UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM - UMSNH

GAPS Y MODELOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

TESIS

Que para optar por el grado de:

Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Francisco Santiago Nieto de la Rosa

fnieto@matmor.unam.mx

Tutor:

Dr. Osvaldo Guzmán González

oguzman@matmor.unam.mx

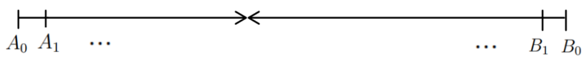
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM Morelia

Morelia, Michoacán, México

Agosto de 2022

Abstract

In set theory one of the most interesting objects is the power set of natural numbers, one of the main reasons is that its cardinality is not fixed with the ZFC axioms. Let FIN be the ideal of the finite sets of ω and suppose that we have ordered the quotient $\wp(\omega)/FIN$ with $\subset^*$. Let us now consider two ordinals γ and δ that index the following sequences $\{A_\alpha : \alpha \in \gamma\}$ and $\{B_\alpha : \alpha \in \delta\}$ in $\wp(\omega)/FIN$ and with the following properties. First, $\subset^*$ is a well order for the first sequence, second, $\supset^*$ is a well order for the second sequence, and lastly, for each $\alpha \in \gamma$ and $beta \in \delta$ occurs that $A_\alpha \subset^* B_\beta$. Geometrically it can be represented as follows.



So, the most natural question is what happens between the tips of these arrows? Will there be a set C that falls in the middle (with containment) or is there no space between the A's and B's for that set?

Precisely from these questions comes the name of the main object of study in this thesis, the gaps. When there is no such C from the previous question we are in the presence of a (γ, δ)-gap because the only thing between the two arrows is a gap. If, on the other hand, such C does exist, we say that we have a pregap and C interpolates said (γ, δ)-pregap. Recall that δ and γ refer to the lengths of the dates in the diagram above.

We began the work by formalizing the ideas that were outlined above. To begin with, we will only be interested in the (κ, λ)-gaps where κ and γ are regular cardinals. One of the first results we get is that there are no (ω, ω)-gaps. This leads us to ask first if gaps really exist, and if so, what is the minimum size κ and λ for which gaps exist. It turns out that we can give answers from ZFC to these questions, showing that there are gaps of type (ω_1, ω_1) and the minimum κ for which there is a (κ, ω)-gap is $\mathfrak{b}$.

Another question that may arise from the previous paragraph is what other types of gaps exist? And in order to give a partial answer to this question, we include two highly relevant sections in the first chapter. In the first one we studied how to use the forcing method to create gaps in the generic extensions of ZFC. In the second we study the opposite, that is, how to destroy (interpolate) a gap that we have in a ZFC model using forcing (that is, forcing a set that interpolates to a gap).

We close the first chapter giving an application of the gaps. In particular, we see that every total order of size at most ω_1 can fit into $\wp(\omega)/FIN$.

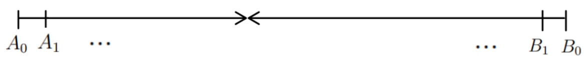
Once all the necessary tools have been developed, we move on to the second chapter of the thesis, which consists of studying the existence of gaps in ZFC models plus some axiom. Specifically, we use Martin's Axiom (MA) and Proper Forcing Axiom (PFA) and present as results a Kunen's theorem that ensures the existence of a ZFC model where MA is satisfied (and therefore the continuum hypothesis fails) and there is a gap of type $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$. On the other hand, we have a Baumgartner result that says that in any model where PFA is satisfied (therefore $\mathfrak{c} = \omega_2$) we have that the only gaps that exist are those of type $(\mathfrak{b}, \omega)$, $(\omega, \mathfrak{b})$ or (ω_1, ω_1).

With these two results we have that from ZFC we can only ensure the existence of gaps for the two sizes that we saw in chapter one. Furthermore, we show that there is a certain "gap" between MA and PFA that, despite being very similar axioms, have great differences as shown in this thesis.

Finally, it is worth emphasizing that since this is a thesis to obtain a master's degree, it is not self-contained, that is, for a complete understanding of it, it is essential that the reader have prior knowledge of: Zorn's lemma, cardinal and ordinal numbers. , cofinality, set algebra, forcing method, transfinite induction, continuum characteristics.

Resumen

En la teoría de los conjuntos uno de los objetos de mayor interés es el conjunto potencia de los números naturales, una de las principales razones es que su cardinalidad no queda fija con los axiomas de ZFC. Sea FIN el ideal de los conjuntos finitos de ω y supongamos que tenemos ordenado al cociente $\wp(\omega)/FIN$ con $\subset^*$. Consideremos ahora a dos ordinales γ y δ que indizan a las siguientes sucesiones $\{A_\alpha : \alpha \in \gamma\}$ y $\{B_\alpha : \alpha \in \delta\}$ en $\wp(\omega)/FIN$ y con las siguientes propiedades. Primero, $\subset^*$ es un buen orden para la primer sucesión, segundo, $\supset^*$ es un buen orden para la segunda sucesión y por último, para cada $\alpha \in \gamma$ y $\beta \in \delta$ ocurre que $A_\alpha \subset^* B_\beta$. Geométricamente se puede representar de la siguiente manera.



Entonces la pregunta más natural es ¿qué pasa entre las puntas de dichas flechas? ¿Existirá un conjunto C que se queda en medio (con la contención) o no hay espacio entre las A's y las B's para dicho conjunto?

Justo de estas preguntas viene el nombre del principal objeto de estudio en esta tesis, las gaps. Como su traducción al español nos revela, se trata de saber si hay una "brecha" entre las dos flechas, justo cuando no existe tal C de la pregunta anterior estamos en presencia de una (γ, δ)-gap pues lo único que hay entre las dos flechas es una brecha. Si por el contrario sí existe tal C, decimos que tenemos una pregap y C interpola a dicha (γ, δ)-pregap. Recordemos que δ y γ hacen referencia a las longitudes de las fechas en el diagrama de arriba.

Empezamos el trabajo formalizando las ideas que se bosquejaron arriba. Para empezar solo nos interesarán las (κ, λ)-gaps donde κ y γ son cardinales regulares. Uno de los primero resultados que obtenemos es que no hay (ω, ω)-gaps. Esto nos conduce a preguntarnos primero si realmente existen las gaps, y si es así, cuál es el tamaño mínimo κ y λ para los cuales existen gaps. Resulta que podemos dar respuestas desde ZFC a dichas preguntas, demostrando que existen gaps de tipo (ω_1, ω_1) y el mínimo κ para el cual existe una (κ, ω)-gap es $\mathfrak{b}$.

Otra pregunta que puede surgir a raíz del párrafo anterior es ¿qué otros tipos de gaps existen? Y con el fin de dar una respuesta parcial a esta pregunta incluimos en el primer capítulo dos secciones altamente relevantes. En la primera estudiamos como usar el método de forcing para crear gaps en las extensiones genéricas de ZFC. En la segunda estudiamos lo contrario, es decir como destruir (interpolar) una gap que tenemos en un modelo de ZFC usando forcing (es decir, forzar un conjunto que interpola a una gap).

Cerramos el primer capítulo dando una aplicación de las gaps. En particular vemos que todo orden total de tamaño a lo más ω_1 se puede encajar en $\wp(\omega)/FIN$.

Una vez desarrollada toda la herramienta necesaria pasamos al segundo capítulo de la tesis que consiste en estudiar las existencia de gaps en modelos de ZFC más algún axioma. En concreto empleamos Axioma de Martin (MA) y Proper Forcing Axiom (PFA) y presentamos como resultados un teorema de Kunen que asegura la existencia de un modelo de ZFC donde se satisface MA (y por ende falla la hipótesis del continuo) y existe una gap del tipo $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$. Por otro lado tenemos un resultado de Baumgartner que dice que en cualquier modelo donde se satisfaga PFA (por tanto $\mathfrak{c} = \omega_2$) tenemos que las únicas gaps que existen son las de tipo $(\mathfrak{b}, \omega)$, $(\omega, \mathfrak{b})$ o bien (ω_1, ω_1).

Con estos dos resultados tenemos que desde ZFC solo podemos asegurar la existencia de gaps para los dos tamaños que vimos en el capítulo uno. Más aún, mostramos que existe cierta "brecha" entre MA y PFA que a pesar de ser axiomas muy parecidos tienen grandes diferencias como se muestra en esta tesis.

Por último vale la pena recalcar que al ser ésta una tesis para obtener el grado de maestro no es autocontenida, es decir, para una total comprensión de la misma es fundamental que el lector tenga conocimientos previos en: lema de Zorn, números cardinales y ordinales, cofinalidad, álgebra de conjuntos, método de forcing, inducción transfinita, características del continuo.

PALABRAS CLAVE: ZFC, Forcing, Proper Axiom, Martin's Axiom, casicontención.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a las gaps

1.1. Definiciones y propiedades básicas de las gaps

Como es natural pensar por el nombre de esta sección, aquí daremos la introducción a las gaps y algunos resultados que nos serán útiles en el desarrollo de la tesis.

Definición 1.1. *Sean κ y λ números cardinales y $\{f, g\}, \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$, $\{g_\beta : \beta < \kappa\} \subseteq \omega^\omega$.*

1. *Decimos que f diverge de g ($f \prec g$) si $lim_n(g(n) - f(n)) = \infty$.*

2. *Diremos que $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{g_\beta : \beta < \lambda\}$ es una (κ, λ)-pregap en ω^ω si se cumple que para todo $\alpha_1 < \alpha_2 < \kappa$ y $\beta_1 < \beta_2 < \lambda$*

$$f_{\alpha_1} \prec f_{\alpha_2} \prec g_{\beta_2} \prec g_{\beta_1}.$$

3. *Una (κ, λ)-pregap en ω^ω es una gap en ω^ω si no existe $h \in \omega^\omega$ tal que para todo $\alpha < \kappa$ y $\beta < \lambda$ se tiene que $f_\alpha \prec h \prec g_\beta$.*

4. *Si una* (κ,λ)*-pregap en* ω^ω *no es una gap en* ω^ω*, a una función* h *como en el punto anterior la llamamos interpolación y decimos que* h *interpola a la* (κ,λ)*-pregap en* ω^ω*.*

5. *Una pregap en* ω^ω *es simétrica si* $cof(\kappa) = cof(\lambda)$*.*

A continuación presentaremos algunos resultados útiles considerados folklore.

Teorema 1.2 (de interpolación)**.** *No existen* (κ,λ)*-gaps en* $(\omega^\omega, \prec)$ *cuando* $\kappa, \lambda \leq \omega$*.*

Demostración. El caso en el que κ ó λ son finitos es trivial, así que nos concentraremos en el caso $\kappa = \omega = \lambda$.

Sea $\{f_n : n < \omega\}, \{g_n : n < \omega\}$ una (ω,ω)-pregap. Definimos por recursión una sucesión $(m_n)_n \subseteq \omega$ tal que para toda $k \in \omega$ si $j \geq m_k$

1. $f_0(j) < f_1(j) < ... < f_k(j) < g_k(j) < ... < g_0(j)$

2. $f_k(j) + 2k \leq g_k(j)$.

Así definimos a

$$h(j) = \begin{cases} f_k(j) + k & si \quad j \in [m_k, m_{k+1}) \\ \\ 0 & si \quad j \notin \bigcup_{k<\omega} [m_k, m_{k+1}) \end{cases}$$

Veamos que h en efecto interpola la pregap.

