomendados, el tirante mínimo que tendría que existir es 2.2 m, lo que implica un volumen de agua en el cárcamo de 598.4 m^3 , en términos prácticos, un volumen de 600 m^3 .

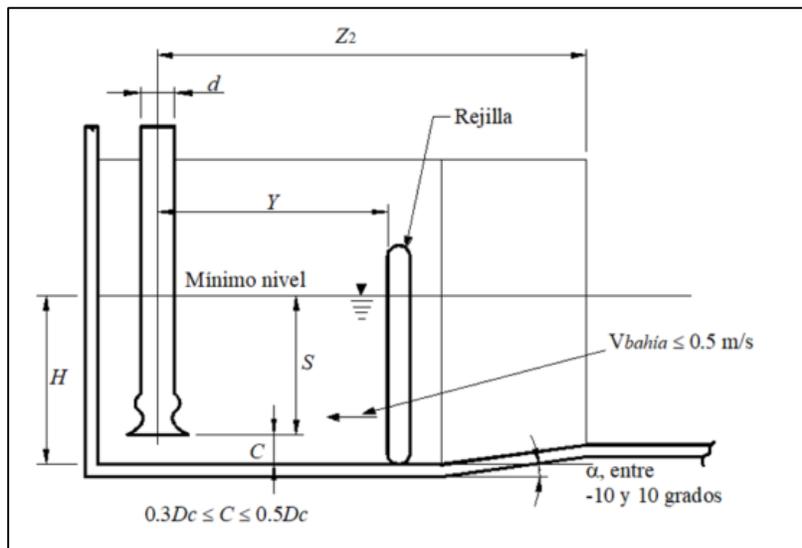


Figura 6.6. Medidas de cárcamos de bombeo rectangulares

Una vez determinado el tirante de agua para que no se presenten vórtices, se verifica que con este valor no existan problemas de cavitación. Si se asume que existen 30 cm desde la base de la campana al impulsor, el nivel de succión que se presenta con la condición analizada es 1.61 m. Con este valor de nivel de succión, asumiendo pérdidas despreciables en el tramo de succión y considerando una presión de vapor de 0.24 mca, se calcula la carga de succión positiva neta disponible ($NPSH_{Disp}$) con la expresión:

$$NPSH_{Disp} = \Delta z + \frac{p_{atm}}{\gamma} - \frac{p_{vap}}{\gamma} \quad [61]$$

Donde:

Δz es el nivel de succión, en m
 $\frac{p_{atm}}{\gamma}$ presión atmosférica, en mca

La presión atmosférica puede calcularse con la ecuación:

$$p_{atm}/\gamma = p_{atm0}/\gamma (1 - 2.26 \times 10^{-5} h)^{5.256} \quad [62]$$

Donde:

p_{atm0}/γ es la presión atmosférica al nivel del mar, 10.33 mca
 h es la cota topográfica del punto analizado, en msnm

De acuerdo con la Tabla 2.1, la elevación de la PB Xotepingo es 2240 msnm. Por lo tanto, la presión atmosférica en dicho punto es 7.86 m. Sustituyendo los valores en la ecuación de la carga de succión positiva neta, el valor de $NPSH_{Disp}$ es 9.23 m.

Para tener la seguridad de que no existen problemas de cavitación, el valor de $NPSH_{Req}$, que es proporcionado por el fabricante, debe ser multiplicado por un factor mayor a la unidad y, este producto debe ser igual o menor que el valor de $NPSH_{Disp}$.

De la Figura 2.6 se observa que, para el gasto de diseño, $NPSH_{Req}$ es 25 ft (7.62 m), por lo tanto, como el valor requerido es menor al disponible, es posible afirmar que, si el cárcamo de la PB Xotepingo cuenta con un volumen de 600 m³, no se presentan problemas de vorticidad ni cavitación.

6. 1. 1. 2. Rebombeo Estrella

Se realiza un procedimiento análogo para determinar el volumen mínimo que puede tener el cárcamo de esta planta para que no existan los problemas mencionados previamente.

De acuerdo con el gasto de diseño de las bombas y el límite mayor de la velocidad de campana correspondiente a dicho gasto (ver Figura 6.5), el diámetro de campana es 0.728 m. Con este valor se determina el número de Froude, resultando un valor de 0.898. Sustituyendo ambos valores en la expresión de la sumergencia mínima, se obtiene un resultado de 2.23 m. A dicha magnitud debe sumarse la distancia desde la base del cárcamo hasta el inicio de la campana cuidando que el valor se encuentre dentro de los límites recomendados por el HI. Si se propone un valor de 27 cm, el tirante de agua mínimo que debe existir en el tanque de succión para que no haya presencia de vórtices es de 2.5 m, es decir, un volumen de 758.6 m³.

Para rectificar que no existan problemas de cavitación, se debe calcular $NPSH_{Disp}$ y comparar ese valor con el requerido por el fabricante. En esta planta también se

hace la suposición de que el impulsor de la bomba se encuentra 30 cm arriba del inicio de la campana, por lo que el nivel de succión es de 1.93 m.

Para determinar la carga de succión positiva neta disponible, es necesario calcular la presión atmosférica que se tiene en el Rebombero Estrella. De acuerdo con la Tabla 2.1, la planta se encuentra en la elevación 2244 msnm, de modo que la presión atmosférica, en mca, es de 7.86 m. Al sustituir los valores necesarios se obtiene que $NPSH_{Disp}$ tiene una magnitud de 9.55 m. De acuerdo con la Figura 2.10, el valor de $NPSH_{Req}$ es de 30 ft (9.14 m), por lo tanto, si se tiene un volumen en el cárcamo de 758.6 m³, no se presentan problemas de vorticidad ni cavitación.

Con base en los volúmenes mínimos determinados se escribe en los códigos dicho límite. En el caso de PB Xotepingo, si al cabo de una hora se obtienen un valor de volumen menor a 600 m³, este valor no se debe permitir y se debe escribir 600 m³, ya que este es límite inferior que se puede tener para que no existan problemas en la planta (ver Figura 6.7). En caso de que al resolver la ecuación de continuidad se obtenga un número mayor a 1900 m³, se debe escribir este valor, debido a que es físicamente imposible que el tanque almacene una cantidad mayor de agua que su límite máximo (ver Figura 6.7).

```
128         vol=volinicial+ingreso(dia,i)-salida;
129
130         if vol<=600
131             vol=600;
132         else
133             if vol>=1900
134                 vol=1900;
135             end
136         end
```

Figura 6.7. Límites de volumen en el cárcamo de PB Xotepingo

En el caso del Rebombero Estrella, si al hacer el cálculo del volumen que tiene el cárcamo se obtiene un número menor a 760 m³, el número se debe corregir y se tiene que escribir el valor mencionado, ya que es el límite inferior para que no existan problemas en la planta (ver Figura 6.8). De la misma forma que para PB Xotepingo, en caso de que se obtenga un volumen mayor al máximo estado permisible que puede tener el cárcamo, el valor que se tiene que escribir es 1500 m³.

```
111         vol=volinicial+ingreso(dia,i)-salida;
112
113         if vol<=760
114             vol=760;
115         else
116             if vol>=1500
117                 vol=1500;
118             end
119         end
```

Figura 6.8. Límites de volumen en el cárcamo del Rebombero Estrella

Al tener calculado el volumen al cabo de la primera hora, este valor se convierte automáticamente en el volumen inicial que tiene el tanque de succión para la segunda hora de análisis y, en función de este valor, se determina la extracción que existe en la planta de bombeo durante la segunda hora de análisis (ver Figura 6.4). Este proceso se repite hasta la octava hora del día, es decir, al finalizar la primera etapa.

Para analizar la segunda etapa el proceso es similar, solamente se cambian los valores de extracción (ver Figura 6.9) y, consecuentemente, los condicionales que definen el valor de salida de agua del cárcamo se modifican en función de las nuevas extracciones.

146	extraccion2=[5800
147	5800
148	5800
149	5800
150	5800
151	5800
152	5800
153	5800
154	5800
155	5800
156	5800
157	5800
158	5800
159	5800
160	5800
161	5800
162	5800
163	5800
164	5800];

Figura 6.9. Definiciones de las extracciones PB Xotepingo, etapa 2

En la segunda etapa se calcula la ecuación de continuidad ocho veces, de la hora 9 a la 16 y, si se obtiene algún valor físicamente imposible, éste se corrige. En la tercera etapa se define un nuevo vector de extracciones (ver Figura 6.10) y se utiliza la ecuación de continuidad para el cálculo del volumen, teniendo en cuenta que dicho valor, al final de una hora, se convierte en el volumen inicial para la siguiente hora de análisis.

225	extraccion3=[5800
226	5800
227	5800
228	5800
229	5800
230	5800
231	5800
232	5800
233	5800
234	5800
235	5800
236	6500
237	6500
238	6500
239	6500
240	6500
241	6500
242	6500
243	6500];

Figura 6.10. Definición de las extracciones PB Xotepingo, etapa 3

La Figura 6.1 a Figura 6.10 muestran una porción del código desarrollado para la PB Xotepingo. El código realizado para el Rebombéo Estrella es muy similar al ya descrito, sin embargo, los valores de extracciones e ingresos cambian, de forma que los vectores de extracciones, para las tres etapas, no tienen las mismas dimensiones que los definidos para la PB Xotepingo. En el caso de la matriz de ingresos, las dimensiones de este arreglo son las mismas, no obstante, los valores de volúmenes que ingresan a la planta son diferentes.

Los resultados de volúmenes calculados cada hora se guardan en un vector para mostrarse posteriormente a través de leyendas donde se indique el volumen que tiene el cárcamo al finalizar cada hora de análisis, asimismo, dichos valores se grafican en una figura, en el eje horizontal se colocan las horas del día y en el eje vertical se escriben los volúmenes que tiene el tanque de succión al finalizar cada hora (ver Figura 6.11), tomando en cuenta los niveles mínimos y máximos permisibles dentro de la estructura.

304	j;
305	dia=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24];
306	
307	plot(dia,j,"-o"),title('Volumen en el cárcamo'), xlabel('Hora del día'), ylabel('Volumen, en m ³ ')

Figura 6.11. Instrucción para graficar los volúmenes calculados cada hora del día

6. 2. Resultados del comportamiento del cárcamo

Al ejecutar el programa se tiene la libertad de seleccionar el día, así como el volumen que tiene el tanque de succión al inicio del análisis.

Para cada una de las plantas se muestran los resultados para el día 20, es decir, el 28 de marzo, suponiendo dos condiciones: cárcamo completamente lleno y a la mitad de su capacidad total al inicio del cálculo.

6. 2. 1. PB Xotepingo

La Figura 6.12 muestra los resultados, en forma de leyenda, para la condición más favorable de la planta de bombeo, es decir, que el tanque de succión se encuentre completamente lleno. Si ocurre este escenario, durante el día analizado se tienen 10 horas en las que el ingreso de agua es mayor a la salida óptima determinada y, por lo tanto, existe acumulación de agua en el cárcamo, pero no excesiva de tal forma que existan derrames. Asimismo, se observa que existen 14 horas en las que el volumen en el tanque es de 600 m^3 , lo que significa que el ingreso que recibió fue igual o menor a la salida óptima. En caso de que el ingreso haya sido menor, los equipos electromecánicos deben parar cuando no se tenga más de 600 m^3 en el cárcamo. Se debe tener cuidado en la interpretación de los valores correspondientes a 600 m^3 , estos no significan que no existe abastecimiento de agua durante dichas horas, sino que la extracción óptima supera al ingreso que se tuvo.

```

¿Qué día desea analizar?
Escoger un número del 1-31 (siendo el día 1 el 8 de marzo), si desea calcular un día del mes, o bien,
el 32 si desea calcular los máximos o 33 si desea calcular los mínimos:15
¿Cuál es el estado inicial? Escoger un número del 0-1900 v=1900
El volumen, en m³, al cabo de la hora 1 es: 1.303415e+03
El volumen, en m³, al cabo de la hora 2 es: 7.583890e+02
El volumen, en m³, al cabo de la hora 3 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 4 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 5 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 6 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 7 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 8 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 9 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 10 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 11 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 12 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 13 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 14 es: 5.685400e+01
El volumen, en m³, al cabo de la hora 15 es: 2.404100e+01
El volumen, en m³, al cabo de la hora 16 es: 9.770000e+01
El volumen, en m³, al cabo de la hora 17 es: 3.700000e+00
El volumen, en m³, al cabo de la hora 18 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 19 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 20 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 21 es: 0
El volumen, en m³, al cabo de la hora 22 es: 3.289400e+01
El volumen, en m³, al cabo de la hora 23 es: 8.181100e+01
El volumen, en m³, al cabo de la hora 24 es: 9.237200e+01

```

Figura 6.12. Comportamiento del cárcamo PB Xotepingo, cárcamo lleno

La Figura 6.13 muestra de forma gráfica el comportamiento descrito anteriormente y mostrado en la Figura 6.12.

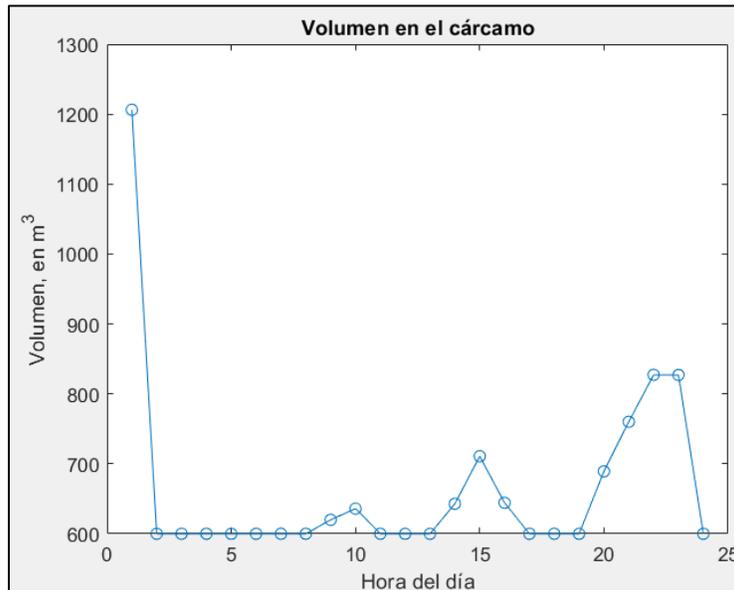


Figura 6.13. Comportamiento gráfico del cárcamo PB Xotepingo, cárcamo lleno

La Figura 6.14 muestra de forma gráfica los volúmenes que tiene el tanque en la planta a lo largo de 24 horas cuando se inicia el cálculo con el cárcamo a la mitad de su capacidad. Para esta condición existen 9 horas en las que hay acumulación de agua y que amortiguan la falta del líquido durante las horas restantes del día.

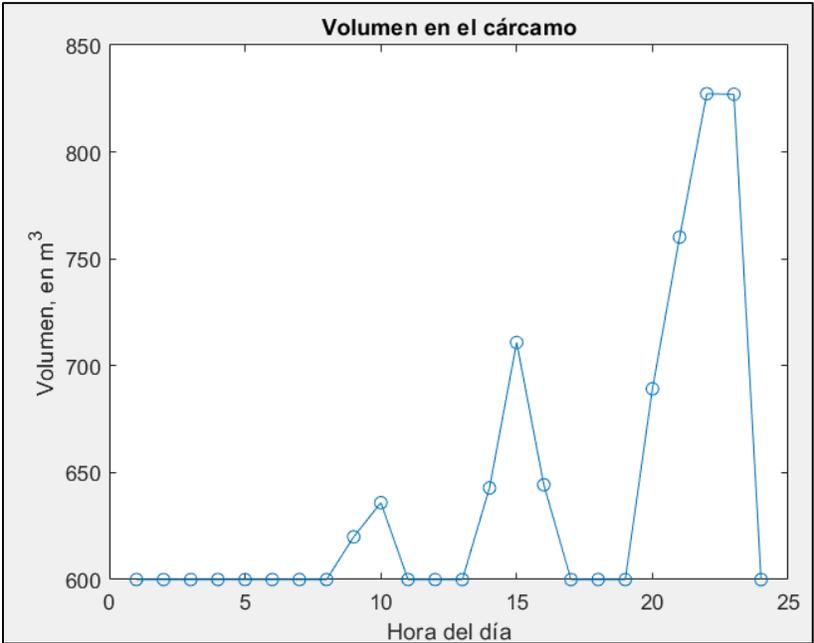


Figura 6.14. Comportamiento del cárcamo PB Xotepingo, cárcamo a la mitad

6. 2. 2. Rebombeo Estrella

La Figura 6.15 muestra cómo se comporta el cárcamo de succión con las condiciones iniciales más favorables. Durante tres horas del día los ingresos son mayores a las extracciones óptimas, mientras que durante 21 horas los ingresos son los mismos o menores que las salidas que maximizan los beneficios, resultando nula acumulación de agua en el cárcamo. Esto no significa que no se abastezca de agua, sino que se manda toda la que ingresa a la planta y, por lo tanto, no hay posibilidad de que el agua se almacene en la estructura.

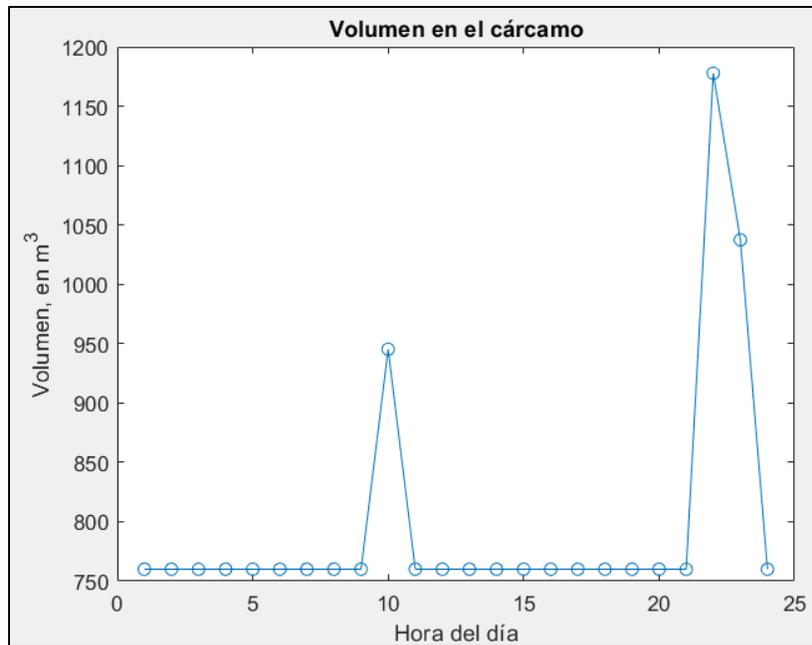


Figura 6.15. Comportamiento del cárcamo del rebombero estrella, cárcamo lleno

En la Figura 6.16 se muestra que con un volumen inicial del cárcamo de 750 m³, al igual que en el caso anterior, existen cinco horas del día en que hay acumulación de agua, mientras que existen 19 horas en las que toda el agua que llega a la planta es enviada.

