



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

*Flujo de Curvatura Media y Variedades Simplécticas*

*Tesis*

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

EDUARDO IVÁN VELÁZQUEZ RICHARDS

DIRECTOR DE LA TESIS

DR. PABLO SUÁREZ SERRATO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, CU

MIEMBRO COMITÉ TUTOR

Dr. Renato Carlos Calleja Castillo  
IIMAS

Dr. Gabriel Ruiz Hernández  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, Juriquilla

Cd. de México, Noviembre del 2022.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice general

<b>Introducción</b> .....	<b>5</b>
<b>1. Generalidades</b> .....	<b>9</b>
1.1. Conexión y Curvatura $\diamond$ 1.2. Variedades Simpléticas $\diamond$ 1.3. Variedades Complejas y Kähler.	
<b>2. Flujo de Curvatura Media</b> .....	<b>21</b>
2.1. Ejemplos de Evolución por Flujo de Curvatura Media $\diamond$ 2.2. Evolución de Cantidades Geométricas bajo el Flujo de Curvatura Media Simplético.	
<b>3. Flujo de Curvatura Media y Estructura Simplética</b> .....	<b>41</b>
3.1. Subvariedades Simpléticas $\diamond$ 3.2. Subvariedades Lagrangianas: Esferas de Whitney $\diamond$ 3.3. Ángulo de Kähler en Esferas de Whitney.	
<b>4. Aplicaciones</b> .....	<b>73</b>
4.1. Flujo de Curvatura Media Renormalizado $\diamond$ 4.2. Flujo de Curvatura Media y Campos Hamiltonianos.	
<b>Conclusiones</b> .....	<b>83</b>
<b>Apéndices</b> .....	<b>87</b>
A. Proyección a $\mathbb{R}^3$ de esfera de Whitney (Código) $\diamond$ B. Existencia y Unicidad de Soluciones al FCM en una Vecindad Tubular $\diamond$ C. Desigualdad de Hölder (Generalizada) $\diamond$ D. Solución al FCM de un Arco de Curva con Extremos Fijos.	
<b>Bibliografía</b> .....	<b>103</b>



# Introducción

Deformar una curva a lo largo de su dirección normal con una rapidez proporcional a la curvatura es un modelo que ha sido utilizado en diversas áreas, por ejemplo, para estudiar el crecimiento de cristales, la interfaz entre dos fluidos, la segmentación de imágenes, entre otras. En Geometría Diferencial, un problema relacionado con estas aplicaciones es el *Flujo de Curvatura Media*. A partir de la inmersión inicial  $F_0 : M \rightarrow \widetilde{M}$  de una subvariedad inicial  $M_0$  en una variedad ambiente  $\widetilde{M}$ , este problema consiste en encontrar una  $t$ -familia de inmersiones  $F(t)$  tal que para todo punto  $\mathbf{p}$  en  $M$  se cumpla

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{p}, t) &= \mathbf{H}(\mathbf{p}, t) \\ F(\mathbf{p}, 0) &= F_0(\mathbf{p}), \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $\mathbf{H}$  es el vector de curvatura media de la subvariedad inmersa al tiempo  $t$ .

Una de las soluciones explícitas más conocidas del Flujo de Curvatura Media es el *Grim Reaper* [27]. Esta solución consiste en una familia de curvas invariante bajo una traslación, y cuyo vector de traslación coincide con el vector de curvatura. En la Figura 1 se muestran algunas curvas pertenecientes a esta familia, en color rojo se ha señalado la curva inicial y, utilizando diferentes intensidades de negro, se ha representado su traslación.

Este trabajo aborda el problema de Flujo de Curvatura Media en un contexto de variedades

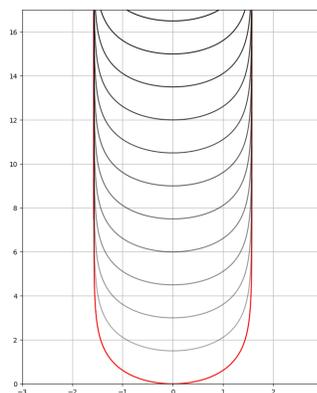


Figura 1: (**Grim Reaper**)  
Ejemplo de una familia de curvas que satisface el Flujo de Curvatura Media.

simplécticas, a saber, buscamos estudiar el Flujo de Curvatura Media de subvariedades dotadas de una estructura simpléctica, y cuya forma simpléctica es heredada de la variedad ambiente. Existen distintas variantes de este problema, por ejemplo, considerar variedades ambiente de tipo Einstein, restringirse a subvariedades reales o complejas, soluciones invariantes bajo algún grupo, etc [12, 22, 37].

El objetivo de este trabajo fue identificar las repercusiones que tiene la estructura simpléctica en las soluciones que podemos encontrar en un problema de Flujo de Curvatura Media. Con este fin decidimos restringir nuestro análisis al contexto de una variedad ambiente de tipo Kähler y hacer una distinción entre subvariedades simplécticas y lagrangianas.

Las aportaciones de este trabajo las podemos distinguir por capítulo:

En el primer capítulo definimos la notación y los conceptos geométricos necesarios que se utilizan en el resto de este trabajo; para esto nos hemos basado en el trabajo de Ballman [5] y O'Neill [35].

En el segundo capítulo se define el Flujo de Curvatura Media para subvariedades de codimensión arbitraria y se presentan ejemplos explícitos que no aparecen en la literatura. Entre las cualidades que distinguen a estos ejemplos, de otros también explícitos, podemos encontrar que las variedades ambiente son distintas a  $\mathbb{R}^2$ , y en uno de ellos la codimensión es distinta de uno. En particular resaltamos el Ejemplo 3, el cual, en conocimiento del autor de este trabajo, es el primer ejemplo explícito, no trivial y no autosimilar de una familia de curvas no planas que satisfacen el Flujo de Curvatura Media, más aún, este ejemplo es asintóticamente convergente y no desarrolla singularidades.

Este segundo capítulo finaliza con el cálculo de la evolución de algunas cantidades geométricas bajo el Flujo de Curvatura Media Simpléctico. A partir de estos cálculos se deriva una primer implicación que aporta la estructura simpléctica al problema de Flujo de Curvatura Media: la posibilidad de calcular la evolución del tensor métrico a través de la evolución de la 2-forma simpléctica (Corolario 2.8). Si bien parece un resultado inmediato, la comparación entre el Lema 2.5 y el Corolario 2.7 muestra la enorme reducción de términos y la interpretación que se logra a partir de la evolución de la forma simpléctica en la subvariedad como el *pullback* de una 2-forma dependiente del vector de curvatura media.

En el tercer capítulo hacemos una distinción entre subvariedades simplécticas y lagrangianas a través del ángulo de Kähler. Para subvariedades simplécticas (subvariedades cuyo coseno del ángulo de Kähler es positivo), el Teorema 3.7 muestra otra consecuencia que tiene la estructura simpléctica para el Flujo de Curvatura Media, la cual podemos resumir como: no existe una subvariedad compleja que sea el equivalente simpléctico al *Grim Reaper* (Teorema 3.7) cuando la variedad ambiente es Kähler. Las subvariedades lagrangianas (subvariedades cuyo coseno del ángulo de Kähler es cero) se abordan de una manera menos general, ya que nos hemos limitado a una familia en particular de subvariedades lagrangianas: las *esferas de Whitney*.

La dificultad de abordar un problema más general para el caso lagrangiano radica en el Teorema 3.2 [29] que describe la evolución del ángulo de Kähler bajo el Flujo de Curvatura Media. Para subvariedades lagrangianas, el coseno de este ángulo es cero y es un invariante, lo cual anula la mayoría de los términos que describen esta evolución, haciendo necesarias otras herramientas de análisis. Si bien la evolución por Flujo de Curvatura Media de las esferas de Whitney se ha abordado en [37], el principal aporte de este trabajo a la evolución de subvariedades lagrangianas es la solución numérica al Flujo de Curvatura Media de esferas de Whitney.

Sin embargo, aunque la motivación principal es investigar las diferencias entre el Flujo de Curvatura Media en  $\mathbb{R}^n$  y simpléctico, presentamos una coincidencia: el método numérico explícito y paralelizable que proponemos para calcular la evolución de esferas de Whitney, también puede utilizarse para el Flujo de Curvatura Media en el plano, ya que la evolución de esferas de Whitney se reduce a la evolución de una curva (curva perfil). Este método lo hemos presentado como artículo [40] para resolver numéricamente un Flujo de Curvatura Media condicionado (anisotrópico), el cual se reduce a la ecuación (1) eligiendo ciertos parámetros. Además, al final de este trabajo presentamos una mejora de este método numérico a la aplicación al reconocimiento de contornos en imágenes digitales.

Si bien la evolución de esferas de Whitney se reduce a la evolución de una curva, la ecuación de evolución consta de dos términos, ambos en la dirección normal a la curva. Estos términos pueden incluirse en nuestro esquema numérico sin ver modificado su desempeño. Al final de la sección 3.2, mostramos una comparación entre nuestro método y una modificación equivalente implementada en otro método propuesto por Kimura [25]. A partir de nuestro método se obtiene una mejor aproximación al preservar la simetría de la curva en evolución, y abre la posibilidad de utilizarlo en otros flujos dependientes de la curvatura y en la evolución de otras subvariedades

lagrangianas equivariantes, es decir, invariantes bajo algún grupo lo cual a su vez reduce su evolución al de una curva perfil; para estas subvariedades existe cierto interés en sus aplicaciones [4, 23].

Finalizamos el capítulo 3 con una demostración de la invarianza de la estructura lagrangiana para las esferas de Whitney. En este resultado, aunque limitado a esta familia de subvariedades, no utilizamos el Principio del Máximo, alguna condición sobre la variedad ambiente (ser de tipo Einstein, por ejemplo), ni compacidad de la subvariedad; condiciones frecuentemente asumidas.

Finalmente, el Capítulo 4 se divide en dos secciones de aplicación. En la primer sección se describe una mejora a los resultados de nuestro esquema numérico. A diferencia del Capítulo 3, en [40] presentamos una aplicación del Flujo de Curvatura Media a la parametrización de contornos, es decir, al problema de encontrar una representación discreta del contorno de una región plana, acotada y conexa. Sin embargo, en esta sección se aborda el problema de refinar iterativamente una primer aproximación obtenida por nuestro esquema numérico. El resultado principal de este capítulo es el Teorema 4.1, donde se da una cota en el tiempo de convergencia del refinamiento. En la segunda sección del Capítulo 4, se parte del invarianza de la estructura simpléctica bajo el Flujo de Curvatura Media (Teorema 4.2) para demostrar que el vector de curvatura media de una curva holomorfa o de una subvariedad lagrangiana en evolución es un campo hamiltoniano (Teorema 4.4).

Este trabajo fue posible gracias al proyecto de PAPIIT IN104819-162120/224620 y a CONACYT.

# Capítulo 1

## Generalidades

En este capítulo definiremos las estructuras geométricas básicas para el resto de los capítulos y estableceremos la notación requerida.

**Definición 1.1.** Una variedad diferenciable  $M^n$  es un espacio topológico de Hausdorff, segundo numerable, localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  y en el cual se satisfacen las siguientes tres condiciones (estructura diferenciable):

- Para cada punto  $\mathbf{p}$  en  $M$  es posible dar una pareja  $(U, \phi)$  denominada carta, formada por un abierto  $U \subset M$  y un homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sobre un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .
- Sean  $(U, \phi), (V, \psi)$  dos cartas de  $M$  para las que  $U \cap V \neq \emptyset$ , los mapeos  $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$  son de clase  $C^k$ .
- Para una colección  $\mathcal{A}$  de cartas  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  se cumple

$$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}.$$

Asociada a cada variedad diferenciable tenemos su espacio tangente:

**Definición 1.2.** Sea  $\mathbf{p}$  un punto en una variedad  $M$  y  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  una curva tal que  $\gamma(0) = \mathbf{p}$ , y  $\varphi \circ \gamma$  es un mapeo diferenciable para alguna carta  $(U, \phi)$  en la cual  $\mathbf{p} \in U$ . Dada una carta  $(U, \phi)$  y un punto  $\mathbf{p}$  en  $U$ , diremos que dos curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  que pasan por  $\mathbf{p}$  son equivalentes  $\sim_{\mathbf{p}}$  si ambas tienen la misma derivada en  $\mathbf{p}$ , es decir, si  $(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0)$ .

Un vector tangente en  $\mathbf{p}$  es la clase de equivalencia de todas las curvas que pasan por  $\mathbf{p}$  bajo la relación de equivalencia  $\sim_{\mathbf{p}}$  y llamamos espacio tangente  $T_{\mathbf{p}}M$  al conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en  $\mathbf{p}$ . A su vez, llamaremos haz tangente  $TM$  a la unión disjunta

$$TM = \bigsqcup_{\mathbf{p} \in M} T_{\mathbf{p}}M.$$

Más aún, para un sistema de coordenadas en  $\mathbf{p}$ , el espacio tangente  $T_{\mathbf{p}}M$  tiene estructura de espacio vectorial y el conjunto  $\{\frac{\partial}{\partial x^i} \big|_{\mathbf{p}} \mid 1 \leq i \leq n\}$  forma una base de  $T_{\mathbf{p}}M$ .

La estructura diferenciable en variedades también permite definir mapeos diferenciables entre variedades:

**Definición 1.3.** Dado un mapeo  $F : M^m \rightarrow N^n$  entre dos variedades, si  $(U, \phi)$  es una carta de  $M^m$  tal que  $U$  es una vecindad de un punto  $\mathbf{p} \in M^m$ , y  $(V, \psi)$  es una carta de  $N^n$  tal que  $V$  es una vecindad de la imagen de  $\mathbf{p}$  bajo  $F$ , decimos que el mapeo  $F$  es diferenciable si  $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$  es diferenciable como función de  $\mathbb{R}^m$  a  $\mathbb{R}^n$ .

Asímismo, un mapeo diferenciable  $F$  entre variedades también induce un mapeo entre espacios tangente a partir de  $F$ , a saber:

Sea  $(y_1, \dots, y_n)$  un sistema coordenado de  $N$  y  $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}_{i=1}^n$  una base de  $T_{F(\mathbf{p})}N^n$ ,

$$\begin{aligned} dF : T_{\mathbf{p}}M &\rightarrow T_{F(\mathbf{p})}N \\ dF \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \bigg|_{\mathbf{p}} \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (y^i \circ F)}{\partial x^j} (\mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial y^i} \bigg|_{F(\mathbf{p})} \end{aligned} \quad (1.1)$$

para  $1 \leq j \leq m$ .

A partir de lo anterior, definimos a las inmersiones.

**Definición 1.4.** Sea  $F : M^m \rightarrow N^n$  un mapeo diferenciable entre variedades, se dice que  $F$  es una *inmersión* si  $dF$  es inyectiva.

**Definición 1.5.** Sean  $\widetilde{M}$  y  $M$  variedades diferenciables, se dice que  $M$  es *subvariedad* de  $\widetilde{M}$  si es un subespacio topológico de  $\widetilde{M}$  y el mapeo inclusión  $\iota : M \rightarrow \widetilde{M}$  es una *inmersión*. En este contexto, a  $\widetilde{M}$  se le llama *variedad ambiente*.

Utilizaremos una tilde para distinguir lo perteneciente a la variedad ambiente, por ejemplo: el espacio tangente en un punto  $\mathbf{p}$  de  $\widetilde{M}$  lo representaremos como  $T_{\mathbf{p}}\widetilde{M}$ .

Denotaremos a una métrica Riemanniana en una variedad  $M$  como el tensor  $\mathbf{g}$  con componentes

$$g_{ij} = \mathbf{g}(\partial_i, \partial_j), \quad (1.2)$$

donde  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  y  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$  pertenecen a una base del espacio tangente de  $M$  en un punto  $\mathbf{p}$ .

A partir de una métrica  $\widetilde{\mathbf{g}}$  en una variedad ambiente y una inmersión  $F$ , en capítulos posteriores la siguiente dotaremos a subvariedades con la siguiente métrica.

**Definición 1.6.** *Sea  $M$  subvariedad de  $\widetilde{M}$  y  $\widetilde{\mathbf{g}}$  métrica de la variedad ambiente. Dada  $F : M \rightarrow \widetilde{M}$  una inmersión, se define la métrica inducida sobre  $M$  como*

$$\mathbf{g}(\partial_i, \partial_j) = \widetilde{\mathbf{g}}(dF(\partial_i), dF(\partial_j)) \quad (1.3)$$

## 1.1. Conexión y Curvatura

Sea  $\mathfrak{F}(M)$  el conjunto de funciones reales en  $M$  y sea  $\mathfrak{X}(M)$  el conjunto de campos vectoriales diferenciables en  $M$ , y sean  $V$  y  $W$  dos campos diferenciables en  $M$ , definimos

**Definición 1.7.** *La conexión  $\nabla$  de  $M$  es una función  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  tal que*

- $\nabla_V W$  es  $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en  $V$ .
- $\nabla_V W$  es  $\mathbb{R}$ -lineal en  $W$ .
- $\nabla_V fW = (Vf)W + f\nabla_V W$

para  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ , y para  $W := \sum W^i \partial_i$  se llama derivada covariante de  $W$  respecto a  $V$  y se calcula como  $\nabla_V W = \sum V(W^i) \partial_i$ .

Definiremos también el gradiente, el operador de Laplace.

**Definición 1.8.** Sea  $f$  en  $\mathfrak{F}(M)$ , el gradiente de  $f$  se define en términos de un sistema coordenado como

$$\text{grad } f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j. \quad (1.4)$$

**Definición 1.9.** Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y  $g$  una métrica riemanniana de  $M$ , se define  $\Delta_g f$  (el laplaciano de  $f$ ) como la contracción de la derivada covariante de su diferencial, es decir

$$\begin{aligned} \Delta_g f &= \mathbf{C}_{12} \nabla df(X, Y) \\ &= \mathbf{C}_{12} \nabla_Y (df(X)) \\ &= \mathbf{C}_{12} (Y(df(X)) - df(\nabla_Y X)) \\ &= \mathbf{C}_{12} (Y X f - (\nabla_Y X) f) \\ &= \sum_{i,j} g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

aquí  $\mathbf{C}_{12}$  es el factor de contracción y  $\Gamma_{ij}^k$  son los símbolos de Christoffel que surgen al calcular  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$  y cuya expresión explícita es

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\}. \quad (1.6)$$

**Definición 1.10.** Sea  $[X, Y] = XY - YX$  para dos campos  $X, Y$ , definimos al tensor de curvatura  $\mathcal{R}$  por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ \mathcal{R}_{XY}Z &= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z. \end{aligned}$$

A través del mapeo inclusión  $i$  y su diferencial podemos extender los vectores tangentes a una subvariedad a la variedad ambiente; y con esto, dada  $M$  una subvariedad de una variedad  $\widetilde{M}$ , la conexión  $\widetilde{\nabla}$  de  $\widetilde{M}$  induce una conexión  $\nabla$  sobre la subvariedad  $M$ . Asimismo, a partir de las definiciones 1.4- 1.6 tenemos la siguiente suma directa.

$$T_{\mathbf{p}}\widetilde{M} = T_{\mathbf{p}}M \oplus (T_{\mathbf{p}}M)^{\perp}.$$

En este contexto, llamaremos *vectores normales* a  $M$  en  $\mathbf{p}$  a los vectores en  $(T_{\mathbf{p}}M)^{\perp}$ . A partir de aquí usaremos el superíndice  $(\perp)$  para referirnos a la proyección de un

campo en  $\widetilde{M}$  sobre el haz normal a  $M$ , y por  $(\top)$  a la proyección sobre el haz tangente.

Sea  $\mathbf{p}$  un punto en una subvariedad  $M \subset \widetilde{M}$  y sean  $V, W$  dos campos tangentes a la subvariedad y  $\nu$  en  $(T_{\mathbf{p}}M)^\perp$ , definimos la siguiente forma bilineal:

$$\begin{aligned} A_\nu : T_{\mathbf{p}}M \times T_{\mathbf{p}}M &\rightarrow \mathbb{R} \\ A_\nu(V, W) &= \widetilde{\mathbf{g}} \left( \widetilde{\nabla}_{\widetilde{V}} \widetilde{W}, \nu \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

cuyas componentes son

$$A_{ij} = A_\nu(\partial_i|_{\mathbf{p}}, \partial_j|_{\mathbf{p}}) \quad (1.8)$$

**Definición 1.11.** La forma cuadrática  $II_\nu$  asociada a (1.7)

$$II_\nu(W) = A_\nu(W, W), \quad (1.9)$$

se conoce como 2<sup>da</sup> forma fundamental en  $\mathbf{p}$  a lo largo de  $\nu$ .

**Definición 1.12.** Sea  $M^m$  una subvariedad de  $N^n$  y sea  $\{e_1, \dots, e_m\}$  un marco ortogonal de su espacio tangente y  $\{\nu_1, \dots, \nu_{n-m}\}$  una base ortonormal de su haz normal. Definimos en  $M$  el vector de curvatura media  $\mathbf{H}$  como

$$\mathbf{H} = \sum_{i,\alpha} g^{ii} h_{ii}^\alpha \nu_\alpha,$$

con  $1 \leq \alpha \leq n - m$  y  $h_{ij}^\alpha$  la componente  $ij$  en la dirección  $\nu_\alpha$  de la segunda forma fundamental. Usando la ecuación (1.7) damos una expresión explícita:

$$\begin{aligned} h_{ij}^\alpha &= A_\alpha(e_i, e_j) \\ &= \langle \widetilde{\nabla}_{e_i} e_j, \nu_\alpha \rangle. \end{aligned}$$

**Definición 1.13.** Sea  $M$  una variedad con métrica  $g$ ,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  un marco de su espacio tangente y  $\mathcal{R}$  su tensor de curvatura, y sean  $X, Y$  dos campos tangentes a  $M$ . Definimos la curvatura de Ricci  $\text{Ric}(X, Y)$  como la contracción  $\mathbf{C}_3^1$  de  $\mathcal{R}$ , es decir,

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_i g_{ii} \langle e_i, \mathcal{R}(X, Y, e_i) \rangle.$$

**Definición 1.14.** La curvatura escalar  $R$  de una variedad  $M$  es la contracción de la curvatura de Ricci.

En las siguientes secciones se describen las propiedades de algunas variedades diferenciales con estructuras geométricas adicionales.

## 1.2. Variedades Simplécticas

**Definición 1.15.** Una variedad  $M$  es simpléctica si existe una 2-forma  $\omega$  cerrada y no degenerada. Llamamos a  $\omega$  forma simpléctica.

**Definición 1.16.** Una subvariedad  $L$  de una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  es lagrangiana si  $\omega|_L = 0$ .

**Ejemplo. Haz cotangente de una variedad.** Sea  $M^n$  una variedad diferenciable con un sistema coordenado  $(q_1, \dots, q_n)$  y sea  $T_q^*M^n$  el espacio dual del espacio tangente a la variedad en un punto  $\mathbf{q}$ . Definimos el haz cotangente  $T^*M^n$  como

$$T^*M^n = \bigcup_{\mathbf{q} \in M} \{\mathbf{q} \times T_q^*M^n\}.$$

Sea  $j = 1, \dots, n$ , definimos  $p_j$  como el dual de  $\partial_{q_j} \in T_qM^n$ . A partir de la definición de haz cotangente, podemos asignarle el sistema coordenado

$$(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n).$$

El haz  $T^*M^n$  tienen estructura de variedad diferenciable y si además definimos la 2-forma

$$\omega = \sum_j dq_j \wedge dp_j,$$

tiene estructura simpléctica.

Por otra parte,  $M^n$  es una subvariedad lagrangiana de  $T^*M^n$  ya que el conjunto  $\{\partial_{q_1}, \dots, \partial_{q_n}\}$  es base de su espacio tangente y  $\omega(\partial_{q_i}, \partial_{q_j}) = 0$ . □

**Definición 1.17.** Sean  $(M_1, \omega_1)$  y  $(M_2, \omega_2)$  dos variedades simplécticas, y sea  $F : M_1 \rightarrow M_2$  un mapeo diferenciable. Se dice que  $F$  es un simplectomorfismo si

$$\omega_2 = F^*\omega_1.$$

### 1.3. Variedades Complejas y Kähler

Algunas de las variedades que estudiaremos son complejas por lo cual es necesario adaptar algunas de las definiciones de las secciones anteriores:

**Definición 1.18.** Una variedad compleja  $M$  es una variedad diferenciable que admite cartas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  donde  $U_\alpha$  es un abierto de  $M$  y  $\varphi_\alpha = U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$  es un homeomorfismo. Además, dadas dos cartas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  y  $(U_\beta, \varphi_\beta)$ , el mapeo  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  es holomorfo en  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$ .

Debido a que la imagen de  $U_\alpha$  bajo  $\varphi_\alpha$  es un abierto de  $\mathbb{C}^n$ , también podemos identificarlos como abiertos de  $\mathbb{R}^{2n}$  y considerar que el espacio tangente de una variedad compleja  $M$  con cartas coordenadas  $z_j = x_j + iy_j$  es el espacio generado por

$$\{\partial_{x_j}, \partial_{y_j}\}_{j=1}^n.$$

Sin embargo, podemos *complexificar* este espacio tangente, es decir, podemos dotarlo de una estructura de espacio vectorial complejo:

Definimos el operador:

$$\begin{aligned} J(\partial_{x_j}) &= \partial_{y_j} \\ J(\partial_{y_j}) &= -\partial_{x_j} \end{aligned}$$

y también definimos

$$\begin{aligned} \partial_{z_j} &= \partial_{x_j} - i\partial_{y_j} \\ \partial_{\bar{z}_j} &= \partial_{x_j} + i\partial_{y_j}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Debido a este isomorfismo, el espacio tangente  $T_z M$  es el espacio generado por los elementos del conjunto

$$\{\partial_{z_j}, \partial_{\bar{z}_j}\}_{j=1}^n,$$

además  $J$  puede extenderse a  $T_z M$  como

$$\begin{aligned} J(\partial_{z_j}) &= i\partial_{z_j} \\ J(\partial_{\bar{z}_j}) &= -i\partial_{\bar{z}_j}. \end{aligned}$$

La siguiente definición nos ayudará a definir algunas estructuras geométricas de interés.

**Definición 1.19.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $TM$  su haz tangente, decimos que un endomorfismo  $J : TM \rightarrow TM$  es una estructura casi compleja si  $J^2 = -\text{id}$ .

**Definición 1.20.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con métrica  $g$  y estructura casi compleja  $J$ , se dice que  $J$  es compatible con  $g$ , si para cualquier par de vectores  $X, Y$  tangentes a  $M$  se satisface  $g(X, Y) = g(JX, JY)$ .

