



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS Y EL GRUPO
PROPIO DE LORENTZ

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

ARIAS CRUZ JESSICA RUBÍ

TUTOR

MARÍA DE LOS ÁNGELES SANDOVAL ROMERO



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Primero y más importante, debo agradecer a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM por el apoyo con la beca PAPIIME, con clave del proyecto PE101521. Gracias al soporte de la beca anterior pude acabar satisfactoriamente el presente texto.

Agradezco a la Facultad de Ciencias, así como a todos los profesores que me apoyaron durante todos estos años, en especial a la Dra. María de los Ángeles Sandoval Romero, quien fue mi guía en todo el proceso de titulación y me consiguió el apoyo necesario para continuar, así como al M. en C. José Rafael Martínez Enríquez con quien realice mi servicio social y me ofreció apoyo y consejos profesionales. También mi agradecimiento a la M. en C. Emma Lam Osnaya quien me apoyo y dio palabras de aliento para terminar mis estudios a pesar de las dificultades que se me presentaron.

Quisiera finalmente agradecer a mi familia por darme el apoyo a mi educación y que pudiera terminarla, así como a Erick J. Sánchez Vázquez por apoyarme en todo momento y nunca dudar de mí.

El presente texto lo dedico a mi padre Gerardo Arias, quien aunque ya no me acompaña físicamente, sus enseñanzas y palabras de aliento siempre me acompañarán para no sucumbir ante cualquier situación venidera.

Índice general

1. Preliminares	11
1.1. Álgebra de Lie	11
1.1.1. Introducción	11
1.1.2. Campos vectoriales invariantes izquierdos	15
1.1.3. El álgebra de Lie de un grupo de Lie	21
1.1.4. De los Grupos de Lie a las Álgebras de Lie	23
1.1.5. De Álgebras de Lie a Grupos de Lie	25
1.2. Espacio-tiempo de Minkowski	29
1.2.1. Espacio Vectorial de Minkowski	30
1.2.2. El espacio-tiempo de Minkowski	36
1.2.3. Cambio de coordenadas	38
2. Transformaciones de Möbius y el grupo de Lorentz	41
2.1. El grupo de Lorentz	41
2.2. Proyección estereográfica	49
2.3. Estructura compleja de S^2	51
2.4. Transformaciones de Möbius	55
2.5. Transformaciones de Möbius y el grupo propio de Lorentz . . .	59
2.6. Álgebra de Lie del grupo de Lorentz	65
2.7. Espinores	75
2.8. El cielo de un observador que se mueve rápidamente	78
A. La geometría de los vectores mundo y los vectores spin	85
A.1. Direcciones nulas y transformaciones spin	86
A.1.1. Las transformaciones de Lorentz y las transformaciones Spin	93
A.1.2. Relación con los cuaterniones	103
A.2. Algunas propiedades de las transformaciones de Lorentz	106

ÍNDICE GENERAL

A.2.1. Los tipos de las transformaciones de Lorentz, en términos de S^+	109
A.2.2. Relaciones cruzadas de direcciones nulas	112
A.3. Banderas nulas y vectores spin	115
A.3.1. Descripción en \mathcal{L}^+	116
A.3.2. Descripción en \mathbb{V}	119
A.3.3. Vectores spin	123

(...) y como el ingenio de una mujer desbarató los planes mejor trazados de Sherlock Holmes. En otro tiempo, acostumbraba a bromear a propósito de la inteligencia de las mujeres; pero ya no lo he vuelto a oír expresarse de ese modo en los últimos tiempos.

-Un escándalo en Bohemia, Arthur Conan Doyle.

Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo principal demostrar la relación entre las transformaciones de Möbius y el grupo propio de Lorentz. Las transformaciones de Möbius, o transformaciones fraccionales lineales, están definidas en el plano complejo extendido. Utilizando la proyección estereográfica se puede pensar a las transformaciones de Möbius en la esfera de Riemann para visualizarlas. Por otro lado, el grupo propio de Lorentz es un subgrupo del grupo de Lorentz, el cual consta de todas las transformaciones de Lorentz del espacio de Minkowski. Este último es un espacio vectorial, que tiene una base de cuatro vectores linealmente independientes, la cual, equiparada con el producto interno con signatura $(+ - - -)$, se obtiene una matriz de 4×4 que representa la base canónica del espacio de Minkowski. Sin embargo, el producto interno puede ser definido en términos de la norma de Lorentz, lo cual nos lleva a la definición de vector causal (o nulo).

El capítulo 2 empieza explicando de manera detallada al grupo de Lorentz, el cual determina la relación entre las observaciones de dos observadores inerciales en un evento dado. Por lo tanto, se empieza a describir el espacio de dimensión 4 de Minkowski, así como su base canónica, representada por la matriz de 4×4 (la cual se representa con la letra η) de la que se habló anteriormente. Se relaciona una transformación de Lorentz L con una representación matricial con respecto a una base elegida, para poder afirmar que el grupo de Lorentz es isomorfo al grupo ortogonal generalizado $O(3, 1) = \{\Lambda \in GL(4) : \Lambda^t \eta \Lambda\}$, podemos entonces señalar la diferencia de una transformación *activa* de Lorentz Λ , con la correspondiente transformación *pasiva* Λ^{-1} , con las cuales podemos cambiar de marco ortonormal. Si consideramos a las transformaciones de Lorentz con su representación matricial, podemos asegurar que el grupo $O(3, 1)$ es la unión disjunta de cuatro conjuntos abiertos $O_+^\uparrow(3, 1)$, $O_-^\uparrow(3, 1)$, $O_+^\downarrow(3, 1)$, $O_-^\downarrow(3, 1)$, lo cual nos lleva a considerar al único subconjunto que contiene a la identidad del grupo $O(3, 1)$ y que interesa desarrollar, el subgrupo llamado el grupo propio de las transformaciones de Lorentz $O_+^\uparrow(3, 1)$.

Dejando establecida de manera clara uno de los temas principales del trabajo, se desarrolla la proyección estereográfica de la esfera unitaria en el plano complejo, tomando el plano complejo en \mathbb{R}^3 con la coordenada $z = 0$, podemos hacer el mapeo $\zeta : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$, con la cual podemos obtener todos los puntos del plano complejo extendido en la llamada esfera de Riemann. Como se está hablando de una esfera (y se obtuvo una función $\zeta(x, y, z) = \frac{x+iy}{1-z}$),

se puede obtener una función en coordenadas esféricas que dependen de θ, φ dada por $\zeta(\theta, \varphi) = \frac{\text{sen } \theta}{1 - \cos \theta} e^{i\varphi}$ que ayuda a concluir que la proyección estereográfica es un mapeo conforme (lo cual se puede apreciar en la **Sección 2.5** o en el **Apéndice A.1**). Otra manera de verlo es diciendo que dicha proyección mapea círculos en círculos. Algo importante para hacer notar, es que la proyección estereográfica puede ser hecha tomando como punto especial al polo Sur, aunque ésta nos da un mapeo que se denomina $\tilde{\zeta}(x, y, z) = \frac{x - iy}{1 + z}$. Entonces, si tenemos la esfera menos los polos Norte y Sur podemos obtener el mapeo $\zeta\tilde{\zeta} = \frac{x^2 + y^2}{1 - z^2} = 1$, por lo que se obtiene la inversión compleja $\zeta \rightarrow \frac{1}{\zeta}$ con $\tilde{\zeta} \circ \zeta^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ el cual es suave y un mapeo holomorfo, junto con la función $a\zeta$ ($a \neq 0$). Entonces se afirma que cualquier automorfismo holomorfo de la esfera es una composición de un automorfismo representado por $\frac{1}{\zeta}$ y $a\zeta + b$ ($a \neq 0$).

Podemos entonces introducir al grupo de las transformaciones de Möbius \mathcal{M} , que son los automorfismos analíticos complejos de la esfera, ya que \mathcal{M} es generado por la composición de los automorfismos $\frac{1}{\zeta}$ y $a\zeta + b$, los cuales son de la forma $\frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$ con la condición $ad - bc \neq 0$, inversamente, todos los automorfismos representados por la función anterior pueden ser obtenidas como composiciones del automorfismo que genera al grupo de Möbius y, por lo tanto, se tiene la representación de todas las transformaciones de Möbius. Sin embargo, considerando al mapeo $H : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$, el cual es un homomorfismo de grupos, se prueba que el conjunto de todos los automorfismos complejos analíticos representados por las funciones que se consideraron es en efecto \mathcal{M} . Sabiendo que \mathcal{M} es isomorfo a $\frac{GL(2, \mathbb{C})}{\ker H}$, se calcula el núcleo de H , es decir, $\ker H = \{aI : a \in \mathbb{C} - \{0\}\}$. Tomando un representante Λ de una clase de equivalencia en este grupo cociente, se puede notar que cada clase de equivalencia tiene al menos un representante con determinante 1 y, como $SL(2, \mathbb{C}) = \{\Lambda \in GL(2, \mathbb{C}) : \det \Lambda = 1\}$ es un subgrupo de $GL(2, \mathbb{C})$ se puede concluir que \mathcal{M} es isomorfo a $\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\pm I}$. De ahí que se pueda representar a cualquier transformación de Möbius por la función $g(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$ que satisface $ad - bc = 1$. No se debe olvidar que las transformaciones de Möbius tienen algunas propiedades importantes, tales como: tener dos puntos fijos cuando $a + d \neq 2$, mientras que cuando $a + d = 2$ tiene exactamente un punto fijo y que cualquier transformación está completamente determinada por las tres imágenes (distintas) de tres puntos distintos en la esfera.

Se puede entonces empezar a abordar el tema principal, es decir, como se da la relación entre el grupo propio de Lorentz y las transformaciones de

Möbius. Al tomar la base ortonormal del espacio-tiempo de Minkowski y la representación de un vector v con respecto a esa base, podemos asociar a v (y a esa base) una matriz V que está en el conjunto de las matrices complejas Hermitianas \mathbb{H}_2 , que define una biyección entre el espacio-tiempo de Minkowski y \mathbb{H}_2 , el cual es útil, dado que el $\det V = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle$. Como se conoce que $GL(2, \mathbb{C})$ actúa sobre \mathbb{H}_2 a través de la acción adjunta, se trabaja con ella para obtener todas las acciones adjuntas que preservan el determinante de $GL(2, \mathbb{C})$ en \mathbb{H}_2 de los elementos de $SL(2, \mathbb{C})$, por lo tanto, se revisa la conexidad de éste último grupo, así como que $SU(2)$ es una variedad difeomorfa a S^3 y la propiedad $H(SL(2, \mathbb{C})) \subseteq O_+^\uparrow(3, 1)$ para, apoyándose de resultados de la teoría de grupos de Lie (como el espacio tangente en la identidad) poder afirmar que $O_+^\uparrow(3, 1) = \mathcal{M}$.

Se revisa con más cuidado la teoría del álgebra de Lie del grupo de Lorentz (lo cual se hace cuidadosamente en los preliminares), para entender mejor la relación antes mencionada, así como la teoría que permita llegar a la definición de espinores. Es decir, un vector $k \in \mathbb{C}$ más el mapeo $k \mapsto kk^* = V = v$ es llamado un espinor y, por la manera en la cual los espinores parametrizan a los vectores nulos, se pueden definir en la Relatividad general si el espacio-tiempo se considera no compacto. Se define entonces la conexión spin, que al utilizarla se puede escribir a la ecuación de Einstein en la forma de un spinor, por la forma sencilla en que una transformación de Lorentz actúa sobre un vector nulo parametrizado por un espinor.

Entonces, ya que se habla de la relación de los vectores spin, podemos afirmar que el grupo de transformaciones propias de Lorentz se puede pensar como el grupo de los mapeos conformes en la 2 esfera que preserva la orientación. En el **Apéndice A.1** podemos relacionar a las transformaciones de Lorentz con lo que en Física se conoce como la *esfera celestial* de un observador. Recordando a las transformaciones activas y pasivas de Lorentz, si tenemos a $g \in SL(2, \mathbb{C})$ una transformación activa de Lorentz relacionada a dos observadores, entonces este cambio se acompaña por la correspondiente transformación pasiva de Lorentz g^{-1} . Por lo tanto, podemos ver que las transformaciones de Lorentz relativa a dos observadores corresponde a una transformación de Möbius de S^+ . Como se hará notar en el presente trabajo, las transformaciones de Möbius tienen algunas propiedades, las cuales pueden transformarse fácilmente en teoremas sobre los cielos.

En el **Capítulo 2** se puede notar que la descripción anterior corresponde al contenido principal de la tesis. Sin embargo, durante el estudio del contenido del texto, se dedicó un tiempo a la revisión del libro de Roger Penrose,

"*Spinors and Space-Time: Volume 1, Two Spinor Calculus and Relativistic*". Aunque se reconoce que el abordaje de estos temas tienen más un enfoque físico que matemático, dada su relevancia se decidió incluirlo en el presente trabajo como un apéndice. Utilizando la definición desarrollada en el preámbulo de tétrada de Minkowski, así como el producto interno definido en términos de la norma de Lorentz para poder denominar a los vectores U del espacio de Minkowski *causales*, es decir, tipo tiempo o nulo con la condición $(U^0)^2 \leq (U^1)^2 + (U^2)^2 + (U^3)^2$. Entonces, el concepto de vectores causales junto con el producto interno, se tiene que dichos vectores caen en dos clases disjuntas, las cuales se distinguen por el signo de U^0 . Esto nos lleva al llamado *espacio-tiempo de Minkowski* \mathbb{M} , es decir, un espacio de vectores posición relativo a elegir arbitrariamente el origen de los eventos. Se define entonces la transformación $vec : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{V}$, con la cual podemos inducir una norma en \mathbb{V} , llamada el *intervalo cuadrado* ϕ . Luego, se puede examinar otra manera de presentar las coordenadas de Minkowski, es decir, se define un sistema coordinado del cono nulo en términos de los números complejos, lo que conduce al concepto de vector spin. Y así, el concepto de las direcciones nulas nos llevan al espacio abstracto cuyos elementos son el futuro (y pasado) de direcciones nulas que se denotan por \mathcal{L}^+ (\mathcal{L}^-), dichos espacios pueden ser representados en cualquier sistema de coordenadas dado por la intersección $S^+(S^-)$. Por lo tanto, se desarrolla el significado de S^+ y S^- en términos físicos, es decir, se entienden el conceptos conocidos como *esfera celestial* y el *mapeo del cielo*, así como el *mapeo anti-cielo*. Al tener las esferas S^+ y S^- pueden ser vistas como la *esfera de Riemann*, dado que dicha esfera refleja muchas de las propiedades geométricas del espacio vectorial de Minkowski \mathbb{V} , por lo tanto, las transformaciones restringidas de Lorentz se pueden ver determinadas por su efecto en la esfera de Riemann, así como los vectores spin reciben una interpretación geométrica en dicha esfera.

Por lo anterior, podemos ver a las transformaciones de Lorentz en la esfera de Riemann. Es decir, tomando las coordenadas proyectivas complejas, se llega a la definición de las transformaciones spin (que son transformaciones de Möbius desde la perspectiva Matemática), las cuales están relacionadas a los vectores nulos de Minkowski. En el mismo contexto, se define la *matriz spin* cuyo $\det A = 1$, con lo cual se puede ver a las transformaciones spin como un grupo. Por lo tanto, se dice que a cada transformación spin le corresponde una transformación restringida de Lorentz, así como que a cada transformación spin le corresponde una rotación propia de S^+ , por lo que se pueden apreciar las transformaciones de Lorentz como transformaciones de

la esfera de Riemann (¡Tal como las transformaciones de Möbius!).

Uno de los científicos que tuvo muchas contribuciones en la física relativista fue Hendrik Antoon Lorentz, físico holandés que ganó el premio Nobel de Física en 1902 (junto a su pupilo Pieter Zeeman), por su investigación conjunta sobre la influencia del magnetismo en la radiación, originando la radiación eléctrica". Hendrik nació el 18 de julio de 1853 en los Países Bajos, a Lorentz se le deben importantes contribuciones a distintos campos de la Física, tales como la termodinámica, la radiación, el magnetismo, la electricidad y la refracción de la Luz. Semanas antes de su muerte, el 4 de febrero de 1928, Einstein declaró que Lorentz era uno de los pocos científicos que verdaderamente admiraba y que consideraba como precursor de su propio trabajo. Algunos de los científicos contemporáneos incluso llegaron a comentar que Lorentz y Einstein debían compartir el premio Nobel por el descubrimiento de la Teoría Especial de la Relatividad, a pesar de esto ambos se consideraban buenos amigos.

Un matemático y astrónomo importante en el presente trabajo es August Ferdinand Möbius, el cual nació el 17 de noviembre de 1790. El matemático alemán fue pionero de la Topología y es más conocido por el descubrimiento de un objeto no orientable que lleva su nombre: la **banda de Möbius**. Además fue estudiante de otro gran matemático de la época: Carl Friedrich Gauss, con el cual posteriormente trabajó como ayudante. Gauss lo recomendó en 1816 para sustituir a su maestro Mollweide en el puesto de profesor extraordinario de la Cátedra de Astronomía y Mecánica Superior de la Universidad de Leipzig, en la cual fue nombrado catedrático en 1844. En el presente texto se hablará de las *Transformaciones de Möbius*, las cuales no deben confundirse con las *transformadas de Möbius*, ya que estas últimas son utilizadas en la teoría de números. El matemático alemán falleció el 26 de septiembre de 1868, en su memoria se nombró a al cráter lunar Möbius (el cual se encuentra en la cara oculta de la Luna), así como el asteroide (28516) Möbius (el cual fue descubierto el 27 de febrero del 2000 en Estados Unidos y se encuentra en el cinturón de asteroides).

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Álgebra de Lie

1.1.1. Introducción

La noción de grupo fue mencionada en 1830 por Évariste Galois en su trabajo sobre ecuaciones algebraicas. Cuarenta años después, el trabajo de Galois inspiró al matemático noruego Sophus Lie, quien en lugar de estudiar la invarianza de ecuaciones algebraicas estudiaba la invarianza de propiedades de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, lo cual apuntó a la necesidad de notar otros tipos de grupos. Éstos se llamaron formalmente "grupos finitos y continuos", que hoy en día se conocen como grupos topológicos de dimensión finita. De hecho muchos de los ejemplos encontrados son variedades suaves, con operaciones de grupo suaves. Hoy tales grupos, son llamados grupos de Lie.

Se conjeturó rápidamente, pero se demostró sólo hasta 1950 que cada variedad topológica equipada con una operación de grupo continua es un grupo de Lie. No es sorprendente que muchos de los grupos que surgen en geometría y física son grupos de Lie. Los ejemplos que se verán son subgrupos del grupo lineal, $Gl(n, \mathbb{R})$, es decir, el grupo de matrices regulares de orden n con entradas en los reales y determinante diferente de cero. Inversamente, se puede probar que cada grupo de Lie es localmente isomorfo a un subgrupo del grupo lineal. En el nivel elemental que se va a comentar, la teoría arroja luz sobre fenómenos esenciales, donde se estudiará el vínculo entre las propiedades del grupo y las de una estructura algebraica particular en el espacio tangente al elemento identidad. Esta estructura es naturalmente identificada con campos

1.1. ÁLGEBRA DE LIE

vectoriales invariantes izquierdos, y es estable bajo el denominado *corchete*. Esta estructura algebraica, llamada el *álgebra de Lie* refleja las propiedades del grupo.

El álgebra de Lie de un grupo conmutativo es conmutativa, y el de un subgrupo es un subálgebra del álgebra de Lie del grupo original. El mapeo tangente lineal a un morfismo de grupo da un morfismo de álgebras de Lie. En la dirección del álgebra al grupo, las cosas no son sencillas. El álgebra de Lie de un grupo de Lie depende sólo de las propiedades del grupo en una vecindad del elemento identidad. Dos grupos que tienen el mismo componente identidad tienen la misma álgebra de Lie, así como dos grupos donde uno es la cubierta de otro. Aquí algunos ejemplos de ésta situación en dimensión 1: el grupo $(\mathbb{R}, +)$ (simplemente conexo), $SO(2) \simeq S^1$ (conexo pero no simplemente conexo), $O(2)$ (aquel cuyo componente identidad es $SO(2)$) tienen la misma álgebra de Lie. Se tiene un segundo ejemplo, los grupos $SU(2)$ (simplemente conexo como es homeomorfo a S^3), $SO(3)$ (conexo pero no simplemente conexo ya que es un cociente de orden 2 de $SU(2)$) y $O(3)$ (cuyo componente identidad es $SO(3)$) tienen la misma álgebra de Lie, que resulta ser \mathbb{R}^3 equipada con el producto cruz.

La existencia y propiedades del álgebra de Lie de un grupo de Lie vienen de las propiedades del flujo de un campo vectorial y del corchete. También se verán algunos resultados topológicos que permiten entender el paso en la dirección del álgebra al grupo. Vamos a motivar la definición de grupo de Lie mediante un importante ejemplo.

Una poderosa aplicación del teorema de la preimagen¹ sirve para demostrar lo siguiente:

Proposición 1 *El grupo ortogonal $O(n)$, el grupo de las transformaciones lineales de \mathbb{R}^n que preservan la distancia es una variedad suave.*

Demostración: Notemos primero que el espacio $M(n)$ de todas las matrices de $n \times n$ es una variedad; puesto que reordenando las entradas a lo largo de una sola línea, ésta no es otra más que \mathbb{R}^{n^2} , que al ser un espacio Euclidiano, es una variedad. Del álgebra lineal se puede saber que $O(n)$ se puede identificar con matrices de entradas reales de $n \times n$ que satisfacen la ecuación $AA^t = I$, donde A^t es la traspuesta de A e I es la matriz identidad. Se mostrará entonces que $O(n)$ es una variedad. Notemos primero, que para cualquier matriz A ,

¹**Teorema de la preimagen:** Si y es un valor regular de $f : X \rightarrow Y$, entonces la preimagen $f^{-1}(y)$ es una subvariedad de X , con $\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$.

la matriz AA^t es simétrica, porque es igual a su propia traspuesta, ya que $(AA^t)^t := (A^t)^t A^t = AA^t$. El espacio vectorial $S(n)$ de todas las matrices simétricas de $n \times n$ es obviamente una subvariedad de $M(n)$ difeomorfa a \mathbb{R}^k , donde $k = n(n+1)/2$, ya que toda matriz simétrica $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ se puede expresar en la forma:

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} &= a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nn} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
 + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{(n-1)n} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots \\
 + a_{(n-2)n} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{1n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Entonces, utilizando la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\dim S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Además, el mapeo $f : M(n) \rightarrow S(n)$, definido por $f(A) = AA^t$ es suave. La función f es suave ya que es posible encontrar su derivada. Entonces, $O(n) = f^{-1}(I)$, con el fin de establecer que el grupo ortonormal es una variedad, sólo se necesita mostrar que I es un valor regular de f . Por lo tanto

1.1. ÁLGEBRA DE LIE

calculamos la derivada de f en una matriz A . Por definición:

$$\begin{aligned}
 df_A(B) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(A + sB) - f(A)}{s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(A + sB)(A + sB)^t - AA^t}{s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{AA^t + sBA^t + sAB^t + s^2BB^t - AA^t}{s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} (BA^t + AB^t + sBB^t) \\
 &= BA^t + AB^t.
 \end{aligned}$$

□

Nos podemos preguntar si $df_A : T_A M(n) \rightarrow T_{f(A)} S(n)$ es suprayectiva cuando A pertenece a $f^{-1}(I) \subset O(n)$. Por las identificaciones de $M(n)$ y $S(n)$ como espacios Euclidianos, se tiene que $T_A M(n) = M(n)$ y $T_{f(A)} S(n) = S(n)$. La matriz I es un valor regular de f si y sólo si $df_A : M(n) \rightarrow S(n)$ es suprayectiva para toda $A \in O(n)$. Esto es para $C \in S(n)$, debe existir una $B \in M(n)$ que resuelva la ecuación $df_A(B) = C$, o equivalentemente para $A \in O(n)$ y que resuelva la ecuación $BA^t + AB^t = C$. Como C es simétrica, se puede escribir $C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^t$, y entonces la ecuación se puede resolver para B si cumple que $BA^t = \frac{1}{2}C$. Dado que $AA^t = I$, si multiplico el lado derecho por A me quedaría $B = \frac{1}{2}CA$, notando que para el caso $AB^t = \frac{1}{2}C^t$ si resuelve también, porque $(AB^t)^t = BA^t$. Entonces,

$$df_A(B) = \left(\frac{1}{2}CA\right)A^t + A\left(\frac{1}{2}CA\right)^t = \frac{1}{2}C(AA^t) + \frac{1}{2}(AA^t)C^t = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^t = C,$$

de este modo la B encontrada satisface la ecuación. Entonces, f es una submersión para cada A en $f^{-1}(I)$, esto quiere decir que I es un valor regular de f . Por lo tanto $O(n)$ es una subvariedad de $M(n)$; más aún,

$$\dim O(n) = \dim M(n) - \dim S(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Finalmente note que $O(n)$ es un grupo y además se acaba de demostrar que es una variedad. Se puede mostrar que las operaciones de grupo son suaves en el siguiente sentido: el mapeo multiplicación $O(n) \times O(n) \rightarrow O(n)$ definido por $(A, B) \rightarrow AB$, es decir, la multiplicación de matrices y el mapeo inversión $O(n) \rightarrow O(n)$ definido por $A \rightarrow A^{-1}$ son mapeos suaves de variedades. Más

en concreto tomemos a $f_1 : O(n) \times O(n) \rightarrow O(n)$ como $f_1(A, B) = AB$ y $f_2 : O(n) \rightarrow O(n)$ como $f_2(A) = A^{-1}$. Para mostrar que f_1 es suave, voy a fijar una de las matrices y voy a realizar la multiplicación por la izquierda y el resultado de la multiplicación por la derecha es análogo. Defino $m_A(B) = AB$ y esto para cualquier $B \in O(n)$

$$m_A : O(n) \rightarrow O(n)$$

$$d_B(m_A) : T_B O(n) = O(n) \rightarrow T_{AB} O(n) = O(n).$$

Sea $C \in O(n)$

$$\begin{aligned} d_B(m_A)(C) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{m_A(B + sC) - m_A(B)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{AB + sAC - AB}{s} \\ &= AC \end{aligned}$$

$$\therefore d_B m_A = A.$$

Con ello se muestra que la multiplicación es suave. Para la función f_2 se considera la definición de una matriz inversa ², entonces, para $A \in O(n)$:

$$d_A f_2 : T_A O(n) = O(n) \rightarrow T_{A^{-1}} O(n) = O(n).$$

Sea $C \in O(n)$

$$\begin{aligned} d_A f_2(C) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_2(A + sC) + f_2(A)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A^t + sC^t - A^t}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} C^t = C^t = C^{-1} \end{aligned}$$

$$\therefore d_A f_2(C) = C^{-1} = f_2(C)$$

$$\therefore d_A f_2 = f_2.$$

Por lo tanto, f_1 y f_2 son suaves. En la siguiente sección se va a formalizar la definición de grupo de Lie y teoría básica al respecto.

1.1.2. Campos vectoriales invariantes izquierdos

Definición 1 *Un grupo de Lie es un grupo G equipado con una estructura de variedad suave de tal manera que los mapeos*

$$\begin{aligned} (g, h) &\mapsto gh : G \times G \rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} : G \rightarrow G \end{aligned}$$

²**Definición:** Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ es invertible si existe una $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_{n \times n}$, es decir, la matriz identidad. Sin embargo, por como se definió $O(n)$, se tiene que $A^{-1} = A^t$.

1.1. ÁLGEBRA DE LIE

son suaves.

Se puede asumir, entonces que el siguiente mapeo es suave

$$(g, h) \mapsto gh^{-1} : G \times G \rightarrow G.$$

Ejemplos

- El grupo aditivo \mathbb{R}^n es un grupo de Lie, ya que tomando $x, y \in \mathbb{R}^n$ con la operación $+$, tiene que $(x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}^n$ y $x \mapsto -x \in \mathbb{R}^n$.
- El **grupo general lineal** $GL(n, \mathbb{R})$ de los automorfismos del espacio vectorial \mathbb{R}^n es un grupo de Lie, con la operación multiplicación de matrices, las cuales son invertibles. Por lo tanto, si se tienen $A, B \in GL(2, \mathbb{R})$ entonces $(A, B) \mapsto AB \in GL(2, \mathbb{R})$ y $A \mapsto A^{-1} \in GL(2, \mathbb{R})$.
- El círculo S^1 visto como el grupo multiplicativo de los números complejos de módulo unitario es un grupo de Lie. Tomando propiedades de los módulos, se tiene que si $x, y \in \mathbb{C} \Rightarrow |x||y| = |xy|$, así como si el módulo de un número complejo es 1, la función es una rotación.
- El grupo ortogonal $O(n)$ es un grupo de Lie, así como $U(n)$ y $SU(n)$. Notemos que $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ y tiene la operación multiplicación de matrices, si $A \in O(n) \Rightarrow \det A = \pm 1$ y A es invertible. Por lo tanto, si $A, B \in O(n) \Rightarrow (A, B) \mapsto AB \in O(n)$ y $A \mapsto A^{-1} \in O(n)$, por propiedades del determinante. Igualmente, para el grupo de las matrices unitarias y el grupo unitario especial se utilizan propiedades del determinante.
- El grupo $A(n, \mathbb{R})$ de automorfismos afines de \mathbb{R}^n , que son las transformaciones

$$x \mapsto Ax + b : A \in GL(n, \mathbb{R})$$

es un grupo de Lie. Notemos que como $A \in GL(2, \mathbb{R}) \Rightarrow A$ es invertible y la multiplicación por un escalar está bien definida y tiene inverso.

- El **grupo de Lorentz** $O(3, 1)$ de automorfismos de la forma cuadrática

$$x^2 + y^2 + z^2 - t$$

que surge en la Relatividad Especial. **Nota:** Se volverá a este ejemplo más adelante.

- Definición 2**
1. Un **morfismo** entre dos grupos de Lie G y H es un mapeo $f : G \rightarrow H$ que es un homomorfismo de grupos y un mapeo suave.
 2. Dos grupos de Lie G y H se dice que son **isomorfos** si $f : G \rightarrow H$ es un isomorfismo de grupos y un difeomorfismo.
 3. Un subgrupo de Lie de G es una subvariedad que también es un subgrupo.

Ejemplos

- Se sabe que $O(n)$ es un sub grupo de Lie de $Gl(n, \mathbb{R})$. El grupo $SO(n)$ (llamado el grupo especial ortogonal) de las transformaciones ortogonales con determinante 1 es un subgrupo de Lie de $O(n)$, porque es un subgrupo y subconjunto abierto de $SO(n)$: se tiene una partición

$$O(n) = SO(n) \cup O^-(n) : O^-(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = -1\}.$$

- La componente conexa del elemento identidad de un grupo de Lie es un subgrupo de G (de la misma dimensión ya que es un abierto en G). Se llama la **componente de identidad** de G y se denota por G_o . Por ejemplo, $O(n)_o = SO(n)$.

A cada elemento g de un grupo de Lie G , se le asocian *traslaciones derechas e izquierdas*, denotadas por R_g y L_g respectivamente, y definidas como:

$$R_g \cdot x = xg, L_g \cdot x = gx.$$

Por la asociatividad de la operación de grupo, se tiene

$$L_g \circ L_h = L_{gh} \text{ y } R_g \circ R_h = R_{hg}.$$

En particular, R_g y L_g son difeomorfismo de G . Más aún, nuevamente la asociatividad implica que R_g y L_h *conmutan*, es decir, $h(xg) = (hx)g$.

Si X es un campo vectorial en G , se puede definir para cada $g \in G$ el campo vectorial $L_{g*}X$ como la traslación por la izquierda y $R_{g*}X$ la traslación por la derecha del campo vectorial correspondiente.

1.1. ÁLGEBRA DE LIE

Definición 3 *Un campo vectorial X en un grupo de Lie G es invariante izquierdo (o invariante derecho) si*

$$\forall g \in G, L_{g^*}X = X, (R_{g^*}X = X),$$

donde L_{g^*}, R_{g^*} son traslaciones de campos vectoriales en G , uno por la izquierda y otro por la derecha respectivamente y g^* es una operación que desplaza al campo vectorial.

Se denota el difeomorfismo $x \mapsto x^{-1}$ de G por \mathcal{I} .

Proposición 2 *El campo vectorial invariante (izquierdo o derecho) tiene las siguientes propiedades:*

- *La suma y el corchete de Lie³ de dos campos vectoriales invariantes izquierdos (o invariantes derechos) son invariantes izquierdos (o invariantes derechos).*
- *La imagen de un campo vectorial invariante izquierdo (invariante derecho) bajo \mathcal{I} es invariante derecho (invariante izquierdo).*
- *Si X es invariante izquierdo (invariante derecho), lo mismo es verdadero para $R_{g^*}X$ ($L_{g^*}X$).*

Demostración:

Primero, utilizando la definición anterior, se puede suponer que $L_{g^*}Y = Y$, y entonces utilizando la suma, se puede ver que $L_{g^*}X + L_{g^*}Y = X + Y$, pero por otro lado, $L_{g^*}(X + Y) = X + Y$, por lo tanto $X + Y$ es invariante por la izquierda.

