



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

**MÉTODOS ANALÍTICOS PARA LA OBTENCIÓN DE LA
CONFIGURACIÓN DEFORMADA EN VIGAS DE ACERO Y
DE CONCRETO**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Civil

P R E S E N T A

Arturo Corro Garcia

DIRECTOR DE TESIS

Ing. Marcos Molina Elvira



Ciudad Nezahualcóyotl, Estado de México, 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatorias

A Dios:

Por cuidarme y por cuidar a mi familia en todo momento, por darme salud, sabiduría, inteligencia, fuerzas y perseverancia para poder acabar mi carrera profesional, por estar conmigo en las buenas y en las malas situaciones y jamás dejarme solo, por guiarme en mi camino, por siempre brindarme su paz, amor y gozo, por apartarme de todo peligro, por darme la inteligencia para poder ingresar a la UNAM, por darme hasta el momento un día más de vida y porque por su gracia soy lo que soy.

A mis padres Cesar Corro y Reyna Garcia:

Por apoyarme económicamente durante toda mi trayectoria escolar, por siempre creer en mí y jamás abandonarme, agradezco los consejos, las enseñanzas y las sabias palabras que me dieron y que me ayudaron todos los días que estuve lejos de casa, por siempre estar pendiente de mi salud y de mi bienestar, por su apoyo incondicional en las decisiones que tomé, por su amor y cariño que siempre me ayudaron a seguir adelante y terminar mi carrera, y por siempre estar orgullosos de mí.

A mi hermano Gerardo Corro:

Por estar conmigo incondicionalmente, por cuidarme, protegerme y jugar conmigo desde pequeño, por tenerme paciencia cuando me enseñaba a tocar el teclado, por su cariño y amor, por enseñarme y aconsejarme sobre las lecciones de la vida, por inspirarme a seguir estudiando, por ser un gran amigo, hermano, y por ser un ejemplo a seguir.

A mi primo Gustavo Garcia:

Por jugar conmigo cuando éramos unos niños, por acompañarme siempre a la escuela, por sus consejos, por las bromas, risas, travesuras y alegrías que compartimos, por siempre invitarme a las ferias del pueblo, por ver películas y jugar en las albercas, agradezco por siempre ser mi compañero de aventuras, por ser mi confidente, por ser mi primo, amigo y hermano durante 20 grandiosos años.

A mis abuelos paternos Bernardo Corro y Otilia Barrera:

Por su cariño y amor, por consentirme desde pequeño, por sus consejos sabios que guiaron mi camino y me impulsaron a seguir con mis estudios, por apoyarme y creer en mi incondicionalmente y por siempre estar orgullosos de mí.

A mis abuelos maternos Gustavo Garcia y Judith Ayala:

Por su apoyo incondicional, por su gran cariño y amor, por sus consejos y sus enseñanzas que me ayudaron a crecer y ser mejor como persona, por los buenos hábitos que me enseñaron desde pequeño, por alegrar mi vida y por siempre estar junto a mí.

Agradecimientos

A la UNAM:

Por permitirme ser parte de la máxima casa de estudios, por los conocimientos, las aventuras, las experiencias, las aptitudes y las enseñanzas que adquirí dentro de esta grandiosa institución, por permitirme conocer personas extraordinarias, desde maestros hasta compañeros de clases, agradezco por la gran satisfacción y orgullo que sentí durante todo mi trayecto profesional por formar parte de la máxima casa de estudios.

A la FES Aragón:

Por brindarme la oportunidad de ser parte de la extraordinario comunidad que conforma esta inigualable institución, por brindarme la oportunidad de conocer amigos con una excelente calidad humana que siempre me acompañaron durante toda mi carrera profesional, por los conocimientos, habilidades y destrezas que adquirí dentro de esta extraordinaria institución y que me ayudarán cuando ejerza como ingeniero civil en el campo laboral, por los conocimientos, consejos, enseñanzas y exhortaciones de los profesores de imparten clases dentro de esta institución y que me inspiraron a siempre seguir adelante y perseverar hasta lograr mi meta y agradezco por las inigualables experiencia que tuve desde que inicie con mis estudios dentro de esta bella institución.

Al ingeniero Marcos Molina Elvira:

Por permitirme ser su alumno y adquirir los conocimiento que impartió durante todas sus clases, por ser la mayor inspiración para enfocarme en el área de la ingeniería estructural, por sus clases que fueron de gran ayuda para fortalecer mis conocimientos y adquirir nuevas habilidades en mi carrera profesional, por siempre aclarar las dudas que me surgían durante mi carrera, por los sabios consejo que me brindo y que fuero de gran ayuda, por impartir sus clase de una manera clara y entendible, ya que gracias a la comprensión de sus clase, pude aclara las dudas que tenía, por su gran apoyo que recibí en la elaboración de esta tesis, por su excelente calidad humana, por su amistad, por su humildad y humanidad como ingeniero y sobre todo, por ser el mayor ejemplo a seguir.

Al Ingeniero Miguel Ángel Pedraza Álvarez:

Por su valiosa amistad, por los sabios consejos que me dio en el área de la ingeniería estructural, por su excelente calidad humana, por haber sido mi mayor influencia en la elaboración de esta tesis, por apoyarme incondicionalmente durante el tiempo que desarrolle esta tesis, por inspirarme a ser mejor cada día como ingeniero y como persona, por enseñarme con su ejemplo, por ser siempre humilde a pesar del gran conocimiento que tenía, por siempre brindarme confianza y enseñarme a creer en mí, pero sobre todo, le agradezco por ser una gran inspiración como ingeniero civil.

Antecedentes

Es de gran importancia entender y comprender los métodos numéricos que existen para calcular las deformaciones que se pueden presentar en elementos estructurales, ya que el análisis estructural es la base para que, en temas posteriores, se pueda facilitar el entendimiento de materias como diseño estructural y dinámica estructural. Estas materias tienen gran importancia en el área de la ingeniería estructural, ya que permiten la formación de ingenieros capaces de diseñar todos los elementos estructurales que puedan conformar una obra de infraestructura.

Es de gran importancia que al leer la presente tesis, se tengan conocimientos sólidos en las materias de álgebra, cálculo diferencial e integral, estática y estructuras isostáticas, ya que en los métodos numéricos enseñados en la presente tesis, requiere que el lector conozca los distintos tipos de apoyos, las reacciones y los grados de libertad presentes en cada apoyo, también se requiere que el lector pueda calcular las reacciones y las ecuaciones de momentos flexionantes presentes en los elementos estructurales tipo viga. Todos estos conocimientos son enseñados en la materia de estructuras isostáticas, por lo que es recomendable que se dominen estos temas.

Hay diversos libros escritos acerca del análisis estructural, que han sido de gran ayuda para el entendimiento y la elaboración de la presente tesis, entre los libros que pueden mencionarse se destacan los siguientes:

- Análisis Estructural de Gonzáles Cuevas
- Análisis Estructural de Aslam Kassimali
- Análisis de estructuras de Jack C. McCormac
- Análisis Estructural de Hibbeler

Se recomienda leer estos libros para que se tenga un conocimiento más amplio en el análisis estructural y se tenga el conocimiento adecuado para calcular desplazamientos en todo tipo de elementos estructurales como vigas, armaduras y marcos.

Introducción

El contenido de la presente tesis se enfocará principalmente en los diferentes métodos analíticos para la obtención de los diferentes desplazamientos que se presentan en los elementos estructurales tipo viga que son sometidas a diferentes sistemas de cargas.

Se realizarán ejercicios en donde el módulo de elasticidad y el momento de inercia es constante en toda la longitud de la viga, pero también se realizarán ejercicios donde se tengan vigas de concreto y de acero a los cuales se les calculará el valor del módulo de elasticidad y el momento de inercia.

En el capítulo I se presenta un resumen explicando el significado de lo que es un desplazamiento o una deformación en un elemento estructural, también se trata de explicar el porqué es importante para un ingeniero civil conocer el valor de estos desplazamientos en la rama de la ingeniería estructural, como nos afectan estos desplazamientos en nuestras estructuras y que consecuencias podríamos tener como ingenieros civiles si ignoramos estos fenómenos.

En el capítulo II se presentará la deducción de los principios energéticos del análisis estructural en donde explicaremos que es la energía interna y externa de deformación elástica y como calcularla, también se realizarán diferentes ejercicios donde se explicará a detalle cómo se calcula la energía interna de deformación elástica en elementos estructurales tipo viga que son sometidas a diferentes sistemas de cargas.

En el mismo capítulo II se explicará y se realizarán ejercicios utilizando un método energético para el cálculo de deformaciones, este método se le conoce como "El Teorema de Castigliano", el cual calcula deformaciones o desplazamientos verticales en un punto específico de un elemento estructural, derivando parcialmente la energía total de deformación interna de un sistema estructural.

De igual manera se explicará a detalle el procedimiento matemático para calcular en cualquier punto de un elemento estructural un desplazamiento, utilizando otro método energético el cual se le conoce como "El Principio del Trabajo Virtual". También se realizarán ejercicios utilizando este método, explicando por medio de una serie de pasos detallados el procedimiento que se requieren para la obtención de las deformaciones causadas por los momentos flexionantes (deformación por flexión) y las deformaciones causadas por la fuerza cortante (deformación por cortante) y cómo influye la deformación por cortante en un elemento estructural tipo viga.

En el capítulo III de la presente tesis se enfocará a la enseñanza de un método que nos ayudará a calcular una ecuación con la cual podremos conocer el desplazamiento vertical en cualquier punto de nuestro elemento estructural (viga) y así conocer su configuración deformada, este método se le conoce como "El Método de la Doble Integración". Se realizarán ejercicios al igual que en los otros capítulos explicando el procedimiento que se requiere para calcular la ecuación del desplazamiento vertical y la ecuación de rotación para conocer la configuración deformada y se calcularán los desplazamientos verticales máximos que se encuentran en cada elemento estructural.

Finalmente, en el capítulo IV se enseñará el método de las rigideces o también conocido como el método de los desplazamientos, con el cual podremos resolver estructuras hiperestáticas. En este capítulo se realizarán diversos ejercicios detallados explicando el procedimiento matemático que conlleva la ejecución del método de las rigideces para que el lector pueda dominar el método más utilizando en la práctica profesional para la resolución de estructuras hiperestáticas y por último se darán las conclusiones de todo lo visto en los capítulos de la presente tesis.

Justificación

Esta tesis aportará en el lector como calcular deformaciones en elementos estructurales tipo viga, donde el modulo de elasticidad y el momento de inercia es constante en toda la longitud de esta, de igual manera se calcularán deformaciones en vigas de concreto y de acero sometidas a diferentes sistemas de carga. Así mismo, beneficiará al lector para retroalimentarse en temas que se impartieron en las clases de estática y de estructuras isostáticas.

Objetivo

Estudiar las nociones necesarias del comportamiento de una viga sometida a distintas cargas, la importancia de conocer las condiciones de frontera presentes en los distintos apoyos para identificar si los resultados obtenidos son correctos, conocer cómo influye el modulo de elasticidad y el momento de inercia de una viga en las deformaciones que presenta, se pretende que el lector pueda comprender las deformaciones de una viga y pueda buscar soluciones para disminuirlas. De igual manera, se busca que el lector pueda entender el procedimiento matemáticos de los diferentes métodos numéricos que se utilizan para el cálculo de los valores reales de las deformaciones en vigas y así mismo desarrolle objetividad para extrapolar ese conocimiento a softwares de ingeniería estructural como ETABS, SAP2000, STAAD PRO, entre otros.

Alcances

En esta tesis se limitará a calcular el valor de las deformaciones por flexión en vigas isostáticas e hiperestáticas con sección constante, de concreto y de acero, utilizando diferentes métodos en los cuales se explicará a detalle paso a paso el procedimiento matemático que conlleva utilizar cada uno de los métodos.

Contenido

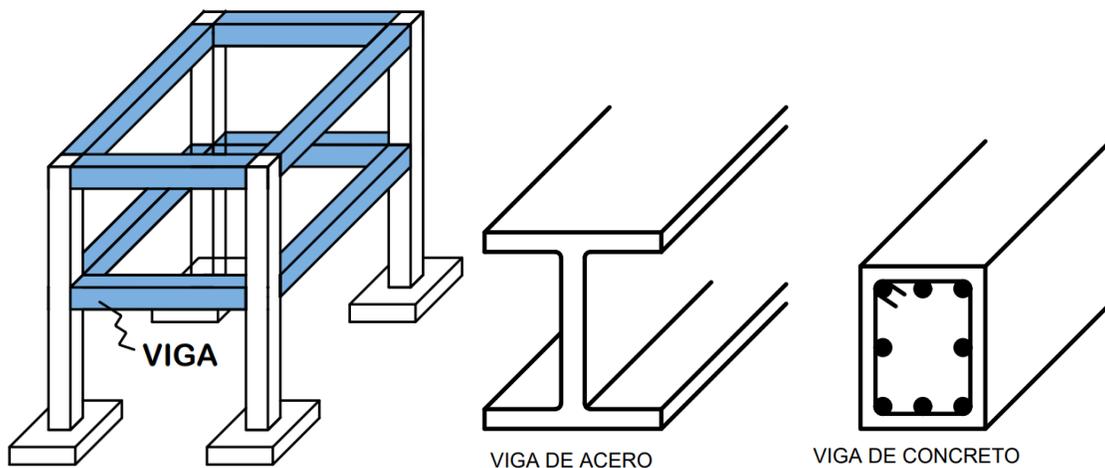
I. Marco teórico	10
II. Cálculo de deformaciones por métodos energéticos	20
2.1 Principios energéticos del análisis estructural	20
2.2 Energía externa generada por una carga axial	20
2.3 Energía externa generada por un momento flexionante	23
2.4 Energía interna en un elemento tipo barra bajo carga axial	25
2.5 Energía interna en un elemento sujeto a flexión	26
2.6 Cálculo de la energía interna de deformación elástica en vigas	27
2.7 Teorema de Castigliano	87
2.8 Principio del trabajo virtual	210
2.8.1 Deformación por flexión	210
2.8.2 Deformación en vigas causada por fuerza cortante	255
III. Cálculo de deformaciones por el método de la doble integración	309
IV. Método de las rigideces	377
4.1 Grados de libertad	379
4.2 Rigidez lineal	382
4.3 Rigidez angular	389
4.4 Construcción de la matriz de rigidez	395
4.5 Deducción de las fuerzas y los momentos de empotramiento	400
Conclusiones	464
Referencias	466

I. MARCO TEÓRICO

QUE ES UNA VIGA

La viga es un elemento estructural horizontal lineal que trabaja principalmente a flexión y que se ocupa en la construcción de diferentes obras de infraestructura como: puentes, edificios, naves industriales, aeropuertos, escuelas, casas residenciales, etc.

Estos elementos estructurales pueden estar elaborados de diferentes materiales como: madera, concreto y acero, pero en la construcción de obras de infraestructura en México, es más común utilizar vigas de concreto y acero.



VIGA DE CONCRETO

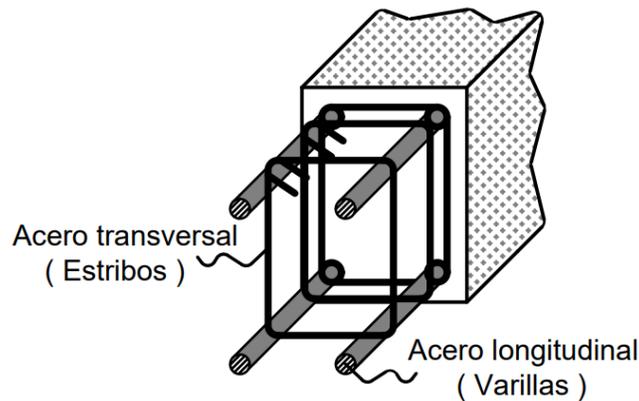
Las vigas que se construyen con concreto, son reforzadas con acero para lograr una resistencia en conjunto, ya que el concreto tiene una alta capacidad de soportar o de resistir fuerzas a compresión, pero tiene escasa capacidad para soportar fuerzas a tensión, por lo que a las vigas de concreto se les coloca acero para soportar las fuerzas a tensión y así, una viga de concreto pueda ser capaz de soportar las fuerzas a compresión y tensión que se generan a someter dicha viga a un sistema de cargas.

Una viga de concreto está conformada por dos tipos de acero: el acero longitudinal (varillas) y el acero transversal (estribos).

El acero longitudinal (varillas), es diseñado para resistir los momentos flexionantes a los cuales este sometida la viga, estos momentos flexionantes provoca que la viga tenga esfuerzos de compresión y de tensión, por lo que el acero longitudinal, se diseña para soportar estos esfuerzos que el concreto no puede resistir, adicionalmente el acero longitudinal permite que la viga pueda flexionarse sin que

se triture el concreto y además puede disipar de manera controlada, la energía que se introduce en la estructura a causa de un terremoto.

El acero transversal que también se le conoce como estribos, es diseñado para resistir la fuerza cortante que se genera en una viga al ser sometido a un sistema de cargas, de igual manera, el acero transversal permite que el acero longitudinal mantenga su posición, y adicionalmente, evita que las barras de acero longitudinal sufran un pandeo cuando las fuerzas excesivas de compresión actúan sobre la viga, los estribos minimizan las fisuras y las grietas que son causadas por la fuerza cortante.



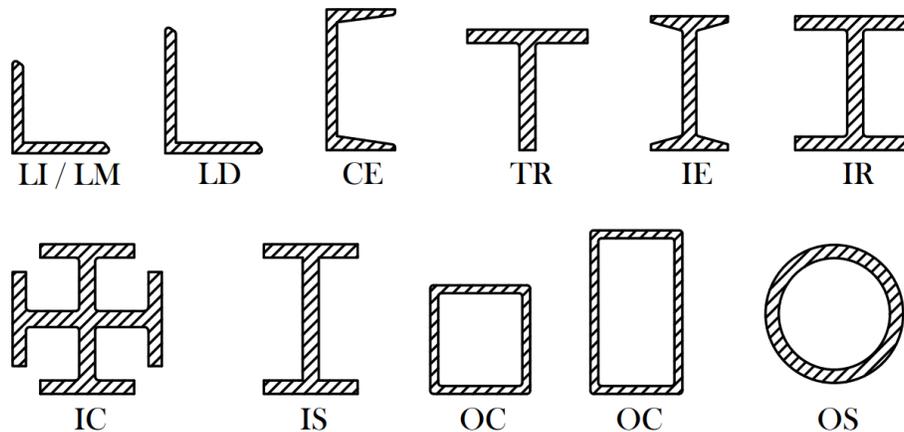
VIGA DE ACERO

Las vigas de acero son barras horizontales fabricadas en su totalidad con acero, las cuales son diseñadas para soportar las cargas a las que este sometida, estos elementos estructurales de acero brindan mayor resistencia en comparación con las vigas de concreto.

Las vigas de acero son elementos fundamentales en la construcción de obras de infraestructura por la gran capacidad que tiene al resistir esfuerzos a flexión y a tensión, también por su gran capacidad de carga y por su ductilidad que permite que tenga deformaciones mínimas al estar sometida a un sistema de cargas sin presentar fisuras o grietas.

Las vigas de acero se diseñan para soportar o resistir las flexiones y las fuerzas cortantes que provocan las cargas a las cuales este sometida, esta resistencia depende de las propiedades mecánicas (esfuerzo de fluencia, módulo de elasticidad) y de las propiedades geométricas (dimensiones de la sección transversal, momento de inercia).

Existe un manual donde viene especificados los distintos tipos de acero, las distintas designaciones, las distintas propiedades mecánicas y los diferentes perfiles de acero como: LI/LM, LD, CE, TR, IE, IR, IC, IS, OC, OS, CF y ZF. Cada perfil de acero tiene una variedad de propiedades geométricas (dimensiones), las cuales vienen especificadas en el Manual de Construcción de Acero, elaborado por el Instituto Mexicano de la Construcción de Acero (IMCA).



TIPO DE APOYOS

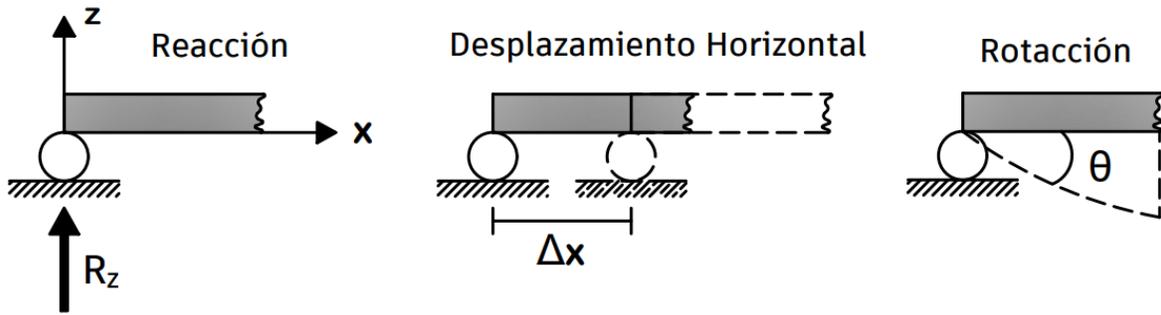
En estructuras planas, existen diferentes tipos de apoyos, pero entre los más comunes son los móviles, fijos y empotrados, estos apoyos se caracterizan por los grados de libertad que presentan. Los grados de libertad son los desplazamientos permitidos en cada apoyo frente a fuerzas actuantes.

Las vigas pueden estar sometidas a tres tipos de fuerzas: fuerzas verticales (Fuerzas cortantes), fuerzas horizontales (fuerzas axiales) y momentos flexionantes. Para que una fuerza sea axial, deberá ser aplicada en el eje neutro de la viga.

Cada apoyo presenta una fuerza como reacción que impide el desplazamiento en la dirección de dicha fuerza.

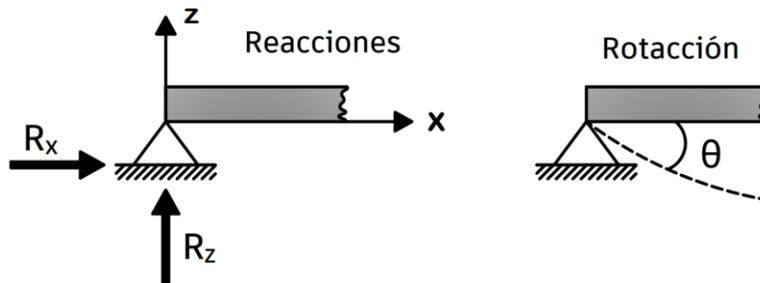
APOYO MOVIL

El apoyo móvil tiene como reacción una fuerza vertical (R_z) que impide el desplazamiento vertical, pero al no tener una reacción horizontal, este podrá tener un desplazamiento horizontal a lo largo del eje longitudinal de la viga, y al no tener una reacción de momento, este podrá permitir tener una rotación, por lo que un apoyo móvil tiene dos grados de libertad (2 GDL).



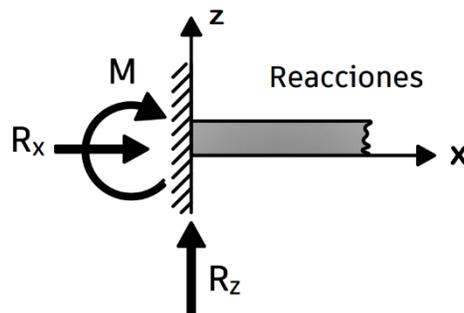
APOYO FIJO

El apoyo fijo tiene como reacción una fuerza vertical (R_z) que impide el desplazamiento vertical y una fuerza horizontal (R_x) que impide el desplazamiento horizontal, al no tener una reacción de momento, este podrá permitir una rotación, por lo que el apoyo fijo tiene un grado de libertad (1 GDL).



APOYO EMPOTRADO

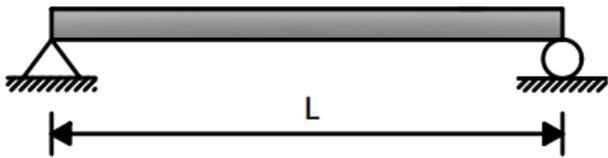
El apoyo empotrado tiene como reacciones, una fuerza vertical (R_z), horizontal (R_x) y un momento (M), que impiden cualquier desplazamiento, por lo que un apoyo empotrado no presenta grados de libertad.



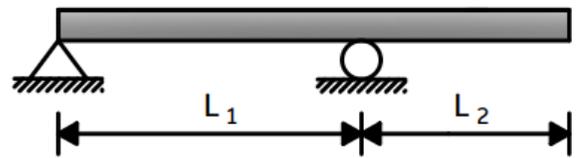
TIPO DE VIGAS

Existen distintos tipos de vigas, las cuales dependen de que tipo de combinación de apoyos tengan, las vigas más comunes son:

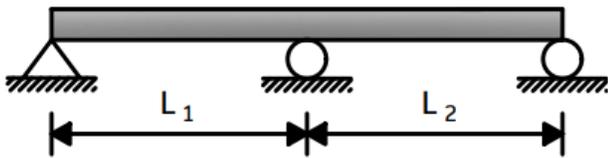
Viga simplemente apoyada



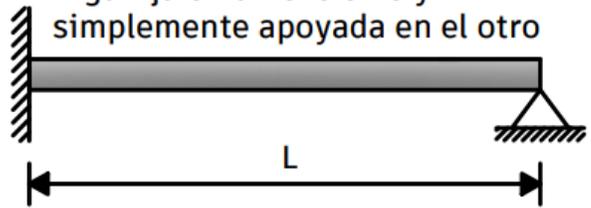
Viga con voladizo



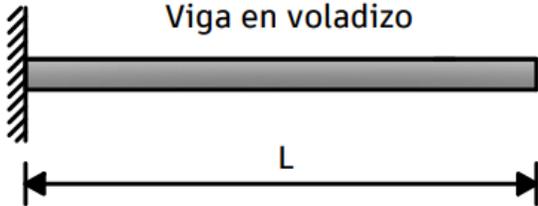
Viga continua



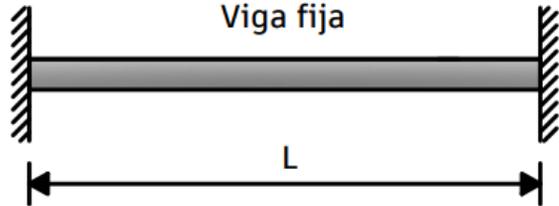
Viga fija en un extremo y simplemente apoyada en el otro



Viga en voladizo

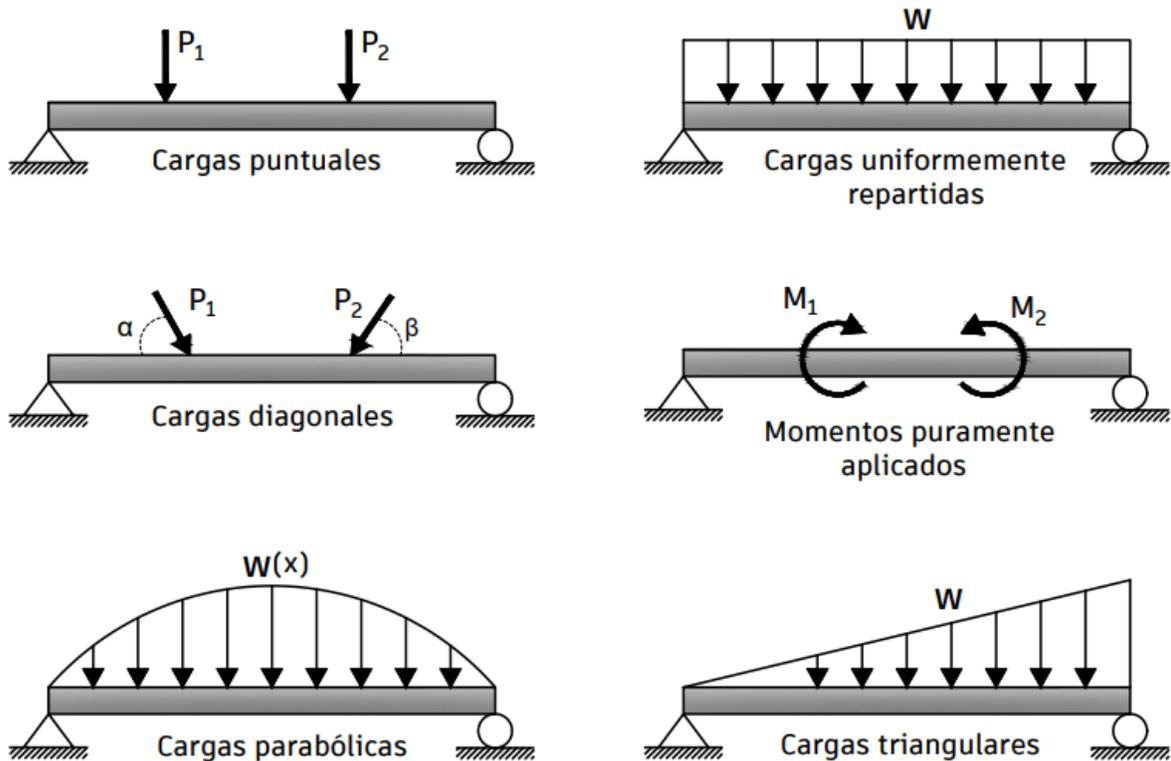


Viga fija



TIPO DE CARGAS

De igual manera, existen diferentes tipos de cargas a las que puede estar sometida una viga, como lo son:



VIGAS ISOSTÁTICAS E HIPERESTÁTICAS

En un análisis estructural, se pueden encontrar dos diferentes tipos de vigas: isostáticas e hiperestáticas. Esta división depende de las condiciones de apoyos que presente el elemento que se esté resolviendo. Las vigas que presenten un número inferior o igual a tres incógnitas, se les conoce como vigas isostáticas, las cuales se pueden resolver utilizando las ecuaciones del equilibrio.

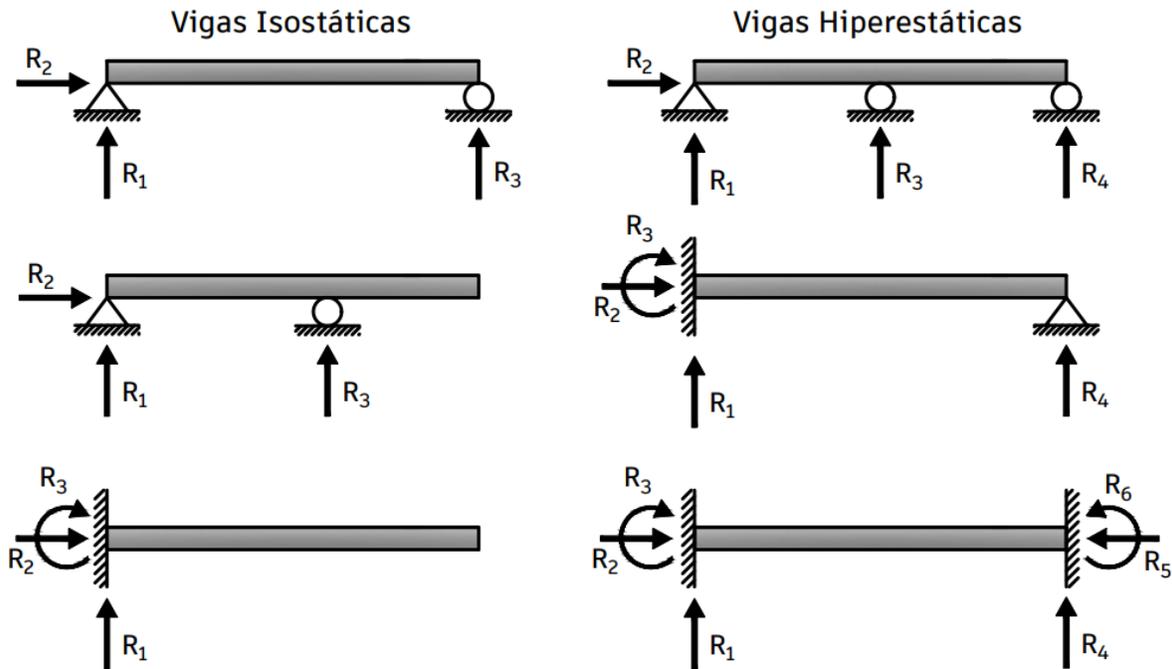
$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

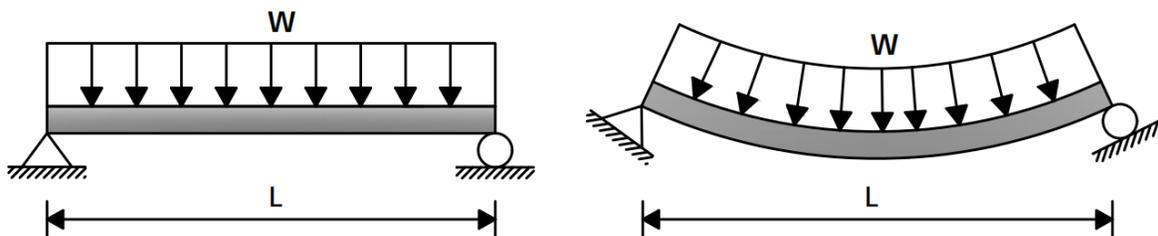
Las vigas que presentan más de tres incógnitas, se les conoce como vigas hiperestáticas, estas estructuras solo pueden ser resueltas utilizando otros métodos numéricos, ya que al tener más incógnitas que ecuaciones del equilibrio, es imposible resolverlas utilizando dichas ecuaciones. Los métodos numéricos que se utilizan para resolver estructuras hiperestáticas son: método de las fuerzas o también conocido como método de las flexibilidades y el método de los desplazamientos o también

conocido como método de las rigideces, el método que más se utiliza en la actualidad es el método de las rigideces, algunos programas de computadora utilizan este método para la solución de estructuras hiperestáticas complejas.



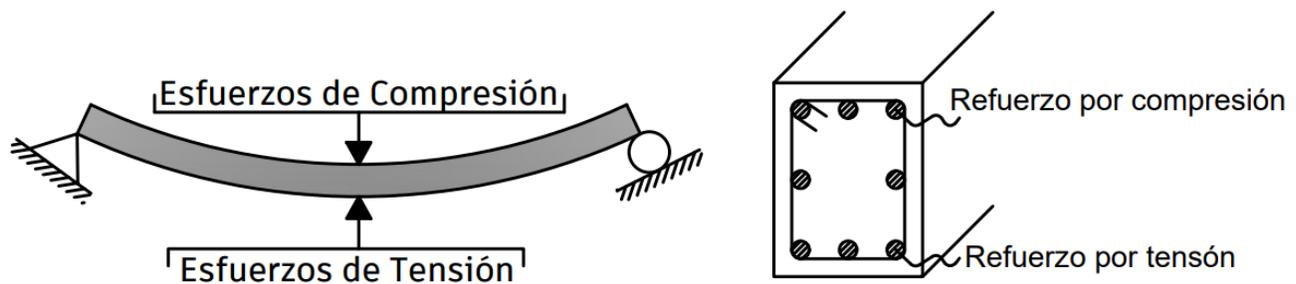
DEFORMACIÓN EN VIGAS

En elementos estructurales tipo viga, al ser sometidos a un sistema de cargas, ya sea una carga puntual, triangular o uniformemente repartida, estas provocarán que haya una deformación en la viga. En algunos textos a las deformaciones se les llama deflexiones, desplazamientos, flexiones o flechas y se representan con diferente simbología como: δ , Δ , v , y , u . En la presente tesis a las deformaciones se les llamará desplazamientos verticales y se representarán con el símbolo (Δ_z).



Las deformaciones que se presentan en una viga al ser sometida a un sistema de cargas provocarán que haya esfuerzos de compresión en la parte superior y esfuerzos de tensión en la parte inferior de la viga.

En el diseño estructural de una viga de concreto, se hace el cálculo del área de acero necesario que estará colocado en la parte inferior o en el lecho inferior de la viga, para resistir los esfuerzos de tensión, de igual manera se hace el cálculo del área de acero necesario colocado en la parte superior o en el lecho superior, que resistirá los esfuerzos de compresión.



La razón por la cual es importante realizar el cálculo del valor de las deformaciones o deflexiones que sufren los elementos estructurales bajo la acción de cargas, es que existe unas normas que se les conoce como Las Normas Técnicas Complementaria, que nos especifica que por motivos estéticos y de seguridad, la deformación de un elemento estructural no debe exceder el límite de la deformación permisible, para el caso de una viga, la deformación permisible es una cierta fracción su claro. Si las vigas de un edificio presentaran deformaciones excesivas, esto provocaría una mala apariencia, causaría una sensación de inseguridad a los ocupantes del edificio, las deformaciones excesivas producirían graves daños en otros elementos estructurales o no estructurales, por lo que se hace un diseño estructural para que las deformaciones de una viga no excedan las deformaciones permisibles.

El Reglamento de Construcciones del Distrito Federal nos dice que, para un diseño estructural, se debe de cumplir el estado límite de falla y el estado límite de servicio. Se considera como estado límite de falla cualquier situación que corresponda al agotamiento de la capacidad de carga de cualquier componente de la estructura, incluyendo la cimentación, o al hecho de que ocurran daños irreversibles que afecten significativamente la resistencia de la estructura a causa de la aplicación de cargas nuevas.

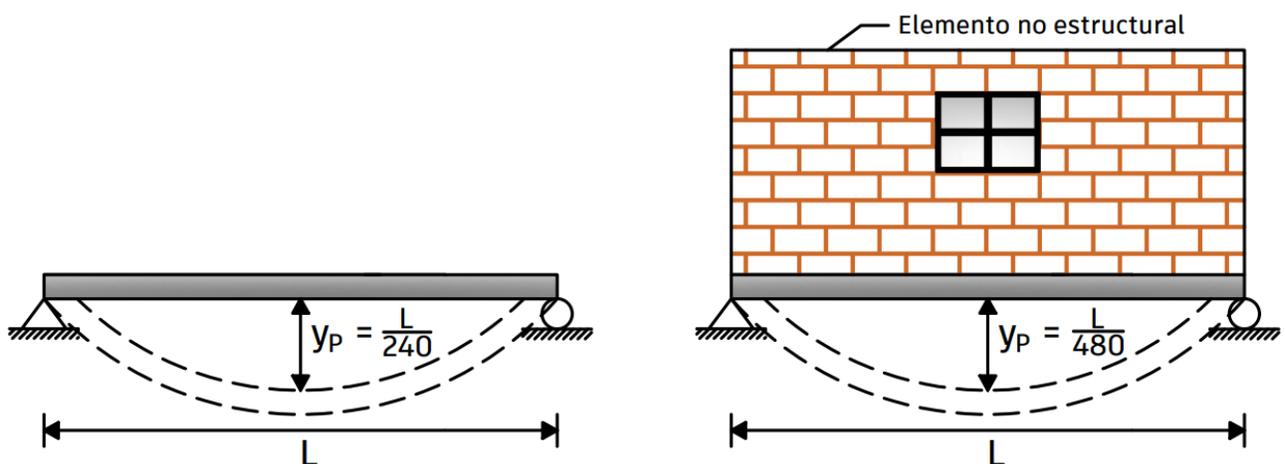
En las Normas Técnicas Complementarias vienen establecidos los estados límite de falla más importantes para cada material y tipo de estructura, si se superan estos límites de falla, podrían presentarse fallas irreversibles en una estructura, lo que provocaría el colapso de esta.

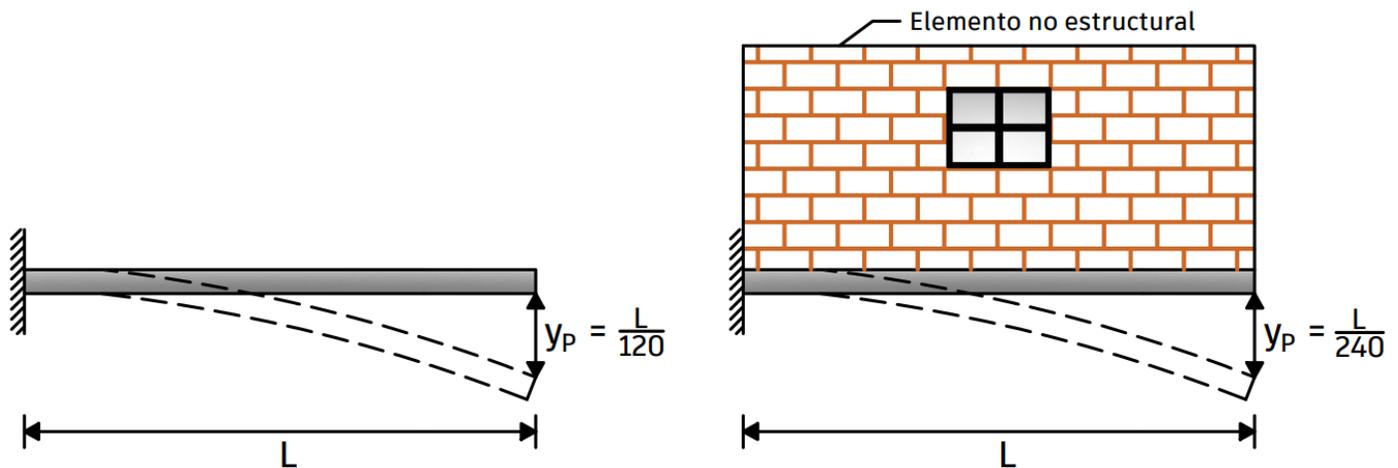
Se considera como estado límite de servicio, la ocurrencia de desplazamientos, agrietamientos, vibraciones o daños que afecten el correcto funcionamiento de la edificación, pero que no perjudiquen su capacidad para soportar cargas. Los valores de estos límites se les conoce como deformaciones permisibles y vienen especificados en las Normas Técnicas Complementarias.

Las Normas Técnicas Complementarias nos dicen que el desplazamiento permisible (y_p) en vigas que no estén cargando elementos no estructurales como muros de mampostería, será igual al claro entre 240, incluyendo los efectos a largo plazo. En miembros en los cuales sus desplazamientos afectan a elementos no estructurales, como muros de mampostería, que no sean capaces de soportar desplazamientos apreciables, el desplazamiento permisible medido después de colocar los elementos no estructurales será igual al claro de la viga entre 480.

El desplazamiento permisible o el estado límite de falla en vigas en voladizo sin elementos no estructurales será igual a el claro de la viga entre 120 y el desplazamiento permisible en vigas en voladizo con elementos no estructurales será igual a el claro de la viga entre 240.

Deformaciones Permisibles (y_p)





Para cumplir con el estado límite de servicio, el desplazamiento total calculado debe ser menor o igual al desplazamiento permisible:

$$y_{TOTAL} \leq y_{PERMISIBLE}$$

El desplazamiento total calculado deberá de incluir el efecto por agrietamiento, los factores de carga y la deformación a largo plazo, todos estos factores vienen especificados en las normas técnicas complementarias, los cuales solo se toman en cuenta para el diseño de vigas de concreto, en vigas de acero no se toman en cuenta estos factores. El diseño estructural de vigas tomando en cuenta estos factores, son parte de otro tema, por lo que en la presente tesis solo se enfocará en los métodos que se utilizan para calcular un desplazamiento o una deformación.

Es fundamental disponer de métodos que permitan el cálculo de las deformaciones, por lo que en la presente tesis se trata de enseñar a través de ejercicios, el procedimiento matemático que se lleva a cabo para calcular deformaciones utilizando diferentes métodos. Como se dijo con anterioridad, es importante conocer el valor de las deformaciones de una viga, ya que por motivos estéticos y de seguridad las deformaciones calculadas no deben de ser mayores a las deformaciones permisibles.

Existen métodos como el teorema de Castigliano y el principio del trabajo virtual que te permiten calcular una deformación en un punto específico, también existe un método que te permite calcular una ecuación donde se podrá conocer una deformación en cualquier punto de la longitud de la viga, de igual manera existe un método que permite solucionar vigas hiperestáticas y que a la vez te permite conocer los desplazamientos presentes en una viga. Se podrá observar en el trascurso de la presente tesis, que las deformaciones de una viga están en función de los momentos producidos por las cargas a las que es sometida la viga que se esté resolviendo. Todos los métodos antes mencionados vienen presentes en esta tesis.

II. CALCULO DE DEFORMACIONES POR MÉTODOS ENERGÉTICOS

2.1 PRINCIPIOS ENERGÉTICOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

En esta sección se aprenderá a calcular la deformación de un elemento estructural, es decir, se calculará la deformación de una viga basándonos en consideraciones energéticas, se conocerá y calculará la energía que se requiere para deformar un miembro estructural (energía externa) y de igual manera se conocerá la energía que se desarrolla dentro del mismo miembro estructural al deformarse (energía interna).

El calculo de deformaciones por métodos energéticos están basados en el principio de la conservación de la energía: "La energía no se crea ni se destruye, solo se transforma".

En este apartado se hará referencia a la frase anterior. Se sabe que el trabajo externo o la energía externa producida por fuerzas que actúan sobre un cuerpo, se transforman en trabajo interno o energía interna que se le conoce como energía de deformación elástica.

La energía externa que se genera a causa de las fuerzas externas (P_0) aplicada a un sistema estructural, será igual a la energía interna producto de la deformación del elemento que compone el mismo sistema estructural. Esto en resumidas palabras quiere decir, que la acción será igual a la respuesta (véase la ecuación 2.1).

$$U_e = U_i \quad (2.1)$$

Donde:

$U_e =$ Energía externa (fuerzas sobre el sistema estructural).

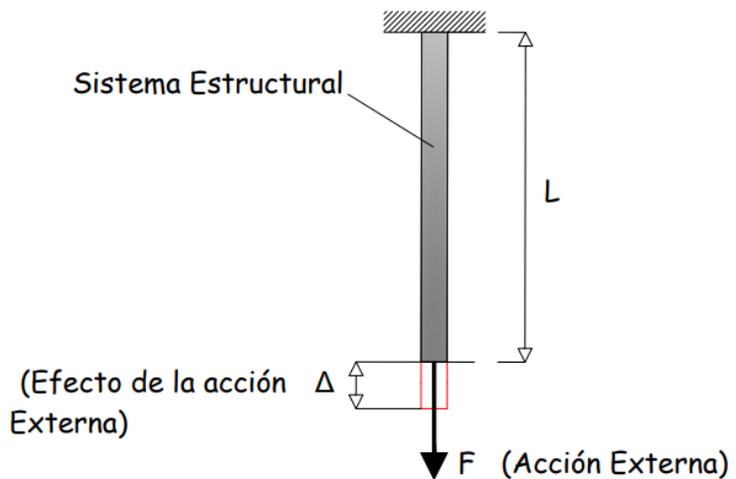
$U_i =$ Energía interna (deformación de elementos que componen el sistema estructural).

2.2 ENERGÍA EXTERNA GENERADA POR UNA CARGA AXIAL

Sabemos que el trabajo realizado por una fuerza que se desplaza a lo largo de un eje es igual a la magnitud de la fuerza por la distancia recorrida. Esto quiere decir que el trabajo realizado para producir un alargamiento diferencial (dU_e) es igual a la magnitud de la fuerza por un alargamiento diferencial en x (véase la ecuación 2.2).

$$dU_e = Fdx \quad (2.2)$$

Supongamos que se aplica una fuerza (F) a una barra con una longitud (L), esta carga irá aumentando uniformemente desde un valor 0 hasta un valor (P). Cuando la carga tiene un valor de 0 no hay ninguna deformación, pero conforme la carga va aumentando la deformación igual irá aumentando linealmente hasta llegar a una deformación (Δ), esto lo podemos interpretar de la siguiente manera:



Cuando:

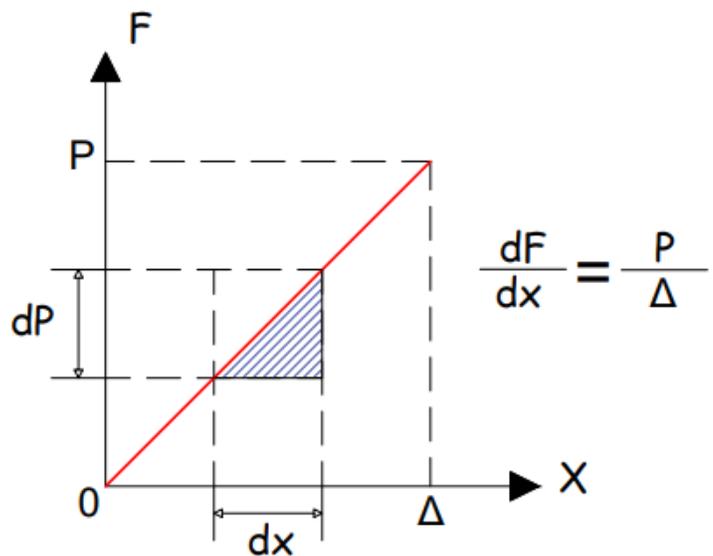
$$\text{Fuerza } (F) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Desplazamiento } (x) = 0$$

$$\text{Fuerza } (F) = P \quad \rightarrow \quad \text{Desplazamiento } (x) = \Delta$$

Dicho lo anterior podemos decir que la barra tiene un comportamiento elástico lineal, por lo tanto, podemos hacer una gráfica donde ilustremos que conforme va aumentando la fuerza, el desplazamiento de igual manera aumentará.

Si en la gráfica, yo quisiera aumentar solamente el desplazamiento en un tamaño diferencial x (dx), ¿cuál sería el diferencial F que tendría que

asignar (df)? la respuesta vendría siendo la pendiente de la recta la cual sería $\left(\frac{P}{\Delta}\right)$ y la fórmula quedaría expresada de la siguiente manera:



$$\frac{dF}{dx} = \frac{P}{\Delta} \quad (2.3)$$

Entonces a lo que llegamos es lo siguiente:

De la ecuación 2.3, se despeja el diferencial de la fuerza y después se integra la ecuación y con esto se obtendrá una ecuación (2.4) en la cual se podrá colocar cualquier desplazamiento y obtendrá la fuerza necesaria para tener dicho desplazamiento.

$$dF = \frac{P}{\Delta} dx \quad \rightarrow \quad \int dF = \int \frac{P}{\Delta} dx \quad \rightarrow \quad F = \frac{P}{\Delta} x \quad (2.4)$$

Para comprobar si la ecuación es correcta utilizaremos las condiciones iniciales mencionadas anteriormente:

Fuerza (F) = 0 " cuando el " Desplazamiento (x) = 0

$$F = \frac{P}{\Delta} x \quad \therefore \quad F = \frac{P}{\Delta} (0) \quad \rightarrow \quad F = 0$$

Fuerza (F) = P " cuando el " Desplazamiento (x) = Δ

$$F = \frac{P}{\Delta} x \quad \therefore \quad F = \frac{P}{\Delta} (\Delta) \quad \rightarrow \quad F = P$$

Ya realizada la comprobación, sustituye la ecuación de la fuerza (ecuación 2.4) en la ecuación 2.2 y después se integra la ecuación para conocer la ecuación de la energía externa (ecuación 2.5) que se genera desde un valor 0 hasta un valor Δ, para ello, se debe de resolver una integral definida que va desde 0 hasta Δ.

$$dU_e = F dx$$

$$dU_e = \left(\frac{P}{\Delta} x \right) dx$$

$$\int dU_e = \int \left(\frac{P}{\Delta} x \right) dx \quad \rightarrow \quad U_e = \int_0^{\Delta} \left(\frac{P}{\Delta} x \right) dx$$

$$U_e = \left[\frac{P}{\Delta} \left(\frac{x^2}{2} \right) \right]_0^{\Delta} = \frac{P}{\Delta} \left(\frac{(\Delta)^2}{2} \right) - \frac{P}{\Delta} \left(\frac{(0)^2}{2} \right)$$

$$U_e = \frac{1}{2} P \Delta \quad (2.5)$$

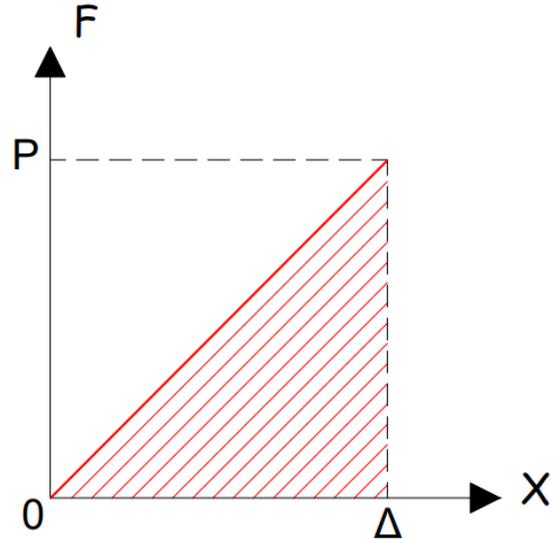
Una manera más fácil para calcular la energía externa que se genera al aplicar una fuerza a un elemento estructural, es con la ayuda de la gráfica. En lugar de realizar todo el cálculo anterior, solo se calcula el área del triángulo que se forma en la siguiente grafica.

$$U_e = \text{Área del Triangulo} = \frac{b \times h}{2}$$

$$U_e = \frac{P(\Delta)}{2}$$

$$U_e = \frac{1}{2} P \Delta$$

Con esto podemos concluir que, la energía externa generada por una carga "P" que deforma a un elemento tipo barra en una magnitud " Δ ", es igual al área del triángulo de la gráfica fuerza (F)-deformación (Δ).



2.3 ENERGÍA EXTERNA GENERADA POR UN MOMENTO FLEXIONANTE

Supóngase que se tiene una viga simplemente apoyada en los extremos, a la cual se le aplica un grupo de cargas gravitacionales, esta viga tiene una distancia (L), ahora supóngase que se toma un elemento diferencial de esta viga y se le aplican unos momentos flexionantes, se puede observar en la figura 2.1 que al aplicarle los momentos flexionantes, en la parte de superior del elemento se tienen fuerzas de compresión y en la parte de inferior se tienen fuerzas de tensión, al flexionarse se genera una curva en el eje neutro, si a esta curva de deflexión trazamos unas rectas tangente obtenemos un ángulo, que se le conoce como ángulo de rotación.

Es claro observar que cuando no se le aplica un momento flexionante ($M' = 0$) a el elemento diferencial, este no se deflexiona, es decir, no hay una ninguna curvatura por lo tanto no existe ningún ángulo de rotación ($\theta' = 0$), pero cuando aplicamos un momento al elemento ($M' = M$) esto provocará que el elemento estructura tenga una deflexión, por lo tanto, tendremos un ángulo de rotacion ($\theta' = \theta$).

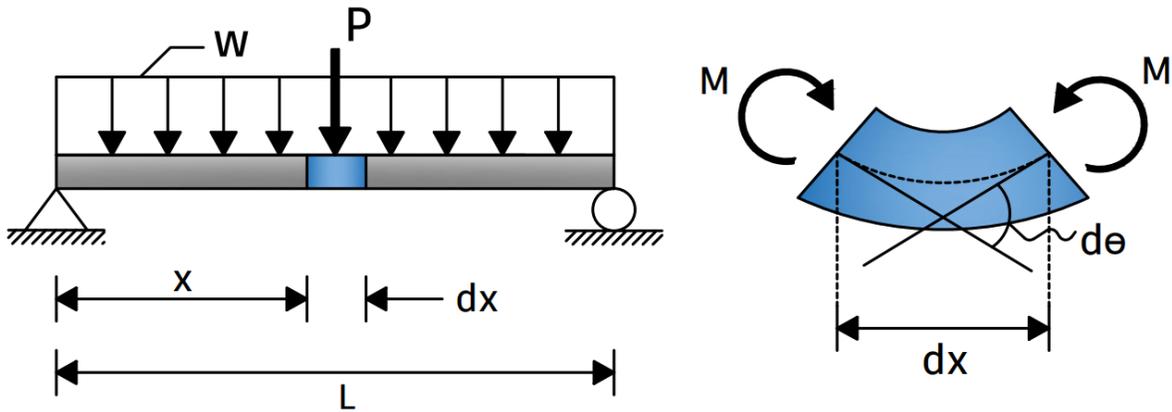
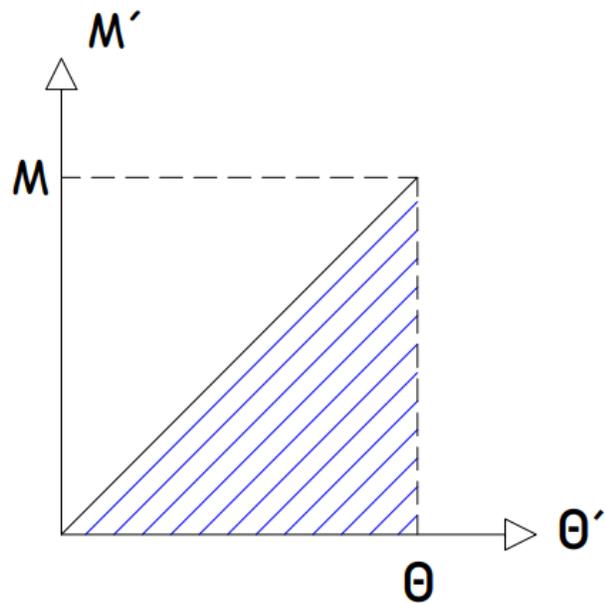


Figura 2.1. Momentos aplicados en un elemento diferencial

Para saber cuál es el trabajo externo realizado por un momento, se hará el mismo procedimiento que se hizo anteriormente para el cálculo del trabajo externo realizado por una carga axial, utilizando la manera sencilla.

Se calculará el área del triángulo que se genera cuando se grafica el momento aplicado y la rotación que se genera al aplicar dicho momento, como se muestra en la gráfica.



Se puede observar que la grafica coincide con las siguientes condiciones iniciales antes mencionadas:

$$\text{Momento } (M') = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Angulo de Rotacion } (\theta') = 0$$

$$\text{Momento } (M') = M \quad \rightarrow \quad \text{Angulo de Rotacion } (\theta') = \theta$$

$$U_e = \text{Area del Triangulo} = \frac{b \times h}{2}$$

$$U_e = \frac{M(\theta)}{2}$$

$$U_e = \frac{1}{2} M \theta \tag{2.6}$$

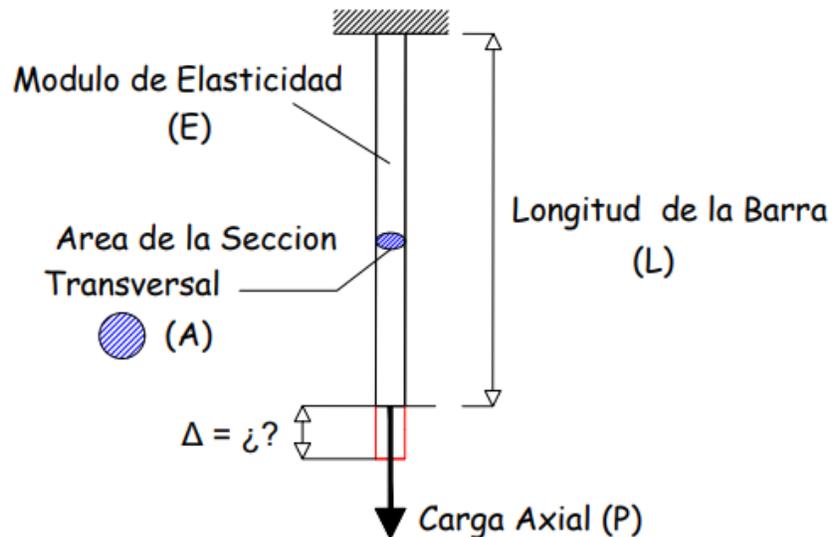
Con esto concluimos que la energía externa producida por la acción de un momento es igual a un medio del momento aplicado por su respectivo ángulo de rotación que se genera al aplicar dicho momento. Podemos decir que conforme vamos aumentando el valor del momento flexionante, el valor del ángulo de rotación irá creciendo linealmente y esto se debe a que se tiene un comportamiento elástico lineal.

2.4 ENERGÍA INTERNA EN UN ELEMENTO TIPO BARRA BAJO CARGA AXIAL

Ya se calculó la energía externa que se requiere para que un elemento tipo barra se deforme al ser sometido a una carga axial, ahora se pasará a calcular la energía interna que se desarrolla dentro de un elemento al deformarse. El cálculo de la energía interna es más fácil de calcular ya que como se mencionó, la energía externa que se genera en un elemento debido a la aplicación de fuerzas es igual a la energía interna que se desarrolla dentro de un elemento al deformarse (véase la ecuación 2.7).

$$U_e = U_i = \frac{1}{2} P \Delta \quad (2.7)$$

De la ecuación (2.7) se conoce el valor de la carga axial (P) pero no se sabe cuál es el valor del desplazamiento (Δ), se puede calcular la deformación o el desplazamiento (Δ) de un elemento estructural sometido a una carga axial con una fórmula que está en función de la carga que se le aplique (P), del área de la sección transversal (A), de la longitud (L) y del módulo de elasticidad de la barra (E).



La fórmula para calcular el desplazamiento de una barra (elemento estructural) sometido a una carga axial es la siguiente:

$$\Delta = \frac{PL}{EA} \quad (2.8)$$

Sustituye la ecuación (2.8) en la ecuación (2.7) para que así se obtenga la ecuación de la energía externa:

$$U_i = \frac{1}{2}P\Delta = \frac{1}{2}P\left(\frac{PL}{EA}\right) \quad \therefore \quad U_i = \frac{P^2L}{2EA} \quad (2.9)$$

Si se tiene una estructura con varias barras como una armadura, que es sometida a un conjunto de fuerzas axiales, la energía interna de deformación será igual a la suma de la energía interna de cada una de las barras que componen la armadura. Esto se puede expresar con la siguiente ecuación.

$$U_i = \sum \frac{P^2L}{2EA} \quad (2.10)$$

2.5 ENERGÍA INTERNA EN UN ELEMENTO SUJETO A FLEXIÓN

Para saber cuál es la ecuación que permita calcular la energía elástica de deformación interna en una viga o en una columna sujeta a flexión, se debe recordar que el ángulo de rotación es igual a la integral de la función del momento flexionante dividido entre el módulo de elasticidad por el momento de inercia del elemento estructural (véase la ecuación 2.11).

$$\theta = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} dx \quad (2.11)$$

En ángulo de rotación de la ecuación 2.11 se sustituirá en la ecuación de la energía externa que genera un momento flexionante (ecuación 2.6). La energía externa considera que el momento es una función de (x), por lo tanto, la energía interna será una ecuación definida que va desde 0 hasta la longitud de la viga o columna, como se muestra a continuación:

$$U_e = \frac{1}{2}M\theta = U_i = \frac{1}{2}M\theta \quad \therefore \quad U_i = \frac{1}{2}M(x) \cdot \theta$$

$$U_i = \frac{1}{2}M(x) \cdot \theta \rightarrow \theta = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} dx \quad \therefore \quad U_i = \left(\frac{1}{2}M(x)\right) \left(\int_0^L \frac{M(x)}{EI}\right)$$

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx \quad (2.12)$$

En caso de tener un sistema estructural con varias vigas o columnas, la energía interna total será igual a la sumatoria de cada energía interna de los diferentes miembros que conforman el sistema estructural.

Las ecuaciones calculadas anteriormente para conocer cuál es el trabajo externo o la energía externa que producen las fuerzas y los momentos en un elemento, y la energía interna o la energía de deformación acumulada en el elemento que se generó al aplicar una carga axial o un momento flexionante, nos permitirá calcular el valor de las rotaciones o el valor de las deflexiones en un elemento, esto con ayuda de algunos métodos como son los siguientes:

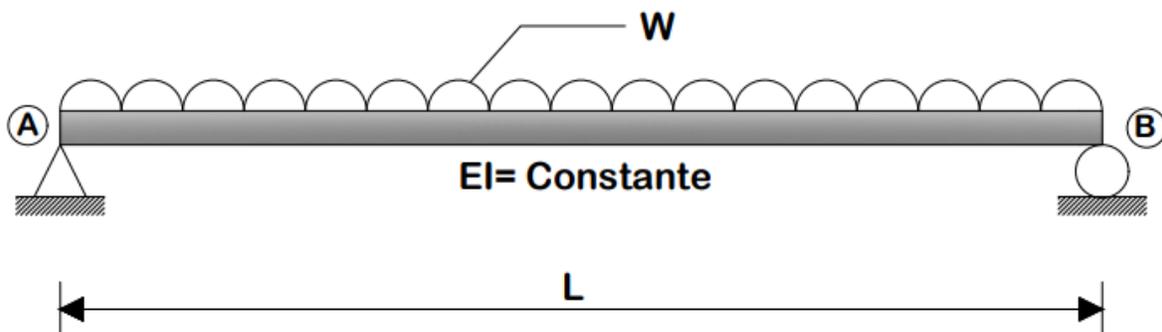
- Método del principio del trabajo y la energía
- Teorema de Castigliano
- Principio del trabajo virtual

Solo veremos los últimos dos métodos, el más utilizado en la práctica en la actualidad es el principio del trabajo virtual. en las siguientes secciones se aprenderá a calcular el valor de un desplazamiento en una viga sometida a un sistema de cargas con ayuda en la energía interna de un elemento. Los conocimientos de estos métodos son de gran importancia para comprender la amplia aplicación de los métodos energéticos en un análisis estructural.

2.6 CÁLCULO DE LA ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACION ELASTICA EN VIGAS

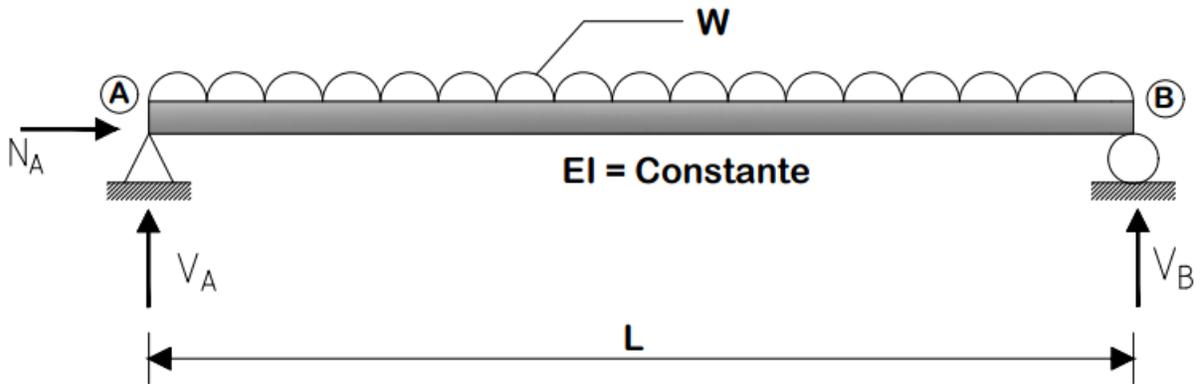
Ya teniendo claro el concepto de la energía interna de deformación, se pasará a resolver ejercicios para que el lector pueda aprender cómo se utiliza la ecuación de la energía interna de deformación elástica en un elemento sujeto a flexión.

Ejercicio 2.1: Calcular la energía interna de deformación elástica de una viga simplemente apoyada de longitud (L) que es sometida a una carga gravitacional uniformemente repartida (w), utilizando la ecuación (2.12).



Se dividirá en diferentes pasos el procedimiento matemático para la solución del ejercicio.

PASO ①: Calcular las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_A = 0 \quad (+)$$

$$wL \left(\frac{L}{2} \right) - V_B(L) = 0$$

$$V_B(L) = \frac{wL^2}{2}$$

$$V_B = \frac{wL^2}{2L}$$

$$V_B = \frac{wL}{2}$$

$$\Sigma F_Y = 0 \quad (+)$$

$$-wL + V_B + V_A = 0$$

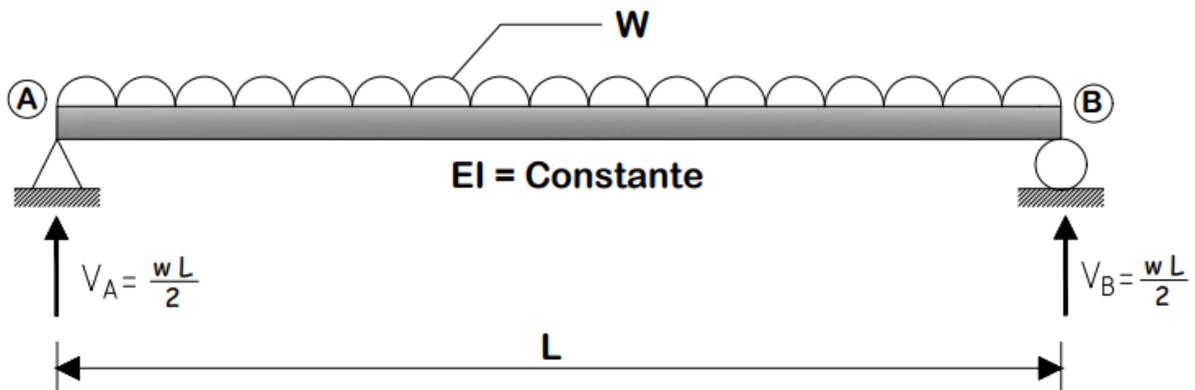
$$-wL + \frac{wL}{2} + V_A = 0$$

$$V_A = wL - \frac{wL}{2}$$

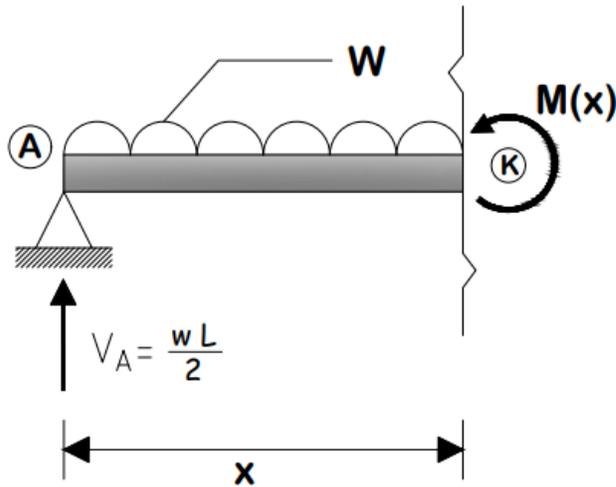
$$V_A = \frac{wL}{2}$$

$$\Sigma F_X = 0 \quad (+)$$

$$N_A = 0$$



PASO ②: Obtención de la ecuación del momento flexionante $M(x)$, utilizando el método de cortes.



$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M(x) + wx \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{wL}{2}x = 0$$

$$M(x) + \frac{wx^2}{2} - \frac{wL}{2}x = 0$$

$$M(x) = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

PASO ③: Teniendo la ecuación del momento flexionante, se pasará a calcular la energía interna de deformación elástica, utilizando la ecuación (2.12).

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx \rightarrow \int_0^L \frac{\left(\frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)^2}{2EI} dx \rightarrow \frac{1}{2EI} \int_0^L \left(\frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)^2 dx$$

$$U_i = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left(\frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)^2 dx$$

Se resuelve el binomio al cuadrado:

$$(a - b)^2 = (a)^2 - 2(a)(b) + (b)^2$$

$$\left(\frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{wL}{2}x\right)^2 - 2\left(\frac{wL}{2}x\right)\left(\frac{wx^2}{2}\right) + \left(\frac{wx^2}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{w^2L^2x^2}{4}\right) - \left(\frac{w^2Lx^3}{2}\right) + \left(\frac{w^2x^4}{4}\right)$$

Se sustituye la nueva ecuación en la integral definida y se resuelve:

$$U_i = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left(\frac{w^2 L^2 x^2}{4} \right) - \left(\frac{w^2 L x^3}{2} \right) + \left(\frac{w^2 x^4}{4} \right) dx$$

$$U_i = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^L \left(\frac{w^2 L^2 x^2}{4} \right) dx - \int_0^L \left(\frac{w^2 L x^3}{2} \right) dx + \int_0^L \left(\frac{w^2 x^4}{4} \right) dx \right]$$

Se sacan las constantes fuera de las integrales:

$$U_i = \frac{1}{2EI} \left[\frac{w^2 L^2}{4} \int_0^L x^2 dx - \frac{w^2 L}{2} \int_0^L x^3 dx + \frac{w^2}{4} \int_0^L x^4 dx \right]$$

Se resuelven las diferentes integrales definidas con la siguiente formula:

$$\int x^n dx = \int \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$U_i = \frac{1}{2EI} \left[\frac{w^2 L^2}{4} \int_0^L \frac{x^{2+1}}{2+1} dx - \frac{w^2 L}{2} \int_0^L \frac{x^{3+1}}{3+1} dx + \frac{w^2}{4} \int_0^L \frac{x^{4+1}}{4+1} dx \right]$$

$$U_i = \frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{w^2 L^2}{4} \right) \left(\frac{x^3}{3} \right) - \left(\frac{w^2 L}{2} \right) \left(\frac{x^4}{4} \right) + \left(\frac{w^2}{4} \right) \left(\frac{x^5}{5} \right) \right]$$

$$U_i = \frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{w^2 L^2 x^3}{12} \right) - \left(\frac{w^2 L x^4}{8} \right) + \left(\frac{w^2 x^5}{20} \right) \right]$$

Se evalúa el resultado de la integral en ambos extremos del intervalo (0) a (L):

$$U_i = \frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{w^2 L^2 (L)^3}{12} - \frac{w^2 L (L)^4}{8} + \frac{w^2 (L)^5}{20} \right) - \left(\frac{w^2 L^2 (0)^3}{12} - \frac{w^2 L (0)^4}{8} + \frac{w^2 (0)^5}{20} \right) \right]$$

$$U_i = \frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{w^2 L^5}{12} - \frac{w^2 L^5}{8} + \frac{w^2 L^5}{20} \right) \right]$$

$$U_i = \frac{1}{2EI} \left[\frac{w^2 L^5}{120} \right]$$

Resultado:

Energía Interna de Deformación elástica

$$U_i = \frac{w^2 L^5}{240EI}$$

Al resolver diferentes vigas con diferentes sistemas de cargas nos encontraremos con distintas ecuaciones de momento flexionante, algunas de estas ecuaciones serán fáciles de elevarlas al cuadrado y después integrarlas, pero algunas otras ecuaciones serán más complejas y difíciles de integrar y hacer el mismo procedimiento que se hizo en el ejercicio (2.1).

Existen una tabla de integración de diagramas de momento que simplifican el procedimiento del cálculo de la energía interna de deformación en vigas, esta tabla permite obtener directamente el resultado de la integración a partir de los diagramas de momento.

la tabla de integración fue obtenida de la materia de Análisis Estructural que imparte el Maestro en Ingeniería Miguel Ángel Rodríguez Vega en el Departamento de Estructuras de la Facultad de Ingeniería de la UNAM y se utiliza de la siguiente manera:

En un ejercicio se tendrá un diagrama de momento (M_k) y otro diagrama de momento (M_i), se sabe que los diagramas de momento son algunas figuras geométricas como son: un rectángulo, un triángulo, un trapecio, etc. Una vez teniendo los dos diagramas de momento, se buscará en la tabla (2.1) que figura geométrica se asemeja más a cada uno de los diagramas de momento.

Una vez determinados los momentos (M_k) y (M_i) y seleccionado el tramo en que se va a plantear la integración del producto de los dos diagramas, se entra a una columna de la tabla que corresponda al diagrama de (M_k) y a un renglón que corresponda al diagrama de (M_i) o viceversa. La intersección de la columna y el renglón seleccionado proporcionará el resultado de la integración del producto.

Para que el resultado sea correcto, se debe de ser cuidadoso con los diagramas de momento, ya que, si los diagramas de momento están incorrectos, el resultado será erróneo. También se debe de prestar atención en la forma en la que están los diagramas, por ejemplo, si se tiene un triángulo como figura geométrica de los momentos (M_k) y (M_i), se debe prestar atención si los vértices están en el mismo extremo o en extremos opuestos del tramo para poder seleccionar el resultado correcto.

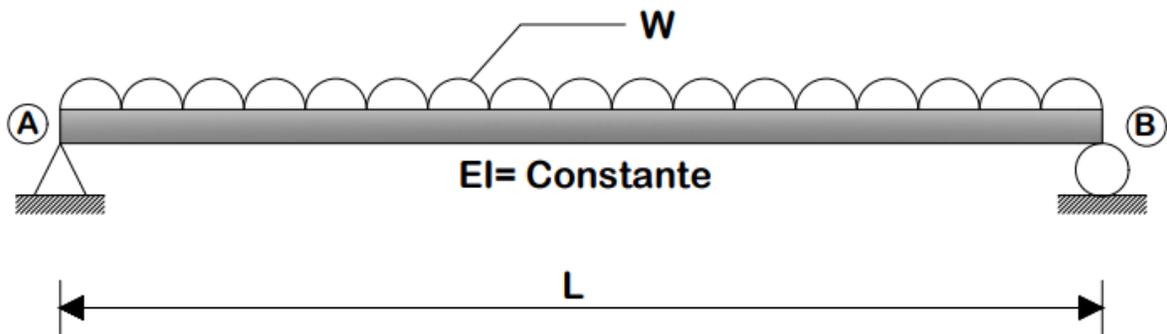
M_i	Lik	$\frac{1}{2} Lik$	$\frac{1}{2} Li(k_1 + k_2)$	$\frac{2}{3} Likm$	$\frac{2}{3} Lik$	$\frac{1}{3} Lik$	$\frac{1}{2} Lik$
	$\frac{1}{2} Lik$	$\frac{1}{3} Lik$	$\frac{1}{6} Li(k_1 + 2k_2)$	$\frac{1}{3} Likm$	$\frac{5}{12} Lik$	$\frac{1}{4} Lik$	$\frac{1}{6} Lik(1 + \alpha)$
	$\frac{1}{2} Lik$	$\frac{1}{6} Lik$	$\frac{1}{6} Li(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3} Likm$	$\frac{1}{4} Lik$	$\frac{1}{12} Lik$	$\frac{1}{6} Lik(1 + \beta)$
	$\frac{1}{2} Lk(i_1 + i_2)$	$\frac{1}{6} Lk(i_1 + 2i_2)$	$\frac{1}{6} L[i_1(2k_1 + k_2) + i_2(k_1 + 2k_2)]$	$\frac{1}{3} Lkm(i_1 + i_2)$	$\frac{1}{12} Lk(3i_1 + 5i_2)$	$\frac{1}{12} Lk(i_1 + 3i_2)$	$\frac{1}{6} Lk[(1 + \beta)i_1 + (1 + \alpha)i_2]$
	$\frac{2}{3} Limk$	$\frac{1}{3} Limk$	$\frac{1}{3} Lim(k_1 + k_2)$	$\frac{8}{15} Limkm$	$\frac{7}{15} Limk$	$\frac{1}{5} Limk$	$\frac{1}{3} Limk(1 + \alpha\beta)$
	$\frac{2}{3} Lik$	$\frac{5}{12} Lik$	$\frac{1}{12} Li(3k_1 + 5k_2)$	$\frac{7}{15} Likm$	$\frac{8}{15} Lik$	$\frac{3}{10} Lik$	$\frac{1}{12} Lik(5 - \beta - \beta^2)$
	$\frac{2}{3} Lik$	$\frac{1}{4} Lik$	$\frac{1}{12} Li(5k_1 + 3k_2)$	$\frac{7}{15} Likm$	$\frac{11}{30} Lik$	$\frac{2}{15} Lik$	$\frac{1}{12} Lik(5 - \alpha - \alpha^2)$
	$\frac{1}{3} Lik$	$\frac{1}{4} Lik$	$\frac{1}{12} Li(k_1 + 3k_2)$	$\frac{1}{5} Likm$	$\frac{3}{10} Lik$	$\frac{1}{5} Lik$	$\frac{1}{12} Lik(1 + \alpha + \alpha^2)$
	$\frac{1}{3} Lik$	$\frac{1}{12} Lik$	$\frac{1}{12} Li(3k_1 + k_2)$	$\frac{1}{15} Likm$	$\frac{2}{15} Lik$	$\frac{1}{30} Lik$	$\frac{1}{12} Lik(1 + \beta + \beta^2)$
	$\frac{1}{2} Lik$	$\frac{1}{6} Lik(1 + \alpha)$	$\frac{1}{6} Li[(1 + \beta)k_1 + (1 + \alpha)k_2]$	$\frac{1}{3} Likm(1 + \alpha\beta)$	$\frac{1}{12} Lik(5 - \beta - \beta^2)$	$\frac{1}{12} Lik(1 + \alpha + \alpha^2)$	$\frac{1}{3} Lik$

Tabla 2.1. Tabla de integración de diagramas

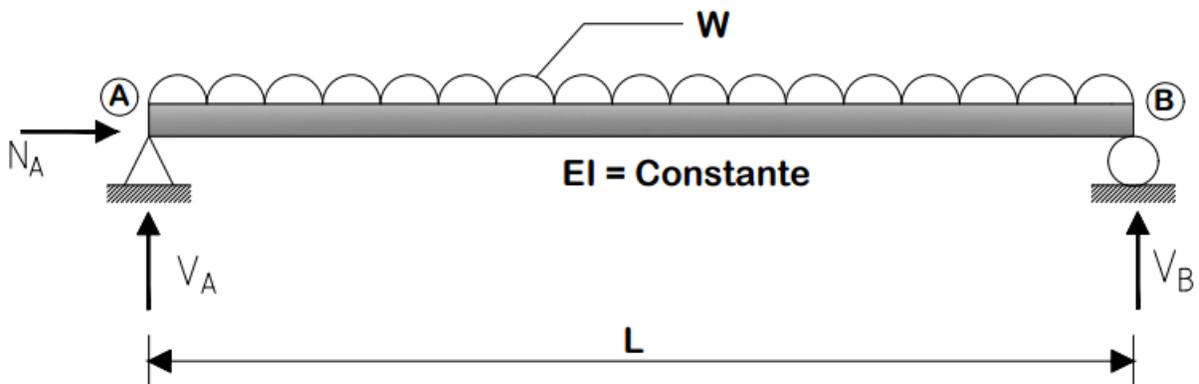
Puede que aún no esté clara la idea de cómo utilizar la tabla 2.1, para ello se pasará a resolver la misma viga del ejercicio (2.1), pero ahora utilizando la tabla de integración de diagramas y se podrá observar que el resultado que se obtenga con este método será el mismo obtenido en el ejercicio (1.1).

Cabe recalcar que se seguirá utilizando la ecuación (2.12) de la energía interna de deformación elástica, lo único que cambiar, es que en lugar de utilizar la ecuación del momento flexionante y elevarla al cuadrado para después resolver la integral definida, se utilizarán las figuras geométricas de los diagramas de momento flexionante como se muestra a continuación.

Ejercicio 2.2: Calcular la energía interna de deformación elástica de una viga simplemente apoyada de longitud (L) que es sometida a una carga gravitacional uniformemente repartida (w) utilizando la ecuación (2.12) y utilizando la tabla 2.1.



PASO ①: Calcular las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$wL \left(\frac{L}{2} \right) - V_B(L) = 0$$

$$V_B(L) = \frac{wL^2}{2}$$

$$V_B = \frac{wL^2}{2L}$$

$$V_B = \frac{wL}{2}$$

$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-wL + V_B + V_A = 0$$

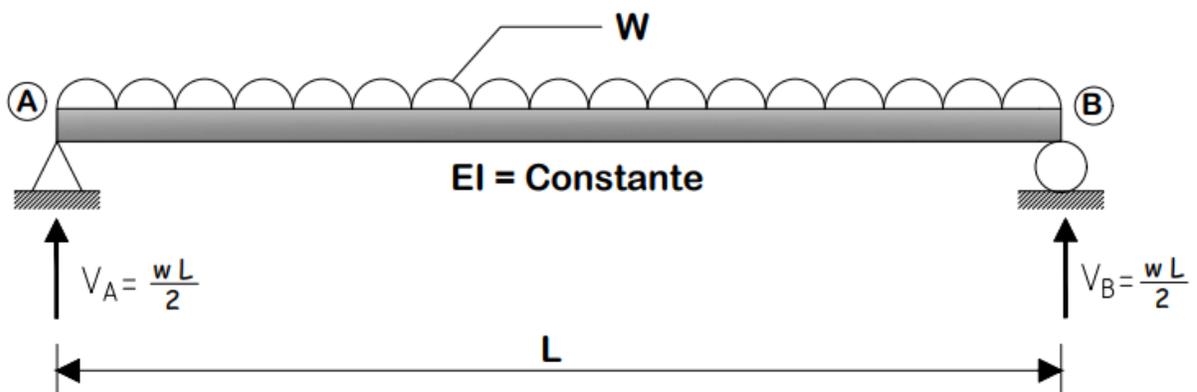
$$-wL + \frac{wL}{2} + V_A = 0$$

$$V_A = wL - \frac{wL}{2}$$

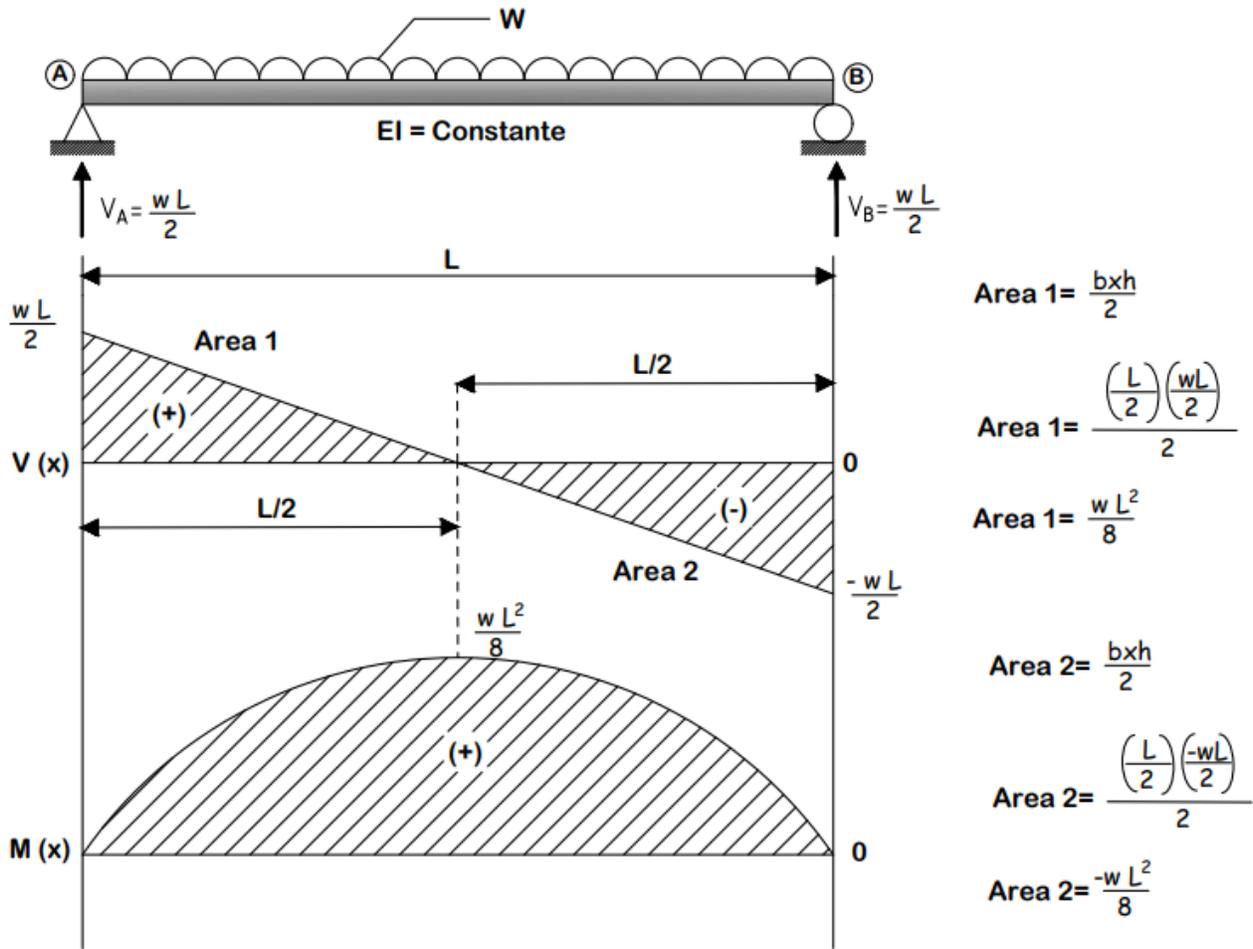
$$V_A = \frac{wL}{2}$$

$$\Sigma F_X = 0 \quad \rightarrow (+)$$

$$N_A = 0$$



PASO ②: Obtener los diagramas de la fuerza cortante y del momento flexionante utilizando el método de áreas.

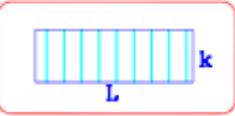
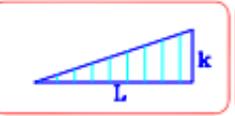
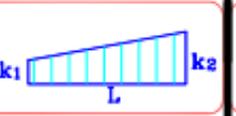
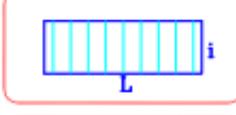
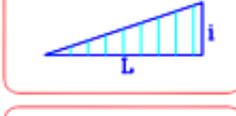
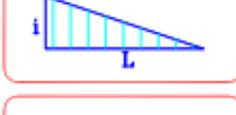
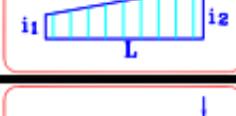
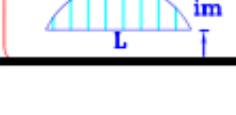


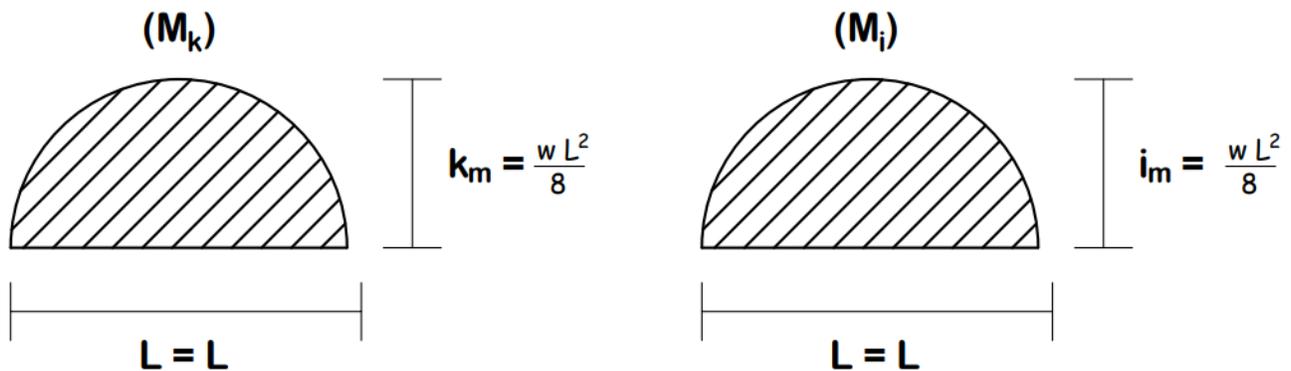
PASO ④: Plantear la ecuación de la energía de deformación (ecuación 2.12) y expresarla en término del diagrama de momento flexionante.

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx \quad \rightarrow \quad M(x) = \text{Diagrama de momento flexionante}$$

$$U_i = \int_0^L \frac{\left(\text{Diagrama de momento flexionante}\right)^2}{2EI} dx = U_i = \int_0^L \frac{M_k}{2EI} \left(\text{Diagrama de momento flexionante}\right) dx$$

PASO ⑤: Buscar la intersección de la columna (M_k) y el renglón (M_i) seleccionados en la tabla 2.1 y tomar el resultado de la integración del producto.

				
	Lik	$\frac{1}{2} Lik$	$\frac{1}{2} Li(k_1 + k_2)$	$\frac{2}{3} Likm$
	$\frac{1}{2} Lik$	$\frac{1}{3} Lik$	$\frac{1}{6} Li(k_1 + 2k_2)$	$\frac{1}{3} Likm$
	$\frac{1}{2} Lik$	$\frac{1}{6} Lik$	$\frac{1}{6} Li(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3} Likm$
	$\frac{1}{2} Lk(i_1 + i_2)$	$\frac{1}{6} Lk(i_1 + 2i_2)$	$\frac{1}{6} L[i_1(2k_1 + k_2) + i_2(k_1 + 2k_2)]$	$\frac{1}{3} Lkm(i_1 + i_2)$
	$\frac{2}{3} Limk$	$\frac{1}{3} Limk$	$\frac{1}{3} Lim(k_1 + k_2)$	$\frac{8}{15} Limkm$



$$U_i = \int_0^L \frac{\left(\frac{M_k}{2EI} \right) \left(\frac{M_i}{2EI} \right) dx}{2EI} = \frac{1}{2EI} \left[\frac{8}{15} (L)(i_m)(k_m) \right]$$

$$U_i = \frac{1}{2EI} \left[\frac{8}{15} (L) \left(\frac{wL^2}{8} \right) \left(\frac{wL^2}{8} \right) \right] = \frac{8 w^2 L^5}{1920EI}$$

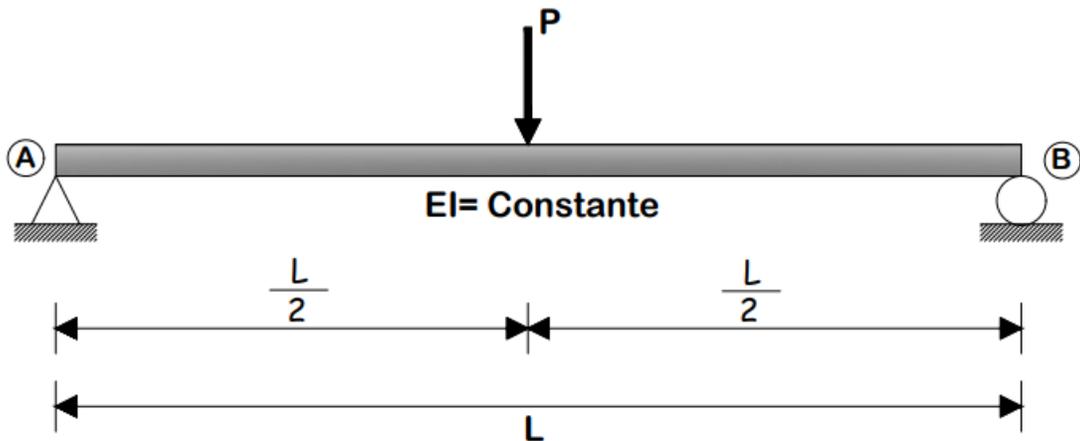
Resultado:

Energía Interna de Deformación elástica

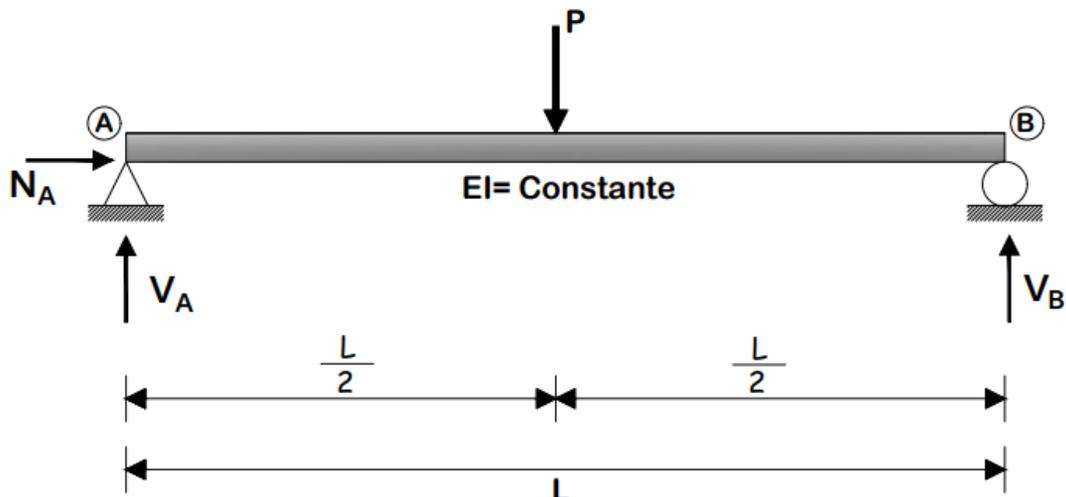
$$U_i = \frac{w^2 L^5}{240EI}$$

Se puede observar que los resultados de ambos ejercicios resueltos son los mismos utilizando cualquiera de los dos métodos, por lo que se pasará a resolver más ejercicios utilizando la tabla 2.1, para que se pueda entender de una manera más clara como se calcula la energía interna de deformación elástica utilizando la tabla 2.1.

Ejercicio 2.3: Calcular la energía interna de deformación elástica utilizando la ecuación (2.12) de una viga simplemente apoyada de longitud (L) que es sometida a una carga puntual (P) que está localizada a la mitad de la longitud, como se muestra a continuación.



PASO ①: Calculo de las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_A = 0 \quad (\odot)$$

$$P\left(\frac{L}{2}\right) - V_B(L) = 0$$

$$V_B(L) = \frac{PL}{2}$$

$$V_B = \frac{PL}{2L}$$

$$V_B = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-P + V_B + V_A = 0$$

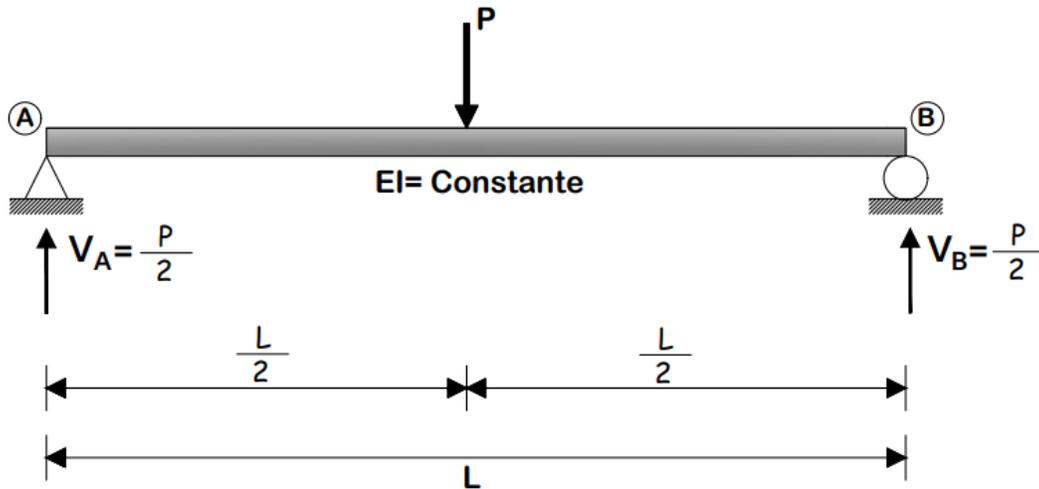
$$-P + \frac{P}{2} + V_A = 0$$

$$V_A = P - \frac{P}{2}$$

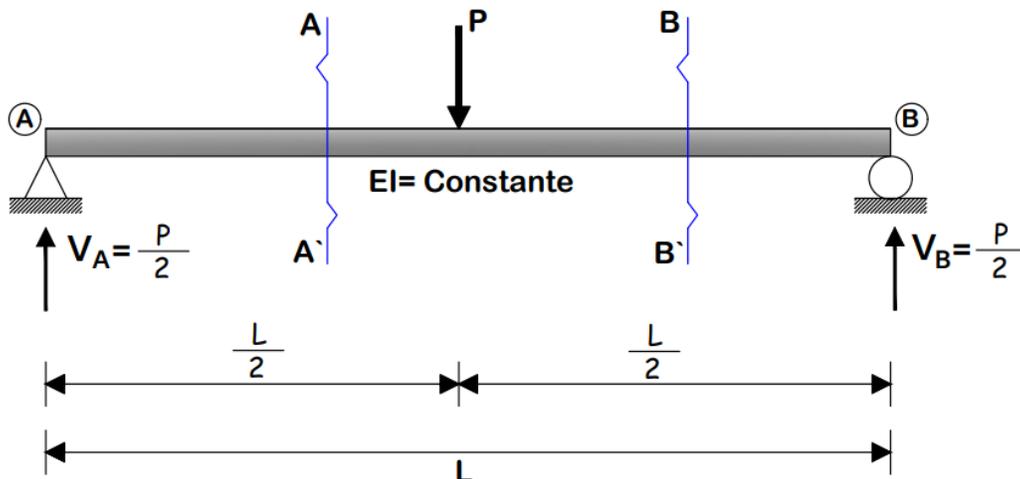
$$V_A = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma F_X = 0 \quad \rightarrow (+)$$

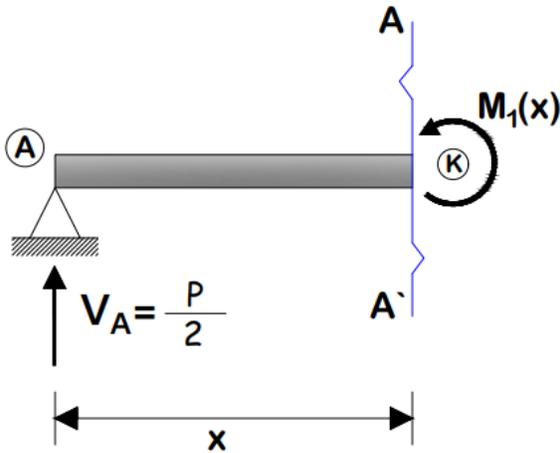
$$N_A = 0$$



PASO ②: Obtención de la ecuación del momento flexionante $M(x)$ por medio del método de cortes.



CORTE A - A' $\left[0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right]$

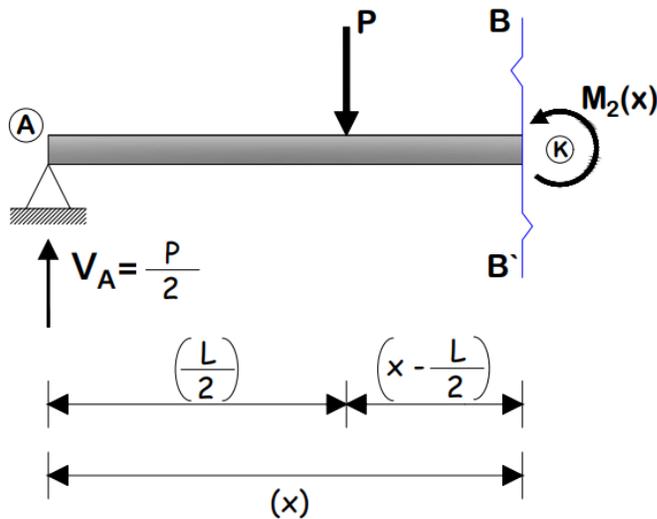


$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M(x) - \frac{P}{2}(x) = 0$$

$$M_1(x) = \frac{P}{2}(x)$$

CORTE B - B' $\left[\frac{L}{2} \leq x \leq L\right]$



$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M_2(x) + P\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}(x) = 0$$

$$M_2(x) = \frac{P}{2}(x) - P\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$M_2(x) = \frac{P}{2}(x) - P(x) + \frac{PL}{2}$$

$$M_2(x) = -\frac{P}{2}(x) + \frac{PL}{2}$$

PASO ③: Teniendo la ecuación del momento flexionante, se pasa a calcular la energía interna de deformación elástica con ayuda de la ecuación (2.12).

Para este ejemplo la energía interna de deformación total será la suma de la energía del primer tramo que va desde 0 a L/2 y la energía del segundo tramo que va desde L/2 a L como se muestra a continuación.

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

$$U_{i_{TOTAL}} = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)^2}{2EI} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}\right)^2}{2EI} dx$$

Se resolverá cada integral definida por separado.

Primera Integral Definida:

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{P^2x^2}{4} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{P^2x^3}{12} \right]_0^{\frac{L}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{P^2\left(\frac{L}{2}\right)^3}{12} - \frac{P^2(0)^3}{12} \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{P^2\left(\frac{L^3}{8}\right)}{12} - 0 \right]$$

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{P^2L^3}{96} \right] = \frac{P^2L^3}{192EI}$$

$\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)^2}{2EI} dx = \frac{P^2L^3}{192EI}$
--

Segunda Integral Definida:

$$\int_{\frac{L}{2}}^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}\right)^2}{2EI} dx$$

Se resuelve el binomio al cuadrado:

$$(a + b)^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2$$

$$\left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}\right)^2 = \left(-\frac{P}{2}x\right)^2 + 2\left(-\frac{P}{2}x\right)\left(\frac{PL}{2}\right) + \left(\frac{PL}{2}\right)^2$$

$$\left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}\right)^2 = \left(\frac{P^2x^2}{4}\right) - \left(\frac{P^2Lx}{2}\right) + \left(\frac{P^2L^2}{4}\right)$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}\right)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left(\frac{P^2x^2}{4}\right) - \left(\frac{P^2Lx}{2}\right) + \left(\frac{P^2L^2}{4}\right) dx$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}\right)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\int_{\frac{L}{2}}^L \left(\frac{P^2x^2}{4}\right) dx - \int_{\frac{L}{2}}^L \left(\frac{P^2Lx}{2}\right) dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \left(\frac{P^2L^2}{4}\right) dx \right]$$

Se sacan las constantes fuera de cada integral:

$$\int_{\frac{L}{2}}^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}\right)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{P^2}{4} \int_{\frac{L}{2}}^L x^2 dx - \frac{P^2L}{2} \int_{\frac{L}{2}}^L x dx + \frac{P^2L^2}{4} \int_{\frac{L}{2}}^L dx \right]$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}\right)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{P^2}{4}\right) \left(\frac{x^3}{3}\right) - \left(\frac{P^2L}{2}\right) \left(\frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{P^2L^2}{4}\right) (x) \right]$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}\right)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{P^2x^3}{12}\right) - \left(\frac{P^2Lx^2}{4}\right) + \left(\frac{P^2L^2x}{4}\right) \right]$$

$$\frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{P^2(L)^3}{12} - \frac{P^2L(L)^2}{4} + \frac{P^2L^2(L)}{4}\right) - \left(\frac{P^2\left(\frac{L}{2}\right)^3}{12} - \frac{P^2L\left(\frac{L}{2}\right)^2}{4} + \frac{P^2L^2\left(\frac{L}{2}\right)}{4}\right) \right]$$

$$\frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{P^2L^3}{12} - \frac{P^2L^3}{4} + \frac{P^2L^3}{4}\right) - \left(\frac{P^2L^3}{12} - \frac{P^2L^3}{4} + \frac{P^2L^3}{4}\right) \right]$$

$$\frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{P^2 L^3}{12} - \frac{P^2 L^3}{4} + \frac{P^2 L^3}{4} \right) - \left(\frac{P^2 L^3}{96} - \frac{P^2 L^3}{16} + \frac{P^2 L^3}{8} \right) \right]$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} \right)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{P^2 L^3}{12} \right) - \left(\frac{7P^2 L^3}{96} \right) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{P^2 L^3}{96} \right) \right]$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} \right)^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{192EI}$$

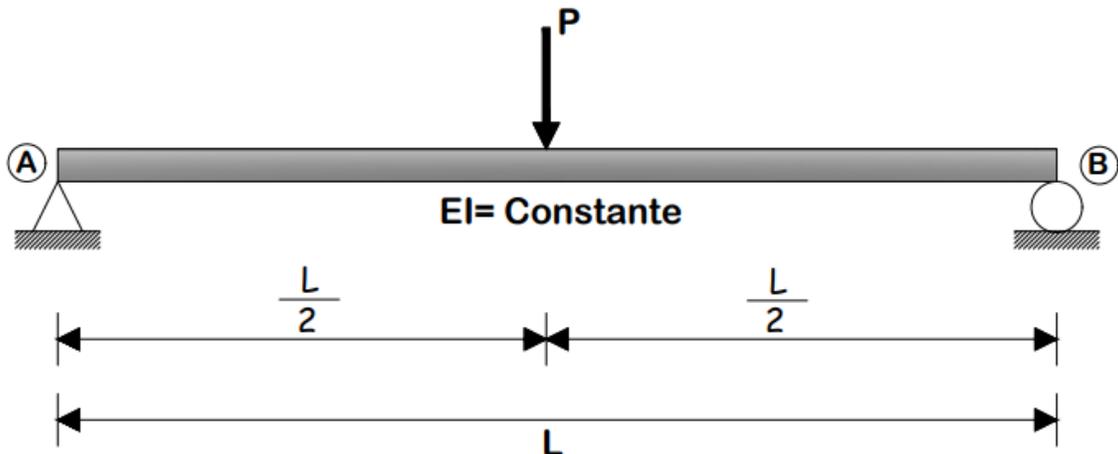
Energía interna de deformación total:

$$U_{i\text{TOTAL}} = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\left(\frac{P}{2}x \right)^2}{2EI} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} \right)^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{192EI} + \frac{P^2 L^3}{192EI}$$

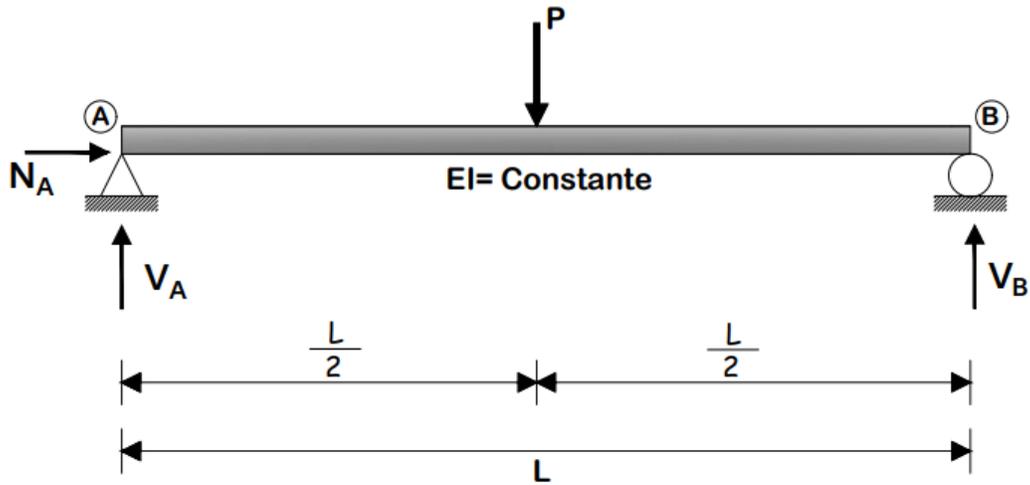
Respuesta: Energía interna de deformación

$$U_{i\text{TOTAL}} = \frac{P^2 L^3}{96EI}$$

Ejercicio 2.4: Utilizando la ecuación 2.12 y la tabla 2.1, calcular la energía interna de deformación elástica de una viga simplemente apoyada de longitud (L) que es sometida a una carga puntual (P) que está localizada a la mitad de la longitud.



PASO ①: Calcular las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_A = 0 \quad (+)$$

$$P\left(\frac{L}{2}\right) - V_B(L) = 0$$

$$V_B(L) = \frac{PL}{2}$$

$$V_B = \frac{PL}{2L}$$

$$V_B = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma F_Y = 0 \quad (+)$$

$$-P + V_B + V_A = 0$$

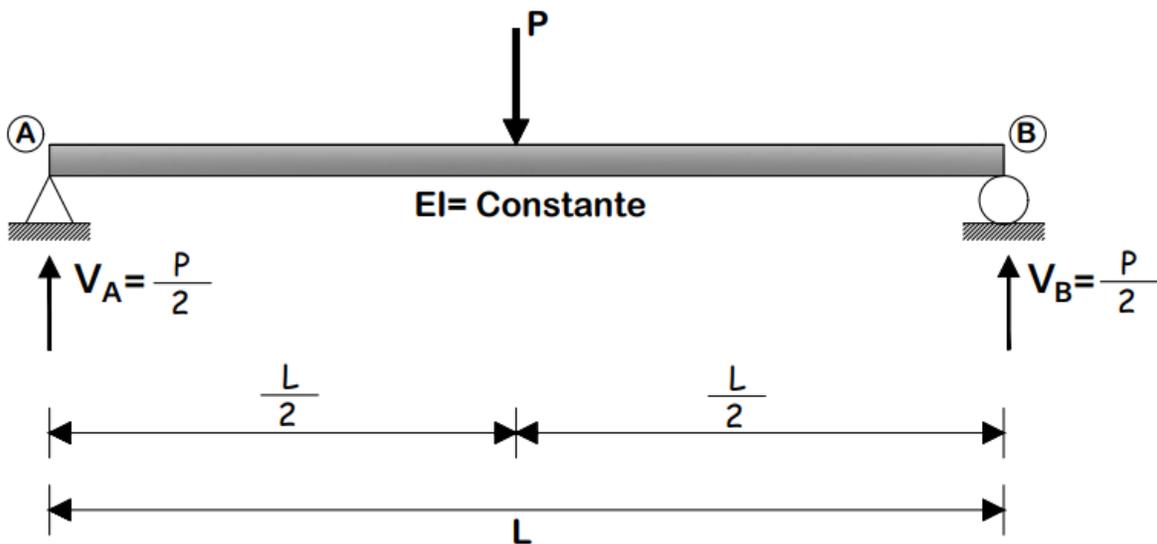
$$-P + \frac{P}{2} + V_A = 0$$

$$V_A = P - \frac{P}{2}$$

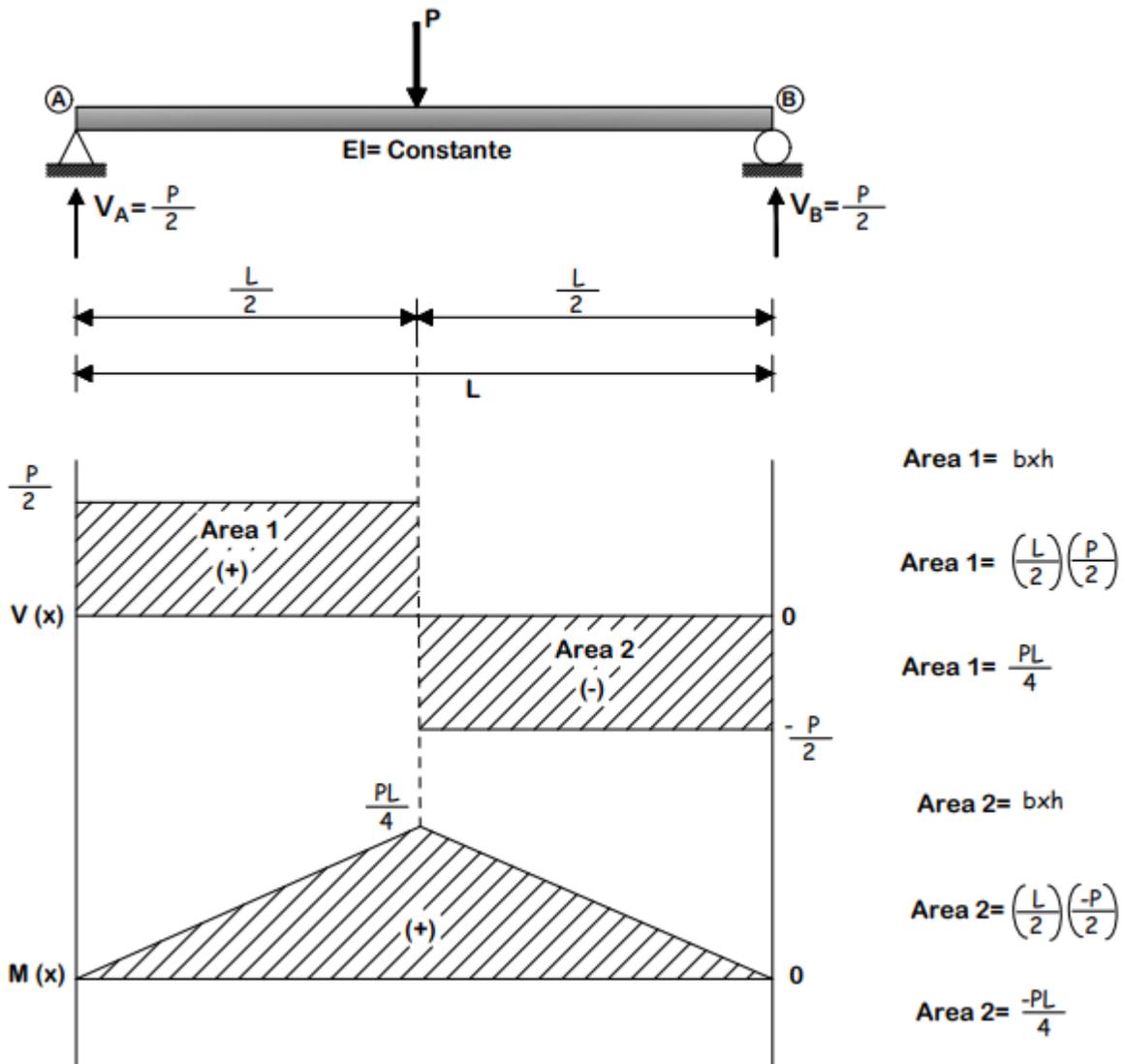
$$V_A = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma F_X = 0 \quad (+)$$

$$N_A = 0$$



PASO ②: Obtener los diagramas de la fuerza cortante y del momento flexionante utilizando el método de áreas.



PASO ④: Plantear la ecuación de la energía de deformación (ecuación 2.12) y expresarla en término del diagrama de momento flexionante y después buscar en la tabla 2.1 el resultado.

Para este ejercicio, se resolverá de dos formas diferentes y se podrá observar que el resultado será el mismo:

1._ Si se observa el diagrama de momento, la primera forma de resolver el ejercicio es dividir el diagrama del momento (Δ) en dos intervalos, el primer intervalo será desde $[0 \text{ a } L/2]$, en este intervalo se tendrá un triángulo rectángulo (Δ) de longitud $[L/2]$ y el segundo intervalo será desde $[L/2 \text{ a } L]$ en este intervalo se tendrá igual un

triángulo rectángulo (Δ) que tiene una longitud de $[L/2]$. Se tendrán dos triángulos con una longitud de $[L/2]$ y la energía interna de deformación será igual a la suma de estos dos triángulos rectángulos.

2._ La segunda forma de resolver este ejercicio es teniendo solo un triángulo equilátero que es tal y como está el diagrama de momento (Δ) que tiene una longitud (L).

Se pasa a resolver el ejercicio de las dos formas antes mencionadas:

- **Primera forma de solución (2 triángulos rectángulos).**

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

$$U_i = \int_0^{L/2} \left(\frac{\text{triángulo}}{2EI} \right)^2 dx + \int_{L/2}^L \left(\frac{\text{triángulo}}{2EI} \right)^2 dx$$

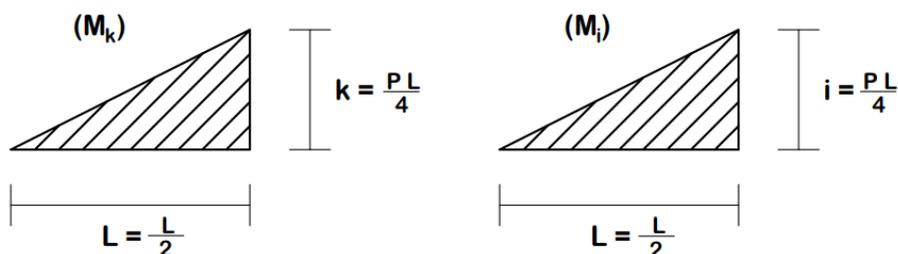
$$U_i = \underbrace{\int_0^{L/2} \frac{(M_k)(M_i)}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 1}} + \underbrace{\int_{L/2}^L \frac{(M_k)(M_i)}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 2}}$$

INTEGRAL 1:

$$\int_0^{L/2} \frac{(M_k)(M_i)}{2EI} dx$$

	Lik	$\frac{1}{2}$ Lik	$\frac{1}{2}$ Li(k ₁ + k ₂)
	$\frac{1}{2}$ Lik	$\frac{1}{3}$ Lik	$\frac{1}{6}$ Li(k ₁ + 2k ₂)
	$\frac{1}{2}$ Lik	$\frac{1}{6}$ Lik	$\frac{1}{6}$ Li(2k ₁ + k ₂)
	$\frac{1}{2}$ Lk(i ₁ + i ₂)	$\frac{1}{6}$ Lk(i ₁ + 2i ₂)	$\frac{1}{6}$ L[i ₁ (2k ₁ + k ₂) + i ₂ (k ₁ + 2k ₂)]

$$\int_0^{L/2} \frac{(M_k)(M_i)}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right]$$



$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{PL}{4} \right) \left(\frac{PL}{4} \right) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{P^2 L^3}{96} \right] = \frac{P^2 L^3}{192EI}$$

$$\int_0^{L/2} \frac{(M_k)(M_i)}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{192EI}$$

INTEGRAL 2.

Se puede notar que los triángulos rectángulos de la integral 1 son diferentes que los triángulos rectángulos de la integral 2, el ángulo recto [L] de cada triángulo se encuentra en diferente lugar.

La tabla 2.1 no tiene un triángulo rectángulo que tenga el sentido que los triángulos de la integral 2, pero no importa en este caso, lo único que importa es que se preste atención en la localización del ángulo recto de cada triángulo rectángulo, se puede observar en la tabla 2.1 que se tienen dos fórmulas diferentes cuando se tiene dos triángulos rectángulos.

Si se tienen dos triángulos rectángulos con el ángulo recto en el mismo lugar, el resultado será el siguiente:

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right]$$

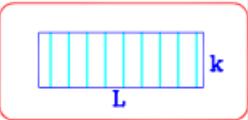
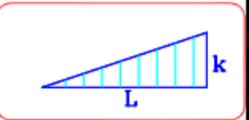
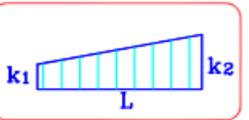
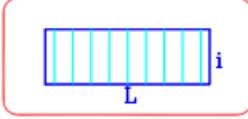
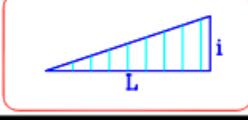
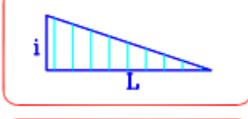
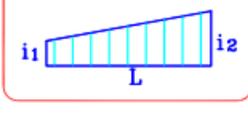
Pero si se tienen dos triángulos rectángulos donde sus ángulos rectos se localizan en diferente, se tendrá el siguiente resultado:

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \left[\frac{1}{6} (L)(i)(k) \right]$$

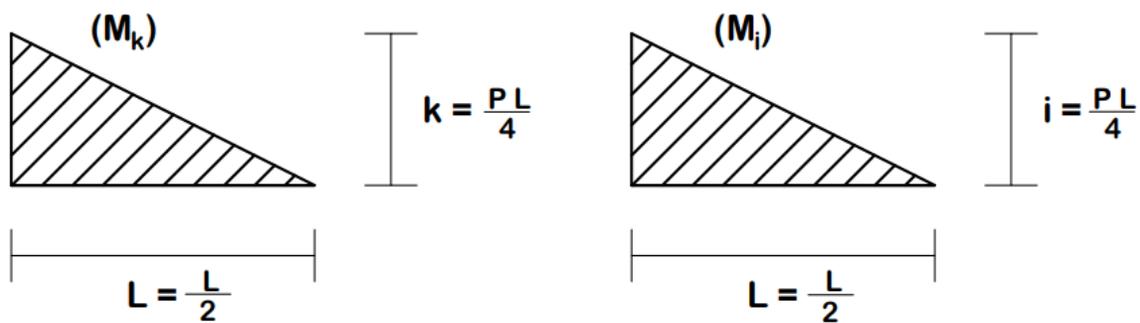
Lo importante es prestar atención si el ángulo recto de ambos triángulos se encuentra en el mismo lugar o si su ángulo recto se encuentra en diferente lugar como se demostró.

Después de haber explicado lo anterior, se continua con la solución del ejercicio:

$$\int_{L/2}^L \frac{\left(\begin{array}{c} M_k \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} M_i \\ \text{---} \end{array} \right)}{2EI} dx$$

			
	Lik	$\frac{1}{2} Lik$	$\frac{1}{2} Li(k_1 + k_2)$
	$\frac{1}{2} Lik$	$\frac{1}{3} Lik$	$\frac{1}{6} Li(k_1 + 2k_2)$
	$\frac{1}{2} Lik$	$\frac{1}{6} Lik$	$\frac{1}{6} Li(2k_1 + k_2)$
	$\frac{1}{2} Lk(i_1 + i_2)$	$\frac{1}{6} Lk(i_1 + 2i_2)$	$\frac{1}{6} L[i_1(2k_1 + k_2) + i_2(k_1 + 2k_2)]$

$$\int_{L/2}^L \frac{\left(\frac{M_k}{L} x \right) \left(\frac{M_i}{L} (L-x) \right)}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right]$$



$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{PL}{4} \right) \left(\frac{PL}{4} \right) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{P^2 L^3}{96} \right] = \frac{P^2 L^3}{192EI}$$

$$\int_{L/2}^L \frac{\left(\frac{M_k}{L} x \right) \left(\frac{M_i}{L} (L-x) \right)}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{192EI}$$

$$U_i = \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{M_k}{2EI} \right) \left(\frac{M_i}{2EI} \right) dx}{2EI} + \int_{L/2}^L \frac{\left(\frac{M_k}{2EI} \right) \left(\frac{M_i}{2EI} \right) dx}{2EI}$$

$$U_i = \frac{P^2 L^3}{192 EI} + \frac{P^2 L^3}{192 EI} \quad \therefore \quad U_i = \frac{P^2 L^3}{96 EI}$$

- Segunda forma de solución (1 triángulo equilátero)

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx \quad \rightarrow \quad U_i = \int_0^L \left(\frac{\text{triángulo}}{2EI} \right)^2 dx$$

$$U_i = \int_0^L \frac{\left(\frac{M_k}{2EI} \right) \left(\frac{M_i}{2EI} \right) dx}{2EI}$$

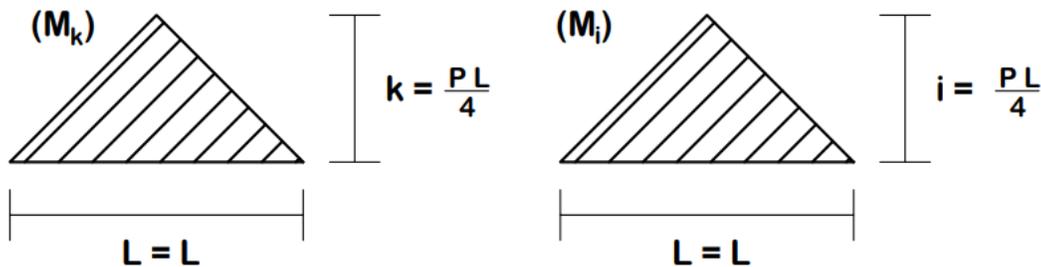
	Lik	$\frac{1}{2} Lik$	$\frac{1}{2} Li(k_1 + k_2)$
	$\frac{1}{2} Lik$	$\frac{1}{3} Lik$	$\frac{1}{6} Li(k_1 + 2k_2)$
	$\frac{1}{2} Lik$	$\frac{1}{6} Lik$	$\frac{1}{6} Li(2k_1 + k_2)$
	$\frac{1}{2} Lk(i_1 + i_2)$	$\frac{1}{6} Lk(i_1 + 2i_2)$	$\frac{1}{6} L[i_1(2k_1 + k_2) + i_2(k_1 + 2k_2)]$

Se puede observar que en la tabla 2.1 solo se tiene la figura geométrica de un triángulo rectángulo y el diagrama de momento del ejercicio que se está resolviendo tiene como figura geométrica un triángulo equilátero. No existe problema alguno

del tipo de triángulo que se tenga, lo importante en este caso es conocer el valor de la altura y la base de triángulo. Por lo tanto, se utilizará la formula del producto de dos triángulos rectángulos, sin importar que se tenga un producto de dos triángulos equiláteros.

Ya explicado lo anterior, se prosigue con la solución del ejercicio.

$$U_i = \int_0^L \frac{\left(\begin{array}{c} M_k \\ \text{triángulo} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} M_i \\ \text{triángulo} \end{array} \right)}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right]$$



$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L) \left(\frac{PL}{4} \right) \left(\frac{PL}{4} \right) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{P^2 L^3}{48} \right] = \frac{P^2 L^3}{96EI}$$

$$U_i = \int_0^L \frac{\left(\begin{array}{c} \text{triángulo} \\ \text{triángulo} \end{array} \right)}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{96EI}$$

Resultado: Energía Interna de Deformación elástica

$$U_i = \frac{P^2 L^3}{96EI}$$

Todos los resultados fueron los mismos en las diferentes maneras en las que se resolvió el ejercicio, queda a criterio de cada uno como resolver los ejercicios que se le presente en la vida académica o en lo laboral, si calcular la energía interna de deformación utilizando la ecuación del momento o con la tabla de integración.

Cada método tiene sus ventajas y desventajas, queda a criterio personal que método utilizar en los próximos ejercicios que resuelva ya que la lección de cada método

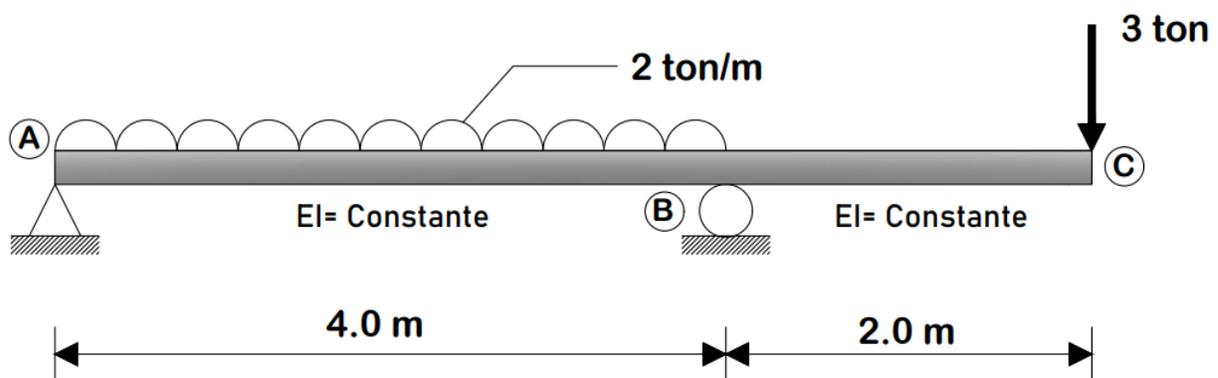
depende de diferentes factores como: que método es más fácil, cual fue más rápido, cual es más entendible, etc.

Se pasará a resolver otro ejercicio para que vaya quedando más claro cómo obtener la energía interna de deformación. Para el siguiente ejercicio se calculará la energía interna utilizando el principio de superposición. Se utilizará este principio porque habrá casos en donde el diagrama de momento será complejo, no será como los diagramas de los ejemplos anteriores que son sencillos y fáciles de conocer, por ello, se pasará a utilizar el principio de superposición para que cuando se tenga una viga con un sistema de cargas que genere un diagrama de momento flexionante complejo, con ayuda del principio de superposición se tenga una viga inicial descompuesta en varias vigas con cargas sencillas de resolver y con esto se tengan diagramas de momento que formen figuras geométricas que estén presentes en la tabla 2.1.

El principio de superposición permite descomponer una viga inicial con un sistema de cargas complejas en dos o más vigas con una carga sencilla, esto con el propósito de encontrar la solución de la viga original resolviendo dos o más vigas sencillas.

Tal vez lo antes mencionado no quedo muy claro y entendible y pueda que sea algo confuso, pero para que se entienda mejor se pasara a resolver el siguiente ejercicio.

Ejercicio 2.5: Se desea conocer la energía interna de deformación de una viga utilizando la ecuación (2.12), que es sometida a una carga uniformemente repartida de 2 ton/m y a una carga puntual de 3 toneladas como se muestra a continuación.

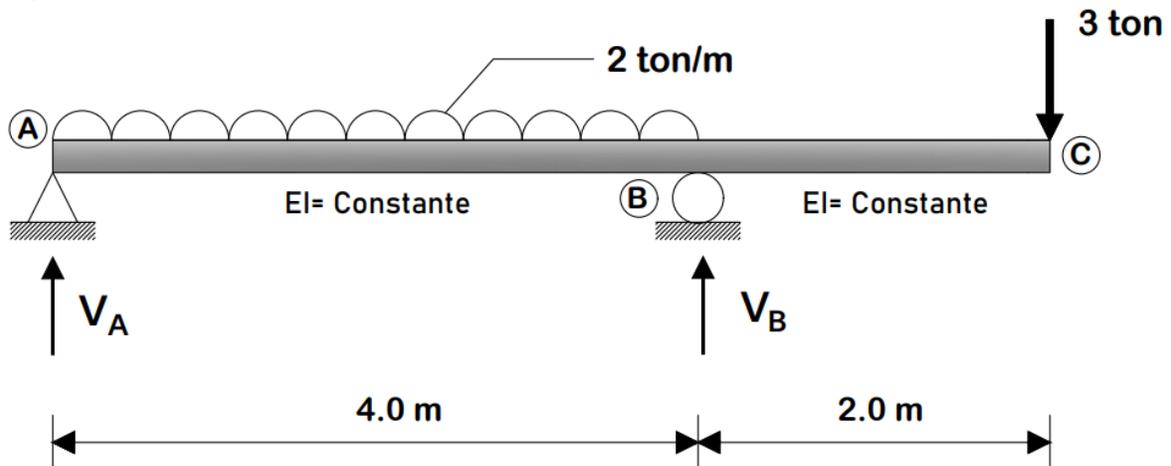


Se pasará a resolver la viga tal y como se encuentra, sin aplicar el principio de superposición. Se calculan las ecuaciones de momentos flexionante y después se graficará el momento flexionante, esto con el propósito de tener una idea del porque se emplea el principio de superposición, una vez graficando el momento flexionante de la viga original entenderá mejor lo antes mencionado.

El ejercicio se dividirá en varias partes y cada parte estará conformada por varios pasos para seguir un orden y no haya alguna confusión en la solución de este ejercicio.

PRIMERA PARTE

PASO ①: Obtener las reacciones en los apoyos con ayuda de las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_A = 0 \quad (\curvearrowright)$$

$$-V_B(4 \text{ m}) + 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (4 \text{ m}) \left(\frac{4 \text{ m}}{2} \right) + 3 \text{ ton}(6 \text{ m}) = 0$$

$$-V_B(4 \text{ m}) + 16 \text{ ton} \cdot \text{m} + 18 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$-V_B(4 \text{ m}) + 34 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$V_B = \frac{34 \text{ ton} \cdot \text{m}}{4 \text{ m}}$$

$$V_B = \frac{17}{2} \text{ ton}$$

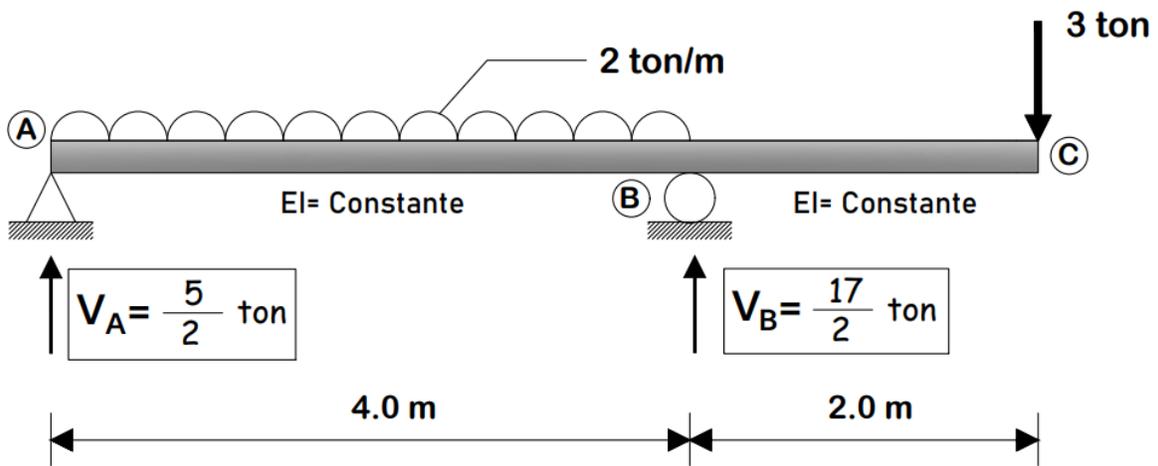
$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$V_A + V_B - 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (4 \text{ m}) - 3 \text{ ton} = 0$$

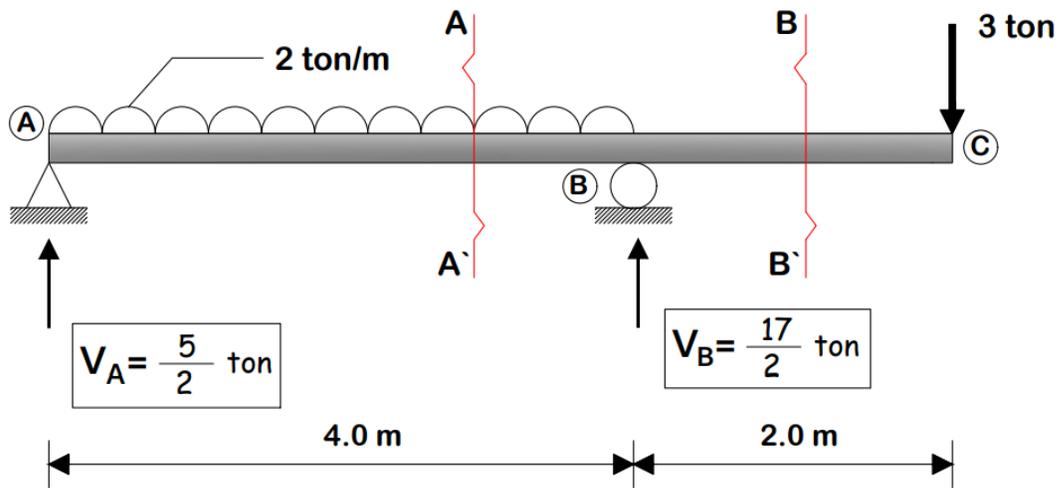
$$V_A + \frac{17}{2} \text{ ton} - 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (4 \text{ m}) - 3 \text{ ton} = 0$$

$$V_A - \frac{5}{2} \text{ ton} = 0$$

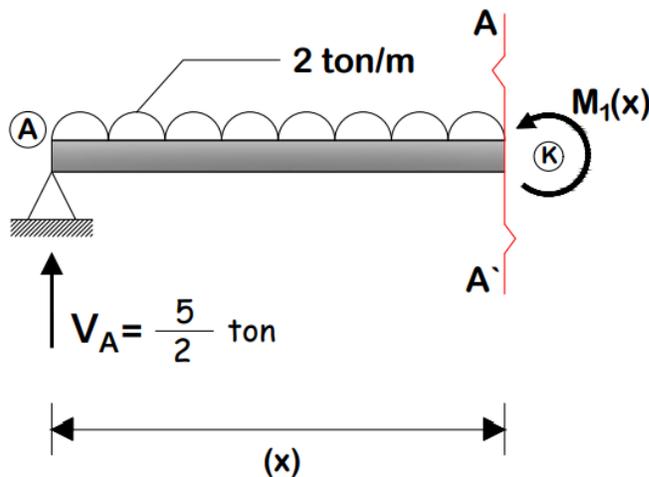
$$V_A = \frac{5}{2} \text{ ton}$$



PASO ②: Obtener las ecuaciones del momento flexionante con el método de cortes y después con las ecuaciones graficar el momento flexionante.



CORTE A – A' [0 m ≤ x ≤ 4.0 m]



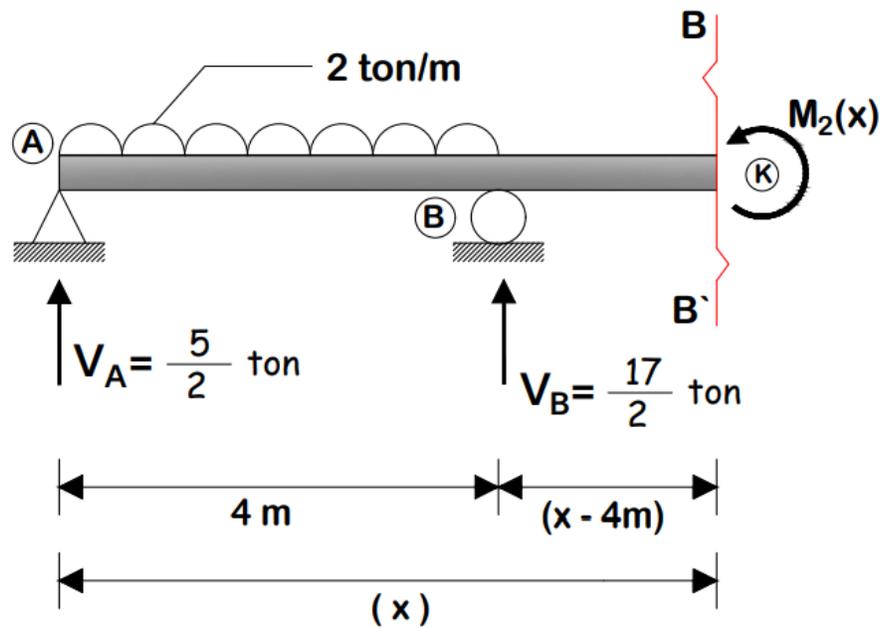
$$\Sigma M_k = \overset{\curvearrowright}{(+)}$$

$$M_1(x) + 2(x) \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{5}{2}(x) = 0$$

$$M_1(x) + x^2 - \frac{5}{2}(x) = 0$$

$$M_1(x) = -x^2 + \frac{5}{2}(x)$$

CORTE B – B' [4.0 m ≤ x ≤ 6.0 m]



$$\Sigma M_k = \overset{(+)}{\curvearrowright}$$

$$M_2(x) - \frac{5}{2}(x) - \frac{17}{2}(x - 4) + 2(4) \left(x - 4 + \frac{4}{2} \right) = 0$$

$$M_2(x) - \frac{5}{2}(x) - \frac{17}{2}(x) + 34 + 8(x - 2) = 0$$

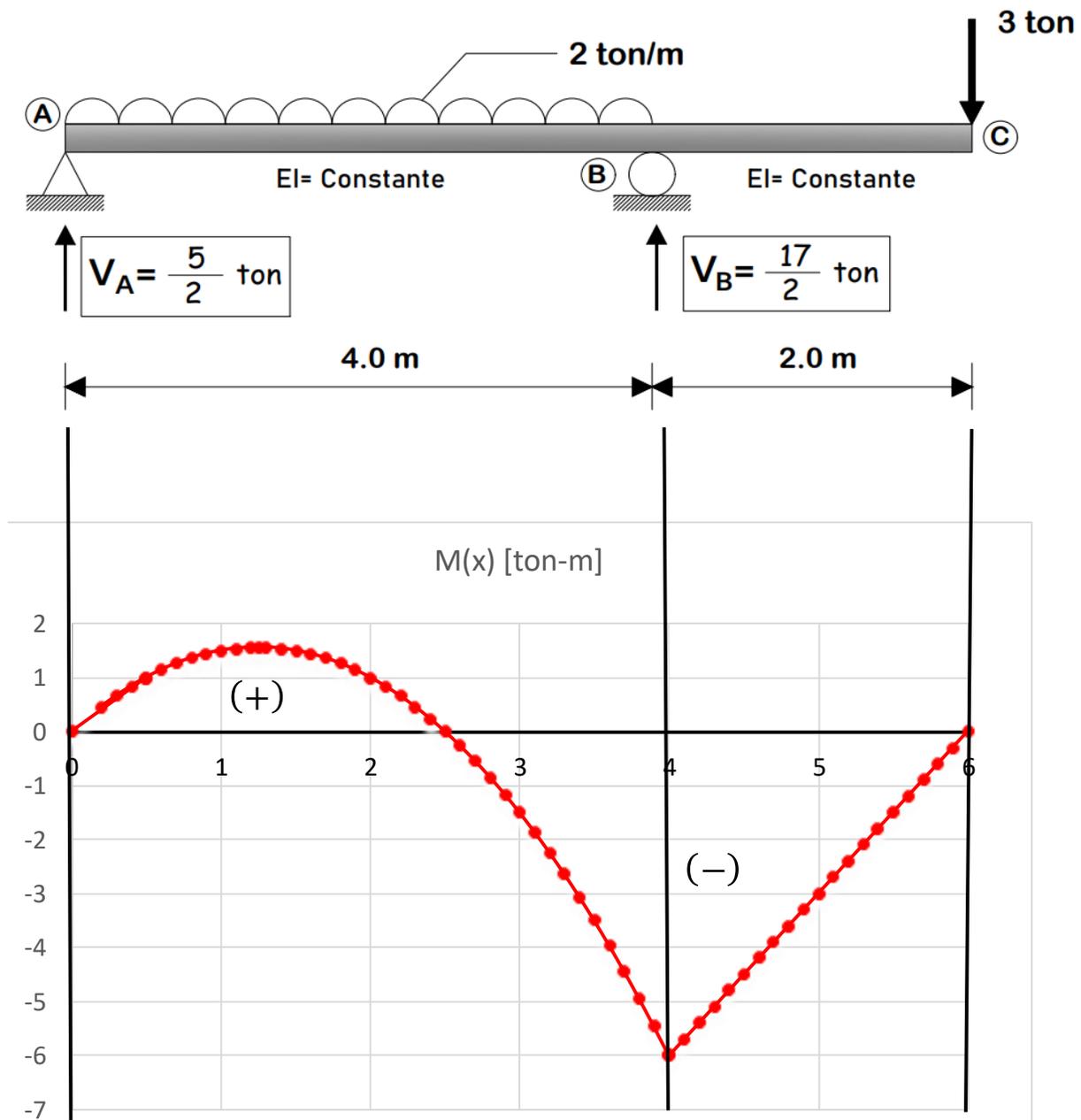
$$M_2(x) - \frac{5}{2}(x) - \frac{17}{2}(x) + 34 + 8x - 16 = 0$$

$$M_2(x) - 3x + 18 = 0$$

$$\mathbf{M_2(x) = 3x - 18}$$

Con las ecuaciones del momento flexionante se graficará el diagrama del momento de la siguiente manera:

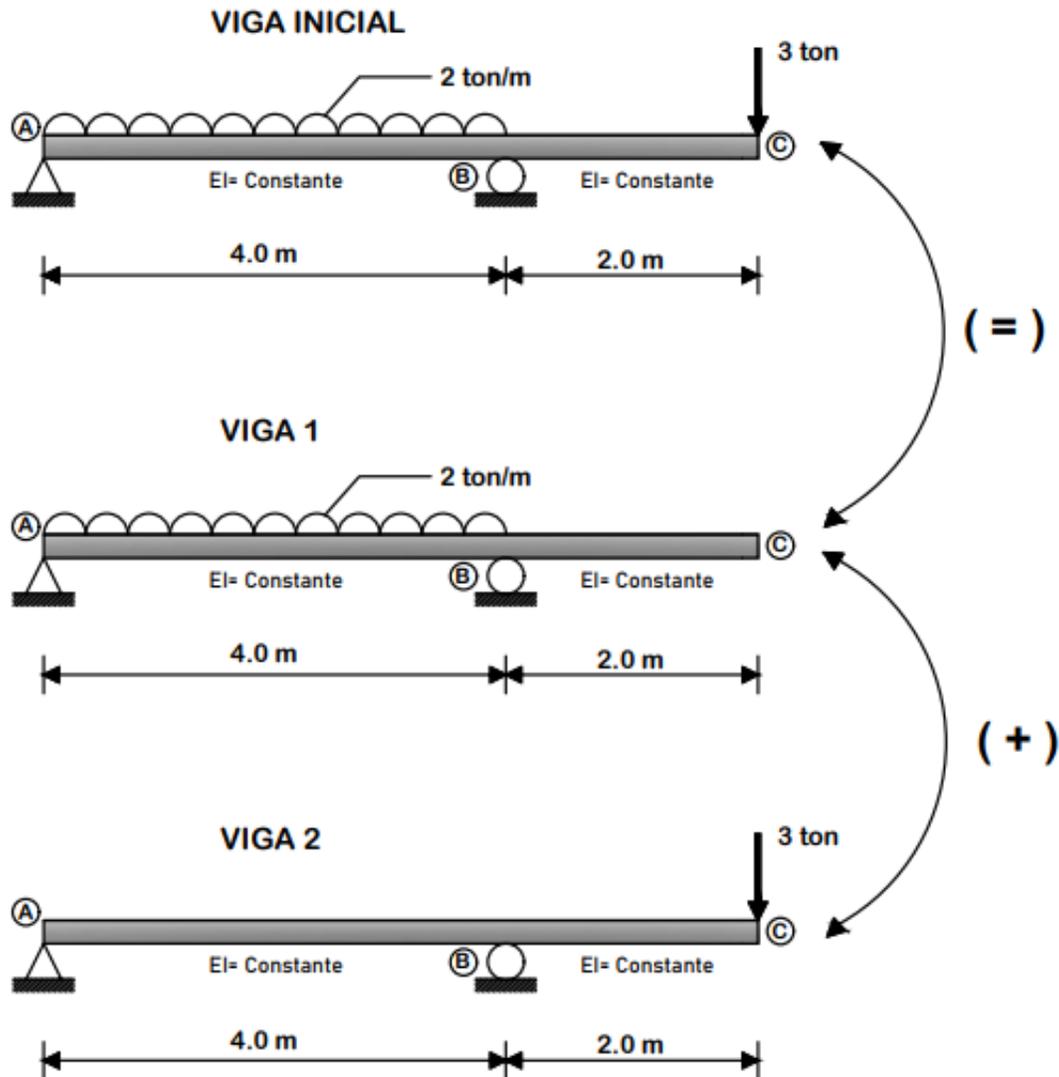
[0 m ≤ x ≤ 4 m]	[4 m ≤ x ≤ 6 m]
$M_1(x) = -x^2 + \frac{5}{2}x$	$M_2(x) = 3x - 18$



✚ SEGUNDA PARTE

Como se puede observar en el diagrama de momento, se tienen figuras geométricas conocidas y que se encuentran en la tabla 2.1, pero el problema de este diagrama de momento radica en que no se conoce con exactitud la altura máxima y la longitud de cada figura geométrica. Tal vez haya la posibilidad de resolver el ejercicio con el diagrama de momento flexionante, pero el resultado que se obtenga no será muy exacto, por que como ya se mencionó, no se tiene el valor exacto de la altura y la

longitud de cada figura geométrica y sin estos valores se tendría un margen de error, por ello, se empleará el principio de superposición para obtener un resultado exacto.