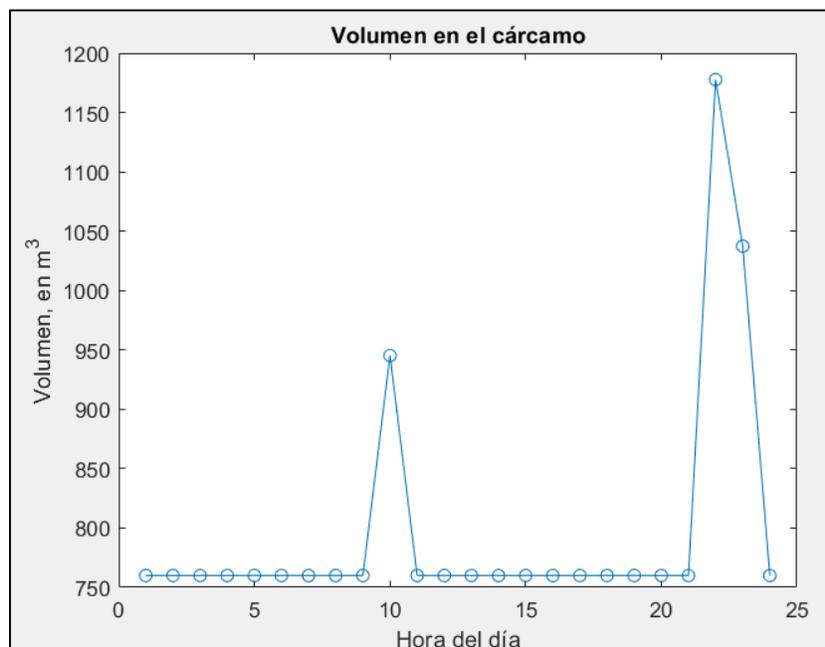


Figura 6.16. Comportamiento del cárcamo del Rebombero Estrella, cárcamo a la mitad

Capítulo 7. Conclusiones

Los resultados de la política óptima obtenidos con programación dinámica estocástica, a través de su algoritmo codificado en Matlab para cada una de las plantas muestran cuáles deben ser las extracciones que minimicen el costo de la operación de los equipos de bombeo. Dichas salidas se presentan en forma de volúmenes, sin embargo, para que los resultados puedan ser utilizados en la práctica, es necesario convertir dichos valores a número de equipos en funcionamiento y realizar la simulación de los sistemas.

En el caso de la PB Xotepingo, durante la etapa 1, independientemente del estado del cárcamo de bombeo, deben salir entre 6400 y 6500 m³ de agua cada hora. Si esta cantidad se traduce a las unidades utilizadas en la práctica para caudal, significa que tiene que ser bombeada la cantidad de 1.806 m³ cada segundo (utilizando el volumen más grande, 6500 m³).

La Figura 2.11 muestra el punto de operación que existe entre el sistema cuando operan dos y tres bombas en paralelo en la PB Xotepingo. De esta figura se observa que, si desea enviar el caudal de 1.806 m³/s, no sería posible que dos bombas operaran por una fracción de hora y, posteriormente, solo se pusiera en operación una bomba para así suministrar el volumen requerido, esto debido a que no existe punto de operación cuando sólo se pone en funcionamiento un equipo.

Una alternativa para poder proporcionar el gasto óptimo de la primera etapa es reducir la velocidad de giro de los equipos electromecánicos. La Figura 2.6 muestra en línea roja discontinua la curva H-Q ajustada para proporcionar los datos de placa. Si a esta curva se le aplican las leyes de similitud reduciendo la velocidad de giro, es posible obtener, para tres bombas en paralelo, un punto de operación muy cercano al solicitado en la etapa 1.

La Figura 7.1 muestra el comportamiento que teóricamente tendrían las bombas si su velocidad de giro se reduce un 29%, es decir, que su nueva velocidad de giro sea el 71% de su magnitud original.

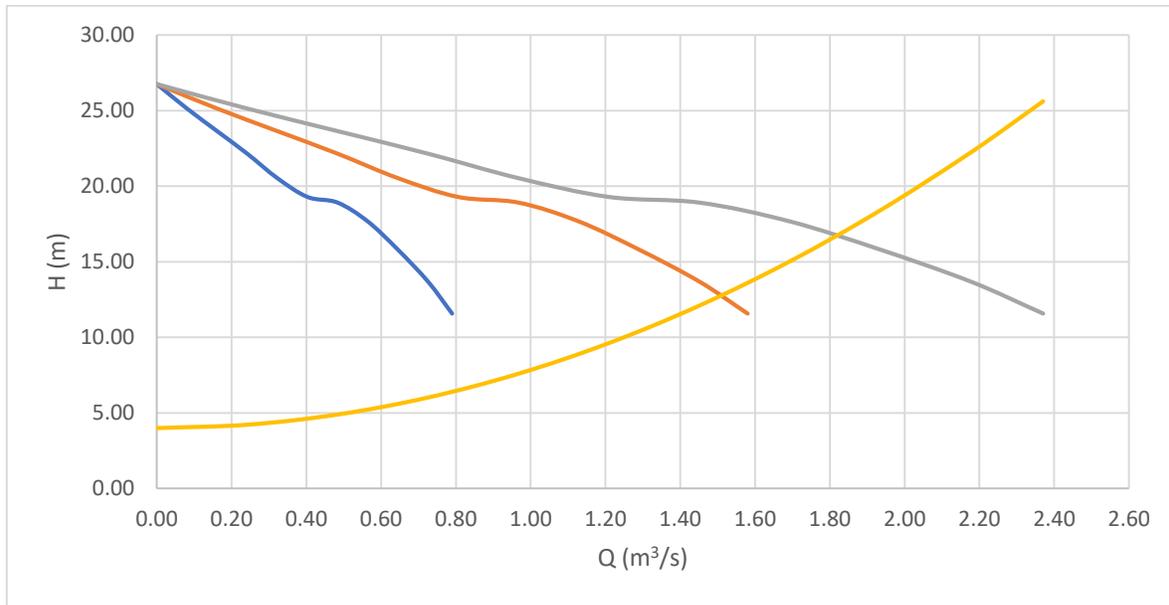


Figura 7.1. Curva H-Q PB Xotepingo, vel. Reducida

Al reducirse la velocidad, el gasto de operación con tres bombas es muy cercano al solicitado, por lo tanto, al hacer este ajuste es posible proporcionar el volumen óptimo de salida para la etapa 1 sin requerir maniobras de paro y arranque y, aunque en la práctica es usual este tipo de ejercicios, la operación con una sola bomba, al estar en sobregasto, impide que se pueda realizar.

Para la segunda etapa del día, el volumen óptimo de salida es de 5800 m³ cada hora sin importar el estado inicial del cárcamo, es decir, 1.61 m³/s. De la Figura 7.1 se observa que si se ajusta la velocidad al 71% de la magnitud original, al operar con dos bombas en paralelo se tienen un gasto de operación muy cercano al óptimo, de modo que si se quiere proporcionar el volumen óptimo calculado para minimizar costos de operación en la etapa 2, con el ajuste sugerido a la velocidad de giro de los equipos no es necesario realizar maniobras de paro y arranque, con dos bombas en paralelo funcionando ininterrumpidamente se suministra el volumen óptimo.

En la tercera etapa, el volumen de salida varía entre dos valores 5800 y 6500. Dado que estas magnitudes son las que se presentan en las dos etapas previas, al variar la velocidad al porcentaje sugerido se puede bombear, sin ningún problema, cualquiera de estos dos valores, teniendo en cuenta que cuando se desee bombear el volumen de 5800 m³ sólo deben operar dos bombas en paralelo, pero, si es necesario que el volumen bombeado cada hora sea de 6500 m³, entonces deben funcionar tres bombas de forma conjunta.

En el caso del Rebombeo Estrella, si el volumen que debe salir durante la primera etapa se traduce a las unidades convencionales de gasto, la magnitud de este valor es 1.67 m³/s, para el volumen de 6000 m³ de agua de extracción cada hora, y 1.94 m³/s, para el volumen de 7000 m³. De la Figura 2.12 se observa que no existe ningún

gasto de operación que se aproxime suficiente a los gastos óptimos de salida para la primera etapa. Cuando en el Rebombero Estrella sólo opera una bomba, el gasto de operación es $1.1 \text{ m}^3/\text{s}$, cuando operan dos equipos, el caudal es $2.14 \text{ m}^3/\text{s}$ y cuando se ponen en funcionamiento tres bombas, el gasto que circula por el sistema es $3.1 \text{ m}^3/\text{s}$.

Como en esta planta de bombeo sí existe punto de operación con una bomba, para suministrar los volúmenes óptimos de la primera etapa sí es posible hacer combinaciones de equipos durante cada hora y no necesariamente colocar variadores de velocidad que permitan el ajuste de caudal.

Si el estado del cárcamo se encuentra entre 0 y 799.9 m^3 , el volumen de salida de 6000 m^3 cada hora se puede proporcionar a través de:

- 33 minutos de operación de dos bombas y 27 minutos una bomba
- 17 minutos de operación de tres bombas y 43 minutos una bomba

Al hacer esas dos combinaciones de equipos en funcionamiento, el volumen que se proporciona cada hora es muy cercano a los 6000 m^3 .

Por otro lado, si el volumen del tanque de succión se encuentra entre 800 y 1500 m^3 , la cantidad de agua que debe salir cada hora es 7000 m^3 . Este valor se puede obtener a través de la combinación de:

- 25 minutos operando tres bombas y 35 minutos una bomba
- 50 minutos operando dos bombas y 10 minutos una bomba

Con las combinaciones horarias sugeridas, el volumen de salida de la planta es muy cercano a los 7000 m^3 .

Para la etapa 2 y 3, el volumen de agua que se debe bombear por hora, sin importar el estado inicial del cárcamo, es 5500 m^3 que en unidades convencionales de gasto es $1.53 \text{ m}^3/\text{s}$. Para poder proporcionar dicho volumen en el tiempo establecido, existen dos posibilidades de combinaciones de los equipos electromecánicos:

- Operar 13 minutos tres bombas y 47 minutos una bomba
- Operar 25 minutos dos bombas y 35 minutos una bomba

A partir de las combinaciones horarias de los equipos electromecánicos se puede proporcionar el volumen óptimo de salida para cada una de las etapas, sin embargo, con esto no se disminuyen las maniobras de paro y arranque de las bombas.

Una alternativa para disminuir considerablemente dichas maniobras es la colocación de variadores de velocidad en $n+1$ equipos, donde n es el número máximo de bombas en funcionamiento. Para el Rebombero Estrella, colocar tres variadores es suficiente para que, en caso de ser necesario algún mantenimiento, operen los equipos sin ningún problema.

Cuando el volumen que deba proporcionar el Rebombero Estrella sea 6000 m³ en una hora (1.67 m³/s), disminuir la velocidad de giro 11% en dos equipos eliminaría la necesidad de prender y apagar las bombas. Al operar dos equipos en paralelo con un 89% de su velocidad de giro original, el gasto de operación es muy cercano a 1.67 m³/s (ver Figura 7.2).

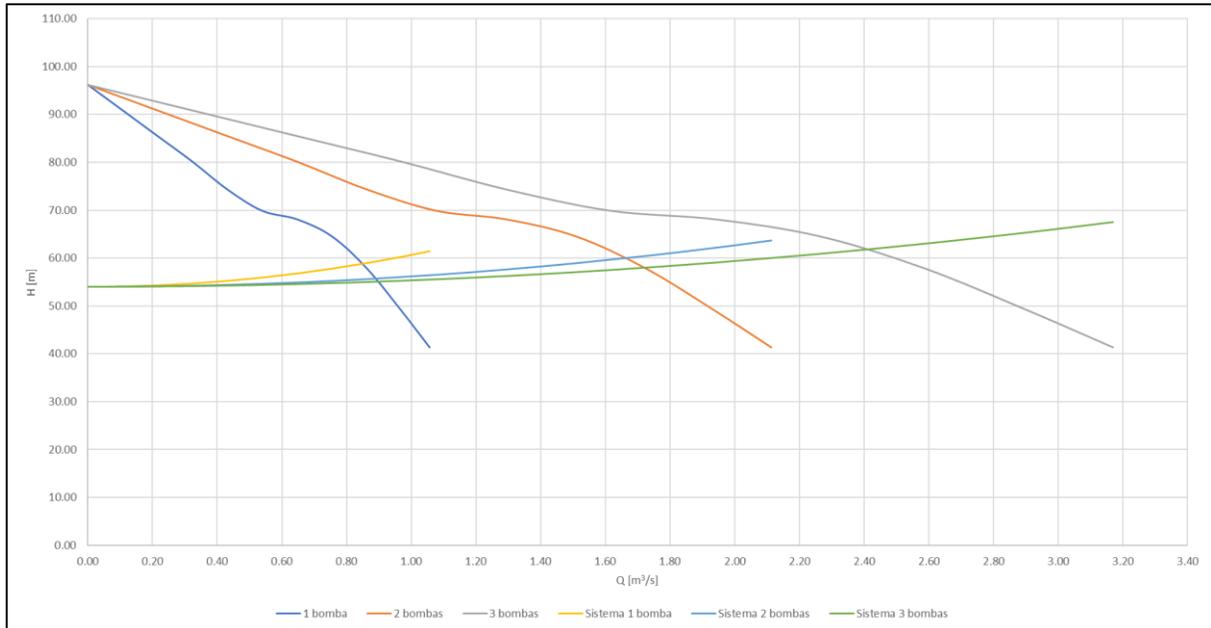


Figura 7.2. Puntos de operación Rebombero Estrella, vel. reducida 11%

Cuando el gasto óptimo en el Rebombero Estrella sea de 1.94 m³/s (correspondiente a un volumen de 7000 m³ por hora), ajustar la velocidad de giro de dos equipos al 96% de su magnitud original propiciaría que el gasto de operación fuera muy cercano al solicitado (ver Figura 7.3).

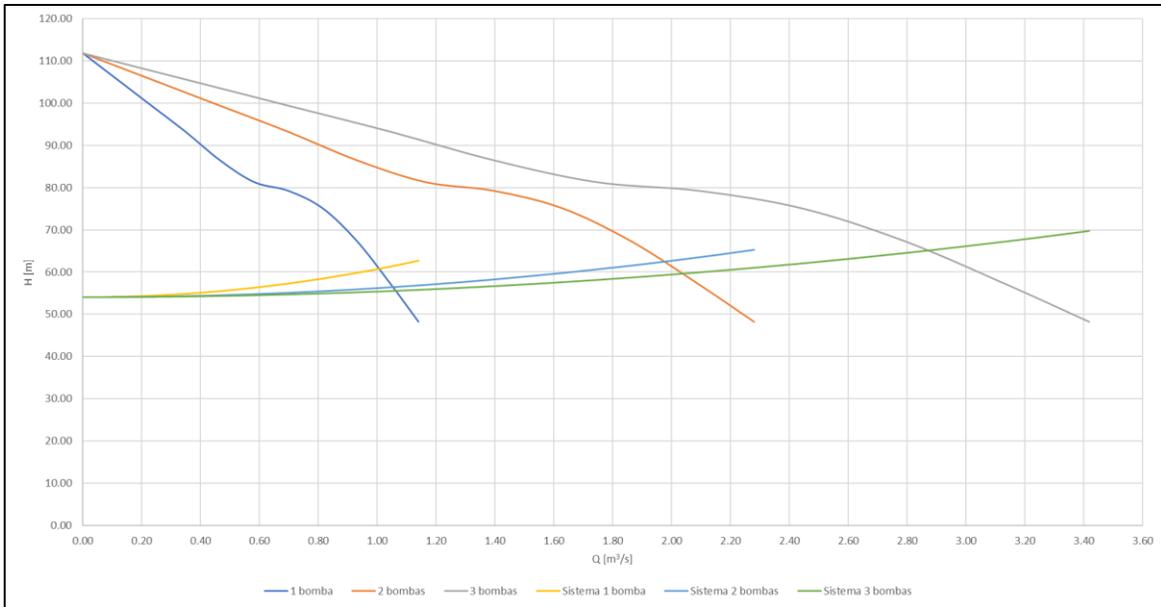


Figura 7.3. Puntos de operación Rebompeo Estrella, vel. reducida 4%

Durante la tercera etapa del día es posible disminuir la velocidad de giro de dos bombas al 87% de su magnitud original para que el gasto de operación se aproxime al valor de 1.53 m³/s (ver Figura 7.4), es decir, con ese ajuste de velocidad, durante una hora dos equipos en funcionamiento podrían proporcionar un volumen de 5500 m³.

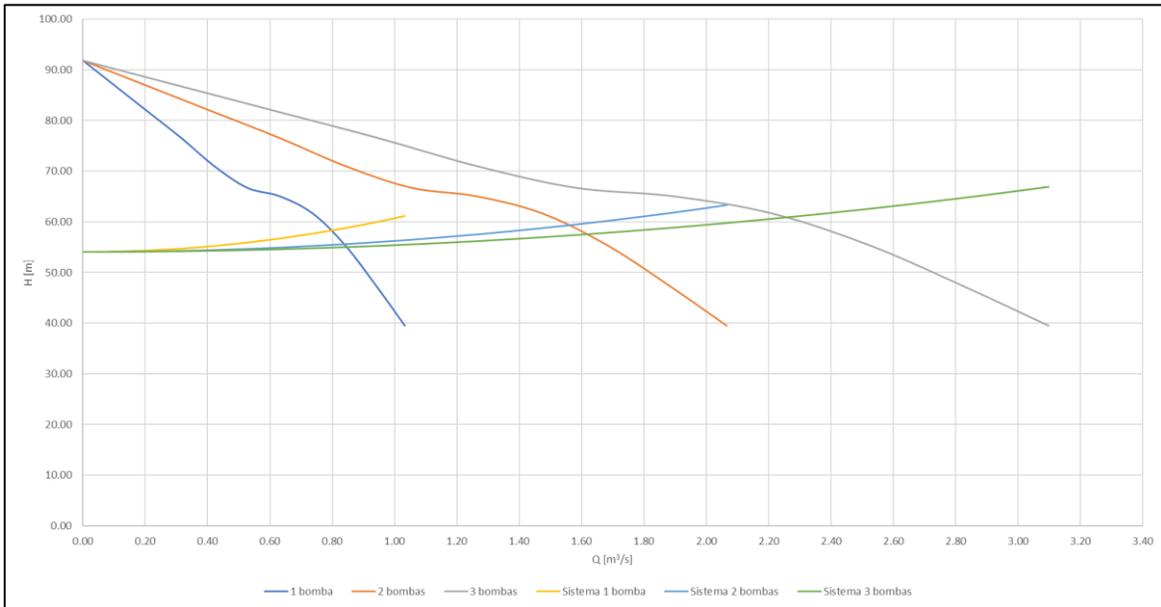


Figura 7.4. Puntos de operación Rebompeo Estrella, vel. reducida 13%

En la práctica, es común que los operadores de las plantas de bombeo tengan la necesidad de encender y apagar las bombas según las condiciones que se presenten en los tanques de succión. Si se introducen variadores de velocidad a las plantas de bombeo no sólo se minimizarían considerablemente los paros y arranques de las bombas, sino que los caudales enviados podrían manipularse fácilmente para suministrar los volúmenes óptimos. Aún si las condiciones no permiten enviar los volúmenes óptimos de salida, la colocación de dichos dispositivos minimiza al máximo los encendidos y apagados de las bombas, lo que permite prolongar la vida útil de los equipos electromecánicos.