Para el primer inciso, se debe mostrar que $L_{g^*}[X, Y] = [X, Y]$, pero se sabe que si X y Y son dos campos vectoriales y se tiene un difeomorfismo φ^* , entonces $\varphi^*[X, Y] = [\varphi^*X, \varphi^*Y]$. Por lo tanto, para este caso se tiene que

³Más adelante se da la definición, sin embargo, para entender mejor la proposición, se da a continuación otra: **Definición:** El **corchete de Lie** es un operador bilineal de un espacio vectorial V , tal que $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ tal que si $x, y \in V \Rightarrow (x, y) \mapsto [x, y]$ que cumple $\forall x, y, z \in V$:

$$\begin{aligned} [x, y] &= -[y, x] \\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= 0 \end{aligned}$$

$$[L_{g^*}X, L_{g^*}Y] = [X, Y].$$

Para el segundo inciso, es suficiente notar que la relación

$$(gx)^{-1} = x^{-1}g^{-1}$$

puede ser escrita como

$$\mathcal{I} \circ L_g = R_{g^{-1}} \circ \mathcal{I}.$$

Finalmente, para el tercer inciso, si X es invariante izquierdo, entonces se utiliza el hecho de que las traslaciones derechas conmutan con las traslaciones izquierdas, es decir

$$L_{h^*}(R_{g^*}X) = R_{g^*}(L_{h^*}X) = R_{g^*}X.$$

□

Proposición 3 *Si G es un grupo de Lie, el mapeo $X \mapsto X_e$ es un isomorfismo entre el espacio vectorial de los campos invariantes izquierdos en G y el plano tangente a G anclado en $e \in T_eG$.*

Demostración:

Si un campo vectorial en G denotado por X es invariante izquierdo, entonces necesariamente

$$X_g = T_eL_g \cdot X_e,$$

es inyectivo. Si suponemos un $X_g \neq \tilde{X}_g$ y que ambos son invariantes por la izquierda, se debe mostrar que $X_e \neq \tilde{X}_e$. Por definición, se tiene que

$$\begin{aligned} X_g &= ((L_g)_*X)_g := (T_eL_g)X_e \\ \tilde{X}_g &= ((L_g)_*\tilde{X})_g := (T_eL_g)\tilde{X}_e \\ &\Rightarrow X_e \neq \tilde{X}_e. \end{aligned}$$

$\therefore X \rightarrow X_e$ es inyectiva. Por otro lado, dado un vector $v \in T_eG$, es necesario que el mapeo de G a T_eG dado por

$$g \longmapsto T_eL_g v$$

⁴Aquí se debe recordar que en Álgebra generalmente se toma a e como el elemento neutro, en éste caso, se toma como el elemento neutro del grupo de Lie

1.1. ÁLGEBRA DE LIE

sea un campo vectorial (que entonces será invariante izquierdo por construcción). Es suficiente mostrar que este mapeo define una derivación. Para $f \in C^\infty(G)$, se denota por $L_v f$ la función

$$g \mapsto T_g f \cdot (T_e L_g \cdot v).$$

Considere $(T_e L_g \cdot v) = X_g$, entonces se puede ver que

$$\begin{aligned} L_v(fh)(g) &= T_g(fh)X_g = (f \cdot T_g h + h \cdot T_g f)X_g \\ &= f \cdot T_g h X_g + h \cdot T_g f X_g = f \cdot L_v h + h \cdot L_v f \\ &= (L_v f)h + f \cdot (L_v h) \end{aligned}$$

y falta demostrar que la función $L_v f$ es suave.

Sea $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto G$ una curva suave tal que $c(0) = e$ y $c'(0) = v$. Ahora, por la regla de la cadena, se tiene

$$L_v f(g) = \frac{d}{dt} f(g(c(t)))_{t=0}.$$

Sin embargo, la función $(t, g) \mapsto f(g(c(t)))$ es suave tanto en t con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ como en G . \square

En particular, cada campo vectorial en G puede escribirse como una combinación lineal (con coeficientes en $C^\infty(G)$) del campo vectorial invariante derecho (o invariante izquierdo).

Definición 4 *Un subgrupo de un parámetro de un grupo de Lie G es un morfismo de $(\mathbb{R}, +)$ a G , en otras palabras, un mapeo suave h de \mathbb{R} a G tal que*

$$h(t+s) = h(t)h(s) \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos

- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, entonces $t \mapsto \exp tA$ es un subgrupo de un parámetro de $Gl(n, \mathbb{R})$. Si A es antisimétrica se obtienen subgrupos de un parámetro de $O(n)$.
- Si G es un subgrupo de Lie de $Gl(n, \mathbb{R})$ y φ es un morfismo continuo de $(\mathbb{R}, +)$ a G , entonces φ es un subgrupo de un parámetro de G , y entonces existe una única $A \in T_I G \subset End(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi(t) = \exp(tA)$.

Dado un subgrupo de un parámetro en G , podemos asociar a él un grupo de difeomorfismos de un parámetro en G dado por

$$\varphi(t, x) = xh(t).$$

En otras palabras, φ_t es la traslación derecha $R_{h(t)}$.

1.1.3. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

En resumen, se ha visto que para un grupo de Lie es lo mismo tener un campo vectorial invariante derecho; un vector en el espacio tangente a la identidad y un subgrupo de un parámetro. En particular, cada operación algebraica definida sobre uno de estos objetos, tales como el *corchete* para campos vectoriales invariantes izquierdos, puede ser transportada a los demás.

Definición 5 *Un álgebra de Lie es una pareja $(L, [,])$ donde la primera entrada es un espacio vectorial sobre un campo K y la segunda es un mapeo bilineal de $L \times L$ a L llamado el **corchete de Lie** tal que*

1. $\forall X \in L, [X, X] = 0.$
2. $\forall X, Y, Z \in L, [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$

Ejemplos

- Cualquier espacio vectorial equipado con el corchete cero (i.e. $[X, Y] = 0 \forall X, Y \in L$) es un álgebra de Lie. Éste es el único caso (al menos con característica no igual a 2) donde un álgebra de Lie es anti conmutativa, calculando $[X + Y, X + Y]$ muestra que $[X, Y] + [Y, X] = 0.$
- Por cada variedad suave M , el espacio vectorial $C^\infty(TM)$ equipada con un corchete de Lie es un álgebra de Lie (de dimensión infinita, ya que $C^\infty(M)$ ya es de dimensión infinita).
- Los campos invariantes izquierdos (o invariantes derechos) en un grupo de Lie finito forman un álgebra de Lie de dimensión finita.

Definición 6 *Un morfismo de álgebras de Lie L, L' sobre el mismo campo K es un mapeo lineal $f : L \mapsto L'$ tal que*

$$\forall X, Y \in L, f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$$

Si f es invertible, es claro que f^{-1} también es un morfismo. Se dice entonces que f es un isomorfismo de álgebra de Lie.

Definición 7 *Dado un grupo de Lie G con el álgebra de Lie \mathfrak{G} , el mapeo de asocia a $X \in \mathfrak{G}$ el valor del grupo asociado de uniparamétrico de X al tiempo 1 es llamado el **mapeo exponencial**, y está denotado por \exp .*

1.1. ÁLGEBRA DE LIE

Si, por ejemplo $G = Gl(n, \mathbb{R})$, $T_e Gl(n, \mathbb{R}) = End(\mathbb{R}^n)$ ⁵ y $X \in End(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{G}$ da lugar al campo vectorial cuyo valor en A es AX . El mapeo exponencial se obtiene integrando la ecuación diferencial

$$A'(t) = A(t)X$$

con condición inicial $A(0) = I$. En el caso de matrices, se puede ver que $[A, B] = AB - BA$.

Proposición 4 *El mapeo exponencial es un mapeo suave de \mathfrak{G} a G , y un difeomorfismo local de una vecindad de $0 \in \mathfrak{G}$ a una vecindad de $e \in G$.*

Demostración:

El hecho de que \exp sea suave proviene de la suavidad de las soluciones de una familia de ecuaciones diferenciales que dependen suavemente de un parámetro (aquí el espacio de los parámetros es \mathfrak{G}). Por la misma definición de \exp , se tiene que

$$\frac{d}{dt} \exp tX|_{t=0} = X.$$

La diferencial de \exp en 0 es por lo tanto la identidad y se puede entonces aplicar el teorema de la función inversa. \square

Se ha visto que si $X \in C^\infty(TG)$ es invariante por la izquierda, entonces lo mismo es cierto para $R_{g*}X$. Surge entonces la pregunta para interpretar esta propiedad en términos de vectores tangentes anclados en e y en términos de subgrupos de parámetro.

Proposición 5 *Se puede demostrar que:*

$$(R_{g*}X)_e = \frac{d}{dt}(g^{-1} \exp tXg)|_{t=0}.$$

Demostración:

El flujo de X esta dado por $\varphi_t(x) = x \exp tX$ y R_{g*} está dado por

$$(R_g \circ \varphi_t \circ R_{g^{-1}})(x) = Xg^{-1} \exp tXg.$$

El subgrupo de un parámetro de G asociado a $R_{g*}X$ es entonces

$$t \longmapsto g^{-1} \exp tXg. \square$$

⁵Recordando que End son los mapeos lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n .

Se define

$$\text{Ad}g \cdot X = (R_{g^{-1}*}X)_e = \frac{d}{dt}g \exp tX g^{-1}|_{t=0}.$$

Ahora, para $X, Y \in \mathfrak{G}$ se tiene

$$\text{Ad}g \cdot [X, Y] = [\text{Ad}g \cdot X, \text{Ad}g \cdot Y].$$

Además

$$\text{Ad}g_1 g_2 = \text{Ad}g_1 \circ \text{Ad}g_2.$$

(Es esta relación la que explica la elección de $R_{g^{-1}}$ sobre R_g .) En otras palabras, Ad es un morfismo de G al grupo de automorfismos del álgebra de Lie \mathfrak{G} .

Definición 8 *El mapeo Ad es llamada la **representación adjunta** de G .*

Cuando se estudia el cálculo diferencial en un grupo de Lie, es muy útil escribir todo en el elemento identidad, y la representación adjunta está hecha para esto.

Proposición 6 *Para $X, Y \in \mathfrak{G}$ se tiene*

$$\frac{d}{dt} \text{Ad}(\exp tX) \cdot Y|_{t=0} = [X, Y].$$

En particular, si G es conmutativo, el corchete es idénticamente cero.

Ejemplo Recordando que $T_e G$ se identifica con $\text{End}(\mathbb{R}^n)$, y \exp con el mapeo exponencial de endomorfismos. Ahora, como

$$\text{Ad}g \cdot A = \frac{d}{dt}(g \exp tA g^{-1})|_{t=0} = gA g^{-1},$$

por la proposición anterior

$$[B, A] = \frac{d}{dt}((\exp tB)A(\exp -tB))|_{t=0} = BA - AB.$$

1.1.4. De los Grupos de Lie a las Álgebras de Lie

Veamos entonces resultados básicos de la teoría, para ver la existencia de una relación entre las propiedades de los grupos de Lie y las álgebras de Lie.

1.1. ÁLGEBRA DE LIE

Teorema 1 Sean G, H dos grupos de Lie, y $f : G \rightarrow H$ un morfismo. Entonces $T_e f : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{H}$ es un morfismo de álgebras de Lie. Más aún, si f es un isomorfismo, $T_e f$ es un isomorfismo.

Demostración:

Primero se debe notar que la imagen bajo f del subgrupo de un parámetro $t \mapsto h(t)$ de G es un subgrupo de un parámetro de H . Así que si $Y \in T_e G$, existe una única $Z \in T_e H$ tal que

$$f(\exp tY) = \exp tZ$$

y tomando la derivada con respecto a t de ambos lados de ésta ecuación en $t = 0$, se puede ver que $Z = T_e f \cdot Y$. Ahora, para $g \in G$ fija,

$$f(g \exp tY g^{-1}) = f(g)(\exp tZ)f(g^{-1}).$$

Por la definición de Ad , también se tiene

$$f(g \exp tY g^{-1}) = f(\exp t(Adg \cdot Y)).$$

Tomando la derivada con respecto a t en $t = 0$ de ambos lados de la igualdad

$$f(\exp t(Adg \cdot Y)) = f(g)(\exp tZ)f(g^{-1})$$

y encontramos

$$T_e f(Adg \cdot Y) = Adf(g) \cdot (T_e f \cdot Y).$$

Es suficiente tomar esta igualdad para $g = \exp tY$, para tomar la derivada en $t = 0$, y entonces aplicar la **Proposición 4**. En efecto, si f es un isomorfismo, $T_e f$ es biyectivo. \square

Note que si $G = H$, y f es la conjugación por un elemento g de G , entonces $T_e f = Adg$.

Ejemplo Determinante y traza: Considere el homomorfismo $\det : Gl(n, \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}^* (\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\})$. Se tiene $T_e \det = \text{tr}$. Por otro lado, se puede ver que el corchete del álgebra de Lie de un grupo conmutativo (en este caso \mathbb{R}^*) es el corchete cero. Se deduce del **Teorema 1** que para $A, B \in End(\mathbb{R}^n)$

$$\text{tr}[A, B] = 0 \Rightarrow \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

El ejemplo nos hace notar el porque el mapeo exponencial no puede ser un homomorfismo de grupo. Ya que no puede ser inyectivo o suprayectivo. Solo es suprayectivo para grupos de Lie conexos. La prueba general más simple utiliza geometría Riemanniana, lo cual no se verá en este trabajo.

Corolario 1 *Si H es un subgrupo de Lie de G , el álgebra de Lie de H es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie de G .*

Demostración:

Si j es la inyectividad natural de $T_e H = \mathfrak{h}$ en $T_e G = \mathfrak{g}$, entonces nuevamente por el **Teorema 4** $j[X, Y] = [jX, jY]$. \square

1.1.5. De Álgebras de Lie a Grupos de Lie

Teorema 2 *Cada homomorfismo de grupos continuo de un grupo de Lie a otro es necesariamente suave. En particular, un grupo topológico tiene al menos una estructura de grupo de Lie.*

La prueba de éste teorema es consecuencia de los siguientes resultados, los cuales ya son importantes por sí solos.

Proposición 7 *Si h es un homomorfismo de grupo continuo de \mathbb{R} a un grupo de Lie G (en otras palabras, un sub grupo de un parámetro de G), existe una única $X \in \mathfrak{g}$ tal que $h(t) = \exp tX$.*

Demostración:

Se puede suponer que f no es constante. Sea U una bola abierta con centro en 0 (ya que \exp es un difeomorfismo local en 0) en $End(\mathbb{R}^n)$ tal que \exp restringe a la bola del doble de radio (definida como $2U$) como difeomorfismo. Por la continuidad de f , existe un intervalo I que contiene al 0 tal que $f(I) \subset \exp U$. Como f no es constante existe $c \in I$ tal que $f(c) = A \in \exp U$, con $A \neq I$. Por la elección de U existe una $X \in I$ diferente de cero tal que $\exp X = A$. Se sigue que $\exp \frac{X}{2} = f\left(\frac{c}{2}\right)$. Más aún, dada la elección de U se tiene que

$$f\left(\frac{c}{2}\right) = \exp X' \text{ con } X' \in U$$

entonces $\exp 2X' = f(c) = \exp X$, mientras que ambos endomorfismos $2X'$ y X están en el subconjunto abierto $2U$, en el cual \exp es un difeomorfismo, y en particular inyectivo. Por lo tanto $X' = X/2$.

El mismo razonamiento se prueba para cada entero p ,

$$\exp \frac{X}{2^p} = f\left(\frac{c}{2^p}\right).$$

1.1. ÁLGEBRA DE LIE

Por lo tanto, por las propiedades algebraicas de f , se tiene

$$\exp \frac{kX}{2^p} = f \left(\frac{kC}{2^p} \right)$$

para todos los enteros k y p . Pero los números reales de la forma $\frac{k}{2^p}$ son densos en \mathbb{R} , y utilizando nuevamente la continuidad, se puede ver que

$$\forall X \in \mathfrak{G}, \exp tX = h(t).$$

□

Lema 1 Sea (X_1, \dots, X_n) una base de \mathfrak{G} . Entonces el mapeo de \mathbb{R}^n a G dado por

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (\exp t_1 X_1) \dots (\exp t_n X_n)$$

es un difeomorfismo local en una vecindad de 0.

Demostración:

El mapeo de arriba es suave, y la imagen bajo el diferencial de 0 del vector de coordenadas canónicas i -th de \mathbb{R}^n es claramente X_i . □

Lema 2 Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Entonces

1. Para que f sea suave, es suficiente que f sea suave en una vecindad del elemento identidad del dominio.
2. Suponga que f es suave. Para ver que f es un difeomorfismo local (respectivamente una inmersión o sumersión), es suficiente que la diferencial en el elemento identidad sea un isomorfismo (una inyección o suryección respectivamente)

Demostración:

Sólo se necesita la primera de estas dos propiedades para la prueba del **Teorema 2**, pero se han puesto juntas ya que sus pruebas son muy similares. Es suficiente observar que como f es un homomorfismo, se puede escribir de la forma

$$f(gh) = L_{f(g)}f(h).$$

Esto muestra que si f es suave en un subconjunto abierto U que contiene a e , también es suave en gU para cualquier g , y por lo tanto en todo el grupo.

□

Demostración del Teorema 2:

Sea X_1, \dots, X_n una base para \mathfrak{G} . Para cada $i \in [1, n]$, el mapeo

$$t \mapsto f(\exp tX_i)$$

es un subgrupo de un parámetro de H , y entonces existe una $Y_i \in \mathfrak{H}$ tal que

$$f(\exp t_i) = \exp tY_i$$

para cualquier t . En consecuencia,

$$\begin{aligned} f((\exp t_1X_1) \dots (\exp t_nX_n)) &= f(\exp t_1X_1) \dots f(\exp t_nX_n) \\ &= (\exp t_1Y_1) \dots (\exp t_nY_n). \end{aligned}$$

Se escribe entonces

$$\phi(t_1, \dots, t_n) = (\exp t_1X_1) \dots (\exp t_nX_n),$$

esto muestra que $f \circ \phi$ es suave. Por el primer lema, f es por lo tanto suave en una vecindad de e , y por lo tanto en todas partes por el segundo lema. \square Se deben hacer notar tres cosas

1. Un álgebra de Lie \mathfrak{G} es un álgebra de Lie de un grupo de Lie y esto se conoce como el *tercer teorema de Lie*. (Para ver una prueba moderna, vea *Duistermaat-Kolk 99, 1.8 y 1.14*)
2. Supongamos que \mathfrak{G} es el álgebra de Lie de un grupo G , y supóngase que \mathfrak{H} es una subálgebra de \mathfrak{G} . En general, no existe un sub grupo H de G cuya álgebra de Lie sea \mathfrak{H} .
3. Si se suponen dos grupos de Lie G_1 y G_2 dados, así como un morfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{G}_1 \mapsto \mathfrak{G}_2$, en general no existe un morfismo de grupos de Lie tal que $F : G_1 \mapsto G_2$, donde $T_eF = \varphi$. Ya que si F existe, su gráfica será un subgrupo de Lie de $G_1 \times G_2$ cuya álgebra de Lie será la gráfica de φ . Más aún, ya que F es continuo, su gráfica es *cerrada*. Aquí se debe tener cuidado, ya que hay subálgebras de Lie que no pueden ser álgebras de Lie de un grupo cerrado de Lie.

Para entender esto mejor, se puede notar que para la observación 2, si se toma $G_1 = G_2 = S^1$, y el morfismo (de álgebras de Lie conmutativo) de \mathbb{R} a \mathbb{R} dado por $x \mapsto \alpha x$, donde $\alpha \notin \mathbb{Z}$. El morfismo de S^1 son de la forma $t \mapsto t^k$,

1.1. ÁLGEBRA DE LIE

donde $k \in \mathbb{Z}$, y entonces es imposible subir ϕ a un morfismo de S^1 . Para la observación 1, tomando $G = S^1 \times S^1$ y para \mathfrak{H} una línea con una pendiente irracional α en \mathbb{R}^2 . Como subgrupo de un parámetro $x \mapsto (e^{ix}, e^{i\alpha x})$ es tangente a \mathfrak{H} en la identidad, el único posible candidato para H es la imagen de su subgrupo de un parámetro, que no es una sub variedad, si no una subvariedad *estrictamente inversa*. Este es un ejemplo típico de lo que pasa en general.

Teorema 3 *Sea G un grupo de Lie y sea \mathfrak{H} una subálgebra del álgebra de Lie \mathfrak{G} de G . Existe un grupo de Lie H y una inmersión estrictamente inyectiva de H en G cuya imagen es el subgrupo de G dado por $\exp \mathfrak{H}$.*

Esta propiedad justifica la terminología empleada en este caso cuando la imagen de H (un grupo de Lie) no es un sub grupo de Lie. Dada una inmersión inyectiva de H en G es llamada una inmersión de subgrupo de Lie.

Corolario 2 *Sean G y H dos grupos de Lie, y sea $f : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{H}$ un morfismo de álgebras de Lie. Entonces existen vecindades U y V de los elementos identidad de G y H , y el mapeo suave $F : U \rightarrow V$ tal que*

- $T_e F = f$;
- Si x_1, x_2 y $x_1 x_2$ están en U , entonces $F(x_1)F(x_2) = F(x_1 x_2)$.

Más aún, el núcleo de f en e está determinado únicamente por estas propiedades.

Demostración:

La gráfica de F es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$, donde se aplica la primera parte del **Teorema 3**. Sea Y una subvariedad integral que pasa por los elementos identidad de $G \times H$. Al restringir a Y se puede suponer que ésta es la gráfica: en efecto, la diferencial de la proyección de G en e , restringida a Y es la proyección de la gráfica de f en \mathfrak{G} , que es un isomorfismo. Ésta proyección es por lo tanto, localmente invertible, y la inversa es de la forma $x \mapsto (x, F(x))$, donde F es un mapeo suave de un subconjunto abierto U de G que contiene a e en un subconjunto abierto análogo V de H . De nuevo, por el **Teorema 3**, si x_1 y x_2 están en U , el producto $(x, F(x_1))(x_2, F(x_2)) = (x_1 x_2, F(x_1)F(x_2))$ que está en Y , y como Y es la gráfica de F , se tiene que $F(x_1 x_2) = F(x_1)F(x_2)$. La unicidad del núcleo de F viene de la unicidad del núcleo de la variedad integral de la gráfica de f . \square

Note que si G es *simplemente conexo*, cada morfismo de álgebra de Lie \mathfrak{G} al álgebra de Lie \mathfrak{H} de un grupo de Lie H sube a morfismo de G a H .

1.2. Espacio-tiempo de Minkowski

Con la teoría de la Relatividad de Einstein, publicada en 1905, los conceptos de espacio y tiempo dejaron de ser independientes para fusionarse en un nuevo concepto: el espacio-tiempo. Se sabe que para localizar un punto en el espacio, se necesita un sistema de referencia y tres números o coordenadas (otra manera de entender esto es decir que cualquier cuerpo posee anchura, altura y profundidad), mientras que para el tiempo se necesita un número para algún intervalo de tiempo. Por lo tanto, en la teoría de la Relatividad se tiene el espacio-tiempo de cuatro dimensiones; tres espaciales y una dimensión temporal. Éste espacio-tiempo tiene propiedades geométricas bien establecidas, lo cual fue demostrado por Minkowski, poco después de la aparición de la Teoría de la Relatividad. Por lo tanto, los fenómenos físicos ocurren en el espacio-tiempo que los físicos y matemáticos llaman *espacio de Minkowski*, un espacio de cuatro dimensiones en el que cada punto es un suceso.

Hermann Minkowski (22 de junio de 1864, 12 de enero de 1909) fue un matemático alemán que desarrolló la Teoría Geométrica de los Números, así como contribuciones importantes a la Teoría de los Números, la Física Matemática y a la Teoría de la Relatividad. Sus padres vivían en Rusia, pero el regresó a Alemania en 1872 para estudiar en la Universidad de Königsberg y en la Universidad de Berlín a la edad de 15 años. Tres años después fue condecorado con el *Grand Prix des Sciences Mathematiques* de la Academia de Ciencias Francesas por su trabajo sobre las formas cuadráticas. En la Universidad de Königsberg obtuvo su doctorado en 1885.

Dio clases en las Universidades de Königsberg, Bonn, Gotinga y Zúrich, en esta última dio clases a Einstein.

En el año de 1896 presentó su *Geometría de los Números*, es decir, un método geométrico para resolver problemas en Teoría de Números. En 1902 se incorporó al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Gotinga, en donde colaboró con David Hilbert. En 1907 se percató de que la Teoría Especial de la Relatividad (que fue presentada por Einstein en 1905 y basada en los trabajos de Lorentz y Poincaré) se podía entender mejor en una *Geometría No-Euclidiana* sobre un espacio cuatridimensional, que desde entonces se conoció como *espacio de Minkowski*.



H. Minkowski

Figura 1.1: Hermann Minkowski

1.2.1. Espacio Vectorial de Minkowski

El *espacio vectorial de Minkowski* \mathbb{V} consiste en un conjunto de vectores posición en el espacio-tiempo de la relatividad especial. En la curva de espacio-tiempo de la relatividad general, los vectores espaciales de Minkowski ocurren como espacios tangentes a los puntos espacio-tiempo. Al considerarse un espacio vectorial, se debe verificar que están definidas las dos operaciones **adición** (+) y **multiplicación por un escalar** (\bullet), entonces $\forall U, V, W \in \mathbb{V}$ y $a, b \in \mathbb{R}$

1. Si $U, V \in \mathbb{V} \Rightarrow U + V \in \mathbb{V}$
2. $U + V = V + U$
3. $U + (V + W) = (U + V) + W$
4. Existe $0 \in \mathbb{V}$ tal que $0 + U = U + 0 = U$
5. $\forall U \in \mathbb{V}$ existe un denominado $-U$ tal que $U + (-U) = (-U) + U = 0$
6. Si $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \bullet V \in \mathbb{V}$
7. $a \bullet (U + V) = a \bullet U + a \bullet V$
8. $(a + b) \bullet U = a \bullet U + b \bullet U$
9. $a \bullet (b \bullet U) = (a \bullet b) \bullet U$

10. Existe $1 \in \mathbb{V}$ tal que $1 \bullet U = U \bullet 1 = U$ [3]

Se usa la resta como un caso especial de la suma, es decir, $U + V - W = (U + V) + (-W)$.

Las cuatro dimensiones de \mathbb{V} es equivalente a la existencia de una *base* que consiste en cuatro vectores linealmente independientes $\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}$. Esto es cualquier vector $U \in \mathbb{V}$ se expresa de manera única de la forma

$$\mathbf{U} = U^0 \mathbf{t} + U^1 \mathbf{x} + U^2 \mathbf{y} + U^3 \mathbf{z} \quad (1.1)$$

con las *coordenadas* $U^0, U^1, U^2, U^3 \in \mathbb{R}$, y sólo $\mathbf{0}$ tiene coordenadas cero. Cualquier otra base de \mathbb{V} debe tener cuatro elementos y *cualquier* conjunto de cuatro elementos linealmente independientes de \mathbb{V} constituye una base. Nos referiremos a la base de \mathbb{V} como una *tétrada*, y a menudo se denota la tétrada $\{\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ por g_i donde

$$\mathbf{t} = g_0, \mathbf{x} = g_1, \mathbf{y} = g_2, \mathbf{z} = g_3. \quad (1.2)$$

Entonces, (1.1) se vuelve

$$\mathbf{U} = U^0 g_0 + U^1 g_1 + U^2 g_2 + U^3 g_3 = U^i g_i \quad (1.3)$$

Aquí se utiliza la *convención de suma* de Einstein, esta implica que una suma cada vez que un índice *numérico* aparece dos veces en un término, una vez arriba, una vez abajo.

Considere ahora dos bases de \mathbb{V} , digamos por ejemplo $g_i, g_{\hat{i}}$ (note que se usan índices marcados, esto para diferenciar dos bases diferentes) y suponga que cada vector g_i de la primera base es una combinación lineal de los vectores $g_{\hat{i}}$ de la segunda:

$$g_i = g_i^{\hat{0}} g_{\hat{0}} + g_i^{\hat{1}} g_{\hat{1}} + g_i^{\hat{2}} g_{\hat{2}} + g_i^{\hat{3}} g_{\hat{3}} = g_i^{\hat{j}} g_{\hat{j}}. \quad (1.4)$$

Los 16 números $g_i^{\hat{j}}$ forman una matriz real no singular de (4×4) , esto implica que el determinante es diferente de cero. Si el determinante es *positivo* se dice que ambas tétradas g_i y $g_{\hat{i}}$ tienen la *misma orientación*, si es *negativo* las tétradas tienen *orientación opuesta*. Se dice que la relación de *tener la misma orientación* es una relación de equivalencia, solo existen dos clases de equivalencia disjuntas. Llamaremos a las tétradas de una clase *tétradas propias*, y las tétradas de la otra clase *tétradas impropias*, esta selección le da a \mathbb{V} su *orientación*.

En el espacio vectorial de Minkowski \mathbb{V} también se define la *operación producto interior*, es decir, si tomamos $U, V, W \in \mathbb{V}$ y a $a \in \mathbb{R}$, se define entonces:

1.2. ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

1. $U \cdot V = V \cdot U$
2. $(U + V) \cdot W = U \cdot W + V \cdot W$
3. $(a \cdot U) \cdot V = a \cdot (U \cdot V)$
4. $U \cdot U \geq 0$. Además, $U \cdot U = 0 \Leftrightarrow U = 0$.

Proposición 8 *La operación de producto interior es simétrica y bilineal.*

Demostración: Sean $U, V, W \in \mathbb{V}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y la operación de producto anterior definida anteriormente, entonces se debe demostrar que:

1. $U \cdot V = V \cdot U$. Lo cual se da por definición. Por lo tanto es simétrica. Para la demostración de ser bilineal, se deben cumplir los siguientes dos puntos.
 - $(\lambda \cdot U + \mu \cdot V) \cdot W = \lambda U \cdot W + \mu V \cdot W$, lo cual se da al aplicar el punto dos de la definición. Por lo tanto se cumple.
 - $U \cdot (\lambda \cdot V + \mu \cdot W) = \lambda \cdot U \cdot V + \mu \cdot U \cdot V \Rightarrow \lambda \cdot U \cdot V + \mu \cdot U \cdot V = \lambda V \cdot U + \mu \cdot W \cdot U = (\lambda \cdot V + \mu \cdot W) \cdot U = U \cdot (\lambda \cdot V + \mu \cdot W)$. Por lo tanto, la operación del producto interior es simétrica y bilineal.

□

Se requiere además que el producto interno tenga signos (+ - - -), esto quiere decir que existe una tétrada $\{\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ tal que:

$$\begin{aligned}\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} &= 1; \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = -1 \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 0.\end{aligned}$$

Esta condición en el producto interno nos recuerda a la función **Delta de Dirac**, presentada por el físico-matemático inglés Paul Adrien Maurice Dirac, la cual a su vez está inspirada en la *delta de Kronecker*, definida como:

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= 1 \Rightarrow i = j \\ \delta_{ij} &= 0 \Rightarrow i \neq j\end{aligned}$$

en donde i, j ⁶ son números enteros.

Si se denota a la tétrada $\{\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ por \mathbf{g}_i de acuerdo con la notación de (1.2) y reescribiéndola con la notación anterior, se obtiene:

$$g_i \cdot g_j = \eta_{ij} \quad (1.5)$$

donde la matriz (η_{ij}) esta dada por:

$$(\eta_{ij}) = (\eta^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

la cual es una de las **matrices de Dirac** en mecánica cuántica [3], a la tétrada que satisface la condición (1.5) se denominará una *tétrada de Minkowski*. La notación $(\eta_{ij}) = (\eta^{ij})$ nos indica que la matriz y su inversa tienen mismos valores. Sabemos que (η_{ij}) tiene inversa ya que $\det(\eta_{ij}) \neq 0$, en este caso, el $\det(\eta_{ij}) = -1$.

Dada una tétrada de Minkowski $\{g_i\}_{i=0}^3$ se puede, representar con la notación de (1.2) cualquier vector $U \in \mathbb{V}$ con sus correspondientes coordenadas de Minkowski U^i ; entonces el producto interno tiene la forma de:

$$\left. \begin{aligned} U \cdot V &= (U^i g_i) \cdot (V^j g_j) \\ &= U^i V^j (g_i \cdot g_j) \\ &:= U^i V^j \eta_{ij} \\ &= U^0 V^0 - U^1 V^1 - U^2 V^2 - U^3 V^3. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Y notando que $U \cdot g_j = U \eta_{ij}$. Entonces,

$$U^0 = U \cdot g_0; U^1 = -U \cdot g_1; U^2 = -U \cdot g_2; U^3 = -U \cdot g_3. \quad (1.8)$$

Un caso particular del producto interno es el inducido por la *norma de Lorentz* que es:

$$\|U\| := U \cdot U := U^i U^j \eta_{ij} = (U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2. \quad (1.9)$$

⁶Tal vez parezca confuso el hecho de usar primeramente subíndices i, \hat{i} y después se usen subíndices i, j , pero más adelante se explica la razón.