Sean $n, m \in \omega$ y k el máximo de ellos, si $j > m_k \geq m_n, m_m$ tenemos que $f_0(j) < f_1(j) < ... < f_k(j) < f_k(j) + k = h(j) < f_k(j) + 2k < g_k(j) < ... < g_0(j)$. ■

Gracias al teorema de interpolación vamos a considerar a partir de ahora ordinales no numerables, al menos uno de ellos, pues si ambos son numerables no tenemos una gap.

Es fácil notar que $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{g_\beta : \beta < \lambda\}$ es una (κ, λ)-gap si y sólo si para cualquier par de conjuntos X, Y cofinales en κ y λ respectivamente, $\{f_\alpha : \alpha \in X\}, \{g_\beta : \beta \in Y\}$ es una (κ, λ)-gap. Por lo cual a partir de ahora vamos a pensar que todos nuestros cardinales que indicen una gap son regulares.

Proposición 1.3. *Existe un cardinal λ tal que hay una (λ, ω)-gap.*

Demostración. Empecemos por fijar $\{g_n : n < \omega\}$ una familia de funciones tal que si $n < m$ entonces $g_m \prec g_n$. Definimos $F \subseteq \wp(\omega^\omega)$ como el conjunto de los x tales que cumplen:

1. x es no vacío y bien ordenado con $\prec$,
2. si $f \in x$, para toda n tendremos que $f \prec g_n$,
3. si $f \in x$, entonces $\lim_n f(n) = \infty$.

Notemos que F es no vacío. Entonces, definimos un orden en F del siguiente modo: $x \ll y$ (con $x, y \in F$) si $x \subseteq y$ y para cada $f \in x$ y $g \in y$ se tiene que $f \prec g$. Podemos demostrar que $(F \ll)$ es un orden parcial que cumple con las hipótesis del lema de Zorn, por lo que podemos encontrar a $z \in F$ un elemento maximal. Sea $\{f_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq z$ un conjunto cofinal en z con $\lambda = |z|$. Basta usar las propiedades de z para corroborar que $\{f_\alpha : \alpha < \lambda\}, \{g_n : n < \omega\}$ es una gap. ■

Otro orden en donde se puede estudiar gaps es $(\wp(\omega), \subset^*)$ donde $A \subset^* B$ si $A \setminus B$ es finito y $B \setminus A$ es infinito.

En vista de que $\omega \times \omega$ es numerable, la existencia de una $(\kappa, \lambda)-$gap en $(\wp(\omega), \subset^*)$ es equivalente a la existencia de una $(\kappa, \lambda)-$gap en $(\wp(\omega \times \omega), \subset^*)$.

Proposición 1.4. *Sean κ y λ cardinales regulares infinitos. Si existe una (κ, λ)-gap en $(\omega^\omega, \prec)$, entonces existe una (κ, λ)-gap en $(\wp(\omega), \subset^*)$.*

Demostración. Consideremos a $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{g_\beta : \beta < \lambda\}$ una (κ, λ)-gap en $(\omega^\omega, \prec)$. Construiremos una $(\kappa, \lambda)-$gap en $(\wp(\omega \times \omega), \subset^*)$.

Para cada $\alpha < \kappa$ definimos $A_\alpha = \{(n, m) : m \leq f_\alpha(n)\}$ y para cada $\beta < \lambda$ definimos $B_\beta = \{(n, m) : m \leq g_\beta(n)\}$. Notemos que el hecho de que $f_\alpha \prec g_\beta$ implica que $A_\alpha \subset^* B_\beta$. Por lo cual hemos obtenido hasta el momento una $(\kappa, \lambda)-$pregap.

Si suponemos que $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{B_\beta : \beta < \lambda\}$ no es una gap, existe $C \subseteq \omega \times \omega$ tal que interpola a la pregap.

Definimos

$$h(n) = \begin{cases} 0 & \text{si para toda m se tiene que } (n,m) \notin C \\ \max\{m : (n, m) \in C\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la cual está bien definida gracias a que $C \subset^* B_0$.

De la definición de h se sigue para toda $\alpha < \kappa$ que $f_\alpha \prec h$ pues: existe un natural ℓ tal que $A_\alpha \setminus \ell \subset C$. Por lo tanto, para toda $n \geq \ell$ se tiene que $f_\alpha(n) < h(n)$, como $C \setminus A_\alpha$ es infinito y $\kappa \setminus \alpha$ también lo es tenemos que h diverge de f_α.

Con un razonamiento análogo se prueba para toda $\beta < \lambda$ a partir de que $C \subset^* B_\beta$ que $h \prec g_\beta$. Por lo cual tenemos que h interpola a la gap con la que iniciamos lo cual es un absurdo. Ésta contradicción vino de suponer que $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{B_\beta : \beta < \lambda\}$ no es una gap. ■

Como el lector puede suponer, es posible definir gaps y pregaps en otros ordenes. Sin embargo, con el resultado anterior nosotros unicamente nos concentraremos en el estudio de gaps en $(\wp(\omega), \subset^*)$. Así, para abreviar solo diremos (κ, λ)-pregap o (κ, λ)-gap según sea el caso y el lector deberá entender que estamos trabajando en $(\wp(\omega), \subset^*)$.

1.2. Gaps en ZFC

En esta sección mostraremos que para las parejas de cardinales $(\omega, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b}, \omega)$ y (ω_1, ω_1) podemos encontrar una gap en $(\wp(\omega), \subset^*)$. Más aún, en el capítulo siguiente veremos que desde ZFC son las únicas que podemos asegurar que existen, aunque en ciertos modelos de ZFC pueden existir más tipos de gaps.

Para simplificar un poco nuestro trabajo tenemos la siguiente proposición muy cómoda.

Proposición 1.5. *Existe una (κ, λ)-gap en $(\wp(\omega), \subset^*)$ si y sólo si existe una (λ, κ)-gap.*

Demostración. Empecemos por fijar κ, λ cardinales regulares y $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{B_\beta : \beta < \lambda\}$ una (κ, λ)-gap.

Para cada $\alpha < \kappa$ definimos $D_\alpha = \omega \setminus A_\alpha$ y para cada $\beta < \lambda$ hacemos lo propio con $C_\beta = \omega \setminus B_\beta$. Claramente, para dos subconjuntos X, Y de ω la condición $X \subset^* Y$ tiene como consecuencia que $(\omega \setminus Y) \subset^* (\omega \setminus X)$. Por lo tanto tenemos que $\{C_\beta : \beta < \lambda\}, \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una pregap.

Supongamos por contrapositiva que la pregap construida el párrafo anterior no es una gap, así existe $E \subseteq \omega$ que interpola a dicha pregap. Entonces $\omega \setminus E$ interpola a $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{B_\beta : \beta < \lambda\}$. ■

Para la siguiente definición será util recordar que dadas dos funciones f y g en ω^ω el símbolo $f \leq^* g$ significa que existe $n \in \omega$ tal que para todo $m \geq n$ se tiene que $f(m) \leq g(m)$.

Definición 1.6. *Sea $B = \{f_\alpha \in \omega^\omega : \alpha < \mathfrak{b}\}$, decimos que B es una $\mathfrak{b}$-escala si B es una familia no acotada de funciones crecientes y si $\alpha < \beta < \mathfrak{b}$, entonces $f_\alpha \leq^* f_\beta$*

Es un simple ejercicio de recursión transfinita que existe una $\mathfrak{b}$-escala en ZFC.

Teorema 1.7 (Rothberger)**.** *Sea λ el mínimo cardinal para el que existe una (λ, ω)-gap. Entonces $\lambda = \mathfrak{b}$.*

Demostración. Primero mostremos que $\lambda \geq \mathfrak{b}$. Sea $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}, \{B_n : n < \omega\}$ una gap. Si $i < j < \omega$ tenemos que $B_j \subset^* B_i$, por lo que si hacemos para cada n a $M_n = \omega \setminus B_n$, entonces $M_i \subseteq^* M_j$.

Sin pérdida de la generalidad podemos suponer que $(M_i)_{i<\omega}$ es $\subseteq$-creciente y $\bigcup_{i<\omega} M_i = \omega$. Sea $f : \omega \to \omega \times \omega$ una biyección tal que $f(M_0) = \{0\} \times \omega$ y $f(M_{i+1} \setminus M_i) = \{i\} \times \omega$. Así $f(M_i) = (i+1) \times \omega$.

Notemos que para cada natural n y cada $\alpha < \lambda$ tenemos que $|A_\alpha \cap M_n|$ es finito puesto que $A_\alpha \subseteq^* B_m$. Para cada $\alpha < \lambda$ podemos definir a $x_\alpha : \omega \to \omega$

$$x_\alpha(n) = \begin{cases} \max\{\ell : (n, \ell) \in f[A_\alpha \cap (M_n \setminus M_{n-1})]\} & \text{cuando tal máximo existe,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

una función en ω^ω donde para cada $a \in A_\alpha$

1. $\ell \leq x_\alpha(n)$ donde ℓ y n son tales que $f(a) = (n, \ell)$,

2. $a \in M_n \setminus \bigcup_{i<n} M_i$.

Afirmamos que $\{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es no acotada. Probemos esto por contradicción. Supongamos que $x \in \omega^\omega$ es una cota para dicha familia.

Definimos para cada n natural a $c_n = \{(n, i) : i \leq x(n)\}$. Notemos que c_n es finito. Así mismo, definimos $C = f^{-1}(\bigcup_{n<\omega} c_n)$.

Notemos que

$$C \cap M_i = f^{-1}(\bigcup_{n<\omega} c_n) \cap M_i = f^{-1}(\bigcup_{n<\omega} c_n \cap f(M_i)) = f^{-1}(\bigcup_{n\leq i} c_n),$$

el cual es finito. Por lo tanto, para cada i ocurre que $C \subseteq^* B_i$.

Sea $\alpha < \lambda$, para llegar a una contradicción basta ver que $A_\alpha \subseteq^* C$, pues así C interpolaría a una gap. En orden de corroborar esto encontramos $m < \omega$

tal que para toda $n \geq m$ se tiene que $x_\alpha(n) \leq x(n)$. De este modo para cada $n \geq m$, $f(A_\alpha \cap [M_n \setminus_{i<n} M_i]) \subseteq c_n$.

Por el párrafo anterior $\bigcup_{n\geq m}(A_\alpha \cap [M_n \setminus_{i<n} M_i]) \subseteq \bigcup_{n\geq m} c_n \subseteq^* C$. En resumidas cuentas tenemos que $\bigcup_{n\geq m}(A_\alpha \cap M_n) \subseteq^* C$. Pero $A_\alpha =^* \bigcup_{n\geq m}(A_\alpha \cap M_n)$, por lo tanto $A_\alpha \subseteq^* C$, tal como buscábamos.

Para demostrar que $\lambda \leq \mathfrak{b}$ empecemos por considerar $B = \{f_i : i < \mathfrak{b}\}$ una $\mathfrak{b}$-escala. Definiremos en $\omega \times \omega$ una $(\omega, \mathfrak{b})$-gap. Empezamos con $A_0 = \{0\} \times \omega$ y si $n < \omega$, $A_{n+1} = A_n \cup (\{n\} \times \omega)$. Claramente tenemos que si $i < j < \omega$, entonces $A_i \subseteq A_j$.

