



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SOBRE LA CONVERGENCIA DE LA SUCESIÓN ESPECTRAL ORTOGONAL

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
JULIO CÉSAR GALINDO LÓPEZ

DIRECTOR:
DR. JOSÉ PABLO PELÁEZ MENALDO (IMATE-CU)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA (IMATE-CU)
DR. FELIPE DE JESÚS ZALDÍVAR CRUZ (UAM-IZTAPALAPA)

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, OCTUBRE 2022.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

SOBRE LA CONVERGENCIA DE LA SUCESIÓN ESPECTRAL ORTOGONAL.

César Galindo

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM., AV. UNIVERSIDAD S/N.

Contenido

Introducción	v
Capítulo 1. Preliminares	1
1. Categorías trianguladas	1
1.1. Localización de categorías trianguladas	8
1.2. El teorema del funtor adjunto de Neeman	13
1.3. La categoría derivada y funtores derivados	14
2. Sucesiones espectrales	20
2.1. Convergencia	22
2.2. Definición de convergencia	25
2.3. Generación de sucesiones espectrales: parejas exactas	25
2.4. Convergencia de la sucesión espectral asociada a una pareja exacta	28
3. La categoría de motivos mixtos de Voevodsky	32
3.1. Correspondencias finitas	32
3.2. La categoría de motivos geométricos efectivos	33
3.3. La categoría de motivos geométricos	34
3.4. Sitios y gavillas	35
3.5. Complejos motivicos	36
3.6. El complejo de Suslin	38
3.7. Cohomología motivica	41
3.8. Resumen de resultados de Voevodsky	42
3.9. La categoría de motivos mixtos de Voevodsky	43
Capítulo 2. Resultados	47
1. La torre ortogonal	47
2. Convergencia de la torre ortogonal	48
2.1. La sucesión espectral ortogonal	48
2.2. Ortogonalidad y dualidad	49
2.3. Convergencia	50
3. La categoría homotópica \mathbb{A}^1 -estable de Morel-Voevodsky	52
Bibliografía	57

Introducción

Uno de los teoremas centrales en Geometría Algebraica es el teorema de la base de Nerón-Severi [21], [17], [18] el cual afirma que para una variedad proyectiva suave X sobre un campo algebraicamente cerrado, el grupo $CH^1(X)/CH_{\text{num}}^1(X)$ es finitamente generado, en donde $CH^1(X)$ es el grupo de ciclos algebraicos de codimensión 1 en X módulo equivalencia racional y $CH_{\text{num}}^1(X)$ es el subgrupo de $CH^1(X)$ que consiste de haces numéricamente equivalentes a cero. Como $CH_{\text{num}}^1(X)$ es el grupo de puntos racionales de la variedad de Picard de X , la cual es una variedad abeliana, este resultado descompone a $CH^1(X)$ en una componente continua: $CH_{\text{num}}^1(X)$ que está parametrizada por una variedad abeliana; y una componente discreta: $CH^1(X)/CH_{\text{num}}^1(X)$ la cual es un grupo abeliano finitamente generado.

Motivados por este resultado central, la expectativa era que para los grupos de Chow de codimensión mayor a 1: $CH^r(X)$, $r > 1$; también existiera un subgrupo parametrizado por alguna variedad algebraica asociada naturalmente a X tal que el cociente fuera finitamente generado. Sin embargo, esta expectativa fue hecha añicos por Mumford al probar en un artículo seminal [14] que para una superficie S tal que $\dim H^0(S, \Omega_S^2) > 0$, el grupo de cero ciclos $CH^2(S)$ es “enorme” y en particular no admite la parametrización esperada.

Esto condujo a los expertos a la conclusión de que los grupos de Chow $CH^r(X)$ para $r > 1$ son en general caóticos. Sin embargo, a finales de los 70's Bloch, Beilinson y Murre de manera independiente [3], [4], [7] introdujeron un programa conjetural en el cual los grupos de ciclos algebraicos $CH^r(X)$, $r > 1$ tienen propiedades accesibles. La parte central de dicho programa consiste en la existencia de una filtración en $CH^r(X)$ cuyas piezas graduadas tienen propiedades accesibles.

Con el fin de estudiar filtraciones finitas sobre los grupos de Chow de una variedad suave proyectiva Y sobre un campo k que satisfacen algunas de las propiedades de la filtración, aún conjetural, de Bloch-Beilinson-Murre, en [20] se introduce una torre de funtores triangulados $bc_{\leq \bullet}$:

$$\cdots \rightarrow bc_{\leq n-1} \leq bc_{\leq n} \rightarrow bc_{\leq n-1} \rightarrow \cdot$$

en la categoría triangulada de motivos de Voevodsky DM .

La filtración sobre los grupos de Chow con coeficientes en un anillo conmutativo R se define evaluando la torre ortogonal $bc_{\leq \bullet}$ en el motivo de un punto \mathbb{Z}_R y luego se consideran morfismos de $M(Y)(-q)[-2q]$ en $bc_{\leq \bullet}(\mathbb{Z}_R)$, en donde $M(Y)$ es el motivo de Y , y $(-q)$ (resp. $[-2q]$) se define en términos del twist de Tate en DM (resp. la suspensión en DM). El

proceso anterior provee una filtración en los grupos de Chow ya que

$$CH^q(Y)_R \cong \mathrm{Hom}_{DM}(M(Y)(-q)[-2q], \mathbb{Z}_R).$$

Dados $A, B \in DM$, es posible evaluar la torre en A y luego mapear B en $bc_{\leq \bullet}(A)$ para así obtener una sucesión espectral:

$$(1) \quad E_{p,q}^1 = \mathrm{Hom}_{DM}(B, (bc_{p/p-1}A[q-p])) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{DM}(B, A)$$

en donde $bc_{p/p-1}A$ se define en términos de un triángulo distinguido canónico en DM ([**20**], 3.2.8):

$$bc_{\leq p-1}A \rightarrow bc_{\leq p}A \rightarrow bc_{p/p-1}A$$

El objetivo principal de esta tesis es estudiar las propiedades de convergencia de esta sucesión espectral.

El resultado principal (Teorema II.2.6) muestra que la sucesión espectral (1) converge fuertemente para $B = M(X)(r)[s]$, con $r, s \in \mathbb{Z}$ y X un esquema suave arbitrario de tipo finito sobre k .

Mostraremos también que los resultados análogos no se cumplen en la categoría homotópica \mathbb{A}^1 -estable de Morel-Voevodsky \mathcal{SH} dando contraejemplos explícitos (Proposición II.3.2. y Corolario II.3.4.). Por otra parte, verificamos que, bajo condiciones apropiadas para $A \in \mathcal{SH}$, la sucesión espectral es fuertemente convergente (Proposición II.3.5.), y que estas condiciones se satisfacen para las rebanadas de Voevodsky $s_m G \in \mathcal{SH}$. Como consecuencia directa, obtenemos una sucesión espectral que es fuertemente convergente al término E_1 de la sucesión espectral rebanada de Voevodsky (Corolario II.3.6.).

CAPÍTULO 1

Preliminares

1. Categorías trianguladas

Las referencias principales para esta sección son [15], [6].

Sea \mathcal{A} una categoría aditiva dotada de una autoequivalencia $\Sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ de categorías. Para todo entero $n \in \mathbb{Z}$ y para todo objeto X (resp. morfismo f) de \mathcal{A} , definimos $X[n] := \Sigma^n(X)$ (resp. $f[n] = \Sigma^n(f)$).

DEFINICIÓN 1.1 (Verdier). Sea \mathcal{A} una categoría aditiva. La estructura de *categoría triangulada* está dada por una autoequivalencia $\Sigma = [1] : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, llamado *el funtor traslación*, y una clase de diagramas en \mathcal{A} . Un triángulo de (\mathcal{A}, Σ) es una sucesión de morfismos

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

llamados *triángulos distinguidos*. Un morfismo entre triángulos distinguidos es una tripleta (f, g, h) de morfismos de \mathcal{A} que hacen conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & f[1] \downarrow \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

Tal tripleta (f, g, h) es un isomorfismo si las flechas verticales son isomorfismos. Requerimos que los triángulos distinguidos satisfagan los siguientes axiomas:

(TR1) (a) Todo triángulo de la forma

$$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

es distinguido.

(b) Todo triángulo isomorfo a un triángulo distinguido es distinguido.

(c) Para todo morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{A} , existe un triángulo distinguido de la forma:

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

(TR2) Un triángulo de la forma

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

es distinguido si y solamente si el triángulo

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{-w} X[1] \xrightarrow{-\Sigma u} Y[1]$$

es distinguido.

(TR3) Supongamos que existe un diagrama conmutativo de triángulos distinguidos con flechas verticales f y g :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & f[1] \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1] \end{array}$$

Entonces, existe una (no necesariamente única) flecha $h : Z \rightarrow Z'$ tal que el diagrama anterior conmuta.

(TR4) **Axioma del octaedro.** Supongamos que en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & f[1] \downarrow \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \\ f' \downarrow & & g' \downarrow & & h' \downarrow & & f'[1] \downarrow \\ X'' & \xrightarrow{u''} & Y'' & \xrightarrow{v''} & Z'' & \xrightarrow{w''} & X''[1] \\ f'' \downarrow & & g'' \downarrow & & h'' \downarrow & & f''[1] \downarrow \\ X[1] & \xrightarrow{u[1]} & Y[1] & \xrightarrow{v[1]} & Z[1] & \xrightarrow{-w[1]} & X[2] \end{array}$$

se cumple que $gu = u'f$, que los dos renglones superiores y las dos primeras columnas izquierdas son triángulos distinguidos. Entonces, existe un objeto Z'' y flechas punteadas tal que el diagrama es conmutativo excepto por el cuadrado inferior derecho, que conmuta hasta signo, y todos los cuatro renglones y columnas sin triángulos distinguidos.

NOTA 1.2. Si $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \Sigma)$ es una categoría triangulada, entonces $\mathcal{T}^{op} = (\mathcal{A}^{op}, \Sigma^{-1})$ es una categoría triangulada.

Si $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \Sigma)$ es una categoría triangulada, gracias a que Σ es invertible se sigue que Σ^{-1} es adjunto izquierdo y derecho. Ya que un functor que posee adjunto izquierdo respeta productos, un functor que posee adjunto derecho respeta coproductos. Por lo tanto, se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.3. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada. Supongamos que $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un conjunto de objetos de \mathcal{T} , y supongamos que el coproducto categórico $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ existe en

\mathcal{T} . Entonces, la aplicación natural

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda[1] \rightarrow \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right) [1]$$

es un isomorfismo.

DEFINICIÓN 1.4. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada. Para \mathcal{A} una categoría abeliana, un funtor

$$H : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$$

es homológico si, para cada triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

la sucesión

$$H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H(v)} H(Z)$$

es exacta en \mathcal{A} .

Por el axioma (T2) se sigue que la sucesión puede extenderse continuamente en ambas direcciones. Esto es, la sucesión

$$H(Z[-1]) \xrightarrow{H(w[-1])} H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H(v)} H(Z) \xrightarrow{H(w)} H(X[1])$$

es exacta en todas partes.

NOTA 1.5. Un funtor homológico sobre la categoría triangulada \mathcal{T}^{op} es un *functor cohomológico* sobre \mathcal{T} .

LEMA 1.6. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada y U un objeto de \mathcal{T} . Entonces el funtor

$$\text{Hom}(U, -) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

es homológico.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que tenemos un triángulo distinguido dado

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1].$$

Necesitamos probar la exactitud de la sucesión

$$\text{Hom}(U, X) \longrightarrow \text{Hom}(U, Y) \longrightarrow \text{Hom}(U, Z).$$

Verifiquemos que $vu = 0$. Esto implica entonces que la composición de cualesquiera dos morfismos consecutivos en un triángulo distinguido es cero. A partir de (TR3) aplicado a

$$X \xrightarrow{id} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1].$$

y a

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1].$$

se obtiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{id} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X[1] \\
 id \downarrow & & u \downarrow & & h \downarrow & & id[1] \downarrow \\
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1]
 \end{array}$$

De aquí que $h = 0$. Por lo tanto, la conmutatividad implica que $vu = 0$.

Sea $f : U \rightarrow Y$ tal que la composición

$$U \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{v} Z$$

es cero. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 U & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & U[1] & \xrightarrow{-id} & U[1] \\
 f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & f[1] \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{-v} & Z & \xrightarrow{-w} & X[1] & \xrightarrow{-u[1]} & Y[1]
 \end{array}$$

Por (TR2) el diagrama superior es un triángulo distinguido, mientras que por (TR1) y (TR2) el diagrama inferior es un triángulo. Por lo tanto, por (TR3), existe un mapeo $h : U \rightarrow X$ tal que $h[1] : U[1] \rightarrow X[1]$ hace conmutar el diagrama anterior. En particular, el cuadrado siguiente

$$\begin{array}{ccc}
 U[1] & \xrightarrow{-id} & U[1] \\
 h[1] \downarrow & & \downarrow f[1] \\
 X[1] & \xrightarrow{-u[1]} & Y[1]
 \end{array}$$

conmuta. Así $f = uh$ y esto prueba el resultado. \square

NOTA 1.7. Se sigue del Lema 1.6 que el funtor

$$\mathrm{Hom}(-, U) : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

es cohomológico.

PROPOSICIÓN 1.8 (Propiedades sobre categorías trianguladas). Sea \mathcal{T} una categoría triangulada. Sea (f, g, h) un morfismo entre triángulos de \mathcal{T} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\
 f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & f[1] \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1]
 \end{array}$$

(1) Si dos de los morfismos verticales son isomorfos, el tercero lo es.

(2) Si

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

es un triángulo distinguido en \mathcal{T} ; entonces u es un isomorfismo si y solo si Z es isomorfo al objeto cero.

(3) Cualquier triángulo de la forma

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \xrightarrow{0} X[1]$$

es isomorfo a un triángulo de la forma

$$X \longrightarrow X \oplus Z \longrightarrow Z \xrightarrow{0} X[1]$$

DEMOSTRACIÓN. (Ver [6] IV §1)

□

DEFINICIÓN 1.9. Una *estructura tensorial* sobre una categoría aditiva \mathcal{A} está dada por un bifunctor

$$\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

que es asociativo, conmutativo y unitario; esto es se tiene un objeto unidad 1 e isomorfismos

- $X \otimes (Y \otimes Z) \rightarrow (X \otimes Y) \otimes Z$.
- $X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$.
- $1 \otimes X \rightarrow X$ y $X \otimes 1 \rightarrow X$

que hacen conmutar diagramas obvios.

Además, para $f : X_1 \rightarrow X_2$, $g : Y_1 \rightarrow Y_2$, se tiene que

$$f \otimes g : X_1 \otimes Y_1 \rightarrow X_2 \otimes Y_2$$

es bilineal en f y g , y respeta composición:

$$(f \otimes g) \circ (f' \otimes g') = (f \circ f') \otimes (g \circ g').$$

DEFINICIÓN 1.10. Si \mathcal{A} cuenta con una traslación $X \mapsto \Sigma X$, decimos que la estructura tensorial está graduada si

- (1) $\Sigma \circ (- \otimes -) = \Sigma(-) \otimes -$ y $\Sigma^2(-) \otimes - = - \otimes \Sigma^2(-)$ vistos como funtores $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.
- (2) Los isomorfismos naturales

$$X \otimes \Sigma Y \cong \Sigma X \otimes Y = \Sigma(X \otimes Y) = \Sigma X \otimes Y$$

satisfacen que la composición

$$X \otimes \Sigma^2 Y \rightarrow X \otimes \Sigma Y$$

es la identidad

DEFINICIÓN 1.11 (Categoría tensorial triangulada). Supongamos que \mathcal{T} es una categoría triangulada y una categoría tensorial (con operación \otimes) tal que \otimes es graduada. Supongamos que para cada triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

y para cada $W \in \mathcal{T}$, la sucesión

$$X \otimes W \xrightarrow{u \otimes id_W} Y \otimes W \xrightarrow{v \otimes id_W} Z \otimes W \xrightarrow{w \otimes id_W} X[1] \otimes W = (X \otimes W)[1]$$

es un triángulo distinguido. Entonces decimos que \mathcal{T} es una categoría tensorial triangulada.

DEFINICIÓN 1.12. Sean (\mathcal{T}, Σ) y (\mathcal{T}', Σ') categorías trianguladas. Un funtor aditivo $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ se llama *functor triangulado* si existe un isomorfismo natural

$$F \circ \Sigma \cong \Sigma' \circ F$$

tal que, para cualquier triángulo distinguido:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

en \mathcal{T} , el triángulo

$$FX \xrightarrow{u} FY \xrightarrow{v} FZ \xrightarrow{w} F(X[1])$$

es distinguido en \mathcal{T}' .

DEFINICIÓN 1.13. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada. Una *subcategoría triangulada* de \mathcal{T} es una subcategoría $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ con la estructura de una categoría triangulada, tal que el funtor inclusión $\iota : \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ es un funtor triangulado.

PROPOSICIÓN 1.14. Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}' categorías trianguladas y consideremos un par adjunto de funtores

$$\mathcal{T} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \perp \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{T}'$$

donde F es adjunto izquierdo. Entonces, F es un funtor triangulado si y sólo si G es triangulado.

DEMOSTRACIÓN. (Ver [16], Lem. 5.3.6) □

PROPOSICIÓN 1.15. Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ es una categoría plena de una categoría triangulada \mathcal{T} , entonces es una subcategoría triangulada si y solo si es invariante bajo el funtor traslación y para cualquier triángulo distinguido

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

en \mathcal{T} con $X, Y \in \mathcal{S}$, el objeto Z es isomorfo a un objeto en \mathcal{S} .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que \mathcal{S} es una subcategoría triangulada. Entonces, es invariante bajo el funtor de traslación y, para cualquier triángulo distinguido

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

en \mathcal{T} , con $X, Y \in \mathcal{S}$, el morfismo $X \rightarrow Y$ puede completarse a un triángulo distinguido

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z_0 \longrightarrow X[1]$$

en \mathcal{S} que también es distinguido en \mathcal{T} ya que el funtor inclusión es triangulado. De esta manera, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z_0 & \longrightarrow & X[1] \end{array}$$

Usando (TR3), es posible completar el diagrama a un morfismo de triángulos distinguidos. Ya que las flechas sólidas verticales son isomorfismos, resulta que el morfismo $Z \rightarrow Z_0$ es un isomorfismo.

Recíprocamente, las condiciones nos dicen exactamente que (TR1) se satisface. Todos los demás axiomas se cumplen del hecho de que \mathcal{S} es pleno e invariante bajo el funtor de traslación. \square

DEFINICIÓN 1.16. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada y \mathcal{S} una subcategoría triangulada. Definimos por $Mor_{\mathcal{S}}$ al conjunto de morfismos $s : X \rightarrow Y$ tales que, en el triángulo distinguido,

$$X \xrightarrow{s} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

el objeto Z se encuentra en \mathcal{S} .

DEFINICIÓN 1.17. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada. Un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array}$$

es *homotópicamente cartesiano* si existe un triángulo distinguido

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}} Y' \oplus Z \xrightarrow{(f', -g')} Z' \xrightarrow{\partial} Y[1]$$

para algún $\partial : Z' \rightarrow Y[1]$.

Si

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array}$$

es un cuadrado homotópicamente cartesiano, decimos que Y es el *pullback homotópico* de

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow g' \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array}$$

y Z' es el *pushout homotópico* de

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ g \downarrow & & \\ Y' & & \end{array}$$

NOTA 1.18. El pushout homotópico (resp. pullback homotópico) siempre existe y es único hasta isomorfismos no canónicos.

