



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN MODELO COMBINATORIO DEL ESPACIO DE MÓDULI DE
RIEMANN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JAVIER ALEJANDRO DE LOERA CHÁVEZ

TUTOR

DR. DANIEL LABARDINI FRAGOSO



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

De Loera

Chávez

Javier Alejandro

4772285228

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

417030638

2. Datos del tutor

Dr.

Daniel

Labardini

Fragoso

3. Datos del sinodal 1

Dra.

Rita

Jiménez

Rolland

2. Datos del sindoal 2

Dr.

Christof

Geiss

Hahn

2. Datos del sindoal 3

Dr.

Bruno Aarón

Cisneros

de la Cruz

2. Datos del sindoal 4

Dr.

Pierre Michel

Bayard

2. Datos del trabajo escrito

Un modelo combinatorio del espacio de móduli de Riemann

134 p

2022

Para mi hermano Gerardo, también conocido como el Nene.

Agradecimientos

El camino ha sido largo y más accidentado de lo que imaginé, pero he tenido la fortuna de contar con el apoyo, la amistad, la guía y el cariño de muchas personas increíbles. Tras reflexionar sobre por qué siento gratitud y para quién, me encontré con la bonita realidad de que mi vida está llena de amigos y que les debo mucho más de lo que podría escribir en un par de páginas.

Ante todo, agradezco a Daniel por su infinita paciencia, su apoyo, y por compartirme su visión y su filosofía. Gracias por mostrarme que para abrir la puerta a las matemáticas basta con girar la perilla.

A mi mamá, por escucharme cuando le hablaba de orbifolds mientras limpiábamos frijoles. Gracias por tus consejos siempre acertados, tus historias rancheras, tus palabras de enciclopedia y tu cariño sin fin.

A mi papá, por creer en mí siempre y por enseñarme la luz de la ciencia y de la música. Gracias por decirme las verdades difíciles, por darme la noción del equilibrio y por bajar la voz cuando estamos arreglando algo roto en la casa.

Al nene, que es mi otro par de ojos en este mundo. Gracias por ser mi mejor amigo, por darme lata sin cesar, por escucharme hablar de matemáticas hasta la una de la mañana y por distraerme un año entero jugando ping pong en todas sus variantes: conversong, rapidong, ping pong de llenos.

A mi hermana, mi primera amiga. Gracias por las películas de miedo, el hipo con el que acaba tu risa, y por abrirme el camino con tu ejemplo y tus consejos.

A Punk, mi perro. Aunque otra vez eres una parte dormida del mundo, te recuerdo porque la mejor mitad de mi vida consistió en verte correr y rascarte la panza.

A Fernando Gutiérrez, que es mi otro hermano. Gracias por predecir todas las modas y por hacer que cada conversación se convierta en un chiste, un performance o un poema. Esos cinco años en Ajusco me sentí siempre en casa.

A Julieta Hernández, por tu amor. Gracias por ese año patinando, bailando e imaginando el futuro. Gracias por los sábados en el centro cuando éramos niños, por el regalo de la poesía, y por creer en mí desde entonces.

A Vale Dehesa, porque pensaste que soy un ñoño y te acercaste a mí con el obsequio de tu amistad. Gracias por tu cariño, tu mente, tus opiniones siempre opuestas a las mías, y por soportarme todos estos años.

A Ximena Taborga, por cambiar el significado de la Ciudad de México. Gracias por cada una de tus palabras, por tu cariño, tu amistad y tu convicción de sacarme del lugar en el que esté para ir a pasear.

A Adrica Merino, por tu cariño y tu amistad, y en especial por tu compañía y tu apoyo incansable durante el año más difícil de mi vida.

A Mafer Estrada, mi amiga más antigua. Gracias por compartir tu infancia conmigo y por seguir aquí, escuchándome hablar de tonterías y mostrándome siempre la solución más simple. Sigo pensando que en otra vida fuiste matemática.

A la señora Carmen Segundo, de quien no pude despedirme. Gracias por permitirnos a Nando y a mí vivir en el centro del universo junto a Julio y Chucho, con una dotación ilimitada de caldo tlalpeño y tortitas de huazontle.

A mis sinodales, Rita Jiménez, Pierre Bayard, Christof Geiss, Bruno Cisneros, por sus comentarios, su apoyo y su ayuda para entrar al posgrado. A los profesores que me mostraron el camino: Daniela Terán, Max Neumann, Jorge Moreno, Jana Dosal, Juan José Alba, Ángel Fuerte, Alan Mendoza, Jan Kyncl, Václav Chvátal y Martha Takane.

A mi grupo de geometría analítica, en especial a Regina Valencia y Jeremías Valenzuela, por su paciencia y su amistad, y por mostrarme el valor de la enseñanza.

A mis amigos de la licenciatura. En especial a Erick Gordillo por darme las conversaciones matemáticas y no matemáticas más ricas y productivas que he tenido; más de un resultado de este trabajo lo entendí gracias a tu gran talento. A Braulio Morales, por enseñarme tu música, tus trucos de guitarra, de cálculo y de física; tu amistad me acompañó en los momentos más difíciles de la carera. A Azul Castañeda, por tus conversaciones siempre agradables, por reírte de mis tonterías y por tu cariño indeleble. A Carlos Ochoa, por tener la razón más veces de las que quisiera admitir, y por enseñarme una y otra vez nuevas formas de ver las cosas. A Victor Knapp, una persona brillante y de generosidad y paciencia sin límites. A Diego Barceló, por tu apoyo perpetuo, tus hábitos y tu buen ejemplo. A Diego Zanella, por hacer que las matemáticas parezcan fáciles. A Edwin Anzures, por tu calma y tu perspicacia en la que todos nos apoyamos. A mis amigos del prome; a Dante Vargas, Lucy Rovelo, Elizabeth Ríos, Carlos Soberano, por las tardes sin fin de cartas y de chistes. A Ehecatl Nieto, por tu increíble generosidad, y por permitirme vivir en tu casa mientras escribía este trabajo; por tu disposición a escucharme y por dejarte ganar más de una vez cuando jugábamos básquet antes de ir al Frody con Vale. A Ana Muñoz, persona increíble, por tu cariño, tus chistes inigualables y tu apreciación por los míos. A Reyna Peñuelas, por todas las conversaciones incesantes y divertidas que sabes construir.

A Yiatziri Valdéz, por tu amor y tu amistad, por rescatarme de mi letargo, por abrir la ventana para recordarme que vivir es un parque.

A mis amigos de Torreón, quizá las tres personas más brillantes que conozco: Sergio Hernández, por tu humor, tu genialidad y por enseñarme dónde encontrar la esperanza. A Alejandro González, que es un pilar del futuro, y a Andrés Salazar, que inventó la comedia muchas veces.

A mis amigos de León con quienes compartí la idea absurda de venir a la Ciudad de México. A Edwin Olivares, por tu amistad absoluta, tu fe en mí y las palabras de apoyo que me ofreces siempre. A Karla Torres, Emiliano Hernández y Ricardo Lázaro, por hacer que el tiempo parezca un algodón. A mis hermanos de la prepa. A Hiram Villaseñor, con quien crecí para encontrar que el mundo ya había empezado; a Mauricio Haro, la definición de un humano tranquilo; a Estefanía Álvarez, por tu cariño que es más viejo que mi habilidad para multiplicar. A Sofía

Oviedo, por nuestra larga amistad y por tu comprensión y apoyo sin fin. A los Töller: Dani, Paty, Ralph, y Tris, por darle otra casa al nene y aceptar que el nene y yo venimos en paquete. A Arantza Pérez, por tu cariño y tu habilidad para sacarme de muchos momentos complicados. A Sara Nicholson, Denys Bulavka y Lucka, por haber inventado el mejor verano que he tenido.

A mi tío Armando y mi tía Geo, por cultivar mi inclinación por la ciencia, los rompecabezas, y mi adicción a Les Luthiers. Por su apoyo y sus conversaciones. A mi tío Lalo y mi tía Irene, por su cariño que precede mi nacimiento. A mi tío Marcos, por desafiarme y cuestionarme todo el tiempo y por enseñarme que para ser hay que hacer. A mi prima Dani Salvatierra, por ser mi amiga desde que empecé a hablar.

A Josué Ortega, por convencerme en una tarde calurosa de 2015 que valía toda la pena del mundo estudiar matemáticas.

Índice general

1. Elementos de la topología de superficies	7
1.1. Superficies	7
1.2. El grupo fundamental	12
1.3. Espacios cubrientes	16
1.4. Notas y referencias	28
2. Superficies de Riemann	30
2.1. Conceptos básicos	30
2.2. Ramificación	39
2.3. El Teorema de Riemann-Roch	43
2.4. La esfera perforada y el Teorema de Existencia de Riemann	45
2.5. Clasificación de las superficies de Riemann	48
2.6. El espacio de módulos	52
2.6.1. El espacio de módulos del toro	53
2.7. Notas y referencias	58
3. Mapas en superficies orientadas	60
3.1. Mapas	60
3.2. El modelo de permutaciones	63
3.3. Notas y referencias	71
4. Las gráficas de listones	73
4.1. Orbifolds	74

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
4.2. El espacio de las gráficas de listones métricas	79
4.2.1. Las gráficas de listones excepcionales	81
4.2.2. El espacio $RG_{g,n}^{\text{met}}$	84
4.3. Notas y referencias	99
5. El diferencial de Strebel-Jenkins	100
5.1. Diferenciales cuadráticos	100
5.2. Coordenadas canónicas	109
5.3. Notas y referencias	116
6. Un modelo combinatorio de $\mathcal{M}_{g,n}$	118
6.1. La correspondencia de Strebel	118
6.2. El espacio $\mathcal{M}_{g,1}$	123
6.3. Notas y referencias	124
7. Apéndice	126
7.1. Gráficas y mapas	126
7.1.1. Gráfica Dual	127
7.2. Espacios de móduli	127
7.3. El modelo combinatorio	130

Introducción

Desde su invención, el análisis complejo ha estado sentado en la intersección del álgebra, la geometría, el análisis y, a través del trabajo de Riemann, la topología. En el estudio de la variable compleja, uno rápidamente encuentra la aparente contradicción de una función multivaluada f . Siguiendo a Cauchy, uno obtiene la construcción de las *ramas* de f , definidas en un plano que ha sido cortado a lo largo de cierta curva. El ejemplo clásico es el de los logaritmos complejos, cuya ambigüedad se sigue de la ambigüedad en el argumento de un $z \in \mathbb{C}$. En su tesis doctoral, Riemann describe una construcción en la que pega de forma adecuada los distintos planos cortados en donde f se especializa, de forma que obtiene un espacio para el que f toma un valor en cada uno de sus puntos. Añadiendo coherentemente un punto al infinito a \mathbb{C} , esta construcción produce una cubierta ramificada X de la *esfera de Riemann*, S . Cabe notar que esta construcción precede a la noción abstracta de superficie, de modo que tomó tiempo llevarla al lenguaje topológico con el que hoy se presenta este objeto. La definición abstracta y más formal de superficie de Riemann fue introducida por Weyl [46], aunque Weyl da crédito a Klein.

Por otro lado, el Teorema de Riemann-Roch y los grados de libertad al variar los puntos críticos en S para construir a X llevaron a Riemann a sospechar que la estructura compleja de una superficie compacta de género g depende de $3g - 3$ parámetros complejos, $g > 1$. Así, la idea heurística de esta cuenta de parámetros afirma que el conjunto de clases de isomorfismo de superficies de Riemann compactas y de género g , que denotaremos por M_g , “tiene dimensión $3g - 3$ ”. En los disfraces más modernos para la superficie X también tenemos nociones naturales de variación. A saber, podemos pensar en X como una curva compleja no singular C dada por el polinomio $f \in \mathbb{C}[z, w]$: uno podría esperar que una pequeña perturbación en sus coeficientes produzca otra curva singular C' que, con suerte, no es equivalente a C . Similarmente, el Teorema de Uniformización de Poincaré y Koebe nos permite entender a X a partir de la representación de su grupo fundamental en el grupo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, en donde tenemos topología, y una noción de modulación de parámetros.

Así, para hacer sentido de estos $3g - 3$ grados de libertad, es necesario hacer precisas estas nociones intuitivas. En efecto, como se discute en [1], el primer *problema de móduli* consistió en dar sentido a la afirmación de Riemann sobre la “modulación” de las estructuras complejas. La historia del desarrollo de estas ideas es larga y emocionante, y transformó profundamente el entendimiento de muchas áreas de las matemáticas. Referimos a la bonita monografía de A'Campo, Ji y Papadopolous, [1]. En cuanto a estos problemas, el trabajo de varios de los matemáticos más famosos de los siglos XIX y XX culminó en el desarrollo de la noción de *espacio de móduli* y de la teoría de Teichmüller, que continúa hasta hoy. En esencia, el *problema de móduli* de Riemann consiste en formalizar la noción de una *familia* de superficies de Riemann compactas y de género g , y en obtener un *catálogo* \mathcal{M}_g que parametrize de forma satisfactoria al conjunto M_g . Este problema resulta técnico y complicado, y puede ser atacado desde el punto de vista analítico, introducido por Teichmüller, o desde el algebraico, presentado por Deligne y Mumford.

Para fijar ideas, denotemos por S_g a la superficie compacta de género $g \geq 2$. A grandes rasgos, Teichmüller construye el espacio T_g de superficies de Riemann *marcadas* por un cierto homeomorfismo a su superficie subyacente S_g , módulo isotopías. T_g resulta tener dimensión compleja $3g - 6$. En este contexto, el llamado *grupo modular* de la superficie S_g , $\text{Mod}(S_g)$, actúa de forma que el cociente $T_g/\text{Mod}(S_g)$ es un espacio que *casi* es una variedad; a saber, es un *orbifold* de dimensión real $6g - 6$, que esclarece la intuición original de Riemann. Así, escribimos $\mathcal{M}_g := T_g/\text{Mod}(S_g)$, y lo llamamos el *espacio de móduli de Riemann*. Si bien \mathcal{M}_g es un espacio topológico, su estructura de orbifold carga con información adicional, relacionada a los puntos fijos de la acción de $\text{Mod}(S_g)$. Los puntos singulares provienen de superficies de Riemann especialmente simétricas. Una forma de hacer más homogéneo este espacio es introducir *puntos marcados* en la superficie, de forma que, apelando al teorema de automorfismos de Hurwitz, cada superficie marcada en n puntos admita únicamente a la identidad como automorfismo que preserva las marcas. Denotamos por S_g^n a una superficie de género g con n puntos marcados. Hay tanto un espacio de Teichmüller como un grupo modular análogos para S_g^n , y $\mathcal{M}_{g,n} = T_{g,n}/\text{Mod}(S_g^n)$ da al espacio de móduli correspondiente.

Con ánimos de describir la cohomología de $\mathcal{M}_{g,n}$, es conveniente utilizar al *espacio de móduli decorado* $\mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n$. El trabajo de Harer [11], Mumford [26] y Penner [35] permite, además, dar una descripción elemental de $\mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n$ a partir de las clases combinatorias de *gráficas encajadas* en la superficie de género g con n marcas. El espacio de estas clases, que denotamos $RGB_{g,n}^{\text{met}}$ da un *modelo combinatorio* para el espacio decorado de móduli, y la noción de *contracción* de Whitehead para gráficas encajadas le da una estructura natural de orbifold. Esta estrategia, que parte del punto de vista conforme, se basa en resultados de Strebel [42], y consiste en asociar una gráfica métrica a una superficie de Riemann decorada: a saber, le asocia la *gráfica crítica* de cierto diferencial cuadrático especial sobre la superficie. La estrategia de Penner [35], por otro lado, utiliza un polígono uniformizante de S_g^n e introduce coordenadas al decorar sus vértices ideales con horociclos, uno sobre cada una de las marcas. Estas estrategias producen un haz trivial sobre $\mathcal{M}_{g,n}$, así como estratificaciones del espacio total $\mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n$ que son combinatoriamente equivalentes [34], pero geoméricamente distintas.

En [11], Harer y Zagier utilizan este modelo combinatorio para describir algunos grupos de cohomología de $\mathcal{M}_{g,n}$, y computa su característica de Euler orbifold. En [25], Kontsevich usa el modelo combinatorio para demostrar la conjetura de Witten, dando una equivalencia entre dos teorías cuánticas de gravedad en dos dimensiones. En esta dirección, el espacio decorado $\mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n$ está íntimamente relacionado con una de las posibles compactificaciones de $\mathcal{M}_{g,n}$, de gran interés para la teoría de intersecciones y en especial la geometría enumerativa. A saber, la noción de *curva estable*, que Deligne y Mumford utilizan para compactificar $\mathcal{M}_{g,n}$ tiene su análogo combinatorio en las gráficas de listones estables, como se explica en [26], [25], [6]. La información que uno puede obtener a partir de considerar objetos combinatorios es sorprendente. En [6], por ejemplo, M. Chan explica cómo otros complejos de gráficas permiten utilizar métodos de *geometría tropical* para describir la cohomología racional de los espacios de móduli de Riemann.

El propósito de este trabajo es dar una presentación autocontenida de este modelo combinatorio, así como una introducción a nivel licenciatura de las superficies de Riemann. Para ello, desarrollamos las ideas básicas de la teoría de superficies de Riemann compactas, los diferenciales cuadráticos y los llamados *mapas* en superficies, una noción equivalente a la de gráfica de listones. Nuestra intención es dar un acercamiento a la teoría de espacios de móduli a través del lenguaje elemental de la teoría de gráficas. Una vez sentadas las bases, seguimos la estrategia de Mulase y Penkava en [32] para describir este modelo. Construiremos un sistema de coordenadas canónico para una superficie de Riemann marcada, una vez elegida una decoración con números reales, utilizando un diferencial cuadrático especial. Esto permite dar una descripción topológica

de $\mathcal{M}_{g,n}$ que, como hemos mencionado, tiene diversas aplicaciones. El plan es el siguiente:

En el capítulo 1, revisamos las nociones elementales de la topología de superficies y exploramos las primeras herramientas de la topología algebraica, como la importante relación entre el grupo fundamental de un espacio arcoconexo y sus espacios cubrientes.

En el capítulo 2 presentamos y desarrollamos el concepto de superficie de Riemann. Después de dar algunas propiedades elementales, describimos dos maneras de entender a una superficie de Riemann abstracta S : como una cubierta ramificada de la esfera y como el cociente de una acción por un grupo de isometrías hiperbólicas. La primera está basada en el Teorema de Riemann-Roch, que implica la existencia de una función meromorfa no constante sobre S , y sobre el Teorema de Existencia de Riemann, que permite construir a S a partir del grupo fundamental de una esfera perforada. La variación continua de las perforaciones sugiere una *modulación* de la estructura de S . Así, pasamos a una descripción introductoria de la noción de *móduli* de superficies, y construimos el espacio de estructuras complejas del toro como un ejemplo.

En el capítulo 3 presentamos la noción de mapa como una gráfica dibujada sobre una superficie, siguiendo la noción de *constelación* usada en [26] y [19]. Esto permite describir una gráfica encajada utilizando un conjunto ordenado de generadores para una representación por permutaciones del llamado *grupo cartográfico orientado*, un objeto íntimamente relacionado al problema de Galois inverso y a los *dessins d'enfants*, como se describe en [40] y [10]. Utilizamos el concepto de mapa para hablar naturalmente de una *gráfica de listones*, y para dar una descripción concreta de sus grupos de automorfismos.

En el capítulo 4, exploramos el concepto de las gráficas de listones, también llamadas *fat-graphs* en la literatura, y estudiamos el espacio de las gráficas de listones métricas. Para ello, iniciamos describiendo la noción de *orbifold*, objeto que surge como una generalización natural de las variedades, cuando uno piensa en una variedad como el espacio de órbitas de una acción propiamente discontinua y libre. Permitir acciones más generales (a saber, con estabilizadores no triviales) permite acercarse a la motivación detrás de la definición técnica de orbifold. Después, seguimos la descripción de Mulase y Penkava en [32] para definir el espacio de gráficas de listones métricas con un número fijo de caras como un orbifold diferenciable.

En el capítulo 5 estudiamos los *diferenciales cuadráticos meromorfos*, objetos analíticos profundamente relacionado con la teoría de Teichmüller de superficies. Centramos nuestra atención en un diferencial cuadrático especial asociado a una superficie marcada y decorada (S, M) , descrito originalmente por Jenkins [18] y Strebel[42]. Utilizamos este diferencial q cuadrático para obtener una triangulación de (S, M) que nos permite construir un sistema de coordenadas canónico para la superficie S , y una gráfica de listones Γ_q dada por las trayectorias singulares de q .

Finalizamos con el capítulo 6, en donde describimos una correspondencia entre el espacio de gráficas de listones métricas y el espacio de móduli de Riemann, salvo por un factor \mathbb{R}_+^n de *decoración*. Para ello, replicamos la construcción de las coordenadas canónicas de una superficie para pegar abiertos a una gráfica de listones métricas, de modo que recuperamos una superficie de Riemann marcada con un diferencial cuadrático meromorfo que coincide con su diferencial de Strebel-Jenkins, en una instancia de un proceso más general descrito, por ejemplo, en [40].

Al final de cada capítulo incluimos un breve resumen de las equivalencias entre este trabajo y las referencias usadas para escribirlo, entre otras notas sobre el contenido. Todas las figuras son originales y fueron realizadas con Inkscape.

Capítulo 1

Elementos de la topología de superficies

En este capítulo, describimos brevemente las nociones básicas de la topología de superficies. Estudiamos la asociación de un invariante algebraico a un espacio X , conocido como el grupo fundamental. Presentamos la teoría básica de espacios cubrientes, también conocidos como recubrimientos, o bien, cubiertas. Por último, estudiamos la relación entre los espacios cubrientes de X y la estructura de su grupo fundamental.

1.1. Superficies

Una superficie es una *variedad topológica* de dimensión 2, que definimos a continuación.

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico Hausdorff. Decimos que X es una variedad topológica de dimensión n si su topología tiene una base numerable y es localmente euclidiano. Esto es, para cada $x \in X$ hay una vecindad abierta $U \subseteq X$ de x , un abierto V de \mathbb{R}^n y un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$.

Llamamos a las funciones (U, ϕ) las *cartas* de X . Abusando del lenguaje, también llamamos así a las propias funciones, y a los abiertos donde están definidas.

Observemos que cuando dos cartas ϕ y ψ tienen dominios que se intersecan, la función $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ es un homeomorfismo. El dominio y contradominio de esta función son abiertos de \mathbb{R}^n , de modo que uno podría preguntarse si dicha función *de transición* tiene propiedades adicionales, familiares para campos vectoriales: en efecto, añadir el adjetivo “diferenciable”, “suave”, “analítica” a estas funciones cambia correspondientemente el adjetivo que acompaña a la variedad. Más adelante trabajaremos con superficies de Riemann, donde estas transiciones son *biholomorfismos*.

Cualquier espacio euclidiano \mathbb{R}^n es un ejemplo de una variedad topológica. La gráfica de la función $x \mapsto x^2$ es una 1-variedad, con la proyección en la primera coordenada como una carta global. El círculo es una 1-variedad compacta: para construir cartas, basta notar que las funciones $f(x) = \pm\sqrt{1-x}$ y $f(y) = \pm\sqrt{1-y}$ son inyectivas en $(0, 1)$. Sin embargo, también

es posible utilizar las proyecciones estereográficas desde los polos para definir cartas en S^1 . Los ejemplos de superficies son ubicuos: los subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^2 , la esfera, el toro, el plano proyectivo. Observemos que la unión de superficies es también una superficie, de forma que una superficie no es necesariamente conexa.

Una de las propiedades más agradables de las superficies compactas es que están determinadas por características que son fáciles de visualizar, como describimos a continuación. Denotemos por S^2 , T^2 y P^2 a la esfera, el toro y el plano proyectivo real, respectivamente. Tomemos las superficies X_1 y X_2 , y sean $D_1 \subset X_1$, $D_2 \subset X_2$ discos topológicos. Tomemos un homeomorfismo¹ $f : \delta D_1 \rightarrow \delta D_2$, y sea $S = X_1 \setminus D_1 \sqcup X_2 \setminus D_2$. La *suma conexa* de X_1 y X_2 es el espacio cociente resultante de identificar x con $f(x)$ en S , denotado por $X_1 \# X_2$. El espacio $X_1 \# X_2$ resulta ser una superficie, y su clase de homeomorfismo no depende de la elección de f ni de los discos D_i . Referimos a la sección 6 de [29]. Con esta terminología, tenemos el siguiente teorema de clasificación de superficies.

Teorema 1.1.1. *Cualquier superficie compacta y conexa es homeomorfa a exactamente una de las siguientes superficies:*

- S^2
- $T^2 \# \dots \# T^2$
- $P^2 \# \dots \# P^2$

Para una prueba completa de este teorema, referimos al artículo [43]. La suma conexa de n toros es fácil de imaginar como una esfera con n asas. A priori no es evidente que sumas del tipo $T^2 \# P^2 \# P^2$ resulten ser homeomorfas a una de las superficies especificadas por el teorema; no obstante, este es el caso. Por ejemplo, la superficie $T^2 \# P^2$ resulta homeomorfa a $P^2 \# P^2 \# P^2$. Una forma de convencerse de ello es a través de la noción de característica de Euler. Referimos al ejemplo 1.1.

El teorema anterior es importante porque motiva una primera definición de la noción de *género*. Si una superficie es homeomorfa a la suma conexa de n toros, decimos que es la superficie *orientable* de género n . En este sentido, basta con contar las asas que tiene la presentación de alguna superficie orientable para reconocerla². En analogía, decimos que la superficie no orientable de género n es una homeomorfa a $P^2 \# \dots \# P^2$. Convenimos en que S^2 es la superficie compacta de género 0, homeomorfa a la suma conexa de 0 toros, por vacuidad. La prueba del teorema de clasificación se basa en el estudio del *grupo fundamental* de una superficie, que definiremos más adelante.

La *orientabilidad* es una característica más general que puede ser definida para superficies no compactas, e incluso superficies que tienen *frontera*. La definición formal de orientabilidad para una superficie X es un poco técnica: puede ser dada formalmente a través de grupos de homología para n -variedades en general, como en la sección 3.3 de [14], pero nos limitaremos a una noción más intuitiva. Antes, generalicemos un poco nuestra noción de superficie. Denotemos por \bar{H}^2 al conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$, que llamaremos el semiplano superior cerrado.

Definición 1.2. Tomemos un espacio topológico X , Hausdorff y con una base numerable. Diremos que X es una superficie con frontera si para cada $x \in X$ hay una vecindad abierta $U \subseteq X$ de x , un abierto V de \bar{H}^2 y un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$.

¹Por ejemplo, ya que X_1 y X_2 son localmente euclidianas, podemos elegir homeomorfismos $h_i : S^i \rightarrow \delta D_i$, $1 \leq i \leq 2$, de manera que $f = h_2 \circ h_1^{-1}$.

²Esto es más difícil de lo que a primera vista puede parecer. Una superficie abstracta no está encajada en un espacio en el que podemos “ver” la superficie.

Más generalmente, reemplazar \bar{H}^2 por el *semiespacio* superior cerrado \bar{H}^n permite definir una variedad con frontera de dimensión n . Tomemos una superficie con frontera X . Si $x \in X$ va al eje real bajo alguna carta ϕ , lo mismo sucede para cualquier otra carta coordenada. Así, diremos que x es un punto de frontera de X . El conjunto de estos puntos forma una 1-variedad, no necesariamente conexa, que llamamos la *frontera* de X y denotamos por δX ; el resto de los puntos de x son llamados puntos *interiores*, y admiten una vecindad homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^2 . Esto implica que el conjunto $X \setminus \delta X$ es una superficie, de forma que δX es un subespacio cerrado de X .

Si X es compacta, δX es también un conjunto compacto, y sus componentes conexas son entonces homeomorfas al círculo.³ Así, δX es homeomorfa a una unión finita de círculos ajenos. Identifiquemos cada componente conexa C de δX con la frontera de una copia del disco cerrado $\bar{D} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$. Como resultado, obtenemos un espacio de identificación compacto $S(X)$, pues es la imagen continua de la unión de dos compactos, X y la unión finita de copias de \bar{D} . Además, $S(X)$ es una superficie: la proyección natural $\pi : X \rightarrow S(X)$ preserva las cartas coordenadas en puntos interiores de X , mientras que los puntos interiores de cada copia de \bar{D} son claramente puntos interiores de $S(X)$. Por otro lado, si $x \in \delta X$ es identificado por π con un punto \tilde{x} en una copia de S^1 , podemos tomar cartas $(U \subset X, \phi)$ y $(U' \subset \bar{D})$ de x y \tilde{x} , respectivamente, con imágenes homeomorfas al medio disco $M := H^2 \cap D$. En tales coordenadas, π es representada por una identificación de las fronteras de ambas copias de M , que produce un disco abierto homeomorfo a $\pi(U \cup U')$, haciendo de x un punto interior de $S(X)$.

La construcción anterior nos permite caracterizar a X , una superficie compacta con frontera, a través de su superficie asociada $S(X)$. De esta forma, definimos el género de X como el género de $S(X)$, y lo denotamos por $g(X)$. Diremos que X es *orientable* si $S(X)$ es homeomorfa a la suma conexa de $g(X)$ toros, y que es *no orientable* en otro caso. Observemos que X está determinada, salvo homeomorfismo, por su género, su orientabilidad, y el número de componentes conexas de su frontera, que denotamos con $b(X)$.

Si bien esto nos da una definición de orientabilidad para superficies con o sin frontera, es preciso entender qué significa intrínsecamente. Intuitivamente, una superficie es orientable si es imposible encajar un pequeño objeto sobre ella y moverlo continuamente hasta obtener su imagen espejo. Más abstractamente, es imposible tomar un pequeño lazo orientado y moverlo libremente por la superficie hasta regresar a su posición original, para encontrar que ahora tiene la orientación opuesta. Si uno imagina a la superficie encajada en el espacio, esto equivale a la noción intuitiva de que la superficie tenga dos “lados”. Una orientación de X es entonces una elección consistente y continua de una dirección positiva para cada curva cerrada en X .

Otra forma de definir la orientabilidad de una superficie es a través de una *triangulación* de X , un concepto de gran utilidad. Citamos la definición usada en [45], que aparece como la definición 3.8.

Definición 1.3. Sea X una superficie, $U \subseteq X$, $V \subseteq \mathbb{R}^2$ abiertos, y $\phi : V \rightarrow U$ un homeomorfismo. Un triángulo Δ en X es la imagen bajo ϕ de un triángulo cerrado contenido en V , digamos δ . Una arista y un vértice de Δ es la imagen bajo ϕ de una arista y un vértice de δ , respectivamente. Decimos que una *triangulación* de X es una familia de triángulos $T = \{\Delta_i \mid i \in I\}$ cuya unión es X y que posee las siguientes dos características:

- La intersección de dos triángulos es ajena, o bien, una arista o un vértice común a ambos.
- Cada arista de T es una arista de exactamente dos triángulos.

³En la sección 6 de [29] se enuncia la clasificación de las 1-variedades: salvo homeomorfismo, sólo tenemos a \mathbb{R} y a S^1 .

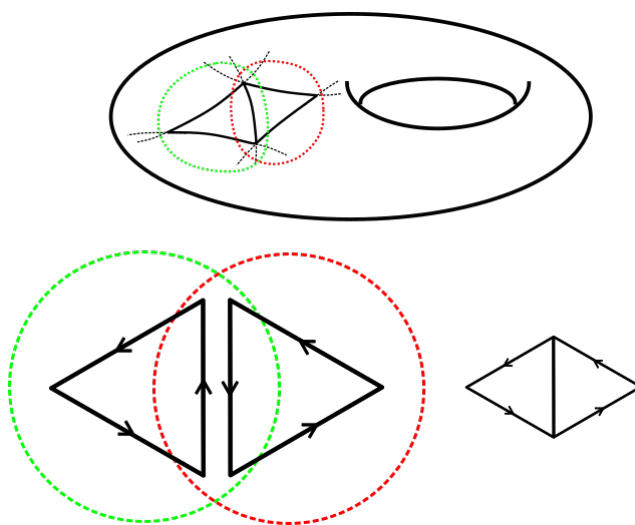


Figura 1.1: Dos triángulos de T con orientaciones compatibles.

Dicho en un lenguaje más general, una triangulación es un *complejo simplicial* S , acompañado de un homeomorfismo $h : S \rightarrow X$. Sin embargo, no usaremos esta terminología. Una triangulación de X es un caso particular de una *descomposición celular*, que definiremos al final de esta sección.

Decimos que una superficie que admite una triangulación T es *triangulable*. En cada triángulo de T , podemos elegir una orientación de las aristas de manera que construyamos un ciclo dirigido. Esto es, podemos circular por la frontera del triángulo respetando las direcciones de sus aristas. Esto da una noción de dirección para cualquier curva cerrada contenida en dicho triángulo. Así, elijamos una orientación para cada triángulo de T . Si e es una arista que pertenece a los triángulos $\Delta_1, \Delta_2 \in T$, podemos decir que elegimos orientaciones distintas para e si tomamos direcciones distintas para sus imágenes homeomorfas en δ_1 y δ_2 . Si esto sucede, vemos que la orientación de Δ_1 y Δ_2 es compatible, en el sentido en que se extiende a una orientación del cuadrilátero que surge de su unión, como en la figura 1.1. Esta construcción es generalizable a complejos de dimensión más grande. Referimos a la sección 5 de [29].

Definición 1.4. Tomemos una superficie X con una triangulación T . Diremos que X es orientable si es posible orientar a los triángulos de T de manera que cada dos triángulos adyacentes reciben orientaciones compatibles.

Una triangulación orientada de esta forma permite definir una dirección positiva para cualquier curva cerrada en X , pues yace dentro de un polígono triangulado cuya frontera indica tal dirección. Más aún, podemos entender la noción intuitiva de *mover continuamente* un pequeño círculo orientado l sobre la superficie como una serie de desplazamientos de l paso a paso, empezando en un triángulo particular y circulando la superficie por medio de una sucesión de triángulos adyacentes. Por la consistencia de la orientación de T , vemos por qué es imposible obtener el reflejo de l una vez que regresamos al triángulo original.

El siguiente teorema es bien conocido, y explica por qué podemos tomar la definición previa como una definición satisfactoria de orientabilidad. Para una prueba, referimos al artículo [43].

Teorema 1.1.2. *Toda superficie admite una triangulación.*

Triangular un espacio topológico permite darle una descripción combinatoria, que resulta

extremadamente útil. Por ejemplo, dada una superficie compacta, podemos utilizar una de sus triangulaciones para calcular su género.

Teorema 1.1.3. *Tomemos una superficie compacta y conexa X de género g , y una triangulación T para X . Sean V el número de vértices de T , E el de sus aristas y F el de sus caras. Entonces*

- $V - E + F = 2 - 2g$ si X es orientable,
- $V - E + F = 2 - g$ si X no es orientable.

Llamamos al número $\chi(X) = V - E + F$ la característica de Euler de X .

Ejemplo 1.1. No es difícil convencerse de que si S_1 y S_2 son superficies, $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$, pues podemos producir una triangulación de $S_1 \# S_2$ a partir de triangulaciones de S_1 y S_2 : basta elegir triángulos en cada S_i como los discos a identificar para obtener $S_1 \# S_2$. Así, la noción de orientabilidad y de característica de Euler basta para identificar una suma conexa con su llamada *presentación estándar*. Por ejemplo, $\chi(T^2 \# P^2) = 0 + 1 - 2 = -1$. La presencia de una *crosscap* nos dice que $T^2 \# P^2$ es no orientable⁴, y se tiene que $2 - g = -1$ si $g = 3$. Así, $T^2 \# P^2 \cong P^2 \# P^2 \# P^2$.

Más generalmente, podemos definir una descomposición *poligonal* para una superficie X de manera similar. Es fácil imaginar cómo podríamos reemplazar una triangulación suficientemente fina en una superficie por una descomposición por polígonos: si una cadena conexa de triángulos está contenida en una carta de X , podemos quedarnos con su frontera e ignorar sus divisiones internas para obtener un polígono. Recíprocamente, un polígono de k lados puede ser triangulado añadiendo $k - 3$ diagonales, proceso que produce $k - 3$ caras nuevas también; así, triangular una descomposición poligonal con V vértices, E aristas y F caras no cambia al número $V - E + F$, de modo que es posible calcular $\chi(X)$ usando una descomposición más general que una triangulación.

Ahora bien, la compacidad de X garantiza que cualquiera de sus triangulaciones tiene un número finito de caras. Por otro lado, cualquier triangulación T de una superficie compacta X con $b(X) > 1$ componentes de frontera debe tener un número finito de caras, de forma que también podemos calcular $V(T) - E(T) + F(T)$. La superficie con frontera más sencilla es el disco cerrado \overline{D} , y una triangulación suya, digamos T_D , induce una descomposición poligonal P de la esfera: a saber, si T_D tiene k aristas en la frontera de \overline{D} , basta con identificar un polígono de k lados y δD adecuadamente. Así, $V(P) - E(P) + F(P) = V(T_D) - E(T_D) + F(T_D) + 1 = 2$, de modo que $V(T_D) - E(T_D) + F(T_D) = 1$. Esto nos permite extender $\chi(X)$ a \overline{D} , y por lo tanto a toda superficie compacta con frontera X . A saber, X es el complemento de $b(X)$ discos en la superficie $S(X)$, por lo que podemos extender T a una triangulación de $S(X)$ si triangulamos adecuadamente al disco cerrado \overline{D} previo a su identificación con una componente de δX . Así, tenemos el

Corolario 1.1.3.1. *Sea X una superficie compacta y orientable de género g con b componentes de frontera. Si T es una triangulación de X con V vértices, E aristas y F caras, entonces $V - E + F = 2 - 2g - b$.*

Así, tenemos una definición de característica de Euler para cualquier superficie compacta, con o sin frontera.

⁴En general, si una suma conexa incluye un P^2 entre sus sumandos, el resultado es no orientable. Podemos ver esto intuitivamente: podemos pensar en un *crosscap* como una puerta que permite "invertir" la orientación de un círculo para permitirnos moverla hasta su posición original.

La característica de Euler es quizás la invariante topológica más antigua utilizada para distinguir superficies, y halló su primer uso en el estudio de los poliedros, que pueden pensarse como superficies descompuestas en polígonos. En la siguiente sección trataremos con otra invariante topológica de mucho poder, el grupo fundamental. Antes, finalizamos esta sección definiendo un objeto general que engloba a los conceptos de triangulación y descomposición poligonal, y que usaremos en los últimos capítulos de este trabajo.

Definición 1.5. Diremos que un espacio topológico homeomorfo a $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ es una n -celda abierta. Similarmente, una n -celda cerrada es un espacio homeomorfo a $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.

También diremos que una n -celda es una celda de dimensión n . Observemos que el interior de una celda cerrada es una celda abierta. Sin embargo, no es verdad que la frontera de una celda cerrada es una celda abierta.

Definición 1.6. Sea X un espacio topológico no vacío. Una *descomposición celular* de X es una familia \mathcal{E} de celdas abiertas de diversas dimensiones para la que se satisface lo siguiente:

- $\bigcup \mathcal{E} = X$.
- Los elementos de \mathcal{E} son ajenos a pares.
- Para cada $e \in \mathcal{E}$ de dimensión $n \geq 1$ existe una n -celda cerrada D y una función continua $\phi : D \rightarrow X$ tal que su restricción a $\text{Int}(D)$ es un homeomorfismo sobre e , y $\phi(\delta D) \subseteq \{e' \in \mathcal{E} \mid \dim(e') < n\}$.

Las primeras dos condiciones significan que \mathcal{E} es una partición de X por n -celdas abiertas, la tercera es una condición de *pegado*.

1.2. El grupo fundamental

En esta sección, definimos una poderosa herramienta para estudiar la topología de superficies: el grupo fundamental. La asignación de un grupo a una superficie surge como un primer acercamiento a la descripción de sus agujeros, y nos permite utilizar las herramientas del álgebra para estudiar problemas topológicos.

Definición 1.7. Una *curva* en X con punto inicial p y punto final q es una función continua $f : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = p$, $f(1) = q$. Si $f(0) = f(1) = p$, decimos que f es un *lazo* basado en p .

Aunque el concepto de homotopía entre funciones es más general, nos conformaremos con la siguiente noción:

Definición 1.8. Dos curvas f y g con punto inicial p y punto final q son *homotópicas relativo a sus extremos* si existe una función continua $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ que satisface $H(s, 0) = f(s)$ y $H(s, 1) = g(s)$ para cada $s \in [0, 1]$.

Notemos que, para cada t , $H_t = H(s, t) : [0, 1] \rightarrow X$ es una curva con punto inicial p y punto final q . Así, una homotopía entre dos curvas con mismos extremos formaliza la idea

de “deformación continua” de una curva en otra. En particular, si $p = q$, cada H_t es un lazo. Para un punto fijo p y el conjunto de los lazos basados en p es fácil notar que la relación ‘son homotópicos’ es de equivalencia. Por ello, también diremos que dos lazos homotópicos f y g están en la misma *clase de homotopía*, y escribiremos que $f \sim g$.

Ahora, dados dos lazos f y g basados en $p \in X$, intuimos que la curva obtenida al “ir primero con f y luego con g ” debería ser también un lazo basado en p , pues podríamos tomar al intervalo $[0, 2]$ y definir una cierta función fg dada por f en $[0, 1]$ y $g(s - 1)$ en $[1, 2]$. Para convertir dicha función a una curva bien definida, basta con “ir primero rápido con f y luego rápido con g ”. Formalmente, *concatenamos* los lazos f y g de la siguiente manera:

Definición 1.9. Sean f y g dos lazos basados en p . Definimos la *concatenación* de f y g por

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

También es posible definir la concatenación de curvas en general, siempre y cuando una termine donde comienza la otra. Cuando sea posible concatenar dos curvas, la clase de homotopía de su concatenación no dependerá de sus propias clases de homotopía, como veremos en un momento. En el caso de lazos basados en un mismo punto, la concatenación tiene un buen comportamiento:

Teorema 1.2.1. Sea $x \in X$, y $\pi_1(X, x)$ el conjunto de las clases de homotopía de lazos basados en x . A saber, $\pi_1(X, x) = \{[f] \sim \mid f : [0, 1] \rightarrow X, f(0) = f(1) = x\}$. Bajo la operación $\cdot : \pi_1(X, x) \times \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ inducida por la concatenación, $\pi_1(X, x)$ forma un grupo.

La prueba y motivación del teorema se basa completamente en el siguiente lema:

Lema 1.2.1. Si l es un lazo basado en p , el lazo $l^{-1} := l(1 - s)$ satisface $l \cdot l^{-1} \sim l^{-1} \cdot l \sim c_p$, donde c_p es la curva constante p (Es decir, $c_p(s) = p$ para toda $s \in [0, 1]$). Además, $c_p \cdot l \sim l$.

Como vemos, el lema nos indica qué objetos deberían actuar como los inversos y el neutro en $\pi_1(X, x)$. Notemos, sin embargo, que el lema es cierto también si consideramos simplemente una curva f con extremos arbitrarios en X . Citaremos en un bosquejo la prueba de [29].

Demostración. La homotopía entre $l \cdot l^{-1}$ está dada por

$$H(s, t) = \begin{cases} l(2s), & 0 \leq s \leq t/2 \\ l(t), & t/2 \leq s \leq 1 - t/2 \\ l(2(1 - s)), & 1 - t/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

La homotopía comienza en la constante p y termina en $l \cdot l^{-1}$. La intuición detrás consiste en ir, poco a poco, alejándose de p con l hasta llegar a $l(t)$, para después regresar con l^{-1} . Notar que $l = (l^{-1})^{-1}$ basta para ver que también $l^{-1} \cdot l \sim c_p$.

Para el lazo $c_p \cdot l$, la homotopía que lo une con l es la siguiente:

$$F(s, t) = \begin{cases} p & 2s \leq t \\ l(\frac{2s-t}{2-t}) & 2s \geq t \end{cases}$$

□

Tenemos las bases para probar el teorema 1.2.1

Demostración. Primero, la concatenación de clases está bien definida: si $f \sim f'$ y $g \sim g'$ a través de las homotopías F , y G , vemos que

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ G(2s - 1, t) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

es una homotopía entre $f \cdot g$ y $f' \cdot g'$. En efecto, para toda $s \in [0, \frac{1}{2}]$, $H(s, 0) = F(2s, 0) = f(2s)$, y si $s \in [\frac{1}{2}, 1]$, $H(s, 0) = G(2s - 1, 0) = g(2s - 1)$, por lo que $H(s, 0) = (f \cdot g)(s)$. De misma forma, uno puede comprobar que $H(s, 1) = f' \cdot g'$. Este argumento no depende de que f y g sean lazos, así que de hecho la concatenación respeta la equivalencia homotópica siempre que es posible llevarla a cabo.

El lema anterior muestra que $[c_x]$ es el neutro del grupo, y que el inverso de $[l]$ es exactamente $[l^{-1}]$. Para la asociatividad, basta ver que la concatenación de representantes en efecto es asociativa. Si l, h, g son lazos basados en x , los lazos $a = f \cdot (g \cdot h)$ y $b = (f \cdot g) \cdot h$ satisfacen

$$a(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(4s - 2) & 1/2 \leq s \leq 3/4 \\ h(4s - 3) & 3/4 \leq s \leq 1 \end{cases} \quad b(s) = \begin{cases} f(4s) & 0 \leq s \leq 1/4 \\ g(4s - 1) & 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ h(2s - 1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Observemos que a es simplemente una reparametrización de b . Explícitamente, la función continua $r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$r(s) = \begin{cases} s/2 & 0 \leq s \leq 1/2 \\ s - 1/4 & 1/2 \leq s \leq 3/4 \\ 2s - 1 & 3/4 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

es tal que $a = b \circ r$. Más aún, $r(0) = 0$, $r(1) = 1$, de modo que r es una función continua de $[0, 1]$ que fija sus extremos, y por tanto la función H dada por $H(s, t) = b(tr(s) + (1 - t)s)$ define una homotopía entre b y a . □

Ese último argumento puede aplicarse más generalmente; esto es, siempre que tengamos una curva f y una reparametrización g de f para la cual exista $r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que fije 0 y 1 y que cumpla $f = g \circ r$. Esto coincide con la idea intuitiva de que la esencia de una curva l , desde el punto de vista de la homotopía, es su *trazo*, $\text{Im}(l)$. Sin embargo, esa intuición resulta ser incorrecta:

Ejemplo 1.2. La curvas $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow S^1$ definidas por

$$\gamma(s) = \exp(2\pi is), \quad \delta(s) = \exp(4\pi is)$$

no son homotópicamente equivalentes.

Integrar la función $z \mapsto 1/2\pi iz$ sobre γ y δ arroja 1 y 2, respectivamente. Recordemos que es esta integral la que da la definición del *índice* de una curva, y que un argumento clásico de análisis complejo muestra que la integral de contorno de una función holomorfa en un cierto dominio depende sólo de su clase de homotopía (ver [36], por ejemplo). De hecho, la noción de índice permite demostrar que $\pi_x(S^1, x) \sim \mathbb{Z}$.

En general, intentar calcular el grupo fundamental de un espacio solamente a través de su definición no tiende a llevar muy lejos. No es muy evidente cómo debería verse un espacio abstracto formado por todos los posibles lazos basados en un punto, y mucho menos qué “bloques” deberíamos dibujar en él para delimitar las clases de equivalencia. A pesar de que el grupo fundamental captura la idea intuitiva de “atrapar agujeros lanzando cuerdas”, es importante distinguir la noción de curva como función de la imagen mental que hacemos de ella, que es más bien su trazo. A priori, la dependencia del punto base para describir al grupo fundamental parece ser otra dificultad, pero no lo será para nuestros espacios de interés:

Definición 1.10. Un espacio X es *arcoconexo*, si para cualesquiera dos puntos $a, b \in X$ existe una curva f con $f(0) = a$, $f(1) = b$. Diremos que X es *localmente arcoconexo* si para cada $x \in X$ y $U \subset X$ con $x \in U$ existe un abierto V arcoconexo tal que $x \in V \subset U$.

Proposición 1.2.1. Sea X una superficie conexa. Entonces X es arcoconexo y localmente arcoconexo.

Demostración. Que X es localmente arcoconexo se sigue de que es un espacio localmente euclidiano: cada $x \in X$ admite una vecindad homeomorfa a un disco abierto, que es un subconjunto convexo de \mathbb{R}^2 y por lo tanto arcoconexo. Ahora bien, tomemos un $x \in X$ y definamos al conjunto I_x como el conjunto de puntos $y \in X$ para los que existe una trayectoria con extremos en x y y . Dado un punto $z \in I_x$, tomemos una trayectoria $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ con $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = z$. Sea U una vecindad abierta arcoconexa de z . Observemos que cada $y \in U$ pertenece a I_x , pues es posible extender γ a una trayectoria entre x y y a partir de una con extremos z y y . Así, $U \subset I_x$. Similarmente, si $y \notin I_x$, la arcoconexidad local de X implica la existencia de una vecindad abierta de y contenida en $X \setminus I_x$. Puesto que x tiene una vecindad arcoconexa, $I_x \neq \emptyset$. X es conexa, por lo que se tiene que $I_x = X$. \square

Si X es un espacio arcoconexo, una curva γ en X con extremos en q y p define un isomorfismo $\phi_\gamma : \pi_1(X, q) \rightarrow \pi_1(X, p)$. Puesto que en X podemos hallar curvas que conectan cualesquiera dos puntos, la estructura de $\pi_1(X, X)$ no depende del punto base x . Así, no hay ambigüedad cuando hablamos de el grupo fundamental de un tal espacio. Sin embargo, el isomorfismo ϕ_γ depende de la elección de la curva γ , de modo que los grupos $\pi_1(X, q)$ y $\pi_1(X, p)$ no son canónicamente isomorfos. Concluimos esta sección con un par de ejemplos.

Proposición 1.2.2. Sean U un subconjunto convexo de \mathbb{R}^n y $x \in U$. Entonces $\pi_1(U, x) = 1$.

Demostración. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ una curva con $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Consideremos la función continua H dada por $H(s, t) = (1 - s)\gamma(t) + sc_x(t)$, con $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Es claro que $H(0, t) = \gamma(t)$ y $H(1, t) = c_x(t) = x$. Para un t fijo, los puntos $(1 - s)\gamma(t) + sc_x(t)$ trazan la recta entre $\gamma(t)$ y x . Así, H es una homotopía en U . \square

Definición 1.11. Sean X un espacio topológico arcoconexo y $x \in X$. Decimos que X es simplemente conexo si $\pi_1(X, x)$ es trivial.

La proposición 1.2.2 junto a un resultado técnico⁵ implican que la esfera S^2 es simplemente conexa. Otra forma de probar este hecho es utilizando el teorema de Seifert-Van Kampen, con un argumento similar al de la proposición 2.4.1 de la siguiente sección. Mucho más interesante es el siguiente ejemplo, tomado de la sección 10 de [29].

Proposición 1.2.3. Sean X una superficie conexa y compacta, y $x \in X$. Por el teorema 1.1.1, X es homeomorfa a la esfera, a una suma conexa de n toros o n planos proyectivos reales, para cierto número natural n . Se tiene que

$$\pi_1(X, x) \cong \begin{cases} 1 & \text{si } X \cong S^2 \\ \langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \rangle & \text{si } X \cong T^2 \# \cdots \# T^2 \\ \langle a_1, \dots, a_n \mid a_1^2 \cdots a_n^2 \rangle & \text{si } X \cong P^2 \# \cdots \# P^2 \end{cases}$$

Para demostrar este resultado es preciso un análisis de la presentación estándar de X . Es natural entender al toro como un espacio de identificación en el cuadrado: a saber, T^2 es homeomorfo al espacio que resulta de identificar lados opuestos en $[0, 1] \times [0, 1]$. Similarmente, es posible obtener $T^2 \# \cdots \# T^2$ a partir de identificaciones en un polígono de $4n$ lados, así como $P^2 \# \cdots \# P^2$. Omitimos estas construcciones, pero referimos a la sección 6 de [29]. Notemos que la proposición anterior sugiere que

$$\pi_1(T^2) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle,$$

en donde el término $aba^{-1}b^{-1}$ es el conmutador de los únicos generadores. Esto es, $\pi_1(T^2)$ es un grupo abeliano de rango dos, y es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

En general, es difícil calcular el grupo fundamental de un espacio. es crucial la noción de los *espacios cubrientes*. Antes, recordemos la siguiente definición:

Evidentemente, los espacios simplemente conexos tiene grupo fundamental trivial, sin importar el punto en el que nos basemos. Un espacio también puede ser *localmente* simplemente conexo, donde cada punto satisface que para cada abierto U que lo contiene, hay una vecindad abierta contenida en U que es simplemente conexa. El círculo, por ejemplo, es localmente simplemente conexo, pero no simplemente conexo.

1.3. Espacios cubrientes

Una forma de probar que $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ consiste en tomar la función $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $p(t) = \exp(2\pi it)$. Esta función es el homomorfismo usual que caracteriza a S^1 como el grupo cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Para cada punto x en S^1 , $p^{-1}(x)$ es simplemente el conjunto de todos los posibles argumentos de $x \in S^1$. Tomemos al lazo l basado en 1 dado por $l(s) = \exp(2\pi sn)$, y al punto $0 \in \mathbb{R}$. Si tomamos la función $e : x \mapsto nx$ de \mathbb{R} , vemos que $l(s) = (p \circ e)(s)$, donde $e(0) = 0 \in p^{-1}(0)$. Notemos que la fibra de 0 es \mathbb{Z} , y que si tomamos cualquier otro entero z , la función $e_z = e + z$ también satisface $l = p \circ e_z$, pero $e_z(0) = z$. Decimos que las funciones

⁵A saber, un lazo en S^n es homotópicamente equivalente a un lazo γ que no toca algún punto x de S^n (Ver, por ejemplo, el lema 7.19 de [29]). Puesto que S^n es la *compactación* por un punto de \mathbb{R}^n , el espacio $S^n \setminus \{x\}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^n , que es simplemente conexo por 1.2.2. Así, podemos jalar una homotopía en \mathbb{R}^n para construir una en $S^n \setminus \{x\}$ que contraiga γ a un punto.

e_z son levantamientos de la curva l , y tratar de encontrar funciones distintas que cumplan lo mismo resultará ser fútil, como veremos. Primero, formalicemos los objetos con los que estamos tratando. La función p resulta ser una instancia de una función *cubriente*.

Definición 1.12. Sean X, \tilde{X} espacios topológicos, y $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una función continua. Diremos que $U \subset X$ está *cubierto parejamente* si U es conexo y para cada componente conexa V de $p^{-1}(U)$, $p|_V : V \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Así, diremos que (\tilde{X}, p) es un *espacio cubriente* de X , y que p es una *función cubriente* si se satisfacen las siguientes condiciones:

- \tilde{X} es arcoconexo y localmente arcoconexo⁶.
- La función p es suprayectiva.
- Cada $x \in X$ tiene una vecindad cubierta parejamente por p .

Más generalidad es permitida en las definiciones que aparecen en [14] y [9]. Dado que la imagen bajo p de \tilde{X} es todo X , nuestra definición implica que X es un espacio conexo, y la suprayectividad implica que X debe ser también arcoconexo; por tanto, limitaremos nuestra atención a dichos espacios topológicos. Puesto que estudiaremos superficies conexas, la proposición 1.2.1 nos garantiza que las superficies poseen estas propiedades. Haremos los abusos de notación usuales para decir que el espacio cubriente es \tilde{X} cuando sea claro cuál es la función cubriente que tiene asociada, que también llamaremos su *proyección*.

Observación. Un espacio cubriente de una superficie es también una superficie.

En efecto, si tenemos una carta (U, ϕ) de X , podemos suponer que U está cubierto parejamente, de manera que una componente conexa V de $p^{-1}(U)$ nos permite construir una carta $(V, \phi \circ p)$ para X . Vemos que \tilde{X} es Hausdorff: si dos puntos distintos en \tilde{X} , digamos x y y , satisfacen $p(x) = p(y)$ y U es una vecindad cubierta parejamente de $p(x)$ entonces x y y pertenecen a componentes distintas de $p^{-1}(U)$; si $p(x) \neq p(y)$, cualesquiera vecindades ajenas U y V de $p(x)$ y $p(y)$ satisfacen que sus preimágenes son abiertas y no se intersecan en \tilde{X} . Ver que \tilde{X} posee una base numerable para su topología requiere un poco más de esfuerzo. Sin embargo, si la fibra de cada punto en X es numerable, un boceto del argumento es como sigue: si β es una base numerable de X , el conjunto $B = \{U \in \beta \mid U \text{ está cubierto parejamente}\}$ es una base para X también, pues cada punto admite una tal vecindad, y un subconjunto abierto de un abierto cubierto parejamente también está cubierto parejamente. Más aún, B es numerable al ser subconjunto de β , y podemos suponer que los elementos de B son homeomorfos a un disco si tomamos cada U suficientemente pequeño. Dado $U \in B$, $p^{-1}(U)$ es homeomorfo al producto $U' \times p^{-1}(x)$, donde x es cualquier punto de U y U' es un disco, de modo que $p^{-1}(U)$ tiene una base numerable si y sólo si $p^{-1}(x)$ es numerable. Si esto sucede, podemos construir una base numerable para \tilde{X} a partir de los abiertos básicos de cada $p^{-1}(U)$. A priori, no es fácil ver por qué la fibra de cada punto debería ser numerable, pero un poco más adelante retomaremos este punto.

Una propiedad de los espacios cubrientes que sí es inmediata es la siguiente:

Proposición 1.3.1. Si (\tilde{X}, p) es un espacio cubriente de X , todas las fibras $p^{-1}(q)$ tienen la misma cardinalidad.

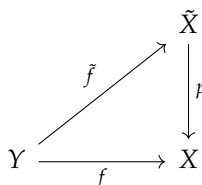
⁶Es sencillo ver que un espacio localmente arcoconexo no es necesariamente arcoconexo: basta considerar dos rectas distintas y paralelas en \mathbb{R}^2 . Aunque parece desafiar la intuición, la conexidad por trayectorias de un espacio tampoco implica su versión local: el *seno del topólogo extendido* es un espacio con esta propiedad. Ver [41].

Demostración. Como p se restringe a un homeomorfismo en cada componente de $p^{-1}(q)$, cada una contiene exactamente una preimagen de q . Si U es una vecindad de q cubierta parejamente, lo mismo es cierto para cada $q' \in U$, de forma que $|p^{-1}(q)| = |p^{-1}(q')|$. Escribamos C_q para denotar al conjunto de los $x \in X$ con $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(q)|$. Lo anterior nos dice que C_q es abierto, pues si $x \in C_q$ se tiene que cada punto en una vecindad cubierta parejamente de x también está en C_q . Observemos que $X = \cup_q C_q$. Así, si el complemento de C_q es no vacío, debe ser la unión ajena de ciertos C_y , para algunos $y \in X$, y por lo tanto es abierto también. X es conexo, de modo que $X \setminus C_q = \emptyset$, pues $q \in C_q$. \square

Diremos que esta cardinalidad común de las fibras es el *grado* de la cubriente; aunque preferiremos decir que p es una cubriente de n *hojas* cuando n es un número natural. Notemos que una cubriente de 1 hoja es necesariamente un homeomorfismo. Si bien la demostración de la proposición anterior es sencilla, ilustra una estrategia común que utilizaremos para varias pruebas subsecuentes; a saber, la de verificar que una propiedad se satisface en todo un espacio conexo mostrando que se satisface en un conjunto no vacío que es abierto y cerrado.