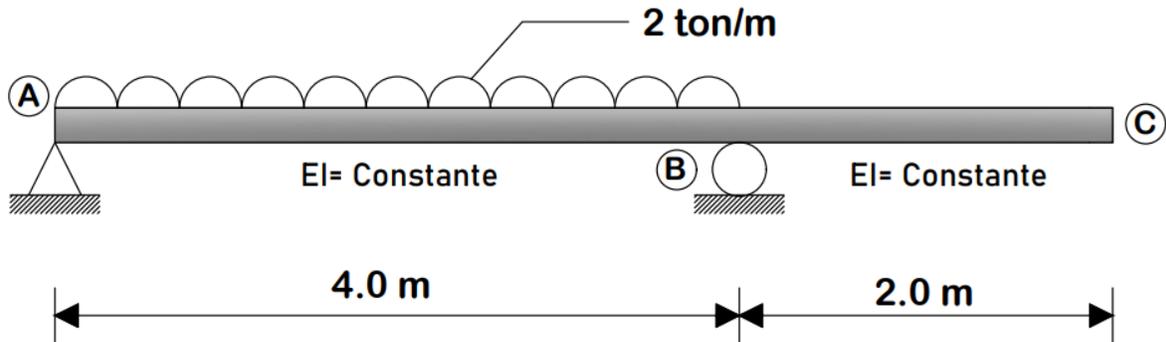


Se puede observar que con el principio de superposición se descompuso una viga inicial con un sistema de cargas en dos vigas, cada una de estas vigas tiene presente una carga de la viga original.

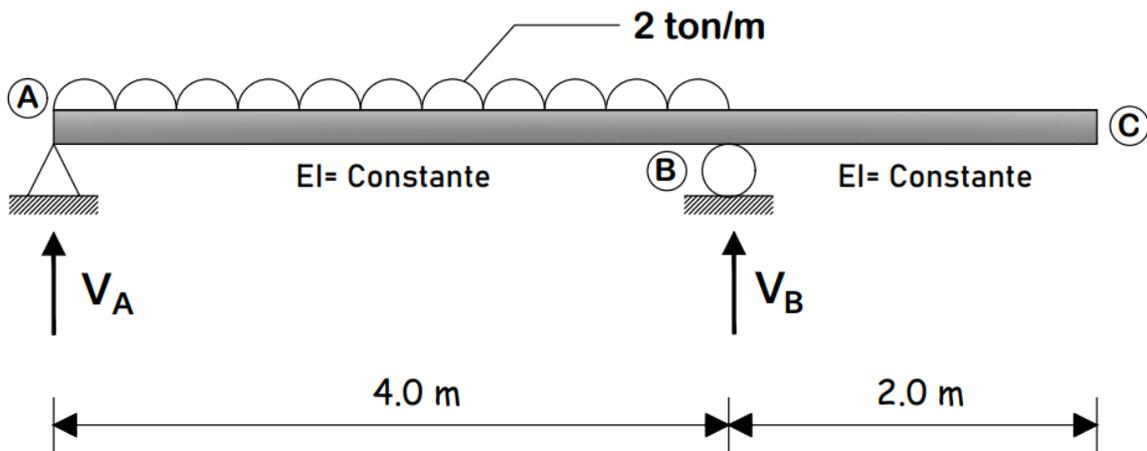
Después de emplear el principio de superposición, se pasa a calcular las reacciones con las ecuaciones del equilibrio y obtener el diagrama del momento flexionante con ayuda de las ecuaciones de momento que se calcularan con el método de cortes.

Se procede a resolver cada una de las vigas por separado y a obtener el diagrama de momento flexionante, se resolverá primero la viga 1 y después la viga 2.

VIGA 1



PASO ①: Obtener las reacciones en los apoyos de la viga 1 utilizando las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-V_B(4\text{ m}) + 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (4\text{ m}) \left(\frac{4\text{ m}}{2} \right) = 0$$

$$-V_B(4\text{ m}) + 16\text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$V_B = \frac{16\text{ ton} \cdot \text{m}}{4\text{ m}}$$

$$V_B = 4\text{ ton}$$

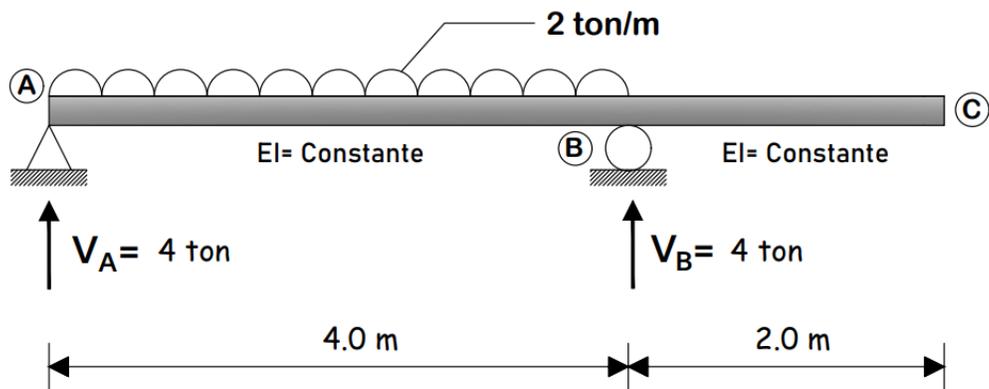
$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$V_A + V_B - 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (4\text{ m}) = 0$$

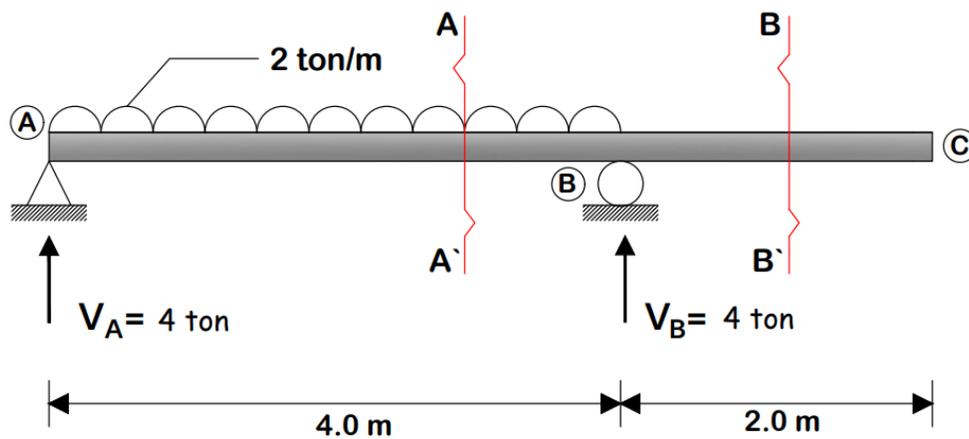
$$V_A + 4\text{ ton} - 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (4\text{ m}) = 0$$

$$V_A - 4\text{ ton} = 0$$

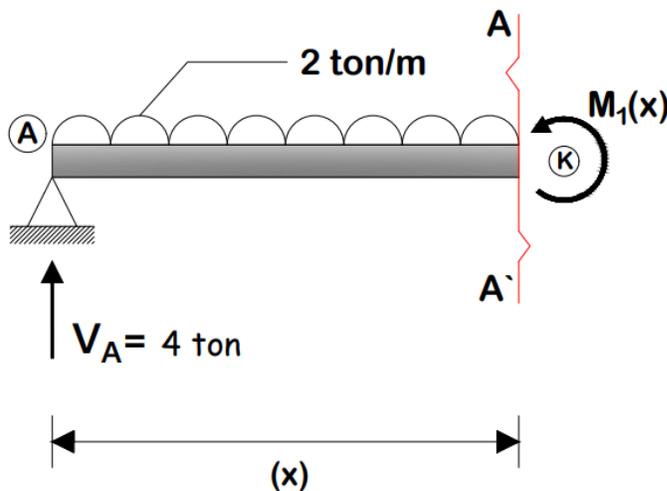
$$V_A = 4\text{ ton}$$



PASO ②: Obtener las ecuaciones del momento flexionante con el método de cortes y después con las ecuaciones calculas se graficará el momento flexionante de la VIGA 1.

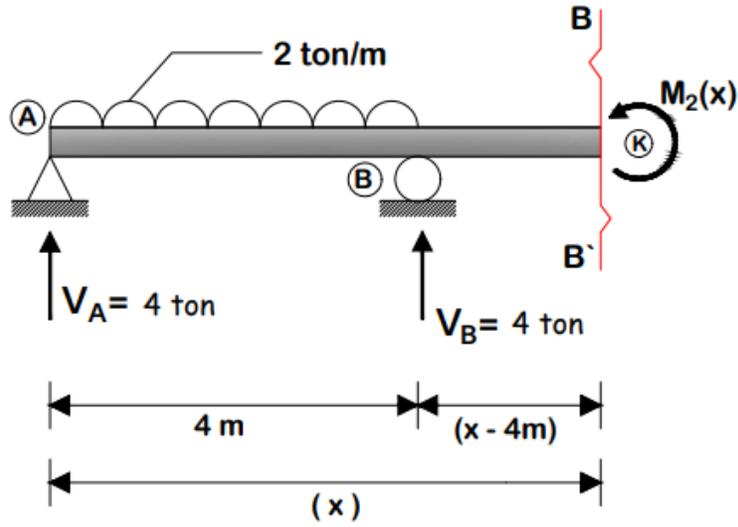


CORTE A – A' [0 m ≤ x ≤ 4.0 m]



$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$ $M_1(x) - 4(x) + 2(x) \left(\frac{x}{2}\right) = 0$ $M_1(x) - 4(x) + x^2 = 0$ $M_1(x) = -x^2 + 4(x)$

CORTE B – B' [4.0 m ≤ x ≤ 6.0 m]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M_2(x) - 4(x) + 2(4)\left(x - 4 + \frac{4}{2}\right) - 4(x - 4) = 0$$

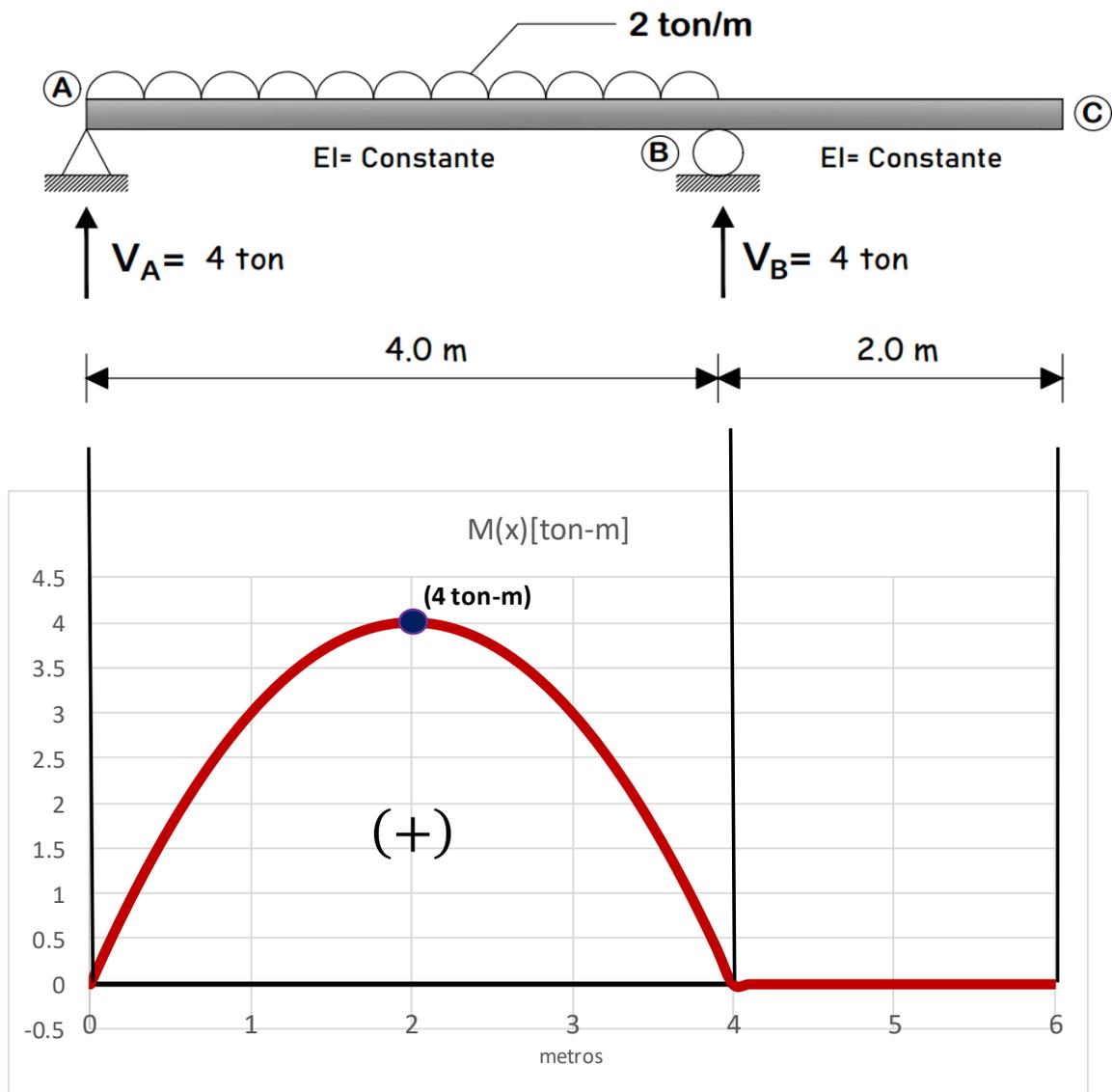
$$M_2(x) - 4(x) + 8(x - 2) - 4(x) + 16 = 0$$

$$M_2(x) - 4(x) + 8(x) - 16 - 4x + 16 = 0$$

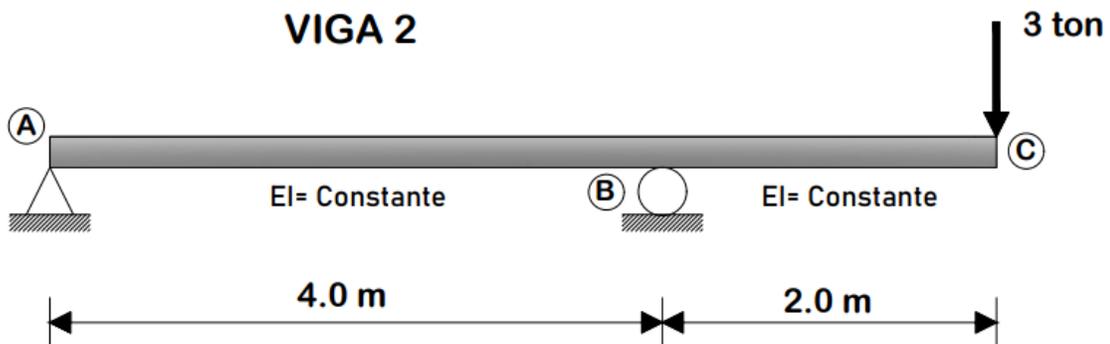
$$M_2(x) = 0$$

(x)	M(x)	
0	0	[0 m ≤ x ≤ 4 m] $M_1(x) = -x^2 + 4(x)$
0.50	1.75	
1.00	3	
1.50	3.75	
2.00	4	
2.50	3.75	
3.00	3	
3.50	1.75	
4.00	0	
4.00	0	[4 m ≤ x ≤ 6 m] $M_2(x) = 0$
4.50	0	
5.00	0	
5.50	0	
6.00	0	

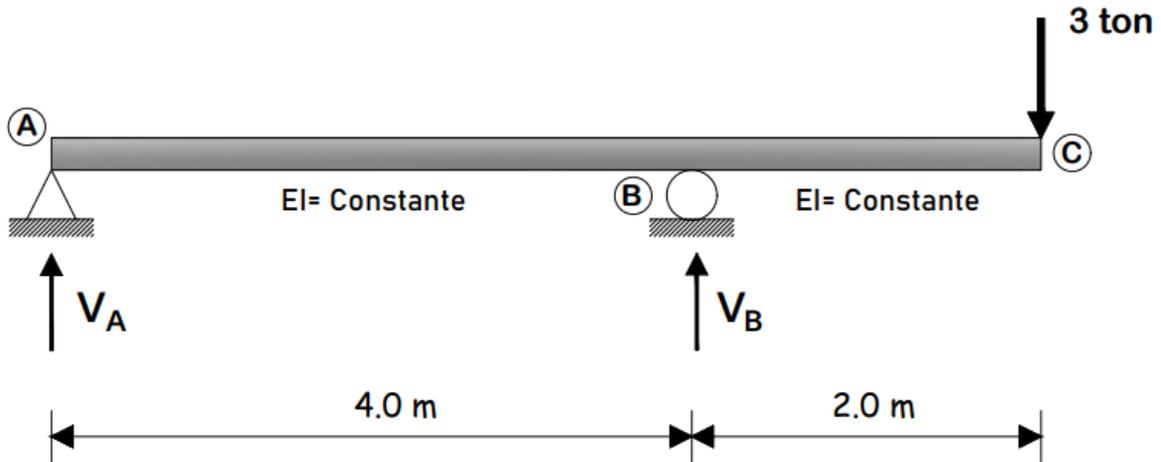
VIGA 1



VIGA 2



PASO ③: Obtener las reacciones en los apoyos de la viga 2 utilizando las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_A = 0 \quad (\odot)$$

$$-V_B(4 \text{ m}) + 3 \text{ ton}(6 \text{ m}) = 0$$

$$-V_B(4 \text{ m}) + 18 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$V_B(4 \text{ m}) = 18 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_B = \frac{18 \text{ ton} \cdot \text{m}}{4 \text{ m}}$$

$$V_B = \frac{9}{2} \text{ ton}$$

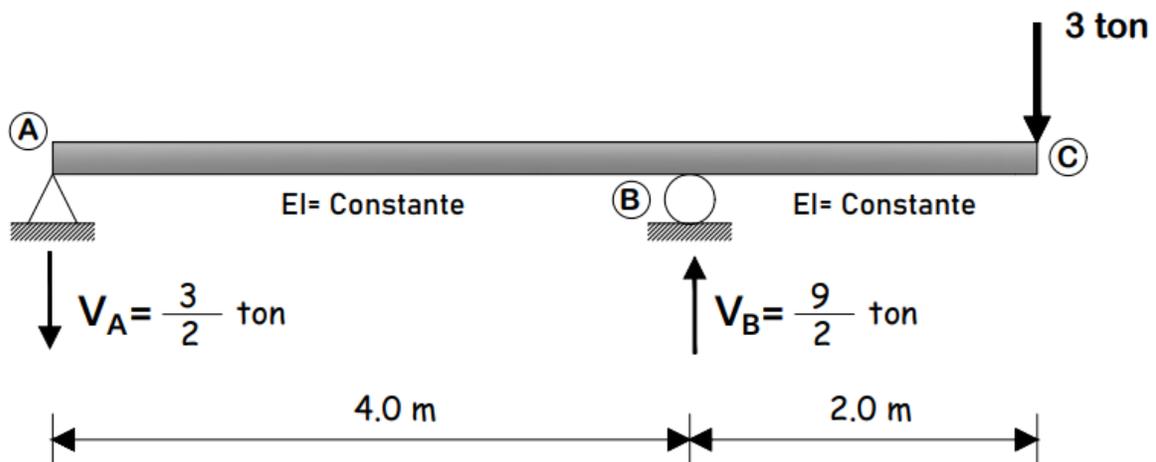
$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$V_A + V_B - 3 \text{ ton} = 0$$

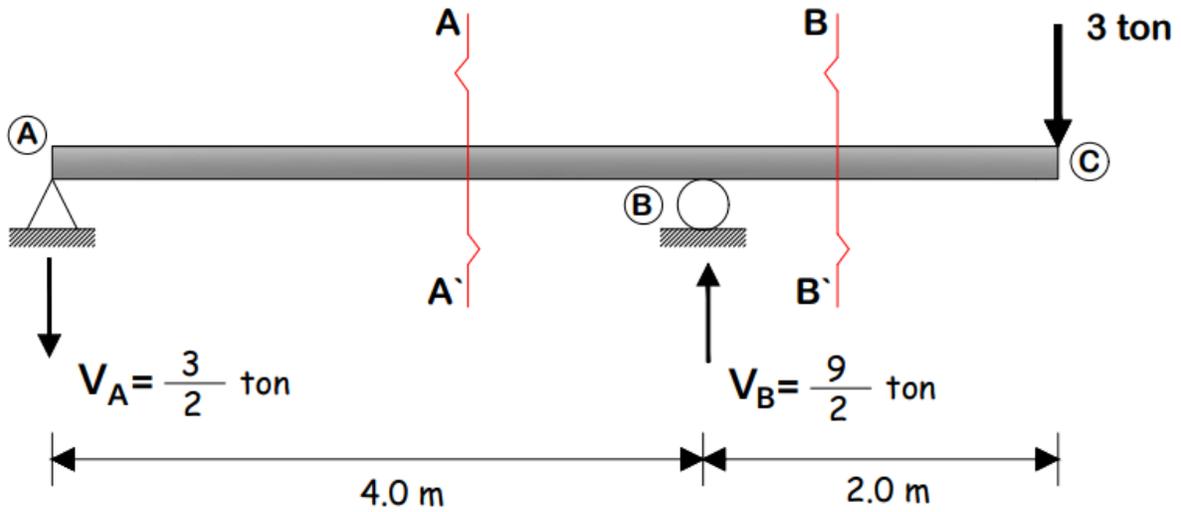
$$V_A + \frac{9}{2} \text{ ton} - 3 \text{ ton} = 0$$

$$V_A + \frac{3}{2} \text{ ton} = 0$$

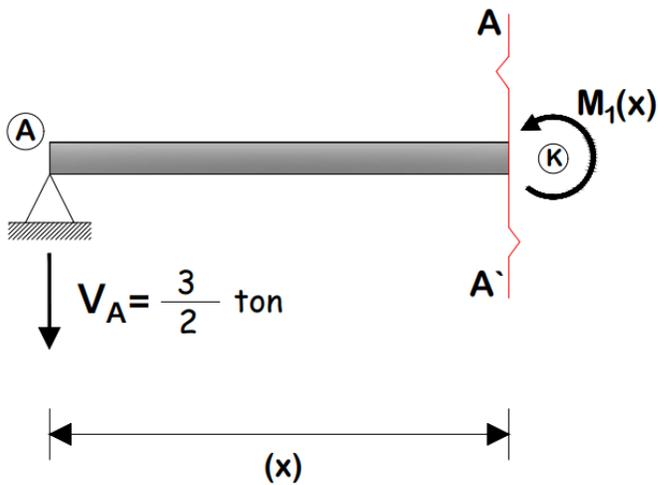
$$V_A = -\frac{3}{2} \text{ ton} \quad [\downarrow]$$



PASO ④: Obtener las ecuaciones del momento flexionante con el método de cortes y después con las ecuaciones calculadas graficar el momento flexionante de la viga 2.



CORTE A – A' [0 m ≤ x ≤ 4.0 m]

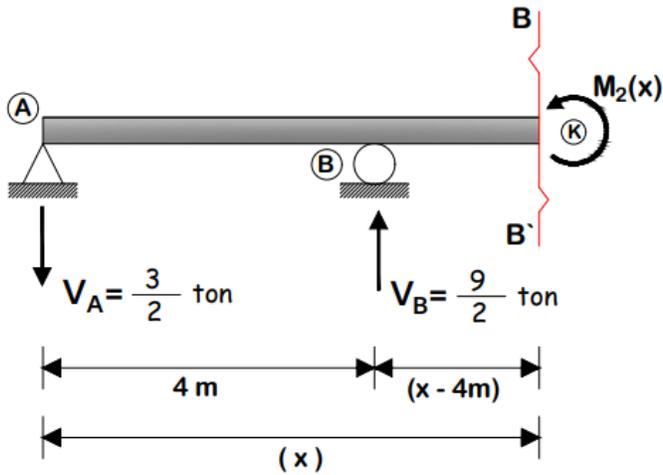


$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M_1(x) + \frac{3}{2}(x) = 0$$

$$M_1(x) = -\frac{3}{2}(x)$$

CORTE B – B' [4.0 m ≤ x ≤ 6.0 m]



$\Sigma M_k = 0$ (+)

$$M_2(x) + \frac{3}{2}(x) - \frac{9}{2}(x-4) = 0$$

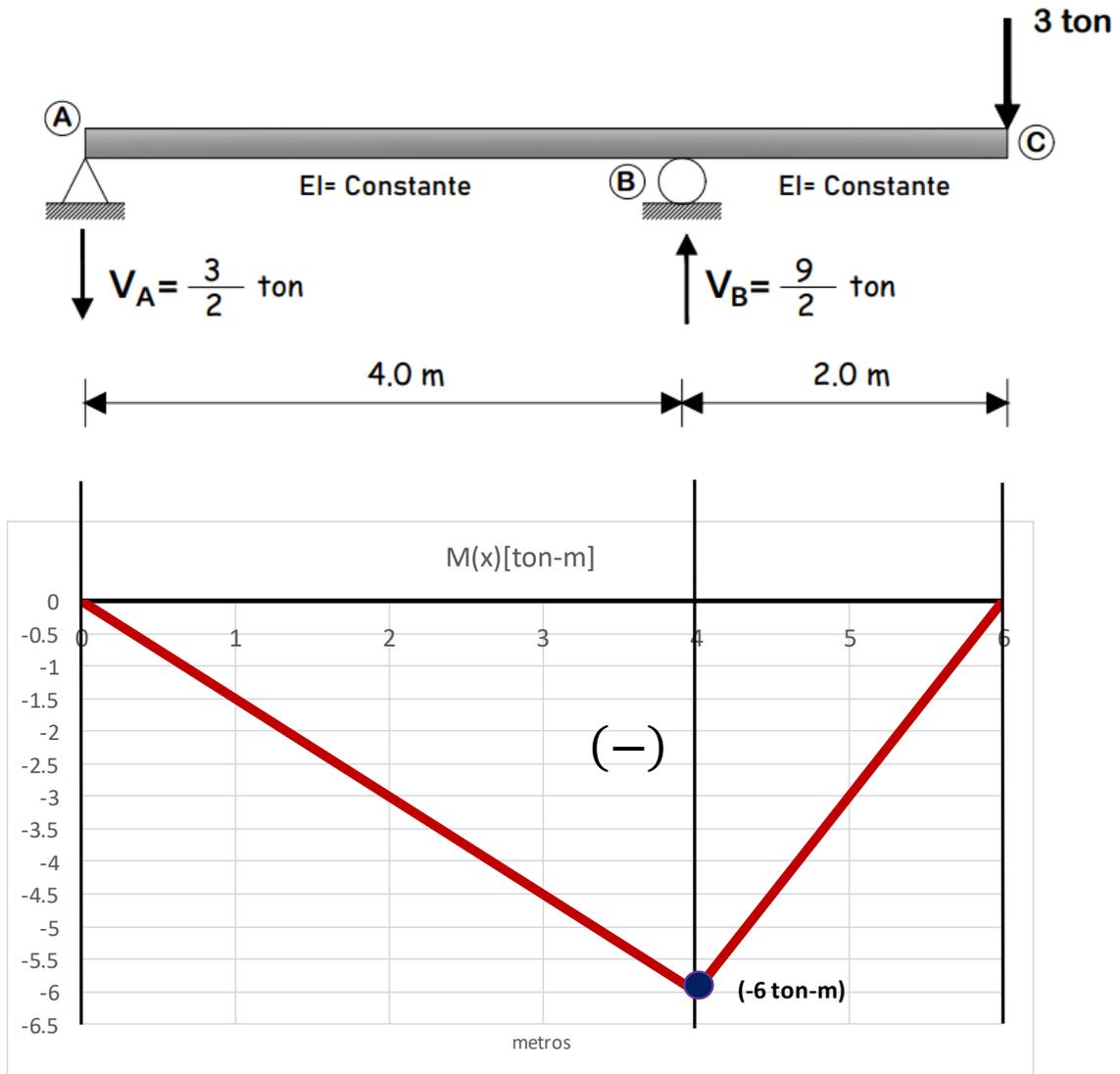
$$M_2(x) + \frac{3}{2}(x) - \frac{9}{2}(x) + 18 = 0$$

$$M_2(x) - 3(x) + 18 = 0$$

$$M_2(x) = 3(x) - 18$$

(x)	M(x)	
0	0	[0 m ≤ x ≤ 4 m] $M_1(x) = -\frac{3}{2}(x)$
0.25	-0.375	
0.50	-0.75	
0.75	-1.125	
1.00	-1.5	
1.25	-1.875	
1.50	-2.25	
1.75	-2.625	
2.00	-3	
2.25	-3.375	
2.50	-3.75	
2.75	-4.125	
3.00	-4.5	
3.25	-4.875	
3.50	-5.25	
3.75	-5.625	
4.00	-6	
4.25	-5.25	
4.50	-4.5	
4.75	-3.75	
5.00	-3	
5.25	-2.25	
5.50	-1.5	
5.75	-0.75	
6.00	0	

VIGA 2

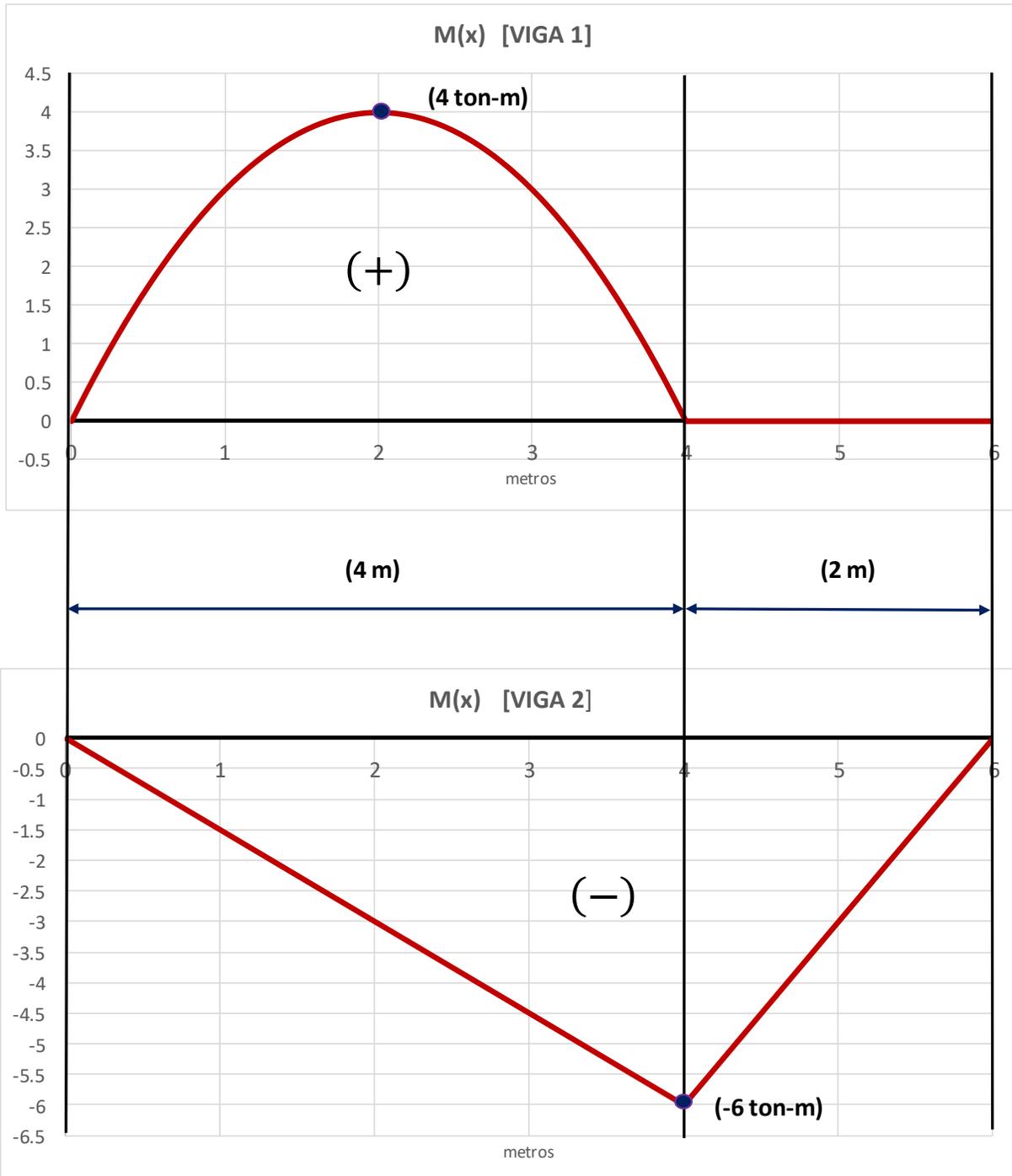


El principio de superposición permite descomponer una viga inicial en dos vigas secundarias, como ya se tienen los diagramas de momento flexionante de ambas vigas, se pasará a sumar ambos diagramas ya que como se ha venido mencionando, el diagrama de momento flexionante de la viga inicial es igual a la suma de los diagramas de momento de la viga 1 y de la viga 2.

Después de hacerse la suma de ambos diagramas de momento, se utilizará la ecuación 2.12 para plantear la ecuación que permita conocer cuál es la energía interna de deformación de la viga inicial, esta energía interna será igual a la suma de la energía interna de deformación del tramo que va desde 0 a los 4 metros más la energía interna de deformación del tramo que va desde los 4 metros a los 6 metros.

Puede que la idea no está clara, por lo que se continuara con la solución del ejercicio:

PASO ⑤): Calcular la energía interna de deformación elástica de la viga original utilizando los diagramas de momento flexionante de la viga 1 y la viga 2.



$$U_i = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} = U_i = \int_0^4 \frac{(\text{semicírculo} + \text{triángulo})^2}{2EI} dx + \int_4^6 \frac{(\text{triángulo})^2}{2EI} dx$$

Se resuelve el binomio al cuadrado:

$$\left(\begin{array}{c} a \\ \text{semicírculo} \end{array} + \begin{array}{c} b \\ \text{triángulo} \end{array} \right)^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2$$

$$\left(\text{semicírculo} + \text{triángulo} \right)^2 = (\text{semicírculo})^2 + 2(\text{semicírculo})(\text{triángulo}) + (\text{triángulo})^2$$

Sustituir el trinomio al cuadrado perfecto en la ecuación de la energía interna de deformación:

$$U_i = \underbrace{\int_0^4 \frac{(\text{semicírculo})^2}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 1}} + \underbrace{\int_0^4 \frac{2(\text{semicírculo})(\text{triángulo})}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 2}} + \underbrace{\int_0^4 \frac{(\text{triángulo})^2}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 3}} + \underbrace{\int_4^6 \frac{(\text{triángulo})^2}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 4}}$$

Se resolverá cada una de las integrales por separado y después se sumará el resultado de cada una de las integrales para obtener la energía interna de deformación total.

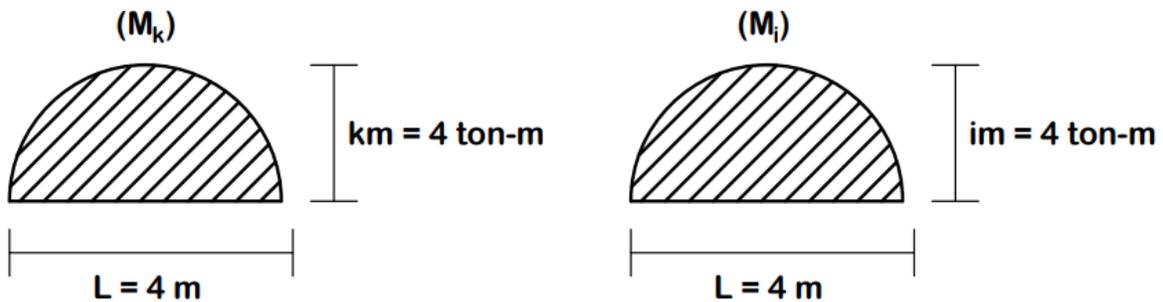
Para los próximos ejemplos ya no se colocará una parte de la tabla 2.1 como se hizo en los ejercicios pasados, ya se debe de saber que el resultado de la integración del producto de las dos ecuaciones del momento flexionante se encuentran en la tabla 2.1, por lo tanto, solo colocará el resultado. Si se desea verificar si el resultado está correcto, se recomienda revisar la tabla 2.1 y comprobar el resultado.

Ya dicho lo anterior, se continua con la solución del problema resolviendo cada integral por separado:

INTEGRAL 1

$$\int_0^4 \left(\frac{\text{shaded semi-circle}}{2EI} \right)^2 dx$$

$$\int_0^4 \left(\frac{\text{shaded semi-circle}}{2EI} \right)^2 dx = \int_0^4 \frac{M_k}{2EI} \frac{M_i}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{8}{15} (L)(im)(km) \right]$$



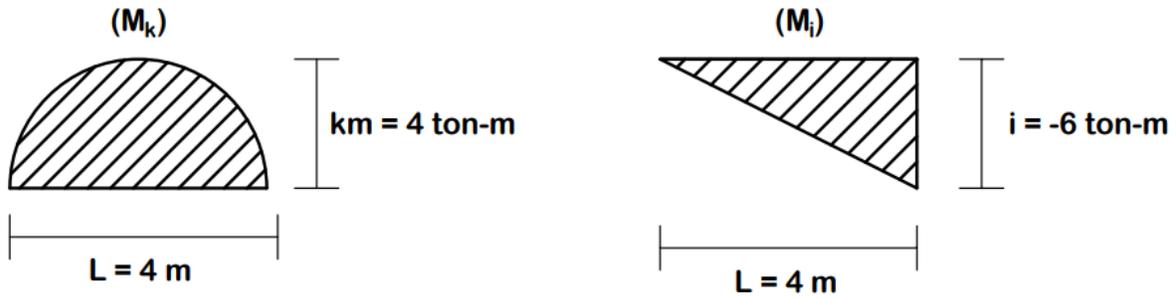
$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{8}{15} (L)(im)(km) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{8}{15} (4)(4)(4) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{512}{15} \right] = \frac{256}{15EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

$$\int_0^4 \left(\frac{\text{shaded semi-circle}}{2EI} \right)^2 dx = \frac{256}{15EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

INTEGRAL 2

$$\int_0^4 \frac{2 \left(\frac{\text{shaded semi-circle}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{shaded triangle}}{EI} \right)}{2EI} dx$$

$$\int_0^4 \frac{2 \left(\frac{\text{shaded semi-circle}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{shaded triangle}}{EI} \right)}{2EI} dx = \int_0^4 \frac{\left(\frac{\text{shaded semi-circle}}{EI} \right) \left(\frac{\text{shaded triangle}}{EI} \right)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(km) \right]$$



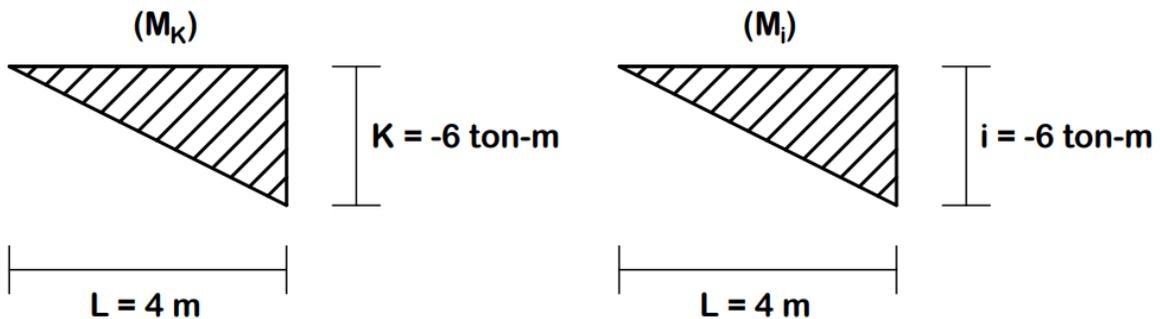
$$\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(km) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (4)(-6)(4) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (4)(-6)(4) \right] = -\frac{32}{EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

$$\int_0^4 \frac{2 \left(\text{semi-circle} \right) \left(\text{triangle} \right)}{2EI} dx = -\frac{32}{EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

INTEGRAL 3

$$\int_0^4 \left(\frac{\text{triangle}}{2EI} \right)^2 dx$$

$$\int_0^4 \left(\frac{\text{triangle}}{2EI} \right)^2 dx = \int_0^4 \left(\frac{M_k}{2EI} \right) \left(\frac{M_i}{2EI} \right) dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right]$$



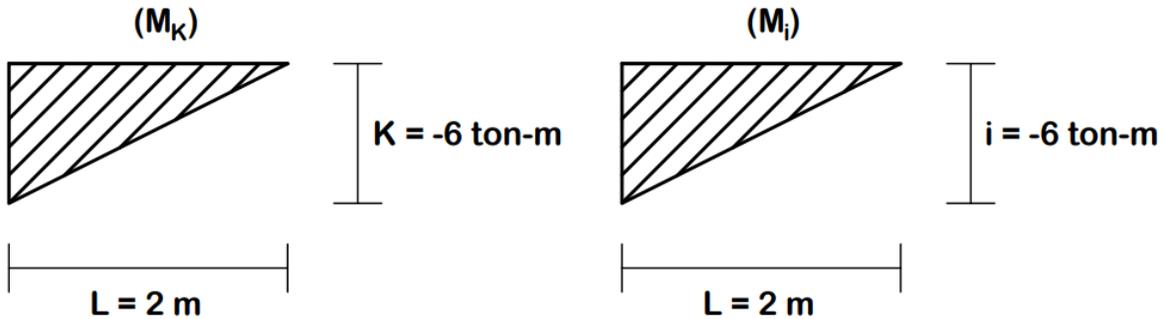
$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (4)(-6)(-6) \right] = \frac{1}{2EI} [48] = \frac{24}{EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

$$\int_0^4 \left(\frac{\text{trapezoid}}{2EI} \right)^2 dx = \frac{24}{EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

INTEGRAL 4

$$\int_4^6 \left(\frac{\text{trapezoid}}{2EI} \right)^2 dx$$

$$\int_4^6 \left(\frac{\text{trapezoid}}{2EI} \right)^2 dx = \int_4^6 \frac{M_k}{2EI} \frac{M_i}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right]$$



$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (2)(-6)(-6) \right] = \frac{1}{2EI} [24] = \frac{12}{EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

$$\int_4^6 \left(\frac{\text{trapezoid}}{2EI} \right)^2 dx = \frac{12}{EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN TOTAL

$$U_i = \int_0^4 \left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right)^2 dx + \int_0^4 \frac{2 \left(\text{Diagrama 1} \right) \left(\text{Diagrama 2} \right)}{2EI} dx + \int_0^4 \left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right)^2 dx + \int_4^6 \left(\frac{\text{Diagrama 3}}{2EI} \right)^2 dx$$

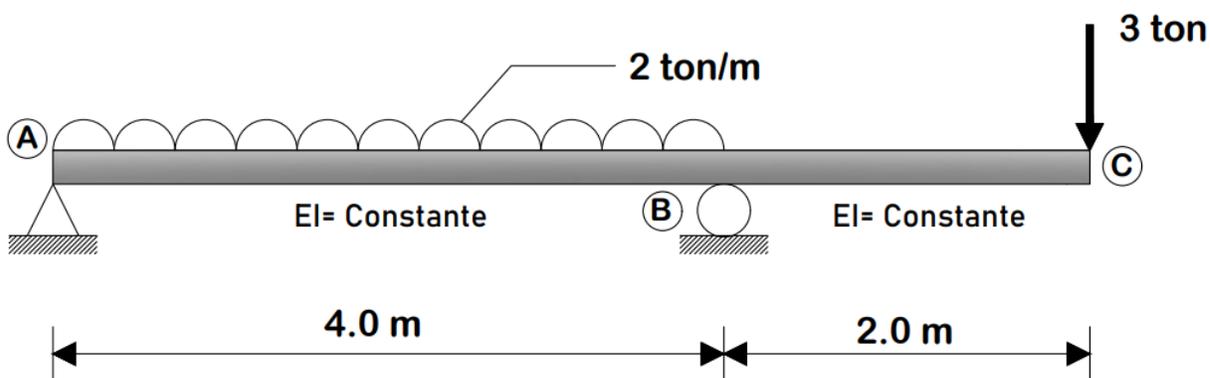
$$U_i = \frac{256}{15EI} - \frac{32}{EI} + \frac{24}{EI} + \frac{12}{EI}$$

Resultado: Energía Interna de Deformación elástica

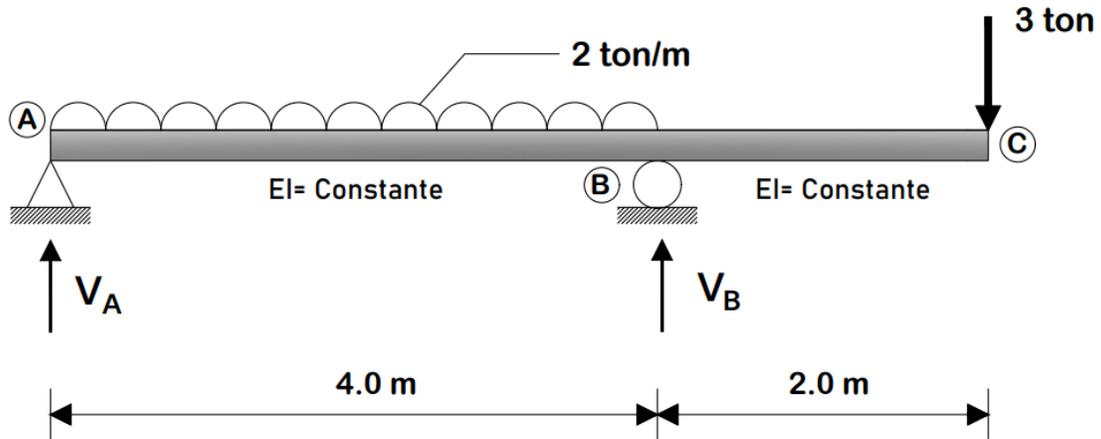
$$U_i = \frac{316}{15EI} \text{ [ton} \cdot \text{m]}$$

Para confirmar si el resultado es correcto, se resolverá el mismo ejercicio, pero ahora utilizando las ecuaciones del momento flexionante.

Ejercicio 2.6: Con el propósito de comparar resultados y crear criterios propios sobre que método es más eficiente para calcular la energía interna de deformación, se resolverá la misma viga del ejercicio 2.5 pero utilizando las ecuaciones del momento flexionante, en lugar de ocupar la tabla de integración.



PASO ①: Obtener las reacciones en los apoyos utilizando las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_A = 0 \quad (+)$$

$$-V_B(4 \text{ m}) + 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (4 \text{ m}) \left(\frac{4 \text{ m}}{2} \right) + 3 \text{ ton}(6 \text{ m}) = 0$$

$$-V_B(4 \text{ m}) + 16 \text{ ton} \cdot \text{m} + 18 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$-V_B(4 \text{ m}) + 34 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$V_B = \frac{34 \text{ ton} \cdot \text{m}}{4 \text{ m}}$$

$$V_B = \frac{17}{2} \text{ ton}$$

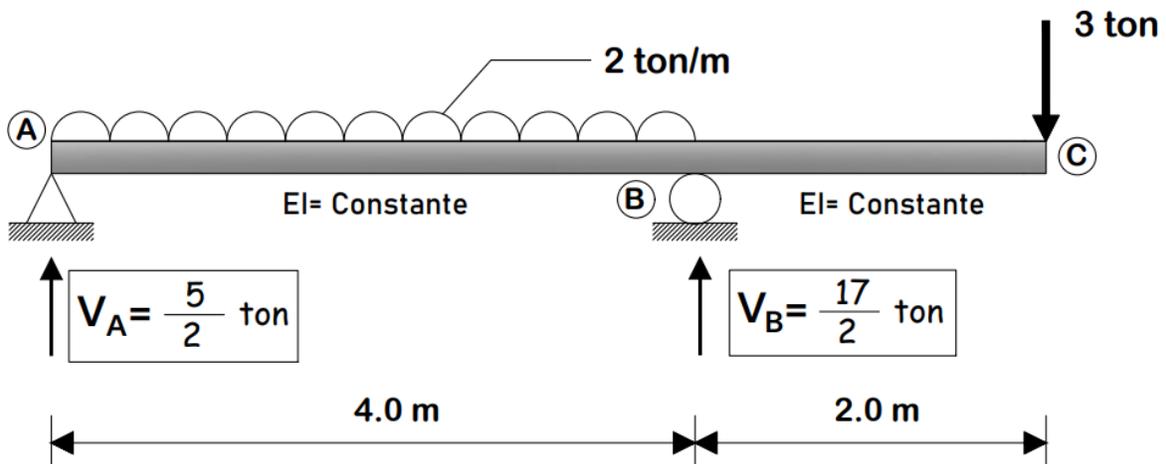
$$\Sigma F_Y = 0 \quad (+)$$

$$V_A + V_B - 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (4 \text{ m}) - 3 \text{ ton} = 0$$

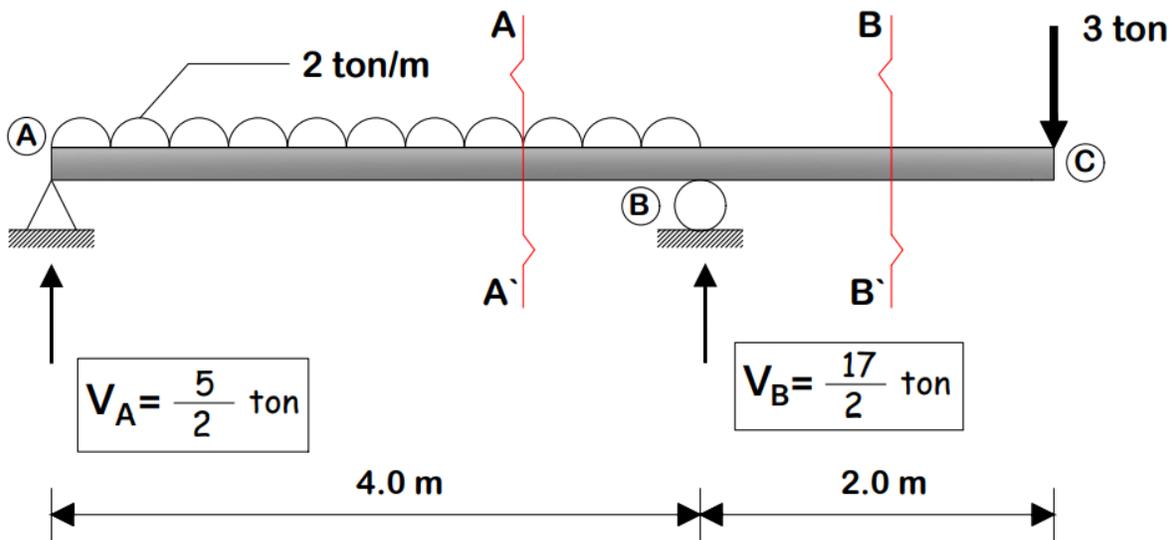
$$V_A + \frac{17}{2} \text{ ton} - 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (4 \text{ m}) - 3 \text{ ton} = 0$$

$$V_A - \frac{5}{2} \text{ ton} = 0$$

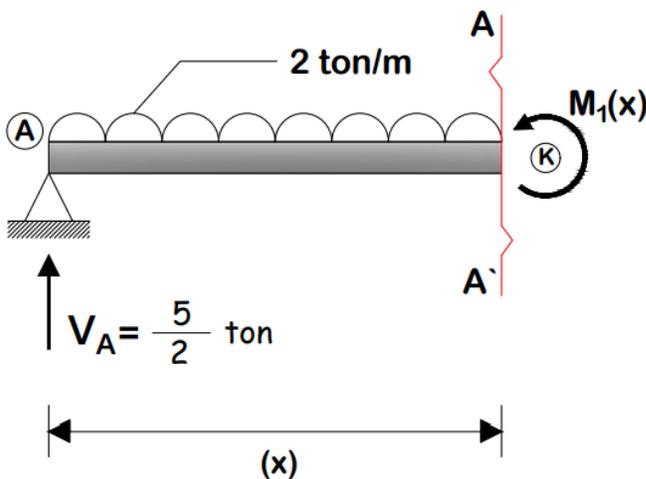
$$V_A = \frac{5}{2} \text{ ton}$$



PASO ②: Obtener las ecuaciones del momento flexionante con el método de cortes.



CORTE A – A' [0 m ≤ x ≤ 4.0 m]



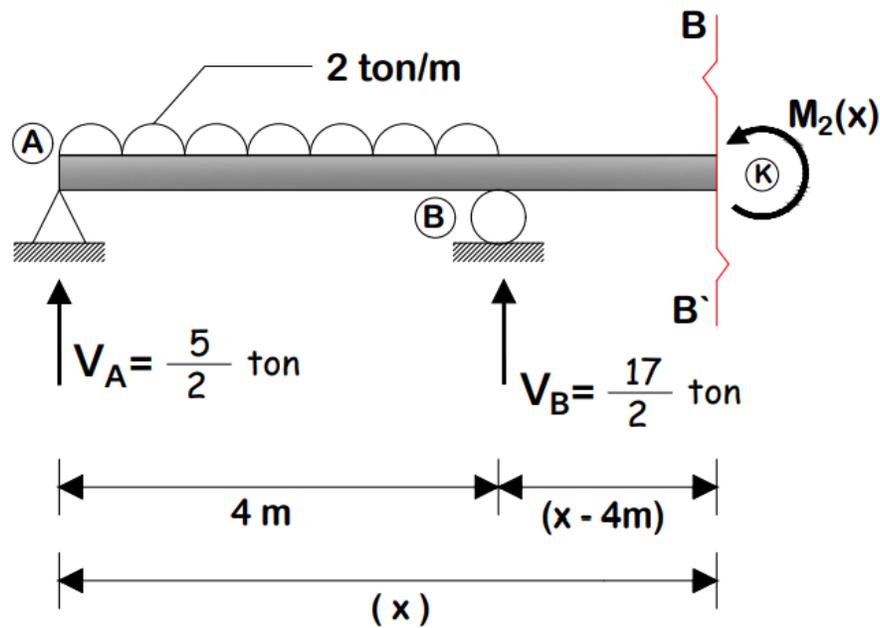
$$\Sigma M_k = \overset{(+)}{\curvearrowright}$$

$$M_1(x) + 2(x) \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{5}{2}(x) = 0$$

$$M_1(x) + x^2 - \frac{5}{2}(x) = 0$$

$$M_1(x) = -x^2 + \frac{5}{2}(x)$$

CORTE B – B' [4.0 m ≤ x ≤ 6.0 m]



$$\Sigma M_k = \curvearrowright (+)$$

$$M_2(x) - \frac{5}{2}(x) - \frac{17}{2}(x - 4) + 2(4)\left(x - 4 + \frac{4}{2}\right) = 0$$

$$M_2(x) - \frac{5}{2}(x) - \frac{17}{2}(x) + 34 + 8(x - 2) = 0$$

$$M_2(x) - \frac{5}{2}(x) - \frac{17}{2}(x) + 34 + 8x - 16 = 0$$

$$M_2(x) - 3x + 18 = 0$$

$$M_2(x) = 3x - 18$$

PASO ③: Se calcula la energía interna de deformación con ayuda de la ecuación 2.12 y con las ecuaciones del momento flexionante de la viga.

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

$[0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}]$	$[4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}]$
$M_1(x) = -x^2 + \frac{5}{2}x$	$M_2(x) = 3x - 18$

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx = \int_0^4 \frac{M_1^2(x)}{2EI} dx + \int_4^6 \frac{M_2^2(x)}{2EI} dx$$

$$U_i = \underbrace{\int_0^4 \frac{\left(-x^2 + \frac{5}{2}x\right)^2}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 1}} + \underbrace{\int_4^6 \frac{(3x - 18)^2}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 2}}$$

Se resuelve cada integral por separado y después se suman los resultados para obtener el valor de la energía interna de deformación.

INTEGRAL 1

$$\int_0^4 \frac{\left(-x^2 + \frac{5}{2}x\right)^2}{2EI} dx = \int_0^4 \frac{x^4 - 5x^3 + \frac{25}{4}x^2}{2EI} dx$$

$$\frac{1}{2EI} \int_0^4 x^4 dx - \frac{1}{2EI} \int_0^4 5x^3 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^4 \frac{25}{4} x^2 dx$$

$$\int_0^4 \left[\left(\frac{1}{2EI}\right) \left(\frac{x^5}{5}\right) - \left(\frac{1}{2EI}\right) \left(\frac{5x^4}{4}\right) + \left(\frac{1}{2EI}\right) \left(\frac{25x^3}{12}\right) \right]$$

$$\int_0^4 \left[\left(\frac{x^5}{10EI}\right) - \left(\frac{5x^4}{8EI}\right) + \left(\frac{25x^3}{24EI}\right) \right]$$

$$\left[\left(\frac{(4)^5}{10EI}\right) - \left(\frac{5(4)^4}{8EI}\right) + \left(\frac{25(4)^3}{24EI}\right) \right] - \left[\left(\frac{(0)^5}{10EI}\right) - \left(\frac{5(0)^4}{8EI}\right) + \left(\frac{25(0)^3}{24EI}\right) \right]$$

$$\left[\left(\frac{512}{5EI}\right) - \left(\frac{160}{EI}\right) + \left(\frac{200}{3EI}\right) \right] - [0]$$

$$\int_0^4 \frac{\left(-x^2 + \frac{5}{2}x\right)^2}{2EI} dx = \frac{136}{15EI}$$

INTEGRAL 2

$$\begin{aligned} \int_4^6 \frac{(3x - 18)^2}{2EI} dx &= \int_4^6 \frac{9x^2 - 108x + 324}{2EI} dx \\ \frac{1}{2EI} \int_4^6 9x^2 dx - \frac{1}{2EI} \int_4^6 108x dx + \frac{1}{2EI} \int_4^6 324 dx \\ &= \frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{9x^3}{3} \right) - \left(\frac{108x^2}{2} \right) + (324x) \right]_4^6 \\ &= \frac{1}{2EI} \left[\left(\frac{3x^3}{EI} \right) - \left(\frac{27x^2}{EI} \right) + \left(\frac{162x}{EI} \right) \right]_4^6 \\ &= \left[\left(\frac{3(6)^3}{2EI} \right) - \left(\frac{27(6)^2}{EI} \right) + \left(\frac{162(6)}{EI} \right) \right] - \left[\left(\frac{3(4)^3}{2EI} \right) - \left(\frac{27(4)^2}{EI} \right) + \left(\frac{162(4)}{EI} \right) \right] \\ &= \left[\left(\frac{324}{EI} \right) - \left(\frac{972}{EI} \right) + \left(\frac{972}{EI} \right) \right] - \left[\left(\frac{96}{EI} \right) - \left(\frac{432}{EI} \right) + \left(\frac{648}{EI} \right) \right] \\ &= \left[\frac{324}{EI} \right] - \left[\frac{312}{EI} \right] \end{aligned}$$

$$\int_4^6 \frac{(3x - 18)^2}{2EI} dx = \frac{12}{EI}$$

$$U_i = \int_0^4 \frac{\left(-x^2 + \frac{5}{2}x\right)^2}{2EI} dx + \int_4^6 \frac{(3x - 18)^2}{2EI} dx$$

$$U_i = \frac{136}{15EI} + \frac{12}{EI}$$

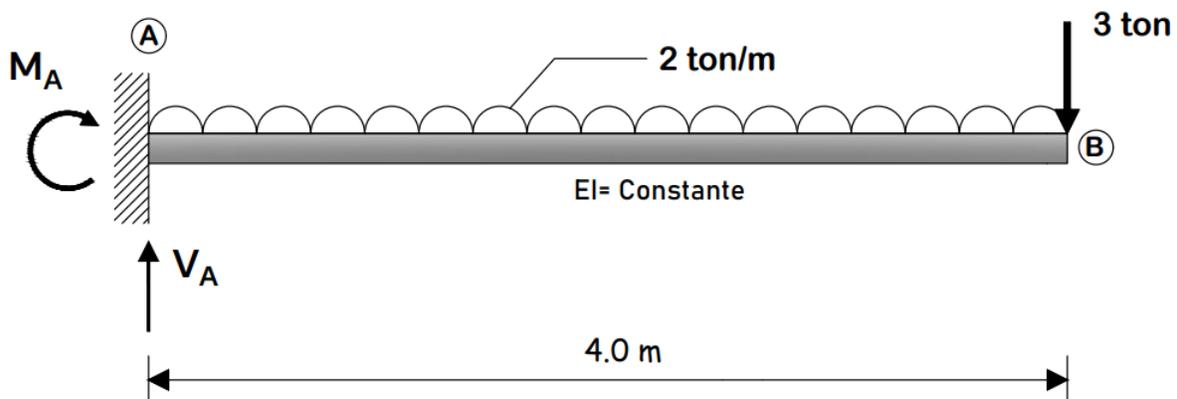
Resultado: Energía Interna de Deformación elástica

$$U_i = \frac{316}{15EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

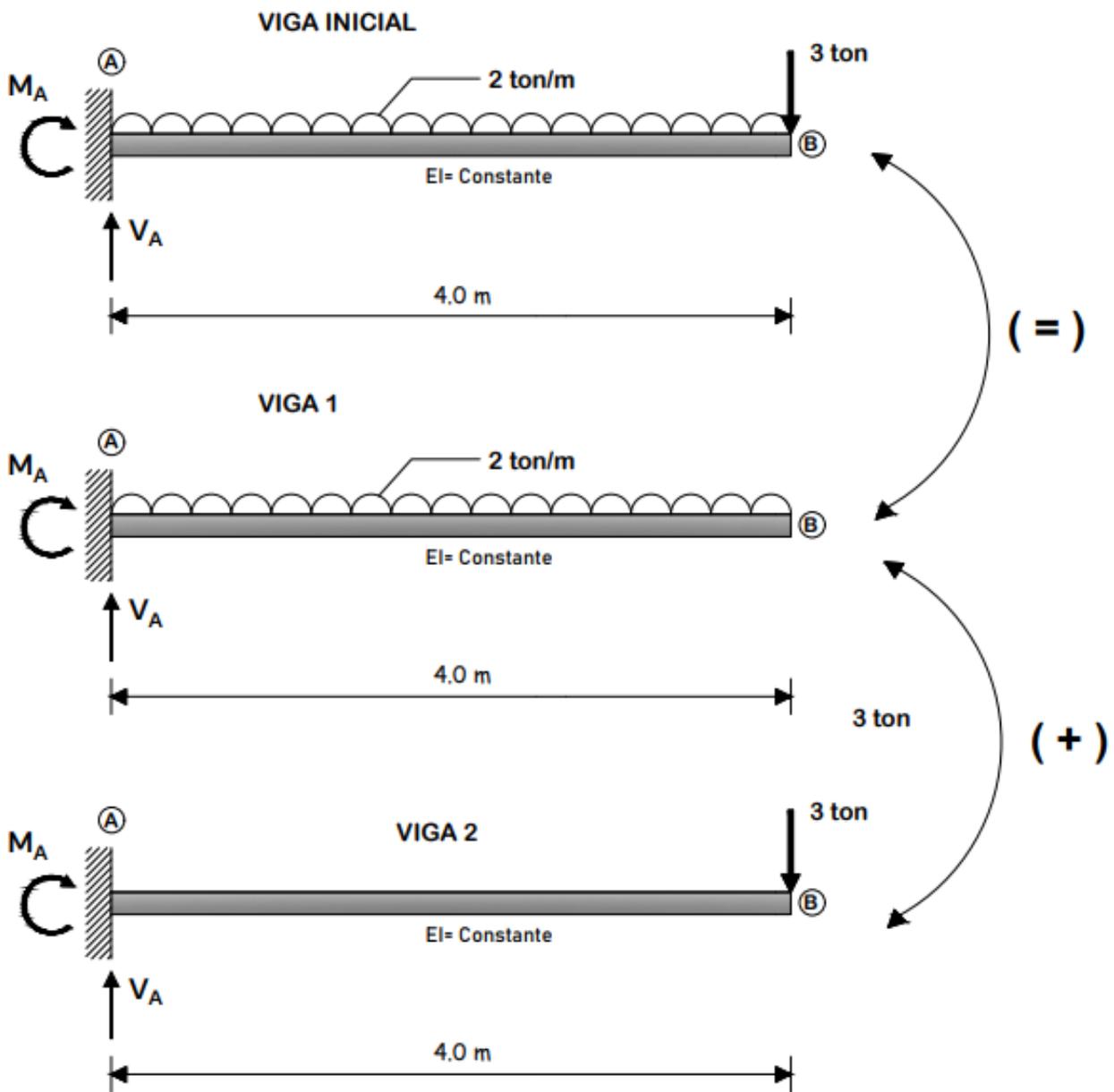
El resultado obtenido utilizando cada uno de los diferentes métodos es el mismo, por lo que se puede concluir que el principio de superposición permite obtener diagramas de momentos más fáciles para que al ocupar la tabla de integración se facilite el cálculo de la energía interna y se obtenga un resultado más preciso.

Se pasará a resolver el último ejercicio utilizando el principio de superposición para calcular la energía interna de deformación.

Ejercicio 2.7: Calcular la energía interna de deformación de una viga empotrada de 4 metros de longitud que es sometida a una carga uniformemente repartida de 2 ton/m y a una carga puntual de 3 toneladas, se supone que la sección transversal es constante por lo que también lo es el valor del módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I) de la viga.

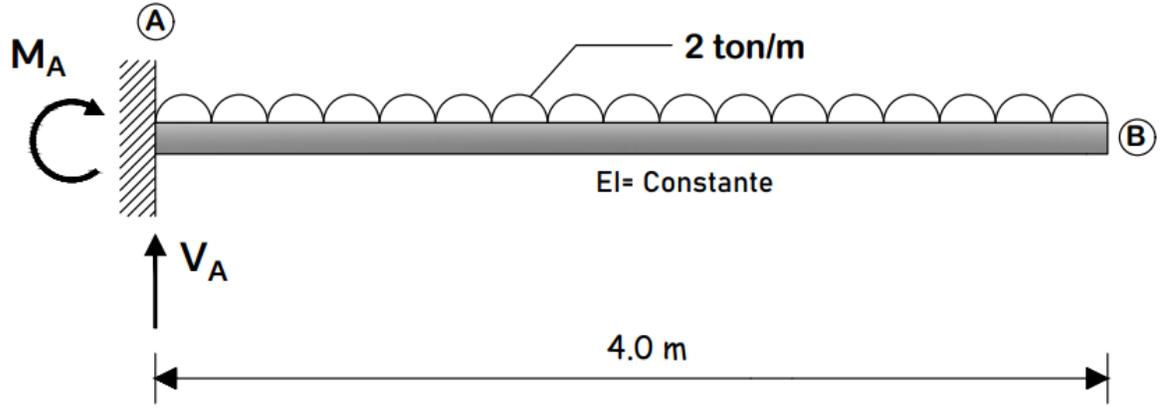


PASO ①: Aplicar el principio de superposición en la viga inicial.



PASO ③: Obtener el diagrama de momento flexionante de la viga 1.

VIGA 1



Cálculo de las reacciones con ayuda de las ecuaciones del equilibrio.

$$\Sigma M_A = 0 \quad (\odot)$$

$$M_A + 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (4 \text{ m}) \left(\frac{4 \text{ m}}{2} \right) = 0$$

$$M_A + 16 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$M_A = -16 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad (\ominus)$$

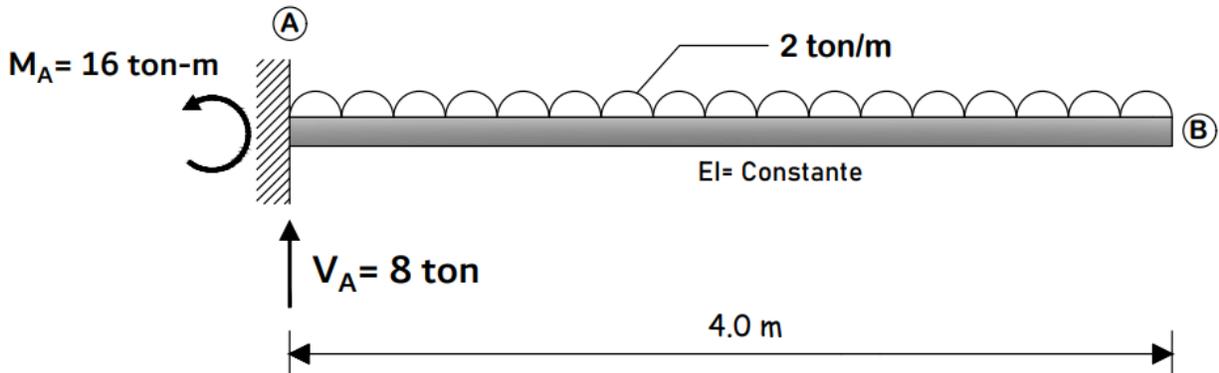
$$\Sigma M_B = 0 \quad (\odot)$$

$$M_A - 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (4 \text{ m}) \left(\frac{4 \text{ m}}{2} \right) + V_A (4 \text{ m}) = 0$$

$$-16 \text{ ton} \cdot \text{m} - 16 \text{ ton} \cdot \text{m} + V_A (4 \text{ m}) = 0$$

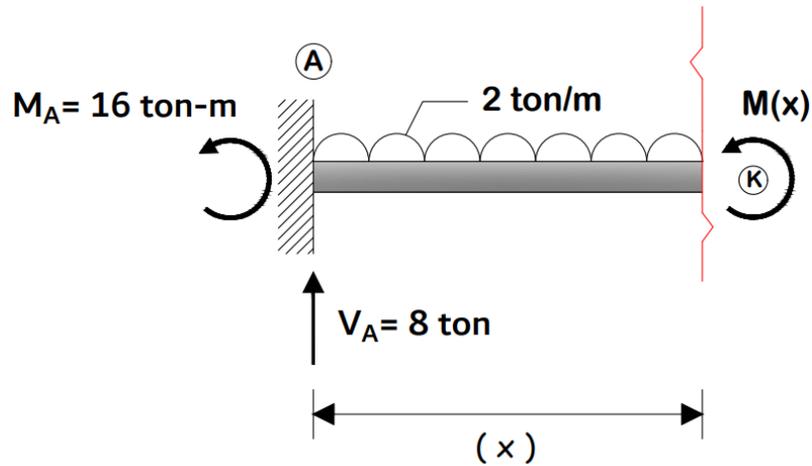
$$V_A (4 \text{ m}) = 32 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_A = 8 \text{ ton}$$



Cálculo de la ecuación del momento flexionante con el método de cortes.

CORTE #1 [0.0 m ≤ x ≤ 4.0 m]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

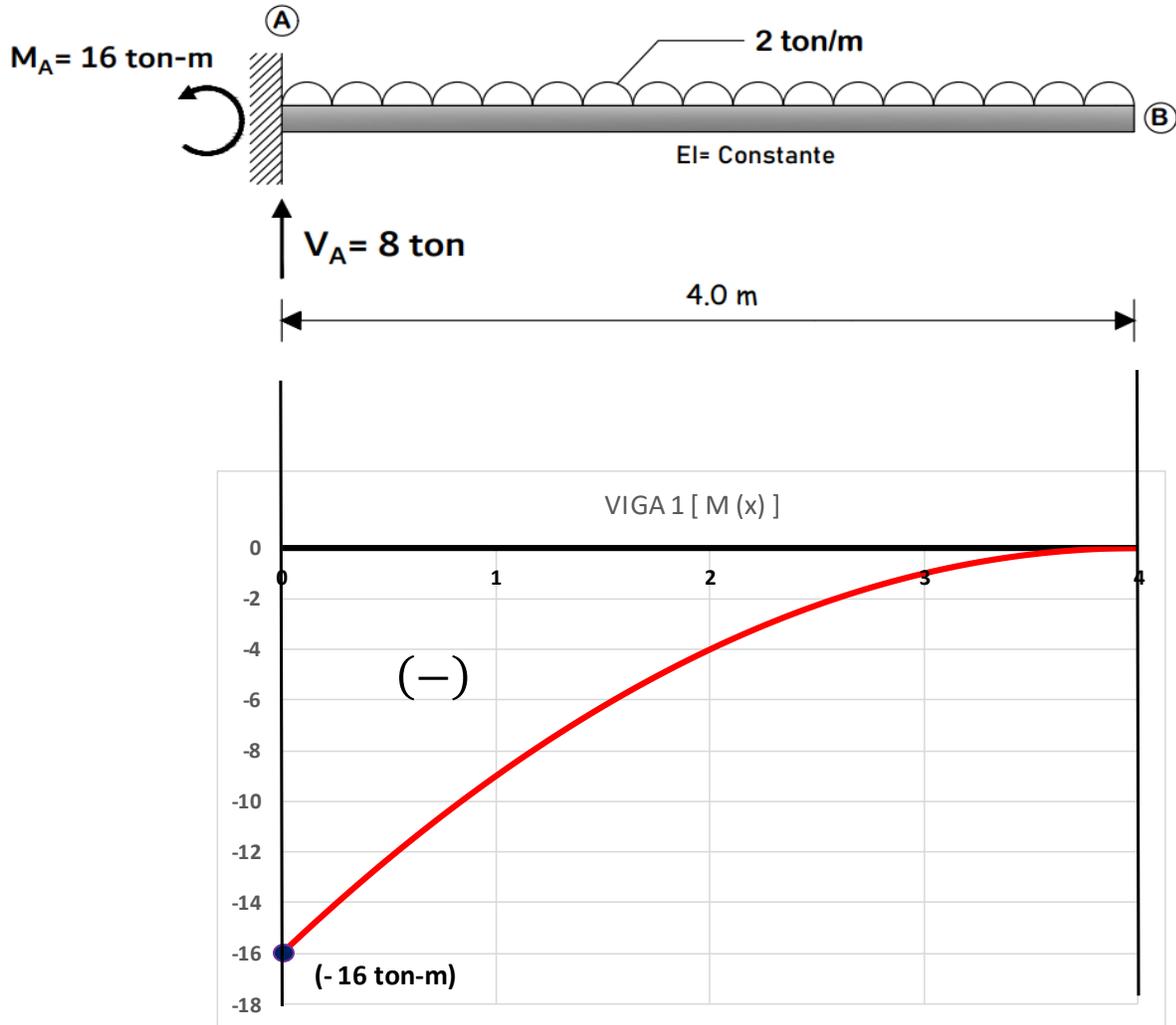
$$M(x) + 16 - 8x + 2(x) \left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$M(x) + 16 - 8x + x^2 = 0$$

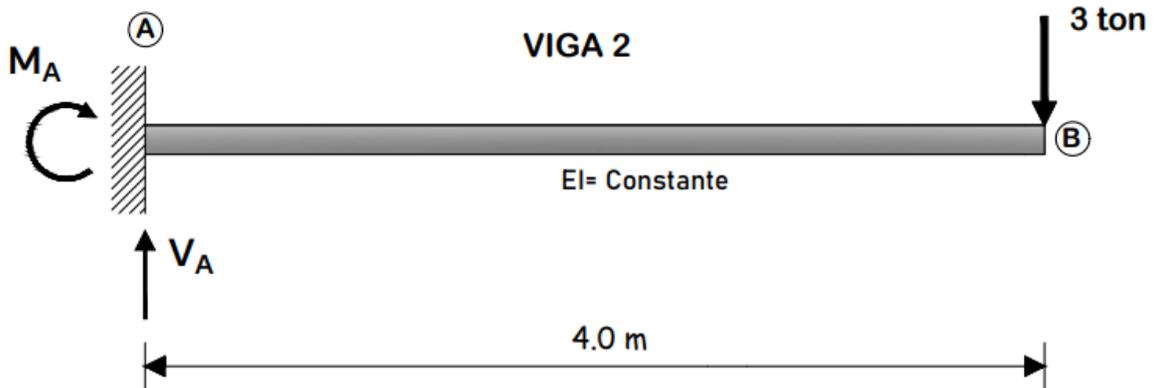
$$M(x) = -x^2 + 8x - 16$$

(x)	M(x)	
0	-16.00	[0 m ≤ x ≤ 4 m] M(x) = -x² + 8x - 16
0.50	-12.25	
1.00	-9.00	
1.50	-6.25	
2.00	-4.00	
2.50	-2.25	
3.00	-1.00	
3.50	-0.25	
4.00	0.00	

GRAFICA DEL MOMENTO FLEXIONANTE



PASO ④: Obtener el diagrama del momento flexionante de la viga 2.



Cálculo de las reacciones con ayuda de las ecuaciones del equilibrio.

$$\Sigma M_A = 0 \quad (+)$$

$$M_A + 3 \text{ ton}(4 \text{ m}) = 0$$

$$M_A + 12 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$M_A = -12 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

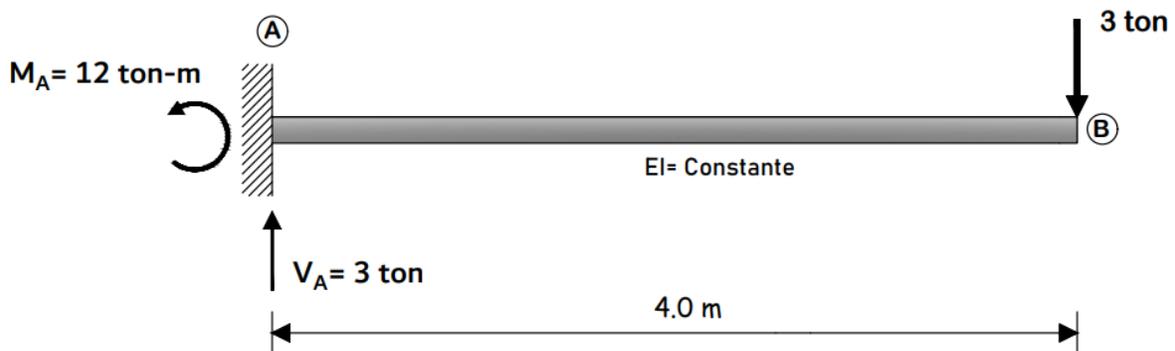
$$\Sigma M_B = 0 \quad (+)$$

$$M_A + V_A(4 \text{ m}) = 0$$

$$-12 \text{ ton} \cdot \text{m} + V_A(4 \text{ m}) = 0$$

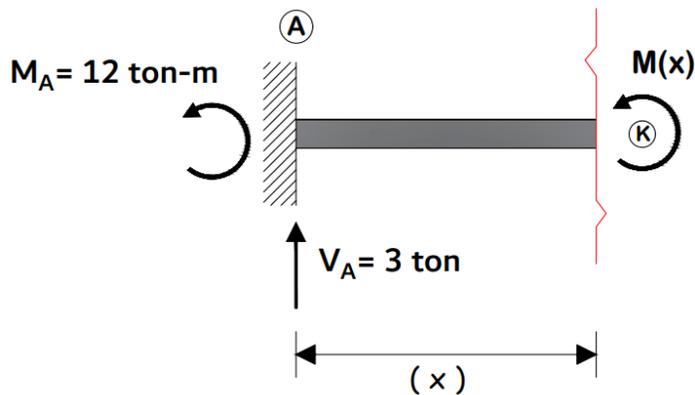
$$V_A = \frac{12 \text{ ton} \cdot \text{m}}{4 \text{ m}}$$

$$V_A = 3 \text{ ton}$$



Cálculo de la ecuación del momento flexionante con el método de cortes

CORTE #1 $[0.0 \text{ m} \leq x \leq 4.0 \text{ m}]$



$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

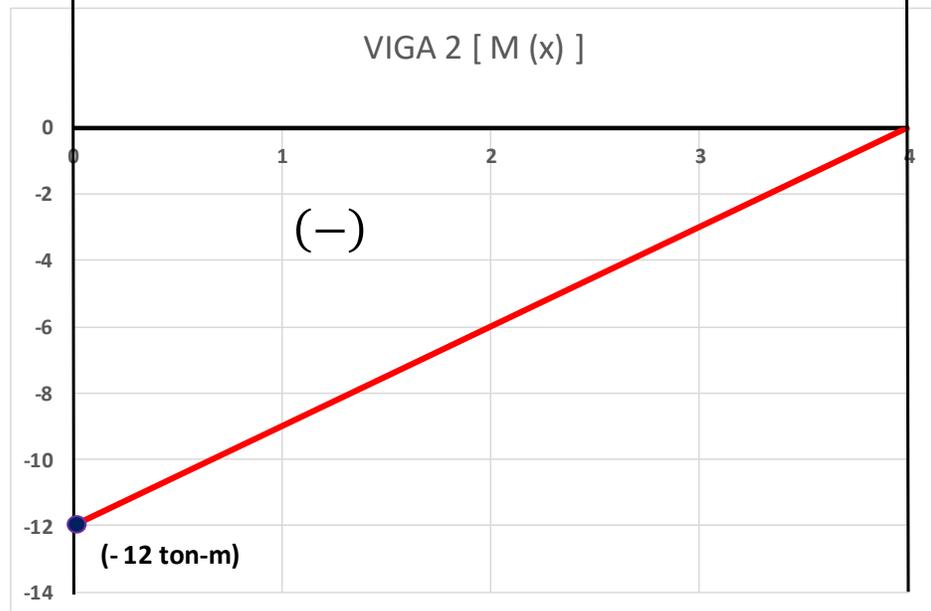
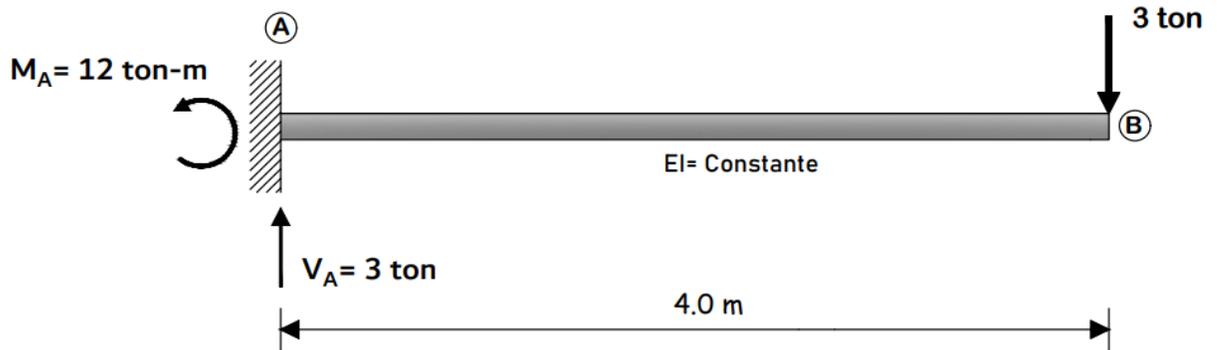
$$M(x) + 12 - 3x = 0$$

$$M(x) = 3x - 12$$

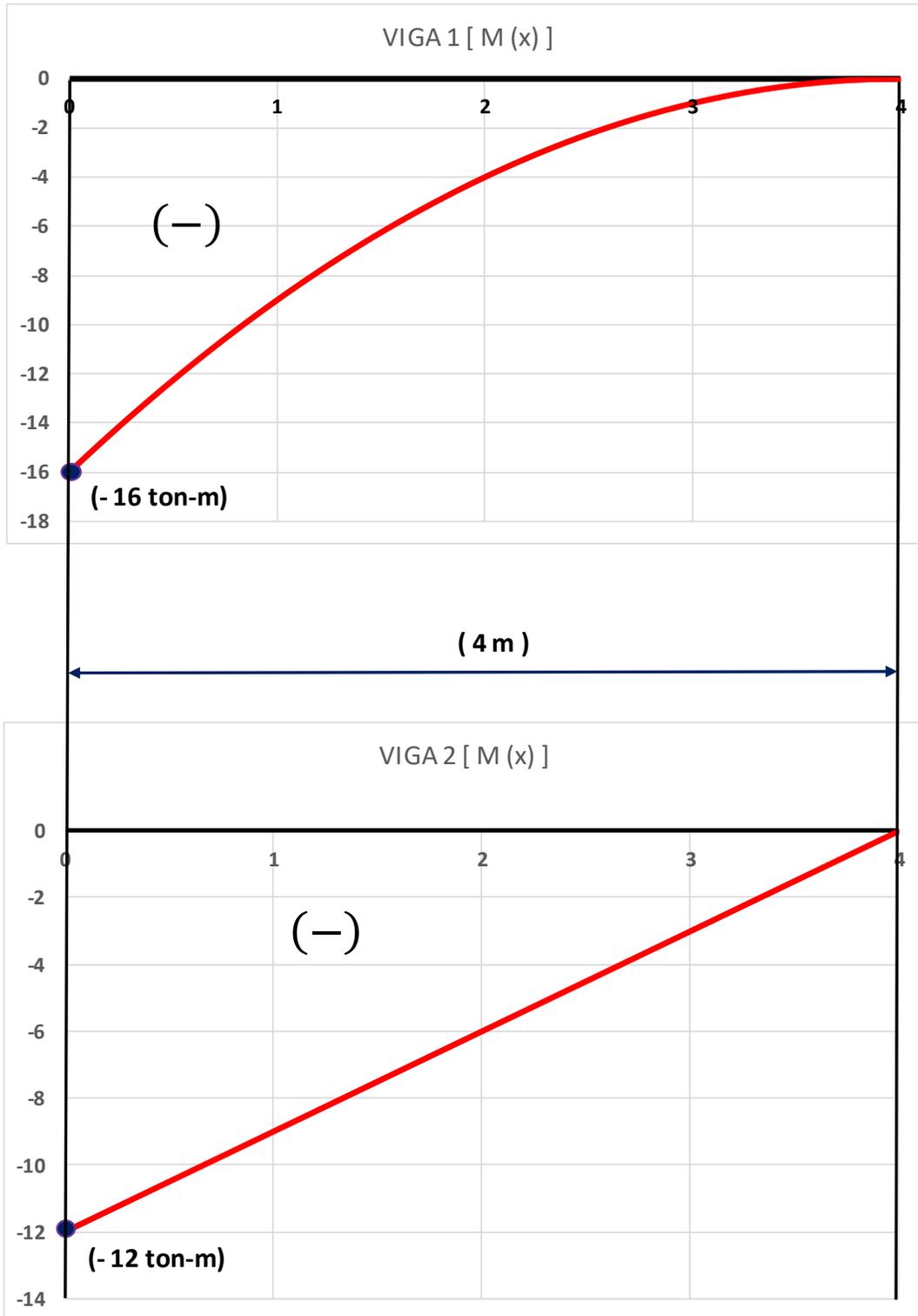
(x)	$M(x)$
0	-12.00
0.50	-10.50
1.00	-9.00
1.50	-7.50
2.00	-6.00
2.50	-4.50
3.00	-3.00
3.50	-1.50
4.00	0.00

$[0\text{ m} \leq x \leq 4\text{ m}]$

$M(x) = 3x - 12$



PASO ⑤: Suma de los diagramas de los momentos flexionantes de la viga 1 y de la viga 2.



PASO ⑥: Con la ecuación 2.12, plantear la ecuación que nos permita conocer el valor de la energía interna de deformación de la viga inicial.

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

$$U_i = \int_0^4 \frac{\left(\begin{array}{c} \text{Diagrama 1} \\ \text{Diagrama 2} \end{array} \right)^2}{2EI} dx$$

Se resuelve el binomio al cuadrado:

$$\left(\begin{array}{c} a \\ \text{Diagrama 1} \end{array} + \begin{array}{c} b \\ \text{Diagrama 2} \end{array} \right)^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2$$

$$\left(\begin{array}{c} a \\ \text{Diagrama 1} \end{array} + \begin{array}{c} b \\ \text{Diagrama 2} \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{c} a \\ \text{Diagrama 1} \end{array} \right)^2 + 2 \left(\begin{array}{c} a \\ \text{Diagrama 1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} b \\ \text{Diagrama 2} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} b \\ \text{Diagrama 2} \end{array} \right)^2$$

Se sustituye el trinomio al cuadrado perfecto en la ecuación de la energía interna de deformación:

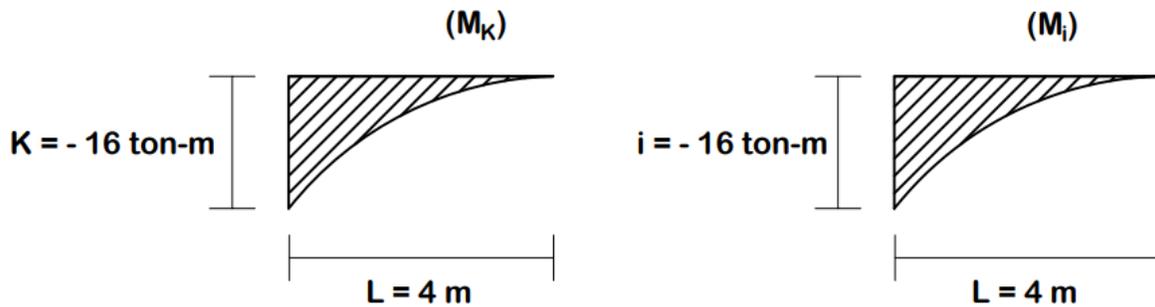
$$U_i = \underbrace{\int_0^4 \frac{\left(\begin{array}{c} \text{Diagrama 1} \end{array} \right)^2}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 1}} + \underbrace{\int_0^4 \frac{2 \left(\begin{array}{c} \text{Diagrama 1} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Diagrama 2} \end{array} \right)}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 2}} + \underbrace{\int_0^4 \frac{\left(\begin{array}{c} \text{Diagrama 2} \end{array} \right)^2}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 3}}$$

Se resuelve cada una de las integrales por separado y después se sumará el resultado de cada una de las integrales para obtener la energía interna de deformación total.

INTEGRAL 1

$$\int_0^4 \left(\frac{\text{Diagram}}{2EI} \right)^2 dx$$

$$\int_0^4 \left(\frac{\text{Diagram}}{2EI} \right)^2 dx = \int_0^4 \frac{(\text{Diagram})(\text{Diagram})}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{5} (L)(i)(k) \right]$$



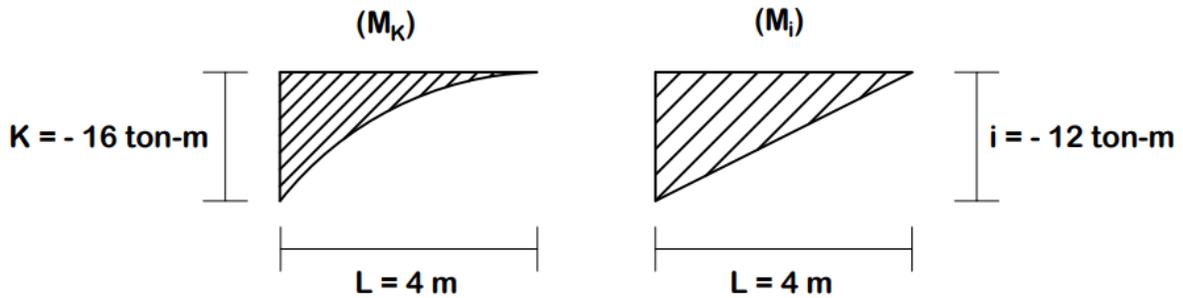
$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{5} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{5} (4)(-16)(-16) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1024}{5} \right] = \frac{512}{5} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

$$\int_0^4 \left(\frac{\text{Diagram}}{2EI} \right)^2 dx = \frac{512}{5} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

INTEGRAL 2

$$\int_0^4 \frac{2(\text{Diagram})(\text{Diagram})}{2EI} dx$$

$$\int_0^4 \frac{2(\text{Diagram})(\text{Diagram})}{2EI} dx = \int_0^4 \frac{(\text{Diagram})(\text{Diagram})}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} (L)(i)(k) \right]$$



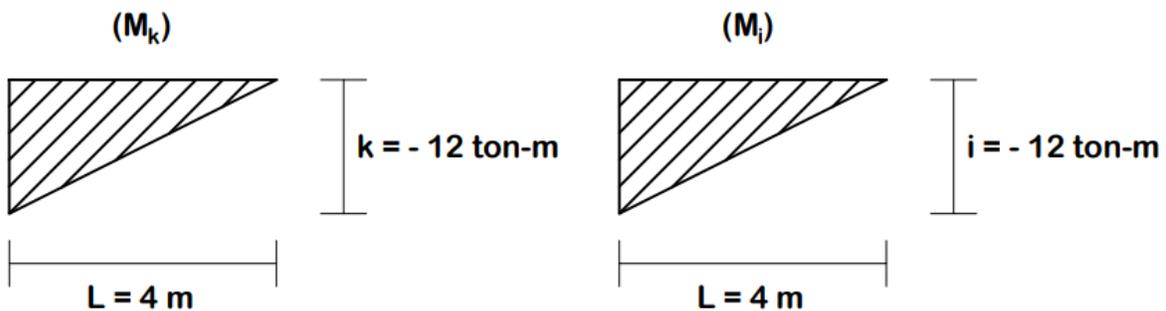
$$\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} (4)(-12)(-16) \right] = \frac{1}{EI} [192] = \frac{192}{EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

$$\int_0^4 \frac{2 \left(\frac{\text{trapezoid}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{trapezoid}}{2EI} \right) dx = \frac{192}{EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

INTEGRAL 3

$$\int_0^4 \left(\frac{\text{triangle}}{2EI} \right)^2 dx$$

$$\int_0^4 \left(\frac{\text{triangle}}{2EI} \right)^2 dx = \int_0^4 \frac{\left(\frac{\text{triangle}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{triangle}}{2EI} \right) dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right]$$



$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (4)(-12)(-12) \right] = \frac{1}{2EI} [192] = \frac{96}{EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

$$\int_0^4 \left(\frac{\text{triangular diagram}}{2EI} \right)^2 dx = \frac{96}{EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

$$U_i = \int_0^4 \left(\frac{\text{curved diagram}}{2EI} \right)^2 dx + \int_0^4 \frac{2(\text{curved diagram})(\text{triangular diagram})}{2EI} dx + \int_0^4 \left(\frac{\text{triangular diagram}}{2EI} \right)^2 dx$$

$$U_i = \frac{512}{5EI} + \frac{192}{EI} + \frac{96}{EI}$$

Resultado: Energía Interna de Deformación elástica

$$U_i = \frac{1952}{5EI} [\text{ton} \cdot \text{m}]$$

Se preguntarán para que nos sirve calcular la energía interna de deformación elástica y la respuesta es muy sencilla, hay un método que se explicará en el siguiente tema que nos permite calcular las deformaciones de una estructura con la ayuda de la energía interna de deformación elástica, este método se le conoce como el "Teorema de Castigliano" el cual se explicará a continuación.

2.7 TEOREMA DE CASTIGLIANO

El ingeniero italiano Alberto Castigliano descubrió un método para calcular el desplazamiento vertical (Δ_z) o el ángulo de rotación (θ) de un sistema estructural, esto con ayuda de la energía interna de deformación elástica (U_i) de un elemento.

El Teorema de Castigliano establece lo siguiente:

"La primera derivada parcial de la energía total de deformación de una estructura con respecto a una de las cargas aplicadas es igual al desplazamiento en el punto y en la dirección de la carga aplicada."

El Teorema de Castigliano puede expresarse matemáticamente de la siguiente manera:

$$\Delta = \frac{\partial U_i}{\partial P} \quad (2.13)$$

Se sabe que la ecuación para calcular la energía interna de deformación es la siguiente:

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} \quad (2.12)$$

Si se sustituye la ecuación (2.12) en la ecuación (2.13) y se deriva parcialmente la ecuación de la energía interna con respecto a una carga P, se obtendrá como resultado la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial U_i}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} \right) \\ \Delta &= \int_0^L \frac{M(x) \left[\frac{\partial M(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx \end{aligned} \quad (2.14)$$

Puede que no haya quedado claro lo antes mencionado, por lo que se pasará a explicar de una manera gráfica el Teorema de Castigliano.

Supóngase que se tiene un sistema estructural tipo viga sometido a carga uniformemente repartida (w) y se desea conocer el desplazamiento vertical (Δ_z) en un punto B de viga. Lo primero que se debe de hacer es colocar una carga puntual ficticia (P) en el punto donde se quiere conocer el valor del desplazamiento y la carga puntual (P) debe de ir en la dirección en la que se crea que es la del desplazamiento (véase la figura 2.1).

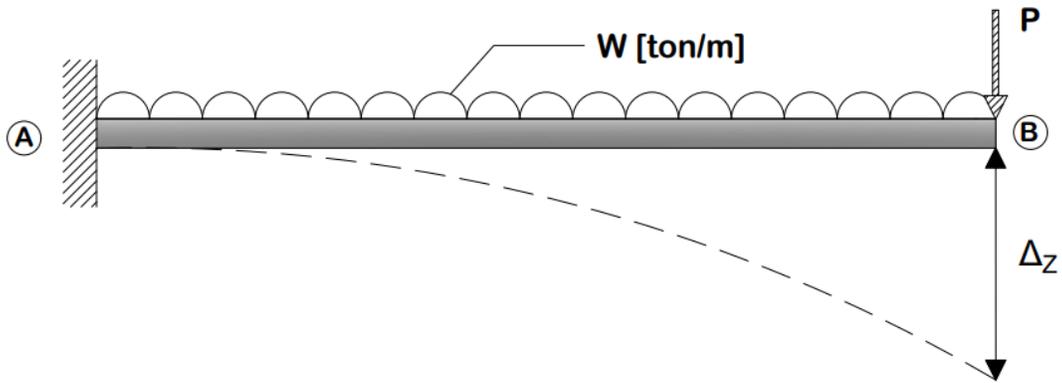


Figura 2.2. Aplicación de una carga ficticia P

Una vez teniendo este sistema de cargas donde se tiene una carga repartida (w) y una carga ficticia (P), se calcula la energía interna de deformación para que después se derivará esta energía con respecto a (P). Es evidente notar que la carga puntual (P) es una carga ficticia por lo que el valor de esta carga es igual a cero ($P = 0$), por lo tanto, el resultado de la derivada parcial se evaluará con un valor de $P = 0$ y el resultado será el valor del desplazamiento vertical (Δ_z) que se deseaba conocer.

Existirán casos en los cuales se deseará conocer el valor del desplazamiento vertical en un punto de la viga donde ya se encuentre una carga puntual real (P_R), en estos casos en lugar de colocar una carga puntual ficticia (P), lo único que se hará es que la carga real (P_R) se convertirá en una variable (P), para que después se pueda derivar la energía interna de deformación con respecto a " P ". Si la carga puntual real (P_R) no se convierte en una variable (P), al momento de que se obtenga la energía interna de deformación, esta no se podrá derivar con respecto a (P) y con esto no se obtendrá el valor del desplazamiento vertical que se requiere conocer.

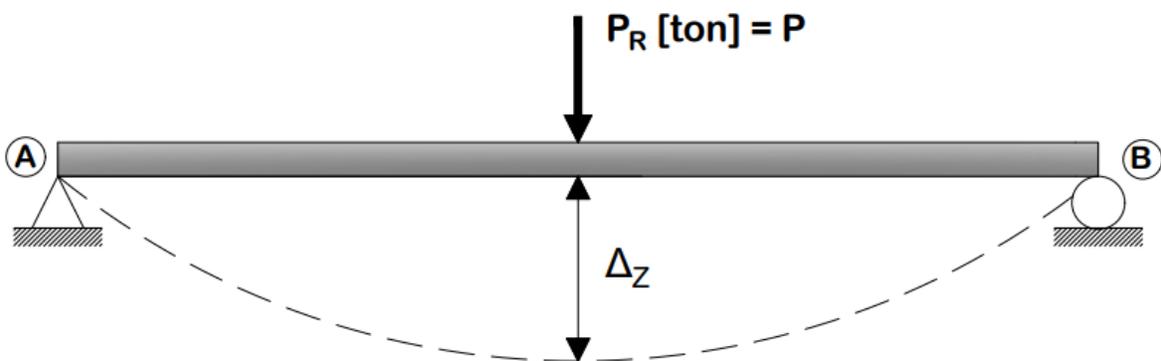


Figura 2.3. Carga puntual real localizada en el punto donde se requiere conocer un desplazamiento

Una vez haciendo que la carga real (P_R) sea una variable (P), se calcula la ecuación de energía interna de deformación para que después se derive con respecto "P" y se obtenga una ecuación, la cual se le sustituirá el valor real de la carga "P". Se sabe que la carga puntual (P) ya no es una carga ficticia por lo que el valor de P tiene un valor, el cual es el valor real de carga aplicada en el punto donde se deseaba conocer el desplazamiento ($P = P_R$). Con esto se puede decir que el resultado de la derivada parcial se evaluará con el valor real de la carga puntual (P_R) como se muestra en la figura 2.3 y el resultado final será el valor del desplazamiento vertical (Δ_z) que queríamos conocer.

El procedimiento para calcular el ángulo de rotación (θ) de una viga es semejante al procedimiento que se hizo para calcular un desplazamiento vertical, lo único que cambia es que, en lugar de colocar una carga puntual ficticia, se coloca un momento (M) ficticio y la derivada es respecto a "M".

Existen dos opciones para calcular un desplazamiento vertical (Δ_z) en un sistema estructural, que este caso sería una viga. La primera opción es utilizando la ecuación (2.13) y la segunda opción es utilizando la ecuación (2.14), estas dos opciones se describen a continuación:

ECUACIÓN (2.13)

$$\Delta = \frac{\partial U_i}{\partial P} \tag{2.13}$$

Esta primera opción se resuelve calculando la energía interna de deformación de un sistema estructural que contiene un sistema de cargas, se debe de recordar que este sistema de cargas debe tener presente una carga puntual ficticia (P) en el punto y en la dirección donde se requiere conocer el desplazamiento vertical. Una vez teniendo la energía interna de deformación, se deriva con respecto a "P" y por último se evalúa el resultado de la derivada parcial con un valor de $P = 0$, el resultado será el valor del desplazamiento vertical que se necesitaba conocer.

Para calcular la energía interna de deformación elástica se hará uso de la tabla 2.1, ya se resolvieron ejercicios calculando la energía interna de deformación utilizando esta tabla y empleando el principio de superposición.

ECUACIÓN (2.14)

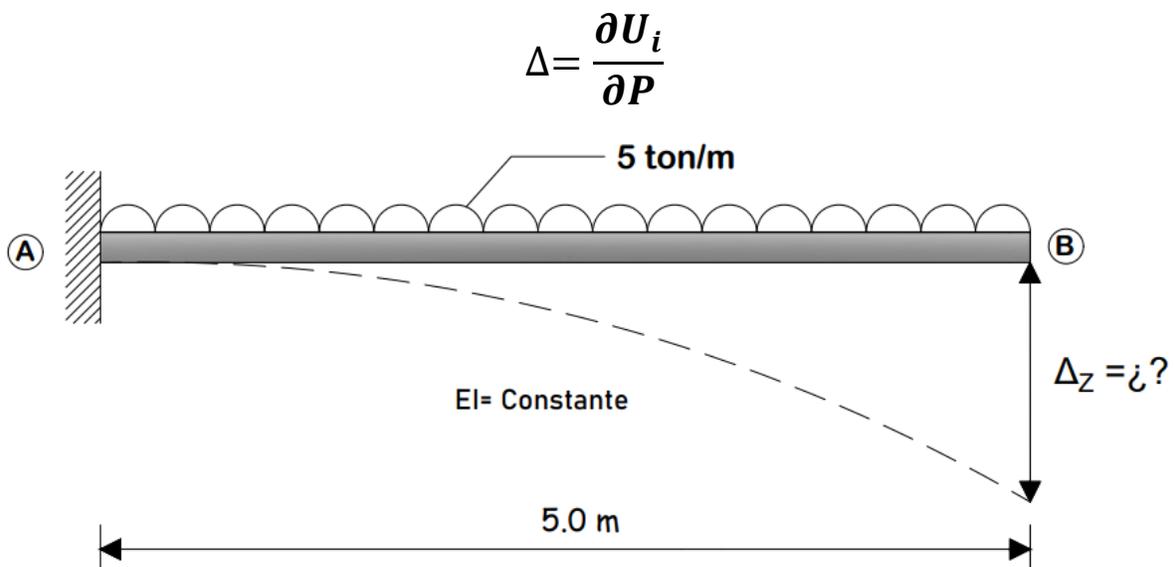
$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \left[\frac{\partial M(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx \tag{2.14}$$

Esta segunda opción se resuelve utilizando las ecuaciones del momento flexionante de un sistema estructural que contiene un sistema de cargas, se recalca que este sistema de cargas debe tener una carga puntual ficticia (P) en el punto y en la dirección donde se desea conocer el desplazamiento vertical.

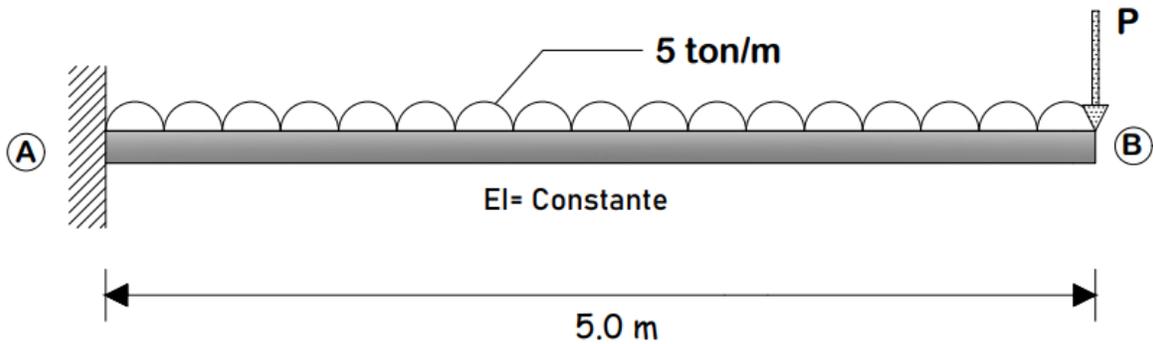
Como se puede observar en la ecuación (2.14), el desplazamiento vertical será igual a la integral definida de 0 a la longitud de la viga (L) del producto de la ecuación del momento flexionante por la derivada parcial con respecto a la carga ficticia (P) de la misma ecuación del momento flexionante dividida entre el módulo de elasticidad y el momento de inercia del sistema estructural tipo viga.

Se pasará a revolver unos ejercicios para que se pueda entender mejor lo ya antes mencionado y para conocer el procedimiento matemático que conlleva el cálculo de un desplazamiento vertical utilizando el Teorema de Castigliano. Como ya se mencionó, existe dos opciones para calcular un desplazamiento en un sistema estructural, una opción es utilizando la ecuación (2.13) y la segunda opción es utilizando la ecuación (2.14), se pasará a resolver la misma viga utilizando cada una de las ecuaciones para comprobar que el resultado será el mismo.

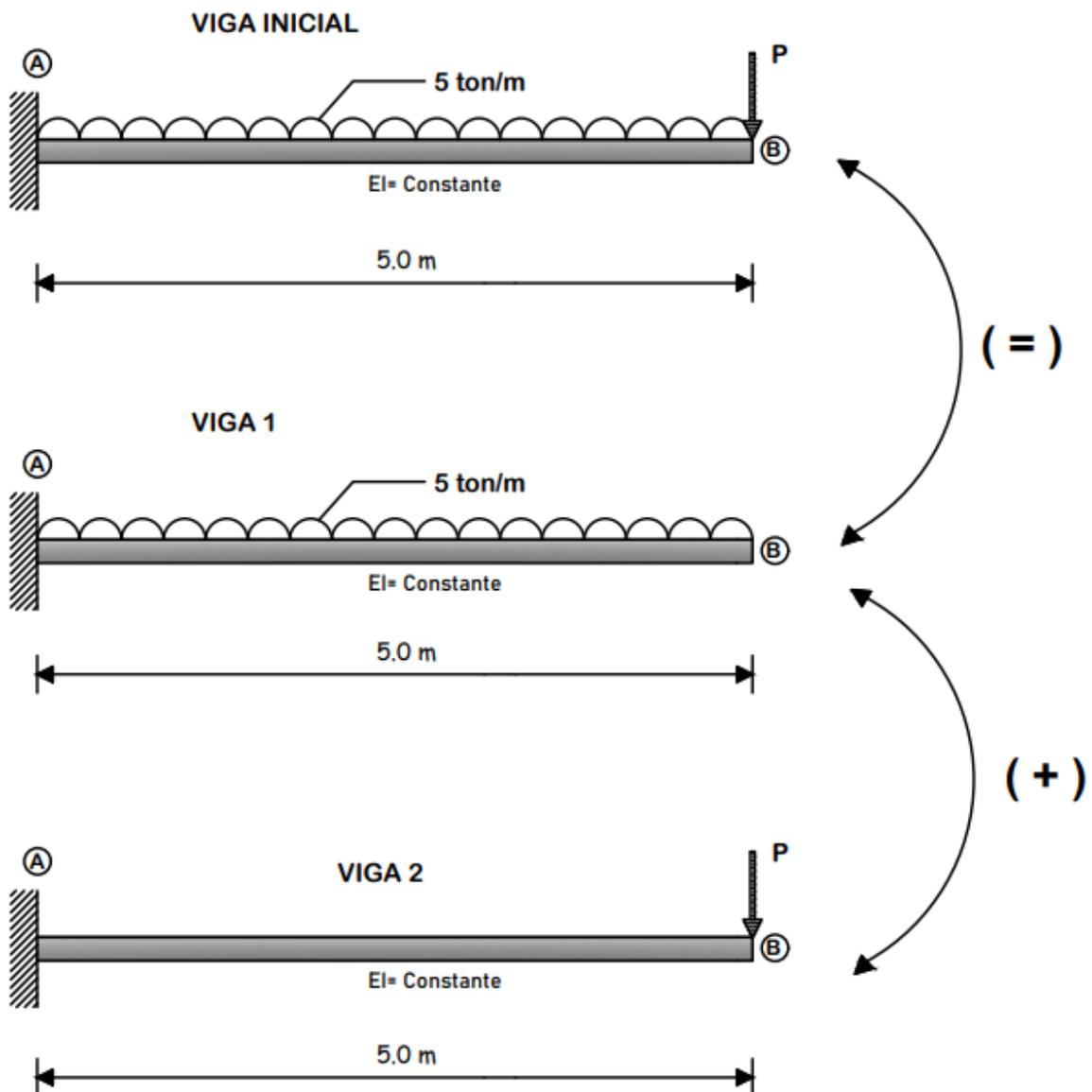
Ejercicio 2.8: Calcular el desplazamiento vertical (Δ_z) en el punto B de una viga empotrada que tiene una longitud de 5 m, esta viga contiene una carga uniformemente repartida de 5 ton/m, Se supone que la sección transversal es constante por lo que también lo es el valor del módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I). Para calcular el desplazamiento se requiere utilizar la ecuación (2.13).



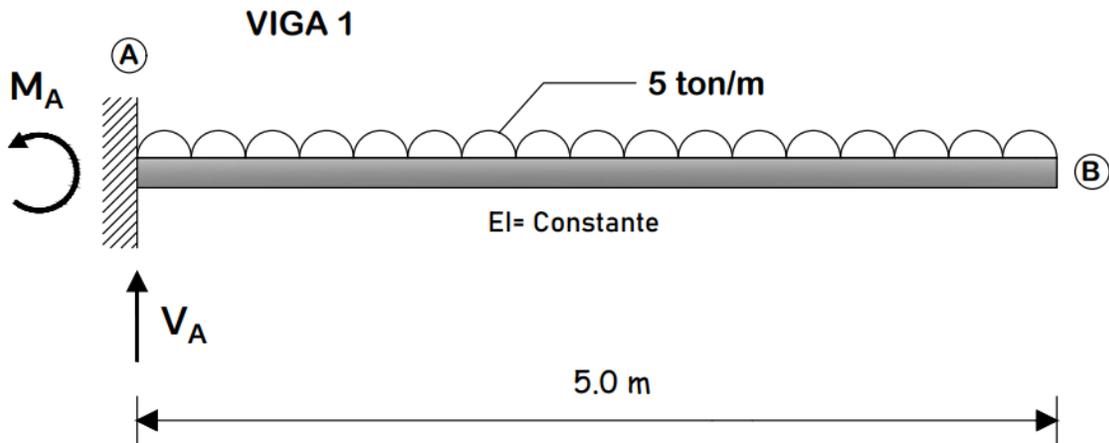
PASO ①: Colocar una carga puntual ficticia (P) en el punto donde se desea conocer el desplazamiento vertical.



PASO ②: Utilizar el Principio de Superposición.



PASO ③: Calcular el diagrama del momento flexionante de la viga 1.



- Cálculo de las reacciones del apoyo empotrado con las ecuaciones del equilibrio.

$$\Sigma M_A = 0 \quad (+)$$

$$-M_A + 5 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (5 \text{ m}) \left(\frac{5 \text{ m}}{2} \right) = 0$$

$$-M_A + \frac{125}{2} \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$M_A = \frac{125}{2} \text{ ton} \cdot \text{m}$$

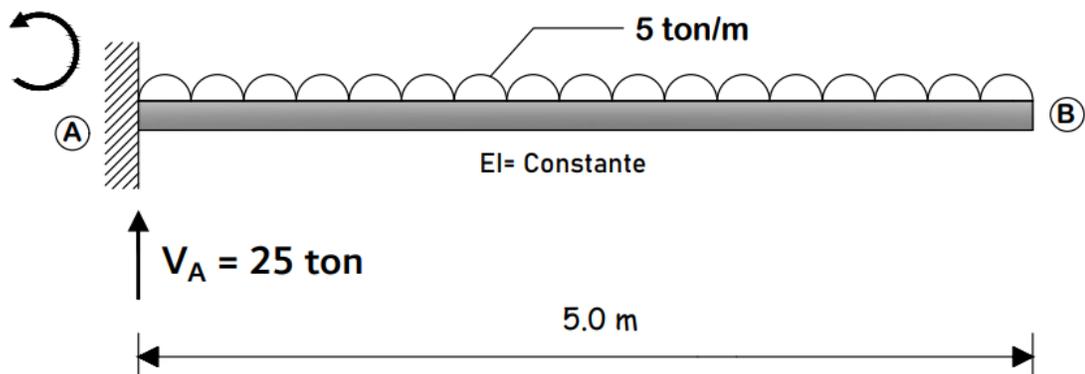
$$\Sigma F_Y = 0 \quad (+)$$

$$V_A - 5 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (5 \text{ m}) = 0$$

$$V_A - 25 \text{ ton} = 0$$

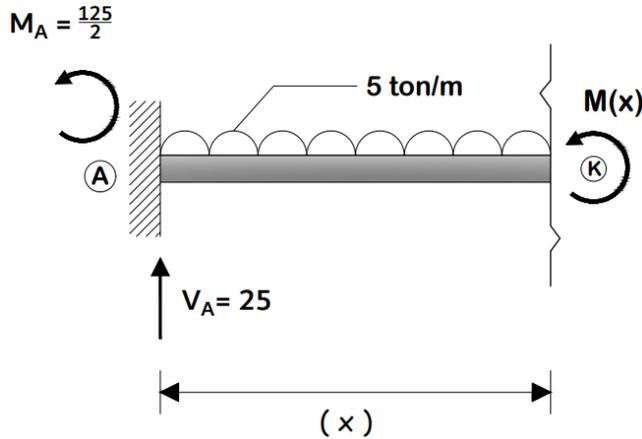
$$V_A = 25 \text{ ton}$$

$$M_A = \frac{125}{2} \text{ ton-m}$$



- Cálculo de la ecuación del momento flexionante.

CORTE #1 $[0.0 \text{ m} \leq x \leq 5.0 \text{ m}]$



$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M(x) + 5(x) \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{125}{2} - 25(x) = 0$$

$$M(x) + \frac{5}{2}x^2 + \frac{125}{2} - 25x = 0$$

$$M(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 25x - \frac{125}{2}$$

- Diagrama de momento flexionante.

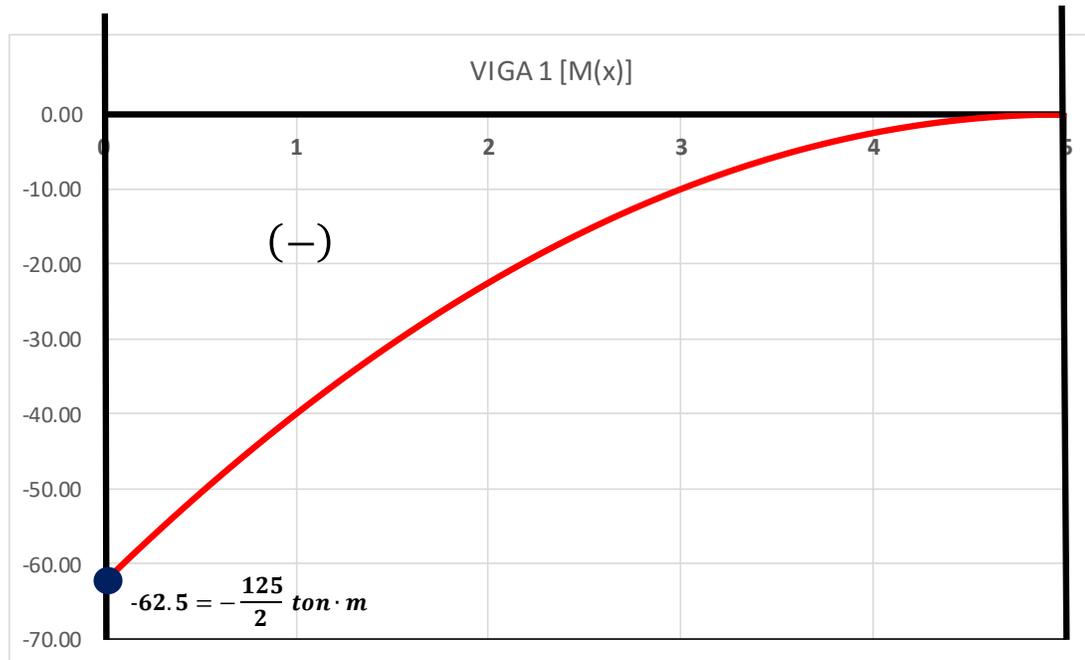
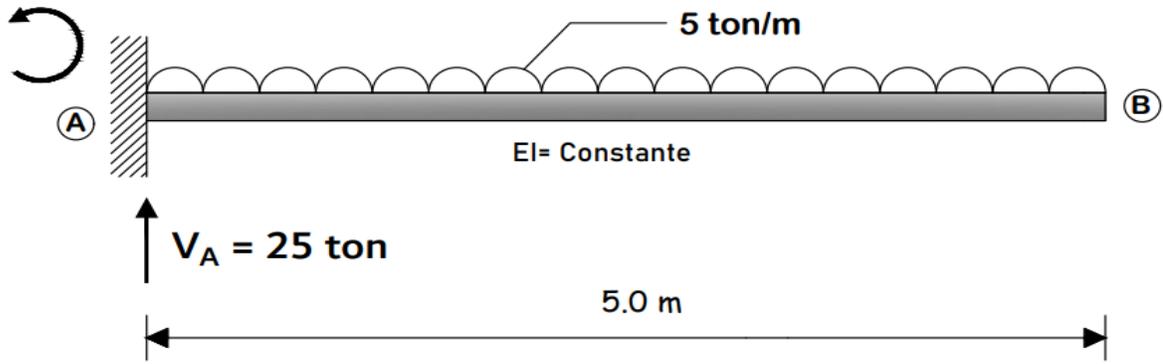
(x)	$M(x)$
0	-62.5
0.25	-56.40625
0.50	-50.625
0.75	-45.15625
1.00	-40
1.25	-35.15625
1.50	-30.625
1.75	-26.40625
2.00	-22.5
2.25	-18.90625
2.50	-15.625
2.75	-12.65625
3.00	-10
3.25	-7.65625
3.50	-5.625
3.75	-3.90625
4.00	-2.5
4.25	-1.40625
4.50	-0.625
4.75	-0.15625
5.00	0

$$[0 \text{ m} \leq x \leq 5 \text{ m}]$$

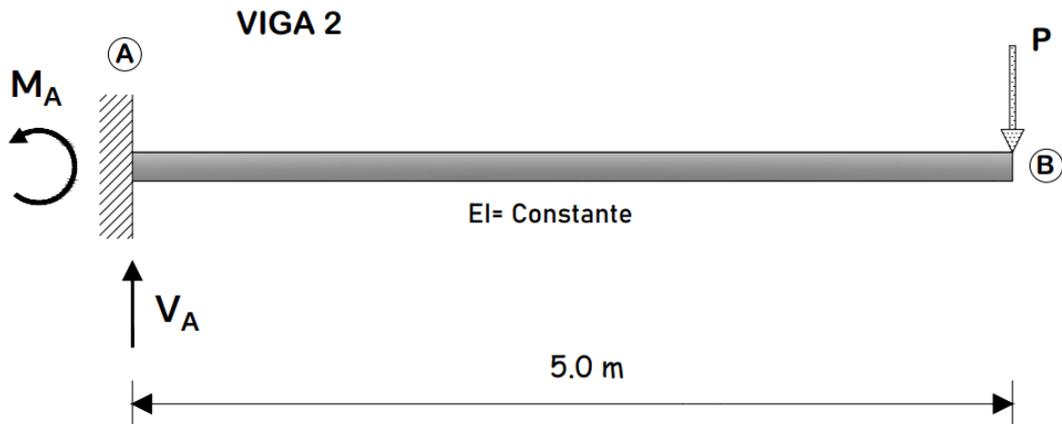
$$M(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 25x - \frac{125}{2}$$

VIGA 1

$$M_A = \frac{125}{2} \text{ ton}\cdot\text{m}$$

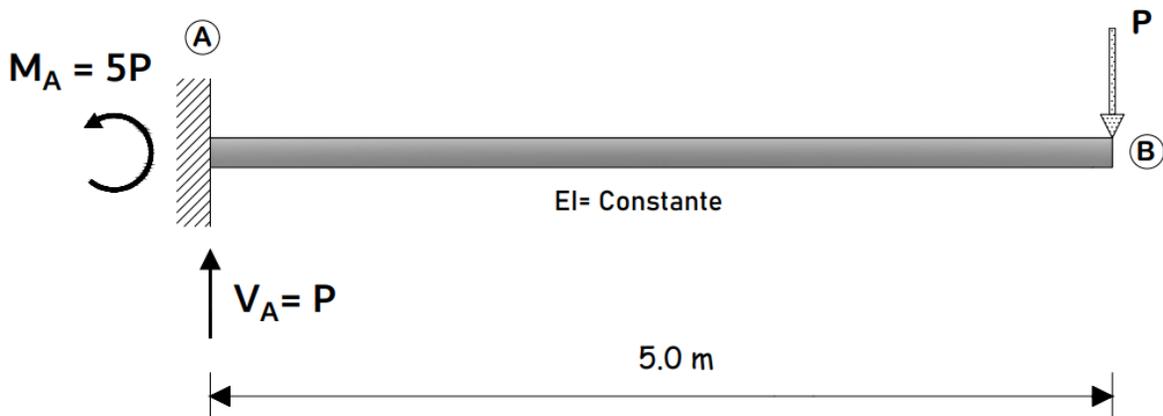


PASO ④: Calcular el diagrama del momento flexionante de la viga 2.



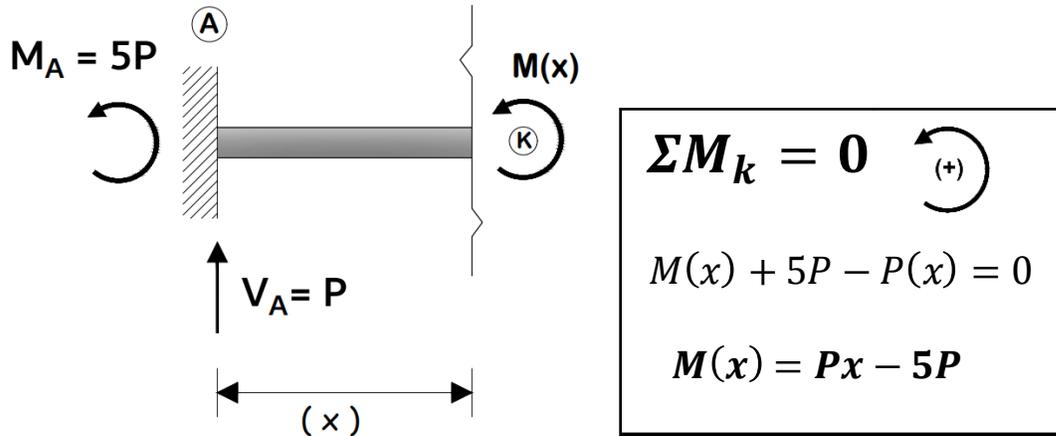
- Cálculo de las reacciones del apoyo empotrado con las ecuaciones del equilibrio.

$\Sigma M_A = 0 \quad (+)$ $-M_A + 5P = 0$ $M_A = 5P$	$\Sigma F_Y = 0 \quad (+)$ $V_A - P = 0$ $V_A = P$
---	--



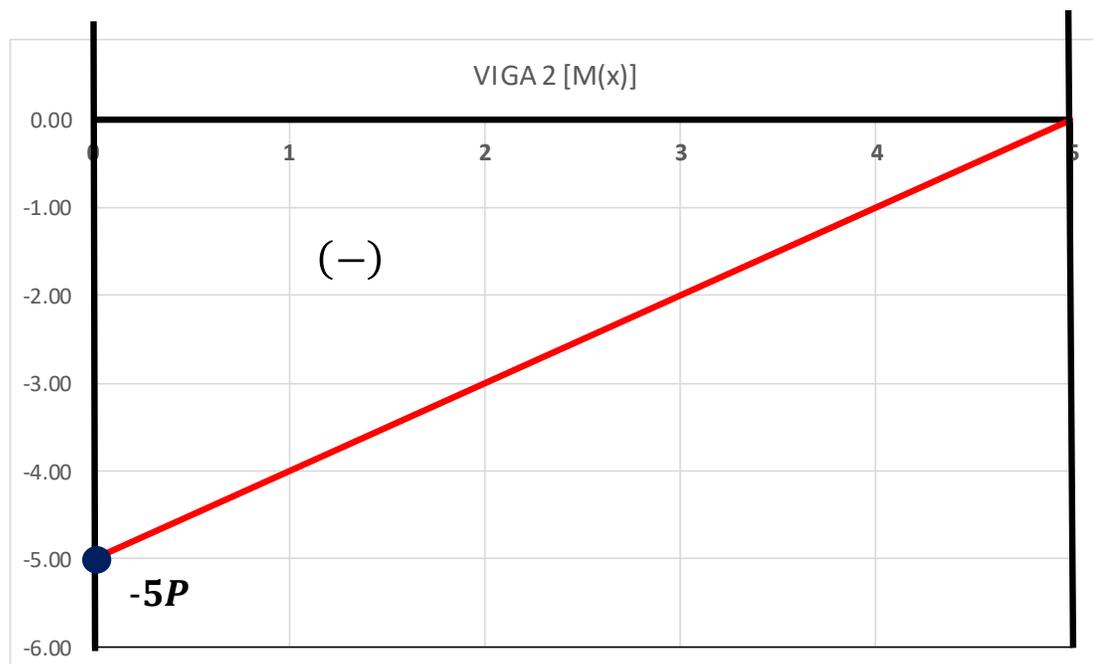
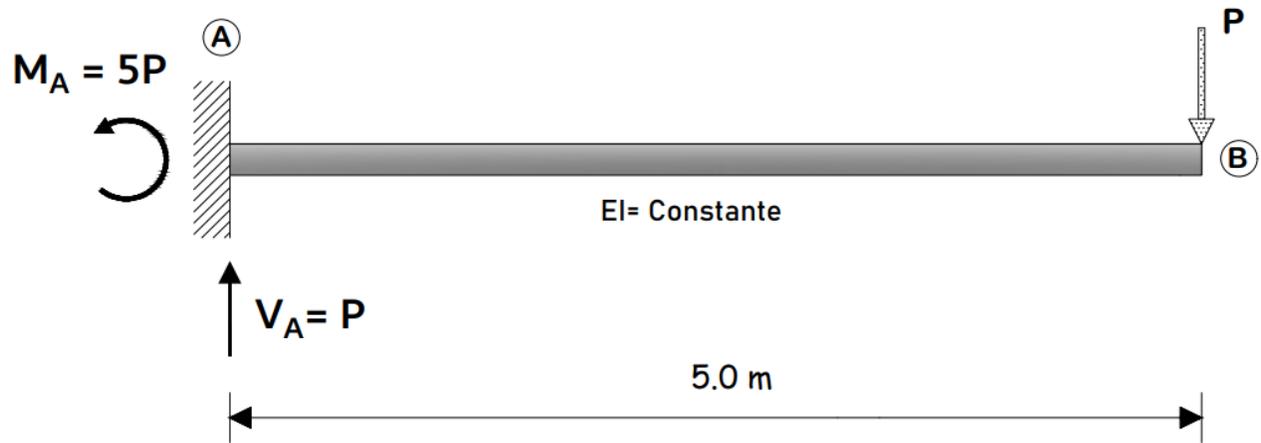
- Cálculo de la ecuación del momento flexionante.

CORTE #1 $[0.0 \text{ m} \leq x \leq 5.0 \text{ m}]$

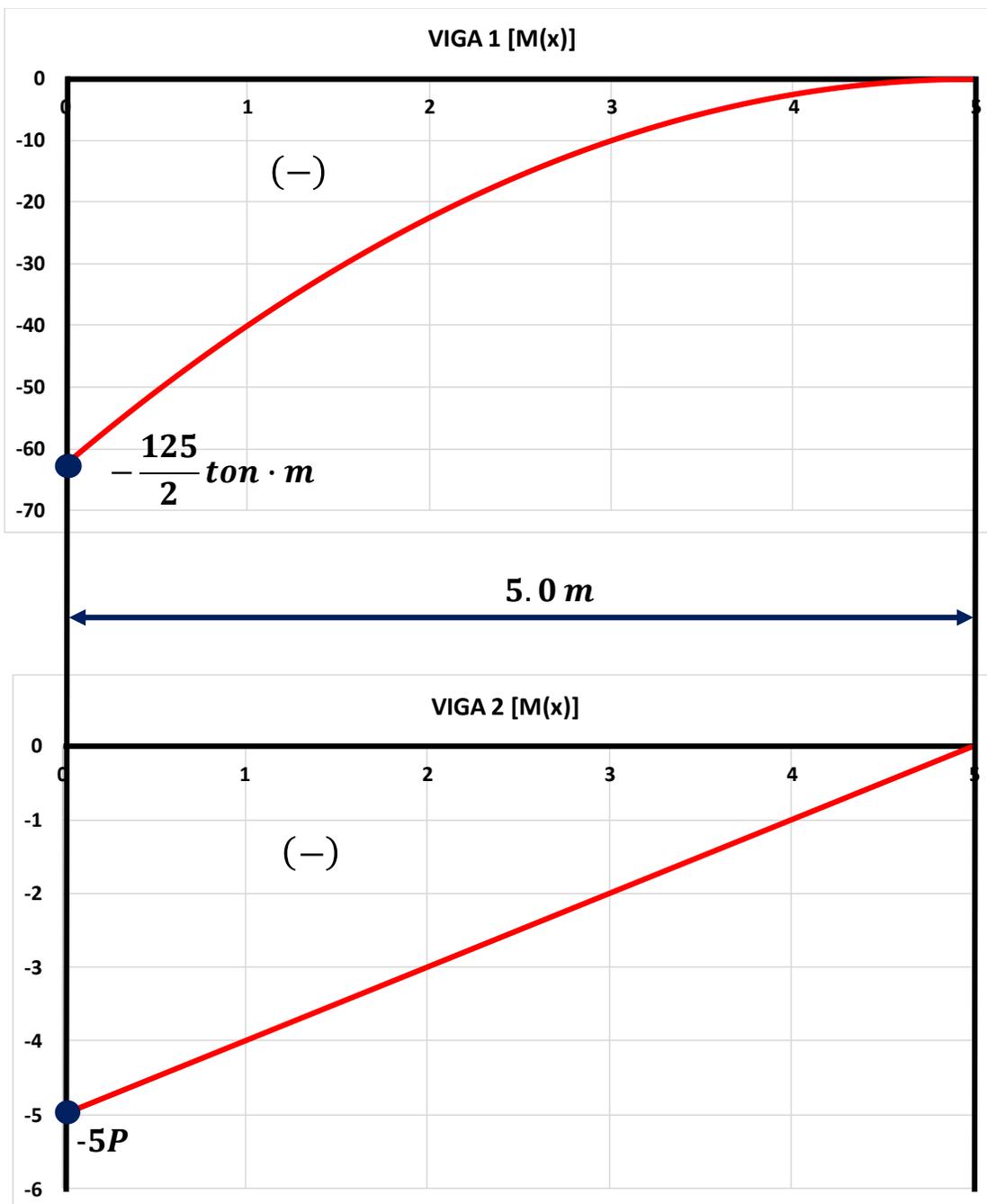


(x)	$M(x)$	$[0 \text{ m} \leq x \leq 5 \text{ m}]$ $M(x) = Px - 5P$
0	$-5P$	
0.50	$-4.5P$	
1.00	$-4P$	
1.5	$-3.5P$	
2.00	$-3P$	
2.50	$-2.5P$	
3	$-2P$	
3.50	$-1.5P$	
4.00	$-1P$	
4.5	$-0.5P$	
5.00	0	

VIGA 2



PASO ⑤: Se calcula la energía interna de deformación elástica $[U_i]$ con la tabla 2.1.



$$U_i = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI}$$

$$U_i = \int_0^5 \frac{\left(\begin{array}{c} \text{triangle } a \\ \text{triangle } b \end{array} \right)^2}{2EI} dx$$

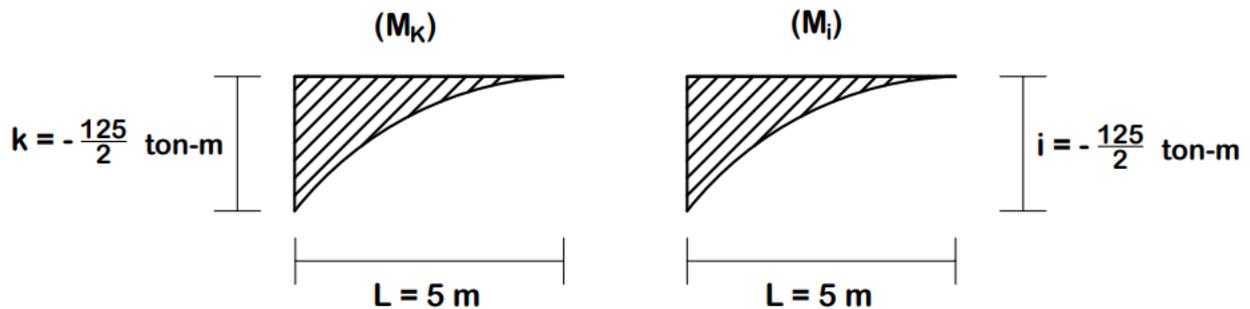
$$\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right)^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2$$

$$\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{c} a \\ \end{array} \right)^2 + 2 \left(\begin{array}{c} a \\ \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \\ b \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \\ b \end{array} \right)^2$$

$$U_i = \underbrace{\int_0^5 \frac{\left(\begin{array}{c} a \\ \end{array} \right)^2}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 1}} + \underbrace{\int_0^5 \frac{2 \left(\begin{array}{c} a \\ \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \\ b \end{array} \right)}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 2}} + \underbrace{\int_0^5 \frac{\left(\begin{array}{c} \\ b \end{array} \right)^2}{2EI} dx}_{\text{INTEGRAL 3}}$$

INTEGRAL 1

$$\int_0^5 \frac{\left(\begin{array}{c} \text{triangle } M_k \\ \text{triangle } M_i \end{array} \right)^2}{2EI} dx = \int_0^5 \frac{\left(\begin{array}{c} M_k \\ \text{triangle } M_i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{triangle } M_i \\ M_k \end{array} \right)}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{5} (L)(i)(k) \right]$$

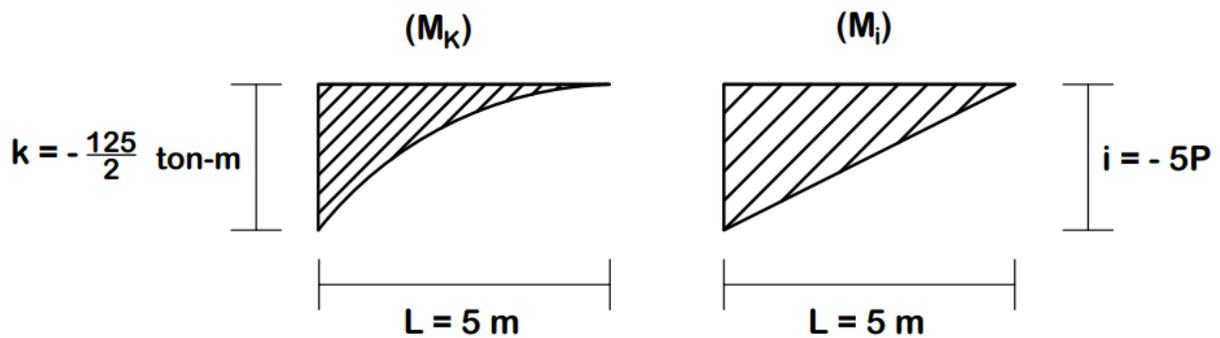


$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{5} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{5} (5) \left(-\frac{125}{2} \right) \left(-\frac{125}{2} \right) \right] = \frac{15625}{8EI}$$

$$\int_0^5 \frac{\left(\frac{1}{2}kx\right)^2}{2EI} dx = \frac{15625}{8EI}$$

INTEGRAL 2

$$\int_0^5 \frac{2\left(\frac{1}{2}kx\right)\left(\frac{1}{2}ix\right)}{2EI} dx = \int_0^5 \frac{M_k M_i}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} (L)(i)(k) \right]$$

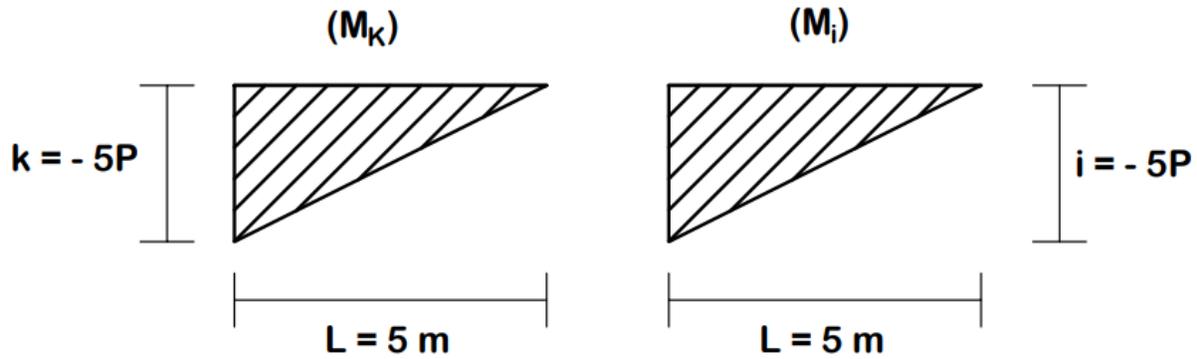


$$\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} (5)(-5P) \left(-\frac{125}{2} \right) \right] = \frac{3125}{8} P$$

$$\int_0^5 \frac{2\left(\frac{1}{2}kx\right)\left(\frac{1}{2}ix\right)}{2EI} dx = \frac{3125}{8EI} P$$

INTEGRAL 3

$$\int_0^5 \frac{\left(\frac{1}{2}kx\right)^2}{2EI} dx = \int_0^5 \frac{M_k M_i}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right]$$



$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (5)(-5P)(-5P) \right] = \frac{125}{6EI} P^2$$

$$\int_0^5 \left(\frac{\text{triangular moment}}{2EI} \right)^2 dx = \frac{125}{6EI} P^2$$

ENERGIA INTERNA DE DEFORMACION

$$U_i = \int_0^5 \left(\frac{\text{triangular moment}}{2EI} \right)^2 dx + \int_0^5 2 \left(\frac{\text{triangular moment}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{triangular moment}}{2EI} \right) dx + \int_0^5 \left(\frac{\text{triangular moment}}{2EI} \right)^2 dx$$

$$U_i = \frac{15625}{8EI} + \frac{3125}{8EI} P + \frac{125}{6EI} P^2$$

PASO ⑥: Cálculo del desplazamiento vertical (Δ_z) con la ecuación (2.13).

$$\Delta = \frac{\partial U_i}{\partial P}$$

$$\Delta_z = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{15625}{8EI} + \frac{3125}{8EI} P + \frac{125}{6EI} P^2 \right)$$

$$\Delta_z = 0 + \frac{3125}{8EI} + (2) \left(\frac{125}{6EI} P \right)$$

$$\Delta_z = \frac{3125}{8EI} + \frac{125}{3EI} P$$

La carga puntual (P) es una carga ficticia, por lo que el valor de (P) es igual a 0, por lo tanto, se evalúa la ecuación con un valor de $P = 0$ y el resultado será el desplazamiento vertical que deseaba conocer.

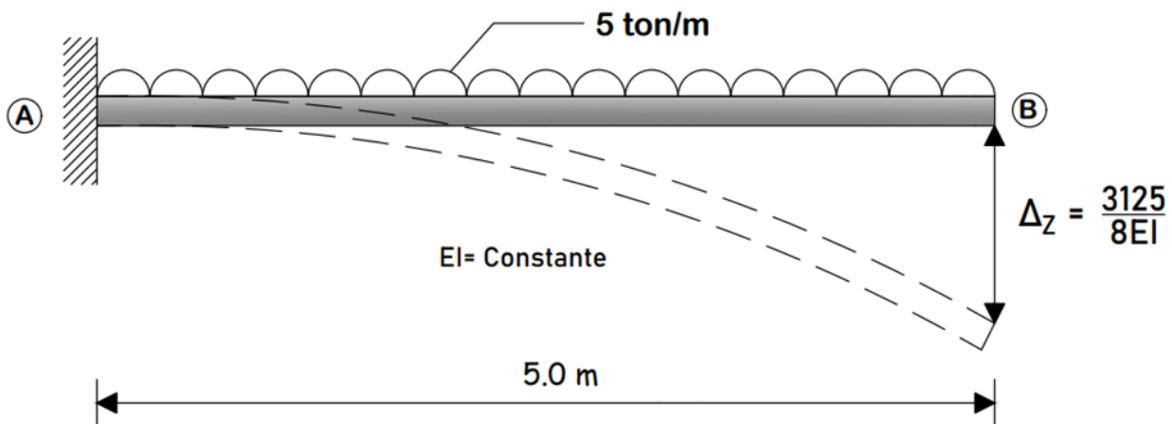
Haciendo $P = 0$:

$$\Delta_z = \frac{3125}{8EI} + \frac{125}{3EI}(0)$$

Resultado:

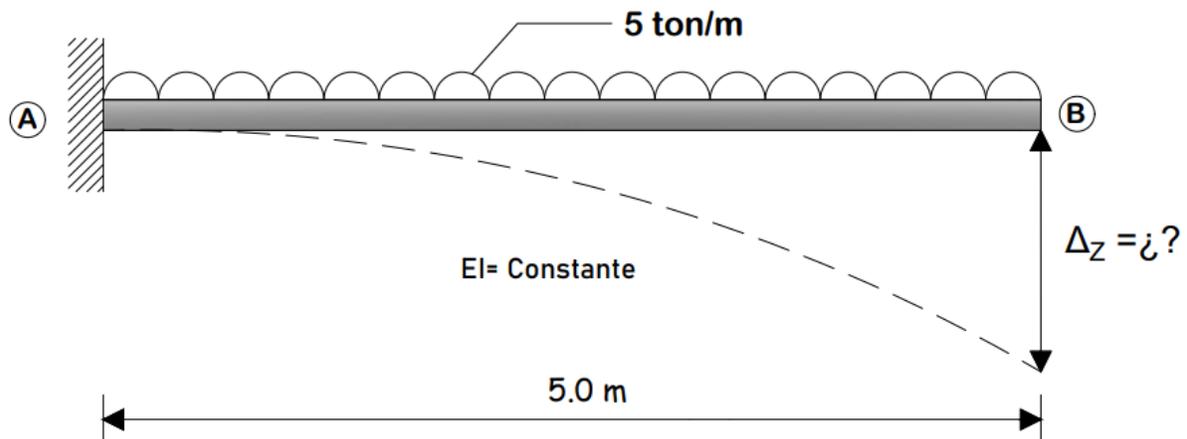
Desplazamiento vertical en el punto B

$$\Delta_z = \frac{3125}{8EI} [m]$$



Se resolverá la misma viga del ejercicio 2.8, pero ahora se utilizará la ecuación 2.14 para calcular el desplazamiento vertical.

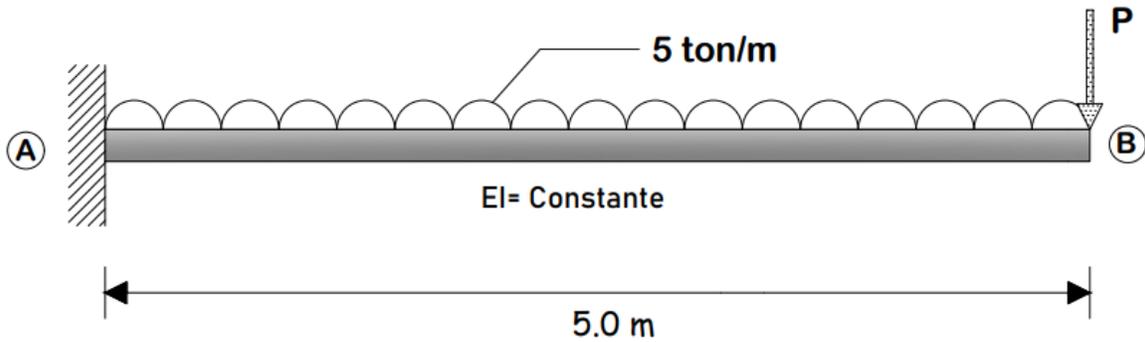
Ejercicio 2.9: Calcular el desplazamiento vertical (Δ_z) en el punto B de la misma viga que se resolvió en el ejercicio anterior, pero en este ejemplo se utilizará la ecuación (2.14) para calcular lo que se pide.