También definimos para cada $i < \mathfrak{b}$ a $B_i = \bigcup_{n<\omega}\{(n,k) : k > f_i(n)\}$. Así, si $i < j < \mathfrak{b}$, se tiene que $B_j \subseteq^* B_i$.

Supongamos que lo construido hasta ahora no es una gap, es decir que hay C tal que interpola a $\{A_i : i < \omega\}$ y $\{B_j : j < \mathfrak{b}\}$. Notemos que en este caso, como para cada $n < \omega$ pasa que $A_n \subseteq^* C$, entonces $|(\{n\} \times \omega) \setminus C|$ es finito. Así definimos $f : \omega \to \omega$ como $f(n) = \max\{(\{n\} \times \omega) \setminus C\}$. Ahora, en vista de que para cada $j < \mathfrak{b}$, tenemos que $C \subseteq^* B_j$ y $f_j \leq f$, deducimos que B está acotada, lo cual es una contradicción que viene de suponer la existencia de tal C. ■

Las otras gaps en $(\wp(\omega), \subset^*)$ que podemos asegurar que existen en ZFC son las (ω_1, ω_1)-gaps, más aún, la primera demostración de este hecho fue dada con una gap que tiene propiedades especiales conocida como Hausdorff gap. En orden de definir a ésta última daremos una equivalencia de gap.

Definición 1.8. *Sean $A, B \subseteq [\omega]^\omega$, decimos que A y B son ortogonales ($A \perp B$) si para toda $a \in A$ y para toda $b \in B$ se tiene que $(a \cap b)$ es finito.*

Proposición 1.9. *Sean κ y λ cardinales regulares, $(\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{B_\beta : \beta < \lambda\})$ es una pregap si y sólo si*

1. *$\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $\{\omega \setminus B_\beta : \beta < \lambda\}$ son ortogonales*

2. $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ *y* $\{\omega \setminus B_\beta : \beta < \lambda\}$ *son* $\subset^*$*-crecientes*

Además la pregap es una gap si y sólo si no existe C *tal que*

1. para cada $\alpha < \kappa$ *se tiene* $A_\alpha \subseteq^* C$ *y*

2. para cada $\beta < \lambda$ *se tiene* $|(\omega \setminus B_\beta) \cap C| < \omega$.

A esta equivalencia le llamaremos segunda definición de gap, el fin de esto es poder dar la prueba más natural de la existencia de una Hausdorff gap que definimos a continuación.

Definición 1.10. *Sea* $(\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}, \{B_\beta : \beta < \omega_1\})$ *una* (ω_1, ω_1)*-pregap según la segunda definición.*

1. para cada $\alpha < \omega_1$ *y* $n < \omega$ *sea*

$L_\alpha(n) = \{\beta \leq \alpha : (A_\beta \cap B_\alpha) \cup (A_\alpha \cap B_\beta) \subseteq n\}$,

2. la pregap es una Haudorff gap si:

a*) para cada* $\alpha < \omega_1$*, pasa que* $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$,

b*) para cada* $\alpha < \omega_1$ *y* $n < \omega$ *el conjunto* $L_\alpha(n)$ *es finito.*

Lema 1.11. *Sea* $(\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}, \{B_\beta : \beta < \omega_1\})$ *una Hausdorff gap, entonces* $(\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}, \{B_\beta : \beta < \omega_1\})$ *es una gap (según la segunda definición).*

Demostración. Procedemos por contradicción y suponemos que existe C como en la Proposición 1.9. Para cada $\alpha < \omega_1$ definimos a

$$m_\alpha = \text{mín}\{n < \omega : A_\alpha \setminus n \subseteq C \wedge (B_\alpha \setminus n) \cap C = \emptyset\}.$$

Supongamos sin pérdida de la generalidad que hay $m < \omega$ tal que para toda $\alpha < \omega_1$ pasa $m_\alpha = m$. Ahora fijamos $\gamma < \omega_1$ un ordinal infinito. De esta manera para cada $\alpha < \gamma$ se tiene que $A_\alpha \setminus m \subseteq C$ y $B_\gamma \setminus m \subseteq \omega \setminus C$, por lo tanto $A_\alpha \cap B_\gamma \subseteq m$. De manera totalmente análoga concluimos que $B_\alpha \cap A_\gamma \subseteq m$. De las conclusiones anteriores obtenemos que $\alpha \in L_\gamma(m)$, lo cual es una contradicción ya que entonces $L_\gamma(m)$ es infinito. ∎

Ahora veamos el resultado al que queríamos llegar.

Teorema 1.12 (Hausdorff, 1936). *Existe una Hausdorff gap. En particular existe una* (ω_1, ω_1)*-gap.*

Demostración. Por recursión sobre ω_1 construiremos $\{(A_\alpha, B_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ tal que:

1. Si $\alpha < \beta < \omega_1$, las contenciones $A_\alpha \subseteq A_\beta$ y $B_\alpha \subseteq B_\beta$ se cumplen.
2. $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$.
3. Si $\alpha, \beta < \omega_1$ el conjunto $A_\alpha \cap B_\beta$ es finito.
4. Si $\alpha, \beta < \omega_1$ el conjunto $\omega \setminus (A_\alpha \cup B_\beta)$ es infinito.
5. Para todo $n < \omega$ y para todo $\alpha < \omega_1$ el conjunto $L_\alpha(n)$ es finito.

Claramente, con estas propiedades el conjunto resultante es una Hausdorff gap, así que procedemos a su construcción.

Empecemos la recursión fijando A_0 y B_0 subconjuntos ajenos de ω cuya unión tenga complemento infinito.

Supongamos que tenemos construida la sucesión hasta β y queremos construir el paso $\alpha = \beta + 1$. En virtud de que $\omega \setminus (A_\beta \cup B_\beta)$ es infinito, definimos $\{X, Y, Z\}$ una partición de dicho conjunto en conjuntos infinitos. Basta hacer $A_\alpha = A_\beta \cup X$ y $B_\alpha = B_\beta \cup Y$. Notemos que para toda $n < \omega$ pasa que $L_\alpha(n)$ es finito pues $A_\beta \subseteq A_\alpha$ y $B_\beta \subseteq B_\alpha$.

Ahora supongamos que α es un ordinal límite y para cada $\xi < \alpha$ ya tenemos definido a A_ξ y B_ξ. En virtud de que $\alpha < \omega_1$ es numerable y la familia $\{A_\xi \cup B_\xi : \xi < \alpha\}$ es $\subseteq^*$-creciente, existe $W \in [\omega]^\omega$ el cual cumple que

1. para cada $\xi < \alpha$ ocurre que $A_\xi \cup B_\xi \subseteq^* W$ y
2. $\omega \setminus W$ es infinito.

Para cada $\xi < \alpha$ definimos a $\bar{A}_\xi = A_\xi \cap W$ y $\bar{B}_\xi = B_\xi \cap W$. De esta manera $\{\bar{A}_\xi : \xi < \alpha\}, \{\bar{B}_\xi : \xi < \alpha\}$ forman una gap, sin embargo, es numerable por lo que sabemos que existe $C \subseteq \omega$ que la interpola y entonces no es una gap.

Definimos $\mathcal{L} = \{X \subseteq \omega : (C \subseteq X \subseteq W) \wedge (\forall \xi < \alpha (X \perp B_\xi))\}$. También podemos definir para cada natural n y cada D elemento de $\mathcal{L}$ al conjunto $K_n(D) = \{\xi < \alpha : B_\xi \cap D \subseteq n\}$. Notemos algunas propiedades de éstos conjuntos.

1. Si $K_n(D)$ es infinito, entonces es cofinal en α y de tipo de orden ω.

   Para ver este punto es suficiente notar que si $\beta < \alpha$, entonces $\beta \cap K_n(D)$ es finito. Sea $\xi \in \beta \cap K_n(D)$, fijamos un natural $m > n$ de suerte tal que $A_\beta \setminus m \subseteq D$ y $(B_\beta \setminus m) \cap D = \emptyset$. Una consecuencia de esto es que tanto $A_\beta \cap B_\xi$ como $A_\xi \cap B_\beta$ se quedan contenidos en m. Por tanto $\xi \in L_m(\beta)$ que es finito por hipótesis de recursión.

2. Para cada $D \in \mathcal{L}$ y cada $n \in \omega$ existe $E \in \mathcal{L}$ tal que contiene a D y para todo $m < \omega$ se tiene que $K_n(D) \cap K_m(E)$ es finito.

   Dividimos en dos casos, si para toda m pasa que $K_m(D)$ es finito hacemos $E = D$. En el caso que $K_m(D)$ es infinito usamos el punto anterior para dar una enumeración de $K_m(D)$ a saber $\{\alpha_m : m < \omega\}$. Fijamos $\{s_m : m \in \omega\}$ tal que $s_m \in [W \setminus D]^{<\omega} \cap [B_{\alpha_m}]^{m+1}$ y $s_m \cap \bigcup_{i<m} B_{\alpha_i} = \emptyset$. De esta manera definimos $E = D \cup (\bigcup_{m<\omega} s_m)$.

3. Existe $D \in \mathcal{L}$ tal que para cualquier $n \in \omega$, $K_n(D)$ es finito.

   Fijemos a D un elemento de $\mathcal{L}$. Empleamos el punto anterior para construir por recursión una familia en $\mathcal{L}$ de conjuntos digamos $\{D_n \in \mathcal{L} : n < \omega\}$ tal que para todo número natural m se tenga que $K_n(D_n) \cap K_m(D_{n+1})$ es finito. Ahora tomamos a D una pseudounión de dicha familia (es decir, un conjunto que para toda n se tenga que $D_n \subseteq^* D$) que esté contenida en W y sea ortogonal con cada B_ξ.

Si consideramos a D el conjunto dado por el punto 3 definimos a $A_\alpha = D$ y $B_\alpha = W \setminus D$. ■

1.3. Creando gaps con forcing

En lo siguiente debemos recordar que es natural asociar a un subconjunto de ω con su función característica, es decir, si $A \subseteq \omega$, su función característica es $\chi_A(a) = 1$ si $a \in A$ y $\chi_A(a) = 0$ en otro caso.

Consideremos $(L, <)$ un conjunto totalmente ordenado, definimos $P(L, <)$ como el conjunto de las p tales que p es una función con $dom(p) \in [L]^{<\omega} \times \omega$ y $img(p) \subseteq \{0, 1\}$ y lo ordenamos de la siguiente manera: $p_1 \prec p_2$ (con $dom(p_1) = F_1 \times n_1$ y $dom(p_2) = F_2 \times n_2$) si:

1. $p_2 \subseteq p_1$,

2. Para toda $x, y \in F_2$ y $k \in [n_2, n_1)$ se tiene que las condiciones $x < y$ y $p_1(x, k) = 1$ implican $p_1(y, k) = 1$.

Ahora presentaremos una serie de lemas que nos permitirán forzar la existencia de una gap.

Lema 1.13. *Sean $p_1, p_2 \in P(L, <)$ con dominios $dom(p_1) = F_1 \times n_1$ y $dom(p_2) = F_2 \times n_2$:*

1. *si $n_1 = n_2$, son equivalentes los siguientes enunciados*

   a) *p_1 y p_2 son compatibles.*

   b) *si $j < n_1$ y $y \in F_1 \cap F_2$, entonces $p_1(y, j) = p_2(y, j)$.*

2. *si $n_1 < n_2$, son equivalentes los siguientes enunciados*

   a) *p_1 y p_2 son compatibles.*

b) *si* $j < n_1$ *y* $y \in F_1 \cap F_2$, *entonces* $p_1(y, j) = p_2(y, j)$ *y* *si* $k \in [n_1, n_2)$ *y hay* $x, z \in F_1 \cap F_2$ *tales que* $x < z$, *entonces la condición* $p_2(x, k) = 1$ *implica* $p_2(z, k) = 1$.