Nuestro interés en estos espacios cubrientes reside en la relación natural que hay entre el grupo fundamental del espacio cubierto y el cubriente. Más aún, las propias simetrías de la función cubriente juegan un papel importante en el álgebra que relaciona estos conceptos, como veremos un poco más adelante. Antes, recordemos las propiedades de levantamiento de curvas, que conforman la útil maquinaria que hilará las ideas mencionadas. Primero, formalicemos la noción de *levantamiento* que mencionamos al inicio de esta sección. Las referencias para las definiciones y resultados siguientes son el primer capítulo de [9] y de [14], y el capítulo 11 de [29]. A continuación, X será un espacio topológico y (\tilde{X}, p) un espacio cubriente de X .

Definición 1.13. Sea Y un espacio topológico. Si $f : Y \rightarrow X$ es una función continua, diremos que la función continua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ es un *levantamiento* de f si satisface $p \circ \tilde{f} = f$.



Este diagrama conmutativo ilustra la relación entre una función y uno de sus levantamientos p . En el ejemplo con el que iniciamos la sección, las funciones e_z son levantamientos del lazo l , y cada una satisface $e_z(0) = z \in p^{-1}(0)$. Estas funciones son, de hecho, los únicos levantamientos que l con tal propiedad.

Proposición 1.3.2. Supongamos que Y es conexo y $f : Y \rightarrow X$ es continua. Si \tilde{f}_1 y \tilde{f}_2 son levantamientos de f y $y_0 \in Y$ es un punto tal que $\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0)$, entonces \tilde{f}_1 y \tilde{f}_2 coinciden en todo Y .

Demostración. El conjunto $I := \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$ es no vacío, pues y_0 es uno de sus elementos. Supongamos que hay un $y \in Y \setminus I$ y que $U \subset X$ es una vecindad abierta de $f(y)$ cubierta parejamente. Por definición de I , $\tilde{f}_1(y)$ y $\tilde{f}_2(y)$ pertenecen a componentes conexas distintas de $p^{-1}(U)$, digamos \tilde{U}_1 y \tilde{U}_2 , respectivamente. Escribamos $V := \tilde{f}_1^{-1}(U_1) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U_2)$. Vemos que $y \in V$, por lo que V es un abierto no vacío para el que $\tilde{f}_1(V) \cap \tilde{f}_2(V) = \emptyset$. Deducimos que $Y \setminus I$ es abierto. Similarmente, tomemos otra vez un $y \in I$, una vecindad U de $f(y)$ cubierta parejamente, y escribamos $\tilde{U}_i = \tilde{f}_i^{-1}(U)$ para $i \in \{1, 2\}$. Puesto que $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$, necesariamente $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$. Dado que \tilde{f}_1 y \tilde{f}_2 son levantamientos de f , se sigue que $f = p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2$. Si

$V := \tilde{f}_1^{-1}(U_1) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U_2)$, vemos que $\tilde{f}_1(V) = \tilde{f}_2(V) = U_1 = U_2$, conjunto en donde p se restringe a un homeomorfismo y por tanto admite una inversa local p^{-1} . Así, para cada $y \in V$, $\tilde{f}_1(y) = p^{-1} \circ p \circ \tilde{f}_1(y) = p^{-1} \circ p \circ \tilde{f}_2(y) = \tilde{f}_2(y)$. Luego, $V \subset I$ es abierto, y por lo tanto I también. Puesto que Y es conexo y el conjunto I es no vacío, concluimos que $I = Y$. \square

Una consecuencia inmediata de este teorema es la posibilidad de levantar curvas de manera única:

Proposición 1.3.3. *Si $f : [0, 1] \rightarrow X$ es una curva y \tilde{y}_0 es un punto en $p^{-1}(f(0))$, entonces existe un único levantamiento $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ de f tal que $\tilde{f}(0) = \tilde{y}_0$.*

Demostración. Basta demostrar la existencia de dicho levantamiento, pues su unicidad se deduce de la proposición 1.3.2. El conjunto $f([0, 1])$ es compacto en X , por lo que podemos tomar un entero k suficientemente grande y k números reales $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = 1$ tales que para cada $0 \leq i \leq k$ existe una vecindad U_k de $f(t_k)$ cubierta parejamente, de manera que $\bigcup U_i = f([0, 1])$ y $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U_{i+1}$.

Fijemos al punto $\tilde{y}_0 \in p^{-1}(f(0))$, y sea \tilde{U}_1 la componente conexa de $p^{-1}(U_1)$ tal que $\tilde{x}_0 \in \tilde{U}_1$. La función $p|_{\tilde{U}_1}$ es un homeomorfismo sobre su imagen, U_1 , por lo que tiene una inversa, σ_1 ; así, definimos $\tilde{f}_1 : [0, t_1] \rightarrow \tilde{X}$ como $\tilde{f}_1 := \sigma_1^{-1} \circ f$. Dado que $t_1 \in U_2$, la componente conexa de $p^{-1}(U_2)$ que contiene a $\tilde{f}_1(t_1)$ interseca a \tilde{U}_1 ; definimos a \tilde{U}_2 como tal componente conexa. Así, podemos usar la sección local $\sigma_2 : U_2 \rightarrow \tilde{U}_2$ para levantar a f y definir $\tilde{f}_2 : [t_1, t_2] \rightarrow \tilde{X}$ como $\tilde{f}_2 := \sigma_2 \circ f$. Procedemos inductivamente: para $i > 1$, definimos a \tilde{U}_i como la componente conexa de $p^{-1}(U_i)$ que contiene a \tilde{f}_{i-1} , y, usando la sección local de $\sigma_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i$ de p , definimos $\tilde{f}_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \tilde{X}$ como $\tilde{f}_i := \sigma_i \circ f$. Es claro que en las intersecciones $U_i \cap U_{i+1}$, las secciones σ_i y σ_{i+1} coinciden, de modo que la función

$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} \tilde{f}_1(t) & t \in [0, t_0], \\ \vdots & \\ \tilde{f}_k(t) & t \in [t_{k-1}, 1]. \end{cases}$$

está bien definida y es continua, pues su dominio es una unión finita de cerrados en los cuales es continua, y se pega bien. Vemos fácilmente que $p \circ \tilde{f} = f$: llamando t_0 a 0, para cualquier $t \in [0, 1]$, hay un i tal que $t \in [t_{i-1}, t_i]$, y entonces $(p \circ \tilde{f})(t)$ se traduce a $(p \circ \sigma_i \circ f)(t) = f(t)$. \square

Resulta que, desde el punto de vista de la homotopía, este levantamiento depende sólo del elemento elegido sobre la fibra de $f(0)$ y de la clase de homotopía de f . Más específicamente, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.3.1. *Sean f_0, f_1 dos curvas homotópicas en X y \tilde{f}_0, \tilde{f}_1 levantamientos suyos en \tilde{X} , respectivamente. Si $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0) = \tilde{q}_0 \in \tilde{X}$, entonces $\tilde{f}_0 \sim \tilde{f}_1$.*

Demostración. La prueba sigue en analogía a la del teorema previo. Sean q_0, q_1 las imágenes de 0 y 1, respectivamente, bajo las curvas f_0 y f_1 . Supongamos que $H : I^2 \rightarrow X$ es una homotopía relativa a extremos entre f_0 y f_1 . Denotemos por f_s cada una de las curvas $H(s, t)$. Como en el teorema previo, cubramos cada uno de los conjuntos $Im(f_s)$ con k_s abiertos cubiertos parejamente. Esto da una cubierta abierta del compacto $Im(H)$, de donde, sin pérdida de generalidad, podemos extraer $k + 1$ abiertos U_0, \dots, U_k cubiertos parejamente para los que $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, $q_0 := p(\tilde{q}_0) \in U_0$ y $q_1 \in U_k$. Los conjuntos $V_i := H^{-1}(U_i)$ cubren a I^2 . Definimos $\tilde{H}_1 : V_0 \rightarrow \tilde{X}$

por $\tilde{H}_1 = \sigma_0 \circ H$, en donde σ_0 es la sección de p con dominio U_0 que satisface $\sigma_0(q_0) = \tilde{q}_0$. Una vez hecho esto, definimos inductivamente $\tilde{H}_i : V_i \rightarrow \tilde{X}$ como $\tilde{H}_i = \sigma_i \circ H$, en donde σ_i es la sección de p que coincide con σ_{i-1} en los puntos de $U_i \cap U_{i-1}$. Así, la función $\tilde{H} : I \rightarrow \tilde{X}$ está bien definida, pues los V_i se pegan bien, y es continua al serlo en cada uno de los V_i .

Por construcción, $p \circ \tilde{H} = H$. Luego, para cada $t \in I$, $p \circ \tilde{H}(s, t) = H(s, t) = f_s$, de modo que $\tilde{H}(s, t)$ coincide con los únicos levantamientos de las funciones f_s que empiezan en \tilde{q}_0 , \tilde{f}_s , de acuerdo al teorema previo. Notemos que $\tilde{H}(s, 0)$ y $\tilde{H}(s, 1)$ son levantamientos de las curvas constantes q_0 y q_1 , respectivamente. Dado que $\tilde{f}_0(0) = \tilde{q}_0 = \tilde{H}(0, 0)$, todas las \tilde{f}_s comienzan en \tilde{q}_0 , y similarmente terminan en $\tilde{q}_1 := \tilde{f}_1(1)$, pues \tilde{q}_1 determina a $\tilde{H}(s, 1)$, y cada levantamiento de las f_s se construye con las secciones σ_0 y σ_{k+1} en los conjuntos U_0, U_{k+1} . Así, \tilde{H} es una homotopía relativa a extremos entre \tilde{f}_0 y \tilde{f}_1 . \square

El teorema previo es especialmente útil cuando las curvas que queremos levantar son lazos, pues indica que es posible definir una noción de levantamiento para sus clases de homotopía, y por lo tanto para los elementos del grupo fundamental de X basado en el punto x . Sin embargo, no es necesariamente el caso que los lazos de X se levantan siempre a lazos de \tilde{X} . Intuitivamente, las curvas cerradas de X basadas en un punto x_0 se “desenredan” en \tilde{X} , levantándose a curvas que en general conectan dos elementos distintos de la fibra de x_0 . A partir de este fenómeno obtenemos una acción bien definida de $\pi_1(\tilde{X}, x)$ en $p^{-1}(x_0)$, sugerida por el siguiente corolario:

Corolario 1.3.1.1. (*Monodromía*) Sean f y g dos curvas homotópicamente equivalentes. Si \tilde{f} y \tilde{g} son levantamientos suyos tales que $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$, entonces $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.

Demostración. Dado que los levantamientos son también homotópicos, sus puntos terminales deben coincidir. \square

Los elementos de $\pi_1(X, x)$ son clases de equivalencia de lazos basados en $x \in X$. Si tomamos un representante γ de una dicha clase, vemos que para cada $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ existe un único levantamiento $\tilde{\gamma}$ de γ que comienza en \tilde{x} , y termina en $\tilde{\gamma}(1)$, que es también elemento de $p^{-1}(x)$, pues $p \circ \tilde{\gamma}(1) = \gamma(1) = x$. Así, definimos la acción de $\pi_1(X, x)$ en $p^{-1}(x)$ por

$$\tilde{x} \cdot [\gamma] := \tilde{\gamma}(1).$$

Observemos que la acción resulta ser derecha por cómo elegimos escribir la concatenación de curvas. Primero notemos que el corolario anterior, el teorema de *monodromía*, garantiza que la acción está bien definida, en el sentido en que no depende de un representante particular de $[\gamma]$. Para ver que en efecto es una acción, vemos que para cualquier $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, $\tilde{x} \cdot [c_x] = \tilde{c}_x(1) = \tilde{x}$, pues la curva constante $c_{\tilde{x}}$ es el único levantamiento de c_x que comienza en \tilde{x} . Por otro lado, si $h = f \cdot g$ se tiene que $\tilde{x} \cdot [h] = \tilde{h}(1)$. Sólo hay un levantamiento \tilde{f} de f que comienza en \tilde{x} , y sólo uno de g que comienza en $\tilde{f}(1)$, que denotaremos \tilde{g} . Vemos que $p \circ (\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = f \cdot g$, de manera que $\tilde{h}(1) = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$, y por lo tanto $\tilde{x} \cdot [f \cdot g] = (\tilde{f} \cdot \tilde{g})(1) = \tilde{f}(1) \cdot \tilde{g} = (\tilde{x} \cdot f) \cdot g$.

Más aún, el hecho de que \tilde{X} es conexo por trayectorias implica que esta acción es transitiva: basta con tomar una curva f entre $\tilde{x}, \tilde{x}' \in p^{-1}(x)$ y proyectarla para obtener un lazo γ que satisface $\tilde{x} \cdot [\gamma] = \tilde{x}'$.

Equivalentemente, la acción descrita produce un homomorfismo h de $\pi_1(X, x)$ en S_q , el grupo simétrico de $p^{-1}(q)$, dado por $[\gamma] \mapsto [\tilde{x} \mapsto \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1)]$.

Definición 1.14. Denotemos por S_q al grupo simétrico del conjunto $p^{-1}(q)$. Llamaremos a la imagen del homomorfismo $h : \pi_1(X, x) \rightarrow S_q$ el *grupo de monodromía* de X correspondiente a (\tilde{X}, p) .

Supongamos que X es arcoconexo y que l es una curva entre los puntos q y q' . l define un isomorfismo ϕ entre $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, q')$. Llamemos G a la imagen de la representación $h : \pi_1(X, x) \rightarrow S_q$ y G' la imagen de $h' : \pi_1(X, q') \rightarrow S_{q'}$. Sea $\sigma \in G$ tal que $\sigma = h(\gamma)$. Entonces la asignación $\sigma \mapsto h'(\phi(\gamma))$ define un isomorfismo entre G y G' , de modo que el grupo de monodromía de X está bien definido.

En la otra dirección, podemos ver que una función cubriente $p : \tilde{X} \rightarrow X$ induce un homomorfismo⁷ p_* entre $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ y $\pi_1(X, x)$, dado por $p_*([l]) = [p \circ l]$, pues cada representante l de un elemento de $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ se puede ver como un levantamiento de su imagen bajo p . De hecho, una vez fijo $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, eso es exactamente lo que es l , por unicidad de los levantamientos.

Es fácil ver que el homomorfismo p_* es inyectivo: si $[l] \in \text{Ker}(p_*)$, tenemos que $[p \circ l] = [c_x]$ y por lo tanto l es un levantamiento de c_x , así como lo es el lazo constante $c_{\tilde{x}}$. Así, $[l] = [c_{\tilde{x}}]$, el elemento neutro de $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$. Puesto de otra manera, hay una copia isomorfa de $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ como un subgrupo de $\pi_1(X, x)$, a saber, $\text{Im}(p_*)$. El estabilizador de q de la acción de $\pi_1(X, x)$ en $p^{-1}x$ coincide con $\text{Im}(p_*)$ pues si $\tilde{x} \cdot [\gamma] = \tilde{x}$ entonces $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}$ y por lo tanto $\tilde{\gamma} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$, de manera que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma \in \text{Im}(p_*)$. Viceversa, es claro que un representante de un elemento de $\text{Im}(p_*)$ se levanta a un lazo basado en q que actúa trivialmente.

Definición 1.15. Llamaremos al grupo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \subset \pi_1(X, x)$ el *grupo inducido* por el espacio cubriente (\tilde{X}, p) .

De nuevo, notemos que el grupo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ coincide con el estabilizador de \tilde{q} de la acción de $\pi_1(X, x)$ en $p^{-1}(q)$. ¿Qué hay de los grupos $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ cuando \tilde{x} es cualquier otro punto de la fibra $p^{-1}(q)$? La acción de $\pi_1(X, x)$ en $p^{-1}(q)$ es transitiva, de modo que si $\tilde{x}, \tilde{y} \in p^{-1}(q)$ existe un $g \in \pi_1(X, x)$ tal que $x \cdot g = y$ (incidentalmente, un representante de g es la proyección de cualquier curva que conecte x con y). Si $G := \pi_1(X, x)$ y G_x, G_y son los estabilizadores de x y y , respectivamente, vemos que $g^{-1}G_xg = G_y$. En efecto, cualquier elemento en $g^{-1}G_xg$ tiene forma $g^{-1}fg$, con $f \in G_x$, de modo que $y \cdot (g^{-1}fg) = (y \cdot g^{-1}) \cdot (fg)x \cdot (fg) = x \cdot g = y$. Concluimos que la conjugación por g da una biyección entre G_x y G_y cuya inversa es la conjugación por g^{-1} . En resumen,

Proposición 1.3.4. *Dados dos puntos \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 de \tilde{X} , los grupos $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{q}_1))$ y $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{q}_2))$ son conjugados, y $|p^{-1}(q)|$ coincide con el índice de $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{q}))$ en $\pi_1(X, q)$, independientemente de la elección de q .*

Demostración. La primera afirmación se sigue de la discusión previa. Para la segunda, construiremos una biyección explícita entre las clases laterales $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))g$ y $p^{-1}(q)$ para un \tilde{q} arbitrario, en donde $p(\tilde{q}) = q$. Fijemos un tal \tilde{q} y denotemos por H al grupo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ y por G a $\pi_1(X, q)$. Para cualquier $g \in G$, los elementos $h \in Hg$ actúan de la misma forma en \tilde{q} ; a saber, h satisface $h = fg$, donde $f \in H = G_{\tilde{q}}$, de modo que $\tilde{q} \cdot h = \tilde{q} \cdot fg = \tilde{q} \cdot g$. Si Hg, Hf son dos clases de H entonces $\tilde{q} \cdot g = \tilde{q} \cdot h$ implica que $gf^{-1} \in H$, por lo que $g \in Hf$, y se tiene que $Hg = Hf$. Así, vemos que la función $\phi : Hg \mapsto \tilde{q} \cdot g$ es una función inyectiva. Por otro lado, la arcoconexidad

⁷Notemos que el homomorfismo $f_* = [f \circ l]$ está definido para cualquier función continua f entre dos espacios topológicos. Resulta que $(-)_*$, junto con la asociación $(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$, constituye un funtor covariante de la categoría de *espacios basados* (en donde los objetos son parejas (X, x) compuestas de un espacio topológico y un punto base $x \in X$ y los morfismos son funciones continuas que envían puntos base en puntos base) y la categoría de grupos.

de \tilde{X} implica que para cualquier punto \tilde{q}_2 en la fibra de q hay una curva en \tilde{X} que inicia en \tilde{q} y termina en \tilde{q}_2 ; su proyección define una clase lateral derecha de H que claramente va a \tilde{q}_2 bajo ϕ . Así, ϕ es la biyección buscada. \square

Más aún, una curva l entre dos puntos x, y de X da un isomorfismo no canónico entre los grupos $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$, como se muestra en el capítulo 7 de [29]. Uno puede entonces poner la acción del primer grupo en $p^{-1}(x)$ en términos del segundo y convencerse de que los grupos inducidos $p_*(\pi_1(X, \tilde{x}))$ y $p_*(\pi_1(X, \tilde{y}))$ son isomorfos también. Así, el grupo inducido es un objeto algebraico propio del espacio cubriente (\tilde{X}, p) , cuya estructura no depende del punto usado para su construcción. Esto nos da una forma de asignarle un subgrupo de $\pi_1(X, x)$ a una cubierta de X . Podemos preguntarnos si cualquier subgrupo de $\pi_1(X, x)$ ocurre como el grupo inducido por alguna cubierta de X . Para respondernos, necesitamos de la noción de *cubriente universal*, que discutiremos más adelante.

Ahora, hemos hablado de levantar curvas y homotopías de un espacio X a una de sus cubiertas. En general, tenemos el siguiente importante *criterio de levantamiento* para funciones continuas:

Lema 1.3.1. Sean (\tilde{X}, p) un espacio cubriente de X , Y un espacio topológico arcoconexo y localmente arcoconexo, y $\phi : Y \rightarrow X$ una función continua. Tomemos $y \in Y$ y un $\tilde{q} \in p^{-1}(f(y))$. Entonces existe un único levantamiento $\tilde{\phi} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{\phi}(y) = \tilde{q}$ si y sólo si $\phi_*(\pi_1(Y, y)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{q}))$.

Es fácil ver que esta condición es necesaria: si $\tilde{\phi}$ es un levantamiento de ϕ , entonces ϕ_* coincide con $(p \circ \tilde{\phi})_*$, de modo que $\phi_*(\pi_1(Y, y)) = p_*(\tilde{\phi}_*(\pi_1(Y, y))) \subset \text{Im}(p_*)$. La suficiencia es más delicada, y referimos a la prueba que aparece en el primer capítulo de [14]. La unicidad del levantamiento sigue de un argumento familiar: si $\tilde{\phi}_2$ es otro levantamiento de ϕ con $\tilde{\phi}_2(y) = \tilde{q}$, entonces el conjunto de los puntos \tilde{x} tales que $\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \tilde{\phi}_2(\tilde{x})$ es no vacío, abierto y cerrado.

Ahora, tomemos un espacio cubriente (\tilde{X}, p) de X y demos otro vistazo al homomorfismo $\rho : [\gamma] \mapsto [\tilde{x} \mapsto \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1)]$ definido por la acción de $\pi_1(X, x)$ en $p^{-1}(x)$. De ser inyectivo, ρ induce una buena representación de $\pi_1(X, x)$ como un grupo de permutaciones. En tal caso, diremos que la acción es *fiel*, para reflejar el hecho de que $\pi_1(X, x)$ tiene una copia homomorfa en el grupo de permutaciones $S_{p^{-1}(x)}$.

Ejemplo 1.3. Sea $X = S^1$ y consideremos una cubierta finita (\tilde{X}, p) de X . Sabemos que $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$, de manera que el homomorfismo $\rho : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow S_{p^{-1}(1)}$ no puede ser inyectivo, pues la fibra de x en \tilde{X} es finita. Observemos que para tener una acción fiel, necesitamos una cubierta con una cantidad al menos numerable de hojas. Puesto que sus fibras deben ser discretas, tal cubierta no puede ser compacta.

Una acción de un grupo G en un conjunto X es *libre* si no tiene puntos fijos. Esto es, cada $g \in G$ distinto de la identidad satisface que $g \cdot x \neq x$ y cada $x \in X$. Observemos que una acción libre necesariamente es fiel, pues ningún elemento de g puede actuar en X de forma trivial. Ahora, supongamos que $\pi_1(X, x)$ actúa libremente en $p^{-1}(x)$. Tenemos entonces que $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ debe ser el grupo de un elemento: de lo contrario, podemos hallar un lazo $\tilde{\gamma}$ basado en \tilde{x} que no es equivalente al lazo constante $c_{\tilde{x}}$. Si denotamos por γ al lazo basado en x dado por $p \circ \tilde{\gamma}$, tenemos que $\tilde{x} \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}$, y puesto que p_* es inyectiva, la curva γ no es nulhomotópica. Similarmente, es claro que si $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ es trivial, la acción de $\pi_1(X, x)$ en la fibra de x es libre, y por lo tanto fiel.

Así, la discusión previa nos dice que si podemos encontrar una cubierta simplemente conexa de X , garantizaremos que la acción de $\pi_1(X, x)$ en la fibra de q es fiel. Además, por el

criterio de levantamiento, dos cubrientes simplemente conexas de X son necesariamente homeomorfas, pues sus respectivas funciones cubrientes se levantan a una biyección entre sus “torres” de abiertos, como veremos enseguida. Ahora, supongamos por un momento que \tilde{X} es una tal cubriente, y notemos que si fijamos un $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tal que $p(\tilde{x}) = x$ y y es un punto arbitrario de \tilde{X} , hay exactamente una clase de homotopía de trayectorias entre x y y . Esto se debe a que si $[l]$ y $[t]$ son clases de trayectorias entre x y y , la curva $l \cdot t^{-1}$ es un lazo, y por lo tanto es nulhomotópico. Así, podemos identificar cada punto y de $p^{-1}(x)$ con la única clase de curvas $[l_{xy}]$ con extremos x y y . El teorema de monodromía implica que p induce una biyección entre los $[l_{xy}]$ y los elementos de $\pi_1(X, x)$, de modo que $p^{-1}(x)$ es numerable si y sólo si $\pi_1(X, x)$ lo es. Una forma simple e inmediata de concluir esto es recordar que el número de hojas de p es el índice de $[c_q]$ en $\pi_1(X, x)$.

Así, al menos para una cubriente simplemente conexa de una superficie con un grupo fundamental numerable, podemos finalmente afirmar que la cubriente es también una superficie, como discutimos en la observación 1.3. Esta consideración resulta suficiente, pues las superficies X con las que trabajaremos tienen grupos fundamentales isomorfos a cocientes del grupo libre en $g + n$ generadores, donde g es el género de X y n su número de perforaciones, que por lo tanto son numerables. Además, como veremos, cualquier cubriente (\tilde{X}_1, p_1) de una superficie es un espacio obtenido a partir de identificaciones realizadas en una cubriente simplemente conexa (\tilde{X}, p) de X , de modo que la cardinalidad de la fibra $p_1^{-1}(x)$ está acotada por la cardinalidad de $p^{-1}(x)$.⁸

Así, tenemos dos motivaciones interesantes para encontrar una cubierta simplemente conexa para el espacio X . La pregunta es, ¿cuándo es posible encontrarlo? Para superficies, la respuesta es siempre. Más generalmente, tenemos el siguiente resultado estándar, obtenido del capítulo 1 de [14]:

Teorema 1.3.2. *Si X es un espacio arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo, X admite una única cubriente simplemente conexa, salvo homeomorfismos, que denotaremos por (X_u, ρ) .*

Intuitivamente, un espacio X es *semilocalmente simplemente conexo* si cada punto suyo admite una vecindad U en la que todo lazo se contrae a un punto, pero donde la contracción puede desenvolverse fuera de la vecindad U .⁹ Esta condición es necesaria para que X admita una cubriente universal: si (X_u, ρ) es tal cubriente y $x \in X$, una vecindad U_x de x cubierta parejamente es homeomorfa a un abierto de X_u , de modo que un lazo l contenido en U_x se levanta a una curva que es posible contraer a un punto en X_u a través de una homotopía H . La homotopía $\rho \circ H$ describe la contracción de l a un punto, que no necesariamente tiene la totalidad de su imagen contenida en U .

Llamaremos al espacio (X_u, ρ) la *cubriente universal* del espacio X . Una descripción detallada de este espacio se encuentra en la sección 5 del capítulo 1 de [9]; en su lugar, describimos la idea de su construcción, que es exactamente la que utilizamos para dar una biyección entre $\pi_1(X, x)$ y la fibra de x en \tilde{X} . Primero, tomemos X como en el teorema y fijemos un $x \in X$. Consideramos el conjunto L_y de todas las clases de homotopía de curvas con extremos en x y un punto y . En

⁸Nota: esto resulta de importancia para la teoría de superficies de Riemann. Como es de esperarse, la proyección de un espacio cubriente \tilde{X} de X en X también puede usarse para inducir una estructura adicional en X que está definida localmente, de modo que es sensato esperar que si X tiene una estructura compleja entonces hay una forma de darle una a \tilde{X} también. En dicha construcción es fácil ver cuál debería ser la clase del atlas complejo para \tilde{X} , pero no es claro a priori el por qué \tilde{X} tiene una base numerable, como vimos antes. El hecho de que una superficie de Riemann conexa posee una base numerable es un resultado de Radó.

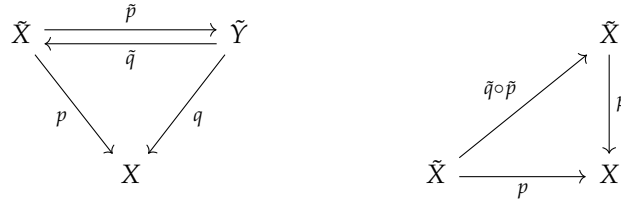
⁹Equivalentemente, X es semilocalmente simplemente conexo si la función $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ inducida por la inclusión $U \hookrightarrow X$ es trivial.

general, este conjunto tiene $k > 1$ elementos, y como mencionamos antes, $k = 1$ cuando el grupo fundamental de X es trivial. La conexidad por trayectorias de X garantiza que los L_y tienen todos la misma cardinalidad: basta tomar una curva c con extremos y y y' para dar una biyección no canónica entre L_y y $L_{y'}$, pues la función $L : L_y \rightarrow L_{y'}$ dada por $[l_{xy} \mapsto l_{xy} \cdot c]$ es inyectiva y su inversa está inducida por c^{-1} .

Así, \tilde{X} surge de tomar el espacio de todas las clases de curvas entre x y y , variando y en todo el espacio X , de modo que los puntos de \tilde{X} sobre y sean exactamente las k clases de curvas l_{xy} . Esta cubriente universal efectivamente “deshace los agujeros” de X al separar en distintos puntos las k formas esencialmente distintas de conectar dos puntos de X . La dificultad técnica está en definir una topología para tal espacio.

La unicidad de la cubriente universal se sigue del criterio de levantamiento: tomemos dos cubiertas simplemente conexas (\tilde{X}, p) y (\tilde{Y}, q) para X y fijemos puntos $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tal que $p(\tilde{x}_0) = x_0$, y $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(x_0)$. Los grupos $\text{Im}(p_*)$ e $\text{Im}(q_*)$ coinciden con $\{[c_x]\} \subset \pi_1(X, x)$, por lo que es posible levantar p a \tilde{p} y q a \tilde{q} de forma que $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$ y $\tilde{q}(\tilde{y}_0) = \tilde{x}_0$.

Observemos los siguientes diagramas conmutativos:



El primero implica que $p \circ \tilde{q} \circ \tilde{p} = p$, hecho que se refleja en el segundo. Esto es, la función $\tilde{q} \circ \tilde{p}$ levanta la función cubriente $p : \tilde{X} \rightarrow X$ al espacio \tilde{X} . Observemos que la identidad de \tilde{X} es también un levantamiento de p , pues claramente $p \circ \text{Id} = p$. Dado que ambos levantamientos coinciden en el punto \tilde{x}_0 , deben ser iguales en todo su dominio. En otras palabras, \tilde{p} es un homeomorfismo con inversa \tilde{q} .

De hecho, tenemos una noción más fuerte de equivalencia entre la cubriente \tilde{X} y la cubriente \tilde{Y} : tomemos el mismo levantamiento \tilde{p} de p , pero ahora dejemos que \tilde{q} sea un levantamiento de la cubriente q al espacio \tilde{X} que satisface $\tilde{q}(\tilde{y}_0) = \tilde{x}_1$, donde $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x) \setminus \{\tilde{x}_0\}$. En este caso, $h = \tilde{q} \circ \tilde{p}$ no coincide con la identidad, pues $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Sin embargo, h también es un homeomorfismo: uno puede argumentar como antes y notar que, si \tilde{p}_2 denota el levantamiento de p que toma el valor \tilde{y}_0 en \tilde{x}_1 , entonces $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}^{-1} = \tilde{p}_2 \circ \tilde{q}$ invierte a h . Notemos que estas construcciones toman en cuenta que $y_0 \in q^{-1}(x)$, $x_0, x_1 \in p^{-1}(x)$, y $p \circ (\tilde{q} \circ \tilde{p}) = p \circ h = q$. Esto sugiere que las distintas posibles formas de “proyectar” el espacio X_u en X están completamente determinadas por los auto homeomorfismos que respetan las fibras. Más precisamente, $q : X_u \rightarrow X$ es una función cubriente si y sólo si existe un automorfismo h de X_u tal que $q = p \circ h$: en efecto, si reemplazamos \tilde{Y} por \tilde{X} en el diagrama anterior y \tilde{q} por h , obtenemos que $q = p \circ h$. Cuando q coincide con p , estos automorfismos h nos dan una buena noción de las simetrías del espacio cubriente (X, p) . Observemos que la noción de un automorfismo que preserva una función cubriente se puede definir para cualquier espacio cubriente (\tilde{X}, p) de X .

Definición 1.16. Sea (\tilde{X}, p) un espacio cubriente de X . Decimos que el conjunto

$\{h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \mid p \circ h = p\}$ es el grupo de *transformaciones cubrientes* de (\tilde{X}, p) , y lo denotamos con $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$.

Es inmediato ver que $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ es un grupo. Sus elementos son conocidos en inglés como “deck transformations”. La imagen de un espacio cubriente como un mazo de cartas sobre una mesa es una imagen pintoresca y conceptualmente útil, por lo cual también llamaremos *barajeos* a los elementos de $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$. Sin embargo, la imagen no es completamente correcta: los barajeos deben ser homeomorfismos, y no necesariamente es posible extender una permutación arbitraria de las hojas de p a un automorfismo de \tilde{X} . De hecho, la estructura de $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ está determinada por el espacio cubierto por \tilde{X} .

Teorema 1.3.3. *Sea (X_u, p) la cubriente universal de X . Entonces $\text{Aut}(\tilde{X}, p) \cong \pi_1(X, x)$.*

Demostración. Sea G el grupo de monodromía de X asociado a (X_u, p) . Puesto que el grupo fundamental de X_u es trivial, la representación $\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow S_q$ es inyectiva, y tenemos que G es isomorfo a $\pi_1(X, x)$. Por otro lado, tomemos un $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$. Para un $\tilde{q}_0 \in p^{-1}(q)$, llamemos \tilde{q}_1 al punto $\tilde{q}_0 \cdot [\gamma]$. Por el criterio de levantamiento, y como discutimos previamente, es posible levantar a p a un homeomorfismo $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ de modo que $\tilde{p}(\tilde{q}_0) = \tilde{q}_1$. Al ser un levantamiento de p , se satisface que $p \circ \tilde{p} = p$, por lo que $\tilde{p} \in \text{Aut}(\tilde{X}, p)$. Ahora, notemos que $h = \tilde{p} \in \text{Aut}(\tilde{X}, p)$ se restringe a un elemento del grupo de monodromía G en la fibra $p^{-1}(x)$, de donde obtenemos un isomorfismo $\phi : \text{Aut}(\tilde{X}, p) \rightarrow G$ dado por $h \mapsto h \upharpoonright p^{-1}(q)$: su inversa está dada por llevar σ al único levantamiento de p definido por la acción de $\rho^{-1}(\sigma) \in \pi_1(X, x)$ en el punto \tilde{q}_0 . A saber, $h = \phi^{-1}(\sigma)$ es el único levantamiento de p que satisface $h(\tilde{q}_0) = \sigma(\tilde{q}_0)$. Así, $\rho^{-1} \circ \phi$ es un isomorfismo entre $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ y $\pi_1(X, x)$. \square

Ejemplo 1.4. Supongamos que $X = S^1$. Antes, discutimos intuitivamente por qué $\pi_1(X, 1)$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$. Ahora basta con encontrar la cubriente universal de S^1 y su grupo de transformaciones cubrientes. La cubierta $(\mathbb{R}, p : t \mapsto \exp(2\pi it))$ es simplemente conexa, por lo que debe ser espacio cubriente universal de X . Es claro que para cada entero z la función $e_z : t \mapsto t + z$ es un elemento de $\text{Aut}(\mathbb{R}, p)$. En el sentido opuesto, tenemos que $p^{-1}(0) = \{2\pi im \mid m \in \mathbb{Z}\}$ de modo que $h \in \text{Aut}(\mathbb{R}, p)$ satisface $h(0) = 2\pi in$ para cierto entero n . Así, h y e_n son levantamientos de p que coinciden en 0, y por lo tanto son la misma función. Vemos que $\text{Aut}(\mathbb{R}, p) = \{e_z \mid z \in \mathbb{Z}\} \cong (\mathbb{Z}, +)$, pues es claro que $e_n \circ e_m = e_{n+m}$, y concluimos que $\pi_1(S^1, 1) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

El espacio cubriente universal de X induce el grupo trivial, pues es simplemente conexo. En sentido opuesto, dado un grupo $H \subset \pi_1(X, x)$, es posible encontrar una cubierta (\tilde{X}, p) de X tal que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = H$.

Teorema 1.3.4. *Sea X un espacio que admite una cubriente universal \tilde{X} , $q \in X$ y un subgrupo $H \subset \pi_1(X, x)$. Fijemos un punto $\tilde{q} \in \tilde{X}$ sobre $q \in X$. Entonces existe un espacio cubriente (X_H, p_H) tal que $p_{H*}(\pi_1(X_H, p_H(\tilde{q}))) = H$.*

Demostración. Dado que $\text{Aut}(X_u, p)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x)$, podemos considerar a la imagen homomorfa H' de H bajo este isomorfismo, contenida en $\text{Aut}(X_u, p)$. Recordemos que este isomorfismo depende de la elección de un punto $\tilde{q} \in \tilde{X}$ sobre $q \in X$, que fijamos. Definimos la relación en X_u dada por $x \sim y$ si y sólo si existe una $h \in H'$ tal que $h(x) = y$. Esta relación es de equivalencia puesto que H' es un grupo: es reflexiva, pues I_{X_u} claramente está en H' ; es simétrica, pues h invertible; es transitiva, ya que H' es cerrado bajo la composición. Llamemos X_H al espacio cociente obtenido por esta identificación. Notemos que, como $p \circ h = p$, la cubriente p es constante en las fibras de la proyección natural $\pi : X_u \rightarrow X_H$: en efecto, $a, b \in \pi^{-1}(x)$ son equivalentes bajo \sim , por lo que $p(a) = (p \circ h)(a) = p(b)$. Así, la función $p_H := p \circ \pi^{-1}$ está bien

definida y es continua; más aún, es una función cubriente de X . Observemos que p_H es suprayectiva, pues p lo es; además, X_H es localmente arcoconexo y arcoconexo al ser la imagen continua de un tal espacio. Por último, para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x cubierta parejamente por p . Notemos que dos elementos de una componente conexa V de $p^{-1}(U)$ no pueden ser H -equivalentes: en efecto, la relación \sim sólo identifica puntos que pertenecen a la misma fibra de p , pues la existencia de $h \in \text{Aut}(X_u, p)$ tal que $h(a) = b$ implica que $p(a) = p(h(a)) = p(b)$. Luego, $\pi(V)$ es abierto al tener a V como preimagen bajo π , y $p_H(\pi(V)) = p \circ \pi^{-1}(V) = p(V) = U$. Concluimos que cada punto de X es cubierto parejamente por p_H , y que por lo tanto (X_H, p_H) es un espacio cubriente. Por construcción, H coincide con el grupo inducido por la cubierta p_H sobre q , pues es el estabilizador de su acción. \square

Más aún, la cubriente que corresponde al grupo $H \subset \pi_1(X, x)$ es única, como el siguiente teorema especifica.

Teorema 1.3.5. *Sean X arcoconexo y localmente arcoconexo, (X_1, p_1) , (X_2, p_2) dos espacios cubrientes de X arcoconexos y un punto arbitrario $x \in X$. Entonces existen puntos $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x)$, $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x)$ y un homeomorfismo $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ tal que $p_1 = p_2 \circ \phi$ si y sólo si $p_{1*}(\pi_1(X_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(X_2, \tilde{x}_2))$.*

Demostración. Supongamos que ϕ es un tal homeomorfismo. Un elemento

$$[\gamma] \in p_{1*}(\pi_1(X_1, \tilde{x}_1))$$

satisface $[\gamma] = [p_1 \circ \gamma']$ para algún $\gamma' \in \pi_1(X_1, \tilde{x}_1)$. La identidad $p_1 = p_2 \circ \phi$ implica que $[\gamma] = [p_2 \circ (\phi \gamma')] \in \pi_1(X_2, \tilde{x}_2)$ y que por tanto $\pi_1(X_1, \tilde{x}_1) \subset \pi_1(X_2, \tilde{x}_2)$, mientras que la identidad $p_2 = p_1 \circ \phi^{-1}$ da la otra contención. En sentido opuesto, elijamos primero puntos $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x)$ y $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x)$, y supongamos que $p_{1*}(\pi_1(X_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(X_2, \tilde{x}_2))$. Del lema 1.3.1 deducimos que es posible levantar p_1 a la función $\tilde{p}_1 : X_1 \rightarrow X_2$, de modo que $p_2 \circ \tilde{p}_1 = p_1$ y $\tilde{p}_1(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Viceversa, p_2 admite un levantamiento \tilde{p}_2 que envía \tilde{x}_2 en \tilde{x}_1 y satisface $p_1 \circ \tilde{p}_2 = p_2$. Como antes, tenemos que $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1$ es un levantamiento de la identidad de X_1 que fija al punto x_1 , y por lo tanto coincide con ella. Así, $\phi := \tilde{p}_1$ es el homeomorfismo buscado. \square

Como hemos mencionado antes, diremos que dos espacios cubrientes son *isomorfos* o equivalentes si existe un homeomorfismo ϕ entre las cubiertas que preserve sus respectivas proyecciones. Notemos que esta noción de equivalencia preserva la estructura de espacio cubriente, en el sentido en que ϕ es un homeomorfismo que preserve todas las fibras. Es fácil convencerse de que la noción de isomorfismo es una relación de equivalencia en el conjunto de los espacios cubrientes de X . Así, sumando este último par de resultados con la proposición 1.3.4, tenemos una excelente descripción, si bien un poco abstracta, de los espacios cubrientes de un espacio X . A saber,

Teorema 1.3.6 (Clasificación de los espacios cubrientes). *Sea X arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo. Hay una correspondencia biyectiva entre las clases de conjugación de subgrupos $H \subset \pi_1(X, x)$ y las clases de isomorfismo de cubrientes de X .*

Un bosquejo de la prueba que resume nuestras discusiones previas es como sigue.

Demostración. Para cada grupo $H \subset \pi_1(X, x)$ es posible construir un espacio cubriente (X_H, ϕ) de X con grupo inducido $\phi_*(\pi_1(X_H, \tilde{x})) = H$. La construcción de tal espacio cubriente depende de la elección de un elemento distinguido \tilde{q} en la fibra de q bajo su cubriente universal. Esta

construcción asocia al grupo conjugado $gHg^{-1} \subset \pi_1(X, x)$ al mismo espacio cubriente X_H , pues conjugar H corresponde a cambiar la elección del punto q . Por la discusión anterior, cualquier cubriente (Y, p) con grupo inducido H es equivalente a X_H . Así, la clase de conjugación de H está asociada a la clase de isomorfismo de X_H . En una palabra, la asociación biyectiva está dada por $(X, p) \mapsto p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$, y no depende de los representantes correspondientes. \square

Hasta ahora, la discusión ha tenido un tono un poco más general de lo que en verdad necesitamos. En este trabajo lidiaremos con superficies de Riemann, cuyo espacio subyacente es una superficie conexa. Antes, finalizamos este capítulo con una descripción más precisa de la relación entre $\pi_1(X, x)$ y $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ para un espacio cubriente general de X .

Cuando X y \tilde{X} son superficies arcoconexas y $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es una función cubriente, sabemos que la acción de $\pi_1(X, x)$ en cualquier fibra de p es transitiva. Si además \tilde{X} resulta ser la cubriente universal de X , tenemos que el grupo inducido por \tilde{X} es trivial, y la acción de $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ en $p^{-1}(x)$ también es transitiva. Para ver esto, recordemos el argumento usado en la prueba del teorema 1.3.3: dado $x \in X$ y puntos $\tilde{x}, \tilde{x}' \in p^{-1}(x)$, el criterio de levantamiento implica que la función $p : \tilde{X} \rightarrow X$ se levanta a una función $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ que satisface $\tilde{p}(\tilde{x}) = \tilde{x}'$, pues tanto $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ como $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'))$ coinciden con el subgrupo trivial de $\pi_1(X, x)$, y por lo tanto entre sí. De misma forma podemos construir la función inversa de \tilde{p} . En este caso, la transitividad de $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ nos dice que hay simetría completa entre los elementos de $p^{-1}(x)$.

Es natural preguntarse si tenemos esta misma transitividad de $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ cuando \tilde{X} corresponde a un subgrupo $H \subset \pi_1(X, x)$ no trivial. La clave del argumento previo está en que los grupos $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ y $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'))$ coinciden; sin embargo, como vimos en la proposición 1.3.4, en general sólo podemos esperar que tales grupos son conjugados en $\pi_1(X, x)$. Esto nos lleva a la siguiente noción:

Definición 1.17. Decimos que un espacio cubriente (\tilde{X}, p) de X es *normal* si para cada $x \in X$ y $\tilde{x}, \tilde{x}' \in p^{-1}(x)$ existe un $h \in \text{Aut}(\tilde{X}, p)$ que lleva \tilde{x} en \tilde{x}' . Esto es, si $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ actúa transitivamente en las fibras de p .

En la literatura, este tipo de cubiertas también son conocidas como *regulares* o *de Galois*. El nombre de *normal* es el más sugerente, de acuerdo al siguiente teorema extraído de [14], en donde aparece como la proposición 1.39.

Teorema 1.3.7. *Tomemos un espacio X arcoconexo y localmente arcoconexo, y (\tilde{X}, p) un espacio cubriente de X . Fijemos $x \in X$ y $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, y sea H el grupo inducido por la cubierta \tilde{X} , $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$. Denotemos por $N(H)$ al normalizador¹⁰ de H en $\pi_1(X, x)$. Entonces:*

- *El espacio cubriente (\tilde{X}, p) es normal si y sólo si H es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$.*
- *$\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ es isomorfo al cociente $N(H)/H$.*

Observemos que cuando \tilde{X} es una cubierta normal, el grupo $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ es isomorfo al cociente $\pi_1(X, x)/H$, pues el normalizador de H coincide con $\pi_1(X, x)$. El primer inciso del teorema se deduce de la discusión anterior. En efecto, cuando $H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ es normal en $\pi_1(X, x)$, cambiar de punto base en $p^{-1}(x)$ corresponde a conjugar un grupo que es invariante bajo conjugación, de manera que el criterio de levantamiento nos permite argumentar como antes y concluir que $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ actúa transitivamente en $p^{-1}(x)$. Para el segundo inciso, un boceto de la prueba es como sigue: tomemos un $[\gamma] \in N(H)$ y supongamos que $\tilde{x} \cdot [\gamma] = \tilde{x}'$. Esto es, el levantamiento

¹⁰Esto es, el subgrupo más grande de $\pi_1(X, x)$ en el que H es normal.

$\tilde{\gamma}$ de γ que comienza en \tilde{x} termina en \tilde{x}' . En este caso, vemos que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'))$, pues uno de estos grupos resulta de conjugar por $[\gamma]$ al otro, que denotamos por H , y que es invariante bajo la conjugación por elementos de $N(H)$ por definición. Utilizando el criterio de levantamiento, esta construcción produce un homomorfismo suprayectivo $f : N(H) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}, p)$ cuyo núcleo es H .

Notemos que el teorema 1.3.3 se deduce del teorema anterior. En analogía al teorema fundamental de la teoría de Galois, tenemos una correspondencia entre subgrupos normales de $\pi_1(X, x)$ y cubiertas normales de X . Del criterio de levantamiento vemos que si $H \subseteq F \subseteq \pi_1(X, x)$, los espacios cubrientes (X_F, p_F) y (X_H, p_H) de X satisfacen que X_F es cubierta de X_H , y podemos hallar una proyección intermedia $p : X_F \rightarrow X_H$ que satisface $p_H \circ p = p_F$, siguiendo el procedimiento de identificación utilizado en la prueba del teorema 1.3.4.

Adicionalmente, el grupo $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ juega un papel similar al del grupo de automorfismos de una extensión de campos. Recordemos que en una extensión de campos L/K de Galois, los subgrupos de $\text{Gal}(L/K)$ están en correspondencia con los campos intermedios $K \subseteq L \subseteq L$. Si bien los subgrupos de H producen cubiertas de X_H , los subgrupos de $\pi_1(X, x)$ que contienen a H están en correspondencia con los subgrupos de $N(H)/H$, y producen espacios cubrientes de X que están cubiertos por X_H .

Intuitivamente, los subgrupos de $N(H)/H \cong \text{Aut}(\tilde{X}, p)$ corresponden a las “cubiertas intermedias” entre \tilde{X} y X , con H asociado a \tilde{X} y $N(H)$ a X . La teoría de las superficies de Riemann y las funciones algebraicas hace mucho más concreta esta relación entre extensiones de campos y espacios cubrientes. Sin embargo, nos limitaremos a estudiar las superficies de Riemann desde un lente topológico.

1.4. Notas y referencias

El capítulo anterior es una introducción compacta a la topología de superficies. El contenido está tomado de las referencias [43], [9], [14], [26], [29], y [45]. La explicación y orden elegidos para presentar el contenido ha sido de acuerdo a nuestra preferencia. A continuación resumimos la fuente del material.

Para la sección inicial, las definiciones para superficie y superficie con frontera provienen de la sección 2 de [29]. El enunciado para el teorema 1.1.1 de superficies aparece en [29] como el teorema 6.14. Su prueba descansa en la clasificación de las presentaciones poligonales para las superficies. Sin embargo, un tratamiento más satisfactorio aparece en [43], pues utiliza como base solamente el hecho de que la gráfica completa bipartita $K_{3,3}$ no puede ser encajada en el plano. La breve discusión y definición de orientabilidad está basada en la discusión correspondiente en la sección 5 de [29], y la justificamos utilizando el teorema 1.1.2, tomado de [43], y el teorema 1.1.3., que aparece como la proposición 6.18 de [29] y en más generalidad como el teorema 2.44 de [14]. En la definición 1.6 rescatamos la discusión al inicio de la sección 5 de [29].

Para la sección del grupo fundamental, tomamos la definición de homotopía del capítulo 1 de [14]. El lema 1.2.1 está reescrito a partir del teorema 7.11 de [29], y resumimos la prueba de Lee en un bosquejo. Una parte de la prueba del teorema 1.2.1 se basa en el lema 1.2.1, y el resto es original. Las definiciones 1.11 y 1.12 provienen del capítulo 1 de [14].

Para la sección de espacios cubrientes, hemos tomado la definición de espacio cubriente del capítulo 1 de [9], en donde aparece como la definición 4.11. Hemos reescrito las pruebas de una

forma amigable, tratando de comunicar las ideas concisamente y de manera autocontenida. La proposición 1.3.1 es la proposición 4.16 de [9], pero la prueba escrita aquí es nuestra, y la usamos para introducir la estrategia de prueba que utilizamos en la mayoría de las demostraciones siguientes. La proposición 1.3.2 está tomada de [14], y corresponde a la proposición 1.34; la prueba que hacemos es una reescritura más clara de la de Hatcher. La proposición 1.3.3 aparece en [9] como el teorema 4.14: su prueba es igual a la de [29], que reproducimos aquí con mayor claridad, y está basada en el *teorema del número de Lebesgue*, que aparece en [29] como el lema 7.19. Su prueba sugiere la del teorema 1.3.1, que es nuestra. Su corolario, el teorema de monodromía, está tomado de [29], en donde es llamado el teorema 11.15.

La discusión sobre la acción de $\pi_1(X, x)$ en la fibra de su punto base bajo una función cubriente está basada en la construcción 1.2.6 de [26], y de ella tomamos la definición 1.14. La proposición 1.3.4 es una mezcla de los teoremas 1.38 y la proposición 1.32 de [14]; su prueba está basada en la de Hatcher. El criterio de levantamiento también está tomado de [14], en donde aparece como la proposición 1.33. El teorema 1.3.2 corresponde a la discusión al inicio de la sección 1.3 de [14]; la explicación de su unicidad es nuestra, y se basa fuertemente en el criterio de levantamiento. La noción de equivalencia de cubiertas es natural, y la tomamos del primer capítulo de [26]. El teorema 1.3.4 equivale a la proposición 1.36 de [14], y la prueba es nuestra. Similarmente, Los teoremas 1.3.9 y 1.3.10 están tomados de [14], en donde corresponden a los teoremas 1.37 y 1.38. Las pruebas dadas son reescrituras más profundas de las pruebas de Hatcher. El teorema 1.3.3 es clásico y la prueba que exponemos es nuestra. Es un corolario del teorema 1.3.7 que está tomado de [29], en donde aparece como el teorema 12.7, aunque la versión que enunciamos es la de [14], que corresponde a la proposición 1.39.

Capítulo 2

Superficies de Riemann

A pesar del orden de los capítulos en este trabajo, el estudio de las superficies de Riemann antecede históricamente al estudio abstracto de las variedades topológicas, y muchos de los conceptos tratados en el capítulo previo surgieron primero en el contexto de la teoría de funciones. Más adelante discutiremos motivaciones para la definición de este objeto. Iniciemos recordando algunas nociones elementales de análisis complejo.

2.1. Conceptos básicos

Definición 2.1. Sean z_0 un punto en \mathbb{C} y $U \subset \mathbb{C}$ una vecindad abierta de z_0 . Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en z_0 si el cociente

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

converge a un número complejo cuando $z \rightarrow z_0$. Cuando exista, llamaremos a tal número la *derivada* de f en z_0 y escribiremos $f'(z_0)$ para denotarlo. Si f es holomorfa en cada punto de U , diremos que f es holomorfa en U .

Citaremos sin prueba algunas propiedades que evidencian la rigidez de esta definición. La referencia principal de esta sección es [9]. Las funciones holomorfas no constantes son *abiertas*; es decir, la imagen de conjuntos abiertos es abierta, de modo que, por ejemplo, es imposible encontrar funciones holomorfas de \mathbb{C} en \mathbb{R} más allá de las constantes. Además, las funciones holomorfas son *conformes* en todos los puntos z_0 de su dominio en los que el número $f'(z_0) \neq 0$. Esto quiere decir que preservan el ángulo orientado en el que dos curvas se intersecan. Esta última afirmación se sigue de notar que la derivada de f en un punto puede ser interpretada como una función entre dos planos tangentes reales de dimensión 2, y está dada por el producto de un número complejo no cero, que es una transformación ortogonal entre dichos planos seguida de una homotecia.

Observemos que la definición 2.1 es una definición local, por lo que deberíamos esperar la posibilidad de generalizarla a superficies y obtener propiedades similares a las descritas. Con

esta motivación, definimos el objeto de estudio de este capítulo:

Definición 2.2. Sea X una superficie. Un *atlas complejo* para X es una cubierta de X por cartas coordenadas $A = \{(U_\nu, \phi_\nu)\}$ holomorfamente compatibles: esto es, para cada $\nu \in I$ existe un abierto $V_\nu \subseteq \mathbb{C}$ para el que $\phi_\nu : U_\nu \rightarrow V_\nu$ es un homeomorfismo, y para cualquier par de cartas de X (U, ϕ) y (V, ψ) tales que $U \cap V \neq \emptyset$, la *función de transición* $f_{\phi\psi} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ es holomorfa. Si A es un atlas complejo para X , diremos que (X, A) es una superficie de Riemann.

Esta definición es suficiente para obtener una noción de función holomorfa en una superficie de Riemann, que es como sigue:

Definición 2.3. Sea (X, A) una superficie de Riemann y $f : U \subset X \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Diremos que f es una *función holomorfa* si para cada carta (V, ϕ) de X , la función $f \circ \phi^{-1} : \phi(V \cap U) \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa.

Más generalmente, podemos definir *mapeos* holomorfos de la siguiente manera:¹

Definición 2.4. Sean (X, A) y (Y, B) dos superficies de Riemann, y $f : X \rightarrow Y$ una función. Diremos que f es holomorfa si para cualquiera cartas $\psi : U' \rightarrow V'$, $\phi : U \rightarrow V$, con $U' \subseteq Y$, $U \subseteq f^{-1}(U')$, la *representación por coordenadas* de f ,

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : V \rightarrow V',$$

es una función holomorfa.

La definición implica que una función holomorfa en $U \subset X$ es continua: una representación por coordenadas de f es holomorfa y por lo tanto continua; puesto que las cartas son homeomorfismos, deducimos que f misma es continua. Además, observemos que todas las cartas de X son holomorfas por definición.

Es posible que dos atlas distintos, digamos A y A' , definan la misma superficie de Riemann, en el sentido en que $I : (X, A) \rightarrow (X, A')$ es un mapeo holomorfo con inversa holomorfa. En tal caso, todas las cartas complejas de A son holomorfamente compatibles con todas las cartas de A' , y viceversa. Así, es más conveniente lidiar con un *atlas maximal*:

Definición 2.5. Un atlas maximal Σ para X es un atlas para el que si $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una carta holomorfamente compatible con las cartas de Σ , entonces $(\phi, U) \in \Sigma$. Decimos que Σ es una *estructura compleja* para X .

Si (X, A) es una superficie de Riemann, siempre es posible encontrar un atlas maximal Σ para el que $A \subset \Sigma$, por lo que siempre supondremos que A es maximal. Notemos que, intuitivamente, el tener más cartas no “incrementa la cantidad” de funciones holomorfas en X , pues las cartas de A son compatibles con las de Σ , y tanto los abiertos de A como los de Σ cubren a X^2 . Usar Σ nos da mayor libertad para representar por coordenadas a las funciones definidas en X , y por tanto es una ventaja tanto conceptual como computacional. Habiendo definido Σ , inmediatamente dejaremos de escribir (X, Σ) para decir simplemente que X es una superficie de Riemann, entendiendo que carga con algún atlas maximal.

¹Por lo general se distingue entre *función* y *mapeo* holomorfo porque es conveniente pensar en el espacio de las funciones holomorfas de valores complejos definidas en una superficie X .

²Más correctamente, una estructura compleja es la *clase de equivalencia* de un atlas maximal, donde relacionamos dos atlas si son mutuamente holomorfamente compatibles. Sin embargo, fijar un representante de la estructura es conceptualmente más cómodo.

Proposición 2.1.1. *Sea X una superficie de Riemann. Para un abierto $U \subseteq X$, el conjunto $\mathcal{O}(U) := \{f : U \subseteq X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$ es un anillo conmutativo con las operaciones usuales de suma y producto de funciones.*

Demostración. Para $f, g \in \mathcal{O}(U)$, que $f + g$ y fg son holomorfas se sigue del truco usual de un curso de cálculo, a saber,

$$\frac{f(z) + g(z) - f(z_0) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

para la suma, mientras que para el producto tenemos

$$\begin{aligned} \frac{fg(z) - fg(z_0)}{z - z_0} &= \frac{fg(z) - f(z_0)g(z) + f(z_0)g(z) - fg(z_0)}{z - z_0} \\ &= \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) g(z) + f(z_0) \left(\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right) \end{aligned}$$

y tomamos los límites correspondientes, usando el hecho de que una función holomorfa es continua. Es claro que $\mathcal{O}(U)$ es un subconjunto del anillo A de funciones de U en \mathbb{C} y que la función constante -1 es holomorfa, de forma que si f es holomorfa, $-f \in \mathcal{O}(U)$. Concluimos que $\mathcal{O}(U)$ es un subanillo de A . \square

Además, es sencillo ver que las funciones constantes son holomorfas, y que si g no se anula en U , la función $1/g$ es holomorfa, así como f/g para cualquier $f \in \mathcal{O}(U)$. Observemos que el anillo $\mathcal{O}(U)$ puede tener divisores de su elemento nulo. Por ejemplo, si U tiene dos componentes conexas A, B , las funciones indicadoras 1_A y 1_B satisfacen $1_A 1_B \equiv 0$. Así, a partir de este momento, supondremos siempre que una superficie de Riemann es un espacio conexo, de modo que $\mathcal{O}(U)$ es un dominio entero.

