



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
FÍSICA - NANOCIENCIAS

FASES GEOMÉTRICAS Y ENTRELAZAMIENTO EN SISTEMAS CON  
SIMETRÍAS DINÁMICAS  $SU(2)$  Y  $SU(3)$ .

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS

PRESENTA:  
DIEGO MORACHIS GALINDO

TUTOR PRINCIPAL  
JESÚS A. MAYTORENA CÓRDOVA  
COMITÉ TUTOR  
DR. ERNESTO COTA ARAIZA  
DR. FERNANDO ROJAS ÍÑIGUEZ

ENSENADA, B.C., 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*A Araceli, Eduardo y René, por su apoyo incondicional...*



# Reconocimientos

---

Son muchas e invaluable las experiencias que me ha brindado el realizar el doctorado y me siento profundamente afortunado por haber tenido la oportunidad de vivirlas. Durante los años en los que me he dedicado a conseguir esta meta he convivido y conocido a muchas personas sin las cuales esto no habría sido posible.

Primero que nada quisiera agradecer a mi asesor el Dr. Jesús Alberto Maytorena Córdova por su total apoyo durante el proceso de admisión al doctorado y el desarrollo de esta tesis. También le agradezco las amenas charlas que siempre terminaban siendo enriquecedoras tanto personal como académicamente.

Agradezco a la Dra. Catalina López Bastidas y a los doctores Ernesto Cota Araiza y Fernando Rojas Íñiguez por haber formado parte de mi comité de tesis así como por sus comentarios y evaluaciones.

A la Dra. Guadalupe Moreno Armenta y el Dr. Jonathan Guerrero Sánchez por haberme dado acceso a su equipo de cómputo para realizar mis experimentos numéricos. En este sentido también agradezco al M. en C. Aldo Rodríguez Guerrero por su asesoría en cuestiones de cómputo.

A mis padres Eduardo y Araceli, quienes siempre me apoyaron y alentaron a perseguir mis sueños. Sin su amor y dedicación esto no hubiera sido posible.

A Reneé, por ser la compañera perfecta durante este viaje y creer en mi en todo momento.

Quisiera agradecer al personal del Centro de Nanociencias y Nanotecnología, en especial al personal académico que con su apoyo me ayudó a incursionar en el mundo de la física.

A los coordinadores del Posgrado en Ciencias Físicas, los doctores Jorge Alejandro Reyes Esqueda y Alberto Güijosa Hidalgo, así como a la Ing. Jazmín Acosta Reza, la M. en I. Silvia Núñez y María Isabel Mendoza Romero.

Agradezco en gran medida al CONACyT por brindarme la beca doctoral durante estos años.

Quisiera agradecer a mis amigos y compañeros Enrique, Abril y Wallace con quienes compartí momentos agradables y a quienes tengo en alta estima.







# Resumen

---

En el presente trabajo investigamos las fases geométricas en sistemas con simetrías dinámicas  $SU(2)$  y  $SU(3)$ . Estudiamos las fases de Berry y Aharonov-Anandan en un sistema optomecánico que consta de una cavidad óptica con una membrana dieléctrica que oscila sinusoidalmente en su interior. Este sistema tiene simetría dinámica  $SU(2)$  y previamente se había notado que muestra un espectro de interferometría Landau-Zener-Stückelberg (LZS). Al estudiar las fases geométricas como función de la posición de equilibrio y amplitud de oscilación de la membrana observamos que estas son no triviales en las zonas en donde se manifiestan las oscilaciones LZS. En el caso de la fase de Aharonov-Anandan observamos que hay puntos en donde la fase parece no estar bien definida y coinciden con degeneraciones del espectro del hamiltoniano de Floquet del sistema. Por último localizamos numéricamente las zonas en donde la fase dinámica es trivial y con ello encontramos compuertas geométricas de dos y tres niveles cuando la cavidad contiene uno y dos fotones, respectivamente.

Con la finalidad de encontrar compuertas geométricas de tres niveles no restringidas a la simetría  $SU(2)$ , estudiamos el modelo Lipkin-Meshkov-Glick con una variación cíclica en los parámetros. Estudiamos las fases de Aharonov-Anandan de los modos de Floquet, las analizamos en términos de las trayectorias de las estrellas de Majorana y en función de la concurrencia de los estados. Al encontrar zonas de parámetros en donde la fase dinámica resulta ser irrelevante, encontramos compuertas cuánticas geométricas de relevancia en protocolos basados en cutrits.

Además, estudiamos una propuesta de fases geométricas para sistemas mixtos conocida como la fase de Uhlmann. Calculamos de manera exacta la fase de Uhlmann para una partícula con espín- $j$  en equilibrio térmico y en presencia de un campo magnético que oscila lentamente alrededor de un eje fijo. Encontramos que la fase de Uhlmann se encuentra en términos de los polinomios de Chebyshev del segundo tipo. Para un campo magnético que gira sobre el ecuador, mostramos que la fase de Uhlmann presenta  $2j$  discontinuidades en ciertas temperaturas críticas, lo que se asocia a cambios en el orden topológico del sistema. Al hacer uso del Principio del Argumento de Análisis Complejo, cada orden topológico se asocia a un número de giros de una curva en el plano de Aargand, el cual es  $2j$  para temperatura cero y disminuye por una unidad cada vez que se cruza una temperatura crítica.

Por otro lado, estudiamos el poder entrelazador de compuertas simétricas de dos cubits, definidos como la entropía lineal promedio de los estados producidos por la acción de una compuerta sobre el conjunto de estados separables. Encontramos condiciones para determinar cuando una compuerta simétrica puede producir un estado máximamente entrelazado a partir del conjunto de estados separables, compuertas denominadas entrelazadores perfectos. Estos resultados son aplicables a sistemas de tres niveles en general, dado que el espacio simétrico de dos cubits es isomórfico al de un cutrit, y por tanto nos ayudan a tener una mayor comprensión de las operaciones sobre cutrits. Por ejemplo, mediante la representación de Majorana de los estados cuánticos, un entrelazador perfecto corresponde a una operación de tres niveles capaz de generar un estado con dos estrellas de Majorana en posiciones antipodales. Estos resultados fueron cruciales en el estudio de las compuertas cuánticas geométricas en el modelo Lipkin-Meshkov-Glick.

# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Anticipaciones de la fase de Berry . . . . .	2
1.2. Fases geométricas en sistemas físicos . . . . .	6
1.2.1. Fase geométrica de una partícula de espín- $j$ . . . . .	7
1.2.2. Efecto Hall cuántico . . . . .	8
1.2.3. Aislantes topológicos . . . . .	10
1.3. Fase geométrica en la computación cuántica . . . . .	12
1.4. Interferometría Landau-Zener-Stückelberg . . . . .	14
1.5. Fase geométrica, fase dinámica y levantamientos . . . . .	18
1.6. Sistemas mixtos . . . . .	21
1.6.1. Holonomía y fase de Uhlmann . . . . .	22
1.6.2. Invariantes térmico-topológicas en sistemas de estado sólido . . . . .	26
1.7. Geometría de operaciones no locales, poder entrelazador y sistemas de tres niveles . . . . .	28
1.8. Contenido de la tesis . . . . .	30
<b>2. Fases geométricas en un sistema optomecánico con simetría dinámica SU(2)</b>	<b>33</b>
2.1. Hamiltoniano del sistema . . . . .	34
2.2. Fase de Berry . . . . .	36
2.3. Fase de Aharonov-Anandan . . . . .	39
2.3.1. Interferometría Landau-Zener-Stückelberg . . . . .	41
2.4. Compuertas cuánticas geométricas de cubits y cutrits . . . . .	45
2.4.1. Compuertas cuánticas de un cubit . . . . .	45
2.4.2. Compuertas cuánticas de un cutrit . . . . .	47
2.5. Conclusiones . . . . .	48
<b>3. Poder Entrelazador de Compuertas Cuánticas en Espacios Simétricos de Dos Cubits y operaciones en sistemas de tres niveles</b>	<b>51</b>
3.1. Espacio simétrico, entrelazamiento y sistemas de tres niveles . . . . .	52
3.2. Descomposición de Cartan . . . . .	55
3.2.1. Transformaciones de dos cubits: $\mathfrak{su}(4)$ . . . . .	55
3.2.2. Transformaciones irreducibles de dos cubits: $\mathfrak{su}(3)$ . . . . .	57

3.3. Invariantes Locales y Clases de Equivalencia de Compuertas Simétricas	60
3.4. Poder entrelazador	64
3.4.1. Expresión y propiedades	64
3.4.2. Entrelazadores perfectos	66
3.5. Ejemplos	71
3.5.1. Modelo anisotrópico de Heisenberg sin términos cruzados	71
3.5.2. Modelo Lipkin-Meshkov-Glick	72
3.5.3. Osciladores acoplados con interacción de Kerr cruzada	74
3.6. Conclusiones	75
<b>4. Compuertas cuánticas geométricas en el modelo Lipkin-Meshkov-Glick</b>	<b>77</b>
4.1. Hamiltoniano del sistema	78
4.2. Estados y modos de Floquet	78
4.3. Fases geométricas de los estados de Floquet	81
4.4. Compuertas cuánticas geométricas	85
4.4.1. Poder entrelazador	85
4.4.2. Compuertas geométricas	86
4.5. Robustez de compuertas geométricas ante errores estocásticos	93
4.6. Conclusiones	94
<b>5. Transiciones topológicas de la fase de Uhlmann para una partícula de espín-<math>j</math> en un campo magnético</b>	<b>97</b>
5.1. Fase de Uhlmann para un espín $j$ arbitrario en un campo magnético externo	98
5.2. Transiciones topológicas de la fase de Uhlmann	101
5.2.1. Temperaturas críticas	101
5.2.2. Números topológicos de Uhlmann	103
5.3. Fase de Uhlmann para direcciones arbitrarias del campo magnético	107
5.4. Interpretación física de los números de Uhlmann	107
5.5. Conclusiones	109
<b>6. Conclusiones</b>	<b>111</b>
<b>A. Representación estelar de Majorana</b>	<b>113</b>
A.1. Esfera de Bloch	113
A.2. Representación de Schwinger de momento angular	114
A.3. Representación de Majorana	115
A.4. Ejemplos	117
A.5. Fase geométrica de Liu y Fu	120
<b>B. Representación adjunta de un álgebra de Lie</b>	<b>123</b>
<b>C. Solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo</b>	<b>127</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>129</b>

# Introducción

---

El concepto de las fases geométricas es uno de los más importantes en la física moderna. En Física del Estado Sólido juega un papel vital, dado que es el concepto clave sobre el cual se describe el efecto Hall cuántico[1], la teoría microscópica de la ferroelectricidad[2], la velocidad anómala de los electrones de Bloch[3], sirve de herramienta para la clasificación de los aislantes topológicos[4], etc. De manera fundamental, la fase geométrica se ha utilizado para dar la primera demostración satisfactoria del teorema de la estadística del espín[5], y una reinterpretación del efecto Aharonov-Bohm[6]. En óptica aparece en el estudio de la interferencia entre estados de la luz con polarización distinta[7], en el estudio del momento angular[8] y vórtices en frentes de onda ópticos[9].

Formalmente, la fase geométrica fue descubierta en 1984 por M.V. Berry[6]. En dicho trabajo se calculó el factor global de fase que adquiere un eigenestado de un hamiltoniano cíclico que evoluciona muy lentamente. Se observó que además de la fase dinámica del sistema, dada en términos de la energía del estado, había un factor de fase extra que dependía solamente de la evolución del hamiltoniano en el espacio de parámetros, por lo que se le dio el nombre de fase geométrica. Además, para aterrizar este concepto en un sistema físico, Berry obtuvo la elegante fórmula de la fase geométrica de una partícula con espín-1/2 como la mitad del ángulo sólido que subtiende el vector de Bloch al trazar una trayectoria sobre la esfera unitaria.

El trabajo de Berry estableció el concepto de la fase geométrica para evoluciones cíclicas y adiabáticas de eigenestados. Sin embargo, poco tiempo después se generalizó el concepto a evoluciones cíclicas arbitrarias, conocido como fase de Aharonov-Anandan[10]. Después se generalizó el concepto para cualquier evolución en particular[11, 12] y para espacios degenerados, en donde la fase geométrica aparece como un operador que actúa sobre los estados del sistema[13].

Los trabajos mencionados anteriormente se ocupan del estudio de las fases geométricas en sistemas puros. No obstante, dicho concepto también se puede generalizar para estados mixtos. En este caso existen dos propuestas que han recibido especial atención en la literatura teórica y experimental. Una de ellas es la denominada fase de Uhlmann[14, 15], la cual se obtiene al mapear las matrices de densidad a un espacio de

estados puros<sup>1</sup> y obtener la fase según la trayectoria que se trazó en dicho espacio. Más adelante describiremos esto con mayor detalle. Otra propuesta no equivalente es la llamada fase de Sjöqvist[16], en la cual se considera la evolución de la matriz de densidad como generada por artefactos ópticos, en donde la fase geométrica se define de manera similar a la fase de Pancharatnam, que veremos más adelante. Aquí sólo estudiaremos la fase de Uhlmann, que ha recibido atención en la comunidad de estado sólido debido a su posible uso como indicador de transiciones topológicas a temperatura finita en varios sistemas.

## 1.1. Anticipaciones de la fase de Berry

Antes de que saliera a la luz el trabajo de Berry, algunos estudios previos habían anticipado la presencia de la fase geométrica. Por ejemplo Yakir Aharonov y Daniel Bohm estudiaron el efecto de los potenciales electromagnéticos en la interferencia de haces de electrones que no interactúan con un campo magnético[17]; este fenómeno tiene su contraparte en dinámica molecular, conocido como el efecto Aharonov-Bohm molecular[18]. En el campo de la óptica la fase geométrica fue anticipada en 1956 por Pancharatnam al estudiar la interferencia entre haces de luz con distintos estados de polarización. A continuación describiremos con más detalle estos fenómenos antes de entrar de lleno a las fases geométricas.

### Efecto Aharonov-Bohm

Consideremos un experimento similar al de la doble rendija, en donde una fuente de electrones emite un haz que pasa por una placa metálica con dos orificios; ver la Fig.1.1. Del otro lado se coloca un solenoide largo y estrecho que genera un campo magnético que es cero fuera de él y distinto de cero en la región interior, con un detector de electrones detrás de ellos. En este experimento los electrones recibidos por el detector jamás interactúan con el campo magnético encerrado. Sin embargo, el hamiltoniano del sistema no es el de una partícula libre, sino que toma la forma[19]

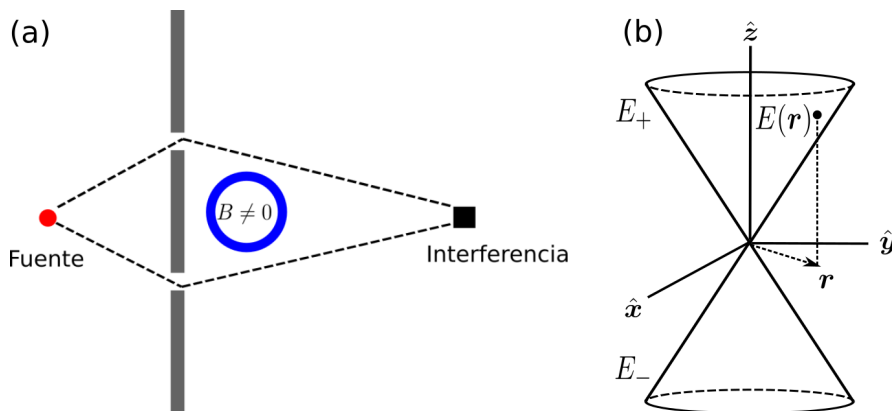
$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}} \right)^2 + eA_o \quad (1.1)$$

en donde  $\hat{A}_o$  denota el potencial escalar y  $\hat{\mathbf{A}}$  el potencial vectorial que da origen al campo magnético.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es  $\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$ , cuya solución puede escribirse como[19]  $\psi(\mathbf{r}) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{r}'\right) \psi^{(o)}$ . Aquí  $\Gamma$  representa una trayectoria de integración cerrada y  $\psi^{(o)}(\mathbf{r})$  es la función de onda del sistema en ausencia del potencial vectorial. Sean  $\psi_1$  y  $\psi_2$  las funciones de onda que pasan por la

---

<sup>1</sup>En información cuántica, este proceso se conoce como purificación.



**Figura 1.1:** (a) Una fuente emite electrones que pasan por una doble rendija. Se puede observar la interferencia del haz en un solo punto conforme varía el campo magnético dentro del solenoide. Este es el efecto Aharonov-Bohm. (b) Intersección cónica de las superficies energéticas de una molécula de dos niveles. Aquí  $E_+$  ( $E_-$ ) denota el cono superior (inferior) de la superficie de energía.

rendija 1 y 2, respectivamente. La probabilidad de detección de los electrones  $|\psi_1 + \psi_2|^2$  viene dada por

$$|\Psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2 \cos(e\Phi/\hbar c) \quad (1.2a)$$

$$\Phi = \oint \hat{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{r}'. \quad (1.2b)$$

El tercer término da origen a oscilaciones espaciales que dependen del campo magnético encerrado. De esta manera, aunque los electrones no entren en la zona de campo magnético finito, el potencial vectorial  $\hat{\mathbf{A}}$  afecta a su función de onda y da origen al término de interferencia.

El efecto Aharonov-Bohm también se manifiesta en dinámica molecular. En el estudio de sistemas moleculares es común considerar los núcleos fijos para calcular el movimiento de los electrones, lo que se conoce como la aproximación Born-Oppenheimer. De esta manera podemos calcular las energías de los estados electrónicos para cada configuración de los núcleos y con ello construir superficies de energía potencial. Estas superficies pueden intersectarse entre sí con la posibilidad de tener un punto aislado en el cual converjan dos superficies energéticas. Esto se muestra gráficamente en la Fig.1.1(b). De esta manera, el estudio de un sistema molecular en la proximidad de una intersección cónica se puede modelar por un sistema de dos niveles. El hamiltoniano efectivo del sistema es entonces

$$\hat{H}(\phi) = E(\hat{\sigma}_x \cos \phi + \hat{\sigma}_y \sin \phi) \quad (1.3)$$



## 1. INTRODUCCIÓN

---

con eigenvalores  $\pm E$  y eigenestados

$$|\psi_+\rangle = (\cos(\phi/2), \sin(\phi/2))^T, \quad |\psi_-\rangle = (\sin(\phi/2), \cos(\phi/2))^T. \quad (1.4)$$

Aquí  $\phi$  es un parámetro de control del hamiltoniano. Los eigenestados (1.4) no se encuentran univaluados, ya que cambian de signo cuando  $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ . Para remediar esto, podemos multiplicar los estados por una fase global  $e^{i\phi/2}$ . Sin embargo, la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo implica que en el hamiltoniano del sistema aparezca un potencial vectorial correspondiente al del un monopolo magnético situado en la intersección cónica. De esta manera, transportar el sistema alrededor del origen genera que el estado adquiera un signo debido a un campo magnético con el que no interactúa directamente. A este fenómeno se le ha bautizado como el efecto Aharonov-Bohm molecular[18]. Algunas de sus consecuencias son la emergencia de números cuánticos semienteros en grados de libertad pseudorrotacionales en ciertas moléculas[18, 20].

### Fase de Pancharatnam

La polarización de la luz se refiere a la dirección que tienen en el tiempo los campos eléctrico y magnético de un haz que se propaga en algún medio o en el vacío. En general, la polarización del campo eléctrico y magnético puede ser distinta en un mismo haz. Sin embargo, para haces de luz que se propagan en el vacío los campos son ortogonales y podemos enfocarnos solamente en la dirección del campo eléctrico.

El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es perpendicular a la dirección de propagación de haz  $\hat{\mathbf{k}}$ . La dirección de  $\mathbf{E}$  en este caso no es arbitraria, y puede demostrarse que conforme la fase  $\phi = \omega t - kz + \delta$  del haz<sup>1</sup> avanza  $2\pi$  el campo eléctrico traza una elipse en el plano perpendicular a  $\hat{\mathbf{k}}$ , con el círculo y líneas rectas como casos especiales[21]. En la Fig.1.2(a) se muestra el campo eléctrico en el plano perpendicular al vector de onda  $\hat{\mathbf{k}}$ . Como se observa, el vector  $\hat{\mathbf{k}}$  traza una curva elíptica con un grado de inclinación cuantificado por  $\alpha$  y una excentricidad determinada por  $\gamma$ .

Una característica importante de la elipse de polarización es su representación geométrica en términos de la *esfera de Poincaré*. Para esto es necesario obtener los parámetros de Stokes definidos por

$$s_0 = I_0 + I_{90} \quad (1.5a)$$

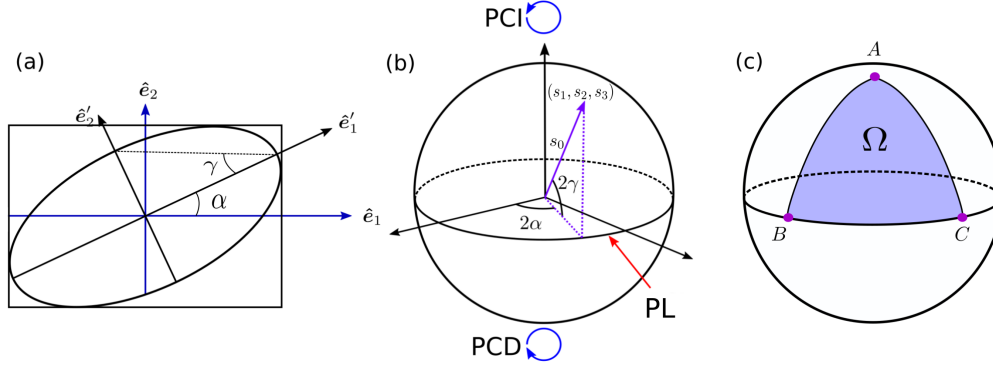
$$s_1 = I_0 - I_{90} \quad (1.5b)$$

$$s_2 = I_{+45} - I_{-45} \quad (1.5c)$$

$$s_3 = I_{PCD} - I_{PCI}. \quad (1.5d)$$

---

<sup>1</sup>El símbolo  $\delta$  denota una fase inicial arbitraria de la onda y las demás cantidades tienen el significado común usado en física de ondas.



**Figura 1.2:** (a) Elipse de polarización de un haz de luz. (b) Esfera de Poincaré de estados de polarización de la luz. Los puntos en el polo norte y sur denotan estados con polarización circular izquierda y derecha, respectivamente. Los puntos en el ecuador corresponden a estados con polarización lineal. (c) Ángulo sólido subtendido sobre la esfera de Poincaré al realizar una trayectoria cíclica en los estados de polarización.

Estas expresiones están en términos de las intensidades del campo medidas con filtros de polarización a distintos ángulos. Por ejemplo,  $I_{-45}$  y  $I_{90}$  son las intensidades con filtros polarizadores a  $-45$  y  $90$  grados. Además  $I_{PCD}$  y  $I_{PCI}$  son intensidades medidas con filtros de polarización circular derecha e izquierda, respectivamente. Con estas medidas y atendiendo a la elipse en la Fig.1.2(a) podemos encontrar las siguientes expresiones de los parámetros de Stokes

$$s_1 = s_0 \cos 2\gamma \cos 2\alpha \quad (1.6)$$

$$s_2 = s_0 \cos 2\gamma \sin 2\alpha \quad (1.7)$$

$$s_3 = s_0 \sin 2\gamma \quad (1.8)$$

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad (1.9)$$

con las cuales asignamos un punto sobre la esfera a cada estado de polarización.

En el panel (b) de la Fig.1.2 se muestra la esfera de Poincaré, en la cual cada punto en la superficie representa un estado distinto de polarización de la luz, en donde los estados con polarización circular izquierda y derecha se encuentran en el polo norte y polo sur, respectivamente. En el ecuador se encuentran los estados de luz con polarización lineal; en las zonas restantes se encuentran los estados con polarización elíptica.

Una pregunta natural que podemos plantearnos es cuál es la fase relativa entre dos estados de la luz con polarizaciones distintas. Para abordar esta pregunta podemos considerar que dos estados con polarización distinta se encuentran en (fuera de) fase cuando  $\arg(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)$  es máximo (mínimo)[22]. Una característica interesante de esta fase es la no transitividad. Por ejemplo, tomemos tres estados de polarización de la luz, indicados por  $A$ ,  $B$  y  $C$  en la Fig.1.2(c). Cambiemos el estado de polarización de la

luz, de tal manera que generamos una trayectoria cerrada  $ABCA$ , en donde  $A$  tiene PCI, de acuerdo con (c). Si tomamos dos haces con esta polarización, y hacemos que uno de ellos recorra la trayectoria  $ABCA$  de estados en la esfera de Poincaré, podemos observar que los haces difieren por una fase<sup>1</sup>  $\theta$  dada por la mitad del ángulo sólido  $\Omega$  de la trayectoria del vector de polarización sobre la esfera:

$$\vartheta = \frac{1}{2}\Omega. \quad (1.10)$$

De esta manera, la interferencia entre ambos haces de luz depende de una propiedad geométrica del sistema, en este caso el ángulo sólido subtendido por la trayectoria de los estados de polarización en la esfera de Poincaré. Como veremos a continuación, esta es la forma que adopta la fase geométrica en todo un espectro de sistemas físicos, y se puede decir que es una generalidad de los sistemas cuánticos de varios niveles<sup>2</sup>. La fase geométrica obtenida en este contexto se conoce como fase de Pancharatnam[7].

## 1.2. Fases geométricas en sistemas físicos

Como mencionamos anteriormente, el trabajo que dio origen a un interés global en el estudio de las fases geométricas fue el realizado por Berry en su artículo seminal en 1984[6]. En dicho trabajo se estudió una evolución hamiltoniana cíclica a través de un conjunto de parámetros que varían lentamente, de tal manera que se cumple la aproximación adiabática. En esta base, un estado a un tiempo  $t$  de la evolución siempre puede escribirse como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n |n; \mathbf{R}(t)\rangle, \quad (1.11)$$

en donde los estados  $|n; \mathbf{R}(t)\rangle$  forman una base ortonormal completa y cada uno de ellos es un eigenestado del hamiltoniano  $\hat{H}(\mathbf{R}(t))$  en cuestión. Por esta razón los elementos  $|n; \mathbf{R}(t)\rangle$  se denominan eigenestados instantáneos del hamiltoniano. El vector  $\mathbf{R}(t)$  denota el vector de parámetros temporales de los que depende el hamiltoniano.

La condición cíclica en la evolución implica que el hamiltoniano tiene un periodo  $T$  tal que  $\hat{H}(\mathbf{R}(t+T)) = \hat{H}(\mathbf{R}(t))$ . Por lo tanto, un eigenestado instantáneo  $|n; \mathbf{R}(t)\rangle$ , después de sufrir una evolución adiabática por un tiempo  $T$ , vuelve a sí mismo a excepción de un factor global de fase, es decir

$$|n; \mathbf{R}(t+T)\rangle = e^{i\gamma_n} e^{-i \int_t^{t+T} E_n(t') dt'} |n; \mathbf{R}(t)\rangle. \quad (1.12)$$

El factor  $e^{i \int_t^{t+T} E_n(t') dt'}$  es la fase dinámica del sistema. Berry demostró que la otra contribución a la fase total del sistema se encuentra dada por

$$\gamma_n = i \oint \langle n; \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} | n; \mathbf{R} \rangle \cdot d\mathbf{R}. \quad (1.13)$$

---

<sup>1</sup>Esto al cuidar que el factor dinámico de fase  $\omega t$  sea el mismo en ambos haces.

<sup>2</sup>Véase la fórmula de Fu y Liu del Apéndice A

Esta fase tiene varias propiedades interesantes y en general no es cero o un múltiplo de  $2\pi$ . Por otro lado, su valor depende solamente de la trayectoria que el hamiltoniano recorre en el espacio de parámetros  $\mathbf{R}$ , por lo que recibe el nombre de fase geométrica.

Para sistemas con espacios paramétricos tridimensionales, la ecuación (1.13) puede escribirse de manera alternativa, en términos de una integral de superficie, mediante el teorema de Stokes. Puesto en ecuaciones, esto es

$$\gamma_n = \int_S \nabla_{\mathbf{R}} \times \langle n; \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} | n; \mathbf{R} \rangle. \quad (1.14)$$

De esta última expresión se observa claramente que un estado cuya trayectoria se cierra sobre sí misma (no encierra área alguna) no adquiere fase geométrica. El integrando de (1.14) se conoce como curvatura de Berry del eigenestado  $|n; \mathbf{R}\rangle$  y lo denotaremos por  $\mathbf{F}^{(n)}$ . La curvatura puede expresarse de manera explícita como

$$\mathbf{F}^{(n)} = \sum_{n \neq m} \frac{\langle n; \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} \hat{H}(\mathbf{R}) | m; \mathbf{R} \rangle \times \langle m; \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} \hat{H}(\mathbf{R}) | n; \mathbf{R} \rangle}{(E_m(\mathbf{R}) - E_n(\mathbf{R}))^2}. \quad (1.15)$$

en donde  $\nabla_{\mathbf{R}}$  denota el gradiente sobre los parámetros del hamiltoniano. Esta cantidad es de vital importancia en Física del Estado Sólido, dado que la velocidad anómala de los electrones de Bloch y la conductividad Hall pueden expresarse en términos de ella[3, 20].

Las dos maneras de expresar  $\gamma_n$  obtenidas por Berry resultan muy convenientes pues permiten interpretar la fase geométrica como el flujo de un monopolo magnético[6]. Por otro lado, Simon[23] fue el primero en reconocer que estas expresiones corresponden al grupo de holonomía de un fibrado principal, con grupo estructural  $U(1)$ . En este contexto, el integrando  $\langle n; \mathbf{R} | \nabla_{\mathbf{R}} | n; \mathbf{R} \rangle$  en (1.13) es la conexión de Berry, una 1-forma diferencial que actúa sobre el álgebra de Lie del grupo estructural  $U(1)$  en este caso[20]. El integrando en (1.14) se asocia con la 2-forma, que es la curvatura del fibrado principal del sistema[20]. Además, estas expresiones e interpretaciones físicas son las mismas al considerar evoluciones cíclicas no adiabáticas, como lo demostraron Aharonov Anandan[10], en donde el lugar del espacio de parámetros  $\mathbf{R}$  del hamiltoniano lo toma el espacio proyectivo de los estados cuánticos.

### 1.2.1. Fase geométrica de una partícula de espín- $j$

Para ejemplificar las expresiones y conceptos abstractos introducidos en la sección anterior, Berry calculó la fase geométrica de una partícula con momento angular  $j$  que interactúa con un campo magnético que rota muy lentamente. A este sistema lo llamaremos partícula con espín- $j$  de aquí en adelante. El hamiltoniano del sistema está dado por

$$\hat{H} = \mathbf{B}(\mathbf{R}) \cdot \hat{\mathbf{J}}, \quad (1.16)$$

en donde  $\hat{\mathbf{J}}$  es el vector cuyas componentes son los operadores de momento angular  $\hat{J}_i$ ,  $i = x, y, z$ . El campo se expresa por  $B(\cos \phi(t) \sin \theta, \sin \phi(t) \sin \theta, \cos \theta)$ , en donde

$\theta$  es una constante que denota la colatitud y  $\phi(t)$  la coordenada polar que cambia muy lentamente. Esta forma implica que el campo magnético tiene magnitud constante y su trayectoria puede expresarse por una curva sobre una esfera; además el espectro del hamiltoniano es constante durante toda la evolución. De esta manera, los eigenestados instantáneos del sistema son  $|j, m; \hat{\mathbf{n}}\rangle = \exp(-i\phi\hat{J}_z) \exp(-i\theta\hat{J}_y) \exp(i\phi\hat{J}_z) |j, m\rangle$ . Al usar la ecuación (1.13), la fase geométrica de un eigenestado  $|j, m; \hat{\mathbf{n}}\rangle$  cuando el campo magnético da una vuelta completa alrededor del eje  $\hat{\mathbf{z}}$  tenemos

$$\gamma_m^{(j)} = -2\pi m(1 - \cos\theta). \quad (1.17)$$

Este resultado tiene una interpretación geométrica muy elegante, ya que expresa la fase geométrica en términos del ángulo sólido que el campo magnético subtende sobre la esfera unitaria. Para el estado excitado de un sistema de dos niveles ( $j = m = 1/2$ ), la fase geométrica es la mitad del ángulo sólido subtendido por la trayectoria de  $\mathbf{B}$ .

Si bien la fase geométrica (1.17) en términos de un ángulo sólido se obtuvo para un sistema en particular, el caso general de evolución cíclica de un estado de  $n$  niveles puede expresarse análogamente en términos de los ángulos sólidos que la trayectoria de las estrellas de Majorana subtenden sobre una esfera unitaria, más un término que depende de la distancia entre los pares de estrellas. Dicha fórmula será utilizada y mencionada a lo largo de esta tesis. Sin embargo, su expresión es un tanto complicada y necesita forzosamente de la representación estelar de Majorana. Esto nos desviaría mucho de los propósitos de esta introducción, por lo que hemos relegado su exposición al Apéndice A junto a la representación de Majorana.

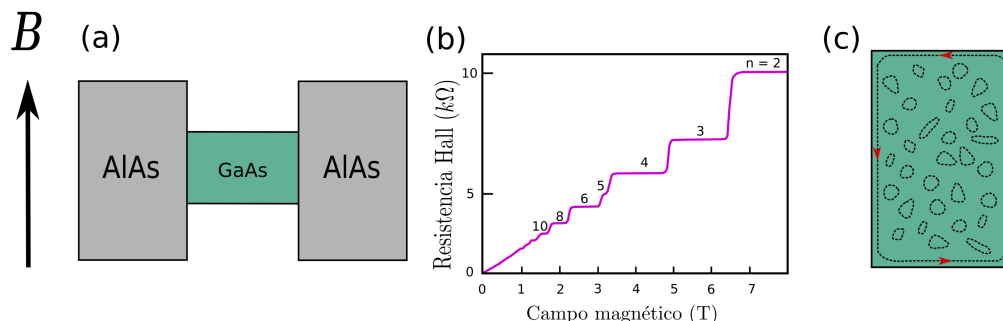
Las ecuaciones aquí expuestas pueden interpretarse en términos de la electrostática. Por ejemplo, el integrando de la ecuación (1.13) puede interpretarse como un potencial vectorial  $\mathbf{A}$  cuyo rotacional nos da el campo generado por un monopolo magnético. Para la partícula de espín- $j$  el campo magnético asociado está dada por

$$\nabla_{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{A}} = m \frac{\mathbf{B}}{B^3}. \quad (1.18)$$

Por ende,  $\gamma_m$  corresponde al flujo de un monopolo magnético con carga  $m$  situado en el origen[6].

### 1.2.2. Efecto Hall cuántico

Uno de los fenómenos más interesantes en Física del Estado Sólido es el efecto Hall cuántico en el cual los conceptos de fase y curvatura de Berry juegan un papel esencial. El fenómeno se observó por primera vez en 1980 por von Klitzing al estudiar la conductividad de un gas bidimensional de electrones en una heteroestructura de GaAs. Con la aplicación de un campo magnético alrededor de 4T perpendicular al plano de la muestra y a una temperatura de aproximadamente 2K, la resistividad transversal muestra el patrón de la Fig.1.3.(c) [24].



**Figura 1.3:** (a) Heteroestructura de arsenuro de galio (GaAs) en la cual se encuentra el gas de electrones bidimensional sujeto a un campo magético perpendicular. (b) Resistividad Hall del gas de electrones. Figura adaptada a partir de Paalanen et al.[24]. (c) Plano transversal del gas de electrones. Las líneas punteadas representan equipotenciales del sistema debido a impurezas.

Cada terraza de la resistencia Hall se encuentra a un valor de  $h/e^2$  dividido entre un número entero; aquí  $e$  es la carga del electrón y  $h$  es la constante de Planck. De esta manera, los valores de la conductividad Hall estática en las mesetas están dados por

$$\sigma_{xy} = n \frac{e^2}{h}, \quad (1.19)$$

con  $n$  igual al número de niveles de Landau ocupados en el sistema. Si bien en mecánica cuántica uno se encuentra acostumbrado a la idea de cantidades físicas que toman valores discretos, la cuantización de una cantidad macroscópica, como la conductividad, que depende de la interacción de incontables electrones embebidos en un material semiconductor es algo distinto[25]. Una de las características sobresalientes de este resultado es la precisión de una parte en  $10^{10}$  con la que se midió el coeficiente entero de la expresión anterior, lo que representó un nuevo estándar de la resistividad eléctrica en metrología[26].

Es interesante cómo la conductividad Hall está dada por números enteros de  $e^2/h$ , que depende solamente de constantes fundamentales. Thouless et al. demostraron que la fórmula de Kubo para la corriente puede leerse como una invariante topológica  $C$ , llamada número de Chern[27]. A temperaturas suficientemente bajas, se puede demostrar que la conductividad Hall de un sistema bidimensional con una brecha energética es[28]

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{h} \int_{BZ} d^2\mathbf{k} F_z(\mathbf{k}). \quad (1.20)$$

Aquí  $\mathbf{k}$  representa al momento cristalino de un sistema bidimensional, mientras que  $F_z(\mathbf{k})$  es la curvatura de Berry de los estados ocupados del sistema. A su vez, el número

de Chern viene dado por

$$C = \int_{BZ} d^2\mathbf{k} F_z(\mathbf{k}). \quad (1.21)$$

De esta manera, la curvatura de Berry entra en juego para definir una invariante topológica del sistema.

Al fenómeno aquí mencionado se le suele dar el nombre más específico de efecto Hall cuántico entero (EHCE), para diferenciarlo del efecto Hall cuántico fraccionario (EHCF). En el EHCF aparecen mesetas de conductividad constante para múltiplos racionales de la conductividad  $e^2/h$  a temperaturas del orden de 1K y menores, observado por primera vez por Tsui et al. en 1982[29]. La aparición de estos valores de la conductividad se deben a interacciones electrónicas de muchos cuerpos[20] y el formalismo que lo describe involucra fases geométricas abelianas y no abelianas además de cuasipartículas con una estadística fraccionaria[20].

### 1.2.3. Aislantes topológicos

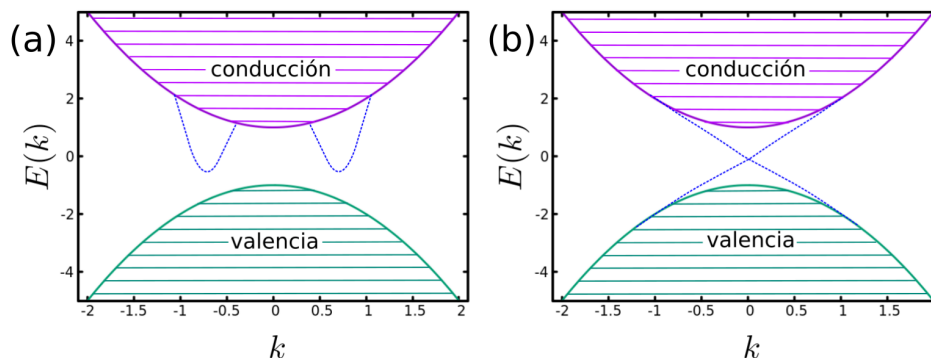
Un aislante topológico se caracteriza por ser un material aislante en el bulto que posee estados conductores en la frontera protegidos topológicamente por alguna simetría del sistema[4]. En los aislantes convencionales, los estados de la frontera también pueden ser conductores, sin embargo al no poseer una protección topológica estos pueden desaparecer fácilmente por la presencia de desorden u oxidación. Por ejemplo, en la Fig.1.4 mostramos la estructura de bandas de un aislante trivial (panel (a)) y uno topológico (panel (b)). En un aislante trivial, los estados de frontera están dentro de la brecha prohibida del bulto, sin embargo no conectan las bandas de conducción y de valencia y por ende no contribuyen al transporte electrónico. En un aislante topológico los estados de borde conectan estas bandas y propician el transporte. Una característica importante en estos sistemas es la existencia de invariantes topológicas que dependen solamente del hamiltoniano de bulto del sistema. Los valores que toman estas cantidades nos indican la presencia o ausencia de estados de borde topológicamente protegidos, lo que se conoce como la *correspondencia bulto-frontera*[4].

Un sistema en el cual resulta sencillo introducir la correspondencia bulto-frontera es el modelo del poliacetileno introducido por Su-Schrieffer-Heeger (SSH). Este consiste en una cadena de dímeros con átomos  $a$  (azul) y  $b$  (rosa) como se muestra en la Fig.1.5. Las energías de interacción inter e intra celda son  $v$  y  $w$  respectivamente. En ausencia de un potencial de sitio del sistema, el hamiltoniano y las energías de bulto del modelo son[30]

$$\hat{H}(k) = \mathbf{d}(k) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (1.22a)$$

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{w^2 + v^2 + 2vw \cos k}, \quad (1.22b)$$

en donde  $\mathbf{d}(k) = (v + w \cos k, w \sin k)$ . Este hamiltoniano corresponde a un sistema de dos niveles, en donde  $\mathbf{d}(k)$  se puede interpretar como un campo magnético efectivo que



**Figura 1.4:** (a) Estructura de bandas de un aislante trivial y (b) un aislante topológico. Las energías de los estados de frontera se representan por las líneas azules punteadas.

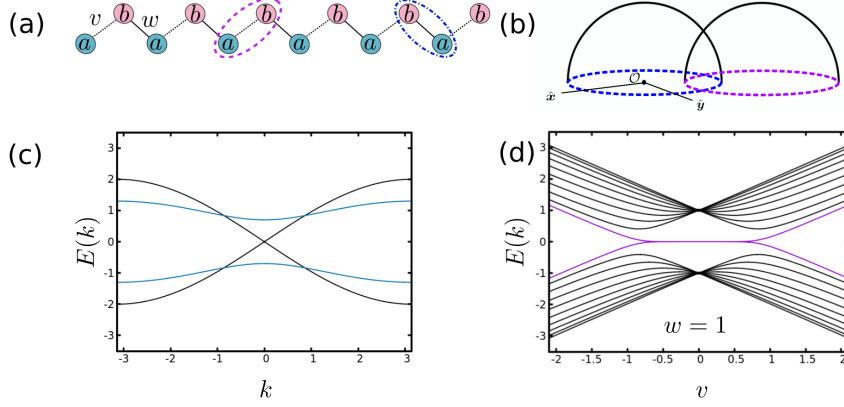
depende del momento cristalino  $k$ . Los estados de la frontera son aquellos fuertemente localizados en los extremos de la cadena del polímero y se forman cuando el acoplamiento intracelda  $v$  es igual a cero. El sistema consiste de dímeros formados por uniones de átomos  $a$  y  $b$  en distintas celdas (línea discontinua azul), que dejan sin interacción a los átomos de los extremos. A este régimen el modelo SSH lo llamaremos no trivial. Por otro lado, cuando se suprime el acoplamiento intercelda, el modelo SSH consiste en un número finito de dímeros (línea violeta a guiones) sin átomos aislados.

La presencia de estados de borde en este modelo puede relacionarse al número de giros del vector  $\mathbf{d}(k)$  alrededor del origen[30]. En la Fig.1.5(b) la curva azul discontinua representa la trayectoria del vector  $\mathbf{d}(k)$  cuando  $v = 0$ . El número de giros de  $\mathbf{d}(k)$  alrededor del origen  $O$  es igual a 1. La línea discontinua morada representa la trayectoria de  $\mathbf{d}(k)$  en el caso trivial y tiene un número de giros igual a cero.

A su vez, el número de giros puede calcularse a partir de la fase geométrica. Por ejemplo, para el régimen no trivial del modelo SSH, el campo magnético efectivo  $k$  está en el ecuador y encierra el origen, como lo muestra la línea punteada azul en la Fig.1.5(b). El vector de Bloch de los eigenestados instantáneos, que es de magnitud unitaria, apunta siempre en la dirección del campo magnético efectivo  $\mathbf{d}(k)$ . Así el estado gira una vuelta alrededor del origen y adquiere una fase de  $\pi$ . En el caso trivial el campo magnético efectivo también está en el ecuador pero no encierra al origen, como lo muestra la línea morada. El vector de Bloch sigue la trayectoria de  $\mathbf{d}(k)$  traza una trayectoria que va y viene sobre sí misma, de modo que no adquiere fase geométrica. Por lo tanto los regímenes trivial y no trivial del modelo SSH se caracterizan por la fase geométrica.

El espectro energético del sistema finito compuesto de diez celdas unitarias se muestra en la Fig.1.5 en función de  $v$  y  $w = 1$ . En morado hemos representado las energías que son cero para  $v = 0$  y que corresponden a los estados de borde. Se observa que alrededor de  $v \approx 1$  las energías pierden la degeneración. Un análisis de las amplitudes





**Figura 1.5:** (a) Modelo SSH del poliacetileno. (b) Número de giros del campo magnético efectivo alrededor del origen. (c) Energías del Hamiltoniano de bulto para  $n = 0, 1$  (azul) y cuando  $n$  no está definido (negro). (d) Estructura de bandas del sistema abierto: la línea morada representa la energía de los estados de borde y las líneas negras las energías de los estados de bulto.

de las funciones de onda correspondientes a estas energías en los distintos sitios del modelo SSH indican que la densidad de probabilidad se encuentra fuertemente localizada en los extremos para  $v < 1$  y comienza a distribuirse de manera más uniforme en toda la cadena conforme  $v$  aumenta, en concordancia con la correspondencia bulto-frontera.

### 1.3. Fase geométrica en la computación cuántica

Una de las metas científicas y tecnológicas más importantes de nuestro tiempo es la construcción de una computadora cuántica, debido a las ventajas que presenta con respecto a una computadora clásica. Por ejemplo, el tiempo de cómputo de los algoritmos de búsqueda de cierto número de objetos en un listado, factorización de números enteros y la simulación de sistemas cuánticos se ve drásticamente reducido en una computadora cuántica a comparación de su contraparte clásica[31]. La propiedad fundamental detrás de esta ventaja sobre las computadoras clásicas es el principio de superposición, que da origen a la propiedad llamada coherencia cuántica. Como consecuencia, si el sistema físico en el cual se realizan las operaciones computacionales está conformado de varios subsistemas, el principio de superposición implica también que los estados más generales del sistema puedan tener entrelazamiento. El mantener la coherencia cuántica en los sistemas físicos que implementan los algoritmos cuánticos es todo un desafío experimental.

El paradigma actual de la computadora cuántica se basa en una arquitectura formada por múltiples qubits o sistemas de dos niveles. Las operaciones sobre el qubit se denominan compuertas cuánticas, las cuales son operadores de evolución temporal de algún sistema físico con un espacio vectorial de dos dimensiones. El acoplamiento entre los distintos qubits del sistema nos permite realizar operaciones en un espacio de  $2^n$  dimensiones, con  $n$  igual al número de qubits del sistema. Además, de todas las transformaciones que hay en este espacio, para alcanzar la universalidad de la computación cuántica son sólo necesarias operaciones que actúen en uno o dos qubits simultáneamente. Al primer tipo de operaciones se les conoce como operaciones locales y al segundo como operaciones no locales. De las posibles operaciones locales basta escoger dos de ellas que no conmuten entre sí, por ejemplo  $\hat{\sigma}_x$  y  $\hat{\sigma}_y$ , mientras que de las no locales sólo es necesario tener a nuestra disposición una compuerta del tipo CNOT[32, 33], cuya forma explícita es

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x \otimes \mathbb{1} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} & \mathbb{1} \otimes \hat{\sigma}_x &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_x \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma}_y \otimes \mathbb{1} &= \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbb{1} \\ i\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} & \mathbb{1} \otimes \hat{\sigma}_y &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_y & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_y \end{pmatrix} \\ \text{CNOT} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Las dos primeras líneas muestran ejemplos de operaciones locales, las cuales son separables no generan entrelazamiento en los estados cuánticos. En la última línea se muestra la compuerta CNOT, ejemplo no local y que genera estados entrelazados.

Debido a las dificultades experimentales para realizar computación cuántica, ha habido un interés en buscar o proponer dinámicas que sean resilientes ante el ruido del sistema. Quizá la que ha resultado más atractiva ha sido la computación cuántica basada en los fermiones de Majorana[34], los cuales tienen estados que ofrecen la posibilidad de realizar computación cuántica topológica[35]. No obstante, la búsqueda de los fermiones de Majorana ha producido varios artículos en los cuales se ha afirmado su manifestación, pero que se consideran poco confiables o han terminado siendo refutados por estudios posteriores[36]. Otra propuesta que ha recibido bastante atención es la computación cuántica geométrica propuesta inicialmente por Zanardi y Rasetti[37]. Las compuertas cuánticas construidas bajo esta propuesta tienen una mayor resiliencia ante el ruido clásico experimental proveniente del control de parámetros experimentales[38]. La idea detrás de esta propuesta es bastante sencilla, la cual ejemplificaremos con un sistema de un qubit, como en la referencia [39].

Consideremos un hamiltoniano de un sistema de dos niveles cuyos eigenestados son  $|0; \hat{\mathbf{n}}\rangle = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_z} e^{-i\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_y} e^{i\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_z} |0\rangle$  y  $|1; \hat{\mathbf{n}}\rangle$  definido de manera similar; aquí  $\hat{\mathbf{n}}$  es un vector unitario con componentes  $(\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)^T$  que denota la dirección del vector de Bloch del estado. Supongamos que el hamiltoniano evoluciona adiabáticamente por una trayectoria cerrada. De esta manera, los eigenestados al final de la evolución

vuelven a ser los mismos salvo un factor global de fase. Por lo tanto, si evaluamos el propagador al periodo  $T$ , por medio de la descomposición espectral, obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{U}(T) &= e^{-i(\gamma+\alpha)} |+\rangle \langle +| + e^{i(\gamma+\alpha)} |-\rangle \langle -| \\ &= e^{-i(\gamma+\alpha)\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}},\end{aligned}\tag{1.23}$$

en donde hemos definido  $\gamma$  igual a  $\gamma_+$  y usado el hecho de que  $\gamma_+ = -\gamma_-$  para cualesquiera eigenestados de un sistema de dos niveles bajo la misma evolución cíclica. Por lo tanto, las compuertas cuánticas en donde la fase dinámica es trivial[39] o un factor global de fase se denominan compuertas cuánticas geométricas. Se ha mostrado[38] que para compuertas de uno y dos cubits, aquellas en donde predomina la fase geométrica sobre la fase dinámica son más robustas ante errores en el control de parámetros clásicos del sistema. A su vez, esta propuesta puede extenderse a sistemas de más dimensiones y evoluciones no adiabáticas mediante el uso de los modos de Floquet del sistema[40]. Hemos utilizado este método para la construcción de compuertas geométricas con simetrías dinámicas SU(2) y SU(3) en los capítulos 2 y 4, respectivamente.

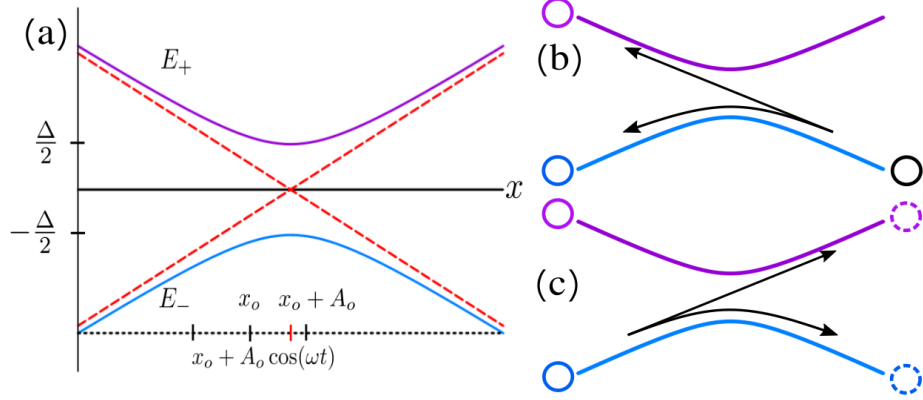
Resulta menester mencionar aquí que la computación cuántica geométrica es una propuesta diferente de la computación cuántica holonómica[41]. Esta última se basa en la holonomía de Wilczek-Zee[13] que se adquiere cuando un hamiltoniano evoluciona adiabática y cíclicamente sobre un subespacio degenerado y así la fase dinámica resulta en un factor global de fase. Al final del ciclo, el estado inicial del sistema se ve modificado por esta holonomía, que es una transformación unitaria que depende únicamente de la trayectoria del hamiltoniano en el espacio de parámetros. Su expresión es

$$\hat{U} = \mathcal{P}e^{i\oint_C \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{R})\cdot d\mathbf{R}},\tag{1.24}$$

en donde  $\mathcal{P}$  es el operador de ordenamiento de la trayectoria,  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{R})$  es una matriz con elementos  $\hat{A}_{pk}(\mathbf{R}) = \langle u_p(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | u_k(\mathbf{R}) \rangle$ , y  $C$  representa la trayectoria cerrada de integración en el espacio de parámetros. En principio se pueden obtener distintas compuertas  $\hat{U}$  que no conmuten entre sí y con ello lograr la universalidad de la computación cuántica[42]. Esta propuesta también ha sido generalizada a procesos no adiabáticos[43, 44] y se ha implementado en sistemas superconductores[45], puntos cuánticos de espín electrónico[46] y sistemas de trampas iónicas[47].

