



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBLEMAS DE DISPERSIÓN INVERSOS PARA LA ECUACIÓN  
DE DIRAC

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

JOAQUÍN ANTONIO RAMÍREZ HERNÁNDEZ

TUTOR

DR. RICARDO ALBERTO WEDER ZANINOVICH

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2022





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## 1.Datos del alumno

Ramírez

Hernández

Joaquín Antonio

(55) 24 10 34 75

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Física

30912832-8

## 2.Datos del tutor

Dr.

Ricardo Alberto

Weder

Zaninovich

## 3.Datos del Sinodal 1

Dr.

Ángel

Sánchez

Cecilio

## 4.Datos del Sinodal 2

Dr.

Manuel

Domínguez

de la Iglesia

## 5.Datos del Sinodal 3

Dr.

Miguel Arturo

Ballesteros

Montero

## 6.Datos del Sinodal 4

M. en C.

Augusto

Cabrera

Manuel

## 7.Datos del trabajo escrito

Problemas de dispersión inversos para la ecuación de Dirac

108 p

2022

---

# Agradecimientos

Este trabajo es la culminación de una de las etapas más importantes de mi vida académica y profesional, éste representa para mí el primer gran paso para alcanzar mis metas, aspiraciones y sueños, sin embargo, éste no hubiera sido posible sin el apoyo de mi familia, amigos, compañeros, profesores e instituciones que me han impactado e influenciado a lo largo de mi vida, por lo cual, es menester hacer mención de ellos.

Quisiera empezar agradeciendo a mi madre Irma de Jesús Hernández Cruz, la cual, siempre me ha apoyado para que salga adelante. A mi hermano Ángel de Jesús Ramírez Hernández, él que ha estado presente en las buenas y en las malas, brindándome el ánimo que solo un hermano de gran corazón puede ofrecer. A mi abuela Marina Sara Cruz de la Cruz, quien fue un ejemplo de la fuerza de voluntad que alguien puede llegar a tener, a quien dedico este trabajo a su memoria. Al licenciado Juan Manuel Pastrana Rodríguez, persona que no ha dudado en brindarme todo su apoyo en todo momento, siendo como un padre para mí. A todos mis tíos, los cuales, nunca han dudado en promover que pueda seguir adelante. A todos mis primos, que son como mis hermanos (aunque tengamos nuestras diferencias), siempre estamos conscientes del cariño que nos tenemos. A mi tutor el Dr. Ricardo Alberto Weder Zaninovich, quien me ha auxiliado a lo largo de este trayecto. A la Dra. María de los Ángeles Sandoval Romero, persona que nunca dudo de mí y hasta el presente me ha motivado en seguir mis sueños. Al Dr. Fermín Alberto Viniegra Heberlein, quien estuvo en uno de los momentos más difíciles de mi vida. Al Dr. Gerardo Carmona Ruiz, gracias a él aprendí distintos ámbitos de la física, como la termodinámica, además de la vida en general y que, aunque ya no se encuentra con nosotros, es alguien presente dentro de cada una de las personas a quien influencié. Al Dr. Ariel Alberto Valladares Clemente, con quien pasé mucho tiempo disfrutando de sus conversaciones sobre la vida y la ciencia. A mi ex-compañero de consejo y mi gran amigo de la vida Eduardo Becerra Torres, así como también a Juan David Covian Samperio, con quienes he vivido grandes aventuras, además de haber aprendido una infinidad de cosas respecto a la vida. A mis amigos Ángel, Yanín, Pedro, Axel, Mario, Lydia, Ricardo, José Juan, Sebastián, Donovan, Carlos, Víctor, Ernesto, Hiram, Leonardo, Sergio, Silvia, Alan, Saul, Juli, Samuel, Marcela, Octavio, Rafael, David, Yoary, "Paco", Michelle, Luis Ivan, Eduardo, Pablo Reséndiz, Pablo de la Guerra, Manuel alias "Manolo", Fernando, Alain, Patricio. Al Dr. Raymundo Eugenio Peralta Herrera, que nunca ha dudado en impulsar mis aspiraciones y no solo eso, sino que también a proponerme nuevos retos. A mis compañeros de trabajo Vladimir y Juan Carlos. A mis sinodales, quienes siempre tuvieron la disposición para prestarme su ayuda. A la U. N. A. M. por ser la institución que formó. A CONACYT por los apoyos económicos. Y a todas las personas que han pasado por mi vida.

Esta tesis fue realizada como parte del proyecto DGAPA-PAPIIT IN 100321, mis más sinceros agradecimientos.



# Resumen

La mecánica cuántica es el área de la física que se dedica a estudiar a la materia a niveles atómicos y subatómicos. Por esta razón, los fenómenos físicos en esta área son imposibles de observar directamente. De esto último, surge la necesidad de obtener las interacciones que ocurren en un experimento a partir de sus resultados, a esto se le conoce como "un problema inverso". En particular, si el experimento consiste en dispersar partículas, a este se le conoce como "un problema de dispersión inverso".

En este trabajo de tesis, se da un panorama amplio, sobre la teoría física y matemática relacionada con el problema de dispersión inverso planteado en el artículo:

Naumkin, I., Weder, R. (2015). *High-energy and smoothness asymptotic expansion of the scattering amplitude for the Dirac equation and applications*. Math. Meth. Appl. Sci., Vol. 38, 2427-2465.

En este artículo, se estudia un sistema de partículas cuánticas relativistas con espín 1/2, dispersadas por un potencial electromagnético externo  $V$ , el cual, no se conoce, sin embargo, su matriz de dispersión  $S(E)$  sí.

Éstas, al ser partículas cuánticas relativistas con espín 1/2, son descritas por la ecuación de Dirac libre y perturbada:

$$\begin{aligned} -i\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta m \psi &= i\mathbb{I} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \\ -i\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta m \psi + \mathbb{V} &= i\mathbb{I} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned}$$

A partir de hacer ciertas hipótesis *a priori* en el potencial, se puede demostrar la existencia de las soluciones de estas dos ecuaciones diferenciales, permitiendo así, desarrollar estas soluciones en una serie conocida como "expansión asintótica". Estas expansiones permiten relacionar la matriz de dispersión  $S(E)$  con estas soluciones para, posteriormente, relacionar a  $S(E)$  y a  $\mathbb{V}$ .



# Contenido

<b>1. Introducción física del problema</b>	<b>1</b>
1.1. Mecánica cuántica no relativista: Ecuación de Schrödinger . . . . .	1
1.2. Un breve repaso de la relatividad especial . . . . .	9
1.3. Inicios de la mecánica cuántica relativista: Ecuación de Dirac . . . . .	19
<b>2. Formalismo matemático de la mecánica cuántica relativista</b>	<b>31</b>
2.1. Operador de Schrödinger: Formalismo matemático . . . . .	31
2.2. Operador de Dirac: Formalismo Matemático . . . . .	53
<b>3. El operador de dispersión y la matriz de dispersión</b>	<b>63</b>
3.1. Teoría espectral de operadores auto-adjuntos . . . . .	63
3.2. Teoría de dispersión cuántica . . . . .	67
3.3. La matriz de dispersión . . . . .	70
3.4. Operadores pseudodiferenciales . . . . .	72
<b>4. Propiedades de la matriz de dispersión y problema de dispersión inverso</b>	<b>75</b>
4.1. Eigenfunciones generalizadas de la ecuación de Dirac perturbada . . . . .	75
4.2. Singularidad principal en la diagonal del kernel de la matriz de Dispersión . . . . .	80
4.3. La sección transversal de dispersión . . . . .	95
4.4. El límite de altas energías de la matriz de dispersión . . . . .	96
4.5. Problema inverso a energía fija para potenciales homogéneos. . . . .	97
4.6. Las soluciones de dispersión promedio y la construcción del potencial eléctrico y del campo magnético . . . . .	101
<b>5. Discusión y Resultados</b>	<b>105</b>
5.1. Breve discusión de los resultados obtenidos y sus posibles aplicaciones: . . . . .	105
5.2. Conclusiones: . . . . .	106



# Capítulo 1

## Introducción física del problema

### 1.1. Mecánica cuántica no relativista: Ecuación de Schrödinger

A principios del siglo XX, los paradigmas que la física clásica había establecido fueron desplazados por la observación de nuevos fenómenos que no se ajustaban con lo ya establecido; experimentos como el efecto fotoeléctrico y el movimiento browniano, demostraban que la materia estaba conformada por pequeñas partículas a las cuales se les denominó átomos (en honor a los griegos que antiguamente las nombraron así); mientras que, la propagación de ondas electromagnéticas en el vacío y la invariancia de las ecuaciones de Maxwell ante transformaciones de Lorentz (y no de Galileo), demostraron que la dinámica de los cuerpos era distinta a la que se pensaba hasta ese momento.

Para poder describir estos dos fenómenos, se crearon dos distintas teorías:

1. La primera de éstas teorías llamada cuántica, se dedica a estudiar a la materia a niveles atómicos y subatómicos.
2. La segunda teoría llamada relatividad, se puede dividir en dos grandes ramas: la relatividad especial y la relatividad general; la primera de éstas se dedica a estudiar la dinámica de cuerpos que se mueven a velocidades cercanas a la de la luz (velocidades relativistas), mientras que la segunda estudia la interacción gravitacional utilizando los postulados incorporados por la relatividad especial.

Desde esta perspectiva, la relatividad general se dedica a estudiar a la materia a niveles macroscópicos, ya que, para objetos con poca masa, la interacción gravitacional es prácticamente despreciable. Por ésta y otras razones, unificar la teoría cuántica con la teoría de la relatividad general no ha sido posible y es un problema que hasta la fecha sigue abierto.

Sin embargo, se ha observado en algunos fenómenos cuánticos partículas que se mueven a velocidades relativistas, por lo cual, ha sido de gran interés para los físicos de nuestra época conciliar la teoría de la relatividad especial con la teoría cuántica, llamada "teoría de la mecánica cuántica relativista".

Muchos físicos trataron de conciliar estas dos teorías, los más citados en la literatura corresponden a Oskar Klein, Walter Gordon y Paul Dirac; los primeros dos son reconocidos por la ecuación de Klein-Gordon, la cual describe a partículas que se mueven a velocidades relativistas pero que no consideran el espín o cuyo espín es igual a cero, mientras que la ecuación que propuso Paul Dirac, describe partículas que se mueven a velocidades relativistas con espín fraccionario  $1/2$  conocidas como "fermiones", las cuales aparecen en muchos lugares de la

naturaleza (como el electrón).

Por esto último, la descripción dada por Paul Dirac es mas completa que la de Klein-Gordon, razón por la cual se utiliza más en experimentos y aplicaciones; este trabajo se dedicará a la dispersión cuántica de partículas relativistas utilizando la ecuación de Dirac, dejando de lado a la de Klein-Gordon. Sin embargo, antes de poder resolver el problema de interés, se hablará de la mecánica cuántica, de la relatividad especial y de la mecánica cuántica relativista desde un punto de vista físico y posteriormente, se tocará el formalismo matemático que se necesita para resolverlo.

En este subcapítulo, primero se hablará sobre los postulados de la mecánica cuántica no relativista; cabe recalcar que todos estos resultados no fueron obtenidos de manera inmediata, hubieron muchos físicos que abordaron estos problemas para converger a las conclusiones actuales. Sin embargo, por el tipo de trabajo que se está presentando, se prescindirá de mencionar a todos éstos autores y solo se enfocará a lo ya comentado.

Para poder empezar a hablar sobre los postulados de la mecánica cuántica, se debe mencionar una de las propiedades mas importantes sobre los sistemas cuánticos: "la dualidad onda-partícula"; ésta se manifiesta por las perturbaciones que se hacen en un sistema cuántico, cuando se realizan experimentos sobre éstos. Dependiendo de como se perturbe el sistema, las partículas que lo conforman se pueden comportar como si fueran "partículas clásicas" (i. e. presentan características como el momento lineal o angular de las "partículas clásicas"), pero también pueden comportarse como "ondas clásicas" (i. e. presentan propiedades como la interferencia o superposición de las "ondas clásicas"). Por ésta razón, las leyes de Newton o la ecuación de onda clásica, no logran dar una descripción completa de éstos sistemas. Además, se observó que las mediciones realizadas en estos sistemas son múltiplos de un valor ya establecido, y no un continuo como se observaba en las teorías clásicas; a este fenómeno se le denomina "cuantización".

Para poder modelar este tipo de fenómenos se postularon los siguientes axiomas para describirlos:

1. El espacio de configuraciones de un sistema cuántico corresponde a un espacio de Hilbert separable y complejo  $\mathcal{H}$ ; además, todos los posibles estados de un sistema están dados por vectores  $\psi \in \mathcal{H}$  con norma igual a uno.
2. A cada observable  $a$ , le corresponde un operador lineal  $A$  auto-adjunto, definido en un subconjunto denso  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}$ ; cuyos eigenvalores son las posibles mediciones que se pueden obtener de  $a$  en el sistema. Además, el operador correspondiente al polinomio  $P_n(a) = \sum_{j=0}^n \alpha_j a^j$ , con  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ , está dado por  $P_n(A) = \sum_{j=0}^n \alpha_j A^j$ , con dominio  $\mathcal{D}(P_n(A)) = \mathcal{D}(A^n) = \{\psi \in \mathcal{D}(A) | A\psi \in \mathcal{D}(A) \dots A^{n-1}\psi \in \mathcal{D}(A)\} (A^0 = \mathbb{I})$ .
3. El valor promedio del observable  $a$ , cuando el sistema se encuentra en el estado  $\psi$ , está dado por  $\bar{a} = \langle \psi, A\psi \rangle$ , que debe ser real para toda  $\psi \in \mathcal{D}(A)$  porque  $A$  es autoadjunto.
4. La evolución en el tiempo está dada por un grupo unitario, uni-paramétrico y fuertemente continuo  $U(t)$ . El generador de este grupo corresponde a la energía del sistema.

Estos postulados se pueden encontrar con mayor detalle en la referencia [20].

En este subcapítulo, no se hará tanto énfasis en el axioma dos, ya que, éste será tocado con mayor detalle en el capítulo dos.

En este subcapítulo, los vectores que se utilizarán son funciones complejas

$$\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

tales que  $\psi = \psi(x, t)$  donde  $x$  corresponde a la parte espacial y  $t$  a la temporal; estas funciones son conocidas como "funciones de onda". Además, la función

$$\rho_t(x) = |\psi(x, t)|^2 \quad (1.1)$$

se postula como la densidad de probabilidad de encontrar al sistema en el punto  $x$  al tiempo  $t$ . Por tal razón, como el sistema cuántico debe estar en algún lugar del espacio, se debe de cumplir que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, t)|^2 d^3x = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

De tal manera que  $\psi(x, t) \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ; esto implica que el espacio de Hilbert a utilizar es  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ .

Puesto que los observables, por el segundo axioma, corresponden a operadores lineales auto-adjuntos, se postula que el momento lineal  $\mathbf{p}$ , la posición  $x$  y al potencial de interacción  $V(x, t)$  corresponden a:

$$\mathbf{p}\psi = \left(-i\frac{\partial\psi}{\partial x}, -i\frac{\partial\psi}{\partial y}, -i\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{x}\psi = (x\psi, y\psi, z\psi) \quad (1.4)$$

$$V(x, t)\psi = V(x, t)\psi \quad (1.5)$$

donde se toma como convención que  $\hbar = 1$ .

Para poder determinar a la "función de onda", se optó por una teoría Hamiltoniana, adonde  $H$  designa el Hamiltoniano del sistema. Si el sistema esta compuesto por una sola partícula con masa normalizada a  $m = 1/2$ , la cual está siendo perturbada por un potencial  $V(x, t)$ , el Hamiltoniano del sistema está dado por:

$$H = |\mathbf{p}|^2 + V(x, t). \quad (1.6)$$

Cuantizando la ecuación 1.6, es decir, cambiando las observables clásicas por operadores, se obtiene que:

$$H(\psi) = (-\Delta + V(x, t))\psi = -\Delta\psi + V(x, t)\psi. \quad (1.7)$$

Se postula que la evolución temporal de la función de onda viene dada por la ecuación siguiente,

$$-\Delta\psi + V(x, t)\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (1.8)$$

La ecuación 1.8 es "la ecuación de Schrödinger" para una partícula puntual sin espín, que interactúa con una fuerza externa con potencial  $V(x, t)$ . En los casos en que el potencial no cambia en el tiempo, es decir,  $V$  no es función del tiempo, la ecuación de Schrödinger se reescribe como

$$-\Delta\psi + V(x)\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (1.9)$$

En ésta última, podemos proponer como solución una función de onda  $\psi(x, t) = \varphi(x)e^{-iEt}$  que, al hacer separación de variables se obtiene la "ecuación de Schrödinger independiente del tiempo", la cual está dada por

$$-\Delta\varphi + V(x)\varphi = E\varphi. \quad (1.10)$$

Esta deducción se puede estudiar con mayor detalle en la referencia [11].

Note que la ecuación 1.10 corresponde a una ecuación de eigenvalores  $E$ ; estos eigenvalores corresponden a la energía del sistema, por lo cual, es pertinente estudiar el espectro del operador de Schrödinger

$$H = -\Delta + V(x) \quad (1.11)$$

para poder obtener sus soluciones.

Para el caso de  $n$  partículas con masas normalizadas a  $m_i = 1/2$  con  $i = 1 \dots n$ , el Hamiltoniano toma la forma:

$$H = \sum_{i=1}^n |\mathbf{p}_i|^2 + V(x_1, \dots, x_n, t) \quad (1.12)$$

donde  $x_i$  es la posición de la  $i$ -ésima partícula,  $\mathbf{p}_i$  es el momento de la  $i$ -ésima partícula y  $V(x_1, \dots, x_n, t)$  es el potencial que contiene todas las interacciones que hay entre las partículas.. De esta expresión se sigue que:

$$H = \sum_{i=1}^n (-\Delta_i) + V(x_1, \dots, x_n, t) \quad (1.13)$$

donde:

$$\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y_i} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z_i}$$

$$\text{y } x_i = (x_i, y_i, z_i).$$

Por último, se hablará del "espín", el cual corresponde a una de las propiedades mas importantes de las partículas cuánticas. Para esto, primero se hablará del momento angular en la mecánica cuántica y posteriormente de éste.

Al igual que en la mecánica clásica, se define el operador de momento angular por medio de la siguiente expresión:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1.14)$$

donde, en este caso,  $\mathbf{r}$  corresponde al operador de posición y  $\mathbf{p}$  al operador de momento. El momento angular corresponde a un observable del sistema, por lo cual, debe de cumplir con el segundo axioma de la mecánica cuántica; esto último se supondrá cierto para los calculos siguientes.

De la definición 1.14, se deduce que el operador de momento angular está dado por:

$$\mathbf{l} = (iz \frac{\partial}{\partial y} - iy \frac{\partial}{\partial z}, ix \frac{\partial}{\partial z} - iz \frac{\partial}{\partial x}, iy \frac{\partial}{\partial x} - ix \frac{\partial}{\partial y}) \quad (1.15)$$

que en términos de componentes se puede escribir como:

$$\mathbf{l} = l_x \hat{\mathbf{i}} + l_y \hat{\mathbf{j}} + l_z \hat{\mathbf{k}} \quad (1.16)$$

donde

$$\begin{aligned}
l_x &= iz \frac{\partial}{\partial y} - iy \frac{\partial}{\partial z} \\
l_y &= ix \frac{\partial}{\partial z} - iz \frac{\partial}{\partial x} . \\
l_z &= iy \frac{\partial}{\partial x} - ix \frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Se observa que los conmutadores de las componentes del momento angular son:

- 1.-  $[l_x, l_y] = il_z$ .
- 2.-  $[l_y, l_z] = il_x$ .
- 3.-  $[l_z, l_x] = il_y$ .

La demostración de estos se pueden encontrar en los libros [11] y [12].

De manera general, si un observable  $\mathbf{J} = J_x \hat{i} + J_y \hat{j} + J_z \hat{k}$  cumple las reglas de conmutación anteriores, es decir, cumple

$$\begin{aligned}
[J_x, J_y] &= iJ_z \\
[J_y, J_z] &= iJ_x \\
[J_z, J_x] &= iJ_y
\end{aligned}$$

entonces, se dice que que el operador  $\mathbf{J}$  es un momento angular.

Retomando a  $\mathbf{l}$ , se puede demostrar que el operador  $|\mathbf{l}|^2$  definido por

$$|\mathbf{l}|^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$$

cumple las reglas de conmutación

$$[l_i, |\mathbf{l}|^2] = 0$$

donde  $i = x, y, z$ .

De igual manera, esto se puede encontrar en los libros [11] y [12].

Por lo tanto, se pueden encontrar eigenvectores simultáneos para el par de operadores  $(|\mathbf{l}|^2, l_x)$ ; esto también es válido para los pares  $(|\mathbf{l}|^2, l_y)$  y  $(|\mathbf{l}|^2, l_z)$ . Por esta razón, solo se necesita tomar un par arbitrario de estos, para encontrar un conjunto completo de eigenvectores; en particular, se tomará el par  $(|\mathbf{l}|^2, l_z)$ .

Se puede demostrar, que el conjunto de eigenvectores asociados a este par  $\{\psi_{j,m}\}$  cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{l}|^2 \psi_{j,m} &= j(j+1) \psi_{j,m} \\
l_z \psi_{j,m} &= m \psi_{j,m}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

donde  $2j = p + q$  con  $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $-j \leq m \leq j$  y  $2m = p' + q'$  con  $p', q' \in \mathbb{Z}$ .

Los resultados anteriores permiten la descripción de un electrón en presencia de un campo magnético estático. Para poder realizar esta descripción, se debe de modificar el operador de momento 1.3 a lo siguiente:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}(r)}{c} \quad (1.19)$$

donde  $e$  es la carga del electrón. De esta expresión, se sigue que:

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}(r)}{c} \right|^2 &= |\mathbf{p}|^2 - \frac{e}{c}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) + \frac{e^2}{c^2} |\mathbf{A}|^2 \\ &= |\mathbf{p}|^2 - \frac{e}{c}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{l}) + \frac{e^2}{4c^2} |\mathbf{H}|^2 r_{\perp}^2 \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde  $\mathbf{H}$  es el campo magnético,  $\mathbf{l}$  es el momento angular y  $r_{\perp}^2$  es el cuadrado de la proyección de  $\mathbf{r}$  al plano perpendicular del campo  $\mathbf{H}$ . Por lo cual, el operador de Schrödinger del electrón viene dado por:

$$H = |\mathbf{p}|^2 - \frac{e}{c}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{l}) + \frac{e^2}{4c^2} |\mathbf{H}|^2 r_{\perp}^2. \quad (1.21)$$

Si se toma un sistema con  $n$  electrones y se desprecia la interacción que hay entre estos, el operador de Schrödinger total queda determinado por:

$$H = \sum_{i=1}^n |\mathbf{p}_i|^2 - \frac{e}{c}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}) + \frac{e^2}{4c^2} |\mathbf{H}|^2 \left( \sum_{i=1}^n r_{\perp i}^2 \right) \quad (1.22)$$

donde  $\mathbf{L}$  es el momento angular total del sistema, definido de la misma manera que en la mecánica clásica. El tercer término es bastante pequeño desde el punto de vista experimental, por lo cual se puede despreciar, dejando al operador de Schrödinger como:

$$H = \sum_{i=1}^n |\mathbf{p}_i|^2 - \frac{e}{c}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}). \quad (1.23)$$

De la teoría electromagnética, se sabe que cada electrón tiene un momento magnético generado por la órbita en que se desplaza, el cual, es proporcional al momento angular de éste:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{c} \mathbf{l}$$

por lo que, el momento magnético total va estar dado por

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} = \frac{e}{c} \mathbf{L}$$

y por lo tanto, el operador de Schrödinger 1.23 se puede reescribir como

$$H = \sum_{i=1}^n |\mathbf{p}_i|^2 - \boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \mathbf{H}. \quad (1.24)$$

Se puede demostrar que este operador conmuta con las tres componentes del momento angular total  $\mathbf{L}$  (vea las referencias [11] y [12]), por lo tanto, si se toma el campo  $\mathbf{H}$  paralelo al eje  $z$ , los operadores  $H$ ,  $|\mathbf{L}|^2$  y  $L_z$  tendrán un conjunto en común de eigenvectores  $\{\psi_{nLM}\}$ , cuyos eigenvalores  $E^{nLM}$  son de la forma

$$E^{nLM} = E_0^{nL} + M\mu_B|\mathbf{H}|$$

donde  $L, M$  cumplen las mismas características que en 1.18,  $\mu_B = \frac{e}{c}$  es el magnetón de Bohr y  $E_0^{nL}$  son los eigenvalores del operador momento lineal total  $\sum_{i=1}^n |\mathbf{p}_i|^2$ . De esto, se pueden concluir tres cosas:

1. Cada nivel  $E_0^{nL}$  del espectro se divide por el campo  $\mathbf{H}$  en un "multiplete" de  $(2l+1)$  niveles equidistantes.
2. Estos niveles se distribuyen en cada lado de  $E_0^{nL}$  de tal manera que su distancia de  $E_0^{nL}$  en promedio es cero.
3. La distancia entre dos niveles vecinos siempre es  $\mu_B|\mathbf{H}|$  independientemente de la cantidad de electrones que se tomen.

Estas conjeturas fueron parcialmente confirmadas por los experimentos; las discrepancias mas importantes con estas conjeturas fueron:

1. Si el conjunto  $n$  es impar, los multipletes eran todos equitativos, que solo se logra cuando  $\mathbf{L}$  toma valores fraccionarios.
2. La distancia entre vecinos en un mismo multiplete es de la forma  $g\mu_B|\mathbf{H}|$ , donde  $g$ , llamado el factor de Landé, varía según el multiplete observado con límites muy grandes.

Para poder arreglar estas dificultades, se introdujo un momento angular fraccionario, el cual está asociado a cada electrón y es intrínseco a este. Este nuevo momento angular  $\mathbf{s}$  se conoce como espín, el cual tiene magnitud  $\frac{1}{2}$  y tiene asociado un momento magnético  $\mu_s$  dado por:

$$\mu_s = g_s \frac{e}{c} \mathbf{s}$$

donde  $g_s \simeq 2$  para fines experimentales.

Este momento angular  $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$  tiene como componentes

$$s_x = \frac{1}{2} \sigma_x$$

$$s_y = \frac{1}{2} \sigma_y$$

$$s_z = \frac{1}{2} \sigma_z$$

donde  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  son las matrices de Pauli, las cuales están dadas por:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y, además, cumplen las siguientes relaciones:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$$

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z$$

$$\sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y = i\sigma_x$$

$$\sigma_z \sigma_x = -\sigma_x \sigma_z = i\sigma_y$$

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_z = i$$

$$\text{Tr}\sigma_x = \text{Tr}\sigma_y = \text{Tr}\sigma_z = 0$$

$$\det\sigma_x = \det\sigma_y = \det\sigma_z = -1.$$

De esta manera, el operador de Schrödinger 1.23 toma la forma:

$$H = \sum_{i=1}^n |\mathbf{p}|_i^2 - \frac{e}{c} (\mathbf{H} \cdot (\mathbf{L} + 2\mathbf{S})) \quad (1.25)$$

donde  $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i$  es el espín total del sistema.

Si se observa con detenimiento esta ecuación, esta consiste en una ecuación matricial, cuyas soluciones contienen dos funciones de onda como componentes de un vector de dos entradas

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Estas soluciones son conocidas en la literatura como espinores, los cuales cumplen mas propiedades, aparte de necesitar un vector compuesto por funciones de onda con mas de una entrada para poder determinarlos. Estas propiedades extras no serán enunciadas en este trabajo, ya que, no se utilizan en ningún momento en la resolución del problema; por lo que, solo se utilizará el hecho de que los espinores necesitan un vector compuesto por funciones de onda con mas de una entrada para poder describirlos.

## 1.2. Un breve repaso de la relatividad especial

Como se comentó en el subcapítulo anterior, a la par de la teoría cuántica, se creó la teoría de la relatividad, la cual, se divide en dos grandes ramas: la relatividad especial y la relatividad general. En este subcapítulo solo se abordará la relatividad especial y se darán los puntos más importantes de ésta. De ahora en adelante, se tomará la velocidad de la luz  $c = 1$  a lo largo del texto.

En principio, la relatividad especial surgió para describir la dinámica de partículas que se mueven a velocidades muy cercanas a la de la luz (nombradas velocidades relativistas). El surgimiento de ésta empezó gracias a la electrodinámica clásica y las ecuaciones de Maxwell, ya que, éstas predicen fenómenos que no concordaban con la intuición física hasta ese momento.

Como primer punto importante, Lorentz observó que las ecuaciones de Maxwell no eran invariantes ante las "transformaciones de Galileo", cuestión que se contraponen a toda la dinámica clásica. Éste tuvo que inventar un tipo de transformaciones de coordenadas llamadas "transformaciones Lorentz" (en su honor) para poder dejar invariantes éstas ecuaciones.

Para poder escribir las transformaciones, suponga que para un observador inercial  $\mathcal{O}$ , con coordenadas  $(t, x, y, z)$ , una onda electromagnética se propaga solamente en la dirección  $x$ , esto quiere decir, que la ecuación de onda de Maxwell del campo eléctrico está dada por:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (1.26)$$

análogo para el campo magnético.

Si otro observador inercial  $\mathcal{O}'$ , con coordenadas  $(t', x', y', z')$ , observa la misma onda electromagnética, mientras se mueve a una velocidad  $v$  respecto a  $\mathcal{O}$ , en la dirección  $x$ , éste debe realizar el siguiente cambio de coordenadas:

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (1.27)$$

$$(1.28)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (1.29)$$

$$(1.30)$$

$$y' = y \quad (1.31)$$

$$(1.32)$$

$$z' = z \quad (1.33)$$

para que:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (1.34)$$

es decir:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} = 0 \quad (1.35)$$

(esto se encuentra en la referencia [18]).

De esta manera, podemos observar que las transformaciones de Lorentz dejan invariantes las ecuaciones de Maxwell; además, se entrelazan las coordenadas espaciales con las temporales y, por esta razón, para describir estos fenómenos debemos tomar un espacio de cuatro dimensiones, en el cual, el tiempo y la posición están presentes e interaccionan; esto es lo que se llama actualmente "espacio-tiempo".

Además, se observa que la velocidad límite de cualquier objeto es la de la luz, ya que, en caso contrario, el factor  $1/\sqrt{1-v^2}$  diverge si  $v = 1$  y tiene soluciones imaginarias si  $v > 1$ . Esta es la primera razón por la cual no puede haber objetos que se muevan más rápido que la velocidad de la luz.

Las transformaciones de Lorentz también son lineales, por lo cual, éstas tienen una representación matricial dada por:

$$[\Lambda_{\alpha}^{\beta}] = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

donde  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$  es conocido como el factor de Lorentz.

De ésta manera se obtiene que:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Si el movimiento se realiza en dirección del eje "y", entonces, la matriz asociada a la transformación de Lorentz toma la forma:

$$[\Lambda_{\alpha}^{\beta}] = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -v\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Y para la dirección "z" se tiene que:

$$[\Lambda_{\alpha}^{\beta}] = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -v\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Por último, un movimiento compuesto en las tres direcciones es la composición de estas tres matrices según el orden en que se realice el movimiento.

Posteriormente, se puede demostrar (gracias a las ecuaciones de Maxwell) que las ondas electromagnéticas pueden viajar en el vacío sin la necesidad de estar inmersas en un medio. Éste fenómeno se contrapuso con todo el conocimiento que se tenía sobre las ondas hasta ese momento, ya que, siempre se necesitaba de un medio para que una onda pudiera propagarse a través de éste; por esta razón, se propuso que el vacío en realidad estaba

inmerso por una sustancia llamada eter. Este eter poseía propiedades muy poco usuales, en principio se consideró que era isótropo para simplificar las hipótesis, después, éste debía permear todo el espacio sin afectar la dinámica de otros cuerpos como los planetas y, al mismo tiempo, debía ser muy rígido para permitir que ondas de esa velocidad viajaran a través de éste; estas dos últimas cualidades en principio se contraponían, sin embargo, dadas las circunstancias se aceptaron en su momento.

Puesto que el eter permeaba todo el espacio, este se podía tomar como un sistema de referencia universal, en el cual, todo fenómeno debía describirse con respecto a éste, por lo que, tendría la cualidad de ser un sistema de referencia preferencial.

Posteriormente, gracias al experimento de Michelson-Morley, se demostró con certeza que el eter no existe y, por lo tanto, que no existen los sistemas de referencia absolutos. Además, también demostró que la velocidad de la luz es invariante ante cualquier sistema de referencia inercial que lo observe.

Finalmente Einstein, por su parte, utilizando estos resultados llegó a las siguientes conclusiones, proponiendo así los dos grandes postulados de la relatividad especial:

1. Principio de relatividad: Ningún experimento puede medir la velocidad absoluta de un observador; los resultados de cualquier experimento montado por un observador no van a depender de la velocidad relativa de los otros observadores que no estén involucrados en el experimentos.
2. La universalidad de la velocidad de la luz: La velocidad de la luz es la misma respecto a cualquier sistema de referencia inercial.

Estos dos postulados se encuentran citados en la referencia [18].

El primero de estos se interpreta como que no hay sistemas de referencia preferenciales y los resultados de un experimento van a depender del observador que lo realice; sin embargo, siempre va haber un cambio de sistema de coordenadas que haga que estos dos resultados coincidan en sus observaciones. En este caso, las transformaciones de coordenadas que se utilizan son las "transformaciones de Lorentz", las cuales tienen como límite las "transformaciones de Galileo" cuando  $v \ll c$ , es decir, cuando el observador inercial se mueve a una velocidad muy pequeña respecto a la de la luz.

El segundo se refiere a que la velocidad de la luz es una constante universal y, además, cualquier observador inercial que mida la velocidad de la luz obtendrá siempre la misma.

Minkowski observó que todos estos postulados son equivalentes a la geometrización del espacio-tiempo con la "métrica de Minkowski", llamada así en su honor.

Para hablar de esta geometrización, primero se debe mencionar que todos los observadores inerciales tienen asociados un espacio-tiempo de cuatro dimensiones  $(t, x)$ , donde  $x = (x, y, z)$ ; en este espacio-tiempo, cada punto  $(t, x)$  corresponde a un fenómeno o "evento" que sucede respecto a éste. La métrica entre dos eventos  $(t', x', y', z')$ ,  $(t, x, y, z)$  en un mismo espacio-tiempo está dada por:

$$(\Delta s)^2 = (t' - t)^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2 - (z' - z)^2 \quad (1.40)$$

donde  $(\Delta s)^2$  se conoce como el "intervalo" entre estos dos eventos.

Ésta es la "métrica de Minkowski". En la referencia [18] se demuestra que, dados dos espacio-tiempo diferentes con intervalos  $(\Delta s)^2$  y  $(\Delta s')^2$  de los mismo eventos, se cumple que:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 \quad (1.41)$$

es decir, el intervalo es invariante.

De la definición 1.40, se puede demostrar que el intervalo toma valores tanto positivos como negativos, por esta razón, se pueden clasificar los eventos  $(t, x)$  según el signo que tome el intervalo de éstos, es decir, según el signo de la expresión:

$$(\Delta s)^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (1.42)$$

Para poder entender ésta clasificación, primero suponga que los eventos que se observan están constreñidos en la dirección  $x$ , de tal manera que, todos éstos se pueden escribir de la forma  $(t, x, 0, 0)$  (que simplificaremos por notación  $(t, x)$ ). Note que en el espacio-tiempo, la luz siempre se mueve de manera rectilínea y uniforme, ya que, al ser éste la representación de un sistema de referencia inercial, la velocidad que observará será absoluta y, por lo tanto, constante; de esto último podemos concluir que la ecuación que describe el movimiento de la luz está dada por:

$$x = t \text{ y } x = -t.$$

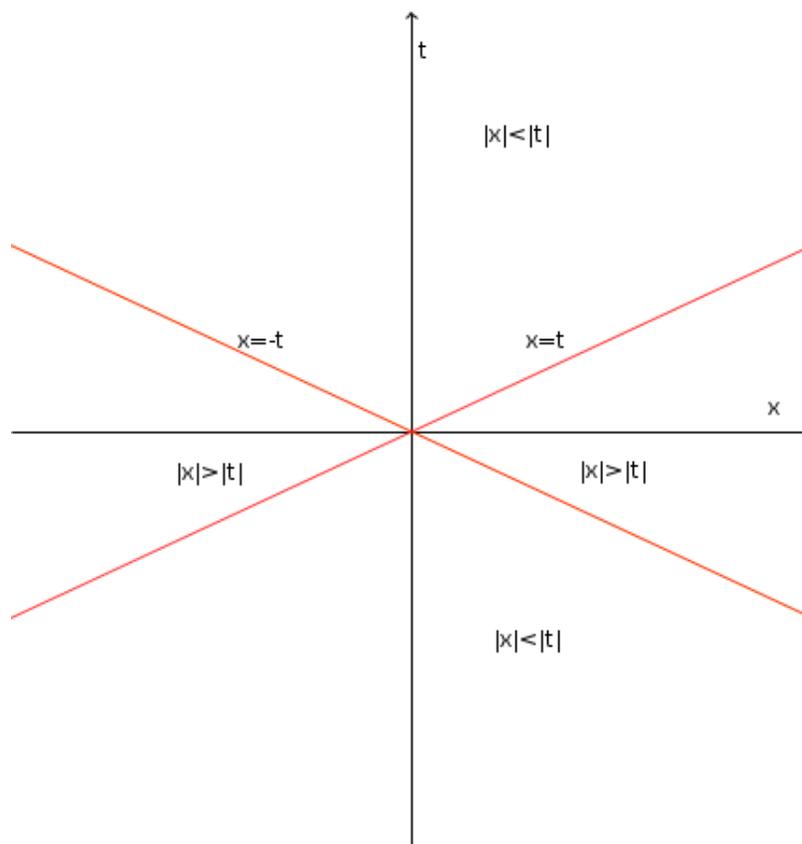


Figura 1.1: Diagrama espacio-tiempo

En el diagrama 1.1, las trayectorias que describen el movimiento de la luz están representadas por rectas de color rojo, si se rotan éstas dos rectas alrededor del origen se generará un cono; éste cono es llamado en la literatura como el "cono de luz", ya que, representa todas las trayectorias en las cuales la luz puede viajar.