PROPOSICIÓN 1.19. Para \mathcal{T} una categoría triangulada y \mathcal{S} una subcategoría triangulada, se cumple lo siguiente

- (a) Todo isomorfismo $f : X \rightarrow Y$ está en $Mor_{\mathcal{S}}$.
- (b) Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Y'$ morfismos en \mathcal{T} . Si dos de los morfismos f, g y gf están en $Mor_{\mathcal{S}}$, entonces el tercero lo está.
- (c) Existe una subcategoría de \mathcal{T} cuyos objetos son los objetos de \mathcal{T} , y cuyos morfismos es $Mor_{\mathcal{S}}$.
- (d) Sea

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array}$$

un cuadrado homotópicamente cartesiano. Entonces f está en $Mor_{\mathcal{S}}$ si y sólo si f' está en $Mor_{\mathcal{S}}$. También, g está en $Mor_{\mathcal{S}}$ si y sólo si g' está en $Mor_{\mathcal{S}}$.

DEMOSTRACIÓN. ([16], §1.5). □

1.1. Localización de categorías trianguladas.

1.1.1. Localización de Verdier.

DEFINICIÓN 1.20. Sea $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{T}$ un funtor triangulado. El núcleo de F se define como la subcategoría plena \mathcal{C} de \mathcal{D} dada por

$$\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{D} : F(X) \cong 0\}.$$

PROPOSICIÓN 1.21. El núcleo de un funtor triangulado $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{T}$, \mathcal{C} , cumple lo siguiente:

- (1) \mathcal{C} es una subcategoría triangulada de \mathcal{D} .
- (2) Si $X \oplus Y$ es un objeto de \mathcal{C} , entonces X y Y están en \mathcal{C} .

DEMOSTRACIÓN. Ver ([16], Lem. 2.1.4. y Lem. 2.1.5) \square

DEFINICIÓN 1.22. Una subcategoría triangulada plena \mathcal{C} de una categoría triangulada \mathcal{D} es *thick* si \mathcal{C} es cerrada bajo sumandos directos.

La proposición anterior afirma que el núcleo de un functor triangulado es thick.

TEOREMA 1.23 (Verdier [24]). Sea \mathcal{T} una categoría triangulada pequeña y $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ una subcategoría triangulada. Entonces, existe una categoría triangulada \mathcal{T}/\mathcal{C} y un functor triangulado

$$Q_{\mathcal{C}} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{C}$$

tal que, para cada functor triangulado $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ tal que \mathcal{C} esté contenido en el núcleo de F , existe un único functor triangulado $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{T}'$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{Q_{\mathcal{C}}} & \mathcal{T}/\mathcal{C} \\ & \searrow F & \downarrow \tilde{F} \\ & & \mathcal{T}' \end{array}$$

Al mapeo canónico $Q_{\mathcal{C}} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{C}$ se le llama *localización de Verdier*. Es usual denotar a la categoría \mathcal{T}/\mathcal{C} como

$$\mathcal{T}/\mathcal{C} := \mathcal{T}[\mathcal{C}^{-1}].$$

La categoría \mathcal{T}/\mathcal{C} se define de la siguiente manera. Los objetos de \mathcal{T}/\mathcal{C} son los objetos de \mathcal{T} . Para describir a los morfismos, usamos la siguiente definición.

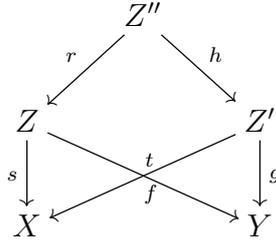
DEFINICIÓN 1.24. Para cualesquiera dos objetos $X, Y \in \mathcal{T}$, consideremos la clase de diagramas de la forma

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array}$$

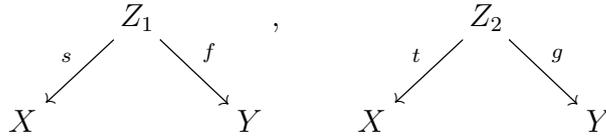
donde Z es un objeto en \mathcal{T} y tal que $s \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}$ (Definición 1.1.16). Decimos que dos tales diagramas

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & Z' & \\ t \swarrow & & \searrow g \\ X & & Y \end{array}$$

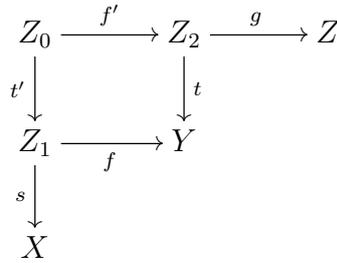
son equivalentes si existen $Z'' \in \mathcal{T}$ y morfismos $r : Z'' \rightarrow Z$ y $h : Z'' \rightarrow Z'$ en $Mor_{\mathcal{C}}$ que hacen conmutar al siguiente diagrama



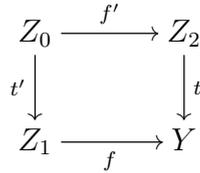
Tomemos dos morfismos representados por



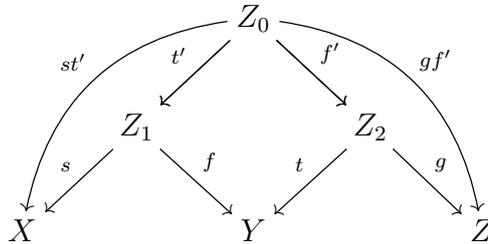
Consideremos el siguiente diagrama:



en donde el cuadrado



se obtiene por pullback homotópico. Ya que $t \in Mor_{\mathcal{C}}$, por la Proposición 1.1.19, $t' \in Mor_{\mathcal{C}}$. Ya que $s \in Mor_{\mathcal{C}}$, nuevamente la Proposición 1.1.19 nos dice que st' está en $Mor_{\mathcal{C}}$. Por lo tanto, la composición está dada por el diagrama:



y $t' \in Mor_{\mathcal{C}}$.

1.1.2. *Localización de Bousfield.*

DEFINICIÓN 1.25. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada. Sea \mathcal{S} una subcategoría thick. Decimos que un funtor de *localización de Bousfield existe* para $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ si existe un adjunto derecho al funtor natural

$$F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{S}.$$

Si es el caso, llamamos al adjunto derecho *el funtor de localización de Bousfield*, y lo denotamos por $G : \mathcal{T}/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$.

NOTA 1.26. Supongamos que existe un funtor de localización de Bousfield para la pareja $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Por adjunción, tenemos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(S, GT) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(FS, T).$$

Si suponemos que $S \in \mathcal{S}$, entonces $FS = 0$ y concluimos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(S, GT) = 0$.

DEFINICIÓN 1.27. Sea \mathcal{S} una clase de objetos en una categoría triangulada \mathcal{T} . Un objeto $T \in \mathcal{T}$ se llama *\mathcal{S} -local* si, para cada objeto $S \in \mathcal{S}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(S, T) = 0.$$

NOTA 1.28. Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ es thick, y si existe una localización de Bousfield para la pareja $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, entonces por la Nota 1.1.26, el objeto GT es \mathcal{S} -local para cualquier $T \in \mathcal{T}$.

LEMA 1.29. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada y $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ una subcategoría triangulada. Sea $T \in \mathcal{T}$ un objeto \mathcal{S} -local. Entonces, el mapeo natural

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, T) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(FX, FT)$$

es un isomorfismo para todo $X \in \mathcal{T}$.

DEMOSTRACIÓN. (Ver [16], Lem. 9.1.5). □

Supongamos que existe un funtor de localización de Bousfield para una pareja $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Los objetos de \mathcal{T} y de \mathcal{T}/\mathcal{S} son los mismos. Dado un objeto $T \in \mathcal{T}$, existe la unidad de la adjunción

$$\eta_T : T \rightarrow GFT,$$

que es el morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, GFT)$ que corresponde a la identidad $id_{FT} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(FT, FT)$ bajo el isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, GFT) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(FT, FT).$$

Ya que T y FT coinciden, escribimos

$$\eta_T : T \rightarrow GT$$

para la unidad de la adjunción.

También, tenemos la counidad de la adjunción

$$\varepsilon : FG \rightarrow id$$

de tal manera que $(\varepsilon F) \circ (F\eta) = id_F$. Esto significa que $F\eta$ tiene inversa izquierda.

Sean $X, T \in \mathcal{T}$ objetos arbitrarios. Por adjunción,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(FX, FT) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, GFT).$$

Por la Nota 1.1.26, GFT es \mathcal{S} -local, y por el Lema 1.1.29 se tiene el isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, GFT) &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(FX, FGFT) \\ g &\mapsto Fg. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene el isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(FX, FT) &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(FX, FGFT) \\ f &\mapsto \left(FX \xrightarrow{F\eta_X} FGF X \xrightarrow{FGf} FGFT \right). \end{aligned}$$

Por naturalidad de $\varepsilon : FG \rightarrow id$, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} FGF X & \xrightarrow{FGf} & FGFT \\ \downarrow \varepsilon_{FX} & & \downarrow \varepsilon_{FT} \\ FX & \xrightarrow{f} & FT \end{array}$$

Se sigue entonces que la composición

$$FX \xrightarrow{F\eta_X} FGF X \xrightarrow{FGf} FGFT \xrightarrow{\varepsilon_{FT}} FT$$

es igual a la composición

$$FX \xrightarrow{F\eta_X} FGF X \xrightarrow{\varepsilon_{FX}} FX \xrightarrow{f} FT$$

que es justo $f : FX \rightarrow FT$. De esta forma, componer con $\varepsilon_{FT} : FGFT \rightarrow FT$ induce la inversa en

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(FX, FT) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(FX, FGFT),$$

por lo que $\varepsilon_{FT} : FGFT \rightarrow FT$ es un isomorfismo. Sin embargo, $\varepsilon_{FT} F\eta_T = id$, y $F\eta_T$ es la inversa de ε_{FT} . En particular,

$$F\eta : F \rightarrow FGF$$

es un isomorfismo. Esto implica que $\eta : T \rightarrow GT$ es un isomorfismo en \mathcal{T}/\mathcal{S} .

PROPOSICIÓN 1.30. Supongamos que \mathcal{S} es una subcategoría thick de una categoría triangulada \mathcal{T} , y supongamos que existe un funtor de localización de Bousfield para $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Sea T un objeto de \mathcal{T} . En el triángulo distinguido

$$T_{\mathcal{S}} \longrightarrow T \xrightarrow{\eta_T} GT \longrightarrow T_{\mathcal{S}}[1]$$

- (1) El objeto GT es \mathcal{S} -local.
- (2) $T_{\mathcal{S}}$ está en \mathcal{S} .

DEMOSTRACIÓN. Por la Nota 1.1.28, GT es \mathcal{S} -local. Por el comentario anterior, η_T es un isomorfismo en \mathcal{T}/\mathcal{S} . Basta aplicar F para obtener el resultado. \square

COROLARIO 1.31. Supongamos que \mathcal{S} es una subcategoría triangulada \mathcal{T} , y supongamos que existe un functor de localización de Bousfield para $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Sea T cualquier objeto \mathcal{S} -local. Entonces, el mapeo $T \rightarrow GT$ es un isomorfismo en \mathcal{T} .

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 1.1.30, en el triángulo distinguido

$$T_{\mathcal{S}} \longrightarrow T \xrightarrow{\eta_T} GT \longrightarrow T_{\mathcal{S}}[1]$$

el objeto $T_{\mathcal{S}}$ está en \mathcal{S} . Así, el mapeo $T_{\mathcal{S}} \rightarrow T$ se anula por la hipótesis de que T es \mathcal{S} -local. Así, $GT = T \oplus T_{\mathcal{S}}[1]$. Por lo tanto, el mapeo $T_{\mathcal{S}}[1] \rightarrow GT$ se anula por la Proposición 1.1.30. Así, por ser la inclusión de un sumando directo, $T_{\mathcal{S}} \cong 0$. \square

El siguiente resultado provee una condición necesaria y suficiente para la existencia de un functor de localización de Bousfield.

PROPOSICIÓN 1.32. Supongamos que \mathcal{S} es una subcategoría thick de una categoría triangulada \mathcal{T} . Una localización de Bousfield existe para la pareja $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ si y sólo si la inclusión $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ admite un adjunto derecho.

DEMOSTRACIÓN. ([16], Prop. 9.1.18). \square

1.2. El teorema del functor adjunto de Neeman. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada. Decimos que \mathcal{T} contiene coproductos si para cualquier conjunto Λ y cualquier $\{X_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ de objetos en \mathcal{T} , el coproducto $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda}$ existe en \mathcal{T} .

DEFINICIÓN 1.33. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada que admite coproductos.

(1) Un objeto U de \mathcal{T} es *compacto* si, para cualquier coproducto de objetos de \mathcal{T} ,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}} \left(U, \coprod_{\lambda} X_{\lambda} \right) = \prod_{\lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, X_{\lambda}).$$

(2) La categoría \mathcal{T} se llama *compactamente generada* si existe un conjunto \mathcal{U} de objetos compactos de \mathcal{T} con la siguiente propiedad: Si $X \in \mathcal{T}$ es tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, X) = 0$ para cada $U \in \mathcal{U}$, entonces $X = 0$.

DEFINICIÓN 1.34. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada que contiene coproductos. Sea

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots$$

un sistema inductivo en \mathcal{T} . Entonces, su *colímite homotópico*, $\mathrm{hocolim} X_i$ se define (hasta isomorfismo no canónico) a través del triángulo distinguido

$$\coprod_i X_i \xrightarrow{id-s} \coprod_i X_i \longrightarrow \mathrm{hocolim} X_i \longrightarrow (\coprod_i X_i)[1]$$

en donde s es la composición

$$s : X_{i_0} \rightarrow X_{i_0+1} \rightarrow \coprod_i X_i$$

sobre el factor X_{i_0} .

PROPOSICIÓN 1.35. Supongamos que U es un objeto compacto de una categoría triangulada \mathcal{T} , y supongamos que

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots$$

es una sucesión de objetos y morfismos en \mathcal{T} . Supongamos que \mathcal{T} admite coproductos. Entonces,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, \mathrm{hocolim} X_i) = \mathrm{colim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, X_i).$$

DEMOSTRACIÓN. ([15], Lem. 2.8). \square

TEOREMA 1.36 (Representabilidad de Brown). Sea \mathcal{T} una categoría triangulada compactamente generada y $H : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un functor cohomológico (Def. 1.1.4) tal que manda coproductos en productos. Entonces, H es representable

DEMOSTRACIÓN. ([15], Thm. 3.1). \square

Una consecuencia directa del Teorema de representabilidad de Brown es el siguiente resultado.

TEOREMA 1.37 (El Teorema del functor adjunto de Neeman [15], Thm. 4.1). Sean \mathcal{S} una categoría triangulada compactamente generada y \mathcal{T} cualquier categoría triangulada. Sea $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ un functor triangulado. Supongamos que F respeta coproductos. Entonces, F tiene un adjunto derecho $G : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea T un objeto de \mathcal{T} , y consideremos el functor sobre \mathcal{S}

$$S \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F(S), T).$$

Tal functor es cohomológico y manda coproductos a productos. Así,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}\left(F\left(\coprod_{\lambda} S_{\lambda}\right), T\right) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}\left(\coprod_{\lambda} F(S_{\lambda}), T\right) = \prod_{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F(S_{\lambda}), T).$$

Por representabilidad de Brown, el functor es representable. Esto es, existe $G(T) \in \mathcal{S}$ con

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F(S), T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(S, G(T)).$$

Por el lema de Yoneda y naturalidad, G se extiende a un functor adjunto derecho a F . \square

1.3. La categoría derivada y funtores derivados.

DEFINICIÓN 1.38. Sea \mathcal{A} una categoría aditiva. Un complejo, A^{\bullet} en \mathcal{A} es un diagrama de objetos y morfismos en \mathcal{A}

$$A^{\bullet} : \dots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \dots$$

tal que $d^n \circ d^{n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Un complejo es *acotado* si $A^n = 0$ para $|n| \gg 0$. Es *acotado por debajo* si $A^n = 0$ para $n \ll 0$ y es *acotado por arriba* si $A^n = 0$ para $k \gg 0$.

Un morfismo entre dos complejos A^{\bullet} y B^{\bullet} consiste de una colección de morfismos $f^n : A^n \rightarrow B^n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d_B^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_A^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. La categoría de todos los complejos en \mathcal{A} se denotará por $C(\mathcal{A})$. La categoría $C^b(\mathcal{A})$ de complejos acotados es una subcategoría plena de $C(\mathcal{A})$.

NOTA 1.39. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. Entonces, $C(\mathcal{A})$ es una categoría abeliana. En efecto, toda estructura de categoría abeliana sobre $C(\mathcal{A})$ se hereda de \mathcal{A} grado a grado. Por ejemplo, $\ker f = (\ker f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

La categoría \mathcal{A} se encaja en $C(\mathcal{A})$ como subcategoría plena identificando un objeto A de \mathcal{A} con el complejo

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

concentrada en grado 0 con diferenciales triviales.

DEFINICIÓN 1.40. Sea A^\bullet un complejo y sea n un entero. Definimos al complejo $A^\bullet[n]$ como $A^\bullet[n]^k = A^{k+n}$ y $d_{A^\bullet[n]}^k = (-1)^n d_{A^\bullet}^{k+n}$. Para un morfismo $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$, se define $f[n] : A^\bullet[n] \rightarrow B^\bullet[n]$ como $f[n]^k = f^{n+k}$.

NOTA 1.41. El n -ésimo funtor de traslación, $[n]$, define una autoequivalencia de $C(\mathcal{A})$ con inversa $[-n]$.

DEFINICIÓN 1.42. Sea A^\bullet un complejo en $C(\mathcal{A})$ con \mathcal{A} una categoría abeliana. Definimos el objeto n -ésimo de cohomología $H^n(A^\bullet)$ como el cociente

$$H^n(A^\bullet) := \frac{\ker(d^n)}{\operatorname{im}(d^{n-1})} \in \mathcal{A}.$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, un morfismo de complejos $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ induce un morfismo en cohomología

$$H^n(f) : H^n(A^\bullet) \rightarrow H^n(B^\bullet).$$

DEFINICIÓN 1.43. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. Un morfismo de complejos $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ es un *casi-isomorfismo* (*qis*) si para todo $n \in \mathbb{Z}$, el morfismo inducido $H^n(f)$ es un isomorfismo.

DEFINICIÓN 1.44. Un morfismo $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ es *homotópico a cero* si, para toda $n \in \mathbb{Z}$, existen morfismos $h^n : A^n \rightarrow B^{n-1}$ tales que $f^n = d_{B^\bullet}^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_{A^\bullet}^n$. Dos morfismos f y g son homotópicos, denotado $f \sim g$, si $f - g$ es homotópico a cero.

DEFINICIÓN 1.45. Sea \mathcal{A} una categoría aditiva y $C(\mathcal{A})$ la categoría de complejos sobre \mathcal{A} . Definimos la categoría homotópica $K(\mathcal{A})$ asociada a \mathcal{A} como la categoría en donde los objetos son los complejos de \mathcal{A} y para cualesquiera dos objetos A^\bullet y B^\bullet , el grupo de morfismos es

$$\operatorname{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) := \operatorname{Hom}_{C(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) / \sim,$$

donde \sim es la relación de homotopía.

Designaremos por $K^b(\mathcal{A})$ a la subcategoría plena de $K(\mathcal{A})$ formada de complejos en donde los términos son nulos salvo en un número finito de grados.