**Definición 1.21.** Sea  $M$  una variedad y  $J$  una estructura casi compleja definida en su haz tangente. Decimos que  $J$  es una estructura compleja en  $M$  si para cualquier par de campos tangentes  $X, Y$ , el siguiente tensor

$$N_J(X, Y) := [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY],$$

llamado tensor de Nijenhuis, se anula.

Finalmente, podemos definir las variedades Kähler que son de interés en este trabajo.

**Definición 1.22.** Una variedad Kähler  $(M, \omega, J)$  es una variedad simpléctica con forma simpléctica  $\omega$  (llamada forma de Kähler) y estructura compleja  $J$ , tal que

$$g(\cdot, \cdot) := \omega(\cdot, J\cdot)$$

define una métrica con la que  $J$  es compatible.

A continuación definiremos una métrica que utilizaremos en futuros análisis:

**Definición 1.23.** Sea  $M$  una variedad Kähler con coordenadas complejas  $z_1, \dots, z_n$ , sea  $\{\partial_{z_i}, \partial_{\bar{z}_i}\}_{i=1}^n$  una base de su espacio tangente, y sea  $J$  su estructura compleja asociada que satisface

$$\begin{aligned} J(\partial_{z_i}) &= i\partial_{z_i} \\ J(\partial_{\bar{z}_i}) &= -i\partial_{\bar{z}_i}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Si definimos la 2-forma

$$\omega_{FS} := i \frac{(1 + \sum z_k \bar{z}_k)(\sum dz^k \wedge d\bar{z}^k) - (\sum \bar{z}_k dz^k) \wedge (\sum z_j d\bar{z}^j)}{(1 + \sum z_k \bar{z}_k)^2}, \tag{1.12}$$

entonces para cualquier par de campos  $X$  y  $Y$

$$g_{FS}(X, Y) := \omega_{FS}(X, JY) \tag{1.13}$$

define una métrica llamada métrica de Fubini-Study.

**Lema 1.24.** (Ballmann [5]) Sea  $\{\partial_{z_1}, \partial_{\bar{z}_1}, \dots, \partial_{z_n}, \partial_{\bar{z}_n}\}$  una base del espacio tangente de una variedad Kähler con coordenadas  $z_1, \dots, z_n$ . Si denotamos a los elementos de esta base como  $e_j$  con  $j = 1, \bar{1}, 2, \bar{2}, \dots, n, \bar{n}$ , entonces los únicos símbolos de Christoffel no nulos son aquellos que no mezclan índices conjugados  $(\bar{1}, \dots, \bar{n})$  con índices no conjugados  $(1, \dots, n)$ , es decir,

$$\Gamma_{ij}^k \neq 0 \text{ y } \Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} \neq 0,$$

para  $i, j, k = 1, \dots, n$ . Además

$$\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} = \overline{(\Gamma_{ij}^k)}.$$

**Ejemplo. Espacio Proyectivo Complejo.** Definimos la siguiente relación de equivalencia  $\sim_{\mathbb{C}P}$ : Sean  $z$  y  $w$  dos puntos en  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ , si existe un número complejo  $\lambda \neq 0$  tal que  $z = \lambda w$  entonces diremos que  $z$  es equivalente a  $w$ , es decir,  $z \sim_{\mathbb{C}P} w$ . Definimos el *Espacio Proyectivo Complejo*  $\mathbb{C}P^n$  como el conjunto de las clases de equivalencia de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  bajo la relación  $\sim_{\mathbb{C}P}$ .

Sea  $\alpha = 0, \dots, n$ , podemos dotar a  $\mathbb{C}P^n$  de las siguientes cartas  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ :

$$U_\alpha = \{z = (z_0, \dots, z_n) \mid z \in \mathbb{C}^{n+1}, z_\alpha \neq 0\}.$$

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : U_\alpha &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ \psi_\alpha(z_0, \dots, z_\alpha, \dots, z_n) &= \left( \frac{z_0}{z_\alpha}, \dots, \frac{z_{\alpha-1}}{z_\alpha}, \frac{z_{\alpha+1}}{z_\alpha}, \dots, \frac{z_n}{z_\alpha} \right). \end{aligned}$$

Para un punto  $x \in \mathbb{C}P^n$  en una carta  $U_\alpha$ , usaremos el siguiente sistema de coordenadas:

$$[z_1, \dots, z_{\alpha-1}, 1, z_{\alpha+1}, \dots, z_n],$$

si además  $z_j = x_j + iy_j$ , una base de  $T_z(\mathbb{C}P^n)$  es

$$\{\partial_{x_1}, \partial_{y_1}, \dots, \partial_{x_n}, \partial_{y_n}\}.$$

Sin embargo, por tratarse de una variedad compleja definiremos

$$\begin{aligned} \partial_{z_j} &:= \partial_{x_j} - i\partial_{y_j} \\ \partial_{\bar{z}_j} &:= \partial_{x_j} + i\partial_{y_j} \end{aligned} \tag{1.14}$$

y usaremos el conjunto

$$\{\partial_{z_1}, \partial_{\bar{z}_1}, \dots, \partial_{z_n}, \partial_{\bar{z}_n}\} \quad (1.15)$$

como una base para dotar a  $T_z(\mathbb{C}P^n)$  con una estructura de espacio vectorial complejo. Definiremos el endomorfismo  $J$  que da lugar a la estructura compleja de la siguiente manera

$$J : T_z(\mathbb{C}P^n) \rightarrow T_z(\mathbb{C}P^n)$$

$$\begin{aligned} J(\partial_{x_j}) &= \partial_{y_j} \\ J(\partial_{y_j}) &= -\partial_{x_j} \end{aligned}$$

para  $j = 1, \dots, n$ . De esta manera recuperamos las relaciones (1.11)

$$J(\partial_{z_j}) = J(\partial_x) - iJ(\partial_y) = \partial_{y_j} + i\partial_{x_j} = i(\partial_{x_j} - i\partial_{y_j}) = i\partial_{z_j}$$

$$J(\partial_{\bar{z}_j}) = J(\partial_x) + iJ(\partial_y) = \partial_{y_j} - i\partial_{x_j} = -i(\partial_{x_j} + i\partial_{y_j}) = -i\partial_{\bar{z}_j}$$

Usando la base 1.15 definimos los elementos duales  $dz^j(\partial_{z_k}) = \delta_{jk}$  y con ellos la 2-forma simpléctica no degenerada:

$$\omega = i \frac{(1 + \sum z_k \bar{z}_k)(\sum dz^j \wedge d\bar{z}^j) - (\sum \bar{z}_k dz^k) \wedge (\sum z_j d\bar{z}^j)}{(1 + \sum z_k \bar{z}_k)^2} \quad (1.16)$$

□

Como una herramienta de análisis en variedades Kähler también podemos definir el *ángulo de Kähler*:

**Definición 1.25.** *Sea  $M$  una variedad Kähler con forma de Kähler  $\omega$  y estructura compleja  $J$ , cuya métrica  $g$  satisface  $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ . Sea  $\{e_1, e_2\}$  una base ortonormal de un subespacio vectorial de dimensión dos del haz tangente, se define el ángulo de Kähler  $\theta$  de ese subespacio como*

$$\theta = \arccos |\omega(e_1, e_2)|. \quad (1.17)$$

A partir de la definición anterior y siguiendo a [11, p. 83], es posible clasificar las subvariedades  $M^2$  inmersas en una variedad Kähler  $\widetilde{M}^4$  de acuerdo a su ángulo de

Kähler. Sean  $e_1$  y  $e_2$  dos vectores tangentes a  $M$ , la ecuación (1.17) permite establecer el criterio de la Tabla 1.1

Alternativamente, también es posible definir este ángulo en variedades con solo estructura simpléctica o compleja, a saber,

- Si  $(M^4, \omega)$  es una variedad simpléctica y el conjunto  $\{e_1, e_2\}$  es una base ortonormal de un subespacio vectorial del haz tangente. Análogamente a la ecuación (1.17) podemos definir el ángulo de Kähler [11] a través de la forma simpléctica  $\omega$ .
- Si  $(M, J)$  es una variedad compleja con métrica  $g$ , podemos definir [24] el ángulo de Kähler de un subespacio vectorial de su haz tangente generado por una base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  como:

$$\theta = \arccos |g(Je_1, e_2)|.$$

Terminaremos esta sección con las siguientes definiciones que consideran un caso especial de variedades Kähler.

**Definición 1.26.** *Una variedad  $M$  con métrica  $g$  es Einstein si existe una función  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cualquier par de campos tangentes  $X, Y$  se cumple*

$$\mathbf{Ric}(X, Y) = \lambda g(X, Y).$$

**Definición 1.27.** *Una variedad es Kähler-Einstein si es Kähler y Einstein.*

Subvariedad	$\cos \theta$
<b>Lagrangiana</b>	0
<b>Simpléctica</b>	$> 0$
<b>Curva holomorfa</b>	1

Tabla 1.1: Clasificación de una subvariedad  $M$  inmersa en una variedad Kähler de acuerdo a su ángulo de Kähler.



## Capítulo 2

# Flujo de Curvatura Media

Este capítulo tiene tres objetivos principales: (1) dar una definición del Flujo de Curvatura Media para subvariedades de codimensión arbitraria (la cual será compatible con la evolución de subvariedades con estructura simpléctica), (2) presentar algunos ejemplos explícitos y originales que ilustran algunas propiedades del flujo cuyas características destacaremos más adelante, y (3) Calcular la evolución de algunas cantidades geométricas bajo el Flujo de Curvatura Media Simpléctico y su comparación con la versión clásica (cuando la variedad ambiente es  $\mathbb{R}^{n+1}$ ).

**Definición 2.1. (Flujo de Curvatura Media).** Sea  $\tau > 0$ ,  $M^n$  una subvariedad de  $\widetilde{M}^m$  y  $\{v_\alpha\}_{\alpha=1}^{m-n}$  una base ortonormal del haz normal a  $M$ . Sea

$$\mathbf{H} := \sum_{\alpha} H^\alpha v_\alpha$$

el vector de curvatura media de  $M$  y  $F_0 : M \rightarrow \widetilde{M}$  una inmersión. Decimos que  $M$  evoluciona por Flujo de Curvatura Media si existe una familia uniparamétrica de inmersiones  $F : M \times [0, \tau) \rightarrow \widetilde{M}$  tal que para todo  $\mathbf{p} \in M$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \mathbf{H} \\ F(\mathbf{p}, 0) &= F_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Antes de comenzar con el análisis geométrico vemos algunos ejemplos. Ejemplos distintos a los aquí presentados para hipersuperficies de  $\mathbb{R}^n$  se pueden encontrar en [27, 30].

## 2.1. Ejemplos de Evolución por Flujo de Curvatura - Media

En el trabajo de Lauret [27] se encuentran algunos de los ejemplos explícitos más frecuentemente citados del Flujo de Curvatura Media. Ellos consisten en soluciones autosimilares, es decir, en soluciones con invarianza traslacional, rotacional y/o de escala. Sin embargo, existen pocos ejemplos en los que se utilicen variedades ambiente distintas a  $\mathbb{R}^n$  o subvariedades de codimensión mayor a uno.

Los siguientes son ejemplos originales y explícitos del Flujo de Curvatura Media que buscan ilustrar algunas de las características de este flujo, y cuya generalización ha quedado establecida en diversos teoremas (ver por ejemplo Ecker [16] y Mantegazza [30]). Dentro de las características que hemos buscado resaltar se encuentran: la longitud como cantidad decreciente en el tiempo (para curvas en evolución), el suavizado o regularización del vector de curvatura, así como soluciones estacionarias no triviales.

El siguiente ejemplo es una alternativa al ejemplo clásico de circunferencias (o hiperesferas en general) que se contraen uniformemente hacia su centro. En este caso, la condición inicial determina si obtenemos una solución estacionaria o la contracción a un punto.

**Ejemplo 1. Círculos en  $\mathbb{S}^2$ .** Sean  $(\theta, \varphi)$  las funciones coordenadas de la esfera  $\mathbb{S}^2$  de radio 1 con la métrica  $g$  inducida por  $\mathbb{R}^3$ . Podemos representar a  $g$  y a su inversa  $g^{-1}$  en la base de vectores tangentes  $\{\partial_\theta, \partial_\varphi\}$  como

$$g = \begin{pmatrix} \text{sen}^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{sen}^2(\varphi)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea  $\varphi_0 \in (0, \pi/2]$  una constante, consideremos sobre esta esfera la curva  $\gamma(\theta)$  definida por

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) &= (\theta, \varphi_0) \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Veamos que existe una familia de curvas  $\gamma(\theta, t) = (\theta, \varphi(t))$  que es solución a la ecuación de Flujo de Curvatura Media. Comencemos por calcular el vector de curvatura media  $\mathbf{H}$  de  $\gamma$ . Este vector de curvatura media  $\mathbf{H}$  es paralelo a  $\partial_\varphi$ , ya que

ésta es la dirección normal a la curva.

De acuerdo con la definición 1.12, el vector de curvatura media  $\mathbf{H}$  depende de las componentes de la segunda forma fundamental  $h_{ij}$

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \left( \sum_i h_{ii} g^{ii} \right) \partial_\varphi \\ &= h_{\theta\theta} g^{\theta\theta} \partial_\varphi.\end{aligned}$$

Sea  $\nabla$  la conexión en  $\mathbb{S}^2$  y sean  $\Gamma_{ij}^k$  los Símbolos de Christoffel para  $i, j, k$  en  $\{\theta, \varphi\}$  respecto la métrica  $g$ ,

$$\begin{aligned}h_{\theta\theta} &= \langle \partial_\varphi, \nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta \rangle \\ &= \langle \partial_\varphi, \Gamma_{\theta\theta}^\theta \partial_\theta + \Gamma_{\theta\theta}^\varphi \partial_\varphi \rangle \\ &= \Gamma_{\theta\theta}^\varphi \\ &= \frac{1}{2} \left[ g^{\varphi\theta} \left( \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + g^{\varphi\varphi} \left( \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} [1 (-2 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi))] \\ &= -\operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi).\end{aligned}$$

De lo anterior resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= (h_{\theta\theta} g^{\theta\theta}) \partial_\varphi = -\frac{\cos \varphi(t) \operatorname{sen} \varphi(t)}{\operatorname{sen}^2 \varphi(t)} \partial_\varphi \\ &= -\cot \varphi(t) \partial_\varphi.\end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación Flujo de Curvatura Media se reduce a

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} \partial_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \partial_\varphi = -\cot \varphi(t) \partial_\varphi,$$

sujeta a la condición inicial  $\varphi(0) = \varphi_0$ .

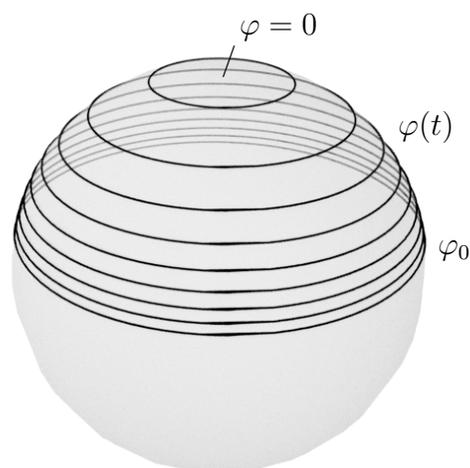


Figura 2.1:  
Evolución por Flujo de Curvatura Media de la curva  $\varphi = \varphi_0$  sobre  $\mathbb{S}^2$  hasta colapsar al punto  $\varphi = 0$ .

La solución a esta ecuación la podemos encontrar a partir de

$$\int_0^t -\frac{d\varphi}{\cot \varphi} = \int_0^t \frac{-\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} d\varphi = t,$$

de donde resulta

$$\ln(\cos(\varphi(\tau))) \Big|_0^t = t.$$

Por tanto,

$$\varphi(t) = \arccos(e^t \cos \varphi_0).$$

Veamos que la condición inicial  $\varphi_0 = \pi/2$  da lugar a una solución estacionaria:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \arccos\left(e^t \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \arccos(0) \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Por el contrario si  $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ , podemos estimar el tiempo máximo de existencia  $t^*$  del flujo antes de que la curva colapse a  $\varphi = 0$  (ver Figura 2.1); esto ocurre cuando

□

$e^{t^*} \cos \varphi_0 = 1$ , es decir,

$$t^* = \ln \left( \frac{1}{\cos \varphi_0} \right).$$

**Ejemplo 2. Curvas de nivel sobre un cono de revolución.** Sea  $\alpha \in (0, \pi/2)$ , consideremos el cono que se obtiene como superficie de revolución al rotar sobre el eje  $z$  la recta  $c(u) = (u \cos \alpha, 0, u \sin \alpha)$  en  $\mathbb{R}^3$ . Esta superficie puede describirse mediante la siguiente parametrización:

$$X(u, v) = (u \cos \alpha \cos v, u \cos \alpha \sin v, u \sin \alpha). \quad (2.2)$$

La métrica estándar de  $\mathbb{R}^3$  induce sobre esta superficie una métrica  $g_{ij}$  dada por

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \quad \text{cuya inversa es} \quad [g^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2 \cos^2 \alpha} \end{pmatrix}.$$

Sea  $u_0 \in \mathbb{R}$  y  $u(t) = \sqrt{u_0^2 - 2t}$ . La familia  $\gamma(v, t)$  de curvas parametrizadas por:

$$\gamma(v, t) = \begin{pmatrix} u(t) \cos \alpha \cos v \\ u(t) \cos \alpha \sin v \\ u(t) \sin \alpha \end{pmatrix},$$

es solución al Flujo de Curvatura Media (ver Figura 2.2), esto lo demostraremos calculando  $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$  y el vector de curvatura media  $\mathbf{H}$ :

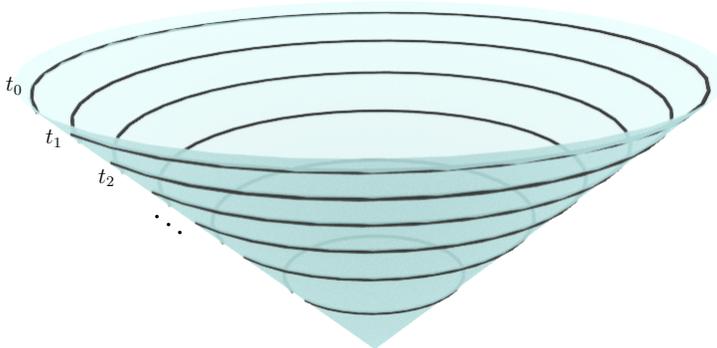


Figura 2.2:  
Las curvas de nivel del cono forman una  $t$ -familia de curvas solución al Flujo de Curvatura Media.

Sean  $h_{ij}$  las componentes de la segunda forma fundamental, calculamos  $\mathbf{H}$  como

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= h_{vv}g^{vv} \partial_u \\ &= -u \cos^2 \alpha \frac{1}{u^2 \cos^2 \alpha} \partial_u \\ &= -\frac{1}{u} \partial_u.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = u' \partial_u = \frac{-1}{\sqrt{u_0^2 - 2t}} \partial_u = -\frac{1}{u} \partial_u.\tag{2.4}$$

Si comparamos las ecuaciones (2.3) y (2.4), podemos concluir que la familia de curvas  $\gamma(v, t)$  satisface la ecuación de Flujo de Curvatura Media.  $\square$

En conocimiento del autor de este trabajo, el siguiente es el primer ejemplo explícito, no trivial y no autosimilar de una familia de curvas solución al Flujo de Curvatura Media; además, es asintóticamente convergente y no desarrolla singularidades.

Construiremos una familia de espirales sobre un helicoide que sea solución al Flujo de Curvatura Media, como se muestra en la Figura 2.3. Sin embargo, para poder escribir explícitamente este ejemplo presentamos en la definición 2.2 la *función  $W$  de Lambert*. Esta función, así como sus propiedades, pueden consultarse en los trabajos de Beardon [6] y Corless [14]; la siguiente definición y el Lema 2.3 resumen las propiedades que utilizaremos.

**Definición 2.2.** Sea  $E(y) := ye^y$  con dominio en  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Definimos la *función  $W(x)$  de Lambert* como la inversa de la función  $E(y) = x$ . Algunas de las propiedades de esta función inversa son las siguientes:

1.  $W(xe^x) = x$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{dW}{dx} = 1$ .
3. La función  $W$  satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}.\tag{2.5}$$

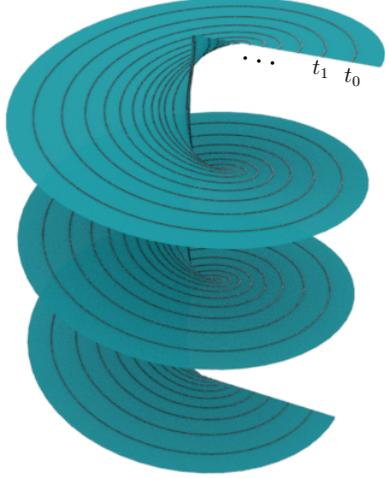


Figura 2.3:  
Familia de espirales sobre el helicoide  
que satisfacen la ecuación de Flujo de  
Curvatura Media (ver Ejemplo 3).

**Lema 2.3.** Sea  $c$  una constante y  $W(x)$  la función de Lambert. La función

$$f(t) = \sqrt{W(e^{c-2t})}$$

satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{df}{dt} = -\frac{f(t)}{1 + f^2(t)}.$$

*Demostración.* Usando la ecuación 2.5,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{W(e^{c-2t})}} \frac{d}{dt} W(e^{c-2t}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{W(e^{c-2t})}} \left( \frac{W(e^{c-2t})}{e^{c-2t} (1 + W(e^{c-2t}))} \right) (-2e^{c-2t}) \\ &= -\frac{\sqrt{W(e^{c-2t})}}{1 + W(e^{c-2t})} \\ &= -\frac{f(t)}{1 + f^2(t)}. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3. Espirales sobre un helicoide.** Sea  $S(u, v)$  el helicoide parametrizado por

$$S : \mathbb{R} \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$S(u, v) = (u \cos(v), v, u \operatorname{sen}(v)) .$$

Sobre esta superficie podemos considerar la siguiente  $t$ -familia de curvas coordenadas

$$\gamma(v, t) = (u(t) \cos(v), v, u(t) \operatorname{sen}(v)) .$$

Encontraremos una función  $u(t)$  tal que la familia de curvas  $\gamma(v, t)$  sea solución al Flujo de Curvatura Media:

Los vectores tangentes al helicoides  $S(u, v)$  son

$$\partial_u = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ 0 \\ \operatorname{sen}(v) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \partial_v = \begin{pmatrix} -u \operatorname{sen}(v) \\ 1 \\ u \cos(v) \end{pmatrix} ,$$

mientras que el tensor métrico  $g$  y su inversa  $g^{-1}$  son, respectivamente

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2+1} \end{pmatrix} .$$

Dada una curva en la familia  $\gamma(v, t)$ , el vector tangente coincide con  $\partial_v$ ,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u(t) \operatorname{sen}(v) \\ 1 \\ u(t) \cos(v) \end{pmatrix} ,$$

esto implica que  $\partial_u$  es normal a  $\gamma(v, t)$ . A partir del vector tangente y normal obtenemos el vector de curvatura media

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= g^{vv} h_{vv}^u \partial_u = g^{vv} \langle \partial_u, \tilde{\nabla}_{\partial_v} \partial_v \rangle \partial_u \\ &= g^{vv} \langle \partial_u, (\tilde{\Gamma}_{vv}^u \partial_u + \tilde{\Gamma}_{vv}^v \partial_v) \rangle \partial_u \\ &= g^{vv} \tilde{\Gamma}_{vv}^u \partial_u . \end{aligned}$$

Usando la ecuación (1.6), calculamos el símbolo de Christoffel  $\tilde{\Gamma}_{vv}^u$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{vv}^u &= \frac{1}{2} \left[ g^{uu} \left( \cancel{\frac{\partial g_{uv}}{\partial v}} + \cancel{\frac{\partial g_{vu}}{\partial v}} - \frac{\partial g_{vv}}{\partial u} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cancel{g^{uv}} \left( \frac{\partial g_{vv}}{\partial v} + \cancel{\frac{\partial g_{vv}}{\partial v}} - \cancel{\frac{\partial g_{vv}}{\partial v}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} [1 \cdot (-2u)] = -u.$$

Por tanto,

$$\mathbf{H} = -g^{vv}u\partial_u = -\frac{u(t)}{1+u^2(t)}\partial_u. \quad (2.6)$$

Por otra parte

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = u'(t) \begin{pmatrix} \cos(v) \\ 0 \\ \text{sen}(v) \end{pmatrix} = u'(t) \partial_u. \quad (2.7)$$

A partir de las ecuaciones (2.6) y (2.7), la ecuación de Flujo de Curvatura Media que debe satisfacer  $\gamma(v, t)$  se reduce a

$$u'(t) = -\frac{u(t)}{1+u^2(t)},$$

y por el Lema 2.3, la función  $u(t) = \sqrt{W(e^{c-2t})}$  es su solución. La constante  $c$  queda determinada al definir una condición inicial:

Sea  $u_0$  una constante que determine un espiral inicial  $\gamma(v, u_0)$  sobre el helicoido,

$$u_0 = u(0) = \sqrt{W(e^{c-2t})} = \sqrt{W(e^c)}.$$

Por la Definición 2.2,

$$u_0^2 = W(e^c) \Rightarrow u_0^2 e^{u_0^2} = e^c$$

$$\Rightarrow c = 2\ln(u_0) + u_0^2.$$

Además, la Propiedad 1. en la Definición 2.2 nos permite saber que  $\gamma(v, t)$  converge asintóticamente al eje  $y$ , ya que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{W(e^{c-2t})} = \sqrt{W(0)} = \sqrt{W(0e^0)} = 0.$$

**Ejemplo 4.**  $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$ . Consideremos la inmersión del espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^1$  en

$\mathbb{C}P^2$  dada por

$$[1, z_1] \mapsto [1, z_1, 0] \quad (2.8)$$

El conjunto  $\{\partial_{z_1}, \partial_{\bar{z}_1}\}$  forma una base del espacio tangente a  $\mathbb{C}P^1$ . Sea

$$\{\partial_{z_1}, \partial_{\bar{z}_1}, \partial_{z_2}, \partial_{\bar{z}_2}\}$$

una extensión de este conjunto a una base del espacio tangente de la variedad ambiente. Dotaremos a  $\mathbb{C}P^1$  con la métrica inducida por la métrica de Fubini-Study  $\tilde{g}$  en  $\mathbb{C}P^2$ , retomando la Definición 1.23, esta última toma la forma

$$\tilde{g}_{i\bar{j}} = \frac{(1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)\delta_{i\bar{j}} - z_j\bar{z}_i}{1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2},$$

y cuya inversa [33] es

$$\tilde{g}^{\bar{i}i} = (1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2) (\delta_{i\bar{j}} + z_i\bar{z}_j).$$

Sean  $h_{ij}^k$  las componentes de la segunda forma fundamental, la componente  $\alpha$  del vector de curvatura media  $\mathbf{H}$  puede escribirse como

$$\mathbf{H}^\alpha = \sum_i \tilde{g}^{\bar{i}i} h_{ii}^\alpha.$$

Siguiendo la definición de Flujo de Curvatura Media, consideremos los siguientes vectores los cuales forman una base ortonormal del haz normal a la subvariedad:

$$\nu_2 := \frac{1}{\|\partial_{z_2}\|} \partial_{z_2}, \quad \nu_{\bar{2}} := \frac{\partial_{\bar{z}_2} - \tilde{g}(\partial_{\bar{z}_2}, \nu_2) \nu_2}{\|\partial_{\bar{z}_2} - \tilde{g}(\partial_{\bar{z}_2}, \nu_2) \nu_2\|}.$$

Sean  $\lambda := \|\partial_{\bar{z}_2} - \tilde{g}(\partial_{\bar{z}_2}, \nu_2) \nu_2\|^{-1}$  y  $\mu := -\lambda \tilde{g}(\partial_{\bar{z}_2}, \nu_2)$ . Las componentes de  $\mathbf{H}$  en la base  $\{\nu_2, \nu_{\bar{2}}\}$  son

$$\begin{aligned} h_{11}^2 &= \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{\partial_{z_1}} \partial_{z_1}, \frac{1}{\|\partial_{z_2}\|} \partial_{z_2}\right) = \frac{1}{\|\partial_{z_2}\|} (\Gamma_{11}^1 \tilde{g}_{1\bar{2}} + \Gamma_{11}^2 \tilde{g}_{2\bar{2}}) \\ h_{11}^{\bar{2}} &= \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{\partial_{z_1}} \partial_{z_1}, \lambda \partial_{\bar{z}_2} + \mu \partial_{z_2}\right) \\ &= \lambda \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{\partial_{z_1}} \partial_{z_1}, \partial_{\bar{z}_2}\right) + \mu \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{\partial_{z_1}} \partial_{z_1}, \partial_{z_2}\right) \\ &= \lambda \left(\Gamma_{11}^{\bar{1}} \tilde{g}_{\bar{1}\bar{2}} + \Gamma_{11}^{\bar{2}} \tilde{g}_{\bar{2}\bar{2}}\right) + \mu \left(\Gamma_{11}^1 \tilde{g}_{1\bar{2}} + \Gamma_{11}^2 \tilde{g}_{2\bar{2}}\right). \end{aligned}$$

A partir del Lema 1.24 sabemos que estos símbolos de Christoffel se anulan y en consecuencia también las  $h_{ii}^\alpha$ . Por tanto, la inmersión (2.8) de  $\mathbb{C}P^1$  en  $\mathbb{C}P^2$  es una solución estacionaria del Flujo de Curvatura Media.  $\square$

## 2.2. Evolución de Cantidades Geométricas bajo el Flujo de Curvatura Media Simpléctico

Cuando una variedad evoluciona bajo un flujo geométrico, los campos tangentes y normales, así como el área y la métrica, también cambian. Calcular su evolución permite, en algunos casos, identificar las características del flujo o proporcionar argumentos que permitan determinar la existencia de soluciones. Sin embargo, las ecuaciones que describen la evolución de estas propiedades geométricas también dependen de la codimensión de la subvariedad.