## 1.4. Inteferometría Landau-Zener-Stückelberg

El forzamiento de los sistemas microscópicos puede jugar un papel doble en mecánica cuántica. Por el lado práctico, la realización de algoritmos cuánticos requiere de la aplicación controlada de una serie de hamiltonianos sobre un sistema para obtener los resultados correctos. Esta serie de hamiltonianos aplicados se puede ver como un cambio externo y controlado de los parámetros del sistema, y la secuencia total de los pasos es en esencia un hamiltoniano dependiente del tiempo. Por otro lado, el forzamiento de los sistemas cuánticos ofrece por sí mismo efectos que no se pueden emular mediante



**Figura 1.6:** (a) Energías de un hamiltoniano de dos niveles en función del parámetro  $x$ . (b) Las transiciones LZ tienen lugar cuando  $x(t)$  cruza la brecha energética, lo que genera transferencia de poblaciones de un modo a otro.

hamiltonianos independientes del tiempo y que además son bastante interesantes desde el punto de vista fundamental. Por ejemplo, un átomo en presencia de un campo externo eventualmente se ioniza, independientemente de la amplitud de oscilación del campo[48]. Otros fenómenos importantes en sistemas cuánticos forzados son el desdoblamiento Autler-Townes[49], las transiciones Landau-Zener (LZ) y la interferometría Landau-Zener-Stückelberg (LZS) [50]. De estos efectos, estudiaremos la relación de la fase geométrica con los últimos dos.

Las transiciones Landau-Zener (LZ) se refieren a los saltos entre niveles cuánticos cuando un sistema se hace pasar por un anticruce entre dos niveles energéticos. Tomemos por ejemplo el siguiente hamiltoniano

$$\hat{H}(t) = \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{x(t)}{2} \hat{\sigma}_x, \quad (1.25)$$

que tiene un espectro dado por  $E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 + x^2(t)}$ , como se muestra en la Fig.1.6. Aquí  $\Delta$  representa la brecha energética entre los niveles y  $x(t)$  representa un parámetro forzamiento del sistema.

Supongamos que el sistema se encuentra inicialmente en el estado base del hamiltoniano a un tiempo  $t_0$ , el cual tiene una energía que puede en principio corresponder a cualquiera de la curva azul en la Fig.1.6. Si el parámetro  $x(t)$  del hamiltoniano pasa rápidamente por el anticruce energético, entonces la probabilidad de transición del estado base al estado excitado está dada por la fórmula[51, 52]

$$P_{LZ} = e^{-2\pi \frac{\Delta^2}{v}}, \quad (1.26)$$

en donde  $v$  es la velocidad con la que se atraviesa el anticruce, es decir  $dx(t)/dt|_{t=0}$ . Esta expresión se conoce como la fórmula Landau-Zener para calcular la probabilidad

de transición del estado base hacia el estado excitado en un proceso no adiabático. El estado final después de esta transición es entonces una superposición cuántica del estado base y estado excitado, como se ilustra en la Fig.1.6(b).

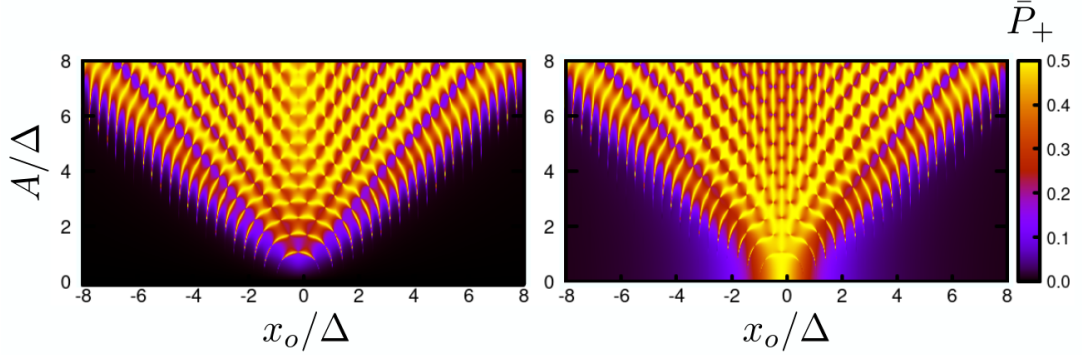
En un sistema que se fuerza repetidamente por el anticruce se generan múltiples transiciones LZ, las cuales pueden verse suprimidas por fenómenos de interferencia. Por ejemplo, en panel (b) de la Fig.1.6 se muestra la transición LZ de un estado base (círculo rojo) al pasar por el anticruce. Esto genera una superposición entre este estado y el estado excitado representados por los círculos azul y morado respectivamente. Estos adquieren una fase relativa distinta de cero hasta que el sistema vuelve a pasar por el anticruce (panel (c)), la cual puede suprimir las transiciones LZ. La fase relativa entre los estados depende tanto de la fase dinámica y la fase geométrica. Gasparinetti *et al.* observaron que la inhibición de las transiciones LZ debido únicamente a la fase geométrica en un sistema superconductor de bombeo de carga[53]. Para un proceso en el que se cruza dos veces la brecha energética obtuvieron que la probabilidad de excitación está dada por

$$P = 4P_{LZ}(1 - P_{LZ}) \cos^2(\tilde{\phi}_S + \alpha + \gamma) \quad (1.27)$$

$$\tilde{\phi}_S = \pi/2 + \Phi_S.$$

En esta expresión  $\alpha$  y  $\gamma$  representan la diferencia entre las fases dinámicas y geométricas entre los estados. Además  $\Phi_S = \pi/4 + \delta(\ln(\Delta^2/4v) - 1) + \arg \Gamma(1 - i\Delta^2/4v)$  corresponde a la fase de Stückelberg y  $\Gamma$  es la función gama[54]. Cuando  $\tilde{\phi}_S + \alpha = n\pi$  con  $n$  entero, obtenemos que la probabilidad de transición depende únicamente de la fase geométrica, efecto que los autores bautizaron como *interfererometría LZ geométrica*. En la derivación del resultado anterior, se encuentra implícita la división de la dinámica del sistema en zonas adiabáticas, en las cuales  $x(t)$  está fuera del anticruce y la población entre los estados base y excitados se mantiene constante, y zonas diabáticas, en donde  $x(t) = 0$  y tiene lugar los saltos cuánticos. La interferometría LZ geométrica ha sido observada experimentalmente en un cubit superconductor acoplado a campos de microondas[55, 56] además de haber sido utilizada para la construcción de compuertas cuánticas geométricas[57].

En general, sin separar la dinámica cuántica en trayectorias adiabáticas y no adiabáticas, los sistemas forzados y periódicos exhiben múltiples transiciones LZ que pueden inhibirse o no por efectos de interferencia cuántica, efecto que se conoce como interferometría Landau-Zener-Stückelberg (LZS) [50]. Este fenómeno ha sido ampliamente estudiado en la literatura y se manifiesta en sistemas atómicos con campos externos producidos por láser y cubits superconductores[58, 59], por ejemplo. Los efectos de interferencia se hacen evidentes al estudiar la probabilidad de transición promedio del estado base al estado excitado, lo que se muestra en la Fig.1.7. En las zonas con  $A < x_o$  se observa una baja probabilidad de transición  $\bar{P}_+$  debido a que el sistema no pasa por el anticruce y las transiciones LZ se ven suprimidas. En cambio para el régimen  $\bar{A} \geq x_o$  el sistema sufre de múltiples transiciones LZ que se manifiestan en zonas con una alta probabilidad promedio de transición. Sin embargo, se observan zonas en este régimen en donde  $\bar{P}_+$  es muy baja, debido a efectos de interferencia destructiva, fenómeno conocido



**Figura 1.7:** Espectro de interferencia LZS como función de la posición de equilibrio  $x_o$  y amplitud de forzamiento  $A$ . La frecuencia de oscilación  $\omega$  es igual a  $0.32g$ . La barra de colores indica la probabilidad de transición  $\bar{P}_+$  y tiene un valor máximo de 0.5 [50]. El panel izquierdo corresponde al espectro adiabático y el derecho al espectro no adiabático

como destrucción coherente del tunelaje[48].

Cabe mencionar que la probabilidad de transición LZ promedio se puede calcular de dos maneras. Una de ellas es proponiendo los eigenestados iniciales del hamiltoniano a  $t = 0$  como el par de estados base y excitado, y con ello calcular el promedio temporal de  $|\langle +; \hat{\mathbf{n}} | -; \hat{\mathbf{n}}(t) \rangle|^2$  en donde  $| -; \hat{\mathbf{n}}(t) \rangle = \hat{U} | -; \hat{\mathbf{n}} \rangle$  y  $\hat{\mathbf{n}}$  es un vector unitario que etiqueta a los estados como vectores propios del hamiltoniano inicial. Al patrón de interferometría así obtenido se le denomina espectro LZS *adiabático* y se muestra en el panel izquierdo de la Fig.1.7. Por otro lado, si escogemos como estados iniciales los vectores  $|\pm\rangle$ , los vectores propios de  $\hat{\sigma}_z$  de los matrices de Pauli, la probabilidad de transición entre ambos estados da origen a un espectro LZS no adiabático. Este último corresponde al panel derecho de la Fig.1.7. En resumen, las probabilidades promedio en ambos casos son

$$\bar{P}_+ = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\eta dt |\langle +; \hat{\mathbf{n}} | -; \hat{\mathbf{n}}(t) \rangle|^2}{\eta} \quad \text{adiabático} \quad (1.28a)$$

$$\bar{P}_+ = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\eta dt |\langle + | \hat{U}(t) | - \rangle|^2}{\eta} \quad \text{no adiabático.} \quad (1.28b)$$

Más allá del mero estudio de las transiciones LZS, la información que guarda este espectro ha sido empleada para obtener constantes de acoplamiento del sistema con el ambiente[59] y constantes del resorte para nanorresonadores[60]. Sin embargo, además del trabajo realizado por Gasparinetti et al., la relación de este fenómeno con la fase geométrica ha sido poco abordada.

Para estudiar la fase geométrica debida a una evolución cíclica es natural elegir los estados de Floquet[61], que son eigenestados del operador de evolución temporal a

una sucesión de instantes (tiempos estroboscópicos). De esta manera cada vez que el sistema evoluciona durante un tiempo  $T$  estos estados adquieren un factor global de fase compuesto de la fase geométrica más la fase dinámica, es decir

$$\hat{U}(T) |u_n\rangle = e^{i\phi_n} |u_n\rangle, \quad (1.29)$$

en donde  $\hat{U}(T)$  es el operador de evolución temporal evaluado en  $t = T$  y  $|u_n\rangle$  es el modo de Floquet. El factor global de fase se compone de  $\alpha_n + \gamma_n$ , en donde  $\gamma_n$  es la fase de Aharonov-Anandan que adquiere el modo de Floquet. Para el sistema descrito por (1.25) la fase de Aharonov-Anandan queda determinada por la trayectoria del vector de Bloch sobre la esfera unitaria, y calcularla analíticamente requiere resolver la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Este problema no es trivial y su solución analítica está en términos de complicadas funciones especiales[62]. Esto hace interesante la evaluación de las fases geométricas desde el punto de vista técnico y conceptual, debido a que el hamiltoniano (1.25) es el modelo estándar con el cual se ejemplifica la interferometría LZS.

En el Capítulo 2 nos enfocaremos en el estudio de las fases geométricas adquiridas por los modos de Floquet de una cavidad óptica con una membrana dieléctrica que puede moverse en su interior. El hamiltoniano básicamente tiene la forma (1.25) para un fotón y para números de fotones mayores las matrices de Pauli se sustituyen por las de momento angular. El estudio de estas fases muestra una rica y complicada estructura cuando se grafica en términos de la amplitud de oscilación y posición de equilibrio. Además, una cualidad interesante de ellas es la aparición de zonas en donde la fase dinámica es irrelevante, lo que hemos utilizado para encontrar parámetros del sistema en donde el propagador sea de naturaleza esencialmente geométrica.

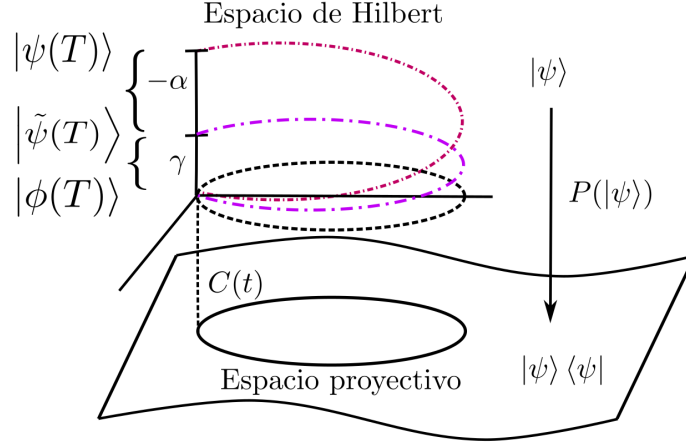
## 1.5. Fase geométrica, fase dinámica y levantamientos

En esta sección explicaremos el surgimiento de las fases dinámica y geométrica y cómo la fase total que adquiere un estado en una evolución cíclica se compone de estas dos. Nuestra exposición se basa en el contenido del cuarto capítulo de la referencia [20]. Con esto daremos una base sólida con la cual darle sentido a la distinción entre fase geométrica y dinámica a la que tanto haremos referencia en los capítulos 2 y 4 de esta tesis.

En mecánica cuántica un estado de un sistema físico se representa por un ket  $|\psi\rangle$  el cual contiene toda la información disponible del sistema. Sin embargo, supongamo que tenemos dos estados  $|\psi\rangle$  y  $|\psi_o\rangle$  que difieren entre sí tan sólo por un factor global de fase, es decir

$$|\psi'\rangle = e^{i\Phi} |\psi\rangle, \quad (1.30)$$

con  $\Phi$  igual a algún número real. Los valores de expectación de las observables del sistema no se ven afectados por el factor global de fase. Por lo tanto, definamos el



**Figura 1.8:** Levantamientos de una curva cerrada  $C(t)$  en el espacio proyectivo  $|\psi\rangle\langle\psi|$ . La función  $P$  mapea los estados  $|\psi\rangle$  del espacio de Hilbert al espacio proyectivo. Esta figura es una adaptación de la Fig. 4.1 de la referencia [20].

espacio proyectivo de estados cuánticos mediante el siguiente mapeo:

$$P(|\psi\rangle) : |\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (1.31)$$

Este mapeo elimina cualquier factor de fase global y por lo tanto podemos pensarlo como el espacio de estados físicos del sistema. El espacio proyectivo es entonces la imagen de  $P$  al actuar sobre el espacio de los vectores estado  $|\psi\rangle$ .

Consideremos un estado inicial  $|\psi(0)\rangle$  que evoluciona por un tiempo  $T$  y traza una curva cerrada en el espacio proyectivo. A esta curva cerrada le corresponde un sinnúmero de curvas suaves en el espacio de Hilbert. Sin embargo, tres de ellas ocupan un lugar especial debido a que nos ayudan a intuir la emergencia de la fase geométrica.

1. Sea la curva definida por  $C_d : |\psi(0)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(T)\rangle = e^{i\phi} |\psi(0)\rangle$ , en donde  $|\psi(t)\rangle$  es la solución de la ecuación de Schrödinger con estado inicial  $|\psi(0)\rangle$ . A esta curva la denominaremos como levantamiento dinámico y corresponde a la curva roja a rayas y puntos pequeños en la Fig.1.8.

2. Sea  $C_c : |\phi(0)\rangle \rightarrow |\phi(t)\rangle \rightarrow |\phi(T)\rangle = |\phi(0)\rangle$ . El estado  $|\phi(0)\rangle$  es idéntico a  $|\psi(0)\rangle$ . A esta curva la denominamos levantamiento cerrado, debido a que el estado inicial y final coinciden en el espacio de Hilbert. Ver la curva negra discontinua de la Fig.1.8.

3. Sea  $C_{AA} : |\tilde{\psi}(0)\rangle \rightarrow |\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{i \int_t^{t+T} \langle\psi(t')|\hat{H}(t')|\psi(t')\rangle dt'} |\psi(t)\rangle \rightarrow |\tilde{\psi}(T)\rangle$ . El estado  $|\tilde{\psi}(T)\rangle$  es igual a  $|\psi(0)\rangle$  salvo una fase dada por  $\int_t^{t+T} \langle\psi(t')|\hat{H}(t')|\psi(t')\rangle dt'$ . A esta curva la denominamos levantamiento *Aharonov-Anandan* y corresponde a la curva morada semipunteada de la Fig.1.8.

En los levantamientos dinámico y AA los estados finales difieren del estado inicial



## 1. INTRODUCCIÓN

---

por un factor global de fase. En el levantamiento cerrado el estado final no adquiere ningún factor de fase adicional. Sin embargo, este levantamiento es de vital importancia debido a que los estados de esta curva son los necesarios para calcular la fase geométrica. Para ver esto, calculemos el factor global de fase entre los levantamientos cerrado y AA. La relación entre los estados de ambos levantamientos puede escribirse como

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \omega(t) |\phi(t)\rangle. \quad (1.32)$$

Por otro lado, dad que en el levantamiento de AA tenemos  $|\tilde{\psi}(t)\rangle = \exp\left(i \int_{t_0}^t \langle \psi(t') | \hat{H}(t') | \psi(t') \rangle\right)$ , podemos ver fácilmente que se cumplen

$$i \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = -\langle \psi(t) | \hat{H}(t) | \psi(t) \rangle |\tilde{\psi}(t)\rangle + \hat{H}(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle.$$

De esta manera tenemos las siguientes relaciones

$$\langle \tilde{\psi}(t) | \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = \langle \psi(t) | \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = 0. \quad (1.33)$$

Al derivar la ecuación (1.32) obtenemos

$$\frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = \frac{d\omega(t)}{dt} |\phi(t)\rangle + \omega(t) \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle, \quad (1.34)$$

que en conjunto con (1.33) nos da

$$\frac{1}{\omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} = -\langle \phi(t) | \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle. \quad (1.35)$$

El factor de fase global que hemos obtenido hasta aquí tiene la misma forma que la fase de Berry (1.13) y lo expresaremos por  $e^{i\gamma}$ . En este caso los estados  $\phi(t)$  de levantamiento cerrado toman el lugar de los eigenestados instantáneos del hamiltoniano bajo la aproximación adiabática. Los estados  $|\psi(t)\rangle$  no están sujetos a la condición de adiabaticidad y por ende el factor de fase obtenido es válido para cualquier evolución dinámica con una trayectoria cerrada en el espacio proyectivo.

El factor  $\omega(t)$  que adquiere  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  es de naturaleza meramente geométrica, es decir, se encuentra determinado por la trayectoria  $P(|\psi(t)\rangle)$  en el espacio proyectivo. Para ver esto notemos que dos hamiltonianos que difieren entre sí por un múltiplo de la identidad trazan la misma trayectoria en el espacio proyectivo al actuar sobre un estado inicial  $|\psi(0)\rangle$ . La ecuación de Schrödinger efectiva del levantamiento de AA está dada por

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle &= \left[ \hat{H}(t) - \langle \psi(t) | \hat{H}(t) | \psi(t) \rangle \mathbb{1} \right] |\tilde{\psi}(t)\rangle \\ |\tilde{\psi}(0)\rangle &= |\psi(0)\rangle, \end{aligned} \quad (1.36)$$

en donde  $|\psi(0)\rangle$  es la solución de la ecuación de Schrödinger con el hamiltoniano  $\hat{H}(t)$ . Si en la ecuación anterior realizamos la transformación  $\hat{H}(t) \rightarrow \hat{H}(t) - k\mathbb{1}$ , y definimos

$|\tilde{\psi}'(t)\rangle$  como el levantamiento AA correspondiente al nuevo hamiltoniano, se puede demostrar que

$$|\tilde{\psi}'(t)\rangle = |\tilde{\psi}(t)\rangle. \quad (1.37)$$

Por lo tanto, el levantamiento AA se encuentra determinado por la trayectoria de los estados en el espacio proyectivo, y por ende el factor de fase  $\exp\left(\int_0^t \langle\phi(t')|\frac{d}{dt}|\phi(t')\rangle\right)$  es de naturaleza geométrica. Este factor es la fase de Aharonov-Anandan mencionada anteriormente[10], cuya expresión vale para cualquier evolución cíclica y es una generalización de la fase de Berry. El integrando de la exponencial es

$$A(t) = -\langle\phi(t)|\frac{d}{dt}|\phi(t)\rangle, \quad (1.38)$$

y se denomina *conexión de Aharonov-Anandan*, en concordancia con el caso adiabático.

El factor de fase entre los levantamientos cerrado y AA es la fase geométrica que adquiere el sistema. De esta manera, la fase total que adquiere el estado en el levantamiento dinámico está dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\int_0^t \langle\psi(t')|\hat{H}(t')|\psi(t')\rangle dt'} e^{-\int_0^t \langle\phi(t')|\frac{d}{dt'}|\phi(t')\rangle dt'} |\phi(t)\rangle. \quad (1.39)$$

El factor de fase  $e^{-i\int_0^t \langle\psi(t')|\hat{H}(t')|\psi(t')\rangle dt'}$  es la fase dinámica del sistema, como habíamos visto de manera heurística al inicio de la introducción y lo denotaremos por  $e^{-i\alpha}$  por el resto de este escrito. Esto nos indica que un estado que traza una trayectoria cerrada en el espacio de estados cíclicos adquiere un fase total compuesta de dos términos, un término de origen dinámico y otro de origen geométrico. Esto nos permite expresar la fase geométrica como

$$\gamma = \Phi - \alpha. \quad (1.40)$$

La fase total  $\Phi$  se obtiene mediante la solución de la ecuación de Schrödinger para una evolución cíclica, mientras que la fase dinámica es independiente del levantamiento que estemos utilizando. Esto puede ser útil en el caso de que los estados  $|\phi\rangle$  del levantamiento dinámico sean difíciles de obtener o en cálculos numéricos. De hecho, esta fórmula es la que estaremos utilizando para el cálculo de la fase geométrica en la construcción de compuertas cuánticas geométricas en los capítulos 2 y 4 de esta tesis.

## 1.6. Sistemas mixtos

Hasta este punto hemos discutido la fase geométrica obtenida por estados puros  $|\psi\rangle$ . Como hemos mencionado, este concepto geométrico tiene varias generalizaciones, entre ellas la holonomía correspondiente a una matriz de densidad. La extensión a estados mixtos es importante, dado que la manera más realista de describir una situación experimental es por medio de la matriz de densidad.

Existen dos generalizaciones de la fase geométrica a sistemas de estados mixtos, la denominada fase de Uhlmann[14, 15], y la fase de Sjöqvist[16]. Ambas propuestas de fase geométrica son invariantes ante transformaciones de norma y han sido observadas experimentalmente[63, 64]. Además, al ser aplicadas a sistemas en equilibrio térmico, ambas tienden a la fase de Berry a muy bajas temperaturas para varios sistemas[65, 66, 67]. No obstante estas fases no son en general equivalentes entre sí. Esto es de esperarse, pues ambas propuestas se encuentran estructuradas de manera distintas y la condición de transporte paralelo de la fase de Uhlmann parece ser más restrictiva que la correspondiente a la fase de Sjöqvist[68]. En este trabajo de tesis sólo abordaremos la fase de Uhlmann, por lo que nos centraremos en dar los fundamentos de este concepto en la páginas que siguen. El problema en específico que hemos atendido es el de una partícula con espín- $j$  en equilibrio térmico en presencia de una campo magnético. El sistema de la partícula de espín  $j$  resulta paradigmático en cuanto es uno de los pocos modelos realistas con solución analítica en varios contextos de la física. Este problema ya había sido considerado por Uhlmann en sus trabajos seminales[14, 15] y posteriormente por Slater[69], sin embargo no se había considerado desde el punto de vista de los materiales topológicos. Esto será explicado con más detalle en la siguiente subsección.

### 1.6.1. Holonomía y fase de Uhlmann

Cualquier situación experimental contiene intrínsecamente un grado de incertidumbre en el control de parámetros del sistema. Esto hace que preparar un estado cuántico  $|\psi\rangle$  con total certeza sea imposible y en lugar de ello obtengamos una distribución de estados similares. Objeto para describir esta situación fue introducido por von Neuman inicialmente y se denomina matriz de densidad. Su forma matemática es

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|. \quad (1.41)$$

Los coeficientes  $p_k$  denotan la probabilidad de obtener el estado  $|\psi_k\rangle$ , y cumplen con la condición de normalización  $\sum_k p_k = 1$ . Los proyectores  $|\psi_k\rangle \langle \psi_k|$  no son necesariamente ortogonales entre sí. Dada la forma de (1.41) la matriz de densidad es un operador Hermitiano que además cumple con la condición  $\text{Tr}[\hat{\rho}] = 1$ . Notemos que esta corresponde a un estado puro  $|\psi_k\rangle \langle \psi_k|$  cuando  $\delta_{ik} p_k = p_i$ .

Dada esta construcción cabría preguntarnos cual sería la generalización de la fase geométrica para los sistemas de estados mixtos. Como vimos anteriormente, la fase geométrica está determinada por la trayectoria de los estados en el espacio proyectivo. La función

$$\pi(|\psi\rangle) : |\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle \langle \psi|, \quad (1.42)$$

mapea los elementos del espacio de Hilbert al espacio proyectivo. Una matriz de densidad es un operador lineal positivo definido y puede expresarse como[14]

$$\hat{\rho} = \hat{w} \hat{w}^\dagger. \quad (1.43)$$

El factor  $\hat{w}$  de la matriz de densidad se nombra *amplitud* de la matriz de densidad. El producto interno definido por  $(\hat{w}_1, \hat{w}_2) = \text{Tr}(\hat{w}_1 \hat{w}_2^\dagger)$  junto con los elementos  $\hat{w}$  forman un espacio de Hilbert; además  $\text{Tr}[\hat{\rho}] = 1$  implica que las amplitudes  $\hat{w}$  estan normalizadas. De esta manera propongamos el mapeo de proyección del espacio de amplitudes  $\hat{w}$  al espacio de estados  $\hat{\rho}$  mediante:

$$\hat{\pi}(\hat{w}) : \hat{w} \rightarrow \hat{w} \hat{w}^\dagger. \quad (1.44)$$

Este mapeo establece una arbitrariedad de norma  $\hat{U}(n)$  en las amplitudes. Es decir, dos amplitudes  $\hat{w}$  y  $\hat{w} \hat{U}$ , en donde  $\hat{U}$  es una matriz unitaria, se mapean a la misma matriz de densidad. Es esta propiedad la que nos permite definir una holonomía para las matrices de densidad y una fase geométrica.

El significado físico de las amplitudes de la matriz de densidad puede entenderse a partir del concepto de purificación en información cuántica[32]. La descomposición de Schmidt establece que dada una matriz de densidad  $\hat{\rho}$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , existe un estado puro  $|w\rangle$  en un espacio aumentado  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$  tal que

$$|w\rangle = \sum_k^n \sqrt{p_k} |w_k\rangle \otimes \hat{U} |w_k\rangle \quad (1.45a)$$

$$\hat{\rho} = \text{Tr}_2[|w\rangle \langle w|], \quad (1.45b)$$

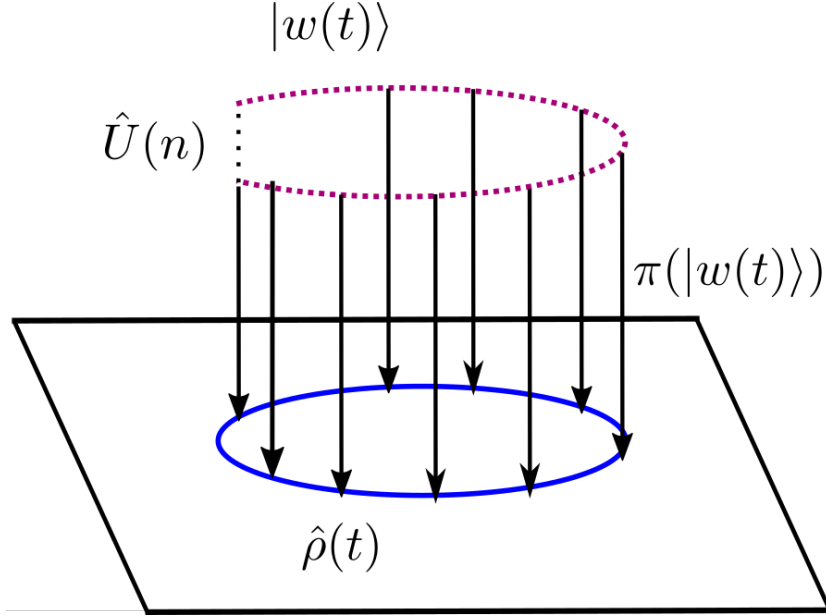
para una matriz unitaria  $\hat{U}$  que actúa sobre  $\mathcal{H}$ . La forma de  $\hat{w}$  en la expresión se obtiene directamente de la descomposición espectral de  $\hat{\rho}$ .

La arbitrariedad de  $\hat{U}$  nos sirve para definir la condición de transporte paralelo en el espacio de las matrices de densidad. En lo que sigue nos basaremos en las referencia [65] para describir el formalismo pertinente. Para estados puros, una manera de definir la condición de transporte paralelo es mantener la norma  $|\langle \psi(t+dt) | - \langle \psi(t) | (|\psi(t+dt)\rangle - |\psi(t)\rangle)|^2$  siempre como un mínimo para una evolución determinada por la curva  $C : t \rightarrow |\psi(t)\rangle$ . Es decir, para una evolución de estados dictada por  $C$  se busca mantener mínima la distancia entre estados arbitrariamente cercanos en el espacio Hilbert. Esta condición la podemos trasladar al espacio de estados físicos a partir de minimizar la distancia entre las amplitudes de las matrices de densidad a tiempos arbitrariamente cercanos. La distancia entre dos amplitudes  $\hat{w}_1$  y  $\hat{w}_2$  puede definirse como

$$\|\hat{w}_1 - \hat{w}_2\|^2 = \text{Tr} \left[ (\hat{w}_1 - \hat{w}_2)(\hat{w}_1 - \hat{w}_2)^\dagger \right], \quad (1.46)$$

en donde  $\hat{\rho}_1 = \hat{w}_1 \hat{w}_1^\dagger$  y  $\hat{\rho}_2 = \hat{w}_2 \hat{w}_2^\dagger$ . Para minimizar la expresión (1.46) haremos uso de la descomposición polar de las amplitudes de la matriz de densidad:  $\hat{w} = \sqrt{\hat{\rho}} \hat{U}$  en donde  $\hat{U}$  es una matriz unitaria. Como lo explican detalladamente Viyuela et al.[65], la minimización de  $\|\hat{w}_1 - \hat{w}_2\|^2$  nos lleva a la siguiente condición:

$$\hat{U}_2 \hat{U}_1^\dagger = \sqrt{\hat{\rho}_2^{-1}} \sqrt{\hat{\rho}_1^{-1}} \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_1} \hat{\rho}_2 \sqrt{\hat{\rho}_1}}. \quad (1.47)$$



**Figura 1.9:** Levantamiento de los estados de la purificación de  $\hat{\rho}(t)$  dada por la holonomía de Uhlmann  $\hat{U}(n)$ .

La condición (1.46) debe de cumplirse en toda la trayectoria de estados  $\hat{\rho}(s)$ , lo que implica que se cumpla para estados infinitesimalmente cercanos. De esta manera podemos escribir que la condición de transporte paralelo está dada por

$$\frac{d}{dt}\hat{U} = \hat{A}\hat{U}, \quad (1.48)$$

en donde  $\hat{A}$  es el generador de  $\hat{U}$ . Que este generador existe se encuentra garantizado por el hecho de que las matrices  $\hat{U}$  son unitarias de dimensión  $n$ , y por ende el generador debe de pertenecer a  $su(n)$ . A este generador se le conoce como la *conexión de Uhlmann*. La ecuación anterior es una ecuación diferencial matricial de primer orden equivalente a la ecuación de Schrödinger. Por lo tanto, la solución formal podemos escribirla como

$$\hat{U} = \mathcal{P}e^{\int \hat{A}}, \quad (1.49)$$

sujeta a la condición  $\hat{U}(0) = 1$ . El símbolo  $\mathcal{P}$  denota el operador de ordenamiento de la trayectoria[20]. Esta cantidad se denomina holonomía de Uhlmann y es la cantidad precursora para definir la fase de Uhlmann. Al igual que la fase de Berry, la cual es una holonomía abeliana para los estados puros, la holonomía de Uhlmann nos define un levantamiento del espacio de estados físicos mixtos al espacio de estados purificados  $|w_i\rangle$ , como lo ejemplifica la Fig.1.9. No entraremos en los detalles pertinentes para obtener la fórmula de la conexión, los cuales se encuentran en [65], y nos limitaremos

a escribir su expresión final:

$$\hat{A} = \sum_{j,k} |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \frac{\langle \psi_j| [d\sqrt{\hat{\rho}}, \hat{\rho}] |\psi_k\rangle}{p_j + p_k}, \quad (1.50)$$

en la cual los vectores estado  $|\psi_k\rangle$  forman una base ortonormal. De la expresión anterior podemos notar que  $\hat{A}$  tiene ceros en la diagonal y además de que es una matriz antihermitiana, en concordancia con la unitariedad de  $\hat{U}$ . La expresión (1.50) puede expresarse de manera más sencilla al usar la eigenbase de la matriz de densidad. De manera directa podemos obtener

$$\hat{A} = \sum_{j,k} \frac{(\sqrt{p_j} - \sqrt{p_k})^2}{p_j + p_k} \langle k| d|j\rangle |k\rangle \langle l|. \quad (1.51)$$

Esta expresión resulta más sencilla de evaluar y será nuestro punto de partida cuando calculemos la fase de Uhlmann para una partícula de espín- $j$  en equilibrio térmico en el capítulo 5.

De manera análoga a la fase de Berry, podemos definir, en notación de índices, una curvatura de Uhlmann

$$\hat{F}_{\mu,\nu}^{(U)} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]. \quad (1.52)$$

El último término es un conmutador que se obtiene debido a que la holonomía de Uhlmann es una matriz y no sólo un factor de fase, similar a la situación de la fase geométrica abeliana de sistemas puros[20]. Al igual que en el estudio de aislantes topológicos, podemos definir números de Chern asociados a  $\hat{F}^{(U)}$ . Sin embargo, el esquema de purificación de Uhlmann en términos de las amplitudes de  $\hat{\rho}$  siempre resulta en una topología trivial y así los números de Chern definidos a partir de la curvatura de Uhlmann son siempre cero[70]. No obstante, han habido esfuerzos por caracterizar la topología de las matrices de densidad mediante cantidades alternas que utilizan la holonomía de Uhlmann, como discutiremos en la siguiente subsección.

La holonomía de Uhlmann que acabamos de obtener puede ser utilizada para calcular una fase geométrica abeliana del sistema. En el caso de estados puros, si consideramos una trayectoria cíclica, la fase geométrica puede escribirse como  $\arg \left( \langle \tilde{\psi}(0) | \tilde{\psi}(T) \rangle \right)$ , en donde los vectores estado  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  están en el levantamiento de Aharonov-Anandan. Recordando que el espacio de amplitudes de la matriz de densidad tienen un isomorfismo con el espacio de estados purificados  $|w_i\rangle$ , de manera análoga definamos la *fase de Uhlmann* como el argumento del traslape entre las amplitudes de la matriz de densidad, es decir

$$\begin{aligned} \Phi_U &= \arg(\text{Tr}[\hat{w}_0 \hat{w}_1]) \\ &= \arg \left( \text{Tr} \left[ \sqrt{\hat{\rho}(0)} \sqrt{\hat{\rho}(T)} \hat{U} \right] \right). \end{aligned}$$

En el caso de una trayectoria cerrada de la matriz de densidad obtenemos

$$\Phi_U = \arg \left( \text{Tr} \left[ \hat{\rho}(0) \mathcal{P} e^{\oint \hat{A}} \right] \right). \quad (1.53)$$

La expresión anterior ha sido utilizada en diversas propuestas teóricas para caracterizar la topología de sistemas de estado, como describiremos con más detalle en la siguiente subsección. Si bien, la definición de esta cantidad parece un tanto arbitraria cumple con la invarianza de norma y además ha sido observada en un sistema de qubits superconductores[63], lo que le da un mayor peso como una cantidad con posibles repercusiones experimentales.

### 1.6.2. Invariantes térmico-topológicas en sistemas de estado sólido

Las fases geométricas revelan una estructura topológica en los sistemas de estado sólido, lo que ha resultado en la clasificación de aislantes topológicos y superconductores por medio de invariantes topológicas. Sin embargo, debido al ruido intrínseco que presenta cualquier situación experimental, la descripción más adecuada de un sistema cuántico requiere del uso de la matriz de densidad. Esto ha desembocado en un gran interés por extender el uso de invariantes topológicas para la clasificación de estados mixtos[65, 71, 72, 73].

Como vimos anteriormente, los números de Chern definidos a partir de la holonomía de Uhlmann  $\hat{U}$  son siempre cero, y por lo tanto no son útiles para realizar una clasificación topológica de estados mixtos. Sin embargo, se han utilizado cantidades relacionadas a ella para definir invariantes topológicas del sistema que son diferentes de cero, sea mediante los eigenvalores de  $\hat{\rho}(0) \mathcal{P} e^{\oint \hat{A}}$ [71], la holonomía de Uhlmann[74] o la fase de Uhlmann[72, 75, 76].

Una característica deseable de una propiedad topológica sería su robustez ante el incremento de la temperatura del sistema. Por ejemplo, las mesetas de la conductividad Hall se suavizan con el aumento de la temperatura[24] y desaparecen completamente conforme esta aumenta. Si uno toma el número de Chern promedio a temperatura finita, la contribución de los electrones en bandas que no están completamente llenas impiden que esta cantidad sea un entero, en concordancia con la pérdida de la cuantización de la conductividad. En este sentido, la fase de Uhlmann resulta interesante, dado que en ciertos modelos nos define una invariante topológica en el sistema que puede mantenerse constante en un intervalo finito de temperatura para después adquirir un valor nulo a partir de una cierta temperatura crítica. El sistema por debajo de la temperatura crítica se clasifica como topológicamente protegido, mientras que por encima de esa temperatura se dice que el sistema está en el régimen topológicamente trivial.

Esta propuesta fue introducida por Viyuela et al. al calcular la fase de Uhlmann para modelos paradigmáticos de aislantes topológicos y superconductores[76], siendo estos el modelo SSH mencionado anteriormente en la sección 1.2.3, la cadena de Majorana[77] y la escalera de Creutz[78, 79]. Daremos aquí una breve descripción de sus resultados en el modelo SSH.

A temperatura finita, la matriz de densidad del modelo SSH es

$$\hat{\rho}(k) = \frac{e^{-\beta\hat{H}_{SSH}}}{\text{Tr}\left(e^{-\beta\hat{H}_{SSH}}\right)} = \frac{1}{2} [\mathbf{1} - \tanh(\beta E(k)\hat{\mathbf{n}}_k \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})]. \quad (1.54)$$

Aquí  $\beta = 1/k_B T$ ,  $k_B$  es la constante de Boltzmann; además hemos escrito  $E(k) = E_+(k)$ ; además  $\hat{\mathbf{n}}_k$  es un vector unitario que se encuentra sobre el plano  $xy$ . Cuano, la holonomía de Uhlmann se expresa mediante

$$\hat{V}_{SSH} = e^{-i\hat{\sigma}_z I(k)}, \quad (1.55)$$

en donde  $I(k) = \int_0^{2\pi} dk (1 - \text{sech}(\beta E(k)/2)) \frac{d\phi(k)}{dk}$  y  $\phi(k) = \cos^{-1}((v + w \cos(k))/E(k))$ . La fase de Uhlmann del modelo es entonces

$$\Phi_U(\beta) = \arg \left[ \cos(\pi\omega_1) \cos \left( \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{sech}(\beta E(k)/2) \frac{d\phi(k)}{dk} dk \right) \right], \quad (1.56)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dk \frac{d\phi(k)}{dk}.$$

La integral  $\omega_1$  definida aquí es igual a la unidad cuando  $w > v$  (régimen no trivial) y es igual a cero en el caso  $v > w$  (régimen trivial); véase la sección 1.2.3. Notemos además que en el límite de bajas temperaturas esta fase tiende a  $\arg(\cos(\pi\omega_1))$ . La fase de Uhlmann para una temperatura arbitraria adquiere dos valores, 0 y  $\pi$ . Un análisis de la fase de Uhlmann respecto a los parámetros  $v$  y  $w$  muestra que a bajas temperaturas adquiere un valor de  $\pi$  y que a una temperatura crítica suficientemente alta esta fase se vuelve cero. De esta manera tenemos una clasificación topológica del sistema en términos de la fase de Uhlmann dependiente de la temperatura, en donde un valor de  $\pi$  nos define el régimen topológicamente no trivial y un valor de cero el régimen topológicamente trivial.

El cambio súbito de la fase de Uhlmann con respecto a la temperatura no lo presenta la fase Sjöqvist[66], la cual cambia continuamente conforme aumenta la temperatura y eventualmente se vuelve cero. En el modelo de Bernevig-Hughes-Zhang[80] el análisis de la fase de Uhlmann con respecto a la temperatura muestra también saltos discontinuos de 0 a  $\pi$  conforme varía la temperatura. Sin embargo, al calcular un análogo de la invariante de Fu-Kane a temperatura finita, que utiliza la holonomía de Uhlmann para formar el bucle de Wilson, se observa que esta coincide con la invariante  $Z_2$  a temperatura cero, pero se desvanece continuamente conforme aumenta la temperatura[74]. La ausencia de cambios discretos en función de la temperatura tanto en la fase de Sjöqvist y el análogo térmico de la invariante de Fu-Kane hacen difícil su interpretación como posibles indicadores de propiedades físicas topológicas que sobrevivan a temperatura finita.

Estos trabajos forman parte del contexto del capítulo 5 de esta tesis. En el cual calculamos la fase de Uhlmann de una partícula con espín- $j$ , que para cierta evolución del sistema presenta múltiples temperaturas críticas en las cuales la fase de Uhlmann da saltos cuantizados de 0 a  $\pi$ [67]. Así el sistema de una partícula con espín- $j$  exhibe distintos órdenes topológicos conforme varía la temperatura.



## 1.7. Geometría de operaciones no locales, poder entrelazador y sistemas de tres niveles

Los estados entrelazados son imprescindibles en protocolos de información y computación cuántica[81], por lo que resulta de suma importancia conocer las condiciones bajo las cuales un sistema físico puede generarlos. En el caso de sistemas de dos cubits, la investigación ha derivado en una teoría geométrica que permite clasificar todas las operaciones cuánticas en clases de equivalencia cuyos elementos difieren solamente operaciones locales[82]. Expondremos brevemente el estado del arte de esta cuestión, que es el punto de partida del capítulo 3 de esta tesis.

Una medida del entrelazamiento en estados puros es la entropía lineal. Esta cantidad nos indica la pérdida de información que sufre un sistema bipartito al realizar mediciones sobre sólo uno de sus subsistemas. Esta cantidad es cero para estados separables y  $1/2$  para estados máximamente entrelazados, en donde estos últimos corresponden a estados de Bell. En un sistema bipartito, la entropía lineal se denota por  $E$  y viene dada por

$$E(|\psi\rangle) = \frac{1}{2} (1 - \text{Tr}[\hat{\rho}_1^2]) \quad (1.57)$$

$$\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2 [\hat{\rho}].$$

Aquí  $\hat{\rho}_1$  es la matriz de densidad reducida correspondiente al subsistema 1, que se obtiene al emplear una serie de mediciones no proyectivas sobre el subsistema 2. Además el vector  $|\psi\rangle$  denota al estado del sistema. De esta manera, la entropía lineal nos da el grado de mezcla de un susbsistema debido a las correlaciones cuánticas en el sistema bipartito. Alternativamente a la entropía linea, una cantidad ampliamente usada para determinar el grado de entrelazamiento en sistemas bipartitos es la *conurrencia*[33]. A diferencia de  $E(|\psi\rangle)$ , la concurrencia cuantifica el entrelazamiento en sistemas bipartitos puros y mixtos. Si fijamos nuestra atención exclusivamente a sistemas de dos cubits, la concurrencia viene dada por

$$C(|\psi\rangle) = 2|ad - cb| \quad (\text{sistema puro}) \quad (1.58a)$$

$$C(\hat{\rho}^{(AB)}) = \max\{1, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (\text{sistema mixto}). \quad (1.58b)$$

Aquí  $|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$  y  $\hat{\rho}^{(AB)}$  es una matriz de densidad genérica para un sistema de dos cubits. Por otro lado, para estados puros existe una biyección entre la concurrencia y la entropía lineal dada por[83]:

$$C(|\psi\rangle) = 2\sqrt{E(|\psi\rangle)}. \quad (1.59)$$

Por lo tanto, es posible cuantificar el entrelazamiento mediante la concurrencia o la entropía lineal para sistemas puros.

Zhang *et al.* (2003) desarrollaron un formalismo que permite determinar la capacidad que tiene una compuerta cuántica de dos cubits (CCDCs) de generar por lo menos

un estado completamente entrelazado a partir del conjunto de estados separables. Este tipo de compuertas se denominan entrelazadores perfectos. Las compuertas cuánticas de dos cubits pueden clasificarse en clases de equivalencia, cuyos elementos difieren sólo por la multiplicación de compuertas locales[82]. El punto de partida de los autores es la descomposición  $KAK$  del grupo  $SU(4)$ , que es el grupo de transformaciones unitarias en el espacio de dos cubits. Esta nos indica que cualquier  $\hat{U} \in SU(4)$  se puede escribir como

$$\hat{U} = \hat{K}_1 \hat{A} \hat{K}_2. \quad (1.60)$$

Los factores  $\hat{K}$  son compuertas locales, es decir, pueden escribirse como el producto tensorial de dos compuertas de un cubit y por ende no pueden generar entrelazamiento. La componente  $\hat{A}$  es la parte no local de la transformación  $\hat{U}$  y es la responsable de cambiar el grado de entrelazamiento de un estado. De esta manera, se pueden definir clases de equivalencia locales (CELs)  $[\hat{A}]$ , cuyos elementos son todas las transformaciones  $\hat{U} \in SU(4)$  que difieren entre sí por factores locales. De manera más precisa

$$[\hat{A}] = \left\{ \hat{U} \sim \hat{A} : \hat{U} = \hat{K}_1 \hat{A} \hat{K}_2 \right\}. \quad (1.61)$$

Por lo tanto, las propiedades de entrelazamiento de una compuerta  $\hat{U}$  pueden determinarse al analizar la componente  $\hat{A}$ . La componente no local es una exponencial del *álgebra de Cartan* del grupo  $SU(4)$ , que se expresa como

$$\hat{A} = e^{\frac{i}{2}(c_1 \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x + c_2 \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y + c_3 \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z)}. \quad (1.62)$$

Las componentes  $\hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_i$ ,  $i \in (x, y, z)$  de la exponencial conmutan entre sí y tienen como eigenbase común a los estados de Bell. La tríada  $(c_1, c_2, c_3)$  representa un punto en el espacio euclideo y se denomina *punto geométrico* de la compuerta cuántica  $\hat{U}$ . Los autores encontraron que la condición para que una compuerta cuántica sea clasificada como un entrelazador perfecto es que la *envoltura convexa* de los eigenvalores de  $\hat{A}$  contenga al origen[82]. Además de ello, determinaron que todas las CELs pueden representarse dentro de un tetrahedro con un vértice en el origen, y que la mitad de su volumen corresponde a entrelazadores perfectos.

Por otro lado, podemos preguntarnos cuál es la capacidad que tiene una compuerta cuántica de generar entrelazamiento, problema que fue abordado por Zanardi *et. al*[84]. Los autores definieron el *poder entrelazador* como la entropía lineal promedio de los estados producidos por una compuerta cuántica al actuar sobre todos los estados separables del sistema; resulta obvio pero necesario mencionar que esta compuerta actúa sobre un espacio de Hilbert bipartito. Fijando de nuevo nuestra atención en el espacio de dos cubits, notemos que el poder entrelazador no depende de los factores  $\hat{K}$  de una compuerta cuántica, y por lo tanto debe de depender sólomente de la componente no local  $\hat{A}$ . Con ello Balakrishnan y Sankaranarayanan[85] demostraron que el poder entrelazador sólomente depende de la traza de  $\hat{A}^2$  y que para los entrelazadores perfectos esta cantidad debe de ser mayor o igual a  $1/6$ .

Dentro de las CCDCs existen aquellas que pueden escribirse como la suma directa de una matriz de  $3 \times 3$  y otra de  $1 \times 1$  que actúan sobre el espacio simétrico y anti-simétrico ante el intercambio de partículas. Según la jerga de teoría de grupos estas compuertas se denominan *reducibles*, en donde llamaremos al bloque que actúa sobre el espacio simétrico *compuerta simétrica*. Estas últimas compuertas, dado que actúan sobre un espacio de Hilbert de tres dimensiones, son simplemente operaciones de tres niveles. En este sentido, cualquier cutrit puede mapearse al espacio simétrico y las transformaciones pueden interpretarse en términos de su capacidad de entrelazamiento en este espacio. En el capítulo 3, desarrollamos un formalismo mediante el cual los conceptos de poder entrelazador, entrelazador perfecto y las clases de equivalencia locales son interpretados en operaciones de sistemas de tres niveles. Para ello hemos usado la *representación de Majorana* (apéndice A) la cual asigna dos puntos sobre la esfera de Bloch a un estado cuántico de tres niveles: cada punto sobre la esfera se llama *estrella de Majorana*. Como mencionan Fu y Liu[86], el grado de entrelazamiento es nulo cuando las estrellas de Majorana tienen la misma posición (estados separables) y máximo cuando son antipodales (estados de Bell). De esta manera, el poder entrelazador en una compuerta de tres niveles se refiere a su capacidad de separar las estrellas de Majorana de un conjunto de estados separables y un entrelazador perfecto es aquella operación que puede producir un estado con estrellas antipodales a partir de un estado separable. Al igual que en las CCDCs, podemos clasificar las operaciones de tres niveles en CELs. Esto nos ayuda a entender la acción de las compuertas de cutrits en términos de su capacidad de separar las estrellas de Majorana y generar entrelazamiento en el espacio simétrico asociado, lo que nos da un mayor entendimiento de estas transformaciones. Además, como explicaremos más a fondo en el capítulo 3, los resultados correspondientes al espacio simétrico no se pueden considerar como un caso especial de los reportados para los dos cubits en general.

### 1.8. Contenido de la tesis

La propuesta de esta tesis doctoral tiene dos aspectos principales. Por un lado, el grueso de ella trata del estudio de las fases geométricas en sistemas con simetría dinámica  $SU(2)$  y  $SU(3)$ , en donde exploramos aspectos relacionados a la interferometría de Landau-Zener-Stückelberg, la computación cuántica geométrica y transiciones térmico topológicas de la fase de Uhlmann. Este es el contenido relacionado a los capítulos 2, 4 y 5. Sin embargo, al estudiar la posibilidad de realizar computación cuántica geométrica en el modelo Lipkin-Meshkov-Glick[87] nos vimos en la necesidad de clasificar el tipo de operaciones que teníamos a la mano según su capacidad de separar las estrellas de Majorana del conjunto de estados separables, como se explicó en la sección 1.7. Esto nos llevó a realizar una teoría geométrica de las transformaciones no locales de las compuertas simétricas de dos cubits y su interpretación en sistemas generales de tres niveles, trabajo que conforma al capítulo 3. Este capítulo pertenece al área de la computación cuántica y no se toca en él el tema de las fases geométricas. Esta discontinuidad, por

llamarla así, que representa el capítulo 3 da una doble faceta a esta tesis doctoral.

En el Capítulo 2 estudiamos las fase geométricas de un sistema optomecánico que consiste en una cavidad óptica con una membrana dieléctrica con un movimiento oscilatorio en su interior la cual actúa como un divisor de haz. Este sistema se comporta como una partícula de espín- $j$ , en donde el momento angular total de la representación se encuentra dado por la mitad del número de fotones en la cavidad. Primero estudiamos la fases geométricas en la aproximación adiabática, que corresponde a la fase de Berry, y después estudiamos la fase de Aharonov-Anandan. Al graficar las fases geométricas con respecto la posición de equilibrio y amplitud de oscilación de la membrana, se observa una compleja estructura que presenta puntos en donde la fase geométrica parece no estar bien determinada. Estos puntos coinciden puntos en el patrón de interferencia LZS en los que la probabilidad de transición promedio tampoco parece tener un valor definido. La correlación entre la fase geométrica y la inteferometría LZS, según nuestro conocimiento, no había sido notada con anterioridad. También se analiza la fase dinámica del sistema y se obtienen las zonas de parámetros en los cuales esta fase es a lo mucho un factor global, con lo que obtenemos compuertas cuánticas de naturaleza geométrica.