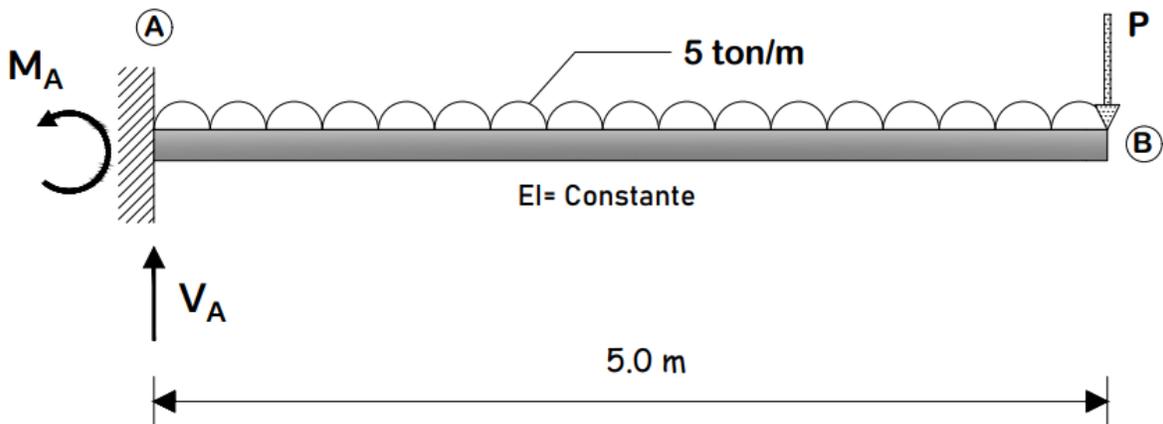
ECUACION 2.14

$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \left[\frac{\partial M(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx$$

PASO ①: Colocar una carga puntual ficticia (P) en el punto donde se desea conocer el desplazamiento vertical.

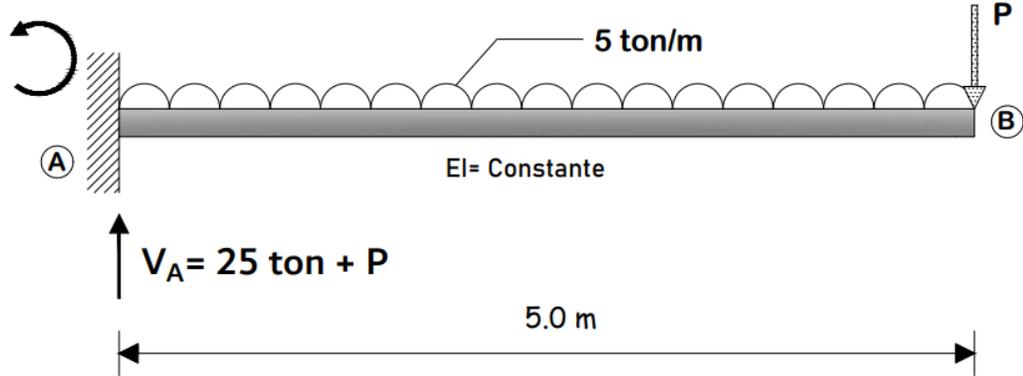


PASO ②: Cálculo de las reacciones del apoyo empotrado con las ecuaciones del equilibrio.



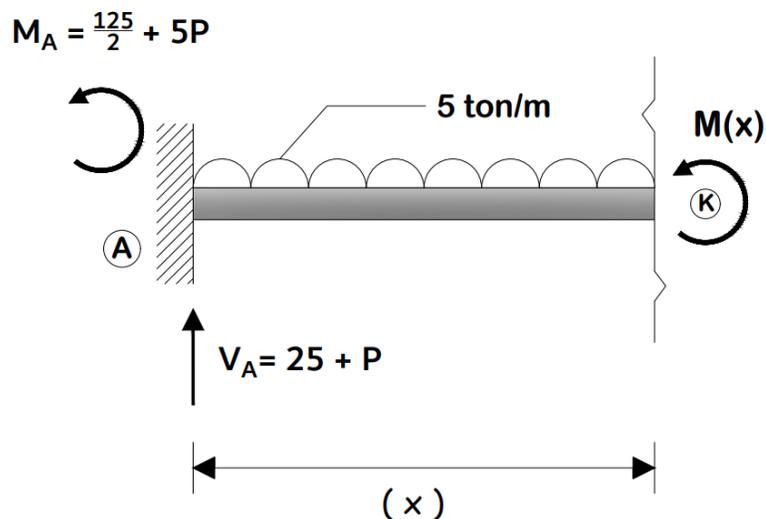
$\Sigma M_A = 0 \quad (\curvearrowright)$ $-M_A + 5 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (5 \text{ m}) \left(\frac{5 \text{ m}}{2} \right) + (P)(5 \text{ m}) = 0$ $-M_A + \frac{125}{2} \text{ ton} \cdot \text{m} + 5P = 0$ $M_A = \frac{125}{2} \text{ ton} \cdot \text{m} + 5P$	$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$ $V_A - 5 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (5 \text{ m}) - P = 0$ $V_A - 25 \text{ ton} - P = 0$ $V_A = 25 \text{ ton} + P$
---	---

$$M_A = \frac{125}{2} \text{ ton-m} + 5P$$



PASO ③: Cálculo de la ecuación del momento flexionante.

CORTE #1 $[0.0 \text{ m} \leq x \leq 5.0 \text{ m}]$



$$\Sigma M_k = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$M(x) + 5(x) \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{125}{2} + 5P - (25 + P)(x) = 0$$

$$M(x) + \frac{5}{2}x^2 + \frac{125}{2} + 5P - 25x - Px = 0$$

$$M(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 25x + Px - 5P - \frac{125}{2}$$

PASO ④: Calcular el desplazamiento vertical (Δ_z) utilizando la ecuación (2.14).

$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \left[\frac{\partial M(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx$$

$$M(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 25x + Px - 5P - \frac{125}{2}$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = x - 5$$

$$\Delta_z = \int_0^5 \frac{\left(-\frac{5}{2}x^2 + 25x + Px - 5P - \frac{125}{2} \right) (x - 5)}{EI} dx$$

$$\Delta_z = \int_0^5 \frac{\left(-\frac{5}{2}x^3 + 25x^2 + Px^2 - 5Px - \frac{125}{2}x + \frac{25}{2}x^2 - 125x - 5Px + 25P + \frac{625}{2} \right)}{EI} dx$$

$$\Delta_z = \int_0^5 \frac{\left(-\frac{5}{2}x^3 + \frac{75}{2}x^2 - \frac{375}{2}x + Px^2 - 10Px + 25P + \frac{625}{2} \right)}{EI} dx$$

$$\Delta_z = \frac{1}{EI} \int_0^5 \left(-\frac{5}{2}x^3 + \frac{75}{2}x^2 - \frac{375}{2}x + Px^2 - 10Px + 25P + \frac{625}{2} \right) dx$$

$$\Delta_z = \frac{1}{EI} \int_0^5 \left[-\frac{5}{2} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{75}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right) - \frac{375}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) + P \left(\frac{x^3}{3} \right) - 10P \left(\frac{x^2}{2} \right) + 25P(x) + \frac{625}{2} x \right]$$

$$\Delta_z = \frac{1}{EI} \int_0^5 \left[-\frac{5}{8} x^4 + \frac{25}{2} x^3 - \frac{375}{4} x^2 + \frac{P}{3} x^3 - 5P x^2 + 25P x + \frac{625}{2} x \right]$$

$$\Delta_z = \frac{1}{EI} \int_0^5 \left[-\frac{5}{8} (5)^4 + \frac{25}{2} (5)^3 - \frac{375}{4} (5)^2 + \frac{P}{3} (5)^3 + 5P(5)^2 + 25P(5) + \frac{625}{2} (5) \right]$$

$$\Delta_z = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3125}{8} + \frac{3125}{2} - \frac{9375}{4} + \frac{125}{3} P + 125P + 125P + \frac{3125}{2} \right]$$

PASO ⑤: La carga puntual (P) es una carga ficticia, por lo que el valor de (P) es igual a 0. por lo tanto, se evalúa la ecuación con un valor de P= 0 y el resultado será el valor del desplazamiento vertical que se pide.

Haciendo P = 0:

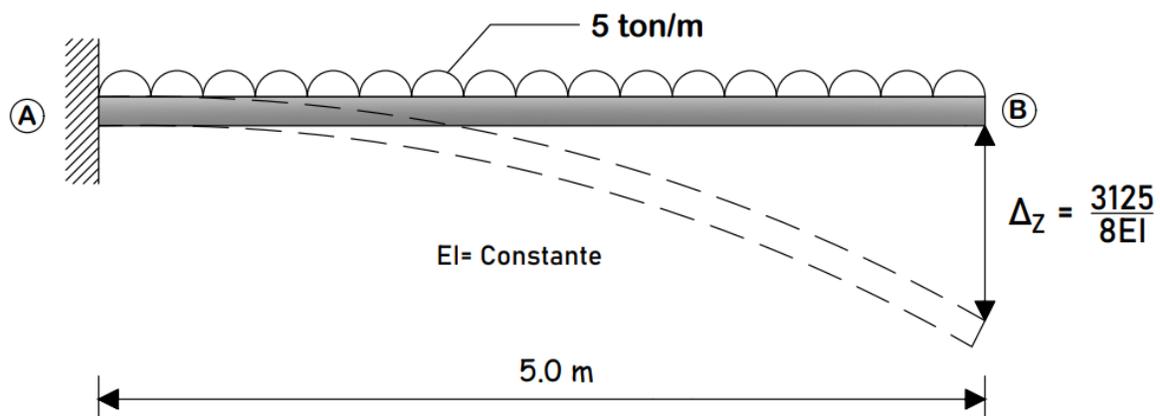
$$\Delta_z = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3125}{8} + \frac{3125}{2} - \frac{9375}{4} + \frac{125}{3} (0) + 125(0) + 125(0) + \frac{3125}{2} \right]$$

$$\Delta_z = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3125}{8} + \frac{3125}{2} - \frac{9375}{4} + \frac{3125}{2} \right]$$

Resultado:

Desplazamiento vertical en el punto B

$$\Delta_z = \frac{3125}{8EI} [m]$$



Como se pudo observar, el resultado es el mismo ya sea utilizando la ecuación (2.13) o con la ecuación (2.14), esto quiere decir que se puede calcular un desplazamiento vertical en cualquier punto de una viga utilizando el Teorema de Castigliano.

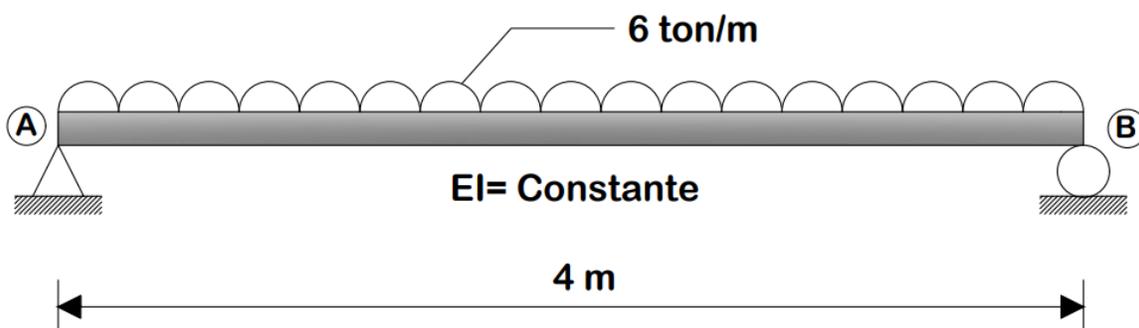
Con el objetivo de que se entienda mejor como se calcula un desplazamiento vertical utilizando el Teorema de Castigliano, se pasará a resolver más ejercicios, se resolverán 2 ejercicios utilizando la ecuación (2.13) y también se resolverán otros dos ejercicios utilizando la ecuación (2.14), esto con el fin de que el lector pueda calcular un desplazamiento con cada una de las diferentes ecuaciones y domine mejor cada ecuación.

Antes de pasar a resolver otro ejercicio, es necesario presentar atención en el resultado del desplazamiento vertical, como se puede observar, el resultado obtenido fue con signo positivo, esto quiere decir que la carga puntual ficticia (P) se propuso correctamente en la dirección [↓] del desplazamiento. Si se hubiera propuesto la carga ficticia (P) en otra dirección [↑], el resultado tendría un signo negativo.

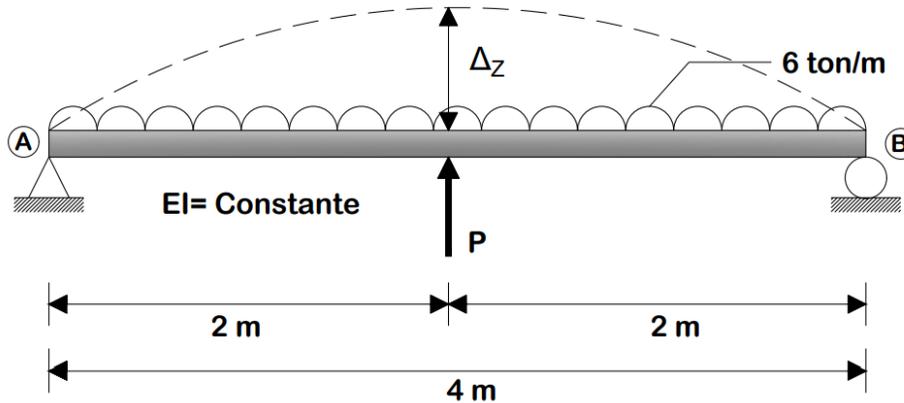
Es importante mencionar el significado del signo de un desplazamiento vertical utilizando el método de Castigliano, si en alguna situación se cree que el desplazamiento vertical va en una dirección y se propone la carga puntual ficticia (P) en esa misma dirección, pero al hacer todo el cálculo matemático el resultado obtenido tiene signo negativo, esto significara que el desplazamiento no va en la dirección que se creía si no que va en la dirección contraria.

Para confirmar lo mencionado, se pasará a resolver una viga en la cual se propondrá la carga ficticia en dirección opuesta a el desplazamiento vertical y se podrá observar que el resultado que se obtenga tendrá signo negativo.

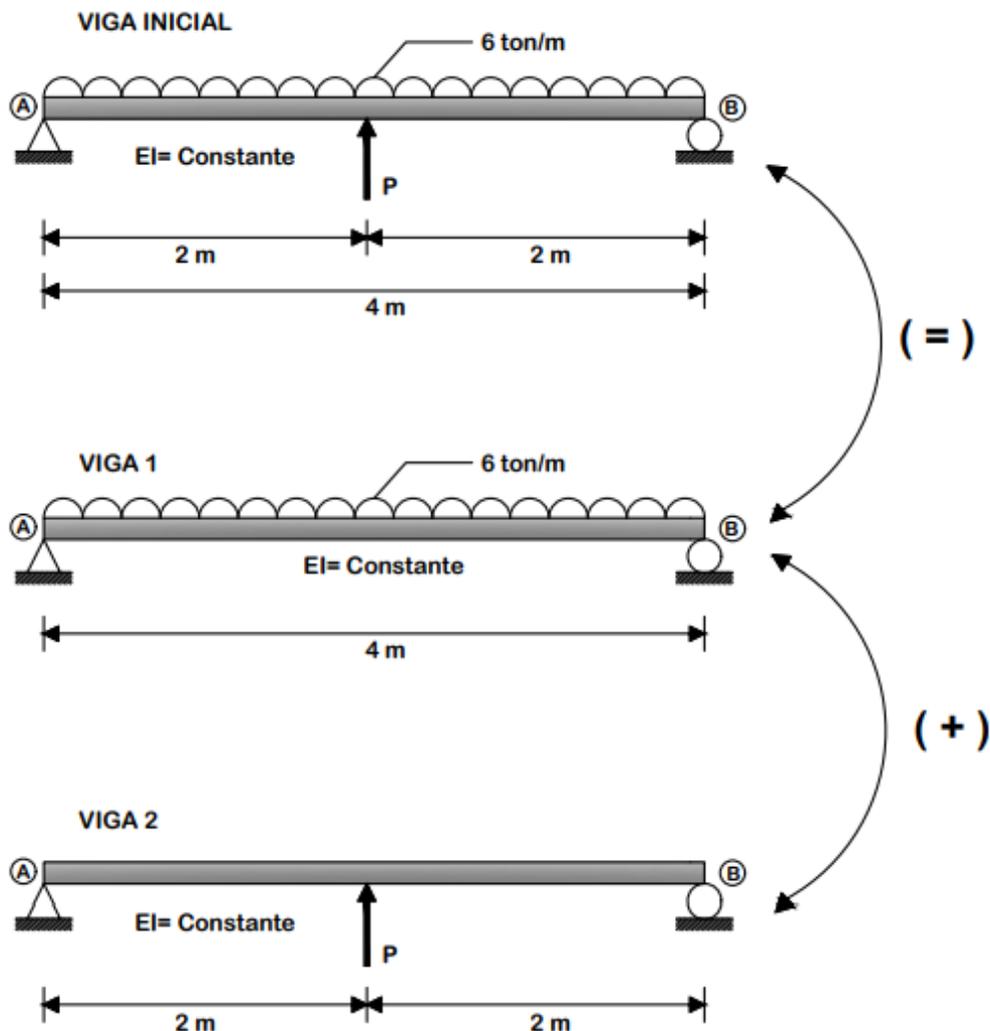
Ejercicio 2.10: Calcular el desplazamiento vertical a la mitad del claro de la viga con la ecuación 2.13. La viga tiene una longitud de 4 metros y es sometida a una carga uniformemente repartida de 6 ton/m, Se supone que la sección transversal es constante por lo que también lo es el valor del módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I).



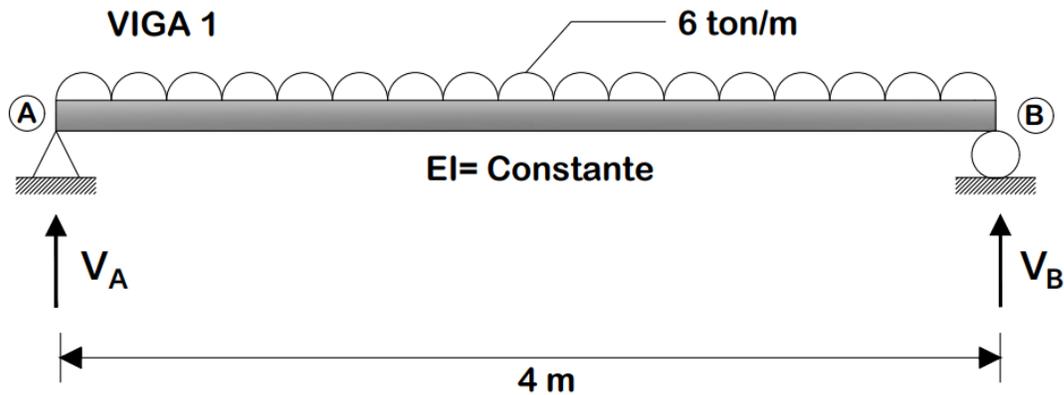
PASO ①: Colocar una carga puntual ficticia en el punto donde se desea calcular el desplazamiento vertical, la carga ficticia debe ir en la dirección en la que se cree que va el desplazamiento.



PASO ②: Utilizar el Principio de Superposición.



PASO ③: Calcular el diagrama del momento flexionante de la viga 1.



- Cálculo de las reacciones de los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.

$$\Sigma M_A = 0 \quad (+)$$

$$6 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (4 \text{ m}) \left(\frac{4 \text{ m}}{2} \right) - V_B (4 \text{ m}) = 0$$

$$V_B (4 \text{ m}) = 48 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_B = \frac{48 \text{ ton} \cdot \text{m}}{4 \text{ m}}$$

$$V_B = 12 \text{ ton}$$

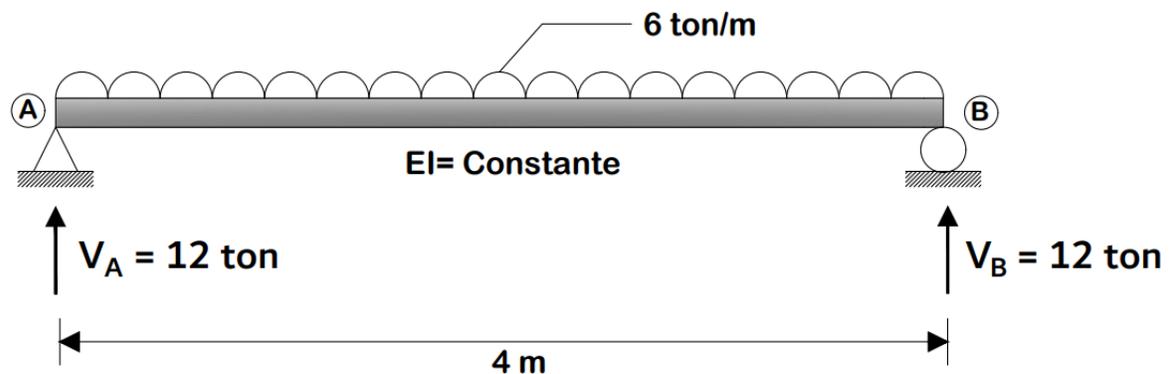
$$\Sigma F_Y = 0 \quad (+)$$

$$V_A + V_B - 6 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (4 \text{ m}) = 0$$

$$V_A + 12 \text{ ton} - 24 \text{ ton} = 0$$

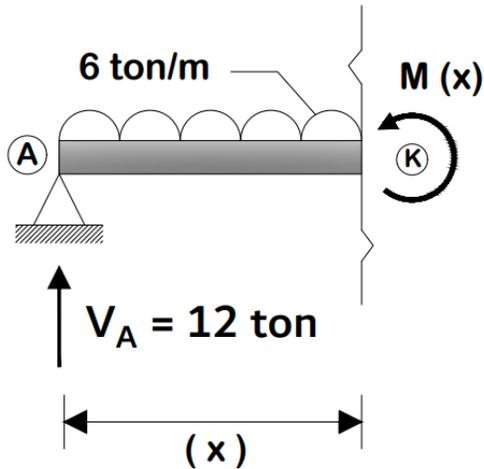
$$V_A - 12 \text{ ton} = 0$$

$$V_A = 12 \text{ ton}$$



- Cálculo de la ecuación del momento flexionante.

CORTE #1 $[0.0 \text{ m} \leq x \leq 4.0 \text{ m}]$



$$\Sigma M_k = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$M(x) + 6 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (x) \left(\frac{x}{2} \right) - 12 (x) = 0$$

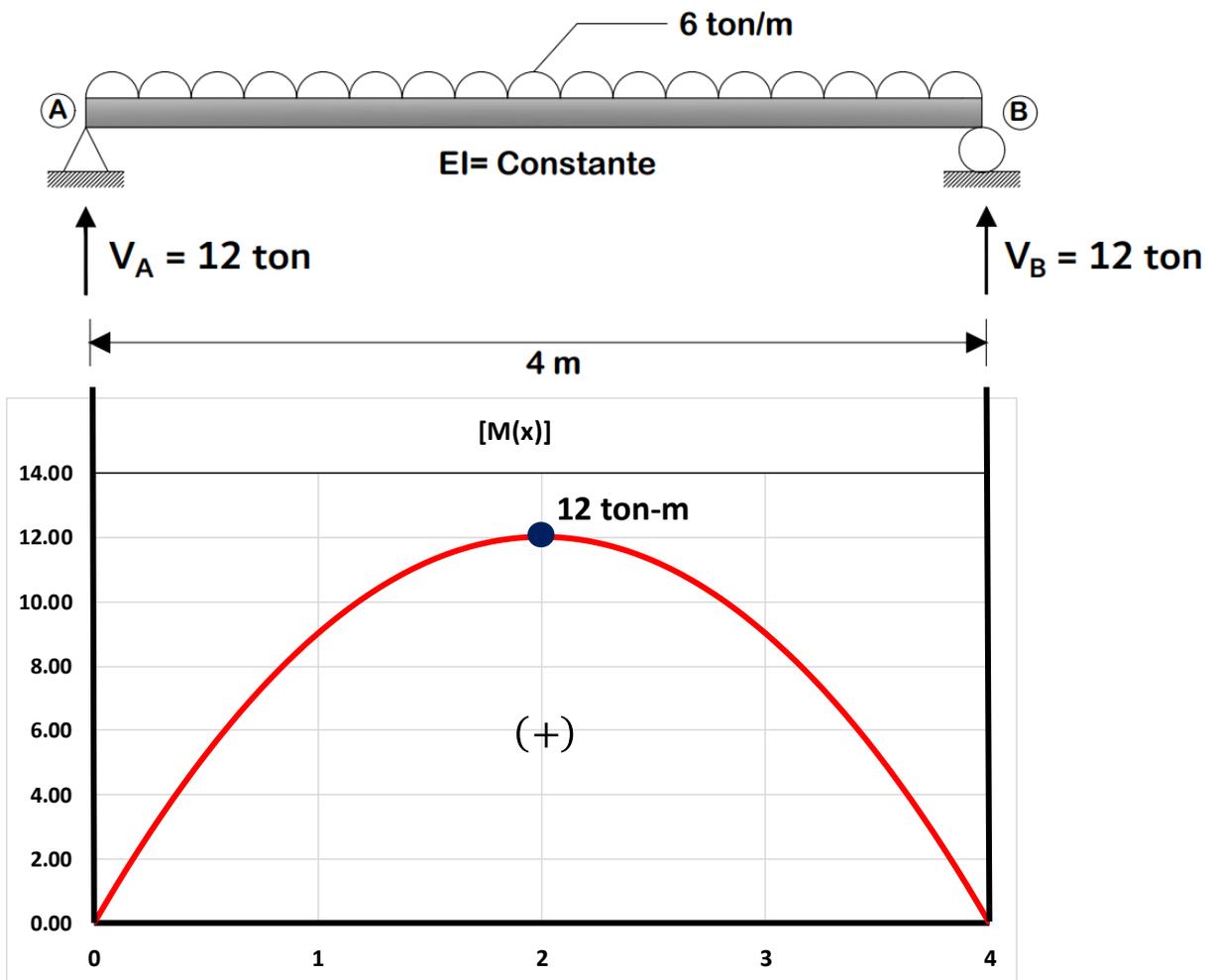
$$M(x) + 3x^2 - 12x = 0$$

$$M(x) = -3x^2 + 12x$$

- Diagrama de momento flexionante.

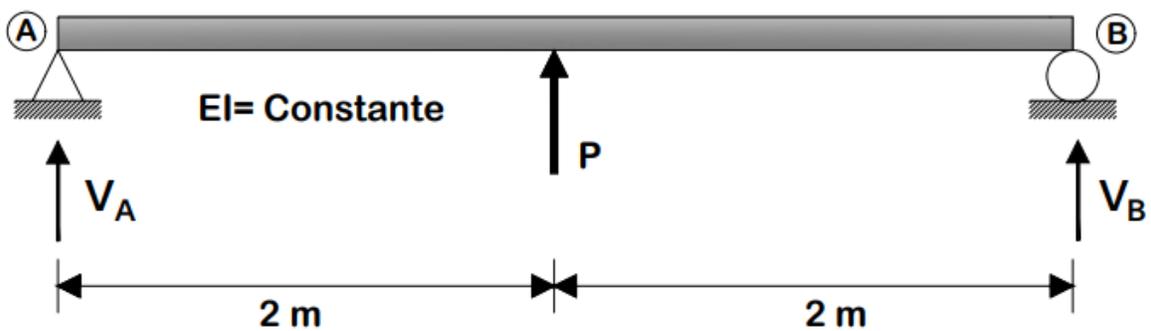
(x)	$M(x)$	
0.0	0.00	$[0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}]$ $M(x) = -3x^2 + 12x$
0.5	5.25	
1.0	9.00	
1.5	11.25	
2.0	12.00	
2.5	11.25	
3.0	9.00	
3.5	5.25	
4.0	0.00	

VIGA 1



PASO ④: Calcular el diagrama de momento flexionante de la viga 2.

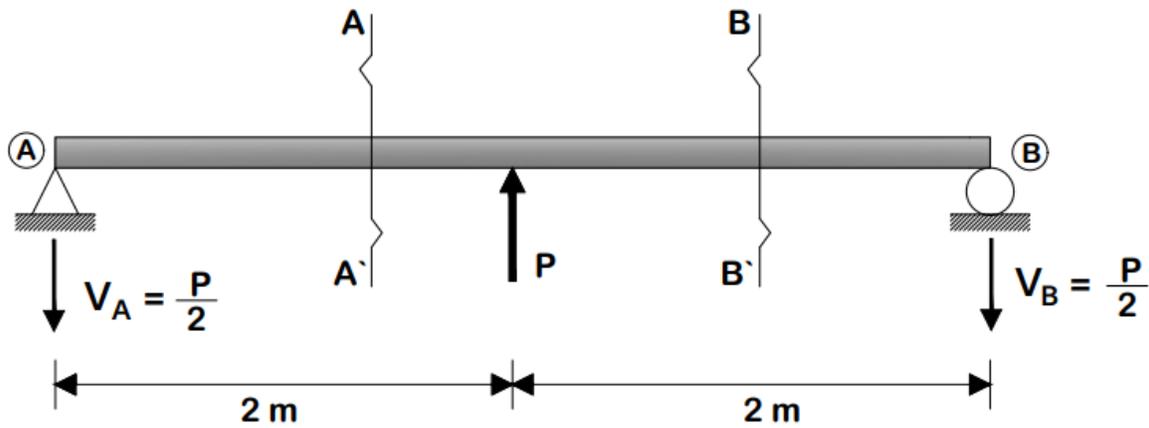
VIGA 2



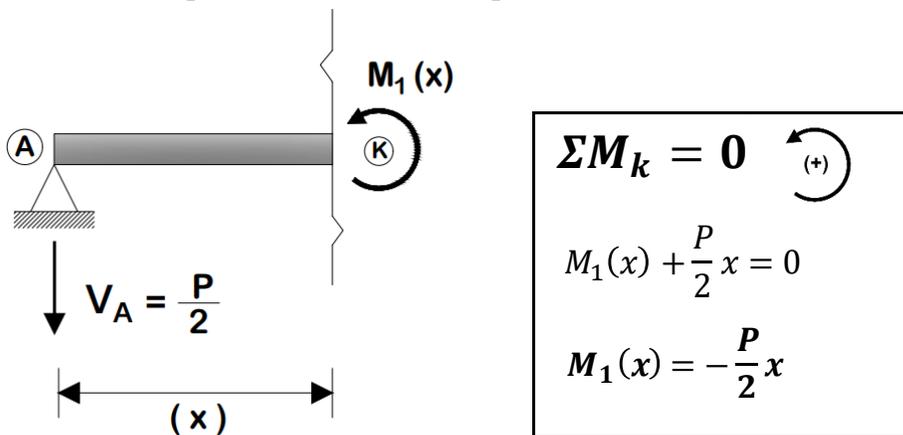
- Cálculo de las reacciones de los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.

$\Sigma M_A = 0 \quad (\odot)$ $-P(2\text{ m}) - V_B(4\text{ m}) = 0$ $V_B(4\text{ m}) = -P(2\text{ m})$ $V_B = -\frac{P(2\text{ m})}{(4\text{ m})}$ $V_B = -\frac{P}{2} \quad [\downarrow]$	$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$ $V_A + V_B + P = 0$ $V_A - \frac{P}{2} + P = 0$ $V_A + \frac{P}{2} = 0$ $V_A = -\frac{P}{2} \quad [\downarrow]$
--	---

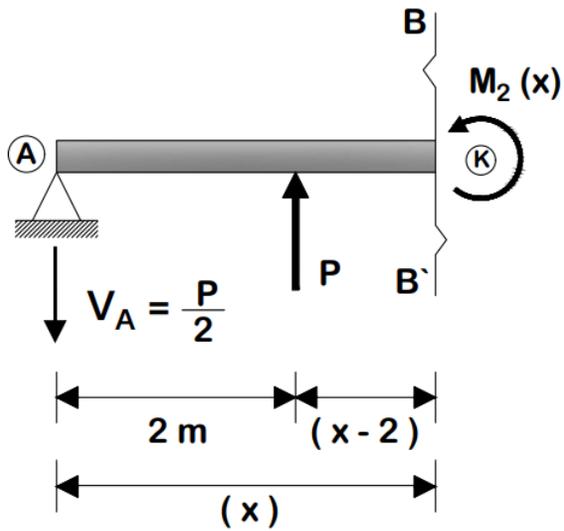
- Cálculo de la ecuación del momento flexionante.



CORTE AA' [0.0 m ≤ x ≤ 2.0 m]



CORTE BB' [2.0 m ≤ x ≤ 4.0 m]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (\text{+})$$

$$M_2(x) + \frac{P}{2}x - P(x - 2) = 0$$

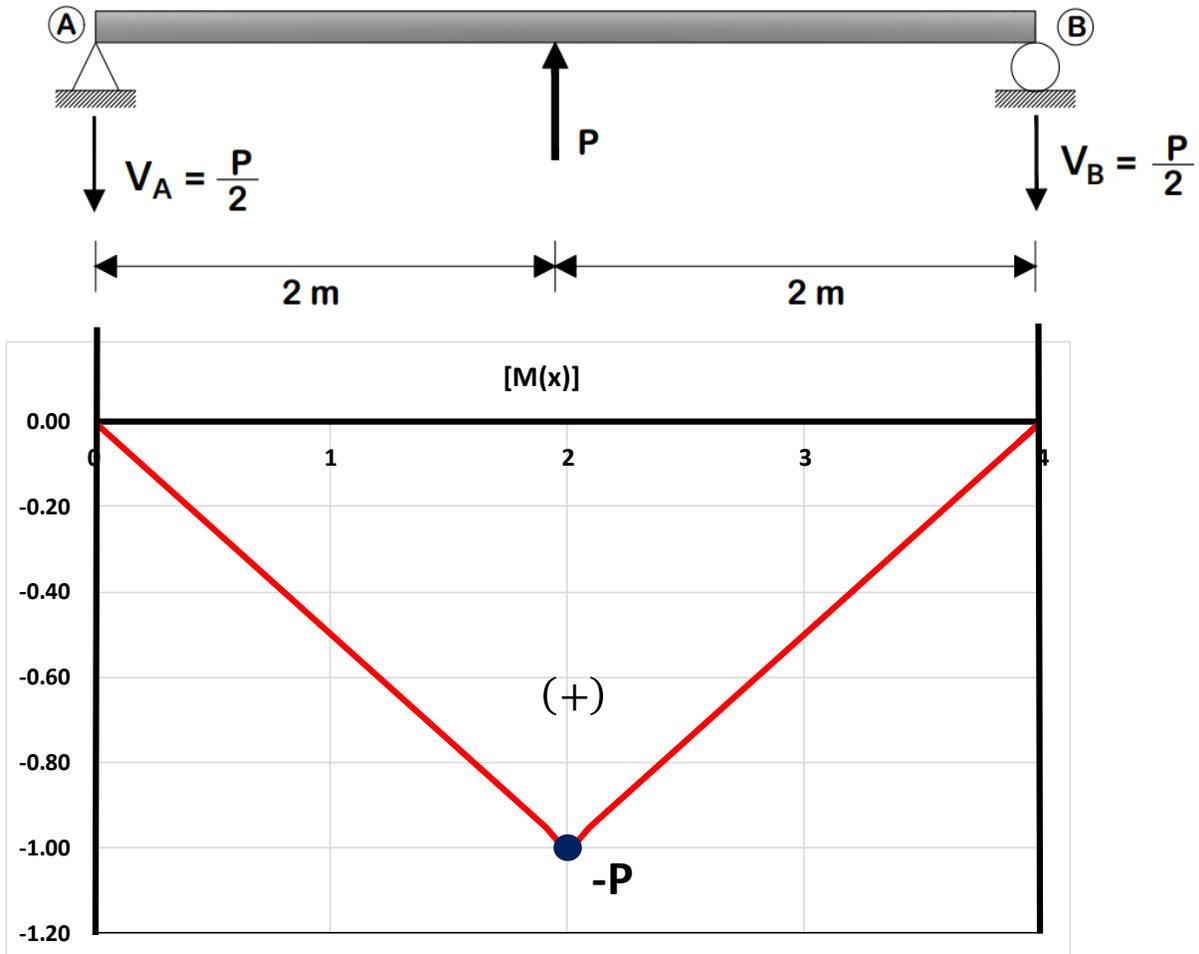
$$M_2(x) + \frac{P}{2}x - Px + 2P = 0$$

$$M_2(x) - \frac{P}{2}x + 2P = 0$$

$$M_2(x) = \frac{P}{2}x - 2P$$

(x)	M(x)	
0.0	0.00	[0 m ≤ x ≤ 2 m] $M_1(x) = -\frac{P}{2}x$
0.5	-1/4 P	
1.0	-1/2 P	
1.5	-3/4 P	
2.0	-P	
2.0	-P	[2 m ≤ x ≤ 4 m] $M_2(x) = \frac{P}{2}x - 2P$
2.5	-3/4 P	
3.0	-1/2 P	
3.5	-1/4 P	
4.0	0.00	

VIGA 2



PASO ⑤: Calcular la energía interna de deformación elástica $[U_i]$ con la tabla 2.1.

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

$$U_i = \int_0^2 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagram A} + \text{Diagram B}}{2EI} \right)^2}_{\text{INTEGRAL A}} dx + \int_2^4 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagram C} + \text{Diagram D}}{2EI} \right)^2}_{\text{INTEGRAL B}} dx$$

INTEGRAL A

$$\int_0^2 \left(\frac{\text{[Diagram: Parabolic shape]} + \text{[Diagram: Triangular shape]}}{2EI} \right)^2 dx$$

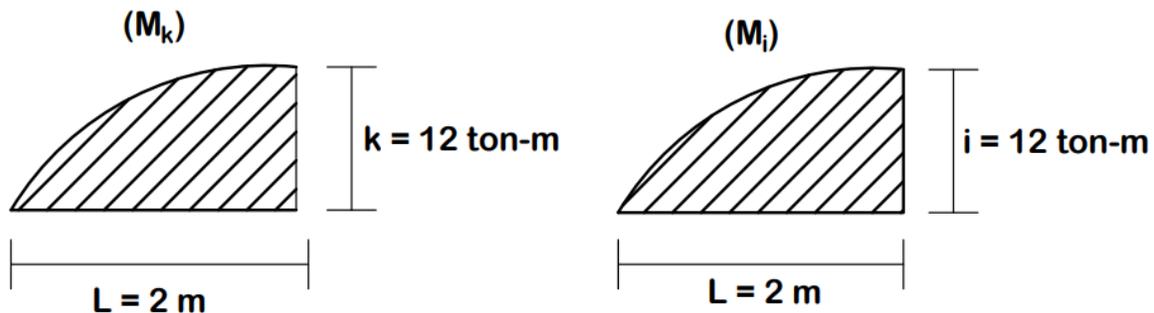
$$\left(\frac{a}{\text{[Diagram: Parabolic shape]}} + \frac{b}{\text{[Diagram: Triangular shape]}} \right)^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2$$

$$\left(\frac{a}{\text{[Diagram: Parabolic shape]}} + \frac{b}{\text{[Diagram: Triangular shape]}} \right)^2 = \left(\frac{a}{\text{[Diagram: Parabolic shape]}} \right)^2 + 2 \left(\frac{a}{\text{[Diagram: Parabolic shape]}} \right) \left(\frac{b}{\text{[Diagram: Triangular shape]}} \right) + \left(\frac{b}{\text{[Diagram: Triangular shape]}} \right)^2$$

$$\underbrace{\int_0^2 \left(\frac{\text{[Diagram: Parabolic shape]}}{2EI} \right)^2 dx}_{\text{Integral 1A}} + \underbrace{\int_0^2 \frac{2 \left(\frac{\text{[Diagram: Parabolic shape]}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{[Diagram: Triangular shape]}}{2EI} \right)}{2EI} dx}_{\text{Integral 2A}} + \underbrace{\int_0^2 \left(\frac{\text{[Diagram: Triangular shape]}}{2EI} \right)^2 dx}_{\text{Integral 3A}}$$

Integral 1A

$$\int_0^2 \left(\frac{\text{[Diagram: Parabolic shape]}}{2EI} \right)^2 dx = \int_0^2 \left(\frac{M_k}{2EI} \right) \left(\frac{M_i}{2EI} \right) dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{8}{15} (L)(i)(k) \right]$$

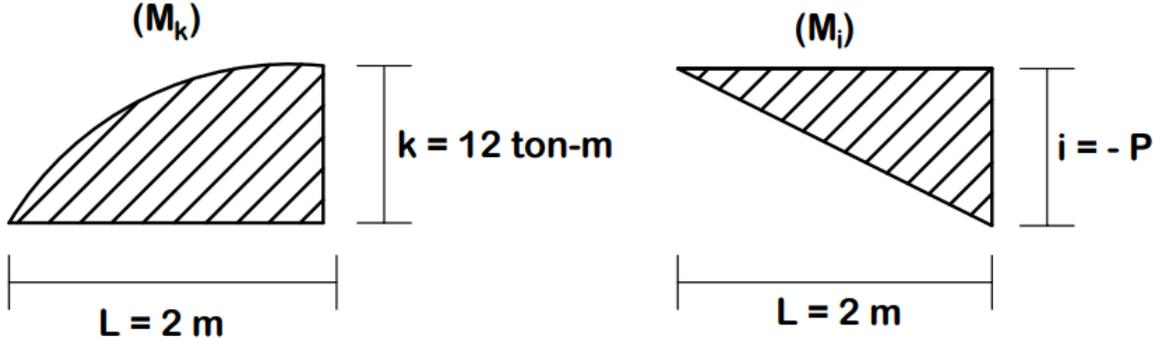


$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{8}{15} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{8}{15} (2)(12)(12) \right] = \frac{384}{5EI}$$

$$\int_0^2 \left(\frac{\text{parabola}}{2EI} \right)^2 dx = \frac{384}{5EI}$$

Integral 2A

$$\int_0^2 \frac{2 \left(\text{parabola} \right) \left(\text{triangle} \right)}{2EI} dx = \int_0^2 \frac{M_k \left(\text{parabola} \right) \left(\text{triangle} \right)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (L)(i)(k) \right]$$

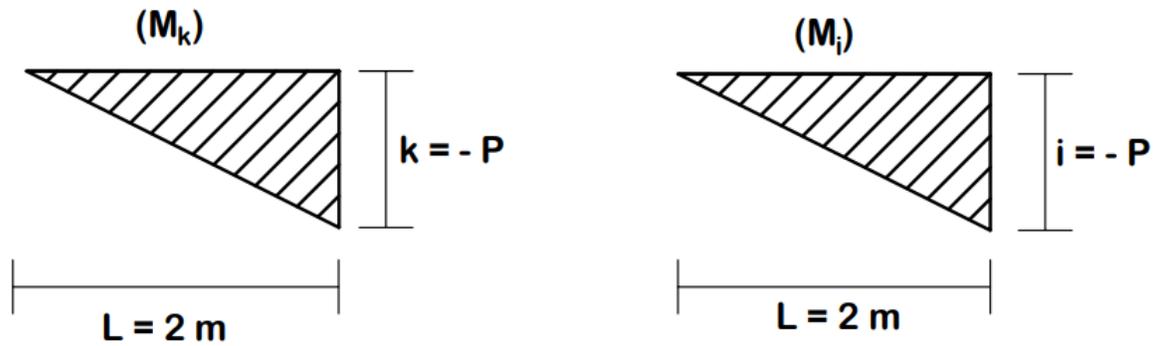


$$\frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (2)(-P)(12) \right] = -\frac{10}{EI} P$$

$$\int_0^2 \frac{2 \left(\text{parabola} \right) \left(\text{triangle} \right)}{2EI} dx = -\frac{10}{EI} P$$

Integral 3A

$$\int_0^2 \left(\frac{\text{triangle}}{2EI} \right)^2 dx = \int_0^2 \frac{M_k \left(\text{triangle} \right) \left(\text{triangle} \right)}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right]$$



$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (2)(-P)(-P) \right] = \frac{1}{3EI} P^2$$

$$\int_0^2 \left(\frac{\text{triangle}}{2EI} \right)^2 dx = \frac{1}{3EI} P^2$$

INTEGRAL B

$$\int_2^4 \frac{\left(\text{triangle} + \text{triangle} \right)^2}{2EI} dx$$

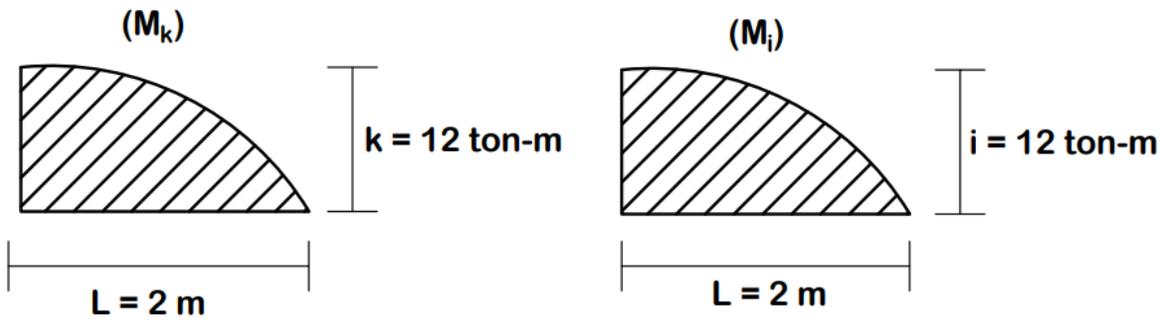
$$\left(\begin{matrix} a \\ \text{triangle} \end{matrix} + \begin{matrix} b \\ \text{triangle} \end{matrix} \right)^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2$$

$$\left(\begin{matrix} a \\ \text{triangle} \end{matrix} + \begin{matrix} b \\ \text{triangle} \end{matrix} \right)^2 = \left(\begin{matrix} a \\ \text{triangle} \end{matrix} \right)^2 + 2 \left(\begin{matrix} a \\ \text{triangle} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} b \\ \text{triangle} \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} b \\ \text{triangle} \end{matrix} \right)^2$$

$$\underbrace{\int_2^4 \frac{\left(\begin{matrix} a \\ \text{triangle} \end{matrix} \right)^2}{2EI} dx}_{\text{Integral 1B}} + \underbrace{\int_2^4 \frac{2 \left(\begin{matrix} a \\ \text{triangle} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} b \\ \text{triangle} \end{matrix} \right)}{2EI} dx}_{\text{Integral 2B}} + \underbrace{\int_2^4 \frac{\left(\begin{matrix} b \\ \text{triangle} \end{matrix} \right)^2}{2EI} dx}_{\text{Integral 3B}}$$

Integral 1B

$$\int_2^4 \frac{\left(\frac{1}{2}kx\right)^2}{2EI} dx = \int_2^4 \frac{M_k}{2EI} \frac{M_i}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{8}{15} (L)(i)(k) \right]$$

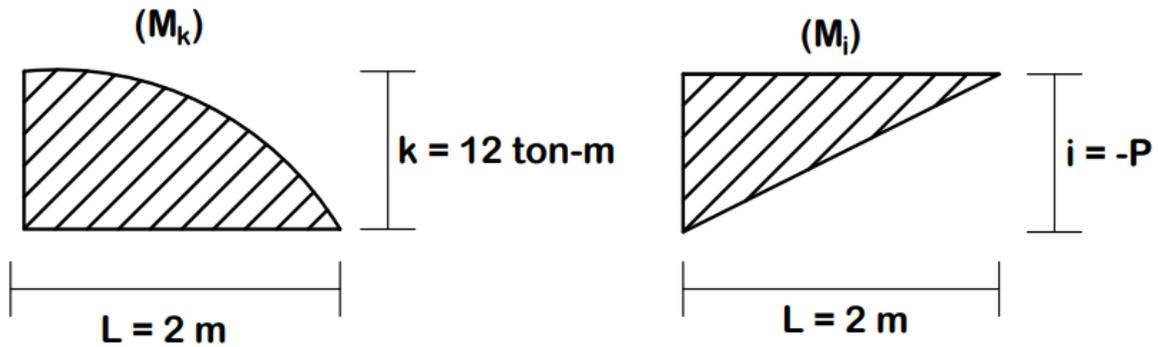


$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{8}{15} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{8}{15} (2)(12)(12) \right] = \frac{384}{5EI}$$

$$\int_2^4 \frac{\left(\frac{1}{2}kx\right)^2}{2EI} dx = \frac{384}{5EI}$$

Integral 2B

$$\int_2^4 \frac{2\left(\frac{1}{2}kx\right)\left(\frac{1}{2}ix\right)}{2EI} dx = \int_2^4 \frac{M_k}{EI} \frac{M_i}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (L)(i)(k) \right]$$

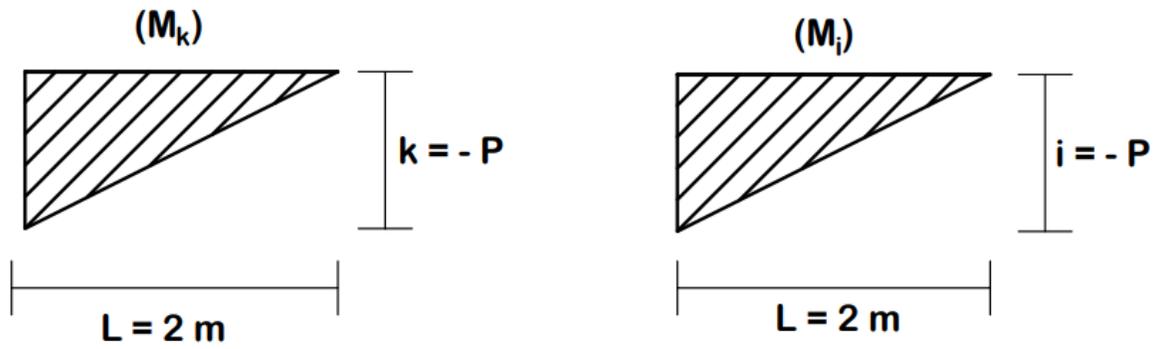


$$\frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (2)(-P)(12) \right] = -\frac{10}{EI} P$$

$$\int_2^4 \frac{2 \left(\frac{\text{shaded area}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{shaded area}}{2EI} \right) dx = -\frac{10}{EI} P$$

Integral 3B

$$\int_2^4 \left(\frac{\text{shaded area}}{2EI} \right)^2 dx = \int_2^4 \frac{M_k}{2EI} \frac{M_i}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right]$$



$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (2)(-P)(-P) \right] = \frac{1}{3EI} P^2$$

$$\int_2^4 \left(\frac{\text{shaded area}}{2EI} \right)^2 dx = \frac{1}{3EI} P^2$$

Energía interna de deformación

$$U_i = \int_0^2 \left(\frac{\text{shaded area}}{2EI} + \frac{\text{shaded area}}{2EI} \right)^2 dx + \int_2^4 \left(\frac{\text{shaded area}}{2EI} + \frac{\text{shaded area}}{2EI} \right)^2 dx$$

$$U_i = \frac{384}{5EI} - \frac{10}{EI} P + \frac{1}{3EI} P^2 + \frac{384}{5EI} - \frac{10}{EI} P + \frac{1}{3EI} P^2$$

PASO ⑥: Cálculo del desplazamiento vertical (Δ_z) con la ecuación (2.13).

$$\Delta = \frac{\partial U_i}{\partial P}$$

$$\Delta_z = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{384}{5EI} - \frac{10}{EI}P + \frac{1}{3EI}P^2 + \frac{384}{5EI} - \frac{10}{EI}P + \frac{1}{3EI}P^2 \right)$$

$$\Delta_z = -\frac{10}{EI} + \frac{2}{3EI}P - \frac{10}{EI} + \frac{2}{3EI}P$$

La carga puntual (P) es una carga ficticia, por lo que el valor de (P) es igual a 0. Por lo tanto, se evalúa la ecuación con un valor de $P = 0$ y el resultado será el desplazamiento vertical a la mitad del claro de la viga.

Haciendo $P = 0$:

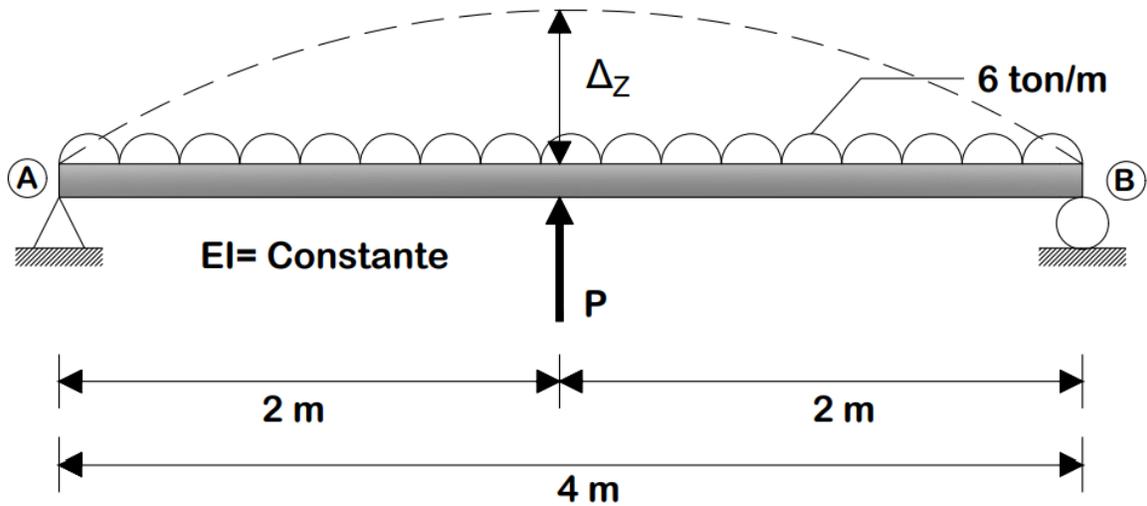
$$\begin{aligned} \Delta_z &= -\frac{10}{EI} + \frac{2}{3EI}(0) - \frac{10}{EI} + \frac{2}{3EI}(0) \\ \Delta_z &= -\frac{10}{EI} - \frac{10}{EI} \end{aligned}$$

Resultado: Desplazamiento vertical a la mitad del claro

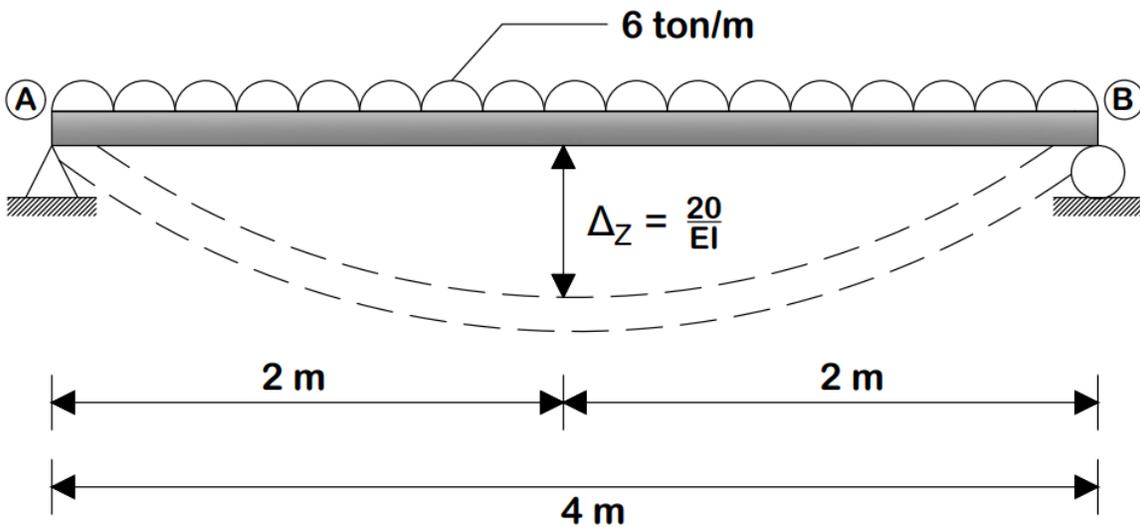
$$\Delta_z = -\frac{20}{EI} [m]$$

Se puede observar que el resultado fue negativo, esto no significa que el resultado es incorrecto, lo único que indica el resultado negativo es que la carga ficticia (P) que se propuso no va en la misma dirección que la del desplazamiento.

Si se regresa al ejercicio, se podrá observar que se propuso una carga ficticia en la dirección que se muestra a continuación:



Una vez resuelto el ejercicio, el resultado que se obtuvo fue negativo y como ya se mencionó, esto significa que se propuso mal la dirección de la carga ficticia (P) ya que esta carga no va en dirección del desplazamiento, por lo tanto, el desplazamiento vertical a la mitad del claro de la viga queda de la siguiente manera.



Antes de pasar a resolver un nuevo ejercicio, se debe hacer énfasis en un detalle importante lo cual se explica a continuación:

Como se ha mencionado y explicado con ayuda de unos ejercicios, el Teorema de Castigliano permite calcular el valor de un desplazamiento vertical en cualquier punto de un sistema estructural que en este caso vendría siendo una viga. Para calcular un desplazamiento vertical, se debe de colocar una carga ficticia en el punto donde se desea conocer este desplazamiento.

Es así como se han estado resolviendo los ejercicios pasados, al colocar una carga ficticia en una viga, se tendrá un sistema con dos diferentes tipos de cargas, una carga real y una carga ficticia. En el ejemplo anterior se tuvo una carga real de 6 ton/m, la cual tiene su propio diagrama de momento flexionante, de igual manera se tuvo una carga puntual ficticia (P) la cual también tuvo su propio diagrama de momento flexionante.

Al calcular ambos diagramas de momento flexionante, el Teorema de Castigliano establece que se debe de calcular la energía interna de deformación del sistema estructural con el respectivo sistema de cargas. Por lo tanto, con los dos diagramas de momento flexionante se tiene la siguiente ecuación para calcular la energía interna de deformación:

Diagrama de momento flexionante de una carga REAL de 6 ton/m.

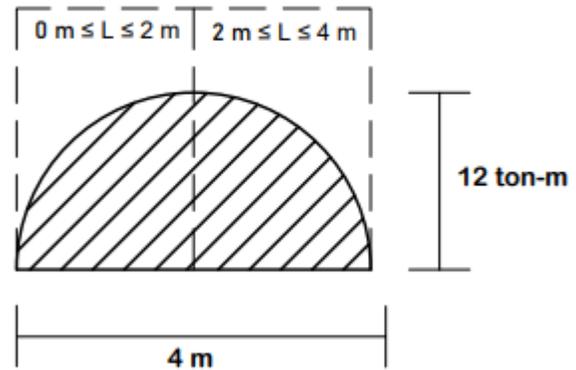
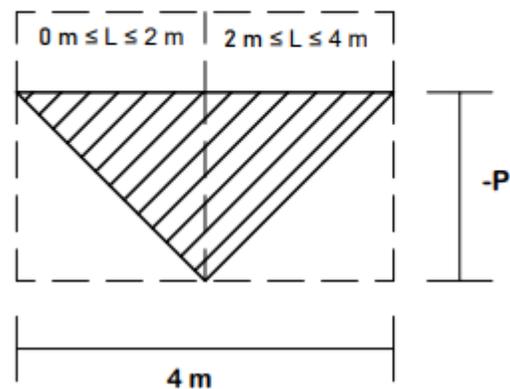


Diagrama de momento flexionante de una carga puntual FICTICIA (P).



$$U_i = \int_0^2 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama Real} + \text{Diagrama Ficticia}}{2EI} \right)^2}_{\text{INTEGRAL A}} dx + \int_2^4 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama Real} + \text{Diagrama Ficticia}}{2EI} \right)^2}_{\text{INTEGRAL B}} dx$$

La energía interna de deformación total es igual a la suma de la energía interna de deformación del tramo que va desde los 0 metros a los 2 metros más la energía de deformación del tramo que va desde los 2 metros a los 4 metros. Al desarrollar el binomio al cuadrado de la integral A y de la Integral B, la energía interna de deformación se divide en las siguientes integrales:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right)^2 dx}_{\text{Integral 1A}} + \int_0^2 \underbrace{2 \left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right)}_{\text{Integral 2A}} dx + \int_0^2 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right)^2 dx}_{\text{Integral 3A}} \\
 & \int_2^4 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right)^2 dx}_{\text{Integral 1B}} + \int_2^4 \underbrace{2 \left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right)}_{\text{Integral 2B}} dx + \int_2^4 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right)^2 dx}_{\text{Integral 3B}}
 \end{aligned}$$

Puede que se tenga la pregunta del por qué se explica de nuevo todo lo del ejercicio anterior, pero toda esta explicación se debe a la siguiente razón.

Como ya se mencionó, la energía interna de deformación está compuesta por dos diferentes diagramas de momento flexionante:

$$\left[\text{Diagrama 1} \quad y \quad \text{Diagrama 2} \right] \rightarrow \text{Diagramas de momento flexionante } \mathbf{CARGA REAL}$$

$$\left[\text{Diagrama 3} \quad y \quad \text{Diagrama 4} \right] \rightarrow \text{Diagramas de momento flexionante } \mathbf{CARGA FICTICIA}$$

La integral 1A y 1B es el producto de los diagramas de los momentos flexionantes de la carga real, la integral 2A y 2B es el producto del diagrama del momento flexionante de la carga real y la mitad del diagrama del momento flexionante de la carga ficticia, la integral 3A y 3B es el producto de los diagramas de los momentos flexionante de la carga ficticia. Esto se puede ilustrar de la siguiente manera para que se pueda entender mejor:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 \frac{\left(\text{Momento CARGA REAL} \right) \left(\text{Momento CARGA REAL} \right)}{2EI} dx + \int_0^2 \frac{2 \left(\text{Momento CARGA REAL} \right) \left(\text{Momento CARGA FICTICIA} \right)}{2EI} dx + \int_0^2 \frac{\left(\text{Momento CARGA FICTICIA} \right) \left(\text{Momento CARGA FICTICIA} \right)}{2EI} dx \\
 & \text{Integral 1A} \qquad \qquad \qquad \text{Integral 2A} \qquad \qquad \qquad \text{Integral 3A} \\
 \\
 & \int_2^4 \frac{\left(\text{Momento CARGA REAL} \right) \left(\text{Momento CARGA REAL} \right)}{2EI} dx + \int_2^4 \frac{2 \left(\text{Momento CARGA REAL} \right) \left(\text{Momento CARGA FICTICIA} \right)}{2EI} dx + \int_2^4 \frac{\left(\text{Momento CARGA FICTICIA} \right) \left(\text{Momento CARGA FICTICIA} \right)}{2EI} dx \\
 & \text{Integral 1B} \qquad \qquad \qquad \text{Integral 2B} \qquad \qquad \qquad \text{Integral 3B}
 \end{aligned}$$

Si se regresa al ejercicio 2.10, se podrá observar que cada integral se resolvió por separado y al obtener el resultado de cada integral se hizo una sumatoria para obtener la energía interna de deformación. Al obtener la energía interna de deformación, el teorema de Castigliano establece que se debe de derivar esta energía interna con respecto a la carga ficticia (P), al hacer esto, se podrá observar en el mismo ejercicio, que el resultado de las siguientes integrales se hacen cero (0) al derivar la energía interna con respecto a "P":

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 \frac{\left(\text{Momento CARGA REAL} \right) \left(\text{Momento CARGA REAL} \right)}{2EI} dx + \int_0^2 \frac{2 \left(\text{Momento CARGA REAL} \right) \left(\text{Momento CARGA FICTICIA} \right)}{2EI} dx + \int_0^2 \frac{\left(\text{Momento CARGA FICTICIA} \right) \left(\text{Momento CARGA FICTICIA} \right)}{2EI} dx \\
 & \text{Integral 1A} \qquad \qquad \qquad \text{Integral 2A} \qquad \qquad \qquad \text{Integral 3A} \\
 \\
 & \int_2^4 \frac{\left(\text{Momento CARGA REAL} \right) \left(\text{Momento CARGA REAL} \right)}{2EI} dx + \int_2^4 \frac{2 \left(\text{Momento CARGA REAL} \right) \left(\text{Momento CARGA FICTICIA} \right)}{2EI} dx + \int_2^4 \frac{\left(\text{Momento CARGA FICTICIA} \right) \left(\text{Momento CARGA FICTICIA} \right)}{2EI} dx \\
 & \text{Integral 1B} \qquad \qquad \qquad \text{Integral 2B} \qquad \qquad \qquad \text{Integral 3B}
 \end{aligned}$$

Después de derivar la energía interna de deformación con respecto a "P", se sustituyó el valor de "P" en el resultado de la derivada parcial, como ya se ha mencionado en varias ocasiones, el valor de "P" es igual a cero, ya que la carga "P" es una carga ficticia. Si se regresa al ejercicio 2.10, se podrá observar que al evaluar la ecuación que resulto de derivar la energía interna de deformación con respecto a la carga ficticia P, el resultado de las siguientes integrales se hicieron cero (0):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 \frac{(\text{diagrama 1}) (\text{diagrama 2})}{2EI} dx + \int_0^2 \frac{2(\text{diagrama 1}) (\text{diagrama 2})}{2EI} dx + \int_0^2 \frac{(\text{diagrama 1}) (\text{diagrama 2})}{2EI} dx \\
 & \text{Integral 1A} \qquad \qquad \qquad \text{Integral 2A} \qquad \qquad \qquad \text{Integral 3A} \\
 & \int_2^4 \frac{(\text{diagrama 1}) (\text{diagrama 2})}{2EI} dx + \int_2^4 \frac{2(\text{diagrama 1}) (\text{diagrama 2})}{2EI} dx + \int_2^4 \frac{(\text{diagrama 1}) (\text{diagrama 2})}{2EI} dx \\
 & \text{Integral 1B} \qquad \qquad \qquad \text{Integral 2B} \qquad \qquad \qquad \text{Integral 3B}
 \end{aligned}$$

↗ [0] ↗ [0] ↗ [0]

Las únicas integrales que no resultaron ser igual a cero después de derivarlas o al sustituir el valor de P igual a cero (P = 0), son las integrales 1B y 2B. Si se les presta atención a estas integrales, se podrá observar que estas integrales son el producto de los diagramas del momento flexionante de la carga real y el momento flexionante de la carga ficticia.

Fue tardado resolver el ejercicio anterior, ya que se tuvo que obtener el resultado de cada integral por separado y después hacer la suma de cada resultado, con todo lo explicado anteriormente se podrán simplificar los ejercicios que se presenten más adelante, esta simplificación reducirá el tiempo para calcular un desplazamiento vertical utilizando la tabla 2.1.

Lo antes mencionado se puede resumir en las siguientes conclusiones:

- El resultado de la integral que tenga el producto de dos diagramas de momento flexionante de una carga "REAL" tendrá un valor igual a cero (0) por derivación, es decir, cuando se derive la energía interna de deformación, el resultado de esta integral será igual a cero (0).

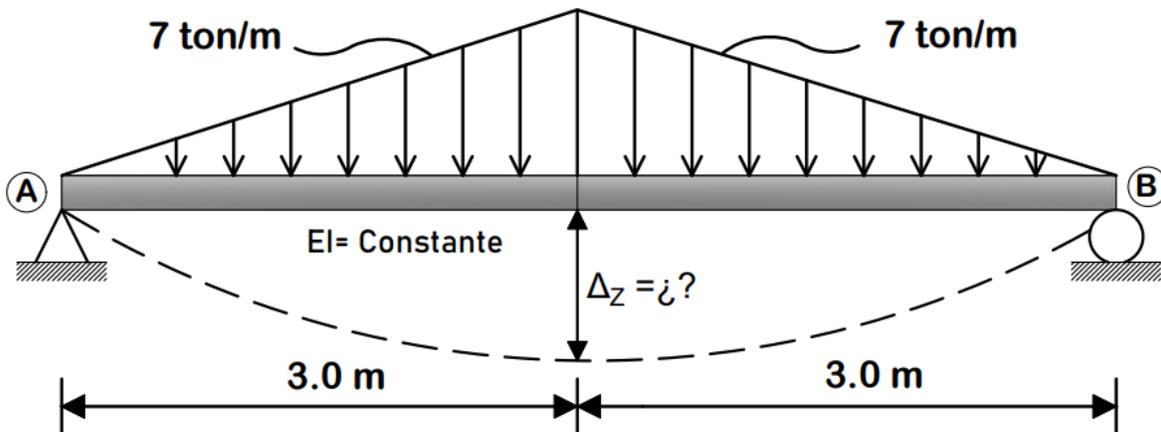
- El resultado de la integral que tenga el producto de dos diagramas de momento flexionante de una carga "FICTICIA" tendrá un valor igual a cero (0) por sustitución, es decir, cuando se derive la energía interna de deformación y al resultado obtenido se le sustituya el valor igual a cero de la carga ficticia, el resultado de esta integral será igual a cero (0).
- La única integral que no será igual a cero (0) ya sea por derivación o por sustitución, es la integral que tenga el producto de un diagrama de momento flexionante de una carga "REAL" por un diagrama de momento flexionante de una carga "FICTICIA".

Se resolverá los últimos ejercicios utilizando la ecuación 2.13 y la tabla de integración, en estos últimos ejercicios se empleará la simplificación que se acaba de explicar y se podrá observar que con esta simplificación que se dedujo se reducirá el tiempo requerido para calcular un desplazamiento vertical. Toda esta explicación tiene relación con otro método que se verá más adelante, este método se le conoce como "El Principio del trabajo virtual" y se verá más a detalle terminado el tema del Teorema de Castigliano, por el momento se recomienda que quede bien entendido lo que se explicó.

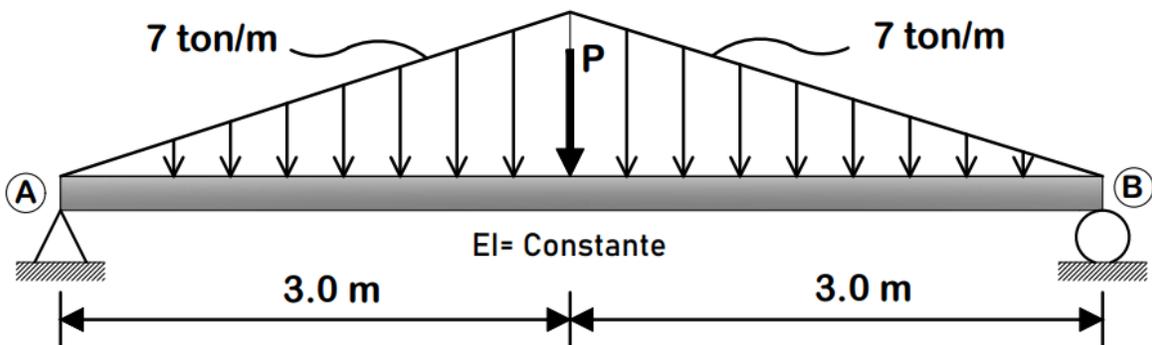
La simplificación que se dedujo solo aplica cuando se desea conocer un desplazamiento vertical en un punto donde no se tiene una carga puntual "REAL", como se mencionó al principio de esta sección, si se requiere conocer un desplazamiento vertical en un punto donde se tiene aplicada una carga puntual "REAL", en lugar de colocar una carga puntual "FICTICIA" en ese mismo punto, lo único que se hace es convertir en una variable el valor de la carga puntual "REAL", al hacer esto, cuando se calcule la energía interna de deformación y después se derive esta misma, al valor obtenido se le sustituirá el valor de (P), este valor ya no será igual a cero (0), si no el valor de "P" será igual al valor de la carga puntual "REAL", todo esto se entenderá mejor resolviendo un ejercicio.

por el momento solo es importante mencionar que todo lo explicado anteriormente solo aplica cuando se desea conocer un desplazamiento vertical en un punto donde no se tenga una carga puntual "REAL", es decir, solo aplica cuando se propone una carga puntual "FICTICIA" en un punto donde se solicita conocer su desplazamiento, donde el valor de $P = 0$. Una vez dicho esto, se pasará a resolver un ejercicio empleando lo que se explicó con anterioridad.

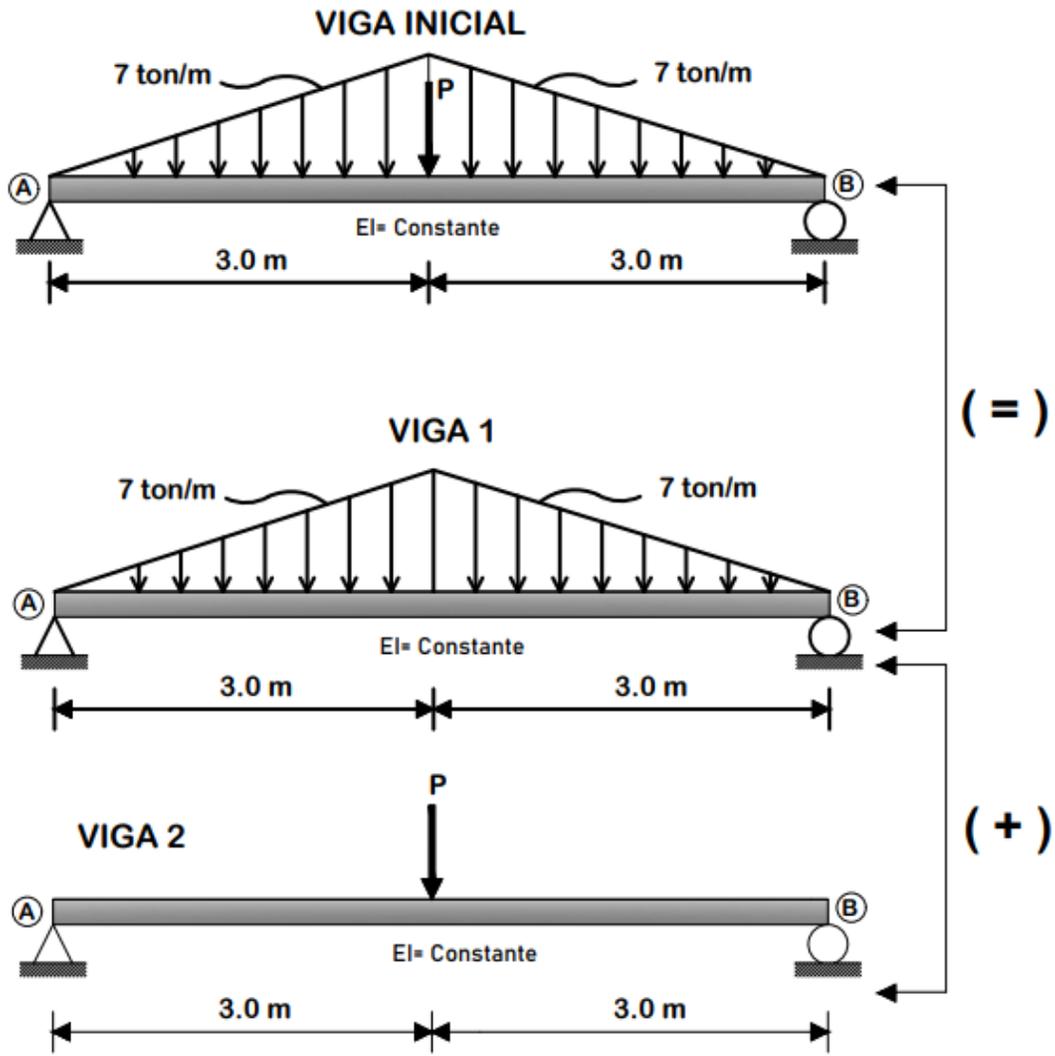
Ejercicio 2.11: Se desea conocer cual es el desplazamiento vertical a la mitad del claro de la viga simplemente apoyada. La viga es sometida a dos cargas triangulares de 7 ton/m, para calcular el desplazamiento vertical se requiere utilizar la ecuación (2.13).



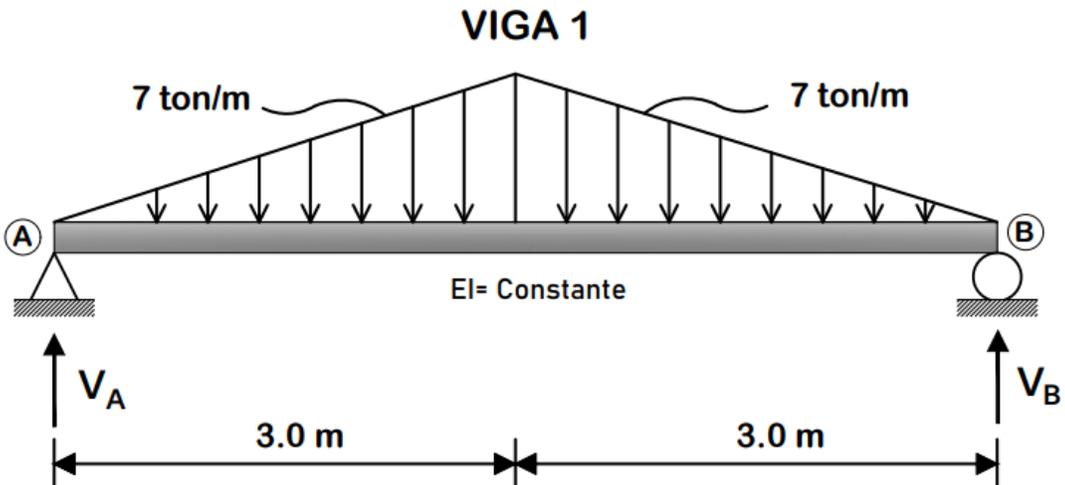
PASO ①: Colocar una carga puntual ficticia (P) en el punto donde se desea conocer el desplazamiento vertical.



PASO ②: Utilizar el Principio de Superposición.



PASO ③: Calcular el diagrama de momento flexionante de la viga 1.



- Cálculo de las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.

$$\Sigma M_A = 0 \quad (\curvearrowright)$$

$$-V_B(6 \text{ m}) + \left[\frac{\left(7 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right)(3 \text{ m})}{2} \right] \left[\frac{2}{3}(3 \text{ m}) \right] + \left[\frac{\left(7 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right)(3 \text{ m})}{2} \right] \left[\frac{1}{3}(3 \text{ m}) + 3 \text{ m} \right] = 0$$

$$-V_B(6 \text{ m}) + \left[\frac{21}{2} \text{ ton} \right] [2 \text{ m}] + \left[\frac{21}{2} \text{ ton} \right] [4 \text{ m}] = 0$$

$$-V_B(6 \text{ m}) + 63 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$V_B = \frac{63 \text{ ton} \cdot \text{m}}{6 \text{ m}}$$

$$V_B = \frac{21}{2} \text{ ton}$$

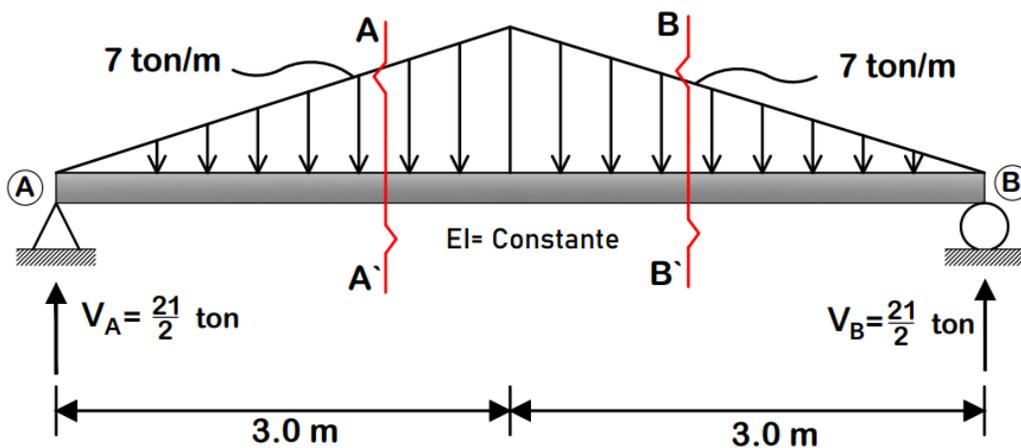
$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$V_A + V_B - \left[\frac{\left(7 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right)(3 \text{ m})}{2} \right] - \left[\frac{\left(7 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right)(3 \text{ m})}{2} \right] = 0$$

$$V_A + \frac{21}{2} \text{ ton} - \frac{21}{2} \text{ ton} - \frac{21}{2} \text{ ton} = 0$$

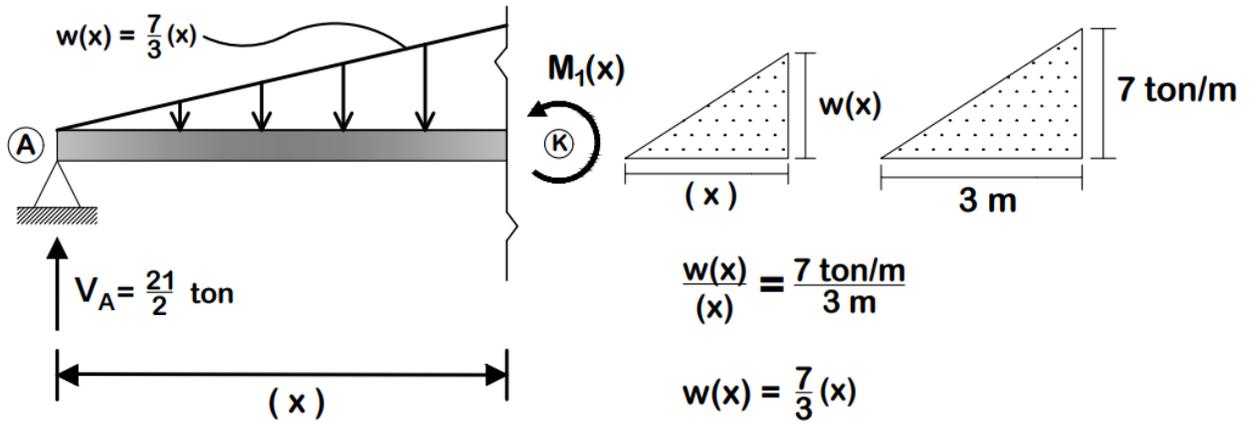
$$V_A - \frac{21}{2} \text{ ton} = 0$$

$$V_A = \frac{21}{2} \text{ ton}$$



- Cálculo de la ecuación del momento flexionante.

CORTE AA' [0.0 m ≤ x ≤ 3.0 m]



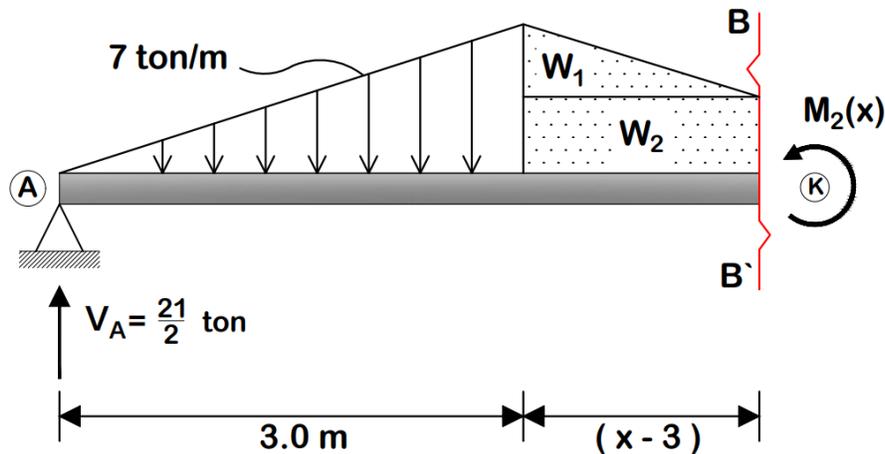
$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

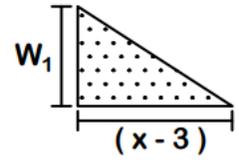
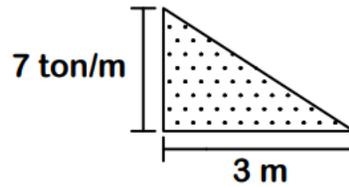
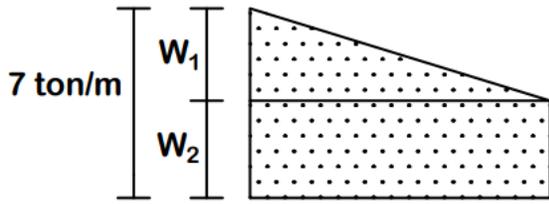
$$M_1(x) - \frac{21}{2}(x) + \left[\frac{\left(\frac{7}{3}x\right)(x)}{2} \right] \left[\frac{1}{3}x \right] = 0$$

$$M_1(x) - \frac{21}{2}x + \frac{7}{18}x^3 = 0$$

$$M_1(x) = -\frac{7}{18}x^3 + \frac{21}{2}x$$

CORTE BB' [3.0 m ≤ x ≤ 6.0 m]





$$W_2 = 7 \text{ ton/m} - W_1$$

$$W_2 = 7 - \frac{7}{3}(x-3)$$

$$\frac{W_1}{(x-3)} = \frac{7 \text{ ton/m}}{3 \text{ m}}$$

$$W_1 = \frac{7}{3}(x-3)$$

$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M_2(x) - \frac{21}{2}(x) + \left[\frac{(7)(3)}{2} \right] \left[\frac{1}{3}3 + x - 3 \right] + \left[\frac{\left(\frac{7}{3}(x-3) \right)(x-3)}{2} \right] \left[\frac{2}{3}(x-3) \right] + \left[\left(7 - \frac{7}{3}(x-3) \right)(x-3) \right] \left[\frac{1}{2}(x-3) \right] = 0$$

$$M_2(x) - \frac{21}{2}(x) + \left[\frac{21}{2} \right] [x - 2] + \left[\frac{7}{6}(x^2 - 6x + 9) \right] \left[\frac{2}{3}x - 2 \right] + \left[7 - \frac{7}{3}x + 7 \right] \left[\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) \right] = 0$$

$$M_2(x) - \frac{21}{2}x + \frac{21}{2}x - 21 + \left[\frac{7}{6}x^2 - 7x + \frac{21}{2} \right] \left[\frac{2}{3}x - 2 \right] + \left[-\frac{7}{3}x + 14 \right] \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} \right] = 0$$

$$M_2(x) - \frac{21}{2}x + \frac{21}{2}x - 21 + \frac{7}{9}x^3 - \frac{14}{3}x^2 + 7x - \frac{7}{3}x^2 + 14x - 21 - \frac{7}{6}x^3 + 7x^2 - \frac{21}{2}x + 7x^2 - 42x + 63 = 0$$

$$M_2(x) - \frac{7}{18}x^3 + 7x^2 - \frac{63}{2}x + 21 = 0$$

$$M_2(x) = \frac{7}{18}x^3 - 7x^2 + \frac{63}{2}x - 21$$

- Diagrama del momento flexionante.

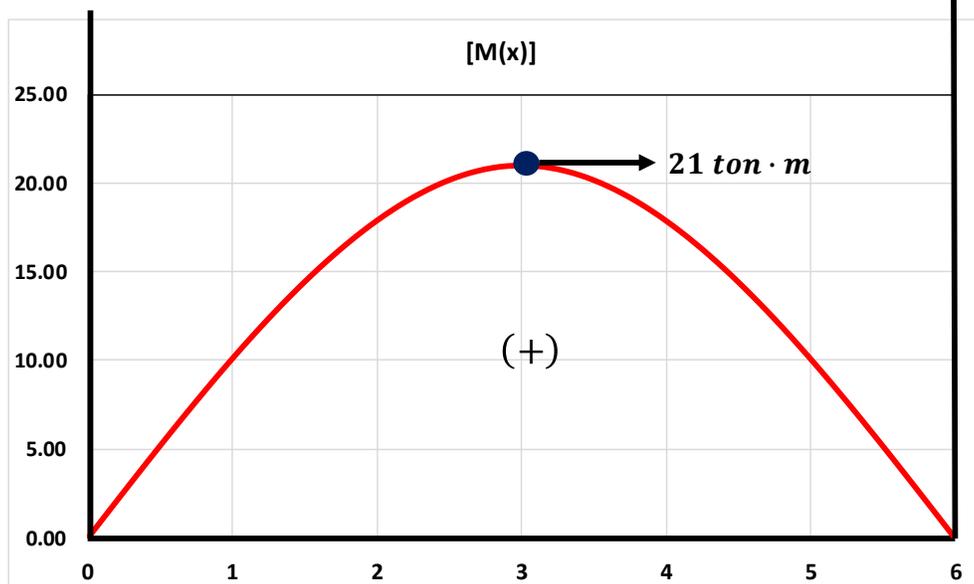
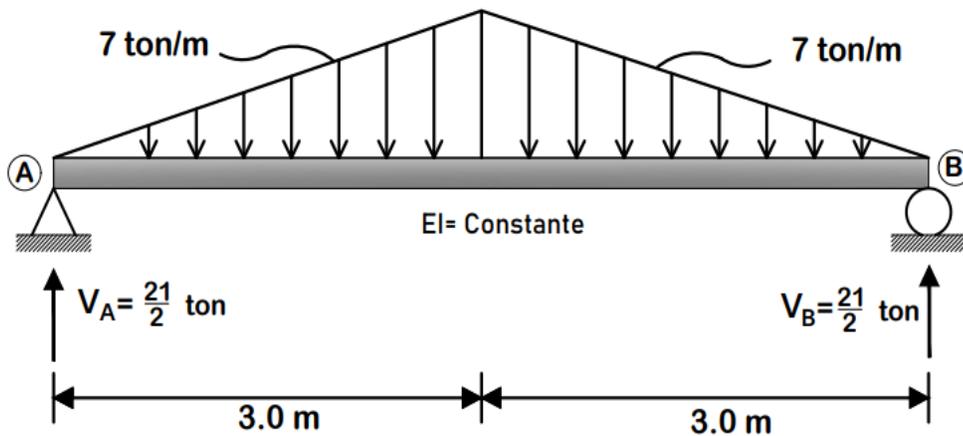
(x)	M(x)
0.0	0.00
0.5	5.20
1.0	10.11
1.5	14.44
2.0	17.89
2.5	20.17
3.0	21.00
3.0	21.00
3.5	20.17
4.0	17.89
4.5	14.44
5.0	10.11
5.5	5.20
6.0	0.00

[0 m ≤ x ≤ 3 m]

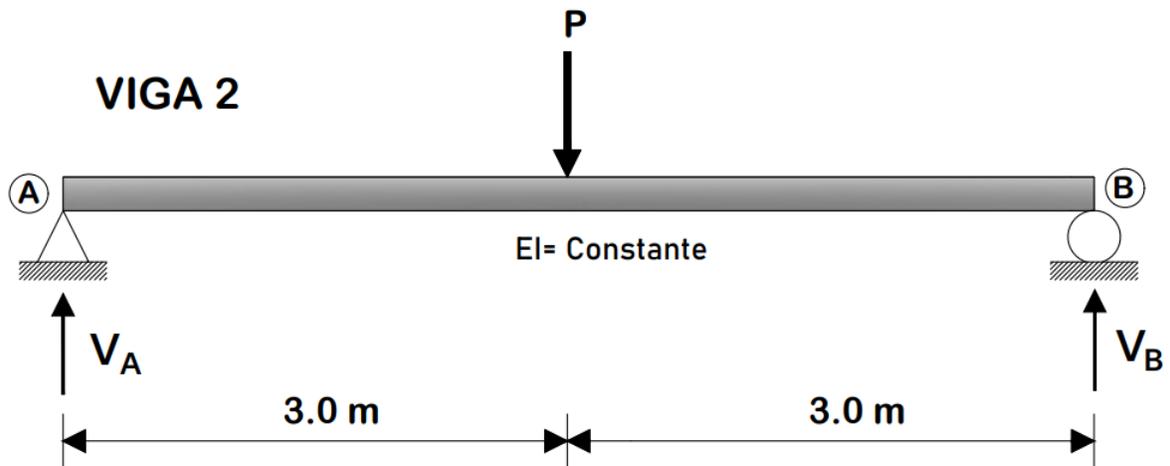
$$M_1(x) = -\frac{7}{18}x^3 + \frac{21}{2}x$$

[3 m ≤ x ≤ 6 m]

$$M_2(x) = \frac{7}{18}x^3 - 7x^2 + \frac{63}{2}x - 21$$

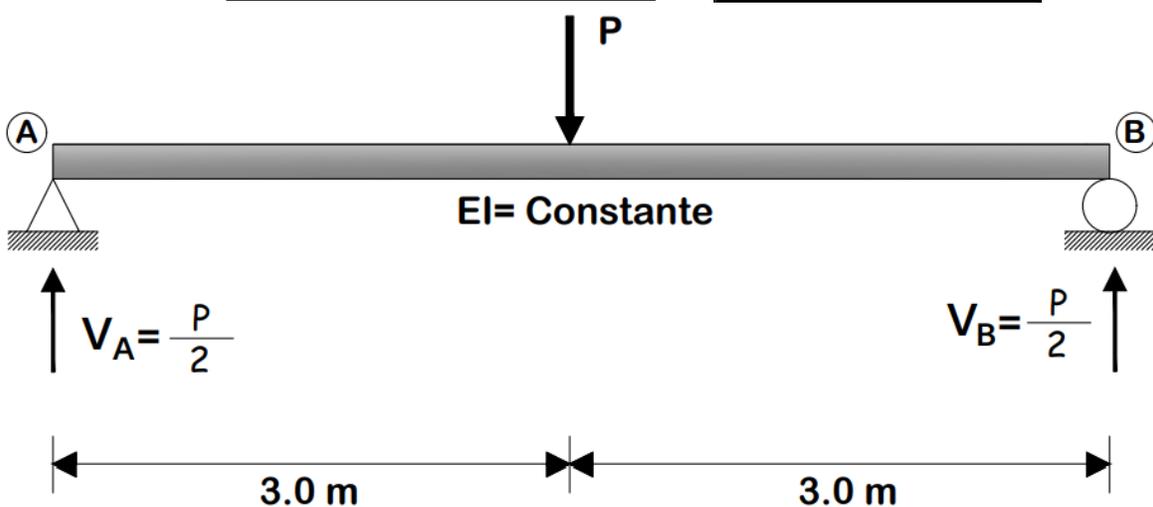


PASO ④: Calcular el diagrama del momento flexionante de la viga 2.



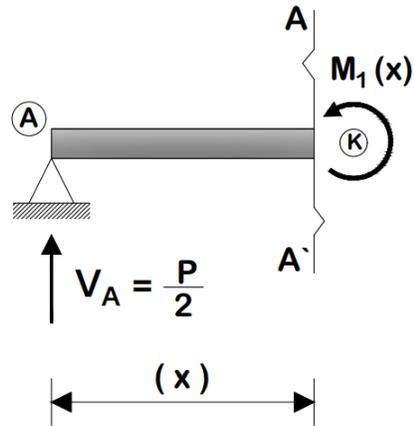
- Cálculo de las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0 \quad (+) \\ -V_B(6 \text{ m}) + P(3 \text{ m}) &= 0 \\ V_B(6 \text{ m}) &= P(3 \text{ m}) \\ V_B &= \frac{P(3 \text{ m})}{(6 \text{ m})} \\ V_B &= \frac{P}{2} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \Sigma F_Y = 0 \quad (+) \\ V_A + V_B - P &= 0 \\ V_A + \frac{P}{2} - P &= 0 \\ V_A - \frac{P}{2} &= 0 \\ V_A &= \frac{P}{2} \end{aligned}$$



- Cálculo de la ecuación del momento flexionante.

CORTE AA' [0.0 m ≤ x ≤ 3.0 m]

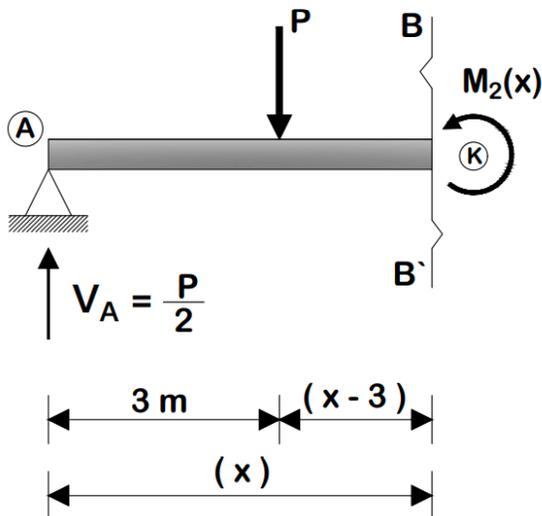


$$\Sigma M_k = 0 \quad (\oplus)$$

$$M_1(x) - \frac{P}{2}(x) = 0$$

$$M_1(x) = \frac{P}{2}(x)$$

CORTE BB' [3.0 m ≤ x ≤ 6.0 m]



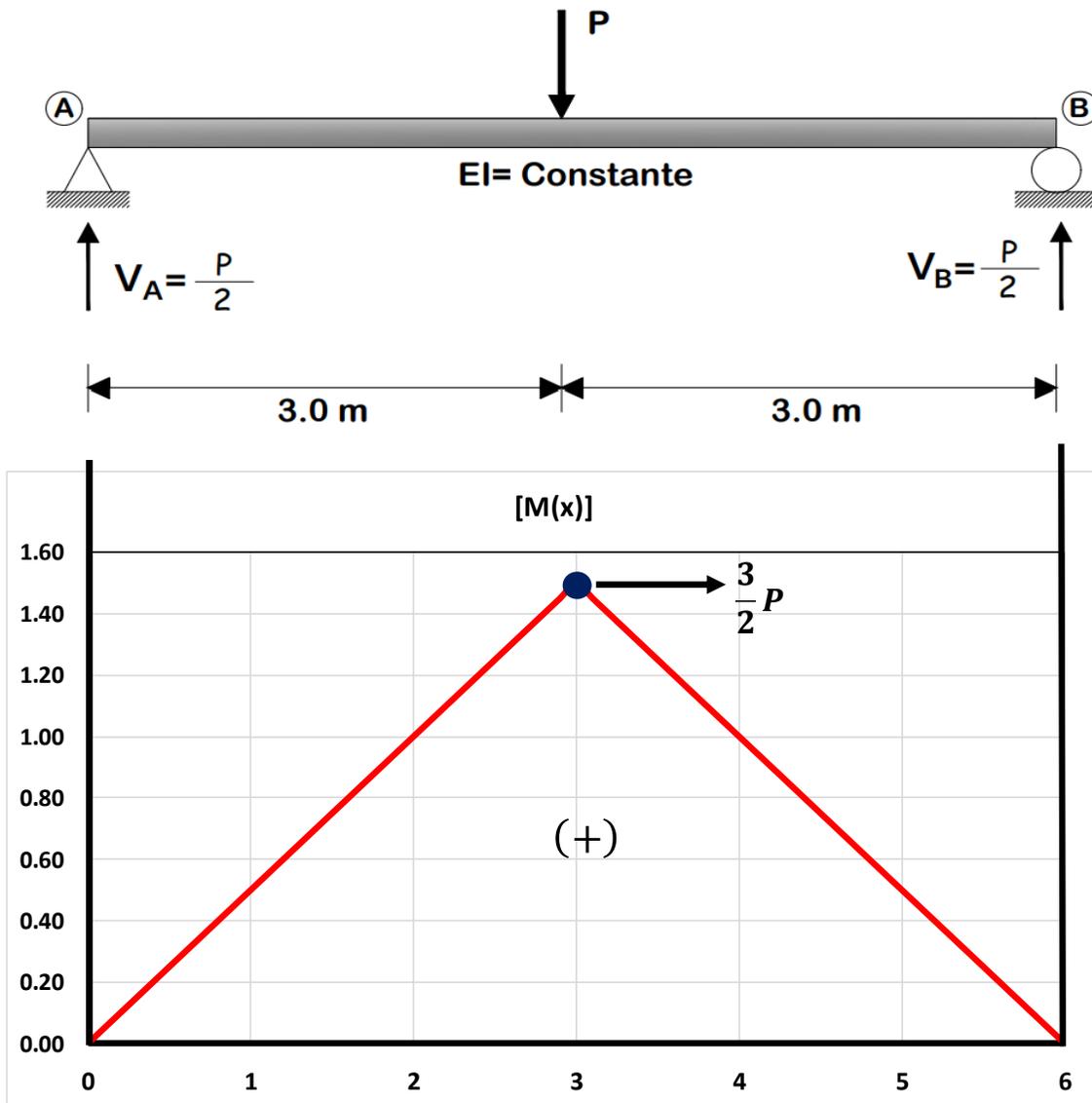
$$\Sigma M_k = 0 \quad (\oplus)$$

$$M_2(x) + P(x - 3) - \frac{P}{2}(x) = 0$$

$$M_2(x) + Px - 3P - \frac{P}{2}x = 0$$

$$M_2(x) = -\frac{P}{2}x + 3P$$

(x)	M(x)	
0.0	0	[0 m ≤ x ≤ 3 m] $M_1(x) = \frac{P}{2}x$
1.0	1/2 P	
2.0	P	
3.0	3/2 P	
3.0	3/2 P	[3 m ≤ x ≤ 6 m] $M_2(x) = -\frac{P}{2}x + 3P$
4.0	P	
5.0	1/2 P	
6.0	0	



PASO ⑤): Calcular la energía interna de deformación elástica $[U_i]$ con la tabla 2.1.

$$U_i = \int_0^3 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagram A} + \text{Diagram B}}{2EI} \right)^2}_{\text{INTEGRAL A}} dx + \int_3^6 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagram C} + \text{Diagram D}}{2EI} \right)^2}_{\text{INTEGRAL B}} dx$$

$$\begin{aligned}
 U_i = & \int_0^3 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI}\right)^2}_{\text{Integral 1A}} dx + \int_0^3 \underbrace{2\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI}\right)\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI}\right)}_{\text{Integral 2A}} dx + \int_0^3 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI}\right)^2}_{\text{Integral 3A}} dx + \\
 & \int_3^6 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI}\right)^2}_{\text{Integral 1B}} dx + \int_3^6 \underbrace{2\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI}\right)\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI}\right)}_{\text{Integral 2B}} dx + \int_3^6 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI}\right)^2}_{\text{Integral 3B}} dx
 \end{aligned}$$

Se eliminan las integrales que tengan el producto de los diagramas del momento flexionante de la carga real y de la carga ficticia, ya que el valor de estas integrales será igual a cero a causa de la derivación y de la sustitución.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^3 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI}\right)\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI}\right)}_{\text{Integral 1A}} dx + \int_0^3 \underbrace{2\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI}\right)\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI}\right)}_{\text{Integral 2A}} dx + \int_0^3 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI}\right)\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI}\right)}_{\text{Integral 3A}} dx \\
 & \int_3^6 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI}\right)\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI}\right)}_{\text{Integral 1B}} dx + \int_3^6 \underbrace{2\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI}\right)\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI}\right)}_{\text{Integral 2B}} dx + \int_3^6 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI}\right)\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI}\right)}_{\text{Integral 3B}} dx
 \end{aligned}$$

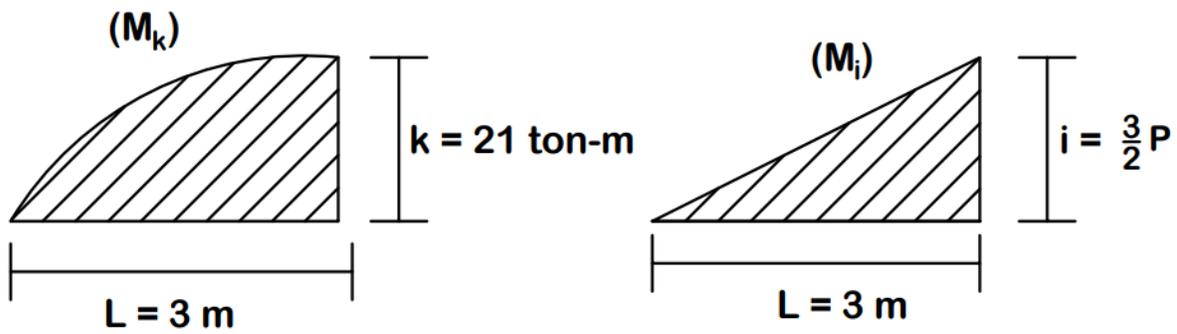
Derivación [0] *Sustitución* [0]

La energía interna de deformación quedará de la siguiente manera:

$$U_i = \int_0^3 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{EI}\right)\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{EI}\right)}_{\text{Integral 2A}} dx + \int_3^6 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{EI}\right)\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{EI}\right)}_{\text{Integral 2B}} dx$$

Integral 2A

$$\int_0^3 \underbrace{\left(\frac{M_k}{EI}\right)\left(\frac{M_i}{EI}\right)}_{\text{Integral 2A}} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (L)(i)(k) \right]$$

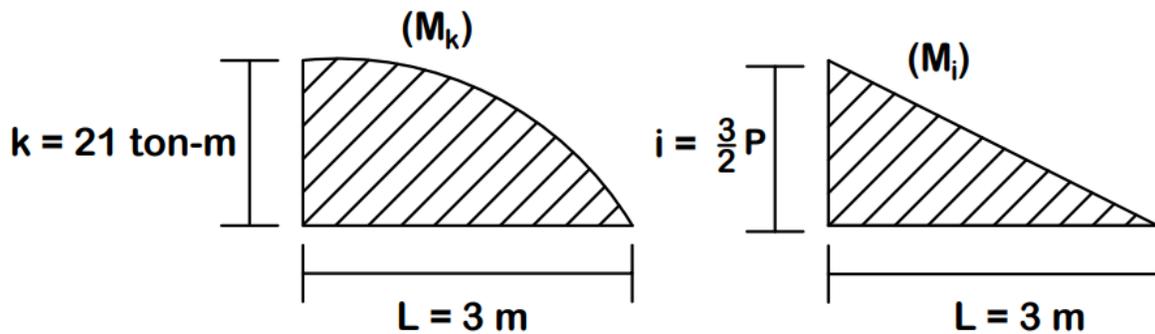


$$\frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (3) \left(\frac{3}{2} P \right) (21) \right] = \frac{315}{8EI} P$$

$$\int_0^3 \frac{\left(\frac{M_k}{EI} \right) \left(\frac{M_i}{EI} \right) dx = \frac{315}{8EI} P$$

Integral 2B

$$\int_3^6 \frac{\left(\frac{M_k}{EI} \right) \left(\frac{M_i}{EI} \right) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (L)(i)(k) \right]$$



$$\frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (3) \left(\frac{3}{2} P \right) (21) \right] = \frac{315}{8EI} P$$

$$\int_3^6 \frac{(M_k)(M_i)}{EI} dx = \frac{315}{8EI} P$$

ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN

$$U_i = \int_0^3 \frac{(M_k)(M_i)}{EI} dx + \int_3^6 \frac{(M_k)(M_i)}{EI} dx$$

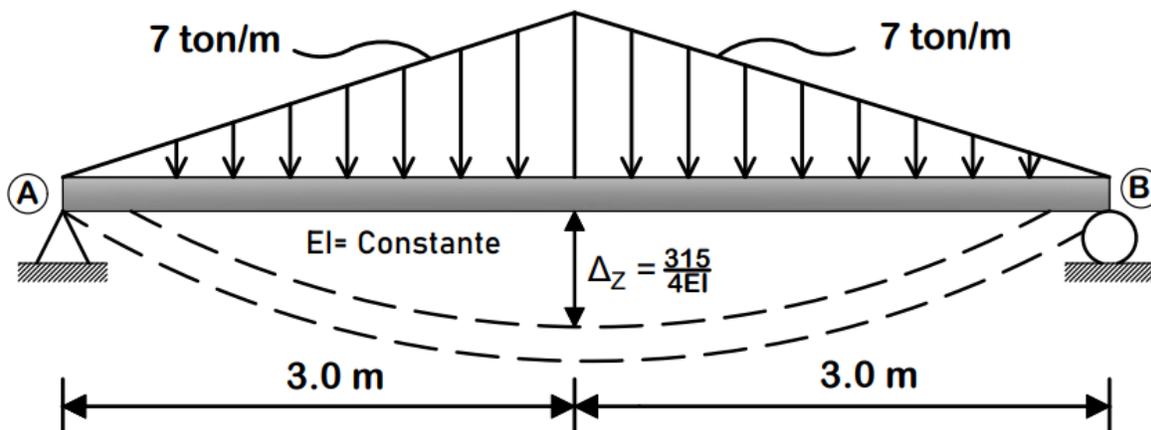
$$U_i = \frac{315}{8EI} P + \frac{315}{8EI} P$$

PASO ⑥: Cálculo del desplazamiento vertical (Δ_z) utilizando la ecuación (2.13).

$$\Delta = \frac{\partial U_i}{\partial P} \dots \dots \dots (2.2)$$

$$\Delta_z = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{315}{8EI} P + \frac{315}{8EI} P \right) = \frac{315}{8EI} + \frac{315}{8EI}$$

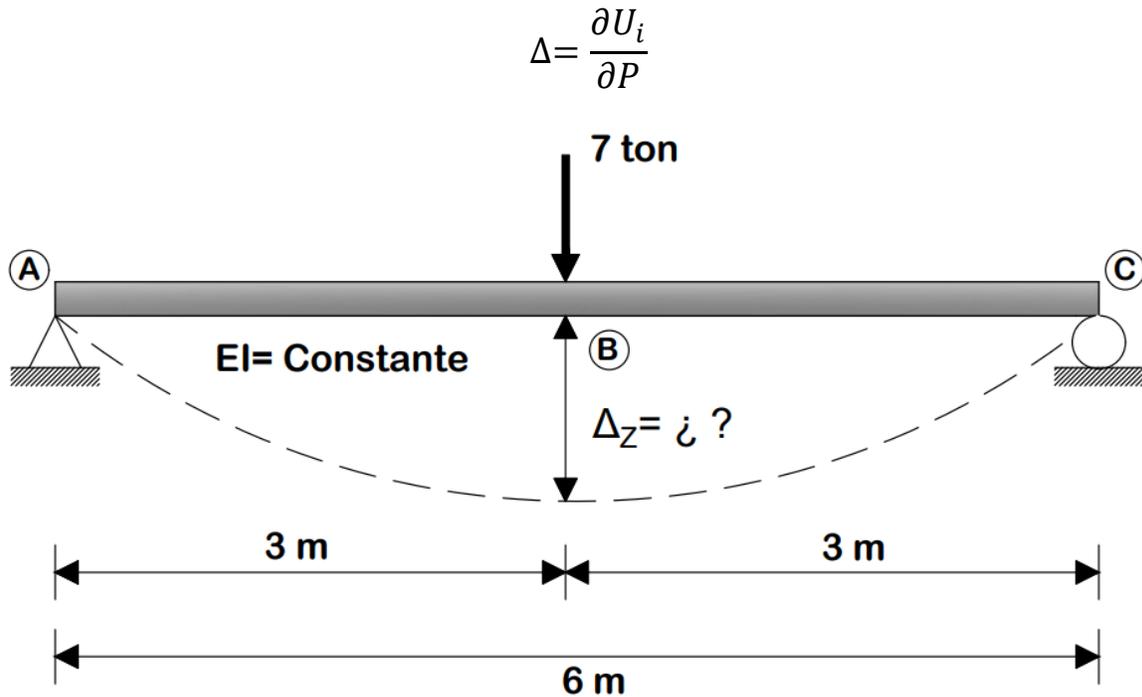
Resultado: Desplazamiento vertical a la mitad del claro de la viga

$$\Delta_z = \frac{315}{4EI} [m]$$


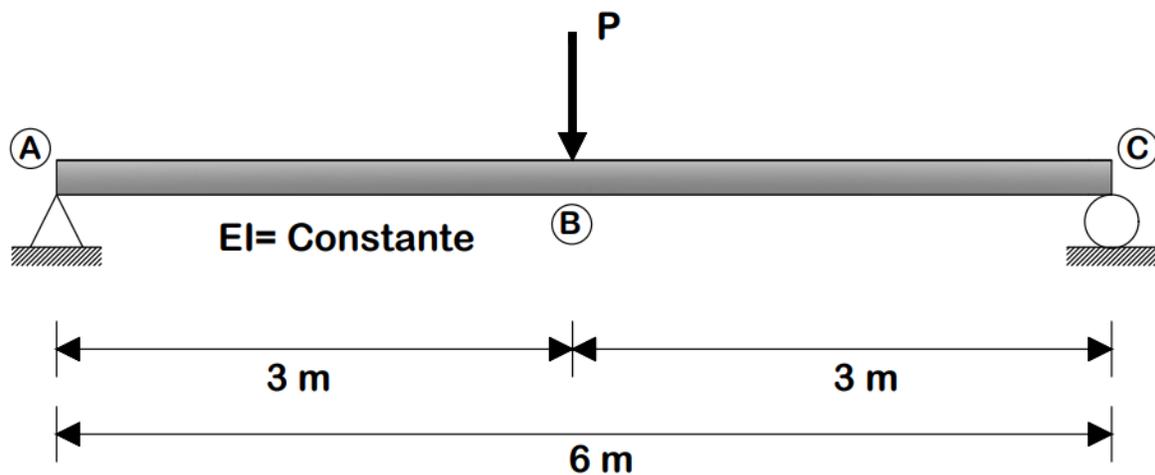
Se pasará a resolver un ejercicio donde se calcule un desplazamiento vertical en un punto donde ya se encuentre una carga puntual y se verá cómo se resuelven este tipo de ejercicios.

Ejercicio 2.12: Calcular el desplazamiento vertical en el punto B que se encuentra a la mitad de una viga simplemente apoyada que tiene una longitud de 6 m, la viga es sometida a una carga puntual de magnitud de 7 ton a la mitad de la viga, para calcular el desplazamiento vertical se requiere utilizar la ecuación (2.13).

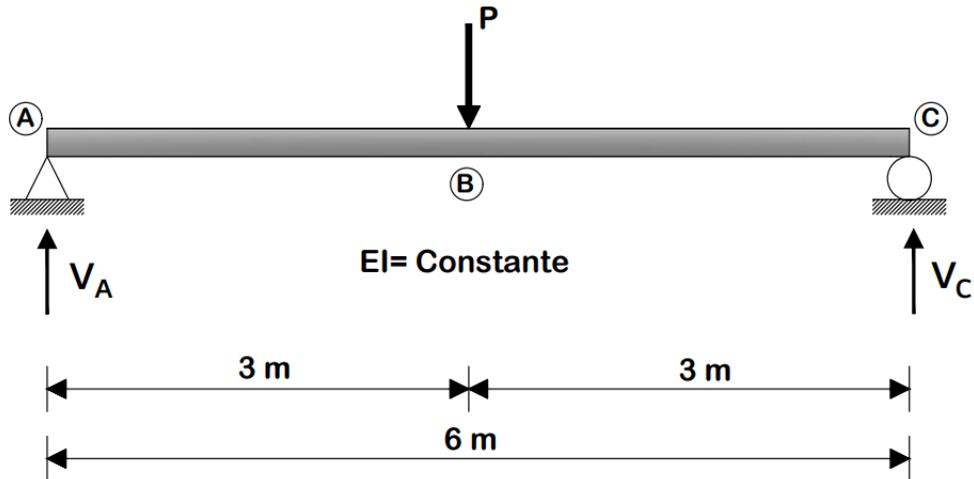
ECUACIÓN (2.13)



PASO ①: Como se mencionó al principio de esta sección, si se tiene una carga puntual en un punto donde se desea conocer un desplazamiento, no es necesario colocar una carga puntual ficticia (P) lo único que se hace es que la carga puntual de 7 toneladas se convierte en una variable "P".

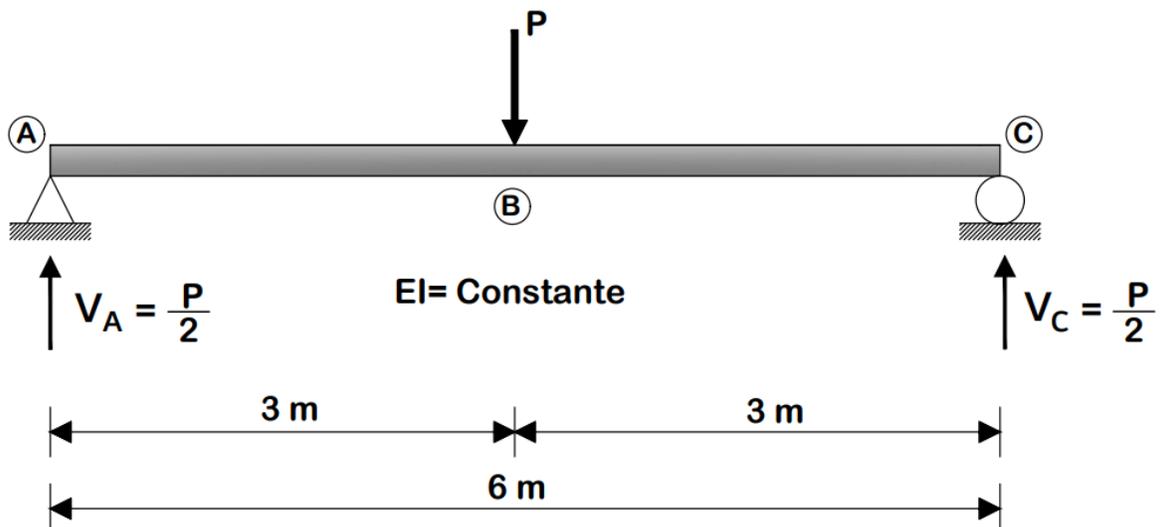


PASO ②: Calcular el diagrama del momento flexionante.

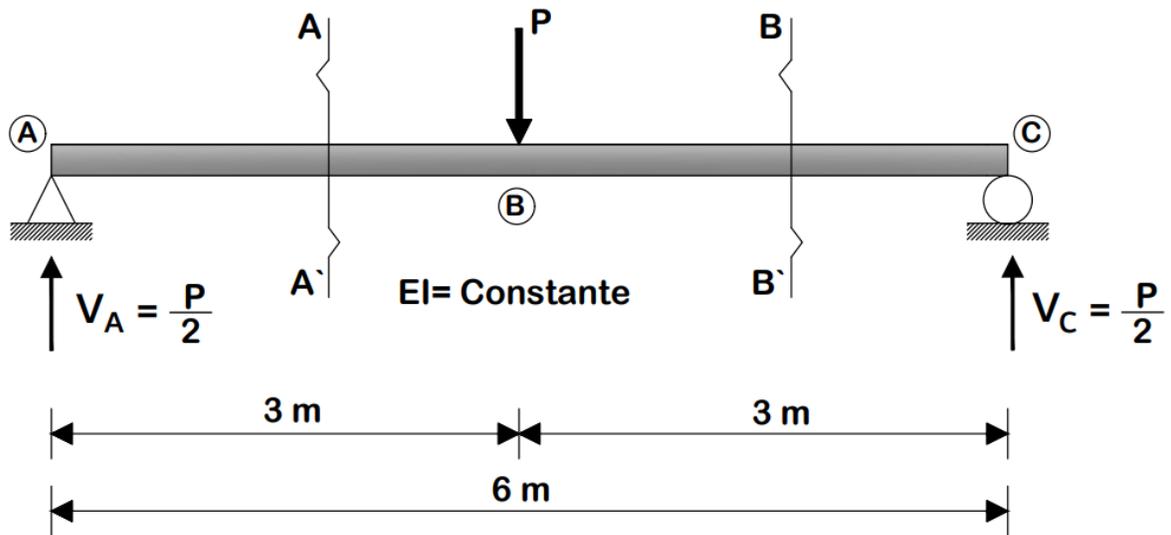


- Cálculo de las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.

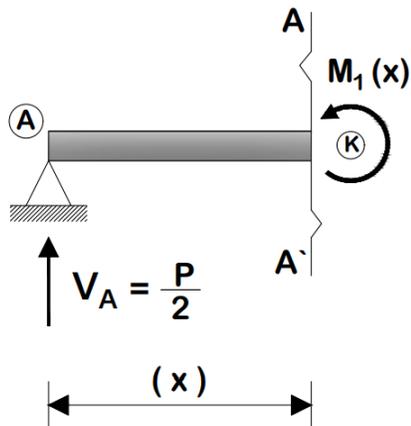
$\Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright (+)$ $-V_C(6\text{ m}) + P(3\text{ m}) = 0$ $V_C(6\text{ m}) = P(3\text{ m})$ $V_C = \frac{P(3\text{ m})}{(6\text{ m})}$ $V_C = \frac{P}{2}$	$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$ $V_A + V_C - P = 0$ $V_A + \frac{P}{2} - P = 0$ $V_A - \frac{P}{2} = 0$ $V_A = \frac{P}{2}$
---	---



- Cálculo de la ecuación del momento flexionante.



CORTE AA' [0.0 m ≤ x ≤ 3.0 m]

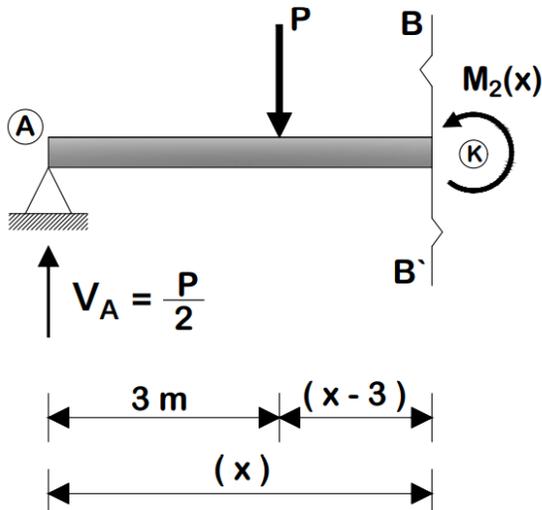


$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M_1(x) - \frac{P}{2}(x) = 0$$

$$M_1(x) = \frac{P}{2}(x)$$

CORTE BB' [3.0 m ≤ x ≤ 6.0 m]



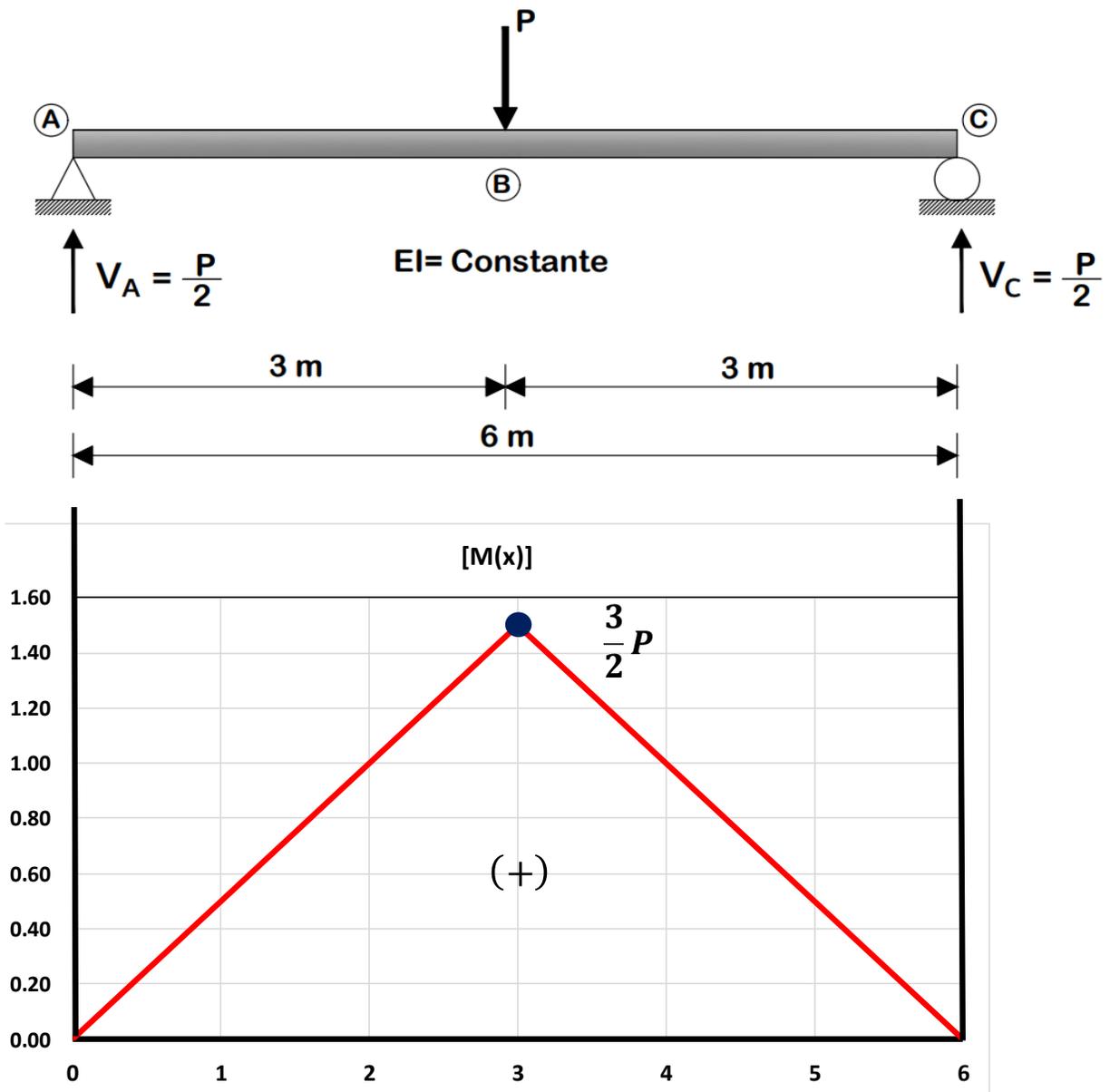
$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M_2(x) + P(x - 3) - \frac{P}{2}(x) = 0$$

$$M_2(x) + Px - 3P - \frac{P}{2}x = 0$$

$$M_2(x) = -\frac{P}{2}x + 3P$$

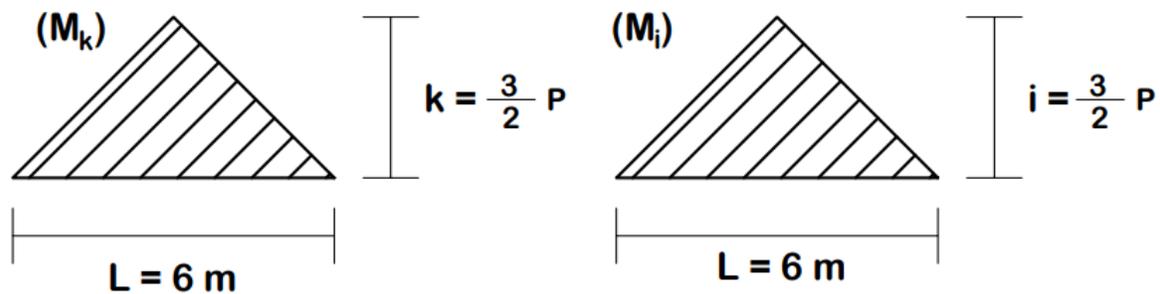
(x)	$M(x)$	
0.0	0	[0 m ≤ x ≤ 3 m] $M_1(x) = \frac{P}{2} x$
1.0	1/2 P	
2.0	P	
3.0	3/2 P	
3.0	3/2 P	[3 m ≤ x ≤ 6 m] $M_2(x) = -\frac{P}{2} x + 3P$
4.0	P	
5.0	1/2 P	
6.0	0	



PASO ③: Calcular la energía interna de deformación elástica $[U_i]$ con la tabla 2.1.

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI}$$

$$U_i = \int_0^6 \left(\frac{\text{triángulo}}{2EI} \right)^2 dx = \int_0^6 \frac{M_k}{2EI} \frac{M_i}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right]$$



$$\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} (6) \left(\frac{3}{2} P \right) \left(\frac{3}{2} P \right) \right] = \frac{9}{4EI} P^2$$

$$U_i = \int_0^6 \left(\frac{\text{triángulo}}{2EI} \right)^2 dx = \frac{9}{4EI} P^2$$

PASO ④: Cálculo del desplazamiento vertical (Δ_z) con la ecuación (2.13).

$$\Delta = \frac{\partial U_i}{\partial P}$$

$$\Delta_z = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{9}{4EI} P^2 \right) = (2) \left(\frac{9}{4EI} P \right) = \frac{9}{2EI} P$$

La carga puntual (P) no es una carga ficticia, si no una carga puntual real que se convirtió en una variable "P". Esta variable tiene un valor de 7 ton, por lo que se sustituye el valor de $P = 7$ en la ecuación para calcular el desplazamiento vertical de desea conocer.

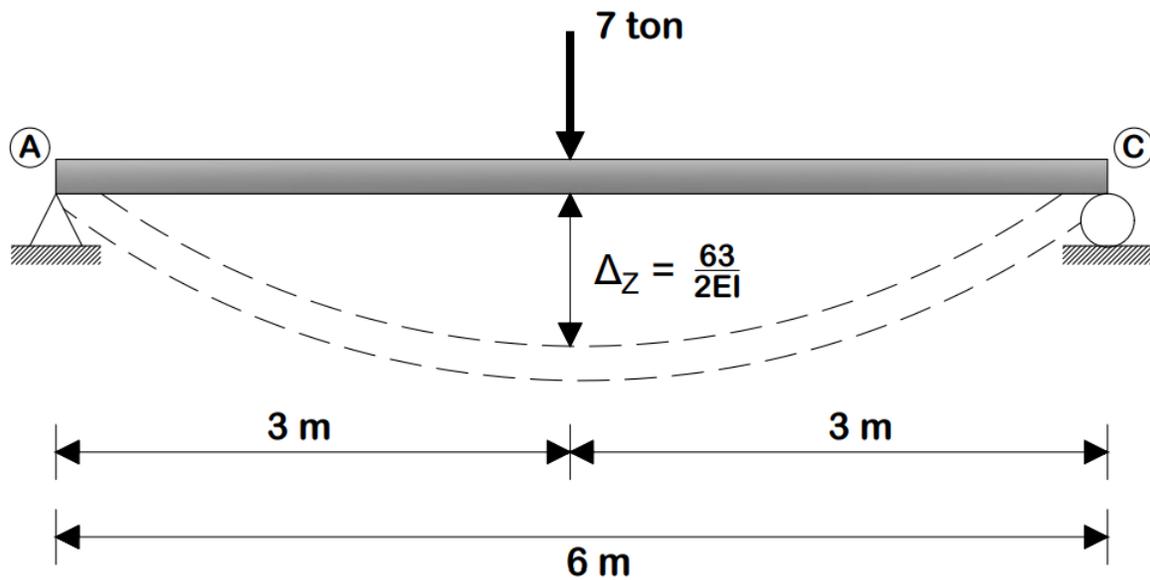
Haciendo $P = 7$:

$$\Delta_z = \frac{9}{2EI} P = \frac{9}{2EI} (7)$$

Resultado:

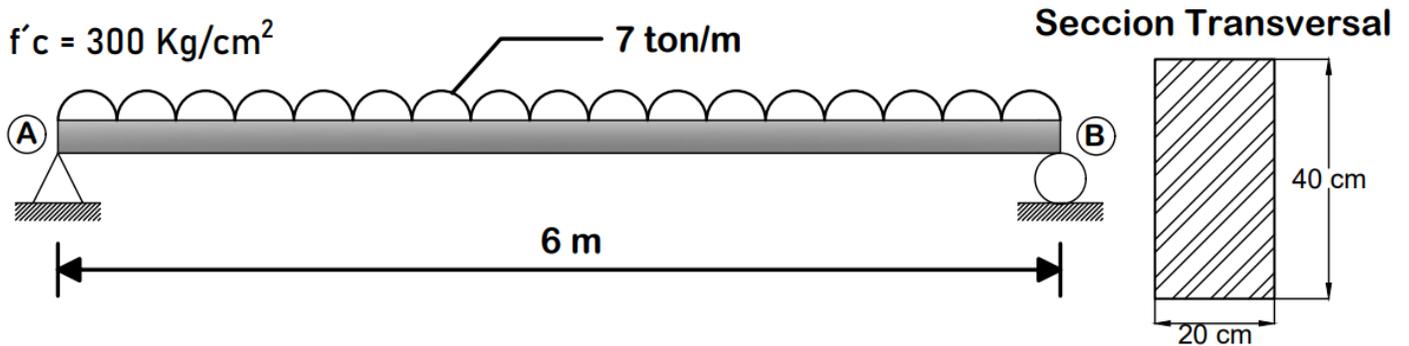
Desplazamiento vertical en el punto B

$$\Delta_z = \frac{63}{2EI} [m]$$

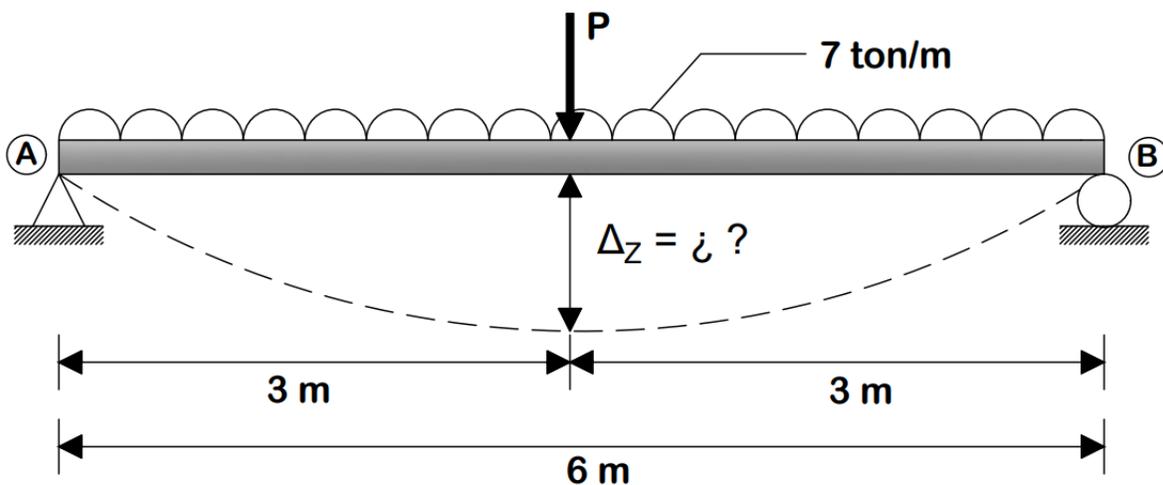


Se resolvió una variedad de ejercicios teniendo el módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I) como un valor constante en toda la longitud de la viga, por lo tanto, ahora se resolverá un ejercicio en donde se calculará el módulo de elasticidad y el momento de inercia de una viga de concreto y de esta manera se conocerá el valor de un desplazamiento que sufre una viga de concreto.

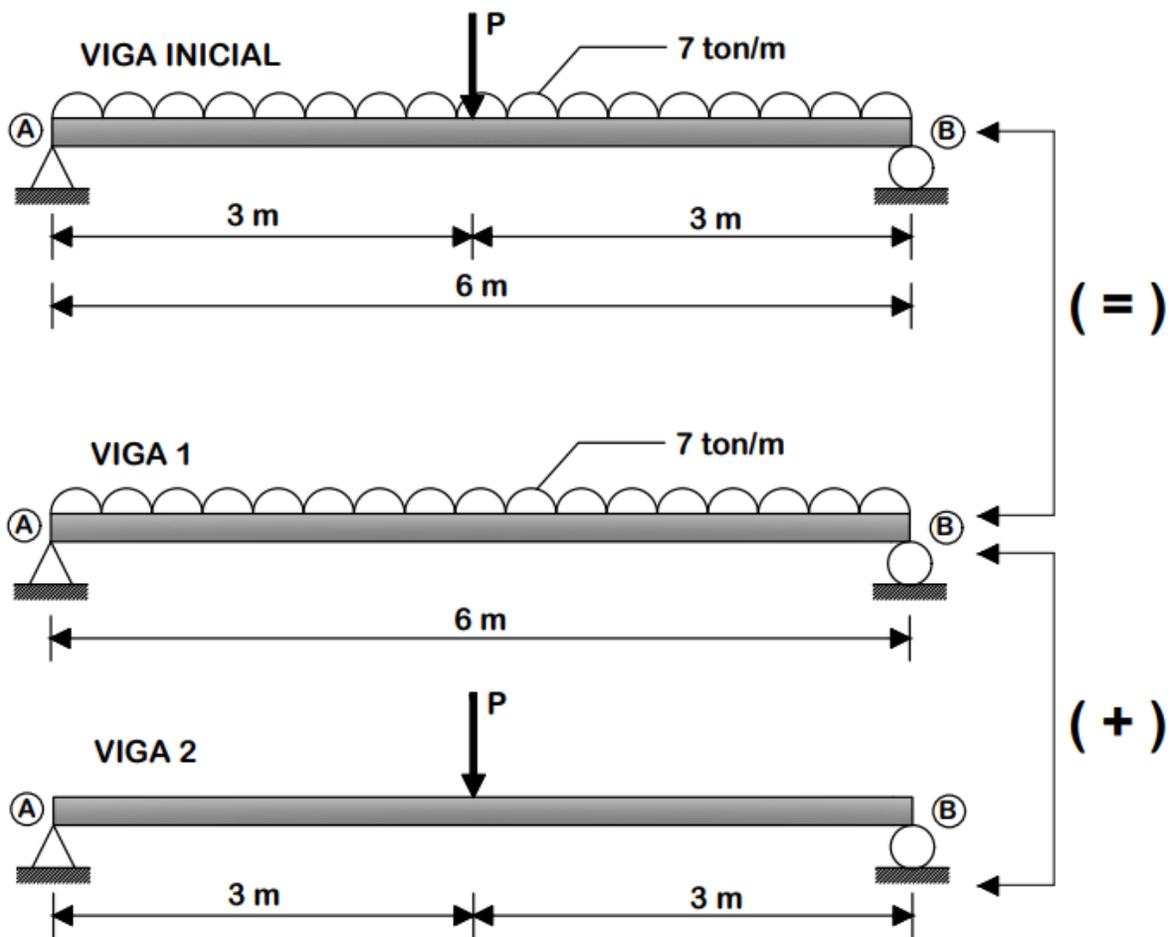
Ejercicio 2.13: Calcular el desplazamiento vertical a la mitad del claro de la viga simplemente apoyada que es sometida a una carga uniformemente repartida de 7 ton/m, la viga de 20 cm x 40 cm tiene una longitud de 6 metros y esta elaborada de un concreto de agregado calizo de Clase I que tiene un $f'c = 300 \text{ Kg/cm}^2$. Calcular el desplazamiento con la ecuación (2.13).



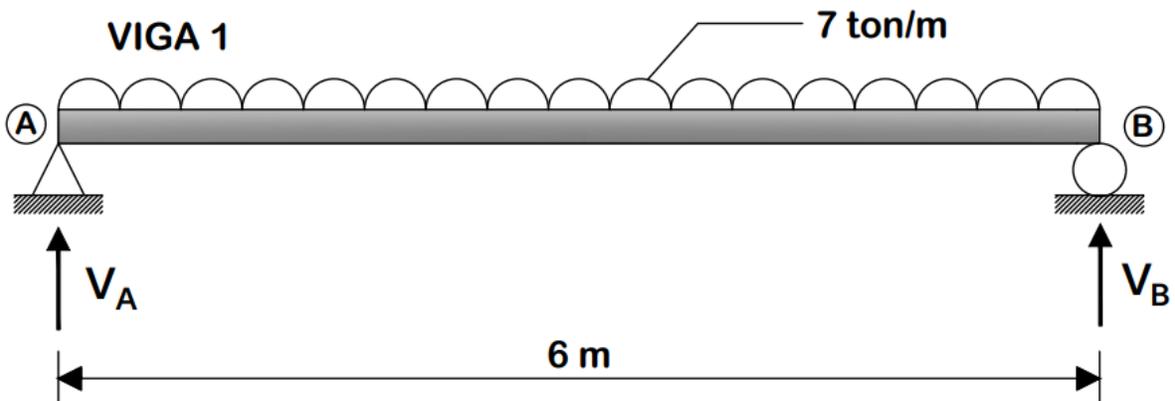
PASO ①: Colocar una carga puntual ficticia (P) en el lugar donde se desea conocer el desplazamiento.



PASO ②: Utilizar el Principio de Superposición.

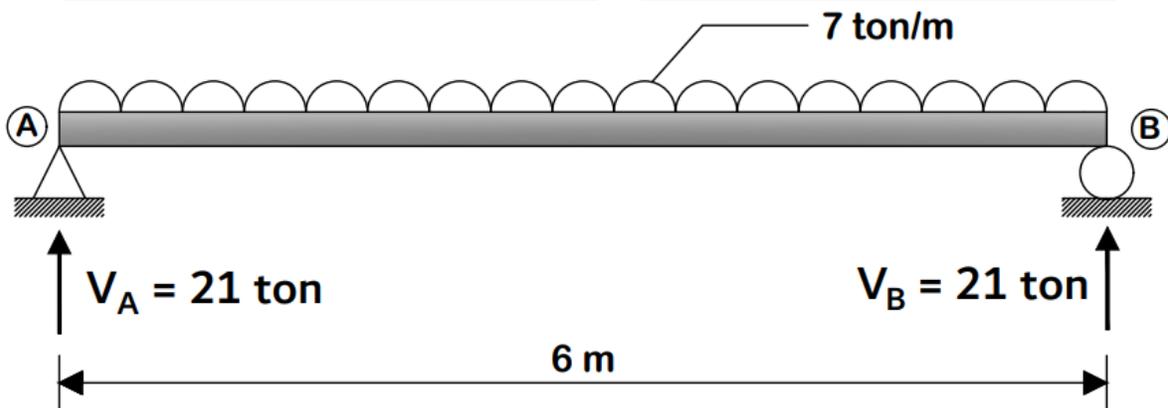


PASO ③: Calcular el diagrama de momento flexionante de la viga 1.



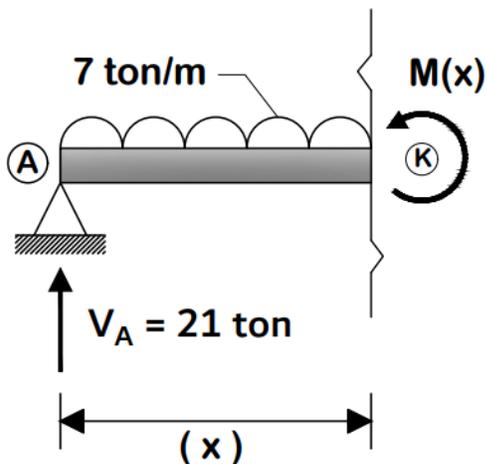
- Cálculo de las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.

$\Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright (+)$ $-V_B(6\text{ m}) + 7 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (6\text{ m}) \left(\frac{6\text{ m}}{2} \right) = 0$ $-V_B(6\text{ m}) + 126\text{ ton} \cdot \text{m} = 0$ $V_B = \frac{126\text{ ton} \cdot \text{m}}{6\text{ m}}$ $V_B = 21\text{ ton}$	$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$ $V_A + V_B - 7 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (6\text{ m}) = 0$ $V_A + 21\text{ ton} - 42\text{ ton} = 0$ $V_A - 21\text{ ton} = 0$ $V_A = 21\text{ ton}$
---	--



- Cálculo de la ecuación del momento flexionante.

CORTE #1 [0.0 m ≤ x ≤ 6.0 m]



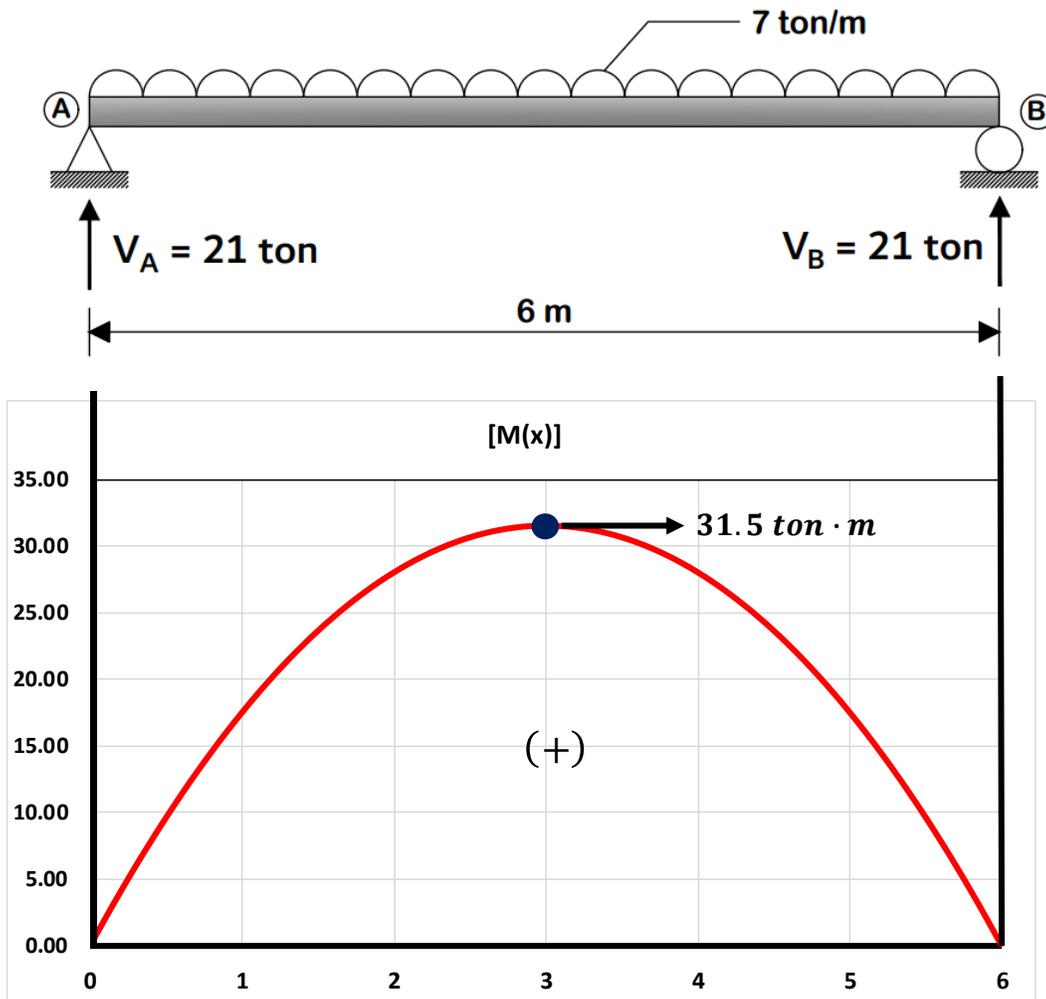
$\Sigma M_K = 0 \quad \curvearrowright (+)$ $M(x) + 7(x) \left(\frac{x}{2} \right) - 21(x) = 0$ $M(x) + \frac{7}{2}x^2 - 21x = 0$ $M(x) = -\frac{7}{2}x^2 + 21x$

- Diagrama del momento flexionante.

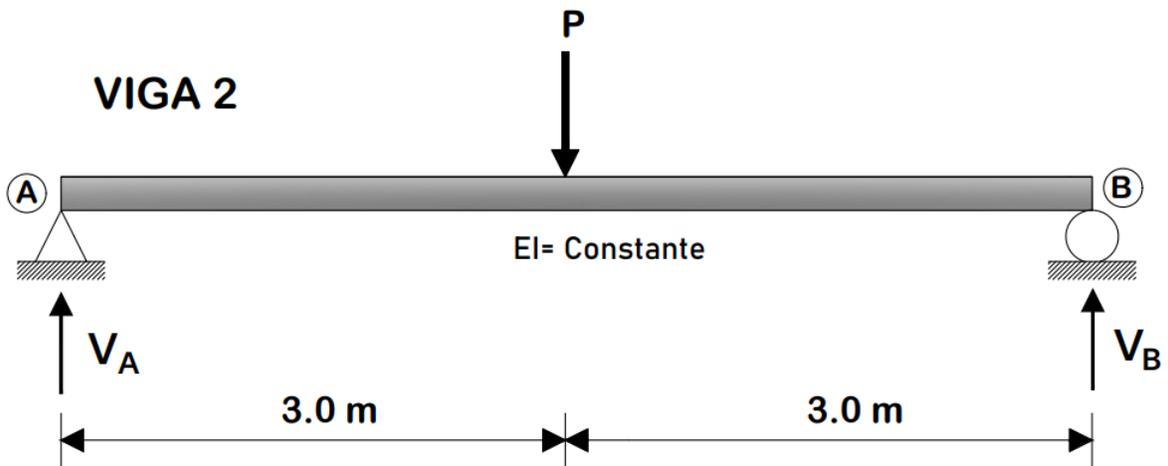
(x)	M(x)
0.0	0.00
0.5	9.63
1.0	17.50
1.5	23.63
2.0	28.00
2.5	30.63
3.0	31.50
3.5	30.63
4.0	28.00
4.5	23.63
5.0	17.50
5.5	9.63
6.0	0.00

$[0\text{ m} \leq x \leq 3\text{ m}]$

$$M(x) = -\frac{7}{2}x^2 + 21x$$



PASO ④: Calcular el diagrama del momento flexionante de la viga 2.