En esta sección obtendremos la evolución de algunas cantidades geométricas bajo el Flujo de Curvatura Media en codimensión arbitraria.

La evolución de los vectores normales y tangentes a una subvariedad en evolución está descrita por los Lemas 2.4 y 2.5, respectivamente. Si bien hemos retomado el Lema 2.4 de Chen *et al.* [12], incluimos aquí detalles adicionales en la demostración; además el propósito principal de incluirlo es hacer explícita la diferencia en codimensión mayor a uno (último término en la ecuación 2.9).

**Lema 2.4.** *Sea  $\widetilde{M}^m$  una variedad con métrica  $\widetilde{g}$  y  $M^n$  una subvariedad. Sea además  $F_0 : M \rightarrow \widetilde{M}$  una inmersión y  $F(t)$  una  $t$ -familia de inmersiones de  $M$  en  $\widetilde{M}$  que satisfacen la ecuación de Flujo de Curvatura Media con  $F(0) = F_0$ . Si  $\{\nu_\alpha\}_{\alpha=1}^{m-n}$  es una base ortonormal del haz normal a  $M$  y  $\{\partial_i F\}_{i=1}^n$  son los vectores tangentes a la subvariedad, entonces*

$$\frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t} = -\text{grad}(H^\alpha) - \sum_{i,j,\beta} \widetilde{g}^{ij} H^\beta \langle \nu_\alpha, \partial_i \nu_\beta \rangle \partial_j F + \sum_{\beta} \left\langle \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t}, \nu_\beta \right\rangle \nu_\beta. \quad (2.9)$$

*Demostración.* La evolución de los vectores  $\nu_\alpha$  puede separarse en una componente

tangencial y otra normal a la subvariedad:

$$\frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t} = \sum_{i,j} \tilde{g}^{ij} \left\langle \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t}, \partial_i F \right\rangle \partial_j F + \sum_{\beta,\gamma} \tilde{g}^{\beta\gamma} \left\langle \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t}, \nu_\beta \right\rangle \nu_\gamma, \quad (2.10)$$

donde los índices  $i, j = 1, \dots, n$  recorren sólo los elementos tangentes; mientras que  $\alpha, \beta = 1, \dots, (m-n)$  recorren los índices de los elementos normales a la subvariedad. Usando la siguiente relación,

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \nu_\alpha, \partial_i F \rangle &= \langle \partial_t \nu_\alpha, \partial_i F \rangle + \langle \nu_\alpha, \partial_i (\partial_t F) \rangle \\ &= \langle \partial_t \nu_\alpha, \partial_i F \rangle + \sum_{\beta} \langle \nu_\alpha, \partial_i (H^\beta \nu_\beta) \rangle, \end{aligned} \quad (2.11)$$

podemos reescribir (2.10) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t} &= \sum_{i,j} \tilde{g}^{ij} \left( \cancel{\partial_t \langle \nu_\alpha, \partial_i F \rangle} - \sum_{\beta} \langle \nu_\alpha, \partial_i (H^\beta \nu_\beta) \rangle \right) \partial_j F \\ &\quad + \sum_{\beta,\gamma} \tilde{g}^{\beta\gamma} \left\langle \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t}, \nu_\beta \right\rangle \nu_\gamma \\ &= - \sum_{i,j,\beta} \tilde{g}^{ij} \langle \nu_\alpha, \partial_i (H^\beta \nu_\beta) \rangle \partial_j F + \sum_{\beta,\gamma} \tilde{g}^{\beta\gamma} \left\langle \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t}, \nu_\beta \right\rangle \nu_\gamma \\ &= - \sum_{i,j,\beta} \tilde{g}^{ij} \langle \nu_\alpha, (\partial_i H^\beta) \nu_\beta + H^\beta \partial_i \nu_\beta \rangle \partial_j F + \sum_{\beta,\gamma} \tilde{g}^{\beta\gamma} \left\langle \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t}, \nu_\beta \right\rangle \nu_\gamma \\ &= - \sum_{i,j,\beta} \tilde{g}^{ij} \partial_i H^\beta \langle \nu_\alpha, \nu_\beta \rangle \partial_j F - \sum_{i,j,\beta} \tilde{g}^{ij} H^\beta \langle \nu_\alpha, \partial_i \nu_\beta \rangle \partial_j F \\ &\quad + \sum_{\beta,\gamma} \tilde{g}^{\beta\gamma} \left\langle \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t}, \nu_\beta \right\rangle \nu_\gamma. \end{aligned}$$

Debido a que el conjunto  $\{\nu_\alpha\}$  se eligió ortonormal, tenemos que  $\langle \nu_\alpha, \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$  y  $\tilde{g}^{\beta\gamma} = \delta_{\beta\gamma}$ , y por tanto

$$\frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t} = - \sum_{i,j} \tilde{g}^{ij} (\partial_i H^\alpha) \partial_j F - \sum_{i,j,\beta} \tilde{g}^{ij} H^\beta \langle \nu_\alpha, \partial_i \nu_\beta \rangle \partial_j F + \sum_{\beta} \left\langle \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t}, \nu_\beta \right\rangle \nu_\beta.$$

Utilizando la definición 1.8, obtenemos

$$\frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t} = -\text{grad}(H^\alpha) - \sum_{i,j,\beta} \tilde{g}^{ij} H^\beta \langle \nu_\alpha, \partial_i \nu_\beta \rangle \partial_j F + \sum_{\beta} \left\langle \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t}, \nu_\beta \right\rangle \nu_\beta.$$

□

Adicionalmente al lema anterior, describir la evolución de los vectores tangentes a la subvariedad es crucial para describir la evolución de otras cantidades como el tensor métrico, la segunda forma fundamental, etc. En el siguiente lema describimos esta evolución tangencial; cabe destacar que al contrario de Chen y Li [12] damos una demostración de la ecuación (2.12), la cual utilizaremos más adelante.

**Lema 2.5.** *Sea  $M^n$  una subvariedad de  $\widetilde{M}^m$  y sea  $F(t)$  una  $t$ -familia de inmersiones de  $M$  en  $\widetilde{M}$  con las mismas hipótesis del lema anterior, los vectores tangentes  $\partial_i F$  a la subvariedad satisfacen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \partial_i F &= \sum_{jk} \tilde{g}^{jk} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \partial_i F, \partial_j F \right\rangle \partial_k F + \sum_{r,s,\alpha} \tilde{g}^{ri} (\partial_r H^\alpha) \tilde{g}_{si} \nu_\alpha \\ &+ \sum_{r,s,\beta} \tilde{g}^{rs} H^\beta \langle \nu_\alpha, \partial_r \nu_\beta \rangle \tilde{g}_{si} \nu_\alpha, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde  $\nu_\alpha$  son los vectores normales a la subvariedad con  $\alpha = 1, \dots, m - n$ .

*Demostración.* Sean  $\nu_1, \dots, \nu_{(m-n)}$  una base ortonormal del haz normal a  $M$ , podemos separar las componentes de  $\partial_t(\partial_i F)$  de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial t} \partial_i F = \sum_{jk} \tilde{g}^{jk} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \partial_i F, \partial_j F \right\rangle \partial_k F + \sum_{\alpha} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \partial_i F, \nu_\alpha \right\rangle \nu_\alpha,$$

y usando la relación (2.11) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \partial_i F = \sum_{jk} \tilde{g}^{jk} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \partial_i F, \partial_j F \right\rangle \partial_k F + \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \partial_i F, \nu_\alpha \rangle - \left\langle \partial_i F, \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial t} \right\rangle \right) \nu_\alpha.$$

Finalmente, usando el Lema 2.4, proyectamos  $\partial \nu_\alpha / \partial t$  sobre los vectores tangente para obtener:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \partial_i F &= \sum_{jk} \tilde{g}^{jk} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \partial_i F, \partial_j F \right\rangle \partial_k F + \sum_{\alpha} \langle \partial_i F, \text{grad}(H^\alpha) \rangle \nu_\alpha \\
&\quad + \sum_{r,s,\beta} \tilde{g}^{rs} H^\beta \langle \nu_\alpha, \partial_r \nu_\beta \rangle \langle \partial_s F, \partial_i F \rangle \nu_\alpha \\
&= \sum_{jk} \tilde{g}^{jk} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \partial_i F, \partial_j F \right\rangle \partial_k F + \sum_{r,s,\alpha} \tilde{g}^{ri} (\partial_r H^\alpha) \tilde{g}_{si} \nu_\alpha \\
&\quad + \sum_{r,s,\beta} \tilde{g}^{rs} H^\beta \langle \nu_\alpha, \partial_r \nu_\beta \rangle \tilde{g}_{si} \nu_\alpha.
\end{aligned}$$

□

A partir de los dos lemas anteriores, que describen la evolución de los vectores tangentes y normales, al estudiar flujos geométricos también suele calcularse la evolución de las componentes del tensor métrico. Sin embargo, a partir de aquí podemos aprovechar la relación entre el tensor métrico y la forma simpléctica, para hacer visible una primer influencia de la estructura simpléctica en el Flujo de Curvatura Media:

Para cualquier par de campos tangentes  $X, Y$  a la subvariedad, la relación

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y)$$

entre la forma simpléctica  $\omega$  y el tensor métrico  $g$  nos permitirá describir indirectamente en el Corolario 2.8 la evolución de  $g$  en términos de la evolución de la forma  $\omega$ .

Aunque este resultado puede parecer inmediato una vez calculemos  $\partial\omega/\partial t$ , tiene dos implicaciones: la reducción de términos al describir  $\partial g_{ij}/\partial t$  en términos del *pull-back* de una 2-forma, y la utilización de  $\partial\omega/\partial t$  en la demostración de la invarianza de la estructura lagrangiana bajo el Flujo de Curvatura Media sin usar el Principio del Máximo, esta segunda implicación se aborda en el siguiente capítulo.

Para proponer el siguiente Teorema y el Corolario 2.7 hemos tomado como referencia [13]. Si bien existe una equivalencia en el resultado, las técnicas que hemos empleado en este trabajo para la demostración son más directas.

**Teorema 2.6.** *Sea  $M^n(t)$  una familia de subvariedades de  $\widetilde{M}^m$  y sea  $F : M(t) \rightarrow \widetilde{M}$  solución al Flujo de Curvatura Media. Además, sean  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  vectores tangentes a  $M$ ,*

$i = 1, \dots, n$ . La evolución bajo el Flujo de Curvatura Media de una 2-forma  $\omega$  en  $\widetilde{M}$  restringida a  $M$  es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \omega|_M \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) &= \sum_{\substack{\alpha < \beta \\ \gamma}} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} H^\gamma \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \\ &+ \sum_{\alpha < \beta} \omega_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial H^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

*Demostración.* Sea  $\{\nu_i\}_{i=1}^{m-n}$  una base ortonormal del haz normal a  $M$ , y sean  $dx^i$  los duales a los elementos de la base  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^n \cup \{\nu_i\}_{i=1}^{m-n}$ , podemos escribir  $\omega$  de la siguiente manera

$$\omega = \sum_{\alpha < \beta} \omega_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Usando la ecuación anterior calcularemos la derivada  $\partial_t \omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \omega|_M \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) &= \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial t} dx^\alpha \wedge dx^\beta \left( \frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \\ &+ \omega \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) + \omega \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial F}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial t} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} + \sum_{\alpha} \omega \left( \frac{\partial}{\partial x^i} (H^\alpha \nu_\alpha), \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \\ &+ \sum_{\beta} \omega \left( \frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} (H^\beta \nu_\beta) \right) \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial t} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} + \sum_{\alpha} \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^i} \omega \left( \nu_\alpha, \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \\ &+ \sum_{\beta} \frac{\partial H^\beta}{\partial x^j} \omega \left( \frac{\partial F}{\partial x^i}, \nu_\beta \right) \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial t} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} + \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^i} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial H^\beta}{\partial x^j} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \\
= & \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial t} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \\
& + \sum_{\alpha < \beta} \omega_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial H^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \right). \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Usando la regla de la cadena y debido a que  $F$  satisface la ecuación de Flujo de Curvatura Media, reescribiremos la derivada  $\partial \omega_{\alpha\beta} / \partial t$  como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial t} & = \sum_{\gamma} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial (x^\gamma \circ F)}{\partial t} \\
& = \sum_{\gamma} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial (x^\gamma \circ F)}{\partial t} \\
& = \sum_{\gamma} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} H^\gamma. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (2.15) en (2.14), se concluye que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left( \omega|_M \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) & = \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} H^\gamma \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \\
& + \sum_{\alpha < \beta} \omega_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial H^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \right).
\end{aligned}$$

□

**Corolario 2.7.** *Sea  $\omega$  una 2-forma simpléctica, el teorema anterior se reduce a*

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega|_M = F^* d(\omega(\mathbf{H}, \cdot)).$$

*Demostración.* Calculemos  $d(\omega(\mathbf{H}, \cdot))$ , para ello

$$\omega(\mathbf{H}, \cdot) = \sum_{\alpha < \beta} \omega_{\alpha\beta} H^\alpha dx^\beta,$$

$$\begin{aligned}
d(\omega(\mathbf{H}, \cdot)) &= \sum_{\alpha < \beta} d(\omega_{\alpha\beta} H^\alpha) \wedge dx^\beta \\
&= \sum_{\alpha < \beta \neq k} \frac{\partial}{\partial x^k} (\omega_{\alpha\beta} H^\alpha) dx^k \wedge dx^\beta \\
&= \sum_{\alpha < \beta \neq k} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^k} H^\alpha dx^k \wedge dx^\beta + \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^\beta. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Si  $\omega$  es una forma simpléctica, en particular es cerrada, es decir,

$$\begin{aligned}
0 = d\omega &= \sum_{\substack{\alpha < \beta \\ k=1, \dots, n}} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= \sum_{k < \alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta + \sum_{\alpha < k < \beta} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&\quad + \sum_{\alpha < \beta < k} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta.
\end{aligned}$$

Podemos renombrar los índices de las últimas dos sumas para obtener

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k < \alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta + \sum_{k < \alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{k\beta}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^k \wedge dx^\beta \\
&\quad + \sum_{k < \alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{k\alpha}}{\partial x^\beta} dx^\beta \wedge dx^k \wedge dx^\alpha \\
&= \sum_{k < \alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta - \sum_{k < \alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{k\beta}}{\partial x^\alpha} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&\quad + \sum_{k < \alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{k\alpha}}{\partial x^\beta} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta,
\end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
\sum_{k < \alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{k\beta}}{\partial x^\alpha} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta &= \sum_{k < \alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&\quad + \sum_{k < \alpha < \beta} \frac{\partial \omega_{k\alpha}}{\partial x^\beta} dx^k \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Por otra parte, y retomando (2.16),

$$\begin{aligned}
F^*d(\omega(\mathbf{H}, \cdot)) \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= d(\omega(\mathbf{H}, \cdot)) \left( \frac{\partial F^k}{\partial x^i}, \frac{\partial F^l}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{\alpha < \beta \neq k} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^k} H^\alpha \frac{\partial F^k}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} - \sum_{\alpha < \beta \neq k} \frac{\partial \omega_{\alpha k}}{\partial x^\beta} H^\alpha \frac{\partial F^k}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \\
&\quad + \sum_{\alpha < \beta \neq k} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial F^k}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} - \sum_{\alpha < \beta \neq k} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial F^k}{\partial x^j} \\
&= \sum_{\alpha < \beta \neq k} \left( \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_{\alpha k}}{\partial x^\beta} \right) H^\alpha \frac{\partial F^k}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \\
&\quad + \sum_{\alpha < \beta \neq k} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} - \sum_{\alpha < \beta \neq k} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

Por la antisimetría de  $\omega$  y (2.17), tenemos

$$\begin{aligned}
F^*d(\omega(\mathbf{H}, \cdot)) \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= \sum_{\alpha < \beta \neq k} \frac{\partial \omega_{k\beta}}{\partial x^\alpha} H^\alpha \frac{\partial F^k}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \\
&\quad + \sum_{\alpha < \beta \neq k} \omega_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} - \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i} \right).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Comparando la ecuación (2.18) con (2.13), se concluye que ambas son equivalentes y en consecuencia

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega|_M = F^*d(\omega(\mathbf{H}, \cdot)). \quad \square$$

Finalizaremos este capítulo rescribiendo el resultado anterior para describir la evolución del tensor métrico en términos de la evolución de  $\omega$ .

**Corolario 2.8.** *Sea  $M$  una subvariedad simpléctica de una variedad Kähler  $\widetilde{M}$  y  $F(t)$  una  $t$ -familia de inmersiones que satisfacen la ecuación de Flujo de Curvatura Media. Entonces el tensor métrico  $g$  de la subvariedad satisface*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( g \left( J \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) = F^*d(\omega(\mathbf{H}, \cdot)) \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

*Demostración.* A partir de la relación entre  $\omega$  y  $g$  y como consecuencia del Corolario 2.7, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( g \left( J \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \omega|_M \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) = F^* d(\omega(\mathbf{H}, \cdot)) \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

□



## Capítulo 3

# Flujo de Curvatura Media y Estructura Simpléctica

En el Capítulo 1 definimos el ángulo de Kähler, a través del cual es posible dar una clasificación de subvariedades de dimensión dos inmersas en una variedad Kähler (ver Definición 1.25 y Tabla 1.1). A partir de la evolución de este ángulo es posible caracterizar subvariedades que pertenezcan a una familia que sea solución al Flujo de Curvatura Media, si éstas se encuentran inmersas en una variedad ambiente con este tipo de estructura.

El siguiente lema y teorema nos permitirán abordar en la siguiente sección algunos casos en los que la estructura simpléctica impone condiciones sobre el tipo de soluciones que podemos encontrar para el Flujo de Curvatura Media.

**Lema 3.1.** *Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica, entonces  $M$  tiene estructura casi compleja. (Ver la demostración en [31, p.81]).*

**Teorema 3.2.** (Li, [29]) *Sea  $F$  una  $t$ -familia de inmersiones formada por subvariedades simplécticas  $(M^2(t), \omega(t))$  con estructura casi compleja compatible  $J$  e inmersas en una variedad  $\widetilde{M}^4$ . Sean  $\{e_1, e_2\}$  una base ortonormal del espacio tangente a la subvariedad al tiempo  $t$  en un punto  $\mathbf{p}$ , y  $\{e_3, e_4\}$  una base ortonormal de su haz normal en  $\mathbf{p}$ , tales que podamos definir localmente*

$$J_{M(t)} : T_{F(\mathbf{p},t)}\widetilde{M} \rightarrow T_{F(\mathbf{p},t)}\widetilde{M} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} J_{M(t)}(e_1) &= e_2 & J_{M(t)}(e_3) &= e_4 \\ J_{M(t)}(e_2) &= -e_1 & J_{M(t)}(e_4) &= -e_3. \end{aligned}$$

Sean además  $h_{ij}^k$  y  $\mathbf{Ric}$  las componentes de la segunda forma fundamental de  $M^2$  y la curvatura de Ricci de  $\widetilde{M}^4$ , respectivamente. Si  $F$  es solución al Flujo de Curvatura Media, entonces la evolución del ángulo de Kähler  $\theta$  de  $M^2(t)$  satisface

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \cos \theta = \left|\widetilde{\nabla} J_{M(t)}\right|^2 \cos \theta + \mathbf{Ric}(Je_1, e_2) \sin^2 \theta, \quad (3.2)$$

donde  $\left|\widetilde{\nabla} J_{M(t)}\right|^2 = |h_{11}^3 - h_{21}^4|^2 + |h_{12}^3 - h_{22}^4|^2 + |h_{21}^3 - h_{11}^4|^2 + |h_{22}^3 - h_{12}^4|^2$ .

La relación entre el término  $|\widetilde{\nabla} J_{M(t)}|^2$  y las componentes de la segunda forma fundamental, así como su relación con el vector de curvatura media, ha sido tratado en diferentes trabajos [10, 12, 29] y en particular la ecuación (3.2) se ha utilizado para estudiar singularidades y existencia de soluciones del Flujo de Curvatura Media [13]. Sin embargo, aquí sólo daremos una breve explicación del cálculo de este término en el contexto de evolucionar subvariedades bajo el Flujo de Curvatura Media:

En general, cuando tenemos una familia de inmersiones  $F : M^2 \times [0, t) \rightarrow \widetilde{M}^4$  que es solución al Flujo de Curvatura Media, la evolución de las subvariedades suele describirse en términos de la base

$$\{\partial_1 F, \partial_2 F, v_1, v_2\},$$

para un conjunto  $\{v_1, v_2\}$  que forme una base ortonormal del haz normal a la subvariedad.

Supongamos que cada elemento en la familia de inmersiones tiene estructura casi compleja  $J$ . En cada punto de la subvariedad podemos extender localmente  $J$  al haz normal como en (3.1) y denotar a esta extensión como  $J_M$ . Sean  $\{\partial_i\}$  y  $\{dy^i\}$  la base estándar del espacio tangente a  $\widetilde{M}$  y su dual, respectivamente. Podemos definir

$$\begin{aligned} e_i &= \sum X_i^k \partial_k \\ \sigma^i &= \sum (X^{-1})_j^i dy^j, \end{aligned} \quad (3.3)$$

para alguna matriz de coeficientes  $X_i^k$  que se obtiene a partir de las derivadas de  $F$ . A

partir de (3.3), podemos escribir  $J_M$  de forma tensorial como

$$J_M = \sum_{i,j} J_j^i \sigma^j \otimes e_i$$

$$J_M(e_k) = \sum_{i,j} J_j^i \sigma^j(e_k) e_i,$$

para algunos coeficientes  $J_j^i$  que se pueden deducir de (3.1). Como producto tensorial, podemos aplicar el operador de conexión  $\tilde{\nabla}$  a  $J_M$  y calcular su norma (ver Lee [28, p. 29]).

El cálculo explícito de  $\nabla J_M$  en términos de las componentes de la segunda forma fundamental puede obtenerse a partir de las 1-formas que definen a las componentes de la matriz de conexión de  $\tilde{\nabla}$  (ver Deruelle [15], Lam [26]) de la siguiente manera:

Sean  $\zeta_i^j$  las 1-formas que definen a la matriz de conexión de  $\tilde{\nabla}$ . La conexión  $\tilde{\nabla}$  puede escribirse en términos de  $\zeta_i^j$  como

$$\tilde{\nabla}(\partial_i) = \sum_j \zeta_i^j \otimes \partial_j$$

$$\tilde{\nabla}(dy^i) = - \sum_j \zeta_j^i \otimes dy^j,$$
(3.4)

donde

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \zeta_j^k(\partial_i) \Leftrightarrow \zeta_j^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k dy^i$$

$$\zeta_j^k + \zeta_k^j = 0,$$
(3.5)

y  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$  son los símbolos de Christoffel en  $\tilde{M}$ . Las ecuaciones (3.4) y (3.5) nos permiten escribir  $\tilde{\nabla} J_M$  en términos de los símbolos de Cristoffel. Sin embargo, para obtener la expresión explícita en términos de  $h_{ij}^k$  tenemos que hacer uso de la siguiente relación

$$\zeta_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \sigma^j,$$

para  $i, j \in \{1, 2\}$  y  $\alpha \in \{3, 4\}$ , y cuya demostración puede encontrarse en [46, p. 71].

