



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

## FACULTAD DE CIENCIAS

SELECCIÓN DE CARTERAS DE INVERSIÓN:  
EL ANÁLISIS DISCRIMINANTE COMO  
HERRAMIENTA DE DECISIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
ACTUARIO

PRESENTA:

CHRISTOPHER GIOVANNI HERNÁNDEZ MELO

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. JOSÉ SALVADOR ZAMORA MUÑOZ



CIUDAD DE MÉXICO

MÉXICO, 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A pesar de la distancia y del  
tiempo ido, sólo puedo dedicar:*

*A todos y ninguno...*

*Demian*

HERMANN HESSE

# Agradecimientos

Gracias a todos los profesores que me formaron como Actuario, aquellos que moldearon mi forma de pensar y mis gustos por las matemáticas, probabilidad, estadística, finanzas, riesgos, economía...

Gracias a mi mamá, mis hermanas y a Carlos el de la Maqueta, a quien tengo la fortuna de poder considerarlo como mi tercer hermano, por haberme enseñado a trabajar duro, a nunca rendirme y a ver las cosas desde otra perspectiva.

Gracias a mis amigos de la facultad, quienes fueron un gran apoyo e influencia para mí, Alberto, Cecy, Karen, Miia, Mike, Zamora y a todos los que me permitieron compartir un café a lado del Prometeo.

Gracias a todos los profesores y profesoras que me apoyaron con este trabajo. A Victor Lemus, por encaminarme, a mis Sinodales y especialmente a Salvador Zamora, por retomar mi trabajo, por ser mi guía y darme consejos, su ayuda fue fundamental para poder concluir mi tesis.

Gracias a todos los que han estado a mi lado a través del camino, a los que están, a los que han estado y a los que siempre me acompañaran a pesar de haber partido, para ellos es este trabajo.

# Índice general

- 1. Introducción** **1**
  - 1.0.1. Contexto Histórico. . . . . 2
  - 1.0.2. Bancos Centrales como inversionistas. . . . . 5
  
- 2. Riesgo** **8**
  - 2.1. Generalidades del Riesgo . . . . . 9
  - 2.2. Riesgos Financieros . . . . . 10
  - 2.3. Riesgo de crédito . . . . . 14
    - 2.3.1. Modelos de estimación de las probabilidades de incumplimiento. . . . . 16
    - 2.3.2. Medición del riesgo de crédito. . . . . 17
  - 2.4. Administración de riesgos . . . . . 19
  
- 3. Análisis Discriminante** **24**
  - 3.1. Generalidades del Análisis Multivariado. . . . . 24
  - 3.2. Análisis Discriminante . . . . . 28
    - 3.2.1. Fundamentos del análisis discriminante . . . . . 31
    - 3.2.2. Regla de Máxima Verosimilitud . . . . . 32
    - 3.2.3. Regla de Discriminación Bayesiana . . . . . 33
    - 3.2.4. Propiedades de las reglas de decisión . . . . . 35
  - 3.3. Discriminación con una muestra dada . . . . . 37
    - 3.3.1. La regla de discriminación muestral . . . . . 37
    - 3.3.2. Razón de máxima verosimilitud . . . . . 37

- 3.4. Funciones lineales de Fisher . . . . . 38
  - 3.4.1. Funciones lineales con una muestra . . . . . 41
- 3.5. Probabilidad de clasificación errónea . . . . . 42
  - 3.5.1. Probabilidades de clasificación errónea con poblaciones normales . . . . . 42
  - 3.5.2. Método de sustitución . . . . . 43
  - 3.5.3. Validación cruzada . . . . . 43
- 4. Aplicación del Modelo . . . . . 45**
  - 4.1. Criterios de selección . . . . . 45
  - 4.2. Descripción de la muestra . . . . . 52
  - 4.3. Variables dentro del Modelo . . . . . 54
  - 4.4. Análisis Descriptivo . . . . . 60
  - 4.5. Implementación . . . . . 75
  - 4.6. Análisis de errores . . . . . 86
    - 4.6.1. Errores por cambios en la calificación . . . . . 87
    - 4.6.2. Errores no consecutivos. . . . . 91
    - 4.6.3. Corrección de errores. . . . . 93
- 5. Conclusiones . . . . . 98**
- Apéndice . . . . . 100**
  - A. Definiciones . . . . . 100
  - B. Algunos resultados . . . . . 103
- Bibliografía . . . . . 105**



# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo se realizará un estudio para la predicción de insolvencia de las instituciones bancarias basado en el modelo estadístico de *Análisis Discriminante*, considerando bancos pertenecientes a países tanto del Grupo de los 10 (G-10)<sup>1</sup> como a bancos pertenecientes a países conocidos como Tigres Asiáticos<sup>2</sup> con el objetivo de fortalecer la toma de decisiones para la inversión. Lo anterior se llevará a cabo a través del mencionado modelo estadístico en el que diferenciaremos dos tipos de instituciones bancarias. El primer grupo contendrá aquellas instituciones que posean un conjunto de características que muestren la conveniencia y seguridad de invertir en éstas; el segundo grupo estará conformado por aquellos bancos en las que se pueda apreciar de manera anticipada algún problema crediticio.

Toda institución financiera tiene cierta exposición al riesgo de crédito. En una economía las empresas solicitan préstamos o emiten deuda para poder financiar los nuevos proyectos, los cuales pretenden generar ganancias o disminuir los costos, pero siempre existirá la incertidumbre de que no se puedan llevar a cabo ciertas metas necesarias para la conclusión de un proyecto, es por esto que las instituciones pueden caer en serios problemas económicos y, por tanto, irse a quiebra.

El negocio principal de los bancos e instituciones financieras es el préstamo de recursos a las personas físicas y morales, por lo anterior, los problemas crediticios de las empresas, implican retrasos, impagos o reestructuraciones, los cuales impactan en la calidad crediticia de las propias instituciones, sin mencionar la cadena de problemas y crisis que las quiebras conllevan.

A lo largo de la historia se ha visto que cuando una empresa se va a quiebra, las consecuencias son realmente graves para el sector que le rodea, específicamente las implicaciones de un banco en bancarrota pueden llegar a afectar a las personas que tienen cuentas en esa institución, a las empresas acreedoras, a las aseguradoras que hayan contratado, a los bancos que estén muy relacionados con éste, etcétera, lo que probablemente puede provocar caos en la economía de un país o región. Por lo anterior, surge la necesidad de saber en qué momento un banco empieza a tener problemas que lo lleven eventualmente a la bancarrota. El realizar estudios sobre la calidad crediticia de una empresa nos permite aportar información a los controles con los que cuenta dicha institución y permite explicar el estado de un banco, si es que hay un sector que debe ser atendido, si el problema es nuevo o si se

---

<sup>1</sup>Alemania, Bélgica, Canadá, Estados Unidos, Inglaterra, Italia, Japón, Francia, Países Bajos, Suecia y Suiza.

<sup>2</sup>Corea del Sur, Hong Kong, Singapur y Taiwan.

ha acrecentado durante los últimos periodos.

El análisis discriminante es una modelo que nos permite describir el estatus de una institución en comparación con dos o más conjuntos distintos de éstas. En el Capítulo I describiremos los antecedentes y la importancia tanto del análisis discriminante como de las razones financieras en la valuación y el estudio de la calidad crediticia de las empresas. Además, se describirá el papel de los bancos centrales como inversionistas; es decir, en qué activos puede invertir y la importancia que tiene el banco central como brindador de recursos.

En el Capítulo II describiremos el riesgo en general y, particularmente, los riesgos que una empresa puede contraer, ninguna de ellas está exenta de los riesgos que mencionaremos, sin embargo, hablaremos de los riesgos desde la perspectiva de las instituciones financieras. Además describiremos cómo ha evolucionado la administración del riesgo y los avances que se han dado en la historia, específicamente después de la publicación de los acuerdos de Basilea.

En el Capítulo III se describirá el modelo que se emplea en este trabajo, la base que lo fundamenta, los estudios en los que se puede aplicar y los resultados que se obtienen. Una vez que hayamos aclarado lo referente al problema al que nos enfrentamos, en el Capítulo IV describiremos ampliamente la muestra que se usó en el modelo y sus características, los países a los que pertenecen, las regiones en las que se encuentran, etc., y por último, se hablará del estudio realizado, dando a conocer los resultados que se obtuvieron así como el alcance de éstos para después terminar con las conclusiones del trabajo y el aprendizaje obtenido.

### 1.0.1. Contexto Histórico.

El primero en utilizar el análisis discriminante para crear un modelo de predicción de bancarrota fue el economista Edward Altman en 1968 (Altman 1968 [3]). Después de notar que el uso de las Razones Financieras estaba siendo descartado en los modelos teóricos y académicos y, que comenzaban a ser sustituidas al desarrollar modelos más sofisticados matemáticamente, Altman decidió modelar éstas para realizar un estudio de empresas manufactureras. El economista aplicó un modelo estadístico que utilizara los datos fundamentales de las empresas y, de esta manera, realizar un estudio con una base matemática que se basara en la información con la que se había trabajado desde mediados del siglo XIX para estudiar el estado de las empresas y así saber en qué sectores podrían desarrollarse para mejorar. Aunque hay que destacar que W. H. Beaver realizó un análisis con razones financieras en 1966 (Beaver 1966 [4]) que intentaba predecir también la quiebra de las instituciones; Beaver comparó varias razones financieras individualmente entre empresas en bancarrota y empresas que no estuvieran en esta situación. Con observaciones de 5 años anteriores a la bancarrota mostró que las razones financieras sí podían ser útiles en la predicción de la bancarrota.

El problema de trabajar por separado las razones financieras es que los resultados son susceptibles a caer en ambigüedades o en interpretaciones erróneas, por ejemplo, una empresa con rentabilidad muy pequeña y solvencia dudosa, podría pensarse que tiene indicadores de estar en bancarrota pero si la empresa tiene la liquidez suficiente se puede considerar que el problema no es tan serio. Ahora, una extensión bastante directa sería evaluar el comportamiento de los resultados en conjunto, que es precisamente el trabajo que Altman realizó ayudado por el análisis discriminante. La pregunta a

responder fue ¿cuáles son las razones que más deben importar de entre todas las disponibles? y, ya que se tiene el conjunto de razones efectivas, ¿cómo ponderarlas de manera que sirvan objetivamente para predecir la bancarrota?

En su primer estudio, Altman llamó  $Z$  al resultado de la función discriminante. De este modo, con la información de las razones financieras de empresas del sector manufacturero concluyó que la función que mejor discriminaba a dichas empresas era:

$$Z = 1.2X_1 + 1.4X_2 + 3.3X_3 + 0.6X_4 + 1.0X_5 \quad (1.1)$$

Donde,

- $X_1 = \text{Capital de trabajo/Activos Totales}$ ,
- $X_2 = \text{Ganancias Retenidas/Activos Totales}$ ,
- $X_3 = \text{Ganancias antes de impuestos e intereses/Activos Totales}$ ,
- $X_4 = \text{Valor de Mercado de las acciones/Valor en Libros de la Deuda Total}$ ,
- $X_5 = \text{Ventas/Activos Totales}$  y
- $Z = \text{Función Discriminadora}$ .

Con ayuda de esta función discriminadora, Altman identificó que si  $Z \geq 2.99$ , la empresa no tendría problemas de insolvencia en el futuro; si  $Z \leq 1.81$ , entonces la probabilidad de que la empresa se fuera a bancarrota era alta si las condiciones en las que estaba persistían. Ahora, si  $1.81 \leq Z \leq 2.99$  entonces no se podría decir nada acerca de la empresa. A este rango Altman lo llamó “Zona Gris” o “Zona de la Ignorancia” ya que ahí cayeron empresas que pertenecían tanto al grupo de las empresas saludables como empresas que habían caído en insolvencia.

Después de realizar este primer estudio y comprobar la eficiencia del modelo, Altman intentó mejorar algunas deficiencias que tenía el primer modelo, en 1983 publicó un nuevo estudio en el que corregía la imposibilidad de evaluar el modelo en empresas privadas (Altman 1984 [2]). Se realizó un nuevo estudio, desde el inicio, y aunque se podía esperar que los coeficientes y las variables que habían salido seleccionadas en el primero cambiaran, no se tuvo un cambio diametralmente distinto; para poder realizar el estudio en empresas privadas usó el Valor del Capital Contable en vez del Valor de Mercado en el numerador de  $X_4$ . El resultado fue una función discriminadora muy parecida a la que se tenía inicialmente, las variables resultaron ser las mismas excepto por el cambio realizado a  $X_4$ :

$$Z_1 = 0.717X_1 + 0.847X_2 + 3.107X_3 + 0.420X_4 + 0.998X_5 \quad (1.2)$$

Con este resultado se tuvo que si  $Z_1 \geq 2.90$ , la empresa no tendría problemas de insolvencia en el futuro; si  $Z_1 \leq 1.23$ , entonces la probabilidad de que se fuera a bancarrota era alta si las condiciones en las que estaba persistían. Ahora la Zona Gris estaría entre 1.23 y 2.90.

Otro de los cambios introducidos por el mismo Altman fue eliminar la razón de *Rotación de Activos*, es decir  $X_5$ , para poder incluir empresas que no fueran del sector manufacturero pues no poder usar el modelo en empresas que fueran de otro ramo era una gran limitación. Así, en 1995 (Altman 1995 [6]) realizó otro estudio con el cual obtuvo la siguiente función:

$$Z_2 = 6.56X_1 + 3.26X_2 + 6.72X_3 + 1.05X_4 \quad (1.3)$$

Este modelo se utilizó para clasificar a pequeñas empresas mexicanas. Los criterios de clasificación eran que si  $Z_2 \geq 2.60$ , la empresa no tendría problemas de insolvencia en el futuro; si  $Z_2 \leq 1.10$ , entonces la probabilidad de que se fuera a bancarrota era bastante considerable si las condiciones en las que estaba persistían. Por tanto, la Zona Gris sería cuando  $1.10 \leq Z_2 \leq 2.60$ .

Además de los modelos de Altman, hay varios que se volvieron bastante conocidos como el modelo de Fulmer en 1984 (Fulmer 1984 [7]), el modelo desarrollado por Gordon L.V. Springate en 1978 (Springate 1978 [21]), o el CA-Score realizado por la Orden de Contadores Certificados de Quebec en 1987 (CA 1987 [14]).

Estos estudios tenían en común varias preocupaciones: mejorar la precisión de los estudios que los antecedían, ampliar los campos en los que se podían aplicar, corregir errores, actualizar la información y principalmente que las empresas pudieran corregir las acciones que había estado realizando con la suficiente antelación para que no se fueran a bancarrota o que las empresas tuvieran otra forma de conocer sus debilidades, reducir la incidencia de bancarrotas que habían sido presentadas y que se vieron incrementadas por las crisis financieras que había y también, aportar información valiosa para los administradores del riesgo.

El Análisis Discriminante aplicado a las empresas o instituciones puede aportar información importante a los inversionistas para que puedan decidir en dónde colocar su dinero con un panorama más amplio o más robusto. Sin embargo, existen inversionistas que tienen perspectivas no necesariamente aversas al riesgo pero sí conservadoras al momento de proponer una cartera de inversión. Estos inversionistas deben estar seguros de que sus inversiones tienen una probabilidad de pérdida muy pequeña para asegurar su rendimiento y suelen depositar su dinero cuando la calidad crediticia del deudor es de las mejores a nivel mundial, no cuando la probabilidad de bancarrota es grande.

En estos casos, el análisis requerido para tomar una decisión no debe de considerar instituciones que puedan caer en incumplimiento o en quiebra en el corto plazo, pero se pueden tomar en cuenta instituciones con perspectivas crediticias robustas, y hacer estudios que permitan seleccionar aquellas instituciones que destaquen dentro de este reducido grupo y de esta manera obtener una cartera con las empresas que se consideren con mayor solidez y menor riesgo crediticio dentro del conjunto de instituciones tomadas en cuenta. Considerar instituciones que fueran a caer en default o en incumplimiento de sus obligaciones en el corto plazo sesgaría los resultados a un modelo menos conservador ya que se decidiría entre instituciones financieras en default y aquellas con las mejores calificaciones crediticias.

### 1.0.2. Bancos Centrales como inversionistas.

El papel que los bancos centrales desempeñan como inversionistas es muy importante en la economía pues brindan liquidez dentro y fuera de su país, dinamismo y crecimiento en ésta ya que permiten que las instituciones lleven a cabo sus proyectos de inversión a través de los recursos brindados. Por otro lado, al financiar a las empresas un banco central obtiene rendimientos por dichas inversiones por lo que las reservas de éste se fortalecen siempre y cuando las instituciones que reciban el dinero efectivamente paguen su deuda con cierto interés.

Por otro lado, los contratos o actividades financieras que los bancos centrales realizan, involucran una gran diversidad de instituciones financieras alrededor del mundo. Además de su principal mandato, asegurar la economía del país así como de mantener un nivel óptimo inflacionario. Por lo anterior, es necesario que las instituciones financieras que solicitan un préstamo a un banco central o si quieren que sus emisiones de deuda sean compradas por éstos, cuenten con una gran calidad crediticia.

El dinero obtenido por los bancos centrales por sus inversiones, forma parte, entre otras cosas, de las reservas internacionales. La constitución de éstas varía en función de las necesidades del país, de la economía y de las regulaciones que éstos han establecido. Para facilitar la comparación entre las reservas de los bancos centrales el Fondo Monetario Internacional (FMI) designó una definición estándar. Los activos de reserva que pueden poseer los bancos centrales son los “activos externos que están disponibles de inmediato y bajo el control de las autoridades monetarias para satisfacer necesidades de financiamiento de la balanza de pagos, para intervenir en los mercados cambiarios a fin de influir sobre el tipo de cambio y para otros fines conexos (como el mantenimiento de la confianza en la moneda y la economía y servir como base para el endeudamiento externo)”<sup>3</sup>.

De acuerdo al FMI, el concepto de reservas se basa en las nociones de “control efectivo” de los activos por parte de las autoridades monetarias y “disponibilidad” de los activos desde el punto de vista de éstas. Por lo tanto, los activos de reserva son activos líquidos a disposición inmediata de las autoridades monetarias. Si las autoridades van a utilizar los activos para financiar desequilibrios en los pagos y para respaldar el tipo de cambio, los activos de reserva deben ser activos en moneda extranjera. Para ser denominado como líquido, los activos en moneda extranjera deben estar denominadas en las divisas más utilizadas internacionalmente como el dólar, el euro y el yen. Además, las monedas extranjeras convertibles pueden incluir el oro y los derechos especiales de giro (DEG<sup>4</sup>). En general, sólo los activos externos que sean efectivamente propiedad de las autoridades monetarias se consideran activos de reserva.

En particular, en México, las *reservas internacionales* son activos financieros que el banco central invierte en el exterior y que pueden ser fácilmente convertidos en medios de pago. Por esto último, su característica principal es la liquidez; es decir, la capacidad de los activos que la integran para liquidar, de manera expedita, obligaciones de pago fuera de nuestro país.

En el caso de México, estos activos son propiedad del Banco de México y tienen como objetivo

---

<sup>3</sup>FMI. Reservas Internacionales y Liquidez en Moneda extranjera.

<sup>4</sup>El DEG es un activo de reservas internacionales cuyo valor esta basado en una canasta de monedas integrada por el dolar de EUA, el euro, la libra esterlina y el yen. A partir de Octubre del 2016 también estará integrado por el renminbi chino.

contar con una reserva internacional para coadyuvar a la estabilidad del poder adquisitivo de la moneda nacional. Los activos en los que Banxico puede invertir sus reservas son los siguientes<sup>5</sup>:

- Los billetes y monedas metálicas extranjeros;
- Los depósitos, títulos y valores pagaderos fuera del territorio nacional, considerados de primer orden en los mercados internacionales; esto es, que tengan relativamente una alta calificación crediticia por parte de las agencias especializadas, y de amplia liquidez, denominados en moneda extranjera y a cargo de gobiernos de países distintos a México, de organismos financieros internacionales o de entidades del exterior, siempre que sean exigibles a plazo no mayor de seis meses, por ejemplo, los títulos de deuda y notas del Tesoro de E.U.A.;
- Los créditos a cargo de bancos centrales, exigibles a plazo no mayor de seis meses, cuyo servicio esté al corriente, tales como créditos que el Banco de México ha otorgado ocasionalmente a algunos bancos centrales de países de América Latina; y
- Los derechos especiales de giro (DEG) del Fondo Monetario Internacional.

Además de los activos mencionados anteriormente, los instrumentos financieros en que se invierte la reserva internacional en México, son los títulos de deuda de los países cuyas monedas se incluyen como divisas, así como los valores emitidos por organismos internacionales, instituciones bancarias y agencias respaldadas por gobiernos extranjeros. Y, por último, la reserva internacional puede invertirse en depósitos a plazo y a la vista que se constituyan en bancos del exterior que cumplan con ciertos requisitos establecidos por el Banco de México.

Como se mencionó anteriormente, la importancia de la administración de la cartera de inversión de un Banco Central radica en que el objetivo de la reserva internacional es contribuir a la estabilidad de los precios mediante la compensación de los desequilibrios en la diferencia entre los ingresos y egresos de las divisas, es decir, en la balanza de pagos de divisas del país. Por lo anterior, las reservas internacionales se pueden ver como un seguro para afrontar contingencias que pudieran reflejarse en una disminución de los flujos comerciales o de capital de la balanza de pagos, generados principalmente por desequilibrios macroeconómicos y financieros<sup>6</sup>, ya sean de origen interno o externo.

Nuestro objetivo es realizar un estudio que pueda servir como herramienta de decisión para los bancos centrales y tener un argumento más para decidir si invertir o no en alguna institución. La importancia de los estudios de este tipo es que los bancos centrales tienen un deber social importante además de que sus activos pertenecen a los habitantes del país. Por lo anterior, las decisiones tomadas por el comité que determina los activos en los que se invierten las reservas tienen un carácter mucho más delicado de lo que cualquier banco privado, exigiendo modelos que fundamenten las decisiones anteriores o que expliquen por qué fue una buena o mala inversión.

Para dicho estudio utilizaremos el Análisis Discriminante en una cartera de bancos seleccionados previamente para clasificarlos entre *confiables* y *no-confiables* y que, partiendo de este punto, se pueda predecir el momento en que una institución deba ser eliminada de la cartera de inversión.

<sup>5</sup><http://www.banxico.org.mx/ayuda/temas-mas-consultados/reservas-internacionales.html>

<sup>6</sup>Por ejemplo, las crisis causadas por la reducción de la actividad económica o en el comercio internacional, quiebras bancarias, escasa liquidez en los mercados financieros o subidas de tasas que provocan el encarecimiento del crédito.

Para determinar las instituciones que se seleccionaron para hacer el estudio, se decidió tener una muestra de instituciones pertenecientes al G-10 y algunos bancos pertenecientes al grupo conocido como los tigres asiáticos para conformar el grupo de bancos saludables y bancos con calificaciones bajas<sup>7</sup>. En este sentido, este estudio pretende clasificar la muestra en instituciones suficientemente confiables para que un Banco Central las considere como posibles acreedoras y, encontrar razones o variables que nos indiquen si hay instituciones que por alguna razón no deberían ser o no son tan confiables para los Bancos Centrales.

La inversión de las reservas internacionales se encuentra expuesta a diferentes tipos de riesgos, entre ellos el riesgo de crédito. Es importante desarrollar herramientas para la detección temprana de una posible situación desfavorable en una institución que pueda ser cuantificada objetivamente, complementariamente a la información que proporcionan, por ejemplo, las agencias calificadoras.

Tomando lo anterior en cuenta, en el siguiente capítulo describiremos los diferentes riesgos a los que están expuestas las instituciones financieras y que deben tomarse en cuenta para evaluar su calidad crediticia.

---

<sup>7</sup>En el Capítulo IV se detallará qué calificaciones consideramos como buenas y cuáles consideramos malas.

# Capítulo 2

## Riesgo

Sin importar qué riesgo se esté estudiando, siempre hay que tener en cuenta que todos los riesgos tienen cierta correlación entre ellos, es decir, cuando una empresa se encuentra en crisis o cuando tiene problemas no necesariamente se debe a que un sector en específico se haya derrumbado, sino que el aumento en el nivel del riesgo que se está observando puede haber sido causado por el desplome de algún sector que no está al alcance del análisis.

Por ejemplo, si se tiene una exposición al riesgo de liquidez muy fuerte y por alguna situación el banco se queda sin activos líquidos suficientes la probabilidad de que caiga en incumplimiento aumenta, es decir, aumenta el riesgo de crédito y, si la empresa se ve en dichos problemas las agencias calificadoras le bajarán su calificación y por tanto, habría menos interés en invertir en dicha institución, por lo cual le sería mucho más difícil sobreponerse a la crisis. Por otro lado, la caída de un sector de la empresa puede ser consecuencia de los demás riesgos, por ejemplo, las ganancias proyectadas a futuro de una empresa se ven afectadas por un movimiento en las tasas de interés o en los precios del activo que venden o producen, se podrían cancelar proyectos de expansión lo cual impediría la contratación de trabajadores o en un caso extremo podría incluso causar el despido de empleados.

Estas situaciones son muy comunes, por ejemplo, la caída en los precios del petróleo a finales del 2014 causó el despido de miles de trabajadores alrededor del mundo pues todas las empresas de este sector se vieron seriamente afectadas, este problema se originó entre otras cosas por el exceso de oferta de barriles de petróleo tanto en Medio Oriente como en Estados Unidos. Este tipo de eventos son muy difíciles de predecir y en un estudio de calidad crediticia no sería muy común un escenario como éste y sin embargo, este hecho causó un gran desequilibrio no solo en las economías que se sustentan principalmente por la venta de energéticos sino que se convirtió también en un problema inflacionario o deflacionario más bien y causó una gran volatilidad en los mercados accionarios.

Como se puede observar en el ejemplo anterior y sus consecuencias, las crisis en las empresas no sólo se ven afectadas por los procesos que poseen para administrar el riesgo, hay factores que no tienen nada que ver con el control de las empresas o su habilidad para predecir las crisis. Sin embargo, mientras más control se tenga de los riesgos internos, mejor preparadas van a estar las instituciones para enfrentar los factores extrínsecos que las afectan, además, teóricamente con el buen manejo y conocimiento de sus riesgos una empresa puede crecer con menores dificultades que las empresas que

no tiene los controles necesarios para enfrentar los riesgos a los que se exponen.

En este capítulo se describe el riesgo en términos generales y particularmente, describiremos el Riesgo Financiero en términos de los riesgos más representativos que tienen las instituciones o empresas. Después de este resumen se hablará del *riesgo de contraparte* o riesgo de crédito ya que estamos estableciendo esta herramienta de decisión en razón de buena o mala calidad crediticia de una institución financiera. Por último se hablará de la administración del riesgo y los esfuerzos que se han hecho a nivel mundial para mejorar las prácticas de las instituciones para evitar que se vuelvan a repetir los eventos que han provocado las crisis económicas a lo largo de la historia.

## 2.1. Generalidades del Riesgo

La palabra riesgo proviene del latín “risicare” que significa “atreverse”. La Real Academia Española define el riesgo como “contingencia o proximidad de un daño”. Independientemente del contexto, el riesgo está relacionado con la incertidumbre y por lo tanto con la noción de aleatoriedad. La diferencia entre incertidumbre y riesgo, como lo dijo Douglas Hubbard en su libro “*How to Measure Anything*” (Hubbard 2007 [23]), incertidumbre es la falta de certeza acerca de las posibilidades que puede tener un resultado, el estado en el que se puede encontrar un objeto o el valor que podría llegar a tener cierto activo; en este sentido la medición de la incertidumbre se reduce a un conjunto de probabilidades asignadas a un conjunto de respuestas. Por otro lado, el riesgo en un contexto económico es el estado de incertidumbre en donde alguna de las posibilidades involucran una pérdida, una catástrofe o un resultado inesperado; en este sentido la medición del riesgo estará relacionada con un conjunto de probabilidades y a la cuantificación de las pérdidas que conllevan dichas probabilidades.

Entonces, podemos definir el riesgo como la probabilidad de que suceda un evento específico dado que hay cierta incertidumbre acerca de los posibles resultados que dicho evento pueda tener, este evento puede ser o no ventajoso respecto a la posición que se tenga y estará relacionado con la ganancia o pérdida de cierto monto.

En los procesos de toma de decisiones en general y de los procesos de inversión en particular, el riesgo es *inevitable*, es decir, el beneficio que se puede obtener por cualquier decisión o acción que se tome, debe adoptarse necesariamente con la certeza de que habrá un riesgo inherente.

Al realizar un análisis de riesgos se involucran muchas ramas de estudio, entre ellas estadística, matemáticas, la experiencia adquirida a través de los años e incluso, la psicología. Por ejemplo, consideremos los siguientes escenarios: un inversionista que posee una acción de una empresa en particular; una compañía de seguros que vende una póliza; un individuo que decide cambiar una hipoteca de una tasa fija a una variable. Estos ejemplos tienen algo en común: el inversionista tiene hoy un activo que no sabe cuánto valdrá en el futuro. La aseguradora tendrá o no que cubrir los daños por el riesgo suscrito en la póliza. En el caso del hipotecado no hay manera de saber si esta decisión le reducirá o no los pagos futuros. Es decir, la aleatoriedad juega un papel crucial en la valuación, al día de hoy, del producto que tiene un inversionista, una aseguradora o el dueño de una casa.

En este trabajo discutiremos el riesgo en el contexto financiero. Empezaremos mencionando los principales tipos de riesgo que se pueden encontrar en finanzas, es decir, una forma de segmentar

los riesgos de una institución financiera para que se tengan áreas especializadas para atender las necesidades de cada tipo de riesgo aunque, cabe mencionar, para tener una administración de riesgos de calidad no solo hay que considerar áreas especializadas en cada riesgo, hay que considerar también áreas que de manera integral hagan un análisis de los riesgos que sostiene una empresa.

## 2.2. Riesgos Financieros

El riesgo financiero se puede dividir en varios tipos de riesgos, dependiendo de sus causas o de sus implicaciones. Una forma de dividir el riesgo es la siguiente:

1. Riesgo de Contraparte.
2. Riesgo de Liquidez.
3. Riesgo de Mercado.
4. Riesgo Operacional.
5. Riesgo País o Riesgo Soberano.
6. Riesgo Sistémico.

### **Riesgo de Contraparte.**

El riesgo de contraparte y el riesgo de crédito están altamente ligados ya que el riesgo de crédito es el riesgo de que un préstamo no pueda ser saldado por un deudor mientras que el riesgo de contraparte es la posibilidad de que una de las partes de un contrato financiero sea incapaz de cumplir con las obligaciones contraídas. Si por ejemplo, se tienen tres bancos A, B y C y supongamos que A le debe a C y el banco B le debe a A. Si B cayera en incumplimiento con A el riesgo de contraparte de C se incrementaría ya que ahora el banco A debe asumir las pérdidas causadas por el incumplimiento de B (Caouette 2008 [11]). Por otro lado, Lara Haro (Haro 2008 [9]) observa que hay otra vertiente del riesgo de crédito en la que se han incorporado eventos que afectan el valor del crédito, sin que necesariamente signifique incumplimiento del deudor. Esto ocurre típicamente por cambios en la calidad de un crédito, cuando una empresa calificadora degrada la calificación de una empresa o de las emisiones de una empresa, lo cual quiere decir que la calificadora considera que ha aumentado la probabilidad de incumplimiento de la deuda del emisor, y por lo tanto el crédito vale menos porque se descuenta con una tasa mayor.

En la mayoría de las instituciones financieras este riesgo es el que tiene una exposición mayor ya que el núcleo de las operaciones de un banco es realizar préstamos a sus clientes, además, de acuerdo a Caouette, el riesgo de contraparte puede elevarse aún más gracias al gran apalancamiento de los derivados en los mercados OTC.

### **Riesgo de Liquidez.**

Se refiere a la pérdida potencial que puede sufrir una institución al requerir una mayor cantidad de recursos en un periodo de tiempo corto o de manera inmediata para financiar sus activos a un costo posiblemente inaceptable. El aumento en el costo puede deberse a que el fondeo fue solicitado en una época de crisis en la institución provocando que los créditos que están dispuestos a concederle sean con una tasa mayor. Los bancos son muy sensibles a las variaciones en las tasas de interés, por lo tanto, el manejo de activos y pasivos (Asset-Liability Management) se convierte en una de las ramas de la administración de riesgos que cubre los costos inaceptables para las instituciones. El riesgo de liquidez cubre también otro aspecto, cuando una institución posee activos o portafolios de poca demanda se dificulta venderlos para transformarlos en efectivo o si se logran vender pueden ser pactados a un precio menor y así obtener el efectivo en un plazo razonable. Este riesgo se presenta en situaciones de crisis, cuando en los mercados hay únicamente vendedores y además puede provocar serias pérdidas para la institución al aceptar acuerdos injustos para librarse de la crisis (Haro 2008 [9]).

Por lo que mencionamos en el Capítulo I este riesgo está muy ligado con los objetivos de los bancos centrales pues si hay demasiada liquidez, se genera un sentimiento generalizado de bienestar que en situaciones extremas podría causar exceso de consumo y por lo tanto se podría disparar la inflación, lo cual implica también un descontento para la población. Sin embargo, actualmente varios Bancos Centrales están inyectando liquidez en las economías, sobre todo en la Euro Zona y Japón, pues si en una economía no hay suficiente liquidez, se desmotiva el consumo lo cual provoca que los precios se reduzcan o no crezcan al nivel adecuado, causando el fenómeno de deflación que a su vez genera que las empresas tengan pérdidas en el caso de no vender lo suficiente o ganancias menores de las esperadas que, en cualquier caso, provoca que no se puedan cumplir las metas fijadas y por lo tanto despedir a trabajadores o frenar el aumento de precios que al final afecta el bienestar de una población.

### **Riesgo de Mercado.**

Se refiere a la pérdida o ganancia potencial del valor de un activo financiero debido a cambios en los factores de riesgo que subyacen o determinan la posición de dicho activo (Mcneil 2005 [1]). Algunos ejemplos de factores de riesgo son las tasas de interés<sup>1</sup>, el tipo de cambio entre divisas<sup>2</sup> y el subyacente al que está referenciado un derivado<sup>3</sup>, entre otros. También se puede definir como el riesgo potencial de que el valor presente neto de un portafolio se mueva adversamente ante cambios en las variables macroeconómicas que determinan el precio de los instrumentos que componen una cartera de valores (Haro 2008 [9]).

---

<sup>1</sup>Por ejemplo, durante la crisis de Grecia, las tasas de interés daban grandes saltos día a día dependiendo de las expectativas del mercado acerca de si llegaban o no a un acuerdo para reestructurar la deuda del país.

<sup>2</sup>Por ejemplo, la apreciación del dolar ante una gran canasta de divisas en el mundo.

<sup>3</sup>Por ejemplo, el precio de los derivados de commodities (como el petróleo, gas, metales o el maíz) varían mucho dependiendo de la temporada o del clima que afecta al subyacente.

### Riesgo Operacional.

Se define como riesgo operacional a la pérdida potencial, directa o indirecta, de una entidad debido a fallas de las personas dentro de la institución, es decir, errores humanos, fallas de procedimientos internos, de sistemas informativos, por fraudes y pérdidas por daños en los activos de la institución, por ejemplo incendios en un edificio o derrumbes por temblores. De acuerdo con el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (CSBB<sup>4</sup>) el riesgo operacional puede tener varias definiciones de acuerdo a las regulaciones de cada país, sin embargo, sin importar cuál sea la definición, esta debe “abarcar el amplio abanico de riesgos operativos” para poder moderar las pérdidas operativas graves. Este abanico incluye fraudes internos y externos, daños de activos materiales, reclamos de empleados, errores o caídas del sistema informático y los errores en la ejecución, entrega y procesamiento de la información<sup>5</sup>. Estos eventos obviamente producen pérdidas, tanto directas como indirectas. Las técnicas de cómputo de riesgo operacional se enfocan tanto en la frecuencia de tales episodios como en los montos en juego o severidad por cada línea de negocio de una institución financiera. Para administrar este riesgo las instituciones financieras crean reservas de capital que puedan absorber estas pérdidas además de procurar tener una buena comunicación entre áreas y una jerarquización de responsabilidades bien establecida.

### Riesgo país o Riesgo Soberano.

De acuerdo a John Caouette (Caouette 2008 [11]), este riesgo es crediticio y además, el riesgo país y el riesgo soberano son ligeramente distintos aunque suelen considerarse o valuarse como uno mismo gracias a que están muy correlacionados. Caouette define al riesgo país como el riesgo de que todas las obligaciones actuales puedan ser afectadas por los factores económicos del país, es decir, por crisis y problemas económicos del país o su situación política, así como el riesgo de transferencia<sup>6</sup>. Mientras que el riesgo soberano es el riesgo de que un país, a través del Banco Central, anule, retrase o realice cambios en sus obligaciones. En cualquier caso, este riesgo se refiere a la capacidad de las instituciones dentro de un país de responder a sus obligaciones en moneda extranjera con sus contrapartes.

Así, estos riesgos sirven como medida de la capacidad y compromiso del banco central del país de poner a disposición de los emisores las divisas necesarias para el servicio de la deuda, incluida la del gobierno central. El análisis del riesgo país se centra en la posible dificultad de generar divisas debido a problemas políticos o económicos en un país y en la existencia de problemas de liquidez a corto plazo; en concreto, se buscan problemas estructurales, anomalías o rigideces que puedan reflejar vulnerabilidades a largo plazo en la generación de riqueza en el país<sup>7</sup>.

---

<sup>4</sup>[www.bis.org](http://www.bis.org)

<sup>5</sup>Es decir, este riesgo administra las pérdidas causadas por ejecuciones de operaciones no autorizadas, robos por parte de los empleados, robos de tarjetas de crédito, fallos del hardware o del software, solicitud de indemnizaciones por parte de los empleados, infracciones a las normas de seguridad e higiene, transferencias realizadas a un destino equivocado, entre otras.

<sup>6</sup>El riesgo de transferencia se refiere al potencial aumento o disminución del valor de un bono o un activo causado por el aumento de impuestos transfronterizos o por el tipo de cambio.

<sup>7</sup>Por ejemplo, durante el 2016 principalmente por la caída de los precios del petróleo, en ciertos países de Latinoamérica hubo empresas que incurrieron en pérdidas por la imposibilidad de pagar materia prima en dólares.

### Riesgo Sistémico.

Es el riesgo de que la crisis económica o financiera de un sector/institución financiera se propague a través de todo el sistema financiero o, dicho de otra manera, la caída simultánea en incumplimiento de las empresas o instituciones financieras dentro de un sector. A nivel global, es el riesgo de que las alteraciones en un sistema financiero sean capaces de desestabilizar la macroeconomía<sup>8</sup>. De acuerdo al CSBB para administrar este riesgo no es suficiente reforzar o aumentar las reservas de las instituciones financieras individualmente ya que en épocas de crisis como la del 2007-2008, se demostró que el riesgo del sistema en conjunto sobrepasó la suma de los riesgos de cada entidad.