NOTA 1.46. El funtor de traslación claramente provee una autoequivalencia de $K(\mathcal{A})$. Además, si \mathcal{A} es una categoría tensorial, entonces $K^b(\mathcal{A})$ hereda una estructura tensorial bajo el producto tensorial usual de complejos. Para la categoría de complejos no acotados, es necesario pedir que \mathcal{A} admita sumas directas arbitrarias para que la estructura tensorial pueda definirse.

DEFINICIÓN 1.47. Sea $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ un morfismo en $K(\mathcal{A})$. El *cono* de f , denotado por $C(f)$, es el siguiente objeto de $K(\mathcal{A})$:

$$C(f)^k = A^{k+1} \oplus B^k$$

$$d_{C(f)}^k = \begin{pmatrix} -d_{A^\bullet}^{k+1} & 0 \\ f^{k+1} & d_{B^\bullet}^k \end{pmatrix}$$

NOTA 1.48. Consideremos al cono, $C(f)$, de $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$.

- (i) El cono es un complejo ya que f es morfismo de complejos.
- (ii) Se tienen morfismos naturales de complejos

$$\tau : B^\bullet \rightarrow C(f), \quad \pi : C(f) \rightarrow A^\bullet[1]$$

dados por la inyección $B^n \rightarrow A^{n+1} \oplus B^n$ y la proyección $A^{n+1} \oplus B^n \rightarrow A^{n+1}$.

- (iii) La composición de complejos $A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C(f)$ es homotópica a cero con homotopía dada por $(\iota_n : A^n \rightarrow A^n \oplus B^{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$.
- (iv) La sucesión $0 \rightarrow B^\bullet \rightarrow C(f) \rightarrow A^\bullet[1] \rightarrow 0$ es exacta. Así, induce una sucesión exacta larga en cohomología. En particular, f es casi-isomorfismo si y sólo si $H^n(C(f)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

DEFINICIÓN 1.49. Decimos que un triángulo

$$A_1^\bullet \longrightarrow A_2^\bullet \longrightarrow A_3^\bullet \longrightarrow A_1^\bullet[1]$$

en $K(\mathcal{A})$ es distinguido si es isomorfo en $K(\mathcal{A})$ a un triángulo de la forma

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{\tau} C(f) \xrightarrow{\pi} A^\bullet[1]$$

donde $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ es un morfismo de complejos.

PROPOSICIÓN 1.50. El funtor de traslación $A^\bullet \rightarrow A^\bullet[1]$ y triángulos distinguidos dados como en la Definición 1.1.49 hacen de la categoría homotópica $K(\mathcal{A})$ de una categoría abeliana \mathcal{A} una categoría triangulada.

DEFINICIÓN 1.51 (**La categoría derivada**). Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. Si $\mathcal{S} = \{A^\bullet : H^n(A^\bullet) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}$, entonces $Mor_{\mathcal{S}}$ consiste de todos los casi-isomorfismos. Por lo tanto, definimos la categoría derivada de \mathcal{A} , como

$$D(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A})[\mathcal{S}^{-1}]$$

(véase el Teorema de Verdier 1.1.23).

DEMOSTRACIÓN. ([6], IV §2). □

Es posible caracterizar a la categoría derivada en términos de resoluciones inyectivas. Sea $Inj(\mathcal{A})$ la subcategoría plena de una categoría abeliana formada por objetos inyectivos. Sea $K^+(Inj(\mathcal{A}))$ la categoría cuyos objetos son complejos de objetos inyectivos acotados por debajo y cuyos morfismos son morfismos de complejos módulo equivalencia homotópica. Sea $\iota : K^+(Inj(\mathcal{A})) \rightarrow D^+(\mathcal{A})$ el funtor natural inducido por $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$.

PROPOSICIÓN 1.52. Supongamos que \mathcal{A} contiene suficientes inyectivos. Entonces, el funtor natural

$$\iota : K^+(\text{Inj}(\mathcal{A})) \rightarrow D^+(\mathcal{A})$$

es una equivalencia.

DEMOSTRACIÓN. Ver ([6], III §5). \square

La meta ahora es levantar funtores entre categorías abelianas (o categorías homotópicas) a funtores asociados a categorías derivadas (funtores derivados). Comencemos con el siguiente resultado.

LEMA 1.53. Si \mathcal{A} y \mathcal{B} son categorías abelianas y $F : K^*(\mathcal{A}) \rightarrow K^*(\mathcal{B})$ es un funtor triangulado, entonces F induce naturalmente un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} K^*(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K(F)} & K^*(\mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^*(\mathcal{A}) & \longrightarrow & D^*(\mathcal{B}) \end{array}$$

si alguna de las siguientes condiciones equivalentes es verdadera:

- (1) Un casi-isomorfismo se mapea bajo F a un casi-isomorfismo.
- (2) La imagen de un complejo acíclico (casi-isomorfo a 0) es acíclico.

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos que las condiciones son equivalentes. Que (1) implica (2) es obvio. Para ver que (2) implica (1), consideremos un morfismo de complejos $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$. Entonces, el triángulo

$$A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C(f) \longrightarrow A^\bullet[1]$$

es distinguido, y $C(f)$ es acíclico si y sólo si f es un casi-isomorfismo. Sin embargo, ya que F es triangulado, $F(f)$ es casi-isomorfismo si y sólo si $C(F(f)) = F(C(f))$ es acíclico.

Ahora, un objeto A^\bullet se mapea a $F(A^\bullet)$, visto como objetos en las categorías derivadas, y un morfismo

$$\begin{array}{ccc} & C^\bullet & \\ s \swarrow & & \searrow \\ A^\bullet & & B^\bullet \end{array}$$

con $s \in \text{Mor}_{\mathcal{S}}$, se mapea a se mapea a

$$\begin{array}{ccc} & F(C^\bullet) & \\ F(s) \swarrow & & \searrow \\ F(A^\bullet) & & F(B^\bullet) \end{array}$$

en donde, por hipótesis, $F(s) \in \text{Mor}_{\mathcal{S}}$. \square

Tenemos la equivalencia $\iota : K^+(\text{Inj}(\mathcal{A})) \rightarrow D^+(\mathcal{A})$, de modo que podemos considerar una casi-inversa ι^{-1} eligiendo un complejo de objetos inyectivos casi-isomorfo a cualquier complejo acotado por debajo. Obtenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} K^+(\text{Inj}(\mathcal{A})) & \xleftarrow{\iota} & K^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K(F)} & K^+(\mathcal{B}) \\ & \searrow & \downarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} & & \downarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \\ & & D^+(\mathcal{A}) & & D^+(\mathcal{B}) \end{array}$$

ι^{-1} (curved arrow from $D^+(\mathcal{A})$ to $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$)

DEFINICIÓN 1.54. Sea $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtor exacto izquierdo de categorías abelianas donde \mathcal{A} tiene suficientes inyectivos. Entonces el funtor derivado (total) de F ,

$$RF : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B}),$$

se define como la siguiente composición

$$D^+(\mathcal{A}) \xleftarrow{\cong} K^+(\text{Inj}(\mathcal{A})) \xrightarrow{K(F)} K^+(\mathcal{B}) \rightarrow D^+(\mathcal{B}),$$

en donde el primer funtor es la inversa del funtor y el último funtor es el único funtor que se factoriza bajo el funtor de localización canónico $C^+(\mathcal{B}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$.

NOTA 1.55 (ver [6], III, §4).

i) Existe un morfismo natural de funtores

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \circ K(F) \rightarrow RF \circ \mathcal{Q}_{\mathcal{A}}.$$

ii) La categoría $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$ es triangulada: si $f : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$ es un morfismo de complejos entre objetos inyectivos, entonces $C(f)$ es un complejo de objetos inyectivos. Claramente, $\iota : K^+(\text{Inj}(\mathcal{A})) \rightarrow D^+(\mathcal{A})$ es un funtor triangulado y por lo tanto ι^{-1} es triangulado. Además F es aditivo y preserva mapeos conos; lo que implica que $K(F)$ es triangulado. Así, el funtor derivado derecho $RF : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$ es un funtor triangulado.

iii) Sean F un funtor exacto izquierdo entre dos categorías trianguladas y $H = H^0$ un funtor cohomológico. Entonces $R^i F = H^0(RF[i]) = H^i(RF)$ se llama *el i -ésimo funtor derivado para F* . Cualquier sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

da lugar a una sucesión exacta larga

$$0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow \cdots \rightarrow R^n F(B) \rightarrow R^n F(C) \rightarrow R^{n+1} F(A) \rightarrow \cdots$$

iv) Todas las construcciones anteriores pueden efectuarse de manera dual: Si F es exacto derecho, el *funtor derivado izquierdo* LF se obtiene aplicando $K(F)$ al complejo P^\bullet de objetos proyectivos casi-isomorfos a A^\bullet .

Daremos una generalización de la construcción de funtor derivado derecho.

PROPOSICIÓN 1.56. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} categorías abelianas, y $F : K^+(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$ un funtor triangulado. Supongamos que existe una subcategoría triangulada $\mathcal{K}_F \subset K^+(\mathcal{A})$ que es adaptado a F , es decir, que satisface las siguientes dos condiciones:

- (1) Si $A^\bullet \in \mathcal{K}_F$ es acíclico, es decir $H^i(A) = 0$ para cualquier i , entonces $F(A^\bullet)$ es acíclico.
- (2) Dado cualquier $A^\bullet \in K^+(\mathcal{A})$ existe un objeto $T_{A^\bullet} \in \mathcal{K}_F$ y un casi-isomorfismo $A^\bullet \rightarrow T_{A^\bullet}$.

Entonces existe un funtor derivado derecho $RF : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$ que satisface las propiedades de la Nota 1.55 i) y ii).

DEMOSTRACIÓN. ([6], Thm. 4.8). □

DEFINICIÓN 1.57. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. El funtor

$$\text{Ext}^i(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

es el i -ésimo funtor derivado de $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ para algún $X \in \mathcal{A}$.

PROPOSICIÓN 1.58. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Entonces, para $X, Y \in \mathcal{A}$, se tiene

$$\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y[i]) = \begin{cases} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y) & i \geq 0 \\ 0 & i < 0. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $Y \hookrightarrow I^\bullet$ una resolución inyectiva tal que $Y \cong I^\bullet$ en $D(\mathcal{A})$ (véase la Proposición 1.1.52). Entonces,

$$\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y[i]) \cong \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, I^\bullet[i]) \cong \text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, I^\bullet) / \sim,$$

en donde el segundo isomorfismo se sigue de ([23], Tag 05TG).

Ahora, un mapeo entre los complejos es un mapeo $X \rightarrow I^i$, en \mathcal{A} , tal que la composición $X \rightarrow I^i \rightarrow I^{i+1}$ es cero, salvo homotopía. Esto es exactamente,

$$\ker(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I^i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I^{i+1})) / \text{im}(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I^{i-1}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I^i))$$

que, por definición es $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y)$. □

Nótese que este resultado permite definir $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i$ en una categoría abeliana \mathcal{A} incluso si \mathcal{A} no admite suficientes inyectivos. También, el funtor traslación $X \mapsto X[1]$ es una autoequivalencia de categorías sobre $C(\mathcal{A})$ y $D(\mathcal{A})$. De modo que, para toda $X, Y \in \mathcal{A}$ y $i, j \in \mathbb{Z}$ obtenemos,

$$\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X[i], Y[j]) = \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y[j - i]).$$

Se tienen las siguientes propiedades.

PROPOSICIÓN 1.59. Se tiene lo siguiente:

- (a) Ya que la categoría $D(\mathcal{A})$ es aditiva, los grupos $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y)$ son abelianos.
- (b) Si $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ (resp. $0 \rightarrow Y' \rightarrow Y \rightarrow Y'' \rightarrow 0$) son sucesiones exactas, vistas como triángulos distinguidos en $D(\mathcal{A})$, obtenemos la sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X'', Y) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X', Y) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i+1}(X'', Y) \longrightarrow \dots$$

(resp.

$$\dots \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y') \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y'') \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i+1}(X, Y') \longrightarrow \dots)$$

(c) Dados $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ y $i, j \in \mathbb{Z}$, existe un mapeo bilineal

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y) \times \text{Ext}_{\mathcal{A}}^j(Y, Z) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i+j}(X, Z).$$

DEMOSTRACIÓN. ([6], IV §3). □

DEFINICIÓN 1.60. Sean $A^\bullet, B^\bullet \in C(\mathcal{A})$. Definimos el *hom interno* $\text{Hom}^\bullet(A^\bullet, B^\bullet)$ como el complejo

$$\text{Hom}^n(A^\bullet, B^\bullet) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A^k, B^{k+n})$$

con diferenciales $d^n((f_k)_{k \in \mathbb{Z}}) := d_B \circ f_k + (-1)^n f_{k+1} \circ d_A$.

PROPOSICIÓN 1.61. Sea $A^\bullet \in C(\mathcal{A})$ un complejo de objetos en una categoría abeliana que contiene suficientes inyectivos. Entonces, el funtor derivado derecho

$$R\text{Hom}^\bullet(A^\bullet, -) : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$$

existe, y si escribimos $\text{Ext}^n(A^\bullet, B^\bullet) := H^n(R\text{Hom}^\bullet(A^\bullet, B^\bullet))$ se tiene

$$\text{Ext}^n(A^\bullet, B^\bullet) \cong \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet[n]).$$

DEMOSTRACIÓN. La subcategoría triangulada plena de $K^+(\mathcal{A})$ formada de complejos de objetos inyectivos es adaptada al funtor $\text{Hom}^\bullet(A^\bullet, -)$. □

2. Sucesiones espectrales

En esta sección, seguiremos el artículo de Boardman [5] adjuntando algunos comentarios. La parte importante es la introducción de los grupos límites D^∞ y colímites $D^{-\infty}$, que son los candidatos naturales para la convergencia de una sucesión espectral.

DEFINICIÓN 2.1. Una *sucesión espectral* (bigraduada) está determinada por los datos siguientes:

- (1) grupos abelianos E_r^{pq} para todo $r \geq 0$ y $p, q \in \mathbb{Z}$.
- (2) morfismos $d_r^{pq} : E_r^{pq} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$, $r \geq 0$ y $p, q \in \mathbb{Z}$, tales que $d^2 = 0$.
- (3) isomorfismos $E_{r+1}^{pq} \cong \ker d_r^{pq} / \text{im } d_r^{p-r, q+r-1} = H(E_r^{pq}, d_r^{pq})$.

NOTA 2.2. i) Consideremos a los grupos graduados

$$E_r^n = \bigoplus_{p+q=n} E_r^{pq}.$$

Los morfismos d_r^{pq} definen una diferencial de grado +1

$$d_r : E_r^n \rightarrow E_r^{n+1},$$

y se tiene un isomorfismo $H^n(E_r^*) \cong E_{r+1}^n$. El entero n se llama *grado total* de E_r^{pq} , mientras que el grado q se llama el *grado complementario*.

- ii) De manera equivalente podemos definir las sucesiones espectrales *homológicas*, que corresponden a la definición anterior pero con el cambio de notación $E_{pq}^r = E_r^{-p,-q}$. Entonces, las diferenciales d_r^{pq} definen morfismos $d_{pq}^r : E_{pq}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ de suerte que, con las notaciones análogas, $E_n^{r+1} = H_n(E_*^r)$.
- iii) Una sucesión espectral E_r^{pq} es de *primer cuadrante* si $E_r^{pq} = 0$ para $p < 0$ o $q < 0$. Observamos, en particular, que dar una sucesión espectral en el tercer cuadrante es equivalente a dar una sucesión espectral homológica de primer cuadrante.

Fijemos un entero positivo r . El grupo E_{r+1}^{pq} es un subcociente de E_r^{pq} . Denotemos

$$\begin{aligned} Z_r^{pq} &= \ker(d_r^{pq} : E_r^{pq} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}) \subset E_r^{pq}, \\ B_r^{pq} &= \text{im}(d_r^{p-r,q+r-1} : E_r^{p-r,q+r-1} \rightarrow E_r^{pq}) \subset E_r^{pq}, \end{aligned}$$

a los ciclos y las fronteras de E_r^{pq} , respectivamente, de la diferencial d_r^{pq} , de suerte que $B_r^{pq} \subset Z_r^{pq}$ y $E_{r+1}^{pq} = Z_r^{pq}/B_r^{pq}$.

Se tiene una cadena de subgrupos de E_1^{pq} ,

$$0 \subset B_1^{pq} \subset \cdots \subset B_r^{pq} \subset B_{r+1}^{pq} \subset \cdots \subset Z_{r+1}^{pq} \subset Z_r^{pq} \subset \cdots \subset Z_1^{pq}.$$

DEFINICIÓN 2.3. Definimos los ciclos y las fronteras (o bordes) al infinito de la sucesión espectral E_r^{pq} como

$$Z_\infty^{pq} = \bigcap_{r \geq 1} Z_r^{pq}, \quad B_\infty^{pq} = \bigcup_{r \geq 1} B_r^{pq},$$

y el término E_∞ como el subcociente de E_1^{pq} dado por

$$E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq}/B_\infty^{pq}.$$

Los ciclos y las fronteras al infinito completan la cadena de subgrupos de E_1^{pq} en la forma

$$B_1^{pq} \subset \cdots \subset B_r^{pq} \subset B_{r+1}^{pq} \subset \cdots \subset B_\infty^{pq} \subset Z_\infty^{pq} \subset \cdots \subset Z_{r+1}^{pq} \subset Z_r^{pq} \subset \cdots \subset Z_1^{pq}.$$

Observamos que los ciclos al infinito, son ciclos para todas las diferenciales d_r^{pq} , $r \geq 1$.

En general, el objetivo de una sucesión espectral es calcular el término E_∞^{pq} . En el caso más favorable, el cálculo final se hace en un número finito de etapas, esto es para una pareja (p, q) fija $E_\infty^{pq} \cong E_r^{pq}$ para $r \gg 0$. Por ejemplo, supongamos que tenemos una sucesión espectral definida en el primer cuadrante ($E_r^{pq} = 0$ para p o $q < 0$). Si para (p, q) tomamos $r > \max\{p, q + 1\}$, entonces las diferenciales de E_r^{pq} son nulas, en donde $E_\infty^{pq} \cong E_r^{pq}$.

DEFINICIÓN 2.4. Diremos que una sucesión espectral E_r^{pq} se degenera en el término N si $d_r^{pq} = 0$ para todo $r \geq N$.

Así, si E_r^{pq} es una sucesión espectral degenerada en el término N , se sigue que

$$E_N^{pq} = E_{N+1}^{pq} = \cdots = E_\infty^{pq},$$

en donde el término al infinito se aproxima finitamente para todas las parejas (p, q) . Por ejemplo, si la sucesión espectral E_r^{pq} es nula fuera de la banda vertical $0 \leq p \leq n$, entonces se degenera en el término n .

DEFINICIÓN 2.5. Un morfismo de sucesiones espectrales es una sucesión de morfismos

$$f_{pq}^r : E_r^{pq} \rightarrow \tilde{E}_r^{pq},$$

tales que

- (1) conmutan con las diferenciales, $d_r f_r = f_r d_r$.
- (2) f_r^{pq} induce f_{r+1}^{pq} en cohomología.