Ejemplo 2.1. Consideremos la compactación por un punto $\bar{\mathbb{C}}$ del plano complejo \mathbb{C} . Este es un espacio topológico obtenido de \mathbb{C} a partir de la adición del símbolo ∞ y los abiertos generados por $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$, donde K es un compacto de \mathbb{C} . En general, en \mathbb{C} dos sucesiones que divergen se alejan entre sí arbitrariamente; el espacio $\bar{\mathbb{C}}$ es, de cierta forma, el espacio más sencillo que hace al punto ∞ indistinguible del resto de puntos en \mathbb{C} . Por ejemplo, dos sucesiones que convergen al mismo punto en \mathbb{C} se acercan arbitrariamente entre sí, pero esto es falso para sucesiones divergentes. Sin embargo, vemos que esto es cierto en $\bar{\mathbb{C}}$. Nos bastan dos cartas para describir a $\bar{\mathbb{C}}$: la función $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ en el abierto $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ y la función f dada por $z \mapsto 1/z$ para $z \in \mathbb{C}$ y $f(\infty) := 0$ definida en el abierto $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. Los abiertos de estas cartas se intersecan en \mathbb{C}^* , donde las funciones de transición coinciden con $1/z$, que es holomorfa en ese dominio. Llamamos a este espacio el *plano complejo extendido*.

Ejemplo 2.2. Tomemos la esfera $S^2 := \{z \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ e identifiquemos el plano $x_3 = 0$ con el plano complejo de la manera natural. La proyección estereográfica desde el punto $N := (0, 0, 1)$ es la función continua ϕ_N que asigna a cada punto x de S^2 el único punto de intersección de la recta l y el plano $x_3 = 0$, donde l pasa por N y x . Escribamos $S := (0, 0, -1)$, y sea ϕ_S la proyección estereográfica desde el punto S . Si σ denota la conjugación compleja, entonces el conjunto $A = \{(S^2 \setminus \{N\}, \phi_N), (S^2 \setminus \{S\}, \sigma \circ \phi_S)\}$ es un atlas complejo para S . La conjugación de ϕ_S garantiza que la transición entre las cartas es holomorfa. El espacio (S^2, A) es conocido como la *esfera de Riemann*.

Es posible encontrar una función holomorfa biyectiva entre la esfera de Riemann y el plano complejo extendido, cuya inversa es también holomorfa. Una función de este tipo entre dos superficies de Riemann es llamada una función *biholomorfa*, o un biholomorfismo. Notemos que si $f : X \rightarrow Y$ es una función biholomorfa entre las superficies de Riemann X y Y , y $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ y $h : Y \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones holomorfas arbitrarias, entonces $f \circ h$ y $g \circ f^{-1}$ son holomorfas en Y y X , respectivamente. Esto es, un biholomorfismo induce un isomorfismo entre los anillos $\mathcal{O}(X)$ y $\mathcal{O}(Y)$ de funciones holomorfas. En este caso, decimos que las superficies de Riemann correspondientes son *isomorfas*. Más generalmente, una función $f : X \rightarrow Y$ es holomorfa en un abierto U exactamente cuando induce un homomorfismo de anillos

$$f^* : \mathcal{O}(f^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{O}(U),$$

dado por el *pull-back* de f a $f^{-1}(V)$. A saber, $f^*(g) = g \circ f$.

Más aún, S^2 y $\bar{\mathbb{C}}$ son a su vez isomorfos a la línea proyectiva compleja $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, que es el espacio de los subespacios vectoriales de dimensión 1 de \mathbb{C}^2 . La estructura compleja de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ se puede definir usando *cortes afines* como sigue: primero, tomemos el espacio $\mathbb{C}^2 := \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ y el conjunto $\{\langle v \rangle \mid v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}$. Dos elementos de $v, u \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ satisfacen $\langle v \rangle = \langle u \rangle$ si y sólo si existe un complejo λ para el cual $v = \lambda u$. Así, definimos una relación de equivalencia \sim en $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ por $u \sim v \iff \langle v \rangle = \langle u \rangle$. $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ es el espacio topológico cociente $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \text{ mód } \sim$. Notemos que un $[v] \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ es tal que $v = (z, w)$, donde necesariamente $z \neq 0$ o $w \neq 0$. En el primer caso, podemos identificar el elemento $[v]$ con $[(z, w, 1)]$, y en el segundo con $[1, w/z]$. Así, la proyección natural en $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ es una cubriente de dos hojas; a saber, los abiertos $U_i := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_i \neq 0\}$ con $i = 1, 2$. Observemos que cada uno de estos abiertos es una copia homeomorfa de \mathbb{C} , de modo que tomar coordenadas homogéneas corresponde a tomar cartas complejas, que resultan ser compatibles, pues sus funciones de transición son cocientes de funciones lineales.

En particular, estos tres espacios son homeomorfos a la esfera S^2 . El hecho de que son también isomorfos como superficies de Riemann es una manifestación de que *todas* las estructuras complejas de S^2 son equivalentes. Esto es un corolario del importante teorema de Riemann-Roch, que discutiremos más adelante.

Una utilidad de tratar con la esfera de Riemann es que nos permite identificar naturalmente a las funciones holomorfas que tienen *polos* con funciones holomorfas cuyo contradominio es $\bar{\mathbb{C}}$. A saber, denotemos por ∞ a un punto abstracto que no pertenece a \mathbb{C} con el que construimos $\bar{\mathbb{C}}$. Dada una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ y un punto $z_0 \in X$ tales que $f(z) \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow z_0$, extendemos la función f a $\bar{f} : X \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, simplemente haciendo $\bar{f}(z_0) = \infty$. Esto nos permite dar un tratamiento más homogéneo de las funciones holomorfas que aparentan tener irregularidades desde el punto de vista de \mathbb{C} .

Definición 2.6. Tomemos una superficie de Riemann X y un abierto $U \subset X$. Diremos que una función holomorfa $f : U \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ es *meromorfa*.

Más aún, el conjunto de tales funciones es también un anillo que denotamos $\mathcal{M}(U)$, y además de ser dominio entero es un *campo*. Esta última afirmación se sigue de que ahora es posible definir $1/f$ para cualquier función f distinta de la constante cero, haciendo la convención usual resumida en la expresión un poco macabra $1/0 = \infty$. Referimos a la proposición 3.13 de [30]

Ejemplo 2.3. (El toro) Tomemos dos números complejos $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$ tales que $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$. Definimos la *retícula*

$$R(\omega_1, \omega_2) := \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

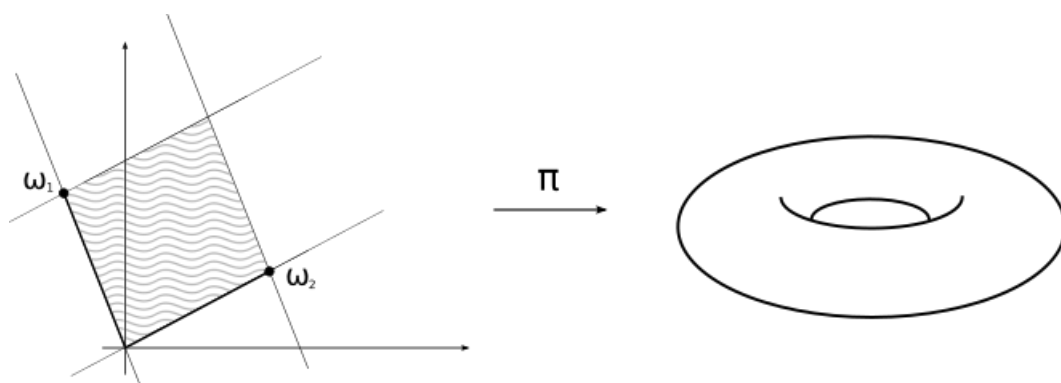


Figura 2.1: La retícula $R(\omega_1, \omega_2)$ permite darle una estructura compleja al toro.

Notemos que $R(\omega_1, \omega_2)$ es un subgrupo discreto de \mathbb{C} que actúa por traslaciones. Consideremos el espacio de sus órbitas: identificamos $z, w \in \mathbb{C}$ si y sólo si $z - w \in R(\omega_1, \omega_2)$ para construir la proyección $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$, en donde damos a X la topología cociente. Observemos la figura 2.1. El interior del cuadrado sombreado tiene un punto por cada órbita, y sus lados opuestos son identificados entre sí. Tenemos pues que X es homeomorfo a un toro. Notemos que la función π es abierta: puesto que X tiene la topología cociente, basta ver que si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto, entonces $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto también. Este conjunto es la unión de todos los desplazamientos $U + z$, $z \in R(\omega_1, \omega_2)$, y por lo tanto es abierto.

Usamos π para darle una estructura compleja a X . Observemos que la acción de R en \mathbb{C} es lo suficientemente “discontinua”³ como para permitir que todo punto x admita una vecindad abierta $V \subset \mathbb{C}$ en la que π es inyectiva. Si V es un abierto de este tipo, tenemos que $\pi|_V : V \rightarrow U$ es un homeomorfismo, donde $U := \pi(V)$ es abierto. Su inversa $\phi : U \rightarrow V$ define una carta (U, ϕ) para X . Puesto que podemos hacer esto alrededor de cada punto de X , el conjunto de estas cartas cubre a X . Para obtener una estructura compleja necesitamos comprobar la compatibilidad de nuestras cartas coordenadas. Supongamos que (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) tienen intersección no vacía, y tomemos la función de transición

$$\psi := \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2).$$

Las funciones ϕ_i que son secciones de la proyección π , por lo que $z \in \phi_1(U_1 \cap U_2)$ satisface $\pi(\phi_1(z)) = \phi_1^{-1}(z) = \pi(z)$, y por lo tanto $\psi(z) - z \in R$. Puesto que ψ es un homeomorfismo, $\psi - \text{Id}$ es una función continua con imagen discreta, así que es constante en cada componente conexa de $\phi_1(U_1 \cap U_2)$. Así, ψ tiene la forma $z + c$ en cada componente, y por tanto es holomorfa. Simétricamente, ψ^{-1} es holomorfa.

Observación. Si bien cada retícula $R(\omega_1, \omega_2)$ nos permite construir una superficie de Riemann cuyo espacio subyacente es el toro $T^2 \cong S^1 \times S^1$, no es cierto en general que cualesquiera dos de estas superficies son equivalentes. El atlas complejo que R induce es una estructura analítica adicional a la información topológica de X . Más adelante veremos exactamente cuándo dos retículas en \mathbb{C} definen la misma estructura compleja para el toro.

Ejemplo 2.4. Regresemos un momento al plano complejo. La función $f : z \mapsto z^2$ es holomorfa. Notemos que la distancia entre las dos raíces cuadradas de un punto $z \neq 0$ es $2|z|$, de modo que cada punto de $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ admite una vecindad abierta U_z , que podemos tomar como

³Se dice que la acción de R es *propriadamente discontinua*. Sin embargo, R actúa por homeomorfismos, por lo que la terminología es un poco desafortunada.

la bola $B(z, 1/2|z|)$, tal que $f^{-1}(U_z)$ es la unión de dos abiertos ajenos. Uno puede ver que f se restringe a un homeomorfismo en cada uno de estos abiertos, de manera que (\mathbb{C}^*, f) define un espacio cubriente de \mathbb{C}^* .

Las distintas ramas de \sqrt{z} corresponden a elegir una de las dos secciones de la función cubriente f . Denotemos por σ_i cada una de estas inversas locales. Por definición, tenemos que $(\sigma_i(z))^2 - z = 0$. Esto es, son funciones *algebraicas* en su dominio de definición más grande. En este dominio es posible afirmar que las secciones son holomorfas por el teorema de la función inversa para superficies de Riemann. Ahora, consideremos la curva algebraica C definida por el conjunto de ceros en $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ del polinomio $z - w^2$. Los puntos de C son de forma (z, w) con $z = w^2$. la función $p_2 : C \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ dada por la proyección en la segunda coordenada claramente satisface $(p_2(z, w))^2 - z = 0$. En esencia, y muy burdamente, hemos construido un espacio en el que la función p se comporta como la raíz cuadrada, y es posible finalmente decir que es holomorfa en *toda* la curva compleja C^4 . Más aún, la proyección p_2 permite dar un contexto en el que el mapeo $\sqrt{z} : C \rightarrow \mathbb{C}$ es una función con un solo valor, a diferencia de la aparente función multivaluada que define en C .

Una manera más pictórica de construir una superficie equivalente a C consiste en analizar las dos ramas de \sqrt{z} definidas en las dos hojas $\tilde{C} \setminus \mathbb{R}_+$, e identificarlas en la franja \mathbb{R}_+ , que incidentalmente define una curva con extremos 0 e ∞ . Usando la proyección estereográfica, podemos interpretar a \tilde{C} como una esfera con un corte en el meridiano que conecta el polo norte y el sur, de forma que al identificar ambas copias en la franja quitada obtenemos un espacio homeomorfo a una esfera. La franja de pegado delimita una frontera en la que podemos imaginar que sucede el cambio entre las dos ramas de \sqrt{z} , a través de la continuación analítica de una en la otra, por medio de una curva que se proyecta a un lazo alrededor del 0 . Históricamente, las superficies de Riemann surgieron a partir de una construcción de este tipo, como los dominios más naturales para las funciones algebraicas.

Ahora bien, podríamos detenernos para observar que es posible hacer lo mismo con la gráfica de la función real valuada x^2 , y de podríamos intentar construir un tipo de superficie para funciones reales diferenciables en general. De acuerdo a la discusión previa, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es nuestra función, su superficie asociada debería ser la curva $(x, f(x))$. Sin embargo, las funciones holomorfas presentan una regularidad que las funciones reales y diferenciables simplemente no poseen. Por ejemplo, en la figura siguiente podemos observar que la función diferenciable $x \mapsto x \sin(x) + 2x$ tiene puntos cuyas fibras difieren en cardinalidad tanto como se quiera. Las funciones holomorfas tienen la propiedad de casi ser funciones cubrientes, como veremos, y por lo tanto la cardinalidad de sus fibras es constante en casi todos los puntos de su imagen.

Ejemplo 2.5. (Curvas complejas no singulares) Un ejemplo de superficie de Riemann de gran importancia es el de las *curvas algebraicas complejas no singulares*. Intuitivamente, una curva compleja C es un conjunto de puntos en \mathbb{C}^n que anulan un cierto conjunto de polinomios $P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, y que tiene dimensión compleja 1. Por simpleza⁵, tomemos un único polinomio P de dos variables complejas z, w , de manera que el conjunto C de sus ceros yace en \mathbb{C}^2 . La evaluación $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ define una función holomorfa⁶, y $C = P^{-1}(0)$. Tomemos un punto $(z_0, w_0) \in C$ en el que las derivadas parciales $\delta_z P(z, w)$ y $\delta_w P(z, w)$ no se anulan. El teorema de la función implícita garantiza la existencia de una función holomorfa ζ y un disco U de \mathbb{C} centrado en z_0 que satisface $\zeta(z_0) = w_0$ y cuya gráfica $(z, \zeta(z))$ coincide con C en $\zeta(U)$.

⁴Esta es sólo una imagen intuitiva. La maquinaria para construir la superficie asociada a una función algebraica requiere de, entre otras cosas, el concepto de *continuación analítica*, cuyo estudio conduce naturalmente a la noción de monodromía.

⁵De hecho, una curva algebraica compleja es *birrationalmente* equivalente a una curva plana, dada por el conjunto de ceros de exactamente un polinomio $f \in \mathbb{C}[z, w]$, por lo que no perdemos generalidad.

⁶Esto es, las funciones $f \circ p_i$ son holomorfas en $\mathbb{C} \times \{0\}$ y $\{0\} \times \mathbb{C}$.

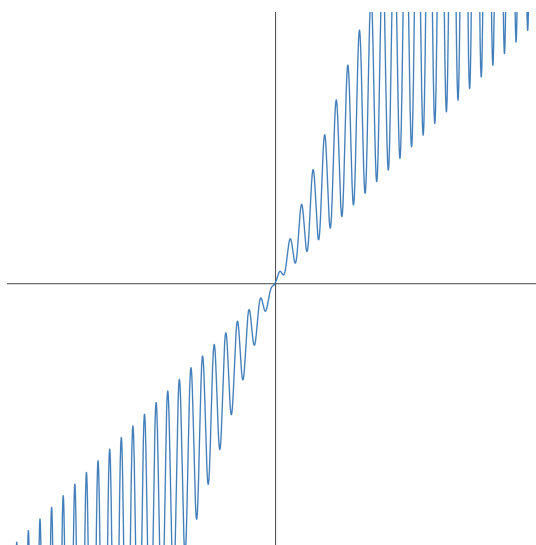


Figura 2.2: La función $x \mapsto x \sin(x) + 2x$ tiene fibras de cada cardinalidad.

Esto nos permite darle una carta compleja a C centrada en (z_0, w_0) . Más aún, las transiciones entre estas cartas resultan ser biholomorfismos. Ahora, decimos que un punto *singular* de C es un punto en que ambas derivadas parciales de P se anulan. A priori, puede ser el caso que un punto singular de C admita una carta compleja. Sin embargo, para una curva sin puntos singulares podemos dar una estructura compleja estándar. Más aún, las curvas en \mathbb{C}^3 dadas por ceros de polinomios homogéneos están en correspondencia con superficies de Riemann compactas: es un resultado profundo de la teoría de superficies de Riemann el que nos dice que cualquier superficie compacta es equivalente a una de estas curvas proyectivas no singulares. Sin embargo, una correspondencia explícita es difícil de producir, como se discute en [20].

Ahora, pensemos por un momento en curvas no singulares dadas por un polinomio

$$P(z, w) = a_0 + a_1 z + a_2 w,$$

en donde los a_i son números complejos no todos cero. Puesto que las derivadas parciales de P no se anulan, uno podría esperar que una pequeña perturbación de sus coeficientes dada por a'_0, a'_1, a'_2 también produzca una curva no singular C' . En este sentido, variar los parámetros de P corresponde a “deformar continuamente” la superficie de Riemann C . Es natural preguntarse si la superficie C resulta equivalente a C' . Intuitivamente, esto pinta la imagen de un subconjunto abierto de \mathbb{C}^3 en el que cada punto produce una superficie de Riemann, y cuya frontera induce curvas algebraicas singulares. La relación de equivalencia dada por biholomorfismos entre las curvas C y C' sugiere tomar un espacio de identificación en \mathbb{C}^3 , cuya topología da una noción de deformación continua para superficies de Riemann. Puesto que la esfera con g asas no es homeomorfa a una con $g' \neq g$ asas, no esperaríamos ver que una superficie de Riemann de género g se pueda deformar en una de género g' sin “pasar” por ciertas superficies singulares. Esta noción ingenua motiva la búsqueda de un espacio de parámetros para superficies de Riemann de un género fijo.

En el ejemplo $z \mapsto z^2$, la exclusión de 0 es artificial, pues el punto 0 también tiene una preimagen bajo esta función. En la superficie C , es natural incluir al punto $(0, 0)$, que también satisface $z - w^2 = 0$. Sin embargo, es imposible encontrar una vecindad de 0 para la cual la

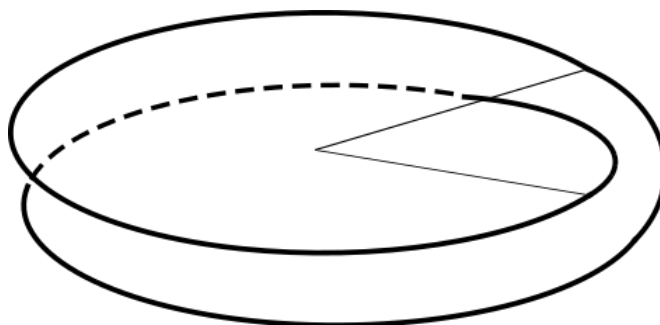


Figura 2.3: La función $f : z \mapsto z^2$ como una doble cubierta del plano perforado en 0. Si $D^* = D \cap \mathbb{C}^*$, las dos componentes conexas de $f^{-1}(D^*)$ son discos perforados en el mismo punto.

proyección p es un homeomorfismo, que corresponde al hecho de que 0 tiene sólo una raíz cuadrada. El punto 0 es entonces un *punto de ramificación* de la función $z \mapsto z^2$, el origen del cual “brotan las ramas” de la raíz cuadrada.

Dejando atrás las motivaciones intuitivas, estudiemos la teoría básica de las superficies de Riemann.

Teorema 2.1.1. Sean X y Y superficies de Riemann y $f, g : X \rightarrow Y$ una funciones holomorfas. Si f y g coinciden en un conjunto $A \subseteq X$ que tiene un punto de acumulación $l \in A$, entonces f y g coinciden en X .

El argumento principal en la prueba de este teorema recae en utilizar su versión usual de análisis complejo, y no nos detendremos en ella. El teorema resulta muy útil al definir y estudiar la estructura de *gavilla* de las funciones holomorfas definidas en un conjunto abierto de X , y tiene el nombre especial de *Teorema de la Identidad*. Puede ser usado, por ejemplo, para concluir que todas las identidades trigonométricas usuales se satisfacen para argumentos complejos, pues son válidas en $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, que claramente contiene un punto de acumulación. Una consecuencia inmediata es que las funciones holomorfas no constantes necesariamente tienen fibras discretas. Otro uso importante surge en la prueba del siguiente teorema, particularmente útil:

Teorema 2.1.2. [Comportamiento local de las funciones holomorfas]

Sean X y Y superficies de Riemann y $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante. Entonces para cualquier $z_0 \in X$ existen cartas $\phi : U \rightarrow V$, $\eta : U' \rightarrow V'$ y un entero $k \geq 1$ tales que $(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = z^k$ para $z \in U$.

Demostración. Tomemos cartas (U, μ) , (V, η) de X y Y para las que $\mu(z_0) = 0 = \eta(f(z_0))$. La representación por coordenadas de f , $r = \eta \circ f \circ \mu^{-1}$, es entonces una función holomorfa que se anula en 0. Observemos que r no es la constante 0 por el teorema de la identidad y porque f es no constante. Al ser holomorfa, f coincide en una vecindad del 0 (que podemos tomar como $\mu(U)$) con una serie de potencias $\sum_n a_n z^n$ cuyo término constante es 0. Dicho de otra forma, existe un entero positivo k y una función holomorfa $g : \mu(U) \rightarrow \eta(V)$ que satisfacen $r(z) = z^k g(z)$ y $g(z) \neq 0$ para z en $\mu(U)$. Ahora, puesto que g no se anula en 0, hay un abierto $V_1 \subseteq g(\mu(U))$ completamente contenido en una de las franjas

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \in \left[\frac{2\pi l}{k}, \frac{2\pi(l+1)}{k} \right] \right\}$$

salvo una rotación del plano, que corresponde a elegir una función $\arg : \mathbb{C} \rightarrow (0, 2\pi)$. Por lo tanto, existe una función holomorfa h tal que $h^k = g$ en una vecindad $U_1 \subset g^{-1}(V_1)$ de 0. Así, el mapeo $m : z \mapsto zh$ es holomorfo e invertible en el abierto U_1 . Sea $U := \mu^{-1}(U_1)$ y definamos la carta (U, ϕ) como $\phi = m \circ \mu$. La representación por coordenadas de f dada por $F = \eta \circ f \circ \phi^{-1}$ es la representación buscada, pues

$$F(m(z)) = \eta \circ f \circ \mu^{-1} \circ m^{-1}(m(z)) = z^k g(z) = (zh(z))^k = (m(z))^k.$$

□

Llamaremos *índice de ramificación* de f en z_0 al número k asociado con una tal representación f en una vecindad de z_0 , y lo denotaremos por $\nu(f, z_0)$. Vemos que en la imagen de dicha vecindad los puntos distintos de $f(z_0)$ tienen k preimágenes, exactamente cómo esperaríamos al analizar el comportamiento de la función modelo $z \mapsto z^k$. Tenemos algunos corolarios útiles.

Corolario 2.1.2.1. *Una función holomorfa $f : X \rightarrow Y$ no constante es una función abierta.*

Demostración. Puesto que las cartas son homeomorfismos, basta ver que las representaciones locales de f son abiertas, que tienen la forma $\phi_k : z \mapsto z^k$. Estas funciones de \mathbb{C} en \mathbb{C} son holomorfas y por lo tanto abiertas. Más precisamente, si U es un abierto en \mathbb{C} , cada punto distinto de cero en $f(U)$ admite una vecindad en la que ϕ_k tiene una inversa continua. Si V es un disco de radio k alrededor del 0, la función $h : z \mapsto z^n/k^n$ preserva a V , de modo que $\phi = k^n h$ envía vecindades abiertas del 0 en abiertos de \mathbb{C} . Concluimos que ϕ es abierta. □

Como consecuencia, si X es compacta, y $f : X \rightarrow Y$ es holomorfa y no constante, tenemos que $f(X) = Y$, pues $f(X)$ es cerrada y abierta, y Y es conexa.

Corolario 2.1.2.2 (Función inversa). *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa, y $z_0 \in X$ un punto para el cual $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existe una vecindad U de z_0 en la que f es un biholomorfismo sobre $f(U)$.*

Demostración. Si la derivada de f es distinta de 0 para alguna representación por coordenadas suya, la regla de la cadena implica que es no cero para cualquier otra representación. Esto es, si representamos a f como una z^k debemos tener que $k = 1$, pues $f'(z_0) = 0$ en cualquier otro caso. Así, $r(z) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = z$ para ciertas cartas $(U, \psi), (V, \phi)$ de X y Y , respectivamente, en donde podemos suponer que $V = f(U)$. Así, $r(z)$ tiene inversa holomorfa en $\psi(U)$, y por lo tanto también f . A saber, $f^{-1} = \phi^{-1} \circ r^{-1} \circ \psi$. □

Corolario 2.1.2.3. *Si X es una superficie de Riemann compacta y $f : X \rightarrow Y$ es una función holomorfa no constante, entonces Y es compacta y f es suprayectiva.*

Demostración. Vemos que $f(X)$ es abierto en Y , pues f es abierta. Además, $f(X)$ es compacto y por lo tanto cerrado, pues Y es Hausdorff. La conexidad de Y implica que $f(X) = Y$. Luego, Y es compacta. □

En particular, si X es una superficie de Riemann compacta vemos que las funciones holomorfas $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ son constantes, pues \mathbb{C} no es compacto. Este hecho evidencia la importancia de considerar funciones meromorfas definidas en X , que están en correspondencia con las funciones holomorfas con polos. En general, el estudio de las superficies de Riemann es el estudio del campo de las funciones meromorfas definidas en ellas. En la siguiente sección estudiaremos un

poco más a fondo el concepto de ramificación que se vislumbró al estudiar el comportamiento local de las funciones holomorfas. El fenómeno de ramificación nos permitirá interpretar y construir a las superficies de Riemann como espacios que son casi cubiertas de la esfera. Notemos que, por un argumento similar al de la prueba del teorema de la función inversa, una función holomorfa no constante $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ tiene índice de ramificación 1 en casi todos los puntos de su dominio: en efecto, el teorema de la identidad implica que la derivada de f es distinta de cero salvo quizás en un subconjunto discreto $A \subset X$, donde yacen los ceros y los polos de f . Como veremos, esto hace de (X, f) un espacio cubriente de $\bar{\mathbb{C}} \setminus f(A)$, lo que nos permitirá utilizar la maquinaria desarrollada en el capítulo anterior.

2.2. Ramificación

En esta sección discutiremos los puntos singulares de las funciones holomorfas, que entendemos como cubrientes *ramificadas*.

Definición 2.7. Tomemos superficies de Riemann X y Y y sean $f : X \rightarrow Y$ holomorfa y z_0 un punto en X . Diremos que x es un *punto de ramificación* si el índice de ramificación de f en z_0 es $k > 1$. Equivalentemente, z_0 es un punto de ramificación si para cualquier vecindad abierta V de z_0 , la función $f|_V$ no es inyectiva.

La equivalencia se sigue de observar que f es una función k a 1 en una vecindad de z_0 . La función f es *no ramificada* si no tiene puntos de ramificación. En tal caso, vemos que f es un homeomorfismo local: cada punto x de X admite una vecindad V_x en el que la función f se restringe a un homeomorfismo, y de hecho a un bihomeomorfismo, sobre su imagen.

Para los siguientes teoremas supondremos que X es una superficie de Riemann compacta. En tal caso, una función holomorfa $f : X \rightarrow Y$ no constante es una función *propia*: la preimagen $f^{-1}(C)$ de un subconjunto compacto de Y es compacta. Esto se sigue de que C es cerrado al ser un compacto de un espacio Hausdorff y de que el conjunto $f^{-1}(C)$ es cerrado al ser f continua, y por tanto $f^{-1}(C)$ es compacto al ser X compacta. Llamemos A al conjunto de puntos de ramificación de f ; dado que f es no constante, A es un conjunto discreto de X y por lo tanto finito y cerrado. Llamaremos a los puntos del conjunto $B := f(A)$ los *valores críticos* de f , y a los puntos en $Y \setminus B$ los *valores regulares*. Notemos que, en una representación por coordenadas de f , los valores críticos son los puntos $f(z)$ para los z que satisfacen $f'(z) = 0$. Observemos que los espacios $X' = X \setminus f^{-1}(B) \subset X \setminus A$ y $Y' = Y \setminus B$ son subconjuntos abiertos de X y Y , respectivamente, y por lo tanto son también superficies de Riemann; además, la restricción de f a X' es holomorfa. Tenemos entonces lo siguiente:

Teorema 2.2.1. Sean X y Y superficies de Riemann y $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa suprayectiva y no constante. Denotemos por B el conjunto de valores críticos de f , y escribamos $Y' := Y \setminus B$, $X' := X \setminus f^{-1}(B)$. Entonces existe un entero n para el cual (X', f) es un espacio cubriente de Y' de $n \geq 1$ hojas.

Demostración. El índice de ramificación de f en cada punto de X' es 1, pues $X' \subset X \setminus A$. Esto hace de f un homeomorfismo local, que junto a la suprayectividad de f garantiza la existencia de una vecindad cubierta parejamente V_x para cada $x \in Y'$. Observemos que $f^{-1}(B)$ es un conjunto discreto, pues es la unión finita de las fibras $f^{-1}(a)$, $a \in f(A)$, que también son finitas. Esto implica que X' es denso en X y por lo tanto conexo, pues cualquier función continua $s : X' \rightarrow \{0, 1\}$ se extiende únicamente a una función continua $\tilde{s} : X \rightarrow \{0, 1\}$, que debe ser constante. Así, la función localmente constante $x \mapsto |f^{-1}(x)|$ es constante en Y' , como hemos argumentado antes, y el valor único que toma es el número de hojas de f . \square

El siguiente teorema nos da una manera de invertir este proceso para construir superficies de Riemann.

Teorema 2.2.2. *Sea X una superficie de Riemann y (Y, p) un espacio cubriente de X . Entonces existe una única estructura compleja en Y para la cual p es holomorfa.*

Demostración. Sea Σ la estructura compleja de X . Para cualquier $y \in Y$, el punto $p(y)$ tiene una vecindad cubierta parejamente por p . Sea $U_y \subset X$ tal vecindad. Además, puesto que la restricción de un homeomorfismo es un homeomorfismo sobre su imagen, podemos suponer que U_y es también el dominio de definición de una carta de X , que denotaremos (U_y, ϕ_y) . Llamemos V_y a la componente conexa del abierto $p^{-1}(U_y)$ que contiene al punto y . Observemos que los conjuntos V_y así contruidos cubren al espacio Y , y que la función $p^*\phi = \phi_y \circ p : V_y \rightarrow \phi(U_y)$ es un homeomorfismo. Más aún, si $y \in V_y \cap V_w$ es la sección de p que satisface $\sigma_y(p(y)) = y$, entonces la función de transición

$$h = \phi_w \circ p \circ \sigma_y \circ \phi_y^{-1} : \phi_y(U_y \cap U_w) \rightarrow \phi_w(U_y \cap U_w)$$

satisface $h = \phi_w \circ \phi_y^{-1}$, y por lo tanto es holomorfa. Así, concluimos que el conjunto $p^*\Sigma := \{(V_y, \phi_y) \mid y \in Y\}$ es un atlas para Y . Como mencionamos en el capítulo previo, Y es Hausdorff y posee una base numerable⁷. Ahora, supongamos que (Y, A) es una otra estructura para Y para la que p es holomorfa. La identidad de Y resulta un biholomorfismo $\text{Id} : (Y, A) \rightarrow (Y, p^*\Sigma)$, pues $\text{Id}_X = p \circ \text{Id}_Y \circ p^{-1}$ es holomorfa, de forma que su composición con p y precomposición con p^{-1} es también holomorfa, pero tal función es Id_Y . \square

La construcción anterior sugiere una forma de relajar la noción cubierta. Usaremos la siguiente definición de [9].

Definición 2.8. Sean X_1 y X_2 espacios topológicos. Diremos que una función continua $f : X_1 \rightarrow X_2$ es una *cubriente ramificada* de n hojas si existen subconjuntos finitos $A \subset X_1$, $B := f(A) \subset X_2$ y un entero n tales que la función $f : X_1 \setminus f^{-1}(B) \rightarrow X_2 \setminus B$ es una cubriente de n hojas.

Observemos que estamos excluyendo al conjunto $f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A))$, cuando en realidad el conjunto en donde encontramos irregularidades es A . El problema es que, aunque es posible que un valor crítico l tenga una preimagen con índice de ramificación 1 (y por lo tanto es posible invertir localmente f alrededor de l), la fibra $f^{-1}(l)$ tendrá menos de n puntos, y será imposible hallar una vecindad de l cubierta parejamente. Sin embargo, la uniformidad de los valores regulares se extiende a los valores críticos cuando uno considera la noción de *multiplicidad*:

Teorema 2.2.3. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante y suprayectiva⁸. Entonces existe un entero $m \geq 1$ tal que, Para todo $c \in Y$,*

$$m = \sum_{x \in f^{-1}(c)} v(f, x)$$

Demostración. Llamemos B al conjunto de valores críticos de f . De la discusión previa sabemos que $f : X' \rightarrow Y'$ es una función cubriente de n hojas. Ahora, tomemos $b \in B$ y sea $f^{-1}(b) =$

⁷En el capítulo previo hay un bosquejo de la prueba de esta última afirmación. Para superficies de Riemann no compactas, el teorema es mucho más complicado, y es un resultado de Radó. Ver la sección 23 de [9].

⁸Puesto que una función holomorfa no constante es abierta y un subconjunto abierto de una variedad es también una variedad, no perderemos generalidad si suponemos siempre que la función $f : X \rightarrow Y$ es suprayectiva.

$\{x_1, \dots, x_s\}$. Escribamos $k_i := \nu(f, x_i)$. Existen vecindades V_i de cada x_i en donde f toma la representación $z \mapsto z^{k_i}$. Sea $U := f(V_1 \cup \dots \cup V_s)$; vemos que un punto $c \in Y' \cap U$ es un valor regular y tiene k_i preimágenes en cada V_i , de modo que $|f^{-1}(c)| = k_1 + \dots + k_s = n$. \square

El número m es llamado la multiplicidad con la que f lleva los puntos de X en Y . Un corolario sencillo de este teorema es que si X es compacta, cualquier elemento no constante de $\mathcal{M}(X)$ tiene el mismo número de polos y ceros, contados con multiplicidad. Esta observación será importante más adelante cuando lidemos con el concepto de los *divisores*.

La discusión anterior sugiere que, si X es una superficie de Riemann compacta, y si existe una función meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ no ramificada, X toma la forma familiar de una cubriente finita de la esfera, que estudiamos en la sección previa y que podríamos describir combinatoriamente. Sin embargo, observemos que ni siquiera para el ejemplo sencillo de la función $z \mapsto z^2$ obtenemos esta estructura, pues ∞ y 0 son valores críticos. No obstante, como hemos ya enunciado antes, podemos apartar a los puntos $f^{-1}(B)$ y concluir que (X', f) es un espacio cubriente de una esfera *perforada*; esto es, una esfera de la que hemos quitado una cantidad finita de puntos, los valores críticos de f . De este modo, podemos intentar describir a X únicamente a partir de su topología como espacio cubriente. Para ello, necesitamos la garantía de que no se genera una ambigüedad cuando excluimos el conjunto $f^{-1}(B)$; esto es, debemos ser capaces de recuperar toda la estructura de X a partir de una cubriente (X', p) de la esfera perforada. Los siguientes teoremas nos dan esta garantía:

Teorema 2.2.4. (Compactación) Sean X una superficie de Riemann, $A \subset X$ un subconjunto cerrado y discreto y $X' := X \setminus A$. Sea Y' una superficie de Riemann y $p' : Y' \rightarrow X'$ una función holomorfa no ramificada y propia. Entonces p' se extiende a una cubriente ramificada de X : existe una superficie de Riemann Y , una función holomorfa propia $p : Y \rightarrow X$ y una función biholomorfa $\phi : Y \setminus p^{-1}(A) \rightarrow Y'$ que preserva las fibras. Esto es, $p' \circ \phi = p'$ y $p \circ \phi^{-1} = p$.

Teorema 2.2.5. Sean X, Y, Z superficies de Riemann, $p : Y \rightarrow X$, $h : Z \rightarrow X$ funciones cubrientes holomorfas y propias. Sea $A \subset X$ cerrado y discreto, y $Y' = p^{-1}(X')$, $Z' = h^{-1}(X')$. Sea $\phi' : Y' \rightarrow Z'$ es un biholomorfismo que preserva las fibras de p y h . Entonces existe un biholomorfismo $\phi : Y \rightarrow Z$ que extiende a ϕ' y que preserva fibras. En particular, los barajeos de $\text{Aut}(Y', p)$ se extienden a barajeos de $\text{Aut}(Y, p)$.

La pruebas de estos teoremas dependen de una clasificación de las cubrientes del disco perforado. Referimos a [9], en donde aparecen como los teoremas 8.4 y 8.5, respectivamente.

Este par de teoremas son clave: tomemos una superficie de Riemann compacta X y supongamos que $Y = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función meromorfa no constante. Como hemos discutido, f tiene un número finito de valores críticos, cuyo conjunto denotamos por B . El conjunto B es discreto y cerrado, y si $X' = X \setminus f^{-1}(B)$ y $Y' := Y \setminus B$, la función $f : X' \rightarrow Y'$ es holomorfa, y es una cubriente con un número finito de hojas, digamos n . El espacio Y' es una esfera perforada en $k = |B|$ puntos. Más aún, la superficie que completa a X' es evidentemente X , de acuerdo a los teoremas previos. De acuerdo a la teoría de la sección anterior, podemos construir una cubriente (\tilde{X}, \tilde{f}) de n hojas para Y con el mismo grupo de monodromía que el espacio cubriente (X', f) , de modo que X' y \tilde{X} sean homeomorfas y de hecho isomorfas como cubrientes. A saber, utilizamos el grupo inducido $f_*(\pi_1(X', \tilde{x})) \subset \pi_1(X', x)$ para construir a \tilde{X} a partir de la cubriente universal de X' ⁹. Por último, dotamos a \tilde{X} de una estructura compleja utilizando a \tilde{f} . Así, tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

⁹Más tarde haremos esta construcción con cuidado y estudiaremos más a la esfera perforada.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & \xrightarrow{h} & X' \\
 \tilde{f} \downarrow & & \downarrow f \\
 \mathbb{P}^1\mathbb{C}^* & \xrightarrow{Id} & \mathbb{P}^1\mathbb{C}^*
 \end{array}$$

Puesto que es no ramificada, podemos cancelar localmente a f de la expresión $\tilde{f} = f \circ h$ y concluir que h debe ser una función holomorfa. El mismo argumento muestra que h^{-1} es holomorfa, de modo que h es un biholomorfismo. Por los teoremas anteriores, \tilde{X} debe ser entonces biholomorfa a la compactación de X' , que coincide con X por construcción. Así, a partir de una función meromorfa f y la selección de k puntos en la esfera $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, hemos logrado reconstruir a X como un espacio cubriente, que podremos describir únicamente utilizando su grupo de monodromía.

La casual elección de los k puntos de perforación de la esfera es sutil pero muy importante: si bien uno puede convencerse intuitivamente que dos esferas perforadas en k puntos son homeomorfas¹⁰, prácticamente nunca es el caso que son biholomorfas. Para ver esto, recordemos que los automorfismos de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ son las funciones dadas por cocientes de transformaciones lineales

$$f : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Estas funciones también se conocen como transformaciones de Möbius, y actúan de manera transitiva y libre en ternas ordenadas de puntos, de manera que quedan determinadas completamente por su imagen en tres puntos distintos. Así, si $X_1 = \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$, $X_2 = \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{y_1, \dots, y_k\}$ y $k > 3$, existe una única función biholomorfa f para la que $f(x_i) = y_i$, $1 \leq i \leq 3$. Si es el caso que f envía un x_i fuera del conjunto $\{y_3, \dots, y_k\}$, entonces es imposible que X_1 y X_2 sean biholomorfas. Notemos que si $k \leq 3$, podemos reemplazar la función identidad en el diagrama conmutativo anterior por una transformación de Möbius y concluir de igual forma que la función h debe ser un biholomorfismo.

De este modo observamos que la esfera perforada en 3 puntos es un caso rígido y especial, y que la variación continua de los puntos de perforación controla, en un sentido burdo, las estructuras complejas que podríamos asignar a X . Estas observaciones serán más claras un poco más adelante, cuando estudiemos el espacio de módulos de Riemann.

En una palabra, la existencia de una función meromorfa f no constante en una superficie de Riemann compacta nos permite caracterizarla como una cubierta de la esfera perforada en un conjunto finito. Así, es importante que determinemos cuándo es posible hacer esto. Para ello, y por completitud, discutiremos brevemente el teorema de Riemann-Roch.

¹⁰Por ejemplo, escalamos para obtener perforaciones dentro de una vecindad $U \subset V$, con U y V homeomorfas al disco, y trabajamos en el plano, pues podemos suponer que una de las perforaciones es el punto al infinito. Utilizando funciones flan, definimos un flujo por homeomorfismos que transporta ambos conjuntos de perforaciones a las mismas posiciones en el círculo unitario, regresamos la vecindad a la esfera y pegamos el homeomorfismo resultante a la identidad de $S^2 \setminus V$ para producir el homeomorfismo buscado.

2.3. El Teorema de Riemann-Roch

Sea X una superficie de Riemann compacta. Seguimos las definiciones usadas en el capítulo 2, sección 16 del libro de Forster [9]. También referimos a la sección 3.2 de [39].

Definición 2.9. Un *divisor* en X es una función $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que para cada compacto $K \subset X$, la restricción de D a K se anula salvo en un conjunto finito. Denotamos por $\text{Div}(X)$ al conjunto de todos los divisores en X . $\text{Div}(X)$ es un grupo bajo la suma puntual de funciones. Definimos un orden parcial natural para $\text{Div}(X)$: para los divisores D, D' en X , diremos que $D \leq D'$ si $D(x) \leq D'(x)$ se satisface para todo $x \in X$.

Cuando X es compacta, podemos identificar $\text{Div}(X)$ con el grupo abeliano libre generado por X , pues todo divisor D se anula salvo en un conjunto finito de X . Ahora, tomemos un abierto $U \subseteq X$ para el que hay una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(U)$. Esto es posible, por ejemplo, si tomamos por f alguna carta de X .

Definición 2.10. Para $a \in U$, definimos el *orden* de f en a como

$$\text{ord}_a(f) := \begin{cases} 0, & f \text{ es holomorfa y no se anula en } a, \\ k, & f \text{ tiene un cero de orden } k \text{ en } a, \\ -k, & f \text{ tiene un polo de orden } k \text{ en } a, \\ \infty, & f \text{ se anula en una vecindad de } a. \end{cases}$$

Notemos que para cada $f \in \mathcal{M}(X)$ no idénticamente cero, la función $x \mapsto \text{ord}_x(f)$ define un divisor en X , pues el teorema de la identidad asegura que $\text{ord}_a(f) \neq \infty$ para cada $a \in X$. Llamamos a este divisor el divisor de f , y lo denotamos por (f) . Vemos que la función f es holomorfa exactamente cuando $(f) \geq 0$.

Definición 2.11. Diremos que un $D \in \text{Div}(X)$ es un divisor *principal* si hay una $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ para la que $D = (f)$. Además, diremos que dos divisores D, D' en X son *linealmente equivalentes* si su diferencia es un divisor principal.

Las definiciones previas aplican en general. Supongamos ahora que X es compacta, y escribimos

$$D = \sum_x D(x) \cdot x, \quad (f) = \sum_x \text{ord}_x(f) \cdot x,$$

como elementos del grupo libre abeliano generado por X . Elegir esta notación nos sugiere definir una función como sigue.

Definición 2.12. Diremos que el *grado* de un divisor D en X es el número

$$\deg D = \sum_x D(x).$$

El grado define un homomorfismo $\deg : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$. En el caso de una función meromorfa, tenemos que $\deg(f) = \sum_x \text{ord}_x(f) = 0$, como el teorema 2.1.3 nos indica. Es fácil convencerse de que el conjunto de los divisores principales es un grupo, y que está contenido en el núcleo de \deg . Así, dos divisores linealmente equivalentes necesariamente tienen el mismo grado. En la

literatura, el cociente del grupo de divisores de grado 0 por el subgrupo de divisores principales es conocido¹¹ como el *grupo de Picard* de X , denotado por $\text{Pic}(X)$. Es importante observar que no necesariamente se tiene que un divisor de grado 0 es principal.

Definición 2.13. Tomemos un $D \in \text{Div}(X)$. Definimos el espacio $L(D)$ por

$$L(D) := \{f \in \mathcal{M}(X) \mid (f) \geq -D\}.$$

Fijemos un divisor D y escribamos

$$D = \sum_i^n n_i \cdot x_i,$$

en donde las $n_i \in \mathbb{Z}$ y D tiene polos o ceros en los puntos $x_i \in X$, $1 \leq i \leq n$. Vemos que los elementos de $L(D)$ son funciones meromorfas que admiten polos en los x_i de multiplicidad a lo más n_i para $n_i > 0$, y ceros en los x_j de multiplicidad al menos n_j para los $n_j < 0$, respectivamente. El espacio $L(D)$ es cerrado bajo la suma puntual de funciones, pues si f y g tienen un cero en a de multiplicidad i y j , respectivamente, $f + g$ también se anula en a con multiplicidad al menos $\min\{i, j\}$. Además, es claro que $L(D)$ está cerrado bajo el producto por escalares complejos, y claramente contiene a la función idénticamente cero¹². En otras palabras, $L(D)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(X)$. Escribamos $l(D)$ para la dimensión de $L(D)$ sobre \mathbb{C} . El siguiente teorema es conocido como la *desigualdad de Riemann*, y es suficiente para nuestros propósitos.

Teorema 2.3.1. (Riemann). *Sea X una superficie de Riemann compacta y de género g . Tomemos un divisor D en X . Entonces*

$$l(D) \geq 1 - g + \deg D.$$

El teorema de Riemann y Roch es más general y preciso, pero requiere la noción de divisor canónico. Lo enunciamos:

Teorema 2.3.2. (Riemann, Roch). *Para X una superficie de Riemann compacta, de género g , un divisor $D \in \text{Div}(X)$ y K un divisor canónico en X ,*

$$l(D) - l(K - D) = 1 - g + \deg D.$$

Un divisor canónico es el divisor asociado a una *forma* meromorfa en X . Puesto que no es necesario para nuestra discusión, no ahondaremos en esta noción. El libro [9] incluye una prueba estándar de este teorema, pero la omitimos por su carácter técnico, y porque depende de nociones de cohomología que decidimos no desarrollar en este trabajo. Sólo necesitamos de la siguiente proposición.

Corolario 2.3.2.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta y de género g , y a un punto en X . Existe una función meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ no constante que tiene un polo en a de orden a lo más $g + 1$, y que es holomorfa en $X \setminus \{a\}$.*

¹¹Es posible hablar del grupo de Picard en ámbitos mucho más generales. Aquí hacemos referencia a la definición de Forster en la sección 21 de [9].

¹²Esto esclarece por qué definimos su orden en cualquier punto como ∞ .

Demostración. Basta tomar al divisor $D = (g + 1) \cdot a$ y utilizar la desigualdad de Riemann. Vemos que $\deg D = g + 1$, y $l(D) \geq 1 - g + \deg D = 1 - g + (g + 1) = 2$. La dimensión de $L(D)$ es al menos 2, de manera que X admite funciones meromorfas no constantes. Una función en $L(D)$ satisface que tiene exactamente un polo en el punto a cuyo orden es a lo más $g + 1$. \square

En particular, tenemos que para cada superficie de Riemann compacta y de género g , es posible encontrar una función $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ para la que X es una cubierta ramificada de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ de a lo más $g + 1$ hojas. Equivalentemente, esto nos permite ver a X como la compactación de una cubriente de la esfera $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ perforada en el conjunto de valores críticos de f .

Finalizamos esta sección con una aplicación útil.

Corolario 2.3.2.2. *Todas las estructuras complejas en S^2 son equivalentes entre sí.*

Esto se sigue del corolario 2.3.2.1: S^2 tiene género 0, y una cubriente holomorfa de a lo más una hoja tiene exactamente una hoja, por lo que es un homeomorfismo.

2.4. La esfera perforada y el Teorema de Existencia de Riemann

Como vimos, el teorema de Riemann-Roch nos indica con qué libertad es posible elegir un conjunto A de k puntos en la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ para obtener una función meromorfa no constante cuyos posibles valores críticos yacen en A . Para la siguiente discusión, fijemos un conjunto $R := \{y_1, \dots, y_k\}$ de k puntos en la esfera S^2 , y escribamos $\mathbb{P}^1\mathbb{C}^* := \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus R$. La siguiente discusión es puramente topológica, pero nos permitirá enunciar una instancia del *Teorema de Existencia de Riemann*, que es un resultado analítico.

Fijemos el orden con el que enumeramos a los puntos de R . Para un punto $x \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$, construiremos un conjunto explícito de generadores de $\pi_1(\mathbb{P}^1\mathbb{C}^*, x)$ como sigue. Elijamos k curvas l_i con extremos en x y en cada uno de los x_i , de modo que el orden cíclico alrededor de x que inducen respeta el orden de R , como se muestra en la figura. Recordemos que $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ es una superficie orientada, por lo que sí tenemos una noción concreta de orden cíclico (sentido antihorario, por ejemplo) alrededor de cualquier punto. Ahora, convertimos las curvas l_i en lazos γ_i "infilando" los puntos x_i de forma que las l_i den un pequeño bucle alrededor de cada extremo x_i , para después regresar a x . Esta explicación es más clara en la figura siguiente.

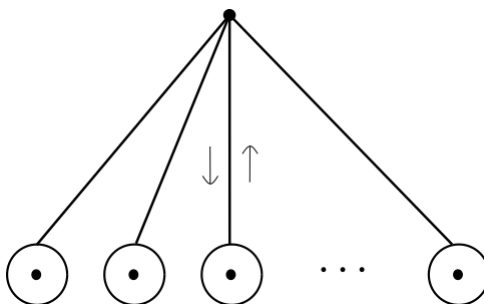


Figura 2.4: Los lazos γ_i recorren la trayectoria l_i hasta un punto cercano a x_i , dan una vuelta alrededor de la perforación x_i , y vuelven por su camino.

Es importante notar que la elección de un orden para R puede cambiar considerablemente la estructura de la estrella base, como se observa en la figura 2.5. Aunque para una estrella plana

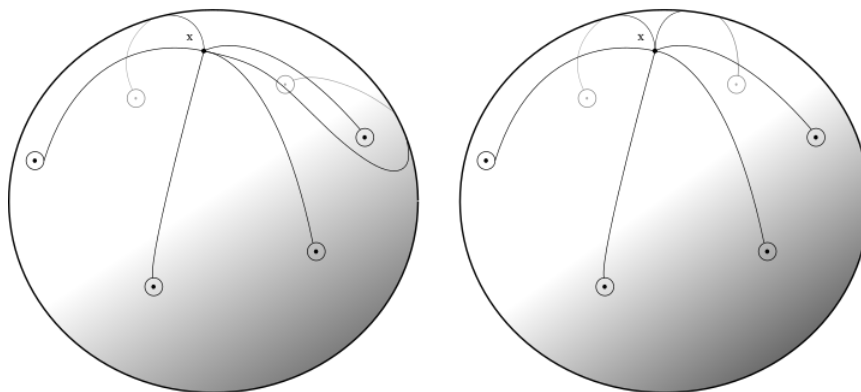


Figura 2.5: El cambio en el orden de R implica un cambio en la elección de las γ_i

(es decir, dibujada en la esfera) este cambio no es topológicamente significativo, el orden cíclico de los lazos γ_i es fundamental para poder reconstruir una superficie a partir de una gráfica, como veremos en el siguiente capítulo. Observemos que, intuitivamente, cada lazo no contraíble de X necesariamente atrapa algunos de las perforaciones x_i . La elección de lazos γ_i basados en x es llamada una *estrella basada* en x por Lando y Zvonkin en [26].

La siguiente es una observación sencilla que se sigue del teorema de Seifert-Van Kampen¹³.

Proposición 2.4.1. Sean $R = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ con al menos dos puntos y $x \in \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus R$. Entonces $\pi_1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus R, x)$ es isomorfo al grupo libre en $k - 1$ generadores, que denotamos F_{k-1} .

Demostración. Procedemos por inducción sobre k : primero, una esfera perforada en 2 puntos es homeomorfa al plano perforado, y por lo tanto al disco perforado, que tiene grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z} \cong F_1$. En general, $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus R$ es homeomorfo a $\mathbb{C} \setminus R'$, en donde $R' = R \setminus \{x_k\}$. Así, denotemos por D^* a un disco abierto perforado en los k puntos $\{x_1, \dots, x_k\}$. Es posible tomar dos abiertos U y V tales que $D^* = U \cup V$, U contiene una perforación de D^* , digamos x_k , mientras que V contiene el resto y $U \cap V$ es homeomorfo a un disco. Por ejemplo, basta con tomar x_k en la frontera de la cerradura convexa de los x_i y tomar U como la intersección de un semiplano adecuado con D^* , como se muestra en la figura 2.6. El teorema de Van Kampen implica que el grupo fundamental de D^* basado en un $x \in U \cap V$ es isomorfo al producto libre $G = \pi_1(U, x) * \pi_1(V, x)$. Puesto que U es homeomorfo a un disco perforado en x_k , y V a un disco perforado en $k - 1$ puntos, la hipótesis de inducción implica que $G \cong F_1 * F_{k-1}$, que a su vez es isomorfo a F_k . Así, la esfera perforada en k puntos tiene grupo fundamental isomorfo a F_{k-1} .

Podemos hacer una construcción similar en la esfera, como la que se muestra en la figura 2.6. En este caso, podemos tomar abiertos U y V de $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus R$ de forma que U es homeomorfo a un disco abierto perforado en x_i , V a un disco perforado en $R \setminus \{x_i\}$, con $U \cap V$ homeomorfo a un cilindro. En este caso, para cada $x \in U \cap V$, el grupo $H = \pi_1(U, x) * \pi_1(V, x)$ es un producto amalgamado por $\mathbb{Z} \cong F_1$. A saber, si los a_1, \dots, a_{k-1} generan el grupo $\pi_1(V, x) \cong F_{k-1}$ y a_k genera a $\pi_1(U, x) \cong F_1$, tenemos que H tiene presentación $\langle a_1, \dots, a_k \mid a_1 \cdots a_k^{-1} = 1 \rangle$, que es también una presentación del grupo libre en $k - 1$ generadores. \square

¹³El teorema de Seifert y Van Kampen es un resultado fundamental de topología algebraica que permite expresar el grupo fundamental de un espacio topológico X como un *producto amalgamado*, a partir de los grupos fundamentales de los subespacios arcoconexos que cubren a X . Referimos al capítulo 10 de [29] para su tratamiento.

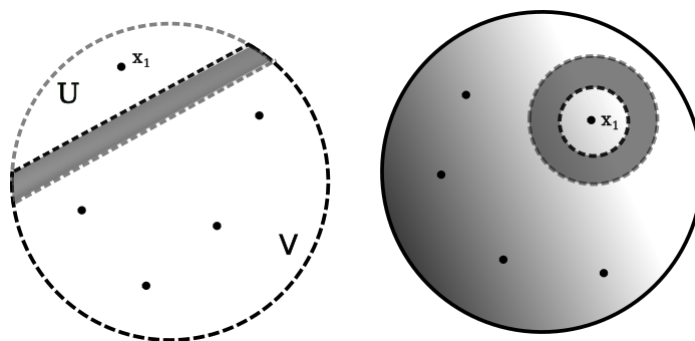


Figura 2.6: En el disco D^* , la vecindad V es homeomorfa a un disco abierto perforado en $k - 1$ puntos, y el conjunto $U \cap V$ es simplemente conexo. En la esfera, $U \cap V$ es un anillo, con grupo fundamental \mathbb{Z} .

La elección de los generadores a_1, \dots, a_k en la discusión previa consiste en fijar una estrella base para $\mathbb{P}^1\mathbb{C}^*$. Sea R un conjunto de k puntos en $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Escribamos $X = \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus R$ y tomemos un $x \in X$. Hemos visto que si $p : Y \rightarrow X$ es una función cubriente, el grupo $\pi_1(X, x) = F_{k-1}$ actúa en la fibra $p^{-1}(x)$ por permutaciones. Como mencionamos en el capítulo previo, el grupo de monodromía de la cubierta Y es la imagen de $\pi_1(X, x)$ bajo el homomorfismo

$$\phi : [\gamma] \mapsto [h : \tilde{x} \mapsto \tilde{x} \cdot \gamma],$$

que es la representación natural de $\pi_1(X, x)$ en el grupo simétrico $S_{p^{-1}(x)}$. Si fijamos una estrella base para X obtenemos un conjunto de generadores $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ que satisfacen la relación $\gamma_1 \cdots \gamma_k = 1$. Bajo ϕ , esta relación se conserva en $S_{p^{-1}(x)}$, de modo que si denotamos por $g_i \in S_x$ a la permutación $\phi(\gamma_i)$, tenemos que $g_1 \cdots g_k$ es la función identidad en la fibra $p^{-1}(x)$. Más aún, la cubierta Y es arcoconexa, por lo que el grupo de monodromía, que está generado por los g_i , actúa transitivamente en $p^{-1}(x)$. Abstraeremos estas propiedades para hacer la siguiente definición, obtenida de [26] y [19]:

Definición 2.14. (Constelación) Tomemos un entero positivo n y k permutaciones $g_i \in S_n$. Haremos la convención de que $g \in S_n$ actúa por la derecha en $\{1, \dots, n\}$, de modo que el producto gh debe ser leído de izquierda a derecha¹⁴. Decimos que $[g_1, g_2, \dots, g_k]$ es una k -constelación si el grupo $G := \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ actúa transitivamente en $\{1, 2, \dots, n\}$ ¹⁵ y se satisface la identidad $g_1 g_2 \cdots g_k = Id$.