Las compuertas cuánticas obtenidas en el sistema optomecánico del Captítulo 2 representan operaciones de varios niveles que actúan como rotaciones rígidas sobre las constelaciones de Majorana de los estados. Sin embargo, cabe preguntarse acerca de la capacidad de una compuerta de cambiar la distancia entre las estrellas de Majorana. En el Capítulo 3 damos una respuesta a esta pregunta para el caso más sencillo, sistemas de tres niveles cuyos estados sólo tienen dos estrellas de Majorana. Para realizar esto partimos de que un sistema de tres niveles es isomórfico a un sistema de dos espines con simetría de intercambio de partículas. En esta nueva representación, los estados con estrellas de Majorana degeneradas son estados separables, mientras que los estados con estrellas de Majorana separadas están entrelazados y son estados de Bell cuando estas se encuentran en posiciones antipodales. De esta manera, la capacidad de obtener operaciones de tres niveles que separen las estrellas de Majorana corresponde a la capacidad de una compuerta de generar estados entrelazados en el espacio simétrico. Con ello realizamos una teoría geométrica de las operaciones no locales sobre estados de dos cubits simétricos ante el intercambio de partículas similar a la que desarrollaron Zhang *et al.*[82] para estados generales de dos cubits. Encontramos que las distintas CELs pueden representarse sobre un plano en  $\mathbb{R}^3$  que pasa sobre el origen. Además, al usar las propiedades cíclicas del álgebra de Cartan del grupo  $SU(3)$  y el grupo de Weyl, encontramos la mínima área en las cual se encuentran todas las distintas CELs. También calculamos el poder entrelazador en términos de punto geométrico de las compuertas simétricas y encontramos que esta cantidad sirve de indicador para clasificar las compuertas como entrelazadores perfectos. Los entrelazadores perfectos del subespacio simétrico representan un cuarto de las compuertas cuánticas posibles, lo que contrasta con el caso de dos cubits en general, en el cual los entrelazadores perfectos conforman la mitad de las operaciones cuánticas posibles. Cabe mencionar que estos resultados no son solamente una aplicación de las técnicas existentes en la literatura al caso simétrico,

sino que son nuevas herramientas para lidiar con este tipo de compuertas. Mediante la representación de Majorana, estos resultados pueden interpretarse en sistemas de tres niveles, sean bipartitos o no, por lo que terminamos este capítulo con la aplicación de las técnicas aquí desarrolladas al modelo de Heisenberg anisotrópico[88], al modelo Lipkin-Meshkov-Glick[87] y a un modelo de osciladores acoplados con interacción Kerr que aparece en óptica cuántica[89]. Los resultados de este capítulo se encuentran publicados en Phys. Rev. A **105**, 012601.

En el Capítulo 4 estudiamos las fase geométricas del modelo Lipkin-Meshkov-Glick de tres niveles, el cual cuenta con simetría dinámica  $SU(3)$ . El modelo que consideramos en esta sección es distinto al del Capítulo 3. Aquí consideramos un modelo con un Hamiltoniano forzado y cíclico. Las fases geométricas que estudiamos son las de los estados de Floquet del sistema. Al utilizar el formalismo de Fu y Liu[86], explicado en el Apéndice A, podemos separar la fase geométrica en dos contribuciones, una proveniente del movimiento de cada estrella de Majorana, y otra contribución que depende de la separación del par de estrellas y se denomina fase de correlación. Estudiamos las fases geométricas de los modos de Floquet y el papel que juega la concurrencia de los estados en la fase geométrica. Además, al explorar distintas combinaciones de parámetros del sistema, encontramos zonas en las cuales las compuertas cuánticas del modelo son esencialmente de naturaleza geométrica. De las compuertas geométricas obtenidas, elegimos aquellas localmente equivalentes a las  $SWAP_{12(23)}$ , Chrestenson y de corrimiento de fase, que resultan importantes en resonancia magnética nuclear[90].

Después de estudiar las fases geométricas en sistemas de estados puros, en el Capítulo 5 estudiamos la fase de Uhlmann de una partícula de espín- $j$  a temperatura finita en presencia de un campo magnético que gira lenta y uniformemente. La fase de Uhlmann de este sistema está dada por el argumento de los polinomios complejos de Chebyshev del segundo tipo[54] y orden  $2j$ , que dependen de una curva cerrada en el plano de Argand. Cuando el campo magnético oscila sobre el ecuador, la fase de Uhlmann exhibe  $2j$  saltos de  $0$  a  $\pi$  o viceversa a ciertas temperaturas críticas que ocurren en los ceros de dichos polinomios y definen cambios en el orden topológico del sistema. Al recurrir al principio del argumento de análisis complejo[91], cada orden topológico se caracteriza por un número de giros, que es  $2j$  para el estado base y disminuye por una unidad cada vez que el sistema pasa por una temperatura crítica. Los resultados de este capítulo están publicados en el siguiente artículo: Phys. Rev. A **103**, 042221.

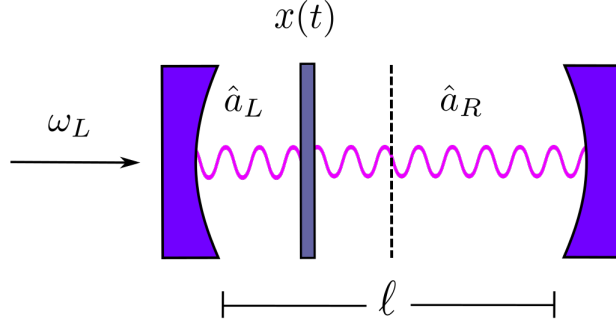
# Fases geométricas en un sistema optomecánico con simetría dinámica SU(2)

---

El sistema más sencillo mediante el cual podemos representar algún aspecto de la mecánica cuántica es el sistema de dos niveles. Este modelo es paradigmático pese a su sencillez, dado que capta la física de varios sistemas en diversos campos de la física: aislantes topológicos de dos bandas [92], resonancia magnética nuclear, interacción átomo-materia (modelo de Jaynes-Cummings) [93], interferometría óptica [94], excitación por microondas de átomos de Rydberg [95, 96], condensados de Bose-Einstein en trampas ópticas [97, 98], excitaciones de baja energía en materiales bidimensionales de Dirac [99] y semimetales de Weyl [100], entre otros. Además los sistemas de dos niveles, llamados *qubits* en la jerga de la computación cuántica, son las unidades cuánticas mínimas sobre las cuales realizar operaciones lógicas en un sistema [33].

La dinámica de un sistema de dos niveles es generada por un hamiltoniano perteneciente al álgebra  $\mathfrak{su}(2)$ . Sin embargo, existen sistemas físicos de varios niveles, cuyos hamiltonianos pueden ser escritos como combinaciones lineales de los elementos de esta álgebra. Ejemplo de ello sería el sistema de una partícula de espín- $j$  en presencia de un campo magnético o cualquier sistema que pueda ser modelado mediante dos modos bosónicos con acoplamiento resonante [101]. Este último modelo ha servido para simular la dinámica de un sistema optomecánico consistente en una cavidad óptica con una membrana dieléctrica en su interior, y será nuestro objeto de estudio.

En este capítulo estudiaremos las fases geométricas de un sistema optomecánico con simetría dinámica SU(2). Se considerará una membrana dieléctrica con movimiento sinusoidal, lo cual cambiará las frecuencias de resonancia en cada lado de la cavidad. La dinámica de este sistema ha sido estudiada anteriormente [102] y da origen a fenómenos como la destrucción coherente del tunelaje, transiciones Landau-Zener (LZ), desdoblamiento Autler-Townes, oscilaciones Landau-Zener-Stuckelberg (LZS), etc. Comenzaremos



**Figura 2.1:** Sistema optomecánico. La posición  $x(t)$  denota el desplazamiento de la membrana con respecto al centro de la cavidad (línea punteada). Cada lado de la cavidad tiene asociado un modo  $\hat{a}$ . La flecha a la izquierda representa la incidencia de un láser externo.

por estudiar la fase geométrica en el caso adiabático y mostraremos que las regiones en donde ella aparece coinciden con las de un patrón típico de interferencia LZS. Luego levantaremos la condición de adiabaticidad y estudiaremos las fases geométricas que adquieren los modos de Floquet del sistema. Al graficar las fases geométricas y dinámicas con respecto a los parámetros del sistema, encontraremos puntos en donde las fases parecen no estar definidas y que asemejan a singularidades de fase.

Por último, mediante una selección fina de parámetros localizaremos las compuertas cuánticas en las cuales la fase dinámica de los modos de Floquet contribuya un factor global de fase al propagador, y con ello las compuertas cuánticas correspondientes sean de carácter meramente geométrico y consecuentemente más robustas ante errores estocásticos de control[38]. Nos enfocaremos en el caso de dos y tres niveles, que corresponde físicamente a una cavidad óptica con uno y dos fotones, respectivamente.

## 2.1. Hamiltoniano del sistema

El modelo optomecánico que vamos a estudiar está representado mediante la Fig.2.1. En este se considera una cavidad óptica de longitud  $\ell$  con una membrana dieléctrica en su interior, cuya posición medida con respecto al centro de la cavidad (línea punteada) está dada por la función  $x(t)$ . Cada lado de la cavidad contiene un modo de campo electromagnético y además es posible que haya incidencia de luz externa por un láser. Bajo ciertas condiciones, el efecto de la membrana es destruir un modo en un lado de la cavidad para crear un fotón del otro lado. De manera heurística, como se propuso en la referencia [102], el hamiltoniano del sistema está dado por

$$\hat{H} = \frac{\omega_o}{2} \left(1 - \frac{x(t)}{\ell}\right) \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L + \frac{\omega_o}{2} \left(1 + \frac{x(t)}{\ell}\right) \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R + \frac{g}{2} \left(\hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R + \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L\right). \quad (2.1)$$

El efecto de mover la cavidad puede leerse rápidamente de la expresión anterior, en donde un desplazamiento a la derecha aumenta la frecuencia de los modos al lado derecho de la cavidad, mientras que la disminuye en el otro lado. Además, el intercambio fotónico efectuado por la membrana es realizado por el último término en el hamiltoniano. Por otro lado, consideraremos que la membrana dieléctrica tiene un movimiento armónico simple, dado por la función  $x(t) = x_o + A \cos(\omega_m t)$ . Notemos que en esta expresión  $\hbar = 1$ , convención que usaremos en lo que resta de este trabajo.

El hamiltoniano anterior puede escribirse en términos de los generadores del álgebra  $\mathfrak{su}(2)$ . Para obtener la expresión correspondiente hagamos uso de los operadores bosónicos de Schwinger [19], definidos por las siguientes ecuaciones

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2} \left(\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L + \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R\right), \quad (2.2a)$$

$$\hat{J}_y = \frac{1}{2i} \left(\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L - \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R\right), \quad (2.2b)$$

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2} \left(\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R - \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L\right). \quad (2.2c)$$

Al sustituir los operadores de Schwinger en el hamiltoniano optomecánico descrito anteriormente obtenemos la siguiente expresión:

$$\hat{H} = \frac{\omega_o}{2} \hat{N} + \bar{x}(t) \hat{J}_z + g \hat{J}_x, \quad (2.3)$$

en donde el operador  $\hat{N}$  está dado por  $\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R + \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L$  que representa el número total de fotones dentro de la cavidad y conmuta con los operadores de Schwinger. Por lo tanto,  $\hat{N}$  es proporcional a la identidad y no afecta la dinámica del sistema. De esta manera, los operadores  $\hat{N}$  y  $\hat{J}_z$  se escogen para designar la base  $|j, m\rangle$ , que cumple con

$$\hat{J}_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle, \quad (2.4a)$$

$$\frac{1}{2} \hat{N} |j, m\rangle = j |j, m\rangle, \quad (2.4b)$$

en donde hemos definido  $m = (n_R - n_L)/2$  y  $j = (n_R + n_L)/2$ ; las cantidades  $n_L$  y  $n_R$  representan el número de fotones en la parte izquierda y derecha de la cavidad, respectivamente. Con esto, el conjunto de elementos  $|j, m\rangle$  con  $m \in \{j, \dots, -j\}$ , genera el espacio vectorial sobre el que actúa nuestro hamiltoniano. Por otro lado, hemos definido  $\bar{x}(t)$  como  $\frac{\omega_o}{\ell} x(t)$ ; de manera análoga se definen  $\bar{A}$  y  $\bar{x}_o$ , para la amplitud y desplazamiento inicial de la membrana para que todos los parámetros del sistema tengan unidades de energía.



## 2.2. Fase de Berry

Los eigenestados del hamiltoniano (2.3) pueden escribirse de manera muy concisa mediante la siguiente expresión:

$$|j, m; \hat{\mathbf{n}}\rangle = e^{-i\theta \hat{J}_y} |j, m\rangle, \quad (2.5)$$

donde  $\theta = \arccos(\bar{x}/\sqrt{\bar{x}^2(t) + g^2})$ . En la representación fundamental o de espín-1/2, el eigenestado  $|1/2, 1/2; \hat{\mathbf{n}}\rangle$  puede representarse por un vector de Bloch con coordenadas polares  $(\theta, 0)$ , mientras que el estado  $|1/2, -1/2; \hat{\mathbf{n}}\rangle$  tiene un vector de Bloch en dirección opuesta. Como el único parámetro que varía es  $\theta$ , los vectores de Bloch se encuentran a un meridiano fijo, y por lo tanto su trayectoria no encierra área alguna sobre la esfera. Esto indica que la fase de Berry de los eigenestados  $|1/2, \pm 1/2; \hat{\mathbf{n}}\rangle$  es cero, como puede verificarse explícitamente con la fórmula de la conexión de Berry. Para un número de fotones mayor la fase de Berry para esta trayectoria del campo magnético efectivo sigue siendo cero. Esto puede observarse a partir de la expresión ec.(1.17)

$$\gamma_B = -m\Omega, \quad (2.6)$$

donde  $\gamma_B$  es la fase de Berry y  $\Omega$  es el ángulo sólido subtendido por la trayectoria del campo magnético efectivo sobre la esfera unitaria, que es nulo para la trayectoria aquí elegida. Consecuentemente, los eigenestados instantáneos del hamiltoniano (2.3) no adquieren fase de Berry a través de la evolución considerada aquí.

Un experimento común de óptica cuántica consiste en hacer incidir un láser en la cavidad óptica con el fin de medir los fotones transportados hacia el lado opuesto de la cavidad. Consideremos que un láser introduce fotones por el lado izquierdo de nuestro sistema, como se muestra en la Fig.2.1. En nuestra descripción matemática, esto introduce una transformación unitaria en los estados del sistema, mediante el operador  $\hat{V} = \exp(i\omega_L t \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L)$ . Al transformar los estados del sistema al marco rotante de  $\hat{V}$  obtenemos el siguiente hamiltoniano efectivo:

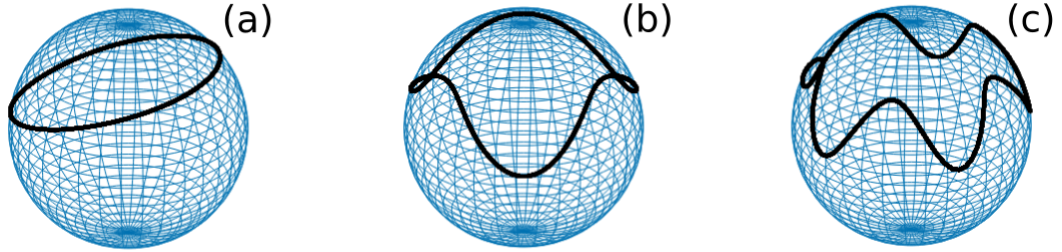
$$\hat{H}_{ef} = (\bar{x}(t) - \omega_L) \hat{J}_z + g \cos(\omega_L t) \hat{J}_x + g \sen(\omega_L t) \hat{J}_y \quad (2.7a)$$

$$= \mathbf{B}(t) \cdot \hat{\mathbf{J}}. \quad (2.7b)$$

En esta expresión el campo magnético efectivo es  $\mathbf{B}(t) = (g \cos(\omega_L t), g \sen(\omega_L t), \bar{x}(t) - \omega_L)^T$ . Las componentes del campo magnético efectivo en el plano  $x-y$  rotan en el sentido de las manecillas del reloj con frecuencia angular  $\omega_L$ . De esta manera los eigenestados del sistema están dados por

$$|j, m; \hat{\mathbf{n}}\rangle = e^{-i\omega_L t \hat{J}_z} e^{-i\theta \hat{J}_y} e^{i\omega_L t \hat{J}_z} |j, m\rangle. \quad (2.8)$$

La etiqueta  $\hat{\mathbf{n}}$  de los eigenestados indica la dirección del campo magnético del hamiltoniano  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{J}$ , que está dada por  $(\sen \theta \cos \phi, \sen \theta \sen \phi, \cos \theta)$ , y en la cual hemos escrito



**Figura 2.2:** Trayectorias del campo magnético efectivo del sistema sobre la esfera de Bloch. La frecuencia mecánica  $\omega_m$  es (a)  $\omega_L$ , (b)  $3\omega_L$  y (c)  $5\omega_L$ .

$\phi = \omega_L t$ . La Fig.2.2 muestra la trayectoria del campo magnético efectivo sobre la esfera de Bloch para tres casos distintos. Se observa que el área subtendida sobre la esfera en los tres casos no es nula, y por lo tanto hemos de esperar que la fase geométrica sea no trivial para ciertas elecciones de parámetros.

Para calcular la fase de Berry utilizemos la integral de la conexión (1.13):

$$\gamma_B = i \oint \langle j, m; \hat{\mathbf{n}} | d | j, m; \hat{\mathbf{n}} \rangle, \quad (2.9)$$

en donde el símbolo  $d$  representa la derivada exterior sobre los parámetros de los cuales dependen los eigenestados[20]. La trayectoria de integración comprende cualquier circuito cerrado en el espacio de parámetros. Después de algunos pasos algebraicos, se obtiene fase de Berry del sistema:

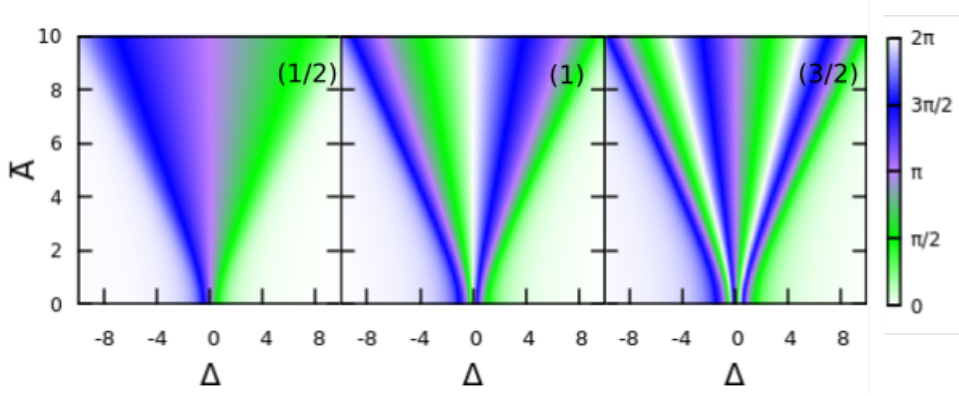
$$\gamma_B = -\frac{n_R - n_L}{2} \oint d\phi \frac{\Delta + \bar{A} \cos(\phi)}{\sqrt{(\Delta + \bar{A} \cos(\phi))^2 + g^2}}, \quad (2.10)$$

con  $\Delta$  definida como  $\bar{x}_o - \omega_L$  y que puede interpretarse como el la posición de equilibrio efectiva del oscilador mecánico.

La forma de la ecuación (2.10) es  $-m\Omega$  en donde  $m = (n_R - n_L)/2$  y la integral es el ángulo sólido subtendido por el campo magnético sobre la esfera de Bloch. Para el caso en el que  $\bar{A}$  es cero, el integrando no depende  $\phi$  y la integral es trivial. El prefactor  $m$ , que involucra la diferencia entre el número de fotones entre ambos lados de la cavidad, si bien es característico de la fase adquirida por estados cíclicos de la forma (2.8) puede interpretarse en términos de la constelación de Majorana. Como se discute en el Apéndice 1, las estrellas de Majorana de los eigenestados de algún operador perteneciente al álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  están distribuidas antipodalmente, con  $j + m$  estrellas en una dirección y  $j - m$  estrellas en dirección contraria. Según la fórmula de Liu y Fu<sup>1</sup> cada estrella de Majorana contribuye un término  $-\Omega/2$  a la fase geométrica, las  $j - m$

<sup>1</sup>Véase el apéndice 1.

## 2. FASES GEOMÉTRICAS EN UN SISTEMA OPTOMECÁNICO CON SIMETRÍA DINÁMICA SU(2)



**Figura 2.3:** Fases de Berry del sistema optomecánico para los estados de espín coherentes  $|j, j; \hat{\mathbf{n}}\rangle$ . Las etiquetas en la parte superior derecha de los paneles indican el número cuántico  $j$ . En los tres casos se ha considerado  $\omega_L = \omega_m$ .

contribuyen  $\Omega/2$ , por lo tanto la fase total es  $-m\Omega$ ; la fase de correlación es cero en este caso.

Una pregunta natural en este punto es el dominio de validez de la fase geométrica (2.10), debido a que se ha utilizado la aproximación adiabática en su derivación. La aproximación adiabática establece que, dado un factor  $I$  de escalamiento del sistema, se cumpla [20]

$$\frac{\langle j, m; \hat{\mathbf{n}} | \frac{d}{dt} \hat{H}(t) | j, m'; \hat{\mathbf{n}} \rangle}{E_m - E_{m'}} \approx 0. \quad (2.11)$$

Al calcular el lado izquierdo de esta ecuación para el hamiltoniano (2.7a), obtenemos la siguiente condición sobre los parámetros

$$\frac{\omega^2 \bar{A}^2}{(\bar{A} + \Delta)^2 + g^2} \approx 0 \quad (2.12a)$$

$$\frac{\omega_m^2 \bar{A}^2}{(\bar{A} + \Delta)^2 + g^2} \approx 0. \quad (2.12b)$$

Estas dos condiciones establecen que  $\bar{A}, \omega, \omega_m \ll g, \Delta$ . Dicho de otra manera, las frecuencias del forzamiento deben de ser menores a la brecha energética  $g$  del sistema o a la posición de equilibrio efectiva  $\Delta$  del oscilador mecánico.

La fase de Berry para los estados  $|j, j; \hat{\mathbf{n}}\rangle$ , conocidos como *estados coherentes de espín* [103], se muestra en la Fig.2.3. Se observa que la fase no es trivial cuando  $\bar{A} > |\Delta|$ , mientras que es trivial en el caso contrario. Estas regiones de color coinciden con las zonas de un espectro típico de interferometría Landau-Zener-Stuckelberg (LZS) [50], que ha sido mostrado de manera teórica en este sistema al estudiar el efecto del forzamiento mecánico en el transporte de fotones de la cavidad [102].

Para comprender un poco la emergencia de este patrón, notemos que la fase de Berry puede ser expresada en términos de la curvatura  $F_B = d \langle j, m; \hat{\mathbf{n}} | d | j, m; \hat{\mathbf{n}} \rangle$ , mediante la expresión

$$\gamma_B = \oint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}_B \quad (2.13)$$

en la cual ambos vectores apuntan en dirección del vector radial. De esta manera, podemos interpretar la fase de Berry como el flujo producido por el campo vectorial  $\mathbf{F}_B$  sobre el área subtendida por la trayectoria del vector  $\hat{\mathbf{n}}$  sobre la esfera unitaria [6].

Al evaluar explícitamente  $F_B$  para nuestro sistema obtenemos la siguiente expresión

$$F_B = \frac{n_R - n_L}{2} \frac{g}{\sqrt{(\Delta + \bar{A} \cos \phi)^2 + g^2}}. \quad (2.14)$$

De esta manera observamos que  $F_B$  es pequeña cuando se cumplen  $\bar{A} \ll \Delta$  y  $g \ll \Delta$ . Es decir, el flujo generado por la curvatura  $F_B$  es despreciable cuando se cumple esta condición y no es nulo cuando esta se viola, lo que da origen al patrón observado en la Fig.2.3. Un análisis del espectro LZS en este sistema optomecánico nos indica que las oscilaciones de Stückelberg se ven suprimidas para  $\bar{A} < \Delta$  y acentuadas cuando  $\bar{A} > \Delta$ , y por lo tanto coinciden con las zonas de fase de Berry no trivial. Si bien las zonas de parámetros en donde la fase de Berry no es trivial y se manifiestan las oscilaciones de Stückelberg coinciden, recordemos que la primera tienen validez bajo la aproximación adiabática mientras que las segundas se deben estrictamente a procesos no adiabáticos.

## 2.3. Fase de Aharonov-Anandan

Como se vio en la sección 1.5 de la introducción, la fase geométrica se manifiesta en un sistema sin importar que la evolución sea adiabática [11, 12]. Enfoquémonos ahora en evoluciones cíclicas generales del sistema y estudiemos la fase geométrica, la cual se conoce como fase de *Aharonov-Anandan* [10].

Consideremos la expresión (2.7a). Al hacer que las frecuencias del láser y de oscilación mecánica sean múltiplos racionales entre sí, dicho hamiltoniano será cíclico en el tiempo. El periodo del hamiltoniano es el tiempo mínimo en el cual éste último tiene una evolución cíclica. Mediante la descomposición espectral, el operador de evolución temporal generado a un tiempo  $T$  puede escribirse como

$$\hat{U}(T) = \sum_{m=-j}^j e^{-i\varepsilon_m T} |\varepsilon_m\rangle \langle \varepsilon_m|, \quad (2.15)$$

donde  $\varepsilon_n$  se denominan *cuasienergías*, cuyas exponenciales son los eigenvalores de  $\hat{U}(T)$  y  $|\varepsilon_n\rangle$  son sus eigenestados, conocidos como *modos de Floquet* [20, 61]. De manera natural los modos de Floquet de nuestro sistema son estados cíclicos durante la evolución, cuya fase total está dada por las cuasienergías del sistema.

## 2. FASES GEOMÉTRICAS EN UN SISTEMA OPTOMECÁNICO CON SIMETRÍA DINÁMICA SU(2)

---

Las cuasienergías dan origen a la fase total de los modos de Floquet y tienen dos contribuciones, una de origen dinámico y otra de origen geométrico [20]. De manera matemática, esto es

$$\varepsilon_m T = \alpha_m + \gamma_m. \quad (2.16)$$

La fase  $\alpha_m$  se denomina fase dinámica y viene dada por

$$\alpha_m = \int_{t_0}^{t_0+T} dt \langle \varepsilon_m(t) | \hat{H}(t) | \varepsilon_m(t) \rangle. \quad (2.17)$$

Esta fase se obtiene a partir de la energía promedio de los estados de Floquet [61]  $|\varepsilon_m(t)\rangle = \hat{U}(t) |\varepsilon_m\rangle$  y depende del tiempo en que se realiza la evolución. Por otro lado, la fase  $\gamma$  se expresa mediante

$$\gamma_m = \varepsilon_m T - \alpha_m. \quad (2.18)$$

Esta fase solamente depende de la trayectoria de  $|\varepsilon_m(t)\rangle$  en el espacio proyectivo, independientemente de la velocidad con que se atraviesa. Es posible también expresar  $\gamma_m$  por una fórmula de la conexión, como en el caso de la fase de Berry [20]. Sin embargo, para usar esa expresión es necesario resolver la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo del sistema. El operador de evolución temporal de este sistema está dado por las funciones de Heun [104, 105]. Sin embargo, el comportamiento asintótico de estas funciones no se conoce para todo el espacio de parámetros del problema, lo que hace inconveniente el uso práctico de esta solución [106]. Esto hace difícil conocer los estados de Floquet y por ende calcular la fase geométrica directamente a partir de la fórmula de la conexión.

Así como en el caso adiabático resulta natural calcular la fase geométrica de los eigenestados instantáneos del sistema, para evoluciones cíclicas generales los estados de Floquet toman este lugar. Recordemos que un hamiltoniano cíclico con un tiempo  $T$  tiene un operador de evolución temporal dado por [61]

$$\hat{U}(t + nT) = \hat{U}(t) \hat{U}(T)^n, \quad (2.19)$$

para algún  $n$  entero. Esto nos indica que para conocer el estado del sistema a un tiempo arbitrario, únicamente nos basta con conocer el operador de evolución temporal en el primer periodo de evolución. La dinámica que rige a nuestro sistema tiene simetría SU(2), y por lo tanto siempre podemos escribir

$$\hat{U}(T) = e^{-iT\hat{H}_F}, \quad (2.20)$$

en donde  $\hat{H}_F$  pertenece al álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  y se denomina *hamiltoniano de Floquet*. Los eigenvalores de  $\hat{H}_F$  son las cuasienergías mencionadas anteriormente. El hamiltoniano de Floquet puede entonces expresarse como  $\hat{H}_F = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{\boldsymbol{J}}$ , en donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es un vector de magnitud  $\varepsilon_+$  con una dirección determinada por el propagador del sistema. Por lo tanto, en la representación de espín- $j$  las cuasienergías son

$$\varepsilon_m = m\varepsilon. \quad (2.21)$$

Por lo tanto el conocimiento de una cuasienergía correspondiente a un modo de Floquet es suficiente para determinar las demás. En el caso especial de la representación de espín-1/2 las cuasienergías vienen dadas por  $\pm\varepsilon$ .

Por otro lado la fase dinámica de los modos de Floquet tiene también una relación similar a la de las cuasienergías. Recordemos que los estados de Floquet vienen en pares ortogonales y por lo tanto tienen vectores de Bloch que apuntan en direcciones contrarias [32]. Esto nos permite obtener la siguientes relaciones para los modos de Floquet en la representación de espín-1/2:  $\alpha_+ = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \langle \varepsilon_+ | \mathbf{B} | \varepsilon_+ \rangle$  y  $\alpha_- = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \langle \varepsilon_- | \mathbf{B} | \varepsilon_- \rangle$ . Como  $\mathbf{r}_+ = -\mathbf{r}_-$ , obtenemos

$$\alpha_+ = -\alpha_- . \quad (2.22)$$

Aquí hemos denotado  $\alpha_{\pm}$  por  $\int_0^T \langle \varepsilon_{\pm 1/2}(t) | \hat{H}(t) | \varepsilon_{1/2}(t) \rangle dt$ . En general, para representaciones de espín mayor tenemos

$$\alpha_m = m\alpha, \quad (2.23)$$

en donde hemos definido  $\alpha = \alpha_+$ . Para obtener este resultado es necesario expresar los modos de Floquet en el espacio de espines simetrizados y obtener el valor de expectación de  $\mathbf{J}$  en esa base; el lector interesado puede consultar la referencia [107] en el capítulo 5 para ver los detalles. Por lo tanto, la fase geométrica obtenida después de un tiempo  $T$  por un modo  $|\varepsilon_m\rangle$  es simplemente

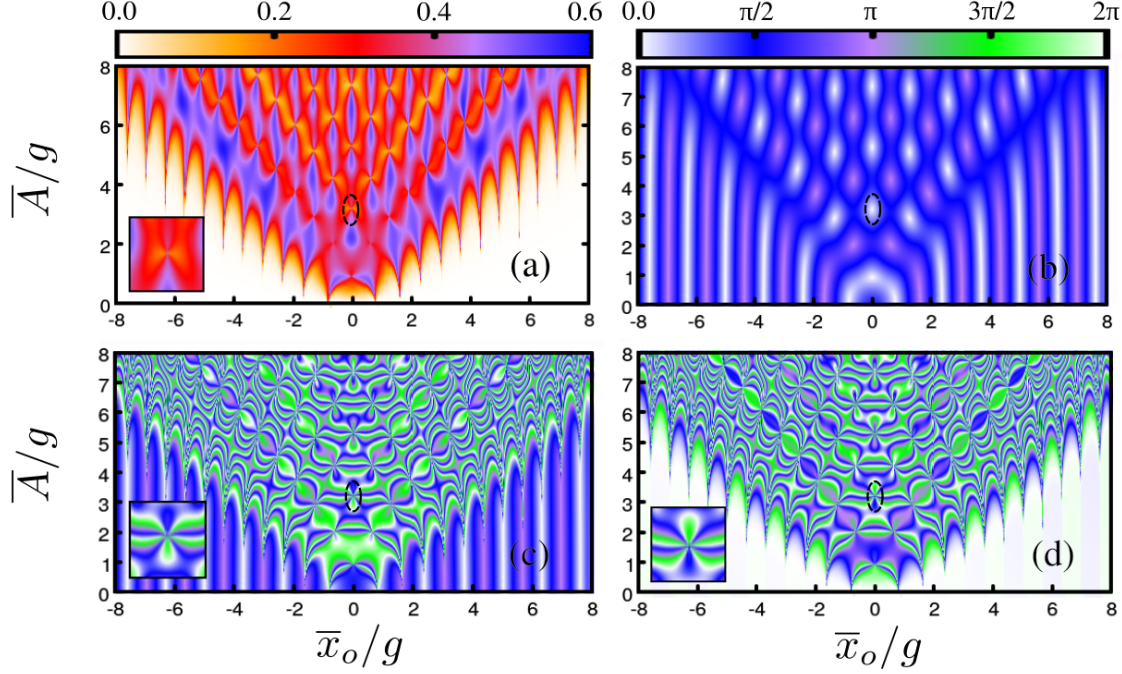
$$\gamma_m = m(\varepsilon T - \alpha). \quad (2.24)$$

Esta relación entre las fases dinámicas de los modos de Floquet es importante desde el punto de vista de la computación cuántica geométrica. Por ejemplo, si encontramos compuertas cuánticas de un sistema de dos niveles en donde la fase dinámica de un modo sea cero o  $\pi$ , la relación (2.22) implica automáticamente que la del otro modo sea igual. De esta manera la fase dinámica del propagador es a lo mucho una fase global del sistema y por lo tanto irrelevante desde el punto de vista computacional. Para sistemas de más niveles con simetría dinámica  $SU(2)$  la relación (2.23) nos asegura que la fase dinámica es un factor global de fase cuando  $\alpha$  es un múltiplo de  $2\pi$ .

### 2.3.1. Interferometría Landau-Zener-Stückelberg

Consideremos ahora el sistema optomecánico sin la presencia de un láser externo, cuyo hamiltoniano se expresa por (2.3). En el caso adiabático, habíamos visto que la fase de Berry de los eigenestados era nula, debido a que, en la representación de espín-1/2, el vector de Bloch no encerraba ningún área sobre la esfera unitaria. Sin embargo, al remover la condición adiabática, la trayectoria del vector del Bloch sobre la esfera unitaria no necesariamente coincide con la del campo magnético efectivo del sistema, lo que abre la posibilidad de que los estados de Floquet adquieran una fase geométrica. Calculemos entonces las fases totales, dinámicas y geométricas de los modos de Floquet del hamiltoniano (2.3) sin influencia del láser externo. Mediante la solución numérica de la ecuación de Schrödinger obtenemos los siguientes mapas de las fases.

## 2. FASES GEOMÉTRICAS EN UN SISTEMA OPTOMECÁNICO CON SIMETRÍA DINÁMICA SU(2)



**Figura 2.4:** (a) Espectro de interferencia LZS de los modos de Floquet y (b) fase total, (c) dinámica y (d) geométrica del modo excitado. La frecuencia mecánica de forzamiento  $\omega_m$  es  $0.64g$ . Los paneles interiores representan un acercamiento correspondiente a la zona de la línea punteada.

El panel (a) corresponde a un espectro de interferencia LZS de los modos de Floquet. En este calculamos el promedio temporal del traslape de estado de Floquet excitado  $|\varepsilon_+(t)\rangle = \hat{U}(t)|\varepsilon_+\rangle$  con el modo base  $|\varepsilon_-\rangle$ ; recordemos que los modos de Floquet no tienen dependencia temporal. En ecuaciones, esto es

$$\bar{P}_+ = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\eta |\langle \varepsilon_- | \varepsilon_+(t) \rangle dt|^2}{\eta} \quad (2.25)$$

La frecuencia mecánica de forzamiento es  $\omega = 0.64g$  en este caso. En los paneles restantes hemos calculado (b) la fase total, (c) dinámica y (d) geométrica del modo de Floquet  $|\varepsilon_+\rangle$ .

El espectro de interferencia LZS muestra un complicado comportamiento oscilante para  $\bar{A} > \bar{x}_o$ , el cual indica que el traslape en el tiempo del producto  $|\langle \varepsilon_+(t) | \varepsilon_- \rangle|^2$  dista de ser cero, con un valor máximo aproximadamente de 0.6. Este difiere de los espectros LZS convencionales, los cuales se suelen obtener de dos maneras distintas. Una de ellas consiste en elegir un par de eigenestados  $|\pm; \hat{\mathbf{n}}(t_o)\rangle$  del hamiltoniano instantáneo al tiempo inicial  $t_o$ . Con esto se obtiene la evolución temporal de uno de ellos, sea  $|+; \hat{\mathbf{n}}(t)\rangle$  y se

calcula el promedio del traslape  $|\langle +; \hat{\mathbf{n}}(t) | -; \hat{\mathbf{n}}(t_o) \rangle|^2$  hasta obtener la convergencia del resultado. Llamémosle a esta construcción espectro LZS *adiabático*. La otra alternativa reportada en la literatura consiste en calcular la evolución temporal del estado  $|0\rangle$  en el tiempo y obtener el promedio de la probabilidad de transición  $|\langle 1 | \hat{U}(t) | 0 \rangle|^2$ . Aquí  $\hat{U}$  es el operador de evolución temporal del sistema. A esta construcción la denominaremos espectro LZS *diabático*. La máxima probabilidad de transición promedio en los espectros diabático y adiabático es de 0.5 [50].

La fase total que adquiere el modo de Floquet excitado después de un ciclo de evolución se muestra en el panel (b). Para  $|\bar{x}_o| < \bar{A}$ , que es la zona de parámetros en la cual ocurre la interferometría LZS, podemos notar una serie de manchas blancas y moradas que corresponden a una fase total de cero y  $\pi$ . Debido a que las fases de los modos de Floquet vienen en pares conjugados, en estas manchas las fases totales se encuentran degeneradas, o dicho de otra manera, son equivalentes modulo  $2\pi$ . Por la descomposición espectral del operador de evolución temporal podemos observar que este corresponde a un múltiplo de la identidad, es decir

$$\begin{aligned} \hat{U} &= e^{-i\varepsilon T} |\varepsilon_+\rangle \langle \varepsilon_+| + e^{i\varepsilon T} |\varepsilon_-\rangle \langle \varepsilon_-|, \\ &= e^{-i\varepsilon T} (|\varepsilon_+\rangle \langle \varepsilon_+| + |\varepsilon_-\rangle \langle \varepsilon_-|), \\ &= \pm \mathbf{1}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Aquí hemos utilizado la degeneración de las fases  $\exp(-i\varepsilon T) = \exp(i\varepsilon T)$ , que su valor es cero o  $\pi$  en estos puntos y la completez de los modos de Floquet. Haciendo referencia a la expresión (2.3), estos puntos corresponden a degeneraciones accidentales modulo  $2\pi$  en el espectro energético  $T\hat{H}_F$  o bien a valores de  $\frac{1}{2}n\omega_m$ , con  $n$  entero, de las cuasienergías.

Dentro de la zona en donde ocurren las transiciones LZ, la fase dinámica y geométrica también tienen un intrincado comportamiento. Fuera de esta zona  $|\bar{x}_o| > \bar{A}$  la fase dinámica oscila entre cero y  $\pi$  mientras que el valor de la fase geométrica es despreciable. Esta última característica puede entenderse al considerar que las transiciones LZ del sistema se ven suprimidas cuando la amplitud de oscilación mecánica es menor que la posición de equilibrio  $\bar{x}_o$  (véase la sección 1.4 y la Fig.1.7). Esto hace que la dinámica sea esencialmente adiabática y por lo tanto la nulidad de la fase geométrica se explica de igual manera que en la fase de Berry.

Tanto en el espectro LZS y en la fase dinámica y geométrica del sistema aparecen puntos en donde las cantidades parecen no estar definidas. Estos puntos corresponden a las degeneraciones del hamiltoniano  $T\hat{H}_F$ . Al movernos alrededor de estas degeneraciones, el operador de evolución temporal difiere de la identidad por un término extra

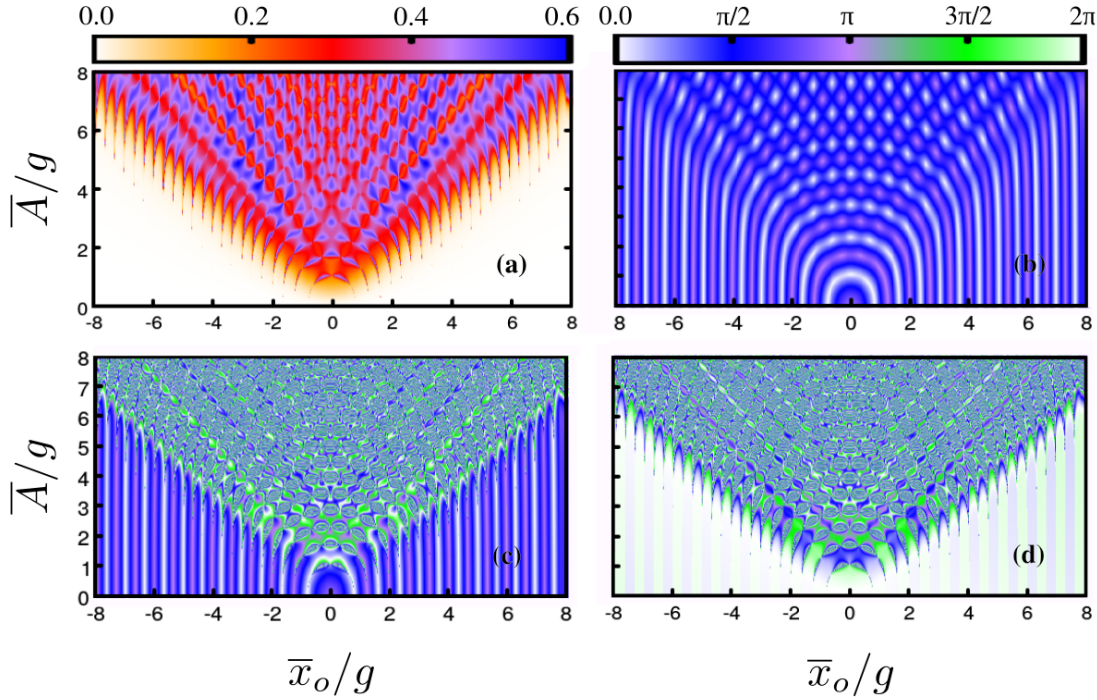
$$\hat{U}(T) = \pm \mathbf{1} + i\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \tag{2.27}$$

en donde  $\boldsymbol{\delta}$  es un campo magnético efectivo de magnitud pequeña. Es este segundo término el que define el vector de Bloch de los modos de Floquet y también la trayectoria que tienen sobre la esfera unitaria. Conforme variamos la amplitud de oscilación y la posición de equilibrio alrededor de estas degeneraciones es posible que el campo



## 2. FASES GEOMÉTRICAS EN UN SISTEMA OPTOMECÁNICO CON SIMETRÍA DINÁMICA SU(2)

magnético  $\delta$  tome valores muy distintos para pequeñas variaciones de  $\bar{x}_o$  y  $\bar{A}$ , generando valores muy distintos de fase geométrica y dinámica. No obstante, hace falta un análisis más detallado para poder asegurarnos de esta aseveración, que no abordaremos aquí.



**Figura 2.5:** (a) Espectro de interferencia LZS de los modos de Floquet y (b) fase total, (c) dinámica y (d) geométrica del modo excitado. La frecuencia mecánica de forzamiento  $\omega_m$  es  $0.32g$ .

Conforme uno disminuye la frecuencia de oscilación mecánica los espectros LZS diabáticos y adiabáticos desarrollan una estructura más fina, en el sentido de que las oscilaciones de Stückelberg están más cercanas en un mapa de posición de equilibrio y amplitud de oscilación [50]. Esto mismo se ve para el espectro LZS de los modos de Floquet. En la Fig.2.5 mostramos (a) el espectro LZS de lo modos de Floquet, y (c)-(d) la fase total, dinámica y geométrica del sistema.

Hasta aquí hemos considerado la dinámica no adiabática del sistema sin la introducción de una láser externo. Esta modificación en el sistema no cambia las características generales del espectro LZS y las fases del sistema. Sin embargo, en la siguiente sección consideraremos la acción de un láser externo para la construcción de compuertas cuánticas geométricas.

## 2.4. Compuertas cuánticas geométricas de cubits y cutrits

Como vimos, las zonas que presentan oscilaciones de Stückelberg presentan fases geométricas no triviales que pueden emplearse para la construcción de compuertas cuánticas. El sistema optomecánico que estamos estudiando tiene simetría dinámica  $SU(2)$ , cuyo momento angular  $j$  se determina por la mitad del número de fotones  $N/2$  dentro de la cavidad. Esto nos permite obtener compuertas cuánticas de varios niveles según el número de fotones. Aquí nos enfocaremos en la construcción de compuertas cuánticas de dos y tres niveles o, equivalentemente, de cubits y cutrits.

Las compuertas cuánticas geométricas son aquellas en las cuales la fase dinámica del sistema no influye en la evolución del sistema y representa un factor global de fase. En los sistemas con simetría  $SU(2)$  se asegura que la fase dinámica sea un factor global si esta vale 0 o  $\pi$  en la representación de espín-1/2 para un modo de Floquet, siempre y cuando el hamiltoniano no tenga un término proporcional a la identidad. En este último caso el término proporcional sólo añade una misma cantidad a la fase dinámica de los modos de Floquet y siempre puede ser eliminada. En nuestro modelo hemos despreciado el término proporcional a la identidad. Para localizar las compuertas geométricas en el plano  $\bar{x}_o - \bar{A}$  debemos entonces encontrar las zonas en las cuales la fase dinámica de un modo de Floquet sea cero o  $\pi$ . Debido a que dependemos de las soluciones numéricas del sistema para calcular todas las fases, es necesario fijar una tolerancia a los valores de la fase dinámica que estamos buscando. Consideraremos como compuertas geométricas aquellas en las cuales la fase dinámica de un modo de Floquet sea  $\pm 0.01 \cdot 2\pi$  o  $\pi \pm 0.01 \cdot 2\pi$ .

### 2.4.1. Compuertas cuánticas de un cubit

Enfoquémonos primero en la construcción de las compuertas cuánticas Hadamard,  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$  y  $\hat{\sigma}_z$  dadas por[32].

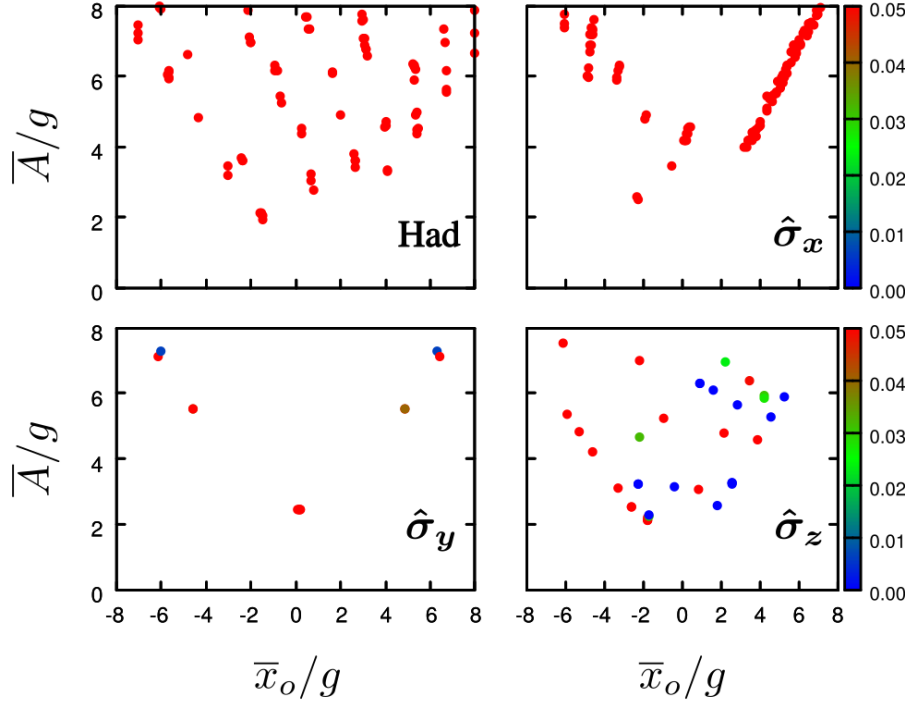
$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma}_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{Had} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Establezcamos criterio para determinar si hemos obtenido la compuerta cuántica en cuestión. Recordando que cualquier operador unitario de un cubit puede escribirse como

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

establecemos que la distancia entre las compuertas, definida por  $d^2(\hat{U}(T), \hat{U}_I) = |a - a_I|^2 + |b - b_I|^2$ , sea menor que 0.05. Aquí los coeficientes  $a$  y  $b$  son los coeficientes de la compuerta cuántica obtenida numéricamente, mientras que  $a_I$  y  $b_I$  son los coeficientes de la compuerta cuántica que deseamos obtener.

## 2. FASES GEOMÉTRICAS EN UN SISTEMA OPTOMECÁNICO CON SIMETRÍA DINÁMICA SU(2)



**Figura 2.6:** Compuertas cuánticas de un cubit generadas en el modelo. Las frecuencias de láser  $\omega_L$  y oscilación mecánica  $\omega_m$  son  $0.64g$  para las compuertas Hadamard,  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$  y  $0.32g$  para  $\hat{\sigma}_z$ . La fase inicial del movimiento mecánico  $\phi_m$  es  $\pi/2$  para  $\hat{\sigma}_y$  y  $\pi$  en los demás casos. La barra de colores indica el valor de la función distancia  $d^2(\hat{U}, \hat{U}_I)$ .

En la Fig.2.6 se muestran las zonas de parámetros en las cuales encontramos las compuertas cuánticas deseadas. Los colores indican la distancia  $d^2(\hat{U}, \hat{U}_I)$  de las compuertas obtenidas con respecto a las compuertas ideales. Se observa que para las compuertas Hamard y  $\sigma_x$  se encuentran cerca del límite de tolerancia impuesto por la función distancia (todos los puntos son rojos), mientras que para las compuertas  $\hat{\sigma}_y$  y  $\hat{\sigma}_z$  hay combinaciones de parámetros que generan compuertas casi idénticas a la ideal (puntos azules). Para obtener estos puntos resolvimos numéricamente la ecuación de Schrödinger del sistema y filtramos aquellas compuertas que satisfacen las condiciones sobre la fase dinámica y la función distancia. Sólo hicimos los cálculos correspondientes para frecuencias de oscilación mecánica de  $0.32g$  y  $0.64g$  con y sin la aplicación de un láser externo. En el primer caso sólo se consideró  $\omega_L = \omega_m$ . Además, consideramos valores de la fase inicial del movimiento mecánico de  $0, \pi/2, \pi$  y  $3\pi/2$ . Quizá una exploración más detallada de las distintas combinaciones de parámetros nos indique valores de  $d^2(\hat{U}, \hat{U}_I)$  más cercanos a cero. De esta manera, hemos mostrado que se pueden

obtener compuertas cuánticas de naturaleza esencialmente geométrica basadas en la fase de Aharonov-Anandan.

Esta propuesta de la computación cuántica resulta más conveniente que la computación cuántica adiabática debido a que los tiempos de operación son más cortos y los efectos de la decoherencia se manifiestan en menor medida [40]. Con respecto a la computación cuántica holonómica, estudios han mostrado que la fuga de densidad de probabilidad del subespacio computacional hacia estados base del espacio de Hilbert completo resultan en una mayor robustez de las compuertas de origen meramente dinámico en algunos casos [108]. Esto va en contra de la supuesta ventaja de las compuertas holonómicas con respecto a las compuertas dinámicas, lo que hace que esta propuesta pierda su sentido inicial. La propuesta de computación cuántica geométrica no sufre de estas desventajas y por lo tanto consideramos que es una buena alternativa con respecto a la computación cuántica adiabática y holonómica.