1.2. ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

Proposición 9 *El producto interno puede ser definido en términos de la norma de Lorentz como:*

$$U \cdot V = \frac{1}{2} \{ \|U + V\| - \|U\| - \|V\| \} \quad (1.10)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{2} \{ \|U + V\| - \|U\| - \|V\| \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (U + V) \cdot (U + V) - (U) \cdot (U) - (V) \cdot (V) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (U \cdot U) + 2(U \cdot V) + (V \cdot V) - (U \cdot U) - (V \cdot V) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ 2(U \cdot V) \} \\ &= U \cdot V. \end{aligned}$$

□

El vector $U \in \mathbb{V}$ es llamado

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{tipo\ tiempo\ si} \quad \|U\| > 0 \\ \mathbf{tipo\ espacio\ si} \quad \|U\| < 0 \\ \mathbf{nulo\ si} \quad \quad \quad \|U\| = 0 \end{array} \right\}$$

En términos de las coordenadas de Minkowski, U es *causal*, es decir, es tipo tiempo o nulo si

$$(U^0)^2 \geq (U^1)^2 + (U^2)^2 + (U^3)^2, \quad (1.11)$$

la cual se vale si U es nulo.

Proposición 10 *Si U y V son causales, entonces aplicando la desigualdad (1.11) y la desigualdad de Schwarz, se obtiene*

$$\begin{aligned} |U^0 V^0| &\geq \{(U^1)^2 + (U^2)^2 + (U^3)^2\}^{\frac{1}{2}} \{(V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &\geq U^1 V^1 + U^2 V^2 + U^3 V^3. \end{aligned}$$

Demostración:

Definimos $\hat{U} = (U_1, U_2, U_3)$ y $\hat{V} = (V_1, V_2, V_3)$, entonces considerando la norma de dichos vectores:

$$\begin{aligned} |\hat{U}| &= \{(U_1)^2 + (U_2)^2 + (U_3)^2\}^{1/2} \\ |\hat{V}| &= \{(V_1)^2 + (V_2)^2 + (V_3)^2\}^{1/2} \end{aligned}$$

y se tendría que

$$\begin{aligned} |U^0V^0| = |U_0||V_0| &\geq \{(U_1)^2 + (U_2)^2 + (U_3)^2\}^{1/2}\{(V_1)^2 + (V_2)^2 + (V_3)^2\}^{1/2} \\ &\geq \hat{U} \cdot \hat{V}. \end{aligned}$$

Esto último por la desigualdad de Schwarz

$$\hat{U} \cdot \hat{V} \leq \|\hat{U}\| \|\hat{V}\|$$

y como

$$\hat{U} \cdot \hat{V} = U^1V^1 + U^2V^2 + U^3V^3$$

entonces

$$|U^0V^0| \geq U^1V^1 + U^2V^2 + U^3V^3.$$

□

Note que si U y V son ambos nulos y U y V son proporcionales entre sí, o a menos que uno de ellos sea cero, entonces por la ecuación (1.7) y la proposición anterior, el signo de $U \cdot V$ es el mismo signo de U^0V^0 . Entonces, en particular:

Proposición 11 *No hay vectores causales distintos de cero tales que sean ortogonales a menos que ambos sean nulos y \hat{U}, \hat{V} sean proporcionales entre sí.*

Demostración:

Si U es nulo, entonces

$$\|U\| := (U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2 = 0$$

por la ecuación (1.10)

$$U \cdot V = \frac{1}{2}\{\|U + V\| - \|U\| - \|V\|\}$$

$$U \cdot V = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\{\|U + V\| - \|U\| - \|V\|\} = 0$$

$$\Rightarrow \|U + V\| - \|U\| - \|V\| = 0 \Rightarrow \|U + V\| = \|U\| + \|V\|$$

□

Se tiene entonces que los vectores causales caen en dos clases disjuntas, (ya que los vectores nulos se excluyeron en la **Proposición 4**) el producto interno de cualesquiera dos vectores no proporcionales que son de la misma

1.2. ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

clase es *positivo*, por el contrario, el producto interno de cualesquiera dos vectores no proporcionales que no son de la misma clase es *negativo*. Estas dos clases se distinguen por el signo de U^0 , por ejemplo, la clase en la cual U^0 es positivo es la clase en la cual pertenece la tétrada del vector tipo tiempo $\mathbf{t} = \mathbf{g}_0$.

La *orientación temporal* de \mathbb{V} consiste en los elementos de una de estas clases llamados *futuro*, y los elementos de la otra *pasado*. Estos se llamarán simplemente como vectores futuro tipo tiempo [nulos, causales]. Si \mathbf{t} es un vector futuro tipo tiempo, entonces la tétrada de Minkowski $\{\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ es llamada *ortocrónica*. Cuando nos referimos a una tétrada ortocrónica de Minkowski, los vectores causales futuros son aquellos para los cuales $U^0 > 0$. El vector cero, aunque es nulo, no es futuro nulo o pasado nulo. Y además el negativo de cualquier vector causal futuro es un vector causal pasado.

La *orientación espacial* de \mathbb{V} consiste en asignar la regla de la mano derecha (o izquierda) a los tres vectores espaciales de cada tétrada de Minkowski, es decir, la triada $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$. Entonces, esta última triada sigue la regla de la mano derecha si la tétrada de Minkowski $\{\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ es propia y ortocrónica, o si no es ni propia ni ortocrónica. Una tétrada de Minkowski que es tanto propia como ortocrónica es llamada *restringida*. Por otro lado, la triada $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ sigue la regla de la mano izquierda si es propia pero no ortocrónica, o si no es propia pero es ortocrónica.

Estas dos orientaciones, es decir, la orientación tiempo y la orientación espacio de \mathbb{V} determinan la tercera, y si se invierten dos, la tercera deberá permanecer sin cambios.

1.2.2. El espacio-tiempo de Minkowski

El espacio vectorial de Minkowski \mathbb{V} puede ser visto como un espacio de vectores posición (es decir, se considera $\overrightarrow{PQ} \in \mathbb{V}$ como un vector), relativo a elegir arbitrariamente el origen de los puntos (eventos) que constituyen el *Espacio-tiempo de Minkowski* \mathbb{M} (es decir que se consideran puntos $P, Q \in \mathbb{M}$). Ninguno de estos puntos son preferenciales y no hay un origen preferido: \mathbb{M} es invariante bajo traslaciones, es decir, es un espacio afín. La relación entre \mathbb{M} y \mathbb{V} puede ser caracterizada por la transformación :

$$vec : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{V}$$

para el cual

$$\begin{aligned} \text{vec}(P, Q) + \text{vec}(Q, R) &= \text{vec}(P, R), \\ \text{donde } \text{vec}(P, P) &= 0, \text{ y } \text{vec}(P, Q) = -\text{vec}(Q, P). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Notemos que $\text{vec}(P, Q)$ se puede ver como el vector posición $\overrightarrow{PQ} \in \mathbb{V}$ de Q relativo a P , donde $P, Q \in \mathbb{M}$. Evidentemente por este mapeo se induce una norma en \mathbb{V} , llamada *intervalo cuadrado* que se denota como Φ . Para cada par de puntos $P, Q \in \mathbb{M}$:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{M} \times \mathbb{M} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \Phi(P, Q) &:= \|\text{vec}(P, Q)\|. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Donde $\|\cdot\|$ es la norma de Lorentz. Las coordenadas de \mathbb{M} tienen una biyección con \mathbb{R}^4 , el cual es el espacio de cuádruplas de números reales, que consiste en la elección del origen $O \in \mathbb{M}$ y la elección de la tétrada de Minkowski $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{M}$. Notemos que si se considera $g_i = \overrightarrow{OQ_i}$ un punto $P \in \mathbb{M}$, las coordenadas de dicho punto P^0, P^1, P^2, P^3 del vector \overrightarrow{OP} relativo a g_i (recordando la notación de (1.1) donde g_i son las coordenadas canónicas) será $\overrightarrow{OP} = P^i g_i$.

Proposición 12 *Utilizando la notación (1.12) y cambiando la Q por O , las coordenadas de \overrightarrow{PR} relativo a g_i es igual a $(\overrightarrow{PR})^i = R^i - P^i$*

Demostración:

Por la notación (1.12) se tiene que:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{PR})^i &= (\text{vec}(P, R))^i \\ &:= (\text{vec}(P, O) + \text{vec}(O, R))^i \\ &= (\text{vec}(O, R))^i - (\text{vec}(O, P))^i \\ &= R^i - P^i. \end{aligned}$$

□.

Esto es claramente independiente de la elección del origen. Por otro lado, de la definición de Φ y la definición de la norma de Lorentz:

$$\begin{aligned} \Phi(P, Q) &= \|\text{vec}(P, Q)\| := \|Q^i - P^i\| \\ &= (Q^0 - P^0)^2 - (Q^1 - P^1)^2 - (Q^2 - P^2)^2 - (Q^3 - P^3)^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.2. ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

Una transformación lineal de \mathbb{V} en sí mismo que preserve la norma de Lorentz (y por lo tanto por la ecuación (1.9) también preserve el producto interno), es llamada una *transformación (activa) de Lorentz*. Si tal transformación preserve la orientación espacial y la orientación temporal de \mathbb{V} , es llamada transformación *restringida* de Lorentz. Esta última genera un grupo llamado *grupo (restringido) de Lorentz*. Similarmente una transformación de \mathbb{M} en sí misma que preserve la norma *intervalo cuadrado* es llamada una *transformación (activa) de Poincaré* y tales transformaciones inducen una transformación activa de Lorentz en \mathbb{V} , que puede ser restringida o no. De nuevo, las transformaciones restringidas de Poincaré forman un grupo.

Cualquier experimento físico que tenga lugar en el espacio tiempo de Minkowski de nuestra experiencia puede estar sujeto a una transformación de Poincaré, es decir, una rotación en el espacio, una traslación en el espacio y tiempo, y un movimiento uniforme dado, sin alterar su resultado intrínseco. Esta es la base de la teoría especial de la relatividad, y puede enunciarse sin referencia a coordenadas ni a otras leyes de la física.

1.2.3. Cambio de coordenadas

A menos de que se indique otra cosa las transformaciones de Lorentz y Poincaré se entenderán como *activas*. Aunque algunas veces es útil considerar transformaciones *pasivas* de Lorentz (y de Poincaré). Estas últimas son transformaciones del *espacio de coordenadas* \mathbb{R}^4 , es decir re coordinaciones de \mathbb{V} (o de \mathbb{M}). Cualquier tétrada de Minkowski g_i en \mathbb{V} define una cuádrupla de coordenadas U^i para cada U de \mathbb{V} [o $U = \overrightarrow{OP} \in \mathbb{M}$], con $U = U^i g_i$. Un cambio en esta *tétrada de referencia*, $g_i \mapsto \hat{g}_i$ en \mathbb{V} [o de una tétrada g_i y origen O en \mathbb{M}] inducen un cambio en las coordenadas de \mathbb{V} [o de \mathbb{M}]. La correspondencia resultante

$$G : U^i \mapsto U^{\hat{i}} \tag{1.15}$$

$$[\text{ó } U^i \mapsto U^{\hat{i}} + K^i \text{ con } K^i \text{ cte.}]^7$$

es llamada una *transformación pasiva de Lorentz [o de Poincaré]*. Es llamada *restringida si puede ser generada por dos tétradas restringidas de Minkowski g_i y \hat{g}_i* . Nos concentraremos en las transformaciones de Lorentz, pero los

⁷Aquí una tétrada va a otra tétrada única, es decir, si $U^i \neq U^j$ entonces $U^{\hat{i}} \neq U^{\hat{j}}$. Además, lo que no esta en paréntesis se toma en \mathbb{V} , mientras que lo que esta dentro del paréntesis se toma en el espacio vectorial de Minkowski \mathbb{M} .

resultados también se aplican a las transformaciones de Poincaré. Si las dos tétradas de referencia están relacionadas por

$$g_i = \hat{g}_i^{\hat{j}} g_{\hat{j}} \quad (1.16)$$

entonces

$$U = U^{\hat{i}} \hat{g}_{\hat{i}} = U^i g_i = U^i \hat{g}_i^{\hat{j}} g_{\hat{j}},$$

y entonces la transformación pasiva G es dada explícitamente por:

$$U^{\hat{i}} = U^i \hat{g}_i^{\hat{j}} \quad (1.17)$$

que es lineal, esta caracterizado por la matriz $\hat{g}_i^{\hat{j}}$.

Es conveniente describir una transformación *activa* de Lorentz por medio de sus coordenadas, sin embargo, ésta transformación existe independientemente de las coordenadas, mientras que la transformación pasiva no. Entonces, para una transformación activa de Lorentz dada $L : U \mapsto V$, podemos referir tanto a U como a su imagen V con respecto una tétrada (arbitraria) de Minkowski $g_{\hat{i}}$, cuya pre-imagen bajo L , digamos g_i , como se hizo en (1.15). Como asumimos la linealidad de L la expresión de V en términos de $g_{\hat{i}}$ debe ser idéntica con la expresión de U en términos de g_i , entonces se tiene de (1.17) que:

$$U^{\hat{i}} = V^{\hat{j}} \hat{g}_{\hat{j}}^{\hat{i}}, \quad (1.18)$$

notando que aquí se entenderá la suma sobre el par de índices diferentes j y \hat{j} . Entonces se tiene la siguiente forma explícita de la transformación:

$$V^{\hat{j}} = U^i L_{\hat{i}}^j \quad (1.19)$$

donde

$$(L_{\hat{i}}^j) = (g_{\hat{j}}^{\hat{i}})^{-1}. \quad (1.20)$$

Entonces una transformación activa de Lorentz L que lleva g_i en $g_{\hat{i}}$ es equivalente a la transformación pasiva de Lorentz G^{-1} inducida por el paso de $g_{\hat{i}}$ a g_i como tétrada de referencia.

Si L es una transformación activa restringida de Lorentz, claramente lleva una tétrada de Minkowski en una tétrada restringida de Minkowski, y entonces la transformación pasiva correspondiente G también es restringida. Si G es restringida, suponiendo que es generada por las tétradas restringidas g_i y



Figura 1.2: Una transformación activa de Lorentz manda el vector mundo U en O al vector mundo V en \hat{O} . Si además manda la tétrada g_i en O a g_i en \hat{O} , entonces las coordenadas U^i , de U en \mathbf{g}_i , son las mismas que aquellas, V^i , de V en \mathbf{g}_i , es decir $U^i = V^i$. Por lo tanto, la transformación (invertida) pasiva inducida por $\{\mathbf{g}_i \text{ en } \hat{O}\} \mapsto \{\mathbf{g}_i\}$ en O toma las coordenadas originales $U^i (= V^i)$ de U de las coordenadas originales V^i de V .

g_i ; entonces la correspondiente L preserva normas, productos y orientación, ya que se preservan las coordenadas, y por lo tanto L es restringida. Como L preserva el producto interno, por (1.6) y (1.18) removiendo los *sombreros* de los índices:

$$\eta_{ij} L_k^i L_l^j = \eta_{kl} \quad (1.21)$$

Tomando esto como una ecuación matricial, entonces $\det(L_i^j) = \pm 1$. La condición de ser restringida de L se puede ver como

$$\det(L_i^j) = 1, L_0^0 > 0. \quad (1.22)$$

Por (1.19), la misma condición se aplica a la matriz de una transformación restringida pasiva de Lorentz. También pueden derivar de las funciones

$$\begin{aligned} \eta_{ij} g_i^i g_j^j &= \eta_{i\hat{j}} \\ \det(g_i^i) &= 1, \\ g_0^0 &> 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Capítulo 2

Transformaciones de Möbius y el grupo de Lorentz

2.1. El grupo de Lorentz

Recordemos que el grupo de todas las isometrías de un espacio-tiempo de Minkowski es el llamado grupo de Poincaré (\mathfrak{P}), es decir, todas las transformaciones restringidas de Poincaré. El grupo de Lorentz (\mathfrak{L}), es decir, las transformaciones lineales de \mathbb{V} que preservan la norma de Lorentz definida en el capítulo anterior, es un subgrupo del grupo de Poincaré formado por todas las isometrías lineales, o, equivalentemente, todas las isometrías que fijan el origen. En consecuencia el grupo de Lorentz determina la relación entre las observaciones de dos observadores inerciales en un evento dado en un espacio tiempo curvo general.

Si $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base ortonormal del espacio tiempo de dimensión 4 de Minkowski y

$$v = v^0 \mathbf{e}_0 + v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3 \quad (2.1)$$

es un vector, entonces

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= -(v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 \\ &= (v^0 v^1 v^2 v^3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \\ &= x^t \eta x \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.1. EL GRUPO DE LORENTZ

donde x es el vector columna de las componentes v y $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Notando que en términos matemáticos, es más conveniente definir un vector en el espacio de Minkowski de esta manera, es decir, en (1.6) se definió la *tétrada de Minkowski*, la cual es igual a (2.2) salvo porque las coordenadas tipo tiempo y tipo espacio están invertidas, pero el determinante sigue resultando -1 . Esto se adopta en matemáticas para evitar confusiones. Si L es una transformación de Lorentz y Λ es su representación matricial con respecto a la base escogida, entonces se debe tener

$$\langle Lv, Lv \rangle = \langle v, v \rangle \Leftrightarrow (\Lambda x)^t \eta (\Lambda x) = x^t \eta x \Leftrightarrow x^t (\Lambda^t \eta \Lambda) x = x^t \eta x. \quad (2.3)$$

Ya que esto es válido para toda $x \in \mathbb{R}^4$ y ambas $\Lambda^t \eta \Lambda$ y η son matrices simétricas, se concluye que

Proposición 13 *El grupo de Lorentz es isomorfo a*

$$O(3, 1) = \{\Lambda \in GL(4) : \Lambda^t \eta \Lambda = \eta\}. \quad (2.4)$$

Todas las rotaciones son elementos en el grupo de Lorentz. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo Si $R \in O(3)$ entonces, definimos

$$\tilde{R} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

la cual satisface

$$\begin{aligned} \tilde{R}^t \eta \tilde{R} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R^t R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \eta \end{aligned}$$

y entonces $\tilde{R} \in O(3, 1)$.

Se puede ver que de hecho

$$\tilde{O}(3) = \{\tilde{R} \in O(3, 1) : R \in O(3)\}$$

es un subgrupo de $O(3, 1)$ isomorfo a $O(3)$. Por ejemplo, ya que

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \in O(3) \quad (2.5)$$

para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$, se sabe que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \in O(3, 1);$$

esta transformación de Lorentz es un *eje de rotación alrededor \mathbf{e}_3 en un ángulo θ* .

Ejemplo No todas las transformaciones de Lorentz son rotaciones. Por ejemplo, definiendo

$$\begin{pmatrix} \cosh u & 0 & 0 & \operatorname{senh} u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{senh} u & 0 & 0 & \cosh u \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Se puede ver que

$$\begin{aligned} B^t \eta B &= \begin{pmatrix} \cosh u & 0 & 0 & \operatorname{senh} u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{senh} u & 0 & 0 & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh u & 0 & 0 & \operatorname{senh} u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{senh} u & 0 & 0 & \cosh u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cosh u & 0 & 0 & \operatorname{senh} u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{senh} u & 0 & 0 & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh u & 0 & 0 & \operatorname{senh} u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{senh} u & 0 & 0 & \cosh u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{senh} u^2 - \cosh u^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh u^2 - \operatorname{senh} u^2 \end{pmatrix} = \eta \end{aligned}$$

y por lo tanto $B \in O(3, 1)$. La ecuación (2.6) es una transformación de Lorentz llamada un *impulso en la dirección \mathbf{e}_3 de un ángulo hiperbólico u* .

Recordemos brevemente lo que se entiende por transformaciones *activas* y *pasivas*. Sea

$$E = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

entonces es claro que

$$v = v^0 \mathbf{e}_0 + v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3 = Ex. \quad (2.7)$$

2.1. EL GRUPO DE LORENTZ

y en consecuencia

$$Lv = L(Ex) = E(\Lambda x). \quad (2.8)$$

En particular

$$LE = (Le_0, Le_1, Le_2, Le_3) = L(EI) = E(\Lambda I) = E\Lambda. \quad (2.9)$$

Por lo tanto, en el *nuevo* marco ortonormal $E' = LE$, el *mismo* vector v tiene nuevas coordenadas x' tal que

$$v = Ex = E'x' \Leftrightarrow Ex = E\Lambda x' \quad (2.10)$$

es decir,

$$x' = \Lambda^{-1}x. \quad (2.11)$$

Entonces Λ representa una transformación *activa* de Lorentz L , Λ^{-1} representa la correspondiente transformación *pasiva*, dejando las coordenadas de cualquier vector en el marco ortonormal obtenido al aplicar la transformación activa a los vectores del marco inicial ortonormal.

Ejemplo Sea B el representante de un impulso en la dirección \mathbf{e}_3 por un ángulo hiperbólico u ; entonces un evento con coordenadas

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

en el marco inicial E tendrá las coordenadas

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh u & 0 & 0 & \sinh u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh u & 0 & 0 & \cosh u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh u & 0 & 0 & -\sinh u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh u & 0 & 0 & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t \cosh u - z \sinh u \\ x \\ y \\ z \cosh u - t \sinh u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

en el marco transformado E' .

En particular

$$z' = 0 \Leftrightarrow z \cosh u - t \sinh u = 0 \Leftrightarrow z = t \tanh u \quad (2.13)$$

y se puede ver que el marco transformado corresponde a un observador inercial en movimiento con velocidad $v = \tanh u$ con respecto al observador inercial representado por el marco inercial.

Si $\Lambda \in O(3, 1)$ entonces

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \det(\Lambda^t \eta \Lambda) = \det(\eta) = -1 \Leftrightarrow -(\det \Lambda)^2 = -1 \Leftrightarrow \det \Lambda = \pm 1.$$

Ahora considere las cuatro matrices

$$I, \Sigma = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \Theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \Omega = \Sigma \Theta, \quad (2.14)$$

todos los cuales están triviales en $O(3, 1)$. Se puede ver que

$$\det I = -\det \Sigma = -\det \Theta = \det \Omega = 1 \quad (2.15)$$

y en consecuencia hay matrices en $O(3, 1)$ con cualquier valor del determinante. Ya que el determinante es una función continua, se sigue que $O(3, 1)$ tiene al menos dos componentes conexos.

Además, si I, S, T, U son las transformaciones de Lorentz representadas por $I, \Sigma, \Theta, \Omega$, respectivamente entonces

$$I \mathbf{e}_0 = S \mathbf{e}_0 = -T \mathbf{e}_0 = -U \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0. \quad (2.16)$$

Ahora si L es una transformación de Lorentz entonces se define

$$f(L) = \langle \mathbf{e}_0, L \mathbf{e}_0 \rangle. \quad (2.17)$$

Ya que

$$\langle L \mathbf{e}_0, L \mathbf{e}_0 \rangle = \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle = -1 \quad (2.18)$$

se obtiene de la desigualdad de Schwarz al revés,

$$|f(L)| = |\langle \mathbf{e}_0, L \mathbf{e}_0 \rangle| \geq |\mathbf{e}_0| |L \mathbf{e}_0| = 1. \quad (2.19)$$

Ya que

$$f(I) = f(S) = -f(T) = -f(U) = -1 \quad (2.20)$$

se ve que I y S no pueden pertenecer al mismo componente conexo del grupo de Lorentz como T y U . Entonces $O(3, 1)$ tiene al menos cuatro componentes conexos distintos. Lo cual se resume en la siguiente proposición

2.1. EL GRUPO DE LORENTZ

Proposición 14 $O(3,1)$ es la unión disjunta de los cuatro conjuntos abiertos

$$\begin{aligned}
 O_+^\uparrow(3,1) &= \{\Lambda \in O(3,1) : \det \Lambda = -f(\Lambda) = 1\}; \\
 O_+^\downarrow(3,1) &= \{\Lambda \in O(3,1) : \det \Lambda = f(\Lambda) = 1\}; \\
 O_-^\uparrow(3,1) &= \{\Lambda \in O(3,1) : \det \Lambda = f(\Lambda) = -1\}; \\
 O_-^\downarrow(3,1) &= \{\Lambda \in O(3,1) : -\det \Lambda = f(\Lambda) = 1\}.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Demostración:

Debemos demostrar que $O(3,1) = O_+^\uparrow \cup O_+^\downarrow \cup O_-^\uparrow \cup O_-^\downarrow$, pero notando que la unión de los conjuntos da como resultado $O(3,1)$ sólo falta ver que los conjuntos son disjuntos.

Sea $\Lambda \in O(3,1)$ entonces $\Lambda \in O_+^\uparrow \cup O_+^\downarrow \cup O_-^\uparrow \cup O_-^\downarrow \Rightarrow \Lambda \in O_+^\uparrow$ o $\Lambda \in O_+^\downarrow$ o $\Lambda \in O_-^\uparrow$ o $\Lambda \in O_-^\downarrow$, pero no está en dos conjuntos diferentes al mismo tiempo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\Lambda \in O_+^\downarrow$ y $\Lambda \in O_+^\uparrow$ entonces $\det(\Lambda) = f(\Lambda) = 1 = -f(\Lambda)$ entonces, $\exists \Lambda \in O(3,1) : -f(\Lambda) = f(\Lambda)$, lo cual representa una contradicción. Por lo tanto, los cuatro conjuntos son disjuntos. \square

Informalmente, $O_+^\uparrow(3,1)$ es el conjunto de transformaciones de Lorentz que preserva ambas orientación y orientación tiempo; $O_+^\downarrow(3,1)$ es el conjunto de transformaciones de Lorentz que preserva la orientación pero invierte la orientación tiempo (y en consecuencia debe revertir la orientación espacio también); $O_-^\uparrow(3,1)$ es el conjunto de transformaciones de Lorentz que revierte la orientación pero preserva la orientación tiempo (entonces revierte la orientación espacio); y $O_-^\downarrow(3,1)$ es el conjunto de transformaciones de Lorentz que revierte ambas orientación y orientación tiempo (por lo tanto preserva orientación espacio).

Proposición 15 Se tiene que

- $O_+^\downarrow(3,1) = TO_+^\uparrow(3,1)$;
- $O_-^\uparrow(3,1) = SO_+^\uparrow(3,1)$;
- $O_-^\downarrow(3,1) = UO_+^\uparrow(3,1)$.

Demostración:

- Sea $\Theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow f(t) := \langle e_0, T e_0 \rangle \Rightarrow e_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por la ecuación (2.2), se tiene que $\langle v, v \rangle = -(v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = +1 \Rightarrow f(T) = 1. \end{aligned}$$

- Sea $\Sigma = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(S) := \langle e_0, S e_0 \rangle \Rightarrow e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 \Rightarrow f(S) = -1. \end{aligned}$$

2.1. EL GRUPO DE LORENTZ

- Sea

$$\begin{aligned}\Omega &= \Sigma\Theta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow f(U) &:= \langle e_0, Ue_0 \rangle \Rightarrow e_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1\end{aligned}$$

pero $\det \Omega = -1 \Rightarrow -\det \Omega = f(U) = 1$. □

De estos subconjuntos disjuntos abiertos del grupo de Lorentz sólo O_+^\uparrow contiene la identidad, y puede por lo tanto ser un subgrupo.

Proposición 16 *Se tiene que $O_+^\uparrow(3, 1)$ es un subgrupo de $O(3, 1)$ y $O_+^\uparrow(3, 1)$ es llamado el grupo propio de las transformaciones de Lorentz.*

Demostración:

Sea el grupo $O(3, 1)$ con la operación multiplicación, entonces, sabemos que $O_+^\uparrow(3, 1) \neq \emptyset$ ya que contiene a las transformaciones de Lorentz que preserva orientación y orientación temporal. Entonces

- P.d. $O_+^\uparrow(3, 1)$ contiene al elemento identidad. Pero, por lo antes dicho, el subconjunto $O_+^\uparrow(3, 1)$ contiene a la identidad.
- P.d. Sean $\Lambda_1, \Lambda_2 \in O_+^\uparrow(3, 1)$ entonces $(\Lambda_1)(\Lambda_2) \in O_+^\uparrow(3, 1)$. Ahora, por la **Proposición 14**, se tiene que $\det(\Lambda_1) = 1, \det(\Lambda_2) = 1 \Rightarrow (\det(\Lambda_1))(\det(\Lambda_2)) = (1)(1) = 1 \therefore (\Lambda_1)(\Lambda_2) \in O_+^\uparrow(3, 1)$.
- P.d. $\forall \Lambda \in O_+^\uparrow(3, 1), \exists \Lambda^t \in O_+^\uparrow(3, 1)$. Por definición de $O(3, 1) \exists \Lambda \in GL(4) : \Lambda^t \eta \Lambda = \eta$.

□

Note también que O_+^\uparrow es conexo, ya que no se puede *dividir*.

2.2. Proyección estereográfica

Recordemos la ecuación de la esfera, dada por

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}. \quad (2.22)$$

Los puntos $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$ son los llamados *polo Norte* y *polo Sur* de S^2 , y jugarán papeles importantes en lo que sigue. Definimos

$$\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \quad (2.23)$$

y se identifica α con \mathbb{C} al identificar (x, y, z) con $\zeta = x + iy$. La *proyección estereográfica* $\zeta : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ es el mapeo que a cada $(x, y, z) \in S^2 - \{N\}$ asocia la intersección ζ de la línea que pasa por $(0, 0, 1)$ y (x, y, z) con α . Entonces

$$\zeta(x, y, z) = \lambda \frac{x + iy}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.24)$$

donde

$$\frac{\lambda}{1} = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - z} \quad (2.25)$$

es decir

$$\zeta(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z}. \quad (2.26)$$

Si utilizamos las coordenadas esféricas (r, θ, φ) en un conjunto abierto apropiado de \mathbb{R}^3 a través de una transformación coordenada inversa

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (2.27)$$

se ve que S^2 es un conjunto nivel $r = 1$ y por lo tanto (θ, φ) son coordenadas locales en el correspondiente conjunto abierto en S^2 . Entonces se puede escribir

$$\zeta(\theta, \varphi) = \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \varphi + i \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi}{1 - \cos \theta} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta} e^{i\varphi}. \quad (2.28)$$

2.2. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

Se puede pensar en esto como una transformación de coordenadas en S^2 . La derivada de ésta transformación esta dada por

$$\begin{aligned} d\zeta &= \frac{\cos \theta(1 - \cos \theta) - \operatorname{sen}^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} e^{i\varphi} d\theta + i \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta} e^{i\varphi} d\varphi \\ &= -\frac{1}{1 - \cos \theta} e^{i\varphi} d\theta + i \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta} e^{i\varphi} d\varphi \end{aligned} \quad (2.29)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} d\zeta d\bar{\zeta} &= \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} d\theta^2 + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} d\varphi^2 \\ &= \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} ds^2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde ds^2 es el elemento de línea habitual en S^2 . Ya que

$$1 + \zeta\bar{\zeta} = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} = \frac{1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} = \frac{2}{1 - \cos \theta} \quad (2.31)$$

donde se ve que

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{4}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2} d\zeta d\bar{\zeta} \\ &= \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)} (dx^2 + dy^2). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Entonces si se ve la proyección estereográfica como un mapeo $\zeta : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C} \approx \alpha \approx \mathbb{R}^2$ se ve que es un *mapeo conforme*, es decir, que satisface

$$\langle u_p, v_p \rangle_{S^2} = \Omega^2(p) \langle \zeta_* u_p, \zeta_* v_p \rangle_{\mathbb{R}^2} \quad (2.33)$$

para todas $u_p, v_p \in T_p S^2$ y toda $p \in S^2 - \{N\}$. Otra manera de ponerlo es diciendo que la proyección estereográfica mapea círculos en $T_p S^2$ a círculos en $T_{\zeta(p)} \mathbb{R}^2$ (o que mapea círculos infinitesimales en círculos infinitesimales). Un *círculo* en S^2 es solo una esfera geodésica, es decir, la imagen a través del mapeo exponencial de un círculo en algún espacio tangente. Es fácil de ver que cualquier círculo es la intersección de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ con algún plano $\beta \subset \mathbb{R}^3$.

Proposición 17 *Si $\gamma \subset S^2$ es un círculo entonces $\zeta(\gamma) \subset \mathbb{C}$ es una línea recta o un círculo dependiendo de si $N \in \gamma$.*

Demostración:

Sea un círculo en S^2 , el cual es la intersección del plano α con la esfera. Dichos puntos satisfacen la ecuación:

$$ax + by + cz = d.$$

Entonces, el círculo es la imagen bajo la proyección estereográfica del conjunto de puntos que satisfacen la ecuación en el plano (usando la notación del **Apéndice** ecuación (A.8)):

$$a \left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1} \right) + b \left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(\zeta\bar{\zeta} + 1)} \right) + c \left(\frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1} \right) = d.$$

Si se escribe $\zeta = x + iy$ se obtiene:

$$\begin{aligned} a \left(\frac{(x + iy) + (x - iy)}{(x + iy)(x - iy) + 1} \right) + b \left(\frac{(x + iy) - (x - iy)}{i((x + iy)(x - iy) + 1)} \right) + c \left(\frac{(x + iy)(x - iy) - 1}{(x + iy)(x - iy) + 1} \right) &= d \\ \Rightarrow a \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \right) + b \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \right) + c \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) &= d \\ \Rightarrow 2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1) &= d(x^2 + y^2 + 1) \end{aligned}$$

esta es la ecuación de una recta si $d = c$ o es la ecuación de una circunferencia si $d \neq c$. [5] ¹ □

2.3. Estructura compleja de S^2

Obviamente se puede definir otra proyección estereográfica $\tilde{\zeta} : S^2 - \{S\} \rightarrow \mathbb{C}$ al asociar a cada $(x, y, z) \in S^2 - \{S\}$ la intersección $\tilde{\zeta}$ de la línea a través de $(0, 0, 1)$ y (x, y, z) con α . Crucialmente, sin embargo, se identifica α con \mathbb{C} al identificar $(x, y, 0)$ con $\tilde{\zeta} = x - iy$. Entonces

$$\tilde{\zeta}(x, y, z) = \tilde{\lambda} \frac{x - iy}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.34}$$

donde

$$\frac{\tilde{\lambda}}{1} = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + z}$$

¹Note que se utilizó el hecho de que la función $\zeta : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es una biyección de $S^2 - \{N\}$ al plano complejo \mathbb{C} .