- Cálculo de las reacciones de los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.

$$\Sigma M_A = 0 \quad (+)$$

$$-V_B(6 \text{ m}) + P(3 \text{ m}) = 0$$

$$V_B(6 \text{ m}) = P(3 \text{ m})$$

$$V_B = \frac{P(3 \text{ m})}{(6 \text{ m})}$$

$$V_B = \frac{P}{2}$$

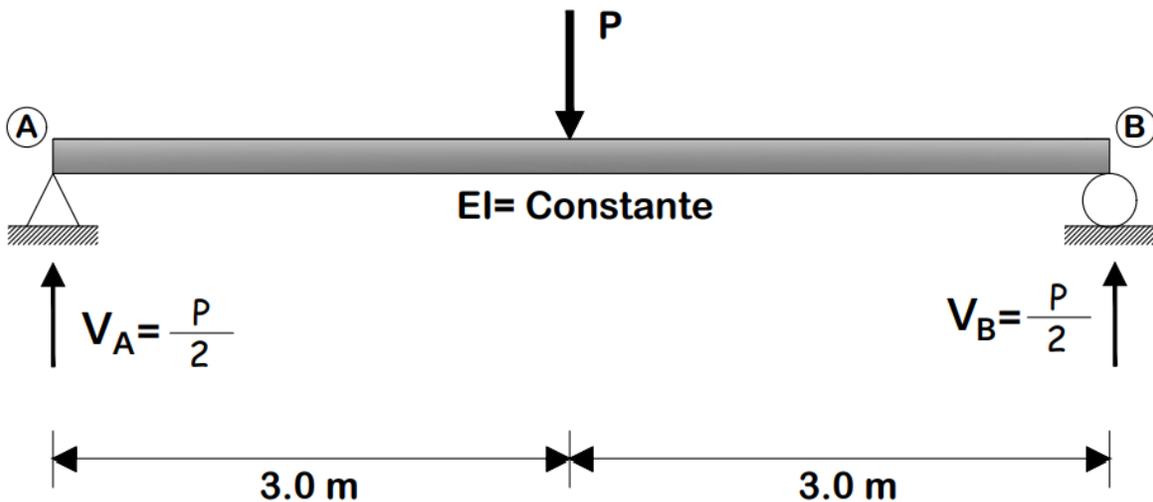
$$\Sigma F_Y = 0 \quad (+)$$

$$V_A + V_B - P = 0$$

$$V_A + \frac{P}{2} - P = 0$$

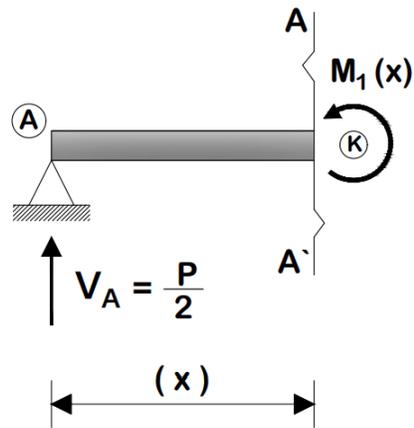
$$V_A - \frac{P}{2} = 0$$

$$V_A = \frac{P}{2}$$



- Cálculo de la ecuación del momento flexionante.

CORTE AA' [$0.0\text{ m} \leq x \leq 3.0\text{ m}$]

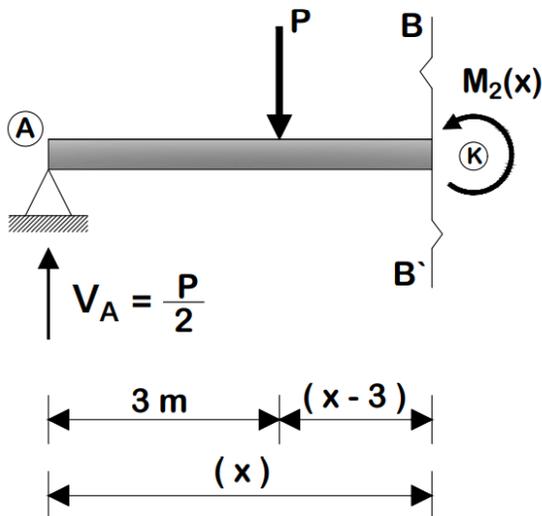


$$\Sigma M_k = 0 \quad (\oplus)$$

$$M_1(x) - \frac{P}{2}(x) = 0$$

$$M_1(x) = \frac{P}{2}(x)$$

CORTE BB' [$3.0\text{ m} \leq x \leq 6.0\text{ m}$]



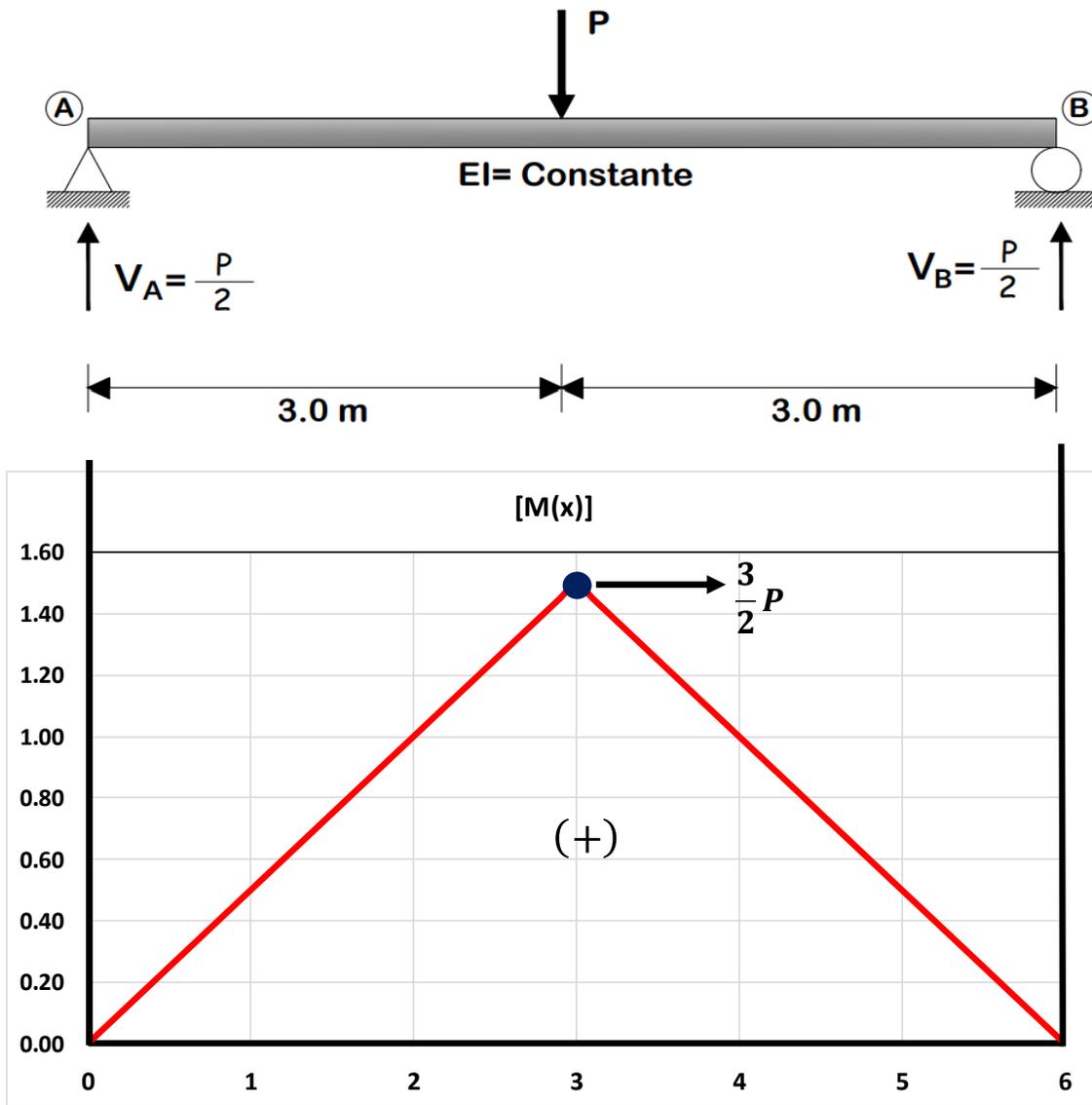
$$\Sigma M_k = 0 \quad (\oplus)$$

$$M_2(x) + P(x - 3) - \frac{P}{2}(x) = 0$$

$$M_2(x) + Px - 3P - \frac{P}{2}x = 0$$

$$M_2(x) = -\frac{P}{2}x + 3P$$

(x)	$M(x)$	
0.0	0	[$0\text{ m} \leq x \leq 3\text{ m}$] $M_1(x) = \frac{P}{2}x$
1.0	$1/2 P$	
2.0	P	
3.0	$3/2 P$	
3.0	$3/2 P$	[$3\text{ m} \leq x \leq 6\text{ m}$] $M_2(x) = -\frac{P}{2}x + 3P$
4.0	P	
5.0	$1/2 P$	
6.0	0	



PASO ⑤): Calcular la energía interna de deformación elástica $[U_i]$ con la tabla 2.1.

$$U_i = \int_0^3 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama A} + \text{Diagrama B}}{2EI} \right)^2 dx}_{\text{INTEGRAL A}} + \int_3^6 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama A} + \text{Diagrama B}}{2EI} \right)^2 dx}_{\text{INTEGRAL B}}$$

$$\begin{aligned}
 U_i = & \int_0^3 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right)^2 dx}_{\text{Integral 1A}} + \int_0^3 \underbrace{2 \left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right)}_{\text{Integral 2A}} dx + \int_0^3 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right)^2 dx}_{\text{Integral 3A}} + \\
 & \int_3^6 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right)^2 dx}_{\text{Integral 1B}} + \int_3^6 \underbrace{2 \left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right)}_{\text{Integral 2B}} dx + \int_3^6 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right)^2 dx}_{\text{Integral 3B}}
 \end{aligned}$$

Se eliminan las integrales que tengan el producto de los diagramas del momento flexionante de la carga real y de la carga ficticia, ya que el valor de estas integrales será igual a cero a causa de la derivación y de la sustitución.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^3 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right)}_{\text{Integral 1A}} dx + \int_0^3 \underbrace{2 \left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right)}_{\text{Integral 2A}} dx + \int_0^3 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right)}_{\text{Integral 3A}} dx \\
 & \int_3^6 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right)}_{\text{Integral 1B}} dx + \int_3^6 \underbrace{2 \left(\frac{\text{Diagrama 1}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right)}_{\text{Integral 2B}} dx + \int_3^6 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right) \left(\frac{\text{Diagrama 2}}{2EI} \right)}_{\text{Integral 3B}} dx
 \end{aligned}$$

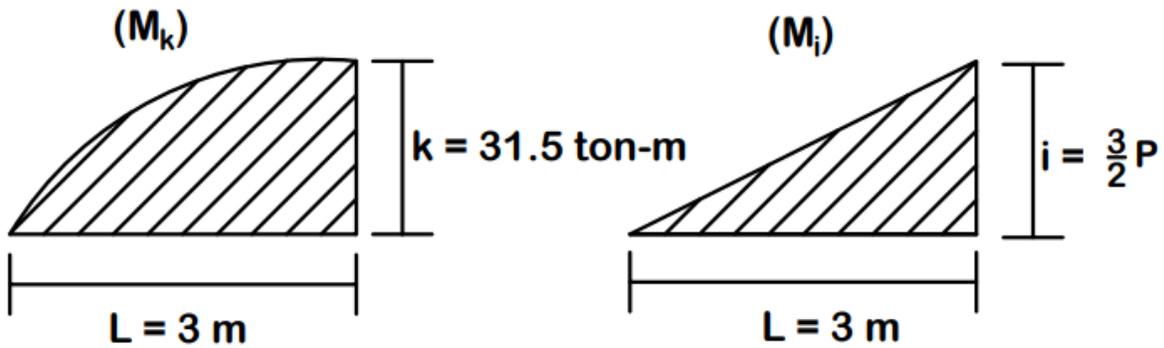
Derivación Sustitución

La energía interna de deformación quedará de la siguiente manera:

$$U_i = \int_0^3 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{EI} \right) \left(\frac{\text{Diagrama 2}}{EI} \right)}_{\text{Integral 2A}} dx + \int_3^6 \underbrace{\left(\frac{\text{Diagrama 1}}{EI} \right) \left(\frac{\text{Diagrama 2}}{EI} \right)}_{\text{Integral 2B}} dx$$

Integral 2A

$$\int_0^3 \underbrace{\left(\frac{M_k}{EI} \right) \left(\frac{M_i}{EI} \right)}_{\text{Integral 2A}} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (L)(i)(k) \right]$$

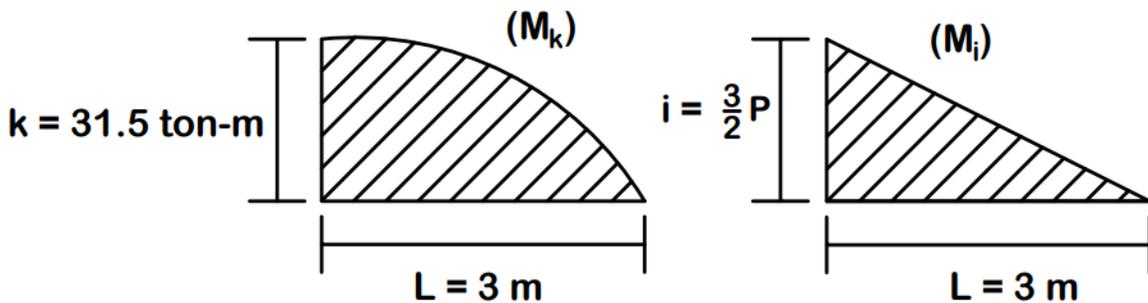


$$\frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (3) \left(\frac{3}{2} P \right) (31.5) \right] = \frac{945}{16EI} P$$

$$\int_0^3 \frac{(M_k)(M_i)}{EI} dx = \frac{945}{16EI} P$$

Integral 2B

$$\int_3^6 \frac{(M_k)(M_i)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (L)(i)(k) \right]$$



$$\frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{12} (3) \left(\frac{3}{2} P \right) (31.5) \right] = \frac{945}{16EI} P$$

$$\int_3^6 \frac{(M_k)(M_i)}{EI} dx = \frac{945}{16EI} P$$

ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN

$$U_i = \int_0^3 \frac{(M_k)(M_i)}{EI} dx + \int_3^6 \frac{(M_k)(M_i)}{EI} dx$$

$$U_i = \frac{945}{16EI} P + \frac{945}{16EI} P$$

PASO ⑥: Cálculo del desplazamiento vertical (Δ_z) utilizando la ecuación (2.13).

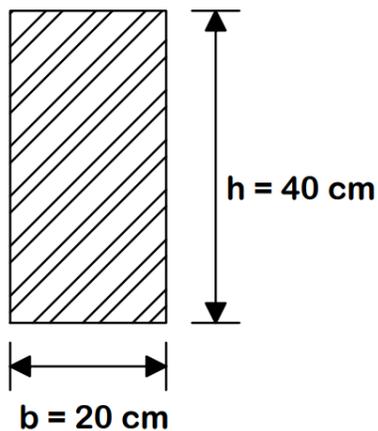
$$\Delta = \frac{\partial U_i}{\partial P}$$

$$\Delta_z = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{945}{16EI} P + \frac{945}{16EI} P \right) = \frac{945}{16EI} + \frac{945}{16EI}$$

$$\Delta_z = \frac{945}{8EI}$$

PASO ⑦: Cálculo del momento de inercia de la sección transversal de la viga.

Sección Transversal



$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$b = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$

$$h = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}$$

$$I = \frac{(0.2 \text{ m})(0.4 \text{ m})^3}{12}$$

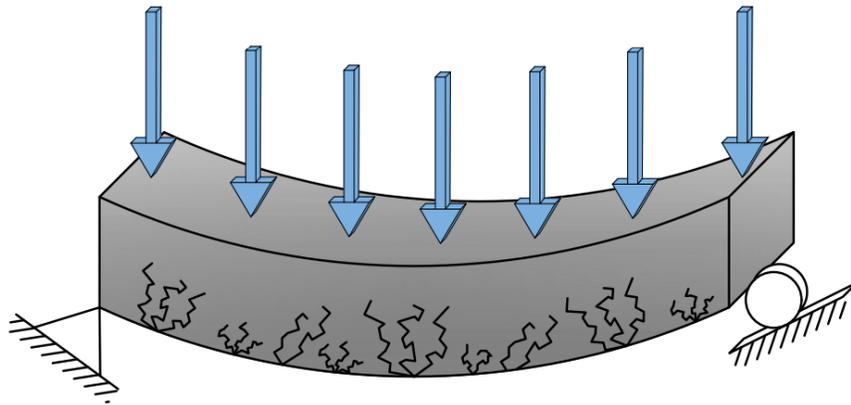
$$I = \frac{2}{1875} \text{ m}^4$$

Para realizar un análisis lineal completo, se deberán de tomar en cuenta dos factores que se encuentran especificados en las Normas Técnicas Complementarias, los cuales son:

- Factor de agrietamiento
- Deformación a largo plazo

FACTOR DE AGRIETAMIENTO

En algunas ocasiones cuando se realiza un análisis estructural en elementos de concreto, se considera al elemento como una sección no agrietada para el cálculo de la rigidez de este mismo, siendo esto inapropiado, debido a que el agrietamiento en un elemento tipo viga puede ocurrir simplemente al ser sometido a un sistema de cargas o en eventos sísmicos de menor intensidad al nivel del sismo de diseño.



El agrietamiento que se presenta en una viga de concreto ocasionado por las fuerzas aplicadas en este elemento o por las fuerzas sísmicas, reducen la rigidez de este elemento y como se sabe, el momento de inercia es una propiedad mecánica que aumenta la rigidez de un elemento, entonces, si se reduce el momento de inercia debido al agrietamiento que puede presentar un elemento, esto provocará que la rigidez igual disminuya y se sabe que la rigidez es la capacidad de un elemento estructural de resistir o de impedir las deformaciones que puedan presentarse en dicho elemento al ser sometido a un sistema de cargas, por lo que, al reducir la rigidez, las deformaciones en el elemento tipo viga aumentarán.

Las deformaciones en un elemento en donde no se toma en cuenta el factor de agrietamiento serán menores que las deformaciones en un elemento en donde si se toma en cuenta el factor de agrietamiento, ya que como se dijo anteriormente, el agrietamiento reduce la rigidez de un elemento, lo que provoca que las deformaciones aumenten.

Se sabe que el agrietamiento reduce la rigidez de un elemento, por lo que, si no se toma en cuenta este factor, se podrían tener graves consecuencias estructurales, por lo tanto, el factor de agrietamiento se considera como una proporción de la rigidez de la sección no agrietada, estos factores de reducción vienen especificados en las Normas Técnicas Complementarias para ser aplicados en el momento de inercia del elemento estructural considerado como no agrietado.

Las Normas Técnicas Complementarias establecen que cuando se apliquen métodos de análisis lineal, en el cálculo de las rigideces de los miembros estructurales se tomará en cuenta el efecto del agrietamiento, estos factores de reducción obtenidos experimentalmente vienen presentes en la siguiente tabla:

<i>Momentos de inercia para cálculo de rigideces</i>	
<i>Elemento</i>	<i>Momento de Inercia</i>
<i>Vigas y muros agrietados</i>	0.5 (I_g)
<i>Columnas agrietadas</i>	0.7(I_g)
<i>Columnas y muros no agrietados</i>	(I_g)

Donde:

(I_g) = *Momneto de inercia del elemneto estructural considerado como no agrietado*

Como se puede observar en la tabla, en vigas y muros agrietados se deberá de reducir un cincuenta por ciento el valor del momento de inercia.

Al reducir la rigidez de un elemento, provocará que el valor del desplazamiento vertical aumente, es decir, al reducir un cincuenta por cierto (50%) el momento de inercia, se reducirá a la mitad la capacidad que tiene la viga que se está resolviendo de imponerse a una deformación, por lo que aumentará el valor de la deformación que se esta calculando.

Una vez explicado que es el factor de agrietamiento y porque se toma en cuenta, se pasa a utilizar este factor en el momento de inercia ya calculado:

VALOR DEL MOMENTO DE INERCIA CONSIDERANDO EL FACTOR DE AGRIETAMIENTO

$$I = 0.5(I_g)$$

$$I_g = \frac{2}{1875} m^4$$

$$I = 0.5 \left(\frac{2}{1875} m^4 \right)$$

$$I = \frac{1}{1875} m^4$$

La deformación a largo plazo se toma en cuenta al final del ejercicio.

PASO ⑧: Cálculo del Módulo de Elasticidad de la Viga.

Se tiene un concreto de Clase I de agregado calizo que tiene un $f'c = 300 \text{ Kg/cm}^2$. Las Normas Técnicas Complementarias de la Ciudad de México establecen que para un Concreto de Clase I de agregado calizo, el módulo de elasticidad se calcula con la siguiente formula:

$$E = 14,000\sqrt{f'c}$$

$$E = 14,000\sqrt{300 \text{ kg/cm}^2} = 242487.1131 \text{ kg/cm}^2$$

Se convierte el módulo de elasticidad de (kg/cm^2) a (ton/m^2) .

$$E = 242,487.1131 \text{ kg/cm}^2 \left(\frac{1 \text{ ton}}{1000 \text{ kg}} \right) \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right)^2$$

$$E = 2,424,871.131 \text{ ton/m}^2$$

PASO ⑨: Cálculo del desplazamiento vertical a la mitad del claro de la viga.

$$\Delta_z = \frac{945}{8EI} = \frac{945}{8 \left(\frac{1}{1875} \right) (2,424,871.131)}$$

$$\Delta_z = 0.0913 \text{ m}$$

PASO ⑩: Se considera la deformación a largo plazo que viene especificada en las Normas Técnicas Complementarias.

Como se menciona en la página 156, para realizar un análisis estructural adecuado, se deben de considerar dos factores importantes, el factor de agrietamiento que ya se tomo en cuenta en el cálculo del momento de inercia y la deformación a largo plazo.

DEFORMACIÓN A LARGO PLAZO

La deformación a largo plazo, como su nombre lo indica, son deformaciones que se van presentando en un elemento estructural durante un determinado tiempo, existen dos tipos de deformaciones, la deformación instantánea o inmediata que se le conoce como deformación elástica la cual se calculó en el paso 9 del ejercicio que se esta resolviendo, y la deformación a largo plazo que se va presentando en un determinado lapso de tiempo.

La deformación a largo plazo también se le conoce como deformación por flujo plástico, esta deformación se va presentando en las vigas de concreto con el paso del tiempo y se considera por medio de una fórmula que permite conocer el valor de la deformación que se puede presentar a largo plazo, a esta fórmula se le conoce como factor de deformación a largo plazo, el cual incrementa el valor de la deformación instantánea, este incremento es la deformación adicional que ocurre a largo plazo en miembros de concreto normal clase 1.

El factor a largo plazo puede incrementar el doble o hasta el tripe el valor de la deformación instantánea, es decir, si se toma en cuenta la deformación por flujo plástico, esto provocará que la deformación de un elemento de concreto aumente considerablemente, por lo que, si no se considera esta deformación se podrían tener graves consecuencias a futuro en los elementos de concreto.

Las Normas Técnicas Complementarias establecen que la deformación total en un elemento estructural tipo viga debe ser igual a la deformación elástica multiplicada por un factor de largo plazo, este factor viene especificado en las mismas normas y se menciona a continuación:

A no ser que se utilice un análisis más preciso, la deflexión adicional que ocurra a largo plazo en miembros de concreto normal clase 1, sujetos a flexión, se obtendrá multiplicando la flecha inmediata, por el factor:

$$\frac{2}{1 + 50P'}$$

Donde:

P' = Cuantía de acero a compresión.

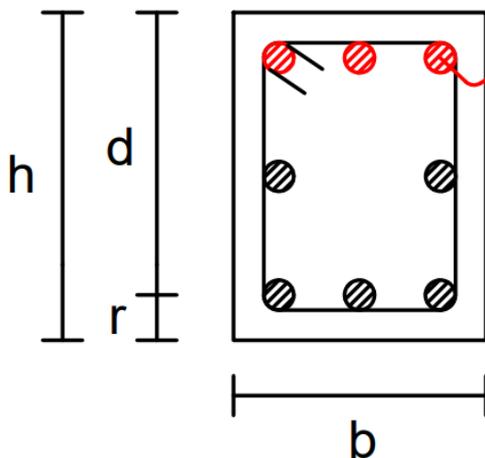
Para elementos de concreto normal clase 2, el factor a largo plazo será igual a 4.

En la pagina 10 de la presente tesis se menciona que las vigas de concreto se refuerzan con acero para lograr una resistencia en conjunto, se refuerzan con acero longitudinal (varillas) y con acero transversal (estribos). El acero longitudinal se coloca en el lecho superior para resistir los esfuerzos a compresión y también se coloca acero longitudinal en el lecho inferior para resistir los esfuerzos a tensión.

Para conocer el factor a largo plazo se debe de calcular la cuantía de acero a compresión y como ya se mencionó, el acero a compresión se localiza en el lecho superior de una viga y para calcular la cuantía del acero a compresión, se debe de utilizar la siguiente fórmula:

$$\rho = \frac{\text{Área del Acero a compresión}}{\text{Área del concreto}} = \frac{A_s}{A_c}$$

$$\rho = \frac{(\text{Número de varillas})(\text{Área de la sección transversal de la varilla})}{(b)(d)}$$



Acero a compresión

Donde:

b = Base de la sección transversal

h = Peralte de la sección transversal

r = Recubrimiento (r = 10% * h)

d = Peralte efectivo (d = h - r)

El valor de la cuantía de acero a compresión se conoce cuando se realiza un diseño estructural, pero como en este ejercicio no se realizó un diseño y por lo tanto no se conoce el armado de la viga de concreto, se recomienda utilizar las siguientes consideraciones:

- Se recomienda suponer que se tienen dos varillas del número cuatro (2 var #4) en la zona de compresión y con esto calcular la cuantía de acero a compresión y así conocer el valor de P' .
- Al no conocer el acero en compresión, se puede proponer una cuantía de acero a igual a cero ($P' = 0$).

En este ejercicio se propondrá una cuantía de acero a compresión igual a cero ($P' = 0$).

Para calcular el desplazamiento o la deformación total presente en una viga de concreto, se utilizará la siguiente fórmula:

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_Z (1 + \alpha)$$

Donde:

$$\alpha = \frac{2}{1 + 50P'}$$

Se calcula el valor de alfa, pero como se propone una cuantía de acero a compresión igual a cero ($p' = 0$), el valor de alfa será igual a:

$$\alpha = \frac{2}{1 + 50P'} = \frac{2}{1 + 50(0)} = 2$$

Por lo que, el valor de la deformación total será igual a:

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_Z (1 + \alpha)$$

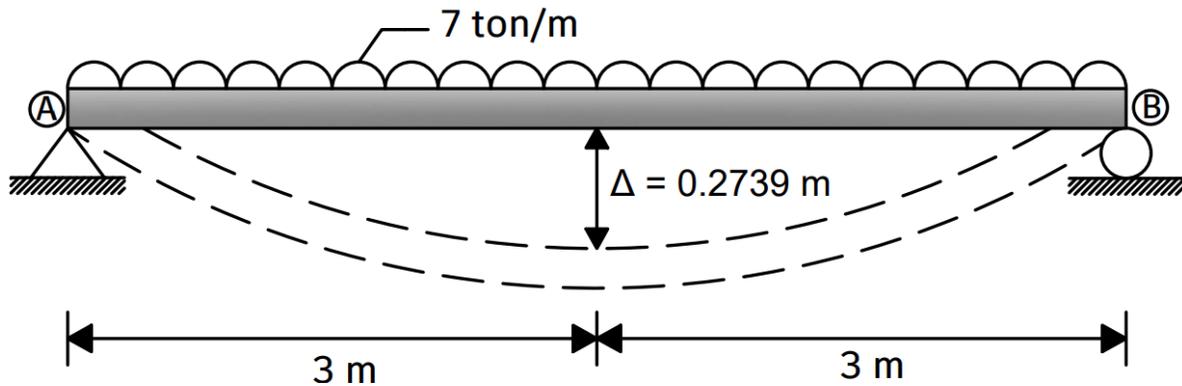
$$\Delta_Z = 0.0913 \text{ m}$$

$$\alpha = 2$$

$$\Delta_{TOTAL} = 0.0913(1 + 2)$$

Resultado: Desplazamiento o Deformación Total

$$\Delta_{TOTAL} = 0.2739 \text{ m}$$



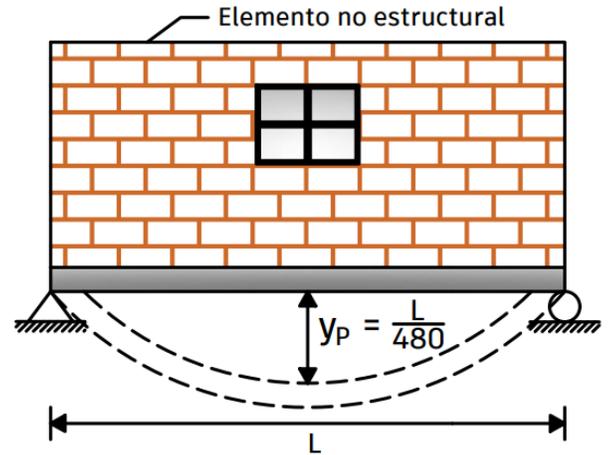
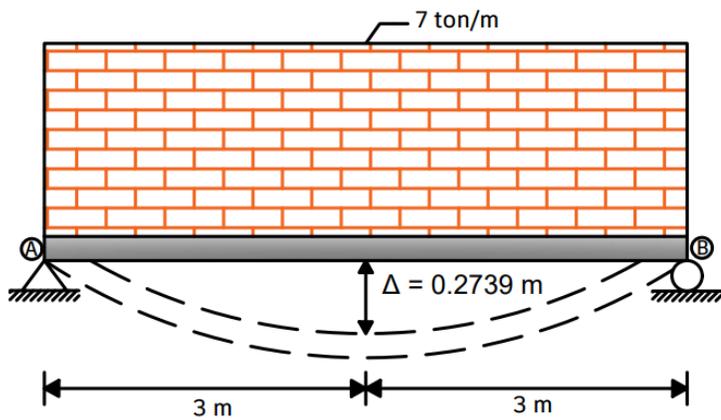
Es importante mencionar que el factor de agrietamiento y el factor de deformación a largo plazo solo aplica en vigas de concreto, en vigas de acero no se consideran estos factores.

Para que la viga que se resolvió cumpla con el estado límite de servicio que viene especificado en las normas técnicas complementarias y explicado en la página 18 de la presente tesis, el desplazamiento calculado deberá ser menor al desplazamiento permisible, los cuales vienen especificados en la página 18 y 19 de la presente tesis:

$$\Delta_{TOTAL} \leq \Delta_{PERMISIBLE}$$

Supóngase que se tienen dos diferentes casos, en un caso la viga que se resolvió tiene aplicado en toda su longitud un elemento no estructural y en el segundo caso la viga no tiene un elemento no estructural, por lo que se pasará a verificar si en estos dos casos la viga que se resolvió cumple con el estado límite de servicio.

Caso ①: La viga que se resolvió tiene aplicado un elemento no estructural en toda su longitud.



Se calcula el desplazamiento permisible:

$$\Delta_{PERMISIBLE} = \frac{L}{480} = \frac{6\text{ m}}{480} = 0.0125\text{ m}$$

Se verifica si se cumple el estado límite de servicio:

$$\Delta_{TOTAL} \leq \Delta_{PERMISIBLE}$$

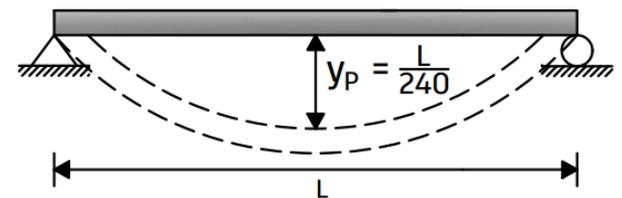
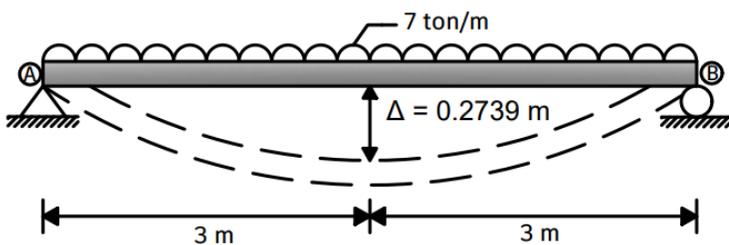
$$\Delta_{TOTAL} = 0.2739\text{ m}$$

$$\Delta_{PERMISIBLE} = 0.0125\text{ m}$$

$$0.2739\text{ m} > 0.0125\text{ m} \quad (\text{NO CUMPE})$$

Se puede observar que, en el primer caso, no se cumple con el estado límite de servicio, por lo que se pasará a verificar si en el segundo caso si se cumple el estado límite de servicio:

Caso ②: La viga que se resolvió no contiene un elemento no estructural en toda su longitud.



Se calcula el desplazamiento permisible:

$$\Delta_{PERMISIBLE} = \frac{L}{240} = \frac{6\text{ m}}{240} = 0.025\text{ m}$$

Se verifica si se cumple el estado límite de servicio:

$$\Delta_{TOTAL} \leq \Delta_{PERMISIBLE}$$

$$\Delta_{TOTAL} = 0.2739 \text{ m}$$

$$\Delta_{PERMISIBLE} = 0.025 \text{ m}$$

$$0.2739 \text{ m} > 0.025 \text{ m} \quad (\text{NO CUMPE})$$

Como se puede observar, en ninguno de los dos casos se cumple con el estado límite de servicio, por lo que se deberá de reducir la deformación total.

Para que la deformación total (Δ_{TOTAL}) sea menor que la deformación permisible ($\Delta_{PERMISIBLE}$) y así se pueda cumplir con el estado límite de servicio, se deberán de realizar o tomar en cuenta una de las siguientes recomendaciones para reducir la deformación total:

1. Aumentar el f_c para que aumente el valor del módulo de elasticidad (E), ya que el módulo de elasticidad es una propiedad mecánica que disminuye el valor de los desplazamientos o las deformaciones.
2. Cambiar las medidas de la sección transversal, de preferencia aumentar el valor del peralte (h) para que con esto aumente la inercia y así la viga pueda tener mayor rigidez y con esto disminuya la deformación.
3. Aumentar el acero en compresión para que así disminuya el valor de alfa (α) y se reduzca el valor de la deformación por flujo plástico.

$$\alpha = \frac{2}{1 + 50P'}$$

Solo en este ejercicio se calcularon las deformaciones permisibles y se explico a detalle que es el factor de agrietamiento y la deformación a largo plazo, esto con el fin de que el lector pueda tener el conocimiento de cómo realizar un análisis lineal completo y optimo, en los próximos ejercicios solo se calcularán los desplazamientos totales, quedará a criterio de cada uno el comprobar si en cada ejercicio se cumple con el estado límite de servicio.

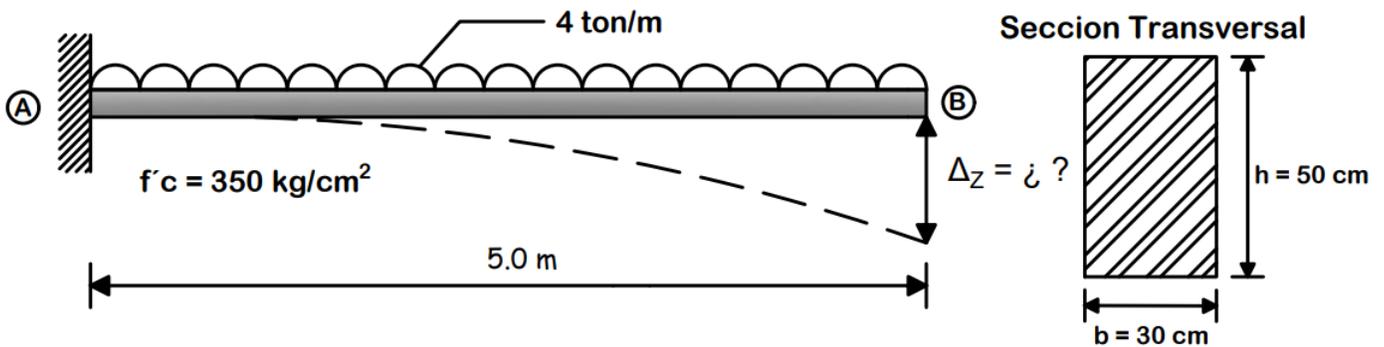
El objetivo de la presente tesis es que el lector pueda calcular desplazamientos utilizando diferentes métodos numéricos y entienda la importancia de calcular estos desplazamientos en los elementos estructurales.

Es impórtate recalcar que el factor de agrietamiento y la deformación a largo plazo solo se consideran en vigas de concreto, en vigas de acero no se aplican estos factores.

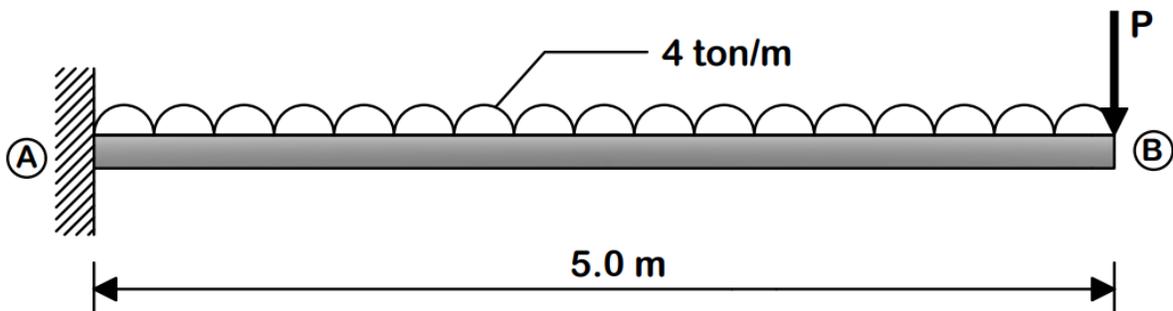
Es de gran importancia que el lector pueda entender la importancia de considerar estos factores, ya que, si no se consideran, se podrían tener graves consecuencias, de igual manera, es importante que se tenga el conocimiento de cómo se puede disminuir el valor de los desplazamientos totales presentes en una viga que es sometido a un sistema de cargas, para que con este conocimiento el ingeniero estructurista pueda cumplir el estado limite de servicio que demanda las normas técnicas complementarias.

Una vez explicado que es el factor de agrietamiento, el factor de deformación a largo plazo, como se calculan las deformaciones permisibles y para que se calculan estas deformaciones, se pasará a resolver otro ejercicio utilizando el método de Castigliano.

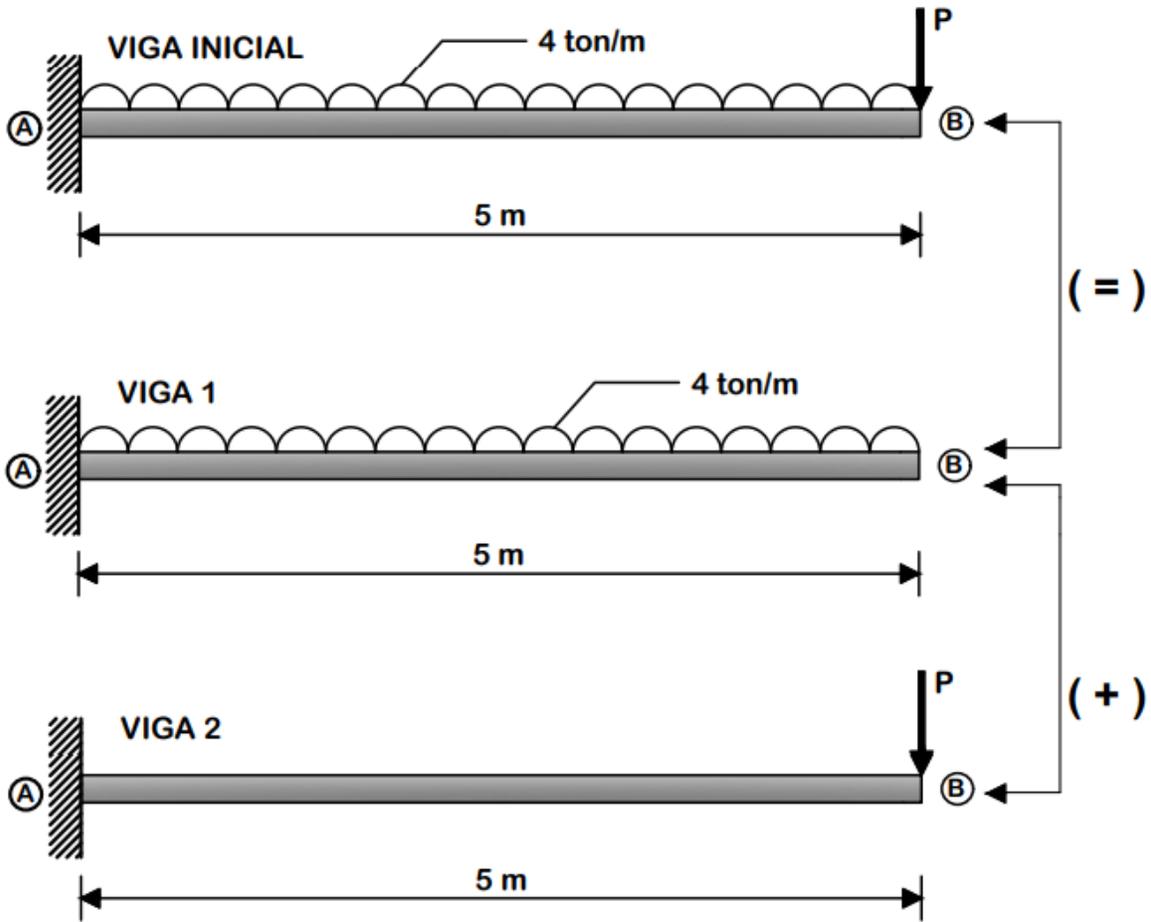
Ejercicio 2.14: Calcular el desplazamiento vertical utilizando la ecuación (2.13) a un extremo de una viga en voladizo. La viga de (30 cm x 50 cm) está elaborada de un concreto de Clase I de agregado calizo que tiene un $f'c = 350 \text{ Kg/cm}^2$.



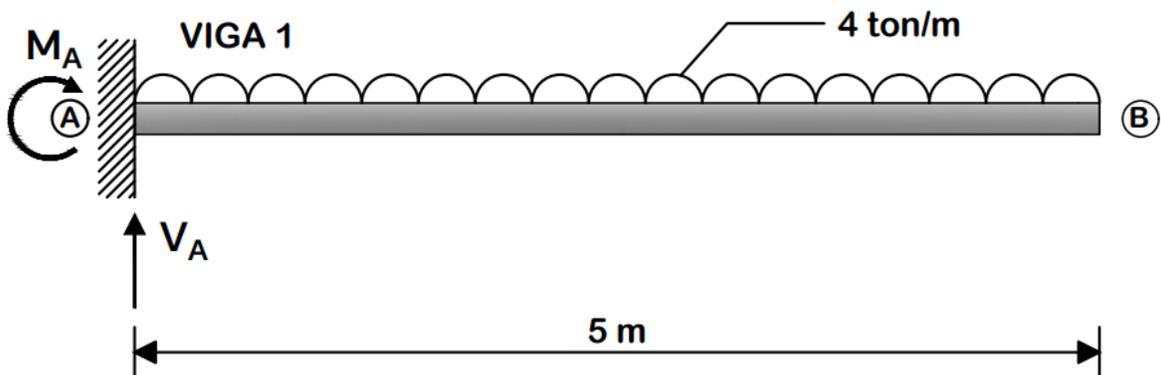
PASO ①: Colocar una carga puntual ficticia (P) en el punto donde se desea conocer el valor del desplazamiento vertical.



PASO ②: Principio de Superposición.



PASO ③: Calcular el diagrama del momento flexionante de la viga 1.



- Cálculo de las reacciones del apoyo empotrado con las ecuaciones del equilibrio.

$$\Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$M_A + 4 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (5 \text{ m}) \left(\frac{5 \text{ m}}{2} \right) = 0$$

$$M_A + 50 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

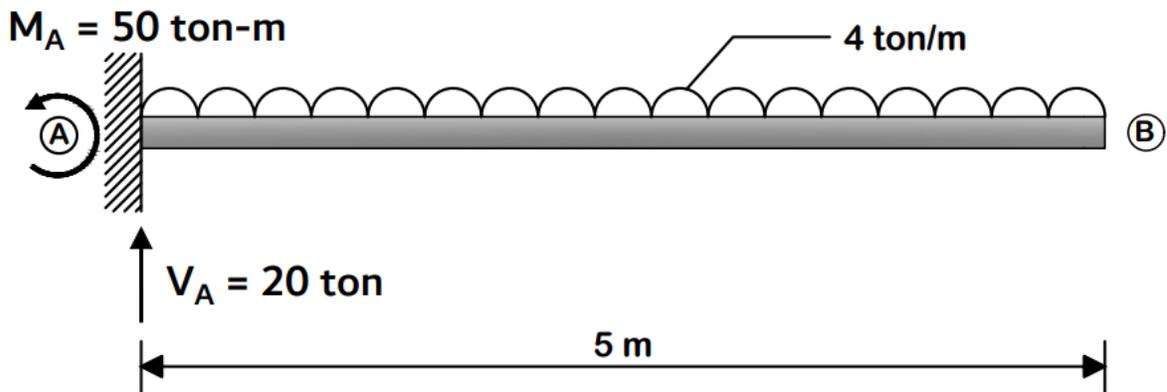
$$M_A = -50 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad \curvearrowleft$$

$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

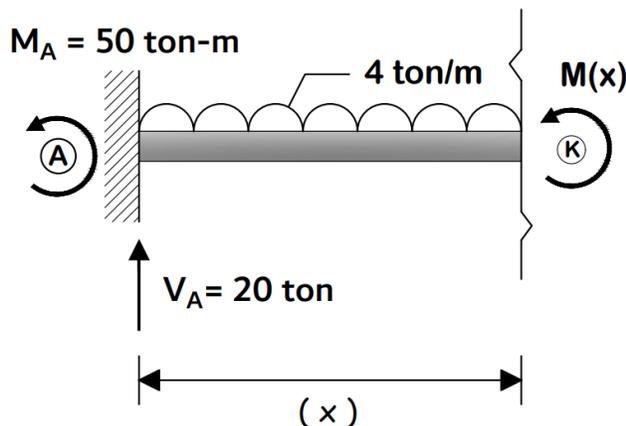
$$V_A - 4 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (5 \text{ m}) = 0$$

$$V_A - 20 \text{ ton} = 0$$

$$V_A = 20 \text{ ton}$$



- Cálculo de la ecuación del momento flexionante.
CORTE #1 $[0.0 \text{ m} \leq x \leq 5.0 \text{ m}]$



$$\Sigma M_k = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$M(x) + 50 - 20(x) + 4(x) \left(\frac{x}{2} \right) = 0$$

$$M(x) + 50 - 20x + 2x^2 = 0$$

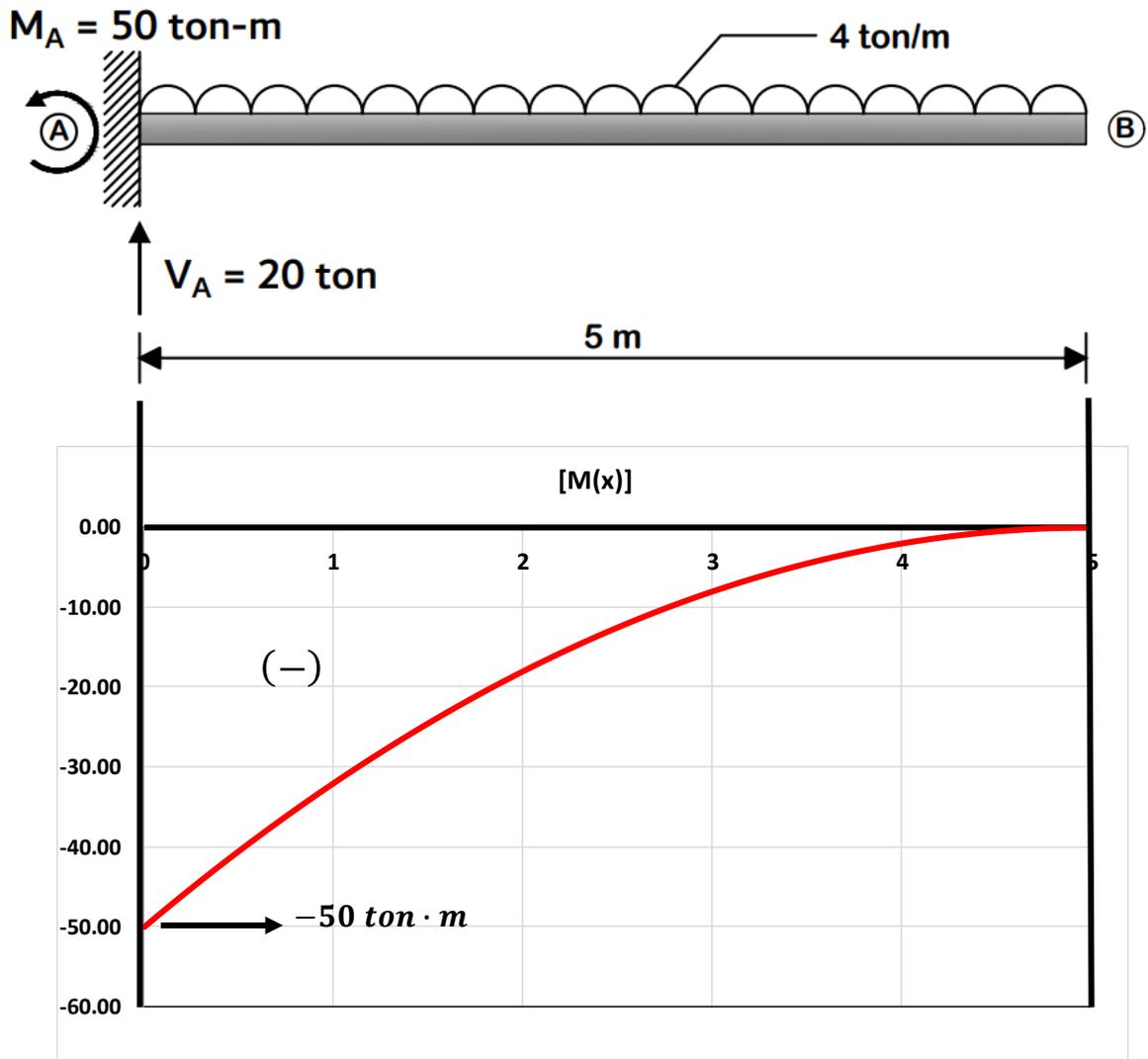
$$M(x) = -2x^2 + 20x - 50$$

- Diagrama del momento flexionante.

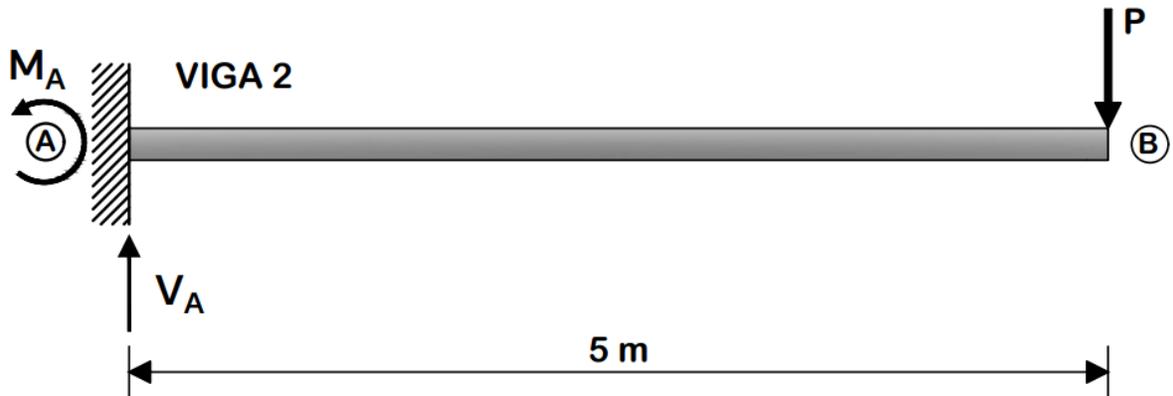
(x)	$M(x)$
0.0	-50.00
0.5	-40.50
1.0	-32.00
1.5	-24.50
2.0	-18.00
2.5	-12.50
3.0	-8.00
3.5	-4.50
4.0	-2.00
4.5	-0.50
5.0	0.00

$[0\text{ m} \leq x \leq 5\text{ m}]$

$M(x) = -2x^2 + 20x - 50$

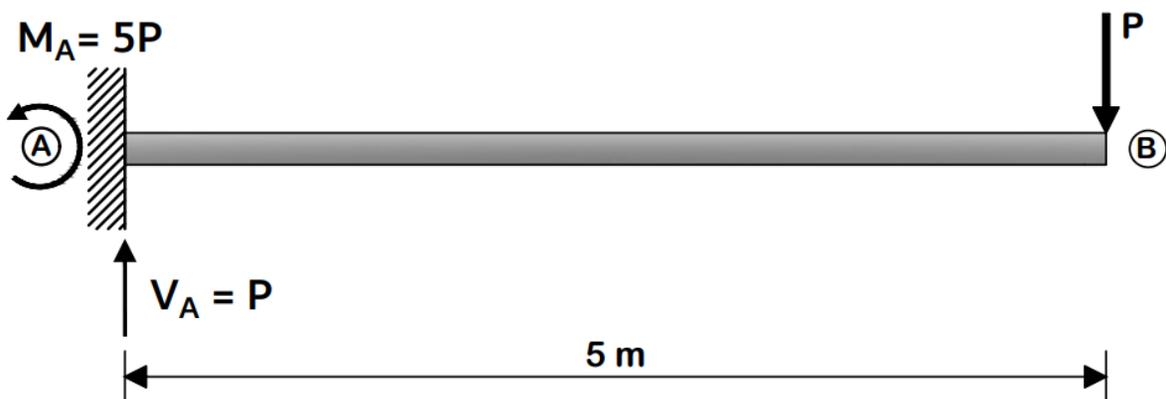


PASO ④: Calcular el diagrama del momento flexionante de la viga 2.



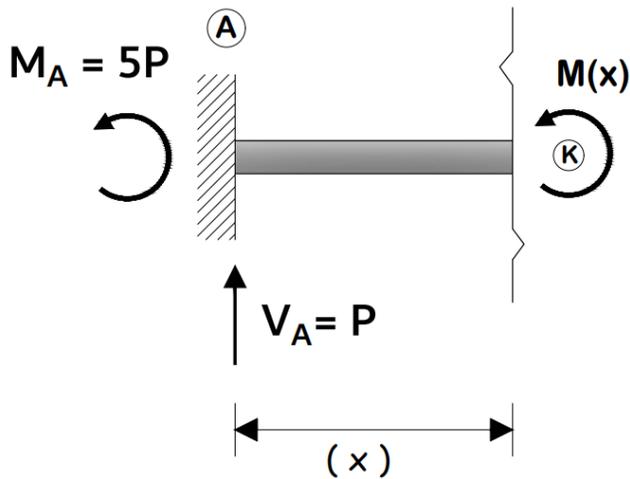
- Cálculo de las reacciones del apoyo empotrado con las ecuaciones del equilibrio.

$\Sigma M_A = 0 \quad \text{⌚ (+)}$ $-M_A + 5P = 0$ $M_A = 5P$	$\Sigma F_Y = 0 \quad \text{↑ (+)}$ $V_A - P = 0$ $V_A = P$
--	---



- Cálculo de la ecuación del momento flexionante.

CORTE #1 $[0.0\text{ m} \leq x \leq 5.0\text{ m}]$

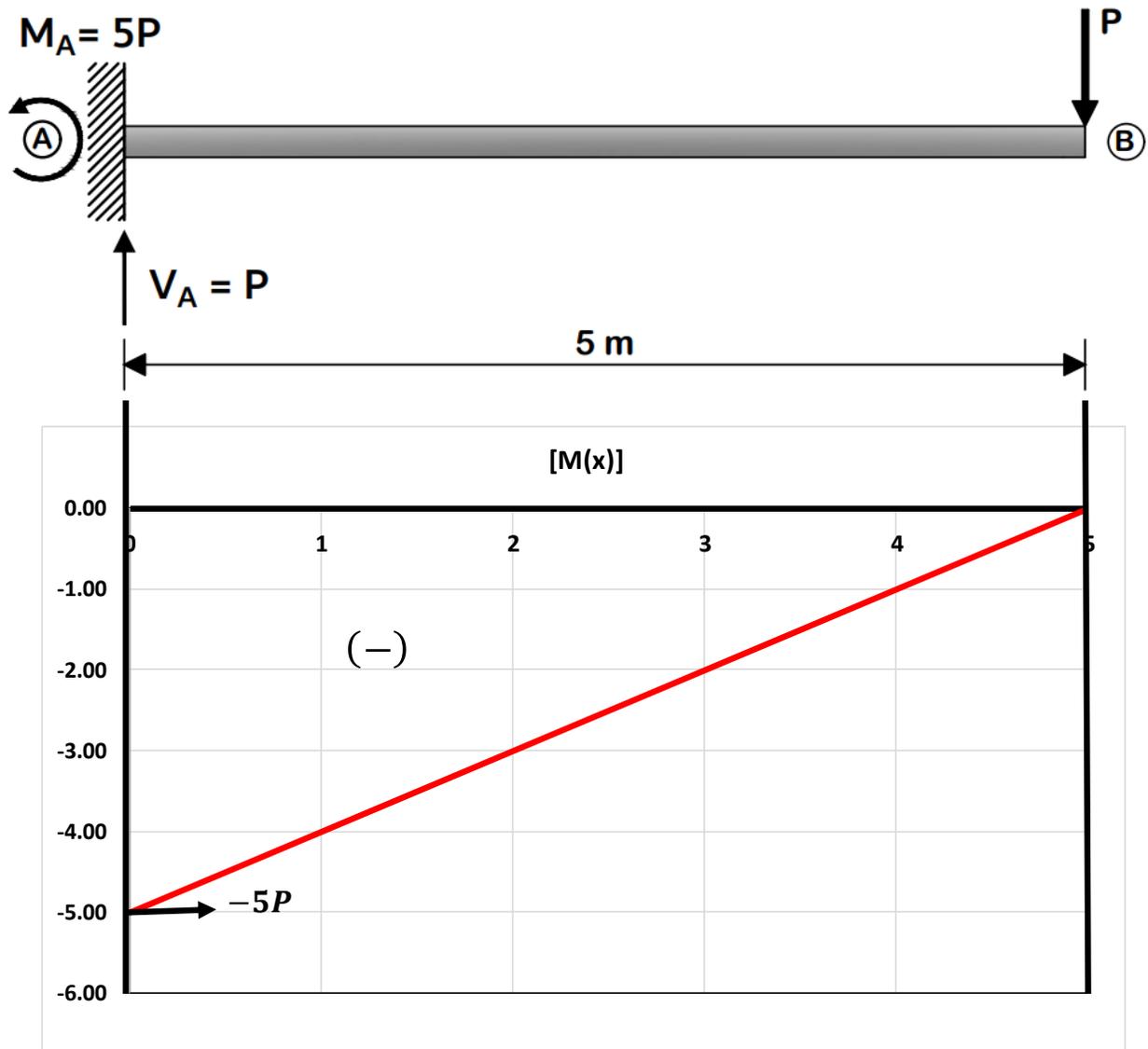


$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M(x) + 5P - P(x) = 0$$

$$M(x) = Px - 5P$$

(x)	$M(x)$	$[0\text{ m} \leq x \leq 5\text{ m}]$ $M(x) = Px - 5P$
0	$-5P$	
0.50	$-4.5P$	
1.00	$-4P$	
1.5	$-3.5P$	
2.00	$-3P$	
2.50	$-2.5P$	
3	$-2P$	
3.50	$-1.5P$	
4.00	$-1P$	
4.5	$-0.5P$	
5.00	0	



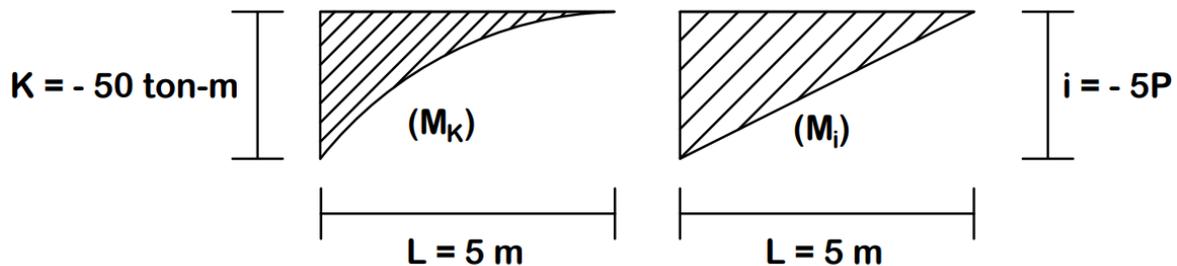
PASO ⑤: Calcular la energía interna de deformación elástica $[U_i]$ con la tabla 2.1.

$$U_i = \int_0^5 \frac{\left(\begin{array}{c} \text{[Diagram: curved shaded area]} \\ + \\ \text{[Diagram: triangular shaded area]} \end{array} \right)^2}{2EI} dx$$

$$\int_0^5 \frac{\left(\begin{array}{c} \text{[Diagram: curved shaded area]} \\ \text{[Diagram: curved shaded area]} \end{array} \right)}{2EI} dx + \int_0^5 \frac{2 \left(\begin{array}{c} \text{[Diagram: curved shaded area]} \\ \text{[Diagram: curved shaded area]} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{[Diagram: triangular shaded area]} \\ \text{[Diagram: triangular shaded area]} \end{array} \right)}{2EI} dx + \int_0^5 \frac{\left(\begin{array}{c} \text{[Diagram: triangular shaded area]} \\ \text{[Diagram: triangular shaded area]} \end{array} \right)}{2EI} dx$$

Derivación Sustitución

$$U_i = \int_0^L \frac{M_k M_i}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} (L)(i)(k) \right]$$



$$\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} (L)(i)(k) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} (5)(-5P)(-50) \right] = \frac{625}{2EI} P$$

$$U_i = \frac{625}{2EI} P$$

PASO ⑥: Cálculo del desplazamiento vertical (Δ_z) con la ecuación (2.13).

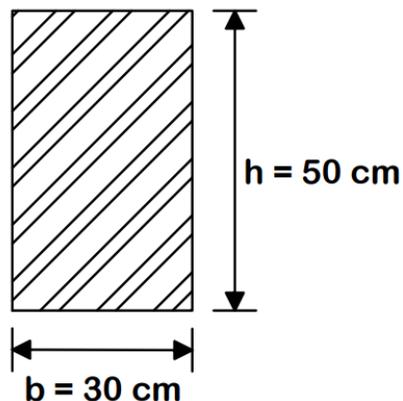
$$\Delta = \frac{\partial U_i}{\partial P}$$

$$\Delta_z = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{625}{2EI} P \right) = \frac{625}{2EI}$$

$$\Delta_z = \frac{625}{2EI}$$

PASO ⑦: Cálculo del momento de inercia de la sección transversal de la viga.

Seccion Transversal



$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$b = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$$

$$h = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$$

$$I = \frac{(0.3 \text{ m})(0.5 \text{ m})^3}{12}$$

$$I = \frac{1}{320} \text{ m}^4$$

VALOR DEL MOMENTO DE INERCIA CONSIDERANDO EL FACTOR DE AGRIETAMIENTO

<i>Momentos de inercia para cálculo de rigideces</i>	
<i>Elemento</i>	<i>Momento de Inercia</i>
<i>Vigas y muros agrietados</i>	0.5 (I_g)
<i>Columnas agrietadas</i>	0.7(I_g)
<i>Columnas y muros no agrietados</i>	(I_g)

$$I = 0.5(I_g)$$

$$I_g = \frac{1}{320} m^4$$

$$I = 0.5 \left(\frac{1}{320} m^4 \right)$$

$I = \frac{1}{640} m^4$

PASO ⑧: Cálculo del módulo de elasticidad de la Viga.

Se tiene un concreto de Clase I de agregado calizo que tiene un $f'c = 350 \text{ Kg/cm}^2$. Las Normas Técnicas Complementarias de la Ciudad de México establecen que para un Concreto de Clase I de agregado calizo el módulo de elasticidad se calcula con la siguiente formula:

$$E = 14,000\sqrt{f'c}$$

$$E = 14,000\sqrt{350 \text{ kg/cm}^2} = 261,916.0171 \text{ kg/cm}^2$$

Convertir el módulo de elasticidad de (kg/cm^2) a (ton/m^2).

$$E = 261,916.0171 \text{ kg/cm}^2 \left(\frac{1 \text{ ton}}{1000 \text{ kg}} \right) \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right)^2$$

$$E = 2,619,160.171 \text{ ton/m}^2$$

PASO ⑨: Cálculo del desplazamiento vertical a la mitad del claro de la viga.

$$\Delta_z = \frac{625}{2EI} = \frac{625}{2 \left(\frac{1}{640} \right) (2,619,160.171)}$$

$$\Delta_z = 0.0764 \text{ m}$$

PASO ⑩: Se considera la deformación a largo plazo que viene especificada en las Normas Técnicas Complementarias.

DEFORMACIÓN A LARGO PLAZO

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_z (1 + \alpha)$$

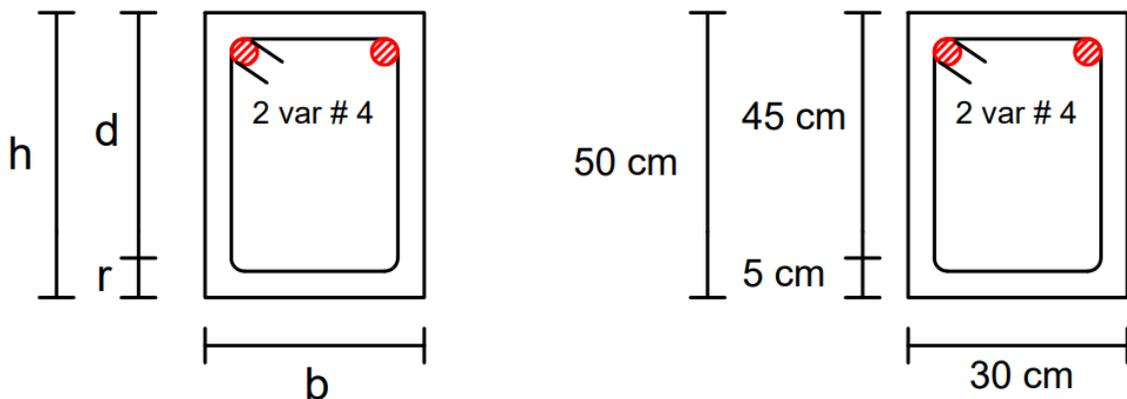
$$\alpha = \frac{2}{1 + 50P'}$$

P' = Cuantía del acero en compresión

Para este ejercicio, se supondrá que se tienen 2 varillas del número cuatro (2 var #4) en la zona de compresión, por lo que se pasa a calcular la cuantía de acero a compresión y así conocer el valor de p'.

Se calcula la cuantía de acero en compresión con la siguiente fórmula:

$$P' = \frac{(\text{Numero de varillas})(\text{Área de la seccion transversal de la varilla})}{(b)(d)}$$

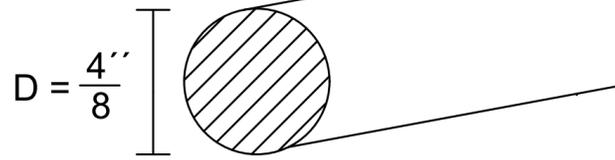


r = Recubrimiento d = Peralte efectivo

$$r = 10\% * h \quad d = h - r$$

Seccion trasnversal de la varilla del numero 4

Varilla de 4/8 de pulgada



1 pulgada = 2.54 centímetros

Se convierte el diametro de la varilla de pulgadas a centímetros:

$$D = \frac{4''}{8} (2.54 \text{ cm}) = 1.27 \text{ cm}$$

Se calcula el area de la seccion transversal de la varilla de acero y se sabe que la formula para caclular un circulo es la siguiente:

$$A = \frac{\pi(D)^2}{4} \therefore A_{\#4} = \frac{\pi(1.27 \text{ cm})^2}{4} = 1.27 \text{ cm}^2$$

Una vez teniendo el valor del peralte efectivo (d), de la base de la seccion transversal de la viga de concreto (b), el area de acero de la seccion transversal de la varilla del numero cuatro ($A_{\#4}$) y el numero de varillas, se pasa a calcular la cuantia de acero a compresion:

$$P' = \frac{(2 \text{ varillas})(1.27 \text{ cm}^2)}{(30 \text{ cm})(45 \text{ cm})} = \frac{2.54 \text{ cm}^2}{1350 \text{ cm}^2} = \frac{127}{67500}$$

Se caclula el valor de alfa (α):

$$\alpha = \frac{2}{1 + 50P'}$$
$$\alpha = \frac{2}{1 + 50\left(\frac{127}{67500}\right)} = 1.828$$

Se caclula el valor del desplzamineto vertical total:

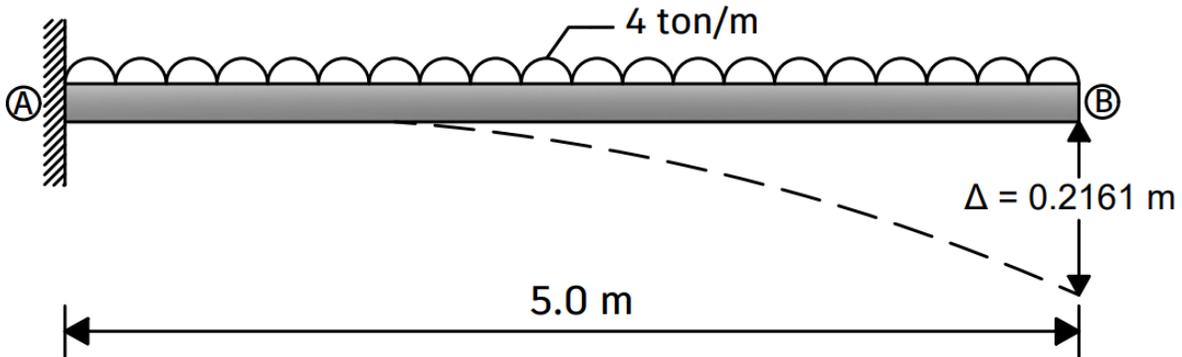
$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_Z(1 + \alpha)$$

$$\Delta_Z = 0.0764 \text{ m}$$

$$\alpha = 1.828$$

$$\Delta_{TOTAL} = 0.0764 \text{ m} (1 + 1.828)$$

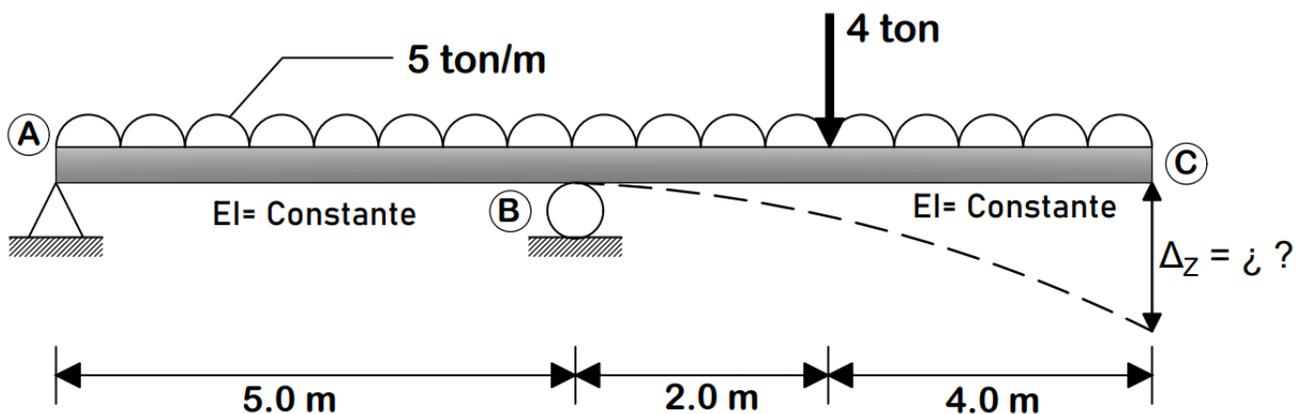
Resultado:	Desplazamiento Total
	$\Delta_{TOTAL} = 0.2161 \text{ m}$



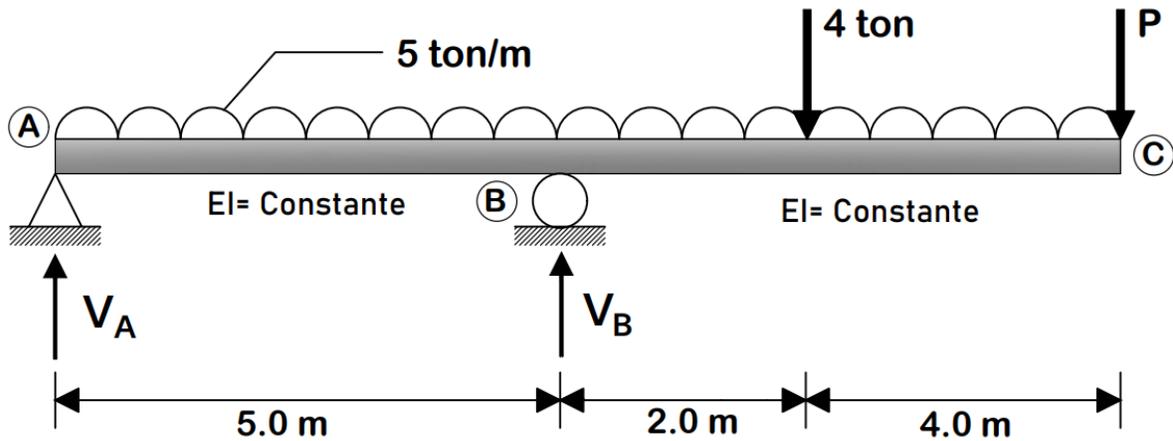
Se han calculado desplazamientos utilizando la ecuación (2.13), por lo que se pasará a resolver ejercicios calculando desplazamientos en diferentes vigas utilizando la ecuación (2.14).

$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \left[\frac{\partial M(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx \quad (2.14)$$

Ejercicio 2.15: Utilizando la ecuación 2.14, calcula el desplazamiento vertical en el punto C que se encuentra en un extremo de la viga, la cual es sometida a dos cargas, una carga uniformemente repartida de 5 ton/m y una carga puntual de 4 toneladas, se supone que la sección transversal es constante por lo que también lo es el valor del módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I).



PASO ①: Colocar una carga puntual ficticia en el punto donde se quiera conocer el desplazamiento.



PASO ②: Calcular las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.

$$\Sigma M_A = 0 \quad (\circlearrowright)$$

$$-V_B(5 \text{ m}) + 5 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (11 \text{ m}) \left(\frac{11 \text{ m}}{2} \right) + 4 \text{ ton}(7 \text{ m}) + P(11 \text{ m}) = 0$$

$$-V_B(5 \text{ m}) + 302.5 \text{ ton} \cdot \text{m} + 28 \text{ ton} \cdot \text{m} + 11P(\text{m}) = 0$$

$$-V_B(5 \text{ m}) + 330.5 \text{ ton} \cdot \text{m} + 11P(\text{m}) = 0$$

$$V_B = \frac{330.5 \text{ ton} \cdot \text{m} + 11P(\text{m})}{5 \text{ m}}$$

$$V_B = 66.10 \text{ ton} + 2.2 P$$

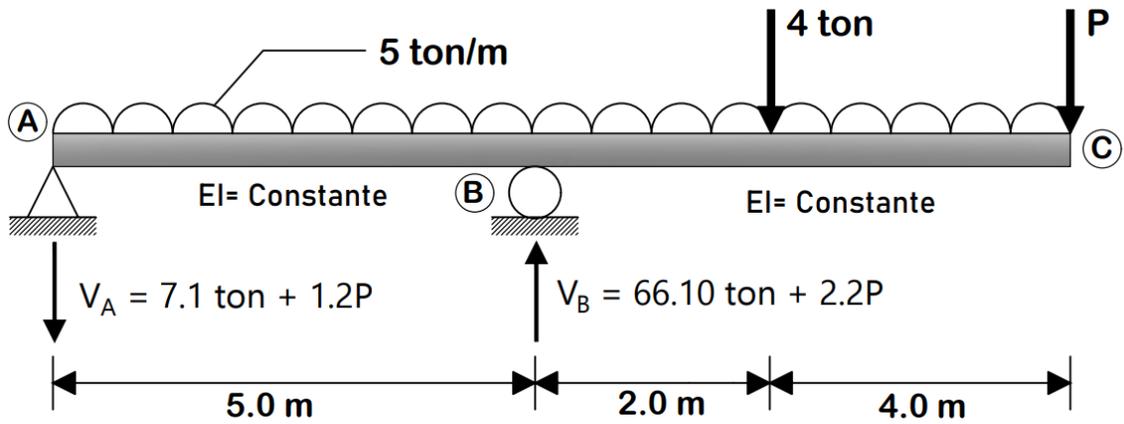
$$\Sigma F_Y = 0 \quad (\uparrow)$$

$$V_A + V_B - 5 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (11 \text{ m}) - 4 \text{ ton} - P = 0$$

$$V_A + 66.10 \text{ ton} + 2.2P - 55 \text{ ton} - 4 \text{ ton} - P = 0$$

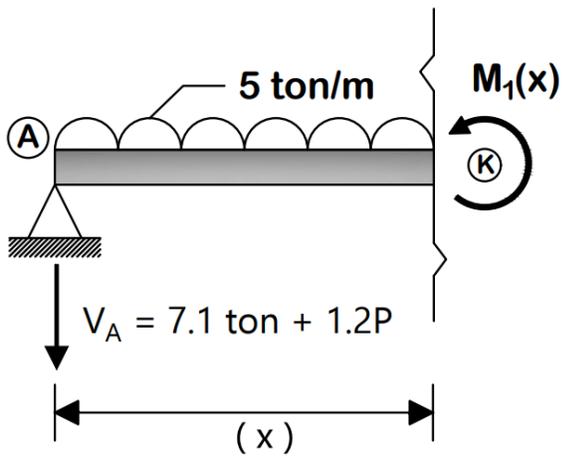
$$V_A + 7.1 \text{ ton} + 1.2P = 0$$

$$V_A = -7.1 \text{ ton} - 1.2P \quad \downarrow$$



PASO ③: Calcular las ecuaciones del momento flexionante.

CORTE #1 [$0.0\text{ m} \leq x \leq 5.0\text{ m}$]



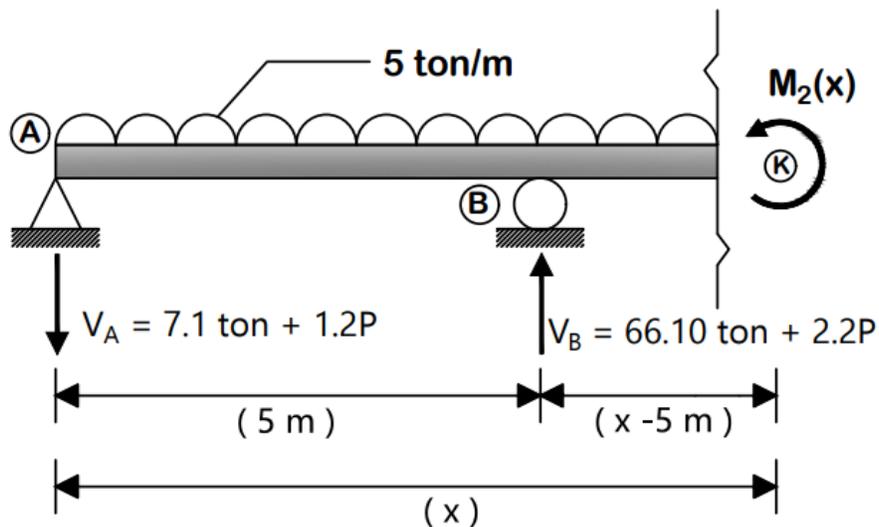
$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M_1(x) + (7.1 + 1.2P)(x) + 5(x) \left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$M_1(x) + 7.1x + 1.2Px + \frac{5}{2}x^2 = 0$$

$$M_1(x) = -\frac{5}{2}x^2 - 7.1x - 1.2Px$$

CORTE #2 [$5.0\text{ m} \leq x \leq 7.0\text{ m}$]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (\circlearrowleft)$$

$$M_2(x) + (7.1 + 1.2P)(x) + 5(x) \left(\frac{x}{2}\right) - (66.10 + 2.2P)(x - 5) = 0$$

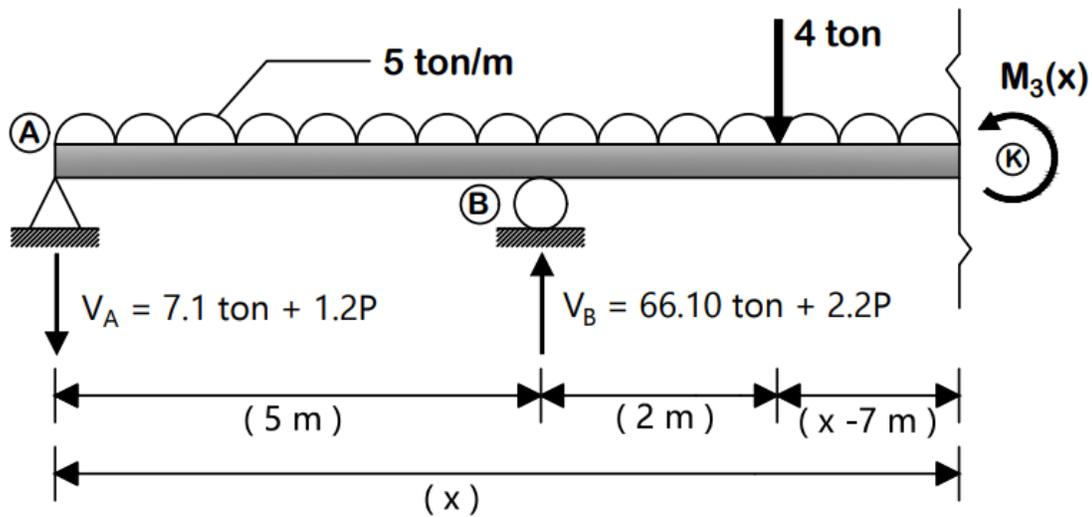
$$M_2(x) + 7.1x + 1.2Px + \frac{5}{2}x^2 - (66.10x - 330.5 + 2.2Px - 11P) = 0$$

$$M_2(x) + 7.1x + 1.2Px + \frac{5}{2}x^2 - 66.10x + 330.5 - 2.2Px + 11P = 0$$

$$M_2(x) + \frac{5}{2}x^2 - 59x - Px + 11P + 330.5 = 0$$

$$M_2(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 59x + Px - 11P - 330.5$$

CORTE #3 [7.0 m ≤ x ≤ 11.0 m]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (\circlearrowleft)$$

$$M_3(x) + (7.1 + 1.2P)(x) + 5(x) \left(\frac{x}{2}\right) - (66.10 + 2.2P)(x - 5) + 4(x - 7) = 0$$

$$M_3(x) + 7.1x + 1.2Px + \frac{5}{2}x^2 - (66.10x - 330.5 + 2.2Px - 11P) + 4x - 28 = 0$$

$$M_3(x) + 7.1x + 1.2Px + \frac{5}{2}x^2 - 66.10x + 330.5 - 2.2Px + 11P + 4x - 28 = 0$$

$$M_3(x) + \frac{5}{2}x^2 - 55x - Px + 11P + 302.5 = 0$$

$$M_3(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 55x + Px - 11P - 302.5$$

PASO ④: Calcular el desplazamiento vertical utilizando la ecuación 2.14.

$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \left[\frac{\partial M(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx$$

$$\Delta = \underbrace{\int_0^5 \frac{M_1(x) \left[\frac{\delta M_1(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx}_{Integral\ 1} + \underbrace{\int_5^7 \frac{M_2(x) \left[\frac{\delta M_2(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx}_{Integral\ 2} + \underbrace{\int_7^{11} \frac{M_3(x) \left[\frac{\delta M_3(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx}_{Integral\ 3}$$

Se resuelve cada integral por separado y se suman cada uno de los resultados:

Integral 1

$$\int_0^5 \frac{M_1(x) \left[\frac{\partial M_1(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx$$

$$M_1(x) = -\frac{5}{2}x^2 - 7.1x - 1.2Px$$

$$\frac{\delta M_1(x)}{\delta P} = -1.2x$$

$$\int_0^5 \frac{M_1(x) \left[\frac{\partial M_1(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx = \int_0^5 \frac{\left(-\frac{5}{2}x^2 - 7.1x - 1.2Px \right) (-1.2x)}{EI} dx$$

$$\int_0^5 \frac{\left(3x^3 + \frac{213}{25}x^2 + \frac{36}{25}Px^2 \right)}{EI} dx = \frac{5}{0} \left[\frac{3}{EI} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{213}{25EI} \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{36}{25EI} P \left(\frac{x^3}{3} \right) \right]$$

$$\left[\frac{3}{EI} \left(\frac{(5)^4}{4} \right) + \frac{213}{25EI} \left(\frac{(5)^3}{3} \right) + \frac{36}{25EI} P \left(\frac{(5)^3}{3} \right) \right] - [0] = \left[\frac{1875}{4EI} + \frac{355}{EI} + \frac{60}{EI} P \right]$$

$$\int_0^5 \frac{M_1(x) \left[\frac{\partial M_1(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx = \frac{3295}{4EI} + \frac{60}{EI} P$$

Integral 2

$$\int_5^7 \frac{M_2(x) \left[\frac{\partial M_2(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx$$

$$M_2(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 59x + Px - 11P - 330.5$$

$$\frac{\delta M_2(x)}{\delta P} = x - 11$$

$$\int_5^7 \frac{M_2(x) \left[\frac{\partial M_2(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_5^7 \left(-\frac{5}{2}x^2 + 59x + Px - 11P - 330.5 \right) (x - 11) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_5^7 \left(-\frac{5}{2}x^3 + 59x^2 + Px^2 - 11Px - 330.5x + \frac{55}{2}x^2 - 649x - 11Px + 121P + \frac{7271}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_5^7 \left(-\frac{5}{2}x^3 + \frac{173}{2}x^2 + Px^2 - \frac{1959}{2}x - 22Px + 121P + \frac{7271}{2} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{5}{2EI} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{173}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{3} \right) - \frac{1959}{2EI} \left(\frac{x^2}{2} \right) - \frac{22P}{EI} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{121P}{EI} (x) \right]$$

$$\left[\frac{7271}{2EI} (x) \right]$$

$$= \left[-\frac{5x^4}{8EI} + \frac{173x^3}{6EI} + \frac{Px^3}{3EI} - \frac{1959x^2}{4EI} - \frac{11Px^2}{EI} + \frac{121Px}{EI} + \frac{7271x}{2EI} \right]$$

$$= \left[-\frac{5(7)^4}{8EI} + \frac{173(7)^3}{6EI} + \frac{P(7)^3}{3EI} - \frac{1959(7)^2}{4EI} - \frac{11P(7)^2}{EI} + \frac{121P(7)}{EI} + \frac{7271(7)}{2EI} \right] -$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{5(5)^4}{8EI} + \frac{173(5)^3}{6EI} + \frac{P(5)^3}{3EI} - \frac{1959(5)^2}{4EI} - \frac{11P(5)^2}{EI} + \frac{121P(5)}{EI} + \frac{7271(5)}{2EI} \right] \\
&= \left[-\frac{12005}{8EI} + \frac{59339}{6EI} + \frac{343P}{3EI} - \frac{95991}{4EI} - \frac{539P}{EI} + \frac{847P}{EI} + \frac{50897}{2EI} \right] - \\
& \left[-\frac{3125}{8EI} + \frac{21625}{6EI} + \frac{125P}{3EI} - \frac{48975}{4EI} - \frac{275P}{EI} + \frac{605P}{EI} + \frac{36355}{2EI} \right] \\
&= \left[\frac{236159}{24EI} + \frac{1267}{3EI}P \right] - \left[\frac{219535}{24EI} + \frac{1115}{3EI}P \right] = \frac{2078}{3EI} + \frac{152}{3EI}P
\end{aligned}$$

$$\int_5^7 \frac{M_2(x) \left[\frac{\partial M_2(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx = \frac{2078}{3EI} + \frac{152}{3EI}P$$

Integral 3

$$\int_7^{11} \frac{M_3(x) \left[\frac{\partial M_3(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx$$

$$M_3(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 55x + Px - 11P - 302.5$$

$$\frac{\delta M_3(x)}{\delta P} = x - 11$$

$$= \frac{1}{EI} \int_7^{11} \left(-\frac{5}{2}x^2 + 55x + Px - 11P - 302.5 \right) (x - 11) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_7^{11} \left(-\frac{5}{2}x^3 + 55x^2 + Px^2 - 11Px - 302.5x + \frac{55}{2}x^2 - 605x - 11Px + 121P + \frac{6655}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_7^{11} \left(-\frac{5}{2}x^3 + \frac{165}{2}x^2 + Px^2 - \frac{1815}{2}x - 22Px + 121P + \frac{6655}{2} \right) dx$$

$$= {}_7^{11} \left[-\frac{5}{2EI} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{165}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{3} \right) - \frac{1815}{2EI} \left(\frac{x^2}{2} \right) - \frac{22P}{EI} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{121P}{EI} (x) \right]$$

$${}_7^{11} \left[\frac{6655}{2EI} (x) \right]$$

$$= {}_7^{11} \left[-\frac{5x^4}{8EI} + \frac{55x^3}{2EI} + \frac{Px^3}{3EI} - \frac{1815x^2}{4EI} - \frac{11Px^2}{EI} + \frac{121Px}{EI} + \frac{6655x}{2EI} \right]$$

$$= \left[-\frac{5(11)^4}{8EI} + \frac{55(11)^3}{2EI} + \frac{P(11)^3}{3EI} - \frac{1815(11)^2}{4EI} - \frac{11P(11)^2}{EI} + \frac{121P(11)}{EI} + \frac{6655(11)}{2EI} \right] -$$

$$\left[-\frac{5(7)^4}{8EI} + \frac{55(7)^3}{2EI} + \frac{P(7)^3}{3EI} - \frac{1815(7)^2}{4EI} - \frac{11P(7)^2}{EI} + \frac{121P(7)}{EI} + \frac{6655(7)}{2EI} \right]$$

$$= \left[-\frac{73205}{8EI} + \frac{73205}{2EI} + \frac{1331P}{3EI} - \frac{219615}{4EI} - \frac{1331P}{EI} + \frac{1331P}{EI} + \frac{73205}{2EI} \right] -$$

$$\left[-\frac{12005}{8EI} + \frac{18865}{2EI} + \frac{343P}{3EI} - \frac{88935}{4EI} - \frac{539P}{EI} + \frac{847P}{EI} + \frac{46585}{2EI} \right]$$

$$= \left[\frac{73205}{8EI} + \frac{1331}{3EI} P \right] - \left[\frac{71925}{8EI} + \frac{1267}{3EI} P \right] = \frac{160}{EI} + \frac{64}{3EI} P$$

$$\int_7^{11} \frac{M_3(x) \left[\frac{\partial M_3(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx = \frac{160}{EI} + \frac{64}{3EI} P$$

$$\Delta = \int_0^5 \frac{M_1(x) \left[\frac{\delta M_1(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx + \int_5^7 \frac{M_2(x) \left[\frac{\delta M_2(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx + \int_7^{11} \frac{M_3(x) \left[\frac{\delta M_3(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx$$

$$\Delta = \left[\frac{3295}{4EI} + \frac{60}{EI} P \right] + \left[\frac{2078}{3EI} + \frac{152}{3EI} P \right] + \left[\frac{160}{EI} + \frac{64}{3EI} P \right]$$

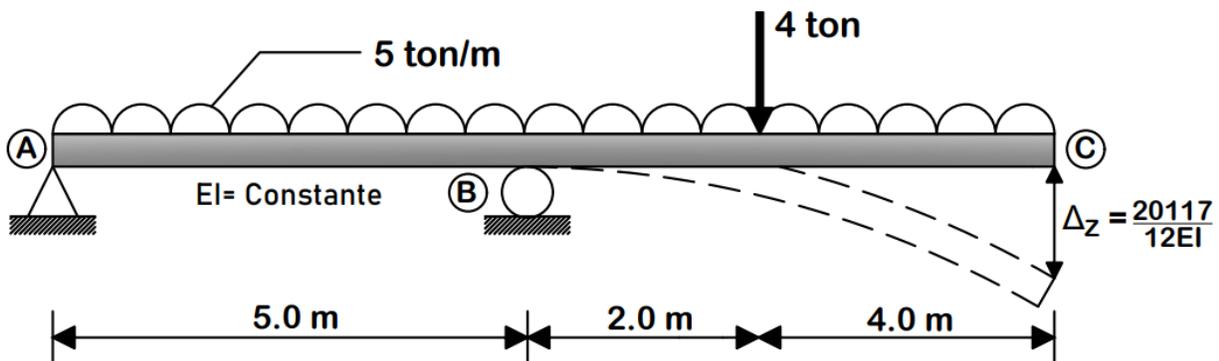
$$\Delta = \frac{20117}{12EI} + \frac{132}{EI} P$$

PASO ⑤: Sustituir el valor de (P), pero como se conoce que la carga (P) es una carga ficticia, por lo tanto, el valor de $P = 0$.

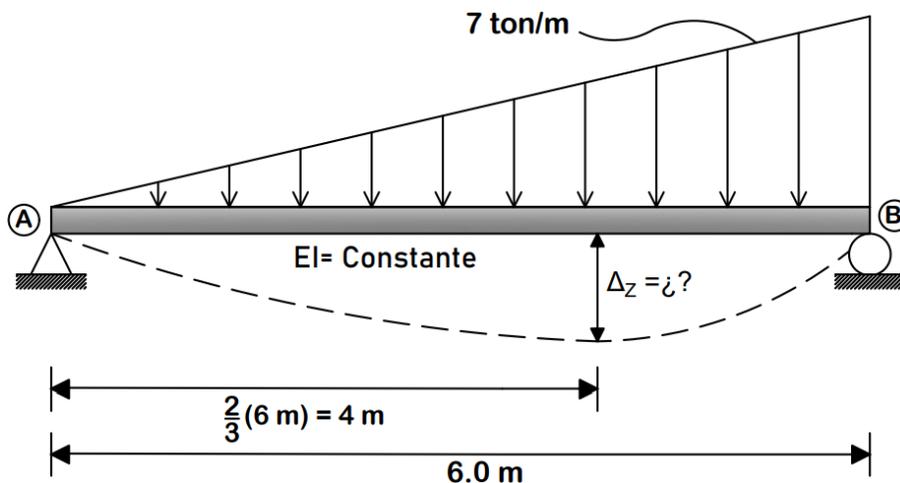
$$\Delta = \frac{20117}{12EI} + \frac{132}{EI} (0)$$

Resultado: Desplazamiento vertical en el Punto C

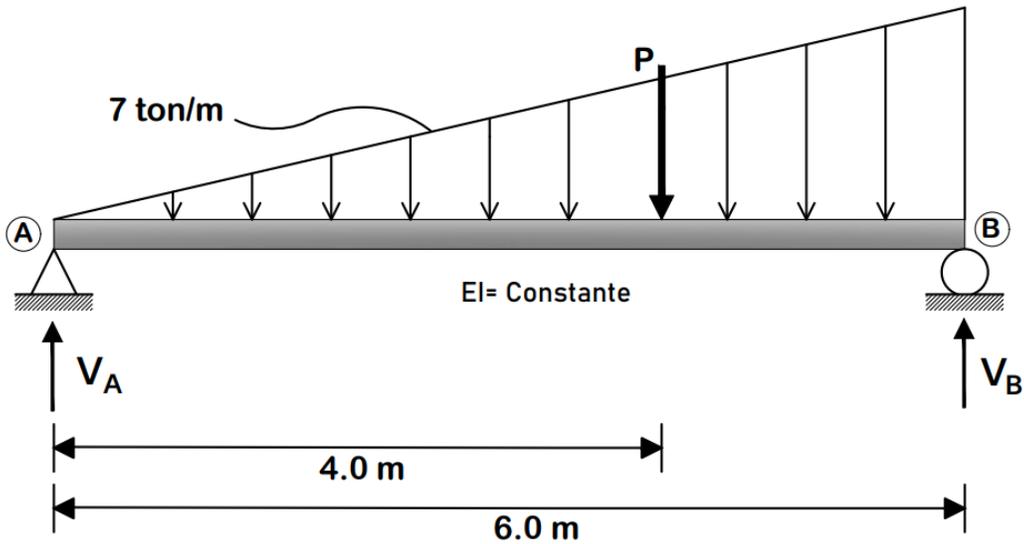
$$\Delta_z = \frac{20117}{12EI} [m]$$



Ejercicio 2.16: Calcular con la ecuación (2.14) el desplazamiento vertical a $2/3$ de la longitud de la viga, la cual tiene una longitud de 6 metros y es sometida a una carga triangular de 7 ton/m, la viga tiene un módulo de elasticidad y momento de inercia constante.



PASO ①: Colocar una carga puntual ficticia en el punto donde se desea conocer un desplazamiento.



PASO ②: Calcular las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.

$$\Sigma M_A = 0 \quad (\curvearrowright)$$

$$-V_B(6\text{ m}) + \left[\frac{(7\text{ ton/m})(6\text{ m})}{2} \right] \left[\frac{2}{3}(6\text{ m}) \right] + P(4\text{ m}) = 0$$

$$-V_B(6\text{ m}) + 84\text{ ton} \cdot \text{m} + P(4\text{ m}) = 0$$

$$V_B = \frac{84\text{ ton} \cdot \text{m} + P(4\text{ m})}{6\text{ m}}$$

$$V_B = 14\text{ ton} + \frac{2}{3}P$$

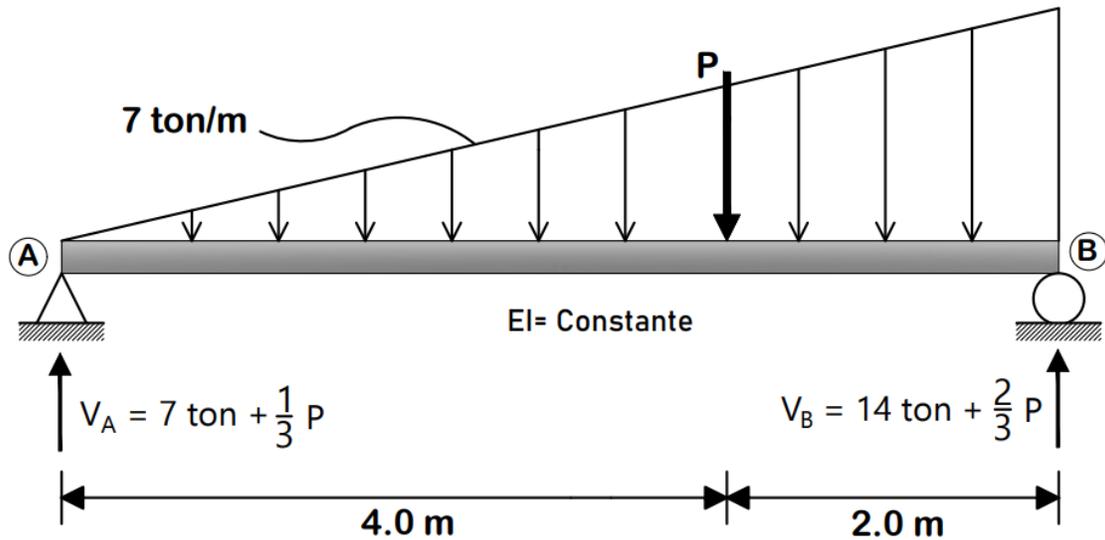
$$\Sigma F_Y = 0 \quad (\uparrow)$$

$$V_A + V_B - \frac{(7\text{ ton/m})(6\text{ m})}{2} - P = 0$$

$$V_A + 14\text{ ton} + \frac{2}{3}P - 21\text{ ton} - P = 0$$

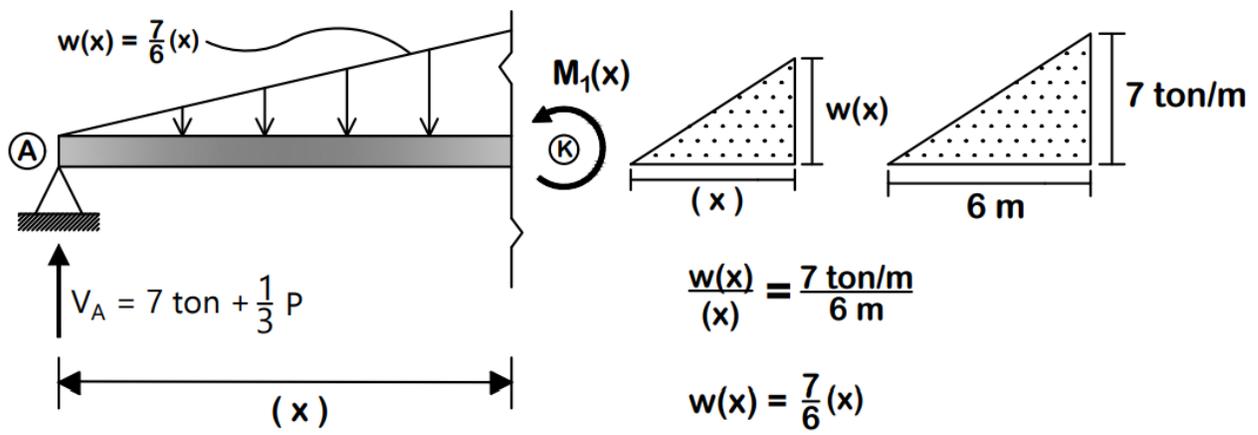
$$V_A - 7\text{ ton} - \frac{1}{3}P = 0$$

$$V_A = 7 \text{ ton} + \frac{1}{3}P$$



PASO ③: Calcular las ecuaciones del momento flexionante.

CORTE #1 [0.0 m ≤ x ≤ 4.0 m]



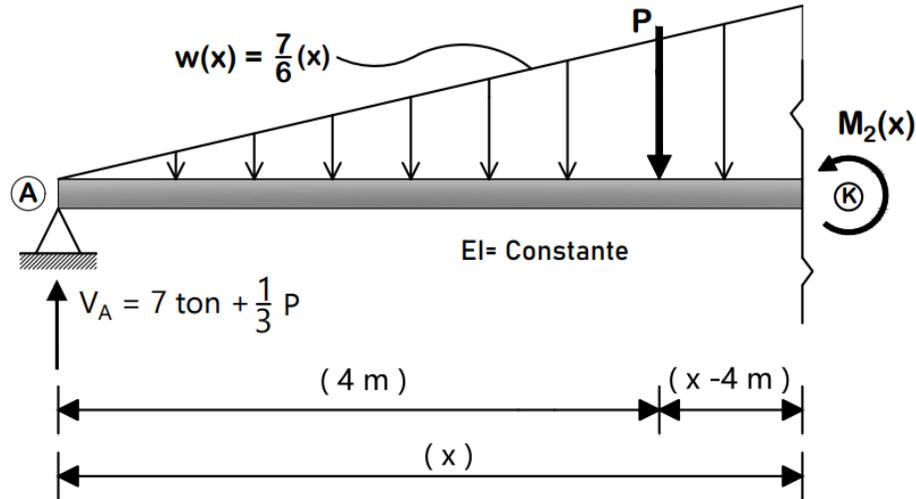
$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M_1(x) + \left[\frac{\left(\frac{7}{6}x\right)(x)}{2} \right] \left[\frac{1}{3}(x) \right] - \left(7 + \frac{1}{3}P\right)(x) = 0$$

$$M_1(x) + \frac{7}{36}x^3 - 7x - \frac{1}{3}Px = 0$$

$$M_1(x) = -\frac{7}{36}x^3 + 7x + \frac{1}{3}Px$$

CORTE #2 [4.0 m ≤ x ≤ 6.0 m]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M_2(x) + \left[\frac{\left(\frac{7}{6}x\right)(x)}{2} \right] \left[\frac{1}{3}(x) \right] - \left(7 + \frac{1}{3}P\right)(x) + P(x-4) = 0$$

$$M_2(x) + \frac{7}{36}x^3 - 7x - \frac{1}{3}Px + Px - 4P = 0$$

$$M_2(x) + \frac{7}{36}x^3 - 7x + \frac{2}{3}Px - 4P = 0$$

$$M_2(x) = -\frac{7}{36}x^3 + 7x - \frac{2}{3}Px + 4P$$

PASO ④: Calcular el desplazamiento vertical utilizando la ecuación (2.14).

$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \left[\frac{\partial M(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx$$

$$\Delta = \int_0^4 \underbrace{\frac{M_1(x) \left[\frac{\delta M_1(x)}{\delta P} \right]}{EI}}_{\text{Integral 1}} dx + \int_4^6 \underbrace{\frac{M_2(x) \left[\frac{\delta M_2(x)}{\delta P} \right]}{EI}}_{\text{Integral 2}} dx$$

Se resuelve cada integral por separado y se suman cada uno de los resultados.

Integral 1

$$\int_0^4 \frac{M_1(x) \left[\frac{\partial M_1(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx$$

$$M_1(x) = -\frac{7}{36}x^3 + 7x + \frac{1}{3}Px$$

$$\frac{\delta M_1(x)}{\delta P} = \frac{1}{3}x$$

$$\int_0^4 \frac{M_1(x) \left[\frac{\partial M_1(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^4 \left(-\frac{7}{36}x^3 + 7x + \frac{1}{3}Px \right) \left(\frac{1}{3}x \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^4 \left(-\frac{7}{108}x^4 + \frac{7}{3}x^2 + \frac{1}{9}Px^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[-\frac{7}{108} \left(\frac{x^5}{5} \right) + \frac{7}{3} \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{1}{9}P \left(\frac{x^3}{3} \right) \right]$$

$$= \left[-\frac{7x^5}{540EI} + \frac{7x^3}{9EI} + \frac{Px^3}{27EI} \right]$$

$$= \left[-\frac{7(4)^5}{540EI} + \frac{7(4)^3}{9EI} + \frac{P(4)^3}{27EI} \right] - \left[-\frac{7(0)^5}{540EI} + \frac{7(0)^3}{9EI} + \frac{P(0)^3}{27EI} \right]$$

$$= \left[-\frac{1792}{135EI} + \frac{448}{9EI} + \frac{64}{27EI}P \right]$$

$$\int_0^4 \frac{M_1(x) \left[\frac{\partial M_1(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx = \frac{4928}{135EI} + \frac{64}{27EI}P$$

Integral 2

$$\int_4^6 \frac{M_2(x) \left[\frac{\partial M_2(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx$$

$$M_2(x) = -\frac{7}{36}x^3 + 7x - \frac{2}{3}Px + 4P$$

$$\frac{\delta M_2(x)}{\delta P} = -\frac{2}{3}x + 4$$

$$\begin{aligned} \int_4^6 \frac{M_2(x) \left[\frac{\partial M_2(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx &= \frac{1}{EI} \int_4^6 \left(-\frac{7}{36}x^3 + 7x - \frac{2}{3}Px + 4P \right) \left(-\frac{2}{3}x + 4 \right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_4^6 \left(\frac{7}{54}x^4 - \frac{14}{3}x^2 + \frac{4}{9}Px^2 - \frac{8}{3}Px - \frac{7}{9}x^3 + 28x - \frac{8}{3}Px + 16P \right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_4^6 \left(\frac{7}{54}x^4 - \frac{7}{9}x^3 - \frac{14}{3}x^2 + 28x + \frac{4}{9}Px^2 - \frac{16}{3}Px + 16P \right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_4^6 \left[\frac{7}{54} \left(\frac{x^5}{5} \right) - \frac{7}{9} \left(\frac{x^4}{4} \right) - \frac{14}{3} \left(\frac{x^3}{3} \right) + 28 \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{4}{9}P \left(\frac{x^3}{3} \right) - \frac{16}{3}P \left(\frac{x^2}{2} \right) + 16Px \right] dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{7x^5}{270EI} - \frac{7x^4}{36EI} - \frac{14x^3}{9EI} + \frac{14x^2}{EI} + \frac{4x^3}{27EI}P - \frac{8x^2}{3EI}P + \frac{16x}{EI}P \right]_4^6 \\ &= \left[\frac{7(6)^5}{270EI} - \frac{7(6)^4}{36EI} - \frac{14(6)^3}{9EI} + \frac{14(6)^2}{EI} + \frac{4(6)^3}{27EI}P - \frac{8(6)^2}{3EI}P + \frac{16(6)}{EI}P \right] - \\ &\quad \left[\frac{7(4)^5}{270EI} - \frac{7(4)^4}{36EI} - \frac{14(4)^3}{9EI} + \frac{14(4)^2}{EI} + \frac{4(4)^3}{27EI}P - \frac{8(4)^2}{3EI}P + \frac{16(4)}{EI}P \right] \\ &= \left[\frac{1008}{5EI} - \frac{252}{EI} - \frac{336}{EI} + \frac{504}{EI} + \frac{32}{EI}P - \frac{96}{EI}P + \frac{96}{EI}P \right] - \\ &\quad \left[\frac{3584}{135EI} - \frac{448}{9EI} - \frac{896}{9EI} + \frac{224}{EI} + \frac{256}{27EI}P - \frac{128}{3EI}P + \frac{64}{EI}P \right] \\ &= \left[\frac{588}{5EI} + \frac{32}{EI}P \right] - \left[\frac{13664}{135EI} + \frac{832}{27EI}P \right] \end{aligned}$$

$$\int_4^6 \frac{M_2(x) \left[\frac{\partial M_2(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx = \frac{2212}{135EI} + \frac{32}{27EI} P$$

$$\Delta = \int_0^4 \frac{M_1(x) \left[\frac{\delta M_1(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx + \int_4^6 \frac{M_2(x) \left[\frac{\delta M_2(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx$$

$$\Delta = \frac{4928}{135EI} + \frac{64}{27EI} P + \frac{2212}{135EI} + \frac{32}{27EI} P$$

$$\Delta = \frac{476}{9EI} + \frac{32}{9EI} P$$

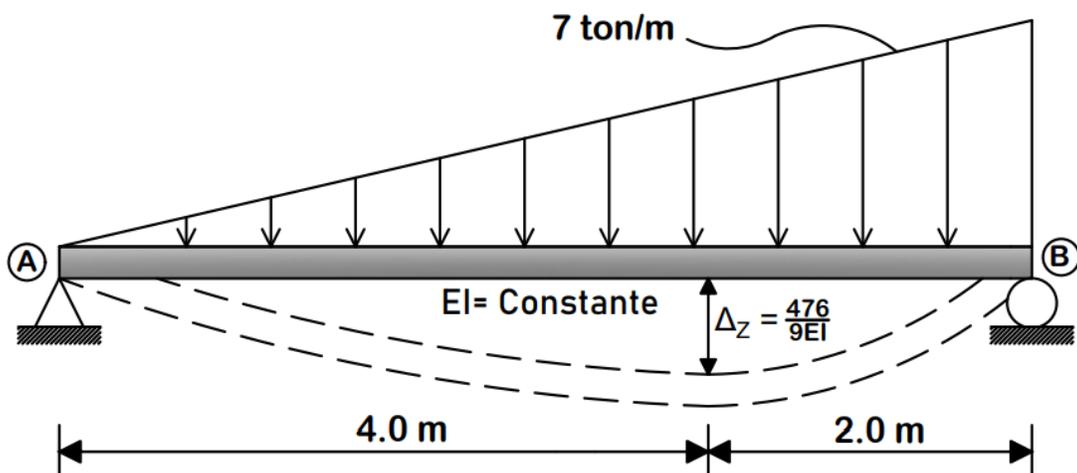
PASO ⑤: Sustituir el valor de (P), pero se sabe que la carga (P) es una carga ficticia, por lo tanto, el valor de $P = 0$.

$$\Delta = \frac{476}{9EI} + \frac{32}{9EI} (0)$$

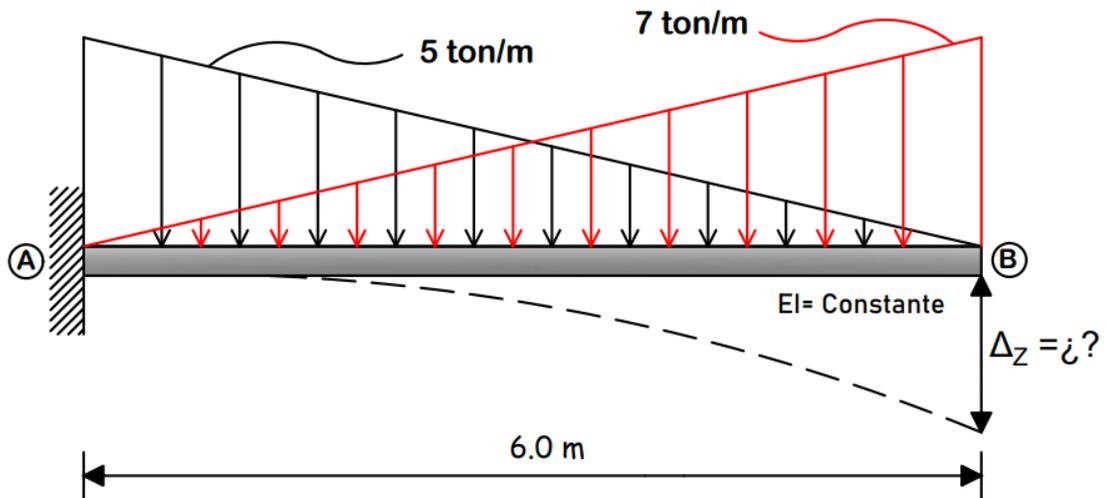
Resultado:

Desplazamiento vertical

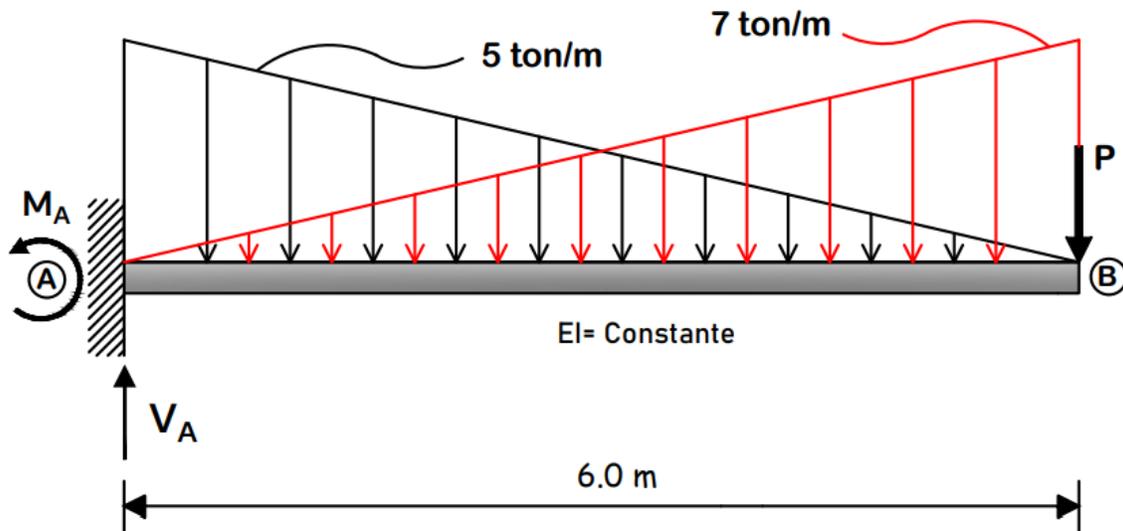
$$\Delta_z = \frac{476}{9EI} [m]$$



Ejercicio 2.17: Calcular utilizando la ecuación (2.14) el desplazamiento vertical en el punto B que se encuentra a un extremo de la viga empotrada que tiene una longitud de 6 m. La viga es sometida a dos cargas triangulares, una carga triangular tiene una magnitud de 5 ton/m y la otra carga triangular tiene una magnitud de 7 ton/m.



PASO ①: Colocar una carga puntual ficticia en el punto donde se requiere conocer el desplazamiento.



PASO ②: Calcular las reacciones en el apoyo empotrado con las ecuaciones del equilibrio.

$$\Sigma M_A = 0 \quad (\curvearrowright)$$

$$-M_A + \left[\frac{\left(5 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (6 \text{ m})}{2} \right] \left[\frac{1}{3} (6 \text{ m}) \right] + \left[\frac{\left(7 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (6 \text{ m})}{2} \right] \left[\frac{2}{3} (6 \text{ m}) \right] + P(6 \text{ m}) = 0$$

$$-M_A + 30 \text{ ton} \cdot \text{m} + 84 \text{ ton} \cdot \text{m} + 6P = 0$$

$$-M_A + 114 \text{ ton} \cdot \text{m} + 6P = 0$$

$$M_A = 114 \text{ ton} \cdot \text{m} + 6P$$

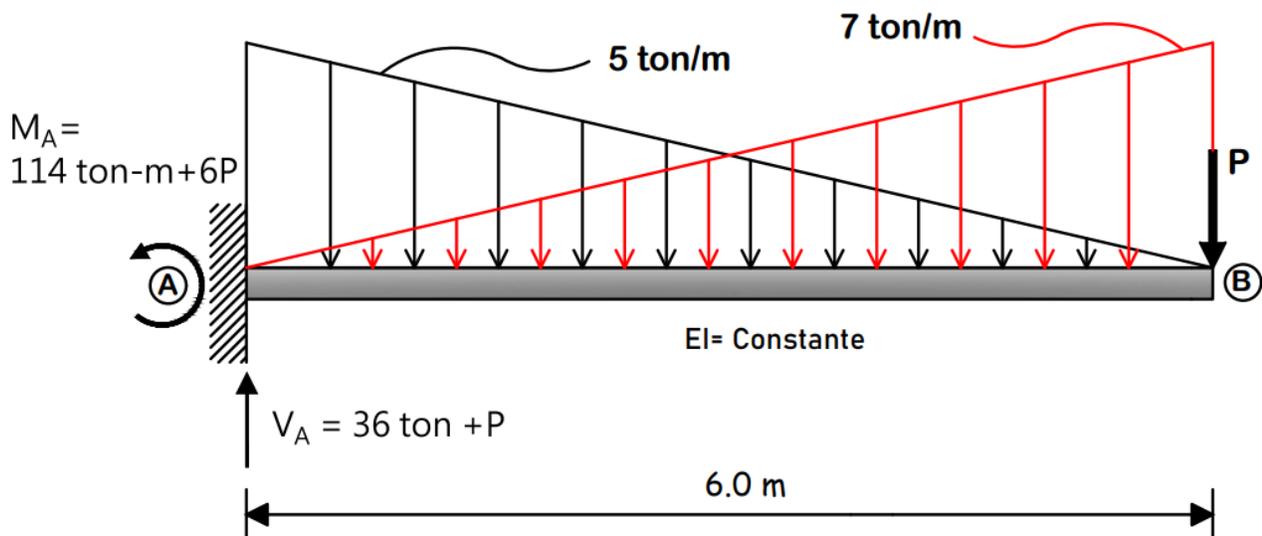
$$\Sigma F_Y = 0 \quad (\uparrow)$$

$$V_A - \frac{(5 \text{ ton/m})(6 \text{ m})}{2} - \frac{(7 \text{ ton/m})(6 \text{ m})}{2} - P = 0$$

$$V_A - 15 \text{ ton} - 21 \text{ ton} - P = 0$$

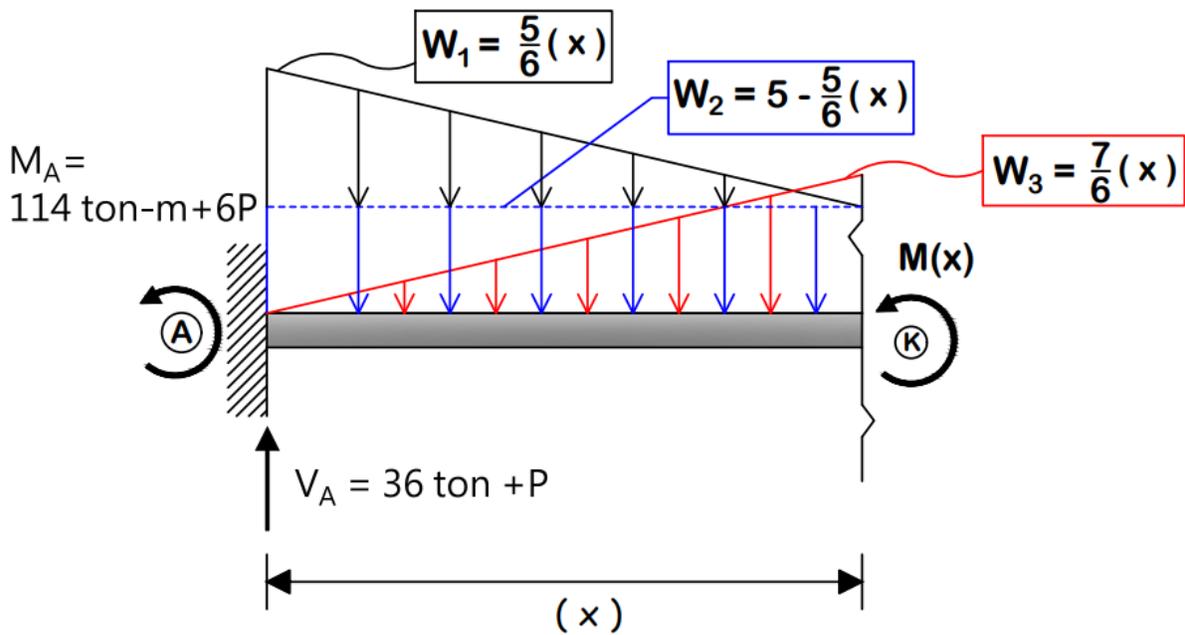
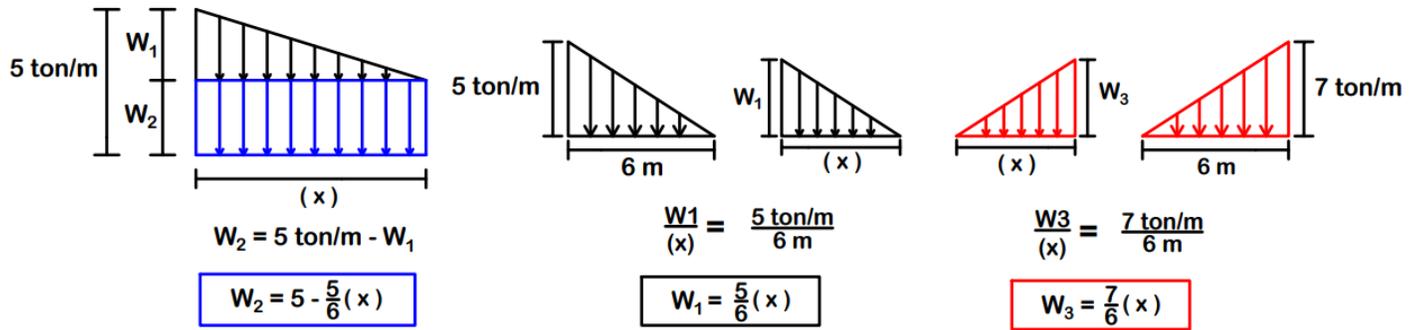
$$V_A - 36 \text{ ton} - P = 0$$

$$V_A = 36 \text{ ton} + P$$



PASO ③: Calcular las ecuaciones del momento flexionante.

CORTE #1 [0.0 m ≤ x ≤ 6.0 m]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M(x) + \left(5 - \frac{5}{6}x\right)(x) \left(\frac{x}{2}\right) + \left[\frac{\left(\frac{5}{6}x\right)(x)}{2}\right] \left[\frac{2}{3}(x)\right] + \left[\frac{\left(\frac{7}{6}x\right)(x)}{2}\right] \left[\frac{1}{3}(x)\right] + 114 + 6P - (36 + P)(x) = 0$$

$$M(x) + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{12}x^3 + \frac{5}{18}x^3 + \frac{7}{36}x^3 + 114 + 6P - 36x - Px = 0$$

$$M(x) + \frac{1}{18}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 36x - Px + 6P + 114 = 0$$

$$M(x) = -\frac{1}{18}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 36x + Px - 6P - 114$$

PASO ④: Calcular el desplazamiento vertical utilizando la ecuación (2.14).

$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \left[\frac{\partial M(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx$$

$$M(x) = -\frac{1}{18}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 36x + Px - 6P - 114$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = x - 6$$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^6 \left(-\frac{1}{18}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 36x + Px - 6P - 114 \right) (x - 6) dx$$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^6 \left(-\frac{1}{18}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 36x^2 + Px^2 - 6Px - 114x + \frac{1}{3}x^3 + 15x^2 - 216x - 6Px + 36P + 684 \right) dx$$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^6 \left(-\frac{1}{18}x^4 - \frac{13}{6}x^3 + 51x^2 - 330x + Px^2 - 12Px + 36P + 684 \right) dx$$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^6 \left[-\left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{x^5}{5}\right) - \left(\frac{13}{6}\right)\left(\frac{x^4}{4}\right) + (51)\left(\frac{x^3}{3}\right) - (330)\left(\frac{x^2}{2}\right) + (P)\left(\frac{x^3}{3}\right) - (12P)\left(\frac{x^2}{2}\right) + 36P(x) + 684(x) \right]$$

$$\Delta = \int_0^6 \left[-\frac{x^5}{90EI} - \frac{13x^4}{24EI} + \frac{17x^3}{EI} - \frac{165x^2}{EI} + \frac{Px^3}{3EI} - \frac{6Px^2}{EI} + \frac{36Px}{EI} + \frac{684x}{EI} \right]$$

$$\Delta = \left[-\frac{(6)^5}{90EI} - \frac{13(6)^4}{24EI} + \frac{17(6)^3}{EI} - \frac{165(6)^2}{EI} + \frac{P(6)^3}{3EI} - \frac{6P(6)^2}{EI} + \frac{36P(6)}{EI} + \frac{684(6)}{EI} \right] - [0]$$

$$\Delta = \left[-\frac{432}{5EI} - \frac{702}{EI} + \frac{3672}{EI} - \frac{5940}{EI} + \frac{72}{EI}P - \frac{216}{EI}P + \frac{216}{EI}P + \frac{4104}{EI} \right]$$

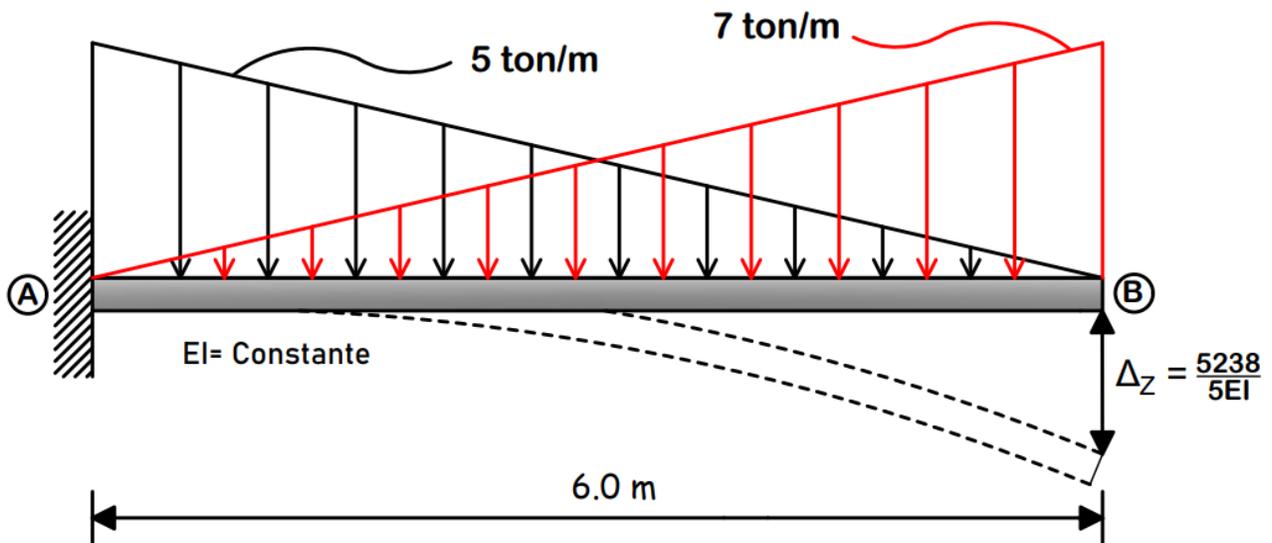
$$\Delta = \frac{5238}{5EI} + \frac{72}{EI}P$$

PASO ⑤: Sustituir el valor de (P), se sabe que la carga (P) es una carga ficticia, por lo tanto, el valor de $P = 0$.

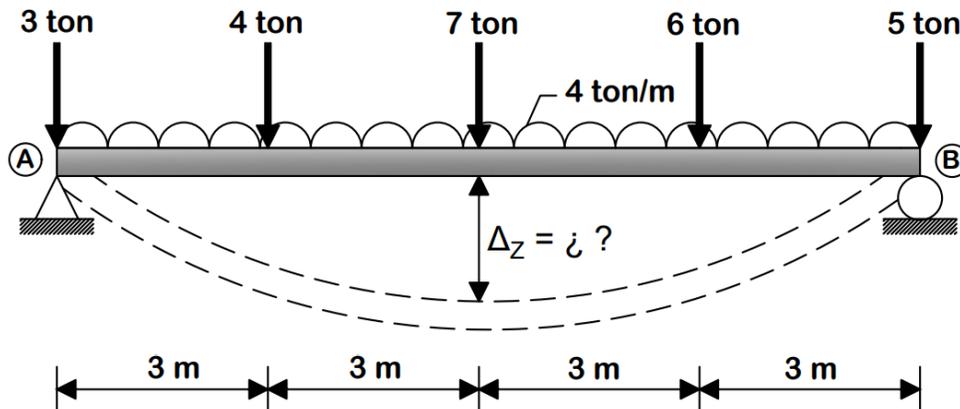
$$\Delta = \frac{5238}{5EI} + \frac{72}{EI}(0)$$

Resultado: Desplazamiento vertical en el Punto B

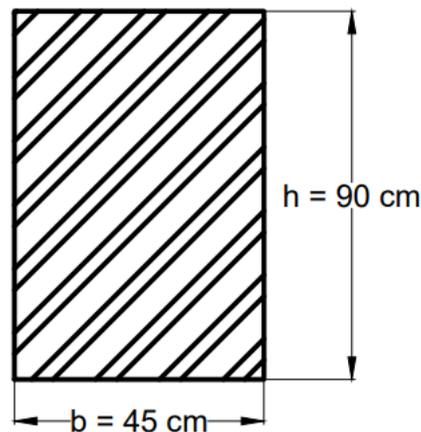
$$\Delta_z = \frac{5238}{5EI} [m]$$



Ejercicio 2.18: Calcular con la ecuación (2.14) el desplazamiento vertical al centro de la viga simplemente apoyada que tiene una longitud de 12 m. La viga es sometida a una carga uniformemente repartida de 4 ton/m y a varias cargas puntuales de distintas magnitudes que se encuentran a cada 3 metros de la longitud de la viga, como se mostrará a continuación. La viga tiene una sección transversal de 45 cm x 90 cm y está elaborada con un concreto de Clase I de agregado calizo que tiene un $f'c = 350 \text{ Kg/cm}^2$.

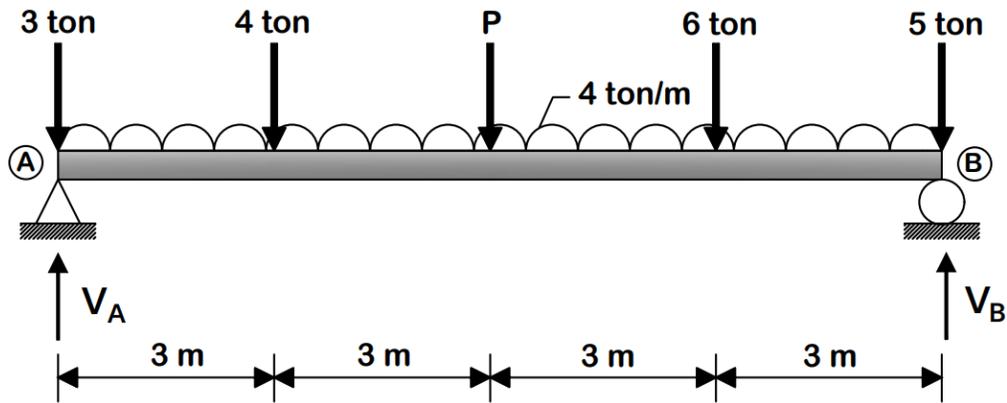


SECCION TRANSVERSAL



Concreto Clase I de Agregado Calizo
 $f'c = 350 \text{ kg/cm}^2$

PASO ①: Se ha estado mencionando que si se tiene una carga puntual en el punto donde se desea conocer un desplazamiento vertical, en lugar de colocar una carga FICTICIA (P) en el punto donde se quiere conocer un desplazamiento, lo único que se hace, es convertir el valor de la carga puntual de 7 ton en una variable "P".



PASO ②: Calcular las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.

$$\Sigma M_A = 0 \quad (\curvearrowright)$$

$$V_A + V_B - (4 \text{ ton/m})(12 \text{ m}) - 3 \text{ ton} - 4 \text{ ton} - P - 6 \text{ ton} - 5 \text{ ton} = 0$$

$$-V_B(12 \text{ m}) + \left(4 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right)(12 \text{ m})\left(\frac{12 \text{ m}}{2}\right) + 4 \text{ ton}(3 \text{ m}) + P(6 \text{ m}) + 6 \text{ ton}(9 \text{ m}) + 5 \text{ ton}(12 \text{ m}) = 0$$

$$-V_B(12 \text{ m}) + 288 \text{ ton} \cdot \text{m} + 12 \text{ ton} \cdot \text{m} + P(6 \text{ m}) + 54 \text{ ton} \cdot \text{m} + 60 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$-V_B(12 \text{ m}) + 414 \text{ ton} \cdot \text{m} + P(6 \text{ m}) = 0$$

$$V_B = \frac{414 \text{ ton} \cdot \text{m} + P(6 \text{ m})}{12 \text{ m}}$$

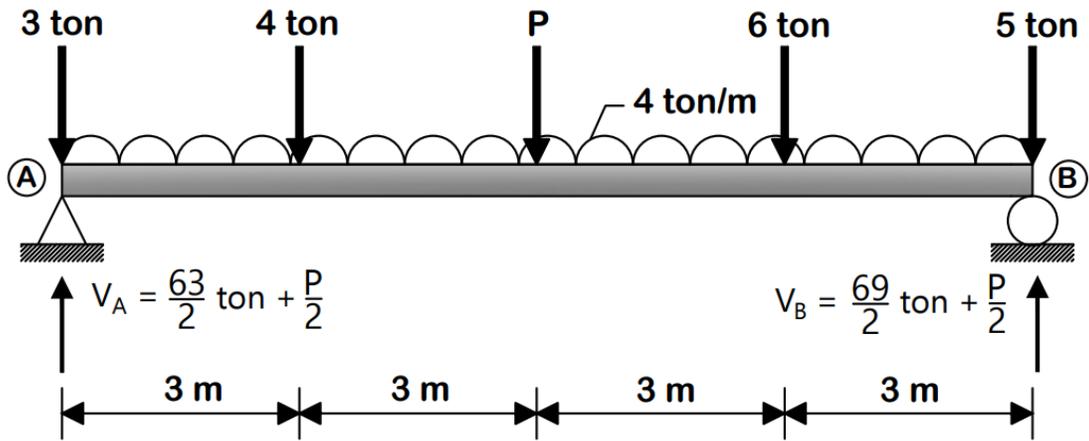
$$V_B = \frac{69}{2} \text{ ton} + \frac{P}{2}$$

$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$V_A + V_B - (4 \text{ ton/m})(12 \text{ m}) - 3 \text{ ton} - 4 \text{ ton} - P - 6 \text{ ton} - 5 \text{ ton} = 0$$

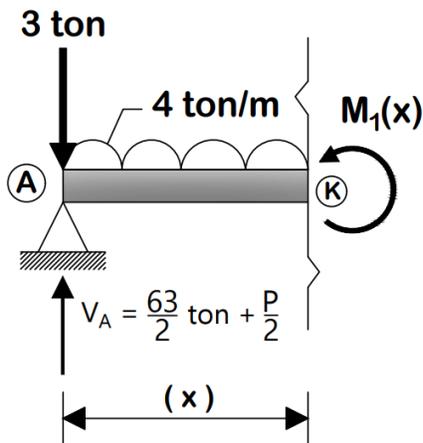
$$V_A + \frac{69}{2} \text{ ton} + \frac{P}{2} - 66 \text{ ton} - P = 0$$

$$V_A = \frac{63}{2} \text{ ton} + \frac{P}{2}$$



PASO ③: Calcular las ecuaciones del momento flexionante.

CORTE #1 $[0.0 \text{ m} \leq x \leq 3.0 \text{ m}]$



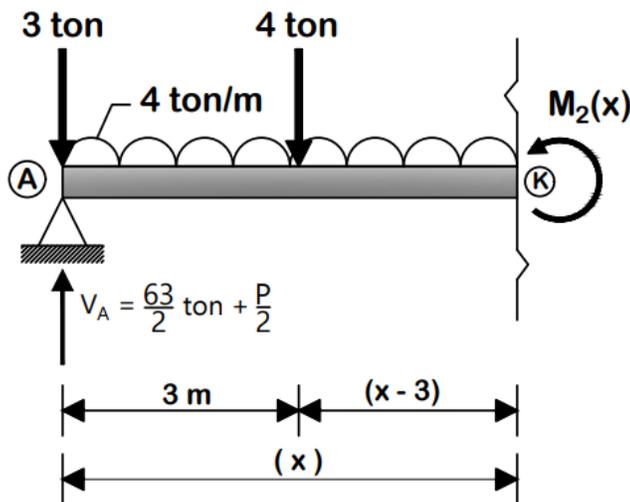
$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M_1(x) - \left(\frac{63}{2} + \frac{P}{2}\right)(x) + 3(x) + 4(x)\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$M_1(x) - \frac{63}{2}x - \frac{P}{2}x + 3x + 2x^2 = 0$$

$$M_1(x) = -2x^2 + \frac{57}{2}x + \frac{P}{2}x$$

CORTE #2 $[3.0 \text{ m} \leq x \leq 6.0 \text{ m}]$



$$\Sigma M_k = 0 \quad (\curvearrowright)$$

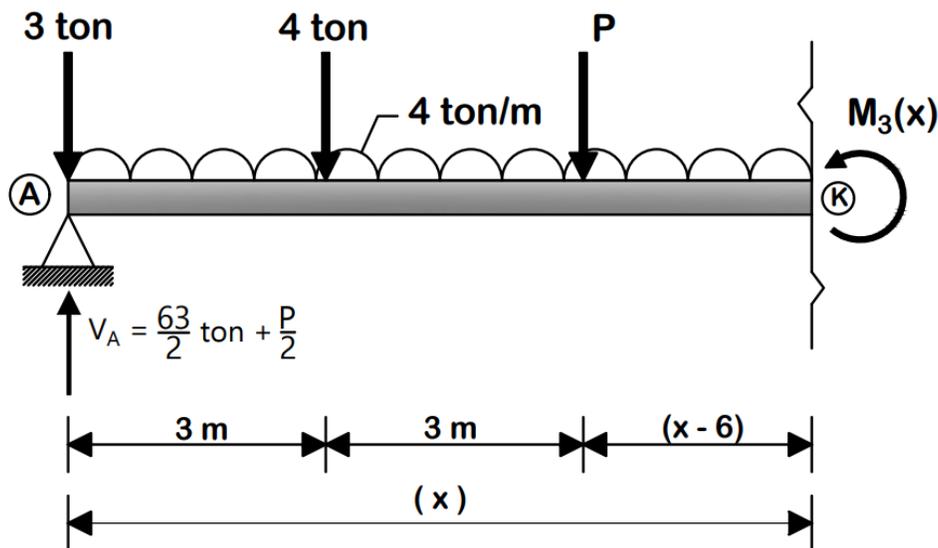
$$M_2(x) - \left(\frac{63}{2} + \frac{P}{2}\right)(x) + 3(x) + 4(x)\left(\frac{x}{2}\right) + 4(x-3) = 0$$

$$M_2(x) - \frac{63}{2}x - \frac{P}{2}x + 3x + 2x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$M_2(x) + 2x^2 - \frac{49}{2}x - \frac{P}{2}x - 12 = 0$$

$$M_2(x) = -2x^2 + \frac{49}{2}x + \frac{P}{2}x + 12$$

CORTE #3 [6.0 m ≤ x ≤ 9.0 m]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (\curvearrowright)$$

$$M_3(x) - \left(\frac{63}{2} + \frac{P}{2}\right)(x) + 3(x) + 4(x)\left(\frac{x}{2}\right) + 4[3 + (x-6)] + P(x-6) = 0$$

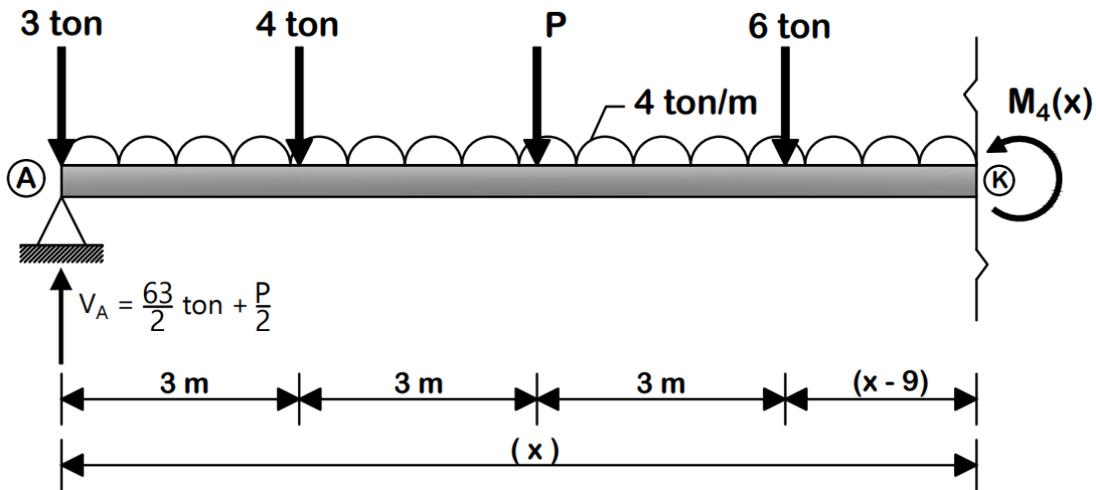
$$M_3(x) - \frac{63}{2}x - \frac{P}{2}x + 3x + 2x^2 + 4(x-3) + Px - 6P = 0$$

$$M_3(x) - \frac{63}{2}x - \frac{P}{2}x + 3x + 2x^2 + 4x - 12 + Px - 6P = 0$$

$$M_3(x) + 2x^2 - \frac{49}{2}x + \frac{P}{2}x - 6P - 12 = 0$$

$$M_3(x) = -2x^2 + \frac{49}{2}x - \frac{P}{2}x + 6P + 12$$

CORTE #4 [9.0 m ≤ x ≤ 12.0 m]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (\curvearrowleft)$$

$$M_4(x) - \left(\frac{63}{2} + \frac{P}{2}\right)(x) + 3(x) + 4(x)\left(\frac{x}{2}\right) + 4[6 + (x - 9)] + P[3 + (x - 9)] + 6(x - 9) = 0$$

$$M_4(x) - \frac{63}{2}x - \frac{P}{2}x + 3x + 2x^2 + 4(x - 3) + P(x - 6) + 6x - 54 = 0$$

$$M_4(x) - \frac{63}{2}x - \frac{P}{2}x + 3x + 2x^2 + 4x - 12 + Px - 6P + 6x - 54 = 0$$

$$M_4(x) + 2x^2 - \frac{37}{2}x + \frac{P}{2}x - 6P - 66 = 0$$

$$M_4(x) = -2x^2 + \frac{37}{2}x - \frac{P}{2}x + 6P + 66$$

PASO ④: Calcular el desplazamiento vertical utilizando la ecuación (2.14)

$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \left[\frac{\partial M(x)}{\partial P} \right]}{EI} dx$$

$$\Delta = \underbrace{\int_0^3 \frac{M_1(x) \left[\frac{\delta M_1(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx}_{\text{Integral 1}} + \underbrace{\int_3^6 \frac{M_2(x) \left[\frac{\delta M_2(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx}_{\text{Integral 2}} + \underbrace{\int_6^9 \frac{M_3(x) \left[\frac{\delta M_3(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx}_{\text{Integral 3}} + \underbrace{\int_9^{12} \frac{M_4(x) \left[\frac{\delta M_4(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx}_{\text{Integral 4}}$$

Integral 1

$$\underbrace{\int_0^3 \frac{M_1(x) \left[\frac{\delta M_1(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx}_{\text{Integral 1}}$$

$$M_1(x) = -2x^2 + \frac{57}{2}x + \frac{P}{2}x$$

$$\frac{\partial M_1(x)}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

$$\int_0^3 \frac{M_1(x) \left[\frac{\delta M_1(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx = \int_0^3 \frac{\left(-2x^2 + \frac{57}{2}x + \frac{P}{2}x\right) \left(\frac{x}{2}\right)}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^3 \left(-x^3 + \frac{57}{4}x^2 + \frac{P}{4}x^2\right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[-\frac{x^4}{4} + \left(\frac{57}{4}\right) \left(\frac{x^3}{3}\right) + \left(\frac{P}{4}\right) \left(\frac{x^3}{3}\right) \right] = \left[-\frac{x^4}{4EI} + \frac{19x^3}{4EI} + \frac{Px^3}{12EI} \right]$$

$$= \left[-\frac{(3)^4}{4EI} + \frac{19(3)^3}{4EI} + \frac{P(3)^3}{12EI} \right] - [0] = -\frac{81}{4EI} + \frac{513}{4EI} + \frac{9}{4EI}P$$

$$\int_0^3 \underbrace{\frac{M_1(x) \left[\frac{\delta M_1(x)}{\delta P} \right]}{EI}}_{\text{Integral 1}} dx = \frac{108}{EI} + \frac{9}{4EI} P$$

Integral 2

$$\int_3^6 \underbrace{\frac{M_2(x) \left[\frac{\delta M_2(x)}{\delta P} \right]}{EI}}_{\text{Integral 2}} dx$$

$$M_2(x) = -2x^2 + \frac{49}{2}x + \frac{P}{2}x + 12$$

$$\frac{\partial M_2(x)}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

$$\int_3^6 \frac{M_2(x) \left[\frac{\delta M_2(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx = \int_3^6 \frac{\left(-2x^2 + \frac{49}{2}x + \frac{P}{2}x + 12 \right) \left(\frac{x}{2} \right)}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_3^6 \left(-x^3 + \frac{49}{4}x^2 + \frac{P}{4}x^2 + 6x \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[-\frac{x^4}{4} + \left(\frac{49}{4} \right) \left(\frac{x^3}{3} \right) + \left(\frac{P}{4} \right) \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{6x^2}{2} \right]_3^6 = \left[-\frac{x^4}{4EI} + \frac{49x^3}{12EI} + \frac{Px^3}{12EI} + \frac{3x^2}{EI} \right]$$

$$= \left[-\frac{(6)^4}{4EI} + \frac{49(6)^3}{12EI} + \frac{P(6)^3}{12EI} + \frac{3(6)^2}{EI} \right] - \left[-\frac{(3)^4}{4EI} + \frac{49(3)^3}{12EI} + \frac{P(3)^3}{12EI} + \frac{3(3)^2}{EI} \right]$$

$$= \left[-\frac{324}{EI} + \frac{882}{EI} + \frac{18}{EI}P + \frac{108}{EI} \right] - \left[-\frac{81}{4EI} + \frac{441}{4EI} + \frac{9}{4EI}P + \frac{27}{EI} \right]$$

$$= \left[\frac{666}{EI} + \frac{18}{EI}P \right] - \left[\frac{117}{EI} + \frac{9}{4EI}P \right] = \frac{549}{EI} + \frac{63}{4EI}P$$

$$\int_3^6 \frac{M_2(x) \left[\frac{\delta M_2(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx = \frac{549}{EI} + \frac{63}{4EI} P$$

Integral 2

Integral 3

$$\int_6^9 \frac{M_3(x) \left[\frac{\delta M_3(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx$$

Integral 3

$$M_3(x) = -2x^2 + \frac{49}{2}x - \frac{P}{2}x + 6P + 12$$

$$\frac{\partial M_3(x)}{\partial P} = -\frac{x}{2} + 6$$

$$\int_6^9 \frac{M_3(x) \left[\frac{\delta M_3(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx = \int_6^9 \frac{\left(-2x^2 + \frac{49}{2}x - \frac{P}{2}x + 6P + 12 \right) \left(-\frac{x}{2} + 6 \right)}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_6^9 \left(x^3 - \frac{49}{4}x^2 + \frac{P}{4}x^2 - 3Px - 6x - 12x^2 + 147x - 3Px + 36P + 72 \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_6^9 \left(x^3 - \frac{97}{4}x^2 + \frac{P}{4}x^2 + 141x - 6Px + 36P + 72 \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{x^4}{4} - \left(\frac{97}{4} \right) \left(\frac{x^3}{3} \right) + \left(\frac{P}{4} \right) \left(\frac{x^3}{3} \right) + (141) \left(\frac{x^2}{2} \right) - (6P) \left(\frac{x^2}{2} \right) + 36Px + 72x \right]$$

$$= \left[\frac{x^4}{4EI} - \frac{97x^3}{12EI} + \frac{Px^3}{12EI} + \frac{141x^2}{2EI} - \frac{3Px^2}{EI} + \frac{36Px}{EI} + \frac{72x}{EI} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{(9)^4}{4EI} - \frac{97(9)^3}{12EI} + \frac{P(9)^3}{12EI} + \frac{141(9)^2}{2EI} - \frac{3P(9)^2}{EI} + \frac{36P(9)}{EI} + \frac{72(9)}{EI} \right] \\
&\quad - \left[\frac{(6)^4}{4EI} - \frac{97(6)^3}{12EI} + \frac{P(6)^3}{12EI} + \frac{141(6)^2}{2EI} - \frac{3P(6)^2}{EI} + \frac{36P(6)}{EI} + \frac{72(6)}{EI} \right] \\
&= \left[\frac{6561}{4EI} - \frac{23571}{4EI} + \frac{243}{4EI}P + \frac{11421}{2EI} - \frac{243}{EI}P + \frac{324}{EI}P + \frac{648}{EI} \right] \\
&\quad - \left[\frac{324}{EI} - \frac{1746}{EI} + \frac{18}{EI}P + \frac{2538}{EI} - \frac{108}{EI}P + \frac{216}{EI}P + \frac{432}{EI} \right] \\
&= \left[\frac{2106}{EI} + \frac{567}{4EI}P \right] - \left[\frac{1548}{EI} + \frac{126}{EI}P \right] = \frac{558}{EI} + \frac{63}{4EI}P
\end{aligned}$$

$$\int_6^9 \underbrace{\frac{M_3(x) \left[\frac{\delta M_3(x)}{\partial P} \right]}{EI}}_{\text{Integral 3}} = \frac{558}{EI} + \frac{63}{4EI}P$$

Integral 4

$$\int_9^{12} \underbrace{\frac{M_4(x) \left[\frac{\delta M_4(x)}{\delta P} \right]}{EI}}_{\text{Integral 4}} dx$$

$$M_4(x) = -2x^2 + \frac{37}{2}x - \frac{P}{2}x + 6P + 66$$

$$\frac{\partial M_4(x)}{\partial P} = -\frac{x}{2} + 6$$

$$\int_9^{12} \frac{M_4(x) \left[\frac{\delta M_4(x)}{\delta P} \right]}{EI} dx = \int_9^{12} \frac{\left(-2x^2 + \frac{37}{2}x - \frac{P}{2}x + 6P + 66 \right) \left(-\frac{x}{2} + 6 \right)}{EI} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{EI} \int_9^{12} \left(x^3 - \frac{37}{4}x^2 + \frac{P}{4}x^2 - 3Px - 33x - 12x^2 + 111x - 3Px + 36P \right. \\
&\quad \left. + 396 \right) dx \\
&= \frac{1}{EI} \int_9^{12} \left(x^3 - \frac{85}{4}x^2 + \frac{P}{4}x^2 + 78x - 6Px + 36P + 396 \right) dx \\
&= \frac{1}{EI} \int_9^{12} \left[\frac{x^4}{4} - \left(\frac{85}{4} \right) \left(\frac{x^3}{3} \right) + \left(\frac{P}{4} \right) \left(\frac{x^3}{3} \right) + (78) \left(\frac{x^2}{2} \right) - (6P) \left(\frac{x^2}{2} \right) + 36Px + 396x \right] \\
&= \int_9^{12} \left[\frac{x^4}{4EI} - \frac{85x^3}{12EI} + \frac{Px^3}{12EI} + \frac{39x^2}{EI} - \frac{3Px^2}{EI} + \frac{36Px}{EI} + \frac{396x}{EI} \right] \\
&= \left[\frac{(12)^4}{4EI} - \frac{85(12)^3}{12EI} + \frac{P(12)^3}{12EI} + \frac{39(12)^2}{EI} - \frac{3P(12)^2}{EI} + \frac{36P(12)}{EI} + \frac{396(12)}{EI} \right] \\
&\quad - \left[\frac{(9)^4}{4EI} - \frac{85(9)^3}{12EI} + \frac{P(9)^3}{12EI} + \frac{39(9)^2}{EI} - \frac{3P(9)^2}{EI} + \frac{36P(9)}{EI} + \frac{396(9)}{EI} \right] \\
&= \left[\frac{5184}{EI} - \frac{12240}{EI} + \frac{144}{EI}P + \frac{5616}{EI} - \frac{432}{EI}P + \frac{432}{EI}P + \frac{4752}{EI} \right] \\
&\quad - \left[\frac{6561}{4EI} - \frac{20655}{4EI} + \frac{243}{4EI}P + \frac{3159}{EI} - \frac{243}{EI}P + \frac{324}{EI}P + \frac{3564}{EI} \right] \\
&= \left[\frac{3312}{EI} + \frac{144}{EI}P \right] - \left[\frac{6399}{2EI} + \frac{567}{4EI}P \right] = \frac{225}{2EI} + \frac{9}{4EI}P
\end{aligned}$$

$$\boxed{
\int_9^{12} \underbrace{\frac{M_4(x) \left[\frac{\delta M_4(x)}{\partial P} \right]}{EI}}_{\text{Integral 4}} = \frac{225}{2EI} + \frac{9}{4EI}P
}$$

Suma de los resultados de las integrales:

$$\Delta = \int_0^3 \underbrace{\frac{M_1(x) \left[\frac{\delta M_1(x)}{\delta P} \right]}{EI}}_{\text{Integral 1}} dx + \int_3^6 \underbrace{\frac{M_2(x) \left[\frac{\delta M_2(x)}{\delta P} \right]}{EI}}_{\text{Integral 2}} dx + \int_6^9 \underbrace{\frac{M_3(x) \left[\frac{\delta M_3(x)}{\delta P} \right]}{EI}}_{\text{Integral 3}} dx + \int_9^{12} \underbrace{\frac{M_4(x) \left[\frac{\delta M_4(x)}{\delta P} \right]}{EI}}_{\text{Integral 4}} dx$$

$$\Delta = \left(\frac{108}{EI} + \frac{9}{4EI} P \right) + \left(\frac{549}{EI} + \frac{63}{4EI} P \right) + \left(\frac{558}{EI} + \frac{63}{4EI} P \right) + \left(\frac{225}{2EI} + \frac{9}{4EI} P \right)$$

$$\Delta = \frac{2655}{2EI} + \frac{36}{EI} P$$

PASO ⑤: Sustituir el valor de (P), pero en este ejercicio el valor de P no es igual a cero (0), ya que en el punto donde se está calculando el desplazamiento vertical no se colocó una carga puntual ficticia, si no que ya se encontraba una carga puntal de 7 ton, por lo tanto, el valor de (P) es igual a siete toneladas.

$$P = 7$$

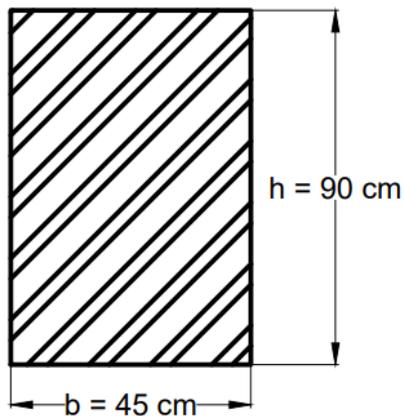
$$\Delta = \frac{2655}{2EI} + \frac{36}{EI} P$$

$$\Delta = \frac{2655}{2EI} + \frac{36}{EI} (7)$$

$$\Delta = \frac{3159}{2EI}$$

PASO ⑦: Cálculo del momento de inercia de la sección transversal de la viga.