Antes de comenzar con la primer sección de este capítulo, cabe señalar que hemos optado por dividirlo en dos secciones: En la Sección 3.1 consideramos la evolución por Flujo de Curvatura Media de una subvariedad simpléctica (cuyo coseno de su ángulo

de Kähler es positivo) y en la Sección 3.2, la evolución de una familia de subvariedades lagrangianas (Esferas de Whitney), asumiendo en ambos casos una variedad ambiente de tipo Kähler de la que heredan la forma simpléctica.

La principal contribución de la sección 3.1 se resume en el Teorema 3.7, el cual exhibe una direferencia respecto al Flujo de Curvatura Media clásico en  $\mathbb{R}^2$ , a saber, que no existe una familia de subvariedades complejas que sea el equivalente simpléctico al *Grim Reaper* cuando la variedad ambiente es Kähler, en el contexto que detallaremos más adelante. Por otra parte, en la sección 3.2 veremos que el Teorema 3.2 es insuficiente para hacer un análisis profundo y se propone como alternativa utilizar el Corolario 2.7.

### 3.1. Subvariedades Simplécticas

En esta sección asumiremos que tenemos una subvariedad simpléctica. Sin embargo, mencionaremos primero algunos casos que reducen la ecuación (3.2) para justificar por qué nos limitaremos a soluciones autosimilares (definición 3.3).

Una manera de simplificar la ecuación (3.2), propuesta por Chen y Li [12], consiste en considerar una variedad Kähler-Einstein (ver definición 1.27) como variedad ambiente, debido a que en este caso existe una constante  $\lambda$  tal que

$$\begin{aligned} \text{Ric}(Je_1, e_2) &= \lambda g(Je_1, e_2) \\ &= \lambda \omega(e_1, e_2) \\ &= \lambda \cos(\theta). \end{aligned}$$

Como alternativas a la estructura Einstein, es posible considerar casos en los que  $|\widetilde{\nabla} J_M|^2$  y/o la curvatura de Ricci son constantes o sólo dependen de  $t$ ; en relación a estos casos daremos un teorema que ejemplifique de qué manera la estructura simpléctica repercute en las soluciones que podemos esperar del Flujo de Curvatura Media. Previamente, necesitamos de la siguiente definición y Lemas 3.1-3.4.

**Definición 3.3.** Sea  $\tau > 0$  y  $F : M \times [0, \tau) \rightarrow \widetilde{M}$  una solución al Flujo de Curvatura Media de una subvariedad  $M$  inmersa en una variedad ambiente  $\widetilde{M}$ . Decimos que  $F$  es una **solución autosimilar** del Flujo de Curvatura Media en los siguientes casos:

1. (Smoczyk [39]) Existe una función  $f(t)$  no constante tal que para todo  $\mathbf{p} \in M$

$$F(\mathbf{p}, t) = f(t) F(\mathbf{p}, 0)$$

$$f(0) = 1,$$

más aún, en este caso decimos que  $F$  es una homotecia o una solución homotética con factor de escala  $f(t)$ .

2. Si existe  $\tau > 0$  y una familia de isometrías  $\phi : \widetilde{M} \times [0, \tau) \rightarrow \widetilde{M}$  no trivial, es decir distinta a la identidad, tal que

$$F(\mathbf{p}, t) = \phi(F(\mathbf{p}, 0), t),$$

de manera que se preservan la métrica y la segunda forma fundamental para todo tiempo  $t < \tau$ .

**Lema 3.4.** Sea  $\tau > 0$  y  $F : M^2 \times [0, \tau) \rightarrow \widetilde{M}^4$  una familia de inmersiones de subvariedades simplécticas tal que  $F$  es solución autosimilar no homotética del Flujo de Curvatura Media. Entonces  $|\widetilde{\nabla} J_M|^2$  es constante para todo  $t \in [0, \tau)$ .

*Demostración.* Para una subvariedad simpléctica, por el Teorema 3.2,

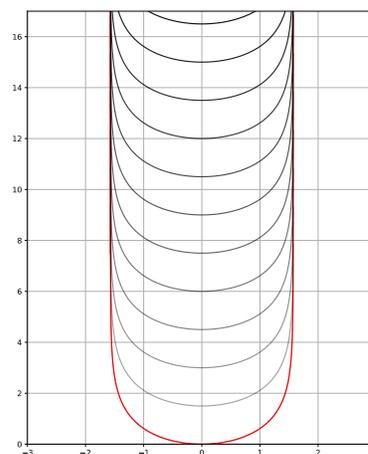
$$|\widetilde{\nabla} J_M|^2 = |h_{11}^2 + h_{12}^1|^2 + |h_{21}^2 + h_{22}^1|^2 + |h_{12}^2 - h_{11}^1|^2 + |h_{22}^2 - h_{21}^1|^2.$$

Por la definición 3.3, una solución autosimilar no homotética implica  $h_{ij}^k$  no depende de  $t$  y en consecuencia tampoco  $|\widetilde{\nabla} J_M|^2$ .  $\square$

A partir de este lema, podemos considerar los siguientes casos que retoman la intención de reducir la ecuación (3.2):

- **Variedad ambiente con curvatura de Ricci nula.** El último término de la ecuación (3.2) desaparece y la evolución del ángulo de Kähler consiste en una ecuación de eigenfunciones para el operador  $\partial/\partial t - \Delta$  con eigenvalor  $|\widetilde{\nabla} J_M|^2$ .
- **La subvariedad tiene segunda forma fundamental paralela.** En este caso el término  $|\widetilde{\nabla} J_M|^2$ , que depende sólo de las componentes de la segunda forma fundamental, tiene el mismo valor en cualquier punto de la subvariedad.
- **Soluciones autosimilares del Flujo de Curvatura Media.** Contrario al caso anterior, por la dependencia del término  $|\widetilde{\nabla} J_M|^2$  exclusivamente de las componentes de la segunda forma fundamental, este término es constante en  $t$  a lo largo del flujo.

Figura 3.1:  
Ejemplo de la evolución de una curva autosimilar no homotética en  $\mathbb{R}^2$  (*Grim Reaper*) cuya evolución por Flujo de Curvatura Media coincide con una traslación. En rojo se muestra la curva inicial (ver parametrización en [27]).



Para el primer caso sería posible aplicar técnicas utilizadas en la teoría de eigenfunciones de operadores parabólicos. Estas técnicas suelen utilizarse por ejemplo: para encontrar las funciones con eigenvalor nulo, la primer eigenfunción con eigenvalor no nulo, o encontrar una base de eigenfunciones.

Sin embargo, estas posibilidades difícilmente pueden interpretarse en el contexto de una subvariedad simpléctica evolucionando por Flujo de Curvatura Media, más aún porque la estructura simpléctica es invariante, es decir,  $\cos(\theta) > 0$  durante todo el flujo.

Por otra parte, en relación con el segundo caso, resultaría conveniente asumir que la subvariedad tiene segunda forma fundamental  $h_{ij}^k$  paralela, es decir, que las componentes de esta última no dependen del punto en la subvariedad, ya que existen clasificaciones de subvariedades simplécticas y Kähler con esta condición [34]. Sin embargo, la condición de tener segunda forma fundamental paralela no es en general invariante bajo el Flujo de Curvatura Media. En [38] se describe la evolución del vector curvatura media  $\mathbf{H}$  y se observa su dependencia en términos de  $h_{ij}^k$ , así como de sus derivadas, por esta razón sólo un caso trivial sería adecuado.

En consecuencia, por el resto de esta sección analizaremos el tercer caso sobre soluciones simplécticas autosimilares.

Una de las soluciones más conocidas del Flujo de Curvatura Media en  $\mathbb{R}^2$  es el *Grim Reaper* (ver figura 3.1), esta solución consiste en una curva cuya evolución por Flujo de Curvatura Media coincide con una traslación.

Podemos suponer una  $t$ -familia de subvariedades simplécticas descritas por una inmersión inicial  $F_0$  y una isometría  $\phi(t)$  tal que  $\phi \circ F_0$  es solución autosimilar del Flujo de Curvatura Media (como en la Definición 3.3), y la variedad ambiente es una variedad con métrica plana (para lograr una analogía con el Grim Reaper de  $\mathbb{R}^2$ ) que hereda la métrica<sup>1</sup> y la estructura simpléctica a las subvariedades. Más aún, asumiremos que la variedad ambiente es Kähler ya que la estructura compleja es la diferencia más inmediata que podemos incluir para distinguir este ejemplo de uno en  $\mathbb{R}^n$ . Probaremos que  $F$  es mínima y por lo tanto  $\phi$  es la identidad.

Sea  $M$  una subvariedad en la familia  $\phi \circ F_0$  y sean  $\{e_1, e_2\}$  dos vectores tangentes ortonormales, comenzaremos por señalar que  $M$  tiene la misma estructura compleja que la variedad ambiente ya que su forma simpléctica coincide con la forma de Kähler de la variedad ambiente, es decir,

$$0 < \omega(e_1, e_2) = \tilde{g}(Je_1, e_2).$$

Aunque es un resultado que se cita con cierta frecuencia [9,45], incluiremos una breve demostración del siguiente resultado: cualquier subvariedad compleja de una variedad Kähler es mínima. Posteriormente, en el Teorema 3.7 probaremos que  $\phi$  sólo puede ser la identidad.

**Lema 3.5.** *Sea  $(\tilde{M}^{2m}, \omega, J, \tilde{g})$  una variedad Kähler y sea  $(M^{2n}, J)$  una subvariedad compleja de  $\tilde{M}^{2m}$  con segunda forma fundamental  $A$ , si además el conjunto*

$$\{e_1, \dots, e_{2n}\} \cup \{\nu_1, \dots, \nu_{2(m-n)}\}$$

*es una base ortonormal del haz tangente a  $\tilde{M}^{2m}$  tal que  $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$  es base del haz tangente a  $M^{2n}$ , entonces*

$$A_{\nu_k}(Je_i, e_j) = -A_{J\nu_k}(e_i, e_j) = A_{\nu_k}(e_i, Je_j)$$

para

$$1 \leq i, j \leq 2n$$

---

<sup>1</sup>Para el Flujo de Curvatura Media estamos asumiendo que la métrica en la subvariedad es la métrica inducida, por lo que ésta no es una condición adicional.

$$1 \leq k \leq 2(m - n)$$

*Demostración.* Comenzaremos por probar la primer igualdad:

Retomando la ecuación (1.8), la simetría de la segunda forma fundamental  $A$  implica

$$\begin{aligned}
A_{\nu_k}(Je_i, e_j) &= A_{\nu_k}(e_j, Je_i) \\
&= \left\langle \tilde{\nabla}_{e_j} Je_i, \nu_k \right\rangle \\
&= \left\langle J\tilde{\nabla}_{e_j} e_i, \nu_k \right\rangle + \left\langle \cancel{(\tilde{\nabla}_{e_j} J)e_i}, \nu_k \right\rangle. \\
&= -\left\langle \tilde{\nabla}_{e_j} e_i, J\nu_k \right\rangle \\
&= -A_{J\nu_k}(e_j, e_i) \\
&= -A_{J\nu_k}(e_i, e_j).
\end{aligned}$$

Análogamente para la segunda igualdad:

$$\begin{aligned}
A_{\nu_k}(e_i, Je_j) &= \left\langle \tilde{\nabla}_{e_i} Je_j, \nu_k \right\rangle \\
&= \left\langle J\tilde{\nabla}_{e_i} e_j, \nu_k \right\rangle + \left\langle \cancel{(\tilde{\nabla}_{e_i} J)e_j}, \nu_k \right\rangle \\
&= -\left\langle \tilde{\nabla}_{e_i} e_j, J\nu_k \right\rangle \\
&= -A_{J\nu_k}(e_i, e_j).
\end{aligned}$$

□

**Lema 3.6.** *Sea  $(\tilde{M}^{2m}, \omega, J, \tilde{g})$  una variedad Kähler y sea  $(M^{2n}, J)$  una subvariedad compleja de  $\tilde{M}^{2m}$ . Entonces  $M$  es mínima.*

*Demostración.* Sea  $\{e_1, \dots, e_n, e_1^*, \dots, e_n^*\}$  una base ortonormal del haz tangente de  $M$  tal que  $e_i^* = Je_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $\{\nu_1, \dots, \nu_{m-n}, \nu_1^*, \dots, \nu_{m-n}^*\}$  una base ortonormal del haz normal a  $M$  tal que  $\nu_i^* = J\nu_i$  para todo  $i = 1, \dots, m-n$ . Demostraremos que las componentes  $H^\alpha \nu_\alpha$  del vector de curvatura media  $\mathbf{H}$  son cero.

Para hacer evidente la distinción entre los términos relacionados con el haz tangente a la subvariedad y los términos relacionados con el haz normal, utilizaremos la siguiente convención:

- Llamaremos  $\alpha$  al índice que recorre los  $2(m - n)$  elementos de la base del haz normal a la subvariedad y los nombraremos de la siguiente manera:

$$\alpha = 1, \dots, m - n, 1^*, \dots, (m - n)^* .$$

- Los índices  $i, j$  recorrerán los  $2n$  elementos de la base del haz tangente a la subvariedad y análogamente los nombraremos:

$$i, j = 1, \dots, n, 1^*, \dots, n^* .$$

Sean  $h_{ij}^\alpha$  las componentes de la segunda forma fundamental de  $M$ ,

$$\mathbf{H} = \sum_{\alpha} H^{\alpha} \nu_{\alpha} = \sum_{\alpha} \sum_i \tilde{g}^{ii} h_{ii}^{\alpha} \nu_{\alpha} ,$$

la suma sobre  $i$  se puede separar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum_{\alpha} \left\{ \sum_i g^{ii} h_{ii}^{\alpha} \nu_{\alpha} + \sum_i g^{i^*i^*} h_{i^*i^*}^{\alpha} \nu_{\alpha} \right\} \\ &= \sum_{\alpha} \left\{ \sum_i g^{ii} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} e_i, \nu_{\alpha} \rangle + \sum_i g^{i^*i^*} \langle \tilde{\nabla}_{e_i^*} e_i^*, \nu_{\alpha} \rangle \right\} . \end{aligned}$$

Al sustituir  $e_i^* = J e_i$ , podemos usar el Lema 3.5 para intercambiar  $J$  del subíndice en la derivada covariante hacia el término  $e_i^*$ , resultando un cambio de signo

$$\mathbf{H} = \sum_{\alpha} \left\{ \sum_i g^{ii} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} e_i, \nu_{\alpha} \rangle + \sum_i g^{i^*i^*} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} J e_i^*, \nu_{\alpha} \rangle \right\} .$$

Como  $J e_i^* = -e_i$  y además la base es ortonormal  $g^{ii} = g^{i^*i^*} = 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum_{\alpha} \left\{ \sum_i g^{ii} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} e_i, \nu_{\alpha} \rangle + \sum_i g^{i^*i^*} \langle -\tilde{\nabla}_{e_i} e_i, \nu_{\alpha} \rangle \right\} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

□

A partir del Lema anterior, podemos postular el siguiente teorema que muestra una restricción en las soluciones al Flujo de Curvatura Media debida a las estructuras que

hemos asumido.

**Teorema 3.7.** *No existen  $t$ -familias de subvariedades complejas inmersas en una variedad Kähler con métrica plana que sean solución autosimilar no homotética del Flujo de Curvatura Media.*

*Demostración.* Sea  $\widetilde{M}$  la variedad ambiente, si existiera una familia de subvariedades simplécticas con esas características, por el lema anterior, cada variedad en la familia sería mínima, es decir, existiría una familia de inmersiones  $F : M \times [0, \infty) \rightarrow \widetilde{M}$  tal que el vector de curvatura media  $\mathbf{H}(\cdot, t)$  es el vector  $\mathbf{0}$  y  $F$  sería una solución estacionaria al Flujo de Curvatura Media, en particular para todo punto  $\mathbf{p} \in M$ ,

$$F(\mathbf{p}, 0) = F(\mathbf{p}, t),$$

y en consecuencia, para cualquier isometría  $\phi$  tenemos

$$\phi(F(\mathbf{p}, 0), 0) = \phi(F(\mathbf{p}, t), t).$$

Derivando respecto  $t$  y utilizando la ecuación de Flujo de Curvatura Media,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial t} \phi(F(\mathbf{p}, 0), 0) &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + d\phi \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + d\phi(\mathbf{H}). \end{aligned}$$

En particular, la isometría identidad satisface las ecuaciones anteriores; sin embargo, por la unicidad de soluciones del Flujo de Curvatura Media [8], concluimos que  $\phi$  sólo puede ser trivial.  $\square$

## 3.2. Subvariedades Lagrangianas: Esferas de Whitney

En el trabajo de Chen [12] y Li [21], el Principio del Máximo es utilizado para el análisis de singularidades y demostrar la invarianza de la estructura simpléctica bajo el Flujo de Curvatura Media. Aplicar este principio hace necesario imponer ciertas condiciones sobre la variedad ambiente, como asumir que es de tipo Einstein o conocer a priori cotas sobre alguno de los términos en la ecuación (3.2).

Abordaremos esta sección restringiendo el análisis a una familia de subvariedades lagrangianas de  $\mathbb{C}^m$  denominada *esferas de Whitney* (Definición 3.8). La importancia

de estudiar la evolución de estas subvariedades radica en que la ecuación de Flujo de Curvatura Media se reduce a la evolución de una curva en  $\mathbb{C}^m$ , reduciendo la dimensión del problema. Si bien se trata de un caso particular, existen otras familias de subvariedades con esta misma propiedad a las que puede generalizarse el análisis.

Smoczyk [37] también aborda la evolución por Flujo de Curvatura Media de esferas de Whitney, de su trabajo retomamos las definiciones 3.8-3.9 y algunas de sus propiedades de las que no se incluye demostración en su trabajo [37, 38]. Sin embargo los resultados que aquí se presentan son diferentes, en particular, damos una solución numérica a la evolución de esferas de Whitney y en el Teorema 3.18 damos una demostración de la invarianza de su estructura lagrangiana aplicando directamente el Corolario 2.7. Esta demostración difiere de otras, ya que aquí no utilizamos la condición de una variedad ambiente de tipo Einstein ni la compacidad de la subvariedad.

**Definición 3.8.** Sea  $R > 0$  y  $C$  un punto en  $\mathbb{C}^m$ , definimos la esfera de Whitney de radio  $R$  y centro  $C$  como la inmersión lagrangiana de  $\mathbb{S}^m$  en  $\mathbb{C}^m$  definida por

$$W_{R,C} : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$$

$$W_{R,C}(x_0, x_1, \dots, x_m) = \frac{R}{1 + x_0^2} (x_1, \dots, x_m; x_0x_1, \dots, x_0x_m) + C$$

Utilizaremos la siguiente definición de curva perfil [2, 37] para reducir la dimensión del problema.

**Definición 3.9.** Sea  $\delta > 0$  y  $z(s) = (u(s), v(s))$  una curva regular en el plano complejo definida sobre  $(-\delta, \delta)$ . Diremos que  $z(s)$  es la curva perfil asociada al mapeo  $F : (-\delta, \delta) \times \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{C}^m$ , si  $F$  es una inmersión de la forma

$$F : M^m = (-\delta, \delta) \times \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{C}^m$$

$$F(s, x) = (u(s)S(x), v(s)S(x)), \tag{3.6}$$

donde  $S$  es el encaje estándar de  $\mathbb{S}^{m-1}$  en  $\mathbb{R}^m$ .

Para asegurar que el mapeo (3.6) resulte en una inmersión, en [37] se menciona la siguiente condición que aquí postulamos como un teorema e incluimos una demostración.

**Lema 3.10.** Si  $z(s)$  es una curva que no pasa por el origen, entonces  $F$  definida por (3.6) es una inmersión.

*Demostración.* Como  $M = (-\delta, \delta) \times \mathbb{S}^{m-1}$ ,

$$T_{(s,p)}M = T_s z \oplus T_p \mathbb{S}^{m-1}$$

y

$$dF : T_{(s,p)}M \rightarrow T_{F(s,p)}\mathbb{C}^m.$$

Usaremos la Definición 1.4 y probaremos que  $dF$  es inyectiva:

Sea  $p = (x_1, \dots, x_{m-1})$  un punto en  $\mathbb{S}^{m-1}$  y sea  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^{m-1}$  una base de su espacio tangente, el conjunto

$$\{\partial_s\} \cup \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^{m-1}$$

es una base de  $T_{(s,p)}M$ .

Sean  $S_i$  las componentes del encaje estándar  $S : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$S(x_1, \dots, x_{m-1}) = (S_1(x_1, \dots, x_{m-1}), \dots, S_m(x_1, \dots, x_{m-1})),$$

aplicamos  $dF$  a cada elemento de la base de  $T_{(s,p)}M$ :

$$dF(\partial_s) = (u'(s)S(p), v'(s)S(p)) \tag{3.7}$$

$$\partial_i F := dF\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = (u(s)\partial_i S_1, \dots, u(s)\partial_i S_{m-1}; v(s)\partial_i S_1, \dots, v(s)\partial_i S_{m-1}).$$

Para probar que  $dF$  es inyectiva, probaremos que  $\dim(\ker(dF)) = 0$  y usaremos la siguiente relación

$$\dim(T_{(s,p)}M) = \dim(\ker(dF)) + \dim(\text{Im}(dF)). \tag{3.8}$$

A partir de la ecuación (3.7), y ya que  $z(s)$  una curva regular que no pasa por el origen, podemos ver que  $dF(\partial_s)$  no es combinación lineal de  $\partial_i F$ ,  $i = 1 \dots, m-1$ . Por tanto el espacio generado por  $dF(\partial_s)$  es un subespacio de  $\dim(\text{Im}(dF))$  y en consecuencia

$$\dim(\text{Im}(dF)) = 1 + \dim(\text{Im}(dF|_{T_p\mathbb{S}^{m-1}})).$$

Por otra parte, como  $z(s)$  no pasa por el origen, la dimensión del espacio generado por  $\{\partial_i F\}$ ,  $i = 1, \dots, m - 1$  coincide con la dimensión de  $T_p \mathbb{S}^{m-1}$ . Es decir,

$$\dim(\text{Im}(dF)) = m = \dim(T_{(s,p)}M),$$

de acuerdo con (3.8),  $\dim(\ker(dF)) = 0 \Rightarrow dF$  es inyectiva.  $\square$

Demostraremos ahora que la evolución por Flujo de Curvatura Media de una subvariedad lagrangiana con curva perfil  $z(s)$  se puede reducir a una ecuación de evolución para  $z(s)$ . Comenzaremos por dotar a  $\mathbb{C}^m$  con la métrica riemanniana estándar, asumiremos que  $M^m$  tiene una curva perfil  $z(s)$  la cual no pasa por el origen y construiremos una base ortonormal de  $T_{(s,p)}M^m$ :

Sea  $(s, p)$  un punto de  $M^m \subset \mathbb{C}^m$  y sea  $\{e_1, \dots, e_{m-1}\}$  una base ortonormal de  $T_p \mathbb{S}^{m-1}$ , definiremos  $r$  como la distancia del punto  $z(s)$  al origen de  $\mathbb{C}$ , es decir,  $r = |z(s)|$ . Como  $z(s)$  no pasa por el origen,  $r \neq 0$  y el conjunto

$$\begin{aligned} \{E_1, \dots, E_{m-1}\} \\ E_i := \frac{1}{r} e_i \end{aligned} \quad (3.9)$$

es una base ortogonal de  $T_p \mathbb{S}^{m-1}$ . Podemos extender al conjunto  $\{E_1, \dots, E_{m-1}\}$  a una base de  $T_{(s,p)}M^m$  agregando al conjunto el vector tangente a la curva perfil, a saber,

$$E_0 := \frac{1}{|z'|} \partial_s. \quad (3.10)$$

Debido a que  $z(s)$  no depende del encaje  $S(x)$  y  $\{e_i\}_{i=1}^{m-1}$  es una base ortonormal, el conjunto

$$\{E_0, E_1, \dots, E_{m-1}\} \quad (3.11)$$

define una base ortonormal respecto a la métrica estándar de  $\mathbb{C}^m$ :

$$\begin{aligned} \langle E_0, E_0 \rangle &= \frac{1}{|z'|^2} \langle (u'S, v'S), (u'S, v'S) \rangle \\ &= \frac{|z'|^2}{|z'|^2} (S_1^2 + \dots + S_{m-1}^2) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle E_0, E_i \rangle &= 0, \quad i \neq 0 \\
\langle E_i, E_j \rangle &= r^{-2} \langle (ue_i, ve_i), (ue_j, ve_j) \rangle \\
&= \frac{1}{|z|^2} (u^2 + v^2) \delta_{ij} = \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

En los Lemas 3.11-3.14 obtenemos explícitamente la curva perfil para las esferas de Whitney y caracterizamos a estas últimas como subvariedades lagrangianas.

