Universidad Nacional Autónoma de México
Programa de Maestría y Doctorado en Ciencias Matemáticas y de la Especialización en Estadística Aplicada

Una introducción a las categorías extrianguladas

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Maestro en Ciencias

PRESENTA:

Diego Alberto Barceló Nieves

DIRECTOR:

Dr. Octavio Mendoza Hernández
Instituto de Matemáticas, UNAM

Ciudad de México, octubre de 2022

Agradecimientos

Quiero agradecer infinitamente a mi familia por tanto apoyo y cariño durante toda mi vida. A pesar de que seamos personas tan divergentes, y sin importar qué tan cerca o qué tan lejos nos encontremos, sepan que siempre están conmigo.

Quiero agradecer enormemente al Dr. Octavio Mendoza Hernández, de quien he aprendido mucho sobre matemáticas, tanto a través de sus excelentes clases como de sus increíbles notas, cuya calidad procuro emular en mi propio trabajo. No menos importantes han sido sus enseñanzas sobre cómo lidiar con las matemáticas y su inmensidad; sus consejos al respecto han sido tranquilizadores y esperanzadores, por decir lo menos, y los aprecio muchísimo. Agradezco también a Shaira, con quien colaboré durante los cursos avanzados del Dr. Octavio y de quien también he aprendido mucho; algunos frutos de dicha colaboración se encuentran en esta tesis.

Me siento también muy agradecido con el proyecto de animación Animathica, particularmente con Bruno, Pablo, Darío, Vianey, Raúl y Andrea, así como con mis estudiantes de la Facultad de Ciencias y con Javier, por ayudarme a mantener vivo y fuerte mi amor por las matemáticas, aún cuando el mundo parecía estar paralizado.

Por último, quisiera agradecer especialmente a Adrián Zenteno Gutiérrez, mi profesor de Cálculo durante mi primer semestre en la Facultad, y gran parte de la razón por la que decidí cambiarme a estudiar matemáticas después de terminar la licenciatura. Adrían: Tu claridad frente al pizarrón y tu humildad como persona son cosas que admiro y a las que aspiro; tuve el honor de llamarte profesor y ahora tengo el privilegio aún más grande de llamarte *amigo*.

Índice general

Introducción

Actualmente, las estructuras básicas para el estudio del álgebra homológica son las categorías abelianas, las categorías exactas y las categorías trianguladas, cuya base común son las categorías aditivas. De las tres primeras, las que han sido más extensamente estudiadas en la literatura son las categorías abelianas[Fre64][Mit65][Pop73], cuya investigación produjo a mediados de los años sesenta el Teorema de Inmersión de Freyd-Mitchell, que afirma que toda categoría abeliana pequeña puede ser sumergida en una subcategoría plena de una categoría de módulos sobre un anillo[1] a través de un funtor fiel, pleno y exacto. Como consecuencia, muchos resultados de álgebra homológica válidos para subcategorías plenas de la categoría $\operatorname{Mod}(R)$ de módulos sobre un anillo pueden ser demostrados para categorías abelianas mediante una inmersión. En particular, esto incluye a los resultados de la forma "p implica q", donde p es una proposición categórica sobre un diagrama finito y q afirma que existen un número finito de morfismos adicionales entre objetos del diagrama que hacen verificar alguna proposición categórica para el diagrama extendido[Mit65, VI.7.3].

Existen varias nociones de categoría exacta. La primera surgió en 1962 cuando Puppe[Pup62] determinó cuáles propiedades de la categoría $\operatorname{Mod}(R)$ eran necesarias para poder hablar sobre sucesiones exactas y dio una definición intrínseca de un tipo de categorías no aditivas que cumplían tales propiedades. Posteriormente, Mitchell[Mit65] estudió las propiedades homológicas de este tipo de categorías y las llamó categorías exactas. Dado que una categoría es abeliana si, y sólo si, es exacta en el sentido de Puppe y aditiva, las categorías exactas definidas por Puppe dotan a las categorías aditivas de la estructura necesaria para que puedan formar categorías abelianas; sin embargo, tienen algunas deficiencias. En 1972, Quillen[Qui72] dio una definición diferente de categoría exacta, la cual es extrínseca en el sentido de que, dada una categoría aditiva, es necesario especificar una clase de "sucesiones exactas cortas distinguidas" en ella, conocida como estructura exacta, para poder formar una categoría exacta. La definición dada por Quillen tiene varias virtudes; en particular, es auto dual, por lo que podemos argumentar usando dualidad, además de que muchos resultados básicos del álgebra homológica tales como el Lema del Cinco y el Tercer Teorema de Isomorfismo de Noether se siguen directamente de sus axiomas. En el presente trabajo, nos enfocaremos en esta segunda noción de categoría exacta por lo que, de ahora en adelante, diremos simplemente *categoría exacta* para referirnos a una categoría exacta en el sentido de Quillen.

Las propiedades homológicas de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ también pueden ser estudiadas a través de una categoría derivada $D(\mathscr{A})$ donde, si la categoría abeliana tiene suficientes proyectivos o suficientes inyectivos, se puede aproximar a un objeto de $\mathscr{A}$ mediante construcciones que involucran a sus resoluciones proyectivas e inyectivas de una forma reminiscente a cómo una función diferenciable se puede aproximar en un punto mediante sus derivadas en algún punto cercano. La categoría derivada $D(\mathscr{A})$ y la categoría homotópica de complejos $K(\mathscr{A})$, necesaria para construir la primera, resultan ser aditivas, mas no necesariamente abelianas. Sin embargo, contienen una estructura útil dada por una clase

[1] En el presente trabajo, usaremos la palabra *anillo* para referirnos a un anillo asociativo con unidad a menos que se especifique lo contrario.

de diagramas, conocidos como triángulos distinguidos, que fungen un rol análogo al de las sucesiones exactas cortas en las categorías abelianas[Flo13]. En 1963, Verdier[Ver96] axiomatizó esta estructura en su tesis doctoral, bajo la dirección de Grothendieck, desarrollando así la noción de categoría triangulada.

Muchos resultados de naturaleza homológica son válidos tanto en categorías exactas como en categorías trianguladas. Sin embargo, el proceso para transferir algunos de estos resultados de un tipo de categoría a otra no es trivial, y la adaptación de algunas pruebas suele ser difícil. En 2019, Nakaoka y Palu[NP19] introdujeron una generalización simultánea de las categorías exactas y las categorías trianguladas, y mostraron que con ella se pueden resolver las principales dificultades encontradas durante el proceso de transferencia de resultados entre estas categorías, principalmente para aquellos relacionados con pares de cotorsión. Obtuvieron esta generalización axiomatizando aquellas propiedades de los bifuntores aditivos Ext^1 en categorías exactas y categorías trianguladas que son relevantes para el estudio de pares de cotorsión, y la llamaron categoría extriangulada.

El presente trabajo se divide en seis capítulos, incluyendo un apéndice. En el Capítulo 0 se da una introducción a la teoría de categorías, limitada a presentar aquellas nociones generales que serán utilizadas en el contexto del álgebra homológica durante el desarrollo principal del texto. La estructuración de este capítulo está hecha de tal forma que refleje el orden en el cual dichas nociones generales de teoría de categorías son requeridas durante los capítulos posteriores. Por ende, este capítulo sirve como referencia para los siguientes. Quienes tengan experiencia previa con el lenguaje categórico podrán empezar a leer a partir del Capítulo 1 si así lo desean; en caso contrario, se recomienda leer las secciones 0.1 a 0.5 antes de iniciar la lectura del Capítulo 1. Posteriormente, para ambos casos, se sugiere consultar el Capítulo 0 siempre que se considere necesario durante el resto de la lectura.

El Capítulo 1 se enfoca en presentar las categorías aditivas, dado que son el punto de partida común para las categorías trianguladas, exactas y extrianguladas, así como para las abelianas. Su extensión se limita a los temas y resultados más relevantes para el desarrollo de los capítulos siguientes, por lo que el tratamiento no es exhaustivo. El capítulo inicia definiendo las categorías con objeto cero —de las cuales las categorías aditivas son un caso particular—, así como el núcleo y el conúcleo, y mostrando algunas equivalencias entre estas nociones y varias de las construcciones presentadas en el Capítulo 0. Después, se discuten otros tipos de categorías previos a la construcción de categoría aditiva. Luego, se definen las nociones de categoría aditiva, funtor aditivo e ideal de una categoría aditiva, así como su categoría cociente asociada. Finalmente, se demuestran algunos resultados sobre bifuntores aditivos que serán ampliamente utilizados durante el Capítulo 4.

En el Capítulo 2 se estudian las categorías exactas. Al inicio, se expone y discute la definición de categoría exacta, que incluye la noción de “sucesión exacta corta” en este tipo de categoría dada por una clase particular de pares núcleo-conúcleo. Después, se demuestran algunas propiedades fundamentales en este tipo de estructuras, incluyendo algunos resultados bien conocidos en el área del álgebra homológica, como el Tercer Teorema de Isomorfismo de Noether. El capítulo termina con la definición del bifuntor aditivo Ext^1 en categorías exactas —el cual será retomado posteriormente en el Capítulo 4 para mostrar la relación entre las categorías exactas y las categorías extrianguladas— y de los pares de cotorsión correspondientes a dicho bifuntor.

El Capítulo 3 tiene como función introducir las categorías trianguladas. Al inicio, se definen las nociones de funtor de traslación sobre una categoría aditiva y la categoría de triángulos asociada, así como los axiomas que debe cumplir una clase especial de triángulos, llamados “triángulos distinguidos” —cuyas propiedades se asemejan de varias maneras a las sucesiones exactas cortas en categorías abelianas—, para poder formar una categoría triangulada. Después, se demuestran algunas propiedades fundamentales de categorías trianguladas, incluyendo algunos resultados que tienen análogos directos en categorías extrianguladas. Finalmente, se definen los pares de cotorsión en categorías trianguladas, utilizando un bifuntor aditivo Ext^1 apropiado.

En el Capítulo 4 se estudian las categorías extrianguladas. El capítulo inicia discutiendo una conexión entre las categorías exactas y las trianguladas, dada por las categorías de Frobenius y sus categorías estables asociadas, cuya utilidad motiva la idea de categoría extriangulada. Posteriormente, se definen las categorías extrianguladas, se demuestran algunos resultados básicos relacionados con ellas, y se explora su relación con las categorías exactas y las categorías trianguladas, lo cual incluye ejemplos de categorías extrianguladas que las distinguen de las dos anteriores. Al final, se demuestran algunos resultados básicos para objetos proyectivos e inyectivos en categorías extrianguladas, y se presentan los pares de cotorsión en este contexto.

Finalmente, el Apéndice A contiene algunos resultados sobre categorías abelianas, acotados en función de su necesidad para el desarrollo de los Capítulos 3 y 4. La primera sección del apéndice presenta algunas nociones generales de la teoría de categorías que, en el contexto del presente trabajo, sólo conciernen a las categorías abelianas. Las siguientes secciones sirven para construir progresivamente la definición de categoría Puppe-exacta, donde se definen las nociones de “sucesión exacta” y “sucesión exacta corta”. En las últimas secciones, se definen las categorías abelianas y se demuestran algunas de sus propiedades fundamentales, varias de las cuales pueden ser utilizadas para trazar analogías con algunos de los resultados expuestos en los Capítulos 2, 3 y 4.

Los contenidos de los Capítulos 0 y 1, así como los del Apéndice A, se basaron en las notas del curso de Homología Relativa en Categorías Abelianas que impartió el Dr. Octavio Mendoza Hernández en el Programa de Posgrado en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México en el año 2021. Así mismo, los contenidos del Capítulo 3 fueron basados en notas del curso de Categorías Trianguladas que impartió el Dr. Octavio en el mismo Programa el año siguiente. Por último, los contenidos de los Capítulos 2 y 4 se basaron principalmente en los artículos de Bühler[Büh10] y Nakaoka y Palu[NP19], respectivamente.

Capítulo 0

Algunas nociones generales de la teoría de categorías

El lenguaje de la teoría de categorías es de gran utilidad para estudiar el álgebra homológica de manera general y eficiente. En este capítulo, presentaremos los conceptos de teoría de categorías necesarios para la comprensión de los capítulos posteriores, que forman el cuerpo principal del texto. Únicamente las secciones 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5 son prerrequisitos para leer el Capítulo 1.

0.1. Definición de categoría

Definición 0.1.1 Una *categoría* $\mathscr{C}$ se compone de:

- una clase de *objetos* $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ de $\mathscr{C}$,
- una clase de *morfismos* $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ de $\mathscr{C}$,
- una correspondencia parcialmente definida

  $$\circ : \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathscr{C}),$$

  que satisfacen las siguientes propiedades:

  (C1) la clase de morfismos está determinada como sigue

  $$\mathrm{Mor}(\mathscr{C}) = \bigcup_{(A,B)\in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})^2} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B),$$

  donde $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ es una clase para cualquier par (A, B) de objetos en $\mathscr{C}$;

  (C2) para cualesquiera pares $(A, B), (C, D)$ de objetos en $\mathscr{C}$, se tiene que

  $$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, D) \neq \varnothing \implies A = C \ \wedge \ B = D;$$

  (C3) para cada terna (A, B, C) de objetos en $\mathscr{C}$, la correspondencia parcial

  $$\circ : \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathscr{C}),$$

  se restringe a una función bien definida

  $$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C), \ (f, g) \mapsto f \circ g := \circ(f, g)$$

  llamada usualmente "composición de morfismos" y que satisface las siguientes propiedades.

(i) Asociatividad: para cualesquiera $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$ y $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,D)$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(ii) Existencia de identidades: para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, existe $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X)$ tal que

$$1_X \circ f = f \quad \wedge \quad g \circ 1_X = g.$$

para cualesquiera $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,B)$.

Cada morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ se suele representar como $f : A \to B$ o bien como $A \xrightarrow{f} B$; en tal caso, $A =: \mathrm{Dom}(f)$ es el *dominio* de f y $B =: \mathrm{Codom}(f)$ es el *codominio* de f. Frecuentemente escribiremos gf en lugar de $g \circ f$. Para cualesquiera $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, se suele denotar a $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ como $\mathscr{C}(A,B)$; en particular, definimos $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(A) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A)$.

Definición 0.1.2 Una categoría $\mathscr{C}$ es:

(a) *pequeña* si las clases $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ son conjuntos;

(b) *localmente pequeña* si $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ es un conjunto para cualesquiera $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

Ejemplo 0.1.3 Algunos ejemplos de categorías incluyen:

(1) Sets, donde Obj(Sets) es la clase de todos los conjuntos, Mor(Sets) es la clase de todas las funciones entre conjuntos y la composición de morfismos es la composición de funciones;

(2) Top, donde Obj(Top) es la clase de todos los espacios topológicos, Mor(Top) es la clase de todas las funciones continuas entre espacios topológicos y la composición de morfismos es la composición de funciones;

(3) Vect_K, donde K es un campo, $\mathrm{Obj}(\mathrm{Vect}_K)$ es la clase de todos los espacios vectoriales sobre K, $\mathrm{Mor}(\mathrm{Vect}_K)$ es la clase de todas las transformaciones lineales compatibles con K y la composición de morfismos es la composición de funciones;

(4) Grp, donde Obj(Grp) es la clase de todos los grupos, Mor(Grp) es la clase de todos los homomorfismos de grupos y la composición de morfismos es la composición de funciones;

(5) Ab, donde Obj(Ab) es la clase de todos los grupos abelianos, Mor(Ab) es la clase de todos los homomorfismos de grupos abelianos y la composición de morfismos es la composición de funciones;

(6) $\mathrm{Mod}(R)$, donde R es un anillo (asociativo con unidad), $\mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}(R))$ es la clase de todos los R-módulos, $\mathrm{Mor}(\mathrm{Mod}(R))$ es la clase de todos los homomorfismos de R-módulos y la composición de morfismos es la composición de funciones;

(7) si M es un monoide, podemos verlo como una categoría pequeña $\mathscr{M}$ con un solo objeto arbitrario (i.e., $\mathrm{Obj}(\mathscr{M}) = \{*\}$) tal que $\mathrm{Mor}(\mathscr{M}) = M$ y la composición de morfismos es el producto en M.

En particular, tenemos que $\mathrm{Vect}_K = \mathrm{Mod}(K)$ y $\mathrm{Ab} = \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$. De esta forma, la categoría de módulos sobre un anillo se puede considerar como una generalización simultánea de la categoría de espacios vectoriales y la categoría de grupos abelianos.

Definición 0.1.4 Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ categorías. Decimos que $\mathscr{C}'$ es una *subcategoría* de $\mathscr{C}$ si se satisfacen las siguientes condiciones.

(SC1) $\mathrm{Obj}(\mathscr{C}') \subseteq \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

(SC2) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(A,B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ para cualesquiera $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}')$.

(SC3) La composición de morfismos en $\mathscr{C}$, restringida a $\mathscr{C}'$, coincide con la composición en $\mathscr{C}'$.

(SC4) Para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}')$, si $1'_A$ y 1_A son identidades en $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}$, respectivamente, entonces $1'_A = 1_A$.

Sea $\mathscr{C}'$ una subcategoría de $\mathscr{C}$. En caso de que la inclusión en (SC2) sea una igualdad, diremos que $\mathscr{C}'$ es una *subcategoría plena* de $\mathscr{C}$, y lo denotaremos por $\mathscr{C}' \subseteq \mathscr{C}$.

Ejemplo 0.1.5

(1) Vect_K, Ab y $\mathrm{Mod}(R)$ son subcategorías de Sets.

(2) Si R es un subanillo de un campo K, entonces podemos considerar a Vect_K como subcategoría de $\mathrm{Mod}(R)$ mediante la restricción de escalares. Similarmente, si R es un subanillo de $\mathbb{Z}$, podemos considerar a Ab como subcategoría de $\mathrm{Mod}(R)$. Más generalmente, si R es un subanillo de S, podemos considerar a $\mathrm{Mod}(S)$ como subcategoría de $\mathrm{Mod}(R)$.

(3) Ab es una subcategoría plena de Grp.

(4) Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathcal{X}$ una clase de objetos de $\mathscr{C}$. Entonces, se puede considerar a $\mathcal{X}$ como una subcategoría plena de $\mathscr{C}$, simplemente definiendo $\mathrm{Obj}(\mathcal{X}) := \mathcal{X}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{X}$.

0.2. Morfismos especiales

Definición 0.2.1 Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo en una categoría $\mathscr{C}$. Decimos que:

(a) f es un *monomorfismo* si, para cualesquiera $g, h \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$,

$$fg = fh \implies g = h.$$

(b) f es un *monomorfismo escindible* si existe un morfismo $B \xrightarrow{g} A$ en $\mathscr{C}$ tal que

$$gf = 1_A.$$

(c) f es un *epimorfismo* si, para cualesquiera $g, h \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$,

$$gf = hf \implies g = h.$$

(d) f es un *epimorfismo escindible* si existe un morfismo $B \xrightarrow{g} A$ en $\mathscr{C}$ tal que

$$fg = 1_B.$$

(e) f es un *isomorfismo* si existe un morfismo $B \xrightarrow{g} A$ en $\mathscr{C}$ tal que

$$gf = 1_A \ \wedge \ fg = 1_B.$$

Observación 0.2.2 Sea $\mathscr{C}$ una categoría.

(1) Sea $A \xrightarrow{f} B \in \operatorname{Mor}(\mathscr{C})$. Si existen $g, g' \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$ tales que $gf = 1_A$ y $fg' = 1_B$, entonces $g' = g$. En particular, f es un isomorfismo.

En efecto: Por la asociatividad en la composición de morfismos, tenemos que

$$\begin{aligned} g' &= 1_A g' \\ &= (gf)g' \\ &= g(fg') \\ &= g 1_B \\ &= g. \end{aligned}$$

En particular, se sigue que el morfismo inverso de f es único, y se denota por f^{-1}. Más aún, por simetría, f^{-1} también es un isomorfismo en $\mathscr{C}$.

(2) La composición de monomorfismos (epimorfismos) es un monomorfismo (epimorfismo).

En efecto: Sean $A, B, C \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ y $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C$ morfismos en $\mathscr{C}$.

Supongamos que f y g son monomorfismos y que existen $X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ y $h, h' \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A)$ tales que $(gf)h = (gf)h'$. Entonces

$$\begin{aligned} (gf)h = (gf)h' &\implies g(fh) = g(fh') \\ &\implies fh = fh' && (g \text{ es monomorfismo}) \\ &\implies h = h', && (f \text{ es monomorfismo}) \end{aligned}$$

por lo que $A \xrightarrow{gf} C$ es un monomorfismo.

Ahora, supongamos que f y g son epimorfismos y que existen $Y \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ y $j, j' \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C, Y)$ tales que $j(gf) = j'(gf)$. Entonces

$$\begin{aligned} j(gf) = j'(gf) &\implies (jg)f = (j'g)f \\ &\implies jg = j'g && (f \text{ es epimorfismo}) \\ &\implies j = j', && (g \text{ es epimorfismo}) \end{aligned}$$

por lo que $A \xrightarrow{gf} C$ es un epimorfismo.

(3) La composición de isomorfismos es un isomorfismo.

En efecto: Sean $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ isomorfismos en $\mathscr{C}$. Entonces, existen morfismos $B \xrightarrow{f^{-1}} A, C \xrightarrow{g^{-1}} B$ en $\mathscr{C}$ tales que $f^{-1}f = 1_A, ff^{-1} = 1_B = g^{-1}g$ y $gg^{-1} = 1_C$. Luego, se sigue que el morfismo $C \xrightarrow{f^{-1}g^{-1}} A$ es tal que

$$\begin{aligned} (f^{-1}g^{-1})gf &= f^{-1}(g^{-1}g)f \\ &= f^{-1}f \\ &= 1_A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (gf)(f^{-1}g^{-1}) &= g(ff^{-1})g^{-1} \\ &= gg^{-1} \\ &= 1_C, \end{aligned}$$

por lo que gf es un isomorfismo y $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

(4) Todo monomorfismo (epimorfismo) escindible es un monomorfismo (epimorfismo).

En efecto: Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo en $\mathscr{C}$.

Supongamos que f es un monomorfismo escindible. Entonces existe un morfismo $B \xrightarrow{g} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $gf = 1_A$. Supongamos que existen $D \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ y $j, j' \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(D, A)$ tales que $fj = fj'$. Entonces

$$\begin{aligned} fj = fj' &\implies g(fj) = g(fj') \\ &\implies (gf)j = (gf)j' \\ &\implies 1_A j = 1_A j' \\ &\implies j = j', \end{aligned}$$

por lo que f es un monomorfismo.

Ahora, supongamos que f es un epimorfismo escindible. Entonces existe un morfismo $B \xrightarrow{g} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $fg = 1_B$. Supongamos que existen $C \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ y $h, h' \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$ tales que $hf = h'f$. Entonces

$$\begin{aligned} hf = h'f &\implies (hf)g = (h'f)g \\ &\implies h(fg) = h'(fg) \\ &\implies h1_B = h'1_B \\ &\implies h = h', \end{aligned}$$

por lo que f es un epimorfismo.

(5) Si gf es un monomorfismo (epimorfismo), entonces f es un monomorfismo (g es un epimorfismo).

En efecto: Sean $X \xrightarrow{f} Y, Y \xrightarrow{g} Z$ morfismos en $\mathscr{C}$.

Supongamos que gf es un monomorfismo. Si $W \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ y $h, h' \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(W, X)$ son tales que $fh = fh'$, entonces

$$\begin{aligned} fh = fh' &\implies g(fh) = g(fh') \\ &\implies (gf)h = (gf)h' \\ &\implies h = h', && (gf \text{ es un monomorfismo}) \end{aligned}$$

por lo que f es un monomorfismo.

Ahora, supongamos que gf es un epimorfismo. Si $W \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ y $h, h' \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, W)$ son tales que $hg = h'g$, entonces

$$\begin{aligned} hg = h'g &\implies (hg)f = (h'g)f \\ &\implies h(gf) = h'(gf) \\ &\implies h = h', && (gf \text{ es un epimorfismo}) \end{aligned}$$

por lo que g es un epimorfismo.

(6) Si f es un isomorfismo, entonces es un monomorfismo y un epimorfismo.

En efecto: Se sigue de (3) pues, por definición, todo isomorfismo es un monomorfismo escindible y un epimorfismo escindible.

(7) f es un isomorfismo si, y sólo si, f es un monomorfismo escindible y un epimorfismo escindible.

En efecto: Por definición de isomorfismo, basta ver que si f es un monomorfismo escindible y un epimorfismo escindible entonces es un isomorfismo. Supongamos que $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$ es un monomorfismo escindible y un epimorfismo escindible. Entonces, existen morfismos $g, g' : B \to A$ en $\mathscr{C}$ tales que $gf = 1_A$ y $fg' = 1_B$. Luego,

$$\begin{aligned} gf = 1_A &\iff (gf)g' = 1_A g' \\ &\iff g(fg') = g' \\ &\iff g1_B = g' \\ &\iff g = g', \end{aligned}$$

de donde se sigue que f es un isomorfismo.

(8) Si f es un monomorfismo (epimorfismo) escindible y un epimorfismo (monomorfismo), entonces f es un isomorfismo.

En efecto: Supongamos que $A \xrightarrow{f} B$ un monomorfismo escindible y un epimorfismo. Entonces, por ser un monomorfismo escindible, existe $B \xrightarrow{g} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $gf = 1_A$. Por la existencia de la identidad 1_B en $\mathscr{C}$ y la asociatividad de la composición de morfismos, tenemos que

$$\begin{aligned} 1_B f &= f 1_A \\ &= f(gf) \\ &= (fg)f. \end{aligned}$$

Luego, como f es un epimorfismo, se sigue que $fg = 1_B$, por lo que f es un isomorfismo.

Ahora, supongamos que $A \xrightarrow{f} B$ es un epimorfismo escindible y un monomorfismo. Entonces, por ser un epimorfismo escindible, existe $B \xrightarrow{g} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $fg = 1_B$. Por la existencia de la identidad 1_A en $\mathscr{C}$ y la asociatividad de la composición de morfismos, tenemos que

$$\begin{aligned} f 1_A &= 1_B f \\ &= (fg)f \\ &= f(gf). \end{aligned}$$

Luego, como f es un monomorfismo, se sigue que $gf = 1_A$, por lo que f es un isomorfismo.

Las flechas $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \xrightarrow{\sim}$ se utilizan para denotar monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos, respectivamente.

Definición 0.2.3 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo en $\mathscr{C}$.

(a) Una *retracción* de f es un morfismo $B \xrightarrow{r} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $rf = 1_A$.

(b) Una *sección* de f es un morfismo $B \xrightarrow{s} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $fs = 1_B$.

Observación 0.2.4 Toda retracción es un epimorfismo escindible y, similarmente, toda sección es un monomorfismo escindible. Por ende, hablar de una retracción o una sección sin hacer referencia explícita a un morfismo es equivalente a hablar de epimorfismos escindibles y monomorfismos escindibles, respectivamente.

Definición 0.2.5 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Dos objetos $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ son *isomorfos*, denotado por $X \simeq Y$, si existe un isomorfismo en $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ o bien en $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$.

Observación 0.2.6 La relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en la clase de objetos de una categoría. Más aún, esta noción general de isomorfismo coincide con las nociones usuales de isomorfismo en las categorías $\mathrm{Vect}_K, \mathrm{Grp}, \mathrm{Ab}$ y $\mathrm{Mod}(R)$, y con la noción de homeomorfismo en la categoría Top; en Sets, dos objetos son isomorfos si tienen la misma cardinalidad. Usualmente, esta relación se denota por $\simeq$.

Demostraremos la primera afirmación: La reflexividad se sigue de observar que todo morfismo identidad es un isomorfismo que se tiene a sí mismo como inverso, la simetría se sigue de la definición de isomorfismo y la transitividad se sigue del inciso (3) de la Observación 0.2.2.

0.3. Funtores

Definición 0.3.1 Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. Una correspondencia $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un *funtor covariante* si satisface las siguientes condiciones:

(F1) Si $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, entonces $F(A) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$.

(F2) Si $A \xrightarrow{f} B \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, entonces $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \in \mathrm{Mor}(\mathscr{D})$.

(F3) Si $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, entonces $F(gf) = F(g)F(f)$.

(F4) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

En otras palabras, un funtor covariante es una correspondencia entre dos categorías que preserva la composición de morfismos y las identidades. Una correspondencia $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un *funtor contravariante* si, en vez de las condiciones (F2) y (F3), se satisfacen las siguientes condiciones:

(FCNT2) Si $A \xrightarrow{f} B \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, entonces $F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \in \mathrm{Mor}(\mathscr{D})$.

(FCNT3) Si $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, entonces $F(gf) = F(f)F(g)$.

Por ende, un funtor contravariante es una correspondencia entre dos categorías que invierte la composición de morfismos y preserva las identidades.

Observación 0.3.2

(1) Los funtores preservan isomorfismos.

En efecto: Supongamos que $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor covariante. Sea $A \xrightarrow{f} B$ un isomorfismo en $\mathscr{C}$. Entonces, existe $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$ tal que $f^{-1}f = 1_A$ y $ff^{-1} = 1_B$. Luego,

$$\begin{aligned} F(f^{-1})F(f) &= F(f^{-1}f) \\ &= F(1_A) \\ &= 1_{F(A)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(f)F(f^{-1}) &= F(ff^{-1}) \\ &= F(1_B) \\ &= 1_{F(B)}, \end{aligned}$$

por lo que $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$ tiene a $F(B) \xrightarrow{F(f^{-1})} F(A)$ como inverso. El caso contravariante es análogo.

(2) La restricción de un funtor a cualquier subcategoría de su dominio es un funtor de la misma varianza.

(3) Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ funtores. Si definimos la composición $GF : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ como

$$(GF)(\cdot) := G(F(\cdot)),$$

entonces la composición de funtores GF es un funtor covariante si F y G tienen la misma varianza, y un funtor contravariante si F y G tienen varianza distinta.

Ejemplo 0.3.3 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathscr{C}'$ una subcategoría de $\mathscr{C}$.

(1) El funtor identidad $1_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, $\left(X \xrightarrow{f} Y\right) \mapsto \left(X \xrightarrow{f} Y\right)$.

(2) El funtor inclusión $\iota_{\mathscr{C}'} : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$, $\left(X \xrightarrow{f} Y\right) \mapsto \left(X \xrightarrow{f} Y\right)$, es decir, $\iota_{\mathscr{C}'} = 1_{\mathscr{C}} |_{\mathscr{C}'}$.

(3) El funtor Hom-covariante, si $\mathscr{C}$ es localmente pequeña. Sea $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Entonces,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, -) : \mathscr{C} \to \mathrm{Sets}, \left(X \xrightarrow{f} Y\right) \mapsto \left(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,f)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, Y)\right),$$

donde $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, f)(\alpha) := f \circ \alpha$ para cualquier $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X)$.

(4) El funtor Hom-contravariante, si $\mathscr{C}$ es localmente pequeña. Sea $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Entonces,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, A) : \mathscr{C} \to \mathrm{Sets}, \left(X \xrightarrow{f} Y\right) \mapsto \left(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f,A)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A)\right),$$

donde $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f, A)(\beta) := \beta \circ f$ para cualquier $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, A)$.

Observación 0.3.4

(1) Podemos considerar a la categoría Cat, donde Obj(Cat) es la clase de todas las categorías, Mor(Cat) es la clase de todos los funtores covariantes y la composición de morfismos es la composición de funtores descrita en el inciso (3) de la Observación 0.3.2. Un funtor covariante $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un isomorfismo si existe un funtor covariante $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que $GF = 1_{\mathscr{C}}$ y $FG = 1_{\mathscr{D}}$.

(2) Por el inciso (3) de la Observación 0.3.2, no es posible formar una categoría cuyos objetos sean categorías y cuyos morfismos sean funtores contravariantes.

Definición 0.3.5

(a) Un *isomorfismo de categorías* es un funtor covariante que es un isomorfismo en Cat.

(b) Un *endomorfismo* es un funtor covariante de una categoría en sí misma.

(c) Un *automorfismo* es un endomorfismo que es un isomorfismo de categorías.

(d) Un funtor contravariante $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un *anti-isomorfismo* si existe un funtor contravariante $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que
$$GF = 1_{\mathscr{C}} \quad \wedge \quad FG = 1_{\mathscr{D}}.$$

Nota En todo lo que sigue, supondremos que los funtores son covariantes, a menos que se especifique lo contrario explícitamente.

Definición 0.3.6 Para un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, con $\mathscr{D}$ localmente pequeña, decimos que:

(a) F es fiel si, para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$,

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FX, FY)$$

es un monomorfismo en Sets.

(b) F es pleno si, para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$,

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FX, FY)$$

es un epimorfismo en Sets.

(c) F es denso si, para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, existe $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ tal que $F(C) \simeq D$ en $\mathscr{D}$.

Diagramas

Definición 0.3.7 Sea $\mathscr{C}$ una categoría.

(a) Un *diagrama* en $\mathscr{C}$ es un conjunto D formado por objetos y morfismos en $\mathscr{C}$ tal que

$$\{\mathrm{Dom}(f), \mathrm{Codom}(f)\} \subseteq D$$

para todo $f \in D \cap \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$.

(b) Sea D un diagrama en $\mathscr{C}$. Un *camino* γ en D es una composición finita de morfismos en D, y su *longitud* es el número de flechas que lo componen.

(c) Un diagrama D en $\mathscr{C}$ es *conmutativo* si, para cualesquiera caminos γ y δ en D tales que $\mathrm{Dom}(\gamma) = \mathrm{Dom}(\delta)$ y $\mathrm{Codom}(\gamma) = \mathrm{Codom}(\delta)$, se tiene que $\gamma = \delta$.

Frecuentemente representaremos a un diagrama D en $\mathscr{C}$ como un grafo dirigido con vértices $D \cap \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y flechas $D \cap \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$.

Ejemplo 0.3.8 Sea $\mathscr{C}$ una categoría.

(1) Para el diagrama D en $\mathscr{C}$ representado por el grafo dirigido

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X_2, \end{tikzcd}$$

los morfismos f y g en $\mathscr{C}$ son los únicos caminos. Note que D es conmutativo si $f = g$.

(2) Para el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} & & X_3 \arrow[dr, "f_3"] & \\ X_1 \arrow[r, "f_1"] & X_2 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dr, "f_4"'] & & X_4 \\ & & X_5, \arrow[ur, "f_5"'] & \end{tikzcd}$$

los caminos posibles son:

- $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ y f_5, de longitud 1;
- $f_2f_1,\ f_4f_1,\ f_3f_2$ y f_5f_4, de longitud 2;
- $f_3f_2f_1$ y $f_5f_4f_1$, de longitud 3.

Note que el diagrama anterior es conmutativo si, y sólo si, $f_3f_2 = f_5f_4$.

(3) Cualquier diagrama sin caminos es conmutativo, por vacuidad.

(4) Sean $\mathscr{D}$ una categoría, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor y D un diagrama en $\mathscr{C}$. Aplicando el funtor F a cada objeto y morfismo en D obtenemos el diagrama $F(D)$ en $\mathscr{D}$.

Los diagramas nos ayudan a mantener un registro de cómo se relacionan distintos morfismos en una categoría a través de sus dominios y codominios. En particular, por (C3), nos muestran cuáles de los morfismos representados son componibles. Más aún, los diagramas conmutativos nos permiten visualizar sistemas de ecuaciones entre morfismos de una categoría de manera sencilla.

Nota En diagramas, es común denotar a los morfismos identidad con flechas de igualdad, es decir,

$$X = X \quad \text{en vez de} \quad X \xrightarrow{1_X} X.$$

Además, comúnmente se utilizan las flechas $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ y $\xrightarrow{\sim}$ para denotar monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos, respectivamente, así como flechas punteadas para denotar la existencia del morfismo correspondiente.

Definición 0.3.9 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $A \xrightarrow{f} C, B \xrightarrow{g} C \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$. Decimos que el morfismo f se *factoriza a través de* g, si existe $A \xrightarrow{f'} B \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ tal que $f = gf'$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "f'"'] & & C. \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{0.3.1}$$

En tal caso, decimos que g y f' son *factores* de f, que gf' es una *factorización* de f, y que el factor f' *hace conmutar* el diagrama (0.3.1). Si f' es el único morfismo con esta propiedad, lo denotamos como

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "\exists!\ f'"'] & & C. \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 0.3.10 Una *propiedad universal* es una afirmación de la existencia de una factorización tal que el factor existente es el único que hace conmutar cierto diagrama. En tal caso, decimos que dicha factorización es la *única* que hace conmutar ese diagrama.

Una gran cantidad de conceptos categóricos importantes se definen en términos de propiedades universales, como veremos en las sección 0.5.

Categoría cociente y categoría producto

Definición 0.3.11 Sean $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña y $\cong$ una relación en $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$. Decimos que $\cong$ es una *relación de congruencia* en $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ si, para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, al restringir $\cong$ en cada $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ se obtiene una relación de equivalencia en el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$, la cual denotaremos por $\simeq_{X,Y}$, que respeta la composición de morfismos; es decir, si $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ y $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,Z)$ son tales que $f_1 \simeq_{X,Y} f_2$ y $g_1 \simeq_{Y,Z} g_2$, entonces $g_1 f_1 \simeq_{X,Z} g_2 f_2$. Si $\cong$ es una relación de congruencia en $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, definimos a la *categoría cociente* $\mathscr{C}/\cong$ por

$$\begin{aligned} \mathrm{Obj}(\mathscr{C}/\cong) &:= \mathrm{Obj}(\mathscr{C}), \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/\cong}(X,Y) &:= \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)/\simeq_{X,Y} \quad \forall\, X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}), \end{aligned}$$

con la composición de morfismos inducida por la composición en $\mathscr{C}$. Al funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}/\cong$ que manda a cada morfismo en su clase de equivalencia se le conoce como *funtor cociente*. Se dice que el funtor cociente *desciende* a los morfismos en $\mathscr{C}$ a sus clases de equivalencia en $\mathscr{C}/\cong$.

Definición 0.3.12 Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ categorías. Definimos a la *categoría producto* $\mathscr{C}' \times \mathscr{C}$ por

$$\begin{aligned} \mathrm{Obj}(\mathscr{C}' \times \mathscr{C}) &:= \mathrm{Obj}(\mathscr{C}') \times \mathrm{Obj}(\mathscr{C}), \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}' \times \mathscr{C}}\big((X,W),(Y,Z)\big) &:= \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W,Z) \quad \forall\, (X,W),(Y,Z) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}' \times \mathscr{C}), \end{aligned}$$

con la composición de morfismos definida entrada a entrada.

Definición 0.3.13 Un *bifuntor* es un funtor cuyo dominio es una categoría producto.

Ejemplo 0.3.14 Sea $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña. Entonces, tenemos[1] el bifuntor Hom

$$\mathrm{Hom}(-,-) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \mathrm{Sets}, \; \Big(X \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} W, Y \xrightarrow{g} Z\Big) \mapsto \Big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f^{\mathrm{op}},g)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W,Z)\Big),$$

donde $\mathrm{Hom}(f^{\mathrm{op}}, g)(\alpha) := g \circ \alpha \circ f$ para cualquier $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$. En particular, para cualquier $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, tenemos que $\mathrm{Hom}(1_A{}^{\mathrm{op}}, -) : \mathscr{C} \to \mathrm{Sets}$ y $\mathrm{Hom}(-, 1_A) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$ son funtores; el primero coincide con el funtor Hom-covariante $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-) : \mathscr{C} \to \mathrm{Sets}$ introducido en el Ejemplo 0.3.3.

0.4. Dualidad

Categoría opuesta

Definición 0.4.1 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. La *categoría opuesta* $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ de $\mathscr{C}$ se define como sigue:

- $\mathrm{Obj}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(B,A) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$.
- La composición $\circ^{\mathrm{op}} : \mathrm{Mor}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}) \times \mathrm{Mor}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{Mor}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})$ es "la opuesta" a la composición $\circ : \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, es decir, $f \circ^{\mathrm{op}} g := g \circ f$.

Nota Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Para distinguirlo del mismo morfismo $f \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, es conveniente denotar a este último por $f^{\mathrm{op}} : B \to A$. Con dicha notación, la composición de

$$C \xrightarrow{g^{\mathrm{op}}} B \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} A$$

[1] Ver la Definición 0.4.1 al inicio de la siguiente sección.

en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ se escribe como sigue:

$$f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}} := (g \circ f)^{\mathrm{op}}.$$

Para simplificar aún más lo anterior, escribimos

$$f^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}} = (gf)^{\mathrm{op}}.$$

Observación 0.4.2 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ su categoría opuesta.

(1) Existe un funtor contravariante dado por la correspondencia

$$\begin{aligned} D_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} &\to \mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \\ X &\mapsto X, \\ A \xrightarrow{f} B &\mapsto B \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} A, \end{aligned}$$

conocido como *funtor de dualidad*.

(2) Note que $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathscr{C}$. Por lo tanto, las composiciones de los funtores $D_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ y $D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{A}$ satisfacen

$$D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} D_{\mathscr{C}} = 1_{\mathscr{C}} \quad \text{y} \quad D_{\mathscr{C}} D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} = 1_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}.$$

Es decir, $D_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ es un anti-isomorfismo de categorías.

(3) Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor de cualquier varianza. Entonces, las composiciones de funtores

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{op}} &:= F \circ D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}, \\ F^{\mathrm{op}} &:= D_{\mathscr{D}} \circ F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}^{\mathrm{op}}, \end{aligned}$$

son funtores de varianza opuesta a F. Notamos que $(F_{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = (F^{\mathrm{op}})_{\mathrm{op}} =: F^{\mathrm{op}}_{\mathrm{op}} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}^{\mathrm{op}}$ es un funtor con la misma varianza que F.

Principio de dualidad

Definición 0.4.3 Una *proposición categórica* es una afirmación que involucra conceptos categóricos, tales como morfismos, funtores, diagramas, etcétera, y es una proposición en el sentido lógico; es decir, se puede determinar sin ambigüedad si es exclusivamente verdadera o falsa.

Recordemos que una proposición lógica puede estar compuesta de otras proposiciones lógicas unidas por operadores lógicos. En particular, una proposición categórica en una categoría $\mathscr{C}$ puede estar compuesta de otras proposiciones categóricas en $\mathscr{C}$ más "elementales". En este sentido, si P es una proposición categórica en $\mathscr{C}$, entonces entenderemos el "aplicar el funtor de dualidad $D_{\mathscr{C}}$ a P" como aplicarlo a todas las proposiciones "elementales" de P donde tenga sentido hacerlo, sin modificar los operadores lógicos que las unen, y denotaremos a la proposición categórica resultante, cometiendo un abuso de notación, por $D_{\mathscr{C}}(P)$. Al procedimiento para obtener $D_{\mathscr{C}}(P)$ se le conoce informalmente como "darle vuelta a las flechas".

Definición 0.4.4 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y P una proposición categórica en $\mathscr{C}$.

(a) La proposición categórica $\overline{P}$ es aquella que se obtiene al escribir la proposición P en términos de conceptos (morfismos, funtores, diagramas, etcétera) en la categoría $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

(b) La *proposición dual* de P se define como $P^* := D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(\overline{P})$.

(c) P es *auto dual* si $P^* = P$.

Observación 0.4.5 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y P una proposición categórica en $\mathscr{C}$. Entonces, $(P^*)^* = P$.

En efecto: Se sigue de notar que

$$\overline{(D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(\overline{P}))} \text{ en } \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \iff D_{\mathscr{C}}(P) \text{ en } \mathscr{C}^{\mathrm{op}},$$

y luego aplicar $D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ a la proposición categórica bicondicional anterior.

Ejemplo 0.4.6 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y P la proposición categórica "f es un monomorfismo", con $f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$. Entonces, $\overline{P}$ es la proposición categórica "f^{op} es un monomorfismo", con $f^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})$. Para obtener la proposición dual P^*, partimos de $\overline{P}$, que podemos reescribir como

$$f^{\mathrm{op}}g^{\mathrm{op}} = f^{\mathrm{op}}h^{\mathrm{op}} \implies g^{\mathrm{op}} = h^{\mathrm{op}}.$$

Aplicando el funtor $D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ a la proposición anterior, obtenemos

$$gf = hf \implies g = h,$$

lo que equivale a la proposición categórica "f es un epimorfismo", con $f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$. Por lo tanto, "$f$ es un epimorfismo" es la proposición dual de "f es un monomorfismo". Más aún, análogamente, se puede ver que "f es un monomorfismo" es la proposición dual de "f es un epimorfismo", verificándose $(P^*)^* = P$.

El hecho de que una proposición categórica P se verifique en una categoría $\mathscr{C}$ no implica que P^* se verifique en $\mathscr{C}$. Esto se debe a que algunas proposiciones categóricas pueden involucrar conceptos que, para ser definidos, requieran que en una categoría se cumplan condiciones adicionales que *a priori* no necesariamente deben cumplirse en su categoría opuesta. Esto significa que la dualizabilidad de proposiciones categóricas depende del contexto en que se esté trabajando. Para hacer más precisa esta idea, introducimos los siguientes conceptos.

Definición 0.4.7

(a) Un *universo* $\mathfrak{U}$ es una colección de categorías.

(b) Un universo $\mathfrak{U}$ es *dualizante* si $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \in \mathfrak{U}$ para toda $\mathscr{C} \in \mathfrak{U}$.

Ejemplo 0.4.8

(1) El universo de todas las categorías es dualizante.

(2) El universo de las categorías de módulos sobre un anillo no es dualizante[2].

Definición 0.4.9 Sea $\mathfrak{U}$ un universo dualizante. Una proposición categórica P es *dualizable* en $\mathfrak{U}$ si se verifica en todas las categorías de $\mathfrak{U}$.

Observación 0.4.10 (Principio de dualidad) Sea $\mathfrak{U}$ un universo dualizante. Entonces, para toda proposición categórica P dualizable en $\mathfrak{U}$, se tiene que P^* es dualizable en $\mathfrak{U}$.

En efecto: Sean $\mathscr{C} \in \mathfrak{U}$ y P una proposición categórica dualizable en $\mathfrak{U}$. Entonces, P se verifica en $\mathscr{C}$ y, en particular, $\overline{P}$ se verifica en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. Aplicando el funtor de dualidad $D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ a $\overline{P}$, obtenemos que P^* se verifica en $\mathscr{C}$.

[2]Se puede demostrar que, para una familia arbitraria de módulos no triviales en una categoría de módulos sobre un anillo, el morfismo canónico entre su coproducto y su producto es un monomorfismo mas no un epimorfismo. Por ende, si $R \neq 0$, suponer que $\mathrm{Mod}(R)^{\mathrm{op}}$ es equivalente a una categoría de módulos sobre un anillo lleva a una contradicción.

El principio de dualidad nos dice que, para cualquier resultado que se pueda demostrar en las categorías de un universo dualizante, se sigue que existe un resultado dual válido para las categorías del mismo universo. Este principio reduce algunas demostraciones a observar que ya se ha demostrado un resultado dual en una categoría que pertenece a un universo dualizante; sin embargo, sólo le da validez a la demostración en categorías del mismo universo.

Proposición 0.4.11 Sea $\mathfrak{U}$ un universo dado por las categorías que cumplen ciertos axiomas adicionales $\{A_i\}_{i\in I}$, con I finito. Entonces, si $\{A_i\}_{i\in I} = \{{A_j}^*\}_{j\in I}$, el universo $\mathfrak{U}$ es dualizante.

Demostración. Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I} = \{{A_j}^*\}_{j\in I}$. Sea $\mathscr{C} \in \mathfrak{U}$. Entonces, los axiomas $\{{A_j}^*\}_{j\in I}$ se cumplen en $\mathscr{C}$, por lo que $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ verifica los axiomas

$$\begin{aligned} \{D_{\mathscr{C}}({A_j}^*)\}_{j\in I} &= \{D_{\mathscr{C}}(D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(\overline{A_j}))\} \\ &= \{\overline{A_j}\}_{j\in I}, \end{aligned}$$

lo que implica que $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \in \mathfrak{U}$. □

Más adelante, utilizaremos la caracterización de los universos dualizantes dada por la Proposición 0.4.11 para observar que los universos formados, respectivamente, por las categorías aditivas, exactas, trianguladas, extrianguladas y abelianas son dualizantes. Esto nos permitirá argumentar en dichos contextos utilizando el principio de dualidad.

Subobjetos y objetos cociente

Definición 0.4.12 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $X \overset{\alpha}{\hookrightarrow} A$ un monomorfismo en $\mathscr{C}$. Entonces, decimos que X es un *subobjeto* de A, vía α, y que α es una inclusión de X en A; denotamos esta relación por $X \subseteq A$. Si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$, decimos que la composición $f\,|_X := f\alpha : X \to B$ es la *restricción* de f en X vía α.

Definición 0.4.13 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. La *categoría de subobjetos* de A, denotada por $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$, se define como sigue:

- $\mathrm{Obj}(\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)) := \{\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \mid \alpha \text{ es un monomorfismo y } \mathrm{Codom}(\alpha) = A\}$.

- Dados $X \overset{\alpha}{\hookrightarrow} A$ y $Y \overset{\beta}{\hookrightarrow} A$, se define

$$\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)(\alpha, \beta) := \{h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \mid \beta h = \alpha\}.$$

  Es decir, $\alpha \xrightarrow{h} \beta \in \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)(\alpha, \beta)$ si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ y hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ Y \arrow[r, "\beta"'] & A. \end{tikzcd}$$

- La composición en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$ es la inducida de $\mathscr{C}$.

Observación 0.4.14 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

(1) Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$, la clase $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)(\alpha, \beta)$ tiene a lo sumo un elemento y, en caso de que exista, es un monomorfismo en $\mathscr{C}$.

(2) $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)(\alpha, \beta) \neq \varnothing$ y $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)(\beta, \alpha) \neq \varnothing$ si, y sólo si, $\alpha \simeq \beta$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$.

En efecto: Sean $\alpha \xrightarrow{h} \beta, \beta \xrightarrow{j} \alpha$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$. Dado que $\beta \xrightarrow{hj} \beta$ y $1_\beta = 1_{\mathrm{Dom}(\beta)}$, por (1), se tiene que $hj = 1_\beta$. Análogamente, se ve que $jh = 1_\alpha$.

(3) La relación $\leq$ en la clase $\mathrm{Obj}(\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A))$ dada por

$$\alpha \leq \beta \iff \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)(\alpha, \beta) \neq \varnothing$$

es una relación de preorden en $\mathrm{Obj}(\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A))$.

(4) Sea $\overline{\mathrm{Mon}}_{\mathscr{C}}(-, A) := \mathrm{Obj}(\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A))/\simeq$. Dado que por (2) tenemos que $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$ si, y sólo si, $\alpha \simeq \beta$, entonces el preorden $\leq$ en $\mathrm{Obj}(\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A))$ induce un orden parcial en $\overline{\mathrm{Mon}}_{\mathscr{C}}(-, A)$ dado por

$$[x] \leq [y] \iff x \leq y.$$

Definición 0.4.15 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $A \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} X$ un epimorfismo en $\mathscr{C}$. Entonces, decimos que X es un *objeto cociente* de A vía β.

Definición 0.4.16 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. La *categoría de objetos cociente* de A, denotada por $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)$, se define como sigue:

- $\mathrm{Obj}(\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)) := \{\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \mid \alpha \text{ es un epimorfismo y } \mathrm{Dom}(\alpha) = A\}$.

- Dados $A \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} X$ y $A \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} Y$, se define

$$\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)(\alpha, \beta) := \{h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \mid h\alpha = \beta\}.$$

Es decir, $\alpha \xrightarrow{h} \beta \in \mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)(\alpha, \beta)$ si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ y hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dd, "h"] \\ A \arrow[ur, two heads, "\alpha"] \arrow[dr, two heads, "\beta"'] & \\ & Y. \end{tikzcd}$$

- La composición en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)$ es la inducida de $\mathscr{C}$.

Observación 0.4.17 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

(1) Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)$, la clase $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)(\alpha, \beta)$ tiene a lo sumo un elemento y, en caso de que exista, es un epimorfismo en $\mathscr{C}$.

(2) $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)(\alpha, \beta) \neq \varnothing$ y $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)(\beta, \alpha) \neq \varnothing$ si, y sólo si, $\alpha \simeq \beta$ en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)$.

(3) La relación $\leq$ en la clase $\mathrm{Obj}(\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -))$ dada por

$$\alpha \leq \beta \iff \mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)(\beta, \alpha) \neq \varnothing$$

es una relación de preorden en $\mathrm{Obj}(\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -))$. Notemos que, en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X \\ A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\ & Y, \arrow[uu, "h"'] \end{tikzcd} \quad \text{i.e., } \alpha \leq \beta,$$

se tiene que h es un epimorfismo (i.e., que Y "cubre" a X, vía h), y en este sentido es que interpretamos la desigualdad $\alpha \leq \beta$.

(4) Sea $\overline{\mathrm{Epi}}_{\mathscr{C}}(A,-) := \mathrm{Obj}(\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A,-))/\simeq$. Dado que por (2) tenemos que $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$ si, y sólo si, $\alpha \simeq \beta$, entonces el preorden $\leq$ en $\mathrm{Obj}(\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(-,A))$ induce un orden parcial en $\overline{\mathrm{Epi}}_{\mathscr{C}}(-,A)$ dado por
$$[x] \leq [y] \iff x \leq y.$$

(5) Las categorías $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-,A)$ y $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(A,-)$ son anti-isomorfas.

0.5. Límites y colímites

Muchas de las construcciones categóricas que estudiaremos posteriormente como los objetos finales, igualadores, productos fibrados y productos, son ejemplos de límites. Así mismo, los objetos iniciales, coigualadores, sumas fibradas y coproductos, que son construcciones duales a las mencionadas anteriormente, son ejemplos de colímites. Tanto los límites como los colímites tienen la bondad de ser únicos hasta isomorfismos en una categoría apropiada. Por lo tanto, en vez de demostrar dicha unicidad hasta isomorfismos para cada una de las construcciones mencionadas anteriormente, demostraremos que esto es válido en general para límites y colímites, y más adelante nos limitaremos a hacer observaciones cuando una construcción sea un límite o un colímite.

Las definiciones de límite y colímite son muy abstractas, por lo que se recomienda a quienes no conozcan ya ejemplos de ellos que empiecen esta sección por leer los que aparecen a continuación, mismos que fueron mencionados en el párrafo anterior, y que vuelvan a estas definiciones cuantas veces sea necesario para ir construyendo un panorama general.

Definición 0.5.1 Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Un *cono* de F es un par (D, ψ), donde $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ y ψ es una familia $\{D \xrightarrow{\psi_X} F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})}$ de morfismos en $\mathscr{D}$ tales que, para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $X \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, se tiene que $F(f)\psi_X = \psi_Y$; diagramáticamente, el cono (D, ψ) se puede ver como el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "\psi_X"'] \arrow[dr, "\psi_Y"] & \\ F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y) \end{tikzcd} \qquad \forall\ X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}), X \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}). \tag{0.5.1}$$

Observación 0.5.2 El término "cono" es una mnemotecnia que hace referencia a los diagramas conmutativos (0.5.1) que representan su definición, pues podemos imaginar que cada uno de dichos diagramas es una rebanada de un cono que tiene en el borde de la base a todos los objetos de la categoría $F(\mathscr{C})$.

Definición 0.5.3 Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor y $(D, \psi), (D', \psi')$ conos de F. Un *morfismo de conos* $\alpha : (D, \psi) \to (D', \psi')$ es un morfismo $D \xrightarrow{\alpha} D'$ en $\mathscr{D}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\psi_X"'] & & D' \arrow[dl, "\psi'_X"] \\ & F(X) & \end{tikzcd} \qquad \forall\ X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}).$$

Observación 0.5.4 Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Las clases de conos de F y de morfismos de conos de F, junto con la composición de morfismos inducida de $\mathscr{D}$, forman una categoría llamada la *categoría de conos de F*, que denotamos por $\mathrm{Cone}(F)$.

Definición 0.5.5 Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Un *cono universal* de F es un cono de F a través del cual se factorizan todos los conos de F de forma única. Es decir, un cono (U, ϕ) de F es un cono universal de F si para cualquier cono (D, ψ) de F existe un único morfismo de conos $(D, \psi) \xrightarrow{\varphi} (U, \phi)$. A un cono universal de F también se le conoce como un *límite* del funtor F, y la propiedad descrita anteriormente se conoce como la *propiedad universal del límite del funtor F*.

Observación 0.5.6 Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Entonces los límites de F, si existen, son únicos hasta isomorfismos en la categoría de conos de F.

En efecto: Sean (U, ϕ) y (U', ϕ') límites de F. Dado que son conos universales y, en particular, conos de F, por la propiedad universal del límite de F existen morfismos únicos $U' \xrightarrow{\varphi} U, U \xrightarrow{\varphi'} U'$ en $\mathscr{D}$ tales que, para cualquier $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[rr, dotted, shift left, "\varphi"] \arrow[dr, "\phi'_X"'] & & U. \arrow[ll, dotted, shift left, "\varphi'"] \arrow[dl, "\phi_X"] \\ & F(X) & \end{tikzcd} \tag{0.5.2}$$

Ahora, del diagrama conmutativo (0.5.2) tenemos que los siguientes diagramas conmutan para cualquier $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\varphi\varphi'"] \arrow[dr, "\phi_X"'] & & U \arrow[dl, "\phi_X"] \\ & F(X) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U' \arrow[rr, "\varphi'\varphi"] \arrow[dr, "\phi'_X"'] & & U' \arrow[dl, "\phi'_X"] \\ & F(X) & \end{tikzcd}$$

Por otro lado, los siguientes diagramas conmutan para cualquier $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "1_U"] \arrow[dr, "\phi_X"'] & & U \arrow[dl, "\phi_X"] \\ & F(X) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U' \arrow[rr, "1_{U'}"] \arrow[dr, "\phi'_X"'] & & U' \arrow[dl, "\phi'_X"] \\ & F(X) & \end{tikzcd}$$

Por ende, de la propiedad universal del límite de F se sigue que $\varphi\varphi' = 1_U$ y $\varphi'\varphi = 1_{U'}$. Por lo tanto, concluimos que los límites de F son únicos hasta isomorfismos en la categoría de conos de F.

Definición 0.5.7 Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Un *cocono* de F es un par (ψ, D), donde $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ y ψ es una familia $\{F(X) \xrightarrow{\psi_X} D\}_{X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})}$ de morfismos en $\mathscr{D}$ tales que, para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $X \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, se tiene que $\psi_Y F(f) = \psi_X$; diagramáticamente, el cocono (ψ, D) se puede ver como el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\psi_X"'] & & F(Y) \arrow[dl, "\psi_Y"] \\ & D & \end{tikzcd} \qquad \forall\ X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}), X \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}). \tag{0.5.3}$$

Observación 0.5.8 El diagrama (0.5.3) puede obtenerse invirtiendo las flechas del diagrama (0.5.1), reordenando los elementos, y reetiquetando a los objetos arbitrarios X y Y. Similarmente, si invertimos las flechas del diagrama (0.5.3), reordenamos los objetos y reetiquetamos a X y a Y, podemos obtener el diagrama (0.5.1). Esto muestra que las nociones de cono y cocono son duales entre sí. Es decir, que si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor, D es un objeto en $\mathscr{D}$ y ψ es una familia $\{D \xrightarrow{\psi_X} F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})}$ de morfismos en $\mathscr{D}$, entonces

$$(D, \psi) \text{ es un cono de } F \iff (\psi^{\mathrm{op}}, D) \text{ es un cocono de } F,$$

donde $\psi^{\mathrm{op}} = \{F(X) \xrightarrow{\psi_X{}^{\mathrm{op}}} D\}_{X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})}$.

Definición 0.5.9 Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor y $(\psi, D), (\psi', D')$ coconos de F. Un *morfismo de coconos* $\beta : (\psi, D) \to (\psi', D')$ es un morfismo $D \xrightarrow{\beta} D'$ en $\mathscr{D}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[dl, "\psi_X"'] \arrow[dr, "\psi'_X"] & \\ D \arrow[rr, "\beta"'] & & D'. \end{tikzcd} \qquad \forall\ X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}).$$

Observación 0.5.10 Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Las clases de coconos de F y de morfismos de coconos de F, junto con la composición de morfismos inducida de $\mathscr{D}$, forman una categoría llamada la *categoría de coconos de* F, que denotamos por $\mathrm{CoCone}(F)$.

Definición 0.5.11 Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Un *cocono universal* de F es un cocono de F a través del cual se factorizan todos los coconos de F de forma única. Es decir, un cocono (ϕ, U) de F es un cocono universal si para cualquier cocono (ψ, D) de F existe un único morfismo de coconos $(\phi, U) \xrightarrow{\varphi} (\psi, D)$. A un cocono universal de F también se le conoce como un *colímite* del funtor F, y la propiedad descrita anteriormente se conoce como la *propiedad universal del colímite del funtor* F.

Observación 0.5.12 Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Entonces los colímites de F, si existen, son únicos hasta isomorfismos en la categoría de coconos de F.

En efecto: Sean (ϕ, U) y (ϕ', U') colímites de F. Dado que son coconos universales y, en particular, coconos de F, por la propiedad universal del colímite de F existen morfismos únicos $U \xrightarrow{\varphi} U', U' \xrightarrow{\varphi'} U$ en $\mathscr{D}$ tales que, para cualquier $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[dl, "\phi_X"'] \arrow[dr, "\phi'_X"] & \\ U \arrow[rr, dotted, shift left, "\varphi"] & & U'. \arrow[ll, dotted, shift left, "\varphi'"] \end{tikzcd} \tag{0.5.4}$$

Ahora, del diagrama conmutativo (0.5.4) tenemos que los siguientes diagramas conmutan para cualquier $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$,

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[dl, "\phi_X"'] \arrow[dr, "\phi_X"] & \\ U \arrow[rr, "\varphi'\varphi"'] & & U \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(X) \arrow[dl, "\phi_X"'] \arrow[dr, "\phi_X"] & \\ U' \arrow[rr, "\varphi\varphi'"'] & & U' \end{tikzcd}$$

Por otro lado, los siguientes diagramas conmutan para cualquier $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$,

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[dl, "\phi_X"'] \arrow[dr, "\phi_X"] & \\ U \arrow[rr, "1_U"'] & & U \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(X) \arrow[dl, "\phi_X"'] \arrow[dr, "\phi_X"] & \\ U' \arrow[rr, "1_{U'}"'] & & U' \end{tikzcd}$$

Por ende, de la propiedad universal del colímite de F se sigue que $\varphi'\varphi = 1_U$ y $\varphi\varphi' = 1_{U'}$. Por lo tanto, concluimos que los colímites de F son únicos hasta isomorfismos en la categoría de coconos de F.

Objetos finales, objetos iniciales y objetos cero

Nota Dado un conjunto Z, denotaremos por $|Z|$ al cardinal de dicho conjunto.

Definición 0.5.13 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Un objeto F en $\mathscr{C}$ es un *objeto final* si

$$|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F)| = 1$$

para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

Observación 0.5.14 Los objetos finales en una categoría $\mathscr{C}$, si existen, son únicos hasta isomorfismos en $\mathscr{C}$.

En efecto: Sean F, F' objetos finales en una categoría $\mathscr{C}$. Entonces, tenemos que

$$|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F', F)| = 1 = |\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F, F')|, \tag{0.5.5}$$
$$|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F, F)| = 1 = |\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F', F')|. \tag{0.5.6}$$

Por (0.5.5), existen $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F, F')$ y $j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F', F)$. Por axiomas de categoría, tenemos que $jh \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F, F), hj \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F', F'), 1_F \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F, F)$ y $1_{F'} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F', F')$. Por (0.5.6), se sigue que $jh = 1_F$ y $hj = 1_{F'}$, por lo que $F \simeq F'$.

Definición 0.5.15 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Un objeto I en $\mathscr{C}$ es un *objeto inicial* si

$$|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I, X)| = 1$$

para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

Observación 0.5.16

(1) Los objetos iniciales en una categoría $\mathscr{C}$, si existen, son únicos hasta isomorfismos en $\mathscr{C}$.

En efecto: Sean I, I' objetos iniciales en una categoría $\mathscr{C}$. Entonces, tenemos que

$$|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I, I')| = 1 = |\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I', I)|, \tag{0.5.7}$$
$$|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I, I)| = 1 = |\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I', I')|. \tag{0.5.8}$$

Por (0.5.7), existen $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I, I')$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I', I)$. Por axiomas de categoría, tenemos que $gf \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I, I), fg \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I', I'), 1_I \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I, I)$ y $1_{I'} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I', I')$. Por (0.5.8), se sigue que $gf = 1_I$ y $fg = 1_{I'}$, por lo que $I \simeq I'$.

(2) Las nociones de objeto final e inicial son duales entre sí. Es decir, si $\mathscr{C}$ es una categoría y X es un objeto en $\mathscr{C}$, entonces

$$X \text{ es un objeto final en } \mathscr{C} \iff X \text{ es un objeto inicial en } \mathscr{C}^{\mathrm{op}}.$$

Definición 0.5.17 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Un objeto 0 en $\mathscr{C}$ es un *objeto cero* si es un objeto final e inicial, es decir, si

$$|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,0)| = 1 = |\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0,X)|$$

para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

Observación 0.5.18

(1) Los objetos cero en una categoría $\mathscr{C}$, si existen, son únicos hasta isomorfismos en $\mathscr{C}$.

(2) La noción de objeto cero es auto dual. Es decir, si $\mathscr{C}$ es una categoría y X es un objeto en $\mathscr{C}$, entonces

$$X \text{ es un objeto cero en } \mathscr{C} \iff X \text{ es un objeto cero en } \mathscr{C}^{\mathrm{op}}.$$

Igualadores y coigualadores

Definición 0.5.19 Sean $\alpha, \beta : A \to B$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Un morfismo $I \xrightarrow{\iota} A$ en $\mathscr{C}$ es un *igualador* para el par (α, β) si las siguientes condiciones se satisfacen.

(I1) $\beta\iota = \alpha\iota$.

(I2) Propiedad universal del igualador: para todo morfismo $X \xrightarrow{f} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $\beta f = \alpha f$, existe un único morfismo $X \xrightarrow{f'} I$ tal que $\iota f' = f$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dotted, "\exists!\ f'"'] \arrow[d, "f"] & \\ I \arrow[r, "\iota"'] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & B. \end{tikzcd}$$

Observación 0.5.20 Sean $\alpha, \beta : A \to B$ en una categoría $\mathscr{C}$.

(1) Si $I \xrightarrow{\iota} A$ es un igualador de (α, β), entonces $\iota \in \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$.

(2) Si $I \overset{\iota}{\hookrightarrow} A$ y $I' \overset{\iota'}{\hookrightarrow} A$ son igualadores de (α, β), entonces $\iota \simeq \iota'$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$.

(3) En virtud de (1) y (2), y en caso de que (α, β) admita un igualador, denotaremos por $\mathrm{Equ}(\alpha, \beta) \overset{\iota}{\hookrightarrow} A$ a la elección de uno de ellos, siguiendo la notación preponderante derivada del término *equalizer* en inglés.

Definición 0.5.21 Sean $\alpha, \beta : A \to B$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Un morfismo $B \xrightarrow{\nu} C$ en $\mathscr{C}$ es un *coigualador* para el par (α, β) si las siguientes condiciones se satisfacen.

(CI1) $\nu\beta = \nu\alpha$.

(CI2) Propiedad universal del coigualador: para todo morfismo $B \xrightarrow{f} Y$ en $\mathscr{C}$ tal que $f\beta = f\alpha$, existe un único morfismo $C \xrightarrow{f'} Y$ tal que $f'\nu = f$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & B \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "f"'] & C. \arrow[dl, dotted, "\exists!\ f'"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Observación 0.5.22 Sean $\alpha, \beta : A \to B$ en una categoría $\mathscr{C}$.

(1) Si $\nu \to C$ es un coigualador de (α, β), entonces $\nu \in \mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(B, -)$.

(2) Si $B \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} C$ y $B \overset{\nu'}{\twoheadrightarrow} C'$ son coigualadores de (α, β), entonces $\nu \simeq \nu'$ en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(B, -)$.

(3) En virtud de (1) y (2), y en caso de que (α, β) admita un coigualador, denotaremos por $B \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} \mathrm{CoEq}(\alpha, \beta)$ a la elección de uno de ellos.

Productos fibrados, sumas fibradas y cuadrados bicartesianos

Definición 0.5.23 Sean $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A$ y $A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Un *producto fibrado* o *pull-back* para el diagrama $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A \xleftarrow{\alpha_2} A_2$ es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

que satisface la siguiente propiedad universal: para cualesquiera morfismos $P' \xrightarrow{\beta'_1} A_1, P' \xrightarrow{\beta'_2} A_2$ en $\mathscr{C}$ tales que $\alpha_2\beta'_2 = \alpha_1\beta'_1$, se tiene que existe un único morfismo $P' \xrightarrow{\gamma} P$ en $\mathscr{C}$ tal que $\beta_1\gamma = \beta'_1$ y $\beta_2\gamma = \beta'_2$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[drr, bend left, "\beta'_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'_1"'] \arrow[dr, dotted, "\exists!\ \gamma"] & & \\ & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A. \end{tikzcd}$$

Observación 0.5.24 Los productos fibrados, si existen, son únicos hasta isomorfismos.

En efecto: Sean $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A$ y $A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Supongamos que los siguientes diagramas conmutativos en $\mathscr{C}$ son productos fibrados para el diagrama $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A \xleftarrow{\alpha_2} A_2$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\beta'_2"] \arrow[d, "\beta'_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A. \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de los productos fibrados, existen morfismos únicos $P \xrightarrow{\gamma} P', P' \xrightarrow{\gamma'} P$ en $\mathscr{C}$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[drr, bend left, "\beta'_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'_1"'] \arrow[dr, dotted, shift left, "\gamma'"] & & \\ & P \arrow[ul, dotted, shift left, "\gamma"] \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A. \end{tikzcd}$$

Más aún, de la unicidad en la propiedad universal del producto fibrado se sigue que $\gamma'\gamma = 1_P$ y $\gamma\gamma' = 1_{P'}$, por lo que $P \simeq P'$.

Corolario 0.5.25 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

un producto fibrado. Entonces, se cumplen las siguientes condiciones.

(a) Si α_1 es un monomorfismo, entonces β_2 también lo es.

(b) Si α_1 es un isomorfismo, entonces β_2 también lo es.

Demostración.

(a) Supongamos que α_1 es un monomorfismo y que existen $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\gamma, \gamma' : X \to P \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ tales que $\beta_2\gamma = \beta_2\gamma'$. Como por hipótesis $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_1\gamma &= \alpha_2\beta_2\gamma \\ &= \alpha_2\beta_2\gamma' \\ &= \alpha_1\beta_1\gamma'. \end{aligned}$$

Dado que α_1 es un monomorfismo, se sigue que $\beta_1\gamma = \beta_1\gamma'$. Por lo tanto, γ y γ' son tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[drr, bend left, "\beta_2\gamma'"] \arrow[dr, shift left, "\gamma'"] \arrow[dr, shift right, "\gamma"'] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1\gamma"'] & & \\ & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A. \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del producto fibrado se sigue que $\gamma = \gamma'$. Por lo tanto, β_2 es un monomorfismo. Observemos que por simetría se sigue que, si α_2 es un monomorfismo, entonces β_1 también lo es.

(b) Supongamos que α_1 es un isomorfismo. Observemos que el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[drr, bend left, "1_{A_2}"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_1^{-1}\alpha_2"'] & & \\ & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A. \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del producto fibrado, existe un único morfismo $A_2 \xrightarrow{\gamma} P$ tal que $\beta_1\gamma = \alpha_1^{-1}\alpha_2$ y $\beta_2\gamma = 1_{A_2}$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}\beta_2\gamma\beta_2 &= 1_{A_2}\beta_2\\ &= \beta_2\\ &= \beta_2 1_P,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_1\gamma\beta_2 &= \alpha_1^{-1}\alpha_2\beta_2\\ &= \alpha_1^{-1}\alpha_1\beta_1\\ &= 1_{A_1}\beta_1\\ &= \beta_1\\ &= \beta_1 1_P.\end{aligned}$$

De la unicidad en la propiedad universal del producto fibrado se sigue que $\gamma\beta_2 = 1_P$, de donde concluimos que β_2 es un isomorfismo.

$\square$

Proposición 0.5.26 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y consideremos un diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\theta_1"] & Q \arrow[l, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\theta_2"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B & I \arrow[l, "\gamma_2"] \end{tikzcd}$$

tal que ambos cuadrados son productos fibrados. Si θ_1 y γ_2 son monomorfismos en $\mathscr{C}$ y existe $A \xrightarrow{\gamma_1} I$ tal que $f = \gamma_2\gamma_1$, entonces existe $P \xrightarrow{\alpha_1} Q$ tal que $\alpha_2\alpha_1 = g$ y el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Q \arrow[d, "\theta_2"] \\ A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I. \end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que θ_1 y γ_2 son monomorfismos en $\mathscr{C}$ y que existe $A \xrightarrow{\gamma_1} I$ tal que $f = \gamma_2\gamma_1$. Entonces, tenemos que el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\theta_1"] & Q \arrow[l, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\theta_2"] \\ A \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "\gamma_1"'] & B & I. \arrow[l, "\gamma_2"] \end{tikzcd} \tag{0.5.9}$$

En particular, observemos que $\gamma_2(\gamma_1\beta_1) = \theta_1 g$. Reordenando el diagrama 0.5.9, obtenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_1\beta_1"'] & & \\ & Q \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\theta_2"'] & B' \arrow[d, "\theta_1"] \\ & I \arrow[r, "\gamma_2"'] & B. \end{tikzcd}$$

Dado que el cuadrado conmutativo es un producto fibrado por hipótesis, de la propiedad universal del producto fibrado se sigue que existe un único morfismo $P \xrightarrow{\alpha_1} Q$ tal que $\alpha_2\alpha_1 = g$ y $\theta_2\alpha_1 = \gamma_1\beta_1$. Veamos que el diagrama conmutativo dado por la segunda igualdad

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Q \arrow[d, "\theta_2"] \\ A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado para $A \xrightarrow{\gamma_1} I \xleftarrow{\theta_2} Q$. En efecto, sean $P' \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $P' \xrightarrow{\varphi_1} A, P' \xrightarrow{\varphi_2} Q$ morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\gamma_1\varphi_1 = \theta_2\varphi_2$. Entonces, como $\gamma_2\theta_2 = \theta_1\alpha_2$, tenemos que

$$\begin{aligned} f\varphi_1 &= \gamma_2\gamma_1\varphi_1 \\ &= \gamma_2\theta_2\varphi_2 \\ &= \theta_1\alpha_2\varphi_2, \end{aligned}$$

por lo que tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[drr, bend left, "\alpha_2\varphi_2"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\theta_1"] \\ & I \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd} \tag{0.5.10}$$

Como el cuadrado del diagrama 0.5.10 es un producto fibrado, existe $P' \xrightarrow{\varphi} P$ en $\mathscr{C}$ tal que $g\varphi = \alpha_2\varphi_2$ y $\beta_1\varphi = \varphi_1$. Ahora, como γ_2 es un monomorfismo y el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\theta_2"'] & B' \arrow[d, "\theta_1"] \\ I \arrow[r, "\gamma_2"'] & B \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, se sigue de la Proposición 0.5.25 que α_2 también es un monomorfismo. Por ende, de $\alpha_2\varphi_2 = g\varphi = \alpha_2\alpha_1\varphi$ se sigue que $\varphi_2 = a\alpha_1\varphi$, por lo que el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[drr, bend left, "\varphi_2"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_1"'] \arrow[dr, dotted, "\varphi"'] & & \\ & P \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Q \arrow[d, "\theta_2"] \\ & A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I \end{tikzcd}$$

conmuta. Como θ_2 y α_1 son monomorfismos, entonces por el inciso (2) de la Observación 0.2.2 sabemos que $\theta_2\alpha_1$ es un monomorfismo. Por lo tanto, si existe $P' \xrightarrow{\varphi'} P$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_1\varphi' = \varphi_2$ y $\beta_1\varphi' = \varphi_1$, entonces tenemos que $\theta_2\alpha_1\varphi' = \theta_2\alpha_1\varphi$, de donde se sigue que $\varphi' = \varphi$. □

Definición 0.5.27 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Decimos que $\mathscr{C}$ es una *categoría con productos fibrados* si para cualquier diagrama $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A \xleftarrow{\alpha_2} A_2$ en $\mathscr{C}$ existe el producto fibrado correspondiente.