Asimismo, contar con equipos de bombeo de menor capacidad en las plantas permite la reducción en las maniobras de paro y arranque y una mejor modulación de los gastos que pueden ser enviados.

En la Ciudad de México existen ejercicios presupuestales destinados al mejoramiento, mantenimiento y puesta en marcha de infraestructura hidráulica. Recientemente el Rebombero Estrella ha sido objeto de estudios para la colocación de nuevo equipo de bombeo que permita la regulación del gasto enviado.

Dicha modulación puede hacerse a través de equipos con menor capacidad. La bomba, con diámetro de impulsor de 14.5" y representada a través de las curvas características mostradas en la Figura 7.5, es propuesta para su instalación en el Rebombero Estrella. Es posible suponer que, si se instalan estos equipos, también se colocarán válvulas en las descargas que ocasionen pérdidas a razón del gasto que circule por el sistema, tales como las instaladas actualmente, de forma que la construcción de la curva del sistema depende del número de equipos que estén en funcionamiento.

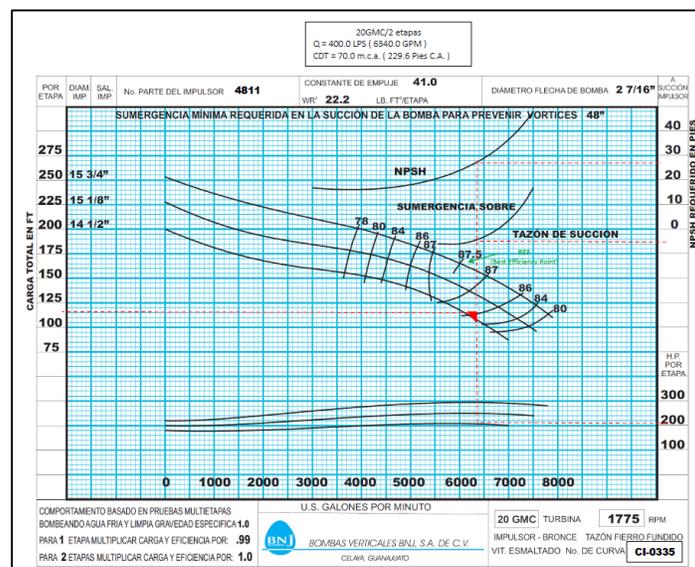


Figura 7.5. Curvas características de bomba propuesta en el Rebombero Estrella

De acuerdo con los resultados óptimos de salida del Rebombero Estrella, en la etapa 1 los volúmenes de agua que se deben entregar cada hora son 6000 y 7000 m³ dependiendo del estado del cárcamo (1.67 m³/s y 1.94 m³/s respectivamente). Si operan de forma conjunta una bomba grande (actualmente instalada en la planta) y una chica (nueva propuesta) por 45 minutos y, adicionalmente, durante 15 minutos se añade la operación de una segunda bomba chica, el volumen que se suministra en una hora es muy cercano a los 6000 m³. La Tabla 7.1 muestra la determinación de gastos de operación cuando en la planta funciona una bomba grande y una chica en paralelo, mientras que en la Tabla 7.2 se muestra la determinación de los gastos de operación con una bomba grande y dos chicas trabajando en conjunto.

Tabla 7.1. Gastos de operación con dos bombas diferentes en paralelo

H _B (m)	Q _{gde} (m ³ /s)	Q _{chica} (m ³ /s)	Q _{op} =Q _{gde} +Q _{chica}	H _{B sis} (m)
70	1.016	0.388	1.404	58.285
58.3	1.135	0.426	1.562	59.304
58.7	1.132	0.425	1.557	59.273
59	1.129	0.424	1.554	59.250
59.2	1.128	0.424	1.551	59.235
59.22	1.127	0.424	1.551	59.233

Tabla 7.2. Gastos de operación con una bomba grande y dos chicas

H _B (m)	Q _{gde} (m ³ /s)	Q _{chica} (m ³ /s)	Q _{chica} (m ³ /s)	Q _{op} =Q _{gde} +2*Q _{chica}	H _{B sis} (m)
59.5	1.125	0.423	0.423	1.971	59.211
59.2	1.128	0.424	0.424	1.975	59.234
59.22	1.127	0.424	0.424	1.975	59.233

En función de los gastos de operación mostrados en las tablas anteriores es que se pudo determinar que con la distribución horaria de 45 y 15 minutos se puede entregar el volumen de 6000 m³ cada hora. En caso de que deba entregarse un volumen de 7000 m³, equivalente a 1.94 m³/s, no es necesario que existan paros y arranques en la planta, si operan de forma conjunta una bomba grande y dos chicas, el gasto de operación es muy similar al caudal óptimo determinado anteriormente.

Para la etapa 2 y 3, el gasto óptimo que debe salir de la planta es 1.53 m³/s, si operan en paralelo una bomba grande y una chica, el gasto de operación es muy cercano al óptimo. De forma que si se instalan al menos dos bombas chicas en el Rebombero Estrella se pueden minimizar considerablemente las maniobras de paro y arranque.

Dado que las bombas que forman parte del sistema Cerro del Judío-Cerro de la Estrella se encuentran en serie, el funcionamiento del Rebombero Estrella depende del comportamiento que tenga la PB Xotepingo. Si se regula el caudal de salida de

la primera planta, es posible hacer adecuaciones en la siguiente, ya sea con variadores de velocidad o equipos de menor capacidad, que permitan flexibilizar el gasto enviado, mantenerlo constante y así tratar de disminuir los paros y arranques.

Una forma de mantener constante la salida de agua en PB Xotepingo es a través de la regulación de volumen al ingreso de la planta. La cantidad de agua que entra a la primera planta del sistema depende de algunos factores probabilísticos e incluso de algunas características de la cuenca que no pueden ser modificadas por el organismo encargado de suministrar el agua, por lo tanto, la regulación a la entrada de la planta muchas veces es una tarea prácticamente imposible de realizar.

Una alternativa para mantener constante la cantidad de agua que sale en algunos puntos del sistema de abastecimiento de agua potable es a través de estructuras contenedoras de gran capacidad que permitan la regulación. En la PB Xotepingo, al existir un tanque de succión de pequeñas dimensiones, no se cuenta con la suficiente capacidad en el cárcamo para poder mantener constante el caudal bombeado. Si se desea hacer esto, una posible alternativa es la ampliación de las dimensiones del tanque de forma que su volumen útil sea suficientemente grande y permita mantener constante el número de bombas que opere en el Rebombéo Estrella, sin embargo, si se realizan adecuaciones en los cárcamos de bombeo, los resultados para determinar los volúmenes óptimos de salida cambian, ya que éste se encuentra en función de las características físicas de los tanques de succión.

El código que se realizó para mostrar el comportamiento de los cárcamos con las condiciones actuales está en función de los registros de ingreso que forman parte del periodo tomado como representativo, de forma que, si los registros más recientes difieren considerablemente a los que ya se tienen, el comportamiento de los cárcamos puede verse modificado.

El código escrito que permite determinar los volúmenes óptimos en las dos plantas analizadas puede ser fácilmente adaptado a otros sistemas, teniendo cuidado en escribir los ingresos, estados y curvas de operación de las bombas adecuadas.

Capítulo 8. Referencias

- Alegría-Díaz, A. (2010). *Política de operación óptima del sistema de presas del río Grijalva. Efectos de la curva guía*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Arreguín-Cortés, F. (1991). Uso eficiente del agua en ciudades e industrias. *Memorias Del Seminario Internacional Sobre Uso Eficiente Del Agua*, 749–756. <http://cdi.mecon.gov.ar/bases/docelec/agua/phi/usoeficienteagua/3.pdf>
- Asuad-Sanén, N. E. (n.d.). *La Ciudad de México y el desarrollo económico regional: funciones económicas y perspectivas en los inicios del siglo XXI*.
- Bernández-de la Granja, M. del C. (2012). Acueducto de Xochimilco. *Villes En Parallele*, 202–2034. https://www.persee.fr/doc/vilpa_0242-2794_2012_num_45_1_1494
- Boroni, G., Mayorano, F., Rubiales, A., & Lotito, P. (2006). Optimización para problemas de bombeo. *Mecánica Computacional*, XXV, 909–920.
- CFE. (2017, June). *Tarifas*. Acervo Histórico CFE. https://app.cfe.mx/Aplicaciones/CCFE/Tarifas/Tarifas/tarifas_negocio.asp
- CONAGUA. (2007). Selección e instalación de equipos de macromedición. In SEMARNAT (Ed.), *Manual de agua potable, alcantarillado y saneamiento* (pp. 3–5).
- CONAGUA. (2021, February 25). *Estado del clima en México durante 2020 y perspectivas para 2021*. <https://www.gob.mx/conagua/prensa/estado-del-clima-en-mexico-durante-2020-y-perspectivas-para-2021#:~:text=En%20lo%20que%20se%20refiere,80%20a%C3%B1os%20de%20registros%20nacionales>.
- Domínguez-Mora, R., & Arganis-Juárez, M. L. (2021). *Notas de clase. Programación dinámica*.
- Domínguez-Mora, R., Capella-Vizcaíno, A., Osnaya-Romero, J., Sánchez-Huerta, A., Rodal-Canales, E. A., Esquivel-Garduño, G., Santana-Soto, O. A., Rodríguez-Hidalgo, B., Escalante-Severiano, L. E., Vázquez-Martínez, R. A., & Quiroz-Estupiñan, Y. C. (2019). *ESTUDIO PARA DEFINIR EL MEJORAMIENTO DE LA OPERACIÓN DE LAS LÍNEAS PRIMARIAS DE LA CDMX. MEJORAR EL SERVICIO DE AGUA POTABLE EN LA CIUDAD DE MÉXICO*.
- el FINANCIERO. (2021, June 11). Reducción de agua en CDMX: ¿cuánto cuesta y cómo pedir una pipa de agua? *EL FINANCIERO*.

<https://www.elfinanciero.com.mx/cdmx/2021/06/11/reduccion-de-agua-en-cdmx-cuanto-cuesta-y-como-pedir-una-pipa-de-agua/>

Fuentes-Barrera, G. A. (2009). *La macromedición de tipo proporcional como una herramienta para la gestión del agua en acueductos de pequeñas localidades y/o zonas rurales*. Universidad Tecnológica de Pereira.

Fuentes-Barrera, G. A., & Guerrero-Erazo, J. (2009, August). Water proportional meters used as a tool for integrated water management. *Revista Técnica de La Facultad de Ingeniería*.
http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0254-07702009000200006

Gendrau, M. (2003). An introduction to tabu search. In F. Glover & G. Kochenberger (Eds.), *Handbook of Metaheuristics* (Vol. 57, pp. 37–54). Springer New York.

Gerencia Electricidad UEN. (2022). *Buenas prácticas de eficiencia energética para Motores Eléctricos Industriales*.

González-Villarreal, F., & Arriaga-Medina, J. A. (2020, April). Retos de la infraestructura hidráulica. *Impluvium*, 2–3.

IMTA. (2019, September 24). *Aguas subterráneas*.
<https://www.gob.mx/imta/articulos/aguas-subterranas#:~:text=El%20agua%20se%20encuentra%20siempre,en%20oda%20la%20corteza%20terrestre.&text=Con%20respecto%20al%20agua%20subterr%C3%A1nea,pa%C3%ADs%20proviene%20de%20estas%20fuentes>

Jaramillo-Jaramillo, J. D. (2008). *Programación Lineal y Algoritmos Genéticos Para la Solución de un Problema de Corte*. Universidad EAFIT.

Legorreta, J. (2006). *El agua y la Ciudad de México. De Tenochtitlán a la megalópolis del siglo XXI* (UAM, Ed.; Primera edición).

Lesser-Illades, J. M., & Cortés-Pérez, M. Á. (1998, September). El hundimiento del terreno en la ciudad de México y sus implicaciones en el sistema de drenaje. *Tecnología y Ciencias Del Agua*, 13–18.
<http://revistatyca.org.mx/ojs/index.php/tyca/article/view/805/798>

METRÓPOLI. (2022, April 24). *El negocio del agua costó mil 500 millones de pesos a alcaldías en 6 años. La Silla Rota*.
<https://lasillarota.com/metropoli/2022/4/24/el-negocio-del-agua-costo-mil-500-millones-de-pesos-alcaldias-en-anos-367181.html>

Millán-Baquedano, M. (2020, April). Infraestructura verde en el entorno urbano. Una mirada hacia los avances en la Ciudad de México. *Impluvium*, 7–12.

Mogrovejo-Delgado, S. (2019). *Uso de Matlab y su influencia en el rendimiento académico del curso de métodos numéricos en los estudiantes de la escuela*

profesional de ingeniería civil de la universidad andina del cusco. Universidad Andina del Cusco.

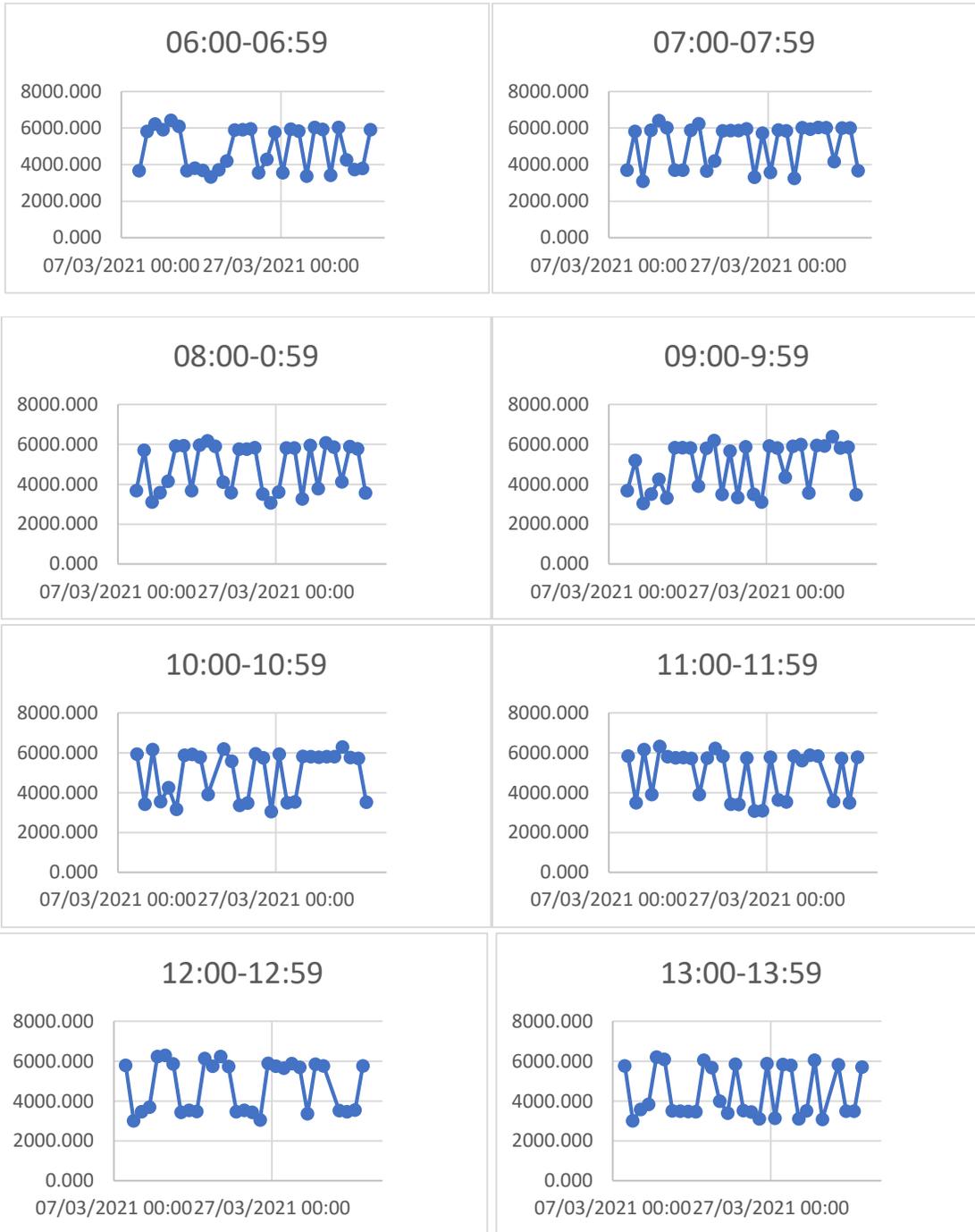
- Moradi-Jalal, M., Rodin, S., & Mariño, M. (2004). Use of Genetic Algorithm in Optimization of Irrigation Pumping Stations. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 130(5), 357–365.
- Moreno, C. (2000). MatLab en el Cálculo Científico. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, 3(2), 351–361.
- National Research Council. (1995). *Mexico City's water supply. Improving the outlook for sustainability*. National Academy Press. <https://nap.nationalacademies.org/read/4937/chapter/1>
- Ortega-Font, N. M. (2011, March). El agua en números. *Casa Del Tiempo*, 39–40. http://www.uam.mx/difusion/casadeltiempo/41_iv_mar_2011/casa_del_tiempo_eIV_num41_39_40.pdf
- PROFECO. (2021). *Quién es quién en los precios. Pipas de agua potable*. https://www.profeco.gob.mx/precios/canasta/pipas/2021/QQPPIPAS_051021.pdf
- Quiroz-Félix, J. (2004). *Determinantes de la tarifa de agua en el sector doméstico de Tijuana, Baja California*. El Colegio de la Frontera Norte.
- Ramos-Arzola, L., Cabrera-Estupiñán, E., Molina-Pérez, D., Hernández-Valdés, A., & Marón-Domínguez, D. (2017). Modelo para la optimización del costo de operación de un campo de pozos en acuíferos. *Tecnología y Ciencias Del Agua*, 8(3). http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2007-24222017000300039
- Ríos-Insua, S., Mateos-Caballero, A., Bielza-Lozoya, Ma. C., & Jiménez-Martín, A. (2004). *Investigación operativa. Modelos determinísticos y estocásticos*. Centro de estudios Ramón Areces S. A..
- Ruíz-Lizama, E. (2014, July). Optimización multi-objetivo al problema de distribución de planta usando algoritmos genéticos: cuestiones previas para una propuesta de solución. *Industrial Data*, 120–137.
- SACMEX. (2012). *El gran reto del agua en la Ciudad de México. Pasado, presente y prospectivas de solución para una de las ciudades más complejas del mundo* (SACMEX, Ed.).
- SACMEX. (2018). *Diagnóstico, logros y desafíos. SACMEX 2018*. SACMEX. <https://data.sacmex.cdmx.gob.mx/aplicaciones/libreria/biblioteca/libros/2018/diagnostico-logros-y-desafios-2018.pdf>
- Santos-Téllez, R. U., Medina-Mendoza, R., & Rodríguez-Varela, J. M. (2021, May 16). Vulnerabilidad del Cutzamala. *Perspectivas*.