Para mitigar este riesgo los reguladores del sistema financiero exigen a los bancos o empresas que puedan causar este riesgo en mayor medida que las demás, es decir, aquellas instituciones que tengan acuerdos de grandes montos con más instituciones, tener reservas con niveles más conservadores y, por otro lado, reducir la prociclicidad<sup>9</sup> del sistema financiero, lo cual dispara la volatilidad en los mercados.

### Otros tipos de riesgos financieros.

Existen otros riesgos financieros a los cuales está expuesta una empresa, entre ellos, el *riesgo legal*, es decir, la pérdida potencial de una empresa al no poder exigir jurídicamente el cumplimiento del pago de una contraparte que haya caído en incumplimiento de sus obligaciones; el *riesgo de reputación*, que se refiere a la pérdida potencial de una institución por no lograr contraer oportunidades de negocios o pérdida de mercado causado por el desprestigio de la institución por falta de capacitación del personal clave, fraude o errores en la ejecución de alguna operación<sup>10</sup>. Pero en última instancia, estos riesgos pueden ser incorporados a alguno de los riesgos anteriores por las consecuencias que generan aunque se vuelve muy complicado el modelaje de éstos.

Una efectiva administración de riesgos es la que considera toda la amplitud de los riesgos que puede generar una transacción. Por ejemplo, en el riesgo de mercado se analiza la volatilidad o varianza, la estructura de la relación de las variables implicadas a través de las correlaciones por ejemplo, sin embargo, en cada transacción hay varios riesgos relacionados: el riesgo de crédito se presenta de manera natural pues en todo momento la contraparte puede caer en incumplimiento incluso tan tarde como en la fecha de liquidación y deshonorar el acuerdo; el riesgo operativo por fallas en el sistema, fallas humanas o que el precio esté mal calculado. Por ejemplo, comprar una opción OTC<sup>11</sup> implica un riesgo de mercado naturalmente ya que se puede ganar o perder de acuerdo a los movimientos del subyacente, pero al mismo tiempo implica también un riesgo de crédito al estar expuesto a que una de las contrapartes no cumpla con sus obligaciones y en todo acuerdo o transacción se tiene un riesgo

---

<sup>8</sup>www.bis.org

<sup>9</sup>La prociclicidad se refiere a la ampliación de los altibajos de la economía, por ejemplo, en el mercado accionario subidas exageradas del precio de una acción motivadas por buenos resultados trimestrales de la empresa y caídas abruptas por datos negativos del sector en general.

<sup>10</sup>Por ejemplo, la reputación dañada de la automotriz Volkswagen hacia finales del 2015.

<sup>11</sup>Un mercado Over the Counter es un mercado regulado estrictamente pero a diferencia de un mercado organizado aquí los productos financieros se pactan de acuerdo a las necesidades de cada una de las partes involucradas sin una cámara de compensación, en el mercado organizado sólo se venden productos previamente estructurados.

operacional.

## 2.3. Riesgo de crédito

De acuerdo a Caouette (Caouette 2008 [11]), el riesgo de crédito es el más antiguo en el mercado financiero, pues nace intrínsecamente de los préstamos de los cuales se tienen datos desde 1800 a.C. y es la probabilidad de que no se reciba una cierta suma de dinero en un determinado periodo. La probabilidad de que sea entregado el monto de la deuda está dada por la incertidumbre acerca de la condición del deudor.

La exposición al riesgo de crédito de una institución financiera antes de pactar un acuerdo entre contrapartes, es estimada a través de ciertos pasos que a través de los años se han homogeneizado entre los bancos, se trata de procedimientos que establezcan un filtro a las instituciones de tal forma que cuando se pacte un acuerdo se tenga a priori un grado suficiente de confianza. Sin embargo, antes de la crisis de los 90's, la concesión de un crédito no tenía los fundamentos suficientes pues los bancos antes que preocuparse por la rentabilidad del préstamo o su efecto en la cartera total preferían cuidar la relación con el cliente, lo cual fue evidenciado por esta crisis. Sin embargo con el paso del tiempo fueron mejorando estos criterios de decisión aunque, como se pudo ver en la crisis del 2007-2008, no fueron suficientes estas mejoras (Caouette 2008 [11]).

Cada banco realiza un estudio acerca de las capacidades del solicitante –la proporción de recursos propios que empleará, factores que se requieren para que se realicen los pagos, el análisis de los estados financieros, la eficiencia y la relación entre costos e ingresos, la rentabilidad del solicitante–, de sus cualidades –el historial crediticio y la cultura del crédito del solicitante– y de las estrategias que tiene el solicitante –objetivos, metas y desarrollo de un plan de pago.

Dicho procedimiento está basado en diferentes aspectos que las instituciones que realizarán el préstamo tendrían que investigar acerca del solicitante: **conocer** al sujeto de crédito, su solvencia moral y económica y su disposición para cumplir con los compromisos con terceros; medir su **capacidad** de pago mediante un análisis financiero exhaustivo; revisar la estructura de **capital** a fin de determinar la capacidad de endeudamiento estimando la proporción de recursos propios en relación con los recursos de terceros; establecer el **colateral** suficiente y adecuado para recuperar la inversión<sup>12</sup>; y finalmente, hacer un análisis de las **condiciones cíclicas** en las que se encuentra, es decir, que tanto puede disminuir su calidad crediticia cuando la economía donde opera en condiciones de volatilidad. (Haro 2008 [9]).

Sin embargo, este método requiere de un gran número de personas y tiempo para obtener toda la información necesaria y después analizarla. Además, mientras más grande es la institución que solicita el préstamo, la complejidad del procedimiento será mayor y menos homogénea de lo que se quisiera para facilitar el estudio.

Por lo anterior, las instituciones financieras se han forzado a establecer procedimientos estadísticos y computacionales para evaluar su exposición al riesgo de crédito y que determinen la probabilidad

---

<sup>12</sup>El colateral de un instrumento se refiere a las garantías de pago en caso de incumplimiento.

de incumplimiento o impago de sus contrapartes.

Cuando un banco le brinda a una cliente o contraparte recursos, el banco tiene un monto positivo de exposición al riesgo con esta contraparte, es decir, tiene un riesgo de crédito. De acuerdo a Alfonso de Lara (Haro 2008 [9]) un aspecto clave en el riesgo de crédito es la dependencia del tiempo, es decir, el riesgo de crédito es una función del riesgo de mercado en la vida remanente de una transacción con la contraparte en donde los factores de riesgo asociados son la probabilidad de incumplimiento y la tasa de recuperación del préstamo; la tasa de recuperación es la proporción de la deuda que aún no se ha pagado y que puede ser recuperada al momento del impago la cual es pactada al inicio de la transacción. Esta dependencia en el tiempo complica medir, reportar y controlar el riesgo crediticio.

Entonces, para calcular la exposición al riesgo de crédito asociado a una contraparte se tiene una función muy sencilla de tres parámetros:

1. El monto de la exposición de riesgo de la contraparte.
2. La probabilidad de incumplimiento o impago.
3. La tasa de recuperación.

La siguiente ecuación simboliza lo señalado:

$$\text{Pérdida por riesgo de crédito} = P * X * (1 - R) \quad (2.1)$$

Donde,  $X$  es el monto que aún no ha pagado la contraparte,  $P$  es la probabilidad de impago o incumplimiento, y  $R$  es la tasa de recuperación.

Sin embargo, hay una diferencia entre la exposición al riesgo de crédito en un préstamo y en un derivado. En el primer caso sólo se necesita que el deudor incurra en default o que se encuentre en crisis, así la exposición sería la suma de los flujos pendientes de pago más los intereses que no se hayan pagado. En operaciones con derivados como el forwards o los swaps, la pérdida ocasionada cuando una contraparte entra en crisis, puede ser compensada reemplazando el derivado en el mercado. El costo de reemplazar el flujo de efectivo remanente dependerá del precio del subyacente y de las tasas de interés en el mercado cuando el evento ocurra. Entonces, la exposición al riesgo de crédito puede ser positiva o negativa dependiendo de las condiciones del mercado, en caso de que sea negativa entonces no habrá pérdida aún cuando la contraparte incurra en default. Por lo anterior, para que haya una pérdida deberían de pasar dos cosas: que la contraparte incurra en default y que el costo de reemplazo sea positivo<sup>13</sup>.

Al riesgo de reemplazo también se le conoce como riesgo implícito y se calcula a través del Valor en Riesgo (VaR), el cual es una medida que indica el máximo de pérdidas esperadas que se podrían tener con cierto grado de confianza y en un periodo de tiempo predeterminado.

Sin embargo, la complejidad existente en materia de riesgo crediticio consiste en que la distribución de rendimientos no se comporta exactamente como una variable aleatoria parametrizable

---

<sup>13</sup><http://group30.org/publications>

Para el cálculo del VaR se necesita de una distribución y típicamente se utiliza la Normal con la media y varianza de la muestra que se tenga. Sin embargo, la complejidad existente en materia de riesgo crediticio consiste en que la distribución de rendimientos no se comporta exactamente como una variable aleatoria Gaussiana con los parámetros mencionados de la muestra y, por ello, se requieren técnicas más sofisticadas para su cálculo, que se aproximen más a la realidad o, más herramientas con las que se pueda hacer el análisis y así, a través de la comparación de los resultados, entender un poco más el comportamiento de dicho riesgo y sus afectaciones.

De acuerdo al G-30, al estar expuestos al riesgo de crédito se debe considerar dos aspectos relacionados con la probabilidad de incumplimiento al día de hoy y la probabilidad de incumplimiento en algún momento entre el día de hoy y el término del contrato. Es decir, hay que tener presente el costo de reemplazo si la contraparte incumple hoy y el estimado del costo de reemplazo razonable si la contraparte incumpliera en un futuro, y aunque el G-30 hace esta recomendación para las exposiciones al riesgo de crédito cuando el acuerdo es de derivados, es apropiado decir que estas dos preocupaciones se pueden aplicar a cualquier tipo de activo al que haya que evaluar el riesgo de crédito. Para conocer estas dos cuestiones se debe calcular la *exposición actual* de la transacción, en términos del valor de mercado y; la *exposición potencial* de la transacción, o sea, un estimado de lo que costaría reemplazar la transacción en el futuro ya sea a través de una vía jurídica o el costo estimado, o pérdida del valor de la deuda al venderlo a empresas compradoras de la cartera vencida del banco. Es decir,

$$\text{Riesgo de crédito} = \text{Riesgo actual} + \text{Riesgo potencial}.$$

### 2.3.1. Modelos de estimación de las probabilidades de incumplimiento.

Después de analizar al riesgo de crédito es claro que las empresas que brindan créditos deben calcular las probabilidades de incumplimiento de los deudores. Algunos de los modelos utilizados en la práctica para medir riesgos de crédito son los siguientes (Haro 2008 [9]):

- **Modelos econométricos.** Entre éstos se encuentra el análisis discriminante, que puede ser lineal o cuadrático, análisis de regresión lineal múltiple, y modelos logit y probit para determinar probabilidades de incumplimiento. En estos modelos, las variables independientes son razones financieras y otros indicadores, así como variables externas que miden los efectos macroeconómicos<sup>14</sup>.
- **Modelo KMV.** Este modelo supone que el comportamiento de una empresa se puede modelar como una opción de compra (*call*) en el que el valor de la deuda es el precio de ejercicio, los activos son el subyacente y es posible determinar la volatilidad de los rendimientos de los activos, de manera que se puede encontrar la probabilidad de incumplimiento utilizando la teoría de derivados usando el modelo de *Black-Scholes*. La empresa KMV<sup>15</sup> también lo aplicó para empresas

<sup>14</sup>El análisis discriminante es en general usado para evaluar la calidad crediticia de las empresas o instituciones financieras mientras que los modelos lineales generalizados se utilizan también para personas por su capacidad para utilizar como predictores variables dicotómicas y politómicas así como variables continuas.

<sup>15</sup>Moody's Analytics desde que, en 2002, ésta comprará KMV.

privadas aunque, de acuerdo con Haro, este modelo es mucho más robusto para empresas que cotizan en la bolsa o empresas públicas.

- **Redes neuronales.** Son sistemas computacionales que intentan imitar el funcionamiento del cerebro humano emulando una red de neuronas interconectadas entre sí. Utilizan los mismos datos que las técnicas econométricas, pero básicamente son modelos de prueba y error.

Además de estos modelos, hay otros que tratan de replicar la probabilidad de incumplimiento de las empresas como el de *Creditmetrics* que hace una analogía entre las calificación de una empresa obtenida por una agencia calificadora, la probabilidad de transición entre una calificación y otra y la probabilidad de incumplimiento de la empresa o, modelos en los que se trata de ajustar una distribución a la probabilidad de incumplimiento en una cartera como *CreditRisk+* desarrollado por Credit Suisse en el que, dada una cartera de créditos separada en  $k$  sectores, se llega a que la probabilidad del número de incumplimientos sigue una distribución  $\Gamma(\alpha, \beta)$  tal que  $\alpha = \mu^2/\sigma^2$  y  $\beta = \sigma^2/\mu$ , con  $\mu$  y  $\sigma$  igual al promedio del número de defaults por sector y la desviación estándar correspondiente<sup>16</sup>. A partir de la distribución de la cantidad de defaults, el modelo concluye que la probabilidad de pérdida por sector, tiene una distribución Binomial Negativa con parámetro  $p_k = \beta_k/(1 + \beta_k)$ . Por lo tanto, la pérdida del portafolio es una suma de variables aleatorias Binomial Negativa, la cual puede ser programada fácilmente en un sistema y así, poder calcular la pérdida del portafolio debido al incumplimiento de algunos acreditados.

En la imagen 2.1 con una distribución Gamma(2, 1/2), la cual simula una tasa de un incumplimiento en promedio con una varianza de 0.5 por sector, podemos ver como mientras más grande es la cantidad de defaults, menor es su probabilidad, sin embargo, la distribución asigna probabilidades que no son despreciables a eventos en los que se tengan múltiples incumplimientos debido al sesgo hacia la derecha.

Independientemente del modelo que se escoja, el objetivo que se persigue es conocer, ya sea la categoría a la que pertenece la calidad crediticia de una empresa o individuo y/o su probabilidad de incumplimiento y, tratar de encontrar una tendencia para descubrir cuando una empresa o un contrato deteriora sus condiciones crediticias y así poder predecir estos movimientos o sucesos con anterioridad, y que la experiencia sirva para no repetir los mismos errores o para poder actuar en consecuencia a los movimientos en contra de los factores de riesgo.

### 2.3.2. Medición del riesgo de crédito.

Para medir cualquier riesgo hay que tomar en cuenta que éstos no son afectados por una sola variable, y para tener una buena administración del riesgo hay que considerar los factores que incrementan el riesgo y cómo se comportan entre ellos. Para medir el riesgo de crédito hay que considerar las probabilidades de incumplimiento o el cambio en la calidad crediticia del deudor, las correlaciones entre incumplimientos, la concentración de las carteras, la exposición de cada deudor y la tasa de recuperación en caso de incumplimiento de los deudores<sup>17</sup>.

<sup>16</sup>En el desarrollo del modelo de Credit Suisse [18], se detalla cómo con información sobre los acreditados de la cartera, se puede obtener los valores de  $\mu$  y  $\sigma$  de cada sector.

<sup>17</sup><http://www.banxico.org.mx/sistema-financiero/material-educativo/intermedio/riesgo.html>

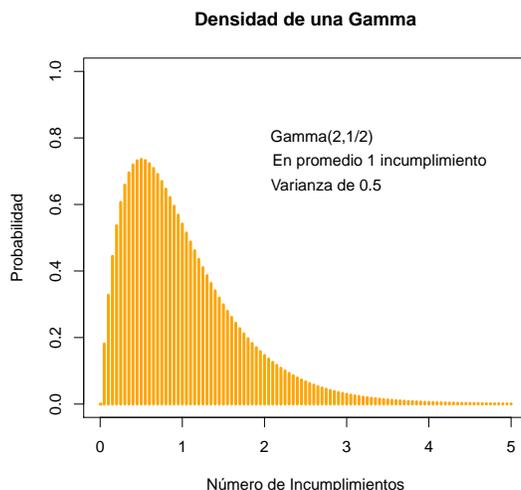


Figura 2.1: Modelación de la probabilidad de pérdida.

La *probabilidad de incumplimiento* es la medida de qué tan probable es que un acreditado deje de cumplir con sus obligaciones contractuales y por ser una probabilidad, los valores que puede tomar están en el intervalo  $[0, 1]$ . Cuando es imposible para un deudor incumplir con sus obligaciones por su calidad crediticia o por alguna otra razón, la probabilidad de incumplimiento es 0 pues es el valor mínimo que puede tomar. Cuando se sabe que seguramente un deudor no podrá cumplir con uno de los pagos de la deuda en el tiempo en el que se acordó, la probabilidad de que incumpla es 1.

La *correlación entre incumplimientos*, que es una forma de saber qué pasaría con los deudores de una cartera de crédito si uno de ellos cambia sus condiciones o estatus crediticio. La correlación entre los deudores se estudia “a pares”, de dos en dos, y en este caso miden la dependencia o grado de asociación entre el comportamiento crediticio de dos deudores. Puede tomar valores en el intervalo  $[-1, 1]$ , la magnitud de la correlación dependerá de qué tan fuerte es la relación entre el comportamiento de los deudores, para entender la correlación se tienen tres casos, cuando ésta es positiva, negativa o 0. Cuando es positiva, se tiene que el incumplimiento de un deudor hará más probable el incumplimiento del segundo deudor y, si un deudor tiene un mejor desempeño, será más probable que el segundo mejore su desempeño también. Cuando la correlación es negativa, se da el comportamiento contrario, es decir, el incumplimiento (o cumplimiento) de uno de los deudores hace más probable el cumplimiento (o incumplimiento) del otro. En el caso en que la correlación sea cero, si existe o no una relación entre los deudores, la correlación entre ellos no nos da información acerca de esta relación.

La *concentración de la cartera* se refiere a la proporción de todos los préstamos que tiene un banco que posee cada deudor, poseer a un deudor con una gran concentración de cartera puede ser muy riesgoso. La concentración se puede dar en muchos sentidos y es más peligrosa cuando se da en un sector económico<sup>18</sup>, en alguna región geográfica, o por tipo de crédito<sup>19</sup>. Normalmente se mide a través de algún indicador que resuma en un solo número cómo está distribuida, por saldos, una cartera de crédito o alguno de sus segmentos.

<sup>18</sup>Textil, automotriz, servicios, comercial, etc.

<sup>19</sup>Tarjetas de crédito, hipotecas, refaccionarios, etc.

La *exposición* es el saldo que aún no paga el deudor en el momento del cálculo o del estudio.

Por último, la *severidad de la pérdida* es el monto que podría perder el acreedor en caso de incumplimiento del deudor y se mide como una proporción de la exposición. Si a 1 le restamos la severidad obtenida tendremos un estimado de lo que se podría rescatar de la exposición del deudor, por lo anterior la proporción  $1 - S$ , donde  $S$  es la severidad de la pérdida, es la tasa de recuperación del crédito  $R$  de la que se habló anteriormente. La severidad representa el costo neto del incumplimiento de un deudor, es decir, la parte no recuperada al incumplir el acreditado una vez tomados en cuenta todos los costos implicados en la recuperación<sup>20</sup>.

## 2.4. Administración de riesgos

Una medición efectiva del riesgo es aquella que permite estimar con gran precisión las pérdidas que se puedan dar en el futuro. En cada decisión que tomamos, sin importar el ámbito de estudio, debemos conocer y responder a las probabilidades de pérdida o de fracaso que confrontan las decisiones que se vayan a tomar de manera intuitiva (por experiencia) o cuantitativa con herramientas que fundamenten las probabilidades de pérdida. La esencia de la administración de riesgos consiste en medir esas probabilidades en contextos de incertidumbre y actuar de la mejor forma en cualquiera de los escenarios que se presenten.

La función de la administración de riesgos es plantear un método racional y sistemático para identificar, reportar, entender, medir y controlar los riesgos en un entorno en el que prevalecen instrumentos financieros sofisticados, mercados financieros que se mueven cada vez con mayor rapidez y avances tecnológicos en los sistemas de información que posibilitan esto (Haro 2008 [9]). Por lo anterior, se necesita gente preparada con conocimientos técnicos para crear modelos con resultados apegados lo más posible a la realidad y que faciliten el análisis de los riesgos. El objetivo de la administración de riesgos puede expresarse en tres sentidos:

1. Asegurarse de que una institución o inversionista no sufra pérdidas económicas inaceptables, es decir, que no puedan ser soportadas por las reservas o por las políticas internas de la empresa o el perfil riesgoso del inversionista.
2. Mejorar el desempeño financiero de los agentes económicos, es decir, mejorar el rendimiento aumentando en la menor cantidad posible el riesgo contraído.
3. Definir mejores niveles de reservas para evitar nuevas crisis financieras, considerando que mientras más instituciones tengan una mejor administración de riesgos menos probable será que haya una crisis de gran escala.

Lo anterior se logra a través del análisis de manera tanto individual como conjunta de los riesgos contraídos al establecer las posiciones de una institución financiera, midiendo sus exposiciones, estableciendo controles de riesgo y comunicando esta información a los tomadores de decisión dentro de la

---

<sup>20</sup>Costo de recobro, los costos jurídicos o judiciales, incluso se puede tomar como costo el valor que pierde un préstamo al vender esa deuda impaga a alguna otra empresa a menor precio, etc.

institución, así como a las instituciones reguladoras y a los inversionistas para fomentar una cultura de transparencia de la información.

De acuerdo a Lara (Haro 2008 [9]), el proceso de la administración de riesgos se puede resumir en tres pasos, en primer lugar, la identificación de riesgos tanto de los riesgos principales o naturales de un área como de todos los riesgos que la pueden afectar y los riesgos que dicha área puede causar; en segundo lugar su cuantificación y control mediante modelos que intenten replicar o explicar la realidad y el establecimiento de límites de tolerancia al riesgo –establecidos por un consejo independiente– y; finalmente, la toma de decisión respecto al riesgo en cuestión, es decir, la aceptación, modificación o nulificación de dichos riesgos a través de estrategias como disminuir la exposición al riesgo, de instrumentar coberturas o de incrementar el nivel de las reservas de capital para cubrir los riesgos que fueron aceptados.

Pasó mucho tiempo en la historia de la administración del riesgo para que se conformara un grupo de especialistas en esta área y empezara a formular bases universales con las cuales poder administrar el riesgo que corrían las instituciones financieras, específicamente los bancos. En el libro “*Quantitative Risk and Management*” (McNeil 2005 [1]) se hace referencia a la interpretación de Nicholas Dunbar, físico y periodista financiero inglés, en 2009 interpretó un pasaje en el Código de Hammurabi de Babilonia en 1800 a. C. como una evidencia temprana del uso del concepto de opción para proporcionar cobertura financiera en el evento de un percance en la cosecha. Pero, no fue sino hasta el siglo XVII en que se tiene una explícita mención de las opciones, la cual apareció en Amsterdam hacia finales del siglo y es narrada por Joseph de la Vega, escritor español, en 1688 en su libro “Confusión de confusiones”, en una discusión entre un abogado, un trader y un filósofo que observaban la actividad de los becarios en Amsterdam. Esta discusión contenía lo que ahora reconocemos como opciones call y put Europeas, y una descripción de su uso en inversiones y en administración del riesgo, y hasta la noción de venta en corto.

Gracias a la crisis financiera que originó el cambio a un régimen flotante de los tipos de cambio por la caída del sistema de paridades fijas de Bretton Woods en 1973<sup>21</sup>, los gobernadores de los bancos centrales del G-10, que es el grupo formado por los 11 países más industrializados, consultaron y cooperaron en materia de economía, política monetaria y en materia financiera, crearon el Comité de Regulación y Supervisión Bancaria (CRSB) a finales de 1974, que después se renombró simplemente como Comité de Supervisión Bancaria (BIS por sus siglas en inglés).

El BIS es el principal organismo normativo internacional para la regulación prudencial de los bancos y constituye un foro de cooperación en materia de supervisión bancaria. Su objetivo es mejorar la regulación, la supervisión y las prácticas bancarias en todo el mundo con el fin de afianzar la estabilidad financiera. El Comité de Basilea no posee ninguna autoridad formal de supervisión supranacional, y por lo tanto, sus lineamientos no tienen fuerza legal. Mas bien, éste formuló estándares y lineamientos de supervisión extensos y recomendó estatutos de buenas prácticas supervisado por las autoridades individuales para dar paso a implementarlos a través de acuerdos detallados que son mejores para el sistema nacional con el objetivo de evitar crisis y atraer inversión local y extranjera, los países firman los acuerdos de Basilea y se comprometen a implementar las regulaciones que introduce el BIS.

---

<sup>21</sup>Muchos bancos tuvieron grandes pérdidas en monedas extranjeras, por ejemplo, en 1974 le quitaron la licencia al banco Herstatt en Alemania por tener exposiciones en monedas extranjera mayores a tres veces su capital, o el Franklin National Bank of New York en bancarrota mas tarde en el mismo año.

Dichos acuerdos pueden cambiar en ciertos aspectos dependiendo del país en el que se encuentren para atender a las especificidades de cada economía y sus propias regulaciones<sup>22</sup>.

El primer Acuerdo de Basilea de Supervisión Bancaria (Basilea I) en 1988 fue un paso importante dentro del estándar internacional de capital mínimo. La idea principal de este acuerdo era el riesgo de crédito y contraparte que para ese entonces era claramente la fuente de riesgo más importante en la industria bancaria pues salían de una crisis en la que se perdió una gran cantidad de dinero por los tipos de cambio llevando a la bancarrota o a la cesación de pagos. Por lo anterior, se propusieron niveles de capital que permitieran absorber las pérdidas en un escenario de crisis, y también se propusieron las probabilidades de impago, se exigió la comprobación de la calidad crediticia de las contrapartes, un nivel mínimo de la tasa de recuperación y un monto máximo de exposición.

Después de algunos años de este acuerdo se pudo observar que se había realizado desde un enfoque burdo y con insuficientes maneras distintas de medir el riesgo, pues no cubría con todos los posibles riesgos que podrían crear una crisis aunque, por supuesto, fue un gran paso tanto en la administración del riesgo como en la homologación de las técnicas para medirlo a nivel internacional.

Después de Basilea I los bancos notaron que era forzoso permitirse considerar efectos netos, i.e., la compensación de posiciones largas vs. cortas<sup>23</sup> bajo el mismo subyacente. En 1996 el CRSB prescribió el llamado “Modelo Estandarizado para Mercados de Riesgo”, además de permitir a las instituciones financieras más grandes (y por tanto más sofisticadas) optar por un modelo interno para modelar sus riesgos, el modelo del VaR.

Sin embargo, de acuerdo con el BIS (BIS [17]) el verdadero problema en el riesgo de crédito permaneció sin resolverse y los bancos continuaron reclamando que el Comité no estaba dando suficientes incentivos para diversificar los portafolios de crédito y que las reglas de regulación de capital actuales estaban lejos de ser lo suficientemente sensibles. Lo cual resultó en un segundo Acuerdo de Basilea.

Hacia 2001 se empezaron a consultar procesos para un nuevo Acuerdo de Basilea (Basilea II); el tema central fue de nuevo el riesgo de crédito, donde el objetivo de los bancos era poder usar un mejor y más sensible enfoque para asesorar el riesgo y sus portafolios de crédito. Los bancos optaron por un mayor avance basado en un enfoque de valuación interna que permitía el uso de métodos internos y/o externos de los sistemas de valuación de crédito cuando fuera apropiado. El segundo tema importante de Basilea II a consideración fue el riesgo operacional como una nueva clase de riesgo.

No fue sino hasta Junio del 2004 que es publicado el Segundo Acuerdo de Basilea (Basilea II) el cual avanza en las aportaciones para una mejor administración del riesgo. Este acuerdo está fundamentado en tres pilares:

- Requerimiento mínimos de capital, el cual demanda el desarrollo y la expansión de reglas estandarizadas implementadas en Basilea I.
- La inclusión de revisiones de un supervisor de una institución de adecuación de capitales y un sistema interno de administración.

---

<sup>22</sup><http://www.bis.org/bcbs/about.htm> (BIS [17])

<sup>23</sup>En Basilea I con una posición corta sobre un subyacente y su cobertura se consideraba que el riesgo de dicha exposición correspondía a la suma del riesgo de ambos contratos y por tanto se sobrevaluaba el riesgo.

- Un sistema efectivo de apertura de información como una medida para fortalecer la disciplina del mercado y alentar las buenas prácticas bancarias.

Este nuevo marco de trabajo fue diseñado para mejorar los requerimientos de capital que ya se habían establecido como un reflejo de los riesgos subyacentes y para implementar las innovaciones financieras que habían ocurrido en los años posteriores a Basilea I. Estos cambios ayudaron a recompensar y alentar las continuas mejoras a las mediciones, al control del riesgo y a desarrollar significativamente la sensibilidad al riesgo de los requerimientos de capital. Además, se persiguió que se siguieran desarrollando mecanismos para medir el riesgo operacional.

Por otra parte, Basilea II también ayudó a implementar una mejor cooperación entre los colegios de supervisores, tanto foráneos como locales, en línea con el tercer pilar de este acuerdo. El avance de estos acuerdos permitieron que una gran cantidad de países fuera del Comité pertenecientes a Asia y América y a toda la Unión Europea firmaran y se comprometieran con el acuerdo junto con sus lineamiento.

Seguido de la publicación de Basilea II y aún antes de que Lehman Brothers cayera en banca rota en la crisis hipotecaria del 2008, volvió a ser evidente la necesidad de fortalecer el marco de trabajo de los acuerdos anteriores pues, en general, los bancos no tenían reservas adecuadas para el riesgo de liquidez, además de que estaban menospreciando este riesgo, tenían niveles de apalancamiento muy elevados y una mala administración de riesgos en general así como estructuras inapropiadas para incentivar las buenas prácticas de dicha administración. Por otro lado, gracias a la ampliación del sistema financiero, durante la década pasada se crearon instrumentos financieros que parecían ser muy atractivos gracias a una mayor rentabilidad y menor riesgo. Uno de los factores que promovió el crecimiento tan acelerado fue el régimen de regulación flexible que se tenía, basado en que la disciplina de mercado restringiría cualquier comportamiento irresponsable y en que la innovación financiera no concentraba el riesgo, sino que lo dispersaba (FMI [10]). Por lo anterior se evidenció la necesidad de una mejor regulación.

En respuesta a estos factores de riesgo, el Comité de Basilea emitió un lineamiento nuevo referente al riesgo de liquidez y su administración y supervisión; un año después emitió un nuevo paquete de documentos para reforzar el marco de trabajo de capital de Basilea II, con el objetivo de mejorar el tratamiento de las coberturas de posiciones, de las exposiciones en los libros de trading y del papel fuera de balance. Esta respuesta llevó a que en 2010 se enunciara Basilea III, como una reforma al paquete de liquidez y de capital, esta vez avalado por los líderes del G-20.

Basilea III está hecho para reforzar los tres pilares de Basilea II además de contener ciertas innovaciones, por ejemplo, el establecimiento de un resguardo de capital que permita, cuando una empresa cae en incumplimiento, pagar un mínimo de ganancias a los accionistas ordinarios, reservas de capital extra a los bancos que puedan provocar caídas sistémicas para evitar las crisis económicas generalizadas, establecer un mínimo de activos lo suficientemente líquidos para prevenir crisis económicas causadas o propiciadas por el riesgo de liquidez, entre otras (BIS [10]).

El reto de la administración de riesgos es adecuar las reservas de capital de acuerdo a la demanda de nuevos productos en el mercado, así como de perseguir una adecuada cultura financiera que promueva a las instituciones a compartir con el mercado sus resultados de manera periódica y a tiempo. Por otro

lado, uno de los retos actuales ha sido controlar las malas prácticas como el soborno y la influencia de terceros en decisiones de política que afectan la economía de los países, generalmente economías en desarrollo.

# Capítulo 3

## Análisis Discriminante

### 3.1. Generalidades del Análisis Multivariado.

El *análisis multivariado* es el estudio de la relación o el conjunto de relaciones en las que se involucran varias variables. En este sentido, el análisis multivariado no solo estudia el comportamiento por separado de cada variable sino que considera cómo cambia cada variable y también cómo son afectadas las demás variables por los cambios que tenga una de ellas.

Con la rapidez de las innovaciones tecnológicas, el procesamiento de las computadoras y la constante búsqueda de rentabilidad de las instituciones y empresas, se requieren de reacciones más rápidas, productos con mejores cualidades y una mayor oferta de servicios. Un requerimiento esencial en este proceso es la creación y gestión del conocimiento efectivo, es decir, aquel conocimiento que permite hacer las cosas más eficaces o que genera nuevos y mejores estudios. Además, hay una gran cantidad de información que ha sido almacenada y que está disponible para mejorar la toma de decisiones. Parte de esta información puede ser analizada y comprendida por estadísticas simples, pero gran parte de ésta requiere procedimientos más complejos, técnicas multivariadas que consideren la correlación entre las variables para convertir la información en conocimiento (Hair 2009 [12]).

De acuerdo a Hair (Hair 2009 [12]), el análisis multivariado se refiere a todas las técnicas estadísticas que analizan simultáneamente múltiples medidas de los individuos u objetos en un modelo. Para que un modelo se considere realmente multivariado, todas las variables deben ser aleatorias y estar relacionadas de manera que efectos diferentes no puedan ser interpretados correctamente por separado. Por otra parte, el propósito de un análisis multivariado debe ser medir, explicar y predecir el grado en que se relacionan las variables tanto explicativas como de respuesta que de ellas se pueda dar. El carácter de *multivariado* reside en las múltiples relaciones entre las variables y no solamente en un gran número de observaciones, poseer una gran cantidad de información mejora la predictibilidad de cualquier modelo estadístico, sin embargo, hay que considerar que no todas las variables de un modelo pueden ser significativas en la respuesta.

Aunque la raíces del análisis multivariado son la estadística univariada y bivariada, la extensión al dominio multivariado introduce conceptos adicionales y temas que hay que considerar. Estos conceptos

nacen de la necesidad de comprender conceptualmente los elementos básicos del análisis multivariado.

En la estadística multivariada existen dos tipos de variables, la variable cuyos valores definen cierto fenómeno, a esta se le conoce como variable dependiente pues sus resultados dependen del comportamiento o características explicadas por un conjunto de variables, a estas últimas se les conoce como variables independientes. Se usan combinaciones lineales de las variables independientes en el modelo como una de las herramientas básicas para explicar el comportamiento de la variable dependiente. Estas combinaciones son sumas ponderadas que ayudan a explicar el fenómeno en el estudio.

Las ponderaciones son determinadas por el modelo que se esté utilizando. Algunas veces, las combinaciones lineales pueden ser especificadas por el investigador, pero los pesos son determinados por la técnica multivariada para lograr un objetivo específico, es decir, en ocasiones se necesita que ciertas variables sean incluidas en el modelo por su significancia, sin embargo, el peso que posean cambiará de acuerdo al modelo, a su importancia o su escala. La combinación lineal de  $n$  variables  $(X_1 \dots X_n)$  está determinada como:

$$V = w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3 + \dots + w_nX_n$$

donde  $V$  es la variable dependiente, las  $X_i$  son las variables observadas y los  $w_i$  son los pesos determinados por el modelo a los cuales les diremos coeficientes de discriminación.

El resultado es el valor que representa la combinación del conjunto de variables que mejor representa el objetivo del análisis multivariado. En el *análisis discriminante*, el resultado de las combinaciones lineales tienen el fin de crear puntajes para cada observación que maximicen la diferencia entre los grupos en observación.

## Escalas de Medición

El análisis de la información involucra la identificación y medición del movimiento en un conjunto de variables, ya sea entre ellas mismas o entre una variable dependiente y una o más variables independientes. La clave está en la *medición* ya que no es posible identificar el movimiento a menos que se pueda medir. La medición es importante pues se debe representar con precisión el concepto de interés y hay que tomarla en cuenta desde el inicio de la modelación pues los modelos dependen de la escala de las variables, por ejemplo, si la respuesta es una variable dicotómica<sup>1</sup>, o si las variables explicativas no son continuas no se podría hacer una regresión lineal con dichas variables, en este caso, se tendría que hacer una transformación de las variables aunque sería preferible realizar otro modelo o a veces los modelos suponen que las variables están escaladas, y de acuerdo a esto, el cambio en una de las variables en un punto, es de la misma magnitud que el cambio en cualquier otra variable. La información puede ser clasificada en dos grupos, variables *cualitativas* y *cuantitativas*, dependiendo del tipo de atributos o características que representen (Hair 2009 [12]).

Las escalas de medición cualitativas se usan para describir un objeto asignándoles una etiqueta, éstas se dividen en dos grupos, las variables nominales y las ordinales. Las últimas son aquellas que están ordenadas de manera que se puede saber la cantidad de un atributo que posee la variable,

---

<sup>1</sup>Las variables dicotómicas son aquellas que solo pueden tomar dos valores.

mientras que las primeras, sólo indican la presencia de un atributo que, claramente, excluye los demás valores que pueda tomar la variable<sup>2</sup>.

Las escalas de medición cuantitativas son usadas cuando los sujetos difieren en el grado o el monto de un atributo en particular. Reflejan cantidad o valor relativo y son apropiadas para atributos que involucran monto y magnitud<sup>3</sup>. Las diferentes medidas cuantitativas son las escalas de *intervalo* y de *razón*.

Las escalas de intervalo o de razón proveen la mayor precisión y permiten hacer casi cualquier operación matemática, esto implica que se pueden realizar diferentes interpretaciones con estas escalas. Estas dos escalas tienen unidades de medida constantes entonces, la diferencia entre dos puntos adyacentes de cualquier parte de la escala es la misma. Las escalas de intervalo utilizan un punto cero arbitrario<sup>4</sup>, por lo que no se puede decir que cualquier valor en las escalas de intervalo sea un múltiplo de otro punto en la escala. Las escalas de razón son las que tienen mayor precisión ya que poseen cierta ventaja sobre las demás escalas además de tener un punto cero absoluto, todas las operaciones matemáticas se permiten hacer con las mediciones de las escalas de razón<sup>5</sup>.

Entender la diferencia entre estas escalas es fundamental para el análisis que se esté realizando por tres razones: **(1)** Se debe identificar qué escala se está usando para no definir incorrectamente datos cuantitativos cuando son cualitativos y viceversa para que el uso de la información no sea inapropiado. **(2)** Tanto las escalas de medición como las propiedades cuantitativas y cualitativas de las variables tanto dependientes como independientes son determinantes para la elección de la técnica multivariada que se aplicará a los datos. Y **(3)** las variables independientes pueden tener diferentes escalas por lo que es de gran importancia conocer si el modelo multivariado supone que las variables están escaladas o no, pues de lo contrario los cambios de una variable cuyo rango este entre 0 y 1 sería insignificante contra el cambio de una variable que tome valores en el intervalo  $(-100, 100)$ .

## Error de Medición

El error de medición se refiere a la habilidad de una variable o modelo de representar el valor real del fenómeno a medir. Hay varios factores que pueden afectar la medición de un modelo, desde errores por captura de datos, lo cual es usual en bases de datos amplias generadas por personas que capturan esa información, la imprecisión de la medida usada, es decir, que la medida o la elección del modelo no sea buena para representar un fenómeno o por imprecisiones en las respuestas que se usan para el estudio. Entonces, se debe asumir que todas las variables que se usan en las técnicas multivariadas tienen un grado de error de medición (Hair 2009 [12]).