Definición 0.5.28 Sean $A \xrightarrow{\alpha_1} A_1$ y $A \xrightarrow{\alpha_2} A_2$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Una *suma fibrada* o *push-out* para el diagrama $A_1 \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} A_2$ es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & A_2 \arrow[d, "\beta_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & S \end{tikzcd}$$

que satisface la siguiente propiedad universal: para cualesquiera morfismos $A_1 \xrightarrow{\beta_1'} S', A_2 \xrightarrow{\beta_2'} S'$ en $\mathscr{C}$ tales que $\beta_1'\alpha_1 = \beta_2'\alpha_2$, se tiene que existe un único morfismo $S \xrightarrow{\gamma} S'$ tal que $\gamma\beta_1 = \beta_1'$ y $\gamma\beta_2 = \beta_2'$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & A_2 \arrow[d, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend left, "\beta_2'"] & \\ A_1 \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[drr, bend right, "\beta_1'"'] & S \arrow[dr, dotted, "\exists!\ \gamma"'] & \\ & & S'. \end{tikzcd}$$

Observación 0.5.29

(1) Las sumas fibradas, si existen, son únicas hasta isomorfismos.

En efecto: Sean $A \xrightarrow{\alpha_1} A_1$ y $A \xrightarrow{\alpha_2} A_2$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Supongamos que los siguientes diagramas conmutativos en $\mathscr{C}$ son sumas fibradas para el diagrama $A_1 \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} A_2$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & A_2 \arrow[d, "\beta_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & A_2 \arrow[d, "\beta_2'"] \\ A_1 \arrow[r, "\beta_1'"'] & S'. \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de las sumas fibradas, existen morfismos únicos $S \xrightarrow{\gamma} S', S' \xrightarrow{\gamma'} S$ en $\mathscr{C}$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & A_2 \arrow[d, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend left, "\beta_2'"] & \\ A_1 \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[drr, bend right, "\beta_1'"'] & S \arrow[dr, dotted, shift left, "\gamma"] & \\ & & S'. \arrow[ul, dotted, shift left, "\gamma'"] \end{tikzcd}$$

Más aún, de la unicidad en la propiedad universal de la suma fibrada se sigue que $\gamma'\gamma = 1_S$ y $\gamma\gamma' = 1_{S'}$, por lo que $S \simeq S'$.

(2) Las nociones de producto fibrado y suma fibrada son duales entre sí. Es decir, si $\mathscr{C}$ es una categoría y $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A, A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A$ son morfismos en $\mathscr{C}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$ es un producto fibrado para el diagrama $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A \xleftarrow{\alpha_2} A_2$ en $\mathscr{C}$.

(ii)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "{\alpha_1}^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "{\alpha_2}^{\mathrm{op}}"'] & A_1 \arrow[d, "{\beta_1}^{\mathrm{op}}"] \\ A_2 \arrow[r, "{\beta_2}^{\mathrm{op}}"'] & X \end{tikzcd}$$
es una suma fibrada para el diagrama $A_1 \xleftarrow{{\alpha_1}^{\mathrm{op}}} A \xrightarrow{{\alpha_2}^{\mathrm{op}}} A_2$ en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

Corolario 0.5.30 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & A_2 \arrow[d, "\beta_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & S \end{tikzcd}$$

una suma fibrada. Entonces, se cumplen las siguientes condiciones.

(a) Si α_1 es un epimorfismo, entonces β_2 también lo es.

(b) Si α_1 es un isomorfismo, entonces β_2 también lo es.

Demostración.

(a) Supongamos que α_1 es un epimorfismo y que existen $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\gamma, \gamma' : S \to X \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ tales que $\gamma\beta_2 = \gamma'\beta_2$. Como por hipótesis $\beta_1\alpha_1 = \beta_2\alpha_2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma\beta_1\alpha_1 &= \gamma\beta_2\alpha_2 \\ &= \gamma'\beta_2\alpha_2 \\ &= \gamma'\beta_1\alpha_1. \end{aligned}$$

Dado que α_1 es un epimorfismo, se sigue que $\gamma\beta_1 = \gamma'\beta_1$. Por lo tanto, γ y γ' son tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & A_2 \arrow[d, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma\beta_2"] & \\ A_1 \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[drr, bend right, "\gamma\beta_1"'] & S \arrow[dr, shift left, "\gamma"] \arrow[dr, shift right, "\gamma'"'] & \\ & & S'. \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de la suma fibrada se sigue que $\gamma = \gamma'$. Por lo tanto, β_2 es un epimorfismo. Observemos que por simetría se sigue que, si α_2 es un epimorfismo, entonces β_1 también lo es.

(b) Supongamos que α_1 es un isomorfismo. Observemos que el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & A_2 \arrow[d, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend left, "1_{A_2}"] & \\ A_1 \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[drr, bend right, "\alpha_2\alpha_1^{-1}"'] & S & \\ & & A_2. \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de la suma fibrada, existe un único morfismo $S \xrightarrow{\gamma} A_1$ tal que $\gamma\beta_1 = \alpha_2\alpha_1^{-1}$ y $\gamma\beta_2 = 1_{A_2}$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}\beta_2\gamma\beta_2 &= \beta_2 1_{A_2}\\ &= \beta_2\\ &= 1_S\beta_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_2\gamma\beta_1 &= \beta_2\alpha_2\alpha_1^{-1}\\ &= \beta_1\alpha_1\alpha_1^{-1}\\ &= \beta_1 1_{A_1}\\ &= \beta_1\\ &= 1_S\beta_1.\end{aligned}$$

De la unicidad en la propiedad universal del producto fibrado se sigue que $\beta_1\gamma = 1_S$, de donde concluimos que β_2 es un isomorfismo.

□

Definición 0.5.31 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Decimos que $\mathscr{C}$ es una *categoría con sumas fibradas* si para cualquier diagrama $A_1 \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} A_2$ en $\mathscr{C}$ existe la suma fibrada correspondiente.

Definición 0.5.32 Un *cuadrado bicartesiano* en una categoría $\mathscr{C}$ es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{BC}"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "\delta"'] & D \end{tikzcd}$$

tal que es un producto fibrado y una suma fibrada.

Observación 0.5.33 La noción de cuadrado bicartesiano es auto dual.

En efecto: Se sigue del inciso (2) de la Observación 0.5.29.

Productos y coproductos

Definición 0.5.34 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$. Un *producto* en $\mathscr{C}$ para $\{A_i\}_{i\in I}$ es un objeto $P \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ junto con una familia $\{P \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i\in I}$ de morfismos en $\mathscr{C}$ tales que se satisfacen la siguiente propiedad universal: para cualesquiera $Q \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\{Q \xrightarrow{\alpha_i} A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$, existe un único morfismo $Q \xrightarrow{\alpha} P$ en $\mathscr{C}$ tal que $\pi_i\alpha = \alpha_i$ para todo $i \in I$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, dotted, "\exists!\ \alpha"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & P \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd} \qquad \forall\ i \in I.$$

Observación 0.5.35 Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$ y $\{P \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i\in I}$ un producto para $\{A_i\}_{i\in I}$.

(1) Si $\{P' \xrightarrow{\pi_i'} A_i\}_{i\in I}$ y $P' \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ son otro producto para $\{A_i\}_{i\in I}$, entonces existe $\lambda : P \xrightarrow{\sim} P'$ en $\mathscr{C}$ tal que $\pi_i'\lambda = \pi_i$ para todo $i \in I$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, dotted, "\lambda", "\sim"'] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & P' \arrow[dl, "\pi_i'"] \\ & A_i & \end{tikzcd} \qquad \forall\ i \in I.$$

En efecto: Por la propiedad universal del producto, existen $P \xrightarrow{\lambda} P'$ y $P' \xrightarrow{\mu} P$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & P' \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi_i'"] & P \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd} \qquad \forall\ i \in I.$$

Luego, para todo $i \in I$ se tienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\mu\lambda"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & P \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P' \arrow[rr, "\lambda\mu"] \arrow[dr, "\pi_i'"'] & & P'. \arrow[dl, "\pi_i'"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

De la unicidad en la propiedad universal del producto se sigue que $\mu\lambda = 1_P$ y $\lambda\mu = 1_{P'}$.

(2) En vista de (1), y en caso de que exista, denotaremos por $\{\prod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i\in I}$ a la elección de un producto en $\mathscr{C}$ para $\{A_i\}_{i\in I}$. En tal caso, el morfismo $\prod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi_i} A_i$ se conoce como la i-ésima proyección natural de $\prod_{i\in I}$ en A_i.

(3) Sean $\mathscr{C}$ localmente pequeña e I un conjunto. Una familia $\{A \xrightarrow{p_i} A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$ es un producto para $\{A_i\}_{i\in I}$ si, y sólo si, para todo $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, el morfismo canónico en Sets

$$\varphi_B : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A_i), \beta \mapsto (p_i\beta)_{i\in I}$$

es un isomorfismo en Sets.

(4) Si $I = \varnothing$, entonces P es un objeto final en $\mathscr{C}$. Recíprocamente, cualquier objeto final en $\mathscr{C}$ es un producto en $\mathscr{C}$ para una familia vacía de objetos en $\mathscr{C}$.

Proposición 0.5.36 Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $A_1, A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ tales que existe un producto $A_1 \prod A_2$ en $\mathscr{C}$, y el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A. \end{tikzcd} \tag{0.5.11}$$

en $\mathscr{C}$. Por la propiedad universal del producto, podemos considerar un morfismo $P \xrightarrow{\beta} A_1 \prod A_2$ tal que hace conmutar los triángulos superiores izquierdos del siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\beta_2"] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dd, "\beta_1"'] & & A_2 \arrow[dd, "\alpha_2"] \\ & A_1 \prod A_2 \arrow[ur, "\pi_2"'] \arrow[dl, "\pi_1"] & \\ A_1 \arrow[rr, "\alpha_1"'] & & A. \end{tikzcd} \tag{0.5.12}$$

Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) El diagrama (0.5.11) es un producto fibrado en $\mathscr{C}$.

(b) $\beta = \mathrm{Equ}(\alpha_2\pi_2, \alpha_1\pi_1)$.

Demostración.

(a)⇒(b) Por hipótesis, tenemos que el cuadrado del diagrama (0.5.12) conmuta. Por ende,

$$\begin{aligned}(\alpha_1\pi_1)\beta &= \alpha_1(\pi_1\beta)\\ &= \alpha_1\beta_1\\ &= \alpha_2\beta_2\\ &= \alpha_2(\pi_2\beta)\\ &= (\alpha_2\pi_2)\beta.\end{aligned}$$

Ahora, sea $X \xrightarrow{\delta} A_1 \prod A_2$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_1\pi_1\delta = \alpha_2\pi_2\delta$. Entonces, como el diagrama (0.5.11) es un producto fibrado, por la propiedad universal del producto fibrado tenemos que existe $X \xrightarrow{\theta} P$ en $\mathscr{C}$ tal que $\beta_2\theta = \pi_2\delta$ y $\beta_1\theta = \pi_1\delta$. Luego, como

$$\begin{aligned}\pi_1(\beta\theta) &= (\pi_1\beta)\theta\\ &= \beta_1\theta\\ &= \pi_1\delta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2(\beta\theta) &= (\pi_2\beta)\theta\\ &= \beta_2\theta\\ &= \pi_2\delta,\end{aligned}$$

de la propiedad universal del producto, se sigue que $\beta\theta = \delta$. Supongamos que existe $X \xrightarrow{\theta'} P$ en $\mathscr{C}$ tal que $\beta\theta' = \delta$. Entonces, para $i \in \{1, 2\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\beta_i\theta' &= (\pi_i\beta)\theta\\ &= \pi_i(\beta\theta')\\ &= \pi_i\delta\end{aligned}$$

y, de la propiedad universal del producto fibrado, se sigue que $\theta' = \theta$.

(b)⇒(a) Observemos que

$$\begin{aligned}\alpha_2\beta_2 &= \alpha_2\pi_2\beta\\ &= \alpha_1\pi_1\beta && (\beta = \mathrm{Equ}(\alpha_1\pi_1, \alpha_2\pi_2))\\ &= \alpha_1\beta_1.\end{aligned}$$

Sean $X \xrightarrow{\delta_1} A_1$ y $X \xrightarrow{\delta_2} A_2$ en $\mathscr{C}$ tales que $\alpha_2\delta_2 = \alpha_1\delta_1$. Por la propiedad universal del producto, existe $X \xrightarrow{\delta} A_1 \prod A_2$ en $\mathscr{C}$ tal que $\pi_1\delta = \delta_1$ y $\pi_2\delta = \delta_2$. Ahora, como

$$\begin{aligned}(\alpha_1\pi_1)\delta &= \alpha_1(\pi_1\delta)\\ &= \alpha_1\delta_1\\ &= \alpha_2\delta_2\\ &= \alpha_2(\pi_2\delta)\\ &= (\alpha_2\pi_2)\delta\end{aligned}$$

y $\beta = \mathrm{Equ}(\alpha_1\pi_1, \alpha_2\pi_2)$, por la propiedad universal del ecualizador, existe $X \xrightarrow{\psi} P$ en $\mathscr{C}$ tal que $\beta\psi = \delta$. Más aún, para $i \in \{1, 2\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_i\psi &= \pi_i\beta\psi \\ &= \pi_i\delta \\ &= \delta_i. \end{aligned}$$

Supongamos que existe $X \xrightarrow{\psi'} P$ en $\mathscr{C}$ tal que $\beta_i\psi' = \delta_i$, para $i \in \{1, 2\}$. Dado que, para $i \in \{1, 2\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_i(\beta\psi') &= (\pi_i\beta)\psi' \\ &= \beta_i\psi' \\ &= \delta_i \\ &= \pi_i\delta, \end{aligned}$$

de la propiedad universal del producto se sigue que $\beta\psi' = \delta$. Finalmente, por la propiedad universal del ecualizador, tenemos que $\psi' = \psi$. □

Definición 0.5.37 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Decimos que $\mathscr{C}$ es una *categoría con productos finitos* si para cualquier familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos en $\mathscr{C}$ con I finito existe el producto correspondiente.

Definición 0.5.38 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$. Un *coproducto* en $\mathscr{C}$ para $\{A_i\}_{i\in I}$ es un objeto C en $\mathscr{C}$ junto con una familia $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} C\}_{i\in I}$ de morfismos en $\mathscr{C}$ tales que satisfacen la siguiente propiedad universal: para cualesquiera $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\{A_i \xrightarrow{\beta_i} B\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$, existe un único morfismo $C \xrightarrow{\beta} B$ en $\mathscr{C}$ tal que $\beta\mu_i = \beta_i$ para todo $i \in I$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dl, "\mu_i"'] \arrow[dr, "\beta_i"] & \\ C \arrow[rr, dotted, "\exists!\ \beta"'] & & B \end{tikzcd} \qquad \forall\ i \in I.$$

Observación 0.5.39 Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$, $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} C\}_{i\in I}$ un coproducto en $\mathscr{C}$ para $\{A_i\}_{i\in I}$.

(1) Si $\{A_i \xrightarrow{\mu'_i} C'\}_{i\in I}$ y $C' \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ son otro coproducto en $\mathscr{C}$ para $\{A_i\}_{i\in I}$, entonces existe $\theta : C' \xrightarrow{\sim} C$ en $\mathscr{C}$ tal que $\theta\mu'_i = \mu_i$ para todo $i \in I$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[rr, dotted, "\theta", "\sim"'] & & C \\ & A_i \arrow[ul, "\mu'_i"] \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \forall\ i \in I.$$

En efecto: Por la propiedad universal del coproducto, existen $C' \xrightarrow{\theta} C$ y $C \xrightarrow{\nu} C'$ tales que el siguiente diagrama en conmuta

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "\theta"'] & C \arrow[r, "\nu"'] & C' \\ & A_i \arrow[ul, "\mu'_i"] \arrow[u, "\mu_i"] \arrow[ur, "\mu'_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \forall\ i \in I.$$

Luego, para todo $i \in I$, se tienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[rr, "\nu\theta"] & & C' \\ & A_i \arrow[ul, "\mu_i'"] \arrow[ur, "\mu_i'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\theta\nu"] & & C. \\ & A_i \arrow[ul, "\mu_i"] \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd}$$

De la unicidad en la propiedad universal del coproducto se sigue que $\nu\theta = 1_{C'}$ y $\theta\nu = 1_C$.

(2) En vista de (1), y en caso de que exista, denotaremos por $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} \coprod_{i\in I} A_i\}_{i\in I}$ a la elección de un coproducto en $\mathscr{C}$ para $\{A_i\}_{i\in I}$. En tal caso, el morfismo $A_i \xrightarrow{\mu_i} \coprod_{i\in I} A_i$ se conoce como la i-ésima inclusión natural de A_i en $\coprod_{i\in I} A_i$.

(3) Sean $\mathscr{C}$ localmente pequeña e I un conjunto. Una familia $\{A_i \xrightarrow{\nu_i} B\}_{i\in I}$ y $B \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$ si, y sólo si, para todo $H \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$, el morfismo canónico en Sets

$$\psi_H : \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(B, H) \to \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A_i, H), \beta \mapsto (\beta\nu_i)_{i\in I}$$

es un isomorfismo en Sets. En particular,

$$\psi_H : \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}\left(\coprod_{i\in I} A_i, H\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A_i, H)$$

en Sets para todo $H \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$.

(4) Si $I = \varnothing$, entonces C es un objeto inicial en $\mathscr{C}$. Recíprocamente, cualquier objeto inicial en $\mathscr{C}$ es un coproducto en $\mathscr{C}$ para una familia vacía de objetos en $\mathscr{C}$.

(5) Las nociones de producto y coproducto son duales entre sí. Es decir, si $\mathscr{C}$ es una categoría, $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de objetos en $\mathscr{C}$, P es un objeto en $\mathscr{C}$ y π es una familia $\{P \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i\in I}$ de morfismos en $\mathscr{C}$, entonces

P y π son un producto en $\mathscr{C}$ para $\{A_i\}_{i\in I} \iff P$ y π^{op} son un coproducto en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ para $\{A_i\}_{i\in I}$,

donde $\pi^{\mathrm{op}} = \{A_i \xrightarrow{\pi_i{}^{\mathrm{op}}} P\}_{i\in I}$.

Proposición 0.5.40 Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} \coprod_{i\in I} A_i\}_{i\in I}$ un coproducto en $\mathscr{C}$, $C \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ y $\{A_i \xrightarrow{\nu_i} C\}_{i\in I}$ una familia de morfismos en $\mathscr{C}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) C y $\{A_i \xrightarrow{\nu_i} C\}_{i\in I}$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$.

(b) Existe un isomorfismo $\varphi : \coprod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\sim} C$ tal que $\varphi\mu_i = \nu_i$ para todo $i \in I$.

Demostración. Si $I = \varnothing$, entonces por el inciso (1) de la Observación 0.5.16 y el inciso (4) de la Observación 0.5.39 se sigue que (a) y (b) son equivalentes, por lo que podemos suponer que $I \neq \varnothing$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que C y $\{A_i \xrightarrow{\nu_i} C\}_{i\in I}$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$. Entonces, por la propiedad universal del coproducto, se sigue que existe un único morfismo $C \xrightarrow{\psi} \coprod_{i\in I} A_i$ tal que $\psi\nu_i = \mu_i$ para cada $i \in I$. Como por hipótesis $\coprod_{i\in I} A_i$ y $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} \coprod_{i\in I} A_i\}_{i\in I}$ también son un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$, entonces existe un único morfismo $\coprod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\varphi} C$ tal que $\varphi\mu_i = \nu_i$ para cada $i \in I$. Observemos que, para cada $i \in I$,

$$\begin{aligned}(\psi\varphi)\mu_i &= \psi(\varphi\mu_i)\\ &= \psi\nu_i\\ &= \mu_i\\ &= 1_{\coprod_{i\in I} A_i}\mu_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi\psi)\nu_i &= \varphi(\psi\nu_i)\\ &= \varphi\mu_i\\ &= \nu_i\\ &= 1_C\nu_i.\end{aligned}$$

De la unicidad en la propiedad universal del coproducto, se sigue que $\psi\varphi = 1_{\coprod_{i\in I} A_i}$ y $\varphi\psi = 1_C$. Por ende, existe $\varphi : \coprod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\sim} C$ tal que $\varphi\mu_i = \nu_i$ para cada $i \in I$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos que existe $\varphi : \coprod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\sim} C$ tal que $\varphi\mu_i = \nu_i$, para cada $i \in I$. Sean $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\{A_i \xrightarrow{\beta_i} B\}_{i\in I}$ una familia de morfismos en $\mathscr{C}$. Como por hipótesis $\coprod_{i\in I} A_i$ y $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} \coprod_{i\in I} A_i\}_{i\in I}$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$, entonces existe un único morfismo $\coprod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\beta} B$ tal que $\beta\mu_i = \beta_i$ para cada $i \in I$. Observemos que $C \xrightarrow{\beta\varphi^{-1}} B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ tal que, para cada $i \in I$,

$$\begin{aligned}(\beta\varphi^{-1})\nu_i &= (\beta\varphi^{-1})(\varphi\mu_i)\\ &= \beta(\varphi^{-1}\varphi)\mu_i\\ &= \beta\mu_i\\ &= \beta_i.\end{aligned}$$

Más aún, de la unicidad de la propiedad universal del coproducto, se sigue que $\beta\varphi^{-1}$ es el único morfismo de C a B que cumple lo anterior. Por ende, C y $\{A_i \xrightarrow{\nu_i} C\}_{i\in I}$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$. ☐

Proposición 0.5.41 Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $\{\prod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i\in I}$ un producto en $\mathscr{C}, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\{C \xrightarrow{\rho_i} A_i\}_{i\in I}$ una familia de morfismos en $\mathscr{C}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) C y $\{C \xrightarrow{\rho_i} A_i\}_{i\in I}$ son un producto de $\{A_i\}_{i\in I}$.

(b) Existe un isomorfismo $\varphi : C \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} A_i$ tal que $\pi_i\varphi = \rho_i$ para todo $i \in I$.

Demostración. Haremos esta demostración utilizando el principio de dualidad. Observemos que, por el inciso (5) de la Observación 0.5.39, tenemos que $\{A_i \xrightarrow{\pi_i{}^{\mathrm{op}}} \prod_{i\in I} A_i\}_{i\in I}$ es un coproducto en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

(a)⇒(b) Supongamos que C y $\{C \xrightarrow{\rho_i} A_i\}_{i\in I}$ son un producto de $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$. Entonces, por dualidad, tenemos que C y $\{A_i \xrightarrow{\rho_i{}^{\mathrm{op}}} C\}_{i\in I}$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. Aplicando la Proposición 0.5.40, tenemos que existe un isomorfismo $\varphi^{\mathrm{op}} : \prod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\sim} C$ tal que $\varphi^{\mathrm{op}}\pi_i{}^{\mathrm{op}} = \rho_i{}^{\mathrm{op}}$ para todo $i \in I$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi^{\mathrm{op}}\pi_i{}^{\mathrm{op}} = \rho_i{}^{\mathrm{op}} \quad \forall\, i \in I &\implies D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(\varphi^{\mathrm{op}}\pi_i{}^{\mathrm{op}}) = D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(\rho_i{}^{\mathrm{op}}) \quad \forall\, i \in I\\ &\implies D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(\pi_i^{\mathrm{op}})D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(\varphi^{\mathrm{op}}) = D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(\rho_i{}^{\mathrm{op}}) \quad \forall\, i \in I\\ &\implies \pi_i\varphi = \rho_i \quad \forall\, i \in I,\end{aligned}$$

donde $\varphi : C \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} A_i$ es un isomorfismo por el inciso (1) de la Observación 0.3.2.

(b)⇒(a) Supongamos que existe un isomorfismo $\varphi : C \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} A_i$ tal que $\pi_i\varphi = \rho_i$ para todo $i \in I$. Observemos que

$$\begin{aligned} \pi_i\varphi = \rho \quad \forall\, i \in I &\implies D_{\mathscr{C}}(\pi_i\varphi) = D_{\mathscr{C}}(\rho_i) \quad \forall\, i \in I \\ &\implies D_{\mathscr{C}}(\varphi)D_{\mathscr{C}}(\pi_i) = D_{\mathscr{C}}(\rho_i) \quad i \in I \\ &\implies \varphi^{\mathrm{op}}{\pi_i}^{\mathrm{op}} = {\rho_i}^{\mathrm{op}} \quad \forall\, i \in I, \end{aligned}$$

donde $\varphi^{\mathrm{op}} : \prod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\sim} C$ es un isomorfismo por el inciso (1) de la Observación 0.3.2. Aplicando la Proposición 0.5.40, tenemos que C y $\{A_i \xrightarrow{{\rho_i}^{\mathrm{op}}} C\}_{i\in I}$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. Por el inciso (5) de la Observación 0.5.39, se sigue que C y $\{C \xrightarrow{\rho_i} A_i\}_{i\in I}$ son un producto de $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$. □

Definición 0.5.42 Sean $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña y $A = \coprod_{j\in J} A_j$, $B = \prod_{i\in I} B_i$ en $\mathscr{C}$, con I y J conjuntos. Denotaremos por $\mathrm{Mat}_{I\times J}(A, B)$ al conjunto de matrices α, de orden $I \times J$, con entradas $[\alpha]_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j, B_i)$. Para $\alpha, \beta \in \mathrm{Mat}_{I\times J}(A, B)$, definimos

$$\alpha = \beta \iff [\alpha]_{i,j} = [\beta]_{i,j} \quad \forall\, (i, j) \in I \times J.$$

Proposición 0.5.43 Sean $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña y $A = \coprod_{j\in J} A_j$, $B = \prod_{i\in I} B_i$ en $\mathscr{C}$, con I y J conjuntos. Entonces, la correspondencia

$$\varphi = \varphi_{B,A} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \mathrm{Mat}_{I\times J}(A, B),$$

dada por $[\varphi(f)]_{i,j} := \pi_i^B f \mu_j^A$ para todo $(i, j) \in I \times J$, es un isomorfismo en Sets.

Demostración. Primero, veamos que φ es inyectiva. Sean $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ tales que $\varphi(f) = \varphi(g)$. Para cada $i \in I$, tenemos que, para todo $j \in J$,

$$\begin{aligned} (\pi_i^B f)\mu_j^A &= [\varphi(f)]_{i,j} \\ &= [\varphi(g)]_{i,j} \\ &= (\pi_i^B g)\mu_j^A. \end{aligned}$$

Luego, por la propiedad universal del coproducto, tenemos que

$$\pi_i^B f = \pi_i^B g \quad \forall\, i \in I;$$

de la unicidad en la propiedad universal del producto, se sigue que $f = g$.

Ahora, veamos que φ es suprayectiva. Sea $\alpha \in \mathrm{Mat}_{I\times J}(A, B)$. Para cada $j \in J$ fijo, se tiene la familia de morfismos $\{A_j \xrightarrow{[\alpha]_{i,j}} B_i\}_{i\in I}$. Luego, por la propiedad universal del producto, para cada $j \in J$, existe un morfismo $A_j \xrightarrow{f_j} B$ en $\mathscr{C}$ tal que $\pi_i^B f_j = [\alpha]_{i,j}$ para todo $i \in I$. Además, por la propiedad universal del coproducto, existe un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$ tal que $f\mu_j^A = f_j$ para todo $i \in I$. Diagramáticamente, tenemos que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "\pi_i^B"] \\ A_j \arrow[u, "\mu_j^A"] \arrow[ur, "f_j"'] \arrow[r, "{[\alpha]_{i,j}}"'] & B_i \end{tikzcd} \qquad \forall\, (i, j) \in I \times J.$$

Por lo tanto, $[\varphi(f)]_{i,j} = \pi_i^B f \mu_j^A = [\alpha]_{i,j}$ para todo $(i,j) \in I \times J$, por lo que $\varphi(f) = \alpha$. $\square$

Definición 0.5.44 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Decimos que $\mathscr{C}$ es una *categoría con coproductos finitos* si para cualquier familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos en $\mathscr{C}$, con I finito, existe el coproducto correspondiente.

Definición 0.5.45 Sea $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña con productos y coproductos finitos. Para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, se definen los morfismos:

(a) Diagonal $\Delta_A : A \to A \prod A$, con $\varphi(\Delta_A) := \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix}$;

(b) Codiagonal $\nabla_A : A \coprod A \to A$, con $\varphi(\nabla_A) := \begin{pmatrix} 1_A & 1_A \end{pmatrix}$.

0.6. Transformaciones naturales

Definición 0.6.1 Sean $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores. Un *morfismo de funtores* o *transformación natural* $\eta : F \to G$ es una familia de morfismos $\eta := \{F(C) \xrightarrow{\eta_C} G(C)\}_{C\in\mathrm{Obj}(\mathscr{C})}$ en $\mathscr{D}$ tal que, para todo morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathscr{C}$, se tiene que $G(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(f)$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y).
\end{tikzcd}$$

La transformación natural $\eta : F \to G$ se suele denotar también como sigue

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dd, "\eta"] \arrow[dr, bend left] & \\
\mathscr{C} \arrow[ur, bend left, no head] \arrow[dr, bend right, no head] & & \mathscr{D}. \\
 & G \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Denotaremos por $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ a la clase de todos los funtores[3] de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$. Para $F, G \in [\mathscr{C}, \mathscr{D}]$, se denota por $\mathrm{Nat}_{[\mathscr{C},\mathscr{D}]}(F, G)$ a la clase de las transformaciones naturales de F en G.

Observación 0.6.2 Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías, $F, G, H \in [\mathscr{C}, \mathscr{D}]$, $\eta \in \mathrm{Nat}_{[\mathscr{C},\mathscr{D}]}(F, G)$ y $\rho \in \mathrm{Nat}_{[\mathscr{C},\mathscr{D}]}(G, H)$.

(1) La familia de morfismos $1_F : F \to F$, dada por

$$(1_F)_C := 1_{F(C)} \;\; \forall\, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}),$$

es una transformación natural.

(2) Si definimos la composición $\rho\eta : F \to H$ como

$$(\rho\eta)_C := \rho_C \circ \eta_C \;\; \forall\, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}),$$

entonces la composición de transformaciones naturales $\rho\eta$ es una transformación natural. Más aún, dado que por definición la composición de morfismos en una categoría es asociativa, se sigue que la composición de transformaciones naturales también lo es.

[3] Recordamos que, al utilizar la palabra *funtor*, suponemos que se trata de un funtor covariante, a menos que se especifique lo contrario explícitamente.

(3) Podemos considerar a la categoría de funtores de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$, denotada por $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$, donde $\mathrm{Obj}(\mathscr{D}^{\mathscr{C}})$ es la clase de todos los funtores de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$, $\mathrm{Mor}(\mathscr{D}^{\mathscr{C}})$ es la clase de todas las transformaciones naturales entre funtores de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$, la composición de transformaciones naturales se define como en (2) y las identidades, como en (1). En particular, del inciso (3) de la Observación 0.4.2 se sigue que $\mathscr{D}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ es la categoría de funtores contravariantes de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$.

(4) Supongamos que $F(C) \xrightarrow{\eta_C} G(C)$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}$, para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Entonces la familia de morfismos $\eta^{-1} : G \to F$, dada por

$$(\eta^{-1})_C := \eta_C^{-1} \ \ \forall\, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}),$$

es una transformación natural. Más aún, $\eta^{-1}\eta = 1_F$ y $\eta\eta^{-1} = 1_G$, por lo que $\eta : F \xrightarrow{\sim} G$ y $\eta^{-1} : G \xrightarrow{\sim} F$ son isomorfismos en $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$. Por ende, a las transformaciones naturales de este tipo se les conoce como *isomorfismos naturales*.

Equivalencia de categorías

Dado que, en general, las categorías están compuestas de clases de objetos y de morfismos, la relación de isomorfismo entre categorías suele ser demasiado restrictiva, pues exige una correspondencia estricta entre las clases de objetos de ambas categorías. Los isomorfismos naturales nos ayudan a definir otra relación de equivalencia entre categorías menos restrictiva, que permite a ambas categorías tener un número arbitrario de “copias isomorfas” de un mismo objeto, llamada equivalencia de categorías. La idea intuitiva de esta noción es que, si dos categorías son equivalentes, una de ellas puede ser “deformada” en la otra añadiendo o removiendo la cantidad de “copias isomorfas de objetos” necesarias para hacer que las categorías sean isomorfas, en analogía con la equivalencia homotópica de espacios topológicos.

Definición 0.6.3 Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías.

(a) Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una *equivalencia de categorías* si existe un funtor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que $GF \simeq 1_{\mathscr{C}}$ y $FG \simeq 1_{\mathscr{D}}$. En tal caso, decimos que las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son *equivalentes*, y lo denotamos por $\mathscr{C} \cong \mathscr{D}$.

(b) Un funtor contravariante $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una *dualidad de categorías* si existe un funtor contravariante $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que $GF \simeq 1_{\mathscr{C}}$ y $FG \simeq 1_{\mathscr{D}}$. En tal caso, decimos que las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son *duales* una de la otra.

Ejemplo 0.6.4 Para cualquier categoría $\mathscr{C}$, el funtor de dualidad $D_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ es una dualidad de categorías, con los isomorfismos naturales dados por las transformaciones naturales identidad. Por esta razón, la categoría opuesta $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ de $\mathscr{C}$ también se conoce como la *categoría dual* de $\mathscr{C}$.

A continuación, veremos una caracterización útil de las equivalencias de categorías.

Proposición 0.6.5 Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Entonces, F es una equivalencia de categorías si, y sólo si, F es fiel, pleno y denso.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que F es una equivalencia. Entonces, por definición, existe $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que $FG \simeq 1_{\mathscr{D}}$ y $GF \simeq 1_{\mathscr{C}}$. Por ende, existen transformaciones naturales $\eta : GF \to 1_{\mathscr{C}}, \rho : FG \to 1_{\mathscr{D}}$ dadas por las familias de isomorfismos $\eta := \{\eta_C : GF(C) \xrightarrow{\sim} 1_{\mathscr{C}}(C)\}_{C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})}$ y $\rho = \{\rho_D : FG(D) \xrightarrow{\sim} 1_{\mathscr{D}}(D)\}_{D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})}$ tales que para todo $C \xrightarrow{\alpha} C' \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ y $D \xrightarrow{\beta} D' \in \mathrm{Mor}(\mathscr{D})$ tenemos que $(1_{\mathscr{C}}(\alpha))\eta_C = \eta_{C'}(GF(\alpha))$ y $(1_{\mathscr{D}}(\beta))\rho_D = \rho_{D'}(FG(\beta))$.

Sean $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$. Supongamos que existen $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ tales que $F(f) = F(g)$. Entonces, $GF(f) = GF(g)$. Observemos que

$$\begin{aligned} f\eta_X &= (1_{\mathscr{C}}(f))\eta_X \\ &= \eta_Y(GF(f)) \\ &= \eta_Y(GF(g)) \\ &= (1_{\mathscr{C}}(g))\eta_X \\ &= g\eta_X. \end{aligned}$$

Por ende, $f\eta_X\eta_X^{-1} = g\eta_X\eta_X^{-1}$, lo que implica que $f = g$. Por lo tanto, F es fiel. Más aún, por la simetría de la definición de equivalencia se sigue que G es fiel.

Sea $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y))$. Entonces $G(h) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(GF(X), GF(Y))$, por lo que $\gamma := \eta_Y(G(h))\eta_X^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$. Observemos que $(1_{\mathscr{C}}(\gamma))\eta_X = \eta_Y(GF(\gamma))$ implica que $(1_{\mathscr{C}}(\gamma)) = \eta_Y(GF(\gamma))\eta_X^{-1}$. Por ende,

$$\eta_Y(G(h))\eta_X^{-1} = \eta_Y(GF(\gamma))\eta_X^{-1}.$$

Aplicando η_Y^{-1} por la izquierda y η_X por la derecha a la ecuación anterior, obtenemos

$$G(h) = GF(\gamma).$$

Como G es fiel, entonces $h = F(\gamma)$; es decir, existe $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ tal que $F(\gamma) = h$. Por ende, F es pleno.

Por último, observemos que $\rho_Z : FG(Z) \xrightarrow{\sim} 1_{\mathscr{D}}(Z)$, por lo que $F(G(Z)) \simeq Z$. Dado que $G(Z) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, se sigue que F es denso.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que F es fiel, pleno y denso. Sea $D \xrightarrow{\beta} D' \in \mathrm{Mor}(\mathscr{D})$. Entonces, como F es denso, existen $C, C' \in \mathscr{C}$ tales que $F(C) \simeq D$ y $F(C') \simeq D'$. Llamemos a estos isomorfismos φ_C^D y $\varphi_{C'}^{D'}$, respectivamente. Entonces, $(\varphi_{C'}^{D'})^{-1}\beta\varphi_C^D \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(C), F(C'))$. Como F es pleno, existe un morfismo $C \xrightarrow{\alpha} C'$ en $\mathscr{C}$ tal que $F(\alpha) = (\varphi_{C'}^{D'})^{-1}\beta\varphi_C^D$. Más aún, como F es fiel, dicha $\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ es única. Por lo tanto, existe una correspondencia biunívoca entre los morfismos de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$.

Siguiendo la discusión anterior, sea $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ dado por $G(D \xrightarrow{\beta} D') = C \xrightarrow{\alpha} C'$, es decir, $G(D \xrightarrow{\beta} D')$ es el único morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $F(G(\beta)) = (\varphi_{C'}^{D'})^{-1}\beta\varphi_C^D$. Veamos que G es un funtor. En efecto, si $D' = D$ y $\beta = 1_D$, entonces $(\varphi_{C'}^{D'})^{-1}\beta\varphi_C^D = (\varphi_C^D)^{-1}1_D\varphi_C^D = (\varphi_C^D)^{-1}\varphi_C^D = 1_{F(C)}$ y, como $F1_C = 1_{F(C)}$ porque F es un funtor, se sigue que $G(1_D) = 1_C = 1_{G(D)}$.

Ahora, sean $D \xrightarrow{\beta_1} D', D' \xrightarrow{\beta_2} D''$ morfismos en $\mathscr{D}$. Entonces, existen $C \xrightarrow{\alpha_1} C', C' \xrightarrow{\alpha_2} C''$ en $\mathscr{C}$ tales que $G(D \xrightarrow{\beta_1} D') = C \xrightarrow{\alpha_1} C'$ y $G(D' \xrightarrow{\beta_2} D'') = C' \xrightarrow{\alpha_2} C''$, es decir, que cumplen las igualdades $F(\alpha_1) = (\varphi_{C'}^{D'})^{-1}\beta_1\varphi_C^D$ y $F(\alpha_2) = (\varphi_{C''}^{D''})^{-1}\beta_2\varphi_{C'}^{D'}$. Observemos que

$$\begin{aligned} (\varphi_{C''}^{D''})^{-1}\beta_2\beta_1\varphi_C^D &= \left((\varphi_{C''}^{D''})^{-1}\beta_2\varphi_{C'}^{D'}\right)\left((\varphi_{C'}^{D'})^{-1}\beta_1\varphi_C^D\right) \\ &= F(\alpha_2)F(\alpha_1) \\ &= F(\alpha_2\alpha_1). && \text{(pues } F \text{ es un funtor)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $G(\beta_2\beta_1) = \alpha_2\alpha_1 = G(\beta_2)G(\beta_1)$, de donde concluimos que G es un funtor.

Notemos que, como $\varphi_C^D : F(C) \xrightarrow{\sim} D$ y $G(C) = D$, entonces $\varphi_C^D : FG(B) \xrightarrow{\sim} D$. Por lo tanto, definiendo $\rho_D := \varphi_C^D$ para cada $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$, tenemos una familia de isomorfismos $\{\rho_D : FG(D) \xrightarrow{\sim}$

$1_{\mathscr{D}}(D)\}_{D\in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})}$. Por construcción de G, para todo $D \xrightarrow{\beta} D'$ se tiene que $F(G(\beta)) = \rho_{D'}^{-1}\beta\rho_D$. Así, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} FG(D) \arrow[r, "\rho_D"] \arrow[d, "FG(\beta)"'] & D \arrow[d, "\beta"] \\ FG(D') \arrow[r, "\rho_{D'}"'] & D'. \end{tikzcd}$$

Entonces, ρ es una transformación natural tal que ρ_D es un isomorfismo para cada $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$. Por ende, tenemos que $\rho : FG \to 1_{\mathscr{D}}$ es un isomorfismo natural, por lo que $FG \simeq 1_{\mathscr{D}}$ en $\mathscr{D}^{\mathscr{D}}$.

Ahora, como $F(C) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ para cada $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, tenemos un isomorfismo $\rho_{F(C)} : FG(F(C)) \xrightarrow{\sim} F(C)$ en $\mathscr{D}$. Como F es un funtor fiel y pleno, existe un único $GF(C) \xrightarrow{\eta_C} C$ tal que $F(\eta_C) = \rho_{F(C)}$. Definimos $\eta := \{GF(C) \xrightarrow{\eta_C} C\}_{C\in\mathrm{Obj}(\mathscr{C})}$. Veamos que $\eta : GF \to 1_{\mathscr{C}}$ es una transformación natural. Sea $C \xrightarrow{\alpha} C'$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Entonces, $F(C) \xrightarrow{F(\alpha)} F(C')$ es un morfismo en $\mathscr{D}$ y por ser ρ una transformación natural, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} FG(F(C)) \arrow[r, "\rho_{F(C)}"] \arrow[d, "FG(F(\alpha))"'] & F(C) \arrow[d, "F(\alpha)"] \\ FG(F(C')) \arrow[r, "\rho_{F(C')}"'] & F(C'). \end{tikzcd}$$

Del diagrama anterior se sigue que $F(\alpha)\rho_{F(C)} = \rho_{F(C')}FG(F(\alpha))$. Por ende, tenemos que

$$\begin{aligned} F(\alpha\eta_C) &= F(\alpha)F(\eta_C) \\ &= F(\alpha)\rho_{F(C)} \\ &= \rho_{F(C')}FG(F(\alpha)) \\ &= F(\eta_{C'})FG(F(\alpha)) \\ &= F(\eta_{C'}GF(\alpha)). \end{aligned}$$

Luego, como F es un funtor fiel, se sigue que $\alpha\eta_C = \eta_{C'}GF(\alpha)$. Por ende, $\eta : GF \to 1_{\mathscr{C}}$ es una transformación natural. Más aún, como $\rho_{F(C)}$ es un isomorfismo, tenemos un morfismo $F(C) \xrightarrow{\rho_{F(C)}^{-1}} F(GF(C))$ y, por ser F pleno, existe un morfismo $C \xrightarrow{\mu_C} GF(C)$ tal que $F(\mu_C) = \rho_{F(C)}^{-1}$. Notemos que

$$\begin{aligned} F(\eta_C\mu_C) = F(\eta_C)F(\mu_C) = \rho_{F(C)}\rho_{F(C)}^{-1} = 1_{F(C)} = F(1_C); \\ F(\mu_C\eta_C) = F(\mu_C)F(\eta_C) = \rho_{F(C)}^{-1}\rho_{F(C)} = 1_{FG(F(C))} = F(1_{GF(C)}). \end{aligned}$$

Dado que F es un funtor fiel, se tiene que $\eta_C\mu_C = 1_C$ y $\mu_C\eta_C = 1_{GF(C)}$, por lo que η_C es un isomorfismo para cada $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Por ende, η es un isomorfismo natural, por lo que $GF \simeq 1_{\mathscr{C}}$ en $\mathscr{C}^{\mathscr{C}}$. $\square$

Proposición 0.6.6 Sean $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña y $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Entonces, $h : A \simeq B$ en $\mathscr{C}$ si, y sólo si, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, h) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, B)$ en $\mathrm{Sets}^{\mathscr{C}}$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que $A \xrightarrow{h} B$ es un isomorfismo en $\mathscr{C}$. Dado que los funtores preservan isomorfismos, trivialmente se verifica que el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$ conmuta para cualquier $X \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,h)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f,A)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, B) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f,B)"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,h)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, B), \end{tikzcd}$$

por lo que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,H) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,B)$ es un isomorfismo natural.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,h)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,B)$ es un isomorfismo natural en $\mathrm{Sets}^{\mathscr{C}}$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en Sets

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,h)", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(1_B,A)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,B) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(1_B,B)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A) \arrow[r, "\sim", "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,h)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,B).
\end{tikzcd}$$

Dado que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,h)$ es un isomorfismo en Sets y, por tanto, una biyección, existe $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,h)(h') = hh' = 1_B$. Por el inciso (4) de la Observación 0.2.2, tenemos que h es un epimorfismo en $\mathscr{C}$, lo que implica que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(h,A) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A)$ es un epimorfismo en Sets, por lo que existe $h'' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(h,A)(h'') = h''h = 1_A$. Luego, del inciso (1) de la Observación 0.2.2, se sigue que $A \xrightarrow{h} B$ es un isomorfismo en $\mathscr{C}$. $\square$

El Lema de Yoneda

Teorema 0.6.7 (Lema de Yoneda) Sean $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña y $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}, G : \mathscr{C} \to \mathrm{Sets}$ funtores. Entonces, para cualquier $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, tenemos las biyecciones

$$\begin{aligned} \upsilon : \mathrm{Nat}_{[\mathscr{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Sets}]}(\mathrm{Hom}(-,A),F) &\to F(A), \\ \tau &\mapsto \tau_A(1_A); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y : \mathrm{Nat}_{[\mathscr{C},\mathrm{Sets}]}(\mathrm{Hom}(A,-),G) &\to G(A), \\ \eta &\mapsto \eta_A(1_A); \end{aligned}$$

donde $\mathrm{Hom}(-,-) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \mathrm{Sets}$ es el bifuntor Hom.

Demostración. Sea $\eta : \mathrm{Hom}(-,A) \to F$ una transformación natural. Dado que $\eta_A : \mathrm{Hom}(A,A) \to F(A)$ es un morfismo en Sets, tenemos que $\upsilon(\eta) = \eta_A(1_A) \in F(A)$, por lo que υ está bien definida.

Por definición de transformación natural, para cada $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})$ y $f^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(A,B)$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(f^{\mathrm{op}},A)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f^{\mathrm{op}})"] \\
\mathrm{Hom}(B,A) \arrow[r, "\eta_B"'] & F(B)
\end{tikzcd}$$

en Sets, de donde se sigue que

$$\begin{aligned} F(f^{\mathrm{op}})\eta_A(1_A) &= \eta_B \mathrm{Hom}(f^{\mathrm{op}},A)(1_A) \\ &= \eta_B(f^{\mathrm{op}}1_A) \\ &= \eta_B f^{\mathrm{op}}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\eta_B f^{\mathrm{op}} = F(f^{\mathrm{op}})\eta_A(1_A). \tag{0.6.1}$$

Análogamente, si $\mu : \mathrm{Hom}(-, A) \to F$ es otra transformación natural, tenemos que $\mu_B f^{\mathrm{op}} = F(f^{\mathrm{op}})\mu_A(1_A)$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
\upsilon(\eta) = \upsilon(\mu) &\implies \eta_A(1_A) = \mu_A(1_A) \\
&\implies F(f^{\mathrm{op}})\eta_A(1_A) = F(f^{\mathrm{op}})\mu_A(1_A) \quad \forall\ f^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) \\
&\implies \eta_B f^{\mathrm{op}} = \mu_B f^{\mathrm{op}} \quad \forall\ f^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) \\
&\implies \eta_B g = \mu_B g \quad \forall\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A) \\
&\implies \eta_B = \mu_B \quad \forall\ B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}) \\
&\implies \eta = \mu,
\end{aligned}$$

por lo que υ es inyectiva.

Ahora, sea $x \in F(A)$. Para todo $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, definimos una función

$$\eta_B : \mathrm{Hom}(B, A) \to F(B),\ \ g \mapsto (F(g))(x),$$

la cual es un morfismo en Sets. Veamos que $\eta := \{\mathrm{Hom}(-, A)(B) \xrightarrow{\eta_B} F(B)\}_{B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})}$ es una transformación natural, es decir que, para cualquier morfismo $B \xrightarrow{h^{\mathrm{op}}} C$ en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, el diagrama en Sets

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(B, A) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(h^{\mathrm{op}}, A)"'] & F(B) \arrow[d, "F(h^{\mathrm{op}})"] \\
\mathrm{Hom}(C, A) \arrow[r, "\eta_C"'] & F(C)
\end{tikzcd} \tag{0.6.2}$$

conmuta. En efecto, sea $B \xrightarrow{h^{\mathrm{op}}} C \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})$. Entonces, para todo $f \in \mathrm{Hom}(B, A)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(F(h^{\mathrm{op}})\eta_B)(f) &= F(h^{\mathrm{op}})(\eta_B(f)) \\
&= F(h^{\mathrm{op}})(F(f)(x)) \\
&= (F(h^{\mathrm{op}})F(f))(x) \\
&= (F(h^{\mathrm{op}} f))(x) \qquad (F \text{ es un funtor}) \\
&= \eta_C(h^{\mathrm{op}} f) \\
&= (\eta_C \mathrm{Hom}(h^{\mathrm{op}}, A))(f),
\end{aligned}$$

por lo que el diagrama (0.6.2) conmuta. Finalmente, dado que

$$\begin{aligned}
\upsilon(\eta) &= \eta_A(1_A) \\
&= (F(1_A))(x) \\
&= 1_{F(A)}(x) \\
&= x,
\end{aligned}$$

se sigue que υ es suprayectiva.

Por otro lado, sea $\tau : \mathrm{Hom}(A, -) \to F$ una transformación natural. Dado que $\tau_A : \mathrm{Hom}(A, A) \to F(A)$ es un morfismo en Sets, tenemos que $y(\tau) = \tau_A(1_A) \in F(A)$, por lo que y está bien definida.

Por definición de transformación natural, para cada $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A,A) & \xrightarrow{\tau_A} & F(A) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(A,f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ \mathrm{Hom}(A,B) & \xrightarrow[\tau_B]{} & F(B) \end{array}$$

en Sets, de donde se sigue que

$$\begin{aligned} F(f)\tau_A(1_A) &= \tau_B \mathrm{Hom}(A,f)(1_A) \\ &= \tau_B(f 1_A) \\ &= \tau_B f, \end{aligned}$$

es decir,

$$\tau_B f = F(f)\tau_A(1_A). \tag{0.6.3}$$

Análogamente, si $\sigma : \mathrm{Hom}(A,-) \to F$ es otra transformación natural, entonces $\sigma_B f = F(f)\sigma_A(1_A)$. Luego,

$$\begin{aligned} y(\tau) = y(\sigma) &\implies \tau_A(1_A) = \sigma_A(1_A) \\ &\implies F(f)\tau_A(1_A) = F(f)\sigma_A(1_A) \qquad \forall\, f \in \mathrm{Hom}(A,B) \\ &\implies \tau_B f = \sigma_B f \qquad \forall\, f \in \mathrm{Hom}(A,B) \\ &\implies \tau_B = \sigma_B \qquad \forall\, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}) \\ &\implies \tau = \sigma. \end{aligned}$$

Ahora, sea $x \in F(A)$. Para todo $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, definimos una función

$$\tau_B : \mathrm{Hom}(A,B) \to F(B),\ f \mapsto (F(f))(x),$$

la cual es un morfismo en Sets. Veamos que $\tau := \{\mathrm{Hom}(A,-)(B) \xrightarrow{\tau_B} F(B)\}_{B\in\mathrm{Obj}(\mathscr{C})}$ es una transformación natural, es decir que, para cualquier morfismo $B \xrightarrow{g} C$ en $\mathscr{C}$, el diagrama en Sets

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A,B) & \xrightarrow{\tau_B} & F(B) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(A,g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(g)} \\ \mathrm{Hom}(A,C) & \xrightarrow[\tau_C]{} & F(C), \end{array} \tag{0.6.4}$$

conmuta. En efecto, sea $B \xrightarrow{g} C \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$. Entonces, para todo $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$, tenemos que

$$\begin{aligned} (F(g)\tau_B)(f) &= F(g)(\tau_B(f)) \\ &= F(g)(F(f)(x)) \\ &= (F(gf))(x) \\ &= \tau_C(gf) \\ &= (\tau_C \mathrm{Hom}(A,g))(f), \end{aligned}$$

por lo que el diagrama (0.6.4) conmuta. Finalmente, vemos que

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \tau_A(1_A) \\ &= 1_{F(A)}(x) \\ &= x. \end{aligned}$$

□

Observación 0.6.8 En la demostración del Teorema 0.6.7 (Lema de Yoneda), la ecuación (0.6.3) nos dice que la acción de τ_B sobre un elemento $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ arbitrario está totalmente determinada por el elemento $\tau_A(1_A) \in F(A)$. Conversamente, el elemento $\tau_A(1_A) \in F(A)$ genera una transformación natural de $\mathrm{Hom}(-,A)$ a F.

Capítulo 1

Categorías aditivas

Las categorías aditivas son el punto de partida común de las estructuras básicas más importantes en la actualidad para el estudio del álgebra homológica: las categorías abelianas, las categorías exactas y las categorías trianguladas. Para llegar a la construcción de categoría aditiva, comenzaremos estudiando las categorías con objeto cero y luego dotaremos a las clases de morfismos entre objetos de estas categorías con algunas estructuras algebraicas básicas.

1.1. Categorías con objeto cero

Definición 1.1.1 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Decimos que $\mathscr{C}$ es una *categoría con objeto cero* si existe un objeto cero 0 en $\mathscr{C}$. En tal caso, un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathscr{C}$ es un *morfismo cero* si se factoriza a través del objeto cero; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted] & & Y. \\ & 0 \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Observación 1.1.2 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $0 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ un objeto cero en $\mathscr{C}$.

(1) Dado que, por el inciso (2) de la Observación 0.5.18, sabemos que la noción de objeto cero es auto dual, se sigue que el universo de las categorías con objeto cero es dualizante.

(2) Para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, existe un único morfismo cero en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$, el cual se denota por $0_{X,Y}$ o bien por 0.

En efecto: Sean $0'$ otro objeto cero en $\mathscr{C}$ y el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} & 0' \arrow[dr, "\beta'"] & \\ X \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y. \\ & 0 \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos que dicho diagrama conmuta. Dado que $|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0', 0)| = 1 = |\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0', Y)|$, existe $0' \xrightarrow{h} 0$ en $\mathscr{C}$ tal que $\beta h = \beta'$. Análogamente, se tiene que $h\alpha' = \alpha$, pues $|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, 0) = 1$. Por lo tanto, $\beta'\alpha' = \beta h \alpha' = \beta\alpha$.

(3) Sea $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ tal que $1_A = 0_{A,A}$. Entonces A es un objeto cero en $\mathscr{C}$.

En efecto: Puesto que $0 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es un objeto cero en $\mathscr{C}$, tenemos que $|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,0)| = |\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0,A)| = 1 = |\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0,0)|$. Sean α y β los únicos morfismos en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,0)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0,A)$, respectivamente. Por hipótesis, tenemos que $\beta\alpha = 0_{A,A} = 1_A$. Por otro lado, como $\alpha\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0,0)$, se sigue que $\beta\alpha = 1_0$. Por ende, $\alpha : A \xrightarrow{\sim} 0$ y $\beta : 0 \xrightarrow{\sim} A$. Observemos entonces que, para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, tenemos que las funciones $\overline{\alpha} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,0)$ y $\overline{\beta} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0,X)$ dadas por $\overline{\alpha}(f) = \alpha f, \overline{\beta}(g) = g\beta$ son biyectivas. Por lo tanto, $|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A)| = 1 = |\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X)|$ para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, de donde concluimos que A es un objeto cero en $\mathscr{C}$.

Lema 1.1.3 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "v_1"'] & A_2 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

un diagrama en $\mathscr{C}$. Entonces, el diagrama anterior es un producto fibrado si, y sólo si, $P = A_1 \prod A_2$ con proyecciones naturales v_1, v_2.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "v_1"'] & A_2 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Sean $Q \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $Q \xrightarrow{\alpha_1} A_1, Q \xrightarrow{\alpha_2} A_2 \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[drr, bend left, "\alpha_2"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_i"'] & & \\ & P \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "v_1"'] & A_2 \arrow[d] \\ & A_1 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del producto fibrado, existe un único morfismo $Q \xrightarrow{\gamma} P$ tal que $v_i\gamma = \alpha_i$ para $i \in \{1,2\}$. Por lo tanto, P y $\{\alpha_i : P \to A_i\}_{i\in\{1,2\}}$ son un producto en $\mathscr{C}$ para $\{A_1, A_2\}$, es decir, $P = A_1 \prod A_2$ y v_1, v_2 son proyecciones naturales.

($\Leftarrow$) Sea $P = A_1 \prod A_2$ con proyecciones naturales v_1, v_2. Observemos que el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$ es conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "v_1"'] & A_2 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{1.1.1}$$

Por la propiedad universal del producto, tenemos que para todo $P' \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $P' \xrightarrow{\beta_1} A_1, P' \xrightarrow{\beta_2} A_2$ existe un único morfismo $P' \xrightarrow{\beta} P$ tal que $v_1\beta = \beta_1$ y $v_2\beta = \beta_2$. En particular, β es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[rrd, bend left, "\beta_2"] \arrow[rdd, bend right, "\beta_1"'] \arrow[rd, dotted, "\beta"] & & \\
& P \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "v_1"'] & A_2 \arrow[d] \\
& A_1 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, concluimos que el diagrama conmutativo (1.1.1) es un producto fibrado en $\mathscr{C}$. $\square$

Dualmente, se tiene el siguiente Lema.

Lema 1.1.4 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[d, "u_2"] \\
A_1 \arrow[r, "u_1"'] & C
\end{tikzcd}$$

un diagrama en $\mathscr{C}$. Entonces el diagrama anterior es una suma fibrada si, y sólo si, $C = A_1 \coprod C_2$ con inclusiones naturales u_1, u_2.

Demostración. Se sigue de aplicar el principio de dualidad al Lema 1.1.3, lo cual es válido por el inciso (1) de la Observación 1.1.2. $\square$

Definición 1.1.5 Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero. Para cada familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos en $\mathscr{C}$ se define la familia de morfismos $\delta^A := \left\{A_i \xrightarrow{\delta^A_{i,j}} A_j\right\}_{(i,j)\in I^2}$ en $\mathscr{C}$ dada por

$$\delta^A_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1_{A_i} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Observación 1.1.6 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$ tales que tiene un producto $\{\prod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$. Entonces, para cualquier $I \neq \varnothing$, existe una única familia de morfismos $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} \prod_{i\in I} A_i\}_{i\in I}$ tales que $\pi_i\mu_j = \delta^A_{i,j}$ para cualesquiera $i, j \in I$.

En efecto: Para cada $i \in I$, consideramos la familia $\left\{A_i \xrightarrow{\delta^A_{i,j}} A_j\right\}_{j\in I}$. Luego, por la propiedad universal del producto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, dotted, "\exists!\ \mu_i"] \arrow[rd, "\delta^A_{i,j}"'] & & \prod_{i\in I} A_i \arrow[ld, "\pi_j"] \\
& A_i &
\end{tikzcd} \qquad \forall\ j \in J.$$

Para cada $i \in I$, la igualdad $\pi_i\mu_i = 1_{A_i}$ implica que el morfismo $A_i \xrightarrow{\mu_i} \prod_{i\in I} A_i$ es un monomorfismo escindible y, en particular, un monomorfismo, el cual es conocido como la i-ésima inclusión natural de A_i en el producto $\prod_{i\in I} A_i$.

Observación 1.1.7 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$ tales que tiene un coproducto $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} \coprod_{i\in I} A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$.

(1) Para cualquier $I \neq \varnothing$, existe una única familia de morfismos $\{\coprod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$ tales que $\pi_i\mu_j = \delta^A_{i,j}$ para cualesquiera $i, j \in I$.

En efecto: Se sigue de aplicar el principio de dualidad a la Observación 1.1.6.

En tal caso, el morfismo $\coprod A_i \xrightarrow{\pi_i} A_i$ se conoce como la i-ésima proyección natural de $\coprod_{i\in I} A_i$ en A_i. Dado que $\pi_i\mu_i = 1_{A_i}$, se tiene que μ_i es un monomorfismo escindible y π_i es un epimorfismo escindible para cada $i \in I$.

(2) En general, la familia $\{\coprod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i\in I}$ obtenida en (1) no tiene por qué ser un producto de $\{A_i\}_{i\in I}$.

Proposición 1.1.8 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero, $\{M_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de objetos en $\mathscr{C}$ y M un producto o un coproducto de $\{M_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$. Si $M \simeq 0$, entonces $M_i \simeq 0$ para cada $i \in [1, n]$.

Demostración. Supongamos que $M \simeq 0$. Sean $M \xrightarrow{\pi_i} M_i$ y $M_i \xrightarrow{\mu_i} M$ para $i \in [1, n]$ las proyecciones e inclusiones naturales, respectivamente. Por el inciso (1) de la Observación 0.5.18, tenemos que $\pi_i = 0$ para cada $i \in I$. De la Observación 1.1.6, o bien, del inciso (1) de la Observación 1.1.7, se sigue que $1_{M_i} = \pi_i\mu_i = 0$ para cada $i \in I$. Finalmente, del inciso (3) de la Observación 1.1.2, concluimos que $M_i \simeq 0$ para cada $i \in [1, n]$. □

Objetos proyectivos e inyectivos

Definición 1.1.9 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Un objeto P en $\mathscr{C}$ es *proyectivo* si para todo diagrama en $\mathscr{C}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, two heads, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

se tiene que f se factoriza a través de g; esto es,

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "\exists\, f'"'] \\ X \arrow[r, two heads, "g"'] & Y. \end{tikzcd} \tag{1.1.2}$$

Denotaremos por $\mathrm{Proj}(\mathscr{C})$ a la clase de todos los objetos proyectivos en $\mathscr{C}$, siguiendo la notación preponderante derivada del término *projective* en inglés.

Lema 1.1.10 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $P \overset{\alpha}{\hookrightarrow} Q$ un monomorfismo escindible en $\mathscr{C}$, con Q proyectivo. Entonces, P es proyectivo.

Demostración. Sea $Q \xrightarrow{\beta} P$ tal que $\beta\alpha = 1_P$. Consideremos un diagrama en $\mathscr{C}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, two heads, "g"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Como $Q \in \mathrm{Proj}(\mathscr{C})$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, dotted, "\exists\ f'"'] & P \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, two heads, "g"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Veamos que el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "f'\alpha"'] \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, two heads, "g"'] & Y. \end{tikzcd}$$

conmuta. En efecto,

$$\begin{aligned} g(f'\alpha) &= (gf')\alpha \\ &= (f\beta)\alpha \\ &= f(\beta\alpha) \\ &= f1_P \\ &= f. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.1.11 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $\{P_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$ tal que existe el coproducto $\coprod_{i\in I} P_i$ en $\mathscr{C}$. Entonces,

$$\coprod_{i\in I} P_i \in \mathrm{Proj}(\mathscr{C}) \iff P_i \in \mathrm{Proj}(\mathscr{C}) \quad \forall\ i \in I.$$

Demostración. Sean $\{P_i \xrightarrow{\mu_i} \coprod_{i\in I} P_i\}_{i\in I}$ las inclusiones naturales y $\{\coprod_{i\in I} P_i \xrightarrow{\pi_i} P_i\}_{i\in I}$ las proyecciones naturales vistas en las Observaciones 0.5.39 y 1.1.7, respectivamente.

($\Rightarrow$) Sea $i \in I$. Dado que $\pi_i\mu_i = 1_{P_i}$ y $\coprod_{i\in I} P_i \in \mathrm{Proj}(\mathscr{C})$, por el Lema 1.1.10 tenemos que $P_i \in \mathrm{Proj}(\mathscr{C})$.

($\Leftarrow$) Consideremos un diagrama en $\mathscr{C}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} & \coprod_{i\in I} P_i \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, two heads, "g"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Luego, para cada $i \in I$, de $P_i \in \mathrm{Proj}(\mathscr{C})$ se sigue que

$$\begin{tikzcd} P_i \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[d, dotted, "\exists\ f_i"'] & \coprod_{i\in I} P_i \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, two heads, "g"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Ahora, considerando la familia $\{P_i \xrightarrow{f_i} X\}_{i\in I}$ y usando la propiedad universal del coproducto, tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P_i \arrow[rr, "\mu_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \coprod_{i\in I} P_i \arrow[dl, dotted, "\exists\ f'"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \forall\ i \in I.$$

Luego, como para cualquier $i \in I$ tenemos que

$$\begin{aligned}(gf')\mu_i &= g(f'\mu_i) \\ &= gf_i \\ &= f\mu_i,\end{aligned}$$

de la propiedad universal del producto se sigue que $gf' = f$. Por ende, concluimos que $\coprod_{i\in I} P_i \in \operatorname{Proj}(\mathscr{C})$. □

Definición 1.1.12 Una categoría $\mathscr{C}$ tiene *suficientes proyectivos* si para cualquier $X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ existe un epimorfismo $P \twoheadrightarrow X$, con $P \in \operatorname{Proj}(\mathscr{C})$.

Definición 1.1.13 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Un objeto Q en $\mathscr{C}$ es *inyectivo* si para todo diagrama en $\mathscr{C}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ Q & \end{tikzcd}$$

se tiene que f se factoriza a través de g; esto es,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, dotted, "\exists\ f'"] \\ Q. & \end{tikzcd} \tag{1.1.3}$$

Denotaremos por $\operatorname{Inj}(\mathscr{C})$ a la clase de todos los objetos inyectivos en $\mathscr{C}$, siguiendo la notación preponderante derivada del término *injective* en inglés.

Observación 1.1.14 Si invertimos el sentido de las flechas en el diagrama (1.1.2) y reemplazamos el epimorfismo por un monomorfismo —su noción dual—, obtenemos el diagrama (1.1.3). Haciendo el proceso análogo con el diagrama (1.1.3), se obtiene el diagrama (1.1.2). Esto muestra que las nociones de objeto proyectivo y objeto inyectivo son duales entre sí. Es decir, que si $\mathscr{C}$ es una categoría y Q es un objeto en $\mathscr{C}$, entonces

$$Q \in \operatorname{Proj}(\mathscr{C}) \iff Q \in \operatorname{Inj}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}).$$

En vista de la Observación anterior, las demostraciones de los siguientes dos resultados se siguen de aplicar el principio de dualidad al Lema 1.1.10 y la Proposición 1.1.11, respectivamente.

Lema 1.1.15 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $Q \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M$ un epimorfismo escindible en $\mathscr{C}$, con Q inyectivo. Entonces M es inyectivo.

Proposición 1.1.16 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $\{Q_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$ tal que existe el producto $\prod_{i\in I} Q_i$ en $\mathscr{C}$. Entonces,

$$\prod_{i\in I} Q_i \in \operatorname{Inj}(\mathscr{C}) \iff Q_i \in \operatorname{Inj}(\mathscr{C}) \quad \forall\ i \in I.$$

Definición 1.1.17 Una categoría $\mathscr{C}$ tiene *suficientes inyectivos* si para cualquier $X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ existe un monomorfismo $X \hookrightarrow Q$, con $Q \in \operatorname{Inj}(\mathscr{C})$.

Biproductos

Definición 1.1.18 Sean $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña con objeto cero y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$, con I un conjunto, tal que existe un coproducto $\coprod_{i\in I} A_i$ en $\mathscr{C}$. Decimos que $\coprod_{i\in I} A_i$ es un *biproducto* en $\mathscr{C}$ para $\{A_i\}_{i\in I}$ si existe un producto $\prod_{i\in I} A_i$ en $\mathscr{C}$ y el morfismo $\coprod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\delta} \prod_{i\in I} A_i$, dado por la matriz

$$[\varphi(\delta)]_{i,j} := \delta^A_{i,j} = \begin{cases} 1_{A_i} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

es un isomorfismo. Denotaremos por

$$\bigoplus_{i\in I} A_i$$

a un biproducto en $\mathscr{C}$ para $\{A_i\}_{i\in I}$, en caso de que exista.

Observación 1.1.19 Sea $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña con objeto cero. El biproducto en $\mathscr{C}$ de una familia vacía de objetos en $\mathscr{C}$, si existe, es un objeto cero en $\mathscr{C}$. Recíprocamente, cualquier objeto cero en $\mathscr{C}$ es un biproducto en $\mathscr{C}$ para una familia vacía de objetos en $\mathscr{C}$.

En efecto: Se sigue del inciso (4) de las Observaciones 0.5.35 y 0.5.39.

Ejemplo 1.1.20 En la categoría $\mathrm{Mod}(R)$, para cualquier familia finita $\{M_i\}_{i=1}^n$ de R-módulos, la suma directa finita $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ es un biproducto (finito) en $\mathrm{Mod}(R)$ para $\{M_i\}_{i=1}^n$. En particular, esto es válido para las categorías Vect_K y Ab.

Proposición 1.1.21 Para una categoría $\mathscr{C}$ localmente pequeña con objeto cero, $A = \coprod_{i\in I} A_i$ y $B = \prod_{i\in I} A_i$ en $\mathscr{C}$, con I un conjunto, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\delta : A \xrightarrow{\sim} B$ en $\mathscr{C}$.

(b) $\left\{A_i \xrightarrow{\mu_i^B} B\right\}_{i\in I}$ es un coproducto.

(c) $\left\{A \xrightarrow{\pi_i^A} A_i\right\}_{i\in I}$ es un producto.

Demostración. Podemos suponer que $I \neq \varnothing$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Por hipótesis, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta", "\sim"'] & B \arrow[d, "\pi_i^B"] \\ A_j \arrow[u, "\mu_j^A"] \arrow[r, "\delta^A_{i,j}"'] & A_i \end{tikzcd} \qquad \forall\ i, j \in I. \tag{1.1.4}$$

Ahora, para cada $j \in I$ fijo, tenemos que

$$\pi_i^B(\delta\mu_j^A) = \delta^A_{i,j} = \pi_i^B(\mu_j^B) \quad \forall\ i \in I;$$

por la propiedad universal del producto, se sigue que

$$\delta\mu_j^A = \mu_j^B \quad \forall\ j \in I.$$

Luego, como δ es un isomorfismo, de la Proposición 0.5.40 se sigue (b).

$(b) \Rightarrow (a)$ Por la Proposición 0.5.40, existe un morfismo $\lambda : A \xrightarrow{\sim} B$ en $\mathscr{C}$ tal que $\lambda\mu_i^A = \mu_i^B$ para cada $i \in I$. Observemos que, para cualesquiera $i, j \in I$, tenemos que

$$\begin{aligned}[\varphi(\delta)]_{i,j} &= \delta_{i,j}^A \\ &= \pi_i^B \mu_j^B \\ &= \pi_i^B \lambda\mu_j^A \\ &= [\varphi(\lambda)]_{i,j},\end{aligned}$$

por lo que $\varphi(\delta) = \varphi(\lambda)$. Luego, por la Proposición 0.5.43, tenemos que $\delta = \lambda$, de donde se sigue (a).

$(a) \Rightarrow (c)$ Nuevamente, por hipótesis, tenemos el diagrama conmutativo (1.1.4) en $\mathscr{C}$. Para cada $j \in I$ fijo, tenemos que

$$(\pi_i^B\delta)\mu_j^A = \delta_{i,j}^A = (\pi_i^A)\mu_j^A \quad \forall\ i \in I;$$

por la propiedad universal del coproducto, es sigue que

$$\pi_i^B\delta = \pi_i^A \quad \forall\ j \in I.$$

Luego, como δ es un isomorfismo, por la Proposición 0.5.41, concluimos que $\left\{A \xrightarrow{\pi_i^A} A_i\right\}_{i\in I}$ es un producto en $\mathscr{C}$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Supongamos que $\left\{A \xrightarrow{\pi_i^A} A_i\right\}_{i\in I}$ es un producto en $\mathscr{C}$. Por la Proposición 0.5.41, existe $\kappa : A \xrightarrow{\sim} B$ en $\mathscr{C}$ tal que $\pi_i^B\kappa = \pi_i^A$ para todo $i \in I$. Veamos que $\kappa = \delta$ para lo cual, por la Proposición 1.8.11, basta demostrar que $\varphi(\kappa) = \varphi(\delta)$. Sean $i, j \in I$, entonces

$$\begin{aligned}[\varphi(\kappa)]_{i,j} &= \pi_i^B \kappa\mu_j^A \\ &= \pi_i^A \mu_j^A \\ &= \delta_{i,j}^A \\ &= [\varphi(\delta)]_{i,j}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\delta : A \xrightarrow{\sim} B$ en $\mathscr{C}$. □

Núcleos y conúcleos

Definición 1.1.22 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Un *núcleo* de f es un morfismo $K \xrightarrow{\kappa} A$ en $\mathscr{C}$ que satisface las siguientes condiciones.

(Núc1) $f\kappa = 0$.

(Núc2) Propiedad universal del núcleo: para todo morfismo $X \xrightarrow{g} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $fg = 0$, existe un único morfismo $X \xrightarrow{g'} K$ tal que $g = \kappa g'$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dotted, "\exists!\ g'"'] \arrow[d, "g"] & \\ K \arrow[r, "\kappa"'] & A \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

Un *seudonúcleo* de f es un morfismo que cumple con las condiciones anteriores, exceptuando la unicidad en (Núc2).

Observación 1.1.23 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero $0 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $K \xrightarrow{\kappa} A$ un núcleo de $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$.

(1) $\kappa \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A))$ y es único hasta isomorfismos en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$.

En efecto: Se sigue del inciso (b) de 1.1.28 y el inciso (1) de 0.5.22.