**Lema 3.11.** *Para esferas de Whitney, la curva perfil es de la forma*

$$z(s) = \frac{1}{1 + \cos^2(s)} (-\sin(s), \sin(s) \cos(s)). \quad (3.12)$$

*Demostración.* Comenzamos con la parametrización de la esfera  $\mathbb{S}^m$  en  $\mathbb{R}^{m+1}$

$$\begin{aligned}
x_0 &= \cos(\theta_0) \\
x_1 &= \sin(\theta_0) \cos(\theta_1) \\
x_2 &= \sin(\theta_0) \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\
&\vdots \\
x_{m-1} &= \sin(\theta_0) \sin(\theta_1) \cdots \sin(\theta_{m-2}) \cos(\theta_{m-1}) \\
x_m &= \sin(\theta_0) \sin(\theta_1) \cdots \sin(\theta_{m-2}) \sin(\theta_{m-1})
\end{aligned} \quad (3.13)$$

donde el dominio de los parámetros es

$$\begin{aligned}
0 &\leq \theta_0, \dots, \theta_{m-2} \leq \pi \\
0 &\leq \theta_{m-1} \leq 2\pi.
\end{aligned}$$

A partir de la Definición 3.8 con  $R = 1$  y  $C = \mathbf{0}$ , y la ecuación (3.13) podemos obtener una expresión explícita para las esferas de Whitney

$$\begin{aligned}
W_{1,0} : \mathbb{S}^m &\rightarrow \mathbb{C}^m \\
W_{1,0}(x_0, x_1, \dots, x_m) &= \frac{1}{1 + x_0^2} (x_1, \dots, x_m; x_0 x_1, \dots, x_0 x_m).
\end{aligned}$$

Retomando la Definición 3.9, podemos obtener una expresión en términos de la curva perfil si factorizamos de  $x_1, \dots, x_m$  en (3.13) los términos que corresponden a una esfera  $S$  de dimensión  $m - 1$ , a saber,

$$S_1 = \cos(\theta_1)$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2) \\
&\vdots \\
S_{m-1} &= \text{sen}(\theta_0) \text{sen}(\theta_1) \cdots \text{sen}(\theta_{m-2}) \cos(\theta_{m-1}) \\
S_m &= \text{sen}(\theta_0) \text{sen}(\theta_1) \cdots \text{sen}(\theta_{m-2}) \text{sen}(\theta_{m-1})
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Comparando (3.13) y (3.14), podemos reescribir las primeras  $m$  coordenadas de  $W_{1,0}$  como

$$\frac{1}{1 + \cos^2(\theta_0)} (\text{sen}(\theta_0)S_1, \text{sen}(\theta_0)S_2, \dots, \text{sen}(\theta_0)S_m),$$

mientras que las últimas  $m$  coordenadas de  $W_{1,0}$  las reescribimos como

$$\frac{1}{1 + \cos^2(\theta_0)} (\cos(\theta_0) \text{sen}(\theta_0)S_1, \cos(\theta_0) \text{sen}(\theta_0)S_2, \dots, \cos(\theta_0) \text{sen}(\theta_0)S_m).$$

Es decir, en un intervalo  $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ , la curva

$$\frac{1}{1 + \cos^2(\theta_0)} (\text{sen}(\theta_0), \text{sen}(\theta_0) \cos(\theta_0)) \tag{3.15}$$

determina la curva perfil de  $W_{1,0}$ . Sin embargo, de acuerdo con la Definición 3.9 debemos parametrizar (3.15) sobre un intervalo simétrico  $(-\delta, \delta)$ , sean

$$u = \frac{\text{sen}(\theta_0)}{1 + \cos^2(\theta_0)} \quad \text{y} \quad v = \frac{\text{sen}(\theta_0) \cos(\theta_0)}{1 + \cos^2(\theta_0)},$$

entonces

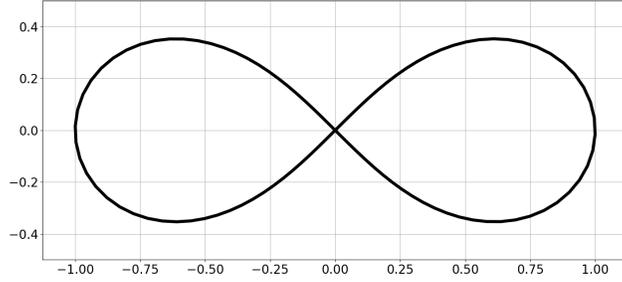
$$(u^2 + v^2)^2 = u^2 - v^2. \tag{3.16}$$

La ecuación (3.16) define la ecuación cartesiana de una *curva lemniscata* que puede parametrizarse en un intervalo simétrico  $(-\pi, \pi)$  como

$$z(s) = \frac{1}{1 + \cos^2(s)} (-\text{sen}(s), \text{sen}(s) \cos(s)).$$

En la Figura 3.2 mostramos el trazo de la curva (3.12). A partir de la parametrización de la curva perfil y de las ecuaciones (3.14), es posible escribir una expresión explícita para la esfera de Whitney de dimensión  $m$ . El Apéndice A contiene el código para generar la Figura 3.3, la cual muestra la siguiente proyección a  $\mathbb{R}^3$  de la 2-esfera □

Figura 3.2:  
Gráfica de la curva perfil  
para esferas de Whitney  
(ecuación 3.12).



de Whitney:

$$(u(s) \cos \theta, u(s) \sin \theta, v(s) \cos \theta, v(s) \sin \theta) \mapsto (u(s) \sin \theta, v(s) \cos \theta, v(s) \sin \theta).$$

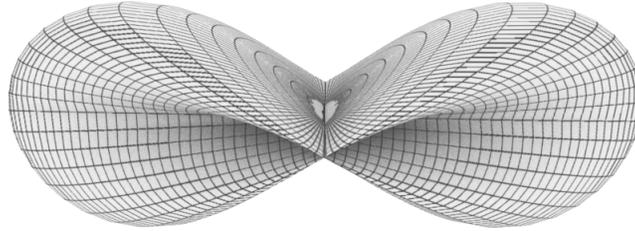


Figura 3.3:  
Proyección de la esfera de Whitney de dimensión dos sobre el espacio  
 $(0 + ia, b + ic) \in \mathbb{C}^2$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Asociada a  $h$ , la forma hermitiana estándar en  $\mathbb{C}^m$

$$h = \sum_{k=1}^m dz^k \otimes d\bar{z}^k,$$

tenemos la forma simpléctica  $\omega = \text{Im } h$ . En el siguiente lema probaremos que la inmersión de las esferas de Whitney define una subvariedad lagrangiana respecto esta forma simpléctica.

**Lema 3.12.** *Dada  $z(s)$  una curva perfil, la inmersión (3.6) de  $M$  en  $\mathbb{C}^m$  define una subvariedad lagrangiana.*

*Demostración.* Probaremos que para cualquier par  $E_i, E_j$  la forma simpléctica se

anula, para ello basta considerar los siguientes dos casos.

- Caso  $i, j \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
\omega(E_i, E_j) &= \frac{1}{|z|^2} \omega((u\partial_i S; v\partial_i S), (u\partial_j S; v\partial_j S)) \\
&= \frac{1}{|z|^2} \omega((u\partial_i S^1, \dots, u\partial_i S^m; v\partial_i S^1, \dots, v\partial_i S^m), \\
&\quad (u\partial_j S^1, \dots, u\partial_j S^m; v\partial_j S^1, \dots, v\partial_j S^m)) \\
&= \frac{1}{|z|^2} \mathbf{Im} \left( (u^2 + v^2)((\partial_i S^1)(\partial_j S^1) + \dots + (\partial_i S^m)(\partial_j S^m)) \right. \\
&\quad \left. + i uv \left( -(\cancel{\partial_i S^1})(\cancel{\partial_j S^1}) - \dots - (\cancel{\partial_i S^m})(\cancel{\partial_j S^m}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\cancel{\partial_i S^1})(\cancel{\partial_j S^1}) + \dots + (\cancel{\partial_i S^m})(\cancel{\partial_j S^m}) \right) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- Caso  $i = 0, j \neq i$ .

$$\begin{aligned}
\omega(E_i, E_j) &= \frac{1}{|z|^2} \omega((u_s S; v_s S), (u\partial_j S; v\partial_j S)) \\
&= \frac{1}{|z|^2} \omega((u_s S^1, \dots, u_s S^m; v_s S^1, \dots, v_s S^m), \\
&\quad (u\partial_j S^1, \dots, u\partial_j S^m; v\partial_j S^1, \dots, v\partial_j S^m)) \\
&= \frac{1}{|z|^2} \mathbf{Im} \left( (u_s u + v_s v)(S^1 \partial_j S^1 + \dots + S^m \partial_j S^m) \right. \\
&\quad \left. + i(-u_s v + uv_s)(S^1 \partial_j S^1 + \dots + S^m \partial_j S^m) \right) \\
&= \frac{1}{|z|^2} (-u_s v + uv_s) \cancel{S \cdot \partial_j S} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene al notar que el vector de posición  $S$  de la esfera es paralelo al vector normal, y éste es ortogonal a los vectores tangente.  $\square$

A partir de aquí nos enfocaremos en la estructura lagrangiana de las esferas de Whitney, por esta razón utilizaremos el conjunto  $\{E_0, \dots, E_m, F_0 := JE_0, \dots, F_m := JE_m\}$  como base de  $\mathbb{C}^m$ .

**Lema 3.13.** (Savas-Halilaj [37]) Sea  $z(s)$  una curva perfil asociada a una inmersión  $F$  en  $\mathbb{C}^m$ , sean  $r = |z(s)|$ ,  $\kappa$  la curvatura de la curva  $z(s)$  y  $\mathbf{n}$  su vector unitario normal. Si definimos

$$p = \langle z, \mathbf{n} \rangle r^{-2}. \quad (3.17)$$

Entonces, la segunda forma fundamental tiene las siguientes componentes:

$$A^{v_0} = - \begin{pmatrix} \kappa & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p \end{pmatrix}, \quad A^{v_j} = - \begin{pmatrix} 0 & p & \cdots & p \\ p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ si } j \neq 0.$$

*Demostración.* Comenzamos por calcular las componentes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned} h_{ss}^0 &= \langle \nabla_{E_0} E_0, F_0 \rangle \\ &= \frac{1}{|z'|^2} \left\langle \nabla_{\partial_s} \left( \frac{1}{|z'|^2} \partial_s F \right), J \partial_s F \right\rangle \\ &= \frac{1}{|z'|^2} \nabla_{\partial_s} \left( \frac{1}{|z'|^2} \right) \langle \partial_s F, J \partial_s F \rangle + \frac{1}{|z'|^3} \langle \nabla_{\partial_s} \partial_s F, J \partial_s F \rangle \\ &= \frac{1}{|z'|^3} \langle (u'' S; v'' S), (-v' S; u' S) \rangle \\ &= \frac{1}{|z'|^3} \langle (u'' S_1, \dots, u'' S_m; v'' S_1, \dots, v'' S_m), \\ &\quad (-v' S_1, \dots, -v' S_m; u' S_1, \dots, u' S_m) \rangle \\ &= \frac{1}{|z'|^3} (-u'' v' (S_1^2 + \dots + S_m^2) + v'' u' (S_1^2 + \dots + S_m^2)) \\ &= -\kappa (S_1^2 + \dots + S_m^2) = -\kappa, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtuvo porque  $S_1^2 + \dots + S_m^2$  es el cuadrado del radio de la esfera en  $\mathbb{R}^m$  que asumimos igual a uno por ser el encaje estándar (definición 3.9).

Sea  $i, j = 1, \dots, m$ ,

$$h_{ij}^0 = \frac{1}{|z'| r^2} \left\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, J \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|z'|r^2} \langle (u\partial_{ij}S; v\partial_{ij}S), J\partial_s F \rangle \\
&= \frac{1}{|z'|r^2} \langle (u\partial_{ij}S; v\partial_{ij}S), (-v'S; u'S) \rangle \\
&= \frac{1}{|z'|r^2} \langle (u\partial_{ij}S_1, \dots, u\partial_{ij}S_m; v\partial_{ij}S_1, \dots, v\partial_{ij}S_m), \\
&\quad (-v'S_1, \dots, -v'S_m; u'S_1, \dots, u'S_m) \rangle \\
&= \frac{1}{|z'|r^2} (-uv'(S_1\partial_{ij}S_1) - \dots - uv'(S_m\partial_{ij}S_m) \\
&\quad +vu'(S_1\partial_{ij}S_1) + \dots + vu'(S_m\partial_{ij}S_m)) \\
&= \frac{1}{|z'|r^2} (-uv' + vu') (\partial_i(S_1\partial_jS_1) - (\partial_iS_1)(\partial_jS_1) + \dots \\
&\quad + \partial_i(S_m\partial_jS_m) - (\partial_iS_m)(\partial_jS_m)),
\end{aligned}$$

como en  $\mathbb{R}^m$  el vector de posición  $S$  de la esfera es paralelo al vector normal, tenemos

$$\begin{aligned}
h_{ij}^0 &= \frac{1}{|z'|r^2} (-uv' + vu') (\partial_i(\cancel{S \cdot \partial_j S}) - \partial_i S \cdot \partial_j S) \\
&= -\frac{1}{r^2} \langle z, \mathbf{n} \rangle_{\mathbb{R}^2} \delta_{ij},
\end{aligned}$$

la última igualdad se sigue de haber utilizado el encaje estándar que genera una base de vectores tangentes ortonormales  $\{\partial_j S\}_{j=1, \dots, m}$ . Por otra parte,

$$\begin{aligned}
h_{0j}^0 &= \frac{1}{|z'|^2 r} \left\langle \nabla_{\partial_s} \partial_j, J \frac{\partial F}{\partial S} \right\rangle \\
&= \frac{1}{|z'|^2 r} \langle (\partial_s \partial_j F), (-v'S; u'S) \rangle \\
&= \frac{1}{|z'|^2 r} \langle (u'\partial_j S; v'\partial_j S), (-v'S; u'S) \rangle \\
&= \frac{1}{|z'|^2 r} \cancel{(-v'u' + u'v')} (S\partial_j S_1 + \dots + S\partial_j S_m) = 0
\end{aligned}$$

Ahora obtendremos las componentes de la segunda forma fundamental en la dirección

$F_k, k = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned}
h_{00}^k &= \frac{1}{|z'|^2 r} \left\langle \nabla_{\partial_s} \partial_s F, J \frac{\partial F}{\partial x^k} \right\rangle \\
&= \frac{1}{|z'|^2 r} \langle (u'' S; v'' S), (-v \partial_k S; u \partial_k S) \rangle \\
&= \frac{1}{|z'|^2 r} (-v u'' + u v'') (S \cdot \partial_k S) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{ij}^k &= \frac{1}{r^3} \left\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j F, J \frac{\partial F}{\partial x^k} \right\rangle \\
&= \frac{1}{r^3} \langle (u \partial_{ij} S; v \partial_{ij} S), (-v \partial_k S; u \partial_k S) \rangle \\
&= \frac{1}{r^3} (-v u + u v) (u \partial_{ij} S; v \partial_{ij} S) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{0j}^k &= h_{j0}^k = \frac{1}{|z'| r^2} \left\langle \nabla_{\partial_s} \partial_j F, J \frac{\partial F}{\partial x^k} \right\rangle \\
&= \frac{1}{|z'| r^2} \langle (u' \partial_j S; v' \partial_j S), (-v \partial_k S; u \partial_k S) \rangle \\
&= \frac{1}{|z'| r^2} (-v u' + u v') (\partial_k S \cdot \partial_j S) \\
&= -\frac{1}{r^2} \langle z, \mathbf{n} \rangle_{\mathbb{R}^2} \delta_{kj} = -p \delta_{kj}.
\end{aligned}$$

□

A partir de las componentes  $h_{ij}^k$  podemos calcular el vector de curvatura media  $\mathbf{H}$  y la norma de la segunda forma fundamental  $|A|$ .

**Lema 3.14.** *Sea  $z(s)$  una curva perfil asociada a una inmersión  $F$  en  $\mathbb{C}^m$ , sea  $\kappa$  la curvatura de la curva  $z(s)$  y  $\mathbf{n}$  su vector unitario normal. Entonces el vector de curvatura media  $\mathbf{H}$  y la norma de la segunda forma fundamental  $|A|$  están dadas por*

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= -(\kappa + (m-1)p) \mathbf{N} \\
|A|^2 &= \kappa^2 + 3(m-1)p^2,
\end{aligned}$$

donde  $p = \langle z, \mathbf{n} \rangle r^{-2}$  y  $\mathbf{N} := \frac{1}{|z'|} J \partial_s F$ .

*Demostración.* Al igual que en los lemas anteriores, utilizaremos la métrica estándar en  $\mathbb{C}^m$  a la que denotaremos  $g$  y la base unitaria

$$\{E_0, E_1, \dots, E_{m-1}, F_0, \dots, F_{m-1}\}$$

donde los vectores  $E_i$  son tangentes a la esfera de Whitney y fueron definidos en (3.9)-(3.10), mientras que  $F_i = JE_i$  para  $i = 0, \dots, m-1$ .

Retomando la Definición 1.12,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}^0 F_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{H}^k F_k \\ &= (g^{ij} A_{ij}^0) F_0 + \sum_{k=1}^{m-1} g^{ij} A_{ij}^k F_k \\ &= (g^{ii} A_{ii}^0) F_0 + \sum_{k=1}^{m-1} g^{ii} A_{ii}^k F_k \\ &= -(\kappa + (m-1)p) F_0 \\ &= -(\kappa + (m-1)p) \frac{1}{|z'|} J\partial_s F. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \sum_{\iota=0}^{m-1} g^{ij} g^{kl} A_{ik}^\iota A_{jl}^\iota \\ &= \sum_{\iota=0}^{m-1} g^{ii} g^{kl} A_{ik}^\iota A_{il}^\iota \\ &= \sum_{\iota=0}^{m-1} g^{ii} g^{kk} A_{ik}^\iota A_{ik}^\iota \\ &= (g^{ii} A_{ii}^0)^2 + \sum_{\iota=1}^{m-1} g^{ii} g^{kk} (A_{ik}^\iota)^2 \\ &= \kappa^2 + (m-1)p^2 + \sum_{\iota=1}^{m-1} g^{ii} \sum_k^{m-1} (A_{ik}^{v_\iota})^2 \\ &= \kappa^2 + (m-1)p^2 + 2(m-1)p^2 \\ &= \kappa^2 + 3(m-1)p^2. \end{aligned}$$

□

A partir del lema anterior podemos escribir la ecuación de evolución para las esferas de Whitney:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -(\kappa + (m-1)p) \mathbf{N}. \quad (3.18)$$

Sea  $S(x)$  el encaje estándar de  $\mathbb{S}^{m-1}$  en  $\mathbb{R}^m$  como en la definición 3.9. De acuerdo con Savas-Halilaj, *et. al.* [37], a lo largo del Flujo de Curvatura Media se preserva la invarianza bajo rotaciones del encaje  $S$ ; y esto implica que la dependencia temporal del flujo se encuentra únicamente en la curva perfil  $z(s)$ .

Sea  $F(s, x; t) = (u(s, t)S(x); v(s, t)S(x))$  una solución al Flujo de Curvatura Media cuya condición inicial  $F(s, x; 0)$  es una esfera de Whitney,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (u_t S(x); v_t S(x)). \quad (3.19)$$

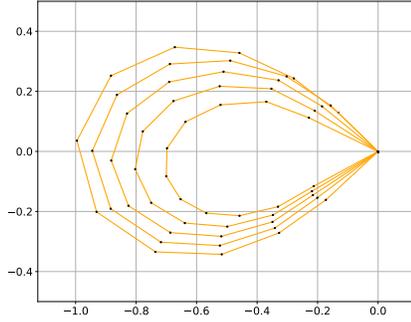
Por otra parte, por la ecuación (3.18),

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= -(\kappa + (m-1)p) \mathbf{N} \\ &= -\frac{\kappa + (m-1)p}{|z'|} (-v' S(x); u' S(x)). \end{aligned} \quad (3.20)$$

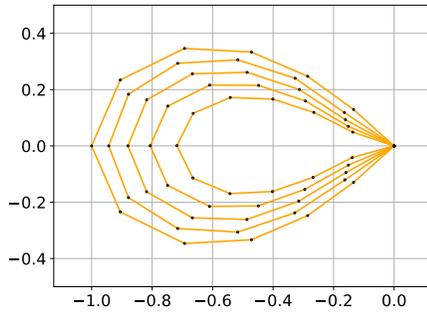
Comparando cada componente en (3.19) y (3.20) vemos que la ecuación de evolución se reduce a una ecuación para la curva perfil  $z(s, t)$  y su vector normal  $\hat{\mathbf{n}}$ :

$$\begin{aligned} (u_t S(x); v_t S(x)) &= -\frac{\kappa + (m-1)p}{|z'|} (-v' S(x); u' S(x)) \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} u_t S^1 \\ \vdots \\ u_t S^m \\ v_t S^1 \\ \vdots \\ v_t S^m \end{pmatrix} &= -\frac{\kappa + (m-1)p}{|z'|} \begin{pmatrix} -v' S^1 \\ \vdots \\ -v' S^m \\ u' S^1 \\ \vdots \\ u' S^m \end{pmatrix} \\ \Rightarrow (u_t, v_t) &= -\frac{\kappa + (m-1)p}{|z'|} (-v', u') \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} = -(\kappa + (m-1)p) \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.21)$$



(a)



(b)

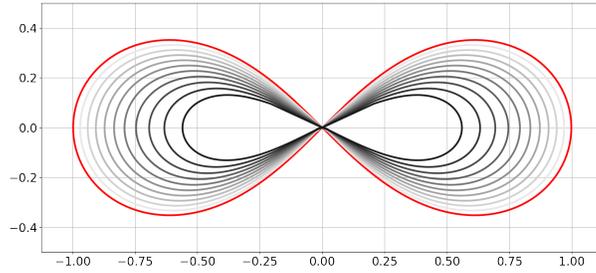
Figura 3.4:  
Comparación entre la solución numérica de la ecuación (3.21) utilizando la aproximación de Kimura [25] (a), y nuestra propuesta [40] (b). Aunque los resultados son similares, la solución (b) preserva la simetría respecto al eje horizontal por lo que representa una mejor aproximación.

A partir de aquí, dedicaremos el resto de esta sección a calcular numéricamente la solución a la ecuación (3.21) en una vecindad tubular. Debido a la similitud entre la ecuación anterior y un flujo dependiente de la curvatura en  $\mathbb{R}^2$ , el método numérico que aquí presentamos tiene la particularidad de que al fijar ciertos parámetros se reconstruye el Flujo de Curvatura Media clásico. Este mismo esquema lo hemos aplicado al problema de parametrización de contornos y presentado en otro de nuestros trabajos [40].

Existen otras técnicas que permiten resolver flujos dependientes de la curvatura, por ejemplo a través del *Método de Conjuntos de Nivel* (ver Osher [36]) y la aproximación propuesta por Kimura [25]. Aunque nuestro método retoma del trabajo de

Figura 3.5:

Evolución por Flujo de Curvatura Media de la curva perfil de la 2-esfera Whitney. En rojo se muestra la curva inicial y la intensidad de color negro representa el avance en el tiempo.



Kimura la aproximación por diferencias finitas de la curvatura y los vectores tangentes, éste consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales formado por una ecuación de deformación de una curva y una ecuación de Poisson; es a través de esta última que se calcula la componente normal del vector de deformación. En la Figura 3.4 hacemos una comparación entre el método de Kimura, sumando a la curvatura el término  $((m - 1)p)\mathbf{n}$ , y nuestro esquema numérico.

Para la Figura 3.4 hemos utilizado la simetría de la curva perfil para dividir el dominio en dos lazos  $(-\pi, 0)$  y  $(0, \pi)$ . Esta misma técnica es utilizada por Savas-Halilaj y Smoczyk [37] en su análisis geométrico. En la Figura 3.5 hemos reflejado la solución horizontalmente y usado una interpolación a base de splines para ilustrar la evolución de la curva perfil.

Antes de establecer nuestro esquema numérico, reescribiremos la ecuación (3.21) en una vecindad tubular para garantizar la existencia y unicidad de soluciones en esa vecindad.

**Lema 3.15.** Sea  $z(s, t)$  una solución a la ecuación (3.21) con  $z(s, 0)$  parametrizada por longitud de arco. Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $z(s, t)$  esté contenida en una vecindad tubular de  $z(s, 0)$  para todo  $t$  en el intervalo  $[0, \varepsilon)$  y pueda reparametrizarse como

$$z(s, t) = z_0(s) + f(s, t)\mathbf{n}_0. \quad (3.22)$$

Entonces la ecuación (3.21) se puede reescribir como

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1 - \kappa_0 f}{\sqrt{(1 - \kappa_0 f)^2 + (f')^2}}(\kappa(t) + (m - 1)p). \quad (3.23)$$

*Demostración.* A partir de la ecuación (3.22) calcularemos el vector tangente  $\mathbf{T}$ , el

vector normal  $\mathbf{n}$  y la curvatura  $\kappa$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{z'}{\|z'\|} = \frac{z'_0 + f'\mathbf{n}_0 - \kappa_0 f \mathbf{T}_0}{\|z'_0 + f'\mathbf{n}_0 - \kappa_0 f \mathbf{T}_0\|} = \frac{(1 - \kappa_0 f) \mathbf{T}_0 + f' \mathbf{n}_0}{\|(1 - \kappa_0 f) \mathbf{T}_0 + f' \mathbf{n}_0\|} \\ &= \frac{(1 - \kappa_0 f) \mathbf{T}_0 + f' \mathbf{n}_0}{\sqrt{(1 - \kappa_0 f)^2 + (f')^2}}\end{aligned}\quad (3.24)$$

Sea  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces

$$\mathbf{n} = \mathbf{J}\mathbf{T} = \frac{(1 - \kappa_0 f) \mathbf{n}_0 - f' \mathbf{T}_0}{\sqrt{(1 - \kappa_0 f)^2 + (f')^2}}\quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\mathbf{T}' \cdot \mathbf{J}\mathbf{T}}{\|z'\|} \\ &= \frac{\left( \left( \frac{(1 - \kappa_0 f) \kappa_0}{|z'|} + \partial_s \frac{f'}{|z'|} \right) \mathbf{n}_0 + \left( -\frac{f' \kappa_0}{|z'|} + \partial_s \frac{1 - \kappa_0 f}{|z'|} \right) \mathbf{T}_0 \right) \cdot \left( \frac{1 - \kappa_0 f}{|z'|} \mathbf{n}_0 - \frac{f'}{|z'|} \mathbf{T}_0 \right)}{|z'|} \\ &= \frac{(1 - \kappa_0 f) f'' + f f' \kappa'_0 + 2\kappa_0 (f')^2 + \kappa_0 - 2\kappa_0^2 f + \kappa_0^3 f^2}{((1 - \kappa_0 f)^2 + (f')^2)^{3/2}}\end{aligned}\quad (3.26)$$

Al igualar la ecuación (3.21) con la derivada de la ecuación (3.22) a lo largo de  $\mathbf{n}_0$ , tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \langle \mathbf{n}_0, \mathbf{n}_0 \rangle = -(\kappa(t) + (m - 1)p) \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_0 \rangle,$$

donde

$$p = \frac{\langle z, \mathbf{n} \rangle}{r^2} = (f + \langle z_0, \mathbf{n}_0 \rangle) \frac{1 - \kappa_0 f}{|z'| |z|^2} - \frac{f' \langle z_0, \mathbf{T}_0 \rangle}{|z'| |z|^2}.$$

Finalmente obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1 - \kappa_0 f}{\sqrt{(1 - \kappa_0 f)^2 + (f')^2}} (\kappa(t) + (m - 1)p).$$

□

Debido a su extensión, dedicamos el Apéndice B a demostrar la existencia y unicidad de soluciones en una vecindad tubular. Sin embargo, queremos destacar que la función  $f$  del lema anterior representa los desplazamientos verticales de la curva perfil. Nuestro esquema numérico se encarga de calcular estos desplazamientos.