Observemos que un morfismo de sucesiones espectrales induce morfismos en los ciclos y fronteras $f_r^{pq} : Z_r^{pq} \rightarrow \tilde{Z}_r^{pq}$, $f_r^{pq} : B_r^{pq} \rightarrow \tilde{B}_r^{pq}$ y, por lo tanto, en los grupos al infinito

$$f_\infty^{pq} : E_\infty^{pq} \rightarrow \tilde{E}_\infty^{pq}.$$

PROPOSICIÓN 2.6. Sea $f_{pq}^r : E_{pq}^r \rightarrow \tilde{E}_r^{pq}$ un morfismo de sucesiones espectrales y supongamos que existe $a > 0$ tal que f_{pq}^a es un isomorfismo. Entonces, f_{pq}^r es un isomorfismo para todo $a \leq r \leq \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f_{pq}^a es un isomorfismo, entonces f_{pq}^a induce un isomorfismo entre ciclos y las fronteras de sucesiones espectrales y, en general, induce un isomorfismo

$$B_r^{pq} \cong \tilde{B}_r^{pq}, \quad Z_r^{pq} \cong \tilde{Z}_r^{pq}, \quad r \geq a,$$

considerados como los subgrupos de E_a^{pq} . □

2.1. Convergencia. Las sucesiones espectrales son útiles para determinar a los grupos filtrados a los que convergen.

DEFINICIÓN 2.7. Sea H un grupo abeliano. Una filtración (decreciente) de H es una sucesión de subgrupos

$$\dots \subset F^{p+1}H \subset F^pH \subset \dots \subset H, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

El p -ésimo grupo graduado de H por la filtración F^* es el grupo

$$Gr_F^p H = F^p H / F^{p+1} H.$$

Si $(H, F), (H', F')$ son dos grupos filtrados, un morfismo filtrado $f : (H, F) \rightarrow (H', F')$ es un morfismo de grupos $f : H \rightarrow H'$ compatible con las filtraciones, es decir tal que $f(F^p) \subset F'^p$.

Si H^* es un grupo abeliano graduado, una filtración de H^* es una filtración de H^n , para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Los grupos graduados de un grupo filtrado no determinan, en general, al grupo H .

Dada una torre A , de grupos abelianos

$$\dots \rightarrow A^{n+1} \xrightarrow{f^n} A^n \rightarrow \dots, \quad n \in \mathbb{Z}$$

escribimos

$$\alpha : \prod_n A^n \rightarrow \prod_n A^n$$

para el morfismo dado por

$$\alpha : (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow (a_n - f^n(a_{n+1}))_{n \in \mathbb{Z}}$$

DEFINICIÓN 2.8. Consideremos al morfismo

$$\alpha : \prod_n A^n \rightarrow \prod_n A^n$$

cuyo núcleo es $\varprojlim_n A^n$. Definimos al derivado del límite de una torre A de grupos abelianos como

$$R\varprojlim_n A^n := \text{coker}(\alpha).$$

Esto es, se tiene la sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n A^n \longrightarrow \prod_n A^n \xrightarrow{\alpha} \prod_n A^n \longrightarrow R\varprojlim_n A^n \longrightarrow 0..$$

DEFINICIÓN 2.9. Sea (H, F^*) un grupo filtrado.

- (1) Decimos que la filtración F^* es separada (o Hausdorff) si $\bigcap_p F^p H = 0$.
- (2) Decimos que la filtración F^* es exhaustiva si $\bigcup_p F^p H = H$.
- (3) Decimos que la filtración F^* es completa si $R\varprojlim_p F^p H = 0$.

Usaremos las siguientes notaciones

$$F^\infty H = \varprojlim_p F^p H = \bigcap_p F^p H,$$

$$F^{-\infty} H = \varinjlim_p F^p H = \bigcup_p F^p H,$$

de modo que la filtración es separada si $F^\infty H = 0$ y es exhaustiva si $F^{-\infty} H = H$.

Entre las filtraciones separadas, tenemos las filtraciones *acotadas inferiormente*: aquellas para las cuales $F^p = 0$, para p suficientemente grande. Dualmente, las filtraciones acotadas superiormente son exhaustivas.

El siguiente resultado describe de manera concisa cuándo una filtración es, a la vez, separada y completa.

LEMA 2.10. Una filtración $F^* H$ es separada y completa si, y solo si,

$$H = \varprojlim_p H/F^p H.$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada p , tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F^p H \longrightarrow H \longrightarrow H/F^p H \longrightarrow 0.$$

Así, la sucesión exacta de los límites derivados se reduce a la sucesión

$$0 \longrightarrow \varprojlim_p F^p H \longrightarrow H \longrightarrow \varprojlim_p H/F^p H \longrightarrow R\varprojlim_p F^p H \longrightarrow 0,$$

de donde ese sigue el resultado. □

Consideremos ahora algunas propiedades elementales de filtraciones que usaremos a lo largo de la sección.

LEMA 2.11. Sea F^*H una filtración de un grupo abeliano H y $K \subset F^\infty H$ un subgrupo. Entonces:

- (1) $\varinjlim_p F^p H/K = F^{-\infty} H/K$.
- (2) $\varprojlim_p F^p H/K = F^\infty H/K$.
- (3) $R\varprojlim_p F^p H/K = R\varprojlim_p F^p H$.

DEMOSTRACIÓN. (1) se sigue de la exactitud del límite inductivo. Para probar (2) y (3), consideramos, para cada p , las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F^p H \longrightarrow F^p H/K \longrightarrow 0.$$

La sucesión exacta derivada se reduce a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \varprojlim_p F^p H \longrightarrow \varprojlim_p F^p H/K \longrightarrow 0.$$

y los isomorfismos

$$R\varprojlim_p F^p H/K = R\varprojlim_p F^p H,$$

prueban el resultado. □

Notemos, en particular, que si filtramos el cociente H/K por $F^p(H/K) = F^p H/K$, la filtración original F^*H es exhaustiva o completa, y similarmente para la filtración del cociente H/K .

El siguiente resultado permite recuperar un grupo filtrado a partir de subcocientes asociados a la filtración.

COROLARIO 2.12. Sea F^*H una filtración exhaustiva, completa y separada. Entonces,

$$H = \varprojlim_q \varinjlim_p F^p H/F^q H.$$

DEMOSTRACIÓN. El isomorfismo se sigue utilizando que la filtración es completa, separada y exhaustiva. □

Como aplicación de los resultados anteriores, a continuación damos un resultado de comparación entre grupos filtrados.

PROPOSICIÓN 2.13. Sean (H, F^*) , (H', F'^*) dos grupos abelianos filtrados y $f : (H, F^*) \rightarrow (H', F'^*)$ un morfismo filtrado. Supongamos que las filtraciones son separadas, exhaustivas y completas. Si los morfismos $gr^p f : Gr_F^p H \rightarrow Gr_{F'}^p H'$ son isomorfismos, para todo p , entonces f es un isomorfismo de grupos filtrados.

DEMOSTRACIÓN. Para $q < p$, se tiene un diagrama conmutativo de sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F^p/F^{p+1} & \longrightarrow & F^q/F^{p+1} & \longrightarrow & F^q/F^p & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F'^p/F'^{p+1} & \longrightarrow & F'^q/F'^{p+1} & \longrightarrow & F'^q/F'^p & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Así, como $g^r f$ son isomorfismos, el lema del cinco y por inducción sobre q , deducimos que $F^q/F^p \cong F'^q/F'^p$ son isomorfismos.

Sin embargo, las filtraciones son exhaustivas, completas y separadas, por lo que es posible aplicar el Corolario 2.12 para concluir la demostración. \square

2.2. Definición de convergencia. A continuación, definiremos las distintas nociones de convergencia de una sucesión espectral.

DEFINICIÓN 2.14. Sea E_r^{pq} una sucesión espectral y (H^*, F^*) un grupo graduado filtrado. Decimos que la sucesión espectral E_r^{pq} converge hacia (H^*, F^*) si existen isomorfismos

$$E_\infty^{pq} \cong Gr_F^p H^{p+q},$$

para toda pareja (p, q) .

Indicaremos la convergencia de la sucesión espectral como

$$E_1^{pq} \Rightarrow H^n,$$

donde $n = p+q$. Para que la sucesión espectral determine al grupo filtrado H^n es necesario imponer condiciones sobre la filtración.

DEFINICIÓN 2.15. Sea E_r^{pq} una sucesión espectral que converge hacia el grupo graduado y filtrado (H^*, F^*) . Decimos que

- i) E_r^{pq} converge débilmente hacia (H^*, F^*) , si la filtración F^* es exhaustiva.
- ii) E_r^{pq} es convergente a (H^*, F^*) si la filtración F^* es exhaustiva y separada.
- iii) E_r^{pq} converge fuertemente a (H^*, F^*) si la filtración F^* es exhaustiva, separada y completa.

Como consecuencia de la Proposición 2.13, la convergencia fuerte de una sucesión espectral hacia un grupo filtrado H^* permite recuperar, salvo extensiones, a tal grupo a partir de los términos E_∞^{pq} .

TEOREMA 2.16. Sean E_r^{pq} y \tilde{E}_r^{pq} dos sucesiones espectrales que convergen fuertemente a los grupos filtrados (H^*, F^*) y (H'^*, F'^*) respectivamente. Sean $f_r^{pq} : E_r^{pq} \rightarrow \tilde{E}_r^{pq}$ un morfismo de sucesiones espectrales y $f^* : H^* \rightarrow H'^*$ un morfismo de grupos filtrados y graduados compatible con f_r^{pq} . Si existe $a > 0$ tal que f_a^{pq} es un isomorfismo, entonces $f^n : H^n \rightarrow H'^n$ es un isomorfismo de grupos filtrados, para todo n .

2.3. Generación de sucesiones espectrales: parejas exactas.

2.3.1. *Parejas exactas.* En esta sección, introduciremos a las parejas exactas y a las sucesiones espectrales asociadas como el método más sistemático de generar sucesiones espectrales.

DEFINICIÓN 2.17. Una pareja exacta es un *triángulo de grupos abelianos graduados y morfismos*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha} & D \\ & \swarrow \gamma & \searrow \beta \\ & E & \end{array}$$

exacta en cada sumando, esto es, tal que

$$\ker \alpha = \operatorname{im} \gamma, \quad \ker \beta = \operatorname{im} \alpha, \quad \ker \gamma = \operatorname{im} \beta.$$

Por la exactitud del triángulo, la composición

$$d = \beta\gamma : E \rightarrow E,$$

satisface $d^2 = 0$ y define una diferencial de E , por lo tanto podemos considerar al grupo abeliano

$$E' = H(E) = \ker d / \operatorname{im} d.$$

Definimos $D' = \operatorname{im} \alpha$ y a los morfismos inducidos por α , $\beta\alpha^{-1}$ y γ respectivamente:

$$\alpha' : D' \rightarrow D'$$

$$\beta' : D' \rightarrow E'$$

$$\gamma' : E' \rightarrow D'.$$

Un razonamiento elemental permite probar el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 2.18. Con las notaciones anteriores,

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{\alpha'} & D' \\ & \swarrow \gamma' & \searrow \beta' \\ & E' & \end{array}$$

es una pareja exacta.

Si indexamos de tal manera que $(D_1, E_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1) := (D, E, \alpha, \beta, \gamma)$, y la pareja derivada como $(D_2, E_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (D', E', \alpha', \beta', \gamma')$ resulta, iterando el proceso, una sucesión de parejas exactas

$$\begin{array}{ccc} D_r & \xrightarrow{\alpha_r} & D_r \\ & \swarrow \gamma_r & \searrow \beta_r \\ & E_r & \end{array}$$

en la cual la $(r + 1)$ -ésima pareja es la pareja derivada de la r -ésima pareja.

Consideremos ahora una pareja exacta en la cual los grupos y los morfismos son bigraduados

$$\begin{array}{ccc} D^{**} & \xrightarrow{\alpha} & D^{**} \\ & \swarrow \gamma & \searrow \beta \\ & E^{**} & \end{array}$$

En el caso más habitual los morfismos son bigraduados

$$\deg \alpha = (-1, 1), \quad \deg \beta = (0, 0), \quad \deg \gamma = (1, 0),$$

que supondremos en el resto de la exposición. Poniendo atención al primer grado, la pareja exacta anterior tiene la forma

$$\begin{array}{ccccc}
 D^{p+1,*} & \xrightarrow{\alpha} & D^{p,*} & \xrightarrow{\alpha} & D^{p-1,*} \\
 & \swarrow \gamma & \searrow \beta & \swarrow \gamma & \searrow \beta \\
 & & E^{p,*} & & E^{p-1,*}
 \end{array}$$

en la cual, cada triángulo corresponde a una sucesión exacta larga

$$\dots \longrightarrow D^{p+1,q} \xrightarrow{\alpha} D^{p,q+1} \xrightarrow{\beta} E^{p,q+1} \xrightarrow{\gamma} D^{p+1,q+1} \longrightarrow \dots$$

En este sentido, la pareja exacta resume la interacción que existe entre las sucesiones exactas subyacentes.

NOTA 2.19. Sea K^\bullet un complejo (cohomológico) de grupos abelianos y

$$\dots \subset F^{p+1}K \subset F^pK \subset \dots \subset K$$

una filtración decreciente de subcomplejos. Las sucesiones exactas de cohomología asociadas entre las sucesiones exactas de complejos

$$0 \longrightarrow F^{p+1}K \longrightarrow F^pK \longrightarrow F^pK/F^{p+1}K \longrightarrow 0,$$

da lugar a la pareja exacta

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(F^{p+1}K) & \xrightarrow{\alpha} & H^*(F^pK) \\
 & \swarrow \gamma & \searrow \beta \\
 & & H^*(F^pK/F^{p+1}K)
 \end{array}$$

en la cual $D^{pq} = H^{p+q}(F^pK)$ y $E^{pq} = H^{p+q}(F^pK/F^{p+1}K)$; α es el morfismo inducido por la inclusión $F^{p+1}K \subset F^pK$; β es el morfismo inducido por pasar al cociente; y γ es el morfismo de conexión correspondiente.

Para las parejas exactas bigraduadas, los bigrados de morfismos son aditivos con respecto a la composición, de donde se tiene el resultado siguiente:

PROPOSICIÓN 2.20. Sea $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ una pareja exacta bigraduada y $(D_r, E_r, \alpha_r, \beta_r, \gamma_r)$ la r -ésima pareja derivada. Entonces,

- (1) $\deg \alpha_r = (-1, 1)$, $\deg \beta_r = (r - 1, 1 - r)$, $\deg \gamma_r = (1, 0)$.
- (2) la diferencial $d^r = \beta_r \gamma_r : E_r \rightarrow E_r$ tiene bigrado $(r, 1 - r)$ y está inducida por $\beta(\alpha^{-1})^{r-1} \gamma$.
- (3) $D_{r+1} = \alpha^r(D)$ y $E_{r+1} = \gamma^{-1}(\alpha^r D) / \beta((\alpha^{-1})^r(0))$.
- (4) $E_{r+1}^{pq} = \ker d_{pq}^r / \text{im } d_{p-r, q+r-1}^r$.

De la proposición, tenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 2.21. Sea $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ una pareja exacta bigraduada. Los términos E_r^{pq} de parejas derivadas y las diferenciales $d_r = \beta_r \gamma_r$ definen una sucesión espectral.

La sucesión espectral se llama *sucesión espectral asociada* a la pareja $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$. Por construcción,

$$\begin{aligned} Z_r^{p,*} &= \gamma^{-1} (\text{im } \alpha^r : D^{p+r+1,*} \rightarrow D^{p+1,*}) \\ B_r^{p,*} &= \beta (\text{ker } \alpha^r : D^{p,*} \rightarrow D^{p-r,*}), \end{aligned}$$

y, en consecuencia, el término E_∞ de la sucesión espectral admite la expresión

$$E_\infty^{p,*} = \bigcap_r Z_r^{p,*} / \bigcup_r B_r^{p,*}.$$

De la primera de las igualdades, se sigue que $\beta(D^{p,*}) \subset Z_r^{p,*}$, para todo $r \geq 1$.

Así, los elementos de $\text{ker } \gamma = \text{im } \beta$ son ciclos de la sucesión espectral que sobreviven indefinidamente. De esta manera, podemos completar la torre de subgrupos de E_r^{pq} de la sucesión exacta de una pareja exacta de la forma

$$B_r^{pq} \subset B_{r+1}^{pq} \subset \cdots \subset B_\infty^{pq} \subset \text{im } \beta = \text{ker } \gamma \subset Z_\infty^{pq} \subset \cdots \subset Z_{r+1}^{pq} \subset Z_r^{pq}.$$

Para una pareja exacta, el término E_∞^{pq} es una extensión de grupos de acuerdo a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{im } \beta / B_\infty^{pq} \longrightarrow E_\infty^{pq} \longrightarrow Z_\infty^{pq} / \text{im } \beta \longrightarrow 0.$$

NOTA 2.22. Si los bigrados de la pareja exacta inicial son

$$\text{deg } \alpha = (-1, 1), \quad \text{deg } \beta = (a, -a), \quad \text{deg } \gamma = (1, 0)$$

entonces, comenzando con la enumeración $(D_a, E_a, \alpha_a, \beta_a, \gamma_a) := (D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ se obtiene una sucesión espectral que comienza en el término E_a .

2.4. Convergencia de la sucesión espectral asociada a una pareja exacta. En esta sección, analizaremos la convergencia de las sucesiones espectrales asociadas a una pareja exacta. Seguiremos muy de cerca el artículo de Boardman [5].

En toda esta sección, fijaremos una pareja exacta bigraduada

$$\begin{array}{ccc} D^{**} & \xrightarrow{\alpha} & D^{**} \\ & \swarrow \gamma & \searrow \beta \\ & E^{**} & \end{array}$$

con los bigrados antes mencionados.

A fin de simplificar las notaciones, solo nos concentraremos sobre el primer grado. Así, partimos de una pareja exacta de grupos abelianos (graduados)

$$\begin{array}{ccccc} D^{p+1} & \xrightarrow{\alpha} & D^p & \xrightarrow{\alpha} & D^{p-1} \\ & \swarrow \gamma & \searrow \beta & \swarrow \gamma & \searrow \beta \\ & E^p & & E^{p-1} & \end{array}$$

con $\text{deg } \alpha = -1$, $\text{deg } \beta = 0$ y $\text{deg } \gamma = 1$.

Tenemos a los siguientes grupos graduados filtrados

$$D^{-\infty} = \varinjlim_p D^p, \quad D^\infty = \varprojlim_p D^p$$

junto con las filtraciones decrecientes dadas por

$$\begin{aligned} F^p D^{-\infty} &= \text{im} (D^p \rightarrow D^{-\infty}), \\ F^p D^\infty &= \text{ker} (D^\infty \rightarrow D^p) \end{aligned}$$

que están asociadas de manera natural a la pareja exacta.

PROPOSICIÓN 2.23. Con las notaciones anteriores, se tiene que

- (1) La filtración $F^p D^{-\infty}$ de $D^{-\infty}$ es exhaustiva.
- (2) La filtración $F^p D^\infty$ de D^∞ es separada y completa. Además

$$\bigcup_p F^p D^\infty = \text{ker} (D^\infty \rightarrow D^{-\infty});$$

en particular, si $D^{-\infty} = 0$, la filtración es exhaustiva.

DEMOSTRACIÓN. La primera aserción es inmediata ya que

$$\bigcup_p F^p D^{-\infty} = \varinjlim_p \text{im} (D^p \rightarrow D^{-\infty}) = D^{-\infty}.$$

Para probar (2) es suficiente observar que

$$\varprojlim_p F^p D^\infty = 0, \quad \text{y} \quad R\varprojlim_p F^p D^\infty = 0.$$

Sea $I^p = \text{im} (D^\infty \rightarrow D^p)$ y consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F^p D^\infty \longrightarrow D^\infty \longrightarrow I^p \longrightarrow 0.$$

La sucesión exacta de funtores derivados del límite provee de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \varprojlim_p F^p D^\infty \longrightarrow D^\infty \longrightarrow \varprojlim_p I^p \longrightarrow R\varprojlim_p F^p D^\infty \longrightarrow 0.$$

Por definición, el morfismo

$$D^\infty \rightarrow \varprojlim_p I^p,$$

es un isomorfismo y se sigue el resultado.