(2) En vista de (1), y en caso de que f admita un núcleo, denotaremos por

$$\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{k_f} A$$

a la elección de uno de ellos, siguiendo la notación preponderante derivada del término *kernel* en inglés, i.e.,

$$\mathrm{Ker}(A \xrightarrow{f} B) := (\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{k_f} A).$$

(3) Por el inciso (c) de 1.1.28 y dado que $0 \to B$ es un monomorfismo, se tiene que $\mathrm{Ker}(f) \simeq f^{-1}(0)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(0, A)$.

(4) $\mathrm{Ker}(f) \simeq 0$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$ si f es un monomorfismo.

En efecto: Dado que $f\mu = 0$, se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "0_{K,0}"'] & A \arrow[r, "f"] & B. \\ & 0 \arrow[u, hook, "0_{0,A}"] \arrow[ur, "0_{0,B}"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora, como $f\mu = 0_{K,B} = f0_{K,A}$ y f es un monomorfismo, se sigue que $\kappa = 0_{K,A}$, por lo que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, hook, "\kappa=0_{K,A}"] \arrow[dr, "0_{K,0}"'] & & A \\ & 0 \arrow[ur, hook, "0_{0,A}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[rr, hook, "\kappa=0_{K,A}"] & & A. \\ & 0 \arrow[ul, "0_{0,K}"] \arrow[ur, hook, "0_{0,A}"'] & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $K \simeq 0$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$.

Lema 1.1.24 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ en $\mathscr{C}$ tales que existen $\mathrm{Ker}(\alpha)$ y $\mathrm{Ker}(\beta\alpha)$. Entonces,

(a) $\mathrm{Ker}(\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta\alpha)$.

(b) Si β es un monomorfismo, entonces $\mathrm{Ker}(\alpha) \simeq \mathrm{Ker}(\beta\alpha)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$.

Demostración. Dado que existen $\mathrm{Ker}(\alpha)$ y $\mathrm{Ker}(\beta\alpha)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[dr, hook, "k_\alpha"] & & B \arrow[dd, "\alpha"] \\ & A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta\alpha"'] & \\ \mathrm{Ker}(\beta\alpha) \arrow[ur, hook, "k_{\beta\alpha}"'] & & C. \end{tikzcd}$$

(a) Dado que

$$\begin{aligned}(\beta\alpha)k_\alpha &= \beta(\alpha k_\alpha)\\ &= \beta 0\\ &= 0,\end{aligned}$$

por la propiedad universal del núcleo se sigue que existe $\operatorname{Ker}(\alpha) \xrightarrow{t} \operatorname{Ker}(\beta\alpha)$ tal que $k_{\beta\alpha}t = k_\alpha$. Por ende, $k_\alpha \leq k_{\beta\alpha}$, por lo que $\operatorname{Ker}(\alpha) \subseteq \operatorname{Ker}(\beta\alpha)$.

(b) Supongamos que β es un monomorfismo. Entonces, de

$$\begin{aligned}\beta(\alpha k_{\beta\alpha}) &= (\beta\alpha)k_{\beta\alpha}\\ &= 0\\ &= \beta 0,\end{aligned}$$

se sigue que $\alpha k_{\beta\alpha} = 0$. Luego, por la propiedad universal del núcleo tenemos que existe $\operatorname{Ker}(\beta\alpha) \xrightarrow{r} \operatorname{Ker}(\alpha)$ tal que $k_\alpha r = k_{\beta\alpha}$. Por ende, $k_{\beta\alpha} \leq k_\alpha$ y, como $k_\alpha \leq k_{\beta\alpha}$, se sigue del inciso (2) de la Observación 0.4.14 que $k_\alpha \simeq k_{\beta\alpha}$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$.

$\square$

Proposición 1.1.25 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y consideremos el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}(\alpha_1) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
\operatorname{Ker}(\alpha_1) \arrow[r, "k_{\alpha_1}"'] & A_1 \arrow[r, "\alpha_2"'] & A,
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado derecho es un producto fibrado y γ es el morfismo inducido del producto fibrado y los morfismos $K \overset{\alpha_1}{\hookrightarrow} A_1$ y $\operatorname{Ker}(\alpha_1) \xrightarrow{0} A_2$. Entonces, $\gamma \simeq \operatorname{Ker}(\beta_2)$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, P)$.

Demostración. Veamos que γ es un núcleo de β_2. Por construcción de γ, se sigue que $\beta_2\gamma = 0$. Ahora, supongamos que existe $X \xrightarrow{v} P$ en $\mathscr{C}$ tal que $\beta_2 v = 0$. Dado que

$$\begin{aligned}\alpha_1(\beta_1 v) &= (\alpha_1\beta_1)v\\ &= (\alpha_2\beta_2)v\\ &= \alpha_2(\beta_2 v)\\ &= 0,\end{aligned}$$

de la propiedad universal del núcleo se sigue que existe $X \xrightarrow{v'} \operatorname{Ker}(\alpha_1)$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, dotted, "v'"'] \arrow[d, "v"] & \\
\operatorname{Ker}(\alpha_1) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
\operatorname{Ker}(\alpha_1) \arrow[r, "k_{\alpha_1}"'] & A_1 \arrow[r, "\alpha_2"'] & A.
\end{tikzcd}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\beta_1 v &= k_{\alpha_1} v' \\ &= \beta_1(\gamma v'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_2 v &= 0 \\ &= \beta_2(\gamma v').\end{aligned}$$

Entonces, por la propiedad universal del producto fibrado, tenemos que $v = \gamma v'$. Finalmente, como $k_{\alpha_1} = \beta_1\gamma$ es un monomorfismo, por el inciso (5) de la Observación 0.2.2, tenemos que γ es un monomorfismo, de donde se sigue que v' es el único morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $v = \gamma v'$. □

Proposición 1.1.26 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y consideremos el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\beta"] & A \arrow[d, "\alpha_1"] & \\ B' \arrow[r, "\alpha_3 := k_{\alpha_2}"'] & B \arrow[r, "\alpha_2"'] & B''. \end{tikzcd}$$

Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) Existe $A' \xrightarrow{\gamma} B'$ en $\mathscr{C}$ tal que

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[d, "\alpha_1"] \\ B' \arrow[r, "\alpha_2"'] & B \end{tikzcd} \tag{1.1.5}$$

es un producto fibrado en $\mathscr{C}$.

(b) $\beta \simeq \operatorname{Ker}(\alpha_3\alpha_1)$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$.

Demostración.
(a)⇒(b) Veamos que β es un núcleo de $A \xrightarrow{\alpha_3\alpha_1} B''$. Observemos que

$$\begin{aligned}\alpha_3\alpha_1\beta &= \alpha_3\alpha_2\gamma \\ &= k_{\alpha_2}\alpha_2\gamma \\ &= 0.\end{aligned}$$

Sea $X \xrightarrow{\theta} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $(\alpha_3\alpha_1)\theta = \alpha_3(\alpha_1\theta) = 0$. Como $\alpha_2 = \operatorname{Ker}(\alpha_3)$, por la propiedad universal del núcleo, existe $X \xrightarrow{\psi} B'$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_2\psi = \alpha_1\theta$. Luego, por la propiedad universal del producto fibrado (1.1.5), se sigue que existe $X \xrightarrow{\theta'} A'$ en $\mathscr{C}$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dotted, "\theta'"] \arrow[drr, bend left, "\theta"] \arrow[ddr, bend right, "\psi"'] & & \\ & A' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[d, "\alpha_1"] \\ & B' \arrow[r, "\alpha_2"'] & B. \end{tikzcd}$$

Ahora, por el inciso (1) de la Observación 1.1.23, sabemos que α_2 es un monomorfismo. Por el Corolario 0.5.25, se sigue que β es un monomorfismo. Por ende, θ' es el único morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $\beta\theta' = \theta$.

(b)⇒(a) Tenemos que $\alpha_3(\alpha_1\beta) = (\alpha_3\alpha_1)\beta = 0$. Como $\alpha_2 = \operatorname{Ker}(\alpha_3)$, se sigue que existe $A' \xrightarrow{\gamma} B'$ en $\mathscr{C}$ tal que hace conmutar el diagrama (1.1.5). Sean $X \xrightarrow{\theta_1} A, X \xrightarrow{\theta_2} B'$ en $\mathscr{C}$ tales que $\alpha_1\theta_1 = \alpha_2\theta_2$. Observemos que

$$\begin{aligned}(\alpha_3\alpha_1)\theta_1 &= \alpha_3(\alpha_1\theta_1)\\ &= \alpha_3(\alpha_2\theta_2)\\ &= (\alpha_3\alpha_2)\theta_2\\ &= 0. && (\alpha_2 = \operatorname{Ker}(\alpha_3))\end{aligned}$$

Luego, como $\beta = \operatorname{Ker}(\alpha_3\alpha_1)$, por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $X \xrightarrow{\theta} A'$ en $\mathscr{C}$ tal que $\beta\theta = \theta_1$. Más aún, como por el inciso (1) de la Observación 1.1.23 sabemos que α_2 es un monomorfismo, de

$$\begin{aligned}\alpha_2\theta_2 &= \alpha_1\theta_1\\ &= \alpha_1(\beta\theta)\\ &= (\alpha_1\beta)\theta\\ &= (\alpha_2\gamma)\theta\\ &= \alpha_2(\gamma\theta)\end{aligned}$$

se sigue que $\theta_2 = \gamma\theta$, por lo que el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "\exists!\ \theta"'] \arrow[drr, bend left, "\theta_1"] \arrow[ddr, bend right, "\theta_2"'] & & \\
& A' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[d, "\alpha_1"] \\
& B' \arrow[r, "\alpha_2"'] & B.
\end{tikzcd}$$

□

Lema 1.1.27 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $A_1, A_2 \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ tales que existe $A_1 \coprod A_2$ en $\mathscr{C}$. Entonces, las inclusiones y proyecciones naturales

$$A_1 \xrightarrow{\mu_1} A_1 \coprod A_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2 \quad \text{y} \quad A_2 \xrightarrow{\mu_2} A_1 \coprod A_2 \xrightarrow{\pi_1} A_1$$

satisfacen que $\mu_1 \simeq \operatorname{Ker}(\pi_2)$ y $\mu_2 \simeq \operatorname{Ker}(\pi_1)$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A_1 \coprod A_2)$.

Demostración. Por el inciso (1) de la Observación 1.1.7, tenemos que $\pi_2\mu_1 = \delta^A_{2,1} = 0$ y que μ_1 es un monomorfismo. Ahora, sea $X \xrightarrow{h} A_1 \coprod A_2$ tal que $\pi_2 h = 0$. Consideremos $h' := \pi_1 h : X \to A_1$

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "h'"'] \arrow[d, "h"] & \\
A_1 \arrow[r, "\mu_1"'] & A_1 \coprod A_2 \arrow[r, "\pi_2"] & A_2.
\end{tikzcd}$$

Aseguramos que $h = \mu_1 h'$. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_1 h &= h' \\ &= 1_{A_1} h' \\ &= \pi_1 \mu_1 h', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2 h &= 0 \\ &= \pi_2 \mu_1 h'. \end{aligned}$$

Por la propiedad universal del producto, se obtiene que $h = \mu_1 h'$, y la unicidad de h' se sigue de que μ_1 es un monomorfismo. La demostración de $\mu_2 \simeq \mathrm{Ker}(\pi_1)$ es análoga. $\square$

Lema 1.1.28 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $K \xrightarrow{\kappa} A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) κ es un núcleo de f.

(b) κ es un igualador de $A \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$.

(c) El diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & 0 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Demostración.

(a)⇒(b) Sea κ un núcleo de f. Entonces $f\kappa = 0$. Como $0\kappa = 0$, se sigue que $f\kappa = 0\kappa$. Supongamos que existe un morfismo $X \xrightarrow{g} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $fg = 0g$. Entonces, $fg = 0$. Por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $X \xrightarrow{g'} K$ tal que $g = \kappa g'$. Por ende, g' es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dotted, "g'"'] \arrow[d, "f"] & \\ K \arrow[r, "\kappa"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B. \end{tikzcd}$$

De la unicidad en la propiedad universal del núcleo, se sigue que g' es el único morfismo en $\mathscr{C}$ que hace conmutar el diagrama anterior. Por lo tanto, κ es un igualador de $A \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$.

(b)⇒(c) Sea κ un igualador de $A \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$. Entonces, $f\kappa = 0\kappa$. Como $0\kappa = 0$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & 0 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd} \tag{1.1.6}$$

Veamos que este diagrama es un producto fibrado para $A \xrightarrow{f} B \leftarrow 0$. Supongamos que existen morfismos $P \xrightarrow{\beta_1} A, P \xrightarrow{\beta_2} 0$ en $\mathscr{C}$ tales que $f\beta_1 = 0\beta_2$. Como el codominio de β_2 es 0, se sigue que $\beta_2 = 0$. Luego, $f\beta_1 = 0 = 0\beta_1$, por lo que el morfismo $P \xrightarrow{\beta_1} A$ es tal que $f\beta_1 = 0\beta_1$. Por la propiedad universal del igualador, existe un único morfismo $P \xrightarrow{f'} K$ tal que $\kappa f' = \beta_1$. Más aún, como $0f' = 0$, tenemos que f' hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dotted, "f'"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1"'] & & \\
& K \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & 0 \arrow[d] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

De la unicidad en la propiedad universal del igualador, se sigue que f' es el único morfismo en $\mathscr{C}$ que hace conmutar el diagrama anterior. Por lo tanto, (1.1.6) es un producto fibrado.

(c)$\Rightarrow$(a) Sea el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

un producto fibrado. En particular, el diagrama anterior es conmutativo, por lo que $f\kappa = 0$. Supongamos que existe un morfismo $X \xrightarrow{g} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $fg = 0$. Entonces, el morfismo g es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& K \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & 0 \arrow[d] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del producto fibrado, existe un único morfismo $X \xrightarrow{g'} K$ tal que $g = \kappa g'$. Por ende, g' hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, dotted, "\exists!\ g'"'] \arrow[d, "g"] & \\
K \arrow[r, "\kappa"'] & A \arrow[r, "f"] & B.
\end{tikzcd}$$

De la unicidad en la propiedad universal del producto fibrado, se sigue que g' es el único morfismo en $\mathscr{C}$ que hace conmutar el diagrama anterior. Por lo tanto, κ es un núcleo de f. $\square$

Definición 1.1.29 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Un *conúcleo* de f es un morfismo $B \xrightarrow{p} C$ en $\mathscr{C}$ que satisface las siguientes condiciones.

(CoNúc1) $pf = 0$.

(CoNúc2) Propiedad universal del conúcleo: para todo morfismo $B \xrightarrow{g} X$ en $\mathscr{C}$ tal que $gf = 0$, existe un único morfismo $C \xrightarrow{g'} X$ tal que $g = g'p$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & C. \arrow[dl, dotted, "\exists !\ g'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Un *seudoconúcleo* de f es un morfismo que cumple con las condiciones anteriores, exceptuando la unicidad en (CoNúc2).

Lema 1.1.30 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $A_1, A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ tales que existe $A_1 \coprod A_2$ en $\mathscr{C}$. Entonces, las inclusiones y proyecciones naturales

$$A_1 \xrightarrow{\mu_1} A_1 \coprod A_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2 \quad \text{y} \quad A_2 \xrightarrow{\mu_2} A_1 \coprod A_2 \xrightarrow{\pi_1} A_1$$

satisfacen que $\pi_1 \simeq \mathrm{CoKer}(\mu_2)$ y $\pi_2 \simeq \mathrm{CoKer}(\mu_1)$ en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A_1 \coprod A_2, -)$.

Observación 1.1.31 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo en $\mathscr{C}$.

(1) $B \xrightarrow{p} C$ es un conúcleo de f en $\mathscr{C}$ si, y sólo si, $C \xrightarrow{p^{\mathrm{op}}} B$ es un núcleo de $B \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} A$ en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. Es decir, el conúcleo es el concepto dual del núcleo en categorías con objeto cero. El conúcleo de f (si existe) es único hasta isomorfismos en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(B, -)$.

(2) En vista de (1), y en caso de que f admita un conúcleo, denotaremos por

$$B \xrightarrow{c_f} \mathrm{CoKer}(f)$$

a la elección de uno de ellos, i.e.,

$$\mathrm{CoKer}(A \xrightarrow{f} B) := (B \xrightarrow{c_f} \mathrm{CoKer}(f)).$$

Note que

$$(B \xrightarrow{c_f} \mathrm{CoKer}(f) = \left(\mathrm{Ker}(f^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\kappa_{f^{\mathrm{op}}}} B\right)^{\mathrm{op}},$$

por lo que $\mathrm{CoKer}(f) = \left(\mathrm{Ker}(f^{\mathrm{op}})\right)^{\mathrm{op}}$.

Proposición 1.1.32 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $A \xrightarrow{\alpha} B$ en $\mathscr{C}$ tal que existen $\mathrm{Ker}(\alpha)$ y $\mathrm{CoKer}(\mathrm{Ker}(\alpha))$. Entonces,

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{CoKer}(\mathrm{Ker}(\alpha)) \text{ en } \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A).$$

Demostración. Sea $p := c_{k_\alpha} : A \to \mathrm{CoKer}(k_\alpha)$. Dado que $\alpha k_\alpha = 0$ y $p = c_{k_\alpha}$, existe un único morfismo $\mathrm{CoKer}(k_\alpha) \xrightarrow{q} B$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha = qp$. Entonces, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r, hook, "k_\alpha"] & A \arrow[rr, "\alpha"] & & B, \\ X \arrow[ur, "\theta"'] & & \mathrm{CoKer}(k_\alpha) \arrow[ur, dotted, "q"'] & \end{tikzcd}$$

por lo que basta ver que k_α es un núcleo de p. En efecto, tenemos que $pk_\alpha = c_{k_\alpha} = 0$. Sea $X \xrightarrow{\theta} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $p\theta = 0$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha\theta &= qp\theta \\ &= q0 \\ &= 0\end{aligned}$$

y, como $k_\alpha = \mathrm{Ker}(\alpha)$, existe un único $X \xrightarrow{\theta'} \mathrm{Ker}(\alpha)$ en $\mathscr{C}$ tal que $\theta = k_\alpha\theta'$. $\square$

Observación 1.1.33 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$.

(1) $\mathrm{Ker}(B \to 0) = \left(B \xrightarrow{1_B} B\right)$.

En efecto: $B \xrightarrow{1_B} B$ es tal que $0_{B,0}1_B = 0$. Sea $X \xrightarrow{h} B$ un morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $0_{B,0}h = 0$. Entonces, $X \xrightarrow{h} B$ es tal que $h = 1_B h$ trivialmente. Supongamos que $X \xrightarrow{h'} B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $h = 1_B h'$. Entonces $h = h'$, por lo que h es único. Por lo tanto, $B \xrightarrow{1_B} B$ es un núcleo de $0_{B,0}$, es decir, $\mathrm{Ker}\big(B \to 0\big) = \left(B \xrightarrow{1_B} B\right)$.

(2) Si f es un epimorfismo, entonces $\mathrm{CoKer}\left(A \xrightarrow{f} B\right) = (B \to 0)$.

En efecto: Supongamos que f es un epimorfismo. Claramente, $0_{B,0} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, 0)$ es tal que $0_{B,0}f = 0_{A,0}$. Sea $B \xrightarrow{g} X$ un morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $gf = 0_{A,X}$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}0_{X,0}gf &= 0_{X,0}0_{A,X} \\ &= 0_{A,0} && (0 \text{ es un objeto final en } \mathscr{C}) \\ &= 0_{B,0}f.\end{aligned}$$

Como f es un epimorfismo, se sigue que $0_{X,0}g = 0_{B,0}$. Más aún, por ser 0 un objeto final en $\mathscr{C}$, $0_{X,0} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, 0)$ es el único morfismo en $\mathscr{C}$ con esta propiedad.

1.2. Categorías semiaditivas

Definición 1.2.1 Una categoría $\mathscr{C}$ se dice que es *semiaditiva* si satisface las siguientes condiciones:

(SA1) $\mathscr{C}$ es una categoría localmente pequeña con objeto cero;

(SA2) para cualesquiera $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ tiene estructura de monoide abeliano $\big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B), +, e_{A,B}\big)$, donde el elemento neutro $e_{A,B}$ es el morfismo cero en $\mathscr{C}$.

(SA3) la composición de morfismos en $\mathscr{C}$ es bilineal, es decir,

$$\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta \quad \wedge \quad (\alpha + \beta)\eta = \alpha\eta + \beta\eta,$$

cada vez que dichas composiciones tengan sentido.

Observación 1.2.2 El universo de las categorías semiaditivas es dualizante.

En efecto: Sea $\mathscr{C}$ una categoría semiaditiva. Entonces, existe un objeto cero 0 en $\mathscr{C}$ y, por el inciso (2) de la Observación 0.5.18, tenemos que 0 es un objeto cero en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

Ahora, sean $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})$. Definimos la suma entre elementos $f^{\mathrm{op}}, g^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(B, A)$ como

$$f^{\mathrm{op}} + g^{\mathrm{op}} := (f+g)^{\mathrm{op}}.$$

Luego, ya que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ tiene estructura de monoide abeliano, para cualesquiera $f^{\mathrm{op}}, g^{\mathrm{op}}, h^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(B, A)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(f^{\mathrm{op}} + g^{\mathrm{op}}) + h^{\mathrm{op}} &= (f+g)^{\mathrm{op}} + h^{\mathrm{op}} \\
&= \big((f+g)+h\big)^{\mathrm{op}} \\
&= \big(f+(g+h)\big)^{\mathrm{op}} \\
&= f^{\mathrm{op}} + (g+h)^{\mathrm{op}} \\
&= f^{\mathrm{op}} + (g^{\mathrm{op}} + h^{\mathrm{op}}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{\mathrm{op}} + e_{A,B}^{\mathrm{op}} &= (f + e_{A,B})^{\mathrm{op}} \\
&= f^{\mathrm{op}} \\
&= (e_{A,B} + f)^{\mathrm{op}} \\
&= e_{A,B}^{\mathrm{op}} + f^{\mathrm{op}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{\mathrm{op}} + g^{\mathrm{op}} &= (f+g)^{\mathrm{op}} \\
&= (g+f)^{\mathrm{op}} \\
&= g^{\mathrm{op}} + f^{\mathrm{op}},
\end{aligned}$$

por lo que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(B, A)$ tiene estructura de monoide abeliano.

Por último, dado que la composición de morfismos en $\mathscr{C}$ es bilineal, también lo es en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, pues

$$\begin{aligned}
\eta^{\mathrm{op}}(\alpha^{\mathrm{op}} + \beta^{\mathrm{op}}) &= \eta^{\mathrm{op}}(\alpha+\beta)^{\mathrm{op}} \\
&= \big((\alpha+\beta)\eta\big)^{\mathrm{op}} \\
&= (\alpha\eta + \beta\eta)^{\mathrm{op}} \\
&= (\alpha\eta)^{\mathrm{op}} + (\beta\eta)^{\mathrm{op}} \\
&= \eta^{\mathrm{op}}\alpha^{\mathrm{op}} + \eta^{\mathrm{op}}\beta^{\mathrm{op}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha^{\mathrm{op}} + \beta^{\mathrm{op}})\gamma^{\mathrm{op}} &= (\alpha+\beta)^{\mathrm{op}}\gamma^{\mathrm{op}} \\
&= \big(\gamma(\alpha+\beta)\big)^{\mathrm{op}} \\
&= (\gamma\alpha + \gamma\beta)^{\mathrm{op}} \\
&= (\gamma\alpha)^{\mathrm{op}} + (\gamma\beta)^{\mathrm{op}} \\
&= \alpha^{\mathrm{op}}\gamma^{\mathrm{op}} + \beta^{\mathrm{op}}\gamma^{\mathrm{op}}
\end{aligned}$$

cada vez que dichas composiciones tengan sentido. De lo anterior, concluimos que, si $\mathscr{C}$ es una categoría semiaditiva, entonces $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ también lo es, por lo que el universo de las categorías semiaditivas es dualizante. Por lo tanto, cualquier resultado válido para categorías semiaditivas tendrá un resultado dual válido para el mismo tipo de categorías.

Proposición 1.2.3 Para una familia finita $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} A\}_{i=1}^{n}$ de morfismos en una categoría semiaditiva $\mathscr{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) A y $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} A\}_{i=1}^n$ son un coproducto en $\mathscr{C}$ para $\{A_i\}_{i=1}^n$.

(b) Existe una familia $\{A \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i=1}^n$ de morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\sum_{i=1}^n \mu_i\pi_i = 1_A$ y $\pi_i\mu_j = \delta_{i,j}^A$ para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Por el inciso (3) de la Observación 0.5.35, existe una familia $\{A \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i=1}^n$ de morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\pi_i\mu_j = \delta_{i,j}^A$ para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\pi_i\right)\mu_j &= \sum_{i=1}^n \mu_i(\pi_i\mu_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \mu_i\delta_{i,j}^A \\
&= \mu_j & (e_{X,Y} = 0_{X,Y} \quad \forall\ X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})) \\
&= 1_A\mu_j.
\end{aligned}$$

Por la propiedad universal del coproducto, se sigue que $\sum_{i=1}^n \mu_i\pi_i = 1_A$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $\{\pi_i : A \to A_i\}_{i=1}^n$ una familia de morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\sum_{i=1}^n \mu_i\pi_i = 1_A$ y $\pi_i\mu_j = \delta_{i,j}^A$ para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Dada una familia $\{A_i \xrightarrow{f_i} B\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$, definimos $f := \sum_{j=1}^n f_j\mu_j$. Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dd, "f"] \\
A_i \arrow[ur, "\mu_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \\
& B
\end{tikzcd}$$

conmuta para cada $i \in I$. Sea $i \in I$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
f\mu_i &= \left(\sum_{j=1}^n f_j\pi_j\right)\mu_i \\
&= \sum_{j=1}^n f_j(\pi_j\mu_i) \\
&= \sum_{j=1}^n f_j\delta_{i,j}^A \\
&= f_i. & (e_{X,Y} = 0_{X,Y} \quad \forall\ X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C}))
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $A \xrightarrow{f'} B$ es tal que $f'\mu_i = f_i$ para todo $i \in I$. Luego,

$$\begin{aligned}
f' &= f'1_A \\
&= f'\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\pi_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n (f'\mu_i)\pi_i \\
&= \sum_{i=1}^n f_i\pi_i \\
&= f.
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.2.4 Para una familia finita $\{A \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i=1}^n$ de morfismos en una categoría semiaditiva $\mathscr{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) A y $\{A \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i=1}^n$ son un producto en $\mathscr{C}$ para $\{A_i\}_{i=1}^n$.

(b) Existe $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} A\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$ tal que $\sum_{i=1}^n \mu_i\pi_i = 1_A$ y $\pi_i\mu_j = \delta_{i,j}^A$ para todo $i, j \in [1, n]$.

Demostración. Por la Observación 1.2.2, sabemos que el universo de las categorías semiaditivas es dualizante; es decir, si $\mathscr{C}$ es una categoría semiaditiva, entonces $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ también lo es. Aplicando la Proposición 1.2.3 a la familia de morfismos $\{A_i \xrightarrow{\pi_i^{\mathrm{op}}} A\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, tenemos las siguientes condiciones equivalentes.

(c) A y $\{A_i \xrightarrow{\pi_i^{\mathrm{op}}} A\}_{i=1}^n$ son un coproducto en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ para $\{A_i\}_{i=1}^n$.

(d) Existe $\{A \xrightarrow{\mu_i^{\mathrm{op}}} A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ tal que $\sum_{i=1}^n \pi_i^{\mathrm{op}}\mu_i^{\mathrm{op}} = 1_A$ y $\mu_i^{\mathrm{op}}\pi_j^{\mathrm{op}} = \delta_{i,j}^A$ para todo $i, j \in [1, n]$.

Luego, aplicando el funtor $D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ a la proposición categórica (c) $\Leftrightarrow$ (d), tenemos que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) A y $\{A \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i=1}^n$ son un producto en $\mathscr{C}$ para $\{A_i\}_{i=1}^n$.

(b) Existe $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} A\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$ tal que $\sum_{i=1}^n \mu_i\pi_i = 1_A$ y $\pi_i\mu_j = \delta_{i,j}^A$ para todo $i, j \in [1, n]$.

□

Teorema 1.2.5 En una categoría semiaditiva, todo coproducto finito es un biproducto finito.

Demostración. Sean $\mathscr{C}$ una categoría semiaditiva y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$, con I finito, tal que existe el coproducto $\coprod_{i\in I} A_i$ en $\mathscr{C}$.

Supongamos que $I = \varnothing$. Entonces, por el inciso (4) de la Observación 0.5.39 tenemos que $A := \coprod_{i\in I} A_i$ es un objeto inicial en $\mathscr{C}$. Además, por vacuidad, todo objeto final en $\mathscr{C}$ es un producto de $\{A_i\}_{\in I}$, por lo que basta ver que A es un objeto final en $\mathscr{C}$. Sea $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Entonces, para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A)$, tenemos que

$$\begin{aligned} f &= 1_A f \\ &= 0_{A,A} f \\ &= 0_{X,A} \\ &= e_{X,A}, \end{aligned}$$

por lo que $|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A)| = 1$. Por ende, A es un objeto final en $\mathscr{C}$.

Supongamos que $I \neq \varnothing$. Sea $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} A\}_{i\in I}$ un coproducto para $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$. Entonces, por la Proposición 1.2.3, existe una familia de morfismos $\{A \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i\in I}$ tal que $\sum_{i\in J} \mu_i\pi_i = 1_A$ y $\pi_i\mu_j = \delta_{i,j}^A$ para cualesquiera $i, j \in [1, n]$. Por 1.2.4, tenemos que A y $\{A \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i\in I}$ son un producto en $\mathscr{C}$ para $\{A_i\}_{i\in I}$. Luego, por la Proposición 1.1.21, concluimos que A es un biproducto. □

Corolario 1.2.6 En una categoría semiaditiva, todo producto finito es un biproducto finito.

Demostración. Se sigue de la Observación 1.2.2, pues basta aplicar el principio de dualidad al Teorema 1.2.5. □

Nota Dado que, por el Teorema 1.2.5 y el Corolario 1.2.6, sabemos que en las categorías semiaditivas no existe distinción entre las nociones de producto, coproducto y biproducto cuando estos son finitos, denotaremos a todos los productos finitos y coproductos finitos en categorías semiaditivas empleando la notación de biproducto.

Proposición 1.2.7 Sean $\mathscr{C}$ una categoría semiaditiva y $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i, B = \bigoplus_{i=1}^{m} B_j$ en $\mathscr{C}$, con m y n enteros positivos. Entonces $\mathrm{Mat}_{m\times n}(A, B)$ es un monoide abeliano, con la suma dada por

$$[\alpha+\beta]_{ij} := [\alpha]_{ij} + [\beta]_{ij} \text{ en } \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j, B_i) \quad \forall\ (i, j) \in [1, n] \times [1, m]$$

y neutro aditivo $[0]_{ij} = 0_{A_j,B_i}$ para cualquier $(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$.

Demostración. Sean $i \in [1, n]$ y $j \in [1, m]$. Por ser $\mathscr{C}$ una categoría semiaditiva, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j, A_i)$ tiene estructura de monoide abeliano. Entonces, dado que la suma en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j, B_i)$ es asociativa, se tiene que

$$\begin{aligned}
[(\alpha+\beta)+\gamma]_{ij} &= [\alpha+\beta]_{ij} + [\gamma]_{ij}\\
&= ([\alpha]_{ij} + [\beta]_{ij}) + [\gamma]_{ij}\\
&= [\alpha]_{ij} + ([\beta]_{ij} + [\gamma]_{ij})\\
&= [\alpha]_{ij} + [\beta+\gamma]_{ij}\\
&= [\alpha+(\beta+\gamma)]_{ij}.
\end{aligned}$$

De esto se sigue que $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, es decir, la suma es asociativa en $\mathrm{Mat}_{m\times n}(A, B)$.

Ahora bien, como la suma en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j, B_i)$ es conmutativa, tenemos que

$$[\alpha+\beta]_{ij} = [\alpha]_{ij} + [\beta]_{ij} = [\beta]_{ij} + [\alpha]_{ij} = [\beta+\alpha]_{ij},$$

por lo que $\alpha+\beta = \beta+\alpha$. Por ende, la suma en $\mathrm{Mat}_{m\times n}(A, B)$ es conmutativa.

Finalmente, como $[0]_{ij}$ es el neutro aditivo de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_i, B_j)$, tenemos que $[\alpha+0]_{ij} = [\alpha]_{ij} + [0]_{ij} = [\alpha]_{ij}$. De esto se sigue que $\alpha+0 = \alpha$, por lo que 0 es un neutro aditivo en $\mathrm{Mat}_{m\times n}(A, B)$.

Por lo tanto, $\mathrm{Mat}_{m\times n}(A, B)$ tiene estructura de monoide abeliano. □

Proposición 1.2.8 Sean $\mathscr{C}$ una categoría semiaditiva y $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i, B = \bigoplus_{j=1}^{m} B_j$ en $\mathscr{C}$, con m y n enteros positivos. Entonces, la función $\varphi_{B,A} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(A, B)$ de la Proposición 0.5.43 es un isomorfismo de monoides abelianos, cuyo inverso es

$$\varphi_{B,A}^{-1}(\alpha) = \sum_{i,j} \mu_i^B [\alpha]_{i,j} \pi_j^A.$$

Demostración. Sean $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Entonces, para cualesquiera $i \in \{1, 2, ..., n\}, j \in \{1, 2, ..., m\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}[\varphi_{B,A}(f+g)]_{i,j} &= \pi_i^B(f+g)\mu_j^A \\ &= \pi_i^B f\mu_j^A + \pi_i^B g\mu_j^A \\ &= [\varphi_{B,A}(f)]_{i,j} + [\varphi_{B,A}(g)]_{i,j} \\ &= [\varphi_{B,A}(f)+\varphi_{B,A}(g)]_{i,j}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}[\varphi_{B,A}(0_{A,B})]_{i,j} &= \pi_i^B 0_{A,B}\mu_j^A \\ &= 0_{A_j,B_i} \\ &= [0]_{i,j},\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\varphi_{B,A}(f+g)=\varphi_{B,A}(f)+\varphi_{B,A}(g)$ y $\varphi_{B,A}(0_{A,B})=0$. Ahora, definimos

$$\begin{aligned}\psi : \mathrm{Mat}_{m\times n}(A,B) &\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B), \\ \alpha &\mapsto \sum_{i,j}\mu_i^B[\alpha]_{i,j}\pi_j^A.\end{aligned}$$

Entonces, para todo $f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\psi(\varphi_{B,A}(f)) &= \sum_{i,j}\mu_i^B[\varphi_{B,A}(f)]_{i,j}\pi_j^A \\ &= \sum_{i,j}\mu_i^B(\pi_i^B f\mu_j^A)\pi_j^A \\ &= 1_B f 1_A \\ &= f,\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\psi\varphi_{B,A} = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)}$. Por otro lado, sea $\alpha\in\mathrm{Mat}_{m\times n}(A,B)$. Entonces, para cualesquiera $k\in\{1,2,...,n\}, l\in\{1,2,...,m\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}[\alpha]_{k,l} &= \sum_{i,j}\delta_{k,i}^B[\alpha]_{i,j}\delta_{j.l}^A \\ &= \sum_{i,j}\pi_k^B\mu_i^B[\alpha]_{i,j}\pi_j^A\mu_l^A \\ &= [\varphi_{B,A}(\psi(\alpha))]_{k,l},\end{aligned}$$

por lo que $\varphi_{B,A}(\psi(\alpha))=\alpha$, de donde se sigue que $\varphi_{B,A}\psi = 1_{\mathrm{Mat}_{m\times n}(A,B)}$. Como $\varphi_{A,B}$ es un morfismo de monoides abelianos, se sigue que ψ también lo es, de donde concluimos que $\varphi_{B,A} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\to\mathrm{Mat}_{m\times n}(A,B)$ es un isomorfismo de monoides abelianos. $\square$

Proposición 1.2.9 Sean $\mathscr{C}$ una categoría semiaditiva y $A=\bigoplus_{i=1}^n A_i, B=\bigoplus_{j=1}^m B_j, C=\bigoplus_{k=1}^l C_k$ en $\mathscr{C}$, con m,n y k enteros positivos. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Para cualesquiera $f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B), g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$, se tiene que

$$\varphi_{C,A}(gf)=\varphi_{C,B}(g)\varphi_{B,A}(f).$$

(b) $\varphi_{A,A}(1_A)=\mathbb{1}_A$, donde $[\mathbb{1}_A]_{i,j} := \delta_{i,j}^A$ para cualesquiera $i,j\in[1,n]$.

Demostración.

(a) Para todo $(k,i) \in [1,l] \times [1,n]$, tenemos que

$$\begin{aligned}[\varphi_{C,A}(gf)]_{k,i} &= \pi_k^C g 1_B f \mu_i^A \\ &= \pi_k^C g \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j^B \pi_j^B \right) f \mu_i^A \\ &= \sum_{j=1}^{m} (\pi_k^C g \mu_j^B)(\pi_j^B f \mu_i^A) \\ &= \sum_{j=1}^{m} [\varphi_{C,B}(g)]_{k,j} [\varphi_{B,A}(f)]_{j,i} \\ &= [\varphi_{C,B}(g)\varphi_{B,A}(f)]_{k,i},\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\varphi_{C,A}(gf) = \varphi_{C,B}(g)\varphi_{B,A}(f)$.

(b) Para cualesquiera $i,j \in [1,n]$, tenemos que

$$\begin{aligned}[\mathbb{1}_A]_{i,j} &= \delta_{i,j}^A \\ &= \pi_i^A 1_A \mu_j^A \\ &= [\varphi_{A,A}(1_A)]_{i,j};\end{aligned}$$

por ende, $\varphi_{A,A}(1_A) = \mathbb{1}_A$.

□

Lema 1.2.10 Sea $\mathscr{C}$ una categoría semiaditiva tal que, para todo $M \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, existe $M \bigoplus M$. Entonces, para $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, la suma $\alpha + \beta$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ está dada por cualquiera de las siguientes composiciones de morfismos en $\mathscr{C}$:

(a) $A \xrightarrow{\Delta_A} A \bigoplus A \xrightarrow{(\alpha\ \beta)} B$;

(b) $A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ \beta\end{smallmatrix}\right)} B \bigoplus B \xrightarrow{\nabla_B} B$;

(c) $A \xrightarrow{\Delta_A} A \bigoplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{smallmatrix}\right)} B \bigoplus B \xrightarrow{\nabla_B} B$.

Demostración. Se sigue directamente de la multiplicación de matrices[1]. □

Teorema 1.2.11 Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero tal que, para todo $M \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, existen biproductos de la forma $M \bigoplus M$ en $\mathscr{C}$. Entonces, para cualesquiera $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, existe una única manera de definir una estructura de monoide abeliano en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ de manera tal que $\mathscr{C}$ sea una categoría semiaditiva.

Demostración. Sean $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Para $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, definimos $\alpha + \beta$ y $\alpha \times \beta$ como las siguientes composiciones de morfismos

$$\alpha + \beta := A \xrightarrow{\Delta_A} A \bigoplus A \xrightarrow{(\alpha\ \beta)} B,$$

$$\alpha \times \beta := A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha \\ \beta\end{smallmatrix}\right)} B \bigoplus B \xrightarrow{\nabla_B} B.$$

Veremos ahora que $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B), +, 0_{A,B})$ es un monoide abeliano y que la composición de morfismos es bilineal con respecto a la suma definida anteriormente. Haremos la demostración por pasos:

[1]Ver la Definición 0.5.45.

(i) $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$ para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$.

Consideremos el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\alpha"'] & & A \arrow[dr, "\alpha"] & \\
B & & A \bigoplus A \arrow[ll, "\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[ur, "\pi_2"] \arrow[rr, "\left(\begin{smallmatrix}0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)"] & & B. \\
 & A \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\mu_1"'] & & A \arrow[ul, "\mu_2"] \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.2.1}$$

Por la Proposición 0.5.43, tenemos que $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\end{smallmatrix}\right)\mu_1 = \alpha = \left(\begin{smallmatrix}0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)\mu_2$ y $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\end{smallmatrix}\right)\mu_2 = \left(\begin{smallmatrix}0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)\mu_1$. En particular, se tiene que

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\end{smallmatrix}\right)\mu_i = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \pi_1\end{smallmatrix}\right)\mu_i \quad \wedge \quad \left(\begin{smallmatrix}0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)\mu_i = \left(\begin{smallmatrix}\pi_2 & \alpha\end{smallmatrix}\right)\mu_i \quad \forall\, i \in \{1, 2\}.$$

Por la propiedad universal del coproducto, se sigue que $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\end{smallmatrix}\right) = \alpha\pi_1$ y $\left(\begin{smallmatrix}0 & \alpha\end{smallmatrix}\right) = \alpha\pi_2$. Luego,

$$\begin{aligned}
\alpha + 0 &= \left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\end{smallmatrix}\right)\Delta_A \\
&= \alpha\pi_1\Delta_A \\
&= \alpha 1_A \\
&= \alpha \\
&= \alpha\pi_2\Delta_A \\
&= \left(\begin{smallmatrix}0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)\Delta_A \\
&= 0 + \alpha.
\end{aligned}$$

(ii) $(\alpha + \beta)^{\mathrm{op}} = \alpha^{\mathrm{op}} \times \beta^{\mathrm{op}}$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$.

Sean $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)^{\mathrm{op}} &= \Big(\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\end{smallmatrix}\right)\Delta_A\Big)^{\mathrm{op}} \\
&= \Delta_A^{\mathrm{op}} \begin{smallmatrix}\alpha & \beta\end{smallmatrix}^{\mathrm{op}} \\
&= \nabla_A \left(\begin{smallmatrix}\alpha^{\mathrm{op}} \\ \beta^{\mathrm{op}}\end{smallmatrix}\right) \\
&= \alpha^{\mathrm{op}} \times \beta^{\mathrm{op}}.
\end{aligned}$$

(iii) $\alpha \times 0 = \alpha = 0 \times \alpha$.

Por (ii) y (i), tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha \times 0 & (\alpha^{\mathrm{op}} + 0^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \\
&= (\alpha^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \\
&= \alpha \\
&= (0^{\mathrm{op}} + \alpha^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \\
&= 0 \times \alpha.
\end{aligned}$$

(iv) $\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B), \gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$.

Sean $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ y $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha + \beta) &= \gamma\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\end{smallmatrix}\right)\Delta_A \\
&= \left(\begin{smallmatrix}\gamma\alpha & \gamma\beta\end{smallmatrix}\right)\Delta_A && \text{(Proposición 1.2.9 (a))} \\
&= \gamma\alpha + \gamma\beta.
\end{aligned}$$

(v) $(\alpha \times \beta)\rho = \alpha\rho \times \beta\rho$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B), \rho \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C, A)$.

Sean $\alpha, \beta \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ y $\rho \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C, A)$. Por (ii) y (iv), tenemos que

$$\begin{aligned}
\Big((\alpha \times \beta)\rho\Big)^{\mathrm{op}} &= \rho^{\mathrm{op}}(\alpha \times \beta)^{\mathrm{op}} \\
&= \rho^{\mathrm{op}}(\alpha^{\mathrm{op}} + \beta^{\mathrm{op}}) \\
&= \rho^{\mathrm{op}}\alpha^{\mathrm{op}} + \rho^{\mathrm{op}}\beta^{\mathrm{op}} \\
&= (\alpha\rho)^{\mathrm{op}} + (\beta\rho)^{\mathrm{op}} \\
&= (\alpha\rho \times \beta\rho)^{\mathrm{op}},
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $(\alpha \times \beta)\rho = \alpha\rho \times \beta\rho$.

(vi) Para $\{\theta_i\}_{i=1}^4 \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, se tiene que $(\theta_1 + \theta_3) \times (\theta_2 + \theta_4) = (\theta_1 \times \theta_2) + (\theta_3 \times \theta_4)$.

Consideremos el morfismo dado por la matriz

$$\psi := \left(\begin{smallmatrix} \theta_1 & \theta_3 \\ \theta_2 & \theta_4 \end{smallmatrix}\right) : A \bigoplus A \to B \bigoplus B.$$

Veamos que

$$\nabla_B(\psi\Delta_A) = (\theta_1 + \theta_3) \times (\theta_2 + \theta_4).$$

Para ello, primero verificaremos que

$$\psi\Delta_A = \left(\begin{smallmatrix} (\,\theta_1 \;\; \theta_3\,)\Delta_A \\ (\,\theta_2 \;\; \theta_4\,)\Delta_A \end{smallmatrix}\right) : A \to B \bigoplus B$$

para lo cual, debido a la Proposición 0.5.43, basta ver que

$$\pi_1^B(\psi\Delta_A) = (\,\theta_1 \;\; \theta_3\,)\Delta_A \quad \wedge \quad \pi_2^B(\psi\Delta_A) = (\,\theta_2 \;\; \theta_4\,)\Delta_A. \tag{1.2.2}$$

En efecto, por la definición de ψ, tenemos que

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \pi_1^B\psi\mu_1^B, \\
\theta_3 &= \pi_1^B\psi\mu_2^A, \\
\theta_2 &= \pi_2^B\psi\mu_1^B, \\
\theta_4 &= \pi_2^B\psi\mu_2^B;
\end{aligned}$$

por ende, $\pi_1^B\psi = (\,\theta_1 \;\; \theta_3\,) : A \bigoplus A \to B$ y $\pi_2^B\psi = (\,\theta_2 \;\; \theta_4\,)$, de donde se siguen (1.2.2). Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_B(\psi\Delta_A) &= \nabla_B\left(\begin{smallmatrix} (\,\theta_1 \;\; \theta_3\,)\Delta_A \\ (\,\theta_2 \;\; \theta_4\,)\Delta_A \end{smallmatrix}\right) \\
&= \nabla_B\left(\begin{smallmatrix} \theta_1+\theta_3 \\ \theta_2+\theta_4 \end{smallmatrix}\right) \\
&= (\theta_1 + \theta_3) \times (\theta_2 + \theta_4).
\end{aligned}$$

Ahora, veamos que $\nabla_B\psi)\Delta_A = (\theta_1 \times \theta_2) + (\theta_3 \times \theta_4)$. En efecto, dado que $\psi_{i,j} = \pi_i^B\psi\mu_j^A$ para cualesquiera $i, j \in \{1, 2\}$, tenemos que $(\psi^{\mathrm{op}})_{j,i} = \psi_{i,j}^{\mathrm{op}} = (\mu_j^A)^{\mathrm{op}}\psi^{\mathrm{op}}(\pi_i^B)^{\mathrm{op}}$ para $i, j \in \{1, 2\}$, por lo que

$$\psi^{\mathrm{op}} = \left(\begin{smallmatrix} \theta_1^{\mathrm{op}} & \theta_2^{\mathrm{op}} \\ \theta_3^{\mathrm{op}} & \theta_4^{\mathrm{op}} \end{smallmatrix}\right).$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\Big((\nabla_B\psi)\Delta_A\Big)^{\mathrm{op}} &= \Delta_A^{\mathrm{op}}(\Delta_B\psi)^{\mathrm{op}} \\
&= \nabla_A(\psi^{\mathrm{op}}\nabla_B^{\mathrm{op}}) \\
&= \Delta_A(\psi^{\mathrm{op}}\Delta_B) \\
&= (\theta_1^{\mathrm{op}} + \theta_2^{\mathrm{op}}) \times (\theta_3^{\mathrm{op}} + \theta_4^{\mathrm{op}}),
\end{aligned}$$

por lo que, de (ii), se sigue que

$$\begin{aligned}(\nabla_B\psi)\Delta_A &= \left((\theta_1^{\mathrm{op}}+\theta_2^{\mathrm{op}})\times(\theta_3^{\mathrm{op}}+\theta_4^{\mathrm{op}})\right)^{\mathrm{op}}\\ &= (\theta_1^{\mathrm{op}}+\theta_2^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}+(\theta_3^{\mathrm{op}}+\theta_4^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}\\ &= (\theta_1\times\theta_2)+(\theta_3\times\theta_4).\end{aligned}$$

Por ende, de $\Delta_B(\psi\nabla_A)=(\Delta_B\psi)\nabla_A$, concluimos que

$$(\theta_1+\theta_3)\times(\theta_2+\theta_4)=(\theta_1\times\theta_2)+(\theta_3\times\theta_4).$$

(vii) $\alpha+\beta=\alpha\times\beta$ para cualesquiera $\alpha,\beta\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$.

Por (iii), (vi) y (i), tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= (\alpha\times 0)+(0\times\beta)\\ &= (\alpha+0)\times(0+\beta)\\ &= \alpha\times\beta.\end{aligned}$$

Por (i), sabemos que existe un elemento identidad de la suma en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$. Además, para cualesquiera $\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, tenemos que

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+\gamma &= (\alpha\times\beta)+(0\times\gamma) && \text{(por (i), (vii) y (iii))}\\ &= (\alpha\times 0)+(\beta\times\gamma) && \text{(por (vi))}\\ &= \alpha+(\beta+\gamma), && \text{(por (vii) y (iii))}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= (0\times\alpha)+(\beta\times 0) && \text{(por (iii))}\\ &= (0+\beta)\times(\alpha+0) && \text{(por (vi))}\\ &= (0+\beta)+(\alpha+0) && \text{(por (vii))}\\ &= \beta+\alpha,\end{aligned}$$

por lo que la suma en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ es asociativa y conmutativa, de donde se sigue que $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B),+,0_{A,B})$ es un monoide abeliano. La bilinealidad de la composición de morfismos con respecto a la suma se sigue de (iv), (v) y (vii). Por ende, $\mathscr{C}$ es una categoría semiaditiva; la unicidad se sigue del Lema 1.2.10. □

Teorema 1.2.12 Para una categoría $\mathscr{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\mathscr{C}$ es una categoría semiaditiva con coproductos finitos.

(b) $\mathscr{C}$ es una categoría localmente pequeña con objeto cero, coproductos finitos y tiene biproductos de la forma $M\bigoplus M$ en $\mathscr{C}$ para todo $M\in\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

(c) $\mathscr{C}$ es localmente pequeña y tiene biproductos finitos.

Demostración. La implicación $(c)\Rightarrow(b)$ se sigue trivialmente de la definición de biproducto, mientras que las implicaciones $(b)\Rightarrow(a)$ y $(a)\Rightarrow(c)$ se siguen de los Teoremas 1.2.11 y 1.2.5, respectivamente. □

1.3. Categorías preaditivas y $\mathbb{Z}$-categorías

Definición 1.3.1 Una categoría $\mathscr{C}$ se dice que es *preaditiva* si satisface las siguientes condiciones:

(PA1) $\mathscr{C}$ es una categoría localmente pequeña con objeto cero;

(PA2) para cualesquiera $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ tiene estructura de grupo abeliano;

(PA3) la composición de morfismos en $\mathscr{C}$ es bilineal.

Una categoría localmente pequeña que sólo satisface las condiciones (PA2) y (PA3) se conoce como *$\mathbb{Z}$-categoría.*

Observación 1.3.2 Sea $\mathscr{C}$ una $\mathbb{Z}$-categoría.

(1) Para cada $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, denotemos por $e_{X,Y}$ al neutro aditivo de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$. Entonces, para $Z \xrightarrow{f} X \xrightarrow{e_{X,Y}} Y \xrightarrow{g} W$ en $\mathscr{C}$, se tiene que

$$ge_{X,Y} = e_{X,W} \quad \text{y} \quad e_{X,Y}f = e_{Z,Y}.$$

En efecto: $ge_{X,Y} = g(e_{X,Y} + e_{X,Y}) = ge_{X,Y} + e_{Z,Y}$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, W)$; por lo tanto, $ge_{X,Y} = e_{X,W}$. Análogamente, $e_{X,Y}f = e_{Z,Y}$.

(2) Todo objeto inicial o final en $\mathscr{C}$ es un objeto cero en $\mathscr{C}$.

En efecto: Supongamos que I es un objeto inicial en $\mathscr{C}$. Sean $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, I)$. Luego,

$$f = 1_I f = e_{I,I} f \overset{(1)}{=} e_{X,I}.$$

Por ende, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, I) = \{e_{X,I}\}$ para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, es decir, I es un objeto final en $\mathscr{C}$, por lo que es un objeto cero.

Por otro lado, supongamos que I' es un objeto final en $\mathscr{C}$. Sean $Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I', Y)$. Luego,

$$g = g1_{I'} = ge_{I',I'} = e_{I',Y}.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I', Y) = \{e_{I',Y}\}$ para todo $Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, es decir I' es un objeto inicial en $\mathscr{C}$, por lo que es un objeto cero.

(3) $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría. Es decir, el universo de las $\mathbb{Z}$-categorías es dualizante.

En efecto: Se sigue de la conmutatividad de la operación de un grupo abeliano, por lo que el grupo opuesto de un grupo abeliano es abeliano, y de las series de equivalencias

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha+\beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta &\iff \Big(\gamma(\alpha+\beta)\Big)^{\mathrm{op}} = (\gamma\alpha + \gamma\beta)^{\mathrm{op}} \\
&\iff (\alpha+\beta)^{\mathrm{op}}\gamma^{\mathrm{op}} = (\gamma\alpha)^{\mathrm{op}} + (\gamma\beta)^{\mathrm{op}} \\
&\iff (\alpha^{\mathrm{op}} + \beta^{\mathrm{op}})\gamma^{\mathrm{op}} = \alpha^{\mathrm{op}}\gamma^{\mathrm{op}} + \beta^{\mathrm{op}}\gamma^{\mathrm{op}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\eta = \alpha\eta + \beta\eta &\iff \Big((\alpha+\beta)\eta\Big)^{\mathrm{op}} = (\alpha\eta + \beta\eta)^{\mathrm{op}} \\
&\iff \eta^{\mathrm{op}}(\alpha+\beta)^{\mathrm{op}} = (\alpha\eta)^{\mathrm{op}} + (\beta\eta)^{\mathrm{op}} \\
&\iff \eta^{\mathrm{op}}(\alpha^{\mathrm{op}} + \beta^{\mathrm{op}}) = \eta^{\mathrm{op}}\alpha^{\mathrm{op}} + \eta^{\mathrm{op}}\beta^{\mathrm{op}}.
\end{aligned}$$

(4) La categoría producto de dos $\mathbb{Z}$-categorías es una $\mathbb{Z}$-categoría. En particular, por (3), $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría.

En efecto: Se sigue de que todo producto de dos grupos abelianos es un grupo abeliano, con la operación de suma definida entrada a entrada, y de que la composición de morfismos en $\mathscr{C} \times \mathscr{C}'$ también está definida entrada a entrada, por lo que la bilinealidad en $\mathscr{C} \times \mathscr{C}'$ se induce de la bilinealidad en $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$.

Observación 1.3.3 Sea $\mathscr{C}$ una categoría preaditiva.

(1) $\mathscr{C}$ es semiaditiva.

En efecto: Basta mostrar que $0_{A,B} = e_{A,B}$ para cualesquiera $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, lo cual se obtiene del inciso (1) de la Observación 1.3.2 como sigue

$$0_{A,B} = e_{A,B} 0_{A,A} = e_{A,B}.$$

(2) $\mathscr{C}$ tiene núcleos si, y sólo si, $\mathscr{C}$ tiene igualadores.

En efecto: Basta revisar que para cualesquiera $\alpha, \beta : A \to B,\ \mathrm{Ker}(\alpha - \beta) = \mathrm{Equ}(\alpha, \beta)$.

(3) Para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, α es un monomorfismo si, y sólo si, $\mathrm{Ker}(\alpha) = 0$.

Proposición 1.3.4 Sea $\mathscr{C}$ una categoría preaditiva. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen

(a) Para $A_1 \xrightarrow{\mu_1} A$ y $A \xrightarrow{\pi_1} A_1$ en $\mathscr{C}$ tales que $\pi_1\mu_1 = 1_{A_1}$, se tiene lo siguiente.

  (a1) $\mu_1\pi_1$ es idempotente en $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(A)$.

  (a2) Existe el núcleo de $1_A - \mu_1\pi_1$ y $\mathrm{Ker}\big(A \xrightarrow{1_A - \mu_1\pi_1} A\big) \simeq \big(A_1 \xrightarrow{\mu_1} A\big)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$.

  (a3) Existe el conúcleo de $1_A - \mu_1\pi_1$ y $\mathrm{CoKer}\big(A \xrightarrow{1_A - \mu_1\pi_1} A\big) \simeq \big(A \xrightarrow{\pi_1} A_1\big)$ en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)$.

(b) Sea $\theta^2 = \theta \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(A)$ tal que existen $\mathrm{Ker}\big(A \xrightarrow{1_A - \theta} A\big) = \big(A_1 \xrightarrow{\mu_1} A\big)$ y $\mathrm{Ker}\big(A \xrightarrow{\theta} A\big) = \big(A_2 \xrightarrow{\mu_2} A\big)$. Entonces, $A = A_1 \coprod A_2$, con μ_1, μ_2 como inclusiones naturales.

Demostración.

(a) Sean $A_1 \xrightarrow{\mu_1} A$ y $A \xrightarrow{\pi_1} A_1$ en $\mathscr{C}$ tales que $\pi_1\mu_1 = 1_{A_1}$.

  (a1) $(\pi_1\mu_1)^2 = \pi_1(\mu_1\pi_1)\mu_1 = \pi_1\mu_1$.

  (a2) Tenemos $A_1 \xrightarrow{\mu_1} A \xrightarrow{1 - \mu_1\pi_1} A$. Primero, observemos que $(1 - \mu_1\pi_1)\mu_1 = \mu_1 - \mu_1(\pi_1\mu_1) = 0$. Ahora, sea $X \xrightarrow{f} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $(1 - \mu_1\pi_2)f = 0$. Entonces, $f = \mu_1(\pi_1 f)$, por lo que f se factoriza a través de μ_1, y dicha factorización es única, pues μ_1 es un monomorfismo.

  (a3) Dual a (a2).

(b) Por la Proposición 1.2.3 y el inciso (1) de la Observación 1.3.3, para ver que $\{A_1 \xrightarrow{\mu_1} A, A_2 \xrightarrow{\mu_2} A\}$ es un coproducto de $\{A_1, A_2\}$ en $\mathscr{C}$, basta con verificar que existen $A \xrightarrow{\pi_1} A_1$ y $A \xrightarrow{\pi_2} A_2$ en $\mathscr{C}$ tales que $\pi_1\mu_j = \delta_{i,j}^{A}$ para cualesquiera $i, j \in \{1, 2\}$ y $1_A = \mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2$.

En efecto, dado que $(1_A - \theta)\theta = \theta - \theta^2 = 0$ y $\mu_1 = \mathrm{Ker}(1_A - \theta)$, tenemos que existe $A \xrightarrow{\pi_1} A_1$ en $\mathscr{C}$ tal que $\theta = \mu_1\pi_1$. Ahora, como $(1_A - \theta)\mu_1 = 0$, entonces $\mu_1 = \theta\mu_1$. Luego, dado que μ_1 es un monomorfismo, de la serie de equivalencias

$$\begin{aligned} \mu_1\pi_1\mu_1 &= \theta\mu_1 \\ &= \mu_1 \\ &= \mu_1 1_{A_1}, \end{aligned}$$

se sigue que $\pi_1\mu_1 = 1_{A_1}$. Similarmente, como $\theta(1_A - \theta) = 0$ y $\mu_2 = \mathrm{Ker}(\theta)$, tenemos que existe $A \xrightarrow{\pi_2} A_2$ en $\mathscr{C}$ tal que $1_A - \theta = \mu_2\pi_2$, lo que implica que $1_A = \mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2$. Luego, dado que μ_2 es un monomorfismo, de la serie de equivalencias

$$\begin{aligned} \mu_2\pi_2\mu_2 &= (1_A - \theta)\mu_2 \\ &= \mu_2 - \theta\mu_2 \\ &= \mu_2 \\ &= \mu_2 1_{A_2}, \end{aligned}$$

se sigue que $\pi_2\mu_2 = 1_{A_2}$.

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_1 1_A \\ &= \pi_1(\mu_2\pi_2 + \mu_1\pi_2) \\ &= \pi_1\mu_2\pi_2 + \pi_1\mu_1\pi_1 \\ &= \pi_1\mu_2\pi_2 + \pi_1, \end{aligned}$$

lo que implica que $\pi_1\pi_2\pi_2 = 0$. Como π_2 es un epimorfismo y $0\pi_2 = 0$, se sigue que $\pi_1\mu_2 = 0$. Análogamente, se comprueba que $\pi_2\mu_1 = 0$.

□

1.4. Categorías aditivas

Definición 1.4.1 Una categoría *aditiva* $\mathscr{A}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría con coproductos finitos.

Teorema 1.4.2 Una categoría $\mathscr{A}$ es aditiva si, y sólo si, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) $\mathscr{A}$ es una categoría localmente pequeña con objeto cero.

(b) $\mathscr{A}$ tiene coproductos finitos y productos finitos.

(c) Para toda familia finita $\{A_i\}_{i=1}^n$ de objetos en $\mathscr{A}$, el morfismo

$$\delta = \begin{pmatrix} 1_{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1_{A_n} \end{pmatrix} : \coprod_{i=1}^n A_i \to \prod_{i=1}^n A_i$$

es un isomorfismo en $\mathscr{A}$.

(d) Para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, existe $S_A \in \mathrm{End}_{\mathscr{A}}(A)$ tal que $\nabla_A \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & S_A \end{pmatrix} \Delta_A = 0$, es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \coprod A \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & S_A \end{pmatrix}"] & A \coprod A \arrow[d, "\nabla_A"] \\ A \arrow[u, "\Delta_A"] \arrow[r, "0"'] & A. \end{tikzcd}$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Como $\mathscr{A}$ tiene coproductos finitos, por el inciso (4) de la Observación 0.5.39 y el inciso (2) de la Observación 1.3.2, se sigue que $\mathscr{A}$ es una categoría con objeto cero. Más aún, por el inciso (3), concluimos que $\mathscr{A}$ es semiaditiva. Luego, por el Teorema 1.2.5 y la Proposición 1.1.21 se obtienen las condiciones (b) y (c), respectivamente.

Sean $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathscr{A}}(A)$. Por el inciso (c) del Lema 1.2.10, tenemos que

$$1_A + \alpha = \nabla_A \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Delta_A.$$

Luego, como $\mathrm{End}_{\mathscr{A}}(A)$ es un grupo abeliano, basta tomar $S_A := -1_A$ para obtener (d).

($\Leftarrow$) Por las condiciones (a), (b) y (c), tenemos que $\mathscr{A}$ es una categoría con objeto cero y biproductos finitos. Por el Teorema 1.2.11 y el Lema 1.2.10, tenemos que $\mathscr{A}$ es semiaditiva y que, para cualesquiera $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ tiene estructura de monoide abeliano dado por

$$\alpha + \beta = \nabla_A \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Delta_A.$$

Luego, por la condición (d), tenemos que existe $S_A \in \mathrm{End}_{\mathscr{A}}(A)$ tal que $1_A + S_A = 0$. Por lo tanto, para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$, se tiene que

$$\alpha + \alpha S_A = \alpha(1_A + S_A) = \alpha 0 = 0,$$

por lo que $-\alpha = \alpha S_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$, de donde se sigue que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ es un grupo abeliano. □

Ejemplo 1.4.3 $\mathrm{Mod}(R)$ es una categoría aditiva.

Observación 1.4.4 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathscr{A}$ una categoría aditiva.

(1) El universo de las categorías semiaditivas con coproductos finitos es dualizante.

En efecto: Se sigue de la Observación 1.2.2 y de notar que la condición (c) del Teorema 1.2.12 es auto dual.

(2) El universo de las categorías aditivas es dualizante.

En efecto: Se sigue de observar que las condiciones (a), (b), (c) y (d) del Teorema 1.4.2 son auto duales.

Definición 1.4.5 Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva, $\chi \subseteq \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ una clase de objetos en $\mathscr{A}$ y $\Phi \subseteq \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ una clase de morfismos en $\mathscr{A}$. Entonces,

(a) χ es *cerrada por isomorfismos* en $\mathscr{A}$ si para cada isomorfismo $X \simeq W$ en $\mathscr{A}$, con $X \in \chi$, se tiene que $W \in \chi$;

(b) χ es *cerrada por sumas directas finitas* en $\mathscr{A}$ si para cualesquiera $A, B \in \chi$ se tiene que el biproducto $A \bigoplus B$ en $\mathscr{A}$ está en χ.

(c) χ es *cerrada por sumandos directos* en $\mathscr{A}$ si para cada biproducto $X = Y \bigoplus Z$ en $\mathscr{A}$, con $X \in \chi$, se tiene que $Y, Z \in \chi$;

(d) Φ es *cerrada por composiciones* si, para cualesquiera $f, g \in \Phi$ tales que existe $fg \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$, se tiene que $fg \in \Phi$.

Definición 1.4.6 Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva. Una *subcategoría aditiva* de $\mathscr{A}$ es una subcategoría $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{A}'$ es una categoría aditiva y todo coproducto finito en $\mathscr{A}'$ es un coproducto en $\mathscr{A}$.

Observación 1.4.7 Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y $\mathscr{A}'$ una subcategoría aditiva de $\mathscr{A}$. Si $\mathrm{Obj}(\mathscr{A}')$ es cerrada por sumandos directos en $\mathscr{A}$, entonces es cerrada por isomorfismos en $\mathscr{A}$.

En efecto: Sea $\varphi : X \xrightarrow{\sim} W$ en $\mathscr{A}$, con $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}')$. Dado que $\mathscr{A}'$ tiene coproductos finitos, en particular existe un coproducto vacío en $\mathscr{A}'$, el cual es un objeto cero 0 en $\mathscr{A}$. Notando que $W \bigoplus 0 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ junto con los morfismos φ^{-1} y $0_{0,X}$ es un biproducto en $\mathscr{A}$ para X, concluimos que $W \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}')$.

1.5. Funtores aditivos

Definición 1.5.1 Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ $\mathbb{Z}$-categorías. Decimos que:

(a) un funtor covariante $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es *aditivo* si $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y))$ es un morfismo en Ab para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$;

(b) un funtor contravariante $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es *aditivo* si $G : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(G(Y), G(X))$ es un morfismo en Ab para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

Observación 1.5.2

(1) La composición de funtores aditivos es un funtor aditivo.

(2) Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ $\mathbb{Z}$-categorías. Entonces, tenemos la siguiente serie de equivalencias

$$\begin{aligned} F : \mathscr{C} \to \mathscr{D} \text{ es aditivo} &\iff F^{\mathrm{op}} = D_{\mathscr{D}} \circ F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}^{\mathrm{op}} \text{ es aditivo} \\ &\iff F_{\mathrm{op}} = F \circ D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D} \text{ es aditivo} \\ &\iff F_{\mathrm{op}}^{\mathrm{op}} = D_{\mathscr{D}} \circ F \circ D_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}^{\mathrm{op}} \text{ es aditivo,} \end{aligned}$$

independientemente de la varianza del funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$.

En efecto: Se sigue de que el funtor de dualidad entre $\mathbb{Z}$-categorías sea un funtor aditivo y de (1).

(3) Sean $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ y $\mathscr{D}$ $\mathbb{Z}$-categorías, y $H : \mathscr{C}' \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un bifuntor. Entonces, el bifuntor H es aditivo si, y sólo si, los funtores $H(X', -) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $H(-, X) : \mathscr{C}' \to \mathscr{D}$ son aditivos para cualesquiera $X' \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}')$ y $H \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

Ejemplo 1.5.3 Sean $\mathscr{C}$ una $\mathbb{Z}$-categoría y $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

(1) El funtor Hom-covariante $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, -) : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ es aditivo.

(2) El funtor Hom-contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, X) : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ es aditivo.

(3) El bifuntor Hom $\mathrm{Hom}(-,-):\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{C}\to \mathrm{Ab}$ es aditivo[2].

Lema 1.5.4 Los funtores aditivos entre categorías preaditivas mandan objetos cero en su dominio en objetos cero en su codominio.

Demostración. Sean $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ un funtor aditivo, con $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías preaditivas, y $0\in\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ un objeto cero en $\mathscr{C}$. Como $F:\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(0)\to\mathrm{End}_{\mathscr{D}}(F(0))$ es un morfismo de grupos abelianos y $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(0)=\{1_0=0_{0,0}\}$, se tiene que $1_{F(0)}=F(1_0)=0_{F(0),F(0)}$. Por el inciso (3) de la Observación 1.1.2, se sigue que $F(0)$ es un objeto cero en $\mathscr{D}$. □

Observación 1.5.5 El Lema 1.5.4 es similar a cómo, en topología algebraica, cualquier función punteada manda al punto distinguido de su dominio en el punto distinguido de su contradominio. Recordando que todas las categorías preaditivas son categorías con objeto cero, puede que esta similitud sea la razón por la cual algunas fuentes le dan a las categorías con objeto cero el nombre de *categorías punteadas*.

Definición 1.5.6 Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías aditivas. Decimos que:

(a) Un funtor covariante $F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ *preserva coproductos finitos* en $\mathscr{A}$ si para todo coproducto $\{A_i\xrightarrow{\mu_i}\bigoplus_{i\in I}A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{A}$, con I finito, se tiene que $F(\bigoplus_{i\in I}A_i)=\bigoplus_{i\in I}F(A_i)$ y $\left\{F(A_i)\xrightarrow{F(\mu_i)}\bigoplus_{i\in I}F(A_i)\right\}_{i\in I}$ es un coproducto en $\mathscr{B}$.

(b) Un funtor contravariante $G:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ *manda productos finitos* en $\mathscr{A}$ *en coproductos finitos* en $\mathscr{B}$ si el funtor $G_{\mathrm{op}}=G\circ D_{\mathscr{A}^{\mathrm{op}}}:\mathscr{A}^{\mathrm{op}}\to\mathscr{B}$ preserva coproductos finitos en $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$.

Lema 1.5.7 Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías aditivas, $X=\bigoplus_{i=1}^n X_i$ y $Y=\bigoplus_{j=1}^n Y_j$ en $\mathscr{A}$, $F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ un funtor que preserva coproductos finitos en $\mathscr{A}$ y $\alpha\in\mathrm{Mat}_{m\times n}(X,Y)$. Consideremos $\overline{\alpha}:=\sum_{t,r}\mu_t^Y[\alpha]_{t,r}\pi_r^X\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)$. Entonces

$$[\varphi_{FY,FX}(F(\overline{\alpha}))]_{i,j}=F([\alpha]_{i,j})\quad\forall i,j.$$

Es decir,la matriz asociada a $F(\alpha)\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(FX,FY)$, se obtiene de α, aplicando F a cada elemento de dicha matriz.

Demostración. Sea $(i,j)\in[1,n]\times[1,m]$. Por la Proposición 1.2.8, tenemos que

$$\begin{aligned}
[\varphi_{FY,FX}(F(\overline{\alpha}))]_{i,j} &= \left[\varphi_{FY,FX}\left(F\left(\sum_{t,r}\mu_t^Y[\alpha]_{t,r}\pi_r^X\right)\right)\right]_{i,j}\\
&= \left[\varphi_{FY,FX}\left(\sum_{t,r}\left(F\left(\mu_t^Y[\alpha]_{t,r}\pi_r^X\right)\right)\right)\right]_{i,j} && (F\text{ es aditivo})\\
&= \left[\varphi_{FY,FX}\left(\sum_{t,r}\left(F\left(\mu_t^Y\right)F\left([\alpha]_{t,r}\right)F\left(\pi_r^X\right)\right)\right)\right]_{i,j}\\
&= \left[\varphi_{FY,FX}\left(\sum_{t,r}\mu_t^{FY}[F(\alpha)]_{t,r}\pi_r^{FX}\right)\right]_{i,j} && (F\text{ preserva coproductos})\\
&= \left[\varphi_{FY,FX}\left(\varphi_{FY,FX}^{-1}(F(\alpha))\right)\right]_{i,j}\\
&= [F(\alpha)]_{i,j}\\
&= F([\alpha]_{i,j}).
\end{aligned}$$

□

[2] Ver el inciso (4) de la Observación 1.3.2.

Teorema 1.5.8 Sea $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor entre categorías aditivas. Entonces, F es aditivo si, y sólo si, F preserva coproductos finitos en $\mathscr{A}$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sean $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $\{A_i \xrightarrow{\mu_i} A\}_{i\in I}$, con I finito, tal que $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ con $\{\mu_i\}_{i\in I}$ como inclusiones naturales.

Supongamos que $I = \varnothing$. Entonces, por la Observación 1.1.19, tenemos que A es un objeto cero en $\mathscr{A}$. Luego, del Lema 1.5.4 se sigue que $F(A)$ es un objeto cero en $\mathscr{B}$, y por la misma Observación anterior, tenemos que $F(A)$ es un coproducto en $\mathscr{B}$.

Supongamos ahora que $I \neq \varnothing$. Podemos suponer que $I = \{1, 2, ..., n\}$. Por la Proposición 1.2.3, existe una familia de morfismos $\{A \xrightarrow{\pi_i} A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{A}$ tales que $\pi_i\mu_j = \delta_{i,j}^A$ para cualesquiera $i, j \in [1, n] \times [1, n]$ y $\sum_{i=1}^n \mu_i\pi_i = 1_A$. Luego, por ser F un funtor aditivo, se tiene que

$$F(\pi_i)F(\mu_j) = \delta_{i,j}^{F(A)} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n F(\mu_i)F(\pi_i) = 1_{F(A)}.$$

Por ende, de la Proposición 1.2.3 se sigue que $F(A) = \bigoplus_{i=1}^n F(A_i)$ con inclusiones naturales $\left\{F(A_i) \xrightarrow{F(\mu_i)} F(A)\right\}_{i=1}^n$.

$(\Leftarrow)$ Sean $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$. Por el Lema 1.2.10, tenemos que

$$\begin{aligned} F(\alpha+\beta) &= F\left(X \xrightarrow{\alpha+\beta} Y\right) \\ &= F\left(X \xrightarrow{\binom{\alpha}{\beta}} Y \bigoplus Y \xrightarrow{(1_Y\ 1_Y)} Y\right) \\ &= F(X) \xrightarrow{\binom{F(\alpha)}{F(\beta)}} F\left(Y \bigoplus Y\right) \xrightarrow{(1_{F(Y)}\ 1_{F(Y)})} F(Y) \qquad \text{(Lema 1.5.7)} \\ &= F(\alpha) + F(\beta). \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 1.5.9 Sea $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor contravariante entre categorías aditivas. Entonces, G es aditivo si, y sólo si, G manda productos finitos en $\mathscr{A}$ en coproductos finitos en $\mathscr{B}$.