Antes de hacer cualquier estudio, hay que analizar los datos para eliminar las observaciones con datos faltantes o incongruentes, es decir, errores de codificación, que no son errores de medición pero

---

<sup>2</sup>Ejemplos de valores que pueden tomar estas variables pueden ser los colores de ojos en el caso de las nominales, o las preguntas de satisfacción dentro de una encuesta de opinión, en el caso de las ordinales.

<sup>3</sup>Por ejemplo, el grado de satisfacción o compromiso con el trabajo.

<sup>4</sup>Un ejemplo de escalas de intervalo son las escalas de temperatura Celcius y Farenheit, con ellas se pueden registrar temperaturas debajo de su respectivo punto cero.

<sup>5</sup>El peso de los objetos es un ejemplo de esta escala, con esta medida podemos hablar en términos de múltiplos cuando se hable de la relación que hay entre dos puntos de esta escala, por ejemplo, 10Kg es el doble de peso que 5Kg.

tampoco aportan nada a la muestra en el estudio. Es importante tener una base de datos limpia para evitar generar resultados sobre elementos cuyas variables no fueron correctamente ingresadas.

Para evaluar el error de medición se debe tomar en cuenta dos características de las medidas, la *validez* y la *confianza*. La validez es el grado de precisión con el que los valores que toma una variable representan lo que se desea medir o mostrar<sup>6</sup>. La validez de una medida debe responder a una pregunta: ¿verdaderamente representa o describe el fenómeno u objeto que se desea medir? Esto quiere decir que los valores que tome la variable deben formar parte o ser un componente del fenómeno desde la definición misma de la medida y, por otro lado, que estos valores comprendan todos los posibles escenarios que pueda tener el fenómeno que se esté midiendo. Además, la validez de la medida también corresponde a la habilidad predictiva pues ésta es una característica necesaria para cualquier variable que se utilice en un estudio. Por otro lado, la confianza es el grado en el que los valores observados de la variable se apegan a las características reales del fenómeno en cuestión. Es importante, para cualquier medida, que dados una serie de experimentos, la variable muestre respuestas consistentes entre ellas y no que se haya ajustado la medida solamente a la muestra inicial.

El impacto en el error de medición y una confianza débil es un aspecto importante ya que no se puede observar directamente pues es intrínseco a las estimaciones de las variables. Es por eso que se deben implementar técnicas para aumentar la confianza y la validez de las medidas, las cuales se traducirán en mayor precisión en las variables de interés. Los resultados no deseados no siempre se deben a los errores de medición pero la presencia de dichos errores distorcionan las relaciones observadas y hacen menos potentes las técnicas multivariadas; reducir los errores de medición puede mejorar los resultados marginales o débiles y fortalecer las pruebas que se obtengan.

Usualmente se divide la muestra en *entrenamiento* y *prueba*, en el conjunto de entrenamiento se ajusta el modelo y posteriormente se toma la muestra *prueba* para evaluar qué tan bien calibrado está el modelo. De esta forma se elimina el sesgo que pueda haber al ajustar el modelo con toda la muestra y, además se pueden obtener errores en cada uno de los subconjuntos de la muestra y de esta manera observar dicho sesgo y la potencia del modelo<sup>7</sup>, aunque la potencia esté afectada por otros factores como el tamaño de la muestra, el nivel de significancia o el tamaño del efecto que exista al cambiar la correlación entre las variables o la media entre dos poblaciones.

## Modelos con Parsimonia

Las técnicas multivariadas están diseñadas para aprovechar la información brindada por varias variables en el análisis. Sin embargo, esta característica no se debe sustituir por el desarrollo del modelo conceptual antes de que el modelo sea aplicado, es decir, hay que conocer la construcción del modelo, los supuestos y si los resultados podrían tener alguna significancia práctica. Algunos modelos incluso son seriamente afectados por tener información innecesaria ya que la inclusión de cada variable nueva requiere de una cantidad cada vez mayor de información para obtener resultados precisos en el modelo, lo cual en ciertos casos no es una tarea fácil.

---

<sup>6</sup>Por ejemplo, si el modelo estadístico no permite variables continuas y se requiere medir el ingreso mensual, se pueden crear rangos de percepción salarial para discretizar la variable y asegurar la validez de la variable.

<sup>7</sup>Recordemos que la potencia es el grado de acertividad del modelo para determinar cuándo no hay que rechazar una hipótesis alternativa.

Cuando se realiza un análisis tratar de no omitir variables con un gran poder predictivo y significancia estadística es de gran importancia, sin embargo, también es de igual importancia no incluir información innecesaria y dejar que la técnica multivariada encuentre las variables relevantes por dos razones:

- i)* Las variables irrelevantes pueden mejorar el ajuste de los datos<sup>8</sup>, sin embargo, esto puede causar sobre-estimaciones de los datos causando que el modelo se apegue tanto a la muestra de prueba que no sea capaz de predecir el comportamiento de la población en general.
- ii)* Aunque las variables irrelevantes típicamente no sesgan las estimaciones de las variables relevantes, incluir a las primeras variables puede ocultar el efecto real que tienen las segundas por la multicolinealidad entre las variables. Cuando la multicolinealidad aumenta, la habilidad para definir el efecto de cualquier variable disminuye pues el comportamiento de una de las variables podría ser explicado por algunas de las variables irrelevantes, y al incluirlas, el poder de predicción de una variable se dividiría entre muchas más.

## 3.2. Análisis Discriminante

La clasificación ha sido uno de los problemas más importantes en el análisis de la información desde los tiempos de Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.), quien clasificó a los seres vivos como ahora los conocemos, vertebrados e invertebrados, hasta la actualidad en la que clasificamos regiones de la tierra conforme a las características del suelo por medio de una imagen satelital. El interés en clasificar una muestra o un grupo se debe a que de esta manera se pueden homogeneizar las características de cierto tipo de elementos y así obtener más información respecto a éstos como parámetro en un análisis futuro, en un estudio o en un reporte que facilite la comprensión de cierto fenómeno.

En estadística, la *clasificación* es el método utilizado para crear técnicas predictivas utilizadas para separar y clasificar nuevas observaciones a partir de una muestra de prueba.

El problema de clasificar un grupo de elementos tiene dos vertientes, cuando se conocen los posibles conjuntos a los que podrían pertenecer los elementos del grupo y cuando, a partir de las características de los elementos del grupo, se conforman conjuntos de elementos con características similares de tal manera que se diferencien entre ellos, en este caso, el analista podrá elegir la cantidad de conjuntos que contiene la muestra dependiendo del criterio que determine para detener el proceso.

En términos generales, en estadística a la primer vertiente se le llama clasificación supervisada y a la segunda clasificación no supervisada y para cada una de éstas, existen diferentes técnicas que nos ayudan a agrupar elementos con características similares, es decir a clasificarlos. Algunos ejemplos de técnicas del análisis supervisados son regresión logística y el análisis discriminante; por otro lado, el análisis de clusters y los árboles aleatorios son ejemplos de clasificación no supervisada.

---

<sup>8</sup>Por ejemplo, siempre que se aumente una variable en el modelo, el valor de la  $R^2$  para determinar qué porcentaje del fenómeno es explicado por el modelo aumentará ligeramente aún cuando la variable no posea relación alguna con la respuesta.

Este trabajo lo abordaremos desde una técnica de clasificación supervisada, el análisis discriminante. Esta técnica fué creada por Ronald Fisher alrededor de 1930 al querer diferenciar entre humanos y sus semejantes antropoides, años después fue fundamentado, robustecido y generalizado por Mahalanobis y Rao, entre otros llegando a ser unos de los modelos utilizados en economía para predecir la bancarrota o el estatus de ciertas empresas.

El análisis discriminante es aplicable en situaciones en las que la muestra puede ser dividida en grupos basándose en una variable cualitativa que caracterice las diferentes clases conocidas. El objetivo primordial de esta técnica es estimar la relación entre la variable cualitativa y un conjunto de variables independientes cuantitativas, es decir:

$$\begin{array}{rcl} Y_1 & = & X_1 + X_2 + \dots + X_n \\ \text{(cualitativa)} & & \text{(cuantitativas)} \end{array}$$

El análisis discriminante es la técnica apropiada si se quiere predecir el grupo al que pertenece una observación dado que se tiene información previa. La cantidad de grupos en los que se puede dividir una población depende del propósito y/o de la población en estudio, puede ser desde dos, tres o más grupos<sup>9</sup>. El problema de clasificación es aplicable en muchas áreas o ámbitos de estudio por ejemplo, en biología, medicina, asignaciones de créditos (*credit scoring*), el éxito o fracaso de un producto nuevo en mercadotecnia, saber qué carrera le conviene más a un alumno de acuerdo a sus intereses vocacionales, etc. En cada caso, los objetos pertenecen a algún grupo, y el objetivo es predecir o explicar las bases por las que se definen los miembros de cada grupo a través de un conjunto de variables independientes seleccionadas en el estudio.

En el ejemplo del *credit scoring* la variable dependiente indica si el sujeto es viable o no para la concesión del crédito e incluso, el máximo nivel de crédito que se le puede otorgar. Por otro lado, las variables independientes son todas aquellas que determinen la calidad crediticia de los sujetos, estado civil, nivel de ingresos, historial crediticio, patrimonio, etcétera.

El análisis discriminante involucra el desarrollo de combinaciones lineales de las variables explicativas que determinarán el valor de la respuesta. La discriminación se logra multiplicando a las variables por sus respectivos pesos para maximizar las diferencias entre los grupos que se definen *a priori*. Desarrollando este método se espera que las puntuaciones de los individuos dentro del mismo grupo sean cercanas mientras que las puntuaciones entre individuos de diferentes grupos se alejen lo más posible.

Cada elemento de la muestra obtiene un valor proyectado por el discriminante dependiendo de las características que posea; con estos valores sabemos en dónde se encuentra cada grupo. Al promediar los resultados de todos los individuos dentro de un grupo, encontramos la media muestral de dicho grupo. A la media de cada grupo se le llama *centroide*. Los centroides indican el valor en el que típicamente se deberían encontrar los miembros de un grupo en particular.

Por lo anterior, la comparación entre los centroides de los grupos muestra qué tan distanciados están los grupos ya que la comparación entre los grupos sólo se puede realizar en términos de la función

---

<sup>9</sup>La variable dependiente es la que dictará la cantidad de grupos si es por ejemplo, hombre-mujer o, bajo-medio-grande

de discriminación. La prueba para determinar la significancia estadística de la función discriminante es una medida generalizada de la distancia entre los centroides. Se calcula comparando las distribuciones de los puntajes por grupo obtenidos por la función discriminadora (Hair 2009 [12]). En la Figura 3.1 se muestran dos escenarios con los que se ilustra la implicación de tener centroides cercanos o lejanos. El primer par de distribuciones se cruzan en un área muy pequeña, lo cual quiere decir que la función discriminadora encontró variables independientes que al ser combinadas separaron casi por completo los grupos en el análisis, en este caso se puede aplicar el modelo a más individuos y determinar a qué grupo pertenecen; en cambio, el segundo par de distribuciones se cruzan en un rango mayor y por tanto, no hay suficientes elementos para distinguir las propiedades de los grupos por separado. El área en la que se cruzan las distribuciones representa el área en la que al discriminante le costará más trabajo identificar el grupo al que una observación pertenece, es decir, cuando un objeto del grupo A es clasificado como B y viceversa.

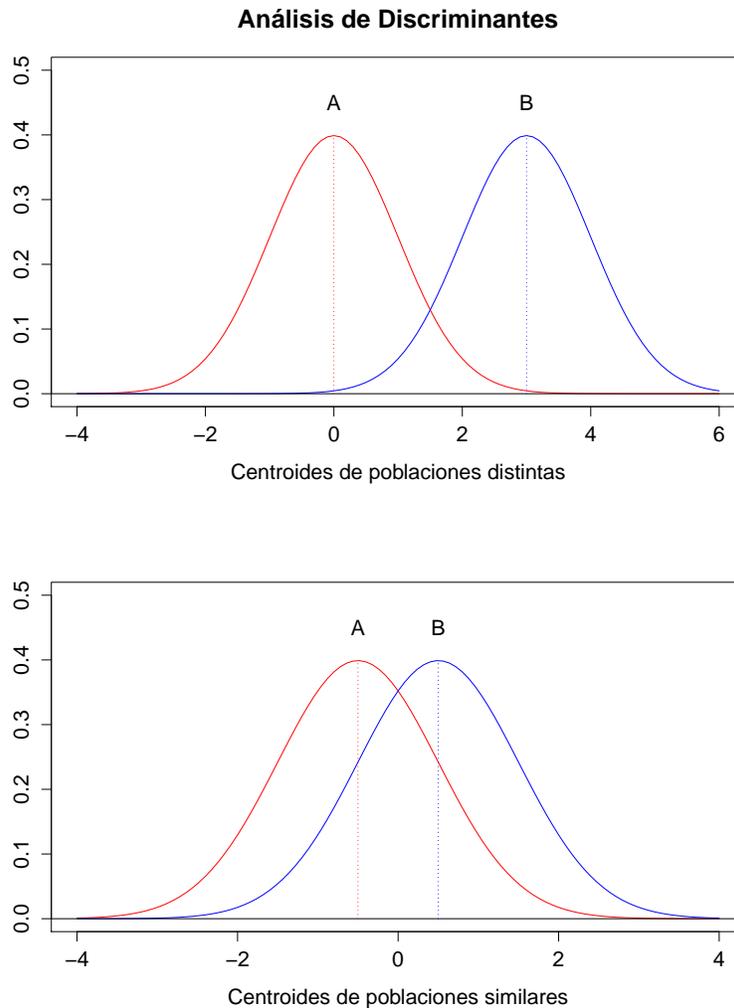


Figura 3.1: Gráfica de Diferencias entre Centroides.

El análisis discriminante es una técnica de reducción de dimensión, es decir, si hay más de dos grupos en el análisis, el análisis discriminante calculará más de una función discriminadora, se calcu-

larán  $g - 1$  funciones, donde  $g$  es el número de grupos. Con ayuda de las funciones discriminadoras se encuentran diferentes áreas asignadas a cada grupo para determinar a qué grupo pertenece un nuevo individuo. Si hay tres grupos, cada objeto será clasificado con base a dos funciones discriminadoras y así al graficar los resultados se podrá ver cómo dividen a la población las funciones discriminadoras. Por lo anterior otra de las ventajas de la técnica es la reducción de dimensiones en las que se trabaja, dicha dimensión es definida por las posibles respuestas de la variable explicativa (Hair 2009 [12]). Sin embargo, más allá de tres dimensiones aunque el análisis se puede hacer logrando buenos resultados no hay pruebas gráficas que puedan apoyar al análisis, lo cual dificulta la inferencia estadística que se pueda hacer.

### 3.2.1. Fundamentos del análisis discriminante

Lo anterior es un breve resumen de las características del modelo, en qué casos puede servir y en los áreas de trabajo en las que ha sido de ayuda. Sin embargo, esta técnica tiene también propiedades matemáticas que la fundamentan y definen. En esta sección se detallan estas características.

Comencemos por considerar  $g$  poblaciones o grupos  $\Pi_1, \dots, \Pi_g$ ,  $g \geq 2$ . Además, para cada población  $\Pi_j$ , hay una función de densidad  $f_j$  en  $\mathbb{R}^P$ , tal que si el individuo  $\mathbf{x}$  pertenece a la población  $\Pi_j$ , entonces  $\mathbf{x}$  tiene una función de densidad  $f_j(\mathbf{x})$ . El objetivo del análisis discriminante es asignar dentro de una de estas poblaciones a cada individuo con base a las características que presente o que lo definan, representadas por las entradas del vector  $\mathbf{x}$ .

Para determinar a qué grupo pertenece un individuo se necesitan criterios para determinar cuándo pertenece cada individuo a cierto grupo y cuándo no. Para lograr este objetivo se tienen ciertas reglas o criterios definidas. Para cada una de las poblaciones que mencionamos existe un subconjunto  $R_i$  en  $\mathbb{R}^P$  tales que su unión disjunta representa todo el espacio, es decir,  $\bigcup R_i = \mathbb{R}^P$  y  $R_i \cap R_j = \emptyset$  para cada  $i, j \in 1, \dots, g$  distintos. Se dice que  $d$  es un criterio de discriminación si  $d$  genera una división en  $\mathbb{R}^P$  delimitando las regiones  $R_1, R_2, \dots, R_g$ . Por lo anterior, el criterio  $d$  está definido por la siguiente expresión:

$$\text{asigna } \mathbf{x} \text{ a } \Pi_j \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \in R_j, \quad (3.1)$$

con  $j = 1, \dots, g$ . La clasificación será más precisa si  $\Pi_j$  tiene una gran concentración de probabilidad en  $R_j$  para cada  $j$  (Mardia 1995 [13]).

Si al inicio del estudio no se tiene información acerca de a qué población pertenece cada individuo el análisis se puede hacer desde una aproximación Bayesiana con probabilidades *a priori* y *a posteriori* o con otros métodos como los clusters.

Después de determinar la conveniencia de aplicar el análisis discriminante hay que estudiar la muestra para saber con qué información se cuenta, de qué variables se componen y qué podemos obtener de ellas. De acuerdo a Mardia, existen tres situaciones generales con las cuales se puede hacer el análisis discriminante dependiendo de qué tanta información se tenga de la muestra, si se sabe la distribución de nuestros datos, si se conocen las probabilidades asociadas a las poblaciones o, si no conocemos nada de la muestra en principio además de la cantidad de grupos que la componen.

Si se conocieran las probabilidades de pertenecer a cada grupo de todos los grupos, es decir,

las funciones de densidad  $f_i(\mathbf{x})$  con  $i = 1, \dots, g$ , entonces se puede hacer una función de máxima verosimilitud y determinar el grupo al que pertenece cada individuo, sin embargo, en la práctica esto es muy poco común. Una variante de esta situación es cuando se conocen las probabilidades de pertenencia dentro de cada grupo o población, en este caso se tienen que calcular algunos parámetros. La estimación se basa en una matriz de datos  $\mathbf{X}(n \times p)$  cuyos renglones están divididos en  $g$  grupos,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_g \end{bmatrix}$$

donde cada matriz  $\mathbf{X}_j$  representa una muestra de  $n_j$  individuos de la población  $\Pi_j$ .

Por último, está la aproximación empírica del análisis discriminante, basada en la función lineal discriminante que desarrolló Fisher en su modelo. Bajo esta aproximación no se asume una forma particular de las poblaciones  $\Pi_j$ , simplemente se basa en una regla ideada por Fisher con un procedimiento lógico que después se fundamentó con la distancia de Mahalanobis.

La Distancia de Mahalanobis es una forma de cuantificar el grado en que dos individuos se parecen o se diferencian. Esta métrica está estandarizada en términos de la varianza de las variables por lo que esta medida es preferible que la euclideana cuando las variables de cada individuo tienen escalas diferentes. La distancia de Mahalanobis entre dos individuos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  con matriz de varianza-covarianza  $\Sigma$  es la siguiente:

$$d_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.2)$$

Ahora, es importante saber criterios que permitan clasificar a los individuos de una muestra, estos criterios dependen de la información que se tenga o de la perspectiva que se desee adoptar. A continuación se presentaran algunos criterios de discriminación.

### 3.2.2. Regla de Máxima Verosimilitud

Consideremos que conocemos la distribución de las poblaciones  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_g$ . Al tratar de entender un fenómeno o de predecir el grupo al que pertenece un objeto, no siempre se puede estimar la distribución de la muestra ni la distribución de cada uno de los grupos que la componen. Sin embargo, dada una muestra suficientemente grande, se pueden estimar estas distribuciones y probar estadísticamente que la muestra sí tiene la distribución que se afirma con la suficiente confianza.

Una forma de escoger el criterio de decisión es realizar el estudio con diferentes criterios, comparar los resultados y escoger aquel que determinemos como el más confiable. La primera aproximación de la que hablaremos es el criterio de máxima verosimilitud. Denotemos por  $f_j(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_j(\mathbf{x})$  a la función de densidad de la  $j$ -ésima población,  $j = 1, \dots, g$ , para enfatizar que la verosimilitud en el punto  $\mathbf{x}$  es una función de la  $j$ -ésima población.

**Definición. 1.** *La regla de máxima verosimilitud para clasificar a la observación  $\mathbf{x}$  dentro de una de las poblaciones  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_g$  es asignar  $\mathbf{x}$  a la población que obtenga la mayor verosimilitud en  $\mathbf{x}$ .*

Es decir,  $\mathbf{x}$  será asignado a la población  $\Pi_j$  cuya probabilidad de pertenencia sea mayor a la probabilidad de pertenencia de  $\mathbf{x}$  a las demás poblaciones,

$$\mathbf{L}_j(\mathbf{x}) = \underset{i}{\text{máx}} \mathbf{L}_i(\mathbf{x}). \quad (3.3)$$

Si varias verosimilitudes tomaran el mismo valor entonces ninguna de ellas podría ser escogida y por lo tanto esta regla de decisión no tendría importancia práctica en el caso de verosimilitudes iguales. Sin embargo, podemos asumir que esto sucede con probabilidad 0, es decir

$$\mathbb{P}[\mathbf{L}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_k(\mathbf{x}) \text{ para alguna } j \neq k \mid \Pi_j] = 0$$

para toda  $j = 1, \dots, g$  (Mardia 1995 [13]).

Como se puede apreciar, dependiendo de la distribución de la población será la función de máxima verosimilitud, además hay que evaluar cada uno de los individuos en la población en todas las funciones de verosimilitud que se tengan –tantas como cantidad de grupos. Como en muchos otros modelos, los cálculos para determinar el resultado del modelo son relativamente sencillos si la distribución que subyace a la muestra es Gaussiana. El siguiente Teorema muestra la sencillez de la decisión en dos casos, cuando la muestra consta de dos o más grupos.

**Teorema. 1.** (a) Si  $\Pi_i$  es una población con distribución  $\mathbf{N}_P(\mu_i, \Sigma)$ , con  $i = 1, \dots, g$  y  $\Sigma > 0$ , entonces la regla de máxima verosimilitud asigna a  $\mathbf{x}$  a la población  $\Pi_j$ , donde  $j \in (1, \dots, g)$  es el valor de  $i$  que minimiza la distancia de Mahalanobis

$$(\mathbf{x} - \mu_i)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_i)$$

(b) Si  $g = 2$ , la regla será asigna a  $\mathbf{x}$  al grupo  $\Pi_1$  si

$$\alpha'(\mathbf{x} - \mu) > 0,$$

donde  $\alpha = \Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$  y  $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ , y al grupo  $\Pi_2$  en otro caso.

Este resultado de la regla de máxima verosimilitud es fácil de probar recordando que la función de densidad de una variable aleatoria gaussiana multivariada con media  $\mu$  y matriz de varianza  $\Sigma$  es

$$f(\mathbf{x}) = |2\pi\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right\}^{10}. \quad (3.4)$$

### 3.2.3. Regla de Discriminación Bayesiana

Primeramente recordemos la regla de Bayes. Supongamos que  $S$  es el conjunto de posibles eventos que pueden ocurrir en un experimento, y supongamos que se puede dividir en  $n$  subconjuntos disjuntos  $F_1, F_2, \dots, F_n$  mutuamente excluyentes tales que  $\bigcup_{i=1}^n F_i = S$  y  $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$ , en el que uno y solo uno

<sup>10</sup>La demostración se encuentra en el Apéndice 5

de estos eventos puede ocurrir. La regla de Bayes brinda una forma de determinar la probabilidad de que un evento  $E$  ocurra condicionando dicha probabilidad a que los eventos  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ocurran. El evento  $E$  se puede escribir como sigue,

$$E = \bigcap_{i=1}^n E F_i$$

ya que la unión de los  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  es el todo el posible espacio de eventos y donde  $E F_i$  es el evento  $E$  restringido al subconjunto  $F_i$ . Por lo anterior, se tiene que los subconjuntos  $E F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  son mutuamente excluyentes. Por lo anterior,

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E F_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E | F_i) \mathbb{P}(F_i), \quad (3.5)$$

Ahora, si queremos encontrar la probabilidad condicional de  $F_i$  dado que el evento  $E$  ya ocurrió tenemos que

$$\mathbb{P}(F_i | E) = \frac{\mathbb{P}(E F_i)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(F_i E)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E | F_i) \mathbb{P}(F_i)}. \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) es conocida como la regla de Bayes (Ross 2007 [20]).

Bajo el enfoque bayesiano, se necesitan conocer las probabilidades a posteriori para obtener una clasificación óptima (Hastie 2008 [22]). Para clasificar a una población se puede hacer uso de la regla de Bayes (3.6), supongamos que  $f_i(\mathbf{x})$  es la densidad condicional del elemento  $\mathbf{x}$  en la población  $i$  y sea  $\pi_i$  la probabilidad a priori de la  $i$ -ésima población, con  $i = 1, \dots, g$ , tal que  $\sum_{i=1}^g \pi_i = 1$ . Por (3.6) tenemos que

$$\mathbb{P}(G = i | X = \mathbf{x}) = \frac{f_i(\mathbf{x})\pi_i}{\sum_{k=1}^g f_k(\mathbf{x})\pi_k}. \quad (3.7)$$

Este enfoque se usa cuando, por ejemplo, en un consultorio médico, los pacientes son más propensos a tener gripa que a tener polio, en este caso la probabilidades a priori pueden ser determinadas por un experto de área, en decir, un médico. Otra situación más natural en caso de no tener un experto de área cerca es tomar en cuenta la cantidad de individuos en la muestra, si las poblaciones de todos los grupos en la base de datos no tienen el mismo número de individuos se considerará la proporción de individuos dentro del total de la muestra como probabilidades a priori.

Una vez que se establecen las probabilidades a priori, la regla de discriminación Bayessiana está dada por la siguiente definición.

**Definición. 2.** Si las poblaciones  $\Pi_1, \dots, \Pi_g$  tienen probabilidades a priori  $(\pi_1, \dots, \pi_g) = \pi'$ , entonces la regla de discriminación Bayesiana asignará la observación  $\mathbf{x}$  a la población tal que

$$\pi_i f_i(\mathbf{x}), \quad (3.8)$$

sea maximizado.

La función (3.8) puede ser vista como la verosimilitud *a posteriori* de  $\Pi_j$  dada la muestra  $\mathbf{x}$ . Nótese que en este caso, la regla de máxima verosimilitud es un caso particular de la regla discriminante Bayesiana en donde las probabilidades a priori son iguales.

Asumiendo que los datos siguen una distribución Gaussiana, se llega a un resultado muy parecido al del Teorema 1, y por supuesto, considerando todas las hipótesis necesarias, es decir, dos poblaciones con distribución normal multivariada con medias distintas pero matriz de varianzas y covarianzas igual, para asignar a  $\mathbf{x}$  a la población  $\Pi_1$  se tiene que cumplir que

$$\begin{aligned} & \pi_1 \mathbf{L}_1(\mathbf{x}) > \pi_2 \mathbf{L}_2(\mathbf{x}) \\ \Rightarrow & \log \{ \pi_1 \mathbf{L}_1(\mathbf{x}) \} > \log \{ \pi_2 \mathbf{L}_2(\mathbf{x}) \} \\ \Rightarrow & \log \{ \mathbf{L}_1(\mathbf{x}) \} - \log \{ \mathbf{L}_2(\mathbf{x}) \} > \log \pi_2 - \log \pi_1 \\ \Rightarrow & \alpha'(\mathbf{x} - \mu) > \log(\pi_2/\pi_1) \end{aligned}$$

con  $\alpha$  definido como en el Teorema 1,  $\alpha = \Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$ .

Entonces, la regla discriminante Bayesiana será

$$\text{asigna } \mathbf{x} \text{ a } \Pi_1 \text{ si } \alpha'(\mathbf{x} - \mu) > \log(\pi_2/\pi_1) \quad (3.9)$$

y a  $\Pi_2$  en otro caso.

### 3.2.4. Propiedades de las reglas de decisión

Las reglas de decisión tienen ciertas propiedades que ayudan a responder por qué se elige una u otra regla de decisión o por qué no se seleccionan probabilidades de pertenencia a los grupos aleatoriamente y se aplican los criterios de decisión posteriormente. Primero hay que notar que los criterios o reglas que mencionamos son deterministas, es decir, si  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$  (es decir, tienen las mismas características) entonces  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  serán asignados al mismo grupo siempre. De acuerdo al objetivo de este trabajo no tiene sentido hablar de una regla de asignación aleatoria ya que no se buscan decisiones aleatorias, sin embargo, lo único que se les pide a dichas reglas de asignación es que las probabilidades de asignar a  $\mathbf{x}$  a la  $j$ -ésima población,  $\phi_j(\mathbf{x})$ , sean tales que  $\sum \phi_j(\mathbf{x}) = 1$ .

Por otro lado, sabemos que teóricamente podrían existir  $\phi$ 's tales que  $\phi_i(\mathbf{x}) = \phi_j(\mathbf{x})$ , sin embargo, se supone que este tipo de eventos tienen probabilidad cero y por lo tanto son irrelevantes.

Ahora, la probabilidad de error, es decir, la probabilidad de asignar a un individuo  $\mathbf{x}$  en la población  $\Pi_k$  cuando en realidad proviene de la población  $\Pi_j$ , nos brinda mucha información ya que sirve de parámetro para medir la precisión del modelo de manera que si la probabilidad de error es muy parecida a la probabilidad de acertar en la selección, significa que el elemento  $\mathbf{x}$  es en realidad muy parecido a ambas poblaciones por lo que, elementos con características similares a  $\mathbf{x}$  serán clasificados correctamente con mayor dificultad, lo cual implica que las probabilidades de error serán considerablemente grandes, es decir, el modelo no podrá estimar de manera correcta si un individuo pertenece a un grupo o a otro.

Las probabilidades de clasificación están dadas por la siguiente ecuación (3.10).

$$p_{kj} = \int \phi_k(\mathbf{x}) \mathbf{L}_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (3.10)$$

La probabilidad de asignar al individuo correctamente esta dada por  $p_{kk}$  y la probabilidad de clasificarlo erróneamente por  $1 - p_{kk}$ , es decir, el complemento de la primera. Una manera de valorar el desempeño de la regla de decisión es evaluando las probabilidades de asignar correctamente a los individuos  $p_{11}, p_{22}, \dots, p_{gg}$  (Mardia 1995 [13]), mientras mayor sean estas probabilidades, mejor será la regla de decisión.

Para clasificar a una población podemos considerar varias reglas de clasificación, creadas a partir de la experiencia de un experto de área o con las vistas anteriormente. La siguiente definición muestra una idea de como comparar si una regla es mejor que otra dando un orden parcial a las reglas de clasificación.

**Definición. 3.** *Decimos que una regla de clasificación  $d$  con probabilidades de asignación correctas  $\{p_{ii}\}$  es tan buena como otra regla  $d'$  con probabilidades de asignación correctas  $\{p'_{ii}\}$  si*

$$p_{ii} \geq p'_{ii} \quad \text{para toda } i = 1, \dots, g. \quad (3.11)$$

*Decimos que  $d$  es mejor que  $d'$  si al menos una de las desigualdades en 3.11 es estricta. Si  $d$  es una regla tal que no existe una mejor regla, entonces decimos que  $d$  es admisible.*

Como se puede notar, es un orden parcial pues de esta forma no se pueden comparar todas las reglas de decisión, por ejemplo, si  $p_{11} > p'_{11}$  pero  $p_{22} < p'_{22}$  no se podrían comparar  $d$  con  $d'$ . Sin embargo, sí se puede probar el siguiente resultado de optimización de reglas de decisión Bayesianas<sup>11</sup>.

**Teorema. 2.** *Todas las reglas discriminantes Bayesianas (y por consiguiente la regla de máxima verosimilitud) son admisibles.*

Con este resultado podemos decir que es mejor fundamentar una decisión con la teoría desarrollada para clasificar grupos que con reglas empíricas o de alguna manera subjetivas, aunque siempre con la ayuda de un experto de área. Por otro lado, hay que notar que por la definición de una regla admisible, el resultado anterior sólo compara las reglas de discriminación con las probabilidades de asignación correcta, sin embargo, se puede establecer otro criterio para encontrar una regla de decisión mejor que las demás, es decir, por las *probabilidades a posteriori* de asignación correcta dadas por  $\pi_j p_{jj}$  con  $j = 1, \dots, g$ . La forma de saber qué tan bien se desempeña una regla de decisión con dichas probabilidades es con la suma de éstas,  $\sum \pi_j p_{jj}$ , mientras mayor sea la suma, mejor será la regla en cuestión. La ventaja de tener este criterio es que cualquier regla se puede comparar sin importar el orden entre las probabilidades de asignación correcta (Mardia 1995 [13]).

**Teorema. 3.** *Si las poblaciones  $\Pi_1, \dots, \Pi_g$  tienen probabilidades a priori  $\pi_1, \dots, \pi_g$ , entonces, ninguna regla tendrá probabilidades a posteriori de asignación correcta más grandes que la regla de discriminación Bayesiana con respecto a estas probabilidades a priori.*<sup>12</sup>

<sup>11</sup>La demostración se encuentra en el Apéndice 5

<sup>12</sup>La prueba de este teorema tiene los mismos argumentos que se usaron para demostrar el Teorema 2.

### 3.3. Discriminación con una muestra dada

Los resultados hasta este momento han sido teóricos, pero existen ciertos detalles que no fueron contemplados desde el punto de vista práctico. En ocasiones el cambio entre la teoría y la práctica pueden ser considerables o la adaptación al modelo podría ser un tanto diferente dependiendo de la muestra. A continuación se describe cómo se debe proseguir con el modelo con una base de datos dada.

#### 3.3.1. La regla de discriminación muestral

La regla de máxima verosimilitud es útil pero solo sirve cuando se conoce la distribución de las poblaciones  $\Pi_1, \dots, \Pi_g$ , y sus parámetros deben ser estimados de una matriz de datos  $\mathbf{X}(n \times p)$ . Supondremos que los renglones de  $\mathbf{X}$  están particionados en  $g$  grupos,  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}'_1, \dots, \mathbf{X}'_g)'$  y que  $\mathbf{X}_i$  contiene  $n_i$  observaciones de  $\Pi_i$ .

Dada una población en la que los grupos son muestras de poblaciones con distribución normal multivariada con diferentes medias y la misma matriz de varianzas y covarianzas, la media muestral y la matriz de varianzas y covarianzas muestral del  $i$ -ésimo grupo se denotaran por  $\bar{\mathbf{x}}_i$  y  $\mathbf{S}_i$ . Los estimadores insesgados de  $\mu_1, \dots, \mu_g$  y  $\Sigma$  son  $\bar{\mathbf{x}}_1, \dots, \bar{\mathbf{x}}_g$  y  $\mathbf{S}_u = \sum n_i \mathbf{S}_i / (n - g)$ . La regla de máxima verosimilitud muestral es obtenida entonces sustituyendo los estimadores en el Teorema 1. Particularmente, si  $g = 2$  la regla de máxima verosimilitud es asignar  $\mathbf{x}$  a  $\Pi_1$  si y solo si

$$\mathbf{a}' \left( \mathbf{x} - \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2) \right) > 0, \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{a} = \mathbf{S}_u^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)$  y a  $\Pi_2$  si la ecuación (3.12) es menor que 0.

Existen más reglas de decisión, su nombramiento escapa de los objetivos de este trabajo sin embargo hay una regla más que es interesante basada también en la regla de máxima verosimilitud.

#### 3.3.2. Razón de máxima verosimilitud

Esta regla involucra el cálculo de las verosimilitudes de las siguientes hipótesis

$$H_i : \mathbf{x} \text{ y los renglones de } \mathbf{X}_i \text{ pertenecen al grupo } \Pi_i, \text{ y los} \\ \text{ renglones de } \mathbf{X}_j \text{ pertenecen al grupo } \Pi_j, j \neq i,$$

para  $j = 1, \dots, g$ . Entonces, la observación  $\mathbf{x}$  será asignada a la población  $\Pi_i$  que obtenga la mayor verosimilitud.

Para aterrizar un poco el concepto de las hipótesis nula y alternativa que mencionamos podemos considerar las hipótesis asumidas en el Teorema 1 que hemos empleado anteriormente, los estimadores máximo verosímiles estimados para  $\mu_1, \mu_2$  y  $\Sigma$  bajo  $H_1$  serían  $\frac{(n_1 \bar{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{x})}{(n_1 + 1)}$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_2$  y

$$\hat{\Sigma}_1 = \frac{1}{n_1 + n_2 + 1} \left\{ \mathbf{W} + \frac{n_1}{1 + n_1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_1)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_1)' \right\},$$

donde  $\mathbf{W} = n_1 \mathbf{S}_1 + n_2 \mathbf{S}_2$ , es conocida como la matriz de la suma de cuadrados y productos dentro de los grupos (SSP por sus siglas en inglés). Bajo  $H_2$  los estimadores máximo verosímiles serían calculados de manera análoga a como se calcularon bajo  $H_1$ .

La estadística de la razón de verosimilitud sería la  $\frac{1}{2}(n_1 + n_2 + 1)$ -ésima potencia de

$$\frac{|\hat{\Sigma}_2|}{|\hat{\Sigma}_1|} = \frac{1 + [n_2/(1 + n_2)] (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_2)' \mathbf{W}^{-1} ((\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_2))}{1 + [n_1/(1 + n_1)] (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_1)' \mathbf{W}^{-1} ((\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_1))}.$$

De acuerdo a esta estadística no se rechazará  $H_1$  y asignaremos  $\mathbf{x}$  al grupo  $\Pi_1$ , si y solo si, esta expresión es mayor que uno. Esto ocurre si y solo si

$$\frac{n_2}{1 + n_2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_2)' \mathbf{W}^{-1} ((\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_2)) > \frac{n_1}{1 + n_1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_1)' \mathbf{W}^{-1} ((\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_1)).$$

### 3.4. Funciones lineales de Fisher

Hasta ahora se ha hablado del análisis discriminante considerando que las variables siguen una distribución, o si no se tiene la distribución definida totalmente se pueden estimar sus parámetros a través de la media y la varianza de los datos. Sin embargo, hay ocasiones en que no se puede asegurar estadísticamente que la muestra este gobernada por alguna distribución.

Anteriormente se había comentado acerca de una aproximación basándose en argumentos lógicos que deberían de cumplirse para determinar si un objeto pertenece o no a un grupo. Bajo esta aproximación, como en las anteriores, consideraremos que cada individuo está definido por  $p$  variables y que se tienen  $g$  posibles grupos en los que está dividida la muestra.

A través del análisis discriminante se busca realizar operaciones que permitan explicar el comportamiento de nuestros objetos en dimensión  $p$  pero compactando esa información de manera que se pueda observar gráficamente, es decir, en una línea recta, un plano o una superficie y, por lo anterior, tener un modelo en el que se pueda identificar las consecuencias que conlleva el aumento o la caída de cada una de las posibles variables que estén en nuestro modelo y determinar el grupo al que pertenece un individuo con características dadas.