En este contexto abstracto, diremos que el subgrupo de S_n generado por los g_i es el grupo cartográfico de la k -constelación, que también llamaremos constelación de grado n y longitud k . Así, el grupo de monodromía de una cubierta finita de $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus R$ es un grupo cartográfico que corresponde a una k -constelación, obtenida a partir de la elección de una estrella base. En efecto, esta es la constelación prototípica. Con este lenguaje podemos expresar el siguiente resultado, basado en la correspondencia entre grupos de monodromía y espacios cubrientes.

Proposición 2.4.2. Para cualquier constelación $C = [g_1, \dots, g_k]$ existe un espacio cubriente (X, p) de $S^2 \setminus R$ cuyo grupo de monodromía es una constelación isomorfa a C .

¹⁴Esta elección corresponde a cómo elegimos escribir la concatenación de dos lazos. Que el lazo $\gamma \cdot \delta$ corresponda a recorrer γ y luego δ implica que $\pi_1(X, x)$ actúa por la derecha en la fibra de una cubierta de X . Dado que esta acción es por permutaciones, debemos interpretar gh como la permutación "g seguida de h".

¹⁵También denotaremos al intervalo discreto $\{1, \dots, n\}$ con $[n]$.

Demostración. Sea $X = S^2 \setminus R$, y consideremos una estrella basada en $x \in X$, esto es, un conjunto de generadores $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ del grupo $\pi_1(X, x)$. Sea $G = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ el grupo cartográfico de C . La asignación $\gamma_i \mapsto g_i$ se extiende a un homomorfismo $\phi : \pi_1(X, x) \rightarrow G$, pues la única relación que los γ_i satisfacen es también satisfecha por los g_i . Así, $\pi_1(X, x)$ actúa en $[n]$ a través de ϕ , de modo que $i \cdot [\gamma] := \phi([\gamma])(i)$. Para un punto arbitrario $j \in [n]$, la clase de conjugación del estabilizador $M_j \subset \pi_1(X, x)$ define una clase de isomorfismo de cubiertas de X , como vimos en el capítulo previo. Puesto que $[n]$ es finito, el subgrupo M_j es de índice finito también, y por lo tanto la cubierta inducida (\tilde{X}, p) tiene un número finito de hojas. A saber, ya que G actúa transitivamente en $[n]$, la órbita de j es $[n]$, y el teorema de órbita-estabilizador implica que $[\pi_1(X, x) : M_j] = n$. Así, (\tilde{X}, p) es una cubierta de n hojas. Más aún, su grupo de monodromía M está generado por las n biyecciones $f_i : p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(x)$ dadas por $f(\tilde{x}) = \tilde{x} \cdot \gamma_i$. Si h es una biyección entre $[n]$ y $p^{-1}(x)$, vemos que $h \circ f_i \circ h^{-1} = g_i$, de forma que C y $[f_1, \dots, f_2]$ son constelaciones isomorfas. \square

Finalmente, enunciamos y una versión del teorema de existencia de Riemann que aparece como el teorema 1.8.14 en [26] utilizando el lenguaje de este capítulo, y reproducimos su prueba. Históricamente, Riemann construyó sus superficies a partir del pegado de planos cortados por ciertos arcos, determinados por las singularidades de una función algebraica. Recíprocamente, Riemann se preguntó si cualquier superficie obtenida a partir de este proceso topológico se puede construir a partir de las continuaciones analíticas de una función algebraica, lo cual motivó originalmente el teorema de Riemann-Roch. Referimos a [1] para un muy bonito recuento histórico.

Teorema 2.4.1 (Teorema de Existencia de Riemann). *Sea $R = \{y_1, \dots, y_k\} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$, $y_i \neq y_j$ para $i \neq j$, y fijemos una estrella basada en $x \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}^* := \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus R$. Entonces para cualquier constelación $C = [g_1, \dots, g_k]$ de grado n existe una superficie de Riemann compacta X y una función meromorfa f tal que R es el conjunto de sus valores críticos y g_1, \dots, g_k generan al grupo de monodromía de la cubriente de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}^*$ inducida. La cubriente es única salvo isomorfismos.*

Demostración. Como discutimos, la constelación C define un espacio cubriente de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}^*$ que denotamos (X, f) . A saber, la estrella base S induce una representación del grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{P}^1\mathbb{C}^*, x)$ en el grupo cartográfico de C , de forma que $\pi_1(\mathbb{P}^1\mathbb{C}^*, x)$ actúa en $[n]$. La clase de conjugación del estabilizador de esta acción induce una cubierta de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}^*$ cuyo grupo de monodromía es exactamente el grupo cartográfico de C . Ahora, X admite una única estructura compleja para la cual f es holomorfa. Por el teorema de compactación, f puede extenderse a una función meromorfa cuyos valores críticos son los puntos en R . Así, obtenemos una superficie de Riemann \tilde{X} con las propiedades buscadas. \square

2.5. Clasificación de las superficies de Riemann

Cualquier superficie de Riemann X admite una cubriente universal que, como hemos discutido, es también una superficie de Riemann. Si (\tilde{X}, p) es tal cubriente, tomar subgrupos de $\text{Aut}(X, p)$ permite construir las distintas cubiertas de X como el espacio de las órbitas de una acción por homeomorfismos. Para esa construcción, presentamos a las cubiertas finitas de X como espacios intermedios entre (\tilde{X}, p) y (X, Id) asociados a las clases de conjugación de subgrupos de $\pi(X, x)$, en analogía a la teoría de Galois. Para ello, construimos a cada cubierta como un espacio de identificación, definiendo una relación de equivalencia en la cubierta universal de X ,

y cuya proyección desciende a través de p para inducir una función cubriente de X . Esto es posible porque, para cada punto $x \in \tilde{X}$, la acción de un subgrupo $G \subset \text{Aut}(\tilde{X}, p)$ es suficientemente “discontinua” como para permitir encontrar una vecindad abierta de x en G/\tilde{X} , digamos U , que se proyecta a X de manera inyectiva, y por lo tanto homeomorfa. Dicho de otra forma, si U es suficientemente pequeño, sus traslaciones por elementos no triviales de G no intersecan a U .

Esta última es una propiedad del grupo G que podemos abstraer, con ánimos de poder expresar a cada superficie de Riemann como un cociente más explícito. En cierto sentido, tal noción es dual a interpretar a X como una cubierta de la esfera perforada, pues ahora X jugará el papel del espacio cubierto, en vez del cubriente. Para la siguiente discusión, referimos a los capítulos 5 y 6 de [4] y a la sección 27 de [9].

Definición 2.15. Sea X una variedad, y G un grupo que actúa en X por homeomorfismos, de manera que su neutro es la función identidad. Diremos que la acción de G es *propriadamente discontinua* si cada $x \in X$ admite una vecindad abierta U para la cual

$$\{g \in G \mid g(U) \cap U \neq \emptyset\} = \{\text{Id}_X\}.$$

En particular, una acción de este tipo es libre, y por lo tanto fiel. Si debilitamos la condición anterior y pedimos sólo que el conjunto $\{g \in G \mid g(U) \cap U \neq \emptyset\}$ sea finito obtenemos una acción que no es libre, pero que puede ser fiel. Este tipo de acciones también se conocen como *propriadamente discontinuas*¹⁶, y tienen diversas definiciones equivalentes. Cuando este sea el caso, diremos que la acción de G es *propriadamente discontinua en el sentido general*. Observemos que la retícula del ejemplo 2.3 es un grupo cuya acción en \mathbb{C} es *propriadamente discontinua*, y su cociente resulta ser una superficie de Riemann. En efecto, una acción en la superficie X como en la definición 2.15 garantiza que el cociente X/\sim es una superficie con cubierta X .

Fijemos una superficie de Riemann X y denotemos por (\tilde{X}, p) a su cubriente universal. Como vimos antes, la unicidad de levantamientos implica que $\text{Aut}(\tilde{X}, p) \cong \pi_1(X, x)$ actúa libremente en \tilde{X} , pues los $g \in \text{Aut}(\tilde{X}, p)$ son levantamientos de la cubierta p , de manera que si g fija un punto \tilde{x} coincide con el levantamiento de p dado por la identidad de \tilde{X} . Más aún, si $U \subset X$ está cubierta parejamente, cada componente conexa $V_i \in p^{-1}(U)$ satisface la propiedad descrita en la definición previa, por lo que la acción de $\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ en \tilde{X} es *propriadamente discontinua*. Por el teorema 1.3.7, la superficie $\tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, p)$ es isomorfa a X . Esta observación, en conjunción con la construcción en el ejemplo 2.3, sugiere una máquina para producir superficies de Riemann: tomamos una superficie de Riemann \tilde{X} con grupo fundamental trivial, y tomamos un subgrupo Γ de automorfismos complejos de \tilde{X} con una acción *propriadamente discontinua*, de manera que el cociente resulte una superficie de Riemann con grupo fundamental isomorfo a Γ . Así, vemos la importancia de determinar las superficies de Riemann que pueden jugar el papel de cubrientes universales. Uno de los teoremas más importantes y celebrados de la teoría es la clasificación de tales superficies.

Supongamos que X es una superficie de Riemann compacta, de género g , y que (\tilde{X}, p) es su cubierta universal. Si $g = 0$, X es homeomorfa a la esfera, por lo que es simplemente conexa y homeomorfa a \tilde{X} , y por lo tanto biholomorfa a la esfera de Riemann. Recordemos que para un punto arbitrario $x_0 \in X$, \tilde{X} es el espacio de clases de equivalencia de curvas con un extremo en x_0 . Si $g > 0$, el grupo fundamental de X basado en x_0 contiene un grupo cíclico infinito, de modo que la fibra de x_0 es numerable y discreta, y por lo tanto \tilde{X} no es compacta.

¹⁶Por ejemplo, es así como se definen en [4] y [22].

Así, la cubierta universal de una superficie de Riemann X debe ser la esfera, o bien una superficie de Riemann no compacta. Además, la conexidad por trayectorias de X implica la de \tilde{X} , a través del levantamiento de curvas, y la posibilidad de darle una estructura analítica nos dice que \tilde{X} es una superficie orientable. Sin embargo, incluso con la restricción al caso orientable, la clasificación de las superficies abiertas es un problema complicado que depende del estudio de la *frontera ideal* de cada superficie. Un tratamiento del problema puede ser encontrado en [37]: en esencia, y burdamente, toda superficie abierta surge a partir de tomar la esfera y quitarle un subconjunto cerrado totalmente desconexo, así como los interiores de una familia (posiblemente vacía, posiblemente infinita) de discos ajenos, para después identificar fronteras de pares de discos adecuadamente, generando asas. La conexidad simple de \tilde{X} nos sugiere que topológicamente coincide con una esfera perforada en un punto; esto es, \tilde{X} es homeomorfo al plano, o bien al disco. Podríamos después proceder a dotar de una estructura compleja a \tilde{X} a través de su proyección, y concluir que las superficies de género distinto de cero son cubiertas por el plano complejo, de manera que la cubierta es holomorfa. Un homeomorfismo entre el plano y el disco nos permitiría definir una estructura compleja en el disco biholomorfamente equivalente a la del plano, que parece contradecir el teorema del mapeo de Riemann. El error en el argumento previo está en que no existe “el” plano complejo: a priori, la estructura que la cubriente p permite definir en el plano no tiene por qué ser equivalente a la de (\mathbb{C}, Id) . En efecto, \mathbb{C} admite dos estructuras complejas: la usual y la del disco, inducida a través de la elección de un homeomorfismo $h : \mathbb{C} \rightarrow D$.

Sin embargo, es posible delimitar nuestra atención a tres superficies de Riemann canónicas, como afirma uno de los teoremas más importantes de la teoría y que enunciaremos a continuación.

Teorema 2.5.1 (Teorema de Uniformización de Riemann). *Sean X una superficie de Riemann, y \tilde{X} su cubierta universal. Entonces \tilde{X} es equivalente a exactamente una de las siguientes superficies:*

- $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, en cuyo caso decimos que X es una superficie elíptica.
- \mathbb{C} , y decimos que X es parabólica.
- D , y decimos que X es hiperbólica,

Las pruebas de este teorema son largas y complicadas, y de gran importancia. Un tratamiento completo de distintas estrategias para su prueba se encuentra en el libro [7]. \mathbb{C} es la cubierta universal de cualquier superficie de Riemann homeomorfa a un toro, superficies que también son llamadas *curvas elípticas* en el contexto de la geometría algebraica, por lo que la terminología puede resultar un poco confusa.

Teorema 2.5.2. *Sea $\text{Aut}(X)$ el grupo de automorfismos para la superficies de Riemann X .*

- Para $X = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$, $\text{Aut}(X)$ es el grupo de transformaciones de Möbius

$$\text{Mob} := \left\{ \mu_A : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}.$$

- Para $X = \mathbb{C}$, $\text{Aut}(X)$ es el grupo de todas las funciones afines complejas

$$\{f : z \mapsto az + b \mid a, b \in \mathbb{C}\}.$$

- Para $X = D$, $\text{Aut}(X)$ es el subgrupo de Mob dado por

$$S = \left\{ \mu_A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}.$$

Demostración. Es bien sabido que todas las funciones meromorfas en $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ son las funciones racionales. En efecto, si $a : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ es meromorfa, a tiene un conjunto finito de polos y ceros, digamos $p_1, \dots, p_k, c_1, \dots, c_l$, respectivamente. Usando expansiones de Laurent, observamos que la función

$$b : z \mapsto a(z) \frac{\prod(z - p_i)}{\prod(z - c_i)}$$

es meromorfa, no se anula y no tiene polos. Esto es, b es una función holomorfa en $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, y por lo tanto es constante. Luego, a es racional. Si además a es invertible, necesariamente es el cociente de dos polinomios de grado 1, pues a tiene exactamente un polo y un cero. Similarmente, cada automorfismo de \mathbb{C} equivale a un automorfismo de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ que fija el punto ∞ , y por lo tanto es una función afín.

Por último, observemos que cada elemento del grupo S descrito arriba en efecto actúa por automorfismos del disco:

$$|az + b|^2 = |a|^2|z|^2 + 2\text{Re}(abz) + |b|^2|z|^2 < |b|^2|z|^2 + 2\text{Re}(abz) + |a|^2 \iff |z|^2 < 1.$$

Por otro lado, el lema de Schwarz implica que si $f : D \rightarrow D$ es biholomorfa y $\alpha = f^{-1}(0)$, para cada $z \in D$ se tiene que

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \tag{2.6}$$

Para ver esto, notemos primero que la función $h : z \mapsto (\alpha - z)/(1 - \bar{\alpha}z)$ es una involución del disco, y equivale a la acción de un elemento adecuado en S . Más aún, la función $g = f \circ h$ es un automorfismo de D que fija el 0, así como su inversa, g^{-1} . Puesto que $|g'(0)| \leq 1$, $|(g^{-1})'(0)| \leq 1$ y $|g'(0)||g^{-1}'(0)| = 1$, se tiene $|g'(0)| = 1$. Así, g es una rotación por un ángulo θ . Aplicando h a la derecha de g obtenemos la descripción buscada de f . De nuevo, podemos renormalizar los coeficientes de la expresión 2.6 para obtener un único elemento en S que actúa en D como f . \square

Estos tres grupos cargan naturalmente con una topología, y la acción de $\Gamma \subset \text{Aut}(X)$ es propiamente discontinua en el sentido general si y sólo si Γ es un subconjunto discreto. Decimos que Γ es un grupo discreto en tal caso. Así, podemos tomar como X a una de las tres superficies de Riemann simplemente conexas, un subgrupo discreto Γ de $\text{Aut}(\tilde{X})$, e intentar ver que el cociente X/Γ es una superficie de Riemann. Puesto que el grupo Γ puede fijar algunos puntos, no es claro a priori cómo dar una estructura compleja para X/Γ . De hecho, este cociente tiene una estructura natural como un *orbifold*, una noción de variedad singular que definiremos más adelante. Los puntos singulares de X/Γ superficies pueden ser resueltos, utilizando un argumento similar al que aparece en la prueba del teorema 2.2.4 que enunciamos en la sección previa.

Teorema 2.5.3. Sean $U \subset \tilde{C}$ un abierto conexo, y Γ un grupo que actúa en U por transformaciones de Möbius de manera propiamente discontinua en el sentido general. Entonces D/Γ es una superficie de Riemann.

Para una prueba, la referencia estándar es [4], en donde aparece como el teorema 6.2.1. La idea es como sigue: la proyección $\pi : U \mapsto U/\Gamma$ es un homeomorfismo local, excepto en vecindades de puntos con estabilizadores no triviales. Si $x \in U$ es un tal punto, su estabilizador resulta isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, que actúa por rotaciones euclidianas salvo conjugación por una transformación de Möbius adecuada. Esto se sigue de un análisis detallado del grupo Γ , cuyos elementos *elípticos* tienen orden finito; referimos a [27] para una discusión accesible. Si D denota al disco unitario en \mathbb{C} , el espacio D/\mathbb{Z}_n resulta homeomorfo a D : en efecto, \mathbb{Z}_n actúa por $i \mapsto \omega^i z$, en donde $\omega = e^{2\pi i/n}$, de modo que la función $h : B \rightarrow B$ dada por $z \mapsto z^n$ desciende al cociente B/\mathbb{Z}_n . La función inducida es abierta puesto que $z \mapsto z^n$ es abierta, y es claramente biyectiva, por lo que h desciende a un homeomorfismo. Esto permite construir cartas alrededor de los puntos fijos de U con estabilizadores no triviales. Para el resto de los puntos, usamos las secciones de π para dotar a D/Γ de una estructura de Riemann. Con esta estructura, π es una cubierta ramificada. Una prueba más precisa puede ser hallada en la sección 3 de [30].

2.6. El espacio de móduli

En esta sección discutiremos el problema de interés de este trabajo: describir un espacio en el que cada punto determina una clase de isomorfismo de superficies de Riemann. En capítulos subsecuentes discutiremos la construcción de un modelo combinatorio para representar cada superficie con un *mapa métrico*, también conocido como *gráfica de listones* o *gráfica gorda*. Esto nos dará un espacio un poco más grande del buscado, pero con una descripción combinatoria. Iniciamos con ejemplos motivadores.

Informalmente, un espacio de móduli es un espacio topológico de *parámetros* que modela cómo varía continuamente un objeto particular. Si fijamos un conjunto C de objetos a clasificar con una noción de equivalencia \sim , un *problema de móduli* consiste en determinar precisamente qué es una *familia* continua de objetos, salvo \sim , y en hallar un espacio apropiado a partir del cual podamos producir cualquier tal familia. Para resolverlo, debemos definir primero una noción de equivalencia entre nuestros objetos si hemos de parametrizarlos de forma satisfactoria, además de esclarecer qué entendemos por una familia de estos objetos. Para fijar ideas, tomemos el espacio de los círculos en el plano. Observemos que tenemos distintos espacios que podemos entender como el “espacio de todos los círculos”, y que dependen del “lente” que elijamos para observarlos:

- $X_1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$. Aquí, cada punto de \mathbb{R}^2 es un posible centro para el círculo, que puede tomar cualquier radio \mathbb{R} .
- $X_2 = \mathbb{R}^+$. El grupo de traslaciones de \mathbb{R}^2 es un candidato natural para definir la equivalencia de dos círculos, y actúa de manera natural en X_1 para producir X_2 .
- $X_3 = \{1\}$. Puesto que todos los círculos centrados en el origen son equivalentes desde el punto de vista afín, podríamos en efecto pensar que sólo existe un círculo.

Estos distintos espacios pueden servir para distintos fines. Si bien es trivial, el espacio X_1 es el que pinta la figura más intuitiva. Una curva continua γ en X_1 define una colección de círculos que varía continuamente. Puesto que es un espacio topológico, esto tiene un sentido preciso. En efecto, podemos pensar en esta curva como una película en el tiempo que nos muestra la evolución de un círculo.

Un problema similar es el de clasificar las elipses del plano. Primero, diremos que dos elipses son equivalentes si son congruentes. Observemos que la pareja ordenada $(M, m) \in \mathbb{R}_+^2$ define exactamente una elipse con eje mayor M y eje menor m . Puesto que las elipses determinadas por (M, m) y (m, M) son isomorfas, el espacio \mathbb{R}_+^2/S_2 es en cierto sentido un espacio de parámetros para la elipse. Observemos que la recta $x = y$ es especial, pues corresponde al subespacio de los círculos. Notemos que hay exactamente 4 isometrías de \mathbb{R}^2 que fijan una elipse particular, mientras que hay una infinidad de automorfismos en el círculo.

Por otro lado, podemos intentar clasificar a las elipses salvo homotecia. En este caso, denotemos por c a la distancia entre el centro de la elipse y cualquiera de sus focos, y por s la longitud del semieje mayor. El cociente $e := c/s$, es invariante bajo homotecias, y es conocido como la excentricidad de una elipse. Observemos que $0 \leq e < 1$. Por otro lado, tenemos un parámetro θ de rotación que nos permite distinguir entre todas las clases de homotecia de elipses con excentricidad fija. Así, vemos que el espacio de elipses salvo homotecia es naturalmente un disco. En este caso ningún punto admite automorfismos, puesto que la noción de isomorfismo está dada por la homotecia.

La teoría de móduli lleva esto a un contexto muy general, y va más allá del alcance y el propósito de este trabajo. En el apéndice se incluyen las definiciones concretas. A continuación, construimos un ejemplo mucho más interesante.

2.6.1. El espacio de móduli del toro

Como vimos, la esfera de Riemann es la única superficie de Riemann compacta de género $g = 0$. Analicemos el caso $g = 1$. Recordemos que en la primera sección de este capítulo discutimos una forma natural de darle una estructura compleja al toro utilizando la retícula $R = R(\omega_1, \omega_2)$, en donde ω_1 y ω_2 son linealmente independientes en $\mathbb{C}_\mathbb{R}$. En el ejemplo 2.3, describimos el cociente $\pi : \mathbb{C} \rightarrow T^2$ definido por la acción de \mathbb{R} en \mathbb{C} . Puesto que esta acción es propiamente discontinua, sabemos que π es además una función cubriente. Ya que \mathbb{C} es simplemente conexo, π es una¹⁷ cubriente universal de T^2 , y es holomorfa por definición de la estructura compleja en T^2 .

Ahora, observemos que cada toro complejo X surge de esta forma: puesto que $X \cong T^2 = S^1 \times S^1$ es un grupo topológico, su grupo fundamental es abeliano. Como discutimos en la proposición 1.2.3, tiene presentación $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$. Sea (\mathbb{C}, p) la cubierta universal de X que satisface $p(0) = x$. Vemos que el grupo de transformaciones cubrientes de (\mathbb{C}, p) es un subgrupo abeliano de $\text{Aut}(\mathbb{C})$ de rango 2. Sean γ_1, γ_2 generadores de $\pi_1(X, x)$ y $w_1 = 0 \cdot \gamma_1$, $w_2 = 0 \cdot \gamma_2$. Como hemos discutido, $\text{Aut}(\mathbb{C}, p)$ actúa libremente en $p^{-1}(x)$, de manera que sus elementos son traslaciones, pues no tienen puntos fijos. Las traslaciones $t_1 : z \mapsto z + w_1$ y $t_2 : z \mapsto z + w_2$ actúan exactamente como γ_1 y γ_2 en 0, de modo que sus potencias generan la fibra de 0. Notemos que cualquier traslación que preserve la fibra de 0 es necesariamente de esta forma, de modo que tenemos $\text{Aut}(\mathbb{C}, p) = R(w_1, w_2)$, y por lo tanto X es un cociente de \mathbb{C} por una retícula.

Nuestro interés está en clasificar las posibles estructuras que podemos darle a T^2 . La discusión previa sugiere transportar el problema a clasificar retículas en \mathbb{C} que inducen toros isomorfos.

¹⁷Recordemos que la cubierta universal de un espacio es única salvo equivalencia de cubrientes.

Primero, fijemos la retícula $R := R(\omega_1, \omega_2)$. Un elemento A del grupo

$$SL(2, \mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

es tal que la retícula $R' = R(A\omega_1, A\omega_2)$ coincide con R . En efecto, si escribimos

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix},$$

es claro que $R' \subset R$, pues los elementos de R' son combinaciones enteras de ω_1 y ω_2 . Puesto que A tiene un inverso, vemos que

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix},$$

por lo que también los elementos de R son combinaciones enteras de ω'_1 y ω'_2 . Así, $R = R'$. Viceversa, supongamos que las retículas $\Gamma = R(\omega_1, \omega_2)$ y $\Gamma' = R(\omega'_1, \omega'_2)$ coinciden. En particular, $\omega'_1, \omega'_2 \in \Gamma$, por lo que $\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2$ y $\omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2$ para ciertos enteros $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Recíprocamente, $\omega_1 = a'\omega'_1 + b'\omega'_2$ y $\omega_2 = c'\omega'_1 + d'\omega'_2$. Esto es,

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por A y A' a las matrices utilizadas, respectivamente. Esto implica que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando determinantes, vemos que $ad - bc$ es una unidad en \mathbb{Z} , y por lo tanto es igual a 1 o a -1 . Podemos suponer que elegimos la numeración de los complejos ω_i, ω'_i de manera positiva.

A saber, las matrices
$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\omega_1) & \operatorname{Re}(\omega_2) \\ \operatorname{Im}(\omega_1) & \operatorname{Im}(\omega_2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\omega'_1) & \operatorname{Re}(\omega'_2) \\ \operatorname{Im}(\omega'_1) & \operatorname{Im}(\omega'_2) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

tienen determinante positivo. Los pares $\beta = (\omega_1, \omega_2)$ y $\beta' = (\omega'_1, \omega'_2)$ son bases ordenadas para $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, de forma que

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\omega'_1) & \operatorname{Re}(\omega'_2) \\ \operatorname{Im}(\omega'_1) & \operatorname{Im}(\omega'_2) \end{pmatrix} \right]_{\beta}.$$

Así, vemos que A^T tiene determinante positivo, y por lo tanto también A . Concluimos que $A \in SL(2, \mathbb{Z})$. Observemos que la matriz $-A$ funciona de misma forma para hacer que las retículas coincidan, pues $-\beta$ y $-\beta'$ definen las mismas retículas con las que trabajamos. Así, tenemos que R, R' coinciden si y sólo si existe un elemento $[A] \in SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ tal que $(\omega_1, \omega_2) = (A\omega'_1, A\omega'_2)$, en donde tomamos el cociente por $\{Id, -Id\} \cong \mathbb{Z}_2$ para identificar A con $-A$. Es fácil ver que $\{Id, -Id\}$ es el centro de $SL(2, \mathbb{R})$, de manera que el cociente es un grupo bien definido.

Notemos que la elección que hicimos para los índices de los ω_i, ω'_i es equivalente a la condi-

ción

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right), \operatorname{Im}\left(\frac{\omega'_2}{\omega'_1}\right) > 0.$$

En efecto, la matriz en la ecuación 2.7 tiene determinante positivo si y sólo si el ángulo α entre ω_1 y ω_2 satisface $0 < \alpha < \pi$, abriendo en el sentido positivo del plano. Vemos que α coincide con el argumento principal del cociente (ω_2, ω_1) , que es la diferencia de los argumentos de ω_2 y ω_1 . Se tiene que $\operatorname{Im}(\omega_2, \omega_1) > 0$ si y sólo si $\alpha \in (0, \pi)$. Supondremos que esta condición se cumple.

Más aún, si $\tau = \omega_2/\omega_1$, las retículas $\Gamma = R(1, \tau)$ y $\Gamma' = R(\omega_1, \omega_2)$ producen toros complejos equivalentes. Para ver esto, denotemos por m a la función $z \mapsto \omega_1 z$, y observemos los diagramas siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{m} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathbb{C}/\Gamma & & \mathbb{C}/\Gamma' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi' \circ m} & \mathbb{C}/\Gamma' \\ \pi \downarrow & \nearrow h & \\ \mathbb{C}/\Gamma & & \end{array}$$

Puesto que m es holomorfa, también lo es la composición $\pi' \circ m$. Si es constante en las fibras de π , $\pi' \circ m$ desciende a una función continua h que resulta un homeomorfismo, pues podemos construir su inversa a partir de la función $m' : z \mapsto \omega_1^{-1}z$. En este caso, dado que localmente está dada por secciones de π , h debe ser holomorfa, y por lo tanto es un biholomorfismo. Para comprobar esto, notemos que dos puntos z, w Γ -equivalentes en \mathbb{C} satisfacen $m(z) - m(w) = m(z - w) \in m\Gamma = \Gamma'$, de manera que $\pi'(m(z)) = \pi'(m(w))$. En general, si para Γ y Γ' hay un $a \in \mathbb{C}^*$ tal que $\Gamma = a\Gamma'$, ambas retículas definen la misma estructura compleja en T^2 .

Así, cada $\tau \in H_+^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ define una estructura compleja para T^2 a través de la retícula $\Gamma_\tau = R(1, \tau)$. Usar τ con parte imaginaria positiva es conveniente, pues $SL(2, \mathbb{Z})$ actúa naturalmente en el semiplano superior. En efecto, si $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ y $\tau \in H_+^2$, el número complejo

$$\tau' = A \cdot \tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

tiene parte imaginaria positiva, pues

$$\operatorname{Im}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(a\tau + b)(c\bar{\tau} + d)}{|c\tau + d|^2}\right) = \frac{(ad - bc)\operatorname{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}.$$

Además, la retícula $R(1, (a\tau + b)/(c\tau + d))$ define la misma estructura que $R(a\tau + b, c\tau + d)$, que a su vez coincide con la de $R(1, \tau)$, pues corresponde a un cambio de base. Así, para obtener una correspondencia unívoca, tomamos el espacio de órbitas

$$M := \frac{H_+^2}{\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})}$$

Ahora bien, sea f un automorfismo de \mathbb{C} y fijemos una retícula R en \mathbb{C} . La función f es una transformación afín de forma $z \mapsto \alpha z + \beta$, y envía R en αR , pues $w - z \in R \iff f(w) - f(z) = \alpha w - \alpha z \in \alpha R$. En particular, cada traslación de \mathbb{C} desciende a un automorfismo de \mathbb{C}/R . En sentido opuesto, tomemos un automorfismo h de \mathbb{C}/R distinto de la identidad, y denotemos por $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/R$ al cociente. la función $h \circ \pi$ es una función continua de \mathbb{C} en \mathbb{C}/R que, por el

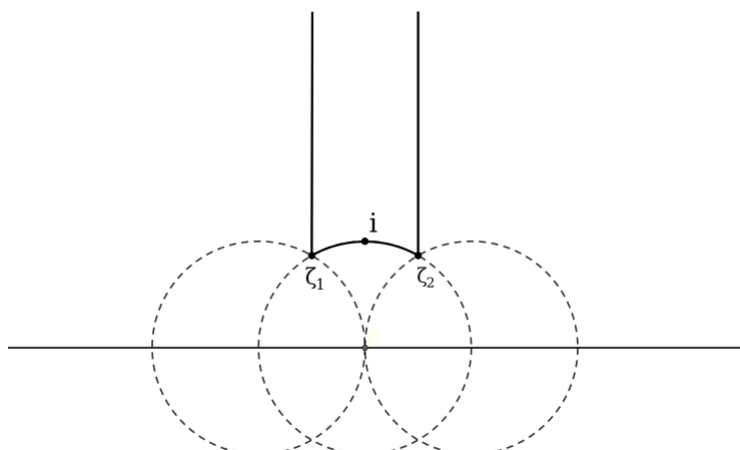


Figura 2.7: Identificamos el espacio M con el dominio D dentro de la franja blanca, unido al punto z_1 , la franja negra izquierda y el arco $z_1 i$. Obtenemos una superficie similar a un cilindro, con un punto que se asemeja a un cono.

criterio del levantamiento, induce una función $\tilde{h} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{18}$ de manera que el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{h}} & \mathbb{C} \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \mathbb{C}/R & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}/R
 \end{array}$$

Como hemos argumentado antes, la función \tilde{h} es holomorfa, y podemos construir su función inversa utilizando a h^{-1} . Esto nos dice que en efecto los automorfismos de \mathbb{C}/R provienen de automorfismos de \mathbb{C} . Así, el grupo de automorfismos del toro \mathbb{C}/R es no numerable y actúa de forma transitiva, pues la traslación $z \mapsto z + (v - u)$ desciende a un automorfismo de \mathbb{C}/R que envía $[u]$ en $[v]$. Observemos que en la discusión anterior omitimos la posibilidad de que $R = \alpha R$, pues esto sucede sólo si $\alpha \in \mathbb{Z}$, en cuyo caso induce el automorfismo identidad, o si \mathbb{R} es especialmente simétrica, como discutiremos abajo. Por último, notemos que los automorfismos genéricos de \mathbb{C}/R no preservan a la proyección de 0 en \mathbb{C}/R .

Observemos la figura 2.7. Dentro de la franja delimitada por las líneas gruesas hay exactamente un representante para cada órbita de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, y las rectas $x = \pm 1/2$ son identificadas por la transformación $T : z \mapsto z + 1$. Este hecho es clásico; referimos a las terceras secciones de [22] y [24] para su tratamiento. Observemos los puntos i y $\zeta_1 = -1/2 + \sqrt{3}/2i$, $\zeta_2 = 1/2 + \sqrt{3}/2i$. Tenemos que $T(\zeta_1) = \zeta_2$, por lo que corresponden a la misma estructura compleja en el toro. La función $S : z \mapsto -1/z$ envía la franja D dentro del “triángulo” con vértices en $\zeta_1, \zeta_2, 0$ y cuyas aristas son los correspondientes segmentos de círculo, de forma que identifica el arco $z_1 i$ con $i z_2$. Observemos que i es un punto fijo de esta función. Similarmente, $S \circ T$ envía D a un abierto contenido en el círculo a la izquierda del 0 , y $(S \circ T)^2$ a un dominio en la intersección de este círculo y el que está centrado en cero. La potencia $(S \circ T)^3$ coincide con la identidad. Dicho de otra manera, los puntos i y $\zeta_1 \sim \zeta_2$ tienen un grupo de isotropía no trivial. En otras palabras, sus estabilizadores bajo la acción de $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ contienen un elemento distinto de

¹⁸Recordemos que hay que elegir un punto en \mathbb{C}/R y en su fibra bajo π para definir a \tilde{h} .

la identidad.

La presencia de puntos con estabilizadores no triviales no es coincidencia. Como se describe en [13], la acción de \mathbb{Z}_2 alrededor del punto i codifica la presencia de un automorfismo complejo de orden 4 para el toro dado por la retícula $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, que es la retícula cuadrada $R = R(1, i)$ de \mathbb{C} . En efecto, observemos que la transformación dada por multiplicar por i preserva R y descendiende a una función holomorfa en \mathbb{C}/R . Similarmente, z_1 determina una estructura para T^2 con un automorfismo de orden 6, y su retícula asociada produce una teselación triangular del plano. Es bien sabido que estas son las únicas dos retículas *regulares* del plano, y son excepcionalmente simétricas. El resto de los puntos en D representan toros complejos cuyos automorfismos no fijan a la proyección de 0. En general, es un fenómeno común que algunos de los objetos estudiados en los problemas de móduli admiten automorfismos no triviales. Puesto que estos automorfismos son miembros de los grupos bajo los cuales se clasifica, no es natural ignorarlos, de manera que forman parte de la estructura del espacio de parámetros. Esta cierta irregularidad es un problema, pues impide realizar el espacio de parámetros como un espacio homogéneo. Para una discusión relevante, ver el apéndice.

Una forma de resolver esto es añadir estructura adicional a nuestros objetos. Antes de discutir este punto, hagamos una primera definición ingenua.

Definición 2.16. Supongamos que $g > 0$. Denotaremos por \mathcal{M}_g al espacio de todas las clases de isomorfismo de estructuras complejas definidas en la superficie compacta de género g .

Naturalmente, el papel de isomorfismo en este contexto es jugado por los biholomorfismos. Como vimos, el teorema de Riemann-Roch implica que \mathcal{M}_0 es un punto. La discusión anterior nos da una forma de representar a \mathcal{M}_1 a partir de un subconjunto de \mathbb{C} . Nuestra intención es hacer de \mathcal{M}_g un espacio topológico suficientemente agradable¹⁹. Como vimos en el ejemplo del toro, es sensato esperar que, de poder describirlo satisfactoriamente, el espacio \mathcal{M}_g tiene puntos singulares, asociados a superficies de Riemann especialmente simétricas. El siguiente teorema sugiere por qué también es sensato esperar pocos automorfismos.

Teorema 2.6.1. (Hurwitz) Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 2$. Entonces $|Aut(X)| \leq 84(g - 1)$.

Referimos a la sección 7.2 de [8] para una prueba de este teorema. Los grupos de automorfismos que alcanzan la cota anterior se conocen como los grupos de Hurwitz. Un ejemplo es $G = \text{PSL}(2, \mathbb{Z}_7)$, que tiene orden $168 = 84(3-1)$ y es el grupo de automorfismos de la *cuártica de Klein*, una curva compleja K de género 3. Por el teorema de uniformización, K es un cociente del disco de Poincaré D , por lo que es una superficie hiperbólica. Un dominio fundamental²⁰ para K es un triángulo hiperbólico cuyas traslaciones por G dan una teselación regular de D . Un recuento de la historia de esa curva puede ser encontrado en [23], así como una copia del artículo original de Klein en el que se estudia esta variedad algebraica por primera vez. Este artículo también tiene una de las primeras encarnaciones de los *mapas* en el contexto de superficies de Riemann. Puesto que la presencia de automorfismos impide dar una descripción satisfactoria de \mathcal{M}_g , introducimos suficiente rigidez para evitar este problema.

Definición 2.17. Sea X una superficie de Riemann y $v = (x_1, \dots, x_n)$ una n -tupla de puntos en X . Diremos que $M = \{x_1, \dots, x_n\}$, con el orden dado por v , es un conjunto de puntos marcados en X , de forma que la pareja (X, M) es una superficie de Riemann *marcada*.

¹⁹En la teoría de móduli, se tiene una distinción entre espacios de móduli *finos* y *gruesos*. La intención usual es encontrar un espacio fino. Sin embargo, generalmente la presencia de automorfismos hace imposible esta construcción. Una discusión concreta de este hecho aparece, por ejemplo, en [13].

²⁰Ver el capítulo 9 de [4] o el capítulo 3 de [22].

Dos superficies marcadas (X, M) y (X', M') son isomorfas cuando existe un biholomorfismo $f : X_1 \rightarrow X_2$ tal que $f(x_1) = x'_1$. En particular, un automorfismo de la superficie marcada (X, M) debe fijar los puntos marcados.

Definición 2.18. Sean $g \geq 0$ y $n \geq 1$ enteros. Denotaremos por $\mathcal{M}_{g,n}$ al espacio de clases de equivalencia de superficies de Riemann de género g con n puntos marcados.

El teorema de Hurwitz implica que una superficie de Riemann X de género $g > 1$ tiene un número finito de automorfismos, de modo que sólo hay un subconjunto finito en X que puede ser fijado por cualquiera de ellos. Esto es, si n es suficientemente grande, los automorfismos de X no fijan alguna de las n marcas en X , y por lo tanto no pueden ser considerados automorfismos de la superficie marcada. La introducción de marcas para X permite construir un buen espacio de parámetros, denominado *fino*. En los capítulos subsecuentes, desarrollaremos las herramientas que necesitaremos para dar una descripción combinatoria del espacio decorado $\mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n$.

Observemos que al construir el espacio $M = H^+ / \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, decidimos representar cada estructura compleja del toro por el parámetro modular τ , que define la retícula $R(1, \tau)$, y que representa una $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ -órbita. Como discutimos, los automorfismos de \mathbb{C} que descienden a isomorfismos entre dos toros son multiplicaciones por un número complejo. En particular, fijan al punto $0 \in \mathbb{C}$, que es el elemento neutro del grupo discreto $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. Así, tenemos que M es de hecho el espacio $\mathcal{M}_{1,1}$ ²¹.

Como hemos discutido, podemos encontrar muchas presentaciones diferentes para una superficie de Riemann X compacta: X es isomorfa a una curva algebraica proyectiva no singular, al cociente de un espacio simplemente conexo por la acción de un grupo discreto, a una cubierta finita de la esfera perforada. En cada uno de estos contextos uno puede hacer una idea intuitiva de variación continua de la superficie X ; a saber, por deformaciones de los coeficientes de un polinomio, de los generadores de un grupo discreto de matrices, o bien de los puntos perforados en $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. La construcción concreta de los espacios \mathcal{M}_g y $\mathcal{M}_{g,n}$ requiere dilucidar la noción de familia de superficies de Riemann. En el resto de este trabajo damos una presentación más para la superficie X : como una gráfica dibujada sobre una superficie.

2.7. Notas y referencias

El capítulo resume las propiedades básicas de las superficies de Riemann compactas y las presenta de distintas formas: como una superficie abstracta determinada por parches complejos, como un espacio de órbitas de una acción discreta, y como una cubierta ramificada de la esfera, que puede interpretarse como una cubierta de la esfera perforada. Además, introducimos intuitivamente el problema de móduli de Riemann y presentamos un acercamiento a su solución para el caso del toro. El contenido está tomado de las referencias [4], [8], [9], [13], [14], [37], [22], [24], [26], [39] y [30].

Para la sección de conceptos básicos, la definición 2.2 corresponde a la definición 1.1 de [9]. Similarmente, la noción de función holomorfa, mapeo holomorfo y función meromorfa fueron obtenidas de las definiciones 1.6, 1.9 y 1.12, respectivamente, mientras que el teorema 2.1.1 es enunciado como una observación en la primera sección de [9], pero nosotros damos una prueba. Los ejemplos del plano proyectivo, el plano complejo extendido y el toro son estándar, y sus

²¹Esta afirmación necesita de mucho más para justificarse, pero nos conformaremos con la intuición que hemos discutido.

descripciones aparecen en [9], respectivamente, como los ejemplos 17.20, 1.5 (c) y 1.5 (d). El ejemplo 2.5 se basa en la discusión que sigue al teorema 2.1 de [30]. El teorema 2.1.2 aparece como el teorema 2.1 de [9], y hemos reescrito su prueba para clarificarla; sus corolarios son inmediatos y también son enunciados en el libro de Forster.

Para la sección de ramificación, usamos [9] y [26]. Muchos de los teoremas citados de Forster piden por hipótesis que las funciones holomorfas consideradas sean propias. Puesto que nos centramos en superficies compactas, obviamos este requerimiento, como discutimos. La definición de cubierta ramificada se basa en la definición 4.3 de [9]. Nuestro teorema 2.2.1 organiza y demuestra una observación bajo la sección 4.23 de [9], mientras que el teorema 2.2.3 aparece como el teorema 4.24. Por otro lado, el enunciado del teorema 2.2.2 está tomado del teorema 4.6 de [9] y la prueba es nuestra. El teorema de compactación y de unicidad de la compactación están tomados directamente de la sección 8 de [9]; los argumentos subsecuentes son originales. La discusión final está basada en la sección que sigue al teorema 1.8.14 de [26].

La sección del teorema de Riemann-Roch está tomada de la sección 16 de [9] y del capítulo 3.2 de [39]. Nuestra presentación está escrita de forma que la fuerza total del teorema de Riemann-Roch sea innecesaria, y nos es suficiente la desigualdad original de Riemann. La idea está basada en la discusión del capítulo 1 de [26], en la que presentamos una caracterización de las superficies de Riemann como cubiertas de la esfera perforada. Hemos completado los huecos para mejorar la discusión de Lando y Zvonkin al hacer uso los teoremas técnicos de la sección 8 de [9] (teorema de compactación) y la desigualdad de Riemann.

Para la sección 2.3 hemos utilizado completamente el libro [26]. La elección de estrella base como un sistema de representantes de $\pi_1(\mathbb{P}^1\mathbb{C}^*, x)$, la definición de constelación y el teorema de existencia de Riemann corresponden a las definiciones 1.2.12, 1.1.1 y al teorema 1.8.14, respectivamente. La proposición 2.4.1 es un resultado conocido; la prueba es original y decidimos usarla para motivar mejor la definición de constelación. La proposición 2.4.2 recupera las construcciones 1.2.7 y 1.2.8 de [26] en una proposición mejor enunciado, y hemos hecho más concisa su prueba.

El contenido de la sección 2.4 está basado en [4], [37], [22] y [7]. La definición de acción propiamente discontinua corresponde al teorema 2.2.1 de [22]. La discusión subsecuente resulta del teorema 6.2.1 de [4], aunque damos una explicación intuitiva basada en la teoría del capítulo 1. Después, lo enunciamos como el teorema 5.1.1. El teorema de uniformización es clásico, y referimos a [7]. El teorema 2.5.2 es bien conocido, y la prueba que damos es nuestra.

Para la sección 2.5 nos basamos en las secciones 3.3 y 7.2 el libro [39]. La exposición del espacio de móduli del toro es original. La discusión sobre la introducción de marcas para facilitar el problema de móduli está basada en la sección A del capítulo 2 de [13], de donde tomamos también la justificación de esta estrategia sostenida sobre el teorema de Hurwitz. La definición de superficie marcada sigue naturalmente de esa misma discusión.

Capítulo 3

Mapas en superficies orientadas

En el capítulo previo, logramos encontrar una descripción topológica de una superficie de Riemann; a saber, a través de un grupo de permutaciones y una elección de k puntos en la esfera. El paso a esta descripción nos permitirá redirigir nuestra atención a objetos combinatorios que admiten una descripción que es, a primera vista, más simple que la de una estructura compleja. En este capítulo daremos una breve exposición de la teoría de los llamados *mapas*, gráficas que están dibujadas o *encajadas* en una superficie. Además, construiremos la noción equivalente de *gráfica de listones* que desarrollaremos bastante más en el siguiente capítulo.

3.1. Mapas

Primero, recordemos que una *gráfica* es una pareja (V, E) , en la que V es un conjunto finito de *vértices* y $E \subset 2^V$ uno de *aristas* entre los vértices de V , en donde cada $e \in E$ satisface $|e| = 2$. Diremos que V y E son los conjuntos de vértices y aristas de G , respectivamente.

Bajo esta definición, podemos pensar que la arista $\{u, v\}$ representa una conexión entre los vértices u y v . Observemos que es imposible encontrar otra tal conexión, pues E es un conjunto.

Para poder incluir las nociones de aristas múltiples y lazos recurriremos a la siguiente definición más formal y abstracta usada en [32]:

Definición 3.1. Una gráfica es una terna $\Gamma := (V, E, i)$ donde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto finito de vértices, E es un conjunto de aristas y $i : E \rightarrow (V \times V)/S_2$ ¹ es la función de *incidencia*, de modo que una arista e y un vértice v son incidentes si $v \in i(e)$. Así, el número $a_{ij} = |i^{-1}(v_i, v_j)|$ da la cantidad de aristas entre los vértices v_i y v_j . Un *lazo* es una arista e tal que $i(e) = (V_j, V_j)$ para alguna $1 \leq j \leq n$. El *grado* o valencia de un vértice es la cantidad $\delta(v)$ de aristas que inciden en él, contando dos veces a los lazos. Esto es, $\delta(v) = \sum_{i \neq j} a_{ij} + 2a_{ii}$. Así, diremos que dos vértices son adyacentes si $a_{ij} > 1$, y llamaremos a los elementos de $i^{-1}(u, v)$ aristas *paralelas*. Por último, el grado mínimo $\delta(\Gamma)$ de Γ es el mínimo del conjunto $\{\delta(v) \mid v \in V\}$, y la lista de grados o el *tipo* de Γ es la lista $(\delta(v_i))_i$, en orden no creciente.

Es natural representar una gráfica Γ como un dibujo. A saber, podemos poner un punto negro

¹Tomamos el cociente por el grupo simétrico S_2 para entender a las aristas como parejas no ordenadas de vértices.

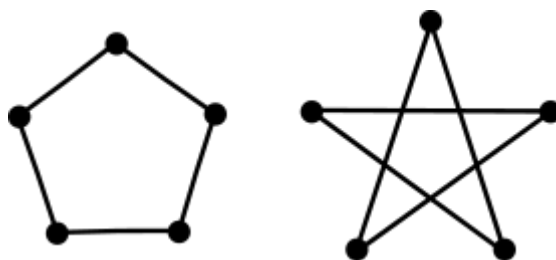


Figura 3.1: Dos representaciones de la misma gráfica. Las intersecciones internas de las aristas de la estrella no representan ningún vértice de la gráfica.

en en plano por cada vértice de Γ , etiquetarlo correspondientemente, y dibujar una curva entre dos puntos si los vértices que representan son adyacentes. Evidentemente hay una infinidad de maneras de dibujar de esta forma a Γ , como se ve en la figura 3.1.

Así como la representación de una gráfica es accidental, diferentes etiquetados para sus vértices y aristas no cambian su estructura de incidencia, y debemos considerarlas equivalentes. Concretamente,

Definición 3.2. Diremos que dos gráficas $G = (V, E, i)$ y $H = (V', E', i')$ son *isomorfas* si existen biyecciones $f : V \rightarrow V'$ y $h : E \rightarrow E'$ para las que $i' \circ h = \phi \circ i$, donde $\phi : (V \times V)/S_2 \rightarrow (V' \times V')/S_2$ está inducida por f .

Esta definición difiere un poco de la noción clásica de isomorfismo de gráficas. En la literatura usual, se dice que un isomorfismo entre las gráficas tradicionales G y H es una biyección $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que para cualesquiera $u, v \in V(G)$ se tiene que $\{u, v\}$ es una arista de G si y sólo si $\{f(u), f(v)\}$ es una arista de H . Cuando exista una tal biyección, diremos que f es un isomorfismo *tradicional*. Con esta definición, vemos que f induce una función bien definida $\tilde{f} : E(G) \rightarrow E(H)$ dada por $\{u, v\} \mapsto \{f(u), f(v)\}$, por lo que resulta innecesario acompañar a f con una biyección de aristas. El problema es que esta noción no identifica la equivalencia entre gráficas con aristas paralelas o lazos, como es de esperarse. Por ejemplo, dos gráficas que consisten en un vértice con dos lazos claramente tienen la misma estructura y hay dos isomorfismos entre ellas, pero es imposible decir esto con un isomorfismo tradicional.

Tomemos una gráfica $G = (V, E, i)$. Dado $e \in E$, tomemos un vértice abstracto v_e que declaramos incidente a los extremos de e . Si dibujamos a G , podemos pensar que seleccionamos un punto medio dentro de cada arista, donde dibujamos un nuevo vértice de tal forma que obtenemos el dibujo de una gráfica distinta a G . El proceso puede convertir a cada lazo o arista múltiple en un par de aristas en el sentido usual. Esta imagen intuitiva tiene una construcción formal.

Definición 3.3. Sea $G = (V, E, i)$ una gráfica. Sea V_E el conjunto de *puntos medios* de las aristas de G . A saber, V_E satisface que cada $v_e \in V_E$ es un vértice de grado 2 que subdivide a la arista e .²

El *refinamiento*³ de G es la gráfica $G_E := (V \sqcup V_E, E \sqcup E, i_E)$, donde la relación de incidencia $i_E : E \sqcup E \rightarrow V \times V_E$ está dada como sigue: si $e \in E$ es tal que $i(e) = [(u_1, u_2)]$, el vértice $v_e \in V_E$ es adyacente a u_1 y a u_2 , de modo que $(e, i) \mapsto (u_i, v_e)$ para $i \in \{1, 2\}$. Llamamos al conjunto

²Formalmente, podemos tomar $V_E := E$.

³En [5] se da una definición más abstracta y simple de gráfica que incluye naturalmente el concepto de media arista. Sin embargo, elegimos utilizar la notación de [32], que es más concisa. Ver el apéndice.

$HE := E \sqcup E = E(G_E)$ las *medias aristas* de G , que también son conocidas como sus *dardos* en la literatura. Llamaremos al conjunto de dardos incidentes en el vértice v la *vecindad* de v .

Por otro lado, demos un vistazo a la figura 3.2. Ambos dibujos representan a la misma gráfica y podemos notar que en ambas representaciones el dibujo divide al plano en un par de regiones acotadas y una región no acotada. En la representación izquierda, ambas regiones acotadas contienen un vértice de grado 1 en su interior y uno de grado 2 en su frontera, y la región no acotada no tiene vértices interiores⁴, mientras que en el dibujo de la derecha es la región no acotada la que contiene dos vértices de grado 1. Así, al elegir un dibujo para la gráfica, parece ser que la estamos dotando de información topológica adicional que no es inherente a su estructura combinatoria. Para estudiar sistemáticamente esta estructura adicional, restringiremos nuestra

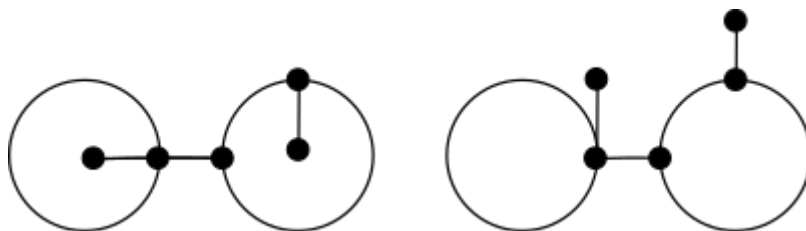


Figura 3.2: Dos encajes de una gráfica en el plano.

atención a las gráficas *encajadas* en superficies, que llamaremos *mapas*. Usamos la definición de [26], hallada en el capítulo 1.

Definición 3.4. Sea X una superficie orientada. Fijemos una gráfica G con conjunto de vértices y aristas $V(G)$ y $E(G)$, respectivamente. Un mapa Γ es un subconjunto de X dado por la unión de los conjuntos $V(\Gamma)$ y $E(\Gamma)$, en donde:

- $V(\Gamma)$ es un conjunto de $|V(G)|$ puntos distintos en X , que corresponden a los vértices de G .
- $E(\Gamma)$ es un conjunto de curvas en X cuyos extremos yacen en $V(\Gamma)$, y que representan a las aristas de G . Además, la intersección de dos elementos de $E(\Gamma)$ es vacía o es exactamente un punto de $V(\Gamma)$.
- Cada componente conexa de $X \setminus \Gamma$, que llamaremos una *cara* de Γ , es homeomorfa a un disco abierto.

Diremos que Γ es un *encaje* de la gráfica G , y que G es su gráfica subyacente.

Es importante no confundir la noción de gráfica encajada con la de encaje tradicional de espacios topológicos. En la terminología usual, Si pensamos en una gráfica abstracta G como un complejo celular unidimensional, un encaje topológico en la superficie X consiste en una inyección de G en X . La definición 3.4 es más restrictiva: el encaje debe ser celular. Esto es, diremos que G está encajada en X si su dibujo define una descomposición celular de X . Por ejemplo, observemos que los dibujos de la figura 3.2 no pueden ser considerados mapas, a menos que pensemos que están siendo dibujados en la esfera: si las gráficas estuvieran dibujadas en el plano, ambos dibujos tendrían que una cara no acotada que no es simplemente conexa, y por lo tanto distinta de un disco topológico.

⁴Esto es solamente heurístico, pues técnicamente tales vértices no yacen en el interior de la cara: como veremos, la cara de un mapa es una componente conexa de su complemento en la superficie en que se encaja.

Abusaremos un poco de la terminología para identificar G con Γ cuando sea conveniente y se entienda que estamos pensando a Γ como una gráfica encajada en X . Consideraremos sólomente gráficas *conexas*: es decir, gráficas G que admiten un encaje conexo. Esto es equivalente a decir que para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(G)$ podemos construir una *trayectoria* entre u y v , que es una sucesión de vértices $(u = v_1, v_2, \dots, v_n = v)$ en la que $\{v_i, v_{i+1}\}$ es una arista de G , con $1 \leq i \leq n - 1$.

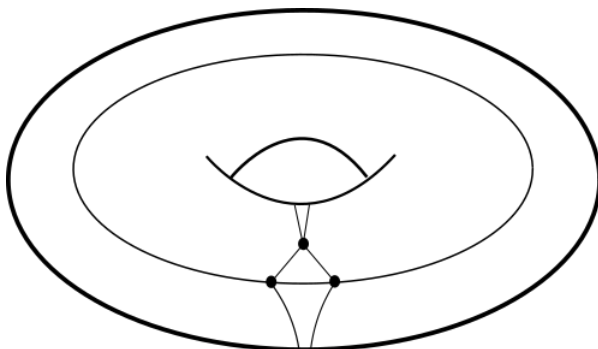


Figura 3.3: Un mapa cuya superficie subyacente es el toro con 3 vértices, 3 caras y 6 aristas

3.2. El modelo de permutaciones

El hecho de que una Γ está dibujada en una superficie orientada también puede ser cifrado a través de un *modelo de permutaciones*. A saber, si G es un mapa con conjunto de vértices V y conjunto de aristas E , es posible codificar la información de G con permutaciones que representan cada uno de sus vértices, de acuerdo a la orientación de la superficie en la que está dibujada. La construcción del modelo es como sigue. Una discusión completa se halla en el capítulo 1 [26] y el artículo [40].

- Enumeremos las medias aristas de Γ , $\{e_1, \dots, e_{2|E|}\}$, y etiquetemos e_i con el número i , de modo que la etiqueta queda a la izquierda de la media arista correspondiente⁵.
- Alrededor de un vértice v , la orientación de la superficie induce un orden cíclico de los dardos de v ⁶. Recorridos en ese orden, obtenemos una lista de etiquetas (i_1, \dots, i_k) de tamaño $\delta(v)$. Identificamos al vértice v con el ciclo $c_v = (i_1 i_2 \dots i_k)$.
- A su vez, si las medias aristas e_i, e_j resultan de una arista e de Γ , identificamos a e con la trasposición $t_e = (i j)$

Así, podemos identificar los vértices del mapa Γ con los ciclos de la permutación $\sigma := \prod_{v \in V} c_v$ y sus aristas con las trasposiciones de $\alpha := \prod_{e \in E} t_e$. Observemos que tanto los factores de σ como

⁵Para fijar ideas, podemos suponer que nuestra superficie carga una estructura diferencial, y que el dardo e_i tiene por extremo al vértice p de Γ . Elijamos un vector u de $T_p X$ en la dirección del dardo e_i . Escribamos la etiqueta i en un punto cercano a p que podamos identificar con la punta de otro vector tangente, digamos v . Diremos que la etiqueta i está a la izquierda de e_i si el determinante de la matriz (uv) es positivo.