En este diagrama, solo se está tomando un corte longitudinal del cono que pasa a través de su vértice; esto ayudará a simplificar la interpretación de la clasificación de los eventos:

- 1.- Los eventos "temporaloides" corresponden a puntos  $(t, x)$  cuyo intervalo  $(\Delta s)^2 > 0$ , es decir, aquellos que cumplen la relación  $|x| < |t|$ . Esto implica que estos puntos están ubicados dentro del cono de luz, como se observa en el diagrama 1.1. Físicamente, éstos corresponden a eventos accesibles para el observador, es decir, puntos en donde el observador puede estar presente. Para observar esto, suponga que se traza una línea recta  $x = vt$  del origen al evento, está debe de cumplir la relación  $|x| < |t|$ , por lo cual, se concluye que  $|v| < 1$ ; en este caso, la línea recta se puede interpretar como la trayectoria de un objeto en movimiento rectilíneo uniforme con velocidad  $v$ . Puesto que la velocidad  $|v| < 1$ , ésta es accesible por ser menor que la de la luz, por lo tanto, el observador solo necesitará moverse en esa trayectoria para estar presente en el evento.
- 2.- Los eventos "nulos" corresponden a puntos  $(t, x)$  cuyo intervalo  $(\Delta s)^2 = 0$ , es decir, aquellos que cumplen la relación  $|x| = |t|$ . Esto implica que estos puntos están ubicados en el cono de luz, como se observa en el diagrama 1.1. Físicamente, éstos corresponden a eventos que solo son accesibles para la luz o para objetos que se puedan mover a la misma velocidad que ésta.
- 3.- Los eventos "espacialoides" corresponden a puntos  $(t, x)$  cuyo intervalo  $(\Delta s)^2 < 0$ , es decir, aquellos que cumplen la relación  $|x| > |t|$ . Esto implica que estos puntos están ubicados fuera del cono de luz, como se observa en el diagrama 1.1. Físicamente, éstos corresponden a eventos no accesibles para el observador, es decir, puntos en donde el observador nunca podrá estar presente. Siguiendo el mismo razonamiento de los eventos temporaloides, se puede observar que se necesita una velocidad  $|v| > 1$  para poder acceder a estos eventos, lo cual es imposible por ser mayor que la de la luz y, por lo tanto, el observador nunca se podrá enterar de estos.

De manera análoga a la clasificación anterior, si dos eventos  $(t, x)$  y  $(t', x')$  tiene por intervalo la expresión 1.40:

Se dice que están separados de forma "temporaloide" si  $(\Delta s)^2 > 0$ . Se dice que están separados de forma "nula" si  $(\Delta s)^2 = 0$ . Se dice que están separados de forma "espacialoide" si  $(\Delta s)^2 < 0$ .

Por otra parte, de la geometrización del espacio-tiempo y las transformaciones de Lorentz, se pudieron encontrar dos de los fenómenos mas importantes de la relatividad especial, éstos son:

- 1.- Dilatación del tiempo: Éste dice que un observador  $\mathcal{O}$  que ve a otro  $\mathcal{O}'$  moverse a una velocidad relativista  $v$ , observará que el tiempo de éste se dilata y ésta relación está dada por:

$$(\Delta t)_{\text{medido en } \mathcal{O}} = \frac{(\Delta t)_{\text{medido en } \mathcal{O}'}}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (1.43)$$

Este fenómeno es válido para todos los eventos que son temporaloides respecto a  $\mathcal{O}$ .

Además, éste es muy importante, ya que se concluye que el tiempo no es absoluto, sino también relativo respecto al observador.

También se desprende de éste, el concepto de "tiempo propio"  $\Delta\tau$  asociado al evento  $(t, x)$ , el cual se define como el tiempo que mide un reloj en reposo que pasa a través de éste. De ésta definición se deduce que, el tiempo propio de un evento  $(t, x)$  viene dado por la expresión:

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta s)^2. \quad (1.44)$$

Si además, el evento corresponde a un objeto que se mueve a velocidad  $v$ , entonces, el tiempo propio está dado por:

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - v^2}. \quad (1.45)$$

2.- Contracción de Lorentz: Éste dice que, si un observador  $\mathcal{O}$  ve a un objeto de longitud  $l$  desplazarse a una velocidad relativista  $v$ , éste percibirá que el objeto está contraído a una longitud  $l'$  y éstas están relacionadas por la siguiente expresión:

$$l' = l \sqrt{1 - v^2}. \quad (1.46)$$

Este fenómeno es válido para todos los eventos separados de manera espacialoide respecto a  $\mathcal{O}$ .

Además, éste es muy importante, ya que demuestra que la percepción en que se observan los eventos puede cambiar.

Para continuar con lo siguiente, se asumirá que el lector conoce la notación de Einstein y que tiene conocimientos básicos del álgebra y calculo tensorial.

Regresando al espacio-tiempo, este se puede considerar un espacio vectorial, en el cual, dados dos puntos  $(t^1, x^1, y^1, z^1)$ ,  $(t^2, x^2, y^2, z^2)$  y un  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se define la suma de vectores y la multiplicación por escalar como:

$$(t^1, x^1, y^1, z^1) \oplus (t^2, x^2, y^2, z^2) = (t^1 + t^2, x^1 + x^2, y^1 + y^2, z^1 + z^2)$$

$$\beta \odot (t^1, x^1, y^1, z^1) = (\beta t^1, \beta x^1, \beta y^1, \beta z^1).$$

Note que, las componentes de cada vector están en su representación covariante, además, para adaptar los vectores del espacio-tiempo a la notación de Einstein, cada punto se denota como:

$$(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

De esta manera, cualquier vector  $\mathbf{A}$  del espacio-tiempo se representa como  $\mathbf{A} = \{A^\alpha\}$ , estos son los que se conocen en la literatura como "cuatro-vectores".

Note ahora que, el espacio-tiempo es un espacio de cuatro dimensiones, en el cual, los vectores base están dados por:

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, 0)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 0)$$

$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 0, 1)$$

los cuales siempre se escriben en su representación contravariante. Además, cada vector se puede escribir (en notación de Einstein) de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = A^\alpha \mathbf{e}_\alpha.$$

Recordando ahora que el espacio-tiempo está geometrizado, se puede definir un producto interno en éste de tal manera que sea consistente con la métrica de Minkowski. Dados dos vectores  $\mathbf{A} = \{A^\alpha\}$  y  $\mathbf{B} = \{B^\beta\}$ , el producto interior de éstos está dado por:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3. \quad (1.47)$$

De esta manera, la norma de un vector  $\mathbf{A} = \{A^\alpha\}$  está dada por:

$$|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2. \quad (1.48)$$

Todo esto lo podemos reescribir en notación de Einstein, representando a la métrica de Minkowski como una matriz  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  dada por:

$$\{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

con su matriz inversa  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  dada por:

$$\{g^{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

Por lo cual, las ecuaciones 1.47 y 1.48 se pueden reescribir como:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta \quad (1.51)$$

$$|\mathbf{A}|^2 = g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta. \quad (1.52)$$

Note ahora que, por la definición de norma 1.48, los vectores del espacio-tiempo pueden tomar valores tanto positivos como negativos, por lo cual, se pueden clasificar los vectores según el valor de su norma. Esta clasificación es análoga a la clasificación que se hace con los eventos: si un vector tiene norma negativa  $|\mathbf{A}|^2 < 0$  se dice que es "espacialoide", si es igual a cero  $|\mathbf{A}|^2 = 0$  es "nulo" y si es positiva  $|\mathbf{A}|^2 > 0$  es "temporaloide"; además, la interpretación que se tiene de la clasificación de los vectores es igual a la de los eventos.

Para finalizar con los cuatro-vectores, se hablará de como cambian éstos entre sistemas de referencia inerciales y como se transforma un objeto covariante a uno contravariante y viceversa.

Para esto, primero supongamos que existen dos sistemas de referencia inerciales  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  con coordenadas  $x = \{x^\alpha\}$  y  $y = \{y^\beta\}$ , respectivamente. Cada uno de estos tendrá asociado un espacio-tiempo, en los cuales, se describirán los eventos según la perspectiva de estos. Por el primer postulado de la relatividad especial, siempre habrá una manera de relacionar éstas mediciones, la forma de hacerlo es por medio de las transformaciones de Lorentz. Para explicarlo, suponga que el espacio-tiempo  $\mathcal{O}$ , observa que el espacio-tiempo  $\mathcal{O}'$ , se mueve a una

velocidad  $v$  en la dirección  $x^1$ , en este caso, la transformación de Lorentz asociada a este movimiento está dada por:

$$[\Lambda_{\alpha}^{\beta}] = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.53)$$

Por lo cual, la relación que existe entre las coordenadas  $x$  y  $y$ , está dada por:

$$y^{\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\beta} x^{\alpha} \quad (1.54)$$

donde  $\Lambda_{\alpha}^{\beta}$  es la transformación de Lorentz 1.53.

De esto último, se puede demostrar que los vectores de la base de  $x$  y  $y$ , dados por  $\{\mathbf{e}_{\alpha}\}$  y  $\{\mathbf{e}'_{\beta}\}$  respectivamente, se transforman de la siguiente manera:

$$\mathbf{e}'_{\beta} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.55)$$

donde  $\Lambda_{\beta}^{\alpha}$  es la misma transformación de Lorentz 1.53.

De manera general, si un objeto  $A$   $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$  tiene componentes  $A = \{A_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}$  en el espacio-tiempo  $\mathcal{O}$ , éstas, van a cambiar en  $\mathcal{O}'$  tomando la forma  $A = \{A_{\beta'_1 \dots \beta'_m}^{\alpha'_1 \dots \alpha'_n}\}$ . La forma de relacionar las diferentes componentes del objeto  $A$ , está dada por:

$$A_{\beta'_1 \dots \beta'_m}^{\alpha'_1 \dots \alpha'_n} = \Lambda_{\alpha'_1}^{\alpha_1} \dots \Lambda_{\alpha'_n}^{\alpha_n} \Lambda_{\beta'_1}^{\beta_1} \dots \Lambda_{\beta'_m}^{\beta_m} A_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}. \quad (1.56)$$

Se debe puntualizar que, si el movimiento se realiza en dos o mas direcciones, se deberán componer las diferentes transformaciones de Lorentz (según el orden en que se realice el movimiento), para obtener la transformación final de las componentes.

Ahora, suponga que se tiene un objeto  $A$  con representación  $n$  covariante, se puede transformar la representación de  $A = \{A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}$ , a una una representación  $n - 1$  covariante y 1 contravariante, tal que, el  $i$ -ésimo índice de la representación  $n$  covariante, corresponderá al nuevo índice contravariante. Esto se define de la siguiente manera:

$$A^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_n} = g_{\alpha_i \beta} A^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \beta \alpha_{i+1} \dots \alpha_n} \quad (1.57)$$

donde  $g_{\alpha\beta}$  es la métrica de Minkowski dada anteriormente.

De manera análoga, se puede transformar la representación de un objeto  $A = \{A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}$   $m$  contravariante, a una  $m - 1$  contravariante y 1 covariante. Ésto está dado por:

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_n} = g^{\alpha_i \beta} A_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \beta \alpha_{i+1} \dots \alpha_n} \quad (1.58)$$

donde  $g^{\alpha\beta}$  es la inversa de la matriz de la métrica de Minkowski dada anteriormente.

Para finalizar con este subtítulo, se hablará del cuatro-momento y la energía relativista, ya que, de esta última relación se obtiene la ecuación de Dirac.

Suponga que se tiene un espacio-tiempo  $\mathcal{O}$  con coordenadas  $(t, x, y, z)$ ; de manera análoga a la mecánica clásica, la descripción del movimiento de una partícula puntual que observa  $\mathcal{O}$  queda completamente determinada por un cuatro-vector que emerge del origen hasta llegar a la posición de la partícula, esto se puede observar en la figura 1.2

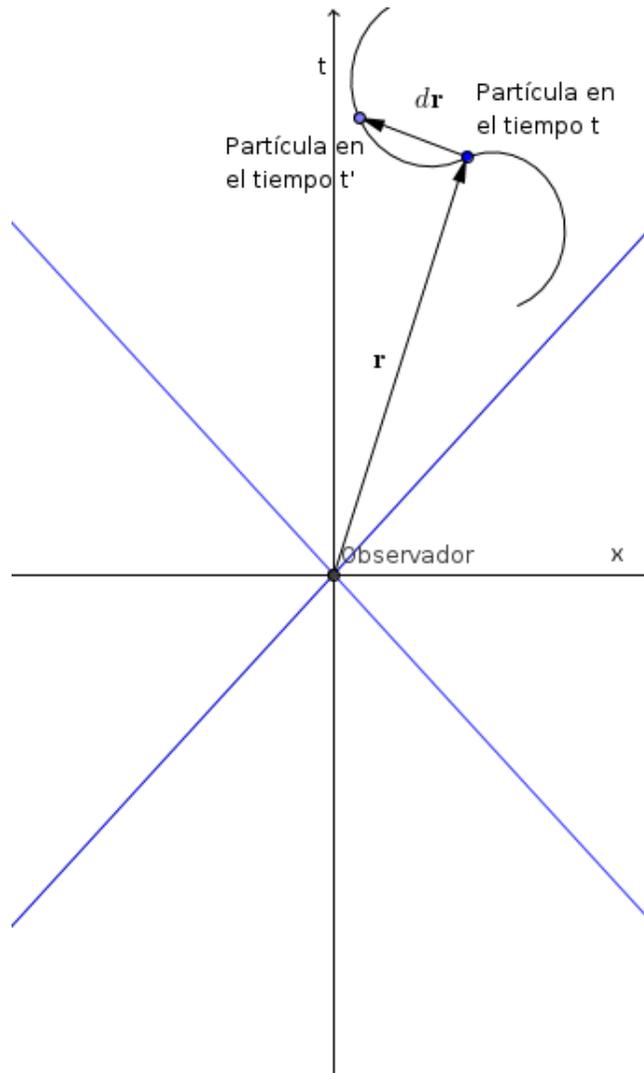


Figura 1.2: Descripción del movimiento de una partícula

De igual manera,  $d\mathbf{r}$  representa un cambio en el desplazamiento de la partícula, de tal manera que:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t) = (t' - t, x' - x, y' - y, z' - z)$$

donde  $\mathbf{r}(s)$  es el cuatro-vector asociado a la posición de la partícula en el tiempo  $s$ . Si el cambio es infinitesimal, entonces:

$$d\mathbf{r} = (dt, dx, dy, dz).$$

Se define la cuatro-velocidad  $\mathbf{U}$  de una partícula en movimiento, como el cuatro-vector:

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \quad (1.59)$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio de la partícula.

Note que, la norma de la cuatro-velocidad viene dada por:

$$|\mathbf{U}|^2 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2. \quad (1.60)$$

Como la partícula está en movimiento, ésta tiene asociada una velocidad  $v$  que puede medir el observador  $\mathcal{O}$  desde su sistema de referencia, por lo cual, de la ecuación 1.45 se obtiene que:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-v^2}} \quad (1.61)$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 - \left(\frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\tau}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \\ &= \left[\frac{1}{1-v^2}\right] [1-v^2] \\ &= 1 \end{aligned} \quad (1.62)$$

Esto concluye que la norma de la cuatro-velocidad para cualquier partícula siempre es uno, es decir:

$$|\mathbf{U}|^2 = 1. \quad (1.63)$$

De la misma forma que en la mecánica clásica, se define el cuatro-momento como:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{U} \quad (1.64)$$

donde  $m$  es la masa en reposo de la partícula.

Las componentes del cuatro-momento  $\mathbf{p}$  son:

$$\begin{aligned} p^0 &= \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \\ p^i &= \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dx^i}{dt}. \end{aligned}$$

La primera componente  $p^0$  se interpreta como la energía relativista de la partícula, ya que, si  $v \ll 1$   $p^0$  se puede aproximar a lo siguiente:

$$p^0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \approx m + \frac{1}{2}mv^2.$$

Note que esta expresión corresponde a la suma de la energía cinética de la partícula mas otro término, este último se interpreta como la energía en reposo, ya que, si se está en un sistema de referencia donde la partícula está en reposo  $p^0 = m$ . Por esta razón, se puede interpretar a  $p^0$  como la energía total relativista y por lo tanto, las componentes del cuatro-momento son:

$$\mathbf{p} = (E, p^1, p^2, p^3). \quad (1.65)$$

Si se toma la norma del cuatro-momento se obtiene:

$$|\mathbf{p}|^2 = E^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2. \quad (1.66)$$

Tomando la definición de cuatro-momento, se puede observar que:

$$|\mathbf{p}|^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = (m\mathbf{U}) \cdot (m\mathbf{U}) = m^2(|\mathbf{U}|) = m^2 \quad (1.67)$$

utilizando la ecuación 1.63. Por lo tanto:

$$m^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2 \text{ o, equivalentemente } E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2. \quad (1.68)$$

Esta última, es la expresión de la energía relativista de una partícula en movimiento. Esta ayudará a deducir la ecuación de Dirac en el siguiente subcapítulo.

### 1.3. Inicios de la mecánica cuántica relativista: Ecuación de Dirac

Como se comento en el primer subcapítulo, uno de los grandes problemas que hay en la actualidad es conciliar la mecánica cuántica con la teoría de la relatividad. Como primer intento de conciliación, se propuso tomar las ideas de la relatividad especial y combinarlas con la mecánica cuántica, esto dio como primera aproximación la ecuación de Klein-Gordon, la cual se puede deducir de la siguiente manera. Dada la expresión de la energía relativista

$$E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2 \quad (1.69)$$

se propone cuantizar la anterior, utilizando los operadores de la energía  $E$  y el momento  $\mathbf{p}$  de la mecánica cuántica no relativista. De esto último, se obtiene la ecuación de Klein-Gordon

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\Delta + m^2)\psi \quad (1.70)$$

donde  $\psi$  es la función de onda a determinar.

Ésta es una de las primeras aproximaciones para describir partículas cuánticas libres a velocidades relativistas; sin embargo, la descripción que da es para partículas de espín 0, por lo cual, la información que otorga es insuficiente para electrones y, en general, para átomos. Por esta razón, Dirac dedujo una ecuación que permitiera la descripción de electrones libres que se movieran a velocidades relativistas.

Para realizar esto, el hizo una linearización de la ecuación de Klein-Gordon, es decir, transformó la ecuación diferencial de segundo orden a una de primer orden e incluyó el espín en esta linearización. Esto se realizó de la siguiente manera:

Como la descripción de los electrones necesita el uso de espinores, Dirac propuso que cualquier solución de su ecuación diferencial debe ser un espinor, es decir, debe de ser de la forma:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

donde  $n$  se debe determinar.

Posteriormente, propuso que la ecuación de Klein-Gordon fuera una ecuación matricial, es decir, fuera una ecuación de la forma

$$\mathbb{I}i \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \mathbb{I}(-\Delta + m^2) \psi \quad (1.71)$$

donde  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad de dimensión  $n \times n$ , es decir,

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Se propone como linearización de la ecuación de Klein-Gordon, al operador

$$\mathbb{I}E = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m \quad (1.72)$$

donde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  es un vector cuyas componentes son matrices de  $n \times n$ ,  $\beta$  es una matriz de  $n \times n$  y  $\mathbf{p} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  es el operador de momento.

Al elevar al cuadrado este operador, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{I}E^2 &= (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m)(\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) \\ &= (\alpha \cdot \mathbf{p})(\alpha \cdot \mathbf{p}) + (\beta m)(\alpha \cdot \mathbf{p}) \\ &\quad + (\alpha \cdot \mathbf{p})(\beta m) + (\beta m)(\beta m) \end{aligned} \quad (1.73)$$

Como  $\alpha \cdot \mathbf{p} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$ , el primer término de la 1.73 se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3)(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3) &= \alpha_1^2 p_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 p_1 p_2 + \alpha_1 \alpha_3 p_1 p_3 + \alpha_2 \alpha_1 p_2 p_1 + \alpha_2^2 p_2^2 \\
&\quad + \alpha_2 \alpha_3 p_2 p_3 + \alpha_3 \alpha_1 p_3 p_1 + \alpha_3 \alpha_2 p_3 p_2 + \alpha_3^2 p_3^2 \quad . \quad (1.74) \\
&= \alpha_1^2 p_1^2 + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) p_2 p_1 + (\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1) p_3 p_1 + \\
&\quad + \alpha_2^2 p_2^2 + (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2) p_2 p_3 + \alpha_3^2 p_3^2
\end{aligned}$$

El segundo y tercer término de la ecuación 1.74 se puede reescribir como

$$(\beta m)(\alpha \cdot \mathbf{p}) + (\alpha \cdot \mathbf{p})(\beta m) = (\beta \alpha + \alpha \beta) \cdot (m \mathbf{p}) \quad (1.75)$$

$$(1.76)$$

$$(\beta m)(\beta m) = m^2 \beta^2. \quad (1.77)$$

Puesto que la expresión 1.73 debe coincidir con la ecuación 1.71 al elevarse al cuadrado, se concluye de 1.74, 1.76 y 1.77 que las matrices  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  deben de cumplir las siguientes relaciones:

$$\alpha_i^2 = \mathbb{I}, \forall i = 1, 2, 3$$

$$\beta^2 = \mathbb{I}$$

$$\beta \alpha_i + \alpha_i \beta = 0, \forall i = 1, 2, 3$$

$$\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 0, \forall i, k = 1, 2, 3 \text{ con } i \neq k.$$

De las primeras dos relaciones se concluye que:

- 1.-  $\forall i = 1, 2, 3$  los eigenvalores de  $\alpha_i, \beta$  son  $\pm 1$ .
- 2.-  $\forall i = 1, 2, 3$  las matrices  $\alpha_i, \beta$  son invertibles y, además, las matrices inversas son ellas mismas.

De la segunda observación y la tercera relación de las matrices de Dirac se obtiene que:

$$\alpha_i = -\beta \alpha_i \beta.$$

Sacando la traza de la matriz  $\alpha_i$  con  $i = 1, 2, 3$  se obtiene que:

$$\text{Tr} \alpha_i = \text{Tr}(\mathbb{I} \alpha_i) = \text{Tr}(\beta^2 \alpha_i) = \text{Tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{Tr} \alpha_i.$$

Por lo tanto:

$$\text{Tr}\alpha_i = 0, \forall i = 1, 2, 3.$$

De manera análoga se demuestra que

$$\text{Tr}\beta = 0.$$

Por otra parte, como a partir de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  se obtiene el operador de energía, éstas deben ser Hermitianas, ya que, de lo contrario el operador de energía no sería auto-adjunto, lo cual, contradice el segundo axioma de la mecánica cuántica. Esto implica que las matrices  $\alpha_i, \beta$  son diagonalizables  $\forall i = 1, 2, 3$ , por lo cual,

$$\text{Tr}(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j, \forall i = 1, 2, 3$$

donde  $\lambda_j$  son los eigenvalores de la matriz  $\alpha_i$  y  $n$  es la dimensión de esta matriz. Puesto que los eigenvalores de estas matrices son exclusivamente 1 y  $-1$ , se tiene que:

$$\text{Tr}(\alpha_i) = p - q$$

donde  $p, q \in \mathbb{N}$  son la multiplicidad de los eigenvalores de 1 y  $-1$ , respectivamente.

Como  $\forall i = 1, 2, 3$  se cumple que  $\text{Tr}(\alpha_i) = 0$ , se tiene que  $p = q$ . Esto implica que si la dimensión de la matriz  $\alpha_i$  es  $n$ , entonces  $n = 2p$ , ya que,  $n$  es la suma de las multiplicidades de los eigenvalores de  $\alpha_i$ . Por lo tanto, la dimensión de la matriz  $\alpha_i$  es par y, por lo tanto,  $\alpha_i \in \mathbb{M}_{2p \times 2p}(\mathbb{C}) \forall i = 1, 2, 3$ , donde  $p \in \mathbb{N}$ . De manera análoga se sigue que  $\beta \in \mathbb{M}_{2p \times 2p}(\mathbb{C})$ .

Este es un resultado muy importante, ya que, impone condiciones en la dimensión de la ecuación diferencial y, por lo tanto, también en las soluciones o espinores.

Para  $p = 1$ , las matrices  $\alpha_i \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$  coinciden con las matrices de Pauli  $\sigma_i$ , esto recupera los resultados de la mecánica cuántica no relativista que incluyen al espín.

Para el caso  $p = 2$  que es el que interesa, las matrices  $\alpha_i, \beta \in \mathbb{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C})$  toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.78}$$

De esta manera, la ecuación de Dirac libre se puede escribir de la siguiente forma:

$$-i\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta m \psi = i\mathbb{I} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{1.79}$$

Multiplicando la expresión 1.79 por la matriz  $\beta$  y definiendo las matrices  $\gamma^\mu$  con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , de la siguiente manera:

$$\gamma^0 = \beta, \gamma^j = \beta \alpha_j \forall i = 1, 2, 3.$$

Se obtiene que:

$$-i\gamma^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\gamma^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mathbb{I}m\psi = i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1.80)$$

Ésta última se puede reescribir, utilizando notación de Einstein y omitiendo la matriz  $\mathbb{I}$  como:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi = 0. \quad (1.81)$$

Esta expresión se conoce como "la forma covariante de la ecuación de Dirac libre"; ésta se distinguirá de la ecuación de Dirac libre 1.72, a pesar de que estas sean equivalentes.

Además, las nuevas matrices  $\gamma^\mu$  cumplirán propiedades análogas a las matrices  $\alpha$  y  $\beta$ , heredadas por éstas. Los anticonmutadores de estas matrices cumplen que:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I} \quad (1.82)$$

donde  $g^{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski definida en el subcapítulo anterior.

Las condiciones de Hermiticidad se transforman en:

$$\gamma^{0\dagger}, \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \forall i = 1, 2, 3$$

que se pueden reescribir como:

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \forall \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Por último, es importante notar que las representaciones contravariantes de las matrices  $\gamma^\mu$ , es decir,  $\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu$ , cumplen las siguientes relaciones:

$$\gamma_0 = \gamma^0, \gamma_i = -\gamma^i \forall i = 1, 2, 3 \text{ y } \gamma^\mu = \gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu^{-1} \forall \mu = 0, 1, 2, 3.$$

La forma covariante de la ecuación de Dirac libre 1.81, permite demostrar que la ecuación de Dirac libre es invariante ante transformaciones de Lorentz. Para esto, suponga que existen dos sistemas de referencia  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  que observan y describen a la misma partícula. Estos dos sistemas de referencia obtendrán sus respectivas funciones de onda  $\psi(x^0, x^1, x^2, x^3) = \psi(x)$  y  $\psi(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = \psi'(x')$  como soluciones de la ecuación de Dirac libre en sus respectivos sistemas de referencia. Estas ecuaciones serán de la forma:

$$\begin{aligned} [i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi(x) &= 0 \\ [i\gamma'^\mu \partial'_\mu - m]\psi'(x') &= 0 \end{aligned}$$

donde la masa  $m$  no cambia por ser la masa en reposo de la partícula.

Note que, si  $\Lambda_V^\mu$  es la transformación de Lorentz que relaciona los sistemas de referencia  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$ , se obtienen que:

$$x^\mu = \Lambda_\nu^\mu x'^\nu \text{ y } \partial_\mu = \Lambda_\mu^\nu \partial'_\nu.$$

Por lo cual, sustituyendo esto en la ecuación de Dirac del observador  $\mathcal{O}$  se obtiene que:

$$[i\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu \partial'_\nu - m]\psi([\Lambda_\mu^\nu]x') = 0$$

donde  $\Lambda_\mu^\nu$  es la matriz asociada a la transformación de Lorentz.

Renombrando  $\hat{\gamma}^\nu = \gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu$ , se puede reescribir la ecuación anterior como:

$$[i\hat{\gamma}^\nu \partial'_\nu - m]\psi([\Lambda_\mu^\nu]x') = 0. \quad (1.83)$$

Note que, las matrices  $\hat{\gamma}^\nu$  cumplen la propiedad 1.82; para esto, observe que:

$$\hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu + \hat{\gamma}^\nu \hat{\gamma}^\mu = \gamma^\lambda \Lambda_\lambda^\mu \gamma^\theta \Lambda_\theta^\nu + \gamma^\theta \Lambda_\theta^\nu \gamma^\lambda \Lambda_\lambda^\mu = \Lambda_\lambda^\mu \Lambda_\theta^\nu (\gamma^\lambda \gamma^\theta + \gamma^\theta \gamma^\lambda) = 2\Lambda_\lambda^\mu \Lambda_\theta^\nu g^{\lambda\theta} \mathbb{I} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I}.$$

Por lo cual, por el teorema fundamental de las matrices  $\gamma^\mu$  (vea referencia [12]), existe una transformación unitaria  $U$ , tal que,

$$\hat{\gamma}^\nu = U^* \gamma^\nu U.$$

Por lo tanto, la ecuación 1.83 se puede reescribir como:

$$[iU^* \gamma^\nu U \partial'_\nu - m]\psi([\Lambda_\mu^\nu]x') = 0 \quad (1.84)$$

que, al multiplicar la ecuación anterior por  $U$  se obtiene que:

$$[i\gamma^\nu U \partial'_\nu - mU]\psi([\Lambda_\mu^\nu]x') = 0$$

o, equivalentemente:

$$[i\gamma^\nu \partial'_\nu - m][U\psi([\Lambda_\mu^\nu]x')] = 0. \quad (1.85)$$

Note que, la expresión 1.85 corresponde a la ecuación de Dirac libre asociada al observador  $\mathcal{O}'$ , por lo tanto,  $[U\psi([\Lambda_\mu^\nu]x')]$  es solución de esta ecuación. Como  $\psi'(x')$  es la solución original a la ecuación 1.85, es decir, es la función de onda que determinó inicialmente  $\mathcal{O}'$ , y éstas dos soluciones describen el mismo fenómeno físico visto desde el mismo sistema de referencia, entonces, se debe de cumplir que:

$$\psi'(x') = U\psi([\Lambda_\mu^\nu]x'). \quad (1.86)$$

De esto último podemos concluir que la ecuación 1.85 se puede reescribir como:

$$[i\gamma^\nu \partial'_\nu - m]\psi'(x') = 0.$$

Esto demuestra que, la ecuación de Dirac libre es invariante ante transformaciones de Lorentz; además, da una regla de correspondencia entre dos distintas funciones de onda, obtenidas por dos distintos observadores inerciales que describen el mismo fenómeno.

Otra de las propiedades importantes de la ecuación de Dirac libre, corresponde a que ésta tiene una densidad de probabilidad positiva.

Para observar esto, se tomará la ecuación de Dirac libre en su forma no covariante; multiplicando esta expresión por la conjugada hermitiana de la función de onda  $\psi^\dagger = (\bar{\psi}_1 \cdots \bar{\psi}_4)$  se obtiene que:

$$i\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\psi^\dagger \alpha \cdot \nabla \psi + m\psi^\dagger \beta \psi. \quad (1.87)$$

Ahora, multiplicando por  $\psi$  a la conjugada hermitiana de la ecuación de Dirac libre, se obtiene que:

$$-i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = i\nabla \psi^\dagger \cdot \alpha \psi + m\psi^\dagger \beta \psi. \quad (1.88)$$

Restando la expresión 1.88 y a la ecuación 1.87, se obtiene que:

$$i(\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi) = -i(\psi^\dagger \alpha \cdot \nabla \psi + \psi^\dagger \alpha \cdot \nabla \psi) + (m\psi^\dagger \beta \psi - m\psi^\dagger \beta \psi). \quad (1.89)$$

Ésta se puede reescribir como:

$$i \frac{\partial \psi^\dagger \psi}{\partial t} = -i\nabla(\psi^\dagger \alpha \psi). \quad (1.90)$$

De esta última ecuación, se define la densidad de probabilidad como

$$\rho = \psi^\dagger \psi.$$

Ésta siempre es positiva, ya que,

$$\psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 \bar{\psi}_i \psi_i \geq 0$$

para cualquier punto  $x \in \mathbb{R}^3$  y  $t \in \mathbb{R}$ . Por otra parte, se define a la corriente de probabilidad como la expresión

$$\mathbf{j} = i\psi^\dagger \alpha \psi.$$

De esta manera, la expresión 1.90 se transforma en:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (1.91)$$

La expresión 1.91 corresponde a una ecuación de continuidad; para verificar esto, se debe de mostrar que la probabilidad se conserva, es decir, que  $\rho$  cumple que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \rho d^3x = 0. \quad (1.92)$$

Para demostrar esto, se integrará la expresión 1.91 en todo el espacio, lo cual transforma a 1.91 en:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \rho d^3x + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \mathbf{j} d^3x = 0. \quad (1.93)$$

Se va a demostrar que el segundo término de la ecuación 1.93 siempre es cero.

Recuerde que  $\psi$  una función de cuadrado integrable. Supongamos que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi = 0. \quad (1.94)$$

Por lo cual, utilizando el teorema de Gauss en el segundo término de la ecuación 1.93, éste se transforma en:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \mathbf{j} d^3x = \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{\partial B_r(0)} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d^3x. \quad (1.95)$$

Sin embargo, como

$$\mathbf{j} = i\psi^\dagger \alpha \psi$$

entonces

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{j} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\exists r > 0 \text{ tal que } \mathbf{j} \approx 0 \forall x \in \partial B_r(0).$$

De esta manera

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{\partial B_r(0)} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} d^3x = 0. \quad (1.96)$$

Esto último demuestra que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \rho d^3x = 0. \quad (1.97)$$

Por lo tanto, 1.91 es una ecuación de continuidad y, por lo tanto,  $\rho$  se puede interpretar como la densidad de probabilidad del sistema.

Para terminar con la discusión de la ecuación de Dirac libre, se hablará de las soluciones de esta, así como la interpretación que se da de ellas.

Para poder encontrar las soluciones de la ecuación de Dirac libre, primero se supondrá que el observador inercial  $\mathcal{O}$  que realiza el experimento, está en el sistema de referencia donde la partícula está en reposo, es decir, en el sistema de referencia donde  $\mathbf{p} = 0$ . De esto se sigue que 1.79 se puede reescribir como:

$$m\beta\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (1.98)$$

Esta ecuación tiene cuatro soluciones, las cuales están asociadas a los eigenvalores y eigenvectores de la matriz  $\beta$ ; por tal razón, éstas están dadas por:

$$\psi_0^1(x) = \omega^1(0)e^{-imt}, \quad \psi_0^2(x) = \omega^2(0)e^{-imt}, \quad \psi_0^3(x) = \omega^3(0)e^{imt}, \quad \psi_0^4(x) = \omega^4(0)e^{imt} \quad (1.99)$$

donde  $\omega^i(0)$  corresponde a los eigenvectores de  $\beta$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Note que, las primeras dos soluciones corresponden a energías positivas, mientras que las restantes a negativas; esto se puede observar si se aplica el operador energía  $E = i\frac{\partial}{\partial t}$  a las funciones  $\psi_0^i$  para toda  $i = 1, 2, 3, 4$ . Además, estas soluciones se pueden compactar definiendo a

$$\varepsilon_r = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 1, 2 \\ -1 & \text{si } r = 3, 4 \end{cases}.$$

De esta manera, las cuatro soluciones de la ecuación de Dirac libre se pueden reescribir como:

$$\psi_0^r(x) = \omega^r(0)e^{-i\varepsilon_r mt}.$$

Por otra parte, note que en el sistema en reposo el cuatro-momento está dado por:

$$p^0 = m, \quad p^i = 0 \text{ para todo } i = 1, 2, 3.$$

Además, note que:

$$t = x_0 = g_{0\mu}x^\mu = g_{00}t + g_{01}x + g_{02}y + g_{03}z.$$

Por lo cual,

$$mt = p^0x_0 = p^0x_0 + p^1x_1 + p^2x_2 + p^3x_3 = p^\mu x_\mu.$$

Por lo tanto, las soluciones a la ecuación de Dirac libre en este sistema se pueden reescribir como:

$$\psi_0^r(x) = \omega^r(0)e^{-i\varepsilon_r p^\mu x_\mu}.$$

Ahora, suponga que existe otro observador inercial  $\mathcal{O}'$ , tal que observa a la partícula moverse a una velocidad  $\mathbf{v}$ . Como ya se demostró en este subtema, la solución a la ecuación de Dirac libre que determina  $\mathcal{O}'$ , está relacionada con la de  $\mathcal{O}$  por medio de la expresión 1.86. Por lo cual, si  $\psi_p^r(x')$  denota a la función de onda determinada por  $\mathcal{O}'$ , entonces, ésta va a estar dada por:

$$\begin{aligned}
 \psi_p^r(x') &= U[\omega^r(0)e^{-i\varepsilon_r p^\mu \Lambda_\mu^y x'_v}] \\
 &= U[\omega^r(0)e^{-i\varepsilon_r p'^\eta \Lambda_\eta^u \Lambda_\mu^y x'_v}] \\
 &= U[\omega^r(0)e^{-i\varepsilon_r p'^\eta \delta_\eta^y x'_v}] \quad . \\
 &= U[\omega^r(0)e^{-i\varepsilon_r p'^\nu x'_v}] \\
 &= [U\omega^r(0)]e^{-i\varepsilon_r p'^\nu x'_v}
 \end{aligned}
 \tag{1.100}$$

donde  $\{p'^\nu\}$  es el cuatro-momento determinado por el observador  $\mathcal{O}'$ . De esto se concluye que existen siempre cuatro soluciones con dos energías distintas, dos de éstas con energía  $m$  y dos con energía  $-m$ .

Esto se contrapone con la mecánica cuántica no relativista, ya que, en el caso del átomo de hidrógeno, el electrón decaería infinitamente. Esto nunca sucede experimentalmente, por lo que, se debe de dar una nueva reinterpretación a estos resultados, surgiendo así el mar de Dirac.

Este establece que, en el vacío, todos los estados de energía negativa están llenos de electrones "imaginarios". Cuando uno introduce un electrón "real" en el vacío, este ya no puede decaer infinitamente porque violaría el principio de exclusión de Pauli, creando así la estabilidad del átomo de hidrógeno (vea la figura 1.3).

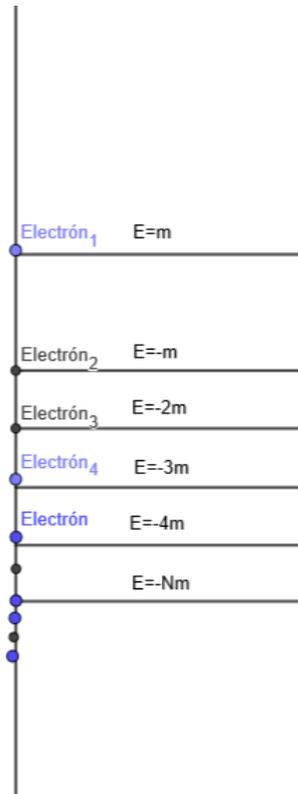


Figura 1.3: Mar de Dirac

Sin embargo, todavía hay un problema, éste surge si el sistema es excitado por radiación. Según la fenomenología de la mecánica cuántica no relativista, todos los electrones incluyendo los del vacío, deben subir a su

siguiente estado de energía para decaer posteriormente. Al haber una cantidad infinita de electrones en el vacío, este proceso se llevaría a cabo una infinidad de veces en un tiempo finito.