Demostración. Probemos $a \Rightarrow b$ de (1). Sea $q \prec p_1, p_2$. Fijemos $y \in F_1 \cap F_2$ y $j \in n_1$, entonces $(y, j) \in dom(q)$, por lo que $p_1(y, j) = q(y, j) = p_2(y, j)$. Para ver $b \Rightarrow a$ del mismo inciso basta notar que $q = p_1 \cup p_2$ está bien definido.

Para $a \Rightarrow b$ de (2). Sea q un testigo de la compatibilidad de p_1 y p_2. De manera idéntica que en el inciso anterior probamos que $p_1(y, j) = q(y, j) = p_2(y, j)$. Ahora fijemos un $k \in [n_1, n_2)$ y supongamos que hay $x, z \in F_1 \cap F_2$ tales que $x < z$ y $p_2(x, k) = 1$, corroboremos que $p_2(z, k) = 1$.

En virtud de que $q \prec p_1$, como $x < y$ se tiene por la definición de orden que $q(x, k) = 1$ implica $q(y, k) = 1$. Del mismo modo, como $y < z$ se sigue que $q(y, k) = 1$ implica $q(z, k) = 1$. Así, hemos acabado.

Resta probar $b \Rightarrow a$ del segundo inciso. Definimos al dominio de q como $(F_1 \cup F_2) \times n_2$.

$$q(s, j) = \begin{cases} p_1(s, j) & si \quad (s, j) \in dom(p_1) \\ p_2(s, j) & si \quad (s, j) \in dom(p_2) \\ 1 & si \quad \exists(c \in F_1 \cap F_2(c < s) \wedge p_2(c, j) = 1) \wedge \\ & \qquad (s, j) \notin dom(p_1) \cup dom(p_2) \\ 0 & si \quad \text{no es ninguno de los anteriores.} \end{cases}$$

Notemos que los primeros dos casos sólo pasan cuando $s \in F_1$ y $s \in F_2 \setminus F_1$ respectivamente, además q está bien definida por hipótesis. También observemos que el único caso en el que la cláusula 3 de la definición de q se aplica es cuando $s \in F_1 \setminus F_2$.

Veamos que $q \prec p_1, p_2$. Como no hay ningún $k \in [n_2, n_2)$, por vacuidad tenemos que $q \prec p_2$. Solo resta probar que $q \prec p_1$.

Sean $u, v \in F_1$ y $k \in [n_1, n_2)$ tales que $u < v$ y $q(u, k) = 1$. queremos probar que $q(v, k) = 1$.

Dividiremos la prueba en 4 casos:

1. **Caso** $u, v \in F_1 \setminus F_2$.
   De la hipótesis de que $q(u,k) = 1$ se sigue que hay $c \in F_2$ tal que $c < u < v$ y $p_2(c,k) = 1$. Lo cual es la condición para que $q(v,k) = 1$.

2. **Caso** $u \in F_1 \cap F_2$ **y** $v \in F_1 \setminus F_2$.
   Se sigue de la cláusula 3 de la definición de q.

3. **Caso** $u \in F_1 \setminus F_2$ **y** $v \in F_1 \cap F_2$.
   De $q(u,k) = 1$ tenemos que hay $c \in F_1 \cap F_2$ tal que $c < u < v$ y $p_2(c,k) = 1$. Por la hipótesis del inciso (b), derivamos que $1 = p_2(v,k) = q(v,k)$.

4. **Caso** $u, v \in F_1 \cap F_2$.
   En este caso tenemos hay $c \in F_1 \cap F_2$ tal que $c < u < v$ y $p_2(c,k) = 1$. Nuevamente aplicamos la hipótesis del inciso (b) para colegir que $1 = p_2(v,k) = q(v,k)$.

■

Fijemos γ y δ dos ordinales. Definimos $\Phi_{\gamma,\delta} = \gamma \times \{0\} \cup \delta \times \{1\}$ y lo dotamos con el siguiente orden, $(\alpha, i) < (\beta, j)$ si $i = j = 0$ y $\alpha < \beta$, $i = j = 1$ y $\alpha > \beta$, ó $i = 0$ y $j = 1$. Notemos que $\Phi_{\gamma,\delta}$ es isomorfo a $\gamma + \delta^*$. De esta manera $(\Phi_{\gamma,\delta}, <)$ es un conjunto totalmente ordenado. Definimos $\mathbb{P}_{\gamma,\delta} = P(\Phi_{\gamma,\delta})$.

Tenemos el siguiente lema.

Lema 1.14. *Sean γ, δ ordinales y $p \in \mathbb{P}_{\gamma,\delta}$. Si $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \delta$ son ordinales límites con al menos una desigualdad estricta y $p_1 \in \mathbb{P}_{\alpha,\beta}$ la restricción de p (i.e. $p_1 = p \restriction \Phi_{\alpha,\beta} : dom(p) \cap (\Phi_{\alpha,\beta} \times \omega) \to \{0,1\}$ tal que $p_1(x,n) = p(x,n)$), entonces para todo $r \in \mathbb{P}_{\alpha,\beta}$ con $r \prec p_1$ ocurre que p y r son compatibles.*

Demostración. Tomemos a r tal como en las hipótesis, veamos que p y r son compatibles. Comencemos por fijar al dominio de r como $F_r \times n_r$, al de p_1 como $F_1 \times n_1$ y al de p como $F \times n$. Notemos que $n_r \geq n_1 = n$.

Por el Lema 1.13 si tenemos que $n_r = n_1 = n$ basta ver que $j < n$ y $y \in F \cap F_r$, entonces $p(y, j) = r(y, j)$, esto es inmediato pues $p_1 \subseteq r$. Supongamos entonces que $n_r > n$. Verifiquemos la equivalencia del lema anterior.

Ahora, si $j \in n_r \setminus n$, por definición de $r \prec p_1$, para cada $x, y \in F_r \cap F_1 = F_r \cap F$ con $x < y$ tenemos que $r(x, j) = 1$ implica $r(y, j) = 1$. Así terminamos de verificar la parte b del segundo inciso del lema antes mencionado. ■

Corolario 1.15. *Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son como en el Lema 1.14 tenemos que $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}$ es un suborden regular de $\mathbb{P}_{\gamma,\delta}$.*

Definición 1.16. *Sea $(\mathbb{P}, <)$ una noción de forcing, diremos que:*

1. *$A \subseteq \mathbb{P}$ es centrado si para cada $F \in [A]^{<\omega}$ existe $p \in \mathbb{P}$ tal que para cada $q \in F$ se tiene que $p \leq q$.*

2. *$A \subseteq \mathbb{P}$ es ligado si todo par de elementos de A son compatibles.*

3. *$\mathbb{P}$ es Knaster si para todo $A \subseteq \mathbb{P}$ no numerable existe $L \subseteq A$ no numerable tal que L es ligado.*

4. *$\mathbb{P}$ es $\leq_\lambda$-Knaster para un cardinal λ si para todo cardinal $\kappa \leq \lambda$ y todo $A \in [\mathbb{P}]^\kappa$ existe $L \in [A]^\kappa$ tal que L es ligado.*

5. *$\mathbb{P}$ es fuertemente Knaster si para todo cardinal regular μ no numerable y todo $A \in [\mathbb{P}]^\mu$, existe $L \in [A]^\mu$ tal que L es ligado.*

La propiedad fuertemente Knaster será importante en el estudio de esta tesis puesto que se usará para caracterizar a las gaps simétricas.

Lema 1.17. *Si γ,δ son ordinales con cofinalidad no numerable, entonces $\mathbb{P}_{\gamma,\delta}$ es fuertemente Knaster.*

Demostración. Sean μ un cardinal no numerable y $\{p_\alpha : \alpha < \mu\} \subseteq \mathbb{P}_{\gamma,\delta}$. Para cada $\alpha < \mu$ fijamos el dominio de p_α como $F_\alpha \times n_\alpha$. Por el principio de las casillas podemos suponer que para cada $\alpha, \beta < \mu$ pasa que $n_\alpha = n_\beta := n$ y $|F_\alpha| = |F_\beta|$. Por el lema del Δ-sistema existe $I \in [\mu]^\mu$ y $F \in [\Phi_{\gamma,\delta}]^{<\omega}$ tal que $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ es un Δ-sistema con raíz F.

Notemos que de nuevo, por el principio de las casillas podemos suponer que para cada $\alpha, \beta \in I$ ocurre que $p_\alpha \restriction F \times n = p_\beta \restriction F \times n$ por lo que $\{p_\alpha : \alpha \in I\}$ es ligado y $(p_\alpha \cup p_\beta)$ es testigo de la compatibilidad entre p_α y p_β. ■

Ahora vamos a definir algunos conjuntos densos y nombres para forzar la existencia de una gap en $(\wp(\omega), \subseteq^*)$.

Sean $0 < \nu < \gamma$ y $0 < \xi < \delta$ ordinales. Si $\alpha < \gamma$ y $k \in \omega$ podemos definir

$$E_k^\nu = \{p \in \mathbb{P}_{\gamma,\delta} : \exists n \geq k\, F \in [\Phi_{\gamma,\delta}]^{<\omega}(dom(p) = F \times n \wedge (\nu, 0) \in F)\},$$

$$H_k^\xi = \{p \in \mathbb{P}_{\gamma,\delta} : \exists n \geq k\, F \in [\Phi_{\gamma,\delta}]^{<\omega}(dom(p) = F \times n \wedge (\xi, 1) \in F)\},$$

Se puede corroborar que los conjuntos definidos arriba son densos en $\mathbb{P}_{\gamma,\delta}$.

Si G es un filtro $(V, \mathbb{P}_{\gamma,\delta})$-genérico podemos definir en $V[G]$:

$$A^\nu = \{m : \exists p \in G(((\nu,0),m) \in dom(p) \subseteq \{(\nu,0)\} \times \omega \wedge p((\nu,0),m) = 1)\}$$

$$B^\xi = \{m : \exists p \in G(((\xi,1),m) \in dom(p) \subseteq \{(\xi,1)\} \times \omega \wedge p((\xi,1),m) = 1)\}$$

Como una observación final, si $p \in G$, tenemos que $p \Vdash$ "$m \in \dot{A}^\nu$" es equivalente a que $((\nu,0),m) \in dom(p)$ y $p((\nu,0),m) = 1$ con $\dot{A}^\nu$ un $\mathbb{P}_{\gamma,\delta}$-nombre para A^ν.

Análogamente, $p \Vdash$ "$m \in \dot{B}^\xi$" es equivalente a que $((\xi,1),m) \in dom(p)$ y $p((\xi,1),m) = 1$ con $\dot{B}^\xi$ un $\mathbb{P}_{\gamma,\delta}$-nombre para B^ξ.