### 2.4.2. Compuertas cuánticas de un cutrit

Ahora nos enfocaremos en la construcción de compuertas cuánticas que actúan sobre un espacio de Hilbert de tres niveles. Las operaciones más generales sobre este espacio pertenecen al grupo  $SU(3)$  y pueden actuar como rotaciones o transformaciones no rígidas sobre la constelación de Majorana de los estados. El modelo optomecánico que estudiamos en esta sección genera únicamente compuertas cuánticas pertenecen al grupo  $SU(2)$  en la representación de espín-1. Si bien estas compuertas no representan el total de operaciones permisibles en un sistema de tres niveles, pueden ser de utilidad en procesos de computación cuántica. Por ejemplo, se han reportado operaciones lógicas de un cubit en los estados vestidos de un ión de itrio  $^{171}\text{Yb}^+$  en presencia de un campo electromagnético de radiofrecuencia [109, 110]. Estos estados vienen dados por

$$|u\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle, \quad (2.30a)$$

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |-1\rangle), \quad (2.30b)$$

$$|d\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle, \quad (2.30c)$$

y son más robustos ante efectos de decoherencia inducidos por fluctuaciones del campo magnético en comparación de los eigenestados base del espacio hiperfino del mismo ión [109, 110]. Los estados base  $|\pm 1\rangle$  y  $|0\rangle$  corresponden a los eigenestados de  $^{171}\text{Yb}^+$  y pueden considerarse como los estados base  $|\pm 1\rangle, |0\rangle$  con momento angular  $j = 1$ .

Así resulta importante la conversión de estados del ión  $^{171}\text{Yb}^+$  a los estados vestidos en presencia de campos electromagnéticos, la cual se logra mediante operadores de la forma  $e^{-i\theta\hat{n}\cdot\hat{J}}$ . Recordemos que los operadores  $\hat{J}_i (i = x, y, z)$  están en la representación de espín-1. Toda compuerta de este tipo puede obtenerse al elegir una evolución de un sistema de dos niveles asociado [107, 110, 111]. En este caso, dado un operador unitario

## 2. FASES GEOMÉTRICAS EN UN SISTEMA OPTOMECÁNICO CON SIMETRÍA DINÁMICA SU(2)

---

de dos niveles (2.29) toma la siguiente forma en la representación de espín-1:

$$\hat{U}^{(1)} = \begin{pmatrix} a^2 & \sqrt{2}ab & b^2 \\ -\sqrt{2}ab^* & |a|^2 - |b|^2 & \sqrt{2}a^*b \\ b^{*2} & -\sqrt{2}a^*b^* & a^{*2} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

A este objeto se le conoce como la matriz de Wigner  $D^{(1)}(a, b)$  [19].

Enfoquémonos en la construcción de las siguientes compuertas cuánticas de un cutrit:

$$e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x} : a = 1/\sqrt{2}, b = -i/\sqrt{2}, \quad (2.32a)$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_y} : a = 1/\sqrt{2}, b = -1/\sqrt{2}, \quad (2.32b)$$

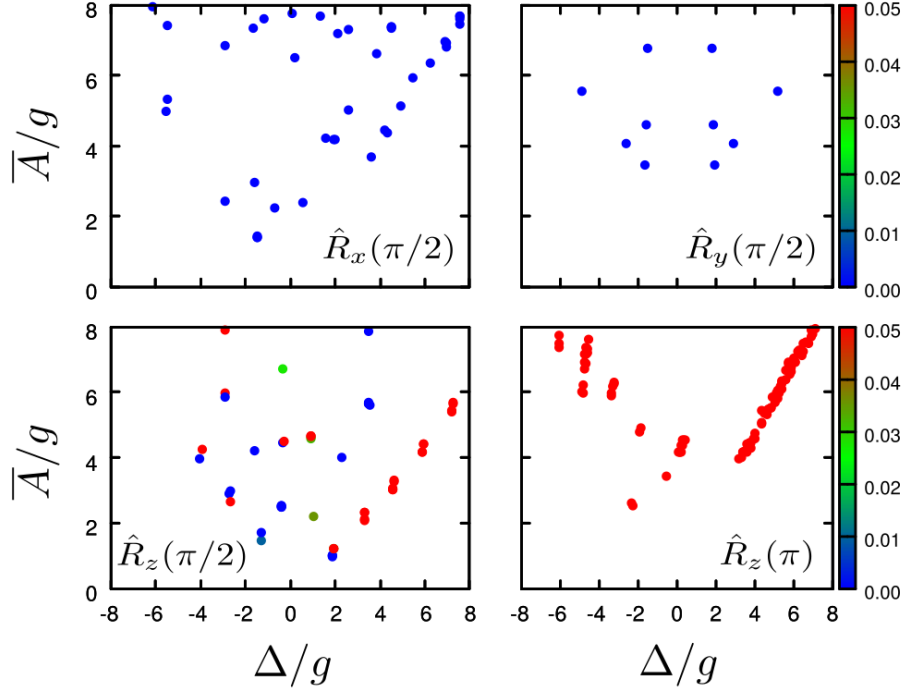
$$e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_z} : a = (1 - i)/\sqrt{2}, b = 0. \quad (2.32c)$$

A su vez, esto equivale a calcular las compuertas  $e^{-i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_x}$ ,  $e^{-i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_y}$  y  $e^{-i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_z}$ . Por lo tanto, para obtener las compuertas SU(2) de tres niveles, impondremos de nuevo la misma condición sobre la función distancia  $d^2(\hat{U}, \hat{U}_I)$ , en donde  $\hat{U}$  y  $\hat{U}_I$  son las compuertas asociadas en el sistema de dos niveles.

Las zonas de parámetros en donde obtenemos las transformaciones  $\hat{R}$  se encuentran en la Fig.2.7. A excepción de la compuerta  $\hat{R}_z(\pi)$ , en los otros tres casos las evoluciones consideradas nos brindan compuertas muy parecidas (puntos azules) a la compuerta cuántica ideal. El modelo considerado aquí nos muestra que es posible obtener compuertas cuánticas de tres niveles de interés cuya naturaleza es esencialmente geométrica. En este caso, a diferencia de las compuertas cuánticas de dos niveles, la fase dinámica global se encuentra cercana a cero únicamente. En el caso de un cubit fue posible elegir las fases dinámicas como cero o  $\pi$ , debido a que ello las convertía en un factor global de fase en el propagador. Sin embargo, en el caso de las compuertas de tres niveles, los modos de Floquet adquieren fase dinámicas  $\alpha$ ,  $0$  y  $-\alpha$ . Por ende es necesario que estas sean múltiplos enteros de  $2\pi$  para considerarlas factores globales de fase.

## 2.5. Conclusiones

En este capítulo hemos considerado un sistema cuántico forzado con simetría dinámica SU(2). Se han estudiado las fases geométricas del sistema y su relación con la interferometría LZS. En el caso de la fase de Berry se observa que las zonas de parámetros en las cuales esta no es trivial coinciden con las zonas en las cuales se manifiestan las oscilaciones de Stückelberg. Sin embargo se requiere un mayor análisis para dilucidar tal regularidad. Al estudiar la fase de Aharonov-Anandan del sistema observamos de nuevo esta coincidencia de la fase geométrica con las oscilaciones de Stückelberg. Sin



**Figura 2.7:** Compuertas cuánticas SU(2) de tres niveles. Los parámetros para cada gráfica son  $R_x(\phi/2)$  ( $w_m = 0.32$ ,  $\omega_L = 0$ ,  $\phi_m = 0$ ),  $R_y(\phi/2)$  ( $w_m = 0.32g$ ,  $\omega_L = 0.32g$ ,  $\phi_m = \pi/2$ ),  $R_z(\pi/2)$  ( $w_m = 0.64g$ ,  $\omega_L = 0.64g$ ,  $\phi_m = 0$ ) y  $R_x(\pi)$  ( $w_m = 0.64$ ,  $\omega_L = 0.64g$ ,  $\phi_m = 0$ ).

embargo, la fase de Aharonov-Anandan tiene una estructura intrincada y se observan zonas en las cuales la fase parece no estar bien definida. Estas zonas conciden con degeneraciones modulo  $2\pi$  del espectro energético de  $\hat{H}_F$ . En estos puntos el operador de evolución temporal al tiempo  $T$  es proporcional a la identidad. Hace falta un análisis más detallado para dilucidar la naturaleza de las fases geométricas en estos puntos, su relación con el espectro LZS y la degeneración del hamiltoniano de Floquet.

Por otro lado, las fases de Aharonov-Anandan fueron utilizadas para la construcción de compuertas cuánticas de un cubit y un cutrit. Para ello se utilizó un ajuste fino de parámetros de modo que la fase dinámica de los modos de Floquet fuera una fase global. Para un cubit nos enfocamos en la obtención de las compuertas Hadamard,  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$  y  $\hat{\sigma}_z$ , las cuales fueron obtenidas para varias combinaciones de parámetros del sistema. En cuanto a las compuertas cuánticas de tres niveles nos enfocamos en obtener  $\hat{R}_x(\pi/2)$ ,  $\hat{R}_y(\pi/2)$ ,  $\hat{R}_z(\pi/2)$  y  $\hat{R}_x(\pi)$ , las cuales obtuvimos para varias combinaciones de parámetros del modelo. Dado que nuestro enfoque es sobre todo numérico, consideramos que obtuvimos cierta compuerta cuántica cuando la distancia  $d^2(\hat{U}, \hat{U}_I)$  entre estas fuese menor que un valor de 0.05.



# Poder Entrelazador de Compuertas Cuánticas en Espacios Simétricos de Dos Cubits y operaciones en sistemas de tres niveles

---

En este capítulo estudiaremos el poder entrelazador y no localidad de las compuertas simétricas de dos cubits. Como mencionamos en la introducción, este trabajo seguirá de cerca el realizado por Zhang *et al.*[82] en el cual se desarrolla un formalismo que nos permite determinar cuando una compuerta de dos cubits es un entrelazador perfecto, representar todas las clases de equivalencia locales (CELs) de dos cubits en un tetraedro, llamado *cámara de Weyl*, y determinar el subconjunto de este espacio ocupado por los entrelazadores perfectos. Aquí realizaremos un formalismo similar sobre el espacio de dos cubits simetrizados. Como veremos a lo largo del capítulo, la geometría de las transformaciones no locales del espacio simétrico no emerge de manera trivial a partir de la correspondiente al espacio de dos cubits. En nuestro caso podemos representar las CELs de las compuertas simétricas sobre un plano. En este encontramos la cámara de Weyl, en la cual un cuarto de su área está ocupada por entrelazadores perfectos simétricos, en contraste con el caso no simétrico, en el cual los entrelazadores perfectos ocupan la mitad de la cámara de Weyl. También calculamos el poder entrelazador de una compuerta simétrica en términos del punto geométrico y lo expresamos en términos de la única invariante local del sistema, lo que hace al poder entrelazador un indicador para clasificar compuertas simétricas como entrelazadores perfectos.

Debido a que el espacio de dos cubits simetrizados reside en un espacio de Hilbert de tres niveles, los resultados expuestos aquí pueden interpretarse en transformaciones generales de un qutrit. Esta conexión entre el poder entrelazador y la geometría de



### 3. PODER ENTRELAZADOR DE COMPUERTAS CUÁNTICAS EN ESPACIOS SIMÉTRICOS DE DOS CUBITS Y OPERACIONES EN SISTEMAS DE TRES NIVELES

---

transformaciones no locales con los sistemas de tres niveles se realiza a través de la representación de Majorana. Al plantear un isomorfismo entre una base ortonormal de un espacio de Hilbert de dimensión tres y los estados simétricos, las compuertas de cubits no locales son aquellas que separan las estrellas de Majorana de un estado inicial con un par de estrellas en la misma posición. De esta manera nuestros resultados nos ayudan a obtener una mayor comprensión de las operaciones de tres niveles.

En el Capítulo 4 haremos uso del formalismo desarrollado aquí para estudiar compuertas cuánticas geométricas en el modelo Lipkin-Meshkov-Glick [87]. Fue la necesidad de cuantificar la no localidad de las compuertas cuánticas en ese modelo lo que motivó y alentó el trabajo realizado en este capítulo. Sin embargo, una exposición coherente de los resultados nos exige presentar ambos capítulos en este orden. Los resultados de este capítulo culminaron en la publicación del siguiente artículo:

- D. Morachis Galindo y Jesús A. Maytorena. *Entangling power of symmetric two-qubit quantum gates and three level operations*. Physical Review A **105**, 012601(2022).

#### 3.1. Espacio simétrico, entrelazamiento y sistemas de tres niveles

El espacio de Hilbert de  $n$ -cubits simétricos ante el intercambio de partículas es básicamente un sistema cuántico de  $n + 1$  dimensiones. Consideremos en esta sección el espacio de dos cubits simetrizados ( $n = 2$ ) que da lugar a un sistema de tres niveles. Por analogía con el sistema de dos niveles, cuya unidad básica se denomina cubit, hablaremos de cutrits para referirnos a una entidad en este espacio cuántico. Cada estado en este espacio tiene una representación geométrica como dos puntos en la esfera de Majorana, la cual es una imagen fidedigna del espacio proyectivo del sistema, es decir, dos estados con la misma constelación de Majorana son idénticos salvo una fase global en cada uno de ellos.

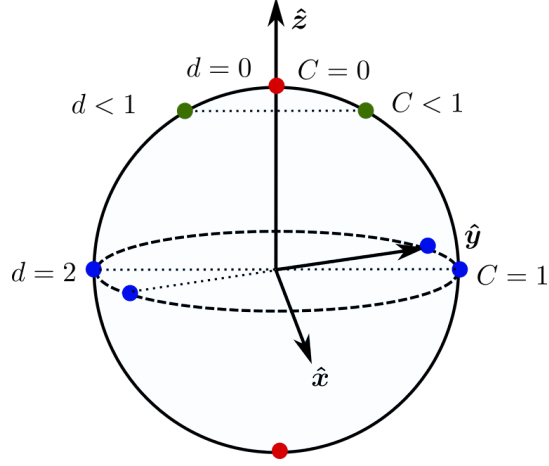
Una de las virtudes de la representación de Majorana para espacios simétricos es brindar una imagen sencilla del entrelazamiento en términos de la distancia entre estrellas. Un estado simétrico de dos cubits  $|\psi\rangle$  puede ser escrito de la siguiente manera

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4 - d_{12}}}( |u_1, u_2\rangle + |u_2, u_1\rangle ), \quad (3.1)$$

en donde hemos definido  $|u_i\rangle = (\cos(\theta_i/2), e^{i\phi_i} \sin(\theta_i/2))^T$ ; los ángulos  $(\theta, \phi)$  definen un vector unitario en coordenadas esféricas mediante  $\hat{\mathbf{u}}_i = (\sin \theta_i \cos \phi_i, \sin \theta_i \sin \phi_i, \cos \theta_i)$ . La constante  $d_{12}$  está dada por  $1 - \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_2$  [86], que se relaciona con la distancia cordal<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>La distancia cordal entre dos puntos sobre una esfera se refiere simplemente a su separación en el espacio euclideo.



**Figura 3.1:** Constelaciones de Majorana para estados simétricos (rojo) separables, (verde) entrelazados y (azul) máximamente entrelazados.

$c_{12}$  mediante  $d_{12} = c_{12}^2/2$ . Como mostraron Liu y Fu [86], la concurrencia  $C$  de los estados simétricos se expresa por

$$C = \frac{d_{12}}{4 - d_{12}}. \quad (3.2)$$

El máximo valor de la concurrencia ocurre cuando las estrellas están máximamente separadas  $d_{12} = 2$  y decrece monótonamente hasta cero cuando las estrellas se encuentran degeneradas  $d_{12} = 0$ . Este análisis indica que podemos parametrizar la concurrencia de los estados simétricos en términos de la distancia  $d_{12}$  entre sus estrellas de Majorana.

En la Fig. 3.1 observamos tres pares de estrellas de Majorana con distintas separaciones; los pares de estrellas se unen por la línea punteada. Las estrellas azules se encuentran en posiciones antipodales y por lo tanto corresponden a un estado de Bell. La constelación en verde representa un estado con menor grado de entrelazamiento. Los puntos rojos por su parte representan un par de estrellas degeneradas, y por ende cada punto corresponde a un estado separable. Consideremos ahora las transformaciones unitarias  $\hat{V}$ , que actúan sobre los estados simétricos  $|\psi\rangle$  dados por la ec.(3.1), de la forma

$$\hat{V} = (e^{-i\phi_1\sigma_z} e^{-i\phi_2\sigma_y} e^{i\phi_3\sigma_z})^{\otimes 2},$$

en donde  $\hat{O}^{\otimes 2} = \hat{O} \otimes \hat{O}$  y  $\phi_i$  ( $i = \{1, 2, 3\}$ ) son ángulos de Euler. El efecto de estas transformaciones en los estados  $|\psi\rangle$  es realizar rotaciones rígidas sobre las constelaciones de Majorana que mantienen fija la distancia entre las estrellas y no cambian el entrelazamiento de los estados cuánticos correspondientes. Por lo tanto, a partir de un cierto estado, podemos obtener todos los estados posibles que cuenten con el mismo

### 3. PODER ENTRELAZADOR DE COMPUERTAS CUÁNTICAS EN ESPACIOS SIMÉTRICOS DE DOS CUBITS Y OPERACIONES EN SISTEMAS DE TRES NIVELES

---

grado de entrelazamiento al escoger los ángulos de Euler adecuados. Esto permite clasificar todos los estados simétricos de dos cubits en clases de equivalencia  $S_c$  con una misma medida de entrelazamiento [90]. El conjunto  $S_c$  viene dado por

$$\{|\psi'\rangle \in S_c : \hat{V}^\dagger |\psi'\rangle = |\psi\rangle, C(|\psi\rangle) = c\}. \quad (3.3)$$

El subíndice  $c$  indica el valor de la concurrencia del estado cuántico  $|\psi\rangle$  de referencia.

Los estados de un sistema de tres niveles son isomórficos a los de dos cubits simétricos, y por lo tanto también tienen constelaciones de Majorana de dos estrellas. El isomorfismo viene dado por el siguiente mapeo:

$$|3\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad (3.4a)$$

$$|2\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(|01\rangle + |10\rangle), \quad (3.4b)$$

$$|1\rangle \rightarrow |11\rangle, \quad (3.4c)$$

en donde los elementos del lado derecho son una base ortonormal del espacio simétrico y los del izquierdo una base ortonormal y ordenada de un cutrit. Dado este isomorfismo, los estados de cutrits también pueden clasificarse mediante las clases de equivalencia (3.3), aunque el sistema sea monopartito. Si este es el caso, el sistema no puede presentar entrelazamiento. Sin embargo, por analogía a los estados simétricos, denominaremos estados entrelazados a aquellos estados de tres niveles cuyas estrellas de Majorana no estén degeneradas. De esta manera, las clases de equivalencia (3.3) corresponden a las dadas por Dogra *et al.* [90], en donde los estados de referencia  $|\psi\rangle$  vienen dados por

$$|\psi\rangle = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha)^T, \quad \alpha \in [0, \pi/4],$$

con estrellas de Majorana en los puntos  $p_1 = (0, y, z)$  y  $p_2 = (0, -y, z)$ , con  $y = \sqrt{2} \sin 2\alpha / (\sin \alpha + \cos \alpha)$  y  $z = (\sin \alpha - \cos \alpha) / (\sin \alpha + \cos \alpha)$ . Se puede revisar fácilmente que los estados con  $\alpha = 0$  tienen ambas estrellas de Majorana en el polo norte de la esfera y los estados con  $\alpha = \pi/4$  tiene las estrellas de Majorana en posiciones antipodales sobre el ecuador. La concurrencia está determinada por  $\alpha$  y viene dada por

$$C(\alpha) = \sin(2\alpha), \quad (3.5)$$

expresión que da cero para estados con estrellas degeneradas y la unidad para aquellos con estrellas antipodales, como se espera.

El poder entrelazador en compuertas simétricas puede interpretarse, en sistemas de tres niveles, como la capacidad de generar estados con estrellas de Majorana separadas a partir de estados con constelaciones degeneradas. Este tipo de transformaciones es vital en computación cuántica basada en cutrits. Como lo discuten Dogra *et al.* [90], ejemplos de estas compuertas son las  $\text{SWAP}_{12}$  y  $\text{SWAP}_{23}$ , dadas por

$$\text{SWAP}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{SWAP}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Estas compuertas, al actuar sobre los estados  $(1, 0, 0)^T$  y  $(0, 0, 1)^T$  con estrellas degeneradas en el polo norte y sur respectivamente, generan un estado de Bell con la constelación de Majorana en el ecuador sobre el eje  $\hat{\mathbf{y}}$ , como se muestra en la Fig. 3.1. Ambas compuertas logran generar un estado tipo Bell a partir de uno separable, en cuanto a la representación de Majorana se refiere, y por lo tanto son ejemplos de entrelazadores perfectos. Es por esto que el concepto del poder entrelazador cobra relevancia en los sistemas de tres niveles.

## 3.2. Descomposición de Cartan

Ahora introduciremos algunos elementos de teoría de grupos necesarios para clasificar las compuertas cuánticas simétricas según su capacidad de realizar transformaciones no rígidas en la esfera de Majorana. Comenzaremos por describir la descomposición de Cartan para el caso general de dos cubits, desarrollada en la referencia [82]. Después describiremos la descomposición de Cartan del álgebra  $\mathfrak{su}(3)$ , con la cual obtendremos la descomposición  $KAK$  (sección 1.7) de las compuertas simétricas. Con ello obtendremos de manera natural un isomorfismo entre los generadores del grupo  $SU(3)$  y un subconjunto de generadores de  $SU(4)$  que nos permitirá demostrar que los factores  $K$  de las compuertas simétricas son reducibles y corresponden a los operadores de rotación  $\exp(-i\theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})$ . Estos resultados nos permitirán definir una invariante local para las transformaciones en el subespacio simétrico, con la cual clasificar todas las transformaciones simétricas según su capacidad de separar las estrellas de Majorana de los estados.

### 3.2.1. Transformaciones de dos cubits: $\mathfrak{su}(4)$

Todas las transformaciones que tienen lugar en el espacio de Hilbert de dos cubits pueden clasificarse como *locales* y *no locales*. Las compuertas locales son aquellas que puede expresarse como el producto tensorial de dos elementos del grupo  $SU(2)$  que actúan cada uno sobre un subsistema. Puesto en ecuaciones, esto es

$$\hat{V}^{(loc)} = \hat{V}^{(1)} \otimes \hat{V}^{(2)}, \quad (3.7)$$

en donde  $\hat{V}^{(j)} = e^{i\theta_j \hat{\mathbf{n}}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}} \in SU(2)$  y consecuentemente  $\hat{V}^{(loc)} \in SU(2) \otimes SU(2)$ . Utilizaremos el símbolo  $\hat{V}$  para referirnos a compuertas que actúan en el espacio de dos cubits y  $\hat{U}$  para la parte simétrica de las compuertas  $\hat{V}$  reducibles.

En general, las transformaciones  $\hat{V} \in SU(4)$  no pueden expresarse como un producto tensorial de compuertas locales y por ende se denominan *no locales*. Cualquier elemento de  $SU(4)$  puede escribirse como la exponencial de una combinación lineal de elementos de álgebra  $\mathfrak{su}(4)$ . Una manera natural para expresar los elementos de  $\mathfrak{su}(4)$  es a partir de productos tensoriales de las matrices de Pauli. De manera explícita, los quince elementos

### 3. PODER ENTRELAZADOR DE COMPUERTAS CUÁNTICAS EN ESPACIOS SIMÉTRICOS DE DOS CUBITS Y OPERACIONES EN SISTEMAS DE TRES NIVELES

son

$$\mathfrak{k} = \text{gen} \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_x^1, \hat{\sigma}_y^1, \hat{\sigma}_z^1, \hat{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}_y^2, \hat{\sigma}_z^2 \}, \quad (3.8a)$$

$$\mathfrak{p} = \text{gen} \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_y^2, \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_z^2, \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_y^2, \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_z^2, \hat{\sigma}_z^1 \hat{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}_z^1 \hat{\sigma}_y^2, \hat{\sigma}_z^1 \hat{\sigma}_z^2 \}, \quad (3.8b)$$

en donde los superíndices indican el subsistema sobre el cual actúan los operadores. Los operadores en  $\mathfrak{k}$  son locales y dan origen al grupo  $SU(2) \otimes SU(2)$ , mientras que los operadores en  $\mathfrak{p}$  son no locales. Los elementos de  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{p}$  son linealmente independientes. Por lo tanto, podemos escribir  $\mathfrak{su}(4) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ , en donde la suma directa se usa en el sentido de los espacios vectoriales<sup>1</sup>.

Denotemos los elementos de  $\mathfrak{su}(4)$  por  $\hat{X}_j$ , donde  $j$  toma valores enteros de uno a quince. Para  $\hat{X}_j (1 \leq j \leq 6)$ ,  $\hat{X}_j$  es el  $j$ -ésimo elemento de  $\mathfrak{k}$ , y para  $\hat{X}_j (7 \leq j \leq 15)$  es el  $(j - 6)$ -ésimo elemento en  $\mathfrak{p}$ . Las relaciones de conmutación entre los elementos de esta álgebra se muestran en la Tabla 3.1.

**Tabla 3.1:** Relaciones de conmutación de los elementos de  $\mathfrak{su}(4)$ .

$i[\hat{X}_i, \hat{X}_j]$	$\hat{X}_1$	$\hat{X}_2$	$\hat{X}_3$	$\hat{X}_4$	$\hat{X}_5$	$\hat{X}_6$	$\hat{X}_7$	$\hat{X}_8$	$\hat{X}_9$	$\hat{X}_{10}$	$\hat{X}_{11}$	$\hat{X}_{12}$	$\hat{X}_{13}$	$\hat{X}_{14}$	$\hat{X}_{15}$
$\hat{X}_1$	0	$-\hat{X}_3$	$\hat{X}_2$	0	0	0	0	0	0	$-\hat{X}_{13}$	$-\hat{X}_{14}$	$-\hat{X}_{15}$	$\hat{X}_{10}$	$\hat{X}_{11}$	$\hat{X}_{12}$
$\hat{X}_2$	$\hat{X}_3$	0	$-\hat{X}_1$	0	0	0	$\hat{X}_{13}$	$\hat{X}_{14}$	$\hat{X}_{15}$	0	0	0	$-\hat{X}_7$	$-\hat{X}_8$	$-\hat{X}_9$
$\hat{X}_3$	$-\hat{X}_3$	$\hat{X}_1$	0	0	0	0	$-\hat{X}_{10}$	$-\hat{X}_{11}$	$-\hat{X}_{12}$	$\hat{X}_7$	$\hat{X}_8$	$\hat{X}_9$	0	0	0
$\hat{X}_4$	0	0	0	0	$-\hat{X}_6$	$\hat{X}_5$	0	$-\hat{X}_9$	$\hat{X}_8$	0	$-\hat{X}_{12}$	$\hat{X}_{11}$	0	$-\hat{X}_{15}$	$\hat{X}_{14}$
$\hat{X}_5$	0	0	0	$\hat{X}_6$	0	$-\hat{X}_4$	$\hat{X}_9$	0	$-\hat{X}_7$	$\hat{X}_{12}$	0	$-\hat{X}_{10}$	$\hat{X}_{15}$	0	$-\hat{X}_{13}$
$\hat{X}_6$	0	0	0	$-\hat{X}_5$	$\hat{X}_4$	0	$-\hat{X}_8$	$\hat{X}_7$	0	$-\hat{X}_{11}$	$\hat{X}_{10}$	0	$-\hat{X}_{14}$	$\hat{X}_{13}$	0
$\hat{X}_7$	0	$-\hat{X}_{13}$	$\hat{X}_{10}$	0	$-\hat{X}_9$	$\hat{X}_8$	0	$-\hat{X}_6$	$\hat{X}_5$	$-\hat{X}_3$	0	0	$\hat{X}_2$	0	0
$\hat{X}_8$	0	$-\hat{X}_{14}$	$\hat{X}_{11}$	$\hat{X}_9$	0	$-\hat{X}_7$	$\hat{X}_6$	0	$-\hat{X}_4$	0	$-\hat{X}_3$	0	0	$\hat{X}_2$	0
$\hat{X}_9$	0	$-\hat{X}_{15}$	$\hat{X}_{12}$	$-\hat{X}_8$	$\hat{X}_7$	0	$-\hat{X}_5$	$\hat{X}_4$	0	0	0	$-\hat{X}_3$	0	0	$\hat{X}_2$
$\hat{X}_{10}$	$\hat{X}_{13}$	0	$-\hat{X}_7$	0	$-\hat{X}_{12}$	$\hat{X}_{11}$	$\hat{X}_3$	0	0	0	$-\hat{X}_6$	$-\hat{X}_5$	$-\hat{X}_1$	0	0
$\hat{X}_{11}$	$\hat{X}_{14}$	0	$-\hat{X}_8$	$\hat{X}_{12}$	0	$-\hat{X}_{10}$	0	$\hat{X}_3$	0	$\hat{X}_6$	0	$-\hat{X}_4$	0	$-\hat{X}_1$	0
$\hat{X}_{12}$	$\hat{X}_{15}$	0	$-\hat{X}_9$	$-\hat{X}_{11}$	$\hat{X}_{10}$	0	0	0	$\hat{X}_3$	$-\hat{X}_5$	$\hat{X}_4$	0	0	0	$\hat{X}_1$
$\hat{X}_{13}$	$-\hat{X}_{10}$	$\hat{X}_7$	0	0	$-\hat{X}_{15}$	$\hat{X}_{14}$	$-\hat{X}_2$	0	0	$\hat{X}_1$	0	0	0	$-\hat{X}_6$	$\hat{X}_5$
$\hat{X}_{14}$	$-\hat{X}_{11}$	$\hat{X}_8$	0	$\hat{X}_{15}$	0	$-\hat{X}_{13}$	0	$-\hat{X}_2$	0	0	$\hat{X}_1$	0	$\hat{X}_6$	0	$-\hat{X}_4$
$\hat{X}_{15}$	$-\hat{X}_{12}$	$\hat{X}_9$	0	$-\hat{X}_{14}$	$\hat{X}_{13}$	0	0	0	$-\hat{X}_2$	0	0	$\hat{X}_1$	$-\hat{X}_5$	$\hat{X}_4$	0

De las expresiones (3.8) podemos verificar fácilmente que se cumplen las siguientes reglas de conmutación:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

<sup>1</sup>El símbolo  $\oplus$  no indica suma directa en el sentido de las álgebras de Lie, lo que implicaría que  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] = 0$  y claramente no se cumple en nuestro caso.

Denotemos por  $B(\hat{X}, \hat{Y}) = \text{Tr}(ad_{\hat{X}}, ad_{\hat{Y}})$  la forma de Killing. Aquí  $ad_{\hat{X}}$  es la representación adjunta del elemento  $\hat{X} \in \mathfrak{su}(4)$  [107]. Como lo muestran Zhang *et al.* [82]  $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$ , por lo que  $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$  se denomina par algebraico de Lie simétrico ortogonal. Estas propiedades en conjunto nos dicen que el grupo  $\mathfrak{su}(4)$  tienen una descomposición de Cartan en términos de  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{p}$ .

Dentro del espacio  $\mathfrak{p}$  podemos encontrar un conjunto de tres operadores que conmutan entre sí, llamado subálgebra de Cartan, dado por

$$\mathfrak{h} = \text{gen}\{\hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_y^2, \hat{\sigma}_z^1 \hat{\sigma}_z^2\}. \quad (3.9)$$

Denotaremos a las matrices generadas por los miembros de  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{h}$  mediante  $\hat{K}$  y  $\hat{A}$ , respectivamente. Con estos elementos podemos enunciar el siguiente resultado, que es crucial para el desarrollo teórico posterior [82].

**Descomposición  $\hat{K}\hat{A}\hat{K}$  del grupo  $\text{SU}(4)$ :** *En un álgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$  con una descomposición de Cartan  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ , sea  $\mathfrak{h}$  el álgebra de Cartan del par  $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ . Entonces el grupo de Lie tiene la descomposición  $G = \hat{K}\hat{A}\hat{K}$  con  $\hat{K} \in \exp(i\mathfrak{k})$  y  $\hat{A} \in \exp(i\mathfrak{h})$ .*

De esta manera, cualquier compuerta  $\hat{V}$  en el espacio de dos cubits puede escribirse mediante el producto  $\hat{K}_1 \hat{A} \hat{K}_2$ . Los factores  $\hat{K}$  se forman por una exponencial compleja de los elementos de  $\mathfrak{k}$ . Estos corresponden a las operaciones locales (3.7) y por lo tanto no son capaces de cambiar el entrelazamiento de los estados cuánticos. Esto nos lleva a clasificar un conjunto de compuertas  $\hat{V}$  que difieren sólo en los factores  $\hat{K}$  en *clases de equivalencia locales* (CELs). Estas CELs vienen determinadas entonces por los coeficientes  $c_i$  en la matriz  $\hat{A}$ . Explícitamente, esta matriz se expresa por

$$\hat{A} = e^{-i(c_1 \sigma_x^1 \otimes \sigma_x^2 + c_2 \sigma_y^1 \otimes \sigma_y^2 + c_3 \sigma_z^1 \otimes \sigma_z^2)/2}. \quad (3.10)$$

Los puntos  $(c_1, c_2, c_3)$  se denominan *puntos geométricos* de la compuerta cuántica y determinan la posición de la CEL en la cámara de Weyl. A su vez, la matriz  $\hat{A}$  es periódica en cada un de las coordenadas  $c_i$ , por lo tanto la estructura topológica de las CELs es un 3-toroide.

### 3.2.2. Transformaciones irreducibles de dos cubits: $\mathfrak{su}(3)$

Un conjunto especial de compuertas de dos cubits son aquellas con una representación reducible en el espacio simétrico y antisimétrico. A la parte que actúa en el espacio simétrico la llamaremos *compuerta simétrica*, y la expresaremos con  $\hat{U}$ . Por lo tanto, un elemento del grupo  $\text{SU}(4)$  con una representación reducible se escribe mediante

$$\hat{V}^{(red)} = \begin{pmatrix} \hat{U} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

### 3. PODER ENTRELAZADOR DE COMPUERTAS CUÁNTICAS EN ESPACIOS SIMÉTRICOS DE DOS CUBITS Y OPERACIONES EN SISTEMAS DE TRES NIVELES

---

La componente  $\hat{U}$  es una matriz de  $3 \times 3$  y pertenece al grupo  $SU(3)$ . El coeficiente en la diagonal inferior indica el proyector sobre el espacio antisimétrico  $|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ . Los ceros a la izquierda y derecha en la matriz son vectores renglón y columna, respectivamente, con todas sus componentes igual a cero.

Como las matrices  $\hat{V}^{(red)}$  pertenecen al grupo  $SU(4)$ , también tienen una descomposición  $\hat{K}\hat{A}\hat{K}$ . La matriz  $\hat{A}$ , como veremos más adelante, es reducible. Sin embargo esto no nos garantiza que los factores locales  $\hat{K}$  también lo sean. Para demostrar la reducibilidad desarrollaremos la descomposición de Cartan del álgebra  $\mathfrak{su}(3)$  y demostraremos que el grupo tiene una descomposición  $\hat{k}\hat{B}\hat{k}$ . Aquí los factores  $\hat{k}$  generan rotaciones rígidas en las constelaciones de Majorana de estados de tres niveles, y la matriz  $\hat{B}$  es una parte que puede cambiar la distancia entre ellas.

Propongamos el siguiente conjunto de matrices que pertenecen a  $\mathfrak{su}(3)$ :

$$\begin{aligned} \hat{J}_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{L}_1 &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{J}_y &= \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{L}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \hat{L}_3 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{h}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \hat{h}_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.12b)$$

Las matrices arriba son un conjunto linealmente independiente y por lo tanto una manera alterna a las matrices de Gell-Mann de representar el álgebra  $\mathfrak{su}(3)$ . Los elementos  $\hat{J}_i$  ( $i \in \{x, y, z\}$ ) son la representación de espín-1 del álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  mientras que  $\hat{h}_1$  y  $\hat{h}_2$  conmutan entre sí y representan el álgebra de Cartan de  $\mathfrak{su}(3)$ . Agrupemos las matrices de manera análoga al álgebra  $\mathfrak{su}(4)$

$$\mathfrak{k} = \text{gen}\{\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z\}, \quad (3.13a)$$

$$\mathfrak{p} = \text{gen}\{\hat{h}_1, \hat{h}_2, \hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3\}, \quad (3.13b)$$

Las relaciones de conmutación de estas matrices se muestran en la Tabla 3.2. De esta manera se observa que se cumple  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \in \mathfrak{k}$ ,  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \in \mathfrak{p}$  y  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \in \mathfrak{k}$ . Además, de manera directa pero un poco prolongada, es posible demostrar que se cumple  $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$ , es decir, que  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{p}$  son ortogonales con respecto a la forma de Killing.

Estas propiedades nos indican que el conjunto de matrices (3.12) forma una descomposición de Cartan con par ortogonal  $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ . Por lo tanto la descomposición de Cartan del grupo  $SU(3)$  está dada por

$$\hat{U} = \hat{k}_1 \hat{B} \hat{k}_2, \quad (3.14)$$

**Tabla 3.2:** Relaciones de conmutación de los elementos del álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(3)$ .

$i[\hat{X}_i, \hat{X}_j]$	$\hat{J}_x$	$\hat{J}_y$	$\hat{J}_z$	$\hat{h}_1$	$\hat{h}_2$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_3$
$\hat{J}_x$	0	$-\hat{J}_z$	$\hat{J}_y$	$\hat{L}_3$	$-2\hat{L}_3$	$-\hat{L}_2$	$\hat{L}_1$	$2\hat{h}_2$
$\hat{J}_y$	$\hat{J}_z$	0	$-\hat{J}_x$	$-2\hat{L}_2$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_3$	$2\hat{h}_1$	$-\hat{L}_1$
$\hat{J}_z$	$-\hat{J}_y$	$\hat{J}_x$	0	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_1$	$-2\hat{h}_3$	$-\hat{L}_3$	$\hat{L}_2$
$\hat{h}_1$	$-\hat{L}_3$	$2\hat{L}_2$	$-\hat{L}_1$	0	0	$\hat{J}_z$	$-2\hat{J}_y$	$\hat{J}_x$
$\hat{h}_2$	$2\hat{L}_3$	$-\hat{L}_2$	$-\hat{L}_1$	0	0	$\hat{J}_z$	$\hat{J}_y$	$-2\hat{J}_x$
$\hat{L}_1$	$-\hat{L}_2$	$-\hat{L}_3$	$2\hat{h}_3$	$-\hat{J}_z$	$-\hat{J}_z$	0	$-\hat{J}_x$	$\hat{J}_y$
$\hat{L}_2$	$\hat{L}_1$	$-2\hat{h}_1$	$\hat{L}_3$	$2\hat{J}_y$	$-\hat{J}_y$	$\hat{J}_x$	0	$-\hat{J}_z$
$\hat{L}_3$	$-2\hat{h}_2$	$-\hat{L}_1$	$-\hat{L}_2$	$-\hat{J}_x$	$2\hat{J}_x$	$-\hat{J}_y$	$\hat{J}_z$	0

con  $\hat{k}_i = e^{-i\theta_i \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \hat{\mathbf{J}}}$  para algún  $\theta_i$  y vector unitario  $\hat{\mathbf{n}}_i$ . La matriz  $\hat{B}$  por su parte es  $\exp[-i(b_1 \hat{h}_1 + b_2 \hat{h}_2)]$ .

Podemos relacionar los generadores del grupo  $SU(3)$  con combinaciones lineales del álgebra  $\mathfrak{su}(4)$  dados por los productos tensoriales de las matrices de Pauli. Para esto introduzcamos el cambio de base dado por

$$\hat{T}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

que transforma los elementos de la base computacional<sup>1</sup> en una parte simétrica (primeras tres filas) y otra antisimétrica (última fila). Con esto podemos hacer las siguientes

<sup>1</sup>Esta base corresponde a los elementos  $|0\rangle \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes |0\rangle, |1\rangle \otimes |1\rangle$ . Los kets de la izquierda pertenecen al espacio del primer cubit y los de la derecha al segundo cubit, respectivamente.



### 3. PODER ENTRELAZADOR DE COMPUERTAS CUÁNTICAS EN ESPACIOS SIMÉTRICOS DE DOS CUBITS Y OPERACIONES EN SISTEMAS DE TRES NIVELES

---

asociaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\hat{T}^\dagger(\hat{\sigma}_x^{(1)}\mathbb{1}^{(2)} + \mathbb{1}^{(1)}\hat{\sigma}_x^{(2)})\hat{T} &= \begin{pmatrix} \hat{J}_x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\hat{T}^\dagger(\hat{\sigma}_y^{(1)}\mathbb{1}^{(2)} + \mathbb{1}^{(1)}\hat{\sigma}_y^{(2)})\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{J}_y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{2}\hat{T}^\dagger(\hat{\sigma}_z^{(1)}\mathbb{1}^{(2)} + \mathbb{1}^{(1)}\hat{\sigma}_z^{(2)})\hat{T} &= \begin{pmatrix} \hat{J}_z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.16a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\hat{T}^\dagger(\hat{\sigma}_x^{(1)}\hat{\sigma}_y^{(2)} + \hat{\sigma}_y^{(1)}\hat{\sigma}_x^{(2)})\hat{T} &= \begin{pmatrix} \hat{L}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\hat{T}^\dagger(\hat{\sigma}_y^{(1)}\hat{\sigma}_z^{(2)} + \hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{\sigma}_y^{(2)})\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{L}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{2}\hat{T}^\dagger(\hat{\sigma}_x^{(1)}\hat{\sigma}_z^{(2)} + \hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{\sigma}_x^{(2)})\hat{T} &= \begin{pmatrix} \hat{L}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.16b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\hat{T}^\dagger(-\hat{\sigma}_x^{(1)}\hat{\sigma}_x^{(2)} + \hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{\sigma}_z^{(2)})\hat{T} &= \begin{pmatrix} \hat{h}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\hat{T}^\dagger(\hat{\sigma}_y^{(1)}\hat{\sigma}_y^{(2)} - \hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{\sigma}_z^{(2)})\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{h}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.16c)$$

Notemos en estas expresiones que los generadores del grupo  $SU(3)$  se escriben en términos de combinaciones lineales simetrizadas del álgebra  $\mathfrak{su}(4)$ . Con esto la descomposición  $\hat{K}\hat{A}\hat{K}$  de una compuerta reducible de dos cubits como

$$\begin{aligned} \hat{V}^{(red)} &= \begin{pmatrix} \hat{U} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \hat{k}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{B} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{k}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Los factores  $\hat{K}$  reducibles tienen la forma  $e^{i\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}} \otimes e^{i\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$ , con  $\hat{\mathbf{n}}$  como un vector unitario y  $\theta$  un ángulo, los cuales pertenecen al grupo  $SU(2)$  en la representación de espín-1 [107]. La acción de estos elementos sobre un estados se manifiesta como rotaciones  $SO(3)$  sobre las constelaciones de Majorana de los estados, en concordancia con la incapacidad de separar las estrellas de Majorana de los estados cuánticos y de cambiar su entrelazamiento.

### 3.3. Invariantes Locales y Clases de Equivalencia de Compuertas Simétricas

Como se discute en la referencia [112], todas las compuertas de dos cubits que pertenecen a una misma CEL tienen las mismas *invariantes locales*. Para una compuerta  $\hat{V}$ , la invariante local se obtiene a partir de la traza de

$$\hat{M} = \hat{V}_B^T \hat{V}_B, \quad (3.17)$$

en donde el subíndice  $B$  indica que  $\hat{V}$  se encuentra expresada en la base de Bell  $B = \{|\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle, |\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle\}$ . La matriz de transformación entre la base de Bell y la base

computacional, con ordenamiento  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ , es

$$\hat{Q}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Con esta definición  $\hat{V}_B = \hat{Q}^\dagger \hat{V} \hat{Q}$ ; nótese que el último renglón corresponde al estado de Bell antisimétrico.

Esta transformación mapea los elementos de  $\mathfrak{k}$  al álgebra  $\mathfrak{so}(4)$ , y consecuentemente  $\hat{Q}^\dagger \hat{K} \hat{Q} \in SO(4)$ . De esta manera, al aplicar la propiedad cíclica de la traza, los eigenvalores de la matriz  $\hat{M}$  dependen solamente de  $\hat{A}^2$ , y no de los factores locales  $\hat{K}$ . Escrito mediante ecuaciones, esto es

$$\text{Tr } \hat{M} = \text{Tr} [\hat{A}^2]. \quad (3.19)$$

Se puede verificar directamente que los estados de Bell  $|\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle, |\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle$  son eigenestados de  $\hat{A}$ , con respectivos eigenvalores

$$\lambda_1 = e^{\frac{i}{2}(c_1 - c_2 + c_3)}, \quad (3.20a)$$

$$\lambda_2 = e^{\frac{i}{2}(c_1 + c_2 - c_3)}, \quad (3.20b)$$

$$\lambda_3 = e^{\frac{i}{2}(-c_1 + c_2 + c_3)}, \quad (3.20c)$$

$$\lambda_4 = e^{-\frac{i}{2}(c_1 + c_2 + c_3)}. \quad (3.20d)$$

La matriz  $\hat{M}$  es unitaria, y sus de eigenvalores están determinados por las cantidades  $(\text{Tr } \hat{M})^2$  y  $(\text{Tr } \hat{M})^2 - \text{Tr } \hat{M}^2$  [82]. Con estas cantidades se definen las invariantes locales de compuertas de dos cubits, escritas como

$$G_1 = \frac{1}{16} (\text{Tr } \hat{M})^2, \quad (3.21)$$

$$G_2 = \frac{1}{4} [(\text{Tr } \hat{M})^2 - \text{Tr } \hat{M}^2]. \quad (3.22)$$

Las compuertas cuánticas que compartan las mismas invariantes locales se clasifican como equivalentes localmente.

Las compuertas reducibles de dos cubits se expresan como en (3.11), y su acción en el subespacio simétrico viene determinado por  $\hat{U}$ . De esta manera, definimos la matriz

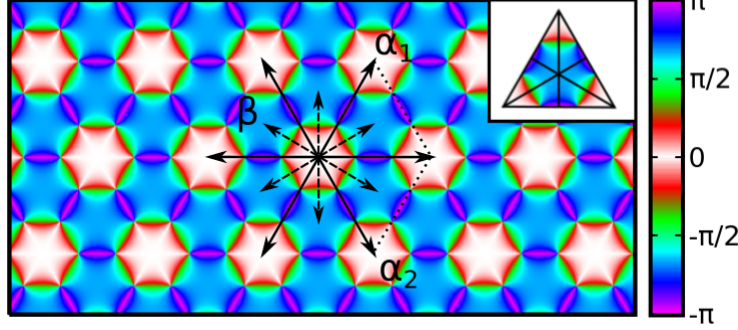
$$\hat{m} = \hat{U}_B^T \hat{U}_B, \quad (3.23)$$

cuyos eigenvalores determinarán a las invariantes locales de  $\hat{U}$ . Note que esta matriz es independiente de  $\lambda_4$ , por tanto, al enfocarnos en matrices especiales unitarias podemos elegir su valor arbitrariamente sin perder generalidad. Al escoger  $\lambda_4 = 1$  obtenemos la siguiente condición

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0. \quad (3.24)$$

### 3. PODER ENTRELAZADOR DE COMPUERTAS CUÁNTICAS EN ESPACIOS SIMÉTRICOS DE DOS CUBITS Y OPERACIONES EN SISTEMAS DE TRES NIVELES

---



**Figura 3.2:** Argumento de  $\text{Tr } \hat{m}$ . Los vectores  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son las raíces simples del álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(3)$ . Reflecciones en los planos perpendiculares a los vectores raíz (flechas continuas) generan el grupo de Weyl. El recuadro muestra una subcelda dividida en seis secciones, en donde cada una representa una cámara de Weyl.

De haber escogido compuertas unitarias no necesariamente especiales, hubiésemos llegado a la condición de arriba al remover el factor de fase global de las compuertas. De esta manera, *las distintas CELs de las compuertas están localizadas en el plano definido por (3.24)*, al que llamaremos *plano-O*.

Puede demostrarse que la ecuación secular de  $\hat{m}$  está dada por

$$\lambda^3 - \text{Tr}(\hat{m})\lambda^2 - [\text{Tr}(\hat{m})]^* \lambda - 1 = 0, \quad (3.25)$$

en donde hemos utilizado que  $\text{Tr}^2(\hat{m}) - \text{Tr}(\hat{m}^2) = -2 \text{Tr}^* \hat{m}$ . Por lo tanto, para las compuertas simétricas, los eigenvalores de  $\hat{m}$  vienen determinados *únicamente por su traza y esta es la única invariante local para clasificar las CELs en el subespacio simétrico*.

Definamos entonces la invariante local de las compuertas simétricas de dos cubits como

$$G = \frac{1}{9} [\text{Tr}(\hat{m})]^2. \quad (3.26)$$

La norma de  $\hat{m}$  puede escribirse en términos del punto geométrico  $\mathbf{c}$  como

$$|G| = 1 - \frac{4}{9} (\text{sen}^2 c_{12} + \text{sen}^2 c_{13} + \text{sen}^2 c_{23}), \quad (3.27)$$

en donde  $c_{ij}$  por  $c_i - c_j$ .

El plano- $O$  (3.24), en donde se encuentran todas la CELs contiene más información de la que necesitamos. En la Fig. 3.2 hemos graficado el argumento de  $\text{Tr} [\hat{m}]$  en el plano- $O$ . Considere los vectores  $\alpha_1 = \pi(-1, 0, 1)$  y  $\alpha_2 = \pi(0, 1, -1)$ . Resulta sencillo demostrar que  $\hat{m}$  es invariante ante traslaciones en las direcciones  $n\alpha_1 + m\alpha_2$  ( $n, m \in \mathbb{Z}$ ), en concordancia con el patrón periódico que exhibe la Fig. 3.2. Por lo tanto, el total

de las CELs puede localizarse en la celda primitiva entre los vectores  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y las líneas punteada en la Fig 3.2. Cabe mencionar que las flechas en la figura forman el espacio de raíces del álgebra  $\mathfrak{su}(3)$ , en donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son el par de raíces positivas simples [113].

En la Fig. 3.2 hemos asignado el mismo color a las fases conjugadas. La razón de ello es la siguiente. Al observar la celda primitiva vemos que está compuesta por dos subceldas, una superior y otra inferior. Al hacer un reflexión en el plano normal a un vector  $\beta$  vertical, llamémoslo  $\beta'$ , las subceldas se intercambian. En general, las reflexiones generadas por los planos normales a los vectores  $\beta$  son  $(\hat{\sigma}_\beta)_{ij} = \delta_{ij} - 2\beta_i\beta_j/\beta^2$  ( $i, j \in \{x, y, z\}$ ). Mediante un procedimiento algebraico directo, podemos demostrar que

$$\text{Tr } \hat{m} [\hat{\sigma}_\beta \mathbf{c}] = \text{Tr}^* [\hat{m}(\mathbf{c})]. \quad (3.28)$$

Para ver esto con detalle tomemos el plano normal al vector  $\hat{\beta} = \pi(-2, 1, 1)$ , dado por

$$\hat{\sigma}_\beta = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, la reflexión sobre un vector  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$  tiene como resultado

$$\mathbf{c}' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -c_1 + 2c_2 + 2c_3 \\ 2c_1 + 2c_2 - c_3 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 \end{pmatrix}^T.$$

De esta manera, los eigenvalores de la matriz  $\hat{m}$  se transforman en<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= e^{\frac{-i}{2}(c_1+c_2-c_3)} = \lambda_2^* \\ \lambda'_2 &= e^{\frac{-i}{2}(-c_1+c_2+c_3)} = \lambda_3^* \\ \lambda'_3 &= e^{\frac{-i}{2}(c_1-c_2+c_3)} = \lambda_1^*. \end{aligned}$$

De este modo los eigenvalores de  $\hat{m}$  están conjugados y se permutan entre sí, por lo que se cumple (3.28). Este resultado indica que las CELs en cada subcelda son una imagen espejo de la otra, con la fase conjugada. Por lo tanto, la información total de las CELs puede inferirse a partir de una sola subcelda.

Podemos reducir aún más la extensión a partir de la cual obtener todas las CELs. Para ello consideremos las reflexiones generadas por los planos normales a los vectores  $\alpha$ , dadas por  $\hat{\sigma}_\alpha$ . Las matrices  $\hat{\sigma}_\alpha$  forman el grupo de Weyl [113]. La acción de este grupo consiste en permutar los eigenvalores de la matriz  $\hat{A}$ , y por lo tanto deja invariante  $\text{Tr } \hat{m}$ . Al segmentar una de las subceldas mediante los planos  $\hat{\sigma}_\alpha$  obtenemos el recuadro de la Fig. 3.2. Cada uno de los seis triángulos representa un área mínima en la cual encontrar las distintas CELs, llamadas *cámaras de Weyl* [82, 113]. Por lo tanto, mediante las operaciones de simetría generadas por las reflexiones  $\hat{\sigma}_\beta$  y  $\hat{\sigma}_\alpha$ , además

---

<sup>1</sup>Recordemos que estamos trabajando en el plano- $O$ .