- SEDEMA. (2016, March 22). *¿De cuánta agua disponemos? Cuidar El Agua Es Cosa de Tod@s*. <http://cuidarelagua.cdmx.gob.mx/consumo.html>
- SEMARNAT. (2010). Usos del agua. In SEMARNAT (Ed.), *Estadísticas del agua en México, edición 2010* (pp. 59–74). https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/259371/_2010_EAM2010.pdf
- SEMARNAT. (2021). *Precipitación media histórica por entidad federativa (milímetros)*. Estadísticas Del Agua En México. http://dgeiawf.semarnat.gob.mx:8080/ibi_apps/WFServlet?IBIF_ex=D3_AGUA_01_01&IBIC_user=dgeia_mce&IBIC_pass=dgeia_mce&NOMBREENTIDAD=* &NOMBREANIO=*
- Solís, L. (2005, October 5). La escasez, el costo y el precio del agua en México. *EconomíaUNAM*.
- STATISTA. (2022, May 18). *Evolución anual de la tasa de inflación en México desde 2015 hasta 2027*. Statista Research Department. <https://es.statista.com/estadisticas/608330/tasa-de-inflacion-mexico/>
- Sterling, M., & Coulbeck, B. (2015). TECHNICAL NOTE. A DYNAMIC PROGRAMMING SOLUTION TO OPTIMIZATION OF PUMPING COSTS. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 59(4), 813–818.
- Winston, W. (2005). *Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos* (4th ed.). Thomson.
- Xiangtao, Z., & Xiaohua, X. (2013). Optimal operation scheduling of a pumping station with multiple pumps. *Applied Energy*, 104, 250–257.

Capítulo 9. Anexos

9. 1. Anexo 1. Volúmenes bombeados, en m³, cada hora en PB Xotepingo durante el periodo representativo







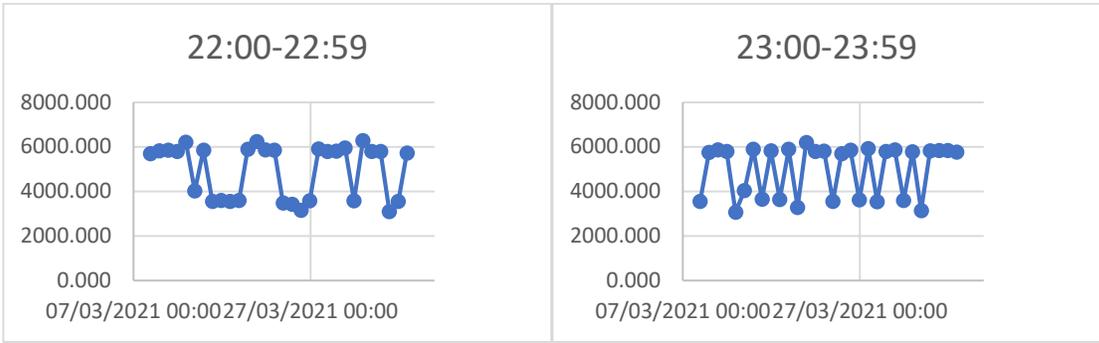
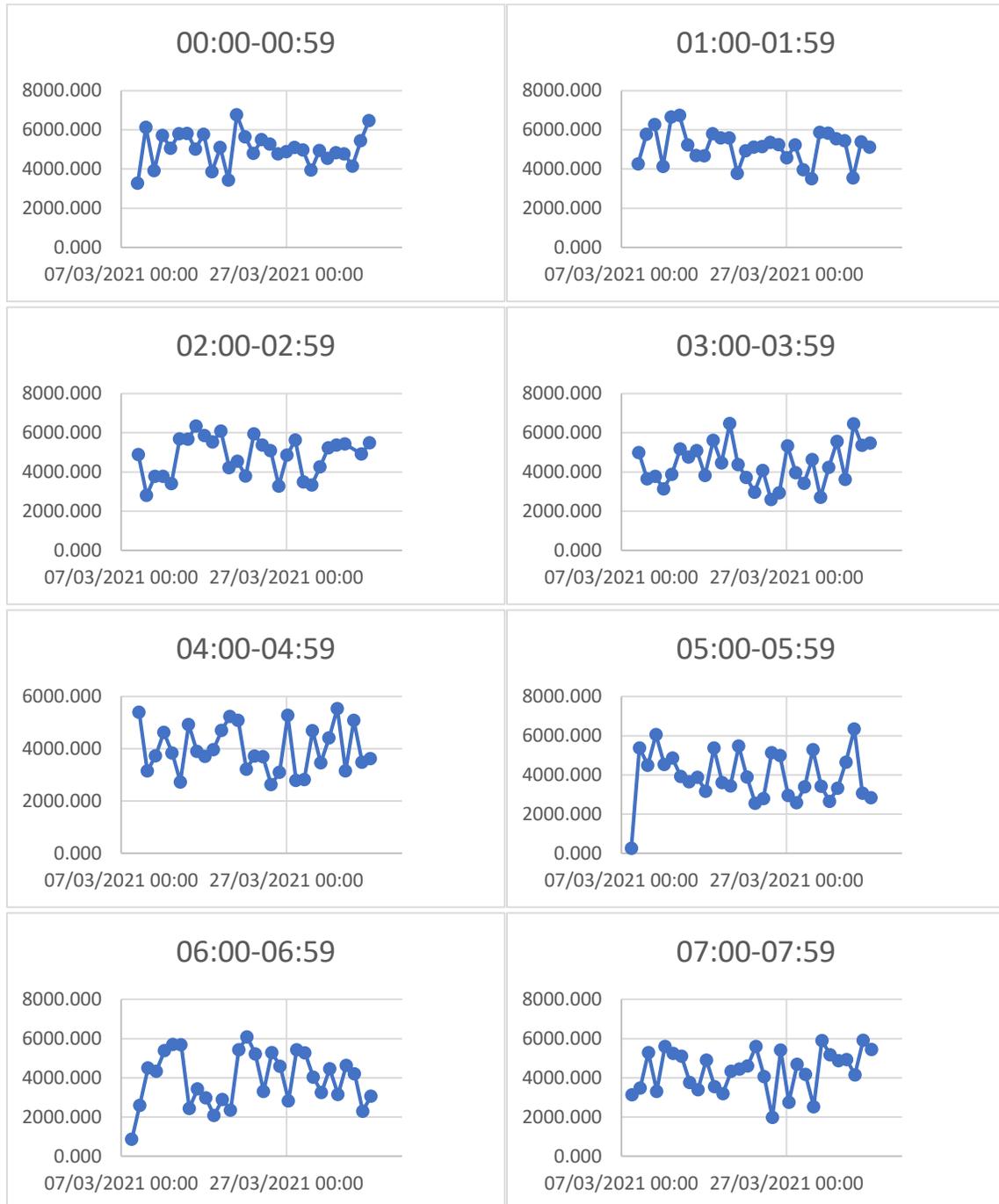
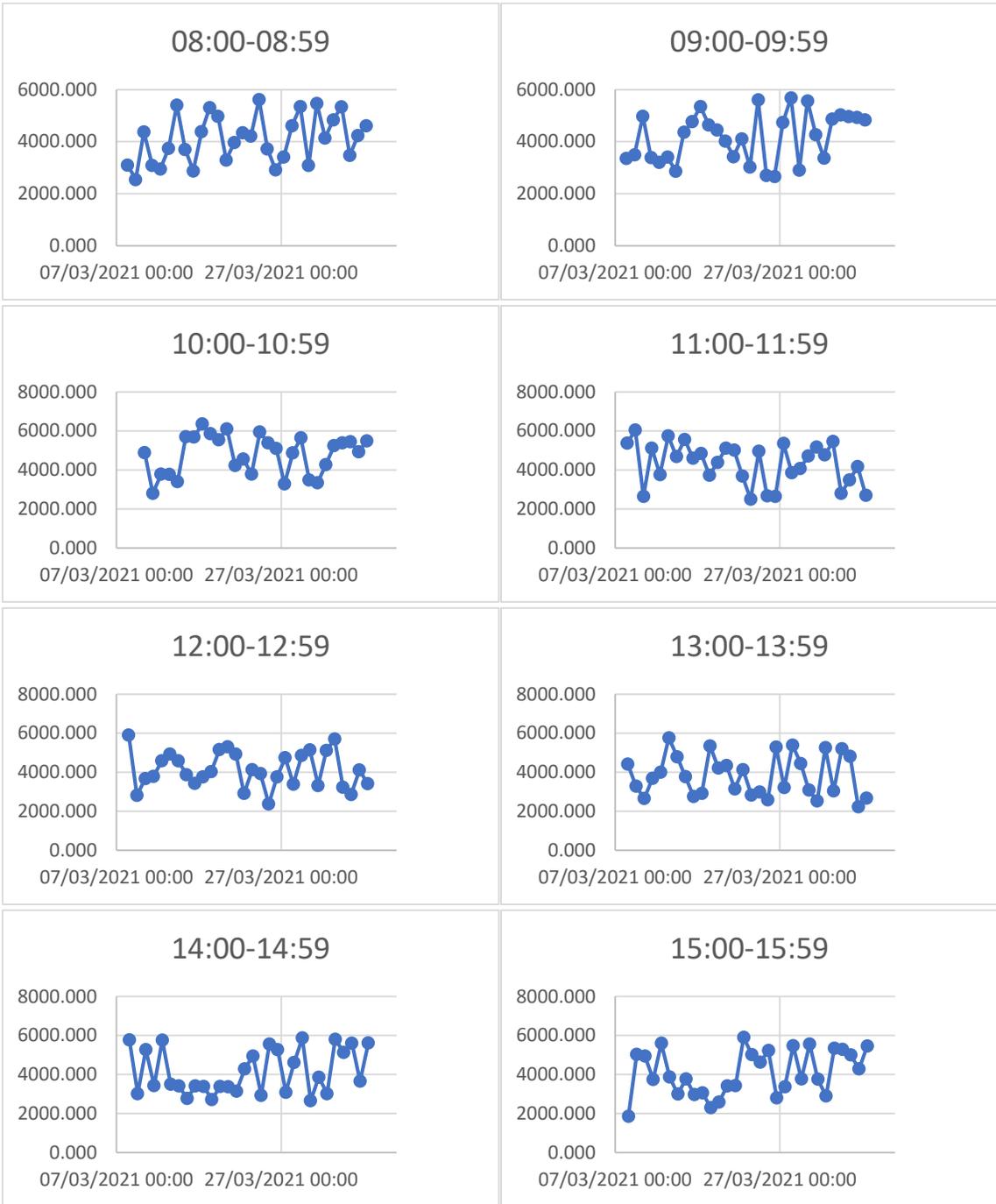


Figura 9.1. Volúmenes, por hora, que ingresaron a PB Xotepingo

9. 2. Anexo 2. Volúmenes bombeados, en m³, cada hora en el Rebombado Estrella durante el periodo representativo





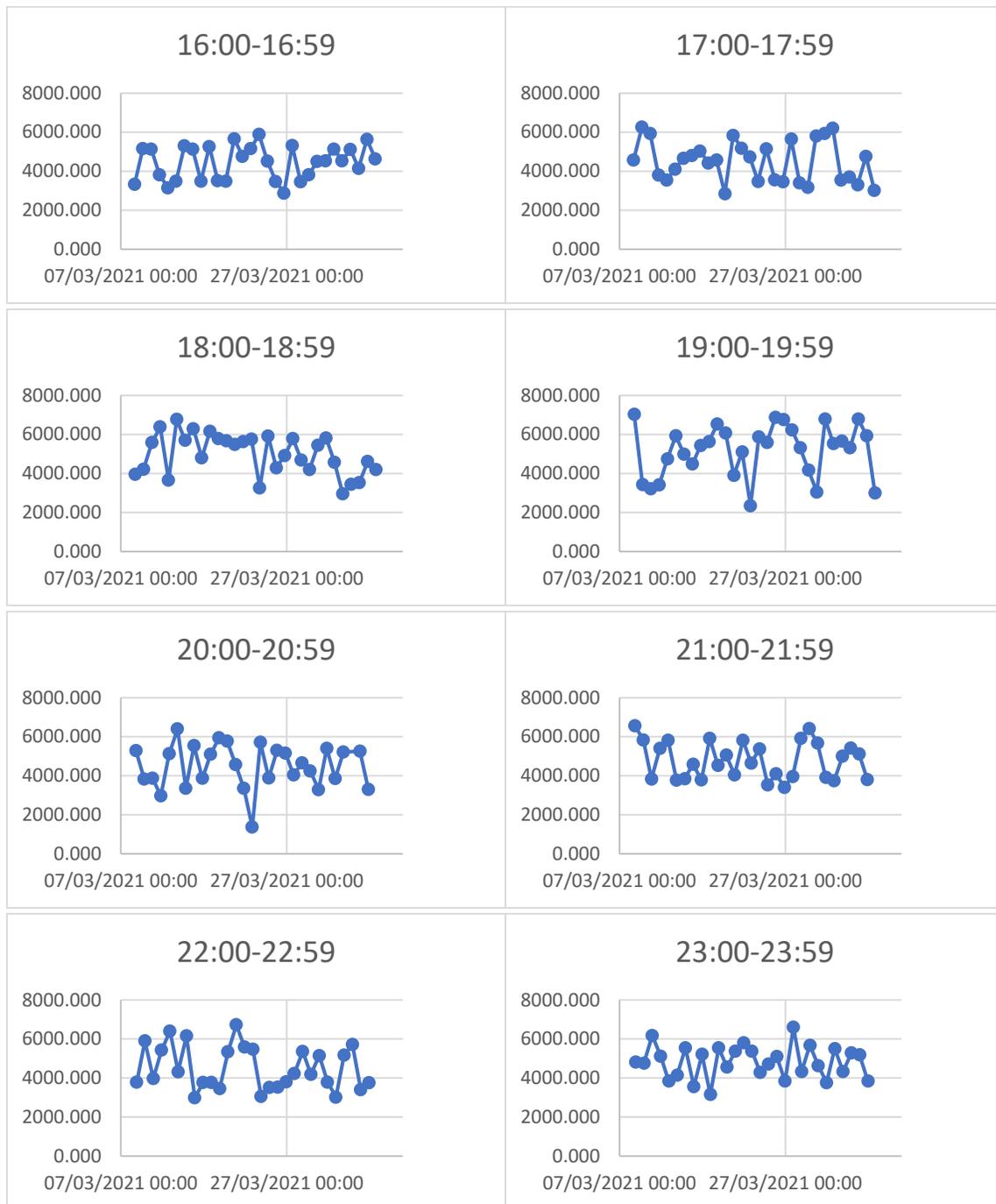


Figura 9.2. Volúmenes, por hora, que ingresaron al Rebombero Estrella

9. 3. Anexo 3. Beneficios asociados a cada estado y cada extracción de las diferentes etapas, PB Xotepingo

Tabla 9.1. Valores de ϕ . Etapa 1 PB Xotepingo

		Estados																		
		1900	1800	1700	1600	1500	1400	1300	1200	1100	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100
Salidas	100	-755823.67	-744823.67	-733823.67	-722823.67	-711823.67	-700823.67	-689823.67	-678823.67	-667823.67	-656823.67	-645823.67	-634823.67	-623823.67	-612823.67	-601823.67	-590823.67	-579823.67	-568823.67	-557823.67
	200	-733768.38	-722768.38	-711768.38	-700768.38	-689768.38	-678768.38	-667768.38	-656768.38	-645768.38	-634768.38	-623768.38	-612768.38	-601768.38	-590768.38	-579768.38	-568768.38	-557768.38	-546768.38	-535768.38
	300	-711717.43	-700717.43	-689717.43	-678717.43	-667717.43	-656717.43	-645717.43	-634717.43	-623717.43	-612717.43	-601717.43	-590717.43	-579717.43	-568717.43	-557717.43	-546717.43	-535717.43	-524717.43	-513717.43
	400	-689670.49	-678670.49	-667670.49	-656670.49	-645670.49	-634670.49	-623670.49	-612670.49	-601670.49	-590670.49	-579670.49	-568670.49	-557670.49	-546670.49	-535670.49	-524670.49	-513670.49	-502670.49	-491670.49
	500	-667627.30	-656627.30	-645627.30	-634627.30	-623627.30	-612627.30	-601627.30	-590627.30	-579627.30	-568627.30	-557627.30	-546627.30	-535627.30	-524627.30	-513627.30	-502627.30	-491627.30	-480627.30	-469627.30
	600	-645587.62	-634587.62	-623587.62	-612587.62	-601587.62	-590587.62	-579587.62	-568587.62	-557587.62	-546587.62	-535587.62	-524587.62	-513587.62	-502587.62	-491587.62	-480587.62	-469587.62	-458587.62	-447587.62
	700	-623551.26	-612551.26	-601551.26	-590551.26	-579551.26	-568551.26	-557551.26	-546551.26	-535551.26	-524551.26	-513551.26	-502551.26	-491551.26	-480551.26	-469551.26	-458551.26	-447551.26	-436551.26	-425551.26
	800	-601518.03	-590518.03	-579518.03	-568518.03	-557518.03	-546518.03	-535518.03	-524518.03	-513518.03	-502518.03	-491518.03	-480518.03	-469518.03	-458518.03	-447518.03	-436518.03	-425518.03	-414518.03	-403518.03
	900	-579487.78	-568487.78	-557487.78	-546487.78	-535487.78	-524487.78	-513487.78	-502487.78	-491487.78	-480487.78	-469487.78	-458487.78	-447487.78	-436487.78	-425487.78	-414487.78	-403487.78	-392487.78	-381487.78
	1000	-557460.37	-546460.37	-535460.37	-524460.37	-513460.37	-502460.37	-491460.37	-480460.37	-469460.37	-458460.37	-447460.37	-436460.37	-425460.37	-414460.37	-403460.37	-392460.37	-381460.37	-370460.37	-359460.37
	1100	-535435.69	-524435.69	-513435.69	-502435.69	-491435.69	-480435.69	-469435.69	-458435.69	-447435.69	-436435.69	-425435.69	-414435.69	-403435.69	-392435.69	-381435.69	-370435.69	-359435.69	-348435.69	-337435.69
	1200	-513413.62	-502413.62	-491413.62	-480413.62	-469413.62	-458413.62	-447413.62	-436413.62	-425413.62	-414413.62	-403413.62	-392413.62	-381413.62	-370413.62	-359413.62	-348413.62	-337413.62	-326413.62	-315413.62
	1300	-491394.07	-480394.07	-469394.07	-458394.07	-447394.07	-436394.07	-425394.07	-414394.07	-403394.07	-392394.07	-381394.07	-370394.07	-359394.07	-348394.07	-337394.07	-326394.07	-315394.07	-304394.07	-293394.07
	1400	-469376.94	-458376.94	-447376.94	-436376.94	-425376.94	-414376.94	-403376.94	-392376.94	-381376.94	-370376.94	-359376.94	-348376.94	-337376.94	-326376.94	-315376.94	-304376.94	-293376.94	-282376.94	-271376.94