Esto no agradó a la comunidad científica por muchas razones y, tratando de arreglar este problema conceptual, se postuló que cuando un electrón "real" es excitado, un electrón del vacío toma su lugar dejando un hueco. Para que se conserve la carga y energía del sistema, este hueco debe ser llenado por una partícula que tenga la misma carga y energía (en magnitud) que la del electrón excitado. Esta nueva partícula que se genera en el hueco es conocida como "positrón", la cual tiene las mismas características que el electrón, solo que su carga es positiva (vea la figura 1.4).

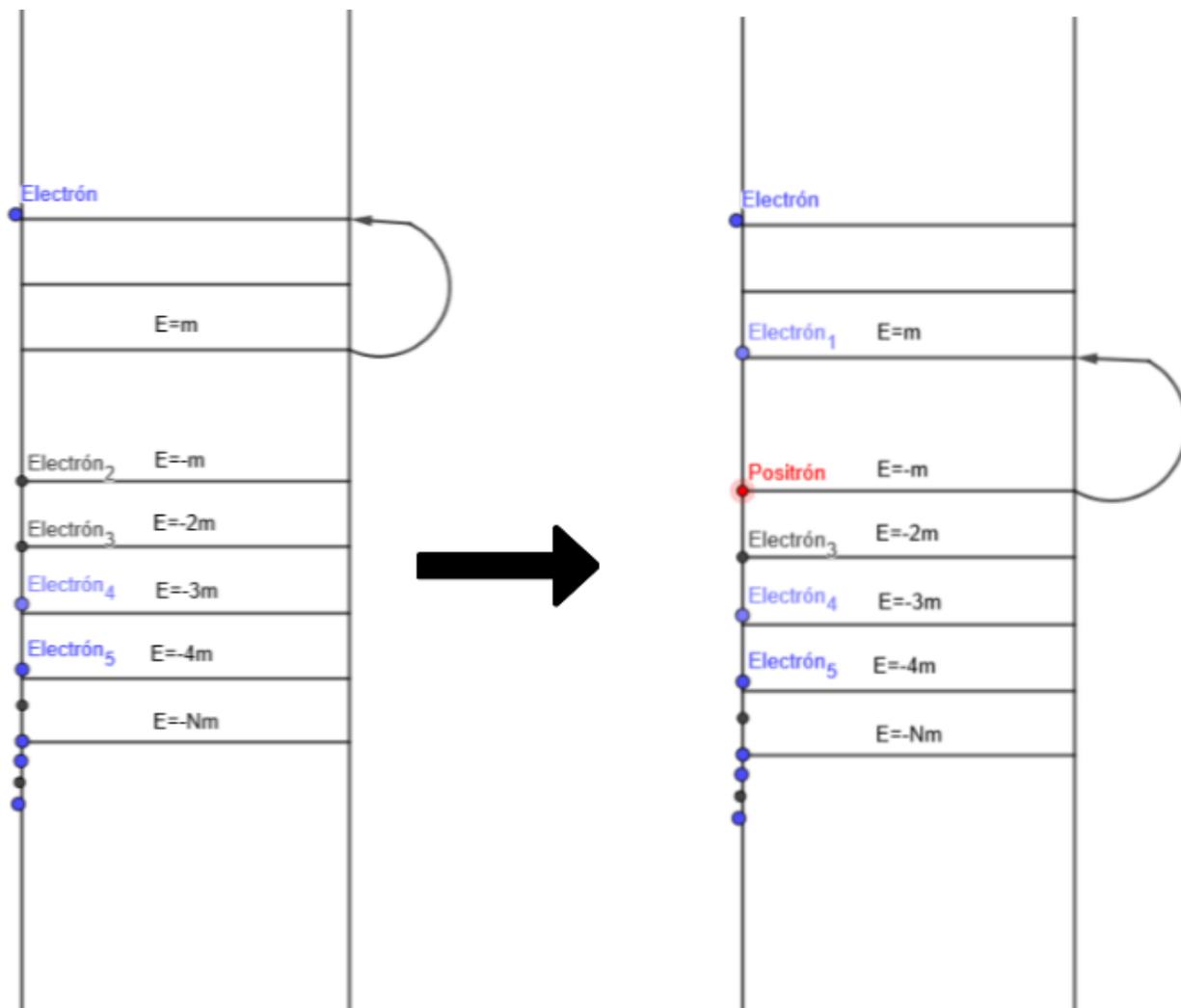


Figura 1.4: Creación de un positrón

Experimentalmente se observa que el electrón "real" decae a su estado original y como consecuencia de este proceso se emite un fotón. El mar de Dirac explica como se genera este fotón, permitiendo a este modelo ser consistente con la fenomenología observada. Éste lo explica de la siguiente manera: Cuando el electrón "real" decae, el electrón del vacío tiene que regresar a su posición original; esto hace que el electrón del vacío y el positrón se aniquilen entre sí, dando como resultado un nuevo electrón del vacío que tomará ese lugar y un fotón emitido. A este fenómeno se le conoce como la aniquilación electrón-positrón (vea la figura 1.5) y éste ya está

demostrado experimentalmente, así como la existencia del positrón.

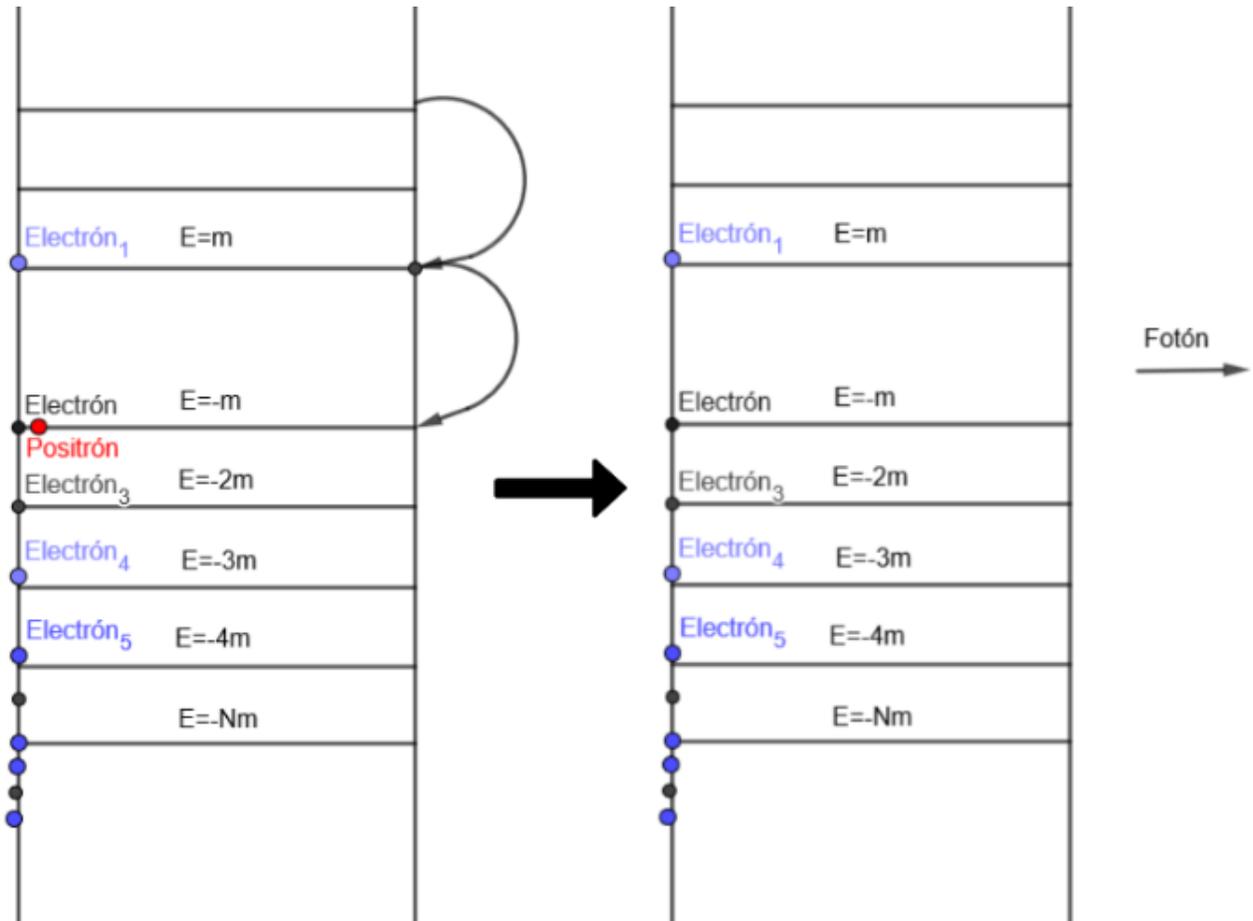


Figura 1.5: Aniquilación electrón-positrón

Por último y para concluir con este capítulo, se hablará de la ecuación de Dirac perturbada. Esta permite la descripción de sistemas cuánticos relativistas urgidos por un campo externo de potencial  $\mathbb{V}$ .

Esta ecuación, como lo indica su nombre, consiste en una perturbación a la ecuación de Dirac libre, es decir, está viene dada por

$$-i\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta m \psi + \mathbb{V} \psi = i\mathbb{I} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Normalmente, el potencial  $\mathbb{V}$  corresponde a un campo electromagnético externo, el cual se sabe de la electrodinámica clásica que es covariante, es decir, es invariante ante transformaciones de Lorentz. Sin embargo, en el caso mas general, este campo externo no necesariamente es covariante, por lo que, esta ecuación deja de ser relativista en el caso general.

## Capítulo 2

# Formalismo matemático de la mecánica cuántica relativista

### 2.1. Operador de Schrödinger: Formalismo matemático

En esta sección, se hablará un poco del formalismo matemático que hay detrás del operador de Schrödinger, así como los teoremas que nos ayudarán a resolver el problema de dispersión inverso.

Para éste trabajo en particular, solo tendrá relevancia el operador de Schrödinger de una partícula libre (operador libre de Schrödinger), i. e., solo se estudiará el caso donde el potencial  $V(x, t) = 0$ ; por lo tanto,

$$H_{0S}\psi = -\Delta\psi \quad (2.1)$$

donde los vectores  $\psi$ , son "funciones de onda"  $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por:

$$\psi = \psi(x, t)$$

donde  $x$  corresponde a la dependencia espacial y  $t$  a la temporal.

Como el potencial externo  $V(x, t) = 0$  es independiente del tiempo, los vectores  $\psi$  se pueden separar en dos funciones: una función  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  que dependerá de la parte espacial y otra  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  con la temporal; de esta manera, toda  $\psi$  queda determinada por:

$$\psi(x, t) = \varphi(x)\tau(t).$$

Además, como la función de onda  $\psi$  debe estar normalizada para cualquier tiempo  $t$ , se debe de cumplir que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, t)|^2 d^3x = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ó, equivalentemente (2.2)

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)\tau(t)|^2 d^3x = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por lo cual, 2.2 se puede reescribir como:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^2 |\tau(t)|^2 d^3x = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ó, equivalentemente (2.3)

$$\left( \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^2 d^3x \right) |\tau(t)|^2 = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La ecuación 2.3 implica que, la parte espacial  $\varphi$  debe de cumplir:

1.  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ .
2.  $\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 d^3x = 1$ .

Y la parte temporal  $\tau$  debe de cumplir:

1.  $\tau(t) = e^{i\alpha t}$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Por ésta razón, el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$  corresponde al espacio de configuraciones del sistema cuántico, cumpliendo así el primer axioma de la mecánica cuántica.

El segundo axioma de la mecánica cuántica, exige que las cantidades observables correspondan a operadores lineales auto-adjuntos; por lo cual, el operador libre de Schrödinger debe tener estas características. Por esta razón, se deben de dar las siguientes definiciones:

**Definición 1** Sea  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert. Un operador lineal es una pareja ordenada  $(\mathcal{D}(A), A)$ , denotado solo por  $A$ , donde  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}$  es un subespacio lineal y

$$A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$$

es una función lineal en  $\mathcal{D}(A)$ .

**Observación 1** Decimos que dos operadores  $A$  y  $B$  son iguales si  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$  y  $Af = Bf$  para toda  $f \in \mathcal{D}(A)$ .

**Observación 2** Si  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$  y  $Af = Bf$  para cada  $f \in \mathcal{D}(A)$ , se dice que  $B$  es una extensión de  $A$  o que  $A$  es una restricción de  $B$  y se denota como  $A \subseteq B$ .

En un espacio de Hilbert, se pueden identificar dos tipos de operadores en general: los operadores acotados y los no acotados. Para definir a estos, denotaremos por  $\|\cdot\|$  a la norma inducida por el producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Con esta precisión, la definición de un operador acotado viene dada por:

**Definición 2** Un operador  $A$  se dice que es acotado en  $\mathcal{D}(A)$ , si existe  $0 \leq M < \infty$ , tal que

$$\forall f \in \mathcal{D}(A) : \|Af\| \leq M\|f\|.$$

En caso contrario, se dice que el operador  $A$  no es acotado.

**Observación 3** El conjunto de todos los operadores acotados en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , es denotado por  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

**Observación 4** La continuidad de un operador está íntimamente relacionado con lo anterior. En general, un operador  $A$  es continuo si y solo es acotado.

Si un operador  $A$  es acotado y  $\mathcal{D}(A)$  no es cerrado, siempre se puede dar una extensión natural para  $A$  conocida como la clausura de  $A$  y denotada por  $\bar{A}$ . Se define de la siguiente manera:

**Definición 3** Sea  $A$  un operador acotado. Se define la clausura del operador  $A$ , denotada por clausura  $\bar{A}$ , como el operador que tiene como dominio a  $\overline{\mathcal{D}(A)}$  y su regla de correspondencia está dada por:

Si  $f \in \overline{\mathcal{D}(A)}$  tiene como sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(A)$ , tal que  $f_n \rightarrow f$ , entonces  $\bar{A}f = s - \lim_{n \rightarrow \infty} Af_n$ .

La existencia del límite  $s - \lim_{n \rightarrow \infty} Af_n$  se da porque  $A$  es acotado, en caso contrario, este límite no necesariamente existe. Esto hace que, para el caso de un operador no acotado, se creen dos clases distintas de éstos.

**Definición 4** Un operador  $A$  es cerrable si para cada  $f_n \in \mathcal{D}(A)$ , tal que  $s - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$  y  $\{Af_n\}_{n=1}^{\infty}$  es de Cauchy, entonces  $s - \lim_{n \rightarrow \infty} Af_n = 0$ .

**Definición 5** Un operador  $A$  es cerrado si para cada  $f_n \in \mathcal{D}(A)$ , tal que  $s - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  y  $\{Af_n\}_{n=1}^{\infty}$  es de Cauchy, entonces  $f \in \mathcal{D}(A)$  y  $s - \lim_{n \rightarrow \infty} Af_n = Af$ .

**Observación 5** Si un operador  $A$  es cerrado, entonces es cerrable. Sin embargo, la proposición recíproca no es siempre cierta.

Si un operador  $A$  es cerrable, entonces, uno puede definir la clausura  $\bar{A}$  de manera muy parecida al caso de operadores acotados.

**Definición 6** Sea  $A$  un operador cerrable. Se define la clausura del operador  $A$ , denotada por  $\bar{A}$ , al operador que tiene como dominio a todos los vectores  $f \in \mathcal{H}$ , tales que existe  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(A)$  que cumple que  $s - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  y la sucesión  $\{Af_n\}$  es fuertemente de Cauchy. Si  $f \in \mathcal{D}(\bar{A})$ , se define  $\bar{A}f = s - \lim_{n \rightarrow \infty} Af_n$ .

**Observación 6** Si un operador  $A$  es cerrado, entonces  $\bar{A} = A$ .

Ahora, se va a definir el adjunto de un operador para después definir que es un operador auto-adjunto.

**Definición 7** Sea  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador lineal, con dominio  $\mathcal{D}(A)$  denso en  $\mathcal{H}$ . Se define el operador adjunto de  $A$ , denotado por  $A^*$ , de la siguiente manera:

Un vector  $f \in \mathcal{H}$  va a pertenecer a  $\mathcal{D}(A^*)$ , si existe un vector  $f^*$  en  $\mathcal{H}$  tal que

$$\forall g \in \mathcal{D}(A) : \langle f^*, g \rangle = \langle f, Ag \rangle.$$

De esta manera, se define  $A^*f = f^*$ .

**Definición 8** Se dice que un operador  $A$  es auto-adjunto si  $A = A^*$ , es decir, si  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$  y  $Af = A^*f$ .

**Observación 7** Si  $A \subseteq A^*$  se dice que el operador  $A$  es simétrico.

**Definición 9** Se dice que  $A$  es esencialmente auto-adjunto, si  $A$  es cerrable y su clausura es auto-adjunta.

El operador libre de Schrödinger corresponde a uno no acotado, por lo cual, para que esté sea auto-adjunto se debe tener especial cuidado con su dominio  $\mathcal{D}(H_{0S})$ . Para esto, primero se restringirá éste al conjunto  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  y, posteriormente, se "agrandará" a otro dominio. Además, a partir de este punto y por simplicidad en la notación, se denotará a la norma del espacio  $L^2(\mathbb{R}^3)$  como  $\|\cdot\|$ ; en caso de utilizar otra norma se hará la distinción pertinente.

Vamos a denotar por  $H_{0S} : C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$  al operador libre de Schrödinger restringido en el conjunto  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , es decir,

$$\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) : H_{0S}f = -\Delta f.$$

El siguiente teorema, permite calcular el adjunto del operador libre de Schrödinger  $H_{0S}$  en concordancia con la definición 7, es decir:

**Teorema 1**  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  es denso en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

La demostración de este teorema se puede encontrar a detalle en las referencias [20], [19] y [5].

Ahora, como el operador libre de Schrödinger  $H_{0S}$  ya se definió en un dominio denso, entonces, ya se puede hacer el computo de su operador adjunto. Para esto, primero se darán algunas definiciones y resultados que permitirán hacer el cálculo éste, para, posteriormente, demostrar que el operador libre de Schrödinger  $H_{0S}$  es auto-adjunto en un dominio adecuado.

Sea  $j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : j(x) = \begin{cases} a \exp[(|x| - 1)^{-1}] & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

donde  $a = \int_{B_1(0)} \exp[(|x| - 1)^{-1}] d^3x$ . Por lo tanto, se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^3} j(x) d^3x = 1$$

y, además,  $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Defina para cada  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , la función  $j_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  como

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : j_k(x) = k^n j(kx). \quad (2.5)$$

Note que, para toda  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$j_k(x) > 0 \quad k|x| < 1$$

$$j_k(x) = 0 \quad k|x| \geq 1$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} j_k(x) d^3x = 1$$

$$j_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Sea  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , defina a la sucesión  $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$  dada por:

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^3} j_k(x-y)f(y)d^3y = (j_k * f)(x) \quad (2.6)$$

donde  $(f * g)(x)$  es la convolución de  $f$  con  $g$ .

Con esta sucesión, se obtienen las siguientes propiedades:

**Proposición 1** Sea  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  y  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  la sucesión dada por 2.6, entonces

1.  $\|f_k\| \leq \|f\|$  para toda  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .
2.  $\|f - f_k\| \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Nuevamente, la demostración de esta proposición se puede encontrar a detalle en las referencias [20], [19] y [5].

Ahora, se definirá que es un operador elíptico en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

Para esto, recuerde que un multi-índice  $\mu$  corresponde a una  $n$ -tupla de números enteros positivos, es decir,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$ , además, se define  $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$  y si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  entonces  $x^\mu = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_n^{\mu_n}$ . Además, se utilizará la siguiente notación:

$$\begin{aligned} D_k &= -i\partial/\partial x_k && \text{para } k=1,2,3 \\ D &= (D_1, D_2, D_3) && \text{y} \\ D^\mu &= D_1^{\mu_1} D_2^{\mu_2} D_3^{\mu_3} && \text{para cada multi-índice } \mu. \end{aligned}$$

**Definición 10** Sea  $x \in \mathbb{R}^3$  y sea  $P(x) = \sum_{|\mu| \leq m} a_\mu x^\mu$  un polinomio de grado  $m$ . Los coeficientes  $a_\mu$  son constantes. Se define el operador diferencial de orden  $m$ , asociado al polinomio  $P(x)$  como

$$P(D) = \sum_{|\mu| \leq m} a_\mu D^\mu.$$

**Observación 8** Observe que el operador libre de Schrödinger, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H_{0S} &= -\Delta \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(-i\frac{\partial}{\partial z}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por lo que, el polinomio asociado a este operador diferencial viene dado por:

$$P(x) = x^2 + y^2 + z^2 = |x|^2$$

**Definición 11** Se define la parte principal del polinomio  $P(x)$ , denotada por  $P_m(x)$ , como todos los términos de grado  $m$  de  $P(x)$ .

**Definición 12** Sea  $P(x)$  un polinomio con parte principal  $P_m(x)$ . Se dice que el operador  $P(D)$  es elíptico si

$$P_m(x) = \sum_{|\mu|=m} a_\mu x^\mu = 0$$

implica que  $x = 0$ .

En el caso del operador de Schrödinger, la parte principal coincide con el mismo polinomio, por lo que, encontrar la solución  $P_2(x) = 0$  es equivalente a  $P(x) = 0$ . Sin embargo, observe que

$$P(x) = 0 \Rightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Por lo tanto, el operador libre de Schrödinger corresponde a un operador elíptico.

**Lema 1** El operador  $P(D)$  definido en  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  es cerrable en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

Demostración:

Sea  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  una sucesión convergente a 0 en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , tal que  $\{P(D)\varphi_k\}_{k=1}^\infty$  es de Cauchy y, por lo tanto, convergente en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Suponga que  $P(D)\varphi_k \rightarrow f$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Note que, para toda  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  y para toda  $k = 1, 2, 3 \dots$

$$\langle \psi, P(D)\varphi_k \rangle = \langle \bar{P}(D)\psi, \varphi_k \rangle \quad (2.8)$$

donde

$$\bar{P}(D) = \sum_{|\mu| \leq m} \bar{a}_\mu D^\mu.$$

Para demostrar la ecuación 2.8, note primero que

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_i f d^3x = 0$$

para toda  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  e  $i = 1, 2, 3$ .

Para esto, sea  $i = 1, 2, 3$  y  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Dado que  $D_i = -i\partial/\partial x_i$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} D_i f d^3x &= \int_{\mathbb{R}^3} -i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} -i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) d^2x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (-if(x_i) \Big|_{-\infty}^{\infty}) d^2x \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

También, observe que si  $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  entonces  $fg \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Para esto, note que si  $f$  y  $g$  son  $C^\infty$ , entonces  $fg$  es  $C^\infty$ . Por otra parte, también se cumple que

$$\text{supp}(fg) = \text{supp}f \cap \text{supp}g.$$

En efecto:

Sea  $x \in \text{supp}(fg)$ , entonces, por definición

$$(fg)(x) \neq 0 \text{ o, equivalentemente } f(x)g(x) \neq 0$$

pero esto pasa si y solo si

$$f(x) \neq 0 \text{ y } g(x) \neq 0.$$

Por lo tanto,  $x \in \text{supp}f \cap \text{supp}g$ .

Por lo tanto,  $\text{supp}(fg) \subseteq \text{supp}f \cap \text{supp}g$ .

Si  $x \in \text{supp}f \cap \text{supp}g$ , entonces

$$f(x) \neq 0 \text{ y } g(x) \neq 0$$

y, por lo tanto,

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \neq 0.$$

Por lo tanto,  $x \in \text{supp}(fg)$ .

Por lo tanto,  $\text{supp}f \cap \text{supp}g \subseteq \text{supp}(fg)$ .

Ahora, note que para cada  $i = 1, 2, 3$  y  $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$D_i(f\bar{g}) = \bar{g}(D_i f) + (D_i \bar{g})f. \quad (2.10)$$

Además,

$$\bar{D}_i = -D_i$$

ya que, por definición

$$\bar{D}_i = \overline{-i \frac{\partial}{\partial x_i}} = i \frac{\partial}{\partial x_i} = -(-i \frac{\partial}{\partial x_i}) = -D_i.$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 2.10 obtenemos que:

$$D_i(f\bar{g}) = \bar{g}(D_i f) - (\bar{D}_i \bar{g})f.$$

Por lo tanto, para cada  $i = 1, 2, 3$  y  $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  se tiene que:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} D_i(f\bar{g})d^3x = \left[ \int_{\mathbb{R}^3} \bar{g}(D_i f)d^3x \right] - \left[ \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{D}_i \bar{g})f d^3x \right] = \langle g, D_i f \rangle - \langle D_i g, f \rangle \quad (2.11)$$

y, por lo tanto,

$$\langle g, D_i f \rangle = \langle D_i g, f \rangle.$$

Generalizando el resultado anterior a un multi-índice  $\mu$  se obtiene que

$$\langle g, D^\mu f \rangle = \langle D^\mu g, f \rangle.$$

Por lo tanto, para toda  $k = 1, 2, 3 \dots$  y para toda  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  se cumple que:

$$\begin{aligned} \langle \psi, P(D)\varphi_k \rangle &= \langle \psi, \sum_{|\mu| \leq m} a_\mu D^\mu \varphi_k \rangle \\ &= \sum_{|\mu| \leq m} a_\mu \langle \psi, D^\mu \varphi_k \rangle \\ &= \sum_{|\mu| \leq m} \bar{a}_\mu \langle D^\mu \psi, \varphi_k \rangle \\ &= \langle \sum_{|\mu| \leq m} \bar{a}_\mu D^\mu \psi, \varphi_k \rangle \\ &= \langle \bar{P}(D)\psi, \varphi_k \rangle \end{aligned} \tag{2.12}$$

lo que demuestra la ecuación 2.8.

Como  $\varphi_k \rightarrow 0$  y  $P(D)\varphi_k \rightarrow f$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces

$$\langle \psi, P(D)\varphi_k \rangle \rightarrow \langle \psi, f \rangle \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty,$$

y, por otra parte,

$$\langle \bar{P}(D)\psi, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle \bar{P}(D)\psi, 0 \rangle = 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto,

$$\langle \psi, f \rangle = 0. \tag{2.13}$$

Ya que  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  es arbitraria, entonces, la ecuación 2.13 se cumple para toda  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Por lo tanto, como  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  es denso en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , entonces,  $f = 0$ .

Por lo tanto,  $P(D)$  es cerrable en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

□

Como  $P(D)$  es cerrable en  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , entonces, se puede definir de manera adecuada la clausura del operador  $P(D)$ . A esta clausura, denotada por  $P_0$ , se le conoce como "la extensión fuerte o mínima del operador  $P(D)$ "; sin embargo, para el cálculo del operador adjunto, conviene más definir otra extensión de  $P(D)$  llamada "la extensión débil o maximal de  $P(D)$ ", la cual, es denotada por  $P$  y se define de la siguiente manera:

**Definición 13** Se dice que  $u \in \mathcal{D}(P)$  y  $Pu = f$  si:

1.  $u, f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ .
2.  $\langle \overline{P}(D)\varphi, u \rangle = \langle \varphi, f \rangle$  para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

En lo siguiente, se va a demostrar que:

**Teorema 2** Para cualquier polinomio  $P(x)$  se tiene que:

$$P = P_0$$

Demostración:

Primero, se demostrará que  $P$  es una extensión de  $P_0$ ; para esto, sea  $u \in \mathcal{D}(P_0)$  y  $P_0u = f$ .

Por definición de  $u$  y  $f$ , existe una sucesión  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , tal que  $\varphi_k \rightarrow u$  y  $P(D)\varphi_k \rightarrow f$  en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

Sabemos por la ecuación 2.8 que

$$\langle \psi, P(D)\varphi_k \rangle = \langle \overline{P}(D)\psi, \varphi_k \rangle$$

para toda  $k = 1, 2, \dots$  y  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Por lo cual, tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  se obtiene que:

$$\langle \psi, f \rangle = \langle \overline{P}(D)\psi, u \rangle.$$

Por lo tanto, por definición,  $u \in \mathcal{D}(P)$  y  $Pu = f$ .

Ahora se demostrará que  $P_0$  es una extensión de  $P$ . Observe que, es suficiente demostrar que  $\mathcal{D}(P) \subseteq \mathcal{D}(P_0)$ , por lo cual, sea  $u \in \mathcal{D}(P)$ . Por definición, existe  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , tal que

$$\langle \overline{P}(D)\varphi, u \rangle = \langle \varphi, f \rangle$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Sea  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  dada por:

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x) = j_k(y-x)$$

donde  $j_k(z)$  está dada por 2.5 e  $y \in \mathbb{R}^3$  es fija. Note que, para cada  $y \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \langle \overline{P}(D)\varphi, u \rangle(y) &= \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\overline{P}(D)j_k(y-x)} u(x) d^3x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} [P(D)j_k(y-x)] u(x) d^3x \\ &= [(P(D)j_k) * u](y) \end{aligned}$$

y que

$$\langle \varphi, f \rangle(y) = (j_k * f)(y).$$

Por lo tanto, por la proposición 1

$$(j_k * u) \rightarrow u \quad \text{y} \quad [(P(D)j_k) * u] \rightarrow f$$

en  $L^2(\mathbb{R}^3)$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Ahora, defina para cada  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  y para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ :

$$u_m(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } |x| \leq m \\ 0 & \text{si } |x| > m \end{cases}.$$

Observe que para cada  $k, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $(j_k * u_m) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  y

$$P(D)(j_k * u_m) = [(P(D)j_k) * u_m].$$

Esto se debe a que  $j_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,  $u_m \in L^1(\mathbb{R}^3)$  y  $\text{supp}u_m$  es acotado.

Por lo tanto, solo falta demostrar que:

1.  $(j_k * u_m) \rightarrow (j_k * u)$  en  $L^2(\mathbb{R}^3)$  cuando  $m \rightarrow \infty$ .
2.  $P(D)(j_k * u_m) \rightarrow [(P(D)j_k) * u]$  en  $L^2(\mathbb{R}^3)$  cuando  $m \rightarrow \infty$ .

para concluir que  $u \in \mathcal{D}(P_0)$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Note que existe una  $k \in \mathbb{N}$ , tal que, para toda  $n \in \mathbb{N}$  que cumpla  $n \geq k$ , implica que:

$$\|u - (j_n * u)\| < \frac{1}{2}\varepsilon \tag{2.14}$$

y que

$$\|f - [(P(D)j_n) * u]\| < \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{2.15}$$

Ahora, observe que:

1.  $|u - u_m|^2, |u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^3)$  para toda  $m \in \mathbb{N}$ .
2.  $|u - u_m|^2 \rightarrow 0$  puntualmente en todo  $\mathbb{R}^3$ .
3.  $|u(x) - u_m(x)|^2 \leq |u(x)|^2$  para toda  $x \in \mathbb{R}^3$ .

Por lo tanto, por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue se tiene que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |u - u_m|^2 d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} 0 d^3x = 0 \text{ o, equivalentemente } \lim_{m \rightarrow \infty} \|u - u_m\| = 0.$$

Por lo tanto,

$$u_m \rightarrow u \text{ en } L^2(\mathbb{R}^3) \text{ cuando } m \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Por lo tanto, existe un  $m \in \mathbb{N}$ , tal que, para toda  $i \in \mathbb{N}$  que cumpla  $i \geq m$ , implica que:

$$\|u - u_i\| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (2.17)$$

y que

$$\|u - u_i\| < \frac{1}{2\|P(D)j_k\|_1}\varepsilon. \quad (2.18)$$

Esta última expresión está bien definida, ya que,  $P(D)j_k \neq 0$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ , por lo tanto,  $\|P(D)j_k\| \neq 0$ .

Observe entonces que, para toda  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $i \geq m$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \|(j_k * u) - (j_k * u_i)\| &= \|j_k * (u - u_i)\| \\ &\leq \|j_k\|_1 \|u - u_i\| \\ &= \|u - u_i\| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon \end{aligned} \quad (2.19)$$

y que

$$\begin{aligned} \|[(P(D)j_k) * u] - [(P(D)j_k) * u_i]\| &= \|[(P(D)j_k) * (u - u_i)]\| \\ &\leq \|P(D)j_k\|_1 \|u - u_i\| \\ &< \|P(D)j_k\|_1 \frac{1}{2\|P(D)j_k\|_1}\varepsilon \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por lo tanto, para toda  $i \in \mathbb{N}$ , tal que  $i \geq m$ , se cumple que:

$$\begin{aligned} \|u - (j_k * u_i)\| &= \|u - (j_k * u) + (j_k * u) - (j_k * u_i)\| \\ &\leq \|u - (j_k * u)\| + \|(j_k * u) - (j_k * u_i)\| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned} \quad (2.21)$$

y que

$$\begin{aligned}
\|f - P(D)(j_k * u_i)\| &= \|f - [(P(D)j_k) * u] + [(P(D)j_k) * u] - [(P(D)j_k) * u_i]\| \\
&\leq \|f - [(P(D)j_k) * u]\| + \|[(P(D)j_k) * u] - [(P(D)j_k) * u_i]\| \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Por lo tanto, para  $u \in \mathcal{D}(P)$  existe una sucesión  $\{(j_k * u_m)\}_{k,m=1}^\infty \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  y  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , tal que  $(j_k * u_m) \rightarrow u$  y  $P(D)(j_k * u_m) \rightarrow f$ .

Por lo tanto,  $u \in \mathcal{D}(P_0)$  y  $P_0 u = f$ .

Por lo tanto,  $P_0$  es una extensión de  $P$ .

Por lo tanto,  $P_0 = P$ .

□

Como corolario se obtiene lo siguiente

**Corolario 1** Si  $\bar{P}_0$  es la extensión fuerte del operador  $\bar{P}(D)$ , entonces

$$P_0^* = \bar{P}_0.$$

Demostración:

Primero, se va a demostrar que  $\bar{P}_0 \subseteq P_0^*$ .

Sea  $v \in \mathcal{D}(\bar{P}_0)$ . Por definición de extensión fuerte de  $\bar{P}(D)$ , existe una sucesión  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , tal que

$$\varphi_k \rightarrow v \text{ y } \bar{P}(D)\varphi_k \rightarrow \bar{P}_0 v$$

en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

Sea  $u \in \mathcal{D}(P_0)$  y  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , tal que  $P_0 u = f$ . Por el teorema anterior, se sabe que  $P_0 = P$ , por lo tanto, para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  se cumple que:

$$\langle \bar{P}(D)\varphi, u \rangle = \langle \varphi, f \rangle.$$

Note entonces que, para toda  $k \in \mathbb{N}$

$$\langle \bar{P}(D)\varphi_k, u \rangle = \langle \varphi_k, f \rangle.$$

Como el producto interior es continuo, al tomar el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  se obtiene que:

$$\langle \bar{P}_0 v, u \rangle = \langle v, f \rangle.$$

Por lo tanto, sustituyendo  $P_0 u = f$ , se obtiene que

$$\langle \bar{P}_0 v, u \rangle = \langle v, P_0 u \rangle. \quad (2.23)$$

Dado que  $u \in \mathcal{D}(P_0)$  es arbitrario, 2.23 se cumple para toda  $u \in \mathcal{D}(P_0)$ . Por lo tanto,

$$v \in \mathcal{D}(P_0^*) \text{ y } P_0^* v = \bar{P}_0 v.$$

lo cual demuestra que  $\bar{P}_0 \subseteq P_0^*$ .

Ahora, se va a demostrar que  $P_0^* \subseteq \bar{P}_0$ .

Sea  $v \in \mathcal{D}(P_0^*)$ . Por definición

$$\forall u \in \mathcal{D}(P_0) : \langle P_0^* v, u \rangle = \langle v, P_0 u \rangle.$$

Como  $P_0 = P$ , esta expresión se puede reescribir como:

$$\forall u \in \mathcal{D}(P) : \langle P_0^* v, u \rangle = \langle v, P u \rangle.$$

En particular, como  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathcal{D}(P)$  por ser  $(\mathcal{D}(P), P)$  una extensión de  $(C_0^\infty(\mathbb{R}^3), P(D))$ , entonces

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) : \langle P_0^* v, \varphi \rangle = \langle v, P \varphi \rangle$$

o, equivalentemente

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) : \langle P_0^* v, \varphi \rangle = \langle v, P(D) \varphi \rangle. \quad (2.24)$$

Aplicando el teorema anterior al operador  $\bar{P}(D)$ , se tiene que

$$\bar{P}_0 = \bar{P}$$

donde  $\bar{P}$  es la extensión débil del operador  $\bar{P}(D)$ .

Observe que, 2.24 se puede reescribir como:

$$\langle \varphi, P_0^* v \rangle = \langle P(D) \varphi, v \rangle \text{ o, equivalentemente } \langle \varphi, P_0^* v \rangle = \langle \bar{P}(D) \varphi, v \rangle. \quad (2.25)$$

Por lo tanto,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) : \langle \varphi, P_0^* v \rangle = \langle \bar{P}(D) \varphi, v \rangle. \quad (2.26)$$

Sin embargo, esta es la definición de que  $v \in \mathcal{D}(\bar{P})$  y que  $P_0^* v = \bar{P} v = \bar{P}_0 v$ .

Por lo tanto,  $P_0^* \subseteq \bar{P}_0$

Por lo tanto,  $P_0^* = \bar{P}_0$ .

□

Como último corolario se obtiene lo siguiente

**Corolario 2** Si  $P(x)$  es un polinomio de coeficientes reales, entonces  $P_0$  es auto-adjunto.

En efecto:

Dado que  $P(x)$  es un polinomio de coeficientes reales, entonces,

$$P(x) = \overline{P}(x).$$

Por lo tanto,

$$P(D) = \overline{P}(D).$$

Por lo tanto,

$$P_0 = \overline{P_0} = (P_0)^*.$$

□

Dado que el operador libre de Schrödinger tiene como polinomio asociado

$$P(x) = |x|^2.$$

entonces  $H_{0S}$  es un operador auto-adjunto en el dominio definido por su extensión débil. En lo siguiente se caracterizará a este dominio; para esto, primero se definirá el espacio de Schwartz  $\mathcal{S}$ , el cual viene dado en la siguiente definición:

**Definición 14** Se define el espacio de Schwartz, denotado por  $\mathcal{S}$ , como el conjunto

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |x|^k \left| \frac{\partial^\mu f(x)}{\partial x^\mu} \right| < \infty, \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } \forall \mu \in \mathbb{N}^3 \text{ multi-índice} \}.$$

**Observación 9** El espacio de Schwartz  $\mathcal{S}$  es denso en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , ya que,  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathcal{S}$

Ahora, se definirá la transformada de Fourier en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Para esto, primero se definirá en el espacio de Schwartz  $\mathcal{S}$ .

**Definición 15** Sea  $u \in \mathcal{S}$ . Se define la transformada de Fourier de  $u$ , denotada por  $Fu$ , como la nueva función  $Fu : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$Fu(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik \cdot x} u(x) dx^3.$$

Ahora, se enunciarán algunas propiedades de la transformada de Fourier en este espacio:

**Teorema 3** Sea  $u \in \mathcal{S}$ . Entonces

1.  $Fu \in \mathcal{S}$ .
2.  $D_k^\mu w(k) = (-1)^{|\mu|} F[x^\mu u(x)]$ .
3.  $k^\mu Fu(k) = F[D_x^\mu u(x)]$ .
4.  $F(\lambda u + v)(k) = \lambda Fu(k) + Fv(k)$  para toda  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $u, v \in \mathcal{S}$ .
5.  $\|Fu\| = \|u\|$ .