Entender el comportamiento o estatus de un individuo, conociendo los valores que obtuvieron cada una de sus variables, es complicado si el número de variables es grande, si en el modelo hay demasiadas variables la comprensión por separado se dificulta cada vez más por la correlación que hay entre la variables. Por lo anterior, se prefieren modelos parsimoniosos que eviten la colinealidad de las variables.

Con esta técnica, se proyectan los valores de cada sujeto a un espacio de menor dimensión, para poder visualizarlo gráficamente o que se pueda comprender los cambios que las diferentes variables puedan ocasionar.

La función lineal discriminante fue implementada por Fisher por primera vez utilizando solamente dos grupos en el estudio, posteriormente Rao generalizó los resultados para que se pudieran abarcar, en teoría, cualquier cantidad de grupos. El criterio propuesto es encontrar un coeficiente o un vector escalar de coeficientes tal que maximice la distancia que hay entre los grupos proyectados a través de las ponderaciones de las variables.

$$Y = \mathbf{a}'\mathbf{X}$$

La diferencia entre dos y más grupos en cuanto al procedimiento que se habría de seguir radica en que para dos grupos se obtiene un solo vector de coeficientes, con tres grupos en la muestra se obtienen dos funciones lineales, en general, si se tienen  $g$  grupos, se encontrarán  $g - 1$  vectores que intenten separar a los individuos según sus características, de tal forma que se generan rectas en  $\mathbb{R}$  resultado de combinaciones lineales de las variables independientes. Para ejemplificar las funciones lineales de Fisher consideraremos solo dos poblaciones para desarrollar el procedimiento con el cual se obtendrá la función de la forma

$$Y = \mathbf{a}'\mathbf{X} = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_pX_p \quad (3.13)$$

Entonces, supongamos que tenemos dos poblaciones  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  en las que cada uno de los individuos que las componen tiene un vector de  $p$  variables asociado  $\mathbf{x}' = (X_1, \dots, X_p)$ . La matriz de datos será una matriz  $\mathbf{X}(n \times p)$  tal que  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)'$  donde  $\mathbf{X}_1$  contiene la información de la primera población y  $\mathbf{X}_2$  la matriz de datos de la segunda población.

A través de la función lineal discriminante todos los individuos de ambos grupos serán proyectados en  $\mathbf{Y}$ , donde  $\mathbf{Y}$  será tal que maximice la separación entre los grupos a estudiar. Para encontrar el vector  $\mathbf{a}$  de coeficientes de discriminación que realice el agrupamiento de individuos hay que definir primero la medida de discriminación entre los individuos. La distancia entre las medias proyectadas por la función lineal  $|\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)|$  donde,  $\bar{\mathbf{x}}_1$  y  $\bar{\mathbf{x}}_2$  son las medias poblacionales de  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  respectivamente, por sí sola no es un buen estimador pues de esta forma no se contemplan ni la varianza que puedan tener las variables ni la reacción entre ellas que afecta el comportamiento general es decir la covarianza.

La medida de separación de los grupos usada en las funciones lineales de Fisher es la distancia de las medias proyectadas escalándolas con la varianza dentro de los grupos. Para cada grupo, esta variabilidad es equivalente a la varianza del grupo proyectado, es decir,

$$\tilde{S}_i^2 = \sum_{\mathbf{Y} \in \Pi_i} (\mathbf{Y} - \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_i)^2, \quad i = 1, 2 \quad (3.14)$$

de esta forma,  $\tilde{S}_i^2$  mide la *variabilidad dentro del grupo  $i$*  después de que ha sido proyectado en el plano  $\mathbf{Y}$ .

Por lo anterior,  $\tilde{S}_1^2 + \tilde{S}_2^2$  es una medida que estima la variabilidad dentro de ambos grupos, una vez realizada la proyección, denominada *variabilidad dentro de grupos* de las muestras proyectadas. Entonces, la función lineal discriminante de Fisher  $\mathbf{Y} = \mathbf{a}'\mathbf{X}$  debe ser tal que maximice la función

$$\frac{|\mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_2|^2}{\tilde{S}_1^2 + \tilde{S}_2^2} \quad (3.15)$$

Otra forma de estimar la matriz de varianza dentro de los grupos es realizando un producto de vectores dedentro del espacio original de las variables,

$$S_i = \sum_{\mathbf{x} \in \Pi_i} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i)', \quad i = 1, 2, \quad (3.16)$$

donde,  $S_i$  es la matriz de varianzas y covarianzas del grupo  $i$ . Hay que notar que en la ecuación (3.16) las variables no estan en el espacio  $Y$ , entonces la matriz de dispersión dentro de los grupos  $S_w$  esta dada por (3.17)

$$S_w = S_1 + S_2. \quad (3.17)$$

Sin embargo, hemos dicho que necesitamos maximizar la distancia entre los individuos en el plano proyectado  $Y$ , la varianza dentro de los grupos proyectados, entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_i^2 &= \sum_{Y \in \Pi_i} (Y - \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_i)^2 \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in \Pi_i} (\mathbf{a}'\mathbf{x} - \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_i)^2 \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in \Pi_i} \mathbf{a}'(\mathbf{x} - \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_i)' \mathbf{a} \\ &= \mathbf{a}'S_i\mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.18)$$

de tal forma que la varianza entre grupos proyectados  $\tilde{S}_1^2 + \tilde{S}_2^2 = \tilde{S}_w$  y de manera análoga, la diferencia de medias de los grupos proyectados pueden expresarse en términos de las medias originales de la siguiente manera:  $(\mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_2)^2 = \mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)'\mathbf{a} = \mathbf{a}'S_B\mathbf{a} = \tilde{S}_B$

Entonces  $S_B$  es la *matriz de dispersión entre los grupos*, mientras que  $\tilde{S}_B$  es la matriz de dispersión entre los grupos proyectados. Cabe mencionar que  $S_B$  y por lo tanto  $\tilde{S}_B$  son de rango a los más *uno*.

Con las expresiones obtenidas anteriormente se logra expresar el criterio de Fisher en términos del vector  $\mathbf{a}$  como

$$\frac{|\mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_2|^2}{\tilde{S}_1^2 + \tilde{S}_2^2} = \frac{\mathbf{a}'S_B\mathbf{a}}{\mathbf{a}'S_w\mathbf{a}} \quad (3.19)$$

Ahora, la función objetivo depende explícitamente de  $\mathbf{a}$ , derivandola respecto al vector de coeficientes igualando a 0 y despejando al vector podemos encontrar su máximo

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{a}} \left( \frac{\mathbf{a}'S_B\mathbf{a}}{\mathbf{a}'S_w\mathbf{a}} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{a}'S_w\mathbf{a} \frac{d}{d\mathbf{a}} \mathbf{a}'S_B\mathbf{a} - \mathbf{a}'S_B\mathbf{a} \frac{d}{d\mathbf{a}} \mathbf{a}'S_w\mathbf{a} &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{a}'S_w\mathbf{a} (2S_B\mathbf{a}) - \mathbf{a}'S_B\mathbf{a} (2S_w\mathbf{a}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dividiendo entre 2 y usando los resultados anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \mathbf{a}'S_w\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)'\mathbf{a} = \mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)'\mathbf{a}S_w\mathbf{a} \\
\Rightarrow & \mathbf{a}'S_w\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) = \mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)S_w\mathbf{a} \\
\Rightarrow & (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)\mathbf{a}'S_w\mathbf{a} = S_w\mathbf{a}(\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)) \\
\Rightarrow & S_w\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}'S_w\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)}{\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)} \\
\Rightarrow & \mathbf{a} = S_w^{-1} \frac{\mathbf{a}'S_w\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)}{\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Por las propiedades de multiplicación matriciales, tenemos que  $\mathbf{a}'S_w\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)$  son escalares, por lo tanto, pueden conmutar las multiplicaciones, si consideramos  $\lambda = \frac{\mathbf{a}'S_w\mathbf{a}}{\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)}$  tenemos que  $\mathbf{a} = \lambda S_w^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)$  finalmente, si multiplicamos por un escalar la función (3.15) no afectaría el punto en el que se encontró el máximo y así,  $\lambda$  puede ser normalizada de tal forma que

$$\mathbf{a}^* = S_w^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \tag{3.22}$$

### 3.4.1. Funciones lineales con una muestra

Para realizar el discriminante con la muestra que se tiene, con los datos proyectados en  $Y$ , hay que calcular la función lineal discriminante. Las matrices que se necesitan son las siguientes:

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{a}'\mathbf{x}_i - \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 \tag{3.23}$$

que es la suma de cuadrados totales o la varianza total y la suma de cuadrados entre grupos o varianza entre grupos,

$$\sum_{k=1}^g n_k (\mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_k - \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}})^2 = \sum_{k=1}^g n_k (\hat{y}_k - \hat{y})^2 \tag{3.24}$$

Como lo mencionamos anteriormente, estamos considerando dos grupos en la muestra, es decir  $g = 2$ . Las medias estimadas de cada grupo son  $\bar{\mathbf{x}}_1$  para el grupo uno y  $\bar{\mathbf{x}}_2$  para el segundo grupo o población y, las varianzas estimadas para las poblaciones uno y dos son

$$S_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} (\mathbf{x}_{1j} - \bar{\mathbf{x}}_1)(\mathbf{x}_{1j} - \bar{\mathbf{x}}_1)', \quad S_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} (\mathbf{x}_{2j} - \bar{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_{2j} - \bar{\mathbf{x}}_2)'$$

Al suponer que las matrices de varianzas y covarianzas son iguales entre los grupos se puede tomar a la varianza conjunta como un promedio ponderado entre las varianzas dentro de los grupos

$$\mathbf{S} = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (3.25)$$

Por lo anterior, la función lineal discriminante de Fisher es

$$\hat{y} = \mathbf{a}'\mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)' \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x} \quad (3.26)$$

Con esta función se podrá determinar si un sujeto  $\mathbf{x}$  puede ser asignado a alguno de los grupos en el modelo con base en los resultados que tenga la función lineal  $\mathbf{a}'\mathbf{x}$ . Las medias muestrales de cada grupo,  $\bar{\mathbf{x}}_i$  tienen medias proyectadas  $\mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_i = \hat{y}_i$ , con  $i = 1, 2$ . Entonces,  $\mathbf{x}$  será asignado a la población  $\Pi_1$  si la distancia entre  $\hat{y}_i$  y el valor del sujeto  $\mathbf{x}$  proyectado es menor que la distancia correspondiente a la población  $\Pi_2$ , es decir, la regla de decisión será

$$\text{asigna } \mathbf{x} \text{ a } \Pi_1 \quad \text{si} \quad |\mathbf{a}'\mathbf{x} - \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_1| < |\mathbf{a}'\mathbf{x} - \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}}_2| \quad (3.27)$$

explícitamente y considerando que sólo hay dos poblaciones, usando (3.22) tenemos que la regla de decisión es

$$\text{asigna } \mathbf{x} \text{ a } \Pi_1 \quad \text{si} \quad (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' \mathbf{S}^{-1} \left[ \mathbf{x} - \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2) \right] > 0 \quad (3.28)$$

y a  $\Pi_2$  en otro caso.

Notemos que la regla de asignación (3.28) es exactamente la misma que la regla de máxima verosimilitud estimada asumiendo poblaciones normales multivariadas con diferentes medias y la misma matriz de varianzas y covarianzas, (3.12), sin embargo, se llega a esta conclusión con dos planteamientos y justificaciones muy diferentes. La que acabamos de desarrollar está basada simplemente en argumentos sensibles basados en una función lineal de  $\mathbf{x}$ . Por lo tanto la regla de asignación de Fisher cuando hay dos grupos en el estudio es bastante apropiada aún con poblaciones cuya prueba de normalidad haya sido rechazada.

## 3.5. Probabilidad de clasificación errónea

### 3.5.1. Probabilidades de clasificación errónea con poblaciones normales

En la sección (3.2.4) se mencionaron las propiedades de las reglas de decisión y con ello se llegó al concepto de las probabilidades de clasificación, tanto de éxito como de fallo dadas por las probabilidades de asignación de un individuo  $\mathbf{x}$  a cualquier población dada por la ecuación (3.10). En esta sección se hablará de las probabilidades de clasificación considerando una distribución Gaussiana para ejemplificar su uso y no para determinar la eficacia de una u otra regla de clasificación.

Consideremos  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  dos poblaciones con distribuciones normales  $N_p(\mu_1, \Sigma)$  y  $N_p(\mu_2, \Sigma)$  respectivamente donde  $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ , si  $\mathbf{x}$  pertenece a la población  $\Pi_1$ .

Por lo anterior, si  $\eta(\mathbf{x}) = \alpha'(\mathbf{x} - \mu)$  entonces  $\eta \sim N\left(\frac{1}{2}\alpha'(\mu_1 - \mu_2), \alpha'\Sigma\alpha\right)$ , con  $\alpha$  definida como en el Teorema (1). Consideremos  $D^2 = (\mu_1 - \mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$  la distancia de Mahalanobis entre las medias de las poblaciones  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ . Entonces, si  $\mathbf{x} \in \Pi_1$  entonces  $\eta(\mathbf{x})$  tiene una distribución  $N\left(\frac{1}{2}D^2, D^2\right)$ . Análogamente, si  $\mathbf{x} \in \Pi_2$  entonces  $\eta(\mathbf{x}) \sim N\left(-\frac{1}{2}D^2, D^2\right)$ .

Por lo anterior, las probabilidades de clasificación errónea estarán dadas por

$$\begin{aligned}
 p_{21} &= P(\eta(\mathbf{x}) > 0 | \Pi_2) = 1 - P(\eta(\mathbf{x}) \leq 0 | \Pi_2) \\
 &= 1 - P\left(\frac{\eta(\mathbf{x}) - \mathbf{E}[\eta(\mathbf{x})]}{\sqrt{\mathbf{V}(\eta(\mathbf{x}))}} \leq \frac{-\mathbf{E}[\eta(\mathbf{x})]}{\sqrt{\mathbf{V}(\eta(\mathbf{x}))}} \middle| \Pi_2\right) \\
 &= 1 - \Phi\left(-\frac{\frac{1}{2}D^2}{D}\right) \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}D\right) \\
 &= \Phi\left(-\frac{1}{2}D\right)
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde  $\Phi$  es la función de distribución  $N(0, 1)$ . La probabilidad de ser clasificado en  $\Pi_1$  dado que  $\mathbf{x} \in \Pi_2 = p_{12} = P(\eta(\mathbf{x}) < 0 | \Pi_1)$  es igualmente  $\Phi\left(-\frac{1}{2}D\right)$ <sup>13</sup>.

### 3.5.2. Método de sustitución

Un método no paramétrico para estimar las probabilidades de fallo en la clasificación es tomar la cantidad individuos de la población  $\Pi_i$  que fueron asignados a la población  $\Pi_j$ ,  $j \neq i$ , y dividirla entre el total de individuos de la primer población es decir, si se tiene la matriz de datos  $\mathbf{X}$  en la que se tienen  $n_j$  individuos de la población  $\Pi_j$  y supongamos que la regla de clasificación asignó las regiones  $R_j$  para cada población. Si  $n_{ij}$  es el número de individuos asignados a la población  $R_i$  provenientes de la población  $R_j$  se tiene que  $\sum_{i=1}^g n_{ij} = n_j$  y, por lo tanto,  $\hat{p}_{ij} = n_{ij}/n_j$  es una estimación de la probabilidad de clasificación errónea  $p_{ij}$ .

En una matriz de clasificación, la probabilidad de clasificación errónea  $\hat{p}_{ij}$  está dada por  $\frac{a_{ji}}{a_j}$ , donde  $a_j$  es la suma de las entradas del  $j$ -ésimo renglón.

### 3.5.3. Validación cruzada

El problema con la última estimación es que se usa toda la muestra para calcular y al mismo tiempo juzgar la precisión de la función lineal de discriminación lo cual ocasiona que los resultados sean demasiado optimistas, es decir, que se sobre-estime el poder de clasificación del método.

<sup>13</sup>Sin embargo, de acuerdo a (Mardia 1995 [13]) esta aproximación suele subestimar la probabilidad de clasificación errónea si  $n$  es pequeña.

Para evitar esta sobre-estimación se utiliza el método de *cross validation* o validación cruzada, en el que se divide a la muestra en dos partes *train* y *test*, es decir una muestra para realizar el análisis y otra para validar los resultados. Este procedimiento se define de la siguiente manera:

Supongamos que  $\mathbf{x}_r$ ,  $r = 1, \dots, n_1$  son los primeros  $n_1$  renglones de la muestra  $\mathbf{X}$ , es decir, los sujetos que pertenecen a la población  $\Pi_1$ . Para cada  $r$  se tienen  $g$  regiones,  $R_1^{(r)}, \dots, R_g^{(r)}$ , determinadas por la regla de clasificación basada en los  $(n - 1)$  sujetos restantes con matriz de datos  $\mathbf{X}(n - 1 \times p)$ . Entonces, el sujeto  $\mathbf{x}_r$  puede ser juzgado con una regla de clasificación en la que no participó para estimarla.

Si denotamos a  $n_{j1}^*$  al número de los sujetos de  $\Pi_1$  tales que  $\mathbf{x}_r \in R_j^{(r)}$ , entonces  $p_{j1}^* = n_{j1}^*/n_1$  es un estimador de la probabilidad de clasificación errónea  $p_{j1}$ . Repitiendo este procedimiento con cada una de las poblaciones restantes obtenemos todas las probabilidades de clasificación errónea  $p_{ji}^*$ . De esta forma podemos observar qué tan confiables son los resultados (Mardia 1995 [13]).

El problema de esta forma de medir la efectividad de los resultados es que puede ser computacionalmente muy tardado, debido a que hay que correr  $n$  veces el modelo, hacer el cálculo de las probabilidades de clasificación y después promediarlas, si la muestra es grande, puede tardarse bastante en realizar la secuencia necesaria. Para evitar esta pérdida de tiempo se puede realizar una validación cruzada sobre conjuntos mayores a un elemento, de manera determinista o aleatoria, considerando individuos elegidos al azar, tomando  $k$  conjuntos de la muestra y para cada uno determinar las probabilidades de clasificación.

Es aceptable en la práctica considerar conjuntos con  $k$  entre 5 y 10 ya que por lo general se obtienen resultados con un buen nivel de confiabilidad. Aunque, por otro lado, la efectividad depende de la base de datos utilizada porque los resultados del modelo dependen en gran medida de la muestra, aún tomando sub-muestras de la inicial, las tasas de error o las probabilidades de clasificación pueden cambiar entre una realización y otra.

Las propiedades de las que se habló en este capítulo fundamentan los cálculos que se aplican a la base de datos con la que se esté trabajando, sin embargo, que un conjunto de datos cuente con todas las propiedades que requiere el análisis discriminante, no implica que los resultados que brinda el modelo serán significativos. Como se mencionó en el segundo capítulo hay que tener ciertas consideraciones para conformar los grupos para poder aplicar la teoría apropiadamente.

# Capítulo 4

## Aplicación del Modelo

### 4.1. Criterios de selección

La determinación del criterio con el cual admitir instituciones en la construcción del modelo no es un tema fácil ya que los resultados que arroje el modelo dependen en gran medida de la muestra inicial. Si los grupos no están lo suficientemente separados, como para poder identificar los grupos a los que las instituciones financieras serán asignadas sin saber de qué grupo vinieron, no se podrán realizar predicciones con una precisión deseable.

Para obtener conjuntos de una muestra hay diferentes formas para clasificar a los individuos que conforman los diferentes grupos, cuando no se sabe cómo están ordenados los sujetos se puede analizar la muestra mediante *clusters*. Los clusters son una técnica que encuentra o identifica iterativamente agrupaciones de forma que en la última iteración éstas estén compuestas por individuos con características homogéneas. Para realizar este análisis hay que considerar dos tipos de medidas, la distancia que hay entre los individuos y la distancia que hay entre los grupos que se crean durante las iteraciones.

Es muy importante destacar que las distancias entre individuos y las distancias entre clusters son conceptos muy diferentes y sirven para formar grupos internamente homogéneos pero que sean heterogéneos entre ellos. Algunas de las medidas para establecer la distancia entre los individuos se muestran en la Tabla 4.1.

En el caso de la Distancia de Mahalanobis  $S$  es la matriz de varianzas y covarianzas entre las variables. Por otra parte, la distancia de Minkowski es igual a la distancia City Block si  $k = 1$  y, si  $k = 2$  es igual a la Distancia Euclídeana.

Para separar la muestra en grupos, el primer paso es calcular la distancia entre todos los individuos, así, se forma un grupo con aquellos individuos cuya distancia haya sido mínima, después se repite el proceso iterativamente calculando la distancia entre los clusters que se forman en cada una de las repeticiones, el algoritmo se detiene cuando todos los individuos están dentro de un solo cluster.

Una vez que acabó el proceso, se debe decidir cuántos grupos se quieren para saber a qué distancia entre clusters se encuentra esa cantidad de grupos o determinar la distancia requerida entre clusters

Tabla 4.1: Medidas de distancia entre individuos

Norma o distancia Euclideana	$d(x_1, x_2) = \left[ \sum_{i=1}^p (x_{1i} - x_{2i})^2 \right]^{1/2}$
Distancia City Block	$d(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n  x_1 - x_2 $
Distancia de Minkowski	$d(x_1, x_2) = \left[ \sum_{i=1}^n (x_1 - x_2)^k \right]^{1/k}$
Distancia de Mahalanobis	$d(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^t S^{-1} (x_1 - x_2)$

y de esta forma encontrar el número de conjuntos que se forman en ese nivel. En la Tabla 4.2 se muestran algunas de las medidas para calcular la distancia entre dos clusters  $C_1$  y  $C_2$  cuyos tamaños de población son  $\Pi_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Tabla 4.2: Medidas de distancia entre clusters

Distancia simple	$d(C_1, C_2) = \min_{i \in C_1, j \in C_2} d_{ij}$
Distancia compuesta	$d(C_1, C_2) = \max_{i \in C_1, j \in C_2} d_{ij}$
Distancia promedio	$d(C_1, C_2) = \frac{1}{\Pi_1} \frac{1}{\Pi_2} \sum_{i \in C_1} \sum_{j \in C_2} d_{ij}$
Distancia centroide	$d(C_1, C_2) = \left[ \sum_{i=1}^p (\hat{C}_{1i} - \hat{C}_{2i})^2 \right]^{1/2}$

Donde  $\hat{C}_{ki}$  es el promedio de las observaciones de la variable  $i$  del  $k$ -ésimo cluster. Cabe aclarar que para calcular la Distancia centroide se necesita que todas las variables sean continuas.

Los grupos creados con este modelo dependen del tipo de distancias que se planteen, tanto por individuos como por clusters, además, elegir una distancia implica suponer cierto comportamiento de los datos. Esta técnica es de aprendizaje no supervisado y sirve como un primer acercamiento a los datos para reconocer cómo se comportan.

Sin embargo, cuando se sabe cuántos grupos hay en la muestra, cómo está organizada o si se tiene alguna forma de separarla en grupos de manera coherente, es preferible optar por el análisis discriminante ya que de esta forma se puede entender mejor los resultados y se reduce el sesgo de estimación. Si la muestra está separada en grupos naturalmente<sup>1</sup> se necesita de otras técnicas. En estos casos es importante considerar la opinión de la gente con conocimientos del área, es decir, no

<sup>1</sup>Por ejemplo, si queremos diferenciar entre especies de animales, o si la categorización es hembra-macho.

obtener la categorización previa de acuerdo al criterio del desarrollador de tal forma que los resultados se puedan aprovechar para un mejor análisis.

## Agencias Calificadoras

En nuestro caso, la base de datos está conformada por la información de instituciones financieras con datos de 5 años y temporalidad trimestral, cada institución es evaluada por ciertas empresas que se dedican a valorar la calidad crediticia de las compañías para brindar información a los inversionistas.

Las agencias calificadoras (rating agencies) son instituciones especializadas en la evaluación del riesgo de crédito de valores emitidos por instituciones financieras, empresas y gobiernos. La calificación crediticia que asignan hace referencia a la capacidad de la entidad para hacer frente a sus obligaciones y su fortaleza para enfrentar escenarios adversos. Las agencias calificadoras contribuyen a disminuir el costo que le tomaría a un inversionista realizar un estudio para cada empresa en la que quisiera invertir y obtienen ganancias pues aquellos que emiten valores pagan comisiones para que les asignen una calificación y de esta forma puedan atraer al público inversionista.

El papel de las calificadoras ha sido cada vez más importante para calcular el capital regulatorio que deben tener las empresas y para que dicho capital sea más sensible al riesgo. Para estimar el riesgo que corren los bancos, determinado en Basilea II, éste se debe ponderar por la calidad crediticia de sus contrapartes para representar de manera más real las exposiciones que tienen dichas instituciones. De esta forma, la calificación obtenida por cada banco representa mejor su calidad crediticia y el riesgo que se corre al invertir en ellos.

Como se puede esperar, los cambios en la calidad crediticia de las empresas se dan gradualmente, sin embargo, un cambio de calificación, tanto positivo como negativo, afecta seriamente la opinión de los inversionistas acerca de la institución evaluada. Algunas de estas agencias calificadoras se mencionan a continuación:

- Fitch.
- HR Ratings.
- Moody's.
- Standard & Poor's.
- PCR Verum.

Las empresas calificadoras tienen lineamientos perfectamente establecidos para determinar la calidad crediticia de las empresas y de los papeles de deuda que emiten de acuerdo a la perspectiva actual y futura, las condiciones del mercado, la situación económica y política del país de origen, entre otras. Por esta razón decidimos considerar las calificaciones otorgadas por Moody's y por Standard & Poor's para formar los grupos de la muestra inicial para poder asignarlos de manera sencilla y basándonos en su calidad crediticia.

A continuación explicaremos los criterios de estas calificadoras para asignar las calificaciones.

*Standard & Poor's.*

Las calificaciones de S&P son una opinión con miras hacia el futuro en cuanto a la calidad crediticia en general de un deudor. Estas opiniones se centran en la capacidad y la disposición del deudor para hacer frente a sus compromisos financieros a su vencimiento; la naturaleza y las reservas que tengan para solventar sus obligaciones y; la protección otorgada y la posición relativa de las obligaciones en un evento de bancarrota, reorganización u otros arreglos bajo las leyes que rigen la bancarrota y demás leyes que afecten los derechos de los acreedores<sup>2</sup>.

La escala de calificaciones de S&P tiene cuatro categorías que dependiendo de la calidad crediticia que tenga una institución, indican si una empresa es **buena**, **regular**, **especulativa** o si ya está en estado de **default**. Las posibles calificaciones son AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, C y D. Las calificaciones entre AA y CCC puede estar modificada por la adición de un signo “+” si la perspectiva a futuro de la institución es que su calificación vaya a subir o un “-” si la perspectiva es a la baja. La definición de las calificaciones según S&P se presentan en la Tabla 4.3.

---

<sup>2</sup>[www.standardandpoors.com](http://www.standardandpoors.com).

Tabla 4.3: Definición de calificaciones según Standard &amp; Poor's.

<b>AAA</b>	Un deudor calificado con AAA tiene una capacidad extremadamente fuerte para hacer frente a sus obligaciones. Esta calificación es la más alta otorgada por S&P.
<b>AA</b>	Un deudor calificado con AA tiene una capacidad muy fuerte para hacer frente a sus obligaciones. Esta calificación difiere de la más alta en tan solo un pequeño grado.
<b>A</b>	Un deudor calificado con A tiene una capacidad fuerte para hacer frente a sus obligaciones pero, de alguna manera más susceptible a los efectos adversos en los cambios en sus circunstancias y en las condiciones económicas que los deudores de categoría superior.
<b>BBB</b>	Un deudor calificado con BBB tiene una capacidad adecuada para hacer frente a sus obligaciones. No obstante, es más probable que las condiciones económicas y los cambios en sus circunstancias lo lleven a una menor capacidad para hacer frente a sus obligaciones.
<b>BB, B, CCC y CC</b>	Los deudores calificados con BB, B, CCC y CC ya son vistos con características especulativas significativas. BB indica el menor grado de especulación y CC el mayor. Mientras que estos deudores tienen algunas cualidades y características protectoras, éstas podrían estar sobrevaloradas por grandes incertidumbres o por mayores exposiciones en condiciones adversas.
<b>BB</b>	Un deudor calificado con BB es menos vulnerable en el corto plazo que los deudores con calificaciones menores. Sin embargo, enfrenta un comportamiento con mayor incertidumbre y exposiciones adversas en contratos, en condiciones financieras o económicas, lo cual podría llevar a una inadecuada capacidad para enfrentar sus obligaciones.
<b>B</b>	Un deudor calificado con B es más vulnerables que un deudor calificado con BB, pero aún tiene la capacidad de cumplir con sus obligaciones financieras. Exposiciones adversas en contratos, en condiciones financieras o económicas, podrían perjudicar su capacidad de enfrentar sus obligaciones.
<b>CCC</b>	Un deudor con calificación CCC es vulnerable actualmente, y depende de la calidad de los contratos y de las condiciones financieras o económicas para poder cumplir con sus obligaciones.
<b>CC</b>	Un deudor con calificación CC es muy vulnerable actualmente. Esta calificación es asignada cuando no ha ocurrido un default, pero Standard & Poor's considera que el default como una certeza virtual, sin importar cuan anticipado sea del tiempo en que se de el default.
<b>C</b>	Un deudor con calificación C es muy vulnerable actualmente a no pagar, y se espera que la deuda tenga menos <i>seniority</i> o menor recuperación comparada con las obligaciones mejor calificadas.
<b>D</b>	Un deudor calificado con D esta en default o en incumplimiento de una promesa imputada.

Por otro lado, cada calificación asignada por S&P puede tener dos tipos más de modificaciones, *Credit Watch* y *Rating Outlooks*. El primer tipo de modificación expresa la opinión de la calificadora

en cuanto a un posible cambio en el corto o largo plazo y se centra en los posibles cambios que pudieran ocurrir por eventos especiales o por cambios en las tendencias a corto plazo; está expresado por un asterisco seguido del signo que representa la dirección del posible cambio de calificación que se está estudiando (“\*+” o bien “\*-”). La segunda modificación valora la posibilidad de un cambio en la calificación en el mediano plazo (entre 6 meses y dos años) y se centra en lo que pudiera ocurrir por cambios en la economía o en las condiciones de los negocios fundamentales; esta modificación está representada por un “Neg”, cuando el cambio podría ser hacia la baja, “Pos” cuando se estima que pueda subir una calificación y “Sta” cuando no se espera que vaya a haber cambios por las condiciones mencionadas. Es importante recalcar que ninguna de estas dos modificaciones implican estrictamente un cambio de calificación.

#### *Moody's Analytcs.*

Las calificaciones asignadas por Moody's son opiniones en cuanto a la perspectiva que la calificadora tiene hacia futuro de los riesgos crediticios relativos a las obligaciones financieras emitidas por corporaciones no-financieras, instituciones financieras, vehículos de financiación estructurada y proyectos de financiación, y por entidades del sector público. Las calificaciones a largo plazo son asignadas a emisores con maduración inicial de un año o más y reflejan dos principales temas, la probabilidad de un default en promesas de pago contractuales y las pérdidas financieras esperadas que se tienen en un default<sup>3</sup>.

Las posibles calificaciones que puede asignar Moody's son Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa, Ca y C dependiendo del riesgo que represente invertir en una u otra empresa, de manera que las instituciones que representen menos riesgo tendrán calificación Aaa y las que ya están en default o cercanas a este evento tendrán C. Además, Moody's añade modificaciones numéricas a sus calificaciones representadas por los números 1, 2 y 3 a las calificaciones entre Aa y Caa. El 1 indica que la institución está muy cerca de subir su calificación; el 2 indica una institución neutral en cuanto a que vaya a subir o bajar su calificación; y el 3 indica que la institución está próxima a bajar su calificación. En la Tabla 4.4 mencionaremos las características de cada calificación que puede asignar Moody's.

Por otro lado, así como Standard & Poors, Moody's tiene dos modificaciones más que no implican forzosamente un cambio de calificación pero sí son consideraciones acerca de cómo se puede ver afectada en el futuro la calificación de un emisor. Dichas modificaciones son exactamente las mismas que las mencionadas para S&P, es decir, *CreditWatch* y *Rating Outlooks* y tienen la misma representación.

---

<sup>3</sup>[www.moodys.com.mx](http://www.moodys.com.mx).

Tabla 4.4: Definición de calificaciones según Moody's

<b>Aaa</b>	Se considera que las instituciones con calificación Aaa tienen la mejor calidad, poseen el nivel más bajo de riesgo de crédito.
<b>Aa</b>	Se considera que las instituciones con calificación Aa tienen una gran calidad y poseen un nivel muy bajo de riesgo de crédito.
<b>A</b>	Se considera que las instituciones con calificación A tienen una calidad medianamente alta y poseen un nivel bajo de riesgo de crédito.
<b>Baa</b>	Se considera que las instituciones con calificación Baa tienen una calidad mediana y poseen un riesgo de crédito moderado, de igual manera, podría tener ciertas características especulativas.
<b>Ba</b>	Se considera que las instituciones con calificación Ba tienen un grado especulativo y poseen un riesgo de crédito substancial.
<b>B</b>	Se considera que las instituciones con calificación B son especulativas y poseen un riesgo de crédito alto.
<b>Caa</b>	Se considera que las instituciones con calificación Caa son especulativas, débiles y poseen un riesgo de crédito muy alto.
<b>Ca</b>	Se considera que las instituciones con calificación Ca son muy especulativas y que están en default o muy cerca de presentar uno, con algunos prospectos de recuperación por intereses o por principales.
<b>C</b>	Se considera que las instituciones con calificación C tienen la calificación más baja y están típicamente en default, con muy pocas posibilidades de recuperación por intereses o principales.

Como se puede ver en las tablas 4.3 y 4.4, las empresas cuya calidad crediticia está catalogada con grado especulativo son aquellas que tienen calificaciones menores o igual a Ba para Moody's, mientras que para S&P, este grado se da a partir de la calificación BB.

## 4.2. Descripción de la muestra

Ya que hemos definido los criterios con los que Moody's y S&P asignan las calificaciones correspondientes, diremos específicamente qué criterios se adoptaron para este análisis. Como ya mencionamos, se seleccionaron 32 instituciones financieras, el grupo I está conformado por instituciones cuyas cualidades son las suficientes y necesarias para que un banco central tenga herramientas o criterios de elegibilidad que le hagan creer que es una buena decisión invertir sus reservas en ellas, por lo anterior las instituciones del grupo serán llamadas de aquí en adelante instituciones "*confiables*". El grupo II, a su vez, está conformado por instituciones cuyas condiciones y características no son las adecuadas para que los bancos centrales tengan la suficiente confianza para que se les otorguen los fondos que requieren; las instituciones del grupo II serán llamadas instituciones "*no-confiables*". De esta manera, el modelo es una propuesta para que se implemente en la selección de los portafolios de inversión de los bancos centrales, así como para obtener más información de las instituciones financieras que aporte criterios de elegibilidad en un portafolio de inversión.

Para dividir la muestra *test* se requiere de un criterio imparcial, por lo anterior, formamos grupos de acuerdo a las calificaciones de las agencias especializadas conforme al siguiente criterio: La calificación más alta que puede tener una empresa del grupo I es Aaa con Moody's y AAA con S&P, mientras que las calificaciones más bajas serán A2 y A, respectivamente. La calificación más alta que puede tener una empresa del grupo II es A3 con Moody's y A- con S&P, mientras que las calificaciones más bajas serán Ba3 y BB-, respectivamente. De esta forma, el grupo I está conformado por instituciones que tienen, bajo el criterio de ambas agencias, una buena calidad crediticia y que son poco susceptibles a caer en algún incumplimiento y por otro lado, el grupo II tendrá aquellas instituciones cuyo calidad crediticia es de alguna manera especulativa y existe algún riesgo de que presente un *default* ante eventos adversos.

No se incluyó a instituciones con menor calificación en el grupo II ya que perdería sentido práctico y significativo ya que invertir en dichas instituciones representa un riesgo crediticio demasiado elevado y por lo tanto se descartarían desde un inicio.

Hay que mencionar que el tamaño de las instituciones no afecta la comparación entre ellas pues es la combinación de varios factores lo que hace que una empresa tenga las calificaciones crediticias que posee. Por lo anterior, se espera que estas combinaciones sean las que contribuyan en los resultados, pues en teoría deberían ser más semejantes las características que poseen las instituciones dentro de cada grupo porque los criterios por los que se les asignaron las calificaciones son iguales para todas las empresas.

La muestra está formada por 18 instituciones *confiables* y 18 instituciones *no-confiables*, de tal forma que los grupos están equilibrados, así, se evita sesgar los resultados hacia el grupo con más elementos. Como se mencionó al inicio de este trabajo estamos analizando instituciones de los países

del G10 y de los Tigres Asiáticos. Los problemas a los que nos enfrentamos al buscar instituciones para la muestra fue la dificultad para seleccionar instituciones de mediana calidad, es decir, aquellas que pertenecen al grupo II. Una de las razones por las que sucede dicho problema es que los países que están en el estudio tienen las mejores economías del mundo, es de esperarse que las instituciones financieras dentro de dichas economías tengan estándares de calidad y de supervisión muy altos.

Como se comentó en el Capítulo III, los errores de medición pueden resultar de una mala selección de variables, pero también podrían surgir de una muestra que no sea representativa del fenómeno que se quiere analizar. Estos errores pueden afectar el resultado del estudio, por ejemplo, en la interpretación de los puntajes de cada una de las instituciones evaluadas. Sin embargo, el objetivo de este trabajo es discriminar empresas para aceptar solo a las que tengan las mejores calidades crediticias, por lo anterior, en donde podrían obtenerse resultados que pudieran ser afectados sería en aquellas instituciones en las cuales no sea contundente la pertenencia a un grupo y, cómo se mencionará más adelante, se puede hacer un análisis de más de un periodo y evaluar si la empresa ha deteriorado su capacidad de pago en los últimos periodos o, por el contrario, si esta ha mejorado y que tan consistentemente lo ha hecho a través de los periodos observados.

En las Tablas 4.5 y 4.6 describiremos las instituciones que están en los grupos I y II, respectivamente. En cada una está el nombre de la institución, el país al que pertenecen y la calificación asignada por Moody's y S&P.

Tabla 4.5: Descripción de instituciones dentro del Grupo I, instituciones confiables.

Número	Nombre de la Institución	Calificaciones		País de origen
		Moody's	S&P	
1	Royal Bank of Canada	Aa3	AA-	Canadá
2	Canadian Imperial Bank of Commerce	Aa3 Neg	A+ Neg	Canadá
3	China Construction Bank	A1	A+	China
4	JPMorgan Chase Bank NA	Aa2	A+	Estados Unidos
5	U.S. Bancorp	A1	A+	Estados Unidos
6	BNP Paribas	A1	A+ Neg	Francia
7	Société Générale	A2	A Neg	Francia
8	Shizuoka Bank Ltd.	A1	A+	Japón
9	ING Bank N.V.	A1	A	Países Bajos
10	Barclays Bank PLC	A2	A-	Reino Unido
11	Lloyds Banking Group PLC	A1	A	Reino Unido
12	United Overseas Bank	Aa1	AA-	Singapur
13	Overseas-Chinese Banking	Aa1	AA-	Singapur
14	Skandinaviska Enskilda Banken	A1 *+	A+	Suecia
15	Svenska Handelsbanken	Aa3	AA- Neg	Suecia
16	Swedbank	A1 *+	A+ Neg	Suecia
17	Credit Suisse Group AG	Aa3	A	Suiza
18	UBS	A1 *	A	Suiza

### 4.3. Variables dentro del Modelo

Para determinar la información que pretendemos usar en el modelo, el tema principal es determinar las variables que afectan el desempeño de una institución, qué variables son las que dictan el estatus de

Tabla 4.6: Descripción de instituciones dentro del Grupo II, instituciones no confiables.