SECCION TRANSVERSAL



$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$b = 45 \text{ cm} = 0.45 \text{ m}$$

$$h = 90 \text{ cm} = 0.9 \text{ m}$$

$$I = \frac{(0.45 \text{ m})(0.9 \text{ m})^3}{12}$$

$$I = \frac{2187}{80000} \text{ m}^4$$

VALOR DEL MOMENTO DE INERCIA CONSIDERANDO EL FACTOR DE AGRIETAMIENTO

$$I = 0.5(I_g)$$

$$I_g = \frac{2187}{80000} \text{ m}^4$$

$$I = 0.5 \left(\frac{2187}{80000} \text{ m}^4 \right)$$

$$I = 0.01366875 \text{ m}^4$$

PASO ⑧: Cálculo del módulo de elasticidad de la viga.

Se tiene un concreto Clase I de agregado calizo que tiene un $f'c = 350 \text{ Kg/cm}^2$. Las Normas Técnicas Complementarias de la Ciudad de México establecen que, para un Concreto Clase I de agregado calizo, el módulo de elasticidad se calcula con la siguiente formula:

$$E = 14,000\sqrt{f'c}$$

$$E = 14,000\sqrt{350 \text{ kg/cm}^2} = 261,916.0171 \text{ kg/cm}^2$$

Convertir el módulo de elasticidad de (kg/cm^2) a (ton/m^2) .

$$E = 261,916.0171 \text{ kg/cm}^2 \left(\frac{1 \text{ ton}}{1000 \text{ kg}} \right) \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right)^2$$

$$E = 2,619,160.171 \text{ ton/m}^2$$

PASO ⑨: Cálculo del valor real del desplazamiento vertical a la mitad del claro de la viga.

$$\Delta_z = \frac{3159}{2EI} = \frac{3159}{2(0.01366875)(2,619,160.171)}$$
$$\Delta_z = 0.0441 \text{ m}$$

PASO ⑩: Se considera la deformación a largo plazo que viene especificada en las Normas Técnicas Complementarias.

DEFORMACIÓN A LARGO PLAZO

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_z(1 + \alpha)$$

Para este ejercicio se considera la cuantía de acero en compresión igual a cero ($P' = 0$).

Cálculo del valor de alfa (α):

$$\alpha = \frac{2}{1 + 50P'} = \frac{2}{1 + 50(0)} = 2$$

Calculo de la deformación total:

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_z(1 + \alpha)$$

$$\Delta_z = 0.0441 \text{ m}$$

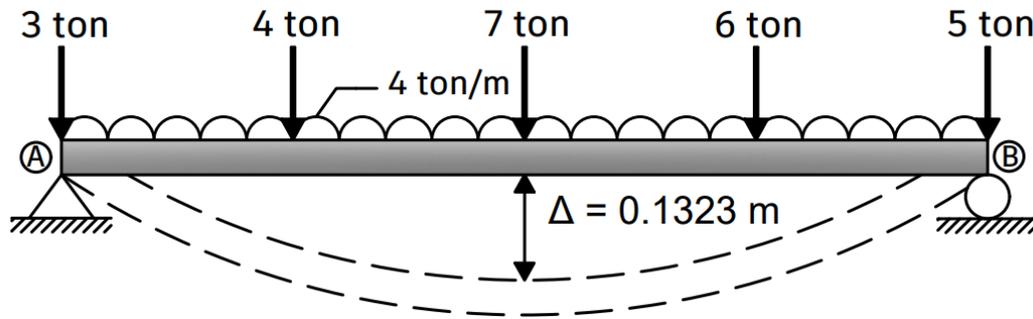
$$\alpha = 2$$

$$\Delta_{TOTAL} = 0.0441 \text{ m}(1 + 2)$$

Resultado:

Deformación Total

$$\Delta_{TOTAL} = 0.1323 \text{ m}$$



Con este ultimo ejercicio se da por concluido el método del Teorema de Castigliano para calcular desplazamientos verticales, como ya se sabe, existen dos ecuaciones diferentes para calcular un desplazamiento con el Teorema de Castigliano, la primera ecuación es la 2.13 y la segunda ecuación es la 2.14.

El objetivo de los ejercicios resueltos es que el lector aprenda a calcular un desplazamiento utilizando las dos diferentes ecuaciones que se vieron, de igual manera, se intenta a través de los ejercicios, formar un criterio propio, para que el lector pueda crear sus propias conclusiones sobre cuál de las dos ecuaciones se le facilitó o le gustó más para calcular un desplazamiento. En lo personal, se prefiere calcular un desplazamiento con la ecuación 2.14, ya que con esta ecuación se facilita el cálculo de un desplazamiento en vigas con cargas complejas y no demora mucho tiempo el procedimiento matemático que conlleva el uso de esta ecuación.

Una desventaja de la ecuación 2.13, es que para calcular la energía interna de deformación elástica, se debe de utilizar la tabla 2.1 y habrá vigas con cargas complejas que ocasionarán que en los diagramas de momento flexionante de estas vigas no formen figuras geométricas que estén presentes en la tabla 2.1, por esta razón, se emplea el principio de superposición, para que una viga con varias cargas complejas se descomponga en diferentes vigas con una sola carga y así cada viga tendrá un diagrama de momento flexionante que forme una figura geométrica que se encuentre en la tabla 2.1 y así sea más fácil de calcular la energía interna de deformación elástica, para que después se calcule el desplazamiento deseado.

Este podría ser el único inconveniente que se tiene con la ecuación 2.13, ya que al calcular la energía de deformación aplicando el principio de superposición y calculando cada diagrama de momento flexionante de cada una de las vigas que se tienen al descomponer la viga original, se tendrá un procedimiento matemático tardado y tedioso.

Lo antes mencionado vendría siendo un criterio personal sobre la diferencia de cada ecuación, pero cada lector puede tener sus propios criterios y generar sus respectivas conclusiones personales respecto a el procedimiento matemático que se hace con cada una de las dos diferentes ecuaciones, cada lector tendrá sus propios criterios.

Se pasará a explicar y a resolver ejercicios utilizando otro método para calcular un desplazamiento vertical, este método se le conoce como "Principio del Trabajo Virtual" y es el método que más se utiliza en la práctica.

2.8 PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

2.8.1 DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN

Este método es el más general y utilizado en la práctica, ya que se puede utilizar para calcular desplazamientos verticales en cualquier tipo de estructura y también por su facilidad de aprender y utilizar porque en comparación con otros métodos no requiere mucho la labor numérica, es decir, no requiere muchos cálculos y tiempo para conocer el valor de un desplazamiento vertical.

Con el principio del trabajo virtual no solo se pueden calcular desplazamientos verticales si no también ángulos de rotación, pero en la presente tesis solo se enfocará en explicar el procedimiento matemático para calcular desplazamientos verticales.

El principio del trabajo virtual establece que para conocer el valor de un desplazamiento vertical causada por los momentos flexionantes, es decir, una deformación por flexión en cualquier punto de un elemento estructural tipo viga, se debe de multiplicar la ecuación del momento flexionante $[M(x)]$ producido por las cargas reales por una ecuación de momento flexionante $[m(x)]$ producido por una carga virtual unitaria colocada en el punto donde se desea conocer un desplazamiento y en dirección de la deformación buscada, este producto de ecuaciones de momentos se divide entre el producto del módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I) del elemento estructural y toda esta ecuación se integra de 0 a la longitud (L) de la viga que se esté resolviendo.

Todo lo mencionado se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \cdot m(x)}{EI} dx \quad (2.15)$$

Donde:

$\Delta =$ *Desplazamiento vertical.*

$M(x) =$ *Ecuación del momento flexionante producido por las cargas reales.*

$m(x) =$ *Ecuación del momento flexionante producido por una carga virtual unitaria.*

$E =$ *Módulo de elasticidad del elemento estructural.*

$I =$ *Inercia de la sección transversal del elemento estructural.*

El principio del trabajo virtual es algo similar al Teorema de Castigliano solo que en lugar de colocar una carga ficticia (P) en el punto donde se desea conocer un desplazamiento, se coloca una carga unitaria ficticia y después se calcula la ecuación de momento flexionante producido por esta misma carga virtual y se multiplica por la ecuación del momento flexionante del mismo sistema estructural (viga) pero ahora con las cargas reales.

Por ejemplo, si se tiene una viga de longitud (L) y es sometida a una carga uniformemente repartida (w) y se desea conocer cuál es el valor del desplazamiento o deformación por flexión a la mitad del claro de la viga, el principio del trabajo virtual establece que para calcular un desplazamiento, se debe de tener dos ecuaciones del momento flexionante, una ecuación del momento producida por las cargas "REALES" y la otra ecuación producida por una carga virtual "UNITARIA" colocada en el punto donde se desea conocer dicho desplazamiento o deformación.

Por lo tanto, el principio del trabajo virtual nos dice que se deben de tener dos sistemas de cargas, es decir, dos vigas con una carga diferente. Una viga debe de tener las cargas reales y la otra viga debe de tener una carga virtual unitaria colocada en el punto donde se desea conocer un desplazamiento, la carga unitaria deberá ir en dirección de la deformación buscada, esto se puede ilustrar de la siguiente manera:

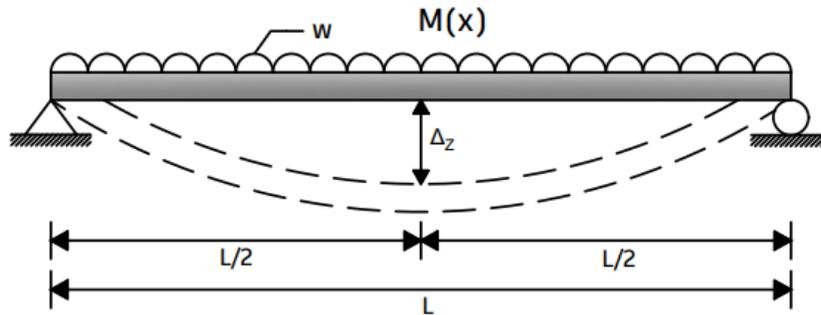


Figura (a): Viga con una carga "REAL"

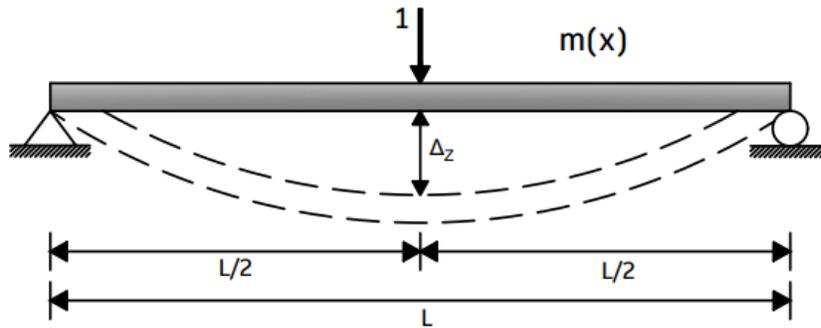


Figura (b): Viga con una carga "VIRTUAL UNITARIA" colocada en el punto donde se desea conocer su desplazamiento.

Figura 2.4. Principio del trabajo virtual

Si se calcula la ecuación del momento flexionante de la viga de la Figura (a), se obtendrá la ecuación del momento flexionante $[M(x)]$ producido por las cargas reales y si se calcula la ecuación del momento flexionante de la viga de la Figura (b), se obtendrá la ecuación del momento flexionante $[m(x)]$ producido por una carga virtual unitaria. Ya teniendo estas dos ecuaciones de momento flexionante, se pasa a sustituirlas en la ecuación 2.15.

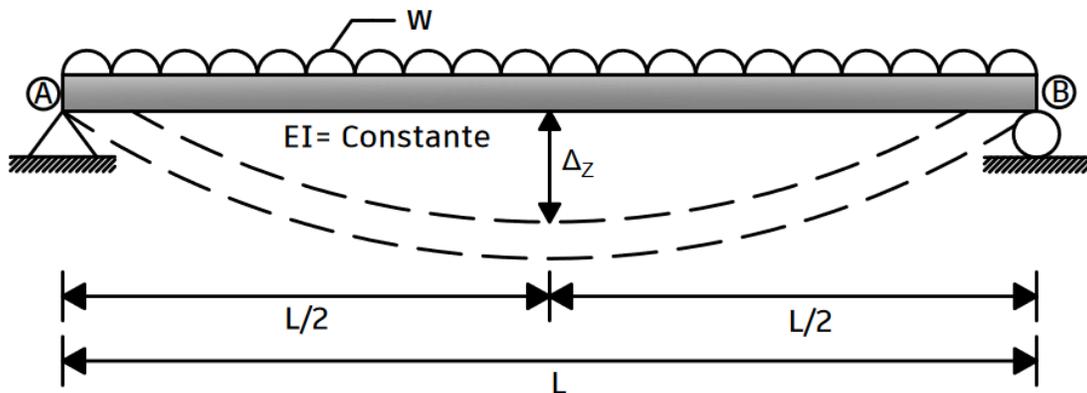
$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \cdot m(x)}{EI} dx$$

Después de sustituir las ecuaciones del momento flexionante, se resuelve la ecuación y el resultado será el valor del desplazamiento causado por los momentos flexionantes. Como se puede observar, el principio del trabajo virtual no es complejo ni difícil de aprender a utilizarlo, solo se deben de tener conocimientos de cálculo integral y saber cómo calcular ecuaciones de momentos flexionantes.

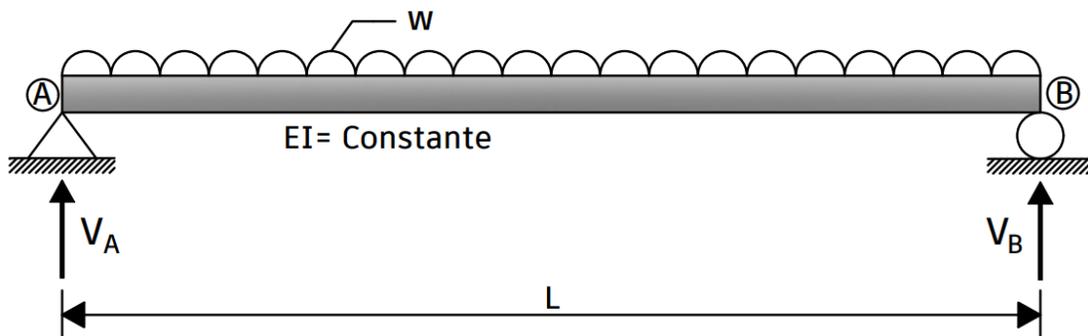
Si aun no ha quedado claro lo antes mencionado y no se entendió como se calcula un desplazamiento vertical utilizando el principio del trabajo virtual, se pasará a

resolver ejercicios empleando este método, esto con el fin de que el lector pueda aprender el procedimiento para calcular un desplazamiento utilizando el "Principio del Trabajo Virtual".

Ejercicio 2.18: Calcular la deformación vertical causada por los momentos flexionantes a la mitad del claro de una viga que tiene una longitud (L) y que es sometida a una carga uniformemente repartida (w), para calcular este desplazamiento se utilizará la ecuación (2.15), el módulo de elasticidad y el momento de inercia es constante en toda la longitud de la viga.



PASO ①: Calcular las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_A = 0 \quad (+)$$

$$-V_B(L) + w(L) \left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$-V_B(L) + \frac{wL^2}{2} = 0$$

$$V_B = \frac{wL^2}{2L}$$

$$V_B = \frac{wL}{2}$$

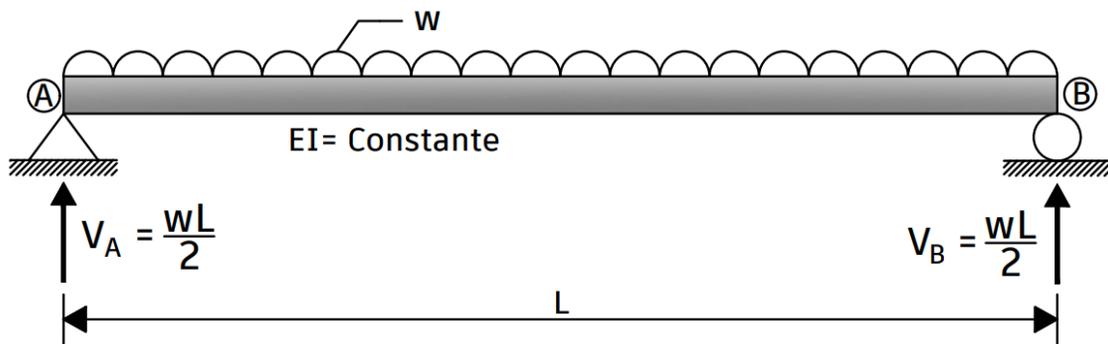
$$\Sigma F_Y = 0 \quad (+)$$

$$V_A + V_B - w(L) = 0$$

$$V_A + \frac{wL}{2} - wL = 0$$

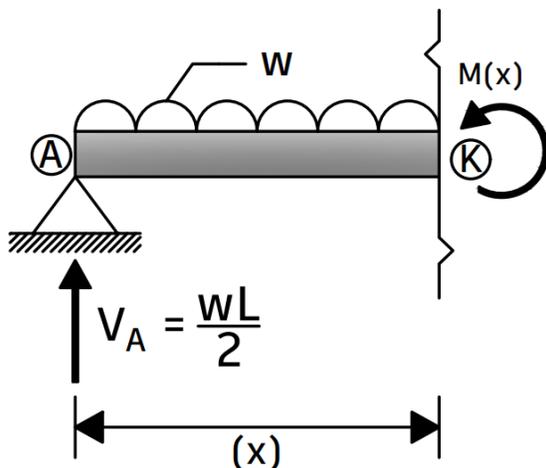
$$V_A - \frac{wL}{2} = 0$$

$$V_A = \frac{wL}{2}$$



PASO ②: Calcular la ecuación del momento flexionante $[M(x)]$ producido por las cargas reales de la viga.

CORTE #1 $[0 \leq x \leq L]$



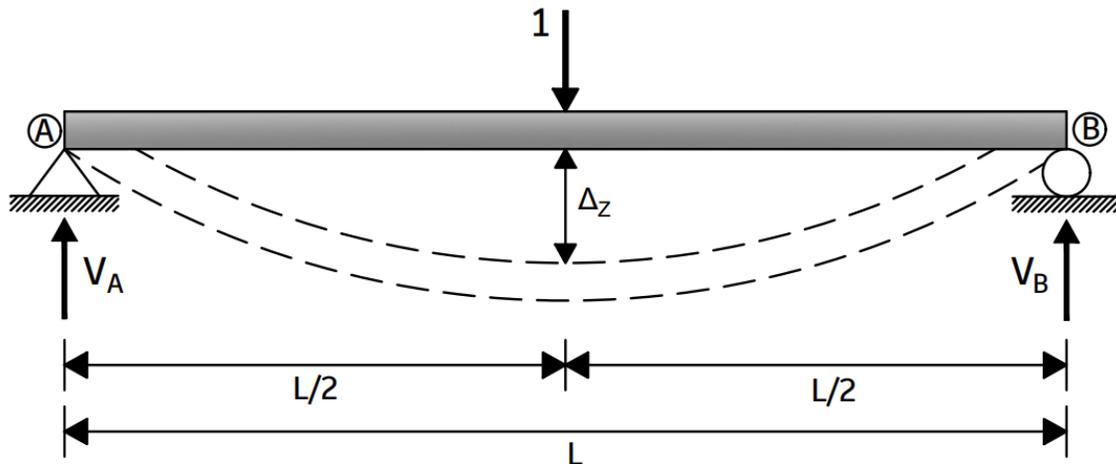
$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$M(x) - \frac{wL}{2}(x) + w(x) \left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$M(x) - \frac{wL}{2}x + \frac{wx^2}{2} = 0$$

$$M(x) = -\frac{wx^2}{2} + \frac{wL}{2}x$$

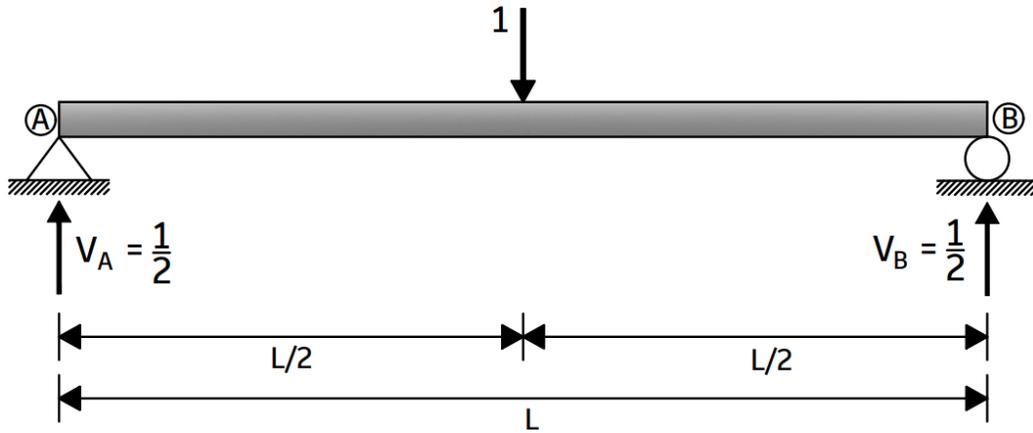
PASO ③: Colocar una carga virtual puntual unitaria en la viga, en el punto donde se desea conocer el desplazamiento vertical. Se coloca la carga unitaria en la dirección que se crea que será la dirección del desplazamiento.



PASO ④: Calcular las reacciones en los apoyos de la viga que tiene la carga virtual unitaria con las ecuaciones del equilibrio.

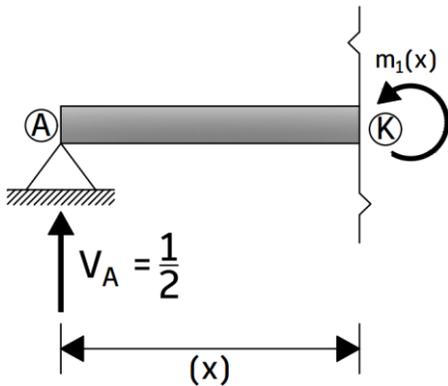
$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0 \quad \curvearrowright (+) \\ -V_B(L) + 1\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\ V_B(L) &= \frac{L}{2} \\ V_B &= \frac{L}{2L} \\ V_B &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_Y &= 0 \quad \uparrow (+) \\ V_A + V_B - 1 &= 0 \\ V_A + \frac{1}{2} - 1 &= 0 \\ V_A - \frac{1}{2} &= 0 \\ V_A &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



PASO ⑤: Calcular las ecuaciones de los momentos flexionantes $[m(x)]$ de la viga que tiene una carga virtual unitaria ficticia.

CORTE #1 $\left[0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right]$

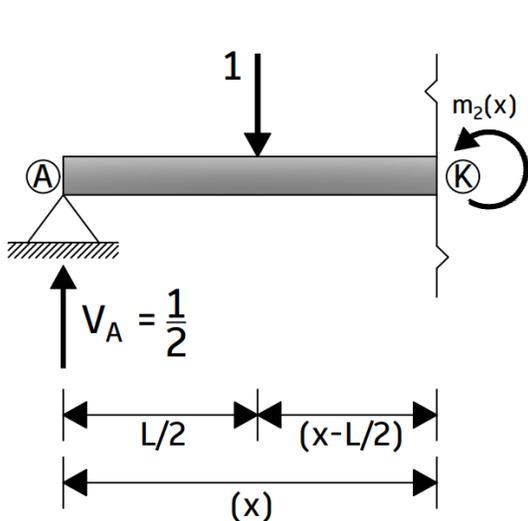


$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$m_1(x) - \frac{1}{2}(x) = 0$$

$$m_1(x) = \frac{1}{2}(x)$$

CORTE #2 $\left[\frac{L}{2} \leq x \leq L \right]$



$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$m_2(x) - \frac{1}{2}(x) + 1\left(x - \frac{L}{2}\right) = 0$$

$$m_2(x) - \frac{1}{2}x + x - \frac{L}{2} = 0$$

$$m_2(x) + \frac{1}{2}x - \frac{L}{2} = 0$$

$$m_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{L}{2}$$

PASO ⑥: Calcular el desplazamiento utilizando la ecuación del principio del trabajo virtual (ecuación 2.15).

$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \cdot m(x)}{EI} dx$$

<i>Ecuación del Momento flexionante [M(x)] de la viga con cargas REALES</i>	<i>Ecuaciones de los Momentos flexionantes [m(x)] de la viga con una carga UNITARIA FICTICIA</i>	
$0 \leq x \leq L$	$0 \leq x \leq L/2$	$L/2 \leq x \leq L$
$M(x) = -\frac{wx^2}{2} + \frac{wL}{2}x$	$m_1(x) = \frac{1}{2}x$	$m_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{L}{2}$

$$\Delta_z = \int_0^{L/2} \frac{M(x) \cdot m_1(x)}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{M(x) \cdot m_2(x)}{EI} dx$$

$$\Delta_z = \int_0^{L/2} \frac{\left(-\frac{wx^2}{2} + \frac{wL}{2}x\right) \left(\frac{1}{2}x\right)}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{\left(-\frac{wx^2}{2} + \frac{wL}{2}x\right) \left(-\frac{1}{2}x + \frac{L}{2}\right)}{EI} dx$$

$$\Delta_z = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(-\frac{wx^3}{4} + \frac{wLx^2}{4}\right) dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(\frac{wx^3}{4} - \frac{wLx^2}{4} - \frac{wLx^2}{4} + \frac{wL^2x}{4}\right) dx$$

$$\Delta_z = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \underbrace{\left(-\frac{wx^3}{4} + \frac{wLx^2}{4}\right)}_{\Delta_1} dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \underbrace{\left(\frac{wx^3}{4} - \frac{wLx^2}{2} + \frac{wL^2x}{4}\right)}_{\Delta_2} dx$$

Cálculo de Δ_1

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(-\frac{wx^3}{4} + \frac{wLx^2}{4}\right) dx$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left[-\frac{w}{4} \left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{wL}{4} \left(\frac{x^3}{3}\right)\right] = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left[-\frac{w}{16}x^4 + \frac{wL}{12}x^3\right]$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{w}{16} \left(\frac{L}{2}\right)^4 + \frac{wL}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^3 \right] - \left[-\frac{w}{16} (0)^4 + \frac{wL}{12} (0)^3 \right] \right\}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{wL^4}{256} + \frac{wL^4}{96} \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{5wL^4}{768} \right]$$

$$\Delta_1 = \frac{5wL^4}{768EI}$$

Cálculo de Δ_2

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(\frac{wx^3}{4} - \frac{wLx^2}{2} + \frac{wL^2x}{4} \right) dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left[\frac{w}{4} \left(\frac{x^4}{4}\right) - \frac{wL}{2} \left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{wL^2}{4} \left(\frac{x^2}{2}\right) \right] = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left[\frac{w}{16} x^4 - \frac{wL}{6} x^3 + \frac{wL^2}{8} x^2 \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{w}{16} (L)^4 - \frac{wL}{6} (L)^3 + \frac{wL^2}{8} (L)^2 \right] - \left[\frac{w}{16} \left(\frac{L}{2}\right)^4 - \frac{wL}{6} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{wL^2}{8} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] \right\}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{wL^4}{16} - \frac{wL^4}{6} + \frac{wL^4}{8} \right) - \left(\frac{wL^4}{256} - \frac{wL^4}{48} + \frac{wL^4}{32} \right) \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{wL^4}{48} \right) - \left(\frac{11wL^4}{768} \right) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{5wL^4}{768} \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{5wL^4}{768EI}$$

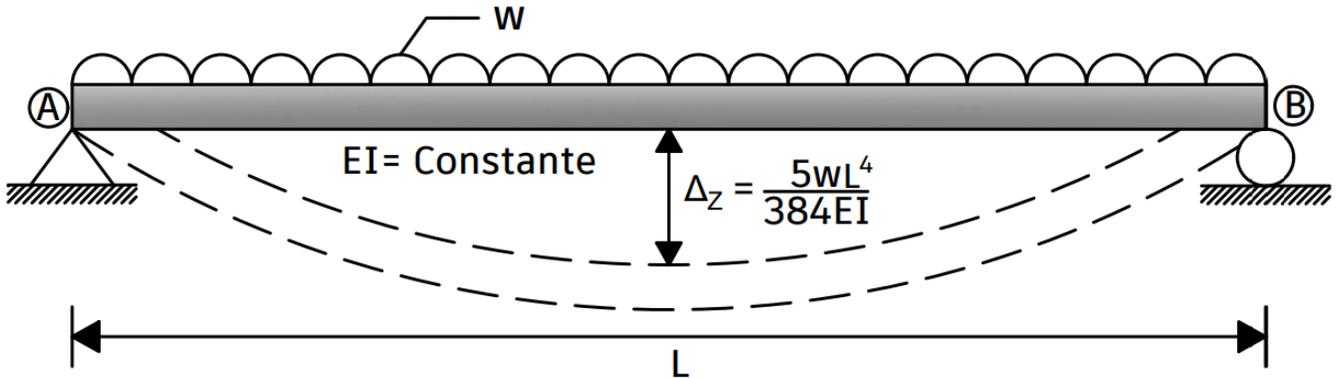
CÁLCULO DE Δ_z

$$\Delta_z = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{5wL^4}{768EI} + \frac{5wL^4}{768EI}$$

Resultado:

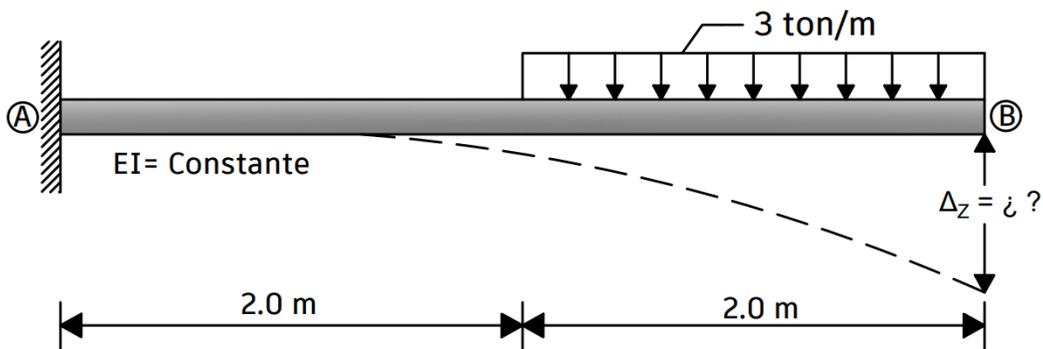
Desplazamiento Vertical

$$\Delta_z = \frac{5wL^4}{384EI}$$

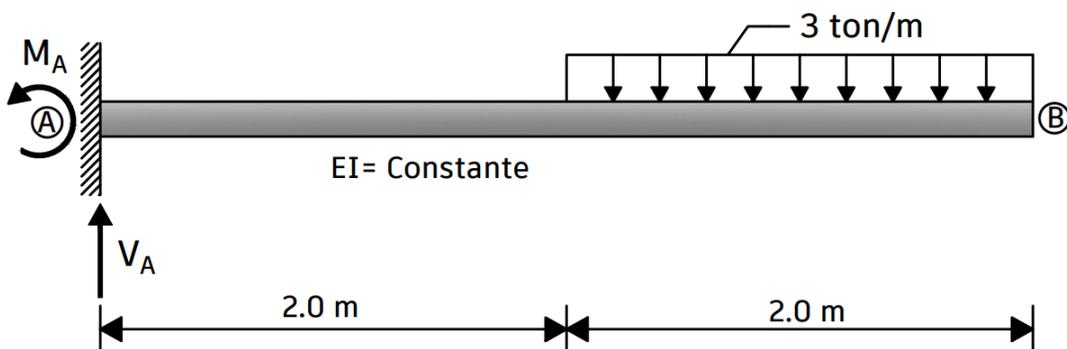


Como se pudo observar en este ejercicio utilizando el método del principio del trabajo virtual, el procedimiento de este método es más rápido y fácil de utilizar y aprender a cómo utilizarlo, pero para que quede más claro se seguirá realizando ejercicios.

Ejercicio 2.19: Calcular la deformación vertical causada por los momentos flexionantes utilizando la ecuación (2.15) al extremo de una viga empotrada como se muestra continuación, se supone que la sección transversal es constante por lo que también lo es el valor del módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I).



PASO ①: Calcular las reacciones en el apoyo empotrado con las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_A = 0 \quad (+)$$

$$-M_A + 3 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (2 \text{ m}) \left(\frac{2 \text{ m}}{2} + 2 \text{ m} \right) = 0$$

$$-M_A + 3 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (2 \text{ m}) (3 \text{ m}) = 0$$

$$-M_A + 18 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

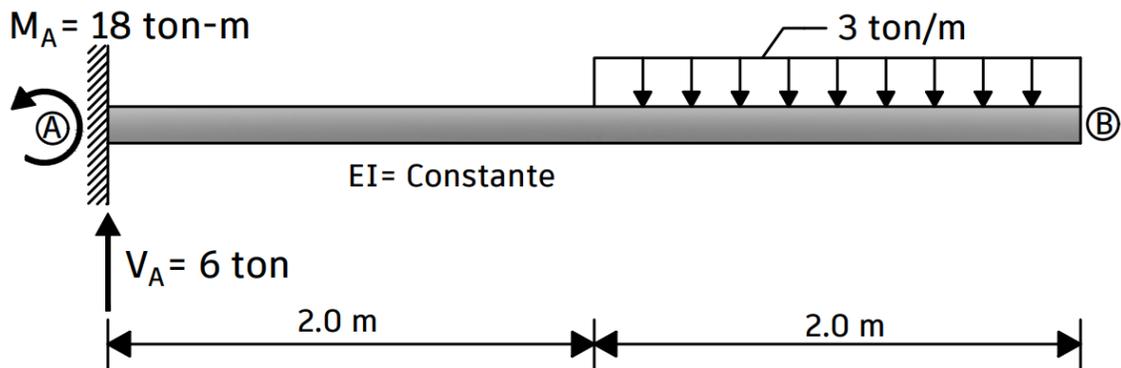
$$M_A = 18 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$V_A - 3 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (2 \text{ m}) = 0$$

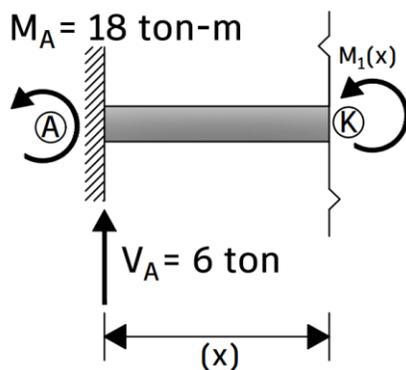
$$V_A - 6 \text{ ton} = 0$$

$$V_A = 6 \text{ ton}$$



PASO ②: Calcular las ecuaciones de los momentos flexionantes $[M(x)]$ producidos por las cargas reales.

CORTE #1 $[0 \text{ m} \leq x \leq 2.0 \text{ m}]$

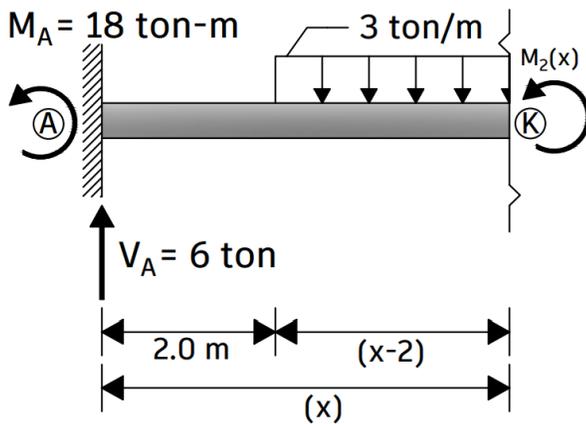


$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$M_1(x) + 18 - 6(x) = 0$$

$$M_1(x) = 6x - 18$$

CORTE #2 [2.0 m ≤ x ≤ 4.0 m]



$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$M_2(x) + 18 - 6(x) + 3(x-2) \left(\frac{x-2}{2} \right) = 0$$

$$M_2(x) + 18 - 6x + \frac{3}{2}(x-2)^2 = 0$$

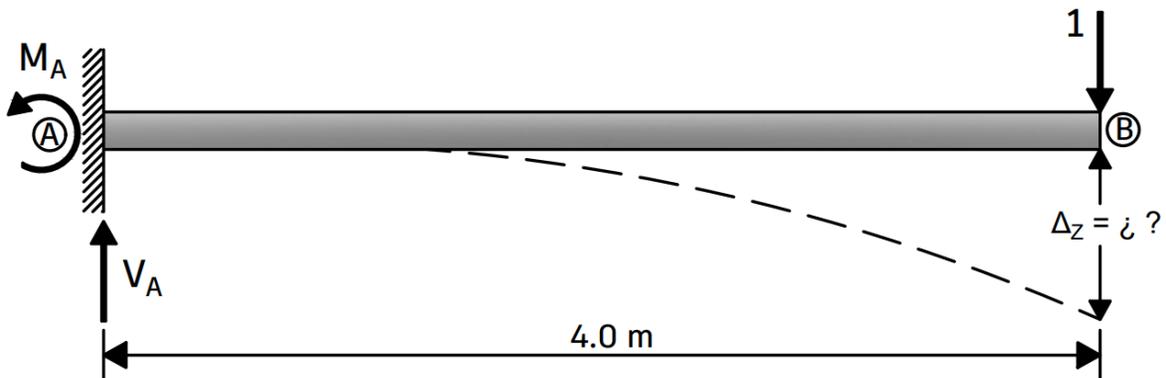
$$M_2(x) + 18 - 6x + \frac{3}{2}(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$M_2(x) + 18 - 6x + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$M_2(x) + \frac{3}{2}x^2 - 12x + 24 = 0$$

$$M_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 12x - 24$$

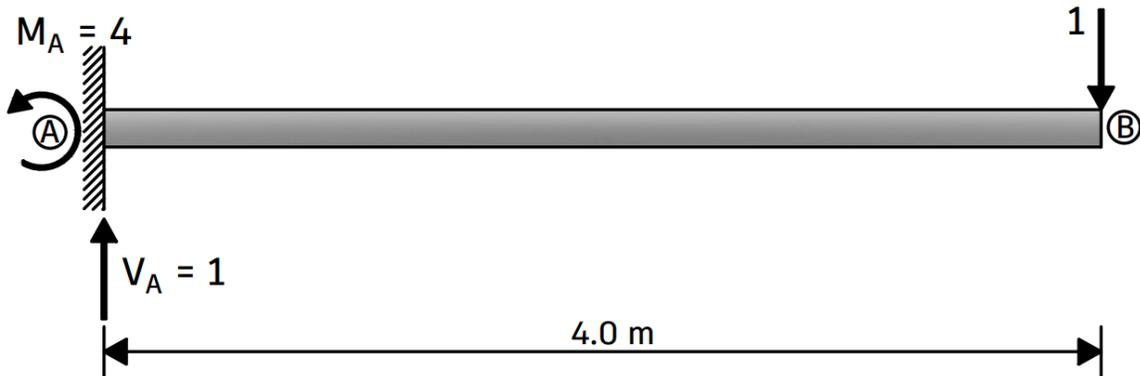
PASO ③: Colocar una carga virtual puntual unitaria en la viga, en el punto donde se desea conocer el desplazamiento vertical. Se coloca la carga unitaria en la dirección que se crea que será la dirección del desplazamiento.



PASO ④: Calcular las reacciones en el apoyo empotrado con las ecuaciones del equilibrio de la viga que tiene la carga virtual unitaria.

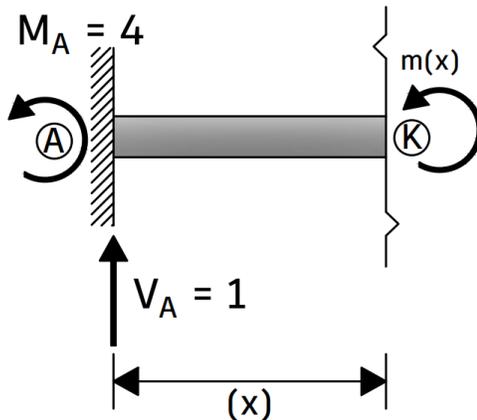
$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0 \quad (+) \\ -M_A + 1(4) &= 0 \\ M_A &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_Y &= 0 \quad \uparrow (+) \\ V_A - 1 &= 0 \\ V_A &= 1 \end{aligned}$$



PASO ⑤: Calcular la ecuación del momento flexionante $[m(x)]$ de la viga que tiene una carga virtual unitaria ficticia.

CORTE #1 $[0 \text{ m} \leq x \leq 4.0 \text{ m}]$



$$\begin{aligned} \Sigma M_K &= 0 \quad (+) \\ m(x) + 4 - 1(x) &= 0 \\ m(x) &= x - 4 \end{aligned}$$

PASO ⑥: Calcular el desplazamiento utilizando la ecuación del principio del trabajo virtual, la cual es la ecuación (2.15).

$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \cdot m(x)}{EI} dx$$

<i>Ecuaciones de los Momentos flexionantes [M(x)] de la viga con cargas REALES</i>	<i>Ecuación del Momento flexionante [m(x)] de la viga con una carga UNITARIA FICTICIA</i>
0 m ≤ x ≤ 2.0 m	0 m ≤ x ≤ 4.0 m
M₁(x) = 6x - 18	m(x) = x - 4
2.0 m ≤ x ≤ 4.0 m	
M₂(x) = -$\frac{3}{2}$x² + 12x - 24	

$$\Delta_z = \int_0^2 \frac{M_1(x) \cdot m(x)}{EI} dx + \int_2^4 \frac{M_2(x) \cdot m(x)}{EI} dx$$

$$\Delta_z = \int_0^2 \underbrace{\frac{(6x - 18)(x - 4)}{EI}}_{\Delta_1} dx + \int_2^4 \underbrace{\frac{\left(-\frac{3}{2}x^2 + 12x - 24\right)(x - 4)}{EI}}_{\Delta_2} dx$$

Cálculo de Δ₁

$$\Delta_1 = \int_0^2 \frac{(6x - 18)(x - 4)}{EI} dx$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^2 (6x^2 - 24x - 18x + 72) dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 (6x^2 - 42x + 72) dx$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \left[6 \left(\frac{x^3}{3} \right) - 42 \left(\frac{x^2}{2} \right) + 72(x) \right]_0^2 = \frac{1}{EI} [2x^3 - 21x^2 + 72x]_0^2$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \{ [2(2)^3 - 21(2)^2 + 72(2)] - [2(0)^3 - 21(0)^2 + 72(0)] \}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} [16 - 84 + 144] = \frac{1}{EI} [76]$$

$$\Delta_1 = \frac{76}{EI}$$

Cálculo de Δ_2

$$\Delta_2 = \int_2^4 \frac{\left(-\frac{3}{2}x^2 + 12x - 24\right)(x - 4)}{EI} dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \int_2^4 \left(-\frac{3}{2}x^3 + 12x^2 - 24x + 6x^2 - 48x + 96\right) dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \int_2^4 \left(-\frac{3}{2}x^3 + 18x^2 - 72x + 96\right) dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{x^4}{4}\right) + 18 \left(\frac{x^3}{3}\right) - 72 \left(\frac{x^2}{2}\right) + 96(x) \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3x^4}{8} + 6x^3 - 36x^2 + 96x \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{3(4)^4}{8} + 6(4)^3 - 36(4)^2 + 96(4) \right] - \left[-\frac{3(2)^4}{8} + 6(2)^3 - 36(2)^2 + 96(2) \right] \right\}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} [(-96 + 384 - 576 + 384) - (-6 + 48 - 144 + 192)]$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} [(96) - (90)] = \frac{1}{EI} [6]$$

$$\Delta_2 = \frac{6}{EI}$$

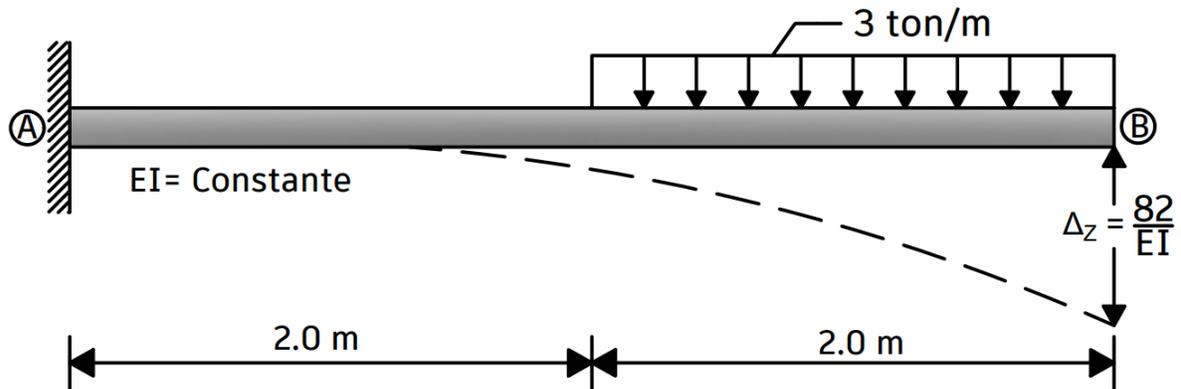
CÁLCULO DE Δ_z

$$\Delta_z = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{76}{EI} + \frac{6}{EI}$$

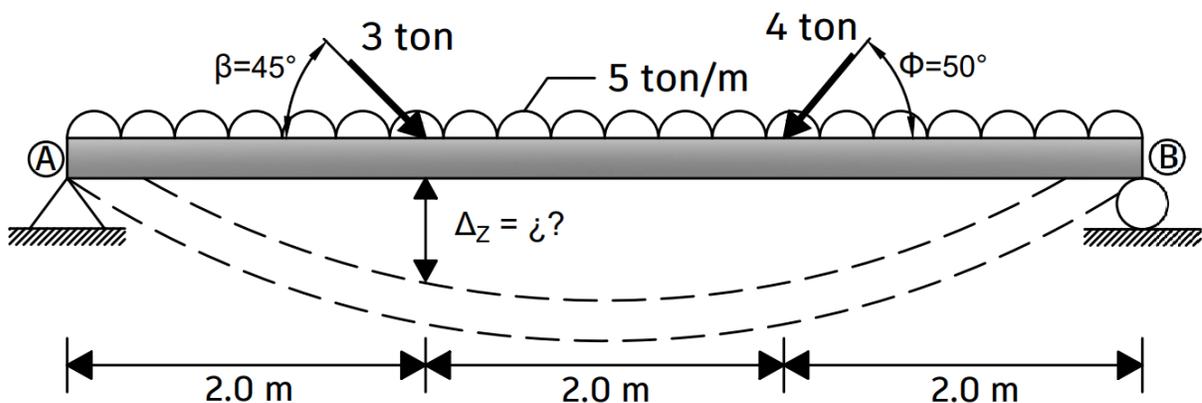
Resultado:

Desplazamiento Vertical

$$\Delta_z = \frac{82}{EI}$$

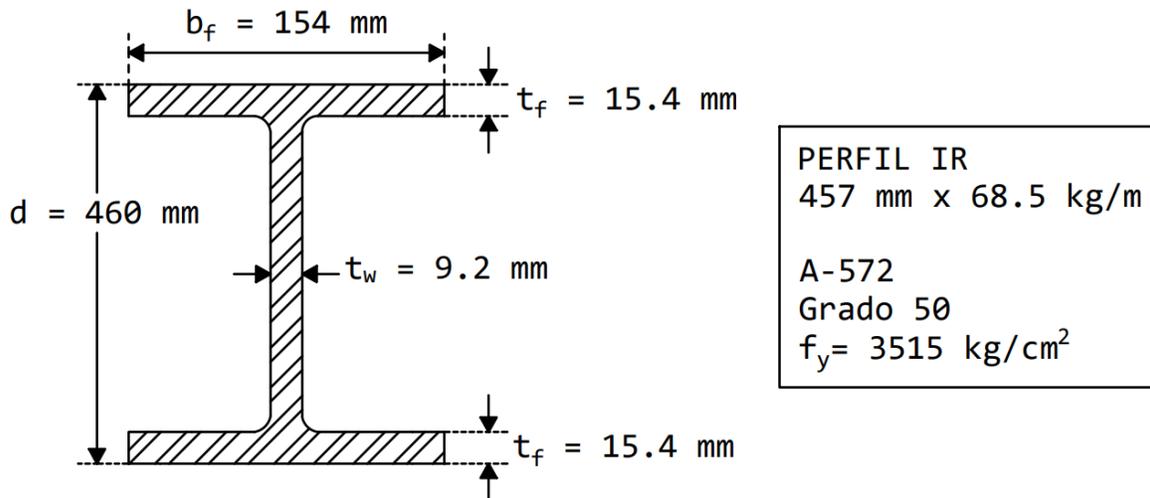


Ejercicio 2.20: Se tiene una viga de acero que tiene una longitud de 6 metros que es sometida a una carga uniformemente repartida de 5 ton/m y a dos cargas puntuales inclinadas, la primera carga de 3 toneladas tiene un ángulo de inclinación de 45° y la segunda carga de 4 toneladas tiene un ángulo de inclinación de 50° . Calcular el desplazamiento vertical a los dos metros de la viga donde se encuentra la primera carga puntual inclinada utilizando la ecuación (2.15).

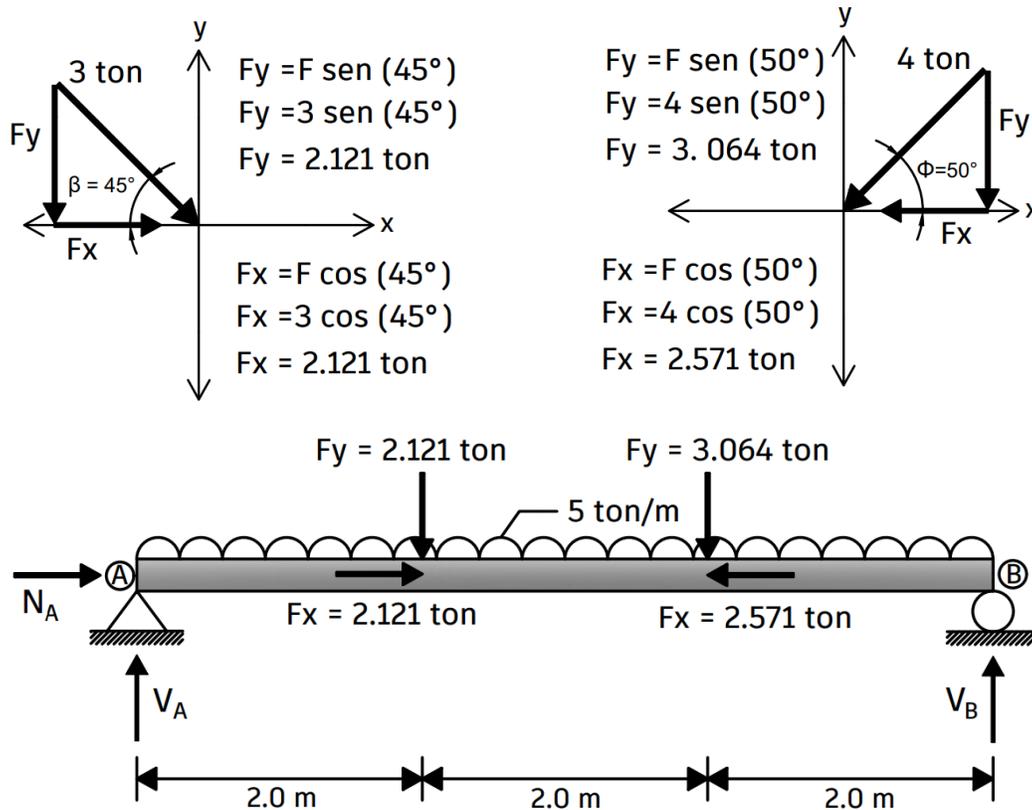


La viga de acero es un Perfil IR A-572 Grado 50 de (457 mm x 68.5 kg/m).

Las dimensiones de la sección transversal del perfil de acero IR de 457 mm x 68.5 kg/m son las siguientes:



Antes de pasara a calcular las reacciones en los apoyos, se descomponen las fuerzas diagonales en sus componentes [Fx y Fy].



PASO ①: Calcular las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.

$$-V_B(6 \text{ m}) + 5 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (6 \text{ m}) \left(\frac{6 \text{ m}}{2} \right) + 2.121 \text{ ton}(2 \text{ m}) + 3.064 \text{ ton}(4 \text{ m}) = 0$$

$$-V_B(6 \text{ m}) + 90 \text{ ton} \cdot \text{m} + 4.242 \text{ ton} \cdot \text{m} + 12.256 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$-V_B(6\text{ m}) + 106.498\text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$V_B = \frac{106.498\text{ ton} \cdot \text{m}}{6\text{ m}}$$

$$V_B = 17.75\text{ ton}$$

$$\Sigma F_Y = 0 \uparrow (+)$$

$$V_A + V_B - 5 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (6\text{ m}) - 2.121\text{ ton} - 3.064\text{ ton} = 0$$

$$V_A + 17.75\text{ ton} - 30\text{ ton} - 2.121\text{ ton} - 3.064\text{ ton} = 0$$

$$V_A - 17.435\text{ ton} = 0$$

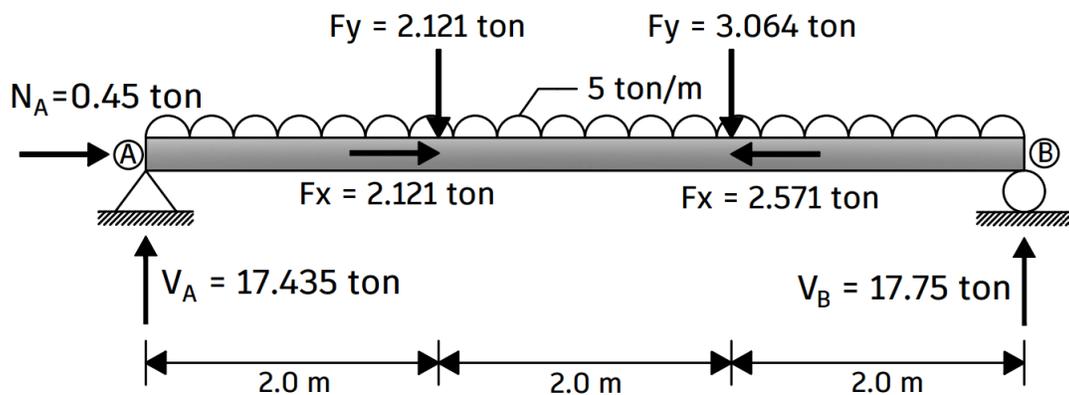
$$V_A = 17.435\text{ ton}$$

$$\Sigma F_X = 0 \rightarrow (+)$$

$$N_A + 2.121\text{ ton} - 2.571\text{ ton} = 0$$

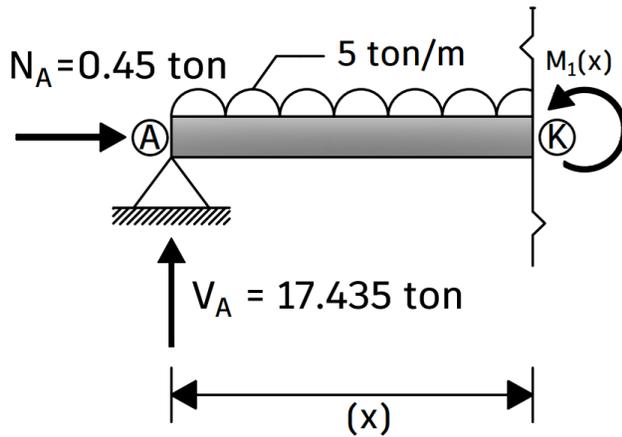
$$N_A - 0.45\text{ ton} = 0$$

$$N_A = 0.45\text{ ton}$$



PASO ②: Calcular las ecuaciones de los momentos flexionantes $[M(x)]$ producidos por las cargas reales de la viga. Se despreciarán las fuerzas en "x" ya que estas fuerzas $[F_x]$ no producen un momento flexionante, por lo cual, no afectará el cálculo del momento flexionante.

CORTE #1 [0 m ≤ x ≤ 2.0 m]



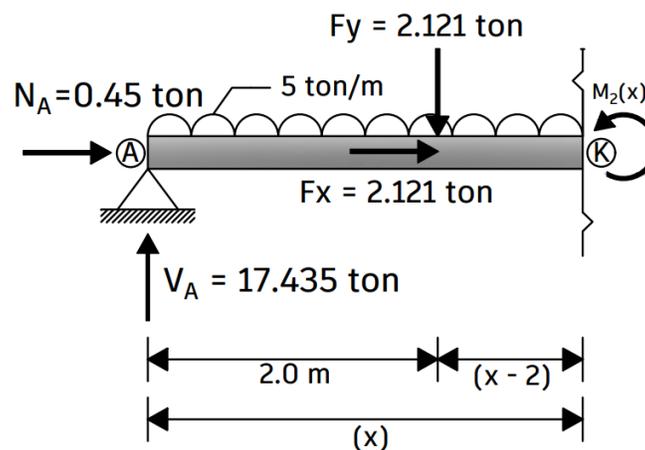
$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$M_1(x) + 5(x) \left(\frac{x}{2}\right) - 17.435(x) = 0$$

$$M_1(x) + \frac{5}{2}x^2 - 17.435x = 0$$

$$M_1(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 17.435x$$

CORTE #2 [2.0 m ≤ x ≤ 4.0 m]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

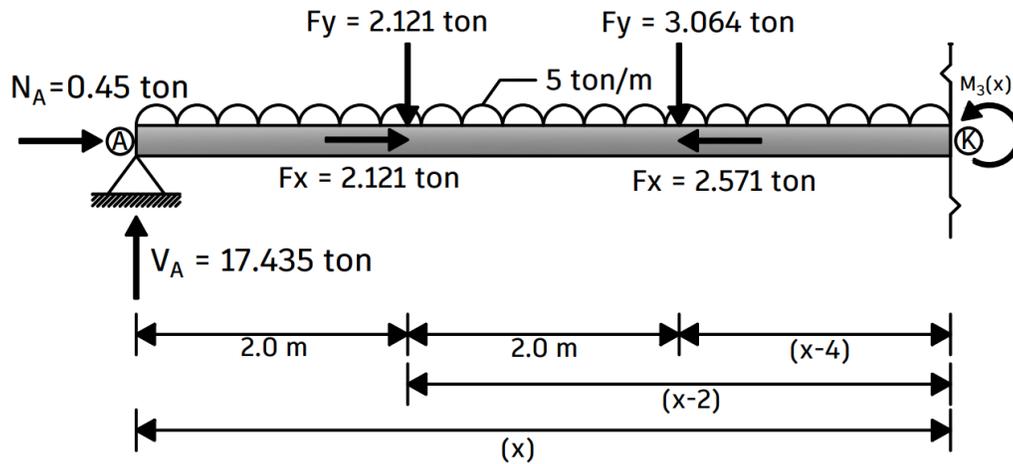
$$M_2(x) + 5(x) \left(\frac{x}{2}\right) - 17.435(x) + 2.121(x - 2) = 0$$

$$M_2(x) + \frac{5}{2}x^2 - 17.435x + 2.121x - 4.242 = 0$$

$$M_2(x) + \frac{5}{2}x^2 - 15.314x - 4.242 = 0$$

$$M_2(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 15.314x + 4.242$$

CORTE #3 [4.0 m ≤ x ≤ 6.0 m]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (\circlearrowleft)$$

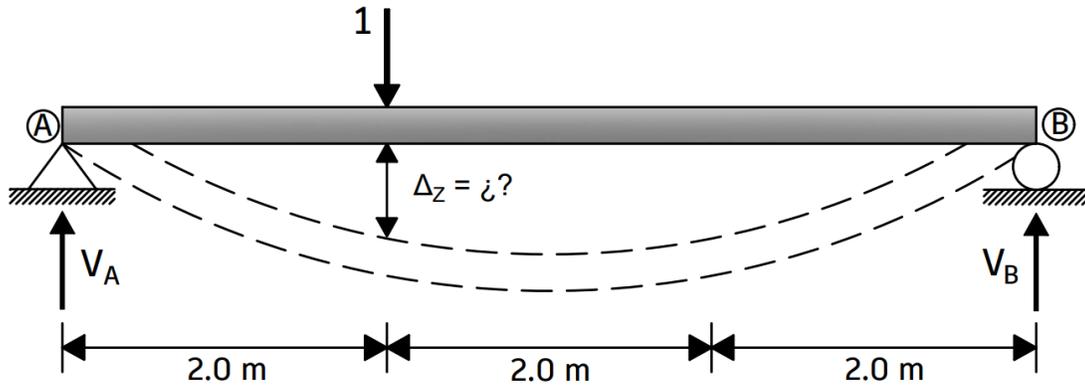
$$M_3(x) + 5(x) \left(\frac{x}{2} \right) - 17.435(x) + 2.121(x - 2) + 3.064(x - 4) = 0$$

$$M_3(x) + \frac{5}{2}x^2 - 17.435x + 2.121x - 4.242 + 3.064x - 12.256 = 0$$

$$M_3(x) + \frac{5}{2}x^2 - 12.25x - 16.498 = 0$$

$$M_3(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 12.25x + 16.498$$

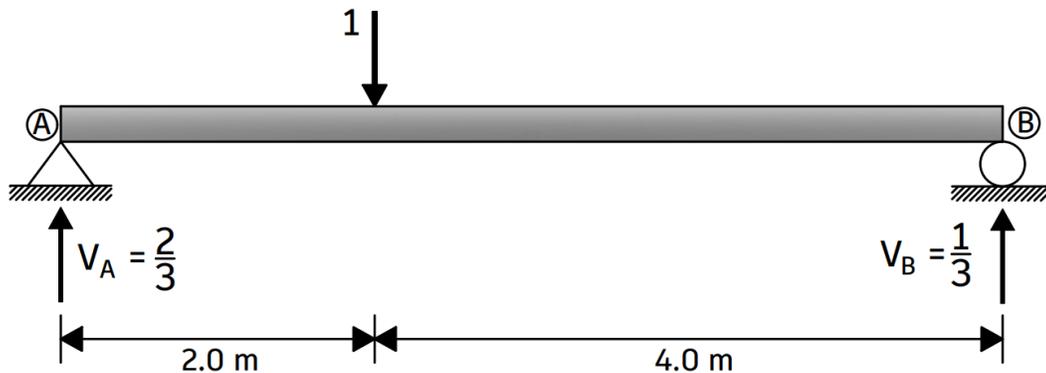
PASO ③: Colocar una carga virtual puntual unitaria en la viga, en el punto donde se desea conocer el desplazamiento vertical. La carga unitaria deberá ir colocada en la dirección que se crea que será la dirección del desplazamiento.



PASO ④): Calcular las reacciones en los apoyos de la viga que tiene la carga virtual unitaria con las ecuaciones del equilibrio.

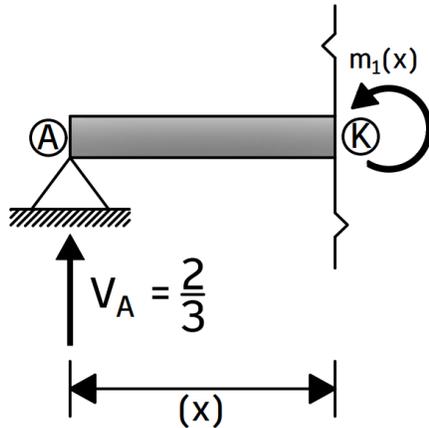
$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0 \quad (+) \\ -V_B(6 \text{ m}) + 1(2 \text{ m}) &= 0 \\ V_B(6 \text{ m}) &= 2 \text{ m} \\ V_B &= \frac{2 \text{ m}}{6 \text{ m}} \\ V_B &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_Y &= 0 \quad \uparrow (+) \\ V_A + V_B - 1 &= 0 \\ V_A + \frac{1}{3} - 1 &= 0 \\ V_A - \frac{2}{3} &= 0 \\ V_A &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



PASO ⑤: Calcular las ecuaciones de los momentos flexionantes $[m(x)]$ de la viga que tiene una carga virtual unitaria ficticia.

CORTE #1 $[0 \text{ m} \leq x \leq 2.0 \text{ m}]$

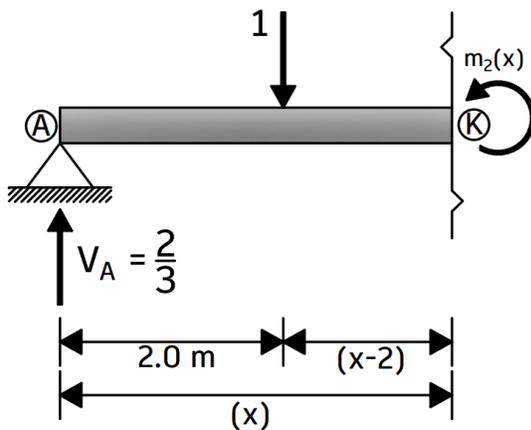


$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$m_1(x) - \frac{2}{3}(x) = 0$$

$$m_1(x) = \frac{2}{3}x$$

CORTE #2 $[2.0 \text{ m} \leq x \leq 6.0 \text{ m}]$



$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$m_2(x) - \frac{2}{3}(x) + 1(x - 2) = 0$$

$$m_2(x) - \frac{2}{3}x + x - 2 = 0$$

$$m_2(x) + \frac{1}{3}x - 2 = 0$$

$$m_2(x) = -\frac{1}{3}x + 2$$

PASO ⑥: Calcular el desplazamiento utilizando la ecuación del principio del trabajo virtual (ecuación 2.15).

$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \cdot m(x)}{EI} dx$$

<i>Ecuaciones de los Momentos flexionantes [M(x)] de la viga con cargas REALES</i>	<i>Ecuaciones de los Momentos flexionantes [m(x)] de la viga con una carga UNITARIA FICTICIA</i>
0 m ≤ x ≤ 2.0 m	0 m ≤ x ≤ 2.0 m
$M_1(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 17.435x$	$m_1(x) = \frac{2}{3}x$
2.0 m ≤ x ≤ 4.0 m	2.0 m ≤ x ≤ 6.0 m
$M_2(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 15.314x + 4.242$	$m_2(x) = -\frac{1}{3}x + 2$
4.0 m ≤ x ≤ 6.0 m	
$M_3(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 12.25x + 16.498$	

$$\Delta_z = \int_0^2 \frac{M_1(x) \cdot m_1(x)}{EI} dx + \int_2^4 \frac{M_2(x) \cdot m_2(x)}{EI} dx + \int_4^6 \frac{M_3(x) \cdot m_2(x)}{EI} dx$$

$$\Delta_z = \frac{1}{EI} \int_0^2 \underbrace{M_1(x) \cdot m_1(x)}_{\Delta_1} dx + \frac{1}{EI} \int_2^4 \underbrace{M_2(x) \cdot m_2(x)}_{\Delta_2} dx + \frac{1}{EI} \int_4^6 \underbrace{M_3(x) \cdot m_2(x)}_{\Delta_3} dx$$

Cálculo de Δ_1

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^2 M_1(x) \cdot m_1(x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{5}{2}x^2 + 17.435x \right) \left(\frac{2}{3}x \right) dx$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{5}{3}x^3 + \frac{3487}{300}x^2 \right) dx = \frac{1}{EI} \left[-\frac{5}{3} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{3487}{300} \left(\frac{x^3}{3} \right) \right]$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{5x^4}{12} + \frac{3487x^3}{900} \right]$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{5(2)^4}{12} + \frac{3487(2)^3}{900} \right] - \left[-\frac{5(0)^4}{12} + \frac{3487(0)^3}{900} \right] \right\}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{20}{3} + \frac{6974}{225} \right] - [0] = \frac{1}{EI} \left[\frac{5474}{225} \right]$$

$$\Delta_1 = \frac{5474}{225EI}$$

Cálculo de Δ_2

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \int_2^4 M_2(x) \cdot m_2(x) dx = \frac{1}{EI} \int_2^4 \left(-\frac{5}{2}x^2 + 15.314x + 4.242 \right) \left(-\frac{1}{3}x + 2 \right) dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \int_2^4 \left(\frac{5}{6}x^3 - \frac{7657}{1500}x^2 - \frac{707}{500}x - 5x^2 + \frac{7657}{250}x + \frac{2121}{250} \right) dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \int_2^4 \left(\frac{5}{6}x^3 - 10.105x^2 + 29.214x + \frac{2121}{250} \right) dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{6} \left(\frac{x^4}{4} \right) - 10.104 \left(\frac{x^3}{3} \right) + 29.214 \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{2121}{250} (x) \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{5x^4}{24} - \frac{10.105x^3}{3} + \frac{29.214x^2}{2} + \frac{2121x}{250} \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{5(4)^4}{24} - \frac{10.105(4)^3}{3} + \frac{29.214(4)^2}{2} + \frac{2121(4)}{250} \right] - \left[\frac{5(2)^4}{24} - \frac{10.105(2)^3}{3} + \frac{29.214(2)^2}{2} + \frac{2121(2)}{250} \right] \right\}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{160}{3} - 215.57 + \frac{29214}{125} + \frac{4242}{125} \right) - \left(\frac{10}{3} - 26.946 + \frac{14607}{250} + \frac{2121}{125} \right) \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} [(105.41) - (51.78)] = \frac{1}{EI} [53.63] =$$

$$\Delta_2 = \frac{53.63}{EI}$$

Cálculo de Δ_3

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI} \int_4^6 M_3(x) \cdot m_2(x) dx = \frac{1}{EI} \int_4^6 \left(-\frac{5}{2}x^2 + 12.25x + 16.498 \right) \left(-\frac{1}{3}x + 2 \right) dx$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI} \int_4^6 \left(\frac{5}{6}x^3 - \frac{49}{12}x^2 - \frac{8249}{1500}x - 5x^2 + \frac{49}{2}x + \frac{8249}{250} \right) dx$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI} \int_4^6 \left(\frac{5}{6}x^3 - \frac{109}{12}x^2 + \frac{28501}{1500}x + \frac{8249}{250} \right) dx$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{6} \left(\frac{x^4}{4} \right) - \frac{109}{12} \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{28501}{1500} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{8249}{250} (x) \right]$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI} \left[\frac{5x^4}{24} - \frac{109x^3}{36} + 9.5x^2 + \frac{8249x}{250} \right]$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{5(6)^4}{24} - \frac{109(6)^3}{36} + 9.5003(6)^2 + \frac{8249(6)}{250} \right] - \left[\frac{5(4)^4}{24} - \frac{109(4)^3}{36} + 9.5003(4)^2 + \frac{8249(4)}{250} \right] \right\}$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI} \left[(270 - 654 + 342.01 + 197.976) - \left(\frac{160}{3} - \frac{1744}{9} + 152 + 131.984 \right) \right]$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI} [(155.98) - (143.54)] = \frac{1}{EI} [12.44]$$

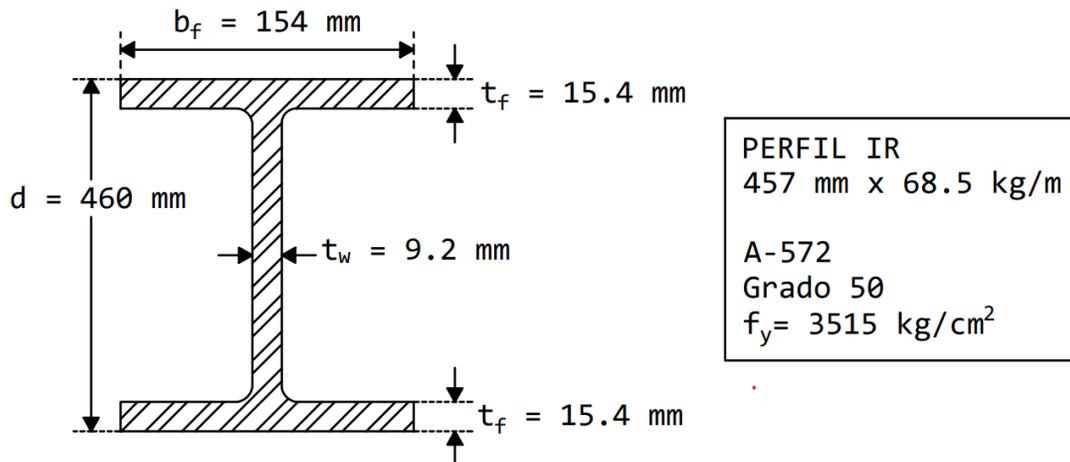
$$\Delta_3 = \frac{12.44}{EI}$$

CÁLCULO DE Δ_z

$$\Delta_z = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{5474}{225EI} + \frac{53.63}{EI} + \frac{12.44}{EI}$$

$$\Delta_z = \frac{90.40}{EI} [m]$$

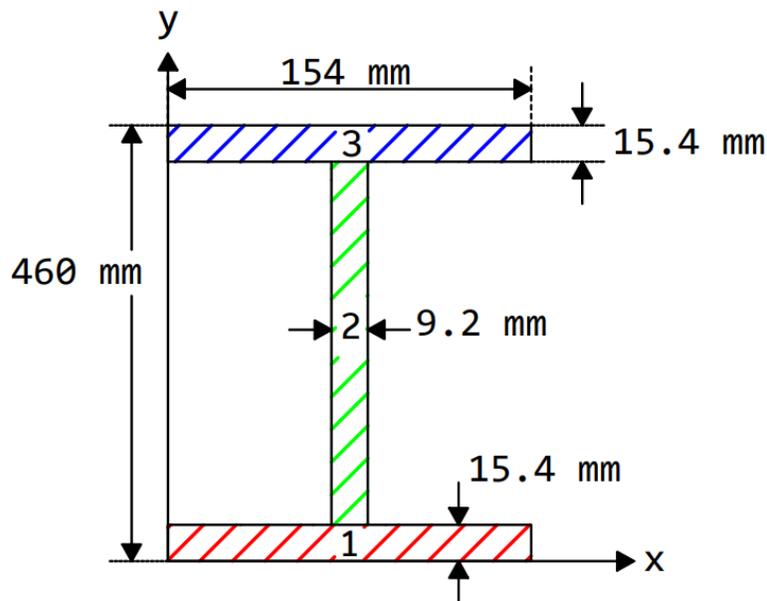
PASO ⑦: Calcular el momento de inercia (I) de la sección transversal de la viga de acero.



Hay dos formas de calcular el momento de inercia, la primera es con el teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos y la otra forma es haciendo una resta de inercias.

TEOREMA DE STEINER O TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

Se pasa a calcular el momento de inercia con el teorema de Steiner por lo que se dividirá la sección transversal en figuras geométricas que sean conocidas, en este caso serán 3 rectángulos como se muestra a continuación:



El teorema de los ejes paralelos indica que se puede calcular el momento de inercia de un cuerpo rígido con la siguiente formula:

$$I_x = \sum_{i=1}^k I_{xGi} + \sum_{i=1}^k A_i (d_{yi})^2 \quad (2.16)$$

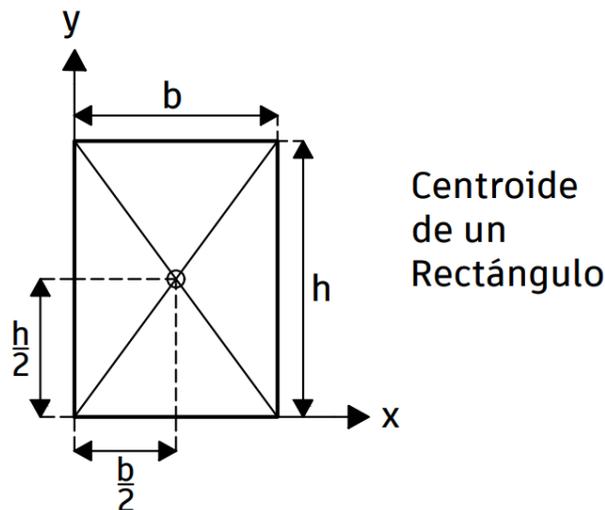
Donde:

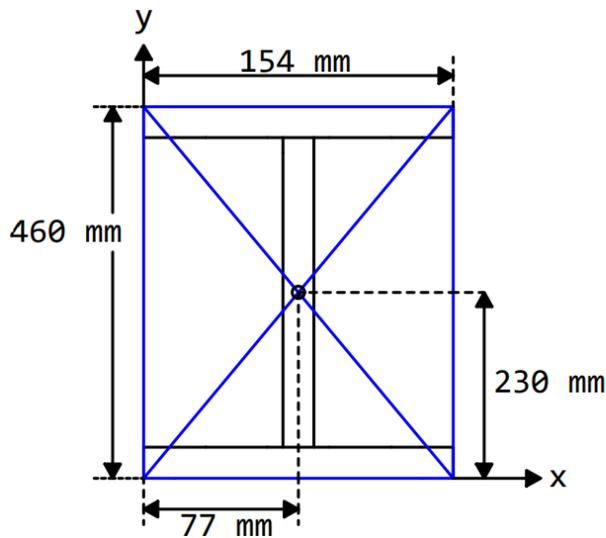
I_{xGi} : Momento de inercia de cada figura geométrica (rectángulo) que conforma la sección transversal.

A_i : Área de cada figura geométrica (rectángulo) que conforma la sección transversal.

d_{yi} : Distancia que hay entre el centroide de la sección transversal (Perfil IR) al centroide de cada figura geométrica (rectángulo).

Antes de calcular el momento de inercia del perfil IR, primero se debe de calcular su centroide, como la sección transversal es simétrica, se puede decir que las coordenadas (x , y) del centroide se calculan de la misma manera como se calcula el centroide de un rectángulo, es decir, la coordenada en "x" será igual a la base dividida entre dos ($x = \frac{b}{2} = \frac{154 \text{ mm}}{2}$) y la coordenada en "y" será igual a la altura dividida entre dos ($y = \frac{h}{2} = \frac{460 \text{ mm}}{2}$). Para que quede más claro lo que se trata de explicar se pasará a ilustrar de la siguiente manera:





Centroide

$$x = \frac{154 \text{ mm}}{2} = 77 \text{ mm}$$

$$y = \frac{460 \text{ mm}}{2} = 230 \text{ mm}$$

Coordenadas

x	y
(77 mm ,	230 mm)

Como se puede observar, la sección transversal es simétrica y por lo tanto fue fácil de saber cuáles eran las coordenadas de su centroide, pero si se requiere comprobar el resultado, se pasará a calcular las coordenadas (x , y) con ayuda de las siguientes formulas:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k (A_i)(x_i)}{\sum_{i=1}^k A_i} \quad (2.17)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^k (A_i)(y_i)}{\sum_{i=1}^k A_i} \quad (2.18)$$

Donde:

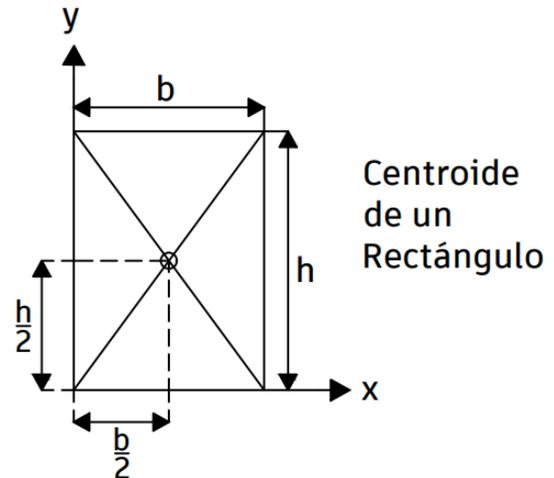
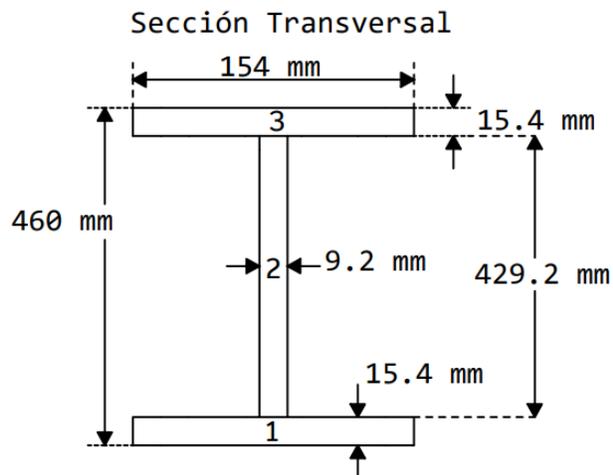
\bar{x}, \bar{y} : Coordenadas del centroide de la sección transversal.

A_i : Área de cada figura geométrica (rectángulo) que conforma la sección transversal.

x_i : Coordenada "x" del centroide de cada figura geométrica (rectángulo) que conforma la sección transversal.

y_i : Coordenada "y" del centroide de cada figura geométrica (rectángulo) que conforma la sección transversal.

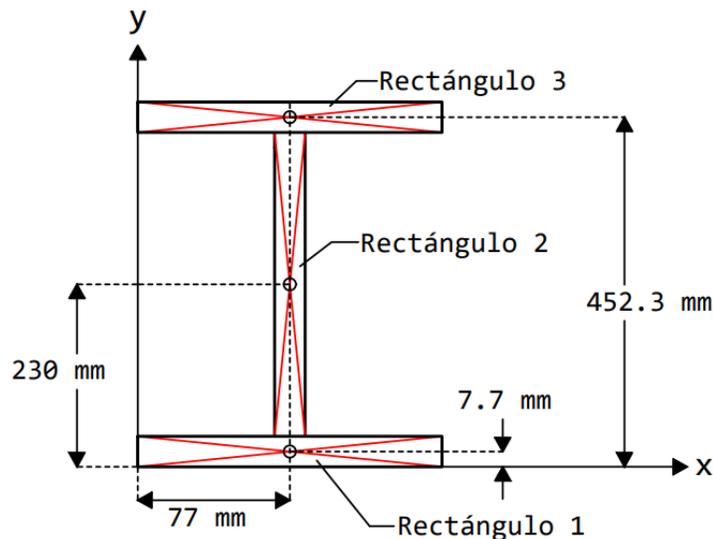
Se calculan las coordenadas del centroide de la sección transversal de la viga de acero IR, para lo cual se divide la sección transversal en tres rectángulos como se muestra a continuación:



Se calculan las áreas de cada uno de los rectángulos que conforman la sección transversal:

RECTÁNGULO	BASE (mm)	ALTURA (mm)	AREA (mm^2)
	(b)	(h)	(b x h)
1	154	15.4	2371.60
2	9.2	429.2	3948.64
3	154	15.4	2371.60

Cálculo de las coordenadas (x, y) de cada uno de los tres rectángulos:



RECTÁNGULO	COORDENADAS	
	(x)	(y)
1	77 mm	7.7 mm
2	77 mm	230 mm
3	77 mm	452.3 mm

Se calcula la coordenada "x" del centroide de la sección transversal:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k (A_i)(x_i)}{\sum_{i=1}^k A_i}$$

$$\bar{x} = \frac{\overbrace{(2371.6 \text{ mm}^2)(77 \text{ mm})}^{\text{Rectángulo 1}} + \overbrace{(3948.64 \text{ mm}^2)(77 \text{ mm})}^{\text{Rectángulo 2}} + \overbrace{(2371.6 \text{ mm}^2)(77 \text{ mm})}^{\text{Rectángulo 3}}}{2371.60 \text{ mm}^2 + 3948.64 \text{ mm}^2 + 2371.6 \text{ mm}^2}$$

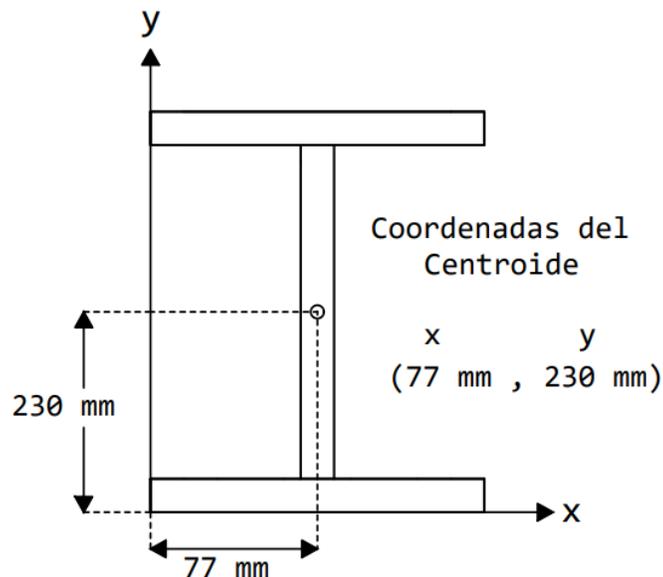
$$\bar{x} = 77 \text{ mm}$$

Se calcula la coordenada "y" del centroide de la sección transversal:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^k (A_i)(y_i)}{\sum_{i=1}^k A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\overbrace{(2371.6 \text{ mm}^2)(7.7 \text{ mm})}^{\text{Rectángulo 1}} + \overbrace{(3948.64 \text{ mm}^2)(230 \text{ mm})}^{\text{Rectángulo 2}} + \overbrace{(2371.6 \text{ mm}^2)(452.3 \text{ mm})}^{\text{Rectángulo 3}}}{2371.60 \text{ mm}^2 + 3948.64 \text{ mm}^2 + 2371.6 \text{ mm}^2}$$

$$\bar{y} = 230 \text{ mm}$$



Como se pudo observar, el resultado de las coordenadas del centroide es el mismo en ambos casos, con esto se llega a la conclusión de que, si la sección transversal es simétrica, se puede conocer el valor de las coordenadas del centroide de una manera fácil y rápida sin necesidad de utilizar fórmulas matemáticas, solo se calcula el centroide de la sección transversal de la misma manera en cómo se calcula el centroide de un rectángulo como ya se vio anteriormente. En caso de que la sección transversal sea asimétrica, se calculan las coordenadas del centroide utilizando las ecuaciones 2.17 y 2.18.

MOMENTO DE INERCIA (I)

Una vez teniendo las coordenadas del centroide de la sección transversal, se pasa a calcular el momento de inercia con la ecuación 2.16.

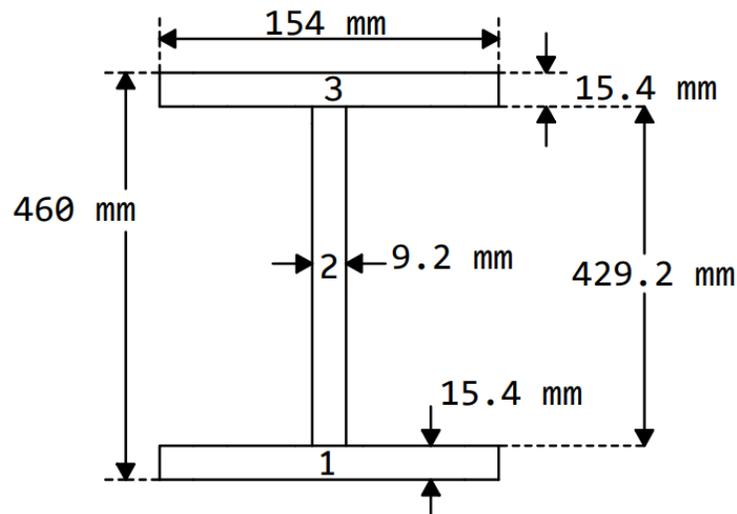
$$I_x = \sum_{i=1}^k I_{xGi} + \sum_{i=1}^k A_i (d_{yi})^2$$

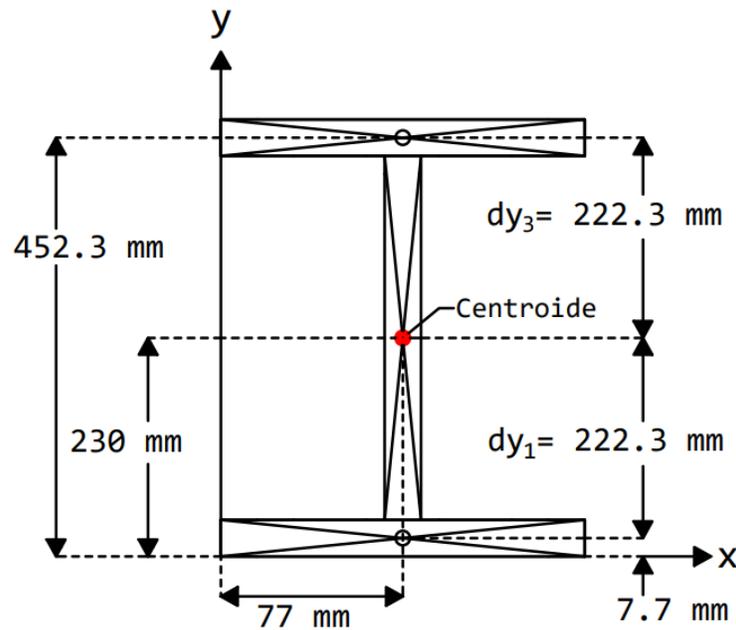
Donde:

I_{xGi} : Momento de inercia de cada figura geométrica (rectángulo) que conforma la sección transversal.

A_i : Área de cada figura geométrica (rectángulo) que conforma la sección transversal.

d_{yi} : Distancia que hay entre el centroide de la sección transversal (Perfil IR) al centroide de cada figura geométrica (rectángulo).





RECTÁNGULO	BASE (mm)	ALTURA (mm)	AREA (mm ²)	$I_{xGi} = \frac{bh^3}{12} (mm^4)$	dy_i
	(b)	(h)	(b x h)		(mm)
1	154	15.4	2371.60	46870.72	222.3
2	9.2	429.2	3948.64	60615783.23	0
3	154	15.4	2371.60	46870.72	222.3

$$I_x = \sum_{i=1}^k I_{xGi} + \sum_{i=1}^k A_i (d_{yi})^2$$

$$I_x = [46,870.72 \text{ mm}^4 + (2,371.60 \text{ mm}^2)(222.3 \text{ mm})^2] +$$

$$[60,615,783.23 \text{ mm}^4 + (3,948.64 \text{ mm}^2)(0)^2] +$$

$$[46,870.72 \text{ mm}^4 + (23,71.60 \text{ mm}^2)(222.3 \text{ mm})^2]$$

$$I_x = [117,244,915.7 \text{ mm}^4] + [60,615,783.23 \text{ mm}^4] + [117,244,915.7 \text{ mm}^4]$$

$$I_x = 295,105,614.6 \text{ mm}^4$$

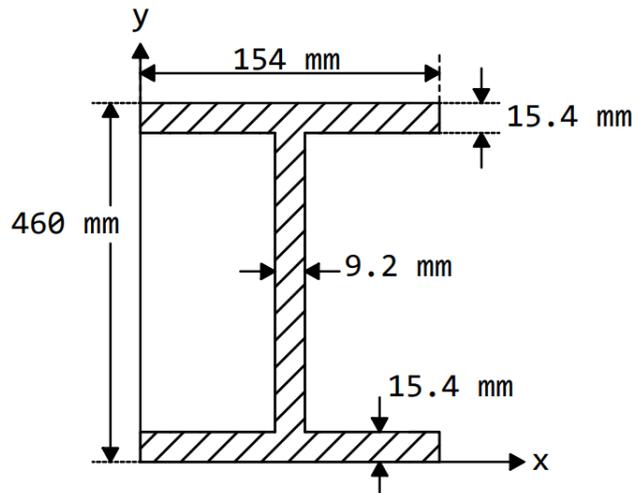
Se convierte el momento de inercia de mm⁴ a m⁴

$$I_x = 295,105,614.6 \text{ mm}^4 \left(\frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}} \right)^4$$

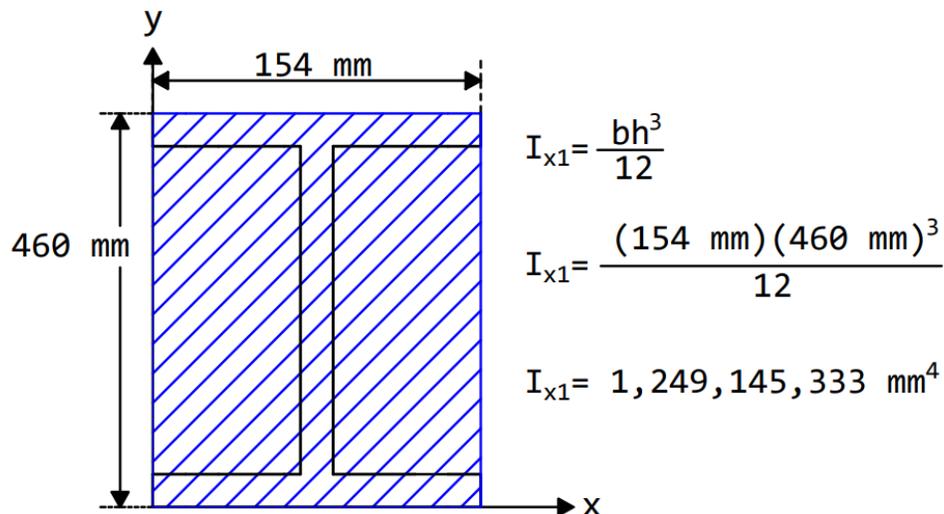
$$I_x = I = 0.00029511 \text{ m}^4$$

Antes de que se calculará el momento de inercia (I) con el método de los ejes paralelos, se mencionó que había otra manera más fácil y rápida de calcular el momento de Inercia de la sección transversal de la viga de acero IR, la cual consta de realizar una resta de inercias.

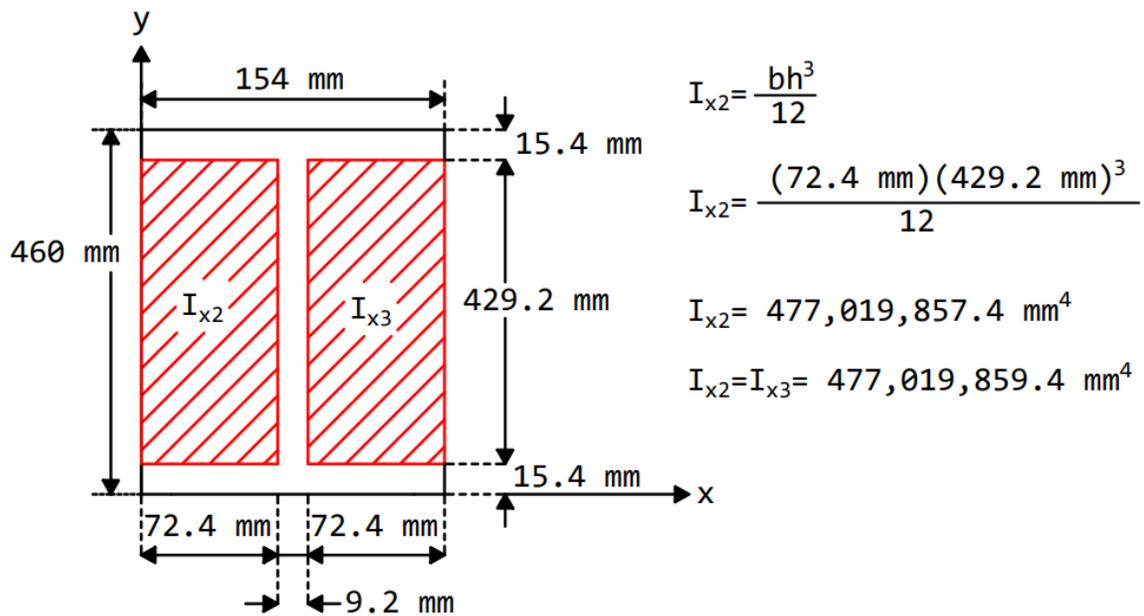
Se tiene la sección transversal del perfil IR con sus respectivas dimensiones:



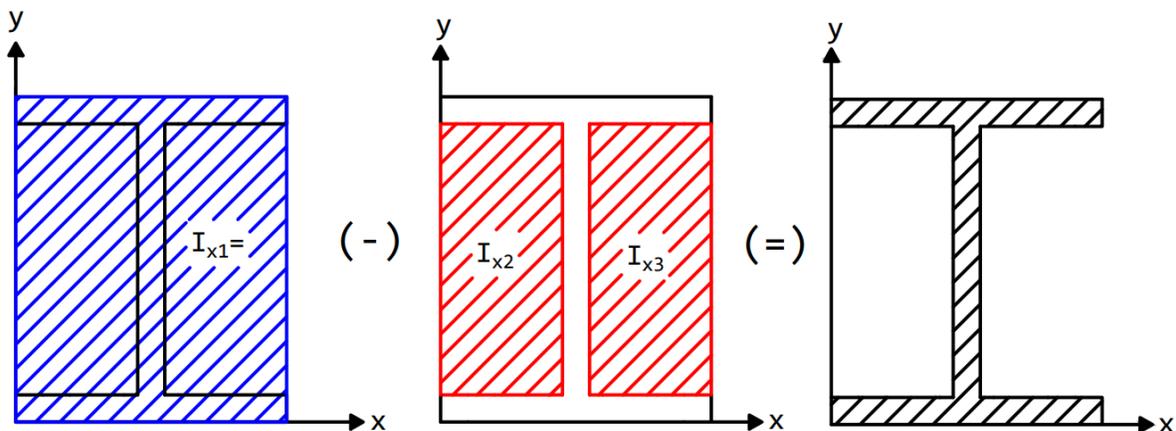
Se calcula el momento de inercia de la figura geométrica (rectángulo) que esta achurada de color azul que se muestra a continuación:



Se observa que la sección transversal de la viga de acero está dentro del rectángulo azul, por lo que se pasará a calcular el momento de inercia de los siguientes rectángulos que están achurados de color rojo como se muestra a continuación:



Al principio se dijo que este método constaba de realizar una resta de Inercias, por lo tanto, la inercia del rectángulo azul (I_{x1}) se le restará la inercia de los dos rectángulos rojos (I_{x2} , I_{x3}) para tener como resultado la inercia de la sección transversal de la viga de acero:



$$I_{x1} = 1,249,145,333 \text{ mm}^4$$

$$I_{x2} = 477,019,859.4 \text{ mm}^4$$

$$I_{x3} = 477,019,859.4 \text{ mm}^4$$

$$I = I_{x1} - I_{x2} - I_{x3}$$

$$I = 1,249,145,333 \text{ mm}^4 - 477,019,859.4 \text{ mm}^4 - 477,019,859.4 \text{ mm}^4$$

$$I = 295,105,614.2 \text{ mm}^4$$

Se convierte el momento de inercia de mm^4 a m^4 :

$$I = 295,105,614.2 \text{ mm}^4 \left(\frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}} \right)^4$$

$$I = 0.00029511 \text{ m}^4$$

Se comprobó que el resultado del momento de inercia fue el mismo ya sea calculándolo con el teorema de los ejes paralelos o utilizando una resta de inercias. para los siguientes ejercicios donde sea necesario calcular el momento de inercia de una sección transversal, se utilizará el método de la resta de inercias ya que este método es más rápido y fácil de utilizar, queda a criterio de cada uno que método utilizar para calcular el valor de un momento de inercia.

Se continua con la solución del ejercicio, por lo que ahora se calculará el módulo de elasticidad del acero para que después se calcule el desplazamiento vertical real de la viga de acero.

PASO ⑧: Calcular el módulo de elasticidad (E_s) de la viga de acero.

Las Normas Técnicas Complementarias de las Ciudad de México establecen que el módulo de elasticidad del acero es igual a:

$$E_s = 2,039,000 \text{ kg/cm}^2$$

Se convierte el Módulo de Elasticidad de kg/cm^2 a ton/m^2 :

$$E_s = 2,039,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \left(\frac{1 \text{ ton}}{1000 \text{ kg}} \right) \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right)^2$$

$$E_s = 20,390,000 \text{ ton/m}^2$$

PASO ⑨: Cálculo del desplazamiento vertical real de la viga de acero IR (457 mm x 68.5 kg/m).

$$\Delta_z = \frac{90.40}{EI} [m]$$

$$E_s = 20,390,000 \text{ ton/m}^2$$

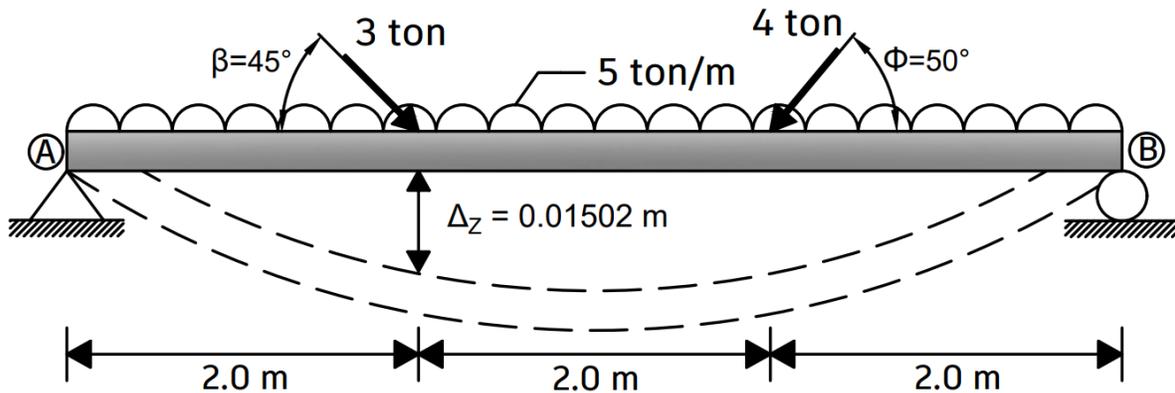
$$I = 0.00029511 \text{ m}^4$$

$$\Delta_z = \frac{90.40}{(20,390,000)(0.00029511)}$$

Resultado:

Desplazamiento Vertical

$$\Delta_z = 0.01502 \text{ m}$$

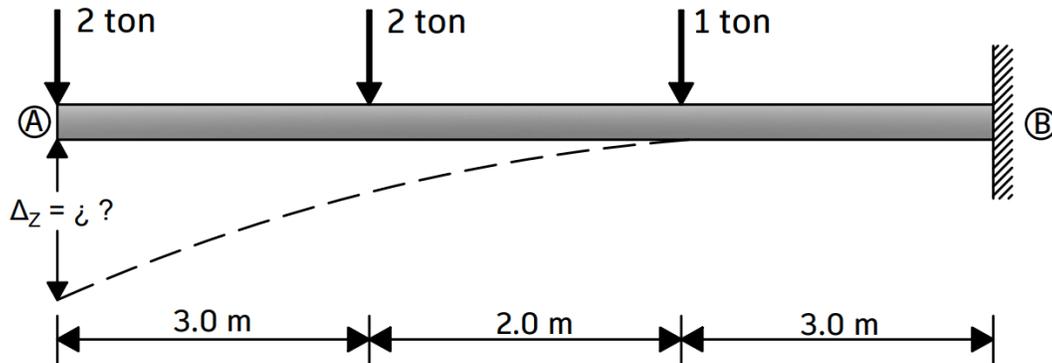


Es importante mencionar que, si el resultado del desplazamiento vertical es positivo esto no significa que el resultado sea correcto o si el resultado del desplazamiento vertical hubiera sido negativo, esto no significaría que el resultado es incorrecto. El signo del desplazamiento vertical no tiene nada que ver con que si este correcto o incorrecto el resultado, lo que indica el signo es si se colocó correctamente la carga puntual unitaria en dirección al desplazamiento vertical deseado.

En el paso 3 de los ejercicios resueltos, se coloca una carga puntual unitaria en dirección al desplazamiento, si se coloca la carga puntual hacia abajo [↓] y el desplazamiento de la viga está en la misma dirección, el resultado será positivo, pero si se coloca la carga puntual unitaria hacia abajo [↓] pero el desplazamiento de la viga no está en esa dirección si no que va hacia arriba, es decir, en la dirección contraria a la de la carga puntual unitaria, el resultado saldrá negativo y esto no significa que el resultado sea incorrecto, el signo del resultado solo indica si el desplazamiento vertical está o no en la misma dirección que la de la carga puntual unitaria.

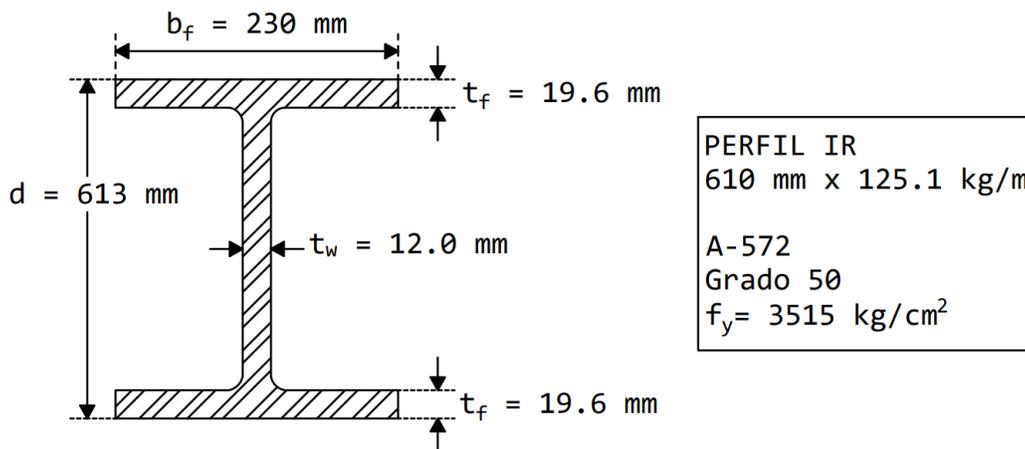
Para que entendamos mejor lo que se trató de explicar, se pasará a resolver otro ejercicio donde se colocará la carga puntual en dirección contraria al desplazamiento para que así se pueda observar que el resultado del ejercicio dará negativo.

Ejercicio 2.21: Utiliza la ecuación 2.15 para calcular el desplazamiento vertical en punto (A) que se encuentra en el voladizo de una viga de acero empotrada de 8 metros de longitud, la viga es sometida a tres cargas puntuales como se muestra a continuación.

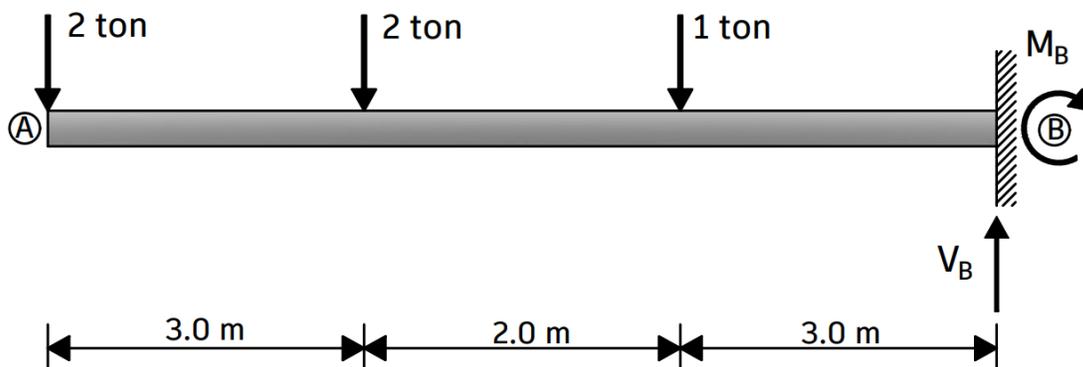


La viga de acero es un Perfil IR A-572 Grado 50 de (610 mm x 125.1 kg/m).

Las dimensiones de la sección transversal del perfil de acero IR de 610 mm x 125.1 kg/m son las siguientes:



PASO ①: Calcular las reacciones en el apoyo empotrado con las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_B = 0 \quad (+)$$

$$M_B - 1 \text{ ton} (3 \text{ m}) - 2 \text{ ton}(5 \text{ m}) - 2 \text{ ton}(8 \text{ m}) = 0$$

$$M_B - 3 \text{ ton} \cdot \text{m} - 10 \text{ ton} \cdot \text{m} - 16 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$M_B - 29 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

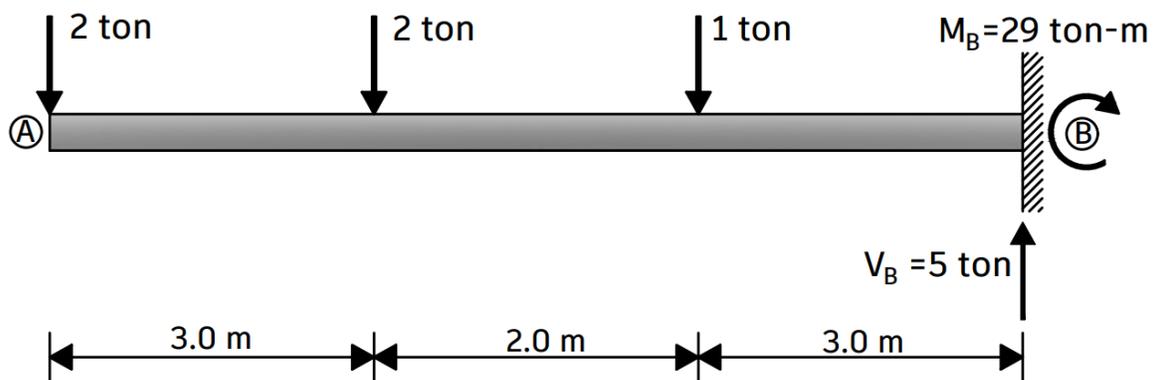
$$M_B = 29 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$V_B - 1 \text{ ton} - 2 \text{ ton} - 2 \text{ ton} = 0$$

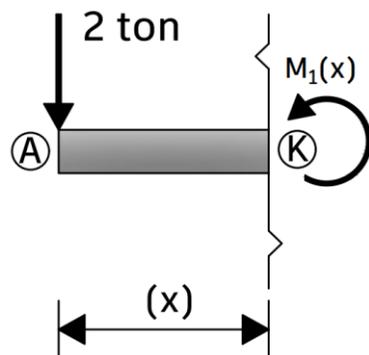
$$V_B - 5 \text{ ton} = 0$$

$$V_B = 5 \text{ ton}$$



PASO ②: Calcular las ecuaciones de los momentos flexionantes [M(x)] producidos por las cargas reales.

CORTE #1 [$0 \text{ m} \leq x \leq 3.0 \text{ m}$]

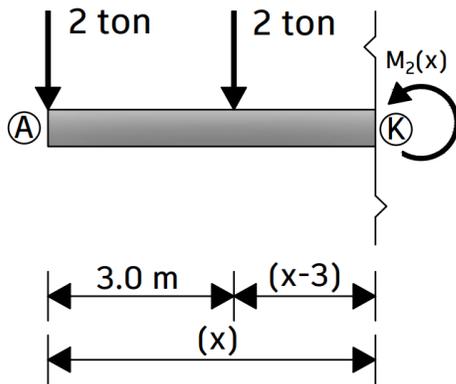


$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$M_1(x) + 2(x) = 0$$

$$M_1(x) = -2x$$

CORTE #2 [$3.0\text{ m} \leq x \leq 5.0\text{ m}$]



$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

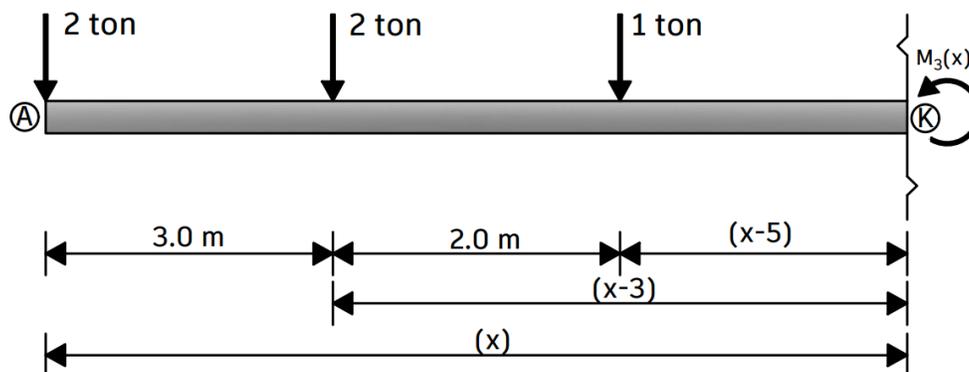
$$M_2(x) + 2(x) + 2(x - 3) = 0$$

$$M_2(x) + 2x + 2x - 6 = 0$$

$$M_2(x) + 4x - 6 = 0$$

$$M_2(x) = -4x + 6$$

CORTE #3 [$5.0\text{ m} \leq x \leq 8.0\text{ m}$]



$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$M_3(x) + 2(x) + 2(x - 3) + 1(x - 5) = 0$$

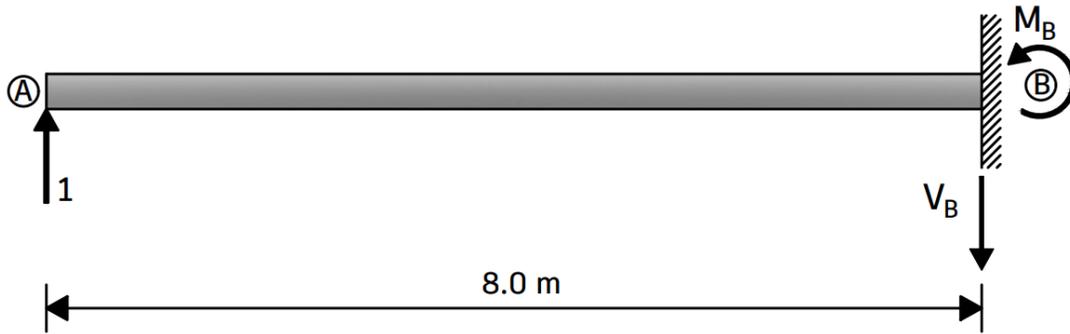
$$M_3(x) + 2x + 2x - 6 + x - 5 = 0$$

$$M_3(x) + 5x - 11 = 0$$

$$M_3(x) = -5x + 11 = 0$$

PASO ③: Colocar una carga virtual puntual unitaria en la viga, en el punto donde se desea conocer el desplazamiento vertical. Se coloca la carga unitaria en la dirección que se crea que será la dirección del desplazamiento.

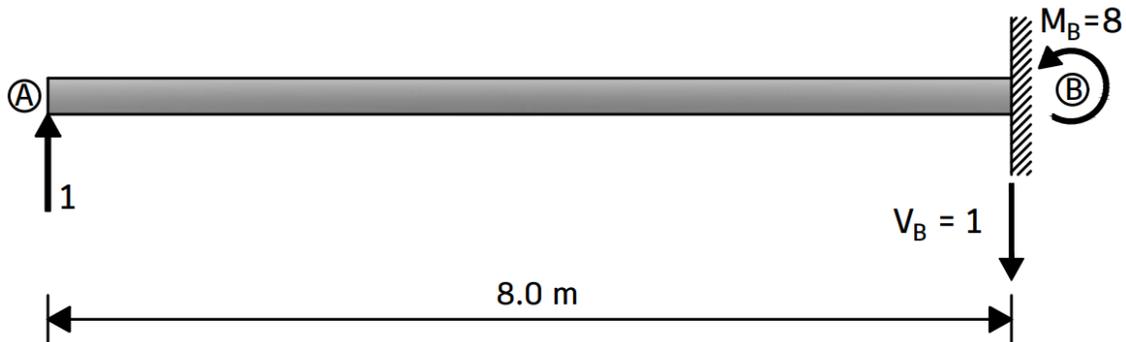
Para este ejercicio, se colocará la carga puntual unitaria en dirección contraria a la del desplazamiento.



PASO ④: Calcular las reacciones en el apoyo empotrado de la viga que tiene la carga virtual unitaria con las ecuaciones del equilibrio.

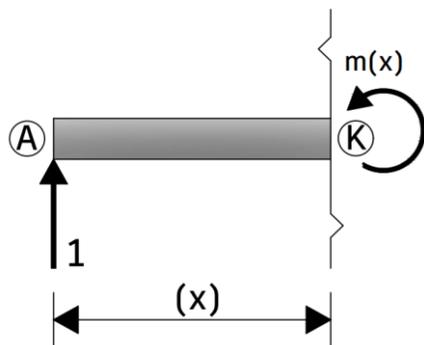
$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= 0 \quad (+) \\ -M_B + 1(8) &= 0 \\ M_B &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_Y &= 0 \quad (+) \\ -V_B + 1 &= 0 \\ V_B &= 1 \end{aligned}$$



PASO ⑤: Calcular la ecuación del momento flexionante $[m(x)]$ de la viga que tiene una carga virtual unitaria ficticia.

CORTE #1 $[0 \text{ m} \leq x \leq 8.0 \text{ m}]$



$$\begin{aligned} \Sigma M_K &= 0 \quad (+) \\ m(x) - 1(x) &= 0 \\ m(x) &= x \end{aligned}$$

PASO ⑥: Calcular el desplazamiento utilizando la ecuación del principio del trabajo virtual (ecuación 2.15).

$$\Delta = \int_0^L \frac{M(x) \cdot m(x)}{EI} dx$$

<i>Ecuaciones de los Momentos flexionantes [M(x)] de la viga con cargas REALES</i>	<i>Ecuación del Momento flexionante [m(x)] de la viga con una carga UNITARIA FICTICIA</i>
0 m ≤ x ≤ 3.0 m	m(x) = x
M₁(x) = -2x	
3.0 m ≤ x ≤ 5.0 m	
M₂(x) = -4x + 6	
5.0 m ≤ x ≤ 8.0 m	
M₃(x) = -5x + 11	

$$\Delta_z = \int_0^3 \frac{M_1(x) \cdot m(x)}{EI} dx + \int_3^5 \frac{M_2(x) \cdot m(x)}{EI} dx + \int_5^8 \frac{M_3(x) \cdot m(x)}{EI} dx$$

$$\Delta_z = \int_0^3 \frac{(-2x)(x)}{EI} dx + \int_3^5 \frac{(-4x + 6)(x)}{EI} dx + \int_5^8 \frac{(-5x + 11)(x)}{EI} dx$$

$$\Delta_z = \frac{1}{EI} \int_0^3 \underbrace{(-2x^2)}_{\Delta_1} dx + \frac{1}{EI} \int_3^5 \underbrace{(-4x^2 + 6x)}_{\Delta_2} dx + \frac{1}{EI} \int_5^8 \underbrace{(-5x^2 + 11x)}_{\Delta_3} dx$$

Cálculo de Δ₁

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^3 (-2x^2) dx = \frac{1}{EI} \left[-2 \left(\frac{x^3}{3} \right) \right]_0^3 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{2x^3}{3} \right]_0^3$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{2(3)^3}{3} \right] - \left[-\frac{2(0)^3}{3} \right] \right\} = \frac{1}{EI} [-18]$$

$$\Delta_1 = -\frac{18}{EI}$$

Cálculo de Δ_2

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \int_3^5 (-4x^2 + 6x) dx = \frac{1}{EI} \left[-4 \left(\frac{x^3}{3} \right) + 6 \left(\frac{x^2}{2} \right) \right] = \frac{1}{EI} \left[-\frac{4x^3}{3} + 3x^2 \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{4(5)^3}{3} + 3(5)^2 \right] - \left[-\frac{4(3)^3}{3} + (3)^2 \right] \right\} = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{275}{3} \right) - (-9) \right]$$

$$\Delta_2 = -\frac{248}{3EI}$$

Cálculo de Δ_3

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI} \int_5^8 (-5x^2 + 11x) dx = \frac{1}{EI} \left[-5 \left(\frac{x^3}{3} \right) + 11 \left(\frac{x^2}{2} \right) \right] = \frac{1}{EI} \left[-\frac{5x^3}{3} + \frac{11x^2}{2} \right]$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{5(8)^3}{3} + \frac{11(8)^2}{2} \right] - \left[-\frac{5(5)^3}{3} + \frac{11(5)^2}{2} \right] \right\}$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{1504}{3} \right) - \left(-\frac{425}{6} \right) \right] = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1504}{3} + \frac{425}{6} \right]$$

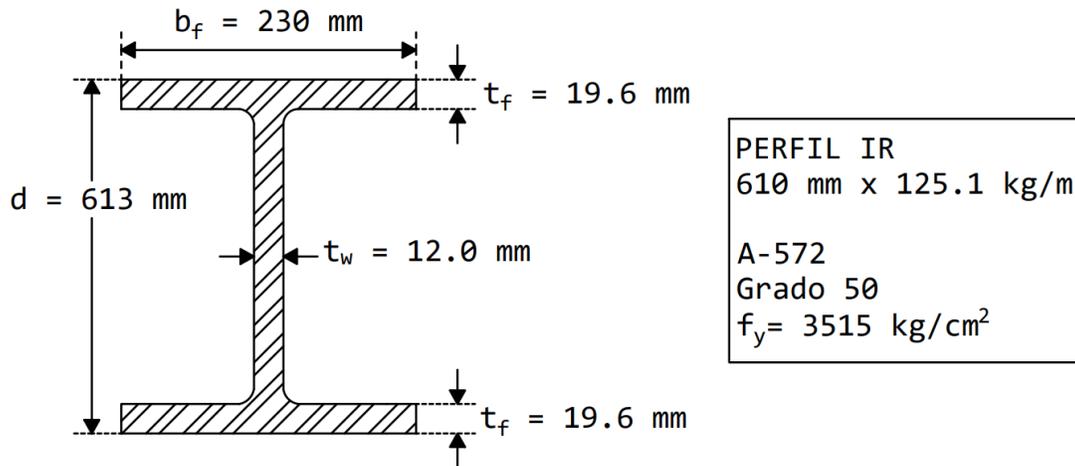
$$\Delta_3 = -\frac{861}{2EI}$$

CÁLCULO DE Δ_z

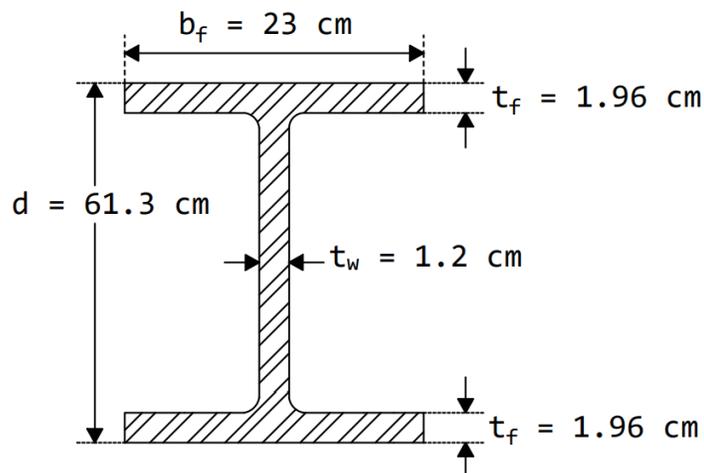
$$\Delta_z = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = -\frac{18}{EI} - \frac{248}{3EI} - \frac{861}{2EI}$$

$$\Delta_z = -\frac{3187}{6EI} [m]$$

PASO ⑦: Calcular el momento de inercia de la sección transversal de la viga de acero.



Se convierten las unidades de las dimensiones de la sección transversal de mm a cm:

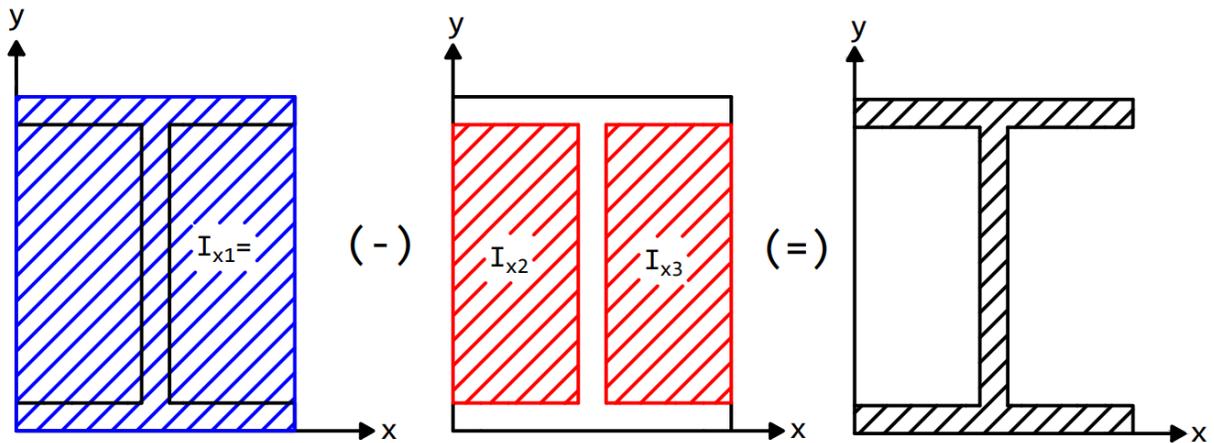
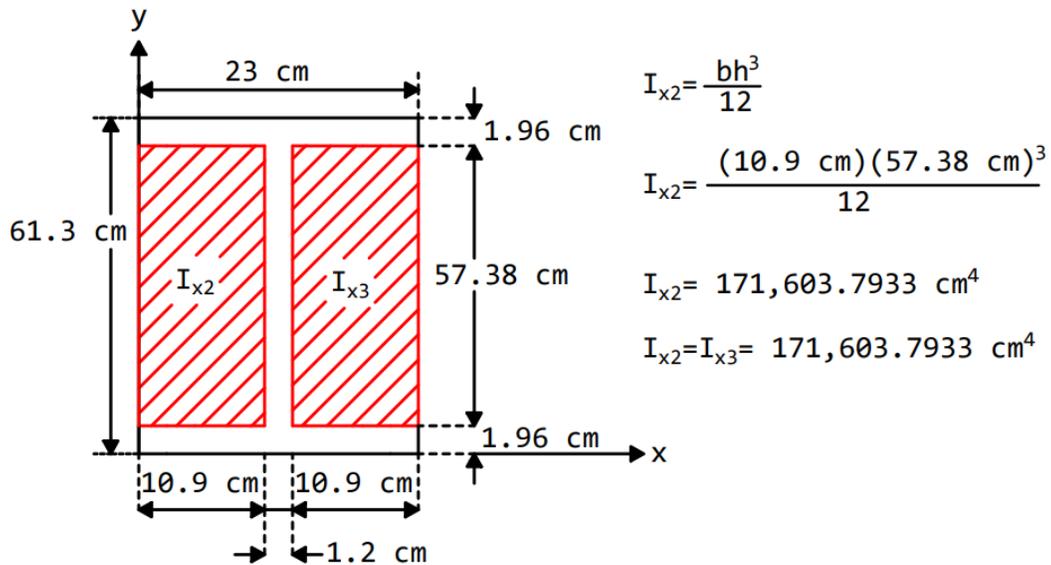


Cálculo del momento de Inercia de la sección trasversal:

$$I_{x1} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{x1} = \frac{(23 \text{ cm})(61.3 \text{ cm})^3}{12}$$

$$I_{x1} = 441,497.2609 \text{ cm}^4$$



$$I_{x1} = 441,497.2609 \text{ cm}^4$$

$$I_{x2} = 171,603.7933 \text{ cm}^4$$

$$I_{x3} = 171,603.7933 \text{ cm}^4$$

$$I = I_{x1} - I_{x2} - I_{x3}$$

$$I = 441,497.2609 \text{ cm}^4 - 171,603.7933 \text{ cm}^4 - 171,603.7933 \text{ cm}^4$$

$$I = 98,289.6743 \text{ cm}^4$$

Se convierte el momento de inercia de mm^4 a m^4 :

$$I = 98,289.6743 \text{ cm}^4 \left(\frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} \right)^4$$

$$I = 0.0009829 \text{ m}^4$$

PASO ⑧: Calcular el módulo de elasticidad (E_s) de la viga de acero.

Las Normas Técnicas Complementarias de las Ciudad de México establecen que el módulo de elasticidad del acero es igual a:

$$E_s = 2,039,000 \text{ kg/cm}^2$$

Se convierte el módulo de elasticidad de kg/cm^2 a ton/m^2 :

$$E_s = 2,039,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \left(\frac{1 \text{ ton}}{1000 \text{ kg}} \right) \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right)^2$$

$$E_s = 20,390,000 \text{ ton/m}^2$$

Paso ⑨: Cálculo del desplazamiento vertical real de la viga de acero IR (610 mm x 125.1 kg/m).

$$\Delta_z = - \frac{3187}{6EI} [m]$$

$$E_s = 20,390,000 \text{ ton/m}^2$$

$$I = 0.0009829 \text{ m}^4$$

$$\Delta_z = - \frac{3187}{6(20,390,000)(0.0009829)}$$

$$\Delta_z = - 0.02650 \text{ m}$$

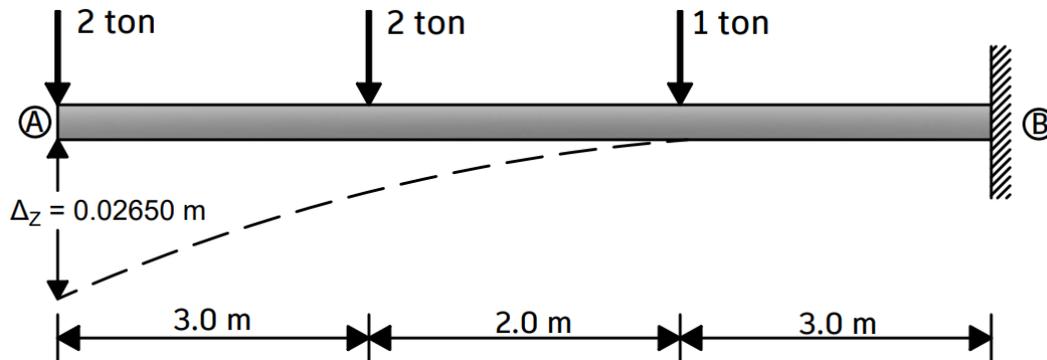
Antes de resolver el ejercicio se mencionó que si se obtenía un desplazamiento vertical negativo esto no significaba que el resultado fuese incorrecto, lo único que indica el signo negativo es que la carga unitaria que se propuso no va en la misma dirección que la del desplazamiento.

Saber esto ayudará al lector a entender el significado del signo en el resultado de un desplazamiento o deformación cuando se calcule utilizando el principio del trabajo virtual. Se presentarán situaciones en las cuales se esté calculando un desplazamiento vertical y al calcularse dicho desplazamiento, se deberá de colocar la carga unitaria en la dirección en la cual se crea que es la dirección del desplazamiento, al finalizar el ejercicio, si se obtiene como resultado un valor negativo, el lector ya sabrá que lo que indica el signo es que el desplazamiento no va en la dirección en la que se creía si no en la dirección contraria.

Resultado:

Desplazamiento Vertical

$$\Delta_z = 0.02650 \text{ m}$$



Con este último ejercicio se finaliza el cálculo de desplazamientos verticales tomando en cuenta solo la deformación por flexión, utilizando el principio del trabajo virtual.

2.8.2 DEFORMACIÓN EN VIGAS CAUSADA POR FUERZA CORTANTE

En las secciones pasadas en el cálculo de deformaciones verticales solo se tomaban en cuenta las deformaciones causadas por los momentos flexionantes, es decir, la deformación por flexión, pero en esta sección se explicará la manera en la cual se puede calcular una deformación causada por fuerza cortante.

En la práctica es común despreciar la deformación por cortante porque en comparación con la deformación por flexión, la deformación por cortante es relativamente pequeña, es decir, la deformación por flexión es mucho mayor que la deformación por cortante y por esta razón es común omitir la deformación por cortante. Sin embargo, si se requiere una gran precisión para el cálculo de un desplazamiento vertical en una viga, lo único que se debe de hacer es calcular la deformación por cortante y sumarle la deformación por flexión, es decir, para calcular con más precisión un desplazamiento, podemos decir que la deformación total será igual a la suma de la deformación por flexión más la deformación por cortante.

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_{FLEXION} + \Delta_{CORTANTE}$$

El principio del trabajo virtual no solo permite calcular deformaciones por flexión si no que con este método también se pueden calcular la deformación causada por la fuerza cortante. La ecuación que permite el cálculo de una deformación por fuerza cortante es similar a la ecuación 2.15 que nos ayuda a calcular una deformación por flexión.

El principio del trabajo virtual nos dice que se puede conocer la deformación por cortante en cualquier punto de un sistema estructural (viga) multiplicando un factor de forma de la sección transversal (K) por la ecuación de la fuerza cortante [V(x)] producido por las cargas reales y esto a su vez se multiplica por una ecuación de fuerza cortante [v(x)] producido por una carga virtual unitaria colocada en el punto donde se desea conocer la deformación por cortante, el producto del factor de forma (K) y las ecuaciones de fuerza cortante se divide entre el producto del módulo de elasticidad por cortante (G) y el área de la sección transversal (A) del elemento estructural y todo esto se integra de 0 a la longitud (L) de la viga que se esté resolviendo.

Todo lo mencionado se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$\Delta_{CORTANTE} = \int_0^L \frac{K \cdot V(x) \cdot v(x)}{GA} dx \quad (2.19)$$

Donde:

$\Delta_{CORTANTE}$ = Deformación por cortante.

$V(x)$ = Ecuación de la fuerza cortante producido por las cargas reales.

$v(x)$ = Ecuación de la fuerza cortante producido por una carga virtual unitaria.

K = Factor de forma de la sección transversal.

G = Módulo de elasticidad por cortante.

A = Área de la sección transversal del elemento estructural.

Como se puede observar, la ecuación para calcular la deformación por cortante es sencilla y su procedimiento es similar al que se ha utilizado para calcular la deformación por flexión, lo que cambia es que en lugar de calcular las ecuaciones del momento flexionante, se calculan las ecuaciones de la fuerza cortante y en lugar de calcular el módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I), se calculará el factor de forma (K), el módulo de elasticidad por cortante (G) y el área de la sección transversal (A), pero el procedimiento es similar y esto se entenderá mejor resolviendo ejercicios donde se calcule la deformación por cortante y la deformación por flexión y se podrá observar que como ya se ha mencionado, el procedimiento es similar y fácil de aprender.

No se explicará tan a detalle como calcular la deformación por cortante ya que si se entendió como se calcula la deformación por flexión, será más sencillo de entender por medio de ejercicios el como calcular una deformación por cortante.

Antes de pasar a resolver ejercicios es importante explicar como se puede calcular el factor de forma (K) y el modulo de elasticidad por cortante (G) ya que estas son las únicas dos variables que no se ha explicado como calcularlas.

FACTOR DE FORMA (K)

El factor de forma para cortante (K) debe evaluarse para cada perfil particular de la sección transversal, pero existe una tabla que proporciona los valores del factor de forma (K) que depende de la sección transversal del elemento estructural, la cual es la siguiente:

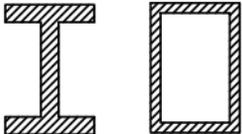
SECCIÓN TRANSVERSAL	Factor de forma (K)
 Rectángulo	$\frac{6}{5}$
 Circulo	$\frac{10}{9}$
 Tubo delgado	2
 Sección I o sección cajón	$\frac{\text{Area Total}}{\text{Area del Alma}}$

Tabla 2.2 Factor de forma (K)

EL MÓDULO DE ELASTICIDAD POR CORTANTE (G)

El módulo de elasticidad por cortante (G) se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

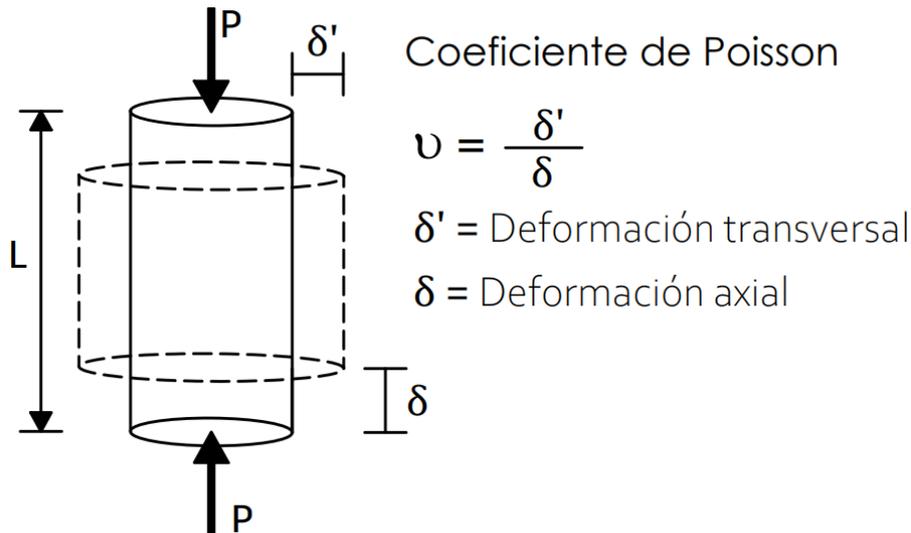
Donde:

G = Módulo de elasticidad por cortante.

E = Módulo de elasticidad.

ν = Coeficiente de Poisson.

El coeficiente de Poisson se puede calcular experimentalmente de la siguiente manera:



Pero en caso de que no se calcule experimentalmente, el coeficiente de Poisson para el concreto se tomara como 0.2 y para el acero como 0.3.

Concreto	$\nu = 0.2$
Acero	$\nu = 0.3$

Se resolverán ejercicios calculando desplazamientos verticales tomando en cuenta la deformación por flexión y la deformación por cortante ya que, si se requiere una gran precisión para el cálculo de un desplazamiento, se deberá de tomar en cuenta estas dos deformaciones. Como se mencionó al principio de esta sección, la deformación por cortante en la practica se desprecia porque en comparación con la deformación

por flexión la deformación por cortante es relativamente pequeña, pero habrá casos especiales en donde no se recomienda despreciar la deformación por cortante ya que en estos casos que se explicarán más adelante, la deformación por cortante aumentará y por lo tanto si se desprecia esta deformación se podrían tener graves consecuencias en los elementos estructurales.

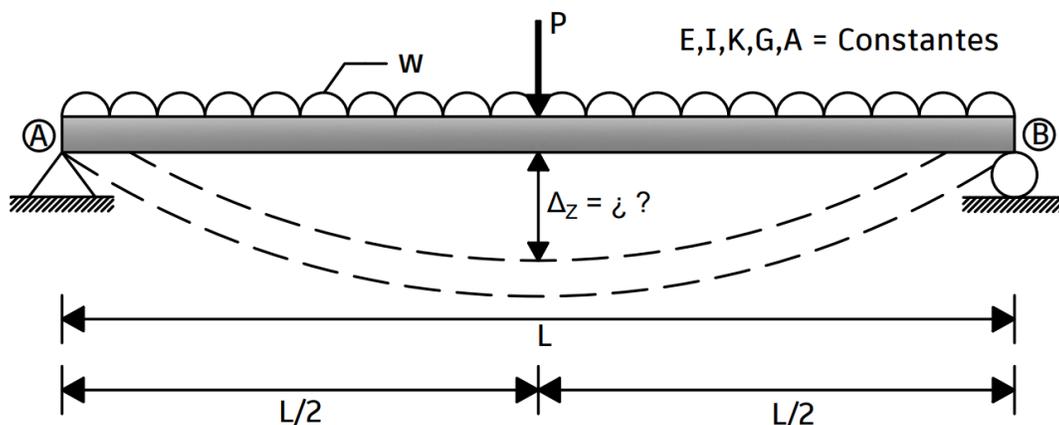
Una vez explicado que es la deformación por cortante, se pasa a resolver ejercicios calculando desplazamientos verticales tomando en cuenta la deformación por flexión y la deformación por cortante, se puede decir que el desplazamiento vertical total será igual a la suma de la deformación por flexión más la deformación por cortante, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_{FLEXIÓN} + \Delta_{CORTANTE}$$

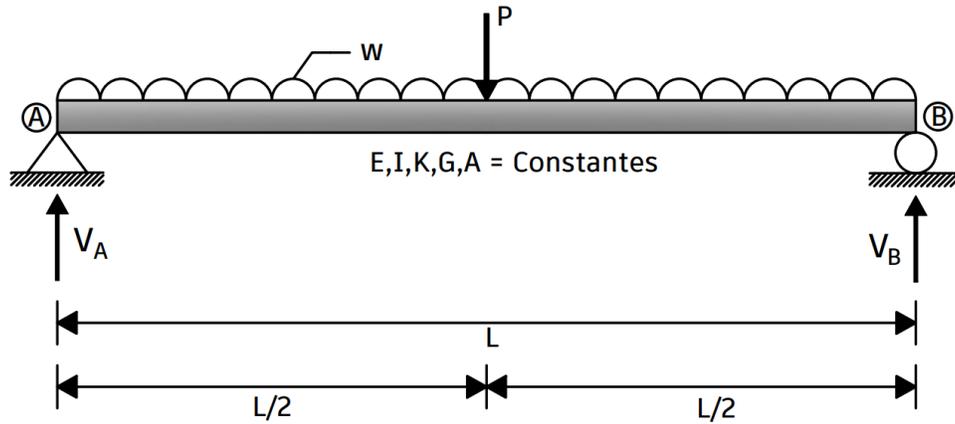
$$\Delta_{TOTAL} = \int_0^L \underbrace{\frac{M(x) \cdot m(x)}{EI}}_{\text{Deformación por flexión}} dx + \int_0^L \underbrace{\frac{K \cdot V(x) \cdot v(x)}{GA}}_{\text{Deformación por cortante}} dx \quad (2.20)$$

Esta ecuación es la que se estará ocupando en los ejercicios que se resolverán a continuación.