Por otra parte, se tiene que

$$\varinjlim_p F^p D^\infty = \varinjlim_p \text{ker} (D^\infty \rightarrow D^p) = \text{ker} (D^\infty \rightarrow D^{-\infty}),$$

ya que el límite directo es un functor exacto. □

Consideremos a los grupos graduados

$$RE_\infty^p = R\varprojlim_r Z_r^p = R\varprojlim_r Z_r^p / B_m^p, \quad r \geq m.$$

Denotemos por $\text{im}^r D$ a la r -ésima sucesión derivada de D , esto es, la sucesión dada por $(\text{im}^r D)^p = \text{im}(D^{p+r} \rightarrow D^p)$. Para cada p , definimos a los grupos graduados

$$Q^p = \bigcap_r \text{im}^r D^p = \varprojlim_r \text{im}^r D^p,$$

$$RQ^p = R\varprojlim_r \text{im}^r D^p.$$

El morfismo $\alpha : D \rightarrow D$ induce los morfismos

$$Q^{p+1} \rightarrow Q^p \quad \text{y} \quad RQ^{p+1} \rightarrow RQ^p.$$

Se tiene un isomorfismo ([5], Thm. 3.4 (a))

$$\varprojlim_p Q^p \cong \varprojlim_p D^p = D^\infty,$$

y una sucesión exacta ([5], Thm. 3.4 (b)) en donde $RD^\infty = R\varprojlim_p D^p$

$$0 \longrightarrow R\varprojlim_p Q^p \longrightarrow RD^\infty \longrightarrow \varprojlim_p (RQ^p) \longrightarrow 0.$$

Consideremos a los grupos

$$I^p = \text{im}(D^\infty \rightarrow D^p).$$

Si tomamos el límite de tales grupos, obtenemos que

$$\varprojlim_p I^p = D^\infty, \quad \text{y} \quad R\varprojlim_p I^p = 0.$$

LEMA 2.24. Se tienen las sucesiones exactas siguientes:

$$(1) \quad 0 \longrightarrow F^p D^\infty / F^{p+1} D^\infty \longrightarrow I^{p+1} \longrightarrow I^p \longrightarrow 0.$$

$$(2) \quad 0 \longrightarrow F^p D^{-\infty} / F^{p+1} D^{-\infty} \longrightarrow E_\infty^p \longrightarrow Z^p / \ker \gamma \longrightarrow 0.$$

$$(3) \quad 0 \longrightarrow Z_\infty^p / \ker \gamma \longrightarrow Q^{p+1} \longrightarrow Q^p \longrightarrow RE_\infty^p \longrightarrow RQ^{p+1} \longrightarrow RQ^p \longrightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN. La sucesión (1) se sigue directamente de la definición de I^p .

Para (2), la inclusión $\text{im} \beta \subset Z_\infty^p$, induce la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{im} \beta / B_\infty^p \longrightarrow E_\infty^p \longrightarrow Z_\infty^p / \text{im} \beta \longrightarrow 0.$$

Sin embargo, $\text{im} \beta = \ker \gamma$. Ahora, dado que $B_\infty^p = \beta \ker(D^p \rightarrow D^{-\infty})$, los morfismos naturales inducen los isomorfismos

$$\text{im} \beta / B_\infty^p \xleftarrow{\sim} D^p / [\text{im} \alpha + \ker(D^p \rightarrow D^{-\infty})] \xrightarrow{\sim} F^p D^{-\infty} / F^{p+1} D^{-\infty}.$$

La sucesión exacta (3) es la sucesión exacta derivada del límite de las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow Z_{r-1}^p / \ker \gamma \xrightarrow{\gamma} \text{im}^{r-1} D^{p+1} \longrightarrow \text{im}^r D^p \longrightarrow 0. \quad \square$$

- PROPOSICIÓN 2.29. (1) Si la sucesión espectral E_r^p es condicionalmente convergente a D^∞ , entonces la filtración $F^p D^\infty$ es separada, exhaustiva y completa
- (2) Si la sucesión espectral es condicionalmente convergente a $D^{-\infty}$, entonces la filtración $F^p D^{-\infty}$ es exhaustiva y completa.

DEMOSTRACIÓN. Resta probar que la filtración $F^p D^{-\infty}$ es completa. Sin embargo, tomando límites a los epimorfismos $D^p \rightarrow F^p D^{-\infty}$, se obtiene un epimorfismo

$$0 = RD^\infty \rightarrow R\varprojlim_p F^p D^{-\infty}$$

de donde se sigue el resultado. \square

Combinando las proposiciones 2.27 y 2.29, obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 2.30. Sea E_r^p la sucesión espectral de una pareja exacta que $RE_\infty^p = 0$, para todo p .

- (1) Si la sucesión E_r^p es condicionalmente convergente a D^∞ , entonces es fuertemente convergente a D^∞ .
- (2) Si $D^\infty = 0$, entonces es débilmente convergente a $D^{-\infty}$.

También, gracias a la Proposición 2.25, se tiene el siguiente criterio.

PROPOSICIÓN 2.31. Sea E_r^p la sucesión espectral de una pareja exacta con $RE_\infty^p = 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) La sucesión espectral es débilmente convergente a $D^{-\infty}$.
- (ii) Los morfismos naturales $\eta^p : D^\infty \rightarrow D^p$ son inyectivos para todo p .
- (iii) Los morfismos η^p inducen isomorfismos $D^\infty \cong Q^p$, para todo p .

3. La categoría de motivos mixtos de Voevodsky

Sea k un campo. Todos los esquemas se suponen separados de tipo finito sobre k . Denotamos por Sch/k a la categoría de esquemas sobre k y por Sm/k a la subcategoría plena de Sch/k de esquemas suaves sobre k . Entenderemos por variedad a un esquema reducido e irreducible y una subvariedad de un esquema será un subesquema cerrado que es una variedad.

3.1. Correspondencias finitas. La referencia canónica para esta subsección es ([12], Ch. 1).

DEFINICIÓN 3.1. Sea X es un esquema suave conexo sobre k , y Y es cualquier esquema (separado) sobre k . Una *correspondencia elemental* de X a Y es un subconjunto cerrado irreducible W de $X \times Y$ cuyo subesquema entero asociado es finito y sobreyectivo sobre X .

El grupo $Cor(X, Y)$ es el grupo abeliano libre generado por las correspondencias elementales de X a Y . Los elementos de $Cor(X, Y)$ se llaman *correspondencias finitas*.

NOTA 3.2. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo sobre Sm/k . Si X es conexo, la gráfica Γ_f de f es una correspondencia elemental de X a Y .

La gráfica Γ_1 de la identidad sobre X es el soporte de la diagonal $\Delta(X) \subset X \times X$. Escribimos como id_X a la correspondencia finita Γ_1 de X a si mismo.

Si X es conexo, Y suave y $f : X \rightarrow Y$ es finito y sobreyectivo, la transpuesta de Γ_f en $Y \times X$ es una correspondencia finita de Y a X .

NOTA 3.3. Todo subesquema cerrado Z de $X \times Y$ que sea finito y sobreyectivo sobre X determina una correspondencia finita $[Z]$ de X a Y .

Dadas dos correspondencias elementales $V \in Cor(X, Y)$ y $W \in Cor(Y, Z)$, formamos el producto de intersección $[T] = (V \times Z) \cdot (X \times W)$ de los ciclos correspondientes en $X \times Y \times Z$. La composición $W \circ V$ se define como el pushforward de la correspondencia finita $[T]$, a lo largo de la proyección $p : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Z$. El ciclo $[T]$ es finito sobre $X \times Z$ por lo que $p_*[T]$ está definido y es una correspondencia finita de X a Z . La identidad id_X es la identidad de $Cor(X, X)$, y la composición de correspondencias finitas es asociativa y bilineal.

DEFINICIÓN 3.4. Definimos por $Cor := Cor(k)$ a la categoría cuyos objetos son esquemas (separados) suaves de tipo finito sobre k y cuyos morfismos de X a Y son elementos de $Cor(X, Y)$:

$$\text{Hom}_{Cor}(X, Y) := Cor(X, Y).$$

Además, se tiene que la categoría Cor así definida es una categoría aditiva con \emptyset como el objeto cero y unión disjunta como coproducto.

NOTA 3.5. Las categorías Cor_k y Sm/k tienen los mismos objetos y se satisface que $\Gamma_g \circ \Gamma_f = \Gamma_{g \circ f}$. Esto es, existe un funtor fiel

$$Sm/k \rightarrow Cor$$

definido como

$$X \mapsto X \quad (f : X \rightarrow Y) \mapsto \Gamma_f.$$

DEFINICIÓN 3.6. Si X y Y son dos objetos en Cor , su *producto tensorial* $X \otimes Y$ se define como el producto de los esquemas sobre k subyacentes:

$$X \otimes Y := X \times Y.$$

El producto tensorial así definido hace de la categoría Cor una categoría simétrica monoidal. Por lo tanto, la categoría homotópica $K^b(Cor)$ es una categoría tensorial triangulada (Nota 1.46).

3.2. La categoría de motivos geométricos efectivos.

DEFINICIÓN 3.7. Definimos la categoría $\widehat{DM}_{gm}^{\text{eff}}$ como la localización de $K^b(Cor)$, como categoría tensorial triangulada, bajo

- *Homotopía.* Para $X \in Sm/k$, se invierte $p_* : [X \times \mathbb{A}^1] \rightarrow [X]$

- *Mayer-Vietoris*. Sea $X \in Sm/k$. Escribimos a X como una unión de abiertos de Zariski $X = U \cup V$. Se tiene el morfismo canónico

$$Cone \left([U \cap V] \xrightarrow{(j_{U,U \cap V^*}, -j_{V,U \cap V^*})} [U] \oplus [V] \right) \longrightarrow [X]$$

ya que $(j_{U^*} + j_{V^*}) \circ (j_{U,U \cap V^*}, -j_{V,U \cap V^*}) = 0$. Se invierte este mapeo.

La categoría DM_{gm}^{eff} de *motivos geométricos efectivos* es la cubierta pseudoabeliana de $\widehat{DM}_{gm}^{\text{eff}}$ (esto es, se añaden formalmente kernels e imágenes de proyecciones, $p^2 = p$).

Los morfismos que se invierten para formar a DM_{gm}^{eff} son cerrados bajo \otimes de modo que DM_{gm}^{eff} hereda la estructura tensorial \otimes de $K^b(Cor)$. Además, DM_{gm}^{eff} es una categoría triangulada.

3.3. La categoría de motivos geométricos. Para definir la categoría de motivos geométricos se invierte el motivo de Lefschetz. Para $X \in Sm/k$, el *motivo reducido* es

$$[\widetilde{X}] := Cone(p_* : [X] \rightarrow [\text{Spec } k])[-1].$$

Sea $\mathbb{Z}(1) := [\mathbb{P}^1][-2]$, y sea $\mathbb{Z}(n) := \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$ para $n \geq 0$ el twist de Tate.

DEFINICIÓN 3.8. La categoría de *motivos geométricos*, DM_{gm} , se define invirtiendo al funtor $\otimes \mathbb{Z}(1)$ sobre DM_{gm}^{eff} ; es decir, se tienen objetos $X(n)$ para $X \in DM_{gm}^{\text{eff}}$, $n \in \mathbb{Z}$ y

$$\text{Hom}_{DM_{gm}}(X(n), Y(m)) := \varinjlim_N \text{Hom}_{DM_{gm}^{\text{eff}}}(X \otimes \mathbb{Z}(n+N), Y \otimes \mathbb{Z}(m+N)).$$

NOTA 3.9. Consideremos las notaciones precedentes.

- (1) El mandar X a $X(0)$ y usando el mapeo canónico

$$\text{Hom}_{DM_{gm}}(X, Y) \rightarrow \varinjlim_N \text{Hom}_{DM_{gm}^{\text{eff}}}(X \otimes \mathbb{Z}(N), Y \otimes \mathbb{Z}(N))$$

define un funtor

$$i : DM_{gm}^{\text{eff}} \rightarrow DM_{gm}.$$

Para $n \geq 0$, el mapeo evidente

$$i(X \otimes \mathbb{Z}(n)) \rightarrow X(n)$$

es un isomorfismo.

- (2) Un resultado de Voevodsky , [25], afirma que la involución conmutativa $\mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}(1) \rightarrow \mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}(1)$ es la identidad. De esta manera, Voevodsky prueba que DM_{gm} es una categoría tensorial triangulada.
- (3) Poniendo $\mathbb{Z}(n) := \mathbf{1}(n)$ para $n \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$X(n) \cong X \otimes \mathbb{Z}(n), \quad \mathbb{Z}(n) \otimes \mathbb{Z}(m) \cong \mathbb{Z}(n+m).$$

- (4) Se tiene el funtor $M_{gm} : Sm/k \rightarrow DM_{gm}^{\text{eff}}$ que manda X a la imagen de $[X]$ y f a la imagen de la gráfica Γ_f .

TEOREMA 3.10 (El teorema de cancelación de Voevodsky [28]). El funtor

$$i : DM_{gm}^{\text{eff}} \rightarrow DM_{gm}$$

es un encaje fiel y pleno.

Voevodsky en [26], introduce categorías de motivos paralelas en las cuales es posible hacer cálculos explícitos. Antes de detallar las construcciones, es necesario repasar la teoría de gavillas sobre un sitio de Grothendieck

3.4. Sitios y gavillas. Esta sección está basada en [29]. Para detalles, el lector puede consultar [1].

DEFINICIÓN 3.11. Una *pregavilla* P sobre una categoría pequeña \mathcal{C} con valores en una categoría \mathcal{A} es un funtor

$$P : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}.$$

Morfismos de pregavillas son transformaciones naturales de funtores. Esto define la categoría de pregavillas \mathcal{A} -valuadas sobre \mathcal{C} , $PreShv^{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$.

Se requiere que \mathcal{C} sea pequeña para que la colección de transformaciones naturales entre pregavillas forme un conjunto.

PROPOSICIÓN 3.12 (Grothendieck). (1) Si \mathcal{A} es una categoría abeliana, entonces $PreShv^{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ es una categoría abeliana, con kernel y cokernel definido objeto a objeto. Esto es, para $f : F \rightarrow G$,

$$\begin{aligned} \ker(f)(x) &= \ker(f(x) : F(x) \rightarrow G(x)) \\ \text{coker}(f)(x) &= \text{coker}(f(x) : F(x) \rightarrow G(x)). \end{aligned}$$

(2) Cuando $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$, la categoría abeliana $PreShv^{\mathbf{Ab}}(\mathcal{C})$ tiene suficientes inyectivos.

DEFINICIÓN 3.13. Sea \mathcal{C} una categoría. Una *pretopología de Grothendieck* τ sobre \mathcal{C} está dada por: Para $X \in \mathcal{C}$ existe un conjunto $Cov_{\tau}(X)$ de *familias cubrientes* de X : una familia cubriente de X es un conjunto de morfismos $\{f_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow X\}$ en \mathcal{C} . Esta familia satisface:

- A1. $\{id_X\}$ está en $Cov_{\tau}(X)$ para cada $X \in \mathcal{C}$.
- A2. Para $\{f_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow X\} \in Cov_{\tau}(X)$ y $g : Y \rightarrow X$ un morfismo en \mathcal{C} , los productos fibrados $U_{\alpha} \times_X Y$ existen y $\{p_2 : U_{\alpha} \times_X Y \rightarrow Y\}$ está en $Cov_{\tau}(Y)$.
- A3. Si $\{f_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow X\}$ está en $Cov_{\tau}(X)$ y si $\{g_{\alpha\beta} : V_{\alpha\beta} \rightarrow U_{\alpha}\}$ está en $Cov_{\tau}(U_{\alpha})$ para cada α , entonces $\{f_{\alpha} \circ g_{\alpha\beta} : V_{\alpha\beta} \rightarrow X\}$ está en $Cov_{\tau}(X)$.

Una categoría con una pretopología es un *sitio*.

Para S una pregavilla de grupos abelianos sobre \mathcal{C} y $\{f_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow X\}$ en $Cov_{\tau}(X)$ para algún $X \in \mathcal{C}$, tenemos los morfismos de restricción

$$\begin{aligned} f_{\alpha}^* &: S(X) \rightarrow S(U_{\alpha}) \\ p_{1,\alpha,\beta}^* &: S(U_{\alpha}) \rightarrow S(U_{\alpha} \times_X U_{\beta}) \\ p_{2,\alpha,\beta}^* &: S(U_{\beta}) \rightarrow S(U_{\alpha} \times_X U_{\beta}) \end{aligned}$$

Tomando productos, se tiene el diagrama de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow S(X) \xrightarrow{\prod f_\alpha^*} \prod_\alpha S(U_\alpha) \xrightarrow{\prod p_{1,\alpha,\beta}^* - \prod p_{2,\alpha,\beta}^*} \prod_{\alpha,\beta} S(U_\alpha \times_X U_\beta)$$

DEFINICIÓN 3.14. Una pregavilla S es una *gavilla* para τ si para cada cubierta $\{f_\alpha : U_\alpha \rightarrow X\} \in Cov_\tau$, la sucesión previa es exacta. La categoría $Shv_\tau^{\mathbf{Ab}}(\mathcal{C})$ de gavillas de grupos abelianos sobre \mathcal{C} para τ es la subcategoría plena de $PreShv^{\mathbf{Ab}}(\mathcal{C})$ con objetos gavillas.

PROPOSICIÓN 3.15. Se tienen las siguientes propiedades.

- i) La inclusión $i : Shv_\tau^{\mathbf{Ab}}(\mathcal{C}) \rightarrow PreShv_\tau^{\mathbf{Ab}}(\mathcal{C})$ admite un adjunto izquierdo exacto: el funtor de gavillización.
- ii) $Shv_\tau^{\mathbf{Ab}}(\mathcal{C})$ es una categoría abeliana: Para $f : F \rightarrow G$, $\ker(f)$ es el kernel pregavilla. El $\text{coker}(f)$ es la gavillización de la pregavilla cokernel.
- iii) $Shv_\tau^{\mathbf{Ab}}(\mathcal{C})$ tiene suficientes inyectivos.

3.5. Complejos motivicos.

DEFINICIÓN 3.16. Sea X una k -variedad. Una *cubierta de Nisnevich* $\mathcal{U} \rightarrow X$ es un morfismo étale de tipo finito tal que, para cada extensión separable de campos F/k finitamente generado, el mapeo sobre los puntos F -valuados $\mathcal{U}(F) \rightarrow X(F)$ es sobreyectivo.

A través de las cubiertas de Nisnevich se puede formar el *sitio de Nisnevich pequeño sobre X* , X_{Nis} . El *sitio grande de Nisnevich sobre k* se define similarmente, excepto que ahora la categoría subyacente es Sm/k y para $X \in Sm/k$ las familias cubrientes de X son las mismas que las de X_{Nis} .

Denotamos por $Shv_{\text{Nis}}(X)$ a las gavillas de Nisnevich de grupos abelianos y por Shv_{Nis} a las gavillas de Nisnevich de grupos abelianos sobre Sm/k . Para una pregavilla \mathcal{F} sobre Sm/k o X_{Nis} , denotamos por \mathcal{F}_{Nis} a la gavilla asociada.

Para $X \in Sch/k$, denotamos por $\mathbb{Z}(X)$ a la pregavilla de grupos abelianos sobre Sm/k generada libremente por $\text{Hom}_{Sch/k}(-, X)$. Asimismo, denotamos por $\mathbb{Z}_{\text{Nis}}(X)$ a la gavilla asociada de Nisnevich.