	5100	341885.72	351499.17	360742.87	369801.69	378121.02	385146.23	390322.70	394389.93	398272.28	402154.63	405759.67	408625.22	411398.33	414079.00	416759.67	419347.91	421936.14	424524.38	427112.61
	5200	362782.32	372026.02	381084.85	389404.17	396429.38	401605.85	405673.08	409555.43	413437.79	417042.83	419908.37	422681.48	425362.16	428042.83	430631.06	433219.30	435807.53	438395.77	440984.01
	5300	383117.97	392176.80	400496.13	407521.34	412697.81	416765.03	420647.39	424529.74	428134.78	431000.33	433773.44	436454.11	439134.78	441723.02	444311.25	446899.49	449487.72	452075.96	454664.19
	5400	403201.88	411521.20	418546.41	423722.88	427790.11	431672.46	435554.82	439159.86	442025.41	444798.51	447479.19	450159.86	452748.09	455336.33	457924.56	460512.80	463101.04	465689.27	468277.51
	5500	422514.51	429539.72	434716.19	438783.42	442665.77	446548.13	450153.17	453018.71	455791.82	458472.50	461153.17	463741.40	466329.64	468917.87	471506.11	474094.35	476682.58	479270.82	481859.05
	5600	440515.01	445691.48	449758.71	453641.06	457523.41	461128.46	463994.00	466767.11	469447.78	472128.46	474716.69	477304.93	479893.16	482481.40	485069.63	487657.87	490246.10	492834.34	495422.57
	5700	456655.24	460722.46	464604.82	468487.17	472092.21	474957.76	477730.87	480411.54	483092.21	485680.45	488268.68	490856.92	493445.15	496033.39	498621.62	501209.86	503798.09	506386.33	508974.56
	5800	471678.14	475560.50	479442.85	483047.89	485913.44	488686.55	491367.22	494047.89	496636.13	499224.36	501812.60	504400.83	506989.07	509577.30	512165.54	514753.77	517342.01	519930.25	522518.49
	5900	486510.13	490392.48	493997.52	496863.07	499636.18	502316.85	504997.52	507585.76	510173.99	512762.23	515350.46	517938.70	520526.93	523115.17	525703.40	528291.64	530879.87	533468.11	536056.34
	6000	501337.31	504942.35	507807.89	510581.00	513261.68	515942.35	518530.58	521118.82	523707.05	526295.29	528883.53	531471.76	534060.00	536648.23	539236.47	541824.70	544412.94	546999.17	549585.40
	6100	515883.20	518748.75	521521.86	524202.53	526883.20	529471.44	532059.67	534647.91	537236.14	539824.38	542412.61	545000.85	547589.08	550177.32	552765.55	555353.79	557942.02	560530.26	563118.49
	6200	529686.18	532459.29	535139.96	537820.63	540408.87	542997.11	545585.34	548173.58	550761.81	553350.05	555938.28	558526.52	561114.75	563702.99	566291.23	568879.46	571467.70	574055.94	576644.17
	6300	543393.71	546074.38	548755.05	551343.29	553931.52	556519.76	559107.99	561696.23	564284.46	566872.70	569460.93	572049.17	574637.40	577225.64	579813.87	582402.11	584990.34	587578.58	590166.81
	6400	557006.06	559686.73	562274.97	564863.21	567451.44	570039.68	572627.91	575216.15	577804.38	580392.62	582980.85	585569.09	588157.32	590745.56	593333.79	595922.03	598510.26	601098.50	603686.73
6500	570615.90	573204.14	575792.37	578380.61	580968.84	583557.08	586145.31	588733.55	591321.78	593910.02	596498.26	599086.49	601674.73	604262.96	606851.20	609439.43	612027.67	614615.90	617204.14	

Tabla 9.2. Valores de ϕ . Etapa 2 PB Xotepingo

		Estados																			
		1900	1800	1700	1600	1500	1400	1300	1200	1100	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100	
Salidas	100	-715778.26	-704778.26	-693778.26	-682778.26	-671778.26	-660778.26	-649778.26	-638778.26	-627778.26	-616778.26	-605778.26	-594778.26	-583778.26	-572778.26	-561778.26	-550778.26	-539778.26	-528778.26	-517778.26	
	200	-693780.47	-682780.47	-671780.47	-660780.47	-649780.47	-638780.47	-627780.47	-616780.47	-605780.47	-594780.47	-583780.47	-572780.47	-561780.47	-550780.47	-539780.47	-528780.47	-517780.47	-506780.47	-495780.47	
	300	-671782.56	-660782.56	-649782.56	-638782.56	-627782.56	-616782.56	-605782.56	-594782.56	-583782.56	-572782.56	-561782.56	-550782.56	-539782.56	-528782.56	-517782.56	-506782.56	-495782.56	-484782.56	-473782.56	-462782.56
	400	-649784.62	-638784.62	-627784.62	-616784.62	-605784.62	-594784.62	-583784.62	-572784.62	-561784.62	-550784.62	-539784.62	-528784.62	-517784.62	-506784.62	-495784.62	-484784.62	-473784.62	-462784.62	-451784.62	-440784.62
	500	-627786.76	-616786.76	-605786.76	-594786.76	-583786.76	-572786.76	-561786.76	-550786.76	-539786.76	-528786.76	-517786.76	-506786.76	-495786.76	-484786.76	-473786.76	-462786.76	-451786.76	-440786.76	-429786.76	-418786.76
	600	-605789.06	-594789.06	-583789.06	-572789.06	-561789.06	-550789.06	-539789.06	-528789.06	-517789.06	-506789.06	-495789.06	-484789.06	-473789.06	-462789.06	-451789.06	-440789.06	-429789.06	-418789.06	-407789.06	-396789.06
	700	-583791.64	-572791.64	-561791.64	-550791.64	-539791.64	-528791.64	-517791.64	-506791.64	-495791.64	-484791.64	-473791.64	-462791.64	-451791.64	-440791.64	-429791.64	-418791.64	-407791.64	-396791.64	-385791.64	-374791.64
	800	-561794.56	-550794.56	-539794.56	-528794.56	-517794.56	-506794.56	-495794.56	-484794.56	-473794.56	-462794.56	-451794.56	-440794.56	-429794.56	-418794.56	-407794.56	-396794.56	-385794.56	-374794.56	-363794.56	-352794.56
	900	-539797.93	-528797.93	-517797.93	-506797.93	-495797.93	-484797.93	-473797.93	-462797.93	-451797.93	-440797.93	-429797.93	-418797.93	-407797.93	-396797.93	-385797.93	-374797.93	-363797.93	-352797.93	-341797.93	-330797.93
	1000	-517801.81	-506801.81	-495801.81	-484801.81	-473801.81	-462801.81	-451801.81	-440801.81	-429801.81	-418801.81	-407801.81	-396801.81	-385801.81	-374801.81	-363801.81	-352801.81	-341801.81	-330801.81	-319801.81	-308801.81
	1100	-495806.30	-484806.30	-473806.30	-462806.30	-451806.30	-440806.30	-429806.30	-418806.30	-407806.30	-396806.30	-385806.30	-374806.30	-363806.30	-352806.30	-341806.30	-330806.30	-319806.30	-308806.30	-297806.30	-286806.30
	1200	-473811.46	-462811.46	-451811.46	-440811.46	-429811.46	-418811.46	-407811.46	-396811.46	-385811.46	-374811.46	-363811.46	-352811.46	-341811.46	-330811.46	-319811.46	-308811.46	-297811.46	-286811.46	-275811.46	-264811.46
	1300	-451817.37	-440817.37	-429817.37	-418817.37	-407817.37	-396817.37	-385817.37	-374817.37	-363817.37	-352817.37	-341817.37	-330817.37	-319817.37	-308817.37	-297817.37	-286817.37	-275817.37	-264817.37	-253817.37	-242817.37
	1400	-429824.07	-418824.07	-407824.07	-396824.07	-385824.07	-374824.07	-363824.07	-352824.07	-341824.07	-330824.07	-319824.07	-308824.07	-297824.07	-286824.07	-275824.07	-264824.07	-253824.07	-242824.07	-231824.07	-220824.07

	5100	382870.35	391549.68	399764.87	405566.55	408490.61	410857.69	413131.96	415313.39	416752.21	417912.55	418794.40	419490.61	420093.98	420697.36	421300.73	421904.11	422507.48	423110.86	423714.23	424317.60
	5200	403452.84	411668.03	417469.71	420393.76	422760.85	425035.12	427216.55	428655.37	429815.71	430697.56	431393.77	431997.14	432600.52	433203.89	433807.27	434410.64	435014.02	435617.39	436220.77	436824.14
	5300	423957.67	429759.36	432683.41	435050.50	437324.76	439506.19	440945.01	442105.35	442987.21	443683.41	444286.79	444890.16	445493.54	446096.91	446700.29	447303.66	447907.04	448510.41	449113.79	449717.16
	5400	442688.83	445612.88	447979.97	450254.23	452435.67	453874.49	455034.83	455916.68	456612.88	457216.26	457819.64	458423.01	459026.39	459629.76	460233.14	460836.51	461439.89	461950.44	462460.99	462971.54
	5500	459712.51	462079.60	464353.86	466535.30	467974.12	469134.46	470016.31	470712.51	471315.89	471919.27	472522.64	473126.02	473729.39	474332.77	474936.14	475539.52	476050.07	476560.62	477071.16	477681.71
5600	478677.22	480951.48	483132.91	484571.73	485732.07	486613.92	487310.13	487913.50	488516.88	489120.25	489723.63	490327.01	490930.38	491533.76	492137.13	492640.51	493153.89	493667.27	494180.64	494694.02	
5700	504573.60	506755.03	508193.85	509354.19	510236.05	510932.25	511535.63	512139.00	512742.38	513345.75	513949.13	514552.50	515155.88	515759.25	516262.63	516766.01	517269.39	517772.77	518276.14	518779.52	
5800	569336.48	570775.30	571935.64	572817.50	573513.70	574117.07	574720.45	575323.82	575927.20	576530.58	577133.95	577737.33	578340.70	578851.25	579361.80	579872.35	580382.90	580707.79	581218.28	581728.77	
5900	327851.52	329011.86	329893.72	330589.92	331193.29	331796.67	332400.04	333003.42	333606.80	334210.17	334813.55	335416.92	335927.47	336438.02	336948.57	337459.12	337784.01	337551.94	337319.87	337087.80	
6000	464851.59	465733.45	466429.65	467033.02	467636.40	468239.77	468843.15	469446.53	470049.90	470653.28	471256.65	471767.20	472277.75	472788.30	473298.85	473623.74	473391.67	469539.35	461695.47	453851.59	
6100	494601.58	495297.78	495901.15	496504.53	497107.91	497711.28	498314.66	498918.03	499521.41	500124.78	500635.33	501145.88	501656.43	502166.98	502491.87	502259.80	498407.48	490563.60	482719.72	474875.84	
6200	513286.94	513890.32	514493.69	515097.07	515700.44	516303.82	516907.20	517510.57	518113.95	518624.50	519135.04	519645.59	520156.14	520481.04	520248.97	516396.65	508552.77	499409.31	491265.43	483121.55	
6300	528515.59	529118.96	529722.34	530325.71	530929.09	531532.46	532135.84	532739.22	533249.76	533760.31	534270.86	534781.41	535106.30	534874.24	531021.92	523178.03	514034.57	504519.81	494355.25	484190.69	
6400	542265.38	542868.75	543472.13	544075.51	544678.88	545282.26	545885.63	546396.18	546906.73	547417.28	547927.83	548252.72	548020.65	544168.33	536324.45	527180.99	517666.22	507501.67	496687.32	485872.97	
6500	555231.86	555835.23	556438.61	557041.98	557645.36	558248.73	558759.28	559269.83	559780.38	560290.93	560615.82	560383.76	556531.44	548687.55	539544.09	530029.33	519864.77	509050.42	498050.42	487040.97	

Tabla 9.3. Valores de ϕ . Etapa 3 PB Xotepingo

		Estados																			
		1900	1800	1700	1600	1500	1400	1300	1200	1100	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100	
Salidas	100	-729632.98	-718632.98	-707632.98	-696632.98	-685632.98	-674632.98	-663632.98	-652632.98	-641632.98	-630632.98	-619632.98	-608632.98	-597632.98	-586632.98	-575632.98	-564632.98	-553632.98	-542632.98	-531632.98	
	200	-707635.19	-696635.19	-685635.19	-674635.19	-663635.19	-652635.19	-641635.19	-630635.19	-619635.19	-608635.19	-597635.19	-586635.19	-575635.19	-564635.19	-553635.19	-542635.19	-531635.19	-520635.19	-509635.19	
	300	-685637.28	-674637.28	-663637.28	-652637.28	-641637.28	-630637.28	-619637.28	-608637.28	-597637.28	-586637.28	-575637.28	-564637.28	-553637.28	-542637.28	-531637.28	-520637.28	-509637.28	-498637.28	-487637.28	-476637.28
	400	-663639.34	-652639.34	-641639.34	-630639.34	-619639.34	-608639.34	-597639.34	-586639.34	-575639.34	-564639.34	-553639.34	-542639.34	-531639.34	-520639.34	-509639.34	-498639.34	-487639.34	-476639.34	-465639.34	-454639.34
	500	-641641.48	-630641.48	-619641.48	-608641.48	-597641.48	-586641.48	-575641.48	-564641.48	-553641.48	-542641.48	-531641.48	-520641.48	-509641.48	-498641.48	-487641.48	-476641.48	-465641.48	-454641.48	-443641.48	-432641.48
	600	-619643.79	-608643.79	-597643.79	-586643.79	-575643.79	-564643.79	-553643.79	-542643.79	-531643.79	-520643.79	-509643.79	-498643.79	-487643.79	-476643.79	-465643.79	-454643.79	-443643.79	-432643.79	-421643.79	-410643.79
	700	-597646.36	-586646.36	-575646.36	-564646.36	-553646.36	-542646.36	-531646.36	-520646.36	-509646.36	-498646.36	-487646.36	-476646.36	-465646.36	-454646.36	-443646.36	-432646.36	-421646.36	-410646.36	-399646.36	-388646.36
	800	-575649.28	-564649.28	-553649.28	-542649.28	-531649.28	-520649.28	-509649.28	-498649.28	-487649.28	-476649.28	-465649.28	-454649.28	-443649.28	-432649.28	-421649.28	-410649.28	-399649.28	-388649.28	-377649.28	-366649.28
	900	-553652.65	-542652.65	-531652.65	-520652.65	-509652.65	-498652.65	-487652.65	-476652.65	-465652.65	-454652.65	-443652.65	-432652.65	-421652.65	-410652.65	-399652.65	-388652.65	-377652.65	-366652.65	-355652.65	-344652.65
	1000	-531656.54	-520656.54	-509656.54	-498656.54	-487656.54	-476656.54	-465656.54	-454656.54	-443656.54	-432656.54	-421656.54	-410656.54	-399656.54	-388656.54	-377656.54	-366656.54	-355656.54	-344656.54	-333656.54	-322656.54
	1100	-509661.02	-498661.02	-487661.02	-476661.02	-465661.02	-454661.02	-443661.02	-432661.02	-421661.02	-410661.02	-399661.02	-388661.02	-377661.02	-366661.02	-355661.02	-344661.02	-333661.02	-322661.02	-311661.02	-300661.02
	1200	-487666.19	-476666.19	-465666.19	-454666.19	-443666.19	-432666.19	-421666.19	-410666.19	-399666.19	-388666.19	-377666.19	-366666.19	-355666.19	-344666.19	-333666.19	-322666.19	-311666.19	-300666.19	-289666.19	-278666.19
	1300	-465672.09	-454672.09	-443672.09	-432672.09	-421672.09	-410672.09	-399672.09	-388672.09	-377672.09	-366672.09	-355672.09	-344672.09	-333672.09	-322672.09	-311672.09	-300672.09	-289672.09	-278672.09	-267672.09	-256672.09
	1400	-443678.79	-432678.79	-421678.79	-410678.79	-399678.79	-388678.79	-377678.79	-366678.79	-355678.79	-344678.79	-333678.79	-322678.79	-311678.79	-300678.79	-289678.79	-278678.79	-267678.79	-256678.79	-245678.79	-234678.79

	5100	367572.35	375718.79	383865.23	391183.22	395279.46	398455.19	401630.92	404806.66	407522.14	409501.22	411480.30	413459.37	415438.45	417417.53	419396.61	421375.69	423354.77	425333.85	427312.93	429292.01
	5200	387621.95	395768.39	403086.38	407182.62	410358.35	413534.08	416709.81	419425.30	421404.38	423383.46	425362.53	427341.61	429320.69	431299.77	433278.85	435257.93	437237.01	439216.09	441195.17	443174.25
	5300	408058.04	415376.03	419472.26	422648.00	425823.73	428999.46	431714.94	433694.02	435673.10	437652.18	439631.26	441610.34	443589.42	445568.50	447547.58	449526.66	451505.74	453484.82	455463.89	457442.97
	5400	428305.50	432401.74	435577.47	438753.20	441928.93	444644.42	446623.49	448602.57	450581.65	452560.73	454539.81	456518.89	458497.97	460477.05	462456.13	464435.21	466414.29	468393.37	470372.45	472351.53
	5500	446501.37	449677.10	452852.83	456028.56	458744.05	460723.13	462702.20	464681.28	466660.36	468639.44	470618.52	472597.60	474576.68	476555.76	478534.84	480513.92	482493.00	484472.08	486451.16	488430.24
	5600	466274.71	469450.45	472626.18	475341.66	477320.74	479299.82	481278.90	483257.98	485237.06	487216.14	489195.21	491174.29	493153.37	495132.45	497111.53	499090.61	501069.69	503048.77	505027.85	507006.93
	5700	493072.57	496248.30	498963.78	500942.86	502921.94	504901.02	506880.10	508859.18	510838.26	512817.34	514796.42	516775.50	518754.58	520733.65	522712.73	524691.81	526670.89	528649.97	530629.05	532608.13
	5800	558829.75	561545.23	563524.31	565503.39	567482.47	569461.55	571440.63	573419.71	575398.79	577377.87	579356.94	581336.02	583315.10	585294.18	587273.26	589252.34	591231.42	593118.45	594545.23	595972.01
	5900	318621.45	320600.53	322579.61	324558.69	326537.77	328516.85	330495.93	332475.00	334454.08	336433.16	338412.24	340391.32	342370.40	344349.48	346328.56	348307.64	350194.67	351621.45	352948.23	354275.01
	6000	456440.26	458419.34	460398.42	462377.50	464356.58	466335.66	468314.74	470293.81	472272.89	474251.97	476231.05	478210.13	480189.21	482168.29	484147.37	486034.40	487461.18	488285.45	489109.72	490034.00
	6100	487287.47	489266.55	491245.63	493224.71	495203.79	497182.87	499161.95	501141.03	503120.10	505099.18	507078.26	509057.34	511036.42	513015.50	514902.53	516329.31	517153.58	517977.85	518802.12	519626.40
6200	507255.71	509234.79	511213.87	513192.95	515172.03	517151.11	519130.19	521109.27	523088.35	525067.43	527046.51	529025.59	531004.67	532891.69	534318.47	535142.74	535967.01	536791.28	537615.55	538439.82	
6300	523860.06	525839.14	527818.22	529797.30	531776.38	533755.46	535734.54	537713.62	539692.70	541671.78	543650.86	545629.93	547516.96	548943.74	549768.01	550592.28	551416.55	552240.82	553065.09	553889.36	
6400	538985.56	540964.64	542943.72	544922.80	546901.87	548880.95	550860.03	552839.11	554818.19	556797.27	558776.35	560663.38	562090.16	562914.43	563738.70	564562.97	565387.24	566211.51	567035.78	567860.05	
6500	553327.74	555306.82	557285.90	559264.98	561244.06	563223.14	565202.22	567181.29	569160.37	571139.45	573026.48	574453.26	575277.53	576101.80	576926.07	577750.34	578574.61	579398.88	580223.15	581047.42	