### 3. PODER ENTRELAZADOR DE COMPUERTAS CUÁNTICAS EN ESPACIOS SIMÉTRICOS DE DOS CUBITS Y OPERACIONES EN SISTEMAS DE TRES NIVELES

---

de las traslaciones a lo largo de los vectores raíz, podemos reducir a un mínimo el área en la cual encontrar las distintas CELs<sup>1</sup>. Más adelante tomaremos ventaja de ello para obtener la fracción de entrelazadores perfectos en relación del total de compuertas simétricas.

## 3.4. Poder entrelazador

### 3.4.1. Expresión y propiedades

Como mencionamos al inicio del capítulo, el poder entrelazador nos da una medida de cuán efectiva es una compuerta cuántica para generar estados entrelazados a partir de estados separables. Para compuertas de dos cubits, el poder entrelazador de una compuerta  $\hat{V}$  se define por el promedio de la entropía lineal de entrelazamiento  $E(|\psi\rangle) = \frac{1}{2}(1 - \text{Tr}\{\hat{\rho}_1^2\})$  sobre la variedad de todos los estados separables con densidad de probabilidad uniforme:

$$ep^{(gral)}(\hat{A}) = \overline{E(\hat{V}|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle)}, \quad (3.29)$$

en la cual la barra indica dicho promedio. Notemos que  $ep$  depende solamente de la matriz  $\hat{A}$ , dado que los factores locales  $\hat{K}$  no cambian el entrelazamiento de un estado. Esta cantidad sirve como parámetro para clasificar las compuertas de dos cubits como entrelazadores perfectos y además se puede expresar de manera compacta en términos de la invariante local  $G_1$  [85]. Dado que esta expresión toma en cuenta todos los estados separables, que no son necesariamente simétricos, no podemos usarla para evaluar el poder entrelazador de compuertas simétricas. Para obtener la expresión deseada, definamos el poder entrelazador de compuertas simétricas de dos cubits mediante la expresión:

$$ep(\hat{U}) = \overline{E(\hat{A}|u\rangle \otimes |u\rangle)}, \quad (3.30)$$

en donde  $|u\rangle$  es el estado de un cubit, como se define en la ec. (3.1). En este caso, el promedio se realiza sobre todos los estados con constelaciones de Majorana degeneradas. Por lo tanto la variedad de integración es la esfera unitaria. Con esta definición nuestro objetivo es obtener una expresión del poder entrelazador en términos de las coordenadas del punto geométrico o de la invariante local  $G$  (ec.(3.27)).

Como primer paso para evaluar el poder entrelazador de las compuertas simétricas de dos cubits obtengamos  $\hat{\rho} = \hat{A}|u, u\rangle\langle u, u|\hat{A}^\dagger$ . En la base de Bell, los estados  $|u, u\rangle$  adquieren la forma

$$\hat{Q}^\dagger |u, u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a \quad ib \quad -ic \quad 0)^T,$$

---

<sup>1</sup>Las distintas CELs que difieren a lo mucho por la conjugación compleja de los eigenvalores de  $\hat{A}$ .

con coeficientes  $a = \cos \phi - i \sin \phi \cos \theta$ ,  $b = i \sin \theta$  y  $c = -i \sin \phi + \cos \phi \cos \theta$ . Al transformar la matriz  $\hat{A}$  a la base de Bell, mediante algunos pasos intermedios, obtenemos

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} |A|^2 & AB^* & AB^* & AC^* \\ AB^* & |B|^2 & |B|^2 & BC^* \\ AB^* & |B|^2 & |B|^2 & BC^* \\ AC^* & BC^* & BC^* & |C|^2 \end{pmatrix},$$

en donde hemos definido  $A = \lambda_1 a - \lambda_3 c$ ,  $B = \lambda_2 b$  y  $c = \lambda_1 a + i \lambda_3 c$ , con los factores  $\lambda_i$  dados por (3.20). Al calcular la matriz de densidad reducida en un subsistema, obtenemos

$$\text{Tr } \hat{\rho}_1^2 = \frac{1}{16} ((|A|^2 + |B|^2)^2 + (|B|^2 + |C|^2)^2 + 2|AB^* + BC^*|^2).$$

En este punto nos queda tomar el promedio de la expresión anterior sobre todos los estados separables (estrellas de Majorana degeneradas), en donde todos los estados tienen la misma probabilidad de ser obtenidos. Por ende

$$\overline{\text{Tr } \hat{\rho}_1^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{A}} [\text{Tr } \hat{\rho}_1^2] \sin \theta d\theta d\phi.$$

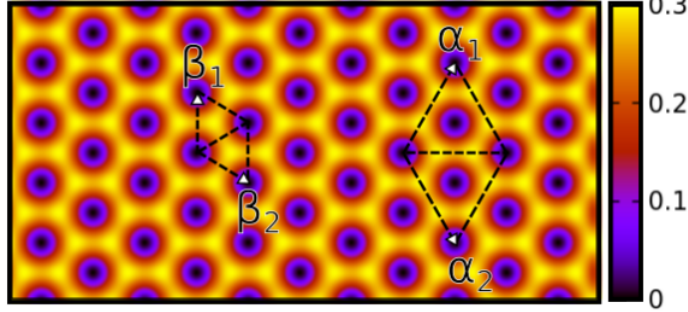
El cálculo explícito de esta integral es directo, sin embargo involucra muchos pasos intermedios que no desarrollaremos aquí. Por lo tanto, al calcular la integral anterior y sustituirla en la definición del poder entrelazador, obtenemos

$$e_p = \frac{2}{15} (\sin^2 c_{12} + \sin^2 c_{13} + \sin^2 c_{32}), \quad (3.31a)$$

$$= \frac{3}{10} (1 - |G|). \quad (3.31b)$$

Para obtener la última expresión utilizamos la ec. (3.27). Hemos obtenido una expresión analítica del poder entrelazador de compuertas simétricas de dos cubits en términos de las coordenadas del punto geométrico o de la invariante local  $G$ . Es notable la similitud entre la ec.(3.31b) y la expresión análoga para compuertas de dos cubits generales  $e_p^{(gral)} = 2(1 - |G_1|)/9$ .

El poder entrelazador  $e_p$  en el plano- $\mathcal{O}$  se muestra en la Fig.3.3. Se observa también un patrón periódico con simetría hexagonal, como en el caso de la Fig.3.2. Sin embargo, en este caso los vectores  $\beta$  pueden considerarse los vectores de traslación, y el área generada por un par de ellos contiene a todos los valores posibles de  $e_p$ . Por otro lado, este patrón es el mismo para toda la familia de planos paralelos al plano- $\mathcal{O}$ , debido a que  $e_p$  es invariante ante traslaciones del punto geométrico en la dirección  $(1, 1, 1)$ . El valor más alto que asume el poder entrelazador es claramente  $3/10$  y se da en el punto geométrico  $(-\pi, 0, \pi)/3$  y puntos equivalentes por traslaciones generadas por los vectores  $\beta$  o rotaciones del grupo  $C_6$  alrededor de puntos de simetría.



**Figura 3.3:** Poder entrelazador  $e_p$  para compuertas simétricas en el plano- $O$ . Las flechas grandes representan a los vectores raíz y el área entre las líneas es la celda primitiva.

### 3.4.2. Entrelazadores perfectos

Una compuerta general de dos cubits es un entrelazador perfecto si es capaz de generar un estado completamente entrelazado a partir de un estado separable. Una condición equivalente para ello es que la envoltura convexa de los eigenvalores de la matriz  $\hat{M}$  contengan al origen [82]. Esta condición se mantiene para las compuertas simétricas, la cual hace referencia a los eigenvalores de  $\hat{m}$  en dicho caso. La demostración de ello es casi idéntica a la del caso general de dos cubits, sin embargo desarrollaremos dicha prueba en esta sección, con los cambios apropiados para centrarnos en las compuertas simétricas. Primero demos la definición de envoltura convexa.

**Definición 1 *Envoltura convexa*** La envoltura convexa de  $n+1$  puntos  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^n$  está dada por el conjunto de vectores de la forma  $\sum_{i=0}^n \theta_i \mathbf{p}_i$ , en donde  $\theta_i$  son números reales no negativos que satisfacen  $\sum_{i=0}^n \theta_i = 1$ .

Con esta definición a la mano, enunciamos y demostramos el siguiente teorema.

**Teorema 1 (*Entrelazadores perfectos*)** Una compuerta simétrica de dos cubits  $\hat{U}$  es un entrelazador perfecto si y sólo si la envoltura convexa de eigenvalores de la matriz  $\hat{m}$  correspondiente contiene al origen.

Primero demos por hecho que nuestra compuerta es un entrelazador perfecto. Por la descomposición de Cartan de las matrices reducibles de dos cubits, podemos expresar una matriz simétrica  $\hat{U}$  como el producto  $\hat{K}_1^{(s)} \hat{A}^{(s)} \hat{K}_2^{(s)}$ , en donde el superíndice indica que las matrices actúan sobre el subespacio simétrico y  $\hat{K}^{(s)} \in \text{SU}(2)$ . Consideremos un estado simétrico separable  $|\psi_o\rangle = (a \ b \ b \ c)^T$ . El grado de entrelazamiento está determinado por la *conurrencia* [32] denotada por  $C$ . Al aplicar una compuerta simétrica  $\hat{U}$

al estado separable  $|\psi_o\rangle$ , la concurrencia cumple con

$$C(\hat{U}|\psi_o\rangle) = C(\hat{A}|\psi_o\rangle),$$

y por lo tanto, para que  $\hat{U}$  sea un entrelazador perfecto,  $\hat{A}$  tiene que serlo; hemos usado  $\hat{A}^{(s)}|\psi_o\rangle = \hat{A}|\psi_o\rangle$  dado que  $|\psi_o\rangle$  es simétrico y no tiene proyección sobre la componente antisimétrica de  $\hat{A}$ . De manera explícita[32],  $C(\hat{A}|\psi_o\rangle) = \langle\psi_o|\hat{A}^T\hat{P}\hat{A}|\psi_o\rangle$ , donde  $\hat{P} = -\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$ . En términos de los estados de Bell, esta expresión se escribe  $C(\hat{A}|\psi_o\rangle) = \langle\psi_o|\hat{Q}\hat{F}^2\hat{Q}^\dagger|\psi_o\rangle$ , en donde usamos la matriz  $\hat{Q}$  (3.18) y  $\hat{Q}^T\hat{P}\hat{Q} = \mathbb{1}$ ; el operador  $\hat{F}$  es igual a  $\hat{Q}^\dagger\hat{A}\hat{Q}$ . Sea  $\hat{Q}^\dagger|\psi_o\rangle = |\phi\rangle$ . Dado que  $|\psi_o\rangle$  es un estado separable, tenemos que  $C(|\psi_o\rangle) = \langle\phi|\hat{Q}^T\hat{P}\hat{Q}|\phi\rangle = \langle\phi|\mathbb{1}|\phi\rangle = 0$ , que implica

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0, \quad (3.32)$$

en donde sólo aparecen tres coeficientes dado que  $|\psi_o\rangle$  es un estado simétrico y no tiene proyección alguna en el subespacio antisimétrico. Para que  $\hat{A}$  sea un entrelazador perfecto, la concurrencia de  $\hat{A}|\psi_o\rangle$  de ser igual a uno. Esto, junto con la condición de normalización de un estado nos da<sup>1</sup>

$$|\phi_1^2\lambda_1^2 + \phi_2^2\lambda_2^2 + \phi_3^2\lambda_3^2| = |\phi_1^2\lambda_1^2|^2 + |\phi_2^2\lambda_2^2|^2 + |\phi_3^2\lambda_3^2|^2.$$

Que se cumpla la siguiente igualdad implica que debe de existir un  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que  $\phi_j^2\lambda_j^2 = |\phi_j|^2e^{2i\theta}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Con esto y la expresión (3.32), obtenemos

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &= e^{2i\theta} \left( \frac{|\phi_1|^2}{\lambda_1^2} + \frac{|\phi_2|^2}{\lambda_2^2} + \frac{|\phi_3|^2}{\lambda_3^2} \right), \\ &= \phi_1^2\lambda_1^{-2} + \phi_2^2\lambda_2^{-2} + \phi_3^2\lambda_3^{-2}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Al tomar el complejo conjugado de la última igualdad se obtiene que la envoltura convexa de la matriz  $\hat{m}$  contiene al origen. El sentido inverso del argumento no se demostrará aquí, pues se puede hacer fácilmente al seguir la referencia [82] y al restringir los estados al subespacio simétrico.

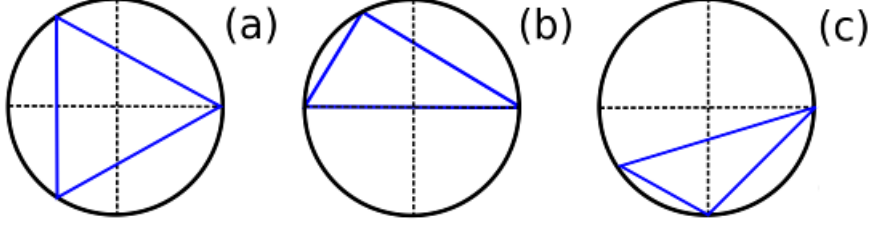
Con ayuda de este teorema estamos en una posición de encontrar las posiciones de los entrelazadores perfectos en el plano- $O$ . La Fig.3.4 nos muestra las envolturas convexas de los eigenvalores  $\lambda_i^2$  de la matriz  $\hat{m}$  para tres casos distintos. Los vértices de los triángulos en cada caso están determinados por la fase de los eigenvalores  $\lambda_i^2$ . En (a) los eigenvalores de  $\hat{m}$  se encuentran separados por un ángulo de  $2\pi/3$ . En este caso tenemos  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0$ , y como consecuencia  $|G| = 0$  y  $e_p = 3/10$ . Un ejemplo de compuertas de tres niveles, y por ende simétricas, que tienen este poder entrelazador son las compuertas  $\text{SWAP}_{12(23)}$  que se usan en resonancia magnética nuclear [90]. El punto geométrico correspondiente a este valor de  $e_p$  es  $\mathbf{c} = \pi(-1, 1, 0)/3$ . Este punto se representa por el punto blanco sobre la Fig.3.5 en la parte inferior del triángulo azul. En

<sup>1</sup>Recuerde que  $\lambda_i$  son los eigenvalores de la matriz  $\hat{m}$ .



### 3. PODER ENTRELAZADOR DE COMPUERTAS CUÁNTICAS EN ESPACIOS SIMÉTRICOS DE DOS CUBITS Y OPERACIONES EN SISTEMAS DE TRES NIVELES

---

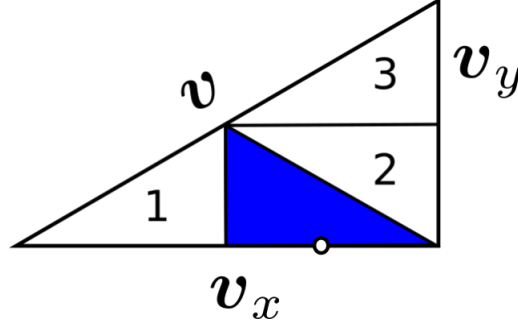


**Figura 3.4:** Envoltura convexa de los eigenvalores  $\lambda_i^2$  de la matriz  $\hat{m}$  asociada a las compuertas simétricas de dos cubits. Los vértices del círculo unitario están determinados por la fase de  $\lambda_i^2, i = 1, 2, 3$ . (a) Entrelazador perfecto con un valor máximo de  $e_p$ . (b) Entrelazador perfecto con un valor mínimo de  $e_p$ . (c) Entrelazador no perfecto. La esencia de los entrelazadores perfectos yace en que la envoltura convexa de la  $\hat{m}$  correspondiente contenga al origen.

términos de los vectores raíz este punto se expresa por  $(\alpha_1 + \alpha_2)/3$ . Por lo tanto, *todas las compuertas simétricas o de tres niveles con  $e_p = 3/10$  son localmente equivalentes a las compuertas  $\text{SWAP}_{12(23)}$* .

El caso (b) también se refiere a un entrelazador perfecto. La envoltura convexa contiene al origen y se observa que se cumple  $\lambda_i^2 = -\lambda_j^2$  para un par de eigenvalores de  $\hat{m}$ . De esta manera, siempre obtenemos  $|\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2| = 1$ , y por ende  $|G| = 1/9$  y  $e_p = 4/15$ . Cualquier deformación de una envoltura convexa del tipo (b), tal que esta ya no contenga al origen, aumenta el valor de  $|G|$  y por tanto disminuye el de  $e_p$ . Por esta razón,  $4/15$  es el valor mínimo de  $e_p$  que puede tener una compuerta simétrica tal que ésta corresponda a un entrelazador perfecto. Ejemplos de compuertas cuánticas con  $e_p = 4/15$  son las  $\hat{U}_{\Lambda_3}(\theta)$  y  $\hat{U}_{\Lambda_8}(\theta)$  según la notación de Dogra *et al.* [90], con valores de  $\theta$  igual a  $\pi/3$  y  $\pi/\sqrt{3}$ , respectivamente. Los autores muestran explícitamente que estas compuertas producen un estado de Bell a partir de uno separable. En (c) se muestra una envoltura convexa que no contiene al origen, y que por lo tanto no corresponde a un entrelazador perfecto.

Ahora que podemos clasificar o no a las compuertas simétricas como entrelazadores perfectos, de acuerdo a las coordenadas del punto geométrico  $\mathbf{c}$ , calculemos la proporción de entrelazadores perfectos con respecto a todas las posibles compuertas simétricas. Para ello calcularemos el área en la cámara de Weyl que corresponde a los entrelazadores perfectos. Restrinjamos las coordenadas  $(c_1, c_2, c_3)$  a la cámara de Weyl mostrada en la Fig.3.5. Una comparación con la Fig.3.3 nos sugiere la siguiente asociación:  $\mathbf{v} = \beta_1 + \beta_2$ ,  $\mathbf{v}_x = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$  y  $\mathbf{v}_y = (\alpha_1 - \alpha_2)/6$ . Recordemos que los vectores raíz están dados por  $\alpha_1 = \pi(-1, 0, 1)$  y  $\alpha_2 = \pi(0, 1, -1)$ . De esta manera, los vectores en la Fig.3.5 están dados por  $\mathbf{v} = \frac{\pi}{3}(-2, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_x = \frac{\pi}{2}(-1, 1, 0)$  y  $\mathbf{v}_y = \frac{\pi}{6}(-1, -1, 2)$ . De esta manera, cada punto geométrico en la cámara de Weyl puede ser expresado como



**Figura 3.5:** Cámara de Weyl de las clases de equivalencia locales. El área en azul contiene a todas las clases de equivalencia que corresponden a entrelazadores perfectos y comprende un cuarto del área total de triángulo.

$\mathbf{c} = s_1 \mathbf{v}_x + s_2 \mathbf{v}_y$ , en donde  $s_1, s_2 \in [0, 1]$  y  $s_2 \leq s_1$ .

Consideremos la siguiente envoltura convexa de un conjunto de eigenvalores  $|a|_1^2 \lambda_1^2 + |a|_2^2 \lambda_2^2 + |a|_3^2 \lambda_3^2$ . Un factor  $e^{i\phi}$  no cambia el contener o no al origen por dicha envoltura. Por lo tanto, para facilitar los cálculos, multipliquemos los eigenvalores de  $\hat{m}$  por  $1/\lambda_2^2$ , que es igual que fijar  $\lambda_2^2 = 1$ . Por lo tanto, las fases de los eigenvalores  $\lambda_1^2$  y  $\lambda_3^2$  son

$$\phi_1 = \pi(s_1 + s_2), \quad (3.33a)$$

$$\phi_3 = \pi(s_1 - s_2), \quad (3.33b)$$

en donde hemos usado que las coordenadas de los puntos geométricos  $\mathbf{c}$  están en el plano- $O$ . Una compuerta simétrica es un entrelazador perfecto sí y sólo sí la siguiente condición se cumple:

$$0 \leq \phi_1 \leq \pi \quad Y \quad -\pi \leq \phi_3 \leq -\pi + \phi_1, \quad (3.34)$$

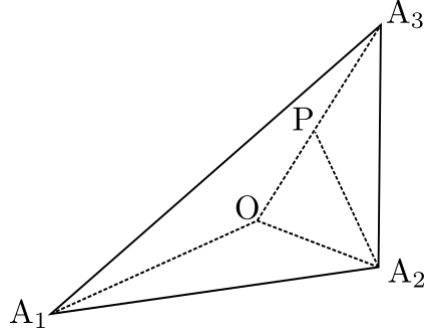
en donde hemos de recordar que todas las fases están definidas módulo  $2\pi$ . Para  $\phi_1 > \pi$  nunca se tienen entrelazadores perfectos, dadas las condiciones impuestas sobre  $s_1$  y  $s_2$ ; más adelante veremos con detalle cómo se cumple esta afirmación. Ahora analicemos todas las secciones de la cámara de Weyl (ver la Fig.3.5) para determinar cuáles de ellas contienen entrelazadores perfectos.

*Área 1.* En esta área tenemos las siguientes restricciones sobre el par de coordenadas  $(s_1, s_2)$ :  $0 \leq s_1 < 1/2$  y  $0 \leq s_2 \leq s_1$ . Estas desigualdades implican que  $s_1 + s_2 < 1$  y por ende  $0 \leq \phi_1 < \pi$ . Por lo tanto nos encontramos en el dominio de la expresión (3.34). Al sustituir  $\phi_3$  en el lado derecho de (3.34) obtenemos  $s_1 \geq 1/2$ , lo cual es una contradicción, dadas las condiciones impuestas a  $s_1$  y  $s_2$ . De esta manera, ningún punto geométrico en esta porción de la cámara de Weyl corresponde a un entrelazador perfecto.

*Áreas 2 y 3.* Estas regiones se definen por las siguientes restricciones en las coordenadas  $(s_1, s_2)$ :  $1/2 < s_1 \leq 1$  y  $1 - s_1 < s_2 \leq s_1$ . Estas implican que  $\phi > \pi$  y  $-\pi < \phi_3 < 0$ .

### 3. PODER ENTRELAZADOR DE COMPUERTAS CUÁNTICAS EN ESPACIOS SIMÉTRICOS DE DOS CUBITS Y OPERACIONES EN SISTEMAS DE TRES NIVELES

---



**Figura 3.6:** Cámara de Weyl de las clases de equivalencia locales para compuertas de dos cubits (no simétricas). El punto  $P$  corresponde al punto geométrico  $\frac{\pi}{4}(1, 1, 1)$ , el cual es un entrelazador perfecto en el caso general pero no para compuertas simétricas.

Por lo tanto, tanto  $\lambda_1^2$  y  $\lambda_3^2$  yacen en la parte inferior del círculo unitario, ninguna de ellas en  $\pi$  (véase la Fig.3.5.(c)). Entonces, la envoltura convexa no contiene al origen y ningún punto geométrico corresponde a un entrelazador perfecto.

*Área en azul.* En este caso, las coordenadas  $(s_1, s_2)$  están restringidas por:  $1/2 \leq s_1 \leq 1$  y  $0 \leq s_2 \leq 1 - s_1$ . Esto implica que  $\pi/2 \leq \phi_1 \leq \pi$  y por lo tanto se cumple el lado izquierdo de (3.34). Al insertar las expresiones de  $\phi_1$  y  $\phi_3$  en la expresión derecha (3.34) obtenemos la desigualdad:  $-1 \leq s_2 - s_1 \leq -1 + s_1 + s_2$ . El lado izquierdo  $-1 \leq s_2 - s_1 \leq -1 + s_1 + s_2$  se cumple de manera trivial, mientras que el lado derecho implica  $s_1 \geq 1 - s_1$ , que se cumple dado que consideramos  $1 \geq s_1 \geq 1/2$ . De esta manera, la condición (3.34) se cumple y por lo tanto el área en azul contiene únicamente entrelazadores perfectos.

Es fácil ver que la porción azul de la cámara de Weyl representa un cuarto del total. Por ende, tenemos el siguiente resultado: *en el conjunto de compuertas simétricas un cuarto del total corresponden a entrelazadores perfectos.*

En este punto es importante hacer notar que la geometría de las clases de equivalencia locales de las compuertas simétricas no se obtiene de manera trivial a partir de la correspondiente a la de dos cubits. Para ello fijemos nuestra atención en la Fig.3.6, en la cual se muestra la cámara de Weyl para compuertas de dos cubits generales. El punto  $P$  en dicho caso, corresponde a un entrelazador perfecto, la compuerta  $\sqrt{\text{SWAP}}$  para ser precisos. Dicho punto tiene coordenadas  $\pi(1, 1, 1)/4$ . Sin embargo, como hemos visto, para las compuertas simétricas todos los puntos de la forma  $c(1, 1, 1)$ , en donde  $c$  es algún número real, tienen un poder entrelazador nulo (véase la expresión (3.30)) y por lo tanto son compuertas locales. *Esto demuestra que la geometría de las clases de equivalencia locales de las compuertas simétricas no es simplemente un subconjunto trivial del de dos cubits en general*, lo que se justifica el estudio en sí de este subconjunto de las operaciones de dos cubits.

### 3.5. Ejemplos

En esta sección aplicaremos el formalismo desarrollado durante este capítulo de la tesis a tres modelos físicos con espacios de Hilbert de tres dimensiones. El primer ejemplo tiene un hamiltoniano de dos cubits con el espacio simétrico como subespacio invariante. Los conceptos de entrelazamiento y poder entrelazador pueden interpretarse literalmente en este caso. El segundo ejemplo es el modelo Likin-Meshkov-Glick, cuyo espacio de Hilbert tiene dimensión tres y es monopartito. Los conceptos de entrelazamiento y poder entrelazador en este caso no pueden interpretarse literalmente, sino a través de la analogía planteada por la representación de Majorana, es decir, un estado está entrelazado si sus estrellas están separadas. En el último ejemplo el sistema es un modelo de dos bosones acoplados en un espacio vectorial de dimensión tres. Si bien este sistema puede presentar entrelazamiento, un estado con estrellas de Majorana antipodales puede representar un estado físicamente separable. Esto será aclarado en la subsección 3.5.3

Aquí calculamos el poder entrelazador para los tres modelos como función de un parámetro independiente y encontramos las condiciones bajo las cuales se pueden generar entrelazadores perfectos (simétricos). Se calcula la entropía lineal  $E(\hat{U}|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle)$  sobre la esfera de Majorana, en donde cada punto representa a un estado separable y el grado de entrelazamiento del estado final producido por una compuerta simétrica  $\hat{U}$  se representa en una escala de colores. También comentamos brevemente algunas características de la distribución del entrelazamiento sobre la esfera de Majorana que resultan interesantes.

#### 3.5.1. Modelo anisotrópico de Heisenberg sin términos cruzados

El modelo de Heisenberg anisotrópico de dos espines viene dado por el hamiltoniano [88]

$$\hat{H}_H = \frac{1}{2} \left( I_x \hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)} + I_y \hat{\sigma}_y^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)} + I_z \hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)} \right), \quad (3.35)$$

en donde los coeficientes  $I_i$  son las constantes de acoplamiento de espines. Este hamiltoniano se compone de los elementos de álgebra de Cartan del grupo  $\mathfrak{su}(4)$ , y por lo tanto tiene una representación irreducible en los espacios simétricos y antisimétrico. La parte simétrica del operador de evolución temporal, en la base de Bell, está dada por

$$\hat{U}_H = \begin{pmatrix} e^{-i(I_x - I_y + I_z)t/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(I_x + I_y - I_z)t/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(-I_x + I_y + I_z)t/2} \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

De la ecuación (3.35), se observa fácilmente que el punto geométrico de las com-

### 3. PODER ENTRELAZADOR DE COMPUERTAS CUÁNTICAS EN ESPACIOS SIMÉTRICOS DE DOS CUBITS Y OPERACIONES EN SISTEMAS DE TRES NIVELES

---

puertas es  $(I_x t, I_y t, I_z t)$ . Por lo tanto, el poder entrelazador es

$$e_p = \frac{2}{15} [\text{sen}^2(I_{xy}t) + \text{sen}^2(I_{yz}t) + \text{sen}^2(I_{xz}t)]. \quad (3.37)$$

Hemos usado la notación  $I_{ij} = I_i - I_j$  para ser más concisos. Note que cuando todas las constantes de acoplamiento son iguales el poder entrelazador es cero, y por ende el modelo isotrópico de Heisenberg no tiene capacidad de entrelazamiento en el subespacio simétrico de dos cubits.

La Fig.3.7(a) muestra el poder entrelazador como función de  $\omega t$  dada la elección de parámetros  $I_y = 0$ ,  $I_z = -I_x = \omega$  (izquierda), y por lo tanto el punto geométrico es  $\omega t(1, 0, -1)$ , paralelo a  $\alpha_1$ . Los valores máximos de  $e_p$  se encuentran en  $\pi/3, 2\pi/3$ , como es de esperarse. El poder entrelazador mínimo tal que la compuerta sea un entrelazador perfecto está en  $\omega t = \pi/2$ .

La esfera al lado derecho muestra la entropía lineal sobre la esfera de Majorana para el caso  $\omega t = \pi/3$  (máximo poder entrelazador). Existen zonas en las cuales la compuerta cuántica no produce entrelazamiento alguno (manchas rojas) mientras que en otras zonas el entrelazamiento producido es máximo (zonas azules). Una propiedad de este patrón es que los estados con entropía lineal máxima (mínima) son cuatro y su distribución forma un tetraedo. Este patrón tetrahédrico se espera siempre para toda compuerta cuántica con  $e_p = 3/10$ , debido a que tienen el mismo punto geométrico y por lo tanto pertenecen a la misma CEL.

#### 3.5.2. Modelo Lipkin-Meshkov-Glick

El modelo de Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) fue propuesto con la finalidad de estudiar interacciones de muchos cuerpos en la física nuclear [87]. También ha sido utilizado para modelar el magnetismo en sólidos moleculares [114, 115] y estudiar fenómenos críticos en condensados de Bose-Einstein [116]. El hamiltoniano que describe a este sistema es

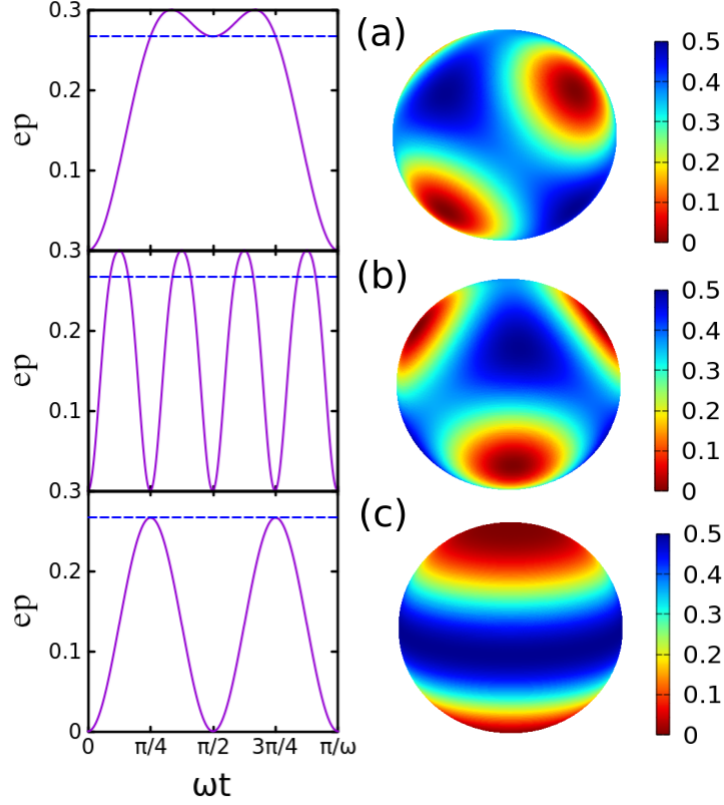
$$\hat{H}_L = \hat{B}\hat{J}_z + g_1\hat{J}_z^2 - g_2\hat{J}_x^2. \quad (3.38)$$

Este hamiltoniano conmuta con el operador de momento angular total  $\hat{\mathbf{J}}$ , por lo que podemos fijar  $j = 1$  y consecuentemente obtener un modelo de tres niveles que pertenece al álgebra  $\mathfrak{su}(3)$ . La forma matricial que adopta este modelo es

$$\hat{H}_L = \begin{pmatrix} B + g_1 - g_2/2 & 0 & -g_2/2 \\ 0 & -g_2 & 0 \\ -g_2/2 & 0 & -B + g_1 - g_2/2 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Los eigenvalores de  $\hat{H}_L$  son :  $\lambda_o = -g_2$  y  $\lambda_{\pm} = g_1 - g_2 \pm \sqrt{B^2 + g_2^2/4}$ . Las compuertas cuánticas correspondientes a este sistema están dadas por  $\exp[-i\hat{H}_L t]$ .

Al enfocarnos en la representación con  $j = 1$ , el modelo LMG es de tres niveles y puede ser mapeado al espacio de dos cubits simetrizado. El mapeo de la base de



**Figura 3.7:** A la izquierda se muestra el poder entrelazador para el modelo (a) Heisenberg anisotrópico, (b) LMG y (c) de osciladores acoplados con interacción Kerr cruzada. La línea horizontal discontinua indica la cota inferior de del poder entrelazador para obtener entrelazadores perfectos ( $e_p = 4/15$ ). A la derecha se muestra la entropía lineal  $E$  de los estados obtenidos al aplicar  $\hat{U}$  a los estados iniciales con constelación de Majorana degenerada (separables).

momento angular al espacio simetrizado es:  $|1\rangle \rightarrow |00\rangle$ ,  $|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ ,  $|-1\rangle \rightarrow |11\rangle$  como en (3.4a). De esta manera, la transformación de la matriz expresada en la base de espín-1 a la base de Bell simetrizada es

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ i & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

La definición de los estados de Bell resulta evidente al ver la matriz anterior. Con esto,

### 3. PODER ENTRELAZADOR DE COMPUERTAS CUÁNTICAS EN ESPACIOS SIMÉTRICOS DE DOS CUBITS Y OPERACIONES EN SISTEMAS DE TRES NIVELES

---

el valor absoluto de la invariante local  $G$  está dado por

$$|G| = \frac{1}{9} [1 + 4G_R \cos(2(g_1 + g_2/2)t) + 4G_R^2], \quad (3.40)$$

en donde

$$G_R = 1 - \frac{g_2^2 \sin^2(Rt)}{2R},$$

$$R = \sqrt{B^2 + g_2^2/4}.$$

El poder entrelazador se obtiene directamente al sustituir  $|G|$  en la ecuación (3.31b).

La figura 3.7(b) muestra el poder entrelazador del modelo LMG para la siguiente elección de parámetros:  $-2B/7 = g_1/2 = g_2/4 = \omega$ , en donde  $\omega$  es una frecuencia dada. El poder entrelazador muestra un comportamiento oscilante en donde los máximos se encuentran en valores cercanos a  $\frac{\pi}{4}(n + 1/2)$  para algún entero  $n \geq 0$ . En el panel a la derecha se encuentra una gráfica de la entropía lineal sobre la esfera de Majorana para un valor de  $\omega t = \pi/8$ . Los patrones de colores muestran una distribución tetrahédrica de los máximos y mínimos de entropía lineal, al igual que en el modelo anterior.

#### 3.5.3. Osciladores acoplados con interacción de Kerr cruzada

La interacción de Kerr no lineal en la óptica cuántica puede moderarse por el siguiente hamiltoniano [89]:

$$\hat{H}_{CK} = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_{CK} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b}. \quad (3.41)$$

Este hamiltoniano conserva el número total de excitaciones  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}$ . Un estado arbitrario de este sistema se encuentra dado por

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-n/2}^{n/2} c_m \frac{\hat{a}^\dagger(n/2+m) \hat{b}^\dagger(n/2-m)}{\sqrt{(n/2+m)!(n/2-m)!}} |0, 0\rangle,$$

$$= \sum_m c_m |n/2 + m, n/2 - m\rangle.$$

En estas expresiones  $|n_a, n_b\rangle$  denota el producto tensorial de estados de Fock con un número de excitaciones  $n_a$  y  $n_b$  en los modos  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$ , respectivamente. Ahora transformemos el hamiltoniano mediante los operadores de Schwinger (véase el apéndice A), para obtener

$$\hat{H}_{CK} = (\omega_a - \omega_b) \hat{J}_z - g_{CK} \hat{J}_z^2. \quad (3.42)$$

De esta manera hemos expresado la interacción Kerr no lineal mediante un hamiltoniano LMG, en donde identificamos los parámetros en (3.42) como  $B = \omega_a - \omega_b$ ,

$g_1 = -g_{CK}$ ,  $g_2 = 0$ . El poder entrelazador se obtiene de manera directa a partir de las ecuaciones (3.18), (3.31b) y (3.40), y está dado por

$$e_p = \frac{4}{15} \text{sen}^2(g_{CK}t). \quad (3.43)$$

La figura 3.7(c) muestra el poder entrelazador de este modelo para la elección de parámetros  $B = g_1/2 = \omega$ . El poder entrelazador tiene un comportamiento oscilante que, a diferencia del modelo LMG anterior, nunca alcanza el poder entrelazador máximo de  $3/10$ . Los eigenvalores de la matriz  $\hat{m}$  correspondiente son  $e^{-ig_{CK}t}$ ,  $e^{-ig_{CK}t}$  y 1. La envoltura convexa de los eigenvalores de  $\hat{m}$  contiene al origen únicamente cuando estos se encuentran en posiciones antipodales, y por ende se obtiene el valor mínimo de  $e_p$  para el cual una compuerta es un entrelazador perfecto. La entropía lineal para  $\omega t = \pi/4$  sobre la esfera de Majorana se encuentra en la parte derecha de la Fig. 3.7(c). El patrón de colores es muy distinto del obtenido en los casos (a) y (b). Las zonas de bajo entrelazamiento se encuentran en posiciones antipodales en la esfera, mientras que las zonas de alto poder entrelazador están sobre el ecuador. Hasta donde hemos verificado, este patrón es el mismo para todas las compuertas cuánticas con  $e_p = 2/15$ , sin importar los detalles del hamiltoniano.

La entropía lineal en este modelo representa la separación entre las estrellas de Majorana pero no necesariamente su entrelazamiento. Por ejemplo, el estado  $|1, 1\rangle$  en el espacio de los bosones acoplados corresponde a un estado  $|j = 1, m = 0\rangle$  en el espacio de una partícula con espín  $j = 1$ . Como vimos, la representación de Majorana de este estado tiene dos estrellas en posiciones antipodales y corresponde a un estado de Bell en el espacio simétrico. Sin embargo, el estado en el espacio de Hilbert del sistema físico es separable, y no tiene entrelazamiento. *Con esto queremos advertir al lector de que los resultados expuestos aquí pueden aplicarse a sistemas de tres niveles en general, sin embargo los conceptos de entrelazamiento y poder entrelazador deben de interpretarse únicamente a través de la representación de Majorana.*

### 3.6. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado el poder entrelazador de compuertas cuánticas de dos cubits que actúan única e irreduciblemente sobre el espacio simétrico. Para ello hemos clasificado las clases de equivalencia locales de las compuertas simétricas, las cuales se pueden representar geoméricamente como un plano con simetría traslacional y hexagonal. En este hemos identificado la cámara de Weyl, que es la mínima extensión del plano que contiene todas las clases de equivalencia locales. Esta descripción geométrica contrasta con la de compuertas de dos cubits en general, la cual tiene una geometría tridimensional y en donde la cámara de Weyl correspondiente es un tetraedro.

También hemos definido una invariante local para las compuertas simétricas, y hemos encontrado una expresión del poder entrelazador en términos de esta. Como en el caso de dos cubits en general, hemos dado condiciones para identificar cuándo una



### 3. PODER ENTRELAZADOR DE COMPUERTAS CUÁNTICAS EN ESPACIOS SIMÉTRICOS DE DOS CUBITS Y OPERACIONES EN SISTEMAS DE TRES NIVELES

---

compuerta simétrica es un entrelazador perfecto y hemos encontrado que  $1/4$  del total de compuertas simétricas corresponde a entrelazadores perfectos; también encontramos que los entrelazadores perfectos tiene un poder entrelazador  $e_p \geq 4/15$ .

Por otro lado, es importante constatar que la geometría de las clases de equivalencia locales para las compuertas simétricas no se obtiene de manera trivial a partir de la correspondiente a compuertas de dos cubits. Esto lo ejemplificamos al notar que hay puntos geométricos para los cuales se puede obtener un entrelazador perfecto de dos cubits, pero cuyo punto geométrico corresponde a una operación local en el espacio simétrico.

El formalismo desarrollado durante este capítulo se ha aplicado a tres modelos físicos de tres niveles, que son el modelo anisotrópico de Heisenberg [88], el modelo Lipkin-Meshkov-Glick [87] y un modelo de dos osciladores acoplados por la interacción de Kerr no lineal en óptica cuántica [89]. En estos encontramos condiciones en los parámetros de los hamiltonianos con las cuales generar entrelazadores perfectos. Si bien nos centramos en los modelos mencionados, este desarrollo teórico puede usarse también en sistemas de estado sólido o análogos ópticos, como arreglos de puntos cuánticos con pocos electrones, usados para el control coherente de estados [117], interferometría de Landau-Zener-Stückelberg [118] o transporte cuántico [119], en condensados de Bose-Einstein de espín-1 [120, 121, 122] o en el estudio de transferencia coherente de poblaciones [123, 124, 125].

# Compuertas cuánticas geométricas en el modelo Lipkin-Meshkov-Glick

---

En el Capítulo 2 construimos compuertas cuánticas geométricas en un sistema optomecánico con simetría dinámica  $SU(2)$  y exploramos compuertas de dos y tres niveles. En el último caso, las compuertas cuánticas más generales pertenecen al grupo  $U(3)$ , por lo que dicho sistema nos restringe sólo a un subconjunto del total de transformaciones posibles. Como explicamos detalladamente en el capítulo anterior, las transformaciones  $SU(2)$  de tres niveles actúan como rotaciones rígidas sobre la constelación de Majorana de un estado cuántico y por ello se pueden considerar como separables en el espacio simétrico de dos cubits.

Aquí estudiaremos las fases geométricas del modelo Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) [87] de tres niveles y las utilizaremos para crear compuertas cuánticas geométricas. Este modelo contiene un término cuadrático de momento angular, el cual rompe la simetría dinámica  $SU(2)$  y nos permite acceder a transformaciones  $SU(3)$  más generales, es decir, aquellas que pueden cambiar la distancia entre las estrellas de Majorana de los estados cuánticos. De esta manera podemos acceder a transformaciones de tres niveles más generales que en el modelo optomecánico estudiado en el Capítulo 2, además de clasificar y cuantificar su no localidad con el formalismo desarrollado en el capítulo anterior.

En este capítulo nos enfocaremos en estudiar las fases geométricas de los modos de Floquet como función de los parámetros del hamiltoniano. Como hemos visto, el espacio proyectivo de tres niveles se representa por dos estrellas de Majorana y la fase geométrica queda determinada por el movimiento de estas. Al usar la fórmula de Fu y Liu obtendremos dos términos que contribuyen a la fase geométrica: uno que es la suma de la fase geométrica de cada estrella por individual, y un segundo término, llamado *fase de correlación* que depende de la distancia entre las estrellas o el entrelazamiento del estado.

Después utilizaremos las fases geométricas para obtener compuertas cuánticas. Para ello exploramos la fase dinámica en función de los parámetros del hamiltoniano para

identificar las zonas en donde esta representa un factor de fase global del propagador y por lo tanto es irrelevante. Con el formalismo desarrollado en el capítulo anterior, clasificaremos las compuertas geométricas obtenidas según las CELs de las compuertas SWAP<sub>12(23)</sub>, Chrestenson y algunas compuertas de fase [90]. Con este material concluiremos el capítulo.

## 4.1. Hamiltoniano del sistema

El modelo LMG que utilizaremos en este capítulo se expresa mediante[126]

$$\hat{H} = \mathbf{B}(t) \cdot \hat{\mathbf{J}} + \lambda \hat{J}_z^2. \quad (4.1)$$

Como de costumbre,  $\mathbf{B}(t)$  es un campo magnético con magnitud y latitud constantes cuya dirección  $\hat{\mathbf{n}}(t) = (\sin \theta \cos(\omega t), \sin \theta \sin(\omega t), \cos \theta)$  precesa con frecuencia  $\omega$  alrededor del eje  $\hat{\mathbf{z}}$ . Por analogía con el modelo optomecánico del Capítulo 2, denotaremos el vector unitario por  $\hat{\mathbf{n}} = (g \cos(\omega t), g \sin(\omega t), \bar{x}_o)/B$ , con  $g = B \sin \theta$  y  $B = \sqrt{\bar{x}_o^2 + g^2}$ . El estudio de las fases geométricas lo realizaremos en función de los parámetros  $g$ ,  $\bar{x}_o$ ,  $\omega$  y  $\lambda$ . En el capítulo anterior utilizamos un modelo LMG para ejemplificar la creación de compuertas de cutrits no locales (ver la Sección 1.5.3). Dicho modelo era independiente del tiempo y por lo tanto los eigenvalores del operador de evolución temporal son de naturaleza meramente dinámica. Siendo más explícitos, para cualquier hamiltoniano  $\hat{H}$  independiente del tiempo, el propagador es

$$\begin{aligned} \hat{U} &= e^{-i\hat{H}t}, \\ &= \sum_n e^{-iE_n t} |n\rangle \langle n|, \end{aligned} \quad (4.2)$$

en donde  $|n\rangle$  es el  $n$ -ésimo eigenestado del hamiltoniano y son el análogo de los estados de Floquet en sistemas con dependencia temporal. Las eigenenergías  $E_n$  en este caso toman el papel de las cuasienergías de los modos de Floquet. Sin embargo, estas cumplen con  $E_n = \langle n | \hat{H} | n \rangle$ , lo que indica su origen meramente dinámico. Por esta razón necesitamos sistemas con dependencia temporal para generar compuertas cuánticas geométricas.

## 4.2. Estados y modos de Floquet

El hamiltoniano (4.1) da origen a un propagador cuya expresión puede obtenerse analíticamente. Para ello escribámoslo alternativamente como

$$\hat{H} = e^{-i\omega t \hat{J}_z} [B(\sin \theta \hat{J}_x + \cos \theta \hat{J}_z) + \lambda \hat{J}_z^2] e^{i\omega t \hat{J}_z}, \quad (4.3a)$$

$$= e^{-i\omega t \hat{J}_z} \hat{h} e^{i\omega t \hat{J}_z}; \quad (4.3b)$$

la definición de  $\hat{h}$  resulta evidente al ver estas expresiones. Se puede observar que el hamiltoniano así escrito está en términos de una rotación sobre el eje  $\hat{\mathbf{z}}$  del operador independiente del tiempo  $\hat{h}$ . Para encontrar el propagador transformemos nuestro marco de referencia a uno en donde el hamiltoniano sea estacionario. El procedimiento para calcular el operador de evolución temporal se muestra en detalle en el Apéndice 2. El propagador es entonces

$$\hat{U} = e^{-i\omega t \hat{J}_z} e^{it \hat{H}_F}, \quad (4.4)$$

en donde hemos definido  $\hat{H}_F = \hat{h} - \omega \hat{J}_z$ . Explícitamente, el operador  $\hat{H}_F$  es

$$\hat{H}_F = \mathbf{R}(t) \cdot \hat{\mathbf{J}} + \lambda \hat{J}_z^2. \quad (4.5)$$

En esta expresión hemos definido el vector  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{B}(t) - \omega \hat{\mathbf{z}}$  con magnitud  $R = \sqrt{(\bar{x} - \omega_o)^2 + g^2}$ .

El hamiltoniano (4.1) es periódico en el tiempo con periodo  $T$  igual a  $2\pi/\omega$ . Por el teorema de Floquet, basta conocer el propagador  $\hat{U}(t)$  a tiempos  $0 \leq t \leq T$  para conocerlo a cualquier tiempo  $t \geq 0$ . Matemáticamente, esto es [61]

$$\hat{U}(t + nT) = \hat{U}(t) \hat{U}^n(T). \quad (4.6)$$

Por otro lado, en un sistema periódico el propagador puede escribirse como  $\hat{U}(t) = \hat{P}(t) e^{-i\hat{G}t}$ , en donde  $\hat{P}(t)$  tiene periodo  $T$  y el operador  $\hat{G}$  se encuentra determinado por  $\hat{U}(T) = e^{-i\hat{G}T}$ . Al comparar (4.2) con estas expresiones, es fácil deducir que

$$\hat{P}(t) = e^{-i\omega t \hat{J}_z}, \quad (4.7)$$

$$\hat{G} = \hat{H}_F. \quad (4.8)$$

La forma matricial de  $\hat{H}_F$ , expresada en la base de momento angular  $|j, m\rangle$  con  $j = 1$ , será de vital importancia más adelante, por lo que daremos su forma explícita:

$$\hat{H}_F = \begin{pmatrix} \lambda + \Delta & g/\sqrt{2} & 0 \\ g/\sqrt{2} & 0 & g/\sqrt{2} \\ 0 & g/\sqrt{2} & \lambda - \Delta \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Aquí  $\Delta$  denota una desintonía<sup>1</sup> dada por  $\bar{x}_o - \omega$ . Por lo tanto, el propagador  $\hat{U}(t)$  puede escribirse como

$$\hat{U}(t) = \sum_i e^{-i\varepsilon_i t} |\varepsilon_i(t)\rangle \langle \varepsilon_i(t)|. \quad (4.10)$$

Los elementos  $|\varepsilon_i(t)\rangle$  ( $i = 1, 0, -1$ ) se denominan estados de Floquet. Estos están determinados por los modos de Floquet

$$|\varepsilon_i\rangle = e^{i\omega t \hat{J}_z} |\varepsilon_i(t)\rangle \quad (4.11)$$

<sup>1</sup> *Detuning* es el término comúnmente usado en inglés.

#### 4. COMPUERTAS CUÁNTICAS GEOMÉTRICAS EN EL MODELO LIPKIN-MESHKOV-GLICK

---

que son los eigenestados de  $\hat{U}(T)$  con eigenvalores  $e^{-i\varepsilon_i T}$ . Como se explica en la sección 2.3, los coeficientes  $\varepsilon_i$  se denominan cuasienergías y son los eigenvalores de del hamiltoniano de Floquet[61]. Notemos que la fase que adquieren los modos de Floquet después de una evolución cíclica es  $-i\varepsilon_i T$ . Como se explica en la sección 1.5, la fase total de un estado que evoluciona en una trayectoria cerrada en el espacio proyectivo es igual a la suma de la fase geométrica y la fase dinámica. Aplicando esto a los modos de Floquet, obtenemos

$$\varepsilon_i T = - \int_0^T \langle \varepsilon_i(t) | \left( i \frac{d}{dt} - \hat{H}(t) \right) | \varepsilon_i(t) \rangle. \quad (4.12)$$

El término de la derivada temporal corresponde a la conexión de Aharonov-Anandan y contiene la contribución de la fase geométrica a la fase total de los modos de Floquet, mientras que el término restante expresa la contribución de la fase dinámica.

Notemos que solución de la ecuación de Schrödinger obtenida a través del formalismo de Floquet es equivalente al método de las invariantes dinámicas usado por Güngördü *et al.* [40] para obtener compuertas cuánticas mediante holonomías abelianas. El método de las invariantes dinámicas establece que existe un operador  $I$  dependiente del tiempo que cumple con la ecuación Liouville-von Neumann

$$0 = \partial \hat{I} / \partial t + i[\hat{H}_s, \hat{I}], \quad (4.13)$$

en donde  $\hat{H}_s$  es el hamiltoniano del sistema en cuestión. Este operador cuenta con los eigenestados instantáneos  $|\phi(t)\rangle$ , los cuales se encuentran relacionados por una transformación de norma con la solución de la ecuación de Schrödinger del sistema  $|\psi(t)\rangle = e^{-i\varepsilon} |\phi(t)\rangle$ . Una conjetura viable de  $I$  para nuestro modelo es  $e^{-i\omega t \hat{J}_z} \hat{H}_F e^{i\omega t \hat{J}_z}$ , que puede verificarse directamente cumple con la ecuación de Liouville-von Neumann. Los eigenestados instantáneos de  $\hat{I}$  están dados por (4.10). Por ende, nuestro enfoque de computación cuántica es equivalente al empleado basado en encontrar las invariantes dinámicas del sistema. No obstante, a diferencia del trabajo de Güngördü *et al.*[40] nosotros nos enfocamos en un sistema de tres niveles o cutrit, mientras que ellos estudian sistemas de uno y dos qubits.