La demostración de este teorema se puede encontrar en las referencias [19], [2] y [5].

**Observación 10** Del teorema 3, se sigue que la transformada de Fourier  $F$  cumple que:

1.  $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  es un operador lineal.
2. Es un operador acotado en  $\mathcal{S}$ .
- 3.

$$\|Ff\| = \|f\|, \quad f \in \mathcal{S}.$$

4. Es un isomorfismo, cuya inversa viene dada por:

$$F^{-1}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ik \cdot x} u(k) dk^3.$$

Dado que  $\mathcal{S}$  es un subconjunto denso de  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , entonces, por la observación anterior,  $F$  se puede extender, como operador lineal, a todo  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , heredando así las propiedades descritas en el teorema 3. Además, al ser  $F$  un operador unitario en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , se cumple que  $F^{-1} = F^*$ .

Ahora si, se caracterizará el dominio del operador libre de Schrödinger  $H_{0S}$  utilizando la definición de extensión débil dada anteriormente.

Suponga que  $u \in \mathcal{D}(H_{0S})$ . Por definición de extensión débil, existe  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , tal que

$$H_{0S}u = f \text{ y } \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) : \langle \overline{-\Delta} \varphi, u \rangle = \langle \varphi, f \rangle.$$

Dado que  $\overline{-\Delta} = -\Delta$ , lo anterior se puede reescribir como:

$$\langle -\Delta \varphi, u \rangle = \langle \varphi, f \rangle \tag{2.27}$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Dado que

$$-\Delta = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

la expresión 2.27 se puede reescribir como

$$\langle (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) \varphi, u \rangle = \langle \varphi, f \rangle. \tag{2.28}$$

Por el inciso 3 del teorema 3, podemos concluir que

1.  $F^{-1}k_x^2 F\varphi = D_x^2$ .
2.  $F^{-1}k_y^2 F\varphi = D_y^2$ .
3.  $F^{-1}k_z^2 F\varphi = D_z^2$ .

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Por lo tanto, la expresión 2.27 se transforma en

$$\langle F^{-1}[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]F\varphi, u \rangle = \langle \varphi, f \rangle \quad (2.29)$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Dado que  $F^{-1} = F^*$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} \langle F^{-1}[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]F\varphi, u \rangle = \langle \varphi, f \rangle &\implies \langle [k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]F\varphi, Fu \rangle = \langle \varphi, f \rangle \\ &\implies \langle F\varphi, [k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]Fu \rangle = \langle \varphi, f \rangle \\ &\implies \langle \varphi, F^{-1}[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]Fu \rangle = \langle \varphi, f \rangle \end{aligned} \quad (2.30)$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Por lo tanto,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) : \langle \varphi, F^{-1}[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]Fu - f \rangle = 0. \quad (2.31)$$

Como  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  es un conjunto denso en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , se concluye que:

$$F^{-1}[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]Fu - f = 0 \text{ o, equivalentemente } F^{-1}[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]Fu = f.$$

Por lo tanto, se pueden concluir dos cosas

1. El dominio del operador libre de Schrödinger está dado por el conjunto

$$\mathcal{D}(H_{0S}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3) : F^{-1}[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]Fu \in L^2(\mathbb{R}^3)\} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3) : F^{-1}|k|^2Fu \in L^2(\mathbb{R}^3)\}.$$

2.  $H_{0S}u = F^{-1}[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]Fu$ .

caracterizando así, el dominio de  $H_{0S}$  y su regla de correspondencia.

Es importante mencionar que, el dominio de  $H_{0S}$  es un caso particular de los espacios de Sobolev  $W^{s,p}(\mathbb{R}^3)$ , lo cuales, aparecerán constantemente en este trabajo, haciendo pertinente dar una definición de éstos:

**Definición 16** Sea  $s \in \mathbb{R}$  y  $1 \leq p < \infty$ . Considere ahora al espacio Schwartz  $\mathcal{S}$  con la siguiente métrica:

$$\forall v \in \mathcal{S} : \|v\|_{s,p} = \|F^{-1}[(1 + |k|^2)^{\frac{1}{2}s}]Fv\|_p$$

donde  $\|\cdot\|_p$  corresponde a la norma de  $L^p(\mathbb{R}^3)$ .

Se define al espacio de Sobolev, denotado por  $W^{s,p}(\mathbb{R}^3)$ , como la completación del espacio métrico  $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_{s,p})$ .

En particular, si  $p = 2$  éstos se denotan por  $H^s(\mathbb{R}^3)$

**Observación 11** El espacio de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^3)$  es un espacio de Hilbert, con producto interior:

$$\forall u, v \in H^s(\mathbb{R}^3) : \langle F^{-1}[(1 + |k|^2)^{\frac{1}{2}s}]Fu, F^{-1}[(1 + |k|^2)^{\frac{1}{2}s}]Fv \rangle.$$

Ahora, se va a demostrar que:

**Teorema 4**

$$\mathcal{D}(H_{0s}) = H^2(\mathbb{R}^3).$$

Demostración:

Sea  $u \in \mathcal{D}(H_{0s})$ . Por definición de  $\mathcal{D}(H_{0s})$

$$\|F^{-1}|k|^2Fu\| < \infty \text{ y } \|u\| < \infty.$$

Note entonces que:

$$\begin{aligned} \|F^{-1}[(1 + |k|^2)^{\frac{1}{2}2}]Fu\| &= \|F^{-1}(1 + |k|^2)Fu\| \\ &= \|u + F^{-1}|k|^2Fu\| \\ &\leq \|u\| + \|F^{-1}|k|^2Fu\| < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ .

Sea  $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ . Por definición de  $H^s(\mathbb{R}^3)$

$$\|F^{-1}(1 + |k|^2)Fu\| < \infty.$$

Pero note que

$$\begin{aligned} \|F^{-1}|k|^2Fu\| - \|u\| &\leq \|u + F^{-1}|k|^2Fu\| \\ &= \|F^{-1}(1 + |k|^2)Fu\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|F^{-1}|k|^2Fu\| \leq \|F^{-1}(1 + |k|^2)Fu\| + \|u\| < \infty.$$

Por lo tanto,  $u \in \mathcal{D}(H_{0s})$ .

□

Otra forma de definir los espacios de Sobolev es por medio de las distribuciones y derivadas débiles. Dado que a lo largo de este trabajo tendrán relevancia estos conceptos, se darán las definiciones pertinentes. Para esto, primero se definirá "el espacio de funciones de prueba", el cual viene dado por:

**Definición 17** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  y  $C_0^\infty(\Omega)$  el espacio de funciones con soporte compacto en  $\Omega$ . Se define el espacio de funciones de prueba, denotado por  $\mathcal{D}(\Omega)$ , como el espacio  $C_0^\infty(\Omega)$  dotado con la siguiente topología:

Sea  $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de funciones en  $C_0^\infty(\Omega)$  y  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Se dice que  $\phi_n \rightarrow \phi$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , si:

1. Existe  $K \subseteq \Omega$  compacto, tal que,  $\text{supp}(\phi_n - \phi) \subseteq K$  para toda  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .
2. Para todo multi-índice  $\mu$  arbitrario,  $\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} \phi_n$  debe converger a  $\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} \phi$  uniformemente en  $K$ .

**Observación 12** El espacio de funciones de prueba  $\mathcal{D}(\Omega)$ , es un espacio vectorial con la suma y el producto escalar usual, por lo cual, se puede considerar el espacio dual  $\mathcal{D}(\Omega)^*$  asociado a éste.

Por la observación anterior y la topología dada en la definición 17, la continuidad de una funcional lineal  $T \in \mathcal{D}(\Omega)^*$  viene dada por el siguiente teorema:

**Teorema 5**  $T \in \mathcal{D}(\Omega)^*$  es continua si y solo si para toda sucesión  $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$  que converja a  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  en el sentido de la definición 17, implica que  $T(\phi_n) \rightarrow T(\phi)$  en  $\mathbb{C}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

La demostración de este resultado, se puede encontrar con mayor detalle en las referencias [1] y [17].

Esto último, nos permite definir el espacio de distribuciones como:

**Definición 18** El espacio de distribuciones, denotado por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , se define como el conjunto

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}(\Omega)^* : T \text{ es continua}\}.$$

En lo siguiente, se darán algunos ejemplos importantes de distribuciones, los cuales, aparecerán constantemente en este trabajo.

1. Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  y  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ . Se define la distribución asociada a  $u$ , denotada por  $T_u$ , como:

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : T_u(\phi) = \int_{\Omega} u(x)\phi(x)d^3x. \quad (2.32)$$

2. Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  y  $a \in \Omega$ . Se define la distribución delta de Dirac centrada en el punto  $a$ , denotada por  $\delta_a$ , como:

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \delta_a(\phi) = \phi(a). \quad (2.33)$$

La demostración de que éstas son distribuciones se puede encontrar en la referencia [1].

Dado que, a lo largo de este escrito se utilizarán constantemente las distribuciones, es importante hacer la siguiente observación:

**Observación 13** Para la delta de dirac  $\delta_a$  no existe  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ , tal que,  $T_u = \delta_a$ .

Sin embargo, dada una distribución  $T$ , existen ciertos teoremas que permiten caracterizar a  $T$  como una distribución asociada a alguna función  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ; éstos serán citados mas adelante.

Por otra parte, la delta de Dirac se puede ver como el límite de una sucesión de distribuciones asociadas a funciones; para esto, primero se va a definir la convergencia de sucesiones en  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Definición 19** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ . Sea  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  una distribución y  $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$  una sucesión de distribuciones. Se dice que  $T_n \rightarrow T$  si para toda  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , la sucesión  $T_n(\phi) \rightarrow T(\phi)$  en  $\mathbb{C}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Por lo tanto, tomando a la sucesión de funciones  $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-a)^2}$ , la delta de Dirac se puede ver como el límite de la sucesión de distribuciones  $\{T_{f_n}\}_{n=1}^\infty$ . Esto se puede revisar con mayor detalle en las referencias [1] y [17].

Ahora, se va a definir el concepto de derivada débil o en el sentido distribucional.

Para esto, primero se definirá la multiplicación de una función suave con una distribución, esto viene dado por:

**Definición 20** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\omega \in C^\infty(\Omega)$  y  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Se define la distribución  $\omega T$  como:

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : (\omega T)(\phi) = T(\omega \phi).$$

Ahora, se definirá la derivada parcial de una distribución:

**Definición 21** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  y  $\mu \in \mathbb{N}^3$  un multi-índice. Se define la derivada parcial de orden  $\mu$  de  $T$ , denotada por  $\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} T$ , como una nueva distribución dada por:

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \left[ \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} T \right](\phi) = (-1)^{|\mu|} T \left( \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} \phi \right).$$

Con esta definición, uno puede calcular la derivada de una distribución  $T_u$  asociada a la función  $u$ , sin embargo, por la observación 13, esta derivada no necesariamente va a estar asociada a una función. En caso de ser esto cierto, se dice que la función  $u$  tiene una derivada parcial débil o en el sentido distribucional, es decir:

**Definición 22** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  y  $\mu \in \mathbb{N}^3$  un multi-índice. Sea  $T_u$  la distribución asociada a la función  $u$ . Se dice que  $u$  tiene una derivada parcial de orden  $\mu$  en el sentido débil o en el sentido distribucional si existe  $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ , tal que la distribución  $\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} T_u = T_v$  y se denota como  $\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} u = v$

**Observación 14** 1. Si  $u, w \in L^1_{loc}(\Omega)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces  $T_{\alpha u + w} = T_{\alpha u} + T_w$ .

2. De la definición 20 se sigue la regla de Leibniz.

3. Si  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  es tal que  $u \in C^{|\mu|}(\Omega)$  y  $\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} u = v$ , entonces existe la derivada parcial débil de orden  $\mu$  de  $u$  y, además, se cumple que  $\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} T_u = T_v$ .

Por estas razones, la noción de derivada débil es consistente con la teoría que hay hasta el momento.

Por último, se va a dar otra definición de los espacios de Sobolev cuando  $s$  es un entero,  $s \geq 0$ ; ésta viene dada por:

**Definición 23** Sea  $s$  entero,  $s \geq 0$  y  $1 \leq p \leq \infty$ . Considere el conjunto

$$\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^3) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^3) : \forall \mu \in \mathbb{N}^3 \text{ con } 0 \leq |\mu| \leq s, \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} u \text{ existe en el sentido débil y } \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} u \in L^p(\mathbb{R}^3)\}.$$

Para todo  $u \in \mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^3)$ , defina la norma:

$$\|u\|_{s,p} = [\sum_{0 \leq |\mu| \leq s} \|\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} u\|_p^p]^{1/p} \quad \text{si } p \in [1, \infty)$$

$$\|u\|_{s,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u\|_\infty \quad \text{si } p = \infty$$

Se define al espacio de Sobolev, denotado por  $W^{s,p}(\mathbb{R}^3)$ , como el espacio normado  $(\mathcal{W}^{s,p}, \|\cdot\|_{s,p})$ .

De igual forma, si  $p = 2$ , estos se denotan como  $H^s(\mathbb{R}^3)$

De esta definición, se obtienen los siguientes teoremas:

**Teorema 6**  $W^{s,p}(\mathbb{R}^3)$  es un espacio de Banach. En particular,  $H^s(\mathbb{R}^3)$  es un espacio de Hilbert.

**Teorema 7** Si  $s$  es un entero,  $s \geq 0$ , las definiciones 16 y 23 son equivalentes para  $1 \leq p < \infty$ .

La demostración de estos teoremas se puede encontrar en la referencia [1].

Con esto, se concluye la caracterización del dominio del operador libre de Schrödinger  $H_{0S}$ . Ahora, se va a encontrar el espectro continuo de éste para, posteriormente, enunciar el principio de absorción límite que será utilizado mas adelante.

Para esto, primero se va a definir que es el espectro de un operador cerrado  $A$  y, posteriormente, se hablará del teorema espectral para operadores auto-adjuntos, así como un poco del cálculo funcional.

**Definición 24** Sea  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador lineal cerrado. Se define el conjunto resolvente de  $A$ , denotado por  $\rho(A)$ , como el conjunto:

$$\rho(A) = \{z \in \mathbb{C} : A - zI \text{ es invertible y } (A - zI)^{-1} \text{ es acotado condominio } \mathcal{H}\},$$

donde  $I$  es el operador identidad en  $\mathcal{H}$ . Además, si  $z \in \rho(A)$ , se define el operador resolvente de  $A$  en el punto  $z$ , denotado por  $R_A(z)$ , como

$$R_A(z) = (A - zI)^{-1}.$$

Recordemos que un operador  $B : \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es invertible sobre su dominio si,  $Bf = 0$  implica que  $f = 0$ .

**Observación 15** Para simplificar la notación, se denotará  $A - zI \equiv A - z$ .

**Observación 16** Dado un operador  $A$  con resolvente  $\rho(A)$ , se puede definir una relación entre los números complejos  $\mathbb{C}$  y los operadores lineales acotados  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Esto se hace, pensando al operador resolvente  $R_A(z)$  como una función  $R_A : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , es decir, una función definida como

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ y } \forall \phi \in \mathcal{H} : R_A(z)\phi = (A - z)^{-1}\phi$$

la cual, es holomorfa en cada componente conexa de  $\rho(A)$ .

Por lo cual, primero se dará un teorema que garantice la existencia del operador  $(A - z)^{-1}$ ; éste viene dado por:

**Teorema 8** *Sea  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador cerrado. Si existe  $M > 0$  tal que*

$$M\|Ax\| \geq \|x\|$$

*entonces  $A$  es invertible y  $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}$  es un operador acotado.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en las referencias [10] y [2].

Como consecuencia de este teorema, se tiene que  $z \in \rho(A)$  si y solo si las siguientes propiedades se cumplen

1. El rango de  $(A - z)$  es  $\mathcal{H}$ .
2. Existe  $M > 0$ , tal que, para todo  $x \in \mathcal{H}$

$$\|x\| \leq M\|(A - z)x\|.$$

Otro conjunto importante y que tiene mas relevancia en la mecánica cuántica es "el espectro de un operador", el cual se define de la siguiente manera.

**Definición 25** *Sea  $A$  un operador cerrado. Se define el espectro de  $A$ , denotado por  $\sigma(A)$ , como el conjunto*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

En particular, el espectro de los operadores auto-adjuntos permite una descomposición en términos de su "familia espectral". Esta familia y su descomposición se definirá con mayor detalle en el siguiente capítulo; sin embargo, con el fin de presentar algunos resultados relevantes en este capítulo, se abusará un poco de la confianza del lector y se definirá lo siguiente:

**Definición 26** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y  $A$  un operador auto-adjunto con familia espectral  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ . Se define:*

1. *El espectro discreto de  $A$  como*

$$\sigma_d(A) := \{z \in \sigma(A) : \mathcal{R}\text{an}[E((z - \varepsilon, z + \varepsilon))] < \infty \text{ para algún } \varepsilon > 0\}.$$

2. *El espectro esencial de  $A$  como*

$$\sigma_{ess}(A) = \{z \in \sigma(A) : \mathcal{R}\text{an}[E((z - \varepsilon, z + \varepsilon))] = \infty \text{ para todo } \varepsilon > 0\}.$$

**Observación 17** *Observe que, por la definición anterior  $\sigma_{ess}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_d(A)$ .*

Ahora, se enunciará el criterio de Weyl, el cual, permite caracterizar al espectro esencial de un operador auto-adjunto.

**Teorema 9** *Sea  $A$  un operador auto-adjunto en  $\mathcal{H}$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Entonces,  $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$  si y solo si existe una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{D}(A)$ , tal que*

1.  $\|x_n\| = 1$  para toda  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

2.  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge débilmente a 0 en  $\mathcal{H}$ .
3.  $(A - \lambda)x_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

A ésta se le conoce como "sucesión singular de Weyl".

La demostración de este teorema se puede encontrar en la referencia [20]. Usando el criterio de Weyl se puede demostrar el teorema siguiente, que caracteriza el espectro de los operadores diferenciales asociados a un polinomio.

**Teorema 10** Sea  $P(x)$  un polinomio con coeficientes reales. Entonces,

$$\sigma(P_0) = \sigma_{ess}(P_0) = \{\lambda \in \mathbf{R} : \lambda = P(x), \text{ for some } x \in \mathbf{R}^3\}$$

Como el polinomio asociado a  $H_{0S}$  es  $x^2$ , este teorema implica que  $\sigma(H_{0S}) = \sigma_{ess}(H_{0S}) = [0, \infty)$ .

Para concluir con este subtema, se enunciará el principio de absorción límite (LAP), el cual tiene gran repercusión en este trabajo. Se omitirá la demostración por ser bastante amplia, sin embargo, ésta se puede encontrar en la referencia [23].

**Observación 18** Para simplificar la notación, se tomará  $\langle x \rangle \equiv (1 + |x|^2)^{1/2}$

**Definición 27** Sea  $s \in \mathbf{R}$ . Se define el espacio con peso en  $L^2$ , denotado por  $L_s^2$ , como el espacio vectorial

$$L_s^2 = \{f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{C} : \langle x \rangle^s f(x) \in L^2\}$$

Además, se define la norma en  $L_s^2$  como:

$$\forall f \in L_s^2 : \|f\|_{L_s^2} = \|\langle x \rangle^s f\|_{L^2}$$

**Definición 28** Sea  $\alpha, s \in \mathbf{R}$ . Se define  $H^{\alpha, s}$  como el espacio vectorial normado

$$H^{\alpha, s} = \{f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{C} : \langle x \rangle^s f(x) \in H^\alpha\}$$

donde su norma viene dada por

$$\forall f \in H^{\alpha, s} : \|f\|_{H^{\alpha, s}} = \|\langle x \rangle^s f\|_{H^\alpha}$$

Ahora sí, se enunciará el LAP y concluye con este subcapítulo.

**Teorema 11** Sea  $H_{0S} := -\Delta$  el operador libre de Schrödinger en  $L^2$ . Sea  $z \in \rho(H_{0S})$  y sea  $R_{0S}(z)$  el resolvente de  $H_{0S}$  en el punto  $z$ . Entonces, el límite  $R_{0S}(\lambda \pm i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} R_{0S}(\lambda \pm i\varepsilon)$  existe en la topología uniforme de  $\mathcal{B}(L_s^2, H^{\alpha, -s})$ , con  $s > 1/2$  y  $|\alpha| \leq 2$ ; además,  $\|R_{0S}(\lambda \pm i0)f\|_{H^{\alpha, -s}} \leq C_{s, \delta} \lambda^{-(1-|\alpha|)/2} \|f\|_{L_s^2}$ , para toda  $\lambda \in [\delta, \infty)$  con  $\delta > 0$ . Las funciones  $R_{0S}^\pm : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{B}(L_s^2, H^{\alpha, -s})$  dadas por:

$$R_{0S}^\pm(\lambda) = \begin{cases} R_{0S}(\lambda) & \text{si } \text{Im}\lambda \neq 0 \\ R_{0S}(\lambda \pm i0) & \text{si } \lambda \in (0, \infty) \end{cases}$$

están definidas para todo  $\lambda \in \mathbf{C}^\pm \cup (0, \infty)$ . Por último, éstas son analíticas para toda  $\lambda$  con  $\text{Im}\lambda \neq 0$  y localmente Hölder continuas para toda  $\lambda \in (0, \infty)$ , con exponente  $\theta$ , tal que,  $0 < \theta \leq s - 1/2$  y  $\theta < 1$ .

## 2.2. Operador de Dirac: Formalismo Matemático

Al igual que en el subcapítulo anterior, se desarrollará la teoría matemática que hay detrás del operador de Dirac. Para esto, primero se empezará con el operador libre de Dirac para, posteriormente, terminar con la ecuación perturbada de Dirac.

**Observación 19** Para simplificar la notación, en lo siguiente se omitirá la matriz identidad  $\mathbb{I} \in \mathbb{M}_{4 \times 4}$  y, en caso de ser necesario, se precisará la presencia de ésta.

Para obtener el operador libre de Dirac, primero se hará separación de variables en la ecuación no perturbada de Dirac, i. e., suponiendo que cualquier solución  $\psi(x, t)$  de la ecuación de Dirac se puede reescribir de la forma  $\psi(x, t) = \varphi(x)\tau(t)$ , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$-i\alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - i\alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \beta m \varphi = E \varphi,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -iE \tau.$$

La segunda ecuación, tiene como solución  $\tau(t) = e^{-iEt}$ , mientras que la primera ecuación, se puede pensar como una ecuación de eigenvalores; por esta razón, el operador libre de Dirac se define como

$$H_{0D} \varphi = -i\alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - i\alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \beta m \varphi.$$

A este, lo podemos reescribir como

$$H_{0D} \varphi = \alpha_1 D_x \varphi + \alpha_2 D_y \varphi + \alpha_3 D_z \varphi + \beta m \varphi.$$

De manera análoga al operador libre de Schrödinger, el operador libre de Dirac estará definido en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^3)^4$  y, nuevamente, encontrar un dominio adecuado para éste.

Para esto, primero se va a definir la transformada de Fourier en  $L^2(\mathbb{R}^3)^4$ .

**Definición 29** Sea  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)^4$ . Se define la transformada de Fourier de  $\psi$ , denotada por  $\mathcal{F}\psi$ , como la nueva función  $\mathcal{F}\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$  dada por

$$\mathcal{F}\psi(k) := \begin{pmatrix} F\psi_1(k) \\ F\psi_2(k) \\ F\psi_3(k) \\ F\psi_4(k) \end{pmatrix}$$

donde  $F$  es la transformada de Fourier definida en el subcapítulo anterior.

**Observación 20** Todas las propiedades del teorema 3 se heredan a  $\mathcal{F}$ . Además, se sigue que su inversa

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(k) := \begin{pmatrix} F^{-1}\psi_1(k) \\ F^{-1}\psi_2(k) \\ F^{-1}\psi_3(k) \\ F^{-1}\psi_4(k) \end{pmatrix}$$

cumple que  $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ .

Ahora, para el cálculo del dominio del operador libre de Dirac, se utilizará la definición de extensión débil dada en el subcapítulo anterior. Observe que esta teoría se extiende de manera inmediata a operadores matriciales. Para esto, suponga que  $u \in \mathcal{D}(H_{0D})$  y que  $H_{0D}u = f$ , entonces, para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^4$  se cumple que

$$\langle \bar{P}_{0D}(D)\varphi, u \rangle = \langle \varphi, f \rangle$$

donde

$$\bar{P}_{0D}(D) = \alpha_1^* D_x \varphi + \alpha_2^* D_y \varphi + \alpha_3^* D_z \varphi + \beta^* m \varphi$$

y  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \beta^*$  son las matrices adjuntas de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ , respectivamente.

Ya que,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  y  $\beta$  son matrices hermitianas, entonces

$$\bar{P}_{0D}(D) = \alpha_1 D_x \varphi + \alpha_2 D_y \varphi + \alpha_3 D_z \varphi + \beta m \varphi.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle \bar{P}_{0D}(D)\varphi, u \rangle &= \langle [\alpha_1 D_x + \alpha_2 D_y + \alpha_3 D_z + \beta m]\varphi, u \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}^{-1}[\alpha_1 k_x + \alpha_2 k_y + \alpha_3 k_z + \beta m]\mathcal{F}\varphi, u \rangle \\ &= \langle \varphi, \mathcal{F}^{-1}[\alpha_1 k_x + \alpha_2 k_y + \alpha_3 k_z + \beta m]\mathcal{F}u \rangle. \end{aligned}$$

Por lo cual,

$$\begin{aligned} \langle \bar{P}_{0D}(D)\varphi, u \rangle = \langle \varphi, f \rangle &\implies \langle [\alpha_1 D_x + \alpha_2 D_y + \alpha_3 D_z + \beta m]\varphi, u \rangle = \langle \varphi, f \rangle \\ &\implies \langle \varphi, \mathcal{F}^{-1}[\alpha_1 k_x + \alpha_2 k_y + \alpha_3 k_z + \beta m]\mathcal{F}u \rangle = \langle \varphi, f \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^4$  se tiene que

$$\langle \varphi, \mathcal{F}^{-1}[\alpha_1 k_x + \alpha_2 k_y + \alpha_3 k_z + \beta m]\mathcal{F}u - f \rangle = 0.$$

Como  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^4$  es denso en  $L^2(\mathbb{R}^3)^4$ , se concluye que

$$\mathcal{F}^{-1}[\alpha_1 k_x + \alpha_2 k_y + \alpha_3 k_z + \beta m]\mathcal{F}u - f = 0 \text{ o, equivalentemente } \mathcal{F}^{-1}[\alpha_1 k_x + \alpha_2 k_y + \alpha_3 k_z + \beta m]\mathcal{F}u = f.$$

Por lo tanto, se pueden concluir dos cosas

1. El dominio del operador libre de Dirac está dado por el conjunto

$$\mathcal{D}(H_{0D}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3)^4 : \mathcal{F}^{-1}[\alpha_1 k_x + \alpha_2 k_y + \alpha_3 k_z + \beta m]\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^3)^4\}$$

$$2. H_{0D}u = F^{-1}[\alpha_1 k_x + \alpha_2 k_y + \alpha_3 k_z + \beta m]\mathcal{F}u.$$

**Teorema 12**

$$\mathcal{D}(H_{0D}) = H^1(\mathbb{R}^3)^4.$$

Demostración:

Para observar esto, primero se va a transformar de manera unitaria al operador libre de Dirac con  $\mathcal{F}$ , de lo cual se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}H_{0D}\mathcal{F}^{-1} &= \mathcal{F}\alpha_1 D_x + \alpha_2 D_y + \alpha_3 D_z + \beta m\mathcal{F}^{-1} \\ &= \mathcal{F}\alpha_1 \mathcal{F}^{-1}k_x \mathcal{F} + \alpha_2 \mathcal{F}^{-1}k_y \mathcal{F} + \alpha_3 \mathcal{F}^{-1}k_z \mathcal{F} + \beta m\mathcal{F}^{-1} \\ &= \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\alpha_1 k_x + \alpha_2 k_y + \alpha_3 k_z + \beta m\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} \\ &= \alpha_1 k_x + \alpha_2 k_y + \alpha_3 k_z + \beta m \\ &= \begin{pmatrix} m & 0 & k_z & k_x - ik_y \\ 0 & m & k_x + ik_y & -k_z \\ k_z & k_x - ik_y & -m & 0 \\ k_x + ik_y & -k_z & 0 & -m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, se diagonalizará esta matriz, por lo cual, se debe plantear la ecuación característica que viene dada por

$$\det(\mathcal{F}H_{0D}\mathcal{F}^{-1} - \lambda(k)) = 0 \Rightarrow [m^2 - \lambda^2 + |k|^2]^2 = 0.$$

Por lo cual, los eigenvalores de este operador matricial vienen dados por:

$$\lambda_1(k) = \lambda_2(k) = -\lambda_3(k) = -\lambda_4(k) = \sqrt{m^2 + |k|^2} = \lambda(k)$$

los cuales son funciones del "momento"  $k$ .

Considere la matriz

$$u(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{m}{\lambda(k)}}\mathbb{I} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{m}{\lambda(k)}}\beta \frac{\alpha \cdot k}{|k|}$$

con inversa

$$u^{-1}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{m}{\lambda(k)}}\mathbb{I} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{m}{\lambda(k)}}\beta \frac{\alpha \cdot k}{|k|}$$

la cual es unitaria, ya que

$$\begin{aligned}
u(k)^* &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{m}{\lambda(k)}} \mathbb{I} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{m}{\lambda(k)}} \beta \frac{\alpha \cdot k}{|k|} \right)^* \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{m}{\lambda(k)}} \mathbb{I}^* + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{m}{\lambda(k)}} (\beta \frac{\alpha \cdot k}{|k|})^* \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{m}{\lambda(k)}} \mathbb{I} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{m}{\lambda(k)}} (\frac{\alpha \cdot k}{|k|})^* \beta^* \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{m}{\lambda(k)}} \mathbb{I} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{m}{\lambda(k)}} (\frac{\alpha \cdot k}{|k|}) \beta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{m}{\lambda(k)}} \mathbb{I} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{m}{\lambda(k)}} \beta \frac{\alpha \cdot k}{|k|} = u^{-1}(k).
\end{aligned}$$

Transformando ahora a  $\mathcal{F}H_{0D}\mathcal{F}^{-1}$  por medio de  $u(k)$ , se obtiene que

$$\begin{aligned}
u(k)\mathcal{F}H_{0D}\mathcal{F}^{-1}u^{-1}(k) &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{m}{\lambda(k)}} \mathbb{I} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{m}{\lambda(k)}} \beta \frac{\alpha \cdot k}{|k|} \right) (\alpha \cdot k + \beta m) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{m}{\lambda(k)}} \mathbb{I} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{m}{\lambda(k)}} \beta \frac{\alpha \cdot k}{|k|} \right) \\
&= \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{m}{\lambda(k)} \right) \alpha \cdot k + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{m}{\lambda(k)} \right)^2} \beta \frac{(\alpha \cdot k)^2}{|k|} + \frac{m}{2} \left( 1 + \frac{m}{\lambda(k)} \right) \beta - \frac{m}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{m}{\lambda(k)} \right)^2} \frac{\alpha \cdot k}{|k|} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{m}{\lambda(k)} \right)^2} \beta \frac{(\alpha \cdot k)^2}{|k|} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{m}{\lambda(k)} \right) \beta \frac{\alpha \cdot k}{|k|} \beta \frac{(\alpha \cdot k)^2}{|k|} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{m}{\lambda(k)} \right)^2} \beta \frac{\alpha \cdot k}{|k|} \beta - \frac{m}{2} \left( 1 - \frac{m}{\lambda(k)} \right) \beta \frac{(\alpha \cdot k)^2}{|k|^2} \right] \\
&= \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{m}{\lambda(k)} \right) \alpha \cdot k + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{m}{\lambda(k)} \right)^2} \beta |k| + \frac{m}{2} \left( 1 + \frac{m}{\lambda(k)} \right) \beta - \frac{m}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{m}{\lambda(k)} \right)^2} \frac{\alpha \cdot k}{|k|} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{m}{\lambda(k)} \right)^2} \beta |k| + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{m}{\lambda(k)} \right) \beta \alpha \cdot k \beta + \frac{m}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{m}{\lambda(k)} \right)^2} \beta \frac{\alpha \cdot k}{|k|} \beta - \frac{m}{2} \left( 1 - \frac{m}{\lambda(k)} \right) \beta \right] \\
&= \left[ \left( \frac{m}{\lambda(k)} \right) \alpha \cdot k + \sqrt{1 - \left( \frac{m}{\lambda(k)} \right)^2} \beta |k| + \left( \frac{m^2}{\lambda(k)} \right) \beta - m \sqrt{1 - \left( \frac{m}{\lambda(k)} \right)^2} \frac{\alpha \cdot k}{|k|} \right] \\
&= \left[ m \mathbb{I} + \frac{|k|^2}{\lambda(k)} \beta - \frac{m}{\lambda(k)} \alpha \cdot k \right] = \left[ \frac{m[\mathbb{I}\lambda(k) - \alpha \cdot k]}{\lambda(k)} + \frac{|k|^2}{\lambda(k)} \beta \right] = \left[ \frac{m^2}{\lambda(k)} \beta + \frac{|k|^2}{\lambda(k)} \beta \right] = \frac{\lambda(k)^2}{\lambda(k)} \beta = \lambda(k) \beta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el dominio del operador  $\mathcal{F}H_{0D}\mathcal{F}^{-1}$  viene dado por

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}H_{0D}\mathcal{F}^{-1}) = \mathcal{D}(\lambda(k)\beta) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^3)^4 : \lambda(k)\beta f \in L^2(\mathbb{R}^3)^4\}.$$

Ahora, observe que

$$\|\lambda(k)\beta f\| = \|m \sqrt{1 + \left(\frac{|k|}{m}\right)^2} \beta f\| = \|m \sqrt{1 + \left(\frac{|k|}{m}\right)^2} f\| = C_m \| \sqrt{1 + |p|^2} f \|$$

donde  $p = \frac{k}{m}$ . Por lo tanto,

$$\|\lambda(k)\beta f\| < \infty \text{ si y solo si } \|\sqrt{1+|p|^2}f\| < \infty.$$

Por lo tanto,

$$f \in \mathcal{D}(\mathcal{F}H_{D0}\mathcal{F}^{-1}) \text{ si y solo si } f \in H^1(\mathbb{R}^3)^4.$$

Puesto que

$$\lambda(k)\beta = u(k)\mathcal{F}H_{D0}\mathcal{F}^{-1}u^{-1}(k)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\lambda(k)\beta) &= \mathcal{D}(u(k)\mathcal{F}H_{D0}\mathcal{F}^{-1}u^{-1}(k)) \\ &= u(k)\mathcal{D}(\mathcal{F}H_{D0}\mathcal{F}^{-1})u^{-1}(k) \\ &= u(k)\mathcal{F}\mathcal{D}(H_{D0})\mathcal{F}^{-1}u^{-1}(k). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{D}(H_{D0}) = \mathcal{F}^{-1}u^{-1}(k)\mathcal{D}(\lambda(k)\beta)u(k)\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}u^{-1}(k)H^1(\mathbb{R}^3)^4u(k)\mathcal{F} = H^1(\mathbb{R}^3)^4.$$

□

### Corolario 3

$$\sigma(H_{D0}) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty).$$

Para observar esto, primero se va a demostrar el siguiente lema.

**Lema 2** *Sea  $A$  un operador en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y sea  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador unitario. Entonces  $\sigma(UAU^{-1}) = \sigma(A)$ .*

Demostración:

Por simplicidad, se demostrará que  $\rho(UAU^{-1}) = \rho(A)$ , lo cual es completamente equivalente a lo enunciado en este lema.

Sea  $z \in \rho(A)$ , entonces:

1. El  $\mathcal{R}(A - z)$  es denso en  $\mathcal{H}$ .
2. Existe  $C \in \mathbb{R}^+$ , tal que, para todo  $x \in \mathcal{D}(A)$  se tiene que

$$\|x\| \leq C\|(A - z)x\|.$$

Por lo cual, falta demostrar que

1. El  $\Re(UAU^{-1} - z)$  es denso en  $\mathcal{H}$ .
2. Existe  $K \in \mathbb{R}^+$ , tal que, para todo  $v \in \mathcal{D}(UAU^{-1})$  se tiene que

$$\|v\| \leq K\|(UAU^{-1} - z)v\|.$$

Para demostrar el inciso 1, note que

$$\Re(UAU^{-1} - z) = \Re[U(A - z)U^{-1}] = U\Re(A - z)U^{-1}.$$

Por lo cual,  $\Re(A - z)$  es denso si y solo si  $\Re(UAU^{-1} - z)$ .

Para demostrar el inciso 2, suponga que existe  $C \in \mathbb{R}^+$ , tal que, para todo  $x \in \mathcal{D}(A)$  se tiene que

$$\|x\| \leq C\|(A - z)x\|.$$

Como  $U$  es un operador unitario, para cada  $x \in \mathcal{D}(A)$  existe  $v \in \mathcal{H}$ , tal que

$$U^{-1}v = x.$$

Por lo tanto, para cada  $x \in \mathcal{D}(A)$  existe  $v \in \mathcal{H}$ , tal que

$$\|U^{-1}v\| \leq C\|(A - z)U^{-1}v\|.$$

Entonces

$$\|v\| = \|U^{-1}v\| \leq C\|(A - z)U^{-1}v\| = C\|U(A - z)U^{-1}v\|.$$

Por lo tanto, tomando  $K = C$  se concluye que,

$$\|v\| \leq K\|(UAU^{-1} - z)v\|$$

para toda  $v \in \mathcal{D}(UAU^{-1})$ .

Por lo tanto,  $z \in \rho(UAU^{-1})$ .

Ahora, suponga que  $z \in \rho(UAU^{-1})$ , por definición existe  $K \in \mathbb{R}^+$  tal que para toda  $x \in \mathcal{D}(UAU^{-1})$  se tiene que

$$\|x\| \leq K\|(UAU^{-1} - z)x\|.$$

Como  $UU^{-1} = \mathbb{I}$ , la anterior desigualdad se puede reescribir como

$$\|x\| \leq K\|U(A - z)U^{-1}x\|$$

sin embargo, como  $U$  es unitario se concluye que

$$\|U^{-1}x\| \leq K\|(A-z)U^{-1}x\|.$$

También, note que para todo  $x \in \mathcal{D}(UAU^{-1})$  existe un  $v \in \mathcal{H}$  tal que

$$U^{-1}x = v.$$

Por lo tanto,

$$\|v\| \leq K\|(A-z)v\|.$$

Por lo tanto, tomando  $C = K$  se demuestra el inciso 2.