⁶De nuevo podemos utilizar el plano tangente de X : en una vecindad pequeña de v , identificamos las medias aristas e_i de Γ con ciertos vectores tangentes u_i . Que X esté orientada implica que hay un sentido positivo en $T_v X$ que induce un orden cíclico a los u_i y que damos a los e_i .

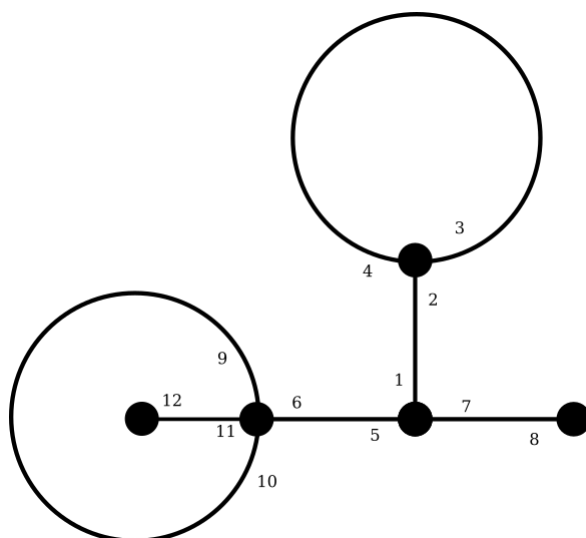


Figura 3.4: Etiquetamos las 12 medias aristas de Γ

los de α son ajenos, pues no hay dos dardos con la misma etiqueta. La pareja $\{\sigma, \alpha\}$ es conocida como un *sistema de rotaciones*. Analicemos el ejemplo de la figura 3.4, que corresponde a una gráfica Γ encajada en la esfera. En este caso, se tiene

$$\begin{aligned} \sigma &= (1\ 5\ 7)(2\ 3\ 4)(6\ 9\ 11\ 10)(12)(8), \\ \alpha &= (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12). \end{aligned}$$

Podemos ver que el subgrupo de S_{12} generado por σ y α actúa transitivamente en el conjunto de etiquetas de $E = \{1, 2, \dots, 12\}$. En efecto, puesto que la gráfica subyacente de Γ es conexa, es posible partir de un dardo y llegar a otro a través de una serie de trasposiciones de medias aristas y rotaciones alrededor de vértices elegidos adecuadamente. Utilizando un sistema de cálculo simbólico⁷, uno puede verificar que $G = \langle \sigma, \alpha \rangle = S_{12}$, por lo que la transitividad no es sorprendente. Por último, observemos que la permutación $\alpha^{-1}\sigma^{-1}$ se factoriza en tres ciclos:

$$\alpha^{-1}\sigma^{-1} = (1\ 4\ 2\ 7\ 8\ 5\ 10\ 6)(9\ 11\ 12)(3)$$

El primer ciclo corresponde a todas las etiquetas escritas sobre la cara no acotada del mapa Γ recorridas en la dirección positiva⁸, el segundo corresponde a la cara que contiene un vértice interior de grado 1, y el tercer ciclo corresponde a la cara acotada y vacía. Además, tenemos que $\sigma\alpha\phi = \text{Id}$. Dicho de otra forma, G es una 3-constelación de grado 12. Esto ocurre en general:

Proposición 3.2.1. *Un mapa Γ induce una 3-constelación $C = [\sigma, \alpha, \phi]$, donde $\phi := \alpha^{-1}\sigma^{-1}$, para la cual α es una involución sin puntos fijos.*

Demostración. Construimos C de acuerdo al modelo de permutaciones. C es una 3-constelación

⁷Por ejemplo, SymPy

⁸Parece contradecir la intuición que esta sea la dirección positiva, pues recorrer las aristas de Γ en el sentido especificado por el ciclo parece ser equivalente a recorrer una curva cerrada en la dirección de las manecillas del reloj. Sin embargo, estamos pensando a tal curva como la frontera de un disco que contiene al punto ∞ , y que podemos suponer es su centro. Así, si imaginamos que observamos la esfera desde su polo norte, vemos que en realidad la curva es recorrida en la dirección positiva.

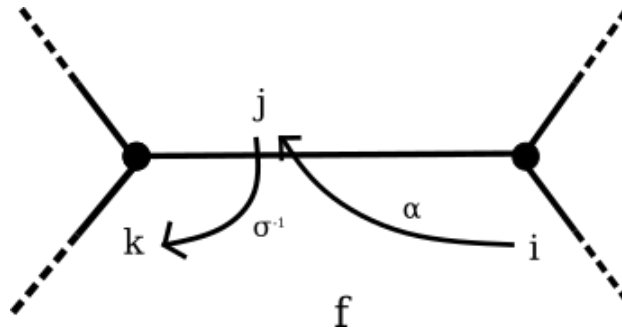


Figura 3.5: La trasposición α envía la etiqueta i en la etiqueta j , que σ^{-1} envía en k , la etiqueta siguiente en el recorrido positivo de la cara f

puesto que $\sigma\alpha\phi = \sigma\alpha\alpha^{-1}\sigma^{-1} = 1$. Además, Γ es conexa. Si aplicamos σ suficientes veces, podemos llevar un dardo en la vecindad v en cualquier otro dardo que incida en él. Por otro lado, aplicar α intercambia los dardos que conforman una arista. Así, podemos construir cualquier trayectoria en Γ utilizando un elemento de $\langle C \rangle$. Esto implica que C actúa transitivamente en el conjunto de etiquetas para los dardos de Γ . Además, α se factoriza en trasposiciones de las medias aristas de Γ , de modo que no tiene puntos fijos. \square

Ahora bien, la introducción del factor ϕ parece artificial, pero tiene una interpretación geométrica y su notación es sugerente: la permutación ϕ representa las caras del mapa Γ . En efecto, si el conjunto de etiquetas dentro de una cara f es A_f , podemos identificarlo con una permutación $(i_1 \cdots i_k)$, con $i_j \in A_f$, de modo que el orden cíclico obtenido queda inducido por un recorrido por las etiquetas en el orden positivo dado por la orientación de la cara. Para hacer tal recorrido basta iniciar en un dardo etiquetado por i_1 , aplicar α para movernos hacia su dardo opuesto y rotar en el vértice correspondiente en el sentido negativo, de modo que terminemos en el dardo siguiente incidente en la cara. La figura 3.5 da una explicación más visual.

Por construcción, σ se factoriza en tantos ciclos ajenos como vértices en Γ . Asimismo, el número de trasposiciones de α coincide con su número de aristas, y los ciclos de ϕ corresponden a sus caras. Notemos, además, que cada dardo incide en exactamente un vértice, conforma exactamente una arista y está en exactamente una cara.

Definición 3.5. Sea $C = [\sigma, \alpha, \phi]$ una 3-constelación de grado n . Denotemos por $l(c)$ la longitud de un ciclo en S_n . Supongamos que σ, α y ϕ se factorizan en ciclos ajenos como $s_1 \cdots s_j, a_1 \cdots a_k$, y $f_1 \cdots f_l$, respectivamente, de manera que

$$\sum_{i=1}^j l(c_i) = \sum_{i=1}^k l(a_i) = \sum_{i=1}^l l(f_i) = n.$$

Denotemos por λ_σ a la tupla (c_1, \dots, c_n) , que suponemos en orden no creciente, y por λ_α y λ_ϕ a las tuplas análogas. Decimos que $P = [\lambda_\sigma, \lambda_\alpha, \lambda_\phi]$ es el pasaporte o el *tipo combinatorio* de C . Si C es el modelo combinatorio de un mapa, λ_σ es la lista de grados de su gráfica asociada, y λ_ϕ da el número de aristas que conforman cada cara.

Así, el nombre de *grupo cartográfico* cobra su significado: es el grupo asociado a un mapa. Sin embargo, es importante observar que la estructura que codifica la información del mapa M es la constelación $C = [\sigma, \alpha, \phi]$, y no el grupo cartográfico G . De hecho, el uso de las letras griegas

σ , α y ϕ corresponde a las palabras francesas para vértice, arista y cara: *sommet*, *arête* y *face*, respectivamente. En la terminología original de Grothendieck [10], [19], el nombre de *cartográfico* hace referencia al grupo

$$C_2^+ = \langle \rho_s, \rho_a, \rho_f \mid \rho_a^2, \rho_s \rho_a \rho_f \rangle.$$

Observemos que el grupo cartográfico de una 3-constelación es una representación transitiva de C_2^+ en S_{2n} . De hecho, tales representaciones de C_2^+ corresponden por completo a los mapas en superficies orientadas. La transitividad asegura la conexidad del mapa, que pedimos tras la definición 3.4.

Tenemos pues que, a través de su refinamiento, un mapa con n aristas induce un subgrupo de S_{2n} que actúa transitivamente en $[2n]$, y cuya estructura no depende del etiquetado elegido. En efecto, dos elecciones distintas producen dos sistemas de rotaciones $\{\sigma_1, \alpha_1\}$ y $\{\sigma_2, \alpha_2\}$, para los que existe una función $f \in S_{2n}$ que traduce las etiquetas. Así, $\sigma_1 = f^{-1} \sigma_2 f$ y $\alpha_1 = f \alpha_2$, y por lo tanto $\langle \sigma_1, \alpha_1 \rangle = f^{-1} \langle \sigma_2, \alpha_2 \rangle f$. Más aún, la permutación ϕ permite recuperar las caras del mapa, pues cada uno de sus ciclos describe un recorrido ordenado por los vértices que yacen en su frontera.

El tamaño de un ciclo de γ coincide con el grado del vértice que representa. Uno podría pensar que dos mapas M_1, M_2 del mismo tipo combinatorio tienen el mismo grupo cartográfico, pues sus permutaciones σ_i correspondientes tienen la misma estructura cíclica, y por lo tanto son conjugadas en S_{2n} través de cierta permutación f . Sin embargo, en general f no conjugará simultáneamente a las permutaciones α_i . Si este fuera el caso, f induciría un isomorfismo entre las gráficas subyacentes de los mapas considerados. Tenemos pues varias nociones posibles de equivalencia entre nuestros objetos, que debemos ordenar.

Definición 3.6. Tomemos dos k -constelaciones $C_1 = [g_1, \dots, g_k]$ y $C_2 = [h_1, \dots, h_k]$ de grado n . Diremos que C_1 y C_2 son *isomorfas* si existe una biyección $f \in S_n$ para la que $h_i = f^{-1} \circ g_i \circ f$.

Bajo esta definición, los grupos cartográficos de constelaciones isomorfas resultan ser conjugados.

Observemos la figura 3.6. Ambos mapas tienen el mismo tipo combinatorio y están encajados en el plano, o bien, la esfera. Sin embargo, sus gráficas subyacentes no pueden ser isomorfas: la segunda contiene una trayectoria de longitud 2 entre dos vértices de grado 1, pero la primera no. Dos subgrupos isomorfos de S_n no son necesariamente conjugados. Así, a priori los grupos

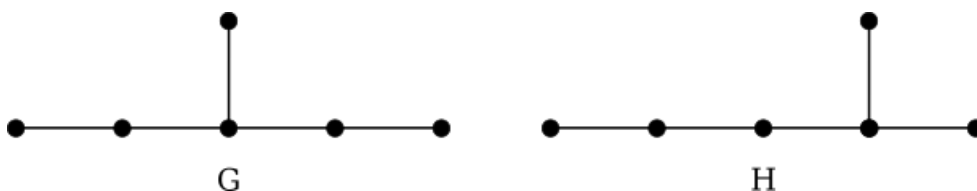


Figura 3.6: Dos gráficas no isomorfas del mismo tipo.

cartográficos de G y H podrían ser isomorfos o incluso coincidir. Utilizando la paquetería de cálculo simbólico SymPy vemos que el grupo de H tiene orden 14400, mientras que el de G tiene orden 7200, por lo que este no es el caso.

Por otro lado, no hay una forma clara de distinguir topológicamente los mapas de la figura. La única cara de ambos mapas tiene a los 6 vértices en su frontera, por lo que no podemos

argumentar como antes para convencernos de que los encajes son distintos.

Definición 3.7. Diremos que dos mapas $\Gamma_1 \subset X_1$ y $\Gamma_2 \subset X_2$ son *isomorfos* si existe un homeomorfismo entre X_1 y X_2 que preserva la orientación y cuya restricción a Γ_1 induce un isomorfismo entre las gráficas subyacentes G_1 y G_2 .

Para nuestros propósitos, un homeomorfismo $h : X_1 \rightarrow X_2$ preserva la orientación si dada una curva $\gamma : I \rightarrow X_1$ orientada positivamente, la curva $h \circ \gamma$ también tiene una orientación positiva en X_2 . Esta última definición tiene la siguiente virtud:

Proposición 3.2.2. *Dos mapas isomorfos inducen 3-constelaciones isomorfas.*

Demostración. Elijamos etiquetas para las medias aristas de Γ_1 . El homeomorfismo h se restringe a un homeomorfismo entre Γ_1 y Γ_2 , que forma que podemos pensar en las imágenes de los puntos medios de Γ_1 como los puntos medios de Γ_2 . Elijamos etiquetas para las medias aristas de cada mapa. La función h se restringe a un isomorfismo entre las gráficas subyacentes G_1 y G_2 . Por la elección de puntos medios en G_2 , h de hecho induce un isomorfismo entre los refinamientos de Γ_1 y Γ_2 , que por lo tanto induce una función $f : [2n] \rightarrow [2n]$ entre los conjuntos de etiquetas.

Más aún, sea $\gamma : I \rightarrow X_1$ una curva pequeña y cerrada que rodea a v en la dirección positiva, con la propiedad de que toca cada dardo de v exactamente una vez, y supongamos que $c_v = (i_1 \dots i_{\delta(v)})$ indica el orden cíclico de los dardos de v . Si recorremos $h(\gamma)$ en la dirección positiva empezando en $h(i_1)$ necesariamente tenemos que el primer dardo de $f(v)$ que toca es $h(i_2)$: si este no fuera el caso, aplicamos h^{-1} para encontrar que γ toca un dardo i_j con $j > 2$ antes de tocar a i_2 , lo cual es imposible. Así, $h(\gamma)$ es una curva positiva alrededor de $f(v)$ que toca a las imágenes de los dardos de v en su orden cíclico, de modo que $c_{f(v)} = (h(e_{i_1}) \dots h(e_{i_k}) = (f(e_{i_1}) \dots f(e_{i_k}))$, por definición de f , y con $k = \delta(v) = \delta(f(v))$. Así, en efecto tenemos que f conjuga a las σ_i y las α_i , por lo que las constelaciones de Γ_1 y Γ_2 son conjugadas. \square

¿Qué hay de la dirección opuesta? Dada una 3-constelación $C = [g_1, g_2, g_3]$, ¿cómo construimos un mapa que induzca a C ? Las permutaciones g_i tienen una factorización por ciclos ajenos, digamos

$$\begin{aligned} g_1 &= v_1 \dots v_n \\ g_2 &= a_1 \dots a_m \end{aligned}$$

Si además g_2 es una involución sin puntos fijos, se tiene que C es un subgrupo de S_{2m} y los ciclos a_i son trasposiciones. Denotemos por V_i y A_i al conjunto de los números que aparecen en la notación de los ciclos v_i y a_i respectivamente. Iniciemos por construir una gráfica $G = (V, E, i)$ con $V = \{V_1, \dots, V_n\}$ y $E = \{A_1, \dots, A_m\}$. Las incidencias están dadas como sigue: cada arista $e \in E$ tiene por extremos los únicos dos vértices u, v tales que $u \cap e$ y $v \cap e$ son no vacíos. Dibujemos la gráfica G en el plano, ignorando los cruces de las aristas que no suceden en los vértices, y etiquetando cada vértice v de acuerdo al ciclo de g_1 que le corresponde, que denotaremos por c_v . Observemos que la orientación del plano induce un orden cíclico O_v en los dibujos de los dardos que inciden en cada vértice v : podemos suponer que hemos dibujado a G de tal forma que O_v coincide con c_v , como se muestra en la figura.

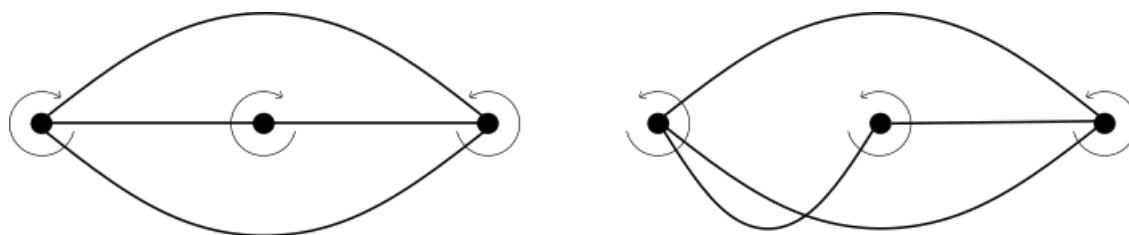


Figura 3.7: A la izquierda, los órdenes cíclicos de cada vértice se indican por un lazo orientado. A la derecha, dibujamos a G de modo que el orden cíclico inducido por la orientación de \mathbb{R}^2 coincide con los ciclos c_v .

Para construir nuestro mapa, cambiaremos un poco la representación de las medias aristas: sustituiremos cada arista de nuestro dibujo por un par de curvas paralelas que representan a las medias aristas que la conforman, y los vértices por pequeños discos orientados positivamente. Recordemos que la permutación g_1 debe cifrar el orden cíclico de las medias aristas en cada vértice, y tal orden debe ser determinado por la orientación del mapa que ahora queremos construir. Tomemos un vértice $v \in V$ y su ciclo asociado $c_v = (i_1 \dots i_{\delta(v)})$. Una arista e de v corresponde a cierta trasposición $(h k)$, donde h es uno de los números que aparecen en c_v ; de las dos curvas que representan sus medias aristas, la orientación del plano nos permite distinguir la izquierda, que elegimos y dotamos de una dirección para convertirla en una flecha que sale de v . Así, cuando hagamos lo mismo con el otro extremo de e , la curva paralela a h recibirá la etiqueta k y una dirección opuesta, formando una flecha que entra a v . De este modo, las aristas de G quedan representadas por *listones*. Además, cada listón determina una región orientada del plano cuya frontera hereda una orientación adecuada⁹, por lo que reemplazamos los dibujos de cada tira con un espacio homeomorfo a $[0, 1]^2$, el cuadrado con frontera.

Ahora, fijemos una etiqueta i , correspondiente a la media arista que brota de un vértice u en dirección a otro vértice w . Dado que C es una constelación, $g_3 = g_1^{-1}g_2^{-1} = g_1g_2^{-1}$. Tenemos pues que $i \cdot g_3$ corresponde a la media arista inmediatamente anterior a $u \cdot g_2$ en el orden cíclico de w , que en nuestro dibujo corresponde a recorrer continuamente un segmento de la frontera de un listón, continuar por la frontera de un disco adyacente y luego encontrar la frontera de otro listón, sin cruzar por el interior del dibujo. Así, siempre y cuando ignoremos los cruces que no corresponden a vértices, la órbita de i bajo g_3 , corresponde a recorrer una componente conexa de la frontera de una superficie. Concluimos que el espacio que resulta de nuestro dibujo es una superficie orientada M , cuya frontera tiene tantas componentes conexas como ciclos en g_3 . Por último, para cada componente conexa c_f de δM , tomemos un disco cerrado y orientado, e identifiquemos su frontera con la componente c_f de acuerdo a su orientación. Así, garantizamos que las orientaciones del disco y de M son compatibles, y por tanto obtenemos una superficie orientada X . Finalmente, si reconstruimos nuestro dibujo original de G sobre M obtenemos un encaje de G en la superficie X ; esto es, un mapa. En otras palabras, completamos la proposición 3.2.2

Teorema 3.2.1. *Dos mapas son isomorfos si y sólo si están asociados a 3-constelaciones isomorfas.*

Si la constelación C consiste en una elección de etiquetas para el mapa M , vemos que las permutaciones σ , α y ϕ se descomponen en V , E y F ciclos ajenos, respectivamente, donde V es el número de vértices, E el de aristas y F el de caras. Así, podemos calcular la característica de Euler $V - E + F$ del mapa M a través de su constelación. Recíprocamente, podemos determinar a priori el género del mapa que induce una constelación C calculando la característica de Euler

⁹A saber, los bordes del listón están orientados de manera compatible con la dirección positiva de su interior.

con σ , α y ϕ .

Observemos que, una vez construida la gráfica G , lo único que necesitamos para obtener la superficie M es la permutación g_1 , que determina el orden cíclico de cada vértice. A saber, una construcción más inmediata de M a partir de la constelación C es como sigue: dibujemos a G sobre el plano orientado, de forma que el orden cíclico inducido O_v coincide con el orden c_v , con c_v el ciclo de g_1 que corresponde al vértice v . Engrosamos los dardos de cada vértice para obtener tiras, y le damos una orientación a los bordes de cada tira de acuerdo a O_v , que representamos con flechas, como en la figura 3.8. Si pegamos las dos tiras que conforman una arista de acuerdo a tal orientación, obtenemos a la misma superficie orientada M^{10} .

La superficie M nos permite construir fácilmente un encaje de su gráfica subyacente, y podemos pensar en ella como una gráfica en la que las aristas son listones con una orientación en sus bordes, imagen que motiva la definición siguiente:

Definición 3.8. Diremos que una *gráfica de listones* es una gráfica con un orden cíclico c en el conjunto de medias aristas incidentes a cada vértice, y la denotaremos por $\Gamma = (G, V, i, c)$. Llamaremos a la superficie $M(\Gamma)$ la *realización topológica* de Γ , y a la superficie orientada $X(\Gamma)$ el *espacio total* de Γ . Diremos que el género de Γ es el género de su espacio total, y lo denotamos por $g(\Gamma) := g(X)$.

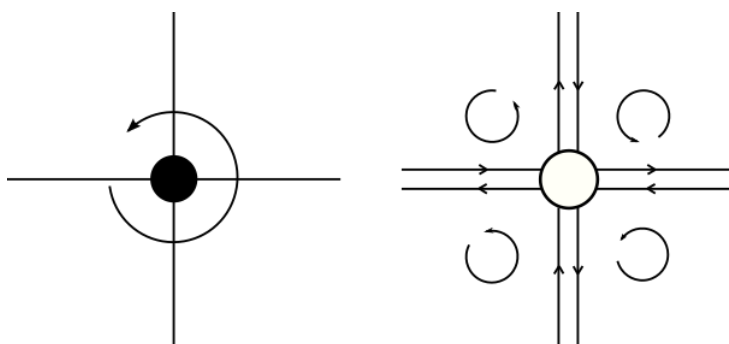


Figura 3.8: Las medias tiras que inciden en cada disco heredan la orientación del plano. Observemos que las flechas que brotan del vértice están a la izquierda.

Observación. Las construcciones previas garantizan que es posible orientar los bordes de cada listón sin incurrir en contradicciones: si recorremos una componente de la frontera, obtenemos siempre una trayectoria dirigida que eventualmente se cierra. Esto es, la construcción nos da siempre una superficie orientada. Intuitivamente, si la superficie con frontera M indujera una superficie X no orientable, entonces sería posible tomar un pequeño lazo y moverlo continuamente por X hasta obtener su versión reflejada. Puesto que dos caras adyacentes tienen orientaciones compatibles entre sí, esto es imposible. Sin embargo, uno podría imaginar que introducir “torceduras” en los listones (que corresponden a la identificación de dardos con orientaciones opuestas) permitiría construir superficies no orientables también¹¹.

Es importante notar que dos constelaciones isomorfas inducen siempre el mismo mapa, pues corresponden a distintos etiquetados para la misma gráfica encajada. Más adelante, necesitaremos una noción más fuerte de automorfismo para estudiar las simetrías de una gráfica de listones.

¹⁰Formalmente, reemplazamos cada tira con un espacio homeomorfo a $[0,1]^2 \setminus \{1 \times [0,1]\}$, e identificamos las dos tiras que representan una arista de acuerdo a sus orientaciones para obtener un cuadrado con frontera.

¹¹Ver la figura 7.1 en el apéndice para un ejemplo de una gráfica de listones más general.

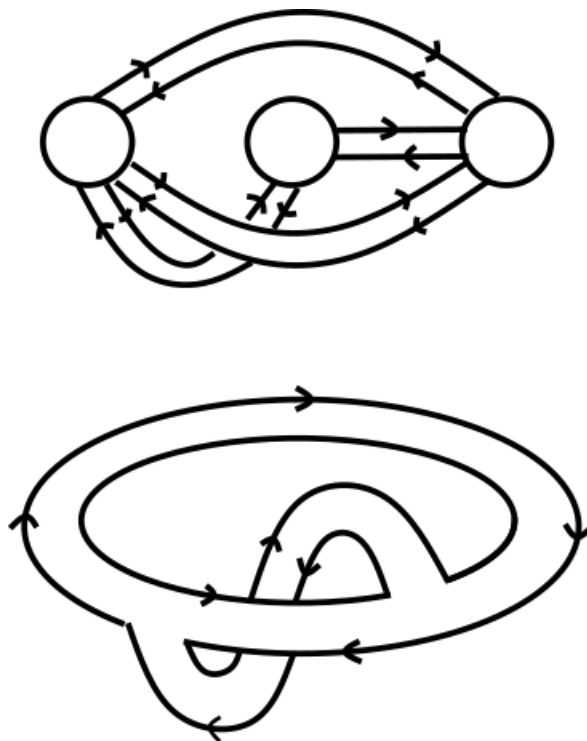


Figura 3.9: Para obtener la superficie M , reemplazamos a los vértices por discos y las aristas por un par de curvas orientadas, que convertimos en un cuadrado topológico con frontera.

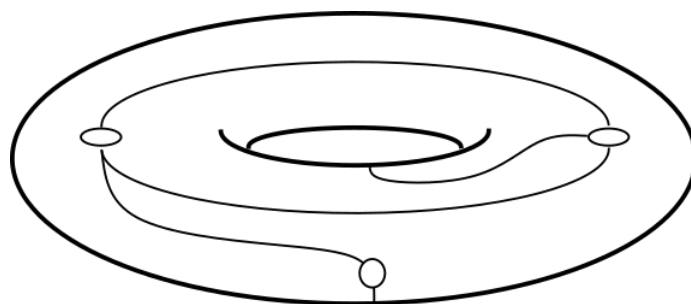


Figura 3.10: Pegamos discos en la frontera de M y obtenemos una superficie orientada, en este caso un toro. Por construcción, la gráfica subyacente de M queda encajada.

Definición 3.9. Fijemos un mapa M y elijamos una 3-constelación C de grado n inducida por M , cuyo grupo cartográfico es G . El grupo de automorfismos de M , denotado por $\text{Aut}(M)$ es el centralizador G en S_n . A saber,

$$\text{Aut}(M) = \{h \in S_n \mid h^{-1}gh = g \text{ para cada } g \in G\}$$

Por definición, un elemento $h \in \text{Aut}(M)$ satisface $h^{-1}Gh = G$. Una elección distinta de etiquetas induce una constelación con un grupo cartográfico que en general sólo es conjugado a G . Un automorfismo de M es una simetría verdadera del mapa M : en efecto, si h conmuta con todo elemento de G , conmuta con σ y α . Si $\sigma = c_1 \cdots c_n$ es una descomposición por ciclos ajenos de σ , se tiene que $h^{-1}\sigma h = h^{-1}c_1 \cdots c_n h = h^{-1}c_1 h \cdots h^{-1}c_n h = \sigma$. Cada $h^{-1}c_i h$ es también un ciclo ajeno, así que la conjugación por h permuta los ciclos de σ y por lo tanto los vértices de M . El mismo argumento muestra que h permuta los ciclos de ϕ , y por tanto las caras de M . Por otro lado, si $(i j)$ es una trasposición de α , M tiene una arista cuyas medias aristas están etiquetadas por i y j . Al ser un automorfismo, $h\alpha = \alpha h$, y la relación $i \cdot h\alpha = i \cdot \alpha \cdot h = j \cdot h$ nos dice que la imagen bajo h de la media arista apareada con i, j , coincide con la media arista apareada con $i \cdot h$. Esto es, h preserva las incidencias de la gráfica subyacente de M .

A pesar de que elegimos una constelación para M para definirlo, la estructura de $\text{Aut}(M)$ no depende de esa elección. Un etiquetado distinto conduce a una constelación isomorfa y por lo tanto a un grupo cartográfico conjugado a G , por lo que sus centralizadores son conjugados, y por lo tanto isomorfos.

Hasta ahora, las constelaciones $[\sigma, \alpha, \phi]$ que hemos utilizado satisfacen que α es una involución sin puntos fijos. En lo siguiente, levantamos esta restricción para obtener un objeto más natural.

3.3. Notas y referencias

El capítulo anterior introduce la noción de mapa y describe su relación con las 3-constelaciones. Se esclarece la traducción de conceptos de monodromía, cubrientes ramificadas, gráficas encajadas y constelaciones. El contenido de este capítulo está tomado de [10], [19] [26], y [40].

Para la primera sección, la definición de gráfica que utilizamos es la de [32], así como su noción de isomorfismo y refinamiento. Citamos a [5] como una fuente más clara y satisfactoria para revisar estos conceptos. La definición 3.4 corresponde a la definición 1.3.6 de [26], y nos apoyamos en la definición de descomposición celular de [29], hallada al inicio de su capítulo 5. Para el modelo de permutaciones nos basamos en la sección 1.3.3 de [26] y el inicio del artículo [40]. La proposición 3.2.1 y su dirección opuesta, el teorema 3.2.2, resumen de forma clara la discusión de Lando y Zvonkin de las construcciones correspondientes, y la prueba es nuestra. La definición de grupo cartográfico corresponde a la definición 1.1.2 de [26], y la noción de isomorfismo de constelaciones está tomada de su definición 1.1.5. Similarmente, la definición de automorfismo de mapa y de equivalencia de mapas están tomadas de la misma sección de [26]. Los ejemplos dados son nuestros, así como los cálculos que conllevan. La discusión que motiva la definición de gráfica de listones es original. La figura 3.8 está basada en una figura equivalente de [32], y motiva nuestra definición 3.8. Elegimos exhibir la equivalencia entre el concepto de mapa y gráfica de listones para simplificar el cálculo del grupo de automorfismos $\text{Aut}(\Gamma)$ y facilitar la clasificación de las gráficas de listones excepcionales, que se enuncia en el

capítulo 4.

Capítulo 4

Las gráficas de listones

Fijemos una gráfica G . Como vimos en el capítulo previo, basta tener un orden cíclico en cada vértice de G para sus medias aristas para obtener un mapa para G . Recíprocamente, es claro que podemos obtener una gráfica de listones partiendo de un mapa particular, pues el encaje de G en la superficie orientada induce un orden cíclico en cada uno de los vértices. Más directamente, podemos obtener la realización de una gráfica de listones a partir de un mapa si tomamos una vecindad suficientemente pequeña de su gráfica encajada. Esto nos permite hablar equivalentemente entre los mapas y las gráficas de listones. La definición de automorfismo para mapas cobra mayor sentido en su versión para gráficas de listones:

Definición 4.1. Dos gráficas de listones son *isomorfas* si existe un isomorfismo entre sus gráficas subyacentes que preserva los órdenes cíclicos en cada vértice. Un automorfismo de la gráfica de listones Γ es un isomorfismo entre Γ y ella misma.

Esta definición coincide con la del grupo de automorfismos de Γ , que denotamos por $\text{Aut}(\Gamma)$. En efecto, si etiquetamos las medias aristas de Γ estamos fijando una constelación $C = [\sigma, \alpha, \phi]$ que la describe, con α una involución sin puntos fijos. Como vimos en la sección previa, Γ es intercambiable con el mapa M asociado a C . Cada automorfismo de h de M es un homeomorfismo que induce un automorfismo de su gráfica subyacente, isomorfa a Γ como gráfica. Por definición, h preserva los órdenes cíclicos en cada vértice. Esto es, tenemos que cada automorfismo de M es un automorfismo de Γ . Similarmente, cada automorfismo de $\Gamma = (V, E, i, c)$ consiste en un par de biyecciones $(f : V \rightarrow V, g : E \rightarrow E)$ que preservan a i y a c . El etiquetado de los dardos de Γ dado por C nos permite inducir a la función $\gamma \in S_{2n}$ que permuta a los vértices, aristas y caras de Γ preservando sus relaciones de incidencia. Esto es, γ conmuta con σ, α y ϕ , y por lo tanto con cualquier elemento de C . En otras palabras, $\text{Aut}(\Gamma)$ y $\text{Aut}(M)$ son objetos equivalentes.

Definición 4.2. Tomemos una gráfica de listones Γ y una constelación $C = [\sigma, \alpha, \phi]$ que la codifique. La *frontera topológica* de Γ es su frontera como superficie, el conjunto $\delta\Gamma$. Cada una de sus componentes está asociada a un ciclo de ϕ , y las identificaremos. Así, describiremos $b(\Gamma)$ para el número de ciclos de ϕ , o bien, al número de componentes conexas de $\delta\Gamma$.

Un automorfismo de Γ permuta las componentes de su frontera topológica. Podemos ver esto de dos formas distintas: un homeomorfismo h de $X(\Gamma)$ en sí mismo se restringe a un homeomorfismo de $X(\Gamma) \setminus \Gamma$, que por lo tanto permuta sus componentes conexas. Esta permutación no es arbitraria, pues h debe restringirse a un automorfismo de Γ . Por otro lado, habiendo elegido una constelación $C = [\sigma, \alpha, \phi]$ para Γ , vemos h actúa en las etiquetas de Γ como lo hace un cierto

elemento del grupo cartográfico de C , que conmuta con σ , α y $\phi = \alpha\sigma^{-1}$. Si h además fija cada ciclo de ϕ , diremos que h preserva la frontera de Γ . Esto es, si ϕ se factoriza en los ciclos ajenos $c_{f_1} \cdots c_{f_n}$, tenemos que $hc_{f_i} = c_{f_i}h = c_{f_i}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Es claro que el conjunto de tales automorfismos forma un subgrupo de $\text{Aut}(\Gamma)$.

Definición 4.3. Denotamos por $\text{Aut}_\delta(\Gamma)$ al grupo de automorfismos de Γ que preservan la frontera.

Un $h \in \text{Aut}_\delta(\Gamma)$ fija cada c_{f_i} como función. Sin embargo, h no necesariamente fija las etiquetas de cada media arista que pertenecen a la cara f_i . Puesto que preserva el ciclo asociado, h actúa rotando cíclicamente las etiquetas incidentes con f_i . Una forma de ver esto es observar h fija los vértices del mapa dual a C . Una discusión relevante está en el apéndice de este trabajo.

Este grupo cobrará importancia más adelante, puesto que su acción en las aristas de Γ es más restrictiva que la de $\text{Aut}(\Gamma)$. En efecto, identificaremos las componentes de frontera de Γ con puntos marcados de una superficie en $\mathcal{M}_{g,n}$. Como discutimos en la sección 2.5, la introducción de marcas en nuestros objetos a clasificar permite reducir el número de automorfismos que hay para cada objeto, y por lo tanto la presencia de puntos singulares. Los elementos de $\text{Aut}_\delta(\Gamma)$ constituyen los automorfismos de Γ que preservan las marcas. Más adelante esclareceremos esta discusión.

4.1. Orbifolds

En la sección anterior observamos que los mapas tienen distintas nociones naturales de automorfismo. En este capítulo estudiaremos el espacio de las gráficas de listones métricas, que resulta ser un *orbifold* diferenciable. Intuitivamente, este espacio es una variedad diferenciable en la mayoría de sus puntos, pero admite puntos singulares donde tendremos parches de forma U/G , donde U es un abierto de R^n y G es un grupo finito que actúa en él. Podemos imaginar que estos puntos corresponden a mapas donde hay mucha simetría, y por lo tanto cierta ambigüedad. Iniciamos con definiciones preliminares.

Definición 4.4. Sea X un espacio topológico. Decimos que una familia de abiertos $\mathcal{F} = \{U_i\}_{i \in I}$ es una cubierta localmente finita de X si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\bigcup_{i \in I} U_i = X$
- Cada $x \in X$ admite una vecindad U_x que interseca una cantidad finita de elementos de \mathcal{F} .

Definición 4.5. Un *orbifold* $O = (X(O), \{U_i\}_{i \in I}, \{G_i\}_{i \in I}, \{\phi_i\}_{i \in I})$ es una cuaterna que consiste en los siguientes objetos:

1. Un espacio topológico Hausdorff $X(O)$, que llamamos el espacio subyacente de O .
2. Una cubierta localmente finita $\{U_i\}_{i \in I}$ de $X(O)$, cerrada bajo intersecciones finitas.
3. Un conjunto de homeomorfismos

$$\phi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i/G_i$$

, en donde $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, y G_i es un grupo finito que actúa fielmente en \tilde{U}_i . El espacio \tilde{U}_i/G_i resulta de la identificación de puntos equivalentes bajo G_i . Llamaremos *carta orbifold* a la terna (\tilde{U}, G_i, ϕ_i) .

Además, si $U_i \subset U_j$, existe un homomorfismo inyectivo

$$f_{ij} : G_i \rightarrow G_j$$

y un encaje

$$\tilde{\varphi}_{ij} : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}_j$$

equivariante respecto al homomorfismo f_{ij} . Esto es, para cada $g \in G_i$ y $x \in \tilde{U}_i$, se satisface

$$\tilde{\varphi}_{ij}(g \cdot x) = f_{ij}(g) \cdot \tilde{\varphi}_{ij}(x)$$

de manera que obtenemos una función inducida $\varphi_{ij} : \tilde{U}_i/G_i \rightarrow \tilde{U}_j/f_{ij}(G_i)$ y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U}_i & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{ij}} & \tilde{U}_j \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{U}_i/G_i & \xrightarrow{\varphi_{ij}=\tilde{\varphi}_{ij}/G_i} & \tilde{U}_j/f_{ij}(G_i) \\
 \uparrow \varphi_i & & \downarrow \\
 U_i & \xrightarrow{\subset} & U_j \\
 & & \uparrow \varphi_j \\
 & & \tilde{U}_j/G_j
 \end{array}$$

Decimos que el orbifold O es un espacio *localmente modelado* por \mathbb{R}^n/G , en donde G es el grupo correspondiente a cada vecindad. Puesto que nos centraremos en la construcción descrita en [32], diremos que el orbifold es *diferenciable* si cada G_i es un subgrupo finito del grupo ortogonal $O(n)$. Esta convención no reduce la generalidad de la definición, pues es posible siempre encontrar un atlas equivalente para O para el cual los G_i actúan como subgrupos de $O(n)$. Para una discusión de este hecho, referimos al capítulo 1 de [2]. Alternativamente, la siguiente noción de *encaje* entre dos cartas orbifold es ocasionalmente útil, y está descrita por el diagrama previo:

Definición 4.6. Un *encaje orbifold* $\lambda : (\tilde{U}, G, \phi) \rightarrow (\tilde{V}, H, \psi)$ es un encaje $\lambda : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ tal que $\psi \circ \lambda = \phi$, en donde ϕ y ψ denotan las proyecciones

$$\phi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}/G, \quad \psi : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}/H.$$

Los orbifolds fueron definidos por primera vez por I. Satake en [38] con el nombre de *V-manifolds*. Como discutimos en el capítulo 2, si un grupo G actúa en una variedad topológica M , el espacio cociente M/G no necesariamente es una variedad para la cual $\pi : M \rightarrow M/G$ es una función cubriente, que es el caso cuando la acción de G es libre y por homeomorfismos. La clase de los orbifolds generaliza a la de las variedades en el sentido en que permite tomar más

cocientes. En particular, permite construir objetos que *casi* son variedades a partir de acciones que admiten puntos fijos. Sin embargo, es importante observar que el espacio subyacente de un orbifold puede ser una variedad.

Sea G un grupo que actúa fielmente en el abierto U , de modo que tenemos también una acción de cualquiera de sus subgrupos. Intuitivamente, $H \leq G$ identifica menos puntos que G , de modo que el espacio U/H es de cierta forma más sencillo. Por ejemplo, si G es el grupo de transformaciones cubrientes de una cierta cubierta (\tilde{U}, p) de U , hemos visto en el capítulo 1 que la clase de conjugación de H induce una clase de isomorfismos de cubiertas (\tilde{V}, p_H) de (\tilde{U}, p) . La acción de H en U está determinada por la inclusión $H \subset G$, pero en realidad sólo necesitamos de un homomorfismo inyectivo $H \rightarrow G$ para pensar a H como un subgrupo de G . Con esto en mente, definimos la noción general de *cubierta orbifold*, localmente dada por la noción de “cubiertas de cubiertas”, en el sentido que describimos antes.

Definición 4.7. Sean Q y O orbifolds y

$$\pi : X(Q) \rightarrow X(O)$$

una función continua y suprayectiva. Diremos que π es una *cubierta orbifold* si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Para cada $x \in Q$ hay dos vecindades abiertas $U \subset Q$, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ y dos grupos finitos $G_0 \subset G_1$ tales que $U \cong \tilde{U}/G_0$, $\pi(U) \cong \tilde{U}/G_1$, de manera que el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\sim} & \tilde{U}/G_0 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \pi(U) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{U}/G_1 \end{array}$$

2. Cada $y \in O$ admite una vecindad abierta $V \subset O$ para la que existen un abierto $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$, grupos finitos $\Gamma_0 \subset \Gamma_1$ y una componente conexa U' de $\pi^{-1}(V)$ tales que $U' \cong \tilde{V}/\Gamma_0$ y $V \cong \tilde{V}/\Gamma_1$, haciendo conmutar al diagrama análogo.

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{\sim} & \tilde{V}/\Gamma_0 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\sim} & \tilde{V}/\Gamma_1 \end{array}$$

Tomemos un $x \in O$, y una carta (\tilde{U}, G, ϕ) con $x = \phi(\tilde{x}) \in U$. Definimos al *grupo de isometría* en x como la clase de isomorfismo del estabilizador $G_{\tilde{x}} \subset G$ de su representación por coordenadas \tilde{x} , y lo denotamos G_x . También lo llamamos el grupo *local* en x . Habiendo fijado una carta, G_x está bien definido salvo conjugación, pues los estabilizadores de puntos en la misma órbita son conjugados. De hecho, el grupo G_x no depende de la carta elegida alrededor de x , como se deduce¹ en [2].

¹La prueba depende indirectamente de consideraciones más complicadas, por lo que la omitimos.

Si $x \in O$ satisface que su grupo de isotropía G_x es no trivial, decimos que x es un *punto singular* del orbifold O . Llamamos a

$$S_O := \{x \in O \mid G_x \neq \{1\}\}$$

el *conjunto singular* de O , también conocido como su *locus* singular. Tomar una carta coordenada (\tilde{U}, G, ϕ) alrededor de $x \in S_O$ nos permite observar que la “mayoría” de los puntos en \tilde{U}/G tienen grupo de isotropía trivial. En efecto, los elementos de G actúan por transformaciones ortogonales, de modo que un $g \in G$ distinto de la identidad fija sólo subespacios de dimensión a lo más $n - 1$ en \mathbb{R}^n . Así, S_O tiene interior vacío, por lo que el conjunto $O \setminus S_O$ es denso en O y todos sus puntos tienen grupos locales triviales. Observemos que podemos identificar $O \setminus S_O$ con una n -variedad, pues es un espacio localmente euclidiano cuya estructura de orbifold es trivial. De esta manera, diremos que el orbifold O es una variedad cuando $S_O = \emptyset$.

Hagamos hincapié en esta última observación. Es importante no confundir la estructura del espacio subyacente $X(O)$ con la del orbifold O : es posible que la vecindad coordenada $U \cong \tilde{U}/G$ de un punto singular x sea también homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^n , digamos \tilde{V} , y por lo tanto que sea topológicamente indistinguible del resto de los puntos en U . Sin embargo, la imposición de la estructura adicional del orbifold O nos dice que x es un punto distinto a otros puntos de U desde el punto de vista de G . La singularidad de un punto en O es una propiedad que se deriva tanto de \tilde{U} como de G . Así, es importante distinguir entre las propiedades de O y las de $X(O)$, particularmente en dimensiones bajas: por ejemplo, cuando $n = 2, 3$, es común que los orbifolds tengan espacios subyacentes que también son variedades topológicas, como se explica en [44].

Definición 4.8. Sea $O = (X, \mathcal{U}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ un orbifold. Denotemos por Σ_G al conjunto de puntos en O con grupo local G . Decimos que la descomposición

$$X = \coprod_a \Sigma_a,$$

en donde cada Σ_a es una componente conexa de cada Σ_G , es la *estratificación canónica* del orbifold O . Llamamos al conjunto Σ_Γ un *estrato* de O .

Las componentes Σ_a resultan ser variedades, pues G actúa trivialmente en Σ_a , y las cartas orbifold alrededor de sus puntos inducen homeomorfismos en abiertos de \mathbb{R}^n . En efecto, si G es un grupo con más de un elemento, el estrato Σ_a no admite una estructura de orbifold no trivial, pues la acción de G no es fiel, mientras que si $G = \{1\}$, Σ_a sólo admite la estructura de orbifold trivial, que la identifica con una variedad topológica.

Esta estratificación es un ejemplo de una descomposición celular del espacio topológico $X(O)$. Más generalmente, diremos que una *descomposición celular orbifold* de O es una descomposición celular de $X(O)$ que satisface que para cada celda C , cualquier punto en C tiene el mismo grupo de isotropía, que denotamos por G_C . Con esta noción, Thurston extendió la característica de Euler para orbifolds en [44]:

Definición 4.9. Si O admite una descomposición celular orbifold, definimos su característica de Euler como

$$\chi(O) = \sum_C (-1)^{\dim(C)} \frac{1}{|G_C|}.$$

Sea $\pi : Q \rightarrow O$ una cubierta orbifold. Para un punto no singular $x \in O$, diremos que el número $|\pi^{-1}x|$ es el número de hojas de π .

Teorema 4.1.1. *Si $\pi : Q \rightarrow O$ es una cubierta orbifold de k hojas, entonces*

$$\chi(Q) = k\chi(O)$$

Demostración. Si y es un punto arbitrario de O , tenemos

$$\sum_{\pi(x)=y} \frac{|G_x|}{|G_y|} = k. \quad (4.1)$$

En efecto, de forma similar a la prueba del teorema 2.2.3, consideremos un modelo local \tilde{U} alrededor de y y un abierto \tilde{V}_x alrededor de cada $x \in \pi^{-1}y$, de modo que representamos a π como una cubierta $\tilde{\pi}|_{\tilde{V}_x} \rightarrow \tilde{U}$.

Por densidad, podemos tomar un punto regular y' de O cercano a y , de manera que tenemos $|G_x|$ preimágenes de y' en \tilde{V}_x . La acción de G_y identifica las proyecciones de estas imágenes, de donde obtenemos 4.1.

Ahora, supongamos que

$$O = \coprod_i C_i$$

es una descomposición celular orbifold. Escribamos

$$\pi^{-1}(C_i) = \coprod_j C_{ij}$$

para denotar las componentes conexas de $\pi^{-1}C_i$. Esto induce una descomposición orbifold de Q . Así, tenemos

$$\begin{aligned} k\chi(O) &= k \sum_i (-1)^{\dim(C_i)} \frac{1}{|G_{C_i}|} \\ &= \sum_i (-1)^{\dim(C_i)} \sum_j \frac{|G_{C_i}|}{|G_{C_{ij}}|} \frac{1}{|G_{C_i}|} \\ &= \sum_{i,j} (-1)^{\dim(C_{ij})} \frac{1}{|G_{C_{ij}}|} \\ &= \chi(Q). \end{aligned}$$

□

4.2. El espacio de las gráficas de listones métricas

De acuerdo a la discusión de la sección previa, intercambiaremos las nociones de mapa y gráfica de listones de acuerdo a la utilidad que tenga cada presentación del objeto. Hay que recordar, sin embargo, las distinciones concretas que hay entre estos conceptos: un mapa es una gráfica encajada en una superficie de modo que induce una descomposición poligonal, una constelación es un modelo combinatorio del mapa que nos permite reconstruirlo y analizar sus automorfismos a partir de grupos simétricos, y una gráfica de listones es, topológicamente, una superficie con frontera.

Definición 4.10. Denotemos por $RG_{g,n}$ al conjunto de las clases de isomorfismo de gráficas de listones Γ con n componentes de frontera y género g . Esto es, los elementos de $RG_{g,n}$ tienen como espacio total X a una superficie de género g , y tienen n componentes de frontera.

Si $\Gamma \in RG_{g,n}$ y dos vértices distintos $u, v \in V(\Gamma)$ son adyacentes a través de la arista e , podemos *contraer* a e para obtener la gráfica de listones Γ' definida como sigue: $V(\Gamma') = V(\Gamma) \setminus \{u, v\} \cup uv$, donde uv es un vértice obtenido de la identificación de u con v ; las aristas $E(\Gamma)$ no incidentes con u o v pasan a ser aristas de $E(\Gamma')$, y aquellas aristas $a \in E(\Gamma)$ de forma (w, u) y (w, v) se convierten en aristas de forma (w, uv) ; por último, el orden cíclico alrededor de uv se induce a partir de los órdenes de las medias aristas incidentes en u y v : si e_u denota la media arista de e incidente en u , e_v la que incide en v y los ciclos $(u_1, \dots, u_k, e_u, u_{k+1}, \dots, e_{\delta(u)})$ y $(v_1, \dots, v_j, e_v, v_{j+1}, \dots, v_{\delta(v)})$ describen los órdenes cíclicos en u y v , entonces el orden de las medias aristas alrededor de uv está dado por $(u_1, \dots, u_k, e_u \cong e_v, v_{j+1}, \dots, v_{\delta(v)}, \dots, v_j, e_v \cong e_u, u_{k+1}, \dots, u_{\delta(u)})$. Llamamos al mapa Γ' así obtenido la *contracción* de Γ por la arista e . Esta operación es conocida también como *contracción de Whitehead*, y la denotamos por $\Gamma' = \Gamma/e$.

Contraer una arista de Γ reduce el número de vértices y aristas por 1, mientras que preserva el número de caras². Así, la contracción es una operación cerrada en $RG_{g,n}$, y define un orden parcial. A saber, dadas $\Gamma', \Gamma \in RG_{g,n}$, diremos que

$$\Gamma' \preceq \Gamma$$

si la gráfica Γ' se obtiene de Γ después de una sucesión finita de contracciones, incluyendo la sucesión vacía. Notemos que contraer las aristas de Γ reduce la cardinalidad de $E(\Gamma)$ por 1, de modo que una gráfica con un sólo vértice con cierta cantidad de lazos es minimal en el orden \preceq . Dado que los elementos de $RG_{g,n}$ tienen grado mínimo 3, un mapa cuyos vértices tienen todos grado 3 es maximal: de no serlo, es el resultado de la contracción de una gráfica que necesariamente contiene un vértice de grado 2 y un vértice de grado 1. Diremos que una gráfica de este tipo es *trivalente*.

Similarmente, cuando una gráfica de listones Γ tiene un vértice de grado al menos 4, es posible *expandir* a G si invertimos el proceso de contracción. Así, diremos que una gráfica Γ' es una *expansión* de Γ si $\Gamma \preceq \Gamma'$. Más abstractamente, podemos expandir a Γ en uno de sus vértices v añadiendo un nuevo vértice u y partiendo la vecindad de v en dos: si $\delta(v) = k$, tomamos l aristas con un extremo en v y lo sustituimos por u . Esto define una nueva relación de incidencia que coincide con la de Γ , excepto en algunas aristas de v . Por último, hacemos adyacentes a u y v por medio de la arista e . Obtenemos una gráfica Γ' que expande a Γ , pues contraer a e deshace

²Intuitivamente, si tomamos la arista e y reducimos su tamaño continuamente podemos imaginar que estamos "apretando" poco a poco dos componentes conexas de la frontera de Γ . Cuando finalmente contraemos a e nada ha cambiado topológicamente, pues sólo hemos reducido el diámetro de dos círculos en la frontera de la superficie.

la operación descrita. Observemos que para que Γ' tenga grado mínimo tres, el número l debe ser a lo más $k - 3$, de modo que sólo podemos expandir vértices de grado mayor o igual a 4.

Definición 4.11. Sea Γ una gráfica de listones. Consideremos una asignación $\mu : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Decimos que μ es una métrica para Γ , y que la pareja (Γ, μ) es una gráfica de listones métrica, o *decorada*.

La función μ es simplemente un etiquetado de las aristas de Γ con números reales positivos. Diremos que $\mu(e)$ es la *longitud* de la arista e . Así, hemos dado a la estructura combinatoria $\Gamma \in RG_{g,n}$ un vector de parámetros continuos en $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$, de acuerdo a algún etiquetado de las aristas de Γ . Identificamos cada gráfica de listones Γ con el espacio de todas sus posibles longitudes, $\mathbb{R}^{e(\Gamma)}$.

Como discutimos anteriormente, el grupo $\text{Aut}(\Gamma)$ actúa en Γ permutando sus aristas, de modo que debe actuar en $\mathbb{R}^{e(\Gamma)}$ por permutaciones. Concretamente, una constelación para Γ nos da una representación concisa de $\text{Aut}(\Gamma)$ como un subgrupo de $S_{e(\Gamma)}$, además de un etiquetado del conjunto $E(\Gamma)$ que nos permite identificar cada uno de sus elementos con un factor de $\mathbb{R}^{e(\Gamma)}$. Aunque conceptualmente no hay dificultad para ver cómo sucede esto, podemos fijar una constelación que nos permite identificar fácilmente $E(\Gamma)$ con el conjunto $\{1, \dots, e(\Gamma)\}$:

Definición 4.12. Sea Γ una gráfica de listones. Tomemos una constelación $C = [\sigma, \alpha, \phi]$ asociada a Γ para la cual α toma la forma $(1\ 2)(3\ 4) \cdots (\lfloor e(\Gamma)/2 \rfloor\ \lfloor e(\Gamma)/2 \rfloor + 1)$. Etiquetemos la arista de Γ asociada a la trasposición $(i\ i+1)$ con el número $(i+1)/2$: diremos que tal etiquetado es *cómodo*, y lo denotamos por $f_C : E(\Gamma) \rightarrow \{1, \dots, e(\Gamma)\}$.

Esto garantiza que basta elegir una constelación para Γ para obtener una representación de $\text{Aut}(\Gamma)$ como un subgrupo de $S_{2e(\Gamma)}$ que actúa en $\{1, \dots, e(\Gamma)\}$ a través de f_C : a saber, cuando C induce un etiquetado $f : E \rightarrow [e(\Gamma)]$ cómodo para Γ , tenemos el homomorfismo

$$\phi_\Gamma : \text{Aut}(\Gamma) \rightarrow S_{e(\Gamma)}, \quad s \mapsto [\sigma : i \mapsto (f \circ s \circ f^{-1})(i)],$$

y por lo tanto una acción de $\text{Aut}(\Gamma)$ en $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$, en donde la arista etiquetada por $(i\ i+1)$ está identificada con el i -ésimo factor de $\mathbb{R}^{e(\Gamma)}$. Cada punto de $\mathbb{R}^{e(\Gamma)}$ corresponde a una elección de longitudes para las aristas de Γ . Observemos que esta es sólo una convención *cómoda* para trabajar con ejemplos concretos, y que cualquier $f : E(\Gamma) \rightarrow [e(\Gamma)]$ basta para inducir una acción en $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$ a partir de una en $\mathbb{R}_+^{E(\Gamma)}$.

Dos puntos en una misma órbita de esta acción representan objetos combinatorios que son indistinguibles. Para obtener una correspondencia unívoca, basta tomar un cociente: el espacio

$$\text{met}(\Gamma) = \frac{\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}}{\text{Aut}(\Gamma)}$$

parametriza las clases de equivalencia de gráficas de listones métricas con gráfica subyacente Γ . Dicho de otro modo, cada punto en $\text{met}(\Gamma)$ corresponde a una forma única de etiquetar las aristas de Γ con números reales positivos. Damos a $\text{met}(\Gamma)$ la topología cociente. Si la acción de $\text{Aut}(\Gamma)$ en Γ resulta fiel, tenemos que $\text{met}(\Gamma)$ es un orbifold diferenciable con una carta orbifold global, de modo que es natural preguntarse si este es el caso para cualquier elemento de $RG_{g,n}$. Analizamos esto en la sección subsecuente.

4.2.1. Las gráficas de listones excepcionales

Conceptualmente, nada impide que un elemento h de $\text{Aut}(\Gamma)$ actúe trivialmente en $\mathbb{R}^{e(\Gamma)}$, incluso si no es la identidad. Analicemos exactamente cuándo sucede esto.

Definición 4.13. Diremos que una gráfica de listones $\Gamma = (V, E, i, c)$ es *excepcional* si el homomorfismo natural $\phi_\Gamma : \text{Aut}(\Gamma) \rightarrow S_E$ no es inyectivo.

Es decir, Γ es excepcional si admite un automorfismo $h \neq Id$ que actúa trivialmente en sus aristas. Este es el caso cuando h intercambia algunos vértices adyacentes, o equivalentemente, alguna pareja de medias aristas.

Supongamos que $\Gamma = (V, E, i, c)$ es excepcional, y que h intercambia los vértices u, v mientras que fija todo $e \in E$. Observemos que Γ tiene a lo más dos vértices: en otro caso, la conexidad de Γ implica que debe existir un tercer vértice w adyacente a u , digamos, por medio de una arista que no puede ser fijada por h si es que ha de preservarse i . Más aún, puesto que h es un isomorfismo de la gráfica subyacente de Γ , u y v tienen el mismo grado.

Supongamos primero que Γ tiene dos vértices de grado k , que llamaremos u y v , y que h es un elemento no trivial del núcleo de ϕ_Γ . Etiquetemos las medias aristas de Γ para obtener una constelación $C = [\alpha, \sigma, \phi]$, usando el orden cíclico c para construir los dos ciclos de σ , que denotamos c_u y c_v . Recordemos que cada trasposición $(i j)$ de α representa a la arista de Γ cuyas medias aristas tienen etiquetas i, j . Una vez etiquetada, identificamos $\text{Aut}(\Gamma)$ con el centralizador de C en el grupo S_{2k} . Así, puesto que h intercambia todas las medias aristas de Γ entre sí, h actúa en las etiquetas de Γ exactamente como α , y entonces α es un automorfismo de la constelación C . Esto es, $\alpha^{-1}\sigma\alpha = \sigma$, y por lo tanto $\alpha^{-1}\sigma^{-1}\alpha = \sigma^{-1}$. Así, $\phi^k = \alpha^k\sigma^{-k} = \alpha^k$, pues los vértices de Γ tienen grado k . Además, si $j < k$ y $s \in 1, \dots, 2k$, vemos que $s \cdot \phi^j = s \cdot c_u^j \neq s$, o bien $s \cdot \phi^j = s \cdot c_v^j \neq s$. Deducimos que ϕ tiene orden k si k es par, y $2k$ cuando k es impar. Puesto que las componentes de la frontera de Γ corresponden a los ciclos de ϕ , su género g depende de la paridad de k .