La forma explícita de las cuasienergías  $\varepsilon_i$  resulta muy complicada y no será mostrada aquí. No obstante, existe una manera implícita pero compacta de expresarlas. Para ello usemos el hamiltoniano auxiliar con traza cero  $\hat{H}$  dado por

$$\hat{H} = \hat{H}_F - \frac{2\lambda}{9} \mathbb{1}. \quad (4.14)$$

Debido a que el hamiltoniano auxiliar es una matriz hermitiana de  $3 \times 3$ , la ecuación secular carece del término cuadrático y tiene la forma [127]

$$\bar{\varepsilon}^3 - \frac{C_2}{2} \bar{\varepsilon} - \frac{C_3}{3} = 0. \quad (4.15)$$

Los eigenvalores son entonces la solución de la cúbica, dados por

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\beta}{\sqrt{3}} \text{sen}(\vartheta + \pi/3) \quad (4.16a)$$

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{\beta}{\sqrt{3}} \text{sen}(\vartheta - \pi/3) \quad (4.16b)$$

$$\bar{\varepsilon}_{-1} = -\frac{\beta}{\sqrt{3}} \text{sen}(\vartheta) \quad (4.16c)$$

$$C_2 = \text{Tr}(\hat{H}_T^2) \equiv \frac{\beta^2}{2} \quad (4.16d)$$

$$C_3 = \text{Tr}[\hat{H}_T^3] = \frac{\beta^3}{4\sqrt{3}} \text{sen}(3\vartheta).$$

Los eigenvalores  $\bar{\varepsilon}_i$  con  $i = 1, 0, -1$  están ordenados en orden ascendente con los índices. Debido a que el hamiltoniano auxiliar y el considerado en este estudio difieren por un múltiplo de la matriz identidad, las cuasienergías buscadas pueden expresarse como

$$\varepsilon_i = 2\lambda/9 + \bar{\varepsilon}_i. \quad (4.17)$$

### 4.3. Fases geométricas de los estados de Floquet

Estudiemos ahora las fases geométricas de los estados de Floquet del sistema. La fase total adquirida después de un periodo  $T$  por un modo de Floquet es

$$-\varepsilon_i T = \alpha_i + \gamma_i m, \quad (4.18)$$

en donde  $\alpha_i$  y  $\gamma_i$  son las fases dinámicas y geométricas del  $i$ -ésimo modo de Floquet. Como se observa de la ec.(4.12), la fase dinámica del sistema es

$$\alpha_i = -\int_0^T \langle \varepsilon_i(t) | \hat{H} | \varepsilon_i(t) \rangle dt.$$

El hamiltoniano cumple con la relación  $\hat{H} = \omega \hat{J}_z + e^{-i\omega t \hat{J}_z} \hat{H}_F e^{i\omega t \hat{J}_z}$ . De esta manera la fase dinámica del sistema es

$$\alpha_i = -2\pi \langle \varepsilon_i | \hat{J}_z | \varepsilon_i \rangle - \varepsilon_i T. \quad (4.19)$$

El segundo término en esta ecuación corresponde a la fase total del modo de Floquet. De esta manera, puede verse fácilmente que la fase geométrica de  $|\varepsilon_i\rangle$  es

$$\gamma_i = 2\pi \langle \varepsilon_i | \hat{J}_z | \varepsilon_i \rangle. \quad (4.20)$$

La fase geométrica está dada por el valor de expectación del operador de momento angular sobre el eje  $\hat{\mathbf{z}}$ .

#### 4. COMPUERTAS CUÁNTICAS GEOMÉTRICAS EN EL MODELO LIPKIN-MESHKOV-GLICK

---

La expresión (4.20) puede escribirse como  $\gamma_i = 2\pi(|a_i|^2 - |c_i|^2)$  en donde  $a_i$  y  $c_i$  son las amplitudes de probabilidad de los elementos  $|1\rangle$  y  $|-1\rangle$ . Al usar  $\hat{H}_F |\varepsilon_i\rangle = \varepsilon_i |\varepsilon_i\rangle$  y la ec. (4.9) podemos expresar la fase geométrica como

$$\gamma_i = 4\pi \frac{g^2 \Delta (\varepsilon_i - \lambda/3)}{[(\lambda/3)^2 - \Delta^2 + 2(\lambda/3)\varepsilon_i + \varepsilon_i^2]^2 + g^2 [(\lambda/3)^2 + \Delta^2 - 2(\lambda/3)\varepsilon_i + \varepsilon_i^2]}. \quad (4.21)$$

Se puede observar que para  $g$  igual a cero la fase geométrica es nula. Este comportamiento es de esperarse, debido a que la dependencia temporal del hamiltoniano se pierde cuando  $g = 0$ , y por lo tanto los modos de Floquet son estados estacionarios que no adquieren fase geométrica. Por otra parte, en el límite de  $\lambda$  igual a cero, la fase geométrica debe de tomar la forma  $\pm 2\pi(1 - \cos \theta)$  o cero, para los modos  $|\varepsilon_{\pm 1}\rangle$  y  $|0\rangle$ , respectivamente. Para ver esto notemos que las cuasienergías  $\varepsilon_i$  son simplemente  $\pm R$  ( $i = \pm 1$ ) y  $0$  ( $i = 0$ ). Al sustituir estos valores de las cuasienergías en (4.21), obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma_{\pm 1} &= \mp 2\pi \left( 1 - \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + g^2}} \right), \\ &= \mp 2\pi \Omega, \end{aligned}$$

para  $|\varepsilon_{\pm}\rangle$ , como esperábamos.

Los estados de tres niveles tienen dos estrellas de Majorana. Del movimiento de ellas depende la fase geométrica de los modos de Floquet. Como explicamos en el Apéndice C, es posible expresar la fase geométrica de la siguiente manera

$$\gamma_i = \gamma_i^{(o)} + \gamma_i^{(c)}. \quad (4.22)$$

El término  $\gamma_i^{(o)}$  es igual a  $-\sum_k \frac{1}{2} \Omega_k^{(i)}$ , es decir, la suma de los ángulos sólidos subtendidos por cada estrella de Majorana sobre la esfera de Bloch [86, 128]. El segundo término es

$$\gamma_i^{(c)} = \frac{1}{2} \oint \frac{\mathbf{u}_1^{(i)} \times \mathbf{u}_2^{(i)} \cdot d(\mathbf{u}_2^{(i)} - \mathbf{u}_1^{(i)})}{3 + \mathbf{u}_1^{(i)} \cdot \mathbf{u}_2^{(i)}}, \quad (4.23a)$$

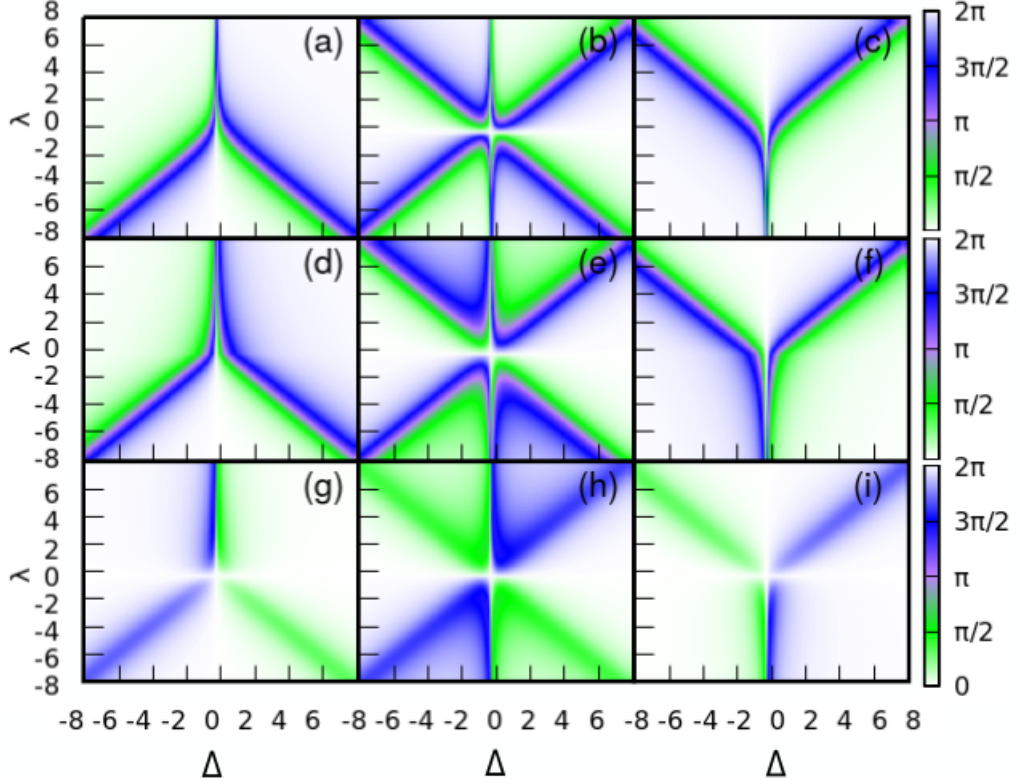
$$= \frac{1}{2} \oint C(\mathbf{u}_{12}^{(i)}) \Omega(d\mathbf{u}_{12}). \quad (4.23b)$$

En la segunda expresión  $C(\mathbf{u}_{12}^{(i)})$  es la concurrencia de los estados y los vectores  $\mathbf{u}_k^{(i)}$  representan la posición de la  $k$ -ésima estrella de Majorana del estado  $|\varepsilon_i\rangle$ ; recordemos que la concurrencia es una medida de entrelazamiento de los estados cuánticos y para estados puros es equivalente<sup>1</sup> a la entropía lineal de entrelazamiento [32]. De esta manera podemos estudiar la contribución de cada término a la fase geométrica total.

En la Fig. 4.1 se muestran las fases geométricas totales (ec.(4.20)), de las estrellas individuales y de correlación de los modos de Floquet (ec.(4.11)). Se observa que las dos

---

<sup>1</sup>La relación con la entropía lineal  $E$  es  $C = \sqrt{2E}$ . Note que  $C \in [0, 1]$  mientras que  $E \in [0, 1/2]$ .



**Figura 4.1:** Fases geométricas (a)-(c) de los modos de Floquet con cuasienergías  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_0$  y  $\varepsilon_{-1}$ , respectivamente. En las gráficas de (d)-(f) se ha graficado  $\gamma_o$  mientras que en (g)-(i) se muestran las fases de correlación  $\gamma_c$ . Note que en  $\lambda = 0$  las fases de  $|\varepsilon_0\rangle$  son triviales.

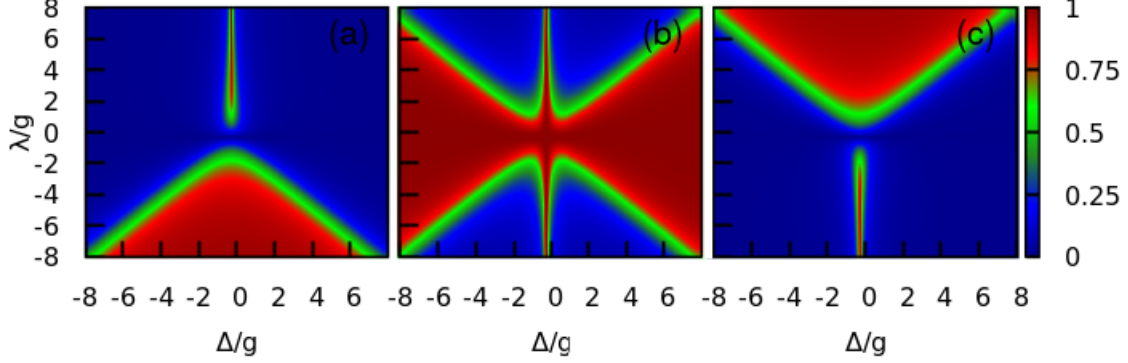
contribuciones a la fase geométrica de los modos  $|\varepsilon_0\rangle$  son cero para  $\lambda = 0$ . En ese caso  $|\varepsilon_0\rangle$  corresponde a un estado  $|1, 0; \hat{\mathbf{n}}\rangle$ , que no adquiere fase geométrica ante una rotación de  $2\pi$  sobre un eje fijo [6]. De hecho, para todo estado  $|j, m; \hat{\mathbf{n}}\rangle$ , como se discute en el Apéndice A, la única contribución a la fase geométrica proviene del término  $\gamma^{(o)}$ , debido a que las estrellas de Majorana se encuentran en un mismo sitio o tienen posiciones antipodales, por lo que el producto cruz en  $\gamma_i^{(c)}$  (ec. (4.23a)) es siempre cero.

Para darle más sentido a los patrones en la Fig.4.1 veamos las gráficas de la concurrencia de los estados  $|\varepsilon_i\rangle$  en la Fig.4.2. Notemos que las zonas de alta concurrencia (rojas) coinciden con zonas de fase geométrica trivial, tanto de estrellas individuales y de correlación. Los estados  $|\varepsilon_i\rangle$  con alta concurrencia tienen estrellas de Majorana en posiciones casi antipodales, por lo que son muy parecidos a estados del tipo  $|1, 0; \hat{\mathbf{n}}\rangle$ , que no adquieren fase geométrica ante rotaciones de  $2\pi$ .

Se observa también que las zonas de baja concurrencia (azules) coinciden con zonas de fase geométrica nula para  $|\Delta/g| \gtrsim 2$ . Tomemos por ejemplo las fases y la con-



#### 4. COMPUERTAS CUÁNTICAS GEOMÉTRICAS EN EL MODELO LIPKIN-MESHKOV-GLICK

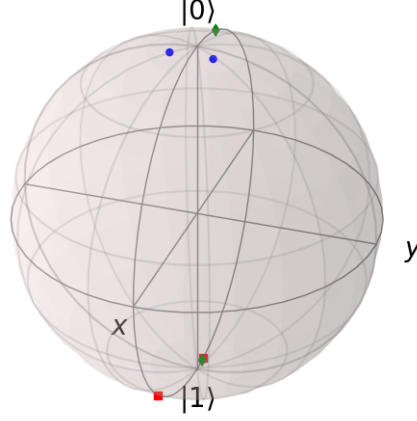


**Figura 4.2:** Concurrencia de los modos de Floquet (a)  $|\varepsilon_1\rangle$ , (b)  $|\varepsilon_0\rangle$  y (c)  $|\varepsilon_{-1}\rangle$  en el plano  $\Delta - \lambda$ . Hemos fijado  $\omega = 3.5g$ .

currencia del modo  $|\varepsilon_1\rangle$ ; panel (a) en Fig.4.2. En este caso, las estrellas de Majorana del modo de Floquet se encuentran casi degeneradas, debido a que la concurrencia es proporcional a la separación entre las estrellas. La condición  $|\Delta/g| \gtrsim 2$  hace que la componente de  $\hat{H}_F$  proporcional a  $J_x$  sea despreciable. Por esto y el hecho de que  $|\varepsilon_1\rangle$  tiene el eigenvalor más alto, las estrellas de Majorana giran alrededor del eje  $\hat{z}$  cerca del polo norte, por lo que el ángulo subtendido por estas es casi nulo. En la Fig.4.3 se muestran las estrellas de Majorana para  $\Delta/4 = \lambda/7 = g$ , que están ambas localizadas cerca del polo norte (azules), y por ende la fase geométrica que adquiere el estado es muy pequeña. También mostramos los pares de estrellas para  $|\varepsilon_0\rangle$  (rojas) y  $|\varepsilon_{-1}\rangle$  (verdes). Las primeras son el par rojo que está cerca del polo sur, la distancia entre ellas es pequeña y por lo tanto su concurrencia es baja, en concordancia con el recuadro (b) en la Fig.4.2; además su fase de correlación y de estrellas individuales es también baja, como lo sugiere la Fig.4.1. El par de estrellas verdes tiene una configuración antipodal, y por ende es de esperarse que la concurrencia del estado correspondiente sea alta, como se muestra en el panel (c); al estar las estrellas localizadas cerca de cada uno de los polos, sus fases de correlación y estrellas individuales también son pequeñas, como lo sugiere la Fig.(4.1).

Con la información mostrada por la gráfica de las fases geométricas y la concurrencia de los estados, podemos obtener información de su geometría y a su vez tener una imagen intuitiva de cómo la evolución impuesta por el hamiltoniano genera la fase geométrica de los modos de Floquet.

Antes de seguir queremos constatar que los autores que derivaron la fórmula (4.22) enuncian explícitamente que esta es válida bajo la condición adiabática [86]. Sin embargo, esta aproximación no se utiliza en ninguna etapa de la derivación y por lo tanto no hay razón para pensar que esa expresión sea válida sólo para procesos adiabáticos. De hecho hemos verificado numéricamente la validez de dicha fórmula para el problema aquí tratado y los resultados han sido satisfactorios, lo que reafirma su validez para



**Figura 4.3:** Estrellas de Majorana para modos de Floquet con  $\Delta = 4g$ ,  $\lambda = 7g$  y  $w = 3.5g$ . Las estrellas azules corresponden a  $|\varepsilon_1\rangle$ , las rojas a  $|\varepsilon_0\rangle$  y las verdes a  $|\varepsilon_{-1}\rangle$ .

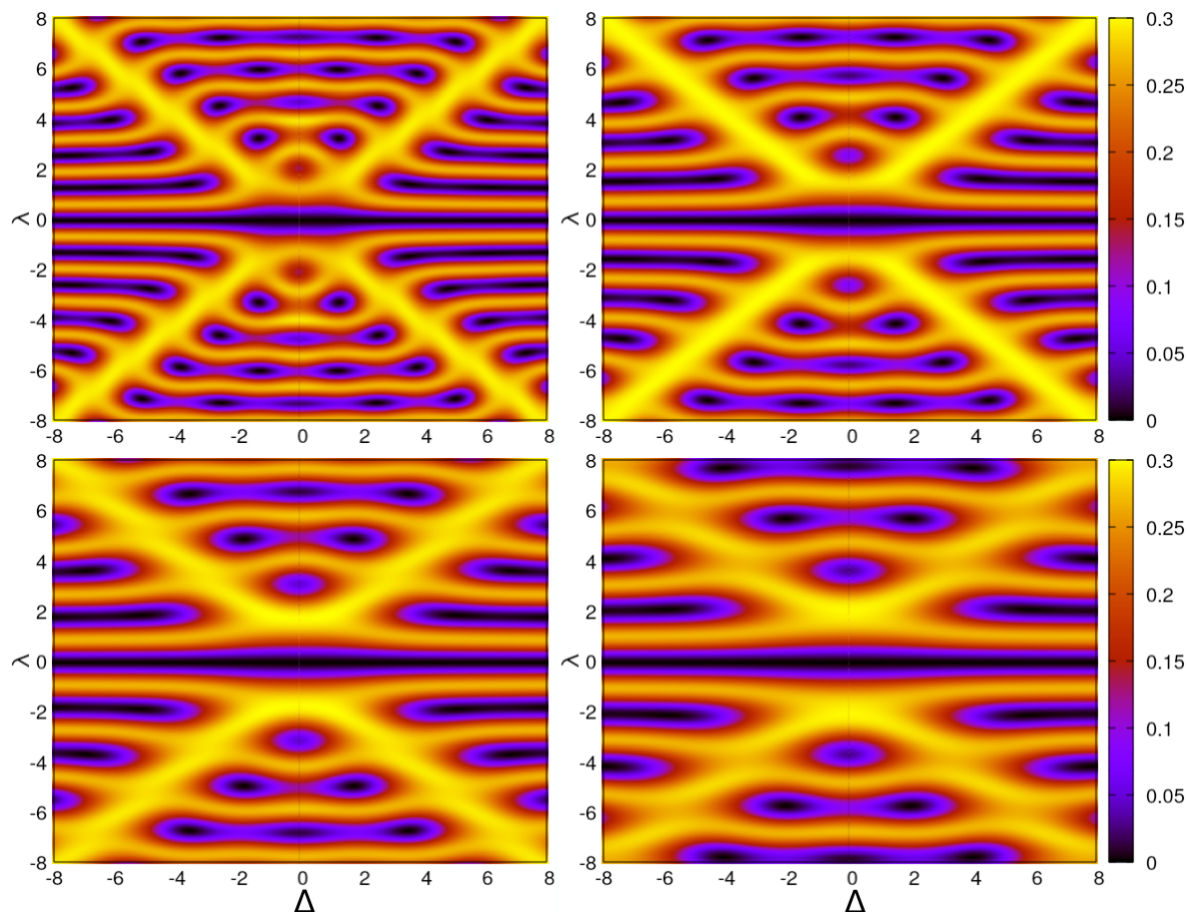
evoluciones cíclicas generales.

## 4.4. Compuertas cuánticas geométricas

En esta sección veremos cómo obtener compuertas cuánticas geométricas en el modelo LMG. Para esto usaremos ajuste fino de parámetros, al igual que en el Capítulo 2. Usaremos la teoría desarrollada en el capítulo anterior para clasificar las compuertas cuánticas de acuerdo al poder entrelazador, que como vimos, es un indicador de las clases de equivalencia no locales en  $SU(3)$ .

### 4.4.1. Poder entrelazador

Comencemos por explorar el poder entrelazador de las compuertas en los planos  $\Delta\lambda$ . En la Fig.4.4 se muestra el poder entrelazador del modelo LMG para cuatro frecuencias  $\omega$  distintas. Se observa una zona de bajo poder entrelazador alrededor de  $\lambda$  igual a cero, lo que es de esperarse debido a que en ese caso las compuertas cuánticas pertenecen o son muy parecidas a las del grupo  $SU(2)$ , que no tienen poder entrelazador. Las zonas amarillas indican un alto poder entrelazador. Resulta curiosa la presencia de dos bandas aparentemente hiperbólicas con alto poder entrelazador en cada una de las gráficas, parecidas a las energías en un sistema de dos niveles. Para altos valores de  $\lambda$  el término  $\hat{J}_z^2$  predomina en el hamiltoniano y se exhibe un carácter oscilatorio de  $e_p$  conforme aumenta  $\lambda$ .



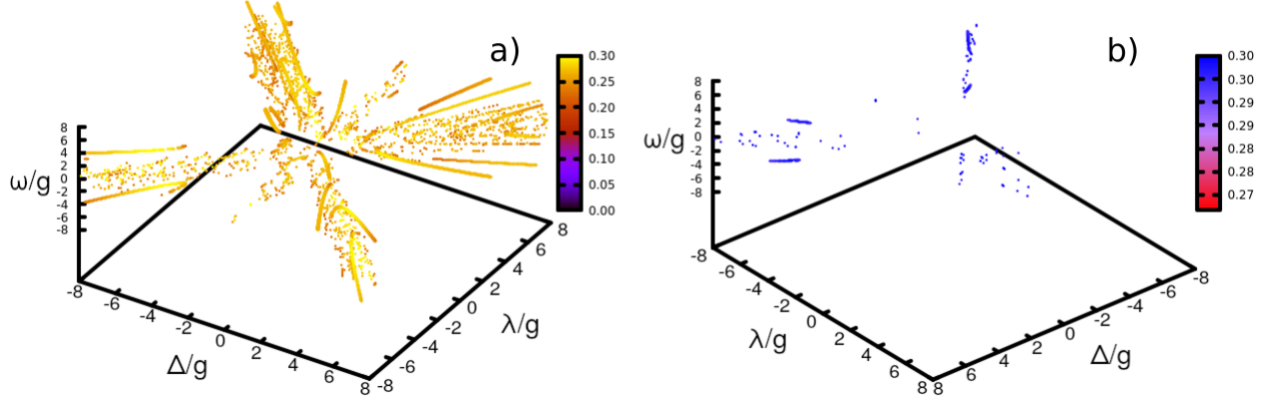
**Figura 4.4:** Poder entrelazador  $e_p$  como función de  $\Delta$  y  $\lambda$ . Los valores de  $\omega$  son:  $2.5g$ ,  $3g$ ,  $3.5g$  y  $4g$ . La barra de colores indica la escala de  $e_p$ .

Esta figura nos muestra que el modelo LMG considerado es un buen candidato para generar compuertas de un cutrit no locales. Busquemos ahora cuáles de ellas son de naturaleza geométrica.

#### 4.4.2. Compuertas geométricas

Las compuertas geométricas corresponden a aquellas en donde la contribución de la fase dinámica a los eigenestados del propagador no afecta al estado más allá de dotarle de una fase global [39]. Encontrar de forma analítica las condiciones para que esto suceda resulta complicado, y por lo tanto procederemos de manera numérica para realizar esta tarea.

Al igual que en el capítulo anterior, tomemos una tolerancia de  $0.005 \cdot 2\pi$  como



**Figura 4.5:** Compuertas geométricas ( $\delta\alpha_{din}/2\pi < 0.005$ ) en el espacio  $(\Delta, \lambda, \omega)$ . En (a) se muestran las compuertas con  $e_p \geq 0.20$  (Chrestenson) mientras que en (b)  $e_p \geq 4/15$ .

diferencia permitida entre las fases dinámicas de los modos de Floquet. La fase dinámica en tal caso difiere a lo mucho por  $1.8^\circ$  y es prácticamente una fase global. Como vimos en el capítulo 2, una fase dinámica global en el propagador no influye en la dinámica cuántica de los estados y por lo tanto es irrelevante.

En la Fig.4.5 se muestran las coordenadas que cumplen con el criterio de compuertas geométricas en el espacio  $(\Delta, \lambda, \omega)$ . En (a) se muestran las compuertas geométricas con  $e_p \geq 0.20$ . Se observa algunas líneas continuas que representan a las compuertas geométricas con este criterio, además de puntos distribuidos aleatoriamente. En (b) Se muestran las compuertas geométricas con  $e_p \geq 4/15$ . Se observan una cantidad de puntos y líneas menor que en el caso anterior, pero aún así zonas suficientes en donde encontrar entrelazadores perfectos holonómicos.

Nos enfocaremos en encontrar tres tipos de compuertas que son importantes en la computación cuántica basada en un cutrit [90]: Chrestenson,  $\text{SWAP}_{(12)13}$  y compuertas de fase. El criterio de clasificación se basa en el poder entrelazador. Este depende de la norma de la invariante local  $|G|$  para compuertas simétricas. Sin embargo, para asegurar que las compuertas son localmente equivalentes su punto geométrico debe de ser el mismo en la cámara de Weyl. Por lo tanto, ubicaremos las compuertas según su poder entrelazador y después obtendremos su punto geométrico para ver si son localmente equivalentes.

Comenzaremos primero por ubicar las compuertas tipo Chrestenson y después las SWAP y compuertas de fase. En la tabla 4.1 se muestran los parámetros necesarios para obtener cada tipo de compuerta, en la cual hemos elegido las primeras cuatro con el poder entrelazador más cercano al de la compuerta cuántica ideal. En todos los casos el poder entrelazador difiere menos de una milésima del poder entrelazador ideal.

4. COMPUERTAS CUÁNTICAS GEOMÉTRICAS EN EL MODELO LIPKIN-MESHKOV-GLICK

---

**Tabla 4.1:** Compuertas cuánticas holonómicas del modelo LMG.

Compuertas cuánticas holonómicas					
Compuerta /Parámetros	$\Delta/g$	$\lambda/g$	$\omega/g$	$e_p$	$e_p(esp)$
Ch	-1.072	0.896	0.096	0.207446	0.207407
	1.072	0.896	-0.096	0.207446	
	-2.544	1.616	-3.104	0.20748	
	2.544	1.616	3.104	0.20748	
Fase	-0.416	1.888	-6.896	0.266667	4/15
	0.416	1.888	6.896	0.266667	
	4.864	4.752	0.464	0.266665	
	-4.864	4.752	-0.464	0.266665	
	-4.112	4.016	-1.376	0.266668	
	4.112	4.016	1.376	0.266668	
SWAP	0.032	3.552	-1.184	0.299902	3/10
	-0.032	3.552	1.184	0.299902	
	0.32	3.616	-1.20	0.299663	
	-0.32	3.616	1.20	0.299663	

### Compuerta Chrestenson:

La compuerta Chrestenson es el análogo de la compuerta Hadamard en el espacio de cutrits [90]. Su forma matricial es

$$Ch = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} \\ 1 & e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Se puede observar que el efecto de esta compuerta sobre los estados base es crear superposiciones uniformes con fases relativas en múltiplos de  $2\pi/3$  [90]. La compuerta Hadamard tiene el mismo efecto en el espacio de un cubit, en donde las fases relativas son múltiplos de  $\pi$ . El poder entrelazador esta compuerta es  $e_p = 0.207407$ .

La matriz  $Ch$  se puede descomponer como  $\hat{K}_1 \hat{A} \hat{K}_2$ , en donde los factores  $\hat{K}$  son elementos del grupo  $SU(2)$  en la representación de espín-1, y la matriz  $\hat{A}$  es la componente no local de la compuerta (ver el capítulo 3). Por lo tanto, la componente no local puede expresarse mediante

$$\hat{A}^{(s)} = \hat{K}_2^\dagger Ch \hat{K}_1^\dagger. \quad (4.25)$$

Aquí  $\hat{A}^{(s)}$  denota la parte simétrica de la matriz  $\hat{A}$ . Para calcular las componentes no locales, definamos las matriz  $\hat{m} = Ch_B Ch_B^T$ , donde el subíndice  $B$  denota que la matriz se encuentra en la base de Bell, y la transformación está definida por  $\hat{Q}^\dagger Ch \hat{Q}$  con

$$\hat{Q}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}i & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Como vimos en el capítulo anterior, los eigenvalores de  $\hat{m}$  son los mismos que los de  $\hat{A}^{(s)2}$ .

La matriz  $\hat{m}$  está dada por

$$\hat{m} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5e^{i\pi/3} & 2\sqrt{2}e^{5i\pi/6} & \sqrt{3}e^{-2i\pi/3} \\ 2\sqrt{2}e^{5i\pi/6} & 2e^{i\pi/3} & 2\sqrt{6}e^{5i\pi/6} \\ \sqrt{3}e^{-2i\pi/3} & 2\sqrt{6}e^{5i\pi/6} & 3e^{i\pi/3} \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Al diagonalizar  $\hat{m}$  obtenemos la matriz  $\hat{F}^{(s)2}$ , que resultan ser

$$\begin{aligned} \hat{F}^{(s)2} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\pi/3}(1 + 2\sqrt{2}i)/3 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\pi/3}(1 - 2\sqrt{2}i)/3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Los elementos de  $\hat{F}$  tienen norma unitaria, como es de esperarse. Nombremos por  $\phi_i$  a las fases de los eigenvalores de  $\lambda_i$ , las cuales se relacionan con los puntos geométricos mediante  $\phi_1 = c_1 - c_2 + c_3$ ,  $\phi_2 = c_1 + c_2 - c_3$ ,  $\phi_3 = -c_1 + c_2 + c_3$ .

En la siguiente tabla 4.2 mostramos las fases de los eigenvalores de  $\hat{F}^2$ , denotados por  $\phi_1, \phi_2$  y  $\phi_3$  para las compuertas clasificadas como Chrestenson (Ch), de fase y SWAP según el poder entrelazador. La compuerta Chrestenson tiene un poder entrelazador menor a  $4/15$  y por lo tanto no es un entrelazador perfecto, lo que también significa que la envoltura convexa formada los ángulos  $\phi_i$  asociados no contiene al origen. Las compuertas holonómicas tipo Chrestenson obtenidas en el modelo LMG están en la tabla 4.2 etiquetadas por números del uno al cuatro. Una inspección detallada de las envolturas convexas formadas por cada conjunto de ángulos  $\phi$  indica que estas no contienen al origen, como es de esperarse para entrelazadores no perfectos.

Además, en dicha tabla mostramos las coordenadas de los puntos geométricos  $c_i$  de la compuerta Chrestenson y las obtenidas en nuestro modelo. Una característica que notar aquí es que las coordenadas  $c_i$  entre las compuertas 1, 2 se intercambian entre sí por un cambio global de signo, y lo mismo sucede para las compuertas 3, 4.

Para tener una visión más clara de los datos obtenidos, hemos mapeado los puntos geométricos de las compuertas a la cámara de Weyl, como se muestra en la Fig.4.6. En esta figura los puntos  $\alpha/2$  and  $\beta$  denotan las coordenadas  $\pi(-1, 1, 0)/2$  y  $\pi(-1, -1, 2)/6$  y  $O$  el origen. Los puntos correspondientes a las compuertas etiquetadas como Chrestenson se muestran en rosa. Se observa que ninguna de los puntos geométricos correspondientes caen dentro del triángulo formado por la línea discontinua azul. Esta zona, como se vio en el capítulo anterior, está conformada por los entrelazadores perfectos, cuyo poder entrelazador está por encima de  $4/15$ . El poder entrelazador de las compuertas tipo Chrestenson es menor a  $4/15$ , y por lo tanto sus puntos geométricos caen fuera del triángulo azul. Un vistazo a la Tabla 4.2 nos muestra que de las compuertas Chrestenson clasificadas según el poder entrelazador, ninguna tiene el mismo punto geométrico que la compuerta ideal, y por lo tanto no son localmente equivalentes.

## Compuerta de fase

Consideremos la siguiente compuerta cuántica de un sistema de tres niveles:

$$Ph = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Este conjunto de compuertas cambia la fase relativa entre los estados de la base de momento angular [90]. Nosotros nos enfocaremos en el caso  $\theta = \pi/3$ , al cual nos referiremos como compuerta de fase. Esta compuerta corresponde a  $\exp(i\phi/3\Lambda_3)$ , en donde

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

**Tabla 4.2:** Compuertas cuánticas holonómicas del modelo LMG. Los ángulos  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  son las fases de los eigenvalores de  $\hat{m}$ . Los puntos geométricos  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  se encuentran en la cámara de Weyl definida por  $\alpha_1$  y  $(\alpha_1 + \alpha_2)/2$ .

	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
Ch	1.231	0	-1.231	-0.615	0.615	0
1	1.433	-0.831	-0.602	-0.716	0.415	0.301
2	1.709	3.972	3.744	-0.716	0.415	0.301
3	0.340	-2.046	-1.436	-1.4	0.853	0.547
4	-3.482	-1.096	-1.705	-1.4	0.853	0.547
<i>Fase</i>	$\pi/3$	$\pi/3$	$-2\pi/3$	$-\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/6$
1	-0.948	1.896	2.193	-1.097	0.623	0.474
2	-2.193	1.245	0.948	-1.097	0.623	0.474
3	1.050	-2.094	-2.098	-1.046	0.524	0.522
4	2.091	-1.047	-1.044	-1.046	0.524	0.522
5	-2.101	1.039	1.062	-1.051	0.531	0.520
6	-1.040	-4.180	-4.204	-1.051	0.531	0.520
SWAP	$-2\pi/3$	$2\pi/3$	0	$-\pi/3$	$\pi/3$	0
1	$-0.011\pi$	$-1.326\pi$	$-0.3378\pi$	$0.332\pi$	$0.006\pi$	$-0.337\pi$
2	$-0.999\pi$	$0.326\pi$	$-0.332\pi$	$0.337\pi$	$-0.006\pi$	$0.337\pi$
3	$0.318\pi$	$-1.006\pi$	$0.312\pi$	$-0.343\pi$	$0.341\pi$	$0.002\pi$
4	$-1.318\pi$	$0.006\pi$	$-0.688\pi$	$-0.344\pi$	$0.341\pi$	$0.003\pi$



es una de las matrices de Gell-Mann.

La matriz  $\hat{F}^2$  de esta compuerta resulta ser

$$\hat{F}^2 = \text{diag} \left( e^{i\pi/3}, e^{i\pi/3}, e^{4\pi i/3} \right). \quad (4.29)$$

La envoltura convexa formada por los eigenvalores de  $\hat{F}^2$  contiene dos puntos en  $\phi_{1,2} = \pi/3$  y otro en  $\phi_3 = 4\pi/3$ . El conjunto de puntos contiene por lo menos un par en posiciones antipodales y por lo tanto la envoltura convexa contiene al origen. Esta compuerta de fase tiene su punto geométrico en las coordenadas  $(-\pi/3, \pi/6, \pi/6)$ , que corresponden al punto rojo en el vértice del triángulo interior azul. Los entrelazadores perfectos con mínimo  $e_p$  se encuentran sobre las líneas discontinuas azules con excepción de la base. Como se puede observar, todas las compuertas de fase caen sobre este borde, ya sea sobre el mismo punto geométrico que  $Ph$  o en el punto rojo contiguo, en concordancia con lo establecido en el capítulo anterior.

Las compuertas de fase 1, 2 corresponden al punto geométrico (rojo) que no está sobre el vértice, mientras que las demás se encuentran en la misma posición que  $Ph$  sobre la cámara de Weyl (punto rojo en el vértice). Como los dos conjuntos de compuertas no caen en zonas equivalentes de la cámara de Weyl, no podemos clasificarlos en la misma clase de equivalencia. No obstante, las compuertas de fase 3, 4, 5, 6 caen en el mismo punto geométrico que  $Ph$  y son localmente equivalentes. Por lo tanto, el modelo LMG tiene la capacidad de formar compuertas de fase de naturaleza geométrica. En cuanto a las compuertas 1, 2, nos son localmente equivalentes a  $Ph$ .

### Compuerta SWAP

Las compuertas tipo de SWAP en sistemas de tres niveles vienen representadas por

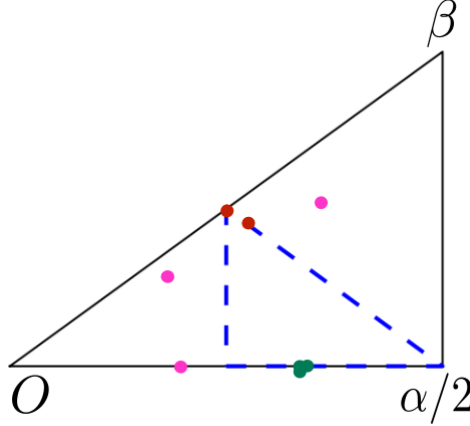
$$SW_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, SW_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Estas compuertas intercambian los elementos  $|1\rangle$  y  $|-1\rangle$  de la base de momento angular y dejan invariante a  $|0\rangle$ . Cabe mencionar que la compuerta  $SW_{13}$  pertenece al grupo  $SU(2)$  y por lo tanto tiene nulo poder entrelazador y no es localmente equivalente a las otras dos compuertas SWAP.

La matriz  $\hat{F}^2$  correspondiente a la compuerta  $SW_{12}$  viene dada por

$$\hat{F}^2 = \text{diag} \left( e^{-i2\pi/3}, 0, e^{i2\pi/3} \right). \quad (4.31)$$

Por lo tanto, el punto geométrico correspondiente es  $\pi(-1, 0, 1)/3$ . Al aplicar las operaciones correspondientes al grupo de Weyl, podemos transformar este punto geométrico al dado por  $\pi(-1, 1, 0)/3$ . En la Fig.4.6 se muestran con puntos verdes las posiciones de los puntos geométricos sobre la cámara de Weyl. Se observa que tanto la compuerta  $SWAP_{12}$  y las encontradas en el modelo LMG tienen los puntos geométricos muy



**Figura 4.6:** Puntos geométricos de las compuertas obtenidas en el modelo LMG. Los puntos morados corresponden a las compuertas Chrestenson, los rojos corresponden a compuertas de fase y los verdes a las del tipo SWAP.

cercanos entre sí. Como se mencionó en el capítulo anterior, todas las compuertas con un máximo poder entrelazador ( $e_p = 3/10$ ), al aplicar las operaciones necesarias del grupo de Weyl, tienen un punto geométrico en  $\pi(-1, 1, 0)/3$ . Por lo tanto, hemos podido encontrar combinaciones de parámetros en el modelo LMG que permiten obtener compuertas tipo  $SW_{12}$  de naturaleza esencialmente geométrica. La compuerta  $SW_{23}$ , al tener un poder entrelazador igual a  $3/10$ , también tiene el mismo punto geométrico que  $SW_{12}$ .

## 4.5. Robustez de compuertas geométricas ante errores estocásticos

Una característica de las compuertas geométricas es su supuesta robustez ante errores paramétricos en el forzamiento del sistema, que denominaremos errores estocásticos [38]. Esta supuesta robustez ante este tipo de ruido ha sido debatida [129] e incluso refutada [130] en propuestas de computación cuántica holonómica, que se basa en la fase de Wilczek-Zee [13]. La razón de ello radica en que el espacio computacional es un subespacio que pertenece a uno mayor. Por ejemplo, las compuertas de un cubit en este caso se obtienen sobre un subespacio degenerado de un sistema de tres niveles. Como mostraron Zheng *et al.* [130], al considerar los errores estocásticos en el forzamiento del sistema, existe una probabilidad de fuga de las funciones de onda en el espacio degenerado hacia el estado excitado. Al comparar la probabilidad de fuga del espacio

degenerado en las compuertas de origen geométrico y dinámica, los autores demostraron que las compuertas geométricas son menos robustas ante el ruido estocástico.

Sin embargo, la propuesta de computación cuántica geométrica basada en la fase abeliana no sufre de este problema, debido a que el espacio de transformaciones es el espacio total del sistema [40] y por ende, no hay fuga de probabilidad fuera del espacio computacional. En este caso se ha comprobado numéricamente que las compuertas de uno y dos cubits de origen geométrico resultan más robustas que las de origen dinámico [38]. Nuestro enfoque de computación cuántico es de este tipo y por lo tanto consideramos que también debe de prevalecer la robustez ante el ruido estocástico.

### 4.6. Conclusiones

Hemos estudiado las fases geométricas de los modos de Floquet del modelo LMG con una dependencia temporal cíclica en los parámetros del sistema. Mediante el formalismo de Liu y Fu, hemos encontrado la contribución de la fase de correlación y de estrellas individuales a la fase geométrica total de los modos de Floquet. Se ha observado que en las zonas de parámetros en donde la fase geométrica no es trivial, tanto la fase de correlación como la de estrellas individuales juegan su parte, sin predominar ninguno de estos dos tipos de contribución. Además hemos obtenido una imagen intuitiva de los mapas de fase geométrica de los modos de Floquet en términos del movimiento de las estrellas de Majorana.

Dado que el propagador del sistema tiene una descomposición espectral en términos de los modos de Floquet, hemos localizado numéricamente las zonas en donde la fase dinámica de estos es una fase global en el propagador y por lo tanto, irrelevante. Dado que nuestro enfoque es numérico, no fue posible determinar con exactitud cuándo la fase dinámica era un factor de fase global. Por lo tanto, en nuestros cálculos consideramos una diferencia máxima de  $\pi/100$  radianes entre las fases dinámicas de los modos de Floquet para considerar a una compuerta cuántica como geométrica. Nuestros resultados indican que existen bastantes zonas de parámetros en donde las compuertas cuánticas obtenidas son de origen meramente geométrico.

De las compuertas holonómicas identificadas en este modelo, enfocamos nuestra atención en las del tipo Chrestenson, de fase y tipo SWAP. Para clasificar las compuertas cuánticas obtenidas en el modelo LMG, utilizamos el poder entrelazador, en donde, las compuertas con aproximadamente el mismo valor de  $e_p$  se clasifican dentro de la misma categoría. Este criterio, no obstante, no indica necesariamente que las compuertas son localmente equivalentes, a excepción de las del tipo  $\text{SWAP}_{12}$ . Al calcular los puntos geométricos de las compuertas obtenidas encontramos que las del tipo Chrestenson, si bien tienen un  $e_p$  muy cercano a la compuerta ideal, no son localmente equivalentes. En el caso de las compuertas de fase, encontramos un conjunto de cuatro compuertas localmente equivalentes a la compuerta ideal buscada. En el caso de las compuertas clasificadas como  $\text{SWAP}_{12}$ , todas tuvieron prácticamente las mismas coordenadas sobre la cámara de Weyl.

Estos resultados muestran la posibilidad de obtener compuertas cuánticas geométricas de importancia en la resonancia magnética nuclear[90] a partir del model LMG. Si bien el paradigma actual de la computación cuántica se basa en la descomposición de toda operación cuántica en compuertas de uno y dos cubits[131], los cutrits ofrecen la posibilidad de reducir el número de unidades físicas necesarias en una computadora cuántica[132, 133]. Además, los resultados obtenidos en la Sección 4.4 muestran la utilidad que tiene el formalismo desarrollado en el Capítulo 3 de clasificar y cuantificar la no localidad de las operaciones de tres niveles en un sistema físico de interés.



# Transiciones topológicas de la fase de Uhlmann para una partícula de espín- $j$ en un campo magnético

---

Hasta ahora hemos estudiado fases geométricas de estados puros y las hemos utilizado para crear compuertas cuánticas geométricas. En este capítulo nos apartaremos de los sistemas puros y estudiaremos la fase de Uhlmann de un sistema en equilibrio térmico. El modelo que estudiaremos en este capítulo es el de una partícula de espín- $j$  en presencia de un campo magnético que precesa con latitud constante y uniformemente alrededor del eje  $\hat{z}$ . Este modelo resulta paradigmático, ya que Berry en su trabajo seminal [6] lo usó para ejemplificar el concepto abstracto de fase geométrica en un sistema físico, obteniendo la elegante fórmula de la fase geométrica en términos del ángulo sólido que la trayectoria del campo magnético traza sobre la esfera de Bloch. Aquí calcularemos la fase de Uhlmann de este sistema en equilibrio térmico. Encontramos que esta fase se encuentra dada por el argumento complejo de los polinomios de Chebyshev del segundo tipo [54] y orden  $2j$ . Para una evolución del campo magnético sobre el ecuador, esto tiene como consecuencia el surgimiento de  $2j$  temperaturas críticas que ocurren en las raíces de los polinomios en las cuales el sistema pasa por una transición topológica. Al usar el Principio del Argumento de Análisis Complejo [91] cada orden topológico se caracteriza por un número de giros, el cual es  $2j$  a temperatura cero y decrece una unidad cada vez que el sistema pasa por una temperatura crítica. Los resultados de este capítulo han sido publicados en el siguiente artículo:

- D. Morachis Galindo, F. Rojas y Jesús A. Maytorena. *Topological Uhlmann phase transitions for a spin- $j$  particle in a magnetic field*. Physical Review A **103**, 042221(2021).

### 5.1. Fase de Uhlmann para un espín $j$ arbitrario en un campo magnético externo

La fase de Uhlmann para un sistema mixto que tiene una evolución cíclica está dada por la expresión:

$$\Phi_U = \arg \left( \text{Tr} \left[ \hat{\rho} \mathcal{P} e^{i \hat{A}} \right] \right), \quad (5.1)$$

en donde  $\hat{\rho}$  es la matriz de densidad del sistema con una descomposición espectral  $\sum_k p_k |k\rangle \langle k|$  y  $\mathcal{P}$  es el operador de ordenamiento de trayectoria. La ecuación (5.1) es válida siempre y cuando la matriz de densidad permanezca isoespectral durante toda la trayectoria cíclica. Esta condición siempre se cumple en este caso, como veremos en seguida. La conexión de Uhlmann  $\hat{A}_U$  viene expresada por [73]

$$\hat{A}_U = \sum_{l,k} \frac{(\sqrt{p_l} - \sqrt{p_k})^2}{p_k + p_l} \langle l | (d|k\rangle) |l\rangle \langle k|, \quad (5.2)$$

en donde  $d$  es la derivada exterior<sup>1</sup>. Esta ecuación ya viene escrita en la eigenbase de la matriz de densidad, por lo que se entiende que los eigenkets tienen una dependencia paramétrica impuesta por la evolución adiabática del hamiltoniano.

El hamiltoniano que consideraremos en este caso es

$$\hat{H} = B \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}}, \quad (5.3)$$

en donde todas las constantes que dan origen a la interacción vienen consideradas en el campo magnético  $\mathbf{B}$ . El vector  $\hat{\mathbf{J}}$  tiene por componentes los operadores de momento angular  $\hat{J}_i$  ( $i = x, y, z$ ) en la representación de espín- $j$ . Tomaremos en cuenta una evolución del campo magnético de magnitud fija que precesa alrededor del eje  $\hat{\mathbf{z}}$  y frecuencia constante. Nótese que el hamiltoniano considerado aquí es equivalente al del Capítulo 2, sin embargo difieren en los detalles de la evolución. El vector unitario  $\hat{\mathbf{n}}$  denota la dirección del campo magnético, que en coordenadas esféricas, viene dado por  $(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ , con  $\theta$  fija y  $\phi$  cambiando de 0 a  $2\pi$  durante la evolución, de manera que el campo magnético gire una sola vez sobre el eje de rotación.

Para modelar los efectos de temperatura, consideraremos un ensamble canónico, que nos da la matriz de densidad térmica no normalizada

$$\hat{\rho} = e^{\beta B \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}}}, \quad (5.4)$$

en donde  $\beta = 1/k_B T$ , y  $k_B$  es el factor de Boltzmann. Hemos eludido la función de partición  $Z$  del sistema debido a que representa un factor de escalamiento de  $\text{Tr}(\hat{M})$ ,

---

<sup>1</sup>La derivada exterior actúa sobre el conjunto de parámetros de los que dependen los eigenestados  $|k\rangle$ .

con  $\hat{M} = \hat{\rho} \mathcal{P} e^{\hat{A}}$ , el cual resulta irrelevante al tomar el argumento en la ecuación (5.1). La matriz de densidad (5.4) tiene la misma eigenbase que el hamiltoniano (5.3). En la representación de los ángulos de Euler, esta viene dada por

$$|j, m; \hat{\mathbf{n}}\rangle = e^{-i\phi \hat{J}_z} e^{-i\theta \hat{J}_y} e^{i\phi \hat{J}_z}. \quad (5.5)$$

Las eigenenergías correspondientes son  $E_m^{(j)} = Bm$ , y de esta manera se observa fácilmente que las probabilidades de ocupación térmicas son  $e^{\beta Bm}/Z$ .

Calculemos ahora la conexión de Uhlmann  $\hat{A}_U$ . Primeramente notemos que el factor que involucra a las probabilidades térmicas de ocupación en la ecuación (5.2) puede escribirse como

$$\frac{(\sqrt{p_m} - \sqrt{p_{m'}})^2}{p_m + p_{m'}} = 1 - \operatorname{sech}[\beta B(m - m')/2]. \quad (5.6)$$

El factor que contiene a la derivada exterior  $d$  puede demostrarse que toma la forma

$$\langle j, m' | d | j, m \rangle = i e^{-i(m'-m)\phi} \sin \theta \langle m' | \hat{J}_x | m \rangle, \quad (5.7)$$

además de un término diagonal, el cual es irrelevante, debido a que las probabilidades térmicas de ocupación se cancelan para  $m = m'$ . Al insertar las ecuaciones (5.6) y (5.7) en la expresión de la conexión (5.2), después de un poco de álgebra, obtenemos

$$\hat{A}_U = -i\eta e^{-i\phi \hat{J}_z} \left( \hat{J}_z \sin \theta - \hat{J}_x \cos \theta \right) e^{i\phi \hat{J}_z} d\phi, \quad (5.8)$$

en donde  $\eta = \sin \theta [1 - \operatorname{sech}(\beta B/2)]$ . Esta expresión de la conexión se puede poner de la forma del hamiltoniano (5.3), en donde el campo magnético también gira sobre el eje  $\hat{\mathbf{n}}$  con una latitud  $\theta - \pi/2$ .