Lema 1.18. *Si γ,δ son ordinales, $\nu_1 < \nu_2 < \gamma$ y $\xi_1 < \xi_2 < \delta$, entonces* $\mathbb{P}_{\gamma,\delta} \Vdash$ "$\dot{A}^{\nu_1} \subset^* \dot{A}^{\nu_2} \subset^* \dot{B}^{\xi_2} \subset^* \dot{B}^{\xi_1}$"

Demostración. Notemos que para todo $k \in \omega$ el siguiente es un conjunto denso $D_k = E_k^{\nu_1} \cap E_k^{\nu_2} \cap H_k^{\xi_1} \cap H_k^{\xi_2}$.

Sea $p \in D_k$ y su dominio $F \times n$. Así $\{(\nu_1, 0), (\nu_2, 0), (\xi_1, 1), (\xi_2, 1)\} \subseteq F$.

Sea $q \prec p$ en $\mathbb{P}_{\gamma,\delta}$ con dominio $H \times m$ y $m > n$. Por la definición del orden tenemos que para toda $k \in [n, m)$ la siguiente cadena de implicaciones se satisface

$$q((\nu_1, 0), k) = 1 \Rightarrow q((\nu_2, 0), k) = 1 \Rightarrow q((\xi_2, 1), k) = 1 \Rightarrow q((\xi_1, 1), k) = 1.$$

Por lo que $q \Vdash$ "$\dot{A}^{\nu_1} \setminus k \subset \dot{A}^{\nu_2} \setminus k \subset \dot{B}^{\xi_2} \setminus k \subset \dot{B}^{\xi_1} \setminus k$".

Como podemos tomar a m arbitrariamente grande, obtenemos
$p \Vdash$ "$\dot{A}^{\nu_1} \subset^* \dot{A}^{\nu_2} \subset^* \dot{B}^{\xi_2} \subset^* \dot{B}^{\xi_1}$". ∎

Teorema 1.19. *Si κ,λ son cardinales regulares no numerables, entonces* $\mathbb{P}_{\kappa,\lambda} \Vdash$ "$\{\dot{A}^\nu : \nu < \kappa\}, \{\dot{B}^\xi : \xi < \lambda\}$ *es una gap en* $(\wp(\omega), \subset^*)$"

Demostración. Sea $G \subseteq \mathbb{P}_{\kappa,\lambda}$ un filtro genérico. Por el Lema 1.18 tenemos en $V[G]$ que $\{\dot{A}^\nu : \nu < \kappa\}, \{\dot{B}^\xi : \xi < \lambda\}$ es una pregap. Veamos que es una gap.

Procedamos por contradicción. Supongamos que $\dot{C}$ es un $\mathbb{P}_{\kappa,\lambda}$-nombre para un subconjunto de ω y $p \in \mathbb{P}_{\kappa,\lambda}$ tales que

$$p \Vdash \text{“}\dot{C} \text{ interpola a } \{\dot{A}^\nu : \nu < \kappa\}, \{\dot{B}^\xi : \xi < \lambda\}\text{”}.$$

Como $\dot{C}$ está forzado a ser numerable y $\mathbb{P}_{\kappa,\lambda}$ es c.c.c., existen ordinales límites $\alpha < \kappa$ y $\beta < \lambda$ tales que $\dot{C}$ es un $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}$-nombre.

Sean $p' \prec p$ y $m_0 \in \omega$ tales que $p' \Vdash$ "$\dot{C} \setminus m_0 \subseteq \dot{B}^\beta$". Así, obtenemos a $p_1 = p' \restriction ([\Phi_{\alpha,\beta}]^{<\omega} \times \omega)$. Fijamos al dominio de p_1 como $F_1 \times n_1$ y $\gamma < \alpha$ tal que $p_1 \in \mathbb{P}_{\gamma,\beta}$, notemos que esto es posible gracias a que α es límite. De esta forma tenemos que $p_1 \prec p$ y $p_1 \Vdash$ "$\dot{A}^\gamma \subseteq^* \dot{C}$".

Aplicando el Lema 1.14 a p', p_1, α y β como en el enunciado del mismo, sabemos que para cada $r \prec p_1$ con $r \in \mathbb{P}_{\alpha,\beta}$, entonces r y p' son compatibles.

Escogemos a $r \prec p_1$ y $m_1 \in \omega$ tal que $r \Vdash$ "$\dot{A}^\gamma \setminus m_1 \subseteq \dot{C}$".

Fijamos el dominio de r como $F_r \times n_r$ y el de p' como $F_{p'} \times n_{p'}$ y definimos a $n = \text{máx}\{n_{p'}, n_r, m_0, m_1\}$. Ahora, en virtud de que r y p_1 son compatibles podemos encontrar una extensión t tal que satisfaga que $t((\gamma, 0), n) = 1$ y a la vez $t((\beta, 1), n) = 0$. Para mostrar la existencia de t basta considerar al conjunto $dom(t) = F_r \cup F_1 \cup \{(\gamma, 0), (\beta, 1)\} \times n + 1$, como $(\gamma, 0) \notin F_1$ y $(\beta, 1) \notin F_r$ definimos a t como r en $F_r \times n_r$, como p_1 en $F_1 \times n_1$, $t((\gamma, 0), n) = 1$, $t((\beta, 1), n) = 0$ se define t de forma que sea cumpla las condiciones del Lema 1.13. De esta manera, como $t \prec r, p'$ se deriva que

$$t \Vdash \text{``}\dot{A}^\gamma \setminus n \subseteq \dot{C} \setminus n \subseteq \dot{B}^\beta \setminus n.$$

Por otro lado, para algún $j > n$ pasa que

$$t \Vdash \text{``}j \in \dot{A}^\gamma\text{''} \quad y \quad t \Vdash \text{``}j \notin \dot{B}^\beta\text{''}.$$

A razón de que $(\gamma, 0) < (\beta, 1)$ debe ocurrir que el hecho de que $t \Vdash$ "$j \in A^\gamma$" implica $t \Vdash$ "$j \in B^\beta$" lo cual contradice al párrafo anterior. De esta manera hemos obtenido el absurdo buscado. ■

1.4. Destruyendo gaps con forcing

El objetivo de esta sección será, como el titulo lo describe, el opuesto de la sección anterior. Empezaremos con una (κ, λ)-gap en $(\wp(\omega), \subset^*)$ y encontraremos una noción de forcing tal que en la extensión genérica la gap inicial fue interpolada.

Esto se demostrará en el primer resultado del capítulo, sin embargo no se acaba aquí pues también nos invita a pensar en las condiciones que le podemos pedir a una gap para que ciertos ordenes parciales la interpolen o no, por ejemplo las nociones de forcing Knaster. En particular daremos condiciones necesarias y suficientes para que una gap sea destruida por una nocion de forcing fuertemente Knaster.

Definición 1.20. *Sea* $g = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$, $\{B_\beta : \beta < \lambda\}$ *una* (κ, λ)*-pregap en* $(\wp(\omega), \subset^*)$. *Definimos:*

1. $\mathbb{L}_g$ *como el conjunto de tuplas* (L, R, s, n) *tal que:* $L \in [\kappa]^{<\omega}$, $R \in [\lambda]^{<\omega}$, $s \in [\omega]^{<\omega}$, $n \in \omega$ *y se cumple que* $s \subseteq n$ *y Para cada* $\gamma \in L$ *y* $\delta \in R$, $A_\gamma \setminus n \subseteq B_\delta$.

2. $\lhd$ *un orden para* $\mathbb{L}_g$ *tal que* $(L_1, R_1, s_1, n_1) \lhd (L_2, R_2, s_2, n_2)$ *si y sólo si* $L_2 \subseteq L_1$, $R_2 \subseteq R_1$, $s_2 = s_1 \cap n_2$, $n_2 \leq n_1$ *y para cada* $\gamma \in L_2$, $\delta \in R_2$, $i \in n_1 \setminus n_2$ *la condición* $i \in A_\gamma$ *implica* $i \in s_1$ *y la condición* $i \in s_1$ *implica* $i \in B_\delta$.

3. $1_{\mathbb{L}_g} = (\emptyset, \emptyset, \emptyset, 0)$.

A la noción de forcing definida arriba se le conoce con el nombre de interpolación de Laver. Como se puede adivinar de dicho nombre, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.21. *Si* $g = (\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{B_\beta : \beta < \lambda\})$ *es una* (κ, λ)*-gap en* $(\wp(\omega), \subset^*)$, *entonces* $\mathbb{L}_g \Vdash$ *"g no es una gap".*

Demostración. Empecemos por fijar a G un filtro genérico para $\mathbb{L}_g$. Para cada $(\alpha, \beta) \in \kappa, \lambda$ definimos

$$E_{\alpha,\beta} = \{(L, R, s, n) \in \mathbb{L}_g : \alpha \in L \wedge \beta \in R\}$$

que es un conjunto denso pues si (L, R, s, n) es tal que $\alpha \notin L$, entonces la condición $(L \cup \{\alpha\}, R, s', n')$ extiende a (L, R, s, n) donde
$n' = max\{j_\beta, n : \beta \in R\} + 1$ con $j_\beta = min\{j : A_\alpha \setminus j \subseteq B_\beta\}$ y
$s' = s \cup (\bigcup_{\gamma \in L} A_\gamma \cap [n, n'))$, pues de esta manera se tiene que:

1. Para todo $\gamma \in L$ y $\delta \in R$, $A_\gamma \setminus n' \subseteq A_\gamma \setminus n \subseteq B_\delta$ y $A_\alpha \setminus n' \subseteq B_\delta$. Por lo tanto $(L \cup \{\alpha\}, r, s', n') \in \mathbb{L}_g$.

2. Sea $i \in n' \setminus n$. Para cada $\gamma \in L$, evidentemente si $i \in A_\gamma$, entonces $i \in s'$. Si $i \in s'$, existe un $\gamma \in L$ tal que $i \in A_\gamma$; luego, como $i > n$ y para cada $\delta \in R$, $A_\gamma \setminus n \subseteq B_\delta$ tenemos $i \in B_\delta$. Por lo tanto $(L \cup \{\alpha\}, R, s', n') \lhd (L, R, s, n)$.

Se extiende de manera análoga si $\beta \notin R$.

Con un argumento similar podemos demostrar que para cada $m \in \omega$ el conjunto $H_m = \{(L, R, s, n) \in \mathbb{L}_g : n > m\}$ también es denso.

De esta manera definimos $C = \bigcup\{s : (L, R, s, n) \in G\}$ y fijamos un $\alpha < \kappa$ y un $\beta \in \lambda$. Queremos demostrar que $A_\alpha \subset^* C \subset^* B_\beta$.

Sean $r = (L, R, s, n) \in G \cap E_{\alpha,\beta}$ y $m > n$; en particular H_m es denso por debajo de r, así encontramos $t = (L', R', s', n') \lhd r$ tal que $t \in G \cap H_m$. Por la condición del orden tenemos que para cada $i \in n' \setminus n$ el hecho $i \in A_\alpha$ implica $i \in s'$ y esto a su vez $i \in B_\beta$. En específico, cuando $i = m$ tenemos que si $m \in A_\alpha$, entonces $m \in C$ y a su vez esto implica que $m \in B_\beta$. De esta manera, por la arbitrariedad de m, mostramos que $A_\alpha \setminus n \subseteq C \setminus n \subseteq B_\beta \setminus n$. ■

Ya que vimos que esta noción de forcing nos sirve para los fines de este capítulo vale la pena estudiar un poco más las propiedades del mismo.

Decimos que una noción de forcing es **σ-centrada** si se puede escribir como una unión numerable de conjuntos centrados.