- Si k es impar, ϕ tiene orden $2k$, y es entonces un ciclo de longitud $2k$. Así, la frontera de Γ es conexa, $\chi(\Gamma) = 2 - k + 1$, y $g(\Gamma) = \frac{k-1}{2}$.
- Si k es par, ϕ tiene orden k y por lo tanto la órbita O de una etiqueta i tiene longitud k y corresponde a la componente de frontera $(\phi(i) \phi^2(i) \cdots \phi^{k-1}(i))$. Una $j \notin O$ induce una órbita ajena a O de misma longitud, que corresponde a otra componente de frontera de Γ . Así, ϕ se descompone en dos ciclos ajenos de longitud k , y por tanto Γ tiene dos componentes de frontera. Vemos que $\chi(\Gamma) = 2 - k + 2$, y por lo tanto $g(\Gamma) = \frac{k-2}{2}$.

Cualquier otro automorfismo de Γ debe fijar los dos vértices e intercambiar las aristas, de forma que se preserve el orden c : la única posibilidad para su acción consiste en ciclar las aristas. Más precisamente, observemos que la permutación σ^j conmuta con σ y con α , pues $\alpha \in \text{Aut}(\Gamma)$, de modo que σ^j es un automorfismo de Γ para cada $1 \leq j \leq k$. Ninguna otra permutación de las medias aristas en cada vértice preserva el orden cíclico. Estructuralmente,

$$\text{Aut}(\Gamma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z},$$

en donde identificamos $\langle \alpha \rangle$ con $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $\langle \sigma \rangle$ con $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. El factor $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ actúa trivialmente en $E(\Gamma)$, pues sólo intercambia parejas de medias aristas. Cuando Γ tiene una frontera conexa, es

claro que $\text{Aut}_\delta(\Gamma)$ coincide con $\text{Aut}(\Gamma)$, por lo que su acción en $E(\Gamma)$ no es fiel. Observemos que $\phi = \alpha\sigma^{-1}$ es también un automorfismo de Γ , y la acción de sus potencias consiste en rotar las medias aristas incidentes a cada componente de frontera, por lo que $\langle \phi \rangle \subset \text{Aut}_\delta(\Gamma)$. Cuando Γ tiene dos componentes de frontera, ϕ tiene orden k , y por lo tanto $\text{Aut}_\delta(\Gamma) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. En este caso, el grupo $\text{Aut}_\delta(\Gamma)$ sí actúa fielmente en el conjunto de aristas de Γ .

Ahora supongamos que Γ tiene sólomente 1 vértice v . En tal caso, las aristas de Γ son lazos y el grado de v es un número par, digamos $2k$. Un automorfismo $h \in \text{Ker}(\phi_\Gamma)$ no trivial que fija las aristas debe permutar las medias aristas de Γ de una forma que preserve el orden cíclico, por lo que esperamos que los automorfismos de Γ consistan en rotaciones de las medias aristas. De nuevo, fijemos una constelación $C = [\sigma, \alpha, \phi]$ eligiendo un etiquetado de las medias aristas de Γ . Así, el automorfismo h corresponde en C a una permutación que conmuta con σ y α , que también denotaremos por h .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que etiquetamos las medias aristas de Γ de acuerdo al orden c , de manera que $i \cdot \sigma = i + 1 \pmod{2k}$; esto es, $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ 2k - 1\ 2k)$. Si $1 \cdot h = j \leq 2k$, necesariamente $h = \sigma^j$, pues h preserva el orden cíclico en v . Además, h preserva las aristas, de modo que si $(i\ j)$ es una trasposición de α , el número $i \cdot h$ debe ser i o j : en el primer caso, h coincide con el automorfismo trivial, pues $i \cdot \sigma^j = i$ exactamente cuando $j = 2k$. Así, deducimos que $h = \sigma^j = \alpha$. Luego, $\sigma^{2j} = \alpha^2 = Id = \sigma^{2k}$, y por lo tanto $j = nk$ para algún n positivo. Puesto que $j < 2k$, concluimos que $j = k$.

Así, vemos que $h = \sigma^k$. Además, la identidad $\sigma^k = \alpha$ garantiza que $\sigma\alpha = \sigma\sigma^k = \sigma^k\sigma = \alpha\sigma$, de modo que σ es un automorfismo de Γ , así como cada una de sus potencias. En efecto, $\text{Aut}(\Gamma) = \mathbb{Z}/(2k)\mathbb{Z}$.

Observemos que $\sigma^k = \alpha$ implica que $\phi = \alpha\sigma^{-1} = \sigma^{k-1}$. Como hicimos antes, analicemos el orden de ϕ para deducir el número de componentes de frontera de Γ , que depende de la paridad de k . Puesto que α y σ conmutan, $\phi^k = (\alpha\sigma^{-1})^k = \alpha^k\sigma^{-k} = \alpha^k - 1$, por lo que $\phi^k = Id$ si k es impar y $\phi^{2k} = Id$ si k es par. Como en el caso previo, tomemos una $1 \leq i \leq 2k$, y observemos que si $(t\ s)$ es una trasposición de α , se tiene que

$$t \cdot \phi^i = t \cdot \alpha^i \sigma^{-i} = \begin{cases} s \cdot \sigma^{-i} & \text{si } i \text{ es impar,} \\ t \cdot \sigma^{-i} & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Puesto que σ tiene orden k , $t \cdot \sigma^i = t$ si y sólo si $i = k$ o $i = 2k$. Una vez más tenemos dos casos:

- Si k es impar, ϕ tiene orden k , por lo que se descompone en dos ciclos ajenos y Γ tiene dos componentes de frontera. Tenemos que $\chi(\Gamma) = 1 - k + 2$, por lo que $g(\Gamma) = \frac{k-1}{2}$.
- Si k es par, ϕ tiene orden $2k$, es un ciclo de esa longitud, y la frontera de Γ es conexa. Así, $\chi(\Gamma) = 1 - k + 1$ y por lo tanto $g(\Gamma) = \frac{k}{2}$.

Como en el caso de dos vértices, cuando la frontera de Γ tiene dos componentes tenemos que $\text{Aut}_\delta(\Gamma) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, presentado por el grupo cíclico generado por ϕ .

En ambos casos, vemos que las gráficas excepcionales aparecen para cualquier género g , y la discusión previa las clasifica completamente.

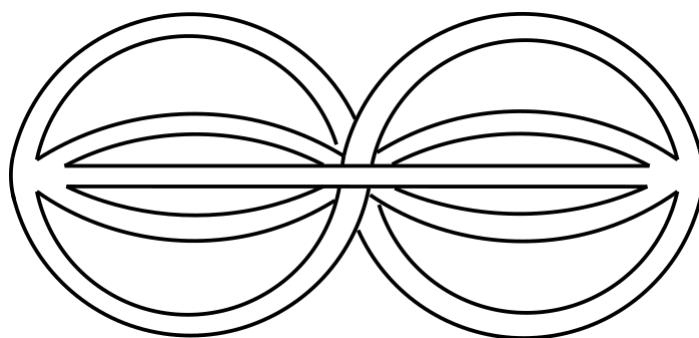


Figura 4.1: Una gráfica de listones excepcional con 2 vértices y 5 aristas

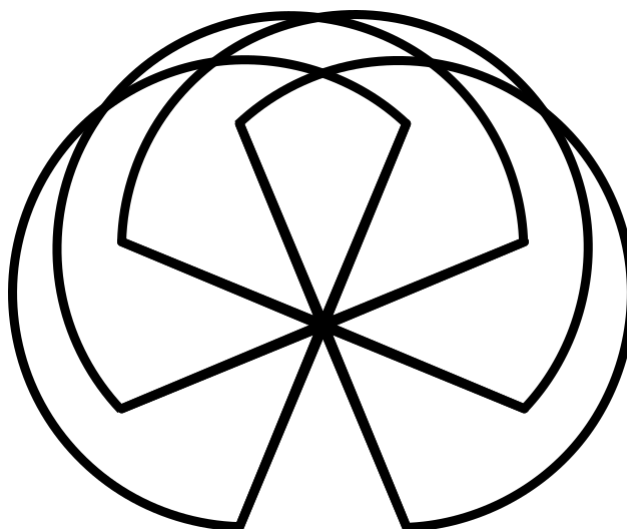


Figura 4.2: Una gráfica excepcional de 1 vértice. Podemos obtenerla a partir de la gráfica en la figura 4.1 contrayendo cualquier arista.

Además, si Γ es una gráfica de listones excepcional,

$$\frac{\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}}{\text{Aut}(\Gamma)} = \frac{\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}}{\text{Aut}(\Gamma)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}$$

mientras que el grupo $\text{Aut}(\Gamma)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ actúa fielmente en $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$, de modo que también obtenemos un orbifold con una carta global. Un orbifold como este, obtenido a partir de la acción de un único grupo en un espacio, es conocido como un orbifold *bueno*.

El caso $(g, n) = (1, 1)$ es de interés particular. Observemos que las dos gráficas en la figura 4.3 son elementos excepcionales de $RG_{1,1}$: si encajamos el toro en el espacio como en la figura, cierta rotación por π es un automorfismo no trivial que preserva las aristas y la orientación. Las denotamos por E_1 y E_2 de acuerdo a su número de vértices. Más aún, las dos gráficas representadas en la figura son los *únicos* elementos de $RG_{1,1}$. Para ver esto, observemos que una $\Gamma \in RG_{1,1}$ satisface

$$v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma) = 2 - 2(1) = 0.$$

Puesto que $n = 1$, $F(\Gamma) = 1$ y por lo tanto $E(\Gamma) = V(\Gamma) + 1$. El grado mínimo de Γ es 3, así que

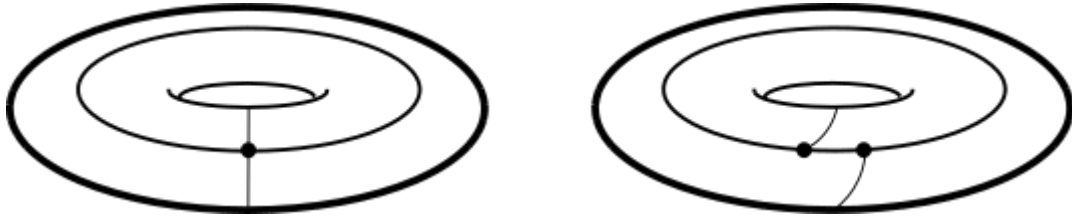


Figura 4.3: E_1 y E_2 : los únicos dos elementos en $RG_{1,1}$.

$V(\Gamma) + 1 = E(\Gamma) \geq 3V(\Gamma)/2$ y por lo tanto $V(\Gamma) \leq 2$. Cuando $V(\Gamma) = 1$ tenemos que $E(\Gamma) = 4$ y la única posibilidad es E_1 . Si $V(\Gamma) = 2$ tenemos que $E(\Gamma) = 3$. Combinatoriamente, las únicas dos posibilidades son E_2 y una gráfica cuyos dos vértices tienen un lazo y una arista que los conecta. De ellas, solo E_2 se puede encajar en el toro. Así, $RG_{1,1}$ tiene dos elementos y ambos son excepcionales.

4.2.2. El espacio $RG_{g,n}^{met}$

Definición 4.14. Sean $g \geq 0, n \geq 1$ dos números enteros que satisfacen $2 - 2g - n < 0^3$. Definimos el conjunto de clases de isomorfismo de gráficas de listones métricas por

$$RG_{g,n}^{met} := \coprod_{\Gamma \in RG_{g,n}} \frac{\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}}{\text{Aut}(\Gamma)}$$

Decimos que el espacio $\frac{\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}}{\text{Aut}(\Gamma)}$ es una *celda racional* de $RG_{g,n}^{met}$. Observemos que cada celda racional es un orbifold diferenciable con una carta orbifold global, y por lo tanto tiene dimensión $e(\Gamma)$.

El propósito de esta sección es demostrar que $RG_{g,n}^{met}$ también es un orbifold diferenciable. Su dimensión corresponde al espacio a partir del cual está modelado, y debe coincidir con la de una celda racional con dimensión máxima. Puesto que la contracción no altera el género ni el número de componentes de frontera de una gráfica de listones, una celda racional máxima debe corresponder a una gráfica de listones maximal respecto a \preceq . Esto es, a una gráfica trivalente Γ con tal que $b(\Gamma) = n$ y $v(\Gamma) - e(\Gamma) + n = 2 - 2g$. En tal caso, tenemos que $3v(\Gamma) = 2e(\Gamma)$ y por lo tanto

$$\dim(RG_{g,n}^{met}) = 6g + 3n - 6.$$

La topología de $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$ nos da una noción concreta de lo que significa “contraer continuamente” una arista de la gráfica métrica (Γ, μ) : si la imagen de μ es el vector $v = (a_j)_{j=1}^{e(\Gamma)}$, y la arista e corresponde a la i -ésima entrada de $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$, el interior de la línea entre $u = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n)$ y v está contenida en $\mathbb{R}^{e(\Gamma)}$. El punto u , que está en la frontera de

³Esto excluye la posibilidad de una esfera perforada en 1 o 2 puntos. Estos espacios son equivalentes al plano complejo y a un disco perforado, respectivamente, y por lo tanto admiten una infinidad de automorfismos complejos.

$\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$, puede ser identificado con un punto de $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)-1}$, correspondiente a una gráfica métrica Γ' . Recíprocamente, podemos comenzar en el punto Γ' y recorrer la línea en la dirección de Γ para visualizar una expansión continua de Γ' en Γ . Este proceso describe intuitivamente cómo pegar las celdas racionales de $RG_{g,n}^{met}$ para obtener un espacio topológico, en analogía con el espacio de adjunción que se obtiene en la construcción de un complejo celular⁴.

Para construir tal pegado, podríamos comenzar tomando la gráfica trivalente G para identificarla con el espacio $\mathbb{R}_+^G \subset R^{e(G)}$, cuya frontera consiste en los $e(\Gamma)$ espacios $\mathbb{R}_+^{e(G)} \cap \{x \in R^{e(G)} \mid x_i = 0\}$ identificados con $\mathbb{R}_+^{e(G)-1}$ a través del etiquetado elegido para $E(G)$. Hacemos lo mismo con cada contracción G' de G , que corresponde a $\mathbb{R}_+^{e(G')} \sim \mathbb{R}_+^{e(G)-1}$, y luego con las contracciones G'' de cada G' , y así sucesivamente hasta detenernos en gráficas compuestas por un vértice y cierto número de lazos. Nos gustaría que la identificación resultante fuera de cierta forma respetada cuando tomamos el cociente de cada grupo $\text{Aut}(G')$, de manera independiente en cada celda. Una descripción formal de este proceso puede ser hallada en [25]; nos limitaremos a describir la topología de $RG_{g,n}^{met}$ a través de una base, como se construye en [32].

Definición 4.15. Tomemos una $\Gamma \in RG_{g,n}^{met}$ con métrica μ . Supongamos que m es la longitud de la arista más corta de Γ . Sea $\epsilon > 0$ un número positivo tal que $\epsilon < m/2$. Definimos la ϵ -vecindad de Γ como el conjunto $U_\epsilon(\Gamma) \subset RG_{g,n}^{met}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. Para cada $\Gamma' \in U_\epsilon(\Gamma)$, $\Gamma \preceq \Gamma'$.
2. Las aristas de Γ' que están contraídas en Γ tienen longitud menor a ϵ .
3. Si e' es una arista de Γ' que corresponde a $e \in \Gamma$, se satisface que

$$\mu'(e') \in (\mu(e) - \epsilon, \mu(e) + \epsilon)$$

en donde μ' es la métrica de Γ' .

El orden \preceq en $RG_{g,n}^{met}$ está inducido por el orden en $RG_{g,n}$, y lo denotamos de misma forma.

Proposición 4.2.1. Las ϵ -vecindades definen una topología para $RG_{g,n}^{met}$.

Demostración. Es claro que las ϵ -vecindades cubren al espacio $RG_{g,n}^{met}$. Supongamos que para las gráficas $\Gamma, \Lambda \in RG_{g,n}^{met}$ y los números $\epsilon, \eta > 0$, hay un $X \in U_\epsilon(\Gamma) \cap U_\eta(\Lambda)$. Puesto que X es una expansión de Γ y de Λ , también lo son las propias expansiones de X . Si c denota la longitud de la arista más corta de X , tomemos $r < \min\{\epsilon, \eta, c/2\}$. Combinatoriamente, para cada $X' \in U_r(X)$ hay una sucesión de contracciones que producen Γ , y las aristas que “sobreviven” al proceso tienen longitudes que difieren a lo más por $r < \epsilon$ de sus copias en X' . Deducimos que $U_r(X) \subseteq U_\epsilon(\Gamma)$. Similarmente, $U_r(X) \subseteq U_\eta(\Lambda)$. Así, las ϵ -vecindades forman una base, y por lo tanto generan una topología para $RG_{g,n}^{met}$. \square

Una gráfica trivalente es maximal respecto a \preceq , de modo que su ϵ -vecindad es simplemente una bola métrica usual en $\mathbb{R}_+^{6g+3n-6}$. Un elemento no maximal en $RG_{g,n}^{met}$ debe ser la contracción de una gráfica trivalente, y por lo tanto corresponde a un punto x que yace en una “pared” de alguna celda de dimensión máxima. Así, es natural que cualquier abierto alrededor de x

⁴O bien, un complejo CW. Ver [29], por ejemplo.

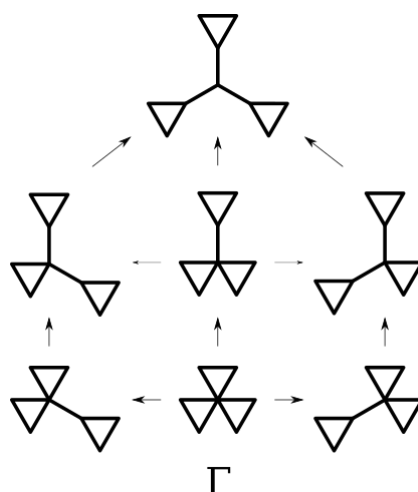


Figura 4.4: Una serie de expansiones de la gráfica Γ . Fijemos un etiquetado para las medias aristas de Γ . Las gráficas de listones en las esquinas inferiores son isomorfas, pues están relacionadas por una rotación. Sin embargo, un isomorfismo entre ellas intercambia la arista que separa un par de triángulos del tercero, y no puede fijar todas las etiquetas de Γ .

interseque a sus celdas adyacentes, y que el estrato al que pertenece tenga interior vacío. Por último, notemos que la segunda propiedad de la definición 4.15 generaliza la tercera propiedad si imaginamos que una arista contraída tiene longitud 0.

Teniendo una topología para $RG_{g,n}^{\text{met}}$, procedemos a determinar su estructura de orbifold.

Definición 4.16. Para una $\Gamma \in RG_{g,n}$ con refinamiento Γ_E . Fijemos un etiquetado T para las aristas de Γ_E , y denotemos por \tilde{X}_Γ al conjunto de todas las expansiones de Γ , incluida Γ misma. Sea G una expansión de Γ . Identificamos dos extensiones $\Gamma', \Gamma'' \in RG_{g,n}$ de Γ si existe un isomorfismo de gráficas de listones entre ellas que preserve a las medias aristas provenientes de Γ_E . Llamamos al espacio resultante de esta identificación el *espacio de expansiones de Γ* , denotado por X_Γ . Finalmente, denotamos por $X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}$ al espacio de *expansiones métricas* de Γ , que es el conjunto de las gráficas en X_Γ dotadas de una métrica para sus aristas.

Observación. $X_{\leq \Gamma}$ no es un subconjunto de $RG_{g,n}$. Es posible que dos expansiones de Γ sean isomorfas como gráficas de listones y que por lo tanto representen el mismo punto en $RG_{g,n}$. En $X_{\leq \Gamma}$ la relación de equivalencia es más fuerte: identificamos dos expansiones de Γ cuando en realidad son la misma gráfica de listones, salvo el etiquetado elegido para las aristas introducidas en la expansión. Observemos, por ejemplo, la figura 4.4.

Usaremos al espacio $X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}$ para describir la estructura orbifold de $RG_{g,n}^{\text{met}}$, por lo que necesitamos demostrar que es homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{6g+3n-6}$. Primero, analicemos la estructura de un espacio más simple, motivado por el carácter *local* del proceso de expansión de una gráfica Γ . A saber, una expansión de Γ por una arista en esencia "parte" a uno de sus vértices en dos.

Fijemos un entero $k > 0$. Denotamos por $*_k$ a la gráfica con un único vértice $*$ y k medias aristas incidentes en él. Equivalentemente, $*_k$ tiene un vértice de grado k y k vértices de grado uno, que pensamos como puntos medios de ciertas aristas abstractas. Definimos a su espacio de expansiones métricas $X_{\leq *_k}^{\text{met}}$ como en la definición anterior, a pesar de que $*_k$ no es un elemento de $RG_{g,n}$. Notemos que dos expansiones de $*_k$ distintas pueden ser isomorfas como gráficas, pero no representan el mismo punto en $X_{\leq *_k}^{\text{met}}$, como se muestra en la figura 4.6.

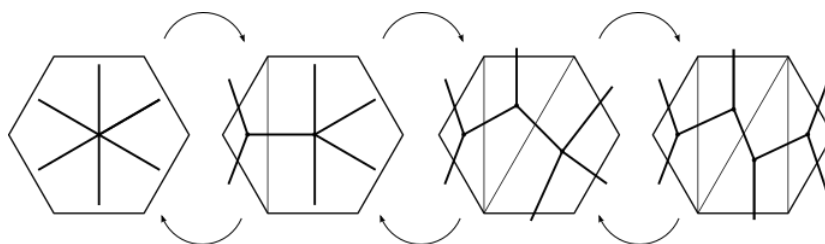


Figura 4.5: Las expansiones maximales $*_k$ corresponden a triangulaciones de un polígono convexo de k lados. De derecha a izquierda, las flechas indican una sucesión de contracciones de una gráfica cuyos vértices internos tienen grado 3. La dirección opuesta indica el retroceso de tal sucesión, que da una serie de expansiones. En $X_{\leq *}_k^{\text{met}}$, asignamos una métrica a las aristas introducidas en cada expansión, pero no a las medias aristas originales de $*_k$.

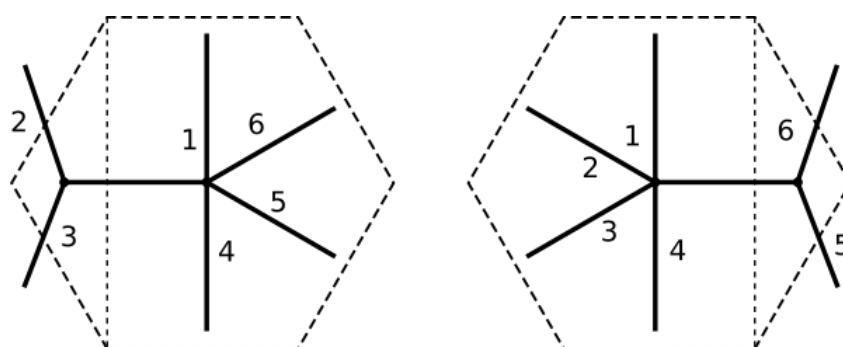


Figura 4.6: Dos expansiones de $*_6$ que son isomorfas como gráficas. Cualquier isomorfismo entre ellas debe permutar las etiquetas de forma no trivial, de manera que no son identificadas en la construcción de $X_{\leq *}_k^{\text{met}}$. Observemos que rotar el hexágono por π induce un isomorfismo entre las gráficas, permutando las celdas en \mathbb{R}^{k-3} que corresponden a cada expansión.

Puesto que pensamos en sus aristas como medias aristas, no le asignamos una métrica a $*_k \in X_{\leq *}_k^{\text{met}}$. Observemos la figura 4.5, y denotemos por D_k al mapa dado por un polígono regular de k lados encajado en el plano. El refinamiento de la gráfica dual de D_k contiene una gráfica isomorfa a $*_k$ ⁵. Así, una expansión de $*_k$ puede ser pensada como una expansión del mapa dual D_k^* , correspondiente a la introducción de una diagonal en D_k para producir una cara nueva en el mapa. Una sucesión de expansiones de $*_k$ equivale a añadir diagonales en D_k de forma que producen nuevas caras dentro de D_k , y que por lo tanto se intersecan únicamente en vértices del polígono. Llamaremos a una descomposición de esta forma un *arreglo de diagonales* de D_k . Notemos que podemos añadir a lo más $k - 3$ diagonales a D_k sin causar intersecciones en su interior, de modo que una expansión de $*_k$ contiene como mucho $k - 3$ aristas, a las que asignamos un número real positivo en $X_{\leq *}_k^{\text{met}}$. Bajo esta correspondencia, una expansión maximal de $*_k$ equivale a una triangulación del polígono D_k . Así, contraer una expansión de $*_k$ equivale a eliminar una diagonal correspondiente en D_k , de forma que las gráficas máximamente expandidas parecen definir una descomposición celular de $X_{\leq *}_k^{\text{met}}$, como discutimos para las celdas racionales de $RG_{g,n}^{\text{met}}$. En efecto, este es el caso.

Teorema 4.2.1. *Tomemos un entero positivo $k \geq 3$. El espacio $X_{\leq *}_k^{\text{met}}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^{k-3} . Su estructura combinatoria, dada por las relaciones de contracción en $X_{\leq *}_k^{\text{met}}$, define una descomposición celular de \mathbb{R}^{k-3} en la que cada celda es un cono convexo abierto con vértice en el origen. El grupo $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ actúa en $X_{\leq *}_k^{\text{met}}$*

⁵La gráfica dual al polígono D_k consiste en dos vértices (uno dentro del polígono, uno fuera) unidos por k aristas, cada una de las cuales atraviesa un lado de D_k . Para una descripción más concreta, ver el apéndice.

por transformaciones ortogonales.

Demostración. Sea D_k un polígono convexo de k lados dibujado en el plano. Como observamos antes, podemos identificar cada expansión de $*_k$ con un arreglo de diagonales de D_k libre de intersecciones, de forma que una expansión maximal corresponde a una triangulación de D_k . Llamemos $V \subset \mathbb{R}^2$ al conjunto de vértices de D_k , de forma que \mathbb{R}^V es el conjunto de todas las funciones $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Elegir un etiquetado $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ nos permite identificar \mathbb{R}^V con \mathbb{R}^k , y por tanto a las funciones $f \in \mathbb{R}^V$ con puntos en \mathbb{R}^k .

Así, para un $f \in \mathbb{R}^V$, la gráfica $gr(f) := \{(v_i, f(v_i)) \mid 1 \leq i \leq k\}$ es un subconjunto de k puntos en \mathbb{R}^3 . Denotemos por C_f a la intersección de todos los conjuntos convexos en \mathbb{R}^3 que contienen a $gr(f)$ ⁶. C_f es un poliedro convexo en \mathbb{R}^k . Comúnmente, los puntos de $V(C_f) = \{f(v_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ se encuentran en posición general, de forma que cualquier plano por tres de ellos no contiene otro elemento de $V(C_f)$.

Visto desde la dirección positiva del eje z , las aristas de C_f producen un arreglo de diagonales de D_k : tomemos $\lambda > \max\{f(v_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$, $H = \{(x, y, \lambda) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ y supongamos que P denota la proyección ortogonal de C_f en H . Para cada $y \in P(C_f)$, denotemos por x_y al punto de $P^{-1}(y)$ más cercano a H , que existe por la compacidad de C_f . El *techo* de C_f es el conjunto $T(C_f) := \{x_y \mid y \in P(C_f)\}$, que es un complejo simplicial cuyas aristas son las envolventes convexas de ciertas parejas en $V(C_f)$. Por medio de una traslación, podemos suponer que H es el plano $z = 0$, de manera que $P(C_f)$ coincide con D_k y P es lineal, por lo que preserva combinaciones convexas. Esto implica que las aristas de $T(C_f)$ van a aristas y diagonales de D_k bajo P . Las proyecciones de dos aristas distintas de $T(C_f)$ se pueden intersecar solamente en la frontera de D_k : en otro caso, su intersección sucede en un plano que también debe contener a sus respectivos extremos, que por lo tanto corresponde a una cara de C_f . Esta construcción nos permite asignar a cada elemento de \mathbb{R}^V un arreglo de diagonales en D_k , identificado con una expansión de $*_k$. Denotemos por $\xi : \mathbb{R}^V \rightarrow X_{\leq *_k}$ a la función resultante.

Si $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función afín, su gráfica satisface una ecuación lineal y es un plano en \mathbb{R}^3 . Así, $T(C_h)$ es un subconjunto plano, por lo que no tiene aristas internas y debe corresponder a un arreglo vacío y por lo tanto a $*_k$. Más generalmente, si $f, g \in \mathbb{R}^V$ satisfacen que $a = f - g$ es una función afín, los arreglos inducidos por f y g coinciden. Para ver esto, tomemos una arista e_f del techo de f correspondiente a una diagonal de D_k , y digamos que resulta de la envolvente convexa de los vértices $f(v_k)$ y $f(v_l)$. Si la envolvente de $g(v_k)$ y $g(v_l)$ no es una arista de $T(C_g)$, debe estar contenida en el interior de una de sus caras y yacer en un plano determinado por la envolvente convexa de 4 elementos de $g(V)$, digamos v_1, \dots, v_4 . Puesto que a es afín, los puntos $a(v_i)$ también yacen en un plano, de modo que los puntos $g(v_i) + a(v_i) = f(v_i)$, $1 \leq i \leq 4$, satisfacen una ecuación lineal. Así, vemos que e_f no es una arista de $T(C_g)$. Denotemos por $\text{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ al grupo de transformaciones afines del plano en la recta. La restricción de un elemento de $\text{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ a V nos permite encajarlo en \mathbb{R}^V de modo que su imagen es un subespacio lineal de dimensión 3. La discusión anterior implica que ξ constante en las fibras de la proyección

$$\pi : \mathbb{R}^k \rightarrow \frac{\mathbb{R}^k}{\text{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})},$$

⁶Usualmente, C_f es llamada la *envolvente convexa* de $gr(f)$.

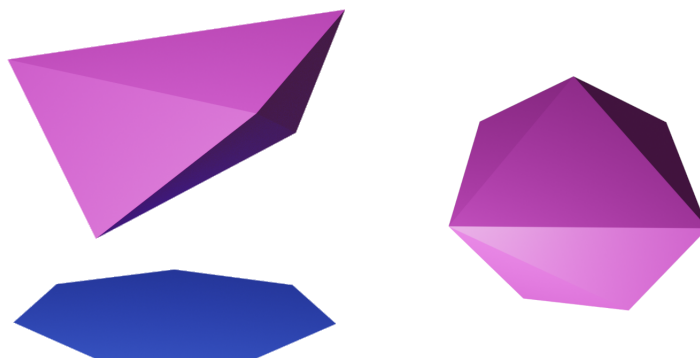


Figura 4.7: El techo de C_f induce un arreglo de diagonales en D_k que corresponde a una expansión de $*_k$.

y por lo tanto se factoriza a través de η' , de acuerdo al diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\pi} & \frac{\mathbb{R}^k}{\text{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})} \\
 \downarrow \zeta & & \swarrow \eta \\
 X_{\leq *k} & &
 \end{array}$$

en donde identificamos \mathbb{R}^V con \mathbb{R}^k y a $\text{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ con su imagen en \mathbb{R}^V . Una función $a \in \text{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ está determinada por su imagen en una base de \mathbb{R}^2 y un $r \in \mathbb{R}$. Así, para una $f \in \mathbb{R}^k$ hay una función afín a tal que $a(v_i) = f(v_i)$, $k - 3 \leq i \leq k$. Puesto que $\zeta(f) = \zeta(f - a)$, podemos pensar en cada $f \in \mathbb{R}^k / \text{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ como una $f' \in \mathbb{R}^V$ que satisface $f'(v_i) = 0$ para $k - 3 \leq i \leq k$, y por lo tanto como un punto en \mathbb{R}^{k-3} . A través de esta correspondencia, dadas $f, g \in \mathbb{R}^{k-3}$ la diferencia $a = f - g$ satisface $a(v_i) = 0$ para $k - 3 \leq i \leq k$, de manera que es afín si y sólo si es la función constante 0 y $f = g$.

La función η es suprayectiva, pues podemos construir cualquier arreglo de diagonales en D_k eligiendo adecuadamente alturas para sus vértices en \mathbb{R}^3 y tomando el techo del poliedro resultante. Para $f \in \mathbb{R}^k$, la longitud de las aristas de $T(C_f)$ que se proyectan a diagonales de D_k definen una métrica en la expansión de $*_k$ correspondiente: si e es una arista en $T(C_f)$ que se proyecta a la diagonal d_e de D_k , asignamos $l(e) - l(d_e)$ a la arista que corresponde en la expansión de $*_k$ ⁷. Así, η define una función de \mathbb{R}^k en $X_{\geq *k}^{\text{met}}$, que denotamos por η' . Fijemos un $d \in X_{\leq *k}$ con $m \leq k - 3$ aristas, y analicemos el conjunto $\eta^{-1}(d)$: afirmamos que es un cono convexo abierto de dimensión m .

Tomemos dos $f, g \in \mathbb{R}^k$ que corresponden al mismo arreglo en D_k . La línea recta L entre f y g está dada por las funciones $l_t = f + t(g - f)$. Observemos que el vértice $l_t(v_i)$ de $T(C_{l_t})$ está en la línea entre $f(v_i)$ y $g(v_i)$ para cada $1 \leq i \leq k - 3$. Si e es una arista en $T(C_f)$ correspondiente

⁷Esta asignación garantiza que deformar continuamente a $T(C_f)$ de manera que e se aplana corresponde a disminuir la longitud de la arista correspondiente de una expansión Γ de $*_k$. Cuando la longitud "se hace" 0, vemos una contracción en Γ .

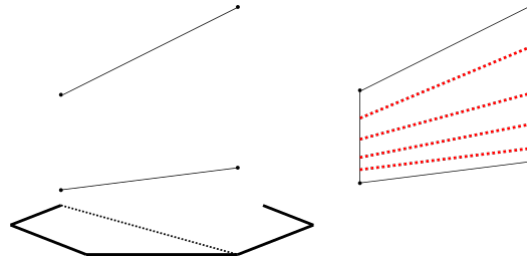


Figura 4.8: Las aristas de $T(C_f)$ que corresponden a diagonales no están en un plano paralelo a $z = 0$. Sus transportes por L también son aristas en $T(C_{l_f})$.

a una diagonal en D_k , sus extremos son transportados por L a través de dos segmentos de recta verticales, digamos r_1, r_2 , hasta llegar a los extremos de una arista equivalente en $T(C_g)$, como se muestra en la figura 4.8. Dos extremos correspondientes de $T(C_{l_f})$ inducen la misma diagonal: si no, su envolvente convexa yace en un plano paralelo a $H : z = 0$, de manera que una de las rectas rojas de la figura es paralela al plano; puesto que r_1 y r_2 son recorridos a la misma velocidad, esto puede suceder únicamente para $t = 0$ o $t = 1$.

Así, $\eta^{-1}(d)$ es un subconjunto convexo de \mathbb{R}^{k-3} . Multiplicar $f \in \eta^{-1}(d)$ por un $\alpha > 0$ preserva las relaciones de orden entre parejas de extremos de $T(C_f)$, que dictan la estructura de sus aristas internas. Así, αf induce el mismo arreglo que f . Similarmente, para $g \in \eta^{-1}(d)$ la suma $f + g$ preserva las mismas relaciones entre pares de extremos, y produce el mismo arreglo de m diagonales. Así, el espacio $\eta^{-1}(d)$ es un cono abierto de dimensión m con vértice en el origen, que corresponde a $*_k$, pues es el punto al que se aproximan los elementos de $\eta^{-1}(d)$ cuando aplanamos continuamente un $T(C_f)$, haciendo tender las longitudes de sus aristas a la longitud de las diagonales correspondientes en D_k . Luego, $\eta^{-1}(d)$ es homeomorfo a \mathbb{R}_+^m , de forma que $X_{\leq \Gamma}$ induce una descomposición celular en \mathbb{R}^{k-3} , en la que dos celdas son adyacentes si corresponden a expansiones de $*_k$ relacionadas por una contracción.

Más aún, la función η' define un homeomorfismo entre \mathbb{R}^{k-3} y $X_{\leq *_k}^{\text{met}}$: la suprayectividad de η nos permite elegir un punto en \mathbb{R}^{k-3} que corresponde a un arreglo fijo en D_k . Para una arista e que representa una de sus diagonales, es posible modificar la altura de uno de sus extremos x para darle una longitud deseada. Esta operación sólo altera la longitud de e y de las aristas incidentes en x que corresponden a lados de D_k . Así, η' es suprayectiva. Similarmente, dos elementos f y g que corresponden al mismo arreglo necesariamente dan longitudes distintas a sus diagonales, de forma que η' es inyectiva. Puesto que pequeñas perturbaciones de $T(C_f)$ producen el mismo arreglo de diagonales, η' es continua en cada celda de \mathbb{R}^{k-3} y por lo tanto es continua en todo su dominio. Finalmente, sea $U \subset \mathbb{R}^{k-3}$ una bola abierta de radio $r > 0$. Para cada $f \in U$, las aristas diagonales de $T(C_f)$ toman sus longitudes de un abierto $U_l \subset \mathbb{R}$, donde l depende de r . Esto es, los puntos de $\eta'(U)$ corresponden a expansiones de $*_k$ cuyas métricas tienen imagen en el abierto U_l . Vemos que podemos tomar una ϵ -vecindad en cada punto de $\eta'(U)$ si ϵ es suficientemente pequeño. Esto implica que η' es abierta, y por lo tanto un homeomorfismo.

Por último, notemos que algunos arreglos de diagonales en D_k están relacionados por rotaciones. Tomemos por D_k al polígono regular con centro en el origen, de forma que $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ actúa en V por rotaciones de D_k . Esto induce una acción en $\mathbb{R}^V = \mathbb{R}^k$ por permutaciones de los ejes, que son transformaciones ortogonales de \mathbb{R}^k . Además, cada rotación de D_k es una rotación de \mathbb{R}^2 , por lo que deja a $\text{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ invariante y por lo tanto a su imagen $A \subset \mathbb{R}^k$. Así, la acción de

$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ desciende a $A^\perp = \mathbb{R}^{k-3}$. □

Fijemos $k \geq 3$, y llamemos C a la descomposición celular de \mathbb{R}^{d-3} inducida por $X_{\leq *k}$. Observemos que el número de celdas de C con dimensión máxima coincide con el número de triangulaciones distintas del polígono D_k , dado por

$$\frac{1}{k-1} \binom{2(k-2)}{k-2},$$

el $(k-2)$ -ésimo número de Catalan. Además, cada celda de dimensión máxima tiene $k-3$ caras de dimensión $k-4$, y cada cara yace en dos celdas, pues un arreglo de $k-4$ diagonales se completa a una triangulación añadiendo 1 de las dos diagonales de un cuadrilátero. Así, hay

$$\frac{k-3}{2(k-1)} \binom{2(k-2)}{k-2}$$

celdas de dimensión $k-4$ en C . Por otro lado, hay tantas 1-celdas como corresponde diagonales en D_k , $\binom{k}{2} - k$. Para otras m , calcular el número c_m de m -celdas es un problema de combinatoria más interesante. Por ejemplo, si $k = 6$ las fórmulas anteriores nos dicen que tenemos 9 celdas de dimensión 1 y 14 de dimensión 3. Cada 2-celda tiene 2 caras de dimensión 1. Ahora, una 1-celda corresponde a una diagonal del hexágono. Seis de ellas lo dividen en un triángulo y un pentágono, y las otras 3 lo dividen en 2 cuadriláteros. Si la 1-celda e corresponde a una diagonal del primer tipo, podemos completarla en un arreglo de dimensión 2 de 5 formas distintas, correspondientes a las 5 elecciones de diagonales para el pentágono. Así, e yace en 5 celdas bidimensionales, mientras que si e es del segundo tipo, e yace en 4 celdas de dimensión 2 dadas por las 4 elecciones de diagonales para los dos cuadriláteros en los que divide a D_6 . Puesto que cada 2-celda tiene por caras a dos 1-celdas, tenemos

$$2c_2 = 6(5) + 3(4) = 42$$

por lo que C tiene 21 celdas de dimensión 2.

Usemos la estructura de $X_{\leq *k}^{\text{met}}$ para estudiar el espacio $X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}$.

Teorema 4.2.2. Para $\Gamma \in RG_{g,n}$,

$$X_{\leq \Gamma}^{\text{met}} \cong \mathbb{R}_+^{e(\Gamma)} \times \mathbb{R}^{6g+3n-6-e(\Gamma)}.$$

La estructura combinatoria de $X_{\leq \Gamma}$ induce una descomposición celular de $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)} \times \mathbb{R}^{6g+3n-6-e(\Gamma)}$. El grupo $\text{Aut}(\Gamma)$ actúa en $X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}$ por transformaciones ortogonales a través del homeomorfismo. La acción de $\text{Aut}(\Gamma)$ es fiel en $\mathbb{R}^{6g+3n-6-e(\Gamma)}$ excepto cuando $g = 1$ y $n = 1$, y es fiel en $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$ cuando Γ no es excepcional.

Demostración. Fijemos $\Gamma \in RG_{g,n}$ con v vértices, e aristas y grado máximo m . Para cada $i \in \{3, \dots, m\}$, sea n_i el número de vértices en Γ de grado i , de forma que $n_3 + \dots + n_m = k$. Puesto que identificamos expansiones $X_{\leq \Gamma}$ sólo cuando hay un isomorfismo entre ellas que fija las medias aristas provenientes de Γ , podemos expandir de manera independientemente cada vértice en Γ

para obtener una $\Gamma' \in X_{\preceq \Gamma}$. Así, si denotamos por $*(1), \dots, *(k)$ a los vértices de Γ , tenemos que

$$X_{\preceq \Gamma}^{\text{met}} = \mathbb{R}_+^{e(\Gamma)} \times \prod_{i=1}^k X_{\preceq *i}^{\text{met}}.$$

en donde el factor $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$ corresponde a la longitud de las aristas que Γ' y Γ tienen en común, mientras que el resto de las longitudes están asignadas independientemente en cada $X_{\preceq *(i)}^{\text{met}}$. Por el teorema previo, vemos que

$$\prod_{i=1}^k X_{\preceq *(i)}^{\text{met}} \cong \prod_{i=1}^m (\mathbb{R}^{i-3})^{n_i} = \mathbb{R}^{\text{codim}(\Gamma)}$$

en donde

$$\begin{aligned} \text{codim}(\Gamma) &= \sum_{i=3}^m (i-3)n_i = \sum_{i=3}^m in_i - 3 \sum_{i=3}^m n_i \\ &= 2e - 3v \\ &= 6g + 3n - 6 - e, \end{aligned}$$

pues Γ satisface que $v - e + n = 2 - 2g$. Llamamos al número $6g + 3n - 6 - e$ la codimensión de la gráfica Γ .

Los elementos de $\text{Aut}(\Gamma)$ pueden ser descritos por su acción en $V(\Gamma)$. Cada automorfismo f permuta los vértices de Γ preservando los órdenes cíclicos. Puesto que f es un isomorfismo de las gráficas subyacentes, sólo puede permutar vértices de mismo grado, que corresponden a los factores de $(\mathbb{R}^{i-3})^{n_i}$, para cada grado i . Localmente, podemos identificar el vértice $*(j)$ de grado i con el mapa $*_i$ encajado en el plano, en donde vemos que las únicas permutaciones de sus medias aristas que preservan el orden cíclico son las rotaciones de $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$. Como vimos en el teorema previo, f actúa ortogonalmente en cada factor correspondiente a la estrella $*_i$, para cada grado i . Luego, $\text{Aut}(\Gamma)$ actúa en $\prod_{i=1}^k X_{\preceq *i}^{\text{met}}$ por transformaciones ortogonales. Además, puesto que $\text{Aut}(\Gamma)$ actúa en $E(\Gamma)$ por permutaciones, vemos que también su acción en $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$ es por transformaciones ortogonales: a saber, un $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ permuta los ejes de $\mathbb{R}^{e(\Gamma)}$. Concluimos que $\text{Aut}(\Gamma)$ actúa en todo $X_{\preceq \Gamma}^{\text{met}}$ por transformaciones ortogonales. Como discutimos antes, la acción de $\text{Aut}(\Gamma)$ en $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$ no es fiel cuando la gráfica Γ es excepcional. Sin embargo, dado que las medias aristas de Γ están etiquetadas en $X_{\preceq \Gamma}^{\text{met}}$, $\text{Aut}(\Gamma)$ actúa fielmente en $\mathbb{R}^{\text{codim}(\Gamma)}$: en efecto, $f \in \text{Aut}(\Gamma) \setminus \{\text{Id}\}$ permuta al menos un par de medias aristas de Γ , de forma que intercambia dos expansiones que si bien son isomorfas como gráficas, no están identificadas en el factor $X_{\preceq *(j)}$ correspondiente. Esto falla únicamente cuando $(g, n) = (1, 1)$. Observemos la figura 4.3: E_2 es maximal, por lo que no tiene expansiones y $\mathbb{R}^{\text{codim}(E_2)}$ es un punto, de manera que $\text{Aut}(E_2)$ actúa trivialmente en él. Para E_1 , $X_{\preceq E_1}$ tiene dos elementos que son fijados por el elemento $2 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, que corresponde al automorfismo de E_1 que actúa trivialmente en $E(E_1)$. \square

El siguiente es el resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.2.3. *Tomemos $g \geq 0$, $n \geq 1$. Si $(g, n) \neq (1, 1)$, el espacio*

$$RG_{g,n}^{met} = \coprod_{\Gamma \in RG_{g,n}} \frac{\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}}{\text{Aut}(\Gamma)}$$

es un orbifold diferenciable de dimensión $6g + 3n - 6$, localmente modelado por los cocientes

$$\frac{X_{\preceq \Gamma}^{met}}{\text{Aut}(\Gamma)}, \quad \Gamma \in RG_{g,n}^{met}$$

Antes de pasar a su demostración, necesitamos de la siguiente observación y de un lema técnico.

Proposición 4.2.2. *Sean Γ y Γ' gráficas de listones métricas, y supongamos que $\Gamma \preceq \Gamma'$. Entonces hay un encaje diferenciable $\alpha : X_{\preceq \Gamma'}^{met} \hookrightarrow X_{\preceq \Gamma}^{met}$*

Demostración. Esto es consecuencia de que Γ se obtiene a partir de una serie de contracciones en Γ' . Esto es, toda expansión métrica de Γ' es una expansión métrica de Γ . Notemos que para ciertos enteros g y n sujetos a $2 - 2g - n < 0$, las gráficas de listones subyacentes de Γ y Γ' pertenecen al mismo $RG_{g,n}$. Etiquetemos de forma que podamos pensar que $E(\Gamma) \subseteq E(\Gamma')$, con $|E(\Gamma)| = e$, $|E(\Gamma')| = e'$. Recordemos que tanto $X_{\preceq \Gamma}^{met}$ como $X_{\preceq \Gamma'}^{met}$ se encajan en

$$X = \mathbb{R}^{6g-6+3n}$$

Pensar a $X_{\preceq \Gamma'}^{met}$ como subconjunto de $X_{\preceq \Gamma}^{met}$ consiste en reemplazar cómo entendemos el etiquetado de una arista $a \in E(\Gamma') \setminus E(\Gamma)$ dentro del espacio X : en $X_{\preceq \Gamma}^{met}$, la asignación de un número positivo para a depende de una variación en un cierto X_* , jalada a través de un homeomorfismo, de acuerdo al teorema 4.2.1; en $X_{\preceq \Gamma'}^{met}$, la asignación corresponde a una coordenada de $\mathbb{R}_+^{e'}$. Así, escribamos $E(\Gamma') \setminus E(\Gamma) = \{a_1, \dots, a_k\}$, de forma que los k factores de $X_{\preceq \Gamma'}^{met}$ correspondientes a $E(\Gamma') \setminus E(\Gamma)$ conforman un \mathbb{R}_+^k . Denotemos por $\iota : \mathbb{R}_+^k \hookrightarrow \mathbb{R}$ a la inclusión, que es claramente diferenciable, y observemos que $k + e = e'$. Definimos $\alpha : X_{\preceq \Gamma'}^{met} \rightarrow X_{\preceq \Gamma}^{met}$ de acuerdo al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}_+^{e'} \times \mathbb{R}^{6g-6+3n-e'} \\ \parallel \\ \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}_+^e \times \mathbb{R}^{6g-6+3n-e-k} \\ \downarrow \iota \times \text{Id} \\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^e \times \mathbb{R}^{6g-6+3n-e-k} \\ \parallel \\ \mathbb{R}_+^e \times \mathbb{R}^{6g-6+3n-e} \end{array}$$

□

Por ejemplo, imaginemos que Γ_3 tiene todos sus vértices de grado 3, salvo un vértice de grado 4. En tal caso, tenemos exactamente dos expansiones (correspondientes a dos diagonales del cuadrado dual a $*_4$). Supongamos que Γ_1 es una tal expansión. Vemos que, una vez etiquetado, $X_{\leq \Gamma_1}^{\text{met}}$ se identifica con dos conos de dimensión máxima en $X_{\leq \Gamma_3}^{\text{met}}$ unidos por su frontera común, un cono de dimensión menor correspondiente a las métricas sobre Γ_3 .

Lema 4.2.1. *Sea O un orbifold. Fijemos cartas (\tilde{U}, G, ϕ) y (\tilde{W}, H, ψ) sobre el conjunto $U = \phi(\tilde{U})$, y supongamos que $U \subset W$. Supongamos que existe un punto $x \in \tilde{U}$ para el que $G = G_x$, que es el caso cuando O es diferenciable. Sea $\alpha : \tilde{U} \rightarrow \tilde{W}$ una función suave para la que $\psi \circ \alpha = \phi$. Entonces α es un encaje orbifold.*

Para su demostración, referimos al artículo [17], donde aparece como el lema 2.2, y al capítulo 1 de [2]. Ahora bien, pasemos a la prueba del teorema 4.2.3

Demostración. Fijemos una $\Gamma \in RG_{g,n}$. Abusando de la notación, identificamos $\text{Aut}(\Gamma)$ con su representación en $O(n)$, donde n es la codimensión de Γ . Denotemos por $\tilde{\mu}_\Gamma$ a la función

$$\tilde{\mu}_\Gamma : X_{\leq \Gamma}^{\text{met}} \rightarrow RG_{g,n}^{\text{met}}$$

que envía cada expansión de Γ a su clase de isomorfismo en $RG_{g,n}^{\text{met}}$ preservando la métrica en cada arista. La acción de $\text{Aut}(\Gamma)$ en $X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}$ permuta expansiones isomorfas de Γ , de modo que $\tilde{\mu}_\Gamma$ se factoriza por su proyección en $X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}/\text{Aut}(\Gamma)$ a través de la función inducida μ_Γ , de acuerdo al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X_{\leq \Gamma}^{\text{met}} & \longrightarrow & \frac{X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}}{\text{Aut}(\Gamma)} \\ & \searrow \tilde{\mu}_\Gamma & \downarrow \mu_\Gamma \\ & & RG_{g,n}^{\text{met}} \end{array}$$

Asignemos una métrica m a Γ para obtener al elemento $\Gamma_m \in RG_{g,n}^{\text{met}}$. Denotemos por U a la ϵ -vecindad de Γ , $U_\epsilon(\Gamma_m)$. El conjunto $\tilde{\mu}_\Gamma^{-1}(U)$ es abierto en $X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}$, y de hecho es homeomorfo a una bola. Para verlo, basta usar el homeomorfismo

$$h : X_{\leq \Gamma}^{\text{met}} \rightarrow \mathbb{R}_+^{e(\Gamma)} \times \mathbb{R}^{\text{codim}(\Gamma)}$$

y elegir un etiquetado de $E(\Gamma)$ para tener una correspondencia explícita entre $\mathbb{R}_+^{E(\Gamma)}$ y $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$. Fijemos $x \in \tilde{\mu}_\Gamma^{-1}(U)$ y analicemos su imagen bajo h . Las primeras $e(\Gamma)$ coordenadas de $h(x)$ corresponden a la métrica de Γ . Puesto que $\tilde{\mu}_\Gamma$ preserva la métrica y U es una ϵ -vecindad, la i -ésima entrada de h satisface $h(x)_i \in B_i := (-\epsilon + m(e_i), m(e_i) + \epsilon)$ cuando $1 \leq i \leq e(\Gamma)$. Si $i > e(\Gamma)$. El resto de las entradas están agrupadas de acuerdo a los vértices de Γ . Un grupo asociado a un vértice de grado k corresponde a un punto en \mathbb{R}^{k-3} contenido en una vecindad abierta del origen, homeomorfa a una bola de radio $r(\epsilon) > 0$ de acuerdo a la asignación métrica que describimos previamente. Denotamos la bola correspondiente al vértice v por B_v . Esta observación nos permite ver que $\tilde{\mu}_\Gamma^{-1}(U)$ es homeomorfa al producto de los B_i y los B_v . Tal producto es un abierto básico en el espacio $\mathbb{R}^{\text{codim}(\Gamma)}$, y por lo tanto es homeomorfo a una bola abierta. Para el punto $h(x)$, podemos elegir bolas suficientemente pequeñas contenidas en cada B_v y tomar un producto similar para dar un abierto alrededor de x contenido en $\tilde{\mu}_\Gamma^{-1}(U)$. La función

$$\mu_\Gamma : \frac{\tilde{\mu}^{-1}(U)}{\text{Aut}(\Gamma)} \rightarrow U$$

resulta ser un homeomorfismo si ϵ es suficientemente pequeño, relativo a la arista más corta de Γ . Primero, veamos que es biyectiva:

Para una expansión métrica de Γ , $Y \in U$, tomemos $X_1, X_2 \in \tilde{\mu}_\Gamma^{-1}(Y)$. Por definición de $\tilde{\mu}$, hay un isomorfismo de gráficas de listones $\tilde{\alpha}$ entre X_1 y X_2 . Para $1 \leq i \leq 2$, denotemos por K_i al conjunto de aristas X_i que están contraídas en Y . Podemos suponer que el isomorfismo $\tilde{\alpha}$ se restringe a una biyección $a : K_1 \rightarrow K_2$, de manera que induce un automorfismo $\alpha \in \text{Aut}(\Gamma)$. Elijiendo etiquetas para K_1 , a nos permite identificar a K_1 y K_2 con el conjunto $K = \{1, \dots, |K_1|\}$. Así, $\tilde{\alpha}$ actúa como el producto de un automorfismo de Y y una permutación del conjunto K ; en efecto, la acción de tal automorfismo en el espacio de expansiones métricas de Y lleva la celda de X_1 en la de X_2 . Puesto que α sólo permuta las aristas a contraerse, olvidarnos de la métrica nos permite ver que α fija a X_1 como elemento de $X_{\leq Y}$. Así, cualesquiera dos preimágenes de Y son equivalentes, de modo que μ_Γ da una biyección natural. Puesto que μ_Γ está inducida por la función continua $\tilde{\mu}_\Gamma$ y $X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}$ tiene la topología cociente, vemos que μ_Γ es continua; si hacemos ϵ suficientemente pequeño, tenemos que además es un homeomorfismo. Para ver esto, recordemos que la topología de $RG_{g,n}^{\text{met}}$ está definida por las ϵ -vecindades, por lo que μ es abierta. Es claro que podemos hacer esto para cualquier $\Gamma_m \in RG_{g,n}^{\text{met}}$, por lo que

$$\bigcup_{\Gamma \in RG_{g,n}^{\text{met}}} \mu_\Gamma \left(\frac{\tilde{\mu}_\Gamma(U_\epsilon(\Gamma_m))}{\text{Aut}(\Gamma)} \right) = RG_{g,n}^{\text{met}}.$$

Recordemos que cada $\text{Aut}(\Gamma)$ actúa fielmente en $\tilde{\mu}_\Gamma(U_\epsilon(\Gamma_m)) \subset X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}$, como indica el teorema 4.2.2. Ahora, supongamos que

$$\Gamma_3 \in I := \mu_{\Gamma_1} \left(\frac{\tilde{\mu}_{\Gamma_1}^{-1}(U_\epsilon(\Gamma_1))}{\text{Aut}(\Gamma_1)} \right) \cap \mu_{\Gamma_2} \left(\frac{\tilde{\mu}_{\Gamma_2}^{-1}(U_\epsilon(\Gamma_2))}{\text{Aut}(\Gamma_2)} \right),$$

de forma que Γ_3 es una expansión métrica de Γ_1 y Γ_2 . Para un δ suficientemente pequeño, se tiene que

$$\mu_{\Gamma_3} \left(\frac{\tilde{\mu}_{\Gamma_3}(U_\delta(\Gamma_3))}{\text{Aut}(\Gamma_3)} \right) \subset I.$$

Puesto que $\Gamma_1 \preceq \Gamma_3$, las expansiones métricas de Γ_3 son expansiones métricas de Γ_1 . Así, si etiquetamos las aristas de Γ_3 provenientes de Γ_1 , obtenemos un encaje explícito $\alpha : X_{\leq \Gamma_3}^{\text{met}} \hookrightarrow X_{\leq \Gamma_1}^{\text{met}}$.

Tomando las identificaciones correspondientes, obtenemos la inclusión

$$\frac{\tilde{\mu}_{\Gamma_3}^{-1}(U_\delta(\Gamma_3))}{\text{Aut}(\Gamma_3)} \subset \frac{\tilde{\mu}_{\Gamma_1}^{-1}(U_\epsilon(\Gamma_1))}{\text{Aut}(\Gamma_1)},$$

Para ver que en efecto la inclusión está bien definida, supongamos que E_1 y E_2 son expansiones métricas de Γ_3 identificadas por la acción de un automorfismo ϕ de Γ_3 en $X_{\leq \Gamma_3}^{\text{met}}$. El automorfismo ϕ permuta el conjunto de aristas E que aparecen en Γ_3 pero no en Γ_1 ; esto es,

el conjunto de aristas expandidas. Al contraerlas, obtenemos un automorfismo ϕ' en Γ_1 que identifica a E_1 y E_2 en $X_{\geq \Gamma_1}^{\text{met}}$. Esto es, la inclusión es equivariante respecto a $\text{Aut}(\Gamma_3)$ y $\text{Aut}(\Gamma_1)$. Similarmente, obtenemos la inclusión $\alpha' : X_{\geq \Gamma_3}^{\text{met}} \hookrightarrow X_{\geq \Gamma_2}^{\text{met}}$ y por tanto

$$\frac{\tilde{\mu}_{\Gamma_3}^{-1}(U_\delta(\Gamma_3))}{\text{Aut}(\Gamma_3)} \subset \frac{\tilde{\mu}_{\Gamma_1}^{-1}(U_\epsilon(\Gamma_1))}{\text{Aut}(\Gamma_2)}.$$

Observemos que la proposición 4.2.2 nos dice que la inclusión α es diferenciable. Así, el lema 4.2.1 garantiza su equivarianza, y que α y α' son los encajes orbifold correspondientes. □

La estratificación natural de $RG_{g,n}^{\text{met}}$

$$\coprod_{\Gamma \in \text{RG}_{g,n}} \frac{\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}}{\text{Aut}(\Gamma)}$$

induce una descomposición celular orbifold. Puesto que la acción de $\text{Aut}(\Gamma)$ es a través de permutaciones, obtenemos una descomposición conocida como la *descomposición canónica* de O , inducida a partir de la estructura de $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}/S_n$, en donde S_n denota el grupo simétrico de $\{1, \dots, n\}$.