2.3. ESTRUCTURA COMPLEJA DE S^2

es decir

$$\tilde{\zeta}(x, y, z) = \frac{x - iy}{1 + z}.$$

Observemos que en $S^2 - \{N, S\}$ uno tiene

$$\zeta \tilde{\zeta} = \frac{x^2 + y^2}{1 - z^2} = 1 \quad (2.35)$$

y en consecuencia se tiene la siguiente proposición:

Proposición 18 $\tilde{\zeta} \circ \zeta^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ es el mapeo $\zeta \rightarrow \frac{1}{\zeta}$. Además de ser suave, este es un mapeo holomorfo.

Demostración:

Sea $\tilde{\zeta} = \frac{x-iy}{1+z}$ y $\zeta^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{1+|z|^2}, \frac{2y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right)$. Sea $z \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} \circ \zeta^{-1} &= \tilde{\zeta}(\zeta^{-1}(x, y, z)) = \tilde{\zeta} \left(\frac{2x}{1+|z|^2}, \frac{2y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right) \\ &= \frac{\frac{2x}{1+|z|^2} - i \frac{2y}{1+|z|^2}}{1 + \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}} = \frac{\frac{1}{1+|z|^2}(2x - 2iy)}{\frac{1}{1+|z|^2}(1 + |z|^2 + |z|^2 - 1)} \\ &= \frac{2x - 2iy}{2|z|^2} = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

□

Definición 9 *El conjunto*

$$\mathcal{A} = \left\{ \{\mathbb{C}, \zeta^{-1}\}, \{\mathbb{C}, \tilde{\zeta}^{-1}\} \right\} \quad (2.36)$$

se dice que es un **atlas analítico** de S^2 , que entonces se dice que posee una estructura de una **variedad compleja** (unidimensional).

Claramente tener una estructura compleja es un requisito más fuerte que tener una estructura diferenciable.

Definición 10 *Un mapeo $f : S^2 \rightarrow S^2$ se dice que es **holomorfo** si y solo si ambas funciones complejas de variable compleja $\zeta \circ f \circ \zeta^{-1}$ y $\tilde{\zeta} \circ f \circ \tilde{\zeta}^{-1}$ son holomorfas.*

2.3. ESTRUCTURA COMPLEJA DE S^2

Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ un automorfismo holomorfo. Si $f(N) = N$ entonces $g = \zeta \circ f \circ \zeta^{-1}$ debe ser holomorfo en \mathbb{C} y

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow +\infty} |g(\zeta)| = +\infty.$$

Si $f(N) = p' \neq N$, entonces $f(p'') = N$ para algún $p'' \neq N$. Si $\zeta' = \zeta(p')$ y $\zeta'' = \zeta(p'')$ entonces g tendrá una singularidad en ζ'' y se debe tener

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta'} |g(\zeta)| = +\infty$$

y necesariamente satisface

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow +\infty} |g(\zeta)| = \zeta'.$$

Se concluye que cualquier automorfismo holomorfo de S^2 puede ser representado por una función analítica en \mathbb{C} con a lo más una singularidad y con un límite bien definido como $|\zeta| \rightarrow +\infty$. Esto a menudo se resume extendiendo g a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y escribiendo $g(\infty) = \infty$ en el caso $f(N) = N$ y $g(\infty) = \zeta', g(\zeta'') = \infty$ en este caso $f(N) \neq N$. Note que se puede identificar S^2 con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y por lo tanto f con g . Al usar la proyección con respecto del polo Sur, se debe ser cuidadoso al enfatizar el polo usado.

Ejemplo Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ representado por $g : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dado por $g(\zeta) = \zeta + b$, con $b \neq 0$ (entonces $g(\infty) = \infty$). Claramente f es biyectiva y $\zeta \circ f \circ \zeta^{-1} = g|_{\mathbb{C}}$ es holomorfa. Como para $\tilde{\zeta} \circ f \circ \tilde{\zeta}^{-1}$, se da en la superposición de los gráficos de los polos Norte y Sur por

$$h(\tilde{\zeta}) = \frac{1}{g(\frac{1}{\tilde{\zeta}})} = \frac{1}{\frac{1}{\tilde{\zeta}} + b} = \frac{\tilde{\zeta}}{b\tilde{\zeta} + 1} \quad (2.37)$$

y ya que $f(N) = N$ y $\tilde{\zeta}(N) = 0$ la expresión de arriba es válida también para $\tilde{\zeta} = 0$.

Entonces

$$\tilde{\zeta} \circ f \circ \tilde{\zeta}^{-1} : \mathbb{C} - \left\{ -\frac{1}{b} \right\} \rightarrow \mathbb{C} - \left\{ \frac{1}{b} \right\}$$

es vista holomorfa en su dominio, y por lo tanto f es un automorfismo holomorfo. Note que h puede ser extendida a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ al mandar $h(-\frac{1}{b}) = \infty, h(\infty) = \frac{1}{b}$. Estas son las versiones de gráficos del polo Sur de $g(-b) = 0, g(0) = b$.

2.3. ESTRUCTURA COMPLEJA DE S^2

Ejemplo Muestre que las funciones representadas por $a\zeta$ ($a \neq 0$) y $\frac{1}{\zeta}$ son difeomorfismos holomorfos.

Demostración:

Notemos que cualquier composición de automorfismos holomorfos es un automorfismo holomorfo. Sea g una representación de un automorfismo holomorfo. Si $g(\infty) \neq \infty$ entonces $g(a) = \infty$ para alguna $a \in \mathbb{C}$. En consecuencia

$$g_1(\zeta) = g\left(a + \frac{1}{\zeta}\right)$$

representa un automorfismo holomorfo que satisface $g_1(\infty) = \infty$. Si $g_1(0) = b \neq 0$, entonces

$$g_2(\zeta) = g_1(\zeta) - b$$

satisface $g_2(\infty) = \infty$ y $g_2(0) = 0$. Entonces g_2 debe ser holomorfa en \mathbb{C} . Por otro lado, la función

$$h_2(\tilde{\zeta}) = \frac{1}{g_2\left(\frac{1}{\tilde{\zeta}}\right)}$$

también debe ser holomorfa en \mathbb{C} . Si $k \geq 1$ es el orden del cero de g_2 en el origen, entonces $\frac{1}{g_2}$ tiene un polo de orden k en el origen y en consecuencia su serie de Laurent es

$$\frac{1}{g_2(\zeta)} = \sum_{i=-k}^{+\infty} a_i \zeta^i. \quad (2.38)$$

Entonces, la serie de Laurent de h_2 es

$$h_2(\tilde{\zeta}) = \sum_{i=-\infty}^k a_{-i} \tilde{\zeta}^i \quad (2.39)$$

y se concluye que $a_i = 0$ para $i \geq 1$. En consecuencia,

$$g_2(\zeta) = \frac{1}{\frac{a_{-k}}{\zeta^k} + \cdots + a_0} = \frac{\zeta^k}{a_{-k} + \cdots + a_0 \zeta^k}$$

y para que esta función sea holomorfa debe cumplir que $a_{-k+1} = \cdots = a_0 = 0$. Entonces

$$g_2(\zeta) = c\zeta^k$$

para alguna $c \in \mathbb{C} - \{0\}$, y ya que g_2 debe ser inyectiva en \mathbb{C} se concluye que $k = 1$. Note que

$$g_2(\zeta) = c\zeta$$

dando

$$h_2(\tilde{\zeta}) = \frac{\tilde{\zeta}}{c}$$

y entonces h_2 es en efecto holomorfa.

Proposición 19 *Cualquier automorfismo holomorfo de S^2 es una composición de un automorfismo representado por $\frac{1}{\zeta}$ y $a\zeta + b$ ($a \neq 0$).*

Demostración:

Note que tanto el mapeo $\zeta \rightarrow \frac{1}{\zeta}$ y el mapeo $a\zeta + b$ son transformaciones en la esfera que van de $\mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ los cuales están bien definidos y representan transformaciones de la esfera, es decir, son las transformaciones inversa ($\frac{1}{\zeta}$), el impulso ($a\zeta$) y la traslación ($\zeta + b$, cuando $a = 1$). \square

Ejemplo Cualquier automorfismo analítico complejo de S^2 manda círculos en círculos.

Demostración:

Por las **Proposiciones 17** y **18** se sabe la forma de cualquier automorfismo analítico complejo, dado por las ecuaciones $\frac{1}{\zeta}$ y $a\zeta + b$. Recordando la **Proposición 16** se sabe que la proyección estereográfica manda círculos en círculos. \square

2.4. Transformaciones de Möbius

Definición 11 *El grupo de las transformaciones de Möbius es el grupo \mathcal{M} de todos los automorfismos analíticos complejos de S^2 .*

Para entender la importancia de este grupo, note que

$$\begin{aligned} ds^2(g(\zeta)) &= \frac{4}{(1 + g\bar{g})^2} dg d\bar{g} \\ &= \frac{4}{(1 + g(\zeta)\bar{g}(\zeta))^2} g'(\zeta)\bar{g}'(\zeta) d\zeta d\bar{\zeta} \\ &= \frac{g'\bar{g}'(1 + \zeta\bar{\zeta})^2}{(1 + g\bar{g})^2} \frac{4}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2} d\zeta d\bar{\zeta} \\ &= \frac{g'\bar{g}'(1 + \zeta\bar{\zeta})^2}{(1 + g\bar{g})^2} ds^2(\zeta). \end{aligned} \tag{2.40}$$

2.4. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

En otras palabras, el automorfismo complejo analítico es conforme. En efecto, se puede mostrar que el grupo de todos los automorfismos complejos analíticos de S^2 es el mismo que el grupo de automorfismos conformes diferenciables que preservan orientación de S^2 .

Como se ha visto, el grupo de Möbius es generado por la composición del automorfismo representado por $\frac{1}{\zeta}$ y $a\zeta + b$ ($a \neq 0$). Todos estos son de la forma

$$\frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

con $ad - bc \neq 0$ (note que si $ad - bc = 0$ la expresión de arriba es una función constante). Inversamente, todos los automorfismos representados por funciones del tipo de arriba pueden ser obtenidas como composiciones del automorfismo que genera al grupo de Möbius. Este es obvio si $c = 0$; si $c \neq 0$, por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} &= \frac{ac\zeta + bc + ad - ad}{c\zeta + d} \\ &= a + \frac{bc - ad}{c\zeta + d}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

En consecuencia todas las funciones de arriba representan transformaciones de Möbius. Considere el mapeo $H : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$ definido por

$$H \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}. \tag{2.42}$$

Proposición 20 *Se tiene que H es un homomorfismo de grupos.*

Demostración:

Sea el mapeo $H : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$, y sean $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$. Con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

y $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. P.d. $A \cdot B = A(B(\zeta))$. Entonces

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \\ \Rightarrow H(A \cdot B) &= \frac{(ae + bg)\zeta + (af + bh)}{(ce + dg)\zeta + (cf + dh)}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} A(B(\zeta)) &= A\left(\frac{e\zeta + f}{g\zeta + h}\right) = \frac{a\left(\frac{e\zeta + f}{g\zeta + h}\right) + b}{c\left(\frac{e\zeta + f}{g\zeta + h}\right) + d} = \frac{a(e\zeta + f) + b(g\zeta + h)}{c(e\zeta + f) + d(g\zeta + h)} \\ &= \frac{ae\zeta + af + bg\zeta + hb}{ce\zeta + cf + dg\zeta + dh} = \frac{(ae + bg)\zeta + (af + bh)}{(ce + dg)\zeta + (cf + dh)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto H es un homomorfismo de grupos. \square

En particular esto prueba que el conjunto de todos los automorfismos complejos analíticos representados por las funciones del tipo que se consideraron es en efecto \mathcal{M} .

Para calcular el Kernel de H se resuelve la ecuación

$$H\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \zeta \Leftrightarrow \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} = \zeta \Leftrightarrow b = c = 0 \text{ y } a = d. \quad (2.43)$$

Entonces $\ker H = \{aI : a \in \mathbb{C} - \{0\}\}$.

Se sabe que \mathcal{M} es isomorfo² a

$$\frac{GL(2, \mathbb{C})}{\ker H}.$$

Sea A un representante de una clase de equivalencia en este grupo cociente. Ya que $\det(aA) = a^2 \det A$ y $\det A \neq 0$ (ya que $A \in GL(2, \mathbb{C})$) se ve que cada clase de equivalencia tiene al menos un representante E con determinante 1. En efecto, ya que $\det(aE) = a^2$, se ve que cada clase de equivalencia tiene exactamente dos de esos representantes $\pm E$. Ya que

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : \det A = 1\} \quad (2.44)$$

²Esto se debe al **Primer Teorema del Isomorfismo**: Sea $\phi : G \rightarrow \bar{G}$ un homomorfismo sobre, con $\ker \phi = K$, entonces $G/K \approx \bar{G}$, en nuestro caso H es el homomorfismo sobre.

2.4. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

es trivialmente un subgrupo de $GL(2, \mathbb{C})$, por lo tanto se concluye que \mathcal{M} es isomorfo³ a

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\pm I}. \quad (2.45)$$

De aquí se puede representar cualquier transformación de Möbius por una función

$$g(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \quad (2.46)$$

que satisface $ad - bc = 1$.

Proposición 21 *Dada tal representación, cada transformación de Möbius con $a + d \neq \pm 2$ tiene exactamente 2 puntos fijos, y cada transformación de Möbius con $a + d = \pm 2$ tiene exactamente 1 punto fijo. (Considerando los casos $c \neq 0$ y $c = 0$ por separado).*

Demostración:

Primero, se recuerda la definición de punto fijo. Un *punto fijo* es un punto z tal que $f(z) = z$, esto es, un punto z que no se mueve cuando le aplicamos f . [4] Suponga que $g(\zeta)$ tiene un punto fijo, entonces

$$\begin{aligned} g(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} = \zeta &\Leftrightarrow a\zeta + b = \zeta(c\zeta + d) \\ \Leftrightarrow a\zeta + b = c\zeta^2 + d\zeta &\Leftrightarrow c\zeta^2 + \zeta(d - a) - b = 0 \end{aligned}$$

la cual es una ecuación de segundo grado. Si $a + d \neq \pm 2$ se tiene dos puntos fijos, que son las soluciones de la ecuación. Si $a + d = 0$ se tiene un punto fijo, o una solución a la ecuación. Sin embargo, si $c \neq 0$, obtenemos las soluciones antes mencionadas, pero si $c = 0$, se tiene que $\zeta = \frac{b}{d-a}$. \square

Suponga que $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ son tres números complejos distintos. Entonces la transformación de Möbius representada por

$$g(\zeta) = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_0} \cdot \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_2} \quad (2.47)$$

satisface $g(\zeta_0) = 0, g(\zeta_1) = 1$ y $g(\zeta_2) = \infty$. Más aún, si h es la representación de cualquier otra transformación de Möbius que satisface las mismas condiciones entonces $i = h \circ g^{-1}$ representa una transformación de Möbius que

³Aquí nuevamente se toma al **Primer Teorema del Isomorfismo** tomando al grupo $SL(2, \mathbb{C})$.

2.5. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS Y EL GRUPO PROPIO DE LORENTZ

satisface $i(0) = 0, i(1) = 1$ y $i(\infty) = \infty$. Haciendo

$$i(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \quad (2.48)$$

se ve que

$$\begin{aligned} i(0) = 0 &\Rightarrow b = 0; \\ i(\infty) = \infty &\Rightarrow c = 0; \\ i(1) = 1 &\Rightarrow \frac{a}{d} = 1 \end{aligned} \quad (2.49)$$

es decir, i es la función identidad, y entonces $h = g$.

Proposición 22 *Cualquier transformación de Möbius está completamente determinada por las tres imágenes (distintas) de tres puntos distintos en S^2 .*

Demostración:

Primero, note que la identidad (2.47) se refiere a la *razón cruzada*. Suponga $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ tres puntos distintos, y sea una transformación de Möbius $T(\zeta)$ tal que $T(\zeta_1) = T(\zeta_2) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} T(\zeta_1) = \frac{a\zeta_1 + b}{c\zeta_1 + d} &= \frac{a\zeta_2 + b}{c\zeta_2 + d} = T(\zeta_2) \\ \Rightarrow (a\zeta_1 + b)(c\zeta_2 + d) &= (a\zeta_2 + b)(c\zeta_1 + d) \\ \Rightarrow ac\zeta_1\zeta_2 + ad\zeta_1 + bc\zeta_2 + bd &= ac\zeta_1\zeta_2 + ad\zeta_2 + bc\zeta_1 + bd \\ \Rightarrow ad\zeta_1 + bc\zeta_2 &= ad\zeta_2 + bc\zeta_1 \\ \Rightarrow \zeta_1 &= \zeta_2 \blacktriangledown \end{aligned}$$

Por lo tanto, las imágenes deben ser distintas. □

2.5. Transformaciones de Möbius y el grupo propio de Lorentz

Si $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base ortonormal del espacio-tiempo de Minkowski y

$$v = v^0\mathbf{e}_0 + v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3 \quad (2.50)$$

es un vector, entonces se asocia a v (y a esta base) la matriz

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

2.5. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS Y EL GRUPO PROPIO DE LORENTZ

(se explicará el factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ más adelante). Note que $V \in \mathbb{H}_2$ (aquí \mathbb{H}_2 es el conjunto de todas las matrices complejas Hermitianas, es decir, todas las matrices V de 2×2 que satisfacen $V^* = (\bar{V})^t = V$); en efecto, el mapeo definido arriba es una biyección entre el espacio tiempo de Minkowski y \mathbb{H}_2 . Este mapeo es útil, porque

$$\det V = \frac{1}{2} \left((v^0)^2 - (v^3)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 \right) = -\frac{1}{2} \langle v, v \rangle. \quad (2.52)$$

Es bien conocido el hecho que $GL(2, \mathbb{C})$ actúa sobre \mathbb{H}_2 a través de la llamada *acción adjunta*,

$$g \cdot V = gVg^*, \quad \forall g \in GL(2, \mathbb{C}), V \in \mathbb{H}_2$$

como

$$(gVg^*)^* = (g^*)^* V^* g^* = gVg^*.$$

Por otro lado,

$$\det(gVg^*) = \det g \det V \det g^* = |\det(g)|^2 \det V \quad (2.53)$$

y entonces esta acción preserva el determinante *si y solo si* $|\det g| = 1$. Ahora, cualquier matriz $g \in GL(2, \mathbb{C})$ que satisface $|\det g| = 1$ es de la forma

$$g = e^{i\frac{\theta}{2}} h \quad (2.54)$$

donde

$$\det g = e^{i\theta}$$

y $h \in SL(2, \mathbb{C})$, y

$$g \cdot V = gVg^* = \left(e^{i\frac{\theta}{2}} h \right)^* V \left(e^{i\frac{\theta}{2}} h \right) = e^{i\frac{\theta}{2}} h^* V e^{i\frac{\theta}{2}} h = h^* V h = h \cdot V.$$

Así se obtienen todas las acciones adjuntas que preservan el determinante de $GL(2, \mathbb{C})$ sobre \mathbb{H}_2 de los elementos de $SL(2, \mathbb{C})$.

Note que \mathbb{H}_2 es un espacio vectorial, y la identificación de (2.51) es claramente un isomorfismo lineal. Por otro lado, la acción adjunta de $SL(2, \mathbb{C})$ en \mathbb{H}_2 es vista fácilmente como un mapeo lineal que preserva el determinante (o, usando la ecuación (2.51), por isometrías lineales). Por lo tanto, se tiene el mapeo $H : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow O(3, 1)$. Este mapeo es un homomorfismo de grupo, como

$$H(gh)v = ghV(gh)^* = ghVh^*g^* = g(hVh^*)g^* = H(g)H(h)v$$

2.5. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS Y EL GRUPO PROPIO DE LORENTZ

para toda $V \in \mathbb{H}_2$, $g, h \in SL(2, \mathbb{C})$ (se usa la identificación que se ha usado para equiparar vectores en el espacio de Minkowski a matrices Hermitianas de 2×2).

Proposición 23 $\text{Ker } H = \{\pm I\}$.

Demostración:

Sea $H : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow O(3, 1)$ el cual es un homomorfismo de grupos, entonces, por definición si $\varphi : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos, entonces se define el **núcleo** o **kernel** de φ como $\ker(\varphi) = \{g \in G | \varphi(g) = e\} \subseteq G$, con e el neutro. Entonces, $\ker(H) := \{h \in SL(2, \mathbb{C}) | H(h) = \eta\} \subseteq H$. Note que se la matriz η se puede tomar como $\pm I$. \square

Se va a mostrar que $SL(2, \mathbb{R})$ es simplemente conexo, análogamente se muestra que $SL(2, \mathbb{C})$ es simplemente conexo.

Proposición 24 $SL(2, \mathbb{R})$ es simplemente conexo.

Demostración:

Utilizaremos el teorema de la descomposición polar y el hecho de que el conjunto de todas las matrices ortogonales tienen determinante igual a 1 es un grupo de Lie conexo.

Si $A \in SL(2, \mathbb{R})$ se descompone como $A = RS$, donde R es una matriz ortogonal con determinante 1, y S es una matriz definida positiva con determinante 1. Como S es simétrica, puede ser diagonalizada, es decir, $S = B \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) B^{-1}$ para alguna matriz ortogonal B y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Se define un camino continuo

$$S(t) = B \text{diag}((1-t) + \lambda_1, 1/((1-t) + t\lambda_1)) B^{-1} \quad (2.55)$$

para $t \in [0, 1]$ y note que, por construcción, $\det S(t) = 1$; $S(t)$ es simétrico; $S(t)$ es definida positiva, ya que la entrada $(1-t) + t\lambda_1 > 0$ para $t \in [0, 1]$; y $S(0) = I, S(1) = S$. Ahora, sea $R(t)$ un camino continuo de matrices ortogonales de determinante 1, tales que $R(0) = I$ y $R(1) = R$. Por lo tanto, $A(t) = S(t)R(t)$ es un camino continuo en $SL(2, \mathbb{R})$ que satisface $A(0) = I$ y $A(1) = RS = A$, por lo tanto se muestra que $SL(2, \mathbb{R})$ es conexo. \square

Proposición 25 $SL(2, \mathbb{C})$ es simplemente conexo.

Demostración:

Utilizaremos el teorema de la descomposición compleja polar y el hecho de

2.5. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS Y EL GRUPO PROPIO DE LORENTZ

que cualquier matriz hermitiana puede ser diagonalizada al conjugarla con una matriz unitaria apropiada.

Si $A \in SL(2, \mathbb{C})$ se descompone como $A = UP$, donde U es una matriz unitaria y entonces tiene determinante 1, y P es una matriz Hermitiana definida positiva con determinante 1. Note que P es hermitiana, es simétrica y puede ser diagonalizada, es decir, $P = B \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) B^{-1}$ para alguna matriz ortogonal B y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Se define un camino continuo

$$P(t) = B \text{diag}((1-t) + \lambda_1, 1/((1-t) + t\lambda_1)) B^{-1} \quad (2.56)$$

para $t \in [0, 1]$ y note que, por construcción, $\det P(t) = 1$; $P(t)$ es simétrico; $P(t)$ es definida positiva, ya que la entrada $(1-t) + t\lambda_1 > 0$ para $t \in [0, 1]$; y $P(0) = I, P(1) = P$. Ahora, sea $U(t)$ un camino continuo de matrices unitarias, tales que $U^\dagger U = U U^\dagger = I$ (con $U^\dagger = \bar{U}^T$) y tales que $U(0) = I$ y $U(1) = U$. Por lo tanto, $A(t) = P(t)U(t)$ es un camino continuo en $SL(2, \mathbb{C})$ que satisface $A(0) = I$ y $A(1) = UP = A$, por lo tanto se muestra que $SL(2, \mathbb{C})$ es conexo. \square

Proposición 26 *Se tiene que*

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbb{C}^2 \text{ y } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \quad (2.57)$$

y por lo tanto $SU(2)$ es una variedad suave difeomorfa a S^3 .

Demostración:

\Rightarrow

Sea $R \in SU(2) = SL(2, \mathbb{C}) \cap U(2) = \{R \in GL(2, \mathbb{C}) : RR^* = Id, \det(R) = 1\}$ y por la ecuación (2.44) se tiene que $SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : \det A = 1\} \Rightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{C} : ac - bd = 1 \Leftrightarrow \bar{a} = c, \bar{b} = d \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1$.

\Leftarrow

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ cuyo $\det A = a\bar{a} - b(-\bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 = 1$. \square

Se concluye que $SU(2)$ (y por lo tanto $SL(2, \mathbb{C})$) es simplemente conexa.

Una técnica similar puede ser usada para mostrar que $O_+^\uparrow(3, 1)$ es conexo por trayectorias: si L es una transformación propia de Lorentz entonces claramente

$$L\mathbf{e}_0 = \cosh u \mathbf{e}_0 + \sinh u \mathbf{e} \quad (2.58)$$

para alguna $u \geq 0$ y $\mathbf{e} \in (\mathbf{e}_0)^\perp$. Si R es cualquier rotación (es decir, cualquier transformación propia de Lorentz que preserva \mathbf{e}_0) que manda \mathbf{e}_3 a \mathbf{e} , se tiene

$$R^{-1}L\mathbf{e}_0 = \cosh u \mathbf{e}_0 + \sinh u \mathbf{e}_3. \quad (2.59)$$

2.5. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS Y EL GRUPO PROPIO DE LORENTZ

Entonces, si B es un impulso en la dirección de \mathbf{e}_3 por un ángulo hiperbólico u , se tiene que

$$B^{-1}R^{-1}L\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0 \quad (2.60)$$

y en consecuencia $S = B^{-1}R^{-1}L$ es una rotación y $L = RBS$.

Proposición 27 *Usando la descomposición de arriba, se puede ver que $O_+^\uparrow(3, 1)$ es conexo por trayectorias. Sin embargo, no se puede utilizar esta descomposición para concluir que $O_+^\uparrow(3, 1)$ es simplemente conexo (de manera similar como la que se uso para $SL(2, \mathbb{C})$).*

Demostración:

Sea $L = RBS$, con $L \in O_+^\uparrow(3, 1)$, $R, S \in SU(n)$ y B un impulso en la dirección \mathbf{e}_3 . Entonces, sea

$$B = \begin{pmatrix} \cosh u & 0 & 0 & \sinh u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh u & 0 & 0 & \cosh u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(B) &= \cosh^2 u + \sinh^2 u = \cosh 2u \\ \Rightarrow \det(RBS) &= \det(R) \det(B) \det(S) = (1)(\cosh 2u)(1) \\ &= \cosh 2u. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $L \in O_+^\uparrow(3, 1) \Rightarrow \det(L) = 1 \Rightarrow \cosh 2u = 1$. Ahora,

$$\begin{aligned} \cosh 2u &= 2 \cosh^2 u - 1 \\ \Rightarrow 2 \cosh^2 u - 1 &= 1 \Rightarrow 2 \cosh^2 u = 2 \\ \Rightarrow \cosh^2 u &= 1 \Rightarrow \cosh u = 1 \\ \Rightarrow u &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que $L(0) = L(1) = 1$, por lo tanto es una trayectoria conexa. Sin embargo, el grupo trivial de $O_+^\uparrow(3, 1)$ no son los impulsos, por lo tanto, con está descomposición $O_+^\uparrow(3, 1)$ no es simplemente conexo. \square

Proposición 28 $H(SL(2, \mathbb{C})) \subseteq O_+^\uparrow(3, 1)$

Demostración:

Sea el mapeo $H : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow O(3, 1)$ Pd. H es continuo. Entonces, por la **Proposición 14**, se sabe que $O(3, 1)$ es la unión disjunta de cuatro conjuntos

2.5. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS Y EL GRUPO PROPIO DE LORENTZ

abiertos, veamos entonces que la imagen inversa de abiertos es abierta. Sea $D \subset O(3, 1)$, entonces se define

$$H^{-1}(D) := \{A \in SL(2, \mathbb{C}) \mid \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \in D\},$$

es decir, A es una matriz de 2×2 con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, que mediante el mapeo H se transforma en la transformación de Möbius $g(\zeta)$. Por la **Proposición 15** podemos suponer que $D = O_+^\uparrow(3, 1)$. Como $O_+^\uparrow(3, 1) \subset O(3, 1) \Rightarrow H^{-1}(O_+^\uparrow(3, 1)) \subset H^{-1}(O(3, 1))$ y $O_+^\uparrow(3, 1)$ es abierto, entonces $H^{-1}(D)$ es abierto. Por lo tanto H es continua. Como H es continua y el det también es continuo, entonces el mapeo debe ir a O_+^\uparrow . \square

Ahora se calcula la dimensión de $SL(2, \mathbb{C})$ calculando su espacio tangente en la identidad. Sea $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ una curva que satisface $g(0) = I$. Si proponemos

$$g(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

se tiene

$$a(0) = d(0) = 1, b(0) = c(0) = 0$$

y

$$\begin{aligned} a(t)d(t) - c(t)b(t) &= 1 \\ \Rightarrow \dot{a}(t)d(t) + a(t)\dot{d}(t) - \dot{c}(t)b(t) - c(t)\dot{b}(t) &= 0 \\ \Rightarrow \dot{a}(0) + \dot{d}(0) &= 0 \end{aligned}$$

(donde el punto representa la diferenciación con respecto de t), indicando que $T_I SL(2, \mathbb{C})$ puede identificarse con el espacio vectorial de matrices complejas de 2×2 sin traza. Este espacio vectorial tienen dimensión real 6, y por lo tanto se concluye que $SL(2\mathbb{C})$ es una variedad real de dimensión 6.

Análogamente se determina la dimensión de $O_+^\uparrow(3, 1)$ al calcular su espacio tangente en la identidad. Si $\Lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow O_+^\uparrow(3, 1)$ es una curva que satisface $\Lambda(0) = I$ entonces

$$\begin{aligned} \Lambda^t(t)\eta\Lambda(t) &= \eta \\ \Rightarrow \dot{\Lambda}^t(t)\eta\Lambda(t) + \Lambda^t(t)\eta\dot{\Lambda}(t) &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\Lambda}^0\eta + \eta\dot{\Lambda}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.61}$$

y ahora se ve que $T_I O_+^\uparrow(3, 1)$ puede ser identificado con el espacio vectorial de matrices reales A de 4×4 que satisfacen

$$A^t\eta + \eta A = 0 \Leftrightarrow (\eta A)^t + \eta A = 0 \tag{2.62}$$

es decir, tales que ηA es antisimétrica. Ya que η no es singular, se concluye que la dimensión de $T_I O_+^\uparrow(3, 1)$ es igual a la dimensión del espacio vectorial de las matrices de 4×4 reales antisimétricas, es decir 6.

Tanto $SL(2, \mathbb{C})$ y $O_+^\uparrow(3, 1)$ son grupos de Lie conexos, y el mapeo $H : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow O_+^\uparrow(3, 1)$ es un homomorfismo de grupo de Lie (es decir, es un mapeo suave el cual es un homomorfismo de grupo). Porque tienen la misma dimensión y el $\ker H$ es finito se sigue que H es suprayectiva en una vecindad de la identidad, es decir, es un *isomorfismo local*.

Más exactamente, dos grupos de Lie localmente isomorfos tienen la misma *cobertura universal*, donde la cobertura universal de un grupo de Lie conexo G es el único grupo de Lie U que es localmente isomorfo a G y simplemente conexo. En ese caso existe un homomorfismo proyectivo suprayectivo $h : U \rightarrow G$ que extiende únicamente el isomorfismo local.

En nuestro caso se tiene entonces que $SL(2, \mathbb{C})$ es el cubierta universal de $O_+^\uparrow(3, 1)$, H es suprayectivo y

$$O_+^\uparrow(3, 1) = \frac{SL(2, \mathbb{C})}{\ker H} = \frac{SL(2, \mathbb{C})}{\{\pm I\}} = \mathcal{M}. \quad (2.63)$$

Se resume esto en lo siguiente

Proposición 29 *El grupo de las transformaciones propias de Lorentz O_+^\uparrow es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius \mathcal{M} .*

Puede sonar un poco extraño que las transformaciones entre los observadores inerciales propios sean lo mismo que los movimientos conformes de la esfera de dimensión 2. En realidad, esta relación es sorprendentemente natural, como veremos.