Ejercicio 2.22: Calcular el desplazamiento vertical a la mitad del claro de la viga utilizando el principio del trabajo virtual. La viga de longitud (L) es sometida a una carga uniformemente repartida (w) y una carga puntual (P). Considere calcular la deformación por flexión y la deformación por cortante.



PASO ①: Calcular las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_A = 0 \quad (\curvearrowright)$$

$$-V_B(L) + w(L)\left(\frac{L}{2}\right) + P\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$-V_B(L) + \frac{wL^2}{2} + \frac{PL}{2} = 0$$

$$V_B(L) = \frac{wL^2}{2} + \frac{PL}{2}$$

$$V_B = \left(\frac{wL^2}{2} + \frac{PL}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right)$$

$$V_B = \frac{wL}{2} + \frac{P}{2}$$

$$\Sigma F_Y = 0 \quad (\uparrow)$$

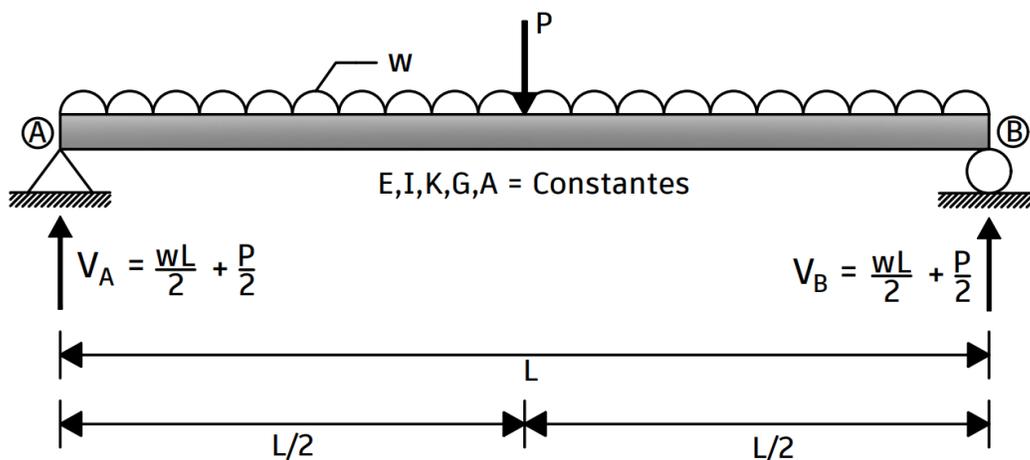
$$V_A + V_B - P - w(L) = 0$$

$$V_A + \left(\frac{wL}{2} + \frac{P}{2}\right) - P - w(L) = 0$$

$$V_A + \frac{wL}{2} + \frac{P}{2} - P - w(L) = 0$$

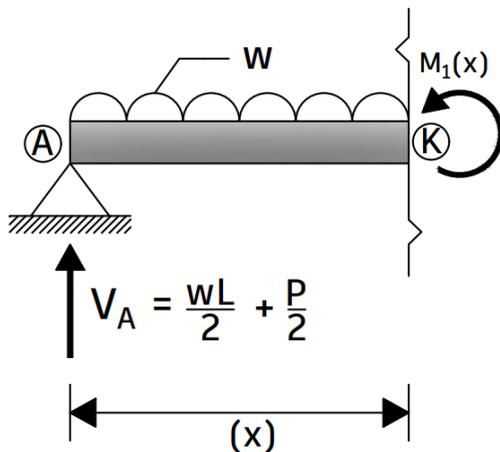
$$V_A - \frac{wL}{2} - \frac{P}{2} = 0$$

$$V_A = \frac{wL}{2} + \frac{P}{2}$$



PASO ②: Calcular las ecuaciones de la fuerza cortante [V(x)] y las ecuaciones de los momentos flexionantes [M(x)] de la viga con cargas "REALES".

CORTE #1 $\left[0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right]$



$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$M_1(x) + w(x) \left(\frac{x}{2} \right) - \left(\frac{wL}{2} + \frac{P}{2} \right) (x) = 0$$

$$M_1(x) + \frac{wx^2}{2} - \frac{wL}{2}x - \frac{P}{2}x = 0$$

$$M_1(x) = -\frac{wx^2}{2} + \frac{wL}{2}x + \frac{P}{2}x$$

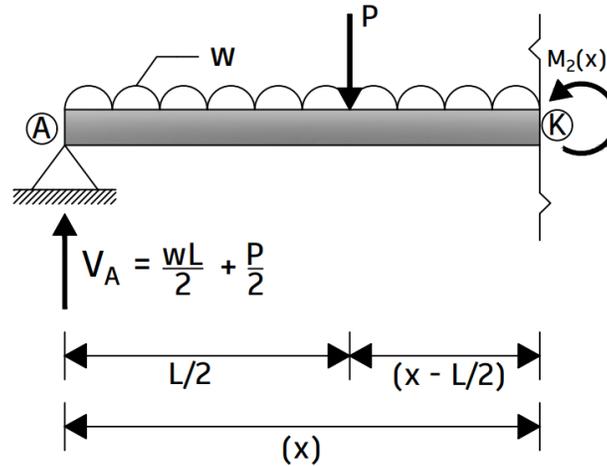
Hay dos maneras de calcular la ecuación de la fuerza cortante, una es haciendo una sumatoria de fuerzas y la otra es derivando con respecto a (x) la ecuación del momento flexionante, por lo que en estos ejercicios se opta por derivar el momento flexionante para calcular la ecuación de la fuerza cortante.

$$V_{(x)} = \frac{d[M(x)]}{dx}$$

$$V_{1(x)} = \frac{d}{dx} [M_1(x)] = \frac{d}{dx} \left(-\frac{wx^2}{2} + \frac{wL}{2}x + \frac{P}{2}x \right)$$

$$V_{1(x)} = -wx + \frac{wL}{2} + \frac{P}{2}$$

CORTE #2 $\left[\frac{L}{2} \leq x \leq L \right]$



$$\Sigma M_k = 0 \quad (\circlearrowleft)$$

$$M_2(x) + w(x) \left(\frac{x}{2} \right) + P \left(x - \frac{L}{2} \right) - \left(\frac{wL}{2} + \frac{P}{2} \right) (x) = 0$$

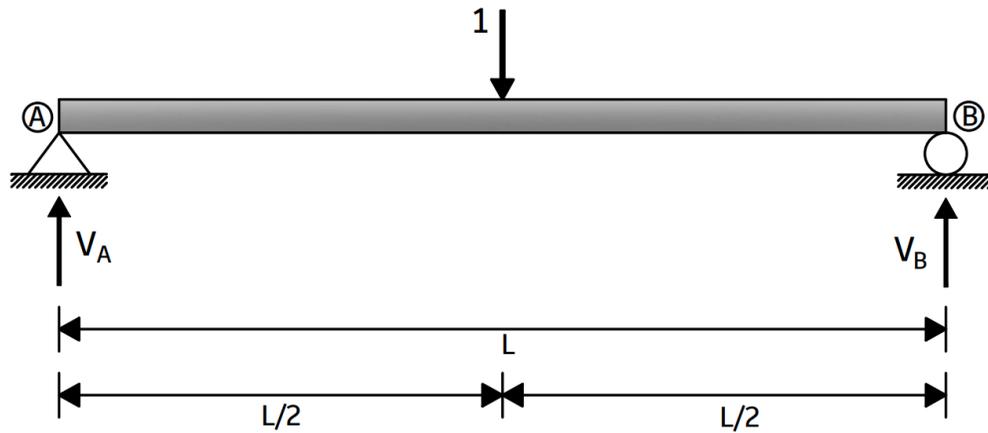
$$M_2(x) + \frac{wx^2}{2} + Px - \frac{PL}{2} - \frac{wL}{2}x - \frac{P}{2}x = 0$$

$$M_2(x) + \frac{wx^2}{2} - \frac{wL}{2}x + \frac{P}{2}x - \frac{PL}{2} = 0$$

$$M_2(x) = -\frac{wx^2}{2} + \frac{wL}{2}x - \frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}$$

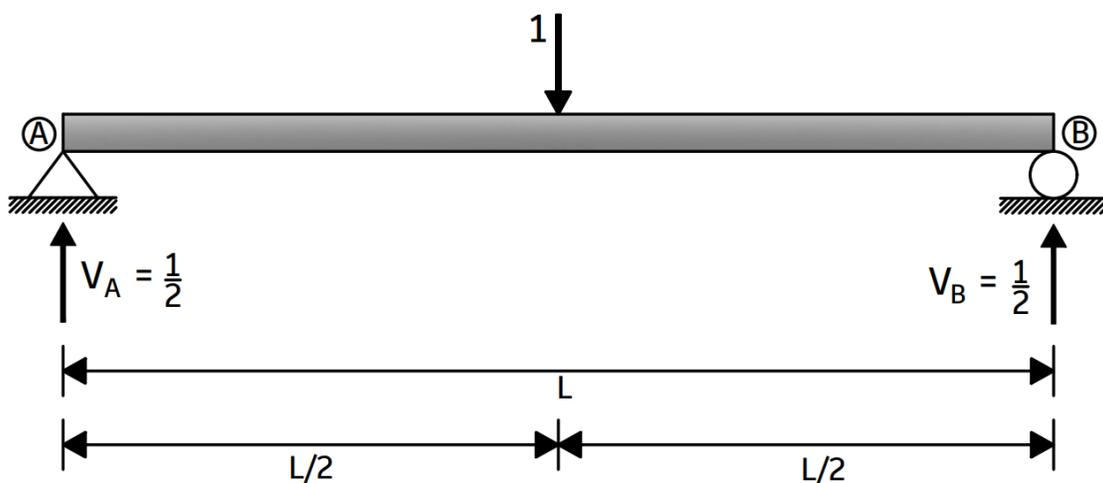
$$V_2(x) = \frac{d}{dx} [M_2(x)] = -wx + \frac{wL}{2} - \frac{P}{2}$$

PASO ③: Colocar una carga virtual puntual unitaria en la viga, en el punto donde se desea conocer el desplazamiento vertical. Se coloca la carga unitaria en la dirección que se crea que será la dirección del desplazamiento.



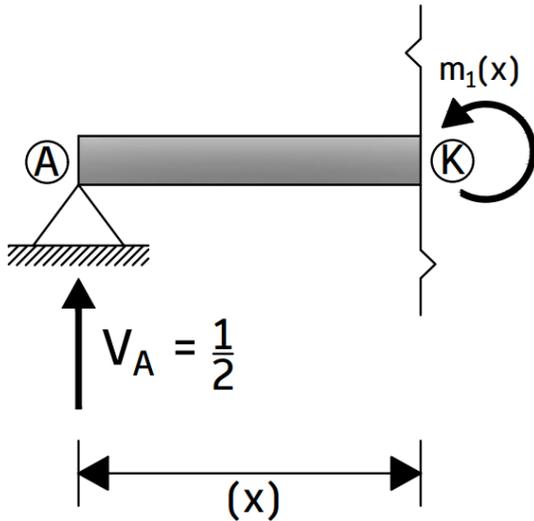
PASO ④: Calcular las reacciones en los apoyos de la viga que tiene la carga virtual unitaria con las ecuaciones del equilibrio.

$\Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright (+)$ $-V_B(L) + 1\left(\frac{L}{2}\right) = 0$ $-V_B(L) + \frac{L}{2} = 0$ $V_B = \frac{L}{2L}$ $V_B = \frac{1}{2}$	$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$ $V_A + V_B - 1 = 0$ $V_A + \frac{1}{2} - 1 = 0$ $V_A - \frac{1}{2} = 0$ $V_A = \frac{1}{2}$
--	---



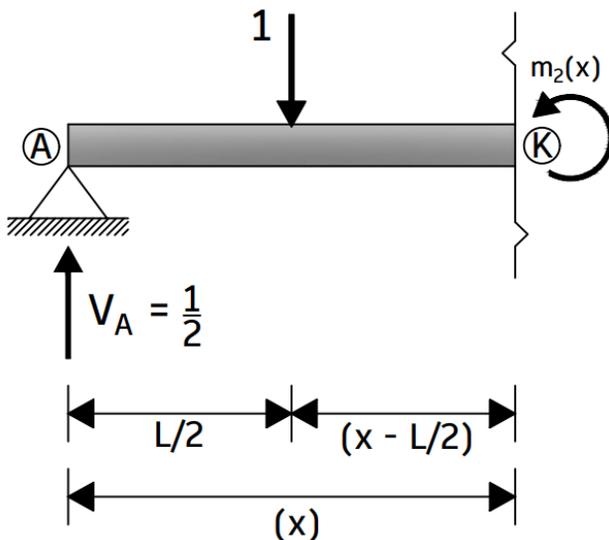
PASO ⑤: Calcular las ecuaciones de los momentos flexionantes $[m(x)]$ y fuerza cortante $[v(x)]$ de la viga que tiene una carga virtual unitaria ficticia.

CORTE #1 $\left[0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right]$



$\Sigma M_K = 0 \quad \curvearrowright (+)$ $m_1(x) - \frac{1}{2}(x) = 0$ $m_1(x) = \frac{1}{2}x$
$v_1(x) = \frac{d}{dx} [m_1(x)] = \frac{1}{2}$ $v_1(x) = \frac{1}{2}$

CORTE #2 $\left[\frac{L}{2} \leq x \leq L \right]$



$\Sigma M_K = 0 \quad \curvearrowright (+)$ $m_2(x) - \frac{1}{2}(x) + 1 \left(x - \frac{L}{2} \right) = 0$ $m_2(x) - \frac{1}{2}x + x - \frac{L}{2} = 0$ $m_2(x) + \frac{1}{2}x - \frac{L}{2} = 0$ $m_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{L}{2}$
$v_2(x) = \frac{d}{dx} [m_2(x)] = -\frac{1}{2}$ $v_2(x) = -\frac{1}{2}$

PASO ⑥: Calcular el desplazamiento vertical utilizando la ecuación 2.20, esta ecuación toma en cuenta la deformación por cortante.

$$\Delta_{TOTAL} = \int_0^L \underbrace{\frac{M(x) \cdot m(x)}{EI}}_{\text{Deformación por flexión}} dx + \int_0^L \underbrace{\frac{K \cdot V(x) \cdot v(x)}{GA}}_{\text{Deformación por cortante}} dx$$

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_{FLEXIÓN} + \Delta_{CORTANTE}$$

<i>Ecuaciones de Momentos flexionantes [M(x)] y Fuerzas Cortantes [V(x)] de la viga con cargas REALES</i>	<i>Ecuaciones de Momentos flexionantes [m(x)] y Fuerzas Cortantes [v(x)] de la viga con una carga UNITARIA FICTICIA</i>
$0 \leq x \leq L/2$	$0 \leq x \leq L/2$
$M_1(x) = -\frac{wx^2}{2} + \frac{wL}{2}x + \frac{P}{2}x$ $V_1(x) = -wx + \frac{wL}{2} + \frac{P}{2}$	$m_1(x) = \frac{1}{2}x$ $v_1(x) = \frac{1}{2}$
$L/2 \leq x \leq L$	$L/2 \leq x \leq L$
$M_2(x) = -\frac{wx^2}{2} + \frac{wL}{2}x - \frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}$ $V_2(x) = -wx + \frac{wL}{2} - \frac{P}{2}$	$m_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{L}{2}$ $v_2(x) = -\frac{1}{2}$

CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \int_0^{L/2} \underbrace{\frac{M_1(x) \cdot m_1(x)}{EI}}_{\Delta_{F1}} dx + \int_{L/2}^L \underbrace{\frac{M_2(x) \cdot m_2(x)}{EI}}_{\Delta_{F2}} dx$$

CÁLCULO DE Δ_{F1}

$$\Delta_{F1} = \int_0^{L/2} \frac{\left(-\frac{wx^2}{2} + \frac{wL}{2}x + \frac{P}{2}x\right) \left(\frac{1}{2}x\right)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(-\frac{wx^3}{4} + \frac{wLx^2}{4} + \frac{Px^2}{4}\right) dx$$

$$\Delta_{F1} = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left[-\frac{w}{4} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{wL}{4} \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{P}{4} \left(\frac{x^3}{3} \right) \right] dx = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left[-\frac{w}{16} x^4 + \frac{wL}{12} x^3 + \frac{P}{12} x^3 \right] dx$$

$$\Delta_{F1} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{w}{16} \left(\frac{L}{2} \right)^4 + \frac{wL}{12} \left(\frac{L}{2} \right)^3 + \frac{P}{12} \left(\frac{L}{2} \right)^3 \right] - \left[-\frac{w}{16} (0)^4 + \frac{wL}{12} (0)^3 + \frac{P}{12} (0)^3 \right] \right\}$$

$$\Delta_{F1} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{w}{16} \left(\frac{L^4}{16} \right) + \frac{wL}{12} \left(\frac{L^3}{8} \right) + \frac{P}{12} \left(\frac{L^3}{8} \right) \right] - [0] \right\}$$

$$\Delta_{F1} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{wL^4}{256} + \frac{wL^4}{96} + \frac{PL^3}{96} \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{5wL^4}{768} + \frac{PL^3}{96} \right)$$

$$\Delta_{F1} = \frac{5wL^4}{768EI} + \frac{PL^3}{96EI}$$

CÁLCULO DE Δ_{F2}

$$\Delta_{F2} = \int_{L/2}^L \frac{\left(-\frac{wx^2}{2} + \frac{wL}{2}x - \frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} \right) \left(-\frac{1}{2}x + \frac{L}{2} \right)}{EI} dx$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(\frac{wx^3}{4} - \frac{wLx^2}{4} + \frac{Px^2}{4} - \frac{PLx}{4} - \frac{wLx^2}{4} + \frac{wL^2x}{4} - \frac{PLx}{4} + \frac{PL^2}{4} \right) dx$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(\frac{wx^3}{4} - \frac{wLx^2}{2} + \frac{Px^2}{4} - \frac{PLx}{2} + \frac{wL^2x}{4} + \frac{PL^2}{4} \right) dx$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left[\frac{w}{4} \left(\frac{x^4}{4} \right) - \frac{wL}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{P}{4} \left(\frac{x^3}{3} \right) - \frac{PL}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{wL^2}{4} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{PL^2}{4} (x) \right] dx$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left[\frac{w}{16} x^4 - \frac{wL}{6} x^3 + \frac{P}{12} x^3 - \frac{PL}{4} x^2 + \frac{wL^2}{8} x^2 + \frac{PL^2}{4} x \right] dx$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{w}{16} (L)^4 - \frac{wL}{6} (L)^3 + \frac{P}{12} (L)^3 - \frac{PL}{4} (L)^2 + \frac{wL^2}{8} (L)^2 + \frac{PL^2}{4} (L) \right] - \left[\frac{w}{16} \left(\frac{L}{2} \right)^4 - \frac{wL}{6} \left(\frac{L}{2} \right)^3 + \frac{P}{12} \left(\frac{L}{2} \right)^3 - \frac{PL}{4} \left(\frac{L}{2} \right)^2 + \frac{wL^2}{8} \left(\frac{L}{2} \right)^2 + \frac{PL^2}{4} \left(\frac{L}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{w}{16} L^4 - \frac{wL}{6} L^3 + \frac{P}{12} L^3 - \frac{PL}{4} L^2 + \frac{wL^2}{8} L^2 + \frac{PL^2}{4} L \right] - \left[\frac{w}{16} \left(\frac{L^4}{16} \right) - \frac{wL}{6} \left(\frac{L^3}{8} \right) + \frac{P}{12} \left(\frac{L^3}{8} \right) - \frac{PL}{4} \left(\frac{L^2}{4} \right) + \frac{wL^2}{8} \left(\frac{L^2}{4} \right) + \frac{PL^2}{4} \left(\frac{L}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{wL^4}{16} - \frac{wL^4}{6} + \frac{PL^3}{12} - \frac{PL^3}{4} + \frac{wL^4}{8} + \frac{PL^3}{4} \right) - \left(\frac{wL^4}{256} - \frac{wL^4}{48} + \frac{PL^3}{96} - \frac{PL^3}{16} + \frac{wL^4}{32} + \frac{PL^3}{8} \right) \right]$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{wL^4}{48} + \frac{PL^3}{12} \right) - \left(\frac{11wL^4}{768} + \frac{7PL^3}{96} \right) \right] = \frac{1}{EI} \left(\frac{5wL^4}{768} + \frac{PL^3}{96} \right)$$

$$\Delta_{F2} = \frac{5wL^4}{768EI} + \frac{PL^3}{96EI}$$

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \Delta_{F1} + \Delta_{F2}$$

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \left(\frac{5wL^4}{768EI} + \frac{PL^3}{96EI} \right) + \left(\frac{5wL^4}{768EI} + \frac{PL^3}{96EI} \right)$$

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \frac{5wL^4}{384EI} + \frac{PL^3}{48EI}$$

CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN POR CORTANTE

$$\Delta_{CORTANTE} = \int_0^{L/2} \frac{K \cdot V_1(x) \cdot v_1(x)}{GA} dx + \int_{L/2}^L \frac{K \cdot V_2(x) \cdot v_2(x)}{GA} dx$$

$$\Delta_{CORTANTE} = \frac{K}{GA} \int_0^{L/2} \underbrace{V_1(x) \cdot v_1(x)}_{\Delta_{V1}} dx + \frac{K}{GA} \int_{L/2}^L \underbrace{V_2(x) \cdot v_2(x)}_{\Delta_{V2}} dx$$

CÁLCULO DE Δ_{V1}

$$\Delta_{V1} = \frac{K}{GA} \int_0^{L/2} \left(-wx + \frac{wL}{2} + \frac{P}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) dx = \frac{K}{GA} \int_0^{L/2} \left(-\frac{wx}{2} + \frac{wL}{4} + \frac{P}{4} \right) dx$$

$$\Delta_{V1} = \frac{K}{GA} \int_0^{L/2} \left[-\frac{w}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{wL}{4} (x) + \frac{P}{4} (x) \right] dx = \frac{K}{GA} \int_0^{L/2} \left[-\frac{w}{4} x^2 + \frac{wL}{4} x + \frac{P}{4} x \right] dx$$

$$\Delta_{V1} = \frac{K}{GA} \left\{ \left[\left(-\frac{w}{4} \left(\frac{L}{2} \right)^2 + \frac{wL}{4} \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{P}{4} \left(\frac{L}{2} \right) \right) - \left(-\frac{w}{4} (0)^2 + \frac{wL}{4} (0) + \frac{P}{4} (0) \right) \right] \right\}$$

$$\Delta_{V1} = \frac{K}{GA} \left[\left(-\frac{wL^2}{16} + \frac{wL^2}{8} + \frac{PL}{8} \right) - (0) \right] = \frac{K}{GA} \left(\frac{wL^2}{16} + \frac{PL}{8} \right)$$

$$\Delta_{V1} = \frac{KwL^2}{16GA} + \frac{KPL}{8GA}$$

CÁLCULO DE Δ_{V2}

$$\Delta_{V2} = \frac{K}{GA} \int_{L/2}^L \left(-wx + \frac{wL}{2} - \frac{P}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) dx = \frac{K}{GA} \int_{L/2}^L \left(\frac{wx}{2} - \frac{wL}{4} + \frac{P}{4} \right) dx$$

$$\Delta_{V2} = \frac{K}{GA} \int_{L/2}^L \left[\frac{w}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) - \frac{wL}{4} (x) + \frac{P}{4} (x) \right] dx = \frac{K}{GA} \int_{L/2}^L \left[\frac{w}{4} x^2 - \frac{wL}{4} x + \frac{P}{4} x \right] dx$$

$$\Delta_{V2} = \frac{K}{GA} \left\{ \left[\left(\frac{w}{4} (L)^2 - \frac{wL}{4} (L) + \frac{P}{4} (L) \right) - \left(\frac{w}{4} \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \frac{wL}{4} \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{P}{4} \left(\frac{L}{2} \right) \right) \right] \right\}$$

$$\Delta_{V2} = \frac{K}{GA} \left[\left(\frac{wL^2}{4} - \frac{wL^2}{4} + \frac{PL}{4} \right) - \left(\frac{wL^2}{16} - \frac{wL^2}{8} + \frac{PL}{8} \right) \right]$$

$$\Delta_{V2} = \frac{K}{GA} \left[\left(\frac{PL}{4} \right) - \left(-\frac{wL^2}{16} + \frac{PL}{8} \right) \right] = \frac{K}{GA} \left(\frac{PL}{4} + \frac{wL^2}{16} - \frac{PL}{8} \right) = \frac{K}{GA} \left(\frac{wL^2}{16} + \frac{PL}{8} \right)$$

$$\Delta_{V2} = \frac{KwL^2}{16GA} + \frac{KPL}{8GA}$$

$$\Delta_{CORTANTE} = \Delta_{V1} + \Delta_{V2}$$

$$\Delta_{CORTANTE} = \left(\frac{KwL^2}{16GA} + \frac{KPL}{8GA} \right) + \left(\frac{KwL^2}{16GA} + \frac{KPL}{8GA} \right)$$

$$\Delta_{CORTANTE} = \frac{KwL^2}{8GA} + \frac{KPL}{4GA}$$

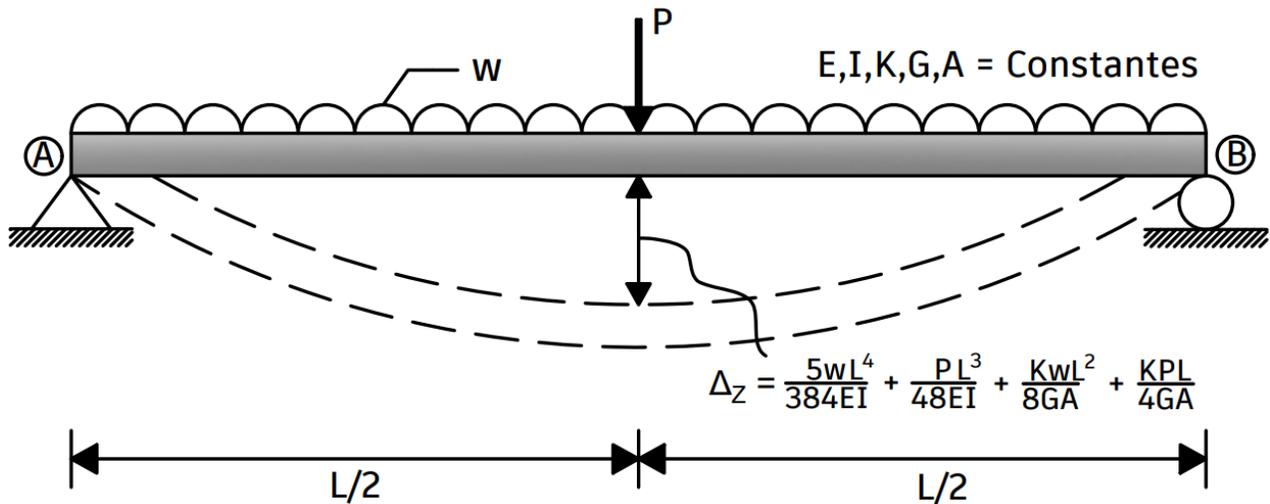
DEFORMACIÓN TOTAL

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_{FLEXIÓN} + \Delta_{CORTANTE}$$

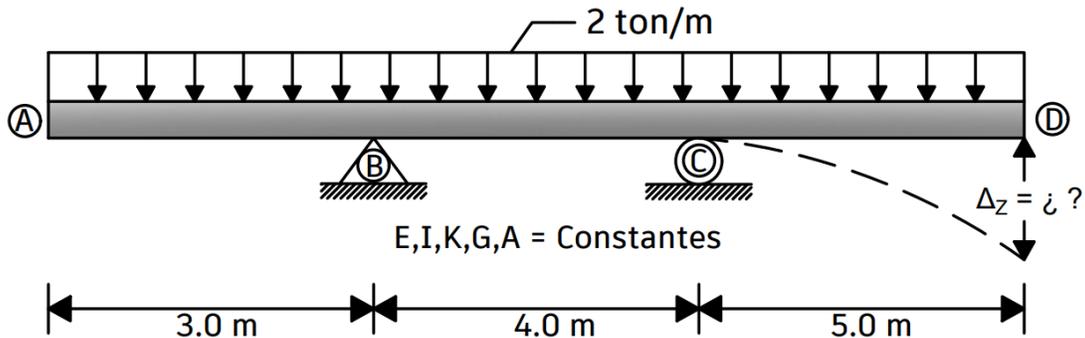
$$\Delta_{TOTAL} = \left(\frac{5wL^4}{384EI} + \frac{PL^3}{48EI} \right) + \left(\frac{KwL^2}{8GA} + \frac{KPL}{4GA} \right)$$

Resultado: Desplazamiento Vertical Total o Deformación Total

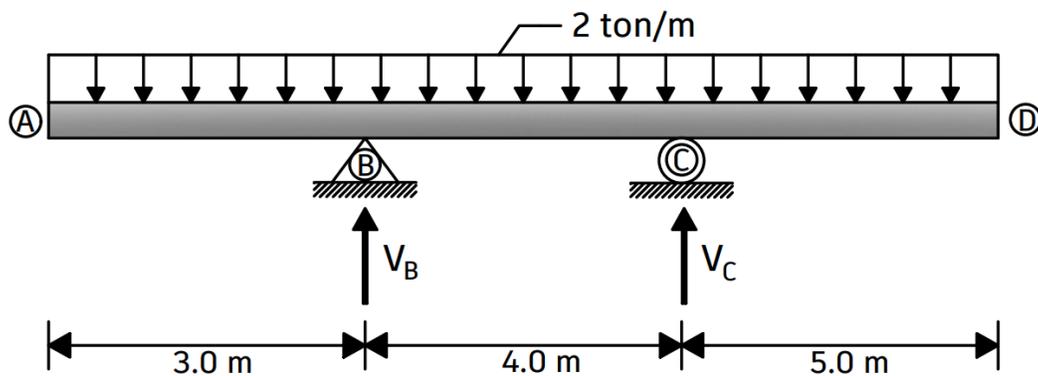
$$\Delta_z = \frac{5wL^4}{384EI} + \frac{PL^3}{48EI} + \frac{KwL^2}{8GA} + \frac{KPL}{4GA}$$



Ejercicio 2.23: Se pide calcular el desplazamiento vertical en el punto D que se encuentra a un extremo de la viga utilizando el principio del trabajo virtual, considere calcular la deformación por flexión y la deformación por cortante. La viga es sometida a una carga uniformemente repartida de 2 ton/m como se muestra a continuación:



PASO ①: Calcular las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_B = 0 \quad (+)$$

$$-V_C(4 \text{ m}) - 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (3 \text{ m}) \left(\frac{3 \text{ m}}{2} \right) + 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (9 \text{ m}) \left(\frac{9 \text{ m}}{2} \right) = 0$$

$$-V_C(4 \text{ m}) - 9 \text{ ton} \cdot \text{m} + 81 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$-V_C(4 \text{ m}) + 72 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$V_C = \frac{72 \text{ ton} \cdot \text{m}}{4 \text{ m}}$$

$$V_C = 18 \text{ ton}$$

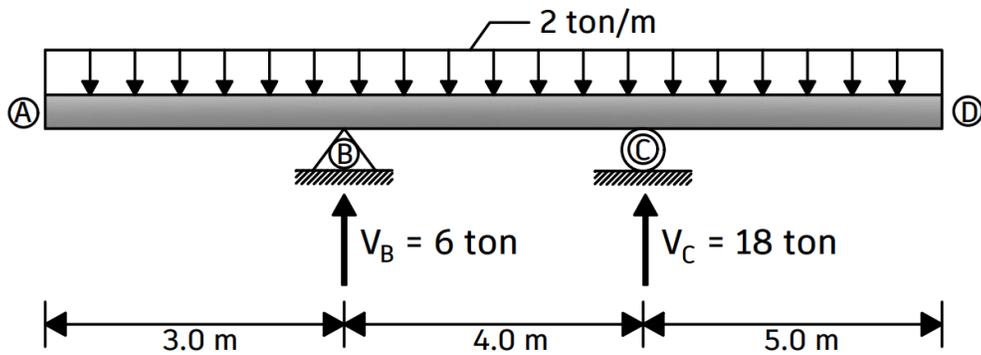
$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$V_B + V_C - 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (12 \text{ m}) = 0$$

$$V_B + 18 \text{ ton} - 24 \text{ ton} = 0$$

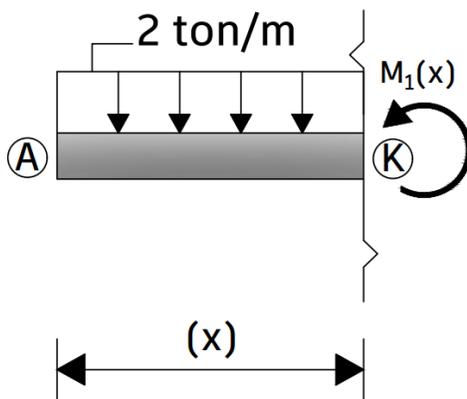
$$V_B - 6 \text{ ton} = 0$$

$$V_B = 6 \text{ ton}$$



PASO ②: Calcular las ecuaciones de los momentos flexionantes $[M(x)]$ y las ecuaciones de la fuerza cortante $[V(x)]$ de la viga con cargas "REALES".

CORTE #1 $[0 \leq x \leq 3.0 \text{ m}]$



$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$M_1(x) + 2(x) \left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

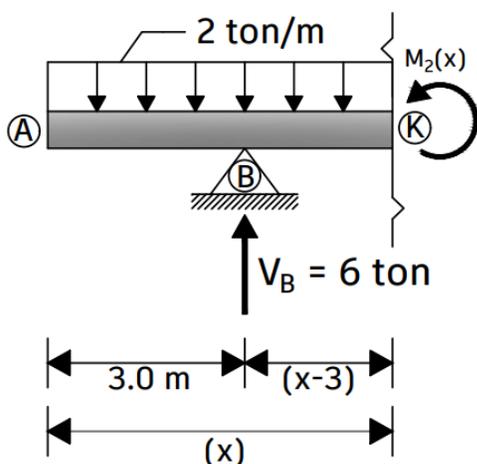
$$M_1(x) + x^2 = 0$$

$$M_1(x) = -x^2$$

$$V_1(x) = \frac{d}{dx} [M_1(x)]$$

$$V_1(x) = -2x$$

CORTE #2 $[3.0 \text{ m} \leq x \leq 7.0 \text{ m}]$



$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$M_2(x) + 2(x) \left(\frac{x}{2}\right) - 6(x-3) = 0$$

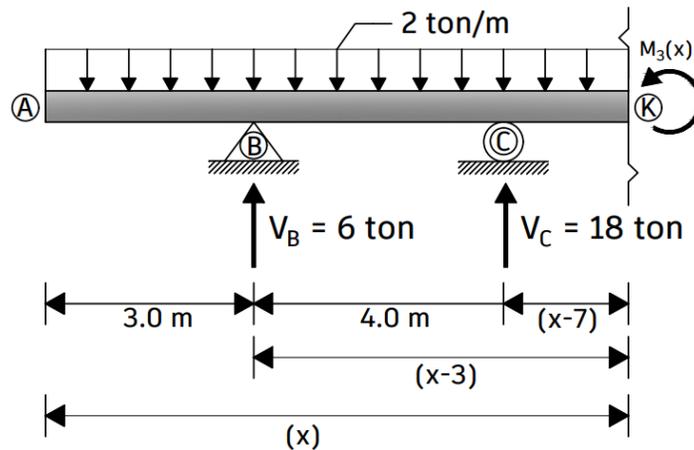
$$M_2(x) + x^2 - 6x + 18 = 0$$

$$M_2(x) = -x^2 + 6x - 18$$

$$V_2(x) = \frac{d}{dx} [M_2(x)]$$

$$V_2(x) = -2x + 6$$

CORTE #3 [7.0 m ≤ x ≤ 12.0 m]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (\curvearrowleft)$$

$$M_3(x) + 2(x) \left(\frac{x}{2}\right) - 6(x-3) - 18(x-7) = 0$$

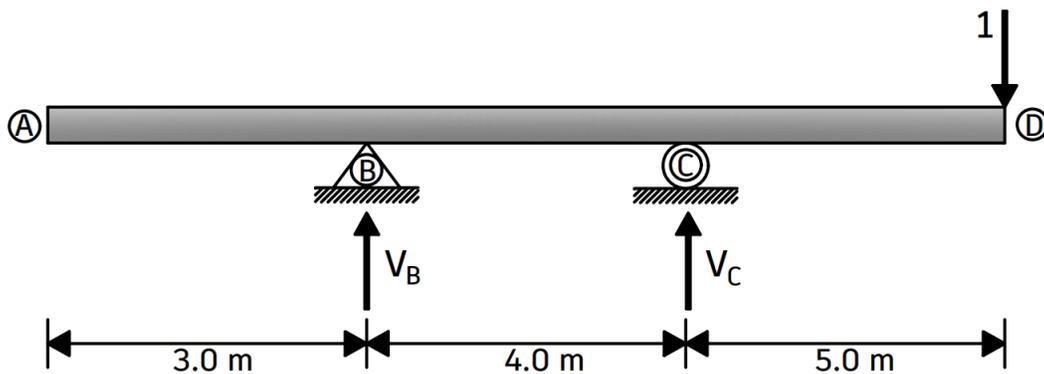
$$M_3(x) + x^2 - 6x + 18 - 18x + 126 = 0$$

$$M_3(x) + x^2 - 24x + 144 = 0$$

$$M_3(x) = -x^2 + 24x - 144$$

$$V_3(x) = \frac{d}{dx} [M_3(x)] = -2x + 24$$

PASO ③: Colocar una carga virtual puntual unitaria en la viga, en el punto donde se desea conocer el desplazamiento vertical. Se coloca la carga unitaria en la dirección en la que se crea que será la dirección del desplazamiento.



PASO ④: Calcular las reacciones en los apoyos de la viga que tiene la carga virtual unitaria con las ecuaciones del equilibrio.

$$\Sigma M_B = 0 \quad (+)$$

$$-V_C(4 \text{ m}) + 1(9 \text{ m}) = 0$$

$$V_C = \frac{9 \text{ m}}{4 \text{ m}}$$

$$V_C = \frac{9}{4}$$

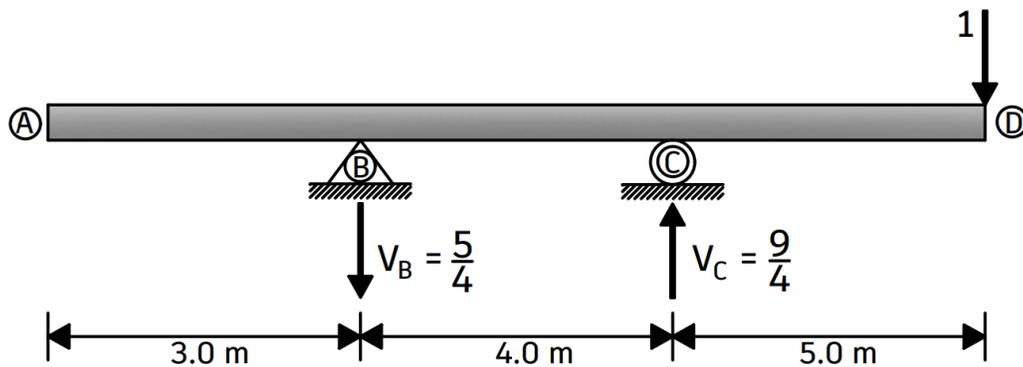
$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$V_B + V_C - 1 = 0$$

$$V_B + \frac{9}{4} - 1 = 0$$

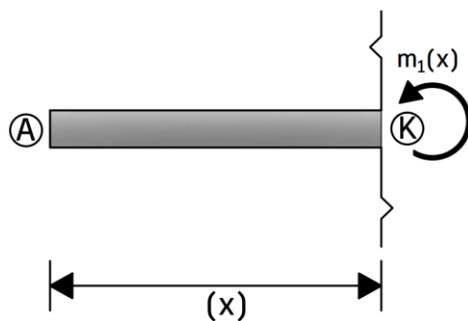
$$V_B + \frac{5}{4} = 0$$

$$V_B = -\frac{5}{4} \quad [\downarrow]$$



PASO ⑤: Calcular las ecuaciones de los momentos flexionantes $[m(x)]$ y fuerzas cortantes $[v(x)]$ de la viga que tiene una carga virtual unitaria ficticia.

CORTE #1 $[0.0 \text{ m} \leq x \leq 3.0 \text{ m}]$

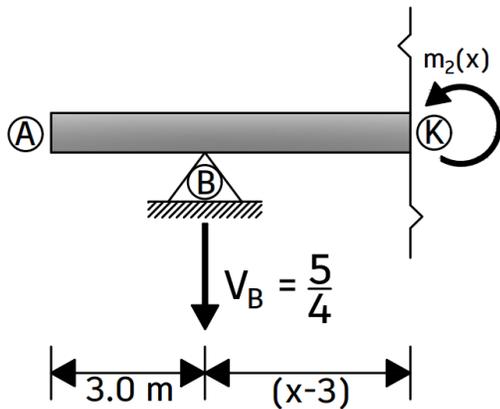


$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$m_1(x) = 0$$

$$v_1(x) = 0$$

CORTE #2 [3.0 m ≤ x ≤ 7.0 m]



$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$m_2(x) + \frac{5}{4}(x-3) = 0$$

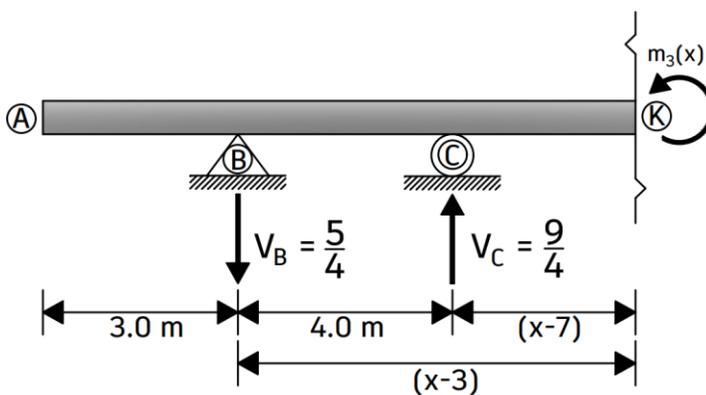
$$m_2(x) + \frac{5}{4}x - \frac{15}{4} = 0$$

$$m_2(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{15}{4}$$

$$v_2(x) = \frac{d}{dx}[m_2(x)]$$

$$v_2(x) = -\frac{5}{4}$$

CORTE #3 [7.0 m ≤ x ≤ 12.0 m]



$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$m_3(x) + \frac{5}{4}(x-3) - \frac{9}{4}(x-7) = 0$$

$$m_3(x) + \frac{5}{4}x - \frac{15}{4} - \frac{9}{4}x + \frac{63}{4} = 0$$

$$m_3(x) - x + 12 = 0$$

$$m_3(x) = x - 12$$

$$v_3(x) = \frac{d}{dx}[m_3(x)]$$

$$v_3(x) = 1$$

PASO ⑥: Calcular el desplazamiento vertical utilizando la ecuación 2.20, esta ecuación toma en cuenta la deformación por cortante.

$$\Delta_{TOTAL} = \int_0^L \underbrace{\frac{M(x) \cdot m(x)}{EI}}_{\text{Deformación por flexión}} dx + \int_0^L \underbrace{\frac{K \cdot V(x) \cdot v(x)}{GA}}_{\text{Deformación por cortante}} dx$$

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_{FLEXION} + \Delta_{CORTANTE}$$

<i>Ecuaciones de Momentos flexionantes [M(x)] y Fuerzas Cortantes [V(x)] de la viga con cargas REALES</i>	<i>Ecuaciones de Momentos flexionantes [m(x)] y Fuerzas Cortantes [v(x)] de la viga con una carga UNITARIA FICTICIA</i>	
0 m ≤ x ≤ 3.0 m	0 m ≤ x ≤ 3.0 m	
$M_1(x) = -x^2$ $V_1(x) = -2x$	$m_1(x) = 0$	$v_1(x) = 0$
3.0 m ≤ x ≤ 7.0 m	3.0 m ≤ x ≤ 7.0 m	
$M_2(x) = -x^2 + 6x - 18$ $V_2(x) = -2x + 6$	$m_2(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{15}{4}$	$v_2(x) = -\frac{5}{4}$
7.0 m ≤ x ≤ 12.0 m	7.0 m ≤ x ≤ 12.0 m	
$M_3(x) = -x^2 + 24x - 144$ $V_3(x) = -2x + 24$	$m_3(x) = x - 12$	$v_3(x) = 1$

CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN

$$\Delta_{FLEXION} = \int_0^3 \underbrace{\frac{M_1(x) \cdot m_1(x)}{EI}}_{\Delta_{F1}} dx + \int_3^7 \underbrace{\frac{M_2(x) \cdot m_2(x)}{EI}}_{\Delta_{F2}} dx + \int_7^{12} \underbrace{\frac{M_3(x) \cdot m_3(x)}{EI}}_{\Delta_{F3}} dx$$

Cálculo de Δ_{F1}

$$\Delta_{F1} = \int_0^3 \frac{(-x^2)(0)}{EI} dx = 0$$

Cálculo de Δ_{F2}

$$\Delta_{F2} = \int_3^7 \frac{(-x^2 + 6x - 18) \left(-\frac{5}{4}x + \frac{15}{4}\right)}{EI} dx$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \int_3^7 \left(\frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{45}{2}x - \frac{15}{4}x^2 + \frac{45}{2}x - \frac{135}{2}\right) dx$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \int_3^7 \left(\frac{5}{4}x^3 - \frac{45}{4}x^2 + 45x - \frac{135}{2}\right) dx$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{4} \left(\frac{x^4}{4}\right) - \frac{45}{4} \left(\frac{x^3}{3}\right) + 45 \left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{135}{2} (x) \right]_3^7$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{16} x^4 - \frac{45}{12} x^3 + \frac{45}{2} x^2 - \frac{135}{2} x \right]_3^7$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{5}{16} (7)^4 - \frac{45}{12} (7)^3 + \frac{45}{2} (7)^2 - \frac{135}{2} (7) \right] - \left[\frac{5}{16} (3)^4 - \frac{45}{12} (3)^3 + \frac{45}{2} (3)^2 - \frac{135}{2} (3) \right] \right\}$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{12005}{16} - \frac{5145}{4} + \frac{2205}{2} - \frac{945}{2} \right) - \left(\frac{405}{16} - \frac{405}{4} + \frac{405}{2} - \frac{405}{2} \right) \right]$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1505}{16} \right) - \left(-\frac{1215}{16} \right) \right] = \frac{1}{EI} \left(\frac{1505}{16} + \frac{1215}{16} \right) = \frac{1}{EI} (170)$$

$$\Delta_{F2} = \frac{170}{EI}$$

Cálculo de Δ_{F3}

$$\Delta_{F3} = \int_7^{12} \frac{(-x^2 + 24x - 144)(x - 12)}{EI} dx$$

$$\Delta_{F3} = \frac{1}{EI} \int_7^{12} (-x^3 + 24x^2 - 144x + 12x^2 - 288x + 1728) dx$$

$$\Delta_{F3} = \frac{1}{EI} \int_7^{12} (-x^3 + 36x^2 - 432x + 1728) dx$$

$$\Delta_{F3} = \frac{1}{EI} \int_7^{12} \left[-\left(\frac{x^4}{4}\right) + 36\left(\frac{x^3}{3}\right) - 432\left(\frac{x^2}{2}\right) + 1728(x) \right]$$

$$\Delta_{F3} = \frac{1}{EI} \int_7^{12} \left[-\frac{x^4}{4} + 12x^3 - 216x^2 + 1728x \right]$$

$$\Delta_{F3} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{(12)^4}{4} + 12(12)^3 - 216(12)^2 + 1728(12) \right] - \left[-\frac{(7)^4}{4} + 12(7)^3 - 216(7)^2 + 1728(7) \right] \right\}$$

$$\Delta_{F3} = \frac{1}{EI} \left[(-5184 + 20736 - 31104 + 20736) - \left(-\frac{2401}{4} + 4116 - 10584 + 12096 \right) \right]$$

$$\Delta_{F3} = \frac{1}{EI} \left[(5184) - \left(\frac{20111}{4} \right) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{625}{4} \right]$$

$$\Delta_{F3} = \frac{625}{4EI}$$

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \Delta_{F1} + \Delta_{F2} + \Delta_{F3}$$

$$\Delta_{FLEXIÓN} = 0 + \frac{170}{EI} + \frac{625}{4EI}$$

$\Delta_{FLEXIÓN} = \frac{1305}{4EI}$

CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN POR CORTANTE

$$\Delta_{CORTANTE} = \int_0^3 \underbrace{\frac{K \cdot V_1(x) \cdot v_1(x)}{GA}}_{\Delta_{V1}} dx + \int_3^7 \underbrace{\frac{K \cdot V_2(x) \cdot v_2(x)}{GA}}_{\Delta_{V2}} dx + \int_7^{12} \underbrace{\frac{K \cdot V_3(x) \cdot v_3(x)}{GA}}_{\Delta_{V3}} dx$$

Cálculo de Δ_{V1}

$$\Delta_{V1} = \int_0^3 \frac{K(-2x)(0)}{GA} dx = 0$$

Cálculo de Δ_{V2}

$$\Delta_{V2} = \int_3^7 \frac{K(-2x+6)\left(-\frac{5}{4}\right)}{GA} dx = \frac{K}{GA} \int_3^7 \left(\frac{5}{2}x - \frac{15}{2}\right) dx$$

$$\Delta_{V2} = \frac{K}{GA} \left[\frac{5}{2} \left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{15}{2}(x) \right]_3^7 = \frac{K}{GA} \left[\frac{5}{4}x^2 - \frac{15}{2}x \right]_3^7$$

$$\Delta_{V2} = \frac{K}{GA} \left\{ \left[\frac{5}{4}(7)^2 - \frac{15}{2}(7) \right] - \left[\frac{5}{4}(3)^2 - \frac{15}{2}(3) \right] \right\} = \frac{K}{GA} \left[\left(\frac{35}{4}\right) - \left(-\frac{45}{4}\right) \right]$$

$$\Delta_{V2} = \frac{K20}{GA}$$

Cálculo de Δ_{V3}

$$\Delta_{V3} = \int_7^{12} \frac{K(-2x+24)(1)}{GA} dx = \frac{K}{GA} \int_7^{12} (-2x+24) dx$$

$$\Delta_{V3} = \frac{K}{GA} \left[-2 \left(\frac{x^2}{2}\right) + 24(x) \right]_7^{12} = \frac{K}{GA} \left[-x^2 + 24x \right]_7^{12}$$

$$\Delta_{V3} = \frac{K}{GA} \left\{ [- (12)^2 + 24(12)] - [- (7)^2 + 24(7)] \right\} = \frac{K}{GA} [(144) - (119)]$$

$$\Delta_{V3} = \frac{K25}{GA}$$

$$\Delta_{CORTANTE} = \Delta_{V1} + \Delta_{V2} + \Delta_{V3}$$

$$\Delta_{CORTANTE} = 0 + \frac{K20}{GA} + \frac{K25}{GA}$$

$$\Delta_{CORTANTE} = \frac{K45}{GA}$$

DEFORMACIÓN TOTAL

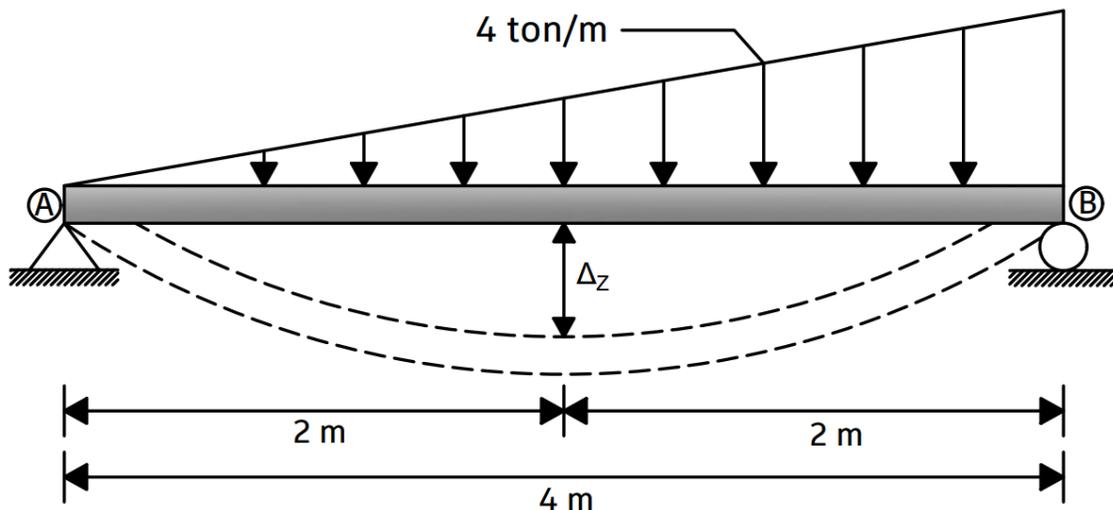
$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_{FLEXIÓN} + \Delta_{CORTANTE}$$

$$\Delta_{TOTAL} = \frac{1305}{4EI} + \frac{K45}{GA}$$

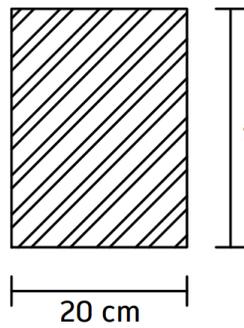
Resultado: Desplazamiento Vertical Total o Deformación Total

$$\Delta = \frac{1305}{4EI} + \frac{K45}{GA}$$

Ejercicio 2.24: Se pide calcular el desplazamiento vertical a la mitad del claro de una viga simplemente apoyada utilizando el principio del trabajo virtual, considere calcular la deformación por flexión y la deformación por cortante. La viga de (20 cm x 40 cm) esta elaborada de un concreto clase II que tiene un $f'c = 200 \text{ kg/cm}^2$, esta viga que tiene longitud de 4 m es sometida a una carga triangular de 4 ton/m como se muestra a continuación:



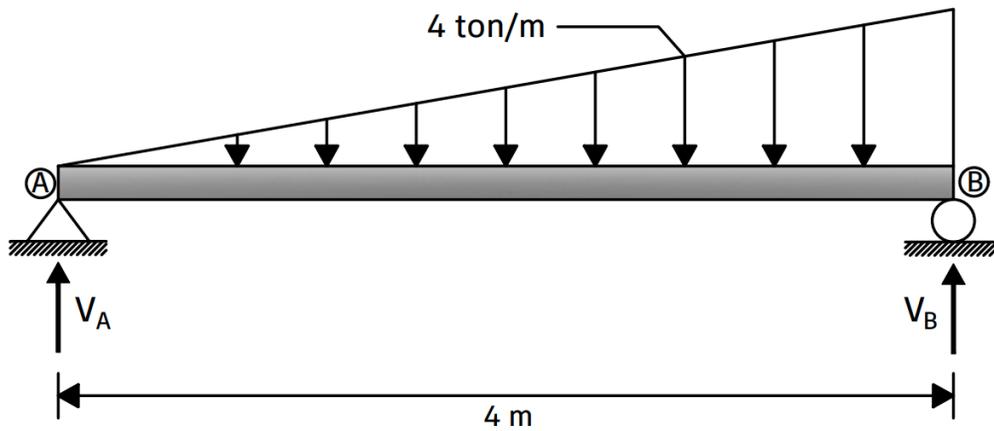
Sección Transversal



Concreto Clase II

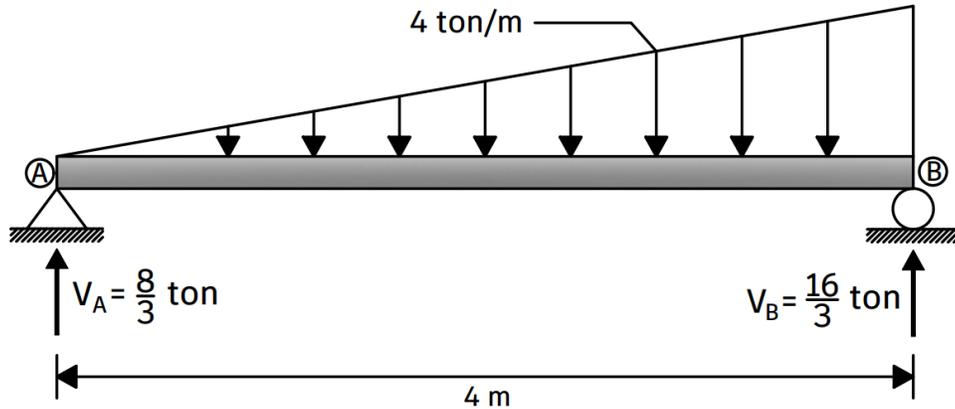
$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

PASO ①: Calcular las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.



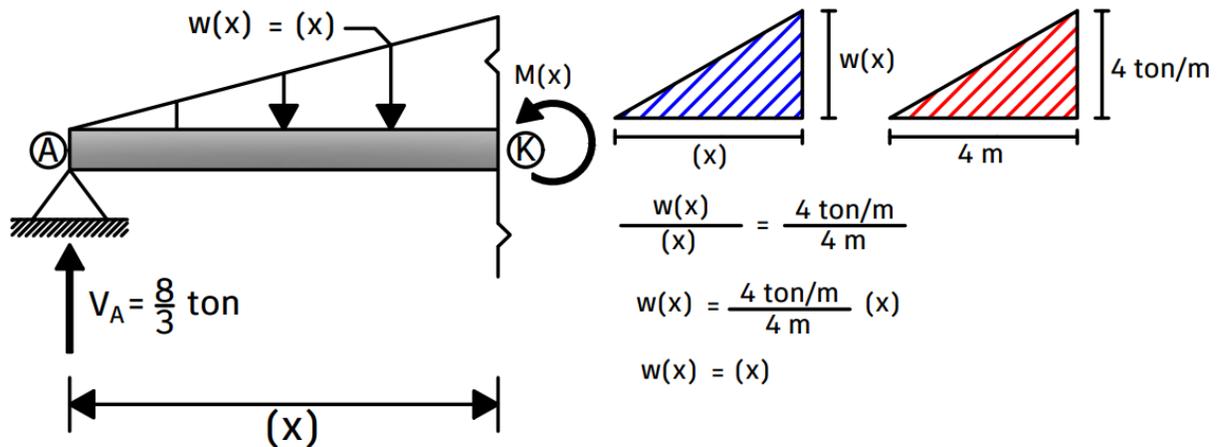
$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0 \quad \curvearrowright (+) \\ -V_B(4 \text{ m}) + \left[\frac{4 \text{ ton/m}(4 \text{ m})}{2} \right] \left[\frac{2}{3}(4 \text{ m}) \right] &= 0 \\ -V_B(4 \text{ m}) + \frac{64}{3} \text{ ton} \cdot \text{m} &= 0 \\ V_B &= \frac{16}{3} \text{ ton} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_Y &= 0 \quad \uparrow (+) \\ V_A + V_B - \frac{4 \text{ ton/m}(4 \text{ m})}{2} &= 0 \\ V_A + \frac{16}{3} \text{ ton} - 8 \text{ ton} &= 0 \\ V_A &= \frac{8}{3} \text{ ton} \end{aligned}$$



PASO ②: Calcular la ecuación del momento flexionante $[M(x)]$ y la ecuación de la fuerza cortante $[V(x)]$ de la viga con cargas "REALES".

CORTE #1 $[0\text{ m} \leq x \leq 4.0\text{ m}]$



$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$M(x) - \frac{8}{3}(x) + \left[\frac{x(x)}{2} \right] \left[\frac{1}{3}(x) \right] = 0$$

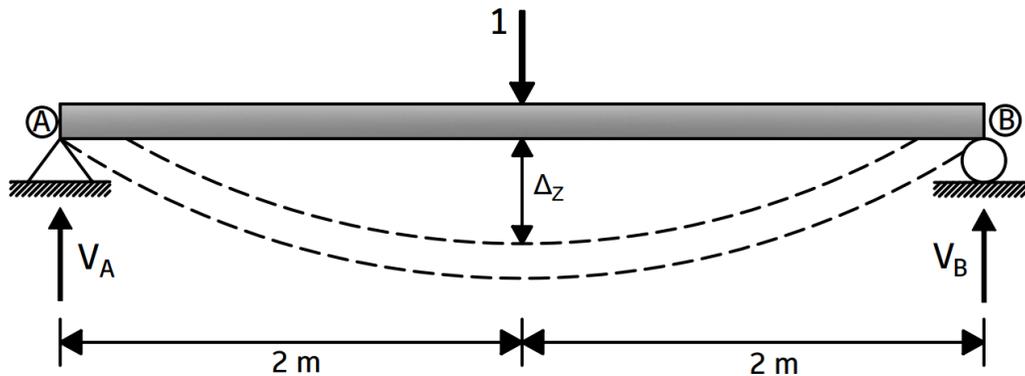
$$M(x) - \frac{8}{3}x + \frac{1}{6}x^3 = 0$$

$$M(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{3}x$$

$$V(x) = \frac{d}{dx}[M(x)]$$

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{3}$$

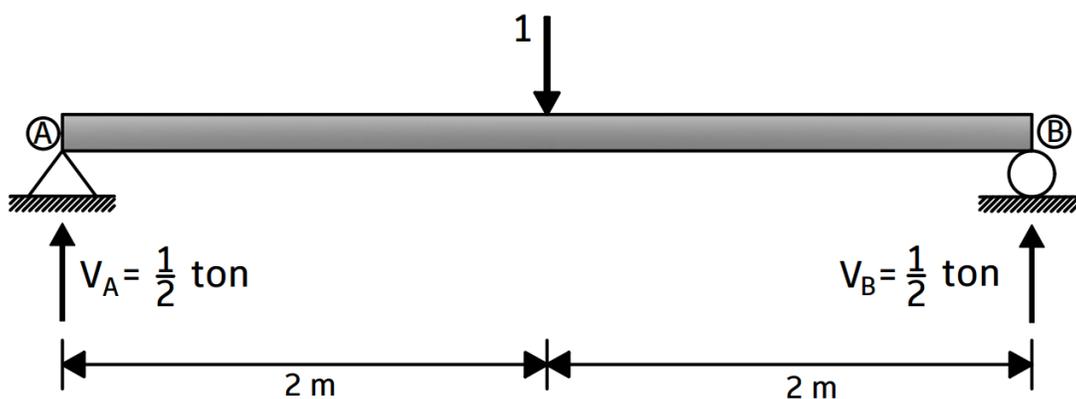
PASO ③: Colocar una carga virtual puntual unitaria en la viga, en el punto donde se desea conocer el desplazamiento vertical. Se coloca la carga unitaria en la dirección del desplazamiento.



PASO ④: Calcular las reacciones en los apoyos de la viga que tiene la carga virtual unitaria con las ecuaciones del equilibrio.

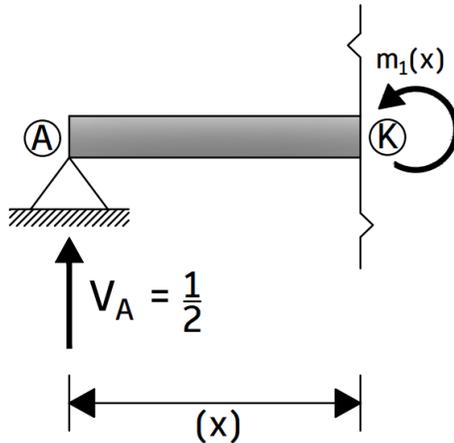
$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0 \quad (+) \\ -V_B(4 \text{ m}) + 1(2 \text{ m}) &= 0 \\ V_B &= \frac{2 \text{ m}}{4 \text{ m}} \\ V_B &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_Y &= 0 \quad (+) \\ V_A + V_B - 1 &= 0 \\ V_A + \frac{1}{2} - 1 &= 0 \\ V_A &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



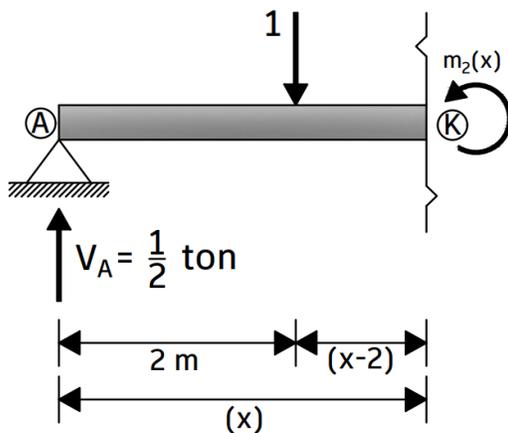
PASO ⑤: Calcular las ecuaciones de los momentos flexionantes $[m(x)]$ y fuerzas cortantes $[v(x)]$ de la viga que tiene una carga virtual unitaria ficticia.

CORTE #1 $[0\text{ m} \leq x \leq 2.0\text{ m}]$



$\Sigma M_K = 0 \curvearrowright (+)$ $m_1(x) - \frac{1}{2}(x) = 0$ $m_1(x) = \frac{1}{2}x$
$v_1(x) = \frac{d}{dx} [m_1(x)] = \frac{1}{2}$ $v_1(x) = \frac{1}{2}$

CORTE #2 $[2.0\text{ m} \leq x \leq 4.0\text{ m}]$



$\Sigma M_K = 0 \curvearrowright (+)$ $m_2(x) - \frac{1}{2}(x) + 1(x - 2) = 0$ $m_2(x) - \frac{1}{2}x + x - 2 = 0$ $m_2(x) = -\frac{1}{2}x + 2$
$v_2(x) = \frac{d}{dx} [m_2(x)]$ $v_2(x) = -\frac{1}{2}$

PASO ⑥: Cálculo del desplazamiento vertical utilizando la ecuación 2.20, esta ecuación toma en cuenta la deformación por cortante.

$$\Delta_{TOTAL} = \int_0^L \underbrace{\frac{M(x) \cdot m(x)}{EI}}_{\text{Deformación por flexión}} dx + \int_0^L \underbrace{\frac{K \cdot V(x) \cdot v(x)}{GA}}_{\text{Deformación por cortante}} dx$$

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_{FLEXIÓN} + \Delta_{CORTANTE}$$

<i>Ecuación del Momento flexionante [M(x)] y Fuerza Cortante [V(x)] de la viga con cargas REALES</i>	<i>Ecuaciones de Momentos flexionantes [m(x)] y Fuerzas Cortantes [v(x)] de la viga con una carga UNITARIA FICTICIA</i>	
0 m ≤ x ≤ 4.0 m	0 m ≤ x ≤ 2.0 m	
$M(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{3}x$ $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{3}$	$m_1(x) = \frac{1}{2}x$	$v_1(x) = \frac{1}{2}$
	2.0 m ≤ x ≤ 4.0 m	
	$m_2(x) = -\frac{1}{2}x + 2$	$v_2(x) = -\frac{1}{2}$

CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \int_0^2 \frac{M(x) \cdot m_1(x)}{EI} dx + \int_2^4 \frac{M(x) \cdot m_2(x)}{EI} dx$$

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \frac{1}{EI} \int_0^2 \underbrace{\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{3}x\right) \left(\frac{1}{2}x\right)}_{\Delta_{F1}} dx + \frac{1}{EI} \int_2^4 \underbrace{\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{3}x\right) \left(-\frac{1}{2}x + 2\right)}_{\Delta_{F2}} dx$$

Cálculo de Δ_{F1}

$$\Delta_{F1} = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{3}x\right) \left(\frac{1}{2}x\right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{4}{3}x^2\right) dx$$

$$\Delta_{F1} = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left[-\frac{1}{12} \left(\frac{x^5}{5} \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{x^3}{3} \right) \right] dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left[-\frac{x^5}{60} + \frac{4x^3}{9} \right]$$

$$\Delta_{F1} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{(2)^5}{60} + \frac{4(2)^3}{9} \right] - \left[-\frac{(0)^5}{60} + \frac{4(0)^3}{9} \right] \right\} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{8}{15} + \frac{32}{9} \right)$$

$$\Delta_{F1} = \frac{136}{45EI}$$

Cálculo de Δ_{F2}

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \int_2^4 \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{3}x \right) \left(-\frac{1}{2}x + 2 \right) dx$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \int_2^4 \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{16}{3}x \right) dx$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \int_2^4 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{x^5}{5} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{x^3}{3} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{16}{3} \left(\frac{x^2}{2} \right) \right]$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \int_2^4 \left[\frac{x^5}{60} - \frac{4x^3}{9} - \frac{x^4}{12} + \frac{8x^2}{3} \right]$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{(4)^5}{60} - \frac{4(4)^3}{9} - \frac{(4)^4}{12} + \frac{8(4)^2}{3} \right] - \left[\frac{(2)^5}{60} - \frac{4(2)^3}{9} - \frac{(2)^4}{12} + \frac{8(2)^2}{3} \right] \right\}$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{256}{15} - \frac{256}{9} - \frac{64}{3} + \frac{128}{3} \right) - \left(\frac{8}{15} - \frac{32}{9} - \frac{4}{3} + \frac{32}{3} \right) \right]$$

$$\Delta_{F2} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{448}{45} \right) - \left(\frac{284}{45} \right) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{164}{45} \right]$$

$$\Delta_{F2} = \frac{164}{45EI}$$

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \Delta_{F1} + \Delta_{F2} = \frac{136}{45EI} + \frac{164}{45EI}$$

$\Delta_{FLEXIÓN} = \frac{20}{3EI}$

CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN POR CORTANTE

$$\Delta_{CORTANTE} = \int_0^2 \frac{K \cdot V(x) \cdot v_1(x)}{GA} dx + \int_2^4 \frac{K \cdot V(x) \cdot v_2(x)}{GA} dx$$

$$\Delta_{CORTANTE} = \frac{K}{GA} \int_0^2 V(x) \cdot v_1(x) dx + \frac{K}{GA} \int_2^4 V(x) \cdot v_2(x) dx$$

$$\Delta_{CORTANTE} = \frac{K}{GA} \int_0^2 \underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right)}_{\Delta_{V1}} dx + \frac{K}{GA} \int_2^4 \underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)}_{\Delta_{V2}} dx$$

Cálculo de Δ_{V1}

$$\Delta_{V1} = \frac{K}{GA} \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) dx = \frac{K}{GA} \int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{3}\right) dx$$

$$\Delta_{V1} = \frac{K}{GA} \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{4}{3}(x) \right] = \frac{K}{GA} \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{4}{3}x \right]$$

$$\Delta_{V1} = \frac{K}{GA} \left\{ \left[-\frac{(2)^3}{12} + \frac{4}{3}(2) \right] - \left[-\frac{(0)^3}{12} + \frac{4}{3}(0) \right] \right\} = \frac{K}{GA} \left[-\frac{2}{3} + \frac{8}{3} \right] = \frac{K}{GA} [2]$$

$$\Delta_{V1} = \frac{2K}{GA}$$

Cálculo de Δ_{V2}

$$\Delta_{V2} = \frac{K}{GA} \int_2^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) dx = \frac{K}{GA} \int_2^4 \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{3}\right) dx$$

$$\Delta_{V2} = \frac{K}{GA} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{4}{3}(x) \right] = \frac{K}{GA} \left[\frac{x^3}{12} - \frac{4}{3}x \right]$$

$$\Delta_{V2} = \frac{K}{GA} \left\{ \left[\frac{(4)^3}{12} - \frac{4}{3}(4) \right] - \left[\frac{(2)^3}{12} - \frac{4}{3}(2) \right] \right\} = \frac{K}{GA} \left[\left(\frac{16}{3} - \frac{16}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{3}\right) \right]$$

$$\Delta_{V2} = \frac{K}{GA} [(0) - (-2)] = \frac{K}{GA} [2]$$

$$\Delta_{V2} = \frac{2K}{GA}$$

$$\Delta_{CORTANTE} = \Delta_{V1} + \Delta_{V2} = \frac{2K}{GA} + \frac{2K}{GA}$$

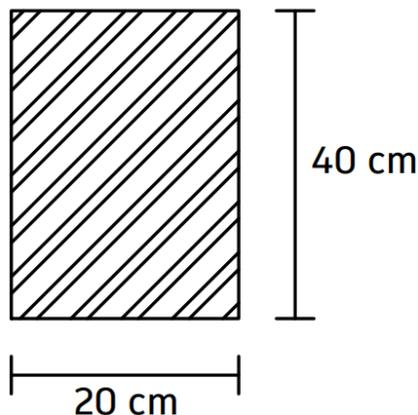
$$\Delta_{CORTANTE} = \frac{4K}{GA}$$

CÁLCULO DEL DESPLAZAMIENTO VERTICAL

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_{FLEXIÓN} + \Delta_{CORTANTE}$$

$$\Delta_{TOTAL} = \frac{20}{3EI} + \frac{4K}{GA}$$

PASO ⑦: Calcular el momento de inercia (I) de la sección transversal de la viga de concreto.



$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$b = 20 \text{ cm} = 0.20 \text{ m}$$

$$h = 40 \text{ cm} = 0.40 \text{ m}$$

$$I = \frac{(0.20 \text{ m})(0.40 \text{ m})^3}{12}$$

$$I = \frac{2}{1875} \text{ m}^4$$

VALOR DEL MOMENTO DE INERCIA CONSIDERANDO EL FACTOR DE AGRIETAMIENTO

$$I = 0.5(I_g)$$

$$I_g = \frac{2}{1875} \text{ m}^4$$

$$I = 0.5 \left(\frac{2}{1875} \text{ m}^4 \right)$$

$$I = \frac{1}{1875} m^4$$

PASO ⑧: Calcular el módulo de elasticidad (E) de la viga de concreto.

La viga está hecha de un Concreto Clase II con un $f'c = 200 \text{ kg/cm}^2$ y las Normas Técnicas Complementarias de las Ciudad de México indican que el módulo de elasticidad de un concreto Clase II se calcula de la siguiente manera:

$$E = 8,000\sqrt{f'c}$$

$$E = 8,000\sqrt{200} \text{ kg/cm}^2$$

$$E = 113,137.085 \text{ kg/cm}^2$$

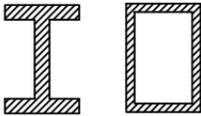
Se convierte el módulo de elasticidad de kg/cm^2 a ton/m^2 :

$$E = 113,137.085 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \left(\frac{1 \text{ ton}}{1000 \text{ kg}} \right) \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right)^2$$

$$E = 1,131,370.85 \text{ ton/m}^2$$

PASO ⑨: Cálculo del factor de forma para cortante (K).

Al principio de esta sección se dijo que existe una tabla que proporciona los valores del factor de forma (K) que depende de la sección transversal del elemento estructural, la cual es la siguiente:

SECCIÓN TRANSVERSAL	Factor de forma (K)
 Rectángulo	$\frac{6}{5}$
 Círculo	$\frac{10}{9}$
 Tubo delgado	2
 Sección I o sección cajón	$\frac{\text{Area Total}}{\text{Area del Alma}}$

Por lo tanto, el factor de forma (K) será el siguiente:

$$K = \frac{6}{5} = 1.2$$

PASO ⑩: Se calcula el módulo de elasticidad por cortante (G).

El módulo de elasticidad por cortante (G) se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Donde:

G = Modulo de elasticidad por cortante.

E = Modulo de elasticidad.

\nu = Coeficiente de Poisson.

como se mencionó al principio de esta sección, salvo que se determine experimentalmente, el coeficiente de Poisson (ν) para el concreto se tomará como 0.2.

$$E = 1,131,370.85 \text{ ton/m}^2$$

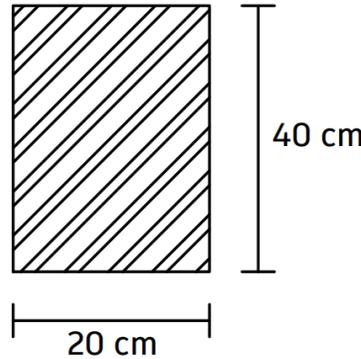
$$\nu = 0.2$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$G = \frac{1,131,370.85 \text{ ton/m}^2}{2(1 + 0.2)}$$

$$G = 471,404.5208 \text{ ton/m}^2$$

PASO ⑪: Se calcula el área (A) de la sección transversal de la viga de concreto.



$$A = b \times h$$

$$b = 20 \text{ cm} = 0.20 \text{ m}$$

$$h = 40 \text{ cm} = 0.40 \text{ m}$$

$$A = (0.2 \text{ m})(0.4 \text{ m})$$

$$A = 0.08 \text{ m}^2$$

PASO ⑫: Cálculo del desplazamiento vertical real de la viga.

$$\Delta_{TOTAL} = \frac{20}{3EI} + \frac{4K}{GA}$$

Donde:

$$E = 1,131,370.85 \text{ ton/m}^2$$

$$I = \frac{1}{1875} \text{ m}^4$$

$$K = 1.2$$

$$G = 471,404.5208 \text{ ton/m}^2$$

$$A = 0.08 \text{ m}^2$$

$$\Delta_z = \frac{20}{3(1,131,370.85) \left(\frac{1}{1875} \right)} + \frac{4(1.2)}{(471,404.5208)(0.08)}$$

$$\Delta_z = 0.01105 \text{ m} + 0.000127 \text{ m}$$

$$\Delta_z = 0.0112 \text{ m}$$

PASO 13: Se considera la deformación a largo plazo que viene especificada en las Normas Técnicas Complementarias.

DEFORMACIÓN A LARGO PLAZO

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_z(1 + \alpha)$$

Las normas técnicas complementarias establecen que para elementos de concreto normal clase 2, el valor de alfa será igual a 4.

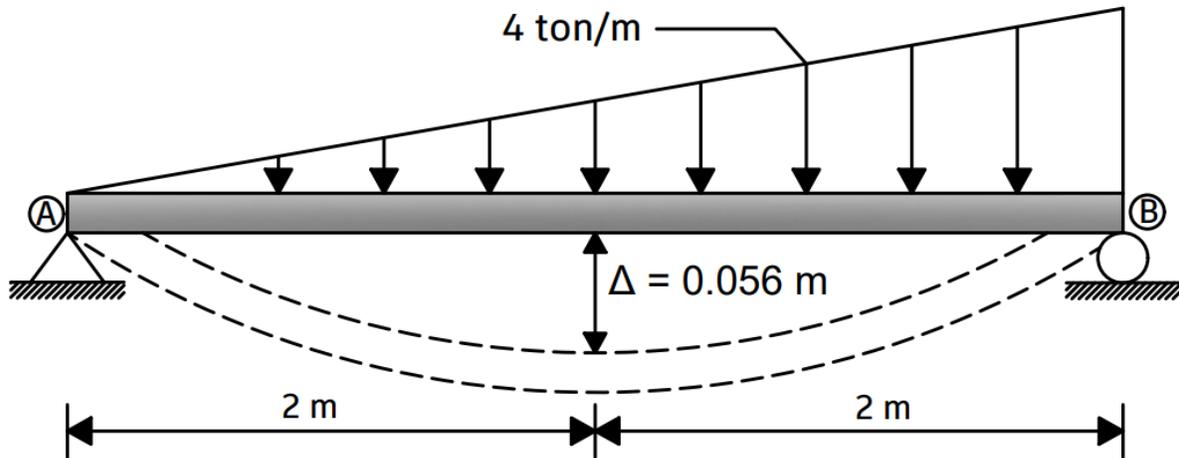
$$\Delta_z = 0.0112 \text{ m}$$

$$\alpha = 4$$

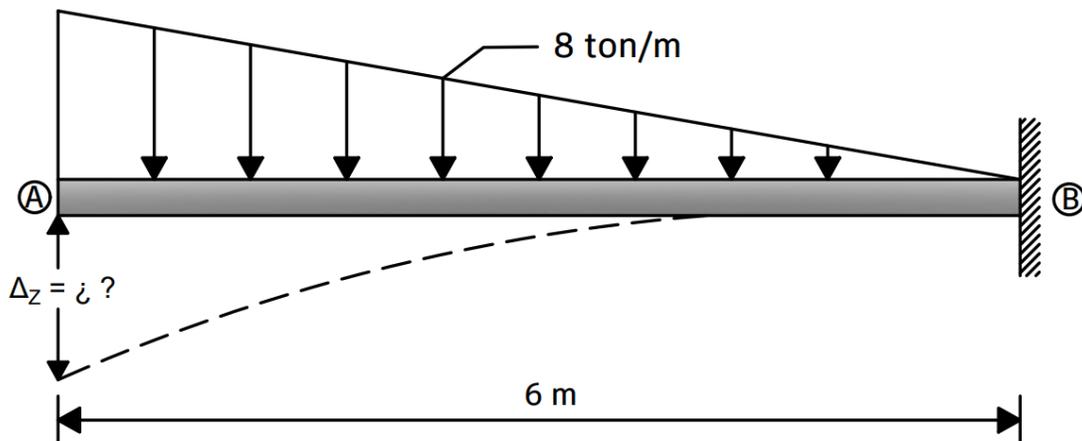
$$\Delta_{TOTAL} = 0.0112(1 + 4)$$

Resultado: Desplazamiento Vertical Total

$$\Delta_z = 0.056 \text{ m}$$

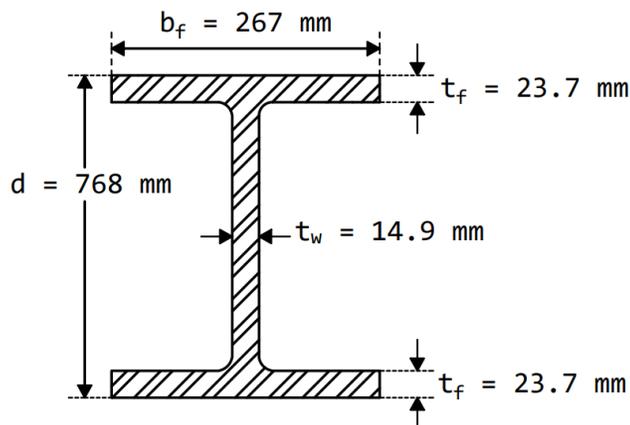


Ejercicio 2.25: Calcular el desplazamiento vertical total en el punto A que se encuentra en el voladizo de una viga empotrada de acero que tiene una longitud de 6 m y es sometida a una carga triangular de 8 ton/m. Recuerda que se calculará la deformación por flexión y se tomará en cuenta la deformación por cortante.



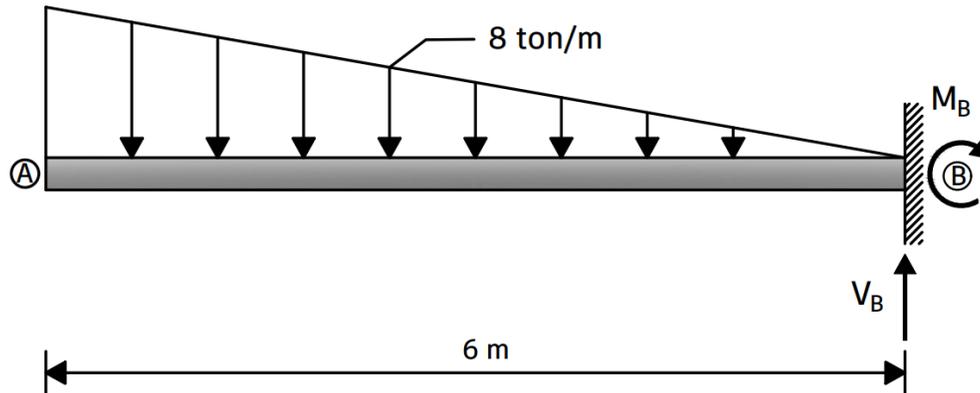
La viga de acero es un perfil IR A - 572 grado 50 de (762 mm x 184.6 kg/m) y las dimensiones de su sección transversal se muestran a continuación.

Sección Transversal



PERFIL IR
762 mm x 184.6 kg/m
A-572
Grado 50
 $f_y = 3515 \text{ kg/cm}^2$

PASO ①: Calcular las reacciones en el apoyo empotrado con las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_B = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$M_B - \left[\frac{8 \text{ ton/m}(6 \text{ m})}{2} \right] \left[\frac{2}{3}(6 \text{ m}) \right] = 0$$

$$M_B - 96 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

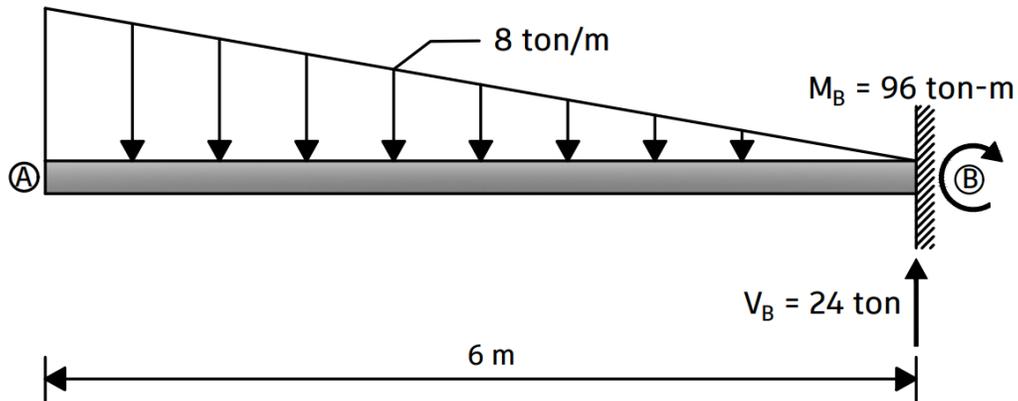
$$\mathbf{M_B = 96 \text{ ton} \cdot \text{m}}$$

$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$V_B - \frac{(8 \text{ ton/m})(6 \text{ m})}{2} = 0$$

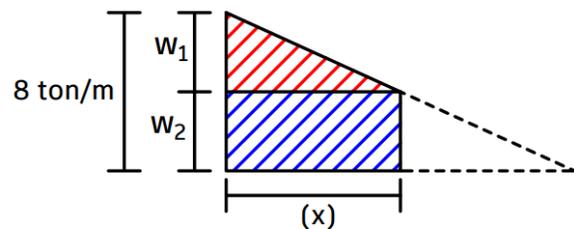
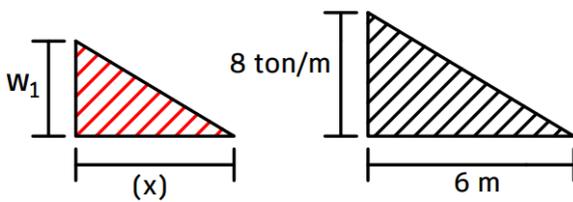
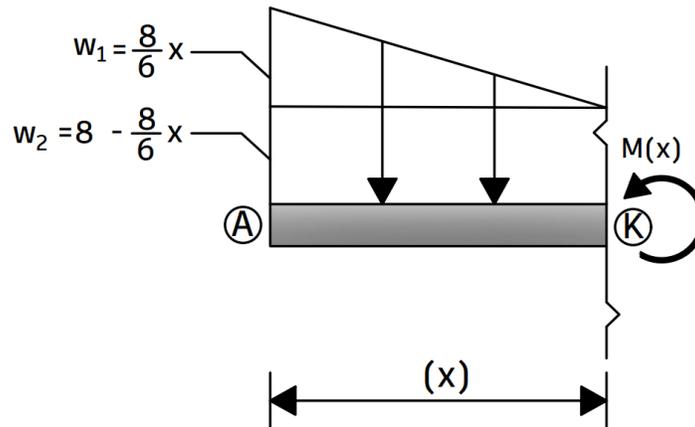
$$V_B - 24 \text{ ton} = 0$$

$$\mathbf{V_B = 24 \text{ ton}}$$



PASO ②: Calcular la ecuación del momento flexionante $[M(x)]$ y la ecuación de la fuerza cortante $[V(x)]$ de la viga con la carga "REAL".

CORTE #1 $[0\text{ m} \leq x \leq 6.0\text{ m}]$



$$\frac{w_1}{(x)} = \frac{8\text{ ton/m}}{6\text{ m}}$$

$$w_1 = \frac{8\text{ ton/m}}{6\text{ m}} (x)$$

$$w_1 = \frac{8}{6} x$$

$$w_2 = 8\text{ ton/m} - w_1$$

$$w_2 = 8 - \frac{8}{6} x$$

$$\Sigma M_k = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$M(x) + \left[\frac{\left(\frac{8}{6}x\right)(x)}{2} \right] \left[\frac{2}{3}(x) \right] + \left(8 - \frac{8}{6}x\right)(x) \left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

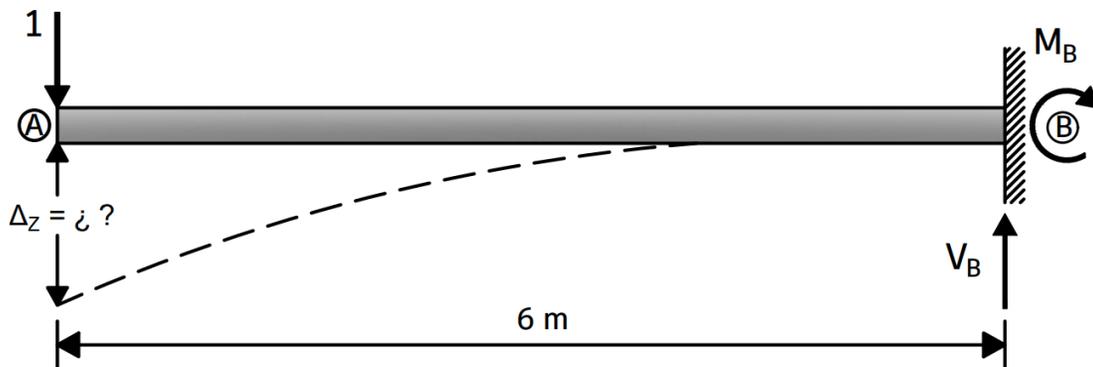
$$M(x) + \frac{4}{9}x^3 + 4x^2 - \frac{2}{3}x^3 = 0$$

$$M(x) - \frac{2}{9}x^3 + 4x^2 = 0$$

$$M(x) = \frac{2}{9}x^3 - 4x^2$$

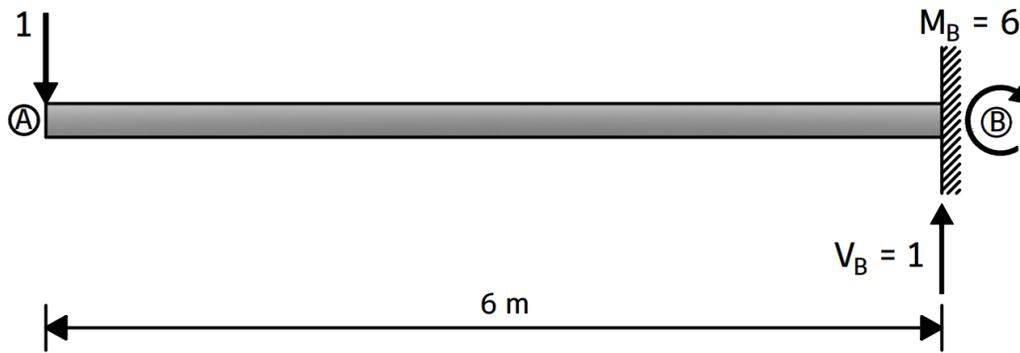
$$V(x) = \frac{d}{dx} [M(x)] = \frac{2}{3}x^2 - 8x$$

PASO ③: Colocar una carga virtual puntual unitaria en la viga, en el punto donde se desea conocer el desplazamiento vertical. Se coloca la carga unitaria en la dirección del desplazamiento.



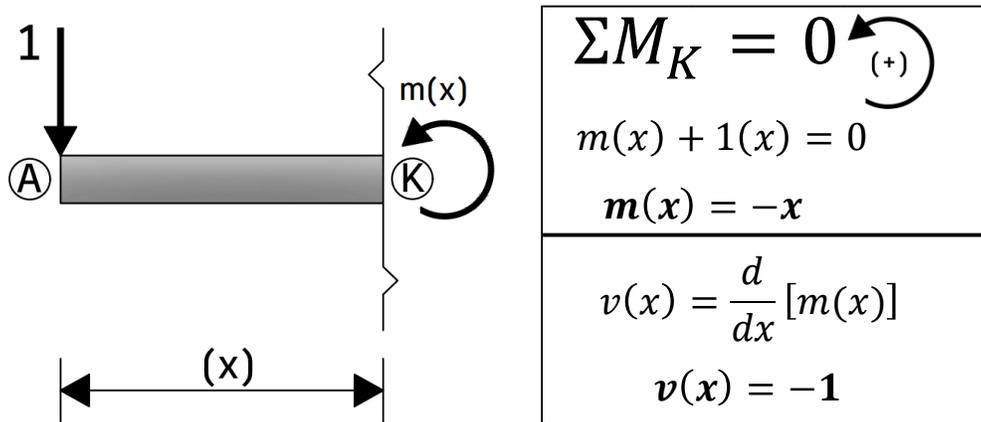
PASO ④: Calcular las reacciones en el apoyo empotrado de la viga que tiene la carga virtual unitaria con las ecuaciones del equilibrio.

$\Sigma M_B = 0 \quad \curvearrowright (+)$ $M_B - 1(6) = 0$ $M_B = 6$	$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$ $V_B - 1 = 0$ $V_B = 1$
--	---



PASO ⑤: Calcular la ecuación del momento flexionante $[m(x)]$ y fuerza cortante $[v(x)]$ de la viga que tiene una carga virtual unitaria ficticia.

CORTE #1 $[0\text{ m} \leq x \leq 6.0\text{ m}]$



PASO ⑥: Calcular el desplazamiento vertical utilizando la ecuación 2.20, esta ecuación toma en cuenta la deformación por cortante y la deformación por flexión.

$$\Delta_{TOTAL} = \int_0^L \underbrace{\frac{M(x) \cdot m(x)}{EI}}_{\text{Deformación por flexión}} dx + \int_0^L \underbrace{\frac{K \cdot V(x) \cdot v(x)}{GA}}_{\text{Deformación por cortante}} dx$$

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_{FLEXIÓN} + \Delta_{CORTANTE}$$

<i>Ecuación del Momento flexionante [M(x)] y Fuerza Cortante [V(x)] de la viga con cargas REALES</i>	<i>Ecuación del Momento flexionante [m(x)] y Fuerza Cortante [v(x)] de la viga con una carga UNITARIA FICTICIA</i>
0 m ≤ x ≤ 6.0 m	0 m ≤ x ≤ 6.0 m
$M(x) = \frac{2}{9}x^3 - 4x^2$ $V(x) = \frac{2}{3}x^2 - 8x$	$m(x) = -x$ $v(x) = -1$

CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \int_0^6 \frac{M(x) \cdot m(x)}{EI} dx = \int_0^6 \frac{\left(\frac{2}{9}x^3 - 4x^2\right)(-x)}{EI} dx$$

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \frac{1}{EI} \int_0^6 \left(-\frac{2}{9}x^4 + 4x^3\right) dx = \frac{1}{EI} \left[-\frac{2}{9} \left(\frac{x^5}{5}\right) + 4 \left(\frac{x^4}{4}\right) \right]$$

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{2x^5}{45} + x^4 \right]_0^6 = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{2(6)^5}{45} + (6)^4 \right] - \left[-\frac{2(0)^5}{45} + (0)^4 \right] \right\}$$

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{4752}{5}\right) - (0) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{4752}{5} \right]$$

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \frac{4752}{5EI}$$

CÁLCULO DE LA DEFORMACIÓN POR CORTANTE

$$\Delta_{CORTANTE} = \int_0^6 \frac{K \cdot V(x) \cdot v(x)}{GA} dx = \int_0^6 \frac{(K) \left(\frac{2}{3}x^2 - 8x\right)(-1)}{GA} dx$$

$$\Delta_{CORTANTE} = \frac{K}{GA} \int_0^6 \left(-\frac{2}{3}x^2 + 8x\right) dx = \frac{K}{GA} \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3}\right) + 8 \left(\frac{x^2}{2}\right) \right]$$

$$\Delta_{CORTANTE} = \frac{K}{GA} \left[-\frac{2x^3}{9} + 4x^2 \right]_0^6 = \frac{K}{GA} \left\{ \left[-\frac{2(6)^3}{9} + 4(6)^2 \right] - \left[-\frac{2(0)^3}{9} + 4(0)^2 \right] \right\}$$

$$\Delta_{CORTANTE} = \frac{K}{GA} [(96) - (0)] = \frac{K}{GA} [96]$$

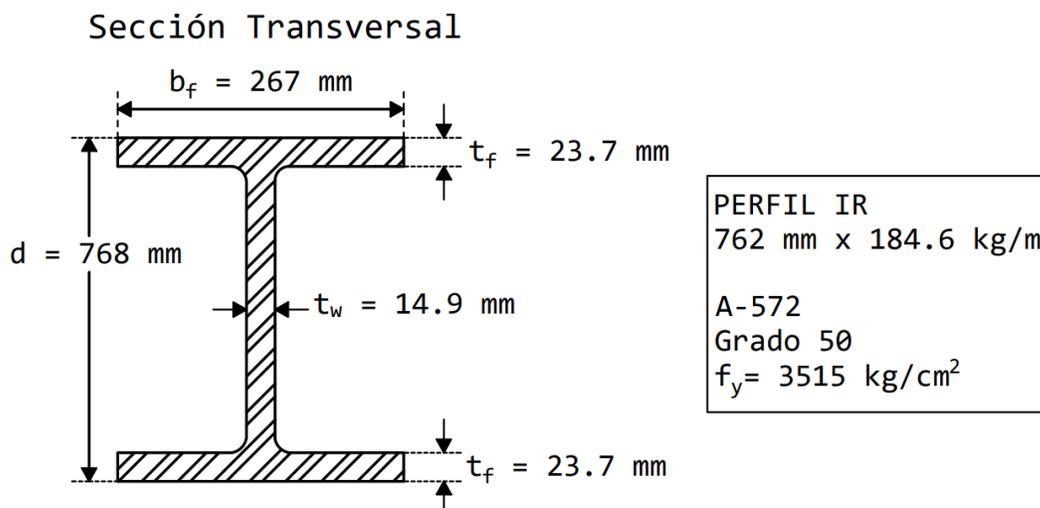
$$\Delta_{CORTANTE} = \frac{K96}{GA}$$

CÁLCULO DEL DESPLAZAMIENTO VERTICAL TOTAL

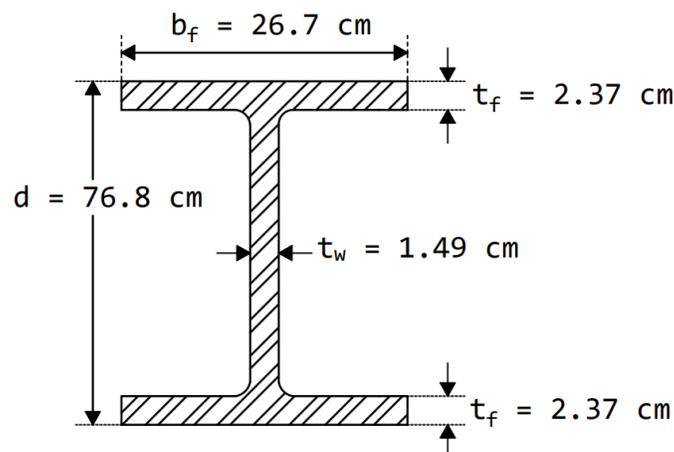
$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_{FLEXIÓN} + \Delta_{CORTANTE}$$

$$\Delta_{TOTAL} = \frac{4752}{5EI} + \frac{K96}{GA}$$

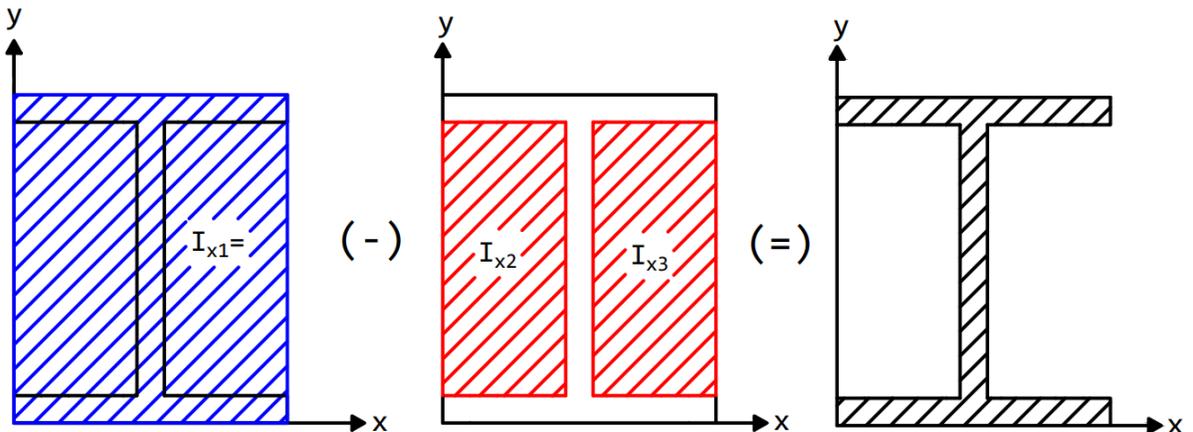
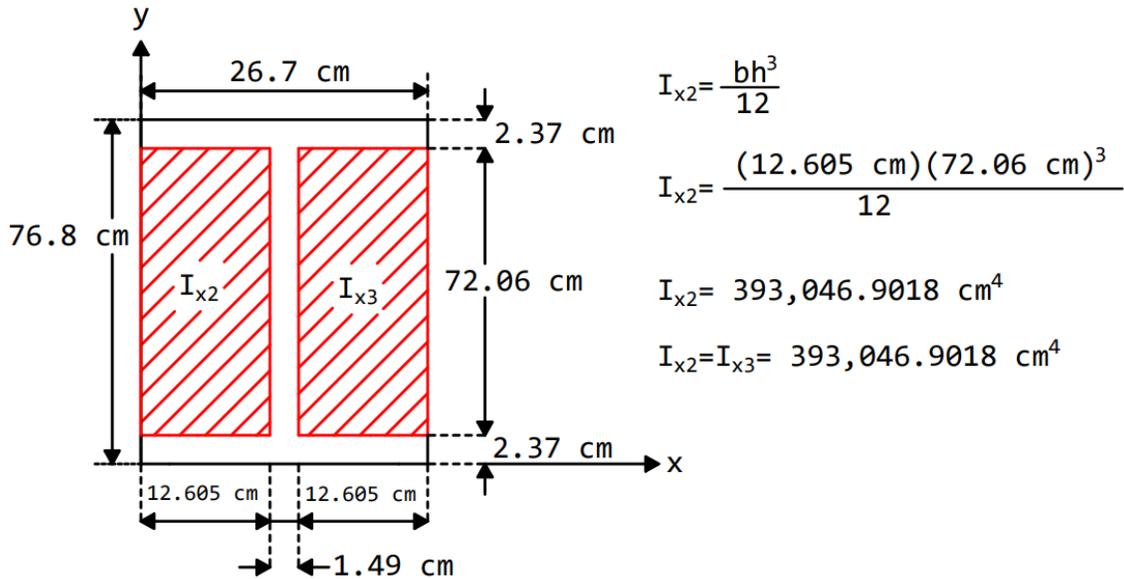
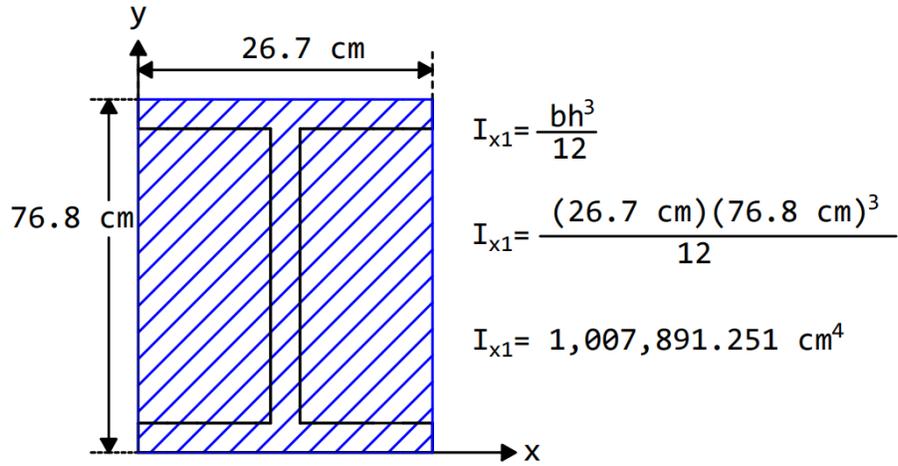
PASO ⑦: Calcular el momento de inercia de la sección transversal de la viga de acero.



Se convierten las unidades de las dimensiones de la sección trasversal de mm a cm:



Cálculo del momento de inercia de la sección transversal:



$$Ix_1 = 1,007,891.251 \text{ cm}^4$$

$$Ix_2 = 393,046.9018 \text{ cm}^4$$

$$Ix_3 = 393,046.9018 \text{ cm}^4$$

$$I = Ix_1 - Ix_2 - Ix_3$$

$$I = 1,007,891.251 \text{ cm}^4 - 393,046.9018 \text{ cm}^4 - 393,046.9018 \text{ cm}^4$$

$$I = 221,797.4474 \text{ cm}^4$$

Se convierte el momento de inercia de cm^4 a m^4 :

$$I = 221,797.4474 \text{ cm}^4 \left(\frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} \right)^4$$

$$I = 0.00221797 \text{ m}^4$$

PASO ⑧: Calcular el módulo de elasticidad (E_s) de la viga de acero.

Las Normas Técnicas Complementarias de las Ciudad de México establecen que el módulo de elasticidad del acero es igual a:

$$E_s = 2,039,000 \text{ kg/cm}^2$$

Se convierte el módulo de elasticidad de kg/cm^2 a ton/m^2 :

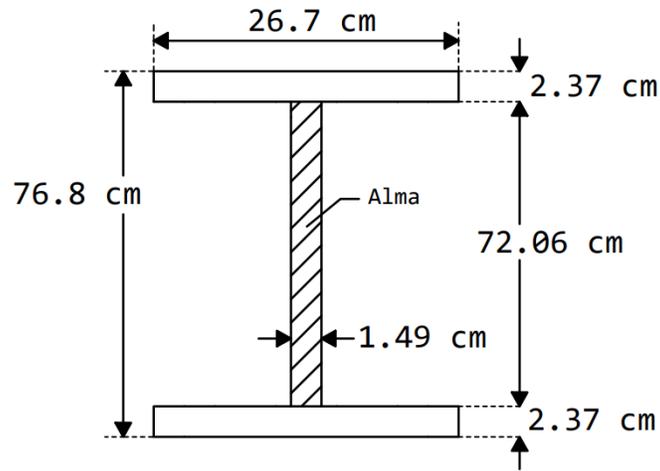
$$E_s = 2,039,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \left(\frac{1 \text{ ton}}{1000 \text{ kg}} \right) \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right)^2$$

$$E_s = 20,390,000 \text{ ton/m}^2$$

PASO ⑨: Cálculo del factor de forma para cortante (K).

Para una sección IR el Factor de forma se calcula de la siguiente manera:

$$K = \frac{\text{Área Total}}{\text{Área del Alma}}$$



$$K = \frac{(26.7 \text{ cm})(2.37 \text{ cm}) + (72.06 \text{ cm})(1.49 \text{ cm}) + (26.7 \text{ cm})(2.37 \text{ cm})}{(72.06 \text{ cm})(1.49 \text{ cm})}$$

$$K = \frac{233.9274 \text{ cm}^2}{107.3694 \text{ cm}^2}$$

$$K = 2.18$$

PASO ⑩: Se calcula el módulo de elasticidad por cortante (G).

El módulo de elasticidad por cortante (G) se calcula con la siguiente ecuación:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Donde:

G = Modulo de elasticidad por cortante.

E = Modulo de elasticidad.

ν = Coeficiente de Poisson.

como se dijo al principio de esta sección, salvo que se determine experimentalmente, el coeficiente de Poisson (ν) para el acero se tomará como 0.3.

$$E = 20,390,000 \text{ ton/m}^2$$

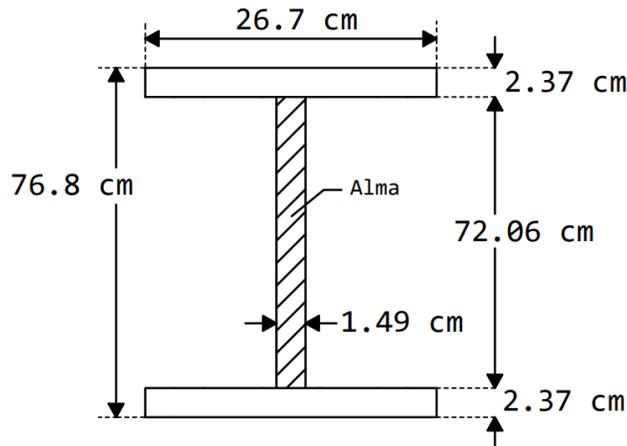
$$\nu = 0.3$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$G = \frac{20,390,000 \text{ ton/m}^2}{2(1 + 0.3)}$$

$$G = 7,842,307.692 \text{ ton/m}^2$$

PASO ⑪: Se calcula el área (A) de la sección transversal de la viga de acero.



$$A = (26.7 \text{ cm})(2.37 \text{ cm}) + (72.06 \text{ cm})(1.49 \text{ cm}) + (26.7 \text{ cm})(2.37 \text{ cm})$$

$$A = 233.9274 \text{ cm}^2$$

$$A = 0.02339274 \text{ m}^2$$

PASO ⑫: Cálculo del desplazamiento vertical real de la viga.

$$\Delta_{TOTAL} = \frac{4752}{5EI} + \frac{K96}{GA}$$

Donde:

$$E = 20,390,000 \text{ ton/m}^2$$

$$I = 0.00221797 \text{ m}^4$$

$$K = 2.18$$

$$G = 7,842,307.692 \text{ ton/m}^2$$

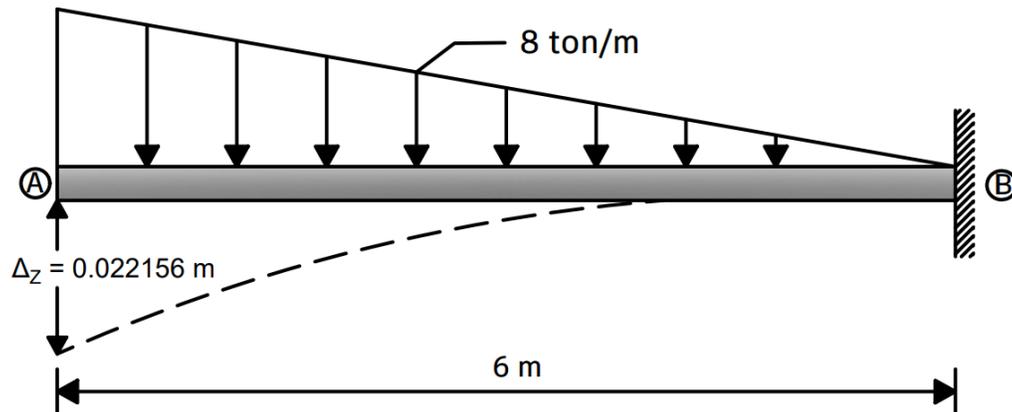
$$A = 0.02339274 \text{ m}^2$$

$$\Delta_{TOTAL} = \frac{4752}{5(20,390,000)(0.00221797)} + \frac{96(2.18)}{(7,842,307.692)(0.02339274)}$$

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_Z = 0.021015m + 0.001141m$$

Resultado: Desplazamiento Vertical Total o Deformación Total

$$\Delta_Z = 0.022156 m$$



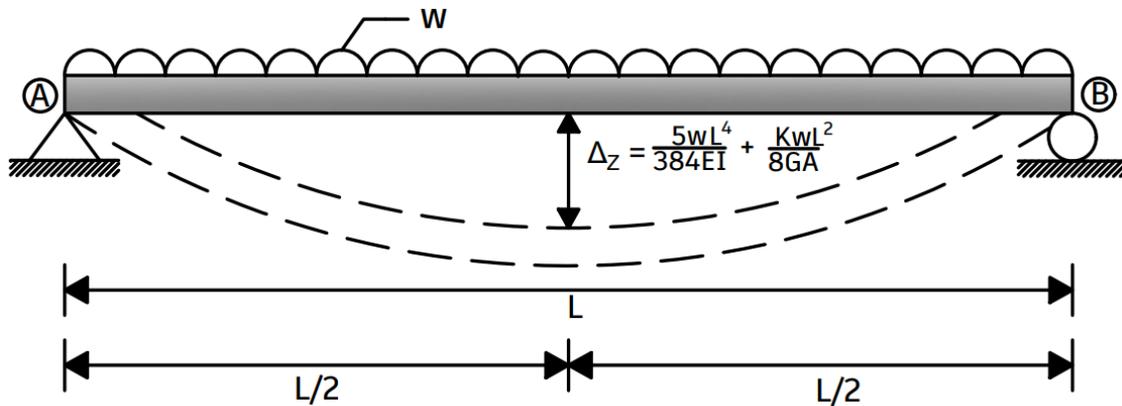
Como se pudo observar en los últimos dos ejercicios, la deformación por cortante es pequeña en comparación con la deformación por flexión, por eso en la practica se desprecia la deformación por cortante y para el cálculo de un desplazamiento o una deformación solo se toma en cuenta la deformación por flexión.

Es importante mencionar que hay situaciones en la cual no se recomienda despreciar la deformación por cortante, ya que si no se toma en cuenta, esto podría afectar considerablemente a la estructura porque en estas situaciones, la deformación por cortante aumenta su valor y en algunos casos hasta podría igualar a la deformación por flexión. Estas situaciones se presentarán a continuación:

Supóngase que se tiene una viga simplemente apoyada que fue elaborada con un concreto que tiene un $f'c = 280 \text{ kg/cm}^2$, esta viga tiene una longitud (L) y es sometida a una carga uniformemente repartida (w), su deformación por flexión y cortante a la mitad del claro de la viga es la siguiente:

$$\Delta_{FLEXIÓN} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

$$\Delta_{CORTANTE} = \frac{KwL^2}{8GA}$$



Para este ejemplo se programó una hoja de cálculo en Excel utilizando formulas que ocuparon en los ejercicios pasados donde se calculó la deformación por flexión y la deformación por cortante. Esta hoja de cálculo ayudará a entender mejor como cambiando algunos valores de las propiedades de la viga puede afectar y cambiar la deformación por cortante.

Como ya se ha mencionado, el valor de la deformación por cortante es pequeña en comparación con la deformación por flexión y por esta razón se suele depreciar en la práctica profesional, pero hay situaciones en las cuales el valor de la deformación por cortante llega a ser mayor y depreciar esta deformación podría traer consecuencias graves en los elementos estructurales.

Estas situaciones se presentan cuando se tienen vigas con un gran peralte (h), si se aumenta el peralte de una viga (h) la deformación por cortante aumenta considerablemente que podría hasta igualar a la deformación por flexión o en casos muy críticos podría superar el valor de la deformación por flexión.

Se programó una hoja de Excel para que el lector pueda observar como el porcentaje de la deformación por cortante ($\% \Delta_{CORTANTE}$) va aumentando si de igual manera se aumenta el valor del peralte (h) de una viga. Si se eleva el valor del peralte (h), el porcentaje de la deformación por cortante ($\% \Delta_{CORTANTE}$) aumentará y el porcentaje de la deformación por flexión ($\% \Delta_{FLEXIÓN}$) disminuirá.

Se recomienda programar en Excel la siguiente hoja de cálculo con las formulas que aparecen en el siguiente cuadro, para que uno mismo vaya cambiando los valores del peralte (h) y así se pueda observar a detalle cómo van cambiando los porcentajes de las deformaciones [$\% \Delta_{CORTANTE}$] y [$\% \Delta_{FLEXIÓN}$].

HOJA DE CÁLCULO EN EXCEL

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;">w =</td> <td style="width: 30%; border: 1px solid black; text-align: center;">10</td> <td style="width: 15%;">(ton/m)</td> </tr> <tr> <td>L =</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">5</td> <td>(m)</td> </tr> <tr> <td>b =</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0.4</td> <td>(m)</td> </tr> <tr> <td>h =</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0.6</td> <td>(m)</td> </tr> <tr> <td>f'c =</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">280</td> <td>(kg/cm²)</td> </tr> </table>	w =	10	(ton/m)	L =	5	(m)	b =	0.4	(m)	h =	0.6	(m)	f'c =	280	(kg/cm ²)	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\Delta_{FLEXIÓN} = \frac{5wL^4}{384EI}$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\Delta_{FLEXIÓN} =$ 0.00482480 (m)</td> </tr> </table>	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN	$\Delta_{FLEXIÓN} = \frac{5wL^4}{384EI}$	$\Delta_{FLEXIÓN} =$ 0.00482480 (m)
w =	10	(ton/m)																	
L =	5	(m)																	
b =	0.4	(m)																	
h =	0.6	(m)																	
f'c =	280	(kg/cm ²)																	
DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN																			
$\Delta_{FLEXIÓN} = \frac{5wL^4}{384EI}$																			
$\Delta_{FLEXIÓN} =$ 0.00482480 (m)																			
MÓDULO DE ELASTICIDAD	DEFORMACIÓN POR CORTANTE																		
$E = 140,000\sqrt{f'c}$	$\Delta_{CORTANTE} = \frac{KwL^2}{8GA}$																		
E = 2342648.0743 (ton/m ²)	$\Delta_{CORTANTE} =$ 1.60075E-04 (m)																		
MOMENTO DE INERCIA	DEFORMACIÓN TOTAL																		
$I = \frac{bh^3}{12}$ 0.0072 (m ⁴)	$\Delta_{TOTAL} = \Delta_{FLEXIÓN} + \Delta_{CORTANTE}$																		
FACTOR DE FORMA	$\Delta_{TOTAL} =$ 0.004984875 (m)																		
K = 1.2	PORCENTAJES (%)																		
COEFICIENTE DE POISSON	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)																		
v = 0.2	$(\%) \Delta_{FLEXIÓN} = \frac{\Delta_{FLEXIÓN}}{\Delta_{TOTAL}} (100)$																		
MÓDULO DE CORTANTE	$\Delta_{FLEXIÓN} =$ 96.79 (%)																		
$G = \frac{E}{2(1+v)}$	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)																		
G = 976103.3643 (ton/m ²)	$(\%) \Delta_{CORTANTE} = \frac{\Delta_{CORTANTE}}{\Delta_{TOTAL}} (100)$																		
AREA DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL	$\Delta_{CORTANTE} =$ 3.21 (%)																		
$A = b \times h$																			
A = 0.240 (m ²)																			

Se presentarán tres casos en los cuales se irá cambiando los valores de dos propiedades de la viga [la longitud (L) y el peralte (h)] y se podrá observar que cuando se cambian estas propiedades, el porcentaje de la deformación por cortante ($\% \Delta_{CORTANTE}$) también cambiará.

CASO 1: Si se mantiene el valor de la longitud (L) pero se va aumentando el valor del peralte (h), el porcentaje de la deformación por cortante ($\% \Delta_{CORTANTE}$) aumentará y el porcentaje de la deformación por flexión ($\% \Delta_{FLEXIÓN}$) disminuirá.

w = L = b = h = f'c =	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	5	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	96.79	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	0.6	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	3.21	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

w = L = b = h = f'c =	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	5	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	91.56	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	1	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	8.44	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

w = L = b = h = f'c =	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	5	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	73.07	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	2	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	26.93	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

w = L = b = h = f'c =	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	5	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	54.66	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	3	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	45.34	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

w = L = b = h = f'c =	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	5	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	40.41	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	4	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	59.59	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

CASO 2: Si se tiene un gran peralte (h = 2 m) y este valor se mantiene fijo, pero se va aumentando el valor de la longitud (L), el porcentaje de la deformación por cortante ($\% \Delta_{CORTANTE}$) disminuirá y el porcentaje de la deformación por flexión ($\% \Delta_{FLEXIÓN}$) aumentará.

w = L = b = h = f'c =	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	5	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	73.07	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	2	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	26.93	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

w = L = b = h = f'c =	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	6	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	79.62	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	2	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	20.38	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

w = L = b = h = f'c =	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	7	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	84.17	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	2	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	15.83	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

$w =$ $L =$ $b =$ $h =$ $f'c =$	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	8	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	87.41	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	2	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	12.59	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

$w =$ $L =$ $b =$ $h =$ $f'c =$	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	10	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	91.56	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	2	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	8.44	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

CASO 3: Si se tiene un peralte normal ($h = 0.6$ m) y este valor se mantiene fijo, pero se va disminuyendo el valor de la longitud (L), el porcentaje de la deformación por cortante ($\% \Delta_{CORTANTE}$) aumentará y el porcentaje de la deformación por flexión ($\% \Delta_{FLEXIÓN}$) disminuirá.

$w =$ $L =$ $b =$ $h =$ $f'c =$	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	5	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	96.79	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	0.6	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	3.21	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

$w =$ $L =$ $b =$ $h =$ $f'c =$	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	4	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	95.07	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	0.6	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	4.93	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

$w =$ $L =$ $b =$ $h =$ $f'c =$	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	3	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	91.56	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	0.6	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	8.44	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

$w =$ $L =$ $b =$ $h =$ $f'c =$	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	2	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	82.83	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	0.6	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	17.17	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

$w =$ $L =$ $b =$ $h =$ $f'c =$	10	(ton/m)	DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN (%)		
	1	(m)	$\Delta_{FLEXIÓN} =$	54.66	(%)
	0.4	(m)	DEFORMACIÓN POR CORTANTE (%)		
	0.6	(m)	$\Delta_{CORTANTE} =$	45.34	(%)
	280	(kg/cm ²)	%TOTAL =	100.00	(%)

Con estos tres casos se puede concluir que la longitud (L) y el peralte (h) son las dos propiedades de una viga que más repercuten en la deformación por cortante. Si volvemos en los tres casos anteriores, se podrá observar que el peralte es la propiedad que más aumenta el valor de la deformación por cortante, la longitud de la viga (L) si afecta la deformación por cortante pero el peralte es la propiedad geométrica de una viga que aumenta considerablemente la deformación por cortante.

Con esto podemos dar por terminado el método del principio del trabajo virtual y se pasará a explicar otro método para calcular desplazamientos verticales.

III. CÁLCULO DE DEFORMACIONES POR EL MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

En las secciones pasadas solo se calculaban desplazamientos verticales o deformaciones en algún punto de la longitud de una viga, pero si se necesitaba conocer algunos otros desplazamientos en diferentes puntos de la viga, se tendrían que calcular dichos desplazamientos punto por punto utilizando los métodos de las secciones pasadas, este procedimiento se volvería tardado y tediosos, por lo que se explicará un método que permita conocer un desplazamiento en cualquier punto de una viga.

Existe un método numérico que permite calcular una ecuación con la cual se podrá conocer el valor de un desplazamiento vertical en cualquier punto de la longitud de una viga, esta ecuación está en función de una variable "x" la cual es un valor de distancia, es decir, se colocará un valor "x" en la ecuación del desplazamiento, este valor será la distancia de la longitud en donde se quiere conocer el valor del desplazamiento en una viga, al sustituir este valor "x" en la ecuación, se obtendrá como resultado el valor del desplazamiento vertical de la viga en la distancia que se colocó como el valor de "x".

El método que se verá en este tema se le conoce como "Método de la Doble Integración", este método establece que se puede calcular una ecuación que permita obtener el valor de un desplazamiento en cualquier punto de la longitud de una viga, integrando dos veces la ecuación del momento flexionante [M(x)] y esto dividido entre el producto del módulo de elasticidad y el momento de inercia (véase la ecuación 3.1).

$$y(x) = \int \int \frac{M(x)}{EI} dx \quad (3.1)$$

En las secciones pasadas solo se enfocó en utilizar los métodos para calcular desplazamientos verticales y se omitió el cálculo de ángulos de rotaciones en una viga, pero para este tema, si se calcularán ángulos de rotaciones porque este método demanda a hacerlo, ya que si se integra solo una vez la ecuación del momento flexionante [M(x)] y esto dividido entre el producto del módulo de elasticidad y el momento de inercia, se obtendrá como resultado una ecuación que nos permitirá conocer el valor de un ángulo de rotación en cualquier punto de una viga (véase la ecuación 3.2).

$$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{EI} dx \quad (3.2)$$

Con esta nueva ecuación se puede decir que también se puede calcular la ecuación del desplazamiento integrando la ecuación de rotación:

$$y(x) = \int \theta(x) dx \quad (3.3)$$

Al resolver las integrales para calcular la ecuación del desplazamiento y la de rotación, este procedimiento generará unas constantes de integración que se determinará su valor con ayuda de las llamadas "condiciones de frontera". Estas condiciones de frontera son valores de desplazamientos que dependen de las condiciones de los apoyos de una viga (apoyo fijo, apoyo móvil, apoyo empotrado). Estas condiciones se pueden observar en la figura 3.1.

CONDICIONES DE FRONTERA

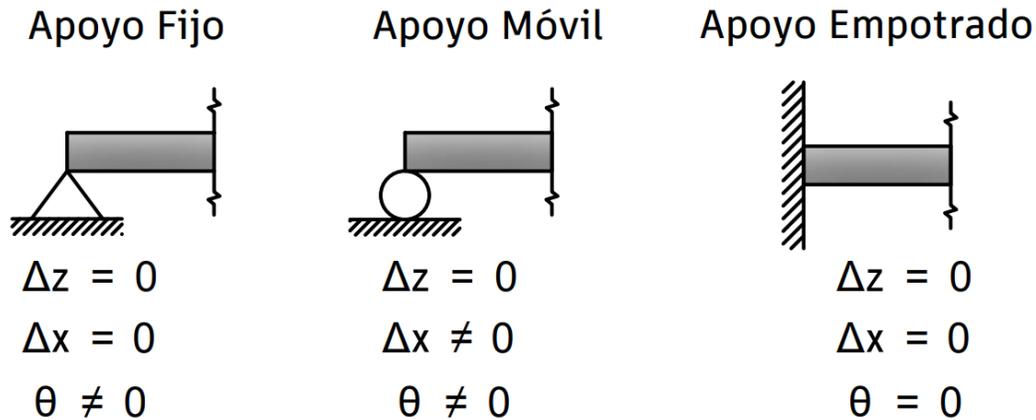


Figura 3.1. Condiciones de frontera en los apoyos

Se puede observar en la figura 3.1 que, en el apoyo fijo su ángulo de rotación es diferente de cero ($\theta \neq 0$) y en el apoyo móvil su desplazamiento en el eje x ($\Delta x \neq 0$) y su ángulo de rotación ($\theta \neq 0$) son diferentes de cero, estos desplazamientos se pueden calcular utilizando el principio del trabajo virtual para que así se puedan conocer el valor de estas condiciones de frontera.

Es importante mencionar que por cada ecuación de momento flexionante $[M(x)]$ que se tenga en una viga, se generarán dos constantes de integración (C) y por cada constante de integración que se tenga, se deberá de conocer una condición de frontera, por lo tanto, si por cada ecuación de momento flexionante se tienen dos constantes de integración, entonces se deberán de conocer dos condiciones de frontera (véase la figura 3.2).

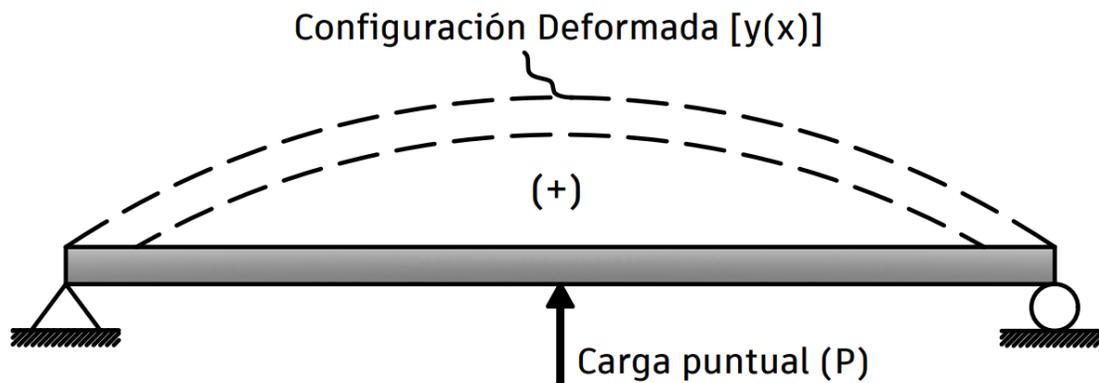
$$y(x) = \int \int \frac{M(x)}{EI} dx \begin{cases} \rightarrow C_1 \rightarrow \text{Condicion de frontera} \\ \Delta_y = 0 \\ \rightarrow C_2 \rightarrow \text{Condicion de frontera} \\ \Delta_x = 0 \end{cases}$$

Figura 3.2. Relación entre constates de integración y condiciones de frontera

El método de la doble integración permite conocer la configuración deformada de un elemento estructural tipo viga que es sometida a un sistema de cargas. Cabe mencionar que en las secciones pasadas como por ejemplo en el tema del principio del trabajo virtual cuando se calculaba un desplazamiento vertical, el signo (positivo/negativo) del resultado obtenido dependía de la dirección en la cual se colocaba la carga virtual unitaria.

Si se colocaba la carga virtual unitaria en la misma dirección a la del desplazamiento, el resultado salía positivo, pero si se colocaba la carga virtual hacia una dirección y la dirección del desplazamiento era otra, como resultado se obtenía un valor negativo.

La razón por la cual se hace énfasis en el significado del signo en el principio del trabajo virtual es porque con el método de la doble integración, el signo negativo indica que la deformación o la configuración deformada de una viga va en un sentido gravitacional (hacia abajo) y el signo positivo indica que la deformación o la configuración deformada de la viga va en un sentido anti gravitacional (hacia arriba), como se muestra en la figura 3.3.



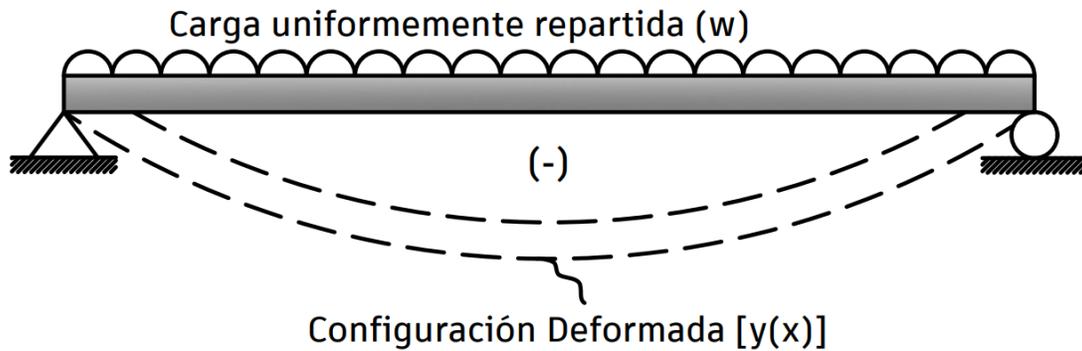


Figura 3.3. Convección de signos en el método de la doble integración

Habrán ejercicios en los cuales será necesario calcular el valor de un ángulo de rotación (θ) o de un desplazamiento vertical (Δ_z), esto con el fin de conocer el valor de una condición de frontera y al hacer esto se tendrán que aplicar las siguientes reglas:

- Si se propone una fuerza puntual unitaria en sentido gravitacional [\downarrow] para calcular un desplazamiento vertical utilizando el principio del trabajo virtual, al resultado se le debe de cambiar el signo para utilizarlo como condición de frontera en el método de la doble integración.
- Si se propone una fuerza puntual unitaria en sentido anti gravitacional [\uparrow] para calcular un desplazamiento vertical utilizando el principio del trabajo virtual, al resultado no se le debe de cambiar el signo para utilizarlo como condición de frontera en el método de la doble integración.
- Si se propone un momento unitario horario [\curvearrowright] para calcular un ángulo de rotación utilizando el principio del trabajo virtual, al resultado se le debe de cambiar el signo para utilizarlo como condición de frontera en el método de la doble integración.
- Si se propone un momento unitario antihorario [\curvearrowleft] para calcular un ángulo de rotación utilizando el principio del trabajo virtual, al resultado no se le debe de cambiar el signo para utilizarlo como condición de frontera en el método de la doble integración.

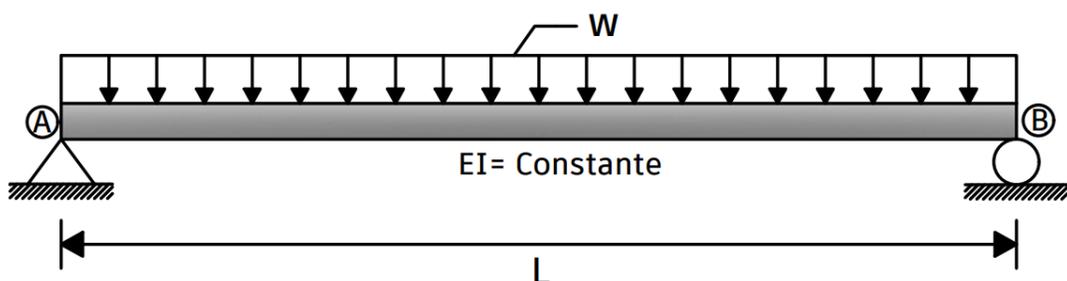
La creación de estas reglas se debe a que si se calcula un desplazamiento vertical utilizando el principio del trabajo virtual y se propone una carga puntual unitaria en sentido gravitacional [\downarrow] y en el resultado se tiene un signo positivo (+), esto significa que la carga unitaria se propuso en el mismo sentido del desplazamiento vertical, pero para el método de la doble integración un desplazamiento vertical en sentido gravitacional debe de tener un signo negativo (-).

Pero si al calcular un desplazamiento vertical utilizando el principio del trabajo virtual se propone una carga puntual unitaria en sentido anti gravitacional [\uparrow] y en el resultado da un signo positivo (+), esto significa que la carga unitaria se propuso en el mismo sentido del desplazamiento vertical, pero para el método de la doble integración un desplazamiento vertical en sentido anti gravitacional debe de tener un signo positivo (+).

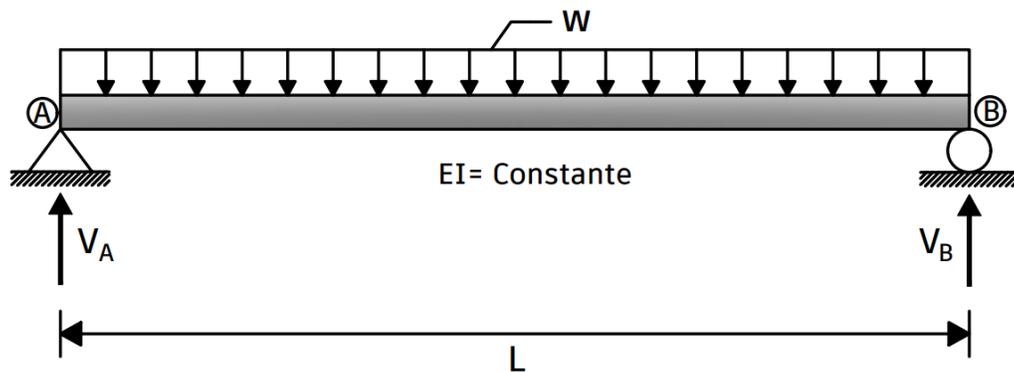
Por esta razón se dice que si se propone una carga gravitacional se cambiará el signo y si se propone una carga anti gravitacional no se cambiará el signo, si se propone un momento horario se cambia el signo y si se propone un momento antihorario no se cambia el signo.

Puede que aún no quede muy claro lo que se trato de explicar por lo que se pasará a resolver unos ejercicios utilizando el método de la doble integración para calcular la ecuación del desplazamiento y con esto se pueda conocer la configuración deformada de un elemento estructural tipo viga.

Ejercicio 3.1: Utilizando el método de la doble integración calcula la ecuación del desplazamiento vertical y la ecuación de rotación para conocer las configuraciones deformadas de una viga simplemente apoyada que tiene una longitud (L) que es sometida a una carga uniformemente repartida (w). Se supone que la sección transversal es constante por lo que también lo es el valor del módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I) de la viga.

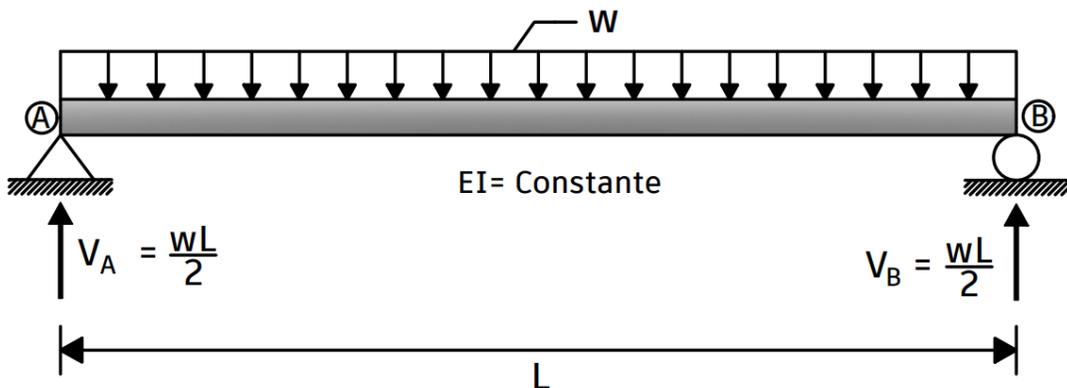


PASO ①: Se calculan las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.



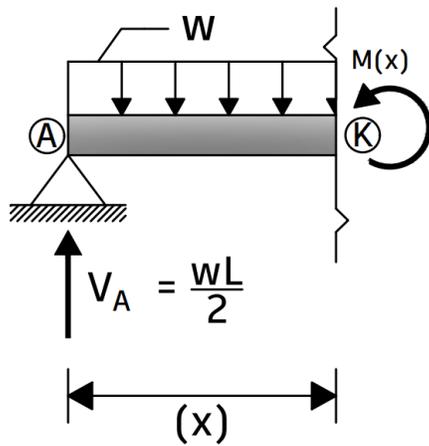
$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0 \quad \curvearrowright (+) \\ -V_B(L) + [w(L)] \left[\frac{1}{2}(L) \right] &= 0 \\ -V_B(L) + \frac{wL^2}{2} &= 0 \\ V_B &= \frac{wL^2}{2(L)} \\ V_B &= \frac{wL}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_Y &= 0 \quad \uparrow (+) \\ V_A + V_B - w(L) &= 0 \\ V_A + \frac{wL}{2} - w(L) &= 0 \\ V_A - \frac{wL}{2} &= 0 \\ V_A &= \frac{wL}{2} \end{aligned}$$



PASO ②: Cálculo de la ecuación del momento flexionante [M(x)].

CORTE #1 [$0 \leq x \leq L$]



$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$M(x) + w(x) \left(\frac{x}{2} \right) - \left(\frac{wL}{2} \right) (x) = 0$$

$$M(x) + \frac{w}{2} x^2 - \frac{wL}{2} x = 0$$

$$M(x) = -\frac{w}{2} x^2 + \frac{wL}{2} x$$

PASO ③: Se integra la ecuación del momento flexionante [M(x)] para obtener la ecuación de rotación [$\theta(x)$].

$$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{EI} dx$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \int M(x) dx$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \int \left(-\frac{w}{2} x^2 + \frac{wL}{2} x \right) dx = \frac{1}{EI} \left[-\frac{w}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{wL}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) + C_1 \right]$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{6} x^3 + \frac{wL}{4} x^2 + C_1 \right)$$

PASO ④: Se integra la ecuación de rotación [$\theta(x)$] para poder obtener como resultado la ecuación del desplazamiento [$y(x)$].

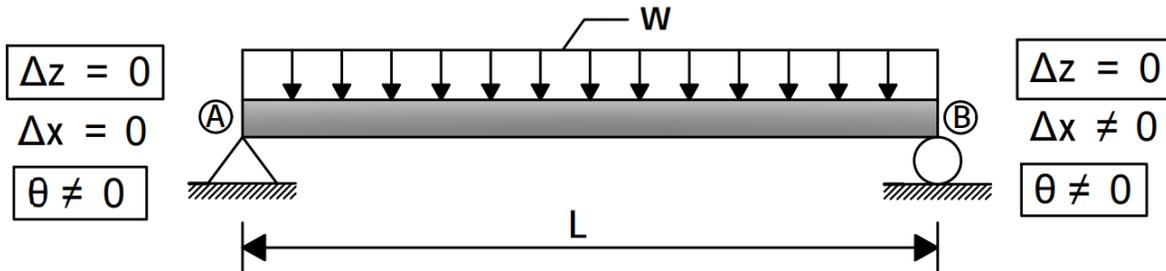
$$y(x) = \int \theta(x) dx$$

$$y(x) = \int \theta(x) dx = \int \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{6} x^3 + \frac{wL}{4} x^2 + C_1 \right) dx$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{w}{6} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{wL}{4} \left(\frac{x^3}{3} \right) + C_1(x) + C_2 \right]$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24}x^4 + \frac{wL}{12}x^3 + C_1x + C_2 \right)$$

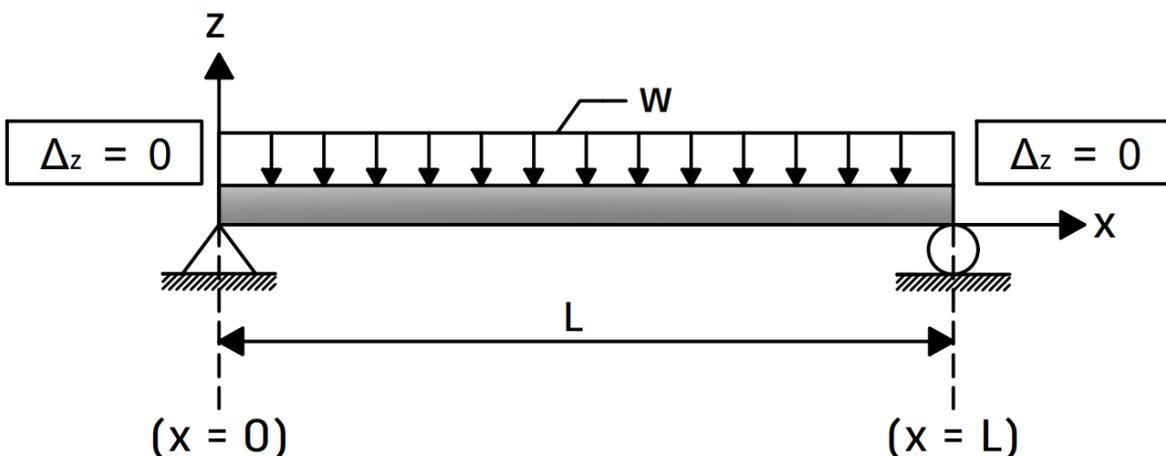
PASO ⑤: Utilizando las condiciones de frontera se calculará el valor de las constantes (C_1 y C_2).



Como se está calculando la ecuación de rotación [$\theta(x)$], se ocupará el valor de la condición de frontera del ángulo de rotación (θ), pero como el valor de la rotación es diferente de cero ($\theta \neq 0$), no se puede ocupar esta condición de frontera porque no se conoce este valor ($\theta = ?$), pero se puede calcular utilizando el principio del trabajo virtual, pero para este ejercicio no se calculará el ángulo de rotación.

De igual manera, se está calculando la ecuación del desplazamiento vertical [$y(x)$], por lo tanto, se ocupará el valor de la condición de frontera del desplazamiento vertical (Δ_z) y como se puede observar, este valor si se conoce ya que el desplazamiento vertical en ambos apoyos es igual a cero ($\Delta_z = 0$).

Como se tienen dos constantes de integración (C_1 y C_2), se debe de tener dos condiciones de frontera y cómo se puede notar, ya se tienen estas condiciones las cuales son las siguientes:



PRIMERA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando "x" es igual a cero ($x = 0$), el desplazamiento vertical es igual a cero ($\Delta_z = 0$).

$$y(x = 0) = 0$$

SEGUNDA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando "x" es igual a "L" ($x = L$), el desplazamiento vertical es igual a cero ($\Delta_z = 0$).

$$y(x = L) = 0$$

Con estas condiciones de frontera se puede calcular la ecuación del desplazamiento vertical $[y(x)]$ y la ecuación de rotación $[\theta(x)]$.

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{6} x^3 + \frac{wL}{4} x^2 + C_1 \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24} x^4 + \frac{wL}{12} x^3 + C_1 x + C_2 \right)$$

Por comodidad se pasan la constante (EI) al otro lado de la igualdad:

$$EI \theta(x) = -\frac{w}{6} x^3 + \frac{wL}{4} x^2 + C_1$$

$$EI y(x) = -\frac{w}{24} x^4 + \frac{wL}{12} x^3 + C_1 x + C_2$$

Como solo se está ocupando la condición de frontera del desplazamiento vertical ($\Delta_z = 0$), solo se ocupará la ecuación del desplazamiento vertical $[y(x)]$.

Se pasa a calcular el valor de la primera constante utilizando la primera condición de frontera:

PRIMERA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando "x" es igual a cero ($x = 0$), el desplazamiento vertical es igual a cero ($\Delta_z = 0$).

$$y(x = 0) = 0$$

$$y(x) = 0 \quad \text{cuando} \quad x = 0$$

$$EI y(x) = -\frac{w}{24} x^4 + \frac{wL}{12} x^3 + C_1 x + C_2$$

$$EI(0) = -\frac{w}{24} (0)^4 + \frac{wL}{12} (0)^3 + C_1(0) + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Con la segunda condición de frontera se calculará el valor de la segunda constante:

SEGUNDA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando "x" es igual a "L" (x = L), el desplazamiento vertical es igual a cero ($\Delta_z = 0$).

$$y(x = L) = 0$$

$$y(x) = 0 \quad \text{cuando} \quad x = L$$

$$EI y(x) = -\frac{w}{24}x^4 + \frac{wL}{12}x^3 + C_1x + C_2$$

$$EI(0) = -\frac{w}{24}(L)^4 + \frac{wL}{12}(L)^3 + C_1(L) + (C_2 = 0)$$

$$0 = -\frac{wL^4}{24} + \frac{wL^4}{12} + C_1L \Rightarrow 0 = \frac{wL^4}{24} + C_1L \Rightarrow C_1L = -\frac{wL^4}{24} \Rightarrow C_1 = -\frac{wL^4}{24L}$$

$$C_1 = -\frac{wL^3}{24}$$

PASO ⑥: Ya teniendo el valor de las constantes de integración, se sustituyen en las ecuaciones.

$$C_1 = -\frac{wL^3}{24}$$

$$C_2 = 0$$

ECUACIÓN DE ROTACIÓN

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{6}x^3 + \frac{wL}{4}x^2 + C_1 \right)$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{6}x^3 + \frac{wL}{4}x^2 - \frac{wL^3}{24} \right)$$

ECUACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO VERTICAL

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24}x^4 + \frac{wL}{12}x^3 + C_1x + C_2 \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24}x^4 + \frac{wL}{12}x^3 - \frac{wL^3}{24}x \right)$$

PASO ⑦: Se calcula el desplazamiento vertical máximo (y_{max}) y la distancia (x) a la que se encuentra este desplazamiento.

Para conocer el valor máximo del desplazamiento, se debe de derivar la función $[y(x)]$ e igualarse a cero para que después se puedan conocer los valores de las variables "x" de la ecuación. Una de estas variables será el valor de la distancia donde se encuentra el desplazamiento máximo, este valor de "x" se sustituye en la función original $[y(x)]$ y el resultado será el valor del desplazamiento máximo (y_{max}).

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24}x^4 + \frac{wL}{12}x^3 - \frac{wL^3}{24}x \right)$$

Se deriva la ecuación:

$$\frac{d}{dx} [y(x)] = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{6}x^3 + \frac{wL}{4}x^2 - \frac{wL^3}{24} \right)$$

Se puede observar que el resultado de la derivada de la ecuación del desplazamiento vertical es igual a la ecuación de rotación $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{6}x^3 + \frac{wL}{4}x^2 - \frac{wL^3}{24} \right) \quad \Rightarrow \quad \theta(x) = \frac{d}{dx} [y(x)]$$

$$\frac{d}{dx} [y(x)] = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{6}x^3 + \frac{wL}{4}x^2 - \frac{wL^3}{24} \right)$$

Con esto se puede concluir que la ecuación de rotación $[\theta(x)]$ es igual a la derivada de la ecuación del desplazamiento vertical $\frac{d}{dx}[y(x)]$, por lo tanto, en lugar de derivar la ecuación del desplazamiento vertical $y(x)$, solo se igualará a cero la ecuación de rotación $[\theta(x)]$ para que con esto se puedan conocer los valores de las variables "x" de la ecuación y una de estas variables será el valor de la distancia donde se encuentra el desplazamiento máximo.