El esquema numérico que proponemos en este trabajo y en [40] consiste en reescribir la evolución de una curva plana bajo el Flujo de Curvatura Media a través de un sistema de ecuaciones diferenciales. Consideremos el siguiente problema:

Sea  $\rho$  una distribución dada, y  $z_0(s)$  una curva cerrada y diferenciable; buscamos una  $t$ -familia de curvas  $z(s, t)$  con curvatura  $\kappa$ , cuyo interior denotaremos por  $\Omega$ , que sea solución al siguiente sistema:

$$(\mathbf{P1}) \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n} \\ z(\cdot, 0) = z_0 \end{cases} \quad (\mathbf{P2})' \begin{cases} \Delta u = \rho & \text{en } \Omega \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \text{en } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \kappa & \text{si } \rho(\mathbf{x}) = 0 \quad . \end{cases}$$

Notemos que si  $\rho = 0$ , el desplazamiento en la dirección normal a la curva es igual a la curvatura, recuperándose la ecuación de flujo de Curvatura Media. Para resolver la ecuación (3.21), haremos la siguiente modificación a  $(\mathbf{P2})'$ :

$$(\mathbf{P2}) \begin{cases} \Delta u = \rho & \text{en } \Omega \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \text{en } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \kappa + (m-1)p & \text{si } \rho(\mathbf{x}) = 0 \quad . \end{cases}$$

El valor de la función  $u$  en  $\partial\Omega$  no lo conocemos explícitamente, sin embargo más adelante veremos la necesidad de calcularlo numéricamente. Nuestro trabajo [40] contempla el caso en el que la función  $\rho$  es igual a la función *delta de Dirac* como una propuesta anisotrópica al Flujo de Curvatura Media. Sin embargo, para resolver la ecuación (3.21), esto no es necesario y nos limitaremos a citar el siguiente resultado.

**Teorema 3.16.** (Velázquez [40]) *Sea  $z_0$  una curva inicial de clase  $C^3$ , denotemos por  $\Omega$  su interior. Sea  $r > 0$  y  $\mathbf{p}$  un punto en  $\Omega$  tal que  $|\mathbf{x} - \mathbf{p}| > 0$  para cualquier  $\mathbf{x}$  en una  $r$ -vecindad tubular de  $z_0$ . Sea  $g$  una función de clase  $C^2(\partial\Omega)$ ,  $\rho(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{p})$  la función delta de Dirac, y  $z_0$  cerrada y simple. Entonces el sistema  $(\mathbf{P1-P2})$  tiene*

una solución única.

Debido a que **(P2)** es un problema de Poisson, podemos hacer uso de la siguiente proposición que demostramos en [40].

**Proposición 3.17.** *Consideremos el problema **(P2)**. Sea  $\mathbf{x}$  un punto en la frontera  $\partial\Omega$  y sea*

$$\Phi(\mathbf{x}) := \frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right)$$

la solución fundamental de la ecuación de Laplace. Si  $u$  es solución de **(P2)**, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial\Omega} \left( \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} - \frac{1}{2} u(\mathbf{x}).$$

Podemos sustituir las condiciones de frontera de **(P2)** en la fórmula de la proposición anterior para obtener alguna de las siguientes dos representaciones integrales:

■ Caso 1. Si  $\rho = 0$ ,

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\kappa(\mathbf{y}) + (m-1)p) d\mathbf{y} = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \frac{1}{2} u(\mathbf{x}). \quad (3.27)$$

■ Caso 2. Si  $\rho \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{y} &= \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \frac{1}{2} u(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

En ambas ecuaciones necesitamos conocer explícitamente el valor de  $u$  en  $\partial\Omega$ . Utilizando los puntos de la discretización de la curva inicial, las integrales en la ecuación (3.27) pueden separarse en arcos. Numéricamente, las integrales sobre cada arco pueden aproximarse utilizando una fórmula de cuadratura; este cálculo estará escrito en términos del valor de  $u$  en cada punto de la discretización, formando un sistema lineal que puede ser resuelto para  $u$ .

De forma similar, podemos obtener un sistema de ecuaciones lineales para la ecuación (3.28); sustituyendo el valor de  $u$ , resolvemos el sistema para las derivadas

$\partial u / \partial \mathbf{n}$ . El valor de estas derivadas corresponde al desplazamiento en la dirección normal [40].

En el caso general  $\rho \neq 0$ , la discretización de las ecuaciones (3.27) y (3.28) genera un sistema de  $2N$  ecuaciones lineales con incógnitas  $u$  y  $\partial u / \partial \mathbf{n}$  evaluadas en cada punto de la discretización. Sin embargo, cuando  $\rho = 0$  el sistema, aunque redundante, tiene la ventaja de corregir los errores numéricos provenientes de sumar la aproximación de  $\kappa$  y el término dependiente de  $p$ ; ya que corrige los errores al aproximar por diferencias finitas la curvatura y los vectores tangentes. Por otra parte, el término  $p = \langle z, \mathbf{n} \rangle / r^2$  representa un mayor problema numéricamente, ya que conforme la curva se contrae, el valor de  $r^2 = |z|^2$  disminuye y  $p$  aumenta. En consecuencia, cualquier error en la aproximación numérica de la curva comienza a cobrar cada vez más peso conforme la curva se contrae.

Sea  $\Delta t > 0$  y  $\{\varphi_1^k, \dots, \varphi_N^k\}$  el conjunto de puntos que represente nuestra discretización de la curva perfil al tiempo  $k \Delta t$ . Si llamamos  $b_j^k$  al desplazamiento en la dirección vertical, nuestra solución utiliza las siguientes aproximaciones del trabajo de Kimura [25]:

$$\begin{aligned}
 d_j &:= |\varphi_{j+1}^k - \varphi_j^k| \\
 l_k &:= \sum_j |\varphi_{j+1}^k - \varphi_j^k| \\
 \tau_i &:= \frac{i}{|i|} \frac{\varphi_{j+i}^k - \varphi_j^k}{d_i}, \text{ for } i = -2, -1, 1, 2 \\
 \mathbf{T}_j &\approx \frac{-\tau_2 + 4\tau_1 + 4\tau_{-1} - \tau_{-2}}{6} \\
 \kappa_j &\approx \mu \frac{2(\tau_1 - \tau_{-1})}{d_1 - d_{-1}} + (1 - \mu) \frac{2(\tau_2 - \tau_{-2})}{d_2 - d_{-2}}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

y actualiza las posiciones de cada punto en la discretización inicial siguiendo la fórmula:

$$\varphi_j^{k+1} = \varphi_j^k + \Delta t (a_j^k \mathbf{T}_j^k + b_j^k \mathbf{n}_j^k). \tag{3.30}$$

Debido a su extensión, los códigos utilizados para generar la Figura 3.4 se encuentran disponibles en el repositorio github del autor de este trabajo [43]. Como característica adicional del método numérico propuesto, destacamos que su implementación actual está paralelizada.

En la siguiente sección analizaremos la evolución del ángulo de Kähler.

### 3.3. Ángulo de Kähler en Esferas de Whitney

En esta sección demostraremos la invarianza bajo el Flujo de Curvatura Media de la estructura lagrangiana para las esferas de Whitney como una consecuencia directa del Corolario 2.7. A pesar de restringir el análisis a esta familia de subvariedades, un argumento análogo se aplica a otras subvariedades lagrangianas equivariantes, ya que la evolución de éstas se reduce a la evolución de una curva perfil [37].

En esta demostración no utilizamos el Principio del Máximo, condición sobre la variedad ambiente, ni compacidad de la subvariedad.

**Teorema 3.18.** *Sea  $\tau > 0$ , sea  $M(t)$  la evolución por Flujo de Curvatura Media de una esfera de Whitney inmersa en  $\mathbb{C}^m$ . Entonces  $M(t)$  es lagrangiana para todo  $t$  en  $[0, \tau)$ .*

*Demostración.* Al igual que en la sección anterior, utilizaremos la métrica estándar en  $\mathbb{C}^m$  y su forma simpléctica asociada. En el Lema 3.12 demostramos que las esferas de Whitney poseen una estructura lagrangiana, por lo que sólo resta aplicar el Corolario 2.7 para probar que el coseno del ángulo de Kähler  $\cos \theta = \omega|_{M(t)}$  es constante, es decir,  $\partial\omega/\partial t = 0$ .

Sea  $X : M \times [0, \tau) \rightarrow \mathbb{C}^m$  la familia de inmersiones que describe la evolución por Flujo de Curvatura Media de una esfera de Whitney. A partir del Corolario 2.7, sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= \sum_{\alpha < \beta \neq k} \frac{\partial\omega_{k\beta}}{\partial x^\alpha} H^\alpha \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^j} \\ &+ \sum_{\alpha < \beta \neq k} \omega_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^j} - \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \right). \end{aligned}$$

Podemos prescindir del primer término del lado derecho de la ecuación anterior notando que la única componente no nula del vector de curvatura media  $H^\alpha$  es cuando  $\alpha = 0$ , y por tanto  $x^\alpha = s$ . Sin embargo, la forma simpléctica es fija y sus componentes  $\omega_{\alpha\beta}$  no dependen de la curva perfil por lo que su derivada respecto  $s$  es cero. En

consecuencia,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{\alpha < \beta \neq k} \omega_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^j} - \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \right). \quad (3.31)$$

Ahora analizaremos por casos el término a la derecha de la ecuación anterior:

- Caso 1:  $x^i = x^j = s$ .

Reescribimos este término como:

$$\sum_{\alpha < \beta \neq k} \omega_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial H^\alpha}{\partial s} \frac{\partial X^\beta}{\partial s} - \frac{\partial H^\alpha}{\partial s} \frac{\partial X^\beta}{\partial s} \right) = 0.$$

- Caso 2:  $x^i \neq s$  y  $x^j \neq s$  (el caso  $x^i = x^j \neq s$  es análogo).

Debido a que el vector de curvatura media depende exclusivamente del parámetro  $s$ , tenemos:

$$\frac{\partial H^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial H^\beta}{\partial x^j} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{\alpha < \beta \neq k} \omega_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^j} - \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \right) = 0.$$

- Caso 3:  $x^i = s \neq x^j$

Análogamente al caso anterior, las componentes  $H^\alpha$  del vector de curvatura media  $\mathbf{H}$  sólo dependen de  $s$ , por tanto

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{\alpha < \beta \neq k} \omega_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial H^\alpha}{\partial s} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^j} - \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial X^\beta}{\partial s} \right) = \omega \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right).$$

Sea  $\zeta := -\frac{\kappa + (m-1)p}{|z'|}$ , a partir de la ecuación (3.20) podemos reescribir

$$\partial_s \mathbf{H} = (\partial_s \zeta) (-v_s S; u_s S) + \zeta (-v_{ss} S; u_{ss} S)$$

$$\frac{\partial X^\beta}{\partial x^j} = (u \partial_j S; v \partial_j S)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \omega \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right) &= \text{Im} \left( \sum_k dz^k \otimes d\bar{z}^k \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right) \right) \\
&= [(\partial_s \zeta)(-v_s S) - \zeta v_{ss} S] \cdot (-v \partial_j S) \\
&\quad + [(\partial_s \zeta) u_s S + \zeta u_{ss} S] \cdot (u \partial_j S)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\omega \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right) &= \cancel{(S \cdot \partial_j S)} ((\partial_s \zeta)(u_s - v_s) + \zeta(u_{ss} - v_{ss})) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que el vector de posición  $S$  es paralelo al vector normal a las esferas y en consecuencia ortogonal a los vectores tangentes  $\partial_j S$ .

- Caso 4:  $x^i \neq s = x^j$ .

Se reduce al caso anterior utilizando la antisimetría de (3.31) al intercambiar  $i$  con  $j$ .

□



# Capítulo 4

## Aplicaciones

### 4.1. Flujo de Curvatura Media Renormalizado

En el capítulo anterior obtuvimos las fórmulas que nos permiten aproximar numéricamente la evolución por Flujo de Curvatura Media (FCM) de la curva perfil de las esferas de Whitney. Esta formulación parte de fijar, a lo largo de todo el flujo, el número de puntos de la discretización de la curva perfil y actualizar sus posiciones en pequeños subintervalos de tiempo. En esta sección se propone una manera de refinar los segmentos poligonales de la discretización de la curva, la cual puede aplicarse al problema de parametrización de contornos en imágenes [40]. La diferencia entre encontrar numéricamente la evolución de curvas perfiles y la parametrización de contornos, se encuentra únicamente en la condición de frontera del problema (**P2**).

El problema de parametrización de contornos consiste en encontrar una curva que se ajuste a la frontera de un subconjunto finito de  $\mathbb{R}^2$ . En particular, aquí asumiremos que la subregión es conexa y está representada por la matriz de píxeles asociada a una imagen digital; donde los píxeles con valor 0 (color negro) forman la subregión de  $\mathbb{R}^2$ , mientras que el resto de la imagen (o fondo) tiene asociados píxeles con valor 255 (color blanco).

En nuestro artículo [40] hemos propuesto e implementado una solución a este problema. Esta solución consiste en evolucionar por FCM una curva cerrada cuyo interior inicialmente contiene la subregión a aproximar, esta subregión es tratada como un obstáculo que limita el avance de la curva a medida que sus segmentos coinciden con la frontera de la subregión. En la Figura 4.1 mostramos una secuencia de imágenes donde se muestra este proceso.

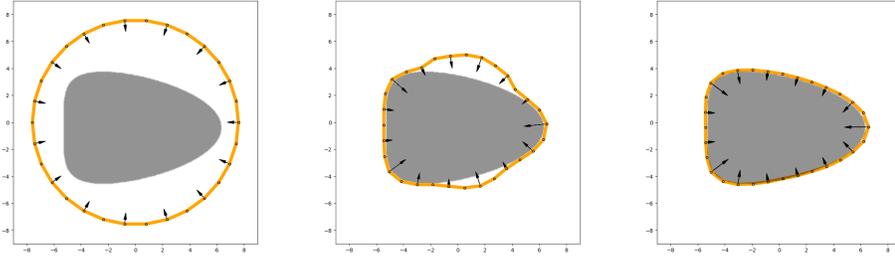


Figura 4.1:  
Flujo de Curvatura Media Anisotrópico aplicado a la parametrización de contornos: La curva (en color naranja) evoluciona por Flujo de Curvatura Media mientras que los pixeles en la región gris restringen la evolución de la curva.

La implementación numérica del procedimiento utilizado en [40] requiere representar la curva en evolución por una curva poligonal, donde el número de puntos que la conforman determina la precisión que aproxima el contorno. Una manera de refinar la aproximación de un contorno consiste en reemplazar cada segmento poligonal  $\overline{p_i p_{i+1}}$  por un arco y evolucionar dicho arco por FCM manteniendo fijos los puntos extremos  $p_i, p_{i+1}$ . Lo anterior puede incluso generalizarse mediante alguna condición que decida si el nuevo arco que se propone es cóncavo o convexo en función de la curvatura en los puntos fijos.

El término *renormalización* se utiliza para referirse a ciertas técnicas utilizadas para estudiar sistemas con un número grande de grados de libertad. La característica principal de éstas consiste en un proceso llamado *decimación*, a partir del cual el número de variables se reduce reasignándolas por bloques; dicho de otra manera, estas técnicas buscan transformar (mediante ciertas funciones) las *variables* en *variables por bloque*. Una descripción más profunda de estas técnicas puede encontrarse en [7, cap. 5], sin embargo cabe destacar su amplia aplicación a sistemas físicos de muchas partículas, en los cuales, uno de los procedimientos más utilizados es buscar puntos fijos en estas transformaciones que mapean variables (o estados) a variables por bloques y estudiar el sistema en vecindades de los puntos fijos.

En analogía a estas técnicas es que llamamos a este refinamiento *renormalizado*, ya que los puntos que representan la curva en evolución definen arcos, los cuales representan a los bloques. Una vez que los puntos coinciden con la frontera del obs-

táculo se vuelven puntos fijos, entre los cuales definimos un nuevo arco (vecindad de puntos fijos) que evoluciona bajo la misma dinámica (el Flujo de Curvatura Media), y se obtiene una descripción más fina del contorno.

Independientemente del esquema numérico que se utilice para aproximar el FCM, el siguiente teorema provee el marco analítico para el refinamiento propuesto, además se incluye una cota para el tiempo durante el cual debe evolucionar un arco para garantizar la convergencia.

**Teorema 4.1.** *Sea  $\varphi(s, t)$  una familia de curvas planas, cerradas y de clase  $C^3$  que satisface la ecuación de Flujo de Curvatura Media con vector normal  $\mathbf{n}(s, t)$ . Sean  $p = \varphi(s_0, t_*)$  y  $q = \varphi(s_1, t_*)$  dos puntos sobre la curva al tiempo  $t_*$ . Sea  $f(s)$  otra curva simple, de clase  $C^\infty$ , con curvatura positiva, cuyos extremos coinciden con  $p$  y  $q$  y que puede parametrizarse como*

$$f : [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(s) = \varphi(s, t_*) + r(s)\mathbf{n}(s, t_*),$$

para alguna función  $r(s) > 0$ . Sea  $\alpha_0(s)$  la curva que resulta de reemplazar el segmento  $\overline{pq} \in \varphi(s, t_*)$  por la curva  $f(s)$  utilizando una función de pegado  $b(s) \in C^\infty$ . Sea  $\mathcal{L}_0$  la longitud del arco  $\overline{pq} \subset \alpha_0$  y  $\mathcal{A}(0)$  el área entre las curvas  $\varphi(s, t_*)$  y  $\alpha_0$ . Si existe una familia de curvas  $\alpha(s, t) \in C^\infty$  tal que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = b(s)\kappa\mathbf{n} \tag{4.1}$$

$$\alpha(s, 0) = f(s).$$

Entonces, para alguna constante  $\zeta$  la curva  $\alpha(s, t)$  converge a  $\varphi(s, t_*)$  en un tiempo  $t$  que satisface

$$t \geq \frac{1}{2\pi^2} (\ln(|\zeta|\mathcal{L}_0 + 2\pi^2\mathcal{A}(0)) - \ln(|\zeta|\mathcal{L}_0)). \tag{4.2}$$

*Demostración.* Primero veremos que el flujo (4.1) decrece monótonamente la longitud  $\mathcal{L}$  de la curva  $\alpha$  en forma similar a como lo hace el Flujo de Curvatura Media:

$$\mathcal{L} = \int_p^q \left| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right| ds$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \int_p^q \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right| ds = -\frac{1}{2} \int_p^q b\kappa^2 \left| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right| ds \leq 0, \quad (4.3)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la siguiente relación

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|^2 &= 2 \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cdot \frac{\partial}{\partial s} (b\kappa \mathbf{n}) = -b\kappa^2 \left| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right| &= -\frac{1}{2} b\kappa^2 \left| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|. \end{aligned}$$

Si a la desigualdad (4.3) aunamos el hecho de que la curva  $\alpha$  es  $C^\infty$  y en consecuencia la curvatura varía continuamente; entonces la disminución en la longitud implica que la función  $r$ , que corresponde a la distancia entre  $\alpha$  y  $\varphi$ , también decrece en el tiempo, es decir,

$$r_t \leq 0. \quad (4.4)$$

El área  $\mathcal{A}$  entre  $\alpha(s, t)$  y  $\varphi(s, t^*)$  está dada por

$$\mathcal{A} = \int_p^q r \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right| ds,$$

mientras que su evolución en el tiempo,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \int_p^q \left( r_t \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right| + r \partial_t \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right| \right) ds \\ &= \int_p^q r_t \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right| ds - \frac{1}{2} \int_p^q br\kappa^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right| ds. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Usando la desigualdad (4.4) podemos probar que el área  $\mathcal{A}$  también decrece en el

tiempo:

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} \leq -\frac{1}{2} \int_p^q br\kappa^2 \left| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right| ds \leq 0.$$

Por otra parte, mientras el flujo (4.1) exista,  $r_t$  está acotada. Sea  $\zeta < 0$  una cota superior a  $r_t$  y  $\mathcal{L}_0$  la longitud del arco  $\overline{pq} \in \alpha$ , finalmente estimamos el tiempo de convergencia a partir de la ecuación (4.5):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \int_p^q r_t \left| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right| ds - \frac{1}{2} \int_p^q br\kappa^2 \left| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right| ds \\ &\geq \zeta \int_p^q \left| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right| ds - \frac{1}{2} \int_p^q br\kappa^2 \left| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right| ds \\ &\geq \zeta \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} \int_p^q br\kappa^2 \left| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right| ds. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Hölder (ver apéndice C) repetidamente, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}}{dt} &\geq \zeta \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} \left( \int_p^q (\kappa^2)^2 ds \right)^{1/2} \cdot \left( \int_p^q \left( br \left| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right| \right)^2 ds \right)^{1/2} \\ &\geq \zeta \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} \left( \int_p^q |\kappa| ds \right)^2 \cdot \mathcal{A} \\ &\geq \zeta \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} (2\pi)^2 \mathcal{A} \\ &= \zeta \mathcal{L}_0 - 2\pi^2 \mathcal{A}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde para la tercer desigualdad se utilizó la Proposición 1.7.7 de [41]. Además, como

$\zeta < 0$ , a partir de la desigualdad anterior podemos encontrar que

$$\int_{\mathcal{A}(0)}^{\mathcal{A}(t)} \frac{1}{|\zeta|\mathcal{L}_0 + 2\pi^2\mathcal{A}} d\mathcal{A} \geq -t$$

$$\Rightarrow \ln(|\zeta|\mathcal{L}_0 + 2\pi^2\mathcal{A}(0)) - \ln(|\zeta|\mathcal{L}_0 + 2\pi^2\mathcal{A}(t)) \leq 2\pi^2t. \quad (4.7)$$

Si  $\mathcal{A}(\tau) = 0$  para alguna  $\tau > 0$ , la desigualdad anterior nos permite estimar el tiempo de convergencia como

$$t \geq \frac{1}{2\pi^2} (\ln(|\zeta|\mathcal{L}_0 + 2\pi^2\mathcal{A}(0)) - \ln(|\zeta|\mathcal{L}_0)) . \quad \square$$

En la Figura 4.2 se muestra el refinamiento en la aproximación poligonal de dos siluetas en color negro. Ambas siluetas se obtuvieron removiendo el color y aplicando un filtro binario a las imágenes ISIC\_0024316 e ISIC\_0024370 de la base de imágenes de lesiones dermatológicas *ISIC2018*<sup>1</sup>. En amarillo se muestra la primer aproximación poligonal y en azul el refinamiento obtenido al reemplazar cada segmento poligonal por media circunferencia. En ambos ejemplos sólo se ha decidido mostrar los refinamientos que mejoran la aproximación del contorno, esto se determinó a partir del porcentaje de puntos cuyas coordenadas coinciden con un pixel de color negro.

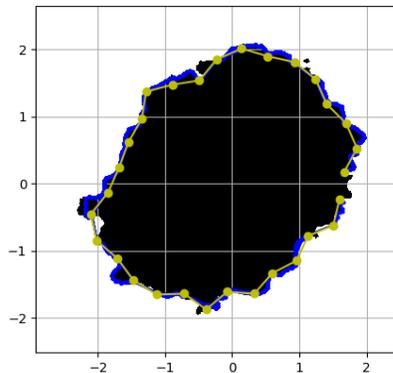
Finalmente, validaremos la cota (4.2) para un ejemplo en particular: Supongamos que para un problema de parametrización de contorno, los puntos  $p = (-1, 0)$  y  $q = (1, 0)$  coinciden con el contorno del obstáculo a un tiempo  $\tau$ , y reemplazamos el segmento de línea que los une por una media circunferencia; posteriormente, hacemos evolucionar por FCM dicho arco manteniendo fijos los puntos  $p, q$  y el resto de la curva.

En la Figura 4.3 se muestran los puntos  $p$  y  $q$ , y en color rojo el nuevo arco que se ha colocado entre ellos. Para estimar el tiempo de convergencia al segmento de recta  $\overline{pq}$ , se resolvió numéricamente la ecuación de FCM y mediante una fórmula de integración numérica se determinó el área entre cada arco y el segmento de recta  $\overline{pq}$ .

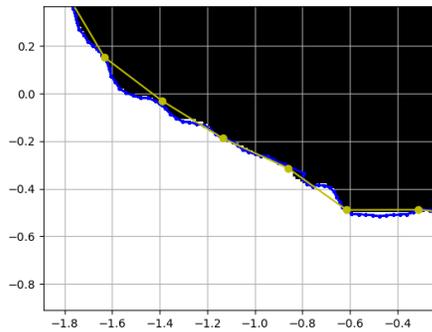
La aproximación numérica se obtuvo utilizando el *método de Crank-Nicolson*

---

<sup>1</sup>La base de datos ISIC2018, así como la documentación respectiva, puede consultarse en <https://www.isic-archive.com>.



(a)



(b)

Figura 4.2:

Refinamiento en la aproximación poligonal de dos contornos obtenidos a partir de imágenes de la base ISIC2018: (a) ISIC\_0024316, (b) ISIC\_0024370. En amarillo se muestra la primer aproximación poligonal y en azul el refinamiento obtenido al reemplazar cada segmento poligonal por media circunferencia y evolucionarlo por FCM.

el cual es un método implícito, incondicionalmente estable y estándar para resolver numéricamente ecuaciones parabólicas con condiciones a la frontera similares a las que aquí se presentan. Por esta razón no incluiremos los detalles de la discretización, sin embargo en el Apéndice D se incluye y comenta el código utilizado. La descripción del método de Crank-Nicolson se encuentra en el trabajo de Ames [1], la discretización de la curva y la aproximación de las derivadas se realizaron de acuerdo al método de *colocación de Chebyshev* [42].

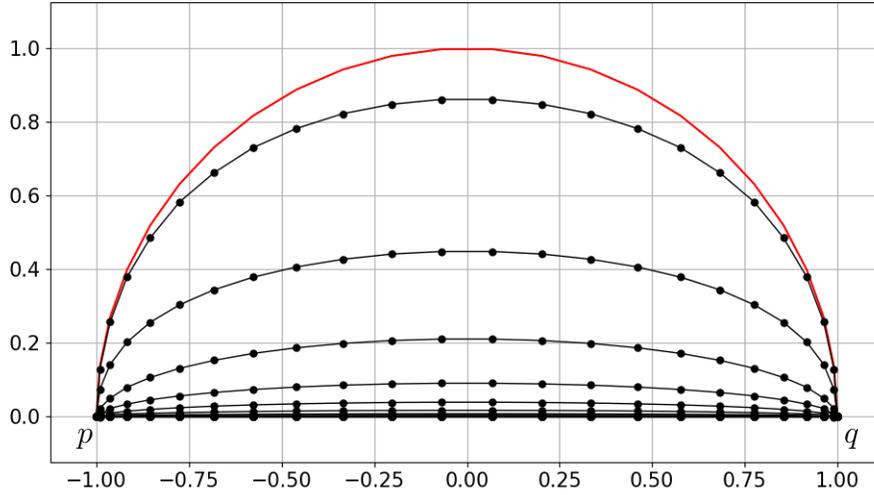


Figura 4.3:

Evolución por FCM de un arco de circunferencia con extremos  $p, q$  fijos. En color rojo se muestra el arco inicial y en negro, las aproximaciones numéricas de su evolución hasta converger a un segmento de recta.