2.6. Álgebra de Lie del grupo de Lorentz

Si G es un grupo de Lie, su espacio tangente en la identidad $\mathfrak{g} = T_I G$ puede ser dada la estructura de un álgebra (llamada el *álgebra de Lie* de G) al introducir el llamado *Soporte de Lie*. En todos los casos se ha visto a G como un grupo de matrices, y entonces \mathfrak{g} era un espacio vectorial de matrices. En este caso el soporte de Lie es sólo en conmutador ordinario de dos matrices: si $A, B \in \mathfrak{g}$ entonces

$$[A, B] = AB - BA. \quad (2.64)$$

2.6. ÁLGEBRA DE LIE DEL GRUPO DE LORENTZ

Es un teorema de Lie que dos grupos de Lie tienen la misma álgebra de Lie *si y sólo si* son localmente isomorfos. Entonces, para estudiar el álgebra de Lie $\mathfrak{o}(3, 1)$ del grupo de Lorentz $O(3, 1)$ se puede simplemente estudiar el álgebra de Lie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ de $SL(2, \mathbb{C})$. Se ve que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ es el espacio de todas las matrices complejas de 2×2 sin traza, y por lo tanto no es solo un espacio vectorial real de dimensión 6, si no también un espacio vectorial complejo de dimensión 3. Una base compleja conveniente para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ esta dada por las llamadas *matrices de Pauli*,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.65}$$

Estas son raíces cuadradas Hermitianas sin traza de la identidad: se tiene

$$(\sigma_k)^2 = I\tag{2.66}$$

para $k = 1, 2, 3$. De hecho, $\Sigma = \{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, iI, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$ forman un grupo bajo la multiplicación de matrices.

Proposición 30 *Utilizando la siguiente tabla de multiplicaciones se tiene que es correcta y Σ es un grupo.*

·	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	I	$i\sigma_3$	$-i\sigma_2$
σ_2	$-i\sigma_3$	I	$i\sigma_1$
σ_3	$i\sigma_2$	$-i\sigma_1$	I

Tabla 2.1: Tabla de Multiplicaciones

Además, se cumplen las relaciones de conmutación $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$; $[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1$; $[\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2$.

2.6. ÁLGEBRA DE LIE DEL GRUPO DE LORENTZ

Demostración:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 \cdot \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id, \\
 \sigma_2 \cdot \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id, \\
 \sigma_3 \cdot \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id, \\
 \sigma_1 \cdot \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_3, \\
 \sigma_1 \cdot \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow i\sigma_2 = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \sigma_2 \cdot \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \Rightarrow -i\sigma_3 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \\
 \sigma_2 \cdot \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow i\sigma_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\
 \sigma_3 \cdot \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow i\sigma_2 = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \sigma_3 \cdot \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -i\sigma_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ahora, para demostrar que Σ es un grupo, se debe notar que es cerrado con la multiplicación de matrices, ya que la multiplicación de $\sigma_k \cdot \sigma_l$, $k, l = 1, 2, 3$ cae nuevamente dentro de Σ . El producto de matrices es asociativo, el neutro es la matriz identidad, que está dentro de Σ , y cada σ_k es su propio inverso multiplicativo.

Note que según la ecuación (2.62) y con lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
 [\sigma_1, \sigma_2] &= i\sigma_3 - (-i\sigma_3) = 2i\sigma_3 \\
 [\sigma_2, \sigma_3] &= i\sigma_1 - (-i\sigma_1) = 2i\sigma_1 \\
 [\sigma_3, \sigma_1] &= i\sigma_2 - (-i\sigma_2) = 2i\sigma_2. \square
 \end{aligned}$$

Para obtener una base real de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ se pueden tomar las matrices

$$\begin{aligned}
 B_k &= \frac{1}{2}\sigma_k; \\
 R_k &= -\frac{i}{2}\sigma_k
 \end{aligned}$$

2.6. ÁLGEBRA DE LIE DEL GRUPO DE LORENTZ

($k = 1, 2, 3$), donde los factores $\frac{1}{2}$ son introducidos para simplificar las relaciones de conmutación. Los elementos de una base de un álgebra de Lie son a menudo llamados *generadores* del álgebra.

Proposición 31 *Las siguientes relaciones conmutativas se sostienen:*

$$\begin{aligned} [B_1, B_2] &= -R_3; [B_2, B_3] = -R_1; [B_3, B_1] = -R_2 \\ [R_1, R_2] &= R_3; [R_2, R_3] = R_1; [R_3, R_1] = R_2 \\ [B_1, R_2] &= B_3; [B_2, R_3] = B_1; [B_3, R_1] = B_2 \\ [R_1, B_2] &= B_3; [R_2, B_3] = B_1; [R_3, B_1] = B_2. \end{aligned}$$

Demostración: Se tiene que:

$$\begin{aligned} [B_1, B_2] &= \left(\frac{1}{2}\sigma_1\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_2\right) - \left(\frac{1}{2}\sigma_2\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_1\right) = \frac{1}{4}(-i\sigma_3) - \frac{1}{4}(i\sigma_3) = -\frac{i}{2}\sigma_3 = R_3 \\ [B_2, B_3] &= \left(\frac{1}{2}\sigma_2\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_3\right) - \left(\frac{1}{2}\sigma_3\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_2\right) = \frac{1}{4}i\sigma_1 - \frac{1}{4}(-i\sigma_3) = \frac{i}{2}\sigma_1 \Rightarrow R_1 = -\frac{i}{2}\sigma_1 \\ [B_3, B_1] &= \left(\frac{1}{2}\sigma_3\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_1\right) - \left(\frac{1}{2}\sigma_1\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_3\right) = \frac{1}{4}i\sigma_2 - \frac{1}{4}(-i\sigma_2) = \frac{i}{2}\sigma_2 \Rightarrow R_2 = -\frac{i}{2}\sigma_2 \\ [R_1, R_2] &= \left(-\frac{i}{2}\sigma_1\right) \left(-\frac{i}{2}\sigma_2\right) - \left(-\frac{i}{2}\sigma_2\right) \left(-\frac{i}{2}\sigma_1\right) = -\frac{1}{4}(i\sigma_3) - \frac{1}{4}(-i\sigma_3) = -\frac{1}{2}i\sigma_3 = R_3 \\ [R_2, R_3] &= \left(-\frac{i}{2}\sigma_2\right) \left(-\frac{i}{2}\sigma_3\right) - \left(-\frac{i}{2}\sigma_3\right) \left(-\frac{i}{2}\sigma_2\right) = -\frac{1}{4}(i\sigma_1) - \frac{1}{4}(-i\sigma_1) = -\frac{1}{2}\sigma_1 = -R_1 \\ [R_3, R_1] &= \left(-\frac{i}{2}\sigma_3\right) \left(-\frac{i}{2}\sigma_1\right) - \left(-\frac{i}{2}\sigma_1\right) \left(-\frac{i}{2}\sigma_3\right) = -\frac{1}{4}(i\sigma_2) - \frac{1}{4}(-i\sigma_2) = -\frac{i}{2}\sigma_2 = R_2 \\ [B_1, R_2] &= \left(\frac{1}{2}\sigma_1\right) \left(-\frac{i}{2}\sigma_2\right) - \left(-\frac{i}{2}\sigma_2\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_1\right) = -\frac{i}{4}i\sigma_3 + \frac{i}{4}(-i\sigma_3) = \frac{1}{2}\sigma_3 = B_3 \\ [B_2, R_3] &= \left(\frac{1}{2}\sigma_2\right) \left(-\frac{i}{2}\sigma_3\right) - \left(-\frac{i}{2}\sigma_3\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_2\right) = -\frac{i}{4}i\sigma_1 + \frac{i}{4}(-i\sigma_1) = \frac{1}{2}\sigma_1 = B_1 \\ [B_3, R_1] &= \left(\frac{1}{2}\sigma_3\right) \left(-\frac{i}{2}\sigma_1\right) - \left(-\frac{i}{2}\sigma_1\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_3\right) = -\frac{i}{4}i\sigma_2 + \frac{i}{4}(-i\sigma_2) = \frac{1}{2}\sigma_2 = B_2 \\ [R_1, B_2] &= \left(-\frac{i}{2}\sigma_1\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_2\right) - \left(\frac{1}{2}\sigma_2\right) \left(-\frac{i}{2}\sigma_1\right) = -\frac{i}{4}i\sigma_3 + \frac{1}{4}(-i\sigma_3) = \frac{1}{2}\sigma_3 = B_3 \\ [R_2, B_3] &= \left(-\frac{i}{2}\sigma_2\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_3\right) - \left(\frac{1}{2}\sigma_3\right) \left(-\frac{i}{2}\sigma_2\right) = -\frac{i}{4}i\sigma_1 + \frac{i}{4}(-i\sigma_1) = \frac{1}{2}\sigma_1 = B_1 \\ [R_3, B_1] &= \left(-\frac{i}{2}\sigma_3\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_1\right) - \left(\frac{1}{2}\sigma_1\right) \left(-\frac{i}{2}\sigma_3\right) = -\frac{i}{4}i\sigma_2 + \frac{i}{4}(-i\sigma_2) = \frac{1}{2}\sigma_2 = B_2. \end{aligned}$$

□

Note en particular que el espacio real atravesado por $\{R_1, R_2, R_3\}$ es cerrado

2.6. ÁLGEBRA DE LIE DEL GRUPO DE LORENTZ

con respecto al soporte de Lie, y por lo tanto forma una *sub álgebra de Lie* de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Esto corresponde al subgrupo de Lie $SU(2, \mathbb{C})$ de $SL(2, \mathbb{C})$ (o alternativamente al subgrupo de Lie $SO(3)$ de $O_{\downarrow}^{\uparrow}(3, 1)$), como se vera.

Si G es un grupo de Lie de matrices y \mathfrak{G} es su álgebra de Lie entonces $e^{At} \in G$ para toda $A \in \mathfrak{g}$ y $t \in \mathbb{R}$, y en efecto todos los elementos de G son de esta forma. Entonces todo el grupo de Lie puede ser obtenido de su álgebra de Lie por exponenciación (este es el hecho básico subyacente de los teoremas de Lie).

El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ entonces puede actuar en el espacio de Minkowski a través de la llamada *acción infinitesimal*

$$\begin{aligned}
 A \cdot v &= \left. \frac{d}{dt} (e^{At} \cdot v) \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} (e^{At} V (e^{At})^*) \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} (e^{At} V e^{A^*t}) \right|_{t=0} \\
 &= \left(A e^{At} V e^{A^*t} + e^{At} V A^* e^{A^*t} \right) \Big|_{t=0} \\
 &= AV + AV^*
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

(donde otra vez usamos lo visto en **2.1**). En particular, si A es uno de los generadores anteriores, y notando que ya que las matrices de Pauli son Hermitianas, se tiene

$$\begin{aligned}
 (B_k)^* &= B_k; \\
 (R_k)^* &= -R_k
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

($k = 1, 2, 3$), se ve que

$$\begin{aligned}
 B_k \cdot v &= B_k V + V B_k = \{B_k, V\}; \\
 R_k \cdot v &= R_k V + V R_k = [R_k, V].
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

2.6. ÁLGEBRA DE LIE DEL GRUPO DE LORENTZ

Ejemplo Se tiene que

$$\begin{aligned}
 B_3 \cdot v &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ -v^1 + iv^2 & -v^0 + v^3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & -v^1 - iv^2 \\ v^1 - iv^2 & -v^0 + v^3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & 0 \\ 0 & -v^0 + v^3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} v^3 \\ 0 \\ 0 \\ v^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

y por lo tanto es claro que

$$\begin{aligned}
 e^{uB_3} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{u}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \left(\frac{u}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{u}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{\frac{u}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{u}{2}} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})
 \end{aligned}$$

2.6. ÁLGEBRA DE LIE DEL GRUPO DE LORENTZ

que corresponde a la transformación de Lorentz representada por

$$\begin{aligned}
 \exp \left(u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \cosh u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sinh u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cosh u & 0 & 0 & \sinh u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sinh u & 0 & 0 & \cosh u \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

es decir, un impulso en la dirección \mathbf{e}_3 por un ángulo hiperbólico u (el cual puede ser identificado con la transformación de Möbius $e^u \zeta$). Por esta razón se dice que B_3 genera impulsos en la dirección \mathbf{e}_3 .

2.6. ÁLGEBRA DE LIE DEL GRUPO DE LORENTZ

Proposición 32 Usando el método anterior, se tiene que B_1 y B_2 generan impulsos en las direcciones \mathbf{e}_1 y $-\mathbf{e}_2$ respectivamente, y que R_1, R_2 y R_3 generan rotaciones sobre $-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y \mathbf{e}_3 . También se tiene que los elementos de $SL(2, \mathbb{C})$ corresponden a estas transformaciones de Lorentz por un ángulo hiperbólico u o un ángulo θ son

$$\begin{aligned} e^{uB_1} &= \begin{pmatrix} \cosh \frac{u}{2} & \sinh \frac{u}{2} \\ \sinh \frac{u}{2} & \cosh \frac{u}{2} \end{pmatrix}; \\ e^{uB_2} &= \begin{pmatrix} \cosh \frac{u}{2} & -i \sinh \frac{u}{2} \\ i \sinh \frac{u}{2} & \cosh \frac{u}{2} \end{pmatrix}; \\ e^{\theta R_1} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}; \\ e^{\theta R_2} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}; \\ e^{\theta R_3} &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demostración: Consideremos B_1, B_2, R_i con $i = 1, 2, 3$ y V como antes:

$$\begin{aligned} \Rightarrow B_1 \cdot V &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \\ v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^1 + iv^2 & v^0 + v^3 \\ v^0 + v^3 & v^1 - iv^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^1 & v^0 \\ v^0 & v^1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} v^1 \\ v^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow e^{uB_1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{u}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{u}{2}\right)^n \\ \left(\frac{u}{2}\right)^n & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \frac{u}{2} & \sinh \frac{u}{2} \\ \sinh \frac{u}{2} & \cosh \frac{u}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.6. ÁLGEBRA DE LIE DEL GRUPO DE LORENTZ

$$\begin{aligned}
\Rightarrow B_2 \cdot V &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -iv^1 - v^2 & -iv^0 + iv^3 \\ iv^0 + iv^3 & iv^1 - v^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} iv^1 - v^2 & -iv^0 - iv^3 \\ iv^0 - iv^3 & -iv^1 - v^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -v^2 & -iv^0 \\ iv^0 & -v^2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} v^2 \\ 0 \\ v^0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow e^{uB_2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{u}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{iu}{2} \\ \frac{iu}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh \frac{u}{2} & -i \operatorname{senh} \frac{u}{2} \\ i \operatorname{senh} \frac{u}{2} & \cosh \frac{u}{2} \end{pmatrix}. \\
\Rightarrow R_1 \cdot V &= \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \\ v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \end{pmatrix} - \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^1 + iv^2 & v^0 + v^3 \\ v^0 - v^3 & v^1 - iv^2 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^1 & v^0 \\ v^0 & v^1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow e^{R_1\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\theta}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & \frac{i\theta}{2} \\ \frac{i\theta}{2} & 0 \end{pmatrix}^n \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ -i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \\
\Rightarrow R_2 \cdot V &= \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -iv^1 - v^2 & -iv^0 + v^3 \\ iv^0 + iv^3 & iv^1 - v^2 \end{pmatrix} - \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} iv^1 - v^2 & -iv^0 - iv^3 \\ iv^0 - iv^3 & -iv^1 - v^2 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -v^2 & -iv^0 \\ iv^0 & v^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.6. ÁLGEBRA DE LIE DEL GRUPO DE LORENTZ

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v^0 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow e^{R_2\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i\theta}{2} \\ \frac{i\theta}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \\
\Rightarrow R_3 \cdot V &= \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ -v^1 + iv^2 & -v^0 + v^3 \end{pmatrix} - \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & -v^1 - iv^2 \\ v^1 - iv^2 & -v^0 + v^3 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & 0 \\ 0 & -v^0 + v^3 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} v^3 \\ 0 \\ 0 \\ v^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow e^{R_3\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{i}{n!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{i}{n!} \begin{pmatrix} \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}. \\
&\square
\end{aligned}$$

Note que en particular los generadores R_k generan el subgrupo de rotaciones de $O_+^\uparrow(3,1)$. Note también que las rotaciones sobre \mathbf{e}_3 por un ángulo θ es la misma cosa que una rotación sobre $-\mathbf{e}_3$ por un ángulo $-\theta$, y entonces se pueden identificar con la transformación de Möbius $e^{i\theta}\zeta$.

2.7. Espinores

Si tomamos un vector columna

$$k = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad (2.70)$$

la matriz

$$kk^* = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

es Hermitiana, ya que $(kk^*)^* = kk^*$. Entonces k representa un vector en el espacio de Minkowski. Ya que

$$\det(kk^*) = \xi\bar{\xi}\eta\bar{\eta} - \xi\bar{\eta}\eta\bar{\xi} \quad (2.72)$$

se ve que representa un vector nulo. Más explícitamente, tal vector v satisface

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

y entonces

$$\begin{aligned} v^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}); \\ v^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}); \\ v^2 &= \frac{1}{i\sqrt{2}}(\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}); \\ v^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}). \end{aligned}$$

Se ve que $v^0 > 0$ para cualquier opción de $k \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$, y entonces $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ parametriza (de forma no inyectiva) un subconjunto del cono de luz futuro del origen. De hecho, parametriza al cono de luz entero: si se toma $v^0 > 0$, los vectores en el cono de luz con su componente \mathbf{e}_0 satisfacen

$$(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = (v^0)^2 \quad (2.74)$$

y entonces el punto

$$\left(\frac{v^1}{v^0}, \frac{v^2}{v^0}, \frac{v^3}{v^0} \right) \in \mathbb{R}^3 \quad (2.75)$$

2.7. ESPINORES

esta en S^2 . Si $v^3 \neq v^0$ su proyección estereográfica es

$$\frac{\frac{v^1}{v^0} + i\frac{v^2}{v^0}}{1 - \frac{v^3}{v^0}} = \frac{v^1 + iv^2}{v^0 - v^3} \quad (2.76)$$

y en consecuencia cualquier vector v en el cono de luz futuro esta representado por

$$k = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

donde ξ y η son dos números complejos que satisfacen

$$|\xi|^2 + |\eta|^2 = \sqrt{2}v^0 \frac{\xi}{\eta} = \frac{v^0 + iv^2}{v^0 - v^3} \quad (2.77)$$

que siempre se puede arreglar.

Proposición 33 *Si se tiene $v^3 = v^0$ entonces $v^1 = v^2 = 0$ y*

$$k = \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{2}v^0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

parametriza v .

Demostración:

Sea $v^0 = v^3$ entonces, de la ecuación (2.71) se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2v^0 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{pmatrix} \Rightarrow v^0 = v^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\xi})$$

$\Rightarrow \eta = 0 \Rightarrow v^1 = v^2 = 0$. Como ξ, η deben satisfacer la ecuación (2.77), entonces

$$|\xi|^2 + |\eta|^2 = \sqrt{2}v^0 \Rightarrow |\xi|^2 = \sqrt{2}v^0 \Rightarrow \kappa = \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{2}v^0} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Proposición 34 $\kappa, \iota \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ parametrizan el mismo vector nulo si y sólo si $k = e^{i\theta}\iota$ para alguna $\theta \in \mathbb{R}$. Note también que el cono de luz futuro del origen esta biyectivamente parametrizado por $\frac{\mathbb{C}^2 - \{0\}}{S^1}$.

Demostración:

Sean $\kappa, \iota \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ suponga que parametrizan el mismo vector nulo, es decir, $\kappa = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ y $\iota = \begin{pmatrix} \beta\xi \\ \beta\eta \end{pmatrix}$, los cuales deben satisfacer la ecuación (2.77), es decir:

$$|\xi|^2 + |\eta|^2 = |\beta\xi|^2 + |\beta\eta|^2 = |\beta|^2(|\xi|^2 + |\eta|^2) \Leftrightarrow |\beta|^2 = 1$$

$\Leftrightarrow \beta$ es un punto en el círculo unitario $\Leftrightarrow \beta = e^{i\theta}$, por la ecuación de Euler, para alguna $\theta \in \mathbb{R}$. \square

Ahora, sí $g \in SL(2, \mathbb{C})$ su acción sobre el vector nulo parametrizado por $k \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ esta dado por

$$g(kk^*)g^* = (gk)(gk)^* \quad (2.78)$$

es decir, es el vector nulo parametrizado por gk .

Definición 12 *Un vector $k \in \mathbb{C}$ más el mapeo*

$$k \mapsto kk^* = V = v \quad (2.79)$$

(donde v es un vector nulo en el espacio de Minkowski) es llamado un **espinor**.

Como se ha visto, los espinores que no desaparecen se pueden considerar como *raíces cuadradas* de los vectores nulos que apuntan al futuro más un factor fase. Note que la manera en la cual los espinores parametrizan a los vectores nulos que apuntan al futuro dependen de la identificación de la **sección 2.1**. la cual por sí misma depende de la elección de una base para el espacio de Minkowski. Por eso los espinores siempre están asociados con una base del espacio de Minkowski. Es posible también definir los espinores en la Relatividad general si el espacio tiempo que se considera no es compacto y tiene un marco ortonormal (que varía suavemente) en cada espacio tangente (que se puede identificar con una base del espacio de Minkowski). De esta manera se obtiene un haz vectorial con fibra \mathbb{C}^2 llamado el *haz de spin*, en el que es posible definir una *conexión de spin*. Usando esta conexión, se puede escribir la ecuación de Einstein en la forma de espinor. En parte debido a la forma sencilla en que una transformación de Lorentz actúa sobre un vector nulo parametrizado por un espinor está representada por la multiplicación de la matriz correspondiente en $SL(2, \mathbb{C})$ por el espinor, estas ecuaciones son particularmente simples. Muchas veces soluciones muy complicadas de las

2.8. EL CIELO DE UN OBSERVADOR QUE SE MUEVE RÁPIDAMENTE

ecuaciones de Einstein pueden ser encontradas al usar métodos de espinor (particularmente el espacio tiempo que poseen ciertos tipos de congruencias geodésicas nulas).

Finalmente note que los espinores

$$o = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \iota = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

corresponden a los vectores nulos

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_3) \text{ y } n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_3) \quad (2.81)$$

y estos satisfacen la condición de normalización

$$\langle l, n \rangle = -1.$$

Esta es la razón para el factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en la **sección 2.5**.

2.8. El cielo de un observador que se mueve rápidamente

Se ha desarrollado desde una perspectiva matemática a los vectores spin (o espinores), los cuales se definen en la Relatividad general y, por lo tanto, tienen aplicación en la Física. Sin embargo, por lo que se puede ver en el apéndice, podemos relacionar a los vectores spin (que están asociados a una matriz en $SL(2, \mathbb{C})$) con las transformaciones de Lorentz, y por lo tanto, con las transformaciones de Möbius.

Cuando se observa el cielo nocturno se aprecia la bóveda celeste encima de nosotros, aunque solo se está percibiendo la mitad de dicha bóveda. Si se imagina un observador en el espacio exterior, con una completa visión de la (que se conoce en Física como) esfera celeste \mathcal{S} , se tiene una mejor visión de la esfera de rayos⁴ que constituyen el cono de luz con el observador como el origen. Si otro observador viaja a una velocidad alta con respecto al primer observador y se encuentran en un mismo suceso P , puede haber cierta distorsión entre las esferas celestiales de ambos observadores. Recordando que

⁴Los rayos de luz de los que se habla son los vectores nulos definidos en el espacio tiempo de Minkowski

2.8. EL CIELO DE UN OBSERVADOR QUE SE MUEVE RÁPIDAMENTE

se habla en el contexto de la Relatividad, la descripción del movimiento depende de los observadores, por ejemplo, en un día lluvioso si el observador se encuentra en un automóvil, verá como la lluvia se mueve hacia el, mientras que un observador que se encuentra inmóvil ve la lluvia cayendo verticalmente.

Desde una perspectiva física, puede ser más fácil identificar el tipo de movimiento, pero, dado que en el presente trabajo se enfoca más en la matemática, puede resultar complicado de identificar o relacionar los movimientos, sin embargo, hay una manera sencilla de relacionar ambas perspectivas sin interferir con ambas visiones.

Consideremos un rayo a través del origen. Se sabe que todos los vectores (nulos) diferentes de cero v en este rayo de luz son múltiplos entre sí y por lo tanto

$$\mathbf{e} = \left(\frac{v^1}{v^0}, \frac{v^2}{v^0}, \frac{v^3}{v^0} \right) \in S^2 \quad (2.82)$$

es lo mismo para todos ellos. Así el conjunto S^+ de todos los rayos de luz a través del origen es una esfera S^2 , que se puede identificar con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Con esto en mente, se presenta lo siguiente:

Proposición 35 *Cualquier transformación propia de Lorentz está completamente determinada por su acción en S^2 . Más específicamente, el grupo de transformaciones propias de Lorentz se puede pensar como el grupo de mapas conformes en la 2 esfera que preservan orientación.*

Demostración:

Si $k = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ un vector. Sea $g \in SL(2, \mathbb{C})$ la correspondiente transformación de Lorentz definida como:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

la cual se aplica al vector nulo parametrizado por el vector k , el resultado vuelve a ser un vector nulo que ahora tiene las entradas:

$$g\kappa = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\xi + b\eta \\ c\xi + d\eta \end{pmatrix}$$

y aplicando la observación anterior eso define un punto en el plano completo que está representado por

$$\frac{a\xi + b\eta}{c\xi + d\eta} = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

2.8. EL CIELO DE UN OBSERVADOR QUE SE MUEVE RÁPIDAMENTE

que se puede ver que es una transformación de Möbius. Y se sabe que las transformaciones son automorfismos que preservan orientación. \square

Para entender como se relacionan los cielos de dos observadores, se deben tener dos cosas en cuenta: lo primero es que si $g \in SL(2, \mathbb{C})$ representa la transformación *activa* de Lorentz relacionada a los dos observadores, entonces este cambio se acompaña de la correspondiente transformación *pasiva* de Lorentz (representada por g^{-1}). Lo segundo es que el cielo de un observador no es en realidad S^+ , sino la imagen S^- de S^+ bajo el mapeo antipodal, por la sencilla razón de que un observador coloca un objeto cuya luz se mueve en dirección \mathbf{e} en posición $-\mathbf{e}$ de su esfera celeste.

Utilizando las coordenadas esféricas (θ, φ) en (un subconjunto abierto apropiado) S^2 , la proyección estereográfica esta dada por

$$\zeta(\theta, \varphi) = \frac{\text{sen } \theta}{1 - \cos \theta} e^{i\varphi}.$$

En consecuencia, el mapeo antipodal $(\theta, \varphi) \mapsto (\pi - \theta, \varphi + \pi)$ esta dado por

$$\zeta \mapsto A(\zeta) = -\frac{\text{sen } \theta}{1 + \cos \theta} e^{i\varphi}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} A(\zeta) &= \left(\frac{\text{sen } \theta}{1 - \cos \theta} e^{-i\varphi} \right) \left(-\frac{\text{sen } \theta}{1 + \cos \theta} e^{i\varphi} \right) = -\frac{\text{sen}^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} \\ &= -1 \Leftrightarrow A(\zeta) = -\frac{1}{\bar{\zeta}}. \end{aligned}$$

Suponga que la transformación de Lorentz relativa a los dos observadores corresponde a la transformación de Möbius

$$g(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

de S^+ , entonces el cambio correspondiente de la esfera celestial del observador corresponde a la transformación de Möbius

$$A \circ g^{-1} \circ A(\zeta)$$

de S^- . Ya que

$$g^{-1}(\zeta) = \frac{d\zeta - b}{-c\zeta + a}$$

2.8. EL CIELO DE UN OBSERVADOR QUE SE MUEVE RÁPIDAMENTE

se tiene

$$\begin{aligned} A \circ g^{-1} \circ A(\zeta) &= A \left(\frac{-d\bar{\zeta}^{-1} - b}{c\bar{\zeta}^{-1} + a} \right) \\ &= \frac{\bar{c}\zeta^{-1} + \bar{a}}{\bar{d}\zeta^{-1} + \bar{b}} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right) \\ &= \frac{\bar{a}\zeta + \bar{c}}{\bar{b}\zeta + \bar{d}}. \end{aligned}$$

Entonces se ha probado lo siguiente:

Proposición 36 *Si la transformación de Lorentz relativa a dos observadores esta representada por $g \in SL(2, \mathbb{C})$ entonces las esferas celestiales de los observadores están relacionadas por la transformación de Möbius correspondiente a g^* .*

Ejemplo Consideremos que

$$e^{\theta R_3} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

corresponde a una rotación sobre \mathbf{e}_3 por un ángulo θ . En consecuencia, el cielo del observador rotado se da aplicando al cielo del observador inicial la transformación de Möbius correspondiente a

$$(e^{\theta R_3})^* = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

es decir, $e^{-i\theta}\zeta$. Esto claramente corresponde a rotar la esfera celestial por un ángulo $-\theta$ sobre \mathbf{e}_3 , como se esperaba (si un observador es rotado en una dirección, ve su esfera celeste rotando en la dirección opuesta).

Proposición 37 *El cielo de un observador que se mueve en la dirección \mathbf{e}_3 con velocidad $\tanh u$ se obtiene del cielo de un observador en reposo por la transformación de Möbius $e^u\zeta$. Entonces objetos en el cielo de un observador que se mueve rápidamente se acumulan hacia la dirección del movimiento, un efecto conocido como **aberración**⁵.*

⁵Este efecto se conoce desde finales del siglo XVII, es también llamado *aberración de Bradley* o aberración de la luz, la cual tiene un papel importante en astronomía, ya que dicho efecto altera la posición aparente de las estrellas a lo largo del año y día, esto por los movimientos de rotación y traslación de la Tierra.

2.8. EL CIELO DE UN OBSERVADOR QUE SE MUEVE RÁPIDAMENTE

Demostración:

Recordando que

$$e^{uB_3} = \begin{pmatrix} e^{\frac{u}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{u}{2}} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

la cual corresponde a un impulso sobre \mathbf{e}_3 por un ángulo hiperbólico u . En consecuencia, el cielo del observador con un impulso se da aplicando al cielo del observador inicial la transformación de Möbius correspondiente

$$(e^{uB_3})^* = \begin{pmatrix} e^{\frac{u}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{u}{2}} \end{pmatrix}$$

es decir, un impulso en la dirección \mathbf{e}_3 por un ángulo hiperbólico que puede ser identificado con la transformación de Möbius $e^u \zeta$ si el observador está en reposo. Recordando el ejemplo que nos relaciona el cielo de un observador con una transformación de Möbius. \square

Teoremas sobre las transformaciones de Möbius pueden transformarse fácilmente en teoremas sobre los cielos. Por ejemplo, el teorema que indica que cualquier transformación de Möbius esta completamente determinada por la imagen de tres puntos distintos se traduce como

Proposición 38 *Si un observador ve tres estrellas en su cielo y especifica una nueva posición para cada estrella, existe un único observador que ve las tres estrellas en esas posiciones.*

Demostración:

Note que los puntos fijos de una transformación T en general son aquellos que cumplen que $T(z) = z$. En el caso de una transformación de Möbius, se tiene que:

$$g(\zeta) = \zeta = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

entonces, se define una ecuación cuadrática, ya que:

$$\begin{aligned} \zeta = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} &\Leftrightarrow \zeta(c\zeta + d) = a\zeta + b \Leftrightarrow c\zeta^2 + d\zeta = a\zeta + b \\ &\Leftrightarrow c\zeta^2 + d\zeta - a\zeta - b = 0 \Leftrightarrow c\zeta^2 + (d - a)\zeta - b = 0. \end{aligned}$$

La cual tiene como soluciones:

$$\begin{aligned} \zeta_{\pm} &= \frac{(a - d) \pm \sqrt{(d - a)^2 - 4(-b)c}}{2c} = \frac{(a - d) \pm \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4cb}}{2c} \\ &= \frac{(a - d) \pm \sqrt{a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4cb}}{2c} = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}. \end{aligned}$$

2.8. EL CIELO DE UN OBSERVADOR QUE SE MUEVE RÁPIDAMENTE

Entonces, si una transformación de Möbius tiene tres puntos fijos, no puede ser otra que la identidad. \square

El hecho de que las transformaciones de Möbius son transformaciones conformes se traduce en

Proposición 39 *Los objetos pequeños son vistos por diferentes observadores que tienen la misma forma exacta. Si $h \in SL(2, \mathbb{C})$ representa la transformación activa de Lorentz relacionando a los dos observadores y $g(\zeta)$ es la transformación de Möbius correspondiente a h^* entonces el factor de aumento en cada punto del cielo de los observadores viene dado por la fórmula*

$$ds^2(g(\zeta)) = \frac{g'\bar{g}'(1 + \zeta\bar{\zeta})^2}{(1 + g\bar{g})^2} ds^2(\zeta). \quad (2.83)$$

Lo anterior se puede ver más claramente recordando las ecuaciones (2.32) y (2.40).

Tal vez la relación más sorprendente de este tipo es la versión del cielo del teorema que indica que las transformaciones de Möbius mandan círculos en círculos:

Proposición 40 *Si un observador mira una marca circular de cualquier objeto en su cielo entonces cualquier observador mira una marca circular de ese objeto.*

Demostración:

Suponga que existe una transformación de Möbius $g(\zeta)$ para un observador, el cual mira una marca circular. Dado que la vista de otro observador está dada por $g^*(\zeta)$ la cual también es una transformación de Möbius por la **Proposición 35**. Entonces, dado que dichas transformaciones preservan círculos bajo transformaciones, la marca circular que ve un observador la ve otro observador.