Número	Nombre de la Institución	Calificaciones		País de origen
		Moody's	S&P	
1	Bayerische Landesbank	A3	—	Alemania
2	Commerzbank AG	Baa1	BBB+	Alemania
3	Deutsche Bank	A3	A *-	Alemania
4	Sun Life Financial Inc.	Baa2	A	Canadá
5	China Merchants Bank Co.	Baa1	BBB+	China
6	American Express Company	A3	BBB+	Estados Unidos
7	Capital One Financial Corp.	Baa1	BBB	Estados Unidos
8	KeyCorp	Baa1	BBB+	Estados Unidos
9	East West Bancorp Inc.	—	BBB Neg	Estados Unidos
10	New York Community Bancorp, Inc.	Baa2	BBB-	Estados Unidos
11	SunTrust Banks, Inc.	Baa1	BBB+	Estados Unidos
12	Bangkok Bank Public Company	Baa1	BBB+	Hong Kong
13	Intesa Sanpaolo SpA	Baa2 *+	BBB-	Italia
14	UniCredit SpA	Baa2 *+	BBB-	Italia
15	Aozora Bank Ltd.	Baa2	A-	Japón
16	Nomura Holdings Inc.	Baa1	BBB+	Japón
17	Shinsei Bank Ltd.	Baa3	BBB+	Japón
18	ING Groep N.V.	Baa1	A-	Países Bajos

confiable o no confiable, qué variables indentifican a todos los bancos y, de entre todas estas variables, cómo hacer una selección entre ellas para que el modelo de predicción que queremos realizar sea suficientemente significativo y que además éste sea parsimonioso, es decir, que sólo estén las variables

que sean necesarias para tener la significancia deseada y no incluir aquellas que puedan sobre-estimar los resultados y generar colinealidad entre las variables<sup>4</sup>, ya que es más difícil interpretar los resultados y por otra parte, a veces el costo de estimación de una gran cantidad de variables pueden llegar a ser bastante elevados por tiempo y dinero.

A veces es difícil encontrar la información necesaria para cada uno de los individuos en la muestra, y en algunos casos resulta imposible, es por eso que la información que se utiliza en el análisis es un aspecto importante a considerar incluso hasta para seleccionar a las instituciones a considerar en nuestro modelo, además de las opiniones de las calificadoras antes mencionadas, ya que varias de las instituciones que se estudiaron no tenían la información suficiente para poder implementar el modelo.

Una de las críticas más importantes que se le han hecho a los estudios de predicción de bancarrota que usan razones financieras, fue la selección de la información que se había empleado pues en las primeras versiones habían considerado al menos 5 años de información, el problema era que no contaban con la historia más reciente en el momento del estudio y además, si bien todas las instituciones tenían la misma cantidad de información, no provenían de los mismos años para todas las empresas lo cual podía provocar resultados sobrevalorados o subvalorados ya que los resultados de las instituciones financieras pueden tener cambios muy violentos de un periodo a otro por las condiciones de la economía de cada país, de la economía global o de los objetivos de la dirección.

Tomando en cuenta lo anterior, la información que utilizaremos tiene una temporalidad trimestral, desde el primer trimestre del 2010 hasta el primer trimestre del 2015 para todas las instituciones que entraron al modelo<sup>5</sup>. De esta forma, tenemos una muestra de tamaño considerable y además, habría muy poco ruido causado por la crisis hipotecaria del 2008; para aprovechar la información se consideró que por cada trimestre en nuestra ventana temporal se tendrían 36 instituciones más en el modelo, es decir, cada reporte trimestral de cada institución se toma en cuenta como un elemento más de la muestra, de esta forma se logró tener una muestra con una buena cantidad de información. Por lo anterior, hemos de suponer que cada banco pertenecería al mismo grupo durante el tiempo que tomamos a muestra. Cabe mencionar que las variables que utilizaremos son variables métricas, es decir, tienen un orden definido.

Otro tema delicado en los primeros estudios de predicción de bancarrota era seleccionar el tamaño de las empresas pues en principio, es poco común que una institución de tamaño considerable y que no se haya declarado en bancarrota, fuera a caer en incumplimiento en poco tiempo, por otro lado y de manera intuitiva es más probable que una empresa pequeña caiga en *default* o se vaya a la quiebra que una empresa grande con mayor experiencia; en nuestro estudio, este problema se vería representado de tal forma que el tamaño de una institución podría ser proporcional a su solidez y los resultados podrían ser más elevados para las instituciones grandes y subvaluados para las empresas pequeñas.

Respecto a este tema, hay que considerar que si bien las razones financieras sirven como una buena fuente de información comparando el resultado anterior con el presente, también calibran el resultado estandarizando las variables con las que comparamos el estatus de las instituciones logrando así la comparación entre los resultados de las instituciones.

Las variables que consideramos para que entraran al modelo están basadas principalmente en las

---

<sup>4</sup>Es decir, que una variable sea explicada por la combinación de una o más de las restantes.

<sup>5</sup>De la misma forma, las calificaciones anteriormente mencionadas son las vigentes en el periodo de observación.

que aportan información acerca del riesgo crediticio de la institución, pero también hay variables de rentabilidad, liquidez, apalancamiento y de solidez. La información de los resultados financieros de las instituciones fue descargada con la plataforma de información Bloomberg, a continuación presentaremos la descripción de las variables que tomaremos en cuenta.

***Deuda Total entre Ganancias antes de Impuestos e Intereses.*** Esta razón permite identificar la proporción de la deuda que podría pagar con las ganancias actuales. Esta es una razón interesante pues si es pequeña por un lado, significa que la institución no tendrá problemas crediticios en el corto plazo pero, si es demasiado pequeña podría significar que no está aprovechando las oportunidades que tiene de obtener préstamos con bajas tasas de interés. Si es grande, significa que podría estar apalancándose más de lo necesario la institución. Se calcula como la deuda a corto y largo plazo entre el total de ganancias obtenidas durante los últimos 12 meses.

***Deuda Total entre Acciones.*** Es el cociente de la deuda total que tiene la institución entre el total de acciones en posesión de los accionistas multiplicada por 100 para que esté expresado en porcentaje y da una referencia del porcentaje de la deuda que es soportado por cada acción, por lo tanto es referencia al accionista de lo que podría perder en un escenario de estrés.

***Deuda Total entre Capital.*** Esta razón es el cociente entre la deuda total y el capital total de la institución expresado en porcentaje. Esta razón es de apalancamiento financiero y, así como la anterior, se prefiere que sea menor a 100 %.

***Deuda Total entre Activos.*** Es una razón de apalancamiento que permite hacer una buena comparación entre las instituciones. Es calculada dividiendo la deuda total de la institución entre sus activos totales y multiplicando dicho cociente por 100 para que esté expresado en porcentaje. En general se prefiere que esta razón sea menor a 1 pues indica qué tanto de la empresa se está generando a través de su deuda. Esta razón indica el crecimiento y la fortaleza de una empresa para soportar la deuda contraída.

***Deuda a Largo Plazo entre Acciones.*** Es el cociente de los préstamos a largo plazo que se le han concedido a la institución entre el total de acciones en posesión de los accionistas multiplicada por 100 para que esté expresado en porcentaje.

***Deuda a Largo Plazo entre Capital.*** Es una medida del apalancamiento que tiene la institución, se calcula como los préstamos a largo plazo que le han concedido a la institución entre su capital total multiplicado por 100 para que esté expresado en porcentaje.

***Deuda a Largo Plazo entre Activos.*** Esta razón es también una razón de apalancamiento respecto a los Activos Totales. Se calcula haciendo el cociente de los préstamos que le han otorgado a la institución a largo plazo entre el total de activos y multiplicándolo por 100 para que esté expresado en porcentaje.

Las razones antes presentadas son una forma de saber dos cosas, la capacidad de una empresa de convertir sus deudas en mayor rentabilidad, mejores instalaciones o mejores contratos que le ayuden a crecer y además, el apalancamiento que tienen respecto a diferentes factores. Por lo anterior, son razones de bastante interés para alguien que quiera invertir en la institución o para las instituciones a las que les quieran solicitar préstamos. Por otra parte, se pueden comparar las razones financieras con numerador *Deuda Total* y aquellas cuyo numerador es *Deuda a Largo Plazo* para saber si una

institución tendrá un panorama más difícil en cuanto a sus pagos en los años en curso o en los siguientes.

**Activos Ponderados por Riesgo entre Activos Totales.** Este cociente es bastante informativo ya que nos indica el riesgo subyacente que una empresa sostiene por los activos que posee. Cada activo tiene un riesgo subyacente distinto, que podría estar ligado a tipos de riesgos diferentes, dependiendo de donde provenga el activo e incluso del momento en que se calcule la razón. Como su nombre lo indica los activos ponderados por riesgo representan el monto no asegurado que podrían perder las instituciones en un escenario de estrés.

**Razón de Capital Tier1.** Es una medida de adecuación de capitales de la institución. Representa el monto de capital Tier1 como porcentaje de los activos ponderados por riesgo. El capital denominado como Tier1 o de “Nivel 1” es la suma de las acciones ordinarias, las utilidades retenidas, la deuda sin pagar y las acciones preferentes. Esta razón es una medida de la proporción de capital que debe tener una institución de reserva ante eventos que pudieran ocasionarle problemas crediticios o de liquidez, actualmente Basilea III aconseja que la meta para el capital Tier1 sea mayor o igual a 6% de los activos ponderados por riesgo a partir del 2015.

**Razón de Capital.** Otra de las razones de adecuación de capital. A partir del 2013 se ha promovido, gracias a Basilea III, que esta razón sea mayor o igual a 8%. Se calcula dividiendo el capital ponderado por riesgo entre los activos ponderados por riesgo, es decir, es la suma del capital Tier1 más las acciones preferentes perpetuas (que no contempla el capital Tier1), las deudas perpetuas y las reservas por pérdidas crediticias entre los activos ponderados por riesgo. Esta razón sirve para tener un estimado o para fijar una meta del nivel que deben de tener las reservas de las instituciones financieras, tomando en cuenta que mientras mayor sea el monto de los activos ponderados por riesgo, mayor tendrá que ser el capital.

**Cartera vencida entre Activos.** Esta razón es el monto de los préstamos en impago que podría tener o que tiene una institución como porcentaje del tamaño de dicha empresa, es decir, este cociente es un indicador de la gravedad de los impagos que generan los clientes de dicha institución y por lo tanto podría ser considerada como razón de solidez y puede ser tomada en cuenta para calificar las políticas de captación de clientes.

**Flujo de Efectivo entre Pasivo.** Esta razón nos explica la eficacia de la institución para mover el dinero respecto a los préstamos que se le han concedido. Es el cociente del flujo de efectivo proveniente de las operaciones realizadas por la institución entre el total de pasivos que posee multiplicado por 100 para que esté expresado en porcentaje. El flujo de efectivo proveniente de las operaciones se refiere a los ingresos netos más las depreciaciones y amortizaciones; incrementos en los activos o decrementos en los pasivos provocan un aumento en el flujo de efectivo y viceversa, decrementos en los activos e incrementos en los pasivos disminuyen el flujo de efectivo. Esta es una razón de liquidez, y representa la habilidad de la empresa para cubrir sus obligaciones en el momento en que se valua la razón. Cuando sólo se consideran el pasivo a corto plazo es preferible que esta razón sea mayor a uno.

**Margen de Operación.** Esta razón es usada para conocer la eficiencia de las operaciones y de la estrategia de precios de la compañía. Se calcula dividiendo los ingresos operacionales, que son las ganancias menos los gastos operacionales, entre los ingresos netos, multiplicados por 100 para expresarlo en porcentaje. Es una medida del rendimiento de la empresa y representa la utilidad que deja la producción de la empresa por lo tanto valores negativos indicarán problemas serios en una

institución financiera.

**Ganancias por Acción Diluidas.** Las *Ganancias por Acción* se calculan dividiendo las Utilidades del periodo entre el promedio ponderado de las acciones ordinarias en circulación. Las *Ganancias por Acción Diluidas*<sup>6</sup> tienen el mismo numerador pero en el denominador se toma el promedio ponderado de las acciones ordinarias en circulación más el promedio ponderado de las acciones que resultarían emitidas en caso de convertir todas las acciones ordinarias potenciales en acciones ordinarias.

**Préstamos entre depósitos.** Esta razón está expresada en porcentaje y es el cociente de los préstamos que ha pedido una institución entre los depósitos que hacen sus clientes, multiplicado por 100. En otras palabras, esta razón nos dice qué tanto representan las obligaciones que ha contraído la institución respecto al dinero que recibió en el periodo por parte de los clientes. Es un indicador del control que tiene respecto al fondeo que necesita para poder realizar sus metas.

**Rentabilidad de las Acciones (ROE por sus siglas en inglés).** Es una medida del rendimiento de la institución, muestra las ganancias que genera con el dinero aportado por los inversionistas. Se calcula dividiendo las ganancias netas de los últimos 12 meses entre el promedio ponderado de las acciones ordinarias en circulación, multiplicado por 100 para que esté expresado en porcentaje.

**Rentabilidad de los Activos (ROA por sus siglas en inglés).** Es otra medida del rendimiento de la institución, muestra la capacidad de la empresa para generar ganancias con los activos que posee. Se calcula dividiendo las ganancias netas de los últimos 12 meses entre los activos que posee, multiplicado por 100 para que esté expresado en porcentaje.

**Rentabilidad del Capital.** Esta razón mide el rendimiento de una institución, muestra la capacidad de la empresa para colocar el dinero de los dueños en negocios que la hagan crecer. Se calcula dividiendo las ganancias netas de los últimos 12 meses menos los dividendos que se hayan tenido que pagar en este periodo entre el capital total de la institución multiplicado por 100 para que esté expresado en porcentaje.

**Razón de Eficacia.** También conocida como razón de Costos entre Ingresos, es una razón que mide la habilidad de la institución para generar sus ingresos, si la razón es mayor a 1 significa que los costos de la institución sobrepasan sus ganancias. Se calcula dividiendo los gastos operacionales entre la suma de las ganancias por intereses, comisiones y honorarios, ganancias por los contratos pactados, menos comisiones y honorarios pagados, multiplicado por 100 para quedar expresado en porcentaje.

**Reservas para Pérdidas por Préstamos entre Cartera Vencida.** Esta relación nos permite conocer la gravedad de los préstamos que probablemente no le serán pagados a la institución dadas las reservas que posee ante estas contingencias. Se calcula dividiendo las reservas para pérdidas por préstamos entre los préstamos de cualquier tipo que ha concedido la institución pero que no han pagado a tiempo o que no le pagarán, multiplicado por 100 para expresarlo en porcentaje. Si el cociente es menor a 1 significa que las reservas no serían suficientes si los clientes en la cartera vencida no pagan, por tanto, se prefieren valores mayores a 1.

---

<sup>6</sup>Dilución se refiere a la reducción de las ganancias por acción que resulta al asumir que los instrumentos convertibles se van a convertir, es decir, que las opciones o certificados de compra de acciones (warrants) van a ser ejercidos y/o que se emitiran acciones ordinarias si se cumplen las condiciones previstas para que esto pase.

Es importante notar que todas las razones financieras que hemos presentado están expresadas en porcentaje, es decir, todas las variables tienen las mismas unidades, si no estuvieran en la misma escala o en las mismas unidades podría ser necesario aplicar alguna transformación a las variables para poder continuar con el análisis. Sin embargo, aunque estén en las mismas unidades las variables, a veces es necesario escalar la base para homogeneizar el rango en el que corren todas las variables.

Otro aspecto que hay que aclarar es la falta de algunos datos en la base. Es importante mencionar que desde el principio se identificaron las variables cuya tasa de datos faltantes fuera menor al 25% en los casos más extremos, la mayoría de las variables tienen menos del 10% de datos faltantes y dentro de éstas, 10 variables tienen una tasa de datos faltantes menor a 5% y, en total se tiene alrededor de 6.5% de datos faltantes. Los datos faltantes fueron atendidos estableciendo como regla el poner la media de la variable dentro del grupo al que pertenece la institución cuyo dato no se tiene registrado. Se decidió hacer este ajuste ya que uno de los supuestos del Análisis Discriminante es que los datos tienen una distribución Normal Multivariada y por lo tanto, es razonable completar los espacios faltantes de la base de datos con la media de la distribución.

## 4.4. Análisis Descriptivo

Las secciones anteriores muestran las características que se tomaron en cuenta para considerar las instituciones que entrarían a la muestra que se utilizó en este estudio, con variables e individuos que intuitivamente podrían hacer un buen discriminante entre los grupos que requerimos, bancos confiables y bancos no-confiables.

Lo primero que realizamos fue encontrar la media, el máximo y el mínimo de cada variable, tanto para la muestra completa como para los específicos de cada grupo. En las tablas 4.7, 4.8 y 4.9 se muestran los resultados.

Como podemos observar, hay medias cercanas, hay medias que indican que sí hay cierta diferencia entre los grupos y en general, la variabilidad es considerable en ciertas razones financieras y pequeña en otras. En las Tablas (4.7), (4.8) y (4.9) vemos que las variables que no muestran diferencia entre las medias son las siguientes:

- Deuda/Ganancias antes de II \*
- Deuda/Activos \*
- Deuda a LP/Capital \*
- Deuda a LP/Activos
- Fujo de Efectivo/Pasivo \*
- Margen Operacional \*
- Ganancias por Acción \*

- Préstamos/Depósitos
- Rentabilidad de Activos \*
- Rentabilidad de Capital \*

De entre estas variables, las marcadas con asteriscos son las que podrían afectar el discriminante, debido a que los rangos del grupo de las instituciones confiables y el de las no-confiables son muy parecidos y el promedio no presenta una diferencia importante entre ninguna de las tablas anteriores, es decir, estas variables podrían no diferenciar la calidad crediticia de las instituciones que están en el modelo respecto a nuestros criterios.

Por otro lado, comparar la población de esta manera no indica nada con gran precisión. Hay que resaltar que este análisis es preeliminar a la ejecución misma del modelo y hay que considerar que los resultados que hay que interpretar son los datos proyectados; además, como hemos mencionado anteriormente, tener todas las variables en el modelo no siempre es bueno.

Por lo anterior, decidimos buscar las variables indispensables para que el discriminante tuviera la mejor tasa de error, y de esta manera realizar un análisis descriptivo que nos permita comparar con distintas herramientas solamente las variables que optimizan nuestro modelo.

Para determinar qué variables saldrían del modelo se realizó un análisis backwise. El análisis backwise es el método para conocer las variables que tienen mayor importancia en el modelo y cuáles no, empezando por considerar las 20 variables en la muestra y comparar la tasa de error de este modelo contra todos los posibles modelos en los que solo se consideren 19 variables, después con 18 variables y así sucesivamente hasta obtener el modelo óptimo.

En general, comprobar todas las posibles variantes de un modelo es la mejor opción para optimizarlo, sin embargo, computacionalmente puede ser muy complicado si la forma en que se comparan dos modelos no es sencilla o, si el modelo tiene una implementación difícil y por lo tanto exigente en cuanto al tiempo que tardaría en correr el proceso. Para optimizar un modelo hay funciones ya implementadas en los paquetes de programación, en este caso, como el tamaño de la base de datos no es tan grande comparado con la capacidad de análisis de información de R y, dado que la comparación entre un modelo y otro se realiza de manera muy sencilla, se realizó la optimización del modelo comparando las tasas de error de cada modelo posible hasta que la tasa de error, en lugar de disminuir con la reducción de una variable, aumentó por la pérdida de información.

En la tabla 4.10 podemos observar 3 resultados con modelos distintos cambiando la cantidad de variables que se utilizaron. Podemos ver que la reducción en cantidad de variables no necesariamente implica una mejora en la predicción del modelo, es decir, en algunos casos el conjunto de variables que se metieron al modelo contenían datos similares entre grupos provocando una tasa de error más grande en comparación con la tasa de error obtenida al usar la base completa o, las variables no proporcionan información útil para diferenciar un grupo de otro.

En la primera matriz de confusión se tiene la muestra completa, todas las variables aportando información para poder determinar la pertenencia de una institución a un grupo en específico. En este caso, 325 elementos del grupo de las instituciones financieras confiables y 304 elementos de las no-confiables fueron asignados correctamente, de tal forma que se tiene una tasa de error de 14%

Tabla 4.7: Medias por grupo.

Variable Grupo	D/GAII	D/AccT	D/C	D/A	DLP/AccT
Muestra Completa	72.37	488.53	72.95	27.49	256.61
Grupo Confiable	61.59	559.27	76.83	27.67	316.34
Grupo No Confiable	83.16	417.79	69.06	27.31	196.87

Variable Grupo	DLP/C	DLP/A	APonR/A	RCTier1	RC
Muestra Completa	37.50	14.51	46.40	13.28	16.03
Grupo Confiable	38.19	15.19	37.38	14.16	16.86
Grupo No Confiable	36.80	13.83	55.43	12.39	15.19

Variable Grupo	CarV/A	FEf/P	M Op	GAcc	Pres/Depos
Muestra Completa	1.69	0.32	28.59	0.50	116.85
Grupo Confiable	1.04	0.27	33.65	0.57	108.93
Grupo No Confiable	2.33	0.37	23.54	0.42	124.76

Variable Grupo	RenAcc	RenA	RenC	REfi	ResPPP/CarV
Muestra Completa	8.28	0.63	2.54	62.40	137.94
Grupo Confiable	10.47	0.62	2.53	60.28	105.43
Grupo No Confiable	6.09	0.63	2.55	64.52	170.45

Tabla 4.8: Máximos por grupo.

Variable Grupo	D/GAII	D/AccT	D/C	D/A	DLP/AccT
Muestra Completa	1326.87	1688.04	94.41	90.99	1355.06
Grupo Confiable	1326.87	1688.04	94.41	60.29	1355.06
Grupo No Confiable	1199.21	1608.31	94.15	90.99	685.13

Variable Grupo	DLP/C	DLP/A	APonR/A	RCTier1	RC
Muestra Completa	83.91	51.43	95.50	24.90	28.20
Grupo Confiable	83.90	51.43	83.72	24.90	28.20
Grupo No Confiable	82.48	50.44	95.50	18.90	25.00

Variable Grupo	CarV/A	FEf/P	M Op	GAcc	Pres/Depos
Muestra Completa	10.49	9.37	81.19	5.99	463.03
Grupo Confiable	6.69	6.98	73.97	3.16	272.31
Grupo No Confiable	10.49	9.37	81.19	5.99	463.03

Variable Grupo	RenAcc	RenA	RenC	REfi	ResPPP/CarV
Muestra Completa	29.07	3.90	10.26	205.12	615.42
Grupo Confiable	23.96	1.65	10.26	162.27	298.00
Grupo No Confiable	29.07	3.90	9.74	205.12	615.42

Tabla 4.9: Mínimos por grupo.

Variable \ Grupo	D/GAII	D/AccT	D/C	D/A	DLP/AccT
Muestra Completa	1.74	25.29	20.18	2.11	3.00
Grupo Confiable	3.33	57.74	36.60	4.54	3.00
Grupo No Confiable	1.74	25.29	20.18	2.11	3.34

Variable \ Grupo	DLP/C	DLP/A	APonR/A	RCTier1	RC
Muestra Completa	1.49	0.24	13.13	7.50	10.72
Grupo Confiable	1.49	0.24	13.98	8.60	11.44
Grupo No Confiable	1.77	0.41	13.13	7.50	10.72

Variable \ Grupo	CarV/A	FEf/P	M Op	GAcc	Pres/Depos
Muestra Completa	0.08	-13.20	-185.65	-4.75	55.55
Grupo Confiable	0.08	-13.21	-63.11	-4.75	55.55
Grupo No Confiable	0.10	-8.57	-185.65	-3.52	67.13

Variable \ Grupo	RenAcc	RenA	RenC	REfi	ResPPP/CarV
Muestra Completa	-51.66	-3.78	-7.57	24.17	14.76
Grupo Confiable	-7.69	-0.36	-0.93	24.17	26.54
Grupo No Confiable	-51.66	-3.78	-7.57	30.35	14.76

para el grupo de las confiables y de 19.6 % para el de las no-confiables y una tasa de error general de 16.8 %.

La segunda matriz de confusión representa una corrida con 14 variables de la que se obtuvo una tasa de error de 20 %. Y por último, en la tercer matriz se tiene un ejemplo en el que sólo se consideraron 5 variables para evaluar el modelo, claramente la tasa de error incrementa de manera importante, en este caso se obtuvo una tasa de error de 28.4 %.

Tabla 4.10: Ejemplos resultados de análisis backwise.

	Grupo C	Grupo NC	Grupo C	Grupo NC	Grupo C	Grupo NC
Grupo C	325	74	309	83	275	112
Grupo NC	53	304	69	295	103	266

La tabla 4.10 muestra algunos de los modelos que se evaluaron. Utilizando el análisis backwise, se encontró que con 7, 6 y 5 variables en el modelo, las tasas de error no mejoraron. Por lo anterior, se concluyó que el mejor modelo era con ocho variables, y así, se logró reducir una gran cantidad de información requerida para discriminar entre un grupo y otro. Las variables que resultaron en el modelo final son:

1. Deuda Total entre Ganancias antes de Impuestos e Intereses.
2. Deuda a Largo Plazo entre Acciones.
3. Activos Ponderados por Riesgo entre Activos Totales.
4. Razón de Capital Tier1.
5. Cartera Vencida entre Activos.
6. Préstamos entre Depósitos.
7. Rentabilidad de las Acciones.
8. Rentabilidad del Capital.

Así, cada individuo en la muestra tiene un vector asociado con 8 entradas:

$$\mathbf{x}_i = (D/GAII, DLP/AccT, APonR/A, RCTier1, CarV/A, Pres/Depos, RenAcc, RenC).$$

En las Tablas 4.11 y 4.12 se muestran la media, la desviación estándar, el máximo y el mínimo por grupo de cada variable. Con estas tablas se muestra que las medias de cada variable están alejadas entre ellas. Considerando que cada una de las variables tiene diferente soporte, es decir, cada una tiene un rango o recorrido distinto, las variables cuyas medias están más separadas son APonR/A, RCTier1 y CarV/A, mientras que las variables con medias más cercanas son D/GAII y RenC.

Además, se puede observar que la media del grupo de las instituciones no confiables de la variable RenC es mayor a la del grupo de los bancos confiables aunque esto puede ser ocasionado por que el capital de los bancos del grupo de los confiables es mayor que en el otro grupo y por lo tanto, el denominador de dicha razón financiera es mayor y así, la razón financiera menor en el grupo de los confiables, sin embargo, el mínimo del grupo de las no confiables,  $-7.569$ , es mucho menor que el mínimo del grupo de las confiables,  $-0.945$ .

Por otra parte, las medias de DLP/AccT y de RenAcc del grupo de las instituciones no-confiables están casi a la mitad del nivel en el que están las medias de estas variables en el otro grupo, sin embargo, vemos que el rango en ambas variables es lo que podría causar la diferencia de las medias tan grande pues en la primer variable el máximo en el primer grupo es el doble que en el otro grupo mientras que en la segunda variable el mínimo del segundo grupo está muy por debajo del mínimo en el otro grupo. En el caso de DLP/AccT la diferencia entre ambos grupos podría significar que a las instituciones del primer grupo se les conceden más préstamos que a las del otro grupo, puede ser que por la calidad del historial crediticio o su solidez, y en cuanto a Rentabilidad de las Acciones esto podría indicar que esta variable es un buen indicador para discernir entre cuáles bancos invertir y cuáles no sin hacer el análisis de las demás variables.

Finalmente, las Tablas 4.11 y 4.12 permiten la comparación, por grupo, entre la desviación estándar de las variables, las diferencias más grandes están en D/GAII, DLP/AccT, RenAcc y RenCap, aunque, como ya vimos, esto podría ser provocado por el rango de estas razones financieras pues es diferente en cada uno de los grupos, lo que podría provocar que la matriz de covarianzas no sea igual en ambos grupos y a su vez, podría implicar que el movimiento de las variables fuera diferente entre las instituciones confiables y las instituciones no-confiables.

Tabla 4.11: Estadísticas del grupo C.

	D/GAII	DLP/AccT	APonR/A	RCTier1	CarV/A	Pres/Depos	RenAcc	RenCap
Media	61.6	316.3	37.4	14.2	1.04	108	10.5	2.5
Desvest	92.6	322.9	16.1	2.9	0.956	45.1	6.7	2.4
Máximo	1326	1355	83.7	24.9	6.68	272	23.9	10.2
Mínimo	3.3	3.0	13.9	8.6	0.084	55.5	-7.7	-0.945

Tabla 4.12: Estadísticas del grupo NC.

	D/GAII	DLP/AccT	APonR/A	RCTier1	CarV/A	Pres/Depos	RenAcc	RenCap
Media	83.2	196.9	55.4	12.4	2.3	124.7	6.1	2.5
Desvest	141	153	19.3	1.9	2.3	54.1	11.4	3.1
Máximo	1199	685	95.5	18.9	10.5	463	29.1	9.7
Mínimo	1.7	3.3	13.1	7.5	0.097	67.1	-51.6	-7.6

## Boxplot.

Para tener un mejor panorama del comportamiento de las variables por grupo existen los *boxplot*. En el boxplot se muestra la mediana, el primer y tercer cuartil, el máximo y el mínimo gráficamente.

En las imágenes 4.1 y 4.2 se muestran los boxplot del grupo de las instituciones confiables y del grupo de no-confiables, respectivamente, de las variables del modelo final. Así, vemos que el rango de cada variable difiere entre los grupos, en algunas variables ligeramente como en CarV/A y en otras más acentuado (DLP/AccT), para nuestro estudio no se necesitan variables que desde un inicio muestren una clara distinción entre un grupo y otro, ya que observando por separado los resultados de las instituciones no podemos determinar cuál es un buen banco y cuál no, en su lugar se utiliza el análisis discriminante y así separar las poblaciones con la ayuda de las variables conjuntamente.

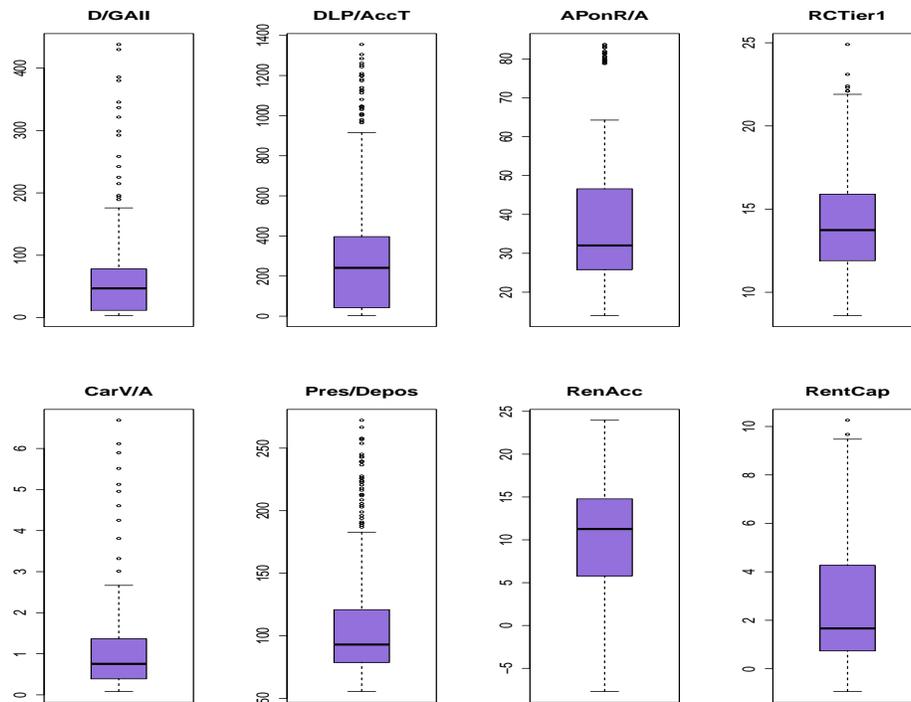


Figura 4.1: Boxplot de variables en el Grupo de bancos confiables.

En los boxplot también podemos observar que las variables cuyas medias difieren más tienen un rango similar, lo cual facilita la comparación por grupos entre dichas variables. Por ejemplo el grupo de los no-confiables tiene en general un mayor porcentaje de APonR/A que el grupo de confiables y hay que notar que la mayor concentración de las empresas de este grupo está entre el 25 % y el 46 %, mientras que para el grupo de los no-confiables la mayor concentración de los bancos está entre el 40 % y el 71 % lo cual quiere decir que este grupo podría tener una mayor exposición al riesgo que el de las instituciones confiables. Con ayuda de estos gráficos podemos ver también la lógica entre APonR/A y RCTier1, dos variables que están muy relacionadas ya que la primera se refiere a los activos riesgosos de una empresa y la segunda al capital en reservas que guardan para solventar las posibles pérdidas de sus activos. Cada vez que crezca el valor de los Activos Ponderados por Riesgo, la primer variable incrementará su valor mientras que la segunda disminuirá. Es comprensible que el grupo de las instituciones confiables en general tenga valores mayores que el otro grupo en la variable RCTier1, esta comparación sirve para inferir que el grupo de las instituciones confiables tendría una adecuación de capital para las reservas mayor que el grupo de las instituciones no-confiables. En

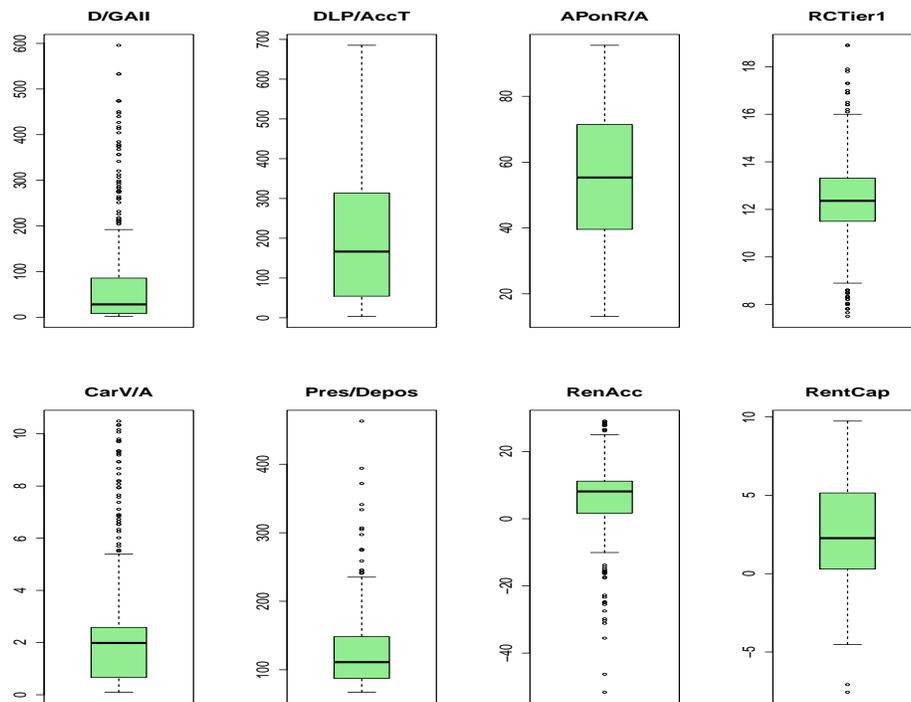


Figura 4.2: Boxplot de variables en el Grupo de bancos no-confiables.

cuanto a CarV/A, podemos observar que hay una cantidad considerable de instituciones financieras en el grupo de las no-confiables que sobrepasa niveles del 6 % de préstamos en impago respecto a los activos que poseen; hay que notar que este nivel ya es preocupante pues representa montos que podrían no ser recuperables en una situación crítica. Sin embargo, una importante cantidad de la muestra tiene niveles mucho más aceptables, por debajo de 2.5 % y en general, en el grupo de las confiables los valores de esta variable son menores que en el otro grupo, lo que podría indicar una mejor selección de clientes en el primer grupo, o una cantidad de activos mayor lo cual disminuiría el riesgo de la cartera vencida de la institución.

La variable D/GAII tiene un comportamiento volátil ya que en ambos grupos hay valores menores al 10 % mientras que, también en ambos grupos, hubo instituciones que reportaron una deuda 10 veces mayor a sus ganancias antes de impuestos e intereses, esto pudo haber sido por gastos extraordinarios como pagos legales por multas o por pérdidas cambiarias que resultaran en un pobre desempeño del banco, sin embargo, la mayor parte de la muestra tiene un valor menor al 80 % de deuda entre ganancias en el grupo de los bancos confiables y menor al 90 % en el grupo de los no-confiables<sup>7</sup>. En la variable DLP/AccT se tiene una relación diferente entre los grupos, en el grupo de las instituciones no-confiables la media y en general toda la muestra tiene valores menores que en el grupo de las confiables, pero esto podría decir que la variable DLP/AccT (que es una razón financiera de calidad crediticia y tomando en cuenta el resultado de las otras variables en este estudio), puede ser analizada como la confianza que se tiene de las instituciones para otorgarles préstamos a largo plazo, es decir,

<sup>7</sup>Para tener una mejor apreciación del boxplot de la variables D/GAII se omitieron, solo en el gráfico, los valores mayores al 1000 %.

se esperaría que los bancos sigan solventes en un periodo grande de tiempo aunque si no saldan las deudas las acciones podrían caer a largo plazo.

El boxplot de la variable Pres/Depos muestra que en general la muestra se encuentra entre el 75 % y el 150 %, es decir los préstamos solicitados por los bancos equivalen a menos del 150 % de los pagos que realizan los clientes a estas instituciones durante los últimos 12 meses en la mayor parte de la población, aunque el grupo de los no-confiables está más cargado hacia valores mayores que el otro grupo. Con la variable RenAcc tenemos una clara apreciación del estatus entre ser de un grupo y de otro, dentro de un grupo en el que se preferiría invertir deberían estar aquellas instituciones que contarán con una mayor rentabilidad de acciones, además, vemos una gran volatilidad en el grupo de las no-confiables pues tiene valores desde una rentabilidad menor al 40 % y, sin embargo, el máximo de la muestra corresponde a una institución del grupo de las no-confiables, aunque en general los valores de RenAcc en el grupo de las instituciones confiables son mayores que en el otro grupo, la mayor parte de la población en este grupo tiene niveles entre el 5 y el 15 % mientras que en el grupo de los no-confiables la mayor parte de la población tiene una rentabilidad de acciones entre 2 y 11 %.