Lema 1.22. *Sean κ y λ cardinales regulares y $g = (\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{B_\beta : \beta < \lambda\})$ una (κ, λ)-pregap en $(\wp(\omega), \subset^*)$. Si ocurre que g no es una gap o que ya sea κ o λ es ω, entonces $\mathbb{L}_g$ es σ-centrado.*

Demostración. Primero supongamos que g no es una gap, entonces hay un conjunto C que interpola a C. Para cada $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $n \in \omega$ definimos

$$Q_{s,n} = \{(L, R, s, n) : \forall \alpha \in L \, \forall \beta \in R \, (A_\alpha \setminus n \subseteq C \subseteq B_\beta \cup n)\}.$$

Sea $D = \bigcup\{Q_{s,n} : s \in [\omega]^{<\omega} \wedge n \in \omega\}$. Veremos que D es denso en $\mathbb{L}_g$ y que es σ-centrado.

Para la densidad empecemos por tomar (L, R, t, m) y encontramos $n > m$ tal que para cada $\alpha \in L$,$\beta \in R$ $A_\alpha \setminus n \subseteq C \subseteq B_\beta \cup n$, luego definimos $s = t \cup \bigcup_{\gamma \in L}(A_\gamma \cap [m, n))$. De esta manera $(L, R, s, n) \in Q_{s,n}$ y extiende a (L, R, t, m).

Para ver que cada $Q_{s,n}$ es centrado basta notar que si tenemos a (L_1, R_1, s, n) y (L_2, R_2, s, n) la tupla $(L_1 \cup L_2, R_1 \cup R_2, s, n)$ los extiende y esta en $Q_{s,n}$.

Como D es denso y σ-centrado encontramos $\{E_n : n < \omega\}$ una partición de D en conjuntos centrados, luego definimos para cada n a

$$E'_n = E \cup \{x \in \mathbb{L}_g : \exists y \in E_n(y \lhd x) \wedge \forall m < n \forall y \in E_m \neg(y \lhd x)\}.$$

Por la densidad de D cada E'_n está bien definido y es centrado, más aún es una partición de $\mathbb{L}_g$.

Ahora supongamos que $\kappa = \omega$. Definimos para cada $E, t \in [\omega]^{<\omega}$ y $m \in \omega$ a

$$Q_{E,t,m} = \{(L, R, s, n) \in \mathbb{L}_g : L = E, t = s, n = m\}.$$

Este conjunto es centrado y $\mathbb{L}_g = \bigcup\{Q_{E,t,m} : E, t \in [\omega]^{<\omega} \wedge m \in \omega\}$. El caso $\lambda = \omega$ es análogo. ■

Lema 1.23. *Sean κ y λ cardinales regulares y $g = (\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{B_\beta : \beta < \lambda\})$ una (κ, λ)-pregap en $(\wp(\omega), \subset^*)$. Si $\kappa \neq \lambda$, entonces $\mathbb{L}_g$ es fuertemente Knaster.*

Demostración. Sea μ un cardinal regular no numerable y $\{(L_\alpha, R_\alpha, s_\alpha, n_\alpha) : \alpha \in \mu\} \subseteq \mathbb{L}_g$. Sin pérdida de la generalidad suponemos que $\kappa < \lambda$, así podemos considerar casos:

Caso 1: $\mu < \lambda$. Encontramos $\delta = \bigcup_{\alpha \in \mu} R_\alpha < \lambda$, de esta manera la pregap $g' = (\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{B_\beta : \beta < \delta\})$ es interpolada por $B_{\delta+1}$, y por el lema anterior $\mathbb{L}_{g'}$ es σ-centrado. Por lo tanto, sea $\{Q_n : n \in \omega\}$ la colección de conjuntos centrados cuya unión es $\mathbb{L}_{g'}$. Como μ es regular y no numerable existen $m \in \omega$ e $I \in [\mu]^\mu$ tales que para cada $\alpha \in I$ se tiene que $(L_\alpha, R_\alpha, s_\alpha, n_\alpha) \in Q_n \subseteq \mathbb{L}_{g'} \subseteq \mathbb{L}_g$. Como Q_n es centrado, acabamos.

Caso 2: $\lambda \leq \mu$. Como μ es regular, encontramos $L \in [\kappa]^{<\omega}$, $s \in [\omega]^{<\omega}$, $n < \omega$ e $I \in [\mu]^{\mu}$ tales que para cada $\alpha \in I$ se cumpla que $L_\alpha = L$, $s_\alpha = s$ y $n_\alpha = n$. Como vimos en la demostración del lema anterior, el conjunto $\{(L, R_\alpha, s, n) : \alpha \in I\}$ es centrado, así acabamos. ■

A una gap como en el lema anterior (es decir que $\kappa \neq \lambda$) se le conoce como gap asimétrica (naturalmente si $\kappa = \lambda$ la gap es simétrica). El lema anterior nos dice que toda gap asimetrica es destruida por una noción de forcing fuertemente Knaster. En particular es destruida por una noción de forcing $\leq_\lambda$-Knaster. Nos interesa esta propiedad a la cual le llamaremos ser $K \leq_\lambda$-destructible. A continuación veremos el recíproco del lema anterior, es decir:

Teorema 1.24. *Sea λ un cardinal regular no numerable. Si $g = (\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}, \{B_\beta : \beta < \lambda\})$ es una (λ, λ)-gap en $(\wp(\omega), \subset^*)$ y $(\mathbb{P}, <_{\mathbb{P}})$ es una noción de forcing $\leq_\lambda$-Knaster, entonces*

$$\mathbb{P} \Vdash \text{“}g \textit{ es una } (\lambda, \lambda)\textit{-gap ”}.$$

Demostración. Procedamos por contradicción, supongamos que $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash$ “g no es una (λ, λ)-gap ”. Así, por el principio maximal, hay $\dot{C}$ un $\mathbb{P}$-nombre para un subconjunto de ω tal que $p \Vdash$ “$\dot{C}$ interpola a g”.

Así, para cada $\alpha < \lambda$ podemos fijar un $m_\alpha \in \omega$ y $p_\alpha < p$ tal que

$$p_\alpha \Vdash \text{“}A_\alpha \setminus m_\alpha \subseteq \dot{C} \setminus m_\alpha \subseteq B_\alpha\text{”}$$

Sin pérdida de la generalidad podemos suponer que existe m tal que para cada $\alpha < \lambda$ ocurra que $m_\alpha = m$. Como $\mathbb{P}$ es $\leq_\lambda$-Knaster podemos encontrar $I \in [\lambda]^\lambda$ tal que $\{p_\alpha : \alpha \in I\}$ es .

De esta manera, para cada $\alpha, \beta \in I$ existe un $q \leq p_\alpha, p_\beta$ tal que,
$q \Vdash$ “$A_\alpha \setminus m \subseteq \dot{C} \setminus m \subseteq B_\beta$”, en particular tenemos que $A_\alpha \setminus m \subseteq B_\beta$.

Definimos (en V) a $H = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \setminus m$. Claramente si $\alpha \in I$, $A_\alpha \subset^* H$, y en virtud del párrafo anterior, $H \subset^* B_\alpha$. De esta manera H interpola a

$g' = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$, $\{B_\beta : \beta \in I\}$, lo cual es un absurdo porque al ser I cofinal en λ, que g' sea interpolada implica que g también lo es ligado. ■

Corolario 1.25. *Sea λ un cardinal regular no numerable y $g = \{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$, $\{B_\beta : \beta < \lambda\}$ una (λ, λ)-pregap en $(\wp(\omega), \subset^*)$. Los siguientes son equivalentes.*

1. *$\mathbb{L}_g$ no tiene la propiedad $\leq_\lambda$-Knaster.*
2. *g es una gap.*

Además también tenemos como un corolario del Lema 1.23 y del Teorema 1.24 el siguiente resultado.

Teorema 1.26. *Sea g una gap en $(\wp(\omega), \subset^*)$. g es $K_{\leq\lambda}$- indestructible si y sólo si es simétrica.*

Ahora presentaremos un resultado que será muy útil en el próximo capítulo.

Teorema 1.27 (Kunen). *Sean $\kappa \leq \lambda$ cardinales regulares y $g = (\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{B_\beta : \beta < \lambda\})$ una (κ, λ)-pregap. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. *Si $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$, $\{B_\beta : \beta < \lambda\}$ no es una gap, entonces $\mathbb{L}_g$ tiene la c.c.c..*
2. *Si $\kappa \neq \omega_1$ o $\omega_1 \neq \lambda$, entonces $\mathbb{L}_g$ tiene la c.c.c..*
3. *Si $\kappa = \omega_1 = \lambda$, existe una noción de forcing $\mathbb{Q}$ tal que es c.c.c. y agrega una anticadena no numerable a $\mathbb{L}_g$.*

Demostración. El primer inciso se sigue de que por el Lema 1.22 $\mathbb{L}_g$ es σ-centerada.

Para comprobar el segundo inciso supongamos que $\kappa \neq \omega_1$, el caso $\lambda \neq \omega_1$ es análogo a éste. Sea $\{(L_\alpha, R_\alpha, s_\alpha, n_\alpha) : \alpha < \omega_1\} \in [\mathbb{L}_g]^{\omega_1}$. Si $\kappa > \omega_1$. Sea

$\gamma = \sup\{\beta \in L_\alpha : \alpha < \omega_1\} + 1$, de este modo A_γ interpola a la pregap $\{A_\alpha : \alpha < \gamma\}$, $\{B_\beta : \beta < \lambda\}$, por el inciso anterior tenemos que $\mathbb{L}_g$ tiene la c.c.c.. Si $\kappa < \omega_1$ basta recordar nuevamente que por el Lema 1.22 $\mathbb{L}_g$ es σ-centerada.

Probemos el último inciso. Empezamos por considerar para cada $\alpha < \omega_1$ a $p_\alpha = (\{\alpha\}, \{\alpha\}, \emptyset, n_\alpha)$ donde n_α es un natural tal que $A_\alpha \setminus n_\alpha \subseteq B_\alpha$. Sin pérdida de la generalidad podemos suponer que hay $n < \omega$ de forma que si $\alpha < \omega_1$, entonces $n_\alpha = n$. Así definimos a $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$ como los $z \in [\omega_1]^{<\omega}$ tal que $\{p_\gamma : \gamma \in z\}$ es una anticadena de $\mathbb{L}_g$ y $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}$ se comparan como $z_1 \leq z_2$ si $z_2 \subseteq z_1$. Demostremos que $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$ es una noción de forcing con la c.c.c..

Supongamos en busca de una contradicción que $\{z_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset \mathbb{Q}$ es una anticadena. Sin perder la generalidad suponemos que si $\alpha < \beta < \omega_1$, ocurre que $\max(z_\alpha) < \min(z_\beta)$. Esto es posible ya que por el lema del Δ-sistema hay $I \in [\omega_1]^{\omega_1}$ y $r \in [\omega_1]^{<\omega}$ de forma que $\{z_\alpha : \alpha \in I\}$ un Δ-sistema con raíz r. Al ser r finito lo podemos considerar vacío pues en caso de que no pasara que $r = \emptyset$ podemos refinar a cada z_α como $z_\alpha \setminus r$.

Notemos que al hacer esta reducción tenemos que $\{z_\alpha \setminus r : \alpha < \omega_1\}$ sigue siendo anticadena.