9. 4. Anexo 4. Beneficios asociados a cada estado y cada extracción de las diferentes etapas, Rebombear Estrella

Tabla 9.4. Valores de ϕ . Etapa 1 Rebombear Estrella

		Estados														
		1500	1400	1300	1200	1100	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100
Salidas	100	-639926.95	-628926.95	-617926.95	-606926.95	-595926.95	-584926.95	-573926.95	-562926.95	-551926.95	-540926.95	-529926.95	-518926.95	-507926.95	-496926.95	-485926.95
	200	-617863.29	-606863.29	-595863.29	-584863.29	-573863.29	-562863.29	-551863.29	-540863.29	-529863.29	-518863.29	-507863.29	-496863.29	-485863.29	-474863.29	-463863.29
	300	-595802.07	-584802.07	-573802.07	-562802.07	-551802.07	-540802.07	-529802.07	-518802.07	-507802.07	-496802.07	-485802.08	-474802.08	-463802.08	-452802.08	-441802.08
	400	-573743.47	-562743.47	-551743.47	-540743.47	-529743.47	-518743.47	-507743.47	-496743.47	-485743.47	-474743.47	-463743.47	-452743.47	-441743.47	-430743.47	-419837.89
	500	-551687.61	-540687.61	-529687.61	-518687.61	-507687.61	-496687.61	-485687.61	-474687.61	-463687.61	-452687.61	-441687.61	-430687.61	-419687.61	-408782.03	-397876.45
	600	-529634.63	-518634.63	-507634.63	-496634.63	-485634.63	-474634.63	-463634.63	-452634.63	-441634.63	-430634.63	-419634.63	-408634.63	-397729.05	-386823.47	-375917.89
	700	-507584.64	-496584.64	-485584.64	-474584.64	-463584.64	-452584.64	-441584.64	-430584.64	-419584.64	-408584.64	-397584.64	-386679.06	-375773.48	-364867.91	-353962.33
	800	-485537.74	-474537.74	-463537.74	-452537.74	-441537.74	-430537.74	-419537.74	-408537.74	-397537.74	-386537.74	-375632.16	-364726.58	-353821.00	-342915.42	-332009.84
	900	-463494.00	-452494.00	-441494.01	-430494.01	-419494.01	-408494.01	-397494.01	-386494.01	-375494.01	-364588.43	-353682.85	-342777.27	-331871.69	-320966.11	-310060.53
	1000	-441453.51	-430453.51	-419453.51	-408453.51	-397453.51	-386453.51	-375453.51	-364453.51	-353547.93	-342642.35	-331736.78	-320831.20	-309925.62	-299020.04	-288208.88
	1100	-419416.32	-408416.32	-397416.32	-386416.32	-375416.32	-364416.32	-353416.32	-342510.74	-331605.16	-320699.58	-309794.00	-298888.42	-287982.85	-277171.69	-266360.53
	1200	-397382.48	-386382.48	-375382.48	-364382.48	-353382.48	-342382.48	-331476.90	-320571.32	-309665.74	-298760.16	-287854.58	-276949.00	-266137.84	-255326.69	-244515.53
	1300	-375352.02	-364352.02	-353352.02	-342352.02	-331352.02	-320446.45	-309540.87	-298635.29	-287729.71	-276824.13	-265918.55	-255107.39	-244296.23	-233485.07	-222673.91
	1400	-353324.99	-342324.99	-331324.99	-320324.99	-309419.41	-298513.83	-287608.25	-276702.67	-265797.09	-254891.51	-244080.35	-233269.19	-222458.03	-211646.88	-200835.72

	5800	502651.69	503831.94	504540.10	504681.73	503973.57	502793.32	501046.54	498449.97	495286.88	491274.00	486128.08	480037.95	472909.20	465119.50	456574.43
	5900	517559.53	518267.68	518409.31	517701.16	516520.90	514774.12	512177.55	509014.46	505001.59	499855.66	493765.54	486636.78	478847.08	470302.02	461379.27
	6000	530689.53	530831.16	530123.01	528942.75	527195.97	524599.40	521436.31	517423.44	512277.51	506187.39	499058.63	491268.93	482723.87	473801.12	464311.85
	6100	542655.83	541947.67	540767.42	539020.63	536424.07	533260.98	529248.10	524102.18	518012.05	510883.30	503093.60	494548.53	485625.79	476136.51	466363.98
	6200	553448.13	552267.87	550521.09	547924.52	544761.43	540748.56	535602.64	529512.51	522383.75	514594.05	506048.99	497126.24	487636.97	477864.44	467903.07
	6300	563571.64	561824.86	559228.30	556065.21	552052.33	546906.41	540816.28	533687.52	525897.83	517352.76	508430.01	498940.74	489168.21	479206.84	469056.62
6400	572999.51	570402.94	567239.85	563226.98	558081.05	551990.93	544862.17	537072.47	528527.41	519604.66	510115.39	500342.86	490381.48	480231.27	469986.63	
6500	581487.59	578324.50	574311.63	569165.71	563075.58	555946.82	548157.12	539612.06	530689.31	521200.04	511427.51	501466.14	491315.92	481071.29	470637.81	
6600	589343.39	585330.52	580184.60	574094.47	566965.71	559176.01	550630.95	541708.20	532218.93	522446.40	512485.03	502334.81	492090.18	481656.70	470939.96	
6700	596299.45	591153.53	585063.40	577934.65	570144.95	561599.88	552677.14	543187.87	533415.34	523453.96	513303.75	503059.11	492625.64	481908.90	471192.16	
6800	602083.27	595993.14	588864.38	581074.68	572529.62	563606.87	554117.60	544345.07	534383.70	524233.48	513988.85	503555.37	492838.63	482121.89	471310.74	
6900	606891.24	599762.48	591972.78	583427.72	574504.97	565015.70	555243.17	545281.80	535131.58	524886.95	514453.47	503736.73	493019.99	482208.83	471208.83	
7000	610634.42	602844.72	594299.66	585376.91	575887.64	566115.11	556153.74	546003.52	535758.89	525325.41	514608.67	503891.94	493080.78	482080.78	471080.78	
7100	613694.57	605149.51	596226.76	586737.49	576964.96	567003.59	556853.37	546608.74	536175.26	525458.52	514741.79	503930.63	492930.63	481930.63	470930.63	

Tabla 9.5. Valores de ϕ . Etapa 2 Rebombeco Estrella

		Estados														
		1500	1400	1300	1200	1100	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100
Salidas	100	-588854.24	-577854.24	-566854.24	-555854.24	-544854.24	-533854.24	-522854.24	-511854.24	-500854.24	-489854.24	-478854.24	-467854.24	-456854.24	-445854.24	-434854.24
	200	-566930.10	-555930.10	-544930.10	-533930.10	-522930.10	-511930.10	-500930.10	-489930.10	-478930.10	-467930.10	-456930.10	-445930.10	-434930.10	-423930.10	-413021.38
	300	-544995.54	-533995.54	-522995.54	-511995.54	-500995.54	-489995.54	-478995.54	-467995.54	-456995.54	-445995.54	-434995.54	-423995.54	-412995.54	-402086.83	-391178.12
	400	-523050.97	-512050.97	-501050.97	-490050.97	-479050.97	-468050.97	-457050.97	-446050.97	-435050.97	-424050.97	-413050.97	-402050.97	-391142.26	-380233.55	-369324.83
	500	-501096.72	-490096.72	-479096.72	-468096.72	-457096.72	-446096.72	-435096.72	-424096.72	-413096.72	-402096.72	-391096.72	-380188.01	-369279.30	-358370.58	-347461.87
	600	-479133.06	-468133.06	-457133.06	-446133.06	-435133.06	-424133.06	-413133.06	-402133.06	-391133.06	-380133.06	-369224.35	-358315.64	-347406.92	-336498.21	-325589.49
	700	-457160.20	-446160.20	-435160.20	-424160.20	-413160.20	-402160.20	-391160.20	-380160.20	-369160.20	-358251.49	-347342.78	-336434.06	-325525.35	-314616.63	-303707.92
	800	-435178.30	-424178.30	-413178.30	-402178.30	-391178.30	-380178.30	-369178.30	-358178.30	-347269.59	-336360.87	-325452.16	-314543.44	-303634.73	-292726.02	-281817.30
	900	-413187.46	-402187.46	-391187.46	-380187.46	-369187.46	-358187.46	-347187.46	-336278.74	-325370.03	-314461.32	-303552.60	-292643.89	-281735.17	-270826.46	-259917.75
	1000	-391187.73	-380187.73	-369187.73	-358187.73	-347187.73	-336187.73	-325279.01	-314370.30	-303461.59	-292552.87	-281644.16	-270735.44	-259826.73	-248918.02	-238009.30
	1100	-369179.11	-358179.11	-347179.11	-336179.11	-325179.11	-314270.40	-303361.68	-292452.97	-281544.26	-270635.54	-259726.83	-248818.11	-237909.40	-227000.69	-216091.97
	1200	-347161.56	-336161.56	-325161.56	-314161.56	-303252.85	-292344.13	-281435.42	-270526.70	-259617.99	-248709.28	-237800.56	-226891.85	-215983.14	-205074.42	-194165.71
	1300	-325134.97	-314134.97	-303134.97	-292226.26	-281317.55	-270408.83	-259500.12	-248591.40	-237682.69	-226773.98	-215865.26	-204956.55	-194047.84	-183139.12	-172230.41
	1400	-303099.20	-292099.20	-281190.49	-270281.77	-259373.06	-248464.34	-237555.63	-226646.92	-215738.20	-204829.49	-193920.78	-183012.06	-172103.35	-161194.63	-150285.92
	1500	-281054.03	-270145.31	-259236.60	-248327.89	-237419.17	-226510.46	-215601.75	-204693.03	-193784.32	-182875.60	-171966.89	-161058.18	-150149.46	-139240.75	-128332.04

	5600	82385.08	81700.43	80376.78	78414.12	76177.61	73667.23	70426.57	66546.90	61936.94	56414.12	50526.15	43907.90	36468.06	28206.65	19123.66
	5700	374726.91	373403.26	371440.60	369204.09	366693.71	363453.05	359573.38	354963.42	349440.60	343552.64	336934.38	329494.54	321233.13	312150.15	302428.15
	5800	441413.30	439450.64	437214.13	434703.76	431463.09	427583.42	422973.47	417450.64	411562.68	404944.42	397504.59	389243.18	380160.19	370438.20	360259.77
	5900	474934.52	472698.01	470187.64	466946.97	463067.30	458457.35	452934.52	447046.56	440428.30	432988.47	424727.06	415644.07	405922.08	395743.65	385200.08
	6000	497306.79	494796.42	491555.76	487676.09	483066.13	477543.31	471655.34	465037.09	457597.25	449335.84	440252.85	430530.86	420352.44	409808.87	398900.16
6100	514454.77	511214.10	507334.43	502724.48	497201.65	491313.69	484695.43	477255.60	468994.19	459911.20	450189.21	440010.78	429467.21	418558.50	407649.79	
6200	528204.60	524324.93	519714.97	514192.15	508304.18	501685.93	494246.09	485984.68	476901.69	467179.70	457001.28	446457.71	435549.00	424640.28	413640.28	
6300	539713.90	535103.94	529581.12	523693.16	517074.90	509635.06	501373.65	492290.67	482568.67	472390.25	461846.68	450937.97	440029.25	429029.25	418029.25	
6400	549456.32	543933.50	538045.53	531427.28	523987.44	515726.03	506643.04	496921.05	486742.63	476199.06	465290.35	454381.63	443381.63	432381.63	421381.63	
6500	557576.51	551688.55	545070.29	537630.46	529369.05	520286.06	510564.07	500385.64	489842.07	478933.36	468024.65	457024.65	446024.65	435024.65	424024.65	
6600	564824.85	558206.59	550766.76	542505.35	533422.36	523700.37	513521.95	502978.38	492069.66	481160.95	470160.95	459160.95	448160.95	437160.95	426160.95	
6700	570968.39	563528.55	555267.14	546184.15	536462.16	526283.74	515740.17	504831.46	493922.74	482922.74	471922.74	460922.74	449922.74	438922.74	427922.74	
6800	576005.75	567744.34	558661.35	548939.36	538760.94	528217.37	517308.65	506399.94	495399.94	484399.94	473399.94	462399.94	451399.94	440399.94	429399.94	
6900	580000.23	570917.24	561195.25	551016.83	540473.26	529564.55	518655.83	507655.83	496655.83	485655.83	474655.83	463655.83	452655.83	441655.83	430655.83	
7000	582997.66	573275.67	563097.25	552553.68	541644.97	530736.25	519736.25	508736.25	497736.25	486736.25	475736.25	464736.25	453736.25	442736.25	431736.25	
7100	585214.62	575036.20	564492.63	553583.92	542675.20	531675.20	520675.20	509675.20	498675.20	487675.20	476675.20	465675.20	454675.20	443675.20	432675.20	

Tabla 9.6. Valores de ϕ . Etapa 3 Rebombeco Estrella

		Estados															
		1500	1400	1300	1200	1100	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100	
Salidas	100	-657451.625	-646451.625	-635451.625	-624451.625	-613451.625	-602451.625	-591451.625	-580451.625	-569451.625	-558451.625	-547451.626	-536451.626	-525451.626	-514451.626	-503451.626	
	200	-635527.482	-624527.482	-613527.482	-602527.482	-591527.482	-580527.482	-569527.482	-558527.482	-547527.482	-536527.482	-525527.483	-514527.483	-503527.483	-492527.483	-481527.483	
	300	-613592.926	-602592.926	-591592.926	-580592.926	-569592.927	-558592.927	-547592.927	-536592.927	-525592.927	-514592.927	-503592.927	-492592.927	-481592.927	-470592.927	-459592.927	
	400	-591648.358	-580648.358	-569648.358	-558648.358	-547648.358	-536648.358	-525648.358	-514648.358	-503648.358	-492648.358	-481648.358	-470648.358	-459648.358	-448648.358	-437648.359	
	500	-569694.108	-558694.108	-547694.108	-536694.108	-525694.108	-514694.108	-503694.108	-492694.109	-481694.109	-470694.109	-459694.109	-448694.109	-437694.109	-426694.109	-415694.109	
	600	-547730.447	-536730.447	-525730.448	-514730.448	-503730.448	-492730.448	-481730.448	-470730.448	-459730.448	-448730.448	-437730.448	-426730.448	-415730.448	-404730.448	-393730.448	
	700	-525757.587	-514757.587	-503757.587	-492757.587	-481757.587	-470757.588	-459757.588	-448757.588	-437757.588	-426757.588	-415757.588	-404757.588	-393757.588	-382757.588	-371757.588	
	800	-503775.684	-492775.684	-481775.684	-470775.684	-459775.684	-448775.684	-437775.684	-426775.684	-415775.684	-404775.685	-393775.685	-382775.685	-371775.685	-360775.685	-349775.685	
	900	-481784.841	-470784.841	-459784.841	-448784.841	-437784.841	-426784.842	-415784.842	-404784.842	-393784.842	-382784.842	-371784.842	-360784.842	-349784.842	-338784.842	-327784.842	
	1000	-459785.111	-448785.111	-437785.111	-426785.111	-415785.111	-404785.111	-393785.112	-382785.112	-371785.112	-360785.112	-349785.112	-338785.112	-327785.112	-316785.112	-305785.112	
	1100	-437776.495	-426776.495	-415776.495	-404776.495	-393776.495	-382776.496	-371776.496	-360776.496	-349776.496	-338776.496	-327776.496	-316776.496	-305776.496	-294776.496	-283776.496	
	1200	-415758.944	-404758.945	-393758.945	-382758.945	-371758.945	-360758.945	-349758.945	-338758.945	-327758.945	-316758.945	-305758.945	-294758.945	-283758.945	-272758.945	-261758.945	
	1300	-393732.358	-382732.358	-371732.359	-360732.359	-349732.359	-338732.359	-327732.359	-316732.359	-305732.359	-294732.359	-283732.359	-272732.359	-261732.359	-250732.359	-239732.359	
	1400	-371696.584	-360696.584	-349696.584	-338696.584	-327696.584	-316696.584	-305696.584	-294696.584	-283696.584	-272696.584	-261696.585	-250696.585	-239696.585	-228696.585	-217696.585	
	
		5500	919366.778	922877.416	925732.735	928119.969	930226.352	932145.501	933034.863	933268.905	932847.629	932239.118	931349.756	930085.926	927324.224	924000.82	919647.629
		5600	71829.8534	74685.1725	77072.4066	79178.7896	81097.9385	81987.3002	82221.3428	81800.0662	81191.5555	80302.1939	79038.3641	76276.662	72953.2577	68600.0663	63591.5556
		5700	367711.652	370098.886	372205.269	374124.418	375013.78	375247.823	374826.546	374218.035	373328.674	372064.844	369303.142	365979.738	361626.546	356618.036	350860.589
		5800	438108.928	440215.311	442134.46	443023.822	443257.864	442836.588	442228.077	441338.715	440074.886	437313.184	433989.779	429636.588	424628.077	418870.63	412177.013
		5900	475699.19	477618.339	478507.701	478741.744	478320.467	477711.956	476822.595	475558.765	472797.063	469473.659	465120.467	460111.957	454354.51	447660.893	440405.574
		6000	502227.124	503116.486	503350.528	502929.252	502320.741	501431.38	500167.55	497405.848	494082.443	489729.252	484720.741	478963.295	472269.678	465014.358	456822.869
		6100	522774.831	523008.873	522587.597	521979.086	521089.725	519825.895	517064.193	513740.788	509387.597	504379.086	498621.64	491928.023	484672.703	476481.214	467540.789
		6200	539999.369	539578.092	538969.582	538080.22	536816.39	534054.688	530731.284	526378.092	521369.582	515612.135	508918.518	501663.199	493471.71	484531.284	475497.242
		6300	554967.064	554358.554	553469.192	552205.362	549443.66	546120.256	541767.064	536758.554	531001.107	524307.49	517052.171	508860.682	499920.256	490886.214	481571.32
		6400	568710.931	567821.569	566557.74	563796.037	560472.633	556119.442	551110.931	545353.484	538659.867	531404.548	523213.059	514272.633	505238.591	495923.697	486234.336
		6500	581464.584	580200.754	577439.052	574115.648	569762.457	564753.946	558996.499	552302.882	545047.563	536856.074	527915.648	518881.606	509566.712	499877.351	490000.755
		6600	593337.057	590575.355	587251.951	582898.759	577890.249	572132.802	565439.185	558183.866	549992.376	541051.951	532017.908	522703.015	513013.653	503137.057	493073.228
		6700	603337.147	600013.743	595660.551	590652.041	584894.594	578200.977	570945.658	562754.169	553813.743	544779.701	535464.807	525775.445	515898.85	505835.02	495490.339
	6800	612490.942	608137.751	603129.24	597371.793	590678.176	583422.857	575231.368	566290.942	557256.9	547942.006	538252.645	528376.049	518312.219	507967.538	497622.858	
	6900	620393.643	615385.132	609627.685	602934.068	595678.749	587487.26	578546.834	569512.792	560197.898	550508.537	540631.941	530568.111	520223.43	509878.75	499065.984	
	7000	627465.55	621708.103	615014.486	607759.167	599567.678	590627.252	581593.21	572278.316	562588.955	552712.359	542648.529	532303.848	521959.168	511146.402	500240.019	
	7100	633647.056	626953.439	619698.12	611506.631	602566.205	593532.163	584217.269	574527.907	564651.312	554587.482	544242.801	533898.12	523085.354	512178.971	501272.589	