2.8. EL CIELO DE UN OBSERVADOR QUE SE MUEVE RÁPIDAMENTE

Apéndice A

La geometría de los vectores mundo y los vectores spin

En la sección de los preliminares hablo del espacio vectorial de Minkowski \mathbb{V} , el cual, con un producto interno con una signatura deseada, da la llamada tétrada de Minkowski. Así mismo, se definió el producto interno en términos de la norma de Lorentz para definir a los vectores de \mathbb{V} como causales o nulos, lo que nos llevó a definir a una tétrada restringida de Minkowski, la cual es propia y ortocrónica. Posteriormente se definió el espacio-tiempo de Minkowski \mathbb{M} , el cual es el espacio vectorial de Minkowski visto como un espacio de vectores posición, con la transformación entre \mathbb{M} y \mathbb{V} dada por $vec : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{V}$, el cual induce una norma en \mathbb{V} llamada el intervalo cuadrado que preserva la norma de Lorentz y con la cual podemos definir a las transformaciones *activas* (y *pasivas*) de Lorentz, las cuales forman un grupo. Teniendo en cuenta que se va a desarrollar una perspectiva Física, se consideran las direcciones nulas que parten del origen de \mathbb{M} , las cuales pueden ser elementos del cono nulo futuro (o pasado), lo que lleva a la definición de la conocida esfera celestial y al mapeo del cielo. Entonces, la esfera S^+ puede ser vista como la esfera de Riemann, ya que las propiedades del plano de Argand y de dicha esfera reflejan muchas de las propiedades de \mathbb{V} , por lo que se procede a su construcción. Ya que se habla del plano de los números complejos, se habla de las coordenadas proyectivas complejas, con las cuales podemos representar a las direcciones nulas futuras en O , esto para tener un sistema de coordenadas que asegura que cualquier transformación lineal compleja de dos números complejos resultará en una transformación lineal real de una tétrada (T, X, Y, Z) , con lo cual se obtiene la definición

de transformación spin donde se relaciona a una función ζ con los vectores nulos de Minkowski, así como la definición de matriz spin con una condición de normalización. También se puede ver a las transformaciones spin como un grupo ($SL(2, \mathbb{C})$), con lo cual, podemos relacionar a las transformaciones spin con el grupo de las transformaciones de Lorentz.

Al tener la representación de las rotaciones propias por matrices spin unitarias, se representan dichas matrices por cuaterniones las cuales se estudian con detalle, ya que, aunque las matrices spin unitarias y los cuaterniones unitarios son prácticamente la misma cosa, no hay una relación general entre ambos.

Se sigue entonces con las transformaciones de Lorentz en la esfera de Riemann, para apreciar de forma visual dichas transformaciones, así como su explicación, lo que lleva a discutir la relación entre las direcciones nulas y la razón cruzada, así como una pequeña discusión de objetos spinoriales.

A.1. Direcciones nulas y transformaciones spin

En los preliminares, **Sección 1.2.1** se revisó la representación del vector mundo U en términos de las coordenadas de *Minkowski*, en esta sección se examinará otra manera de representar dichos vectores por coordenadas. En particular, se va a definir un sistema coordenado del cono nulo (es decir, el conjunto de vectores nulos) en términos de los números complejos, conduciendo al concepto de vectores spin.

Para evitar el uso de índices, se escribirá T, X, Y, Z para las coordenadas $U^0, U^1, U^2, U^3 \in U$ con respecto a la tétrada restringida de Minkowski $\{\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$:

$$U = T\mathbf{t} + X\mathbf{x} + Y\mathbf{y} + Z\mathbf{z}. \quad (\text{A.1})$$

Para los vectores *nulos* las coordenadas satisfacen

$$T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0. \quad (\text{A.2})$$

Se considerarán solo las *direcciones* nulas en el origen O de espacio-tiempo (de Minkowski). Note que $\pm U$ será considerado para tener direcciones desiguales u opuestas. El espacio abstracto cuyos elementos son el futuro [pasado] direcciones nulas se denotan por $\mathcal{L}^+[\mathcal{L}^-]$. Estos dos espacios pueden ser *representados* en cualquier sistema de coordenadas dado (T, X, Y, Z) por la intersección $S^+[S^-]$ del cono nulo futuro [pasado] con los hiper planos

A.1. DIRECCIONES NULAS Y TRANSFORMACIONES SPIN

$T = 1$ [$T = -1$]. En el espacio Euclidiano (X, Y, Z) -espacio $T = 1$ [$T = -1$], S^+ [S^-] es una esfera unitaria determinada por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (\text{A.3})$$

La dirección de *cualquier* vector a través de O (ya sea nulo o no), pueden

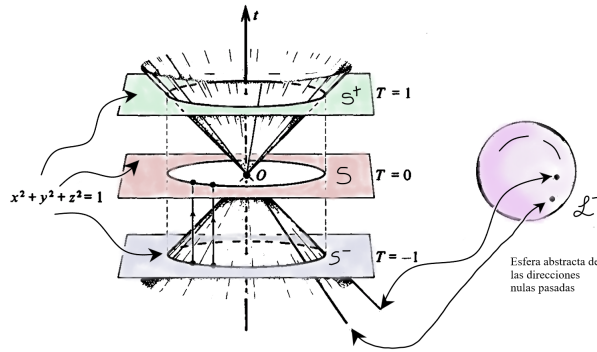


Figura A.1: La esfera abstracta \mathcal{L}^- representa naturalmente la esfera celestial del observador mientras que S^- , o su proyección en S , da una realización más concreta.

ser representados por un punto de $T = 1$ o $T = -1$, a menos que pertenezca al hiper plano $T = 0$. La dirección de U desde el origen es representada, en el hiper plano apropiado, por el punto $(X/|T|, Y/|T|, Z/|T|)$. El interior de S^- representa el conjunto de las direcciones temporales pasadas y el interior de S^+ el conjunto de direcciones temporales futuras. El exterior de estas esferas representa las direcciones tipo espacio.

Ahora, consideremos el significado de S^- y S^+ en términos físicos. Supongamos un observador situado en el evento O en el espacio tiempo. Ahora rayos de luz que atraviesan su ojo corresponden a líneas nulas rectas a través de O , cuyas direcciones pasadas constituye el campo de visión del observador. Éste es \mathcal{L}^- y es representado por la esfera S^- , el cual es una representación geométrica precisa de lo que el observador realmente ‘ve’ siempre que este quieto en relación con el marco, es decir, su velocidad tipo mundo es \mathbf{t} . Para que él pueda imaginarse permanentemente situado en el centro de la esfera unitaria S (su esfera de visión) sobre el cual mapea todo lo que ve en cualquier instante. Las líneas de sus ojos a estos puntos de imágenes en S son las proyecciones del mundo de las líneas tipo mundo de los rayos entrantes a

A.1. DIRECCIONES NULAS Y TRANSFORMACIONES SPIN

su espacio instantáneo $T = 0$. Entonces estas imágenes son congruentes con S^- , y se puede referir a \mathcal{L}^- o S^- como *esfera celestial* de O . El mapeo de las direcciones nulas pasadas en O a los puntos de S^- se llamará el *mapeo del cielo*. Como cualquier vector nulo apuntando al pasado L es inequívocamente (e invariablemente) asociada con un vector nulo apuntando al futuro, es decir $-L$, que también tiene una representación en el campo de visión del observador por la esfera S^+ . Esto puede ser llamado como *mapeo del anti-cielo*. La correspondencia entre S^- y S^+ es simplemente $(x, y, z) \leftrightarrow (-x, -y, -z)$, es decir el mapeo antípoda si se superponen las dos esferas. Esto implica una reversión de la orientación de la esfera, por ejemplo, un vector tangente en S^- girando en sentido de las manecillas del reloj como se ve desde el centro, gira en sentido contrario a las manecillas en S^+ .

La esfera $S^+(S^-)$ puede ser vista como la *esfera de Riemann* de un plano de Argand (-Wessel-Gauss), esta esfera es una bien conocida representación de los números complejos incluido el punto al infinito. Las propiedades familiares del plano de Argand y su esfera de Riemann reflejan muchas de las propiedades geométricas del espacio vectorial de Minkowski \mathbb{V} . En particular, la transformación restringida de Lorentz de \mathbb{V} se verá que esta únicamente determinada por su efecto en la esfera de Riemann (y por lo tanto en las direcciones nulas). Además, se ha visto que los vectores spin pueden recibir una interpretación geométrica bastante directa en la esfera de Riemann.

Se pueden reemplazar las coordenadas x, y, z en S^+ por un solo número complejo, obtenido por la correspondencia estereográfica entre la esfera y el plano como se ve en la Figura A.2. Supongamos el plano Σ , que representamos con la ecuación $z = 0$ en el espacio euclidiano de dimensión 3, con el hiper plano $T = 1$, y el mapeo de los puntos de S^+ a este plano proyectando desde el polo norte $N(1, 0, 0, 1)$ ¹. Sean $P(1, x, y, z)$ y $P'(1, X', Y', 0)$ denota los puntos correspondientes en S^+ y Σ . Sean los puntos A y B que denotan la distancia de dos perpendiculares dibujadas de P a CP' y CN , respectivamente. Etiquetando los puntos de Σ por el parámetro complejo único

$$\zeta = X' + iY', \quad (\text{A.4})$$

se tiene

$$x + iy = h\zeta, \quad (\text{A.5})$$

¹Notemos que la primera coordenada del hiper plano $T = 1$, el razonamiento es análogo para los hiperplanos $T = 0, T = -1$.

A.1. DIRECCIONES NULAS Y TRANSFORMACIONES SPIN

donde

$$h = \frac{CA}{CP'} = \frac{NP}{NP'} = \frac{NB}{NC} = 1 - z.$$

Por lo tanto la expresión para ζ en términos de las coordenadas $(1, x, y, z)$ del punto P se convierte

$$\zeta = \frac{x + iy}{1 - z}. \quad (\text{A.6})$$

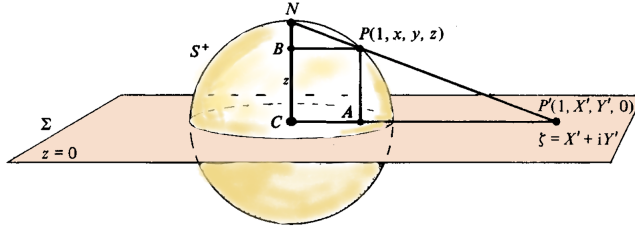


Figura A.2: Proyección estereográfica de S^+ en el plano de Argand

Para obtener las relaciones inversas, primero se eliminan la x y la y de (A.6) por medio de la ecuación (A.3):

$$\zeta \bar{\zeta} = \frac{x^2 + y^2}{(1 - z)^2} = \frac{1 + z}{1 - z} \quad (\text{A.7})$$

resolviendo la ecuación (A.7) para z y sustituyendo en (A.6), se obtiene

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta \bar{\zeta} + 1}, y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(\zeta \bar{\zeta} + 1)}, z = \frac{\zeta \bar{\zeta} - 1}{\zeta \bar{\zeta} + 1}. \quad (\text{A.8})$$

Las ecuaciones (A.6) y (A.8) son las expresiones algebraicas para la correspondencia estereográfica estándar entre el plano de Argand de ζ y en el (x, y, z) -espacio centrado en $(0, 0, 0)$. La correspondencia es uno a uno siempre que se tenga en cuenta $\zeta = \infty$ como un punto añadido al plano Argand, y asociando este punto con el polo norte de la esfera. En este sentido la esfera S^+ da una realización estándar del plano de Argand de ζ con $\zeta = \infty$ añadido: esta es la *esfera de Riemann* de ζ .

Como una alternativa a una elección de coordenadas de S^+ se pueden usar las coordenadas polares esféricas estándar, relacionadas con x, y, z por las ecuaciones:

$$x = \text{sen } \theta \cos \phi, y = \text{sen } \theta \sin \phi, z = \cos \theta \quad (\text{A.9})$$

Con lo cual se tiene lo siguiente:

Proposición 41 *La relación entre ζ y (θ, ϕ) es*

$$\zeta = e^{i\phi} \cot \frac{\theta}{2}. \quad (\text{A.10})$$

Demostración:

De la formula (A.6) se tiene que $\zeta = \frac{x+iy}{1-z}$, entonces utilizando las ecuaciones en (A.9):

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{x+iy}{1-z} = \frac{\text{sen } \theta \cos \phi + i(\text{sen } \theta \text{ sen } \phi)}{1 - \cos \theta} \\ &= \frac{\text{sen } \theta}{1 - \cos \theta} (\cos \phi + i \text{ sen } \phi) := \frac{\text{sen } \theta}{1 - \cos \theta} e^{i\phi} \\ &\Rightarrow \frac{\text{sen } \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{\text{sen } \theta}{1 - \cos \theta} \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) \\ &= \frac{\text{sen } \theta (1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\text{sen } \theta (1 + \cos \theta)}{\text{sen}^2 \theta} \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{\text{sen } \theta}. \end{aligned}$$

Ahora, note que:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &:= \text{sen } \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \text{ sen } \frac{\theta}{2} = 2 \text{ sen } \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \cos \theta &:= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \text{sen } \frac{\theta}{2} \text{ sen } \frac{\theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Usando lo anterior, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} 2 \text{ sen}^2 \frac{\theta}{2} &= 1 - \cos \theta = 1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}, \\ 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} &= 1 + \cos \theta = 1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Entonces, si dividimos, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \text{ sen}^2 \frac{\theta}{2}} &= \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \\ \cot^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) = \frac{(1 + \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(1 + \cos \theta)^2}{\text{sen}^2 \theta}. \end{aligned}$$

A.1. DIRECCIONES NULAS Y TRANSFORMACIONES SPIN

Sacando raíz cuadrada a ambos lados, se obtiene entonces que:

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Entonces, se tiene que

$$\zeta = e^{i\phi} \cot \frac{\theta}{2}. \square$$

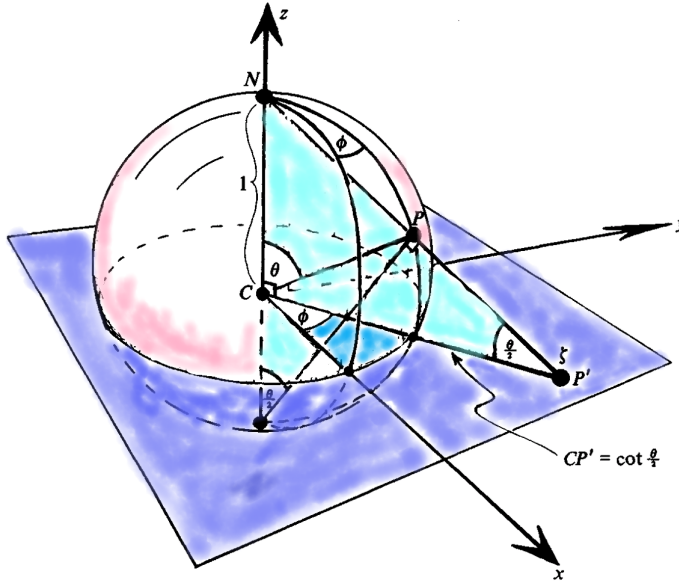


Figura A.3: La geometría de la ecuación $\zeta = e^{i\phi} \cot \frac{\theta}{2}$ que relaciona los ángulos polares esféricos θ , ϕ a las coordenadas complejas estereográficas ζ .

Esta relación también puede ser obtenida al observar la Figura A.3 y aplicando el mapeo anti-cielo

$$\text{cono futuro nulo} \rightarrow S^+ \rightarrow \Sigma.$$

También estaremos interesados en la fórmula correspondiente para el mapeo cielo, en el cual cada dirección nula en O es representada por un típico evento *pasado* $-(1, x, y, z)$ en lugar de un evento *futuro* $+(1, x, y, z)$. Si se requiere ζ en ambos casos para representar la misma *línea* nula, entonces en S^+ y S^- deben corresponder a puntos antípodas $\pm(x, y, z)$. Las fórmulas relevantes son

A.1. DIRECCIONES NULAS Y TRANSFORMACIONES SPIN

por lo tanto obtenidas de (A.6), (A.7), (A.8) y (A.10) por la transformación antipodal $(x, y, z) \mapsto -(x, y, z)$ o equivalentemente, $(\theta, \phi) \mapsto (\pi - \theta, \pi + \phi)$. La ecuación (A.10)² se convierte

$$\zeta = -e^{i\phi} \tan \frac{\theta}{2}. \quad (\text{A.11})$$

Como ya se vio anteriormente, en la Figura A.1, consideramos que las direcciones nulas [futuras o pasadas] a través de O , son representados por un punto que es representado en \mathcal{L}^- , con los hiperplanos $T = \pm 1$, esto en el sistema de coordenadas (T, X, Y, Z) . Ahora se debe notar que esta representación de direcciones nulas se conserva bajo la proyección estereográfica, es decir, la correspondencia del conjunto de direcciones nulas futura [o pasado] en O y el ζ -plano complejo pueden ser obtenido con la proyección estereográfica. Note que en la Figura A.4, en el cual se tiene el cono de direcciones nulas,

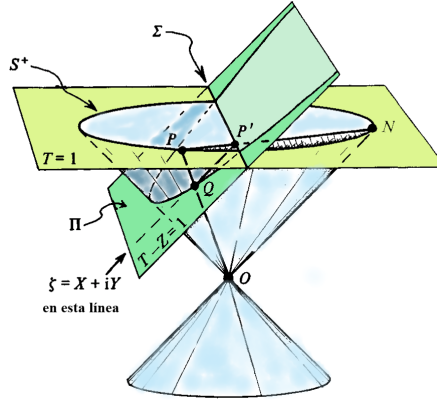


Figura A.4: Como el plano a través de ON varía proporcionalmente la proyección estereográfica $P \mapsto P'$ y también las correspondencias $P \mapsto Q$ y $Q \mapsto P'$ (La intersección parabólica de Π con el cono tiene la misma métrica intrínseca como el plano Σ , el plano de Argand de ζ).

así como el (T, X, Y, Z) - espacio con el hiperplano nulo Π , cuya ecuación es $T - Z = 1$, el cual corta al hiperplano espacial $T = 1$. Considerando una línea recta nula a través del origen O que se encuentra con la circunferencia que se forma al intersectar el plano $T = 1$ con S^+ . Considere la línea que

²Es decir, la ecuación (A.11) es el efecto en el mapeo antípoda $\zeta \mapsto -\frac{1}{\zeta}$

contiene al punto $P = (1, x, y, z)$ que también contiene al punto

$$Q = \left(\frac{1}{1-z}, \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, \frac{z}{1-z} \right)$$

que yace en el plano Π . Las coordenadas X', Y' de Q son precisamente

$$X' = \frac{x}{1-z}, Y' = \frac{y}{1-z}$$

con

$$\zeta = X' + iY'$$

como en la ecuación (A.4) y (A.6), y entonces ζ es obtenido por una proyección ortogonal simple de Π a Σ . En el caso excepcional $\zeta = \infty$ ($z = 1$), la línea nula que pasa a través de O es paralela a Π y se extiende al infinito. Es decir, en esta relación de la proyección estereográfica, (al igual que en la figura A.1) los puntos P, Q son colineales y están en la misma clase de equivalencia. Además, el plano $T - Z = 1$ corta al cono y además corta una proyección de la esfera de Riemann S^+ en el plano de Argand.

Observemos la Figura A.4 para aclarar la relación geométrica entre dos diferentes construcciones. Sea $N = (1, 0, 0, 1)$ el polo norte de S^+ , considere OPQ una línea recta nula y $P \in S^+$ y $Q \in \Pi$. Sea P' una proyección ortogonal de Q en el plano $\Sigma(T = 1, Z = 0)$. Entonces la dirección de OP' es $1 : 0 : 0 : 1$, la misma que la de ON . En consecuencia P', Q, O, N son coplanares. Y P yace en su plano ya que yace en OQ . Pero P', P, N también yacen en el hiper plano $T = 1$. Ellos son por lo tanto colineales³, y se sigue que P' es la proyección estereográfica de P (de S^+ a Σ con N como polo). La equivalencia requerida se establece así, geoméricamente.

A.1.1. Las transformaciones de Lorentz y las transformaciones Spin

Para evitar el uso de la coordenada ($\zeta = \infty$) para el punto $(1, 0, 0, 1)$ en el polo norte de S^+ es conveniente a veces etiquetar los puntos de S^+ no por un sólo número complejo ζ más bien por un par (ξ, η) de números complejos (*ambos* no cero), donde

$$\zeta := \frac{\xi}{\eta}. \tag{A.12}$$

³En *cuatro* dimensiones, la intersección de un plano (dos ecuaciones lineales) con un hiper plano (una ecuación lineal) es una línea recta

A.1. DIRECCIONES NULAS Y TRANSFORMACIONES SPIN

Estas deben ser las coordenadas *projectivas* complejas (homogéneas), de manera que los pares (ξ, η) y $(\lambda\xi, \lambda\eta)$ representan el mismo punto en S^+ , donde λ es cualquier número complejo diferente de cero. Con estas coordenadas, el punto adicional al infinito $\zeta = \infty$ es dado por el punto $(1, 0)$. Entonces se considera a S^+ como la realización de una *línea projectiva compleja*. Escribiendo en términos de estas coordenadas homogéneas complejas, las ecuaciones de (A.8) se convierten en:

$$x = \frac{\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}}, y = \frac{\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}}{i(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})}, z = \frac{\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}}. \quad (\text{A.13})$$

Notando que x, y, z son homogéneas de grado cero en (ξ, η) , y también son invariantes bajo un cambio de escala de ξ, η .

Además el papel del punto $P = (1, x, y, z)$ en S^+ era simplemente el representante de una dirección futura nula en O . Se puede elegir cualquier otro punto en la línea OP como representante de la misma dirección nula. En particular, eligiendo el punto R en OP cuyas coordenadas (T, X, Y, Z) son obtenidas de P multiplicando por el factor $(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})/\sqrt{2}$. Esto eliminará los denominadores en (A.13).⁴ Entonces $\mathbf{K} := \overrightarrow{OR}$ tiene coordenadas

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}), & X &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}) \\ Y &= \frac{1}{i\sqrt{2}}(\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}), & Z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

A diferencia del punto P , sin embargo, R no es independiente de la escala real de (ξ, η) , es decir $(\xi, \eta) \rightarrow (r\xi, r\eta), r \in \mathbb{R}$, aunque es independiente de la escala fase $(\xi, \eta) \rightarrow (e^{i\theta}\xi, e^{i\theta}\eta), \theta \in \mathbb{R}$. Entonces, la posición de R no es solamente una función de ζ sola, aunque la dirección OQ depende sólo de ζ . De las ecuaciones en (A.14) se ve que cualquier transformación lineal compleja de ξ y η resultarán en una transformación lineal real de (T, X, Y, Z) , que se da más adelante. Como los vectores nulos abarcan todo el espacio \mathbb{V} , una transformación lineal de los vectores nulos induce una transformación lineal de \mathbb{V} , que es dado formalmente por la misma ecuación en las coordenadas generales (T, X, Y, Z) . Bajo tal transformación la propiedad (A.2) es preservada. Entonces se tiene también la transformación de Lorentz junto con posiblemente la dilatación. En cualquier caso, el efecto en las *direcciones*

⁴El factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ se incluye para su posterior conveniencia.

A.1. DIRECCIONES NULAS Y TRANSFORMACIONES SPIN

nulas en O serán las mismas que en la transformación de Lorentz, ya que la dilatación no produce efecto en la dirección.

Considere entonces, una transformación (no singular) lineal compleja de ξ y η :

$$\begin{aligned}\xi &\mapsto \tilde{\xi} = \alpha\xi + \beta\eta \\ \eta &\mapsto \tilde{\eta} = \gamma\xi + \delta\eta.\end{aligned}\tag{A.15}$$

Aquí $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son números complejos arbitrarios sujeta a la única condición $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Expresada en términos de ζ la transformación se convierte⁵:

$$\zeta \mapsto \tilde{\zeta} = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}.\tag{A.16}$$

Se puede normalizar, sin pérdida de generalidad, a la transformación $\bar{\zeta}$ imponiendo la *condición unimodular*:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.\tag{A.17}$$

La transformación (A.15) (o (A.16)), sujeta a la condición anterior es llamada la *transformación spin* en el contexto donde ζ esta relacionada a los vectores nulos de Minkowski a través de las ecuaciones (A.12) y (A.14). Estas ecuaciones implican

$$\zeta = \frac{X + iY}{T - Z} = \frac{T + Z}{X - iY}.\tag{A.18}$$

En el mismo contexto, se define la *matriz spin* \mathbf{A} por

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \det \mathbf{A} = 1.\tag{A.19}$$

La última condición es simplemente la *condición de normalización* (A.17). En términos de \mathbf{A} la ecuación (A.15) toma la forma de:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.\tag{A.20}$$

Con esta última ecuación se ve que la composición de dos transformaciones spin consecutivas es de nuevo una transformación spin: la matriz spin de la composición es dada por el producto de los factores de las matrices spin.

⁵Una transformación bilineal de este tipo es de hecho la transformación holomorfa global más general de la esfera de Riemann en si misma (preserva orientación y es conforme, es decir analítica compleja)

Proposición 42 *En particular, cualquier matriz spin tiene una inversa*

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

que también es una matriz spin.

Demostración:

Sea \mathbf{A} una matriz spin, definida como en (A.19). Por demostrar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = Id = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & -\alpha\beta + \beta\alpha \\ \gamma\delta - \delta\gamma & -\gamma\beta + \delta\alpha \end{pmatrix} \text{ por (A.17)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id. \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta\alpha - \beta\gamma & \delta\beta - \beta\delta \\ -\gamma\alpha + \alpha\gamma & -\gamma\beta + \alpha\delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id. \end{aligned}$$

Ahora, se debe demostrar que \mathbf{A}^{-1} es una matriz spin, es decir, que $\det \mathbf{A}^{-1} = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}^{-1} &= \det \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \delta\alpha - (-\gamma)(-\beta) = \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, \mathbf{A}^{-1} es la matriz inversa de \mathbf{A} y es una matriz spin. \square

Además, se tiene que

Proposición 43 *Las transformaciones spin forman un grupo, llamado como $SL(2, \mathbb{C})$.*

Demostración:

Considere la operación multiplicación entre matrices como la operación del grupo. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in SL(2, \mathbb{C})$

1. **Cerradura:** P. d. $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in SL(2, \mathbb{C}) \Rightarrow \mathbf{AB} \in SL(2, \mathbb{C})$. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in SL(2, \mathbb{C})$ entonces

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & \eta \\ \theta & \iota \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\epsilon + \beta\theta & \alpha\eta + \beta\iota \\ \gamma\epsilon + \delta\theta & \gamma\eta + \delta\iota \end{pmatrix}$$

Con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta, \theta, \iota \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha\epsilon + \beta\theta := \alpha', \alpha\eta + \beta\iota := \beta', \gamma\epsilon + \delta\theta := \gamma', \gamma\eta + \delta\iota := \delta' \in \mathbb{C} \therefore \mathbf{AB} \in SL(2, \mathbb{C})$.

2. **Asociatividad:** P.d. $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in SL(2, \mathbb{C}) \Rightarrow (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in SL(2, \mathbb{C})$ entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & \eta \\ \theta & \iota \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\epsilon + \beta\theta & \alpha\eta + \beta\iota \\ \gamma\epsilon + \delta\theta & \gamma\eta + \delta\iota \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\epsilon\kappa + \beta\theta\kappa & \alpha\eta\mu + \beta\iota\mu \\ \gamma\epsilon\lambda + \delta\theta\lambda & \gamma\eta\nu + \delta\iota\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon\kappa + \theta\kappa & \eta\mu + \iota\mu \\ \epsilon\lambda + \theta\lambda & \eta\nu + \iota\nu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \epsilon & \eta \\ \theta & \iota \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \right) = \mathbf{A}(\mathbf{BC}). \end{aligned}$$

3. **Existencia del neutro:** P.d. \exists una matriz spin definida como Id que deja invariante bajo la multiplicación a otra matriz spin, es decir $\forall \mathbf{A} \in SL(2, \mathbb{C}) \Rightarrow Id\mathbf{A} = \mathbf{A}Id = \mathbf{A}$. Sean $Id \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \mathbf{A} \in SL(2, \mathbb{C})$ entonces

$$\begin{aligned} Id\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(1) + \gamma(0) & \beta(1) + \delta(0) \\ \alpha(0) + \gamma(1) & \beta(0) + \delta(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha(1) + \gamma(0) & \beta(1) + \delta(0) \\ \alpha(0) + \gamma(1) & \beta(0) + \delta(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}Id. \end{aligned}$$

4. **Existencia del inverso:** P.d. $\forall \mathbf{A} \exists \mathbf{A}^{-1} | \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = Id$. Esto esta demostrado por la **Proposición 7**.

Dos matrices spin \mathbf{A} y $-\mathbf{A}$ dan lugar a la *misma* transformación de ζ a pesar de que definen diferentes matrices spin. De manera converso, suponiendo que

A.1. DIRECCIONES NULAS Y TRANSFORMACIONES SPIN

\mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices spin cada una de las cuales define la misma transformación de ζ , entonces $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ es una matriz spin que define la transformación identidad en ζ , de la ecuación (A.16) se tiene que $\beta = \gamma = 0, \alpha = \delta$ y de la normalización (A.17) se implica que $\alpha = \delta = \pm 1$, entonces $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \pm \mathbf{I}$ (la matriz identidad), donde $\mathbf{A} = \pm \mathbf{B}$. Una transformación spin es por lo tanto definida *únicamente por el signo* y por su efecto en la esfera de Riemann de ζ .

Examinando la transformación spin (A.20) en las coordenadas (T, X, Y, Z) , se observa que (A.14) puede ser invertida y re expresada como:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T + Z & X + iY \\ X - iY & T - Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \bar{\xi} & \xi \bar{\eta} \\ \eta \bar{\xi} & \eta \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

De esto, se pueden ver los efectos de la transformación spin (A.20):

$$\begin{pmatrix} T + Z & X + iY \\ X - iY & T - Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{T} + \tilde{Z} & \tilde{X} + i\tilde{Y} \\ \tilde{X} - i\tilde{Y} & \tilde{T} - \tilde{Z} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} T + Z & X + iY \\ X - iY & T - Z \end{pmatrix} \mathbf{A}^*, \quad (\text{A.23})$$

donde \mathbf{A}^* denota la transpuesta conjugada de \mathbf{A} . Como se mencionó, esta es una transformación lineal de (T, X, Y, Z) , es real y preserva la condición $T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$. Además, si

$$U = T\mathbf{t} + X\mathbf{x} + Y\mathbf{y} + ZZ \quad (\text{A.24})$$

es *cualquier* vector mundo (es decir, *no necesariamente nulo*), entonces la matriz spin \mathbf{A} todavía define una transformación de \mathbf{U} de acuerdo con (A.23). Esta transformación es no solo lineal y real, pero en adición deja la forma $T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$ *invariante*. Para esta forma es sólo el determinante de la matriz izquierda de la ecuación (A.23) y el determinante de la matriz del lado derecho es simplemente esta forma multiplicada por el $\det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^*$, que es 1. Entonces la ecuación (A.23) define una *transformación de Lorentz*. Considerada como una transformación en (T, X, Y, Z) , su forma explícita es

$$\begin{pmatrix} T \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \begin{pmatrix} T \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} & \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} + \gamma\bar{\delta} + \delta\bar{\gamma} & i(\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha} + \gamma\bar{\delta} - \delta\bar{\gamma}) & \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta} \\ \alpha\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha} + \beta\bar{\delta} + \delta\bar{\beta} & \alpha\bar{\delta} + \delta\bar{\alpha} + \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta} & i(\alpha\bar{\delta} - \delta\bar{\alpha} - \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta}) & \alpha\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha} - \beta\bar{\delta} - \delta\bar{\beta} \\ i(\gamma\bar{\alpha} - \alpha\bar{\gamma} + \delta\bar{\beta} - \beta\bar{\delta}) & i(\delta\bar{\alpha} - \alpha\bar{\delta} + \gamma\bar{\beta} - \beta\bar{\gamma}) & \alpha\bar{\delta} - \delta\bar{\alpha} - \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta} & i(\gamma\bar{\alpha} - \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} - \delta\bar{\beta}) \\ \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta} & \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} - \gamma\bar{\delta} - \delta\bar{\gamma} & i(\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha} - \gamma\bar{\delta} + \delta\bar{\gamma}) & \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

En efecto, esta debe ser una transformación *restringida* de Lorentz, por las siguientes razones:

1. Una transformación de Lorentz continua con la identidad debe ser restringida, ya que ningún movimiento continuo de Lorentz puede transferir el eje tiempo positivo desde el interior del cono nulo futuro hacia adentro del cono nulo pasado, o lograr una reflexión espacial.
2. La transformación (A.23) es evidentemente continua con la identidad si \mathbf{A} es continua.
3. \mathbf{A} , como cualquier matriz spin, es continua con la identidad. Considerando la matriz $\mathbf{B} := \lambda \mathbf{I} + (1 - \lambda)\mathbf{A}$.