Este valor de "x" se sustituirá en la ecuación del desplazamiento vertical $[y(x)]$ para que se pueda conocer el valor del desplazamiento vertical máximo (y_{max}).

Se calcula el valor de las variables "x" utilizando la ecuación de rotación:

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{6}x^3 + \frac{wL}{4}x^2 - \frac{wL^3}{24} \right)$$

Se iguala a cero la ecuación de rotación:

$$0 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{6}x^3 + \frac{wL}{4}x^2 - \frac{wL^3}{24} \right)$$

Por comodidad se supondrá lo siguiente:

$$w = 1 \quad ; \quad L = 1 \quad ; \quad E = 1 \quad ; \quad I = 1$$

Por lo tanto, la ecuación de rotación queda de la siguiente manera:

$$0 = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}$$

Los valores de las variables "x" son las siguientes:

$$x_1 = -0.366 \quad ; \quad x_2 = 1.366 \quad ; \quad x_3 = \frac{1}{2}$$

Se tomará el valor de (x_3) , ya que este valor se encuentra en el rango de $(0 \leq x \leq L)$ pero como se propuso un valor de $L = 1$ entonces el valor de "x" debe de estar en un rango de $(0 \leq x \leq 1)$ y la única variable "x" que se encuentra en este rango es (x_3) .

Se sabe que el valor de (x_3) es un valor de distancia y este valor está dentro del rango de la longitud de la viga y la longitud de la viga es (L) por lo tanto, la deformación vertical máxima se encuentra a un medio $(1/2)$ de la longitud de la viga (L) , es decir, a $(\frac{1}{2}L)$.

Una vez teniendo el valor de "x", se pasa a sustituir el valor de (x_3) en la ecuación del desplazamiento vertical $y(x)$ para conocer el valor del desplazamiento vertical máximo (y_{max}) .

$$x = \frac{1}{2} L = \frac{L}{2}$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24}x^4 + \frac{wL}{12}x^3 - \frac{wL^3}{24}x \right)$$

$$y\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{w}{24}\left(\frac{L}{2}\right)^4 + \frac{wL}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{wL^3}{24}\left(\frac{L}{2}\right) \right]$$

$$y_{max} = y\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{w}{24} \left(\frac{L^4}{16}\right) + \frac{wL}{12} \left(\frac{L^3}{8}\right) - \frac{wL^3}{24} \left(\frac{L}{2}\right) \right]$$

$$y_{max} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{wL^4}{384} + \frac{wL^4}{96} - \frac{wL^4}{48} \right)$$

(Deformación Vertical Maxima)

$$y_{max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$$

La deformación vertical tiene unidades de distancia: metros (m), centímetros (cm), milímetros (mm), etc.

PASO ⑧: Con ayuda del programa Excel y con las ecuaciones $\theta(x)$ y $y(x)$, se pasará a conocer la configuración deformada de la viga que se está resolviendo.

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{6} x^3 + \frac{wL}{4} x^2 - \frac{wL^3}{24} \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24} x^4 + \frac{wL}{12} x^3 - \frac{wL^3}{24} x \right)$$

Suponiendo:

$$w = 1 \quad ; \quad L = 1 \quad ; \quad E = 1 \quad ; \quad I = 1$$

$w =$	1.0
-------	-----

$L =$	1.0
-------	-----

$E =$	1.0
-------	-----

$I =$	1.0
-------	-----

(x)	$\theta(x)$	$y(x)$
0	-0.04167	0.00000
0.10	-0.03933	-0.00409
0.20	-0.03300	-0.00773
0.30	-0.02367	-0.01059
0.40	-0.01233	-0.01240
0.50	0.00000	-0.01302
0.60	0.01233	-0.01240
0.70	0.02367	-0.01059
0.80	0.03300	-0.00773
0.90	0.03933	-0.00409
1.00	0.04167	0.00000



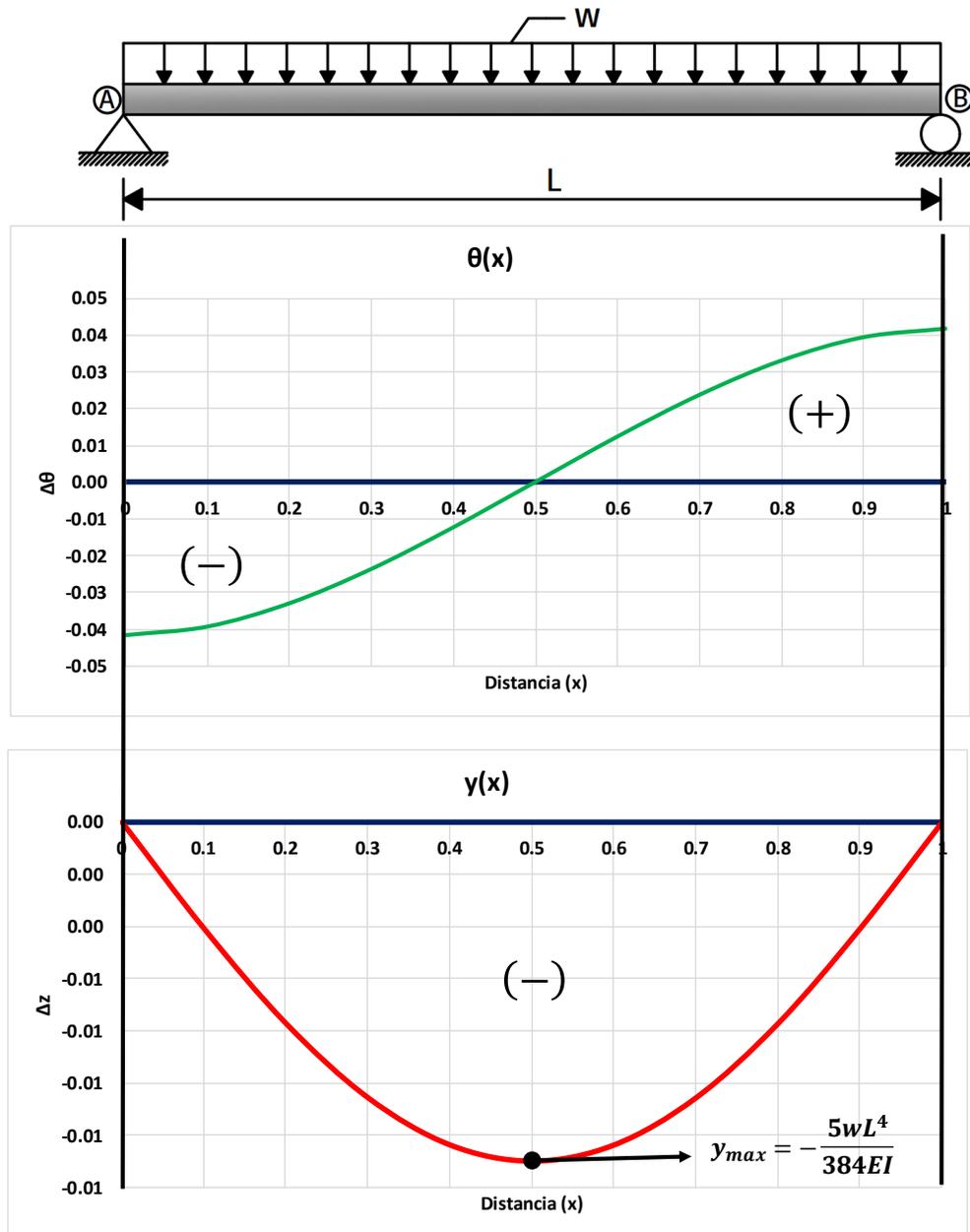
$$y_{max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$$

cuando: $x = \frac{L}{2}$

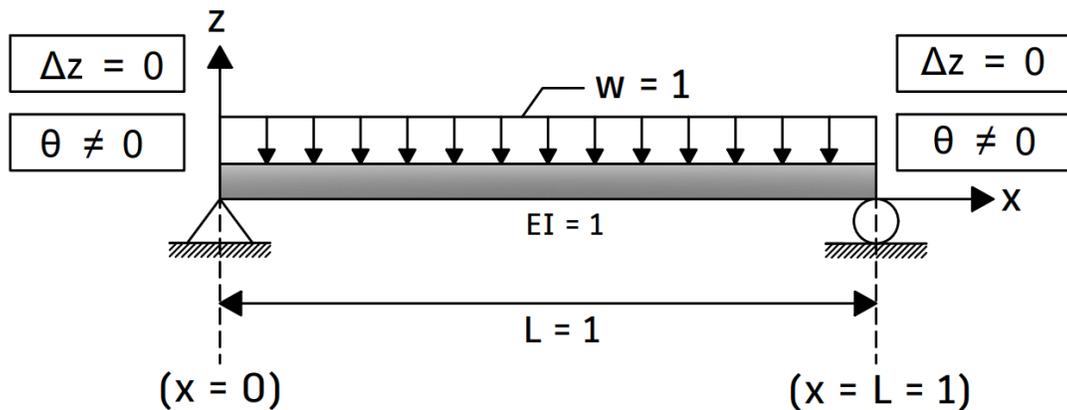
Si se observa la tabla, se podrá observar que a la distancia "x" cuando la rotación es igual a cero $[\theta(x) = 0]$, se tiene el desplazamiento máximo $[y_{max}]$, con esto se puede tener una manera de comprobar si el valor de "x" es correcto.

Se puede concluir que cuando se calcule el valor de "x" donde se encuentra el desplazamiento vertical máximo, una manera de comprobar que este valor de "x" es correcto es que cuando se sustituya "x" en la ecuación de rotación $[\theta(x)]$, el resultado deberá ser igual a cero.

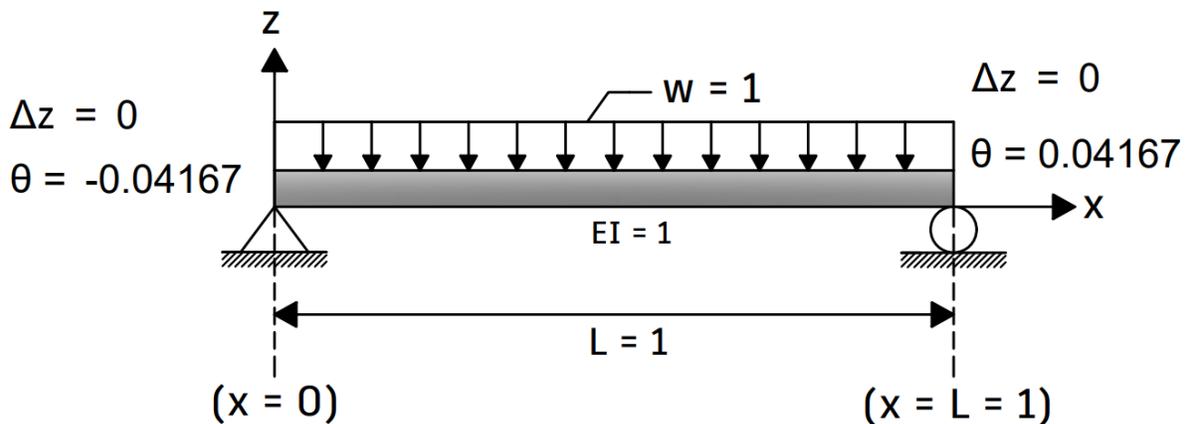
CONFIGURACIÓN DEFORMADA



Una manera de confirmar que las ecuaciones están correctas es comprobando si las dos ecuaciones cumplen con las condiciones de frontera presentes en la viga. Se sabe que en el apoyo fijo y en el apoyo móvil de la viga se tienen las siguientes condiciones de frontera:



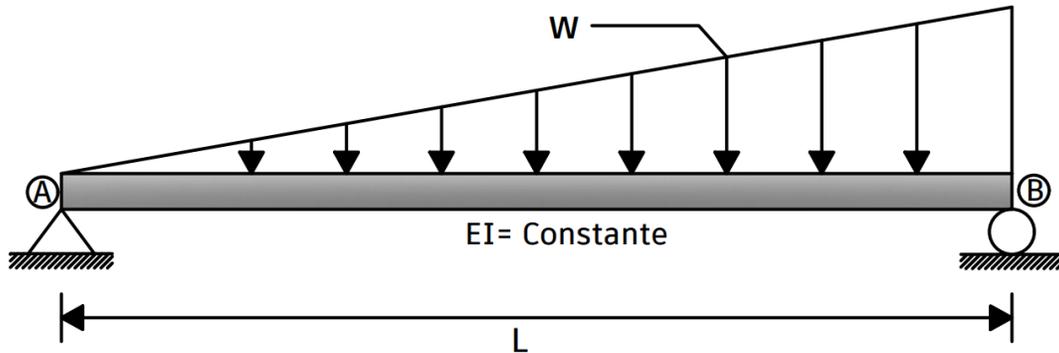
Si se regresa a la tabla donde se tabulo la ecuación de rotación $[\theta(x)]$ y la ecuación del desplazamiento vertical $[y(x)]$, se podrá observar que efectivamente se cumplen las condiciones de frontera:



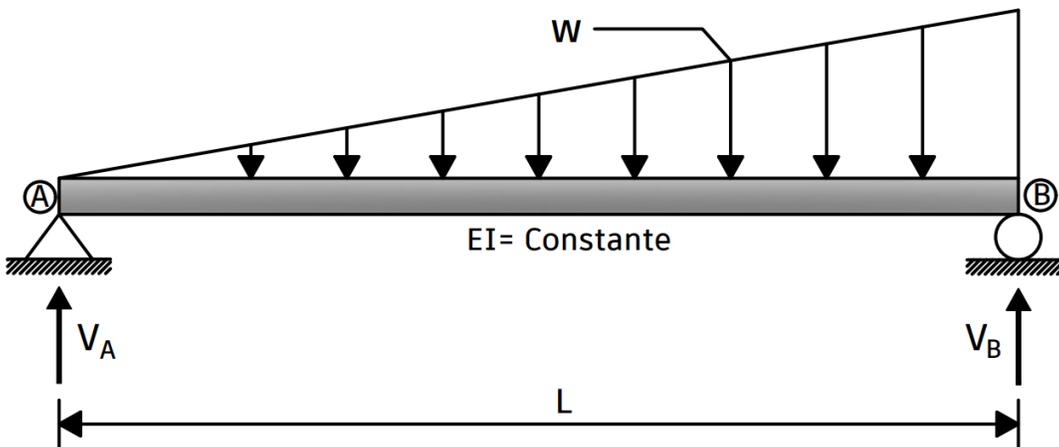
Se omitió el desplazamiento horizontal (Δ_x) ya que el cálculo de este desplazamiento no es tema de esta sección y además cómo se puede observar, en la viga no se tienen fuerzas en el eje x y por lo tanto no habrá un desplazamiento horizontal (Δ_x).

Con esto se concluye el primer ejercicio utilizando el método de la doble integración y se pasará a resolver más ejercicios para que vaya quedando más claro cómo se utiliza este método.

Ejercicio 3.2: Utilizando el método de la doble integración calcula la ecuación del desplazamiento vertical y la ecuación de rotación para conocer las configuraciones deformadas de una viga simplemente apoyada que tiene una longitud (L) que es sometida a una carga triangular (w).

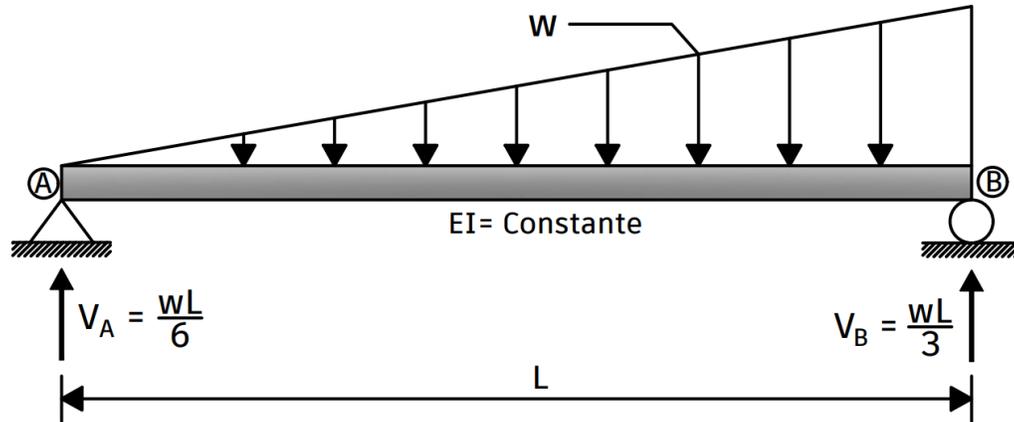


PASO ①: Se calculan las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.



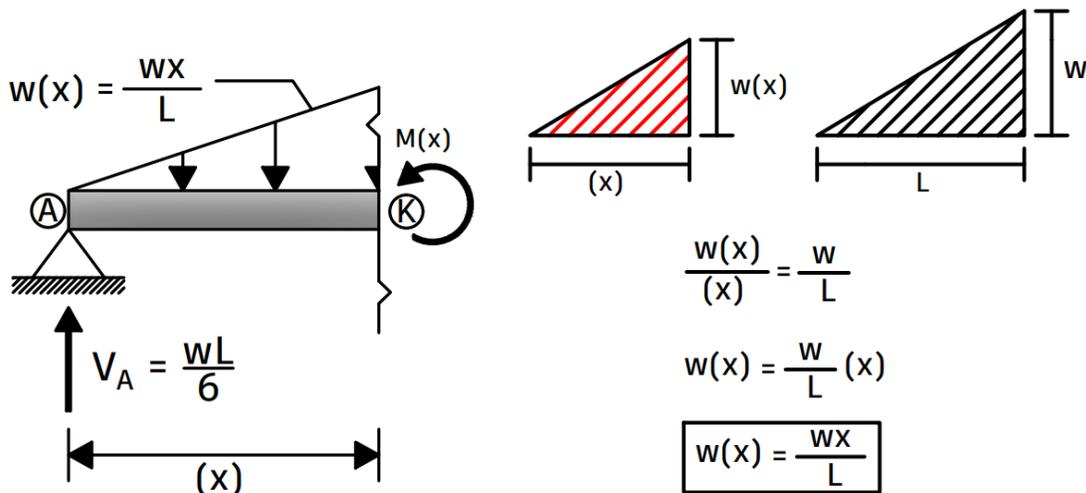
$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0 \quad \curvearrowright (+) \\ -V_B(L) + \left[\frac{w(L)}{2} \right] \left[\frac{2}{3}(L) \right] &= 0 \\ -V_B(L) + \frac{wL^2}{3} &= 0 \\ V_B &= \frac{wL^2}{3L} = 0 \\ V_B &= \frac{wL}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_Y &= 0 \quad \uparrow (+) \\ V_A + V_B - \frac{w(L)}{2} &= 0 \\ V_A + \frac{wL}{3} - \frac{wL}{2} &= 0 \\ V_A - \frac{wL}{6} &= 0 \\ V_A &= \frac{wL}{6} \end{aligned}$$



PASO ②: Calcular la ecuación del momento flexionante $[M(x)]$.

CORTE #1 $[0 \leq x \leq L]$



$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M(x) - \frac{wL}{6} (x) + \left[\frac{\frac{wx}{L} (x)}{2} \right] \left[\frac{1}{3} (x) \right] = 0$$

$$M(x) - \frac{wL}{6} x + \frac{wx^3}{6L} = 0 \quad \therefore \quad M(x) = -\frac{w}{6L} x^3 + \frac{wL}{6} x$$

PASO ③: Se integra la ecuación del momento flexionante $[M(x)]$ para obtener la ecuación de rotación $[\theta(x)]$.

$$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{EI} dx$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \int M(x) dx$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \int \left(-\frac{w}{6L} x^3 + \frac{wL}{6} x \right) dx = \frac{1}{EI} \left[-\frac{w}{6L} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{wL}{6} \left(\frac{x^2}{2} \right) + C_1 \right]$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24L} x^4 + \frac{wL}{12} x^2 + C_1 \right)$$

PASO ④: Se integra la ecuación de rotación $[\theta(x)]$ para poder obtener como resultado la ecuación del desplazamiento $[y(x)]$.

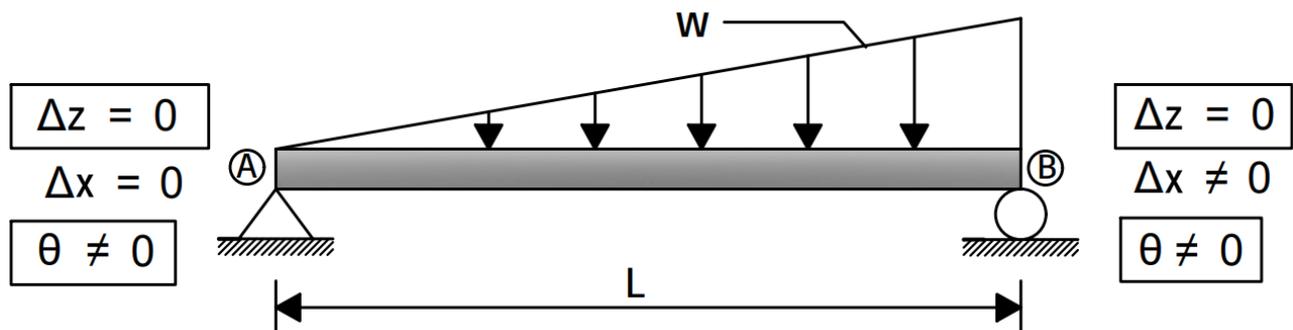
$$y(x) = \int \theta(x) dx$$

$$y(x) = \int \theta(x) dx = \int \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24L} x^4 + \frac{wL}{12} x^2 + C_1 \right) dx$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{w}{24L} \left(\frac{x^5}{5} \right) + \frac{wL}{12} \left(\frac{x^3}{3} \right) + C_1(x) + C_2 \right]$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{120L} x^5 + \frac{wL}{36} x^3 + C_1 x + C_2 \right)$$

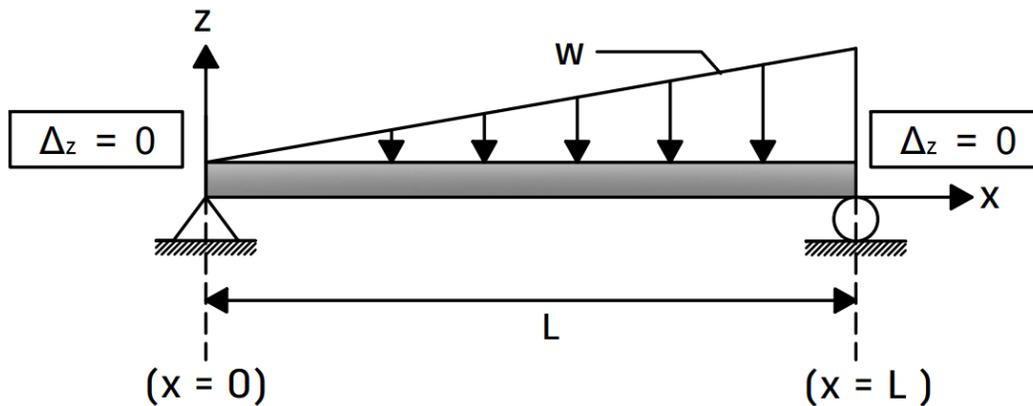
PASO ⑤: Se calculan las constantes $(C_1$ y $C_2)$ utilizando las condiciones de frontera.



Como se está calculando la ecuación de rotación $[\theta(x)]$, se ocupará el valor de la condición de frontera del ángulo de rotación (θ), pero como el valor de la rotación es diferente de cero ($\theta \neq 0$), no se podrá utilizar esta condición de frontera ya que no se conoce su valor ($\theta = ?$), pero se puede calcular utilizando el principio del trabajo virtual, pero para este ejercicio no se calculará el ángulo de rotación.

De igual manera, se está calculando la ecuación del desplazamiento vertical $[y(x)]$ por lo que se ocupará el valor de la condición de frontera del desplazamiento vertical (Δ_z) y como se puede observar, este valor si se conoce ya que el desplazamiento vertical en ambos apoyos es igual a cero ($\Delta_z = 0$).

Como se tienen dos constantes de integración (C_1 y C_2), se deberá de tener dos condiciones de frontera, las cuales son las siguientes:



PRIMERA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando "x" es igual a cero ($x = 0$), el desplazamiento vertical es igual a cero ($\Delta_z = 0$).

$$y(x = 0) = 0$$

SEGUNDA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando "x" es igual a "L" ($x = L$), el desplazamiento vertical es igual a cero ($\Delta_z = 0$).

$$y(x = L) = 0$$

Con estas condiciones de frontera se podrá calcular la ecuación del desplazamiento vertical $[y(x)]$ y la ecuación de rotación $[\theta(x)]$.

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24L} x^4 + \frac{wL}{12} x^2 + C_1 \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{120L} x^5 + \frac{wL}{36} x^3 + C_1 x + C_2 \right)$$

Por comodidad se pasa la constante (EI) al otro lado de la igualdad:

$$EI \theta(x) = -\frac{w}{24L} x^4 + \frac{wL}{12} x^2 + C_1$$

$$EI y(x) = -\frac{w}{120L} x^5 + \frac{wL}{36} x^3 + C_1 x + C_2$$

Solo se está ocupando la condición de frontera del desplazamiento vertical ($\Delta_z = 0$), por lo que solo se ocupará la ecuación del desplazamiento vertical $[y(x)]$.

Se pasa a calcular el valor de la primera constante utilizando la primera condición de frontera:

PRIMERA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando "x" es igual a cero ($x = 0$), el desplazamiento vertical es igual a cero ($\Delta_z = 0$).

$$y(x = 0) = 0$$

$$y(x) = 0 \quad \text{cuando} \quad x = 0$$

$$EI y(x) = -\frac{w}{120L} x^5 + \frac{wL}{36} x^3 + C_1 x + C_2$$

$$EI(0) = -\frac{w}{120L} (0)^5 + \frac{wL}{36} (0)^3 + C_1(0) + C_2$$

$$\boxed{C_2 = 0}$$

Con la segunda condición de frontera se calculará el valor de la segunda constante:

SEGUNDA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando "x" es igual a "L" ($x = L$), el desplazamiento vertical es igual a cero ($\Delta_z = 0$).

$$y(x = L) = 0$$

$$y(x) = 0 \quad \text{cuando} \quad x = L$$

$$EI y(x) = -\frac{w}{120L} x^5 + \frac{wL}{36} x^3 + C_1 x + C_2$$

$$EI(0) = -\frac{w}{120L} (L)^5 + \frac{wL}{36} (L)^3 + C_1(L) + (C_2 = 0)$$

$$0 = -\frac{wL^4}{120} + \frac{wL^4}{36} + C_1L \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{7wL^4}{360} + C_1L \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{7wL^4}{360L}$$

$$C_1 = -\frac{7wL^3}{360}$$

PASO ⑥: Ya teniendo el valor de las constantes de integración, se sustituyen en las ecuaciones.

$$C_1 = -\frac{7wL^3}{360}$$

$$C_2 = 0$$

ECUACIÓN DE ROTACIÓN

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24L}x^4 + \frac{wL}{12}x^2 + C_1 \right)$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24L}x^4 + \frac{wL}{12}x^2 - \frac{7wL^3}{360} \right)$$

ECUACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO VERTICAL

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{120L}x^5 + \frac{wL}{36}x^3 + C_1x + C_2 \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{120L}x^5 + \frac{wL}{36}x^3 - \frac{7wL^3}{360}x \right)$$

PASO ⑦: Se calcula el desplazamiento vertical máximo (y_{max}) y la distancia (x) donde se encuentra este desplazamiento.

Para encontrar la distancia "x" donde se encuentra el desplazamiento vertical máximo (y_{max}), se debe de igualar a cero la ecuación de rotación [$\theta(x)$]:

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24L}x^4 + \frac{wL}{12}x^2 - \frac{7wL^3}{360} \right)$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24L}x^4 + \frac{wL}{12}x^2 - \frac{7wL^3}{360} \right)$$

Por comodidad se supone lo siguiente:

$$w = 1 \quad ; \quad L = 1 \quad ; \quad E = 1 \quad ; \quad I = 1$$

Por lo tanto, la ecuación de rotación queda de la siguiente manera:

$$0 = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2 - \frac{7}{360}$$

Los valores de las variables "x" son las siguientes:

$$x_1 = \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{15}} = 1.315407444$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{15}} = -1.315407444$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{15}} = 0.5193296224$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{15}} = -0.5193296224$$

Se tomará el valor de (x_3), ya que este valor se encuentra en el rango de ($0 \leq x \leq L$) pero como se propuso un valor de $L = 1$, entonces el valor de "x" debe de estar en un rango de ($0 \leq x \leq 1$) y la única variable "x" que se encuentra en este rango es (x_3).

$$x_3 = \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{15}} \Rightarrow x_3 = \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{15}} L$$

Una vez teniendo el valor de "x", se pasa a sustituir el valor de (x_3) en la ecuación del desplazamiento vertical [$y(x)$] para conocer el valor del desplazamiento vertical máximo (y_{max}).

$$x_3 = \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{15}} L$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{120L} x^5 + \frac{wL}{36} x^3 - \frac{7wL^3}{360} x \right)$$

Se pasa al otro lado de la igualdad el módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I):

$$EI y(x) = -\frac{w}{120L}x^5 + \frac{wL}{36}x^3 - \frac{7wL^3}{360}x$$

$$EI y\left(\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{15}}L\right) = -\frac{w}{120L}\left(\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{15}}L\right)^5 + \frac{wL}{36}\left(\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{15}}L\right)^3 - \frac{7wL^3}{360}\left(\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{15}}L\right)$$

$$EI y_{max} = w\left(\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{15}}L\right)\left[-\frac{1}{120L}\left(\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{15}}L\right)^4 + \frac{L}{36}\left(\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{15}}L\right)^2 - \frac{7L^3}{360}\right]$$

$$EI y_{max} = wL^4\left(\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{15}}\right)\left[-\frac{1}{27000}(225 - 60\sqrt{30} + 120) + \frac{1}{540}(15 - 2\sqrt{30}) - \frac{7}{360}\right]$$

$$EI y_{max} = wL^4\left(\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{15}}\right)\left(-\frac{23}{1800} + \frac{1}{450}\sqrt{30} + \frac{1}{36} - \frac{1}{270}\sqrt{30} - \frac{7}{360}\right)$$

$$EI y_{max} = wL^4\left(\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{15}}\right)\left(-\frac{1}{225} - \frac{1}{675}\sqrt{30}\right)$$

$$EI y_{max} = - \left(\frac{45\sqrt{15} + 225\sqrt{2}}{151875} \right) \left(\sqrt{15 - 2\sqrt{30}} \right) wL^4$$

(Deformación Vertical Maxima)

$$y_{max} = - \left(\sqrt{15 - 2\sqrt{30}} \right) \left(\frac{45\sqrt{15} + 225\sqrt{2}}{151875} \right) \frac{wL^4}{EI}$$

La deformación vertical tiene unidades de distancia: metros (m), centímetros (cm), milímetros (mm), etc.

PASO ⑧: Con ayuda del programa Excel y con las ecuaciones $\theta(x)$ y $y(x)$, se conocerá la configuración deformada de la viga.

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{24L} x^4 + \frac{wL}{12} x^2 - \frac{7wL^3}{360} \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w}{120L} x^5 + \frac{wL}{36} x^3 - \frac{7wL^3}{360} x \right)$$

Suponiendo:

$$w = 1 \quad ; \quad L = 1 \quad ; \quad E = 1 \quad ; \quad I = 1$$

w =	1.0
------------	-----

L =	1.0
------------	-----

E =	1.0
------------	-----

I =	1.0
------------	-----

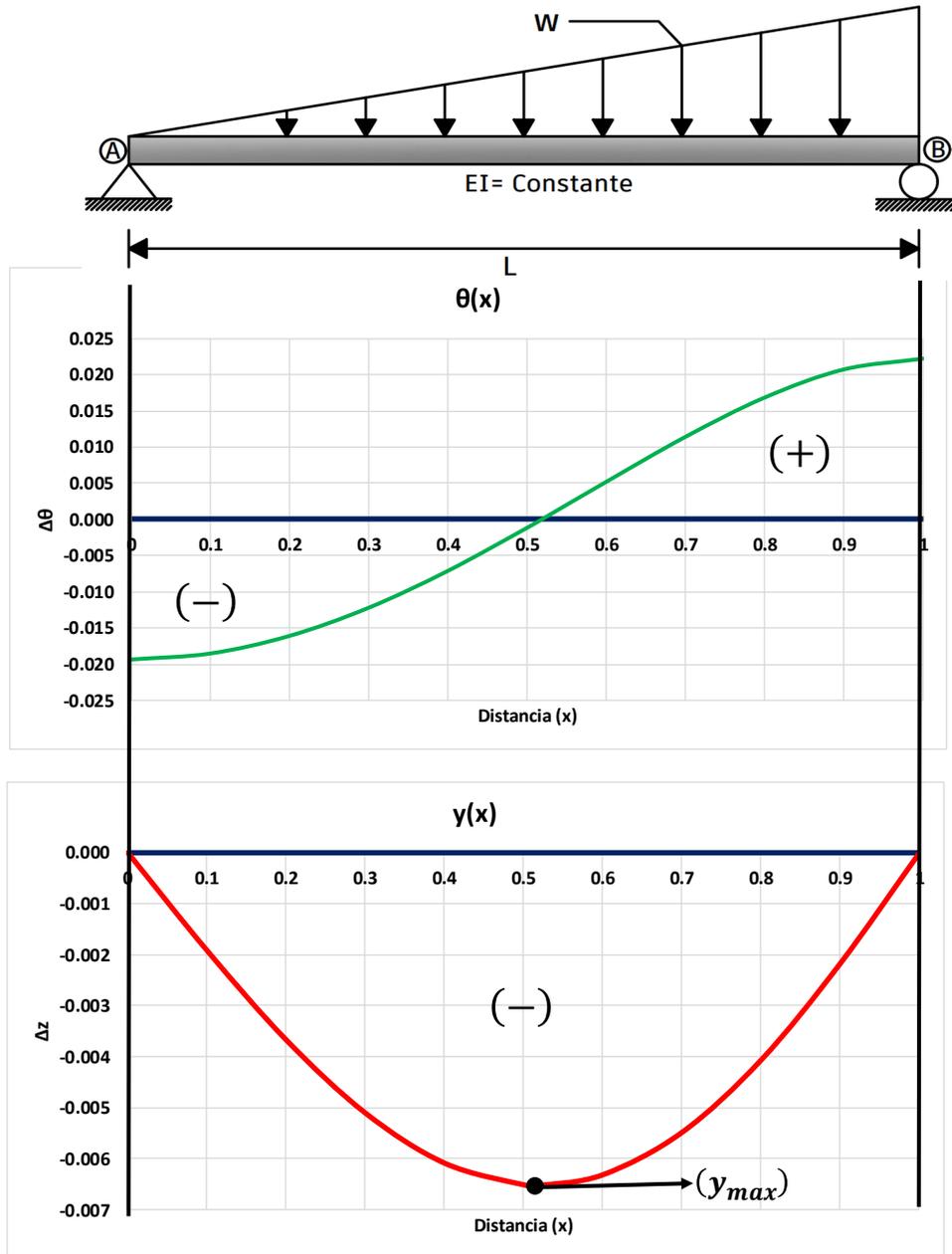
(x)	$\theta(x)$	$y(x)$
0	-0.019444	0.00000
0.10	-0.018615	-0.00192
0.20	-0.016178	-0.00367
0.30	-0.012282	-0.00510
0.40	-0.007178	-0.00609
0.50	-0.001215	-0.00651
0.51933	0.000000	-0.00652218
0.60	0.005156	-0.00631
0.70	0.011385	-0.00548
0.80	0.016822	-0.00406
0.90	0.020718	-0.00217
1.00	0.022222	0.00000

→ (y_{max})

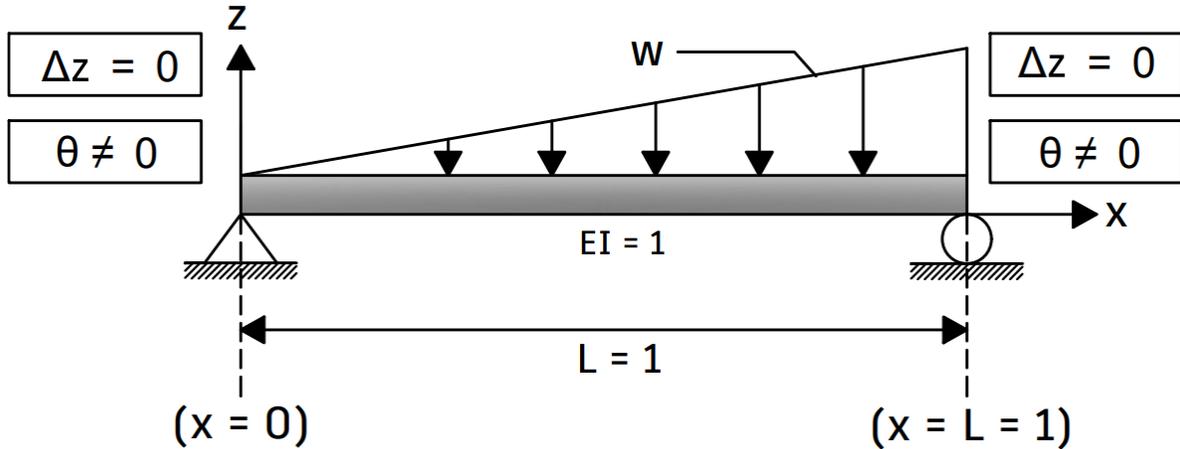
Si se observa la tabla, se podrá observar que a la distancia "x" cuando la rotación es igual a cero [$\theta(x) = 0$], se tiene el desplazamiento máximo [y_{max}], con esto se puede tener una manera de comprobar si el valor de "x" es correcto.

Se puede concluir que, cuando se calcule el valor de "x" donde se encuentra el desplazamiento vertical máximo, una manera de comprobar que este valor es correcto es que cuando se sustituya "x" en la ecuación de rotación [$\theta(x)$], el resultado deberá ser igual a cero.

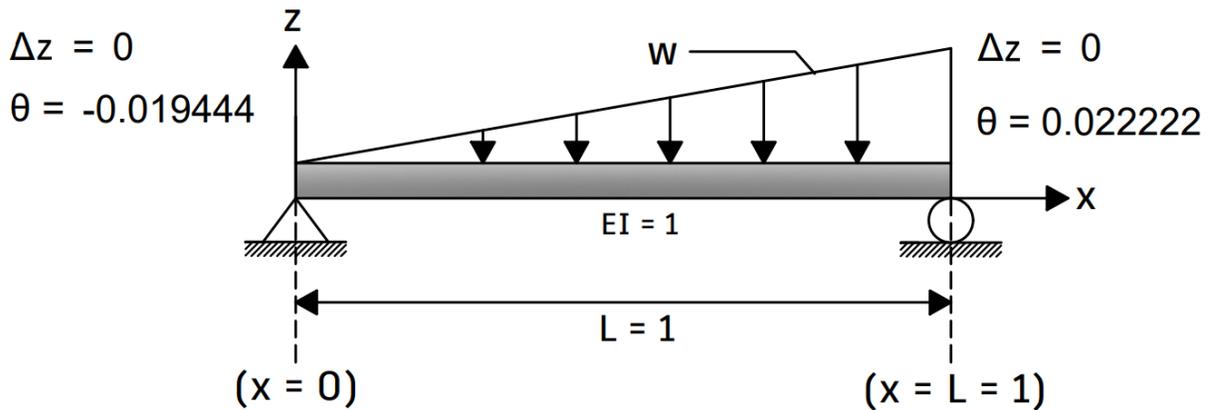
CONFIGURACIÓN DEFORMADA



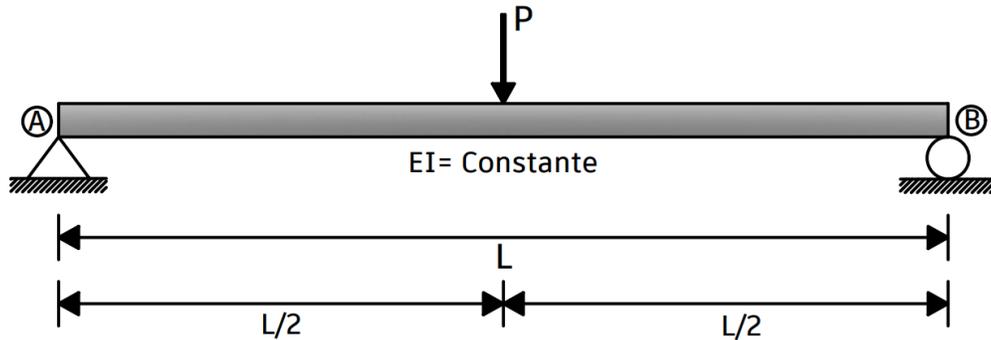
Una manera de confirmar que las ecuaciones están correctas es comprobando si las dos ecuaciones cumplen con las condiciones de frontera presentes en la viga. Se sabe que en el apoyo fijo y en el apoyo móvil de la viga se tienen las siguientes condiciones de frontera:



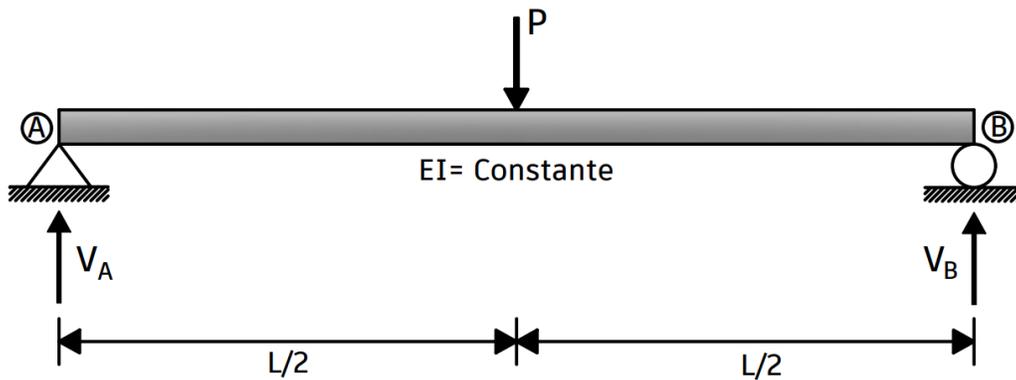
Si se regresa a la tabla donde se tabulo la ecuación de rotación $[\theta(x)]$ y la ecuación del desplazamiento vertical $[y(x)]$, se podrá observar que efectivamente se cumplen las condiciones de frontera:



Ejercicio 3.3: Utilizando el método de la doble integración calcula la ecuación del desplazamiento vertical y la ecuación de rotación para conocer las configuraciones deformadas de una viga simplemente apoyada que tiene una longitud (L) que es sometida a una carga puntual (P) a la mitad del claro de la viga. Se supone que la sección transversal es constante por lo que también lo es el valor del módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I) de la viga.

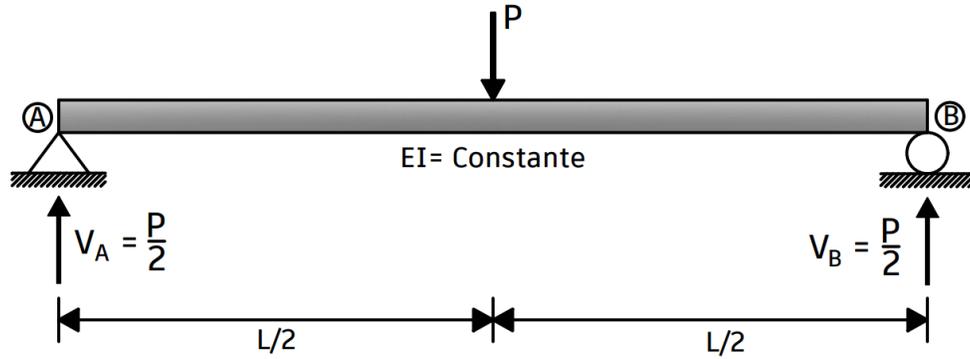


PASO ①: Se calculan las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.



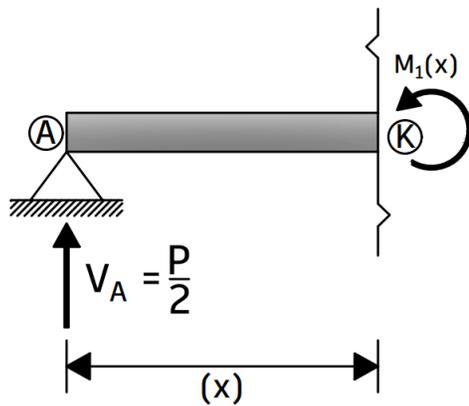
$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0 \quad \curvearrowright (+) \\ -V_B(L) + P\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\ V_B &= \frac{PL}{2L} \\ V_B &= \frac{P}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_Y &= 0 \quad \uparrow (+) \\ V_A + V_B - P &= 0 \\ V_A + \frac{P}{2} - P &= 0 \\ V_A &= \frac{P}{2} \end{aligned}$$



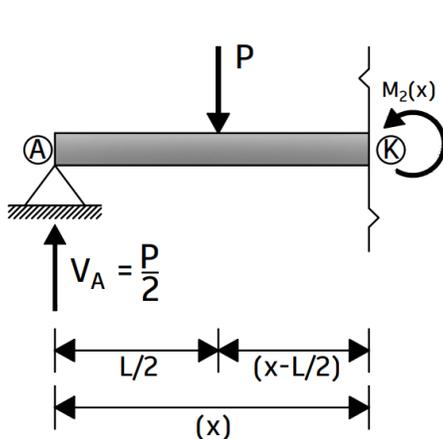
PASO ②: Cálculo de las ecuaciones de los momentos flexionantes [M(x)].

CORTE #1 $\left[0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right]$



$$\begin{aligned} \Sigma M_K &= 0 \quad (+) \\ M_1(x) - \frac{P}{2}(x) &= 0 \\ M_1(x) &= \frac{P}{2}x \end{aligned}$$

CORTE #2 $\left[\frac{L}{2} \leq x \leq L \right]$



$$\begin{aligned} \Sigma M_K &= 0 \quad (+) \\ M_2(x) - \frac{P}{2}(x) + P\left(x - \frac{L}{2}\right) &= 0 \\ M_2(x) - \frac{P}{2}x + Px - \frac{PL}{2} &= 0 \\ M_2(x) - \frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} &= 0 \end{aligned}$$

PASO ③: Se integra la ecuación del momento flexionante $[M_1(x)]$ para obtener de $(0 \leq x \leq L/2)$ la ecuación de rotación $[\theta_1(x)]$.

$$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{EI} dx$$

$$\theta_1(x) = \int \frac{M_1(x)}{EI} dx$$

$$\theta_1(x) = \int \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int \frac{P}{2}x dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{P}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) + C_1 \right]$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{4}x^2 + C_1 \right)$$

PASO ④: Se integra la ecuación de rotación $[\theta_1(x)]$ para obtener de $(0 \leq x \leq L/2)$ la ecuación del desplazamiento vertical $[y_1(x)]$.

$$y(x) = \int \theta(x) dx$$

$$y_1(x) = \int \theta_1(x) dx$$

$$y_1(x) = \int \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{4}x^2 + C_1 \right) dx = \frac{1}{EI} \int \left(\frac{P}{4}x^2 + C_1 \right) dx$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{P}{4} \left(\frac{x^3}{3} \right) + C_1(x) + C_2 \right]$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{12}x^3 + C_1x + C_2 \right)$$

PASO ⑤: Se integra la ecuación del momento flexionante $[M_2(x)]$ para obtener de $(L/2 \leq x \leq L)$ la ecuación de rotación $[\theta_2(x)]$.

$$\theta_2(x) = \int \frac{M_2(x)}{EI} dx$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \int M_2(x) dx$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \int -\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} dx = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{PL}{2} (x) + C_3 \right]$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x + C_3 \right)$$

PASO ⑥: Se integra la ecuación de rotación $[\theta_2(x)]$ para obtener de $(L/2 \leq x \leq L)$ la ecuación del desplazamiento vertical $[y_2(x)]$.

$$y_2(x) = \int \theta_2(x) dx$$

$$y_2(x) = \int \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x + C_3 \right) dx = \frac{1}{EI} \int \left(-\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x + C_3 \right) dx$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{4} \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{PL}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) + C_3(x) + C_4 \right]$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL}{4}x^2 + C_3x + C_4 \right)$$

PASO ⑦: Se calculan los valores de todas las constantes de integración.

Se tienen cuatro constantes de integración:

$$\left[0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right]$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{4}x^2 + C_1 \right)$$

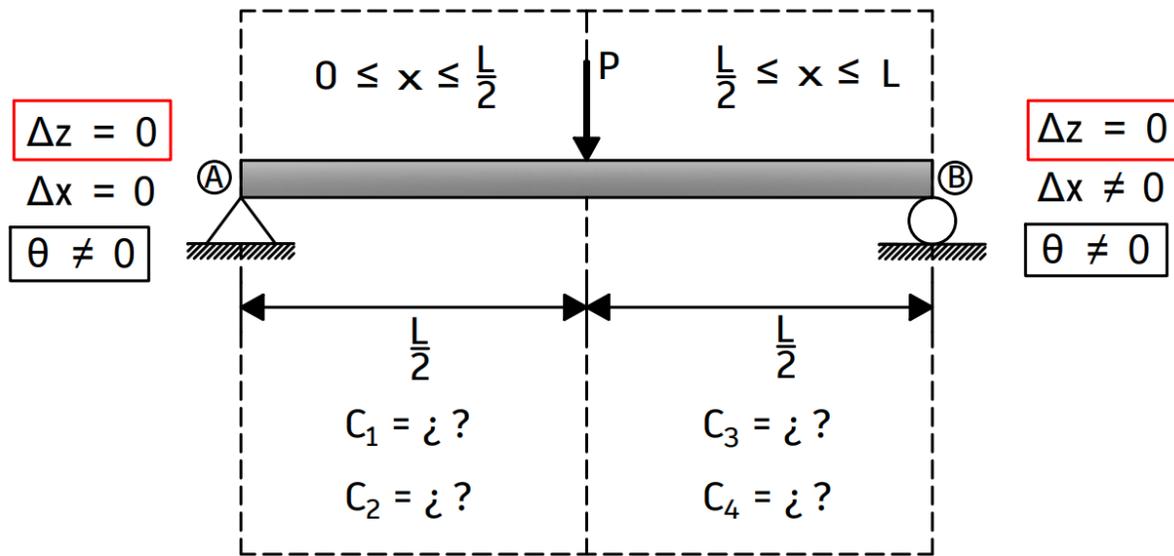
$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{12}x^3 + C_1x + C_2 \right)$$

$$\left[\frac{L}{2} \leq x \leq L \right]$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x + C_3 \right)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL}{4}x^2 + C_3x + C_4 \right)$$

Y solo solo se conocen dos condiciones de frontera:



Se debe de conocer el valor de dos condiciones de frontera que estén dentro del rango de $(0 \leq x \leq L/2)$ ya que dentro de este rango se encuentran las constantes C_1 y C_2 y también se deben de conocer otras dos condiciones de frontera que estén dentro del rango de $(L/2 \leq x \leq L)$ ya que dentro de este rango se encuentran las otras dos constantes C_3 y C_4 .

Dentro del rango de $(0 \leq x \leq L/2)$ solo se conoce el desplazamiento vertical del apoyo fijo el cual tiene un valor de cero ($\Delta z = 0$) y el valor del ángulo de rotación en el mismo apoyo no sé conoce ($\theta \neq 0$), por lo que, se pasará a calcular este valor utilizando el principio del trabajo virtual para que se pueda conocer el valor de las constantes C_1 y C_2 .

Cuando se explicó el método del principio del trabajo virtual solo se enfocó en enseñar como se calculan los desplazamientos verticales empleando este método, pero se omitió el cálculo de ángulos de rotaciones utilizando este mismo método ya que no era tema de esta tesis.

El cálculo de un ángulo de rotación ($\theta \neq 0$) utilizando el principio del trabajo virtual es similar al cálculo de un desplazamiento vertical utilizando este mismo método, lo único que cambia es que en lugar de colocar una carga puntual unitaria en el punto donde se desea conocer un desplazamiento vertical, se coloca un momento unitario en el punto donde se desea conocer el valor de un ángulo de rotación.

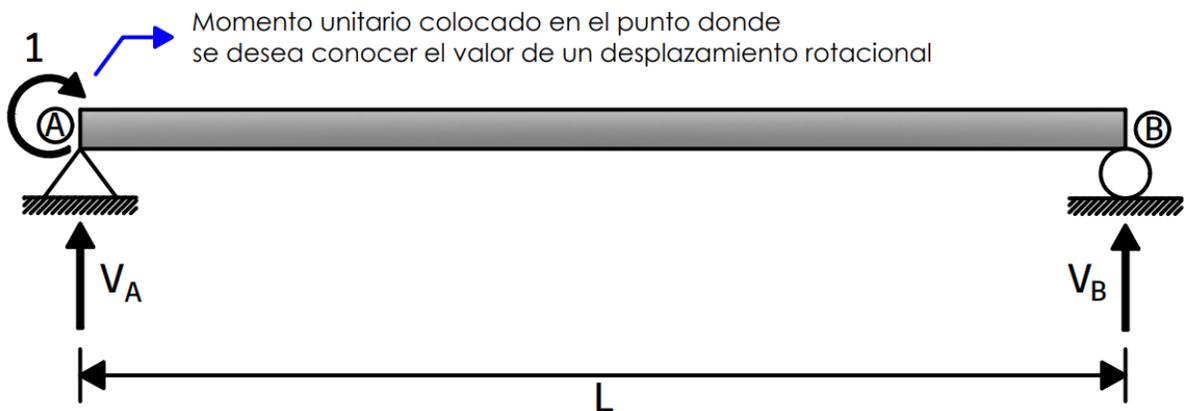
Se pasará a calcular el valor del ángulo de rotación en el apoyo fijo de la viga, para que se entienda mejor lo antes mencionado.

Ya se conocen las ecuaciones de los momentos flexionantes $[M(x)]$ de las cargas reales:

$$M_1(x) = \frac{P}{2}x$$

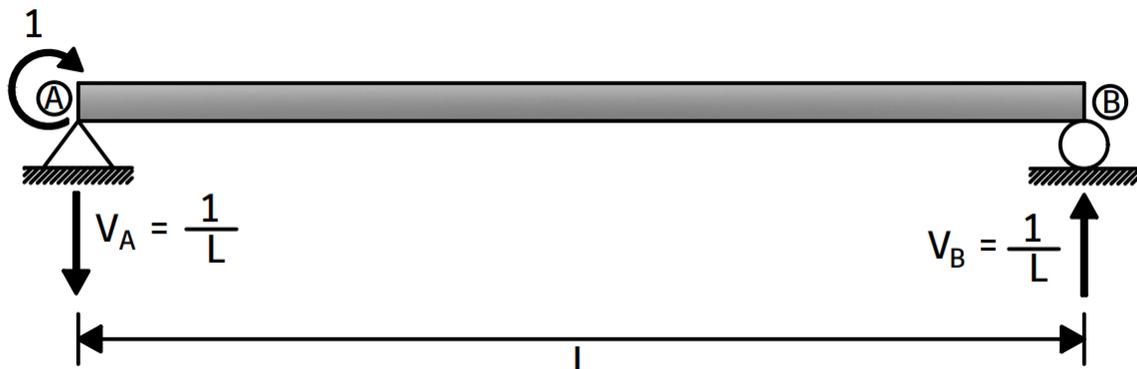
$$M_2(x) = -\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}$$

Por lo que se pasará a calcular la ecuación del momento flexionante de la viga con un momento unitario en el punto donde se desea conocer el valor del ángulo de rotación.



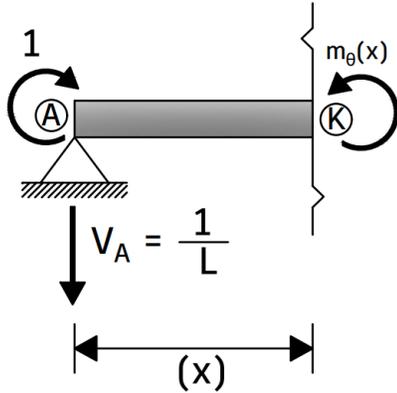
Se calculan las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio:

$\sum M_A = 0 \quad (+)$ $-V_B(L) + 1 = 0$ $V_B = \frac{1}{L}$	$\sum M_B = 0 \quad (+)$ $V_A(L) + 1 = 0$ $V_A = -\frac{1}{L} \quad [\downarrow]$
--	---



Cálculo de la ecuación del momento flexionante $[m_\theta(x)]$:

CORTE #1 $[0 \leq x \leq L]$



$$\Sigma M_K = 0 \quad (+)$$

$$m_\theta(x) + \frac{1}{L}(x) - 1 = 0$$

$$m_\theta(x) = -\frac{1}{L}x + 1$$

Se calcula el ángulo rotación utilizando el principio del trabajo virtual:

$$\Delta_\theta = \int_0^L \frac{M(x) \cdot m_\theta(x)}{EI} dx$$

$$\Delta_\theta = \int_0^{L/2} \frac{M_1(x) \cdot m_\theta(x)}{EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{M_2(x) \cdot m_\theta(x)}{EI} dx$$

$$\Delta_\theta = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \underbrace{M_1(x) \cdot m_\theta(x)}_{\Delta_{\theta 1}} dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \underbrace{M_2(x) \cdot m_\theta(x)}_{\Delta_{\theta 2}} dx$$

Cálculo de $\Delta_{\theta 1}$

$$\Delta_{\theta 1} = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} M_1(x) \cdot m_\theta(x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{P}{2}x\right) \left(-\frac{1}{L}x + 1\right) dx$$

$$\Delta_{\theta 1} = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(-\frac{P}{2L}x^2 + \frac{P}{2}x\right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left[-\frac{P}{2L}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{P}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]$$

$$\Delta_{\theta 1} = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left[-\frac{P}{6L}x^3 + \frac{P}{4}x^2\right] = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{P}{6L}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{P}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] - \left[-\frac{P}{6L}(0)^3 + \frac{P}{4}(0)^2\right] \right\}$$

$$\Delta_{\theta 1} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{P}{6L} \left(\frac{L^3}{8} \right) + \frac{P}{4} \left(\frac{L^2}{4} \right) \right] - [0] \right\} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{PL^2}{48} + \frac{PL^2}{16} \right]$$

$$\Delta_{\theta 1} = \frac{PL^2}{24EI}$$

Cálculo de $\Delta_{\theta 2}$

$$\Delta_{\theta 2} = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L M_2(x) \cdot m_{\theta}(x) dx = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} \right) \left(-\frac{1}{L}x + 1 \right) dx$$

$$\Delta_{\theta 2} = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(\frac{P}{2L}x^2 - \frac{PL}{2L}x - \frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} \right) dx = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(\frac{P}{2L}x^2 - Px + \frac{PL}{2} \right) dx$$

$$\Delta_{\theta 2} = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left[\frac{P}{2L} \left(\frac{x^3}{3} \right) - P \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{PL}{2}(x) \right] dx = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left[\frac{P}{6L}x^3 - \frac{P}{2}x^2 + \frac{PL}{2}x \right]$$

$$\Delta_{\theta 2} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{P}{6L}(L)^3 - \frac{P}{2}(L)^2 + \frac{PL}{2}(L) \right] - \left[\frac{P}{6L} \left(\frac{L}{2} \right)^3 - \frac{P}{2} \left(\frac{L}{2} \right)^2 + \frac{PL}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\Delta_{\theta 2} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{PL^3}{6L} - \frac{PL^2}{2} + \frac{PL^2}{2} \right] - \left[\frac{P}{6L} \left(\frac{L^3}{8} \right) - \frac{P}{2} \left(\frac{L^2}{4} \right) + \frac{PL}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\Delta_{\theta 2} = \frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{PL^2}{6} - \frac{PL^2}{2} + \frac{PL^2}{2} \right] - \left[\frac{PL^2}{48} - \frac{PL^2}{8} + \frac{PL^2}{4} \right] \right\} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{PL^2}{6} \right) - \left(\frac{7PL^2}{48} \right) \right]$$

$$\Delta_{\theta 2} = \frac{PL^2}{48EI}$$

Cálculo de Δ_{θ}

$$\Delta_{\theta} = \Delta_{\theta 1} + \Delta_{\theta 2}$$

$$\Delta_{\theta} = \frac{PL^2}{24EI} + \frac{PL^2}{48EI}$$

$$\Delta_{\theta} = \frac{PL^2}{16EI}$$

Al ángulo de rotación calculado, se le cambiara el signo para utilizarlo como una condición de frontera, ya que como se dijo al principio de esta sección, si se propone un momento unitario horario [⌚] para calcular un ángulo de rotación utilizando el principio del trabajo virtual, al resultado se le debe de cambiar el signo para utilizarlo como condición de frontera en el método de la doble integración.

Como se propuso un momento unitario en sentido horario para el cálculo del ángulo rotación, se le tendrá que cambiar el signo a dicho valor:

$$\Delta_{\theta} = -\frac{PL^2}{16EI}$$

Con este ángulo de rotación, ya se tendrían dos condiciones de frontera:

PRIMERA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando "x" es igual a cero ($x = 0$), el desplazamiento vertical es igual a cero ($\Delta_z = 0$).

$$y_1(x = 0) = 0$$

SEGUNDA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando "x" es igual a cero ($x = 0$), el ángulo de rotación es igual a $\theta = -\frac{PL^2}{16EI}$.

$$\theta_1(x = 0) = -\frac{PL^2}{16EI}$$

Se calcula la primera constante (C_2) utilizando la primera condición de frontera:

PRIMERA CONDICIÓN DE FRONTERA

$$y_1(x = 0) = 0$$

$$y_1(x) = 0 \quad \text{cuando} \quad x = 0$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{12} x^3 + C_1 x + C_2 \right)$$

$$EI y_1(x) = \frac{P}{12} x^3 + C_1 x + C_2$$

$$EI y_1(0) = \frac{P}{12} (0)^3 + C_1(0) + C_2$$

$$\boxed{C_2 = 0}$$

Se calcula la segunda constante (C_1) utilizando la segunda condición de frontera:

SEGUNDA CONDICIÓN DE FRONTERA

$$\theta_1(x = 0) = -\frac{PL^2}{16EI}$$

$$\theta_1(x) = -\frac{PL^2}{16EI} \quad \text{cuando} \quad x = 0$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{4}x^2 + C_1 \right)$$

$$EI \theta_1(x) = \frac{P}{4}x^2 + C_1$$

$$EI \left(-\frac{PL^2}{16EI} \right) = \frac{P}{4}(0)^2 + C_1$$

$$\boxed{C_1 = -\frac{PL^2}{16}}$$

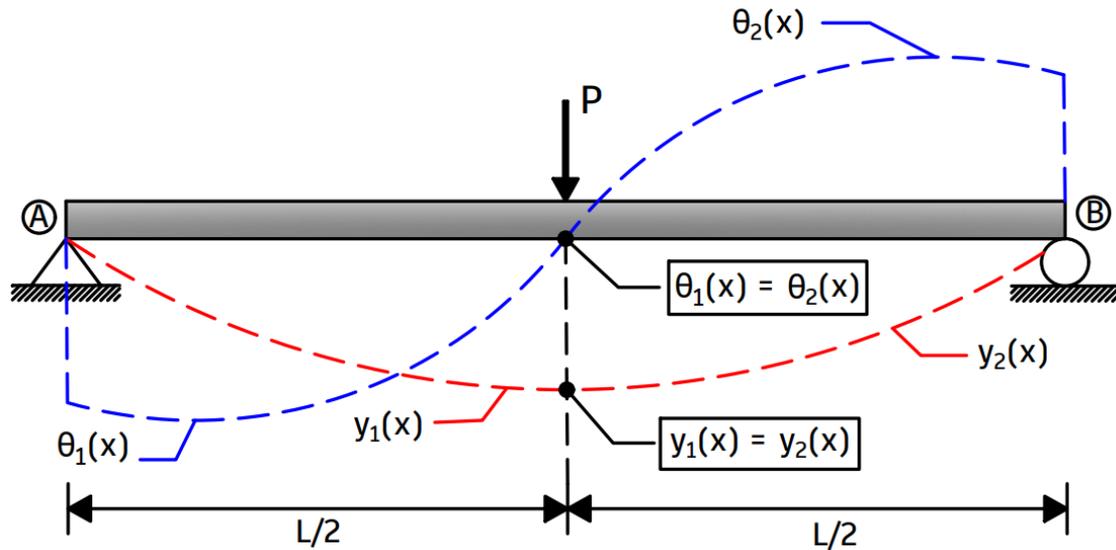
Una vez teniendo el valor de las constantes de integración, se sustituyen para obtener la ecuación del desplazamiento vertical [$y_1(x)$] y la ecuación de rotación [$\theta_1(x)$] que están dentro del rango de ($0 \leq x \leq L/2$).

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{12}x^3 - \frac{PL^2}{16}x \right)$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{4}x^2 - \frac{PL^2}{16} \right)$$

Ya teniendo el valor de las constantes C_1 y C_2 , se pasará a calcular el valor de las constantes C_3 y C_4 que se encuentran en un rango de ($L/2 \leq x \leq L$). Para calcular estas constantes, no será necesario utilizar las condiciones de frontera del apoyo móvil ($\Delta_z = 0$ y $\theta \neq 0$), si no que con la ecuación del desplazamiento vertical [$y_1(x)$] y la ecuación de rotación [$\theta_1(x)$] y empleando la condición de continuidad, se podrá calcular el valor de C_3 y C_4 .

CONDICIÓN DE CONTINUIDAD



Con la condición de continuidad se puede decir que cuando $[x = L/2]$ la rotación $[\theta_1(x)]$ es igual a la rotación $[\theta_2(x)]$ y de igual manera cuando $[x = L/2]$ el desplazamiento vertical $[y_1(x)]$ es igual al desplazamiento vertical $[y_2(x)]$.

Con estas dos nuevas condiciones de frontera, se pasa a calcular las constantes C_3 y C_4 :

TERCERA CONDICIÓN DE FRONTERA.

Cuando $[x = L/2]$, la rotación $[\theta_1(x)]$ es igual a la rotación $[\theta_2(x)]$.

$$\theta_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = \theta_2\left(x = \frac{L}{2}\right)$$

$$\theta_1(x) = \theta_2(x) \quad \text{cuando} \quad x = \frac{L}{2}$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{4} x^2 - \frac{PL^2}{16} \right)$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{4} x^2 + \frac{PL}{2} x + C_3 \right)$$

$$\theta_1\left(\frac{L}{2}\right) = \theta_2\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{P}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{PL^2}{16} \right] = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{PL}{2} \left(\frac{L}{2}\right) + C_3 \right]$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{P}{4} \left(\frac{L^2}{4} \right) - \frac{PL^2}{16} \right] = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{4} \left(\frac{L^2}{4} \right) + \frac{PL}{2} \left(\frac{L}{2} \right) + C_3 \right]$$

$$\left(\frac{PL^2}{16} - \frac{PL^2}{16} \right) = \frac{EI}{EI} \left[-\frac{PL^2}{16} + \frac{PL^2}{4} + C_3 \right]$$

$$0 = \frac{3PL^2}{16} + C_3$$

$$\boxed{C_3 = -\frac{3PL^2}{16}}$$

CUARTA CONDICIÓN DE FRONTERA.

Cuando $[x = L/2]$, el desplazamiento vertical $[y_1(x)]$ es igual al desplazamiento vertical $[y_2(x)]$.

$$y_1 \left(x = \frac{L}{2} \right) = y_2 \left(x = \frac{L}{2} \right)$$

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \text{cuando} \quad x = \frac{L}{2}$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{12} x^3 - \frac{PL^2}{16} x \right)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{12} x^3 + \frac{PL}{4} x^2 + C_3 x + C_4 \right)$$

$$y_1 \left(\frac{L}{2} \right) = y_2 \left(\frac{L}{2} \right)$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{P}{12} \left(\frac{L}{2} \right)^3 - \frac{PL^2}{16} \left(\frac{L}{2} \right) \right] = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{12} \left(\frac{L}{2} \right)^3 + \frac{PL}{4} \left(\frac{L}{2} \right)^2 + C_3 \left(\frac{L}{2} \right) + C_4 \right]$$

$$\left[\frac{P}{12} \left(\frac{L^3}{8} \right) - \frac{PL^2}{16} \left(\frac{L}{2} \right) \right] = \frac{EI}{EI} \left[-\frac{P}{12} \left(\frac{L^3}{8} \right) + \frac{PL}{4} \left(\frac{L^2}{4} \right) - \frac{3PL^2}{16} \left(\frac{L}{2} \right) + C_4 \right]$$

$$\left[\frac{PL^3}{96} - \frac{PL^3}{32} \right] = \left[-\frac{PL^3}{96} + \frac{PL^3}{16} - \frac{3PL^3}{32} + C_4 \right]$$

$$-\frac{PL^3}{48} = -\frac{PL^3}{24} + C_4 \quad \Rightarrow \quad C_4 = -\frac{PL^3}{48} + \frac{PL^3}{24}$$

$$C_4 = \frac{PL^3}{48}$$

Ya teniendo el valor de las constantes de integración, se sustituyen sus valores para obtener la ecuación del desplazamiento vertical $[y_2(x)]$ y la ecuación de rotación $[\theta_2(x)]$ que están dentro del rango de $(L/2 \leq x \leq L)$.

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x - \frac{3PL^2}{16} \right)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL}{4}x^2 - \frac{3PL^2}{16}x + \frac{PL^3}{48} \right)$$

De esta manera se concluye el cálculo de las constantes de integración para obtener las siguientes ecuaciones:

$$\left[0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right]$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{12}x^3 - \frac{PL^2}{16}x \right)$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{4}x^2 - \frac{PL^2}{16} \right)$$

$$\left[\frac{L}{2} \leq x \leq L \right]$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x - \frac{3PL^2}{16} \right)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL}{4}x^2 - \frac{3PL^2}{16}x + \frac{PL^3}{48} \right)$$

PASO ⑧: Se calculan los desplazamientos máximos (y_{max}) y sus respectivas distancias "x".

Primero se calcula el desplazamiento vertical máximo (y_{1max}) y la distancia "x" que se encuentra en un rango de $(0 \leq x \leq L/2)$. Por lo que se pasará a igualar a cero la ecuación de rotación $[\theta_1(x)]$.

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{4} x^2 - \frac{PL^2}{16} \right)$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{4} x^2 - \frac{PL^2}{16} \right)$$

Por comodidad se supondrá lo siguiente:

$$P = 1 \quad ; \quad L = 1 \quad ; \quad E = 1 \quad ; \quad I = 1$$

Por lo tanto, la ecuación de rotación queda de la siguiente manera:

$$0 = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{16}$$

Los valores de las variables "x" son las siguientes:

$$x_1 = \frac{1}{2} L \quad ; \quad x_2 = -\frac{1}{2} L$$

Se tomará el valor de (x_1), ya que este valor se encuentra en el rango de ($0 \leq x \leq L/2$). Una vez teniendo el valor de "x", se sustituye este valor (x_1) en la ecuación del desplazamiento vertical $y_1(x)$ para conocer el valor del desplazamiento vertical máximo (y_{1max}).

$$x_1 = \frac{1}{2} L = \frac{L}{2}$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{12} x^3 - \frac{PL^2}{16} x \right)$$

$$y_{1max} = y_1 \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{EI} \left[\frac{P}{12} \left(\frac{L}{2} \right)^3 - \frac{PL^2}{16} \left(\frac{L}{2} \right) \right]$$

$$y_{1max} = \frac{1}{EI} \left[\frac{P}{12} \left(\frac{L^3}{8} \right) - \frac{PL^2}{16} \left(\frac{L}{2} \right) \right] = \frac{1}{EI} \left(\frac{PL^3}{96} - \frac{PL^3}{32} \right) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{PL^3}{48} \right)$$

$$y_{1max} = -\frac{PL^3}{48EI}$$

Ahora se calculará el desplazamiento vertical máximo (y_{2max}) y la distancia "x" que se encuentra en un rango de ($L/2 \leq x \leq L$). Por lo que se pasará a igualar a cero la ecuación de rotación [$\theta_2(x)$].

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x - \frac{3PL^2}{16} \right)$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x - \frac{3PL^2}{16} \right)$$

Por comodidad se supone lo siguiente:

$$P = 1 \quad ; \quad L = 1 \quad ; \quad E = 1 \quad ; \quad I = 1$$

Por lo tanto, la ecuación de rotación queda de la siguiente manera:

$$0 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}$$

Los valores de las variables "x" son las siguientes:

$$x_1 = \frac{3}{2}L \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{2}L$$

Se tomará el valor de (x_2), ya que este valor se encuentra en el rango de ($L/2 \leq x \leq L$). Una vez teniendo el valor de "x", se sustituye este valor (x_2) en la ecuación del desplazamiento vertical $y_2(x)$ para conocer el valor del desplazamiento vertical máximo (y_{2max}).

$$x_2 = \frac{1}{2}L = \frac{L}{2}$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL}{4}x^2 - \frac{3PL^2}{16}x + \frac{PL^3}{48} \right)$$

$$y_{2max} = y_2 \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{12} \left(\frac{L}{2} \right)^3 + \frac{PL}{4} \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \frac{3PL^2}{16} \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{PL^3}{48} \right]$$

$$y_{2max} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{12} \left(\frac{L^3}{8} \right) + \frac{PL}{4} \left(\frac{L^2}{4} \right) - \frac{3PL^2}{16} \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{PL^3}{48} \right]$$

$$y_{2max} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{PL^3}{96} + \frac{PL^3}{16} - \frac{3PL^3}{32} + \frac{PL^3}{48} \right) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{PL^3}{48} \right)$$

$$y_{2max} = -\frac{PL^3}{48EI}$$

$$y_{1max} = y_{2max} = -\frac{PL^3}{48EI}$$

(Deformación Vertical Maxima)

$y_{max} = -\frac{PL^3}{48EI}$

PASO ⑧: Con ayuda del programa Excel y con las ecuaciones $[\theta_1(x), y_1(x), \theta_2(x)$ y $y_2(x)]$, se pasará a conocer la configuración deformada de la viga.

$$\left[0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right]$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{12} x^3 - \frac{PL^2}{16} x \right)$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{4} x^2 - \frac{PL^2}{16} \right)$$

$$\left[\frac{L}{2} \leq x \leq L \right]$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{4} x^2 + \frac{PL}{2} x - \frac{3PL^2}{16} \right)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{12} x^3 + \frac{PL}{4} x^2 - \frac{3PL^2}{16} x + \frac{PL^3}{48} \right)$$

Suponiendo:

$$P = 1 \quad ; \quad L = 1 \quad ; \quad E = 1 \quad ; \quad I = 1$$

P =	1.0				
L =	1.0				
E =	1.0				
I =	1.0				

(x)	$\theta(x)$	y(x)	
0	-0.062500	0.000000	}
0.10	-0.060000	-0.00617	
0.20	-0.052500	-0.01183	
0.30	-0.040000	-0.01650	
0.40	-0.022500	-0.01967	
0.50	0.000000	-0.02083	}
0.50	0.000000	-0.02083	
0.60	0.022500	-0.01967	}
0.70	0.040000	-0.01650	
0.80	0.052500	-0.01183	
0.90	0.060000	-0.00617	
1.00	0.062500	0.000000	

$\theta_1(x)$

$y_1(x)$

$\theta_2(x)$

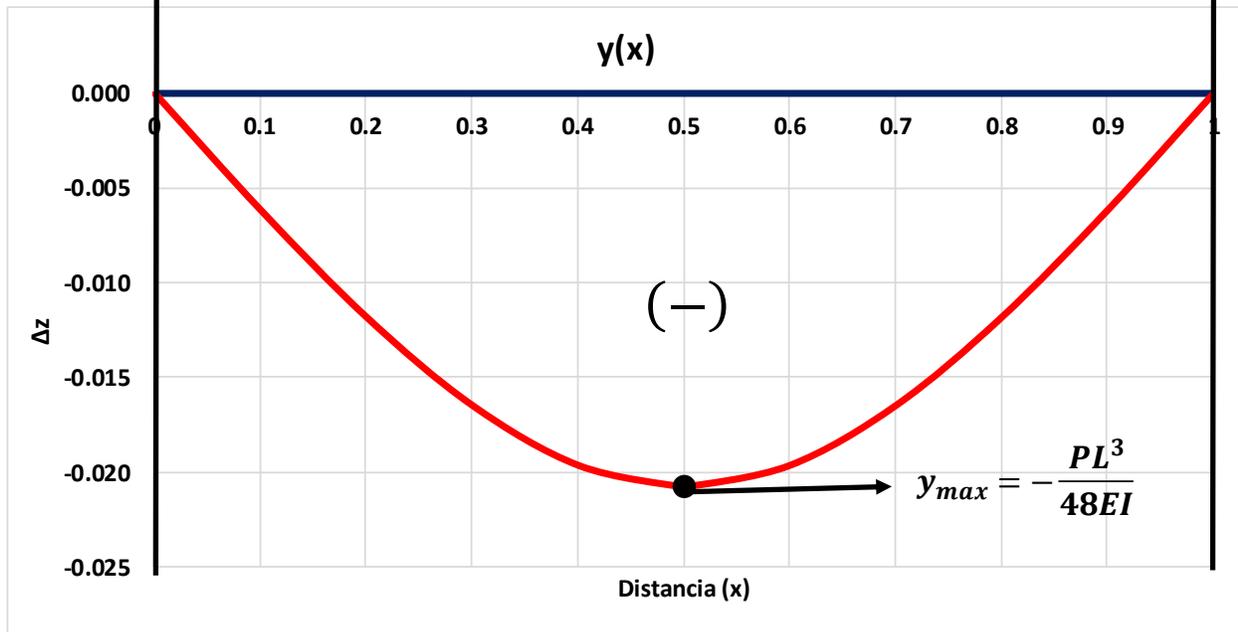
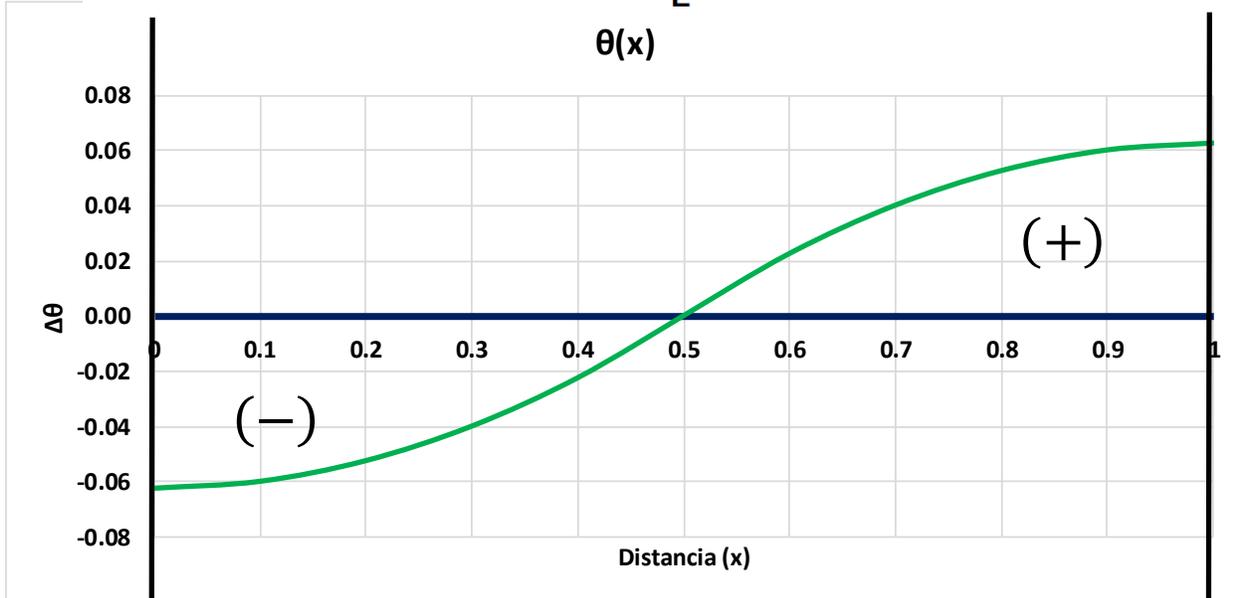
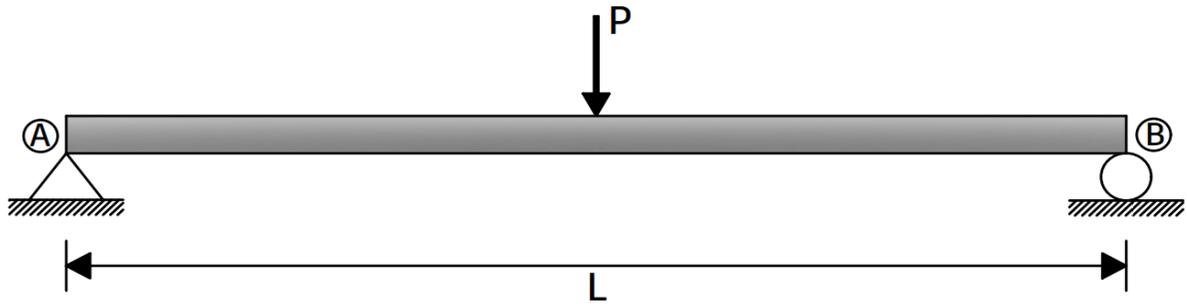
$y_2(x)$

$$y_{max} = -\frac{PL^3}{48EI}$$

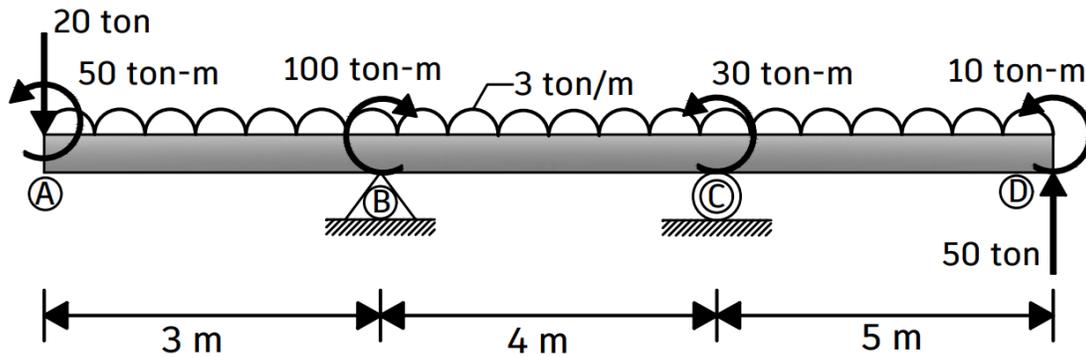
cuando:

$$x = \frac{L}{2}$$

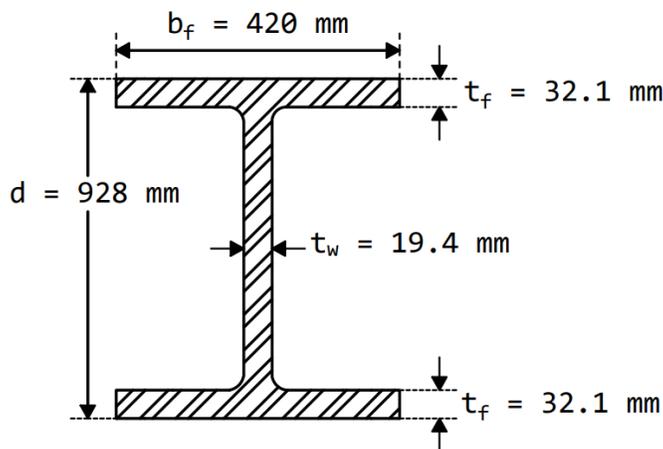
CONFIGURACIÓN DEFORMADA



EJERCICIO 3.4: Se tiene una viga de acero Perfil IR A-572 Grado 50 de (914 mm x 342.4 kg/m) y se requiere calcular utilizando el método de la doble integración la ecuación del desplazamiento vertical y la ecuación de rotación para conocer las configuraciones deformadas de una viga que es sometida a un sistema de cargas como se muestra a continuación.

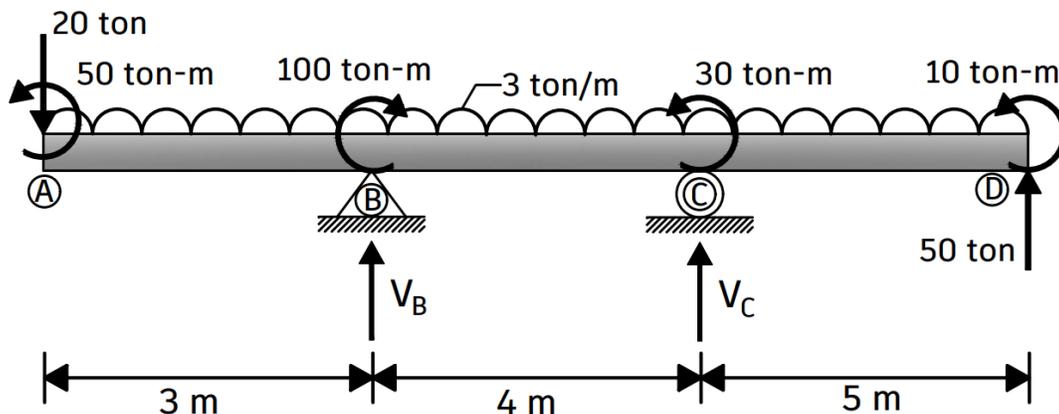


Sección Transversal



PERFIL IR 914 mm x 342.4 kg/m A-572 Grado 50 $f_y = 3515 \text{ kg/cm}^2$

PASO ①: Se calculan las reacciones en los apoyos con las ecuaciones del equilibrio.



$$\Sigma M_B = 0 \quad (\curvearrowright)$$

$$-V_C(4 \text{ m}) + 3 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (12 \text{ m})(3 \text{ m}) - 50 \text{ ton} (9 \text{ m}) - 10 \text{ ton} \cdot \text{m} - 30 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$+ 100 \text{ ton} \cdot \text{m} - 50 \text{ ton} \cdot \text{m} - 20 \text{ ton}(3 \text{ m}) = 0$$

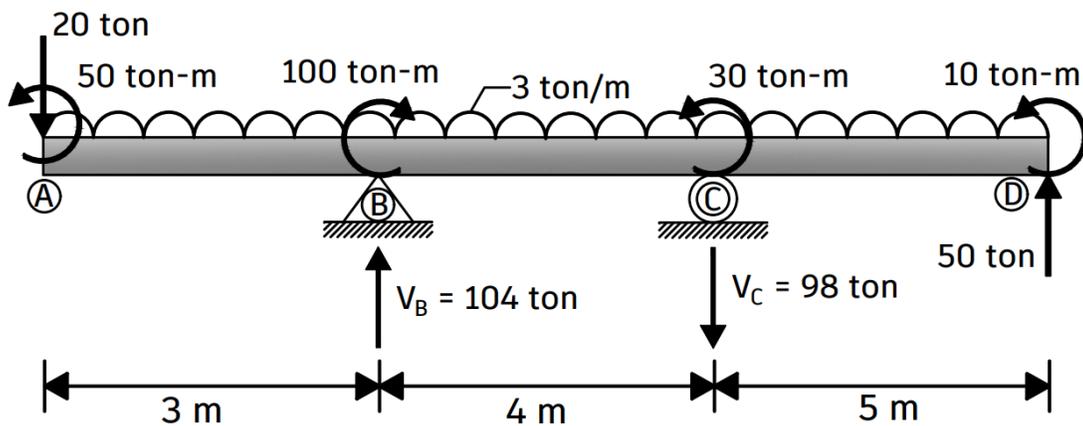
$$-V_C(4 \text{ m}) - 392 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$V_C = -\frac{392 \text{ ton} \cdot \text{m}}{4 \text{ m}} \quad \therefore \quad V_C = -\mathbf{98 \text{ ton}} \quad [\downarrow]$$

$$\Sigma F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

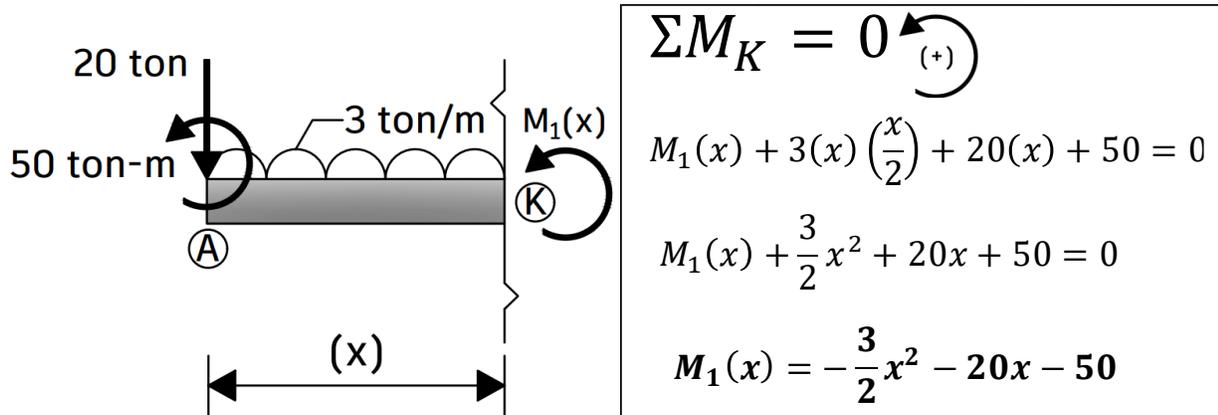
$$V_B + V_C + 50 \text{ ton} - 20 \text{ ton} - 3 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (12 \text{ m}) = 0$$

$$V_B - 98 \text{ ton} - 6 \text{ ton} = 0 \quad \therefore \quad V_B = \mathbf{104 \text{ ton}}$$

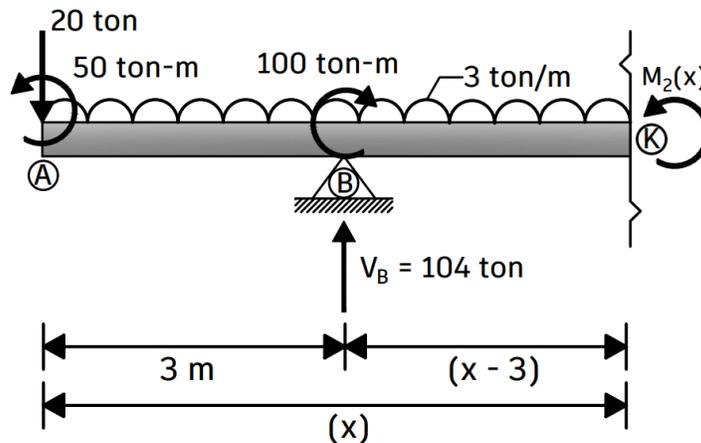


PASO ②: Cálculo de las ecuaciones de los momentos flexionantes [M(x)].

CORTE #1 [0 m ≤ x ≤ 3.0 m]



CORTE #2 [3.0 m ≤ x ≤ 7.0 m]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

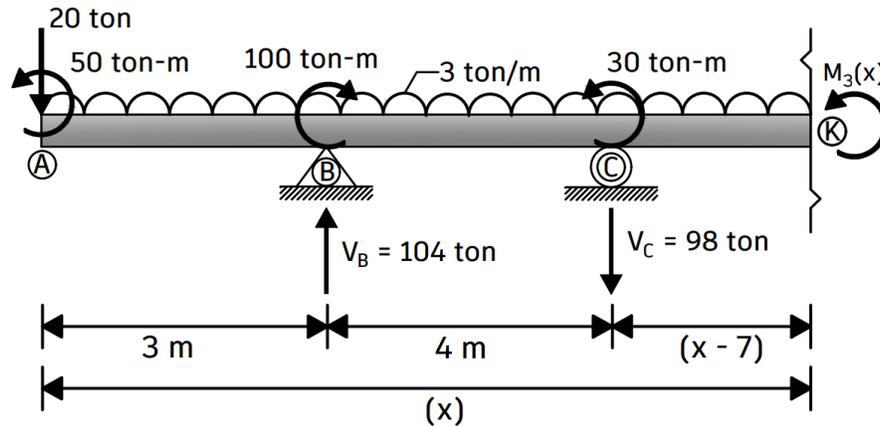
$$M_2(x) + 3(x) \left(\frac{x}{2}\right) + 20(x) + 50 - 100 - 104(x - 3) = 0$$

$$M_2(x) + \frac{3}{2}x^2 + 20x - 50 - 104x + 312 = 0$$

$$M_2(x) + \frac{3}{2}x^2 - 84x + 262 = 0$$

$$M_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 84x - 262$$

CORTE #3 [$7.0 \text{ m} \leq x \leq 12.0 \text{ m}$]



$$\Sigma M_k = 0 \quad (+)$$

$$M_3(x) + 3(x) \left(\frac{x}{2} \right) + 20(x) + 50 - 100 - 104(x - 3) + 30 + 98(x - 7) = 0$$

$$M_3(x) + \frac{3}{2}x^2 + 20x - 20 - 104x + 312 + 98x - 686 = 0$$

$$M_3(x) + \frac{3}{2}x^2 + 14x - 394 = 0$$

$$M_3(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 14x + 394$$

PASO ③: Se integran las ecuaciones de los momentos flexionantes [M(x)] para obtener las ecuaciones de rotación [$\theta(x)$] y después se integran las ecuaciones de rotación [$\theta(x)$] para obtener las ecuaciones de los desplazamientos verticales [y(x)].

$$\theta_1(x) = \int \frac{M_1(x)}{EI} dx$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \int -\frac{3}{2}x^2 - 20x - 50 dx$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right) - 20 \left(\frac{x^2}{2} \right) - 50(x) + C_1 \right]$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 10x^2 - 50x + C_1 \right)$$

$$y_1(x) = \int \theta_1(x) dx$$

$$y_1(x) = \int \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 10x^2 - 50x + C_1 \right) dx$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} \right) - 10 \left(\frac{x^3}{3} \right) - 50 \left(\frac{x^2}{2} \right) + C_1(x) + C_2 \right]$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 - \frac{10}{3}x^3 - 25x^2 + C_1x + C_2 \right)$$

$$\theta_2(x) = \int \frac{M_2(x)}{EI} dx$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \int -\frac{3}{2}x^2 + 84x - 262 dx$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right) + 84 \left(\frac{x^2}{2} \right) - 262(x) + C_3 \right]$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 42x^2 - 262x + C_3 \right)$$

$$y_2(x) = \int \theta_2(x) dx$$

$$y_2(x) = \int \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 42x^2 - 262x + C_3 \right) dx$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} \right) + 42 \left(\frac{x^3}{3} \right) - 262 \left(\frac{x^2}{2} \right) + C_3(x) + C_4 \right]$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 + 14x^3 - 131x^2 + C_3x + C_4 \right)$$

$$\theta_3(x) = \int \frac{M_3(x)}{EI} dx$$

$$\theta_3(x) = \frac{1}{EI} \int -\frac{3}{2}x^2 - 14x + 394 dx$$

$$\theta_3(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right) - 14 \left(\frac{x^2}{2} \right) + 394(x) + C_5 \right]$$

$$\theta_3(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 7x^2 + 394x + C_5 \right)$$

$$y_3(x) = \int \theta_3(x) dx$$

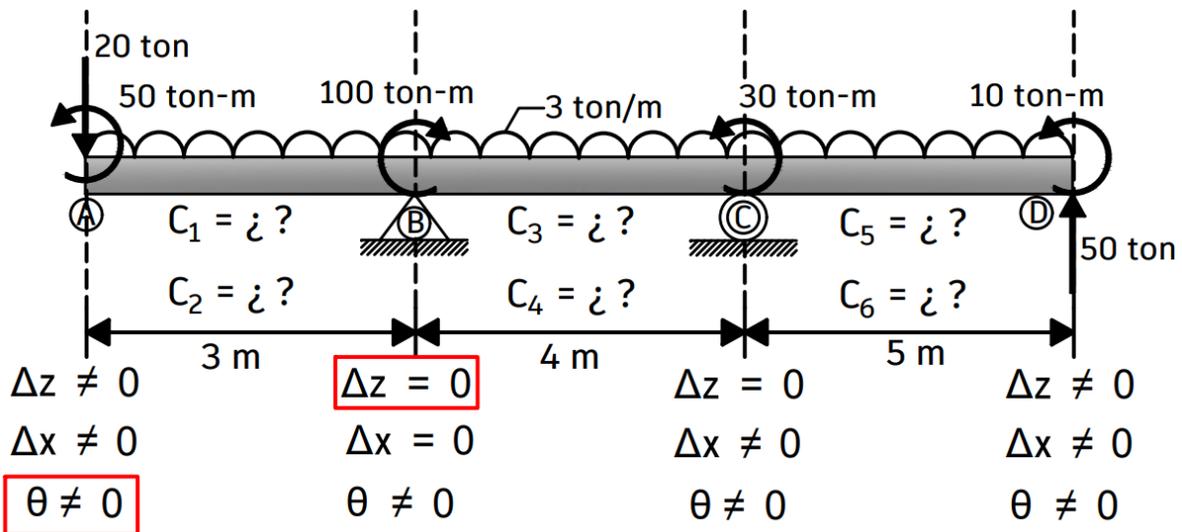
$$y_3(x) = \int \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 7x^2 + 394x + C_5 \right) dx$$

$$y_3(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} \right) - 7 \left(\frac{x^3}{3} \right) + 394 \left(\frac{x^2}{2} \right) + C_5(x) + C_6 \right]$$

$$y_3(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 197x^2 + C_5x + C_6 \right)$$

PASO ④: Utilizando las condiciones de frontera, se calcularán los valores de las constantes de integración.

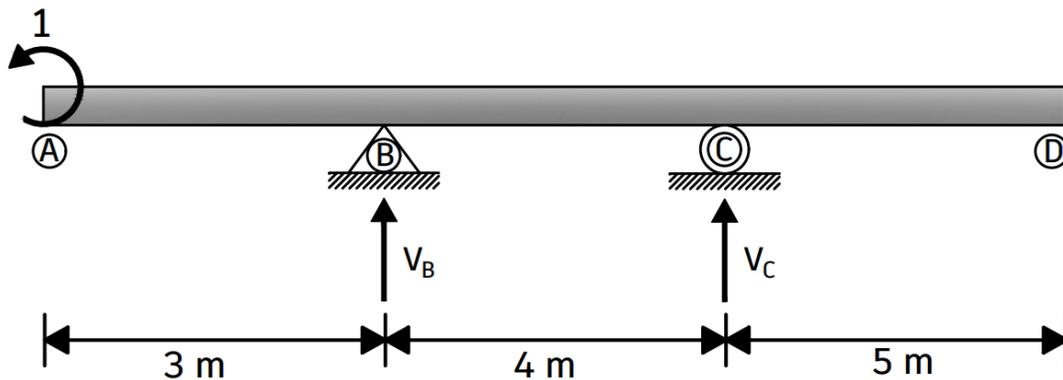
CONDICIONES DE FRONTERA



Para calcular las constantes C_1 y C_2 , se ocuparán las condiciones de frontera que están encerradas en color rojo. Se conoce el valor del desplazamiento vertical (Δ_z) pero no se conoce el valor de la rotación (θ) por lo que, se pasará a calcular este valor utilizando el principio del trabajo virtual como en el ejercicio anterior.

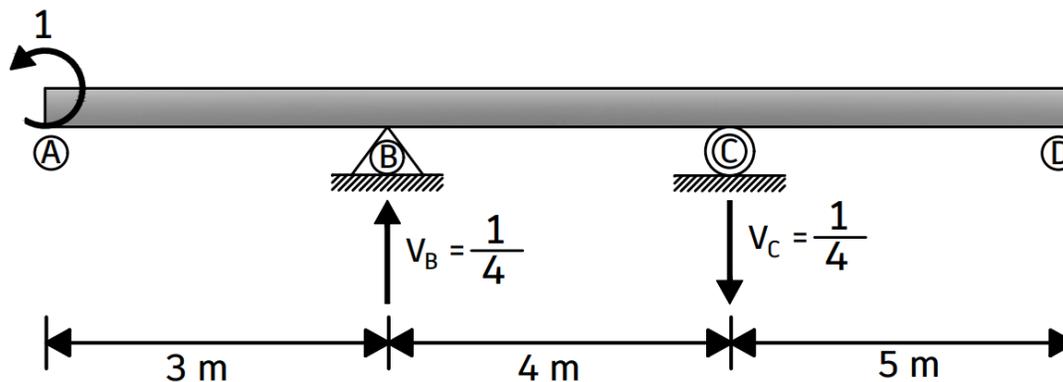
Una vez conocidas las constantes C_1 y C_2 , se podrá conocer la ecuación del desplazamiento vertical $[y_1(x)]$ y la ecuación de rotación $\theta_1(x)$, con estas ecuaciones y con la condición de continuidad se podrán calcular las constantes C_3, C_4, C_5 y C_6 y así conocer todas las ecuaciones del desplazamiento vertical y de rotación.

Se pasa a calcular el ángulo de rotación (θ) en el punto A utilizando el principio del trabajo virtual, para lo cual, se coloca un momento unitario antihorario en el punto A:



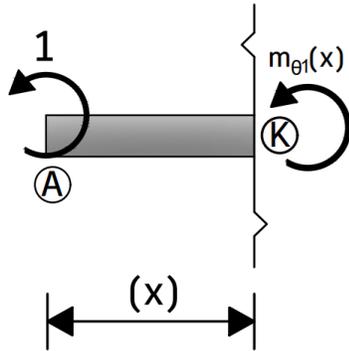
$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= 0 \quad (+) \\ -V_C(4) - 1 &= 0 \\ V_C(4) &= -1 \\ V_C &= -\frac{1}{4} \quad [\downarrow] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_C &= 0 \quad (+) \\ V_B(4) - 1 &= 0 \\ V_B(4) &= 1 \\ V_B &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Se calculan las ecuaciones de los momentos flexionantes causadas por el momento unitario:

CORTE #1 [$0 \text{ m} \leq x \leq 3.0 \text{ m}$]

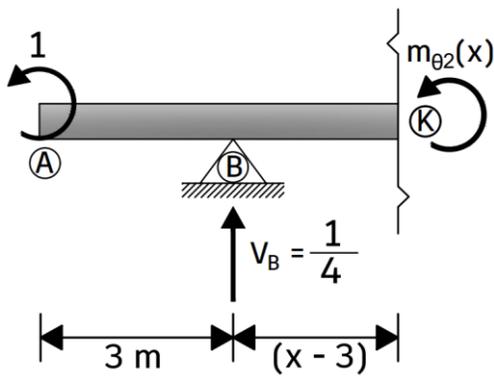


$$\Sigma M_K = 0 \quad (\curvearrowright)$$

$$M_{\theta_1}(x) + 1 = 0$$

$$M_{\theta_1}(x) = -1$$

CORTE #2 [$3.0 \text{ m} \leq x \leq 7.0 \text{ m}$]



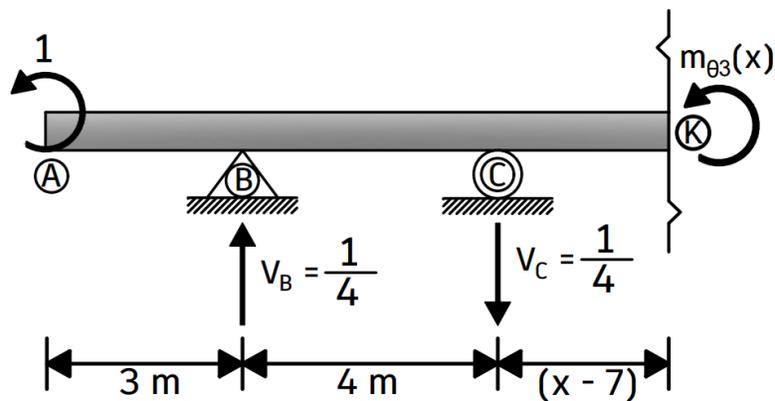
$$\Sigma M_K = 0 \quad (\curvearrowright)$$

$$M_{\theta_2}(x) + 1 - \frac{1}{4}(x - 3) = 0$$

$$M_{\theta_2}(x) + 1 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = 0$$

$$M_{\theta_2}(x) = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$$

CORTE #3 [$7.0 \text{ m} \leq x \leq 12.0 \text{ m}$]



$$\Sigma M_K = 0 \curvearrowright (+)$$

$$M_{\theta_3}(x) + 1 - \frac{1}{4}(x - 3) + \frac{1}{4}(x - 7) = 0$$

$$M_{\theta_3}(x) + 1 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{7}{4} = 0$$

$$M_{\theta_3}(x) = 0$$

Cálculo del ángulo de rotación en el punto A:

$$\Delta_{\theta} = \int_0^L \frac{M(x) \cdot m_{\theta}(x)}{EI} dx$$

<i>Ecuaciones de los Momentos flexionantes [M(x)] de la viga con cargas REALES</i>	<i>Ecuaciones de los Momentos flexionantes [m_θ(x)] de la viga con un momento UNITARIO</i>
0 m ≤ x ≤ 3.0 m	0 m ≤ x ≤ 3.0 m
$M_1(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 20x - 50$	$m_{\theta_1}(x) = -1$
3.0 m ≤ x ≤ 7.0 m	3.0 m ≤ x ≤ 7.0 m
$M_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 84x - 262$	$m_{\theta_2}(x) = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$
7.0 m ≤ x ≤ 12.0 m	7.0 m ≤ x ≤ 12.0 m
$M_3(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 14x + 394$	$m_{\theta_3}(x) = 0$

$$\Delta_{\theta} = \int_0^3 \frac{M_1(x) \cdot m_{\theta_1}(x)}{EI} dx + \int_3^7 \frac{M_2(x) \cdot m_{\theta_2}(x)}{EI} dx + \int_7^{12} \frac{M_3(x) \cdot m_{\theta_3}(x)}{EI} dx$$

$$\Delta_{\theta} = \frac{1}{EI} \int_0^3 \underbrace{M_1(x) \cdot m_{\theta_1}(x)}_{\Delta_1} dx + \frac{1}{EI} \int_3^7 \underbrace{M_2(x) \cdot m_{\theta_2}(x)}_{\Delta_2} dx + \frac{1}{EI} \int_7^{12} \underbrace{M_3(x) \cdot m_{\theta_3}(x)}_{\Delta_3} dx$$

Cálculo de Δ_1

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^3 M_1(x) \cdot m_{\theta_1}(x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^3 \left(-\frac{3}{2}x^2 - 20x - 50 \right) (-1) dx$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^3 \left(\frac{3}{2}x^2 + 20x + 50 \right) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right) + 20 \left(\frac{x^2}{2} \right) + 50(x) \right]$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2}x^3 + 10x^2 + 50x \right]$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{1}{2}(3)^3 + 10(3)^2 + 50(3) \right] - \left[\frac{1}{2}(0)^3 + 10(0)^2 + 50(0) \right] \right\}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{27}{2} + 90 + 150 \right) - (0) \right] = \frac{1}{EI} \left(\frac{507}{2} \right)$$

$$\Delta_1 = \frac{507}{2EI}$$

Cálculo de Δ_2

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \int_3^7 M_2(x) \cdot m_{\theta_2}(x) dx = \frac{1}{EI} \int_3^7 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 84x - 262 \right) \left(\frac{1}{4}x - \frac{7}{4} \right) dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \int_3^7 \left(-\frac{3}{8}x^3 + 21x^2 - \frac{131}{2}x + \frac{21}{8}x^2 - 147x + \frac{917}{2} \right) dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \int_3^7 \left(-\frac{3}{8}x^3 + \frac{189}{8}x^2 - \frac{425}{2}x + \frac{917}{2} \right) dx$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3}{8} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{189}{8} \left(\frac{x^3}{3} \right) - \frac{425}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{917}{2}(x) \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3}{32}x^4 + \frac{63}{8}x^3 - \frac{425}{4}x^2 + \frac{917}{2}x \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left\{ \left[-\frac{3}{32}(7)^4 + \frac{63}{8}(7)^3 - \frac{425}{4}(7)^2 + \frac{917}{2}(7) \right] - \left[-\frac{3}{32}(3)^4 + \frac{63}{8}(3)^3 - \frac{425}{4}(3)^2 + \frac{917}{2}(3) \right] \right\}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{7203}{32} + \frac{21609}{8} - \frac{20825}{4} + \frac{6419}{2} \right) - \left(-\frac{243}{32} + \frac{1701}{8} - \frac{3825}{4} + \frac{2751}{2} \right) \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{15337}{32} \right) - \left(\frac{19977}{32} \right) \right] = \frac{1}{EI} (-145)$$

$$\Delta_2 = -\frac{145}{EI}$$

Cálculo de Δ_3

$$\Delta_3 = \frac{1}{EI} \int_7^{12} M_3(x) \cdot m_{\theta_3}(x) dx = \frac{1}{EI} \int_7^{12} \left(-\frac{3}{2}x^2 - 14x + 394 \right) (0) dx$$

$$\Delta_3 = 0$$

Cálculo de Δ_θ

$$\Delta_\theta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

$$\Delta_\theta = \frac{507}{2EI} - \frac{145}{EI} + 0$$

$$\Delta_\theta = \frac{217}{2EI}$$

No se le cambiará el signo al ángulo de rotación para utilizarlo como condición de frontera en el método de la doble integración ya que como se dijo al principio de esta sección, si se propone un momento unitario antihorario [U] para calcular un ángulo de rotación utilizando el principio del trabajo virtual, al resultado no se le debe de cambiar el signo para utilizarlo como condición de frontera en el método de la doble integración.

Se propuso un momento unitario en sentido antihorario para el cálculo del ángulo de rotación, por lo que no se le cambia el signo a dicho valor.

$$\Delta_{\theta} = \frac{217}{2EI}$$

Una vez teniendo el ángulo de rotación, se pasa a calcular las constantes con las condiciones de frontera:

PRIMERA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando "x" es igual a cero ($x = 0$), el ángulo de rotación es igual a $\left(\theta = \frac{217}{2EI}\right)$.

$$\theta_1(x = 0) = \frac{217}{2EI}$$

$$\theta_1(x) = \frac{217}{2EI} \quad \text{cuando} \quad x = 0$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 10x^2 - 50x + C_1 \right)$$

$$\frac{217}{2EI} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}(0)^3 - 10(0)^2 - 50(0) + C_1 \right)$$

$C_1 = \frac{217}{2}$

SEGUNDA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando "x" es igual a tres metros ($x = 3$ m), el desplazamiento vertical es igual a cero ($\Delta_z = 0$).

$$y_1(x = 3) = 0$$

$$y_1(x) = 0 \quad \text{cuando} \quad x = 3$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 - \frac{10}{3}x^3 - 25x^2 + C_1x + C_2 \right)$$

$$EI y_1(x) = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{10}{3}x^3 - 25x^2 + \frac{217}{2}x + C_2$$

$$0 = -\frac{1}{8}(3)^4 - \frac{10}{3}(3)^3 - 25(3)^2 + \frac{217}{2}(3) + C_2$$

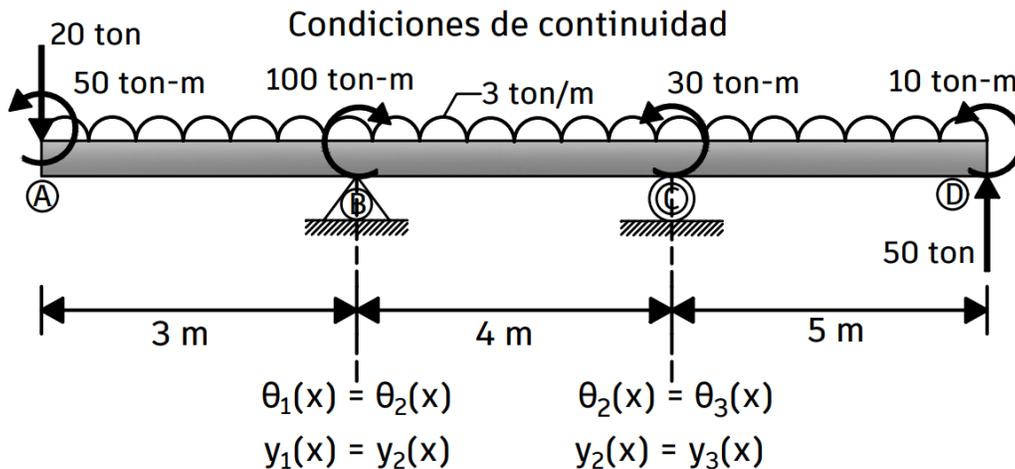
$$0 = -\frac{1}{8}(3)^4 - \frac{10}{3}(3)^3 - 25(3)^2 + \frac{217}{2}(3) + C_2$$

$$C_2 = -\frac{3}{8}$$

$$[0 \text{ m} \leq x \leq 3.0 \text{ m}]$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 10x^2 - 50x + \frac{217}{2} \right)$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 - \frac{10}{3}x^3 - 25x^2 + \frac{217}{2}x - \frac{3}{8} \right)$$



TERCERA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando $[x = 3 \text{ m}]$ el ángulo de rotación $[\theta_1(x)]$ es igual al ángulo de rotación $[\theta_2(x)]$.

$$\theta_1(x = 3) = \theta_2(x = 3)$$

$$\theta_1(x) = \theta_2(x) \quad \text{cuando} \quad x = 3$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 10x^2 - 50x + \frac{217}{2} \right)$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 42x^2 - 262x + C_3 \right)$$

$$\theta_1(x = 3) = \theta_2(x = 3)$$

$$\frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}(3)^3 - 10(3)^2 - 50(3) + \frac{217}{2} \right) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}(3)^3 + 42(3)^2 - 262(3) + C_3 \right)$$

$$-145 = \frac{EI}{EI} \left(-\frac{843}{2} + C_3 \right) \quad \Rightarrow \quad C_3 = -145 + \frac{843}{2}$$

$$C_3 = \frac{553}{2}$$

CUARTA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando $[x = 3 \text{ m}]$ el desplazamiento vertical $[y_1(x)]$ es igual al desplazamiento vertical $[y_2(x)]$.

$$y_1(x = 3) = y_2(x = 3)$$

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \text{cuando} \quad x = 3$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 - \frac{10}{3}x^3 - 25x^2 + \frac{217}{2}x - \frac{3}{8} \right)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 + 14x^3 - 131x^2 + C_3x + C_4 \right)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 + 14x^3 - 131x^2 + \frac{553}{2}x + C_4 \right)$$

$$y_1(x = 3) = y_2(x = 3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}(3)^4 - \frac{10}{3}(3)^3 - 25(3)^2 + \frac{217}{2}(3) - \frac{3}{8} \right) \\ &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}(3)^4 + 14(3)^3 - 131(3)^2 + \frac{553}{2}(3) + C_4 \right) \\ & 0 = \frac{EI}{EI} \left(\frac{147}{8} + C_4 \right) \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{147}{8} + C_4 \end{aligned}$$

$$C_4 = -\frac{147}{8}$$

$$[3.0 \text{ m} \leq x \leq 7.0 \text{ m}]$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 42x^2 - 262x + \frac{553}{2} \right)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 + 14x^3 - 131x^2 + \frac{553}{2}x - \frac{147}{8} \right)$$

QUINTA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando $[x = 7 \text{ m}]$ el ángulo de rotación $[\theta_2(x)]$ es igual al ángulo de rotación $[\theta_3(x)]$.

$$\theta_2(x = 7) = \theta_3(x = 7)$$

$$\theta_2(x) = \theta_3(x) \quad \text{cuando} \quad x = 7$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 42x^2 - 262x + \frac{553}{2} \right)$$

$$\theta_3(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 7x^2 + 394x + C_5 \right)$$

$$\theta_2(x = 7) = \theta_3(x = 7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}(7)^3 + 42(7)^2 - 262(7) + \frac{553}{2} \right) \\ &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}(7)^3 - 7(7)^2 + 394(7) + C_5 \right) \end{aligned}$$

$$329 = \frac{EI}{EI} \left(\frac{4487}{2} + C_5 \right) \quad \Rightarrow \quad C_5 = 329 - \frac{4487}{2}$$

$$\boxed{C_5 = -\frac{3829}{2}}$$

SEXTA CONDICIÓN DE FRONTERA

Cuando $[x = 7 \text{ m}]$ el desplazamiento vertical $[y_2(x)]$ es igual al desplazamiento vertical $[y_3(x)]$.

$$y_2(x = 7) = y_3(x = 7)$$

$$y_2(x) = y_3(x) \quad \text{cuando} \quad x = 7$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 + 14x^3 - 131x^2 + \frac{553}{2}x - \frac{147}{8} \right)$$

$$y_3(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 197x^2 + C_5x + C_6 \right)$$

$$y_3(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 197x^2 - \frac{3829}{2}x + C_6 \right)$$

$$y_2(x = 7) = y_3(x = 7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}(7)^4 + 14(7)^3 - 131(7)^2 + \frac{553}{2}(7) - \frac{147}{8} \right) \\ &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}(7)^4 - \frac{7}{3}(7)^3 + 197(7)^2 - \frac{3829}{2}(7) + C_6 \right) \\ 0 &= \frac{EI}{EI} \left(-\frac{116375}{24} + C_6 \right) \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{116375}{24} + C_6 \end{aligned}$$

$C_6 = \frac{116375}{24}$

[7.0 m ≤ x ≤ 12.0 m]
$\theta_3(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 7x^2 + 394x - \frac{3829}{2} \right)$
$y_3(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 197x^2 - \frac{3829}{2}x + \frac{116375}{24} \right)$

PASO ⑤): Cálculo de los desplazamientos verticales máximos (y_{max}) y la distancia (x) a la que se encuentran estos desplazamientos.

Desplazamiento máximo y_{1max} de $0 m \leq x \leq 3.0 m$

Se iguala a cero la ecuación de rotación [$\theta_1(x)$], después se encuentran los valores de "x" y se escoge un valor de "x" que se encuentre en un rango de $0 m \leq x \leq 3.0 m$ para que después se sustituya este valor de "x" en la ecuación del desplazamiento vertical [$y_1(x)$] y de esta manera se pueda conocer el valor del desplazamiento vertical máximo (y_{1max}) que se encuentra en el rango de $0 m \leq x \leq 3.0 m$.

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 10x^2 - 50x + \frac{217}{2} \right) \\ EI \theta_1(x) &= -\frac{1}{2}x^3 - 10x^2 - 50x + \frac{217}{2} \\ 0 &= -\frac{1}{2}x^3 - 10x^2 - 50x + \frac{217}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = 1.609911247$$

$$x_2 = -10.80495562 + 4.247702101i$$

$$x_3 = -10.80495562 - 4.247702101i$$

Se tomará el valor de (x_1) para sustituirlo en la ecuación del desplazamiento vertical [$y_1(x)$], ya que este valor de "x" es el único que pertenece a los numero reales y se encuentra en un rango de $0 m \leq x \leq 3.0 m$.

$$x_1 = 1.609911247$$

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 - \frac{10}{3}x^3 - 25x^2 + \frac{217}{2}x - \frac{3}{8} \right)$$

$$y_{1max} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}(1.609911247)^4 - \frac{10}{3}(1.609911247)^3 - 25(1.609911247)^2 + \frac{217}{2}(1.609911247) - \frac{3}{8} \right)$$

$$y_{1max} = \frac{1}{EI} \left(-0.839687621 - 13.90863623 - 64.79535558 + 174.6753703 - \frac{3}{8} \right)$$

$y_{1max} = \frac{94.75669087}{EI}$

Desplazamiento máximo y_{2max} de $3.0 m \leq x \leq 7.0 m$

Se iguala a cero la ecuación de rotación [$\theta_2(x)$], después se encuentran los valores de "x" y se escoge un valor de "x" que se encuentre en un rango de $3.0 m \leq x \leq 7.0 m$, para que después se sustituya este valor de "x" en la ecuación del desplazamiento vertical [$y_2(x)$] y así se pueda conocer el valor del desplazamiento vertical máximo (y_{2max}) que se encuentra en el rango de $3.0 m \leq x \leq 7.0 m$.

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 42x^2 - 262x + \frac{553}{2} \right)$$

$$EI \theta_2(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 42x^2 - 262x + \frac{553}{2}$$

$$0 = -\frac{1}{2}x^3 + 42x^2 - 262x + \frac{553}{2}$$

$$x_1 = 77.31504712$$

$$x_2 = 5.347369298$$

$$x_3 = 1.337583578$$

Se tomará el valor de (x_2) para sustituirla en la ecuación del desplazamiento vertical $[y_2(x)]$, ya que este valor se encuentra en un rango de $3.0\text{ m} \leq x \leq 7.0\text{ m}$.

$$x_2 = 5.347369298$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 + 14x^3 - 131x^2 + \frac{553}{2}x - \frac{147}{8} \right)$$

$$y_{2max} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}(5.347369298)^4 + 14(5.347369298)^3 - 131(5.347369298)^2 + \frac{553}{2}(5.347369298) - \frac{147}{8} \right)$$

$$y_{2max} = \frac{1}{EI} \left(-102.2046666 + 2140.66432 - 3745.860952 + 1478.547611 - \frac{147}{8} \right)$$

$$y_{2max} = -\frac{247.2286876}{EI}$$

Desplazamiento máximo y_{3max} de $7.0\text{ m} \leq x \leq 12.0\text{ m}$

Se iguala a cero la ecuación de rotación $[\theta_3(x)]$, después se encuentran los valores de "x" y se escogerá un valor de "x" que se encuentre en un rango de $7.0\text{ m} \leq x \leq 12.0\text{ m}$, para que después se sustituya este valor de "x" en la ecuación del desplazamiento vertical $[y_3(x)]$ y así se pueda conocer el valor del desplazamiento vertical máximo (y_{3max}) que se encuentra en el rango de $7.0\text{ m} \leq x \leq 12.0\text{ m}$.

$$\theta_3(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 7x^2 + 394x - \frac{3829}{2} \right)$$

$$\theta_3(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 7x^2 + 394x - \frac{3829}{2} \right)$$

$$EI \theta_3(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 7x^2 + 394x - \frac{3829}{2}$$

$$0 = -\frac{1}{2}x^3 - 7x^2 + 394x - \frac{3829}{2}$$

$$x_1 = -37.63870722$$

$$x_2 = 17.98106924$$

$$x_3 = 5.657637983$$

Ningún valor de "x" se encuentra en un rango de ($7.0 \text{ m} \leq x \leq 12.0 \text{ m}$), esto quiere decir que dentro de este rango el ángulo de rotación $[\theta_3(x)]$ no se hace cero. Si se presta atención en la viga que se está resolviendo, se podrá observar que de 7 m a 12 m se tiene un voladizo por lo que, se puede decir que en el rango de ($7.0 \text{ m} \leq x \leq 12.0 \text{ m}$) el valor del desplazamiento vertical máximo (y_{3max}) se encuentra al final del voladizo, es decir, cuando "x" es igual a 12 m.

$$x = 12$$

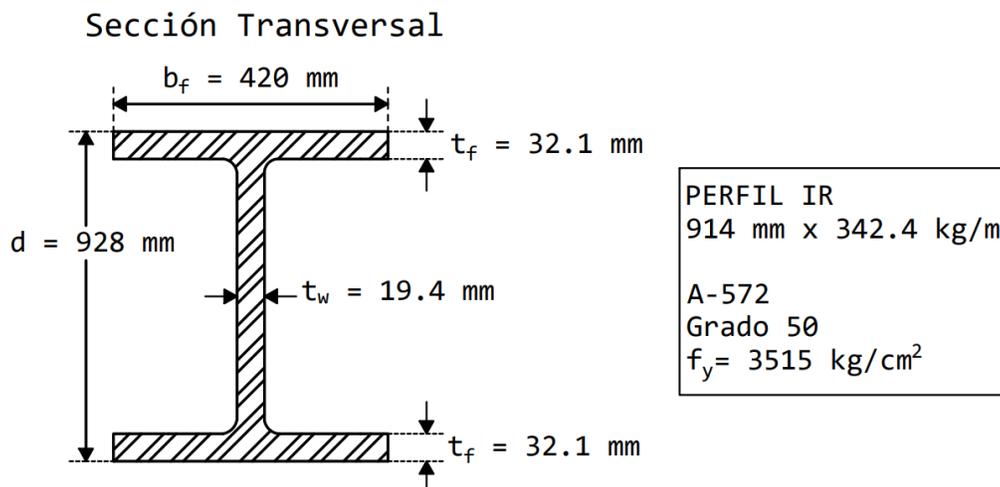
$$y_3(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 197x^2 - \frac{3829}{2}x + \frac{116375}{24} \right)$$

$$y_{3max} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}(12)^4 - \frac{7}{3}(12)^3 + 197(12)^2 - \frac{3829}{2}(12) + \frac{116375}{24} \right)$$

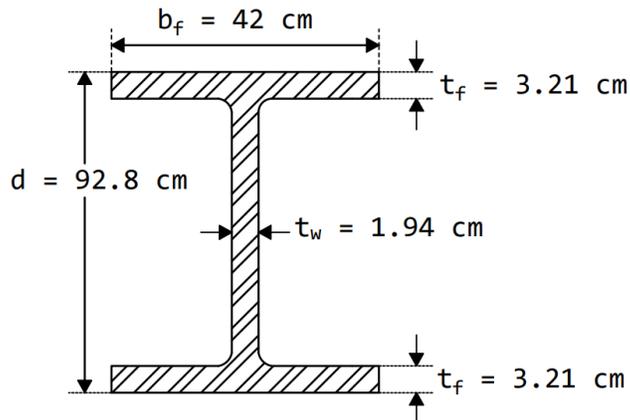
$$y_{3max} = \frac{1}{EI} \left(-2592 - 4032 + 28368 - 22974 + \frac{116375}{24} \right)$$

$$y_{3max} = \frac{86855}{24EI}$$

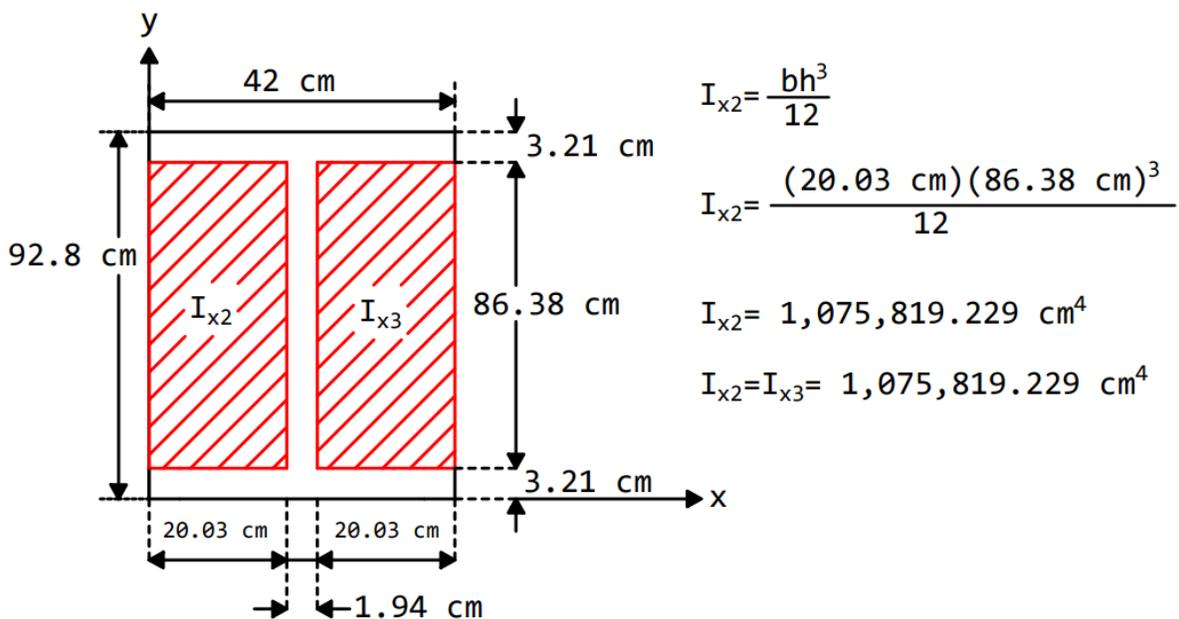
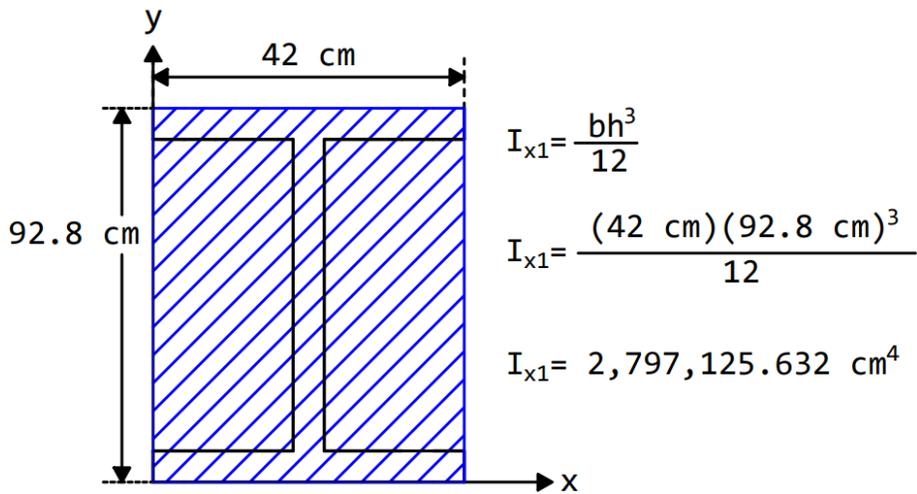
PASO ⑥: Cálculo del momento de inercia de la sección transversal de la viga de acero.

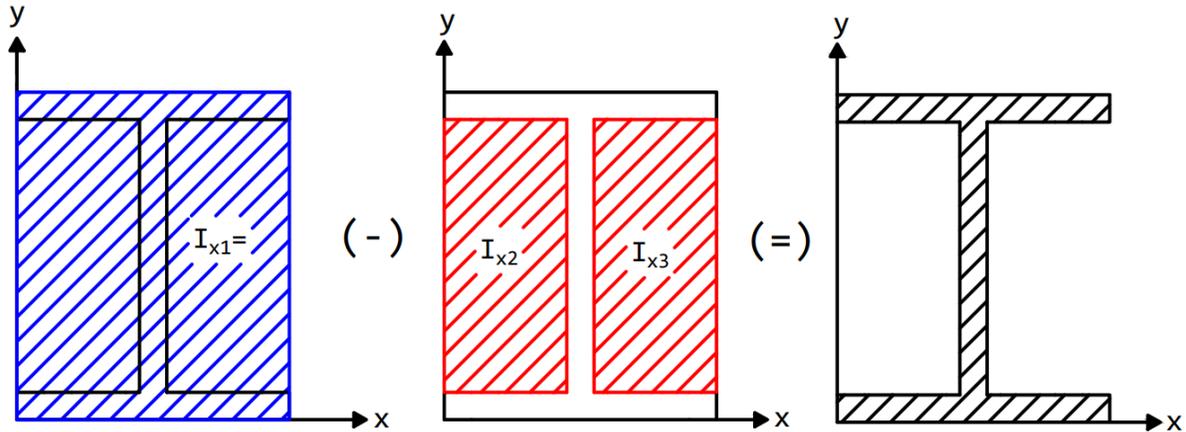


Se convierten de mm a cm las unidades de las dimensiones de la sección trasversal:



Se calcula el momento de Inercia de la sección trasversal:





$$I_{x_1} = 2,797,125.632 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_2} = 1,075,819.229 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_3} = 1,075,819.229 \text{ cm}^4$$

$$I = I_{x_1} - I_{x_2} - I_{x_3}$$

$$I = 2,797,125.632 \text{ cm}^4 - 1,075,819.229 \text{ cm}^4 - 1,075,819.229 \text{ cm}^4$$

$$I = 645,487.174 \text{ cm}^4$$

Se convierte el momento de inercia de mm^4 a m^4 :

$$I = 645,487.174 \text{ cm}^4 \left(\frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} \right)^4$$

$$I = \mathbf{0.00645487174 \text{ m}^4}$$

PASO ⑦: Cálculo del módulo de elasticidad (E_s) de la viga de acero.

Las Normas Técnicas Complementarias de las Ciudad de México nos dice que el módulo de elasticidad del acero es igual a:

$$E_s = 2,039,000 \text{ kg/cm}^2$$

Se convierte el módulo de elasticidad de kg/cm^2 a ton/m^2 :

$$E_s = 2,039,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \left(\frac{1 \text{ ton}}{1000 \text{ kg}} \right) \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right)^2$$

$$E_s = \mathbf{20,390,000 \text{ ton/m}^2}$$

PASO ⑧: Con ayuda del programa Excel y con las ecuaciones de rotación $[\theta(x)]$ y las ecuaciones del desplazamiento vertical $[y(x)]$, sustituyendo el valor del módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I) en las ecuaciones, se pasa a tabular las ecuaciones para conocer la configuración deformada de la viga de acero.

$E =$	20390000.0	(ton/m^2)
-------	------------	-------------

$I =$	0.00645487174	(m^4)
-------	---------------	---------

$[0 m \leq x \leq 3.0 m]$
$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 10x^2 - 50x + \frac{217}{2} \right)$
$y_1(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 - \frac{10}{3}x^3 - 25x^2 + \frac{217}{2}x - \frac{3}{8} \right)$
$[3.0 m \leq x \leq 7.0 m]$
$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 42x^2 - 262x + \frac{553}{2} \right)$
$y_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 + 14x^3 - 131x^2 + \frac{553}{2}x - \frac{147}{8} \right)$
$[7.0 m \leq x \leq 12.0 m]$
$\theta_3(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 7x^2 + 394x - \frac{3829}{2} \right)$
$y_3(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 197x^2 - \frac{3829}{2}x + \frac{116375}{24} \right)$

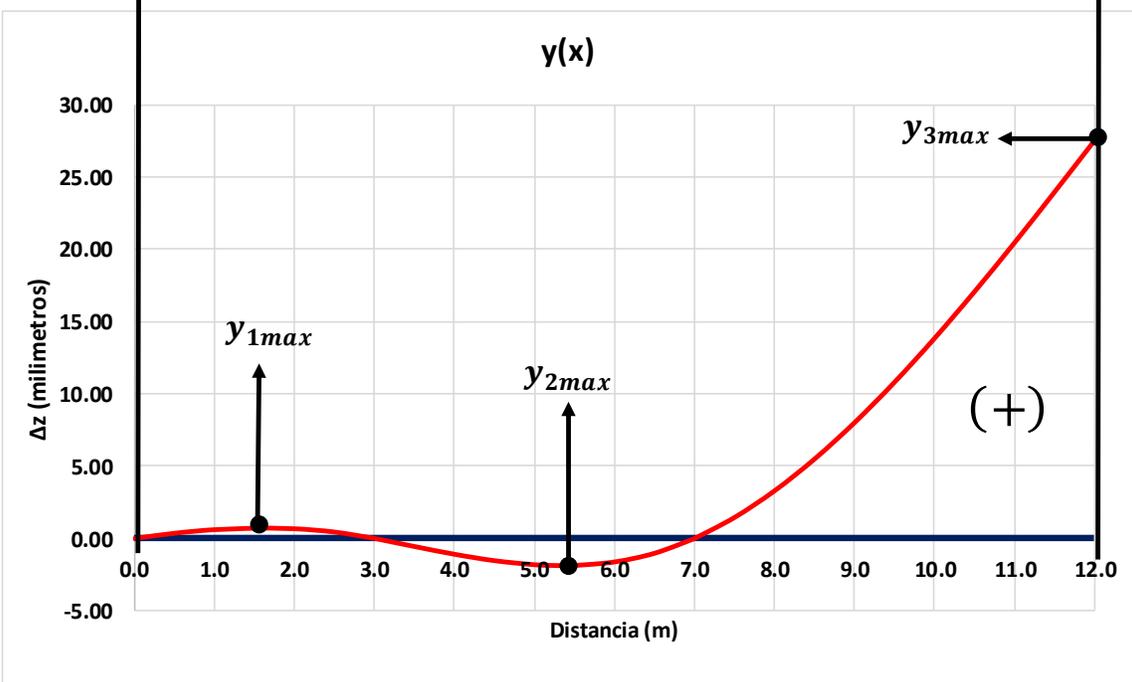
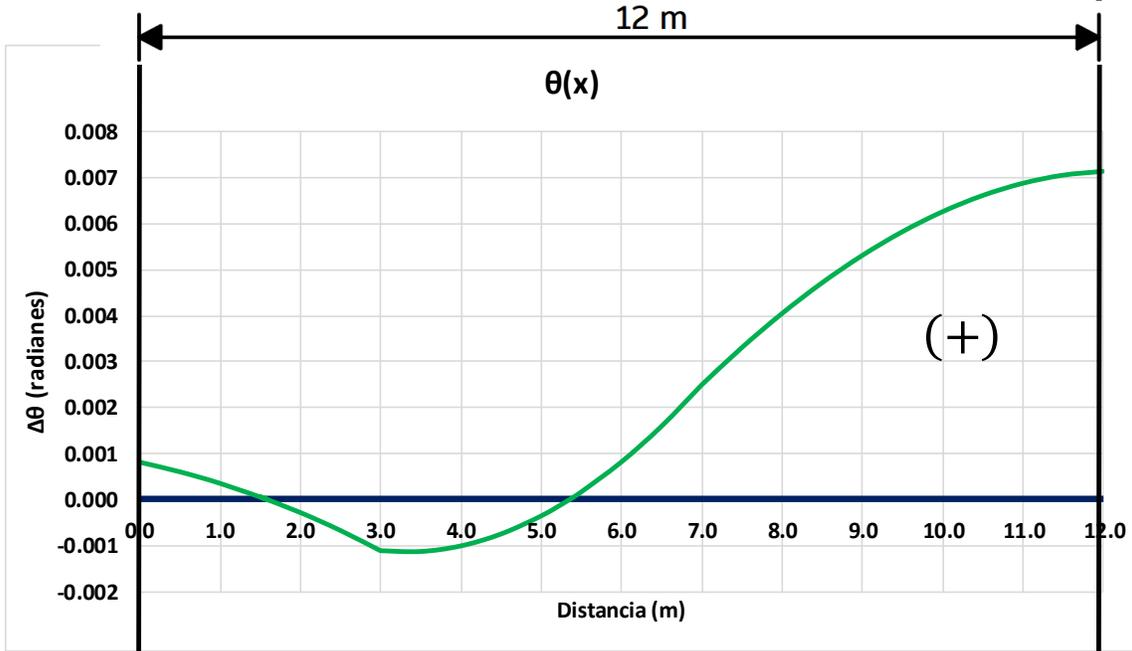
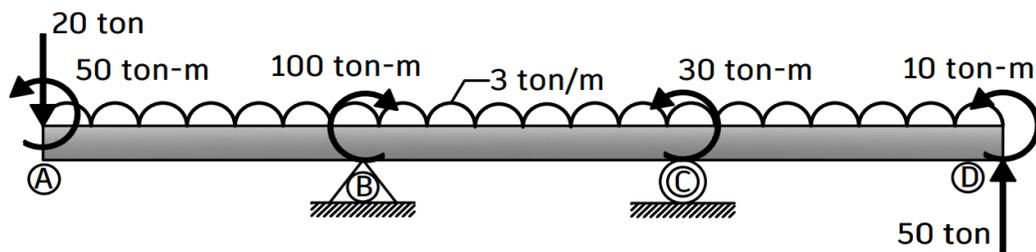
	(x)	$\theta(x)$ [radianes]	$y(x)$ [m]	$y(x)$ [mm]
$\theta_1(x)$ $y_1(x)$	0.00	0.0008244	-0.0000028	-0.0028492
	0.50	0.0006150	0.0003586	0.3586261
	1.00	0.0003647	0.0006053	0.6053016
	1.60991	0.0000000	0.0007200	0.7199545
	1.50	0.0000708	0.0007160	0.7160453
	2.00	-0.0002697	0.0006683	0.6683011
	2.50	-0.0006596	0.0004381	0.4380878
	3.00	-0.0011017	0.0000000	0.0000000
$\theta_2(x)$ $y_2(x)$	3.00	-0.0011017	0.0000000	0.0000000
	3.50	-0.0011202	-0.0005614	-0.5613563
	4.00	-0.0009991	-0.0010970	-1.0969508
	4.50	-0.0007413	-0.0015377	-1.5376900
	5.00	-0.0003495	-0.0018159	-1.8159047
	5.34737	0.0000000	-0.0018784	-1.8784257
	5.50	0.0001733	-0.0018654	-1.8653506
	6.00	0.0008244	-0.0016212	-1.6212078
$\theta_3(x)$ $y_3(x)$	6.50	0.0016008	-0.0010201	-1.0200812
	7.00	0.0024997	0.0000000	0.0000000
	7.00	0.0024997	0.0000000	0.0000000
	7.50	0.0033113	0.0014556	1.4555770
	8.00	0.0040535	0.0032997	3.2997167
	8.50	0.0047235	0.0054970	5.4970413
	9.00	0.0053185	0.0080107	8.0107484
	9.50	0.0058357	0.0108026	10.8026109
10.00	0.0062721	0.0138330	13.8329771	
10.50	0.0066249	0.0170608	17.0607707	
11.00	0.0068913	0.0204435	20.4434908	
11.50	0.0070684	0.0239372	23.9372119	
	12.0000	0.0071534	0.0274966	27.4965838

y_{1max}

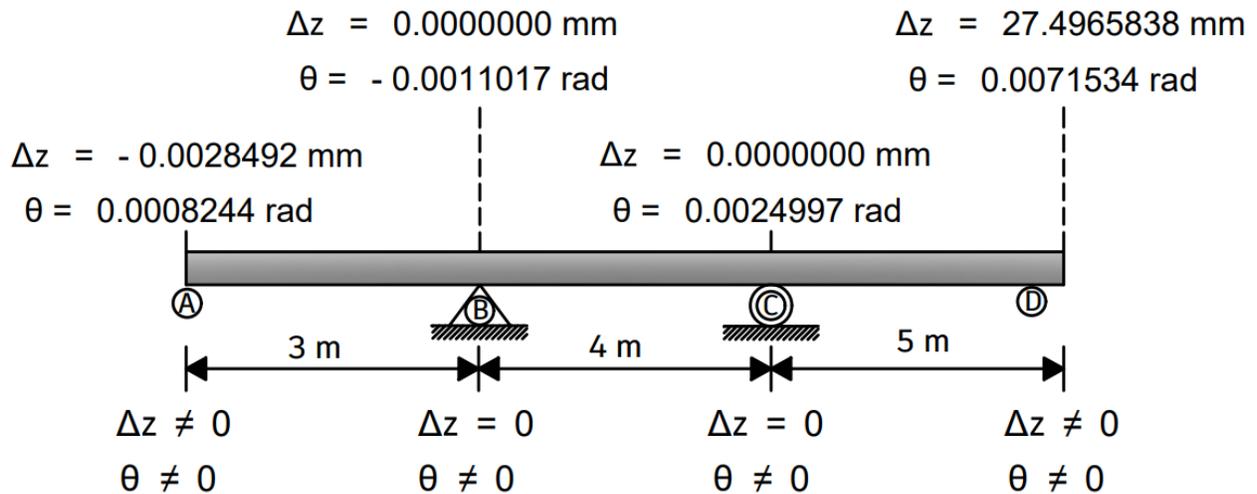
y_{2max}

y_{3max}

CONFIGURACIÓN DEFORMADA



Para comprobar que el ejercicio fue resuelto correctamente, se debe de observar en la tabla si las condiciones de frontera en los apoyos de la viga se cumplen. Si volvemos a la tabla podremos observar que efectivamente se cumplen las condiciones de frontera y con esto podemos concluir que el ejercicio fue resuelto correctamente.



Con este último ejercicio se culmina el método de la doble integración para calcular desplazamientos verticales y ángulos de rotación, como se pudo observar en todos los ejercicios, el método de la doble integración no es complejo solo se debe de tener conocimiento de cómo calcular la ecuación de un momento flexionante, saber cálculo integral y plantear correctamente las condiciones de frontera.

Este método es muy eficiente ya que se puede conocer un desplazamiento en cualquier punto de la longitud de una viga, también se puede calcular el desplazamiento vertical máximo de una manera sencilla y además con las ecuaciones que se calculan utilizando este método, se conoce con exactitud y de una manera grafica como se va deformando todo el elemento estructural tipo viga que es sometido a un sistema de cargas y estos ayudará al lector a entender el comportamiento físico y mecánico de una viga.

En todos los métodos anteriores solo se calcularon desplazamientos verticales en vigas isostáticas, por lo que en el siguiente tema se pasará a explicar un método con el cual se podrán resolver vigas hiperestáticas.

IV. MÉTODO DE LAS RIGIDECES

En todas las secciones pasadas se calcularon desplazamientos en estructuras isostáticas tipo viga. Se sabe que una estructura es isostática, cuando el número de reacciones (NR) es igual al número de ecuaciones del equilibrio (NE) más el número de articulaciones (NA), como se muestra en la figura 4.1.

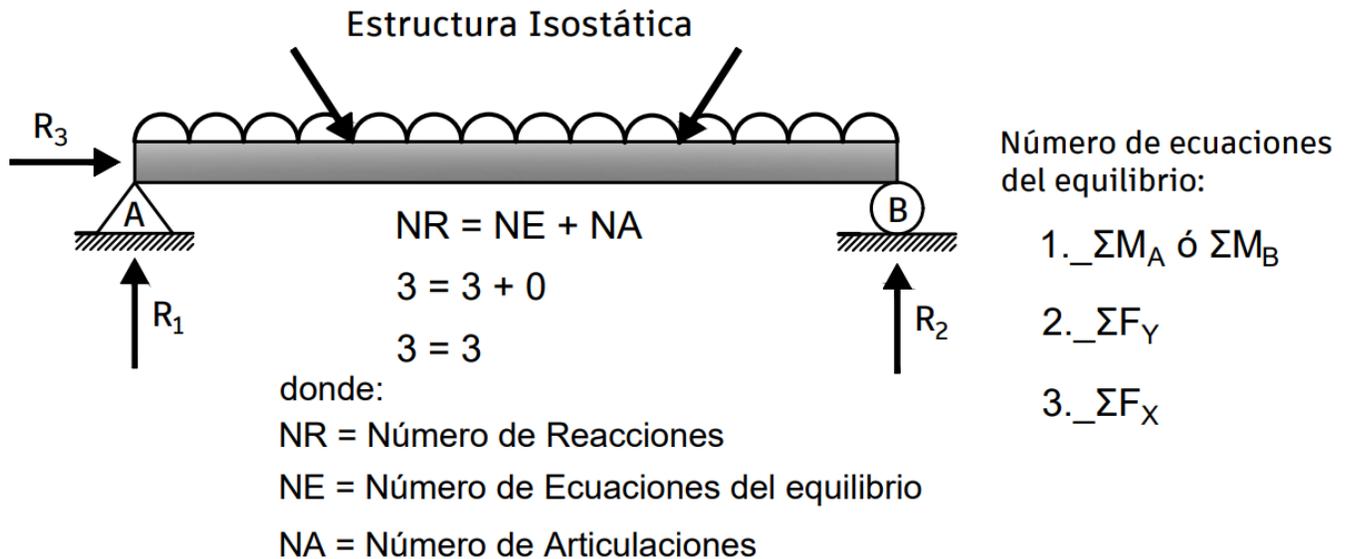


Figura 4.1. Estructura isostática tipo viga.

Con el método de las rigideces se podrán resolver estructuras hiperestáticas y se sabe que una estructura es hiperestática, cuando el número de reacciones (NR) es mayor al número de ecuaciones del equilibrio (NE) más el número de articulaciones (NA), como se muestra en la figura 4.2.