Demostración. Por el inciso (2) de la Observación 1.5.2 se tiene que G es aditivo si, y sólo si, G_{op} es aditivo. Ahora, como $G_{op} = G \circ D_{A^{op}}$ es un funtor covariante, por el Teorema 1.5.8 tenemos que G_{op} es aditivo si, y sólo si, G_{op} preserva coproductos en $\mathscr{A}^{op}$. De esto se sigue que G sea aditivo es equivalente a que G_{op} preserve coproductos finitos en $\mathscr{A}^{op}$. Dado que la noción dual de coproducto es producto, concluimos que G es aditivo si, y sólo si, G manda productos finitos en $\mathscr{A}$ en coproductos finitos en $\mathscr{B}$. $\square$

Ideales de categorías aditivas

Definición 1.5.10 Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva. Un *ideal* de $\mathscr{A}$ es una clase de morfismos en $\mathscr{A}$

$$J = \bigcup_{(X,Y)\in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})^2} J(X, Y),$$

con $J(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$, tal que satisface las siguientes condiciones.

(I1) Para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, $J(X,Y)$ es un subgrupo abeliano de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)$.

(I2) Para cualesquiera morfismos componibles $W \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\beta} Z$ en $\mathscr{A}$, si $f \in J(X,Y)$, entonces $\beta f \alpha \in J(W,Z)$.

En caso de que J sea un ideal de $\mathscr{A}$, lo denotaremos por $J \trianglelefteq \mathscr{A}$.

Observación 1.5.11 Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y J un ideal de $\mathscr{A}$.

(1) Para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, tenemos la relación de equivalencia $\simeq_{X,Y}$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)$ dada por
$$f \simeq_{X,Y} g \iff f - g \in J(X,Y),$$
la cual nos define una relación de congruencia $\cong$ en $\mathscr{A}$. Por ende, podemos considerar la categoría cociente[3] $\mathscr{A}/\cong$. Dado que esta relación de congruencia está caracterizada por el ideal J, la categoría cociente anterior se conoce como la *categoría cociente de $\mathscr{A}$ sobre J*, y se denota por $\mathscr{A}/J$. Explícitamente,
$$\begin{aligned} \mathrm{Obj}(\mathscr{A}/J) &:= \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}/J}(X,Y) &:= \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)/J(X,Y) & \forall\ X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}/J). \\ \big(g + J(Y,Z)\big)\big(f + J(X,Y)\big) &= gf + J(X,Z) & \forall\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}/J}(X,Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}/J}(Y,Z). \end{aligned}$$

(2) El funtor cociente
$$\begin{gathered} \pi_J : \mathscr{A} \to \mathscr{A}/J, \\ \big(X \xrightarrow{f} Y\big) \mapsto \big(X \xrightarrow{f+J(X,Y)} Y\big) \end{gathered}$$
es pleno, denso y aditivo. En particular, la categoría cociente $\mathscr{A}/J$ es aditiva.

En efecto: La plenitud y aditividad de π_J se siguen de que, por definición, π_J actúa sobre cada grupo abeliano $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)$ como el epimorfismo canónico al grupo cociente $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}/J}(X,Y)$, que es un morfismo de grupos abelianos suprayectivo. La densidad de π_J es trivial, pues el funtor cociente fija objetos. Luego, por la funtorialidad y aditividad de π_J, tenemos que la composición de morfismos en $\mathscr{A}/J$ es blilineal. Más aún, de la existencia de coproductos finitos en $\mathscr{A}$ y la caracterización de coproductos finitos dada por el inciso (b) de la Proposición 1.2.3, se sigue que $\mathscr{A}/J$ tiene coproductos finitos.

(3) Sea $\chi \subseteq \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ una clase de objetos cerrada por sumas directas finitas en $\mathscr{A}$. Entonces, la colección de todos los morfismos que se pueden factorizar a través de algún objeto en χ es un ideal de $\mathscr{A}$.

En efecto: Sean $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $J(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)$ el conjunto de todos los morfismos de X en Y factorizables a través de algún objeto en χ. Supongamos que los morfismos $f_1, f_2 \in J(X,Y)$ se pueden factorizar a través de $J_1, J_2 \in \mathrm{Obj}(\chi)$, respectivamente. Entonces, tenemos los siguientes diagramas conmutativos en $\mathscr{A}$
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, dotted, "j_1"'] & & Y. \\ & J_1 \arrow[ur, dotted, "j_1'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dr, dotted, "j_2"'] & & Y \\ & J_2 \arrow[ur, dotted, "j_2'"'] & \end{tikzcd}$$

[3] Ver la Definición 0.3.11.

Por ende, tenemos que

$$\begin{aligned} f_1 + (-f_2) &= f_1 - f_2 \\ &= j_1'j_1 - j_2'j_2 \\ &= \begin{pmatrix} j_1' & -j_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con $X \xrightarrow{(\, j_1' \; -j_2' \,)} J_1 \bigoplus J_2$ y $J_1 \bigoplus J_2 \xrightarrow{\binom{j_1}{j_2}} Y$ en $\mathscr{A}$. Como χ es cerrada por sumas directas finitas, se sigue que $J_1 \bigoplus J_2 \in \mathrm{Obj}(\chi)$, por lo que $f_1 - f_2 \in J(X,Y)$. Esto implica que $J(X,Y)$ es un subgrupo abeliano de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)$.

Ahora, sean $W \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\beta} Z$ morfismos componibles en $\mathscr{A}$, con $f \in J(X,Y)$. Entonces, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "j"'] & & Y \arrow[r, "\beta"] & Z, \\ & & J \arrow[ur, dotted, "j'"'] & & \end{tikzcd}$$

con $J \in \mathrm{Obj}(\chi)$, de donde se sigue que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "\beta f \alpha"] \arrow[dr, "j\alpha"'] & & Z \\ & J \arrow[ur, "\beta j'"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., que $\beta f \alpha \in J(W,Z)$.

(4) En vista de (3), para una subcategoría plena $\chi \subseteq \mathscr{A}$ cerrada por sumas directas finitas, denotaremos por $\langle \chi \rangle$ al ideal de todos los morfismos que se factorizan a través de algún objeto en χ, y por $\mathscr{A}/\chi := \mathscr{A}/\langle \chi \rangle$ a la categoría cociente asociada a dicho ideal.

Bifuntores aditivos, bimódulos generalizados y matrices asociadas

Definición 1.5.12 Sean $\mathscr{C}$ una $\mathbb{Z}$-categoría, $\mathbb{E} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ un bifuntor aditivo y $A, A', C, C' \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Definimos las correspondencias

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A') \times \mathbb{E}(C,A) &\to \mathbb{E}(C,A'), \\ (a,\delta) &\mapsto a \cdot \delta := \mathbb{E}(C,a)(\delta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(C,A) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C',C) &\to \mathbb{E}(C',A), \\ (\delta,c) &\mapsto \delta \cdot c := \mathbb{E}(c^{\mathrm{op}},A)(\delta). \end{aligned}$$

Proposición 1.5.13 Sean $\mathscr{C}$ una $\mathbb{Z}$-categoría y $\mathbb{E} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ un bifuntor aditivo. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) $a \cdot (\delta_1 + \delta_2) = a \cdot \delta_1 + a \cdot \delta_2 \quad \forall\, a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A'),\ \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{E}(C,A)$.

(b) $(a_1 + a_1) \cdot \delta = a_1 \cdot \delta + a_2 \cdot \delta \quad \forall\, a_1, a_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A'),\ \delta \in \mathbb{E}(C,A)$.

(c) $1_A \cdot \delta = \delta \quad \forall\, \delta \in \mathbb{E}(C, A)$.

(d) $(a'a) \cdot \delta = a' \cdot (a \cdot \delta) \quad \forall\, a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A'), a' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A', A''), \delta \in \mathbb{E}(C, A)$.

(e) $(\delta_1 + \delta_2) \cdot c = \delta_1 \cdot c + \delta_2 \cdot c \quad \forall\, c \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C', C),\; \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{E}(C, A)$.

(f) $\delta \cdot (c_1 + c_2) = \delta \cdot c_1 + \delta \cdot c_2 \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C', C),\; \delta \in \mathbb{E}(C, A)$.

(g) $\delta \cdot 1_C = \delta \quad \forall\, \delta \in \mathbb{E}(C, A)$.

(h) $\delta \cdot (cc') = (\delta \cdot c) \cdot c' \quad \forall\, c \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C', C), c' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C'', C'), \delta \in \mathbb{E}(C, A)$.

(i) $a \cdot (\delta \cdot c) = (a \cdot \delta) \cdot c \quad \forall\, a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A'), c \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C', C), \delta \in \mathbb{E}(C, A)$.

(j) $0 \cdot \delta = 0 = \delta \cdot 0 \quad \forall\, \delta \in \mathbb{E}(C, A)$.

Demostración. Por el inciso (3) de la Observación 1.5.2 sabemos que, para cualquier $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, los funtores $\mathrm{Hom}(X, -) : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}, \mathrm{Hom}(-, X) : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}, \mathbb{E}(X, -) : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ y $\mathbb{E}(-, X) : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ son aditivos.

(a) Sean $a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A')$ y $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{E}(C, A)$. Entonces,

$$\begin{aligned} a \cdot (\delta_1 + \delta_2) &= \mathbb{E}(C, a)(\delta_1 + \delta_2) \\ &= \mathbb{E}(C, a)(\delta_1) + \mathbb{E}(C, a)(\delta_2) \\ &= a \cdot \delta_1 + a \cdot \delta_2. \end{aligned}$$

(b) Sean $a_1, a_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A')$ y $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$. Entonces,

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) \cdot \delta &= \mathbb{E}(C, a_1 + a_2)(\delta) \\ &= \mathbb{E}(C, a_1)(\delta) + \mathbb{E}(C, a_2)(\delta) \\ &= a_1 \cdot \delta + a_2 \cdot \delta. \end{aligned}$$

(c) Sea $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$. Entonces,

$$\begin{aligned} 1_A \cdot \delta &= \mathbb{E}(C, 1_A)(\delta) \\ &= 1_{\mathbb{E}(C,A)}\delta \\ &= \delta. \end{aligned}$$

(d) Sean $a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A'), a' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A', A'')$ y $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$. Entonces,

$$\begin{aligned} (a'a \cdot \delta) &= \mathbb{E}(a'a, C)(\delta) \\ &= (\mathbb{E}(a', C)\mathbb{E}(a, C))(\delta) \\ &= \mathbb{E}(a', C)(\mathbb{E}(a, C)(\delta)) \\ &= a' \cdot (a \cdot \delta). \end{aligned}$$

(e) Análogo a (a).

(f) Análogo a (b).

(g) Análogo a (c).

(h) Análogo a (d).

(i) Observemos que

$$\begin{aligned} a\cdot(\delta\cdot c) &= \mathbb{E}(1_{C'}{}^{\mathrm{op}}, a)(\delta\cdot c)\\ &= \mathbb{E}(1_{C'}{}^{\mathrm{op}}, a)\mathbb{E}(c^{\mathrm{op}}, 1_A)(\delta)\\ &= \mathbb{E}(c^{\mathrm{op}}, a)(\delta)\\ &= \mathbb{E}(c^{\mathrm{op}}, 1_{A'})\mathbb{E}(1_C{}^{\mathrm{op}}, a)(\delta)\\ &= \mathbb{E}(c^{\mathrm{op}}, 1_{A'})(a\cdot\delta)\\ &= (a\cdot\delta)\cdot c. \end{aligned}$$

(j) Se sigue de que los morfismos de grupos fijan a los elementos neutros.

□

Observación 1.5.14 Recordemos que, en el inciso (7) del Ejemplo 0.1.3, vimos que podemos pensar a un monoide como una categoría con un solo objeto. De forma similar, los incisos (a) a (i) de la Proposición 1.5.13 nos dicen que podemos interpretar a un bifuntor aditivo sobre una $\mathbb{Z}$-categoría con un solo objeto como un bimódulo. Más generalmente, esta Proposición nos dice que un bifuntor aditivo $\mathbb{E}:\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{C}\to \mathrm{Ab}$, con $\mathscr{C}$ una $\mathbb{Z}$-categoría, puede ser considerado como un bimódulo sobre los anillos generalizados $\mathrm{Mor}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})$ y $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, cuyos productos están parcialmente definidos, en general.

A continuación, generalizaremos la Definición 0.5.42, de matrices asociadas al bifuntor aditivo Hom, a cualquier bifuntor aditivo y demostraremos un resultado análogo a la Proposición 0.5.43 para estas nuevas matrices. Para lograr esto, necesitaremos restringirnos al uso de biproductos finitos, por lo que consideraremos categorías aditivas, cuyos productos son $\mathbb{Z}$-categorías[4].

Definición 1.5.15 Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva, $\mathbb{E}:\mathscr{A}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{A}\to\mathrm{Ab}$ un bifuntor aditivo y $C=\bigoplus_{j=1}^{n} C_j$, $A=\bigoplus_{i=1}^{m} A_i$ en $\mathscr{A}$, con m y n enteros positivos. Denotaremos por $\mathrm{Mat}^{\mathbb{E}}_{m\times n}(C,A)$ al conjunto de matrices α, de orden $m\times n$, con entradas $[\alpha]_{i,j}\in\mathbb{E}(C_j,A_i)$. Para $\alpha,\beta\in\mathrm{Mat}^{\mathbb{E}}_{m\times n}(C,A)$, definimos

$$\alpha=\beta \iff [\alpha]_{i,j}=[\beta]_{i,j}\quad \forall\ (i,j)\in[1,m]\times[1,n].$$

Llamaremos $\mathbb{E}$-*matrices* a los elementos de $\mathrm{Mat}^{\mathbb{E}}_{m\times n}(C,A)$. Notamos que[5] $\mathrm{Mat}^{\mathrm{Hom}}_{m\times n}(C,A)=\mathrm{Mat}_{m\times n}(C,A)$, por lo que podemos llamar Hom-matrices a los elementos de $\mathrm{Mat}_{m\times n}(C,A)$.

Observación 1.5.16 Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva, $\mathbb{E}:\mathscr{A}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{A}\to\mathrm{Ab}$ un bifuntor aditivo y $C=\bigoplus_{j=1}^{n} C_j$, $A=\bigoplus_{i=1}^{m} A_i$ en $\mathscr{A}$, con m y n enteros positivos. Entonces, el conjunto de $\mathbb{E}$-matrices $\mathrm{Mat}^{\mathbb{E}}_{m\times n}(C,A)$ tiene estructura de grupo abeliano, inducida de la de $\mathbb{E}(C,A)$, con la operación de suma de matrices usual y el elemento neutro formado por la matriz cuya entrada $[0]_{i,j}$ es el elemento neutro del grupo abeliano $\mathbb{E}(C_j,A_i)$.

Proposición 1.5.17 Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva, $\mathbb{E}:\mathscr{A}^{\mathrm{op}}\times\mathscr{A}\to\mathrm{Ab}$ un bifuntor aditivo y $C=\bigoplus_{j=1}^{n} C_j$, $A=\bigoplus_{i=1}^{m} A_i$ en $\mathscr{A}$, con m y n enteros positivos. Entonces, la correspondencia

$$\Phi^{\mathbb{E}}=\Phi^{\mathbb{E}}_{A,C}:\mathbb{E}(C,A)\to\mathrm{Mat}^{\mathbb{E}}_{m\times n}(C,A),$$

dada por $[\Phi^{\mathbb{E}}(\delta)]_{i,j}:=\pi_i^A\cdot\delta\cdot\mu_j^C$ para todo $(i,j)\in[1,m]\times[1,n]$, es un isomorfismo en Ab.

[4] Ver el inciso (4) de la Observación 1.3.2.

[5] Ver la Definición 0.5.42.

Demostración. De los incisos (a) y (e) de la Proposición 1.5.13, se sigue que $\Phi^{\mathbb{E}}$ es un morfismo de grupos abelianos.

Sean $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{E}(C, A)$ tales que $\Phi^{\mathbb{E}}(\delta_1) = \Phi^{\mathbb{E}}(\delta_2)$. Entonces, tenemos que

$$\pi_i^A \cdot \delta_1 \cdot \mu_j^C = \pi_i^A \cdot \delta_2 \cdot \mu_j^C$$

para todo $(i, j) \in [1, m] \times [1, n]$. Luego, de la Proposición 1.5.13, se sigue que

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mu_i^A \cdot (\pi_i^A \cdot \delta_1 \cdot \mu_j^C) \cdot \pi_j^C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mu_i^A \cdot (\pi_i^A \cdot \delta_1 \cdot \mu_j^C) \cdot \pi_j^C \\
\Downarrow \\
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (\mu_i^A \pi_i^A) \cdot \delta_1 \cdot (\mu_j^C \pi_j^C) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (\mu_i^A \pi_i^A) \cdot \delta_2 \cdot (\mu_j^C \pi_j^C) \\
\Downarrow \\
\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i^A \pi_i^A\right) \cdot \delta_1 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j^C \pi_j^C\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i^A \pi_i^A\right) \cdot \delta_2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j^C \pi_j^C\right) \\
\Downarrow \\
1_A \cdot \delta_1 \cdot 1_C = 1_A \cdot \delta_2 \cdot 1_C \qquad \text{(Proposición 1.2.3)} \\
\Downarrow \\
\delta_1 = \delta_2,
\end{gathered}$$

por lo que $\Phi^{\mathbb{E}}$ es inyectiva.

Por otro lado, sea $\alpha \in \mathrm{Mat}^{\mathbb{E}}_{m \times n}(C, A)$. Entonces, tenemos que $[\alpha]_{i,j} \in \mathbb{E}(C_j, A_i)$ para todo $(i, j) \in [1, m] \times [1, n]$. Consideremos $\delta := (\sum_{i=1}^{m} \mu_i^A) \cdot [\alpha]_{i,j} \cdot (\sum_{j=1}^{n} \pi_j^C) \in \mathbb{E}(C, A)$. Por la Proposición 1.5.13, para todo $(i', j') \in [1, m] \times [1, n]$, tenemos que

$$\begin{aligned}
[\Phi^{\mathbb{E}}(\delta)]_{i',j'} &= \pi_{i'}^A \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i^A\right) \cdot [\alpha]_{i,j} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \pi_j^C\right)\right) \cdot \mu_{j'}^C \\
&= \left(\pi_{i'}^A \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i^A\right)\right) \cdot [\alpha]_{i,j} \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{n} \pi_j^C\right) \mu_{j'}^C\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \pi_{i'}^A \mu_i^A\right) \cdot [\alpha]_{i,j} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \pi_j^C \mu_{j'}^C\right) && \text{(bilinealidad en } \mathscr{A}\text{)} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \delta_{i',i}^A\right) \cdot [\alpha]_{i,j} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \delta_{j,j'}^C\right) && \text{(Proposición 1.2.4)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{i',i}^A \cdot [\alpha]_{i,j} \cdot \delta_{j,j'}^C\right) \\
&= 1_{A_{i'}} \cdot [\alpha]_{i',j'} \cdot 1_{C_{j'}} \\
&= [\alpha]_{i',j'},
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\Phi^{\mathbb{E}}$ es suprayectiva. Por lo tanto, $\Phi^{\mathbb{E}}$ es un isomorfismo de grupos abelianos. $\square$

Corolario 1.5.18 Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva. Entonces, la correspondencia φ de la Proposición 0.5.43 es un isomorfismo en Ab.

Demostración. Se sigue de aplicar la Proposición 1.5.17 al bifuntor aditivo Hom. □

Por último, veremos que el producto de Hom-matrices con $\mathbb{E}$-matrices, que definiremos a continuación, es compatible con las acciones de bimódulo vistas en la Proposición 1.5.13.

Definición 1.5.19 Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva, $\mathbb{E} : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ un bifuntor aditivo, $C = \bigoplus_{j=1}^{n} C_j$, $A = \bigoplus_{i=1}^{m} A_i$ en $\mathscr{A}$, con m y n enteros positivos, y $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$.

(a) Si $A' = \bigoplus_{k=1}^{p} A'_k$, con p un entero positivo, y $a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A')$, definimos el producto $\varphi_{A',A}(a)\Phi^{\mathbb{E}}_{A,C}(\delta)$ con entradas

$$[\varphi_{A',A}(a)\Phi^{\mathbb{E}}_{A,C}(\delta)]_{k,j} := \sum_{i=1}^{m}[\varphi_{A',A}(a)]_{k,i} \cdot [\Phi^{\mathbb{E}}_{A,C}(\delta)]_{i,j} \quad \forall\ (k,j) \in [1,p] \times [1,n].$$

(b) Si $C' = \bigoplus_{l=1}^{q} C'_l$, con q un entero positivo, y $c \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C', C)$, definimos el producto $\Phi^{\mathbb{E}}_{A,C}(\delta)\varphi_{C,C'}(c)$ con entradas

$$[\Phi^{\mathbb{E}}_{A,C}(\delta)\varphi_{C,C'}(c)]_{i,l} := \sum_{j=1}^{n}[\Phi^{\mathbb{E}}_{A,C}(\delta)]_{i,j} \cdot [\varphi_{C,C'}(c)]_{j,l} \quad \forall\ (i,l) \in [1,m] \times [1,q].$$

Notamos que, en ambos casos, el producto de una Hom-matriz con una $\mathbb{E}$-matriz da como resultado una $\mathbb{E}$-matriz.

Proposición 1.5.20 Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva, $\mathbb{E} : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ un bifuntor aditivo, $C = \bigoplus_{j=1}^{n} C_j$, $A = \bigoplus_{i=1}^{m} A_i$ en $\mathscr{A}$, con m y n enteros positivos y $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones.

(a) $\Phi^{\mathbb{E}}_{A',C}(a \cdot \delta) = \varphi_{A',A}(a)\Phi^{\mathbb{E}}_{A,C}(\delta) \quad \forall\ A' = \bigoplus_{k=1}^{p} A'_k$ en $\mathscr{A}$, $a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A')$.

(b) $\Phi^{\mathbb{E}}_{A,C'}(\delta \cdot c) = \Phi^{\mathbb{E}}_{A,C}(\delta)\varphi_{C,C'}(c) \quad \forall\ C' = \bigoplus_{l=1}^{q} C'_l$ en $\mathscr{A}$, $c \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C', C)$.

Demostración.

(a) Sean $A' = \bigoplus_{k=1}^{p}$ en $\mathscr{A}$ y $a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A')$. Entonces, para todo $(k,j) \in [1,p] \times [1,n]$, tenemos que

$$\begin{aligned}
[\Phi^{\mathbb{E}}_{A',C}(a \cdot \delta)]_{k,j} &= \pi^{A'}_k \cdot (a \cdot \delta) \cdot \mu^{C}_j \\
&= \left(\pi^{A'}_k a\right) \cdot \delta \cdot \mu^{C}_j && \text{(Proposición 1.5.13(d))} \\
&= \left(\pi^{A'}_k a\left(\sum_{i=1}^{m} \mu^{A}_i \pi^{A}_i\right)\right) \cdot \delta \cdot \mu^{C}_j && \text{(Proposición 1.2.3)} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \pi^{A'}_k a \mu^{A}_i \pi^{A}_i\right) \cdot \delta \cdot \mu^{C}_j && \text{(bilinealidad en } \mathscr{A}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\pi^{A'}_k a \mu^{A}_i \pi^{A}_i\right) \cdot \delta \cdot \mu^{C}_j && \text{(Proposición 1.5.13(b))} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\pi^{A'}_k a \mu^{A}_i\right) \cdot (\pi^{A}_i \cdot \delta \cdot \mu^{C}_j) && \text{(Proposición 1.5.13(d))} \\
&= \sum_{i=1}^{m} [\varphi_{A',A}(a)]_{k,i} \cdot [\Phi^{\mathbb{E}}_{A,C}(\delta)]_{i,j} \\
&= [\varphi_{A',A}(a)\Phi^{\mathbb{E}}_{A,C}(\delta)]_{k,j}.
\end{aligned}$$

(b) Análogo a (a).

□

Capítulo 2

Categorías exactas

Las categorías exactas[1] se componen de una categoría aditiva y una clase de cierto tipo de sucesiones de morfismos —cuya definición involucra las nociones categóricas de núcleo y conúcleo— que verifica una serie de axiomas descritos a continuación; en tal caso, dichas sucesiones juegan un rol análogo al de las sucesiones exactas cortas[2] en las categorías abelianas[3], por lo que reciben el mismo nombre.

2.1. Definición de categoría exacta

La definición de categoría exacta que presentamos a continuación es debida a Yoneda[Yon60, §2]. Una axiomatización minimal está dada por Keller[Kel90, Appendix A].

Definición 2.1.1 Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva.

(a) Dos morfismos componibles $A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A''$ forman un *par núcleo-conúcleo* (i, p) en $\mathscr{A}$ si i es el núcleo de p y p es el conúcleo de i.

(b) Dos pares núcleo-conúcleo $(i_1, p_1), (i_2, p_2)$ son *isomorfos* si existen isomorfismos f, g y h en $\mathscr{A}$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_1' \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"', "\wr"] & A_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "g"', "\wr"] & A_1'' \arrow[d, "h", "\wr"'] \\ A_2' \arrow[r, "i_2"'] & A_2 \arrow[r, "p_2"'] & A_2'' \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 2.1.2 Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y $\mathscr{E}$ una clase de pares núcleo-conúcleo en $\mathscr{A}$.

(a) Un *monomorfismo admisible* es un morfismo i para el cual existe un morfismo p tal que $(i, p) \in \mathscr{E}$. Denotaremos a los monomorfismos admisibles en diagramas como $\rightarrowtail$.

(b) Dualmente, un *epimorfismo admisible* es un morfismo p para el cual existe un morfismo i tal que $(i, p) \in \mathscr{E}$. Denotaremos a los epimorfismos admisibles en diagramas como $\twoheadrightarrow$.

[1] Recordamos que utilizamos el término *categoría exacta* para referirnos a una categoría exacta en el sentido de Quillen, como se mencionó en la Introducción.

[2] Ver la Definición A.4.2.

[3] En particular, toda categoría abeliana puede ser vista como una categoría exacta, por lo que podemos considerar a estas últimas como una generalización de las primeras.

Definición 2.1.3 Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva. Una clase $\mathscr{E}$ de pares núcleo-conúcleo es una *estructura exacta* sobre $\mathscr{A}$ si es cerrada por isomorfismos y satisface los siguientes axiomas.

(E0) Los morfismos identidad en $\mathscr{A}$ son monomorfismos admisibles.

(E0)* Los morfismos identidad en $\mathscr{A}$ son epimorfismos admisibles.

(E1) La clase de monomorfismos admisibles es cerrada por composiciones.

(E1)* La clase de epimorfismos admisibles es cerrada por composiciones.

(E2) La suma fibrada de un monomorfismo admisible a lo largo de un morfismo arbitrario existe y produce un monomorfismo admisible.

(E2)* El producto fibrado de un epimorfismo admisible a lo largo de un morfismo arbitrario existe y produce un epimorfismo admisible.

Los axiomas (E2) y (E2)* se sintetizan en los diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{PO}"] & B \arrow[d, dotted] \\ A' \arrow[r, tail, dotted] & B' \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, two heads, dotted] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\text{PB}"] & B' \arrow[d] \\ A \arrow[r, two heads] & B, \end{tikzcd}$$

respectivamente.

Definición 2.1.4 Una *categoría exacta* es un par $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ donde $\mathscr{A}$ es una categoría aditiva y $\mathscr{E}$ es una estructura exacta sobre $\mathscr{A}$. Los elementos de $\mathscr{E}$ son llamados *sucesiones exactas cortas*.

Observación 2.1.5

(1) La definición anterior de categoría exacta es extrínseca, pues se debe especificar una clase particular de sucesiones exactas cortas —la estructura exacta— para obtener una categoría exacta.

(2) El universo de las categorías exactas es dualizante.

En efecto: Se sigue del inciso (2) de la Observación 1.4.4 y de que, por la Definición 2.1.3, $\mathscr{E}$ es una estructura exacta sobre $\mathscr{A}$ si, y sólo si, $\mathscr{E}^{\text{op}}$ es una estructura exacta sobre $\mathscr{A}^{\text{op}}$

(3) Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y 0 un objeto cero en $\mathscr{A}$. Entonces, para cualquier $A \in \text{Obj}(\mathscr{A})$, tenemos los pares núcleo-conúcleo $(1_A, 0_{A,0})$ y $(0_{0,A}, 1_A)$. En particular, tenemos que $(1_0, 1_0)$ forma un par núcleo-conúcleo.

En efecto: Se sigue de la Observación 1.1.33 y un resultado dual.

(4) Los isomorfismos son monomorfismos admisibles y epimorfismos admisibles.

En efecto: Sea $A \xrightarrow{f} B$ un isomorfismo en una categoría exacta. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}", "\wr"'] & 0 \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, tail, "1_A"'] & A \arrow[r, two heads] & 0, \end{tikzcd}$$

donde el segundo renglón es un sucesión exacta por (3) y (E0). Dado que la clase de sucesiones exactas cortas es cerrada por isomorfismos, se sigue que f es un monomorfismo admisible. Más aún, de (2) y el principio de dualidad, se sigue que f es un epimorfismo admisible.

(5) Los axiomas anteriores son redundantes y pueden simplificarse. Por ejemplo, en vez de suponer (E0) y (E0)*, supongamos que el elemento identidad 1_0 del objeto cero de $\mathscr{A}$ es un epimorfismo admisible. Entonces, para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ 0 \arrow[r, two heads, "1_0"'] & 0. \end{tikzcd} \tag{2.1.1}$$

Sean $P \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $\beta_1 : P \to 0, \beta_2 : P \to A$ tales que $1_0\beta_1 = 0\beta_2$. Entonces, $\beta_2 : P \to A$ es el único morfismo en $\mathscr{A}$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[drr, bend left, "\beta_2"] \arrow[dr, dotted, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1"'] & & \\ & A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ & 0 \arrow[r, two heads, "1_0"'] & 0. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, el diagrama conmutativo (2.1.1) es un producto fibrado. Por (E2)*, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "1_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & A \arrow[d] \\ 0 \arrow[r, two heads, "1_0"'] & 0 \end{tikzcd} \qquad \forall\ A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}),$$

de donde se sigue (E0)*. Luego, como 1_0 es un núcleo de sí mismo, entonces también es un monomorfismo admisible. Dualmente, se puede verificar que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, tail, "1_0"] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "1_A"'] & A \end{tikzcd}$$

es una suma fibrada para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Luego, por (E2), se sigue (E0). Notemos que, puesto que 1_0 es conúcleo de sí mismo, si inicialmente hubiéramos supuesto que 1_0 es un monomorfismo admisible habríamos llegado a las mismas conclusiones de manera dual.

Más aún, Keller[Kel90, Appendix A] demostró que es posible prescindir de alguno de los axiomas (E1) o (E1)*, así como reemplazar (E2) por el siguiente axioma:

(E2') Para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ y para todo epimorfismo admisible $p \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B', B)$ existen $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A', B')$ y un epimorfismo admisible $p' : A' \to A$ tales que $fp' = pf'$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, dotted, "f'"] \arrow[d, dotted, two heads, "p'"'] & B' \arrow[d, two heads, "p"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Esto es una consecuencia directa de la Proposición 2.2.12. Alternativamente, podemos reemplazar a (E2)* por el axioma dual de (E2').

(6) Es posible derivar los axiomas de categoría exacta dados por Quillen[Qui72, §2] a partir de los axiomas presentados en (2.1.4), como se muestra en [Büh10].

(7) Keller[Kel90] utiliza los términos *conflación*, *inflación* y *deflación* en vez de sucesión exacta corta, monomorfismo admisible y epimorfismo admisible, respectivamente. Los primeros tres términos serán rescatados en el Capítulo 4 en el contexto de las categorías extrianguladas; sin embargo, en este capítulo nos apegaremos a la terminología utilizada en la definición 2.1.4 por considerarla más descriptiva en el contexto de las categorías exactas.

2.2. Propiedades fundamentales de categorías exactas

Lema 2.2.1 Sean $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ una categoría exacta y $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Entonces, $A \overset{\binom{1}{0}}{\rightarrowtail} A \bigoplus B \xrightarrow{(1\ 0)} \!\!\!\rightarrow B$ y $A \overset{\binom{0}{1}}{\rightarrowtail} A \bigoplus B \xrightarrow{(0\ 1)} \!\!\!\rightarrow B$ son sucesiones exactas cortas.

Demostración. Por el Lema 1.1.4, tenemos la siguiente suma fibrada en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & B \arrow[d, tail, "\binom{0}{1}"] \\ A \arrow[r, tail, "\binom{1}{0}"'] & A \bigoplus B, \end{tikzcd}$$

donde las flechas de arriba y de la izquierda son monomorfismos admisibles por (E2)*, pues $0 \rightarrowtail B \overset{1_B}{\twoheadrightarrow} B$ y $0 \rightarrowtail A \overset{1_A}{\twoheadrightarrow} A$ son sucesiones exactas cortas, mientras que las flechas de abajo y de la derecha son monomorfismos admisibles por (E2). Como por los Lemas 1.1.27 y 1.1.30 los morfismos $\binom{1}{0}$ y $(1\ 0)$ forman un par núcleo-conúcleo y, por definición, $\mathscr{E}$ es cerrada por isomorfismos, se sigue que $\left(\binom{1}{0}, (1\ 0)\right) \in \mathscr{E}$. La demostración de que $\left(\binom{0}{1}, (0\ 1)\right) \in \mathscr{E}$ es análoga. $\square$

Proposición 2.2.2 La clase de sucesiones exactas cortas sobre una categoría exacta es cerrada por sumas directas.

Demostración. Sean $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ una categoría exacta y $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$, $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$ sucesiones exactas cortas. Observemos que, para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, la sucesión

$$A' \bigoplus C \rightarrowtail A \bigoplus C \twoheadrightarrow A''$$

es exacta, pues el segundo morfismo es un epimorfismo admisible por ser la composición de los epimorfismos admisibles $(1\ 0) : A \bigoplus C \twoheadrightarrow A$ y $A \twoheadrightarrow A''$, mientras que el primer morfismo es un monomorfismo admisible por ser un núcleo del segundo morfismo. Similarmente, tenemos los monomorfismos admisibles $A' \oplus B' \rightarrowtail A \oplus B'$ y $A \oplus B' \rightarrowtail A \oplus B$. Por (E1), se sigue que su composición $A' \oplus B' \rightarrowtail A \oplus B$ es un monomorfismo admisible. Finalmente, dado que

$$A' \bigoplus B' \rightarrowtail A \bigoplus B \twoheadrightarrow A'' \bigoplus B''$$

es un par núcleo conúcleo, se sigue que la suma directa de las sucesiones exactas cortas $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$ y $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$ es una sucesión exacta corta. □

Lema 2.2.3 Sean $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ una categoría exacta y consideremos la suma fibrada

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PO}"] & B \arrow[d, "b"] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"'] & B'. \end{tikzcd}$$

Entonces, se cumplen las siguientes condiciones.

(a) Si $p : B \twoheadrightarrow C$ es un conúcleo de i, entonces el morfismo único $p' : B' \to C$ tal que $p'b = p$ y $p'i' = 0$ es un conúcleo de i'.

(b) Si $p' : B' \twoheadrightarrow C$ es un conúcleo de i', entonces $p = p'b$ es un conúcleo de i.

Demostración.

(a) Sea $p : B \twoheadrightarrow C$ un conúcleo de i. Por la propiedad universal de la suma fibrada, existe un único morfismo $p' : B' \to C$ tal que $p'b = p$ y $p'i' = 0$; en particular, por el inciso (5) de la Observación 0.2.2, de la primera ecuación se sigue que p' es un epimorfismo. Supongamos que existe un morfismo $g : B' \to X$ en $\mathscr{A}$ tal que $gi' = 0$. Entonces, $gbi = gi'a = 0$ y, por la propiedad universal del conúcleo, existe un único morfismo $g' : C \to X$ tal que $gb = g'p$. Observemos que

$$\begin{aligned} gb &= g'p \\ &= g'p'b \\ &= g'p'i \\ &= 0 \\ &= gi', \end{aligned}$$

por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \arrow[ddr, bend left, "gf'"] & \\ A' \arrow[r, tail, "i'"'] \arrow[drr, bend right, "gi'"'] & B' \arrow[dr, shift left, "g'p'"] \arrow[dr, shift right, "g"'] & \\ & & X. \end{tikzcd}$$

Luego, por la propiedad universal de la suma fibrada, se sigue que $g'p' = g$. Más aún, como p' es un epimorfismo, g' es el único morfismo tal que $g'p' = g$. Por ende, p' es un conúcleo de i'.

(b) Sea $p' : B' \twoheadrightarrow C$ un conúcleo de i' y consideremos $p = p'b$. Observemos que $pi = p'bi = p'i'a = 0$. Supongamos que existe un morfismo $g : B \to X$ tal que $gi = 0$. Por la propiedad universal de la suma fibrada, existe un único morfismo $\gamma : B' \to X$ tal que $\gamma b = g$ y $\gamma i' = 0$. Entonces, por la propiedad universal del conúcleo, existe un único morfismo $g' : C \to X$ tal que $g'p' = \gamma$. Por ende, $g'p = g'p'b = \gamma b = g$. De la unicidad en la propiedad universal del conúcleo, se sigue que g' es único. Por lo tanto, p es un conúcleo de i.

□

Proposición 2.2.4 Sean $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ una categoría exacta y

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"'] & B' \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

un diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) El diagrama (2.2.1) es una suma fibrada.

(b) El diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[d, equal] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"'] & B' \arrow[r, two heads, "p'"'] & C \end{tikzcd} \tag{2.2.2}$$

es conmutativo y tiene renglones exactos.

(c) $A \overset{\left(\begin{smallmatrix} i \\ -f \end{smallmatrix}\right)}{\rightarrowtail} B \bigoplus A' \overset{(\,f' \ \ i'\,)}{\twoheadrightarrow} B'$ es una sucesión exacta corta.

(d) El diagrama (2.2.1) es bicartesiano, i.e., un producto fibrado y una suma fibrada.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Se sigue del Lema 2.2.3.

$(b) \Rightarrow (c)$ Por (E2)*, existe un producto fibrado en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dotted, two heads, "q'"] \arrow[d, dotted, two heads, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & B \arrow[d, two heads, "p"] \\ B' \arrow[r, two heads, "p'"'] & C. \end{tikzcd}$$

Aplicando el principio de dualidad al Lema 2.2.3, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, equal] \arrow[d, dotted, tail, "j"'] & A \arrow[d, tail, "i"] \\ A' \arrow[r, dotted, tail, "j'"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, two heads, "q'"] \arrow[d, two heads, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & B \arrow[d, two heads, "p"] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"'] & B' \arrow[r, two heads, "p'"'] & C, \end{tikzcd}$$

cuyos renglones y columnas son sucesiones exactas cortas. Por la conmutatividad del diagrama (2.2.2), tenemos que

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, equal] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[d, two heads, "p"] \\ B' \arrow[r, two heads, "p'"'] & C \end{tikzcd}$$

es un cuadrado conmutativo en $\mathscr{A}$. Por la propiedad universal del producto fibrado, existe un único morfismo $B \xrightarrow{k} D$ tal que $q'k = 1_B$ y $qk = f'$. Como $q'(1_D - kq') = 0$, por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $D \xrightarrow{l} A'$ tal que $j'l = 1_D - kq'$. Dado que

$$\begin{aligned} j'lk &= (1_D - kq')k \\ &= k - kq'k \\ &= k - 1_B k \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j'lj' &= (1_D - kq')j' \\ &= j' - kq'j' \\ &= j', \end{aligned}$$

y j' es un monomorfismo, se sigue que $lk = 0$ y $lj' = 1_{A'}$. Observemos que

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} k & j' \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} q' \\ l \end{smallmatrix}\right) &= kq' + j'l \\ &= 1_D, && \text{(pues } j'l = 1_D - kq'\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} q' \\ l \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} k & j' \end{smallmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} q'k & q'j' \\ lk & lj' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_B & 0 \\ 0 & 1_{A'} \end{pmatrix} \\ &= 1_{B \bigoplus A'}, \end{aligned}$$

por lo que $B \bigoplus A' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} k & j' \end{smallmatrix}\right)} D$ es un isomorfismo en $\mathscr{A}$. Más aún, de

$$\begin{aligned} i'lj &= qj'lj \\ &= q(1_D - kq')j \\ &= qj - (qk)(q'j) \\ &= -f'i \\ &= -i'f, \end{aligned}$$

se sigue que $lj = -f$, pues i' es un monomorfismo, por lo que

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} f' & i' \end{smallmatrix}\right) &= \left(\begin{smallmatrix} qk & qj' \end{smallmatrix}\right) \\ &= q\left(\begin{smallmatrix} k & j' \end{smallmatrix}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} i \\ -f \end{smallmatrix}\right) &= \left(\begin{smallmatrix} q'j \\ lj \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} q' \\ l \end{smallmatrix}\right)j. \end{aligned}$$

Dado que $\left(\begin{smallmatrix} k & j' \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} q' \\ l \end{smallmatrix}\right)$ son inversos entre sí, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} i \\ -f \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & B \bigoplus A' \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} f' & i' \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, shift left, "\left(\begin{smallmatrix} k & j' \end{smallmatrix}\right)", "\wr"'] & B' \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, tail, "j"'] & D \arrow[r, two heads, "q"'] \arrow[u, shift left, "\left(\begin{smallmatrix} q' \\ l \end{smallmatrix}\right)", "\wr"'] & B',
\end{tikzcd}$$

de donde se sigue que $A \overset{\left(\begin{smallmatrix} i \\ -f \end{smallmatrix}\right)}{\rightarrowtail} B \bigoplus A' \overset{(\,f' \;\, i'\,)}{\twoheadrightarrow} B'$ es una sucesión exacta corta, pues $\mathscr{E}$ es cerrada por isomorfismos.

$(c) \Rightarrow (d)$ Supongamos que la sucesión corta $A \overset{\left(\begin{smallmatrix} i \\ -f \end{smallmatrix}\right)}{\rightarrowtail} B \bigoplus A' \overset{(\,f' \;\, i'\,)}{\twoheadrightarrow} B'$ es exacta. Como $(\,f' \;\, i'\,)$ es un conúcleo de $\left(\begin{smallmatrix} i \\ -f \end{smallmatrix}\right)$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\,f' \;\, i'\,)\left(\begin{smallmatrix} i \\ -f \end{smallmatrix}\right) = 0 &\implies f'i - i'f = 0 \\ &\implies f'i = i'f, \end{aligned}$$

por lo que el diagrama (2.2.1) conmuta. Sean $S' \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $A' \xrightarrow{\beta_1'} S', B \xrightarrow{\beta_2'} S'$ morfismos en $\mathscr{A}$ tales que $\beta_2' i = \beta_1' f$. Entonces, $(\,\beta_2' \;\, \beta_1'\,)\left(\begin{smallmatrix} i \\ -f \end{smallmatrix}\right) = 0$ y, por la propiedad universal del conúcleo, existe un único morfismo $B \bigoplus A' \xrightarrow{h} S'$ en $\mathscr{A}$ tal que $h(\,f' \;\, i'\,) = (\,\beta_2' \;\, \beta_1'\,)$, i.e., $hf' = \beta_2'$ y $hi' = \beta_1'$. Por ende, el diagrama (2.2.1) es una suma fibrada. Análogamente, usando la propiedad universal del núcleo para $\left(\begin{smallmatrix} i \\ -f \end{smallmatrix}\right)$ se prueba que el diagrama (2.2.1) es un producto fibrado, de donde se sigue que es bicartesiano.

$(d) \Rightarrow (a)$ Trivial. □

Observación 2.2.5 El inciso (c) de la Proposición 2.2.4 equivale a que la sucesión

$$A \overset{\left(\begin{smallmatrix} i \\ f \end{smallmatrix}\right)}{\rightarrowtail} B \bigoplus A' \overset{(\,f' \;\, -i'\,)}{\twoheadrightarrow} B'$$

sea exacta corta. Más aún, estos pares núcleo-conúcleo son isomorfos.

En efecto: Se sigue del diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} i \\ -f \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & B \bigoplus A' \arrow[r, "(\,f' \;\, i'\,)"] \arrow[d, "\wr"', "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)"] & B' \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} i \\ f \end{smallmatrix}\right)"'] & B \bigoplus A' \arrow[r, "(\,f' \;\, -i'\,)"'] & B', \end{tikzcd}$$

donde el morfismo $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) : B \bigoplus A' \to B \bigoplus A'$ es un isomorfismo por ser una involución.

Proposición 2.2.6 El producto fibrado de un monomorfismo admisible a lo largo de un epimorfismo admisible produce un monomorfismo admisible.

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, two heads, "e'"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & B' \arrow[r, two heads, "pe"] \arrow[d, two heads, "e"] & C \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, tail, "i"'] & B \arrow[r, two heads, "p"'] & C, \end{tikzcd} \tag{2.2.3}$$

donde e' es un epimorfismo admisible por (E2)*, p es un conúcleo de i y, por ende, un epimorfismo admisible, y pe es un epimorfismo admisible por (E1)*. Por el inciso (1) de la Observación 1.1.23 y el Corolario 0.5.25, tenemos que i' es un monomorfismo. Para ver que es un monomorfismo admisible, basta ver que i' es un núcleo de pe. Observemos del diagrama (2.2.3) que $pei' = pie' = 0$. Supongamos que existe un morfismo $g : X \to B'$ tal que $peg = 0$. Como i es un núcleo de p, existe un único morfismo $f : X \to A$ tal que $eg = if$. Por la propiedad universal del producto fibrado, existe un único morfismo $f' : X \to A'$ tal que $e'f' = f$ y $i'f' = g$. Más aún, como i' es un monomorfismo, f' es el único morfismo tal que $i'f' = g$. Por ende, i' es un núcleo de pe. □

Proposición 2.2.7 La suma fibrada de un epimorfismo admisible a lo largo de un monomorfismo admisible produce un epimorfismo admisible.

Demostración. Se sigue de aplicar el principio de dualidad a la Proposición 2.2.6. □

Proposición 2.2.8 (Axioma oscuro) Sean $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ una categoría exacta e $i : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{A}$ que admite un conúcleo. Si existe un morfismo $j : B \to C$ en $\mathscr{A}$ tal que la composición $ji : A \rightarrowtail C$ es un monomorfismo admisible, entonces i es un monomorfismo admisible.

Demostración. Sea $k : B \to D$ un conúcleo de i. Supongamos que existe un morfismo $j : B \to C$ en $\mathscr{A}$ tal que $ji : A \rightarrowtail C$ es un monomorfismo admisible. Entonces, por (E2) tenemos la siguiente suma fibrada en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "ji"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & C \arrow[d] \\ B \arrow[r, tail] & E. \end{tikzcd}$$

De la Proposición 2.2.4, la Observación 2.2.5 y la cerradura de $\mathscr{E}$ por isomorfismos, se sigue que $\left(\begin{smallmatrix} ji \\ i \end{smallmatrix}\right) : A \rightarrowtail C \bigoplus B$ es un monomorfismo admisible. Observemos que $\left(\begin{smallmatrix} 1_C & -j \\ 0 & 1_B \end{smallmatrix}\right) : C \bigoplus B \to C \bigoplus B$ es un isomorfismo por lo que, por el inciso (3) de la Observación 2.1.5, en particular es un monomorfismo admisible. Por (E1), se sigue que $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1_C & -j \\ 0 & 1_B \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} ji \\ i \end{smallmatrix}\right)$ es un monomorfismo admisible. Dado que $\left(\begin{smallmatrix} 1_C & 0 \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$ es un conúcleo de $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix}\right)$, es un epimorfismo admisible. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & D \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"] \\ A \arrow[r, tail, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix}\right)"'] & C \bigoplus B \arrow[r, two heads, "\left(\begin{smallmatrix} 1_C & 0 \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)"'] & C \bigoplus D. \end{tikzcd}$$

Puesto que el cuadrado del lado derecho es un producto fibrado, por (E2)* se sigue que k es un epimorfismo admisible y que i es un núcleo de k, de donde se sigue que i es un monomorfismo admisible. □

Observación 2.2.9 La afirmación de la Proposición 2.2.8, así como su afirmación dual, están dadas por el axioma c) en la definición de Quillen de categoría exacta [Qui72, §2]. Previamente, se había demostrado que es una consecuencia de los axiomas debidos a Yoneda[Yon60]. El axioma c) fue bautizado por Thomason como el "axioma obscuro" en [TT90], y su redundancia fue luego redescubierta por Keller[Kel90], a quien se debe la demostración anterior.

Corolario 2.2.10 Sean (i, p) y (i', p') pares de morfismos componibles. Si la suma directa $\left(i \bigoplus i', p \bigoplus p'\right)$ es una sucesión exacta corta, entonces (i, p) y (i', p') son sucesiones exactas cortas.

Demostración. Dado que p es conúcleo de i y

$$i = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) i = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & i' \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right),$$

de la Proposición 2.2.8 se sigue que i es un monomorfismo admisible, por lo que (i, p) es una sucesión exacta corta. El otro resultado se obtiene de forma análoga. □

Corolario 2.2.11 Supongamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & B' \arrow[d, tail, "b"] \\ A \arrow[r, tail, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

es una suma fibrada. Entonces a es un monomorfismo admisible.

Demostración. Por (E1), de la hipótesis se sigue que $fa : A' \to B$ es un monomorfismo admisible. Sea $b' : B \twoheadrightarrow B''$ un conúcleo de b. Entonces, por el inciso (b) del Lema 2.2.3, tenemos que $a' := b'f$ es un conúcleo de a. Por ende, el resultado se sigue de la Proposición 2.2.8. □

A continuación, demostraremos algunos lemas ampliamente conocidos en el contexto de las categorías abelianas que también son válidos para categorías exactas. Las demostraciones se basarán en la siguiente observación:

Proposición 2.2.12 Sea $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ una categoría exacta. Entonces todo morfismo entre dos sucesiones exactas cortas $A' \rightarrowtail B' \twoheadrightarrow C'$ y $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ se factoriza a través de una sucesión exacta corta $A \rightarrowtail D \twoheadrightarrow C'$ de tal forma que los dos cuadrados marcados con BC en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{BC}"] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, "b'"] & C' \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, tail, "m"'] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "b''"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{BC}"] & C' \arrow[d, "c"] \\
A \arrow[r, tail, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

son bicartesianos.

Demostración. Consideremos el morfismo entre sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "a"'] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, "b"] & C' \arrow[d, "c"] \\
A \arrow[r, tail, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "g"'] & C.
\end{tikzcd} \tag{2.2.4}$$

Sean $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $A \xrightarrow{m} D, B' \xrightarrow{b'} D \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & B' \arrow[d, "b'"] \\
A \arrow[r, tail, "m"'] & D
\end{tikzcd}$$

es una suma fibrada en $\mathscr{A}$. Por la propiedad universal de la suma fibrada, existe un único morfismo $e : D \to C'$ en $\mathscr{A}$ tal que $eb' = g'$ y $em = 0$, así como un único morfismo $D \xrightarrow{b''} B$ tal que $b''b' = b$ y $b''m = f$. Dado que g' es un conúcleo de f', por el inciso (a) del Lema 2.2.3 se sigue que e es un conúcleo de m. Como por el diagrama (2.2.4) tenemos que $gfa = cg'f' = gbf'$, por la propiedad universal de la suma fibrada existe un único morfismo $D \xrightarrow{\gamma} C$ tal que $\gamma m = gf$ y $\gamma b' = cg' = gb$. Ya que $\gamma m = gf = gb''m$ y $\gamma b' = cg' = ceb'$, se sigue que $gb'' = \gamma = ce$, por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, "b'"] & C' \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, tail, "m"'] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "b''"'] & C' \arrow[d, "c"] \\
A \arrow[r, tail, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "g"'] & C.
\end{tikzcd} \tag{2.2.5}$$

Más aún, por la propiedad universal de la suma fibrada se sigue que el cuadrado inferior derecho del diagrama (2.2.5) es una suma fibrada, por lo que el resultado se sigue de la Proposición 2.2.4. □

Corolario 2.2.13 Consideremos un morfismo de sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, tail] \arrow[d, "a"'] & B' \arrow[r, two heads] \arrow[d, "b"] & C' \arrow[d, "c"] \\ A \arrow[r, tail] & B \arrow[r, two heads] & C. \end{tikzcd}$$

Si a y c son isomorfismos (o monomorfismos admisibles, o epimorfismos admisibles), entonces b también lo es.

Demostración. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{BC}"] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, "b'"] & C' \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, tail, "m"'] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "b''"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{BC}"] & C' \arrow[d, "c"] \\ A \arrow[r, tail, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "g"'] & C, \end{tikzcd} \tag{2.2.6}$$

donde $b = b''b'$, obtenido como en la Proposición 2.2.12.

Supongamos que a y c son isomorfismos. Entonces por los Corolarios 0.5.25 y 0.5.30 tenemos que b' y b'' son isomorfismos, respectivamente, de donde se sigue que b es un isomorfismo.

Supongamos que a y c son monomorfismos admisibles. Entonces, por (E2) se sigue que b' es un monomorfismo admisible, mientras que del diagrama (2.2.6) y la Proposición 2.2.6 se sigue que b'' es un monomorfismo admisible. Luego, por (E1), tenemos que b es un monomorfismo admisible.

Supongamos que a y c son epimorfismos admisibles. Entonces, por (E2)* se sigue que b'' es un epimorfismo admisible, mientras que del diagrama (2.2.6) y la Proposición 2.2.7 se sigue que b' es un epimorfismo admisible. Luego, por (E1)*, tenemos que b es un epimorfismo admisible. □

Lema 2.2.14 (Tercer Teorema de Isomorfismo de Noether) Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & X \\ A \arrow[r, tail] & C \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Y \\ & Z \arrow[r, equal] & Z \end{tikzcd}$$

en una categoría exacta $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$, donde los primeros dos renglones y la columna de en medio son sucesiones exactas cortas, y el cuadrado es conmutativo. Entonces, el diagrama anterior se puede completar por una columna exacta $X \rightarrowtail Y \twoheadrightarrow Z$, de tal forma que el diagrama completado conmute, de manera única. Más aún, el cuadrado superior derecho del diagrama completado es bicartesiano.

Demostración. Observemos que, por hipótesis, la composición $A \rightarrowtail C \twoheadrightarrow Y$ es nula y es igual a $A \rightarrowtail B \rightarrowtail C \twoheadrightarrow Y$. Además, como la sucesión $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow X$ es exacta corta, por la propiedad universal del conúcleo existe un único morfismo de $X \to Y$ que hace conmutar el diagrama. Por otro lado, dado que la composición $B \rightarrowtail C \twoheadrightarrow Z$ es nula, se sigue que $A \rightarrowtail B \rightarrowtail C \twoheadrightarrow Z$ también lo es. Luego, como la sucesión $A \rightarrowtail C \twoheadrightarrow Y$ es exacta corta, por la propiedad universal del conúcleo existe un único morfismo $Y \to Z$ que hace conmutar el diagrama. Finalmente, de la Proposición 2.2.4 y el inciso (2) de la Observación 2.1.5 se sigue que el cuadrado superior derecho es bicartesiano. Notemos que, por el inciso (1) de la Observación 1.1.23, escribiendo a X, Y y Z como los objetos cociente correspondientes, hemos demostrado que

$$(C/A)/(B/A) \simeq C/B.$$

□

Corolario 2.2.15 (Lema 3×3) Consideremos el diagrama conmutativo en una categoría exacta $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, tail, "a"'] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, tail, "b"] & C' \arrow[d, tail, "c"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "a'"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "b'"] & C \arrow[d, two heads, "c'"] \\
A'' \arrow[r, "f''"'] & B'' \arrow[r, "g''"'] & C'',
\end{tikzcd} \tag{2.2.7}$$

donde las columnas son sucesiones exactas cortas y, adicionalmente, se cumple una de las siguientes condiciones:

(a) el renglón de en medio y alguno de los renglones exteriores son sucesiones exactas cortas;

(b) los renglones exteriores son sucesiones exactas cortas y $gf = 0$.

Entonces, todos los renglones del diagrama anterior son sucesiones exactas cortas.

Demostración.

(a) Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los primeros dos renglones son sucesiones exactas cortas, pues el otro caso se sigue por dualidad. Aplicando la Proposición 2.2.12 a los primeros dos renglones, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{BC}"] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, "i"] & C' \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, tail, "\overline{f}"'] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, two heads, "\overline{g}"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{BC}"] & C' \arrow[d, "c"] \\
A \arrow[r, tail, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "g"'] & C,
\end{tikzcd} \tag{2.2.8}$$

donde $ji = b$. Observemos que los morfismos i y j son monomorfismos admisibles por el axioma (E2) y la Proposición 2.2.6, respectivamente. Por el Lema 2.2.3, el morfismo $i' : D \to A''$ determinado por $i'i = 0$ y $i'\overline{f} = a'$ es un conúcleo de i, y el morfismo $j' : B \twoheadrightarrow C''$ dado por $j' = c'g = g''b'$ es un conúcleo de j. Ahora, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, two heads, "i'"] \arrow[d, tail, "j"] & A'' \arrow[d, "f''"] \\
B' \arrow[r, tail, "b"'] & B \arrow[r, two heads, "b'"] \arrow[d, two heads, "j'"'] & B'' \arrow[d, "g''"] \\
 & C'' \arrow[r, equal] & C'',
\end{tikzcd} \tag{2.2.9}$$

donde sabemos que los cuadrados superior izquierdo e inferior derecho son conmutativos. Del diagrama conmutativo (2.2.8), se obtiene

$$(f''i')i = 0 = b'b = (b'j)i \quad \wedge \quad (b'j)\overline{f} = b'f = f''a' = (f''i')\overline{f}$$

que, junto con

$$(f''i'\overline{f})a = (f''i'i)f' = 0 \quad \wedge \quad (g'j\overline{f})a = f''a'a = 0 = b'bf' = (b'ji)f'$$

nos da el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, tail, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{BC}"] & B' \arrow[d, tail, "i"] \arrow[ddr, bend left, "0"] & \\
A \arrow[r, tail, "\overline{f}"'] \arrow[drr, bend right, "f''a'"'] & D \arrow[dr, dotted, shift left, "b'j"] \arrow[dr, dotted, shift right, "f''i'"'] & \\
 & & B''.
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de la suma fibrada, se sigue que $f''i' = b'j$. Por ende, el diagrama (2.2.9) es conmutativo, por lo que podemos aplicarle el Lema 2.2.14 (Tercer Teorema de Isomorfismo de Noether) y concluir que la sucesión $A'' \xrightarrow{f''} B'' \xrightarrow{g''} C''$ es exacta corta.

(b) Supongamos que los renglones exteriores son sucesiones exactas cortas y $gf = 0$. Como las columnas también son sucesiones exactas cortas, por (E2), existe una suma fibrada en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, tail, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & C' \arrow[d, tail, dotted, "k"] \\
B \arrow[r, two heads, dotted, "j"'] & D,
\end{tikzcd}$$

donde j es un epimorfismo admisible por la Proposición 2.2.7. Aplicando el Lema 2.2.3, tenemos el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ con sucesiones exactas cortas en sus renglones y columnas

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, dotted, "f'"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, tail, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & C' \arrow[d, tail, "k"] \\
A' \arrow[r, tail, dotted, "i"'] & B \arrow[r, two heads, "j"'] \arrow[d, two heads, dotted, "b'"'] & D \arrow[d, two heads, dotted, "k'"] \\
 & B'' \arrow[r, equal] & B'',
\end{tikzcd}$$

donde el conúcleo k' de k está determinado por $k'j = b$ y $k'k = 0$, mientras que $i = bf'$ es el núcleo del epimorfismo admisible j. Dado que por hipótesis $gb = cg'$, por la propiedad universal de la suma fibrada, existe un único morfismo $D \xrightarrow{d'} C$ tal que $d'k = c$ y $d'j = g$. Además, como

$$\begin{aligned}
c'd'j &= c'g \\
&= g''b' \\
&= g''k'j
\end{aligned}$$

y j es un epimorfismo, entonces $c'd' = g''k'$, por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "k"'] & C' \arrow[d, tail, "c"] \\
D \arrow[r, "d'"] \arrow[d, two heads, "k'"'] & C \arrow[d, two heads, "c'"] \\
B'' \arrow[r, two heads, "g''"'] & C'',
\end{tikzcd} \tag{2.2.10}$$

cuyas columnas son exactas. Ahora, aplicando el principio de dualidad a la Proposición 2.2.4, el cuadrado inferior del diagrama conmutativo (2.2.10) es un producto fibrado lo cual, por (E2)*, implica que d es un epimorfismo admisible. Más aún, de (E1)*, se sigue que $g = d'j$ también es un epimorfismo admisible. Dado que el renglón inferior del diagrama (2.2.7) es exacto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A'' \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, tail, bend right, "f''"'] & & \\
& D \arrow[r, two heads, "d'"] \arrow[d, two heads, "k'"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & C \arrow[d, two heads, "c'"] \\
& B'' \arrow[r, two heads, "g''"'] & C''.
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del producto fibrado, existe un único morfismo $A'' \xrightarrow{d} D$ en $\mathscr{A}$ tal que $k'd = f''$ y $d'd = 0$; en particular, d es un núcleo de d'. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
k'(da') &= f''a' \\
&= b'f \\
&= k'(jf),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d'(da') &= 0 \\
&= gf \\
&= d'(jf),
\end{aligned}$$

por lo que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "a"'] & A' \arrow[d, tail, "i"] & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "a'"'] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, two heads, "j"] & C \arrow[d, equal] \\
A'' \arrow[r, tail, "d"'] & D \arrow[r, two heads, "d'"'] & C
\end{tikzcd}$$

conmuta. Finalmente, por la Proposición dual a 2.2.4, tenemos que el cuadrado inferior izquierdo del diagrama anterior es bicartesiano y, por la Proposición 2.2.6, se sigue que f es un núcleo de g, por lo que la sucesión $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta corta.

$\square$

2.3. El bifuntor aditivo Ext^1 en categorías exactas

Definición 2.3.1 Sean $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ una categoría exacta y $A, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

(a) Sea $\mathrm{E}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C, A)$ la clase de todas las sucesiones exactas cortas en $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ de la forma $A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow C$, las cuales llamamos *extensiones*. Consideremos la relación $\simeq$ en $\mathrm{E}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C, A)$ dada por

$$(A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow C) \simeq (A \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow C)$$

si existe un diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d] & C \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, tail] & E' \arrow[r, two heads] & C, \end{tikzcd}$$

la cual es una relación de equivalencia en $\mathrm{E}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C, A)$ (ver el Corolario 2.2.13). Definimos

$$\mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C, A) := \mathrm{E}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C, A)/\simeq,$$

y denotamos a la clase de equivalencia de una extensión $\varepsilon \in \mathrm{E}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C, A)$ por $[\varepsilon]$.

(b) Sean $\varepsilon \in \mathrm{E}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C, A)$ la extensión dada por $A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow C$ y $C \xrightarrow{f} C'$, $A' \xrightarrow{g} A$, en $\mathscr{A}$. Entonces, por los axiomas (E2) y (E2)*, tenemos los diagramas conmutativos en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & E \arrow[d, dotted] \\ A' \arrow[r, tail, dotted] & E'' \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} E' \arrow[r, two heads, dotted] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & C' \arrow[d, "f"] \\ E \arrow[r, two heads] & C. \end{tikzcd}$$

Más aún, por la Proposición 2.2.4 y su dual, tenemos que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, dotted] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & C' \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, tail] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, dotted] & C \arrow[d, equal] \\ A' \arrow[r, tail, dotted] & E'' \arrow[r, two heads] & C \end{tikzcd}$$

es conmutativo y tiene renglones exactos. Definimos a las sucesiones exactas cortas del primer y tercer renglón como $\varepsilon \cdot f$ y $g \cdot \varepsilon$, respectivamente, obteniendo así las correspondencias

$$\mathrm{E}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(f, A) : \mathrm{E}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C, A) \to \mathrm{E}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C', A),$$
$$\varepsilon \mapsto \varepsilon \cdot f;$$

$$\mathrm{E}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C, g) : \mathrm{E}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C, A) \to \mathrm{E}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C, A'),$$
$$\varepsilon \mapsto g \cdot \varepsilon.$$

(c) Dado que las correspondencias definidas en el inciso (b) son compatibles con la relación de equivalencia $\simeq$ del inciso (a), definimos las correspondencias inducidas

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(f,A) : \mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C,A) &\to \mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C',A),\\ [\varepsilon] &\mapsto [\varepsilon \cdot f];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C,g) : \mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C,A) &\to \mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C,A'),\\ [\varepsilon] &\mapsto [g \cdot \varepsilon].\end{aligned}$$

Observación 2.3.2 Las correspondencias del inciso (c) de la Definición 2.3.1 definen acciones a derecha y a izquierda, respectivamente. Más aún, estas acciones son compatibles. Notamos que estas acciones son análogas a las de los funtores Hom-contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,A)$ y Hom-covariante $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C,-)$, respectivamente.

Definición 2.3.3 Sean $(\mathscr{A},\mathscr{E})$ una categoría exacta, $A, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathrm{E}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C,A)$ las extensiones dadas por $A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} B \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} C$ y $A \overset{\alpha'}{\rightarrowtail} E' \overset{\beta'}{\twoheadrightarrow} C$, respectivamente. Definimos la *suma de Baer*

$$[\varepsilon] + [\varepsilon'] := \left[\nabla_A \cdot \left(\varepsilon \bigoplus \varepsilon'\right) \cdot \Delta_C\right] \in \mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C,A),$$

donde $\varepsilon \bigoplus \varepsilon' \in \mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C \bigoplus C, A \bigoplus A)$ (ver la Proposición 2.2.2) y Δ_C, ∇_A son los morfismos diagonal y codiagonal de la Definición 0.5.45.

Lema 2.3.4 Sean $(\mathscr{A},\mathscr{E})$ una categoría exacta y $A, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) La suma de Baer define una estructura de grupo abeliano en $\mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C,A)$, con el elemento neutro dado por

$$A \overset{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)}{\rightarrowtail} A \bigoplus C \overset{(0\ 1)}{\twoheadrightarrow} C.$$

(b) Para cualesquiera $C \xrightarrow{f} C'$, $A' \xrightarrow{g} A$ en $\mathscr{A}$, tenemos que las correspondencias

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(f,A) : \mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C,A) &\to \mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C,A'),\\ \mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C,g) : \mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C,A) &\to \mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(C',A)\end{aligned}$$

son morfismos de grupos abelianos.

Observación 2.3.5 Del Lema 2.3.4 se sigue que $\mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(-,-) : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ es un bifuntor aditivo.

Definición 2.3.6 [Što13, Definition 5.1] Sea $(\mathscr{A},\mathscr{E})$ una categoría exacta. Para $S \subseteq \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, definimos

$$\begin{aligned}S^{\perp} &:= \{V \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}) \mid \mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(S,V) = 0 \text{ para todo } S \in S\},\\ {}^{\perp}S &:= \{U \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}) \mid \mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(U,S) = 0 \text{ para todo } S \in S\}.\end{aligned}$$

Un *par de cotorsión* $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ en $(\mathscr{A},\mathscr{E})$ es un par $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ de subcategorías plenas de $\mathscr{A}$ tal que $\mathcal{U} = {}^{\perp}\mathcal{V}$ y $\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{V}$. Un par de cotorsión $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ es *completo* si cumple las siguientes condiciones[4].

(a) Para cualquier $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, existe una sucesión exacta corta $V^C \to U^C \to C$ tal que $U^C \in \mathcal{U}, V^C \in \mathcal{V}$.

(b) Para cualquier $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, existe una sucesión exacta corta $C \to V_C \to U_C$ tal que $U_C \in \mathcal{U}, V_C \in \mathcal{V}$.

[4] Se puede demostrar que esta definición de par de cotorsión completo es equivalente a que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ sean subcategorías plenas de $\mathscr{A}$, cerradas por sumandos directos en $\mathscr{A}$, y cumplan las condiciones $\mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},\mathscr{E})}(\mathcal{U},\mathcal{V}) = 0$, (a) y (b).

Capítulo 3

Categorías trianguladas

Las categorías trianguladas están compuestas de forma similar a las categorías exactas; sin embargo, en este caso, la definición de las sucesiones de morfismos involucran a un endofuntor de cierto tipo, y los axiomas que verifica la clase de dichas sucesiones son significativamente diferentes.

3.1. Definición de categoría triangulada

Definición 3.1.1 Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva. Un *funtor de traslación* es un automorfismo aditivo[1] $T : \mathscr{A} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}$. Escribiremos $T^n(X) = X[n]$ para cualesquiera $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), n \in \mathbb{Z}$. Un *triángulo* en $\mathscr{A}$ es un diagrama

$$X \to Y \to Z \to T(X),$$

el cual denotamos también por

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr] & & Y. \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Un *morfismo de triángulos* es una terna $(f, g, h) \in \mathrm{Mor}^3(\mathscr{A})$ que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & T(X'). \end{tikzcd}$$

Observación 3.1.2 Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y $T : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ un funtor de traslación. Las clases de triángulos en $\mathscr{A}$ y de morfismos de triángulos en $\mathscr{A}$, junto con la composición de morfismos inducida de $\mathscr{A}$ componente a componente, forman una categoría llamada la *categoría de triángulos asociada al par* $(\mathscr{A}, T)$, que denotamos por $\mathscr{T}(\mathscr{A}, T)$. En particular, un morfismo de triángulos (u, v, w) es un *isomorfismo de triángulos* si, y sólo si, u, v y w son isomorfismos en $\mathscr{A}$.

En efecto: Sea $\mathscr{T} := \mathscr{T}(\mathscr{A}, T)$, y sean $\alpha = (A, A', A'', a, a', a'')$, $\beta = (B, B', B'', b, b', b'')$, $\gamma = (C, C', C'', c, c', c'')$, $\delta = (D, D', D'', d, d', d'')$ objetos en $\mathscr{T}$ y $\alpha \xrightarrow{(f,f',f'')} \beta$, $\beta \xrightarrow{(g,g',g'')} \gamma$, $\gamma \xrightarrow{(h,h',h'')} \delta$ morfismos en $\mathscr{T}$.

[1] En algunas fuentes de la literatura, se define un funtor de traslación de forma más general como una autoequivalencia aditiva de categorías.

(C1) Dado que $\mathscr{A}$ es una categoría, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B), \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A',B')$ y $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A'',B'')$ son clases, por lo que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\alpha,\delta) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A',B') \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A'',B'')$ es una clase.

(C2) Se sigue de la construcción de $\mathscr{T}$.

(C3) Por definición de morfismo en $\mathscr{T}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "f'"'] & A'' \arrow[r, "a''"] \arrow[d, "f''"] & T(A) \arrow[d, "T(f)"] \\
B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "g"'] & B' \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "g'"'] & A'' \arrow[r, "b''"] \arrow[d, "g''"] & T(B) \arrow[d, "T(g)"] \\
C \arrow[r, "c"'] & C' \arrow[r, "c'"'] & C'' \arrow[r, "c''"'] & T(C)
\end{tikzcd} \tag{3.1.1}$$

De los dos cuadrados conmutativos del lado izquierdo y la asociatividad de la composición de morfismos en $\mathscr{A}$ tenemos que $c(gf) = (g'f')a$. Análogamente, de los dos cuadrados conmutativos del centro se sigue que $c'(g'f') = (g''f'')a'$. Por los dos cuadrados conmutativos de la derecha, tenemos que

$$c''(g''f'') = \big(T(g)T(f)\big)a'' = T(gf)a'',$$

por lo que $\alpha \xrightarrow{(gf, g'f', g''f'')} \gamma$ es un morfismo en $\mathscr{T}$. Por ende, la composición de morfismos en $\mathscr{T}$ está bien definida.

(i) Observemos que

$$\begin{aligned}
\big((h,h',h'')(g,g',g'')\big)(f,f',f'') &= (hg, h'g', h''g'')(f,f',f'') \\
&= \big((hg)f, (h'g')f', (h''g'')f''\big) \\
&= \big(h(gf), h'(g'f'), h''(g''f'')\big) \qquad (\mathscr{A} \text{ es una categoría}) \\
&= (h,h',h'')(gf, g'f', g''f'') \\
&= (h,h',h'')\big((g,g',g'')(f,f',f'')\big),
\end{aligned}$$

por lo que la composición de morfismos en $\mathscr{T}$ es asociativa.

(ii) Observemos que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "1_B"'] & B' \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1_{B'}"'] & B'' \arrow[r, "b''"] \arrow[d, "1_{B''}"] & T(B) \arrow[d, "T(1_B)"] \\
B \arrow[r, "b"'] & B' \arrow[r, "b'"'] & B'' \arrow[r, "b''"'] & T(B)
\end{tikzcd}$$

conmuta trivialmente, pues $1_B, 1_{B'}, 1_{B''}$ y $1_{T(B)}$ son morfismos identidad en $\mathscr{A}$, y $T(1_B) = 1_{T(B)}$ por ser T un funtor. Por ende, tenemos el morfismo $\beta \xrightarrow{(1_U, 1_V, 1_W)} \beta$ en $\mathscr{T}$. Ahora, del diagrama (3.1.1), se sigue que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$, $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A',B'')$, $f'' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A'',B'')$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,C)$, $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B',C')$ y $g'' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B'',C'')$. Como $1_B, 1_{B'}$ y $1_{B''}$ son morfismos identidad en $\mathscr{A}$, entonces

$$\begin{aligned}(1_B, 1_{B'}, 1_{B''})(f, f', f'') &= (1_B f, 1_{B'} f', 1_{B''} f'')\\ &= (f, f', f''),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g, g', g'')(1_B, 1_{B'}, 1_{B''}) &= (g1_B, g'1_{B'}, g''1_{B''})\\ &= (g, g', g''),\end{aligned}$$

por lo que $(1_B, 1_{B'}, 1_{B''})$ es el morfismo identidad del objeto β en $\mathscr{T}$.