Por último, la variable RentCap, si bien el grupo de las instituciones confiables tiene niveles mayores que el grupo de las no-confiables, ambos grupos tienen valores similares, tanto la media como la concentración de la muestra se encuentran entre 0.5 % y 5 % sin embargo, podemos ver que en el grupo de los no-confiables hay varios bancos con valores negativos, lo cual implica ganancias netas por debajo del monto de dividendos, que podría implicar un retraso o disminución del pago de dividendos y/o una perspectiva crediticia de mayor riesgo.

## Correlación ente las variables.

Ahora analizaremos la relación lineal entre las variables. Este análisis es importante ya que si una correlación es muy fuerte, indicaría que podríamos explicar linealmente una de las variables con ayuda de otra y, por tanto, sería innecesario admitir alguna de ellas en el modelo. Lo que buscamos es poder respaldar estadísticamente que no haya multicolinealidad en nuestras variables. Esto se puede comprobar con una prueba estadística que más adelante explicaremos, sin embargo, para conocer más características de la muestra podemos observar gráficamente la distribución de las variables al compararlas entre ellas, de tal forma que podamos ver el comportamiento y las dependencias entre las variables. En este apartado veremos cómo se comporta la muestra en general, separándola por grupos para obtener más información.

En la Figura 4.3 están reflejadas las correlaciones entre las variables en la muestra total, sin hacer distinciones entre un grupo y otro; en el triángulo inferior de la matriz, podemos observar la magnitud y dirección de las correlaciones entre las variables mientras que en el superior están graficados los datos, variable contra variable. El grupo de las instituciones confiables está representado por el color azul y el grupo de las instituciones no confiables está representado por el color naranja.

La correlacion de mayor magnitud, de 0.76, es la asociada a RenAcc y RenC, y entre las relaciones con magnitud considerablemente grande aunque menor que la anterior estan DLP/AccT y Pres/Depos, APonR/A y RenC, ambas positivamente relacionadas mientras que las variables negativamente relacionadas con una magnitud similar están DLP/AccT y APonR/A, CarV/A y RenAcc,

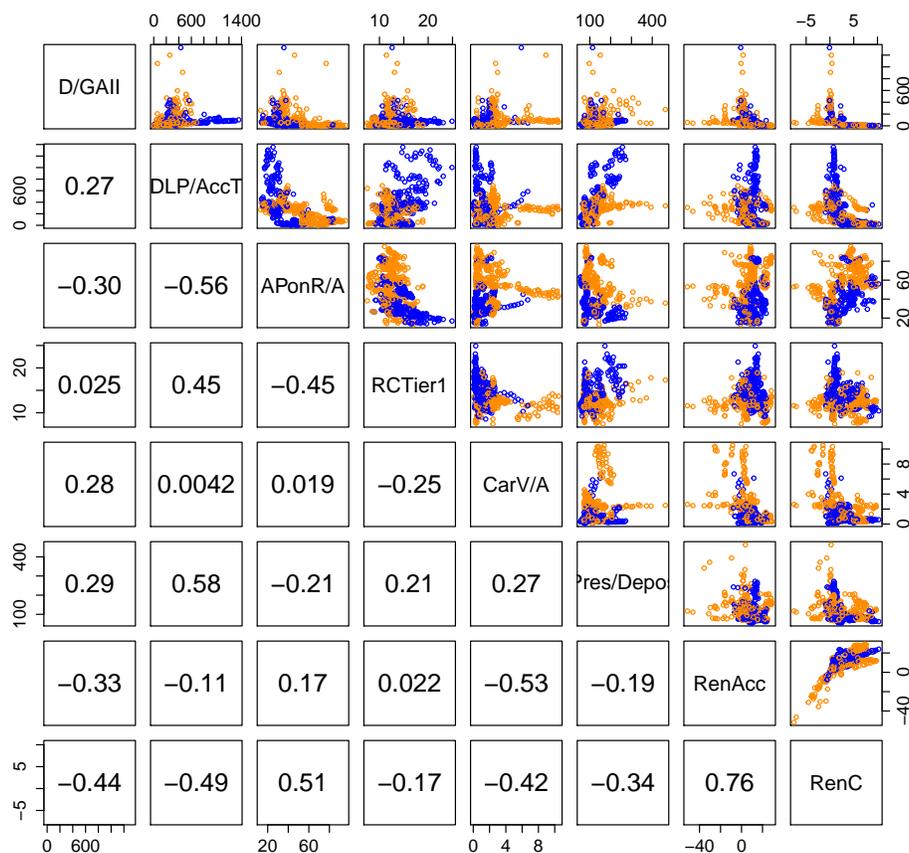


Figura 4.3: Correlación entre las razones financieras.

DLP/AccT y RenC, entre otras.

Por otro lado, las correlaciones de menor intensidad son DLP/AccT y CarV/A, APonR/A y CarV/A, RCTier1 y RenAcc, y D/GAII y RCTier1, cuyos valores (menores a 0.05) muestran que no hay una relación lineal clara entre dichas variables. Las correlaciones que muestran una relación lineal débil entre las variables están DLP/AccT y RenAcc, y Pres/Depos con RenAcc con una correlación negativa mientras que las parejas de variables con esta magnitud pero en sentido positivo son APonR/A y RenAcc, RCTier1 y Pres/Depos, entre otras.

Con toda la muestra, es interesante la correlación entre RenAcc y RenC pues por su magnitud podría indicar que existe cierta colinealidad entre las variables sin embargo, más adelante se verá una prueba estadística para eliminar la hipótesis de colinealidad entre las variables.

Ahora, en las Figuras 4.4 y 4.5 se presentan la correlación entre las variables por grupo, de esta forma sabremos si hay alguna distinción en la relación entre las variables si separamos la muestra en las dos poblaciones. Se puede observar que en general las correlaciones entre las variables que fueron grandes en toda la muestra se mantienen con magnitudes grandes dentro de los grupos. Entre las correlaciones que eran pequeñas con toda la muestra hay algunas que cambian bastante la relación

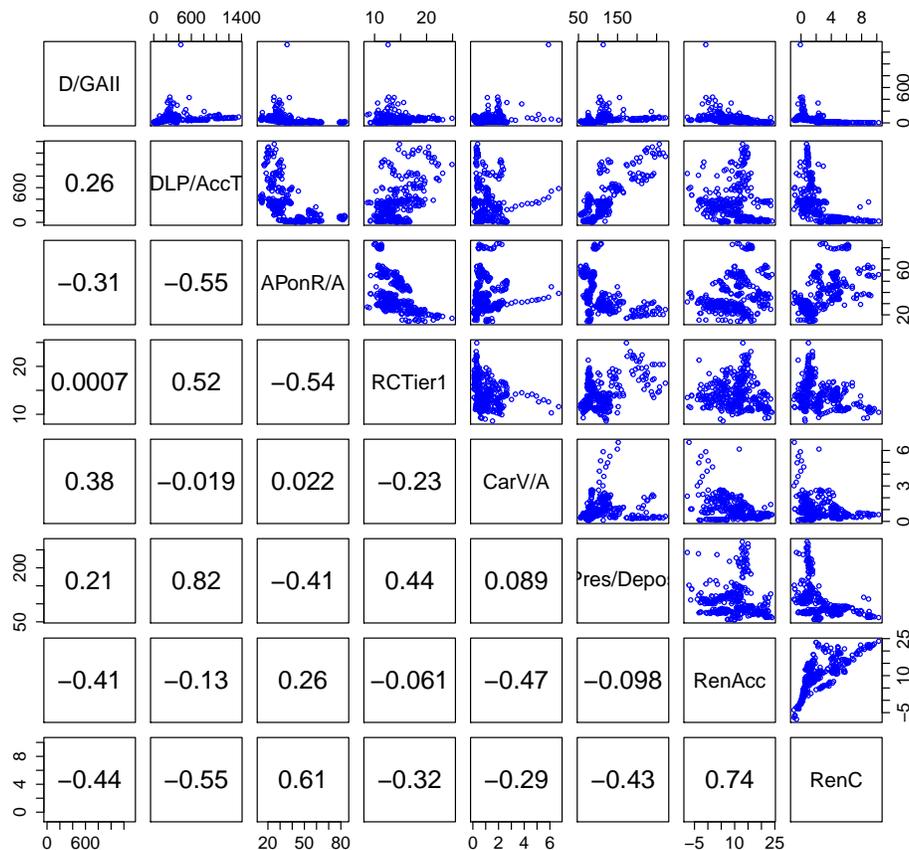


Figura 4.4: Correlación entre las razones financieras Grupo C.

entre un grupo y otro, por ejemplo entre APonR/A y CarV/A o D/GAII y RCTier1 la correlación en el grupo de las instituciones no-confiables es varias veces mayor que en el otro grupo aunque en cualquier caso la relación entre estas variables indica que no hay una asociación lineal clara o que ésta es muy pequeña.

Por otro lado, se puede apreciar que hay ciertas relaciones que cambian drásticamente entre los grupos, por ejemplo, la asociación entre DLP/AccT y RCTier1, dentro del grupo de los confiables es ligeramente grande mientras que en el grupo de las no-confiables esta asociación es muy pequeña; o la relación entre DLP/AccT y Pres/Depos, en el grupo de las no-confiables es medianamente grande mientras que en el grupo de las confiables hay una fuerte asociación entre dichas variables, sin embargo, fuera de las últimas dos relaciones mencionadas, se tiene un comportamiento muy parecido entre las variables de la muestra. Cabe aclarar también que la dirección de la relación entre las variables es la misma en todos los pares de variables en ambos grupos, lo que cambia es la magnitud de dicha relación.

Algunas de las relaciones más interesantes entre las variables se muestran en la imagen 4.6, se puede ver claramente la relación creciente que hay entre RenAcc y RenC que corresponde a una correlación tan alta, además se pueden apreciar que hay una cantidad considerable de individuos del grupo

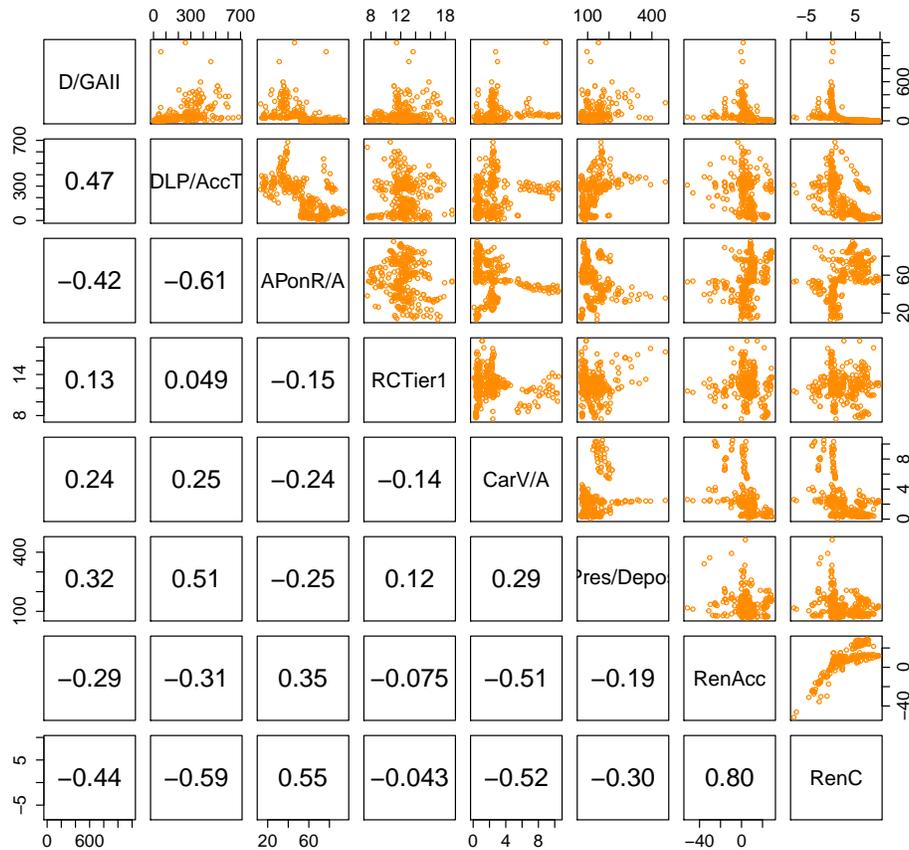


Figura 4.5: Correlación entre las razones financieras Grupo NC.

de las instituciones no-confiables con valores negativos en ambas variables aunque el comportamiento es muy parecido en los dos grupos. En el segundo gráfico se muestra la interacción entre DLP/AccT y APonR/A, se puede ver que hay una relación inversa entre estas variables, mientras mayor es el cociente DLP/AccT, la razón financiera APonR/A disminuye, este comportamiento se aprecia en ambos grupos y, sin embargo, entre estas dos variables se logra separar la muestra, el grupo de los no-confiables tiene una mayor concentración de activos ponderados por riesgo respecto al total de sus activos y una deuda a largo plazo pequeña respecto de sus acciones mientras que, siguiendo con el comportamiento antes descrito, el grupo de los confiables tienen resultados mayores en DLP/AccT y menor resultado en APonR/A. En la gráfica de DLP/AccT contra RenC se nota el mismo comportamiento que en la gráfica anterior y, aunque el grupo de las instituciones no confiables tiene mucho más individuos con una rentabilidad de capital negativa, no se distingue una clara separación entre ellos.

Hay dos comportamientos interesantes relacionadas también con APonR, ya que logran separar la muestra aunque no tan contundentemente como con DLP/AccT; contra RenAcc si bien los grupos no se encuentran separados, podemos ver que en el eje de APonR la mayor parte de las instituciones del grupo de las no-confiables se encuentra por encima del 50% mientras que las instituciones del otro grupo se encuentran por debajo de este nivel, facilitando la distinción entre los grupos. Por otro

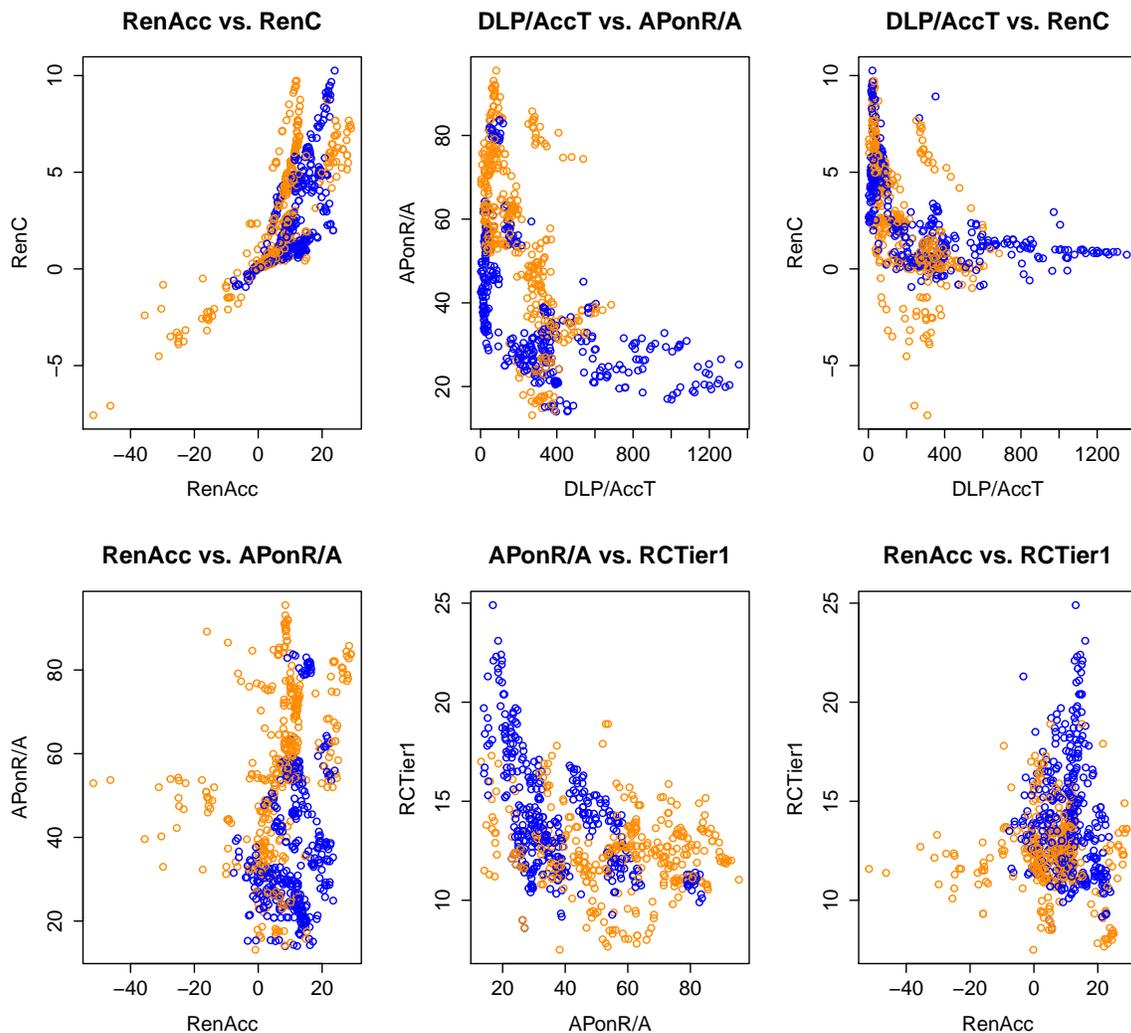


Figura 4.6: Interacciones entre variables.

lado, la correlación entre APonR y RCTier1 es inversa y además, separa eficientemente los grupos en la muestra, lo cual nos da una clara distinción entre las instituciones de ambos grupos ya que una forma de contrarrestar el riesgo contraído por la institución es tener un mayor capital resguardado en las reservas; el grupo de las instituciones confiables tiene mayor proporción de reservas y menor proporción de activos ponderados por riesgo mientras que en el otro grupo ocurre el caso contrario hay más instituciones con menores reservas de capital y mayor proporción de activos riesgosos.

Por último, se muestra la relación entre RenAcc y RCTier1, la cual es positiva pero no es tan clara pues hay una gran concentración en el lado inferior derecho de la gráfica de ambos grupos aunque sí se puede apreciar que las instituciones con mayor reserva de capital, independientemente del grupo al que pertenezca, tienen una mayor rentabilidad de las acciones mientras que aquellas instituciones con rentabilidad de las acciones pequeña e incluso negativa, tienen reservas de capital pequeñas también<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>En los acuerdos de Basilea recomiendan mantener la razón de capital Tier1 arriba del 6% a partir del 2015.

Así, analizando la correlación entre las variables logramos conocer el comportamiento general de las variables, y cómo actúan dependiendo del grupo que se analice. Si bien no hay una gran separación entre ambos grupos en todas las posibles combinaciones a pares que se tienen, hay algunas de éstas que indican cierta distinción entre una institución confiable y una que no cuente con una gran calidad crediticia.

## Autocorrelación en las variables.

Otro de los factores que hay que considerar es la dependencia que tenga un nuevo resultado de las observaciones anteriores, es un análisis propio de las series de tiempo, sin embargo, es importante descartar este comportamiento en nuestras variables debido a la forma en que se construyó la muestra. Tomando la información trimestral histórica de las instituciones financieras, que reportaron trimestralmente.

Si bien la periodicidad de las observaciones hace poco probable la autocorrelación entre las observaciones<sup>9</sup>, es de interés reconocerlo de manera explícita. Para analizar este comportamiento, se puede observar gráficamente y de manera muy clara con ayuda de los autocorrelogramas (*acf*) y más aún con los autocorrelogramas parciales (*pacf*).

En el gráfico del *pacf* tenemos en el eje de las  $x$  un indicador de la observación que estamos analizando al contrastarlo con la observación más reciente, el primer dato, es la correlación con la segunda observación, el segundo, la correlación con la tercera observación y así sucesivamente, en el eje de las  $y$ , tenemos el nivel de dichas correlaciones. Si para alguna de las observaciones la correlación queda fuera de las bandas de confianza, denotados por las líneas punteadas, se tendría que hay autocorrelación entre este periodo respecto al primero. En la imagen 4.7, se muestran algunos ejemplos de los *pacf*. Podemos ver que en algunos no existe autocorrelación mientras que en otros, como en el de BNP Paribas, sí hay cierta correlación entre la primera y la segunda observación.

Para este análisis, es necesario revisar el *pacf* para cada variable y cada individuo. Para las variables incluidas en el modelo, pudimos observar que existe autocorrelación entre la primera observación y la segunda, aunque ligera. Los resultados obtenidos son los siguientes:

- En 26 % de los *pacf* no hubo autocorrelaciones.
- En 72 % solo en un periodo.
- El 2 % restante, es decir, 5 *pacf* tuvieron correlación en los primeros 3 periodos.

Los resultados obtenidos muestran que la mayoría de las variables tienen cierta autocorrelación entre el primer y el segundo periodo, aunque el 26 % de las observaciones no presentan este comportamiento. De acuerdo a lo anterior, la autocorrelación en la muestra no haría menos confiable la conclusión de este análisis.

---

<sup>9</sup> Cuando las observaciones son diarias o anuales, en el caso de los reportes financieros por razones estacionales, es más común que las observaciones se autocorrelacionen.

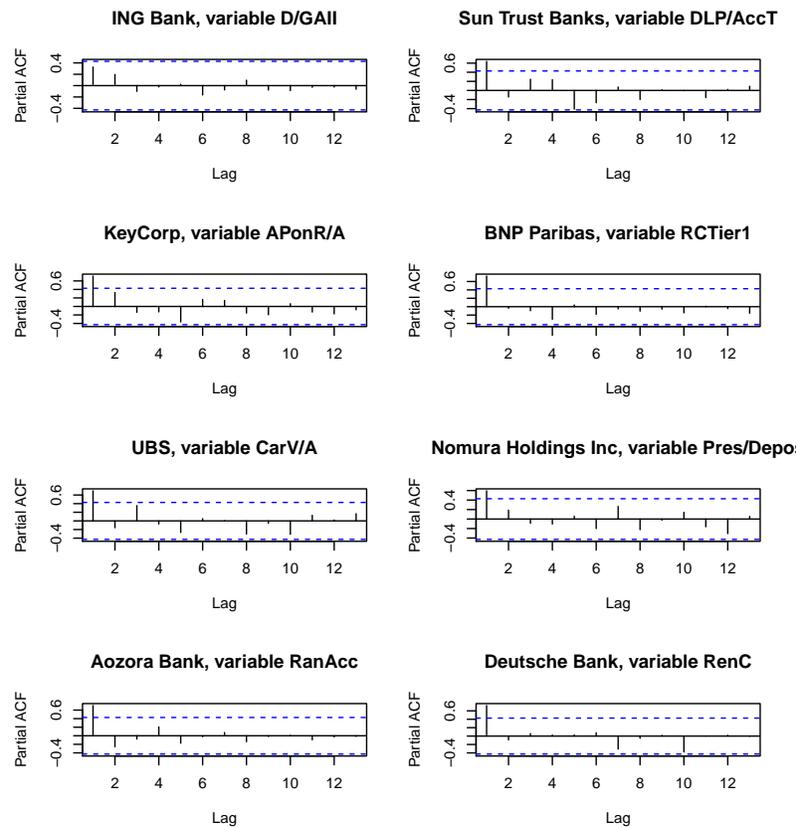


Figura 4.7: Gráfico de Autocorrelogramas parciales (pacf).

## 4.5. Implementación

En la sección anterior se realizó un análisis exploratorio de las variables que estarán en el análisis discriminante, además se representaron las características de los grupos que participan en este estudio. En esta sección se describirá la implementación del modelo, las pruebas de hipótesis asociadas a éste y los resultados obtenidos. El programa que se utilizó para hacer la implementación fue R y R-studio.

### Análisis de Supuestos.

Como se había comentado anteriormente, el análisis discriminante tiene una serie de supuestos que tenemos que comprobar si la muestra los cumple, tanto la normalidad de las muestras de ambas poblaciones como la homoscedasticidad entre grupos.

Lo primero que hay que comprobar es si las poblaciones provienen de una distribución normal multivariada. Para comprobar este supuesto existen pruebas de hipótesis, la que se utilizó en este caso fue la propuesta por K. V. Mardia, basada en el nivel de asimetría y curtosis de las distribuciones de las poblaciones. Antes de mostrar el resultado de este contraste, veremos algunos gráficos y pruebas

de hipótesis que nos ayudan a responder si alguna de las variables tiene una distribución normal<sup>10</sup>.

Para visualizar si las variables tienen un comportamiento normal, tenemos los *Q-Q plot*, que son gráficas en las que en el eje de las X, se tienen los cuantiles teóricos de una distribución gaussiana, mientras que en el eje de las Y se tienen los cuantiles obtenidos a partir de la muestra, si esta efectivamente se distribuye normalmente, entonces se deberá trazar una línea recta en donde cada par de puntos se ubiquen. En caso contrario, los pares de cuantiles graficados se despegaran de línea recta, en mayor o menor medida.

En la imagen 4.8 podemos observar diferentes ejemplos, los primeros considerando solo el grupo de los bancos confiables y, por último, tenemos un par de ejemplos de las instituciones no-confiables.

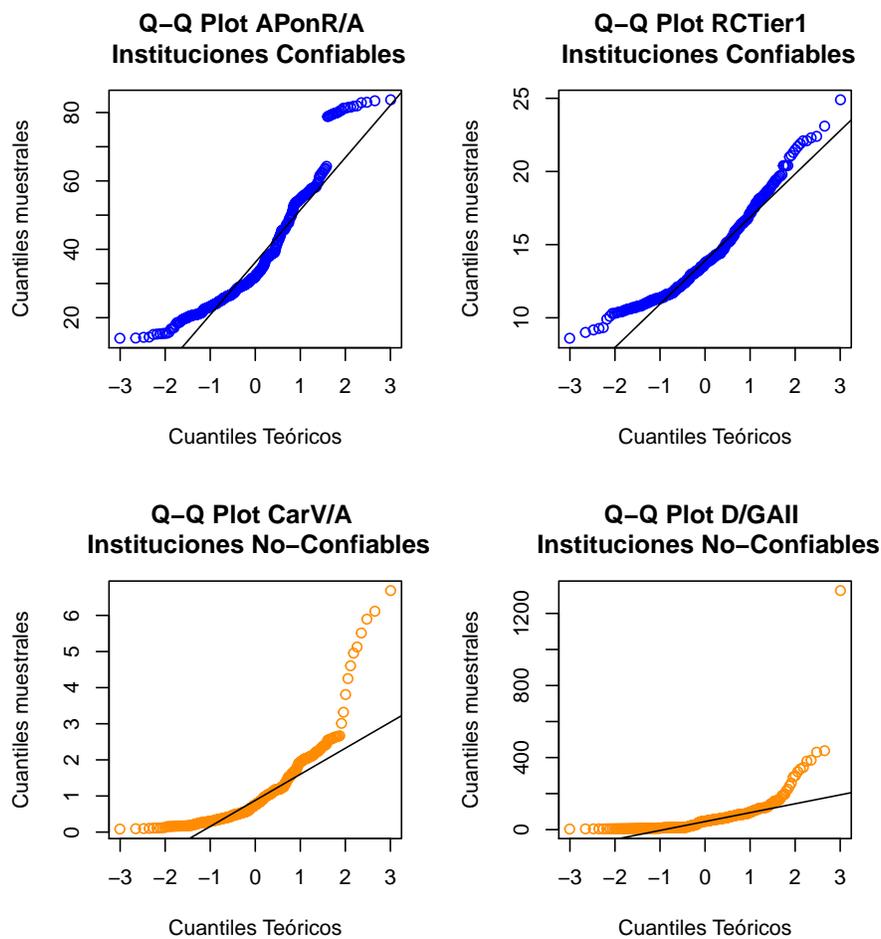


Figura 4.8: Ejemplos de Q-Q Plot.

Para todas las variables en cada uno de los grupos se analizaron los Q-Q plot obteniendo resultados semejantes a los que se ven en la imagen 4.8. Ninguno de ellos muestra un apego claro a la recta, sobre todo en las colas de la distribución. Debido a lo anterior, parecería que las variables de la muestra en

<sup>10</sup>El análisis de cada variable se realiza de manera exploratoria. Cabe destacar que si cada una de las variables se distribuye Normal, no implica que la muestra se distribuya como una Normal Multivariada.

realidad no siguen una distribución gaussiana, sin embargo, hay que comprobarlo con una prueba de hipótesis para corroborar los resultados de los Q-Q Plot.

Además del apoyo gráfico que se tiene, es necesario formalizar los resultados señalados. Para cumplir con este propósito, las pruebas de bondad de ajuste nos permiten, con cierto grado de confianza, rechazar la hipótesis de que una muestra no proviene de cierta distribución o, no rechazar dicha hipótesis. Se han hecho estudios para determinar cuales son las mejores pruebas y en qué casos utilizarlas, de acuerdo a Yap y Sim (Yap and Sim 2011 [24]), para el tamaño de los grupos en el presente trabajo, las pruebas de Shapiro-Wilk (S. S. Shapiro y M. B. Wilk [25]) y Anderson Darlin son las que tienen mayor potencia.

```
> shapiro.test(x = D_GAII_C) # Prueba de Normalidad para D/GAII, Instituciones Confiables

      Shapiro-wilk normality test

data:  D_GAII_C
W = 0.49083, p-value < 2.2e-16

> ad.test(x = Pres_Depos_NC) # Prueba de Normalidad para Pres/Depos, Instituciones No Confiables

      Anderson-Darling normality test

data:  Pres_Depos_NC
A = 16.576, p-value < 2.2e-16

> shapiro.test(x = RenAcc_C) # Prueba de Normalidad para RenAcc, Instituciones Confiables

      Shapiro-wilk normality test

data:  RenAcc_C
W = 0.90818, p-value < 2.2e-16

> ad.test(x = APonR_A_NC) # Prueba de Normalidad para APonR/A, Instituciones No Confiables

      Anderson-Darling normality test

data:  APonR_A_NC
A = 1.491, p-value = 0.0007511
```

Figura 4.9: Prueba de Normalidad

Como se mencionó anteriormente, el supuesto del Análisis Discriminante es que la distribución de los grupos es Normal Multivariada. De cualquier forma, para las variables dentro del modelo, se validó si alguna de éstas seguía una distribución Normal, revisando por grupo y variable por variable. Algunos ejemplos de los resultados se pueden ver en la imagen 4.9, como se puede observar el p-value de cada prueba es muy cercano a 0, por lo tanto en estos ejemplos, como en todos los que se hicieron rechazamos la hipótesis de normalidad de las variables, tanto en el grupo de las instituciones confiables como en el de las no-confiables.

Después de ver estos resultados, hicimos 2 pruebas de hipótesis más para saber si alguno de los grupos en la muestra cumple con el supuesto mencionado. La prueba que se realizó fue el contraste de Mardia (K. V. Mardia [15]). Esta prueba consiste en evaluar la asimetría y la curtosis de la distribución de la muestra con base en un estadístico de prueba para cada una de estas características.

El estadístico para la prueba de la asimetría, bajo la hipótesis de normalidad, sigue una distribución

$\chi^2$ , con  $h$  grados de libertad, donde

$$h = \frac{1}{6}p(p+1)(p+2)$$

con  $p$  igual al número de variables, mientras que el estadístico de la curtosis seguirá una distribución Normal Estandar, bajo la hipótesis nula. De acuerdo a la imagen 4.10, no hay pruebas suficientes para sostener la hipótesis de normalidad, es decir, se rechazan la hipótesis de Normalidad Multivariada en los grupos del modelo.

```
> contraste.Mardia(ins_fin_C,378,8,.95) # Prueba Normalidad Multivariada, Instituciones Confiables
  qnorm(Alpha/2)  Cuantil-Normal  qnorm(1-Alpha/2)  Cuantil-xi^2  qchisq(Alpha)
    -0.06270678    117.87428416    0.06270678    8451.05266994    95.70463704
>
> contraste.Mardia(ins_fin_NC,378,8,.95) # Prueba Normalidad Multivariada, Instituciones No Confiables
  qnorm(Alpha/2)  Cuantil-Normal  qnorm(1-Alpha/2)  Cuantil-xi^2  qchisq(Alpha)
    -0.06270678    45.19471252    0.06270678    3487.97423440    95.70463704
>
```

Figura 4.10: Prueba de Normalidad

En segundo lugar, y a pesar de que el primero no se cumple, hay que revisar el supuesto de la homoscedasticidad, comprobar que la matriz de varianzas y covarianzas de las dos poblaciones son iguales. La prueba para este supuesto tiene por nombre Box's M Test, descrita en el libro de Johnson y Wichern (Johnson 2007 [19]), en la que la hipótesis nula es que las matrices de varianzas y covarianzas de cada grupo en la muestra son iguales mientras que la hipótesis alternativa es que al menos un par de esas matrices es distinta entre sí.

Si los resultados son tales que no se pudiera rechazar  $H_0$  nos indicaría que hay una población sin restricciones para las medias pero con la misma estructura de correlación entre las variables del modelo. Si el estadístico proporcionado por la prueba es menor que el cuantil teórico, no se rechaza  $H_0$ , si es mayor se rechaza.

```
> BoxSMTest(ins_finC[, -1], ins_finNC[, -1])
  Estadística c/s      M      qchiq.95      qchiq.975      qchiq.99
    1099.22554      1084.12008      50.99846      54.43729      58.61921
```

Figura 4.11: Box's M Test

En la imagen 4.11 se ve el resultado de esta prueba con diferentes niveles de confianza. Podemos ver entonces que la hipótesis nula se rechaza de acuerdo al nivel del estadístico, el cual es mucho mayor a los cuantiles teóricos.

En resumen, esta muestra de bancos y sus razones financieras no se distribuye normal y, si consideramos los grupos de instituciones confiables y no confiables, la matriz de varianza-covarianza de ambas muestras no son estadísticamente iguales.

Sin embargo, hay que considerar que son supuestos muy fuertes en el sentido que son muy restrictivos de acuerdo a la información que podemos obtener en ejercicios reales, y no teóricos; por otro lado, aunque no se cumpla con los supuestos, hay técnicas estadísticas que sí tienen poder de predicción. Por lo anterior, a pesar de que no se cumplan con los supuestos mencionados se aplicará el Análisis Discriminante en este trabajo.

Con estas consideraciones, a continuación describiremos la aplicación del modelo, los resultados obtenidos y las observaciones que de este modelo se deriven. Más adelante y para robustecer los resultados explicaremos brevemente el modelo *logit*, su aplicación y cómo éste nos puede ayudar a responder si los supuestos no cumplidos por la muestra son determinantes en la posible aplicación de este modelo en diferentes instituciones financieras en un futuro.

## Exploración del Modelo Preliminar.

En el Capítulo III vimos las bases teóricas del modelo, para poder evaluar la precisión de la predicción del análisis discriminante, se utiliza la matriz de confusión en donde se tabulan los valores reales contra las predicciones de nuestra herramienta. En la Tabla 4.13 podemos observar las tasas de error, en total se tienen 105 errores, 49 para el grupo de las instituciones confiables y 56 para el grupo de las instituciones no-confiables.

		Predicción	
		Grupo C	Grupo NC
Grupos Reales	Grupo C	329	49
	Grupo NC	56	322

Tabla 4.13: Matriz de Confusión.

La precisión obtenida es del 86 %, es decir una tasa de error del 14 %. En particular, para el grupo de las instituciones confiables se tiene una tasa de error del 13 % mientras que para el grupo de las instituciones no-confiables se tienen una tasa de error del 14.8 %, es decir, hay más errores de clasificación en el grupo de las no-confiables provocado, tal vez, por la volatilidad de las observaciones en este grupo que se había visto en la comparación de los Boxplot anteriores. Por otra parte, aunque las tasas de error no son malas, están sesgadas pues se utilizó toda la muestra para realizar el modelo y a esta misma serie de datos se le hizo la predicción, más adelante comprobaremos la precisión evaluándolo con *cross validation* o validación cruzada, para saber qué tan confiable es el modelo.

La Tabla 4.13 fue el resultado del Z-score, es decir, de la combinación lineal de las variables definida por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 Z' = & -0.00261X_1 + 0.00155X_2 - 0.07236X_3 + 0.13308X_4 \\
 & - 0.23287X_5 - 0.23287X_6 - 0.01672X_7 - 0.03712X_8
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Donde,

- $X_1$  = Deuda / Ganancias antes de Impuestos e Intereses,
- $X_2$  = Deuda a LP / Acciones,

- $X_3 =$  Activos Ponderados por Riesgo / Activos Totales,
- $X_4 =$  Razón de Capital Tier1,
- $X_5 =$  Cartera Vencida / Activos,
- $X_6 =$  Préstamos / Depósitos,
- $X_7 =$  Rentabilidad de las Acciones (ROE),
- $X_8 =$  Rentabilidad del Capital y
- $Z' =$  Z-score.

Los coeficientes de discriminación en la ecuación (4.1) son muy pequeños pues las variables tienen rangos muy diferentes entre ellas, y por lo tanto no se puede saber cómo afectan los cambios en las variables en la calificación del Z-score, pero no conocemos la importancia de cada variable. El punto de corte es  $-3.27867$ , una institución financiera con Z-score menor que este valor será asignada al grupo de las no-confiables mientras que una institución con puntuación mayor, será asignada al grupo de las instituciones confiables.

Uno de los aspectos más interesantes del análisis discriminante son los pesos que cada variable tiene para poder conocer el poder de discriminación que tiene cada una de ellas y así saber cuál afecta más y las repercusiones en la clasificación por los movimientos que tenga cada una de las variables. Para poder conocer el verdadero efecto que tiene cada una de las variables en el Z-score se deben mostrar los coeficientes de discriminación con la base escalada para que éstos no estén afectados por la diferencia entre los rangos de las variables, el Z-score con la muestra escalada se define por la siguiente ecuación:

$$Z = -0.3131X_1 + 0.4020X_2 - 1.4409X_3 + 0.3450X_4 - 0.4347X_5 - 0.8421X_6 + 0.6294X_7 - 0.1022X_8 \quad (4.2)$$

Con el Z-score dado por la ecuación (4.2), el punto de corte con estos coeficientes es 0, una institución financiera con Z-score menor 0 será asignada al grupo de las no-confiables mientras que una institución con puntuación positiva, será asignada al grupo de las instituciones confiables.

Con la muestra escalada podemos ver, a través de las ponderaciones de cada variable, el poder de discriminación que cada una de ellas tiene pues ahora el rango de todas está estandarizado. Por lo anterior, por su poder predictivo las variables en orden de importancia son APonR/A, Pres/Depos, RenAcc, CarV/A, DLP/AccT, RCTier1, D/GAII y RenC.

Las variables que ponderan la eficiencia de las instituciones son RenAcc, DLP/AccT y RCTier1 pues tienen signo positivo y por tanto, mientras mayor sea el resultado de dichas variables, el modelo asignará una mejor calificación y de esta manera se podría interpretar que la perspectiva crediticia es

positiva hacia el futuro. Instituciones con mayor rentabilidad en las acciones y colchones de reservas de capital mayores tendrán una mejor calificación, además, aquellas instituciones que brindan la confianza suficiente como para recibir una mayor cantidad de préstamos a largo plazo, obtendrán también una mejor calificación.