La categoría $PreShv_{\text{Nis}}(Sm/k)$ tiene un producto tensorial:

$$(F \otimes G)(X) := F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G(X)$$

y Hom interno dado por

$$\mathcal{H}om(F, G)(X) := \text{Hom}_{PreShv_{\text{Nis}}(Sm/k)}(F \otimes \mathbb{Z}(X), G)$$

La categoría $Shv_{\text{Nis}}(Sm/k)$ tiene el producto tensorial por gavillización de la pregavilla

⊗. El Hom interno en $Shv_{\text{Nis}}(Sm/k)$ está dado por:

$$\mathcal{H}om(F, G)(X) := \text{Hom}_{Shv_{\text{Nis}}(Sm/k)}(F \otimes \mathbb{Z}_{\text{Nis}}(X), G).$$

DEFINICIÓN 3.17 (Gavillas con transers). (1) La categoría $PST := PST(k)$ de pregavillas con transfer es la categoría de pregavillas aditivas de grupos abelianos sobre Cor , esto es la categoría de funtores aditivos

$$F : Cor^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}.$$

- (2) La categoría de gavillas Nisnevich con transfers sobre Sm/k , $Shv_{\text{Nis}}(\text{Cor})$, es la subcategoría plena de PST con objetos aquellas pregavillas F tales que, para cada $X \in Sm/k$, la restricción de F al sitio X_{Nis} es una gavilla. Se tiene el funtor de gavillización

$$F \mapsto F_{\text{Nis}}.$$

NOTA 3.18. Una pregavilla $F \in PST$ sobre Sm/k es una pregavilla con *morfismos de transfers*

$$\text{Tr}(a) : F(Y) \rightarrow F(X)$$

para cada correspondencia finita $a \in \text{Cor}(X, Y)$ que satisface

- (1) $\text{Tr}(\Gamma_f) = f^*$,
- (2) $\text{Tr}(a \circ b) = \text{Tr}(b) \circ \text{Tr}(a)$,
- (3) $\text{Tr}(a \pm b) = \text{Tr}(a) \pm \text{Tr}(b)$.

Para $X \in Sch/k$, se tiene la gavilla con transfers $L(X)$ definida por

$$L(X)(Y) = \text{Cor}(Y, X)$$

para $Y \in Sm/k$. La gavilla $L(X)$ es la gavilla libre con transfers generada por la gavilla representable de conjuntos $\text{Hom}_{Sch/k}(-, X)$. En particular, tenemos los isomorfismos canónicos

$$\text{Hom}_{Shv_{\text{Nis}}(\text{Cor})}(L(X), F) = F(X).$$

De hecho, para $F \in Shv_{\text{Nis}}(\text{Cor})$ existen isomorfismos canónicos

$$\text{Ext}_{Shv_{\text{Nis}}(\text{Cor})}^n(L(X), F) \cong H^n(X_{\text{Nis}}, F).$$

Podemos definir una estructura tensorial sobre la categoría PST como

$$L(X) \otimes^{tr} L(Y) := L(X \times Y).$$

Para F general, tenemos los sobrección canónica

$$\mathcal{L}_0(F) := \bigoplus_{X \in Sm/k} \bigoplus_{s \in F(X)} L(X) \rightarrow F$$

Aplicando \mathcal{L}_0 al núcleo de la aplicación anterior e iterando, obtenemos la resolución canónica izquierda $\mathcal{L}(F) \rightarrow F$ en PST :

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{L}_1(F) \longrightarrow \mathcal{L}_0(F) \longrightarrow F.$$

Defínase,

$$F \otimes G := H_0^{PST}(\mathcal{L}(F) \otimes^{tr} \mathcal{L}(G)).$$

Tomando la gavilla de Nisnevich asociada da lugar a una estructura tensorial sobre $Shv_{\text{Nis}}(\text{Cor})$. Si el contexto es claro, usaremos la misma notación para el producto tensorial de gavillas.

Existe un Hom interno en PST y en $Shv_{\text{Nis}}(\text{Cor})$ con

$$\mathcal{H}om(L(X), G)(Y) := G(X \times Y)$$

y extendiendo a $\mathcal{H}om(F, G)$ por

$$\mathcal{H}om(F, G) := \ker(\mathcal{H}om(\mathcal{L}_0(F), G) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{L}_1(F), G)),$$

el cual está bien definido ya que cada $\mathcal{L}_i(F)$ es un sumando directo de gavillas representables $L(X_\alpha)$.

El Hom interno satisface la adjunción con respecto al producto tensorial:

$$\mathrm{Hom}_{PST}(F \otimes^{tr} G, H) \cong \mathrm{Hom}_{PST}(F, \mathcal{H}om(G, H))$$

y, similarmente, en $Shv_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Cor})$.

De igual manera, \otimes^{tr} se extiende a una estructura tensorial sobre $C^-(PST)$ y $C^-(Shv_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Cor}))$; el Hom interno $\mathcal{H}om(F, G)$ se extiende también, al menos para F un complejo acotado. La unidad para \otimes^{tr} (para pregavillas y gavillas) es $L(\mathrm{Spec} k)$.

DEFINICIÓN 3.19. Sea F una pregavilla de grupos abelianos sobre Sm/k . Decimos que F es *invariante bajo homotopía* si para toda $X \in Sm/k$, la aplicación

$$p^* : F(X) \rightarrow F(X \times \mathbb{A}^1)$$

es un isomorfismo en donde $p : X \times \mathbb{A}^1 \rightarrow X$ es la proyección canónica. Decimos que F es *estrictamente homotópicamente invariante* si para todo $q \geq 0$, la pregavilla de cohomología

$$X \mapsto H^q(X_{\mathrm{Nis}}, F_{\mathrm{Nis}})$$

es un invariante bajo homotopía.

Se tiene el siguiente resultado clave de Voevodsky.

TEOREMA 3.20 (Voevodsky). Sea F en PST invariante bajo homotopía sobre Sm/k . Entonces

- (1) La pregavilla de cohomología $X \mapsto H^q(X_{\mathrm{Nis}}, F_{\mathrm{Nis}})$ son pregavillas con transfers sobre k .
- (2) F_{Nis} es estrictamente homotópicamente invariante.
- (3) $F_{\mathrm{Zar}} = F_{\mathrm{Nis}}$ y $H^q(X_{\mathrm{Zar}}, F_{\mathrm{Zar}}) = H^q(X_{\mathrm{Nis}}, F_{\mathrm{Nis}})$.

DEMOSTRACIÓN. (Ver [26], Ch. 3, Thm 4.27 y Thm. 5.7 o [12] Prop. 13.9) □

DEFINICIÓN 3.21 (La categoría de complejos motivicos). Dentro de la categoría derivada $D^-(Shv_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Cor}))$, tenemos la subcategoría plena DM_{-}^{eff} que consiste de complejos cuyas gavillas de cohomología son invariantes bajo homotopía.

3.6. El complejo de Suslin. El objetivo ahora es describir a la categoría triangulada DM_{-}^{eff} como una localización de $D^-(Shv_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Cor}))$. Para esto, introducimos el complejo de Suslin. Sea $\Delta^n := \mathrm{Spec} k[t_0, \dots, t_n] / \sum_{i=0}^n t_i - 1$. La aplicación $n \mapsto \Delta^n$ define el k -esquema cosimplicial Δ^* con cocara

$$\delta_i^n : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n+1}$$

con

$$\delta_i^n(x_0, \dots, x_n) := (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n).$$

DEFINICIÓN 3.22. Sea F una pregavilla (de grupos abelianos) sobre Sm/k . Definamos la pregavilla $C_n(F)$ como

$$C_n(F)(X) := F(X \times \Delta^n).$$

El complejo de Suslin $C_*(F)$ es el complejo con diferencial

$$d_n := \sum_i (-1)^i \delta_i^* : C_n(F) \rightarrow C_{n-1}(F).$$

Para $X \in Sm/k$, sea $C_*(X)$ el complejo de gavillas

$$C_n(X)(U) := Cor(U \times \Delta^n, X).$$

Claramente, $C_*(X) = C_*(L(X))$.

Nótese que, si F es PST (resp. gavilla con transfers sobre Sm/k), entonces $C_*(F)$ es un complejo de PST (resp. gavilla con transfers). Las pregavillas $h_i(F) := \mathcal{H}^{-i}(C_*(F))$ son invariantes bajo homotopía. Por los resultados de Voevodsky de la sección anterior, las gavillas de Nisnevich asociadas $h_i^{\text{Nis}}(F)$ son estrictamente homotópicamente invariantes para F en PST . Por lo tanto, tenemos un funtor

$$C_* : PST \rightarrow DM_-^{\text{eff}}.$$

Extendiendo, tomando el complejo total del complejo doble correspondiente, obtenemos el funtor

$$C_* : C^-(PST) \rightarrow C^-(Shv_{\text{Nis}}(Cor)).$$

Por lo tanto, tenemos el funtor triangulado

$$C_* : K^-(PST) \rightarrow DM_-^{\text{eff}}.$$

Tenemos a las inclusiones $i_0, i_1 : \text{Spec } k \rightarrow \mathbb{A}^1$ que dan lugar a mapeos en PST

$$i_0, i_1 : \mathbb{Z} = L(\text{Spec } k) \rightarrow L(\mathbb{A}^1).$$

DEFINICIÓN 3.23. Sean F y G en $C^-(PST)$. Dos aplicaciones $f, g : F \rightarrow G$ son \mathbb{A}^1 -homotópicos si existe

$$h : F \otimes^{tr} L(\mathbb{A}^1) \rightarrow G$$

con $f = h \circ (id \otimes i_0)$, $g = h \circ (id \otimes i_1)$. Escribimos esta relación de equivalencia como $f \sim_{\mathbb{A}^1} g$. Una aplicación $f : F \rightarrow G$ en $C^-(PST)$ es una \mathbb{A}^1 -equivalencia homotópica si existe una aplicación $g : G \rightarrow F$ tal que $fg \sim_{\mathbb{A}^1} id_G$ y $gf \sim_{\mathbb{A}^1} id_F$.

DEFINICIÓN 3.24. Denotemos por $\mathcal{A}_{\mathbb{A}^1}$ a la subcategoría de localización (es decir, triangulada y cerrada bajo coproductos) más pequeña de $D^-(Shv^{\text{Nis}}(Cor))$ que contiene al cono de cada \mathbb{A}^1 -equivalencia homotópica $f : F \rightarrow G$ en $C^-(PST)$. Similarmente, $\mathcal{T}_{\mathbb{A}^1}$ es la subcategoría de localización más pequeña de $D^-(PST)$ que contiene al cono de cada \mathbb{A}^1 -equivalencia de homotopía $f : F \rightarrow G$ en $C^-(PST)$.

DEFINICIÓN 3.25. Una aplicación $f : F \rightarrow G$ en $C^-(PST)$ es una \mathbb{A}^1 -equivalencia débil si el cono de f se mapea a $\mathcal{A}_{\mathbb{A}^1}$ bajo el funtor canónico

$$C^-(PST) \rightarrow D^-(Shv_{\text{Nis}}(Cor)).$$

Decimos que $f : F \rightarrow G$ es una \mathbb{A}^1 -equivalencia débil estricta si el cono de f se mapea a $\mathcal{T}_{\mathbb{A}^1}$ bajo el funtor canónico

$$C^-(PST) \rightarrow D^-(PST).$$

Claramente una \mathbb{A}^1 -equivalencia débil estricta es una \mathbb{A}^1 -equivalencia débil.

NOTA 3.26. Sea

$$\begin{array}{ccccccc} F_0 & \xrightarrow{i_0} & \cdots & \xrightarrow{i_{n-1}} & F_n & \xrightarrow{i_n} & \cdots \\ \downarrow f_0 & & & & \downarrow f_n & & \\ G_0 & \xrightarrow{i'_0} & \cdots & \xrightarrow{i'_{n-1}} & G_n & \xrightarrow{i'_n} & \cdots \end{array}$$

un diagrama conmutativo en $C^-(PST)$. Supongamos que las sumas (infinitas) de F_n y G_n existen en $C^-(PST)$. Entonces los colímites $F := \operatorname{colim}_n F_n$ y $G := \operatorname{colim}_n G_n$ existen en $C^-(PST)$ ya que

$$F \cong \operatorname{coker} \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} F_n \xrightarrow{id - \iota_F} \bigoplus_{n=0}^{\infty} F_n \right)$$

donde ι_F es la suma de las aplicaciones $i_n : F_n \rightarrow F_{n+1}$, y similarmente para G .

Si todos los $f_n : F_n \rightarrow G_n$ son \mathbb{A}^1 -equivalencias débiles estrictas, entonces también lo es el mapeo inducido $f : F \rightarrow G$. En efecto, $id - \iota_F$ es un monomorfismo, por lo que

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} F_n \xrightarrow{id - \iota_F} \bigoplus_{n=0}^{\infty} F_n \rightarrow F$$

se extiende a un triángulo distinguido en $D^-(PST)$, y similarmente para G . Como $\mathcal{T}_{\mathbb{A}^1}$ es localizante, se sigue que f es una \mathbb{A}^1 -equivalencia débil estricta.

En particular, sea $f : F \rightarrow G$ en $C^-(PST)$. Supongamos que en cada grado n , el mapeo $f^n : F^n \rightarrow G^n$ es una \mathbb{A}^1 -equivalencia débil estricta. Entonces f es una \mathbb{A}^1 -equivalencia débil estricta.

Reemplazando $D^-(PST)$ con $D^-(Shv_{\text{Nis}}(Cor))$ y $\mathcal{T}_{\mathbb{A}^1}$ con $\mathcal{A}_{\mathbb{A}^1}$ lo anterior funciona para \mathbb{A}^1 -equivalencias débiles.

NOTA 3.27. La subcategoría $\mathcal{A}_{\mathbb{A}^1}$ es, de hecho, la subcategoría de localización más pequeña de $D^-(Shv_{\text{Nis}}(Cor))$ que contiene a todos los complejos $p_* : L(X \times \mathbb{A}^1) \rightarrow L(X)$. En efecto, sea \mathcal{A} esta subcategoría de localización más pequeña de $D^-(Shv_{\text{Nis}}(Cor))$. Usando la resolución izquierda canónica $\mathcal{L}(F) \rightarrow F$, observamos que \mathcal{A} contiene todos los conos de las aplicaciones $F \otimes^{tr} L(\mathbb{A}^1) \rightarrow F$. Así, en $D^-(Shv_{\text{Nis}}(Cor)) / \mathcal{A}$, todas las \mathbb{A}^1 -equivalencias homotópicas se vuelven isomorfismos, por lo que \mathcal{A} contiene a los generadores de $\mathcal{A}_{\mathbb{A}^1}$. Los resultados para $\mathcal{T}_{\mathbb{A}^1} \subset D^-(PST)$ se prueban de la misma manera.

TEOREMA 3.28 (**El teorema de localización**). El funtor

$$C_* : C^-(Shv_{\text{Nis}}(Cor)) \rightarrow DM_-^{\text{eff}}$$

desciende a un funtor triangulado

$$RC_* : D^-(Shv_{\text{Nis}}(Cor)) \rightarrow DM_-^{\text{eff}},$$

adjunto izquierdo a la inclusión $DM_-^{\text{eff}} \rightarrow D^-(Shv_{\text{Nis}}(Cor))$. El funtor RC_* identifica DM_-^{eff} con la localización $D^-(Shv_{\text{Nis}}(Cor))/\mathcal{A}_{\mathbb{A}^1}$. Además, $\mathcal{A}_{\mathbb{A}^1}$ es la subcategoría de localización de $D^-(Shv_{\text{Nis}}(Cor))$ generada por los complejos

$$L(X \times \mathbb{A}^1) \xrightarrow{L(p_1)} L(X),$$

para $X \in Sm/k$.

DEMOSTRACIÓN. ([25], Prop. 3.2.3.) □

Consideremos al funtor

$$L : Cor \rightarrow Shv_{\text{Nis}}(Cor)$$

que manda X a la gavilla representable $L(X)$. El funtor L se extiende a la categoría homotópica de complejos acotados:

$$L : K^b(Cor) \rightarrow D^-(Shv_{\text{Nis}}(Cor)).$$

DEFINICIÓN 3.29. Decimos que un funtor exacto $i : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$ entre categorías trianguladas es denso si cada objeto A en \mathcal{A} encaja en un triángulo distinguido

$$\bigoplus_{\alpha} i(A_{\alpha}) \longrightarrow \bigoplus_{\beta} i(B_{\beta}) \longrightarrow A \longrightarrow \bigoplus_{\alpha} i(A_{\alpha})[1],$$

donde A_{α} y B_{β} están en \mathcal{B} , y las sumas directas (arbitrarias) existen en \mathcal{A} .

TEOREMA 3.30 (El Teorema del encaje de Voevodsky). Existe un diagrama conmutativo de funtores tensoriales exactos

$$\begin{array}{ccc} K^b(Cor) & \xrightarrow{L} & D(Shv_{\text{Nis}}(Cor)) \\ \downarrow & & \downarrow RC_* \\ DM_{gm}^{\text{eff}} & \xrightarrow{i} & DM_-^{\text{eff}} \end{array}$$

tal que

- (1) i es un encaje pleno con imagen densa.
- (2) $RC_*(L(X)) \cong C_*(X)$.

DEMOSTRACIÓN. ([25], Thm. 3.2.6.) □

3.7. Cohomología motivica.

DEFINICIÓN 3.31. Para $X \in Sm/k$, $q \geq 0$, defínase $M(X) = C_*(X)$ y

$$H^p(X, \mathbb{Z}(q)) := \text{Hom}_{DM_-^{\text{eff}}}(M_{gm}(X), \mathbb{Z}(q)[p]).$$

Definimos el producto cup

$$H^p(X, \mathbb{Z}(q)) \otimes H^{p'}(X, \mathbb{Z}(q')) \rightarrow H^{p+p'}(X, \mathbb{Z}(q+q'))$$

mandando $a \otimes b$ a

$$M(X) \xrightarrow{\delta} M(X) \otimes M(X) \xrightarrow{a \otimes b} \mathbb{Z}(q)[p] \otimes \mathbb{Z}(q')[p']$$

NOTA 3.32. El producto cup así definido hace de $\bigoplus_{p,q} H^p(X, \mathbb{Z}(q))$ un anillo conmutativo graduado con unidad dada por la aplicación

$$M(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

inducida por $p_X : X \rightarrow \text{Spec } k$.

NOTA 3.33 (Homotopía y Mayer-Vietoris). El isomorfismo $p_* : M(X \times \mathbb{A}^1) \rightarrow M(X)$ da lugar al isomorfismo

$$p^* : H^p(X, \mathbb{Z}(q)) \xrightarrow{\sim} H^p(X \times \mathbb{A}^1, \mathbb{Z}(q)).$$

Para $U, V \subset X$ subsquemas abiertos, el triángulo distinguido

$$M(U \cap V) \longrightarrow M(U) \oplus M(V) \longrightarrow M(U \cup V) \longrightarrow M(U \cap V)[1]$$

da lugar a la *sucesión exacta de Mayer-Vietoris*:

$$\cdots \rightarrow H^{p-1}(U \cap V, \mathbb{Z}(q)) \rightarrow H^p(U \cup V, \mathbb{Z}(q)) \rightarrow H^p(U, \mathbb{Z}(q)) \oplus H^p(V, \mathbb{Z}(q)) \rightarrow H^p(U \cap V, \mathbb{Z}(q)) \rightarrow \cdots$$

El motivo reducido de \mathbb{P}^1 es $\mathbb{Z}(1)[2]$, y $M(\mathbb{P}^1)$ está representado en DM_-^{eff} por el complejo de Suslin $C_*(\mathbb{P}^1)$.