La forma que adquiere la conexión de Uhlmann para este problema en particular hace que el cálculo de la integral ordenada sea sencillo. Para ello primero notemos que dicha integral es la solución de la ecuación diferencial matricial de primer orden o ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{d\phi} \hat{U} = \hat{V} \hat{U}, \quad (5.9)$$

con  $\hat{U}$  y  $\hat{V}$  definidas como  $\mathcal{P} e^{\hat{A}_U}$  y  $\hat{A}_U$ , respectivamente. La solución de esta ecuación diferencial involucra el transformar el espacio de kets a uno que gire conforme lo hace el campo magnético, lo que se explica con detalle en el Apéndice C. Con ello obtenemos la siguiente expresión de la integral ordenada

$$\mathcal{P} e^{\hat{A}_U} = (-1)^{2j} e^{-i2\pi[(\eta \sin \theta - 1)\hat{J}_z - \eta \cos \theta \hat{J}_x]}. \quad (5.10)$$

Para calcular la fase de Uhlmann debemos obtener la traza de la matriz  $\hat{M}$ . Excepto en las representaciones de momento angular más bajo, la forma de esta matriz es muy complicada. Además, para realizar el cálculo de la traza necesitaríamos la forma exacta



## 5. TRANSICIONES TOPOLÓGICAS DE LA FASE DE UHLMANN PARA UNA PARTÍCULA DE ESPÍN- $J$ EN UN CAMPO MAGNÉTICO

---

de  $\hat{M}$  para cada valor de  $j$ , lo que no resulta muy conveniente. Una manera de evitar este embrollo es notar que  $\hat{M}$  es un elemento del grupo de Lie  $SL(2, \mathbb{C})$  en la representación  $(j, 0)$ . La teoría de la representación nos indica que los eigenvalores de  $\hat{M}$  para cualquier  $j$  están determinados por aquellos correspondientes a  $j = 1/2$  [107]. Sean  $\lambda_+$  y  $\lambda_-$  los eigenvalores de  $\hat{M}$  en la representación  $(1/2, 0)$ , por lo tanto, los eigenvalores para valores de momento angular  $j$  mayores están dados por

$$\lambda^{2j}, \lambda^{2j-2}, \dots, \lambda^{-2j+2}, \lambda^{-2j}, \quad (5.11)$$

con  $\lambda = \lambda_+ = \lambda_-^{-1}$ . La última igualdad proviene de que  $\hat{M}$  pertenece a  $SL(2, \mathbb{C})$  y por lo tanto es de determinante uno. Con lo mencionado hasta aquí, la traza de  $\hat{M}$  es

$$\text{Tr} \left[ \hat{\rho} \mathcal{P} e^{\int \hat{A} U} \right] = \frac{\lambda^{2j+1} - \lambda^{-2j-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}. \quad (5.12)$$

Resta ahora encontrar la expresión exacta de el eigenvalor  $\lambda$ . Para ello, diagonalizemos la matriz  $\hat{M}$  en la representación  $(1/2, 0)$ . Esta matriz se encuentra dada por

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\beta B}{2}} \left( \cos(\pi C) + i \sin(\pi C) \frac{\cos \theta}{C} \right) & -i e^{-\frac{\beta B}{2}} \sin(\pi C) \frac{\eta - \sin \theta}{C} \\ -i e^{\frac{\beta B}{2}} \sin(\pi C) \frac{\eta - \sin \theta}{C} & e^{-\frac{\beta B}{2}} \left( \cos(\pi C) - i \sin(\pi C) \frac{\cos \theta}{C} \right) \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

en donde  $C(\theta)$  se define como

$$C(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2 \theta \tanh^2(\beta B/2)}. \quad (5.14)$$

Al diagonalizar la matriz anterior obtenemos los eigenvalores

$$\lambda_{\pm} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}, \quad (5.15)$$

Debido a que la matriz  $\hat{M}$  pertenece al grupo especial lineal, tiene determinante uno y por ende  $\lambda_+ \lambda_- = 1$ , de manera que  $\lambda = \lambda_+ = 1/\lambda_-$ . Por otro lado,  $z(\theta)$  es una variable compleja dada por

$$z = \cosh(\beta B/2) \cos(\pi C) - i \sinh(\beta B/2) \sin(\pi C) \frac{\cos \theta}{C}, \quad (5.16)$$

La función  $z(\theta)$  es una curva cerrada simple en el intervalo de  $\theta \in [0, \pi]$ . Esta propiedad es de fundamental importancia para el análisis que se realizará en las siguientes secciones. Ahora, con los ingredientes obtenidos hasta ahora, la fase de Uhlmann del sistema viene dada por

$$\begin{aligned} \Phi_U^{(j)}(\theta; \beta B) &= \arg \left[ (-1)^{2j} \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2j+1} - (z - \sqrt{z^2 - 1})^{2j+1}}{2\sqrt{z^2 - 1}} \right], \\ &= \arg \left[ (-1)^{2j} U_{2j}(z) \right], \end{aligned} \quad (5.17)$$

en donde  $U_{2j}(z)$  son los polinomios de Chebyshev del segundo tipo en el dominio complejo; nos referiremos a ellos simplemente como los polinomios de Chebyshev para

disminuir la verbosidad. La ecuación (5.17) es válida bajo la aproximación adiabática y también exacta bajo este régimen. El índice superior ( $j$ ) indica que la fase de Uhlmann corresponde a la de una partícula de espín- $j$ . Además, se puede demostrar que la expresión obtenida tiende a la fórmula de ángulo sólido de Berry en el límite de temperatura cero, como se ha reportado también en otros sistemas [6, 20, 65]. Notemos que el resultado obtenido no es simplemente un retrato de fase de los polinomios de Chebyshev dado que el punto  $z(\theta)$  se encuentra sobre una curva, cuya forma depende también del producto de parámetros  $\beta B$ .

La emergencia de los polinomios de Chebyshev en este problema puede rastrearse al hecho de que la matriz  $\hat{M} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  y es un producto de  $\mathcal{P}e^{\int \hat{A}v} \in \text{SU}(2)$  y la matriz de densidad (5.4). Los eigenvalores de esta matriz en la representación siempre tienen la forma  $v \pm \sqrt{v^2 - 1}$ , en donde  $v \in \mathbb{C}$ , y por lo tanto la traza de  $\hat{M}$  para una representación  $(j, 0)$  está en términos de los polinomios de Chebyshev. Dicho resultado también es válido cuando el campo magnético gira  $n$  veces alrededor del eje  $\hat{\mathbf{z}}$ . En dicho caso la integral ordenada de trayectoria resulta ser  $\hat{U}^n$ , con  $\hat{U}$  dada por (5.10), y por ende el producto  $\hat{\rho}\hat{U}^n$  pertenece a  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ . En lo que sigue del capítulo nos enfocaremos únicamente en evoluciones con  $n$  igual a 1.

## 5.2. Transiciones topológicas de la fase de Uhlmann

### 5.2.1. Temperaturas críticas

La fase de Uhlmann obtenida está determinada por el argumento de los polinomios de Chebyshev  $U_{2j}(z)$ . Las raíces de estos polinomios son todas reales,  $2j$  en total, y se encuentran en el intervalo  $(-1, 1)$  [54]. Los ceros de cualquier polinomio  $P_n(z)$  definen puntos en los cuales su magnitud es nula. De esta manera la función argumento de  $P_n(z)$  queda indefinida [134]. A estos puntos se les conoce como singularidades de fase y son una generalidad de los fenómenos ondulatorios. Por ejemplo, en el campo de la óptica su estudio resulta muy relevante, ya que permite encontrar vórtices ópticos los cuales tienen propiedades y aplicaciones interesantes [9].

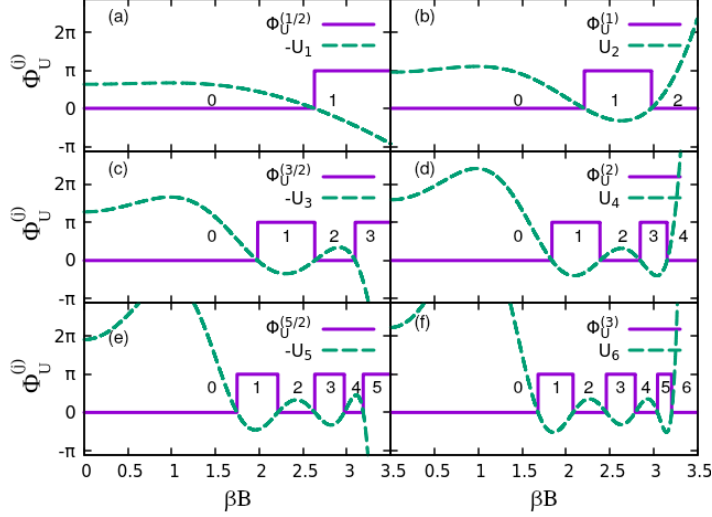
De esta manera, la fase de Uhlmann (5.17) muestra  $2j$  singularidades. Al restringir la evolución del campo al plano ecuatorial,  $\theta = \pi/2$ , la curva  $z(\theta)$  adquiere únicamente valores reales. Como consecuencia, la fase de Uhlmann en dicho caso sólo adquiere valores de cero o  $\pi$ . Las  $2j$  temperaturas críticas  $T_{c,k}^{(j)}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2j$ ) en las cuales ocurren los cambios de fase están determinados por la expresión

$$\cosh(\beta_k B/2) \cos(\pi \operatorname{sech}(\beta_k B/2)) = \cos\left(\frac{\pi k}{2j+1}\right), \quad (5.18)$$

en donde el lado derecho de la ecuación corresponde a la  $k$ -ésima raíz del polinomio  $U_{2j}(x)$ , con  $x = z(\pi/2)$ .

En la Fig.5.1 se muestra la fase de Uhlmann para distintos valores de  $j$  cuando el campo magnético gira sobre el ecuador ( $\theta = \pi/2$ ). Nótese que el signo  $(-1)^{2j}$  que

## 5. TRANSICIONES TOPOLÓGICAS DE LA FASE DE UHLMANN PARA UNA PARTÍCULA DE ESPÍN- $J$ EN UN CAMPO MAGNÉTICO



**Figura 5.1:** Fases topológicas de Uhlmann  $\Phi_U^{(j)}$  (línea continua) y los polinomios de Chebyshev  $(-1)^{2j}U_{2j}$  (línea punteada) como funciones de  $\beta B$  para  $\theta = \pi/2$ . Los paneles a la izquierda representan la fase para espín semientero: (a)  $j = 1/2$ , (c)  $j = 3/2$  y (e)  $j = 5/2$ . Los paneles a la derecha representan la fase para espín entero: (b)  $j = 1$ , (d)  $j = 2$  y (f)  $j = 3$ . Los enteros entre los ceros de los polinomios denotan el número de giros correspondiente a cada orden topológico, y corresponden a los números de Uhlmann (ver la siguiente subsección).

multiplica a los polinomios de Chebyshev hace que la fase de Uhlmann sea  $\pi$  a bajas temperaturas para valores de  $j$  semienteros. En general, el valor de la fase de Uhlmann es cero (fase trivial) o  $\pi$ , y en este sentido la fase es *topológica*. Las transiciones topológicas entre las fases triviales y no triviales tienen lugar a temperaturas (o amplitudes del campo magnético) tales que  $x$  es igual a un cero de los polinomios de Chebyshev. El valor de la fase topológica de Uhlmann está determinado por el signo de  $U_{2j}$  a cierta temperatura y el signo de Pauli  $(-1)^{2j}$ . Como se ha observado en otros sistemas, la fase de Uhlmann se elimina a altas temperaturas ( $\beta B \ll 1$ ) [65]. A bajas temperaturas, la fase de Uhlmann es cero o  $\pi$  para valores de  $j$  enteros o semienteros respectivamente. Esto es de esperarse, debido a que, a partir de las expresiones obtenidas, puede demostrarse que la fase de Uhlmann tiende a la fase de Berry en el límite de temperatura cero. Por ejemplo, el estado base instantáneo del hamiltoniano (5.3) cuando el campo magnético gira una vez sobre el ecuador adquiere una fase de Berry igual a  $\gamma_{-j} = 2\pi j$ , lo que resulta congruente con lo que acabamos de mencionar.

Algo sobresaliente de este resultado es la aparición de múltiples temperaturas críticas, distribuidas de manera no uniforme conforme  $j$  varía. Hay  $2j$  temperaturas críticas,

que caen a temperaturas más altas y más bajas que la correspondiente a  $j = 1/2$ . Por lo tanto, existen ordenes topológicos no triviales a temperaturas apenas mayores en comparación con el caso más sencillo, es decir,  $j = 1/2$ , y que por lo tanto son más robustos ante el ruido térmico. Sin embargo, los ordenes topológicos no triviales no pueden manifestarse a temperaturas arbitrariamente elevadas para valores grandes de  $j$ , dado que las raíces de los polinomios de Chebyshev  $U_{2j}$  se encuentran en el intervalo  $(-1, 1)$  [54].

Ejemplos de sistemas que presentan más de una temperatura crítica pueden encontrarse en la literatura. Viyuela *et al.* [75] predicen la existencia de dos temperaturas críticas en un aislante topológico bidimensional con números de Chern mayores a uno, lo que sugiere la posibilidad de dos transiciones de fase topológicas inducidas por la temperatura.

Cabe mencionar que la fase de Uhlmann del problema aquí propuesto ya había sido estudiada por el mismo Uhlmann en su artículo seminal[14] y por Slater[69]. Sin embargo, en sus trabajos no se da una expresión analítica y cerrada de esta fase y su interés tampoco estaba ligado a las transiciones térmicas topológicas.

Hou *et al.* por su parte, realizaron un trabajo[135] que se traslapa en buena parte con el contenido en este capítulo<sup>1</sup>. No obstante ambos estudios presentan diferencias fundamentales. En ese trabajo los autores también estudian las transiciones térmicas topológicas de una partícula con espín- $j$  en presencia de un campo magnético que puede oscilar  $n$  veces alrededor del eje  $\hat{z}$  a un ángulo  $\theta = \pi/2$ . Mediante un formalismo similar al nuestro expresan la fase de Uhlmann en términos de los elementos diagonales de la matriz  $\hat{M}$ , que involucra a las probabilidades de ocupación térmica y los elementos diagonales de las matrices de Wigner  $d_{mm}^{(j)}$ ; para ver la expresión aludida véase la referencia [135]. Con ello muestran numéricamente la presencia de  $n$  y  $2n$  temperaturas críticas para valores de  $j$  iguales a  $1/2$  y  $1$ , respectivamente. La expresión de la fase de Uhlmann tal cual ellos la reportan no sugiere de manera sencilla la emergencia de múltiples temperaturas críticas para valores de momento angular mayores. Además en dicho trabajo tampoco se hace un análisis que permita asociar un índice topológico a distintas temperaturas, como lo haremos en la siguiente sección. Sin embargo, el lector interesado podrá encontrar en dicho trabajo una propuesta experimental para observar el fenómenos de múltiples transiciones topológicas de la fase de Uhlmann, punto que no es abordado por nosotros.

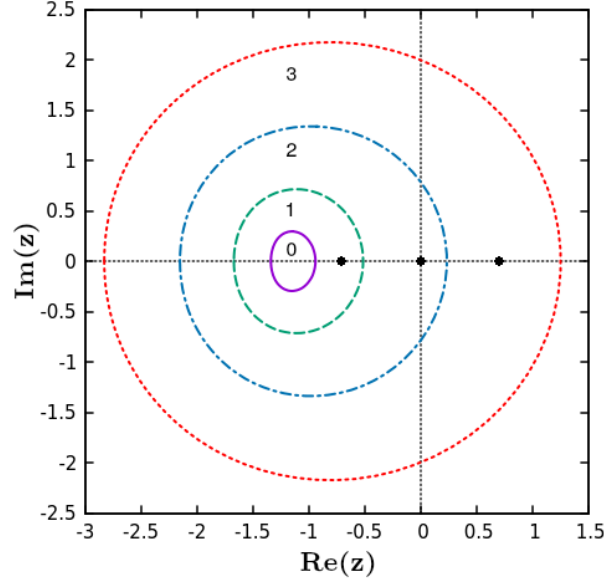
### 5.2.2. Números topológicos de Uhlmann

En esta sección definiremos los números de Uhlmann para caracterizar cada temperatura por un orden topológico. Fijémonos primero en el caso de espín- $1/2$ , en el que sólo hay un temperatura crítica, cuyo valor exacto está dado por  $\beta B = 2 \ln(2 + \sqrt{3})$  (véase la Fig.5.1). Esta temperatura crítica ha sido reportada por Viyuela *et al.* para

<sup>1</sup>Dicho trabajo salió publicado algunos meses después que el nuestro también en Physical Review A.

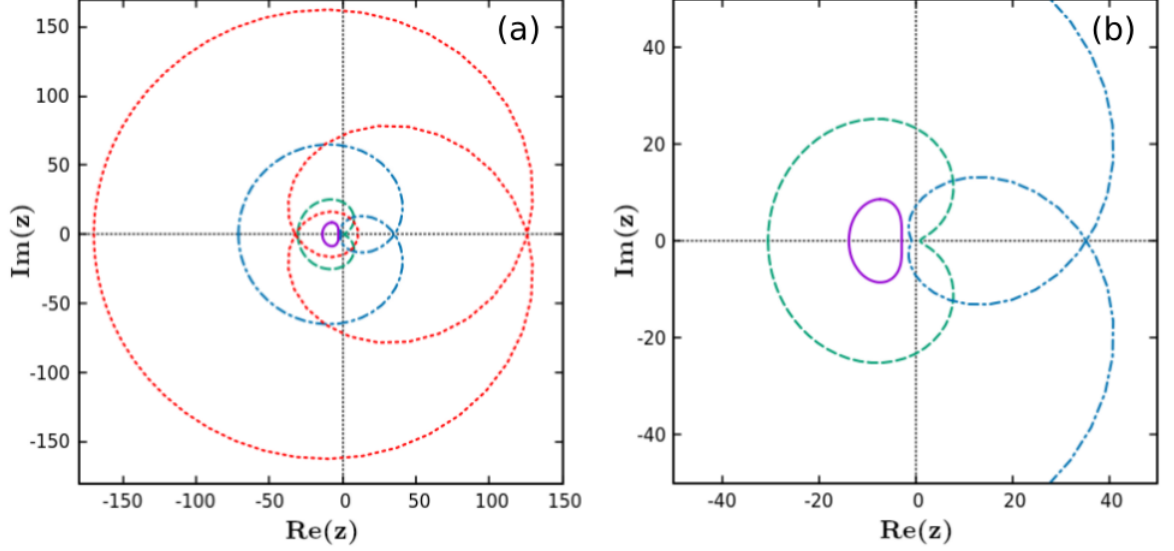
## 5. TRANSICIONES TOPOLÓGICAS DE LA FASE DE UHLMANN PARA UNA PARTÍCULA DE ESPÍN- $J$ EN UN CAMPO MAGNÉTICO

---



**Figura 5.2:** Diagrama de Argand de la curva  $z(\theta)$  para distintos valores de  $\beta B$ . Al considerar  $j = 3/2$ , los puntos marcados sobre el eje real son las raíces del polinomio  $U_3(z)$ . A temperaturas suficientemente altas, la curva  $z(\theta)$  (sólida morada) no encierra ninguna raíz del polinomio. Conforme se reduce la temperatura, la curva se expande y encierra sucesivamente a las raíces. Los números de Uhlmann equivalen al número de raíces encerradas por  $z(\theta)$ .

modelos de aislantes topológicos de dos bandas y superconductores [76]. A temperatura cero, el estado base del sistema adquiere un fase de Berry  $\pi$  y un número de Chern igual a  $+1$ . A temperatura finita  $T < T_{c,1}^{(1/2)}$ , se obtiene la misma fase pero, pero a temperaturas por encima del valor crítico la fase de Uhlmann se hace trivial, y el número índice topológico asociado, llamado número de Uhlmann, es igual a cero. Una pregunta que surge naturalmente es cómo definir los números de Uhlmann en el caso de fases topológicas asociadas a valores de  $j$  mayores. Para dar la definición adecuada observemos la Fig.5.2. Las distintas curvas representan a la curva  $z(\theta)$  (5.16) para distintos valores de  $\beta B$ , y los puntos sobre el eje real representan las raíces de  $U_3(z)$ . La curva más pequeña (sólida morada) corresponde a la curva  $z(\theta)$  a una temperatura mayor que  $T_{c,3}^{(3/2)}$ , mientras que la curva más extensa (roja punteada) se encuentra a una temperatura por debajo de todas las temperaturas críticas. Conforme la temperatura disminuye, la curva  $z(\theta)$  se expande y progresivamente va encerrando a las raíces de  $U_3(z)$ , cada vez que la temperatura pasa por un valor crítico  $T_{c,k}^{(j)}$ . El número de raíces encerradas es cero a altas temperaturas y  $2j$  a temperaturas suficientemente bajas.



**Figura 5.3:** Diagrama de Argand de la curva  $U_3(z(\theta))$  para distintos valores de  $\beta B$ , al igual que en la Fig.5.2. En (a) se muestran todas las curvas, mientras que en (b) se muestran las curvas en excepto aquella en donde  $z(\theta)$  encierra tres raíces de  $U_3$ .

Para dar la definición adecuada de los números de Uhlmann haremos uso de un teorema de variable compleja conocido como *el principio del argumento*. Este resultado nos indica lo siguiente. Sea una curva simple y cerrada  $\Gamma$  en  $\mathbb{C}$  y  $P_n$  un polinomio de orden  $n$  que, por ende, tiene  $n$  raíces. Denotemos por  $D$  al conjunto de puntos  $\Gamma \cup \text{int } \Gamma$ , en donde  $\text{int } \Gamma$  denota el interior de la curva  $\Gamma$ . Entonces, el número de giros alrededor del origen de la curva  $P_n(\Gamma)$  está dado por el número de raíces de  $P_n$  en  $\text{int } \Gamma$ . Este resultado se conoce como el principio del argumento para polinomios[91].

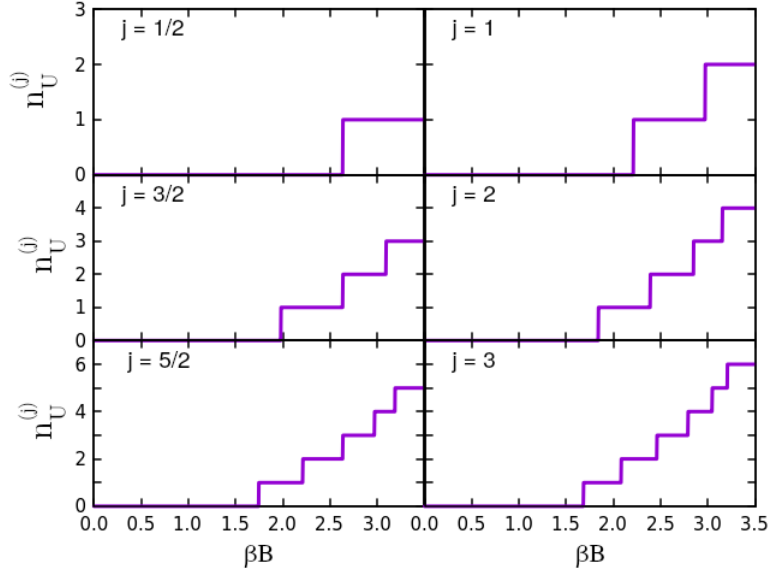
En la Fig.5.3 se muestran las curvas  $U_3(z)$ , en la cual los colores corresponden a las  $z(\theta)$  de la Fig.5.2. Se observa que la curva roja, en la cual  $z(\theta)$  encierra a tres raíces de  $U_3$ , gira tres veces alrededor del origen. En el panel derecho, se encuentra un acercamiento al origen, en el cual se ve más claramente que los números de giros de las curvas son cero (sólido morada), uno (línea segmentada verde) y dos (línea punteada-segmentada azul), conforme al principio del argumento que acabamos de describir.

Con esto definamos los *números de Uhlmann* como el número de giros de la curva  $(-1)^{2j}U_{2j}(z)$ . Dicho número de giros es igual al número de veces que el argumento de número complejo  $(-1)^{2j}U_{2j}(z)$  aumenta de cero a  $2\pi$  en una trayectoria cerrada de  $z$ , y esta fase es simplemente  $\Phi_U^{(j)}(\theta)$ . Por lo tanto, el número de Uhlmann lo hemos definido por

$$n_U^{(j)}(T) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\Phi_U^{(j)}(z(\theta))}{d\theta} d\theta, \quad (5.19)$$

## 5. TRANSICIONES TOPOLÓGICAS DE LA FASE DE UHLMANN PARA UNA PARTICULA DE ESPÍN- $J$ EN UN CAMPO MAGNÉTICO

---



**Figura 5.4:** Números de Uhlmann  $n_U^{(j)}$  para algunos valores de espín  $j$ . Los escalones se localizan en los valores críticos  $\beta_k B$ , que determinan a las temperaturas críticas  $T_{c,k}^{(j)}$  con  $k = 1, 2, \dots, 2j$ .

que es el número de giros de  $(-1)^{2j} U_{2j}(z)$  a una temperatura distinta de algún valor crítico. Estos números son el análogo de los números de Chern de estados puros [3]. La expresión (5.19) es equivalente a la propuesta por Viyuela en el contexto de aislantes topológicos de dos dimensiones [65]. En nuestro caso, seguimos un procedimiento *ad hoc* motivados por la forma específica de la fase de Uhlmann en términos de polinomios.

La Fig.5.4 muestra los números de Uhlmann para distintos valores de momento angular  $j$ . Los escalones se encuentran situados en las temperaturas críticas  $T_{c,k}^{(j)}$ . Nótese que el máximo valor que toma  $n_U^{(j)}$  es  $2j$ , el cual es igual al número de Chern de una partícula de espín- $j$  en el estado base [20]. La figura muestra como la aparición de múltiples temperaturas críticas hace posible las transiciones entre distintos órdenes topológicos del tipo  $2j \rightarrow 2j - 1 \rightarrow 2j - 2 \rightarrow \dots \rightarrow 0$  al incrementar la temperatura.

En el modelo de un aislante topológico bidimensional que presenta dos temperaturas críticas [75], existen tres órdenes topológicos distintos, i.e., uno trivial con  $n_U = 0$  y dos no triviales con valores  $n_U = 1, 2$ , que pueden manifestarse al variar la temperatura. El surgimiento de  $2j + 1$  números de Uhlmann distintos en la partícula de espín- $j$  es un ejemplo aún más excepcional de un sistema con más de un sólo orden topológico.

### 5.3. Fase de Uhlmann para direcciones arbitrarias del campo magnético

En la Fig.5.1 mostramos la dependencia de la fase de Uhlmann con la temperatura para  $\theta = \pi/2$ . Pasemos a analizar ahora el caso en el cual el campo magnético oscila a latitudes en  $\theta \in [0, \pi]$ . La Fig.5.5 muestra el mapa de colores de  $\Phi_U^{(j)}$  para distintos valores de  $j$ . En cada panel,  $2j$  vórtices pueden ser distinguidos sobre la línea  $\theta = \pi/2$ , situados en las raíces de  $U_{2j}$  o de manera equivalente, en las temperaturas críticas. Note que en todos los casos la fase de Uhlmann es trivial a temperaturas suficientemente altas ( $\beta B \ll 1$ ), como es de esperarse. A bajas temperaturas ( $\beta B \gg 1$ ) la fase de Uhlmann debe de converger a la fase de Berry,  $\Phi_U^{(j)}(\theta, \beta B) \rightarrow 2j\pi(1 - \cos \theta)$ . Por ejemplo, en el panel de  $j = 1/2$  a bajas temperaturas, conforme  $\theta$  incrementa de cero a  $\pi$ , la secuencia de colores corresponde a la de la barra en la derecha: la fase de Uhlmann es cero a  $\theta = 0$  e incrementa de manera constante hasta  $2\pi$  al llegar a  $\theta = \pi$ . Llamémosle *ciclo de fase* a esta secuencia de colores. Para los paneles con  $j$  mayor, observamos que a bajas temperaturas los ciclos de fase aparecen  $2j$  veces. Conforme aumentamos la temperatura los ciclos de fase disminuyen por una unidad cada vez que se cruza una temperatura crítica. Este punto puede ejemplificarse al echar un vistazo al panel con  $j = 1$ . A bajas temperaturas, hay dos ciclos de fase conforme  $\theta$  varía de cero a  $\pi$ . Cuando aumentamos la temperatura por encima de un valor crítico  $T_{c,1}^{(1)}$ , la fase de Uhlmann atraviesa un ciclo de fase, y ninguno cuando la temperatura cruza al último valor crítico.

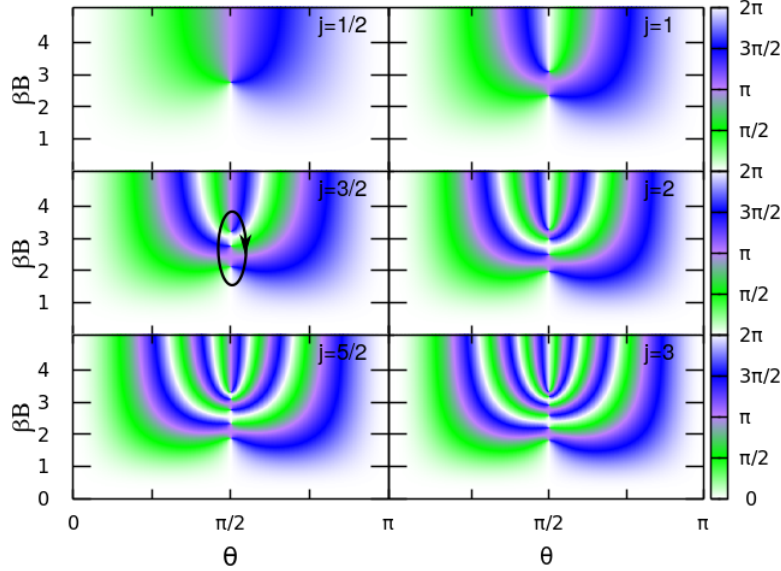
Este comportamiento también puede mostrarse de una manera similar a la usada para ver en acción el principio del argumento por medio de un retrato de fases de una función compleja [134]. Para tomar un ejemplo concreto, consideremos una curva cerrada simple que encierra a las tres singularidades para  $j = 3/2$  en la Fig.5.5, y contemos los ciclos de fase conforme recorremos la curva. Se puede observar que este número es exactamente  $2j$ , el número de ceros encerrados, que iguala al número de temperaturas críticas. Las líneas isocromáticas (por ejemplo, las verdes) aparecen  $2j$  veces. El número de ciclos disminuye cada vez que la trayectoria se encoge al aumentar la temperatura y deja de encerrar a un cero, de acuerdo con la interpretación de los números de Uhlmann sugerida por la Fig. 5.2. Por lo tanto, en este problema, los números de Uhlmann puede ser también obtenidos a partir del número de ciclos de fase de  $\Phi_U^{(j)}$  en la vecindad de las singularidades.

### 5.4. Interpretación física de los números de Uhlmann

Las implicaciones físicas de las múltiples transiciones topológicas caracterizadas por los números de Uhlmann no están claras hasta la fecha. En el caso de sistemas puros, los números de Chern caracterizan estados de borde que tienen propiedades de transporte



## 5. TRANSICIONES TOPOLÓGICAS DE LA FASE DE UHLMANN PARA UNA PARTÍCULA DE ESPÍN- $J$ EN UN CAMPO MAGNÉTICO



**Figura 5.5:** Fases de Uhlmann  $\Phi_U^{(j)}(\theta, \beta B)$  para  $j = 1/2, 1, \dots, 3$ . Hay  $2j$  singularidades de fase a lo largo de la dirección  $\theta = \pi/2$ . El número de Uhlmann que caracteriza un cierto orden topológico puede obtenerse visualmente al encerrar una o más singularidades con una curva cerrada simple y contar el número de veces que se repite una línea isocromática.

más robustas ante imperfecciones del sistema [92]. Para sistemas en equilibrio térmico no se han encontrado propiedades físicas medibles caracterizadas por los números de Uhlmann descritos en este capítulo o, que resultan equivalentes, los propuestos por Viyuela *et. al* [65, 75] en el contexto de aislantes topológicos bidimensionales. Sin embargo, como se ha mostrado por diversos autores, existen definiciones de los números de Uhlmann, a partir de la integral de superficie de la curvatura media de Uhlmann, que han servido para caracterizar transiciones cuánticas de fase y propiedades de sistemas fuera de equilibrio [136, 137, 138]. No obstante, dichas cantidades no son números enteros, lo que difícilmente sugiere interpretarlos como indicadores de observables topológicas.

El modelo de la cadena de Kitaev [139] manifiesta temperaturas críticas en las cuales la fase de Uhlmann cambia abruptamente de cero a  $\pi$ . La distribución de las temperaturas críticas es muy complicada y no se observa una relación clara con la topología de la estructura de bandas del sistema y no ha sido posible establecer una conexión con sus propiedades observables[139].

Por otro lado, Budich y Diehl [70] han notado que la falta de una estructura aditiva de grupo de la fase de Uhlmann introduce ciertas ambigüedades en los números de Uhlmann definidos como el número de giros de una curva en sistemas bidimensionales. En contraste, los autores mostraron que al imponer ciertas restricciones sobre la matriz de densidad, se pueden definir invariantes topológicas no triviales mediante la curvatura

de Uhlmann, las cuales no manifiestan ninguna dependencia con la temperatura, más allá de hacerse cero en el límite de temperatura infinita. Sin embargo, estas últimas invariantes topológicas así definidas no muestran las transiciones críticas a temperatura finita que hacen atractiva a la fase de Uhlmann.

## 5.5. Conclusiones

En esta sección hemos estudiado la fase de Uhlmann de una partícula de espín- $j$  en presencia de un campo magnético que gira lentamente alrededor del eje  $\hat{\mathbf{z}}$ . Obtuvimos una expresión simple y elegante de la fase de Uhlmann como el argumento complejo de los polinomios de Chebyshev del segundo tipo  $U_{2j}(z)$  multiplicados por un signo de Pauli  $(-1)^{2j}$ , en donde  $z$  es función del ángulo polar del campo y de la temperatura. Consecuentemente, la fase de Uhlmann tiene  $2j$  singularidades que implican transiciones de fase topológicas en  $2j$  temperaturas distintas. Esto es notable, dado que anteriormente se habían reportado hasta dos temperaturas críticas para evoluciones equivalentes del campo magnético. Basados en el principio del argumento de variable compleja, derivamos unas invariantes topológicas, llamadas números de Uhlmann, que representan el número de giros asociado al orden topológico del sistema para cierta temperatura. Estos toman valores enteros que se encuentran entre 0 y  $2j$ .

Nuestro estudio sugiere la manipulación térmica de las transiciones topológicas de una partícula de espín- $j$ . Este efecto no trivial ha sido observado en el caso de una partícula de espín-1/2[63] y por lo tanto esperamos que este estudio incentive la verificación experimental del fenómeno aquí predicho.



## Conclusiones

---

En esta tesis doctoral investigamos las fases geométricas en sistemas que pueden modelarse efectivamente mediante sistemas de dos y tres niveles: los primeros se dice que tienen simetría dinámica  $SU(2)$  mientras que los segundos tienen simetría  $SU(3)$ . Nuestra investigación toca diversos temas relacionados con las fases geométricas, que básicamente comprenden lo siguiente: su relación con la interferometría Landau-Zener-Stückelberg, la construcción de compuertas cuánticas geométricas y transiciones térmicas topológicas en sistemas en equilibrio. Por otro lado, en la construcción de compuertas cuánticas geométricas en sistemas con simetría dinámica  $SU(3)$  nos vimos en la necesidad de desarrollar un formalismo para clasificar estas compuertas según su capacidad de formar estados entrelazados a partir de estados separables en el espacio de dos qubits simétricos ante el intercambio de partículas.

En el Capítulo 2 exploramos las fases geométricas en un sistema optomecánico que consta de una cavidad óptica con una membrana dieléctrica oscilante en su interior. Formalmente, el hamiltoniano del sistema corresponde al modelo semiclásico de Rabi con forzamiento lineal cuando hay un sólo fotón en la cavidad. Estudiamos las fases de Berry y Aharonov-Anandan de los modos de Floquet y su relación con el patrón de interferometría Landau-Zener-Stückelberg. Observamos que existen zonas en donde la fase de Aharonov-Anandan parece no estar bien definida, las cuales conciden con mínimos en la probabilidad de transición del estado base hacia el estado excitado que a su vez empatan con degeneraciones en el hamiltoniano de Floquet. A partir de un ajuste fino de parámetros encontramos zonas en las cuales la fase dinámica es irrelevante que por lo tanto nos brindan compuertas cuánticas geométricas, las cuales son relevantes en la computación cuántica geométrica por su mayor robustez ante ruido estocástico de control de origen clásico.

El Capítulo 3 contiene un formalismo con el cual podemos clasificar las compuertas cuánticas del grupo  $SU(3)$  según su capacidad de generar estados entrelazados a partir de estados simétricos separables de dos qubits. Los resultados principales de esta sección son la representación geométrica de las distintas clases de equivalencia locales de las compuertas cuánticas dentro de un triángulo denominado *cámara de Weyl*, la localización de los entrelazadores perfectos en ella, así como una expresión exacta del poder

## 6. CONCLUSIONES

---

entrelazador del sistema. Además obtuvimos que un cuarto de las compuertas cuánticas simétricas de dos cubits corresponden a entrelazadores perfectos, en contraste con el caso de dos cubits no simétrico, en donde los entrelazadores perfectos corresponden a la mitad de todas las operaciones posibles. Esto muestra que el estudio de las operaciones no locales en el caso simétrico no es un caso especial que emerge trivialmente del estudio de las transformaciones generales de dos cubits. La capacidad de generar entrelazamiento en el subespacio simétrico de dos cubits equivale a cambiar la distancia entre las estrellas de Majorana de los estados correspondientes. Dado el isomorfismo entre el subespacio simétrico y un sistema de tres niveles, los resultados aquí obtenidos pueden aplicarse a transformaciones sobre cutrits, en donde las transformaciones no locales son aquellas que cambian la distancia entre el par de estrellas de Majorana de un estado cuántico. Hasta donde sabemos esta interpretación no había sido notada antes, y consideramos que brinda una mayor comprensión de las transformaciones generales de tres niveles, que son de vital importancia en distintos campos de la física.

Posteriormente, en el Capítulo 4 estudiamos las compuertas cuánticas geométricas en el modelo Lipkin-Meshkov-Glick. Determinamos la fase de Aharanov-Anandan en función de los parámetros del sistema y la relación con el entrelazamiento de los modos de Floquet. Obtuvimos condiciones sobre los parámetros para obtener compuertas cuánticas geométricas, centrando nuestra atención en las compuertas de tres niveles del tipo Chrestenson, SWAP y de corrimiento de fase. Para obtener estos últimos resultados hicimos uso del formalismo del Capítulo 3 y hubiera sido en extremo complicado obtenerlos sin esas herramientas.

Por último, en el Capítulo 5 estudiamos la fase de Uhlmann para estados mixtos y que ha recibido bastante atención en la década pasada debido a su posible uso como indicador de propiedades topológicas de la materia robustas ante ruido térmico. El modelo que estudiamos es el de una partícula con espín- $j$  en presencia de un campo magnético. Obtuvimos una expresión exacta de la fase de Uhlmann como el argumento de los polinomios complejos de Chebyshev del segundo tipo. Cuando el campo magnético gira sobre el ecuador, la fase de Uhlmann sólo toma valores discretos de 0 y  $\pi$  en función de la temperatura. Los valores de la temperatura para los cuales se da el salto en la fase de Uhlmann se denominan *temperaturas críticas*. En general, obtuvimos  $2j$  valores críticos para un valor de  $j$ . Mediante el Principio del Argumento de análisis complejo pudimos caracterizar toda temperatura por una invariante topológica que equivale al número de giros de una curva dependiente de la temperatura del sistema. Con ello los cambios discretos de la fase de Uhlmann como función de la temperatura corresponden a transiciones topológicas del sistema. Nuestros resultados tienen como caso especial la temperatura crítica  $T = 2 \ln(2 + \sqrt{3})$  para  $j = 1/2$ , la cual fue observada experimentalmente en un cubit superconductor. Por ello esperamos que nuestros resultados alienten realizar la observación de las múltiples temperaturas críticas para la partícula de espín- $j$ .

## Representación estelar de Majorana

---

En este apéndice introduciremos la representación estelar de Majorana[140] es estados cuánticos, la cual usamos a lo largo de esta tesis. Se tratará de ser suficientemente pedagógicos para que el lector no familiarizado con el tema pueda hacer uso de las herramientas que expondremos aquí. Además se mostrarán distintos espacios isomórficos entre sistemas de dimensión finita, que facilitarán la construcción de la representación de Majorana. También abordaremos la formula de Liu y Fu[86] de la fase geométrica de un sistema de dimensión finita en términos de las trayectorias de las estrellas de Majorana del sistema.

### A.1. Esfera de Bloch

Comencemos primero con la esfera de Bloch de un sistema de dos niveles. Como sabemos, un estado cuántico en este espacio puede representarse de manera general mediante

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (\text{A.1})$$

en donde  $a$  y  $b$  son dos números complejos. Por la interpretación de Born de la mecánica cuántica, estos coeficientes deben de cumplir con la condición de normalización  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Esto reduce a tres las variables independientes necesarias para representar a este sistema. Sin embargo, la fase global que acompaña a un estado cuántico es irrelevante, ya que las propiedades observables de este último no dependen de la primera. Con estos elementos, un estado de dos niveles puede escribirse de manera general como

$$|+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle. \quad (\text{A.2})$$

De esta manera, el estado  $|+\rangle$  puede representarse por un punto sobre una esfera con coordenadas polares  $(\theta, \phi)$ . Las funciones trigonométricas que aparecen como coeficientes aseguran que se cumpla la condición de normalización y la fase que acompaña al ket  $|1\rangle$  se obtiene al considerar la irrelevancia de la fase global de un estado.

## A. REPRESENTACIÓN ESTELAR DE MAJORANA

---

Por otro lado, cada estado de la forma (A.2) es un eigenestado de un hamiltoniano de un sistema de dos niveles, cuya forma general es

$$\hat{H} = B\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (\text{A.3})$$

con  $\hat{\mathbf{n}} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \sin\theta)^T$  y en donde  $B > 0$  sin perder generalidad. El vector  $B\hat{\mathbf{n}}$  puede interpretarse como un campo magnético que actúa sobre una partícula con espín. Es fácil verificar que el estado (A.2) es un eigenestado de (A.3) con eigenvalor  $B$ . El eigenestado con eigenvalor  $-B$  es

$$|-\rangle = \sin\frac{\theta}{2} |0\rangle - \cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1\rangle. \quad (\text{A.4})$$

Los estados  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$  son ortogonales, y las coordenadas de éste último sobre la esfera de Bloch son  $(\pi - \theta, \phi + \pi)$ . Por lo tanto, las coordenadas de dos estados ortogonales en un sistema de dos niveles ocupan posiciones antipodales sobre la esfera de Bloch.

### A.2. Representación de Schwinger de momento angular

Ahora introduciremos la representación de Schwinger de momento angular que resulta de utilidad para comprender cómo construir la representación de Majorana. Como se discute en varios textos[19], existe un isomorfismo entre el espacio generado por  $|j, m\rangle$  y el de dos modos bosónicos acoplados en donde se conserva el número total de partículas. Este espacio viene dado por el producto tensorial de dos espacios de Fock, cuyos elementos son

$$|n_+, n_-\rangle = \frac{\hat{a}_+^{\dagger n_+} \hat{a}_-^{\dagger n_-}}{\sqrt{n_+! n_-!}} |0, 0\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Los operadores  $\hat{a}_\pm$  cumplen con la relación de conmutación canónica  $[\hat{a}_\pm, \hat{a}_\pm^\dagger] = 1$  y conmutan con los del otro subespacio, es decir  $[\hat{a}_+, \hat{a}_-] = 0$ .

De esta manera, el mapeo entre ambos espacios viene dado por

$$|j, m\rangle = \frac{\hat{a}_+^{\dagger(j+m)} \hat{a}_-^{\dagger(j-m)}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0, 0\rangle, \quad (\text{A.6})$$

$$= |n_+, n_-\rangle. \quad (\text{A.7})$$

Por lo tanto, un estado general (A.11) en el espacio de bosones acoplados, toma la forma

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{m=-j}^j \frac{c_m \hat{a}_+^{\dagger(j+m)} \hat{a}_-^{\dagger(j-m)}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0, 0\rangle, \\ &= \sum_{k=0}^{2j} \frac{c_{k-j} \hat{a}_+^{\dagger k} \hat{a}_-^{\dagger(2j-k)}}{\sqrt{(2j-k)!k!}} |0, 0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Esta expresión es una manera alternativa de expresar un estado cuántico con momento angular total  $j$ . Además, como todos los espacios de momento angular  $j$  abarcan todas las posibles dimensiones de espacio de Hilbert discretos, cualquier estado de  $N$  niveles puede representarse mediante la expresión de arriba.

No sólo los estados pueden ser expresados en términos de los operadores bosónicos, sino los operadores de momento angular. Esta representación es conocida como representación de Schwinger[19]. La equivalencia viene establecida por

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+), \quad (\text{A.9a})$$

$$\hat{J}_y = \frac{1}{2i}(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+), \quad (\text{A.9b})$$

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-). \quad (\text{A.9c})$$

Se puede verificar que los operadores así escritos cumplen con las relaciones de conmutación del álgebra  $\mathfrak{su}(2)$ :

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk} \hat{J}_k. \quad (\text{A.10})$$

### A.3. Representación de Majorana

Para sistemas de más de dos niveles resulta un tanto complicado representar a los estados cuánticos por una coordenada en algún espacio, debido a que conforme crece la dimensionalidad del sistema cuántico los espacios involucrados son de dimensión tres o mayor y no pueden visualizarse fácilmente. En este sentido la representación de Majorana es una alternativa que evita de manera muy sagaz este problema, ya que en lugar de recurrir a espacios de alta dimensionalidad representa a los estados como un conjunto de puntos sobre una esfera. Consideremos un sistema cuyo espacio lo generan los estados base con momento angular total  $j$ . Un estado en este espacio se denota por

$$|\psi^{(j)}\rangle = \sum_{m=-j}^j c_m |j, m\rangle. \quad (\text{A.11})$$

Para  $j = 1/2$  los estados son de la forma (A.2) y tienen la representación de Bloch, como es de esperarse.

La idea detrás de asignar un conjunto de puntos sobre una esfera es la siguiente: con los coeficientes de (A.11) construyamos un polinomio, cuyas raíces se encuentran en el plano complejo, y asignemos a cada una una posición sobre la esfera mediante una proyección estereográfica. Notemos que el estado general (A.11) puede escribirse como en (A.8). Esta expresión es un polinomio de orden  $2j$  en los operadores de creación de los modos bosónicos aplicados al estado del vacío  $|0, 0\rangle$ . Por lo tanto podemos expresar



este estado como[86]

$$|\psi\rangle = C_1 \prod_{k=1}^{2j} \left( \hat{a}_+^\dagger + \lambda_k \hat{a}_-^\dagger \right) \quad (\text{A.12a})$$

$$= C_2 \prod \hat{a}_{\mathbf{u}_k}^\dagger |0, 0\rangle. \quad (\text{A.12b})$$

Aquí los coeficientes  $\lambda_k = e^{i\phi_k} \tan(\theta_k/2)$  son números complejos mientras que  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de normalización. Además, en (A.12b)  $\hat{a}_{\mathbf{u}_k}^\dagger = \hat{a}_+^\dagger \cos(\theta_k/2) + \hat{a}_-^\dagger \sin(\theta_k/2)$ , expresión que se obtiene directamente de (A.12a).

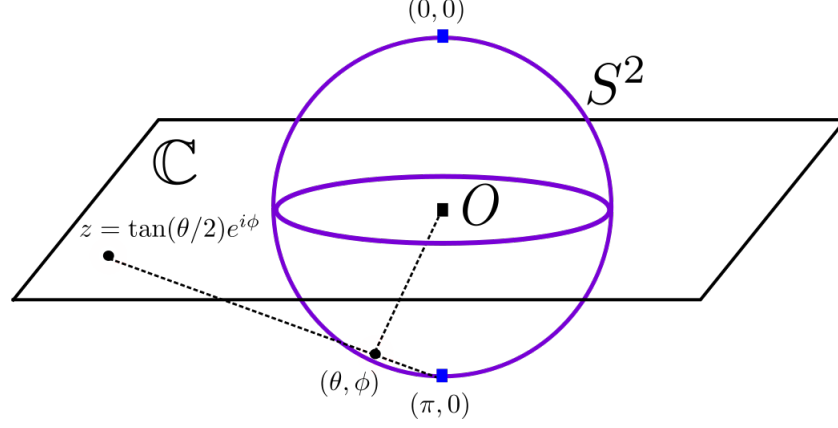
¿Cuál es el significado de estas ecuaciones? En la Fig.A.1 se muestra la proyección estereográfica de un número complejo  $z = \tan(\theta/2)e^{i\phi}$  sobre el plano de Argand y una esfera unitaria que intersecta al plano sobre el ecuador. Al trazar un línea desde la posición de  $z$  al polo sur de la esfera, mediante relaciones trigonométricas básicas podemos demostrar que el punto de intersección sobre la superficie de la esfera tiene coordenadas  $(\theta, \phi)$ . De esta manera, los coeficientes  $\lambda_k$  en la expresión (A.12a) tienen asociados un conjunto de puntos sobre una esfera unitaria. A su vez, en (A.12b) el estado se expresa como el producto de los operadores de creación  $\hat{a}_{\mathbf{u}_k}^\dagger = \hat{a}_+^\dagger \cos(\theta_k/2) + \hat{a}_-^\dagger e^{i\phi_k} \sin(\theta_k/2)$ . Estos operadores conmutan entre sí, y cada uno crea una partícula de espín-1/2 en un estado con vector de Bloch  $(\sin \theta_k \cos \phi_k, \sin \theta_k \sin \phi_k, \cos_k)^T$ . Esto nos indica que un estado cuántico de momento angular  $j$  es simplemente un conjunto simetrizado de  $2j$  partículas de espín-1/2 en distintos estados caracterizados por vectores de Bloch  $(\sin \theta_k \cos \phi_k, \sin \theta_k \sin \phi_k, \cos_k)^T$ . Esta interpretación es válida para sistemas de  $N$  niveles en general, y por lo tanto podemos asignar un conjunto de puntos sobre una esfera a cualquier estado cuántico generado por una base discreta. A esta representación geométrica se le denomina *representación de Majorana*.

Cada punto sobre la esfera se denomina *estrella de Majorana* mientras que al conjunto de puntos se le conoce como *constelación de Majorana*. Las estrellas de Majorana son las soluciones del *polinomio de Majorana* que viene dado por[86, 140]

$$\sum_{k=0}^{2j} \frac{(-1)^k c_{j-k}}{\sqrt{(2j-k)!k!}} z^{2j-k} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Este polinomio se obtiene al comparar (A.12a) con (A.8), en donde los coeficientes  $\lambda_k$  se obtienen al efectuar la factorización. El factor  $(-1)^k$  en (A.13) proviene de haber factorizado el polinomio en (A.8) como  $\prod_k (\hat{a}_+^\dagger + \lambda_k \hat{a}_-^\dagger)$  en lugar de  $\prod_k (\hat{a}_+^\dagger - \lambda_k \hat{a}_-^\dagger)$ . Note que esta convención nos permite interpretar cada factor de (A.12b) como una partícula con espín-1/2 en la dirección  $(\theta_k, \phi_k)$ .

La ecuación (A.13) sugiere que el polinomio de Majorana es de orden  $2j$ . Sin embargo existe la posibilidad de que los  $n < 2j + 1$  coeficientes  $c_{j-k}$  sean cero, lo que resulta en un polinomio de orden  $2j - n$ . En dicho caso se obtienen  $2j - n$  estrellas de Majorana a través de la proyección estereográfica. Las  $n$  estrellas restantes se corresponden a raíces  $z_i$  de magnitud infinita, y por lo tanto se mapean a la coordenada  $(\pi, 0)$ . Pongamos el ejemplo un estado con  $j = 1/2$ , de dos niveles, dado por [1]. Al



**Figura A.1:** Proyección estereográfica de un número complejo  $z \in \mathbb{C}$  sobre la esfera unitaria  $S^2$  centrada en el origen. La coordenada azimutal  $\phi$  es la misma en el plano complejo y sobre la esfera.

comparar con la ecuación (A.2), se observa que este estado tiene coordenadas polares  $(\pi, 0)$ <sup>1</sup>. Además  $\lim_{\theta \rightarrow \pi} e^{i\phi} \tan(\theta/2) \rightarrow \infty$ , lo que indica que el polinomio de Majorana correspondiente tiene una solución en el infinito.

## A.4. Ejemplos

La representación de Majorana es una descripción geométrica del espacio proyectivo de los estados cuánticos. Por ello, dos estados que difieran entre sí a lo mucho por un factor global de fase, tendrán la misma constelación de Majorana. Pongamos ejemplos concretos. El más sencillo es un estado de dos niveles de la forma (A.2). El polinomio de Majorana se observa fácilmente que es  $\cos(\theta/2)z + e^{i\phi} \sin(\theta/2)$ , cuya solución es  $z = \tan(\theta/2)e^{i\phi}$ , como era de esperarse.

Consideremos ahora los eigenestados del hamiltoniano

$$\hat{H} = B\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}}, \quad (\text{A.14})$$

en donde  $B\hat{\mathbf{n}}$  es un campo magnético con dirección  $\hat{\mathbf{n}}$ . El vector  $\hat{\mathbf{J}}$  tiene componentes  $\hat{J}_i$  ( $i = x, y, z$ ), que son los operadores de momento angular en la representación  $j$  o de espín- $j$ . Los eigenestados de este sistema son, en la representación de ángulos de Euler

$$|j, m; \hat{\mathbf{n}}\rangle = e^{-i\phi\hat{J}_z} e^{-i\theta\hat{J}_y} e^{i\phi\hat{J}_z} |j, m\rangle. \quad (\text{A.15})$$

<sup>1</sup>Cuando una raíz está en el infinito la variable azimutal no se encuentra determinada.