El punto 3. se justifica de la siguiente manera: ya que la matriz \mathbf{A} es singular para a lo más dos valores de λ , se pueden encontrar un camino en el λ -plano complejo de 0 a 1 que evite estos valores. Entonces $(\det \mathbf{B})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}$ define una sucesión continua de las transformaciones spin de \mathbf{A} a \mathbf{I} o $-\mathbf{I}$, esto último ocurre si el camino es tal que $(\det \mathbf{B})^{-\frac{1}{2}}$ cambia de 1 a -1, como es inevitable, por ejemplo si $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$. Pero $-\mathbf{I}$ es continua con \mathbf{I} , en la transformación spin diagonal $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Más adelante se da una prueba constructiva de esto, por el contrario, cualquier transformación restringida de Lorentz se puede expresar de la forma (A.23), con \mathbf{A} una matriz spin. Entonces se establece el siguiente resultado:

Proposición 44 *A cada transformación spin le corresponde una transformación restringida de Lorentz; por otro lado, a cada transformación restringida de Lorentz le corresponden dos transformaciones spin y una es la negativa de la otra.*

La parte inversa requerida de este resultado es una consecuencia simple de una propiedad general de los grupos de Lie. Para el subgrupo del grupo de Lorentz que surge en la forma de la ecuación (A.23) debe tener la dimensionalidad completa seis. Esto es porque las matrices spin forman un sistema real de dimensión seis, es decir de dimensión tres compleja, y porque sólo un número discreto (a saber dos) de las matrices spin define una sola transformación de Lorentz. Este grupo dimensional-completo debe contener el componente entero contenido de la identidad del grupo de Lorentz.

Sin embargo también se debe dar una demostración alternativa de la parte inversa de la proposición simplemente construyendo explícitamente aquella

A.1. DIRECCIONES NULAS Y TRANSFORMACIONES SPIN

matriz spin que corresponde a cierta transformación básica de Lorentz suficiente para generalizar el grupo entero. Estas transformaciones básicas son rotaciones espaciales e ‘impulsos’, es decir transformaciones velocidad pura, como en las ecuaciones conocidas

$$\begin{aligned}
 \tilde{T} &= (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}(T + vZ) \\
 \tilde{X} &= X \\
 \tilde{Y} &= Y \\
 \tilde{Z} &= (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}(Z + vT),
 \end{aligned}
 \tag{A.27}$$

en las cuales v es el *parámetro velocidad*. Cualquier transformación (activa) restringida de Lorentz puede ser compuesta de una rotación espacial adecuada, seguida de un impulso en la dirección z , seguido finalmente por una segunda rotación del espacio. Por que la transformación puede ser caracterizada por su efecto en la tétrada de Minkowski. Eligiendo la primera rotación para llevar z en el plano espacio-tiempo que contiene las \mathbf{t} direcciones inicial y final. Los incrementos (A.27) envían \mathbf{t} en su dirección final, y la segunda rotación orienta adecuadamente \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} . Entonces se debe mostrar que el espacio de rotaciones y \mathbf{z} -impulsos pueden ser obtenidos de las transformaciones spin. Considere las *rotaciones* primero, estableciendo el siguiente resultado:

Proposición 45 *Cada transformación spin unitaria corresponde a una única rotación propia de S^+ ; inversamente cada rotación propia de S^+ corresponde precisamente a dos transformaciones spin, una siendo la negativa de la otra. (Una transformación spin unitaria es una dada por una matriz spin que es unitaria: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*$.)*

Primero se debe tener en cuenta el significado geométrico de las transformaciones. La transformación de Lorentz es vista como *activa*. Las esferas S^+ y S^- son vistas como parte del marco de coordenadas, y no participan de la transformación: como cada dirección nula futura [pasada] se desplaza, su representación en $S^+[S^-]$ se turna. Por ejemplo, una rotación de $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ que deja \mathbf{t} sin alterar corresponde a la rotación de las imágenes en $S^+[S^-]$, la que se puede llamar vagamente una rotación de $S^+[S^-]$. El plano Σ también es parte de la estructura coordenada, y permanece fijo mientras las imágenes ζ de las líneas nulas se desplazan. De nuevo, vagamente, se puede hablar de los movimientos de Σ . (Por su puesto, S^+ , S^- , Σ no son más invariables que

los diversos hiperplanos coordenados: vectores que terminan en ellos generalmente no lo harán después de que la transformación de Lorentz ha sido aplicada.) Es importante recordar que, mientras se tiene una representación sólo de las direcciones nulas de \mathbb{V} , sus transformaciones únicamente determinan la transformación de *todos* los vectores de \mathbb{V} .

De la transformación (A.23) se sigue que T es invariante bajo una transformación spin unitaria, ya que la traza (que es igual a $2T$) es siempre invariante bajo transformaciones unitarias. Equivalentemente se puede ver esta invariancia de la expresión $\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}$, que es la norma Hermitiana de (ξ, η) . Las transformaciones restringidas de Lorentz para las cuales T es invariante son simplemente rotaciones propias de S^+ (ya que deja $X^2 + Y^2 + Z^2$ invariante) según sea necesario. Para demostrar lo contrario explícitamente, note que cualquier rotación propia $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \rightarrow (\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$ de S^+ puede ser compuesta por rotaciones sucesivas sobre los ejes Y, Z . Para la triada $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$ es determinada por las coordenadas polares θ, ϕ de z' relativa a $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ y por el ángulo ψ subtendido por el plano \mathbf{x}', \mathbf{y}' con los de \mathbf{z}, \mathbf{z}' (se habla de los *Ángulos de la mecánica de Euler*). Entonces una rotación con respecto de un ángulo ψ sobre \mathbf{z} , seguida de una rotación con respecto de un ángulo θ sobre el \mathbf{z} original, lo que logrará la transformación requerida. Se debe demostrar como estas rotaciones elementales pueden ser representadas por transformaciones spin unitarias. De ahí se sigue que cualquier rotación propia de S^+ pueden ser representadas, ya que un producto de matrices unitarias es unitario.

Una rotación de S^+ sobre el eje z , con respecto del ángulo ψ , evidentemente surge de una rotación del plano de Argand sobre el origen, con respecto del ángulo ψ , esto esta dado por

$$\tilde{\zeta} = e^{i\psi} \zeta \quad (\text{A.28})$$

es decir, por la transformación spin

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

Lo siguiente, se afirma que una rotación de S^+ con respecto de un ángulo θ sobre el eje y es representado por la transformación spin unitaria siguiente:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\text{sen } \theta/2 \\ \text{sen } \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

Esta última es unitaria, la cual representa *alguna* rotación. Más aún, ya que $\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}$ es invariante, tanto como $\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}$, se sigue de (A.13) que las

A.1. DIRECCIONES NULAS Y TRANSFORMACIONES SPIN

coordenadas y de los puntos en S^+ son invariantes bajo (A.30). Por lo tanto la rotación es sobre el eje y . Finalmente, la transformación (A.30) envía el punto $(1, 0, 0, 1)$ a $(1, \sin \theta, 0, \cos \theta)$, así el ángulo de rotación es en efecto θ . De manera análoga se verifica que la transformación spin unitaria

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \cos \chi/2 & -\operatorname{sen} \chi/2 \\ \operatorname{sen} \chi/2 & \cos \chi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

corresponde a una rotación a través del ángulo χ sobre el eje x . Con esto la **Proposición 44**. Como referencia se exhibe la matriz spin resultante correspondiente a la rotación (general) a través de los ángulos de Euler θ, ϕ, ψ :

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\phi+\psi)/2} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{i(\phi-\psi)/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i(\phi-\psi)/2} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\phi+\psi)/2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

Sus elementos son los parámetros de la rotación de Cayley-Klein de la mecánica.

Se completa entonces la prueba de la **Proposición 43** mostrando que cada incremento- z puede ser obtenido de una transformación spin. Para hacer esto, se reescribe (A.27) en la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{T} + \tilde{Z} &= w(T + Z), \\ \tilde{T} - \tilde{Z} &= w^{-1}(T - Z), \\ \tilde{X} &= X, \\ \tilde{Y} &= Y \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

donde

$$w = \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.34})$$

Aquí w es el factor relativista de Doppler y $\log w = \tanh^{-1} v$ es la ‘rapidez’ correspondiente a v . Por la referencia a (A.23), se puede ver que (A.33) se logra mediante la transformación spin:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} w^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & w^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

o en términos del plano de Argand ζ , por la expresión simple:

$$\tilde{\zeta} = w\zeta. \quad (\text{A.36})$$

Entonces, la **Proposición 43** queda establecida.

Finalmente *cualquier* impulso puro (dos hiperplanos ortogonales a \mathbf{t} quedan invariantes, por ejemplo los planos $X = 0, Y = 0$ de arriba) corresponden a la matriz spin Hermitiana positiva [o negativa] definida, y viceversa. Para el impulso- z (A.35) es de esta forma, y para obtener un impulso en cualquier otra dirección se necesita simplemente rotar esa dirección en la dirección- z , aplicar un impulso- z , y rotar hacia atrás. Esto corresponde a la matriz spin $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}$, donde \mathbf{A} es la rotación requerida y \mathbf{B} es el aumento- z ; por la teoría de la matriz elemental, $\mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{A}$ es aún Hermitiana positiva [negativa] definida. Por otro lado, cualquier matriz definida Hermitiana positiva [-negativa] $\tilde{\mathbf{B}}$ puede ser diagonalizada por una matriz unitaria $\mathbf{A} : \mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{A}^{-1} = \text{diag}(\alpha, \delta)$, la cual debe ser de la forma $\pm \text{diag}(w^{\frac{1}{2}}, w^{-\frac{1}{2}}) = \pm \mathbf{B}$, ya que se preserva la Hermiticidad, la definición y el determinante unitario. En consecuencia $\tilde{\mathbf{B}}$ es de la forma $\pm \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}$ y el resultado queda establecido.

Es fácil ver por lo descrito anteriormente que *cualquier* transformación restringida de Lorentz L es únicamente la composición de *un* aumento seguido de *una* rotación del espacio propia, y también el camino contrario. Ahora se necesita determinar la dirección espacial \mathbf{w} ortogonal a \mathbf{t} en el plano que contiene al original y final \mathbf{t} , aplicando un ‘aumento’ \mathbf{w} que envía \mathbf{t} a su posición final, y entonces aplica la rotación espacial para re-orientar $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ adecuadamente.⁶ Evidentemente, si realizamos estas transformaciones en reversa, se tiene una descomposición de L^{-1} .

A.1.2. Relación con los cuaterniones

La representación de las rotaciones propias por matrices spin unitarias es efectivamente la misma que sus representaciones en términos de los cuaterniones, es decir el conjunto

$$\mathbf{I} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.37})$$

Entonces estas matrices tienen la siguiente tabla de multiplicación: la cual define $\mathbf{I}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ y \mathbf{k} como los cuaterniones elementales. El cuaternión

⁶Se sigue que la topología del grupo restringido de Lorentz es el producto topológico del grupo de rotaciones con \mathbb{R}^3 .

A.1. DIRECCIONES NULAS Y TRANSFORMACIONES SPIN

	I	i	j	k
I	I	i	j	k
i	i	-I	k	-j
j	j	-k	-I	i
k	k	j	-i	-I

Tabla A.1: Multiplicación

general será representado por la matriz:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d = \begin{pmatrix} a + id & -c + ib \\ c + ib & a - id \end{pmatrix}, \quad (\text{A.38})$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. La suma o el producto de dos cuaterniones es obtenido simplemente como la matriz producto. De nuevo \mathbf{A}^* es definida por la correspondiente operación matricial, y se puede notar que:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{I}a - (\mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d). \quad (\text{A.39})$$

La matriz \mathbf{A} en (A.38) será una matriz spin unitaria si es unimodular y unitaria. Pero de ese mismo sistema de ecuaciones se tiene que:

$$\det \mathbf{A} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \quad (\text{A.40})$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^* = \mathbf{I}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2), \quad (\text{A.41})$$

también ambas condiciones se satisfacen si el cuaternión tiene norma unitaria:

$$N(\mathbf{A}) := a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \quad (\text{A.42})$$

Entonces, los cuaterniones unitarios pueden ser representados por matrices spin unitarias. Algunos ejemplos de cuaterniones unitarios son los cuaterniones elementales $\mathbf{I}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. De las ecuaciones (A.29), (A.30), (A.31) y (A.37) se tiene que \mathbf{i}, \mathbf{j} y \mathbf{k} definen, respectivamente, rotaciones de π radianes, con respecto de los ejes X, Y, Z .

Si se escribe:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d = a + \mathbf{v} \quad (\text{A.43})$$

y se tiene:

$$\mathbf{v} = (b, c, d) \quad (\text{A.44})$$

como un vector que tiene componentes (b, c, d) relativo a *alguna* base y si similarmente, $\mathbf{A}' = \mathbf{I}a' + \dots = a' + \mathbf{v}'$, entonces se puede verificar que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{A}' &= a + a' + \mathbf{v} + \mathbf{v}' \\ \mathbf{A} \mathbf{A}' &= aa' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + a' \mathbf{v}' + a \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}', \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

donde la suma y el producto vectorial se toman en la forma habitual a partir de componentes. Por lo tanto, es claro que una ecuación válida de cuaterniones, que envuelve sumas y productos, permanece válida cuando una transformación rotacional es aplicada a los vectores componentes (b, c, d) , (b', c', d') , etc.; la parte vectorial de la ecuación, quedará de la forma invariante bajo dicha transformación.

Algunos cuaterniones pueden ser representados con matrices spin. Y entonces, pueden ser considerados como transformaciones. Pero los cuaterniones juegan un rol dual, en el que pueden ser tanto funciones como transformaciones, por ejemplo, como tres vectores *siendo* transformados. Como se ve en (A.23), puede ser útil combinar las componentes (T, X, Y, Z) de un cuatro vector en una cierta matriz Hermitiana. En el caso particular cuando $T = 0$, y después de multiplicar esa matriz por i , puede ser definido con a cuaternión vectorial \mathbf{Q} ⁷:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} iZ & iX - Y \\ iX + Y & -iZ \end{pmatrix} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z. \quad (\text{A.46})$$

Entonces la ecuación (A.23) se lee

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{A}^*. \quad (\text{A.47})$$

De la interpretación de la matriz spin de esta ecuación se sabe que *cualquier* cuaternión unitario \mathbf{A} será, por esta ecuación, efecto de una cierta rotación propia del espacio en el vector \mathbf{Q} . La unidad de cuaternión más general puede ser escrita claramente en la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \cos \frac{\psi}{2} + (\mathbf{i}l + \mathbf{j}m + \mathbf{k}n) \sin \frac{\psi}{2} = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{v} \sin \frac{\psi}{2}, \quad (\text{A.48})$$

donde $\mathbf{v} = (l, m, n)$ y $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Afirmación 1 \mathbf{A} efectúa una rotación a través de ψ sobre \mathbf{v} .

⁷Tal truco no funciona en el cuatro vector completo (T, X, Y, Z) con cuaterniones reales.

A.2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS TRASFORMACIONES DE LORENTZ

Demostración:

Note que la ecuación (A.47) es una ecuación de cuaternión y como tal no se ve afectada por un cambio de vectores (cuaterniones) base: rotar esa base para que \mathbf{v} se transforme en $(0, 1, 0)$. Entonces el resultado es inmediatamente por comparación con (A.30), habiéndose reducido \mathbf{A} a la matriz spin que produce una rotación a través de ψ sobre el eje y , y \mathbf{v} es reducido a ese eje. \square

Corolario 3 *Cualquier rotación espacial adecuada (cuaterniones unitarios) es una rotación sobre algún eje \mathbf{v} , a través de algún ángulo ψ .*

Escribiendo la ecuación (A.48) en notación matricial se tiene

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi}{2} + in \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} & (-m + il) \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \\ (m + il) \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} & \cos \frac{\psi}{2} - in \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.49})$$

se obtiene la matriz spin unitaria general en una forma que permite leer su efecto transformador mediante inspección. Además, note que \mathbf{A} cambia el signo bajo $\psi \mapsto \psi + 2\pi$.

A pesar de que las matrices spin unitarias y los cuaterniones unitarios son efectivamente la misma cosa, no hay dicha relación entre las matrices spin y los cuaterniones en general. La razón subyacente para esto es que los cuaterniones están asociados con formas cuadráticas de signo positivo definido mientras que las matrices spin y las transformaciones de Lorentz toman en cuenta los signos de las transformaciones de Lorentz mencionadas antes, es decir $(+, -, -, -)$. Por supuesto, se puede evitar esta dificultad al introducir los cuaterniones con coeficientes complejos adecuados. Tales objetos no comparten con los cuaterniones reales sus propiedades fundamentales de constituir un álgebra de división. Sin embargo, el mero uso de la *notación* de cuaterniones puede traer considerables ventajas para ciertas manipulaciones en matrices spin generales.

A.2. Algunas propiedades de las transformaciones de Lorentz

Como consecuencia de la correspondencia entre el grupo restringido de Lorentz y el grupo de transformaciones spin, es posible dar derivaciones simples de muchas de las propiedades estándar de las rotaciones y transformaciones de Lorentz.

A.2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Se puede ver que cuando la transformación spin (A.15) es unitaria la transformación (A.16) se convierte en

$$\tilde{\zeta} = \frac{\alpha\zeta - \bar{\gamma}}{\gamma\zeta + \bar{\alpha}}. \quad (\text{A.50})$$

Los puntos fijos, es decir $\bar{\zeta} = \zeta$ son dados simplemente por

$$\gamma\zeta^2 + (\bar{\alpha} - \alpha)\zeta + \bar{\gamma} = 0. \quad (\text{A.51})$$

Si ζ es una de las raíces de esta ecuación cuadrática, entonces $-1/\bar{\zeta}$ es la otra. En consecuencia los puntos fijos tienen la forma $\zeta, -1/\bar{\zeta}$, que corresponden a antípodas en la esfera S^+ . Esto constituye otra prueba más de hecho de que cada rotación de la esfera es equivalente a una rotación sobre un solo eje.

Un *círculo* en la esfera S^+ es definido como la intersección de S^+ con algún plano en el espacio Euclidiano 3 $T = 1$, dado por una ecuación lineal real $lX + mY + nZ = p$ con $(p^2 < l^2 + m^2 + n^2)$. Sustituyendo (A.8) en esta ecuación, se tiene (con $p \neq n$) una ecuación de la forma $\zeta\bar{\zeta} - \kappa\bar{\zeta} - \bar{\kappa}\zeta + \kappa\bar{\kappa} = r^2$ con $r > 0, \kappa$ complejo, es decir $|\zeta - \kappa| = r$. Esta es la ecuación de un círculo en el plano de Argand, con centro en κ y radio r . Cuando $p = n$, es decir, cuando el círculo original pasa a través del polo norte en S^+ , se obtiene la ecuación de una línea recta en el plano de Argand. Así queda establecido el hecho bien sabido que bajo la proyección estereográfica los círculos en la esfera proyectan círculos o líneas rectas en el plano y viceversa, ya que el argumento de arriba es reversible.

En la sección anterior se mostró que cada transformación spin puede ser compuesta de transformaciones que inducen ya sean rotaciones de S^+ o simples expansiones del plano de Argand. El primer tipo claramente preserva círculos en S^+ mientras que el segundo preserva círculos o líneas rectas en el plano de Argand. Se sigue entonces que cada transformación spin induce una transformación en S^+ que envía círculos en círculos.⁸

Cualquier transformación que preserve círculos debe necesariamente ser *conforme* es decir, que preserva ángulos. Esto es básicamente porque los círculos infinitesimales deben transformarse en círculos infinitesimales en lugar de elipses. Alternativamente, se debe verificar que la naturaleza conforme de la proyección estereográfica observando que el intervalo cuadrado $d\sigma^2$ en la

⁸Esta es una propiedad familiar de las transformaciones bilineales de la esfera de Riemann

A.2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS TRASFORMACIONES DE LORENTZ

esfera esta relacionada con eso, $d\zeta d\bar{\zeta}$, en el plano de Argand por

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{4d\zeta d\bar{\zeta}}{(\zeta\bar{\zeta} + 1)^2} \quad (\text{A.52})$$

que se sigue de (A.8). Y la naturaleza conforme de la transformación bilinear puede ser deducida del mero hecho de que es holomorfa, es decir analítica compleja; entonces para $\tilde{\zeta} = f(\zeta)$ implica que $d\tilde{\zeta} = f'(\zeta)d\zeta$. En consecuencia de todo esto se ve que una transformación de Lorentz produce una expansión *isotrópica* y rotación en la vecindad de cada punto de S^+ .

Las propiedades de ser conforme y preservar los círculos tienen como corolario los familiares pero conocidos efectos de la relatividad especial conocidos como ‘la invisibilidad de la contracción de Lorentz’. Supongamos al observador en O . Como se dijo antes, su campo de visión o *esfera celestial* puede ser representada convenientemente por S^- . Cada rayo de luz que entra en su ojo es representado por una línea recta nula a través de O y por lo tanto como un punto en la esfera celestial S^- (mapeo del cielo). Ahora S^- esta relacionada con S^+ simplemente por el mapeo antipodal. Entonces, cada transformación restringida de Lorentz de \mathbb{V} induce un mapeo conforme que preserva círculos de la esfera celestial en si misma. Se sigue de la propiedad conforme que un objeto subtende un ángulo *pequeño* en un observador dado presentará una forma similar a cualquier otro observador que coincida momentáneamente con el primero, no importa cual sea su velocidad relativa al primer observador. Solamente el tamaño angular aparente y la dirección serán en general, diferentes para tales observadores. Más aun, de la propiedad de preservar círculos se sigue que un observador inercial percibe que un objeto de *cualquier* tamaño tiene un contorno *circular*, entonces todos los observadores inerciales que coincidan momentáneamente con el primero percibirán contornos circulares (o, en casos especiales, contornos rectos, si se considera un círculo grande en la esfera celestial que parece una línea recta). Por lo tanto, en particular, esferas en movimiento uniforme, a pesar de la contracción de Lorentz, presentan contornos circulares a todos los observadores.

Una transformación bilinear en la esfera de Riemann esta completamente determinada si especificamos cualesquiera tres puntos distintos como imágenes de cualesquiera otros tres puntos en la esfera. Esté hecho bien conocido es una simple consecuencia de (A.16). (Las tres proporciones complejas $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ define la transformación y estos están fijados por tres ecuaciones complejas.) Se sigue de esto que cada transformación restringida de Lorentz esta totalmente determinada si se especifican los (distintos) mapeos de las distintas

direcciones nulas. Entonces, por un único ajuste su velocidad y orientación un observador puede hacer que cuales quiera tres estrellas dadas tomen tres posiciones específicas en la esfera celestial.

De nuevo, cada transformación bilineal (A.16) (no solamente el caso especial (A.50), aparte de la transformación identidad) posee sólo *dos* (posiblemente coincidentes) puntos fijos en la esfera de Riemann, es fácil ver que el conjunto $\tilde{\zeta} = \zeta$ en (A.16) y resultado es la solución de la ecuación cuadrática. Consecuentemente cada transformación de Lorentz (no trivial) deja invariante solo dos (posiblemente coincidentes) direcciones nulas.⁹

A.2.1. Los tipos de las transformaciones de Lorentz, en términos de S^+

Examinemos la estructura de las transformaciones de Lorentz a la luz de este hecho. Considere primero el caso donde los dos puntos fijos de las direcciones nulas son distintos. Se pueden obtener una forma canónica de tal transformación de Lorentz al escoger nuestra tétrada de Minkowski de referencia de modo que \mathbf{t} y \mathbf{z} se encuentren en el plano de dimensión 2 abarcado por estas direcciones nulas. Éstos últimos deben entonces tener componentes $(1, 0, 0, \pm 1)$ de donde los puntos fijos yacen en los polos Norte y Sur de S^+ ($\zeta = \infty, 0$). La transformación bilinear más generalizada (A.16) que deja ambos polos invariantes es de la forma

$$\tilde{\zeta} = we^{i\psi}\zeta \tag{A.53}$$

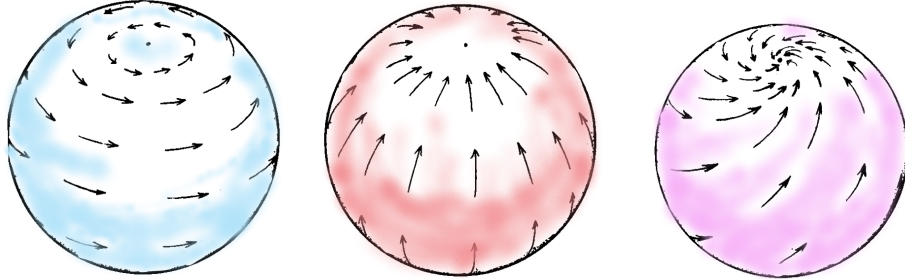
donde w, ψ son números reales. Esta es la composición (en cualquier orden) de una rotación a través de un ángulo ψ sobre el eje z . En términos de las coordenadas de Minkowski se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= X \cos \psi - Y \sen \psi, \tilde{Y} = X \sen \psi + Y \cos \psi, \\ \tilde{Z} &= Z \cosh \phi + T \sinh \phi, \tilde{T} = Z \sinh \phi + T \cosh \phi. \end{aligned} \tag{A.54}$$

Esto es lo que Synge llama una transformación tipo *tornillo* que se puede ver en la figura A.5(c). Ya se ha visto que un impulso puro en la dirección z

⁹De hecho, de acuerdo con un teorema de Topología, cada mapeo continuo que preserva la orientación de la esfera en sí misma debe poseer al menos *un* punto fijo y debidamente enumerado, precisamente dos puntos fijos, ya que la caracterización de la esfera de Euler es 2.

A.2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ



(a) El efecto de una rotación en S^+ (b) El efecto de un impulso en S^+ (c) El efecto tornillo (o loxodrómica) en S^+

Figura A.5: Efectos de las transformaciones de Lorentz

corresponde a una expansión $\tilde{\zeta} = w\zeta$ del plano de Argand. En términos del mapeo cielo (S^-), esto lleva a la fórmula de aberración¹⁰ para los rayos de luz en la forma útil:

$$\tan \frac{\tilde{\theta}}{2} = w \tan \frac{\theta}{2}$$

con

$$w = \left(\frac{1 - V}{1 + V} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(A.55)

Aquí $V = -v$ es la velocidad en la dirección $\theta = 0$ del observador que mide el ángulo $\tilde{\theta}$, relativo al que mide θ . Ya que las transformaciones son activas, se debe pensar en el resto del universo adquiriendo una velocidad $-V = v$ en la dirección z . Se puede ver que un observador que viaja a una alta velocidad al rededor de una estrella P percibe todas las otras estrellas aglomerándose más y más alrededor de P y su velocidad aumenta.

Lo siguiente que se examina de las transformaciones de Lorentz para las cuales dos direcciones fijas nulas coinciden. Estas son llamadas *rotaciones nulas*. Sin pérdida de generalidad consideramos la dirección nula fija que corresponde al polo norte de S^+ . Entonces $\zeta = \infty$ es el único punto fijo de la transformación (A.16), y entonces

$$\tilde{\zeta} = \zeta + \beta$$

(A.56)

¹⁰Aquí se habla de descubrimiento de la aberración de la luz, publicado por James Bradley en 1728.

A.2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS TRASFORMACIONES DE LORENTZ

donde β es algún número complejo. Esto es simplemente una traslación en el plano de Argand. Una transformación bilinear del plano de Argand, para la cual $\zeta = \infty$ es un punto fijo, debe ser de la forma $\zeta = \alpha\zeta + \beta$, pero si $\alpha \neq 1$ tiene un punto fijo *finito*. La transformación spin dada por (A.56) es

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.57})$$

Sin pérdida de generalidad se puede tomar, por ejemplo, $\beta = i\alpha$ con a un real. Entonces, en términos de las coordenadas de Minkowski se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= X, \tilde{Y} = Y + a(T - Z) \\ \tilde{Z} &= Z + aY + \frac{1}{2}a^2(T - Z), \tilde{T} = T + aY + \frac{1}{2}a^2(T - Z). \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Note que el vector nulo $z + \mathbf{t}$ es en sí mismo invariante, no simplemente su dirección. Para visualizar el efecto de esta rotación nula en la esfera de Rie-

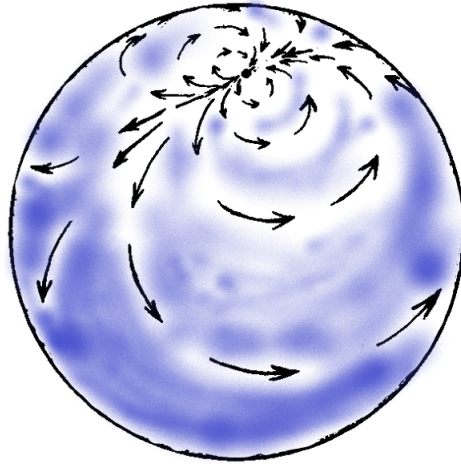


Figura A.6: Rotación nula

mann, vea la figura A.6. La traslación rígida del plano de Argand se proyecta a una transformación en la esfera de Riemann para la cual los puntos son desplazados a lo largo de círculos a través del polo norte tangentes a la dirección y . Los desplazamientos se vuelven cada vez menos a medida que se acercan al polo norte, dejándolo como el único punto fijo.

Como se mencionó arriba, la transformación bilinear más general para la cual

A.2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS TRASFORMACIONES DE LORENTZ

$\zeta = \infty$ es un punto fijo tiene la forma $\tilde{\zeta} = \alpha\zeta + \beta$. Esta se puede dividir en una traslación, una rotación y una dilatación del plano de Argand (en cualquier orden). Entonces la transformación restringida de Lorentz más general que deja invariante una dirección nula dada \mathbf{K} (en el plano de z y \mathbf{K} , por ejemplo) es el producto de una rotación nula sobre \mathbf{K} , una rotación espacial sobre z , y un impulso en z . Las primeras dos de estas transformaciones dejan todo el vector \mathbf{K} invariante, la última sólo su dirección.

Se puede comentar que las transformaciones de Lorentz que dejan dos direcciones nulas (dadas) invariante y las rotaciones nulas dejan una dirección nula *dada* invariante, forman cada una un subgrupo abeliano de dos dimensiones del grupo de Lorentz. En el primer caso se tiene el grupo aditivo en el número complejo $\phi + i\psi$ (módulo $2\pi i$) y en el segundo caso, el grupo aditivo en β . Los grupos no son isomorfos ya que ellos tienen diferentes topologías ($S^1 \times \mathbb{R}$ y \mathbb{R}^2 , respectivamente). Esto es porque $\phi + i\psi + 2\pi in$ ($n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$) todas dan la misma transformación, mientras que para las β diferentes las direcciones nulas son todas distintas.

A.2.2. Relaciones cruzadas de direcciones nulas

Para terminar esta sección se revisarán algunos resultados de las relaciones cruzadas.

Proposición 46 *La relación cruzada*

$$\chi = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\} := \frac{(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_3 - \zeta_4)}{(\zeta_1 - \zeta_4)(\zeta_3 - \zeta_2)} \quad (\text{A.59})$$

de cuatro puntos $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ en el plano de Argand es invariante bajo transformaciones bilineales.

En coordenadas homogéneas,

$$\chi = \frac{(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)(\xi_3\eta_4 - \xi_4\eta_3)}{(\xi_1\eta_4 - \xi_4\eta_1)(\xi_3\eta_2 - \xi_2\eta_3)}. \quad (\text{A.60})$$

Veamos también que

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \{\beta, \alpha, \delta, \gamma\} = \{\gamma, \delta, \alpha, \beta\} = \{\delta, \gamma, \beta, \alpha\}. \quad (\text{A.61})$$

En consecuencia puede haber cómo máximo seis diferentes valores de razones cruzadas de cuatro puntos tomados en todos los ordenes posibles, y estos se

A.2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS TRASFORMACIONES DE LORENTZ

ven como

$$\chi, 1 - \chi, \frac{1}{\chi}, \frac{1}{1 - \chi}, \frac{\chi - 1}{\chi}, \frac{\chi}{\chi - 1}. \quad (\text{A.62})$$

Cuando justo dos ζ coinciden, χ se degenera en 1, 0 o ∞ . Con triple o cuádruple coincidencias, χ queda indeterminada.

Las relaciones cruzadas de cuatro direcciones nulas cruzadas se define como la relación cruzada de (A.59) de los cuatro puntos correspondientes en el plano de Argand. Es fácil ver que al intercambiar las ξ y η en (A.60), se tiene

$$\{1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma, 1/\delta\} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \{-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta\} \quad (\text{A.63})$$

y en consecuencia el mapeo cielo y el mapeo anti-cielo producen relaciones cruzadas que son conjugadas complejas una de otra, ya que los mapeos en S^+ y S^- de las direcciones nulas dadas como son $-1/\bar{\zeta}$ y ζ respectivamente. Se sabe que tres de los números complejos $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ (sin coincidencias), y un valor asignado arbitrariamente de la razón cruzada (A.59) determina el cuarto número de manera única (contando el ∞ como número). En consecuencia, cualesquiera cuatro direcciones nulas distintas (puntos de S^+) pueden ser transformados mediante una transformación restringida de Lorentz adecuada (una transformación bilineal) en otras cuatro direcciones nulas (puntos) que tienen la misma razón cruzada; para cualesquiera tres direcciones nulas pueden ser mapeadas en cualesquiera otras tres direcciones nulas no coincidentes y entonces la cuarta está únicamente determinada por la razón cruzada invariante.

La *realidad* de la razón cruzada (A.60) es la condición para que los cuatro puntos relevantes sean concíclicos (o colineales) en el plano de Argand. Esto es equivalente a decir que los cuatro puntos correspondientes en la esfera de Riemann son concíclicos y por lo tanto coplanares. Consecuentemente la condición de que cuatro líneas nulas estén en el hiper plano real

$$aT + bX + cY + dZ = 0$$

es que su relación cruzada sea real. Un caso particular de esto es un conjunto *armónico* para el cual la razón cruzada es $-1, 2, 1/2$. Un conjunto armónico en el plano de Argand esta dado por los vértices del cuadrado $1, i, -1, -i$; estos mismos puntos en el ecuador de la esfera de Riemann por lo tanto corresponden al conjunto de direcciones nulas armónicas. Por la observación del párrafo anterior, cualesquiera cuatro direcciones nulas pueden ser transformadas en estas por una transformación restringida de Lorentz adecuada.