Fijemos un $\alpha < \omega_1$, podemos encontrar un $k_\alpha \in \omega$ de suerte tal que para toda $\beta, \gamma \in z_\alpha$ ocurre que si $\beta < \gamma$, entonces $A_\beta \setminus k_\alpha \subseteq A_\gamma \setminus k_\alpha \subseteq B_\gamma \setminus k_\alpha \subseteq B_\gamma$. Por principio de las casillas podemos suponer que existe $k \in \omega$ tal que para toda $\alpha < \omega_1$ se cumple que $k_\alpha = k$; notemos que podemos pedir que $n \leq k$.

De esta manera podemos definir para cada $\alpha \in \omega_1$ a $C_\alpha = A_\gamma \setminus k$ y $D_\alpha = B_\gamma \setminus k$ donde $\gamma = \min(z_\alpha)$. Notemos que $\{C_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, $\{D_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ forman una pregap en la que dado un $\alpha < \omega_1$ se satisface que $C_\alpha \subseteq D_\alpha$.

Supongamos que existen $\alpha, \beta < \omega_1$ tal que $C_\alpha \not\subseteq D_\beta$, entonces sean $\gamma = \min(z_\alpha)$ y $\delta = \min(z_\beta)$. Así $A_\gamma \setminus k \not\subseteq B_\delta$. Sea ℓ un testigo de dicha no contención. Afirmamos que $\{p_\xi : \xi \in z_\alpha \cup z_\beta\}$ es una anticadena en $\mathbb{L}_g$, lo cual implica que z_α y z_β son compatibles en $\mathbb{Q}$, obteniendo así una contradicción.

Procedemos a probar nuestra afirmación por contradicción. Supongamos que hay $\xi \in z_\alpha$ y $\eta \in z_\beta$ tales que p_ξ y p_η son compatibles. Sea q testigo de dicha compatibilidad y, sin perder la generalidad, podemos suponer que para alguna $m > n$ y $s \in [\omega]^{<\omega}$, la condición q es de la forma $(\{\xi, \eta\}, \{\xi, \eta\}, s, m)$. Notemos que del hecho de que $q \lhd p_\xi, p_\eta$ tenemos que para cada $i \in m \setminus n$

1. $i \in A_\xi$ implica $i \in s$ y esto implica $i \in B_\xi$.

2. $i \in A_\eta$ implica $i \in s$ y esto implica $i \in B_\eta$.

De combinar 1 y 2 tenemos que para cada $i \in m \setminus n$ ocurre que $i \in A_\xi$ implica $i \in B_\eta$. Ahora, notemos que como $n \leq k < \ell < m$ y $\ell \in A_\gamma \setminus k \subseteq A_\xi$ (pues $\gamma \leq \xi$), podemos concluir que $\ell \in B_\eta$. Como $\delta < \eta$, se tiene que $\ell \in B_\eta \setminus k \subseteq B_\delta$ lo cual es un absurdo que viene de suponer que p_ξ y p_η son compatibles. Por lo tanto damos como verdadera la afirmación hecha anteriormente.

Por el argumento anterior podemos asumir que para cada $\alpha, \beta < \omega_1$ se da que $C_\alpha \subseteq D_\beta$. Ahora observemos que si definimos $E = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} C_\alpha$, éste interpola a g pues si $\gamma < \omega_1$, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\gamma < \min(z_\alpha)$, de este modo $A_\gamma \subseteq^* C_\alpha \subset^* E \subset^* D_\alpha \subset^* B_\gamma$. Obteniendo en este caso una contradicción nuevamente.

Así hemos comprobado que $\mathbb{Q}$ tiene la c.c.c., ahora veamos que agrega una anticadena no numerable a $\mathbb{L}_g$. Sea G un filtro $\mathbb{Q}$-generico y sea $\dot{X}$ un Q-nombre para el conjunto $\{p_\alpha : \alpha \in \bigcup G\}$. Notemos que en virtud de que $\mathbb{Q}$ es c.c.c., si $\mathbb{Q} \Vdash$ "$\dot{X}$ es numerable", entonces es posible encontrar $\alpha < \omega_1$ tal que $\mathbb{Q} \Vdash \dot{X} \subseteq \{p_\beta : \beta < \alpha\}$, lo cual es imposible pues para cada $\gamma \geq \alpha$ tenemos que $\{\gamma\} \Vdash$ "$p_\gamma \in \dot{X}$". Por lo tanto hay $z \in \mathbb{Q}$ tal que $z \Vdash$ "$\dot{X}$ no es numerable". $\blacksquare$

1.5. Una aplicación de las gaps

En esta breve sección daremos una muy simple aplicación de las gaps en teoría de conjuntos. Para esto empezamos por notar que $\wp(\omega)$ pensada como álgebra booleana con las operaciones estándar tiene como ideal a la colección de conjuntos finitos de ω que denotaremos por FIN. Así podemos considerar a $(\wp(\omega)/FIN, \subseteq)$ como conjunto parcialmente ordenado.

Teorema 1.28. *(folklore) Todo orden total de tamaño ω_1 se encaja en el cociente $(\wp(\omega)/FIN, \subseteq)$.*

Demostración. Sea $(L, <_L)$ un orden total de tamaño ω_1 y fijemos una enumeración libre de repeticiones de L, a saber $\{\ell_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Notemos que $\wp(\omega)$ tiene átomos pero $\wp(\omega)/FIN$ no.

Definiremos por recursión a f un encaje de L a $\wp(\omega)/FIN$. Empezamos por mandar a ℓ_0 a cualquier elemento de $\wp(\omega)/FIN$ menos a $[\omega]$ ni a $[\emptyset]$. Supongamos que para todo ordinal β menor que $\alpha < \omega_1$ ya tenemos $f(\ell_\beta) = t_\beta$. Definimos los siguientes conjuntos

$$A = \{x \in \wp(\omega)/FIN : \exists\beta < \alpha(x = f(\ell_\beta) \wedge \ell_\beta < \ell_\alpha)\},$$

$$B = \{x \in \wp(\omega)/FIN : \exists\beta < \alpha(x = f(\ell_\beta) \wedge \ell_\beta > \ell_\alpha)\}.$$

Notemos que (A, B) forman una pregap que está indizada por ordinales numerables, por lo tanto hay un conjunto que la interpola, a dicho conjunto lo definimos como $f(\ell_\alpha)$. ■

Una observación importante es que no podemos reproducir este argumento para los ordenes totales de tamaño ω_2. La razón de esto es que si intentamos replicar la construcción hecha arriba podría ser que nos topáramos en un paso con una (ω_1,ω_1)-gap y de este modo no encontrar ningún conjunto que tenga el rol que tiene $f(\ell_\alpha)$ en la demostración. Más aún, se sabe que es consistente con ZFC que $\omega_2 \leq \mathfrak{c}$ y hay un orden total de tamaño ω_2 que no se encaja en $(\wp(\omega)/FIN, \subseteq)$.

Capítulo 2

Existencia de Gaps bajo PFA y MA.

En este capítulo nos centraremos en hablar de gaps que podemos encontrar en modelos del Martin's Axiom (MA) y Proper Forcing Axiom (PFA). En particular veremos que es consistente ZFC junto con MA y la existencia de una $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$-gap en $(\wp(\omega), \subset^*)$. Por otro lado, veremos que bajo PFA esto no es posible; más aún demostraremos que sólo las gaps que podemos mostrar en ZFC son las que existen en los modelos de ZFC+PFA.

2.1. Gaps con MA

Como es bien sabido, el Axioma de Martin nace como una abstracción del método de forcing que hemos empleado numerosas veces en este trabajo, sin embargo vale la pena definirlo apropiadamente.

Siendo κ un cardinal enunciado " para toda noción de forcing $\mathbb{P}$ con la c.c.c. y toda familia D con a lo más κ elementos de conjuntos densos en $\mathbb{P}$, existe un filtro de $\mathbb{P}$ tal que tiene intersección no vacía con cada elemento de D" es resumido por $MA(\kappa)$.

De esta manera podemos enunciar el Axioma de Martin de forma simple (que se abrevia con MA) como sigue:" Para todo $\kappa < \mathfrak{c}$ es verdadero MA(κ)´´.

Con el lema de Rasiowa-Sikorski se corrobora que MA(ω) es verdadero y fácilmente se comprueba que MA($\mathfrak{c}$) no lo es. De esta manera sólo queda el interrogante para los cardinales que quedan en medio. Gracias a esto inmediatamente notamos que CH (la hipótesis del continuo) implica trivialmente MA, desde luego el recíproco no es cierto y esa es la razón por la que cada vez que hablemos de MA tomaremos como falsa la hipótesis del continuo.

Como un hecho relevante para este trabajo tenemos que toda noción de forcing con la c.c.c. preserva cardinales regulares (en general cardinales) por lo que no tendremos problemas con colapsos.

Lema 2.1. *Sean $\kappa \leq \lambda$ cardinales regulares no numerables, $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{B_\beta : \beta < \lambda\}$ una (κ, λ)-gap en $(\wp(\omega), \subset^*)$ y $\mathbb{P}$ una noción de forcing. Si $|\mathbb{P}| < \lambda$ y se tiene que $\mathbb{P} \Vdash$ "κ y λ son cardinales regulares", entonces $\mathbb{P}$ preserva a la gap.*

Demostración. Procedemos por contradicción y supongamos que hay $\dot{C}$ un $\mathbb{P}$-nombre para un subconjunto de ω y $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash \text{"}\dot{C} \text{ interpola a } (\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{B_\beta : \beta < \lambda\})\text{"}.$$

Entonces, para cada $\beta < \lambda$ podemos encontrar un $q_\beta \leq p$ y $n_\beta < \omega$ de suerte que $q \Vdash$ "$\dot{C} \setminus n_\beta \subseteq B_\beta$". Como $|\mathbb{P}| < \lambda$ y λ y ω son regulares, encontramos $q \leq p$, $X \in [\lambda]^\lambda$ y $n \in \omega$ tal que si $\beta \in X$, entonces $q_\beta = q$ y $n_\beta = n$.

Ahora hacemos lo propio con κ: para cada $\alpha < \kappa$ nos fijamos en un $t_\alpha < q$ y $m_\alpha < \omega$ de forma que $t_\alpha \Vdash$ "$A_\alpha \setminus m_\alpha \subseteq \dot{C}$.

Podemos fijar $Y \in [\kappa]^\kappa$ y $m < \omega$ tales que para cada $\alpha \in Y$ y $m_\alpha = m$. De este modo definimos $z = \min\{m, n\} + 1$ y $E = \bigcup_{\alpha \in Y} A_\alpha \setminus z$. Claramente, para cualquier $\alpha \in Y$ se tiene que $A_\alpha \subset^* E$. Además, para cada $\alpha \in Y$ y $\beta \in X$ tenemos que $t_\alpha \Vdash$ "$A_\alpha \setminus z \subseteq \dot{C} \setminus z \subseteq B_\beta$. De este modo aseguramos que E interpola a $(\{A_\alpha : \alpha \in Y\}, \{B_\beta : \beta \in X\})$, obteniendo la contradicción buscada por la cofinalidad de Y y X. ∎

Teorema 2.2 (Kunen). *ZFC + MA + Existe una $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$-gap en $(\wp(\omega), \subset^*)$ es consistente asumiendo la consistencia de ZFC.*

Demostración. Supongamos que $V \models GCH$ y sea κ un cardinal regular no numerable mayor o igual a ω_2. Empecemos forzando tal y como vimos en el Capítulo 1 una (κ, κ)-gap con $\mathbb{P}_{\kappa,\kappa}$ y sea G el filtro genérico que define a dicha gap g. Al estar agregando κ subconjuntos de ω tenemos que $\kappa \leq \mathfrak{c}$ en la extensión genérica. Además, como $V \models GCH$, $|\mathbb{P}_{\kappa,\kappa}| = \kappa$ y $\mathbb{P}_{\kappa,\kappa}$ tiene la c.c.c. (tal y como una cuenta rutinaria que estamos omitiendo lo muestra), entonces para cualquier cardinal $\lambda < \kappa$, tenemos que $(2^\lambda)^{V[G]} \leq (\kappa^\lambda)^V = \kappa^V$. De este modo $V[G] \models$ " existe una $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$-gap en $(\wp(\omega), \subset^*)$ y $2^{<\kappa} \leq \kappa$".