## A. REPRESENTACIÓN ESTELAR DE MAJORANA

---

Al usar la representación de Schwinger de los operadores y estados de momento angular, podemos expresar la ecuación anterior como

$$e^{-i\phi\hat{J}_z} e^{-i\theta\hat{J}_y} e^{i\phi\hat{J}_z} |j, m\rangle = \sum_{m=-j}^j \frac{c_m \hat{a}_+^{\dagger(j+m)} \hat{a}_-^{\dagger(j-m)}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0, 0\rangle. \quad (\text{A.16})$$

Mediante las relaciones de conmutación de los operadores bosónicos  $\hat{a}_\pm$  podemos demostrar, después de un poco de álgebra, las siguientes relaciones:

$$e^{-i\phi\hat{J}_z} \hat{a}_\pm^\dagger e^{i\phi\hat{J}_z} = e^{\mp i\phi} \hat{a}_\pm^\dagger, \quad (\text{A.17a})$$

$$e^{-i\theta\hat{J}_y} \hat{a}_\pm^\dagger e^{i\theta\hat{J}_y} = \cos(\theta/2) \hat{a}_\pm^\dagger \mp \sin(\theta/2) \hat{a}_\mp^\dagger, \quad (\text{A.17b})$$

Con estas expresiones, los eigenestados (A.16) toman la forma

$$|\psi\rangle = \frac{e^{-\phi/2}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \left( \cos(\theta/2) \hat{a}_+^\dagger + \sin(\theta/2) e^{i\phi} \hat{a}_-^\dagger \right)^{j+m} \times \left( \sin(\theta/2) \hat{a}_+^\dagger - \cos(\theta/2) e^{i\phi} \hat{a}_-^\dagger \right)^{j-m} |0, 0\rangle. \quad (\text{A.18})$$

Este resultado nos indica que la constelación de Majorana de los eigenestados de (A.14) consiste de  $j+m$  estrellas de Majorana con coordenadas  $(\theta, \phi)$  y  $(j-m)$  estrellas antipodales a las primeras, con coordenadas  $(\theta + \pi, \phi)$ . Una descripción gráfica de esto se puede encontrar en la Fig.A.2(a). Se observan dos puntos sobre una esfera, en donde cada uno representa a un conjunto de  $j+m$  y  $j-m$  estrellas de Majorana respectivamente. Las estrellas de Majorana que se encuentran sobre una misma posición se conoce como estrellas degeneradas.

En general, no es sencillo obtener soluciones analíticas del polinomio de Majorana para un estado general. No obstante, prescindamos de dichas dificultades técnicas para mostrar un conjunto de estados cuyas constelaciones de Majorana corresponden a los sólidos platónicos. Como lo discute Zimba[141], estos estados son un subconjunto de los estados anticoherentes, que tienen propiedades prometedoras en el la computación cuántica holonómica[142]. Los estados que nos interesan son

$$|\psi\rangle_{tet}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( |2, 2\rangle - \sqrt{2} |2, -1\rangle \right), \quad (\text{A.19a})$$

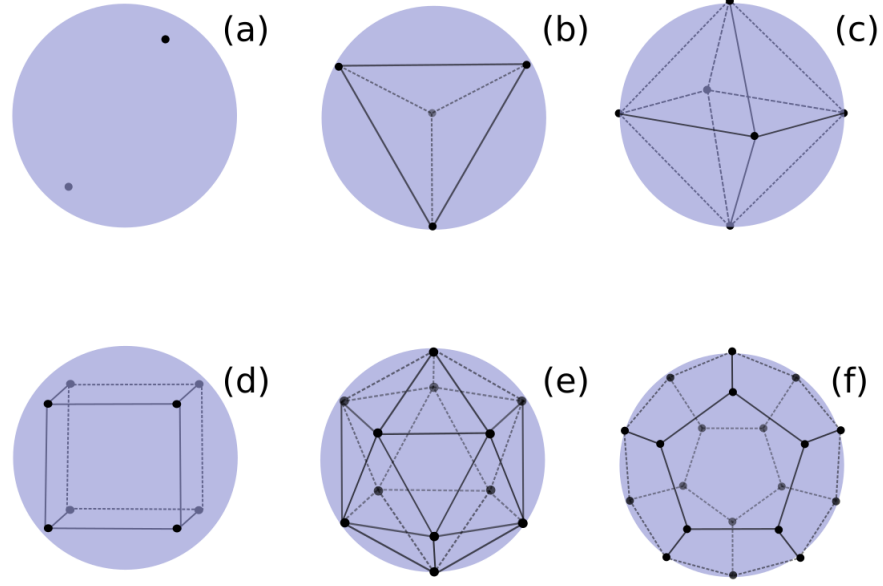
$$|\psi\rangle_{oct}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |3, 2\rangle - |3, -2\rangle \right), \quad (\text{A.19b})$$

$$|\psi\rangle_{cubo}^{(4)} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left( \sqrt{5} |4, 4\rangle + \sqrt{14} |4, 0\rangle + \sqrt{5} |4, -4\rangle \right), \quad (\text{A.19c})$$

$$|\psi\rangle_{icos}^{(6)} = \frac{1}{5} \left( -\sqrt{7} |6, 5\rangle + \sqrt{11} |6, 0\rangle + \sqrt{7} |6, -5\rangle \right), \quad (\text{A.19d})$$

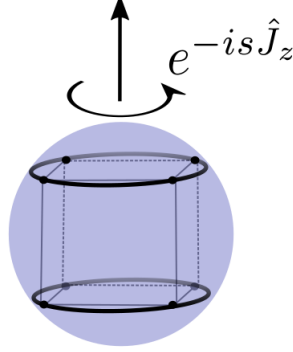
$$|\psi\rangle_{dode}^{(10)} = a |10, 10\rangle + b |10, 5\rangle + |10, 0\rangle - b |10, -5\rangle + a |10, -10\rangle, \quad (\text{A.19e})$$

con  $a = \sqrt{11/38 + 7b^2/38}$ . Los elementos base que hemos utilizados son los kets  $|j, m\rangle$  del momento angular. Las constelaciones de Majorana correspondientes se encuentran



**Figura A.2:** Constelaciones de Majorana de distintos estados. (a) Eigenestado de  $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{J}}$  y (b)-(f) sólidos platónicos para sistemas con  $j$  igual a 2, 3, 4, 6 y 10, respectivamente.

en la Fig.A.2(b)-(f). Resulta interesante ver que si bien a simple vista las expresiones de los estados no sugieren algún tipo de simetría, las constelaciones de Majorana manifiestan claramente simetrías rotacionales, de reflexión e inversión. Tomemos por ejemplo el estado  $|\psi\rangle_{tet}^{(2)}$ . Consideremos el operador unitario  $\hat{R} = \exp(-i2\pi\hat{J}_z/3)$ , que corresponde a una rotación de  $\pi/3$  radianes en sentido antihorario a lo largo del eje  $\hat{\mathbf{z}}$ . Al calcular  $\hat{R}|\psi\rangle_{tet}^{(2)}$  obtenemos  $e^{i\gamma}|\psi\rangle_{tet}^{(2)}$ . La fase global no cambia el polinomio de Majorana del estado, y por lo tanto las estrellas correspondientes deben tener la misma configuración que en  $|\psi\rangle_{tet}^{(2)}$ . El tetrahedro de la Fig.A.2(b) está boca abajo con un eje de simetría  $C_3$  sobre el eje  $\hat{\mathbf{z}}$ , y por lo tanto es de esperarse que la aplicación de  $\hat{R}$  al estado  $|\psi\rangle_{tet}^{(2)}$  deje invariante la constelación de Majorana correspondiente. Al realizar los cálculos explícitamente, se obtiene que  $\gamma = 2\pi/3$ . Hemos denotado este ángulo con  $\gamma$ , para hacer notar su origen geométrico. Como lo discuten Chryssomalakos *et. al.*[142], en una evolución cíclica  $SU(2)$  de los estados la fase dinámica no contribuye a la fase total adquirida por los estados. Además, esta fase no depende de los detalles de la trayectoria en el espacio proyectivo, y por ende es de naturaleza topológica. Esta propiedad los hace atractivos en la computación cuántica holonómica. Otras fases topológicas obtenidas al aplicar distintas rotaciones de simetría  $C_n$  a los estados (A.19) pueden consultarse en la referencia [143].



**Figura A.3:** Constelación de Majorana cúbica y su trayectoria ante una rotación sobre el eje  $\hat{z}$ .

## A.5. Fase geométrica de Liu y Fu

La representación de Majorana nos puede ayudar a visualizar la dinámica de los estados cuánticos en un espacio de Hilbert de dimensión finita. Consideremos la evolución de un estado inicial  $|\psi(0)\rangle$  a un estado final  $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$ , en donde  $\hat{U}$  es un operador unitario continuo en el tiempo  $t$ . Cada estado  $|\psi(t)\rangle$  tiene asociado una constelación de Majorana, por lo que la evolución de  $|\psi(t)\rangle$  puede representarse por las trayectorias de las estrellas de Majorana en la esfera de Bloch. La Fig. A.3 muestra la trayectoria de las estrellas de Majorana del estado  $|\psi\rangle_{oct}^{(4)}$  ante una rotación de las estrellas de Majorana sobre el eje  $\hat{z}$ .

Los estados que sufren una evolución cíclica, es decir, que cumplen con  $|\psi(s)\rangle = e^{i\phi}|\psi(0)\rangle$  tienen el mismo polinomio de Majorana que  $|\psi(0)\rangle$  y por lo tanto la misma constelación. El factor de fase  $\phi$  es igual a  $\alpha + \gamma$ , en donde el segundo término corresponde a la fase geométrica y está dada por

$$\gamma = i \oint \langle \bar{\psi}(s) | \frac{d}{ds} | \bar{\psi}(s) \rangle. \quad (\text{A.20})$$

Los estados  $|\bar{\psi}\rangle$  corresponden al levantamiento de Aharonov-Anandan[20], como se explica en la sección 1.5.

La fase geométrica (A.20) depende de la trayectoria del estado sobre el espacio proyectivo, lo que sugiere que esta está determinada por las trayectorias de las estrellas de Majorana sobre la esfera de Bloch, lo cual fue primeramente mostrado por Hannay[128]. Sin embargo, resulta muy difícil interpretar la expresión de  $\gamma$  ahí derivada en términos de las trayectorias de las estrellas. En este sentido la fórmula obtenida por Liu y Fu nos lleva un paso más adelante. La expresión derivada por ellos es

$$\gamma^{(j)} = \gamma_o^{(j)} + \gamma_c^{(j)}. \quad (\text{A.21})$$

El primer término contiene la contribución a la fase geométrica por cada una de las estrellas de Majorana, y está dada por

$$\gamma_o^{(j)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{2j} \Omega_n, \quad (\text{A.22})$$

en donde  $\Omega$  es el ángulo sólido subtendido por la  $n$ -ésima estrella de Majorana durante la evolución cíclica. El segundo término es

$$\gamma_C^{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \beta_{ij} \Omega(d\mathbf{u}_{ij}), \quad (\text{A.23})$$

El factor  $\Omega(d\mathbf{u}_{ij})$  es igual a  $\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j \cdot d(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) / d_{ij}$ , en donde el símbolo  $d$  es la diferencial y  $d_{ij} = 1 - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$  y  $\mathbf{u}_i$  es la posición de la  $i$ -ésima estrella de Majorana en coordenadas cartesianas. Este término es el ángulo sólido subtendido por el par de estrellas  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ . El factor  $\beta_{ij}$  es igual a

$$\beta_{kl} = -\frac{d_{kl}}{N_{(j)}^2} \frac{\partial N_{(j)}^2}{\partial d_{kl}}.$$

Esta fase depende de la distancia relativa entre las estrellas y, por tanto, de sus correlaciones, con lo que recibe en nombre de *fase de correlación*.

Antes de indagar más en la interpretación de  $\gamma_C^{(j)}$  notemos que los estados del tipo  $e^{-i\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}}} |j, m\rangle$  no tienen fase de correlación, debido a que sus estrellas de Majorana se encuentran en posiciones iguales o antipodales, por lo que el  $\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j = 0$  para todo par  $(i, j)$ . De esta manera la contribución a la fase geométrica proviene de  $(j + m)$  estrellas  $(\theta, \phi)$  y  $j - m$  estrellas  $(\pi - \theta, \pi + \phi)$ . La fase geométrica es entonces  $\gamma^{(j)} = -\frac{j+m}{2}\Omega - \frac{j-m}{2}(-\Omega) = -m\Omega$ , como es de esperarse.

con dos estrellas de Majorana,  $j = 1$ , se puede demostrar que el factor  $\beta_{12}$  de la fase de correlación toma la forma

$$\gamma_C^{(1)} = \frac{1}{2} \oint C(\mathbf{u}_{12}^{(i)}) \Omega(d\mathbf{u}_{12}). \quad (\text{A.24})$$

El factor  $C(\mathbf{u}_{12}^{(i)})$  denota la concurrencia del estado, la cual depende de la distancia entre las estrellas y viene dada por [86, 144]

$$C = \frac{d_{12}}{4 - d_{12}}. \quad (\text{A.25})$$

La fase de correlación se anula para estados de dos espines simetrizados cuando estos no están entrelazados. Sin embargo, la fase de correlación tampoco contribuye a la fase geométrica de los estados tipo Bell, debido a que las estrellas de Majorana de estos son colineales lo que anula al producto cruz en (A.23).

## A. REPRESENTACIÓN ESTELAR DE MAJORANA

---

La fase de correlación puede expresarse de manera alterna en términos del movimiento absoluto y relativo de las estrellas de Majorana. El ángulo sólido  $\Omega(d\mathbf{u}_{ij})$  puede expresarse como

$$\Omega(d\mathbf{u}_{ij}) = [d\phi'_{i(j)} + d\phi'_{j(i)}] + (\cos \theta_i d\phi_i + \cos \theta_j d\phi_j), \quad (\text{A.26a})$$

$$\Omega(d\mathbf{u}_{ij}) = \frac{\Omega(d\mathbf{u}_{i(j)}) + \Omega(d\mathbf{u}_{j(i)})}{1 - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j} + (\cos \theta_i d\phi_i + \cos \theta_j d\phi_j). \quad (\text{A.26b})$$

El primer término en el lado derecho de (A.26) denota la contribución del movimiento relativo entre las estrellas de Majorana. Por ejemplo,  $d\phi'_{i(j)}$  es el diferencial de la coordenada azimutal de  $\mathbf{u}_i$  en el marco de referencia con  $\mathbf{u}_j$  fija, con  $d\phi'_{i(j)}$  interpretada de manera equivalente. Al desarrollar  $d\phi'_{i(j)}$  obtenemos el primer término de (A.26b), en donde  $\Omega(d\mathbf{u}_{i(j)})$  es el ángulo sólido infinitesimal subtendido por  $\mathbf{u}_i$  vista desde el marco de referencia de  $\mathbf{u}_j$ . El segundo término denota la contribución del movimiento absoluto de las estrellas. Por lo tanto la fase de correlación es  $\gamma_C^{(j)} = \gamma_R^{(j)} + \gamma_A^{(j)}$ , en la cual

$$\gamma_A^{(j)} = \sum_{i=1}^{2j+1} \sum_{j>i}^{2j+1} \oint \beta_{ij} \frac{\Omega(d\mathbf{u}_{i(j)}) + \Omega(d\mathbf{u}_{j(i)})}{1 - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j}, \quad (\text{A.27})$$

$$\gamma_R^{(j)} = \oint \beta_{ij} [\cos \theta_i d\phi_i + \cos \theta_j d\phi_j]. \quad (\text{A.28})$$

El material presentado en esta sección se utiliza a lo largo de los capítulos 2, 3 y 4 de este trabajo.

---

# Representación adjunta de un álgebra de Lie

---

En el Capítulo 3 introdujimos la descomposición de Cartan de un álgebra de Lie en la cual se hizo uso del concepto de representación adjunta. En este apéndice daremos una definición de representación adjunta y construiremos esta representación explícitamente para las álgebras  $\mathfrak{su}(2)$  y  $\mathfrak{su}(3)$ . Además mostraremos que efectivamente los subconjuntos  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{su}(3)$  son ortogonales con respecto al producto interior dado por la forma de Killing[107].

## Definición de la representación adjunta

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $\hat{X} \in \mathfrak{g}$ . La representación del álgebra  $(\text{ad}, \mathfrak{g})$  dada por

$$\text{ad}_{\hat{X}_l}(\hat{Y}_i) = [\hat{X}_l, \hat{Y}_i], \quad \hat{X}_l, \hat{Y}_i \in \mathfrak{g},$$

se denomina *representación adjunta*[107]. El elemento  $\text{ad}_{\hat{X}_l}$  denota una matriz de  $n \times n$ , con  $n$  igual a la dimensión del álgebra de Lie, que corresponde a la matriz de la representación adjunta de  $\hat{X}_l$ . Para obtener la forma matricial de  $\text{ad}_{\hat{X}_l}$  escojamos una base de  $\mathfrak{g}$  dada por  $\hat{X}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\hat{X}_l}(\hat{X}_i) &= \sum_j c_{li}^j \hat{Y}_j \\ \text{ad}_{\hat{X}_l} &= \begin{pmatrix} c_{l1}^1 & \cdots & c_{ln}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ c_{l1}^n & \cdots & c_{ln}^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los elementos de matriz de  $\text{ad}_{\hat{X}_l}$  están dados por  $c_{li}^j$ , que son las constantes de estructura del álgebra de Lie correspondiente.



## B. REPRESENTACIÓN ADJUNTA DE UN ÁLGEBRA DE LIE

---

**Tabla B.1:** Relaciones de conmutación de los elementos del álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(3)$ .

$i[\hat{X}_i, \hat{X}_j]$	$\hat{J}_x$	$\hat{J}_y$	$\hat{J}_z$	$\hat{h}_1$	$\hat{h}_2$	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_3$
$\hat{J}_x$	0	$-\hat{J}_z$	$\hat{J}_y$	$\hat{L}_3$	$-2\hat{L}_3$	$-\hat{L}_2$	$\hat{L}_1$	$2\hat{h}_2$
$\hat{J}_y$	$\hat{J}_z$	0	$-\hat{J}_x$	$-2\hat{L}_2$	$\hat{L}_2$	$\hat{L}_3$	$2\hat{h}_1$	$-\hat{L}_1$
$\hat{J}_z$	$-\hat{J}_y$	$\hat{J}_x$	0	$\hat{L}_1$	$\hat{L}_1$	$-2\hat{h}_3$	$-\hat{L}_3$	$\hat{L}_2$
$\hat{h}_1$	$-\hat{L}_3$	$2\hat{L}_2$	$-\hat{L}_1$	0	0	$\hat{J}_z$	$-2\hat{J}_y$	$\hat{J}_x$
$\hat{h}_2$	$2\hat{L}_3$	$-\hat{L}_2$	$-\hat{L}_1$	0	0	$\hat{J}_z$	$\hat{J}_y$	$-2\hat{J}_x$
$\hat{L}_1$	$\hat{L}_2$	$-\hat{L}_3$	$2\hat{h}_3$	$-\hat{J}_z$	$-\hat{J}_z$	0	$-\hat{J}_x$	$\hat{J}_y$
$\hat{L}_2$	$-\hat{L}_1$	$-2\hat{h}_1$	$\hat{L}_3$	$2\hat{J}_y$	$-\hat{J}_y$	$\hat{J}_x$	0	$-\hat{J}_z$
$\hat{L}_3$	$-2\hat{h}_2$	$\hat{L}_1$	$-\hat{L}_2$	$-\hat{J}_x$	$2\hat{J}_x$	$-\hat{J}_y$	$\hat{J}_z$	0

## Ejemplos

### Representación adjunta del álgebra $\mathfrak{su}(2)$

Los elementos del álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  dados por  $\hat{J}_i$ ,  $i = x, y, z$  cumplen con las reglas de conmutación

$$[\hat{J}_l, \hat{J}_i] = \sum_j \epsilon_{li}^j \hat{J}_j.$$

El índice  $l$  denota al elemento  $\hat{J}_l$  de la base de álgebra de Lie, mientras que  $i$  y  $j$  especifican el elemento de matriz de la representación adjunta. Con esto las representaciones adjuntas de los elementos  $\hat{J}_i$ :

$$\text{ad}_{\hat{J}_x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_{\hat{J}_y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_{\hat{J}_z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como podemos observar la representación adjunta de  $\mathfrak{su}(2)$  es idéntica a la representación fundamental de  $\mathfrak{so}(3)$ , es decir, los generadores de rotaciones en tres dimensiones.

### Representación adjunta del álgebra $\mathfrak{su}(3)$

Elijamos la base de  $\mathfrak{su}(3)$  por los elementos  $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z, \hat{h}_1, \hat{h}_2, \hat{L}_1, \hat{L}_2$  y  $\hat{L}_3$ , definidos en la sección 3.2.2. Los tres primeros elementos forman el conjunto  $\mathfrak{k}$ , mientras que los restantes ( $\hat{h}_1$  y demás) conforman a  $\mathfrak{p}$ . Los conmutadores de estos elementos se

encuentran en la Tabla B.1. Al revisar cuidadosamente las relaciones de conmutación de los elementos de  $\mathfrak{su}(3)$  podemos obtener la forma matricial de la representación adjunta para cada  $\hat{X} \in \mathfrak{su}(3)$ :

$$\begin{aligned}
\text{ad}_{\hat{j}_x} = i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{ad}_{\hat{j}_y} = i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{ad}_{\hat{j}_z} = i & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{ad}_{\hat{h}_1} = i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\text{ad}_{\hat{h}_2} = i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{ad}_{\hat{L}_1} = i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\text{ad}_{\hat{L}_2} = i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{ad}_{\hat{L}_3} = i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Con estas matrices podemos ya comprobar que los subconjunto  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{p}$  son ortogonales con respecto a la forma de Killing  $B(\hat{X}_i, \hat{X}_j) = \text{Tr}(\text{ad}_{\hat{X}_i}, \text{ad}_{\hat{X}_j})$ . La forma de Killing puede expresarse como una matriz, es decir  $B(\hat{X}_i, \hat{X}_j) \equiv B_{ij}$ , en donde el orden de los elementos de las filas y columnas es igual al utilizado en la Tabla B.1. La forma de

## B. REPRESENTACIÓN ADJUNTA DE UN ÁLGEBRA DE LIE

---

Killing  $B_{ij}$  tiene la siguiente forma:

$$B(\hat{X}, \hat{Y}) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

en donde las filas y columnas están ordenadas la Tabla [B.1](#). Observamos que  $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$  como indicamos en la Sección [3.2.2](#), y por lo tanto los subconjuntos  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{p}$  son una descomposición de Cartan del álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(3)$ .

## Solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

---

Una solución importante que usamos en este trabajo es la correspondiente al problema de una partícula de espín- $j$  en presencia de un campo magnético que gira con frecuencia y magnitud constante alrededor de un eje fijo. Este problema viene explicado detalladamente en la referencia [20] y puede encontrarse además en algunas notas en internet. En todos los casos que hemos visto la solución de este problema requiere de los vectores estado del espacio de Hilbert para encontrar el propagador del sistema. Aquí expondremos un método que no hace uso de los vectores estado y sólo requiere de algunas propiedades generales de un operador unitario.

El hamiltoniano de una partícula de espín- $j$  en presencia de un campo magnético viene dado por [20]

$$\hat{H}(t) = B \left( \sin \theta \cos(\omega t) \hat{J}_x + \sin \theta \sin(\omega t) \hat{J}_y + \cos \theta \hat{J}_z \right), \quad (\text{C.1})$$

en donde  $\theta$  indica la latitud del campo magnético sobre la esfera unitaria y  $\hat{J}_i$  ( $i = x, y, z$ ) son los operadores de momento angular en la representación  $j$ . De manera más concisa podemos escribir el hamiltoniano como  $\hat{H}(t) = e^{-i\omega t \hat{J}_z} e^{-i\theta \hat{J}_y} \hat{J}_z e^{i\theta \hat{J}_y} e^{i\omega t \hat{J}_z}$ . La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo del problema es

$$i \frac{d}{dt} \hat{U} = \hat{H} \hat{U}. \quad (\text{C.2})$$

Para resolver esta ecuación tratemos de encontrar una transformación de  $\hat{U}$  tal que obtengamos una ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Para esto proponemos

$$\hat{V} = e^{-i\omega_1 t \hat{J}_z} \hat{U} e^{-i\omega_2 t \hat{J}_z}, \quad (\text{C.3})$$

la cual cumple con la relación

$$i \frac{d}{dt} \hat{V} = \omega_1 \hat{J}_z \hat{V} + e^{-i\omega_1 t \hat{J}_z} \hat{H}(t) e^{i\omega_1 t \hat{J}_z} \hat{V} + \omega_2 \hat{V} \hat{J}_z. \quad (\text{C.4})$$

## C. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER DEPENDIENTE DEL TIEMPO

---

Por lo tanto, para obtener una ecuación de la forma  $i\frac{d}{dt}\hat{V} = \hat{h}\hat{V}$ , en donde  $\hat{h}$  es un operador hermitiano independiente del tiempo, hagamos  $\omega_1 = -\omega$  y  $\omega_2 = 0$ . Con esta elección de parámetros, la ecuación de Schrödinger para  $\hat{V}$  es

$$i\frac{d}{dt}\hat{V} = (\hat{H}(0) - \omega\hat{J}_z)\hat{V}, \quad (\text{C.5})$$

en donde  $\hat{H}(0) = e^{-i\theta\hat{J}_y}\hat{J}_ze^{i\theta\hat{J}_y}$ . El hamiltoniano efectivo en este caso es  $(B\cos\theta - \omega)\hat{J}_z + \sin\theta\cos\phi\hat{J}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{J}_y$  y es independiente del tiempo. Por lo tanto, la solución de  $\hat{V}$  viene dada por  $e^{-it(\hat{H}(0) - \omega\hat{J}_z)}$  y el operador de evolución temporal que estamos buscando es simplemente

$$\hat{U}(t) = e^{-i\omega t\hat{J}_z}e^{-it(\hat{H}(0) - \omega\hat{J}_z)}. \quad (\text{C.6})$$

De esta manera hemos obtenido el operador de evolución temporal para este problema sin recurrir al uso de los vectores estado. Este procedimiento se utiliza para obtener el operador de evolución temporal en el modelo LMG en el Capítulo 4 y también para calcular la holonomía de Uhlmann en el Capítulo 5 de este trabajo.

# Bibliografía

---

- [1] Q. Niu, D. J. Thouless, and Yong-Shi Wu. Quantized Hall conductance as a topological invariant. *Phys. Rev. B*, 31:3372–3377, 1985. [1](#)
- [2] R. D. King-Smith and David Vanderbilt. Theory of polarization of crystalline solids. *Phys. Rev. B*, 47:1651–1654, 1993. [1](#)
- [3] D. Xiao, M.-C. Chang, and Q. Niu. Berry phase effects on electronic properties. *Rev. Mod. Phys.*, 82:1959–2007, 2010. [1](#), [7](#), [106](#)
- [4] M. Z. Hasan and C. L. Kane. Colloquium: Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.*, 82:3045–3067, 2010. [1](#), [10](#)
- [5] M. V. Berry and J. M. Robbins. Indistinguishability for quantum particles: spin, statistics and the geometric phase. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 453(1963), 1997. [1](#)
- [6] M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 392, 1984. [1](#), [6](#), [7](#), [8](#), [39](#), [83](#), [97](#), [101](#)
- [7] E. Cohen, F. Bouchard, F. Nejdassattari, Y. Gefen, and E. Karimi. Geometric phase from Aharonov–Bohm to Pancharatnam–Berry and beyond. *Nature Reviews Physics*, 1:437–499, 2019. [1](#), [6](#)
- [8] Y. Bliokh, K. F. J. Rodríguez-Fortuño, F. Nori, and A. V. Zayats. Spin-orbit interactions of light. *Nature Photonics*, 9:796–808, 2015. [1](#)
- [9] Mark R. Dennis, Kevin O’Holleran, and Miles J. Padgett. Chapter 5 singular optics: Optical vortices and polarization singularities. In E. Wolf, editor, *Progress in Optics*, volume 53, chapter 5, pages 293–363. Elsevier, 2009. [1](#), [101](#)
- [10] Y. Aharonov and J. Anandan. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1593–1596, 1987. [1](#), [7](#), [21](#), [39](#)
- [11] N. Mukunda and R. Simon. Quantum kinematic approach to the geometric phase. I. General formalism. *Annals of Physics*, 228(2):205–268, 1993. [1](#), [39](#)

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [12] N. Mukunda and R. Simon. Quantum kinematic approach to the geometric phase. II. The case of unitary group representations. *Annals of Physics*, 228(2):269–340, 1993. [1](#), [39](#)
- [13] F. Wilczek and A. Zee. Appearance of gauge structure in simple dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 52:2111–2114, 1984. [1](#), [14](#), [93](#)
- [14] A. Uhlmann. Parallel transport and quantum holonomy along density operators. *Rep. Math. Phys.*, 24(2):229–240, 1986. [1](#), [22](#), [103](#)
- [15] A. Uhlmann. On Berry phases along mixtures of states. *Annalen der Physik*, 501(1):63–69, 1989. [1](#), [22](#)
- [16] E. Sjöqvist, Arun K. Pati, A. Ekert, Jeeva S. Anandan, M. Ericsson, Daniel K. L. Oi, and V. Vedral. Geometric phases for mixed states in interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 85:2845–2849, 2000. [2](#), [22](#)
- [17] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115:485–491, 1959. [2](#)
- [18] C. Alden Mead. The geometric phase in molecular systems. *Rev. Mod. Phys.*, 64:51–85, 1992. [2](#), [4](#)
- [19] J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994. [2](#), [35](#), [48](#), [114](#), [115](#)
- [20] A. Bohm, Mostafazadeh, Koizumi A., Q. H., Niu, and Zwanziger. *The Geometric Phase in Quantum Systems*. Springer-Verlag, 2003. [4](#), [7](#), [10](#), [18](#), [19](#), [24](#), [25](#), [37](#), [38](#), [39](#), [40](#), [101](#), [106](#), [120](#), [127](#)
- [21] A. Zangwill. *Classical Electrodynamics*. Cambridge University Press, 1st edition, 2013. [4](#)
- [22] C. P Jisha, S. Nolte, and A. Alberucci. Geometric phase in optics: From wavefront manipulation to waveguiding. *Laser Photon Rev.*, 15. [5](#)
- [23] B. Simon. Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry’s phase. *Phys. Rev. Lett.*, 51:2167–2170, 1983. [7](#)
- [24] M. A. Paalanen, D. C. Tsui, and A. C. Gossard. Quantized Hall effect at low temperatures. *Phys. Rev. B*, 25:5566–5569, 1982. [8](#), [9](#), [26](#)
- [25] D. Tong, 2016. [9](#)
- [26] J. E. Avron, D. Osadchy, and R. Seiler. A topological look at the quantum hall effect. *Phys. Today*, 56:38–42, 2003. [9](#)
- [27] Nakahara M. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics, Bristol, 2nd edition, 2003. [9](#)

- 
- [28] Hongming W., Rui Y., Xiao H., Xi D., and Zhong F. Quantum anomalous Hall effect and related topological electronic states. *Advances in Physics*, 64(3):227–282, 2015. [9](#)
- [29] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1559–1562, 1982. [10](#)
- [30] Asbóth J., Oroszlány L., and Pályi A. *A Short Course on Topological Insulators*. Springer, Cham, 1st edition, 2016. [10](#), [11](#)
- [31] P. W. Shor. Why haven't more quantum algorithms been found? *JACM*, 50:87–90, 2003. [12](#)
- [32] J. Audretsch. *Entangled Systems*. John Wiley & Sons, Ltd, 1st edition, 2007. [13](#), [23](#), [41](#), [45](#), [66](#), [67](#), [82](#)
- [33] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010. [13](#), [28](#), [33](#)
- [34] R. Aguado and L. Kouwenhoven. Majorana qubits for topological quantum computation. *Phys. Today*, 73:44–50, 2020. [13](#)
- [35] Stanescu T. D. *Introduction to Topological Quantum Matter and Quantum Computation*. CRC Press, Boca Raton, 2017. [13](#)
- [36] S. Frolov. Quantum computing's reproducibility crisis: Majorana fermions. *Nature*, 592:350–352, 2021. [13](#)
- [37] P. Zanardi and M. Rasetti. Holonomic quantum computation. *Physics Letters A*, 264(2):94–99, 1999. [13](#)
- [38] Shi-Liang Zhu and Paolo Zanardi. Geometric quantum gates that are robust against stochastic control errors. *Phys. Rev. A*, 72:020301, 2005. [13](#), [14](#), [34](#), [93](#), [94](#)
- [39] E. Sjöqvist, A. V. Mousolou, and C. M. Canali. Conceptual aspects of geometric quantum computation. *Quantum Information Processing*, 15(10), 2016. [13](#), [14](#), [86](#)
- [40] U. Güngördü, Y. Wan, and M. Nakahara. Non-adiabatic universal holonomic quantum gates based on abelian holonomies. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 83(3), 2014. [14](#), [47](#), [80](#), [94](#)
- [41] J. Zhang, T. H. Kyaw, S. Filipp, L.-C. Kwek, E. Sjöqvist, and D. Tong. Geometric and holonomic quantum computation, 2021. [14](#)
-



- [42] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, John A. Smolin, and H. Weinfurter. Elementary gates for quantum computation. *Phys. Rev. A*, 52:3457–3467, 1995. [14](#)
- [43] J. Anandan. Non-adiabatic non-abelian geometric phase. *Physics Letters A*, 133(4):171–175, 1988. [14](#)
- [44] E. Sjöqvist, D. M. Tong, L. M. Andersson, B. Hessmo, M. Johansson, and K. Singh. Non-adiabatic holonomic quantum computation. *New Journal of Physics*, 2012. [14](#)
- [45] A. A. Abdumalikov Jr., J. M. Fink, K. Juliusson, M. Pechal, S. Berger, A. Wallraff, and S. Filipp. Experimental realization of non-abelian non-adiabatic geometric gates. *Nature*, 496:482–485, 2013. [14](#)
- [46] S. Arroyo-Carmejo, A. Lazariiev, S. W. Hell, and G. Balasubramanian. Room temperature high-fidelity holonomic single-qubit gate on a solid-state spin. *Nat. Comm.*, 5, 2014. [14](#)
- [47] K. Toyoda, K. Uchida, A. Noguchi, S. Haze, and S. Urabe. Realization of holonomic single-qubit operations. *Phys. Rev. A*, 87:052307, 2013. [14](#)
- [48] M. Grifoni and P. Hänggi. Driven quantum tunneling. *Physics Reports*, 304(5):229–354, 1998. [15](#), [17](#)
- [49] Autler, S. H. and Townes, C. H. Stark Effect in Rapidly Varying Fields. *Phys. Rev.*, 100:703–722, 1955. [15](#)
- [50] S.N. Shevchenko, S. Ashhab, and Franco Nori. Landau-zener-stückelberg interferometry. *Physics Reports*, 492(1):1–30, 2010. [15](#), [16](#), [17](#), [38](#), [43](#), [44](#)
- [51] L. Novotny. Strong coupling, energy splitting, and level crossings: A classical perspective. *Am. J. Phys.*, 78:1199, 2010. [15](#)
- [52] M. Frimmer and L. Novotny. The classical Bloch equations. *Am. J. Phys.*, 82:947, 2014. [15](#)
- [53] Gasparinetti, S. and Solinas, P. and Pekola, J. P. Geometric Landau-Zener Interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 107:207002, 2011. [16](#)
- [54] G.B. Arfken and H.J. Weber. *Mathematical methods for physicists*. Elsevier, 2005. [16](#), [32](#), [97](#), [101](#), [103](#)
- [55] J. Zhang, J. Zhang, Z. Zhang, and K. Kim. Realization of geometric Landau-Zener-Stückelberg interferometry. *Phys. Rev. A*, 89:013608, 2014. [16](#)
- [56] X. Tan, D.-W. Zhang, Z. Zhang, Y. Yu, S. Han, and S.-L. Zhu. Demonstration of geometric Landau-Zener interferometry in a superconducting qubit. *Phys. Rev. Lett.*, 112:027001, 2014. [16](#)

- 
- [57] Wang, L., Tu, T., Gong, B. et. al. Experimental realization of non-adiabatic universal quantum gates using geometric Landau-Zener-Stückelberg interferometry. *Sci. Rep.*, 6, 2016. [16](#)
- [58] M. Sillanpää, T. Lehtinen, A. Paila, Y. Makhlin, and P. Hakonen. Continuous-time monitoring of Landau-Zener interference in a Cooper-pair box. *Phys. Rev. Lett.*, 96:187002, 2006. [16](#)
- [59] R. Blattmann, P. Hänggi, and S. Kohler. Qubit interference at avoided crossings: The role of driving shape and bath coupling. *Phys. Rev. A*, 91:042109, 2015. [16](#), [17](#)
- [60] S. N. Shevchenko, S. Ashhab, and Franco Nori. Inverse Landau-Zener-Stückelberg problem for qubit-resonator systems. *Phys. Rev. B*, 85:094502, 2012. [17](#)
- [61] 2015. [17](#), [39](#), [40](#), [79](#), [80](#)
- [62] Q. Xie and W. Hai. Analytical results for a monochromatically driven two-level system. *Phys. Rev. A*, 82:032117, 2010. [18](#)
- [63] A Rivas, O. Viyuela, S. Gasparinetti, A. Wallraff, S Filipp, and M.A. Martin-Delgado. Observation of topological Uhlmann phases with superconducting qubits. *npj Quantum Information*, 4, 2018. [22](#), [26](#), [109](#)
- [64] J. Du, P. Zou, M. Shi, L. C. Kwek, J.-W. Pan, C. H. Oh, A. Ekert, Daniel K. L. Oi, and M. Ericsson. Observation of geometric phases for mixed states using NMR interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 91:100403, 2003. [22](#)
- [65] O. Viyuela, A. Rivas, and M. A. Martin-Delgado. Symmetry-protected topological phases at finite temperature. *2D Mater.*, 2(3), 2015. [22](#), [23](#), [24](#), [26](#), [101](#), [102](#), [106](#), [108](#)
- [66] J. Villavicencio, E. Cota, F. Rojas, Jesús A. Maytorena, and D. Morachis Galindo. Uhlmann phase in composite systems with entanglement. *Phys. Rev. A*, 104:042204, 2021. [22](#), [27](#)
- [67] D. Morachis Galindo, F. Rojas, and Jesús A. Maytorena. Topological Uhlmann phase transitions for a spin- $j$  particle in a magnetic field. *Phys. Rev. A*, 103:042221, 2021. [22](#), [27](#)
- [68] Zhu, J., Shi, M., Vedral, V., Peng, X., Suter, D., and Du, J. Experimental demonstration of a unified framework for mixed-state geometric phases. *EPL*, 94(2):20007, 2011. [22](#)
- [69] Paul B. Slater. Mixed state holonomies. *Letters in Mathematical Physics*, 60:123–133, 2002. [22](#), [103](#)
- [70] J. C. Budich and S. Diehl. Topology of density matrices. *Phys. Rev. B*, 91:165140, 2015. [25](#), [108](#)
-

- [71] Zhoushen Huang and Daniel P. Arovas. Topological indices for open and thermal systems via Uhlmann’s phase. *Phys. Rev. Lett.*, 113:076407, 2014. [26](#)
- [72] A. Rivas, O. Viyuela, and M. A. Martin-Delgado. Density-matrix Chern insulators: Finite-temperature generalization of topological insulators. *Phys. Rev. B*, 88:155141, 2013. [26](#)
- [73] Yan He, Hao Guo, and Chih-Chun Chien. Thermal uhlmann-chern number from the Uhlmann connection for extracting topological properties of mixed states. *Phys. Rev. B*, 97:235141, 2018. [26](#), [98](#)
- [74] Ye Zhang, Aixin Pi, Yan He, and Chih-Chun Chien. Comparison of finite-temperature topological indicators based on Uhlmann connection. *Phys. Rev. B*, 104:165417, 2021. [26](#), [27](#)
- [75] O. Viyuela, A. Rivas, and M. A. Martin-Delgado. Two-dimensional density-matrix topological fermionic phases: topological Uhlmann numbers. *Phys. Rev. Lett.*, 113:076408, 2014. [26](#), [103](#), [106](#), [108](#)
- [76] O. Viyuela, A. Rivas, and M. A. Martin-Delgado. Uhlmann phase as a topological measure for one-dimensional fermion systems. *Phys. Rev. Lett.*, 112:130401, 2014. [26](#), [104](#)
- [77] A. Y. Kitaev. Unpaired Majorana fermions in quantum wires. *Physics-Uspekhi*, 44(10S):131–136, 2001. [26](#)
- [78] M. Creutz. End states, ladder compounds, and domain-wall fermions. *Phys. Rev. Lett.*, 83:2636–2639, 1999. [26](#)
- [79] L Tarruel, T. Uehlinger, G. Jotzu, and E. Esslinger. Creating, moving and merging dirac points with a Fermi gas in a tunable honeycomb lattice. *Nature*, 483:302–305, 2012. [26](#)
- [80] B. A., Bernevig and T. L., Hughes and S-C, Zhang . Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells. *Science*, 314, 2006. [27](#)
- [81] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81:865–942, 2009. [28](#)
- [82] J. Zhang, J. Vala, S. Sastry, and K. Birgitta Whaley. Geometric theory of nonlocal two-qubit operations. *Phys. Rev. A*, 67:042313, 2003. [28](#), [29](#), [31](#), [51](#), [55](#), [57](#), [61](#), [63](#), [66](#), [67](#)
- [83] Christopher Eltschka, Géza Tóth, and Jens Siewert. Partial transposition as a direct link between concurrence and negativity. *Phys. Rev. A*, 91:032327, 2015. [28](#)

- 
- [84] P. Zanardi, C. Zalka, and L. Faoro. Entangling power of quantum evolutions. *Phys. Rev. A*, 62:030301, 2000. [29](#)
- [85] S. Balakrishnan and R. Sankaranarayanan. Entangling power and local invariants of two-qubit gates. *Phys. Rev. A*, 82:034301, 2010. [29](#), [64](#)
- [86] H. D. Liu and L. B. Fu. Berry phase and quantum entanglement in majorana’s stellar representation. *Phys. Rev. A*, 94:022123, 2016. [30](#), [32](#), [52](#), [53](#), [82](#), [84](#), [113](#), [116](#), [121](#)
- [87] H.J. Lipkin, N. Meshkov, and A.J. Glick. Validity of many-body approximation methods for a solvable model: (I). Exact solutions and perturbation theory. *Nuclear Physics*, 62(2):188–198, 1965. [30](#), [32](#), [52](#), [72](#), [76](#), [77](#)
- [88] Ahmad Abliz, H. J. Gao, X. C. Xie, Y. S. Wu, and W. M. Liu. Entanglement control in an anisotropic two-qubit Heisenberg *xyz* model with external magnetic fields. *Phys. Rev. A*, 74:052105, 2006. [32](#), [71](#), [76](#)
- [89] M Bhattacharya and H. Shi. Coupled second-quantized oscillators. *Am. J. Phys.*, 81:267, 2013. [32](#), [74](#), [76](#)
- [90] Shruti Dogra, Kavita Dorai, and Arvind. Majorana representation, qutrit Hilbert space and NMR implementation of qutrit gates. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2018. [32](#), [54](#), [67](#), [68](#), [78](#), [87](#), [89](#), [90](#), [95](#)
- [91] T. Needham. *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press, 1998. [32](#), [97](#), [105](#)
- [92] M. Z. Hasan and C. L. Kane. Colloquium: Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.*, 82:3045–3067, 2010. [33](#), [108](#)
- [93] Bruce W. Shore and Peter L. Knight. The Jaynes-Cummings model. *Journal of Modern Optics*, 40(7):1195–1238, 1993. [33](#)
- [94] Bernard Yurke, Samuel L. McCall, and John R. Klauder. SU(2) and SU(1,1) interferometers. *Phys. Rev. A*, 33:4033–4054, 1986. [33](#)
- [95] M. C. Baruch and T. F. Gallagher. Ramsey interference fringes in single pulse microwave multiphoton transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 68:3515–3518, 1992. [33](#)
- [96] S. Yoakum, L. Sirko, and P. M. Koch. Stueckelberg oscillations in the multiphoton excitation of helium Rydberg atoms: Observation with a pulse of coherent field and suppression by additive noise. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1919–1922, 1992. [33](#)
- [97] S. Kling, T. Salger, C. Grossert, and M. Weitz. Atomic bloch-zener oscillations and stueckelberg interferometry in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 105:215301, 2010. [33](#)
-

- [98] A. Zenesini, D. Ciampini, O. Morsch, and E. Arimondo. Observation of Stückelberg oscillations in accelerated optical lattices. *Phys. Rev. A*, 82:065601, 2010. [33](#)
- [99] T.O. Wehling, A.M. Black-Schaffer, and A.V. Balatsky. Dirac materials. *Advances in Physics*, 63(1):1–76, 2014. [33](#)
- [100] N. P. Armitage, E. J. Mele, and Ashvin Vishwanath. Weyl and Dirac semimetals in three-dimensional solids. *Rev. Mod. Phys.*, 90:015001, 2018. [33](#)
- [101] M. Wagner. *Unitary Transformation in Solid State Physics*. North-Holland, New York, 1986. [33](#)
- [102] G. Heinrich, J. G. E. Harris, and F. Marquardt. Photon shuttle: Landau-Zener-Stückelberg dynamics in an optomechanical system. *Phys. Rev. A*, 81:011801, 2010. [33](#), [34](#), [38](#)
- [103] J M Radcliffe. Some properties of coherent spin states. *Journal of Physics A: General Physics*, 1971. [38](#)
- [104] Qiongtao Xie and Wenhua Hai. Analytical results for a monochromatically driven two-level system. *Phys. Rev. A*, 82:032117, 2010. [40](#)
- [105] Slavyanov S. Y. and W. Lay. *Special Functions*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 2000. [40](#)
- [106] Q. Xie. Exactly solvable model for Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry. *Phys. Rev. A*, 97:022113, 2018. [40](#)
- [107] N. Jeevanjee. *An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists*. Birkhäuser, 2nd edition, 2015. [41](#), [47](#), [57](#), [60](#), [100](#), [123](#)
- [108] S.-B. Zheng, C.-P. Yang, and F. Nori. Comparison of the sensitivity to systematic errors between nonadiabatic non-abelian geometric gates and their dynamical counterparts. *Phys. Rev. A*, 93:032313, 2016. [47](#)
- [109] N. Timoney, I. Baumgart, M. Johanning, A. F. Varón, M. B. Plenio, A. Retzker, and Ch. Wunderlich. Quantum gates and memory using microwave-dressed states. *Nature*, 76:185–188, 2011. [47](#)
- [110] J. Randall, A. M. Lawrence, S. C. Webster, S. Weidt, N. V. Vitanov, and W. K. Hensinger. Generation of high-fidelity quantum control methods for multilevel systems. *Phys. Rev. A*, 98:043414, 2018. [47](#)
- [111] F. T. Hioe. N-level quantum systems with SU(2) dynamic symmetry. *J. Opt. Soc. Am. B*, 4:1327–1332. [47](#)
- [112] Y. Makhlin. Nonlocal properties of two-qubit gates and mixed states, and the optimization of quantum computations. *Quant. Inf. Proc.*, 82:034301, 2010. [60](#)

- 
- [113] B. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras and Representations: An Elementary Introduction*. Springer International Publishing, 2015. 63
- [114] A. Garg. Topologically quenched tunnel splitting in spin systems without Kramer’s degeneracy. *Europhysics Letters (EPL)*, 1993. 72
- [115] J.A. Campos and J.G. Hirsch. Single molecule magnets and the Lipkin-Meshkov-Glick model. *Rev. Mex. Fis.*, 57:56–61, 2011. 72
- [116] P. Ribeiro, J. Vidal, and R. Mosseri. Thermodynamical limit of the Lipkin-Meshkov-Glick model. *Phys. Rev. Lett.*, 99:050402, 2007. 72
- [117] T. Brandes. Coherent and collective quantum optical effects in mesoscopic systems. *Physics Reports*, 408(5):315–474, 2005. 76
- [118] F. Gallego-Marcos, R. Sánchez, and G. Platero. Coupled Landau-Zener-Stückelberg quantum dot interferometers. *Phys. Rev. B*, 93:075424, 2016. 76
- [119] I. Maldonado, J. Villavicencio, L. D. Contreras-Pulido, E. Cota, and J. A. Maytorena. Dephasing effects on ac-driven triple quantum dot systems. *Phys. Rev. B*, 97:195310, 2018. 76
- [120] T. Ohmi and K. Machida. Bose-Einstein condensation with internal degrees of freedom in alkali atom gases. *Journal of the Physical Society of Japan*, 67(6):1822–1825, 1998. 76
- [121] Chang, Q. and Qin, Q. and Zhang, W. and You, L. and Chapman, M. S. Coherent spinor dynamics in a spin-1 Bose condensate. *Nat. Phys.*, 1:111–116, 2005. 76
- [122] T.-L. Ho. Spinor Bose condensates in optical traps. *Phys. Rev. Lett.*, 81:742–745, 1998. 76
- [123] K. Bergmann, H. Theuer, and B. W. Shore. Coherent population transfer among quantum states of atoms and molecules. *Rev. Mod. Phys.*, 70:1003–1025, 1998. 76
- [124] Kumar, K. S. and Vepsäläinen, A. and Danilin, S. and Paraoanu, G. S. Stimulated Raman adiabatic passage in a three-level superconducting circuit. *Nat. Commun.*, 7:10628, 2016. 76
- [125] S. Dogra, A. Vepsäläinen, and G. S. Paraoanu. Majorana representation of adiabatic and superadiabatic processes in three-level systems. *Phys. Rev. Research*, 2:043079, 2020. 76
- [126] A. Garg. Berry phases near degeneracies: Beyond the simplest case. *Am. J. Phys.*, 78:661, 2010. 78
- [127] D. Kusnezov. Exact matrix expansions for the group elements of SU(N). *Journal of Mathematical Physics*, 1995. 80
-

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [128] J H Hannay. The Berry phase for spin in the Majorana representation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(2):L53–L59, 1998. [82](#), [120](#)
- [129] C. Lupo, P. Aniello, M. Napolitano, and G. Florio. Robustness against parametric noise of nonideal holonomic gates. *Phys. Rev. A*, 76:012309, 2007. [93](#)
- [130] S.-B. Zheng, C.-P. Yang, and F. Nori. Comparison of the sensitivity to systematic errors between nonadiabatic non-abelian geometric gates and their dynamical counterparts. *Phys. Rev. A*, 93:032313, 2016. [93](#)
- [131] David P. DiVincenzo. Two-bit gates are universal for quantum computation. *Phys. Rev. A*, 51:1015–1022, 1995. [95](#)
- [132] Ashok Muthukrishnan and C. R. Stroud. Multivalued logic gates for quantum computation. *Phys. Rev. A*, 62:052309, 2000. [95](#)
- [133] Moreno-Pineda E., Godfrin C., Balestro F., Wernsdorfer W., and Ruben M. Molecular spin qubits for quantum algorithms. *Chem. Soc. Rev.*, 47:501–513, 2018. [95](#)
- [134] Wegert, E. *Visual Complex Functions*. Birkhäuser Basel, 2nd edition, 2012. [101](#), [107](#)
- [135] X.-Yang Hou, H. Guo, and C.-C. Chien. Finite-temperature topological phase transitions of spin- $j$  systems in Uhlmann processes: General formalism and experimental protocols. *Phys. Rev. A*, 104:023303, 2021. [103](#)
- [136] A. Carollo, D. Valenti, and B. Spagnolo. Geometry of quantum phase transitions. *Phys. Rep.*, 838:1–72, 2020. [108](#)
- [137] L. Leonforte, D. Valenti, B. Spagnolo, and A. Carollo. Uhlmann number in translational invariant systems. *Scientific Reports*, 9:9106, 2019. [108](#)
- [138] A. Carollo, B. Spagnolo, and D. Valenti. Uhlmann curvature in dissipative phase transitions. *Scientific Reports*, 8:9852, 2018. [108](#)
- [139] F. Bascone, L. Leonforte, D. Valenti, B. Spagnolo, and A. Carollo. Finite-temperature geometric properties of the Kitaev honeycomb model. *Phys. Rev. B*, 99:205155, 2019. [108](#)
- [140] E. Majorana. Atomi orientati in campo magnetico variabile. *Nuovo Cim.*, 9:43–50, 1932. [113](#), [116](#)
- [141] J. Zimba. Anticoherent spin states via the Majorana representation. *EJTP*, 3(10):143, 2006. [118](#)
- [142] C. Chryssomalakos, L. Hanotel, E. Guzmán-González, and E. Serrano-Ensástiga. Toponomic quantum computation, 2022. [118](#), [119](#)

- [143] P. Aguilar, C. Chryssomalakos, E. Guzmán-González, L. Hanotel, and E. Serrano-Ensástiga. When geometric phases turn topological. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2020. [119](#)
- [144] H. D. Liu and L. B. Fu. Representation of Berry phase by the trajectories of Majorana stars. *Phys. Rev. Lett.*, 113:240403, 2014. [121](#)