De lo anterior, se sigue que $\mathscr{T}$ es una categoría. Ahora demostraremos la segunda parte. Sean $\eta = (E, E', E'', e, e', e''), \mu = (M, M', M'', m, m', m'') \in \mathrm{Obj}(\mathscr{T})$ y $\eta \xrightarrow{(f,g,h)} \mu \in \mathrm{Mor}(\mathscr{T})$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & E' \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "g"'] & E'' \arrow[r, "e''"] \arrow[d, "h"] & T(E) \arrow[d, "T(f)"] \\ M \arrow[r, "m"'] & M' \arrow[r, "m'"'] & M'' \arrow[r, "m''"'] & T(M). \end{tikzcd} \tag{3.1.2}$$

$(\Rightarrow)$ Si (f, g, h) es un isomorfismo en $\mathscr{T}$, entonces existe $(f', g', h') \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})^3$ tal que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f'"'] & M' \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "g'"'] & M'' \arrow[r, "m''"] \arrow[d, "h'"] & T(M) \arrow[d, "T(f')"] \\ E \arrow[r, "e"'] & E' \arrow[r, "e'"'] & E'' \arrow[r, "e''"'] & T(E) \end{tikzcd}$$

conmuta y

$$\begin{aligned}(f', g', h')(f, g, h) &= (f'f, g'g, h'h)\\ &= (1_E, 1_{E'}, 1_{E''}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f, g, h)(f', g', h') &= (ff', gg', hh')\\ &= (1_M, 1_{M'}, 1_{M''}),\end{aligned}$$

de donde se sigue que $f'f = 1_E, ff' = 1_M, g'g = 1_{E'}, gg' = 1_{M'}, h'h = 1_{E''}$ y $hh' = 1_{M''}$. Por ende, f, g y h son isomorfismos en $\mathscr{A}$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que f, g y h son isomorfismos en $\mathscr{A}$. Entonces, existen $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, E), g' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M', E')$ y $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M'', E'')$ tales que $f'f = 1_E, ff' = 1_M, g'g = 1_{E'}, gg' = 1_{M'}, h'h = 1_{E''}$ y $hh' = 1_{M''}$. Dado que por hipótesis el diagrama (3.1.2) conmuta, se sigue que

$$\begin{aligned} mf = ge &\iff mff' = gef'\\ &\iff m = gef'\\ &\iff g'm = g'gef'\\ &\iff g'm = ef',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m'g = he' &\iff m'gg' = he'g' \\ &\iff m' = he'g' \\ &\iff h'm' = h'he'g' \\ &\iff h'm' = e'g', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m''h = T(f)e'' &\iff m''hh' = T(f)e''h' \\ &\iff m'' = T(f)e''h' \\ &\iff T(f')m'' = T(f')T(f)e''h' \\ &\iff T(f')m'' = T(f'f)e''h' \\ &\iff T(f')m'' = T(1_E)e''h' \\ &\iff T(f')m'' = e''h'. && (T(1_E) = 1_{T(E)}) \end{aligned}$$

Por ende, el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f'"'] & M' \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "g'"'] & M'' \arrow[r, "m''"] \arrow[d, "h'"] & T(M) \arrow[d, "T(f')"] \\ E \arrow[r, "e"'] & E' \arrow[r, "e'"'] & E'' \arrow[r, "e''"'] & T(E). \end{tikzcd}$$

Es decir, tenemos que $\mu \xrightarrow{(f',g',h')} \eta$ es un morfismo en $\mathscr{T}$ tal que

$$\begin{aligned} (f',g',h')(f,g,h) &= (f'f, g'g, h'h) \\ &= (1_E, 1_{E'}, 1_{E''}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f,g,h)(f',g',h') &= (ff', gg', hh') \\ &= (1_M, 1_{M'}, 1_{M''}), \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\eta \xrightarrow{(f,g,h)} \mu$ es un isomorfismo en $\mathscr{T}$.

Definición 3.1.3 Una *categoría pretriangulada* es una terna $(\mathscr{A}, T, \Delta)$, donde $\mathscr{A}$ es una categoría aditiva, $T : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ es un funtor de traslación y Δ es una clase de objetos en $\mathscr{T}(\mathscr{A}, T)$, llamados *triángulos distinguidos* en $\mathscr{A}$, que es cerrada por isomorfismos en $\mathscr{T}(\mathscr{A}, T)$ y satisface los siguientes axiomas.

(TR1a) Para cualquier $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, tenemos que

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "1_X"'] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

es un triángulo distinguido.

(TR1b) Para cualquier morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathscr{A}$, existe un triángulo distinguido

$$
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Y. \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

(TR2) Si el triángulo

$$
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "w"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "u"'] & & Y \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}
\tag{3.1.3}
$$

es distinguido, entonces el triángulo

$$
\begin{tikzcd}
& T(X) \arrow[dl, "-T(u)"', "{[1]}"] & \\
Y \arrow[rr, "v"'] & & Z \arrow[ul, "w"']
\end{tikzcd}
\tag{3.1.4}
$$

también lo es.

(TR3) Si

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r] & T(X) \arrow[d, "T(u)"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & T(X')
\end{tikzcd}
\tag{3.1.5}
$$

es un diagrama donde los renglones son triángulos distinguidos y el cuadrado es conmutativo, entonces existe $h : Z \to Z'$ en $\mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ tal que (f, g, h) es un morfismo de triángulos distinguidos.

Una categoría pretriangulada $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ es *triangulada* si además satisface el siguiente axioma.

(TR4) Para cualesquiera $X \xrightarrow{u} Y, Y \xrightarrow{v} Z \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$, el diagrama con triángulos distinguidos en sus renglones (que podemos formar por (TR1b))

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r, "i'"] & T(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "vu"] \arrow[d, "u"'] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "k'"] & T(X) \arrow[d, "T(u)"] \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "r"'] & X' \arrow[r, "r'"'] & T(Y)
\end{tikzcd}
$$

puede ser completado al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, dotted, "\exists\ f"] & T(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "vu"] \arrow[d, "u"'] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "k'"] \arrow[d, dotted, "\exists\ g"] & T(X) \arrow[d, "T(u)"] \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "j"'] & X' \arrow[r, "j'"'] \arrow[d, "h"] & T(Y) \arrow[d, "T(i)"] \\
 & & T(Z') \arrow[r, equal] & T(Z'),
\end{tikzcd}$$

donde la tercera columna es un triángulo distinguido.

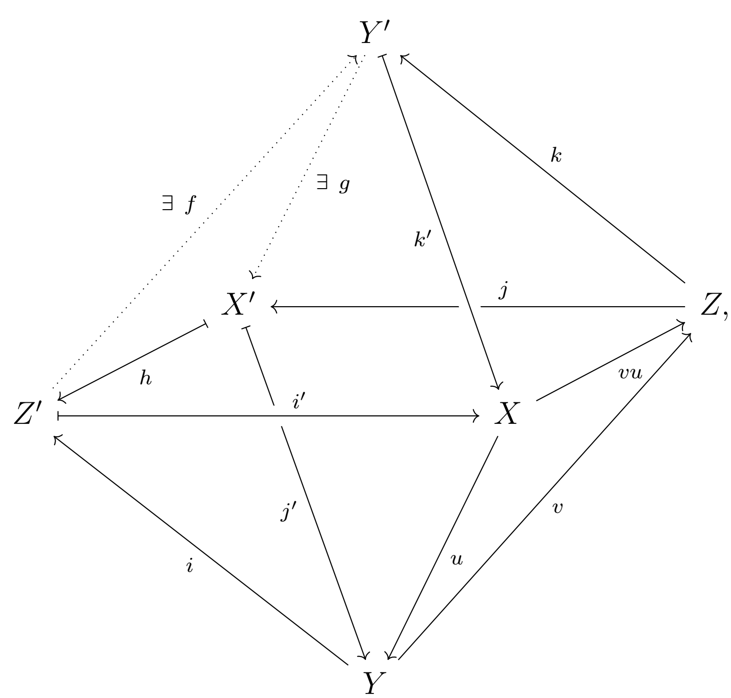
Observación 3.1.4

(1) El axioma (TR1b) se conoce como el *axioma de completación de morfismos a triángulos distinguidos*.

(2) El axioma (TR2) se conoce como el *axioma de rotación de triángulos distinguidos*, pues podemos interpretarlo como el que toda "rotación" de un triángulo distinguido en el sentido negativo da como resultado otro triángulo distinguido[2], como se puede apreciar comparando los diagramas (3.2.3) y (3.2.4).

(3) El axioma (TR3) se puede parafrasear afirmando que cualquier cuadrado conmutativo entre triángulos distinguidos como en (3.1.5) puede ser completado a un morfismo de triángulos distinguidos.

(4) El axioma (TR4) se conoce como el *axioma del octaedro*, pues se puede escribir como el siguiente diagrama



[2] Más adelante veremos que este axioma es equivalente a pedir que toda "rotación" de un triángulo distinguido en el sentido positivo dé como resultado otro triángulo distinguido, pues ambas afirmaciones se implican entre sí (ver la Proposición 3.2.4 y Observación 3.2.5).

donde las caras del octaedro con una sola flecha $\mapsto$ representan triángulos distinguidos, y las caras con dos flechas $\mapsto$ o bien ninguna representan triángulos conmutativos. Otra forma a menudo más útil de ver al axioma (TR4) es afirmando que, para cualesquiera morfismos $X \xrightarrow{u} Y, Y \xrightarrow{v} Y$ en $\mathscr{A}$, el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, dotted, "f"] & T(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "vu"'] & Z \arrow[r, "k"'] \arrow[d, "j"'] & Y' \arrow[r, "k'"'] \arrow[d, dotted, "g"] & T(X) \arrow[d, "T(u)"] \\
 & X' \arrow[r, equal] \arrow[d, "j'"'] & X' \arrow[r, "j'"'] \arrow[d, "T(i)j'"] & T(Y) \\
 & T(Y) \arrow[r, "T(i)"'] & T(Z') &
\end{tikzcd} \tag{3.1.6}$$

conmuta, donde los dos renglones y las dos columnas con cuatro objetos son triángulos distinguidos.

3.2. Propiedades fundamentales de categorías trianguladas

Lema 3.2.1 Para una categoría pretriangulada $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ y $\eta = (X, Y, Z, u, v, w), \eta' = (X', Y', Z', u', v', w') \in \Delta$, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Si existen morfismos $g : Y \to Y'$ y $h : Z \to Z'$ en $\mathscr{A}$ tales que $hv = v'g$, entonces existe un morfismo $f : X \to X'$ en $\mathscr{A}$ tal que $(f, g, h) : \eta \to \eta'$ es un morfismo en $\mathscr{T}(\mathscr{A}, T)$.

(b) Si existen morfismos $f : X \to X'$ y $h : Z \to Z'$ en $\mathscr{A}$ tales que $T(f)w = w'h$, entonces existe un morfismo $g : Y \to Y'$ en $\mathscr{A}$ tal que $(f, g, h) : \eta \to \eta'$ es un morfismo en $\mathscr{T}(\mathscr{A}, T)$.

Demostración.

(a) Supongamos que existen $g : Y \to Y'$ y $h : Z \to Z'$ en $\mathscr{A}$ tales que $hv = v'g$. Entonces, tenemos el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & T(X) \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & T(X'),
\end{tikzcd} \tag{3.2.1}$$

donde el cuadrado conmuta. Aplicando (TR2) a cada triángulo distinguido, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & T(X) \arrow[r, "-T(u)"] & T(Y) \arrow[d, "T(v)"] \\
Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & T(X') \arrow[r, "-T(u')"'] & T(Y').
\end{tikzcd}$$

Luego, por (TR3), existe $t \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(X), T(X'))$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & T(X) \arrow[r, "-T(u)"] \arrow[d, dotted, "t"] & T(Y) \arrow[d, "T(v)"] \\
Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & T(X') \arrow[r, "-T(u')"'] & T(Y').
\end{tikzcd}$$

Dado que T es un automorfismo, en particular es una equivalencia de categorías. Por la Proposición 0.6.5, sabemos T que es fiel, pleno y denso. En particular, el que T sea pleno implica que $T : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, X') \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(X), T(X'))$ es un epimorfismo en Sets. Por ende, existe $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, X')$ tal que $T(f) = t$, por lo que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & T(X) \arrow[r, "-T(u)"] \arrow[d, "T(f)"] & T(Y) \arrow[d, "T(v)"] \\ Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & T(X') \arrow[r, "-T(u')"'] & T(Y') \end{tikzcd} \tag{3.2.2}$$

conmuta. En particular,

$$\begin{aligned} -T(u')T(f) = T(v)\big(-T(u)\big) &\implies -T(u'f) = -T(vu) \\ &\implies T(u'f) = T(vu) \\ &\implies u'f = vu. && (T \text{ es fiel}) \end{aligned}$$

Luego, de los cuadrados conmutativos al centro de los diagramas (3.2.1) y (3.2.2) se sigue que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & T(X') \end{tikzcd}$$

conmuta. Por ende, $(f, g, h) : \eta \to \eta'$ es un morfismo en $\mathscr{T}(\mathscr{A}, T)$.

(b) Es análogo a (a), aplicando (TR2) dos veces a cada triángulo distinguido en vez de una.

□

Definición 3.2.2 Sean $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada y $\mathscr{B}$ una categoría abeliana. Un funtor aditivo covariante (respectivamente, contravariante) $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es *cohomológico* si para todo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \in \Delta$ se tiene que la sucesión $F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z)$ $\Big($respectivamente, $F(Z) \xrightarrow{F(v)} F(Y) \xrightarrow{F(x)} F(X)\Big)$ es exacta[3] en $\mathscr{B}$.

Teorema 3.2.3 Para una categoría pretriangulada $(\mathscr{A}, T, \Delta)$, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ es un triángulo distinguido, entonces $vu = 0$ y $wv = 0$.

(b) Para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, los funtores $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, -), \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, A) : \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ son cohomológicos.

(c) Para todo $\eta \xrightarrow{(f,g,h)} \eta' \in \mathrm{Mor}(\mathscr{T})$, con $\eta, \eta' \in \Delta$ se tiene que si f y g son isomorfismos en $\mathscr{A}$, entonces h es un isomorfismo en $\mathscr{A}$.

Demostración.

(a) Por (TR2) y (TR1a), tenemos los triángulos distinguidos $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$ y $Z \xrightarrow{1_Z} Z \to 0 \to TZ$, respectivamente, con los cuales podemos formar el diagrama en $\mathscr{A}$ con cuadrado conmutativo

[3] Ver la Definición A.4.2 en el Apéndice A.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "1_Z"] & TX \arrow[r, "-Tu"] & TY \arrow[d, "Tv"] \\
Z \arrow[r, "1_Z"'] & Z \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TZ.
\end{tikzcd}$$

Por (TR3), tenemos que existe un morfismo $h : TX \to 0$ en $\mathscr{A}$ que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "1_Z"] & TX \arrow[r, "-Tu"] \arrow[d, dotted, "h"] & TY \arrow[d, "Tv"] \\
Z \arrow[r, "1_Z"'] & Z \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TZ,
\end{tikzcd}$$

de donde se sigue que $0 = Tv(-Tu) = -T(vu)$, lo que implica que $T(vu) = 0$. Como T es un automorfismo, en particular, T^{-1} es un funtor aditivo. Luego, del Lema 1.5.4, se sigue que

$$\begin{aligned}
vu &= T^{-1}(T(vu)) \\
&= T^{-1}(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) Sean $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $\eta = X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \in \Delta$.

Veamos que la sucesión $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,u)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,v)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, Z)$ es exacta en Ab. En efecto, observemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, v)\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, u) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, vu) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, 0) && \text{(por el inciso (a))} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\mathrm{Im}\big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, u)\big) \subseteq \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, v)\big)$. Ahora, sea $\varphi \in \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, v)\big)$. Entonces, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, Y)$ y $v\varphi = 0$. Por (TR1a), tenemos que $\alpha = (A, A, 0, 1_A, 0, 0)$ es un triángulo distinguido. Aplicando (TR2) a α y a η, tenemos el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & T(A) \arrow[r, "-1_{T(A)}"] & T(A) \arrow[d, "T(\varphi)"] \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & T(X) \arrow[r, "-T(u)"'] & T(Y),
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado es conmutativo y los renglones son triángulos distinguidos. Por (TR3), tenemos que existe $T(A) \xrightarrow{\psi} T(X)$ en $\mathscr{A}$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & T(A) \arrow[r, "-1_{T(A)}"] \arrow[d, dotted, "\psi"] & T(A) \arrow[d, "T(\varphi)"] \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & T(X) \arrow[r, "-T(u)"'] & T(Y).
\end{tikzcd}$$

Dado que T es un automorfismo, tenemos que $g := T^{-1}(\psi) : A \to X \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ es tal que $T(g) = \psi$. Luego,

$$\begin{aligned} T(\varphi)\Big(-1_A\Big) = -T(u)\psi &\iff -T(\varphi) = -T(u)T(g) \\ &\iff T(\varphi) = T(ug) \\ &\iff T^{-1}\Big(T(\varphi)\Big) = T^{-1}\Big(T(ug)\Big) \\ &\iff \varphi = ug = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,u)(g), \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\mathrm{Ker}\Big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,u)\Big) \subseteq \mathrm{Im}\Big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,v)\Big)$. Por ende,

$$\mathrm{Im}\Big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,u)\Big) = \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,v)\Big).$$

La verificación de que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Z,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(v,A)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Y,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(u,A)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,A)$ es exacta en Ab es análoga a la anterior, aplicando (TR2) tres veces a η y dos veces a α. Como $\eta \in \Delta$ es arbitrario, concluimos que los funtores $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,-), \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,A) : \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ son cohomológicos.

(c) Sean $\eta = (X,Y,Z,u,v,w), \eta' = (X',Y',Z',u',v',w') \in \Delta$ y $\eta \xrightarrow{(f,g,h)} \eta' \in \mathrm{Mor}(\mathscr{T})$ tal que f y g son isomorfismos en $\mathscr{A}$. Entonces, dado que los funtores preservan isomorfismos, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"', "\wr"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"', "\wr"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & T(X) \arrow[d, "\wr"', "T(f)"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & T(X'), \end{tikzcd}$$

donde los renglones son triángulos distinguidos. Por (TR2) y el inciso (b), aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Z',-)$ tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}(Z',X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{A}(Z',f)"', "\wr"] & \mathscr{A}(Z',Y) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{A}(Z',g)"', "\wr"] & \mathscr{A}(Z',Z) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{A}(Z',h)"] & \mathscr{A}(Z',T(X)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"', "\mathscr{A}(Z',T(f))"] & \mathscr{A}(Z',T(Y)) \arrow[d, "\wr"', "\mathscr{A}(Z',T(g))"] \\ \mathscr{A}(Z',X') \arrow[r] & \mathscr{A}(Z',Y') \arrow[r] & \mathscr{A}(Z',Z') \arrow[r] & \mathscr{A}(Z',T(X')) \arrow[r] & \mathscr{A}(Z',T(Y')) \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo exacto en Ab. Dado que Ab es una categoría abeliana, por el Lema A.6.14 (Lema del 5) se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Z',h) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Z',Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Z',Z')$ en Ab. En particular, existe $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Z',Z)$ tal que $h\phi = 1_{Z'}$. Análogamente, aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,Z')$ tenemos que existe $\phi' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Z',Z)$ tal que $\phi' h = 1_Z$. Dado que

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi' 1_{Z'} \\ &= \phi' h \phi \\ &= 1_Z \phi \\ &= \phi, \end{aligned}$$

concluimos que h es un isomorfismo en $\mathscr{A}$.

$\square$

Proposición 3.2.4 Sean $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada y $\eta = (X, Y, Z, u, v, w) \in \mathscr{T}$. Entonces, $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ es un triángulo distinguido si, y sólo si, $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \xrightarrow{-T(u)} T(Y)$ es un triángulo distinguido.

Demostración.

($\Rightarrow$) Esto es el axioma (TR2).

($\Leftarrow$) Supongamos que $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \xrightarrow{T(u)} T(Y)$ es un triángulo distinguido. Dado que $\eta \in \mathscr{T}$, en particular tenemos que $X \xrightarrow{u} Y \in \operatorname{Mor}(\mathscr{A})$. Por (TR1b), podemos completar el morfismo u en un triángulo distinguido $\eta' = (X, Y', Z', u, v', w')$. Aplicando (TR2) tres veces a η y a η', tenemos el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "-T(u)"] \arrow[d, equal] & T(Y) \arrow[r, "-T(v)"] \arrow[d, equal] & T(Z) \arrow[r, "-T(w)"] & T^2(X) \arrow[d, equal] \\
T(X) \arrow[r, "-T(u)"'] & T(Y) \arrow[r, "-T(v')"'] & T(Z') \arrow[r, "-T(w')"'] & T^2(X'),
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado es conmutativo y los renglones son triángulos distinguidos. Por (TR3), existe $T(Z) \xrightarrow{t} T(Z') \in \operatorname{Mor}(\mathscr{A})$ tal que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "-T(u)"] \arrow[d, equal] & T(Y) \arrow[r, "-T(v)"] \arrow[d, equal] & T(Z) \arrow[r, "-T(w)"] \arrow[d, dotted, "h"] & T^2(X) \arrow[d, equal] \\
T(X) \arrow[r, "-T(u)"'] & T(Y) \arrow[r, "-T(v')"'] & T(Z') \arrow[r, "-T(w')"'] & T^2(X'),
\end{tikzcd}$$

conmuta. Más aún, por el inciso (c) del Teorema 3.2.3, tenemos que $h : T(Z) \xrightarrow{\sim} T(Z')$ en $\mathscr{A}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
h\Big(-T(v)\Big) = -T(v') &\iff -hT(v) = T(v') \\
&\iff T^{-1}(hT(v)) = T^{-1}(T(v')) && (T \text{ es automorfismo}) \\
&\iff T^{-1}(h)v = v',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-T(w) = -T(w')h &\iff T^{-1}(T(w)) = T^{-1}(T(w')h) \\
&\iff w = w'T^{-1}(h),
\end{aligned}$$

donde $T^{-1}(h)$ es un isomorfismo, puesto que los funtores preservan isomorfismos. Por ende, el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "T^{-1}(h)", "\wr"'] & T(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & T(X),
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por la Observación 3.1.2, tenemos que los triángulos η y η' son isomorfos en $\mathscr{T}$. Como $\eta' \in \Delta$ y la clase de triángulos distinguidos es cerrada por isomorfismos, tenemos que $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ es un triángulo distinguido. $\square$

Observación 3.2.5

(1) El axioma (TR2) puede ser reemplazado por el siguiente axioma:

(TR2') Si el triángulo

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "w"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "u"'] & & Y \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd} \tag{3.2.3}$$

es distinguido, entonces el triángulo

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "v"', "{[1]}"] & \\ T^{-1}(Z) \arrow[rr, "-T^{-1}(w)"'] & & X \arrow[ul, "u"'] \end{tikzcd} \tag{3.2.4}$$

también lo es.

En efecto: Notemos que (TR2') equivale a la implicación contraria de la Proposición 3.2.4, que fue demostrada utilizando (TR2). De forma análoga, es posible demostrar que (TR2') implica a (TR2). Esta equivalencia entre (TR2) y (TR2') es la razón por la cual, en algunos textos de la literatura, la afirmación de la Proposición 3.2.4 se declara como axioma en vez de (TR2) o (TR2').

(2) Para una categoría pretriangulada $(\mathscr{A}, T, \Delta)$, las correspondencias

$$\begin{gathered} R : \mathscr{T}(\mathscr{A}, T) \to \mathscr{T}(\mathscr{A}, T), \\ (X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)) \mapsto (Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \xrightarrow{-T(u)} T(Y)), \\ (f, g, h) \mapsto (g, h, T(f)), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} R^{-1} : \mathscr{T}(\mathscr{A}, T) \to \mathscr{T}(\mathscr{A}, T), \\ (X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)) \mapsto (T^{-1}(Z) \xrightarrow{-T^{-1}(w)} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) \\ (f, g, h) \mapsto (T^{-1}(h), f, g) \end{gathered}$$

son funtores, e inversos entre sí. Más aún, una vez establecida la equivalencia de la Proposición 3.2.4, tenemos que

$$R(\Delta) = \Delta = R^{-1}(\Delta),$$

es decir, que los automorfismos R y R^{-1} mandan triángulos distinguidos en triángulos distinguidos. El funtor R *rota* triángulos distinguidos en el sentido negativo de (TR2), mientras que R^{-1} los rota en el sentido positivo de (TR2').

Proposición 3.2.6 Sean $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada y $\eta = (X, Y, Z, u, v, w) \in \Delta$. Entonces, se cumplen las siguientes condiciones.

(a) u es un seudonúcleo de v.

(b) w es un seudoconúcleo de w.

(c) v es un seudonúcleo de w y un seudoconúcleo de u.

Demostración.

(a) Por el inciso (a) del Teorema 3.2.3, tenemos que $vu = 0$. Supongamos que existe un morfismo $M \xrightarrow{\alpha} Y$ en $\mathscr{A}$ tal que $v\alpha = 0$. Por (TR1a), sabemos que $M \xrightarrow{1_M} M \to 0 \to T(M)$ es un triángulo distinguido. Entonces, tenemos el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "1_M"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & T(M) \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & T(X), \end{tikzcd}$$

donde el cuadrado conmuta y los renglones son triángulos distinguidos. Por el inciso (b) del Lema 3.2.1, existe $M \xrightarrow{u'} X$ en $\mathscr{A}$ tal que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "1_M"] \arrow[d, "u'"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & T(M) \arrow[d, "T(f)"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & T(X), \end{tikzcd}$$

conmuta, de donde se sigue que $\alpha = uu'$.

(b) Nuevamente, por el inciso (a) del Teorema 3.2.3, tenemos que $wv = 0$. Supongamos que existe un morfismo $Y \xrightarrow{\beta} M$ en $\mathscr{A}$ tal que $\beta v = 0$. Entonces, por (TR1a) tenemos el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d] & T(X) \\ M \arrow[r, "1_M"'] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & T(M), \end{tikzcd}$$

donde el cuadrado conmuta y los renglones son triángulos distinguidos. Por el inciso (b) del Lema 3.2.1, el diagrama anterior puede ser completado a un morfismo de triángulos distinguidos.

(c) Por la Observación 3.2.5, tenemos que

$$R(\eta) = Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \xrightarrow{-T(u)} T(Y) \quad \text{y} \quad R^{-1}(\eta) = T^{-1}(Z) \xrightarrow{-T^{-1}(w)} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$$

son triángulos distinguidos en $(\mathscr{A}, T, \Delta)$. Por ende, el resultado se sigue de aplicar (a) a $R(\eta)$ y (b) a $R^{-1}(\eta)$.

□

Proposición 3.2.7 Sean $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada y $(f, g, h) : \eta \to \mu$ en $\mathscr{T}(\mathscr{A}, T)$, con $\eta, \mu \in \Delta$. Si dos de los tres morfismos f, g y h son isomorfismos en $\mathscr{A}$, entonces el tercero también lo es.

Demostración. Si f y g son isomorfismos, se sigue del inciso (c) del Teorema 3.2.3.

Si g y h son isomorfismos, por la Observación 3.2.5 tenemos que $R\big((f, g, h)\big) = (g, f, T(f))$ es un morfismo de triángulos distinguidos que cumple las condiciones del inciso (c) del Teorema 3.2.3, por lo que $T(f)$ es un isomorfismo. Como T es un automorfismo, tenemos que $f = T^{-1}(T(f))$. En particular, como los funtores preservan isomorfismos, se sigue que f es un isomorfismo.

El caso restante se demuestra de forma análoga al caso anterior utilizando el funtor R^{-1}. □

Lema 3.2.8 Sea $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada. Si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \in \Delta$, entonces se tienen los siguientes triángulos distinguidos:

$$X \xrightarrow{-u} Y \xrightarrow{-v} Z \xrightarrow{w} T(X),\ X \xrightarrow{-u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{-w} T(X),\ X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{-v} Z \xrightarrow{-w} T(X).$$

Demostración. Se sigue de observar que los siguientes diagramas en $\mathscr{A}$ conmutan

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "-1_Y"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal] & T(X) \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "-u"'] & Y \arrow[r, "-v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & T(X), \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "-1_X"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "-1_Z"] & T(X) \arrow[d, "T(-1_X)"] \\ X \arrow[r, "-u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "-w"'] & T(X), \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "-1_X"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "-1_Y"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "-1_Z"] & T(X) \arrow[d, equal, "T(-1_X)"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "-v"'] & Z \arrow[r, "-w"'] & T(X), \end{tikzcd}$$

donde $T(-1_X) = -T(1_X) = -1_{T(X)}$ por ser T un funtor aditivo y $-1_X, -1_Y, -1_Z$ y $-1_{T(X)}$ son isomorfismos —pues son sus propios inversos—, y aplicar la Observación 3.1.2 junto con el hecho de que Δ es cerrado por isomorfismos. $\square$

Categoría triangulada opuesta

Proposición 3.2.9 Sean $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada (respectivamente, triangulada), $\tilde{T}(f^{\mathrm{op}})$ $:= (T^{-1}(f))^{\mathrm{op}}$ y $\tilde{\Delta}$ definida como sigue:

$$X \xrightarrow{u^{\mathrm{op}}} Y \xrightarrow{v^{\mathrm{op}}} Z \xrightarrow{w^{\mathrm{op}}} \tilde{T}X \in \tilde{\Delta} \iff Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{Tw} TZ \in \Delta.$$

Entonces, $(\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$ es una categoría pretriangulada (respectivamente, triangulada).

Demostración. Supongamos que $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ es una categoría pretriangulada. Sean $\eta = (E'', E', E, (e')^{\mathrm{op}}, e^{\mathrm{op}}, \tilde{T}((e'')^{\mathrm{op}})), \mu = (M'', M', M, (m')^{\mathrm{op}}, m^{\mathrm{op}}, \tilde{T}((m'')^{\mathrm{op}})) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{T}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \tilde{T}))$.

Como el universo de las categorías aditivas es dualizante, sabemos que $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ es una categoría aditiva. Notemos que $\tilde{T} = D_{\mathscr{A}} T^{-1} D_{\mathscr{A}^{\mathrm{op}}} : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{A}^{\mathrm{op}}$. Dado que T es un automorfismo aditivo, se sigue que T^{-1} también lo es. Ya que $D_{\mathscr{A}} D_{\mathscr{A}^{\mathrm{op}}} = 1_{\mathscr{A}^{\mathrm{op}}}$ y $D_{\mathscr{A}^{\mathrm{op}}} D_{\mathscr{A}} = 1_{\mathscr{A}}$, los funtores de dualidad son isomorfismos. Por la aditividad de $\mathscr{A}$, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{op}}}(Y, X)$ tienen la misma estructura de grupo abeliano para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}) = \mathrm{Obj}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}})$, de donde se sigue que los funtores de dualidad son aditivos. Por ende, $\tilde{T} : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ es un automorfismo aditivo.

Sea $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Como $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ es una categoría pretriangulada, por (TR1a) tenemos que $X \xrightarrow{1_X} X \to 0 \to T(X) \in \Delta$. Ahora, de la Proposición 1.3 se sigue que $T^{-1}(0) \to X \xrightarrow{1_X} X \to 0 \in \Delta$. Dado que T y T^{-1} son aditivos, preservan coproductos finitos. Como un objeto cero en $\mathscr{A}$ es un coproducto vacío, tenemos que $0 = T(0)$ y $T^{-1}(0) = 0$, por lo que $0 \to X \xrightarrow{1_X} X \to T(0) \in \Delta$. Luego, de la definición de $\tilde{\Delta}$ se sigue que $X \xrightarrow{(1_X)^{\mathrm{op}}} X \to 0 \to \tilde{T}(0) \in \tilde{\Delta}$.

Supongamos que $\eta \simeq \mu$ en $\mathscr{T}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \tilde{T})$, con $\mu \in \tilde{\Delta}$. Entonces, por la Observación 3.1.2, sabemos que existen isomorfismos $h^{\mathrm{op}}, g^{\mathrm{op}}, f^{\mathrm{op}}$ en $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ tales que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
E'' \arrow[r, "(e')^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "h^{\mathrm{op}}"', "\wr"] & E' \arrow[r, "e^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "g^{\mathrm{op}}"', "\wr"] & E \arrow[r, "\tilde{T}((e'')^{\mathrm{op}})"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}", "\wr"'] & \tilde{T}(E'') \arrow[d, "\tilde{T}(h^{\mathrm{op}})", "\wr"'] \\
M'' \arrow[r, "(m')^{\mathrm{op}}"'] & M' \arrow[r, "m^{\mathrm{op}}"'] & M \arrow[r, "\tilde{T}((m'')^{\mathrm{op}})"'] & \tilde{T}(M'').
\end{tikzcd}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
f^{\mathrm{op}} e^{\mathrm{op}} = m^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}} &\iff ef = gm, \\
g^{\mathrm{op}}(e')^{\mathrm{op}} = (m')^{\mathrm{op}} h^{\mathrm{op}} &\iff e'g = m'h, \\
\tilde{T}(h^{\mathrm{op}})\tilde{T}((e'')^{\mathrm{op}}) = \tilde{T}((m'')^{\mathrm{op}}) f^{\mathrm{op}} &\iff \tilde{T}(h^{\mathrm{op}}(e'')^{\mathrm{op}}) = (T^{-1}(m''))^{\mathrm{op}} f^{\mathrm{op}} \\
&\iff \tilde{T}((e''h)^{\mathrm{op}}) = fT^{-1}(m'') \\
&\iff T(T^{-1}(e''h)) = T(fT^{-1}(m'')) \\
&\iff e''h = T(f)m'',
\end{aligned}$$

de donde obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & M' \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "g"'] & M'' \arrow[r, "m''"] \arrow[d, "h"] & T(M) \arrow[d, "T(f)"] \\
E \arrow[r, "e"'] & E' \arrow[r, "e'"'] & E'' \arrow[r, "e''"'] & T(E).
\end{tikzcd}$$

Más aún, como $f^{\mathrm{op}}, g^{\mathrm{op}}$ y h^{op} son isomorfismos en $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$, se sigue que f, g y h son isomorfismos en $\mathscr{A}$. Por la Observación 3.1.2, tenemos que (f, g, h) es un isomorfismo en $\mathscr{T}(\mathscr{A}, T)$. Luego, como por hipótesis $\mu \in \tilde{\Delta}$, entonces $(M, M', M'', m, m', m'') \in \Delta$. Como $(\mathscr{A}, \Delta, T)$ es una categoría pretriangulada, Δ es cerrada por isomorfismos, de donde se sigue que $(E, E', E'', e, e', e'') \in \Delta$, lo que implica que $\eta \in \tilde{\Delta}$.

Sea $X \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} Y$ en $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$. Entonces, tenemos el morfismo $Y \xrightarrow{f} X$ en $\mathscr{A}$. Como $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ es una categoría pretriangulada, de (TR1b) se sigue que existe $Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} T(Y) \in \Delta$ y, por la Proposición 1.3, tenemos el triángulo distinguido $T^{-1}(Z) \xrightarrow{T^{-1}(-\beta)} Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\alpha} Z \in \Delta$. Definiendo $Z' := T^{-1}(Z)$, tenemos que $Z' \xrightarrow{T^{-1}(-\beta)} Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\alpha} T(Z') \in \Delta$, de donde se sigue que existe $X \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} Y \xrightarrow{\tilde{T}((-\beta)^{\mathrm{op}})} Z' \xrightarrow{\tilde{T}(\alpha^{\mathrm{op}})} \tilde{T}(X) \in \tilde{\Delta}$.

Supongamos que $\eta \in \tilde{\Delta}$. Entonces, tenemos que $E \xrightarrow{e} E' \xrightarrow{e'} E'' \xrightarrow{e''} T(E) \in \Delta$. Como $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ es una categoría pretriangulada, de la Proposición 1.3 se sigue que $T^{-1}(E'') \xrightarrow{-T^{-1}(e'')} E \xrightarrow{e} E' \xrightarrow{e'} E'' \in \Delta$ y, por el Lema 3.2.8, tenemos que $T^{-1}(E'') \xrightarrow{T^{-1}(e'')} E \xrightarrow{e} E' \xrightarrow{-e'} E'' \in \Delta$. Luego, observando que $T^{-1}(E'') = \tilde{T}(E'')$, pues los funtores de dualidad fijan objetos, por definición de $\tilde{\Delta}$ tenemos que $E' \xrightarrow{e^{\mathrm{op}}} E \xrightarrow{\tilde{T}((e'')^{\mathrm{op}})} E'' \xrightarrow{-\tilde{T}((e')^{\mathrm{op}})} T(E') \in \tilde{\Delta}$.

Supongamos que $\eta, \mu \in \tilde{\Delta}$ y que existen $E'' \xrightarrow{h^{\mathrm{op}}} M'', E' \xrightarrow{g^{\mathrm{op}}} M'$ en $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ tales que $g^{\mathrm{op}}(e')^{\mathrm{op}} = (m')^{\mathrm{op}} h^{\mathrm{op}}$. Entonces, $(E, E', E'', e, e', e''), (M, M', M'', m, m', m'') \in \Delta$ y $e'g = hm'$. Como $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ es una categoría pretriangulada, del inciso (b) del Lema 3.2.1 se sigue que existe $M \xrightarrow{f} E$ en $\mathscr{A}$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & M' \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "g"'] & M'' \arrow[r, "m''"] \arrow[d, "h"] & T(M) \arrow[d, "T(f)"] \\
E \arrow[r, "e"'] & E' \arrow[r, "e'"'] & E'' \arrow[r, "e''"'] & T(E).
\end{tikzcd}$$

Luego, dado que

$$\begin{aligned}
gm = ef &\iff m^{\mathrm{op}}g^{\mathrm{op}} = f^{\mathrm{op}}e^{\mathrm{op}}, \\
T(f)m'' = e''h &\iff T^{-1}(T(f)m'') = T^{-1}(e''h) \\
&\iff fT^{-1}(m'') = T^{-1}(e'')T^{-1}(h) \\
&\iff (T^{-1}(m''))^{\mathrm{op}}f^{\mathrm{op}} = (T^{-1}(h))^{\mathrm{op}}(T^{-1}(e''))^{\mathrm{op}} \\
&\iff \tilde{T}((m'')^{\mathrm{op}})f^{\mathrm{op}} = \tilde{T}(h^{\mathrm{op}})\tilde{T}((e'')^{\mathrm{op}}),
\end{aligned}$$

se sigue que $E \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} M$ en $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ es tal que $\eta \xrightarrow{(h^{\mathrm{op}}, g^{\mathrm{op}}, f^{\mathrm{op}})} \mu$ es un morfismo de triángulos en $\mathscr{T}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \tilde{T})$.

Ahora, supongamos adicionalmente que $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ cumple el axioma (TR4). Sean $X \xrightarrow{u^{\mathrm{op}}} Y, Y \xrightarrow{v^{\mathrm{op}}} Z \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}})$. Como hemos visto que $(\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$ es una categoría pretriangulada, por (TR1b) podemos formar el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "v^{\mathrm{op}}"'] & Z' \arrow[r, "(i')^{\mathrm{op}}"] & \tilde{T}(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "v^{\mathrm{op}}u^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "u^{\mathrm{op}}"'] & Z \arrow[r, "k^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "(k')^{\mathrm{op}}"] & \tilde{T}(X) \arrow[d, "\tilde{T}(u^{\mathrm{op}})"] \\
Y \arrow[r, "v^{\mathrm{op}}"'] & Z \arrow[r, "r^{\mathrm{op}}"'] & X' \arrow[r, "(r')^{\mathrm{op}}"'] \arrow[d, "h^{\mathrm{op}}"'] & \tilde{T}(Y) \arrow[d, "\tilde{T}(i^{\mathrm{op}})"] \\
 & & \tilde{T}(Z') \arrow[r, equal] & \tilde{T}(Z'),
\end{tikzcd} \tag{3.2.5}$$

cuyos primero tres renglones son elementos de $\tilde{\Delta}$. Del diagrama (3.2.5), obtenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "r"] & Z \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "T(r')"] \arrow[d, "u"] & T(X') \\
Y' \arrow[r, "k"] & Z \arrow[r, "uv"] \arrow[d, "v"'] & X \arrow[r, "T(k')"] \arrow[d, equal] & T(Y') \\
Z' \arrow[r, "i"'] & Y \arrow[r, "u"'] & X \arrow[r, "T(i')"'] & T(Z'),
\end{tikzcd} \tag{3.2.6}$$

cuyos renglones son elementos de Δ. Más aún, tenemos que

$$\begin{aligned}
h^{\mathrm{op}} &= \tilde{T}(i^{\mathrm{op}})(r')^{\mathrm{op}} \\
&= (T^{-1}(i))^{\mathrm{op}}(r')^{\mathrm{op}} \\
&= (r'T^{-1}(i))^{\mathrm{op}},
\end{aligned}$$

por lo que $h = r'T^{-1}(i)$. Dado que T es un funtor, se sigue que $T^2(h) = T^2(r')T(i)$ por lo que, aplicando (TR2) a los renglones del diagrama (3.2.6), tenemos que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "T(r')"] \arrow[d, "u"'] & T(X') \arrow[r, "-T(r)"] & T(Z) \arrow[d, equal] \\
Z \arrow[r, "uv"] \arrow[d, "v"'] & X \arrow[r, "T(k')"] \arrow[d, equal] & T(Y') \arrow[r, "-T(k)"] & T(Z) \arrow[d, "T(v)"] \\
Y \arrow[r, "u"'] & X \arrow[r, "T(i')"'] & T(Z') \arrow[r, "-T(i)"'] \arrow[d, "-T^2(h)"'] & T(Y) \arrow[d, "T^2(r')"] \\
 & & T^2(X') \arrow[r, equal] & T^2(X')
\end{tikzcd}$$

conmuta, y sus renglones son elementos de Δ. Luego, por (TR4), existen $T(X') \xrightarrow{g'} T(Y'), T(Y') \xrightarrow{f'} T(Z')$ en $\mathscr{A}$ tales que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "T(r')"] \arrow[d, "u"'] & T(X') \arrow[r, "-T(r)"] \arrow[d, dotted, "g'"] & T(Z) \arrow[d, equal] \\
Z \arrow[r, "uv"] \arrow[d, "v"'] & X \arrow[r, "T(k')"] \arrow[d, equal] & T(Y') \arrow[r, "-T(k)"] \arrow[d, dotted, "f'"'] & T(Z) \arrow[d, "T(v)"] \\
Y \arrow[r, "u"'] & X \arrow[r, "T(i')"'] & T(Z') \arrow[r, "-T(i)"'] \arrow[d, "-T^2(h)"'] & T(Y) \arrow[d, "T^2(r')"] \\
 & & T^2(X') \arrow[r, equal] & T^2(X')
\end{tikzcd}$$

conmuta y su tercer renglón está en Δ. Definiendo $g := T^{-1}(G'), f := T^{-1}(f')$, tenemos que $\nu = (T(X'), T(Y'), T(Z'), T(g), T(f), -T^2(h)) \in \Delta$. Aplicando la Proposición 1.3 tres veces a ν, se sigue que $X' \xrightarrow{-g} Y' \xrightarrow{-f} Z' \xrightarrow{T(h)} T(X')$ está en Δ. Del Lema 3.2.8, tenemos que $X' \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{f} Z' \xrightarrow{T(h)} T(X')$ es un elemento de Δ, por lo que $Z' \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} Y' \xrightarrow{g^{\mathrm{op}}} X' \xrightarrow{h^{\mathrm{op}}} \tilde{T}(Z')$ es elemento de $\tilde{\Delta}$. Más aún, dado que

$$\begin{aligned}
T(v)\big(-T(k)\big) = -T(i)f' &\iff -T(vk) = -T(i)f' \\
&\iff vk = iT^{-1}(f') \\
&\iff k^{\mathrm{op}}v^{\mathrm{op}} = f^{\mathrm{op}}i^{\mathrm{op}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(i') = f'T(k') &\iff T(i') = T(f)T(k') \\
&\iff i' = fk' \\
&\iff (i')^{\mathrm{op}} = (k')^{\mathrm{op}}f^{\mathrm{op}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-T(r) = -T(k)g' &\iff T(r) = T(k)T(g) \\
&\iff r = kg \\
&\iff r^{\mathrm{op}} = g^{\mathrm{op}}k^{\mathrm{op}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'T(r') = T(k')u &\iff T(g)T(r') = T(k')u \\
&\iff T(gr') = T(k')u \\
&\iff gr' = k'T^{-1}(u) \\
&\iff (r')^{\mathrm{op}}g^{\mathrm{op}} = \tilde{T}(u^{\mathrm{op}})(k')^{\mathrm{op}},
\end{aligned}$$

se sigue que el diagrama en $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "v^{\mathrm{op}}"'] & Z' \arrow[r, "(i')^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}"] & \tilde{T}(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "v^{\mathrm{op}}u^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "u^{\mathrm{op}}"'] & Z \arrow[r, "k^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "(k')^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "g^{\mathrm{op}}"] & \tilde{T}(X) \arrow[d, "\tilde{T}(u^{\mathrm{op}})"] \\
Y \arrow[r, "v^{\mathrm{op}}"'] & Z \arrow[r, "r^{\mathrm{op}}"'] & X' \arrow[r, "(r')^{\mathrm{op}}"'] \arrow[d, "h^{\mathrm{op}}"] & \tilde{T}(Y) \arrow[d, "\tilde{T}(i^{\mathrm{op}})"] \\
 & & \tilde{T}(Z') \arrow[r, equal] & \tilde{T}(Z'),
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde su tercera columna es un elemento de $\tilde{\Delta}$. $\square$

Observación 3.2.10 En vista de la Proposición 3.2.9, definimos la categoría opuesta de una categoría triangulada $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ como $(\mathscr{A}, T, \Delta)^{\mathrm{op}} := (\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$.

Lema 3.2.11 Sean $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada y $\eta : X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \in \Delta$. Entonces, para cada $i \in \mathbb{Z}$, el triángulo

$$\eta^{(i)} : T^i(X) \xrightarrow{(-1)^i T^i(u)} T^i(Y) \xrightarrow{(-1)^i T^i(v)} T^i(Z) \xrightarrow{(-1)^i T^i(w)} T^{i+1}(X)$$

es distinguido.

Demostración. Se sigue de observar que $\eta^{(0)} = \eta \in \Delta$ por hipótesis y que, para $j \geq 0$, al aplicar (TR2) a $\eta^{(j)}$ y la implicación contraria de la Proposición 1.3 a $\eta^{(-j)}$, tres veces cada una, se obtiene que $\eta^{(j+1)} \in \Delta$ y $\eta^{-(j+1)} \in \Delta$, respectivamente. $\square$

Teorema 3.2.12 Sean $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada, $\mathscr{B}$ una categoría abeliana y $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor cohomológico. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, considere el funtor $F^i := F \circ T^i : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$. Entonces, para cada $(X, Y, Z, u, v, w) \in \Delta$, se tiene la sucesión exacta larga en $\mathscr{B}$:

(a) Caso covariante:

$$\cdots \to F^i(X) \xrightarrow{F^i(u)} F^i(Y) \xrightarrow{F^i(v)} F^i(Z) \xrightarrow{F^i(w)} F^{i+1}(X) \to \dots$$

(b) Caso contravariante:

$$\cdots \to F^i(Z) \xrightarrow{F^i(v)} F^i(Y) \xrightarrow{F^i(u)} F^i(X) \xrightarrow{F^{i-1}(w)} F^{i-1}(Z) \to \dots$$

Demostración. Sean $\eta = (X, Y, Z, u, v, w) \in \Delta$ e $i \in \mathbb{Z}$. Entonces, por el Lema 3.2.11, sabemos que $\eta^{(i)} \in \Delta$.

(a) Supongamos que F es covariante. Sea $i \in \mathbb{Z}$. Como F es cohomológico, tenemos que la sucesión

$$FT^i(X) \xrightarrow{F((-1)^i T^i(u))} FT^i(Y) \xrightarrow{F((-1)^i T^i(v))} FT^i(Z) \xrightarrow{F((-1)^i T^i(w))} FT^{i+1}(X) \tag{3.2.7}$$

es exacta en $\mathscr{B}$. Más aún, como F es aditivo, se sigue que

$$F((-1)^i T^i(u)) = (-1)^i F(T^i(u)) = (-1)^i F^i(u).$$

Análogamente, tenemos que $F((-1)^i T^i(v)) = (-1)^i F^i(v)$ y $F((-1)^i T^i(w)) = (-1)^i F^i(w)$. Dado que, para cualquier morfismo α en una categoría abeliana, tenemos que

$$\operatorname{Im}(\alpha) \simeq \operatorname{Im}(-\alpha) \text{ y } \operatorname{Ker}(\alpha) \simeq \operatorname{Ker}(-\alpha)$$

como subobjetos, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(F^i(u)) &\simeq \operatorname{Im}((-1)^i F^i(u)) \\ &\simeq \operatorname{Ker}((-1)^i F^i(v)) && \text{(por (3.2.7))} \\ &\simeq \operatorname{Ker}(F^i(v)), \end{aligned}$$

por lo que la sucesión de (a) es exacta en $F^i(Y)$. Análogamente, se demuestra que la sucesión de (a) es exacta en $F^i(Z)$. Más aún, aplicando (TR2) a $\eta^{(i)}$ y usando que F es cohomológico, por un procedimiento similar se sigue que la sucesión de (a) es exacta en $F^{i+1}(X)$. Como esto es válido para todo $i \in \mathbb{Z}$, concluimos que la sucesión larga de (a) es exacta en $\mathscr{B}$.

(b) Análogo al caso anterior.

□

Proposición 3.2.13 Sean $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada y $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \in \Delta$. Entonces $Z \simeq 0$ en $\mathscr{A}$ si, y sólo si, $X \xrightarrow{u} Y$ es un isomorfismo en $\mathscr{A}$.

Demostración.
($\Rightarrow$) Supongamos que $Z \simeq 0$ en $\mathscr{A}$. Por (TR1a) y (TR3), tenemos que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "\alpha"] & T(X) \arrow[d, "T(u)"] \\ Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & T(Y) \end{tikzcd}$$

conmuta, donde sus renglones son triángulos distinguidos. Como $Z \simeq 0$ y 0 es un objeto final en $\mathscr{A}$, tenemos que α es un isomorfismo en $\mathscr{A}$. Luego, de la Proposición 3.2.7, se sigue que $X \xrightarrow{u} Y$ es un isomorfismo en $\mathscr{A}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $X \xrightarrow{u} Y$ es un isomorfismo en $\mathscr{A}$. Entonces, existe $u^{-1} : Y \xrightarrow{\sim} X$ tal que $u^{-1}u = 1_X$ y $uu^{-1} = 1_Y$. Por (TR1a), (TR3) y el inciso (c) del Teorema 3.2.3, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u^{-1}"', "\wr"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "\beta", "\wr"'] & T(X) \arrow[d, "T(u)"] \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & T(Y), \end{tikzcd}$$

de donde se sigue que $Z \simeq 0$ en $\mathscr{A}$. □

Proposición 3.2.14 Sean $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada y $\eta = (X, Y, Z, u, v, w), \eta' = (X', Y', Z', u', v', w') \in \Delta$. Entonces

$$\eta \bigoplus \eta' := \left(X \bigoplus X', Y \bigoplus Y', Z \bigoplus Z', u \bigoplus u', v \bigoplus v', w \bigoplus w'\right)$$

es un triángulo distinguido.

Demostración. Por (TR1b), podemos completar el morfismo $X \bigoplus X' \xrightarrow{u \bigoplus u'} Y \bigoplus Y'$ en $\mathscr{A}$ a un triángulo distinguido $\chi = (X \bigoplus X', Y \bigoplus Y', L, u \bigoplus u', m, n) \in \Delta$. Luego, por (TR3), tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "f"] & (X) \arrow[d, "\binom{1}{0}"] \\
X \bigoplus X' \arrow[r, "\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix}"] & Y \bigoplus Y' \arrow[r, "m"] & L \arrow[r, "n"] & T(X \bigoplus X') \\
X \arrow[r, "u'"'] \arrow[u, "\binom{0}{1}"] & Y' \arrow[r, "v'"'] \arrow[u, "\binom{0}{1}"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] \arrow[u, dotted, "f'"'] & T(X'), \arrow[u, "\binom{0}{1}"']
\end{tikzcd}$$

de donde se sigue que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \bigoplus X' \arrow[r, "\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & Y \bigoplus Y' \arrow[r, "\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & Z \bigoplus Z' \arrow[r, "\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w' \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(f,f')"] & T\big(X \bigoplus X'\big) \arrow[d, equal] \\
X \bigoplus X' \arrow[r, "\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix}"'] & Y \bigoplus Y' \arrow[r, "m"'] & L \arrow[r, "n"'] & T\big(X \bigoplus X'\big)
\end{tikzcd} \tag{3.2.8}$$

conmuta. Sea $M \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Por el Teorema 3.2.12, se tienen las sucesiones exactas en Ab

$$\mathscr{A}(M,X) \xrightarrow{\mathscr{A}(M,u)} \mathscr{A}(M,Y) \xrightarrow{\mathscr{A}(M,v)} \mathscr{A}(M,Z) \xrightarrow{\mathscr{A}(M,w)} \mathscr{A}(M,T(X)) \xrightarrow{\mathscr{A}(M,T(u))} \mathscr{A}(M,T(Y)),$$
$$\mathscr{A}(M,X') \xrightarrow{\mathscr{A}(M,u')} \mathscr{A}(M,Y') \xrightarrow{\mathscr{A}(M,v')} \mathscr{A}(M,Z') \xrightarrow{\mathscr{A}(M,w')} \mathscr{A}(M,T(X')) \xrightarrow{\mathscr{A}(M,T(u'))} \mathscr{A}(M,T(Y'))$$

que denotamos por $\overline{\eta}$ y $\overline{\eta'}$, respectivamente. Por la Proposición A.6.2, tenemos que $\overline{\eta} \bigoplus \overline{\eta'}$ es una sucesión exacta en Ab. Similarmente, aplicando el Teorema 3.2.12 a χ, tenemos la sucesión exacta en Ab

$$\mathscr{A}\big(M, X \bigoplus X'\big) \to \mathscr{A}\big(M, Y \bigoplus Y'\big) \xrightarrow{\mathscr{A}(M,m)} \mathscr{A}(M,L) \xrightarrow{\mathscr{A}(M,n)} \mathscr{A}\Big(M, T\big(X \bigoplus X'\big)\Big) \xrightarrow{\mathscr{A}\left(M, T\left(u \bigoplus u'\right)\right)} \mathscr{A}\Big(M, T\big(Y \bigoplus Y'\big)\Big),$$

la cual denotamos por $\overline{\chi}$. Aplicando el funtor Hom-covariante $\mathscr{A}(M,-)$ al diagrama (3.2.8), obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}\big(M, X \bigoplus X'\big) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{A}\big(M, Y \bigoplus Y'\big) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{A}\big(M, Z \bigoplus Z'\big) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{A}(M,h)"] & \mathscr{A}\Big(M, T\big(X \bigoplus X'\big)\Big) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{A}\Big(M, T\big(Y \bigoplus Y'\big)\Big) \arrow[d, equal] \\
\mathscr{A}\big(M, X \bigoplus X'\big) \arrow[r] & \mathscr{A}\big(M, Y \bigoplus Y'\big) \arrow[r] & \mathscr{A}(M,L) \arrow[r] & \mathscr{A}\Big(M, T\big(X \bigoplus X'\big)\Big) \arrow[r] & \mathscr{A}\Big(M, T\big(Y \bigoplus Y'\big)\Big),
\end{tikzcd}$$

en Ab, el cual es conmutativo y tiene renglones exactos pues, dado que el funtor $\mathscr{A}(M,-)$ es aditivo, del Teorema 1.5.8 se sigue que el primer renglón del diagrama es isomorfo a $\overline{\eta} \bigoplus \overline{\eta'}$. Luego, por el inciso (c) del Lema A.6.14 (Lema del 5), tenemos que $\mathscr{A}(M,h) : \mathscr{A}\big(M, Z \bigoplus Z'\big) \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}(M,L)$ en Ab. Dado que lo anterior vale para cualquier $M \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, de la Proposición 0.6.6 se sigue que $h : Z \bigoplus Z' \xrightarrow{\sim} L$ en $\mathscr{A}$. Luego, por la Observación 3.1.2, tenemos que $(1_{X \bigoplus X'}, 1_{Y \bigoplus Y'}, h) : \eta \bigoplus \eta' \xrightarrow{\sim} \chi$ en $\mathscr{T}(\mathscr{A}, T)$, con $\chi \in \Delta$. Dado que Δ es cerrada por isomorfismos, concluimos que $\eta \bigoplus \eta' \in \Delta$. $\square$

Corolario 3.2.15 Sea $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada. Entonces, para cualesquiera $X, Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, se tiene que

$$X \xrightarrow{\binom{1}{0}} X \bigoplus Z \xrightarrow{(0\ 1)} Z \xrightarrow{0} T(X)$$

es un triángulo distinguido.

Demostración. Sean $X, Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Por (TR1a) y el inciso (c) del Teorema 3.2.4, tenemos a los triángulos distinguidos $\eta = (X, X, 0, 1_X, 0, 0)$ y $\mu = (0, Z, Z, 0, 1_Z, 0)$. Luego, de la Proposición 3.2.15, se sigue que

$$\begin{aligned}\eta \bigoplus \mu &= X \xrightarrow{1_X \bigoplus 0} X \bigoplus Z \xrightarrow{0 \bigoplus 1_Z} Z \xrightarrow{0} T(X) \\ &= X \xrightarrow{\binom{1}{0}} X \bigoplus Z \xrightarrow{(0\ 1)} Z \xrightarrow{0} T(X) \in \Delta.\end{aligned}$$

$\square$

Definición 3.2.16 Sea $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada. Un triángulo distinguido (X, Y, Z, u, v, w) es *escindible* si existe un isomorfismo $\lambda : Y \xrightarrow{\sim} X \coprod Z$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\lambda"', "\wr"] & Z \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "\binom{1}{0}"'] & X \oplus Z \arrow[r, "(0\ 1)"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Proposición 3.2.17 Para un triángulo distinguido $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$ en una categoría pretriangulada $(\mathscr{A}, T, \Delta)$, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $w = 0$.

(b) u es un monomorfismo escindible.

(c) v es un epimorfismo escindible.

(d) η es escindible.

(e) Existe $X \oplus Z \xrightarrow{\lambda} Y \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ tal que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & X \oplus Z \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[d, "\lambda"] & Z \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z. \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Sea $\eta' = \Big(X, X \oplus Z, Z, 1_X \oplus 0, 0 \oplus 1_Z, 0\Big) \in \Delta$, por el Corolario 3.2.15.

(a)$\Rightarrow$(b) Supongamos que $w = 0$. Entonces, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w=0"] \arrow[d] & T(X) \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & T(X), \end{tikzcd}$$

donde los renglones son triángulos distinguidos por hipótesis y por (TR1a). Por el inciso (a) del Lema 3.2.1, existe $Y \xrightarrow{u'} X \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & Z \arrow[r, "w=0"] \arrow[d] & T(X) \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & T(X), \end{tikzcd}$$

de donde se sigue que $u'u = 1_X$.

(b)⇒(c) Supongamos que u es un monomorfismo escindible. Entonces, existe $Y \xrightarrow{u'} X \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ tal que $u'u = 1_X$. Por (TR1a) y (TR3), existe $Z \xrightarrow{f} 0 \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ tal que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d] & T(X) \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & T(X) \end{tikzcd}$$

conmuta. Luego, del cuadrado conmutativo de la derecha, además de (TR1a) y la Proposición 3.2.4, tenemos que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r, "1_Z"] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & T(X), \end{tikzcd}$$

donde los dos renglones son triángulos distinguidos, el cuadrado conmuta, y se utilizó que $T(0) = 0$ por el Lema 1.5.4. Por el inciso (b) del Lema 3.2.1 existe $Z \xrightarrow{v'} Y \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r, "1_Z"] \arrow[d, "v'"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & T(X), \end{tikzcd}$$

de donde se sigue que $vv' = 1_Z$.

(c)⇒(d) Supongamos que v es un epimorfismo escindible. Entonces, existe $Z \xrightarrow{v'} Y \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ tal que $vv' = 1_Z$. Dado que por el inciso (a) del Teorema 3.2.3 sabemos que $vu = 0$, se sigue que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & X \bigoplus Z \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[d, "(u\ v')"] & Z \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $\lambda := (\,u\ v'\,)$. Aplicando (TR2) a η y η', tenemos el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \bigoplus Z \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[d, "\lambda"'] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & T(X) \arrow[r, "-T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}"] & T\big(X \bigoplus Z\big) \arrow[d, "T(\lambda)"] \\ Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & T(X) \arrow[r, "-T(u)"] & T(Y), \end{tikzcd}$$

donde los renglones son triángulos distinguidos. Por (TR3), el diagrama anterior puede ser completado a un morfismo de triángulos distinguidos. Luego, por la Proposición 3.2.4, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & X \bigoplus Z \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[d, "\lambda"'] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & T(X) \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "0"'] & T(X), \end{tikzcd}$$

donde los renglones son triángulos distinguidos. De la Proposición 3.2.7, se sigue que λ es un isomorfismo en $\mathscr{A}$.

(d)⇒(e) Trivial.

(e)⇒(a) Supongamos que existe $X \bigoplus Z \xrightarrow{\lambda} Y \in \operatorname{Mor}(\mathscr{A})$ tal que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & X \bigoplus Z \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[d, "\lambda"] & Z \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z. \end{tikzcd}$$

conmuta. Aplicando (TR2) a η y η', tenemos el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} X \bigoplus Z \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[d, "\lambda"'] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & T(X) \arrow[r, "-T\binom{1}{0}"] & T\big(X \bigoplus Z\big) \arrow[d, "T(\lambda)"] \\ Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & T(X) \arrow[r, "-T(u)"] & T(Y), \end{tikzcd}$$

donde los renglones son triángulos distinguidos. Por (TR3), el diagrama anterior puede ser completado a un morfismo de triángulos distinguidos, de donde se sigue que $w = 0$. $\square$

Corolario 3.2.18 Para una categoría pretriangulada $(\mathscr{A}, T, \Delta)$, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Todo monomorfismo en $\mathscr{A}$ es escindible.

(b) Todo epimorfismo en $\mathscr{A}$ es escindible.

(c) Si $\mathscr{A}$ es abeliana, entonces $\mathscr{A}$ es semisimple; es decir, $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X, Y) = 0$ para cualesquiera $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$.

Demostración.

(a) Sea $X \xrightarrow{f} Y \in \operatorname{Mor}(\mathscr{A})$ un monomorfismo. Por (TR1b), f puede ser completado a un triángulo distinguido (X, Y, Z, f, g, w) y, por la Proposición 3.2.4, tenemos que $T^{-1}(Z) \xrightarrow{T^{-1}(w)} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ es un triángulo distinguido. Del inciso (a) del Teorema 3.2.3, se sigue que

$$f\Big(- T^{-1}(w)\Big) = 0 = f0,$$

lo que implica que $-T^{-1}(w) = 0$, pues f es un monomorfismo. Luego, de la Proposición 3.2.17 se sigue que f es un monomorfismo escindible.

(b) Por la Observación 3.2.9, se sigue de aplicar el principio de dualidad al inciso (a).

(c) Se sigue de (a) y (b).

□

Proposición 3.2.19 La clase de triángulos distinguidos en una categoría pretriangulada es cerrada por sumandos directos.

Demostración. Sean $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada y $\eta = (X, Y, Z, u, v, w), \eta' = (X', Y', W', u', v', w')$ en $\mathscr{T}$ tales que $\eta \bigoplus \eta' = \Big(X \bigoplus X', Y \bigoplus Y', Z \bigoplus Z', u \bigoplus u', v \bigoplus v', w \bigoplus w'\Big)$ es un triángulo distinguido. Por (TR1b), podemos completar al morfismo $X \xrightarrow{u} Y$ en $\mathscr{A}$ en un triángulo distinguido (X, Y, E, u, a, b), por lo que tenemos el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"'] & Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"'] & E \arrow[r, "b"] & T(X) \arrow[d, "\binom{1}{0}"] \\
X \bigoplus X' \arrow[r, "\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix}"'] & Y \bigoplus Y' \arrow[r, "\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix}"'] & Z \bigoplus Z' \arrow[r, "\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w' \end{pmatrix}"'] & T\Big(X \bigoplus X'\Big),
\end{tikzcd}$$

donde los renglones son triángulos distinguidos y el cuadrado es conmutativo. Por (TR3), existe un morfismo $\binom{\alpha}{\beta}$ en $\mathscr{A}$ que completa el diagrama anterior y lo hace conmutar. En particular, como $T\Big(X \bigoplus X'\Big) = T(X) \bigoplus T(X')$ por el Teorema 1.5.8, obtenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\alpha"] & T(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & T(X).
\end{tikzcd} \tag{3.2.9}$$

Sea $M \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Dado que $\eta \bigoplus \eta' \in \Delta$, por los Teoremas 3.2.12 y 1.5.8, tenemos la sucesión exacta en Ab

$$\mathscr{A}\Big(M, X \bigoplus X'\Big) \to \mathscr{A}\Big(M, Y \bigoplus Y'\Big) \to \mathscr{A}\Big(M, Z \bigoplus Z'\Big) \to \mathscr{A}\Big(M, T(X) \bigoplus T(X')\Big) \to \mathscr{A}\Big(M, T(Y) \bigoplus T(Y')\Big).$$

Ahora, como el funtor Hom-covariante $\mathscr{A}(M, -)$ es aditivo, se sigue que la sucesión

$$\mathscr{A}(M, X) \xrightarrow{\mathscr{A}(M,u)} \mathscr{A}(M, Y) \xrightarrow{\mathscr{A}(M,v)} \mathscr{A}(M, Z) \xrightarrow{\mathscr{A}(M,w)} \mathscr{A}(M, T(X)) \xrightarrow{\mathscr{A}(M,T(u))} \mathscr{A}(M, T(Y))$$

es exacta en Ab. Luego, por el Teorema 3.2.12 y el diagrama conmutativo 3.2.9, se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en Ab

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}(M, X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{A}(M, Y) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{A}(M, E) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{A}(M,\alpha)"] & \mathscr{A}(M, T(X)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{A}(M, T(Y)) \arrow[d, equal] \\
\mathscr{A}(M, X) \arrow[r] & \mathscr{A}(M, Y) \arrow[r] & \mathscr{A}(M, Z) \arrow[r] & \mathscr{A}(M, T(X)) \arrow[r] & \mathscr{A}(M, T(Y)).
\end{tikzcd}$$

Luego, por el Lema A.6.14 (Lema del 5) en Ab, se sigue que $\mathscr{A}(M, \alpha) : \mathscr{A}(M, E) \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}(M, Z)$ y, de la Proposición 0.6.6, tenemos que $\alpha : E \xrightarrow{\sim} Z$ en $\mathscr{A}$. Finalmente, del diagrama (3.2.9), la Observación 3.1.2 y el hecho de que Δ sea cerrada por isomorfismos, concluimos que $\eta \in \Delta$. □

Proposición 3.2.20 Sean $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada y $\eta = (X, Y, Z, u, v, w), \eta' = (X', Y', Z', u', v', w') \in \Delta$. Entonces, para el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] & T(X) \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & T(X)',
\end{tikzcd}$$

las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $v'gu = 0$.

(b) Existe $f : X \to X'$ en $\mathscr{A}$ tal que $gu = u'f$.

(c) Existe $h : Z \to Z'$ en $\mathscr{A}$ tal que $hv = v'g$.

(d) Existe $f : X \to X'$ y $h : Z \to Z'$ en $\mathscr{A}$ tal que $(f, g, h) : \eta \to \eta'$ en $\mathscr{T}(\mathscr{A}, \Delta)$.

Más aún, si $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, T^{-1}Z') = 0$ y las condiciones anteriores se satisfacen, entonces el morfismo f en (b) (respectivamente, h en (c)) es único.

Demostración.
(a)$\Rightarrow$(b) Se sigue de la Proposición 3.2.6.

(b)$\Rightarrow$(c) Se sigue el axioma (TR3).

(c)$\Rightarrow$(d) Se sigue del inciso (b) del Lema 3.2.1.

(d)$\Rightarrow$(a) Se sigue del inciso (a) del Teorema 3.2.3.

Ahora, supongamos que las condiciones anteriores se satisfacen y, adicionalmente, que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, T^{-1}(Z')) = 0$. Por el inciso (b) del Teorema 3.2.3, sabemos que los funtores $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, -)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, Z')$ son cohomológicos. Aplicando la Proposición 1.3 a η y $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, -)$ al triángulo distinguido resultante, obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, T^{-1}(Z')) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, X') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,u')} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y')$$

en Ab. Dado que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, T^{-1}(Z)) = 0$, se sigue que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, u')$ es un monomorfismo, lo que implica que u' es un monomorfismo. Por ende, si existen $X \xrightarrow{f} X', X \xrightarrow{f'} X'$ en $\mathscr{A}$ tales que $gu = u'f = u'f'$, entonces $f = f'$.

Análogamente, aplicando (TR2) a η y $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, Z')$ al triángulo distinguido resultante, obtenemos la sucesión

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(X), Z') \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Y, Z') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(v,Z')} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Z, Z'),$$

la cual es exacta en Ab. Como T es un automorfismo aditivo, se sigue que $T^{-1} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(X), Z') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, T^{-1}(Z')) = 0$, por lo que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(v, Z')$ es un monomorfismo, de donde se sigue que v es un epimorfismo. Por ende, si existen $Z \xrightarrow{h} Z', Z \xrightarrow{h'} Z'$ en $\mathscr{A}$ tales que $v'g = hv = h'v$, entonces $h = h'$. □

Corolario 3.2.21 Sean $(\mathscr{C}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada y η un triángulo distinguido dado por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "w"'] & \\
X \arrow[rr, "u"'] & & Y \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}$$

tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, T^{-1}(Z)) = 0$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Si el triángulo η' dado por el diagrama

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "w'"'] & \\ X \arrow[rr, "u"'] & & Y \arrow[ul, "v'"'] \end{tikzcd}$$

pertenece a Δ, entonces existe un único morfismo $g : Z \to Z'$ en $\mathscr{C}$ tal que $(1_X, 1_Y, g) : \eta \xrightarrow{\sim} \eta'$ en $\mathscr{T}(\mathscr{C}, \Delta)$.

(b) Si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w'} T(X)$ es un triángulo distinguido, entonces $w = w'$.

Demostración.

(a) Se sigue directamente de la Proposición 3.2.20, del inciso (c) del Teorema 3.2.3 y de la Observación 3.1.2

(b) Se sigue del inciso (a), pues necesariamente $g = 1_Z$.

□

3.3. El bifuntor aditivo Ext^1 en categorías trianguladas

Definición 3.3.1 Para una categoría triangulada $(\mathscr{A}, T, \Delta)$, definimos el bifuntor

$$\mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},T,\Delta)}(-,-) := \mathrm{Hom}(-,-[1]),$$

donde $\mathrm{Hom}(-,-)$ es el bifuntor Hom con dominio en $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{A}$.

Observación 3.3.2 Sea $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría triangulada. Entonces, el bifuntor $\mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},T,\Delta)}(-,-)$ es aditivo.

En efecto: Se sigue del inciso (3) de la Observación 1.5.2.

Definición 3.3.3 [Nak18, Definition 1.1] Sea $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría triangulada. Un *par de cotorsión (completo)* $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ en $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ es un par $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ de subcategorías aditivas plenas de $\mathscr{A}$, cerradas por sumandos directos en $\mathscr{A}$, tal que cumple las siguientes condiciones.

(a) $\mathrm{Ext}^1_{(\mathscr{A},T,\Delta)}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$.

(b) Para cualquier $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, existe un triángulo distinguido $U \to C \to V[1] \to U[1]$ tal que $U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}$.

Observación 3.3.4 Sean $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría triangulada y $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ un par de cotorsión completo en $(\mathscr{A}, T, \Delta)$. Entonces, para cualquier $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, tenemos un triángulo distinguido $U \to C \to V[1] \to U[1]$, con $U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}$. En particular, aplicando la Proposición 3.2.4, obtenemos el triángulo distinguido

$$V \to U \to C \to V[1].$$

Por otro lado, podemos considerar a $C[1] \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, tomar un triángulo distinguido $U' \to C[1] \to V'[1] \to U'[1]$, con $U' \in \mathcal{U}, V' \in \mathcal{V}$, y aplicar la Proposición 3.2.4 dos veces para obtener el triángulo distinguido

$$C \to V' \to U' \to C[1].$$

De esta forma, obtenemos sucesiones análogas a las que aparecen en la Definición 2.3.6.

Capítulo 4

Categorías extrianguladas

Al inicio de este capítulo motivaremos el estudio de las categorías extrianguladas, empezando por observar una importante conexión entre las categorías exactas y las categorías trianguladas, dada por las categorías de Frobenius —que son un tipo particular de categoría exacta— y sus categorías estables asociadas —las cuales admiten una estructura de categoría triangulada. Posteriormente, daremos la definición de categoría extriangulada introducida por Nakaoka y Palu[NP19], demostraremos algunas de sus propiedades fundamentales, mostraremos cómo las categorías extrianguladas se relacionan con las categorías exactas y las categorías trianguladas, y estudiaremos sus pares de cotorsión.

4.1. Categorías de Frobenius y categorías estables asociadas

Definición 4.1.1 Sea $(\mathscr{A},\mathscr{E})$ una categoría exacta.

(a) Definimos a los objetos *$\mathscr{E}$-proyectivos* en $\mathscr{A}$ y decimos que $\mathscr{A}$ tiene *suficientes $\mathscr{E}$-proyectivos* siguiendo las Definiciones 1.1.9 y 1.1.12, considerando epimorfismos admisibles en vez de sólo epimorfismos, y denotamos a la clase de objetos $\mathscr{E}$-proyectivos en $\mathscr{A}$ por $\operatorname{Proj}_{\mathscr{E}}(\mathscr{A})$. En particular, notamos que $\operatorname{Proj}(\mathscr{A}) \subseteq \operatorname{Proj}_{\mathscr{E}}(\mathscr{A})$, pues todo epimorfismo admisible es, en particular, un epimorfismo.

(b) Definimos a los objetos *$\mathscr{E}$-inyectivos* en $\mathscr{A}$ y decimos que $\mathscr{A}$ tiene *suficientes $\mathscr{E}$-inyectivos* siguiendo las Definiciones 1.1.13 y 1.1.17, considerando monomorfismos admisibles en vez de sólo monomorfismos, y denotamos a la clase de objetos $\mathscr{E}$-inyectivos en $\mathscr{A}$ por $\operatorname{Inj}_{\mathscr{E}}(\mathscr{A})$. En particular, notamos que $\operatorname{Inj}(\mathscr{A}) \subseteq \operatorname{Inj}_{\mathscr{E}}(\mathscr{A})$, pues todo monomorfismo admisible es, en particular, un monomorfismo.

(c) Un objeto A en $\mathscr{A}$ es *$\mathscr{E}$-proyectivo-inyectivo* si $A \in \operatorname{Proj}_{\mathscr{E}}(\mathscr{A}) \cap \operatorname{Inj}_{\mathscr{E}}(\mathscr{A})$.

Definición 4.1.2

(a) Una *categoría de Frobenius* es una categoría exacta $(\mathscr{A},\mathscr{E})$ que tiene suficientes $\mathscr{E}$-proyectivos y $\mathscr{E}$-inyectivos, tal que $\operatorname{Proj}_{\mathscr{E}}(\mathscr{A}) = \operatorname{Inj}_{\mathscr{E}}(\mathscr{A})$.

(b) Sea $(\mathscr{A},\mathscr{E})$ una categoría de Frobenius. La *categoría estable $\underline{\mathscr{A}}$ asociada a $(\mathscr{A},\mathscr{E})$* es aquella cuyos objetos son los mismos que los de $\mathscr{A}$, y en donde todos los morfismos en $\mathscr{A}$ que se factorizan a través de un objeto en $\operatorname{Proj}_{\mathscr{E}}(\mathscr{A})$ se identifican con el morfismo cero en $\underline{\mathscr{A}}$.

Observación 4.1.3 Sean $\mathscr{A}$ es una categoría de Frobenius y J la clase de todos los morfismos en $\mathscr{A}$ que se pueden factorizar a través de un objeto proyectivo-inyectivo. Entonces, J es un ideal de $\mathscr{A}$ y la categoría cociente $\mathscr{A}/J = \underline{\mathscr{A}}$.