Describamos los estabilizadores de cada gráfica de listones métrica Γ en una celda racional fija. Si $\text{Aut}(\Gamma)$ actúa fielmente en $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$, por construcción tenemos que $\text{Aut}(\Gamma)$ fija a Γ en una vecindad $\tilde{\phi}_\Gamma(U_\epsilon(\Gamma)) \subset X_{\geq \Gamma}^{\text{met}}$. Así, el grupo local asociado al estrato

$$\frac{\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}}{\text{Aut}(\Gamma)}$$

es precisamente $\text{Aut}(\Gamma)$.

Si Γ es excepcional y $(g, n) \neq (1, 1)$, el grupo $\text{Aut}(\Gamma)$ actúa fielmente en $X_{\geq \Gamma}^{\text{met}}$, de forma que el grupo local asociado a $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}/\text{Aut}(\Gamma) = \mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}/\text{Aut}(\Gamma)/\mathbb{Z}_2$ es $\text{Aut}(\Gamma)(\Gamma)$ también. Desde otro punto de vista, notemos que $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}/\text{Aut}(\Gamma)/\mathbb{Z}_2$ es un conjunto singular en $X_{\geq(\Gamma)}^{\text{met}}/\text{Aut}(\Gamma)$: la cubierta orbifold $X_{\geq(\Gamma)}^{\text{met}}/\text{Aut}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}/\text{Aut}(\Gamma)/\mathbb{Z}_2$ implica que su contribución a la característica de Euler de $RG_{g,n}^{\text{met}}$ es

$$\frac{1}{2|\text{Aut}(\Gamma)/\mathbb{Z}_2|} = \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|}.$$

En otras palabras, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.4. *Para $(g, n) \neq (1, 1)$, la característica de Euler de $RG_{g,n}^{\text{met}}$ está dada por*

$$\sum_{\Gamma \in \text{RG}_{g,n}} = (-1)^{e(\Gamma)} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|}.$$

Este número resulta ser

$$\sum_{\Gamma \in RG_{g,n}} = -\frac{(2g+n-3)!(2g)(2g-1)}{(2g)!n!} \zeta(1-2g),$$

en donde ζ denota la función zeta de Riemann. Este número fue calculado por Harer y Zagier en [12] a través de argumentos combinatorios, como se discute en [32]. Para la correspondencia final de este trabajo, necesitaremos un orbifold distinto a $RG_{g,n}^{\text{met}}$ que obtendremos utilizando una noción más fuerte de equivalencia. Más adelante, describiremos una forma de codificar la información conforme de una superficie de Riemann marcada (X, M) en una gráfica de listones Γ cuyo espacio total $X(\Gamma)$ es X . El etiquetado de las marcas M se traducirá en un etiquetado para las componentes de frontera de Γ .

Definición 4.17. Fijemos dos $\Gamma, \Gamma' \in RG_{g,n}$. Etiquetemos las componentes de la frontera de Γ como x_1, \dots, x_n , y las de Γ' como x'_1, \dots, x'_n . Diremos que Γ y Γ' son equivalentes si existe un isomorfismo de gráficas de listones $f: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ tal que $f(x_i) = x'_i, 1 \leq i \leq n$.

Denotamos por $RGB_{g,n}$ al conjunto de clases de equivalencia de gráficas de listones Γ con frontera etiquetada. Exactamente los mismos argumentos que antes muestran que el espacio

$$RGB_{g,n}^{\text{met}} = \coprod_{\Gamma \in RGB_{g,n}} \frac{\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}}{\text{Aut}_\delta(\Gamma)}$$

es un orbifold localmente modelado por los espacios

$$\frac{X_{\rightarrow\Gamma}^{\text{met}}}{\text{Aut}_\delta(\Gamma)}$$

En efecto, una expansión métrica de Γ define un etiquetado para su frontera, por lo que es suficiente utilizar al espacio $X_{\rightarrow\Gamma}^{\text{met}}$ para modelar al orbifold. Específicamente, elegir un etiquetado para las medias aristas de Γ induce una constelación $C = [\sigma, \alpha, \phi]$ en la que también tenemos un etiquetado natural de las aristas, a través de un etiquetado cómodo, por ejemplo, en donde cada ciclo γ en la descomposición ϕ puede ser etiquetado con el entero más pequeño no fijado por γ . Naturalmente, una elección distinta de etiquetas para las medias aristas de γ induce una permutación de $\{1, \dots, e(\Gamma)\}$ que no necesariamente pertenece al grupo de automorfismos del mapa dado por C . Puesto que el proceso de expansión y contracción de Γ no altera las etiquetas para sus aristas originales, las etiquetas de la frontera de Γ inducen etiquetas para la frontera de cualquier expansión Γ' de Γ .

Teorema 4.2.5. *Fijemos $g \geq 0, n \geq 1$. La proyección*

$$\pi: RGB_{g,n}^{\text{met}} \rightarrow RG_{g,n}^{\text{met}}$$

es una cubierta orbifold de grado $n!$. Es llamada la proyección olvidadiza, pues olvida el etiquetado de $\delta\Gamma$ para asignarle su clase de isomorfismo usual.

Demostración. Fijemos una gráfica de listones Γ' . Denotemos por F al conjunto de las compo-

nentes de frontera de Γ , y por $B := S_F$ al grupo simétrico de F . Observemos que $|B| = n!$. Elegimos un etiquetado $q : F \rightarrow \{1, \dots, n\}$, de manera que los elementos de B corresponden a todas las distintas formas $f \circ b : F \rightarrow [n]$ de etiquetar F . Cada elemento de $\text{Aut}(\Gamma)$ se restringe a un elemento de S_F , por lo que $\text{Aut}(\Gamma)$ actúa en B por multiplicación izquierda. Para cualquier $b \in B$, el estabilizador de esta acción es isomorfo a $\text{Aut}_\delta(\Gamma)$. Esto sucede puesto que un elemento de $\text{Aut}_\delta(\Gamma) \subset \text{Aut}(\Gamma)$ fija los elementos de F , por lo que su acción preserva cualquier $b \in B$. Obtenemos un homomorfismo $\text{Aut}_\delta(\Gamma) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)_b$ inyectivo, y por tanto un isomorfismo. Así, el espacio de órbitas $B/\text{Aut}(\Gamma)$ está en biyección con el conjunto de clases de gráficas de listones con frontera etiquetada, con gráfica subyacente Γ . En efecto, una órbita de $\text{Aut}(\Gamma)$ corresponde a elecciones distintas de etiquetas para F que son equivalentes de acuerdo a la definición 4.17. Esto es, para cada modelo local

$$L(\Gamma) := \frac{X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}}{\text{Aut}(\Gamma)}$$

hay $|B/\text{Aut}(\Gamma)|$ copias de

$$\frac{X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}}{\text{Aut}_\delta(\Gamma)}$$

que se proyectan en L bajo π . Además, estas copias son disjuntas, pues cada elemento en $B/\text{Aut}(\Gamma)$ da una forma esencialmente distinta de etiquetar F . Observemos que, dado que $\text{Aut}_\delta(\Gamma) \subset \text{Aut}(\Gamma)$ es un subgrupo, su inclusión natural produce un homomorfismo, haciendo de la proyección

$$\pi : \frac{X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}}{\text{Aut}_\delta(\Gamma)} \rightarrow \frac{X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}}{\text{Aut}(\Gamma)} \quad (4.2)$$

una cubriente de orbifolds buenos, de grado $[\text{Aut}(\Gamma) : \text{Aut}_\delta(\Gamma)]$. Este número es el índice de $\text{Aut}_\delta(\Gamma)$ en $\text{Aut}(\Gamma)$, y coincide con $|\text{Aut}(\Gamma)|/|\text{Aut}_\delta(\Gamma)|$. Así, la proyección

$$\pi : \pi^{-1} \left(\frac{X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}}{\text{Aut}(\Gamma)} \right) \rightarrow \frac{X_{\leq \Gamma}^{\text{met}}}{\text{Aut}(\Gamma)}$$

es una cubriente orbifold de grado $|B/\text{Aut}(\Gamma)||\text{Aut}(\Gamma)/\text{Aut}_\delta(\Gamma)|$. El lema de Burnside implica que

$$|B/\text{Aut}(\Gamma)| = \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \sum_{b \in B} |\text{Aut}_\delta(\Gamma)| = \frac{|\text{Aut}_\delta(\Gamma)|}{|\text{Aut}(\Gamma)|} |B|$$

puesto que cada estabilizador de la acción de $\text{Aut}(\Gamma)$ es isomorfo a $\text{Aut}_\delta(\Gamma)$. Así, tenemos que $|B/\text{Aut}(\Gamma)||\text{Aut}(\Gamma)/\text{Aut}_\delta(\Gamma)| = |B| = n!$. Dado que utilizamos el mismo modelo local en ambos espacios, los conjuntos $\pi^{-1}(L(\Gamma))$ cubren a $\text{RGB}_{g,n}^{\text{met}}$, y deducimos que $\pi : \text{RGB}_{g,n}^{\text{met}} \rightarrow \text{RG}_{g,n}^{\text{met}}$ es una cubierta orbifold en todos lados. Las consideraciones del encaje $\text{Aut}_\delta(\Gamma) \subset \text{Aut}(\Gamma)$ suceden localmente en cada modelo $L(\Gamma)$, por lo que es suficiente considerar las proyecciones como en la ecuación 4.2. Puesto que $\text{Aut}_\delta(\Gamma) \subset \text{Aut}(\Gamma)$, tenemos la equivarianza del diagrama correspondiente. \square

Corolario 4.2.5.1. *La característica de Euler de $RGB_{g,n}^{met}$ está dada por*

$$\chi(RGB_{g,n}^{met}) = n! \chi(RG_{g,n}^{met}).$$

4.3. Notas y referencias

Este capítulo explica la estructura orbifold del espacio de gráficas de listones métricas y el espacio de aquellas que tienen frontera etiquetada. El contenido de este capítulo está tomado de [2], [32], [22] y [44].

La definición 4.1 es una consecuencia de la noción de isomorfismo de mapas. Nuestra definición 4.2 aprovecha la presentación de una gráfica de listones como una 3-constelación para evadir la noción de frontera que da [32]. La definición 4.4 está tomada de [22], en donde aparece en la sección 2.2. La definición de orbifold está tomada de [44], y coincide con la que Motohico y Penkava citan en [32], así como la definición de cubierta orbifold, descomposición celular y característica de Euler orbifold. Nuestra definición 4.6 está tomada de [2], en donde aparece como la definición 1.1; similarmente, la definición para grupo de isotropía equivale a la definición 1.5 del mismo libro. Asimismo, completamos la prueba del teorema 4.1.1 a partir de la de [32].

La sección 4.2 sigue al artículo [32]. Rescatamos y explicamos sus definiciones para el espacio de gráficas de listones métricas, contracción de Whitehead y el orden parcial que define. Introducimos el etiquetado cómodo simplemente para fijar un isomorfismo $\mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}^{|E|}$. En la subsección de gráficas de listones excepcionales seguimos la discusión de [32], que enuncia sin prueba su clasificación. Damos pruebas completas y explotamos la equivalencia con el modelo de permutaciones para mapas para calcular los grupos de automorfismo de todas las gráficas excepcionales.

De nuevo, la subsección 4.2.2 es una reescritura de la sección correspondiente en [32]. Reescribimos la definición 4.15 e introducimos y demostramos la proposición 4.2.1 para hacer más explícita la topología de $RG_{g,n}^{met}$. Profundizamos en la discusión previa al teorema 4.2.1 para esclarecer la estructura del espacio de expansiones de Γ , y damos una prueba rigurosa del teorema 4.2.1, que aparece en [32] como el teorema 3.3. Reproducimos la prueba del teorema 4.2.2 y nos permitimos simplificarla un poco. Para el teorema 4.2.3 nos basamos en la prueba de Motohico y Penkava, pero la completamos: por un lado, introducimos la proposición 4.2.2 y damos una prueba original; por el otro, apelamos al lema 4.2.1 tomado de [17], donde equivale al lema 2.2. El resto de la sección sigue de nuevo a [32] fielmente, salvo por la demostración del teorema 4.2.5, que completamos.

Capítulo 5

El diferencial de Strebel-Jenkins

En este capítulo, construiremos un sistema canónico de cartas coordenadas para la superficie de Riemann X , una vez fijados una cantidad finita de puntos en X y un número real positivo para cada punto. Haremos esto a través de un *diferencial de Strebel*, un objeto analítico que permite cifrar la estructura compleja de X en información combinatoria. Esto nos permitirá identificar una superficie de Riemann marcada con una gráfica de listones métrica. Para ello, damos una introducción a la teoría de los diferenciales cuadráticos. La referencia principal es [42]. Adicionalmente, referimos a [28] para una explicación detallada de los conceptos básicos de topología diferencial que utilizamos.

5.1. Diferenciales cuadráticos

Fijemos una superficie de Riemann X con un atlas $A = (U, \phi)$ y un $p \in P$. Puesto que X es también una variedad diferenciable, podemos considerar su plano tangente $T_p X$, que es un espacio vectorial de dimensión compleja 1. Fijar una carta coordenada (U, z) alrededor de p nos permite dar una base para $T_p X$ sobre \mathbb{R} , usualmente llamada su *base canónica*, que también nos permite identificarlo con $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$.

Definición 5.1. El *plano cotangente* de X en p es el espacio dual de su plano tangente en p , $T_p X^*$. Lo denotamos por $CT_p X$

Referimos a la definición usada al inicio de la sección 4 de [28]. Usualmente, el espacio tangente de X se define como el espacio de derivaciones de X en p , que actúa en el espacio de funciones holomorfas en U con el mismo valor en p . Intuitivamente, cada $v_p \in T_p X$ actúa f de acuerdo a $vf = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(p) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(p)$, en donde $z = x + iy$ denota la coordenada elegida en X y (v_1, v_2) las coordenadas de v en la base de $T_p X$ inducida por z . Los elementos de $CT_p X$ son funciones lineales $\sigma : T_p X \rightarrow \mathbb{C}$. Un ejemplo claro es $d_p f$, la derivada de f en p . Concretamente, elegir la coordenada U nos permite calcular $f'(p) = c \in \mathbb{C}$, que define una función lineal $T_p X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $z \mapsto cz$, de acuerdo a la identificación de $T_p X = \mathbb{C}$ inducida por la coordenada z . Así, si f es una función holomorfa en U , el símbolo

$$f(z)dz$$

cobra un sentido concreto. En cada punto $w \in X$, $f(z(w))$ es un punto en \mathbb{C} , mientras que $dz_w : T_w X \rightarrow \mathbb{C}$ es una función lineal inducida por la carta z . Así, para cada $v \in T_w X$, $f(z(w))dz_w(v) \in \mathbb{C}$. Si $f(z(w)) \neq 0, \infty$, observemos que la condición

$$f(z(w))dz_w(v)^2 > 0$$

implica que $\arg(dz_w(v)) = -\frac{1}{2}\arg(f(z(w)))$. Así, $dz_w(v)$ está determinado por $f(z(w))$ salvo por un signo.

Ahora bien, podemos decir que una curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X$ es diferenciable si pensamos en X como una variedad diferenciable de dimensión 2. En tal caso, los vectores tangentes $\gamma'(t) \in T_p X_{\mathbb{R}}$ pueden ser identificados con vectores en $T_p X$.

Así, la condición de arriba define naturalmente un conjunto de vectores tangentes en X , y motiva la siguientes definiciones.

Definición 5.2. (Strebel). Sea X una superficie de Riemann con atlas $A = (U_i, z_i)$. Diremos que *diferencial cuadrático meromorfo* ϕ es un conjunto de funciones meromorfas $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ para las que se satisface la regla de transformación

$$\phi_v(z_i)dz_i^2 = \phi_j(z_j)dz_j^2 \quad dz_j = \frac{dz_j}{dz_i} dz_i.$$

También llamarmeos cada ϕ_i una representación local de ϕ .

Una vez definido, omitiremos el adjetivo “meromorfo”, pues suponemos siempre que las representaciones locales están dadas por funciones meromorfas; esto es, funciones holomorfas con valores en $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. En un lenguaje más técnico, ϕ es una sección holomorfa σ del haz vectorial

$$K : CT(X) \otimes CT(X) \rightarrow X,$$

en donde $CT(X)$ denota el haz cotangente de X y \otimes es el producto tensorial simétrico¹. Localmente, ϕ tiene la forma $f(z)(dz) \otimes (dz)$, con $f(z)$ una función holomorfa, que, al evaluarse en un punto y en un vector tangente, da el número complejo $f(z)(dz)^2$. De acuerdo a la definición previa, un cambio de variable $z = z(w)$ induce un cambio en las expresiones locales de ϕ . A saber,

$$f(z)(dz)^2 = f(z(w)) \left(\frac{dz}{dw} dw \right)^2 = f(z(w))z'(w)^2(dw)^2 = g(w)(dw)^2.$$

Un diferencial cuadrático meromorfo es una sección holomorfa del haz K sobre una superficie perforada $X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$, donde además tomamos expresiones $\phi_i(z)(dz)^2$ en vecindades V_i de los p_i para las cuales ϕ_i es *meromorfa* y coincide con σ en la intersección de cada vecindad perforada de p_i con V_i .

Así, la definición 5.2 identifica a un diferencial cuadrático con uno de sus *sistema de representantes*: en una vecindad coordinada de X , una sección de K es representada por un objeto de forma $f dz \otimes dz$, que se especializa a una función como las ϕ_v descritas en la definición de Strebel.

¹Esto es, se satisface que $dz \otimes dw = dw \otimes dz$.

Un diferencial cuadrático ϕ puede tener puntos críticos. Para un $p \in X$, ϕ asigna un valor en p a través de una elección de coordenadas, por lo que no tenemos una noción absoluta de un “valor” de ϕ en p . Sin embargo, la regla de transformación que damos arriba implica que los ceros y polos de ϕ están bien definidos. A saber, supongamos que $\phi = f(z)(dz)^2$ tiene un cero en p y fijemos una carta z alrededor de p tal que $z(p) = 0$, de manera que $f(z)$ es una función meromorfa con un cero de orden n en 0. Bajo la coordenada z , f admite una expansión analítica

$$f(z) = z^n(a_n + a_{n+1}z + \dots).$$

Bajo la regla de transformación, escribimos $z = z(w)$ de modo que

$$\begin{aligned} f(w) &= f(z) \left(\frac{dz}{dw} \right)^2 = f(a_1w + a_2w^2 + \dots)(a_1 + 2a_2w + \dots)^2 \\ &= (a_1w + a_2w^2 + \dots)^n (c_n + c_{n+1}(a_1w + a_2w^2 + \dots) \\ &\quad + c_{n+2}(a_1w + \dots) + \dots)(a_1 + 2a_2w + \dots)^2 \\ &= a_1^{n+2}c_n w^n + N(w) \\ &= w^n(b_n + b_{n+1}w + \dots), \end{aligned}$$

donde $N(w)$ está dada por potencias w^m con $m > n$, y $b_n = a_1^{n+2}c_n \neq 0$. Similarmente, si p es un polo de orden n para f , elegimos la carta z de manera que $f(z)$ tiene un polo de orden n en 0. Basta sustituir n por $-n$ en el cálculo anterior para concluir que cualquier otra expresión de ϕ alrededor de p también tiene un polo en p del mismo orden.

Observación. En la expansión anterior, notemos que $c_n = b_n$ para toda n si $a_1^{n-2} = 1$, que se satisface para cualquier cambio de coordenada si $n = -2$. Así, vemos que los diferenciales cuadráticos con polos dobles son especiales de cierta forma.

Definición 5.3. Sea ϕ un diferencial cuadrático en X . Elijamos un conjunto finito de representaciones locales ϕ_v para ϕ . Escribamos S_v para el conjunto de ceros y polos de cada expresión local ϕ_v . El conjunto de puntos singulares de ϕ es $S_\phi = \cup_v S_v$. Decimos que $p \in S_\phi$ es un cero de ϕ si es un cero de la representación local ϕ_v correspondiente. Análogamente, un polo de ϕ es un polo de una de sus expresiones locales.

Por el teorema de la identidad, el conjunto singular de un diferencial cuadrático ϕ no cero es un subconjunto discreto de X . Los elementos de $X \setminus S_\phi$ son llamados los *puntos regulares* de ϕ . Así, si X es compacta, el conjunto de polos ϕ es finito.

Definición 5.4. Sea X una superficie de Riemann compacta y M un subconjunto finito de X . Diremos que M es un conjunto de *puntos marcados* en X , y diremos que (X, M) es una superficie de Riemann marcada. Si M denota el conjunto de polos de un diferencial cuadrático ϕ en X , diremos que ϕ es un diferencial cuadrático en (X, M) .

Fijemos un diferencial cuadrático ϕ en X . Alrededor de un punto regular z_0 de ϕ , una expresión local $\phi = f(z)(dz)^2$ admite una vecindad $U \subset X$ tal que $f(U) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, de forma que podemos elegir una rama de $\sqrt{}$ para la que $\sqrt{f(z)}$ define una función holomorfa biyectiva. Así, para la carta coordenada (U, z) , la función

$$h : z(U) \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \int_{z_0}^z \sqrt{f(z)} dz$$

es holomorfa², de modo que su precomposición con z es holomorfa y por lo tanto define una carta coordenada para X alrededor de z_0 compatible con el atlas de X . Podemos suponer que su dominio es U . Denotemos esta carta por $w : U \rightarrow \mathbb{C}$. Vemos que $h'(z) = \sqrt{f(z)}$. Así, la regla de la cadena implica que el diferencial determinado por w satisface

$$(dw)^2 = (\sqrt{f}dz)^2 = f(dz)^2,$$

de manera que la expresión local de ϕ en U respecto de la coordenada w es $\phi = 1(dw)^2$. En este sentido, la carta coordenada w es *canónica*. Sin embargo, para cada $c \in \mathbb{C}$ las cartas

$$\pm w + c$$

inducen el mismo diferencial, y por lo tanto dan expansiones equivalentes para ϕ . Así, esto da el teorema siguiente, tomado del libro [42].

Teorema 5.1.1. *Fijemos un diferencial cuadrático ϕ en X . Alrededor de cada punto regular en X existe una carta w para la que ϕ tiene la expansión local $(dw)^2$. Está determinado salvo una transformación $w \mapsto \pm w + c$.*

En la construcción de w , elegimos una vecindad pequeña en la que es inyectiva, que depende de la elección de rama de $\sqrt{\cdot}$.

Definición 5.5. Sea ϕ un diferencial cuadrático en X . Un ϕ -disco es una vecindad de X en la que una coordenada canónica w es un homeomorfismo.

Todo punto regular z de ϕ es el centro de un único ϕ -disco maximal. La idea de su construcción consiste en continuar analíticamente una coordenada canónica hasta obtener una obstrucción inducida por un polo o un cero de q . Referimos al Teorema 5.2 del libro [42]. Llamaremos a este tal disco la vecindad maximal de z .

Nuestro interés está en las *trayectorias* de ϕ y en su estructura local, que discutiremos en un momento, de forma que la aparente ambigüedad en la elección de w no es relevante.

Definición 5.6. Sea ϕ un diferencial cuadrático con la expresión local $f(z)(dz)^2$ en (U, z) . Para $a \leq b \in \mathbb{R}$, fijemos una curva diferenciable $\gamma : (a, b) \rightarrow U$. Diremos que γ es una *trayectoria horizontal* para el diferencial ϕ si satisface

$$f(\gamma(t))(\gamma'(t))^2 > 0$$

para toda $t \in (a, b)$, en donde $\gamma'(t)$ está identificado con el elemento en \mathbb{C} al que corresponde bajo el isomorfismo $T_p X \cong \mathbb{C}$, inducido por la carta z . Más concretamente, podemos escribir $f(\gamma(t))((z \circ \gamma(t))')^2$. Por otro lado, si

$$f(\gamma(t))(\gamma'(t))^2 < 0$$

para cada $t \in (a, b)$, diremos que γ es una *trayectoria vertical* para ϕ . Además, diremos que una curva es una *trayectoria recta* si es vertical u horizontal³.

²Podemos ver esto utilizando una expansión en serie de potencias para $\sqrt{f(z)}$.

³Más generalmente, las trayectorias rectas de ϕ son las que tienen vectores tangentes de argumento fijo.

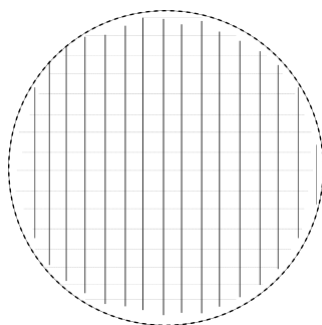


Figura 5.1: Trayectorias horizontales y verticales del diferencial $(dz)^2$.

Como discutimos de forma intuitiva, la función local $f(z)$ determina completamente un campo vectorial en C en el que $f(z)dz > 0$, salvo la ambigüedad de un signo para cada vector tangente. Vemos que las trayectorias horizontales son las curvas integrales de este campo. Podemos decir lo mismo para las trayectorias verticales, sujetas a la condición $f(z)dz < 0$. La coordenada canónica ayudará a clarificar lo que está sucediendo.

Proposición 5.1.1. *Sea $\phi = (dz)^2$ un diferencial cuadrático en $U \subset X$. Las rectas*

$$\gamma(t) = t + ci, \quad t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$$

dan las trayectorias horizontales de ϕ . Por otro lado, las rectas

$$\delta(t) = ti + c, \quad t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$$

dan las trayectorias verticales de ϕ .

Demostración. Podemos suponer que la carta z es un homeomorfismo $z : U \rightarrow \mathbb{C}$. En ambos casos, la curva $\gamma(t)$ induce la curva $z^{-1} \circ \gamma$, y

$$\phi(z^{-1} \circ \gamma)(t) = 1((z \circ (z^{-1} \circ \gamma(t)))'^2 = \gamma'(t)^2$$

Si $\gamma(t) = t + ci$ tenemos que $\gamma'(t)^2 = 1 \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $z^{-1} \circ \gamma$ es horizontal. Cuando $\delta(t) = ti + c$, $\delta'(t)^2 = (i)^2 = -1 < 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Si η es cualquier otra trayectoria horizontal en U , su imagen bajo z debe consistir en una curva para la que cada vector tangente es un número complejo cuyo cuadrado yace en \mathbb{R} . Así, un v tangente a η satisface $2\arg(v) = 0$, de manera que v tiene argumento 0 y debe ser real también. Concluimos que $z \circ \eta = \alpha t + ic$, con $\alpha > 0$, de forma que η es una reparametrización de un cierto γ . Así, al derivar η en t obtenemos el cuadrado del factor α , que es positivo también. El mismo análisis muestra que las funciones δ inducen todas las trayectorias verticales de ϕ . \square

La proposición previa explica la terminología de trayectorias horizontales y verticales. Para una diferencial cuadrática arbitraria, la figura 5.1 muestra exactamente lo que vemos cerca de uno de sus puntos regulares. La proposición anterior nos permite deducir lo siguiente:

Proposición 5.1.2. *Sea ϕ un diferencial cuadrático en X . Si $x \in X$ es un punto regular, existe una trayectoria vertical y una trayectoria horizontal que se intersecan en x ortogonalmente, respecto a la*

estructura compleja de X . Tales trayectorias son únicas.

Demostración. Basta con tomar una coordenada canónica z alrededor de x . Si $z(x) = a + ib \in \mathbb{C}$, las trayectorias dadas por la recta horizontal $\gamma = t + ib$ y la recta vertical $\delta = it + a$ son las únicas trayectorias que se intersecan en x ortogonalmente. Puesto que z es compatible con la estructura de X , el ángulo entre γ y δ en $z(x)$ coincide con el ángulo entre $z^{-1} \circ \gamma$ y $z^{-1} \circ \delta$. \square

En particular, dos trayectorias rectas que comparten más de un punto coinciden.

Ejemplo 5.1. En general, la situación es distinta en los puntos singulares del diferencial ϕ . Si una expresión local de $\phi = f(z)dz$ tiene un cero de orden m en p , tenemos que hay una carta (U, z) de X tal que $z(p) = 0$, bajo la cual f toma la forma $z \mapsto z^m$. Bajo esta representación local, el diferencial ϕ satisface

$$\phi = z^m (dz)^2.$$

Las funciones

$$\gamma_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_k : t \mapsto t \cdot \exp\left(\frac{2\pi i k}{m+2}\right), \quad k \in \{0, \dots, m+1\}$$

dan las trayectorias horizontales que tienen un extremo en 0. Para mostrar esto basta suponer que el diferencial ϕ está dado en el plano. En tal caso, vemos que

$$\phi(\gamma_k(t)) \left(\frac{d\gamma_k(t)}{dt}\right)^2 = t^m \exp\left(\frac{2\pi i k}{m+2}\right)^m \exp\left(\frac{2\pi i k}{m+2}\right)^2 = t^m > 0.$$

Similarmente, los números

$$\frac{2\pi i k + \pi i}{m+2}, \quad k \in \{0, \dots, m+1\}$$

determinan las raíces $(m+2)$ -ésimas de -1 , de manera que las curvas

$$\delta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}, \quad \delta_k : t \mapsto t \cdot \exp\left(\frac{2\pi i k + \pi i}{m+2}\right), \quad k \in \{0, \dots, m+1\}$$

dan trayectorias verticales para ϕ .

¿Qué sucede en los polos de una diferencial? Una discusión detallada aparece en la referencia [42], que es estándar. En general, la estructura de las trayectorias de ϕ es complicada. Sin embargo, nuestro interés está solamente en los polos de orden m a lo más 2.

Ejemplo 5.2. Estudiemos qué pasa cuando $m = 2$ y ϕ tiene la forma local $\phi = -\frac{1}{z^2}(dz)^2$. En tal caso, el residuo cuadrático de ϕ es menor que cero⁴. Los círculos concéntricos

$$c_r(t) = r \exp(it), \quad t \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R}_+$$

⁴Ver la sección 7.2 de [42] para una descripción de las trayectorias para otros residuos.

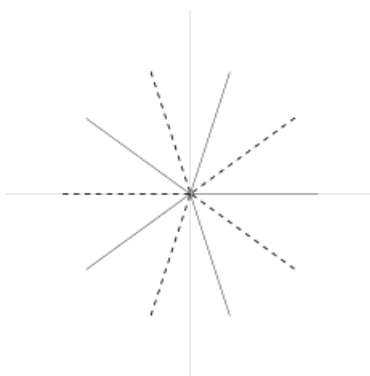


Figura 5.2: La estructura de trayectorias en un cero de orden m . Las trayectorias horizontales son los rayos sólidos, mientras que las verticales están punteadas.

dan las trayectorias horizontales. Vemos que

$$-\frac{1}{c_r(t)^2} \left(\frac{c_r(t)}{t} \right)^2 = -\frac{1}{r^2 \exp(it)^2} \cdot \exp(it)^2 i^2 = \frac{1}{r^2} > 0.$$

Por otro lado, los rayos

$$ta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad |a| = 1$$

dan las trayectorias verticales, pues para cada complejo a de módulo 1, tenemos

$$-\frac{1}{t^2 a^2} a^2.$$

Por supuesto, reparametrizaciones ρ de estas funciones también dan trayectorias con la misma imagen, en los intervalos donde ρ' no se anula. Observemos que las trayectorias horizontales son espacios compactos. Si ψ es un diferencial cuadrático con un polo doble en $x \in X$, podemos tomar una carta (U, z) para X y obtener una representación local en la que ψ toma la forma del ϕ de este ejemplo⁵. Más aún, podemos suponer que $z(U)$ es el disco unitario. Vemos que las trayectorias horizontales de ψ dan una *foliación* del disco, esto es, una partición suya en subvariedades de dimensión 1.

El resultado 5.1.1 sugiere la siguiente generalización, que aparece como el teorema 6.2 del libro de Strebel.

Teorema 5.1.2. *Sea p un punto cero de orden m de un diferencial cuadrático ϕ . Entonces existe una carta (U, z) centrada en z tal que ϕ tiene la representación local*

$$\phi(z)(dz)^2 = \left(\frac{n+2}{2} \right)^2 z^n (dz)^2.$$

La carta z es única salvo por su escalamiento por el factor $c = \exp(2\pi i k / (n+2))$, $1 \leq k \leq n+1$.

⁵Recordemos que definimos al diferencial ψ a partir de estas representaciones locales.

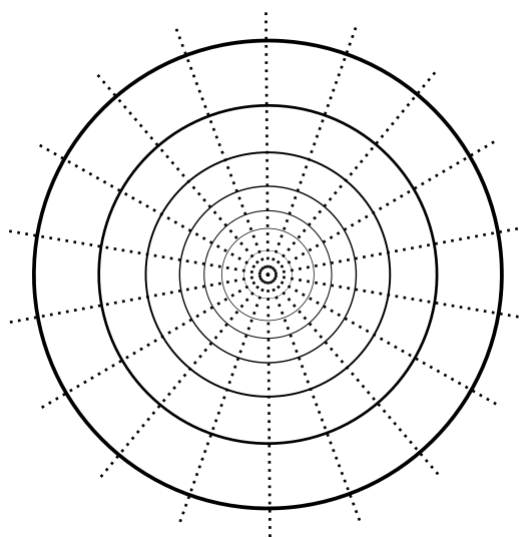


Figura 5.3: La estructura de trayectorias en un polo de orden 2 con coeficiente negativo. Las trayectorias horizontales son los discos concéntricos; las verticales los rayos desde el origen.

Una idea de la demostración es como sigue: tomamos una carta arbitraria (U, z) centrada en p y expandimos la representación local $q = \phi(z)(dz)^2$ como una serie de Laurent centrada en 0. Supongamos que p es un cero de orden m . Obtenemos que

$$\phi = z^m h(z), \quad h(0) \neq 0 \text{ en } z(U).$$

cuando m es par, tenemos $m = 2n$ podemos definir una raíz cuadrada para ϕ en todo $z(U)$. Tomamos una rama $\sqrt{\cdot}$ para definir $g = \sqrt{h}$, y tenemos que $\sqrt{\phi} = z^n(g(z))$. Una última elección distinta de coordenadas da la representación

$$w = \zeta^m + 1 + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

finalmente dando la expresión

$$(dw)^2 = (m+1)^2 \zeta^{2m} (d\zeta)^2 = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 \zeta^n (d\zeta)^2.$$

Si el orden m es impar, el argumento es un poco más complicado, pero reside en la misma idea. Podemos construir una w de manera similar, holomorfa en una vecindad perforada de 0, y extenderla al origen. Ahora bien, un teorema más útil para la discusión futura es el siguiente.

Teorema 5.1.3. *Sea ϕ un diferencial cuadrático con un polo p de orden 2. Hay una representación local w de ϕ para la cual*

$$(dw)^2 = \frac{a_{-2}}{z^2} (dz)^2,$$

en donde a_{-2} es el término asociado a z^{-2} en cualquier expansión de Laurent de ϕ . La carta que da esta

⁶Esto es, de una representación local para ϕ .

representación está determinada salvo por multiplicación por un factor $c \in \mathbb{C}^*$ arbitrario.

Este teorema aparece como el teorema 6.3 de [42], en donde podemos encontrar una prueba. La idea es bastante similar a la discusión previa, pero la omitimos. Ahora bien, fijemos un diferencial cuadrático ϕ , y sea $\gamma : (a, b) \rightarrow X$ cualquier curva diferenciable. Para cada $t \in (a, b)$ hay una expresión local ϕ_v de ϕ y una vecindad abierta U de $\gamma(t)$ que nos permite restringir γ a la curva

$$\gamma_v : \phi_v^{-1}(U) \cap (a, b) \rightarrow U.$$

La proposición 2.5.3 nos permite identificar si γ_v es una trayectoria recta. Por la regla de transformación, podemos utilizar cualquier ϕ_v que exprese a ϕ cerca de $\gamma(t)$. Esto nos permite decidir si una curva general en X es una trayectoria recta. Intuitivamente, esto corresponde a pegar segmentos de recta en el plano de forma adecuada, de manera que producimos una 1-variedad contenida en X cuyas cartas están inducidas por las coordenadas canónicas, como se muestra en la figura 5.4. Así, puede ser el caso que una trayectoria recta sea homeomorfa a un círculo, y de hecho este es el caso en general cuando la superficie X es compacta.

Supongamos que X es compacta y fijemos un diferencial cuadrático ϕ meromorfo. Si la curva $\gamma : (a, b) \rightarrow X$ es una trayectoria horizontal para ϕ , decimos que $\gamma' : (a', b')$ extiende a γ si $a' \leq a \leq b \leq b'$ y γ' es una trayectoria horizontal tal que $\gamma'|_{(a,b)} = \gamma$, de manera que obtenemos un orden parcial en el conjunto de trayectorias horizontales en X . Como discutimos antes, podemos construir extensiones de cada trayectoria utilizando coordenadas canónicas trasladadas adecuadamente.

Observemos que la traza de una trayectoria recta en X es un conjunto bien definido, que no depende de las cartas que utilicemos para describirlo. Esto se sigue de la regla de transformación para diferenciales cuadráticos. En efecto, la regla de la cadena garantiza que una reparametrización de una trayectoria horizontal es horizontal también, siempre y cuando su derivada no sea cero en el intervalo de interés. Podemos decir lo mismo para las trayectorias verticales. Esto permite interpretar al orden parcial entre trayectorias rectas simplemente como una relación de contención. Así, diremos que una trayectoria recta es una *trayectoria del diferencial ϕ* si es una trayectoria recta maximal. En particular, observemos que si las trayectorias maximales no son compactas, deben tener por “extremos” puntos singulares del diferencial: esto es, su cerradura en X contiene ceros o polos del diferencial cuadrático meromorfo ϕ .

Un diferencial cuadrático ϕ en X induce una métrica Riemanniana en X . Supongamos que una curva rectificable⁷ $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ está contenida en una vecindad de un punto regular en la que podemos dar una coordenada canónica w . Denotemos por $l_e(\gamma)$ la longitud de la curva $w \circ \gamma$. Observemos que cambiar la elección de la rama de $\sqrt{}$ no altera al número $l_e(\gamma)$, así como los cambios $w \rightarrow \pm w + c$. A saber, tomemos una X compacta y ϕ un diferencial cuadrático en X con $M = S_\phi$. Para una carta coordenada z en $X \setminus M$, definimos la métrica ϕ_m en (X, M) por

$$|\phi(z)||dz|^2.$$

En un punto concreto p de X y $v \in T_p(X)$, la métrica está dada por $|\phi(z(p))|(dx^2 + dy^2)$, en donde dx y dy denotan las coordenadas del vector tangente v respecto de la \mathbb{R} -base para $T_p(X)$ ⁸. El producto de $u, v \in T_p(X)$ puede ser calculado a partir de la norma de $u + v$ utilizando

⁷Es decir, diferenciable por partes.

⁸Técnicamente, dz actúa linealmente en el vector v por medio de los covectores dx y dy duales a la base canónica de

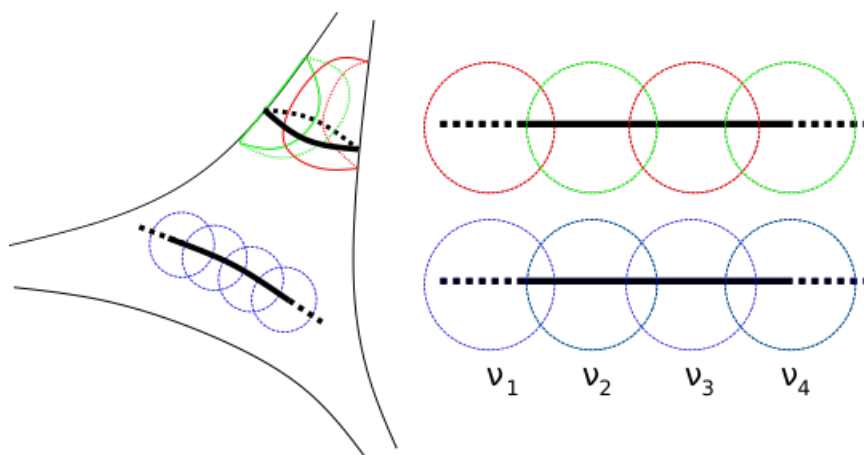


Figura 5.4: Dos trayectorias horizontales en X . Si γ tiene imagen en compacta, usamos los abiertos rojo y verde para extenderla arbitrariamente, de forma que obtenemos una función periódica. La trayectoria cubierta por abiertos azules puede también ser arbitrariamente expandida, y está dada por una η con imagen no compacta. Cuando X es compacta, hay una cantidad finita de expresiones locales para ϕ , por lo que existe una (U, ϕ_ν) para la que las vecindades canónicas usadas para expandir a η eventualmente están contenidas en un U , y están dadas por la integral de $\sqrt{\phi_\nu}$. Esto sucede cuando U contiene un cero de ϕ .

la identidad de polarización, de forma que obtenemos una métrica en $T_p X$. Observemos que en cada punto ϕ_m es un múltiplo de la métrica euclidiana, por lo que tenemos una métrica localmente plana. En efecto, siempre podemos elegir la coordenada w en $X \setminus M$, de manera que ϕ_m toma la forma $dx^2 + dy^2$.

5.2. Coordenadas canónicas

En esta sección construiremos un sistema de coordenadas canónico para la superficie de Riemann marcada (X, M) . Esto nos permitirá construir una triangulación de X que podremos utilizar para modelarla como una gráfica de listones métrica con frontera etiquetada. Para ello, utilizamos el teorema de Strebel-Jenkins. Seguimos la construcción de Motohico y Penkava [32]. Utilizamos el libro de Strebel [42] y el de Lando y Zvonkin [26] como referencias auxiliares.

Teorema 5.2.1. (Strebel). *Fijemos una superficie de Riemann compacta X de género $g \geq 0$ y un conjunto de n puntos marcados $M = \{p_1, \dots, p_n\}$. Elijamos un $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Entonces existe un único diferencial cuadrático meromorfo ϕ en X que satisface las siguientes propiedades:*

1. El conjunto de polos de ϕ es M , de manera que ϕ es un diferencial cuadrático holomorfo en la superficie perforada $X \setminus M$.
2. ϕ tiene un polo de orden 2 en cada $p \in M$.
3. La unión de todas las trayectorias horizontales no compactas de ϕ es un conjunto cerrado C con interior vacío.

$T_p X$, y que satisfacen $dx(\partial x) = dy(\partial y) = 1$ y $dx(\partial y) = dy(\partial x) = 0$. Hacemos el abuso de notación universal.

4. Cada trayectoria horizontal compacta α es un lazo simple que encierra uno de los polos. Si α circula a p_i , tenemos

$$\int_{\alpha} \sqrt{\bar{\phi}} = a_i.$$

La última integral denota la longitud de γ respecto de la métrica inducida por ϕ . Diremos que ϕ es el *diferencial de Strebel-Jenkins* asociado a la información

$$(X, (p_1, \dots, p_n), (a_1, \dots, a_n)).$$

Referimos al lector a [42] para la demostración, en donde corresponde al teorema 25.5. Una discusión relevante aparece en [25]. Este diferencial permite construir una *foliación medible* de la superficie X . En [16] podemos hallar una descripción más completa de este fenómeno. Como mencionamos en la sección previa, la descripción 7.2 de [42] caracteriza el comportamiento de las trayectorias de ϕ en sus polos. La elección de los a_i corresponde a prescribir los residuos cuadráticos de ϕ ; esto es, $a_i = -c_{-2}$, en donde c_{-2} es el coeficiente de z^{-2} de la serie de Laurent de ϕ centrada en el polo p_i . De acuerdo a lo que hemos discutido, podemos empezar a intuir que el conjunto C corresponderá a una gráfica encajada en X , con un polo de ϕ en cada cara.

Ahora bien, la condición $c_2 < 0$ garantiza que las vecindades de p_i foliadas por trayectorias horizontales compactas son homeomorfas a discos, como mencionamos en el ejemplo 5.2. Más precisamente, cada tal trayectoria está encajada en un abierto de bien definido de X llamado su *anillo característico*. Para un diferencial de Strebel-Jenkins ϕ , cada uno de estos anillos es homeomorfo a un disco perforado en p_i , D_i . Más aún, la noción de *sucesiones* de estos anillos descrita en la sección 3 de [42] implica que hay una carta $(D_i \cup \{p_i\}, z)$ para X centrada en p_i , con la cual podemos construir una representación local como la del teorema 5.1.3. Equivalentemente, el anillo característico D_i asociado a p_i es la unión de todas las trayectorias horizontales y compactas de ϕ que son homotópicamente equivalentes a p_i . Recordemos que cada punto de X está en alguna trayectoria horizontal de ϕ . Denotemos por S al conjunto de ceros de ϕ . Tenemos que

$$X \setminus M = (\cup D_i) \cup C \cup S, \quad 1 \leq i \leq n$$

en donde C es el conjunto de las trayectorias horizontales no compactas, que tiene interior vacío. Observemos que la unión de S no es redundante: los puntos regulares de cada D_i son como en el ejemplo 5.2, de manera que en cada uno inciden exactamente dos trayectorias de ϕ , una horizontal y una vertical. Sin embargo, en los ceros de ϕ tenemos una estructura como la de 5.1, en donde inciden al menos tres trayectorias rectas. En particular, notemos que la frontera de cada D_i está contenida en C .

La siguiente es una idea intuitiva discutida en [25]. Puesto que el diferencial ϕ induce una métrica plana, esto nos permite visualizar a $X \setminus M$ como una unión de cilindros sin tapa, pegados adecuadamente en las componentes de frontera del mapa asociado a C , donde el número a_i determina la circunferencia del cilindro asociado al polo p_i . Cada cilindro resulta de la identificación de los lados opuestos de un rectángulo en $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$, de modo que podemos darle una estructura compleja natural. El teorema de compactación que discutimos en el capítulo 2 nos permite recuperar una única superficie compacta \tilde{X} a través de la adjunción de puntos abstractos, que, como vimos, debe ser biholomorfa a X . Esta es la idea intuitiva, a grandes rasgos, de la correspondencia que describiremos. Observemos cómo (a_1, \dots, a_n) *decora* a la superficie X , pues una elección distinta de circunferencias para los cilindros debería producir una superficie equivalente.

Como definimos en la sección previa, decimos que una trayectoria horizontal del diferencial cuadrático ϕ es una trayectoria horizontal maximal.

Proposición 5.2.1. *Para X como en el teorema anterior, el diferencial de Strebel ϕ determina una descomposición celular de X , que denotamos por \square_ϕ .*

Demostración. Denotemos por V al conjunto de ceros de ϕ . Al ser puntos, los elementos de V son 0-celdas. X es compacta y ϕ es holomorfa en $X \setminus M$, de manera que una trayectoria horizontal no compacta h satisface que su cerradura contiene dos puntos de V . Si denotamos por E al conjunto de trayectorias horizontales no compactas de ϕ , tenemos que $e \in E$ es homeomorfo a \mathbb{R} y por lo tanto es una 1-celda abierta cuya frontera en X está contenida en V , como discutimos en la sección previa. La superficie X es compacta, por lo que ϕ tiene una cantidad finita de ceros y polos. Puesto que las trayectorias horizontales necesariamente unen singularidades de ϕ , el conjunto E es una unión finita de subvariedades de dimensión 1 en X . Por tanto, E tiene interior vacío.

Ahora, tomemos por F al conjunto de componentes conexas de $X \setminus (V \cup E)$. Cada elemento de F es un anillo característico que contiene exactamente un polo de ϕ , por lo que tenemos que $|F| = n$. Además, las trayectorias horizontales de ϕ no compactas no pueden unir un cero con un polo, pues cada polo tiene orden 2. Como vemos en el ejemplo 5.2, las únicas trayectorias rectas de ϕ que inciden en sus polos son verticales. Así, los elementos de E únicamente unen ceros no necesariamente distintos de q . Observemos que si f contiene al polo p_i , f es una componente conexa de la unión de todas las trayectorias horizontales compactas de longitud a_i ⁹. Como discutimos arriba, la frontera de cada f está contenida en el conjunto $E \cup V$. Así, dos celdas distintas son separadas por una cadena finita y conexa de elementos de E . Deducimos que \square_ϕ es una descomposición celular definida por los conjuntos V , E y F . \square

La notación para la descomposición celular sigue la de [32]. En particular, ϕ induce un mapa en X . Puesto que la superficie X está orientada de acuerdo a su estructura compleja, tenemos automáticamente un orden cíclico de las trayectorias que inciden en cada cero de ϕ . De este modo, la colección de ceros y trayectorias horizontales no compactas forman una gráfica de listones Γ , en el que cada componente de frontera está etiquetada por un polo p_i . Como vimos en la sección previa, en un cero de ϕ de orden m inciden $m + 2$ trayectorias horizontales, por lo que Γ tiene grado mínimo 3. Las longitudes de estas trayectorias inducen un etiquetado de la frontera de Γ por los números reales positivos a_i .

Más precisamente, fijemos la cara f de \square_q que contiene al polo p_i : su frontera δf en X contiene una cantidad finita de vértices z_1, \dots, z_d que son ceros de ϕ , y están unidos por aristas que son trayectorias no compactas de ϕ , que supondremos unen z_j con z_{j+1} , módulo d , y denotaremos por e_j . Así, un polígono P_f encajado en X . Resulta que el interior de P_f coincide con la vecindad maximal D_i del polo p_i . Recordemos que ϕ define una métrica plana en el disco perforado $D_i \setminus \{p_i\}$, y resulta isométrico a un cilindro abierto. Puesto que ϕ es de Strebel, las trayectorias horizontales compactas de ϕ tienen la longitud asociada a_i , y podemos usarlas para aproximar la q -longitud de la frontera del polígono P_f para notar que coincide con a_i también. Por otro lado, la frontera de P_f es la unión de los puntos z_i y de las trayectorias horizontales e_j que los unen. Esto implica que la ϕ -longitud l_j de cada e_j es finita, y que

$$l_1(e_1) + \dots + l_d(e_d) = a_i.$$

⁹A priori, dos de las a_i podrían ser el mismo número real asociado a polos distintos.

Observemos que algunas e_j pueden coincidir entre sí. Esto sucede cuando una cara es adyacente a sí misma¹⁰. Así, el diferencial ϕ nos produce una gráfica de listones métrica. Nuestro interés está en llevar a cabo este procedimiento en la dirección opuesta.

Para poder construir una superficie de Riemann a partir de una $\Gamma \in RG_{g,n}^{\text{met}}$, primero necesitamos ser capaces de recuperar toda la estructura de X a partir de \square_ϕ . Para ello, definiremos una triangulación canónica. Fijemos una tupla

$$D = (X, (p_1, \dots, p_n), (a_1, \dots, a_n))$$

y sea q el diferencial de Strebel asociado a los datos D . La unión de todas las trayectorias horizontales compactas de q es igual a la superficie perforada $X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. Como vimos, cada punto de X está en una trayectoria vertical u horizontal de q , o es uno de sus extremos. Además, como notamos en la prueba anterior, las trayectorias horizontales no compactas de q no inciden en los polos. Esto implica que los puntos p_i son extremos de trayectorias verticales. Más aún, una trayectoria vertical no puede unir dos ceros de q , pues necesariamente tiene un polo en uno de sus extremos. En particular, cada trayectoria vertical con un extremo en un cero de q termina en un polo.

Teorema 5.2.2. *Sea E' el conjunto de trayectorias verticales de q que unen ceros con polos, y \square_q la descomposición celular de X inducida por las trayectorias horizontales no compactas de q . Sea E el conjunto de 1-celdas de \square_q . El conjunto $E \cup E'$ de trayectorias rectas de q define una triangulación para X . La denotamos por Δ_q .*

Demostración. Analicemos el ejemplo 5.1. Si un cero c de q tiene orden m , c está en $m + 2$ caras de \square_q , cuyos centros son polos de q . Además, hay $m + 2$ trayectorias verticales de q que inician en c y que terminan en un polo, que necesariamente es el centro de una de las caras de las que q es vértice. Así, cada polo p_i está conectado a través de un elemento de E' con cada vértice de su cara asociada f . Esto define una triangulación de f , para cada cara f . En particular, las trayectorias de E' intersecan a las de E sólo en los vértices de cada polígono asociado a f . Obtenemos una triangulación Δ_q de X . Puesto que \square_q es una descomposición celular de X , es claro que Δ_q también. \square

Para el diferencial de Strebel q , denotemos por Γ_q la gráfica de listones dada por la descomposición \square_q . Las caras f_i de Γ_q son las 2-celdas de \square_q asociadas al polo p_i de q . Supongamos que f y f' son caras distintas que comparten la arista $e \in E$, con centros en los polos p, p' , respectivamente. Los extremos de e son ceros de q que denotamos por v y v' . Hay exactamente dos caras de Δ_q que contienen la arista e en su frontera, y forman un cuadrilátero con vértices p, v, p', v' , cuyo interior es abierto y denotamos por V_e . En la figura 5.5 podemos ver esta situación. Observemos que cualquier elemento z en V_e es un punto regular de q . Podemos elegir una coordenada canónica w para q que envía el abierto V_e en el conjunto

$$U_e = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Re}(z) \leq L\}$$

en donde L es la longitud de e . En efecto, la cara f es el anillo característico de su polo asociado, de manera que hay una carta z definida en todo el diamante V_e para la que q toma la representación

¹⁰Un ejemplo es el mapa dado por un árbol T dibujado sobre la esfera. La cara que contiene al punto ∞ es adyacente a sí misma a través de cualquier arista de T .

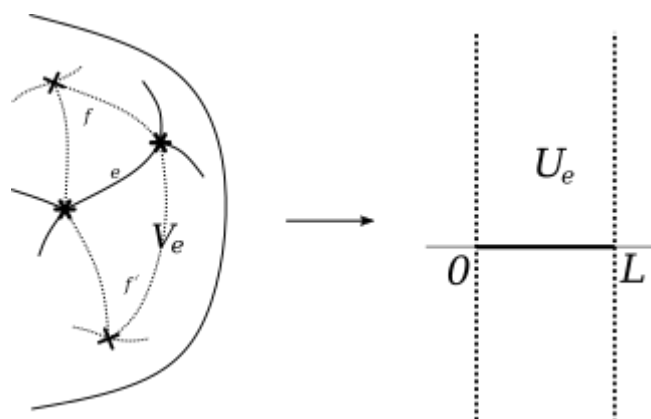


Figura 5.5: El cuadrilátero abierto V_e asociado a la arista $e \in E(\Gamma_q)$. Los asteriscos representan ceros de q , y las cruces polos.

$$q = -\frac{a_i}{z^2}(dz)^2,$$

para cierto índice i . Para esta misma carta z , podemos elegir una coordenada canónica asociada

$$w = w(z) = \int_v^p \sqrt{q},$$

de manera que envía el triángulo con vértice en f del cuadrilátero abierto V_e en la mitad superior de U_e . Para la carta asociada al anillo característico del f' , la otra mitad de V_e va a la mitad inferior de U_e . Ambos conjuntos se pegan bien, pues un punto de e tiene un q -disco contenido en V_e . Observemos de nuevo la figura 5.5. Supongamos que la arista e tiene longitud L . Podemos tomar una coordenada canónica w ¹¹ que envía una vecindad centrada en p en un abierto contenido en U_e , en donde la arista e va dentro de la línea $l = (0, L) \in \mathbb{C}$.

El conjunto l define la trayectoria horizontal e en X , que es maximal asociada respecto a todas aquellas trayectorias dadas por un subintervalo de l y la coordenada w . Las rectas verticales contenidas en U_e definen trayectorias verticales en V_e que podemos extender arbitrariamente. La trayectoria maximal asociada a cada una es una trayectoria vertical cuyos extremos son los polos de q que yacen en las caras f y f' . En efecto, V_e es el conjunto de todas las trayectorias verticales de q que intersecan a e .

El punto v es un cero de ϕ orden $m \geq 1$. El teorema 5.1.2 nos dice que, en una vecindad abierta W_v del vértice v , q tiene una representación local dada por

$$q = \left(\frac{m+2}{4}\right)^2 z^m (dz)^2, \quad (5.3)$$

para cierta carta (W_v, z) . Por otro lado, q tiene la representación $(dw)^2$ utilizando la coordenada canónica w en V_e . En la intersección $I = W_v \cap V_e$ los diferenciales deben coincidir, pues definen la misma sección del haz vectorial que los define. Esto es, buscamos una función de transición

¹¹Usamos la coordenada que construimos en la sección previa y la trasladamos por $z \mapsto z + L$.

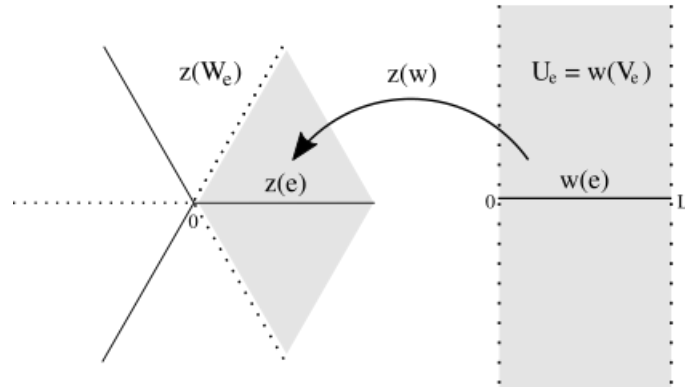


Figura 5.6: Las coordenadas canónicas se pegan bien en ceros y puntos regulares de q . Las líneas punteadas y sólidas determinan trayectorias verticales y horizontales, respectivamente, con un extremo en v .

adecuada que ponga a z en función de w , de manera que

$$(dw)^2 = \left(\frac{m+2}{4}\right)^2 z^m (dz)^2.$$

se satisfaga al tomar la regla de transformación del diferencial q . La anterior es una ecuación diferencial sujeta a la condición inicial $z(v) = 0 = w(v)$, pues ambas representaciones de q están centradas en v . Sus soluciones tienen forma

$$z(w) = cw^{2/(m+2)}, \quad c^{m+2} = 1, \tag{5.4}$$

definidas a partir de la elección de una rama holomorfa de $z \mapsto z^{1/(m+2)}$. Notemos que la intersección I no contiene a v , por lo que $z(w)$ da una función biholomorfa si I es suficientemente pequeña. Tomando $z = z(w)$, verificamos que

$$\left(\frac{m+2}{2}\right)^2 z^m (dz)^2 = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 c^m w^{\frac{2m}{m+2}} \left(\frac{2}{(m+2)}\right)^2 c^2 (w^{\frac{-m}{m+2}})^2 (dw)^2 = (dw)^2.$$

La ambigüedad¹² dada por el factor c corresponde a los cambios en la elección de rama para la raíz $m+2$ -ésima.