Al tratarse de una aproximación, el área  $\mathcal{A}(t)$  no necesariamente se anula, por esta razón se fijó como condición de paro un área menor o igual a  $1.0\text{E}^{-8}$ , la cual se alcanzó en 117 iteraciones a un paso temporal  $\Delta t = 1.25\text{E}^{-4}$ , es decir, en un tiempo  $T_{exp} = 1.46\text{E}^{-2}$ . Para la curva inicial de la Figura 4.3, la longitud y el área inicial tienen los siguiente valores, respectivamente

$$\mathcal{L}_0 = 3.139, \quad \mathcal{A}(0) = 1.571.$$

Podemos decir que para este ejemplo se valida la cota si la estimación teórica  $T_{teo}$  es mayor a  $T_{exp}$ . Esto lo haremos a partir de la desigualdad (4.7),

$$T_{teo} \geq \frac{(\ln(|\zeta|\mathcal{L}_0 + 2\pi^2\mathcal{A}(0)) - \ln(|\zeta|\mathcal{L}_0 + 2\pi^2\mathcal{A}(t)))}{2\pi^2}$$

$$\Rightarrow T_{teo} \geq 0.952 \geq T_{exp} = 1.46\text{E}^{-2},$$

para este ejemplo se utilizó un valor  $\zeta = -1.0\text{E}^{-8}$ .

## 4.2. Flujo de Curvatura Media y Campos Hamiltonianos

En el capítulo anterior dimos una demostración de la invarianza de la estructura lagrangiana bajo el Flujo de Curvatura Media para esferas de Whitney, la cual es un caso particular de un resultado más general; sin embargo su importancia consiste en no asumir compacidad ni una variedad ambiente de tipo Kähler-Einstein. En esta sección, tomamos un enfoque distinto al propuesto en el capítulo anterior, y hacemos referencia al caso más general sobre la invarianza de la estructura simpléctica/lagrangiana bajo el Flujo de Curvatura Media. Este caso general lo podemos resumir en el siguiente teorema cuya demostración (ver Han y Li [19]) hace uso de la evolución del ángulo de Kähler (ver Teorema 3.2).

**Teorema 4.2.** (Anciaux [3], Han-Li [20]) *Sea  $M(t)$  una  $t$ -familia de subvariedades compactas que satisfacen la ecuación de Flujo de Curvatura Media, inmersas en una variedad ambiente Kähler-Einstein  $\widetilde{M}$ . Si  $M(0)$  hereda de  $\widetilde{M}$  una estructura simpléctica (o lagrangiana), entonces toda subvariedad en la familia  $M(t)$  también hereda esta estructura.*

Además, en el Capítulo 2 dimos una expresión explícita para describir la evolución de la forma simpléctica. En esta sección usaremos el Corolario 2.7 y la invarianza de la estructura simpléctica y lagrangiana (Teorema 4.2) para demostrar que el vector de curvatura media  $\mathbf{H}$  de una curva holomorfa o de una subvariedad lagrangiana es un campo hamiltoniano, para esto necesitamos de la siguiente definición.

**Definición 4.3.** (Moser, Zehnder [32]) *Sea  $X$  un campo vectorial sobre una variedad simpléctica  $(M, \omega)$ , decimos que  $X$  es un **campo hamiltoniano** si la forma*

$$\alpha := \omega(X, \cdot) \tag{4.8}$$

*es cerrada, es decir, si  $d\alpha = 0$ .*

**Teorema 4.4.** *Sea  $(\widetilde{M}, \widetilde{\omega})$  una variedad simpléctica, y sea  $(M, \omega)$  una curva holomorfa o una subvariedad lagrangiana compacta que evoluciona por Flujo de Curvatura Media y está inmersa en  $\widetilde{M}$ , entonces su vector de curvatura media  $\mathbf{H}$  es un campo hamiltoniano.*

*Demostración.* Veamos que  $d\omega(\mathbf{H}, \cdot) = 0$ . Como  $M$  evoluciona por Flujo de Curvatura Media, existe  $\tau > 0$  y una familia de inmersiones  $F : M \times [0, \tau) \rightarrow \widetilde{M}$  que satisface la ecuación de Flujo de Curvatura Media; además,  $\omega = F^*\widetilde{\omega}$ .

Sea  $\mathbf{p} \in M$  y  $t \in [0, \tau)$ . Sea  $\mathbf{H}(\mathbf{p}, t)$  el vector de curvatura media, por el Teorema 4.2 sabemos que la estructura simpléctica es invariante. Esto implica, de acuerdo con la Tabla 1.1, que  $\omega$  vale 1 si  $M$  es una curva holomorfa ó 0 si es lagrangiana, es decir,  $0 = \partial\omega/\partial t$ .

Por tanto, por el Corolario 2.7 tenemos

$$0 = \frac{\partial\omega}{\partial t} = d\omega(\mathbf{H}, \cdot) . \quad \square$$

# Conclusiones

En este trabajo abordamos la evolución por Flujo de Curvatura Media de variedades simplécticas inmersas en una variedad ambiente Kähler. En el Capítulo 2 hemos ilustrado que es posible construir ejemplos explícitos para el Flujo de Curvatura Media Simpléctico (ver Ejemplo 4). Sin embargo, la estructura simpléctica debe repercutir en las soluciones, ya que de acuerdo con Smoczyk [22, 37], esta estructura es invariante bajo el Flujo de Curvatura Media. A partir del Capítulo 3 encontramos algunas de las implicaciones que tiene la estructura simpléctica en las soluciones.

Como un primer análisis, en el Capítulo 3 se obtuvieron las expresiones explícitas de la evolución bajo el Flujo de Curvatura Media de los vectores normales (Lema 2.4), vectores tangentes (Lema 2.5) y la forma simpléctica (Corolario 2.7). A partir de estos cálculos se encontró la primera diferencia de este flujo simpléctico respecto la versión clásica, a saber, la evolución del tensor métrico bajo el Flujo de Curvatura Media se puede escribir en términos de la evolución de la forma simpléctica (Corolario 2.8). Aunque este resultado parece inmediato al asumir una forma simpléctica compatible con la métrica, la expresión que resulta puede interpretarse en términos de un *pull-back* dependiente del vector de curvatura media (ecuación 2.18); además, calculamos una expresión explícita.

Al analizar el Teorema 3.2 (Li, *et al.* [29]), encontramos que es necesario hacer una distinción entre subvariedades simplécticas y lagrangianas; ya que la ecuación de evolución del ángulo de Kähler descrita en este teorema anula muchos de sus términos en el caso lagrangiano.

Para el caso de la evolución de subvariedades simplécticas, son pocos los resultados que se conocen en comparación con los resultados para subvariedades lagrangianas. Una de las razones es la necesidad de asumir alguna propiedad en la variedad ambiente para resolver la ecuación del Teorema 3.2. En lugar de imponer alguna condición adicional, en este trabajo probamos que no existe un equivalente

complejo (no trivial) al *Grim Reaper* en variedades ambiente Kähler con métrica plana (Teorema 3.7).

El Flujo de Curvatura Media de subvariedades lagrangianas se ha abordado en varios trabajos; sin embargo, la investigación se centra en explotar las simetrías impuestas en la subvariedad, por ejemplo, asumiendo variedades lagrangianas invariantes bajo rotaciones [37]. Aunque en este trabajo también hacemos uso de estas simetrías a través de las esferas de Whitney, nuestros resultados los podemos dividir en una parte analítica y una numérica, respectivamente:

- En el Teorema 3.18 demostramos la invarianza de la estructura lagrangiana, sin hacer uso de las hipótesis que frecuentemente se utilizan (Principio del Máximo, compacidad, etc). Aunque nuestro resultado lo hemos postulado específicamente para esferas de Whitney, es posible extenderlo a otras subvariedades que puedan describirse mediante una curva perfil (subvariedades lagrangianas equivariantes [2]). Asimismo, también hemos demostrado la existencia y unicidad de soluciones para la evolución de la curva perfil en una vecindad tubular (Lema 3.15).
- Debido a que la evolución para las esferas de Whitney se reduce a una ecuación para su curva perfil, hemos aplicado nuestro esquema numérico para el Flujo de Curvatura Media descrito en nuestro artículo [40]. A diferencia del flujo con restricciones propuesto en el artículo, la evolución de la curva perfil depende no sólo de la curvatura, sino que incluye un término adicional también en la dirección normal a la curva (ver ecuación 3.21). El método numérico propuesto divide la evolución en dos problemas: la evolución de una curva y un problema de Poisson cuya aproximación lineal consiste en un sistema de ecuaciones cuya incógnita es la componente normal del campo que deforma a la curva.

El término adicional que aparece en la evolución de la curva perfil puede sumarse directamente a la curvatura en el esquema numérico propuesto. Sin embargo, aunque una modificación similar se puede plantear en otros esquemas, por ejemplo en el propuesto por Kimura [25], diferencia de otros métodos, la Figura 3.4 muestra que nuestro esquema calcula una mejor aproximación al preservar la simetría de la curva perfil a lo largo de la evolución.

En el capítulo 4 hacemos una propuesta para refinar nuestro método numérico, a esta propuesta le hemos llamado *Flujo de Curvatura Media Renormalizado* y hacemos

un análisis para estimar una cota en el tiempo que debe evolucionar un arco para garantizar una mejora en el refinamiento. Esta propuesta es una mejora a nuestro trabajo [40] aplicado a la parametrización de contornos en imágenes, en la Figura 4.2 mostramos un ejemplo de su implementación.

El Flujo de Curvatura Media tiene la particularidad de poder utilizarse como una herramienta de análisis geométrico en muchos problemas, por ejemplo, al plantear problemas cuya solución se aproxime a una variedad de interés, construir variedades mínimas, e incluso utilizar una solución estacionaria a este flujo para *pegar* variedades y evitar así singularidades [4]. Es en estos contextos que se han planteado muchos de los problemas y líneas de investigación que siguen las publicaciones en el área. Una manera de aprovechar las propuestas numéricas que se plantean, es precisamente conocer las motivaciones detrás de estos problemas, algunas de ellas, problemas físicos. Una primera exploración en esta dirección se ha presentado en el Teorema 4.4.



# Apéndices

## A. Proyección a $\mathbb{R}^3$ de esfera de Whitney (Código)

El siguiente código de Python fue utilizado en Maya Autodesk para generar la Figura 3.3.

```
import numpy as np
import maya.cmds as cmds

def f(s):
    A=(1+np.cos(s)**2)
    X,Y=-np.sin(s)/A,np.sin(s)*np.cos(s)/A
    return X,Y
umin,umax=-np.pi,np.pi
vmin,vmax=0,2*np.pi
du=(umax-umin)/25
dv=(vmax-vmin)/25
u=umin

while u<umax:
    L=[]
    v=vmin
    while v<vmax:
        z1,z2=f(u)
        x=z1*np.sin(v)
        y=z2*np.cos(v)
        z=z2*np.sin(v)
        L.append((x,y,z))
        v+=dv
    cmds.curve(ep=L)
    u+=du
```

## B. Existencia y Unicidad de Soluciones al FCM en una Vecindad Tubular

En este apéndice demostramos la existencia y unicidad de soluciones en una vecindad tubular para el Flujo de Curvatura Media de curvas planas y cerradas, en particular esta demostración puede aplicarse a la ecuación (3.23). Hemos incluido esta demostración debido a la gran cantidad de detalles que involucra, los cuales son difíciles de encontrar en la literatura.

Sea  $\gamma_0$  una curva plana, cerrada y diferenciable. Sea  $W_2^k$  el conjunto de funciones  $L_2$  definidas sobre  $\gamma_0$  cuyas  $k$  derivadas también pertenecen a  $L_2$ . Sean  $u$  y  $v$  funciones en  $W_2^2$ , consideremos el siguiente producto interno:

$$\langle u, v \rangle_{W_2^k} = \int_{\gamma_0} \sum_{i=0}^k \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \frac{\partial^i v}{\partial x^i} dx.$$

Denotemos como  $W_2^{\alpha, \beta}$  al conjunto de funciones  $L_2$  sobre  $\gamma_0 \times (0, \infty)$  cuyas  $\alpha$  derivadas espaciales y  $\beta$  derivadas temporales también pertenecen a  $L_2$ . Consideremos el siguiente problema:

**Teorema .5.** *Dada una función  $f$  de clase  $C^3(\mathbb{R})$ , consideremos el operador parabólico  $\mathcal{L}$  definido por la ecuación (3.23)*

$$\mathcal{L}(f) = -\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1 - \kappa_0 f}{\sqrt{(1 - \kappa_0 f)^2 + (f')^2}} (\kappa(t) + (m + 1)p).$$

Sea  $u_0$  una función en  $W_2^{\alpha+1}$  definida en  $\gamma_0$ ,  $h \in W_2^{\alpha, \beta}$ , y sea  $\mathcal{L}_0$  la linealización de  $\mathcal{L}$  en  $W_2^{2,1}$ . Entonces el problema

$$(LP) \begin{cases} \mathcal{L}_0(u) = h \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases}$$

tiene una solución.

Para el teorema anterior, nos hemos basado en la siguiente definición.

**Definición .6.** *Sea  $\mathcal{L} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbf{R}$  un operador diferenciable de segundo orden*

$$\mathcal{L}(u(x, t)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \partial_{x_i x_j}^2 u + b(x, t) \partial_{x_i} u + c(x, t) u - u_t.$$

Decimos que  $\mathcal{L}$  es parabólico si existe  $\lambda > 0$  tal que para cualquier  $\xi$  en  $\mathbb{R}^n$  se satisface la

siguiente desigualdad:

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2.$$

Para demostrar el teorema .5, necesitamos los siguientes lemas:

**Lema .7.** (Desigualdad de Poincaré [44]) Sea  $1 \leq p \leq \infty$  y  $M \subset \mathbb{R}^n$  un dominio acotado. Si  $u \in W_p^1(M)$ , entonces existe una constante  $k_p$  dependiente de  $p, M$ , y  $n$  tal que

$$\int_M |u|^p dx \leq k_p \int_M |Du|^p dx.$$

**Lema .8.** (Desigualdad de Holder [44]) Sean  $f, g$  funciones  $L^2(M)$  definidas en un dominio acotado  $M$ . Entonces

$$\int_M |f(x)g(x)| dx \leq \|f(x)\|_{L^2} \|g(x)\|_{L^2}.$$

**Lema .9.** (Desigualdad de Cauchy [17]) Dada  $\epsilon > 0$ , sean  $a, b > 0$  dos constantes reales,

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$

**Lema .10.** (Teorema de Lax-Milgram Modificado [44]) Sea  $H$  un espacio de Hilbert, y  $V \subset H$  un subespacio denso. Sea  $a(u, v)$  una forma bilineal en  $H \times V$  tal que

(1) Sean  $u \in H, v \in V$  y una constante  $C > 0$ ,

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_V.$$

(2) Para toda  $v \in V$  existe una constante  $\delta > 0$  tal que

$$|a(v, v)| \geq \delta \|v\|_H^2.$$

Entonces para cualquier operador lineal acotado  $F \in H$  y  $v \in V$ , existe  $u$  en  $H$  tal que  $F(v) = a(u, v)$ .

Sean  $f, g \in C_0^\infty(\gamma_0 \times [0, \infty))$ , en analogía con el trabajo de Polden [18] definamos:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{LL_m} &= \int_0^\infty e^{-mt} \langle f, g \rangle_{L^2} dt \\ \langle f, g \rangle_{LW_m^k} &= \int_0^\infty e^{-mt} \langle f, g \rangle_{W_2^k} dt. \end{aligned}$$

Donde  $LL$  y  $LW$  son espacios de Hilbert que resultan de completar el espacio  $C_0^\infty(\gamma_0 \times [0, \infty))$  de funciones con soporte compacto usando respectivamente las normas arriba definidas.

Sea  $V$  el espacio de funciones  $C^\infty$  definidas sobre  $\gamma_0 \times [0, \infty)$  tal que para cualquier elemento  $f \in V$ , existen  $T_\varepsilon, T_M \in (0, \infty)$  tales que

$$f(\cdot, t) = 0$$

para cualquier  $t \in (T_M, T_\varepsilon)$ . Sea  $WW^k$  la completitud de  $V$  con la norma asociada al siguiente producto interno:

$$\langle f, g \rangle_{WW^k} = \langle f, g \rangle_{LW_m^k} + \langle f_t, g_t \rangle_{LL_m}.$$

Sea

$$P^s = \{f : \gamma_0 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : |\partial_t^i f|_{LW_m^2} < \infty, \forall i \leq s\}$$

dotado con el producto

$$\langle f, g \rangle_{P^s} = \sum_{i \leq s} \langle \partial_t^i f, \partial_t^i g \rangle_{LW_m^{2(s-i)}}.$$

Necesitaremos de la siguiente definición y lema de la teoría de ecuaciones parabólicas [17, p. 351-352].

**Definición .11.** Sea  $Q := \gamma_0 \times (0, \epsilon)$  y  $\varphi$  una función en  $W_2^{1,1}$  definida sobre  $\gamma_0 \times [0, \infty)$  que se anula en  $t = 0$ . Decimos que  $u(x, t)$  en  $WW$  es una solución débil de la linealización del problema **(LP)** si

$$\int_Q (u_t \varphi + a(x, t) u_x \varphi_x + b(x, t) u_x \varphi + c(x, t) u \varphi) dx dt = \int_Q h(x, t) \varphi dx dt. \quad (\text{B.1})$$

**Lema .12.** (Ver Evans [17, Sec. 7.1.2] y Wu [44, Sec. 3.5.1]) Sea  $m$  una constante positiva. Una función  $u(x, t)$  en  $WW$  es una solución débil de **(LP)** si y sólo si

$$\int_Q (u_t \varphi_t + a(x, t) u_x \varphi_{tx} + b(x, t) u_x \varphi_t + c(x, t) u \varphi_t) e^{-mt} dx dt = \int_Q h(x, t) \varphi_t e^{-mt} dx dt. \quad (\text{B.2})$$

Ahora podemos comenzar con la demostración del Teorema .5

*Demostración del Teorema .5.* Comenzaremos por probar la existencia de soluciones débiles.

Sea  $A : WW^2 \times V \rightarrow \mathbf{R}$  una forma bilineal

$$A(u, v) = \int_0^\infty \int_{\gamma_0} e^{-mt} (u_t v_t + a(x, t) u_x v_{tx} + b(x, t) u_x v_t + c(x, t) u v_t) dx dt, \quad (\text{B.3})$$

donde  $m$  es una constante,  $u \in WW^2$ ,  $v \in V$ , y  $a, b, c$  son los coeficientes de la linealización al Problema (LP). Sea  $F(v)$  un operador lineal definido sobre  $V$  como

$$F(v) := \int_0^\infty \int_{\gamma_0} h v e^{-mt} dx dt \quad (\text{B.4})$$

Demostraremos que  $A$  satisface las hipótesis del lema .10:

1. Condición (1). Sean  $s_0, s_1$  los puntos extremos en el dominio de  $\gamma_0$

$$\gamma_0 : [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Los coeficientes  $a, b, c$  y  $h$  están acotados porque se ha asumido que fueron encontrados por la linealización de una función en una vecindad tubular, ver Ecuación (3.23) en el Lema 3.15. Sea  $C$  el máximo de las cotas de  $a, b$  y  $c$ . Entonces,

$$\begin{aligned} |A(u, v)| &\leq \left| \int_0^\infty \int_{\gamma_0} e^{-mt} (u_t v_t + C(u_x v_{tx} + u_x v_t + u v_t)) dx dt \right| \\ &\leq \left| \text{máx}(1, C) \int_0^\infty \int_{\gamma_0} e^{-mt} (u_t v_t + u_x v_{tx} + u_x v_t + u v_t) dx dt \right| \\ &= \text{máx}(1, C) \left| \int_0^\infty \int_{\gamma_0} e^{-mt} (u_t v_t + u_x v_t + u v_t) dx dt + \int_0^\infty \int_{\gamma_0} e^{-mt} u_x v_{tx} dx dt \right|. \end{aligned}$$

Integrando por partes el segundo término, y debido a que  $\gamma_0$  es una curva cerrada:

$$\begin{aligned} |A(u, v)| &\leq \text{máx}(1, C) \left| \int_0^\infty \int_{\gamma_0} e^{-mt} (u_t v_t + u_x v_t + u v_t) dx dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty e^{-mt} \left( u_x v_t \Big|_{s_0}^{s_1} - \int_{\gamma_0} u_{xx} v_x dx \right) dt \right| \\ &= \text{máx}(1, C) \left| \int_0^\infty \int_{\gamma_0} e^{-mt} (u_t v_t - u_{xx} v_t + u_x v_t + u v_t) dx dt \right| \end{aligned}$$

Definimos

$$\mathbf{u} = (u_t, -u_{xx}, u_x, u) \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = (v_t, v_t, v_t, v_t) .$$

Entonces,

$$|A(u, v)| \leq \text{máx}(1, C) \left| \int_0^\infty \int_{\gamma_0} e^{-mt} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx \, dt \right| ,$$

esto implica:

$$\begin{aligned} |A(u, v)|^2 &\leq \text{máx}(1, C) \left| \int_0^\infty \int_{\gamma_0} e^{-mt} \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \, dx \, dt \right| \\ &= 4 \text{máx}(1, C) \left| \int_0^\infty \int_{\gamma_0} e^{-mt} (u_t^2 + u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2) v_t^2 \, dx \, dt \right| . \end{aligned}$$

Retomando la definición de la norma  $|\cdot|_{WW^2}$ ,

$$|u|_{WW^2}^2 = |u|_{LW^2}^2 + |u_t|_{LLm}^2 = \int_0^\infty \int_{\gamma_0} e^{-mt} (u^2 + u_x^2 + u_{xx}^2 + u_t^2) \, dx \, dt ,$$

tenemos

$$\int_0^\infty \int_{\gamma_0} e^{-mt} v_t^2 \, dx \, dt \leq \int_0^\infty \int_{\gamma_0} e^{-mt} (v^2 + v_x^2 + v_{xx}^2 + v_t^2) \, dx \, dt = |v|_{WW^2}^2 .$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |A(u, v)|^2 &\leq 4 \text{máx}(1, C) |u|_{WW^2}^2 |v|_{WW^2}^2 \\ \Rightarrow |A(u, v)| &\leq \sqrt{4 \text{máx}(1, C)} |u|_{WW^2} |v|_{WW^2} . \end{aligned}$$

2. Para verificar que la condición (2) también se satisface, sea  $\mu$  una constante tal que

$$\lambda - |C + \mu| > 0 ,$$

donde  $\lambda$  es la constante en la Definición .6 y  $C$  es la cota superior de  $a, b$ , and  $c$ .

Definamos

$$B(u, v) = \int_{\gamma_0} (au_x v_v + (c + \mu)uv) dx,$$

primero comprobaremos que  $B(v, v)$  está acotado:

$$\begin{aligned} B(v, v) &= \int_{\gamma_0} (av_x^2 + (c + \mu)v^2) dx \geq \lambda \int_{\gamma_0} v_x^2 - \int_{\gamma_0} |C + \mu|v^2 dx \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_{\gamma_0} v_x^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\gamma_0} v_x^2 dx - \int_{\gamma_0} |C + \mu|v^2 dx. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Poincaré en el Lema .7, existe una constante  $k_p$  tal que

$$\begin{aligned} B(v, v) &\geq \frac{\lambda}{2} \int_{\gamma_0} v_x^2 dx + \frac{\lambda}{2k_p} \int_{\gamma_0} v^2 dx - \int_{\gamma_0} |C + \mu|v^2 dx \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_{\gamma_0} v_x^2 dx + \frac{\lambda - |C + \mu|}{2k_p} \int_{\gamma_0} v^2 dx \\ &\geq \min\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - |C + \mu|}{2k_p}\right) |v|_{W_2^1}^2. \end{aligned}$$

A partir de la definición de  $B(v, v)$  calculamos la siguiente derivada

$$\partial_t (B(v, v)) = \int_{\gamma_0} (a_t v_x^2 + c_t v^2) dx + 2 \int_{\gamma_0} (av_x v_{xt} + (c + \mu)vv_t) dx,$$

y reescribimos  $A(v, v)$  en terminos de  $B(v, v)$ :

$$\begin{aligned} A(v, v) &= \int_0^\infty \int_{\gamma_0} (v_t^2 + au_x v_{tx} + bv_x v_t + cvv_t) e^{-mt} dx dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\gamma_0} v_t^2 e^{-mt} dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty \partial_t (B(v, v)) e^{-mt} dt - \mu \int_0^\infty \int_{\gamma_0} vv_t e^{-mt} dx dt \\ &\quad - \int_0^\infty \int_{\gamma_0} (a_t v_x^2 + c_t v^2) e^{-mt} dx dt + \int_0^\infty \int_{\gamma_0} bv_x v_t e^{-mt} dx dt \end{aligned}$$

Integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
A(v, v) &= |v_t|_{LL_m}^2 - \frac{1}{2} \int_{\gamma_0} av_x^2 \Big|_{t=0} dx + \frac{m}{2} \int_0^\infty B(v, v) e^{-mt} dt - \mu \int_0^\infty \int_{\gamma_0} vv_t e^{-mt} dx dt \\
&\quad - \int_0^\infty \int_{\gamma_0} (a_t v_x^2 + c_t v^2) e^{-mt} dx dt + \int_0^\infty \int_{\gamma_0} bv_x v_t e^{-mt} dx dt.
\end{aligned}$$

Sea  $\zeta = \min\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - |C + \mu|}{2k_p}\right)$ , sustituimos la cota de  $B(v, v)$ :

$$\begin{aligned}
A(v, v) &\geq |v_t|_{LL_m}^2 - \frac{\lambda}{2} |v_x|_{L^2}^2 + \frac{m\zeta}{2} \int_0^\infty |v|_{W_2^1}^2 e^{-mt} dx dt - \mu \int_0^\infty \int_{\gamma_0} vv_t e^{-mt} dx dt \\
&\quad - \int_0^\infty \int_{\gamma_0} (a_t v_x^2 + c_t v^2) e^{-mt} dx dt + \int_0^\infty \int_{\gamma_0} bv_x v_t e^{-mt} dx dt \\
&\geq |v_t|_{LL_m}^2 - \frac{\lambda}{2} |v_x|_{L^2}^2 + \frac{m\zeta}{2} |v|_{LW_m^1}^2 - \mu \int_0^\infty \int_{\gamma_0} vv_t e^{-mt} dx dt \\
&\quad - \int_0^\infty \int_{\gamma_0} (a_t v_x^2 + c_t v^2) e^{-mt} dx dt + \int_0^\infty \int_{\gamma_0} bv_x v_t e^{-mt} dx dt
\end{aligned}$$