9. 5. Anexo 5. Código PB Xotepingo

```
clear
clc

%Etapa 1: 24 a 7:59 hrs
%Etapa 2: 8 a 15:59 hrs
%Etapa 3: 16 a 23:59 hrs

%Definición de estados del cárcamo de bombeo (i):
for a=100:100:1900
    i(a/100)=a;
end

%Definición de los egresos (k):
for b=100:100:6500
    k(b/100)=b;
end

%Definición de los ingresos (x):
for c=100:100:6500
    x(c/100)=c;
end

%Probabilidades de ingreso Etapa 1
petapa1=[100 0
200 0
300 0
400 0
500 0
600 0
700 0
800 0
900 0
1000 0
1100 0
1200 0
1300 0
1400 0
1500 0
1600 0
1700 0
1800 0
1900 0
2000 0
2100 0
2200 0
2300 0
2400 0
2500 0
```

```
2600 0
2700 0
2800 0
2900 0
3000 0
3100 0.008403361
3200 0.029411765
3300 0.025210084
3400 0.016806723
3500 0.008403361
3600 0.033613445
3700 0.058823529
3800 0.084033613
3900 0.050420168
4000 0.008403361
4100 0
4200 0.012605042
4300 0.033613445
4400 0.004201681
4500 0.004201681
4600 0
4700 0.004201681
4800 0
4900 0
5000 0
5100 0
5200 0
5300 0
5400 0
5500 0
5600 0
5700 0.008403361
5800 0.037815126
5900 0.155462185
6000 0.231092437
6100 0.084033613
6200 0.021008403
6300 0.029411765
6400 0.029411765
6500 0.021008403];
```

```
%Probabilidades de ingreso Etapa 2
```

```
petapa2=[100 0
```

```
200 0
300 0
400 0
500 0
600 0
700 0
800 0
900 0
1000 0
1100 0
1200 0
1300 0
```

```
1400 0
1500 0
1600 0
1700 0
1800 0
1900 0
2000 0
2100 0
2200 0
2300 0
2400 0
2500 0
2600 0
2700 0
2800 0
2900 0
3000 0.004219409
3100 0.050632911
3200 0.046413502
3300 0.004219409
3400 0.021097046
3500 0.109704641
3600 0.130801688
3700 0.025316456
3800 0.004219409
3900 0.004219409
4000 0.033755274
4100 0.012658228
4200 0.012658228
4300 0.008438819
4400 0.004219409
4500 0
4600 0
4700 0
4800 0
4900 0
5000 0
5100 0
5200 0.004219409
5300 0
5400 0
5500 0
5600 0.008438819
5700 0.025316456
5800 0.164556962
5900 0.181434599
6000 0.05907173
6100 0.016877637
6200 0.029535865
6300 0.029535865
6400 0.008438819
6500 0];
```

```
%Probabilidades de ingreso Etapa 3
petapa3=[100 0
```

200	0
300	0
400	0
500	0
600	0
700	0
800	0
900	0
1000	0
1100	0
1200	0
1300	0
1400	0
1500	0
1600	0
1700	0
1800	0.0041841
1900	0
2000	0
2100	0
2200	0
2300	0
2400	0
2500	0
2600	0
2700	0
2800	0
2900	0
3000	0
3100	0.046025105
3200	0.071129707
3300	0.008368201
3400	0
3500	0.037656904
3600	0.146443515
3700	0.041841004
3800	0
3900	0
4000	0.020920502
4100	0.033472803
4200	0
4300	0
4400	0
4500	0
4600	0
4700	0
4800	0
4900	0
5000	0
5100	0
5200	0
5300	0
5400	0
5500	0
5600	0.0041841

```

5700  0.020920502
5800  0.209205021
5900  0.242677824
6000  0.041841004
6100  0
6200  0.029288703
6300  0.037656904
6400  0.0041841
6500  0];

```

%Cálculo de phi Etapa 1

```

%Cálculo de Déficit, Derrame, j y j corregida para diferentes valores
%de estado (en orden decreciente) y diferentes valores de salida (en
%orden creciente)
for d=i(1,end):i(1,1)-i(1,2):i(1,1)
for e=k(1,1):k(1,2)-k(1,1):k(1,end)

    for f=x(1,1):x(1,2)-x(1,1):x(1,end)
        j(f/100)=d+f-e;
        if j(f/100)>i(1,end)
            Derrame(f/100)=j(f/100)-i(1,end);
        else
            Derrame(f/100)=0;
        end
        if j(f/100)<i(1,1)
            Deficit(f/100)=i(1,1)-j(f/100);
        else
            Deficit(f/100)=0;
        end

        %Corrección de las j con base en derrames y déficits
        if j(f/100)<i(1,1)
            j(f/100)=i(1,1);
        else
            if j(f/100)>i(1,end)
                j(f/100)=i(1,end);
            end
        end

        %Cálculo de la carga de la bomba en función del volumen que se
        %extraiga
        H=-37.739*(e/3600)^4+56.276*(e/3600)^3-16.026*(e/3600)^2-
        27.178*(e/3600)+53.127;

        %Cálculo del beneficio de cada ingreso para los valores de estados y
        extracciones
        b(f/100)=110*e-110*j(f/100)-((3*9.81*(e/3600)*H)/(0.95*(-
        1.1556*(e/3600)^3+0.8575*(e/3600)^2+1.001*(e/3600))))-110*Deficit(f/100)-
        110*Derrame(f/100);

    end

%Aquí se comparan los valores de los estados del vector de probabilidades y
%los valores de los ingresos para asignar las probabilidades a los ingresos
for g=1:size(x,2)

```

```

    for h=1:size(petapa1,1)
        if x(g)==petapa1(h)
            P(g)=petapa1(h,2); %Esto es el vector de probabilidades de la etapa 1
            asignado a los ingresos
            Mult(g)=P(g)*b(g);
            phietapa1(e/100,(2000-d)/100)=sum(Mult,2);%Puse el 2000 para acomodar
            los vectores en el orden
            renglones son los valores de k
            las columnas son los valores
            decreciente: 1900,1800,...,100)
        end
    end
end
end
end

```

%que yo quería. Los
(en orden ascendente) y
%de i (en orden

%Aquí comienza el cálculo de phi etapa 2

%Cálculo de phietapa2

```

for l=i(1,end):i(1,1)-i(1,2):i(1,1)
    for m=k(1,1):k(1,2)-k(1,1):k(1,end)

        for n=x(1,1):x(1,2)-x(1,1):x(1,end)
            j2(n/100)=1+n-m;
            if j2(n/100)>i(1,end)
                Derrame2(n/100)=j2(n/100)-i(1,end);
            else
                Derrame2(n/100)=0;
            end
            if j2(n/100)<i(1,1)
                Deficit2(n/100)=i(1,1)-j2(n/100);
            else
                Deficit2(n/100)=0;
            end

            %Corrección de las j con base en derrames y déficits
            if j2(n/100)<i(1,1)
                j2(n/100)=i(1,1);
            else
                if j2(n/100)>i(1,end)
                    j2(n/100)=i(1,end);
                end
            end

            %Cálculo de la carga de la bomba en función del volumen que se
            %extraiga
            H2=-37.739*(m/3600)^4+56.276*(m/3600)^3-16.026*(m/3600)^2-
            27.178*(m/3600)+53.127;

            %Cálculo del beneficio de cada ingreso para los valores de
            b2(n/100)=110*m-110*j2(n/100)-((3*9.81*(m/3600)*H2)/(0.95*(-
            1.1038*(m/3600)^2+1.7986*(m/3600))))-110*Deficit2(n/100)-110*Derrame2(n/100);

```

```

end

%Aquí se comparan los valores de los estados del vector de probabilidades y
%los valores de los ingresos para asignar las probabilidades a los ingresos
for o=1:size(x,2)
    for p=1:size(petapa2,1)
        if x(o)==petapa2(p)
            P2(o)=petapa2(p,2); %Esto es el vector de probabilidades de la etapa
1 asignado a los ingresos
            Mult2(o)=P2(o)*b2(o);
            phietapa2(m/100,(2000-1)/100)=sum(Mult2,2);%Puse el 2000 para
acomodar los vectores en el orden
renglones son los valores de k
las columnas son los valores
decreciente: 1900,1800,...,100)
        end
    end
end
end
end

%Cálculo de phietapa3
for q=i(1,end):i(1,1)-i(1,2):i(1,1)
    for r=k(1,1):k(1,2)-k(1,1):k(1,end)

        for s=x(1,1):x(1,2)-x(1,1):x(1,end)
            j3(s/100)=q+s-r;
            if j3(s/100)>i(1,end)
                Derrame3(s/100)=j3(s/100)-i(1,end);
            else
                Derrame3(s/100)=0;
            end
            if j3(s/100)<i(1,1)
                Deficit3(s/100)=i(1,1)-j3(s/100);
            else
                Deficit3(s/100)=0;
            end

            %Corrección de las j con base en derrames y défcits
            if j3(s/100)<i(1,1)
                j3(s/100)=i(1,1);
            else
                if j3(s/100)>i(1,end)
                    j3(s/100)=i(1,end);
                end
            end

            %Cálculo de la carga de la bomba en función del volumen que se
            %extraiga
            H3=-37.739*(r/3600)^4+56.276*(r/3600)^3-16.026*(r/3600)^2-
27.178*(r/3600)+53.127;

            %Cálculo del beneficio de cada ingreso para los valores de

```

```

        b3(s/100)=110*r-110*j3(s/100)-((3*9.81*(r/3600)*H3)/(0.95*(-
1.1038*(r/3600)^2+1.7986*(r/3600))))-110*Deficit3(s/100)-110*Derrame3(s/100);

    end

%Aquí se comparan los valores de los estados del vector de probabilidades y
%los valores de los ingresos para asignar las probabilidades a los ingresos
for t=1:size(x,2)
    for u=1:size(petapa3,1)
        if x(t)==petapa3(u)
            P3(t)=petapa3(u,2); %Esto es el vector de probabilidades de la etapa
1 asignado a los ingresos
            Mult3(t)=P3(t)*b3(t);
            phietapa3(r/100,(2000-q)/100)=sum(Mult3,2);%Puse el 2000 para
acomodar los vectores en el orden
                                %que yo quería. Los
renglones son los valores de k                                %(en orden ascendente) y
las columnas son los valores                                %de i (en orden
decreciente: 1900,1800,...,100)
        end
    end
end
end
end

phietapa1
phietapa2
phietapa3

%Ya se obtuvieron las matrices de phi para las tres diferentes etapas.
%Sigues obtener Bast en orden decreciente. Debo empezar con phietapa3,
%después con phietapa2 y al último con phietapa1. Como en este caso no son
#años los que van a estar operando, sino días para que el conjunto
%de las etapas forme un ciclo, entonces hago la programación contemplando un
%día como un "ciclo". Considero 10 días de operación, cada uno con 3 etapas
Nmax=10;
etapas=[1,2,3];
estados=[100,200,300,400,500,600,700,800,900,1000,1100,1200,1300,1400,1500,1600,
1700,1800,1900];
salidas=[100,200,300,400,500,600,700,800,900,1000,1100,1200,1300,1400,1500,1600,
1700,1800,1900,2000,2100,2200,2300,2400,2500,2600,2700,2800,2900,3000,3100,3200,
3300,3400,3500,3600,3700,3800,3900,4000,4100,4200,4300,4400,4500,4600,4700,4800,
4900,5000,5100,5200,5300,5400,5500,5600,5700,5800,5900,6000,6100,6200,6300,6400,
6500];
ingresos=[100,200,300,400,500,600,700,800,900,1000,1100,1200,1300,1400,1500,1600
,1700,1800,1900,2000,2100,2200,2300,2400,2500,2600,2700,2800,2900,3000,3100,3200
,3300,3400,3500,3600,3700,3800,3900,4000,4100,4200,4300,4400,4500,4600,4700,4800
,4900,5000,5100,5200,5300,5400,5500,5600,5700,5800,5900,6000,6100,6200,6300,6400
,6500];

%Renglón 1 es la prob de la etapa 1
%Renglón 2 es la prob de la etapa 2
%Renglón 3 es la prob de la etapa 3

```

```

probetapas=[0      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0      0.008403361  0.029411765
0.025210084  0.016806723  0.008403361  0.033613445  0.058823529
0.084033613  0.050420168  0.008403361  0      0.012605042  0.033613445
0.004201681  0.004201681  0      0.004201681  0      0      0      0
0      0      0      0      0.008403361  0.037815126  0.155462185
0.231092437  0.084033613  0.021008403  0.029411765  0.029411765
0.021008403
      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0.004219409  0.050632911
0.046413502  0.004219409  0.021097046  0.109704641  0.130801688
0.025316456  0.004219409  0.004219409  0.033755274  0.012658228
0.012658228  0.008438819  0.004219409  0      0      0      0      0
0      0.004219409  0      0      0      0.008438819  0.025316456
0.164556962  0.181434599  0.05907173  0.016877637  0.029535865
0.029535865  0.008438819  0
      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0.0041841  0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0      0.046025105
0.071129707  0.008368201  0      0.037656904  0.146443515  0.041841004  0
0      0.020920502  0.033472803  0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0.0041841  0.020920502
0.209205021  0.242677824  0.041841004  0      0.029288703  0.037656904
0.0041841  0];

```

```
for N=Nmax:-1:1
```

```
for e=size(etapas,2):-1:1
```

```
for i=size(estados,2):-1:1
```

```
for k=1:1:size(salidas,2)
```

```
for x=1:1:size(ingresos,2)
```

```
j(x,k,i,e,N)=estados(1,i)+ingresos(1,x)-salidas(1,k);
```

```
%Correcciones de los valores de j
```

```
if j(x,k,i,e,N)<estados(1,1)
```

```
j(x,k,i,e,N)=estados(1,1);
```

```
end
```

```
if j(x,k,i,e,N)>estados(1,end)
```

```
j(x,k,i,e,N)=estados(1,end);
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
%%%%%%%%Aquí sólo estoy haciendo lo de la etapa 3 de N=10%%%%%%%%
```

```
if e==size(etapas,2) && N==Nmax
```

```
[val,idx]=max(phietapa3,[],1);
```

```
B(:, :, i, e, N)=[fliplr(estados)', [idx;val].'];
```

```
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if N==Nmax && e==2
%Aquí solamente obtengo Bast para la etapa 2 de N=Nmax con
%base en las B obtenidas previamente en un ciclo for
for z=1:1:65 %Número de vectores que tiene la matriz j
    for a=1:1:65 %renglones de j
        for b=1:1:19 %Número de estados que tiene el cárcamo
            c=j(a,z,i,2,Nmax); %defino una nueva variable como el
valor único de j
            d=B(b,1,i,3,Nmax); %defino una nueva variable como el
valor único de B
            if c==d %Comparo ambos valores para ver si son iguales
                Bast(a,z,i,e,N)=B(b,3,19,3,Nmax);
                Prob=probetapas(2,a);
                X=Bast(a,z,i,e,N);
                ProbxBast(a,z,i,e,N)=Prob*X;
                %Escribo el beneficio asociado
                %a la etapa 1 de cada k y de cada i
                M=ProbxBast(:,z,i,e,N); %todos los renglones, k=1,
i=1
                P=phietapa2(z,20-i);
                Bnueva(z,i)=sum(M)+P;
                [val,idx]=max(Bnueva,[],1);
                Bajustada(:,z,i,e,N)=[estados',[idx;val-min(val)]];
            end
        end
    end
end
end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

if N==Nmax && e==1
%Aquí solamente obtengo Bast para la etapa 2 de N=Nmax(32850) con
%base en las B obtenidas previamente en un ciclo for
for z=1:1:65 %Número de vectores que tiene la matriz j
    for a=1:1:65 %renglones de j
        for b=1:1:19 %Número de estados
            c=j(a,z,i,1,Nmax); %defino una nueva variable como el
valor único de j
            d=Bajustada(b,1,2,Nmax); %defino una nueva variable como
el valor único de B
            if c==d %Comparo ambos valores para ver si son iguales
                Bast(a,z,i,e,N)=Bajustada(b,3,2,Nmax);
                Prob=probetapas(1,a);
                X=Bast(a,z,i,e,N);
                ProbxBast(a,z,i,e,N)=Prob*X;
                M=ProbxBast(:,z,i,e,N); %todos los renglones, k=1,
i=1
                P=phietapa1(z,20-i);
                Bnueva(z,i)=sum(M)+P;
                [val,idx]=max(Bnueva,[],1);
            end
        end
    end
end

```



```

M=ProbxBast(:,z,i,e,N); %todos los renglones, k=1,
i=1
columna
P=phietapa2(z,20-i);%k=1, i=1 pero i=1 está en la 19
Bnueva(z,i)=sum(M)+P;
[val,idx]=max(Bnueva,[],1);
Bajustada(:, :, e,N)=[estados', [idx;val-min(val)]];
end
end
end
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if N<Nmax && e==1
for z=1:1:65 %Número de vectores que tiene la matriz j
for a=1:1:65 %renglones de j
for b=1:1:19 %renglones de b
único de j
valor único de B
c=j(a,z,i,1,N); %defino una nueva variable como el valor
d=Bajustada(b,1,2,N); %defino una nueva variable como el
if c==d %Comparo ambos vlores para ver si son iguales
Bast(a,z,i,e,N)=Bajustada(b,3,2,N);
Prob=probetapas(1,a);
X=Bast(a,z,i,e,N);
ProbxBast(a,z,i,e,N)=Prob*X;
%Escribo el beneficio asociado
%a la etapa 1 de cada k y de cada i
M=ProbxBast(:,z,i,e,N); %todos los renglones, k=1,
i=1
columna (pongo 20-1)
excel
Bnueva(z,i)=sum(M)+P; %son los cuadros verdes de
[val,idx]=max(Bnueva,[],1);
Bajustada(:, :, e,N)=[estados', [idx;val-min(val)]];
end
end
end
end
end

Bajustada