LEMA 3.34. Se tiene que

$$\mathbb{Z}(1)[2] \cong \mathbb{G}_m[1].$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del triángulo distinguido de Mayer-Vietoris para la cubierta $U = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$, $V = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ de \mathbb{P}^1 . \square

PROPOSICIÓN 3.35. Para $X \in Sm/k$, se tiene

$$H^n(X, \mathbb{Z}(1)) = \begin{cases} H_{Zar}^0(X, \mathcal{O}_X^*) & n = 1 \\ Pic(X) := H_{Zar}^1(X, \mathcal{O}_X^*) & n = 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. El Teorema del encaje de Voevodsky, asegura que

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{DM_{gm}^{\text{eff}}(k)}(M_{gm}(X), \mathbb{Z}(1)[n]) &\cong \mathbb{H}_{\text{Nis}}^n(X, \mathbb{Z}(1)) \\ &= \mathbb{H}_{Zar}^n(X, \mathbb{Z}(1)) \\ &= H_{Zar}^{n-1}(X, \mathbb{G}_m) \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. \square

3.8. Resumen de resultados de Voevodsky. A continuación, enumeramos algunos resultados fundamentales de Voevodsky [25]

Cancelación. Supongamos que k es un campo perfecto. Entonces, para $A, B \in DM_{gm}^{\text{eff}}$, la aplicación

$$- \otimes id : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A(1), B(1))$$

es un isomorfismo. De esta forma,

$$DM_{gm}^{\text{eff}} \rightarrow DM_{gm}$$

es un encaje pleno.

Relación con los grupos de Chow superiores. Para $Y \in Sch/k$, equidimensional

$$CH^i(Y, j) \cong H^{2i-j}(Y, \mathbb{Z}(i))$$

para $i \geq 0, j \in \mathbb{Z}$.

Dualidad. Para cualquier k que admita resolución de singularidades, la categoría DM_{gm} es rígida en el siguiente sentido:

- (1) Para cualesquiera par de objetos A, B en DM_{gm} existe un objeto Hom interno. Ponemos $A^* = \mathcal{H}om(A, \mathbb{Z})$.
- (2) Para cualquier objeto A en DM_{gm} , la aplicación canónica

$$A \rightarrow (A^*)^*$$

es un isomorfismo.

3.9. La categoría de motivos mixtos de Voevodsky. Un argumento paralelo a la Nota 3.26 combinado con la compacidad de $L(X) \in D(Shv_{\text{Nis}}(Cor))$, para $X \in Sm/k$, muestra que la localización $D(Shv_{\text{Nis}}(Cor))/\mathcal{A}_{\mathbb{A}^1}$ también existe. Denotamos a esta categoría triangulada por DM^{eff} , la cual permite trabajar con complejos no acotados. Por el Teorema 3.28, el funtor de inclusión $DM_{-}^{\text{eff}} \rightarrow DM^{\text{eff}}$ es triangulado e identifica a DM_{-}^{eff} con una subcategoría plena de DM^{eff} .

Finalmente, usando la teoría de homotopía abstracta de Quillen, se invierte el motivo de Tate, $\mathbb{Z}(1) \in DM^{\text{eff}}$. Esto es, existe una categoría tensorial triangulada DM , en la cual el funtor

$$\mathbb{Z}(1) \otimes - : DM \rightarrow DM$$

es una equivalencia de categorías, y una generalización inmediata del teorema de cancelación de Voevodsky nos da un funtor tensorial triangulado

$$DM^{\text{eff}} \rightarrow DM,$$

el cual es un encaje fiel y pleno. Así, por el Teorema 3.30 obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} DM_{gm}^{\text{eff}} & \longrightarrow & DM^{\text{eff}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ DM_{gm} & \longrightarrow & DM \end{array}$$

en donde todos los funtores son tensoriales triangulados y encajes fieles y plenos.

NOTA 3.36. Dado $X \in Sm/k$, $M(X) \in DM$ es la imagen de $M(X) \in DM_{-}^{\text{eff}}$, bajo los encajes $DM_{-}^{\text{eff}} \rightarrow DM^{\text{eff}}$ y $DM^{\text{eff}} \rightarrow DM$. Por construcción ([2], Thm. 4.5.67.), DM es una categoría triangulada compactamente generada con generadores compactos $\{M(X)(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

3.9.1. *La torre motivica de Postnikov.* Sea $DM^{\text{eff}}(n)$ la subcategoría de localización de DM^{eff} generada por objetos $M(X)(m)[2m]$, $m \geq n$ y $X \in Sm/k$. Entonces, para $n \in \mathbb{Z}$, tenemos la torre de subcategorías trianguladas

$$\cdots \subset DM^{\text{eff}}(n+1) \subset DM^{\text{eff}}(n) \subset \cdots \subset DM^{\text{eff}}(0) = DM.$$

Gracias al trabajo de Neeman (ver 1.1.3), tenemos el adjunto derecho $r_n : DM \rightarrow DM^{\text{eff}}(n)$ a la inclusión $i_n : DM^{\text{eff}}(n) \hookrightarrow DM$.

DEFINICIÓN 3.37. Para E en DM^{eff} , la *torre de rebanadas* está dada por

$$\cdots \rightarrow f_{n+1}E \rightarrow f_nE \rightarrow f_{n-1}E \rightarrow$$

con $f_n := i_n \circ r_n$.

Consideramos el triángulo distinguido en DM :

$$f_{n+1}E \longrightarrow f_nE \longrightarrow s_nE$$

La n -ésima rebanada de E está dada por s_nE .

PROPOSICIÓN 3.38 (**Propiedad universal de la cubierta efectiva**). Para $E \in DM$, f_mE está caracterizada hasta isomorfismos únicos por la siguiente propiedad universal:

Para cualquier $F \in DM^{\text{eff}}(m)$, la counidad de la adjunción (i_m, r_m) , $\epsilon_m^E : f_mE \rightarrow E$ en DM induce un isomorfismo de grupos abelianos:

$$\epsilon_{m*}^E : \text{Hom}_{DM}(F, f_mE) \rightarrow \text{Hom}_{DM}(F, E).$$

DEMOSTRACIÓN. Si $F \in DM^{\text{eff}}(m)$, entonces

$$\text{Hom}_{DM}(F, E) = \text{Hom}_{DM}(i_mF, E).$$

Por adjunción:

$$\text{Hom}_{DM}(i_mF, E) \cong \text{Hom}_{DM^{\text{eff}}(m)}(F, r_mE).$$

Ya que $DM^{\text{eff}}(m)$ es una subcategoría plena de DM , deducimos que:

$$\text{Hom}_{DM^{\text{eff}}(m)}(F, r_mE) = \text{Hom}_{DM}(i_mF, i_mr_mE) = \text{Hom}_{DM}(F, f_mE),$$

lo que muestra el resultado. □

PROPOSICIÓN 3.39. Sea \mathbb{Z} el motivo de un punto. Entonces

$$f_m(\mathbb{Z}(n)) = \begin{cases} 0 & m > n \\ \mathbb{Z}(n) & m \leq n \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. ([9], Prop. 1.1) □

NOTA 3.40. De la Proposición, se tiene que

$$s_n(\mathbb{Z}(n)) = \mathbb{Z}(n)$$

para $n \geq 0$. En efecto, $f_n(\mathbb{Z}(n)) = \mathbb{Z}(n)$ y $f_{n+1}(\mathbb{Z}(n)) = 0$.

NOTA 3.41. Para todo E en $DM^{\text{eff}}(k)$ y para cualesquiera enteros $m > n \geq 0$, y todo p , tenemos que

$$\text{Hom}_{DM^{\text{eff}}}(E(m), \mathbb{Z}(n)[p]) = 0.$$

La propiedad universal de la cubierta efectiva (Proposición 3.38) $f_m(\mathbb{Z}(n)) \rightarrow \mathbb{Z}(n)$ da el isomorfismo

$$\text{Hom}_{DM^{\text{eff}}}(E(m), f_m(\mathbb{Z}(n))[p]) \cong \text{Hom}_{DM^{\text{eff}}}(E(m), \mathbb{Z}(n)[p]).$$

La Proposición 3.39 afirma que $f_m(\mathbb{Z}(n)) = 0$.

PROPOSICIÓN 3.42. Se cumple que

$$f_n(M(\mathbb{P}^N)) = \begin{cases} \mathbb{Z}(n)[2n] & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. El resultado se sigue gracias a la Proposición 3.39 y a la fórmula del haz proyectivo, la cual implica en particular:

$$M(\mathbb{P}^N) \cong \bigoplus_{i=0}^N \mathbb{Z}(i)[2i].$$

□

CAPÍTULO 2

Resultados

1. La torre ortogonal

En lo sucesivo, consideraremos motivos con coeficientes en $R = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ donde p es la característica exponencial del campo base k .

A continuación, revisaremos la construcción de la torre ortogonal dada en [20]. Para esto, recordemos de la Nota 3.36 que la categoría triangulada DM es compactamente generada (en el sentido de la Definición I.1.33 (2)). Denotemos por \mathcal{G}^{eff} al conjunto de objetos compactos de la forma $\{M(X)(p)\}_{p \geq 0}$ para $X \in Sm/k$. Para $n \in \mathbb{Z}$, denótese por $\mathcal{G}^{\text{eff}}(n)$ al conjunto de objetos compactos de la forma $\{M(X)(p)\}_{p \geq n}$ para $X \in Sm/k$.

Escribiremos por $DM^\perp(n)$ a la categoría triangulada ortogonal de $DM^{\text{eff}}(n)$ ([20] Def 2.1.1.). Esto es, los objetos de $DM^\perp(n)$ son objetos $E \in DM^{\text{eff}}$ tales que, para cada objeto $A \in DM^{\text{eff}}(n)$, $\text{Hom}_{DM^{\text{eff}}}(A, E) = 0$.

Por ([20], Lemm. 2.1.7 (2)), la categoría ortogonal $DM^\perp(n)$ es compactamente generada. De esta manera, por el Teorema del funtor adjunto de Neeman (Teorema I.1.37), la inclusión

$$j_n : DM^\perp(n) \rightarrow DM$$

admite un funtor derecho

$$p_n : DM \rightarrow DM^\perp(n)$$

que es triangulado.

DEFINICIÓN 1.1. Sea $bc_{\leq n} = j_{n+1} \circ p_{n+1}$ y sea $E \in DM$. La *cubierta ortogonal* de E se define por

$$bc_{\leq n}E \rightarrow E.$$

A continuación, enunciamos las propiedades que satisface la cubierta ortogonal.

PROPOSICIÓN 1.2 ([20], Rem. 3.2.5, Prop. 3.2.4, Rem. 3.2.5 y Cor. 3.2.7.). Tenemos las siguientes propiedades de la cubierta ortogonal $bc_{\leq n}E$, con $E \in DM$.

- (1) $bc_{\leq n}E \in DM^\perp(n+1)$
- (2) La counidad $\theta_n : j_{n+1}p_{n+1} \rightarrow id$ de la adjunción

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{i_{n+1}} & \\
 DM^\perp(n+1) & \perp & DM \\
 & \xleftarrow{p_{n+1}} &
 \end{array}$$

está caracterizada hasta isomorfismos únicos por la siguiente propiedad universal:

Para cualquier $E \in DM$ y para cualquier $F \in DM^\perp(n+1)$, la cubierta $\theta_n^E : bc_{\leq n}E \rightarrow E$ en DM induce un isomorfismo de grupos abelianos:

$$\theta_{n*}^E : \text{Hom}_{DM}(F, bc_{\leq n}E) \rightarrow \text{Hom}_{DM}(F, E).$$

- (3) Se tiene el isomorfismo de funtores $bc_{\leq n} \circ bc_{\leq n+1} \cong bc_{\leq n}$ y existe una transformación natural canónica

$$bc_{\leq n} \rightarrow bc_{\leq n+1}.$$

- (4) Sea E in DM . Entonces $\theta_n^E : bc_{\leq n}E \rightarrow E$ es un isomorfismo en DM si y sólo si E pertenece a $DM^\perp(n+1)$.

PROPOSICIÓN 1.3 ([20], Thm. 3.2.12). Para cada $E \in DM$, existe una torre en DM :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & bc_{\leq n}E & \longrightarrow & bc_{\leq n+1}E & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n}E \\ & & \searrow \theta_n^E & & \downarrow \theta_{n+1}^E & & \nearrow c \\ & & & & E & & \end{array}$$

en donde todos los triángulos conmutan.

DEFINICIÓN 1.4. A la torre de la Proposición 1.3, se le conoce como *la torre ortogonal*.

NOTA 1.5. Por la Proposición 1.2, se tiene que la torre ortogonal es functorial con respecto a morfismos en DM .

DEFINICIÓN 1.6. Para E, F en DM , consideremos la filtración creciente F_\bullet sobre $\text{Hom}_{DM}(F, E)$ (resp. $\text{Hom}_{DM}(F, \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n}E)$), donde F_p está dado por la imagen de

$$\begin{aligned} \theta_{p*}^E & : \text{Hom}_{DM}(F, bc_{\leq p}E) \rightarrow \text{Hom}_{DM}(F, E) \\ (\text{resp. } \lambda_{p*}^E & : \text{Hom}_{DM}(F, bc_{\leq p}E) \rightarrow \text{Hom}_{DM}(F, \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n}E)) \end{aligned}$$

donde $\lambda_p^E : bc_{\leq p}E \rightarrow \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n}E$ es el mapeo canónico hacia el colímite homotópico.

2. Convergencia de la torre ortogonal

2.1. La sucesión espectral ortogonal. Sean E y F en DM . En ([20], Thm. 3.2.8), se construyen funtores triangulados canónicos

$$bc_{p/p-1} : DM \rightarrow DM$$

con $p \in \mathbb{Z}$ que se insertan en un triángulo distinguido en DM :

$$bc_{\leq p-1}E \longrightarrow bc_{\leq p}E \longrightarrow bc_{p/p-1}E$$

PROPOSICIÓN 2.1. La torre ortogonal induce una sucesión espectral de tipo homológico:

$$E_{p,q}^1 = \mathrm{Hom}_{DM}(F, (bc_{p/p-1}E)[q-p]) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{DM}(F, E)$$

con diferenciales $d_r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q-r+1}^r$ y donde el objeto filtrado está dado por el grupo graduado asociado para la filtración creciente F_\bullet de $\mathrm{Hom}_{DM}(F, E)$ considerada en (1.6).

Similarmente, se tiene una sucesión espectral de tipo homológico:

$$E_{p,q}^1 = \mathrm{Hom}_{DM}(F, (bc_{p/p-1}E)[q-p]) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{DM}(F, \mathrm{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n}E)$$

con exactamente las mismas diferenciales y donde el objeto filtrado está dado por el grupo graduado asociado para la filtración creciente F_\bullet de $\mathrm{Hom}_{DM}(B, \mathrm{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n}A)$ considerada en (1.6).

DEMOSTRACIÓN. Se sigue directamente de [20, Thm. 3.2.16]. \square

Observe que el mapeo c induce un mapeo de sucesiones espectrales que es la identidad sobre los términos E_1 :

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} E_{p,q}^1 = \mathrm{Hom}_{DM}(F, (bc_{p/p-1}E)[q-p]) & \Longrightarrow & \mathrm{Hom}_{DM}(F, \mathrm{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n}E) \\ \downarrow = & & \downarrow c_* \\ E_{p,q}^1 = \mathrm{Hom}_{DM}(F, (bc_{p/p-1}E)[q-p]) & \Longrightarrow & \mathrm{Hom}_{DM}(F, E) \end{array}$$

2.2. Ortogonalidad y dualidad. En esta sección consideremos $Y \in Sm/k$ conexo de dimensión d , y enteros $r, s \in \mathbb{Z}$.

PROPOSICIÓN 2.2. Se cumple lo siguiente:

$$M(Y)(s)[r] \in DM^\perp(d+s+1).$$

DEMOSTRACIÓN. Por ([20], 2.2) es suficiente probar que $\mathrm{Hom}_{DM}(M(X)(a)[b], M(Y)(s)[r]) = 0$, para cada $X \in Sm/k$, $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a \geq d+s+1$. Gracias a ([22], Cor. 4.13, Thm. 4.12, Thm. 5.1) podemos suponer que el campo base k es perfecto. Ahora bien, si el campo base k admite resolución de singularidades, por ([25], Thm. 4.3.7) concluimos que:

$$\mathrm{Hom}_{DM}(M(X)(a)[b], M(Y)(s)[r]) \cong \mathrm{Hom}_{DM}(M(X) \otimes M^c(Y)(e)[f], \mathbb{Z})$$

en donde $M^c(Y) \in DM^{\mathrm{eff}}$ es el motivo de Y con soporte compacto ([25], §4.1, Cor. 4.1.6), $e = a - s - d$ y $f = b - r - 2d$. Para un campo base perfecto de característica positiva, obtenemos la misma conclusión por ([11], Thm. 5.5.14 y Lem. 5.5.6).

Por lo tanto, por ([20], 5.1.1) es suficiente verificar que $M(X) \otimes M^c(Y)(e)[f] \in DM^{\mathrm{eff}}(1)$, lo cual se asegura por hipótesis: $e = a - s - d \geq 1$. \square

COROLARIO 2.3. Sea $E = M(Y)(s)[r] \in DM$. Entonces:

(1) La aplicación natural

$$\theta_{d+s}^E : bc_{\leq d+s}E \rightarrow E$$

es un isomorfismo en DM .

- (2) Para cualquier $A \in DM$, y para cualquier $f : E \rightarrow A$ en DM , existe un único levantamiento $g : E \rightarrow bc_{\leq d+s}A$ tal que el siguiente diagrama conmuta en DM :

$$\begin{array}{ccc} & & bc_{\leq d+s}E \\ & \nearrow g & \downarrow \theta_{d+s}^A \\ E & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

- (3) La aplicación f es cero si y solo si la aplicación g es cero.

DEMOSTRACIÓN. (1): Se sigue directamente combinando la Proposición 2.2 con la Proposición 1.2 (4). El punto (2) y (3) se siguen de la Proposición 2.2 y de la propiedad universal de θ_{d+s}^A (Proposición 1.2, (2)). \square

2.3. Convergencia. En esta sección consideramos objetos $A, B \in DM$, en donde B es de la forma $B = M(X)(s)[r]$ para $X \in Sm/k$ y $r, s \in \mathbb{Z}$.

TEOREMA 2.4. La sucesión espectral

$$E_{p,q}^1 = \text{Hom}_{DM}(B, (bc_{p/p-1}A)[q-p]) \Rightarrow \text{Hom}_{DM}(B, \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n}A)$$

es fuertemente convergente.

DEMOSTRACIÓN. Ya que $B = M(X)(s)[r]$ es compacto en DM , se sigue del trabajo de Neeman (Proposición 1.35) que

$$\text{Hom}_{DM}(B, \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n}A) \cong \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \text{Hom}_{DM}(B, bc_{\leq n}A)$$

lo que implica que la filtración F_\bullet en $\text{Hom}_{DM}(B, \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n}A)$ es exhaustiva.