□

Para demostrar el corolario, observe que  $\sigma(H_{0D}) = \sigma(u(k)\mathcal{F}H_{0D}\mathcal{F}^{-1}u^{-1}(k))$ ; sin embargo, dado que

$$u(k)\mathcal{F}H_{0D}\mathcal{F}^{-1}u^{-1}(k) = \lambda(k)\beta$$

entonces, el espectro de  $u(k)\mathcal{F}H_{0D}\mathcal{F}^{-1}u^{-1}(k)$  corresponde a todos los eigenvalores que puede tomar la matriz  $\lambda(k)\beta$ .

Por lo tanto, como los eigenvalores de  $\beta$  son  $\pm 1$ , entonces, los eigenvalores de  $u(k)\mathcal{F}H_{0D}\mathcal{F}^{-1}u^{-1}(k)$  son todos los valores que toman las funciones  $\lambda(k)$  y  $-\lambda(k)$ .

Por lo tanto,  $\sigma(u(k)\mathcal{F}H_{0D}\mathcal{F}^{-1}u^{-1}(k)) = (-\infty, m] \cup [m, \infty)$ .

□

**Observación 21**  $\sigma_{ess}(H_{0D}) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty)$ .

**Observación 22** Sea  $k \in \mathbb{R}^3$ . Como ya se demostró, los eigenvalores del operador libre de Dirac vienen dados por  $\pm\lambda(k)$ , los cuales, tienen como operadores de proyección a las matrices

$$P^\pm(k) := \frac{1}{2} \left[ I \pm \frac{1}{\lambda(k)} (\alpha \cdot k + m\beta) \right]$$

y, por lo tanto, como eigespacios a  $\chi^\pm(k) = \mathfrak{R}(P^\pm(k))$ .

Para terminar con el operador libre de Dirac, se va a enunciar una de las consecuencias del LAP, la cual dice así

$$R_{0D}(E \pm i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} R_{0D}(E \pm i\varepsilon) = \begin{cases} (H_{0D} + E)R_{0S}((E^2 - m^2) \pm i0) & \text{si } E > m \\ (H_{0D} + E)R_{0S}((E^2 - m^2) \mp i0) & \text{si } E < -m \end{cases}$$

existe para todo  $E \in (-\infty, -m) \cup (m, \infty)$  con la topología uniforme en  $\mathcal{B}(L_s^2, H^{\alpha, -s})$ , tomando a  $s > 1/2$  y  $|\alpha| \leq 1$ . Además,

$$\|R_{0D}(E \pm i0)f\|_{H^{\alpha, -s}} \leq C_{s, \delta} |E|^{|\alpha|} \|f\|_{L_s^2}$$

para todo  $|E| \in [m + \delta, \infty)$ , con  $\delta > 0$ . Por otra parte, las funciones  $R_{D0}^{\pm} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(L_s^2, H^{\alpha, -s})$  dadas por

$$R_{D0}^{\pm}(E) = \begin{cases} R_{0D}(E) & \text{si } \text{Im}E \neq 0 \\ R_{0D}(E \pm i0) & \text{si } E \in (-\infty, -m) \cup (m, \infty) \end{cases}$$

están definidas para todo  $E \in \mathbb{C}^{\pm} \cup (-\infty, -m) \cup (m, \infty)$ , son analíticas para toda  $E$  con  $\text{Im}E \neq 0$  y localmente Hölder continuas para toda  $E \in (-\infty, -m) \cup (m, \infty)$ , con exponente  $\theta$ , tal que,  $0 < \theta \leq s - 1/2$  y  $\theta < 1$ .

La demostración se puede encontrar en la referencia [3].

Para este trabajo, se debe también de hablar del operador de Dirac perturbado por un campo electromagnético independiente del tiempo. Para obtener la expresión de este, debe recordarse que si una partícula cuántica está en presencia de un campo electromagnético con potencial  $(V, \mathbf{A})$ , entonces la ecuación que la describe viene dada por

$$[\alpha \cdot (-i\nabla - e\mathbf{A}) + \beta m + eV]\varphi = i\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Como el potencial  $(V, \mathbf{A})$  es independiente del tiempo, entonces se puede proponer como solución de esta a  $\varphi(x, t) = \psi(x)\tau(t)$ , por lo cual, separando variables en esta ecuación se obtiene que

$$[\alpha \cdot (-i\nabla - e\mathbf{A}) + \beta m + eV]\psi = E\psi, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = (-iE\tau).$$

Simplificando la ecuación 2.34 se obtiene que

$$[\alpha \cdot (-i\nabla) + \beta m - \alpha \cdot (e\mathbf{A}) + eV]\psi = E\psi \quad (2.35)$$

lo cual, es equivalente a

$$[H_{0D} + \mathbb{V}(x)]\psi = E\psi \quad (2.36)$$

donde  $H_{0D}$  es el operador libre de Dirac y  $\mathbb{V}(x)$  es una perturbación al operador. Por esta razón, se define el operador de Dirac perturbado como

$$H_D = H_{0D} + \mathbb{V}. \quad (2.37)$$

Ahora, se supondrá que el potencial  $\mathbb{V}$  cumple lo siguiente:

1. Es de la forma

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} V & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} & V \end{pmatrix}$$

donde  $V$ , y cada componente de  $\mathbf{A}$  toman valores en los reales.

2. Para algún  $s_0 > 1/2$ ,  $\langle x \rangle^{2s_0} \mathbb{V}$  es un operador compacto de  $H^1$  a  $L^2$ .

3.  $\forall \in L_s^2$  para algún  $s > 1/2$ .

Con la hipótesis anterior, se tiene como consecuencia que, el operador de Dirac perturbado cumple lo siguiente:

1.  $H_D$  es un operador auto-adjunto con dominio  $\mathcal{D}(H) = H^1(\mathbb{R}^3)^4$ .
2. Tiene el mismo espectro esencial que el operador libre de Dirac

$$\sigma_{ess}(H_{0D}) = \sigma_{ess}(H_D) = (-\infty, -m) \cup [m, \infty).$$

La demostración de éstas propiedades se puede encontrar en la referencia [3]. También, de esto se puede concluir que

$$R_D(E \pm i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} R_D(E \pm i\varepsilon) = R_{0D}(E \pm i0)(1 + \forall R_{0D}(E \pm i0))^{-1}$$

existe para todo  $E \in (-\infty, -m) \cup (m, \infty) \setminus \sigma_p(H_D)$ , con la topología uniforme en  $\mathcal{B}(L_s^2, H^{\alpha, -s})$ ,  $s \in (1/2, s_0]$ ,  $|\alpha| \leq 1$ . Además, se tiene que las funciones  $R_{D0}^\pm: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(L_s^2, H^{\alpha, -s})$  dadas por

$$R_D^\pm(E) = \begin{cases} R_D(E) & \text{si } \text{Im}E \neq 0 \\ R_D(E \pm i0) & \text{si } E \in (-\infty, -m) \cup (m, \infty) \setminus \sigma_p(H_D), \end{cases}$$

están definidas para todo  $E \in \mathbb{C}^\pm \cup (-\infty, -m) \cup (m, \infty) \setminus \sigma_p(H_D)$  y, además, son analíticas para  $\text{Im}E \neq 0$  y localmente Hölder continuas para  $(-\infty, -m) \cup (m, \infty) \setminus \sigma_p(H_D)$  con exponente  $\theta$  tal que  $0 < \theta < s - 1/2$ ,  $s < \min\{s_0, 3/2\}$ .

La demostración de ésta, se puede encontrar en la referencia [3].

Además, con esta hipótesis se puede asegurar la existencia de soluciones de dispersión, es decir, soluciones a la ecuación diferencial

$$H_D u = E u$$

para  $E \in (-\infty, -m) \cup (m, \infty) \setminus \sigma_p(H_D)$ . Estas soluciones vienen dadas por:

$$u_\pm(x, \theta; E) = P_\theta(E) e^{i\nu(E)\langle x, \theta \rangle} - (R_D(E \pm i0) \forall (\cdot) P_\theta(E) e^{i\nu(E)\langle \cdot, \theta \rangle})(x).$$

Además, éstas admiten una expansión asintótica dada por

$$u_\pm(x, \theta; E) = P_\theta(E) e^{i\nu(E)\langle x, \theta \rangle} + a_\pm(\hat{x}, \theta; E) \frac{e^{\pm i(\text{sgn}E)\nu(E)|x|}}{|x|} + \hat{o}(|x|^{-1})$$

donde  $\hat{x} = x/|x|$  y

$$a_\pm(\hat{x}, \theta; E) = -(\text{sgn}E) \left( \frac{2\pi|E|}{\nu(E)} \right)^{1/2} (\Gamma_\pm(E) \forall (\cdot) P_\theta(E) e^{i\nu(E)\langle \cdot, \theta \rangle})(\pm(\text{sgn}E)\hat{x}).$$

De esta manera se puede asegurar que el potencial electromagnético  $\mathbb{V}$  puede recuperarse por una expansión asintótica de la matriz de dispersión. Esto se verá mas adelante.

Si  $\mathbb{V}$  cumple la siguiente estimación:

$$|\mathbb{V}(x)| \leq C\langle x \rangle^{-\rho} \text{ para algún } \rho > 1$$

donde  $|\mathbb{V}(x)|$  es la norma de la matriz  $\mathbb{V}$ , no existen eigenvalores en el espectro absolutamente continuo del operador  $H_D$ , es decir,

$$\{(-\infty, -m) \cup (m, \infty)\} \cap \sigma_p(H_D) = \emptyset.$$

Este resultado se demuestra en [4]. Por último, es importante mencionar que este tipo de potenciales son conocidos como *potenciales de corto alcance* y los que cumplan

$$C\langle x \rangle^{-\rho} \leq |\mathbb{V}(x)| \text{ para algún } \rho \leq 1$$

son conocidos como *potenciales de largo alcance*.

## Capítulo 3

# El operador de dispersión y la matriz de dispersión

### 3.1. Teoría espectral de operadores auto-adjuntos

Para la teoría de dispersión, es muy importante el espectro de los operadores auto-adjuntos. Por lo cual, se enunciará la teoría espectral de operadores auto-adjuntos, así como la clasificación de estos.

Para empezar, se definirá que es una proyección en un espacio de Hilbert, para posteriormente, definir que es una familia espectral y concluir con la medida espectral de un operador auto-adjunto:

**Definición 30** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. Una proyección  $E : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es un operador lineal acotado, tal que

1.  $E$  es auto-adjunto.
2.  $E$  es idempotente, i. e.,  $E^2 = E$ .

**Observación 23** El  $\mathcal{M}(E) = \{f \in \mathcal{H} : Ef = f\}$  es el subespacio que  $E$  proyecta, i. e.,  $E\mathcal{M}(E) = \mathcal{M}(E)$  y  $E\mathcal{M}(E)^\perp = \{0\}$ , donde  $\mathcal{M}(E)^\perp$  es el complemento ortogonal de  $\mathcal{M}(E)$ .

**Definición 31** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y sea  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  una familia de proyecciones en  $\mathcal{H}$ . Se dice  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  es una familia espectral si

1. La familia  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  es no-decreciente, i. e.  $E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda, \mu\}}$ .
2.  $s\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda = O$  y  $s\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda = I$ .

**Definición 32** Sea  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador lineal. Se dice que  $A$  es un operador positivo si para toda  $f \in \mathcal{D}(A)$  se cumple que

$$\langle f, Af \rangle \geq 0.$$

**Observación 24** La propiedad uno, se puede reescribir como  $E_\lambda \leq E_\mu$  si  $\lambda \leq \mu$ , i. e.  $E_\mu - E_\lambda$  es un operador positivo si  $\lambda \leq \mu$ .

**Observación 25** De la propiedad uno, también se sigue que los límites  $s - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} E_{\lambda \pm \varepsilon} = E_{\lambda \pm 0}$  existen para toda  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Estos límites cumplen que  $E_{\lambda-0} \leq E_{\lambda} \leq E_{\lambda+0}$ .

En lo siguiente, todas las familias espectrales de este texto son continuas por la derecha, i. e.

$$E_{\lambda+0} = s - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} E_{\lambda+\varepsilon} = E_{\lambda}.$$

**Definición 33** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$  y  $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  una familia espectral. Se define

$$E((a, b]) = E_b - E_a.$$

**Observación 26** De la definición anterior y la observación 25 se sigue que:

$$E((a, b)) = E_{b-0} - E_a, E([a, b]) = E_b - E_{a-0}.$$

**Observación 27** De la propiedad uno de las familias espectrales, es fácil ver que:

$$E((a, b))E((c, d]) = E((a, b] \cap (c, d]).$$

Considere ahora a  $\mathcal{A}_B$  el  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$ . Con las observaciones anteriores, se puede definir para cada  $\mathcal{V} \in \mathcal{A}_B$  un operador de proyección  $E(\mathcal{V})$ , tal que,  $E(\mathcal{V})$  sea  $\sigma$ -aditiva, i. e.

$$E(\cup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} E(\mathcal{V}_k)$$

si  $\{\mathcal{V}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una familia disjunta de elementos de  $\mathcal{A}_B$ .

La colección de proyecciones  $\{E(\mathcal{V})\}_{\mathcal{V} \in \mathcal{A}_B}$  es llamada la medida espectral asociada a la familia espectral  $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ .

Por otra parte, las propiedades de la familia espectral permiten definir una medida de Stieljes para cada  $f \in \mathcal{H}$ . Esta viene dada de la siguiente manera:

**Definición 34** Sea  $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  una familia espectral y sea  $f \in \mathcal{H}$ . Sea define la medida de Stieljes asociada a  $f$ , denotada por  $m_f$ , como la función  $m_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : m_f(\lambda) = \langle f, E_{\lambda} f \rangle = \|E_{\lambda} f\|^2.$$

**Observación 28** La medida anterior, cumple las siguientes propiedades

1. Si  $\mu \leq \lambda$  entonces  $m_f(\mu) \leq m_f(\lambda)$ .
2.  $m_f$  es continua por la derecha.
3.  $m_f(-\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \langle f, E_{\lambda} f \rangle = 0$  y  $m_f(+\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle f, E_{\lambda} f \rangle = \|f\|^2$ .
4. Para cada  $\mathcal{V} \in \mathcal{A}_B$  :  $m_f(\mathcal{V}) = \|E(\mathcal{V})f\|^2$ .

De manera análoga al espacio de medida  $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_B, d\lambda)$ , se pueden definir integrales en  $\mathcal{H}$  de funciones continuas  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , solo que éstas corresponden a operadores en  $\mathcal{H}$ . Sin embargo, la construcción de esta integral no está dentro de los objetivos de este trabajo, por lo que, solo se enunciará el siguiente teorema:

**Teorema 13** *Sea  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  una familia espectral en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $-\infty < a < b < \infty$  y  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua.*

1. *Sea  $\{\Pi_r\}$  una sucesión de particiones en el intervalo  $(a, b]$  tal que,  $|\Pi_r| \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Entonces la sucesión de operadores  $\{\sum_{k=1}^N \varphi(u_k)E((s_{k-1}, s_k])\}$  es fuertemente convergente y su límite es denotado por  $\int_a^b \varphi(\lambda)E(d\lambda)$ . Además, éste pertenece a  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  y es independiente de la sucesión  $\{\Pi_r\}$ .*
2.  *$\int_a^b \varphi(\lambda)E(d\lambda)$  conmuta con cada  $E_\lambda$  y satisface*

$$\left\| \int_a^b \varphi(\lambda)E(d\lambda) \right\| = \sup_{\mu \in [a, b] \cap \text{supp}\{E_\lambda\}} |\varphi(\mu)|$$

donde

$$\text{supp}\{E_\lambda\} = \{\mu \in \mathbb{R} : E_{\mu+\varepsilon} - E_{\mu-\varepsilon} \neq 0 \forall \varepsilon > 0\}$$

se conoce como el soporte de  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ .

3. *Si  $\bar{\varphi}$  denota la función compleja conjugada de  $\varphi$ , entonces  $\int_a^b \bar{\varphi}(\lambda)E(d\lambda)$  es el adjunto de  $\int_a^b \varphi(\lambda)E(d\lambda)$ .*
4. *Para cada vector  $f \in \mathcal{H}$ :*

$$\left\| \int_a^b \varphi(\lambda)E(d\lambda)f \right\|^2 = \int_a^b |\varphi(\lambda)|^2 m_f(d\lambda).$$

5. *Si  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es también una función continua, entonces*

$$\left( \int_a^b \varphi(\lambda)E(d\lambda) \right) \left( \int_a^b \psi(\mu)E(d\mu) \right) = \int_a^b \varphi(\lambda)\psi(\lambda)E(d\lambda).$$

6. *Si  $a = -\infty$  y  $b = \infty$  entonces  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)E(d\lambda)$  es un operador cerrado y su adjunto es  $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\lambda)E(d\lambda)$ .*

La demostración de este teorema se puede encontrar en la referencia [2].

Por otra parte, la importancia de estas medidas y su integración surge del teorema espectral, el cual dice lo siguiente:

**Teorema 14 (Teorema Espectral)** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y sea  $A$  un operador auto-adjunto. Entonces existe una familia espectral  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  tal que*

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda E_{d\lambda}.$$

La demostración del Teorema Espectral se puede encontrar en la referencia [20].

Otro teorema importante es la relación de la medida espectral con el espectro de  $A$ , la cual está dada por:

**Teorema 15**  $\sigma(A) = \text{supp}\{E_\lambda\}$ .

Ésta se encuentra demostrada en la referencia [20].

Otra propiedad importante la da el cálculo funcional, la cual, se utiliza mucho en teoría de dispersión. Esta establece lo siguiente

**Definición 35** Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua. Se define  $\varphi(A)$  como el operador dado por:

$$\varphi(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) E(d\lambda).$$

Estos operadores heredan todas las propiedades del teorema 13, y como se menciona, su importancia aparece en la teoría de dispersión, en particular, en los operadores de onda.

Por último, el teorema espectral permite la clasificación del espectro, teniendo mayor relevancia el espectro continuo en teoría de dispersión. Para esta clasificación, se utiliza el teorema de descomposición de Lebesgue, el cual concluye que cualquier medida de Stieltjes en  $\mathbb{R}$ , se puede escribir como

$$m = m_p + m_{sc} + m_{ac}$$

donde  $m_p$  es una medida puramente puntual,  $m_{sc}$  es una medida singularmente continua y  $m_{ac}$  es una medida absolutamente continua.

Por lo tanto, para cada  $f \in \mathcal{H}$  con medida de Stieltjes  $m_f$ , se cumple que

$$m_f = m_{pf} + m_{scf} + m_{acf}.$$

Por esta razón, se pueden definir los siguientes subespacios de  $\mathcal{H}$ , en términos de estas medidas:

1.  $\mathcal{H}_{ac}(A) = \{f \in \mathcal{H} \mid m_f \text{ es una medida absolutamente continua}\}.$
2.  $\mathcal{H}_{sc}(A) = \{f \in \mathcal{H} \mid m_f \text{ es una medida singularmente continua}\}.$
3.  $\mathcal{H}_p(A) = \{f \in \mathcal{H} \mid m_f \text{ es una medida puramente puntual}\}.$

Estos subespacios cumplen lo siguiente:

**Teorema 16** Sea  $A$  un operador auto-adjunto en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , entonces,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p(A) \oplus \mathcal{H}_{sc}(A) \oplus \mathcal{H}_{ac}(A).$$

**Corolario 4** Sea  $A$  un operador auto-adjunto en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Si se define a  $A_p, A_{sc}, A_{ac}$  como la restricción del operador  $A$  en los subespacios  $\mathcal{H}_p(A), \mathcal{H}_{sc}(A), \mathcal{H}_{ac}(A)$ , respectivamente, entonces

$$\sigma(A) = \sigma(A_p) \cup \sigma(A_{sc}) \cup \sigma(A_{ac}).$$

La demostración de este teorema y corolario se puede encontrar en la referencia [2].

**Definición 36** Sea  $A$  un operador auto-adjunto. Se define

1. el espectro puntual de  $A$ , denotado por  $\sigma_p(A)$ , como  $\sigma_p(A) = \sigma(A_p)$ .

2. el espectro singularmente continuo de  $A$ , denotado por  $\sigma_{sc}(A)$ , como  $\sigma_{sc}(A) = \sigma(A_{sc})$ .
3. el espectro absolutamente continuo de  $A$ , denotado por  $\sigma_{ac}(A)$ , como  $\sigma_{ac}(A) = \sigma(A_{ac})$ .

En teoría de dispersión, los estados mas relevantes del sistema vienen caracterizados por los vectores en  $\mathcal{H}_{ac}$  o los que están asociados al espectro absolutamente continuo  $\sigma_{ac}(A)$ ; justo por esto son llamados estados de dispersión. Designamos por  $P_{ac}(A)$  al proyector sobre  $\mathcal{H}_{ac}(A)$ .

En los siguientes subtemas, se dará una discusión mas amplia sobre esto.

## 3.2. Teoría de dispersión cuántica

Un fenómeno de dispersión cuántica consiste en un conjunto de partículas que viajan inicialmente de forma libre y que, posteriormente, se ven afectadas por una fuerza externa llamada dispersor. Ésta fuerza cambia el estado de movimiento de la partículas, haciendo que éstas cambien de un estado de movimiento rectilíneo uniforme a uno curvilíneo. Una vez que las partículas han cambiado su estado de movimiento, pueden realizar dos acciones:

1. Quedarse atrapados por el dispersor, manteniéndose localizadas en una región.
2. Escapar del dispersor y continuar con un movimiento rectilíneo uniforme distinto al inicial.

Las partículas que cumplen la primera condición se dice que están en un "estado acotado"; las segundas se dice que están en un "estado de dispersión".

Para caracterizar estos estados matemáticamente, primero se debe observar que si el sistema está descrito por un Hamiltoniano  $H$ , la ecuación de evolución temporal queda determinada por

$$H\psi(t) = i\frac{d}{dt}\psi(t)$$

y esto es válido para sistemas relativista y no relativistas. Observe que, las soluciones a esta ecuación diferencial vienen dadas por

$$\psi(t) = e^{-iHt}\psi(t_0)$$

donde  $\psi(t_0)$  es el estado inicial del sistema. Por lo tanto, la evolución del sistema queda determinada por la familia de operadores  $\{U_t = e^{-iHt}\}_{t \in \mathbb{R}}$ , los cuales, corresponden a un grupo unitario, fuertemente continuo, de operadores en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ ; por esta razón, a  $\{U_t = e^{-iHt}\}_{t \in \mathbb{R}}$  se le conoce como "el grupo unitario de evolución temporal del sistema".

Haciendo esta precisión, se puede definir un estado acotado y un estado de dispersión de la siguiente manera: Los estados acotados corresponden a los autovectores, y más generalmente al subespacio puntual  $\mathcal{H}_p(H)$ . Por otra parte, los estados de dispersión corresponden al subespacio absolutamente continuo  $\mathcal{H}_{ac}(H)$ . Habitualmente en los sistemas de dispersión el subespacio singularmente continuo,  $\mathcal{H}_{sc}$  se reduce al vector zero.

En teoría de dispersión, uno requiere que la partícula libre que se acerca al dispersor con estado  $f_- \in \mathcal{H}_{ac}(H_0)$ , le corresponda un estado de dispersión  $f \in \mathcal{H}_{ac}(H)$  del Hamiltoniano perturbado  $H$ . Dicho de otra forma, uno desea que la evolución del estado  $f_0$  corresponda a la evolución del estado  $f$ ; esto matemáticamente se traduce en que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{-iHt} f - e^{-iH_0 t} f_-\| = 0 \text{ o, equivalentemente } \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{iH_0 t} e^{-iHt} f - f_+\| = 0.$$

Esto pasa análogamente para las partículas que se escapan del dispersor; solo que en este caso, el límite a calcular es el siguiente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{-iH_0 t} f - e^{-iHt} f_+\| = 0 \text{ o, equivalentemente } \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{iHt} e^{-iH_0 t} f - f_+\| = 0,$$

adonde  $f_+ \in \mathcal{H}_{ac}(H_0)$ . Esto motiva la definición de los operadores de onda:

**Definición 37** Sean  $H, H_0$  los Hamiltonianos perturbado y libre, respectivamente. Se definen los operadores de onda  $\Omega_+(H, H_0)$  y  $\Omega_-(H, H_0)$  como el límite fuerte,

$$\Omega_{\pm}(H, H_0) = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} P_{ac}(H_0)$$

si éste existe.

**Observación 29** Los operadores  $\Omega_{\pm}(H, H_0)$  son parcialmente isométricos con espacio inicial  $\mathcal{H}_{ac}(H_0)$ .

**Observación 30** Los operadores de onda cumplen las siguientes reglas de conmutación:

$$H\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}H_0$$

conocidas como las relaciones de entrelazamiento.

Estas propiedades se pueden encontrar demostradas en la referencia [2].

Es importante mencionar que no necesariamente todas las partículas en un sistema se van a dispersar, por lo que, el operador de dispersión  $S$  no siempre se podrá definir. Sin embargo, en un fenómeno de dispersión siempre se espera que haya al menos una partícula dispersada, por lo cual, se debe de cumplir que  $\mathfrak{R}(\Omega_-) \subseteq \mathfrak{R}(\Omega_+)$ .

Por otra parte, el siguiente teorema relaciona el espectro absolutamente continuo con los operadores de onda y, por lo tanto, con el operador de dispersión.

**Teorema 17** Sean  $H, H_0$  los Hamiltonianos perturbado y libre, respectivamente y  $\Omega_{\pm}(H, H_0)$  sus operadores de onda. Entonces

$$\mathfrak{R}(\Omega_{\pm}) \subseteq \mathcal{H}_{ac}.$$

Por esta razón, se dice que el operador de onda  $\Omega_+$  (o  $\Omega_-$ ) es completo si  $\mathfrak{R}(\Omega_+) = \mathcal{H}_{ac}$  (o  $\mathfrak{R}(\Omega_-) = \mathcal{H}_{ac}$ ) y se dice que  $\Omega_{\pm}$  son asintóticamente completos si  $\mathfrak{R}(\Omega_+) = \mathfrak{R}(\Omega_-) = \mathcal{H}_{ac}$ . En el experimento, esto último significa que todas las partículas que se mandan al dispersor, se dispersan y ninguna se queda atrapada por este o se absorbe.

Por otra parte, observe que las partículas que llegan al dispersor quedan determinadas por el operador

$$\Omega_-(H, H_0)$$

y las que salen por

$$\Omega_+(H, H_0).$$

Si una partícula llega al dispersor con estado  $f_-$  y sale de éste con estado  $f_+$ , es decir, está dentro del conjunto de partículas dispersadas, entonces se van a cumplir la siguiente relación

$$\Omega_-(H, H_0)f_- = \Omega_+(H, H_0)f_+.$$

Si los operadores de onda son asintóticamente completos, se obtiene que

$$f_+ = \Omega_+^*(H, H_0)\Omega_-(H, H_0)f_-.$$

Por lo tanto, existe un operador que permite relacionar los diferentes estados que tiene una partícula dispersada; éste es conocido como "el operador de dispersión" y se define de la siguiente manera:

**Definición 38** Sean  $H, H_0$  los Hamiltonianos perturbado y libre, respectivamente y  $\Omega_{\pm}(H, H_0)$  los operadores de onda. Se define el operador de Dispersión, denotado por  $S$ , como

$$S(H, H_0) = \Omega_+^*(H, H_0)\Omega_-(H, H_0).$$

**Observación 31** Note que  $S(H, H_0)$  cumple las siguientes reglas de conmutación

$$H_0S(H, H_0) = S(H, H_0)H_0$$

y

$$e^{itH_0}S(H, H_0) = S(H, H_0)e^{itH_0}$$

para toda  $t \in \mathbb{R}$ .

La demostración de esta observación se puede encontrar en la referencia [2].

En casos en que no haya posibilidad de confusión, por simplicidad, utilizaremos la notación  $\Omega_{\pm}$  para designar los operadores de onda, y  $S$  para el operador de dispersión.

En lo siguiente, se definirá la matriz de dispersión, y se dará una justificación de su existencia. Se omitirán las demostraciones por no ser el objetivo de este trabajo, sin embargo, estas se pueden revisar en las referencias [15] y [16].

**Definición 39** Sea  $(M, \mu)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finita, sea  $\mathcal{H}_0$  un espacio de Hilbert separable y  $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu; \mathcal{H}_0)$ .

1. Se dice que una función  $a : M \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$  es medible si  $\langle \psi, a(\cdot)\phi \rangle$  es una función medible, para todo  $\psi, \phi \in \mathcal{H}_0$ .
2. Se dice que una función  $a : M \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$  es  $L^\infty(M, d\mu; \mathcal{B}(\mathcal{H}_0))$  si es medible y, además, el  $\text{ess sup}\{\|a(\cdot)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)}\} < \infty$ .

Por último, al espacio  $\mathcal{H}$  se le conoce como la integral directa de fibra constante y es denotada como

$$\mathcal{H} = \int_M^{\oplus} \mathcal{H}_0 d\mu.$$

**Observación 32** Note que si  $a \in L^\infty(M, d\mu; \mathcal{B}(\mathcal{H}_0))$  y  $\phi \in \mathcal{H}$  es fija, entonces, la funcional lineal definida por:

$$\forall \psi \in \mathcal{H} : \int_M \langle \psi(\lambda), a(\lambda)\phi(\lambda) \rangle_{\mathcal{H}_0} d\mu(\lambda)$$

es acotada en  $\mathcal{H}$ . Por lo tanto, por el teorema de Riesz existe un operador  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  acotado, tal que

$$\langle \psi, A\phi \rangle_{\mathcal{H}} = \int_M \langle \psi(\lambda), a(\lambda)\phi(\lambda) \rangle_{\mathcal{H}_0} d\mu(\lambda)$$

por lo cual,

$$(A\psi)(m) = a(m)\psi(m)$$

casi en todas partes.

Esta observación, hace pertinente la siguiente definición:

**Definición 40** Sea  $(M, \mu)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finita, sea  $\mathcal{H}_0$  un espacio de Hilbert separable y  $\mathcal{H} = \int_M^\oplus \mathcal{H}_0 d\mu$ . Sea  $a \in L^\infty(M, d\mu; \mathcal{B}(\mathcal{H}_0))$  y  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador acotado en  $\mathcal{H}$ . Se dice que  $A$  se puede descomponer en una integral directa de  $a$  y que  $a(\lambda)$  es la fibra de  $A$  en  $\lambda$  si, para toda  $\psi \in \mathcal{H}$

$$(A\psi)(m) = a(m)\psi(m).$$

En tal caso,  $A$  se denota como

$$A = \int_M^\oplus a(m) d\mu(m).$$

En teoría de dispersión, esta definición toma gran relevancia, ya que, la matriz de dispersión en la energía  $E$ , denotada por  $S(E)$ , corresponde a la descomposición del operador  $S$  en la fibra  $E$ . Además, experimentalmente se determina la matriz de dispersión y no propiamente el operador de dispersión  $S$ , por lo cual, es necesario dar condiciones para que el operador de dispersión  $S$  se pueda descomponer.

Para este trabajo, estas condiciones vienen dadas por el siguiente teorema:

**Teorema 18** Sea  $\mathcal{H}_0$  un espacio de Hilbert separable y  $\mu$  la medida de Borel en  $\mathbb{R}$ . Sea  $B$  el operador de multiplicación por  $x$  en  $\int_{\mathbb{R}}^\oplus \mathcal{H}_0 d\mu$ . Suponga que  $A \in \mathcal{B}(\int_{\mathbb{R}}^\oplus \mathcal{H}_0 d\mu)$  conmuta con  $e^{itB}$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces  $A$  es un operador descomponible. Además, si  $A$  es unitario (auto-adjunto), entonces también sus fibras son unitarias (auto-adjuntas) c.t.p. en  $\mathcal{H}_0$ .

En este caso, dado que  $S$  conmuta con  $e^{iH_0}$ , si  $H_0$  fuera descomponible, entonces,  $S$  es descomponible. Por lo tanto, todo se reduce a ver que  $H_0$  sea descomponible, lo cual se verá mas adelante.

### 3.3. La matriz de dispersión

En esta sección consideramos la matriz de dispersión. Para esto, dadas las hipótesis impuestas en el capítulo 2 en el potencial, se debe recalcar que los operadores de onda  $\Omega_\pm(H, H_0)$  existen y son asintóticamente completos, esto puede encontrarse en la referencia [21]. Por lo tanto, el operador  $S$  existe y está bien definido.

Ahora, se va a dar la representación espectral del operador  $H_0$ , es decir, se va a descomponer al operador  $H_0$ .

Para esto, sea  $E \in \sigma(H_{0D})$  y  $s > 1/2$ . Se va a definir el operador  $\Gamma_0(E) : L_s^2 \rightarrow L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4)$  dado por

$$(\Gamma_0(E)f)(\omega) := (2\pi)^{-\frac{3}{2}} v(E) P_\omega(E) \int_{\mathbb{R}^3} e^{-iv(E)\langle\omega,x\rangle} f(\mathbf{x}) d^3x$$

donde  $v(E) = (E^2 - m^2)^{1/2}$  y

$$P_\omega(E) = \begin{cases} P^+(v(E)\omega) & \text{si } E > m \\ P^-(v(E)\omega) & \text{si } E < -m. \end{cases}.$$

Note que, el operador adjunto  $\Gamma_0(E)^* : L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4) \rightarrow L^2_{-s}$  está dado por:

$$(\Gamma_0^*(E)f)(\omega) := (2\pi)^{-\frac{3}{2}} v(E) \int_{\mathbb{S}^2} e^{iv(E)\langle x,\omega\rangle} P_\omega(E) f(\omega) d^2\omega.$$

Este operador es unitariamente equivalente al operador traza  $T_0(E)$  utilizando la transformada de Foldy-Wouthuysen, esto se puede encontrar en la referencia [3]. Por lo cual,  $\Gamma_0(E)$  es un operador acotado de  $L^2_s$  a  $L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4)$ , además, es localmente Hölder continuo en  $(-\infty, -m) \cup (m, \infty)$ , con exponente  $\theta \in (0, s - \frac{1}{2})$  y  $\theta < 1$ .

Ahora, defina a al espacio

$$\mathcal{H}(E) = \int_{\mathbb{S}^2}^{\oplus} \chi^\pm(v(E)\omega) d\omega, \quad \pm E > m,$$

y al espacio

$$\hat{\mathcal{H}} = \int_{(-\infty, -m) \cup (m, \infty)}^{\oplus} \mathcal{H}(E) dE$$

y defina también, al operador  $\mathcal{F}_0 : L^2 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$  dado por

$$(\mathcal{F}_0 f)(E, \omega) = (\Gamma_0(E)f)(\omega)$$

Observe que,

$$\mathcal{F}_0 H_0 \mathcal{F}_0^* = E$$

es el operador multiplicación por  $E$  en  $\hat{\mathcal{H}}$ . Esto se puede encontrar en la referencia [3].

Por lo tanto, por el teorema 18,  $S$  se puede descomponer y, además,

$$\mathcal{F}_0 S \mathcal{F}_0^* = S(E).$$

Por otra parte, la ecuación estacionaria para  $S(E)$  viene dada por

$$S(E) = I - 2\pi i \Gamma_0(E) (\nabla - \nabla R_D(E + i0) \nabla) \Gamma_0(E)^*$$

donde  $I$  es el operador identidad en  $\hat{\mathcal{H}}(E)$ . Esto se puede encontrar en la referencia [3].

Defina ahora al operador

$$\Gamma_{\pm}(E) = \Gamma_0(E)(I - \mathbb{V}R_D(E \pm i0)).$$

De las propiedades de  $T(E)$  y el resolvente  $R_D(E \pm i0)$ , se sigue que  $\Gamma_{\pm}(E)$  es un operador acotado de  $L_s^2$  a  $L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4)$ , para  $s \in (1/2, s_0]$ , donde  $s_0$  es el real  $s_0 > 1/2$ , tal que, hace a  $\langle x \rangle^{2s_0} \mathbb{V}$  un operador compacto. Además, este operador es Hölder continuo en  $(-\infty, -m) \cup (m, \infty)$  a  $\mathcal{B}(L_s^2; L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4))$ , con exponente  $\theta \in (0, s - \frac{1}{2})$  y  $s < \min\{s_0, 3/2\}$ . Nuevamente, defina al operador

$$(\mathcal{F}_{\pm}f)(E, \omega) = (\Gamma_{\pm}(E)f)(\omega)$$

que va de  $\mathcal{H}_{ac}(H_D)$  a  $\mathcal{H}$ , el cual, da una representación espectral para  $H_D$ , es decir,

$$\mathcal{F}_{\pm}H\mathcal{F}_{\pm}^* = E$$

Todo esto, permite demostrar que la matriz de dispersión  $S(E)$  y el operador de dispersión están bien definido

### 3.4. Operadores pseudodiferenciales

Primero, se van a definir los siguientes espacios que utilizaremos posteriormente.

#### Definición 41

1.  $\dot{S}^{-\rho} = \{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) : \partial^{\alpha}\varphi(x) = O(|x|^{-\rho-|\alpha|}) \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}^3\}$ .
2.  $S^{-\rho} = \dot{S}^{-\rho} \cap C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ .
3.  $S^{-\infty} = \mathcal{S}$  la clase de Schwartz.

**Definición 42** Sea  $f_j \in \dot{S}^{-\rho_j}$  con  $\rho_j \rightarrow \infty$ , cuando  $j \rightarrow \infty$ . Se dice que  $f$  tiene la expansión asintótica  $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$  y se denota como

$$f(x) \simeq \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x), \quad (3.1)$$

si para toda  $N \in \mathbb{N}$ , el error

$$f(x) - \sum_{j=1}^N f_j(x) \in \dot{S}^{-\rho}, \quad (3.2)$$

donde  $\rho = \min_{j \geq N+1} \{\rho_j\}$ .

**Observación 33** Note que, una función  $f \in C^{\infty}$  está determinada por una expansión como en la definición anterior módulo una función en  $S^{-\infty}$ .

Veremos que el potencial electromagnético  $\mathbb{V}$  se va a aproximar por una expansión asintótica.

Ahora, se va a definir un operador pseudo-diferencial.

**Definición 43** Un operador  $A$  en  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$  se dice que es un operador pseudodiferencial (PDO) si existe una matriz  $a(x, \xi) \in \mathbb{M}_{4 \times 4}$ , tal que

$$(Af)(x) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle \xi, x - \xi' \rangle} a(x, \xi) f(\xi') d\xi' d\xi$$

para toda  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ . A la matriz  $a(x, \xi)$  se le conoce como el símbolo del PDO.

Ahora, se definirán las clases  $S^{n,m}$  de los operadores PDO.