En efecto: Se sigue del inciso (3) la Observación 1.5.11 y de la Proposición 1.1.11.

Proposición 4.1.4 La categoría estable asociada a una categoría de Frobenius tiene estructura de categoría triangulada.

Demostración. Los detalles se pueden consultar en [Are17, Chapter 2]. □

Existen muchos resultados de naturaleza homológica que son válidos tanto para categorías exactas como para categorías trianguladas, después de haber sido debidamente adaptados a cada contexto, y las categorías de Frobenius y sus categorías estables asociadas nos permiten tender un puente entre ellas con el cual a menudo podemos transferir resultados de un contexto a otro. La estrategia usual para pasar de un resultado válido para categorías trianguladas a un resultado que sea válido en categorías exactas es la siguiente:

(1) Especificar el resultado en el caso de categorías estables asociadas a categorías de Frobenius.

(2) Levantar todas las definiciones y afirmaciones de la categoría estable asociada a la categoría de Frobenius.

(3) Adaptar la demostración para que sea válida para cualquier categoría exacta, con las suposiciones adecuadas.

Por otro lado, es posible que un resultado válido para categorías exactas tenga un resultado análogo para categorías trianguladas, que se pueda demostrar con ayuda del siguiente procedimiento:

(1) Especificar el resultado en el caso de una categoría de Frobenius.

(2) Descender todas las definiciones y afirmaciones a su categoría estable asociada.

(3) Adaptar la demostración para que sea válida para cualquier categoría triangulada, con las suposiciones adecuadas.

A pesar de que, en ambos casos, el paso (2) no es trivial, usualmente la principal dificultad se encuentra en el paso (3). Esta misma dificultad es removida mediante el uso de las categorías extrianguladas como consecuencia de los primeros resultados obtenidos en la sección 4.4.

4.2. Definición de categoría extriangulada

Una revisión cuidadosa de las definiciones de pares de cotorsión en categorías exactas y trianguladas, dadas por las Definiciones 2.3.6 y 3.3.3, respectivamente, revela que para definir un par de cotorsión en una categoría es necesario que exista un bifuntor Ext^1 con características apropiadas. Las categorías extrianguladas se obtienen al extraer aquellas propiedades de los funtores Ext^1 en categorías categorías exactas y trianguladas que parecen relevantes desde el punto de vista de los pares de cotorsión. De esta manera, podemos definir una noción de par de cotorsión en una categoría extriangulada que generalice aquellas nociones en categorías exactas y categorías trianguladas.

$\mathbb{E}$-extensiones

Definición 4.2.1 [NP19, Definition 2.1] Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y $\mathbb{E} : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ un bifuntor aditivo. Para cualesquiera $A, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, una $\mathbb{E}$-*extensión* es un elemento $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$. Por ende, formalmente, una $\mathbb{E}$-extensión es una terna (A, δ, C). En particular, decimos que el elemento $0 \in \mathbb{E}(C, A)$ es la $\mathbb{E}$-*extensión escindible*.

Definición 4.2.2 [NP19, Definition 2.3] Sean (A, δ, C) y (A', δ', C') $\mathbb{E}$-extensiones. Un par de morfismos $a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A')$ y $c \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C, C')$ es un *morfismo de* $\mathbb{E}$*-extensiones* si satisface la igualdad $a \cdot \delta = \delta' \cdot c$, y lo denotamos por $(a, c) : \delta \to \delta'$.

Observación 4.2.3 [NP19, Remark 2.4] Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y $\mathbb{E} : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ un bifuntor aditivo.

(1) Las $\mathbb{E}$-extensiones y los morfismos de $\mathbb{E}$-extensiones forman la categoría $\mathbb{E}\text{-}\mathrm{Ext}(\mathscr{A})$ de $\mathbb{E}$-extensiones de $\mathscr{A}$, donde la composición de morfismos y los morfismos identidad se inducen de $\mathscr{A}$.

(2) Sean (A, δ, C) una $\mathbb{E}$-extensión y $A', C' \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Entonces, cualquier morfismo $a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A')$ induce el morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones

$$(a, 1_C) : \delta \to a \cdot \delta,$$

y cualquier morfismo $c \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C', C)$ induce el morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones

$$(1_A, c) : \delta \cdot c \to \delta.$$

Observación 4.2.4 [NP19, Definition 2.6] Sean $(A, \delta, C), (A', \delta', C')$ $\mathbb{E}$-extensiones y $C \xrightarrow{\mu_C} C \bigoplus C' \xleftarrow{\mu_{C'}} C'$, $A \xleftarrow{\pi_A} A \bigoplus A' \xrightarrow{\pi_{A'}} A'$ un coproducto y un producto en $\mathscr{A}$, respectivamente. Dado que $\mathbb{E}$ es un bifuntor aditivo, por el Teorema 1.5.8 tenemos que

$$\mathbb{E}\Big(C \bigoplus C', A \bigoplus A'\Big) \simeq \mathbb{E}(C, A) \bigoplus \mathbb{E}(C, A') \bigoplus \mathbb{E}(C', A) \bigoplus \mathbb{E}(C', A').$$

Sea $\delta \bigoplus \delta' \in \mathbb{E}(C \bigoplus C', A \bigoplus A')$ el elemento correspondiente a $(\delta, 0, 0, \delta')$ según el isomorfismo anterior. Si $A = A'$ y $C = C'$, entonces, por la Proposición 1.5.20, tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi_{A,C}(\nabla_A \cdot \delta \bigoplus \delta' \cdot \Delta_C) &= \varphi_{A, A \bigoplus A}(\nabla_A)\Phi_{A \bigoplus A, C \bigoplus C}(\delta \bigoplus \delta')\varphi_{C \bigoplus C, C} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \delta + \delta'.\end{aligned}$$

donde $\Delta_C : C \to C \bigoplus C$ y $\nabla_A : A \bigoplus A \to A$ son los morfismos diagonal y codiagonal[1].

Realización de $\mathbb{E}$-extensiones

Definición 4.2.5 [NP19, Definition 2.7] Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y $A, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Dos sucesiones de morfismos $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ y $A \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C$ en $\mathscr{A}$ son *equivalentes* si existe un isomorfismo $b \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B, B')$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "y"] \arrow[dd, "b", "\wr"'] & \\ A \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "x'"'] & & C. \\ & B' \arrow[ur, "y'"'] & \end{tikzcd}$$

Claramente, esta es una relación de equivalencia. Denotamos a la clase de equivalencia de $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ por $[A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$.

[1] Ver la Definición 0.5.45.

Definición 4.2.6 [NP19, Definition 2.8] Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva.

(a) Para cualesquiera $A, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, denotamos $0 = [A \xrightarrow{\binom{1}{0}} A \bigoplus C \xrightarrow{(0\ 1)} C]$.

(b) Para cualesquiera dos clases de secuencias de morfismos $[A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ y $[A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$, denotamos

$$\Big[A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C] \bigoplus [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C'] = [A \bigoplus A' \xrightarrow{x \bigoplus x'} B \bigoplus B' \xrightarrow{y \bigoplus y'} C \bigoplus C'\Big].$$

Definición 4.2.7 [NP19, Definition 2.9] Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y $\mathbb{E} : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ un bifuntor aditivo. Una *realización* de $\mathbb{E}$ es una correspondencia $\mathfrak{s}$ que asocia a cada $\mathbb{E}$-extensión $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ una clase de equivalencia $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ tal que se cumple la condición siguiente.

(i) Sean $\delta \in \mathbb{E}(C, A), \delta' \in \mathbb{E}(C', A')$ $\mathbb{E}$-extensiones, con $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ y $\mathfrak{s}(\delta') = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$. Entonces, para cualquier morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones $(a, c) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\text{-}\mathrm{Ext}(\mathscr{A})}(\delta, \delta')$, existe un morfismo $b \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B, B')$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[d, "c"] \\ A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C'. \end{tikzcd} \tag{4.2.1}$$

En este caso, decimos que la sucesión de morfismos $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ *realiza a* δ y que la terna (a, b, c) *realiza* al morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones (a, c). Claramente, la condición (1) no depende de los representantes de las clases de equivalencias.

Definición 4.2.8 [NP19, Definition 2.10] Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva, $\mathbb{E} : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ un bifuntor aditivo. Una realización $\mathfrak{s}$ de $\mathbb{E}$ es *aditiva* si cumple las siguientes condiciones.

(i) Para cualesquiera $A, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, la $\mathbb{E}$-extensión escindible $0 \in \mathbb{E}(C, A)$ satisface $\mathfrak{s}(0) = 0$.

(ii) Para cualesquiera $\mathbb{E}$-extensiones $\delta = (A, \delta, C)$ y $\delta' = (A', \delta', C')$, se tiene que $\mathfrak{s}\Big(\delta \bigoplus \delta'\Big) = \mathfrak{s}(\delta) \bigoplus \mathfrak{s}(\delta')$.

Observación 4.2.9 [NP19, Remark 2.11] Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva, $\mathbb{E} : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ un bifuntor aditivo y $\mathfrak{s}$ una realización aditiva de $\mathbb{E}$.

(1) Para cualesquiera $A, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, si la $\mathbb{E}$-extensión escindible $0 \in \mathbb{E}(C, A)$ es realizada por $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$, entonces existen una retracción $r \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B, A)$ de x y una sección $s \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C, B)$ de y tales que se tiene el isomorfismo $\binom{r}{y} : B \xrightarrow{\sim} A \bigoplus C$.

(2) Para cualquier $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$, la sucesión

$$A \xrightarrow{\binom{1}{-f}} A \bigoplus B \xrightarrow{(f\ 1)} B$$

realiza a la $\mathbb{E}$-extensión escindible $0 \in \mathbb{E}(B, A)$.

Categoría extriangulada

Definición 4.2.10 [NP19, Definition 2.12] Una *categoría pre-extriangulada* es una terna $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$, donde $\mathscr{A}$ es una categoría aditiva, tal que satisface los siguientes axiomas.

(ET1) $\mathbb{E} : \mathscr{A}^{\text{op}} \times \mathscr{A} \to \text{Ab}$ es un bifuntor aditivo.

(ET2) $\mathfrak{s}$ es una realización aditiva de $\mathbb{E}$.

(ET3) Sean $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ y $\delta' \in \mathbb{E}(C', A')$ $\mathbb{E}$-extensiones realizadas como $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ y $\mathfrak{s}(\delta') = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$. Entonces, para todo diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & C \\ A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C' \end{tikzcd} \tag{4.2.2}$$

existe un morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones $(a, c) : \delta \to \delta'$ realizado por (a, b, c).

(ET3)* Sean $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ y $\delta' \in \mathbb{E}(C', A')$ $\mathbb{E}$-extensiones realizadas como $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ y $\mathfrak{s}(\delta') = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$. Entonces, para todo diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"] \\ A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C' \end{tikzcd}$$

existe un morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones $(a, c) : \delta \to \delta'$ realizado por (a, b, c).

En este caso, diremos que el par $(\mathbb{E}, \mathfrak{s})$ es una *pretriangulación externa* de $\mathscr{A}$. Una categoría pre-extriangulada $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ es *extriangulada* si además satisface los siguientes axiomas.

(ET4) Sean (A, δ, D) y (B, δ', F) $\mathbb{E}$-extensiones realizadas por $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f'} D$ y $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{g'} F$, respectivamente. Entonces existen $E \in \text{Obj}(\mathscr{A})$, un diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] & D \arrow[d, "d"] \\ A \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "g'"'] & E \arrow[d, "e"] \\ & F \arrow[r, equal] & F \end{tikzcd} \tag{4.2.3}$$

y una $\mathbb{E}$-extensión $\delta'' \in \mathbb{E}(E, A)$ realizada por $A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{h'} E$ tales que se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} F$ realiza a $f' \cdot \delta'$,

(ii) $\delta'' \cdot d = \delta$,

(iii) $f \cdot \delta'' = \delta' \cdot e$.

De (iii), se sigue que $(f, e) : \delta'' \to \delta'$ es un morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones realizado por

$$(f, 1_C, e) : [A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{h'} E] \to [B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{g'} F].$$

(ET4)* Sean (D, δ, B) y (F, δ', C) $\mathbb{E}$-extensiones realizadas por $D \xrightarrow{f'} A \xrightarrow{f} B$ y $F \xrightarrow{g'} B \xrightarrow{g} C$, respectivamente. Entonces existen $E \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, un diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "h'"'] & F \arrow[d, "g'"] \\
D \arrow[r, "f'"'] & A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\
 & C \arrow[r, equal] & C
\end{tikzcd}$$

y una $\mathbb{E}$-extensión $\delta'' \in \mathbb{E}(C, E)$ realizada por $E \xrightarrow{h'} A \xrightarrow{h} C$ tales que se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} F$ realiza a $\delta \cdot g'$,

(ii) $e \cdot \delta'' = \delta'$,

(iii) $\delta'' \cdot g = d \cdot \delta$.

De (iii), se sigue que $(d, g) : \delta \to \delta''$ es un morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones realizado por

$$(d, 1_C, g) : [D \xrightarrow{f'} A \xrightarrow{f} B] \to [E \xrightarrow{h'} A \xrightarrow{h} C].$$

En este caso, diremos que el par $(\mathbb{E}, \mathfrak{s})$ es una *triangulación externa* de $\mathscr{A}$.

Observación 4.2.11 El universo de las categorías extrianguladas es dualizante.

Los ejemplos principales de categorías extrianguladas aparecerán durante el desarrollo de las siguientes secciones.

4.3. Terminología en categorías extrianguladas

A continuación, introducimos terminología proveniente de categorías exactas y categorías trianguladas para poder argumentar en el contexto de las categorías extrianguladas utilizando términos que nos resultan familiares. Recordamos que, a pesar de que en el Capítulo 2 decidimos utilizar los términos sucesión exacta corta, monomorfismo admisible y epimorfismo admisible por considerarlos más descriptivos en el contexto de categorías exactas, para referirse a estas nociones también se utilizan los términos conflación, inflación y deflación, respectivamente.

Definición 4.3.1 [NP19, Definitions 2.19 & 2.15] Sea $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una terna que satisface (ET1) y (ET2).

(a) Un $\mathbb{E}$-*triángulo* es un par $(A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C, \delta)$, donde la sucesión de morfismos $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ realiza a $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$, y lo denotamos por

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow} . \tag{4.3.1}$$

Notamos que esto *no necesariamente* implica que δ sea un morfismo en $\mathscr{A}$ con dominio C.

(b) Sean $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ y $A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C' \overset{\delta'}{\dashrightarrow}$ $\mathbb{E}$-triángulos. Un *morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos* es una terna (a, b, c) que realiza al morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones $(a, c) : \delta \to \delta'$ como en (4.2.1), y lo denotamos por

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "c"] & {} \\
A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"'] & {}
\end{tikzcd} .$$

(c) Una *conflación* es una sucesión $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ que realiza a alguna $\mathbb{E}$-extensión $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$.

(d) Una *inflación* es un morfismo f en $\mathscr{A}$ que admite una conflación $A \xrightarrow{f} B \to C$.

(e) Una *deflación* es un morfismo f en $\mathscr{A}$ que admite una conflación $K \to A \xrightarrow{f} B$.

Observación 4.3.2 [NP19, Remark 2.16]
Usando esta nueva terminología[2], podemos parafrasear lo siguiente:

- la condición (i) de la Definición 4.2.7 afirma que cualquier morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones puede ser realizado por un morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos;

- el axioma (ET3) afirma que cualquier cuadrado conmutativo entre $\mathbb{E}$-triángulos como en (4.2.2) puede completarse en un morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos —lo cual es análogo al axioma (TR3) de categorías trianguladas, que afirma que cualquier cuadrado conmutativo entre triángulos distinguidos como en (3.1.5) puede completarse en un morfismo de triángulos distinguidos;

- el axioma (ET4) afirma que, para cualesquiera inflaciones $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C$, el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] & D \arrow[r, dashed, "\delta = \delta'' \cdot d"] \arrow[d, dotted, "d"] & {} \\
A \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "g'"'] & E \arrow[r, dashed, "\delta''"'] \arrow[d, dotted, "e"] & {} \\
 & F \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta'"'] & F \arrow[d, dashed, "\delta''' = f' \cdot \delta'"] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

  conmuta, con $f \cdot \delta'' = \delta' \cdot e$, donde los dos renglones y las dos columnas con tres objetos son $\mathbb{E}$-triángulos. Esto es análogo al axioma (TR4) de categorías trianguladas, como se puede ver comparándolo con el diagrama (3.1.6) de la Observación 3.1.4.

Adicionalmente, de los axiomas (ET4) y (ET4)* se sigue que las clases de inflaciones y deflaciones son cerradas por composiciones, respectivamente. Estas implicaciones son análogas a los axiomas (E1) y (E1)* de las categorías exactas, que afirman que tanto los monomorfismos admisibles como los epimorfismos admisibles son cerrados por composiciones.

[2] En artículos más recientes, se ha sugerido el uso de los términos $\mathfrak{s}$-triángulo, $\mathfrak{s}$-conflación, $\mathfrak{s}$-inflación y $\mathfrak{s}$-deflación, dado que un bifuntor adivito $\mathbb{E}$ puede tener más de una realización aditiva; sin embargo, en el presente trabajo, nos apegaremos a la terminología utilizada en el artículo original de Nakaoka y Palu[NP19].

Definición 4.3.3 [NP19, Definition 2.17] Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada y $\mathcal{D} \subseteq \mathscr{A}$ una subcategoría plena y aditiva, cerrada por isomorfismos. $\mathcal{D}$ es *cerrada por extensiones* si para cualquier conflación $A \to B \to C$ tal que $A, C \in \mathcal{D}$ se tiene que $B \in \mathcal{D}$.

Observación 4.3.4 [NP19, Remark 2.18] Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada y $\mathscr{B}$ una subcategoría aditiva plena de $\mathscr{A}$ cerrada por isomorfismos en $\mathscr{A}$ y extensiones. Si definimos a $\mathbb{E}\mid_{\mathscr{B}}$ como la restricción de $\mathbb{E}$ a $\mathscr{B}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{B}$ y a $\mathfrak{s}\mid_{\mathscr{B}}$ como la restricción de $\mathfrak{s}$ a $\mathbb{E}\mid_{\mathscr{B}}$, entonces $(\mathscr{B}, \mathbb{E}\mid_B, \mathfrak{s}\mid_B)$ es una categoría extriangulada.

4.4. Propiedades fundamentales de categorías extrianguladas

En esta sección, veremos cómo se le puede asociar una sucesión exacta a cada $\mathbb{E}$-triángulo en una categoría extriangulada, lo cual es similar a lo que sucede con los triángulos distinguidos en categorías trianguladas. Además, demostraremos varios resultados análogos al axioma del octaedro (TR4) de categorías trianguladas válidos en categorías extrianguladas, y mostraremos cómo se relacionan las categorías extrianguladas con las categorías exactas y las categorías trianguladas.

Sucesión exacta asociada

Sea $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada. El objetivo de esta sección es asociar, a cada $\mathbb{E}$-triángulo $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, sucesiones exactas de transformaciones naturales

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,x)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,y)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,C) \xrightarrow{\delta_\sharp} \mathbb{E}(-,A) \xrightarrow{\mathbb{E}(-,x)} \mathbb{E}(-,B) \xrightarrow{\mathbb{E}(-,y)} \mathbb{E}(-,C),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C,-) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(y,-)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,-) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(x,-)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,-) \xrightarrow{\delta^\sharp} \mathbb{E}(C,-) \xrightarrow{\mathbb{E}(y^{\mathrm{op}},-)} \mathbb{E}(B,-) \xrightarrow{\mathbb{E}(x^{\mathrm{op}},-)} \mathbb{E}(A,-)$$

con $\delta_\sharp$ y $\delta^\sharp$ como se definen a continuación.

Definición 4.4.1 [NP19, Definition 3.1] Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y $\mathbb{E} : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ un bifuntor aditivo. Por el Lema de Yoneda (Teorema 0.6.7), cualquier $\mathbb{E}$-extensión $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ induce transformaciones naturales $\delta_\sharp : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,C) \to \mathbb{E}(-,A)$ y $\delta^\sharp : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,-) \to \mathbb{E}(C,-)$. Para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, los morfismos $(\delta_\sharp)_X$ y $\delta^\sharp_X$ están dados por

(a) $(\delta_\sharp)_X : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, C) \to \mathbb{E}(X, A), f \mapsto \delta \cdot f$;

(b) $\delta^\sharp_X : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, X) \to \mathbb{E}(C, X), g \mapsto g \cdot \delta$.

Abreviaremos $(\delta_\sharp)_X(f)$ y $\delta^\sharp_X(f)$ como $\delta_\sharp f$ y $\delta^\sharp g$, respectivamente, cuando esto no lleve a confusiones.

Observación 4.4.2 [NP19, Remark 3.4] Consideremos qué significa que las sucesiones previas de transformaciones naturales sean exactas. En [San07, Lema 2.13.3] se demuestra que si $\mathscr{A}$ es una categoría aditiva pequeña y $\mathscr{B}$ es una categoría abeliana, entonces la clase de funtores aditivos de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ es una subcategoría abeliana de $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$, la cual denotaremos por $\mathrm{Mod}(\mathscr{A})$. Más aún, se puede demostrar que, para cualesquiera $F, G, H \in \mathrm{Mod}(\mathscr{A})$, se tiene que

$$0 \to F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \to 0 \text{ es exacta en } \mathrm{Mod}(\mathscr{A})$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \to F(X) \xrightarrow{\alpha_X} G(X) \xrightarrow{\beta_X} H(X) \to 0 \text{ es exacta en Ab} \quad \forall\ X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}).$$

Sin embargo, una categoría aditiva no tiene por qué ser pequeña en general —aunque por definición sea localmente pequeña—, por lo que el criterio anterior no siempre es estrictamente aplicable en categorías extrianguladas. Una vez aclarado este detalle técnico e inspirándonos en la discusión previa, durante el resto de esta sección diremos que una sucesión en $\mathrm{Mod}(\mathscr{A})$ es exacta utilizando el criterio anterior, aún cuando $\mathscr{A}$ no sea pequeña.

Lema 4.4.3 [NP19, Lemma 3.2] Sea $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría pre-extriangulada. Entonces, para cualquier $\mathbb{E}$-triángulo $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, se cumplen las siguientes condiciones.

(a) $yx = 0$.

(b) $x \cdot \delta \ (= \delta^\sharp x) = 0$.

(c) $\delta \cdot y \ (= \delta_\sharp y) = 0$.

Demostración.

(a) Por (ET2), tenemos que la conflación $A \xrightarrow{1_A} A \to 0$ realiza a $0 \in \mathbb{E}(0, A)$, por lo que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "x"] & 0 \\ A \arrow[r, "x"'] & B \arrow[r, "y"'] & C \end{tikzcd}$$

en $\mathscr{A}$. Luego, por el axioma (ET3), existe un morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones $(a, c) : 0 \to \delta$ y, en particular, c hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "x"] & 0 \arrow[d, dotted, "c"] \\ A \arrow[r, "x"'] & B \arrow[r, "y"'] & C. \end{tikzcd}$$

Por ende, $yx = 0$. Observemos que esto es similar a cómo se aplica el axioma (TR3) en el inciso (a) de la Proposición 3.2.3.

(b) Similarmente, la conflación $B \xrightarrow{1_B} B \to 0$ realiza a $0 \in \mathbb{E}(0, B)$, por lo que tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "x"'] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "1_B"] & C \\ B \arrow[r, "1_B"'] & B \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Por (ET3), existe un morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones $(x, c') : \delta \to 0$, por lo que c' es tal que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "x"'] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "1_B"] & C \arrow[d, dotted, "c'"] \\ B \arrow[r, "1_B"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta, y además $x \cdot \delta = 0 \cdot c'$. Dado que 0 es un objeto final en $\mathscr{A}$, entonces $c' = 0$, y obtenemos el morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones $(x, 0) : \delta \to 0$. Por definición de morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones y el inciso (j) de la Proposición 1.5.13, se sigue que

$$\begin{aligned} \delta^\sharp x &= x \cdot \delta \\ &= 0 \cdot c' \\ &= 0. \end{aligned}$$

(c) Se sigue de aplicar el principio de dualidad a (b).

□

Proposición 4.4.4 [NP19, Proposition 3.3] Sea $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una terna que satisface (ET1) y (ET2). Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ es una categoría pre-extriangulada.

(2) Para cualquier $\mathbb{E}$-triángulo $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, las sucesiones de transformaciones naturales

$$\text{(2-i)}\quad \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-, A) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-,x)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-, B) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-,y)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-, C) \xrightarrow{\delta_\sharp} \mathbb{E}(-, A) \xrightarrow{\mathbb{E}(-,x)} \mathbb{E}(-, B),$$

$$\text{(2-ii)}\quad \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(C, -) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(y,-)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(B, -) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(x,-)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, -) \xrightarrow{\delta^\sharp} \mathbb{E}(C, -) \xrightarrow{\mathbb{E}(y,-)} \mathbb{E}(B, -)$$

son exactas en $\operatorname{Mod}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}})$ y $\operatorname{Mod}(\mathscr{A})$, en el sentido de la Observación 4.4.2.

Demostración.
(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ satisface (ET3) y (ET3)*. Demostraremos la exactitud de la sucesión (2-ii), pues la de (2-i) se puede demostrar de forma dual.

La exactitud en $\operatorname{Hom}(B, X)$, para todo $X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$, se demuestra de forma análoga al caso de categorías trianguladas[3].

Por el inciso (2) del Lema 4.4.3, tenemos que $\delta^\sharp_X(\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}(x, X))) = 0$, de donde se sigue que $\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}(x, X)) \subseteq \operatorname{Ker}(\delta^\sharp_X)$. Ahora, sea $a \in \operatorname{Hom}(A, X)$ tal que $\delta^\sharp_X(a) = a \cdot \delta = 0$. Entonces, se sigue que $(a, 0) : \delta \to 0$ es un morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones. Dado que $\mathfrak{s}$ realiza a $\mathbb{E}$, existe $b \in \operatorname{Hom}(B, X)$ tal que se tiene el siguiente morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d] & {} \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r, dashed, "a\cdot\delta=0"'] & {} \end{tikzcd} .$$

En particular, tenemos que $a = bx = \operatorname{Hom}(x, X)(b)$, por lo que $\operatorname{Ker}(\delta^\sharp_X) \subseteq \operatorname{Im}(\operatorname{Hom}(x, X))$.

Sea $A \xrightarrow{f} X$ en $\mathscr{A}$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y^{\mathrm{op}}, X)(\delta^\sharp_X(f)) &= f \cdot (\delta \cdot y) \\ &= f \cdot 0 && \text{(Lema 4.4.3(c))} \\ &= 0, && \text{(Proposición 1.5.13(j))} \end{aligned}$$

[3]Ver el inciso (b) del Teorema 3.2.3.

por lo que $\operatorname{Im}(\delta_X^\sharp) \subseteq \operatorname{Ker}(\mathbb{E}(y^{\mathrm{op}}, X))$. Veamos ahora que $\operatorname{Ker}(\mathbb{E}(y^{\mathrm{op}}, X)) \subseteq \operatorname{Im}(\delta_X^\sharp)$. Sea $\theta \in \mathbb{E}(C, X)$ una $\mathbb{E}$-extensión tal que $\mathbb{E}(y^{\mathrm{op}}, X)(\theta) = \theta \cdot y = 0$. Por (ET2), podemos realizar a θ y $\theta \cdot y$ como los $\mathbb{E}$-triángulos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} C \overset{\theta}{\dashrightarrow}$ y $X \xrightarrow{m} Z \xrightarrow{e} B \overset{\theta \cdot y}{\dashrightarrow}$, respectivamente. Entonces, el morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones $(1_X, y) : \theta \cdot y \to \theta$ puede ser realizado por el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "m"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] & B \arrow[r, dashed, "\theta \cdot y"] \arrow[d, "y"] & {} \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r, dashed, "\theta"'] & {} ,
\end{tikzcd}$$

para algún $e' \in \operatorname{Hom}(Z, Y)$. Dado que la $\mathbb{E}$-extensión $\theta \cdot y$ es escindible, por el inciso (1) de la Observación 4.2.9, se sigue que e tiene una sección s. Aplicando (ET3)* al diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "e's"'] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & C, \arrow[r, dashed, "\theta"'] & {}
\end{tikzcd}$$

obtenemos un morfismo $a \in \operatorname{Hom}(A, X)$, con el cual podemos formar el morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones $(a, 1_C) : \delta \to \theta$. En particular, esto implica que $\theta = a \cdot \delta = \delta_X^\sharp a$, por lo que $\operatorname{Ker}(\mathbb{E}(y, X)) \subseteq \operatorname{Im}(\delta_X^\sharp)$.

(2)⇒(1) Supongamos que, para cualquier $\mathbb{E}$-triángulo $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, las sucesiones (2-i) y (2-ii) son exactas en $\operatorname{Mod}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}})$ y $\operatorname{Mod}(\mathscr{A})$, respectivamente. Demostraremos que esto implica a (ET3), pues la demostración de que implica a (ET3)* es dual.

Sean y $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ y $A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C' \overset{\delta'}{\dashrightarrow}$ $\mathbb{E}$-triángulos arbitrarios. Supongamos que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & C \\
A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por el Teorema 0.6.7 (Lema de Yoneda), sabemos que $\mathbb{E}(-, x)\delta_\sharp = 0$ equivale a $x \cdot \delta = 0$. Análogamente, tenemos que $\delta' \cdot y' = 0$. Por la exactitud de la sucesión $\operatorname{Hom}(C, C') \xrightarrow{(\delta'_\sharp)_C} \mathbb{E}(C, A') \xrightarrow{\mathbb{E}(C, x')} \mathbb{E}(C, B')$ y la igualdad

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C, x')(a \cdot \delta) &= x' \cdot (a \cdot \delta) \\
&= (x'a) \cdot \delta && \text{(Proposición 1.5.13(d))} \\
&= (bx) \cdot \delta \\
&= b \cdot (x \cdot \delta) \\
&= b \cdot 0 \\
&= 0, && \text{(Proposición 1.5.13(j))}
\end{aligned}$$

existe $c' \in \operatorname{Hom}(C, C')$ tal que $a \cdot \delta = (\delta')_\sharp c' = \delta' \cdot c'$. Por ende, $(a, c') : \delta \to \delta'$ es un morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones. Supongamos que (a, c') es realizado por el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b'"'] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "c'"] & {} \\
A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"'] & {} .
\end{tikzcd}$$

Entonces, por la exactitud de $\mathrm{Hom}(C,B') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(y,B')} \mathrm{Hom}(B,B') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(x,B')} \mathrm{Hom}(A,B')$ y la igualdad

$$\begin{aligned}(b-b')x &= bx - b'x\\ &= x'a - x'a\\ &= 0,\end{aligned}$$

se sigue que existe $c'' \in \mathrm{Hom}(C,B')$ tal que $c''y = b-b'$. Por ende, definiendo $c := c' + y'c''$, tenemos que

$$\begin{aligned}cy &= c'y + y'c''y\\ &= y'b' + (y'b - y'b')\\ &= y'b,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta' \cdot c &= \delta \cdot (c' + y'c'')\\ &= \delta' \cdot c' + \delta' \cdot (y'c'') && \text{(Proposición 1.5.13(f))}\\ &= \delta' \cdot c' + (\delta' \cdot y') \cdot c'' && \text{(Proposición 1.5.13(h))}\\ &= \delta' \cdot c' && \text{(Proposición 4.4.3)}\\ &= a \cdot \delta.\end{aligned}$$

Por ende, $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ satisface (ET3). □

Los siguientes dos corolarios se siguen directamente de la Proposición 4.4.4.

Corolario 4.4.5 [NP19, Corollary 3.5] Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría pre-extriangulada y

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "c"] & {} \\ A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"'] & {} \end{tikzcd}$$

un morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos arbitrario. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) a se factoriza a través de x.

(b) $a \cdot \delta = \delta' \cdot c = 0$.

(c) c se factoriza a través de y'.

En particular, considerando el caso trivial $\delta = \delta'$ y $(a,b,c) = (1_A, 1_B, 1_C)$, obtenemos que

$$x \text{ tiene una retracción} \iff \delta \text{ se escinde} \iff y \text{ tiene una sección.}$$

Corolario 4.4.6 [NP19, Corollary 3.6] Sea $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría pre-extriangulada. Entonces, para cualquier morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos (a,b,c), se cumplen las siguientes condiciones.

(a) Si a y c son isomorfismos en $\mathscr{A}$ o, equivalentemente, si (a,c) es un isomorfismo en $\mathbb{E}\text{-Ext}(\mathscr{A})$, entonces b es un isomorfismo en $\mathscr{A}$.

(b) Si a y b son isomorfismos en $\mathscr{A}$, entonces c también lo es.

(c) Si b y c son isomorfismos en $\mathscr{A}$, entonces a también lo es.

Proposición 4.4.7 [NP19, Proposition 3.7] Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría pre-extriangulada y $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ un $\mathbb{E}$-triángulo arbitrario. Si $a \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A')$ y $c \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(C', C)$ son isomorfismos, entonces

$$A' \xrightarrow{xa^{-1}} B \xrightarrow{c^{-1}y} C' \overset{a\cdot\delta\cdot c}{\dashrightarrow}$$

es un $\mathbb{E}$-triángulo.

Demostración. Sea $\mathfrak{s}(a \cdot \delta \cdot c) = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$. Observemos que

$$\begin{aligned}(a \cdot \delta \cdot c) \cdot c^{-1} &= (a \cdot \delta) \cdot (cc^{-1}) && \text{(Proposición 1.5.13(h))}\\ &= a \cdot \delta \cdot 1_C\\ &= a \cdot \delta, && \text{(Proposición 1.5.13(g))}\end{aligned}$$

por lo que $(a, c^{-1}) : \delta \to a \cdot \delta \cdot c$ es un morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones. Sea (a, b, c^{-1}) un morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "c^{-1}"] & {} \\ A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C' \arrow[r, dashed, "a\cdot\delta\cdot c"'] & {} \end{tikzcd} \tag{4.4.1}$$

que realiza a (a, c^{-1}). Dado que por hipótesis a es un isomorfismo, del Corolario 4.4.6 se sigue que b es un isomorfismo. Luego, de (4.4.1) obtenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "c^{-1}y"] \arrow[dd, "b", "\wr"'] & \\ A' \arrow[ur, "xa^{-1}"] \arrow[dr, "x'"'] & & C', \\ & B' \arrow[ur, "y'"'] & \end{tikzcd}$$

por lo que $[A' \xrightarrow{xa^{-1}} B' \xrightarrow{c^{-1}y} C'] = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C'] = \mathfrak{s}(a \cdot \delta \cdot c)$. □

El siguiente resultado establece relaciones entre conflaciones que realizan a una misma $\mathbb{E}$-extensión.

Corolario 4.4.8 [NP19, Corollary 3.8] Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría pre-extriangulada y $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ un $\mathbb{E}$-triángulo arbitrario. Entonces, para cualquier $\delta' \in \mathbb{E}(C, A)$, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\mathfrak{s}(\delta) = \mathfrak{s}(\delta')$.

(b) $\delta' = a \cdot \delta$ para algún automorfismo $a \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A)$ tal que $xa = x$.

(c) $\delta' = \delta \cdot c$ para algún automorfismo $c \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(C, C)$ tal que $cy = y$.

(d) $\delta' = a \cdot \delta \cdot c$ para algunos automorfismos $a \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A), c \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(C, C)$ tales que $xa = x$ y $cy = y$.

Demostración. La implicación (d) $\Rightarrow$ (a) se sigue de la Proposición 4.4.7, las implicaciones (a) $\Rightarrow$ (b) y (a) $\Rightarrow$ (c) se siguen del Corolario 4.4.6, y las implicaciones (b) $\Rightarrow$ (d) y (c) $\Rightarrow$ (d) son triviales. □

Definición 4.4.9 [NP19, Definition 3.9] Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría pre-extriangulada y $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{A}$.

(a) Si f es una inflación, para cualquier conflación arbitraria $A \xrightarrow{f} B \to C$, denotamos al objeto C por $\mathrm{Cone}(f)$.

(b) Si f es una deflación, para cualquier conflación arbitraria $K \to A \xrightarrow{f} B$, denotamos al objeto K por $\mathrm{CoCone}(f)$.

Observación 4.4.10 [NP19, Remark 3.10] Sea $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría pre-extriangulada.

(1) Para toda inflación $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$, $\mathrm{Cone}(f)$ es único hasta isomorfismos en $\mathscr{A}$.

En efecto: Sean f una inflación y $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g'} C' \overset{\delta'}{\dashrightarrow}$ $\mathbb{E}$-triángulos. Entonces, por (ET3), existe $c \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C, C')$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dotted, "c"] & {} \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"'] & {} \end{tikzcd} .$$

Por el Corolario 4.4.6, c es un isomorfismo en $\mathscr{A}$. Por ende, $\mathrm{Cone}(f)$ es único hasta isomorfismos en $\mathscr{A}$.

Remarcamos que, dado que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ es una inflación, la notación $\mathrm{Cone}(f)$ no debe ser confundida con aquella utilizada en la sección 0.5 para denotar a la categoría de conos sobre un funtor, pues denotamos a los funtores con letras mayúsculas.

(2) Para toda deflación $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$, $\mathrm{CoCone}(f)$ es único hasta isomorfismos en $\mathscr{A}$.

En efecto: La demostración es dual a la de (1).

Similarmente, remarcamos que, dado que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ es una deflación, la notación $\mathrm{CoCone}(f)$ no debe ser confundida con aquella utilizada en la sección 0.5 para denotar a la categoría de coconos sobre un funtor, pues denotamos a los funtores con letras mayúsculas.

Proposición 4.4.11 [NP19, Proposition 3.11] Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría pre-extriangulada, $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ un $\mathbb{E}$-triángulo y $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Entonces, se cumplen las siguientes condiciones.

(a) Si $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ satisface (ET4), entonces $\mathbb{E}(X, A) \xrightarrow{\mathbb{E}(X,x)} \mathbb{E}(X, B) \xrightarrow{\mathbb{E}(X,y)} \mathbb{E}(X, C)$ es exacta en Ab.

(b) Si $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ satisface (ET4)*, entonces $\mathbb{E}(C, X) \xrightarrow{\mathbb{E}(y^{\mathrm{op}},X)} \mathbb{E}(B, X) \xrightarrow{\mathbb{E}(x^{\mathrm{op}},X)} \mathbb{E}(A, X)$ es exacta en Ab.

Demostración.

(a) Observemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X, y)\mathbb{E}(X, x) &= \mathbb{E}(X, yx) && (\mathbb{E} \text{ es un funtor}) \\ &= \mathbb{E}(X, 0) && (\text{Lema } 4.4.3) \\ &= 0, && (\mathbb{E} \text{ es aditivo}) \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\mathrm{Im}(\mathbb{E}(X, x)) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathbb{E}(X, y))$. Ahora, sea $\theta \in \mathbb{E}(X, B)$ una $\mathbb{E}$-extensión arbitraria, realizada por el $\mathbb{E}$-triángulo $B \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X \overset{\theta}{\dashrightarrow}$. Por (ET4), existen $E \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), \theta' \in \mathbb{E}(E, A)$ y un diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "d"] \\ A \arrow[r, "h"'] & Y \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[d, "e"] \\ & X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

que cumple las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}(\theta \cdot y) &= [C \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} X], \\ \mathfrak{s}(\theta') &= [A \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{h'} E], \\ x \cdot \theta' &= \theta \cdot e. \end{aligned}$$

Supongamos que $\mathbb{E}(X, y)(\theta) = y \cdot \theta = 0$. Entonces, $y \cdot \theta$ es una $\mathbb{E}$-extensión escindible y, por la Observación 4.2.9, se sigue que e tiene una sección $s \in \operatorname{Hom}(X, E)$. Luego, tenemos que $\theta' \cdot s \in \mathbb{E}(X, A)$ es tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X, x)(\theta' \cdot s) &= x \cdot (\theta' \cdot s) \\ &= (x \cdot \theta') \cdot s && \text{(Proposición 1.5.13(i))} \\ &= (\theta \cdot e) \cdot s \\ &= \theta \cdot (es) && \text{(Proposición 1.5.13(h))} \\ &= \theta \cdot 1_X \\ &= \theta, && \text{(Proposición 1.5.13(g))} \end{aligned}$$

de donde concluimos que $\operatorname{Ker}(\mathbb{E}(X, y)) \subseteq \operatorname{Im}(\mathbb{E}(X, x))$.

(b) Dual a (a).

□

Corolario 4.4.12 [NP19, Corollary 3.12] Sea $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada tal que $\operatorname{Mod}(\mathscr{A})$ o, equivalentemente, $\operatorname{Mod}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}})$ es localmente pequeña. Entonces, para cualquier $\mathbb{E}$-triángulo $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, las sucesiones de transformaciones naturales

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-, A) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-,x)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-, B) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-,y)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-, C) \xrightarrow{\delta_\sharp} \mathbb{E}(-, A) \xrightarrow{\mathbb{E}(-,x)} \mathbb{E}(-, B) \xrightarrow{\mathbb{E})(-,y)} \mathbb{E}(-, C)$$

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(C, -) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(y,-)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(B, -) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(x,-)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, -) \xrightarrow{\delta^\sharp} \mathbb{E}(C, -) \xrightarrow{\mathbb{E}(y,-)} \mathbb{E}(B, -) \xrightarrow{\mathbb{E})(x,-)} \mathbb{E}(A, -),$$

son exactas en $\operatorname{Mod}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}})$ y $\operatorname{Mod}(\mathscr{A})$, respectivamente.

Demostración. Se sigue directamente de las Proposiciones 4.4.4 y 4.4.11. □

Octaedros trasladados

Como se mencionó en la Observación 4.3.2, el axioma (ET4) es análogo al axioma del octaedro (TR4) de categorías trianguladas. En esta sección, veremos otros resultados de categorías extrianguladas análogos a (TR4).

Lema 4.4.13 [NP19, Lemma 3.14] Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada y $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f'} D \overset{\delta_f}{\dashrightarrow}$, $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{g'} F \overset{\delta_g}{\dashrightarrow}$, $A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{h_0} E_0 \overset{\delta_h}{\dashrightarrow}$ $\mathbb{E}$-triángulos tales que $h = gf$. Entonces, existen morfismos d_0, e_0 en $\mathscr{A}$ tales que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] & D \arrow[d, "d_0"] \\
A \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "h_0"'] \arrow[d, "g'"'] & E_0 \arrow[d, "e_0"] \\
& F \arrow[r, equal] & F
\end{tikzcd} \tag{4.4.2}$$

conmuta, y se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $D \xrightarrow{d_0} E \xrightarrow{e_0} F \overset{f' \cdot \delta_g}{\dashrightarrow}$ es un $\mathbb{E}$-triángulo,

(ii) $\delta_h \cdot \delta_0 = \delta_f$,

(iii) $f \cdot \delta_h = \delta_g \cdot e_0$.

Demostración. Por (ET4), existen $E \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, un diagrama conmutativo (4.2.3) en $\mathscr{A}$, y un $\mathbb{E}$-triángulo $A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{h'} E \overset{\delta''}{\dashrightarrow}$, tales que se satisfacen las siguientes condiciones:

(i') $D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} F \overset{f' \cdot \delta_g}{\dashrightarrow}$ es un $\mathbb{E}$-triángulo,

(ii') $\delta'' \cdot d = \delta_f$,

(iii') $f \cdot \delta'' = \delta_g \cdot e$.

Por el inciso (1) de la Observación 4.4.10, tenemos el morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "h'"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, dashed, "\delta''"] \arrow[d, "u"] & {} \\
A \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "h_0"'] & E_0 \arrow[r, dashed, "\delta_h"'] & {}
\end{tikzcd} ,$$

con u un isomorfismo. En particular, tenemos que $\delta'' = \delta_h \cdot u$. Definiendo $d_0 := ud$ y $e_0 := eu^{-1}$, la conmutatividad del diagrama (4.4.2) se sigue de la del diagrama (4.2.3). Además, dado que u es un isomorfismo, tenemos que

$$[D \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{e_0} F] = [D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} F].$$

Luego, de (i') se sigue (i), mientras que por (ii') y (iii') tenemos que

$$\begin{aligned}\delta_f &= \delta'' \cdot d\\ &= (\delta_h \cdot u)\cdot d\\ &= \delta_h \cdot (ud) && \text{(Proposición 1.5.13(h))}\\ &= \delta_h \cdot d_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_g \cdot e = f\cdot \delta'' &\iff \delta_g \cdot e = f\cdot(\delta_h \cdot u)\\ &\iff \delta_g \cdot e = (f\cdot\delta_h)\cdot u && \text{(Proposición 1.5.13(i))}\\ &\iff (\delta_g \cdot e)\cdot u^{-1} = ((f\cdot\delta_h)\cdot u)\cdot u^{-1}\\ &\iff (\delta_g \cdot eu^{-1}) = (f\cdot\delta_h)\cdot uu^{-1} && \text{(Proposición 1.5.13(h))}\\ &\iff (\delta_g\cdot e_0) = (f\cdot\delta_h)\cdot 1_{E_0}\\ &\iff (\delta_g\cdot e_0) = (f\cdot\delta_h) && \text{(Proposición 1.5.13(g))}\end{aligned}$$

□

Proposición 4.4.14 [NP19, Proposition 3.15] Sean $(\mathscr{A},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ una categoría extriangulada y $C\in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Entonces, la siguiente proposición y su proposición dual se verifican en $(\mathscr{A},\mathbb{E},\mathfrak{s})$:

Para cualesquiera $\mathbb{E}$-triángulos $A_1 \xrightarrow{x_1} B_1 \xrightarrow{y_1} C \overset{\delta_1}{\dashrightarrow}$, $A_2 \xrightarrow{x_2} B_2 \xrightarrow{y_2} C \overset{\delta_2}{\dashrightarrow}$, existe un diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} & A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "n_2"'] & A_2 \arrow[d, "x_2"] \\ A_1 \arrow[r, "n_1"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_2"'] & B_2 \arrow[d, "y_2"] \\ A_1 \arrow[r, "x_1"'] & B_1 \arrow[r, "y_1"'] & C, \end{tikzcd} \tag{4.4.3}$$

tal que se satisfacen las condiciones

(i) $\mathfrak{s}(\delta_1\cdot y_2) = [A_1 \xrightarrow{n_1} N \xrightarrow{e_1} B_2]$,

(ii) $\mathfrak{s}(\delta_2\cdot y_1) = [A_2 \xrightarrow{n_2} N \xrightarrow{e_2} B_1]$,

(iii) $n_1\cdot\delta_1 + n_2\cdot\delta_2 = 0$.

Demostración. Dado que $\mathfrak{s}$ es una realización aditiva de $\mathbb{E}$, tenemos que

$$\mathfrak{s}\Big(\delta_1 \bigoplus \delta_2\Big) = \Big[A_1\bigoplus A_2 \xrightarrow{x_1\bigoplus x_2} B_1\bigoplus B_2 \xrightarrow{y_1\bigoplus y_2} C\bigoplus C\Big].$$

Sean $A_1 \underset{\pi_1}{\overset{\mu_1}{\rightleftarrows}} A_1\oplus A_2 \underset{\pi_2}{\overset{\mu_2}{\leftrightarrows}} A_2$ un biproducto en $\mathscr{A}$ y $\nu = (\delta_1\oplus\delta_2)\cdot\Delta_C$, con $\mathfrak{s}(\nu) = \Big[A_1\oplus A_2 \xrightarrow{j} N \xrightarrow{k} C\Big]$. Por el inciso (b) de la Proposición 1.5.20, tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi^{\mathbb{E}}_{A_1\bigoplus A_2, C}(\nu) &= \Phi^{\mathbb{E}}_{A_1\bigoplus A_2,C}\Big((\delta_1\bigoplus\delta_2)\cdot\Delta_C\Big)\\ &= \Phi^{\mathbb{E}}_{A_1\bigoplus A_2, C\bigoplus C}(\delta_1\bigoplus\delta_2)\varphi_{C\bigoplus C,C}(\Delta_C)\\ &= \begin{pmatrix}\delta_1 & 0\\ 0 & \delta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \delta_1 + 0 \cdot \delta_2 \\
&= \delta_1, && \text{(Proposición 1.5.13(g) y (j))} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \delta_1 + 1 \cdot \delta_2 \\
&= \delta_2,
\end{aligned}$$

de las Proposiciones 0.5.43 y 1.5.17, se sigue que

$$\pi_1 \cdot \nu = \delta_1 \quad \wedge \quad \pi_2 \cdot \nu = \delta_2. \tag{4.4.4}$$

Aplicando (ET4) a $\mathfrak{s}(0) = \left[A_1 \xrightarrow{\mu_1} A_1 \bigoplus A_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2\right]$ y $\mathfrak{s}(\nu) = \left[A_1 \bigoplus A_2 \xrightarrow{j} N \xrightarrow{k} C\right]$, obtenemos $B_2' \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), \theta_1 \in \mathbb{E}(B_2', A_1)$ y un diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, equal] & A_1 \bigoplus A_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "j"'] & A_2 \arrow[d, "x_2'"] \\
A_1 \arrow[r, "n_1"'] & N \arrow[r, "e_1'"'] \arrow[d, "k"'] & B_2' \arrow[d, "y_2'"] \\
& C \arrow[r, equal] & C
\end{tikzcd}$$

tales que $\mathfrak{s}(\pi_2 \cdot \nu) = [A_2 \xrightarrow{x_2'} B_2 \xrightarrow{y_2'} C]$, $\theta_1 \cdot x_2 = 0$, $\mathfrak{s}(\theta_1) = [A_1 \xrightarrow{n_1} N \xrightarrow{e_1'} B_2']$, y $(\mu_1, y_2') : \theta_1 \to \nu$ es un morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones realizado por $(\mu_1, 1_N, y_2')$, por lo que $\nu \cdot y_2' = \mu_1 \cdot \theta_1$. En particular, tenemos que

$$[A_2 \xrightarrow{x_2'} B_2 \xrightarrow{y_2'} C] = \mathfrak{s}(\delta_2) = [A_2 \xrightarrow{x_2} B_2 \xrightarrow{y_2} C].$$

Por ende, existe un isomorfismo $b_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_2, B_2')$ tal que $b_2 x_2 = x_2'$ y $y_2' b_2 = y_2$. Definiendo $e_1 := b_2^{-1} e_1'$, de la Proposición 4.4.7 se sigue que $\mathfrak{s}(\theta_1 \cdot b_2) = [A_1 \xrightarrow{n_1} N \xrightarrow{e_1} B_2]$, y obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, equal] & A_1 \bigoplus A_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "j"'] & A_2 \arrow[d, "x_2"] \\
A_1 \arrow[r, "n_1"'] & N \arrow[r, "e_1"'] \arrow[d, "k"'] & B_2 \arrow[d, "y_2"] \\
& C \arrow[r, equal] & C,
\end{tikzcd}$$

el cual, por la Proposición 1.5.13, satisface

$$\begin{aligned}
\delta_1 \cdot y_2 &= (\pi_1 \cdot \nu) \cdot y_2 \\
&= (\pi_1 \cdot \nu) \cdot (y_2' \cdot b_2) \\
&= \pi_1 \cdot ((\nu \cdot y_2') \cdot b_2) \\
&= \pi_1 \cdot ((\mu_1 \cdot \theta_1) \cdot b_2) \\
&= ((\pi_1 \cdot \mu_1) \cdot \theta_1) \cdot b_2 \\
&= 1_{A_1} \cdot \theta_1 \cdot b_2 \\
&= \theta_1 \cdot b_2,
\end{aligned}$$

de donde se sigue (i).

Análogamente, de $\mathfrak{s}(0) = [A_2 \xrightarrow{\mu_2} A_1 \bigoplus A_2 \xrightarrow{\pi_1} A_1]$ y $\mathfrak{s}(\nu) = \left[A_1 \bigoplus A_2 \xrightarrow{j} N \xrightarrow{k} C\right]$, tenemos que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, "\mu_2"] \arrow[d, equal] & A_1 \bigoplus A_2 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "j"'] & A_1 \arrow[d, "x_1"] \\
A_2 \arrow[r, "n_2"'] & N \arrow[r, "e_2"'] \arrow[d, "k"'] & B_1 \arrow[d, "y_1"] \\
& C \arrow[r, equal] & C,
\end{tikzcd}$$

conmuta, de donde se sigue (ii).

Observemos que, de los dos diagramas conmutativos anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned} e_2 n_1 &= e_1 j \mu_1 \\ &= x_1 \pi_1 \mu_1 \\ &= x_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 n_2 &= e_1 j \mu_2 \\ &= x_2 \pi_2 \mu_2 \\ &= x_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 e_1 &= k \\ &= y_1 e_2, \end{aligned}$$

por lo que el diagrama (4.4.4) conmuta. Más aún, de (4.4.4), el Lema 4.4.3 y la Proposición, 1.5.13, tenemos que

$$\begin{aligned} n_1 \cdot \delta_1 + n_2 \cdot \delta_2 &= (j\mu_1) \cdot \delta_1 + (j\mu_2) \cdot \delta_2 \\ &= (j\mu_1) \cdot (\pi_1 \cdot \nu) + (j\mu_2) \cdot (\pi_2 \cdot \nu) \\ &= j \cdot (\mu_1 \pi_1) \cdot \nu + j \cdot (\mu_2 \pi_1) \cdot \nu \\ &= j \cdot (\mu_1 \pi_1 + \mu_2 \pi_2) \cdot \nu \\ &= j \cdot 1_{A_1 \bigoplus A_2} \cdot \nu \\ &= j \cdot \nu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, por la Observación 4.2.11 y el principio de dualidad, se sigue que la proposición dual también es válida en $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$. $\square$

Corolario 4.4.15 [NP19, Corollary 3.16] Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada, y $x \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$, $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, D)$ morfismos arbitrarios. Entonces, si x es una inflación, $\left(\begin{smallmatrix} f \\ x \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, D \bigoplus B)$ también lo es. Más aún, la proposición dual para deflaciones también se cumple.

Demostración. Por la Observación 4.2.11 y el principio de dualidad, es suficiente demostrar la proposición para inflaciones.

Sea $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ un $\mathbb{E}$-triángulo. Supongamos que $\mathfrak{s}(f \cdot \delta) = [D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} C]$. Por la Proposición 4.4.14, obtenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, equal] \arrow[d, "m"'] & A \arrow[d, "x"] & \\
D \arrow[r, "k"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "l"'] \arrow[d, "e"] & B \arrow[r, dashed, "(f\cdot\delta)\cdot y"] \arrow[d, "y"] & {} \\
D \arrow[r, "d"'] & E \arrow[r, "e"'] \arrow[d, dashed, "\delta\cdot e"'] & C \arrow[r, dashed, "f\cdot\delta"'] \arrow[d, dashed, "\delta"] & {} \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} \tag{4.4.5}$$

compuesta de $\mathbb{E}$-triángulos que satisfacen $m \cdot \delta + f \cdot \delta \cdot k = 0$. Dado que, por los incisos (i) y (j) de la Proposición 1.5.13, tenemos que

$$\begin{aligned}(f \cdot \delta) \cdot y &= f \cdot (\delta \cdot y)\\ &= f \cdot 0\\ &= 0,\end{aligned}$$

podemos suponer que $M = D \bigoplus B, k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, l = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sean $p \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M, D), i \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(B, M)$ tales que $D \underset{p}{\overset{k}{\rightleftarrows}} M \underset{l}{\overset{i}{\leftrightarrows}} B$ es un biproducto en $\mathscr{A}$. Por la Proposición 4.4.4, tenemos que la sucesión $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(B, M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(x,M)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, M) \xrightarrow{\delta^\sharp} \mathbb{E}(C, M)$ es exacta en Ab. Más aún, por el Lema 4.4.3, tenemos que $\delta^\sharp(m + kf) = (m + kf) \cdot \delta = 0$. Por ende, existe $b \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(B, M)$ tal que $bx = m + kf$. Modificando a $A \xrightarrow{m} M \xrightarrow{e} E$ con el automorfismo

$$n = \begin{pmatrix} -1 & pb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (1_M - kpbl) : M \xrightarrow{\sim} M,$$

obtenemos una conflación $A \xrightarrow{nm} D \bigoplus B \xrightarrow{en^{-1}} E$. Luego, dado que

$$\begin{aligned}pnm &= -p(1_M - kpbl)m\\ &= pkpblm - pm\\ &= pbx - pm\\ &= pkf\\ &= f,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}lnm &= l(1_M - kpbl)m\\ &= lm\\ &= x,\end{aligned}$$

se sigue que $nm = \begin{pmatrix} f \\ x \end{pmatrix}$. $\square$

Proposición 4.4.16 [NP19, Proposition 3.17] Sea $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada. Entonces, para cualesquiera $\mathbb{E}$-triángulos $D \xrightarrow{f} A \xrightarrow{f'} C \overset{\delta_f}{\dashrightarrow}$, $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{g'} F \overset{\delta_g}{\dashrightarrow}$, $E \xrightarrow{h} B \xrightarrow{h'} C \overset{\delta_h}{\dashrightarrow}$ tales que $h'g = f'$, existen un $\mathbb{E}$-triángulo $D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} F \overset{\theta}{\dashrightarrow}$ y un diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d"'] & A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, equal] \\
E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"'] & B \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "g'"] & C \\
F \arrow[r, equal] & F &
\end{tikzcd} \tag{4.4.6}$$

tales que se satisfacen las condiciones

(i) $d \cdot \delta_f = \delta_h$,

(ii) $f \cdot \theta = \delta_g$,

(ii) $\theta \cdot g' + \delta_f \cdot h' = 0$.

Demostración. Por (ET4), existen $\mathbb{E}$-triángulos $D \xrightarrow{gf} B \xrightarrow{a} G \overset{\mu}{\dashrightarrow}$ y $C \xrightarrow{b} G \xrightarrow{c} F \overset{\nu}{\dashrightarrow}$ tales que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[d, "b"] \\
D \arrow[r, "gf"'] & B \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "g'"'] & G \arrow[d, "c"] \\
 & F \arrow[r, equal] & F
\end{tikzcd} \tag{4.4.7}$$

conmuta, con $f' \cdot \delta_g = \nu, \mu \cdot b = \delta_f$ y $\delta_g \cdot c = f \cdot \mu$. Del Lema 4.4.3 y la Proposición 1.5.13, se sigue que

$$\begin{aligned}
\nu &= f' \cdot \delta_g \\
&= (h'g) \cdot \delta_g \\
&= h' \cdot (g \cdot \delta_g) \\
&= h' \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por ende, hasta equivalencia, podemos suponer que $G = C \bigoplus F, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces, por la conmutatividad del diagrama (4.4.7), tenemos que $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} : B \to G = C \bigoplus F$ satisface $a_1 g = f'$ y $a_2 = g'$. Dado que $h' - a_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B, C)$ satisface $(h' - a_1)g = f' - f' = 0$, existe $z \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F, C)$ tal que $zg' = h' - a_1$. Sea $z' = \begin{pmatrix} -z \\ 1 \end{pmatrix}$. Aplicando el resultado dual del Lema 4.4.13 al diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "h"'] & F \arrow[d, "z'"] & \\
D \arrow[r, "gf"'] & B \arrow[r, "a"] \arrow[d, "h'"'] & G \arrow[r, dashed, "\mu"] \arrow[d, "(1\ z)"] & {} \\
 & C \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_h"'] & C \arrow[d, dashed, "0"] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

obtenemos un $\mathbb{E}$-triángulo $D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} F \overset{\theta}{\dashrightarrow}$ tal que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "h"'] & F \arrow[d, "z'"] \\
D \arrow[r, "gf"'] & B \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "h'"'] & G \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}1 & z\end{smallmatrix}\right)"] \\
& C \arrow[r, equal] & C
\end{tikzcd} \tag{4.4.8}$$

conmuta, y se satisface $\theta = \mu \cdot z', d \cdot \mu = \delta_h \cdot \left(\begin{smallmatrix}1 & z\end{smallmatrix}\right)$. Por la conmutatividad del diagrama (4.4.8), tenemos que

$$gf = hd,$$

$$\begin{aligned}
ah = z'e &\iff \left(\begin{smallmatrix}a_1\\ a_2\end{smallmatrix}\right)h = \left(\begin{smallmatrix}-z\\ 1\end{smallmatrix}\right)e \\
&\iff \left(\begin{smallmatrix}a_1 h\\ a_2 h\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-ze\\ e\end{smallmatrix}\right) \\
&\iff a_2 h = ev \\
&\iff g'h = e,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix}1 & z\end{smallmatrix}\right)a = h' &\iff \left(\begin{smallmatrix}1 & z\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a_1\\ a_2\end{smallmatrix}\right)g = h'g \\
&\iff a_1 g + z a_2 g = h'g \\
&\iff f' + zg'g = h'g \\
&\iff f' + (h' - a_1)g = h'g \\
&\iff f' = h'g, && \text{(puesto que } (h' - a_1)g = f' - f')
\end{aligned}$$

por lo que el diagrama (4.4.6) conmuta. Luego, por la Proposición 1.5.13, tenemos que

$$\begin{aligned}
d \cdot \mu = \delta_h \cdot \left(\begin{smallmatrix}1 & z\end{smallmatrix}\right) &\iff (d \cdot \mu) \cdot b = (\delta_h \cdot \left(\begin{smallmatrix}1 & z\end{smallmatrix}\right)) \cdot b \\
&\iff d \cdot (\mu \cdot b) = \delta_h \cdot \Big(\left(\begin{smallmatrix}1 & z\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right)\Big) \\
&\iff d \cdot \delta_f = \delta_h \cdot 1_C \\
&\iff d \cdot \delta_f = \delta_h,
\end{aligned}$$

obteniéndose (i). Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned}
(f \cdot \theta) \cdot c &= f \cdot ((\mu \cdot z') \cdot c) \\
&= f \cdot (\mu \cdot z'c) \\
&= f \cdot \left(\mu \cdot \begin{pmatrix}0 & -z\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \\
&= f \cdot \Big(\mu \cdot \Big(1 - \left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & z\end{smallmatrix}\right)\Big)\Big) \\
&= f \cdot \mu - f \cdot \Big(\mu \cdot \Big(b\left(\begin{smallmatrix}1 & z\end{smallmatrix}\right)\Big)\Big) \\
&= f \cdot \mu - f \cdot ((\mu \cdot b) \cdot \left(\begin{smallmatrix}1 & z\end{smallmatrix}\right)) \\
&= f \cdot \mu - f \cdot (\delta_f \cdot \left(\begin{smallmatrix}1 & z\end{smallmatrix}\right)\Big)) \\
&= f \cdot \mu && \text{(Por el Lema 4.4.3)} \\
&= \delta_g \cdot c.
\end{aligned}$$

Luego, como c es un epimorfismo, tenemos que $\mathbb{E}(c, A)$ es inyectiva, de donde se sigue (ii). Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}\theta \cdot g' + \delta_f \cdot h' &= (\mu \cdot z') \cdot g' + (\mu \cdot b) \cdot h' \\ &= \mu \cdot (z'g') + \mu \cdot (bh') \\ &= \mu \cdot (z'g' + bh') \\ &= \mu \cdot \left(\left(\begin{smallmatrix} -zg' \\ g' \end{smallmatrix} \right) + \left(\begin{smallmatrix} h' \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right) \\ &= \mu \cdot \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ g' \end{smallmatrix} \right) && \text{(pues } zg' = h - a_1\text{)} \\ &= \mu \cdot a \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Relación con categorías exactas

Ejemplo 4.4.17 [NP19, Example 2.13] Una categoría exacta con una restricción adicional (relacionada con “pequeñez”) puede ser vista como una categoría extriangulada, como se detalla a continuación.

Sean $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ una categoría exacta y $A, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Entonces, por el Lema del 3 (Corolario 2.2.13), sabemos que para cualquier morfismo de sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "x"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, two heads, "y"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, tail, "x'"'] & B' \arrow[r, two heads, "y'"'] & C \end{tikzcd}$$

se tiene que b es un isomorfismo. Por ende, considerando la misma relación de equivalencia que en la Definición 4.2.5, definimos a $\mathrm{Ext}^1(C, A)$ como la colección de todas las clases de equivalencia de sucesiones exactas cortas de la forma $A \overset{x}{\rightarrowtail} B \overset{y}{\twoheadrightarrow} C$. En este caso, $\mathrm{Ext}^1(C, A)$ es un conjunto cuando se satisface alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\mathscr{A}$ es equivalente a una categoría pequeña;

(ii) $\mathscr{A}$ tiene suficientes proyectivos o suficientes inyectivos.

En caso de que $\mathrm{Ext}^1(C, A)$ sea un conjunto para cualesquiera $A, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, obtenemos un bifuntor aditivo $\mathrm{Ext}^1 : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ de manera análoga a como se hizo en la sección 2.3 para la relación de equivalencia $\simeq$, verificándose así (ET1). Resumimos esta construcción utilizando la notación de categorías extrianguladas como sigue.

- Para cualesquiera $\delta = [A \overset{x}{\rightarrowtail} B \overset{y}{\twoheadrightarrow} C] \in \mathrm{Ext}^1(C, A)$ y $C \xrightarrow{f} C', A' \xrightarrow{g} A$ en $\mathscr{A}$, tenemos que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, dotted, two heads] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & C' \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, tail] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, dotted] & C \arrow[d, equal] \\ A' \arrow[r, dotted, tail] & B'' \arrow[r, two heads] & C \end{tikzcd}$$

conmuta y tiene renglones exactos, de donde definimos

$$\mathrm{Ext}^1(f,A)(\delta) = f\cdot\delta = [A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C'],$$
$$\mathrm{Ext}^1(C,g)(\delta) = \delta\cdot g = [A' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C].$$

- Para cualesquiera $\delta = [A \overset{x}{\rightarrowtail} B \overset{y}{\twoheadrightarrow} C], \delta' = [A \overset{x'}{\rightarrowtail} B' \overset{y'}{\twoheadrightarrow} C] \in \mathrm{Ext}^1(C,A)$, la suma $\delta+\delta'$ está dada por la suma de Baer
$$\nabla_A \cdot \left(\delta \bigoplus \delta'\right)\cdot \Delta_C,$$
en concordancia con la Observación 4.2.4. En particular, el elemento neutro de $\mathrm{Ext}^1(C,A)$ está dado por $0 = [A \overset{\left(\begin{smallmatrix}1_A\\0\end{smallmatrix}\right)}{\rightarrowtail} A\bigoplus C \overset{(0\ 1_C)}{\twoheadrightarrow} C]$.

Ahora, definiendo a la realización $\mathfrak{s}(\delta)$ de $\delta = [A \overset{x}{\rightarrowtail} B \overset{y}{\twoheadrightarrow} C]$ como δ mismo, (ET2) se satisface trivialmente. Luego, (ET3) se sigue de la Proposición 2.2.12 y la propiedad universal del conúcleo; dualmente, (ET3)* se sigue de la Proposición dual a 2.2.12 y la propiedad universal del núcleo. Finalmente, (ET4) se sigue del Lema 2.2.14 y, dualmente, se obtiene (ET4)*.

Conversamente, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.4.18 [NP19, Corollary 3.18] Sean $(\mathscr{A},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ una categoría extriangulada en la cual toda inflación es un monomorfismo y toda deflación es un epimorfismo, y $\mathscr{S}$ la clase de conflaciones dadas por los $\mathbb{E}$-triángulos. Entonces, $(\mathscr{A},\mathscr{S})$ es una categoría exacta.

Demostración. Sea $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ un elemento de $\mathscr{S}$. De las sucesiones exactas obtenidas en la Proposición 4.4.4 y la hipótesis de que toda inflación es un monomorfismo se sigue que x es un núcleo de y. Dualmente, tenemos que y es un conúcleo de x. Por ende, los elementos de $\mathscr{S}$ son pares núcleo-conúcleo.

Sean $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ un $\mathbb{E}$-triángulo arbitrario y $A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C'$ un par núcleo-conúcleo, y supongamos que existen isomorfismos $a\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,A'), b\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,B'), c\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C,C')$ tales que $x'a = bx$ y $y'b = cy$. Por la Proposición 4.4.7, obtenemos un $\mathbb{E}$-triángulo $A' \xrightarrow{xa^{-1}} B \xrightarrow{cy} C' \overset{(c^{-1})^*a_*\delta}{\dashrightarrow}$. Entonces, tenemos que $\mathfrak{s}(\delta) = [A' \xrightarrow{xa^{-1}} B \xrightarrow{cy} C'] = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$, lo que implica que $A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C'$ es un elemento de $\mathscr{S}$. Por ende, $\mathscr{S}$ es cerrada por isomorfismos.

Por (ET2) y (ET2)*, tenemos que $A \xrightarrow{1_A} A \to 0$ y $0 \to A \xrightarrow{1_A} A$ son elementos de $\mathscr{S}$, demostrándose (E0) y (E0)*.

De (ET4) y (ET4)* se siguen se siguen (E1) y (E1)*, como se mencionó en la Observación 4.3.2.

Sean $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ un $\mathbb{E}$-triángulo arbitrario y $A \xrightarrow{a} A'$ en $\mathscr{A}$. Por el Corolario 4.4.15, existe una conflación

$$A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}x\\-a\end{smallmatrix}\right)} B\bigoplus A' \xrightarrow{(b\ x')} B'.$$

Dado que dicha conflación es un par núcleo-conúcleo, se sigue que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ A' \arrow[r, "x'"'] & B' \end{tikzcd}$$

es una suma fibrada. Más aún, por el dual de la Proposición 4.4.16, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r, equal] \arrow[d, "\binom{0}{1}"'] & A' \arrow[d, "x'"] \\
A \arrow[r, "\binom{x}{-a}"] \arrow[d, equal] & B \bigoplus A' \arrow[r, "(b\ x')"'] \arrow[d, "(1\ 0)"] & B' \arrow[d, "y'"] \\
A \arrow[r, "x"'] & B \arrow[r, "y"'] & C,
\end{tikzcd}$$

lo que muestra que x' es una inflación, demostrándose (E2). Dualmente, se demuestra (E2)*. □

Relación con categorías trianguladas

Consideremos una categoría triangulada $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ y el bifuntor aditivo $\mathbf{E}^1 := \operatorname{Ext}^1_{(\mathscr{A},T,\Delta)}$ visto en la sección 3.3. Observemos que, en este caso, para $\delta \in \mathbf{E}^1(C, A) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(C, T(A))$ y $A \xrightarrow{a} A', C' \xrightarrow{c} C$ en $\mathscr{A}$, se tiene que

$$a \cdot \delta = T(a)\delta \quad \wedge \quad \delta \cdot c = \delta c.$$

El siguiente resultado demuestra que dar una triangulación de $\mathscr{A}$ con el funtor de traslación T es equivalente a dar una $\mathbf{E}^1$-triangulación de $\mathscr{A}$.

Proposición 4.4.19 [NP19, Proposition 3.22] Para una categoría aditiva $\mathscr{A}$ y un automorfismo aditivo $T : \mathscr{A} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}$, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Sea $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ una categoría triangulada. Si para cada $\delta \in \mathbf{E}^1(C, A) = \operatorname{Hom}(C, T(A))$, tomamos un triángulo distinguido

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} T(A)$$

y definimos $\mathfrak{s}(\delta) := [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$, entonces $(\mathscr{A}, \mathbf{E}^1, \mathfrak{s})$ es una categoría extriangulada.

(b) Supongamos que $\mathfrak{s}$ es una $\mathbf{E}^1$-triangulación externa de $\mathscr{A}$. Si definimos una clase Δ como

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} T(A) \in \Delta \iff \mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C],$$

entonces $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ es una categoría triangulada.

Demostración.

(a) (ET1) se sigue de la Observación 3.3.2.

Sean $A, C \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A}), \delta \in \mathbf{E}^1(C, A)$ y $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} T(A)$, $A \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C' \xrightarrow{\delta} T(A)$ triángulos distinguidos. Entonces, del Lema 3.2.1 y el inciso (c) del Teorema 3.2.3, se sigue que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, dotted, "\wr"] & C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & T(A) \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C \arrow[r, "\delta"'] & T(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces, por la Definición 4.2.5, tenemos que

$$\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C] = [A \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C],$$

por lo que $\mathfrak{s}$ está bien definida. Luego, del Corolario 3.2.15 y la Proposición 3.2.14, se sigue que $\mathfrak{s}$ es una realización aditiva de $\mathbf{E}^1$, verificándose (ET2).

(ET3) y (ET3)* se siguen directamente del Lema 3.2.1.

(ET4) se sigue del axioma del octaedro, y (ET4)* se sigue del mismo axioma y de la Proposición 3.2.9.

(b) Sean $\eta = (E, E', E'', e, e', e''), \mu = (M, M', M'', m, m', m'') \in \mathrm{Obj}(\mathscr{T}(\mathscr{A}, T))$. Supongamos que $(f, g, h) : \eta \simeq \mu$ en $\mathscr{T}(\mathscr{A}, T)$ y $\mu \in \Delta$. Entonces, $\mathfrak{s}(m'') = [M \xrightarrow{m} M' \xrightarrow{m'} M'']$ y tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"', "\wr"] & E' \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "g"', "\wr"] & E'' \arrow[r, "e''"] \arrow[d, "h", "\wr"'] & T(E) \arrow[d, "T(f)", "\wr"'] \\ M \arrow[r, "m"'] & M' \arrow[r, "m'"'] & M'' \arrow[r, "m''"'] & T(M). \end{tikzcd} \tag{4.4.9}$$

Como $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, E)$ y $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(E'', M'')$, de la Proposición 4.4.7, se sigue que

$$\mathfrak{s}\Big(f^{-1} \cdot (m'' \cdot h)\Big) = [E \xrightarrow{mf} M' \xrightarrow{h^{-1}m'} E''].$$

Luego, de la conmutatividad del diagrama (4.4.9), se sigue que

$$\begin{aligned} f^{-1} \cdot (m'' \cdot h) &= T(f^{-1})m''h \\ &= e, \end{aligned}$$

y que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[dr, "e'"] \arrow[dd, "g", "\wr"'] & \\ E \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "mf"'] & & E'' \\ & M' \arrow[ur, "h^{-1}m'"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, por lo que $\mathfrak{s}(e'') = [E \xrightarrow{e} E' \xrightarrow{e'} E'']$, lo que implica que $\eta \in \Delta$. Por ende, Δ es cerrada por isomorfismos.

Sea $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Por el inciso (2) de la Observación 4.2.9, tenemos que

$$X \xrightarrow{\binom{1}{0}} X \bigoplus 0 \xrightarrow{(0\ 1)} 0$$

realiza a la $\mathbf{E}^1$-extensión escindible $0 \in \mathbf{E}^1(0, X)$. Como $X \bigoplus 0 \simeq X$ en $\mathscr{A}$, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & X \bigoplus 0 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por ende, $\mathfrak{s}(0) = \left[X \xrightarrow{\binom{1}{0}} X \bigoplus 0 \to 0\right] = [X \xrightarrow{1_X} X \to 0]$, de donde se sigue que $X \xrightarrow{1_X} X \to 0 \to T(X)$ es un triángulo distinguido, probándose (TR1a).