Observe ahora que $B \in DM^{\text{eff}}(s)$ para cada $r \in \mathbb{Z}$ y por construcción $bc_{\leq n}A \in DM^\perp(n+1)$ (Proposición 1.2(1)). Por lo tanto, deducimos que $\text{Hom}_{DM}(B, bc_{\leq n}A) = 0$ para todo $n \leq s-1$ y para cada $r \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, aplicando el triángulo distinguido

$$bc_{\leq p-1}A \longrightarrow bc_{\leq p}A \longrightarrow bc_{p/p-1}A$$

concluimos que $E_{p,q}^1 = 0$ para $p \leq s-1$. Entonces, el Teorema 6.1(a) en [5] implica que la sucesión espectral es fuertemente convergente ya que las diferenciales son de la forma $d_r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q-r+1}^r$ (nótese que la notación aquí es homológica). \square

COROLARIO 2.5. Supongamos que el mapeo canónico

$$c : \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n}A \rightarrow A$$

induce un isomorfismo de grupos abelianos:

$$c_* : \text{Hom}_{DM}(B, \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n}A) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{DM}(B, A).$$

Entonces, la sucesión espectral

$$E_{p,q}^1 = \text{Hom}_{DM}(B, (bc_{p/p-1}A)[q-p]) \Rightarrow \text{Hom}_{DM}(B, A)$$

es fuertemente convergente.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue directamente del teorema anterior y el morfismo de sucesiones espectrales (2) en 2.1. \square

El siguiente, es el resultado principal.

TEOREMA 2.6. El mapeo canónico

$$c : \operatorname{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n} A \xrightarrow{\cong} A$$

es un isomorfismo en DM . Por lo tanto, la sucesión espectral

$$E_{p,q}^1 = \operatorname{Hom}_{DM}(B, (bc_{p/p-1} A)[q-p]) \Rightarrow \operatorname{Hom}_{DM}(B, A)$$

es fuertemente convergente.

DEMOSTRACIÓN. Por el Corolario 2.5, es suficiente probar que c es un isomorfismo en DM . Para esto, es suficiente mostrar que, para cada $a, b \in \mathbb{Z}$, y para cada $Y \in Sm/k$ el mapeo inducido:

$$c_* : \operatorname{Hom}_{DM}(M(Y)(a)[b], \operatorname{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n} A) \rightarrow \operatorname{Hom}_{DM}(M(Y)(a)[b], A)$$

es un isomorfismo de grupos abelianos, ya que DM es compactamente generada.

Probemos que c_* es sobreyectivo. Dado $f : M(Y)(a)[b] \rightarrow A$, por el Corolario 2.3(2), obtenemos un levantamiento:

$$\begin{array}{ccc} & & bc_{\leq d+a} A \\ & \nearrow & \downarrow \theta_{d+a}^A \\ M(Y)(a)[b] & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

en donde d es la dimensión de Y . La sobreyectividad se sigue de la torre ortogonal (Proposición 1.3).

Probemos ahora que c_* es inyectivo. Sea $f : M(Y)(a)[b] \rightarrow \operatorname{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n} A$ tal que la composición $c_*(f) : M(Y)(a)[b] \rightarrow A$ es cero. Ya que $M(Y)(a)[b]$ es compacto en DM , por la Proposición I.1.35:

$$\operatorname{Hom}_{DM}(M(Y)(a)[b], \operatorname{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n} A) \cong \operatorname{colim}_n \operatorname{Hom}_{DM}(M(Y)(a)[b], bc_{\leq n} A).$$

Por lo tanto, podemos suponer que f se factoriza como:

$$\begin{array}{ccc} & & bc_{\leq n} A \\ & \nearrow f' & \downarrow \theta_{d+a}^A \\ M(Y)(a)[b] & \xrightarrow{f} & \operatorname{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n} A \end{array}$$

para algún $n \geq d + a$. Aplicando nuevamente el Corolario 2.3(2), f' se factoriza como:

$$\begin{array}{ccc} & bc_{\leq d+a}A \cong bc_{\leq d+a}(bc_{\leq n}A) & \\ & \nearrow f'' & \downarrow \\ M(Y)(a)[b] & \xrightarrow{f'} & bc_{\leq n}A \end{array}$$

Por lo tanto, es suficiente mostrar que f'' es cero. Sin embargo, esto último se sigue directamente del Cor. 2.3(3), ya que:

$$\theta_{d+a}^A \circ f'' = c_*(f) = 0$$

en donde la primer igualdad se sigue de la Proposición 1.3 y de los dos triángulos conmutativos precedentes, mientras que la segunda igualdad se sigue por hipótesis. \square

NOTA 2.7. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada compactamente generada con generadores compactos \mathcal{G} y fijemos una familia de subconjuntos de \mathcal{G} : $\mathcal{S} = \{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ que satisface las condiciones en ([20], 2.2). Supongamos además que $\cup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_n = \mathcal{G}$.

Entonces, por ([20], 2.1.7 (3)) es posible construir un análogo en \mathcal{T} para la torre ortogonal, que induce una filtración en $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, -)$ como en la Definición 1.6 y sucesiones espectrales como en la Proposición 2.1.

Observe que se cumplen el Teorema 2.4 y el Corolario 2.5 en este contexto general. Sin embargo, el Teorema 2.6 no es verdadero para una categoría triangulada compactamente generada general.

3. La categoría homotópica \mathbb{A}^1 -estable de Morel-Voevodsky

Referimos al lector a ([10], Thm. 4.15) para la construcción de la estructura de modelo estable sobre la categoría de T -espectros simétricos. Escribiremos \mathcal{SH} para su categoría homotópica, que es la *categoría homotópica \mathbb{A}^1 -estable de Morel-Voevodsky*.

Sea $\Sigma_T^\infty X_+ \in \mathcal{SH}$, $X \in Sm/k$ la suspensión infinita de la pregavilla simplicial representada por X junto con un punto base disjunto. Por ([10], Prop. 4.19), \mathcal{SH} es una categoría tensorial triangulada con unidad $\mathbf{1} = \Sigma_T^\infty \text{Spec } k_+$. Escribiremos $E(1)$ para $E \otimes \Sigma_T^\infty(\mathbb{G}_m)[-1]$, $E \in \mathcal{SH}$, e inductivamente, $E(n) = (E(n-1))(1)$, $n \geq 0$. Observamos que el funtor $\mathcal{SH} \rightarrow \mathcal{SH}$, $E \mapsto E(1)$ es una equivalencia de categorías ([8], 8.10 y [2], Thm. 4.3.38); escribimos $E \mapsto E(-1)$ para su inversa e, inductivamente, $E(-n) = (E(-n+1))(-1)$, $n > 0$. Por convención, $E(0) = E$ para $E \in \mathcal{SH}$.

Al igual que con la categoría DM , se tiene que \mathcal{SH} es una categoría triangulada compactamente generada ([2], Thm. 4.5.67) con generadores compactos:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{SH}} = \{\Sigma_T^\infty X_+(p) : X \in Sm/k; p \in \mathbb{Z}\}.$$

Para $n \in \mathbb{Z}$, escribimos $\mathcal{G}_{\mathcal{SH}}^{\text{eff}}(n) \subset \mathcal{G}_{\mathcal{SH}}$ para el conjunto que consiste de objetos compactos de la forma:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{SH}}^{\text{eff}}(n) = \{\Sigma_T^\infty X_+(p) : X \in Sm/k; p \geq n\}.$$

Sea $\mathcal{SH}^{\text{eff}}(n)$ la subcategoría de localización de \mathcal{SH} , y $\mathcal{SH}^\perp(n)$ la categoría triangulada ortogonal de $\mathcal{SH}^{\text{eff}}(n)$ ([20], Def. 2.2.1). Nótese que $\mathcal{SH}^{\text{eff}}(n)$ es compactamente generada con conjunto de generadores $\mathcal{G}_{\mathcal{SH}}^{\text{eff}}(n)$ ([15], Thm. 2.1 (2.1.1)).

NOTA 3.1. Es posible definir la torre ortogonal como en la Proposición 1.3 para objetos en \mathcal{SH} . De esta manera, es posible definir una filtración creciente F_\bullet sobre $\text{Hom}_{\mathcal{SH}}(F, E)$ como en la Definición 1.6. Asimismo, se tienen sucesiones espectrales como en la Proposición 2.1 y un morfismo de sucesiones espectrales como en (2), sección 2.1. Véase [19].

A continuación, veremos que el Teorema 2.6 no se satisface para el espectro de las esferas en \mathcal{SH} . Por otra parte, mostraremos que el Teorema 2.6 se satisface para objetos en $\mathcal{SH}^\perp(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Como consecuencia directa, obtenemos una sucesión espectral que converge al término E_1 de la sucesión espectral rebanada de Voevodsky.

PROPOSICIÓN 3.2. El mapeo canónico

$$c : \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n} \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1}$$

no es isomorfismo en \mathcal{SH} .

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por contradicción. Así suponemos que c es un isomorfismo en \mathcal{SH} . Ya que $\mathbf{1} \in \mathcal{SH}$ es compacto, entonces

$$\text{colim}_{n \rightarrow \infty} \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(\mathbf{1}, bc_{\leq n} \mathbf{1}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(\mathbf{1}, \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n} \mathbf{1}) \xrightarrow{c_*} \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(\mathbf{1}, \mathbf{1}).$$

en donde c_* también es un isomorfismo. Así, para algún $n \in \mathbb{Z}$, el mapeo identidad para $\mathbf{1}$ se factoriza como en el siguiente diagrama conmutativo en \mathcal{SH} :

$$\begin{array}{ccc} & & bc_{\leq n} \mathbf{1} \\ & \nearrow & \downarrow \theta_n^1 \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{id} & \mathbf{1} \end{array}$$

Por lo tanto, $\mathbf{1} \oplus E \cong bc_{\leq n} \mathbf{1} \in \mathcal{SH}^\perp(n+1)$ para algún $E \in \mathcal{SH}$. Ya que $\mathcal{SH}^\perp(n+1)$ es cerrado bajo sumandos directos, deducimos que $\mathbf{1} \in \mathcal{SH}^\perp(n+1)$. Sin embargo, esto es una contradicción ya que implica que para cada $m \geq n$, los funtores rebanados de Voevodsky ([27], Thm. 2.2) se anulan $s_m \mathbf{1} = 0$ para el espectro de las esferas, lo cual no es el caso ([27], Conj. 9 y [13], p. 350). \square

NOTA 3.3. El argumento anterior muestra que la Proposición 3.2. se satisface para cualquier objeto compacto $A \in \mathcal{SH}$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$, existe $m \geq n$ con $s_m A \neq 0$.

COROLARIO 3.4. Considere la sucesión espectral en \mathcal{SH} para el espectro de las esferas $\mathbf{1}$:

$$E_{p,q}^1 = \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(\Sigma_T^\infty X_+(s)[t], (bc_{p/p-1} \mathbf{1})[q-p]) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(\Sigma_T^\infty X_+(s)[t], \mathbf{1}).$$

Entonces, la sucesión espectral no es fuertemente convergente para todo $\Sigma_T^\infty X_+(s)[t]$, $X \in Sm/k$, $s, t \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por contradicción y supongamos que la sucesión espectral es fuertemente convergente. Entonces, combinando el morfismo (2) de la sección 2.1 y el Teorema 2.4 (que es válido en \mathcal{SH}), concluimos que

$$c_* : \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(\Sigma_T^\infty X_+(s)[t], \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n} \mathbf{1}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(\Sigma_T^\infty X_+(s)[t], \mathbf{1}).$$

es un isomorfismo. Sin embargo, esto implica que c es un isomorfismo ya que \mathcal{SH} es una categoría compactamente generada con generadores $\mathcal{G}_{\mathcal{SH}}$. \square

Sin embargo, la sucesión espectral

$$E_{p,q}^1 = \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(\Sigma_T^\infty X_+(s)[t], (bc_{p/p-1} \mathbf{1}[q-p]) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(\Sigma_T^\infty X_+(s)[t], \mathbf{1}).$$

es fuertemente convergente para una clase grande de objetos en \mathcal{SH} :

PROPOSICIÓN 3.5. Sea $A \in \mathcal{SH}$ tal que para algún $r \in \mathbb{Z}$, $A \in \mathcal{SH}^\perp(r)$. Entonces, el mapeo canónico

$$c : \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n} A \xrightarrow{\cong} A$$

es un isomorfismo en \mathcal{SH} . Por lo tanto, la sucesión espectral

$$E_{p,q}^1 = \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(\Sigma_T^\infty X_+(s)[t], (bc_{p/p-1} A)[q-p]) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(\Sigma_T^\infty X_+(s)[t], A).$$

es fuertemente convergente para cada $X \in Sm/k$, $s, t \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Corolario 2.5, es suficiente probar que c es un isomorfismo en \mathcal{SH} .

Sea $m \geq r$ un entero arbitrario. Se tiene que $A \in \mathcal{SH}^\perp(m)$ por la proposición 1.2(3)-(4). Por lo tanto, se tiene que $\theta_m^A : bc_{\leq m} A \rightarrow A$ es un isomorfismo por la propiedad universal (Proposición 1.2(2)) que es válida en \mathcal{SH} (ver [20], 2.3.7.). Pero esto implica que el mapeo canónico $c : \text{hocolim}_{n \rightarrow \infty} bc_{\leq n} A \rightarrow A$ es un isomorfismo en \mathcal{SH} . \square

Sea $B \in \mathcal{SH}$ con $B = \Sigma_T^\infty X_+(s)[t]$, $X \in Sm/k$, $s, t \in \mathbb{Z}$. Considere la sucesión espectral rebanada de Voevodsky ([27] §7) para $G \in \mathcal{SH}$:

$$E_1^{m,n} = \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(B, s_m G[m+n]) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(B, G).$$

Como consecuencia directa de la proposición anterior, obtenemos una sucesión espectral que es fuertemente convergente al término E_1 de la sucesión espectral rebanada de Voevodsky y que es compatible con las diferenciales $d_1 : E_1^{m,n} \rightarrow E_1^{m+1,n}$:

COROLARIO 3.6. La sucesión espectral

$$E_{p,q}^1 = \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(B, (bc_{p/p-1} s_m G[m+n])[q-p]) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(B, s_m G[m+n]).$$

es fuertemente convergente hacia el término E_1 de la sucesión espectral rebanada de Voevodsky $E_1^{m,n} = \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(B, s_m G[m+n])$. Además, la diferencial $d_1 : E_1^{m,n} \rightarrow E_1^{m+1,n}$

en la sucesión espectral rebanada de Voevodsky induce un mapeo entre las sucesiones espectrales:

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} E_{p,q}^1 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}}(B, (bc_{p/p-1}s_m G[m+n])[q-p]) & \Longrightarrow & E_1^{m,n} \\ \downarrow d_{1*} & & \downarrow d_1 \\ E_{p,q}^1 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}}(B, (bc_{p/p-1}s_{m+1} G[m+1+n])[q-p]) & \Longrightarrow & E_1^{m+1,n} \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Por construcción $s_m G \in \mathcal{SH}^\perp(m+1)$ ([27], Thm. 2.2(3)). Por lo tanto, la convergencia fuerte de la sucesión espectral para $A = s_m G[m+n]$ se sigue directamente de la Proposición 3.5.

Ahora, observe que la diferencial $d_1 : E_1^{m,n} \rightarrow E_1^{m+1,n}$ en la sucesión espectral, está inducida por el mapeo $\partial[m+n]$ en \mathcal{SH} en donde ∂ es la siguiente composición ([27], Thm. 2.2(1)):

$$s_m G \xrightarrow{\sigma_m} f_{m+1} G[1] \xrightarrow{\pi_{m+1}[1]} s_{m+1} G[1].$$

Ya que la torre ortogonal (Definición 1.3) es funtorial en \mathcal{SH} , concluimos que $\partial[m+n]$ induce el mapeo deseado entre las sucesiones espectrales (3). \square

Bibliografía

- [1] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1, 2. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4). Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [2] J. Ayoub. *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique*. II. Astérisque, (315):vi+364 pp. (2008), 2007.
- [3] A. A. Beilinson, *Height pairing between algebraic cycles*, K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984-1986), 1987, pp. 1-25.
- [4] S. Bloch, *Lectures on algebraic cycles*, Duke University Mathematics Series, IV, Duke University Mathematics Department, Durham, N.C., 1980.
- [5] J. Michael Boardman, *Conditionally convergent spectral sequences*, Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998), Contemp. Math., vol. 239, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 49-84.
- [6] Y. Manin, S. Gelfand. *Methods of Homological algebra*, Springer 1996
- [7] J. P. Murre, *On a conjectural filtration on the Chow groups of an algebraic variety*. I. The general conjectures and some examples, Indag. Math. (N.S.) 4 (1993), no. 2, 177-188
- [8] M. Hovey, *Spectra and symmetric spectra in general model categories*, J. Pure Appl. Algebra, 165, (2001), no. 1, 63-127.
- [9] A. Huber, B. Kahn. *The slice filtration and mixed Tate motives*. Compos. Math., 142(4): 907-936, 2006.
- [10] J. F. Jardine. *Motivic symmetric spectra*. In: Doc. Math. 5 (2000), 445-553.
- [11] S. Kelly. *Triangulated categories of motives in positive characteristic* (2013), disponible en arXiv:1305.5349v2.
- [12] C. Mazza, V. Voevodsky, and C. Weibel. *Lecture notes on motivic cohomology*, volume 2 of Clay Mathematics Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [13] M. Levine. *A comparison of motivic and classical stable homotopy theories*. J. Topol., 7(2):327-362, 2014.
- [14] D. Mumford *Rational equivalence of 0-cycles on surfaces*. J. Math. Kyoto Univ., 9 (1969), 195-204.
- [15] A. Neeman. *The Grothendieck duality theorem via Bousfield techniques and Brown representability*. J. Amer. Math. Soc., 9(1):205-236, 1996.
- [16] A. Neeman, *Triangulated categories*, Princeton University Press, 2001.
- [17] A. Néron *Problèmes arithmétiques et géométriques attachée à la notion de rang d'une courbe algébrique dan un corps*. Bull. Soc. Math. France, 80 (1952), 101-166.
- [18] A. Néron *La théorie de la base pour les diviseurs sur les variétés algébriques*. 2nd Coll. Géom. Alg. Liège, G. Thone, (1952), 119-126.
- [19] P. Pelaez. *Motivic Birational Covers and Finite Filtrations on Chow Groups*. 2014.
- [20] P. Pelaez. *Mixed motives and motivic birational covers*, J. Pure. Appl. Algebra, 221: (2017), 1699-1716.

- [21] F. Severi. *La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data e la teoria generale delle corrispondenze fra i punti di due superficie algebriche*. Mem. Accad. Ital., 5 (1934), 239-283.
- [22] A. Suslin, *Motivic complexes over nonperfect fields*, Ann. K-Theory **2** (2017), no. 2, 277-302.
motivic homology theories, volume 143 of Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.
- [23] The Stacks Project: <http://stacks.math.columbia.edu> (2017)
- [24] J. L. Verdier. *Catégories triangulées, état 0. Cohomologie étale. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 $\frac{1}{2}$* . P. Deligne, avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier. pp. 262-311. Lecture Notes in Mathematics, 569. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [25] V. Voevodsky. *Triangulated categories of motives over a field*. In Cycles, transfers, and motivic homology theories, volume 143 of Ann. of Math. Stud., pages 188-238. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.
- [26] V. Voevodsky. *Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic*. Int. Math. Res. Not., 7:351-355, 2002.
- [27] V. Voevodsky. *Open problems in the motivic stable homotopy theory*. I. In Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998), volume 3 of Int. Press Lect. Ser., pages 3-34. Int. Press, Somerville, MA, 2002.
- [28] V. Voevodsky. *Cancellation theorem*. Doc.Math. Extra volume: Andrei A. Suslin sixtieth birthday, pages 671-685, 2010.
- [29] V. Voevodsky, A. Suslin, and E. M. Friedlander. *Cycles, Transfers and Motivic homology theories*, volume 143 of Annals of Mathematics Studies. Princeton Univ. Press, 2000.