**Definición 44** Se define la clase  $S^{n,m}$  de operadores PDO, como aquellos que tienen símbolos  $a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ , tales que, para toda  $x, \xi$  y para todo multi-índice  $\alpha, \beta$ , la estimación

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle x \rangle^{n-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}$$

se cumple.

Por otra parte

**Definición 45** Se define la clase  $S_{\pm}^{n,m}$  de operadores PDO, como todos aquellos que pertenecen a la clase  $S^{n,m}$  y que satisfacen

1. Su símbolo  $a(x, \xi) = 0$  para  $\mp \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \leq \varepsilon$ , donde  $\hat{x} = x/|x|$ ,  $\hat{\xi} = \xi/|\xi|$  y  $\varepsilon > 0$ .
2. Su símbolo  $a(x, \xi) = 0$  si  $|x| \leq \varepsilon_1$  o  $|\xi| \leq \varepsilon_1$ , donde  $\varepsilon_1 > 0$ .

Otro tipo de operadores PDO son los siguientes

**Definición 46** Un operador  $\mathbf{A}$  en  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$  se dice que es un operador PDO con amplitud  $a(x, \xi, \xi')$  si

$$(\mathbf{A}f)(x) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle \xi, x - \xi' \rangle} a(x, \xi, \xi') f(\xi') d\xi' d\xi$$

para toda  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ .

En este caso

**Definición 47** Se define la clase  $S^n$  de operadores PDO, como todos aquellos que tienen amplitud  $a(x, \xi, \xi')$  y satisfacen la estimación

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_{\xi'}^\gamma a(x, \xi, \xi')| \leq C_{\alpha, \beta, \gamma} \langle (x, \xi, \xi') \rangle^{n-|\alpha+\beta+\gamma|}.$$

Ahora, se anotarán algunos resultados de los PDO.

**Proposición 2** Si  $A$  es un PDO de clase  $S^{n,m}$  con  $n \leq 0$  y  $m \leq 0$ , entonces  $A$  se puede extender a un operador acotado en  $L^2$ . La norma de  $A \langle x \rangle^{-n}$  es estimada por una constante  $C$  que depende solo de  $C_{\alpha, \beta}$ . Además, si  $n < 0$  y  $m < 0$ , entonces  $A$  se puede extender a un operador compacto en  $L^2$ .

**Proposición 3** Sea  $A_j$  un PDO de clase  $S^{n_j, m_j}$ , para  $j = 1, 2$ . Entonces, el símbolo de  $A_1 A_2$  pertenece a la clase de  $S^{n_1+n_2, m_1+m_2}$  y admite la siguiente expansión asintótica

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_1(x, \xi) \partial_x^\alpha a_2(x, \xi) + r^{(N)}(x, \xi)$$

donde  $r^{(N)} \in S^{n_1+n_2-N, m_1+m_2-N}$ .

**Proposición 4** Si  $A$  es PDO con amplitud  $a(x, \xi, \xi')$  en  $S^n$ , entonces  $A$  puede ser extendido como un operador acotado en  $L^2$  para  $n = 0$  y su norma es acotada por una constante  $C$  que depende solo de  $C_{\alpha, \beta, \gamma}$ . Además,  $A$  puede extenderse a un operador compacto en  $L^2$  para  $n < 0$ .

Estos resultados son importantes, ya que si  $\mathbb{V}$  satisface las hipótesis del capítulo 2, entonces, el operador  $S(E) - I$  es un operador PDO con amplitud  $s^{int}(\omega, \theta; E)$ . A la amplitud  $s^{int}(\omega, \theta; E)$  se le conoce como "el kernel de la matriz de dispersión" o "la amplitud de dispersión"

## Capítulo 4

# Propiedades de la matriz de dispersión y problema de dispersión inverso

### 4.1. Eigenfunciones generalizadas de la ecuación de Dirac perturbada

En este subtema, se construirán eigensoluciones generalizadas de la ecuación de Dirac perturbada, es decir, se encontrarán las soluciones para la ecuación diferencial parcial

$$(\alpha \cdot (-i\nabla + \mathbf{A}) + m\beta + V)u = Eu \quad (4.1)$$

donde  $E = \pm\sqrt{|\xi|^2 + m^2}$  para alguna  $\xi \in \mathbb{R}^3$ . Observe que, por las hipótesis en el potencial  $V$  se cumple que

$$|\partial_x^\alpha A(x)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |x|)^{-\rho_m - |\alpha|}, \quad \rho_m > 1 \quad (4.2)$$

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |x|)^{-\rho_e - |\alpha|}, \quad \rho_e > 1$$

para todo multi-índice  $\alpha$ . Ahora, se va a definir el siguiente conjunto

**Definición 48** Sea  $\omega = \xi/|\xi|$ ,  $\hat{x} = x/|x|$ ,  $0 < \varepsilon_0 < 1$  y  $0 < R < \infty$ . Defina al conjunto  $\Xi^\pm(E) := \Xi^\pm(\varepsilon_0, R; E) \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  como el conjunto

$$\Xi^\pm(E) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \pm(\operatorname{sgn} E)\langle \hat{x}, \omega \rangle \geq -1 + \varepsilon_0 \text{ con } |x| \geq R\}.$$

Se van a construir  $u_N^\pm(x, \xi; E) \in \mathbb{M}_{4 \times 4}$ , tales que, cada columna sea una solución aproximada de la ecuación 4.1, cuyo error va estar dado por

$$r_N^\pm(x, \xi; E) := e^{-i\langle x, \xi \rangle} (H - E)u_N^\pm(x, \xi; E) \quad (4.3)$$

y satisface la siguiente estimación

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r_N^\pm(x, \xi; E)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |x|)^{-\rho - N - |\alpha|} |\xi|^{-N - |\beta|}$$

para  $\rho = \min\{\rho_e, \rho_m\}$ , para toda  $N \geq 0$ , para todo  $(x, \xi) \in \Xi^\pm(E)$  y para todos los multi-índices  $\alpha, \beta$ .

Como las soluciones a la ecuación 4.1 son complejas, entonces, se propone que  $u_N^\pm(x, \xi; E)$  sea de la forma

$$u_N^\pm(x, \xi; E) = e^{i\phi^\pm(x, \xi; E)} w_N^\pm(x, \xi; E) \quad (4.4)$$

donde  $\phi^\pm(x, \xi; E)$  es una función real y  $w_N^\pm(x, \xi; E)$  es una función matricial de  $4 \times 4$ . Sustituyendo  $u_N$  en la 4.1, se obtiene que

$$(\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\phi^\pm + \mathbf{A}) + m\beta + V - E)w_N^\pm = e^{i\langle x, \xi \rangle - i\phi^\pm} r_N^\pm. \quad (4.5)$$

Proponga a  $\phi^\pm$  como

$$\phi^\pm(x, \xi; E) = \langle x, \xi \rangle + \Phi^\pm(x, \xi; E)$$

donde  $\Phi^\pm$  tiende a 0 cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , tomando a  $(x, \xi) \in \Xi^\pm(E)$ .

Sustituyendo en la ecuación 4.5 se tiene que

$$(\alpha \cdot \xi + m\beta - E + \alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + \mathbf{A}) + V)w_N^\pm = e^{-i\Phi^\pm} r_N^\pm. \quad (4.6)$$

Ahora, se va a descomponer  $w_N^\pm$  como

$$w_N^\pm = (w_1)_N^\pm + P_\omega(E)(w_2)_N^\pm$$

que al sustituirla, se obtiene que

$$(-2EP_\omega(-E) + \alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + \mathbf{A}) + V)(w_1)_N^\pm + (\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + \mathbf{A}) + V)P_\omega(E)(w_2)_N^\pm = e^{-i\Phi^\pm} r_N^\pm$$

donde se ha usado que  $\alpha \cdot \xi + m\beta - E = -2EP_\omega(-E)$ .

Observe que, como consecuencia del álgebra de las matrices  $\alpha_j$ , se tiene que

$$\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + \mathbf{A})(\alpha \cdot \xi) = 2\langle \xi, (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + \mathbf{A}) \rangle - (\alpha \cdot \xi)\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + \mathbf{A}).$$

Utilizando que  $P_\omega(E)$  es una proyección, se tiene que

$$\begin{aligned} & (-2EP_\omega(-E) + \alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + \mathbf{A}) + V)(w_1)_N^\pm + P_\omega(-E)\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + \mathbf{A})P_\omega(E)(w_2)_N^\pm \\ & + \frac{1}{E}\langle \xi, (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + \mathbf{A}) \rangle P_\omega(E)(w_2)_N^\pm + VP_\omega(E)(w_2)_N^\pm = e^{-i\Phi^\pm} r_N^\pm. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si se propone que  $\Phi^\pm$  satisfaga la ecuación eikonal

$$\langle \omega, \nabla\Phi^\pm + \mathbf{A} \rangle + \frac{E}{|\xi|}V = 0 \quad (4.8)$$

entonces, la ecuación 4.7 se transforma en

$$\begin{aligned} & (-2EP_\omega(-E) + \alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + A) + V)(w_1)_N^\pm \\ & + P_\omega(-E)\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + A)P_\omega(E)(w_2)_N^\pm + \frac{1}{E}\langle \xi, (-i\nabla) \rangle P_\omega(E)(w_2)_N^\pm = e^{-i\Phi^\pm} r_N^\pm. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ahora, se propone que  $(w_1)_N^\pm$  y  $(w_2)_N^\pm$  sean sumas de la forma

$$\begin{aligned} (w_1)_N^\pm &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{|\xi|^j} b_j^\pm(x, \xi; E) \\ (w_2)_N^\pm &= \sum_{j=0}^N \frac{1}{|\xi|^j} c_j^\pm(x, \xi; E) \end{aligned}$$

además, también se busca que  $w_N^\pm$  tienda a  $P_\omega(E)$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , por lo tanto,  $b_0^\pm = 0$  y  $c_0 = \mathbb{I}$ .

Sustituyendo las sumas de  $w_1$  y  $w_2$  en la ecuación 4.9 y multiplicando por el lado izquierdo a  $P_\omega(-E)$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{1}{|\xi|^j} [-2EP_\omega(-E) + P_\omega(-E)(\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + A) + V)] b_j^\pm \\ & + \sum_{j=0}^N \frac{1}{|\xi|^j} P_\omega(-E)\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + A)P_\omega(E)c_j^\pm = e^{-i\Phi^\pm} P_\omega(-E)r_N^\pm. \end{aligned} \quad (4.10)$$

y multiplicando ahora 4.9 por  $P_\omega(E)$  se obtiene que

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{|\xi|^j} [(P_\omega(E)(\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + A) + V)) b_j^\pm + \frac{|\xi|}{E} \langle \omega, (-i\nabla) \rangle P_\omega(E)c_j^\pm] = e^{-i\Phi^\pm} P_\omega(E)r_N^\pm \quad (4.11)$$

Observe que, la condición en el error  $r_N^\pm$  implica que los términos en las ecuaciones anteriores que posean potencias de  $\frac{1}{|\xi|^j}$  menores que  $N$  tienen que ser cero, por lo que, al comparar las ecuaciones 4.10 y 4.11 se obtiene las siguientes fórmulas recursivas

$$b_{j+1}^\pm(x, \xi; E) = \frac{|\xi|}{2E} P_\omega(-E)(\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + A) + V)b_j^\pm + \frac{|\xi|}{2E} P_\omega(-E)\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + A)P_\omega(E)c_j^\pm \quad (4.12)$$

para  $0 \leq j \leq N-1$  y

$$\langle \omega, \nabla c_j^\pm \rangle = -i \frac{E}{|\xi|} P_\omega(E)(\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + A) + V)b_j^\pm$$

para  $0 \leq j \leq N$ .

Note que,  $P_\omega(-E)b_j^\pm = b_j^\pm$ , ya que,  $P_\omega(-E)$  es una proyección, por lo tanto,  $P_\omega(E)Vb_j^\pm = 0$  y, por lo tanto,  $c_j^\pm$  debe satisfacer la siguiente relación

$$\langle \omega, \nabla c_j^\pm \rangle = -i \frac{E}{|\xi|} P_\omega(E)(\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla\Phi^\pm + A))b_j^\pm \quad (4.13)$$

es decir, debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial

$$\langle \omega, \nabla d \rangle = F(x, \xi; E) \quad (4.14)$$

donde  $d$  y  $F$  son matrices de  $4 \times 4$ .

Observe que

$$\Phi^\pm(x, \xi; E) = \begin{cases} \pm \int_0^\infty \left( \frac{|E|}{|\xi|} V(x \pm t\omega) + \langle \omega, A(x \pm t\omega) \rangle \right) dt & \text{si } E > m \\ \pm \int_0^\infty \left( \frac{|E|}{|\xi|} V(x \mp t\omega) - \langle \omega, A(x \mp t\omega) \rangle \right) dt & \text{si } -E > m \end{cases}$$

satisface la ecuación 4.8 y las matrices

$$c_j^\pm(x, \xi; E) = \begin{cases} \pm \int_0^\infty F_j^\pm(x \pm t\omega, \xi; E) dt & \text{si } E > m \\ \pm \int_0^\infty F_j^\pm(x \mp t\omega, \xi; E) dt & \text{si } -E > m \end{cases} \quad (4.15)$$

donde

$$F_j^\pm(x, \xi; E) = -i \frac{|E|}{|\xi|} P_\omega(E) (\alpha \cdot (-i\nabla + \nabla \Phi^\pm(x, \xi; E) + A)) b_j^\pm(x, \xi; E)$$

resuelve la ecuación 4.13 y  $j \geq 1$ .

Note que, utilizando inducción, las relaciones 4.12 y 4.15 implican que

$$b_j^\pm P_\omega(E) = b_j^\pm \text{ y } c_j^\pm P_\omega(E) = c_j^\pm \text{ para toda } j \geq 1. \quad (4.16)$$

El siguiente lema dará estimaciones para las funciones  $\Phi^\pm$ ,  $b_j^\pm$  y  $c_j^\pm$ .

**Lema 3** *Suponga que la función matricial  $F$  satisface la estimación*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F(x, \xi; E)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-\rho - |\alpha|} |\xi|^{-|\beta|}$$

para todo  $(x, \xi) \in \Xi^\pm(E)$  y para algún  $\rho > 1$ . Entonces, la función matricial

$$d^\pm(x, \xi; E) = \pm \int_0^\infty F(x \pm t\omega, \xi; E) dt$$

satisface la ecuación 4.14 y la estimación

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta d^\pm(x, \xi; E)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-(\rho-1) - |\alpha|} |\xi|^{-|\beta|}$$

en  $\Xi^\pm(E)$ , para todo multi-índice  $\alpha, \beta$ .

La demostración de este lema se puede encontrar en la referencia [22]

Ahora, se sigue del lema que bajo las hipótesis del potencial  $\mathbb{V}$ , la función fase  $\Phi^\pm$  es solución de la ecuación 4.8 y satisface en  $\Xi^\pm(E)$  la estimación

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \Phi^\pm(x, \xi; E)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-(\rho-1)-|\alpha|} |\xi|^{-|\beta|} \text{ con } \rho = \min\{\rho_e, \rho_m\} \quad (4.17)$$

además, también se obtiene de este lema que

**Proposición 5** *Suponga que el potencial magnético  $A$  y el potencial eléctrico  $V$  satisfacen las estimaciones 4.2. Entonces  $c_j^\pm$  resuelve la ecuación 4.13 y, además, cumple las siguientes estimaciones en  $\Xi^\pm(E)$*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_j^\pm(x, \xi; E)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-\rho-j+1-|\alpha|} |\xi|^{-|\beta|}$$

y

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta c_j^\pm(x, \xi; E)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-\rho-j+1-|\alpha|} |\xi|^{-|\beta|}$$

para toda  $j \geq 1$

La demostración de esta proposición se puede encontrar en la referencia [14].

La proposición anterior demuestra que, las soluciones a la ecuación de eigenvalores generalizada están dadas por 4.4.

Por otra parte, definiendo a

$$a_N^\pm(x, \xi; E) := e^{i\Phi^\pm(x, \xi; E)} w_N^\pm(x, \xi; E)$$

note que

$$u_N^\pm(x, \xi; E) = e^{i(x, \xi)} a_N^\pm(x, \xi; E). \quad (4.18)$$

Por lo cual, la relación 4.16 implica que

$$u_N^\pm P_\omega(E) = a_N^\pm, \quad a_N^\pm P_\omega(E) = a_N^\pm \text{ y } r_N^\pm P_\omega(E) = r_N^\pm. \quad (4.19)$$

Con todo esto, finalmente se obtiene el siguiente teorema

**Teorema 19** *Suponga que el potencial magnético  $A$  y el potencial eléctrico  $V$  satisfacen las estimaciones 4.2. Entonces, para cada  $(x, \xi) \in \Xi^\pm(E)$  la siguiente estimación se da*

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta w_N^\pm(x, \xi; E)| &\leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-|\alpha|} |\xi|^{-|\beta|}, \\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_N^\pm(x, \xi; E)| &\leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-|\alpha|} |\xi|^{-|\beta|}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Además, el error  $r_N^\pm(x, \xi; E)$  satisface la estimación deseada.

La demostración de este teorema se puede encontrar en la referencia [14].

## 4.2. Singularidad principal en la diagonal del kernel de la matriz de Dispersión

Para esta sección, primero se darán algunos resultados que permitirán la estimación de la matriz de dispersión. Para esto, se define los siguientes conjuntos

**Definición 49** Sea  $\omega_0 \in \mathbb{S}^2$ . Se define a

1.  $\Pi_{\omega_0}$  el plano ortogonal a  $\omega_0$
2.  $\Omega_{\pm}(\omega_0, \delta) := \{\omega \in \mathbb{S}^2 : \pm \langle \omega, \omega_0 \rangle > \delta\}$ , para algún  $0 < \delta < 1$ .
3.  $O_j^{\pm} = \Omega_{\pm}(\omega_0, \sqrt{(1+\delta)/2})$
4.  $O_j := O_j^+ \cup O_j^-$

Ahora, se va a utilizar el siguiente lema, el cual está demostrado en la referencia [14].

**Lema 4** Sean  $j$  y  $k$  tales que  $O_j \cap O_k \neq \emptyset$ . Entonces, si  $\omega_{jk} \in O_j^{\pm} \cap O_k^{\pm}$  se tiene que  $O_j^+ \cup O_k^+ \subseteq \Omega_{\pm}(\omega_{jk}, \delta)$  y  $O_j^- \cup O_k^- \subseteq \Omega_{\mp}(\omega_{jk}, \delta)$ . Además, si  $\omega_{jk} \in O_j^{\pm} \cap O_k^{\mp}$  se tiene que  $O_j^+ \cup O_k^- \subseteq \Omega_{\pm}(\omega_{jk}, \delta)$  y  $O_j^- \cup O_k^+ \subseteq \Omega_{\mp}(\omega_{jk}, \delta)$ .

Como  $\mathbb{S}^2$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^3$  y la familia  $\{O_j\}_{j \in \mathbb{S}^2}$  es una cubierta abierta para  $\mathbb{S}^2$ , entonces, por definición existe una subcubierta abierta finita  $\{O_j\}_{j=1}^n$  de  $\{O_j\}_{j \in \mathbb{S}^2}$ , tal que, S.P.G. se cumple que si  $O_j \cap O_k = \emptyset$ , entonces,  $\text{dist}(O_j, O_k) > 0$ .

Para cada  $j = 1, 2, \dots, n$  sea  $\chi_j(\omega) \in C^{\infty}(\mathbb{S}^2)$ , tal que,  $\chi_j(\omega) = \chi_j(-\omega)$  y  $\sum_{j=1}^n \chi_j(\omega) = 1$  para toda  $\omega \in \mathbb{S}^2$ . Observe que, la familia de funciones  $\{\chi_j\}_{j=1}^n$  corresponde a una partición de la unidad subordinada a la cubierta  $\{O_j\}_{j=1}^n$ .

Ahora, se va a descomponer a  $S(E)$  como la suma

$$S(E) = \sum_{j,k=1}^n \chi_j S(E) \chi_k$$

entonces, el kernel  $s(\omega, \theta; E)$  de la matriz de dispersión  $S(E)$  se puede descomponer como

$$s(\omega, \theta; E) = \sum_{j,k=1}^n \chi_j(\omega) s(\omega, \theta; E) \chi_k(\theta).$$

Por otra parte, suponga que  $O_j \cap O_k \neq \emptyset$  y sea  $\omega_{jk} \in O_j \cap O_k$  fija, tal que,  $\omega_{jk} = \omega_{kj}$ . Sea

$$\chi_{jk}(\omega, \theta) := \chi_{jk}^+(\omega) \chi_{jk}^+(\theta) - \chi_{jk}^-(\omega) \chi_{jk}^-(\theta)$$

donde  $\chi_{jk}^{\pm}(\omega) \in C^{\infty}(\mathbb{S}^2)$  son tales que  $\chi_{jk}^{\pm}(\omega) = \chi_{kj}^{\pm}(\omega)$ ,  $\chi_{jk}^{\pm}(\omega) = 1$  para toda  $\omega \in \Omega_{\pm}(\omega_{jk}, \delta)$  y  $\chi_{jk}^{\pm}(\omega) = 0$  para toda  $\omega \in \mathbb{S}^2$ , tal que,  $\pm \langle \omega, \omega_{jk} \rangle < 0$ . Nuevamente, la familia de funciones  $\{\chi_{jk}^{\pm}\}_{j,k=1}^n$  es otra partición de la unidad subordinada a la cubierta  $\{O_j\}_{j=1}^n$  con las características antes mencionadas.

Note que  $\chi_{jk}(\omega, \theta) = \chi_{jk}(\theta, \omega)$  y  $\chi_{jk}(\omega, \theta) = -\chi_{jk}(-\omega, -\theta)$ . Además, por el lema anterior, se sigue que la familia  $\{\chi_{jk}(\omega, \theta)\}_{j,k=1}^n$  cumple que

1. Si  $\omega_{jk} \in O_j^+ \cap O_k^+$ , entonces,  $\chi_{jk}(\omega, \theta) = \pm 1$  para toda  $(\omega, \theta) \in O_j^\pm \times O_k^\pm \subseteq \Omega_\pm(\omega_{jk}, \delta) \times \Omega_\pm(\omega_{jk}, \delta)$  y  $\chi_{jk}(\omega, \theta) = 0$  para toda  $(\omega, \theta) \in O_j^\pm \times O_k^\mp \subseteq \Omega_\pm(\omega_{jk}, \delta) \times \Omega_\mp(\omega_{jk}, \delta)$ .
2. Si  $\omega_{jk} \in O_j^- \cap O_k^-$ , entonces,  $\chi_{jk}(\omega, \theta) = \mp 1$  para toda  $(\omega, \theta) \in O_j^\pm \times O_k^\pm \subseteq \Omega_\mp(\omega_{jk}, \delta) \times \Omega_\mp(\omega_{jk}, \delta)$  y  $\chi_{jk}(\omega, \theta) = 0$  para toda  $(\omega, \theta) \in O_j^\pm \times O_k^\mp \subseteq \Omega_\mp(\omega_{jk}, \delta) \times \Omega_\pm(\omega_{jk}, \delta)$ .
3. Si  $\omega_{jk} \in O_j^+ \cap O_k^-$ , entonces,  $\chi_{jk}(\omega, \theta) = \pm 1$  para toda  $(\omega, \theta) \in O_j^\pm \times O_k^\mp \subseteq \Omega_\pm(\omega_{jk}, \delta) \times \Omega_\pm(\omega_{jk}, \delta)$ , y  $\chi_{jk}(\omega, \theta) = 0$  para toda  $(\omega, \theta) \in O_j^\pm \times O_k^\pm \subseteq \Omega_\pm(\omega_{jk}, \delta) \times \Omega_\mp(\omega_{jk}, \delta)$ .
4. Si  $\omega_{jk} \in O_j^- \cap O_k^+$ , entonces,  $\chi_{jk}(\omega, \theta) = \pm 1$  para toda  $(\omega, \theta) \in O_j^\mp \times O_k^\pm \subseteq \Omega_\pm(\omega_{jk}, \delta) \times \Omega_\pm(\omega_{jk}, \delta)$ , y  $\chi_{jk}(\omega, \theta) = 0$  para toda  $(\omega, \theta) \in O_j^\pm \times O_k^\pm \subseteq \Omega_\mp(\omega_{jk}, \delta) \times \Omega_\pm(\omega_{jk}, \delta)$ .

La demostración de estas propiedades se puede encontrar en la referencia [14].

Sea

$$s_{N,jk}(\omega, \theta; E) := (2\pi)^{-2} \nu(E)^2 \chi_{jk}(\omega, \theta) \chi_j(\omega) \chi_k(\theta) \int_{\Pi_{\omega_{jk}}} e^{i\nu(E)\langle y, \theta - \omega \rangle} \mathbf{h}_{N,jk}(y, \omega, \theta; E) dy \quad (4.21)$$

donde

$$\mathbf{h}_{N,jk}(y, \omega, \theta; E) := (\text{sgn} E) (a_N^+(y, \nu(E)\omega; E))^* (\alpha \cdot \omega_{jk}) (a_N^-(y, \nu(E)\theta; E))$$

y la integral en 4.21 es entendida como una integral oscilatoria.

**Observación 34** Note que el operador  $S_{pr}(E)$  con kernel  $\sum_{O_j \cap O_k \neq \emptyset} s_{N,jk}(\omega, \theta; E)$  es un operador Pseudo-diferencial en la esfera  $\mathbb{S}^2$ , con amplitud de clase  $S^0$ .

La demostración de esto, se puede ver en la referencia [14].

Se define también a la función  $\mathbf{g}_{N,jk}^{Int}(\omega, \theta; E)$  dada por

$$\mathbf{g}_{N,jk}^{Int}(\omega, \theta; E) := s_{N,jk}(\omega, \theta; E) - s_{00}^{(jk)}(\omega, \theta; E) \quad (4.22)$$

donde

$$s_{00}^{(jk)}(\omega, \theta; E) := (\text{sgn} E) (2\pi)^{-2} \nu(E)^2 \chi_{jk}(\omega, \theta) \chi_j(\omega) \chi_k(\theta) \int_{\Pi_{\omega_{jk}}} e^{i\nu(E)\langle y, \theta - \omega \rangle} P_\omega(E) (\alpha \cdot \omega_{jk}) P_\theta(E) dy.$$

También, se va a definir a la función  $s_{sing}^{(N)}(\omega, \theta; E; \omega_0)$ . Para esto, sea  $\omega_0 \in \mathbb{S}^2$ , considere las funciones de corte  $\Psi_\pm(\omega, \theta; \omega_0) \in C^\infty(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ , con soporte en  $\Omega_\pm(\omega_0, \delta) \times \Omega_\pm(\omega_0, \delta)$ . Además, sea  $\Psi_1(\omega, \theta) \in C^\infty(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$  con soporte en  $O \times O'$ , donde  $O, O' \subseteq \mathbb{S}^2$  son conjuntos abiertos tales que  $\overline{O} \times \overline{O'} = \emptyset$ . Se define

$$s_{sing}^{(N)}(\omega, \theta; E; \omega_0) := \pm \Psi_\pm(\omega, \theta; \omega_0) (2\pi)^{-2} \nu(E)^2 \int_{\Pi_{\omega_0}} e^{i\nu(E)\langle y, \theta - \omega \rangle} \mathbf{h}_N(y, \omega, \theta; E; \omega_0) dy \quad (4.23)$$

como una integral oscilatoria, donde

$$\mathbf{h}_N(y, \omega, \theta; E; \omega_0) := (\text{sgn}E)(a_N^+(y, \nu(E)\omega; E))^*(\alpha \cdot \omega_0)(a_N^-(y, \nu(E)\theta; E)) \quad (4.24)$$

$$y \text{ sreg}(\omega, \theta; E) := \Psi_1(\omega, \theta)s(\omega, \theta; E).$$

Ahora, considere la construcción mas general de un operador de onda. Para esta construcción, suponga que  $H_0$  y  $H$  son dos operadores auto-adjuntos definidos en los espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_0$  y  $\mathcal{H}$ , respectivamente. Si  $\Gamma \subseteq \sigma_{ac}(H_0)$ , se define el operador de onda  $\Omega_{\pm}(H, H_0; J, \Gamma)$  como

$$\Omega_{\pm}(H, H_0; J, \Gamma) := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_0} E_0(\Gamma)$$

donde  $J$  es el operador inclusión entre los espacios  $\mathcal{H}_0$  y  $\mathcal{H}$  y  $E_0(\Gamma)$  es la resolución de la identidad para  $H_0$ . Si  $\Gamma = \sigma_{ac}(H_0)$  se escribirá  $\Omega_{\pm}(H, H_0; J)$  en lugar de  $\Omega_{\pm}(H, H_0; J, \Gamma)$ .

De manera análoga, se puede definir un operador de dispersión

$$\hat{S} = \Omega_+^*(H, H_0; J, \Gamma)\Omega_-(H, H_0; J, \Gamma)$$

y, por lo tanto, también se puede definir una matriz de dispersión  $\hat{S}(E)$ .

Se van a construir operadores de inclusión  $J_{\pm}$ , tales que su matriz de dispersión  $\hat{S}(E)$  coincida con la matriz de dispersión del experimento  $S(E)$  para una energía fija  $E$ , es decir,

$$\hat{S}(E) = S(E).$$

Sean  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ ,  $R \in (0, \infty)$  y  $\varepsilon \in (\sqrt{1 - \delta^2}, 1 - \varepsilon_0)$ , donde  $\delta$  es la misma que la de los conjuntos  $\Omega_{\pm}(\omega_0, \delta)$ .

Sea  $\sigma_+ \in C^{\infty}[-1, 1]$ , tal que  $\sigma_+(\tau) = 1$  si  $\tau \in (-\varepsilon, 1]$  y  $\sigma_+(\tau) = 0$  si  $\tau \in [-1, -1 + \varepsilon_0]$  y defina a  $\sigma_-(\tau) = \sigma_+(-\tau)$ .

Sea  $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ , tal que  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\eta(x) = 0$  en una vecindad de 0 y  $\eta(x) = 1$  para  $|x| \geq R$ .

Sean  $c_1, c \in (0, \nu(E))$ , tales que  $0 < c < c_1 < \nu(E)$  y sea  $\theta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^+)$ , tal que es igual a  $\theta(t) = 0$  para  $t \leq c$  y  $\theta(t) = 1$  para  $t \geq c_1$ .

Finalmente, defina a

$$\zeta_{\pm}^+(x, \xi) := \sigma_{\pm}(\eta(x)\langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle)\theta(|\xi|) \text{ y } \zeta_{\pm}^-(x, \xi) := \sigma_{\mp}(\eta(x)\langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle)\theta(|\xi|).$$

Note que  $\zeta_{\pm}^+$  tiene soporte en  $\Xi^{\pm}(E)$ , para  $E > m$  y  $\zeta_{\pm}^-$  tiene soporte en  $\Xi^{\pm}(E)$ , para  $E < -m$ .

Defina a  $J_{\pm} = J_{\pm}^{(N)}$  como el operador pseudo-diferencial

$$(J_{\pm}f)(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle x, \xi \rangle} j_N^{\pm}(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

donde

$$j_N^{\pm}(x, \xi) := a_N^{\pm}(x, \xi; |\lambda(\xi)|)\zeta_{\pm}^+(x, \xi) + a_N^{\pm}(x, \xi; -|\lambda(\xi)|)\zeta_{\pm}^-(x, \xi), \quad (4.25)$$

$$\lambda(\xi) = \lambda(\xi; E) := (\operatorname{sgn} E) \sqrt{|\xi|^2 + m^2} \quad (4.26)$$

Como  $a_N^\pm(x, \xi; E)$  satisface la estimación 4.20 en  $\Xi^\pm(E)$ , entonces,  $j_N^\pm(x, \xi) \in S^{0,0}$ . Esto implica que  $J_\pm$  es un operador acotado. Además, observe que  $j_N^\pm$  se puede reescribir como

$$j_N^\pm(x, \xi) = a_N^\pm(x, \xi; |\lambda(\xi)|)P^+(\xi)\zeta_\pm^+(x, \xi) + a_N^\pm(x, \xi; -|\lambda(\xi)|)P^-(\xi)\zeta_\pm^-(x, \xi).$$

Ahora, se va a enunciar el siguiente lema, el cual tiene una demostración análoga al lema 1.1 de la referencia [7].

**Lema 5** Sean  $A_\pm^+$  y  $A_\pm^-$  operadores pseudo-diferenciales con símbolos  $a_\pm^+(x, \xi), a_\pm^-(x, \xi) \in S^{0,0}$ , respectivamente, que satisfacen

$$a_\pm^+(x, \xi) = 0 \text{ si } \pm \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \leq -1 + \varepsilon_0 \text{ y } a_\pm^-(x, \xi) = 0 \text{ si } \mp \langle \hat{x}, \hat{\xi} \rangle \leq -1 + \varepsilon_0, \varepsilon_0 > 0$$

para  $|x| \geq R > 0$ , y

$$a_\pm^+(x, \xi) = a_\pm^-(x, \xi) = 0 \text{ para } |\xi| \leq c$$

con alguna  $c > 0$ . Además, suponiendo que

$$a_\pm^+(x, \xi)P^+(\xi) = a_\pm^+(x, \xi) \text{ y } a_\pm^-(x, \xi)P^-(\xi) = a_\pm^-(x, \xi)$$

entonces, para cada  $f \in S(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$  y para cada  $N \in \mathbb{N}$  existe una constante  $C_{N,f}$ , tal que

$$\|A_\pm e^{-itH_0} f\| \leq C_{N,f}(1 + |t|)^{-N} \text{ para } \mp t > 0$$

donde  $A_\pm$  puede ser  $A_\pm^+$  o  $A_\pm^-$ .

Ahora, defina a

$$(\mathbf{J}_\pm f)(x) := (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle x, \xi \rangle} \mathbf{j}_\pm(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

donde

$$\mathbf{j}_\pm(x, \xi) := P^+(\xi)\zeta_\pm^+(x, \xi) + P^-(\xi)\zeta_\pm^-(x, \xi).$$

Entonces, se tiene que

$$((J_\pm - \mathbf{J}_\pm)f)(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle x, \xi \rangle} \tilde{j}_\pm(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

donde  $\tilde{j}_\pm(x, \xi) \in S^{-(\rho-1),0}$ .

Ahora, se va a enunciar la siguiente proposición:

**Proposición 6** Sea  $A$  un operador pseudo-diferencial con símbolo  $a(x, \xi) \in S^{-\sigma, 0}$  para algún  $\sigma > 0$ , tal que  $a(x, \xi) = 0$  para  $|\xi| \leq c$ , tomando a  $c > 0$ . Entonces, para  $f \in S(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$  se sigue la siguiente estimación

$$\|Ae^{-iH_0 t} f\| \leq C \langle t \rangle^{-\sigma}.$$

En particular, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|Ae^{-iH_0 t} f\| = 0 \text{ para cualquier } f \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

Note que, como consecuencia de esta proposición se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|(J_{\pm} - \mathbf{J}_{\pm})e^{-iH_0 t} f\| = 0$$

Usando el lema 5 y la identidad anterior, se obtiene que

**Proposición 7**

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J_{\pm} - \theta(\sqrt{H_0^2 - m^2}))e^{-iH_0 t} = 0 \quad (4.27)$$

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} J_{\pm}^* J_{\pm} e^{-iH_0 t} = 0$$

Como los operadores de onda  $\Omega_{\pm}(H, H_0)$  existen, la ecuación 4.27 implica que  $\Omega_{\pm}(H, H_0; J_{\pm})$  existe y la siguiente igualdad se da

$$\Omega_{\pm}(H, H_0) \theta(\sqrt{H_0^2 - m^2}) = \Omega_{\pm}(J_{\pm}). \quad (4.28)$$

Se define el operador de dispersión  $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}(J_{+}, J_{-})$ , asociado a los operadores de onda  $\Omega_{\pm}(H, H_0; J_{\pm})$ , por la relación

$$\mathbf{S}(J_{+}, J_{-}) := \Omega_{+}^*(H, H_0; J_{+}) \Omega_{-}(H, H_0; J_{-}).$$

Por la ecuación 4.28, se tiene que

$$\theta(\sqrt{H_0^2 - m^2}) \mathbf{S} \theta(\sqrt{H_0^2 - m^2}) = \tilde{\mathbf{S}}.$$

Defina ahora el operador  $T_{\pm}$  como

$$T_{\pm} = HJ_{\pm} - J_{\pm}H_0.$$

Note que

$$(J_{\pm} H_0 f)(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle x, \xi \rangle} |\lambda(\xi)| (a_N^{\pm}(x, \xi; |\lambda(\xi)|) \zeta_{\pm}^{+}(x, \xi) - a_N^{\pm}(x, \xi; -|\lambda(\xi)|) \zeta_{\pm}^{-}(x, \xi)) \hat{f}(\xi) d\xi$$

por lo cual, usando la relación 4.3 se tiene que

$$\begin{aligned}
g_{\pm}(x, \xi) &:= (H - |\lambda(\xi)|)(u_N^{\pm}(x, \xi; |\lambda(\xi)|)\zeta_{\pm}^{+}(x, \xi)) + (H + |\lambda(\xi)|)(u_N^{\pm}(x, \xi; -|\lambda(\xi)|)\zeta_{\pm}^{-}(x, \xi)) \\
&= e^{i\langle x, \xi \rangle} (r_N^{\pm}(x, \xi; |\lambda(\xi)|)\zeta_{\pm}^{+}(x, \xi) + r_N^{\pm}(x, \xi; -|\lambda(\xi)|)\zeta_{\pm}^{-}(x, \xi)) \\
&\quad - i \sum_{j=1}^3 (\partial_{x_j} \zeta_{\pm}^{+}(x, \xi)) \alpha_j u_N^{\pm}(x, \xi; |\lambda(\xi)|) - i \sum_{j=1}^3 (\partial_{x_j} \zeta_{\pm}^{-}(x, \xi)) \alpha_j u_N^{\pm}(x, \xi; -|\lambda(\xi)|).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Entonces, tomando  $t_{\pm}(x, \xi) = e^{-i\langle x, \xi \rangle} g_{\pm}(x, \xi)$  y usando la ecuación 4.18 se obtiene que

$$(T_{\pm} f)(x) = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} t_{\pm}(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi = (T_{\pm}^1 f)(x) + (T_{\pm}^2 f)(x)$$

donde  $T_{\pm}^1$  y  $T_{\pm}^2$  tienen los símbolos

$$t_{\pm}^1 = r_N^{\pm}(x, \xi; |\lambda(\xi)|)\zeta_{\pm}^{+}(x, \xi) + r_N^{\pm}(x, \xi; -|\lambda(\xi)|)\zeta_{\pm}^{-}(x, \xi)$$

y

$$t_{\pm}^2 = -i \sum_{j=1}^3 (\partial_{x_j} \zeta_{\pm}^{+}(x, \xi)) \alpha_j a_N^{\pm}(x, \xi; |\lambda(\xi)|) - i \sum_{j=1}^3 (\partial_{x_j} \zeta_{\pm}^{-}(x, \xi)) \alpha_j a_N^{\pm}(x, \xi; -|\lambda(\xi)|)$$

respectivamente.