En la coordenada z , la estructura de las trayectorias de q es como en el ejemplo 5.1.2. Observemos la figura 5.6. En ese ejemplo, la función de transición $\varphi_{w,z}$ está dada por $z(w) = w^{2/3}$. Si el abierto A resulta de la intersección de una vecindad de 0 con la tira U_e , la función $w^{2/3}$ lo envía dentro del sector correspondiente circular. Esto nos permite ver cómo se pegan los conjuntos W_v y V_e en la superficie de Riemann X .

Similarmente, usamos el teorema 5.1.3 para un escalamiento para obtener la representación

¹²Además, observemos que las funciones de transición 5.4 tienen un polo de orden $m \geq 1$ en el cero, que yace en la frontera de su dominio, el abierto $w(I)$. Así, estas funciones no son de Lipschitz en $w(I)$, lo que explica por qué no son únicas, como el teorema de Picard-Lindelöf implicaría. En un abierto contenido en un compacto de $w(I)$, la unicidad de una solución está garantizada, y debe coincidir con una de las funciones en 5.4 por el teorema de la identidad.

$$q = -\frac{a_j}{4\pi^2} \frac{(du)^2}{u^2} \quad (5.5)$$

alrededor del polo p_j , en donde a_j es la longitud de cualquier trayectoria horizontal compacta con centro en p_j . Como mencionamos antes, podemos utilizar una carta definida en todo $U_i := D_i \cup \{p_i\}$ para obtener la expresión 5.5. La frontera de U_i está contenida en el conjunto de interior vacío $C = E(\Gamma_q)$, compuesto de las trayectorias horizontales abiertas y los ceros de q . Así, supongamos que e_1, \dots, e_d son las aristas de $E(\Gamma_q)$ que conforman la frontera de U_i . Denotemos por w_k a la coordenada canónica en el diamante U_{e_k} . Como antes, tenemos dos representaciones locales para q en la intersección de U_i y U_{e_k} . Así, la función de transición $u = u(w_k)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$(dw_k)^2 = -\frac{a_j}{4\pi^2} \frac{(du)^2}{u^2}, \quad (5.6)$$

y está dada por las funciones

$$u = u(z_k) = ce^{2\pi iw_k/a_i}. \quad (5.7)$$

En efecto, verificamos que

$$(du)^2 = u^2 \left(\frac{2\pi i}{a_i} \right)^2 (dw_k)^2 = -u^2 \left(\frac{2\pi}{a_i} \right)^2 (dw_k)^2$$

y por tanto

$$-\frac{a_j}{4\pi^2} \frac{(du)^2}{u^2} = \frac{a_j}{4\pi^2} \left(\frac{2\pi}{a_i} \right)^2 (dw_k)^2 = (dw_k)^2.$$

En donde c es cualquier una constante distinta de 0. Recordemos la estructura de las trayectorias verticales en p_i en el ejemplo 5.3; el escalamiento por $c \neq 0$ preserva las trayectorias. Elegimos c de acuerdo a

$$u = u(w_k) = \exp \left(\frac{2\pi i}{a_i} (l_1 + \dots + l_{k-1} + w_k) \right), \quad (5.8)$$

en donde $a_i = l_1 + \dots + l_d$.

Esto es, los números l_i denotan las longitudes de las aristas e_i de Γ_q . Observemos que la mitad superior de la tira U_{e_k} va biholomorfa a un sector circular bajo cualquiera de las funciones 5.7. Observemos la figura 5.7. La transición en $\varphi_{w,u}$ en 5.8 envía el hemisferio superior de la tira U_1 dentro del sector del disco unitario perforado determinado por el ángulo $2\pi l_1/a_i$. En efecto, la constante c rota el sector adecuadamente, y garantiza que para cada $1 \leq k \leq d$, $u(w_k)(0)$ da al punto en S^1 con argumento $l_1 + \dots + l_{k-1}$. La función $z \mapsto \exp(2\pi iz)$ envía las rectas paralelas a \mathbb{R} en círculos centrados en 0. Así, bajo $\varphi_{w,u}$, todos los segmentos horizontales en U_{e_k} dan a segmentos de algún círculo con radio menor a 1, correspondientes al argumento $2\pi l_k/a_i$. Observemos que $\varphi_{w,u}$ tiene periodo $(0, a_i)$. Puesto que $l_k \leq a_i$, la transición es un biholomorfismo en $U_{e_k} \cap H^2$.

Así, hemos construido un sistema de coordenadas para X de la siguiente forma: para cada punto en una arista de Γ_q tenemos un abierto U_e contenido en un diamante V_e , cuyo q -disco

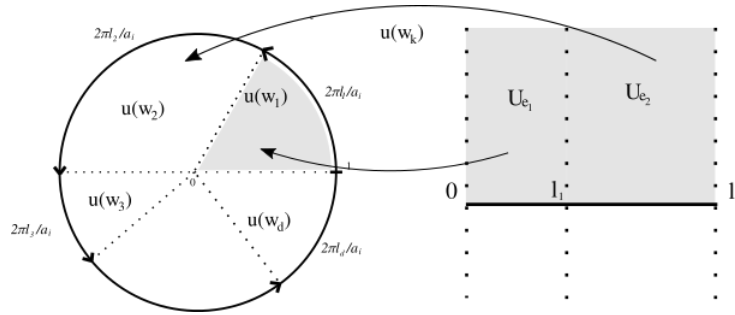


Figura 5.7: La parte superior de cada tira U_{e_i} es enviada por la función exponencial a un sector del disco unitario. Elegir una dirección para la trayectoria e_k corresponde a elegir una orientación en el círculo. Representamos a las tiras U_{e_1} y $U_{e_2} + l_1$ juntas en el mismo plano.

puede tomarse como el diamante completo, en el que tenemos la coordenada canónica w_e . Para los vértices v de Γ_q , tenemos la coordenada estándar (W_v, z) en la que q toma la forma 5.3. Para los polos, tenemos la coordenada U_i descrita en 5.5. Puesto que Γ_q define la descomposición \square_q , este sistema de cartas coordenadas cubre a X . Además, las consideraciones anteriores nos dicen que las cartas son holomorfamente compatibles. Usando la notación de esta sección, concluimos este capítulo con la siguiente definición.

Definición 5.7. Diremos que la cubierta

$$C = \bigcup_{e \in E(\Gamma_q)} V_e \cup \bigcup_{v \in E(\Gamma_q)} U_v \cup \bigcup_{f \in F(\Gamma_q)} W_f$$

es el sistema de *coordenadas canónicas* para el conjunto de datos

$$D = (X, (p_1, \dots, p_n), (a_1, \dots, a_n)),$$

en donde $F(\Gamma_q)$ es el conjunto de polos de q , identificado con el conjunto de caras de Γ_q .

Para una arista e de Γ_q , observemos que la coordenada canónica z en el abierto U_e depende de la elección de una dirección para e . Usar la dirección opuesta para e corresponde a tomar $z \mapsto -z + L$, que efectivamente rota la tira vertical asociada a U_e .

5.3. Notas y referencias

La discusión anterior concentra elementos de la teoría de diferenciales cuadráticos en un capítulo. El material está tomado de [18], [32] y principalmente de [42].

La discusión sobre el plano cotangente es estándar, y usamos como referencia la sección 4 de [28]. La discusión y definición de diferencial cuadrático meromorfo corresponde a la definición 4.1 de [42], mientras que las observaciones sobre los puntos críticos están reescritas a partir de la sección 4.2. La introducción de la coordenada canónica para el diferencial q está basada en la sección 5 de [42], y nuestra definición 5.5 corresponde al teorema 5.2 del mismo libro. Para la definición de trayectorias verticales y horizontales, tomamos el enunciado de [32]. Las proposi-

ciones 5.1.1 y 5.1.2 son enunciadas en [32]; las pruebas son nuestras. Los ejemplos subsecuentes también están tomados de [32], en donde solo se enuncian; nosotros damos su justificación; hacemos lo mismo para el ejemplo 5.2, y damos un bosquejo de la prueba del teorema 5.1.2 basado en el comportamiento local de funciones holomorfas (el teorema 2.1.2) y la prueba de Strebel del equivalente teorema 6.2 de [42]. Las últimas nociones están basadas en la sección 5.3 del mismo libro.

La sección de coordenadas canónicas sigue las explicaciones de [32], de donde tomamos el enunciado para teorema 4.15, que garantiza la existencia del diferencial de Strebel-Jenkins para una superficie marcada y decorada. Una excelente referencia para su prueba es [31], en donde el enunciado equivalente se asemeja más al de [32] que al teorema 25.5 de [42]. La justificación de por qué la gráfica crítica Γ_q del diferencial en efecto se encaja en su superficie es obviada por Motohico y Penkava; la justificamos en la discusión que sigue al enunciado del teorema 4.15. Para ello, apelamos a la noción de anillo característico que se discute en el capítulo 1, sección 3 de [42], así como a su ejemplo 7.2 discutiendo la estructura de las trayectorias cerca de polos con residuo cuadrático negativo. La proposición 5.2.1 y el teorema 5.2.2. están tomados verbatim de [32], y reescribimos sus pruebas de forma más completa. Para el resto de la sección, hemos reescrito la construcción del sistema canónico de coordenadas siguiendo la discusión de [32], completando y esclareciendo conceptos donde lo hemos considerado necesario.

Capítulo 6

Un modelo combinatorio de $\mathcal{M}_{g,n}$

Recordemos que $\mathcal{M}_{g,n}$ es el espacio de clases de equivalencia de superficies de Riemann marcadas en n puntos. Si bien definimos intuitivamente este espacio en el capítulo 2, omitimos completamente su estructura topológica. Los dos caminos usuales para construir $\mathcal{M}_{g,n}$ requieren de conceptos menos elementales que el de las gráficas de listones. En este capítulo, utilizamos la teoría de Strebel para dar una correspondencia entre el orbifold $RGB_{g,n}^{\text{met}}$ y el espacio $\mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n$, permitiendo una definición indirecta de la topología de $\mathcal{M}_{g,n}$. Finalizamos con una presentación concreta de $\mathcal{M}_{g,1}$ como un *complejo simplicial racional*, aprovechando la acción natural de \mathbb{R}^+ en $RGB_{g,n}^{\text{met}}$.

6.1. La correspondencia de Strebel

En la sección previa, la existencia del diferencial de Strebel-Jenkins nos permitió construir una única gráfica de listones $\Gamma_q \in RGB_{g,n}^{\text{met}}$ asociada a la información

$$D = (X, (p_1, \dots, p_n), (a_1, \dots, a_n)),$$

en donde X es una superficie de Riemann de género g . En efecto, los ceros y las trayectorias no compactas de Γ_q que los unen determinan una gráfica de listones métrica encajada en X , cuyas longitudes están dadas por la métrica inducida por ϕ .

Llamaremos σ a la función
$$\sigma : \mathcal{M}_g \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow RGB_{g,n}^{\text{met}} \tag{6.1}$$

que determina esta correspondencia. Habiendo fijado una superficie X , la unicidad del diferencial de Strebel nos permite asociarle unívocamente la gráfica métrica Γ_q , que determina una clase de equivalencia en $RGB_{g,n}^{\text{met}}$. Para ver que σ está bien definida, tomemos una superficie X' equivalente a X . Esto es, hay n puntos en $p'_i \in X'$ y un biholomorfismo

$$f : X \rightarrow X', \quad f(p_i) = p'_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

La elección de la tupla (a_1, \dots, a_n) determina diferenciales de Strebel q y q' en X y X' , respectivamente, que a su vez inducen gráficas de listones métricas Γ_q y $\Gamma_{q'}$. Observemos que la función f envía curvas de en X en curvas en X' y respeta las relaciones de incidencia, pues es biyectiva. Denotemos por d y d' a una elección de mapas duales para Γ_q y $\Gamma_{q'}$. Puesto que podemos identificar las caras de Γ_q y $\Gamma_{q'}$ con sus polos, podemos suponer que las aristas de d son curvas que unen polos entre sí; por ejemplo, podemos una trayectoria vertical contenida en cada diamante V_e , a la que etiquetamos con la longitud de la arista e . El biholomorfismo f induce un isomorfismo entre las gráficas métricas d y d' , pues envía vértices en vértices, preserva la orientación, y recuerda las relaciones de incidencia. Esto implica que f induce un isomorfismo entre Γ_q y una gráfica encajada en X' que es isomorfa a $\Gamma_{q'}$, si bien no necesariamente igual. De cualquier forma, esto nos permite ver que Γ_q y $\Gamma_{q'}$ representan al mismo punto en $RGB_{g,n}^{\text{met}}$.

Ahora bien, nuestro interés está en invertir a la función σ para obtener una biyección. Recordemos que una gráfica Γ induce una superficie $X(\Gamma)$ en la que está encajada. La superficie $X(\Gamma)$ sólo está determinada salvo homeomorfismos, por lo que no es claro a priori cómo darle una estructura compleja. Lo que haremos es construir a $X(\Gamma)$ a partir de los abiertos de \mathbb{C} que estudiamos en el capítulo previo que, como vimos, se pegan entre sí por biholomorfismos. Esto nos permitirá obtener un diferencial de Strebel de manera natural, cuya gráfica de listones asociada coincide con Γ .

El siguiente es el resultado principal de este trabajo. Su prueba sigue a [32].

Teorema 6.1.1. *Hay una biyección natural*

$$S : \mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow RGB_{g,n}^{\text{met}}.$$

Demostración. La prueba es como sigue. Primero, construimos una función

$$\coprod_{\Gamma \in RGB_{g,n}^{\text{met}}} \mathbb{R}_+^{e(\Gamma)} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n \quad (6.2)$$

que invierte a la σ de 6.1 por la derecha. Luego, analizamos cómo actúa el grupo $\text{Aut}_\delta(\Gamma)$ para concluir que esta función desciende a

$$\beta : RGB_{g,n}^{\text{met}} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n. \quad (6.3)$$

Por último, mostramos que β también invierte a σ por la izquierda.

Iniciemos tomando una gráfica de listones métrica Γ y etiquetemos sus componentes de frontera. Etiquetamos al conjunto $E(\Gamma)$ y damos una dirección arbitraria a cada uno de sus elementos. Para la arista $e \in E(\Gamma)$ de longitud L , le asignamos la tira vertical

$$U_e = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Re}(z) < L\}.$$

Así, podemos identificar e con el intervalo $(0, L)$. Puesto que U_e es un subconjunto del plano, la inclusión en \mathbb{C} le da una estructura compleja. Para esta carta global z tenemos el diferencial cuadrático estándar $(dz)^2$, cuyas trayectorias horizontales y verticales son segmentos paralelos a $(0, L)$ y rectas paralelas a $i\mathbb{R}$, respectivamente. Observemos que asignar una orientación opuesta a e corresponde naturalmente al cambio de coordenadas $z \mapsto L - z$, que simplemente rota la tira

U_e por un ángulo π . Cada U_{e_i} vive en una copia de \mathbb{C} , y denotamos por z_{e_i} a la inclusión natural que le da su estructura compleja.

Fijemos un vértice $v \in V(\Gamma)$ de grado m . Etiquetamos sus medias aristas de manera que el orden cíclico alrededor de v es $(1\ 2\ \dots\ m)$. Le damos una orientación de salida a cada arista incidente en v . Esto es, la dirección positiva consiste en “brotar” desde v . Observemos que es posible que v tenga un lazo γ , en cuyo caso su orientación no es relevante¹. Así, hacemos la convención de que ambas orientaciones para γ son equivalentes. Una vez orientadas, etiquetamos las medias aristas por e_1, \dots, e_m .

Colocamos el vértice v en el origen de \mathbb{C} . En cada tira U_{e_1}, \dots, U_{e_m} tomemos un abierto $A_i = U_{e_i} \cap O$, en donde O es una vecindad fija del 0. Pegaremos a los A_i utilizando las funciones

$$w_j = e^{2\pi i(j-1)/m} z_j^{2/m}, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (6.4)$$

Observemos la figura 6.1. Cada A_i es un subconjunto de una copia distinta de \mathbb{C} . Cada w_j envía la recta $i\mathbb{R}^+$ en la recta $\zeta_{j+1}\mathbb{R}$, en donde ζ_j es la j -ésima raíz de -1 , y a $i\mathbb{R}^-$ en $z_{j-1}\mathbb{R}$. Puesto que $w_{j+1} = e^{2\pi i/m} w_j$, las w_j son compatibles en la frontera de cada $w(A_i)$, en donde toman exactamente los mismos valores. Así, las w_j determinan una función holomorfa w en una vecindad U_v de 0, cubierta por los conjuntos $w_j(A_j)$. Al ser biholomorfa, w_j determina una carta para el abierto A_j . En esta carta, el diferencial $(dz_j)^2$ en A_j toma la forma

$$(dz_j)^2 = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 (w_j)^m (dw_j)^2,$$

como implica la ecuación 6.4. Así, definimos un diferencial cuadrático q en U_v con la expresión local

$$q = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 w^m (dw)^2$$

en el abierto U_v . Por construcción, el diferencial q tiene un cero de orden m en 0. Esta es la forma estándar de un diferencial de esta forma, como vimos en el ejemplo 5.1 del capítulo anterior. Vemos que las trayectorias horizontales de q que inciden en 0 coinciden con las imágenes de $e_j \equiv (0, L) \cap A_j$ bajo la w_j correspondiente. Veamos ahora qué sucede con las caras de Γ .

Recordemos que el orden cíclico en los vértices de Γ_q induce una orientación para sus componentes de frontera. Supongamos que las aristas e_1, \dots, e_k están orientadas de manera que la sucesión $(1\ 2\ \dots\ k)$ describe una componente b de la frontera de Γ recorrida en el sentido positivo. Notemos que es posible que cierta arista e_i coincida con e_j , $i \neq j$, recorrida en el sentido opuesto. Esto sucede cuando la arista incide dos veces en la misma cara², como en en la figura 4.1. Denotemos por l_j la longitud de la arista e_j y sea $a_b = l_1 + \dots + l_k$. Consideremos las funciones

$$u_k = \exp\left(\frac{2\pi i}{a_b}(l_1 + \dots + l_{k-1} + z_k)\right)$$

cuyas formas coinciden con la función que discutimos en 5.8. Como antes, cada u_i envía el hemisferio superior $U_{e_1}^+$ de U_{e_1} en un sector del disco unitario determinado por el ángulo l_i . Si al

¹Por cómo representaremos a v en el plano, será imposible incurrir en contradicciones al recorrer las componentes de γ , independientemente de la orientación que demos al lazo γ .

²En un mapa dual a Γ , la cara asociada a b es representada por un vértice, y la arista e_i corresponde a un lazo.

recorrer b una arista e_l aparece como e_j con la dirección opuesta, la función u_j envía el hemisferio inferior de U_{e_j} en el mismo sector en el que u_l envía al hemisferio superior de U_l . En tal caso, el cambio $z_j \mapsto L - z_j$ rota la vecindad U_j , intercambiando estos sectores. Observemos que en la coordenada dada por u_k , el diferencial $(dz_k)^2$ toma la forma

$$(dz_k)^2 = -\frac{a_b}{4\pi^2} \frac{(du_k)^2}{u^2}. \quad (6.5)$$

Puesto que las u_i se pegan bien en la frontera de las $U_{e_i}^+$, obtenemos una vecindad U_b de 0 dada por la unión de las $u_k(U_{e_i}^+)$, de modo que U_b es el disco unitario. En U_b , definimos un diferencial cuadrático q' por la ecuación anterior. Notemos que este diferencial tiene un polo de orden 2 en 0, y su coeficiente asociado es negativo. Sus trayectorias horizontales son círculos centrados en cero, que provienen de los segmentos paralelos a $(0, l_i)$ bajo U_i . La coordenada $L - z_i$ satisface la ecuación 6.5 también, de modo que q' puede ser definido en todo

$$U_b \cup \bigcup_{i=1}^k U_{e_i}.$$

Tenemos los componentes para construir una superficie de Riemann. Denotemos por $F(\Gamma)$ al conjunto de componentes conexas de la frontera de Γ . El conjunto

$$U = \bigcup_{v \in V} U_v \cup \bigcup_{e \in E} U_e \cup \bigcup_{b \in F(\Gamma)} U_b \quad (6.6)$$

es una unión de abiertos de \mathbb{C} , relacionados por los biholomorfismos u_i, w_i que describimos arriba. Definamos la superficie $X(\Gamma)$ como el espacio de identificación en U inducido por estos homeomorfismos. A saber, definimos la siguiente relación de equivalencia en U : dados $x, y \in U$, tenemos $x \sim y$ si existe una $i \in \{1, \dots, k\}$ para la cual $u_i(x) = y$, o bien $u_i^{-1}(x) = y$ o $u_k^{-1}(x) = y$.

Por construcción, $X(\Gamma)$ es una superficie de Riemann: cada punto $[x] \in X(\Gamma)$ tiene un representante en alguno de los abiertos U_v, U_e o U_b , que son subconjuntos abiertos de \mathbb{C} . En efecto, la proyección $\pi : U \rightarrow X(\Gamma)$ es un homeomorfismo local salvo en vecindades de los puntos asociados a polos y ceros del diferencial: en un punto genérico x , π es 3 a 1, y la preimagen de una vecindad pequeña de x es la unión ajena de tres abiertos isomorfos.

La superficie subyacente de $X(\Gamma)$ es homeomorfa al espacio total de Γ : en efecto, esta es una versión explícita de la construcción del espacio total para una gráfica de listones, explicada en el capítulo 3, en la que pegamos tiras abiertas sobre las aristas de Γ . Además, las expresiones locales para q y q' y el diferencial $(dz)^2$ definido en cada U_e conforman un sistema de representantes para un diferencial cuadrático sobre $X(\Gamma)$, que también denotamos q . Por construcción, q tiene n polos dobles, uno dentro de cada cara de Γ en $X(\Gamma)$. Las etiquetas para las componentes conexas de la frontera de Γ inducen un etiquetado para los polos de q . Así, obtenemos una superficie marcada $(X(\Gamma), M)$, en donde $M = \{p_1, \dots, p_n\}$ es el conjunto de polos de q , numerados a partir de $F(\Gamma)$. A cada polo p_i está asociado el número a_i dado por la longitud de una $b_i \in F$. Por construcción, las trayectorias horizontales compactas de q folian los discos U_{b_i} , y cada una tiene longitud a_i . Podemos ver esto transformando cada círculo en una unión finita de segmentos $(0, l_i)$, tomando la coordenada correspondiente u_i^{-1} . Esto nos permite ver que q es el diferencial de Strebel de $X(\Gamma)$ asociado a los datos (p_1, \dots, p_n) y (a_1, \dots, a_n) . Por construcción, $\Gamma_q = \Gamma$.

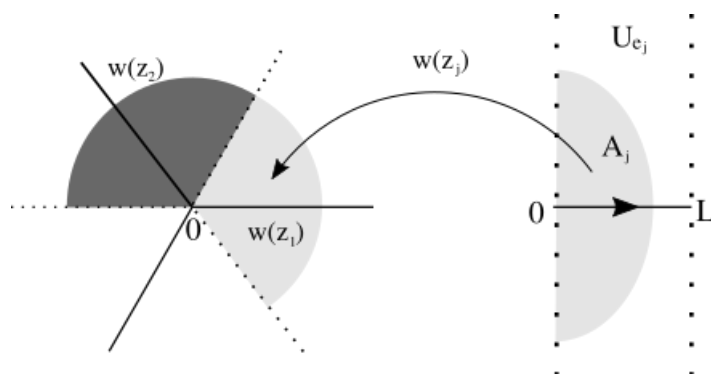


Figura 6.1: Pegamos las tiras a la vecindad de un vértice.

Ahora veamos cómo actúa un automorfismo $f \in \text{Aut}_\delta(\Gamma)$ en la superficie $X(\Gamma)$. Observemos que la unión de las proyecciones de los \bar{U}_e en $X(\Gamma)$ forma una cubierta C de $X(\Gamma) \setminus M$. Abusando de la notación, tenemos

$$X(\Gamma) \setminus \{p_1, \dots, p_n\} = \bigcup_{e \in E(\Gamma)} \bar{U}_e =: C.$$

Puesto que f fija a los puntos p_1, \dots, p_n , basta ver su efecto en los elementos de C . El automorfismo f induce una permutación de las aristas de Γ , por lo que actúa en C permutando los \bar{U}_e y posiblemente aplicando $z \mapsto l - z$. Esto pasa cuando f permuta dos vértices adyacentes, de manera que invierte la dirección de una arista. Supongamos que f fija un vértice de grado m . Puesto que preserva el orden cíclico, su acción en las medias aristas de v se traduce a U_v como una rotación por un múltiplo de $2\pi/m$, que es un biholomorfismo de U_v . Así, la permutación de los vértices inducida por f es biholomorfa en la unión ajena de todos los U_v . Ya que $f \in \text{Aut}_\delta(\Gamma)$, f fija cada abierto U_b , pero rota las aristas que componen a b de manera compatible con los órdenes cíclicos de Γ , como vimos en el capítulo 4. Tomando el cociente que construye a $X(\Gamma)$, vemos que f induce un biholomorfismo de $X(\Gamma)$ que fija cada uno de los p_i . Su representación cerca de los puntos marcados p_i está dada por rotaciones del disco unitario, y por $z \mapsto z$ o $z \mapsto l - z$ cerca de los puntos que corresponden a aristas de Γ .

Así, la clase de equivalencia de la superficie $X(\Gamma)$ no depende de la clase de isomorfismo de Γ en $RGB_{g,n}^{\text{met}}$, de manera que tenemos nuestra función 6.3. Más aún, puesto que el diferencial q en la superficie $(X(\Gamma), M)$ coincide con su diferencial de Strebel-Jenkins, tenemos $\sigma \circ \beta = \text{Id}$. Veamos ahora que $\beta \circ \sigma = \text{Id}$ también. Para una superficie marcada (X, M) y decorada con (a_1, \dots, a_n) , su diferencial de Strebel-Jenkins induce un sistema canónico de coordenadas en X . Observemos que las transiciones de sus cartas son exactamente las funciones que utilizamos para pegar los abiertos de U . Así, la superficie $(X(\Gamma), M)$ coincide exactamente con (X, M) .

□

Notamos que este proceso de pegado de las franjas U_e es un caso particular de una construcción más general en la que producimos una superficie de Riemann a partir de una colección de triángulos ideales, que representan *banderas* orientadas de una gráfica abstracta. La elección de las medias franjas de U_e es particularmente útil, pues garantiza que el diferencial de Strebel asociado tiene como gráfica crítica a la gráfica de listones con la que comenzamos. El artículo [40] incluye la construcción más abstracta.

Así, finalmente tenemos una forma de darle una topología a $\mathcal{M}_{g,n}$. A saber, declaramos que la biyección S es un homeomorfismo. Es posible construir al espacio de módulos $\mathcal{M}_{g,n}$ a través de técnicas algebraicas o analíticas como un espacio topológico por sí solo. Desde esa dirección más abstracta, la función S resulta ser un homeomorfismo también. Para una discusión de este hecho, referimos a los artículos [25], [35]. Para concluir este trabajo, analizamos un ejemplo en el que nuestra correspondencia da una descripción explícita.

6.2. El espacio $\mathcal{M}_{g,1}$

De la correspondencia 6.1.1 vemos que una descripción explícita de $\mathcal{M}_{g,n}$ podría deducirse de un cociente apropiado. A saber, de poder definirse una acción de \mathbb{R}_+^n equivariante bajo S , podríamos cancelar su factor correspondiente. Sin embargo, no hay una acción significativa de \mathbb{R}_+^n en $RGB_{g,n}^{\text{met}}$ salvo cuando $n = 1$, que describimos a continuación.

Observemos que el grupo multiplicativo \mathbb{R}^+ actúa tanto en $RG_{g,n}^{\text{met}}$ como en $RGB_{g,1}^{\text{met}}$ por multiplicación de longitudes de aristas. Un automorfismo de Γ actúa permutando las aristas, de manera que la acción de \mathbb{R}^+ induce una acción en $RG_{g,n}^{\text{met}}$ que es compatible con la acción de $\text{Aut}(\Gamma)$. Así, analicemos los espacios $RG_{g,n}^{\text{met}}/\mathbb{R}^+$.

Recordemos que las celdas racionales de $RG_{g,n}^{\text{met}}$ tienen forma

$$\frac{\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}}{\text{Aut}(\Gamma)}.$$

Definición 6.1. Escribamos $\Delta(1, 2, \dots, n)$ para denotar el interior de la cerradura convexa de los vectores canónicos e_1, e_2, \dots, e_n en $\mathbb{R}^{e(\Gamma)}$. Diremos que $\Delta(1, 2, \dots, n)$ es el n -simplejo estándar en \mathbb{R}^n .

Notemos que la frontera del simplejo estándar es una unión de simplejos de dimensiones menores. El espacio $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$ es un cono sobre $\Delta = \Delta(1, 2, \dots, e(\Gamma))$, de manera que el cociente de $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)}$ por la acción de \mathbb{R}^+ es simplemente Δ . Puesto que la acción de \mathbb{R}^+ es compatible con la de $\text{Aut}(\Gamma)$, vemos que cada celda racional de $RG_{g,n}$ se proyecta al *simplejo racional*

$$\frac{\Delta(1, 2, \dots, e(\Gamma))}{\text{Aut}(\Gamma)}.$$

Así, $RG_{g,n}^{\text{met}}/\mathbb{R}^+$ y $RGB_{g,n}^{\text{met}}/\mathbb{R}^+$ son uniones disjuntas de simplejos racionales. Esto es conocido como un complejo simplicial racional. De nuevo, la compatibilidad de la acción de \mathbb{R}^+ con la de $\text{Aut}(\Gamma)$ implica que estos complejos son orbifolds modelados sobre las vecindades

$$\frac{X_{\geq \Gamma}^{\text{met}}/\mathbb{R}^+}{\text{Aut}(\Gamma)}, \quad \frac{X_{> \Gamma}^{\text{met}}/\mathbb{R}^+}{\text{Aut}_\delta(\Gamma)},$$

respectivamente. Recordemos que el espacio $X_{\geq \Gamma}^{\text{met}}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}_+^{e(\Gamma)} \times \mathbb{R}^{\text{codim}(\Gamma)}$, en donde $\text{codim}(\Gamma) = 6g + 3n - 6 - e(\Gamma)$. Así, tenemos que $X_{\geq \Gamma}^{\text{met}}/\mathbb{R}^+$ es homeomorfo a $\Delta(1, 2, \dots, e(\Gamma)) \times \mathbb{R}^{\text{codim}(\Gamma)}$. Más aún, el simplejo $\Delta(1, 2, \dots, e(\Gamma))$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{e(\Gamma)-1}$, por lo que tenemos

que $RG_{g,n}/\mathbb{R}^+$ es un orbifold localmente modelado por

$$\frac{\mathbb{R}^d}{\text{Aut}(\Gamma)} \cong \frac{\Delta(1, 2, \dots, e(G)) \times \mathbb{R}^{\text{codim}(\Gamma)}}{\text{Aut}(\Gamma)},$$

en donde $d = (e(\Gamma) - 1) + (6g + 3n - 6 - e(\Gamma)) = 6g + 3n - 6$. Similarmente, podemos sustituir $RG_{g,n}^{\text{met}}$ por $RGB_{g,n}^{\text{met}}$ y $\text{Aut}(\Gamma)$ por $\text{Aut}_\delta(\Gamma)$ en las expresiones previas. Así, tenemos que los complejos racionales $RG_{g,n}^{\text{met}}/\mathbb{R}^+$ y $RGB_{g,n}^{\text{met}}/\mathbb{R}^+$ son orbifolds. La compatibilidad de sus modelos locales se sigue de la compatibilidad de las cartas orbifold de $RG_{g,n}^{\text{met}}$ y $RGB_{g,n}^{\text{met}}$.

De misma forma, notemos que \mathbb{R}^+ actúa naturalmente en el segundo factor del espacio $\mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n$ por multiplicación, mientras que no tiene efecto en $\mathcal{M}_{g,n}$. A saber, $r > 0$ transforma $(X, p_1, \dots, p_n), (l_1, \dots, l_n)$ en $(X, p_1, \dots, p_n), (rl_1, \dots, rl_n)$. Así, el espacio cociente correspondiente es

$$\frac{\mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n}{\mathbb{R}^+} = \mathcal{M}_{g,n} \times \frac{\mathbb{R}_+^n}{\mathbb{R}^+} = \mathcal{M}_{g,n} \times \Delta(1, 2, \dots, n).$$

Escribamos $S : \mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow RGB_{g,n}^{\text{met}}$ para denotar el homeomorfismo del teorema 6.1.1. La acción de \mathbb{R}^+ es equivariante bajo S : dadas una $r > 0$ y una superficie decorada (X, v) , tenemos que $r \cdot (X, v) = (X, rv)$. Esto corresponde a elegir el único diferencial de Strebel sobre X cuyos ciclos de trayectorias horizontales tienen las longitudes descritas por rv . Si Γ_v es la gráfica crítica inducida por v , tenemos que Γ_{rv} está en la misma clase que $S(X, v)$, pues la estructura topológica de Γ_v no es modificada por r , y vemos que Γ_{rv} corresponde a un etiquetado distinto de las aristas de Γ_v . Topológicamente, r escala de manera uniforme las circunferencias de cada cilindro con el que construimos X a partir del diferencial asociado a v . Así, vemos que $S(X, rv) = r \cdot (X, v)$.

Esto implica que S desciende a un homeomorfismo

$$\mathcal{M}_{g,n} \times \Delta(1, 2, \dots, n) \cong RGB_{g,n}^{\text{met}} = \coprod_{\Gamma \in \text{RGB}_{g,n}} \frac{\Delta(1, 2, \dots, e(\Gamma))}{\text{Aut}_\delta(\Gamma)}.$$

En particular, cuando $n = 1$ tenemos que $\Delta(1)$ es simplemente un punto, y obtenemos una presentación de $\mathcal{M}_{g,1}$ como un orbifold topológico.

$$\mathcal{M}_{g,1} = \coprod_{\Gamma \in \text{RGB}_{g,1}} \frac{\Delta(1, 2, \dots, e(\Gamma))}{\text{Aut}_\delta(\Gamma)}.$$

6.3. Notas y referencias

Este último capítulo sigue la penúltima sección de [32]. De misma forma que en el artículo, exhibimos la biyección 6.1 utilizando el teorema [42] para asignarle a cada superficie de Riemann marcada y decorada una gráfica de listones métrica. Utilizamos el sistema canónico de coordenadas descrito en el capítulo 5, que nos da una descripción concreta de una superficie de Riemann, para probar que σ desciende al cociente buscado. La prueba sigue completamente a [32]; la hemos reescrito para hacerla más explícita y entendible, pero no ha sido demasiado

alterada: la prueba de Motohico y Penkava es bastante completa.

Finalizamos presentando al espacio $\mathcal{M}_{g,1}$, $g \geq 2$, como un complejo racional. De igual forma, seguimos fielmente la sección 5 del artículo [32]. Referimos a [6] para una discusión sobre otros modelos combinatorios de $\mathcal{M}_{g,n}$ y sus diversos usos. Referimos a [31] para una exposición distinta pero equivalente de la construcción del modelo que elegimos presentar.

Capítulo 7

Apéndice

7.1. Gráficas y mapas

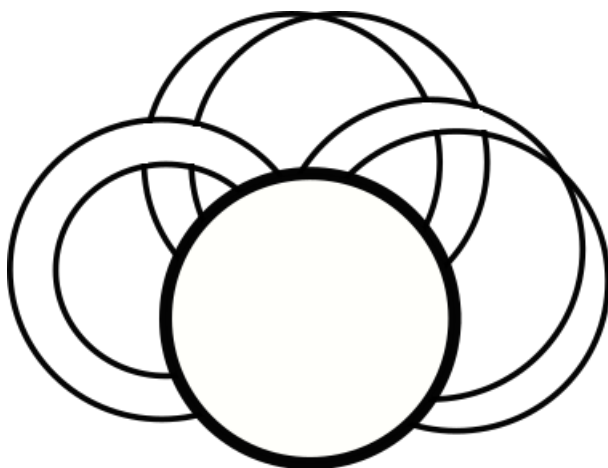


Figura 7.1: Esta gráfica de listones tiene sólo una componente de frontera y no admite una orientación: para poder recorrer su frontera en un ciclo dirigido, al menos una arista debe tener la misma dirección en sus dardos. Esta gráfica representa un encaje en el plano proyectivo real.

Puesto que en este trabajo seguimos principalmente a [32] utilizamos la definición de gráfica y de gráfica de listones utilizada ahí. Sin embargo, en [5], N. Biggs da una noción un poco más abstracta que incluye naturalmente el concepto de media arista sin necesidad de hablar de refinamientos, y es como sigue.

Definición 7.1. (Biggs). Una gráfica es una cuaterna $G = (E, V, \lambda, \tau)$ en la que E y V son conjuntos finitos, $\lambda : E \rightarrow V$ es suprayectiva y $\tau : E \rightarrow E$ es una involución.

La función τ juega el papel de α en el sistema de rotaciones que describimos en el capítulo 3. Esto es, τ determina qué medias aristas conforman una arista de G . Observemos que τ puede fijar elementos de E , que interpretamos como medias aristas libres. En un hipermapa, bajo la convención que hicimos antes, un punto fijo de τ corresponde a la arista adyacente a un vértice blanco de grado 1. La suprayectividad de λ implica que no hay vértices aislados, pero la

definición es suficientemente general para permitir gráficas desconexas. Cuando τ no tiene puntos fijos, podemos recuperar la definición de Motohico construyendo la relación de incidencia $i : E \rightarrow V \times V/S_2$ a partir de λ . A saber, hacemos $i(e) = \{\lambda(e), \lambda(\tau(e))\}$.

Ahora, es fácil definir un mapa.

Definición 7.2. Sea G una gráfica con esta definición. Una *rotación suave* en G es una permutación $\rho : E \rightarrow E$ tal que $\lambda \circ \rho = \lambda$.

Observemos que las órbitas de ρ son los conjuntos $\lambda^{-1}(v)$, $v \in V$. Observemos que este concepto hace precisa la noción intuitiva de un orden cíclico asociado a la vecindad de un vértice. La permutación ρ permuta las medias aristas adyacentes a un vértice fijo y, como vimos, basta para construir un encaje de G en una superficie orientada. Así, diremos que un mapa es una pareja (G, ρ) , en donde G es una gráfica y ρ una rotación suave en G . De nuevo, cuando G no es conexa y su involución no tiene puntos fijos, (G, ρ) coincide con el mapa asociado al sistema $[\tau, \tau\rho^{-1}]$. En analogía con la definición de $\phi = \alpha\sigma^{-1}$ para cierta constelación, las órbitas de la permutación $\rho\tau$ corresponden a ciclos de aristas que conforman las caras del mapa (G, ρ) , y les asocian una orientación consistente con los órdenes asignados a sus vértices adyacentes por ρ . Esto nos permite pegar discos orientados como hicimos antes para construir una superficie orientada en la que G se encaja.

7.1.1. Gráfica Dual

En este trabajo usamos un poco la noción de gráfica dual para entender la estructura de las expansiones locales de una gráfica de listones Γ . Usando la descripción combinatoria de Γ es fácil dar una definición abstracta para su gráfica dual, Γ^* . Recordemos que fue la gráfica dual de $*_k$ la que exploramos previamente, que no es una gráfica de listones de acuerdo a la definición que usamos en el capítulo 4. No obstante, la siguiente definición aplica perfectamente para $*_k$.

Definición 7.3. Sea (G, ρ) un mapa. Su mapa dual es la pareja (G^*, ρ^*) , en donde $G^* = (E^*, V^*, \lambda^*, \tau^*)$ satisface que $E^* = E$, con $\tau^* = \tau$, $V^* = E/\rho\tau$, y la función $\lambda^* : E \rightarrow E/\rho\tau$ es el cociente que envía $e \in E$ a su órbita bajo la permutación $\rho\tau$.

Los vértices del mapa dual (G^*, ρ^*) son las caras de (G, ρ) . Abstractamente, sus aristas son las aristas de G , pero la relación de incidencia es distinta. En el mapa dual, las aristas tienen por extremos las caras de las que forman parte. Esto coincide con la construcción geométrica e intuitiva que describimos previamente.

7.2. Espacios de móduli

En esta sección hacemos un poco más formal la discusión del problema de móduli. Reproducimos la discusión de [33] y [13]. Para el caso particular de curvas complejas de género g , referimos a [11] [15] para una descripción de la construcción analítica de \mathcal{M}_g y $\mathcal{M}_{g,n}$, obtenidos como orbifolds a partir de la acción del grupo modular¹ de la superficie de género g (con n ponchaduras para $\mathcal{M}_{g,n}$) en su espacio de Teichmüller correspondiente.

¹También conocido como *Mapping Class Group* en la literatura.

Fijemos una colección A de *objetos algebraicos* con una noción \sim de equivalencia. Para M_g , los objetos de interés son curvas proyectivas no singulares, y \sim es la relación de biholomorfismo. Más generalmente, podemos pensar que los elementos de A son *esquemas*, con su noción correspondiente de isomorfismo. A grandes rasgos, un problema de móduli consiste en describir el espacio de clases A/\sim de una forma que permita formalizar la presencia de familias continuas de objetos en A . El primer paso es definir una noción correcta de *familia* de objetos en A .

La idea es la siguiente: una familia de objetos en A sobre la variedad S es una colección de objetos X_s indexados por S de modo que se acomodan a la estructura de S .

Ejemplo 7.1. Supongamos que los objetos de A son variedades proyectivas, y \sim denota isomorfismo de variedades. Una *familia* de objetos de A parametrizada por una variedad S es una variedad X y un morfismo propio y *plano* $f : X \rightarrow S$ para el cual $f^{-1}(a)$ es un objeto a de A .

La noción de morfismo *plano* es técnica, pero evita casos patológicos de familias que no coinciden con la intuición de variación continua: a saber, si $f : X \rightarrow S$ es plano, todas las componentes de todas las fibras de f tienen la misma dimensión.

La definición de familia sobre un espacio B depende de las particularidades de cada problema de móduli. Sin embargo, cualquier noción de familia debe satisfacer las condiciones siguientes:

- Hay una noción de equivalencia de familias sobre la variedad S , de modo que si S es un punto $*$, esta noción se reduce a la relación \sim de A . También denotamos a este equivalencia de familias por \sim .
- Para cada morfismo $\phi : S' \rightarrow S$ y cada familia X sobre S hay una familia inducida ϕ^*X sobre S' . Más aún, esta inducción satisface:

$$(\phi \circ \phi') = \phi'^* \circ \phi^*, \quad 1_S^* X = X$$

en donde $\phi : S' \rightarrow S$, $\phi' : S'' \rightarrow S'$ son morfismos, y es compatible con la relación \sim en A . A saber, $X \sim X'$ si y sólo si $\phi^*X \sim \phi^*X'$.

Esto es, buscamos que la noción de familia admita *pullbacks*. Retomando el ejemplo 7.1, buscamos un diagrama como el siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 \phi^* X & \dashrightarrow & X \\
 \phi^* f \downarrow & & \downarrow f \\
 S' & \xrightarrow{\phi} & S
 \end{array}$$

Fijemos S y denotemos por $\mathcal{F}(S)$ al conjunto de clases de equivalencia de familias sobre S . Las condiciones anteriores nos dicen que \mathcal{F} es un funtor contravariante. En nuestro ejemplo, \mathcal{F} es un funtor entre la categoría de variedades algebraicas a la categoría de conjuntos. Bajo \mathcal{F} , cada morfismo $\phi : Y \rightarrow X$ da al pullback ϕ^* que transforma clases de equivalencia de familias sobre X en clases de familias sobre Y , de acuerdo a las condiciones previas.

Así, un problema de móduli consiste en una forma de hacer concreta la noción de familia y equivalencia de familias, para nuestra colección A y relación \sim .

Definición 7.4. Sea $\Psi : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ un funtor contravariante. Decimos que Ψ es *representable* si existe

un objeto $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$ y una transformación natural $\eta : \Psi \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{M})$ que es un isomorfismo de funtores.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \Psi(X) & \xrightarrow{\eta_X} & \text{Hom}(X, \mathcal{M}) \\
 \downarrow f & \uparrow \Psi(f) & & \uparrow f^* \\
 Y & \Psi(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & \text{Hom}(Y, \mathcal{M})
 \end{array}$$

Ahora, supongamos por un momento que M es una variedad que, como conjunto, coincide con A/\sim . Para cada familia X sobre S tenemos una función

$$v_X : S \rightarrow M, \quad v_X(s) = [X_s].$$

A saber, v_X asocia a cada punto de s la clase de equivalencia de X_s . Supongamos que este v_X es un morfismo, y denotemos por $\text{Hom}(S, M)$ al conjunto de morfismos de S en M . Tenemos entonces una función $\eta(S) : \mathcal{F}(S) \rightarrow \text{Hom}(S, M)$, $[X]_{\sim} \mapsto v_X$

de forma que obtenemos la transformación natural

$$\eta : \mathcal{F} \rightarrow \text{Hom}(-, M).$$

Nos interesa que esta transformación natural sea un isomorfismo de funtores:

Definición 7.5. Un espacio de módulos fino para el problema de módulos con funtor asociado \mathcal{F} es una pareja (\mathcal{M}, η) que representa al funtor \mathcal{F} .

Fijemos un espacio de módulos fino (\mathcal{M}, η) . Puesto que identificamos una familia sobre un punto con un elemento de A/\sim , vemos que

$$\Phi(*) : \mathcal{F}(*) \rightarrow \text{Hom}(*, M)$$

es una biyección en donde podemos hacer las identificaciones naturales $A/\sim = \mathcal{F}(*)$ y $\text{Hom}(*, M) = M$, donde $*$ denota un punto particular. Para una variedad S , la inclusión $\{s\} \rightarrow S$ es un morfismo que induce el siguiente diagrama conmutativo, bajo la transformación natural η :

$$\begin{array}{ccccc}
 S & \mathcal{F}(S) & \xrightarrow{\eta_X} & \text{Hom}(S, \mathcal{M}) & \\
 \uparrow \iota & \downarrow [X] \mapsto [X_s] = \eta(\iota) & & \downarrow \phi \mapsto \phi(s) & \\
 \{s\} & \mathcal{F}(\{s\}) & \xrightarrow{\eta_Y} & \text{Hom}(\{s\}, \mathcal{M}) & = \mathcal{M}
 \end{array}$$

en donde, de acuerdo a la notación previa, $\eta(S)(X) = v_X$. Así, tenemos $\eta(S)(X) = \eta(s) \circ v_X$, que denotamos v'_X . Ahora bien, el morfismo $1_{\mathcal{M}}$ determina una familia U sobre \mathcal{M} , salvo equivalencia. Dada una familia X sobre S , tanto X como $v'^*_X(U)$ corresponden al morfismo v'_X :

$S \rightarrow \mathcal{M}$, y $X \sim v_X^*(U)$. En particular, los puntos de \mathcal{M} están en correspondencia con las clases de objetos de A . Esta construcción nos da otra definición para el espacio \mathcal{M} .

Definición 7.6. Un espacio de móduli fino es una variedad M acompañado de una familia universal U sobre \mathcal{M} tal que, para cada familia X sobre S hay un único morfismo $\phi : S \rightarrow \mathcal{M}$ para el que $X \sim \phi^*U$.

Esto es, cualquier familia sobre S se obtiene a partir de un único pullback de la familia universal. Como hemos discutido previamente, no es común tener espacios de móduli finos. Para obtener un espacio grueso, se relaja la condición sobre η en 7.5 a ser solamente una transformación natural.

Definición 7.7. Un espacio de móduli grueso para un cierto problema de móduli con funtor asociado \mathcal{F} es una variedad M con una transformación natural

$$\eta : \mathcal{F} \rightarrow \text{Hom}(-, M)$$

tal que $\eta(*)$ es biyectiva, y para cada variedad N y cualquier transformación natural $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \text{Hom}(-, N)$ hay una única transformación natural

$$\Phi : \text{Hom}(-, M) \rightarrow \text{Hom}(-, N)$$

tal que $\psi = \Phi \circ \eta$.

Consideraciones similares nos llevan a la siguiente definición equivalente.

Definición 7.8. Un espacio de móduli grueso es una variedad M y una función biyectiva $f : A/\sim \rightarrow M$ para la que para toda familia X sobre la variedad S , $f \circ v_X$ es un morfismo, y para cada variedad N y transformación natural $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \text{Hom}(-, N)$, la función $\psi(*) \circ f^{-1}$ es un morfismo también.

7.3. El modelo combinatorio

Al estudiar el espacio de las gráficas de listones métricas optamos por identificar \mathbb{R}_+^n con $\mathbb{R}_+^{E(\Gamma)}$. Sin embargo, es posible lidiar directamente con la topología del espacio de funciones reales positivas definidas en $E(\Gamma)$.

Para una gráfica de listones Γ con frontera etiquetada, denotemos por M_Γ al conjunto de las funciones $l : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que para cada ciclo no trivial e_1, \dots, e_k en Γ se tiene que $l(e_i) > 0$ para al menos una de las e_i . Similarmente, denotamos por \bar{M}_Γ al conjunto de funciones l reales y no negativas tales que cada componente de frontera de Γ tiene una arista e con $l(e) > 0$. Observemos que $\bar{M}_\Gamma \subset M_\Gamma$, pues es posible que un lazo de Γ , correspondiente a un ciclo trivial de aristas, determine una componente de frontera. Los espacios \bar{M}_Γ y M_Γ son subespacios abiertos de $\mathbb{R}_{\geq 0}^{E(\Gamma)}$. Supongamos que e es una arista en Γ que no es un lazo. La contracción de Γ en $\Gamma' = \Gamma/e$ induce inclusiones $M_{\Gamma'} \rightarrow M_\Gamma$, $\bar{M}_{\Gamma'} \rightarrow \bar{M}_\Gamma$

dadas por hacer $l(e) = 0$. En efecto, como discutimos en el capítulo 3, la contracción de una arista con extremos distintos no cambia su estructura topológica, de forma que preserva las

componentes de frontera. Siguiendo a [25], construimos una categoría $\Gamma_{g,n}$ en la que los objetos son gráficas de listones conexas con n componentes de frontera marcadas y cuyos espacios totales tienen género g . Los morfismos son isomorfismos de gráficas de listones que preservan marcas (en la frontera), y los morfismos inducidos por contracciones que preservan marcas. Entonces las asociaciones

$$M_\Gamma, \bar{M}_\Gamma : \Gamma_{g,n} \rightarrow \text{Top}$$

dadas por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0}^{E(\Gamma)} \\ \downarrow m & \rightleftarrows & \uparrow i \\ \Gamma' & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0}^{E(\Gamma')} \end{array}$$

son funtores contravariantes. El espacio $RGB_{g,n}^{\text{met}}$ resulta ser el colímite del funtor M_Γ . A su vez, el colímite de \bar{M}_Γ resulta ser equivalente a un factor del espacio $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, la compactación de Deligne-Mumford de \mathcal{M}_g . Los objetos de este último espacio, que denotamos $\overline{M}_{g,n}^{\text{comb}}$, surgen a partir del concepto de gráfica estable:

Definición 7.9. Γ es una gráfica estable si es una gráfica de listones acompañada de la siguiente información:

1. El conjunto $S \subset V(\Gamma)$ de todos los vértices de grado 1 o 2.
2. Una relación de equivalencia en S , que denotamos \sim .
3. Una función $g : S / \sim \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$

para las que se satisface que para cada $[c] \in S / \sim$, tenemos $2 - 2g([c]) - |[c]| < 0$ y la gráfica Γ/S inducida por la identificación de todos los vértices en S es conexas.

Los puntos de $\overline{M}_{g,n}^{\text{comb}}$ corresponden a clases de equivalencia de gráficas estables métricas con frontera etiquetada, para las que se satisface

$$2 - 2g - n = v(\Gamma) - e(\Gamma) - 2|S| + \sum_{[c] \in S / \sim} (2 - 2g([c])).$$

La terminología proviene de la noción de *curvas estables*, los objetos parametrizados por el espacio $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Bajo esta noción, que omitimos, es posible definir una relación de equivalencia natural entre curvas estables marcadas que permite construir al espacio $\overline{M}_{g,n}^{\text{comb}}$ concretamente como un cociente $\overline{M}_{g,n}'$ en $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. La teoría de diferenciales de Strebel se extiende a superficies de Riemann no compactas, dando una función continua

$$\overline{M}_{g,n}^{\text{comb}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}' \times \mathbb{R}_+^n$$

que resulta un homeomorfismo, y que generaliza la biyección que construimos en el teorema 6.1.1. En efecto, esta construcción produce el homeomorfismo S .

Bibliografía

- [1] A'Campo, N. Ji, L. Papadopolous, A. *On the early history of Moduli and Teichmüller Spaces*. En *Limpan Bers: A Life in Mathematics*, American Mathematical Society, 2015.
- [2] Adem, A. Leida, J. Ruan, Y., *Orbifolds and stringy topology*. Cambridge University Press, 2007.
- [3] Ahlfors, L. Sario, L. *Riemann Surfaces*. Princeton University Press, 1960.
- [4] Beardon, A. *The Geometry of Discrete Groups*; Springer, 1983.
- [5] Biggs, N. *Automorphisms of Imbedded Graphs*; Journal of combinatorial theory 11, p.132-138, 1971.
- [6] Chan, M. *Moduli Spaces of Curves: classical and tropical*. Por aparecer en *Notices of the American Mathematical Society*, Nov. 2021.
- [7] de Saint-Gervais, H. S. *Uniformization of Riemann Surfaces. Revisiting a hundred-year-old theorem*. European Mathematical Society, 2016.
- [8] Farb, B. Margalit, D. *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton University Press, 2012.
- [9] Forster, O. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer-Verlag, 1981.
- [10] Grothendieck, A. *Esquisse d'un programme*. Versión traducida al inglés en Schnepps, L., *Geometric Galois Actions*, p. 243-293. Cambridge University Press, 1997.
- [11] Harer, J. *The cohomology of the moduli space of curves*; Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1988, vol 1337, 138-221.
- [12] Harer, J. Zagier, D. *The Euler characteristic of the moduli space of curves*; Inventiones Mathematicae vol. 85, p. 457-485, 1986.
- [13] Harris, J. Morrison, I. *Moduli of curves*. Springer, 1991.
- [14] Hatcher, A. *Algebraic Topology*; Cambridge University Press, 2002.
- [15] Hubbard, J. *Teichmüller theory and applications to Geometry, Topology and Dynamics, Vol. 1: Teichmüller theory*; Matrix Editions, 2006.
- [16] Hubbard, J. Masur, H. *Quadratic Differentials and Foliations*. Acta Math. 142, p. 221-274, 1979
- [17] I. Moerdijk and D. A. Pronk. *Orbifolds, sheaves and groupoids*. K-Theory 12:1, Kluwer Academic Publishers, p. 3-21, 1997.
- [18] Jenkins, J. *On the Local Structure of the Trajectories of a Quadratic Differential*. Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 5, No. 3, p. 357-362, 1954.

- [19] Jones, G., Singerman, D. *Theory of maps on orientable surfaces*; Proceeding of the London Mathematical Society, Vol s3-37, 2. p. 273-307, 1978.
- [20] Jones, G. Wolfart, J. *Dessins d'Enfants on Riemann Surfaces*. Springer, 2016.
- [21] Karcher, H., Weber, M. *The Geometry of Klein's Riemann Surface*. En Levy, S., *The Eightfold Way: The Beauty of Klein's Quartic Curve*, MSRI Publications, Vol. 35, p. 9-49.
- [22] Katok, S. *Fuchsian Groups*. Chicago Lectures in Mathematics; The University of Chicago Press; 1992.
- [23] Klein, F. *On the Order-Seven Transformation of Elliptic Functions*, en Levy, S., *The Eightfold Way: The Beauty of Klein's Quartic Curve*, MSRI Publications, Vol. 35, p. 287-331.
- [24] Koblitz, N. *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*; Springer, 1984.
- [25] Kontsevich, M. *Intersection theory on the Moduli Space of Curves and the Matrix Airy Function* *. Commun. Math. Phys. 147, 1-23, 1992.
- [26] Lando, S. K., Zvonkin, K. *Graphs on Surfaces and Their Applications*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 141. Springer-Verlag, 2004.
- [27] Lascurain Orive, A. *Una introducción a la geométrica hiperbólica bidimensional*; UNAM, 2015.
- [28] Lee, J. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 1998.
- [29] Lee, J. M., *Introduction to Topological Manifolds*, Second Edition. GTM, Springer-Verlag. 2011.
- [30] Miranda, R. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. American Mathematical Society, 1995.
- [31] Mondello, G. *Riemann surfaces, ribbon graphs and combinatorial classes* Handbook of Teichmüller theory II, European Mathematical Society, p. 151-216, 2009
- [32] Mulase, M., Penkava, M. *Ribbon Graphs, Quadratic Differentials on Riemann Surfaces, and Algebraic Curves Defined over $\bar{\mathbb{Q}}$* . *The Asian Journal of Mathematics*, Vol. 2 (4), p. 875-920, 1998.
- [33] Newstead, P.E. *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*. Narosa, para Tata Institute of Fundamental Research, 2012.
- [34] Penner, R: C. *Cell Decomposition and Compactification of Riemann's Moduli Space in Decorated Teichmüller Theory*; En *Series on Knots and Everything*, Woods Hole Mathematics, pp. 263-301, 2004.
- [35] Penner, R.C. *The decorated Teichmüller space of punctured surfaces*. Comm. Math. Phys. 113(2): 299-339, 1987.
- [36] Remmert, R. *Theory of complex functions*. Springer, 1991.
- [37] Richardson, Ian. *On the classification of noncompact surfaces*; Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 259-269.
- [38] Satake, I., *On a generalization of the notion of manifold*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 42(6) (1956), 359-363
- [39] Schlichenmaier, M. *An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces*. Springer-Verlag, 2007.
- [40] Schneps, L. *Dessins d'enfants*. En *The Grothendieck Theory of Dessins D'Enfants*. Cambridge University Press, 1994.

- [41] Steen, L. A. Seebach, J. A. *Counterexamples in topology*; Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970.
- [42] Strebel, K. *Quadratic Differentials*. Springer-Verlag, 1984.
- [43] Thomassen, C. *The Jordan–Schönflies theorem and the classification of surfaces*. The American Mathematical Monthly, Vol 99, 2. p 116-130, 1992.
- [44] Thurston, W. *The geometry and topology of 3-manifolds*. Notas electrónicas, MSRI.
- [45] Wilson, P.M.H. *Curved Spaces: From Classical Geometries to Elementary Differential Geometry*; Cambridge University Press, 2008.
- [46] Weyl, H. *The Concept of a Riemann Surface*; Dover Publications, 2009.