Por otro lado, las variables que castigan el desempeño de las instituciones financieras son APonR/A, Pres/Depos, CarV/A, D/GAII y RenC, lo cual tiene sentido pues las primeras cuatro denotan una mala toma de decisiones, es decir, activos más riesgosos, una mala cartera de clientes, ganancias ligeramente bajas respecto a la deuda contraída, y por último como se mencionó en el análisis de los boxplot la variable RenC podría tener signo negativo por la relación inversa entre esta razón financiera y el capital del banco.

Con el Z-score dado por la ecuación (4.2), para clasificar dentro de un grupo a una nueva institución financiera se deberán escalar las variables que la definen, así, con las variables escaladas podremos identificar a qué grupo pertenece con la regla de decisión definida como sigue:

$$\text{Asigna } \mathbf{x} \text{ al Grupo de las instituciones confiables si } Z > 0 \quad (4.3)$$

y al Grupo de las instituciones no-confiables en otro caso. La regla de asignación en (4.3) implica que mientras mayor sea la puntuación obtenida por el Z-score menor será el riesgo contraído al invertir en una institución, y mientras menor sea la puntuación obtenida por el Z-score mayor será este riesgo.

Recordemos que los coeficientes de discriminación, representan el poder de discriminación de cada variable, así, la variable que discrimina mejor entre los grupos de instituciones es APonR/A, mientras que la variable con menor poder de discriminación es RenC. Si se comparan dos instituciones financieras, A y B, con resultados similares en todas las variables pero, A con APonR/A un punto porcentual más grande que B<sup>11</sup>, entonces, la segunda tendrá una mejor calificación crediticia, medida por el Z-score, con 1.4409 puntos más y, además, A tendrá una probabilidad menor que B de ser catalogada como una institución confiable.

En línea con el análisis de las variables por grupo realizado con los Boxplot, la variable que menos poder de discriminación brinda es RenC, pues tanto la media como el rango de los valores que toman los individuos en ambos grupos de esta variable son muy parecidos, lo cual dificulta la decisión a tomar si todos los individuos tienen aproximadamente la misma rentabilidad de capital. Sin embargo, como ya se había mencionado, estas variables fueron seleccionadas por generar el mínimo de errores en la clasificación de los grupos, es decir, sin RenC se perdería información necesaria para clasificar correctamente a las instituciones.

En la imagen 4.12 podemos ver el resultado del Z-score en (4.2), en el eje Y de esta gráfica está la calificación de cada institución, en el eje X se tiene el índice de las instituciones; del lado derecho de la gráfica están las calificaciones del grupo de las instituciones no-confiables, se puede ver que hay más errores en este grupo, hay algunos errores que son muy grandes, es decir, instituciones de este grupo que obtuvieron una calificación muy alta. Del lado izquierdo de la gráfica están las calificaciones de las instituciones del grupo de las confiables, y aun cuando la cantidad de errores es ligeramente menor, se puede ver que algunos de ellos son muy grandes – los que están alrededor de  $-2$  – y representan

<sup>11</sup>Al estar escalada nuestra muestra el aumento de 1% en APonR/A significaría un incremento considerable en el riesgo contraído por una institución.

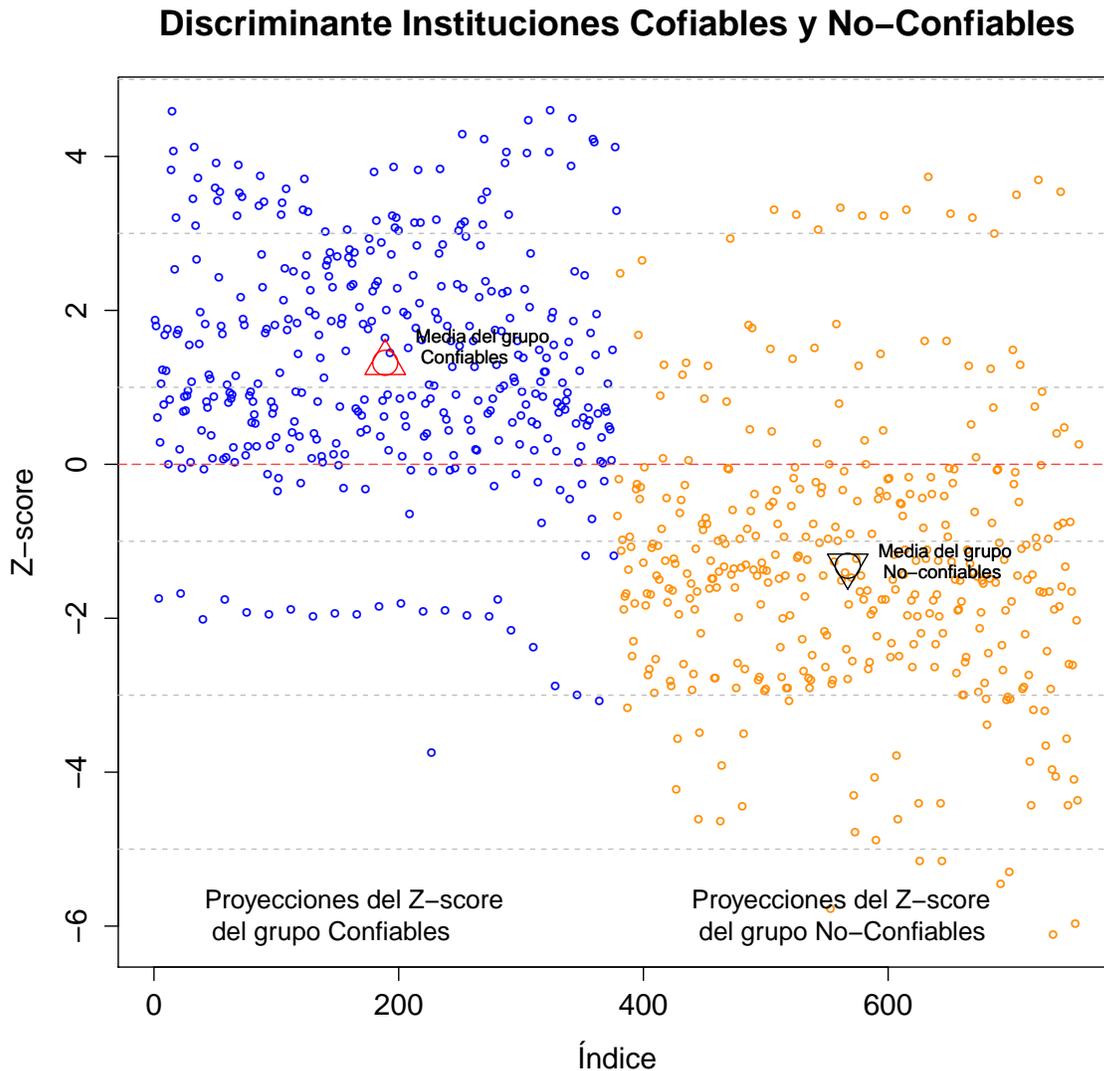


Figura 4.12: Gráfica de calificaciones de las Instituciones Financieras.

aproximadamente la mitad de los errores que hay en este grupo.

Otra forma de describir los resultados del modelo es a través de la densidad del Z-score, en la imagen 4.13 se muestra la densidad de las puntuaciones obtenidas por los individuos en cada grupo, del lado derecho se encuentra la densidad del grupo de las instituciones confiables de color azul y, del lado izquierdo representando al grupo de las no-confiables está la densidad de color naranja. Se puede observar que las densidades tienen un comportamiento similar, cerca del 0 se encuentra una gran cantidad de individuos de ambas poblaciones, además, en ambos casos, en la región de rechazo hay un pequeño repunte o, una segunda moda, en la densidad explicado por los datos atípicos que se mencionaron anteriormente y que se pueden observar con mayor claridad en la imagen 4.12.

Por otro lado, se puede ver que la densidad del grupo de las no-confiables tiene colas más pesadas

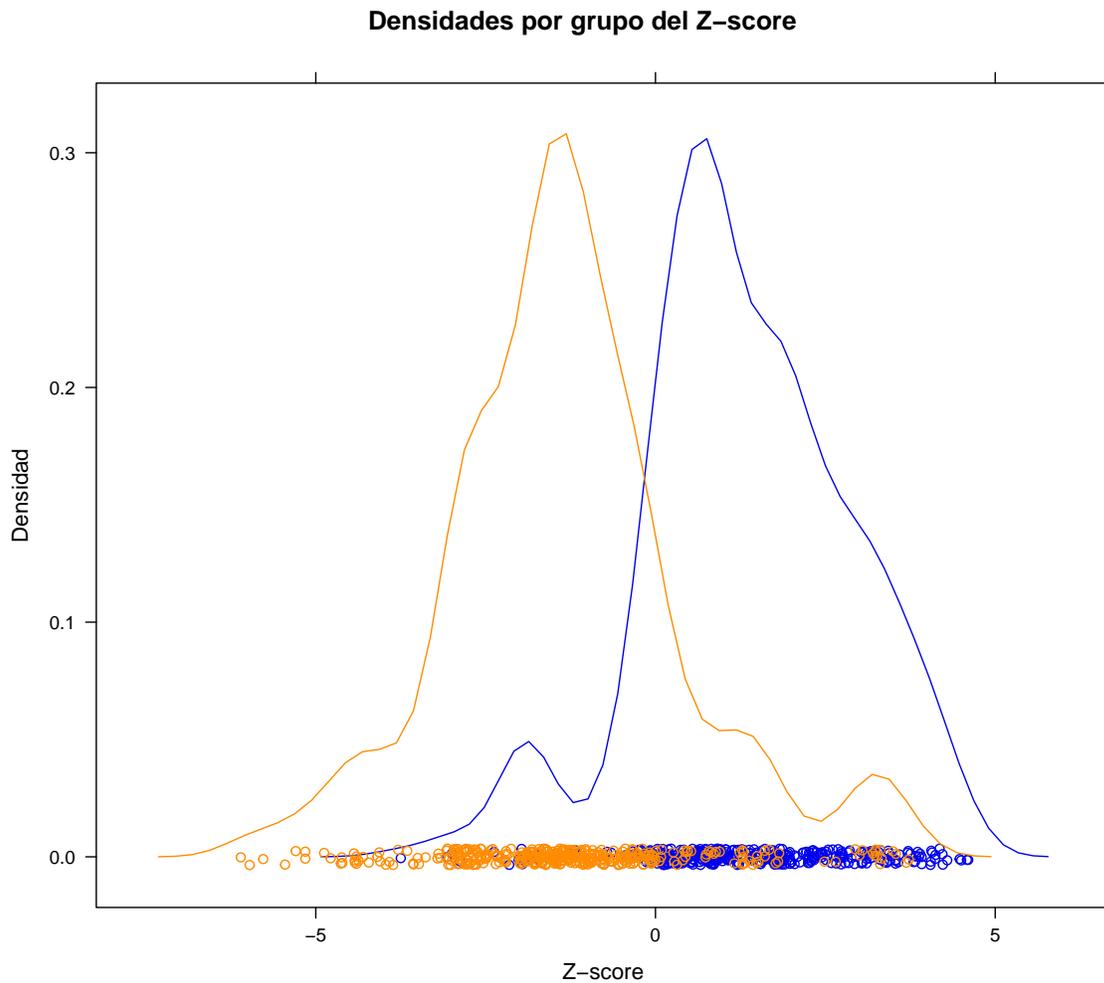


Figura 4.13: Gráfica de calificaciones de las Instituciones Financieras.

que la del otro grupo debido a la cantidad de errores cometidos por el Z-score con las instituciones de este grupo. Sin embargo, la concentración de las instituciones del grupo de las confiables que fueron clasificadas incorrectamente es mayor en un pequeño rango en  $[-2, -1]$  mientras que los errores del grupo de las no confiables están dispersos en el intervalo  $[0, 4]$ . Por último, podemos ver que la media del grupo de las no confiables está más alejado del punto de corte que la media del grupo de las confiables, por lo que aun cuando el punto de corte por construcción del modelo es el 0, se puede apreciar que las densidades se cruzan ligeramente más a la izquierda.

Para aumentar la precisión del modelo se tienen que realizar dos cosas, el análisis de los errores para conocer el por qué de su calificación y la búsqueda del punto de corte óptimo. En la sección Análisis de errores se muestran el procedimiento a seguir con lo errores.

Sin embargo, antes de realizar el análisis de los errores, evaluaremos los resultados preliminares contrastando las tasas de error mencionadas anteriormente, con las tasas de error del modelo logit, de esta forma, sabremos si el análisis discriminante es eficaz aun después de haber encontrado que los supuestos no se cumplen.

## Modelo Logit

Como lo mencionamos en el Capítulo 3, existen otros modelos de clasificación que podemos usar para determinar si un elemento nuevo pertenece o no a cierto grupo preestablecido de acuerdo a sus características.

Uno de ellos es la *regresión logística*, esta herramienta se utiliza principalmente cuando una o algunas de las variables que definen las características de los individuos de la muestra son variables con escalas o recorridos distintos entre ellas, pero la variable de respuesta toma valores categóricos y no necesariamente ordenados entre ellos.

### Regresión Logística.

Si la variable de respuesta  $Y$  tiene dos posibles resultados, por ejemplo instituciones financieras confiables y no-confiables, por comodidad se puede categorizar al primer grupo como 1 y al segundo como 0. El objetivo de este modelo es asignar probabilidades a cada individuo de pertenecer a cada conjunto. Es decir, para el individuo  $\mathbf{x}$  tenemos que si  $P(Y = 1|\mathbf{x}) > 0.5$  entonces  $\mathbf{x}$  será asignado al grupo de las instituciones confiables, y en otro caso,  $\mathbf{x}$  será asignado al grupo de las no-confiables.

Este modelo parte de una regresión lineal, es decir, parte de que la probabilidad de que un individuo pertenezca al grupo 1 se escribe como  $P(X) = P(Y = 1|X) = \beta_0 + \beta_1 X$ , en caso de un modelo de solo una variable. Sin embargo, dado que la respuesta en este caso es cualitativa, la regresión lineal no genera resultados precisos, como explica Gareth James y sus colaboradores (James 2013 [8]).

Para modelar la probabilidad anterior, se cambia la relación de la regresión lineal utilizando la *función logística* de tal manera que los resultados se mantengan en el intervalo  $(0, 1)$ , y así,

$$P(X) = \frac{\exp^{\beta_0 + \beta_1 X}}{1 + \exp^{\beta_0 + \beta_1 X}} \quad (4.4)$$

En la imagen 4.14 podemos ver que la probabilidad de default tendrá una forma de S pero dependiendo del signo de  $\beta_1$ , si es positiva, los valores más pequeños de la función logística tendrán probabilidades pequeñas y mientras la función aumenta su valor, la probabilidad de default será mayor. Si  $\beta_1$  es negativa, el comportamiento será el contrario, valores pequeños de la función logística tendrán mayor probabilidad y ésta decrece conforme la función aumente su valor.

Finalmente, si consideramos la ecuación 4.4, podemos obtener fácilmente que

$$\frac{P(X)}{1 - P(X)} = \exp^{\beta_0 + \beta_1 X}$$

Esta expresión se le conoce como *momio*, puedo tomar valores entre 0 e  $\infty$ , mientras menor sea el momio, significa una menor probabilidad de default y conforme va creciendo el momio, la probabilidad de default crece igualmente.

Precisamente el logaritmo del momio que se construyó se le conoce como *logit* y es de aquí de donde

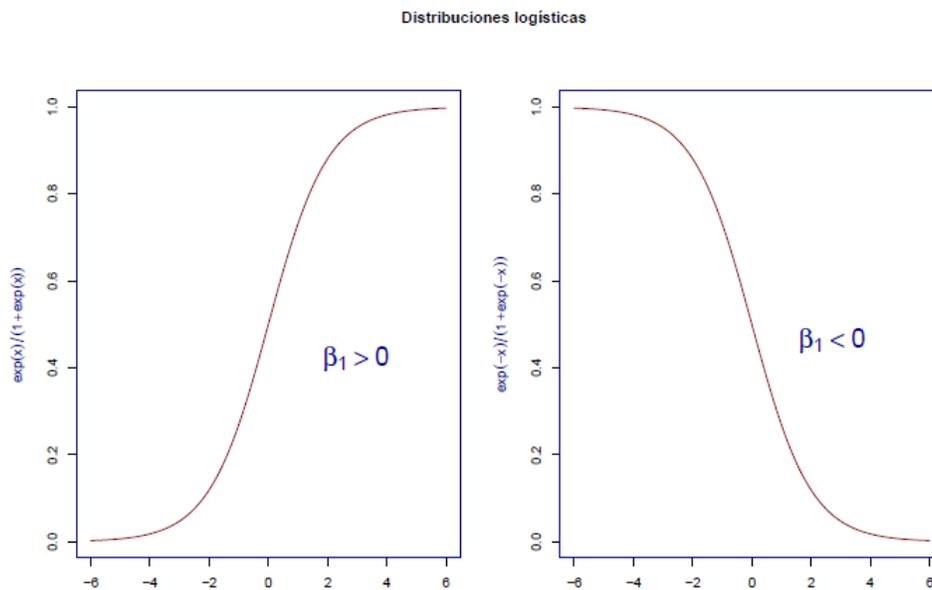


Figura 4.14: Gráfico de tipos de Distribuciones Logísticas.

el modelo toma su nombre. El logit de la función logística de 4.5 tiene una relación lineal respecto a  $X$ .

$$\text{logit}(P(X)) = \log\left(\frac{P(X)}{1 - P(X)}\right) = \beta_0 + \beta_1 X \quad (4.5)$$

Los parámetros del modelo se estiman por *máxima verosimilitud* y si tenemos un modelo con más de una variable explicativa, digamos  $p$  variables, se puede generalizar de manera que

$$\text{logit}(P(\mathbf{X})) = \log\left(\frac{P(\mathbf{X})}{1 - P(\mathbf{X})}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p \quad (4.6)$$

### Aplicación del modelo Logit

Abordaremos ahora la implementación de este modelo. El análisis se hizo nuevamente en R, en este paquete ya está instalada la función *glm* dónde para seleccionar el modelo Logit, hay que especificar el parámetro **family** como binomial. En la imagen 4.15 podemos ver que casi todas las variables son estadísticamente representativas excepto por RenC.

Desarrollando el modelo, logamos obtener una precisión de 84 %, con 323 bancos asignados correctamente al grupo de los confiables, y 314 elementos asignados correctamente al grupo de las instituciones no-confiables, como se ve en la tabla 4.14. Los resultados presentados señalan, con un método totalmente diferente al discutido, que la tasa de error es del 16 %, muy similar a la tasa del 14 % que vimos al inicio de este capítulo representada por la matriz de confusión 4.13.

```

> summary(glm.insFin)$coef
              Estimate Std. Error   z value   Pr(>|z|)
(Intercept) -2.137877019 0.8811111564 -2.4263420 1.525189e-02
D_GAII       0.002531328 0.0012139564  2.0851882 3.705222e-02
DLP_AccT     -0.002776473 0.0008232335 -3.3726433 7.445035e-04
APonR_A      0.057956886 0.0073664853  7.8676443 3.613814e-15
RCTier1      -0.188215932 0.0514920271 -3.6552442 2.569373e-04
CarV_A       0.243445698 0.0973767963  2.5000381 1.241800e-02
Pres_Depos   0.022874229 0.0040459513  5.6536097 1.571128e-08
RenAcc       -0.086696052 0.0222074192 -3.9039229 9.464596e-05
RenC         0.049274241 0.0748977702  0.6578866 5.106110e-01

```

Figura 4.15: Resumen de resultados del modelo Logit en R.

El modelo Logit tiene sus propios supuestos, por ejemplo, de independencia entre variables aleatorias (Canavos 1988 [5]), sin embargo, el objetivo de este trabajo no es profundizar en este modelo ni realizar una comparación entre diferentes herramientas estadísticas. Aplicar un modelo distinto y obtener resultados similares, sirve para tener una referencia que nos indique si el Análisis Discriminante aunque aplicado sin cumplir los supuestos del modelo teórico, es una herramienta coherente para utilizar en este trabajo.

En la siguiente sección, seguiremos con la exploración del Análisis Discriminante buscando explicaciones para los errores que se tuvieron y lo que se puede hacer respecto a ellos, es decir, tratar de optimizar la herramienta para lograr el mejor resultado.

		Predicción	
		Grupo C	Grupo NC
Grupos Reales	Grupo C	323	55
	Grupo NC	64	314

Tabla 4.14: Matriz de Confusión. Modelo Logit.

## 4.6. Análisis de errores

La importancia de analizar los errores del modelo reside en que éstos pueden brindar más información para saber por qué falla la clasificación, si es porque el modelo no tiene el suficiente poder de discriminación o para saber si hay casos específicos en los que podría fallar. Podemos tener dos tipos de errores, puede ser que durante un periodo tuvieron una mejora (o un deterioro) sustancial en sus datos fundamentales por lo que se reportaron datos mejores (o peores) de lo acostumbrado, sin embargo, las perspectivas a futuro no necesariamente cambian por tener un mejor o peor trimestre, se deben de tener fundamentos para que haya un cambio en la calificación de una institución financiera y por lo tanto su calidad crediticia.

Por otro lado, estos errores pueden deberse a que efectivamente hubo un cambio en la calidad crediticia de la institución financiera y por lo tanto en la perspectiva de las agencias calificadoras por lo que antes de la fecha en que se efectuó el cambio en su calificación, la institución debió de

pertenecer al grupo contrario y por lo tanto habría que cambiar de grupo ciertos individuos de la muestra y comprobar si el efecto de estos cambios de calificación repercutiría en la precisión del modelo.

#### 4.6.1. Errores por cambios en la calificación

La primera pregunta que se puede plantear es ¿cómo detectar este tipo de errores? Partiendo de la hipótesis de que el discriminante es una buena herramienta para clasificar nuestra muestra, se puede suponer que si existe algún banco con clasificaciones erróneas consecutivas, éste podría ser candidato para tener un cambio en la calificación.

Analizando los 105 errores correspondientes al Z-score en (4.2), se obtuvieron 5 instituciones financieras con calificaciones con el comportamiento mencionado en el párrafo anterior sin incluir a Lloyds Banking Group PLC pues aunque se obtuvieron varios errores en el periodo 2013 Q4 – 2010 Q2 sólo dos de ellos fueron consecutivos. En la Tabla 4.15 se encuentran los periodos y la cantidad de errores cometidos al clasificar estas instituciones, la cantidad de errores cometidos de manera consecutiva corresponden a un poco más del 60 % de los errores cometidos en la clasificación, es decir, tienen un alto impacto en la precisión del modelo.

Tabla 4.15: Instituciones con clasificadas erróneamente en periodos consecutivos.

Institución	Cantidad de Errores Consecutivos	Periodo
US Bancorp	21	2015 Q1 – 2010 Q1
Shizuoka Bank Ltd	8	2011 Q4 – 2010 Q1
Svenska Handelsbanken	3	2010 Q3 – 2010 Q1
Deutsche Bank AG	16	2013 Q4 – 2010 Q1
ING Groep N.V.	20	2015 Q1 – 2012 Q2, 2011 Q4 – 2010 Q1

En las Imágenes 4.16 y 4.17, se muestran las variables explicativas separadas por grupo, del lado derecho de cada gráfica se encuentra el grupo de las no-confiables y del lado izquierdo el grupo de las confiables. Además los resultados correspondientes a las instituciones a las que hace referencia esta sección se muestran de colores distintos para resaltar que son las instituciones mal clasificadas. De color azul están representados los resultados de Deutsche Bank AG, el azul turquesa representa a la institución ING Groep N.V., por otro lado, en el grupo de las instituciones confiables, USBancorp está representada por el color negro, las resultados de Shizuoka Bank Ltd. son los de color rojo, y los de Svenska Handelsbanken los de color naranja oscuro.

US Bancorp es la institución que más errores tiene en toda la muestra pues en todos los periodos el Z-score la colocó en el grupo de las no-confiables aún cuando su calificación no ha sido menor a A1 en el

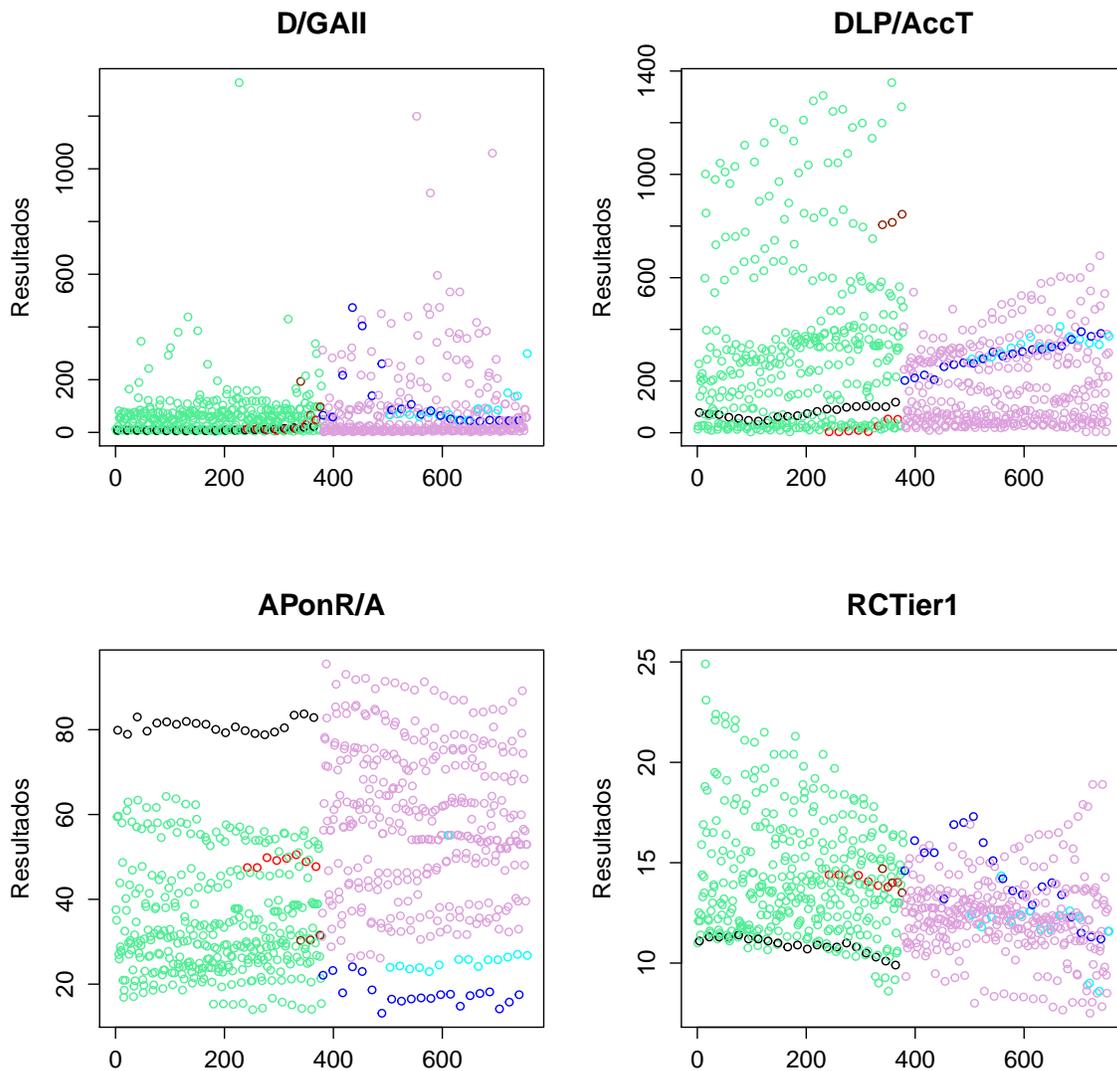


Figura 4.16: Gráfica de las variables de los bancos mal clasificados consecutivamente.

caso de Moody's y A en el caso de S&P y estas calificaciones corresponden según nuestra clasificación al grupo de las instituciones confiables. Sin embargo, las agencias calificadoras sí cambiaron su grado durante el periodo en observación pues a partir del 2012 dejó de tener calificación Aa3, en Septiembre de ese año Moody's le puso un *Watch* negativo y en Diciembre del mismo año lo degradó a A1, pasando de una gran calidad crediticia a una medianamente buena, aunque con un nivel bajo de riesgos. Por otro lado, S&P cambió la calificación dos veces en Diciembre del 2011 de A+ a A y en Septiembre del siguiente año la regreso a A+. Lo anterior podría ser un indicio de que esta institución tuvo periodos con algunas dificultades por lo que sus datos fundamentales podrían haber sido volátiles en el periodo de observación, en línea con la puntuación del Z-score a esta institución en los periodos en observación, la cual estuvo en el intervalo  $[-3, -1.6]$  en donde la calificación del periodo 2015 Q1 fue la mejor,  $-1.67$ , mostrando una ligera mejoría en la calidad crediticia del banco.

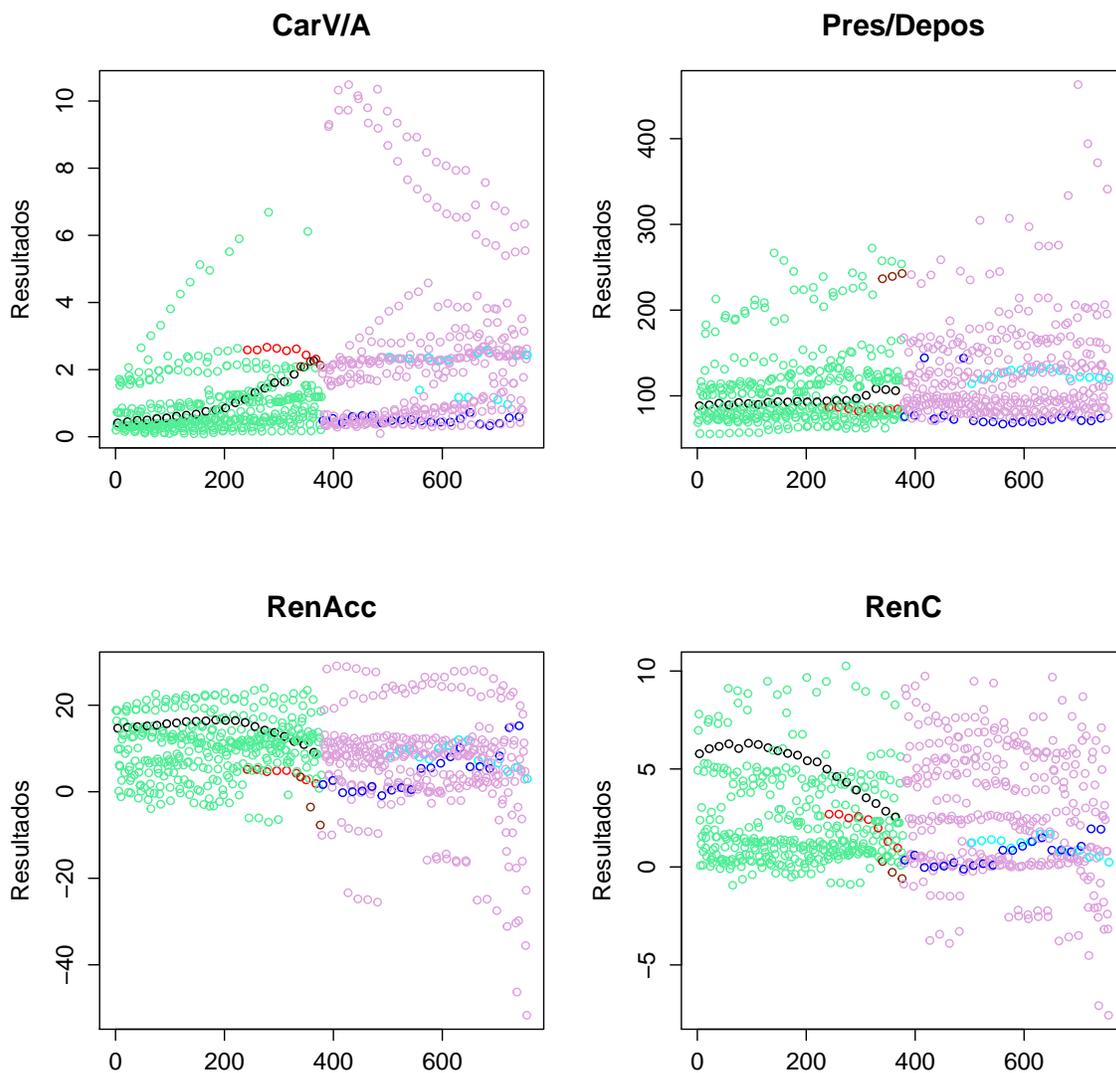


Figura 4.17: Gráfica de las variables de los bancos mal clasificados consecutivamente.

Como se puede observar en las imágenes 4.16 y 4.17, las variables de USBancorp no presentan una gran volatilidad. Sin embargo, en las variables RenAcc, RenC, CarV/A y RCTier1 hay una clara tendencia hacia mejores resultados, es decir, pueden mostrar que la institución mejoró su desempeño cada trimestre y, además, este banco tiene los resultados más desfavorables en la variable APonR/A del grupo al que pertenece, por lo anterior, la calificación del Z-score se redujo fuertemente en todos los periodos, recordemos que esta variable es la que posee el mayor poder de discriminación.

Por otro lado, la calidad crediticia de Shizuoka Bank Ltd no tuvo un cambio significativo durante 2010 y 2011 de acuerdo a Moody's aunque sí se consideró que podría cambiar su perspectiva crediticia pues en Mayo del 2011 le puso un Credit Watch negativo, sin que esto cambiara su calificación. Sin embargo, S&P sí degradó la calificación del banco durante 2011 de AA- a A+, por lo que su

perspectiva crediticia sí sufrió un cambio. En el caso de Svenska Handelsbanken, ninguna de las calificadoras cambió sus perspectiva crediticia, aunque durante el trimestre inmediato anterior al que nosotros consideramos, Moody's decidió cambiar la calificación de banco de Aa1 a Aa2 y hasta Febrero del 2012 le otorgó un Watch negativo al mismo. En cuanto a los resultados corporativos de estas instituciones podemos ver que ambas tienen una rentabilidad sobre las acciones y sobre el capital bastante pequeñas, mientras que la cartera vencida fue de las mayores en el grupo de las confiables en los periodos en los que fueron clasificados erróneamente, y, en el caso de Shizuoka Bank Ltd, tuvo una proporción grande de activos ponderados por riesgo mientras que Svenska Handelsbanken tuvo un balance de préstamos sobre depósitos bastante mayor a los del grupo de los confiables.

Con las instituciones anteriores no hubo ningún cambio en la calificación que implicara un cambio de grupo, por lo que los errores ligados a éstas se deben a resultados reportados en sus razones financieras. Las tres instituciones muestran indicios de que el Z-score tiene la capacidad de reflejar la disminución de la calidad crediticia de una institución financiera, lo cual es una evidencia de que el análisis discriminante es un buen modelo para determinar si invertir o no en un banco.

Ahora, algunos de los errores de Deutsche Bank AG y de ING Groep N.V. sí pueden ser explicados por una mala clasificación a priori de estos elementos de la muestra. Moody's degradó la calificación de Deutsche Bank AG de A2 a A3 el 29-Julio-2014 y S&P el 09-Junio-2015 de A a BBB+ mientras que a ING Groep N.V. Moody's degradó su calificación de A1 a A3 el 15-Junio-2012 y S&P el 02-Diciembre-2013 de A a A-. Es decir, Deutsche Bank AG e ING Groep N.V. antes del cuarto trimestre del 2013, deberían estar en la categoría de los bancos confiables pues hasta ese momento ambas calificadoras consideraron que ya habían cambiado la situación crediticia de los bancos en cuestión. Por otro lado, los resultados obtenidos por ambas instituciones no muestran un decaimiento en su calidad crediticia aunque, en el caso de Deutsche Bank AG, DLP/AccT, RenAcc y RenC decrecen paulatinamente conforme pasa el tiempo y aumentan la proporción APonR/A; en cuanto a ING Groep N.V. la variable DLP/AccT decrece ligeramente mientras que las variables CarV/A y Pres/Depos se muestran niveles altos y niveles bajos en RenAcc y RenC en los periodos anteriores al cambio en la calificación de la institución. Entonces, aun cuando individualmente las variables de estos dos bancos no tenían niveles claros del grupo de los no-confiables o de los confiables, el Z-score fue capaz de determinar correctamente el grupo al que pertenecían y en el caso de ING Groep N.V. determinar el periodo en el que la calidad crediticia de la institución cambió.

Por lo anterior, en la base original hay en total 21 elementos de Deutsche Bank AG y 15 de ING Groep N.V. que están mal clasificados a priori<sup>12</sup>. Al cambiar estos elementos de grupo, toda la estructura de los grupos cambiará, la media y varianza, la estructura de correlaciones mostrada en las Figuras 4.4 y 4.5 e incluso el comportamiento por variable en cada grupo ilustrado en los boxplot de las Figuras 4.1 y 4.2.

---

<sup>12</sup>Nótese que la selección de en qué grupo debería estar la observación de estos bancos, es independiente del resultado que haya tenido el modelo.

### 4.6.2. Errores no consecutivos.

Además de los errores por la clasificación a priori que se tenían, hay que estudiar los errores cuya explicación no puede ser un cambio en la calificación de la institución financiera y decidir si son por culpa de una mala captura, por datos atípicos en alguna variable o porque el modelo tiene ciertas deficiencias que podrían incluso indicar que este no es un buen modelo para clasificar las instituciones en confiables y no-confiables.

En las Figuras 4.18 y 4.19 se muestran nuevamente las instituciones confiables del lado izquierdo, ahora de color amarillo, el grupo de las instituciones no-confiables está del lado derecho de cada gráfica de color morado. En estas imágenes se muestran los errores no consecutivos pintados de color rojo y negro. De color rojo se muestran los valores que son menos comunes en el grupo en el que está clasificada esa institución mientras que de color negro están los demás errores.

En la variable  $D/GAII$  los elementos mal clasificados del grupo de las instituciones confiables tienen valores atípicos en la muestra total pues tienen una proporción de deuda mucho mayor a las ganancias generadas mientras que los elementos mal clasificados del grupo de las instituciones no-confiables no muestran diferencia con el comportamiento del grupo al que pertenecen. En la variable  $DLP/AccT$  casi todos los elementos mal clasificados tienen resultados por arriba de la media de toda la muestra, lo cual no corresponde al comportamiento observado en el grupo de las instituciones no-confiables, aunque por otro lado sí se pudieron encontrar elementos del grupo de las instituciones confiables con valores pequeños que no concuerdan con el comportamiento de este grupo en la variable  $DLP/AccT$ .

En cuanto a  $APonR$ , hay ciertos elementos mal clasificados del grupo de las confiables con valores grandes, y dado que ésta es la variable con mayor poder de discriminación, los resultados de estas instituciones bajó considerablemente. En el grupo de las no-confiables la mayoría de los errores tienen un valor entre 30 y 40 % de  $APonR/A$ , por lo que su calificación no bajó tanto como cabría esperarse en este grupo.