Usando la estimación para el error  $r_N$ , se tiene que

$$t_{\pm}^1 \in S^{-\rho-N, -N}, N \geq 0$$

y, usando las estimaciones de 4.20 se obtiene que

$$t_{\pm}^2 \in S_{\pm}^{-1, 0}.$$

Ahora, se va a definir el generador de dilatación, denotado por  $\mathbf{A}$ , como

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^3 (x \cdot \nabla + \nabla \cdot x).$$

Note que

$$i[H_0, \mathbf{A}] = H_0 - m\beta$$

y

$$i[H, \mathbf{A}] = H - m\beta - \mathbb{V} + i[\mathbb{V}, \mathbf{A}] = H - m\beta - \mathbb{V} - \langle x, (\nabla \mathbb{V})(x) \rangle.$$

Si  $\mathbb{V}$  satisface las estimaciones anteriores, entonces, no existen eigenvalores encajados en el espectro absolutamente continuo de  $H$ , por lo tanto, por la estimación de Mourre, Teorema 2.5 de [6]

$$\pm E_H(I) i[H, \mathbf{A}] E_H(I) \geq c E_H(I)$$

para  $c > 0$ ,  $\pm E > m$  e  $I = (E - \eta_E, E + \eta_E)$  para alguna  $\eta_E > 0$ .

Ahora, se enunciará el siguiente teorema

**Proposición 8** *Suponga que las estimaciones en (4.2) se cumplen. Defina a  $P_+ := E_{\mathbf{A}}(0, \infty)$  y  $P_- := E_{\mathbf{A}}(-\infty, 0)$  las proyecciones espectrales del operador  $\mathbf{A}$ . Para  $\pm \operatorname{Re} z > m$  y  $\operatorname{Im} z \geq 0$ , los operadores*

$$\langle \mathbf{A} \rangle^{-p} R_D(z) \langle \mathbf{A} \rangle^{-p}, p > \frac{1}{2}$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle^{-1+p} P_{\pm} R_D(z) \langle \mathbf{A} \rangle^{-q}, q > \frac{1}{2}, p < q$$

$$, \langle \mathbf{A} \rangle^{-q} R_D(z) P_{\pm} \langle \mathbf{A} \rangle^{-1+p}, q > \frac{1}{2}, p < q$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle^p P_{\mp} R_D(z) P_{\pm} \langle \mathbf{A} \rangle^p, \forall p$$

son continuos en norma con respecto a  $z$ . Además, las normas de los operadores anteriores en  $z = E + i0$  están acotadas por  $C|E|^{-1}$  cuando  $|E| \rightarrow \infty$ .

Ahora, se van a enunciar dos proposiciones, para esto, suponga que  $T$  es un operador pseudo-diferencial con símbolo  $t$ .

**Proposición 9** *Sea  $t \in S_{\pm}^{0,0}$  para algún signo y sea  $p > 0$  un número entero. Entonces, el operador  $\langle x \rangle^p \langle \nabla \rangle^p T \langle \mathbf{A} \rangle^{-q}$  es acotado para todo  $q \geq p$ .*

**Proposición 10** *Sea  $t \in S_{\pm}^{n,m}$  para alguna  $n$  y  $m$ . Entonces el operador  $\langle x \rangle^q \langle \nabla \rangle^s T P_{\pm} \langle \mathbf{A} \rangle^p$  es acotado para todo  $p, q, s \in \mathbb{R}$ .*

Ya que  $\mathbb{V}$  satisface las estimaciones del capítulo 2, entonces, el resolvente  $R_D(E \pm i0)$  es localmente Hölder continua en  $(-\infty, -m) \cup (m, \infty)$  y, por lo tanto, de la proposición 4.1 de la referencia [9] se obtiene que:

**Proposición 11** *Suponga que  $\mathbb{V}$  es una función con valores en las matrices Hermitiana  $4 \times 4$ , tal que,  $|(x \cdot \nabla)^l \mathbb{V}(x)|$  es acotado para toda  $x \in \mathbb{R}^3$  y  $l = 0, 1, 2$ . Entonces, para cualquier  $E_0 > m$ , la siguiente estimación es válida*

$$\sup_{0 < \varepsilon < 1, |E| \geq E_0} \|R_D(E \pm i\varepsilon) f\|_{L^2_{-s}} \leq C_{s, E_0} \|f\|_{L^2_s}$$

para  $1/2 < s \leq 1$ .

Esto implica que

**Lema 6** Para cualquier  $p, q$  y  $N$  tales que  $N > p - \rho + 1/2$ ,  $N \geq q$ , para  $|\operatorname{Re} z| > m$  y  $\operatorname{Im} z \geq 0$ , el operador

$$\langle x \rangle^p \langle \nabla \rangle^q T_+^* R_D(z) T_- \langle \nabla \rangle^q \langle x \rangle^p$$

es continuo en norma con respecto a  $z$  y, además, el operador

$$\langle x \rangle^p \langle \nabla \rangle^q T_+^* R_+(E) T_- \langle \nabla \rangle^q \langle x \rangle^p$$

es uniformemente acotado para  $|E| \geq E_0 > m$  y  $E_0 > m$ .

Para  $|E| > m$ , se va a definir los siguientes operadores

$$S_1(E) = 2\pi i \Gamma_0(E) T_+^* R_+(E) T_- \Gamma_0^*(E)$$

y  $S_2(E)$  está dado por

$$(S_2(E)f_1, f_2) := -2\pi i \lim_{\mu \downarrow 0} (J_+^* T_- \delta_\mu(H_0 - E) g_1, \Gamma_0^*(E) \Gamma_0(E) g_2)$$

donde  $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(E)$  y cumplen que  $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{C}^4)$ ,  $\delta_\mu(H_0 - E) := (2\pi i)^{-1} (R_0(E + i\mu) - R_0(E - i\mu))$  y  $g_j$  son tales que  $\hat{g}_j(\xi) = \nu(E)^{-1} f_j(\hat{\xi}) \gamma(|\xi|)$  para  $j = 1, 2$ , con  $\hat{\xi} = \xi/|\xi|$ ,  $\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$  y  $\gamma(\nu(E)) = 1$ .

El kernel del operador  $S_1(E)$  es suave:

**Teorema 20** Sea  $A(x)$  y  $V(x)$  el potencial electromagnético que satisface las estimaciones 4.2, respectivamente. Entonces, para cualquier  $p$  y  $q$ , existe  $N$  tal que el kernel  $s_1(\omega, \theta; E)$  del operador  $S_1(E)$  pertenece a la clase de  $C^p(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$  y, además, su norma  $C^p$  es de orden  $O(|E|^{-q})$  cuando  $|E| \rightarrow \infty$ .

La demostración de este teorema se puede encontrar en la referencia [14].

Ahora, se van a enunciar las propiedades del operador  $S_2(E)$ .

Primero, se sigue de su definición que:

$$(S_2(E)f_1, f_2) = -2\pi i \lim_{\mu \downarrow 0} (T_- F^* \tilde{\delta}_\mu^{(sgnE)} \hat{g}_1, J_+ \Gamma_0^*(E) f_2) \quad (4.30)$$

donde  $\tilde{\delta}_\mu^{(sgnE)} = \frac{\mu}{\pi} ((\lambda(\xi) - E)^2 + \mu^2)^{-1} P^{(sgnE)}(\xi)$  y  $\lambda(\xi)$  está definida en la ecuación 4.26. Note que, la igualdad  $\lambda(\xi) = E$  es válida si y solo si  $|\xi| = \nu(E)$ .

Usando la ecuación (4.25) se obtiene que

$$J_+ \Gamma_0^*(E) f_2 = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \nu(E) \int e^{i\langle x, \nu(E)\omega \rangle} j_N^+(x, \nu(E)\omega; E) f_2(\omega) d\omega$$

donde  $j_N^+(x, \xi; E) := a_N^+(x, \xi; \lambda(\xi)) \zeta_+^{(sgnE)}(x, \xi)$  y, además,

$$(T_- f, J_+ \Gamma_0^*(E) f_2) = (2\pi)^{-3} \nu(E) \int \left( \int \int e^{i(x, \xi' - \nu(E)\omega)} ((j_N^+(x, \nu(E)\omega; E))^* t_-(x, \xi'; E) \hat{f}(\xi'), f_2(\omega)) d\omega d\xi' \right) dx$$

para  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ .

Sea  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  tal que  $\varphi(0) = 1$ , entonces, tomando  $f = F^* \tilde{\delta}_\mu^{(sgnE)} \hat{g}_1$  en la ecuación anterior y usando la definición de  $T_\pm$ , las ecuaciones (4.19) y (4.30), se tiene que

$$(S_2(E) f_1, f_2) = -i(2\pi)^{-2} \nu(E) \lim_{\mu \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^2} (G^{(\varepsilon)}(\nu(E)\omega, \xi'; E) \tilde{\delta}_\mu^{(sgnE)} \hat{g}_1(\xi'), f_2(\omega)) d\omega d\xi' \quad (4.31)$$

donde,

$$G^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E) := \zeta(|\xi|) \zeta(|\xi'|) \int e^{i(x, \xi' - \xi)} (j_N^+(x, \xi; E))^* t_-(x, \xi'; E) \varphi(\varepsilon x) dx$$

para alguna  $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ , tal que  $\zeta(t) = 1$  en una vecindad de  $\nu(E)$  y  $\zeta(t) = 0$  para  $t < c_1$  y

$$t_-(x, \xi'; E) := t_-^1(x, \xi'; E) + t_-^2(x, \xi'; E)$$

con  $t_-^1(x, \xi'; E) := r_N^-(x, \xi'; \lambda(\xi')) \zeta_-^{(sgnE)}(x, \xi')$  y  $t_-^2(x, \xi'; E) := -i \sum_{j=1}^3 (\partial_{x_j} \zeta_-^{(sgnE)}(x, \xi')) \alpha_j a_N^-(x, \xi'; \lambda(\xi'))$ .

Ahora, con este lema se determina el límite de  $G^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Lema 7** Sea  $G(\xi, \xi'; E)$  definida en  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , tal que, para cada  $E$  con  $|E| > m$ , la función  $G(\nu(E)\hat{\xi}, \xi'; E)$  es Hölder continua en  $\xi'$ , y uniformemente continua para  $\omega \in \mathbb{S}^2$ . Sean  $g_1, f_1$  y  $f_2$  como en la definición de  $S_2(E)$ . Entonces, la siguiente identidad se da

$$\lim_{\mu \downarrow 0} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} (G(\nu(E)\omega, \xi'; E) \tilde{\delta}_\mu^{(sgnE)} \hat{g}_1(\xi'), f_2(\omega)) d\omega d\xi' = \nu(E) \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} (G(\nu(E)\omega, \nu(E)\theta; E) f_1(\theta), f_2(\omega)) d\omega d\theta.$$

Su demostración se puede encontrar en la referencia [14].

Usando la definición de  $t_-$ , a  $G^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E)$  se le puede descomponer como

$$G^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E) = G_1^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E) + G_2^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E)$$

donde

$$G_1^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E) = \zeta(|\xi|) \zeta(|\xi'|) \int e^{i(x, \xi' - \xi)} (j_N^+(x, \xi; E))^* t_-^1(x, \xi'; E) \varphi(\varepsilon x) dx$$

y

$$G_2^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E) = \zeta(|\xi|) \zeta(|\xi'|) \int e^{i(x, \xi' - \xi)} (j_N^+(x, \xi; E))^* t_-^2(x, \xi'; E) \varphi(\varepsilon x) dx. \quad (4.32)$$

Ahora, se van a enunciar los siguientes lemas.

**Lema 8** *El límite*

$$G_1^{(0)}(\nu(E)\hat{\xi}, \nu(E)\hat{\xi}'; E) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_1^{(\varepsilon)}(\nu(E)\hat{\xi}, \nu(E)\hat{\xi}'; E)$$

existe.

Para cualquier  $p$  y  $q$ , existe una  $N$ , tal que  $G_1^{(0)}(\nu(E)\hat{\xi}, \nu(E)\hat{\xi}'; E) \in C^p(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$  y su norma  $C^p$  es acotada por  $C|E|^{-q}$ , cuando  $|E| \rightarrow \infty$ .

Además, el límite de la integral en 4.31 con  $G_1^{(\varepsilon)}$ , en lugar de  $G^{(\varepsilon)}$ , existe y

$$\begin{aligned} & -i(2\pi)^{-2} \nu(E) \lim_{\mu \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{\mathbb{S}^2} (G_1^{(\varepsilon)}(\nu(E)\omega, \xi'; E) \tilde{\delta}_\mu^{(sgnE)} \hat{g}_1(\xi'), f_2(\omega)) d\omega d\xi' = \\ & = -i(2\pi)^{-2} \nu(E)^2 \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} (G_1^{(0)}(\nu(E)\omega, \nu(E)\theta; E) f_1(\theta), f_2(\omega)) d\theta d\omega. \end{aligned}$$

**Lema 9** Sea  $O, O' \subseteq \mathbb{S}^2$  conjuntos abiertos tales que  $\overline{O} \cap \overline{O'} = \emptyset$ . Entonces, existe una función  $G_{2,O,O'}^{(0)}(\xi, \xi'; E)$ , tal que, para cada  $p$  y  $q$ ,  $G_{2,O,O'}^{(0)}(\xi, \xi'; E)$  es de clase  $C^p(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  y su norma  $C^p$  es acotada por  $C|E|^{-q}$ , cuando  $|E| \rightarrow \infty$ . Además, para  $g_1, f_1$  y  $f_2$  como en la definición de  $S_2(E)$ , con la propiedad de que  $f_1 \in C_0^\infty(O')$  y  $f_2 \in C_0^\infty(O)$ , entonces

$$\begin{aligned} & -i(2\pi)^{-2} \nu(E) \lim_{\mu \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{\mathbb{S}^2} (G_2^{(\varepsilon)}(\nu(E)\omega, \xi'; E) \tilde{\delta}_\mu^{(sgnE)} \hat{g}_1(\xi'), f_2(\omega)) d\omega d\xi' = \\ & = -i(2\pi)^{-2} \nu(E)^2 \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} (G_{2,O,O'}^{(0)}(\nu(E)\omega, \nu(E)\theta; E) f_1(\theta), f_2(\omega)) d\theta d\omega. \end{aligned}$$

En particular, la función  $G_{2,O,O'}^{(0)}$  satisface la estimación

$$\|G_{2,O,O'}^{(0)}(\nu(E)\hat{\xi}, \nu(E)\hat{\xi}'; E)\|_{C^p(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)} \leq C_p(O, O') |E|^{-q}$$

para cualquier  $p$  y  $q$ .

**Lema 10** Sean  $\omega, \theta \in \Omega_+(\omega_0, \delta)$  o  $\omega, \theta \in \Omega_-(\omega_0, \delta)$ . Suponga que  $\langle \theta, \hat{x} \rangle > \varepsilon$ , donde  $\varepsilon > \sqrt{1 - \delta^2}$ . Entonces,  $\langle \omega, \hat{x} \rangle > -\varepsilon$ .

La demostración de estos, se puede encontrar en la referencia [14].

Ahora, se necesita conocer las singularidades de  $G_2^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E)$  para  $\xi' = \xi$ . Para esto, suponga que se tiene  $\omega_0 \in \mathbb{S}^2$  arbitrario,  $\Psi_\pm(\hat{\xi}, \hat{\xi}'; \omega_0) \in C^\infty(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$  las funciones de corte con soporte en  $\{(\hat{\xi}, \hat{\xi}') \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 : \hat{\xi}, \hat{\xi}' \in \Omega_\pm(\omega_0, \delta)\}$  y considere a  $\Psi_\pm(\hat{\xi}, \hat{\xi}'; \omega_0) G_2^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E)$ .

Note que,

$$\partial_{x_j} \zeta_\pm^\pm(x, \xi') = 0$$

para  $\pm \langle \hat{\xi}', \hat{x} \rangle < \varepsilon$  y

$$\zeta_\pm^\pm(x, \xi) = 1$$

para  $\pm \langle \hat{\xi}, \hat{x} \rangle > -\varepsilon$  y  $|\xi| \geq c_1$ . Entonces, por los lemas anteriores se infiere que

$$\zeta_{+}^{\pm}(x, \xi) \partial_{x_j} \zeta_{-}^{\pm}(x, \xi') = \partial_{x_j} \zeta_{-}^{\pm}(x, \xi')$$

para  $|\xi| \geq c_1$  y  $\hat{\xi}, \hat{\xi}' \in \Omega_{+}(\omega_0, \delta)$  o  $\hat{\xi}, \hat{\xi}' \in \Omega_{-}(\omega_0, \delta)$ . Por lo tanto, de la ecuación (4.32) se obtiene que

$$G_2^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E) := -i\varsigma(|\xi|)\varsigma(|\xi'|) \sum_{j=1}^3 \int (u_N^{+}(x, \xi; \lambda(\xi)))^* \alpha_j u_N^{-}(x, \xi'; \lambda(\xi')) (\partial_{x_j} \zeta_{-}^{(\text{sgn}E)}(x, \xi')) \varphi(\varepsilon x) dx \quad (4.33)$$

para  $\hat{\xi}, \hat{\xi}' \in \Omega_{+}(\omega_0, \delta)$  o  $\hat{\xi}, \hat{\xi}' \in \Omega_{-}(\omega_0, \delta)$ .

Ahora, se van a enunciar dos lemas que se pueden encontrar en la referencia [22].

**Lema 11** *Sea*

$$A_{\pm}^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E) = \int_{\Pi_{\omega_0}} e^{i\langle y, \xi' - \xi \rangle} g_{\pm}(y, \xi, \xi'; E) \varphi(\varepsilon y) dy$$

donde  $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$  es tal que  $\varphi(0) = 1$ ,

$\Pi_{\omega_0} := \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, \omega_0 \rangle = 0, \omega_0 \in \mathbb{S}^2\}$  y  $g_{\pm} \in S^p$  para algún número real  $p$ . Suponga que

$$\text{supp} g_{\pm} \subseteq \{(\hat{\xi}, \hat{\xi}') \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \hat{\xi}, \hat{\xi}' \in \Omega_{\pm}(\omega_0, \delta), \delta > 0, |\xi'| \geq c\}.$$

Sean  $g_1, f_1$  y  $f_2$  como en la definición de  $S_2(E)$ . Entonces, para  $|E| > m$  y para  $n$  par se tiene que

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^2} \int (A_{\pm}^{(\varepsilon)}(v(E)\omega, \xi'; E) \tilde{\delta}_{\mu}^{(\text{sgn}E)} \hat{g}_1(\xi'), f_2(\omega)) d\xi' d\omega = \\ & = v(E) \int_{\Pi_{\omega_0}} \int_{\Pi_{\omega_0}} \int_{\Pi_{\omega_0}} e^{iv(E)\langle y, \zeta' - \zeta \rangle} \langle v(E)y \rangle^{-n} \langle D_{\zeta'} \rangle^n (\tilde{g}'_{\pm}(y, v(E)\zeta, v(E)\zeta'; E) \tilde{f}_1(\zeta'), \tilde{f}_2(\zeta)) dy d\zeta' d\zeta. \end{aligned}$$

$$\text{donde } \langle v(E)y \rangle = \sqrt{1 + (v(E)y)^2}, \langle D_{\zeta'} \rangle^2 = 1 - \partial_{\zeta'}^2, y \tilde{g}'_{\pm}(y, v(E)\zeta, v(E)\zeta'; E) := \frac{\tilde{g}_{\pm}(y, v(E)\zeta, v(E)\zeta'; E)}{((1-|\zeta|^2)(1-|\zeta'|^2))^{1/2}}.$$

Ahora, defina a  $\Pi_{\omega_0}^{\pm}(E) := \{x \in \mathbb{R}^3 : x = z\omega_0 + y, y \in \Pi_{\omega_0} \text{ y } \pm(\text{sgn}E)z \geq 0\}$ .

**Lema 12** *Sea*

$$A_{\pm}^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E) = (|\lambda(\xi)| - |\lambda(\xi')|) \int_{\Pi_{\omega_0^{\pm}}(E)} e^{i\langle x, \xi' - \xi \rangle} g_{\pm}(x, \xi, \xi'; E) \varphi(\varepsilon x) dx$$

donde  $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$  es tal que  $\varphi(0) = 1$  y  $g_{\pm} \in S^p$  para algún número real  $p$ . Suponga que

$$\text{supp} g_{\pm} \subseteq \{(\hat{\xi}, \hat{\xi}') \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \hat{\xi}, \hat{\xi}' \in \Omega_{\pm}(\omega_0, \delta), \delta > 0, |\xi'| \geq c\}$$

y que satisface la estimación

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \partial_{\xi'}^{\beta'} g_{\pm}(x, \xi, \xi'; E)| \leq C_{\alpha, \beta, \beta'} (1 + |x|)^{p - |\alpha|}$$

para algún número real  $p$  y para toda  $x \in \Pi_{\omega_0}^{\pm}(E)$ . Además, suponga que satisface la relación

$$g_{\pm}(x, \xi, \xi'; E) = 0 \text{ si } (\text{sgn}E)\langle \eta, x \rangle \geq c_0 |\eta| |x|$$

para  $\eta = \xi + \xi'$ ,  $c_0 \in (0, 1)$ ,  $x \in \Pi_{\omega_0}^{\pm}(E)$ ,  $|x| \geq R$ . Entonces, se tiene que

$$\lim_{\mu \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^2} \int (A_{\pm}^{(\varepsilon)}(v(E)\omega, \xi'; E) \tilde{\delta}_{\mu}^{(\text{sgn}E)} \hat{g}_1(\xi'), f_2(\omega)) d\xi' d\omega = 0.$$

Ahora, se va a tratar de encontrar una expresión para  $G_2^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E)$  que sea independiente de las funciones de corte  $\zeta_{-}^{(\text{sgn}E)}$ . Para esto, observe que si  $\hat{\xi}' \in \Omega_{\pm}(\omega_0, \delta)$ , entonces la función  $\partial_{x_j} \zeta_{-}^{(\text{sgn}E)}(x, \xi') = 0$  para  $\pm(\text{sgn}E)z < 0$ , por lo cual, la integral de 4.33 solo se localiza en la región de  $\Pi_{\omega_0}^{\pm}(E)$ . Integrando por partes en  $G_2^{(\varepsilon)}$  y notando que  $\zeta_{-}^{(\text{sgn}E)}(y, \xi') = 1$ , para  $|\xi'| \geq c_1$ , se tiene que

$$\Psi_{\pm}(\hat{\xi}, \hat{\xi}'; \omega_0) G_2^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E) = \Psi_{\pm}(\hat{\xi}, \hat{\xi}'; \omega_0) (\pm \check{G}_2^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E) + R_{\pm}^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E))$$

donde

$$\check{G}_2^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E) := i(\text{sgn}E) \varsigma(|\xi|) \varsigma(|\xi'|) \int_{\Pi_{\omega_0}} (u_N^+(y, \xi; \lambda(\xi)))^* (\alpha \cdot \omega_0) u_N^-(y, \xi'; \lambda(\xi')) \varphi(\varepsilon y) dy$$

y

$$R_{\pm}^{(\varepsilon)}(\xi, \xi'; E) := i(\text{sgn}E) \varsigma(|\xi|) \varsigma(|\xi'|) \sum_{i=1}^3 \int_{\Pi_{\omega_0}^{\pm}(E)} \partial_{x_i} ((u_N^+(x, \xi; \lambda(\xi)))^* \alpha_i u_N^-(x, \xi'; \lambda(\xi')))) \varphi(\varepsilon x) \zeta_{-}^{(\text{sgn}E)}(x, \xi') dx.$$

Usando la definición de las funciones  $r_N^{\pm}(x, \xi; E)$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} & i \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} ((u_N^+(x, \xi; \lambda(\xi)))^* \alpha_j u_N^-(x, \xi'; \lambda(\xi'))) = \\ & = e^{i\langle x, \xi' - \xi \rangle} [(r_N^+(x, \xi; \lambda(\xi)))^* a_N^-(x, \xi'; \lambda(\xi')) - (a_N^+(x, \xi; \lambda(\xi)))^* r_N^-(x, \xi'; \lambda(\xi')) + \\ & (\lambda(\xi) - \lambda(\xi')) (a_N^+(x, \xi; \lambda(\xi)))^* a_N^-(x, \xi'; \lambda(\xi'))]. \end{aligned}$$

Ahora, se va a descomponer a  $\Psi_{\pm}(\hat{\xi}, \hat{\xi}'; \omega_0) R_{\pm}^{(\varepsilon)}$  en la suma

$$\Psi_{\pm}(\hat{\xi}, \hat{\xi}'; \omega_0) R_{\pm}^{(\varepsilon)} = \Psi_{\pm}(\hat{\xi}, \hat{\xi}'; \omega_0) ((R_1^{(\varepsilon)})_{\pm} + (R_2^{(\varepsilon)})_{\pm} + (R_3^{(\varepsilon)})_{\pm})$$

donde

$$\begin{aligned}
(R_1^{(\varepsilon)})_{\pm}(\xi, \xi'; E) &:= i\varepsilon(\operatorname{sgn}E)\zeta(|\xi|)\zeta(|\xi'|) \\
&\times \sum_{j=1}^3 \int_{\Pi_{\omega_0}^{\pm}(E)} e^{i(x, \xi' - \xi)} ((a_N^+(x, \xi; \lambda(\xi)))^* \alpha_j a_N^-(x, \xi'; \lambda(\xi'))) \zeta_-^{(\operatorname{sgn}E)}(x, \xi') (\partial_{x_j} \varphi)(\varepsilon x) dx, \\
(R_2^{(\varepsilon)})_{\pm}(\xi, \xi'; E) &:= (\operatorname{sgn}E)\zeta(|\xi|)\zeta(|\xi'|) \\
&\times \int_{\Pi_{\omega_0}^{\pm}(E)} e^{i(x, \xi' - \xi)} ((r_N^+(x, \xi; \lambda(\xi)))^* a_N^-(x, \xi'; \lambda(\xi')) - (a_N^+(x, \xi; \lambda(\xi)))^* r_N^-(x, \xi'; \lambda(\xi'))) \zeta_-^{(\operatorname{sgn}E)}(x, \xi') \varphi(\varepsilon x) dx, \\
(R_3^{(\varepsilon)})_{\pm}(\xi, \xi'; E) &:= (|\lambda(\xi)| - |\lambda(\xi')|)\zeta(|\xi|)\zeta(|\xi'|) \\
&\times \int_{\Pi_{\omega_0}^{\pm}(E)} e^{i(x, \xi' - \xi)} (a_N^+(x, \xi; \lambda(\xi)))^* a_N^-(x, \xi'; \lambda(\xi')) \zeta_-^{(\operatorname{sgn}E)}(x, \xi') \varphi(\varepsilon x) dx.
\end{aligned}$$

Con estos operadores se obtienen los siguientes lemas

**Lema 13** *El límite*

$$\Psi_{\pm}(\hat{\xi}, \hat{\xi}'; \omega_0)(R_2^{(0)})_{\pm}(\xi, \xi'; E) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_{\pm}(\hat{\xi}, \hat{\xi}'; \omega_0)(R_2^{(\varepsilon)})_{\pm}(\xi, \xi'; E)$$

existe. Para cualquier  $p$  y  $q$ , existe  $N$ , tal que la función  $\Psi_{\pm}(\hat{\xi}, \hat{\xi}'; \omega_0)(R_2^{(0)})_{\pm}(\nu(E)\hat{\xi}, \nu(E)\hat{\xi}'; E)$  es de clase  $C^p(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$  y su  $C^p$  norma es acotada por  $C|E|^{-q}$ , cuando  $|E| \rightarrow \infty$ . Además, la siguiente relación se da

$$\begin{aligned}
&-i(2\pi)^{-2} \nu(E) \lim_{\mu \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{\mathbb{S}^2} (\Psi_{\pm}(\omega, \hat{\xi}'; \omega_0) R_{\pm}^{(\varepsilon)}(\nu(E)\omega, \xi'; E) \check{\delta}_{\mu}^{(\operatorname{sgn}E)} \hat{g}_1(\xi'), f_2(\omega)) d\omega d\xi' = \\
&= -i(2\pi)^{-2} \nu(E)^2 \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} (\Psi_{\pm}(\omega, \theta; \omega_0)(R_2^{(0)})_{\pm}(\nu(E)\omega, \nu(E)\theta; E) f_1(\theta), f_2(\omega)) d\theta d\omega.
\end{aligned}$$

**Lema 14** Sean  $g_1, f_1$  y  $f_2$  como en la definición de  $S_2(E)$ . Para cualquier  $\omega_0 \in \mathbb{S}^2$  arbitrario, se tiene que

$$\begin{aligned}
&-i(2\pi)^{-2} \nu(E) \lim_{\mu \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int \int (\pm \Psi_{\pm}(\omega, \hat{\xi}'; \omega_0) \check{G}_2^{(\varepsilon)}(\nu(E)\omega, \xi'; E) \check{\delta}_{\mu}^{(\operatorname{sgn}E)} \hat{g}_1(\xi'), f_2(\omega)) d\xi' d\omega = \\
&= \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} (s_{\operatorname{sing}}^{(N)}(\omega, \theta; E; \omega_0) f_1(\theta), f_2(\omega)) d\theta d\omega
\end{aligned}$$

donde  $s_{\operatorname{sing}}^{(N)}(\omega, \theta; E; \omega_0)$  está dada por la ecuación 4.23.

La demostración de estos lemas se puede encontrar en la referencia [14].

Esto permite obtener el siguiente teorema

**Teorema 21** Sea  $s_2(\omega, \theta; E)$  el kernel del operador  $S_2(E)$ . Para cualquier  $p$  y  $q$ ,  $\Psi_1(\omega, \theta) s_2(\omega, \theta; E)$  es de clase  $C^p(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$  y su norma  $C^p$  es una función  $O(E^{-q})$ . Además, para cualquier  $p$  y  $q$  existe  $N$  suficientemente larga, tal que,  $\Psi_{\pm}(\omega, \theta; \omega_0) s_2(\omega, \theta; E) - s_{\operatorname{sing}}^{(N)}(\omega, \theta; E; \omega_0)$  es de clase  $C^p(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$  y, además, su  $C^p$  norma es acotada por  $C|E|^{-q}$ , cuando  $|E| \rightarrow \infty$ . Esta estimación es uniforme para  $\omega_0 \in \mathbb{S}^2$ .

Nuevamente, este teorema está demostrado en la referencia [14].

Ahora, se va a citar el siguiente resultado que se puede encontrar en la referencia [8].

**Lema 15** Sea  $f(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$  tal que

$$|\partial_x^\alpha f(x, \xi)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-\rho - |\alpha|}$$

para algún  $0 < \rho < N$ . Entonces, se tiene que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x, \xi)) dx \right| \leq C |\xi|^{-(N-\rho)}$$

cuando  $|\xi| \rightarrow 0$ .

Defina la función  $\mathbf{h}_N^{\text{int}}$  dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_N^{\text{int}}(y, \omega, \theta; E; \omega_0) &:= (\text{sgn} E) ((a^+(y, \nu(E)\omega; E) - P_\omega(E))^* (\alpha \cdot \omega_0) (a^-(y, \nu(E)\theta; E) - P_\theta(E)) \\ &\quad + P_\omega(E) (\alpha \cdot \omega_0) (a^-(y, \nu(E)\theta; E) - P_\theta(E)) + (a^+(y, \nu(E)\omega; E) - P_\omega(E)) (\alpha \cdot \omega_0) P_\theta(E)) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Con esta función, se obtiene el siguiente lema

**Lema 16** La función  $\mathbf{b}_N$ , dada por

$$\mathbf{b}_N(\omega, \theta; E; \omega_0) := \pm (2\pi)^{-2} \nu(E)^2 \Psi_\pm(\omega, \theta; \omega_0) \int_{\Pi_{\omega_0}} e^{i\nu(E)\langle y, \theta - \omega \rangle} (\mathbf{h}_N(y, \omega, \theta; E; \omega_0) - (\text{sgn} E) P_\omega(E) (\alpha \cdot \omega_0) P_\theta(E)) dy$$

satisface la estimación

$$|\mathbf{b}_N(\omega, \theta; E; \omega_0)| \leq C |\omega - \theta|^{-(3-\rho)}$$

para  $\omega \neq \theta$  y  $\rho = \min\{\rho_e, \rho_m\} < 3$ .

Su demostración se puede encontrar en la referencia [8].

Para  $f, g \in \mathcal{H}(E)$ , defina  $I_{jk} := \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} (s_{00}^{jk}(\omega, \theta; E) f(\theta), g(\omega))_{\mathcal{H}(E)} d\theta d\omega$ .

**Proposición 12** La función  $\sum_{O_j \cap O_k \neq \emptyset} s_{00}^{(jk)}(\omega, \theta; E)$  es una función de Dirac sobre  $\mathcal{H}(E)$ . Esto es

$$\sum_{O_j \cap O_k \neq \emptyset} I_{jk} = (f, g)_{\mathcal{H}(E)}$$

la demostración de esta proposición se puede encontrar en la referencia [8].

**Lema 17** El límite de la ecuación (4.30) existe y el operador  $S_2(E)$  se descompone como sigue

$$S_2(E) = I + \mathcal{G} + \mathcal{R}_1$$

donde  $I$  es el operador identidad en  $\mathcal{H}(E)$ ,  $\mathcal{G}$  es un operador integral con kernel  $g_N(\omega, \theta; E) := \sum_{O_j \cap O_k \neq \emptyset} \chi_j(\omega) \mathbf{g}_{N, jk}^{int}(\omega, \theta; E) \chi_k(\omega)$  que satisface la estimación

$$|g_N(\omega, \theta; E)| \leq C |\omega - \theta|^{-(3-\rho)}$$

para  $\omega \neq \theta$  y  $\rho = \min\{\rho_e, \rho_m\} < 3$  y, por último,  $\mathcal{R}_1$  es un operador integral con kernel

$$\begin{aligned} r_1(\omega, \theta; E) := & -i(2\pi)^{-2} v(E)^2 (\sum_{O_j \cap O_k = \emptyset} \chi_j(\omega) (G_1^{(0)} + G_{2, O_j, O_k}^{(0)}) (v(E)\omega, v(E)\theta; E) \chi_k(\theta) + \\ & + \sum_{O_j \cap O_k \neq \emptyset} r_{jk} \chi_{jk}^+(\theta) (R_2^{(0)})_+ + \chi_{jk}^-(\omega) \chi_{jk}^-(\theta) (R_2^{(0)})_-) \chi_k(\theta) \end{aligned}$$

donde  $\chi'_{jk}(\omega, \theta) = \chi_{jk}^+(\omega) \chi_{jk}^+(\theta) + \chi_{jk}^-(\omega) \chi_{jk}^-(\theta)$ . Además, para cualquier  $p$  y  $q$  existe  $N$  suficientemente larga, tal que,  $r_1(\omega, \theta; E)$  es de clase  $C^p(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$  y su norma  $C^p$  es acotada por  $C|E|^{-q}$  cuando  $|E| \rightarrow \infty$ . Por último, el operador  $S_2(E) - I$  es un operador compacto en  $\mathcal{H}(E)$ .

La demostración nuevamente se puede encontrar en la referencia [14].

Ahora, el siguiente lema da una fórmula estacionaria para  $\tilde{S}(E)$ .

**Lema 18** Para  $|E| > m$ , la matriz de dispersión  $\tilde{S}(E)$  puede ser representada como

$$\tilde{S}(E) = S_1(E) + S_2(E).$$

Y, como corolario, se obtiene que

**Corolario 5** Para cualquier  $|E| > m$ , la matriz de dispersión  $S(E)$  satisface la relación

$$S(E) = S_1(E) + S_2(E).$$

La demostración de estos, se puede encontrar en la referencia [14].

El siguiente teorema calcula el término principal en la singularidad en la diagonal de  $s^{int}(\omega, \theta; E)$ , para  $1 < \rho < 3$ , cuando  $\omega - \theta \rightarrow 0$  y  $E$  está fija.

Para  $\omega_0 \in \mathbb{S}^2$  fija, se toma la función de corte  $\Psi_+(\omega, \theta; \omega_0)$  con soporte en  $\Omega_+(\omega_0, \delta) \times \Omega_+(\omega_0, \delta)$ , tal que, sea igual a 1 en  $\Omega_+(\omega_0, \delta')$  para alguna  $\delta' > \delta$ . Defina también al operador  $\mathcal{V}_{V, A; \omega}^{(E)}(x) := \frac{|E|}{v(E)} V(x) + (\text{sgn} E) \langle \omega, A(x) \rangle$ . De esto se sigue que:

**Teorema 22** Sea un potencial magnético  $A(x)$  y el potencial eléctrico  $V(x)$  que satisface las estimaciones 4.2, con  $1 < \rho < 3$ , respectivamente. Entonces, para toda  $\omega \in \mathbb{S}^2$  fija y  $\theta \in \Omega_+(\omega, \delta')$ ,  $\omega \neq \theta$ , se tiene que

$$|(s^{int}(\omega, \theta; E) - \frac{1}{i} (2\pi)^{-1/2} v(E)^2 \frac{v(E)}{|E|} (\mathcal{F} \mathcal{V}_{V, A; \omega}^{(E)}) (-v(E) \tilde{\theta}) P_\omega(E))| \leq C |\omega - \theta|^{-2+\rho_1} \quad (4.35)$$

donde  $\tilde{\theta} = \theta - \langle \theta, \omega \rangle$ ,  $\rho_1 = 2(\rho - 1)$ , si  $\rho < 2$  y  $\rho_1 = 2 - \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$ , para  $\rho = 2$ . Aquí la constante  $C$  es independiente de  $\omega$ . Si  $\rho > 2$ , entonces la diferencia del lado izquierdo es continuo.

Su demostración se puede encontrar en la referencia [14].

Para lo siguiente, suponga que  $V, A \in C^\infty$ , son tales que  $V = V_0|x|^{-\rho}$  y  $A = A_0|x|^{-\rho}$  para  $1 < \rho < 3$ ,  $|x| \geq R$  con  $R > 0$ ; además, suponga que  $V_0$  es una constante real y  $A_0$  es un vector constante real que satisfacen  $V_0 + \langle \omega, A_0 \rangle \neq 0$  para toda  $\omega \in \mathbb{S}^2$ .