Para poder demostrar (TR1b), debemos primero demostrar (TR2). Sea $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ un $\mathbf{E}^1$-triángulo arbitrario. Aplicando la Proposición 4.4.14 a $A \to 0 \to T(A) \overset{\mathbf{1}}{\dashrightarrow}$ y δ, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[d] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "m'"] & C \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"] & C \\
T(A) \arrow[r, equal] & T(A), &
\end{tikzcd}$$

con

(i) $[0 \to M \xrightarrow{e} C] = 0 \cdot \delta = 0$,

(ii) $\delta \cdot e + \mathbf{1} \cdot e' = 0$,

(iii) $\mathfrak{s}(T(x)) = \mathfrak{s}(x \cdot \mathbf{1}) = [B \xrightarrow{m'} M \xrightarrow{e'} T(A)]$.

Por (i) y el inciso (1) de la Observación 4.2.9, se sigue que e es un isomorfismo. De (ii), tenemos que $\delta e + e' = 0$ en $\operatorname{Hom}(M, T(A))$, por lo que $e'e^{-1} = -\delta$. Ahora, por (iii), tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}(T(x)) &= [B \xrightarrow{m'} M \xrightarrow{e'} T(A)] \\
&= [B \xrightarrow{e^{-1}y} M \xrightarrow{e'} T(A)].
\end{aligned}$$

Luego, del diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dd, "\wr"', "e"] \arrow[dr, "e'"] & \\
B \arrow[ur, "e^{-1}y"] \arrow[dr, "y"'] & & T(A), \\
& C \arrow[ur, "-\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

se sigue que $\mathfrak{s}\big(T(x)\big) = [B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{-\delta} T(A)]$, por lo que $B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{-\delta} T(A) \xrightarrow{T(x)} T(B)$ es un triángulo distinguido, el cual es isomorfo a $B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} T(A) \xrightarrow{-T(x)} T(B)$. Por ende, (TR2) se verifica.

Sea $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathscr{A}$. Entonces, $f \in \operatorname{Hom}(X,Y) = \mathbf{E}^1(X, T^{-1}(Y))$. Como $\mathfrak{s}$ es una $\mathbf{E}^1$-triangulación de $\mathscr{A}$, tenemos que existe una clase de equivalencia tal que $\mathfrak{s}(f) = [T^{-1}(Y) \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} X]$, lo que implica que $T^{-1}(Y) \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{f} Y$ pertenece a Δ. Aplicando (TR2) dos veces, se sigue que $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{-T(\alpha)} T(Z) \xrightarrow{-T(\beta)} T(X)$ es un triángulo distinguido, probándose (TR1b).

Supongamos que $\eta, \mu \in \Delta$ y que existen $E \xrightarrow{f} M, E' \xrightarrow{g} M'$ en $\mathscr{A}$ tales que $ge = mf$. Entonces, por (ET3), existe $E'' \xrightarrow{h} M''$ en $\mathscr{A}$ tal que $\eta \xrightarrow{(f,h)} \mu$ es un morfismo de $\mathbf{E}^1$-extensiones realizado por (f,g,h). En particular, tenemos que $\eta \xrightarrow{(f,g,h)} \mu \in \operatorname{Mor}(\mathscr{T}(\mathscr{A},T))$, por lo que se verifica (TR3).

Hasta ahora, hemos visto que $(\mathscr{A}, T, \Delta)$ es una categoría pretriangulada. Sean $X \xrightarrow{u} Y, Y \xrightarrow{v} Z \in \operatorname{Mor}(\mathscr{A})$. Entonces, por (TR1b), podemos formar el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r, "i'"] & T(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "vu"'] & Z \arrow[r, "k"'] \arrow[d, "j"'] & Y' \arrow[r, "k'"'] & T(X) \arrow[d, "T(u)"] \\
 & X' \arrow[r, equal] \arrow[d, "j'"'] & X' \arrow[r, "j'"'] \arrow[d, "T(i)j'"] & T(Y), \\
 & T(Y) \arrow[r, "T(i)"'] & T(Z') &
\end{tikzcd}$$

cuyos primeros dos renglones, así como su segunda columna, son triángulos distinguidos. Por ende, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}(i') &= X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{i} Z', \\
\mathfrak{s}(j') &= Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{j} X', \\
\mathfrak{s}(k') &= X \xrightarrow{vu} Z \xrightarrow{k} Y'.
\end{aligned}$$

En particular, u y v son inflaciones y, de (ET4) y la Observación 4.3.2, obtenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r, dashed, "i'=k'\cdot d"] \arrow[d, "d"] & {} \\
X \arrow[r, "vu"'] & Z \arrow[r, "k"'] \arrow[d, "j"'] & Y' \arrow[r, dashed, "k'"'] \arrow[d, "e"] & {} \\
 & X' \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "j'"'] & X' \arrow[d, dashed, "i\cdot j'"] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

con $u \cdot k' = j' \cdot e$, donde los dos renglones y las dos columnas son $\mathbf{E}^1$-triángulos. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "d"] & T(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "vu"'] & Z \arrow[r, "k"'] \arrow[d, "j"'] & Y' \arrow[r, "k'"'] \arrow[d, "e"] & T(X) \arrow[d, "T(u)"] \\
 & X' \arrow[r, equal] \arrow[d, "j'"'] & X' \arrow[r, "j'"'] \arrow[d, "T(i)j'"] & T(Y), \\
 & T(Y) \arrow[r, "T(i)"'] & T(Z') &
\end{tikzcd}$$

donde los dos renglones y las dos columnas son triángulos distinguidos, pues $Z' \xrightarrow{d} Y' \xrightarrow{e} X' \overset{i_*j'}{\dashrightarrow}$ es un $\mathbf{E}^1$-triángulo, verificándose así (TR4).

$\square$

Objetos proyectivos e inyectivos

Definición 4.4.20 [NP19, Definitions 3.23 & 3.25] Sea $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada. Definimos a los objetos $\mathbb{E}$-*proyectivos* en $\mathscr{A}$ y decimos que $\mathscr{A}$ tiene *suficientes* $\mathbb{E}$-*proyectivos* siguiendo las Definiciones 1.1.9 y 1.1.12, considerando deflaciones en vez de epimorfismos, y denotamos a la clase de objetos $\mathbb{E}$-proyectivos en $\mathscr{A}$ por $\mathrm{Proj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A})$.

Proposición 4.4.21 [NP19, Proposition 3.24] Un objeto P en $\mathscr{A}$ es $\mathbb{E}$-proyectivo si, y sólo si, se satisface que $\mathbb{E}(P, A) = 0$ para cualquier $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que P es $\mathbb{E}$-proyectivo. Sean $A \in \mathscr{A}$ y $\delta \in \mathbb{E}(P, A)$, con $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} M \xrightarrow{y} P]$. Dado que P es $\mathbb{E}$-proyectivo, existe $m \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P, M)$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, equal] \arrow[d, "m"'] & P \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "x"'] & M \arrow[r, "y"'] & P.
\end{tikzcd}$$

Luego, por (ET3)*, se sigue que el triple $(0, m, 1_P)$ realiza al morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos $(0, 1_P) : 0 \to \delta$. En particular, tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta &= \delta \cdot 1_p && \text{(Proposición 1.5.13(g))} \\
&= 0 \\
&= 0 \cdot 0. && \text{(Proposición 1.5.13(j))}
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Se sigue directamente de la sucesión exacta (2-ii) en la Proposición 4.4.4. $\square$

Ejemplo 4.4.22 [NP19, Example 3.26]

(1) Sea $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría exacta que cumpla con alguna de las condiciones de "pequeñez" del Ejemplo 4.4.17 y que, por lo tanto, pueda ser vista como una categoría extriangulada. Entonces, la Definición 4.4.20 coincide con el inciso (a) de la Definición 4.1.1. En particular, $\mathrm{Proj}(\mathscr{A}) \subseteq \mathrm{Proj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A})$.

(2) Sea $(\mathscr{A}, \mathbf{E}^1, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada, con $\mathbf{E}^1(-,-) := \mathrm{Hom}(-,-[1])$ y $[1] : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ un automorfismo aditivo, que puede ser vista como una categoría triangulada por el inciso (b) de la Proposición 4.4.19. Entonces, $\mathrm{Proj}_{\mathbf{E}^1}(\mathscr{A})$ consiste en todos los objetos cero en $\mathscr{A}$. Más aún, siempre tiene suficientes $\mathbf{E}^1$-proyectivos. Notemos que, en este caso, puede ocurrir que exista un objeto $P' \in \mathrm{Proj}(\mathscr{A})$ tal que $P' \notin \mathrm{Proj}_{\mathbf{E}^1}(\mathscr{A})$, lo cual sucede cuando $\mathscr{A}$ es semisimple y $\mathscr{A} \neq \varnothing$.

En efecto: Por la propiedad universal del objeto cero, se sigue que todo objeto cero en $\mathscr{A}$ es $\mathbf{E}^1$-proyectivo. Por otro lado, sea $P \in \mathrm{Proj}_{\mathbf{E}^1}(\mathscr{A})$. Entonces, por (TR1a) y la Proposición 3.2.4, tenemos que $P[-1] \to 0 \to P \xrightarrow{1_P} P \in \Delta$, lo que implica que $P[-1] \to 0 \to P \overset{1_P}{\dashrightarrow}$ es un $\mathbf{E}^1$-triángulo. Como P es $\mathbf{E}^1$-proyectivo, existe un morfismo que hace conmutar el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[d, "1_P"] \arrow[dl, dotted] & \\ P[-1] \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P \arrow[r, dashed, "1_P"] & {} \end{tikzcd},$$

por lo que $1_P = 0$. Por el inciso (3) de la Observación 1.1.2, se sigue que P es un objeto cero en $\mathscr{A}$. En particular, la existencia del $\mathbf{E}^1$-triángulo $X[-1] \to 0 \to X \overset{1_X}{\dashrightarrow}$ para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, por (TR1a) y la Proposición 3.2.4, implica que $(\mathscr{A}, \mathbf{E}, \mathfrak{s})$ tiene suficientes $\mathbf{E}^1$-proyectivos.

Corolario 4.4.23 [NP19, Corollary 3.27] Sea $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada con suficientes $\mathbb{E}$-proyectivos. Entonces, para cualquier objeto $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y cualquier $\mathbb{E}$-triángulo $A \xrightarrow{x} P \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, con $P \in \mathrm{Proj}(\mathscr{A})$, la sucesión

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,-) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(x,-)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,-) \xrightarrow{\delta^\sharp} \mathbb{E}(C,-) \to 0$$

es exacta. En particular, tenemos un isomorfismo natural $\mathbb{E}(C,-) \simeq \mathrm{CoKer}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(x,-))$.

Demostración. Se sigue directamente de las Proposiciones 4.4.4 y 4.4.21. □

Observación 4.4.24 [NP19, Remark 3.28] Sea $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada con suficientes $\mathbb{E}$-proyectivos. Sean $C \xrightarrow{c} C'$ en $\mathscr{A}$ y $A \xrightarrow{x} P \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, $A' \xrightarrow{x'} P' \xrightarrow{y'} C' \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ un par de $\mathbb{E}$-triángulos tales que $P, P' \in \mathrm{Proj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A})$. Entonces, por la proyectividad de P y (ET3)*, obtenemos un morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos $(q,c) : \delta \to \delta'$ y, por ende, un morfismo de sucesiones exactas, como sigue

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "q"'] & P \arrow[r, "y"] \arrow[d, "p"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "c"] & {} \\ A' \arrow[r, "x'"'] & P' \arrow[r, "y'"'] & C' \arrow[r, "\delta'"] & {} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,-) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(x,-)"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,-) \arrow[r, "\delta^\sharp"] & \mathbb{E}(C,-) \arrow[r] & 0 \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P',-) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(x',-)"'] \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(p,-)"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A',-) \arrow[r, "\delta'^\sharp"'] \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(q,-)"'] & \mathbb{E}(C',-) \arrow[r] \arrow[u, "\mathbb{E}(c^{\mathrm{op}},-)"'] & 0. \end{tikzcd}$$

Por la Observación 4.2.11, los resultados duales para objetos inyectivos en categorías extrianguladas son válidos.

Lema 4.4.25 [NP19, Lemma 3.29] Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada, $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ un $\mathbb{E}$-triángulo, $i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, I)$ con $I \in \mathrm{Inj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A})$ y p_C la proyección de $C \bigoplus I$ a C. Entonces, la $\mathbb{E}$-extensión $\delta \cdot p_C$ es realizada por un $\mathbb{E}$-triángulo de la forma

$$A \xrightarrow{x_I} B \bigoplus I \xrightarrow{y_I} C \bigoplus I \overset{\delta \cdot p_C}{\dashrightarrow},$$

donde $x_I = \left(\begin{smallmatrix} x \\ i \end{smallmatrix}\right)$ y $y_I = \left(\begin{smallmatrix} y & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$.

Demostración. Por el Corolario 4.4.15, tenemos un $\mathbb{E}$-triángulo $A \xrightarrow{x_I} B \bigoplus I \xrightarrow{d} D \overset{\nu}{\dashrightarrow}$. Por la Proposición dual a 4.4.16, obtenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[r, equal] \arrow[d, "\binom{0}{1}"'] & I \arrow[d, "e"] & \\
A \arrow[r, "x_I"] \arrow[d, equal] & B \bigoplus I \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & D \arrow[r, dashed, "\nu"] \arrow[d, "f"] & {} \\
A \arrow[r, "x"'] & B \arrow[r, "y"'] \arrow[d, dashed, "0"'] & C \arrow[r, dashed, "\delta"'] \arrow[d, dashed, "\theta"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd},$$

que satisface $\delta \cdot f = \nu$. Dado que $I \in \mathrm{Inj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A})$, se sigue que $\theta = 0$. Por ende, existe un isomorfismo $n : C \bigoplus I \xrightarrow{\sim} D$ tal que $n\binom{0}{1} = c$ y $fn = (\,1\ 9\,)$. Entonces, para $p_C = (\,1\ 0\,) : C \bigoplus I \to C$, tenemos que el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x_I"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "n^{-1}d"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & C \bigoplus I \arrow[r, dashed, "\nu \cdot n"] \arrow[d, "(1\ 0) = p_C"] & {} \\
A \arrow[r, "x"'] & B \arrow[r, "y"'] & C \arrow[r, dashed, "\delta"'] & {}
\end{tikzcd}$$

es un morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos. Entonces, $n^{-1}d$ satisface que

$$\begin{aligned} p_C(n^{-1}d)\binom{0}{1} &= y(\,1\ 0\,)\binom{0}{1} \\ &= y, \end{aligned}$$

por lo que es de la forma $\begin{pmatrix} y & * \\ * & * \end{pmatrix}$. $\square$

A continuación, mostramos un ejemplo de una categoría extriangulada que no es exacta ni triangulada en general.

Proposición 4.4.26 [NP19, Proposition 3.30] Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada y $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{A}$ una subcategoría aditiva plena de $\mathscr{A}$ cerrada por isomorfismos en $\mathscr{A}$. Si $\mathscr{I} \subseteq \mathrm{Proj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A}) \cap \mathrm{Inj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A})$, entonces la categoría cociente $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ tiene una estructura de categoría extriangulada, inducida de la de $\mathscr{A}$. En particular, a cada categoría extriangulada $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ podemos asociarle una categoría extriangulada "reducida" $\mathscr{A}' := \mathscr{A}/(\mathrm{Proj}(\mathscr{A}) \cap \mathrm{Inj}(\mathscr{A}))$ que satisface $\mathrm{Proj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A}') \cap \mathrm{Inj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A}') = 0$.

Demostración. Sea $\overline{\mathscr{A}} = \mathscr{A}/\mathscr{I}$.

Dado que $\mathbb{E}(\mathscr{I}, \mathscr{A}) = \mathbb{E}(\mathscr{A}, \mathscr{I}) = 0$, podemos definir un bifuntor aditivo $\overline{\mathbb{E}} : \overline{\mathscr{A}}^{\mathrm{op}} \times \overline{\mathscr{A}} \to \mathrm{Ab}$ dado por

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}(C, A) &= \mathbb{E}(C, A) \quad \forall\ A, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), \\ \overline{\mathbb{E}}(\bar{c}, \bar{a}) &= \mathbb{E}(c, a) \quad \forall\ a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A'), c \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C, C'), \end{aligned}$$

donde $\bar{a}$ y $\bar{c}$ son las clases de correspondencia en $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ correspondientes a a y c, respectivamente.

Para cualquier $\overline{\mathbb{E}}$-extensión $\delta \in \overline{\mathbb{E}}(C, A) = \mathbb{E}(C, A)$, definimos

$$\bar{\mathfrak{s}}(\delta) := \overline{\mathfrak{s}(\delta)} = [A \xrightarrow{\overline{x_0}} B \xrightarrow{\overline{y_0}} C],$$

donde $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x_0} B \xrightarrow{y_0} C]$. Veamos que $\overline{\mathfrak{s}}$ es una realización aditiva de $\overline{\mathbb{E}}$. Sea $(\overline{a}, \overline{c}) : \delta = (A, \delta, C) \to \delta' = (A', \delta', C')$ un morfismo de $\overline{\mathbb{E}}$-extensiones. Por definición, esto equivale a que $(a, c) : \delta \to \delta'$ sea un morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones. Supongamos que $\overline{\mathfrak{s}}(\delta) = [A \xrightarrow{\overline{x}} B \xrightarrow{\overline{y}} C]$, $\overline{\mathfrak{s}}(\delta') = [A' \xrightarrow{\overline{x'}} B' \xrightarrow{\overline{y'}} C']$. Dado que la condición de la Definición 4.2.7 no depende de los representantes de las clases de equivalencia de suseciones en $\overline{\mathscr{A}}$, podemos suponer que $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C], \mathfrak{s}(\delta') = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$. Entonces, existe un morfismo $b \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(B, B')$ tal que (a, b, c) realiza a (a, c), de donde se sigue que $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ realiza a $(\overline{a}, \overline{c})$. Por otro lado, la igualdad $\overline{\mathfrak{s}} = 0$ se satisface trivialmente, mientras que

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{s}}\Big(\delta \bigoplus \delta'\Big) &= \overline{\mathfrak{s}\Big(\delta \bigoplus \delta'\Big)} \\
&= \overline{\mathfrak{s}(\delta) \bigoplus \mathfrak{s}(\delta')} \\
&= \Big[A \bigoplus A' \xrightarrow{\overline{x \bigoplus x'}} B \bigoplus B' \xrightarrow{\overline{y \bigoplus y'}} C \bigoplus C'\Big] \\
&= [A \xrightarrow{\overline{x}} B \xrightarrow{\overline{y}} C] \bigoplus [A' \xrightarrow{\overline{x'}} B' \xrightarrow{\overline{y'}} C'] \\
&= \overline{\mathfrak{s}}(\delta) \bigoplus \overline{\mathfrak{s}}(\delta').
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que tenemos $\overline{\mathfrak{s}}(\delta) = [A \xrightarrow{\overline{x}} B \xrightarrow{\overline{y}} C], \overline{\mathfrak{s}}(\delta') = [A' \xrightarrow{\overline{x'}} B' \xrightarrow{\overline{y'}} C']$ y $\overline{a} \in \operatorname{Hom}_{\overline{\mathscr{A}}}(A, A')$, $\overline{b} \in \operatorname{Hom}_{\overline{\mathscr{A}}}(B, B')$ tales que $\overline{x'}\overline{a} = \overline{b}\overline{x}$. Entonces, nuevamente, podemos suponer que $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C], \mathfrak{s}(\delta') = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$. Por $\overline{x'}\overline{a} = \overline{b}\overline{x}$, existen $I \in \operatorname{Obj}(\mathscr{I}), i \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, I)$ y $j \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(I, B')$ tales que $x'a = bx + ji$. Por el Lema 4.4.25, obtenemos el $\mathbb{E}$-triángulo

$$A \xrightarrow{x_I} B \bigoplus I \xrightarrow{y_I} C \bigoplus I \overset{\delta \cdot p_C}{\dashrightarrow},$$

el cual induce el isomorfismo de $\mathbb{E}$-triángulos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\overline{x_I}"] \arrow[d, equal] & B \oplus I \arrow[r, "\overline{y_I}"] \arrow[d, "\overline{p_B}"] & C \oplus I \arrow[r, dashed, "\delta \cdot p_C"] \arrow[d, "\overline{p_C}"] & {} \\
A \arrow[r, "x"'] & B \arrow[r, "y"'] & C \arrow[r, dashed, "\delta"'] & {} .
\end{tikzcd} \tag{4.4.10}$$

Por otro lado, dado que $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ cumple el axioma (ET3), tenemos el siguiente morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x_I"] \arrow[d, equal] & B \oplus I \arrow[r, "y_I"] \arrow[d, "(b\ j)"] & C \oplus I \arrow[r, dashed, "\delta \cdot p_C"] \arrow[d, "c"] & {} \\
A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"'] & {} .
\end{tikzcd} \tag{4.4.11}$$

De los diagramas (4.4.10) y (4.4.11), obtenemos un morfismo de $\overline{\mathbb{E}}$-extensiones $(\overline{a}, \overline{cp_C}^{-1}) : \delta \to \delta'$ tal que $(\overline{cp_C}^{-1})\overline{y} = \overline{y'}\overline{b}$. Dualmente, se demuestra (ET3)*.

Sean $A \xrightarrow{\overline{f}} B \xrightarrow{\overline{f'}} D \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ y $B \xrightarrow{\overline{g}} C \xrightarrow{\overline{g'}} F \overset{\delta'}{\dashrightarrow}$ $\overline{\mathbb{E}}$-triángulos. Entonces, siguiendo los mismos argumentos de antes, podemos suponer que $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f'} D \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ y $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{g'} F \overset{\delta'}{\dashrightarrow}$ son $\mathbb{E}$-triángulos. Entonces, puesto que $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ cumple el axioma (ET4), obtenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"] & D \arrow[d, "d"] \\
A \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "g'"'] & E \arrow[d, "e"] \\
 & F \arrow[r, equal] & F
\end{tikzcd}$$

compuesto de conflaciones, que satisface $\mathfrak{s}(f' \cdot \delta') = [D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} F]$, $\delta'' \cdot d = \delta$ y $f \cdot \delta'' = \delta' \cdot e$. La imagen de este diagrama en $\overline{\mathscr{A}}$ muestra que también se verifica (ET4) en $(\overline{\mathscr{A}}, \overline{\mathbb{E}}, \overline{\mathfrak{s}})$. Dualmente, se demuestra (ET4)*. □

Corolario 4.4.27 [NP19, Corollary 3.32] Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada y $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{A}$ una subcategoría aditiva plena de $\mathscr{A}$ cerrada por isomorfismos en $\mathscr{A}$ tal que $\mathbb{E}(\mathscr{I}, \mathscr{I}) = 0$. Si $\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{A}$ es la subcategoría plena de los objetos $Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ tales que $\mathbb{E}(Z, I) = \mathbb{E}(I, Z) = 0$ para todo $I \in \mathrm{Obj}(\mathscr{I})$, entonces $\mathscr{Z}/\mathscr{I}$ es una categoría extriangulada.

Demostración. Se sigue de la Observación 4.3.4 y la Proposición 4.4.26. □

Pares de cotorsión

Definición 4.4.28 [NP19, Definition 4.1] Sea $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada. Un *par de cotorsión (completo)* $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ en $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ es un par $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ de subcategorías aditivas plenas de $\mathscr{A}$, cerradas por sumandos directos en $\mathscr{A}$, tal que cumple las siguientes condiciones.

(a) $\mathbb{E}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$.

(b) Para cualquier $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, existe una conflación $V^C \to U^C \to C$ tal que $U^C \in \mathcal{U}, V^C \in \mathcal{V}$.

(c) Para cualquier $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, existe una conflación $C \to V_C \to U_C$ tal que $U_C \in \mathcal{U}, V_C \in \mathcal{V}$.

Definición 4.4.29 [NP19, Definition 4.2] Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada y $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathscr{A}$ un par de subcategorías plenas cerradas por isomorfismos. Definimos las subcategorías plenas $\mathrm{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $\mathrm{CoCone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de $\mathscr{A}$, las cuales son cerradas por isomorfismos, como sigue.

(i) $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ pertenece a $\mathrm{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ si, y sólo si, admite una conflación $X \to Y \to C$ con $X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}$.

(ii) $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ pertenece a $\mathrm{CoCone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ si, y sólo si, admite una conflación $C \to X \to Y$ con $X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}$.

Observación 4.4.30 [NP19, Remarks 4.3, 4.4, 4.6 & 4.7]
Sean $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ una categoría extriangulada y $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ subcategorías plenas de $\mathscr{A}$ cerradas por isomorfismos.

(1) Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son subcategorías aditivas de $\mathscr{A}$, entonces del axioma (ET2) se sigue que $\mathrm{Cone}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ y $\mathrm{CoCone}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ también lo son.

(2) Si $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es un par de cotorsión completo en $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ entonces, por la Observación 4.2.9, tenemos que
$$C \in \mathcal{U} \iff \mathbb{E}(C, \mathcal{V}) = 0 \quad \wedge \quad C \in \mathcal{V} \iff \mathbb{E}(\mathcal{U}, C) = 0$$
para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Más aún, por la Proposición 4.4.11, se sigue que las subcategorías $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cerradas por extensiones en $\mathscr{A}$.

(3) $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es un par de cotorsión completo en $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$, si, y sólo si, $\mathscr{A} = \mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = \mathrm{CoCone}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$.

(4) Si $\mathcal{X} \subseteq \mathscr{A}$ es una subcategoría entonces, por el inciso (2) y la Proposición 4.4.21, tenemos que $(\mathcal{X}, \mathscr{A})$ es un par de cotorsión completo si, y sólo si, $(\mathrm{Proj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A}), \mathscr{A})$ es un par de cotorsión si, y sólo si $\mathscr{A}$ tiene suficientes $\mathbb{E}$-proyectivos. Más aún, se verifica una observación análoga para objetos $\mathbb{E}$-inyectivos.

Corolario 4.4.31 [NP19, Corollary 4.5] Sean $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ un par de cotorsión en una categoría extriangulada $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ y $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Si $U \in \mathcal{U}$ y existe una sección $C \to U$ o una retracción $U \to C$, entonces $C \in \mathcal{U}$, y similarmente para $\mathcal{V}$.

Demostración. Supongamos que $U \in \mathcal{U}$. Sean $s \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C, U)$ y $r \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(U, C)$ tales que $rs = 1_C$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo de transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{E}(U,-) \arrow[dr, "\mathbb{E}(s^{\mathrm{op}},-)"] & \\ \mathbb{E}(C,-) \arrow[ur, "\mathbb{E}(r^{\mathrm{op}},-)"] \arrow[rr, "\mathbb{E}(1_C{}^{\mathrm{op}},-)=1_{\mathbb{E}(C,-)}"'] & & \mathbb{E}(C,-). \end{tikzcd}$$

Luego, $\mathbb{E}(U, \mathcal{V}) = 0$ implica que $\mathbb{E}(C, \mathcal{V}) = 0$ y, del inciso (2) de la Observación 4.4.30, se sigue que $C \in \mathcal{U}$. $\square$

Apéndice A

Categorías abelianas

En este Apéndice, presentamos la definición de categoría abeliana dada por Mitchell[Mit65] e incluimos algunos resultados de categorías abelianas relevantes para el desarrollo del texto principal. Antes de esto, definimos algunas nociones generales de teoría de categorías necesarias para definir las categorías abelianas que no fueron incluidas en el Capítulo 0 y mostramos propiedades básicas de algunos tipos de categorías previas a las Puppe-exactas, las cuales definen la estructura exacta de las categorías abelianas.

A.1. Intersecciones, uniones, imágenes y preimágenes

Definición A.1.1 Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\{\mu_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia de subobjetos de A. Una *intersección* de dicha familia es un morfismo $A' \xrightarrow{\mu} A$ en $\mathscr{C}$ tal que satisface las siguientes condiciones.

(I1) Para cada $i \in I$, μ se factoriza a través de μ_i; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, dotted, "\exists\ v_i"'] & & A \\ & A_i \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \forall\ i \in I.$$

(I2) Sea $B \xrightarrow{\theta} A$ en $\mathscr{C}$. Si, para cada $i \in I$, θ se factoriza a través de μ_i, entonces θ se factoriza de forma única a través de μ; diagramáticamente

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, dotted, "\exists\ \eta_i"'] & & A \\ & A_i \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd} \quad \forall\ i \in I \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, dotted, "\exists!\ \eta"'] & & A. \\ & A' \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Observación A.1.2 Sea $A' \xrightarrow{\mu} A$ la intersección de una familia de subobjetos $\{\mu_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$ en una categoría $\mathscr{C}$.

(1) $\mu \in \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$ y $\mu \leq \mu_i$ para cada $i \in I$.

En efecto: Sean $X \overset{\alpha_1}{\underset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} A' \xrightarrow{\mu} A$ tales que $\mu\alpha_1 = \mu\alpha_2$. Veamos que $\alpha_1 = \alpha_2$. Por ser μ una intersección de $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i\in I}$, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, dotted, "v_i"'] & & A \\ & A_i \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \forall\ i \in I.$$

Ahora, consideremos a $X \xrightarrow{\theta:=\mu\alpha_1} A$. Como, para cada $i \in I$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mu_i(v_i\alpha_1) &= (\mu_i v_i)\alpha_1 \\ &= \mu\alpha_1 \\ &= \theta, \end{aligned}$$

por (I2), se sigue que existe un único morfismo $X \xrightarrow{\eta} A'$ que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, dotted, "\exists!\ \eta"'] & & A. \\ & A' \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Dado que $\mu\alpha_1 = \theta = \mu\alpha_2$, por la unicidad de η se sigue que $\alpha_1 = \alpha_2$, lo que implica que μ es un monomorfismo. En particular, para cada $i \in I$, tenemos que $\mu \leq \mu_i$, pues $v_i \in \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)(\mu, \mu_i)$.

(2) En vista de (1), si $A'' \overset{\mu'}{\hookrightarrow} A$ es otra intersección de $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i\in I}$, entonces $\mu' \simeq \mu$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$.

En efecto: Por ser μ' una intersección de $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i\in I}$, de (I1), se sigue que el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[rr, "\mu'"] \arrow[dr, dotted, "v_i'"'] & & A \\ & A \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \forall\ i \in I;$$

luego, por (I2), existe $A'' \xrightarrow{v'} A'$ en $\mathscr{C}$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[rr, "\mu'"] \arrow[dr, dotted, "v'"'] & & A. \\ & A' \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora, por (1), sabemos que $\mu' \in \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$. Luego, del diagrama anterior se sigue que $\mu' \leq \mu$. Análogamente, se obtiene que $\mu \leq \mu'$ y, por el inciso (2) de la Observación 0.4.14, concluimos que $\mu' \simeq \mu$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$.

(3) En vista de (2), y en caso de que exista, denotaremos por

$$\bigcap_{i\in I} A_i \overset{\mu}{\hookrightarrow} A$$

a la elección de una intersección de la familia $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i\in I}$.

(4) Supongamos que $I = \varnothing$. Entonces, $A \xrightarrow{1_A} A$ es la intersección de $\{\mu_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$; esto es,

$$\bigcap_{i\in\varnothing} A_i = A.$$

En efecto: Sea $I = \emptyset$. Dado que $A \xrightarrow{1_A} A$ es un isomorfismo, entonces por el inciso (6) de la Observación 0.2.2, tenemos que 1_A es un monomorfismo, por lo que A es un subobjeto de A, vía 1_A. Dado que la familia de subobjetos $\{A_i \overset{\mu_i}{\hookrightarrow} A\}_{i\in I}$ es vacía, entonces μ se factoriza a través de cada μ_i por vacuidad. Sea $B \xrightarrow{\theta} A$ en $\mathscr{C}$ tal que se factoriza a través de cada μ_i lo que, por vacuidad, significa que θ es un morfismo arbitrario. Como $1_A\theta = \theta$, entonces θ se factoriza a través de 1_A trivialmente. Más aún, si $B \xrightarrow{\sigma} A$ es tal que $1_A\sigma = \theta$, $\sigma = 1_A\sigma = \theta$, por lo que la factorización de θ a través de 1_A es única.

Proposición A.1.3 Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ tales que existe $A\prod B$ en $\mathscr{C}$ y $\alpha, \beta : A \to B$ en $\mathscr{C}$. Por la propiedad universal del producto, podemos considerar $\theta_1, \theta_2 : A \to A\prod B$ en $\mathscr{C}$ tales que hacen conmutar los siguientes diagramas en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} & B & \\ A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\theta_1"] \arrow[dr, "1_A"'] & & A\prod B \arrow[ul, "\pi_2"'] \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B & \\ A \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "\theta_2"] \arrow[dr, "1_A"'] & & A\prod B \arrow[ul, "\pi_2"'] \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{A.1.1}$$

En particular, de $\pi_1\theta_1 = 1_A = \pi_1\theta$ y los incisos (6) y (5) de la Observación 0.2.2, se sigue que θ_1 y θ_2 son monomorfismos. Las siguientes condiciones se verifican.

(a) Si el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\mu_2"'] & A \arrow[d, "\theta_1"] \\ A \arrow[r, "\theta_2"'] & A\prod B \end{tikzcd} \tag{A.1.2}$$

conmuta, entonces $\mu_1 = \mu_2$.

(b) Las siguientes condiciones son equivalentes.

(b1) El diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"'] & A \arrow[d, hook, "\theta_1"] \\ A \arrow[r, hook, "\theta_2"'] & A\prod B \end{tikzcd} \tag{A.1.3}$$

conmuta y $K \xrightarrow{\theta_1\mu} A\prod B$ es la intersección de θ_1 y θ_2.

(b2) $\mu = \mathrm{Equ}(\alpha, \beta)$.

Demostración.

(a) Supongamos que el diagrama (A.1.2) conmuta. De la conmutatividad de los diagramas (A.1.1), se sigue que

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= 1_A\mu_1 \\
&= (\pi_1\theta_1)\mu_1 \\
&= \pi_1(\theta_1\mu_1) \\
&= \pi_1(\theta_2\mu_2) \\
&= (\pi_1\theta_2)\mu_2 \\
&= 1_A\mu_2 \\
&= \mu_2.
\end{aligned}$$

(b) (b1)⇒(b2) Por la Proposición A.1.4, tenemos que el diagrama (A.1.3) es un producto fibrado en $\mathscr{C}$. Veamos que $K \xrightarrow{\mu} A$ es un ecualizador de $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B$. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\beta\mu &= \pi_2\theta_2\mu \\
&= \pi_2\theta_1\mu \\
&= \alpha\mu.
\end{aligned}$$

Ahora, sea $X \xrightarrow{\gamma} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha\gamma = \beta\gamma$. Dado que

$$\begin{aligned}
\pi_1(\theta_1\gamma) &= (\pi_1\theta_1)\gamma \\
&= 1_A\gamma \\
&= (\pi_1\theta_2)\gamma \\
&= \pi_1(\theta_2\gamma),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_2(\theta_1\gamma) &= (\pi_2\theta_1)\gamma \\
&= \alpha\gamma \\
&= \beta\gamma \\
&= (\pi_2\theta_2)\gamma \\
&= \pi_2(\theta_2\gamma),
\end{aligned}$$

por la propiedad universal del producto, se sigue que $\theta_1\gamma = \theta_2\gamma$. Luego, como el diagrama (A.1.3) es un producto fibrado, por la propiedad universal del producto fibrado, existe $X \xrightarrow{\overline{\gamma}} K$ en $\mathscr{C}$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "\overline{\gamma}"] \arrow[drr, bend left, "\gamma"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma"'] & & \\
& K \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"'] & A \arrow[d, "\theta_1"] \\
& A \arrow[r, "\theta_2"'] & A\prod B.
\end{tikzcd} \tag{A.1.4}$$

Más aún, como por el Corolario 0.5.25 tenemos que μ es un monomorfismo, se sigue que $\overline{\gamma}$ es el único morfismo en $\mathscr{C}$ que hace conmutar el diagrama (A.1.4). En particular, $\overline{\gamma}$ es el único morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $\mu\overline{\gamma} = \gamma$.

(b2)⇒(b1) Sea $\mu = \mathrm{Equ}(\alpha, \beta)$. Por la Proposición A.1.4, es suficiente verificar que el cuadrado del diagrama (A.1.3) es un producto fibrado en $\mathscr{C}$. Sean $X \underset{\alpha_2}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} A$ tales que $\theta_1\alpha_1 = \theta_2\alpha_2$. Dado que

$$\begin{aligned}\pi_1(\theta_2\mu) &= (\pi_1\theta_2)\mu \\ &= 1_A\mu \\ &= (\pi_1\theta_1)\mu \\ &= \pi_1(\theta_1\mu),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2(\theta_2\mu) &= (\pi_2\theta_2)\mu \\ &= \beta\mu \\ &= \alpha\mu && (\mu = \mathrm{Equ}(\alpha,\beta)) \\ &= (\pi_2\theta_1)\mu \\ &= \pi_2(\theta_1\mu),\end{aligned}$$

de la propiedad universal del producto, se sigue que $\theta_2\mu = \theta_1\mu$. Observemos que

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1_A\alpha_1 \\ &= \pi_1\theta_1\alpha_1 \\ &= \pi_1\theta_2\alpha_2 \\ &= 1_A\alpha_2 \\ &= \alpha_2,\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\beta\alpha_1 &= \beta\alpha_2 \\ &= \pi_2\theta_2\alpha_2 \\ &= \pi_2\theta_1\alpha_1 \\ &= \alpha\alpha_1.\end{aligned}$$

Luego, de la propiedad universal del ecualizador, se sigue que existe un único morfismo $X \xrightarrow{\lambda} K$ en $\mathscr{C}$ tal que $\mu\lambda = \alpha_1$.

□

Proposición A.1.4 Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A \xleftarrow{\alpha_2} A_2$ en $\mathscr{C}$ y

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$. Entonces, dicho cuadrado es un producto fibrado si, y sólo si, $P \xrightarrow{\mu:=\alpha_2\beta_2} A$ es la intersección de α_1 y α_2.

Demostración. (⇒) De la hipótesis, se sigue que μ se factoriza a través de α_1 y α_2, por lo que se verifica (I1). Sea $\{\eta_i : P' \to A_i\}_{i=1,2}$ una familia de morfismos en $\mathscr{C}$ tal que $\theta = \alpha_1\eta_1 = \alpha_2\eta_2$. Entonces, por la propiedad universal del producto fibrado, existe $P' \xrightarrow{\eta} P$ en $\mathscr{C}$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dotted, "\eta"'] \arrow[drr, bend left, "\eta_2"] \arrow[ddr, bend right, "\eta_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] \arrow[dr, "\mu"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A.
\end{tikzcd}$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
\mu\eta &= \alpha_2\beta_2\eta \\
&= \alpha_2\eta_2 \\
&= \theta.
\end{aligned}$$

Más aún, como α_1 es un monomorfismo, por el Corolario 0.5.25 tenemos que β_2 es un monomorfismo, de donde sigue que η es el único morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $\mu\eta = \theta$.

($\Leftarrow$) Sean $P' \xrightarrow{\eta_i} A_i$ en $\mathscr{C}$, con $i \in \{1, 2\}$, tales que $\alpha_2\eta_2 = \alpha_1\eta_1$. Consideremos a $\xrightarrow{\theta := \alpha_2\eta_2} A$. Como $\alpha_2\eta_2 = \alpha_1\eta_1$, por la propiedad universal de la intersección, tenemos que existe un morfismo $P' \xrightarrow{\eta} P$ en $\mathscr{C}$ tal que $\theta = \mu\eta$. Dado que

$$\begin{aligned}
\alpha_2(\beta_2\eta) &= (\alpha_2\beta_2)\eta \\
&= \mu\eta \\
&= \theta \\
&= \alpha_2\eta_2
\end{aligned}$$

y α_2 es un monomorfismo, se sigue que $\beta_2\eta = \eta_2$. Análogamente, usando que α_1 es un monomorfismo, se obtiene que $\beta_1\eta = \eta_1$. Finalmente, como por el inciso (1) de la Observación A.1.2 sabemos que μ es un monomorfismo, se sigue que η es el único morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $\theta = \mu\eta$. $\square$

Definición A.1.5 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. $\mathscr{C}$ es una categoría *con intersecciones* si, para cualquier $A \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ y cualquier familia $\{\mu_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i \in I}$ de subobjetos de A, existe una intersección $\mu : \bigcap_{i \in I} A_i \to A$. Si las intersecciones existen sólo para conjuntos de índices finitos, decimos que $\mathscr{C}$ *tiene intersecciones finitas*.

Teorema A.1.6 Sea $\mathscr{C}$ una categoría con coproductos finitos. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\mathscr{C}$ tiene igualadores.

(b) $\mathscr{C}$ tiene productos fibrados.

(c) $\mathscr{C}$ tiene intersecciones finitas.

Demostración. Las implicaciones (a) $\Longrightarrow$ (b), (b) $\Longrightarrow$ (c) y (c) $\Longrightarrow$ (a) se siguen de las Proposiciones 0.5.36, A.1.4 y A.1.3, respectivamente. $\square$

A continuación, presentamos la noción dual de la intersección, dado que será usada más adelante.

Definición A.1.7 Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $A \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ y $\{\beta_i : A \twoheadrightarrow A'_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos cociente de A. Una *cointersección* de dicha familia es un morfismo $A \xrightarrow{\theta} A'$ en $\mathscr{C}$ tal que satisface las siguientes condiciones.

(CI1) Para cada $i \in I$, θ se factoriza a través de cada β_i; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, two heads, "\beta_i"'] & & A' \\ & A'_i \arrow[ur, dotted, "v_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \forall\ i \in I.$$

(CI2) Sea $A \xrightarrow{\mu} B$ en $\mathscr{C}$. Si, para cada $i \in I$, μ se factoriza a través de β_i, entonces μ se factoriza a través de θ; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, two heads, "\beta_i"'] & & B \\ & A'_i \arrow[ur, dotted, "\exists\ \eta_i"'] & \end{tikzcd} \quad \forall\ i \in I \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\theta"'] & & B. \\ & A' \arrow[ur, dotted, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

En caso de que exista una cointersección para $\{\beta_i : A \twoheadrightarrow A'_i\}_{i\in I}$, la denotaremos por $A \xrightarrow{\theta} \bigcap^{\text{op}}_{i\in I} A'_i$.

Definición A.1.8 Consideremos el siguiente diagrama en una categoría $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[d, hook, "u"'] & B' \arrow[d, hook, "h"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Decimos que u es *llevado a* h, *vía* f, si existe $A' \xrightarrow{f'} B'$ en $\mathscr{C}$ tal que $hf' = fu$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, dotted, "f'"] \arrow[d, hook, "u"'] & B' \arrow[d, hook, "h"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Definición A.1.9 Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\{u_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia de subobjetos de A. Una *unión* de dicha familia es un subobjeto $A' \overset{u}{\hookrightarrow} A$ de A tal que las siguientes condiciones se satisfacen.

(U1) $u_1 \leq u$ para todo $i \in I$.

(U2) Si $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$ es tal que cada u_i es llevado, vía f, a algún subobjeto $B' \overset{\mu}{\hookrightarrow} B$, entonces u es llevado a μ, vía f; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[drrr, dotted, bend left, "\exists\ f''"] \arrow[ddrr, bend right, "u"'] & & & \\ & & A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, hook, "u_i"'] & B' \arrow[d, hook, "\mu"] \\ & & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \text{para todo } i \in I.$$

Observación A.1.10 Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $A' \xrightarrow{u} A$ una unión de subobjetos $\{u_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$ de A.

(1) Sean $B' \overset{\mu}{\hookrightarrow} B$ y $\{f'_i : A_i \to B'\}_{i\in I}$ tales que $\mu f'_i = f u_i$ para todo $i \in I$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[ddr, bend right, "u"'] \arrow[rrd, dotted, bend left, "f''"] & & \\
& A_i \arrow[ul, dotted, "v_i"'] \arrow[r, "f'_i"] \arrow[d, "u_i"'] & B \arrow[d, "\mu"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

En efecto: por (U1), para cada $i \in I$, existe $A_i \xrightarrow{v_i} A'$ en $\mathscr{C}$ tal que $uv_i = u_i$. Luego, por (U2), existe $A' \xrightarrow{f''} B'$ en $\mathscr{C}$ tal que $\mu f'' = fu$. Como para cada $i \in I$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mu f'' v_i &= f u v_i \\ &= f u_i \\ &= \mu f'_i \end{aligned}$$

y μ es un monomorfismo, se sigue que $f'' v_i = f'_i$ para cada $i \in I$.

(2) Si $X \overset{\nu}{\hookrightarrow} A$ es tal que $u_i \le \nu$ para cada $i \in I$, entonces $u \le \nu$.

En efecto: haciendo $f := 1_A$ y $\mu := \nu$ en (1), se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[ddr, bend right, "u"'] \arrow[rrd, dotted, bend left] & & \\
& A_i \arrow[r] \arrow[d, hook, "u_i"'] & X \arrow[d, hook, "\nu"] \\
& A \arrow[r, equal] & A,
\end{tikzcd}$$

por lo que $u \le \nu$.

(3) Si $A'' \overset{u'}{\hookrightarrow} A$ es otra unión de $\{u_i : A_i \to A\}_{i\in I}$, entonces $u \simeq u'$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$.

En efecto: aplicando (2) a u y u', se sigue que $u \le u'$ y $u' \le u$. Luego, del inciso (2) de la Observación 0.4.14, tenemos que $u \simeq u'$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$.

(4) En vista de (3), y en caso de que exista, denotaremos por

$$\bigcup_{i\in I} A_i \overset{u}{\hookrightarrow} A$$

a la elección de una unión de $\{u_i : A_i \to A\}_{i\in I}$.

Definición A.1.11 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. $\mathscr{C}$ es una categoría *con uniones* si, para cualquier $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y cualquier familia $\{u_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$, existe la unión $\bigcup_{i\in I} A_i \overset{u}{\hookrightarrow} A$. Si las uniones existen sólo para conjuntos de índices finitos, diremos que $\mathscr{C}$ *tiene uniones finitas*.

Definición A.1.12 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$. Una *imagen* de f es un subobjeto $I \overset{\mu}{\hookrightarrow} B$ de B tal que satisface las siguientes condiciones.

(Im1) Existe $A \xrightarrow{f'} I$ en $\mathscr{C}$ tal que $f = \mu f'$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "f'"'] & & B. \\ & I \arrow[ur, hook, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

(Im2) Si $I' \overset{\mu'}{\hookrightarrow} B$ es un subobjeto de B tal que existe $A \xrightarrow{f''} I'$ con $f = \mu' f''$, entonces $\mu \leq \mu'$; diagramáticamente

$$\begin{tikzcd} & I' \arrow[dr, hook, "\mu'"] & & & I' \arrow[dr, hook, "\mu'"] & \\ A \arrow[ur, "f''"] \arrow[dr, "f'"'] & & B & \Longrightarrow & & B. \\ & I \arrow[ur, hook, "\mu"'] & & & I \arrow[uu, dotted] \arrow[ur, hook, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Observación A.1.13 Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$ y $I \overset{\mu}{\hookrightarrow} B$ una imagen de f en $\mathscr{C}$.

(1) La composición $A \xrightarrow{f'} I \overset{\mu}{\hookrightarrow} B$ en (Im1) se dice que es una *factorización de f a través de su imagen.*

(2) Sea $A \xrightarrow{f''} I' \overset{\mu'}{\hookrightarrow} B$ una factorización de f a través de $\mu' \in \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B)$. Entonces, existe un único morfismo $I \xrightarrow{u} I'$ en $\mathscr{C}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & I' \arrow[dr, hook, "\mu'"] & \\ A \arrow[ur, "f''"] \arrow[dr, "f'"'] & & B. \\ & I \arrow[uu, dotted, "\exists!\ u"'] \arrow[ur, hook, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto, por (Im2), existe $I \xrightarrow{u} I'$ en $\mathscr{C}$ tal que $\mu = \mu' u$. Luego, dado que

$$\begin{aligned} \mu' u f' &= \mu f' \\ &= f \\ &= \mu' f'' \end{aligned}$$

y μ' es un monomorfismo, tenemos que $uf' = f''$.

(3) Si $J \overset{\nu}{\hookrightarrow} B$ es otra imagen de f, entonces $\mu \simeq \nu$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B)$.

En efecto, por (IM2), se tiene que $\mu \leq \nu$ y $\nu \leq \mu$. Luego, del inciso (3) de la Observación 0.4.14, se sigue que $\mu \simeq \nu$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B)$.

(4) En vista del inciso (3), y en caso de que exista, denotaremos por $\mathrm{Im}(f) \overset{\mu}{\hookrightarrow} B$ a la elección de una imagen de f.

Proposición A.1.14 Sea $A \xrightarrow{f} B$ un monomorfismo en una categoría $\mathscr{C}$. Entonces, $A \xrightarrow{f} B$ es una imagen de f, es decir, $\mathrm{Im}(f) \simeq f$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B)$.

Demostración. Observemos que $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ es un subobjeto de B y que $1_A \in \operatorname{Mor}(\mathscr{C})$ tal que $f = f1_A$. Supongamos que existen $I' \overset{\mu'}{\hookrightarrow} B$ y $A \xrightarrow{f''} I'$ en $\mathscr{C}$ tales que $f = \mu' f''$. Entonces, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
& I' \arrow[dr, hook, "\mu'"] & \\
A \arrow[ur, "f''"] \arrow[dr, "1_A"'] & & B. \\
& A \arrow[uu, "f''"] \arrow[ur, hook, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Por ende, $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ es una imagen de f y, del inciso (3) de la Observación A.1.13, se sigue que $\operatorname{Im}(f) \simeq f$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B)$. □

Definición A.1.15 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. $\mathscr{C}$ es *balanceada* si todo morfismo que es un monomorfismo y un epimorfismo es un isomorfismo.

Proposición A.1.16 Sean $\mathscr{C}$ una categoría balanceada y $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$ tal que existe $\operatorname{Im}(f)$ en $\mathscr{C}$. Si $A \overset{f'}{\twoheadrightarrow} I \overset{\mu}{\hookrightarrow} B$ es tal que $\mu f' = f$, entonces $I \overset{\mu}{\hookrightarrow} B$ es una imagen de f.

Demostración. Sean $A \overset{f'}{\twoheadrightarrow} I \overset{\mu}{\hookrightarrow} B$ tal que $\mu f' = f$ y $A \xrightarrow{f''} \operatorname{Im}(f) \overset{\nu}{\hookrightarrow} B$ una factorización de f a través de su imagen. Entonces, por el inciso (2) de la Proposición A.1.13, tenemos que existe $\operatorname{Im}(f) \xrightarrow{u} I$ en $\mathscr{C}$ tal que hacer conmutar el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
& I \arrow[dr, hook, "\mu"] & \\
A \arrow[ur, two heads, "f'"] \arrow[dr, "f''"'] & & B. \\
& \operatorname{Im}(f) \arrow[uu, dotted, "u"'] \arrow[ur, hook, "\nu"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego, del inciso (5) de la Observación 0.2.2, se sigue que u es un monomorfismo y un epimorfismo. Como $\mathscr{C}$ es balanceada, u es un isomorfismo, de donde concluimos que $\mu \simeq \nu$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B)$. □

Definición A.1.17 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. $\mathscr{C}$ es una *categoría con imágenes* si todo morfismo $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$ tiene una imagen $I \overset{\mu}{\hookrightarrow} B$ en $\mathscr{C}$. Si, además, el morfismo $A \xrightarrow{f'} I$ tal que $f = \mu f'$ es un epimorfismo, se dice que $\mathscr{C}$ *tiene imágenes epimórficas*.

Definición A.1.18 Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$. Una *coimagen* de f es un objeto cociente $A \overset{p}{\twoheadrightarrow} J$ de A tal que satisface las siguientes condiciones.

(CoIm1) Existe $J \xrightarrow{f'} B$ en $\mathscr{C}$ tal que $f = f'p$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "p"'] & & B. \\
& J \arrow[ur, dotted, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

(CoIm2) Si $A \overset{p'}{\twoheadrightarrow} J'$ es un objeto cociente de A tal que existe $J' \xrightarrow{f''} B$ con $f = f''p'$, entonces $p \leq p'$; diagramáticamente

$$
\begin{tikzcd}
 & J \arrow[dr, "f'"] & & & & J \\
A \arrow[ur, two heads, "p"] \arrow[dr, two heads, "p'"'] & & B & \Longrightarrow & A \arrow[ur, two heads, "p"] \arrow[dr, two heads, "p'"'] & \\
 & J' \arrow[ur, "f''"'] & & & & J'. \arrow[uu, dotted]
\end{tikzcd}
$$

Definición A.1.19 Sea $\mathscr{C}$ una categoría. $\mathscr{C}$ es una *categoría con coimágenes* si todo morfismo $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$ tiene una coimagen $A \overset{p}{\twoheadrightarrow} J$ en $\mathscr{C}$.

Definición A.1.20 Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo en una categoría $\mathscr{C}$. La *imagen inversa por* f de $B' \overset{\alpha_1}{\hookrightarrow} B$ es el producto fibrado en $\mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, hook, "\alpha_1"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B,
\end{tikzcd}
$$

donde el objeto P suele denotarse por $f^{-1}(B')$.

A.2. Categorías con núcleos y conúcleos

Definición A.2.1 Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero. Entonces, $\mathscr{C}$ es una *categoría con núcleos* si cada morfismo en $\mathscr{C}$ tiene un núcleo.

Definición A.2.2 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con núcleos, $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\beta_1 \xrightarrow{\delta} \beta_2 \in \mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\beta_1) \arrow[dr, hook, "k_{\beta_1}"] & & B_1 \arrow[dd, "\delta"] \\
 & A \arrow[ur, two heads, "\beta_1"] \arrow[dr, two heads, "\beta_2"'] & \\
\mathrm{Ker}(\beta_2) \arrow[ur, hook, "k_{\beta_2}"'] & & B_2.
\end{tikzcd}
$$

Como $\beta_2 k_{\beta_1} = (\delta\beta_1)k_{\beta_1} = 0$, por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo de $\mathrm{Ker}(\beta_1)$ a $\mathrm{Ker}(\beta_2)$ en $\mathscr{C}$, que denotamos por $\mathrm{Ker}(\delta)$, tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$ conmuta

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\beta_1) \arrow[dr, hook, "k_{\beta_1}"] \arrow[dd, dotted, "\exists!\ \mathrm{Ker}(\delta)"'] & & B_1 \arrow[dd, "\delta"] \\
 & A \arrow[ur, two heads, "\beta_1"] \arrow[dr, two heads, "\beta_2"'] & \\
\mathrm{Ker}(\beta_2) \arrow[ur, hook, "k_{\beta_2}"'] & & B_2.
\end{tikzcd}
$$

De esta manera, definimos la correspondencia

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ker} : \mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -) &\to \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A) \\
\left(\beta_1 \xrightarrow{\delta} \beta_2\right) &\mapsto \left(\mathrm{Ker}(\beta_1) \xrightarrow{\mathrm{Ker}(\delta)} \mathrm{Ker}(\beta_2)\right).
\end{aligned}
$$

Observación A.2.3 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con núcleos y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

(1) $\mathrm{Ker} : \mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -) \to \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$ es un funtor.

(2) La correspondencia $\mathrm{Ker} : \mathrm{Obj}(\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)) \to \mathrm{Obj}(\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A))$ invierte el preorden. Es decir, si $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)$ son tales que $\beta_1 \leq \beta_2$, entonces $\mathrm{Ker}(\beta_2) \leq \mathrm{Ker}(\beta_1)$.

Definición A.2.4 Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero. Entonces, $\mathscr{C}$ es una *categoría con conúcleos* si cada morfismo en $\mathscr{C}$ tiene un conúcleo.

Definición A.2.5 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con conúcleos, $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\alpha_1 \xrightarrow{\gamma} \alpha_2 \in \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[dr, hook, "\alpha_1"] & & \mathrm{CoKer}(\alpha_1) \\
& A \arrow[ur, two heads, "c_{\alpha_1}"] \arrow[dr, two heads, "c_{\alpha_2}"'] & \\
A_2 \arrow[ur, hook, "\alpha_2"'] & & \mathrm{CoKer}(\alpha_2).
\end{tikzcd}$$

Como $c_{\alpha_2}\alpha_1 = c_{\alpha_2}(\alpha_2\gamma) = 0$, por la propiedad universal del conúcleo, existe un único morfismo de $\mathrm{CoKer}(\alpha_1)$ a $\mathrm{CoKer}(\alpha_2)$ en $\mathscr{C}$, que denotamos por $\mathrm{CoKer}(\gamma)$, tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[dr, hook, "\alpha_1"] & & \mathrm{CoKer}(\alpha_1) \arrow[dd, dotted, "\exists!\ \mathrm{CoKer}(\gamma)"] \\
& A \arrow[ur, two heads, "c_{\alpha_1}"] \arrow[dr, two heads, "c_{\alpha_2}"'] & \\
A_2 \arrow[ur, hook, "\alpha_2"'] & & \mathrm{CoKer}(\alpha_2).
\end{tikzcd}$$

De esta manera, definimos la correspondencia

$$\begin{aligned}
\mathrm{CoKer} : \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A) &\to \mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -) \\
\left(\alpha_1 \xrightarrow{\gamma} \alpha_2\right) &\mapsto \left(\mathrm{CoKer}(\alpha_1) \xrightarrow{\mathrm{CoKer}(\gamma)} \mathrm{CoKer}(\alpha_2)\right).
\end{aligned}$$

Observación A.2.6 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con conúcleos y $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

(1) $\mathrm{CoKer} : \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A) \to \mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)$ es un funtor.

(2) La correspondencia $\mathrm{CoKer} : \mathrm{Obj}(\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)) \to \mathrm{Obj}(\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -))$ invierte el preorden. Es decir, si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$ son tales que $\alpha_1 \leq \alpha_2$, entonces $\mathrm{CoKer}(\alpha_2) \leq \mathrm{CoKer}(\alpha_1)$.

A.3. Categorías normales y conormales

Definición A.3.1 Una categoría $\mathscr{C}$ es *normal* si tiene objeto cero y cada monomorfismo en $\mathscr{C}$ es núcleo de algún morfismo en $\mathscr{C}$. Dualmente, una categoría $\mathscr{C}$ es *conormal* si $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ es normal.

Proposición A.3.2 Sea $\mathscr{C}$ una categoría normal con núcleos. Entonces, $\mathscr{C}$ tiene imágenes inversas e intersecciones finitas.

Demostración. Sean $A \xrightarrow{f} B$ y $B' \xhookrightarrow{\mu} B$ en $\mathscr{C}$. Dado que $\mathscr{C}$ es normal, existe $B \xrightarrow{\alpha} C$ tal que $\mu = \operatorname{Ker}(\alpha)$ y, como $\mathscr{C}$ tiene núcleos, existe $\operatorname{Ker}(\alpha f)$. Luego, de

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha f)k_{\alpha f} \\ &= \alpha(f k_{\alpha f}) \end{aligned}$$

y la propiedad universal del núcleo, se sigue que existe $\operatorname{Ker}(\alpha f) \xrightarrow{f'} B'$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}(\alpha f) \arrow[r, "k_{\alpha f}"] \arrow[d, dotted, "f'"'] & A \arrow[r, "\alpha f"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, equal] \\ B' \arrow[r, hook, "\mu"'] & B \arrow[r, "\alpha"'] & C. \end{tikzcd}$$

Luego, por la Proposición 1.1.26, el cuadrado izquierdo del diagrama anterior es un producto fibrado, por lo que $f^{-1}(B') = \operatorname{Ker}(\alpha f)$.

Sea $\{A_i \xhookrightarrow{\mu_i} A\}_{i \in I}$ una familia finita de subobjetos de A. Por el inciso (4) de la Observación A.1.2 sabemos que, para $I = \varnothing$, existe $\bigcap_{i \in I} A_i$. Supongamos que $|I| = n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Por inducción, es suficiente mostrar la existencia de $A_1 \cap A_2$ para $\{A_1 \xhookrightarrow{\mu_1} A, A_2 \xhookrightarrow{\mu_2} A\}$. Ahora, dado que existen imágenes inversas, se tiene el producto fibrado en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} \mu_2^{-1}(A_1) \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d] & A_2 \arrow[d, hook, "\alpha_2"] \\ A_2 \arrow[r, hook, "\alpha_1"'] & A. \end{tikzcd}$$

Luego, por la Proposición A.1.4, se tiene que $A_1 \cap A_2 \simeq \mu_2^{-1}(A_1)$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$. □

Proposición A.3.3 Sean $\mathscr{C}$ una categoría con núcleos y conúcleos, y $A \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$. Entonces, para los funtores

$$\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A) \xrightarrow{\operatorname{CoKer}} \operatorname{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -) \xrightarrow{\operatorname{Ker}} \operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A),$$

se satisfacen las siguientes condiciones.

(a) $\operatorname{KerCoKer} \simeq 1_{\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-,A)}$ si $\mathscr{C}$ es normal.

(b) $\operatorname{CoKerKer} \simeq 1_{\operatorname{Epi}_{\mathscr{C}}(A,-)}$ si $\mathscr{C}$ es conormal.

Demostración.

(a) Sea $\mathscr{C}$ normal. Entonces, para cada $A' \xhookrightarrow{\alpha} A$ en $\mathscr{C}$, existe $A \xrightarrow{f_\alpha} B$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha = \operatorname{Ker}(f_\alpha)$. Luego, por la Proposición 1.1.32, se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, hook, "\alpha"] \arrow[dr, dotted, "\sim", "\exists!\ \overline{\alpha}"'] & & A \arrow[r, "c_\alpha"] & \operatorname{CoKer}(\alpha) \\ & \operatorname{Ker}(\operatorname{CoKer}(\alpha)), \arrow[ur, hook, "\alpha' := k_{c_\alpha}"'] & & \end{tikzcd} \tag{A.3.1}$$

donde $\overline{\alpha}$ es un isomorfismo en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$. Veamos que

$$\eta : 1_{\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-,A)} \to \operatorname{KerCoKer},$$

con $\eta_a := \overline{\alpha}$, es un isomorfismo natural. Por el inciso (4) de la Observación 0.6.2, basta ver que η es una transformación natural. En efecto, sea $\alpha_1 \xrightarrow{h} \alpha_2$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$. Entonces, por el diagrama (A.3.1), tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}\circ\mathrm{CoKer}(\alpha_1) \arrow[d, hook, "\alpha_1'"] \arrow[dddd, bend left=90, "\overline{h}:=\mathrm{Ker}\circ\mathrm{CoKer}(h)"] & \\
A_1' \arrow[ur, "\overline{\alpha}_1", "\sim"'] \arrow[dr, hook, "\alpha_1"'] \arrow[dd, "h"'] & & \mathrm{CoKer}(\alpha_1) \arrow[dd, "\mathrm{CoKer}(h)"] \\
 & A \arrow[ur, two heads, "c_{\alpha_1}"'] \arrow[dr, two heads, "c_{\alpha_2}"] & \\
A_2' \arrow[ur, hook, "\alpha_2"'] \arrow[dr, "\overline{\alpha}_2", "\sim"'] & & \mathrm{CoKer}(\alpha_2). \\
 & \mathrm{Ker}\circ\mathrm{CoKer}(\alpha_2) \arrow[u, hook, "\alpha_2'"'] &
\end{tikzcd}$$

De la Definición A.2.2, tenemos que $\overline{h}$ es el único morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_2'\overline{h} = \alpha_1'$. Dado que

$$\begin{aligned}
\alpha_2'(\overline{\alpha}_2 h(\overline{\alpha}_1^{-1})) &= (\alpha_2'\overline{\alpha}_2)(h(\overline{\alpha}_1)^{-1}) \\
&= \alpha_2 h(\overline{\alpha}_1)^{-1} \\
&= \alpha_1(\overline{\alpha}_1)^{-1} \\
&= \alpha_1',
\end{aligned}$$

por unicidad, se sigue que

$$\begin{aligned}
\overline{h} &= \overline{\alpha}_2 h(\overline{\alpha}_1)^{-1} \\
&= \eta_{\alpha_2} h \eta_{\alpha_1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por ende, para todo $\alpha_1 \xrightarrow{h} \alpha_2$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\alpha_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[d, "\eta_{\alpha_1}"'] & & \alpha_2 \arrow[d, "\eta_{\alpha_2}"] \\
\mathrm{Ker}\circ\mathrm{CoKer}(\alpha_1) \arrow[rr, "\mathrm{Ker}\circ\mathrm{CoKer}(h)"'] & & \mathrm{Ker}\circ\mathrm{CoKer}(\alpha_2).
\end{tikzcd}$$

(b) Sea $\mathscr{C}$ conormal. Entonces, para cada $A \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} A'$ en $\mathscr{C}$, existe $B \xrightarrow{f_\alpha} A$ tal que $\alpha = \mathrm{CoKer}(f_\alpha)$. Luego, por la Proposición dual a 1.1.32, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r] & A \arrow[rr, two heads, "\alpha"] \arrow[dr, hook, "\alpha' : c_{k_\alpha}"'] & & A', \\
 & & \mathrm{CoKer}\circ\mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[ur, dotted, "\sim", "\exists!\ \overline{\alpha}"'] &
\end{tikzcd} \tag{A.3.2}$$

donde $\overline{\alpha}$ es un isomorfismo en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A,-)$. Veamos que

$$\eta : 1_{\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A,-)} \to \mathrm{CoKer} \circ \mathrm{Ker},$$

con $\eta_\alpha := \overline{\alpha}$, es un isomorfismo natural, para lo cual basta ver que es una transformación natural. En efecto, sea $\alpha_1 \xrightarrow{h} \alpha_2$ en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A,-)$. Entonces, por el diagrama (A.3.2), tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{CoKer} \circ \mathrm{Ker}(\alpha_1) \arrow[dd, bend left=90, "\overline{h}:=\mathrm{CoKer}\circ\mathrm{Ker}(h)"] & \\
A_1' \arrow[ur, "\overline{\alpha}_1", "\sim"'] \arrow[dd, "h"'] & & \mathrm{Ker}(\alpha_1) \arrow[dl, hook, "k_{\alpha_1}"] \arrow[dd, "\mathrm{Ker}(h)"] \\
 & A \arrow[ul, two heads, "\alpha_1"'] \arrow[uu, two heads, "\alpha_1'"'] \arrow[dl, two heads, "\alpha_2"] \arrow[dd, two heads, "\alpha_2'"] & \\
A_2' \arrow[dr, "\overline{\alpha}_2", "\sim"'] & & \mathrm{Ker}(\alpha_2). \arrow[ul, hook', "k_{\alpha_2}"'] \\
 & \mathrm{CoKer} \circ \mathrm{Ker}(\alpha_2) &
\end{tikzcd}$$

De la Definición A.2.5, tenemos que $\overline{h}$ es el único morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_2' = \overline{h}\alpha_1'$. Dado que

$$\begin{aligned}
(\overline{\alpha}_2 h(\overline{\alpha}_1)^{-1})\alpha_1' &= \overline{\alpha}_2 h((\overline{\alpha}_1^{-1})\alpha_1') \\
&= \overline{\alpha}_2 h\alpha_1 \\
&= \overline{\alpha}_2 \alpha_2 \\
&= \alpha_2',
\end{aligned}$$

por unicidad, se sigue que

$$\begin{aligned}
\overline{h} &= \overline{\alpha}_2 h(\overline{\alpha}_1)^{-1} \\
&= \eta_{\alpha_2} h \eta_{\alpha_1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por ende, para todo $h : \alpha_1 \to \alpha_2$ en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A,-)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\alpha_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\eta_{\alpha_1}"'] & \alpha_2 \arrow[d, "\eta_{\alpha_2}"] \\
\mathrm{CoKer} \circ \mathrm{Ker}(\alpha_1) \arrow[r, "\mathrm{CoKer}\circ\mathrm{Ker}(h)"'] & \mathrm{CoKer} \circ \mathrm{Ker}(\alpha_2).
\end{tikzcd}$$

$\square$

Proposición A.3.4 Para una categoría $\mathscr{C}$, con núcleos y conúcleos, y $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Existe un único morfismo $A \xrightarrow{\overline{f}} \mathrm{Ker}(\mathrm{CoKer}(f))$ tal que $k_{c_f}\overline{f} = f$; diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "\overline{f}"'] & & B \arrow[r, two heads, "c_f"] & \mathrm{CoKer}(f). \\
 & \mathrm{Ker}(c_f) \arrow[ur, hook, "k_{c_f}"'] & &
\end{tikzcd}$$

(b) Si $\mathscr{C}$ es normal, entonces $\operatorname{Im}(f) \simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{CoKer}(f))$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B)$.

Demostración.

(a) Dado que $c_f f = 0$, por la propiedad universal del núcleo, se tiene que existe un único morfismo $A \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{Ker}(c_f)$ en $\mathscr{C}$ tal que $k_{c_f}\overline{f} = f$.

(b) Sea $\mathscr{C}$ normal. Veamos que $\operatorname{Ker}(c_f) \xhookrightarrow{k_{c_f}} B$ es el menor subobjeto de B a través del cual se factoriza f. En efecto, por (a), sabemos que f se factoriza a través de k_{c_f}. Sean $A \xrightarrow{\beta} B' \xhookrightarrow{\gamma} B$ en $\mathscr{C}$ tales que $\gamma\beta = f$. Luego, tenemos el diagrama en $\mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
 & B' \arrow[dr, hook, "\gamma"] & & \operatorname{CoKer}(f) \\
A \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \operatorname{Ker}(c_f) \arrow[r, hook, "k_{c_f}"] & B \arrow[ur, two heads, "c_f"] \arrow[dr, two heads, "c_\gamma"'] & \\
 & & & \operatorname{CoKer}(\gamma).
\end{tikzcd}
$$

Luego, por el inciso (a) de la Proposición A.3.3, tenemos que $\operatorname{Ker}(c_f) \simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{CoKer}(\gamma)) \simeq \gamma$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B)$, por lo que γ es un núcleo de c_γ. Ahora, como $c_\gamma f = c_\gamma \gamma\beta = 0$, por la propiedad del conúcleo tenemos que existe $\operatorname{CoKer}(f) \xrightarrow{\eta} \operatorname{CoKer}(\gamma)$ en $\mathscr{C}$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{CoKer}(f) \arrow[dd, dotted, "\eta"] \\
B \arrow[ur, two heads, "c_f"] \arrow[dr, two heads, "c_\gamma"'] & \\
 & \operatorname{CoKer}(\gamma).
\end{tikzcd}
$$

Por otro lado, como $c_\gamma k_{c_f} = \eta c_f k_{c_f} = 0$ y γ es un núcleo de c_f, por la propiedad universal del núcleo tenemos que existe $\operatorname{Ker}(c_f) \xrightarrow{t} B'$ en $\mathscr{C}$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$ conmuta

$$
\begin{tikzcd}
B' \arrow[dr, hook, "\gamma"] & \\
\operatorname{Ker}(c_f) \arrow[u, dotted, "t"] \arrow[r, hook, "k_{c_f}"'] & B.
\end{tikzcd}
$$

Por ende, $k_{c_f} \leq \gamma$ y, así, $\operatorname{Ker}(c_f) \xhookrightarrow{k_{c_f}} B$ es una imagen de $A \xrightarrow{f} B$.

$\square$

Proposición A.3.5 Sea $\mathscr{C}$ una categoría normal, con núcleos y conúcleos. Entonces, $\mathscr{C}$ es balanceada.

Demostración. Sea $A \xrightarrow{f} B$ un monomorfismo y epimorfismo en $\mathscr{C}$. Por la Observación 1.1.33, tenemos que

$$\operatorname{CoKer}\Big(A \xrightarrow{f} B\Big) = (B \to 0) \quad \text{y} \quad \operatorname{Ker}(B \to 0) = \Big(B \xrightarrow{1_B} B\Big),$$

de donde se sigue que $\operatorname{Ker}(\operatorname{CoKer}(f)) = \Big(\xrightarrow{1_B} B\Big)$. Luego, f es un monomorfismo, por el inciso (a) de la Proposición A.3.3, tenemos que $\operatorname{Ker}(\operatorname{CoKer}(f)) \simeq f$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B)$. Por ende, $\operatorname{Ker}(\operatorname{CoKer}(f)) \simeq \Big(B \xrightarrow{1_B} B\Big)$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B)$ y, por el inciso (2) de la Observación 0.4.14, existe un isomorfismo $t : B \xrightarrow{\sim} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $ft = 1_B$, por lo que $f = 1_B t^{-1} = t^{-1}$. Por lo tanto, f es un isomorfismo. $\square$

A.4. Categorías Puppe-exactas

Definición A.4.1 Una categoría $\mathscr{C}$ es *Puppe-exacta* si es normal, conormal, tiene núcleos y conúcleos, y todo $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$ admite una factorización canónica a través de su imagen como sigue

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & B. \\ & I \arrow[ur, hook, "v"'] & \end{tikzcd}$$

Definición A.4.2 Sea $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta. Una *sucesión de morfismos en* $\mathscr{C}$ es un diagrama ξ en $\mathscr{C}$ de la forma

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \ldots.$$

Una sucesión ξ en $\mathscr{C}$ es *exacta en* M_i si

$$\operatorname{Im}(f_{i-1}) \simeq \operatorname{Ker}(f_i) \text{ en } \operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, M_i).$$

Una sucesión ξ en $\mathscr{C}$ es *exacta* si es exacta en M_i para toda i. Una *sucesión exacta corta* en $\mathscr{C}$ es una sucesión exacta de la forma

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0.$$

Proposición A.4.3 Sea $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) $\mathscr{C}$ es balanceada y tiene imágenes. Más aún, $\operatorname{Im}(f) \simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{CoKer}(f))$ para todo $f \in \operatorname{Mor}(\mathscr{C})$.

(b) Para $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$, consideremos el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}(q) \arrow[r, hook, "k_q"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & B \arrow[r, two heads, "c_v"] & \operatorname{CoKer}(v). \\ & & I \arrow[ur, hook, "v"'] & & \end{tikzcd}$$

Entonces, $\operatorname{Ker}(f) \simeq k_q$, $\operatorname{CoKer}(f) \simeq c_v$ y $\operatorname{Im}(f) \simeq v$.

Demostración.

(a) Por la Proposición A.3.5, se sigue que $\mathscr{C}$ es balanceada. Más aún, por el inciso (b) de la Proposición A.3.4, tenemos que $\mathscr{C}$ tiene imágenes y $\operatorname{Im}(f) \simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{CoKer}(f))$ para todo $f \in \operatorname{Mor}(\mathscr{C})$.