Resta ver que a partir de $V[G]$, al forzar MA no interpolamos a g. Para esto viene bien recordar la prueba de la consistencia de ZFC + MA. En resumidas cuentas basta con hacer una iteración de soporte finito de todas las nociones de forcing c.c.c. con cardinalidad menor que κ. Por el lema anterior tenemos que ninguna de estas va a destruir a la $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$-gap, de este modo podemos asegurar que ésta sobrevive a la iteración (es decir, no fue interpolada en ningún paso de la iteración).

Ahora notemos que la iteración como noción de forcing tampoco destruye a g pues si H es un filtro genérico para la iteración, si ocurre que $V[G][H] \models$ "$\exists \dot{C} \subseteq \omega(\dot{C}$ interpola a $g)$", entonces $\dot{C}$ es un nombre para una noción de forcing que aparece como paso intermedio en la iteración, digamos $\mathbb{Q}$. Si H' es el filtro genérico que se obtuvo al forzar con $\mathbb{Q}$, entonces $V[G][H'] \models$ "$\dot{C}$ interpola a $g)$". Lo cual es una contradicción pues dijimos que ningún paso de la iteración destruye a g.

Por último notemos que al forzar con una iteración de longitud κ, agregamos a lo más κ reales tal como lo muestra la prueba de la consistencia de ZFC + MA. Por lo tanto $V[G][H] \models$ "$\mathfrak{c} = \kappa$". Por lo tanto g es una $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$-gap en la extensión final. ■

Con esto damos fin a esta sección. Mostrando que consistentemente hay gaps "grandes"que son compatibles con MA. Sin embargo este resultado no se va a mantener cuando remplazamos MA por PFA.

Como un comentario antes de proceder al resultado mencionado en el párrafo previo es que tal como se menciona en [7] los siguientes enunciados son consistentes con ZFC+MA:

1. Existe una $(\mathfrak{c},\mathfrak{c})$-gap y Existe una $(\omega_1,\mathfrak{c})$-gap.
2. No existen $(\mathfrak{c},\mathfrak{c})$-gaps ni $(\omega_1,\mathfrak{c})$-gaps.
3. Existe una $(\mathfrak{c},\mathfrak{c})$-gap pero no existen $(\omega_1,\mathfrak{c})$-gaps.

2.2. Trabajando con PFA

Ahora trabajaremos con el Proper Forcing Axiom (PFA). Éste consiste en una generalización del ya mencionado Axioma de Martin al sustituir nociones de forcing con la c.c.c. con nociones proper las cuales definiremos en breve.

Naturalmente al tratarse de una generalización tenemos que toda noción de forcing con la c.c.c. es proper. Si bien perdemos la propiedad de preservar a todos los cardinales con una noción proper, éstos siempre van a preservar a ω_1. Además, a diferencia de las nociones c.c.c., una iteración de soporte numerable de nociones proper nos da como resultado una noción proper.

Aunque no nos serán relevantes para el desarrollo del trabajo las propiedades mencionadas arriba, se exponen para resaltar la importancia de este tipo de nociones de forcing y por tanto es importante estudiar las consecuencias que PFA tiene.

Definición 2.3. *Sean $\mathbb{P}$ una noción de forcing y M un modelo numerable de la teoría de conjuntos con $\mathbb{P}\in M$. Llamamos condición a los elementos de $\mathbb{P}$ y p es una condición $(M,\mathbb{P})$-genérica si*

$$p \Vdash \text{“}\dot{G} \textit{ es un filtro } (M,\mathbb{P}) - \textit{ genérico}\text{”}$$

donde $\dot{G}$ es el nombre de un filtro genérico de $\mathbb{P}$.

Definición 2.4. *Sea $\mathbb{P}$ una noción de forcing, diremos que $\mathbb{P}$ es proper si para todo M un submodelo elemental numerable de algún $H(\lambda)$ con λ suficientemente grande tal que $\mathbb{P} \in M$, se tiene que para cualquier $p \in \mathbb{P} \cap M$ existe $q \leq p$ una condición $(M, \mathbb{P})$-genérica.*

PFA resume el siguiente enunciado:
Para toda noción de forcing $\mathbb{P}$ que sea proper si $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia de conjuntos densos de $\mathbb{P}$, entonces hay un filtro que intersecta a cada elemento de dicha familia.

Teorema 2.5 (Baumgartner)**.** *Si existe un cardinal supercompacto, entonces ZFC+PFA es consistente.*

Si bien es un resultado interesante el teorema de Baumgartner, al no estar interesados en el estudio de cardinales supercompactos simplemente asumiremos el resultado.

La siguiente proposición será muy útil en el teorema principal de esta sección.

Proposición 2.6. *Sean $\mathbb{P}$ una noción de forcing y $\dot{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{P}$-nombre para una noción de forcing proper. Entonces:*

1. *Si $\mathbb{P}$ es c.c.c., entonces es proper.*
2. *Si $\mathbb{P}$ es σ-cerrado (i.e. toda cadena numerable decreciente en $\mathbb{P}$ tiene una cota inferior en $\mathbb{P}$), entonces es proper.*
3. *Si $\mathbb{P}$ es σ-cerrado, entonces $\mathbb{P}$ no agrega reales.*
4. *Si $\mathbb{P}$ es proper, entonces $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ (la iteración de $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$) es proper.*
5. *Si $\mathbb{P}$ es proper, entonces preserva a ω_1, es decir si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico, entonces $V[G] \models$ "$\omega_1^V = \omega_1$"*

Notemos como una consecuencia natural del inciso 1 de la proposición anterior que PFA implica MA(ω_1). Además aceptaremos el siguiente resultado.

Teorema 2.7 (Todorcevic)**.** *PFA implica* $\mathfrak{c} = \omega_2$.

Como vimos en la Sección 1.2, desde ZFC podemos asegurar la existencia de $(\mathfrak{b}, \omega), (\omega, \mathfrak{b})$ y (ω_1, ω_1)-gaps. A continuación veremos que éstas son las únicas que pueden existir cuando tenemos a PFA como axioma.

Teorema 2.8 (Baumgartner)**.** *Asumamos PFA. Sean* κ *y* λ *cardinales regulares, si hay una* (κ, λ)*-gap en* $(\wp(\omega), \subset^*)$ *entonces* (κ, λ) *es alguna de las siguientes parejas:* (ω, ω_2), (ω_2, ω) *u* (ω_1, ω_1).

Demostración. Sean $\kappa \leq \lambda$ cardinales regulares y $g = (\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, \{B_\beta : \beta < \lambda\})$ una (κ, λ)-gap.

Por la Proposición 1.5 basta probar que si $\kappa = \omega$, entonces $\lambda = \omega_2$ o $\kappa = \lambda = \omega_1$. Además, por el Teorema 2.7 se tiene que $\lambda \leq \omega_2$.

Primero consideremos el caso $\kappa = \omega$. En virtud de que PFA implica MA(ω_1) tenemos que $\mathfrak{b} = \omega_2$, por el Teorema 1.7 tenemos que $\lambda = \omega_2$

Ahora consideremos el caso $\kappa > \omega$. Nos gustaría probar en este caso que $\lambda = \omega_1 = \kappa$ y para esto supondremos que $\lambda = \omega_2$ para llegar a una contradicción.

Sea $\mathbb{P} = \{p : p$ es una función con $dom(p) \in [\omega_1]^{<\omega_1} \wedge img(p) \subseteq \lambda\}$, es fácil notar que $\mathbb{P}$ ordenado con $\supseteq$ es una noción de forcing σ-cerrada y si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico, entonces $V[G] \vDash$ "$\omega_1 = \lambda$". En virtud de la Proposición 2.6 incisos 2 y 5 tenemos que $V[G]$ no colapsa a ω_1, en consecuencia tenemos que $V[G] \vDash$ "$\kappa = \omega_1 = \lambda$".

Otro hecho que obtenemos de la Proposición 2.6 es que $\mathbb{P}$ no agrega reales, así que $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$, $\{B_\beta : \beta < \lambda\}$ es una (ω_1, ω_1)-gap en $V[G]$. Por el inciso 3 del Teorema 1.27, existe $\dot{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{P}$-nombre para una noción de forcing c.c.c. que agrega una anticadena no numerable a $\mathbb{L}_g$. Usando nuevamente la

Proposición 2.6, esta vez del cuarto inciso, $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ es proper y agrega una anticadena de tamaño ω_1 a $\mathbb{L}_g$.

Notemos que para definir la anticadena que agrega $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ basta usar ω_1 densos. Por PFA hay (en V) $H \subseteq \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ un filtro que los intersecta a todos ellos. De esta forma podemos concluir que dicha anticadena no numerable de $\mathbb{L}_g$ está en V. Lo cual contradice que $\mathbb{L}_g$ no tiene la c.c.c.. Ese es el absurdo buscado pues el inciso 2 del teorema 1.27 nos asegura lo contrario (ya que supusimos $\lambda > \omega_1$). ■

Con esta prueba finalizamos la tesis no sin antes recalcar el gran contraste que obtuvimos cuando pasamos de un axioma a una generalización del mismo. Estos resultados sirven para darnos cuenta de lo diferente que pueden ser estos axiomas a pesar de su fuerte relación.

Además, obtenemos como corolario del teorema de Baumgatner que desde ZFC no se puede demostrar la existencia de gaps que no sean las que se estudiaron en el primer capítulo, lo cual también nos lleva a preguntas como ¿qué axiomas se "llevan bien" con las gaps de cierto tipo?

No me queda más que agradecer al lector el tiempo dedicado a este trabajo.

Bibliografía

[1] Baumgartner, J. *Applications of the Proper Forcing Axiom. Handbook of Set Theoretic Topology*, pp. 913-1044. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[2] Frankiewicz, R. *Hausdorff gaps and limits.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 132, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1994.

[3] Jech, T. *Set theory.* The Third Millennium Edition, Springer, Berlin, 2002.

[4] Kunen, K. *Set theory. An introduction to independence proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[5] Rothberger, S. *Sur les familles indenombrables de suites de nombres naturels et les problemes concernant la propriete C,*, roc. Cambridge Phil. Soc. 37. pp. 109-126, 1941.

[6] Scheepers, M. *Gaps in* $({}^{\omega}\omega, \prec)$, Department of Mathematics Boise State University Boise, Idaho, 1994.

[7] Yorioka, T. *Distinguishing Types of Gaps in* $\wp(\omega)/fin$, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 68, No. 4 , pp. 1261-1276, 2003.