Ya que

$$\mathcal{F}V_{V,A;\omega}^{(E)} = \mathcal{F}(\mathcal{V}_{V,A;\omega}^{(E)} - (V_0 + \langle \omega, A_0 \rangle)|x|^{-\rho}) + (V_0 + \langle \omega, A_0 \rangle)\mathcal{F}(|x|^{-\rho})$$

y

$$\mathcal{F}(|x|^{-\rho}) = 2^{3-\rho} \pi^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3-\rho}{2})}{\Gamma(\frac{\rho}{2})} |\xi|^{-(3-\rho)} = 4\pi\rho(\rho-1)\Gamma(-\rho) \left(\sin \frac{\pi\rho}{2}\right) |\xi|^{-(3-\rho)}$$

donde  $\Gamma$  es la función Gamma, entonces, la estimación (4.35) y la relación

$$|\omega - \theta|^2 = 2(1 - \langle \theta, \omega \rangle) = 2 \frac{|\tilde{\theta}|^2}{1 + \sqrt{1 - |\tilde{\theta}|^2}}$$

implican que la estimación en el kernel de  $g_N$  es optima. Esto implica que la relación  $|s^{int}(\omega, \theta; E)| \leq C|\omega - \theta|^{-3+\rho}$  es la mejor posible.

### 4.3. La sección transversal de dispersión

Designemos por  $s^{int}(\omega, \theta; E)$  el kernel del operador  $S(E) - I$ . Se define la sección transversal de dispersión para la dirección entrante  $\theta$  y todas las direcciones salientes  $\omega$  como

$$\sigma(\theta; E; u) = \int_{\mathbb{S}^2} |s^{int}(\omega, \theta; E)u|^2 d\omega$$

donde  $u \in X^\pm(\nu(E)\theta)$  es un estado inicial normalizado.

**Lema 19** Sea  $\rho := \max\{\rho_e, \rho_m\}$ . La sección transversal  $\sigma(\theta; E; u)$  es una función continua de  $\theta$ , para  $\rho > 2$ . Además, la sección transversal total dada por

$$\int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} |s^{int}(\omega, \theta; E)u|^2 d\theta d\omega$$

para un estado inicial normalizado  $u \in X^\pm(\nu(E)\theta)$ , es finita si  $\rho > 2$ .

Ahora, se enunciará el siguiente resultado:

**Teorema 23** Sea un potencial eléctrico  $V$  y un campo magnético  $B$ , que satisfacen la estimación (4.2) para alguna  $\rho_e > 1$  y  $r = \rho_m + 1$ , con  $\rho_m > 1$  y además supongamos que  $\nabla \cdot B = 0$ . Sea  $V$  y  $B$  funciones homogéneas de orden  $-\rho_e$  y  $-\rho_m - 1$ , respectivamente, para  $|x| \geq R$  con  $R > 0$  y al menos una de ellas no es trivial para  $|x| \geq R$ . Entonces la sección transversal total de dispersión es infinita si y solo si  $\rho \leq 2$  donde

1.  $\rho = \min\{\rho_e, \rho_m\}$  si  $V$  y  $B$  no son triviales para  $|x| \geq R$ .

2.  $\rho = \rho_m$  si  $V$  es trivial para  $|x| \geq R$ .
3.  $\rho = \rho_e$  si  $B$  es trivial para  $|x| \geq R$ .

La demostración se puede encontrar en la referencia [14].

#### 4.4. El límite de altas energías de la matriz de dispersión

Considere la parte principal  $S_0(E)$  de  $S(E)$ , la cual viene dada por tomar  $N = 0$  en la relación 4.21. Note que su kernel, viene dado por  $s_0(\omega, \theta; E) = \sum_{O_j \cap O_k \neq \emptyset} s_{0,jk}(\omega, \theta; E)$ .

Defina el operador  $\mathbf{P}(E) : L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4)$  por la relación  $(\mathbf{P}(E)f)(\omega) := P_\omega(E)f(\omega)$  y denotamos por  $P(\pm\infty) : L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4)$  por la relación  $(\mathbf{P}(\pm\infty)f)(\omega) := P_\omega(\pm\infty)f(\omega)$ , donde  $P_\omega(\pm\infty) := \frac{1}{2}(I \pm (\alpha \cdot \omega))$ . Note que  $\mathbf{P}(E)$  converge a  $\mathbf{P}(\pm\infty)$  en  $L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4)$ , cuando  $\pm E \rightarrow \infty$ . Ahora se va a enunciar el siguiente resultado:

**Proposición 13** *El operador  $S_0(E)$  es uniformemente acotado en  $L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4)$ , para todo  $|E| \geq E_0$ ,  $E_0 > m$  y la siguiente estimación se da*

$$\|S(E) - S_0(E)\| = O(|E|^{-1}) \text{ cuando } |E| \rightarrow \infty.$$

Además, el operador  $S(E)\mathbf{P}(E)$  converge fuertemente al operador  $S(\pm\infty)\mathbf{P}(\pm\infty)$  en  $L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4)$ , cuando  $\pm E \rightarrow \infty$ , donde  $S(\pm\infty)$  es el operador de multiplicación por la función  $\sum_{O_j \cap O_k \neq \emptyset} \chi_j(\omega)\chi_k(\omega)e^{-i \int_{-\infty}^{\pm\infty} (V(t\omega) \pm \langle \omega, A(t\omega) \rangle) dt}$ .

La prueba de esta proposición se puede encontrar en la referencia [14].

Ahora, se va a considerar el caso especial cuando  $|E| \rightarrow \infty$  y  $\omega(E), \theta(E) \rightarrow \omega$  para algún  $\omega \in \mathbb{S}^2$  arbitrario, de tal forma que  $\eta := v(E)(\omega(E) - \theta(E)) \neq 0$  se mantenga fija. Se van a tomar dos familias de vectores  $\omega(E), \theta(E) \in \mathbb{S}^2$  con estas propiedades, con esto se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 24** *Sea un potencial magnético  $A(x)$  y potencial eléctrico  $V(x)$  que satisface las estimaciones (4.2). Para  $\eta \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , sea  $\omega(E), \theta(E) \in \mathbb{S}^2$  definida como antes. Entonces, se tiene que*

$$\lim_{\pm E \rightarrow \infty} v(E)^{-2} s(\omega(E), \theta(E); E) = (2\pi)^{-1} \mathcal{F}(e^{-iR(y, \omega; \pm\infty)} P_\omega(\pm\infty))(\eta) \quad (4.36)$$

donde  $R(y, \omega; \pm\infty) := \int_{-\infty}^{\pm\infty} (V(y + t\omega) \pm \langle \omega, A(y + t\omega) \rangle) dt$  y  $P_\omega(\pm\infty) = \frac{1}{2}(I \pm (\alpha \cdot \omega))$ .

La demostración de este teorema se puede encontrar en la referencia [14]. Usando este teorema y la transformada de Radon se demuestra en el Teorema 7.8 de [14] que el potencial  $V$  y el campo magnético  $B$  se pueden reconstruir unívocamente a partir del límite de altas energías (4.36).

**Teorema 25** *Supongamos que el potencial eléctrico  $V(x)$  y el potencial magnético  $A(x)$  satisfacen las estimaciones (4.2). Entonces la amplitud de dispersión  $s(\omega, \theta, ; E)$  conocida en una vecindad de la diagonal  $\omega = \theta$  para todo  $E \geq E_0$ , o  $E \leq -E_0$  para algún  $E_0 > m$ , determina unívocamente el potencial eléctrico  $V(x)$  y el campo magnético  $B(x) = \text{rot}A(x)$ . Además se puede reconstruir  $V(x)$  y  $B(x)$  a partir del límite de altas energías (4.36).*

#### 4.5. Problema inverso a energía fija para potenciales homogéneos.

Sea  $\omega \in \mathbb{S}^2$  fija. Sea la función de corte  $\Psi_+(\omega, \theta; \omega)$  con soporte en  $\Omega_+(\omega, \delta)$ , tal que, es igual a 1 en  $\Omega_+(\omega, \delta')$ , para algún  $\delta' > \delta$ . Se va a reescribir la ecuación (4.24) en términos de potencias del potencial  $\mathbb{V}(x) := (V(x), A(x))$ . Note primero que para  $|E| > m$

$$e^{i\Phi^\pm(x, \xi; E)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\pm i \int_0^\infty (\frac{|E|}{|\xi|} V(x \pm (\text{sgn}E)t\omega) + (\text{sgn}E) \langle \omega, A(x \pm (\text{sgn}E)t\omega) \rangle) dt)^j.$$

Sustituyendo esto en la definición de  $a_N^\pm$ , se puede escribir a ésta como una expansión asintótica

$$a_N^\pm(x, \xi; E) \simeq \sum_{m=0}^{\infty} a_{N,m}^\pm(x, \xi)$$

donde  $a_{N,\xi}^\pm(x, \xi)$  es de orden  $m$  con respecto a  $\mathbb{V}(x)$ . Sustituyendo esta expansión en la expresión (4.24) y juntando todos los términos con las mismas potencias de  $\mathbb{V}(x)$ , se obtiene que

$$\mathbf{h}_N(y, \theta, \omega; E; \omega) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n(y, \omega, \theta; E) \quad (4.37)$$

donde  $\mathbf{a}_n(y, \omega, \theta; E)$  es de orden  $n$  con respecto a  $\mathbb{V}(x)$ .

Note que  $\mathbf{a}_0(y, \omega, \theta; E) = (\text{sgn}E)P_\omega(E)(\alpha \cdot \omega)P_\theta(E)$  y que el término lineal con respecto a  $\mathbb{V}(x)$  está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(y, \omega, \theta; E) = \\ -i(\text{sgn}E) \left( \int_0^\infty (\frac{|E|}{|\xi|} V(y \pm t\omega) \pm \langle \omega, A(y \pm t\omega) \rangle) + \frac{|E|}{|\xi|} V(y \mp t\theta) \pm \langle \theta, A(y \mp t\theta) \rangle) dt \right) P_\omega(E)(\alpha \cdot \omega)P_\theta(E) \end{aligned} \quad (4.38)$$

para  $\pm E > m$ . Los términos restantes son de clase  $S^{-\rho}$  en la variable  $y$ , además, también se sigue que  $\mathbf{a}_n \in S^{-(\rho-1)n}$ .

Ahora, se va a recuperar asintóticamente el potencial  $\mathbb{V}(x)$  de la parte lineal del símbolo del operador  $S_{\text{sing}}(E)$  con kernel  $s_{\text{sing}}^{(N)}$ .

Para esto, se va a calcular el símbolo  $a(y, \omega; E)$  de  $S_{\text{sing}}(E)$  utilizando la amplitud de  $v(E)^2 \Psi_+(\omega, \theta; \omega) \mathbf{h}_N(y, \omega, \theta; E; \omega)$ , haciendo el cambio de variable  $z = -v(E)y$  en la expresión (4.23) y aplicando se obtiene que

$$\tilde{a}(y, \zeta; E) \simeq \sum_{\beta} \frac{v(E)^2}{\beta!} (-iv(E))^{-|\beta|} \partial_y^\beta \partial_{\zeta'}^\beta \tilde{\mathbf{h}}_N(y, \zeta, \zeta'; E; \omega) |_{\zeta'=\zeta}$$

para  $y \in \Pi_\omega$ . La fórmula explícita del símbolo  $a(y, \omega; E)$  se obtiene al sustituir la expansión 4.37 en la relación anterior.

Note que  $s_{\text{sing}}^{(N)}$  está relacionada con  $a(y, \omega; E)$  por la expresión

$$s_{\text{sing}}^{(N)}(\omega, \theta; E; \omega) = (2\pi)^{-2} \int_{\Pi_\omega} e^{iv(E)\langle y, \theta \rangle} a(y, \omega; E) dy.$$

A partir de esta relación se demuestra que se puede recuperar a la función  $a(y, \omega; E)$  de la amplitud de dispersión  $s(\omega, \theta; E)$ , módulo una función de clase  $S^{-p(N)}$ , i. e.

$$a(y, \omega; E) = \int_{\Pi_\omega} e^{iv(E)\langle y, \theta \rangle} s(\omega, \theta; E) \Psi_+(\omega, \theta; \omega) d\theta + a_{reg}^{(N)}(y, \omega; E). \quad (4.39)$$

donde  $a_{reg}^{(N)} \in S^{-p(N)}$  y  $p(N) \rightarrow \infty$ , cuando  $N \rightarrow \infty$ .

Usando (4.38), se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 14** *Sea un potencial magnético  $A(x)$  y un potencial eléctrico  $V(x)$  que satisfacen la estimaciones (4.2). Entonces, la función  $a(y, \omega; E)$  admite la expansión*

$$a(y, \omega; E) \simeq \frac{v(E)}{|E|} P_\omega(E) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(y, \omega; E)$$

donde  $h_n(y, \omega; E)$  es de orden  $n$  con respecto a  $\mathbb{V}(x)$  y  $h_n \in S^{-(\rho-1)n}$ . Además,

$$(h_1 + i \frac{v(E)}{|E|} R(y, \omega; E) P_\omega(E)) \in S^{-\rho}$$

donde

$$R(y, \omega; E) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{V}_{V,A;\omega}^{(E)}(y + t\omega)) dt$$

$$y (a - \frac{v(E)}{|E|} P_\omega(E) + i \frac{v(E)}{|E|} R(y, \omega; E) P_\omega(E)) \in S^{-\rho+1-\varepsilon} \text{ para } \varepsilon = \min\{\rho - 1, 1\}.$$

La demostración se puede encontrar en la referencia [14].

Ahora, suponga que el potencial eléctrico  $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  y el campo magnético  $B(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , con  $\nabla \cdot B = 0$ , admiten la expansión asintótica

$$V(x) \simeq \sum_{j=1}^{\infty} V_j(x), \quad (4.40)$$

y

$$B(x) \simeq \sum_{j=1}^{\infty} B_j(x), \quad (4.41)$$

respectivamente, donde las funciones  $V_j(x)$  son homogéneas de orden  $-\rho_j^{(e)}$ , con  $1 < \rho_j^{(e)} < \rho_k^{(e)}$ , y las funciones  $B_j(x)$  son homogéneas de orden  $-r_j^{(m)}$ , con  $2 < r_j^{(m)} < r_k^{(m)}$  para  $k > j$ .

Se demuestra en cite[12], que si el campo magnético  $B(x)$  es homogéneo de orden  $-r^{(m)} < -2$  se puede tomar el potencial magnético  $A(x)$  homogéneo de orden  $-\rho^{(m)} = -r^{(m)} + 1 < -1$ . Por lo tanto, si  $B$  satisface la expansión anterior, entonces, cómo se demuestra en [14], podemos suponer que  $A(x)$  también es una suma asintótica. Esto se demuestra de la manera siguiente. Suponga  $B(x) = (B_1(x), B_2(x), B_3(x))$  es el campo magnético, tal que  $\nabla \cdot B = 0$ . Defina a la matriz

$$F = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

y defina a los potenciales auxiliares

$$A_i^{(reg)}(x) = \int_1^\infty s \sum_{j=1}^3 F^{(ij)}(sx) x_j ds, \quad (4.42)$$

$$A_i^{(\infty)} = - \int_0^\infty s \sum_{j=1}^3 F^{(ij)}(sx) x_j ds. \quad (4.43)$$

Note que  $A^{(\infty)}(x)$  es una función homogénea de grado  $-1$ ,  $A^{(reg)}(x) = O(|x|^{-\rho})$  con  $\rho = r - 1$ , cuando  $|x| \rightarrow \infty$  y  $rotA^{(\infty)}(x) = 0$  para  $x \neq 0$ . Defina a

$$A_{tr}(x) = A^{(reg)}(x) + A^{(\infty)}(x) \quad (4.44)$$

como la parte transversal del potencial  $A(x)$ , i. e., la parte de  $A(x)$  que cumple que  $\langle x, A_{tr}(x) \rangle = 0$ . Por otra parte, defina a la función  $U(x)$ , para  $x \neq 0$ , como la función integral curvilínea dada por

$$U(x) = \int_{\Gamma_{x_0, x}} \langle A^{(\infty)}(y), dy \rangle \quad (4.45)$$

donde  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  es  $x_0 \neq 0$  y  $\Gamma_{x_0, x}$  es una curva que une a  $x_0$  con  $x$  y no atraviesa al 0. Se sigue del teorema de Stokes, que  $U(x)$  está bien definida y no depende de la curva  $\Gamma_{x_0, x}$  y, además,  $gradU(x) = A^{(\infty)}(x)$ .

Ahora, tome el potencial magnético

$$A(x) = A_{tr}(x) - grad(\eta(x)U(x)) \quad (4.46)$$

donde  $\eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , tal que,  $\eta(x) = 0$  en una vecindad del cero y  $\eta(x) = 1$  para  $|x| \geq 1$ . Se sigue que

$$rotA(x) = B(x). \quad (4.47)$$

Además,  $A \in C^\infty$  si  $B \in C^\infty$  y  $A(x) = A^{(reg)}(x)$  para  $|x| \geq 1$ . Por último, también satisface la siguiente estimación

$$|\partial^\alpha A(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{-\rho - |\alpha|},$$

si suponemos que,

$$|\partial^\alpha B(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{-\rho - 1 - |\alpha|},$$

para todo multi-índice  $0 \leq |\alpha|$ .

En esta sección eligiéremos el potencial magnético de esta manera, y entonces,

$$A(x) \simeq \sum_{j=1}^{\infty} A_j(x)$$

donde las funciones  $A_j(x)$  son homogéneas de orden  $-\rho_j^{(m)}$  con  $1 < \rho_j^{(m)} < \rho_k^{(m)}$  para  $k > j$ .

Agregando términos iguales a cero en las expansiones para  $V(x)$  y  $A(x)$ , se puede suponer que  $r_j^{(m)} = \rho_j^{(e)} + 1$ . Entonces, el potencial  $\mathbb{V}$  admite una la expansión asintótica

$$\mathbb{V}(x) \simeq \sum_{j=1}^{\infty} W_j(x)$$

donde  $W_j(x) = (V_j(x), A_j(x))$  son funciones homogéneas de orden  $-\rho_j = -\rho_j^{(m)} = -\rho_j^{(e)}$ .

Sustituyendo lo anterior en la expansión (4.39), se sigue que:

**Teorema 26** *Suponga que un potencial eléctrico  $V(x)$  y el campo magnético  $B(x)$ , con  $\nabla \cdot B = 0$ , son  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$  y admiten una expansión asintótica como antes. Suponga que los términos  $V_j$  y  $B_j$  son funciones homogéneas de orden  $-\rho_j$  y  $-r_j = -\rho_j - 1$ , respectivamente y donde  $1 < \rho_1 < \rho_2 < \dots$ . Sea  $A(x)$  el potencial magnético. Entonces, la función  $a(y, \omega; E)$  admite una expansión asintótica*

$$a(y, \omega; E) \simeq \frac{v(E)}{|E|} P_\omega(E) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_n} h_{n,m;j_1, \dots, j_n}(y, \omega; E)$$

donde para cada  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $j_k$  toma valores de 1 a  $\infty$ . Las funciones  $h_{n,m;j_1, \dots, j_n}$  son de orden  $n$  con respecto al potencial  $\mathbb{V}(x)$  y solo dependen de  $W_{j_1}, W_{j_2}, \dots, W_{j_n}$ , además, son funciones homogéneas de orden  $n - m - \sum_{k=1}^n \rho_{j_k}$  con respecto a la variable  $y$ .

La demostración se puede encontrar en la referencia [14].

Se va a definir el mapeo  $T(y, \omega; E; W) = a^{(N)}(y, \omega; E) + a_{reg}^{(N)}(y, \omega; E) - \frac{v(E)}{|E|} P_\omega(E)$ . Como  $a^{(N)}(y, \omega; E)$  está definida por una expansiones asintótica, entonces,  $T$  es una función de clase  $S^{-\infty}$ . Se va a definir a  $Q(y, \omega; E; W) = T(y, \omega; E; W) + i \frac{v(E)}{|E|} R(y, \omega; E; W) P_\omega(E)$ . De esto se obtiene lo siguiente:

**Teorema 27** *Suponga que el potencial eléctrico  $V(x)$  y el campo magnético  $B(x)$ , con  $\text{div} B = 0$ , son  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$  y admiten una expansión asintótica como antes, donde  $V_j$  y  $B_j$  son funciones homogéneas de orden  $-\rho_j$  y  $-r_j = -\rho_j - 1$ , respectivamente, donde  $1 < \rho_1 < \rho_2 < \dots$ . Sea  $A(x)$  el potencial magnético. Entonces, el kernel  $s(\omega, \theta; E)$  de la matriz de dispersión  $S(E)$  para  $E \in (-\infty, -m) \cup (m, \pm\infty)$  en una vecindad de la diagonal  $\omega = \theta$ , determina de manera única cada una de las  $V_j(x)$  y  $B_j(x)$ . Además,  $V_1(x)$  y  $B_1(x)$  pueden ser reconstruidas por la fórmula*

$$-i \frac{v(E)}{|E|} R(y, \omega; E; W_1) P_\omega(E) = h_1(y, \omega; E)$$

donde  $h_1$  es el término homogéneo de orden mas alto con respecto a "y" en la expansión del Teorema 26. Las funciones  $V_j(x)$  y  $B_j(x)$ , para  $j \geq 2$ , pueden ser reconstruidas recursivamente de la fórmula

$$-i \frac{v(E)}{|E|} R(y, \omega; E; W_j) P_\omega(E) = (a(y, \omega; E) - \frac{v(E)}{|E|} P_\omega(E) - T(y, \omega; E; \sum_{i=1}^{j-1} W_i))^\circ,$$

adonde designamos por  $f^\circ$  el término homogéneo de orden mayor  $f_k$  en (3.1) que no es idénticamente cero.

La demostración se puede encontrar en la referencia [14].

Como corolario se obtiene que

**Corolario 6** Sea  $W^{(j)}$  que satisfacen las hipótesis del teorema anterior para  $j = 1, 2$ . Si  $s_1(\omega, \theta; E) - s_2(\omega, \theta; E) \in C^\infty(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$  para algún  $|E| > m$ , entonces  $V_1 - V_2$  y  $B_1 - B_2$  son funciones de Schwartz.

La demostración se puede encontrar en la referencia [14].

## 4.6. Las soluciones de dispersión promedio y la construcción del potencial eléctrico y del campo magnético

Ahora, en este subtema se hablarán de las "Soluciones Promedio de Dispersión".

Para esto, primero se definirá "la solución promedio de dispersión no perturbada", dada por

$$\psi_{0,f}(x; E) := \int_{\mathbb{S}^2} e^{iv(E)\langle \omega, x \rangle} P_\omega(E) f(\omega) d\omega$$

para cualquier  $f \in L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4)$ .

Note que los coeficientes de  $\psi_{0,f}$  son iguales a los de  $\Gamma_0^*(E)f$ , definidos en el capítulo 3, subcapítulo 3. Entonces, se sigue que  $\psi_{0,f} \in \mathcal{H}^{1,-s}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ , con  $s > 1/2$  y  $H_0 \psi_{0,f} = E \psi_{0,f}$ .

Sea  $\mathbb{V}$  que satisface la estimación 4.2. "La solución promedio de dispersión perturbada" viene dada por

$$\psi_{+,f}(x; E) := [I - R_+(E)\mathbb{V}] \psi_{0,f}, \quad E \in (-\infty, -m) \cup (m, \infty), \quad f \in L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4).$$

Note que,  $\psi_{+,f} \in H^{1,-s}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ , con  $1/2 < s \leq s_0$  y  $H \psi_{+,f} = E \psi_{+,f}$ .

Si  $\rho > 2$ , se tiene que

$$\psi_{+,f}(x; E) = \int_{\mathbb{S}^2} \psi^+(x, \omega; E) f(\omega) d\omega$$

donde

$$\psi^+(x, \theta; E) = P_\theta(E) e^{iv(E)\langle x, \theta \rangle} - (R_D(E + i0)\mathbb{V}(\cdot)P_\theta(E) e^{iv(E)\langle \cdot, \theta \rangle})(x).$$

Usando la representación estacionaria de la matriz de dispersión dada en el capítulo 3, subcapítulo 3, se puede reescribir a  $S(E)$  en términos de las soluciones promedio. Para  $f, g \in L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4)$  se tiene que

$$(S(E)f, g)_{\mathcal{H}(E)} = (f, g)_{\mathcal{H}(E)} - i(2\pi)^{-2} v(E)^2 (\mathbb{V} \psi_{+,f}, \psi_{0,g})_{L^2}$$

Las soluciones promedio cumplen la siguiente proposición

**Teorema 28** Sea  $\mathbb{V}$  tal que para algún  $s_0 > 1/2$ ,  $\langle x \rangle^{2s_0} \mathbb{V}$  is a compact operator from  $H^1$  to  $L^2$  and such that,

$$|\partial_x^\alpha \mathbb{V}(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{-\rho}, \quad \rho > 1, \quad |\alpha| \leq 1, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$$

donde  $\Omega$  es un conjunto abierto acotado conexas con frontera suave  $\partial\Omega$ . Entonces, el conjunto de las soluciones promedio de dispersión  $\{\Psi_{+,f}, f \in \mathcal{H}(E)\}$  es fuertemente denso en el conjunto de las soluciones de la ecuación 4.1 en  $L^2(\Omega; \mathbb{C}^4)$  para toda  $E \in (-\infty, -m) \cup (m, \infty)$  fija.

La demostración se puede encontrar en la referencia [14].

Considere el operador libre de Dirac

$$L_{0,\Omega_E} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma \cdot \nabla \\ -i\sigma \cdot \nabla & 0 \end{pmatrix}$$

en  $L^2(\Omega_E; \mathbb{C}^2) \times L^2(\Omega_E; \mathbb{C}^2)$ , donde  $\Omega_E$  es un conjunto abierto conexas y acotado con frontera suave  $\partial\Omega_E$  y  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  son las matrices de Pauli.

$L_{0,\Omega_E}$  es un operador auto-adjunto en

$$\mathcal{D}(L_{0,\Omega_E}) := \{u = (u_+, u_-) : u_+ \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_E; \mathbb{C}^2), u_- \in \mathcal{H}(\Omega_E; \mathbb{C}^2)\}$$

donde  $\mathcal{H}_0^1(\Omega_E; \mathbb{C}^2)$  es la clausura de  $C_0^\infty(\Omega_E)$  en el espacio  $\mathcal{H}^1(\Omega_E; \mathbb{C}^2)$  y  $\mathcal{H}(\Omega_E; \mathbb{C}^2)$  es la clausura de  $\mathcal{H}^1(\Omega_E; \mathbb{C}^2)$  con la norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}(\Omega_E; \mathbb{C}^2)} := \|(\sigma \cdot \nabla) \cdot\|_{L^2(\Omega_E; \mathbb{C}^2)} + \|\cdot\|_{L^2(\Omega_E; \mathbb{C}^2)}$ .

Sea  $\mathbb{V}$  una función con valores en las matrices Hermitianas de  $4 \times 4$ , cuyas entradas perteneces a  $L^\infty(\Omega_E)$ . Entonces,  $L_{\mathbb{V},\Omega_E} := L_{0,\Omega_E} + \mathbb{V}$  es auto-adjunto en  $\mathcal{D}(L_{0,\Omega_E})$ .

Considere el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} (L_{\mathbb{V},\Omega_E} - E)(u_+, u_-) = 0, & \text{en } \Omega_E \\ u_+ |_{\partial\Omega_E} = g \in h(\partial\Omega_E), & \text{en } \partial\Omega_E \end{cases}.$$

donde  $h(\partial\Omega_E)$  es la traza en  $\partial\Omega_E$  de  $\mathcal{H}(\Omega_E; \mathbb{C}^2)$ . Suponga que  $E$  pertenece al conjunto resolvente de  $L_{\mathbb{V},\Omega_E}$ , entonces, se tiene que para cada  $f \in h(\partial\Omega_E)$  existe una única solución  $(u_+, u_-) \in \mathcal{H}(\Omega_E; \mathbb{C}^2) \times \mathcal{H}(\Omega_E; \mathbb{C}^2)$  para la ecuación anterior. Esto se puede encontrar en la referencia [13].

Para cualquier  $g \in h(\partial\Omega_E)$ , se define el mapeo de Dirichlet a Dirichlet (de espinor arriba a espinor abajo) como

$$\Lambda_{\mathbb{V}g} = u_- |_{\partial\Omega_E} \in h(\partial\Omega_E)$$

donde  $(u_+, u_-)$  es la solución única al problema anterior.

Usando las soluciones de dispersión promedio y el mapeo de Dirichlet a Dirichlet se demuestra el teorema siguiente de unicidad a energía fija.

**Teorema 29** *Sea el potencial  $\mathbb{V}_j(x)$  con  $j = 1, 2$ , dado por*

$$\mathbb{V}_j = \begin{pmatrix} V_+^{(j)} & \sigma \cdot A^{(j)} \\ \sigma \cdot A^{(j)} & V_-^{(j)} \end{pmatrix}$$

donde  $V_{\pm}^{(j)}, A_k^{(j)} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$  son funciones reales, tales que  $V_{\pm}^{(j)}$  y  $A_k^{(j)}$  satisfacen las estimaciones del teorema 28, para  $k = 1, 2, 3$  y  $j = 1, 2$ . Sean  $S_j(E)$  las matrices de dispersión asociadas a  $\mathbb{V}_j$  con  $j = 1, 2$ . Suponga que para alguna  $E \in (-\infty, -m) \cup (m, +\infty)$ ,  $S_1(E) = S_2(E)$  y que existe un conjunto abierto acotado conexo  $\Omega_E$  con frontera suave  $\partial\Omega_E$ , tal que  $E$  pertenece al conjunto resolvente de  $L_{\mathbb{V}, \Omega_E}$  para  $j = 1, 2$ . Suponga que  $\mathbb{V}_1(x) = \mathbb{V}_2(x)$  para  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_E$ . Entonces se tiene que  $V_{\pm}^{(1)}(x) = V_{\pm}^{(2)}(x)$  y  $\text{rot}A^{(1)}(x) = \text{rot}A^{(2)}(x)$  para toda  $x \in \mathbb{R}^3$ .

La demostración se puede encontrar en la referencia [14], adonde también se demuestra el teorema siguiente.

**Teorema 30** *Supongamos que las expansiones (4.40, 4.41) para los potenciales eléctricos  $V_j$  y los campos magnéticos  $B_j$ , con  $\nabla \cdot B_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ , son válidas. Sean los potenciales magnéticos,  $A_j$ ,  $j = 1, 2$  tomados como en (4.42-4.46). Supongamos que para un  $E \in (-\infty, -m) \cap (m, \infty)$ ,  $S_1(E) = S_2(E)$ , adonde  $S_j(E)$  es la matriz de dispersión que corresponde a  $(V_j, B_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Además supongamos que existe un conjunto abierto conexo y acotado  $\Omega_E$  con frontera suave  $\partial\Omega_E$  tal que  $E$  pertenece al conjunto resolvente de  $L_{\mathbb{V}_j, \Omega_E}$  para  $j = 1, 2$ . Finalmente supongamos que las expansiones (4.40, 4.41) convergen en sentido puntual para  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_E$ . Entonces, tenemos que  $V_1(x) = V_2(x)$ , y  $B_1(x) = B_2(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ .*



## Capítulo 5

# Discusión y Resultados

### 5.1. Breve discusión de los resultados obtenidos y sus posibles aplicaciones:

La condición de corto alcance aparece de manera natural en diversas aplicaciones en la física. Algunos importantes ejemplos de potenciales de rango corto son los siguientes.

1. El potencial de Eckard

$$V = \gamma_1 \frac{1}{1 + ce^{r/a}} + \gamma_2 \frac{1}{(1 + ce^{r/a})^2}.$$

2. El potencial de Wood-Saxon

$$V = -V_0 \frac{1}{1 + ce^{(r-R)/a}}.$$

3. El potencial del tipo Yukawa

$$V = \int_0^\infty \rho(a) e^{-r/a}.$$

4. El potencial de Morse

$$V = D \left( e^{-2a(r-r_e)} - 2e^{-a(r-r_e)} \right).$$

5. El potencial del tipo de Lennard-Jones

$$V = A \frac{1}{(a+r)^{12}} - B \frac{1}{(a+r)^6}.$$

6. El potencial del tipo de Coulomb apantallado,

$$V = C \frac{1}{\alpha + r} \phi(r/a),$$

adonde  $\phi$  es una función de apantallamiento. Por ejemplo,  $\phi(r/a) = e^{-r/a}$ .

Las correcciones relativistas tienen mayor relevancia en los elementos pesados, ya que, sus núcleos generan una mayor atracción a sus electrones haciendo que se muevan a velocidades prácticamente relativistas. Por lo cual, muchas de las propiedades de estos elementos tienen contribuciones relativistas que no se pueden despreciar como

en la *energía de disociación* y en la *frecuencia vibracional*, vea el capítulo 22 de la referencia [24] para una mayor discusión al respecto.

Visto desde esta perspectiva, los electrones de un elemento pesado están siendo dispersados por su núcleo constantemente a velocidades relativistas, por lo cual, la descripción de estos sistemas recae en la ecuación de Dirac; sin embargo, si se desconoce la estructura interna del núcleo, primero se debe de determinar el potencial que genera por medio de la resolución de un problema inverso para, posteriormente, hacer las correcciones relativistas del sistema. Además, dado que ya se observó que existen potenciales de *corto alcance* que describen estos sistemas adecuadamente, los procedimientos planteados en el presente trabajo son aplicables.

## 5.2. Conclusiones:

Como se menciona en la discusión anterior, la resolución de un problema inverso tiene grandes e importantes aplicaciones en física como es el de determinar o aproximar la estructura intrínseca del núcleo de un átomo, permitiendo así mejorar el cálculo de las propiedades físicas o químicas que tienen los elementos.

Como es habitual en la resolución de problemas inversos, se deben hacer algunas hipótesis a priori sobre las propiedades del sistema, átomo, molécula, etc., que se está considerando. En nuestro caso se debe suponer que el potencial es de *corto alcance*, por lo que se excluye el potencial de *largo alcance*. Sin embargo, en la naturaleza los únicos potenciales de *largo alcance* son el gravitacional y el de Coulomb, y los problemas físicos en los que se presentan son bien conocidos, por lo que considerar los potenciales de *corto alcance* es apropiado desde el punto de vista físico.

Por otra parte, es seguro decir que, al menos, a los elementos pesados se les pueden aplicar los métodos y aproximaciones propuestos por este trabajo, lo cuales, no son pocos, dando gran utilidad al presente trabajo.

Por último, como se puede observar en el presente trabajo, el planteamiento y la resolución de un problema inverso requiere, desde una perspectiva matemática, la comprensión profunda del análisis funcional aplicado a operadores diferenciales. Esto se puede observar con mayor profundidad en los capítulos 2 y 3, en donde tienen gran relevancia: el teorema espectral en espacios de Hilbert de dimensión infinita, la teoría de operadores pseudo-diferenciales, la teoría de distribuciones, entre otros temas; en esto reside la complejidad de la resolución de un problema de dispersión inverso. Desde esta perspectiva, la resolución de un problema inverso consiste en considerar a los potenciales como una perturbación a un operador diferencial, de tal manera que:

1. Se pueda determinar el comportamiento del espectro del operador diferencial perturbado.
2. Se pueda encontrar una relación entre el espectro del operador diferencial perturbado y el espectro del operador diferencial sin perturbar.

Esto permite ver si los operadores de onda están bien definidos y son completos para determinar si el operador de dispersión  $S$  se puede descomponer, relacionando de esta manera al operador de dispersión  $S$  del sistema con la matriz de dispersión  $S(E)$  que genera el sistema experimentalmente. Si el sistema cumple con las propiedades anteriores, todo se reduce a encontrar la relación entre la matriz de dispersión  $S(E)$  y el potencial  $V$  del sistema.

# Bibliografía

- [1] Adams, R. A. (1975), *Sobolev Spaces*, Estados Unidos de América: Academic Press.
- [2] Amrein, W. O. (2009), *Hilbert Space Methods in Quantum Mechanics*, Suiza: EPFL Press.
- [3] Balslev E., Helffer B. (1992), Limiting absorption principle and resonances for the Dirac operator, *Advances in Applied Mathematics*, Vol. 13, 2, 186-215.
- [4] Berthier, A., Georgescu, V. (1987), On the point spectrum of the Dirac operator, *J. Functional Analysis*, Vol 71, 2, 309-338.
- [5] Evans, L. C. (2010), *Partial Differential Equations*, Estados Unidos de América: American Mathematical Society.
- [6] Gâtel, Y., Yafaef, D. (1999), Scattering theory for the Dirac operator with long-range electromagnetic potential, *J. Funct. Anal.* vol 184, 1581-1562.
- [7] Isozaki H, Kitada H. (1985), A remark on the micro-local resolvent estimates for two-body Schrödinger operator, *Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University*, Vol. 21, 889-910.
- [8] Isozaki H., Kitada H. (1986), Scattering matrices for two-body Schrödinger operators, *Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo*, Vol. 35, 81-107.
- [9] Ito H. (1995), High-energy behavior of the scattering amplitude for a Dirac operator, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, Vol. 31, 1107-1133.
- [10] Kreyszig, E. (1978), *Introductory Functional Analysis With Applications*, Estados Unidos de América: John Wiley & Sons.
- [11] Messiah, A. (1961), *Quantum Mechanics: Volumen 1*, Países Bajos : North-Holland Publishing Company.
- [12] Messiah, A. (1961), *Quantum Mechanics: Volumen 2*, Países Bajos : North-Holland Publishing Company.
- [13] Nakamura G, Tsuchida T. (2000), Uniqueness for an inverse boundary value problem for Dirac operators, *Communications in Partial Differential Equations*, Vol 25, 1327-1369.
- [14] Naumkin, I., Weder, R. (2015), High-energy and smoothness asymptotic expansion of the scattering amplitude for the Dirac equation and applications, *Math. Meth. Appl. Sci.*, Vol. 38, 2427-2465.
- [15] Reed, M., Simon, B. (1978), *Methods of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory*, Estados Unidos de América: Academic Press.

- 
- [16] Reed, M., Simon, B. (1978), *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*, Estados Unidos de América: Academic Press.
- [17] Rudin W. (1991), *Functional Analysis*, Estados Unidos de América: McGraw-Hill.
- [18] Schutz, B. F. (1985), *A First Course in General Relativity*, Reino Unido : Cambridge University Press.
- [19] Schechter, M. (1986), *Spectra of Partial Differential Operators*, Países Bajos: Elsevier Science Publishing Company.
- [20] Teschl, G.(2009), *Mathematical Methods in Quantum Mechanics With Applications to Schrödinger Operators*, Austria : American Mathematical Society.
- [21] Thaller, B. (1992), *The Dirac Equation*, Austria : Springer-Verlag.
- [22] Yafaev D. (2003), High-energy and smoothness asymptotic expansion of the scattering amplitude, *Journal of Functional Analysis*, Vol. 202, 526-570.
- [23] Yamada O. (1972), On the principle of limiting absorption for the Dirac operator, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, Vol. 8, 557-577.
- [24] Dylla, K. G., Fægri, K. Jr. (2007), *Introduction to Relativistic Quantum Chemistry*, Estados Unidos de América: Oxford University Press.
- [25] Greiner, W. (1998), *Classical Electrodynamics*, Estados Unidos de América: Springer.