(b) Por el inciso (a) y la Proposición A.1.16, se sigue que $\mathrm{Im}(f) \simeq v$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B)$. Como v es un monomorfismo, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \mathrm{Ker}(vq) && \\ &\simeq \mathrm{Ker}(q) && \text{(Lema 1.1.24(b))} \\ &= k_q. && \end{aligned}$$

Por otro lado, como q es un epimorfismo, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{CoKer}(f) &= \mathrm{CoKer}(vq) && \\ &\simeq \mathrm{CoKer}(v) && \text{(dual del Lema 1.1.24(b))} \\ &= c_v. && \end{aligned}$$

$\square$

Observación A.4.4 Sea $\mathscr{C}$ una categoría.

(1) Si $\mathscr{C}$ tiene igualadores, es normal y conormal, y tiene núcleos y conúcleos, entonces es Puppe-exacta.

En efecto: La existencia de factorizaciones canónicas se sigue de los incisos (a) y (c) de la Proposición A.3.4.

(2) El universo de las categorías Puppe-exactas es dualizante.

(3) Supongamos que $\mathscr{C}$ es Puppe-exacta. Entonces, $\mathscr{C}$ tiene coimágenes. Más aún, en la factorización canónica de $A \xrightarrow{f} B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & B \\ & I \arrow[ur, hook, "v"'] & \end{tikzcd}$$

se tiene que $\mathrm{CoIm}(f) \simeq q$ en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)$.

En efecto: como q es un epimorfismo, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{CoIm}(f) &\simeq \mathrm{CoKer}(\mathrm{Ker}(f)) && \text{(dual de la Proposición A.3.4(b))} \\ &\simeq \mathrm{CoKer}(k_q) && \text{(Proposición A.4.3(b))} \\ &\simeq \mathrm{CoKer}(\mathrm{Ker}(q)) && \\ &\simeq q. && \text{(Proposición A.3.3(b))} \end{aligned}$$

Proposición A.4.5 Sea $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta en $\mathscr{C}$ si, y sólo si, $A \xleftarrow{f^{\mathrm{op}}} B \xleftarrow{g^{\mathrm{op}}} C$ es exacta en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

(b) $0 \to A \xrightarrow{f} B$ es exacta en $\mathscr{C}$ si, y sólo si, f es un monomorfismo en $\mathscr{C}$.

(c) $A \xrightarrow{f} B \to 0$ es exacta en $\mathscr{C}$ si, y sólo si, f es un epimorfismo en $\mathscr{C}$.

(d) $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ es exacta en $\mathscr{C}$ si, y sólo si, f es un isomorfismo en $\mathscr{C}$.

Demostración.

(a) Por el inciso (2) de la Observación A.4.4, basta probar una implicación.

($\Rightarrow$) Supongamos que $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta en $\mathscr{C}$. Consideremos la descomposición canónica

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, two heads, "r"'] & & C. \\ & I \arrow[ur, hook, "v"'] & & J \arrow[ur, hook, "w"'] & \end{tikzcd}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{CoKer}(f) &\simeq \operatorname{CoKer}(v) && \text{(Proposición A.4.3(b))} \\ &\simeq \operatorname{CoKer}(\operatorname{Im}(f)) && \text{(Proposición A.4.3(b))} \\ &\simeq \operatorname{CoKer}(\operatorname{Ker}(g)) \\ &\simeq \operatorname{CoIm}(g) && \text{(dual de la Proposición A.3.4(b))} \end{aligned}$$

Por ende,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f^{\mathrm{op}}) &= \operatorname{CoKer}(f)^{\mathrm{op}} \\ &\simeq \operatorname{CoIm}(g)^{\mathrm{op}} && \text{(dual de la Proposición A.3.4(b))} \\ &= \operatorname{Im}(g^{\mathrm{op}}), \end{aligned}$$

de donde se sigue que $A \xleftarrow{f^{\mathrm{op}}} B \xleftarrow{g^{\mathrm{op}}} C$ es exacta en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

(b) ($\Rightarrow$) Supongamos que $0 \to A \xrightarrow{f} B$ es exacta en $\mathscr{C}$. Entonces, $\operatorname{Im}(0 \to A) \simeq \operatorname{Ker}\big(A \xrightarrow{f} B\big)$. Como $0 \to A$ es un monomorfismo, por la Proposición A.1.14, se tiene que $\operatorname{Im}(0 \to A) \simeq (0 \to A)$. Consideremos la factorización canónica de f

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & B. \\ & \operatorname{Im}(f) \arrow[ur, hook, "v"'] & \end{tikzcd}$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} q &\simeq \operatorname{CoIm}(f) && \text{(Observación A.4.4(3))} \\ &\simeq \operatorname{CoKer}(\operatorname{Ker}(f)) && \text{(dual de la Proposición A.3.4(b))} \\ &\simeq \operatorname{CoKer}(0 \to A) \\ &\simeq \Big(A \xrightarrow{1_A} A\Big) \end{aligned}$$

en $\operatorname{Epi}_{\mathscr{C}}(A, -)$. Por ende, q es un isomorfismo. Como $f = vq$, de los incisos (6) y (2) de la Observación 0.2.2, se sigue que f es un monomorfismo.

($\Leftarrow$) Sea $A \xrightarrow{f} B$ un monomorfismo en $\mathscr{C}$. Por el inciso (1) de la Observación 1.1.23, tenemos que $0 \to A$ es un monomorfismo en $\mathscr{C}$. Luego, por la Proposición A.1.14, tenemos que $\operatorname{Im}(0 \to A) \simeq (0 \to A)$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$, por lo que basta ver que $\operatorname{Ker}\Big(A \xrightarrow{f} B\Big) \simeq (0 \to A)$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$, para lo cual utilizaremos el inciso (1) de la Observación 1.1.23. Claramente, $f0 = 0$. Sea $X \xrightarrow{g} A$ tal que $fg = 0$. Como $fg = 0 = f0$ y f es un monomorfismo, se sigue que $g = 0$. Luego, si existe $X \xrightarrow{g'} 0$ tal que el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, dotted, "g'"'] \arrow[d, "g=0"] & \\
0 \arrow[r, "0_{0,A}"'] & A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta, por el inciso (2) de la Observación 1.1.2, tenemos que $g' = 0$ es el único morfismo tal que $g = 0_{0,A}g'$.

(c) Por (a), se sigue de aplicar el principio de dualidad a (b).

(d) Observemos que

$$\begin{aligned}
0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0 \text{ es exacta en } \mathscr{C} &\iff f \text{ es un monomorfismo y un epimorfismo} && ((b) \text{ y } (c))\\
&\iff f \text{ es un isomorfismo} && (\text{Proposición A.3.5})
\end{aligned}$$

□

Corolario A.4.6 Sea $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) La descomposición canónica de $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(q) \arrow[r, hook, "k_q"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & B \arrow[r, "c_v"] & \mathrm{CoKer}(v) \\
 & & I \arrow[ur, hook, "v"'] & &
\end{tikzcd}$$

induce las sucesiones exactas en $\mathscr{C}$

$$\begin{gathered}
0 \to \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{k_q} A \xrightarrow{q} \mathrm{CoIm}(f) \to 0,\\
0 \to \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{v} B \xrightarrow{c_v} \mathrm{CoKer}(f) \to 0.
\end{gathered}$$

(b) Dado un monomorfismo $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ en $\mathscr{C}$, se tiene la sucesión exacta en $\mathscr{C}$

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{c_v} \mathrm{CoKer}(f) \to 0.$$

En tal caso, frecuentemente escribiremos B/A en vez de $\mathrm{CoKer}(f)$.

(c) Dado un epimorfismo $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ en $\mathscr{C}$, se tiene la sucesión exacta en $\mathscr{C}$

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{k_q} A \xrightarrow{f} B \to 0.$$

Demostración.

(a) Sea $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$. Consideremos su descomposición canónica

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(q) \arrow[r, hook, "k_q"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & B \arrow[r, two heads, "c_v"] & \mathrm{CoKer}(v). \\
 & & \mathrm{Im}(f) \arrow[ur, hook, "v"'] & &
\end{tikzcd}$$

Como k_q es un monomorfismo, por la Proposición A.1.14, tenemos que $\operatorname{Im}(k_q) \simeq k_q = \operatorname{Ker}(q)$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, A)$. Además, como q es un epimorfismo, tenemos la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{C}$

$$0 \to \operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{k_q} A \xrightarrow{q} \operatorname{CoIm}(f) \to 0.$$

Ahora, como v es un monomorfismo, nuevamente por la Proposición A.1.14, tenemos que $v \simeq \operatorname{Im}(v)$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B)$. Luego, por la Proposición A.4.3, tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(v) &\simeq v \\ &\simeq \operatorname{Im}(f) \\ &\simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{CoKer}(f)) \\ &\simeq \operatorname{Ker}(c_v). \end{aligned}$$

Como c_v es un epimorfismo, se sigue que la sucesión

$$0 \to \operatorname{Im}(f) \xrightarrow{v} B \xrightarrow{c_v} \operatorname{CoKer}(v) \to 0$$

es exacta en $\mathscr{C}$.

(b) Sea $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ un monomorfismo en $\mathscr{C}$. Entonces, podemos descomponer a f canónicamente como

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}(q) \arrow[r, hook, "k_q"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "1_A"'] & & B \arrow[r, two heads, "c_v"] & \operatorname{CoKer}(f). \\ & & A \arrow[ur, hook, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

Luego, del inciso (a), se sigue que la sucesión

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{c_v} \operatorname{CoKer}(f) \to 0$$

es exacta en $\mathscr{C}$.

(c) Sea $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$ un epimorfismo en $\mathscr{C}$. Entonces, podemos descomponer a f canónicamente como

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}(f) \arrow[r, hook, "k_q"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "f"'] & & B \arrow[r, two heads, "c_v"] & \operatorname{CoKer}(v). \\ & & B \arrow[ur, hook, "1_B"'] & & \end{tikzcd}$$

Luego, del inciso (a), se sigue que la sucesión

$$0 \to \operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{k_q} A \xrightarrow{f} B \to 0$$

es exacta en $\mathscr{C}$.

□

Lema A.4.7 Sean $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta y

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B \arrow[r, "\beta'"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{A.4.1}$$

un diagrama en $\mathscr{C}$ con renglones exactos. Entonces, existe un morfismo $A \xrightarrow{f} A'$ en $\mathscr{C}$ tal que $\gamma\alpha = \alpha f'$ si, y sólo si, existe $C \xrightarrow{g} C'$ tal que $\beta'\gamma = g\beta$. Más aún, dado uno de ellos, el otro queda determinado de forma única.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que existe $A \xrightarrow{f} A'$ en $\mathscr{C}$ tal que $\gamma\alpha = \alpha' f$. Observemos que

$$\begin{aligned} \beta &\simeq \operatorname{CoKer}(\operatorname{Ker}(\beta)) && \text{(Proposición A.3.3(b))} \\ &\simeq \operatorname{CoKer}(\operatorname{Im}(\alpha)) \\ &\simeq \operatorname{CoKer}(\alpha) && \text{(Proposición A.1.14)} \end{aligned}$$

y, análogamente, $\beta' \simeq \operatorname{CoKer}(\alpha')$. En particular, tenemos que $\beta'\alpha' = 0$, lo que implica que

$$\begin{aligned} (\beta'\gamma)\alpha &= \beta'(\gamma\alpha) \\ &= \beta'(\alpha' f) \\ &= (\beta'\alpha') f \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\beta \simeq \operatorname{CoKer}(\alpha)$, por la propiedad universal del conúcleo, existe un único morfismo $C \xrightarrow{g} C'$ en $\mathscr{C}$ tal que $g'\beta = \beta'\gamma$.

($\Leftarrow$) Se sigue de aplicar el principio de dualidad al inciso anterior. $\square$

Proposición A.4.8 Sean $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta, $A \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ y $\{\alpha_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia de subobjetos de A. Si $\theta \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} A/A'$ es la cointersección de la familia de objetos cociente $\{\beta_i : A \twoheadrightarrow A/A_i\}_{i\in I}$, entonces $\mu = \operatorname{Ker}\Big(A \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} A/A'\Big)$ es la unión de $\{\alpha_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$; es decir,

$$\bigcap_{i\in I}{}^{\mathrm{op}} A/A_i = A/\bigcup_{i\in I} A_i.$$

Demostración. Sea $A \xrightarrow{\theta} A/A'$ la cointersección de la familia $\{\beta_i : A \twoheadrightarrow A/A_i\}_{i\in I}$. Entonces, para cada $i \in I$, existe $v_i : A/A_i \to A/A'$ tal que $\theta = v_i\beta_i$. Por la Proposición A.1.14, tenemos que $\operatorname{Ker}(\beta_i) \simeq \operatorname{Im}(\alpha_i) \simeq \alpha_i$ para cada $i \in I$, por lo que $\beta_i\alpha_i = 0$, de donde se sigue que $\theta\alpha_i = v_i\beta_i\alpha_i = 0$. Como $\mu = \operatorname{Ker}(\theta)$, por la propiedad universal del núcleo, existen morfismos $A_i \xrightarrow{h_i} \operatorname{Ker}(\theta)$ en $\mathscr{C}$ tales que $\mu h_i = \alpha_i$ para cada $i \in I$. Por ende, $\alpha_i \leq \mu$ para cada $i \in I$.

Sean $A \xrightarrow{f} B$ y $B' \overset{\eta}{\hookrightarrow} B$ morfismos en $\mathscr{C}$ tales que cada α_i es llevado a η, vía f. Entonces, existen morfismos $\{f_i' : A_i \to B'\}_{i\in I}$ tales que $\eta f_i' = f\alpha_i$ para cada $i \in I$. Dado que η es un monomorfismo, por el inciso (b) del Corolario A.4.6, tenemos la sucesión exacta en $\mathscr{C}$

$$0 \to B' \xrightarrow{\eta} B \xrightarrow{p} \operatorname{CoKer}(\eta) \to 0.$$

Entonces, para cada $i \in I$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$ con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "f'_i"] & A \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "f"] & A/A_i \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\eta"'] & B \arrow[r, "p"'] & \mathrm{CoKer}(\eta) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como $\mathscr{C}$ es Puppe-exacta, por el Lema A.4.7, para cada $i \in I$, existe $A/A_i \xrightarrow{\gamma_i} \mathrm{CoKer}(\eta)$ en $\mathscr{C}$ tal que $\gamma_i\beta_i = pf$. Dado que θ es la cointersección de la familia $\{\beta_i : A \to A/A_i\}_{i\in I}$, existe $A/A' \xrightarrow{\gamma} \mathrm{CoKer}(\eta)$ en $\mathscr{C}$ tal que $\gamma\theta = pf$. Observemos que γ es tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$ conmuta y tiene renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\theta) \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f"] & A/A' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\eta"'] & B \arrow[r, "p"'] & \mathrm{CoKer}(\eta) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Luego, como $\mathscr{C}$ es Puppe-exacta, por el Lema A.4.7, existe $\mathrm{Ker}(\theta) \xrightarrow{f'} B'$ en $\mathscr{C}$ tal que $f\mu = \eta f'$. Por lo tanto, μ es llevado a η, vía f. □

Lema A.4.9 Sean $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta y

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & A \arrow[d, "\theta_1"] & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha_1"'] \arrow[d, "\gamma_2"'] & B \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\theta_2"] & B'' \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\beta_1"'] & C &
\end{tikzcd} \tag{A.4.2}$$

un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$, con renglones y columnas exactas. Entonces, la sucesión

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\alpha_2\theta_1} B''$$

es exacta en $\mathscr{C}$.

Demostración. Por el inciso (b) de la Proposición A.4.5, tenemos que α_1 y γ_1 son monomorfismos y, como $\alpha_1\gamma_1 = \theta_1 f$, del inciso (5) de la Observación 0.2.2 se sigue que f es un monomorfismo. Luego, por la Proposición A.1.14, $\mathrm{Im}(f) \simeq f$, por lo que basta ver que $f \simeq \mathrm{Ker}(\alpha_2\theta_1)$. Observemos que

$$\begin{aligned}
(\alpha_2\theta_1)f &= \alpha_2(\theta_1 f) \\
&= \alpha_2\alpha_1\gamma_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, sea $X \xrightarrow{\mu} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_2\theta_1\mu = 0$. Entonces, como $\alpha_2(\theta_1\mu) = 0$ y

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &\simeq \mathrm{Im}(\alpha_1) && \text{(Proposición A.1.14)} \\
&\simeq \mathrm{Ker}(\alpha_2),
\end{aligned}$$

se sigue que existe $X \xrightarrow{v} B'$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_1 v = \theta_1 \mu$. Como β_1 es un monomorfismo y

$$\begin{aligned}\beta_1\gamma_2 v &= \theta_2\alpha_1 v\\ &= \theta_2\theta_1\mu\\ &= 0\\ &= \beta 0,\end{aligned}$$

se sigue que $\gamma_2 v = 0$. Como γ_1 es un monomorfismo, por la Proposición A.1.14, tenemos que $\gamma_1 \simeq \mathrm{Im}(\gamma_1) \simeq \mathrm{Ker}(\gamma_2)$. Luego, por la propiedad universal del núcleo, existe $X \xrightarrow{w} A'$ en $\mathscr{C}$ tal que $\gamma_1 w = v$. Como θ_1 es un monomorfismo y

$$\begin{aligned}\theta_1 f w &= \alpha_1\gamma_1 w\\ &= \alpha_1 v\\ &= \theta_1\mu,\end{aligned}$$

se sigue que $fw = \mu$. Más aún, dado que f es un monomorfismo, se sigue que w es el único morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $fw = \mu$. Por lo tanto, f es un núcleo de $\alpha_2\theta_1$ y, del inciso (1) de la Observación 1.1.23, concluimos que $f \simeq \mathrm{Ker}(\alpha_2\theta_1)$. □

Lema A.4.10 Sean $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta y

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\theta_1"] & & \\
B' \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & B \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\theta_2"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "\psi_2"] & 0 \\
C' \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[d] & C \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[d] & C'' \arrow[r] & 0 \\
0 & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{A.4.3}$$

un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$, con renglones y columnas exactas. Entonces, la sucesión

$$A \xrightarrow{\alpha_2\theta_1} B'' \xrightarrow{\psi_2} C'' \to 0$$

es exacta en $\mathscr{C}$.

Demostración. Se sigue de aplicarle el principio de dualidad al Lema A.4.9, usando el inciso (a) del Lema A.4.5. □

Proposición A.4.11 Sean $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta y

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & A' \arrow[d, "\gamma_1"'] & A \arrow[d, "\theta_1"] & A'' \arrow[d, "\psi_1"] & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & B \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\theta_2"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "\psi_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[d] & C \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo y exacto[1] en $\mathscr{C}$. Entonces, existe una sucesión exacta $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ en $\mathscr{C}$ tal que $\theta_1 f = \alpha_1\gamma_1$ y $\psi_1 g = \alpha_2\theta_1$. Más aún, la sucesión

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\alpha_2\theta_1} B'' \xrightarrow{\psi_2} C'' \to 0 \tag{A.4.4}$$

es exacta en $\mathscr{C}$.

Demostración. Por el Lema A.4.7, existen $A' \xrightarrow{f} A$ y $A \xrightarrow{g} A''$ tales que $\theta_1 f = \alpha_1\gamma_1$ y $\psi_1 g = \alpha_2\theta_1$. Luego, por los Lemas A.4.9 y A.4.10, se tiene que la sucesión (A.4.4) es exacta en $\mathscr{C}$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &\simeq \operatorname{Ker}(\alpha_2\theta_1) \\ &\simeq \operatorname{Ker}(\psi_1 g) \\ &\simeq \operatorname{Ker}(g), && \text{(Proposición 1.1.24)} \end{aligned}$$

por lo que sólo falta ver que g es un epimorfismo para demostrar que la sucesión $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ es exacta en $\mathscr{C}$. Consideremos a la factorización canónica de $\alpha_2\theta_1$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha_2\theta_1"] \arrow[dr, two heads, "\rho_1"'] & & B''. \\ & I \arrow[ur, hook, "\rho_2"'] & \end{tikzcd}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \psi_1 &\simeq \operatorname{Im}(\psi_1) && \text{(Proposición A.1.14)} \\ &\simeq \operatorname{Ker}(\psi_2) \\ &\simeq \operatorname{Im}(\alpha_2\theta_1) \end{aligned}$$

en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B'')$ y, por el inciso (b) de la Proposición A.4.3, tenemos que $\rho_2 \simeq \operatorname{Im}(\alpha_2\theta_1)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B'')$, de donde se sigue que $\psi_1 \simeq \rho_2$. Es decir, existe $\eta : A'' \xrightarrow{\sim} I$ en $\mathscr{C}$ tal que hace conmutar el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[dd, dotted, "\exists\ \eta"', "\sim"] \arrow[dr, hook, "\psi_1"] & \\ & B''. \\ I \arrow[ur, hook, "\rho_2"'] & \end{tikzcd}$$

Luego, como ρ_2 es un monomorfismo, de

$$\begin{aligned} \rho_2\eta g &= \psi_1 g \\ &= \alpha_2\theta_1 \\ &= \rho_2\rho_1, \end{aligned}$$

se sigue que $\eta g = \rho_1$, lo que implica que $g = \eta^{-1}\rho_1$. Como η^{-1} es un isomorfismo y ρ_1 es un epimorfismo, por los incisos (6) y (2) de la Observación 0.2.2, concluimos que g es un epimorfismo. $\square$

Corolario A.4.12 Sean $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta y el diagrama en $\mathscr{C}$

[1] Es decir, con renglones y columnas exactas.

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & C' \arrow[d, hook, "\alpha_1"] \\
B \arrow[r, two heads, "\alpha_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

un producto fibrado. Entonces, dicho diagrama se puede completar al siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\theta"'] & B \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\psi"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0. \\
 & & C'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C'' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como α_1 es un monomorfismo, por los incisos (b) y (c) del Corolario A.4.6 tenemos las sucesiones exactas en $\mathscr{C}$

$$0 \to C' \xrightarrow{\alpha_1} C \xrightarrow{\gamma} C'' \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to A \xrightarrow{\theta} B \xrightarrow{\alpha_2} C \to 0,$$

donde $\gamma = \mathrm{CoKer}(\alpha_1)$ y $\theta = \mathrm{Ker}(\alpha_2)$, por lo que podemos considerar el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & A \arrow[d, equal] & B' \arrow[d, "\beta_2"] & C' \arrow[d, "\alpha_1"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\psi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{A.4.5}$$

donde $\gamma := \gamma\alpha_2$. Observemos que la primera columna y el segundo renglón del diagrama (A.4.5) son exactos trivialmente. Dado que

$$\begin{aligned}
\psi\theta &= \gamma\alpha_2\theta \\
&= \gamma 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ambos cuadrados del diagrama (A.4.5) conmutan. Por el inciso (a) del Corolario 0.5.25, β_2 es un monomorfismo y, como γ y α_2 son epimorfismos, por el inciso (2) de la Observación 0.2.2, se sigue que ψ es un epimorfismo. Por el diagrama en $\mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & C' \arrow[d, hook, "\alpha_1"] \\
B \arrow[r, "\alpha_2"'] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
& C'',
\end{tikzcd}
$$

cuyo cuadrado es un producto fibrado, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\beta_2) &\simeq \beta_2 && \text{(Proposición A.1.14)} \\
&\simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{Ker}(\gamma)\alpha_2) && \text{(Proposición 1.1.26)} \\
&= \mathrm{Ker}(\mathrm{Ker}(\mathrm{CoKer}(\alpha_1))\alpha_2) && \\
&\simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{Im}(\alpha_1)\alpha_2) && \text{(Proposición A.1.14)} \\
&\simeq \mathrm{Ker}(\gamma\alpha_2) && \\
&\simeq \mathrm{Ker}(\psi), &&
\end{aligned}
$$

de donde se sigue que el diagrama (A.4.5) es conmutativo y exacto. Entonces, por la Proposición A.4.11, existe el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\beta_2"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\theta"'] & B \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\psi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0. \\
& & C'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C'' \arrow[d] & \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Finalmente, como α_1 es un monomorfismo y $\alpha_1\lambda = \alpha_2\beta_2 = \alpha_1\beta_1$, se sigue que $\lambda = \beta_1$. $\square$

Corolario A.4.13 Sean $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta y $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$. Entonces, para cualquier subobjeto $B' \subseteq B$ de B en $\mathscr{C}$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & f^{-1}(B') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}(f) \cap B' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}(f) \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
& & \frac{\mathrm{Im}(f)}{\mathrm{Im}(f)\cap B'} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \frac{\mathrm{Im}(f)}{\mathrm{Im}(f)\cap B'} \arrow[d] & \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Consideremos la descomposición canónica de f

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "\overline{f}"'] & & B. \\ & \mathrm{Im}(f) \arrow[ur, hook, "v"'] & \end{tikzcd}$$

Por las Proposiciones A.1.4 y A.3.2, obtenemos el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B') \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d, hook, "\theta_1"] & \mathrm{Im}(f) \cap B' \arrow[l] \arrow[d, hook] \\ A \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "q"'] & B & \mathrm{Im}(f). \arrow[l, hook', "v"'] \end{tikzcd}$$

Luego, por la Proposición 0.5.26, tenemos que el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}(f) \cap B' \arrow[d, hook] \\ A \arrow[r, two heads, "q"'] & \mathrm{Im}(f) \end{tikzcd} \tag{A.4.6}$$

es un producto fibrado. Finalmente, dado que por el inciso (b) de la Proposición A.4.3 sabemos que $\mathrm{Ker}(q) \simeq \mathrm{Ker}(f)$, el resultado se sigue de aplicar el Corolario A.4.12 al diagrama (A.4.6). $\square$

Corolario A.4.14 Sean $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta y $A_1 \overset{\alpha_1}{\hookrightarrow} A$ y $A_2 \overset{\alpha_2}{\hookrightarrow} A$ en $\mathscr{C}$. Entonces, se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & A_2/(A_1 \cap A_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] \arrow[d] & A \arrow[r, "\theta_1"'] \arrow[d, "\theta_2"] & A/A_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1/(A_1 \cap A_2) \arrow[r] \arrow[d] & A/A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_/(A_1 \cup A_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Demostración. Por la Proposición A.1.4, sabemos que el producto fibrado de α_1 y α_2 es $A_1 \cap A_2$. Además, por la Proposición dual a A.1.4 y la Proposición A.4.8, la suma fibrada de los cocientes θ_1 y θ_2 es $A/(A_1 \cup A_2)$, por lo que basta aplicar el Corolario A.4.13. $\square$

Proposición A.4.15 Sea $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta con coproductos finitos y biproductos de la forma $A \bigoplus A$ para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Entonces, $\mathscr{C}$ es preaditiva.

Demostración. Por el Teorema 1.2.12, sabemos que $\mathscr{C}$ tiene biproductos finitos y es semiaditiva. Veamos que cada $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ admite inverso aditivo. En efecto, para $A \xrightarrow{\alpha} B$ en $\mathscr{C}$, consideremos

$$\theta := \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ \alpha & 1_B \end{pmatrix} : A \bigoplus B \to A \bigoplus B.$$

Sea $k_\theta = \left(\begin{smallmatrix} k_1 \\ k_2 \end{smallmatrix}\right) : \operatorname{Ker}(\theta) \to A \bigoplus B$ el núcleo de θ en $\mathscr{C}$. Dado que $\theta k_\theta = 0$, por la Proposición 1.2.9, tenemos que

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ \alpha & 1_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \alpha k_1 + k_2 \end{pmatrix}.$$

Luego, por la Proposición 0.5.43, tenemos que $k_1 = 0$ y $\alpha k_1 + k_2 = 0$, de donde se sigue que $k_2 = 0$. Como k_θ es un monomorfismo, entonces $\operatorname{Ker}(\theta) = 0$ y, por el inciso (b) de la Proposición A.4.5, θ es un monomorfismo. De manera análoga se obtiene que θ es un epimorfismo. Como por el inciso (a) de la Proposición A.4.3 sabemos que $\mathscr{C}$ es balanceada, entonces θ es un isomorfismo en $\mathscr{C}$. Sea

$$\theta^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A \bigoplus B \to A \bigoplus B.$$

Entonces, de

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix} &= \theta\theta^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ \alpha & 1_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha a + c & \alpha b + d \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

se sigue que $a = 1_A$ y $\alpha a + c = 0$, es decir, que $\alpha + c = 0$. Por lo tanto, $-\alpha := c$. □

Lema A.4.16 Sean $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta y preaditiva y $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{C}$ tal que existe $C \xrightarrow{\gamma} B$ en $\mathscr{C}$ con $\beta\gamma = 1_C$. Entonces, existe $B \xrightarrow{\delta} A$ en $\mathscr{C}$ tal que $\delta\alpha = 1_A$ y $B = A \coprod C$ con inclusiones naturales $\mu_1 := \alpha, \mu_2 := \gamma$ y proyecciones naturales $\pi_1 := \delta, \pi_2 := \beta$.

Demostración. Consideremos $\theta := 1_B - \gamma\beta \in \operatorname{End}_{\mathscr{C}}(B)$. Observemos que

$$\begin{aligned} \theta^2 &= (1_B - \gamma\beta)(1_B - \gamma\beta) \\ &= 1_B 1_B - 1_B\gamma\beta - \gamma\beta 1_B + (\gamma\beta)^2 \\ &= 1_B - 2\gamma\beta + \gamma(\beta\gamma)\beta \\ &= 1_B - 2\gamma\beta + \gamma\beta \\ &= 1_B - \gamma\beta \\ &= \theta. \end{aligned}$$

Ahora, dado que $\beta\gamma = 1_C$, del inciso (a2) de la Proposición 1.3.4 tenemos que $\gamma \simeq \operatorname{Ker}\Big(1_B - \gamma\beta\Big) = Ker\theta$. Además, como α y γ son monomorfismos, del inciso (b) del Lema 1.1.24 se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha &\simeq \operatorname{Im}(\alpha) \\ &\simeq \operatorname{Ker}(\beta) \\ &\simeq \operatorname{Ker}(\gamma\beta) \\ &= \operatorname{Ker}(1_C - \theta). \end{aligned}$$

Luego, por el inciso (b) de la Proposición 1.3.4, tenemos que $B = A \coprod C$, con $\mu_1 := \alpha$ y $\mu_2 := \gamma$ como inclusiones naturales. Sea $\delta := \pi_1$ y π_2 las proyecciones naturales. Finalmente, de

$$\begin{aligned}\pi_2\pi_1 &= 0\\ &= \beta\alpha\\ &= \beta\mu_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2\mu_2 &= 1_C\\ &= \beta\gamma\\ &= \beta\mu_2,\end{aligned}$$

y la propiedad universal del coproducto, se sigue que $\pi_2 = \beta$. $\square$

Proposición A.4.17 Sean $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta y preaditiva y $0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \to 0, 0 \to C \overset{\gamma}{\to} B \overset{\rho}{\to} A \to 0$ sucesiones exactas en $\mathscr{C}$ tales que $\rho\alpha = 1_A$ y $\beta\gamma = 1_C$. Entonces, $B = A \coprod C$, con $\mu_1 = \alpha, \mu_2 = \gamma, \pi_1 \simeq \rho$ en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(B, -)$ y $\pi_2 = \beta$.

Demostración. Por el Lema A.4.16, tenemos que $B = A \coprod C$, con $\mu_1 = \alpha, \mu_2 = \gamma$ y $\pi_2 = \beta$. Luego, del inciso (a3) de la Proposición 1.3.4 y el dual del inciso (b) del Lema 1.1.24, tenemos que

$$\begin{aligned}\pi_1 &\simeq \mathrm{CoKer}(1_B - \mu_1\pi_1)\\ &= \mathrm{CoKer}(\mu_2\pi_2)\\ &\simeq \mathrm{CoKer}(\mu_2)\\ &= \mathrm{CoKer}(\gamma)\end{aligned}$$

en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{C}}(B, -)$. Ahora, de la exactitud de la segunda sucesión, tenemos que $\gamma \simeq \mathrm{Ker}(\rho)$. Por ende, del inciso (b) de la Proposición A.3.3, se sigue que

$$\begin{aligned}\pi_1 &\simeq \mathrm{CoKer}(\mathrm{Ker}(\rho))\\ &\simeq \rho.\end{aligned}$$

$\square$

Proposición A.4.18 Sean $\mathscr{C}$ una categoría Puppe-exacta y $A_1 \overset{\alpha}{\hookrightarrow} A \overset{\beta}{\hookleftarrow} A_2$ en $\mathscr{C}$. Entonces, si $A = A_1 \coprod A_2$ con inclusiones naturales $\mu_1 = \alpha$ y $\mu_2 = \beta$, tenemos que $A_1 \cap A_2 = 0 = A/(A_1 \cup A_2)$.

Demostración. Sea $A = A_1 \coprod A_2$ con inclusiones naturales $A_1 \xrightarrow{\mu_1=\alpha} A \xleftarrow{\mu_2=\beta} A_2$. Por el inciso (1) de la Observación 1.1.7, podemos suponer que A tiene proyecciones naturales $A_1 \overset{\pi_1}{\twoheadleftarrow} A \overset{\pi_2}{\twoheadrightarrow} A_2$. Por el Lema 1.1.27, tenemos que $\mu_1 \simeq \mathrm{Ker}(\pi_2)$ y $\mu_2 \simeq \mathrm{Ker}(\pi_1)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}\big(-, A_1 \coprod A_2\big)$, por lo que $0 \to A_1 \overset{\mu_1}{\to} A \overset{\pi_2}{\to}\!\!\to 0$ y $0 \to A_2 \overset{\mu_2}{\to} A \overset{\pi_1}{\to} A_1 \to 0$ son sucesiones exactas en $\mathscr{C}$. Luego, por los Corolarios A.4.13 y A.4.14, se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mu_1"] & \mathrm{Im}(\pi_1\mu_1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "\mu_2"] \arrow[d] & A \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(\pi_2\mu_2) \arrow[r, "\lambda_2"'] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A/(A_1 \cup A_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Como $\pi_1\mu_1 = 1_{A_1}$ y $\pi_2\mu_2 = 1_{A_2}$, tenemos que $\lambda_i = \operatorname{Im}(\pi_i\mu_i) = 1_{A_i}$ para $i \in \{1,2\}$, por lo que $A_1 \cap A_2 = 0 = A/(A_1 \cup A_2)$. $\square$

A.5. Categorías abelianas

Definición A.5.1 Una categoría $\mathscr{C}$ es *abeliana* si es aditiva y Puppe-exacta.

A continuación, mostramos algunas caracterizaciones útiles de las categorías abelianas.

Teorema A.5.2 Para una categoría $\mathscr{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\mathscr{C}$ es abeliana.

(b) $\mathscr{C}$ es aditiva, tiene núcleos y conúcleos y, para cada $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$, el morfismo canónico inducido $\overline{f}$, en el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}(f) \arrow[r, hook, "f"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, two heads, "\operatorname{CoKer}(k_f)"'] & & B \arrow[r, two heads, "c_f"] & \operatorname{CoKer}(f) \\
& \operatorname{CoKer}(\operatorname{Ker}(f)) \arrow[rr, "\overline{f}"'] & & \operatorname{Ker}(\operatorname{CoKer}(f)), \arrow[u, hook, "\operatorname{Ker}(c_f)"'] &
\end{tikzcd}$$

es un isomorfismo en $\mathscr{C}$.

(c) $\mathscr{C}$ es normal y conormal, y tiene núcleos, conúcleos, productos finitos y coproductos finitos.

(d) $\mathscr{C}$ es normal y conormal, y tiene productos fibrados y sumas fibradas.

Demostración.

(a)$\Rightarrow$(b) Sea $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathscr{C}$. Por ser $\mathscr{C}$ Puppe-exacta, se tiene la factorización canónica

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & B \\
& I. \arrow[ur, hook, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Por el inciso (3) de la Observación A.4.4 y el dual del inciso (b) de la Proposición A.3.4, tenemos que $q \simeq \operatorname{CoIm}(f) \simeq \operatorname{CoKer}(\operatorname{Ker}(f))$ en $\operatorname{Epi}_{\mathscr{C}}(A,-)$. Más aún, de la Proposición A.4.3, se sigue que $v \simeq \operatorname{Im}(f) \simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{CoKer}(f))$ en $\operatorname{Mon}_{\mathscr{C}}(-,B)$, por lo que tenemos el diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] \arrow[dd, two heads, "\operatorname{CoKer}(k_f)"'] & & B \\
& I \arrow[ur, hook, "v"'] \arrow[dr, dotted, "\varepsilon_1", "\sim"'] & \\
\operatorname{CoKer}(\operatorname{Ker}(f)) \arrow[ur, dotted, "\sim", "\varepsilon_0"'] \arrow[rr, "\overline{f}"'] & & \operatorname{Ker}(\operatorname{CoKer}(f)), \arrow[uu, hook, "\operatorname{Ker}(c_f)"']
\end{tikzcd}$$

donde los triángulos laterales y el triángulo superior conmutan. Luego,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(c_f)\varepsilon_1\varepsilon_0\operatorname{CoKer}(k_f) = f = \operatorname{Ker}(c_f)\overline{f}\operatorname{CoKer}(k_f) &\implies \operatorname{Ker}(c_f)\varepsilon_1\varepsilon_0 = \operatorname{Ker}(c_f)\overline{f} \\
&\qquad\qquad (\operatorname{CoKer}(k_f) \text{ es un epimorfismo}) \\
&\implies \varepsilon_1\varepsilon_0 = \overline{f} \qquad (\operatorname{Ker}(c_f) \text{ es un monomorfismo}) \\
&\implies \overline{f} \text{ es un isomorfismo.}
\end{aligned}$$

(b)⇒(c) Dado que $\mathscr{C}$ es aditiva, por el Teorema 1.4.2 se sigue que $\mathscr{C}$ tiene coproductos finitos y productos finitos. Veamos que $\mathscr{C}$ es normal. Sea $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} B$ en $\mathscr{C}$. Entonces, por el inciso (3) de la Observación 1.3.3, se tiene que $\mathrm{Ker}(\alpha) = 0$, por lo que se tiene el diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r, "k_\alpha"] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{CoKer}(k_\alpha)"'] & B \arrow[r, "c_\alpha"] & \mathrm{CoKer}(\alpha) \\
& \mathrm{CoKer}(\alpha) \arrow[r, "\overline{\alpha}", "\sim"'] & \mathrm{Ker}(\mathrm{CoKer}(\alpha)). \arrow[u, hook, "\mathrm{Ker}(c_\alpha)"'] &
\end{tikzcd}$$

En particular, $\alpha \simeq \mathrm{Ker}(c_\alpha)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}(-, B)$. Dualmente, se comprueba que $\mathscr{C}$ es conormal.

(c)⇒(d) Por la Proposición A.3.2, se tiene que $\mathscr{C}$ tiene intersecciones finitas y, como $\mathscr{C}$ tiene productos finitos, se sigue del Teorema A.1.6 que $\mathscr{C}$ tiene productos fibrados. Ahora, por hipótesis y por dualidad, tenemos que $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ también satisface la condición (c), de donde se sigue que $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ tiene productos fibrados, lo que implica que $\mathscr{C}$ tiene sumas fibradas.

(d)⇒(a) Nuevamente, por la hipótesis y por dualidad, se sigue que $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ también satisface la condición (d). Luego, por el Lema 1.1.3 y el Lema dual a él, se sigue que $\mathscr{C}$ tiene igualadores y coigualadores. En particular, por el Lema 1.1.28 y su Lema dual, obtenemos que $\mathscr{C}$ tiene núcleos y conúcleos. Luego, por el inciso (1) de la Observación A.4.4, concluimos que $\mathscr{C}$ es exacta. Finalmente, para ver que $\mathscr{C}$ es aditiva, por la Proposición A.4.15, es suficiente ver que $\mathscr{C}$ tiene biproductos de la forma $A \bigoplus B$ para cualesquiera $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. En efecto, sean $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Tenemos que ver que

$$\delta = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix} : A \coprod B \to A \prod B$$

es un isomorfismo en $\mathscr{C}$. Consideremos la sucesión exacta en $\mathscr{C}$

$$0 \to K \xrightarrow{\delta_1} A \coprod B \xrightarrow{\delta} A \prod B \xrightarrow{\delta_2} K' \to 0,$$

donde $\delta_1 := \mathrm{Ker}(\delta)$ y $\delta_2 := \mathrm{CoKer}(\delta)$. Sean $\mu_1, \mu_2, \pi_1, \pi_2$ las inclusiones y proyecciones naturales de $A \coprod B$, y $\mu_1', \mu_2', \pi_1', \pi_2'$ las de $A \prod B$. Por el resultado dual al Lema 1.1.27, tenemos las sucesiones exactas en $\mathscr{C}$

$$0 \to A \xrightarrow{\mu_1} A \coprod B \xrightarrow{\pi_2} B \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to B \xrightarrow{\mu_2} A \coprod B \xrightarrow{\pi_1} A \to 0.$$

Observemos que de

$$\begin{aligned} \pi_1 \mu_1 &= 1_A \\ &= \pi_1' \delta \mu_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 \mu_2 &= 0 \\ &= \pi_1' \delta \mu_2, \end{aligned}$$

y la propiedad universal del coproducto, se sigue que $\pi_1 = \pi_1' \delta$. Ahora, como

$$\begin{aligned} \pi_1 \delta_1 &= \pi_1' \delta \delta_1 \\ &= \pi_1' 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

y $\mu_2 \simeq \mathrm{Ker}(\pi_1)$, por la propiedad universal del núcleo existe $K \xrightarrow{t} B$ en $\mathscr{C}$ tal que $\delta_1 = \mu_2 t$ y, en particular, $K \subseteq B$. Análogamente, se comprueba que $K \subseteq A$. Luego, por la Proposición A.4.18, tenemos que $K \subseteq A \cap B = 0$, de donde se sigue que $K = 0$. Dualmente, se demuestra que $K' = 0$, de donde concluimos que δ es un isomorfismo en $\mathscr{C}$. □

Observación A.5.3 El universo de las categorías abelianas es dualizante.

En efecto: Se sigue de notar que cualquiera de los incisos (c) o (d) del Teorema A.5.2 son auto duales.

A.6. Propiedades fundamentales de categorías abelianas

Lema A.6.1 Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $A \xrightarrow{f} A', B \xrightarrow{g} B'$ en $\mathscr{A}$. Entonces, $\mathrm{Ker}(f \bigoplus g) \simeq \mathrm{Ker}(f) \bigoplus \mathrm{Ker}(g)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{A}}(-, A \bigoplus B)$.

Demostración. Sean $\kappa_f : \mathrm{Ker}(f) \hookrightarrow A$ y $\kappa_g : \mathrm{Ker}(g) \hookrightarrow B$ núcleos de f y g, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \kappa_f \\ \kappa_g \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f\kappa_f \\ g\kappa_g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\begin{pmatrix} h \\ j \end{pmatrix} : X \to A \bigoplus B$ en $\mathscr{A}$ tal que $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ j \end{pmatrix} = 0$. Entonces, tenemos que $fh = 0$ y $gj = 0$. Por la propiedad universal del núcleo, existen morfismos únicos $X \xrightarrow{h'} A, X \xrightarrow{j'} B$ en $\mathscr{A}$ tales que $h = \kappa_f h'$ y $j = \kappa_g j'$, de donde se sigue que $\begin{pmatrix} h \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_f \\ \kappa_g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h' \\ j' \end{pmatrix}$; más aún, $\begin{pmatrix} h' \\ j' \end{pmatrix}$ es el único morfismo que verifica esta ecuación. Por lo tanto, $\begin{pmatrix} \kappa_f \\ \kappa_g \end{pmatrix}$ es un núcleo de $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ y, por el inciso (1) de la Observación 1.1.23, concluimos que $\mathrm{Ker}(f) \bigoplus \mathrm{Ker}(g) \simeq \mathrm{Ker}(f \bigoplus g)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{A}}(-, A \bigoplus B)$. □

Proposición A.6.2 Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \dots, \tag{A.6.1}$$

$$\cdots \to N_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} N_i \xrightarrow{g_i} N_{i+1} \to \dots \tag{A.6.2}$$

sucesiones en $\mathscr{A}$ con el mismo número de morfismos. Si las sucesiones (A.6.1) y (A.6.2) son exactas en M_i y N_i, respectivamente, entonces la sucesión en $\mathscr{A}$

$$\cdots \to M_{i-1} \bigoplus N_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1} \bigoplus g_{i-1}} M_i \bigoplus N_i \xrightarrow{f_i \bigoplus g_i} M_{i+1} \bigoplus N_{i+1} \to \dots \tag{A.6.3}$$

es exacta en $M_i \bigoplus N_i$. En particular, la suma directa de dos sucesiones exactas en $\mathscr{A}$ con el mismo número de morfismos es exacta en $\mathscr{A}$.

Demostración. Supongamos que las sucesiones (A.6.1) y (A.6.2) son exactas en M_i y N_i, respectivamente. Observemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\Big(f_{i-1} \bigoplus g_{i-1}\Big) &\simeq \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{CoKer}\Big(f_{i-1} \bigoplus g_{i-1}\Big)\Big) && \text{(A.3.4(b))} \\ &\simeq \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{CoKer}(f_{i-1}) \bigoplus \mathrm{CoKer}(g_{i-1})\Big) && \text{(dual del Lema A.6.1)} \\ &\simeq \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{CoKer}(f_{i-1})\Big) \bigoplus \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{CoKer}(g_{i-1})\Big) && \text{(Lema A.6.1)} \\ &\simeq \mathrm{Im}(f_{i-1}) \bigoplus \mathrm{Im}(g_{i-1}) && \text{(A.3.4(b))} \\ &\simeq \mathrm{Ker}(f_i) \bigoplus \mathrm{Ker}(g_i) \\ &\simeq \mathrm{Ker}\Big(f_i \bigoplus g_i\Big), && \text{(Lema A.6.1)} \end{aligned}$$

por lo que la sucesión (A.6.3) es exacta en $M_i \bigoplus N_i$. □

Definición A.6.3 Sea $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor entre categorías abelianas. Decimos que F es:

(a) *exacto a izquierda* si, para toda sucesión exacta $0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$ en $\mathscr{A}$, se tiene que $0 \to F(M_1) \xrightarrow{F(f_1)} F(M_2) \xrightarrow{F(f_2)} F(M_3)$ es exacta en $\mathscr{B}$;

(b) *exacto a derecha* si, para toda sucesión exacta $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0$ en $\mathscr{A}$, se tiene que $F(M_1) \xrightarrow{F(f_1)} F(M_2) \xrightarrow{F(f_2)} F(M_3) \to 0$ es exacta en $\mathscr{B}$;

(c) *exacto* si es exacto a derecha y a izquierda.

Teorema A.6.4 Sea $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre categorías abelianas. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) F es exacto a izquierda.

(b) F preserva núcleos.

(c) Para toda sucesión exacta $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$ en $\mathscr{A}$, se tiene que $0 \to F(K) \xrightarrow{F(f)} F(L) \xrightarrow{F(g)} F(M)$ es exacta en $\mathscr{B}$.

Demostración.

(a)$\Rightarrow$(b) Sea $X \xrightarrow{\alpha} Y$ un morfismo en $\mathscr{A}$. Entonces, tenemos la sucesión exacta $0 \to \mathrm{Ker}(\alpha) \xrightarrow{k_\alpha} X \xrightarrow{\alpha} Y$ en $\mathscr{A}$. Como F es exacto a izquierda, entonces la sucesión $0 \to F(\mathrm{Ker}(\alpha)) \xrightarrow{F(k_\alpha)} F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} Y$ es exacta en $\mathscr{B}$. Por lo tanto, $F(k_\alpha) \simeq \mathrm{Im}(F(k_\alpha)) \simeq \mathrm{Ker}(F_\alpha)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{B}}(-, F(X))$.

(b)$\Rightarrow$(c) Sea $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$. Entonces, se sigue que

$$\Big(0 \to K\Big) \simeq \mathrm{Ker}\Big(K \xrightarrow{f} L\Big) \quad \text{y} \quad \Big(K \xrightarrow{f} L\Big) \simeq \mathrm{Ker}\Big(L \xrightarrow{g} M\Big). \tag{A.6.4}$$

Veamos que $F(0) = 0$. En efecto, como $\Big(0 \xrightarrow{1_0}\ \Big) \simeq \mathrm{Ker}\Big(0 \xrightarrow{1_0} 0\Big)$ y F preserva núcleos, tenemos que $\Big(F(0) \xrightarrow{1_{F(0)}} F(0)\Big) \simeq \mathrm{Ker}\Big(F(0) \xrightarrow{1_{F(0)}} F(0)\Big) \simeq \Big(F(0) \xrightarrow{0} F(0)\Big)$. Por ende, $1_{F(0)} = 0$ y, del Lema 1.1.2, se sigue que $F(0) = 0$. Ahora bien, por la ecuación A.6.4 y el hecho de que F preserva núcleos, tenemos que

$$\Big(0 \to F(K)\Big) \simeq \mathrm{Ker}\Big(F(K) \xrightarrow{F(f)} F(L)\Big) \quad \text{y} \quad \Big(F(K) \xrightarrow{F(f)} F(L)\Big) \simeq \mathrm{Ker}\Big(F(L) \xrightarrow{F(g)} F(M)\Big),$$

de donde se sigue que $0 \to F(K) \xrightarrow{F(f)} F(L) \xrightarrow{F(g)} F(M)$ es exacta en $\mathscr{B}$.

(c)$\Rightarrow$(a) Sean $0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$ y $M_2 \overset{f_2'}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Im}(f_2) \overset{f_2''}{\hookrightarrow} M_3$ la factorización de $M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$ a través de su imagen. Entonces, tenemos las sucesiones exactas en $\mathscr{A}$

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2'} \mathrm{Im}(f_2) \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Im}(f_2) \xrightarrow{f_2''} M_3 \xrightarrow{c_{f_2}} \mathrm{CoKer}(f_2) \to 0.$$

Aplicando F a las sucesiones anteriores y usando la hipótesis, tenemos las sucesiones exactas en $\mathscr{B}$

$$0 \to F(M_1) \xrightarrow{F(f_1)} F(M_2) \xrightarrow{F(f_2')} F(\mathrm{Im}(f_2)), \tag{A.6.5}$$

$$0 \to F(\mathrm{Im}(f_2)) \xrightarrow{F(f_2'')} F(M_3) \xrightarrow{F(c_{f_2})} F(\mathrm{CoKer}(f_2)). \tag{A.6.6}$$

Por la ecuación (A.6.5), tenemos que $F(f_1)$ es un monomorfismo y que $\mathrm{Im}(F(f_1)) \simeq \mathrm{Ker}(F(f_2'))$ mientras que, de la ecuación (A.6.6), se sigue que $F(f_2'')$ es un monomorfismo. Luego, por el inciso (b) del Lema 1.1.24, en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{B}}(-, F(M_2))$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(F(f_2)) &= \mathrm{Ker}(F(f_2'')F(f_2')) \\ &\simeq \mathrm{Ker}(F(f_2')) \\ &\simeq \mathrm{Im}(F(f_1)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $0 \to F(M_1) \xrightarrow{F(f_1)} F(M_2) \xrightarrow{F(f_2)} F(M_3)$ es exacta en $\mathscr{B}$. □

Teorema A.6.5 Sea $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre categorías abelianas. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) F es exacto a derecha.

(b) F preserva conúcleos.

(c) Para toda sucesión exacta $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$ en $\mathscr{A}$, se tiene que $F(K) \xrightarrow{F(f)} F(L) \xrightarrow{F(g)} F(M) \to 0$ es exacta en $\mathscr{B}$.

Demostración. Se sigue de aplicar el principio de dualidad al Teorema A.6.4. □

Corolario A.6.6 Para un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre categorías abelianas, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) F es exacto si, y sólo si, para cualquier sucesión exacta $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ en $\mathscr{A}$, se tiene que $0 \to F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \to 0$ es exacta en $\mathscr{B}$.

(b) Si F es exacto, entonces es aditivo.

Demostración.

(a) Se sigue del Teorema A.6.4 y la Proposición A.6.5.

(b) Por la prueba del Teorema 1.5.8, es suficiente verificar que $F\Big(X \oplus Y\Big) = F(X) \oplus F(Y)$ para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. En efecto, sean $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, $X \xrightarrow{\mu_1} X \oplus Y, Y \xrightarrow{\mu_2} X \oplus Y$ las inclusiones naturales y $X \oplus Y \xrightarrow{\pi_1} X, X \oplus Y \xrightarrow{\pi_2} Y$ las proyecciones naturales. Luego, por el Lema 1.1.27, se tienen las sucesiones exactas en $\mathscr{A}$

$$0 \to X \xrightarrow{\mu_1} X \bigoplus Y \xrightarrow{\pi_2} Y \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to Y \xrightarrow{\mu_2} X \bigoplus Y \xrightarrow{\pi_1} X \to 0.$$

Dado que $\pi_1\mu_1 = 1_X, \pi_2\mu_2 = 1_Y$ y F es exacto, se tienen las sucesiones exactas en $\mathscr{B}$

$$0 \to F(X) \xrightarrow{F(\mu_1)} F\Big(X \oplus Y\Big) \xrightarrow{F} (\pi_2)F(Y) \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to F(Y) \xrightarrow{F(\mu_2)} F\Big(X \oplus Y\Big) \xrightarrow{F(\pi_1)} F(X) \to 0,$$

con $F(\pi_1)F(\mu_1) = 1_{F(X)}$ y $F(\pi_2)F(\mu_2) = 1_{F(Y)}$. Ahora, por la Proposición A.4.17, se sigue que $F\Big(X \oplus Y\Big) = F(X) \oplus F(Y)$, con inclusiones naturales $F(\mu_1)$ y $F(\mu_2)$.

□

Lema A.6.7 Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ en $\mathscr{A}$, $\mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{k_g} B$ el núcleo de g y $B \xrightarrow{c_f} \mathrm{CoKer}(f)$ el conúcleo de f. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\mathrm{Im}(f) \simeq \mathrm{Ker}(g)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{A}}(-, B)$.

(b) $\mathrm{CoKer}(f) \simeq \mathrm{CoIm}(g)$ en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{A}}(B, -)$.

(c) $gf = 0$ y $c_f k_g = 0$.

Demostración. Sea $A \overset{f'}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Im}(f) \overset{f''}{\hookrightarrow} B$ la factorización de $A \xrightarrow{f} B$ a través de su imagen.

(a)⇒(b) Sea $\mathrm{Im}(f) \simeq \mathrm{Ker}(g)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{A}}(-, B)$. Luego, en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{A}}(B, -)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{CoIm}(g) &\simeq \mathrm{CoKer}(\mathrm{Ker}(g)) && \text{(dual de A.3.4(b))} \\ &\simeq \mathrm{CoKer}(\mathrm{Im}(f)) \\ &\simeq \mathrm{CoKer}(\mathrm{Ker}(\mathrm{CoKer}(f))) && \text{(A.3.4(b))} \\ &\simeq \mathrm{CoKer}(f). && \text{(A.3.3(b))} \end{aligned}$$

(b)⇒(a) Sea $\mathrm{CoKer}(f) \simeq \mathrm{CoIm}(g)$ en $\mathrm{Epi}_{\mathscr{A}}(B, -)$. Luego, en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{A}}(-, B)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &\simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{CoKer}(f)) && \text{(A.3.4(b))} \\ &\simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{CoIm}(g)) \\ &\simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{CoKer}(\mathrm{Ker}(g))) && \text{(dual de A.3.4(b))} \\ &\simeq \mathrm{Ker}(g). && \text{(A.3.3(a))} \end{aligned}$$

(a)⇒(c) Dado que $\mathrm{Im}(f) \simeq \mathrm{Ker}(g)$, se tiene que $gf'' = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} gf &= g(f''f') \\ &= (gf'')f' \\ &= 0f' \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, para probar que $c_f k_g = 0$, es suficiente verificar que $k_g \simeq \mathrm{Ker}(c_f)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{A}}(-, B)$. En efecto, de (a) y el inciso (b) de la Proposición A.3.4, se sigue que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(c_f) &= \mathrm{Ker}(\mathrm{CoKer}(f)) \\ &\simeq \mathrm{Im}(f) \\ &\simeq \mathrm{Ker}(g) \\ &= k_g. \end{aligned}$$

(c)⇒(a) Sean $gf = 0$ y $c_f k_g = 0$. Luego, por la propiedad universal del núcleo, tenemos que existe un morfismo h que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "\exists\ h"'] & & B \arrow[r, "g"] & C \\ & \mathrm{Ker}(g). \arrow[ur, hook, "k_g"'] & & \end{tikzcd}$$

Más aún, por la propiedad universal de la imagen, se sigue que existe un morfismo tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Im}(f) \arrow[dr, hook, "f''"] \arrow[dd, dotted] & \\
A \arrow[ur, two heads, "f'"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\
 & \mathrm{Ker}(g) \arrow[ur, hook, "k_g"'] &
\end{tikzcd}$$

y, en particular, tenemos que $f'' \leq k_g$. Ahora, por la propiedad universal del conúcleo y el inciso (b) de la Proposición A.3.4, tenemos que existen morfismos j y k tales que el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & B \arrow[r, "c_f"] & \mathrm{CoKer}(f) \\
 & \mathrm{Im}(f) \arrow[ur, hook, "f''"] & & \\
 & & \mathrm{Ker}(\mathrm{CoKer}(f)) \arrow[uu, hook] \arrow[ul, dotted, "k", "\wr"'] & \mathrm{Ker}(g). \arrow[uul, "k_g"'] \arrow[l, dotted, "\exists\ j"]
\end{tikzcd}$$

Por ende, se sigue que el morfismo kj hace conmutar el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}(f) \arrow[dr, hook, "f''"] & \\
 & B, \\
\mathrm{Ker}(g) \arrow[uu, dotted, "kj"] \arrow[ur, hook, "k_g"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo que $k_g \leq f''$. Por lo tanto, $\mathrm{Ker}(g) \simeq \mathrm{Im}(f)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{A}}(-, B)$. □

Teorema A.6.8 Para un funtor aditivo $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre categorías abelianas, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) F es fiel.

(b) Sea D un diagrama en $\mathscr{A}$. Si el diagrama FD en $\mathscr{B}$ es conmutativo, entonces D es conmutativo.

(c) Sea D un diagrama en $\mathscr{A}$ de la forma

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

Si FD es exacto en $\mathscr{B}$, entonces D es exacto en $\mathscr{A}$.

Demostración.

(a)⇒(b) Sean D un diagrama en $\mathscr{A}$ y γ, δ caminos en D tales que tengan los mismos puntos iniciales y finales. Como FD es conmutativo, entonces $F(\gamma) = F(\delta$ y, por ser F fiel, se sigue que $\gamma = \delta$, por lo que D conmuta.

(b)⇒(a) Sean $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$ tales que $F(\alpha) = F(\beta)$. Consideremos un diagrama D en $\mathscr{A}$ de la forma $X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} Y$. Dado que $F(X) \overset{F(\alpha)}{\underset{F(\beta)}{\rightrightarrows}} F(Y)$ es conmutativo, se sigue que D es conmutativo y, así, $\alpha = \beta$.

(c)$\Rightarrow$(a) Sean $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathscr{A})$ y $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$. Como F es aditivo, basta ver que $\alpha \neq 0$ implica que $F(\alpha) \neq 0$. Supongamos que $\alpha \neq 0$. Sea D un diagrama en $\mathscr{A}$ de la forma $X \xrightarrow{1_X} X \xrightarrow{\alpha} Y$. Entonces, el diagrama D no es exacto en $\mathscr{A}$ y, por hipótesis, se sigue que $F(X) \xrightarrow{1_{F(X)}} F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y)$ no es exacto en $\mathscr{B}$. Ahora, dado que

$$\begin{aligned} c_{1_{F(X)}} &= \operatorname{CoKer}(1_{F(X)}) \\ &= \left(F(X) \xrightarrow{0} 0\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

se sigue que $c_{1_{F(X)}} k_{F(\alpha)} = 0$. Luego, por el inciso (c) del Lema A.6.7, la no exactitud de FD implica que $F(\alpha) = F(\alpha) 1_{F(X)} \neq 0$.

(a)$\Rightarrow$(c) Sea D un diagrama en $\mathscr{A}$ de la forma $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Haremos una demostración contrapositiva. Supongamos que D no es exacta en $\mathscr{A}$. Entonces, por el Lema A.6.7, tenemos que $gf \neq 0$ o bien $c_f k_g \neq 0$. En el primer caso, dado que F es fiel, entonces $F(g)F(f) \neq 0$ y, por el Lema A.6.7, se tiene que FD no es exacto en $\mathscr{B}$. Supongamos que $c_f k_g \neq 0$. Como $g k_g = 0$ y $c_f f = 0$, tenemos los siguientes diagramas conmutativos en $\mathscr{B}$

$$\begin{tikzcd} & F(\operatorname{Ker}(g)) \arrow[dl, dotted, "\exists\, \mu"'] \arrow[d, "F(k_g)"] & \\ \operatorname{Ker}(F(g)) \arrow[r, "k_{F(g)}"'] & F(B) \arrow[r, "F(g)"'] & F(C) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] & F(B) \arrow[r, "c_{F(f)}"] \arrow[d, "F(c_f)"'] & \operatorname{CoKer}(F(f)). \arrow[dl, dotted, "\exists\, \delta"] \\ & F(\operatorname{CoKer}(f)) & \end{tikzcd}$$

Por ende, tenemos que

$$\begin{aligned} F(c_f k_g) &= F(c_f) F(k_g) \\ &= \delta c_{F(f)} k_{F(g)} \mu. \end{aligned}$$

Si FD fuera exacta en $\mathscr{B}$ entonces, por el Lema A.6.7, tendríamos que $c_{F(f)} k_{F(g)} = 0$, lo que implica que $F(c_f k_g) = 0$, contradiciendo que F sea fiel y $c_f k_g \neq 0$. Por lo tanto, FD no es exacto en $\mathscr{B}$. $\square$

Corolario A.6.9 Para un funtor fiel y exacto $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre categorías abelianas, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) F es aditivo y preserva núcleos, conúcleos y coproductos finitos en $\mathscr{A}$.

(b) Para cualquier diagrama D en $\mathscr{A}$, se tiene que el diagrama D en $\mathscr{A}$ es conmutativo si, y sólo si, el diagrama FD en $\mathscr{B}$ es conmutativo.

(c) Para cualquier diagrama D en $\mathscr{A}$ de la forma

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

se tiene que D es exacto en $\mathscr{A}$ si, y sólo si, FD es exacto en $\mathscr{B}$.

Demostración.

(a) Por el inciso (b) del Corolario A.6.6, se tiene que F es aditivo. Luego, del Teorema 1.5.8, se sigue que F preserva coproductos finitos en $\mathscr{A}$. Ahora, como F es exacto, por el Teorema A.6.4 y la Proposición A.6.5, se sigue que F preserva núcleos y conúcleos en $\mathscr{A}$.

(b) Dado que F es aditivo, por el inciso (a), basta aplicar el inciso (b) del Teorema A.6.8.

(c) Sea D un diagrama en $\mathscr{A}$ de la forma $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Supongamos que D es exacto. Entonces, $\mathrm{Im}(f) \sim \mathrm{Ker}(g)$ en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{A}}(-, B)$. Como F es exacto, por el inciso (a) sabemos que F preserva núcleos y conúcleos. Por lo tanto, en $\mathrm{Mon}_{\mathscr{B}}(-, FB)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(F(f)) &\simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{CoKer}(F(f))) && \text{(por A.3.4(b))} \\ &\simeq \mathrm{Ker}(F(\mathrm{CoKer}(f))) \\ &\simeq F(\mathrm{Ker}(\mathrm{CoKer}(f)) \\ &\simeq F(\mathrm{Im}(f)) && \text{(por A.3.4(b))} \\ &\simeq F(\mathrm{Ker}(g)) \\ &\simeq \mathrm{Ker}(F(g)), \end{aligned}$$

de donde se sigue que FD es exacto en $\mathscr{B}$. La implicación contraria se sigue del inciso (c) del Teorema A.6.8.

□

Definición A.6.10 Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Una *subcategoría abeliana* de $\mathscr{A}$ es una subcategoría $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{A}'$ es abeliana y el funtor de inclusión $\iota_{\mathscr{A}'} : \mathscr{A}' \to \mathscr{A}, \left(X \xrightarrow{f} Y\right) \mapsto \left(X \xrightarrow{f} Y\right)$ es exacto.

Proposición A.6.11 Para una subcategoría plena $\mathscr{A}'$ de una categoría abeliana $\mathscr{A}$, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\mathscr{A}'$ es una subcategoría abeliana de $\mathscr{A}$.

(b) $\mathscr{A}'$ satisface las siguientes condiciones:

  (b1) $\mathscr{A}'$ tiene objeto cero.

  (b2) Para toda familia $\{A_i\}_{i=1}^n$ de objetos de $\mathscr{A}'$, existe un coproducto $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{A}'$, el cual también es un coproducto en $\mathscr{A}$.

  (b3) $\mathscr{A}'$ tiene núcleos y todo núcleo en $\mathscr{A}'$ también es núcleo en $\mathscr{A}$.

  (b4) $\mathscr{A}'$ tiene conúcleos y todo conúcleo en $\mathscr{A}'$ también es conúcleo en $\mathscr{A}$.

Demostración.
(a)⇒(b) Supongamos que $\mathscr{A}'$ es abeliana y que el funtor de inclusión $\iota_{\mathscr{A}'} : \mathscr{A}' \to \mathscr{A}$ es exacto. Como $\iota_{\mathscr{A}'}$ es fiel y $\mathscr{A}'$ es abeliana, basta con aplicar el inciso (a) del Corolario A.6.9.

(b)⇒(a) Dado que $\mathscr{A}'$ es una subcategoría plena de $\mathscr{A}$, por (b1) y (b2), se sigue que $\mathscr{A}'$ es aditiva. Más aún, la plenitud de $\mathscr{A}'$ implica que, para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}')$, si $X \xrightarrow{f} Y$ es un isomorfismo en $\mathscr{A}$, entonces también lo es en $\mathscr{A}'$. Luego, por ser $\mathscr{A}$ abeliana, de (b3) y (b4) se sigue que se satisface la condición (b) del Teorema A.5.2, por lo que $\mathscr{A}'$ es abeliana. Finalmente, por (b3) y (b4), tenemos que el funtor de inclusión $\iota_{\mathscr{A}'} : \mathscr{A}' \to \mathscr{A}$ preserva núcleos y conúcleos. Luego, por el Teorema A.6.4 y la Proposición A.6.5, se tiene que $\iota_{\mathscr{A}'}$ es exacto. □

Teorema A.6.12 Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y D un diagrama en $\mathscr{A}$. Entonces, existe una subcategoría abeliana $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{A}'$ es una subcategoría plena y pequeña de $\mathscr{A}$ y D es un diagrama en $\mathscr{A}'$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definiremos inductivamente una subcategoría plena $\mathscr{A}_n$ de $\mathscr{A}$ tal que D sea un diagrama en $\mathscr{A}_n$ como sigue:

- $\mathscr{A}_0$ es la subcategoría plena de $\mathscr{A}$ cuyos objetos son aquellos que aparecen en la imagen de D.

- Dada $\mathscr{A}_n$, definimos a $\mathscr{A}_{n+1}$ como sigue:

  (i) $\mathscr{A}_{n+1}$ contiene a todos los objetos de $\mathscr{A}_n$;

  (ii) Para cada $A \xrightarrow{\alpha} B$ en $\mathscr{A}_n$, agregamos a $\mathscr{A}_{n+1}$ los morfismos $\mathrm{Ker}(\alpha) \xrightarrow{k_\alpha} A$ y $B \xrightarrow{c_\alpha} \mathrm{CoKer}(\alpha)$ que existen en $\mathscr{A}$;

  (iii) Para cualquier familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de objetos en $\mathscr{A}_n$, con I finito, agregamos a $\mathscr{A}_{n+1}$ el coproducto $\coprod_{i \in I} A_i$ que existe en $\mathscr{A}$.

De este modo, tenemos que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cadena ascendente de subcategorías plenas y pequeñas de $\mathscr{A}$ tales que D es un diagrama en $\mathscr{A}_0$. Luego, $\mathscr{A}' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{A}_n$ es una subcategoría plena y pequeña de $\mathscr{A}$ tal que D es un diagrama en $\mathscr{A}'$. Más aún, dado que $\mathscr{A}'$ satisface las condiciones del inciso (b) de la Proposición A.6.11, se sigue que $\mathscr{A}'$ es abeliana. $\square$

Teorema A.6.13 (Teorema de Inmersión de Freyd-Mitchell) Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $\mathscr{A}'$ una subcategoría abeliana plena y pequeña de $\mathscr{A}$. Entonces, existen un anillo R y un funtor fiel, pleno y exacto

$$F : \mathscr{A}' \to \mathrm{Mod}(R).$$

Demostración. Los detalles se pueden consultar en [Tan19, Theorem 7.15]. $\square$

Lema A.6.14 (Lema del 5) Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "u_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "u_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\ A'_1 \arrow[r, "u'_1"'] & A_2 \arrow[r, "u'_2"'] & A'_3 \arrow[r, "u'_3"'] & A'_4 \arrow[r, "u'_4"'] & A'_5 \end{tikzcd} \tag{A.6.7}$$

un diagrama conmutativo en $\mathscr{A}$, donde los renglones son sucesiones exactas. Entonces,

(a) si f_2 y f_4 son monomorfismos y f_1 es un epimorfismo, entonces f_3 es un monomorfismo;

(b) si f_2 y f_4 son epimorfismos y f_5 es un monomorfismo, entonces f_3 es un epimorfismo;

(c) si f_2 y f_4 son isomorfismos, f_1 es un epimorfismo y f_5 es un monomorfismo, entonces f_3 es un isomorfismo.

Demostración.

(a) Por el Teorema A.6.12, existe una subcategoría abeliana $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ plena, pequeña y que contiene al diagrama (A.6.7). Luego, por el Teorema de Inmersión de Freyd-Mitchell (A.6.13), existen un anillo R y un funtor $F : \mathscr{A}' \to \mathrm{Mod}(R)$ que es fiel, pleno y exacto. Más aún, por el Corolario A.6.9, tenemos que el diagrama (A.6.7) es conmutativo y tiene renglones exactos si, y sólo si, el diagrama obtenido al aplicarle F a (A.6.7) es conmutativo y tiene renglones exactos exactos en

Mod(R). Finalmente, como F preserva monomorfismos y epimorfismos, entonces podemos suponer que $\mathscr{A} = \mathrm{Mod}(R)$, con R un anillo.

Supongamos que f_2 y f_4 son monomorfismos y que f_1 es un epimorfismo. Sea $x \in \mathrm{Ker}(f_3)$. Como $u_3' f_3 = f_4 u_3$, tenemos que $f_4 u_3(x)$, por lo que $u_3(x) \in \mathrm{Ker}(f_4)$. Ahora, como f_4 es un monomorfismo, se tiene que $u_3(x) = 0$, por lo que $x \in \mathrm{Ker}(u_3)$. Como los renglones del diagrama son exactos, tenemos que $\mathrm{Ker}(u_3) = \mathrm{Im}(u_2)$, por lo que existe $y \in A_2$ tal que $u_2(y) = x$. Dado que $u_2(y) = x$ y $f_3(x) = 0$, se tiene que $u_2' f_2(y) = f_3 u_2(y) = 0$, por lo que $f_2(y) \in \mathrm{Ker}(u_2')$. Nuevamente, como los renglones del diagrama son exactos, entonces $\mathrm{Ker}(u_2') = \mathrm{Im}(u_1')$, por lo que existe $z \in A_1'$ tal que $u_1'(z) = f_2(y)$. Más aún, como f_1 es un epimorfismo, entonces existe $w \in A_1$ tal que $f_1(w) = z$. De esto, se sigue que $f_2(y) = u_1' f_1(w) = f_2 u_1(w)$ y, por ser f_2 un monomorfismo, que $y = u_1(w)$. Por ende, tenemos que $x = u_2(y) = u_2 u_1(w)$ y, como $\mathrm{Ker}(u_2) = \mathrm{Im}(u_1)$, se obtiene que $x = 0$. Por lo tanto, f_3 es un monomorfismo.

(b) Se sigue de aplicar el principio de dualidad al inciso (a).

(c) Se sigue de (a) y (b).

□

Bibliografía

[Are17] E. B. Arentz-Hansen. “Classifying Subcategories in Quotients of Exact Categories”. Tesis de maestría. Norwegian University of Science and Technology, dic. de 2017.

[Büh10] T. Bühler. “Exact Categories”. En: *Expo. Math.* 28 (2010), págs. 1-69. DOI: 10.1007/BFb0058580.

[Flo13] M. Flores Galicia. “Categorías trianguladas”. Tesina de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México, abr. de 2013.

[Fre64] P. J. Freyd. *Abelian Categories*. Harper's Series in Modern Mathematics. Harper and Row, 1964.

[Kel90] B. Keller. “Chain Complexes and Stable Categories”. En: *Manuscripta Math.* 67 (1990), págs. 379-417. DOI: 10.1007/BF02568439.

[Mit65] B. Mitchell. *Theory of Categories*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1965.

[Nak18] H. Nakaoka. “A Simultaneous Generalization of Mutation and Recollement of Cotorsion Pairs on a Triangulated Category”. En: *Appl. Categor. Struct.* 26 (2018), págs. 491-544. DOI: 10.1007/s10485-017-9501-3.

[NP19] H. Nakaoka e Y. Palu. “Extriangulated Categories, Hovey Twin Cotorsion Pairs and Model Structures”. En: *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* 60.2 (2019). NP19, págs. 117-193.

[Pop73] N. Popescu. *Abelian Categories with Applications to Rings and Modules*. Academic Press, 1973.

[Pup62] D. Puppe. “Korrespondenzen in abelschen Kategorien”. En: *Math. Ann.* 148 (1962), págs. 1-30. DOI: 10.1007/BF01438388.

[Qui72] D. Quillen. “Higher Algebraic K-Theory”. En: *Higher K-Theories, Proceedings of the Conference, Battelle Memorial Institute, Seattle, Washington* 341 (1972), págs. 85-147. DOI: 10.1007/BFb0067053.

[San07] V. Santiago Vargas. “Elementos de álgebra homológica en categorías abelianas y el Teorema de Inmersión en la categoría de grupos abelianos”. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México, abr. de 2007.

[Šťo13] J. Šťovíček. *Exact Model Categories, Approximation Theory, and Cohomology of Quasi-Coherent Sheaves*. 2013. DOI: 10.48550/arXiv.1301.5206.

[Tan19] A. Tan Junhan. “The Freyd-Mitchell Embedding Theorem”. En: (2019). DOI: 10.48550/arXiv.1901.08591.

[TT90] R. W. Thomason y T. Trobaugh. *Higher Algebraic K-Theory of Schemes and of Derived Categories*. Vol. 3. The Grothendieck Festschrift. Birkhäuser, 1990.

[Ver96] J. L. Verdier. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*. Astérisque 239. Paris: Société mathématique de France, 1996. DOI: 10.24033/ast.364.

[Yon60] N. Yoneda. “On Ext and Exact Sequences”. En: *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* 8 (1960), págs. 507-576.