Por otro lado, casi todos los elementos mal clasificados tienen una  $RCTier1$  entre 10 y 15 %, por lo que en esta variable no se podría discernir bien la clasificación sin considerar las demás. Sin embargo, hay algunas instituciones mal clasificadas del grupo de las no-confiables que tienen valores muy grandes y en el grupo de las confiables tienen valores cercanos al mínimo del grupo. En cuanto a  $CarV/A$ , algunos de los errores de ambos grupos tienen resultados más acordes al grupo contrario, sin embargo, la mayoría tiene resultados entre 1 y 2 %.

Así como en  $RCTier1$ , casi todos los individuos mal clasificados tenían valores muy cercanos a la media en la variable  $Pres/Depos$ , aunque algunos de ellos tuvieron resultados correspondientes al grupo contrario.

Por último, tanto en  $RenAcc$  como en  $RenC$ , varios elementos mal clasificados del grupo de las confiables tienen resultados negativos, mientras que si bien, varios de los elementos mal clasificados del grupo de las instituciones no-confiables tienen valores o muy pequeños o negativos, hay algunos con rentabilidad más alta del promedio en ese grupo.

Entonces, con este análisis se muestra que los elementos mal clasificados tenían observaciones en las variables  $DLP/AccT$  y  $D/GAII$  que se alejan del promedio de toda la muestra, en algunas variables

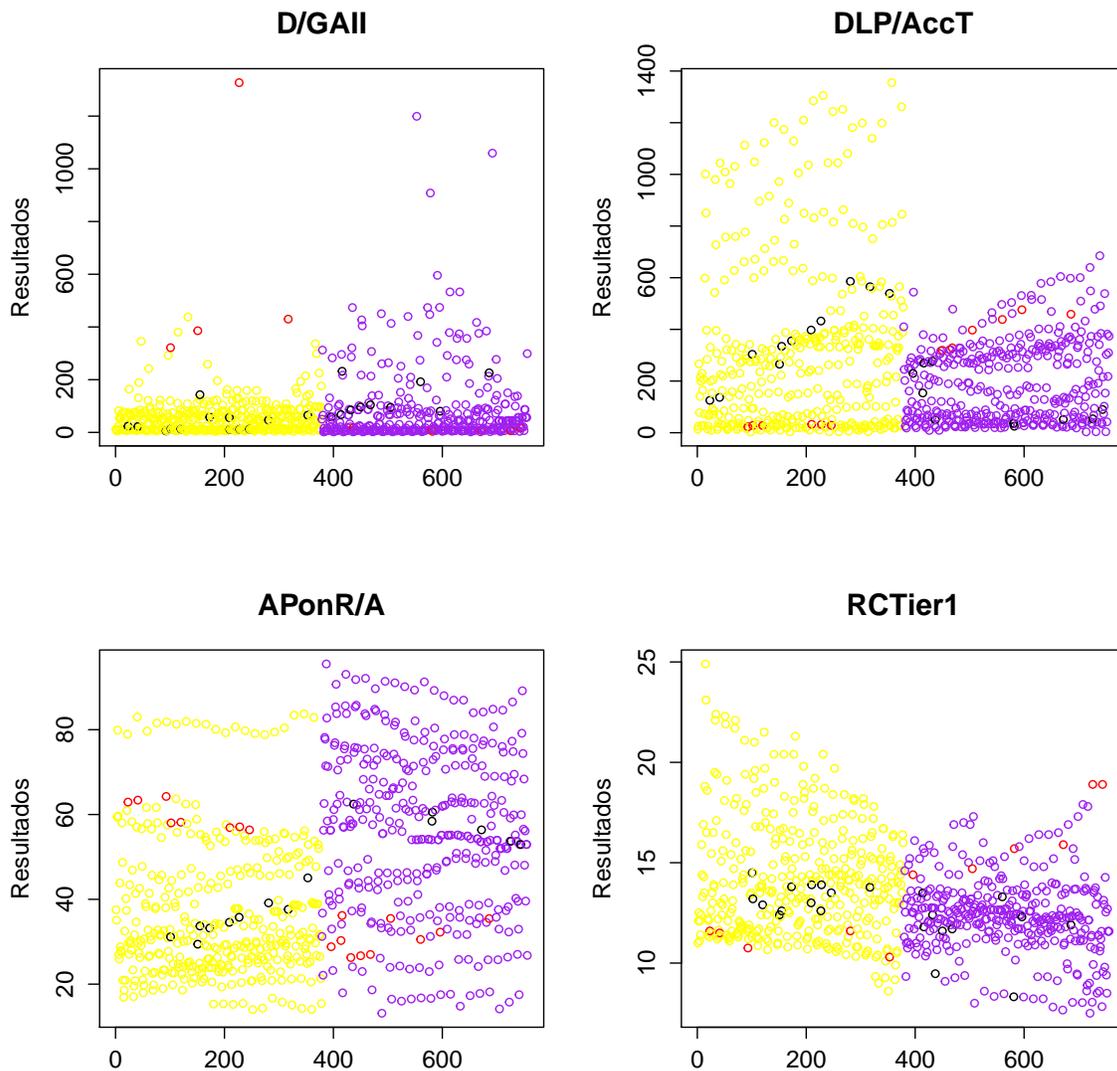


Figura 4.18: Primera gráfica de las variables de los bancos mal clasificados.

tenían resultados correspondientes al grupo contrario, por ejemplo, en APonR/A que es la que afecta más la decisión tomada por la puntuación del Z-score, pero, en las variables restantes, se obtuvieron valores muy cercanos a la media muestral, por lo que la decisión se volvió más complicada. Sin embargo, en todos los elementos mal clasificados fue la combinación de resultados no correspondientes al grupo al que pertenecía la institución lo que determinó el error; por lo anterior podemos descartar una clasificación aleatoria del modelo, en estos casos es difícil poder acertar en la clasificación pues las variables que determinan las características de estas instituciones no lo permiten. Es importante notar que en ninguno de estos casos hubo un cambio de calificación por parte de las agencias calificadoras.

Por último, hay que aclarar que la decisión de invertir o no en una institución debe estar fundamentada por varios modelos y criterios, al utilizar el análisis discriminante sería de más ayuda contar

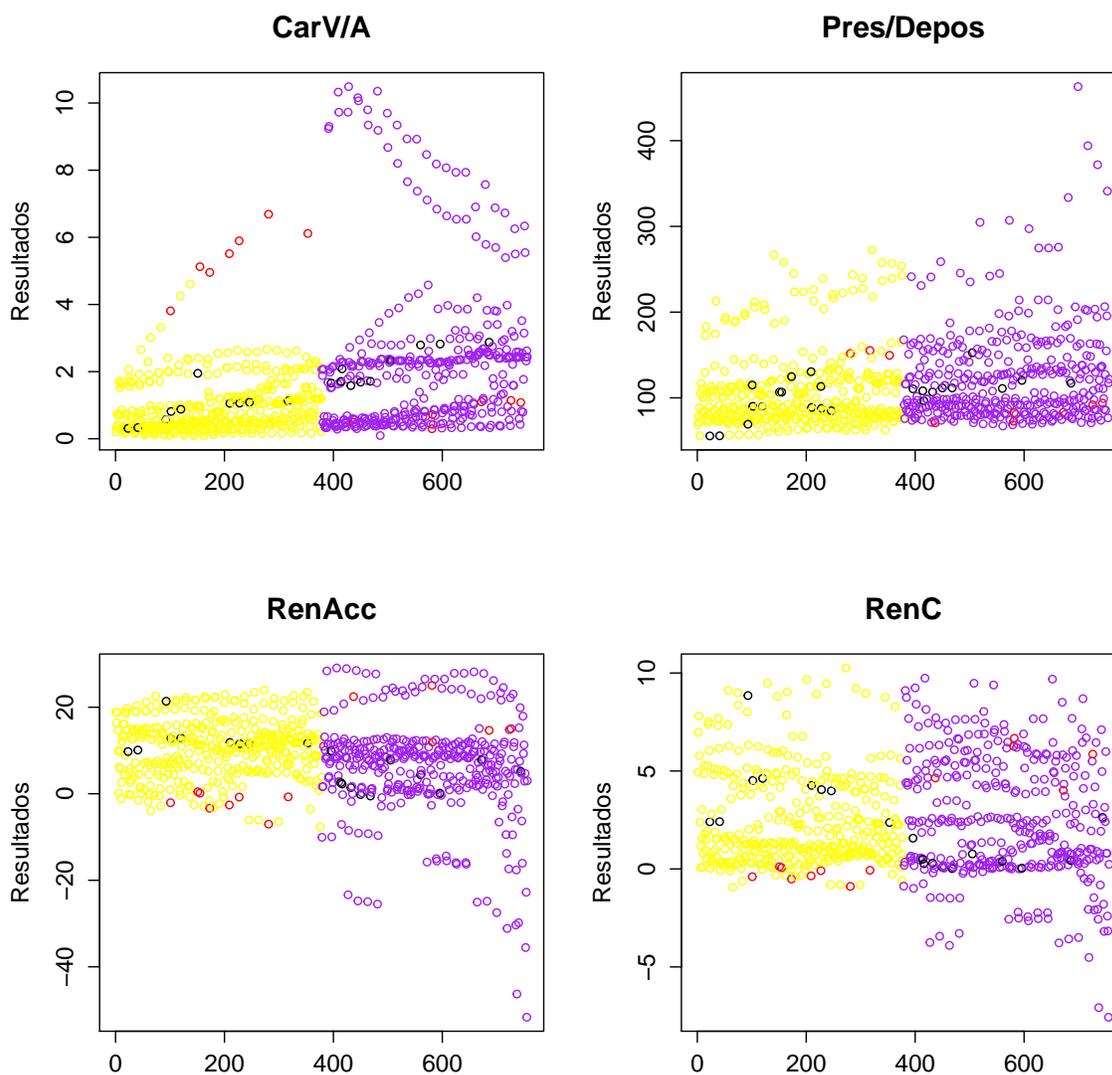


Figura 4.19: Segunda gráfica de las variables de los bancos mal clasificados.

con más de un periodo para evaluar el comportamiento en el tiempo de las instituciones financieras.

### 4.6.3. Corrección de errores.

Como se mencionó en las secciones anteriores, algunos de los errores cometidos al discriminar la muestra se deben a una mala clasificación a priori, en consecuencia el modelo puede mejorar a través de un mejor ajuste en los grupos que conforman la muestra. Es decir, después de hacer un análisis minucioso de los errores, la muestra se conformará por 756 observaciones, 414 del grupo de las instituciones confiables y 342 de las instituciones no-confiables.

Los cambios de clasificación ocasionan que la estructura de los grupos cambie, sin embargo, como se puede ver en las Tablas 4.16 y 4.17 los cambios no son tan grandes en la media o la varianza. En la mayoría de las variables, la varianza dentro de los grupos aumentó ligeramente excepto por APonR/A y en RCTier1, en donde se redujo su nivel. Además, en el grupo de las instituciones no-confiables, el mínimo de las variables APonR/A y Pres/Depos aumentó su nivel por lo que se espera que sigan teniendo un poder de discriminación fuerte con respecto a las demás variables debido a que, por lo mencionado anteriormente, después de mapear con el Z-score a las instituciones financieras, ambos grupos podrían estar más separados.

Tabla 4.16: Estadísticas del grupo C.

	D/GAII	DLP/AccT	APonR/A	RCTier1	CarV/A	Pres/Depos	RenAcc	RenCap
Media	65.6	316.1	36.0	14.0	1.04	108	10.0	2.4
Desvest	94.1	308.8	16.1	2.8	0.946	43.9	6.6	2.3
Máximo	1326	1355	83.7	24.9	6.68	272	23.9	10.257
Mínimo	3.3	3.0	13.1	8.6	0.084	55.5	-7.7	-0.945

Tabla 4.17: Estadísticas del grupo NC.

	D/GAII	DLP/AccT	APonR/A	RCTier1	CarV/A	Pres/Depos	RenAcc	RenCap
Media	80.5	184.5	58.9	12.3	2.4	127.5	6.0	2.7
Desvest	144.5	155.0	16.5	1.8	2.3	55.3	11.8	3.1
Máximo	1199	685	95.5	18.9	10.5	463	29.0	9.7
Mínimo	1.7	3.3	26.1	7.5	0.097	70.8	-51.6	-7.5

Al realizar los cambios de los individuos, se debe calcular el Z-score de nuevo para que los coeficientes de discriminación representen los pesos reales de las variables. Con esta modificación el Z-score con la base escalada se muestra en la ecuación (4.7). En esta ecuación los coeficientes de discriminación están escalados, como en (4.2).

$$\begin{aligned}
 Z = & -0.4236X_1 + 0.3904X_2 - 2.6180X_3 + 0.1608X_4 \\
 & - 0.8150X_5 - 1.2907X_6 + 0.8576X_7 - 0.3411X_8
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Con la ecuación (4.7), se logra mejorar la tasa de error, la Matriz de Confusión 4.18 generada por el nuevo Z-score se calculó con un punto de corte distinto del primero, pues la base no tiene la misma cantidad de individuos en cada grupo y esto provoca que se mueva ligeramente<sup>13</sup>. El punto de corte por default es -0.2333 para decidir a qué grupo pertenecen las instituciones a discriminar.

Con esta clasificación se logra una tasa de buena clasificación de 89.15%, aunque la mejora es pequeña respecto a la tasa de buena clasificación anterior, es un avance que no se puede despreciar. En este caso, para el grupo de las instituciones confiables la tasa de error disminuyó a 10.4% mientras

<sup>13</sup>Recordemos que el punto de corte anterior es 0.

Tabla 4.18: Segunda Matriz de Confusión.

		Predicción	
		Grupo C	Grupo NC
Grupos Reales	Grupo C	371	43
	Grupo NC	39	303

que para el grupo de las instituciones no-confiables la tasa de error disminuyó a 11.4 % desde 13 % y 14.8 %, respectivamente.

### Punto de Corte

Las tasas de error cambian de acuerdo al lugar en el que se encuentra el punto de corte, los que se encontraron con los Z-score tanto en la ecuación (4.2) como en la ecuación (4.7) se encontraron a partir del punto medio entre los centroides de las puntuaciones dentro de cada grupo. Sin embargo, esta decisión no refleja el costo que representa el equivocarse en la elección de las instituciones en la que un banco central invertiría su dinero. En este caso sí es importante controlar el tipo de error II del modelo, es decir, asignarle una calificación buena a una institución con una probabilidad de default más grande que la que el modelo predijo. Así, se prefiere que la tasa de error del grupo de las instituciones no-confiables sea menor o igual a la tasa de error alcanzada por el grupo de las instituciones confiables.

En la Figura 4.20 se muestra cómo cambia la tasa de error del Z-score –en general y por grupo– al mover el punto de corte, de esta manera podemos apreciar qué tanto cede la precisión de uno de los grupos al disminuir la tasa de error del otro. Las dos primeras líneas punteadas representan el punto de corte donde se logra la tasa de error más baja lograda al mover el punto de corte, sin embargo, en el primer caso el Z-score no logró determinar correctamente la pertenencia al grupo de las instituciones no-confiables mientras que en el grupo de las instituciones confiables casi todas fueron clasificadas correctamente. En el segundo caso, la diferencia entre las tasas de error es menor en ambos grupos y además, se logra que ambos grupos tengan la misma tasa de error. La tercer línea vertical corresponde al punto de corte determinado por el punto medio entre los centroides de ambos grupos, mientras que la línea punteada del lado derecho corresponde al punto de corte en el que la tasa de error del grupo de las instituciones no-confiables comienza a ser menor que la tasas de error del otro grupo.

En el último caso, la diferencia en la tasa de error general entre los casos mencionados es despreciable, hay menos errores cometidos al clasificar a los bancos pertenecientes al grupo de los no-confiables y los errores al clasificar a las instituciones del grupo de las confiables no crece de manera significativa. En la matriz de confusión 4.19, se muestran los errores cometidos en cada grupo al mover el punto de corte de  $-0.2333$  a  $-0.1933$ <sup>14</sup>. Como se ilustra en la matriz de confusión mencionada, la precisión del modelo perdería tan solo 0.15 puntos porcentuales quedándose en 89 %, mientras que la precisión al predecir una institución en el grupo de las confiables resulta en 88.8 % y para el grupo de las

<sup>14</sup>Recordemos que este punto de corte esta referenciado a una base escalda, por lo anterior el cambio es bastante pequeño.

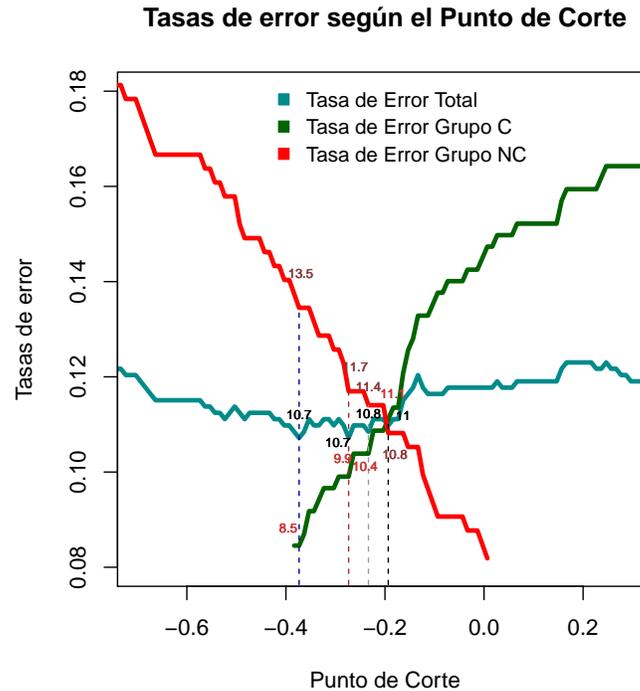


Figura 4.20: Cambio en las tasas de error.

instituciones no-confiables mejora de 88.5% a 89.2%.

Tabla 4.19: Segunda Matriz de Confusión.

		Predicción	
		Grupo C	Grupo NC
Grupos Reales	Grupo C	368	46
	Grupo NC	37	305

Para concluir, en la imagen 4.21, se tienen las curvas ROC<sup>15</sup> de los modelos que exploramos en la sección, antes y después de hacer la corrección por errores, para analizar los resultados obtenidos y su optimización.

La *curva ROC* es una herramienta visual en la que se grafica los resultados obtenidos en la discriminación de los grupos al cambiar el punto de corte, comenzando a partir de con una tasa de error igual a 0 de los falsos positivos, y terminando en 100%.

En el eje de las  $x$  tenemos el tipo de error II, calculado como  $1 - \text{especificidad}$ , donde la especificidad en este caso es la tasa de éxito en clasificar a los bancos en default, como individuos del grupo

<sup>15</sup>Acrónimo de *receiver operating characteristics*, ya que se desarrollo en el campo de la comunicación, para medir la capacidad de recepción de señales.

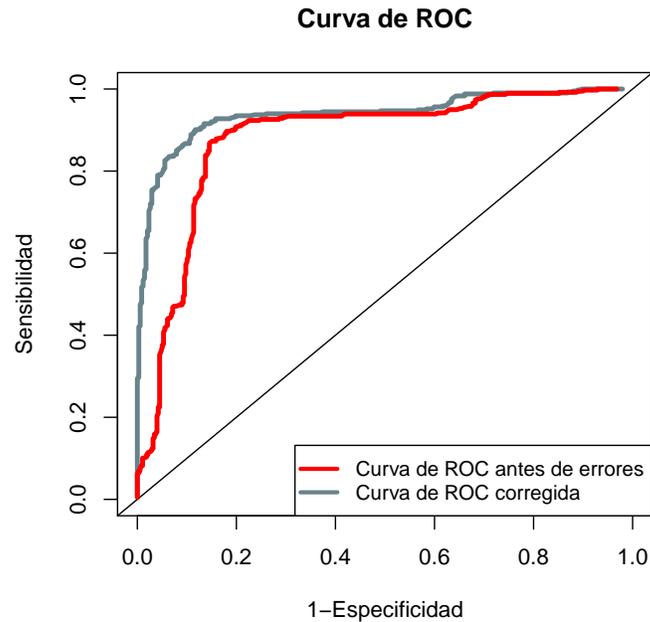


Figura 4.21: Análisis de la curva ROC.

de las no-confiables. En el eje de las  $y$  tenemos la *sensibilidad*, que en este caso, es la tasa de éxito al asignar correctamente a los bancos del grupo I.

Un ajuste perfecto, generaría una recta vertical cuando la tasa de error de falsos positivos sea 0, que al llegar a la altura de 1, se tendría una recta horizontal, en este caso, el área bajo la curva ROC, sería de 1. Mientras mayor sea esta área, mejor será el ajuste logrado.

Por lo anterior, en la imagen 4.21 podemos ver lo que se había comentado anteriormente, el haber replanteado la muestra inicial, condujo a una optimización en la clasificación del modelo. Si bien, no son resultados muy diferentes, sí se puede ver que hay una mejora significativa puesto que la curva de color gris cubre un espacio más grande que la curva ROC de color rojo, generada a partir del modelo inicial.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En línea con los acuerdos de Basilea, este trabajo se propone, sin que éste sea el objetivo, como una herramienta para los colegios de supervisores, con la cual pueden tener un semáforo o un termómetro y de esta manera agrupar a las instituciones financieras y así tener otra forma de controlar la exposiciones al riesgo de crédito. No obstante, hay que aclarar que este método debería de tomarse en cuenta como una herramienta extra, que aporte un poco más de información a los datos que se tengan ya recabados o calculados pues, como ya mencionamos antes, no se debería implementar un solo modelo para administrar cualquier tipo de riesgo, pues mientras más información se tenga, estaremos mejor preparados para cualquier contratiempo o evento por muy inesperado que éste sea.

Además, este modelo podría ser considerado por los Comités de supervisión para evaluar un conjunto de bancos pero además podría ser implementado internamente por lo mismos bancos para tener un parámetro de referencia de la situación en la que se encuentren respecto a sus posiciones riesgosas y así poder actuar en consecuencia.

Al ser tomado en cuenta por las propias instituciones se tendría una herramienta para conocer sus debilidades respecto a otros bancos y con base a esto actuar, ya que las comparaciones en general nos sirven para evaluar a un tiempo, la posición en que estamos respecto a un año anterior, un trimestre anterior, pero también respecto al desempeño del sector, o de los pares de cada institución financiera.

Este estudio además, podría servir para encontrar un patrón que nos permita preveer con la mayor antelación posible los problemas que las instituciones tienen y que de esta forma no pierdan las calificaciones que tienen o si tienen bajas calificaciones poder conocer qué factores son los que lo ocasionan, como se pudo observar en el análisis de errores, la calificación del análisis discriminante a través del tiempo es un buen indicador para medir el desempeño de una empresa.

Los resultados que se esperan obtener de este estudio también pueden servir para ayudar a las instituciones financieras que hayan sido clasificadas como no confiables para que conozcan las áreas en las que tienen que mejorar o hacer reformas y que de esta manera puedan aprovechar las tasas preferenciales que pueden obtener respecto a otras instituciones que no pertenecen al medio financiero, lo cual podría hacer que la institución tuviera un mejor desempeño y tal vez una expansión por lograr alcanzar sus objetivos.

Por otro lado, en un entorno de alta incertidumbre y volatilidad para las instituciones financieras, la clasificación lineal podría no ser la más indicada. Para profundizar en este sentido, se podrían realizar estudios clasificando con técnicas no-lineales. Hay diferentes modelos estadísticos que atienden a comportamientos donde la clasificación no-lineal pudiera ser una alternativa, por ejemplo, modificaciones al Análisis Discriminante, como el Análisis Discriminante Cuadrático o el Análisis Discriminante Regularizado (Kuhn y Johnson 2013 [16]). El primer modelo relaja la hipótesis de tener una sola matriz de varianzas y covarianzas calculando una matriz de covarianza por grupo, y el segundo, supone una matriz de covarianzas por grupo, que son resultado de una combinación entre las matrices de covarianzas del Análisis Discriminante Cuadrático y la matriz del modelo lineal.

Por último, cómo lo mencionó Altman en su primer publicación y que a mi parecer sigue siendo vigente, hay que destacar que el análisis discriminante es una herramienta que sintetiza en una calificación, o en un *score*, la información de los reportes trimestrales de las instituciones financieras, es decir, el análisis de las razones financieras que en conjunto, brindan mucha más información que analizándolas por separado o en grupos de acuerdo a la liquidez, o solidez por ejemplo, de una empresa.

# Apéndice

## Definiciones

Los conceptos que mencionaremos son algunos tecnicismos que ayudan en la comprensión de cualquier problema que se pueda plantear con la estadística multivariada y que unifican el lenguaje que se usa en los modelos, en particular en el Análisis Discriminante para que todas las interpretaciones que se puedan hacer en un estudio sean comprensibles para todos.

**Centroide.** Es el promedio de los valores que identifican a un grupo o categoría de entidades. Es decir, el centroide del  $i$ -ésimo grupo es

$$C_j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} \mathbf{a}' \mathbf{x}_i,$$

donde,  $j = 1, \dots, N_G$ ,  $G$  es el número de grupos,  $N_j$  es el número de individuos dentro del  $j$ -ésimo grupo,  $\mathbf{a}$  es el vector de pesos de las variables independientes asignado por la técnica multivariada y,  $\mathbf{x}_i$  es la realización de las variables independientes del  $i$ -ésimo individuo.

**Coefficiente de Discriminación.** Es el peso cuya medida se relaciona con el poder de discriminación que tiene cada *variable independiente* entre los grupos o posibles resultados de la *variable dependiente*. Para observar el grado de importancia de cada variable a través de este coeficiente es necesario escalar la base para evitar los efectos que puedan tener las escalas de las variables entonces, con la base escalada tenemos que las variables independientes con gran poder de discriminación usualmente poseen pesos más grandes. Sin embargo, la *multicolinealidad* entre las variables independientes puede causar excepciones a esta regla.

**Estructura de las Correlaciones.** Medida de la correlación lineal simple entre las variables independientes, es decir, la asociación que hay entre ellas. En general, la matriz de varianzas y covarianzas muestral de las variables independientes se calcula como

$$S^2 = \begin{pmatrix} s_{11}^2 & s_{12} & \cdots & s_{1p-1} & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22}^2 & \cdots & s_{2p-1} & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp-1} & s_{pp}^2 \end{pmatrix}$$

donde, las varianzas muestrales son  $s_{kk}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{jk} - \tilde{\mu}_k)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$  y, las covarianzas muestrales son  $s_{ik} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{ji} - \tilde{\mu}_i)(x_{jk} - \tilde{\mu}_k)$ ,  $i \neq k$ . También se puede medir la relación que hay entre cada variable y el Z-score, esto es la correlación lineal simple entre cada *variable independiente* y el Z-score, si el modelo tiene más de dos posibles categorías o resultados de la variable respuesta se tendrá más de un Z-score o función discriminadora, en este caso la estructura de correlación es calculada para todas las variables independientes, estén o no en las funciones discriminadoras.

**Indicador.** Es una variable usada en conjunto con una o más variables para formar una *medida compuesta*.

**Matriz de Clasificación.** Sirve para evaluar la habilidad predictiva del Z-score o función discriminadora. Se crea al unir a los objetos que pertenecen a un grupo específico con los objetos pertenecientes al conjunto predictivo, los números en la diagonal representan las clasificaciones correctas y los números fuera de la diagonal representan las clasificaciones incorrectas. En la Tabla 5.1 se muestra el caso en el que solo hay dos posibles clasificaciones Grupo I y Grupo II, en este caso se tienen  $a_{11} + a_{22}$  clasificaciones correctas mientras que la tasa de error es de  $1 - \frac{a_{11} + a_{22}}{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}$ .

Tabla 5.1: Matriz de Clasificación

\ Predichos	Grupo I	Grupo II
Originales		
Grupo I	$a_{11}$	$a_{12}$
Grupo II	$a_{21}$	$a_{22}$

**Medida Compuesta.** Método de combinar varias variables, que miden el mismo concepto, en una sola variable con el objetivo de aumentar el grado en el que la medida replica el fenómeno que medir de la medida a través de una medición multivariada. En la mayoría de los casos, las variables simplemente se suma y esta suma o su promedio se usa en el análisis.

**Modelos Dependientes.** Clasificación de los modelos estadísticos distinguidos por tener una variable o un conjunto de variables llamadas *variable(s) dependiente(s)* y un conjunto de variables llamadas *independientes*. El objetivo es apoyarse en las variables independientes para describir a la variable dependiente.

**Muestra de Validación.** O *sample test*, es usada para comprobar la precisión de un modelo. Se aplica el modelo a una parte de la muestra y en la muestra de validación se comprueba la habilidad del modelo para describir la variable respuesta.

**Multicolinealidad.** Grado en el que una variable puede ser explicada por una o varias de las variables restantes. Cuando la colinealidad es grande no es posible interpretar las relaciones entre las variables o su efecto sobre la respuesta pues no se sabe como afecta el comportamiento de una variable al las demás.

**Punto de Corte.** Es el margen a través del cuál se determina la pertenencia de un individuo a un grupo, para hacer esto se valúa el Z-score en cada individuo y dependiendo de en qué lado del

margen caiga será el grupo al que pertenezca. Cuando el análisis involucra dos grupos, se calcula solo un punto de corte. Los elementos con un Z-score por debajo del punto de corte son asignadas a un grupo, mientras que los individuos con un Z-score mayor serán asignadas al otro grupo. Cuando se tienen tres o más grupos, hay múltiples funciones discriminadoras en el análisis, cada una con un punto de corte distinto. Puede haber cualquier cantidad de puntos de corte, cuando este separa a los grupos con la menos tasa de error se le llama *punto de corte óptimo*.

**Significancia Práctica.** Es una forma de evaluar los resultados del análisis multivariado basada en los resultados sustanciales más que en su significancia estadística. Mientras que la **significancia estadística** determina si el resultado es atribuible a la aleatoriedad, la significancia práctica evalúa si el resultado es útil para alcanzar los objetivos del estudio.

**Función Discriminadora o Z-score.** Es la combinación lineal de las variables en el modelo del análisis discriminante, usualmente se analiza en unidades estandarizadas de manera que se pueda conocer la importancia de cada variable de acuerdo a su coeficiente de discriminación. Esta función tiene la propiedad de dividir a la muestra en grupos de tal forma que cada grupo tendrá un intervalo en la recta proyectada por esta, se calcula para cada objeto –por cada función discriminadora cuando hay más de una– y se usa en conjunto con el *punto de corte* para determinar la predicción del grupo al que pertenecen los objetos. En un modelo con  $n$  variables predictoras  $X_i$  el Z-score es como sigue:

$$Z = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$$

Los coeficientes  $a_i, i = 1, \dots, n$  son los coeficientes de discriminación que pueden ser positivos, negativos o cero si la variable no tiene poder de discriminación.

## Algunos resultados.

**Teorema. 4.** (a) Si  $\Pi_i$  es una población con distribución  $\mathbf{N}_P(\mu_i, \Sigma)$ , con  $i = 1, \dots, g$  y  $\Sigma > 0$ , entonces la regla de máxima verosimilitud asigna a  $\mathbf{x}$  a la población  $\Pi_j$ , donde  $j \in (1, \dots, g)$  es el valor de  $i$  que minimiza la distancia de Mahalanobis

$$(\mathbf{x} - \mu_i)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_i)$$

(b) Si  $g = 2$ , la regla será asigna a  $\mathbf{x}$  al grupo  $\Pi_1$  si

$$\alpha'(\mathbf{x} - \mu) > 0,$$

donde  $\alpha = \Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$  y  $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ , y al grupo  $\Pi_2$  en otro caso.

*Demostración.* Dada una función de distribución normal multivariada con media  $\mu$  y varianza  $\Sigma$  tenemos que la función de verosimilitud es

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = |2\pi\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right\}$$

En la función de verosimilitud el término  $|2\pi\Sigma|^{-\frac{1}{2}}$  es una constante pues la varianza es constante. Por lo tanto la verosimilitud se debería maximizar cuando  $(\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)$  se minimice porque el signo de dicha expresión en la función a maximizar es negativo, pero ese valor es la distancia de Mahalanobis de  $\mathbf{x}$  a la media de la distribución, entonces entre las  $g$  funciones de verosimilitud dadas por las poblaciones, la que tiene un valor más grande, es la que entre minimiza la distancia de Mahalanobis entre su media y el individuo  $\mathbf{x}$ , de esta forma queda probado (a).

Para resolver (b) observemos que  $\mathbf{L}_1(\mathbf{x}) > \mathbf{L}_2(\mathbf{x})$  si y solo si

$$(\mathbf{x} - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_2) > (\mathbf{x} - \mu_1)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_1)$$

$$\Rightarrow (\mathbf{x} - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_2) - (\mathbf{x} - \mu_1)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_1) > 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mu_2 - \mu_2' \Sigma^{-1} \mathbf{x} + \mu_2' \Sigma^{-1} \mu_2 - \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mu_1 + \mu_1' \Sigma^{-1} \mathbf{x} - \mu_1' \Sigma^{-1} \mu_1 > 0$$

$$\Rightarrow -\mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mu_2 - \mu_2' \Sigma^{-1} \mathbf{x} + \mu_2' \Sigma^{-1} \mu_2 + \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mu_1 + \mu_1' \Sigma^{-1} \mathbf{x} - \mu_1' \Sigma^{-1} \mu_1 > 0$$

$$\Rightarrow (\mu_1 - \mu_2)' \Sigma^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2) + \mu_2' \Sigma^{-1} \mu_2 - \mu_1' \Sigma^{-1} \mu_1 > 0$$

Ahora, como  $\mu_1' \Sigma^{-1} \mu_2 = \mu_2' \Sigma^{-1} \mu_1$  ya que  $\mu_i$  y  $\mu_2$  son vectores de  $p \times 1$  podemos sumar uno y restar el otro conservando la desigualdad, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} & (\mu_1 - \mu_2)' \Sigma^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2) - (\mu_1 - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mu_1 + \mu_2) \\ &= \alpha' (2\mathbf{x} - (\mu_1 + \mu_2)) \\ &= \alpha' (\mathbf{x} - \mu) \\ &\Rightarrow \alpha' (\mathbf{x} - \mu) > 0 \end{aligned}$$

Así, se asignará a  $\mathbf{x}$  al grupo  $\Pi_1$  si  $\alpha'(\mathbf{x} - \mu) > 0$  y al grupo  $\Pi_2$ , en otro caso.  $\square$

**Teorema. 5.** *Todas las reglas discriminantes Bayesianas (y por consiguiente la regla de máxima verosimilitud) son admisibles.*

*Demostración.* Sea  $d^*$  la regla de Discriminación Bayesiana respecto al vector de probabilidades a priori  $\pi$ . Supongamos que existe otra regla de decisión  $d$  tal que  $d$  es mejor que  $d^*$ . Entonces, sean  $\{p_{ii}\}$  y  $\{p_{ii}^*\}$  las probabilidades de asignación correcta correspondientes a  $d$  y a la regla de discriminación Bayesiana respectivamente.

Ahora, como  $d$  es mejor que  $d^*$  y además  $\pi_j > 0$  para toda  $j$ , tenemos que  $\sum_j \pi_j p_{jj} > \sum_j \pi_j p_{jj}^*$ . Sin embargo, usando (3.10) tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_j \pi_j p_{jj} &= \sum_j \int \phi_j(\mathbf{x}) \pi_j \mathbf{L}_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\leq \sum_j \int \phi_j(\mathbf{x}) \max_j \{\pi_j \mathbf{L}_j(\mathbf{x})\} \, d\mathbf{x} = \int \left[ \sum_j \phi_j(\mathbf{x}) \right] \max_j \{\pi_j \mathbf{L}_j(\mathbf{x})\} \, d\mathbf{x} \\ &= \int \max_j \{\pi_j \mathbf{L}_j(\mathbf{x})\} \, d\mathbf{x} = \int \left[ \sum_j \phi_j^*(\mathbf{x}) \right] \pi_j \mathbf{L}_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_j \pi_j p_{jj}^*. \end{aligned}$$

Es decir,  $\sum_j \pi_j p_{jj} \leq \sum_j \pi_j p_{jj}^*$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $d^*$  es admisible. Luego, todas las reglas discriminantes Bayesaianas son admisibles.  $\square$

# Bibliografía

- [1] P. Embrechts A. J. McNeil, R. Frey, *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*, (2005).
- [2] E. I. Altman, *A further empirical investigation of bankruptcy costs*, Journal of Finance (1984), pp. 1067–89.
- [3] E.I. Altman, *Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy costs*, Journal of Finance (1968), pp. 189–209.
- [4] W.H. Beaver, *Financial ratios as predictors of failure*, Journal of Accounting Research, Selected Studies (1966), pp. 71–111.
- [5] George C. Canavos, *Probabilidad y estadística aplicaciones y métodos*, 1st edition ed., 1988.
- [6] J. Hartzell E.I. Altman and M. Peck, *Emerging markets corporate bonds: A scoring system*, (1995).
- [7] Moon James E. Gavin Thomas A. Erwin Michael J. Fulmer, John G. Jr., *A bankruptcy classification model for small firms*, Journal of Commercial Bank Lending (1984), pp. 25–37.
- [8] Trevor Hastie Robert Tibshirani Gareth James, Daniela Witten, *An introduction to statistical learning, with applications in r*, 2013.
- [9] A. De Lara Haro, *Medición y control de riesgos financieros*, (2008).
- [10] Fondo Monetario Internacional, *Las lecciones de la crisis*, Boletín del FMI (2009).
- [11] Paul Narayan Robert Nimmo John B. Caouette, Edward I. Altman, *Managing credit risk: The great challenge for the global financial markets*, (2008).
- [12] Barry J. Babin Rolph E. Anderson Joseph F.Hair, William C.Black, *Multivariate data analysis*, (2009).
- [13] J. M. Bibby K. V. Mardia, J. T. Kent, *Multivariate analysis*, (1995).
- [14] Jean Leagult, *C.a.-score, a warning system for small business failures*, (1987), pp. 29–31.
- [15] K. V. Mardia, *Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications*, (1970), pp. 519–530.

- [16] Kjell Johnson Max Kuhn, *Applied predictive modeling*, 2013.
- [17] Basel Committee on Banking Supervision, *A brief history of the basel committee*, (2015).
- [18] Credit Suisse Financial Products, *Creditrisk+, a credit risk management framework*, (1997).
- [19] Dean W. Wichern Richard A. Johnson, *Applied multivariate statistical analysis*, 6th edition ed., 2007.
- [20] Ross Sheldon M., *Introduction to probability models*, 9th edition ed., 2007.
- [21] Gordon L.V. Springate, *Predicticing the possibility of failure in a canadian firm*, (1978).
- [22] Jerome Friedman Trevor Hastie, Robert Tibshirani, *The elements of statistical learning: Data mining, inference, and prediction*, (2008).
- [23] Douglas Hubbard W., *How to measure anything. finding the value of intangibles in bussiness*, (2007).
- [24] B. W. Yap y C. H. Sim, *Comparisons of various types of normality tests*, (2011), pp. 2141–2155.
- [25] S. S. Shapiro y M. B. Wilk, *An analysis of variance test for normality (complete samples)*, (1965), pp. 591–611.