Sea  $\mathcal{S}$  una cota superior de  $a_t, b_t, c_t$ , entonces

$$\begin{aligned}
A(v, v) &\geq |v_t|_{LL_m}^2 - \frac{\lambda}{2} |v_x|_{L^2}^2 + \frac{m\zeta}{2} |v|_{LW_m^1}^2 - \mu \int_0^\infty \int_{\gamma_0} vv_t e^{-mt} dx dt \\
&\quad - \mathcal{S} \int_0^\infty \int_{\gamma_0} (v_x^2 + v^2) e^{-mt} dx dt + \int_0^\infty \int_{\gamma_0} bv_x v_t e^{-mt} dx dt \\
&\geq |v_t|_{LL_m}^2 - \frac{\lambda}{2} |v_x|_{L^2}^2 + \frac{m\zeta - \mathcal{S}}{2} |v|_{LW_m^1}^2 - \mu \int_0^\infty \int_{\gamma_0} vv_t e^{-mt} dx dt \\
&\quad + \int_0^\infty \int_{\gamma_0} bv_x v_t e^{-mt} dx dt \\
&\geq |v_t|_{LL_m}^2 - \frac{\lambda}{2} |v_x|_{L^2}^2 + \frac{m\zeta - \mathcal{S}}{2} |v|_{LW_m^1}^2 - \mu \int_0^\infty \int_{\gamma_0} |vv_t| e^{-mt} dx dt \\
&\quad - C \int_0^\infty \int_{\gamma_0} |v_x v_t| e^{-mt} dx dt
\end{aligned}$$

Podemos acotar las últimas dos integrales aplicando la desigualdad de Holder (Lema .8), de esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned} A(v, v) &\geq |v_t|_{LL_m}^2 - \frac{\lambda}{2}|v_x|_{L^2}^2 + \frac{m\zeta - \mathcal{S}}{2}|v|_{LW_m^1}^2 - \mu \int_0^\infty |v|_{L^2}|v_t|_{L^2}e^{-mt} dxdt \\ &\quad - C \int_0^\infty |v_x|_{L^2}|v_t|_{L^2}e^{-mt} dxdt. \end{aligned}$$

Podemos aplicar la desigualdad de Cauchy (Lema .9) para alguna constante  $\epsilon$  tal que

$$1 \geq \frac{\text{máx}(\mu, C)}{2\epsilon},$$

$$\begin{aligned} A(v, v) &\geq |v_t|_{LL_m}^2 - \frac{\lambda}{2}|v_x|_{L^2}^2 + \frac{m\zeta - \mathcal{S}}{2}|v|_{LW_m^1}^2 \\ &\quad - \mu \int_0^\infty \left( \epsilon|v|_{L^2}^2 + \frac{|v_t|_{L^2}^2}{4\epsilon} \right) e^{-mt} dxdt \\ &\quad - C \int_0^\infty \left( \epsilon|v_x|_{L^2}^2 + \frac{|v_t|_{L^2}^2}{4\epsilon} \right) e^{-mt} dxdt \\ &= |v_t|_{LL_m}^2 - \frac{\lambda}{2}|v_x|_{L^2}^2 + \frac{m\zeta - \mathcal{S}}{2}|v|_{LW_m^1}^2 - \epsilon (\mu|v|_{LL_m}^2 + C|v_x|_{LL_m}^2) \\ &\quad - \frac{(\mu + C)}{4\epsilon}|v_t|_{LL_m}^2. \end{aligned}$$

Sea  $\delta = 1 - \frac{\text{máx}(\mu, C)}{2\epsilon}$ , entonces

$$\begin{aligned} A(v, v) &\geq |v_t|_{LL_m}^2 - \frac{\lambda}{2}|v_x|_{L^2}^2 + \frac{m\zeta - \mathcal{S}}{2}|v|_{LW_m^1}^2 - \epsilon \text{máx}(\mu, C)|v|_{LW_m^1}^2 \\ &\quad - \frac{\text{máx}(\mu, C)}{2\epsilon}|v_t|_{LL_m}^2 \\ &\geq \delta|v_t|_{LL_m}^2 - \frac{\lambda}{2}|v_x|_{L^2}^2 + \frac{m\zeta - \mathcal{S} - \epsilon \text{máx}(\mu, C)}{2}|v|_{LW_m^1}^2 \\ &\geq \delta|v_t|_{LL_m}^2 + \delta|v|_{LW_m^1}^2 = \delta|v|_{WW_1}. \end{aligned}$$

La última desigualdad se obtiene al elegir  $m$  suficientemente grande.

A partir de las condiciones (1) y (2), se sigue que para toda  $v \in V$  existe  $u_L$  tal que  $F(v) = A(u_L, v)$ . Por otra parte, como la Ecuación (B.2) puede obtenerse de (B.3) y (B.4), concluimos que  $u_L$  una solución débil.  $\square$

La regularidad de las soluciones débiles de problemas parabólicos depende de la regu-

laridad de las funciones  $h$  y  $u_0$ . La extensión de la regularidad es un problema que puede encontrarse en [17, Sec. 7.1.3].

La unicidad de soluciones débiles también puede deducirse a partir de considerar la diferencia de dos soluciones débiles  $w := u_1 - u_2$ . De esta forma, debido a que  $w$  satisface el problema (LP) con  $h = w(\cdot, 0) = 0$ , sustituimos  $w$  en (B.1); debido a que el operador es acotado, obtenemos

$$\frac{d}{ds} |w(\cdot, s)|_{L_2}^2 \leq C |w(\cdot, s)|_{L_2}^2 \quad (\text{B.5})$$

Sustituyendo esta última desigualdad en la derivada de  $|w|_{L_2}^2 e^{-Cs}$ , se obtiene

$$\frac{d}{ds} (|w(s)|_{L_2}^2 e^{-Cs}) \leq 0$$

Como la norma  $|w(s)|_{L_2}^2 e^{-Cs}$  es no negativa,  $|w(t)|_{L_2}^2 e^{-Ct} - |w(0)|_{L_2}^2 \leq 0$ . Si  $w = 0$ , entonces  $u_1 = u_2$ . Un argumento similar puede ser usado para probar la unicidad de soluciones de problemas parabólicos cuasilineales. La principal hipótesis es un estimado similar a (B.5), ver [8].

Finalmente extenderemos la solución linealizada (Teorema .5) al problema no lineal

**Teorema .13.** *Dado un problema parabólico cuasilineal,*

$$(\mathbf{NL}) \begin{cases} \partial_t u - a(u, x, t)u_{xx} - b(u, x, t)u_x - c(u, x, t)u = h(u, x, t) \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

en  $\gamma_0 \times [0, \epsilon)$ . Entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que el problema (NL) tiene solución.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{L}_1(u) := \partial_t u - a(u, x, t)u_{xx} - b(u, x, t)u_x - c(u, x, t)u - h(u, x, t)$ . Definamos  $\mathcal{L} : P^2 \rightarrow W_2^{2,1} \times P^1$  como

$$u \xrightarrow{\mathcal{L}} (u_0, \mathcal{L}_1(u)).$$

Notemos que si existe una función  $u$  tal que  $\mathcal{L}_1(u) = 0$ , entonces ésta es solución a (NL). Sea  $\mathcal{L}_{u_0}$  la linealización de  $\mathcal{L}_1$  alrededor de  $u_0$ , por el Teorema .5 el problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{u_0}(w(x, t)) = 0 \\ w(\cdot, 0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

tiene una solución. Sea  $w^t := w(\cdot, t)$  y sea  $\{w^t\}$  una sucesión que converge a  $u_0$  cuando  $t$  tiende a  $0^+$ . Supongamos que  $w$  es solución a (B.6), sean  $a(u_0; x, t)$ ,  $b(u_0; x, t)$ ,  $c(u_0; x, t)$ , y

$h(u_0; x, t)$  los coeficientes de  $\mathcal{L}_{u_0}$ . Consideremos además la linealización de  $\mathcal{L}_1$  alrededor de  $w$ , y sean  $a(w; x, t)$ ,  $b(w; x, t)$ ,  $c(w; x, t)$  y  $h(w; x, t)$  sus coeficientes linealizados.

Sea  $P(x, t, w, D_x w) = a(w, x, t)u_{xx} + b(w, x, t)u_x + c(w, x, t)u + h(w, x, t)$ , por (B.6) tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(w) &= \partial_t w - P(x, t, w, D_x w) \\ &= h(u_0; x, t) + a(u_0; x, t)w_{xx} + b(u_0; x, t)w_x + c(u_0; x, t)w \\ &\quad - P(x, t, w, w_x, w_{xx}) \\ &= h(u_0)u_{xx} - h(w)w_{xx} + a(u_0)u_x - a(w)w_x + b(u_0)u - b(w)w \\ &\quad + c(u_0)u - c(w)w.\end{aligned}$$

Notemos que  $w \rightarrow u_0$  cuando  $t$  tiende a  $0^+$ , esto implica que  $\mathcal{L}_1(w) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 0^+$ .

Podemos elegir  $\epsilon$  suficientemente pequeña de manera que  $w(x, t)$  se encuentre en una vecindad de  $u_0$  para toda  $t$  en  $[0, \epsilon)$ . Al resolver cada problema lineal, obtendremos una sucesión  $u^i$  tal que  $\mathcal{L}(u^i) = (u_0, \mathcal{L}_1(w^i))$ . Por continuidad podemos considerar  $\mathcal{L}(u) = (u_0, 0)$ . Utilizando el *Teorema de la Función Inversa* para espacios de Banach [47, Sec. 4.13],  $\mathcal{L}$  es un difeomorfismo local. Por tanto, el mapeo  $\mathcal{L}(u) = (u_0, 0)$  es localmente invertible.  $\square$

## C. Desigualdad de Hölder (Generalizada)

En este apéndice incluimos la desigualdad de Hölder que fue utilizada para estimar el tiempo de convergencia en el Teorema 4.1, desigualdad (4.6).

**Teorema C.1.** (Desigualdad de Hölder Generalizada). *Sean  $p_1, \dots, p_k$  enteros tales que*

$$\begin{aligned}1 \leq p_1 \leq \dots \leq p_k \leq \infty \\ \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = 1,\end{aligned}$$

*y sea  $u_k$  una función con norma  $L_{p_k}$  finita en un dominio  $U$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Entonces*

$$\int_U |u_1 \cdots u_k| dx \leq \prod_{i=1}^m \|u_i\|_{L_{p_k}}.$$

*Demostración.* Evans [17], p. 623.  $\square$

En particular, para la desigualdad (4.6) elegimos

$$\begin{aligned} u_1 &:= \kappa^2 \\ u_2 &= br \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right| \\ p_1 &= p_2 = 2. \end{aligned}$$

## D. Solución al FCM de un Arco de Curva con Extremos Fijos

La Figura 4.3 representa la evolución por Flujo de Curvatura Media de una curva con extremos fijos que puede ser representada como gráfica de una función  $u(x, t)$ . En casos como éste, la evolución de  $u(x, t)$  por Flujo de Curvatura Media se reduce a [30]:

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1 + u_x^2}. \quad (\text{D.1})$$

Para que el método de Crank-Nicolson [1] aplicado a una ecuación parabólica resulte en un sistema de ecuaciones lineales, el operador de la ecuación parabólica también debe ser lineal. Sea  $F(u, u_x, u_{xx}) = u_{xx}/(1 + u_x^2)$ , la linealización de  $F$  alrededor de una función dada  $\hat{u}$  es

$$F(u, u_x, u_{xx}) \approx \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}(u_{xx} - \hat{u}_{xx}) + \frac{\partial F}{\partial u_x}(u_x - \hat{u}_x) + \frac{\partial F}{\partial u}(u - \hat{u}).$$

En particular, para la ecuación (D.1) la linealización que resulta es

$$u_t = A(u, u_x, u_{xx}) u_{xx} + B(u, u_x, u_{xx}) u_x + C(u, u_x, u_{xx}) \quad (\text{D.2})$$

donde

$$\begin{aligned} A(u, u_x, u_{xx}) &= \frac{1}{1 + \hat{u}_x^2} & B(u, u_x, u_{xx}) &= -\frac{\hat{u}_x \hat{u}_{xx}}{(1 + \hat{u}_x^2)^2} \\ C(u, u_x, u_{xx}) &= 2 \frac{\hat{u}_x^2 \hat{u}_{xx}}{(1 + \hat{u}_x^2)^2}. \end{aligned}$$

Sean  $\Delta x > 0$ ,  $\Delta t > 0$  y  $u(x, t)$  solución de (D.1), si llamamos  $u_i^k$  a la discretización de  $u$  al tiempo  $k\Delta t$  en el punto  $i\Delta x$ , las siguientes son aproximaciones de las derivadas de  $u$  por diferencia finitas

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2}.$$

A partir de estas aproximaciones y aplicando el método de Crank-Nicolson [1] a (D.2), resulta un sistema de ecuaciones lineales para  $u_i^{k+1}$ . El siguiente código utiliza las consideraciones anteriores para resolver numéricamente la linealización (D.1).

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.interpolate import lagrange
from numpy.polynomial.polynomial import Polynomial
from scipy.integrate import simps

fig = plt.figure(frameon=False)
dim=2.54
w,h=2.25*5,1.250*5
fig.set_size_inches(w,h)

# El arco inicial en evolución de la Fig 4.2
# lo describimos como gráfica de la siguiente función
def f(s):
    return np.sqrt(1.0-s**2)
# La representación discreta inicial del arco la obtendremos
# evaluando f(s) en N puntos
N=23
# Los puntos los elegimos mediante el método de colocación de
# Chebyshev. Las coordenadas de cada punto son (X[i],V[i])
X=[]
for i in range(N+1):
    X.append(np.cos(i*np.pi/N))
V=[f(x) for x in X]

# Aunque inicialmente conocemos la función explícita que define
# el arco, usaremos la representación discreta para formar
# el polinomio interpolante de Lagrange de grado N. A partir de
# esta representación polinomial podemos calcular la derivada
# de 1er y 2do orden en los puntos X[i] mediante el producto de
# una matriz D y el vector que representa al polinomio de Lagrange
# asociado al arco. Esta técnica se conoce como Matriz
# de Derivación de Chebyshev (ver [1])
poly=lagrange(X,V)
poly_array=Polynomial(poly).coef
def P(s):
    suma=0.0

```

```

M=len(poly_array)
for i in range(M):
    suma+=poly_array[i]*s**(M-1-i)
return suma
# Formamos la matriz de derivada de Chebyshev
D=np.zeros((N+1,N+1))
def c (s):
    c=1.0
    if s==0 or s==N:
        c=2.0
    return c
for i in range(N+1):
    for j in range(N+1):
        if i==0 and j==0:
            D[i][j]=(2*N**2+1)/6.0
        elif i==N and j==N:
            D[i][j]=-(2*N**2+1)/6.0
        elif i!=0 and i!=N and i==j:
            D[i][j]=-X[j]/(2*(1.0-X[j]**2))
        else:
            D[i][j]=c(i)*(-1)**(i+j)/(c(j)*(X[i]-X[j]))

V=[P(x) for x in X]
# Calculamos la 1er derivada en los puntos "Xz guardamos
# los valores en un arreglo dV
dV=np.dot(D,V)
# La 2da derivada se obtiene aplicando dos veces la matriz D
D2=np.dot(D,D)
d2V=np.dot(D2,V)
# Se ajustan las condiciones de frontera, es decir, las
# derivadas se anulan en los puntos extremos, los cuales
# coinciden con el 1er y último elemento de los arreglos
# que guardan las derivadas
dV[0]=0
dV[-1]=0
d2V[0]=0
d2V[-1]=0
# La siguiente función evalúa los coeficientes de una
# ecuación parabólica      v_t=F(v,v_x,v_xx)
# donde F es de la forma A*v_xx+B*v_x+C
def Fabc(x):

```

```

m=len(V)
A=np.zeros(m)
B=np.zeros(m)
C=np.zeros(m)
for i in range(m):
    A[i]=1.0/(1.0+dV[i]**2)
    B[i]=-2.0*dV[i]*d2V[i]/(1.0+dV[i]**2)**2
    C[i]=2.0*dV[i]**2*d2V[i]/(1+dV[i]**2)**2
return A,B,C

plt.plot(X,V, '-r')
dx=2./N**2 # Tamaño de paso espacial
dt=0.000125 # Tamaño de paso temporal
k=dt/dx**2
count=0 # Numero de iteraciones
# Calculamos la longitud y el area inicial
L0=sum([np.linalg.norm([X[i]-X[i+1],V[i]\
-V[i+1]]) for i in range(len(V)-1)])
A0=abs(simps(V,X))

At=1.0
while (abs(At)>=1.0e-8) and (count<3000):
    S=np.zeros((len(V),len(V)))
    r=np.zeros(len(V))
    A,B,C=Fabc(1)
    # En el siguiente bucle formamos el sistema: S V =r
    # y lo resolvemos para V
    for i in range(1,len(V)-1):
        j=i
        S[i][j+1]=k*A[i]*0.5+dt*B[i]/(4*dx)
        S[i][j-1]=A[i]*0.5*k-B[i]*dt/(4*dx)
        S[i][j]=-k*A[i]-1

        r[i]=-C[i]*dt-V[i]
        r[i]+=-k*0.5*A[i]*(V[i+1]-2*V[i]+V[i-1])
        r[i]+=-B[i]*(dt/(4*dx))*(V[i+1]-V[i-1])

    S[0][0]=1.0
    S[0][1]=0
    S[-1][-1]=1.0

```

```

S[-1][-2]=0
r[0]=0
r[-1]=0

sol=np.dot(np.linalg.inv(S),r) # Solución al tiempo t+dt
if count%5==0:
    plt.plot(X,sol, '-o', lw=1,ms=5,color='k')
    # Una vez calculada la solución "sol", reemplazamos el
    # arreglo anterior por la solución al tiempo t+dt y
    # volvemos a ajustar las condiciones de frontera
    V=[x for x in sol]
    poly=lagrange(X,V)
    poly_array=Polynomial(poly).coef
    dV=np.dot(D,V)
    d2V=np.dot(D2,V)
    dV[0]=0
    dV[-1]=0
    d2V[0]=0
    d2V[-1]=0
    count+=1
    # Aproximamos el área mediante la integración numérica
    # utilizando la Regla de Simpson
    At=abs(simps(V,X))

print(abs(At),count,count*dt)
z=-1.0E-8
print('T_teo: ',(np.log(z*L0+2*np.pi**2*A0)\
-np.log(z*L0+At*2*np.pi**2))/(2*np.pi**2))
plt.grid(True)
plt.xticks(fontsize=15)
plt.yticks(fontsize=15)
plt.xlim((-1.125,1.125))
plt.ylim((-0.125,1.125))
name='evol-fix.png'
plt.savefig(name,format='png')
plt.show()

```

# Bibliografía

- [1] Ames, William F: *Numerical Methods For Partial Differential Equations*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press Inc, 2nd edición, 1984, ISBN 0120567601,9780120567607.
- [2] Anciaux, H.: *Minimal Submanifolds in Pseudo-Riemannian Geometry*. World Scientific, 2011, ISBN 9789814291248.
- [3] Anciaux, Henri: *Construction of Lagrangian Self-similar Solutions to the Mean Curvature Flow in  $\mathbb{C}^n$* . *Geometriae Dedicata*, 120(1):37–48, Jun 2006, ISSN 1572-9168.
- [4] Aspinwall, Paul S.: *D-branes on Calabi-Yau manifolds*. En *Progress in string theory*, páginas 1–152. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.
- [5] Ballmann, W.: *Lectures on Kähler Manifolds*. ESI lectures in mathematics and physics. European Mathematical Society, 2006, ISBN 9783037190258.
- [6] Beardon, A. F.: *The Principal Branch of the Lambert W Function*. *Computational Methods and Function Theory*, Aug 2020, ISSN 2195-3724.
- [7] Binney, J., J.J. Binney, M.C.D.P.J.J. Binney, B.S.J.C.D.P.A.J. Fisher, N.J. Dowrick, M.E.J. Newman y A.J. Fisher: *The Theory of Critical Phenomena: An Introduction to the Renormalization Group*. Oxford Science Publ. Clarendon Press, 1992.
- [8] Chen, Bing Long: *Uniqueness and pseudolocality theorems of the mean curvature flow*. *Communications in Analysis and Geometry*, 15(3):435–490, 2007.
- [9] Chen, B.Y.: *Geometry of Submanifolds*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2019, ISBN 9780486832784.
- [10] Chen, J. y G. Tian: *Minimal Surfaces in Riemannian 4-Manifolds*. *Geometric and Functional Analysis GAFA*, 7(5):873–916, Oct 1997, ISSN 1420-8970.
- [11] Chen, Jingyi: *Deforming surfaces in four dimensional manifolds*. En *Symplectic and contact topology: interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001)*,

- volumen 35 de *Fields Inst. Commun.*, páginas 79–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [12] Chen, Jingyi y Jiayu Li: *Mean Curvature Flow of Surface in 4-Manifolds*. *Advances in Mathematics*, 163(2):287 – 309, 2001, ISSN 0001-8708.
- [13] Chen, Jingyi y Gang Tian: *Moving Symplectic Curves in Kähler-Einstein Surfaces*. *Acta Mathematica Sinica*, 16(4):541–548, Oct 2000, ISSN 1439-7617.
- [14] Corless, R. M., G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey y D. E. Knuth: *On the LambertW function*. *Advances in Computational Mathematics*, 5(1):329–359, Dec 1996, ISSN 1572-9044.
- [15] Deruelle N., Uzan J. P.: *Relativity in Modern Physics*. Oxford University Press, 2018.
- [16] Ecker, K.: *Regularity Theory for Mean Curvature Flow*. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser Boston, 2012, ISBN 9780817682101.
- [17] Evans, L.C.: *Partial Differential Equations*. *Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, 2010, ISBN 9780821849743.
- [18] Gerhard, Huisken y Polden Alexander: *Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems: Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Cetraro, Italy, June 15–22, 1996*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [19] Han, Xiaoli y Jiayu Li: *The mean curvature flow approach to the symplectic isotopy problem*. *International Mathematics Research Notices*, 2005(26):1611–1620, Enero 2005, ISSN 1073-7928.
- [20] Han, Xiaoli y Jiayu Li: *On symplectic mean curvature flows*. *Frontiers of Mathematics in China*, 2(1):47–60, Mar 2007, ISSN 1673-3576.
- [21] Han, Xiaoli y Jiayu Li: *Symplectic critical surfaces in Kähler surfaces*. *Journal of the European Mathematical Society*, páginas 505–527, 2010.
- [22] Han, Xiaoli, Jiayu Li y Liuqing Yang: *Symplectic mean curvature flow in  $CP^2$* . *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 48(1):111–129, Sep 2013, ISSN 1432-0835.
- [23] Imagi, Yohsuke, Dominic Joyce y Joana Oliveira dos Santos: *Uniqueness results for special Lagrangians and Lagrangian mean curvature flow expanders in  $\mathbb{C}^m$* . *Duke Math. J.*, 165(5):847–933, 2016, ISSN 0012-7094.

- [24] Kenmotsu, Katsuei: *Minimal surfaces of constant curvature in complex projective spaces*. En *Geometry and its applications (Yokohama, 1991)*, páginas 85–92. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993.
- [25] Kimura, Masato: *Numerical analysis of moving boundary problems using the boundary tracking method*. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 14(3):373–398.
- [26] Lam, K. S.: *Topics in Contemporary Mathematical Physics*. World Scientific Pub Co Inc, 2003, ISBN 9812384545.
- [27] Lauret, Jorge: *Evolución geométrica de curvas y métricas*. En *Proceedings of the XIth “Dr. Antonio A. R. Monteiro” Congress (Spanish)*, Actas Congr. “Dr. Antonio A. R. Monteiro”, páginas 83–97. Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 2012.
- [28] Lee, J.M.: *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006, ISBN 9780387227269.
- [29] Li, Jiayu y Liuqing Yang: *Symplectic mean curvature flows in Kähler surfaces with positive holomorphic sectional curvatures*. Geometriae Dedicata, 170(1):63–69, Jun 2014, ISSN 1572-9168.
- [30] Mantegazza, C.: *Lecture Notes on Mean Curvature Flow*. Progress in Mathematics. Springer Basel, 2011.
- [31] McDuff, Dusa; Salamon, Dietmar: *Introduction to symplectic topology*. Oxford graduate texts in mathematics 27. Oxford University Press, 3rd edición, 2017, ISBN 9780198794899; 0198794894; 9780198794905; 0198794908.
- [32] Moser, J., E. Zehnder, C.I.M. Sciences y A.M. Society: *Notes on Dynamical Systems*. Courant lecture notes in mathematics. American Mathematical Soc., ISBN 9780821883525.
- [33] Munteanu, G.: *Complex Spaces in Finsler, Lagrange and Hamilton Geometries*. Fundamental Theories of Physics. Springer Netherlands, 2012, ISBN 9781402022067.
- [34] Naitoh, Hiroo: *Parallel submanifolds of complex space forms. I*. Nagoya Mathematical Journal, 90(none):85 – 117, 1983.
- [35] O’Neill, B.: *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. ISSN. Elsevier Science, 1983, ISBN 9780080570570.
- [36] Osher, S. y R. Fedkiw: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2003.
- [37] Savas-Halilaj, Andreas y Knut Smoczyk: *Lagrangian mean curvature flow of Whitney spheres*. Geom. Topol., 23(2):1057–1084, 2019.

- [38] Smoczyk, Knut: *Angle theorems for the Lagrangian mean curvature flow*. *Mathematische Zeitschrift*, 240(4):849–883, Aug 2002, ISSN 1432-1823.
- [39] Smoczyk, Knut: *Mean Curvature Flow in Higher Codimension: Introduction and Survey*. En Bär, Christian, Joachim Lohkamp y Matthias Schwarz (editores): *Global Differential Geometry*, páginas 231–274, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-22842-1.
- [40] Suárez-Serrato, P. y E. I. Velázquez Richards: *Contour Parametrization via Anisotropic Mean Curvature Flows (arXiv:1803.03724)*, 2018.
- [41] Toponogov, V.A. y V. Rovenski: *Differential Geometry of Curves and Surfaces: A Concise Guide*. Birkhäuser Boston, 2006, ISBN 9780817644024.
- [42] Trefethen, Lloyd N.: *Spectral Methods in MATLAB*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [43] Velázquez Richards, E. I.: *Github - Whitney Spheres evolving under MCF*, 2022. [https://github.com/V3du4rd0/MCF\\_WhitneySph](https://github.com/V3du4rd0/MCF_WhitneySph).
- [44] Wu, Z., J. Yin y C. Wang: *Elliptic & Parabolic Equations*. World Scientific, 2006.
- [45] Xin, Y.L.: *Minimal Submanifolds and Related Topics*. Nankai tracts in mathematics. World Scientific, 2003, ISBN 9789812564382.
- [46] Yano K., Kon M.: *Structures on manifolds*. Series in Pure Mathematics. WS, 1984, ISBN 9971966166.
- [47] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: Fixed point theorems*. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*. Springer-Verlag, 1985.