```

9. 6. Anexo 6. Código Rebombear Estrella

```
clear
clc

%Etapa 1: 24 a 7:59 hrs
%Etapa 2: 8 a 15:59 hrs
%Etapa 3: 16 a 23:59 hrs

%Definición de estados del cárcamo de bombeo (i):
for a=100:100:1500
    i(a/100)=a;
end

%Definición de los egresos (k). Revisé el máximo vol que entró y, por lo
%tanto, es el máximo vol que se puede extraer (7100 m3):
for b=100:100:7100
    k(b/100)=b;
end

%Definición de los ingresos (x). Revisé el máx. vol que entró y ese valor
%es el máximo ingreso que se puede teenr (7100 m3):
for c=100:100:7100
    x(c/100)=c;
end

%Probabilidades de ingreso Etapa 1
petapa1=[100 0
200 0
300 0.004291845
400 0
500 0
600 0
700 0
800 0
900 0.004291845
1000 0
1100 0
1200 0
1300 0
1400 0
1500 0
1600 0
1700 0
1800 0
1900 0
2000 0.004291845
2100 0.004291845
2200 0
2300 0
2400 0.008583691
```

```
2500 0.004291845
2600 0.017167382
2700 0.012875536
2800 0.021459227
2900 0.021459227
3000 0.017167382
3100 0.008583691
3200 0.030042918
3300 0.021459227
3400 0.025751073
3500 0.042918455
3600 0.012875536
3700 0.017167382
3800 0.0472103
3900 0.021459227
4000 0.034334764
4100 0.012875536
4200 0.017167382
4300 0.021459227
4400 0.012875536
4500 0.021459227
4600 0.025751073
4700 0.038626609
4800 0.021459227
4900 0.025751073
5000 0.038626609
5100 0.025751073
5200 0.038626609
5300 0.051502146
5400 0.042918455
5500 0.0472103
5600 0.030042918
5700 0.034334764
5800 0.017167382
5900 0.025751073
6000 0.012875536
6100 0.008583691
6200 0.008583691
6300 0.004291845
6400 0.008583691
6500 0.012875536
6600 0
6700 0.004291845
6800 0.008583691
6900 0
7000 0
7100 0];
```

%Probabilidades de ingreso Etapa 2

```
petapa2=[100 0.004149378
```

```
200 0
300 0
400 0
500 0
600 0
```

700	0
800	0
900	0
1000	0
1100	0
1200	0
1300	0
1400	0
1500	0
1600	0
1700	0
1800	0
1900	0.004149378
2000	0
2100	0
2200	0
2300	0.008298755
2400	0.008298755
2500	0
2600	0.024896266
2700	0.033195021
2800	0.029045643
2900	0.033195021
3000	0.037344398
3100	0.045643154
3200	0.01659751
3300	0.024896266
3400	0.041493776
3500	0.058091286
3600	0.004149378
3700	0.020746888
3800	0.058091286
3900	0.01659751
4000	0.008298755
4100	0.020746888
4200	0.033195021
4300	0.029045643
4400	0.029045643
4500	0.012448133
4600	0.012448133
4700	0.033195021
4800	0.029045643
4900	0.033195021
5000	0.041493776
5100	0.01659751
5200	0.033195021
5300	0.037344398
5400	0.037344398
5500	0.037344398
5600	0.029045643
5700	0.020746888
5800	0.01659751
5900	0.01659751
6000	0
6100	0.004149378

```
6200 0
6300 0
6400 0
6500 0
6600 0
6700 0
6800 0
6900 0
7000 0
7100 0];
```

```
%Probabilidades de ingreso Etapa 3
```

```
petapa3=[100 0
200 0
300 0
400 0
500 0
600 0
700 0
800 0
900 0
1000 0
1100 0
1200 0
1300 0
1400 0.004255319
1500 0
1600 0
1700 0
1800 0
1900 0
2000 0
2100 0
2200 0
2300 0
2400 0.004255319
2500 0
2600 0
2700 0
2800 0
2900 0.008510638
3000 0.012765957
3100 0.021276596
3200 0.012765957
3300 0.012765957
3400 0.025531915
3500 0.05106383
3600 0.042553191
3700 0.004255319
3800 0.042553191
3900 0.068085106
4000 0.017021277
4100 0.012765957
4200 0.029787234
4300 0.021276596
```

```

4400 0.012765957
4500 0.008510638
4600 0.046808511
4700 0.029787234
4800 0.029787234
4900 0.008510638
5000 0.012765957
5100 0.017021277
5200 0.068085106
5300 0.025531915
5400 0.046808511
5500 0.029787234
5600 0.034042553
5700 0.042553191
5800 0.025531915
5900 0.042553191
6000 0.034042553
6100 0.004255319
6200 0.012765957
6300 0.017021277
6400 0.008510638
6500 0.008510638
6600 0.012765957
6700 0
6800 0.021276596
6900 0.004255319
7000 0
7100 0.004255319];

```

%Cálculo de phi Etapa 1

**%Cálculo de Déficit, Derrame, j y j corregida para diferentes valores
%de estado (en orden decreciente) y diferentes valores de salida (en
%orden creciente)**

```

for d=i(1,end):i(1,1)-i(1,2):i(1,1)
for e=k(1,1):k(1,2)-k(1,1):k(1,end)

for f=x(1,1):x(1,2)-x(1,1):x(1,end)
j(f/100)=d+f-e;
if j(f/100)>i(1,end)
Derrame(f/100)=j(f/100)-i(1,end);
else
Derrame(f/100)=0;
end
if j(f/100)<i(1,1)
Deficit(f/100)=i(1,1)-j(f/100);
else
Deficit(f/100)=0;
end

```

%Corrección de las j con base en derrames y déficits

```

if j(f/100)<i(1,1)
j(f/100)=i(1,1);
else

```

```

        if j(f/100)>i(1,end)
            j(f/100)=i(1,end);
        end
    end
    %Cálculo de la carga de la bomba en función del volumen que se
    %extraiga
    H=-83.43*((e/3600)^4)+142.51*((e/3600)^3)-58.295*((e/3600)^2)-
51.077*(e/3600)+121.47;

    %Cálculo del beneficio de cada ingreso para los valores de estados y
    %extracciones
    b(f/100)=110*e-110*j(f/100)-((3*9.81*(e/3600)*H)/(0.95*(-
0.7602*(e/3600)^3+0.4025*(e/3600)^2+1.1859*(e/3600))))-110*Deficit(f/100)-
110*Derrame(f/100);

    end

%Aquí se comparan los valores de los estados del vector de probabilidades y
%los valores de los ingresos para asignar las probabilidades a los ingresos
for g=1:size(x,2)
    for h=1:size(petapa1,1)
        if x(g)==petapa1(h)
            P(g)=petapa1(h,2); %Esto es el vector de probabilidades de la etapa 1
            %asignado a los ingresos
            Mult(g)=P(g)*b(g);
            phietapa1(e/100,(1600-d)/100)=sum(Mult,2);%Puse el 1600 para acomodar
            %los vectores en el orden
            %que yo quería. Los
            %renglones son los valores de k
            %de i (en orden
            %de i (en orden
            %ascendente) y
            %decreciente: 1900,1800,...,100)
        end
    end
end
end
end
end

%Aquí comienza el cálculo de phi etapa 2

%Calculo de phietapa2
for l=i(1,end):i(1,1)-i(1,2):i(1,1)
    for m=k(1,1):k(1,2)-k(1,1):k(1,end)

        for n=x(1,1):x(1,2)-x(1,1):x(1,end)
            j2(n/100)=1+n-m;
            if j2(n/100)>i(1,end)
                Derrame2(n/100)=j2(n/100)-i(1,end);
            else
                Derrame2(n/100)=0;
            end
            if j2(n/100)<i(1,1)
                Deficit2(n/100)=i(1,1)-j2(n/100);
            else

```

```

        Deficit2(n/100)=0;
    end

    %Corrección de las j con base en derrames y défcits
    if j2(n/100)<i(1,1)
        j2(n/100)=i(1,1);
    else
        if j2(n/100)>i(1,end)
            j2(n/100)=i(1,end);
        end
    end

    %Cálculo de la carga de la bomba en función del volumen que se
    %extraiga
    H2=-83.43*((e/3600)^4)+142.51*((e/3600)^3)-58.295*((e/3600)^2)-
    51.077*(e/3600)+121.47;

    %Cálculo del beneficio de cada ingreso para los valores de
    b2(n/100)=110*m-110*j2(n/100)-((3*9.81*(m/3600)*H2)/(0.95*(-
    0.7602*(m/3600)^3+0.4025*(m/3600)^2+1.1859*(m/3600))))-110*Deficit2(n/100)-
    110*Derrame2(n/100);

    end

    %Aquí se comparan los valores de los estados del vector de probabilidades y
    %los valores de los ingresos para asignar las probabilidades a los ingresos
    for o=1:size(x,2)
        for p=1:size(petapa2,1)
            if x(o)==petapa2(p)
                P2(o)=petapa2(p,2); %Esto es el vector de probabilidades de la etapa
                1 asignado a los ingresos
                Mult2(o)=P2(o)*b2(o);
                phietapa2(m/100,(1600-1)/100)=sum(Mult2,2);%Puse el 2000 para
                acomodar los vectores en el orden
                %que yo quería. Los
                renglones son los valores de k
                %(en orden ascendente) y
                las columnas son los valores
                %de i (en orden
                decreciente: 1900,1800,...,100)
            end
        end
    end
end
end
end

%Cálculo de phietapa3
for q=i(1,end):i(1,1)-i(1,2):i(1,1)
    for r=k(1,1):k(1,2)-k(1,1):k(1,end)

        for s=x(1,1):x(1,2)-x(1,1):x(1,end)
            j3(s/100)=q+s-r;
            if j3(s/100)>i(1,end)
                Derrame3(s/100)=j3(s/100)-i(1,end);
            else
                Derrame3(s/100)=0;
            end
        end
    end
end
end

```

```

end
if j3(s/100)<i(1,1)
    Deficit3(s/100)=i(1,1)-j3(s/100);
else
    Deficit3(s/100)=0;
end

%Corrección de las j con base en derrames y défcits
if j3(s/100)<i(1,1)
    j3(s/100)=i(1,1);
else
    if j3(s/100)>i(1,end)
        j3(s/100)=i(1,end);
    end
end
%Cálculo de la carga de la bomba en función del volumen que se
%extraiga
H3=-83.43*((e/3600)^4)+142.51*((e/3600)^3)-58.295*((e/3600)^2)-
51.077*(e/3600)+121.47;

%Cálculo del beneficio de cada ingreso para los valores de
b3(s/100)=110*r-110*j3(s/100)-((3*9.81*(r/3600)*H3)/(0.95*(-
0.7602*(r/3600)^3+0.4025*(r/3600)^2+1.1859*(r/3600))))-110*Deficit3(s/100)-
110*Derrame3(s/100);

end

%Aquí se comparan los valores de los estados del vector de probabilidades y
%los valores de los ingresos para asignar las probabilidades a los ingresos
for t=1:size(x,2)
    for u=1:size(petapa3,1)
        if x(t)==petapa3(u)
            P3(t)=petapa3(u,2); %Esto es el vector de probabilidades de la etapa
1 asignado a los ingresos
            Mult3(t)=P3(t)*b3(t);
            phietapa3(r/100,(1600-q)/100)=sum(Mult3,2);%Puse el 2000 para
acomodar los vectores en el orden
                                                %que yo quería. Los
renglones son los valores de k
                                                %(en orden ascendente) y
las columnas son los valores
                                                %de i (en orden
decreciente: 1900,1800,...,100)
            end
        end
    end
end
end

phietapa1
phietapa2
phietapa3

%Ya se obtuvieron las matrices de phi para las tres diferentes etapas.
%Segue obtener Bast en orden decreciente. Debo empezar con phietapa3,

```

%después con phietapa2 y al último con phietapa1. Como en este caso no son
 %años los que van a estar operando, sino días para que el conjunto
 %de las etapas forme un ciclo, entonces hago la programación contemplando un
 %día como un "ciclo". Considero 7 días

```
Nmax=7; %
etapas=[1,2,3];
estados=[100,200,300,400,500,600,700,800,900,1000,1100,1200,1300,1400,1500];
salidas=[100,200,300,400,500,600,700,800,900,1000,1100,1200,1300,1400,1500,1600,
1700,1800,1900,2000,2100,2200,2300,2400,2500,2600,2700,2800,2900,3000,3100,3200,
3300,3400,3500,3600,3700,3800,3900,4000,4100,4200,4300,4400,4500,4600,4700,4800,
4900,5000,5100,5200,5300,5400,5500,5600,5700,5800,5900,6000,6100,6200,6300,6400,
6500,6600,6700,6800,6900,7000,7100];
ingresos=[100,200,300,400,500,600,700,800,900,1000,1100,1200,1300,1400,1500,1600
,1700,1800,1900,2000,2100,2200,2300,2400,2500,2600,2700,2800,2900,3000,3100,3200
,3300,3400,3500,3600,3700,3800,3900,4000,4100,4200,4300,4400,4500,4600,4700,4800
,4900,5000,5100,5200,5300,5400,5500,5600,5700,5800,5900,6000,6100,6200,6300,6400
,6500,6600,6700,6800,6900,7000,7100];
```

%Renglón 1 es la prob de la etapa 1
 %Renglón 2 es la prob de la etapa 2
 %Renglón 3 es la prob de la etapa 3

```
probetapas=[0      0      0.004291845  0      0      0      0      0
0.004291845  0      0      0      0      0      0      0      0      0
0.004291845  0.004291845  0      0      0.008583691  0.004291845
0.017167382  0.012875536  0.021459227  0.021459227  0.017167382
0.008583691  0.030042918  0.021459227  0.025751073  0.042918455
0.012875536  0.017167382  0.0472103    0.021459227  0.034334764
0.012875536  0.017167382  0.021459227  0.012875536  0.021459227
0.025751073  0.038626609  0.021459227  0.025751073  0.038626609
0.025751073  0.038626609  0.051502146  0.042918455  0.0472103
0.030042918  0.034334764  0.017167382  0.025751073  0.012875536
0.008583691  0.008583691  0.004291845  0.008583691  0.012875536  0
0.004291845  0.008583691  0      0      0
0.004149378  0      0      0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0      0      0.004149378  0      0
0      0.008298755  0.008298755  0      0.024896266  0.033195021
0.029045643  0.033195021  0.037344398  0.045643154  0.01659751
0.024896266  0.041493776  0.058091286  0.004149378  0.020746888
0.058091286  0.01659751  0.008298755  0.020746888  0.033195021
0.029045643  0.029045643  0.012448133  0.012448133  0.033195021
0.029045643  0.033195021  0.041493776  0.01659751  0.033195021
0.037344398  0.037344398  0.037344398  0.029045643  0.020746888
0.01659751  0.01659751  0      0.004149378  0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0      0      0      0      0
0      0      0.004255319  0      0      0      0      0      0      0      0
0      0.004255319  0      0      0      0      0.008510638  0.012765957
0.021276596  0.012765957  0.012765957  0.025531915  0.05106383
0.042553191  0.004255319  0.042553191  0.068085106  0.017021277
0.012765957  0.029787234  0.021276596  0.012765957  0.008510638
0.046808511  0.029787234  0.029787234  0.008510638  0.012765957
0.017021277  0.068085106  0.025531915  0.046808511  0.029787234
0.034042553  0.042553191  0.025531915  0.042553191  0.034042553
```

```

0.004255319 0.012765957 0.017021277 0.008510638 0.008510638
0.012765957 0 0.021276596 0.004255319 0 0.004255319];

```

```

for N=Nmax:-1:1

```

```

    for e=size(etapas,2):-1:1

```

```

        for i=size(estados,2):-1:1

```

```

            for k=1:size(salidas,2)

```

```

                for x=1:size(ingresos,2)

```

```

                    j(x,k,i,e,N)=estados(1,i)+ingresos(1,x)-salidas(1,k);

```

```

                    %Correcciones de los valores de j

```

```

                    if j(x,k,i,e,N)<estados(1,1)

```

```

                        j(x,k,i,e,N)=estados(1,1);

```

```

                    end

```

```

                    if j(x,k,i,e,N)>estados(1,end)

```

```

                        j(x,k,i,e,N)=estados(1,end);

```

```

                    end

```

```

                end

```

```

            end

```

```

            %%%%%%%%%Aquí sólo estoy haciendo lo de la etapa 3 de N=Nmax%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

            %%%%%%%%%%

```

```

        valor único de j

```

```

        valor único de B

```

```

            if c==d %Comparo ambos vlores para ver si son iguales

```

```

                Bast(a,z,i,e,N)=B(b,3,15,3,Nmax);

```

```

                Prob=probetapas(2,a);

```

```

                X=Bast(a,z,i,e,N);

```

```

                ProbxBast(a,z,i,e,N)=Prob*X; %Para cada matrisita voy

```

```

a tener tantas columnas como valores de k

```

```

                %Escribo el beneficio asociado

```

```

                %a la etapa 1 de cada k y de cada i

```

```

M=ProbxBast(:,z,i,e,N); %todos los renglones, k=1,
i=1
P=phietapa2(z,16-i);%k=1, i=1 pero i=1 está en la 15
columna (pongo 16-1)
Bnueva(z,i)=sum(M)+P; %son los cuadros verdes de
excel
[val,idx]=max(Bnueva,[],1);
Bajustada(:,e,N)=[estados',[idx;val-min(val)]'];
end
end
end
end
end

```

%%%

```

if N==Nmax && e==1
%Aquí solamente obtengo Bast para la etapa 2 de N=Nmax(32850) con
%base en las B obtenidas previamente en un ciclo for
for z=1:1:71 %Número de vectores que tiene la matriz j
for a=1:1:71 %renglones de j
for b=1:1:15 %renglones de b, número de estados que tengo
c=j(a,z,i,1,Nmax); %defino una nueva variable como el
valor único de j
d=Bajustada(b,1,2,Nmax); %defino una nueva variable como
el valor único de B
if c==d %Comparo ambos vlores para ver si son iguales
Bast(a,z,i,e,N)=Bajustada(b,3,2,Nmax);
Prob=probetapas(1,a);
X=Bast(a,z,i,e,N);
ProbxBast(a,z,i,e,N)=Prob*X; %Para cada matriz voy a
tener tantas columnas como valores de k
%Escribo el beneficio asociado
%a la etapa 1 de cada k y de cada i
M=ProbxBast(:,z,i,e,N); %todos los renglones, k=1,
i=1
P=phietapa1(z,16-i);%k=1, i=1 pero i=1 está en la 15
columna (pongo 16-1)
Bnueva(z,i)=sum(M)+P; %son los cuadros verdes de
excel
[val,idx]=max(Bnueva,[],1);
Bajustada(:,e,N)=[estados',[idx;val-min(val)]'];
end
end
end
end
end

```

%%%

```

if N<Nmax && e==3

```