A.2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS TRASFORMACIONES DE LORENTZ

También es de interés un conjunto *equiharmónico* que posee incluso una mayor simetría intrínseca. La razón cruzada en este caso es $-\omega$ o $-\omega^2$, donde $\omega = e^{2i\pi/3}$. Por una transformación restringida de Lorentz adecuada para cuatro puntos que están en la esfera de Riemann se pueden hacer los vértices de un tetraedro regular. Esto se sigue del hecho que para toda λ del conjunto $0, \lambda, \lambda\omega, \lambda\omega^2$ es equiarmónica en el plano, y para un real adecuado λ se proyecta en los vértices de un tetraedro regular.

Una interpretación geométrica de la razón cruzada puede ser aclarada como sigue ¹¹. Considere cualesquiera cuatro vectores nulos reales distintos \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} y sea $[\mathbf{AB}]$ el plano generado por \mathbf{A} y \mathbf{B} . Sea Ω un plano tipo tiempo único que contiene un vector de cada uno de $[\mathbf{AB}]$ y $[\mathbf{CD}]$, y un vector normal de cada uno de $[\mathbf{AB}]$, $[\mathbf{CD}]$. Supongamos que Ω es el plano de \mathbf{z} y \mathbf{t} , y que $\mathbf{A} \propto (1, p, q, r)$, $\mathbf{B} \propto (1', p', q', r')$. Los únicos vectores normales a \mathbf{A} y \mathbf{B} contenidos en Ω son $(r, 0, 0, 1)$ y $(r', 0, 0, 1)$, respectivamente; por lo tanto $r' = r$. Si $[\mathbf{AB}]$ esta contenido en un vector de Ω , $(p', q') \propto (p, q)$. Como \mathbf{A} y \mathbf{B} son nulos y distintos, esto implica que $\mathbf{A} \propto (1, p, q, r)$, $\mathbf{B} \propto (1, -p, -q, r)$; y similarmente para \mathbf{C} , \mathbf{D} . Por lo tanto en la esfera de Riemann cada uno de este par esta representado por un par de puntos en la misma latitud pero en meridianos opuestos. Solo puede haber una transformación restringida de Lorentz que transforma $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$, $\mathbf{C} \mapsto \mathbf{D}$, y preserva Ω (y por lo tanto sus direcciones nulas, correspondientes a los polos norte y sur). Evidentemente es una rotación (A.28) sobre el eje z , seguida de un impulso (A.36) a lo largo del eje z :

$$\tilde{\zeta} = e^{\phi+i\psi} \zeta = e^\rho \zeta, \quad (\text{A.64})$$

donde $e^\phi = w$ y $\rho = \phi + i\psi$. Si α, β son los puntos en el plano complejo correspondientes a \mathbf{A} , \mathbf{B} , entonces $\beta = -\alpha$; y si γ, δ corresponden a \mathbf{C} , \mathbf{D} , entonces $\delta = -\gamma$ y $\gamma = e^\rho \alpha$. Por consiguiente

$$\chi = \{\alpha, \gamma, \beta, \delta\} = \frac{(1 - e^\rho)^2}{(1 - e^\rho)^2} = \tanh^2 \frac{\rho}{2}. \quad (\text{A.65})$$

Se puede llamar

$$\rho = \phi + i\psi = 2 \tanh^{-1} \sqrt{\chi} \quad (\text{A.66})$$

¹¹La existencia única de Ω no es enteramente obvia. Pero note que la única transformación de Lorentz que manda \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} en \mathbf{B} , \mathbf{A} , \mathbf{D} también envía \mathbf{D} a \mathbf{C} (ya que la razón cruzada de \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} y \mathbf{B} , \mathbf{A} , \mathbf{D} , \mathbf{C} son iguales por (A.61)) y por lo tanto tiene periodo 2. Esto es una reflexión cuyos planos invariantes son Ω y su complemento orthogonal tipo espacio.

al *ángulo complejo* entre los planos reales $[AB]$ y $[CD]$, y se ve que esta determinado de manera única por la razón cruzada $\{\alpha, \gamma, \beta, \delta\}$ aparte del signo, y módulo $i\pi$ dependiendo de si $A \mapsto C, B \mapsto D$ o al revés. Su significado geométrico es que $[AB], [CD]$ difieren de una transformación de Lorentz compuesta de una rotación a través de un ángulo ψ sobre el plano Ω , y un aumento a través de una rapidez ϕ en el plano Ω , siendo Ω el normal único a $[AB], [CD]$, como se definió arriba.

A.3. Banderas nulas y vectores spin

El propósito de esta sección es conducir hasta el concepto geométrico de un vector spin (el tipo más simple de espinor). Sobre esto descansará el contenido geométrico del álgebra del espinor. La geometría de las operaciones algebraicas elementales entre los vectores spin serán tratadas más adelante. El objetivo es encontrar una estructura en el espacio vectorial de Minkowski \mathbb{V} , este será nuestra imagen de un *vector spin* κ del cual el par de números complejos (ξ, η) introducidos en la sección \diamond A.1 pueden ser vistos como representación de coordenadas. Se ha visto como se asocia (ξ, η) con un vector nulo apuntando futuro \mathbf{K} siempre que se proporcione un sistema de coordenadas de Minkowski. El par (ξ, η) sirve de coordenadas para \mathbf{K} ; pero para \mathbf{K} estas coordenadas son redundantes en la medida en que la transformación fase $\xi \mapsto e^{i\theta}\xi, \eta \mapsto e^{i\theta}\eta$ deja \mathbf{K} sin cambio. Se propone entonces una estructura geométrica más rica con (ξ, η) , que reduzca la redundancia a un solo (esencial) signo de ambigüedad. Esta estructura será, de hecho, una *bandera nula*, es decir, el vector nulo previo \mathbf{K} representado ξ y η hasta la fase, juntos con un 'plano bandera', medio plano nulo, adjunto a \mathbf{K} , que representa la fase. Sin embargo, cuando el ángulo fase cambia por θ la bandera gira por 2θ , el cual nos lleva al signo de ambigüedad mencionado antes. Este signo de ambigüedad no puede eliminarse mediante ninguna interpretación geométrica local o canónica en \mathbb{V} ; será discutido más adelante.

Un requerimiento esencial en cualquier imagen geométrica de $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ es que sea independiente de las coordenadas utilizadas. Si $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ es obtenida de (ξ, η) por una transformación spin correspondiente (es decir, por la fórmula (A.23)) a una transformación *pasiva* de Lorentz de las coordenadas de Minkowski, entonces el vector spin abstracto κ representado por (ξ, η) debe quedar sin cambios, así como su representación geométrica. Entonces si (ξ, η) determina la representación geométrica de κ en el primer sistema de coordenadas de

A.3. BANDERAS NULAS Y VECTORES SPIN

Minkowski, $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ debe determinar precisamente la misma estructura en el segundo sistema. Note que se considera aquí una invariancia bajo las transformaciones *pasivas*. En las secciones anteriores se examinó el isomorfismo local entre el grupo spin $SL(2\mathbb{C})$ y el grupo restringido de Lorentz, tomando los grupos como activos; pero el mismo isomorfismo se sostiene para las transformaciones pasivas, como se dijo anteriormente, los resultados también se aplican para transformaciones pasivas.

A.3.1. Descripción en \mathcal{L}^+

Se debe mostrar como se puede obtener la imagen geométrica de (ξ, η) en \mathcal{L}^+ , el espacio de direcciones nulas futuro, y entonces se representa esto en \mathbb{V} . Como antes, se etiquetan los puntos de \mathcal{L}^+ por los números complejos $\zeta = \xi/\eta$ (con $\zeta = \infty$ para $\eta = 0$). Se mostrará que no sólo el radio $\xi : \eta$ sino también ξ y η individualmente (hasta un signo común) pueden representarse, de manera natural, al escoger, en adición con la dirección nula de P (etiquetado por ζ), un vector real \mathbf{L} tangente a P de \mathcal{L}^+ , que se ve en la figura [A.7]. Para abarcar el espacio de derivadas de funciones reales en \mathcal{L}^+ (que es una imagen del plano de Argand), se necesitan las partes reales e imaginarias de $\partial/\partial\zeta$. Un vector real \mathbf{L} en \mathcal{L}^+ (excepto en la singularidad de coordenadas $\zeta = \infty$, para ese punto necesitamos reemplazar ζ por otra coordenada, es decir $1/\zeta$) puede ser representado por un operador lineal diferencial

$$\mathbf{L} = \lambda\partial/\partial\zeta + \bar{\lambda}\partial/\partial\bar{\zeta}, \quad (\text{A.67})$$

los coeficientes que se eligen para hacer \mathbf{L} real. Se requiere λ para ser una

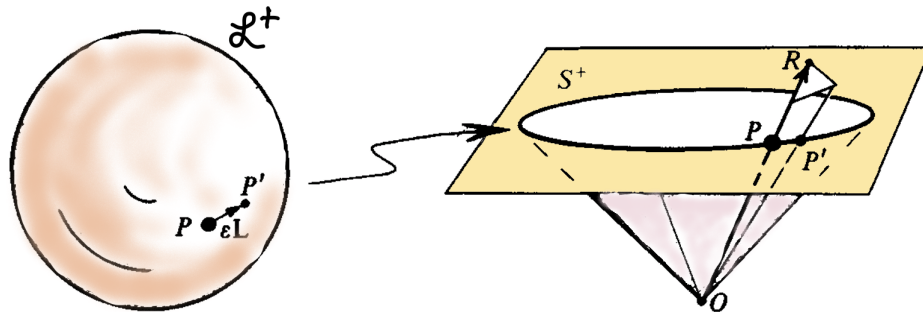


Figura A.7: La representación de un vector spin en términos de un par de puntos infinitesimales en \mathcal{L}^+ o, equivalentemente por una bandera nula.

expresión definida en ξ y η para que después de aplicar la transformación (pasiva) spin

$$\tilde{\xi} = \alpha\xi + \beta\eta, \tilde{\eta} = \gamma\xi + \delta\eta, \tilde{\zeta} = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \quad (\text{A.68})$$

se obtiene

$$\tilde{\lambda} \frac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}} + \bar{\tilde{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \bar{\tilde{\zeta}}} = \lambda \frac{\partial}{\partial \zeta} + \bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}, \quad (\text{A.69})$$

donde $\tilde{\lambda}$ es la misma expresión en $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ esa λ esta en ξ, η . De (A.68) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \left(\frac{\alpha(\gamma\zeta + \delta) - \gamma(\alpha\zeta + \beta)}{(\gamma\zeta + \delta)^2} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}} \\ &= (\gamma\zeta + \delta)^{-2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}} = \eta^2 \tilde{\eta}^{-2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}}, \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

como $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ (por (A.17)). Sustituyendo en (A.69), se encuentra

$$\tilde{\lambda} \tilde{\eta}^2 = \lambda \eta^2, \quad (\text{A.71})$$

y se debe escoger λ para ser el múltiplo numérico de η^{-2} . Para mayor comodidad, se toma $\lambda = -(1/\sqrt{2})\eta^{-2}$, que nos da

$$\mathbf{L} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\eta^{-2} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \bar{\eta}^{-2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right). \quad (\text{A.72})$$

Inversamente, si conocemos \mathbf{L} en P (como un operador), se sabe que el par (ξ, η) completamente hasta el signo general. Esto es visto de la expresión (A.72): al conocer \mathbf{L} y comparando coeficientes, se puede encontrar η^2 ; y al conocer P , se sabe ζ . Entonces se pueden encontrar $\xi^2, \xi\eta$ y η^2 , y por lo tanto $\pm(\xi, \eta)$.

Podemos usar el argumento anterior para encontrar \mathbf{L} en términos algo diferentes. Consideremos P , como antes, ser un punto de \mathcal{L}^+ etiquetado como ζ . Sea P' otro punto en \mathcal{L}^+ que se aproxima a P sobre una curva suave en \mathcal{L}^+ . La dirección límite de PP' es definida en términos de la localización de P' relativa a P , cuando P' esta muy cerca de P . Escribimos el número complejo etiquetado P' de la siguiente forma

$$\zeta' = \zeta - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\varepsilon}{\eta^2} \quad (\text{A.73})$$

A.3. BANDERAS NULAS Y VECTORES SPIN

donde P' esta cerca de P y ϵ es una pequeña cantidad positiva cuyo cuadrado es despreciable. Por un simple cálculo paralelo a (A.70) se verifica que bajo la transformación spin (A.68)

$$\tilde{\zeta}' = \tilde{\zeta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\epsilon}{\tilde{\eta}^2} \quad (\text{A.74})$$

se requiere para la invariancia de la construcción. Tomando $\epsilon > 0$ arbitrariamente dada, P y P' definen ζ y η^{-2} . Por lo tanto (como antes), P y P' definen $\pm(\xi, \eta)$ (donde $\zeta = \infty$ puede ser tratado como el caso límite). El par ordenado de los puntos vecinos P, P' en \mathcal{L}^+ define esencialmente la misma situación que el punto P junto con el vector tangente \mathbf{L} en $PA.7$. Porque el vector \mathbf{L} es

$$\mathbf{L} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \overrightarrow{PP'}. \quad (\text{A.75})$$

Se puede ver esto observando que para alguna $f(\zeta, \bar{\zeta})$,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\epsilon} (f_{P'} - f_P) \right\} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\epsilon} \left[f\left(\zeta - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}\eta^2}, \bar{\zeta} - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}\eta^2}\right) - f(\zeta, \bar{\zeta}) \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\eta^{-2} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \tilde{\eta}^{-2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right) f = \mathbf{L}f, \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

por (A.72).¹²

¹²Otra forma invariante de representar el par (ξ, η) en \mathcal{L}^+ es usar la forma diferencial

$$\eta^2 d\zeta = \eta d\xi - \xi d\zeta$$

en P , ya que bajo las transformaciones spin (1.92)

$$\tilde{\eta}^2 d\tilde{\zeta} = \eta^2 d\zeta.$$

La parte real de esta forma diferencial (por $\sqrt{2}$) da una descripción esencialmente equivalente a la que se acaba de dar en términos de \mathbf{L} , pero ya que la interpretación geométrica de las formas no es tan inmediata como la de los vectores tangentes, no se llega más lejos aquí.

Tenemos que remarcar que hay varias posibilidades de representar transformaciones spines que son equivalentes a las transformaciones restringidas de Lorentz, pero las transformaciones spines no son equivalentes a las transformaciones restringidas de Lorentz si alguno es forzado a incluir reflexiones o reescalamientos conformes.

A.3.2. Descripción en \mathbb{V}

El vector tangente \mathbf{L} en el espacio abstracto \mathcal{L}^+ corresponde al un vector tangente \mathbf{L} en la representación dependiente de coordenadas S^+ de \mathcal{L}^+ . La expresión del operador para el vector (dependiente de coordenadas) \mathbf{L} es formalmente la misma que en (A.72) para el vector (independiente de coordenadas) \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\eta^{-2} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \bar{\eta}^{-2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right) = L^{\mathbf{a}} \frac{\partial}{\partial x^{\mathbf{a}}}, \quad (\text{A.77})$$

donde $L^{\mathbf{a}}$ son los componentes de \mathbf{L} relativo a las coordenadas $x^{\mathbf{a}}$ de \mathbb{V} . La diferencia surge porque en (A.77) se interpretan los operadores $\partial/\partial\zeta$ y $\partial/\partial\bar{\zeta}$ como actuando sobre funciones definidas en \mathbb{V} en lugar de \mathcal{L}^+ , y se están imponiendo dos restricciones adicionales en las coordenadas que definen el subespacio S^+ de \mathbb{V} (es decir $T = 1 = X^2 + Y^2 + Z^2$).

Para futuras referencias se calculan los componentes $L^{\mathbf{a}}$ explícitamente, usando (A.8)

$$x^0 = 1, \quad x^1 = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1}, \quad x^2 = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(\zeta\bar{\zeta} + 1)}, \quad x^3 = \frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1}, \quad (\text{A.78})$$

de donde

$$\frac{\partial x^0}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial x^1}{\partial \zeta} = \frac{1 - \bar{\zeta}^2}{(\zeta\bar{\zeta} + 1)^2}, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \zeta} = \frac{1 + \bar{\zeta}^2}{i(\zeta\bar{\zeta} + 1)^2}, \quad \frac{\partial x^3}{\partial \zeta} = \frac{2\bar{\zeta}}{(\zeta\bar{\zeta} + 1)^2}; \quad (\text{A.79})$$

y ya que, por (A.77)

$$\mathbf{L}^{\mathbf{a}} \frac{\partial}{\partial x^{\mathbf{a}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\eta^{-2} \frac{\partial x^{\mathbf{a}}}{\partial \zeta} + \bar{\eta}^{-2} \frac{\partial x^{\mathbf{a}}}{\partial \bar{\zeta}} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\mathbf{a}}}, \quad (\text{A.80})$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} L^0 &= 0, \quad L^1 = \frac{\xi^2 + \bar{\xi}^2 - \eta^2 - \bar{\eta}^2}{\sqrt{2}(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})^2}, \\ L^2 &= \frac{\xi^2 - \bar{\xi}^2 + \eta^2 - \bar{\eta}^2}{\sqrt{2}i(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})^2}, \quad L^3 = \frac{-\sqrt{2}(\xi\eta + \bar{\xi}\bar{\eta})}{(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

De esto se puede calcular la norma del vector (evidentemente el espacial) \mathbf{L} con la norma de Lorentz en (1.9)

$$\|\mathbf{L}\| = \mathbf{L}^{\mathbf{a}} \mathbf{L}^{\mathbf{b}} \eta_{\mathbf{ab}} = \frac{-2}{(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})^2}, \quad (\text{A.82})$$

A.3. BANDERAS NULAS Y VECTORES SPIN

entonces \mathbf{L} es un vector unitario si y sólo si \mathbf{K} (el vector nulo correspondiente a ξ, η dadas por (A.14)) definen un punto P realmente en S^+ (es decir $K^0 = T = 1$). En efecto, la *longitud* $(-\|\mathbf{L}\|)^{\frac{1}{2}}$ de \mathbf{L} varía inversamente como la extensión¹³ de \mathbf{K} , es decir inversamente como la relación de \mathbf{K} a \overrightarrow{OP} (de las ecuaciones (A.13) y (A.14)). Se escribe

$$\mathbf{K} = (-\|\mathbf{L}\|)^{\frac{1}{2}} \mathbf{k}, \quad (\text{A.83})$$

donde \mathbf{k} define un punto en S^+ . Se toma en cuenta también que mientras que se pudo haber previsto la dificultad con la definición (A.77) para \mathbf{L} en $\eta = 0, \zeta = \infty$, se ve a partir de (A.81) que de hecho no surge ningún problema ya que \mathbf{L} esta bien definida incluso en $\eta = 0$.

Si (ξ, η) y $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ están relacionadas por una transformación spin (pasiva) y se calcula \mathbf{L}^a en relación a los dos sistemas de coordenadas de Minkowski (usando (A.81)) correspondientes, en general se encontrará que *no* están relacionados por una transformación de Lorentz. Esto es claro, por ejemplo, del hecho de que \mathbf{L} , siendo tangente a S^+ , es necesariamente ortogonal a eje coordenado t , una relación que *no* es generalmente preservada por una transformación de Lorentz. Sin embargo, el plano $\hat{\Pi}$ de \mathbf{K} y \mathbf{L} es invariante, es decir, independiente de las coordenadas, y entonces una estructura geométrica en \mathbb{V} . Esto se vuelve claro cuando se recuerda que \mathbf{L} corresponde al vector tangente en \mathcal{L}^+ y así a dos direcciones nulas infinitamente cercanas, una de las cuales es \mathbf{K} . El plano de estas direcciones nulas es evidentemente $\hat{\Pi}$.

Ahora $\hat{\Pi}$ es dado por el conjunto de vectores

$$a\mathbf{K} + b\mathbf{L}, (a, b \in \mathbb{R}), \quad (\text{A.84})$$

y entonces tiene la invarianza requerida. Para dar significado al *sentido* de L se estipula $b > 0$, que hace (A.84) en un *semiplano*, digamos Π , delimitado por \mathbf{K} . Esta es la bandera que se buscaba. Junto con \mathbf{K} determina $(\xi\eta)$ hasta el signo. Porque, de saber \mathbf{K} se puede saber ξ y η hasta la fase común, y al saber la dirección de \mathbf{L} se puede obtener la fase de η (y entonces la de ξ) de (A.72). Note que \mathbf{L} es tipo espacio y ortogonal a \mathbf{K} (siendo tangente

¹³El termino *extensión* se usa frecuentemente para vectores nulos, ya que su *longitud* es siempre cero. La extensión de un vector nulo no puede caracterizarse de manera invariante por un número, ni pueden compararse los vectores nulos de diferentes direcciones con respecto a la extensión. La relación de la extensión de los vectores nulos de la misma dirección es significativa, siendo sólo la relación de los vectores.

a S^+ tiene componente temporal cero, y su parte espacial es evidentemente ortogonal a la de \mathbf{K}). Entonces Π es un medio de un plano *nulo* de dimensión 2, es decir, es tangente al cono nulo. Debe tocar al cono a lo largo de la línea a través de \mathbf{K} . Todas las direcciones en Π , excepto \mathbf{K} , son tipo espacio y ortogonales a \mathbf{K} . Nos referiremos a Π y \mathbf{K} como *bandera nula* o simplemente como bandera. El vector \mathbf{K} será llamado el *asta de la bandera*, su dirección la *dirección del asta de la bandera* y el semiplano Π el plano de la bandera. Recordando brevemente algunas propiedades de los planos nulos, se sabe que en cualquier plano real

$$a\mathbf{U} + b\mathbf{V} \quad (\text{A.85})$$

atravesado por dos 4-vectores \mathbf{U} , \mathbf{V} contiene a lo sumo dos direcciones nulas reales, dadas por

$$a^2\|\mathbf{U}\| + b^2\|\mathbf{V}\| + 2ab\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (\text{A.86})$$

Cuando estas direcciones nulas coinciden, el plano es llamado nulo. En ese

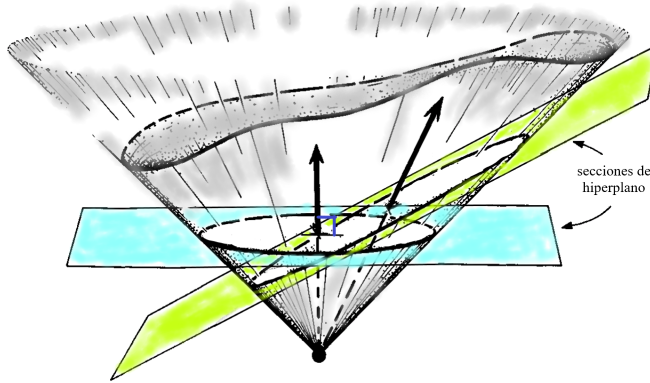


Figura A.8: Las secciones transversales del cono nulo se mapean de forma conforme entre sí por los generadores del cono. Esto proporciona \mathcal{L}^+ con una estructura conforme. Las métricas de esfera surgen como secciones transversales por hiperplanos tipo espacio. Las métricas de esfera de varias unidades en \mathcal{L}^+ compatibles con su estructura conforme corresponden a las diferentes opciones de un vector de tiempo unidad, es decir normal al hiperplano.

caso suponga que \mathbf{U} es la única dirección nula en el plano; entonces (A.86) muestra que no hay otra dirección nula en el plano sólo si $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0$, es decir, *cualquier* otro vector \mathbf{V} en el plano debe ser ortogonal a \mathbf{U} . Y como no hay dos direcciones causales distintas que puedan ser ortogonales cada vector \mathbf{V} debe

ser tipo espacio. El ángulo θ entre dos planos nulos con un vector nulo común, es decir \mathbf{U} , puede ser definido como el que esta entre *cualesquiera* dos vectores no nulos, uno en cada plano; suponga \mathbf{V}, \mathbf{W} son tales vectores, entonces $(a\mathbf{U} + b\mathbf{V}) \cdot (c\mathbf{U} + d\mathbf{W}) = bd\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}$, de donde $\cos \theta = \pm \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} / (\|\mathbf{V}\| \|\mathbf{W}\|)^{\frac{1}{2}}$, independientemente de a, b, c, d .

Proposición 47 *Cualquier sección transversal T del cono nulo en \mathbb{V} , incluso una lograda cortando el cono nulo con una hiper superficie curva, es conformalmente idéntica a todas las demás, y por lo tanto a S^+ , donde los puntos correspondientes se encuentran en el mismo generador del cono nulo.*

Este resultado puede ser visto de muchas maneras, pero en particular, al considerar el triángulo infinitesimal obtenido al cortar tres vecindades generadoras dadas del cono nulo por *cualquier* elemento del hiperplano. Ya que las vecindades generadoras yacen en un plano nulo, el resultado precedente muestra que todos estos triángulos infinitesimales serán similares. La proposición entonces queda establecido. Ya se ha visto un ejemplo del uso del hiperplano en la figura A.4.

Examinemos un poco más cerca el rol geométrico de la *magnitud* del vector \mathbf{L} . No se puede atribuir significado a la norma $\|\mathbf{L}\|$, ya que esto otorgaría un significado no deseado a la métrica de S^+ . Se vio arriba que $\|\mathbf{L}\| = -1$ era la condición para $\mathbf{K} = \overrightarrow{OP}$ con $P \in S^+$. Se debe prever \mathbf{L} , como P , como *unido* al origen O . Entonces, si se reemplaza P por algún otro punto R en OP , al futuro de O , se debe re escalar \mathbf{L} por el factor OR/OP (figura A.7). Así \mathbf{L} en P es *equivalente* a $(OR/OP)\mathbf{L}$ en R . Se puede escoger R tal que $(OR/OP)\mathbf{L}$ es un vector unitario¹⁴. Entonces $\overrightarrow{OR} = \mathbf{K}$, ya que esto da $\mathbf{K} = (-\|\mathbf{L}\|)^{\frac{1}{2}}\overrightarrow{OP}$, que es lo mismo que en (A.83). Entonces, la magnitud de \mathbf{L} simplemente localiza a \mathbf{K} (en la dirección \overrightarrow{OP}). En términos de P y P' , se puede dibujar esto, intuitivamente, en la siguiente manera. Se considera un vecindario de líneas nulas OP, OP' . Entonces se localiza R en OP al proceder sobre la línea OP hasta que la distancia a la vecindad de líneas alcanza el valor ϵ . Note que cuanto más *juntos* estén OP y OP' , mayor será la extensión de OR .

La identificación de banderas por el par (ξ, η) no depende específicamente de la elección del sistema de coordenadas de *Minkowski* de \mathbb{V} . De hecho, algunos otros tipos de sistemas de coordenadas habrían llevado a fórmulas

¹⁴Estrictamente hablando, se debe permitir que \mathbf{L} también tenga múltiplos de \mathbf{K} añadidos. Pero esto no hace ninguna diferencia a la norma ya que \mathbf{K} es nulo y ortogonal a \mathbf{L} .

más simples que las que hemos utilizado. La asignación de un par (ξ, η) a una bandera nula puede hacerse mucho más directa una vez que se tenga el concepto de un *marco spin* disponible. El sistema de coordenadas para \mathbb{V} se verá entonces como una irrelevancia. Esencialmente se define un marco spin cuando las banderas correspondientes al par $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son conocidas, pero hay una pequeña dificultad con respecto a la ambigüedad del signo. Esto se elimina cuando se introduce el concepto de un *vector spin*.

A.3.3. Vectores spin

Para entender el paso del concepto de bandera al de vector spin, se debe apreciar la naturaleza esencial de la ambigüedad del signo en la representación de una bandera nula por un par (ξ, η) . Para este propósito, examinemos el efecto sobre una bandera nula de transformaciones de la forma

$$(\xi, \eta) \mapsto (\lambda\xi, \lambda\eta), \quad (\text{A.87})$$

donde λ es algún número complejo diferente de cero. Estas son las transformaciones que dejan la dirección del asta de la bandera invariante pero pueden alterar la extensión del asta de la bandera o la dirección del plano bandera. Sea

$$\lambda = re^{i\theta} \quad (\text{A.88})$$

donde $r, \theta \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Entonces en el caso particular $\theta = 0$ (es decir λ un real), (A.87) no cambia en el plano bandera, mientras que la extensión del asta de la bandera se incrementa con un factor r^2 ; por otro lado, si $r = 1$ (es decir λ tiene módulo unitario), (A.87) no cambia en el asta de la bandera pero el plano bandera rota a través un ángulo 2θ en sentido positivo. Esto puede ser visto más fácil si se usa la representación en términos de puntos P, P' en S^+ separados infinitesimalmente. Entonces P es dado por ζ y P' por $\zeta - 2^{\frac{1}{2}}\epsilon\eta^{-2}$. Bajo (A.87) se tiene $\eta \rightarrow \lambda\eta$, entonces $\eta^{-2} \rightarrow r^{-2}e^{-2i\theta}\eta^{-2}$. Ya que la extensión del asta de la bandera varía inversamente como la separación infinitesimal PP' se tiene la primera parte de la afirmación de arriba. La segunda parte se ve al recordar que S^+ se obtiene del plano de Argand de ζ por una proyección estereográfica conforme.

Aplicando una rotación continua $(\xi, \eta) \rightarrow (e^{i\theta}\xi, e^{i\theta}\eta)$ donde θ varía de 0 a π . Se termina con

$$(\xi, \eta) \mapsto (-\xi, -\eta), \quad (\text{A.89})$$

A.3. BANDERAS NULAS Y VECTORES SPIN

pero la *bandera* se devuelve a su posición original, el plano bandera ha sido rotado a través de 2π (es decir una vuelta completa sobre el asta de la bandera). Si se continua la rotación, de modo que θ varia aún más de π a 2π , entonces se obtiene nuevamente el par original (ξ, η) . Entonces, una rotación del plano bandera a través de 4π es necesario para restaurar (ξ, η) a su estado original. Tales consideraciones implican que una representación geométrica local completa, en \mathbb{V} , de (ξ, η) que toma en cuenta su signo general, no es posible. Cada estructura local en el espacio de Minkowski \mathbb{V} que se podría adjuntar a la bandera nula también se rotaría a través de 2π y por lo tanto regresar a su estado original, mientras que (ξ, η) experimenta la ecuación (A.89). Para ver esto más claro, se observa primero que para cualquier par particular (ξ, η) se puede conseguir $(\xi, \eta) \mapsto (e^{i\theta}\xi, e^{i\theta}\eta)$ por una transformación spin que corresponde a una rotación para la cual la dirección del asta bandera es un invariante a la dirección nula. (Por simplicidad se puede escoger $(\xi, \eta) = (0, 1) \mapsto (0, e^{i\theta})$ y usando (A.29)). Como θ varia continuamente de 0 a π , la transformación spin varia continuamente (siempre que el eje de rotación se mantenga fijo) y toma el valor final $-\mathbf{I}$. La transformación de Lorentz correspondiente también varia continuamente, pero terminan en la identidad de la transformación de Lorentz. Entonces *cualquier* estructura geométrica en \mathbb{V} sería rotada en su estado original por esta sucesión de transformaciones de Lorentz, aunque (ξ, η) es *rotada* en $(-\xi, -\eta)$.

Una vez que se acepta que una representación geométrica local completa en \mathbb{V} no es posible, se vuelve claro que actitud tomar. Esencialmente se debe *ampliar* el concepto de geometría en \mathbb{V} , de modo que las cantidades puedan ser admitidas como *geométricas* que no son devueltas a su estado original cuando son rotadas a través de un ángulo 2π sobre algún eje; sin embargo cuando son rotadas a través de 4π , estos *deben* regresar a su estado original. Tales cantidades se conocen como *objetos spinoriales*. Un vector de espín difiere de una bandera nula sólo en que es un objeto spinorial, y a cada bandera nula allí corresponden exactamente *dos* vectores de espín.

Dejaremos la discusión de los objetos spinoriales fuera del objetivo del presente trabajo, puesto que se quiere profundizar en la relación con las transformaciones restringidas de Lorentz.

Bibliografía

- [1] Muniz Oliva, Waldyr *Geometric Mechanics* Libro. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2002
- [2] Penrose, Roger. Rindler, Wolfgang *Spinors and Space-Time. Volume 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields.* Libro. Cambridge University Press. 1984
- [3] Anton, Howard. Rorres, Chris. *Introducción al Álgebra Lineal con aplicaciones en negocios, economía, ingeniería, física, ciencias de la computación, teoría de aproximación, ecología, sociología, demografía y genética* Libro. Limusa Wiley . 2011.
- [4] Marsden, Jerrold, E. Hoffman, Michael, J. *Análisis Básico de Variable Compleja.* Libro. Trillas. 1996.
- [5] Lascurain, Orive, Antonio. *Curso Básico de Variable Compleja.* Libro. Las prensas de Ciencias. 2007.
- [6] Lafontaine, Jacques. *An Introduction to Differential Manifolds* Libro. Springer. 2010.
- [7] Guillemin, Victor. Pollack, Alan. *Differential Topology* Libro. American Mathematical Society, Chelsea Publishing. 2010, 2014
- [8] Hacyan, Shahen *Relatividad para principiantes* Libro. Fondo de Cultura Económica. 1989.