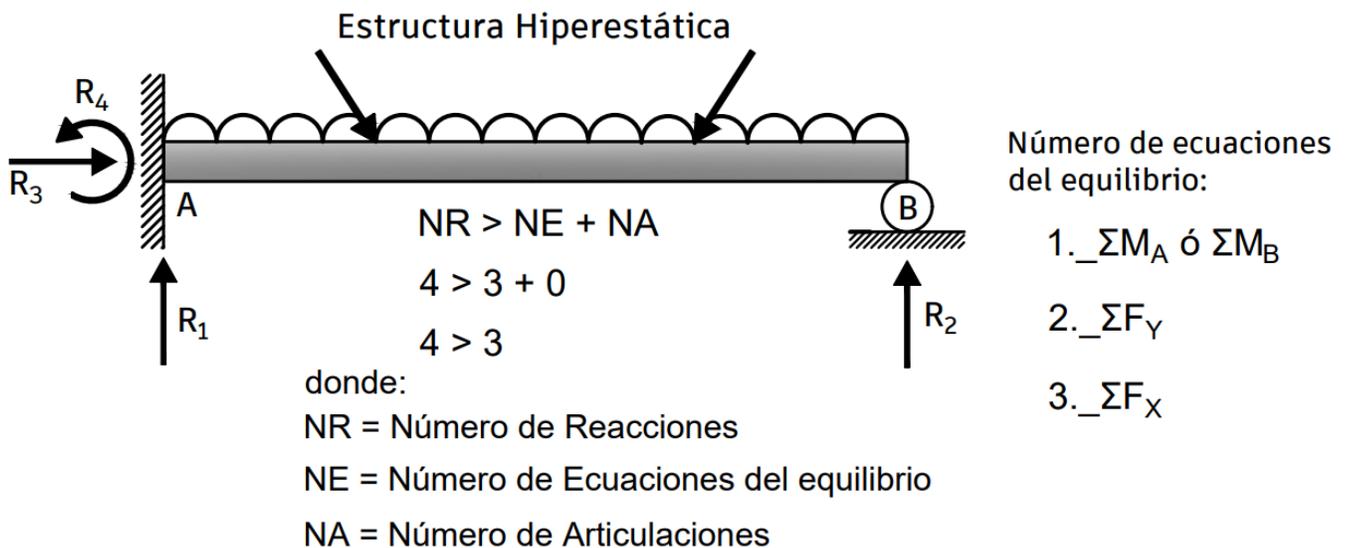


Figura 4.2. Estructura hiperestática tipo viga.

En las estructuras isostáticas, solo se empleaban las ecuaciones del equilibrio para el cálculo de las reacciones en los apoyos, pero en estructuras hiperestáticas se deben de calcular estas reacciones implementando otro método. Existen dos métodos que se utilizan comúnmente en la práctica profesional para la solución de estructuras hiperestáticas., el primer método se le conoce como el "método de las flexibilidades" o como el "método de las fuerzas" y al segundo método se le conoce con el nombre de "método de las rigideces" o "método de los desplazamientos".

Este último método es el más utilizado en la práctica y también es el método más empleado por programas computacionales que se utilizan en la rama de la ingeniería estructural, y esto se debe a la sencillez y facilidad del método.

El método de las rigideces es un método numérico matricial que calcula desplazamientos o deformaciones en los apoyos o en cualquier punto de una estructura hiperestática restringiendo con un empotramiento los desplazamientos de los grados de libertad de cada apoyo o punto donde se desea conocer el valor de una deformación. En los apoyos restringidos con un empotramiento se hará una imposición de rotaciones o desplazamientos unitarios las cuales generarán momentos y fuerzas con las cuales se construirá una matriz de rigidez.

En este método se tendrá una matriz de rigidez y también un vector de desplazamientos que se construirá con los desplazamientos de los grados de libertad que se desconoce su valor y que se restringen con un empotramiento, a los cuales se les propone un valor unitario. Por último, se tendrá un vector de fuerzas el cual se construirá con los momentos y fuerzas que se encuentran en los empotramientos, estos momentos y fuerzas son valores que se generarán por las cargas externas a las cuales es sometido el elemento estructural.

La matriz de rigidez multiplicada por un vector de desplazamientos más un vector de fuerzas igual a cero, será la ecuación que nos ayudará a conocer el valor real de los desplazamientos de los grados de libertad restringidos con un empotramiento, para que después con ayuda de los desplazamientos calculados, se puedan conocer los de las reacciones en cada apoyo.

La ecuación mencionada se puede representar matemáticamente de la siguiente manera:

$$[K]\{u\} + \{F\} = 0 \quad (4.1)$$

Donde:

$[K]$ = Matriz de rigideces

$\{u\}$ = Vector de desplazamientos

$\{F\}$ = Vector de fuerzas

Se realizarán ejercicios donde se explicará por medio de una serie de pasos detallados, el procedimiento matemático que conlleva la implementación del método de las rigideces, esto con el fin de que por medio de los ejercicios el lector pueda entender mejor lo ya mencionado, pero antes de realizar los ejercicios se pasará a explicar los conceptos básicos que se requieren para entender mejor el método de las rigideces.

4.1 GRADOS DE LIBERTAD (GDL)

Se puede definir a los grados de libertad como el número mínimo necesario de coordenadas independientes que nos van a permitir conocer la configuración desplazada de un sistema estructural.

En los apoyos de una viga, los grados de libertad son los desplazamientos permitidos, es decir, son los desplazamientos que no son nulos. Los grados de libertad como lo dice la definición, permitirán conocer cómo se desplaza un elemento estructural que es sometido a diferentes sistemas de cargas.

Véase en la figura 4.3, que se tiene un viga en un plano bidimensional (x,z) , en la cual la viga presenta diferentes apoyos y un punto en el espacio, es decir, sin condiciones de apoyo. Como se puede observar en el apoyo empotrado, el desplazamiento vertical (Δ_z) , horizontal (Δ_x) y el ángulo de rotación (θ) son nulos, por lo tanto, un apoyo empotrado no presenta grados de libertad (0 GDL).

En un apoyo fijo, el desplazamiento vertical (Δ_z) y horizontal (Δ_x) son nulos, pero la rotación (θ) es diferente de cero, es decir, el ángulo de rotación será el único desplazamiento permitido en el apoyo fijo que tendrá un valor, por lo tanto, el apoyo fijo tiene un grado de libertad (1 GDL).

En un apoyo móvil, el desplazamiento vertical (Δ_z) es nulo, pero el desplazamiento horizontal (Δ_x) y la rotación (θ) son diferentes de cero, por lo tanto, el apoyo móvil tiene dos grados de libertad (2 GDL). El punto en el espacio que no presenta ninguna condición de apoyo tiene (3 GDL), ya que se puede desplazar verticalmente (Δ_z) , horizontalmente (Δ_x) y tendrá una rotación (θ) , y esto se debe a que no tiene ningún apoyo para restringir algún desplazamiento.

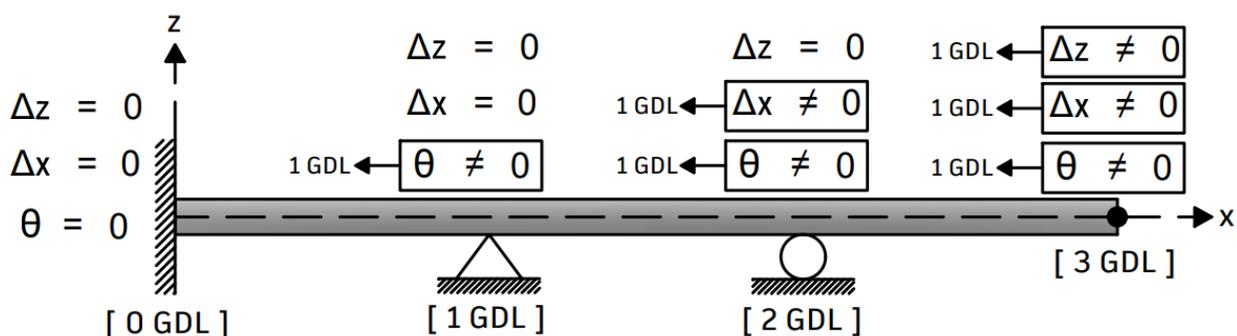


Figura 4.3. Grados de libertad en un plano bidimensional.

Ahora supóngase que se tiene un elemento tipo viga en un plano tridimensional (x, y, z) como se muestra en la figura 4.4. Este elemento no tiene condiciones de apoyo en sus extremos, por lo que no tendrá ningún apoyo que pueda restringir algún desplazamiento, por lo tanto, tendrá en el punto A y en el punto B que son sus dos extremos, desplazamientos traslacionales o lineales ($\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$) en los ejes (x, y, z) y de igual manera tendrá desplazamientos rotacionales ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) en los mismos ejes (x, y, z), por lo que, en cada extremo la viga tendrá seis grados de libertad (6 GDL).

Si se quisiera conocer todos los grados de libertad que se encuentran en el elemento estructural tipo viga, se tendría que conocer el número exacto de nudos o puntos que conforman a el elemento, ya que por cada punto se tendrían seis grados de libertad, pero sería imposible conocer con exactitud la cantidad de puntos que conforman a el elemento tipo viga, ya que cualquier elemento tiene una infinidad de nudos o puntos, por lo que se puede concluir que cualquier sistema estructural tendrá una infinidad de grados de libertad (GDL).

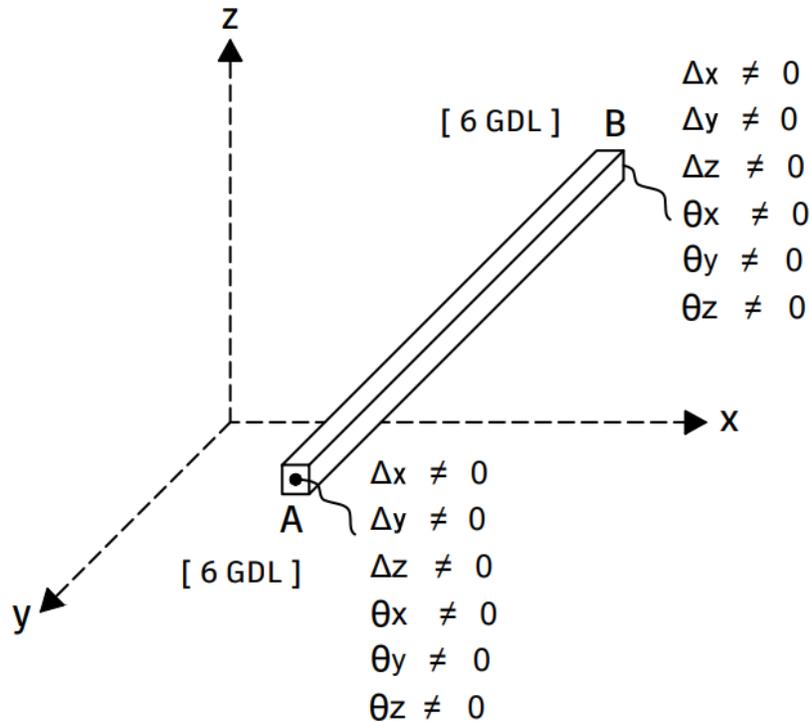


Figura 4.4. Grados de libertad en un plano tridimensional.

En un plano tridimensional como se muestra en la figura 4.5, el apoyo móvil tendrá como incógnita una fuerza en el eje "z" (F_z) que restringirá el desplazamiento traslacional (Δ_z) en el mismo eje, por lo que en este apoyo se tendrán cinco grados de libertad (5 GDL), dos grados de libertad traslacionales (Δ_x, Δ_y) y tres grados de libertad rotacionales ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$).

En un apoyo fijo, se tendrán como incógnitas tres fuerzas, una fuerza en el eje "x" (F_x), una fuerza en el eje "y" (F_y) y una fuerza en el eje "z" (F_z). Estas fuerzas restringirán un desplazamiento traslacional en cada eje ($\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$), por lo que en un apoyo fijo se tendrán 3 grados de libertad (3 GDL) rotacionales ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$).

En un apoyo empotrado se tendrán seis incógnitas, dos incógnitas en el eje "x", que sería un momento (M_x) y una fuerza (F_x), dos incógnitas en el eje "y", que sería un momento (M_y) y una fuerza (F_y) y dos incógnitas en el eje "z", un momento (M_z) y una fuerza (F_z). Las tres fuerzas (F_x, F_y, F_z) restringirán los tres desplazamientos traslacionales ($\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$) y los tres momentos (M_x, M_y, M_z) restringirán los tres desplazamientos rotacionales ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$), por lo que en un apoyo empotrado no se tienen grados de libertad (0 GDL).

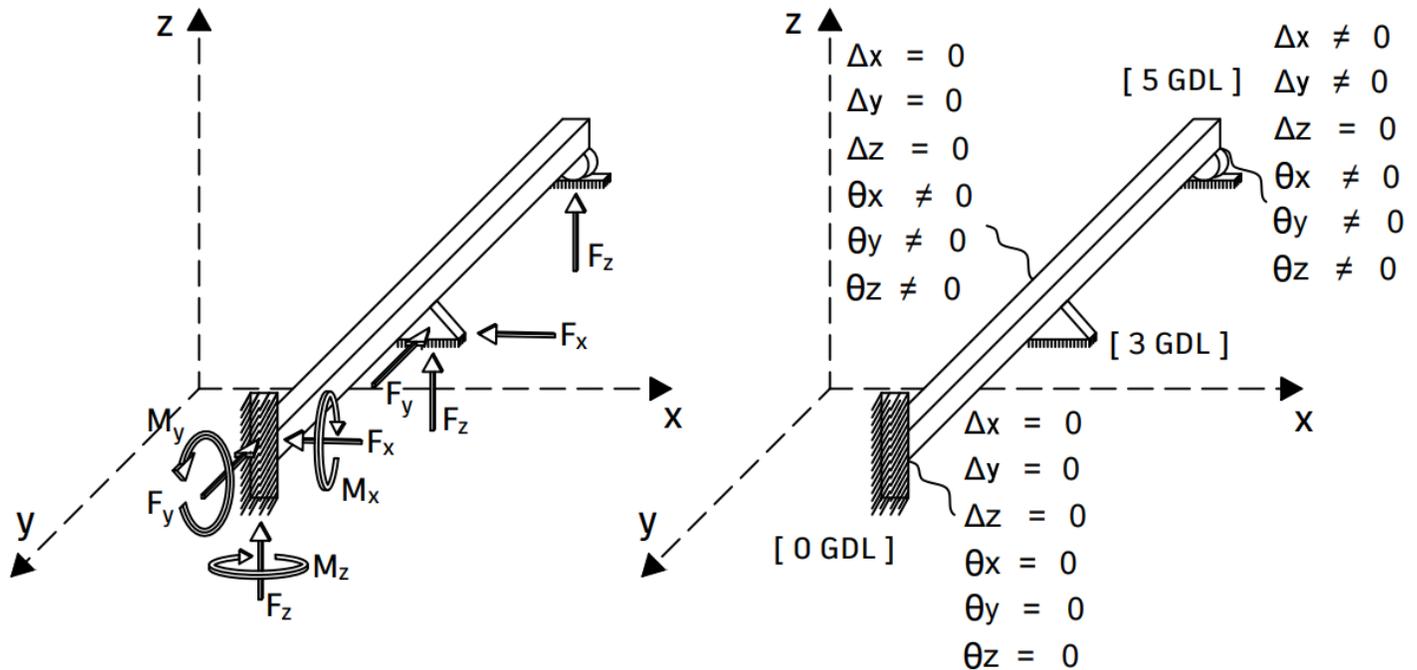


Figura 4.5. Fuerzas, momentos y grados de libertad en los apoyos en un plano tridimensional.

Es importante que se entienda a la perfección lo que es un grado de libertad en un sistema estructural, ya que este concepto es de suma importancia para que se pueda entender el procedimiento matemático para la solución de una estructura hiperestática empleando el método de las rigideces.

Los grados de libertad son de gran importancia en el método de las rigideces, ya que unos de los pasos a seguir para empezar a utilizar correctamente este método, es restringir con un empotramiento todos los grados de libertad que sean necesario en un elemento estructural, por lo que fue necesario realizar una explicación a detalle lo que es un grado de libertad en un sistema estructural, ya sea en un plano bidimensional o en un plano tridimensional.

4.2 RIGIDEZ LINEAL

Supóngase que se tiene un elemento estructural tipo viga empotrada en ambos extremos, como se muestra en la figura 4.6. Esta viga tiene una longitud (L) y una sección transversal constante a lo largo de toda su longitud, esto significa que el módulo de elasticidad y el momento de inercia de la viga son constantes.

Se sabe que un apoyo empotrado en un plano bidimensional no tiene grados de libertad, por lo que el desplazamiento vertical (Δ_z), horizontal (Δ_x) y la rotación (θ) son nulos en ambos extremos empotrados, como se muestra en la figura 4.6.

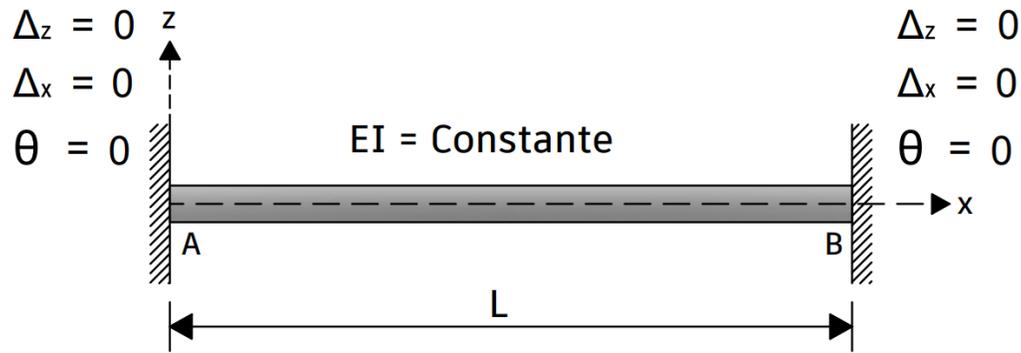


Figura 4.6. Viga doblemente empotrada.

La ley de Hooke nos dice, que cuando estamos en el rango elástico línea, una fuerza (F) es igual a una rigidez (K) por un desplazamiento (u), y un momento (M) es igual a una rigidez rotacional (K_θ) por una rotación (θ), como se ve en la ecuación 4.2 y 4.3 respectivamente.

$$F = (K)(u) \tag{4.2}$$

$$M = (K_\theta)(\theta) \tag{4.3}$$

Si el desplazamiento es nulo en ambos extremos empotrados, es evidente que no se tendrán fuerzas o reacciones en la viga, a menos de que se le aplique un sistema de cargas. Si a la viga se le impone un desplazamiento vertical unitario en el empotramiento del extremo A, este extremo de la viga se moverá una unidad hacia arriba, como se muestra en la figura 4.7.

Se sabe que una fuerza es igual a una rigidez por un desplazamiento por lo que si se tiene un desplazamiento unitario, esto generará que se tenga una fuerza en dirección al desplazamiento. Esta fuerza vendría siendo la reacción (F_A), para que la viga se encuentre en equilibrio y al no tener otra fuerza más que la fuerza (F_A), el extremo empotrado en el punto B deberá tener una fuerza (F_B) con un sentido anti gravitacional para contrarrestar la fuerza (F_A). Para que la viga este en total equilibrio, estas dos fuerzas cortantes (F_A, F_B) provocarán que tanto en el extremo A como el extremo B tengan un momento antihorario (M_A, M_B), como se muestra en la figura 4.7.

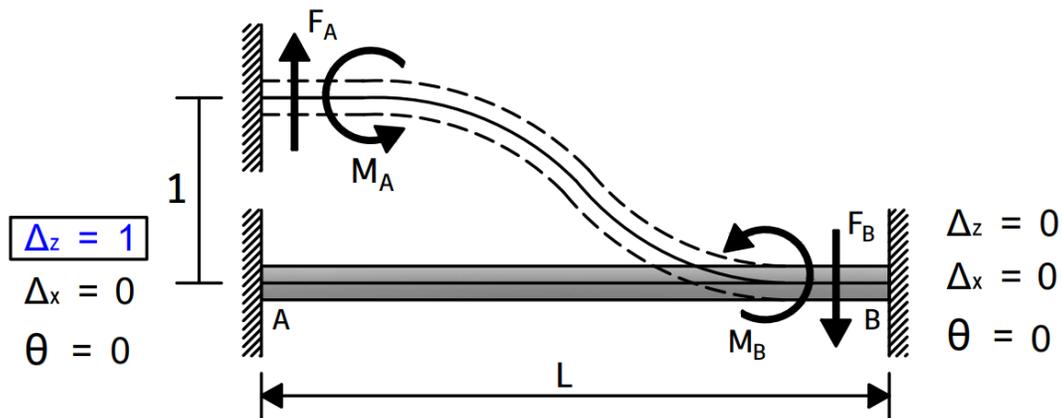


Figura 4.7. Imposición de un desplazamiento vertical unitario.

Como se puede observar en la figura 4.7, se tienen cuatro incógnitas (F_A, M_A, F_B, M_B), de las cuales se requiere conocer su valor. Para conocer el valor de las fuerzas y momentos, se empleará el método de la doble integración visto en la sección pasada, por lo que se pasará a calcular la ecuación del momento flexionante (véase la figura 4.8).

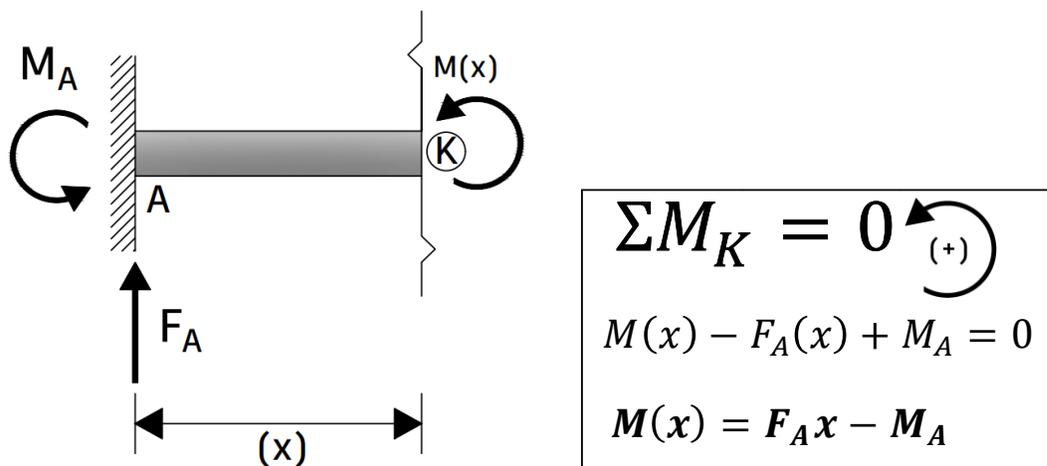


Figura 4.8. Ecuación del momento flexionante de una viga doblemente empotrada con un desplazamiento unitario.

Como ya se vio en anteriores ejercicios utilizado el método de la doble integración, se integra la ecuación del momento flexionante para obtener la ecuación de rotación:

$$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int M(x) dx$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \int (F_A x - M_A) dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{F_A}{2} x^2 - M_A x + C_1 \right)$$

$$EI\theta(x) = \frac{F_A}{2}x^2 - M_Ax + C_1 \quad \text{Ec. 1}$$

Se integra la ecuación de rotación, para obtener la ecuación del desplazamiento vertical:

$$EIy(x) = \int EI\theta(x) dx = \int \left(\frac{F_A}{2}x^2 - M_Ax + C_1 \right) dx$$

$$EIy(x) = \frac{F_A}{6}x^3 - \frac{M_A}{2}x^2 + C_1x + C_2 \quad \text{Ec. 2}$$

Se puede observar en las ecuaciones que se tienen cuatro incógnitas, por lo que será necesario emplear el uso de las condiciones de frontera. Como se observa en la figura 4.9, se tienen tres condiciones de frontera en el extremo A y tres en el extremo B, se despreciarán las condiciones de frontera del desplazamiento horizontal (Δ_x) y solo se ocuparán las condiciones de frontera del desplazamiento vertical (Δ_z) y la de rotación (θ), teniendo así cuatro condiciones de frontera que se ocuparán para calcular el valor de las cuatro incógnitas.

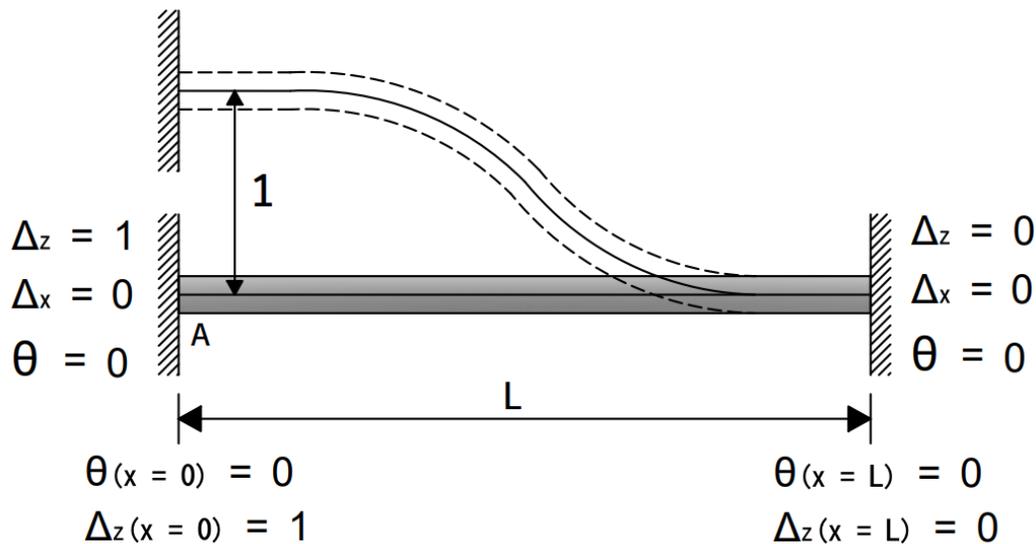


Figura 4.9. Condiciones de frontera en una viga doblemente empotrada con un desplazamiento unitario.

Se utiliza la primera condición de frontera en la ecuación de rotación (Ec 1) para conocer el valor de la primera constante (C_1):

$$\theta(x = 0) = 0$$

El ángulo de rotación es igual a cero, cuando "x" es igual a cero.

$$\theta = 0 \quad \text{cuando} \quad x = 0$$

$$EI\theta(x) = \frac{F_A}{2}x^2 - M_Ax + C_1$$

$$EI(0) = \frac{F_A}{2}(0)^2 - M_A(0) + C_1$$

$$\mathbf{C_1 = 0}$$

Ahora se utiliza la segunda condición de frontera en la ecuación del desplazamiento vertical (Ec 2) para conocer el valor de la segunda constante (C_2):

$$\Delta_z(x = 0) = 1$$

El desplazamiento vertical es igual a uno, cuando "x" es igual a cero.

$$\Delta_z = 1 \quad \text{cuando} \quad x = 0$$

$$EIy(x) = \frac{F_A}{6}x^3 - \frac{M_A}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

$$EI(1) = \frac{F_A}{6}(0)^3 - \frac{M_A}{2}(0)^2 + (0) + C_2$$

$$\mathbf{C_2 = EI}$$

Se utiliza la tercera condición de frontera en la ecuación de rotación (Ec 1) para conocer el momento (M_A), pero ahora se sustituye la primera constante (C_1) en la ecuación:

$$\theta(x = L) = 0$$

El ángulo de rotación es igual a cero, cuando "x" es igual a "L".

$$\theta = 0 \quad \text{cuando} \quad x = L$$

$$EI\theta(x) = \frac{F_A}{2}x^2 - M_Ax + C_1$$

$$EI(0) = \frac{F_A}{2}(L)^2 - M_A(L) + 0$$

$$\frac{F_A}{2}L^2 - M_AL = 0$$

Se despeja la incógnita M_A :

$$M_A = \frac{F_A}{2} L \quad \text{Ec. 3}$$

Por último, se utilizará la cuarta condición de frontera en la ecuación del desplazamiento vertical (Ec 2) para conocer la fuerza (F_A), pero se sustituirá la primera constante (C_1) y la segunda constante (C_2) en la ecuación:

$$\Delta_z(x = L) = 0$$

El desplazamiento vertical es igual a cero, cuando "x" es igual a "L".

$$\Delta_z = 0 \quad \text{cuando} \quad x = L$$

$$EIy(x) = \frac{F_A}{6} x^3 - \frac{M_A}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$EI(0) = \frac{F_A}{6} (L)^3 - \frac{M_A}{2} (L)^2 + (0) + EI$$

$$\frac{F_A}{6} L^3 - \frac{M_A}{2} L^2 + EI = 0 \quad \text{Ec. 4}$$

Se sustituye el momento M_A de la Ec.3 en la ecuación (Ec.4) y se despeja la fuerza F_A :

$$\frac{F_A}{6} L^3 - \left(\frac{F_A}{2} L \right) \frac{L^2}{2} + EI = 0$$

$$\frac{F_A}{6} L^3 - \frac{F_A}{4} L^3 + EI = 0$$

$$-\frac{F_A L^3}{12} = -EI$$

$$F_A = (-EI) \left(-\frac{12}{L^3} \right)$$

$$F_A = \frac{12EI}{L^3} \quad \text{Ec. 5}$$

Se sustituye la fuerza F_A (Ec.5) en la ecuación (Ec.3), para conocer el valor del momento M_A :

$$M_A = \frac{F_A}{2} L$$

$$M_A = \left(\frac{12EI}{L^3}\right) \frac{L}{2}$$

$$M_A = \frac{6EI}{L^2}$$

Se puede observar en la figura 4.10 que ya se conoce el valor del momento (M_A) y la fuerza (F_A) en el extremo empotrado A. Para conocer el valor del momento (M_B) y la fuerza (F_B) en el extremo empotrado B, se hará uso de las ecuaciones del equilibrio.

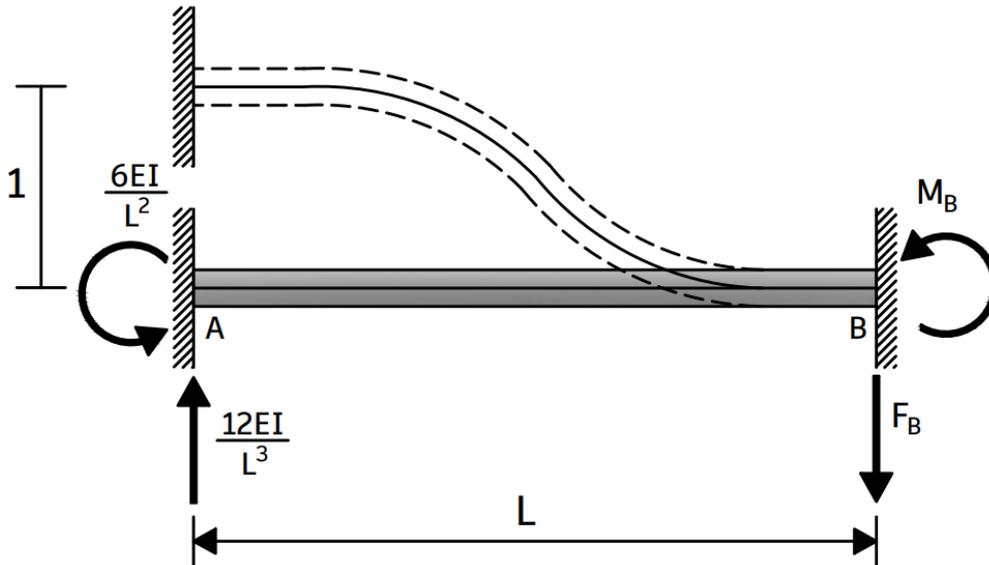


Figura 4.10. Reacciones en el extremo empotrado A de una viga doblemente empotrada con un desplazamiento unitario.

Con las ecuaciones del equilibrio se calculan las reacciones en el empotramiento del extremo B:

$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= 0 \quad (+) \\ -M_B - \frac{6EI}{L^2} + \frac{12EI}{L^3}(L) &= 0 \\ -M_B + \frac{6EI}{L^2} &= 0 \\ M_B &= \frac{6EI}{L^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_Y &= 0 \quad \uparrow (+) \\ -F_B + \frac{12EI}{L^3} &= 0 \\ F_B &= \frac{12EI}{L^3} \end{aligned}$$

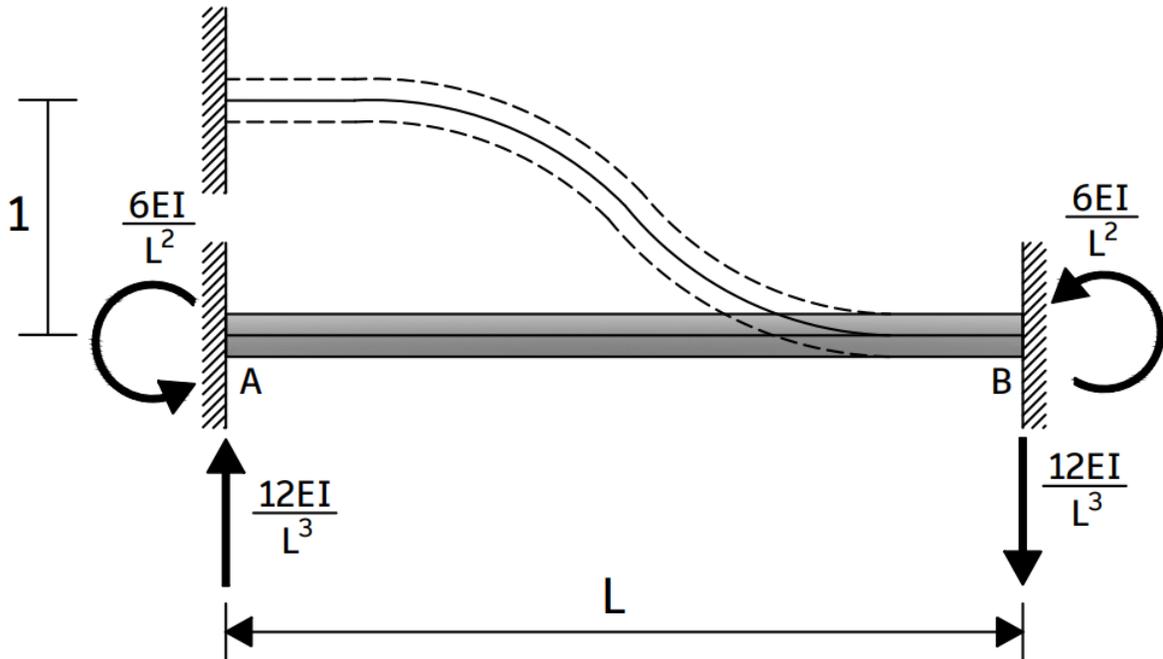


Figura 4.11. Coeficientes de rigidez lineal.

A una viga doblemente empotrada se le aplico un desplazamiento vertical unitario en uno de sus extremos, este desplazamiento unitario genero una fuerza y un momento en cada extremo empotrado, por lo que se calculó el valor de cada fuerza y momento, a las cuales se le conoce como coeficientes de rigidez lineal (véase la figura 4.11).

Podemos decir, que durante todo el procedimiento matemáticos se trató de determinar el valor de los coeficientes de rigidez (figura 4.11) que se generaron en los extremos de una viga doblemente empotrada cuando uno de los extremos de la viga sufre un desplazamiento vertical unitario.

Con esto podemos concluir que la rigidez lineal es el valor de los momentos y las fuerzas que se generan cuando el desplazamiento vertical es igual a 1.

4.3 RIGIDEZ ANGULAR

Supóngase que se tiene la misma viga doblemente empotrada con el módulo de elasticidad y momento de inercia constante como se mostró en la figura 4.6, a esta viga se le impone una rotación unitaria (-1) en el extremo A (véase la figura 4.12). El momento M_A , será el momento que se deberá aplica en el extremo A para producir una rotación unitaria (-1) y el momento M_B , será el momento que se deberá desarrollar en el extremo B para que este permanezca empotrado.

Los momentos M_A y M_B tienen un sentido horario, por lo que será necesario tener fuerzas que provoquen un momento antihorario para que la viga se encuentre en equilibrio, estas fuerzas son aplicadas en los extremos empotrados como se muestra en la figura 4.12.

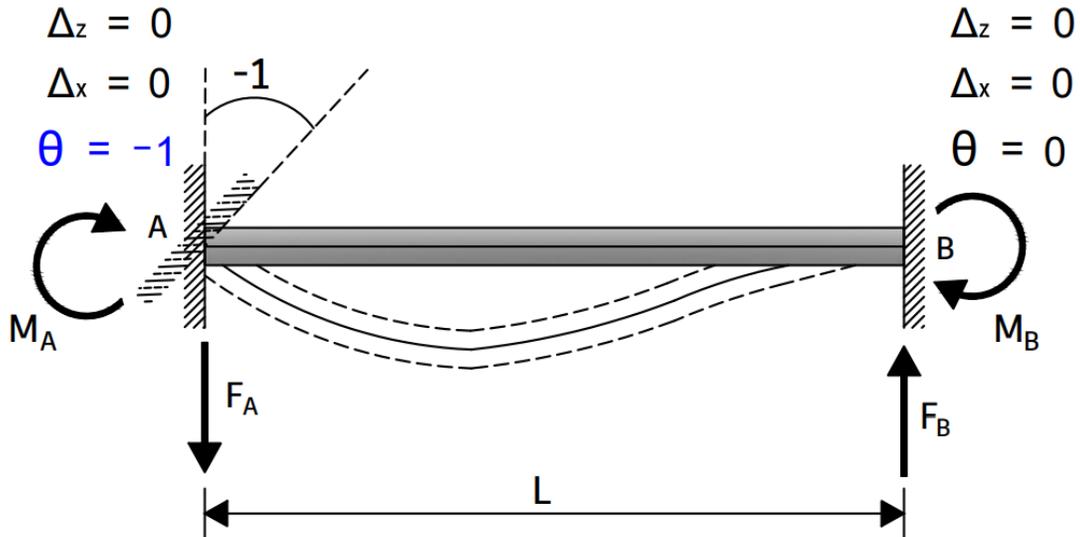


Figura 4.12. Imposición de una rotación unitaria.

Se utilizará el método de la doble integración para conocer el valor de las fuerzas (F_A, F_B) y los momentos (M_A, M_B) que se encuentran presentes en la viga, por lo que se pasará a calcular la ecuación del momento flexionante, como se muestra en la figura 4.13.

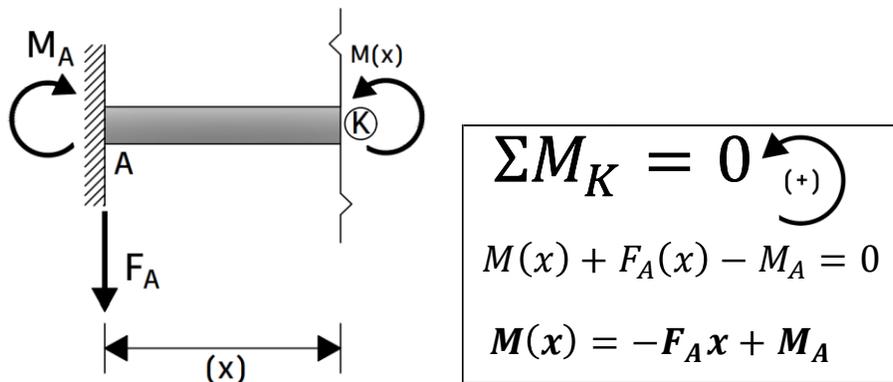


Figura 4.13. Ecuación del momento flexionante de una viga doblemente empotrada con una rotación unitaria.

Se integra la ecuación del momento flexionante para obtener la ecuación de rotación:

$$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int M(x) dx$$

$$EI(-1) = -\frac{F_A}{2}(0)^2 + M_A(0) + C_1$$

$$C_1 = -EI$$

Ahora se utiliza la segunda condición de frontera en la ecuación del desplazamiento vertical (Ec 2) para conocer el valor de la segunda constante (C_2):

$$\Delta_z(x = 0) = 0$$

El desplazamiento vertical es igual a cero, cuando "x" es igual a cero.

$$\Delta_z = 0 \quad \text{cuando} \quad x = 0$$

$$EIy(x) = -\frac{F_A}{6}x^3 + \frac{M_A}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

$$EI(0) = -\frac{F_A}{6}(0)^3 + \frac{M_A}{2}(0)^2 + C_1(0) + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Se utiliza la tercera condición de frontera en la ecuación de rotación (Ec 1) para conocer el momento (M_A), pero se sustituye la primera constante (C_1) en la ecuación:

$$\theta(x = L) = 0$$

El ángulo de rotación es igual a cero, cuando "x" es igual a "L".

$$\theta = 0 \quad \text{cuando} \quad x = L$$

$$EI\theta(x) = -\frac{F_A}{2}x^2 + M_Ax + C_1$$

$$EI(0) = -\frac{F_A}{2}(L)^2 + M_A(L) - EI$$

$$-\frac{F_A}{2}L^2 + M_AL - EI = 0$$

Se despeja la incógnita M_A :

$$M_A = \frac{F_A}{2}L + \frac{EI}{L} \quad \text{Ec. 3}$$

Por último, se utilizará la cuarta condición de frontera en la ecuación del desplazamiento vertical (Ec 2) para conocer la fuerza (F_A), pero se sustituye la primera constante (C_1) y la segunda constante (C_2) en la ecuación:

$$\Delta_z(x = L) = 0$$

El desplazamiento vertical es igual a cero, cuando "x" es igual a "L".

$$\Delta_z = 0 \quad \text{cuando} \quad x = L$$

$$EIy(x) = -\frac{F_A}{6}x^3 + \frac{M_A}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

$$EI(0) = -\frac{F_A}{6}(L)^3 + \frac{M_A}{2}(L)^2 - EI(L)$$

$$-\frac{F_A}{6}L^3 + \frac{M_A}{2}L^2 - EIL = 0 \quad \text{Ec. 4}$$

Sustituimos el momento M_A de la Ec.3 en la ecuación (Ec.4) y se despeja la fuerza F_A :

$$-\frac{F_A}{6}L^3 + \left(\frac{F_A}{2}L + \frac{EI}{L}\right)\frac{L^2}{2} - EIL = 0$$

$$-\frac{F_A}{6}L^3 + \frac{F_A}{4}L^3 + \frac{EIL}{2} - EIL = 0$$

$$\frac{F_A}{12}L^3 - \frac{EIL}{2} = 0$$

$$\frac{F_A}{12}L^3 = \frac{EIL}{2}$$

$$F_A = \left(\frac{EIL}{2}\right)\left(\frac{12}{L^3}\right)$$

$$F_A = \frac{6EI}{L^2} \quad \text{Ec. 5}$$

Se sustituye la fuerza F_A (Ec.5) en la ecuación (Ec.3) para conocer el valor real del momento M_A :

$$M_A = \frac{F_A}{2}L + \frac{EI}{L}$$

$$M_A = \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\frac{L}{2} + \frac{EI}{L}$$

$$M_A = \frac{3EI}{L} + \frac{EI}{L}$$

$$M_A = \frac{4EI}{L}$$

Se puede observar en la figura 4.15, que ya se conoce el valor del momento (M_A) y la fuerza (F_A) en el extremo empotrado A. Para conocer el valor del momento (M_B) y la fuerza (F_B) en el extremo empotrado B, se hará uso de las ecuaciones del equilibrio.

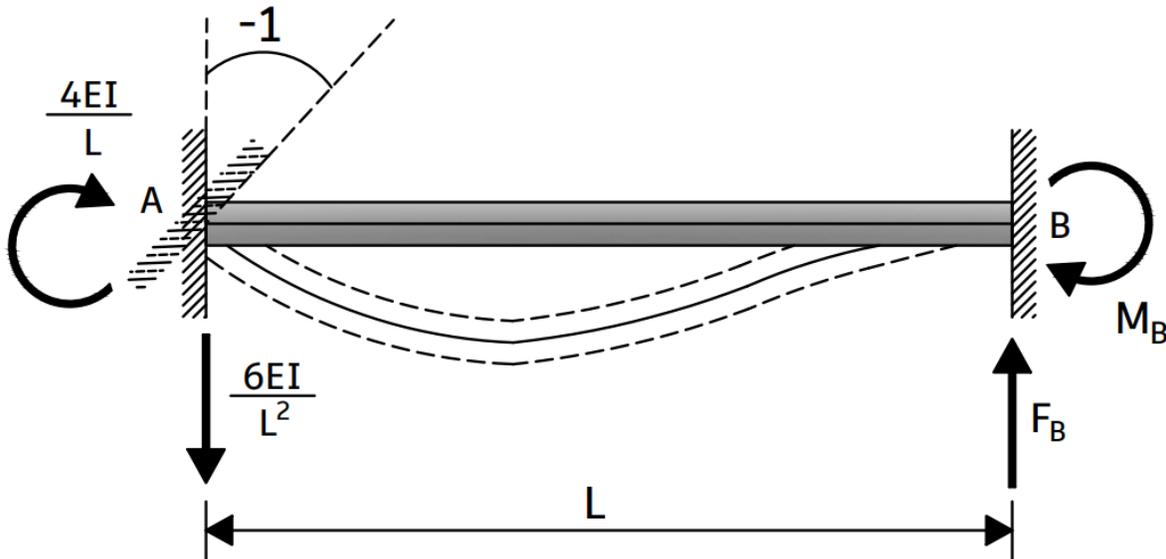


Figura 4.15. Reacciones en el extremo empotrado A de una viga doblemente empotrada con una rotación unitaria.

Con las ecuaciones del equilibrio se calcula el valor de las reacciones en el empotramiento del extremo B:

$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= 0 \quad (+) \\ M_B + \frac{4EI}{L} - \frac{6EI}{L^2}(L) &= 0 \\ M_B - \frac{2EI}{L} &= 0 \\ M_B &= \frac{2EI}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_Y &= 0 \quad \uparrow (+) \\ F_B - \frac{6EI}{L^2} &= 0 \\ F_B &= \frac{6EI}{L^2} \end{aligned}$$

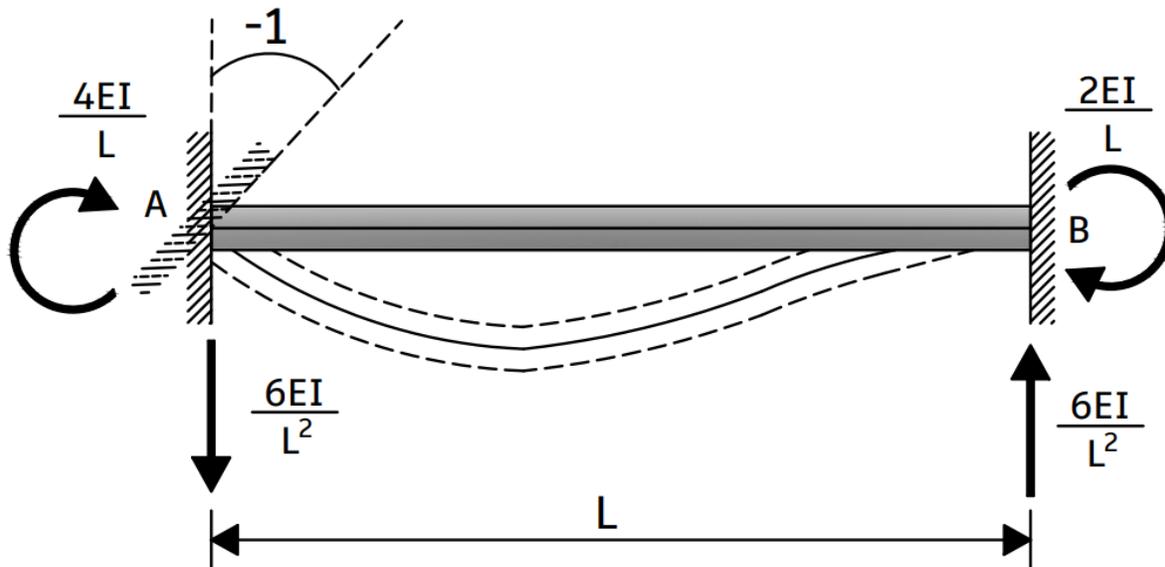


Figura 4.16. Coeficientes de rigidez angular

Durante el procedimiento matemático se trató de conocer el valor del momento M_A que se debe aplicar en el extremo empotrado A para que se genere una rotación unitaria en este mismo extremo.

En la figura 4.16 se puede observar el valor del momento en el extremo A que produce un momento unitario, de igual manera se observa el valor del momento en el extremo B que provoca que este extremo permanezca empotrado. Por último, se conoce el valor de las fuerzas que producen un momento antihorario para que la viga se encuentre en equilibrio, todos estos valores se les conoce como coeficientes de rigidez angular.

Con esto podemos definir a la rigidez angular como el valor del momento que es necesario aplicar en el extremo de una viga para producir una rotación unitaria, fijando el resto de los grados de libertad con un empotramiento.

Así mismo, se puede concluir definiendo a la rigidez como como la fuerza generalizada necesaria para producir un desplazamiento unitario fijando el resto de los grados de libertad.

4.4 CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

Al principio de esta sección se dijo que un paso a seguir en el método de las rigideces es restringir los grados de libertad con un empotramiento, para que después se imponga una rotación o un desplazamiento unitario, dependiendo del grado de libertad restringido.

Como se vio en el tema de rigidez lineal, al tener una viga doblemente empotrada y al imponer un desplazamiento unitario en uno de sus extremos, esto generaba que en cada extremo se tuviera una fuerza y un momento, los cuales se les conoce como coeficientes de rigidez lineal. De igual manera, si ahora se le impone una rotación unitaria en uno de sus extremos empotrados, esta rotación generaba que en cada extremo se tuviera una fuerza y un momento, los cuales se les conoce como coeficientes de rigidez angular. Estos coeficientes deben de estar presentes en la viga y tener los valores que se calcularon para que la viga presente un desplazamiento o una rotación unitaria, dependiendo del grado de libertad.

Al restringir los grados de libertad de una viga hiperestática con un empotramiento y posteriormente imponer un desplazamiento o una rotación unitaria, esto provocará que en la viga estén presentes los coeficientes de rigidez lineal o angular.

Existe una tabla de rigideces angulares y lineales la cual es la tabla 4.1 que fue obtenida de la materia de Análisis Estructural que imparte el Maestro en Ingeniería Miguel Ángel Rodríguez Vega en el Departamento de Estructuras de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

En la tabla 4.1 vienen presente los valores de los coeficientes de rigidez angular que se generan en diferentes vigas con distintos apoyos que tienen presente una rotación unitaria en un extremo empotrado. De igual manera se presentan los valores de los coeficientes de rigidez lineal de las vigas que presentan un desplazamiento vertical u horizontal unitario en un apoyo empotrado.

Se puede observar en la tabla 4.1 que, en la viga doblemente empotrada con un desplazamiento vertical unitario, presenta los mismos valores de fuerzas y momentos que se calcularon con el método de la doble integración y que están presentes en la figura 4.11. De igual manera se puede observar que en la viga doblemente empotrada con una rotación unitaria, presenta los mismos valores de los coeficientes de rigidez angular que están presentes en la figura 4.16.

Durante los ejercicios que se resuelvan utilizando el método de las rigideces, se utilizará la tabla 4.1 para construir la matriz de rigidez., por lo que se pasará a explicar por medio de un ejemplo, el procedimiento que se debe de seguir para la formación de la matriz de rigidez de una viga doblemente empotrada, esto con el fin de que cuando se resuelvan ejercicios, no resulte complejo entender cómo se construye una matriz de rigidez.

RIGIDECES ANGULARES Y LINEALES

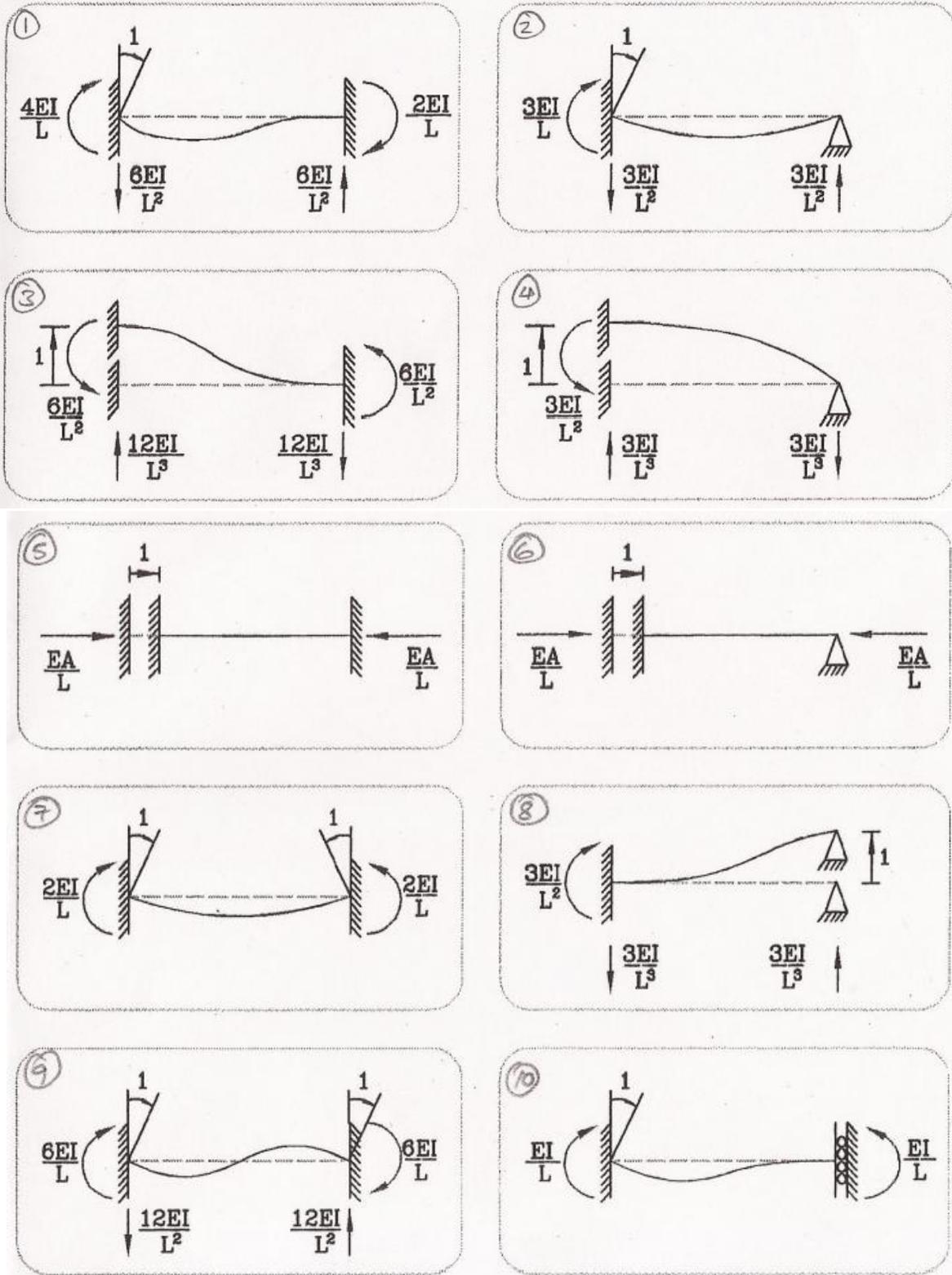


Tabla 4.1. Rigideces angulares y lineales

Supóngase que se tiene una viga doblemente empotrada a la cual se le impondrá un desplazamiento vertical unitario y una rotación unitaria en el extremo A, de igual manera a la misma viga se le impondrá un desplazamiento vertical unitario y una rotación unitaria en el extremo B.

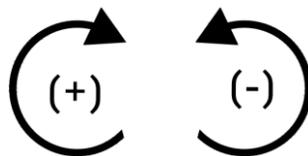
El desplazamiento unitario en el extremo A (Δ_{ZA}), desarrollará una fuerza (F_A) y un momento (M_A) en el extremo A y también una fuerza (F_B) y un momento (M_B) en el extremo B, como se muestra en la figura 4.17a.

La rotación unitaria en el extremo A (θ_A), desarrollará una fuerza (F_A) y un momento (M_A) en el extremo A y también una fuerza (F_B) y un momento (M_B) en el extremo B, como se muestra en la figura 4.17b.

El desplazamiento unitario en el extremo B (Δ_{ZB}), desarrollará una fuerza (F_A) y un momento (M_A) en el extremo A y también una fuerza (F_B) y un momento (M_B) en el extremo B, como se muestra en la figura 4.17c.

La rotación unitaria en el extremo B (θ_B), desarrollará una fuerza (F_A) y un momento (M_A) en el extremo A y también una fuerza (F_B) y un momento (M_B) en el extremo B, como se muestra en la figura 4.17d.

Durante toda esta sección, se tomará la convención de que un momento en sentido antihorario tiene signo negativo y un momento en sentido horario tiene un signo positivo. Con esta convención de signos se creará la matriz de rigidez con las fuerzas y momentos de cada viga (véase la figura 4.18).



Se puede observar en la figura 4.18, que en la construcción de la matriz de rigidez, en la primera columna se colocaron los valores de los coeficientes de rigidez lineal del desplazamiento unitario en el extremo A, en la segunda columna se colocaron los valores de los coeficientes de rigidez angular de la rotación unitaria en el extremo A, en la tercera columna se colocaron los valores de los coeficientes de rigidez lineal del desplazamiento unitario en el extremo B y por último, en la cuarta columna se colocaron los valores de los coeficientes de rigidez angular de la rotación unitaria en el extremo B.

Los valores de los coeficientes de rigidez lineal y angular fueron obtenidos de la tabla 4.1. Se sabe que los coeficientes de rigidez son las fuerzas y momentos que se desarrollan en una viga al tener una rotación o un desplazamiento unitario.

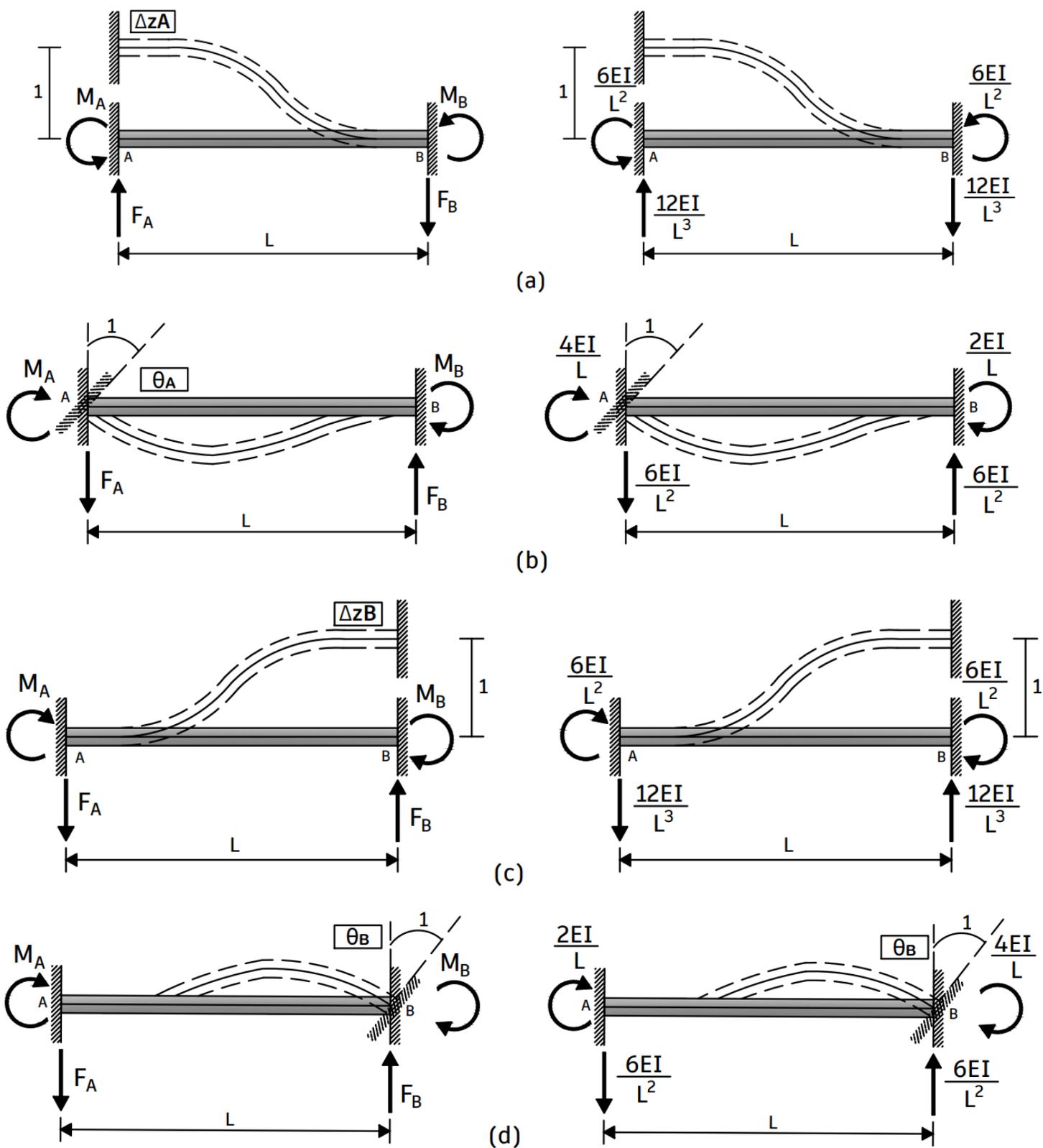


Figura 4.17. imposición de desplazamientos y rotaciones unitarias.

Δz_A	θ_A	Δz_B	θ_B		Δz_A	θ_A	Δz_B	θ_B	
F_A	$-F_A$	$-F_A$	$-F_A$	F_z^A	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	F_z^A
$-M_A$	M_A	M_A	M_A	M_y^A	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	M_y^A
$-F_B$	F_B	F_B	F_B	F_z^B	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	F_z^B
$-M_B$	M_B	M_B	M_B	M_y^B	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	M_y^B

Figura 4.18. Matriz de rigidez.

Para comprobar que la formación de la matriz de rigidez fue correcta, se debe de tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- La matriz debe de ser simétrica, es decir, la matriz debe de ser cuadrada, donde el número de columnas debe ser igual al número de filas y los valores de una columna deben de ser igual a los valores de una fila, es decir, que el elemento en el renglón i y columna j es igual al elemento el renglón j y columna i .
- Los valores de la diagonal principal de la matriz deben ser mayores a cero.
- La matriz original menos su matriz transpuesta debe de ser igual a cero.

Es importante que se tomen en cuenta todas las consideraciones ya mencionadas, ya que si no se cumplen estos requisitos, se tendrá un resultado erróneo, por lo que se recomienda que al terminar de construir una matriz de rigidez, se verifique si esta es simétrica.

4.5 DEDUCCIÓN DE LAS FUERZAS Y LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

Al resolver una viga hiperestática y al restringir con un empotramiento ambos extremos o solo un extremo de la viga, teniendo así, una viga doblemente empotrada o una viga empotrada simplemente apoyada respectivamente, esta estará sometida a una configuración de cargas, como una carga puntual, una carga uniformemente repartida o a una carga triangular o una combinación de todas estas.

Estas cargas desarrollarán fuerzas cortantes y momentos flexionantes en los apoyos empotrados, y en apoyos fijos solo generarán fuerzas cortantes, por ejemplo, supóngase que se tiene viga doblemente empotrada a la cual se le aplica una carga uniformemente repartida, esta carga generará que cada extremo empotrado tenga como reacciones una fuerza y un momento, como se muestra en la figura 4.19.

Como no se sabe cuál es el valor de cada fuerza y momento, se pasará a explicar la deducción de cómo se calculan estos valores, que se les conoce como momentos de empotramiento.

Se podrá observar que el procedimiento matemático que se llevará a cabo para conocer el valor de las fuerzas y momentos que están presentes en la figura 4.19, es similar al procedimiento que se hizo en la deducción de los coeficientes de rigidez lineal y angular, ya que de igual manera se utilizará el método de la doble integración para el cálculo de los momentos de empotramiento, como se muestra a continuación.

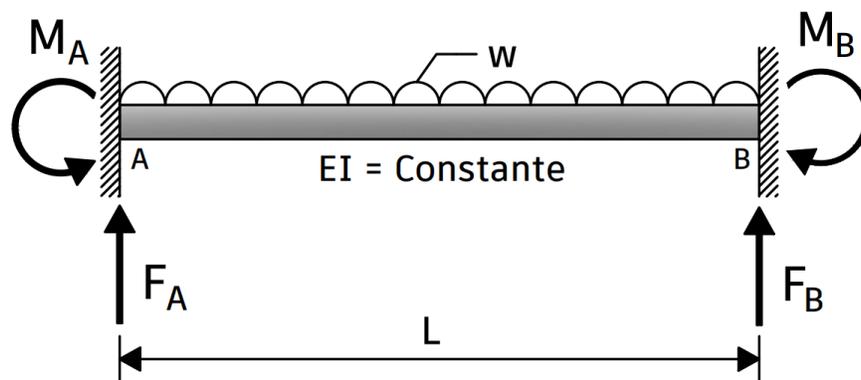


Figura 4.19. viga doblemente empotrada con una carga uniformemente repartida.

Se calcula la ecuación del momento flexionante de la viga doblemente empotrada con una carga uniformemente repartida, como se muestra en la figura 4.20.

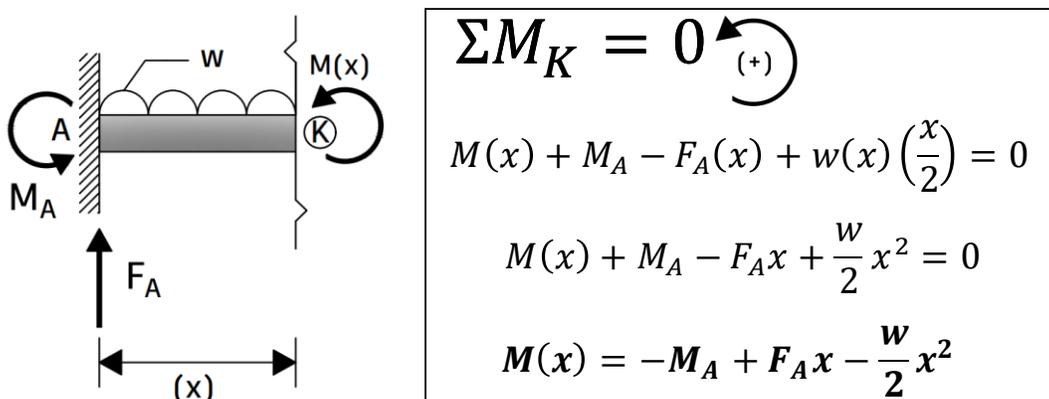


Figura 4.20. Ecuación del momento flexionante de una viga doblemente empotrada con una carga uniformemente repartida.

Se integra la ecuación del momento flexionante para obtener la ecuación de rotación:

$$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int M(x) dx$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \int \left(-M_A + F_A x - \frac{w}{2} x^2 \right) dx = \frac{1}{EI} \left(-M_A x + \frac{F_A}{2} x^2 - \frac{w}{6} x^3 + C_1 \right)$$

$$EI\theta(x) = -M_A x + \frac{F_A}{2} x^2 - \frac{w}{6} x^3 + C_1 \quad \text{Ec. 1}$$

Se integra la ecuación de rotación, para obtener la ecuación del desplazamiento vertical:

$$EIy(x) = \int EI\theta(x) dx = \int \left(-M_A x + \frac{F_A}{2} x^2 - \frac{w}{6} x^3 + C_1 \right) dx$$

$$EIy(x) = -\frac{M_A}{2} x^2 + \frac{F_A}{6} x^3 - \frac{w}{24} x^4 + C_1 x + C_2 \quad \text{Ec. 2}$$

Se utilizarán las cuatro condiciones de frontera que se ilustran en la figura 4.21 para calcular las cuatro incógnitas (F_A, M_A, C_1, C_2).

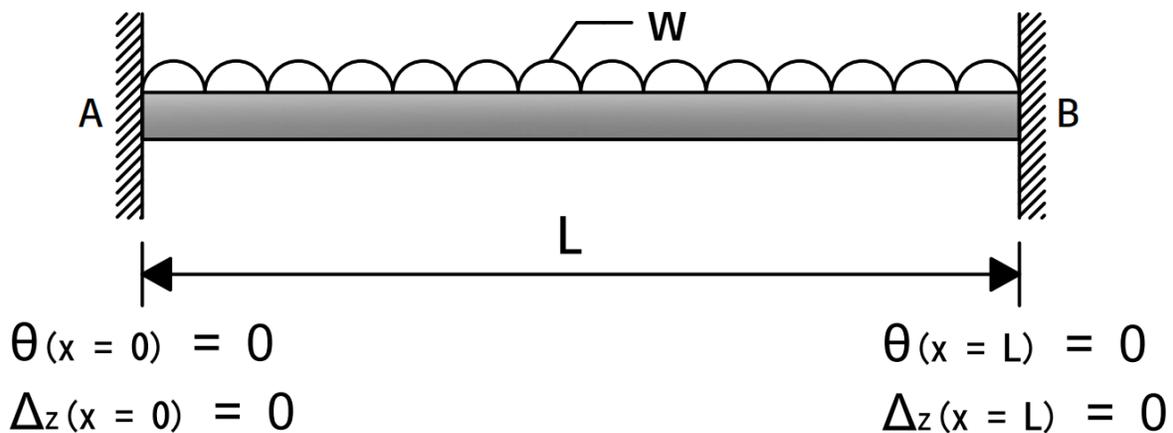


Figura 4.21. Condiciones de frontera en una viga doblemente empotrada con una carga uniformemente repartida.

Se utiliza la primera condición de frontera en la ecuación de rotación (Ec 1) para conocer el valor de la primera constante (C_1):

$$\theta(x=0) = 0$$

El ángulo de rotación es igual a cero, cuando "x" es igual a cero.

$$\theta = 0 \quad \text{cuando} \quad x = 0$$

$$EI\theta(x) = -M_A x + \frac{F_A}{2} x^2 - \frac{w}{6} x^3 + C_1$$

$$EI(0) = -M_A(0) + \frac{F_A}{2}(0)^2 - \frac{w}{6}(0)^3 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

Ahora se utiliza la segunda condición de frontera en la ecuación del desplazamiento vertical (Ec 2) para conocer el valor de la segunda constante (C_2):

$$\Delta_z(x = 0) = 0$$

El desplazamiento vertical es igual a cero, cuando "x" es igual a cero.

$$\Delta_z = 0 \quad \text{cuando} \quad x = 0$$

$$EIy(x) = -\frac{M_A}{2} x^2 + \frac{F_A}{6} x^3 - \frac{w}{24} x^4 + C_1 x + C_2$$

$$EI(0) = -\frac{M_A}{2}(0)^2 + \frac{F_A}{6}(0)^3 - \frac{w}{24}(0)^4 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Se utiliza la tercera condición de frontera en la ecuación de rotación (Ec 1) para conocer el momento (M_A), pero se sustituye la primera constante (C_1) en la ecuación:

$$\theta(x = L) = 0$$

El ángulo de rotación es igual a cero, cuando "x" es igual a "L".

$$\theta = 0 \quad \text{cuando} \quad x = L$$

$$EI\theta(x) = -M_A x + \frac{F_A}{2} x^2 - \frac{w}{6} x^3 + C_1$$

$$EI(0) = -M_A(L) + \frac{F_A}{2}(L)^2 - \frac{w}{6}(L)^3 + 0$$

$$-M_A L + \frac{F_A}{2} L^2 - \frac{w}{6} L^3 = 0$$

Despejamos la incógnita M_A :

$$M_A = \frac{F_A}{2} L - \frac{w}{6} L^2 \quad \text{Ec. 3}$$

Por último, se utilizará la cuarta condición de frontera en la ecuación del desplazamiento vertical (Ec 2) para conocer la fuerza (F_A), pero ahora se sustituye la primera constante (C_1) y la segunda constante (C_2) en la ecuación:

$$\Delta_z(x = L) = 0$$

El desplazamiento vertical es igual a cero, cuando "x" es igual a "L".

$$\Delta_z = 0 \quad \text{cuando} \quad x = L$$

$$EIy(x) = -\frac{M_A}{2}x^2 + \frac{F_A}{6}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + C_1x + C_2$$

$$EI(0) = -\frac{M_A}{2}(L)^2 + \frac{F_A}{6}(L)^3 - \frac{w}{24}(L)^4 + 0 + 0$$

$$-\frac{M_A}{2}L^2 + \frac{F_A}{6}L^3 - \frac{w}{24}L^4 = 0 \quad \text{Ec. 4}$$

Se sustituye el momento M_A de la Ec.3 en la ecuación (Ec.4) y se despeja la fuerza F_A :

$$-\left(\frac{F_A}{2}L - \frac{w}{6}L^2\right)\frac{L^2}{2} + \frac{F_A}{6}L^3 - \frac{w}{24}L^4 = 0$$

$$-\frac{F_A}{4}L^3 + \frac{w}{12}L^4 + \frac{F_A}{6}L^3 - \frac{w}{24}L^4 = 0$$

$$-\frac{F_A}{12}L^3 + \frac{w}{24}L^4 = 0$$

$$F_A = \left(\frac{w}{24}L^4\right)\left(\frac{12}{L^3}\right)$$

$$F_A = \frac{wL}{2} \quad \text{Ec. 5}$$

Se sustituye la fuerza F_A (Ec.5) en la ecuación (Ec.3) para conocer el valor real del momento M_A :

$$M_A = \frac{F_A}{2}L - \frac{w}{6}L^2$$

$$M_A = \left(\frac{wL}{2}\right)\frac{L}{2} - \frac{w}{6}L^2 = \frac{w}{4}L^2 - \frac{w}{6}L^2$$

$$M_A = \frac{wL^2}{12}$$

Una vez teniendo el valor de la fuerza cortante y el momento flexionante del extremo empotrado A como se muestra en la figura 4.22, se calculará con las ecuaciones del equilibrio el valor de la fuerza cortante y momento flexionante del extremo empotrado B, para que con esto se pueda conocer con exactitud los momentos de empotramiento de una viga doblemente empotrada con una carga uniformemente repartida como se muestra en la figura 4.23.

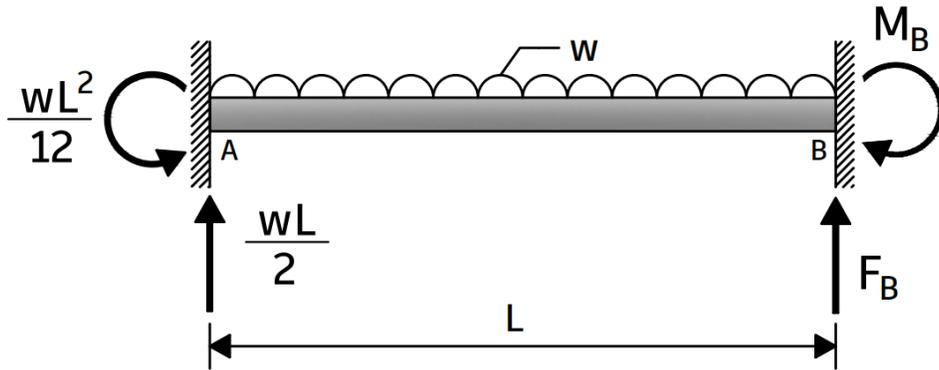


Figura 4.22. Reacciones en el extremo A de una viga doblemente empotrada con una carga uniformemente repartida.

Con las ecuaciones del equilibrio se calcula el valor de las reacciones en el empotramiento del extremo B:

$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= 0 \quad (+) \\ M_B - \frac{wL^2}{12} + \frac{wL}{2}(L) - w(L)\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\ M_B - \frac{wL^2}{12} + \frac{wL^2}{2} - \frac{wL^2}{2} &= 0 \\ M_B &= \frac{wL^2}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_Y &= 0 \quad \uparrow (+) \\ F_B + \frac{wL}{2} - w(L) &= 0 \\ F_B - \frac{wL}{2} &= 0 \\ F_B &= \frac{wL}{2} \end{aligned}$$

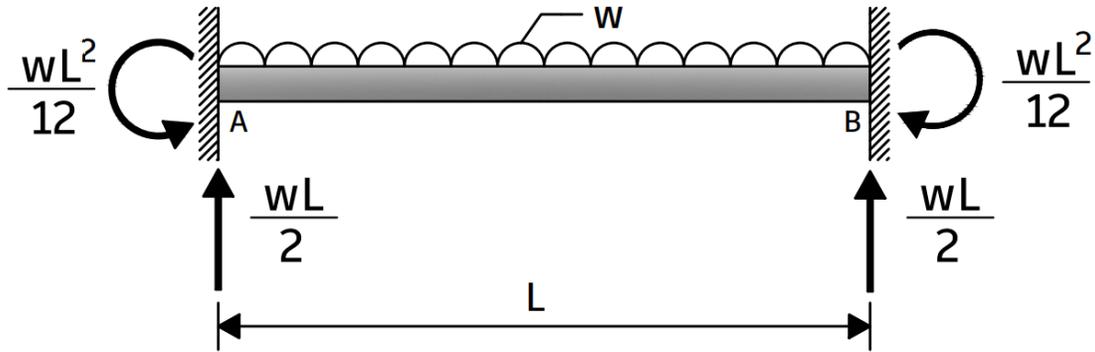


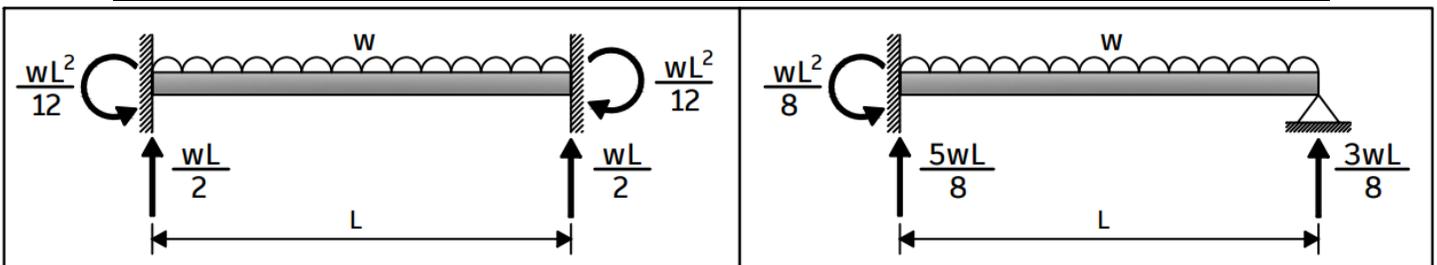
Figura 4.23. Momentos de empotramiento de una viga doblemente empotrada con una carga uniformemente repartida.

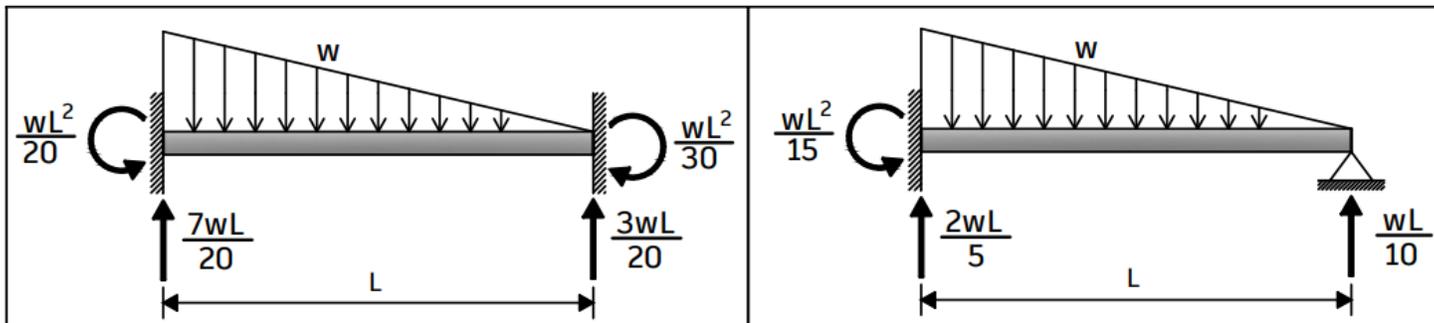
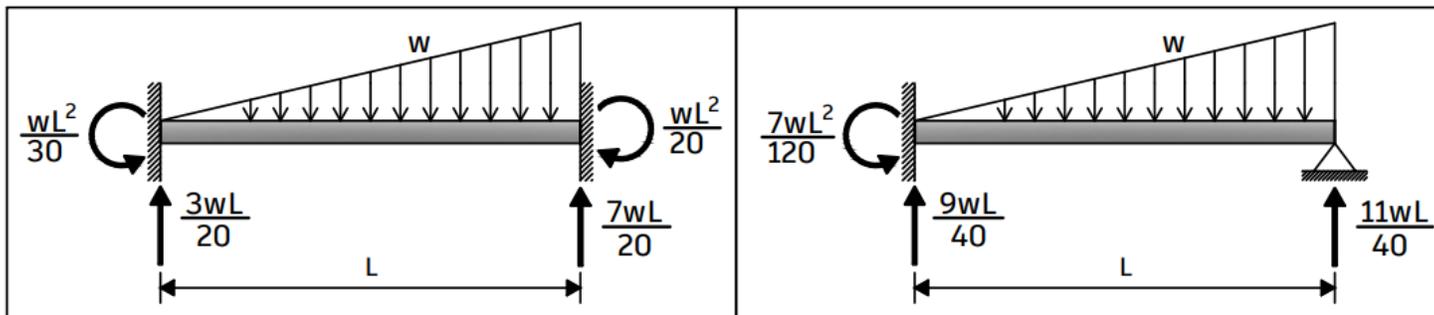
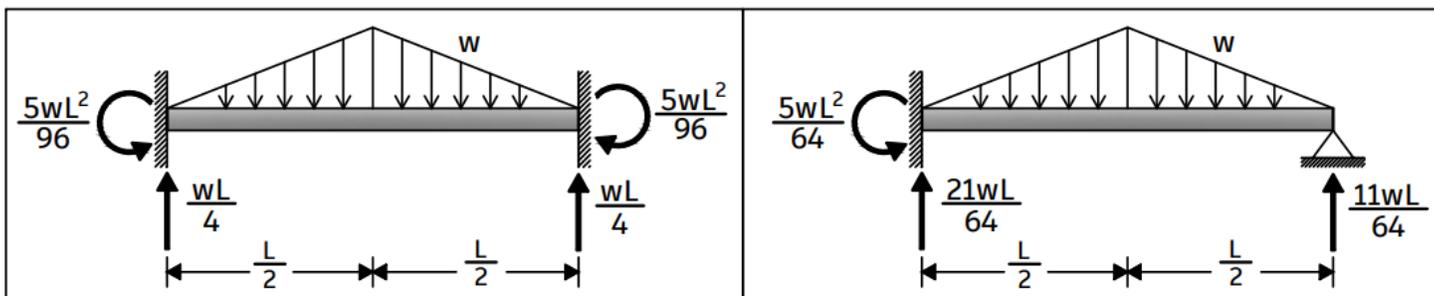
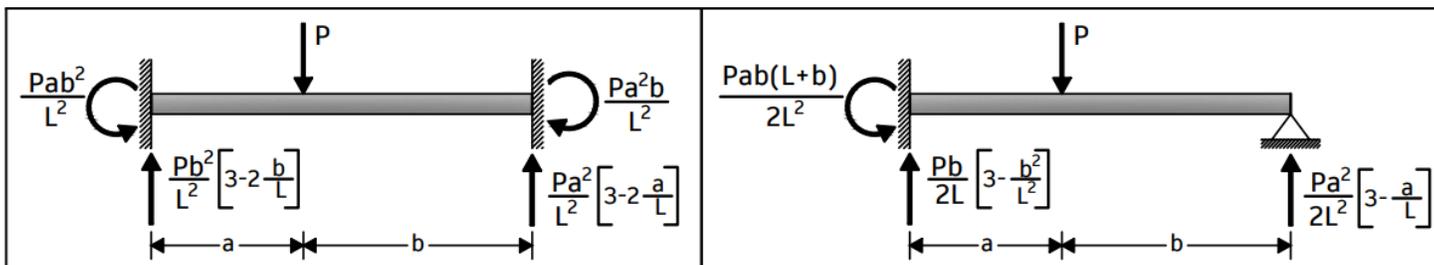
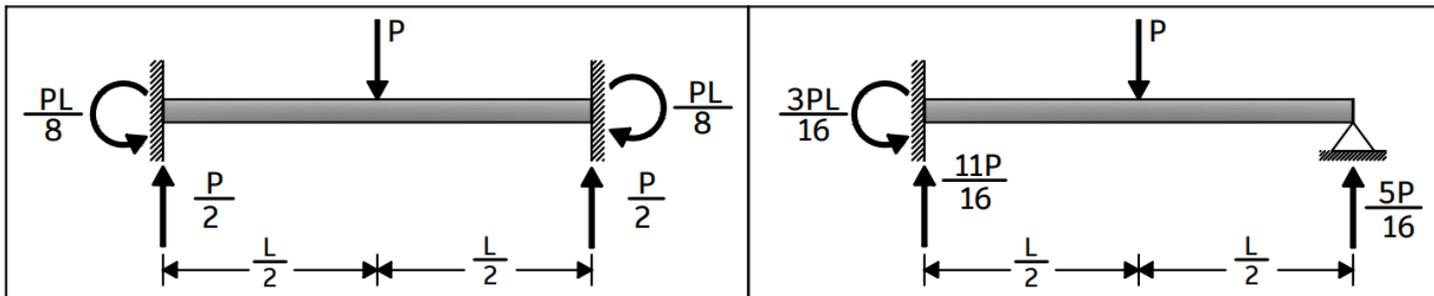
Al principio de esta sección se dijo que la matriz de rigidez multiplicada por un vector de desplazamientos más un vector de fuerzas igual a cero, será la ecuación que nos ayudará a conocer el valor real de los desplazamientos de los grados de libertad restringidos con un empotramiento, para que después con ayuda de los desplazamientos calculados se pueda conocer el valor de las reacciones en cada apoyo de la viga hiperestática.

Ya se explicó cómo se construye una matriz de rigidez, el vector de desplazamientos se formará con los grados de libertad que se restrinjan con un empotramiento, estos grados de libertad son los desplazamientos que estarán como incógnitas en la ecuación. Por último, el vector de fuerzas se construirá con los momentos de empotramiento, los cuales dependerán de la carga y del tipo de apoyos que tenga la viga hiperestática que se esté resolviendo.

En la tabla 4.2 se muestran los momentos de empotramiento y reacciones de vigas doblemente empotradas y de vigas empotradas simplemente apoyadas, las cuales presentan distintos tipos de cargas. Esta tabla será la que se ocupará para construir el vector de fuerzas de los próximos ejercicios que se resuelvan.

MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFETO Y REACCIONES EN LOS APOYOS





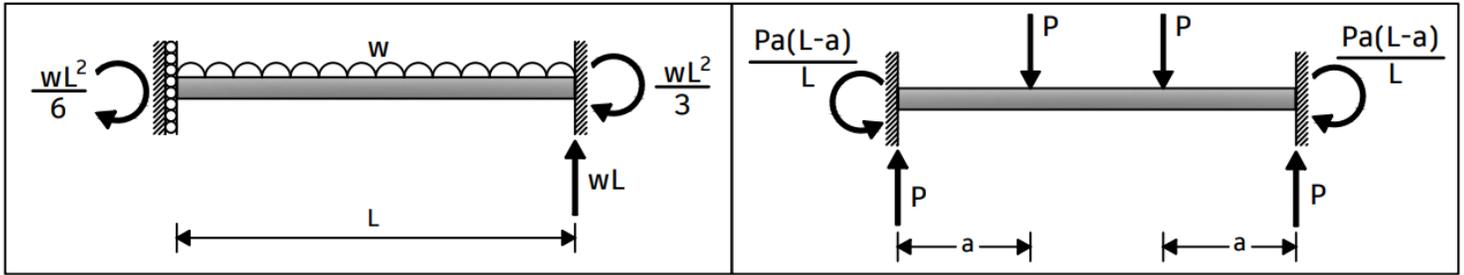
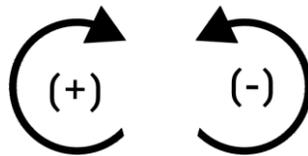
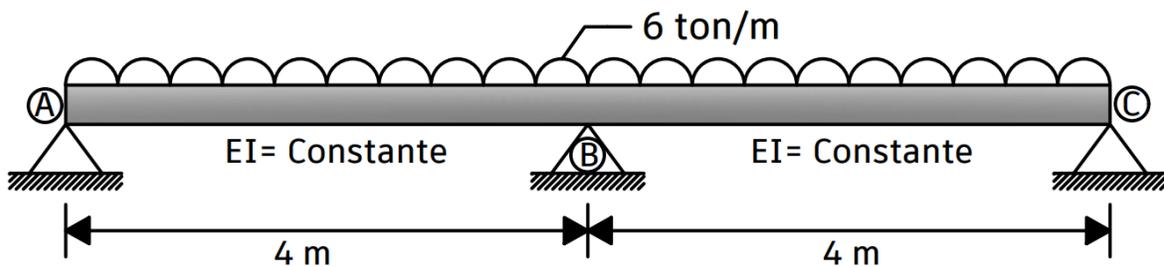


Tabla 4.2. Momentos de empotramiento perfecto y reacciones en los apoyos.

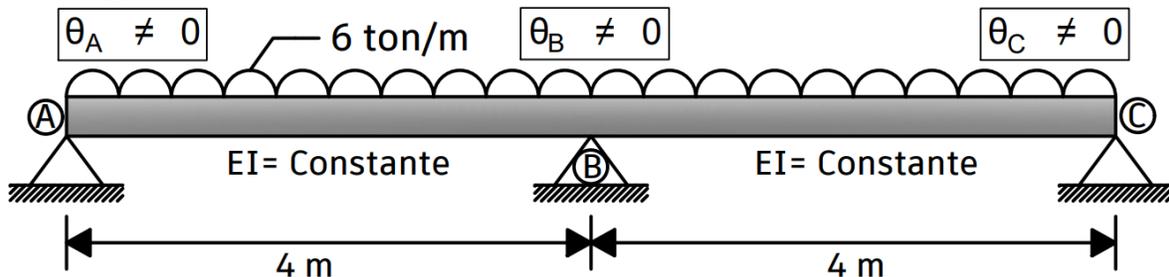
Una vez explicado todos los conceptos necesarios para entender el método de las rigideces, se pasará a resolver ejercicios para que se entienda mejor lo antes mencionado, pero al resolver los ejercicios se debe de recordar que la convención de signos que se estará ocupando, es la que un momento en sentido antihorario tiene signo negativo y un momento en sentido horario tiene un signo positivo.



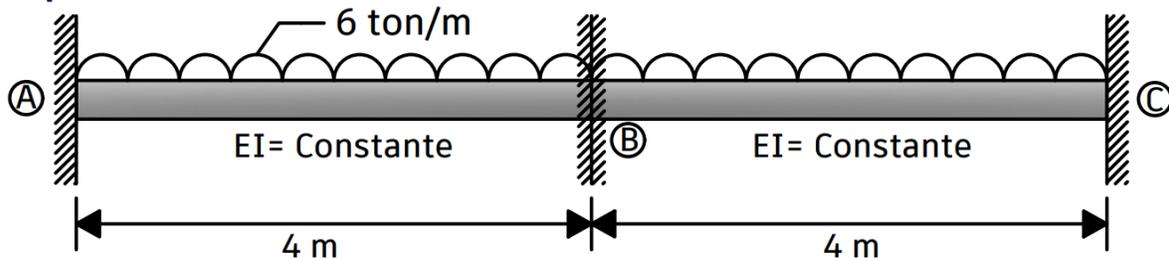
Ejercicio 4.1. Calcular las reacciones en los apoyos de una viga hiperestática utilizando el método de las rigideces. La viga tiene dos claros de 4 metros y es sometida a una carga uniformemente repartida de 6 ton/m, se supone que la sección transversal es constante por lo que también lo es el valor del módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I) de la viga.



PASO ①: Se identifican los grados libertad presentes en la viga hiperestática.

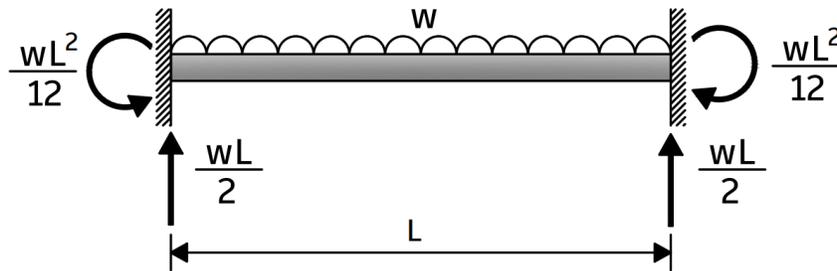


PASO ②: Se restringen los grados de libertad rotacionales con un empotramiento.

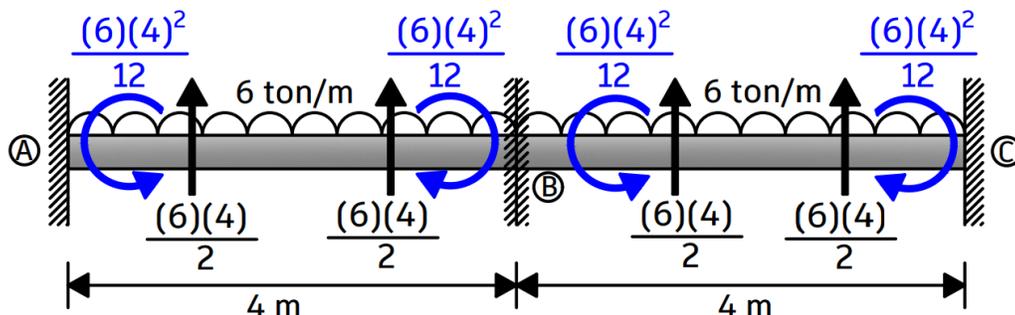
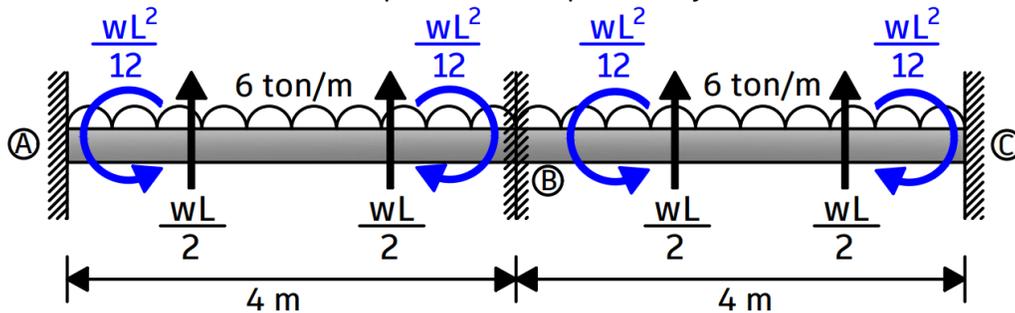


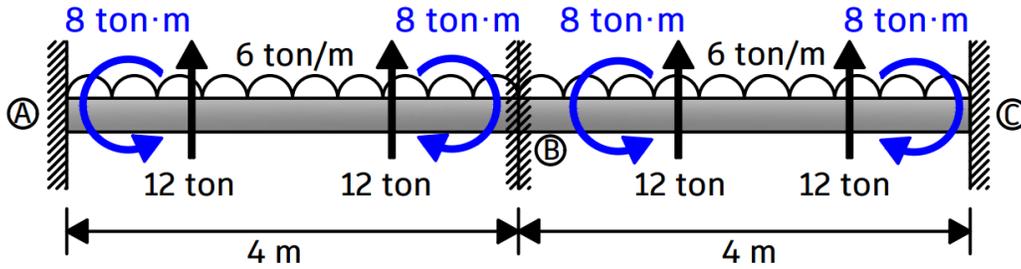
PASO ③: Se calculan los momentos de empotramiento perfecto y reacciones de la viga restringida con empotramientos y se construye el vector de fuerzas $\{F\}$. Para calcular los valores de los momentos y reacciones, se hará uso de la tabla 4.2.

La tabla 4.2 nos dice que, para una viga doblemente empotrada con una carga uniformemente repartida, los momentos de empotramiento perfecto y las reacciones en los apoyos empotrados, son los siguientes:



Se calculan los momentos de empotramiento perfecto y las reacciones:





Para la construcción del vector de fuerzas, se colocará el momento del empotramiento A, la suma de los momentos del empotramiento B y el momento del empotramiento C. Las fuerzas de cada empotramiento se omiten para la construcción del vector de fuerzas. Como la viga original tiene solo apoyos fijos y estos apoyos solo tienen un grado de libertad la cual es una rotación, esto nos indica que en el vector de fuerzas solo se colocarán los momentos de cada empotramiento.

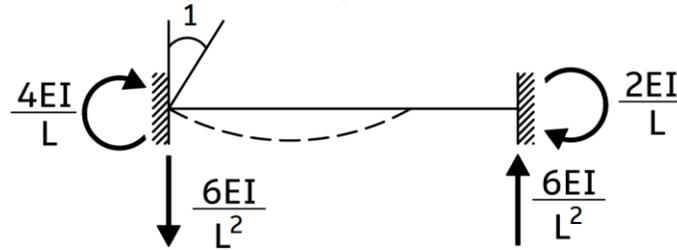
Si se restringe un desplazamiento, en el vector de fuerzas se colocará una fuerza y si se restringe una rotación, en el vector de fuerzas se colocará un momento. En el ejercicio en el punto A se restringió una rotación, por lo que en el vector de fuerzas se coloca el momento de empotramiento perfecto que se encuentra en el punto A. En el punto B se restringió otra rotación, por lo que en el vector de fuerzas se colocará la suma de los momentos de empotramiento perfecto que se encuentra en el punto B. Por último, en el punto C se restringió igual una rotación, por lo que en el vector de fuerzas se coloca el momento de empotramiento perfecto que se encuentra en el punto C.

Una vez explicado cómo se construye el vector de fuerzas, se pasa a construir dicho vector:

$$\{ F \} \rightarrow \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} -8 \\ 8 - 8 \\ 8 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

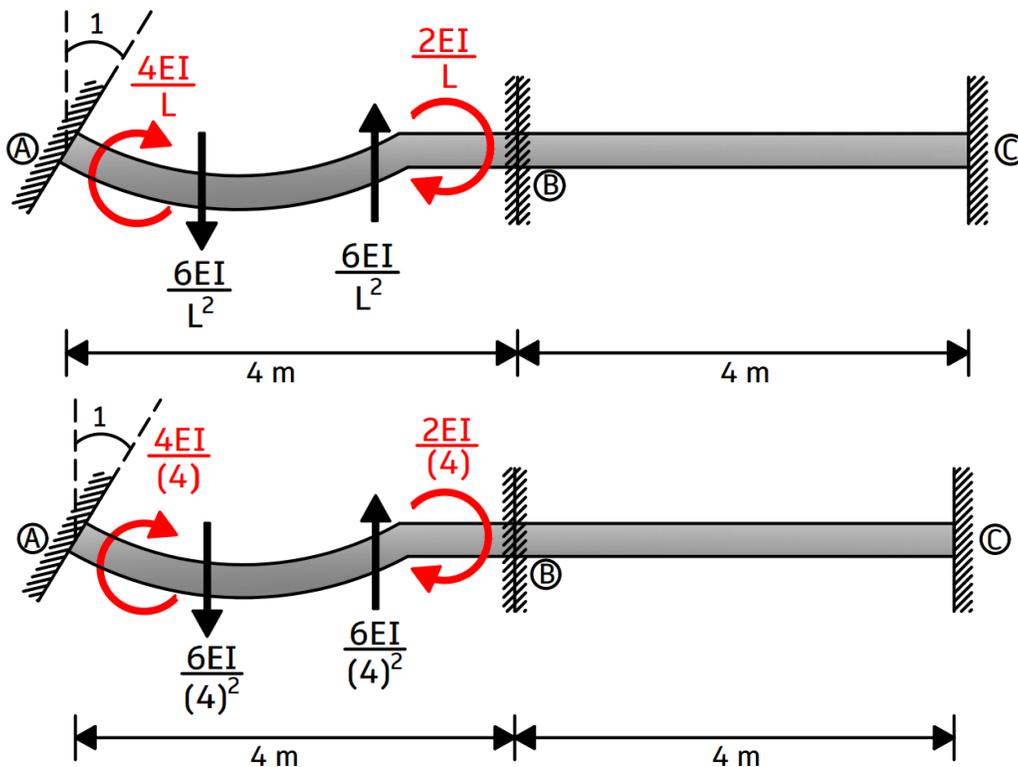
PASO ④: imposición de rotaciones unitarias y obtención de los coeficientes de rigidez angular para la construcción de la matriz de rigidez [K].

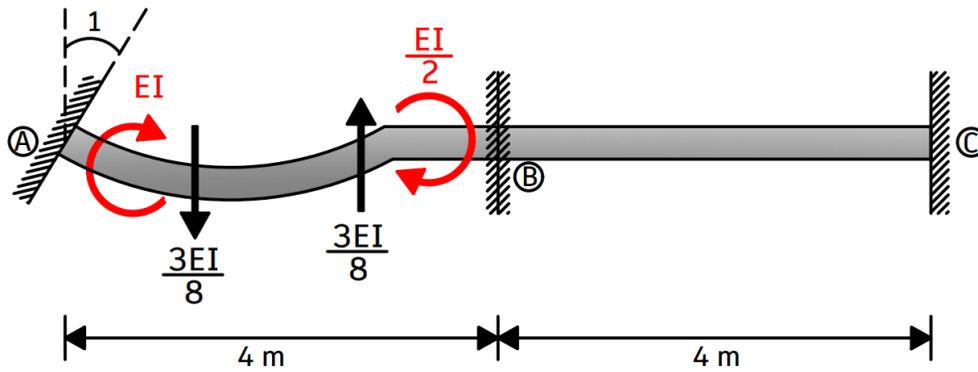
Se impone una rotación unitaria en el empotramiento A, al hacer esto se generarán coeficientes de rigidez angular, los cuales están presentes en la tabla 4.1. Esta tabla nos dice que en una viga doblemente empotrada que presenta una rotación unitaria, tendrá como coeficientes de rigidez los siguientes valores:



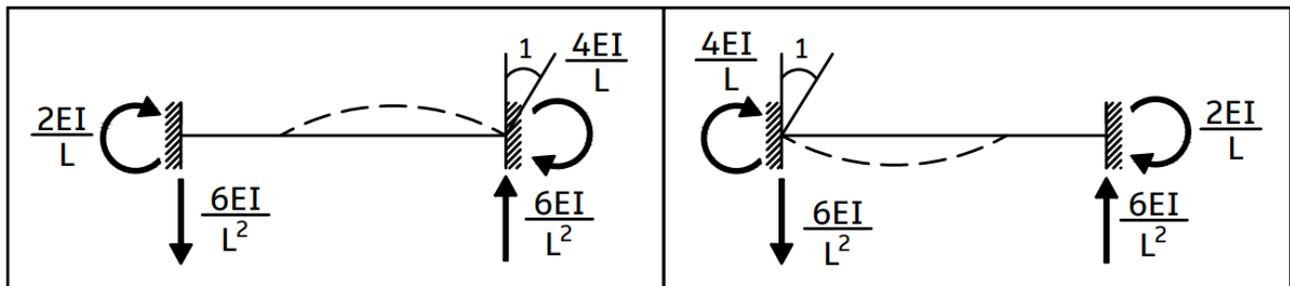
Se colocan los coeficientes de rigidez angular en la viga sin cargas externas, es decir, sin la carga uniformemente repartida de 6 ton/m. Se supone que la rotación en el empotramiento A tiene un valor unitario:

(θ_A)





Se impone una rotación unitaria en el empotramiento B y se calculan los valores de los coeficientes de rigidez angular, utilizando la tabla 4.1:

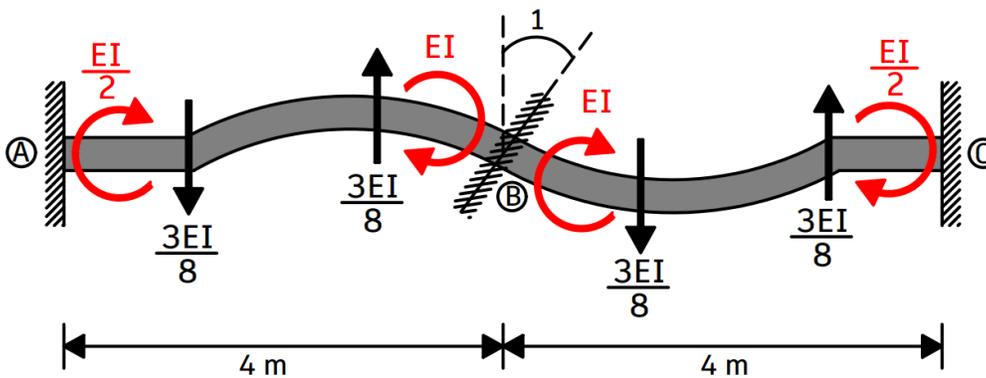
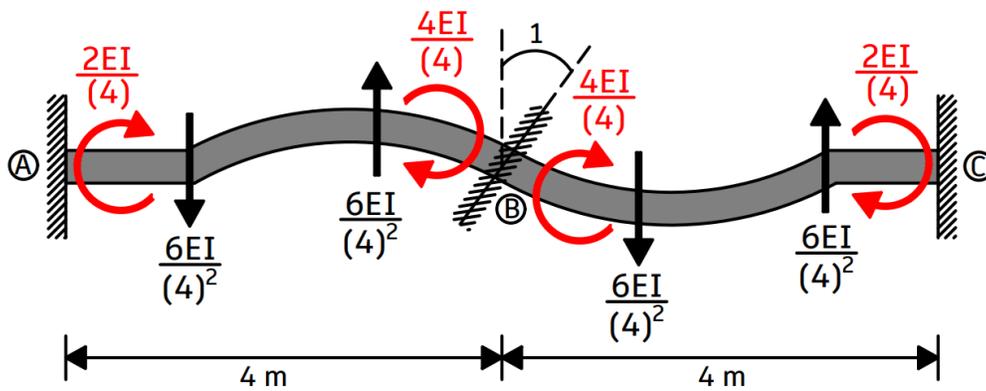
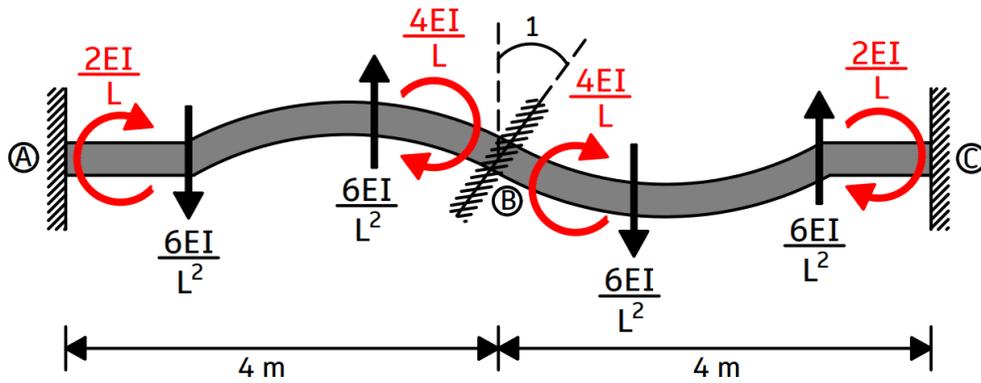


Se puede observar que, en una viga doblemente empotrada, en el extremo donde se impone una rotación unitaria, siempre se tendrá un momento positivo con un valor de $(4EI/L)$ y el extremo contrario siempre tendrá un momento positivo con un valor de $(2EI/L)$, a su vez, deberán de tener dos fuerzas cortantes que provoquen un momento antihorario negativo.

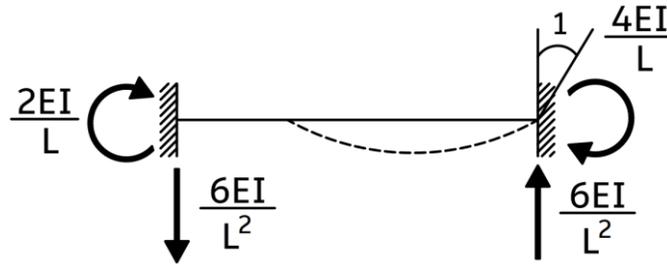
Es importante que se entienda lo antes mencionado, para que se facilite la colocación de momentos y fuerzas en vigas doblemente empotrada que presentan una rotación unitaria. De igual manera, será de gran ayuda el entender lo mencionado, para que se coloquen los momentos y fuerzas en el sentido correcto y no haya error alguno en el procedimiento.

Se prosigue con el cálculo de las rigideces angulares que se generan cuando se impone una rotación unitaria en el empotramiento del punto B:

(θ_B)

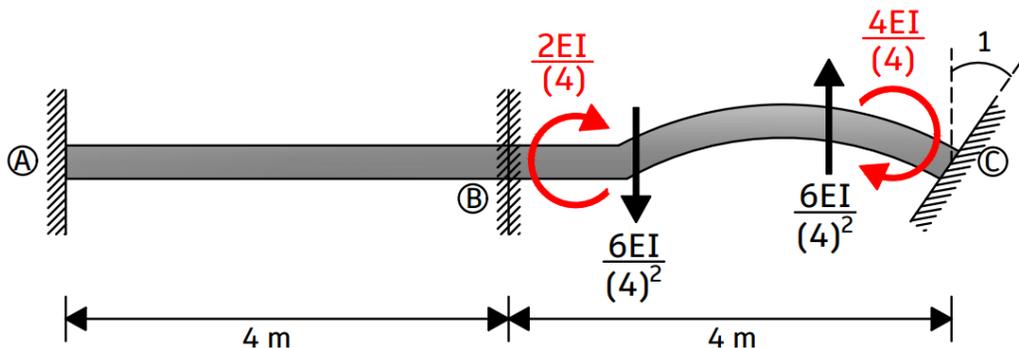
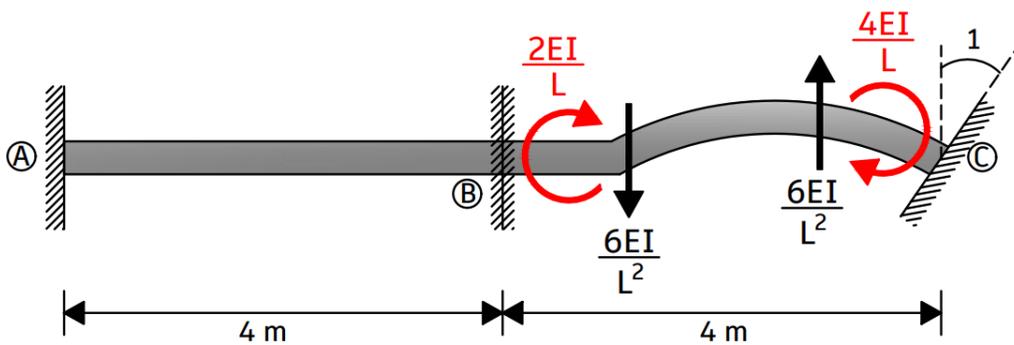


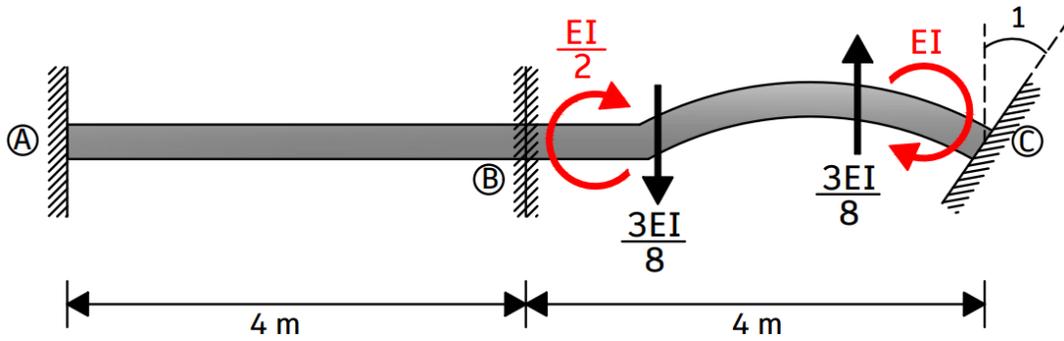
Por último, se impone una rotación unitaria en el empotramiento C y se calculan los valores de los coeficientes de rigidez angular:



Se puede volver a observar que, en el extremo empotrado donde se impone una rotación unitaria, se tendrá un momento positivo con un valor de $(4EI/L)$ y el extremo contrario tendrá un momento positivo con un valor de $(2EI/L)$ y a su vez, se tendrán dos fuerzas cortantes que provoquen un momento antihorario negativo.

(θ_C)





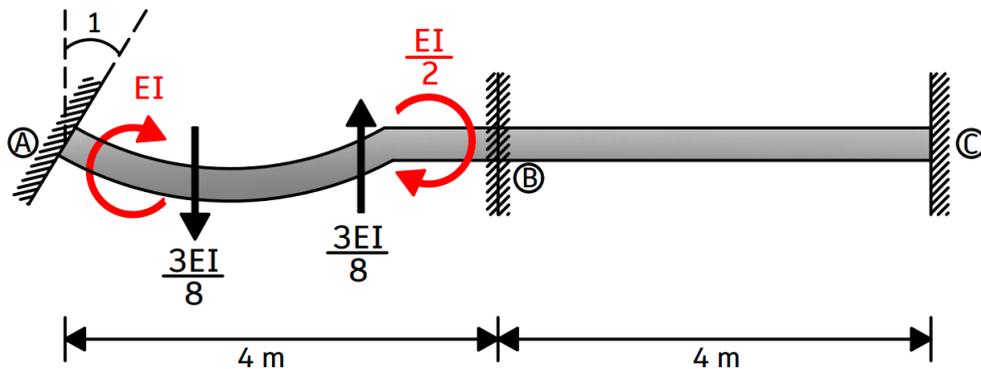
Como solo se restringieron grados de libertad rotacionales, en la matriz de rigidez solo se colocarán momentos, si se hubieran restringido desplazamientos verticales, se hubieran colocado fuerzas cortantes, pero como solo fueron rotaciones, solo se ocuparán los valores de los momentos y se despreciarán las fuerzas cortantes para la construcción de la matriz de rigidez.

Para construir la matriz de rigidez adecuadamente, se debe de colocar en la primera columna, la suma de los momentos que se encuentran en el empotramiento A, empotramiento B y en el empotramiento C, que se generan al imponer una rotación unitaria en el empotramiento A.

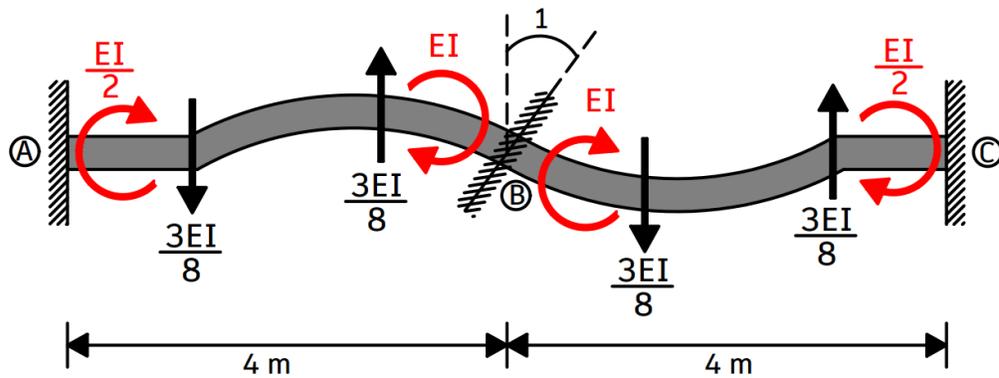
En la segunda columna se debe de colocar la suma de los momentos que se encuentran en el empotramiento A, empotramiento B y en el empotramiento C, que se generan al imponer una rotación unitaria en el empotramiento B.

Y la tercera columna se debe de colocar la suma de los momentos que se encuentran en el empotramiento A, empotramiento B y en el empotramiento C, que se generan al imponer una rotación unitaria en el empotramiento C.

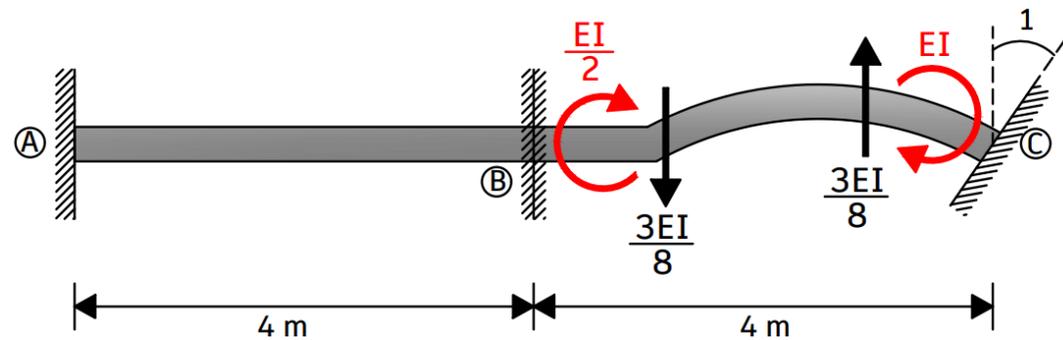
(θ_A)



(θ_B)



(θ_C)



MATRIZ DE RIGIDEZ [K]

Si se restringe una rotación, en la matriz de rigidez se colocará el momento o la suma de los momentos que se encuentren en el punto o apoyo donde se restringió una rotación y si se restringe un desplazamiento vertical, en la matriz de rigidez se colocará la fuerza o la suma de las fuerzas que se encuentren en el punto o apoyo donde se restringió un desplazamiento vertical.

En el ejercicio que se está resolviendo, se restringió una rotación en los apoyos A, B y C, por lo que, para la construcción de la matriz de rigidez se colocará el momento o la suma de los momentos que se encuentran en los empotramientos A, B y C.

Si se hubiera restringido un desplazamiento vertical en algún punto de la viga que se está resolviendo, se colocaría en la matriz de rigidez la fuerza o la suma de las fuerzas que se encontrarán en el punto donde se restringió dicho desplazamiento, pero en este ejercicio no se da este caso.

La matriz de rigidez del ejercicio que se esta resolviendo queda se la siguiente manera:

θ_A	θ_B	θ_C		θ_A	θ_B	θ_C		θ_A	θ_B	θ_C
EI	$\frac{EI}{2}$	0	M_A	\longrightarrow	EI	1	$\frac{1}{2}$	0	M_A	
$\frac{EI}{2}$	$EI + EI$	$\frac{EI}{2}$	M_B		$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	M_B		
0	$\frac{EI}{2}$	EI	M_C		0	$\frac{1}{2}$	1	M_C		

Se puede observar en la matriz de rigidez, que en la primera columna se colocaron los momentos de cada empotramiento que se generaron al imponer una rotación en el empotramiento A. En la segunda columna se colocaron los momentos de cada empotramiento que se generaron al imponer una rotación en el empotramiento B y por último, en la tercera columna se colocaron los momentos de cada empotramiento que se generaron al imponer una rotación en el empotramiento C.

También se puede observar que la matriz es simétrica, los valores de la diagonal principal de la matriz son mayores a cero y la matriz menos su transpuesta da igual a cero, por lo que se puede concluir que la matriz es correcta.

PASO ⑤: Se construye el vector de desplazamiento $\{u\}$.

La construcción del vector de desplazamiento es fácil, ya que solo se deben de colocar los grados de libertad que se desconocen y que se restringieron con un empotramiento para que después se les impusiera un valor unitario.

En este ejercicio los grados de libertad que se desconocen son las rotaciones en los puntos A, B y C, por lo que, con estas rotaciones se creará el vector de desplazamiento:

$$\{u\} \longrightarrow \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix}$$

Es importante mencionar que estas rotaciones son las incógnitas, las cuales se calculara su valor utilizando la ecuación 4.1 que se vio al principio de esta sección.

PASO ⑥: Se calculan los valores de las rotaciones reales, utilizando la ecuación 4.1.

$$[K]\{u\} + \{F\} = 0$$

Como el vector de desplazamiento $\{u\}$ es la incógnita en la ecuación 4.1, se despeja este vector para conocer los valores de las rotaciones que conforman este vector:

$$\{u\} = -[K]^{-1}\{F\}$$

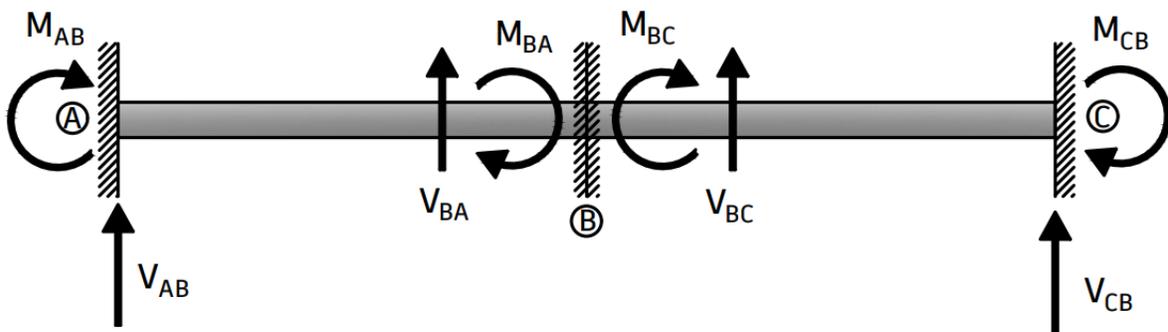
Se sustituye la matriz de rigidez y los vectores calculados en los pasos anteriores:

$$\begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = -\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo la ecuación, se obtiene como resultado las siguientes rotaciones:

$$\theta_A = \frac{8}{EI} \qquad \theta_B = 0 \qquad \theta_C = -\frac{8}{EI}$$

PASO ⑦: Con ayuda de las rotaciones, los coeficientes de rigidez y los momentos de empotramiento, se calculan los valores de las fuerzas y momentos en cada apoyo.

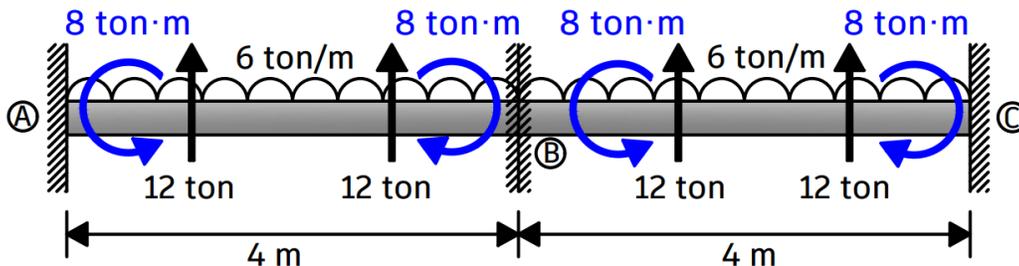


Para calcular el valor de las fuerzas y los momentos en cada empotramiento, se hará una suma y multiplicación de valores, por ejemplo, para calcular el valor del momento M_{AB} , se hará una suma de momentos, el momento de empotramiento perfecto, más el momento que se generó cuando se impuso una rotación unitaria en el empotramiento A multiplicado por el valor real de la rotación en A (θ_A), más el momento que se generó cuando se impuso una rotación unitaria en el

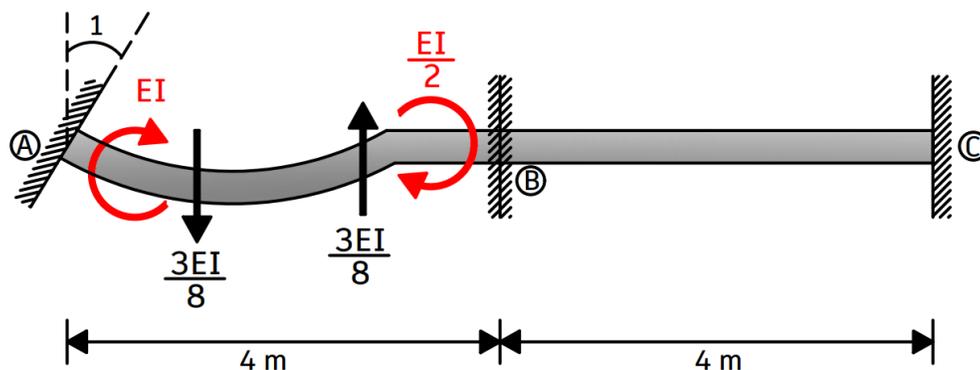
empotramiento B multiplicado por el valor real de la rotación en B (θ_B), más el momento que se generó cuando se impuso una rotación unitaria en el empotramiento C multiplicado por el valor real de la rotación en C (θ_C). El resultado de la suma será el valor del momento (M_{AB}) en el apoyo A.

Para calcular la fuerza F_{AB} , se hará una suma de fuerzas, la fuerza que se generó debido a la carga uniformemente repartida, más la fuerza que se generó cuando se impuso una rotación unitaria en el empotramiento A multiplicado por el valor real de la rotación en A (θ_A), más la fuerza que se generó cuando se impuso una rotación unitaria en el empotramiento B multiplicado por el valor real de la rotación en B (θ_B), más la fuerza que se generó cuando se impuso una rotación unitaria en el empotramiento C multiplicado por el valor real de la rotación en C (θ_C). El resultado de la suma será el valor de la fuerza (F_{AB}) en el apoyo A.

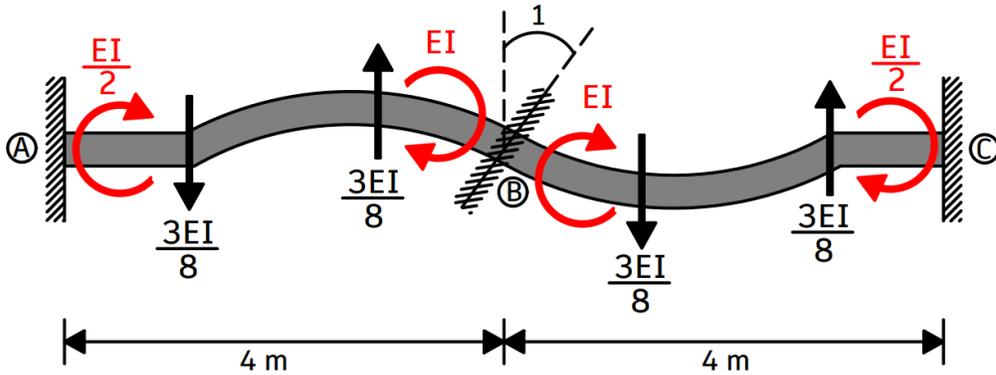
El procedimiento matemático que se realizará para calcular el momento y la fuerza en el empotramiento A, que se acaba de explicar, será el mismo para calcular los momentos y fuerzas en cada empotramiento:



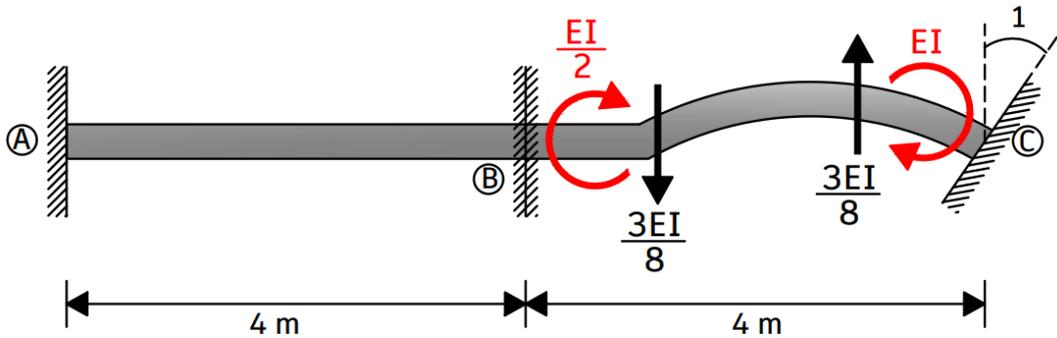
$$\left(\theta_A = \frac{8}{EI}\right)$$



$$(\theta_B = 0)$$



$$(\theta_C = -\frac{8}{EI})$$



$$M_{AB} = -8 + EI \left(\frac{8}{EI} \right) + \frac{EI}{2} (0)$$

$$\therefore M_{AB} = 0$$

$$V_{AB} = 12 - \frac{3EI}{8} \left(\frac{8}{EI} \right) - \frac{3EI}{8} (0)$$

$$\therefore V_{AB} = 9 \text{ ton}$$

$$M_{BA} = 8 + \frac{EI}{2} \left(\frac{8}{EI} \right) + EI(0)$$

$$\therefore M_{BA} = 12 \text{ ton}$$

$$V_{BA} = 12 + \frac{3EI}{8} \left(\frac{8}{EI} \right) + \frac{3EI}{8} (0)$$

$$\therefore V_{BA} = 15 \text{ ton}$$

$$M_{BC} = -8 + EI(0) + \frac{EI}{2} \left(-\frac{8}{EI} \right)$$

$$\therefore M_{BC} = -12 \text{ ton}$$

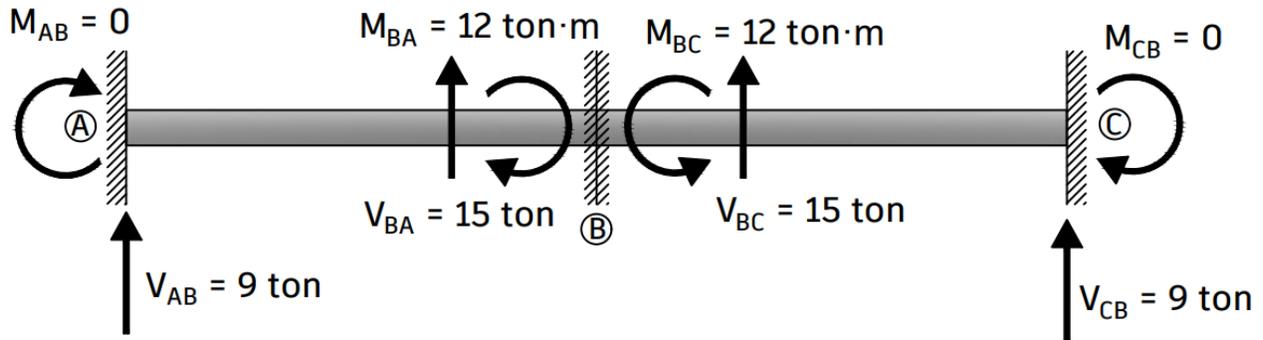
$$V_{BC} = 12 - \frac{3EI}{8} (0) - \frac{3EI}{8} \left(-\frac{8}{EI} \right)$$

$$\therefore V_{BC} = 15 \text{ ton}$$

$$M_{CB} = 8 + \frac{EI}{2} (0) + EI \left(-\frac{8}{EI} \right)$$

$$\therefore M_{CB} = 0$$

$$V_{CB} = 12 + \frac{3EI}{8}(0) + \frac{3EI}{8}\left(-\frac{8}{EI}\right) \quad \therefore \quad V_{CB} = 9 \text{ ton}$$



Para concluir, el valor de la reacción en el apoyo fijo A de la viga original, será el valor de la fuerza cortante V_{AB} , el valor de la reacción en el apoyo fijo B de la viga original, será igual a la suma de las fuerzas cortantes V_{BA} y V_{BC} , por último, el valor de la reacción en el apoyo fijo C de la viga original, será el valor de la fuerza cortante V_{CB} .

La suma de los momentos en el empotramiento B, deberá de ser igual a cero, ya que la viga original presenta un apoyo fijo en el punto B:

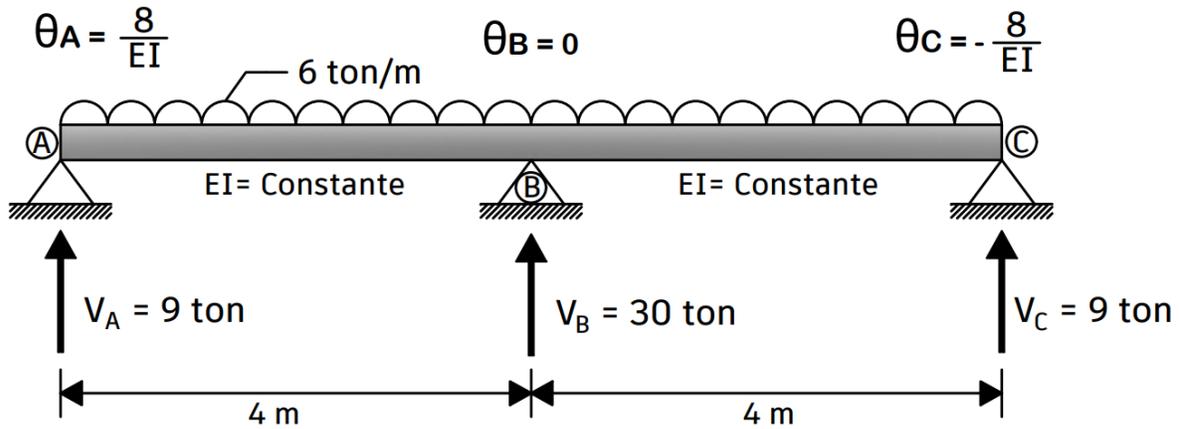
$$M_B = M_{BA} + M_{BC} = 12 \text{ ton} \cdot \text{m} - 12 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad \therefore \quad M_B = 0$$

$$V_B = V_{BA} + V_{BC} = 15 \text{ ton} + 15 \text{ ton} \quad \therefore \quad V_B = 30 \text{ ton}$$

$$V_A = V_{AB} \quad \therefore \quad V_A = 9 \text{ ton}$$

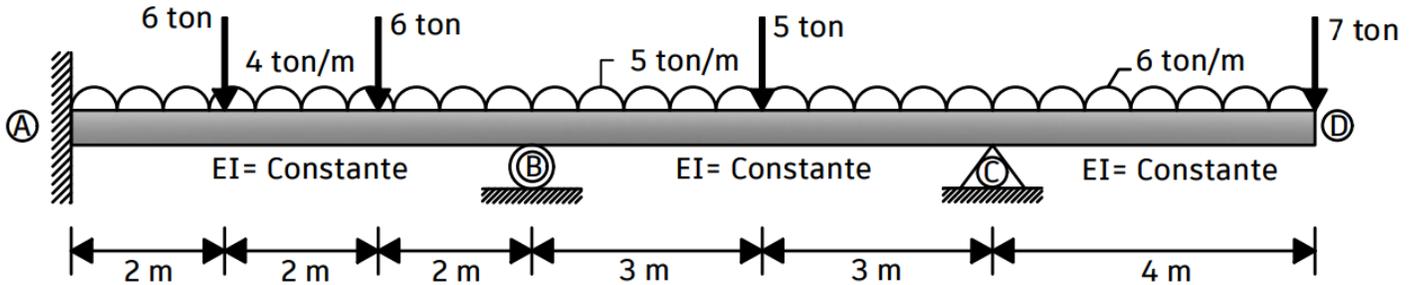
$$V_C = V_{CB} \quad \therefore \quad V_C = 9 \text{ ton}$$

La viga original está compuesta solo de apoyos fijos y se sabe que un apoyo fijo no presenta un momento como reacción, por lo que, una manera de confirmar si los resultados son correctos, es que los momentos o la suma de los momentos en cada apoyo empotrado debe ser igual a cero. Como se puede observar, los momentos en cada apoyo son igual a cero, por lo que se puede concluir que los resultados son correctos y las reacciones en los apoyos fijos de la viga hiperestática, quedan de la siguiente manera:

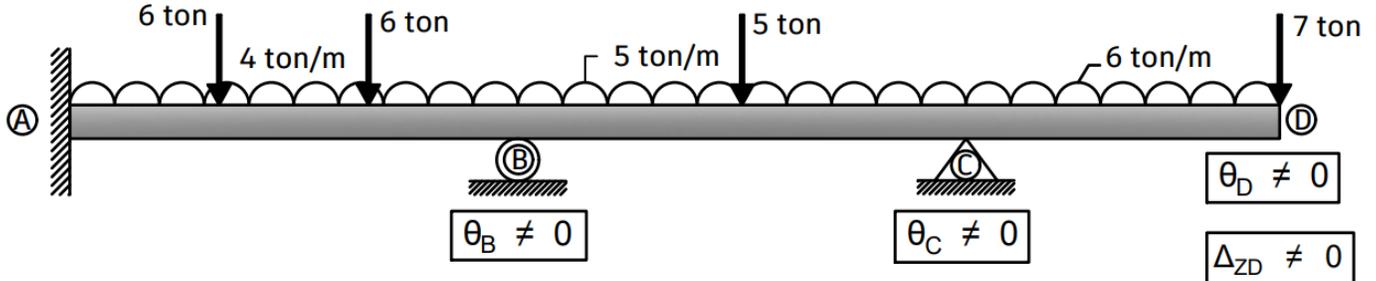


Así se concluye la solución del cálculo de las reacciones en los apoyos de una viga hiperestática.

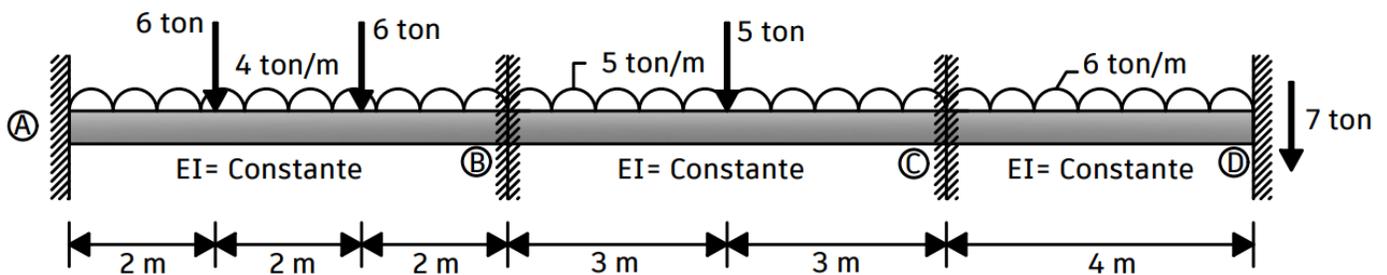
Ejercicio 4.2: Utilizando el método de las rigideces, calcular las reacciones en los apoyos de la siguiente viga hiperestática:



PASO ①: Se identifican los grados libertad presentes en la viga hiperestática.



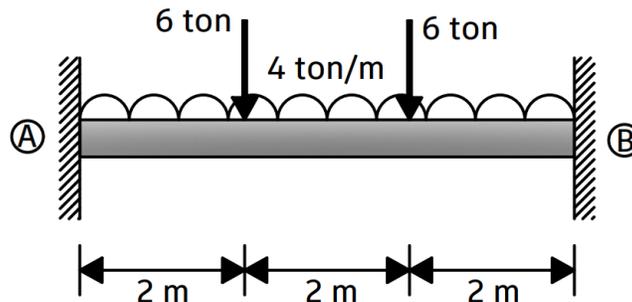
PASO ②: Se restringen los grados de libertad con un empotramiento.



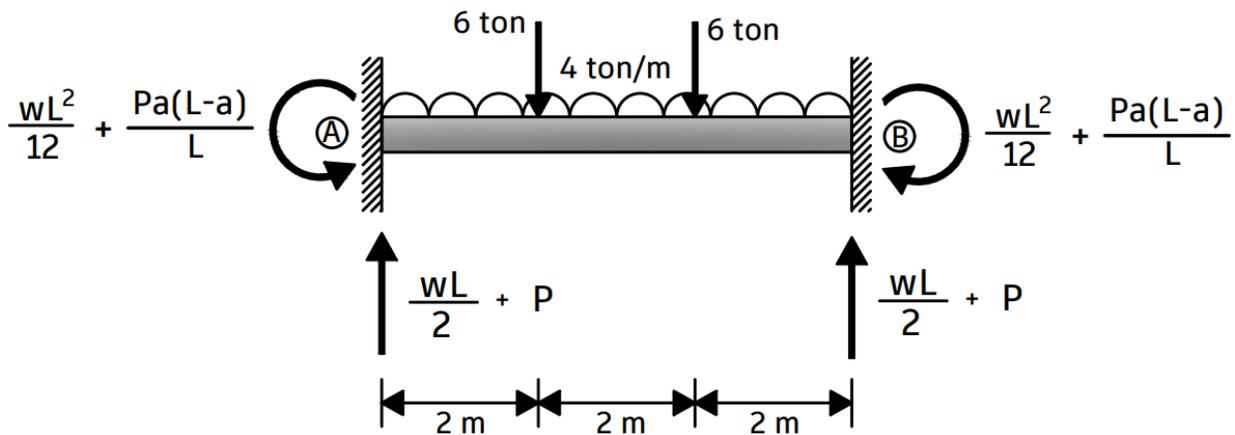
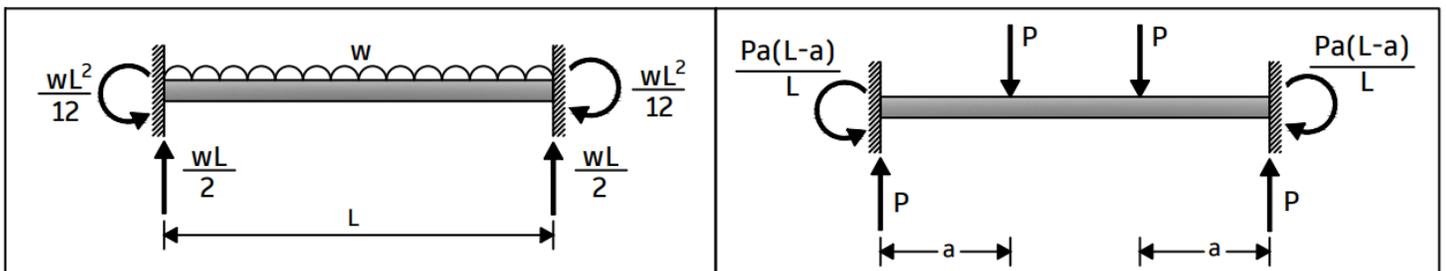
PASO ③: Se calculan los momentos de empotramiento perfecto y reacciones de la viga restringida con empotramientos y se construye el vector de fuerzas $\{F\}$. Para calcular los valores de los momentos y reacciones, se hará uso de la tabla 4.2.

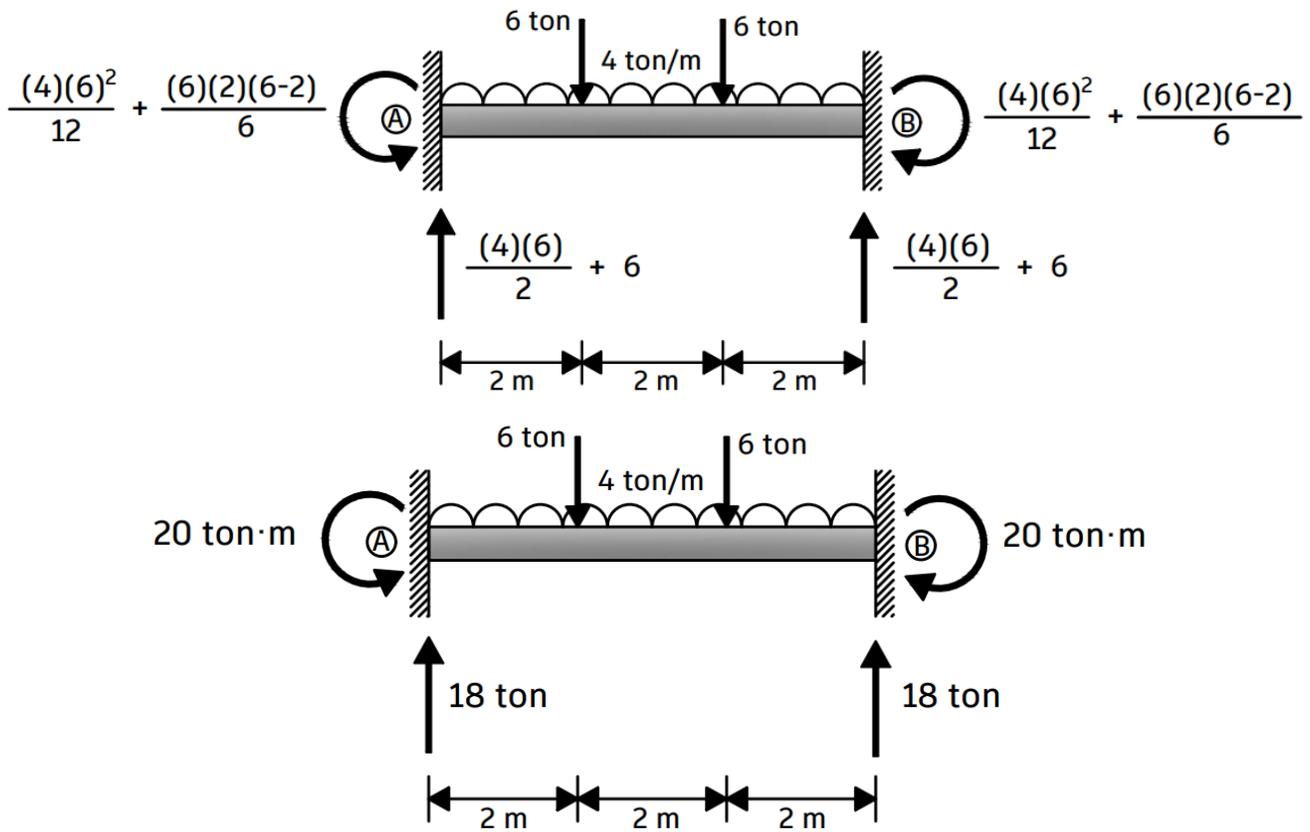
Para calcular las fuerzas y los momentos que se generan en los apoyos debido al sistema de cargas, se dividirá la viga en tres partes y se calcularán las fuerzas y momentos de cada parte de la viga por separado:

VIGA 1

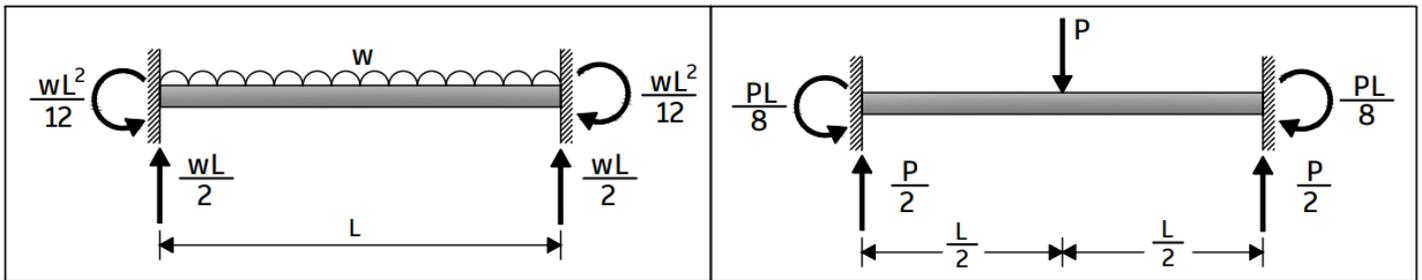
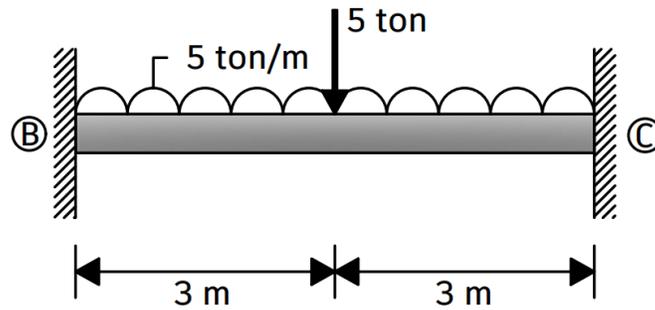


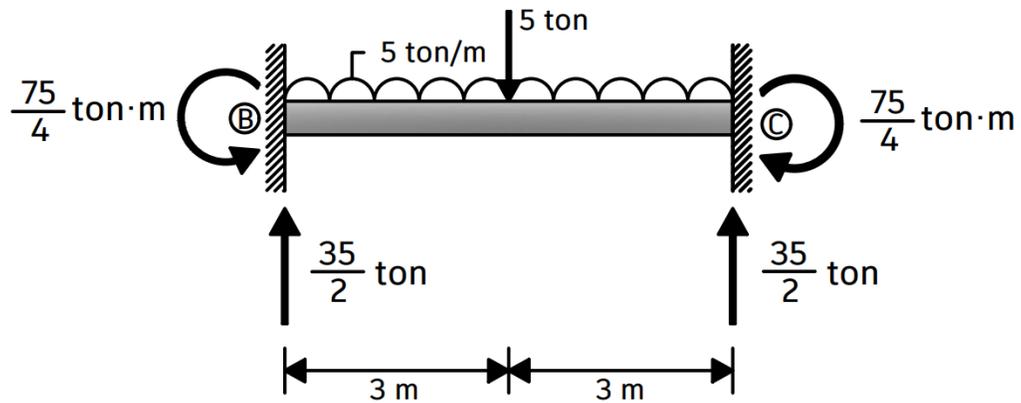
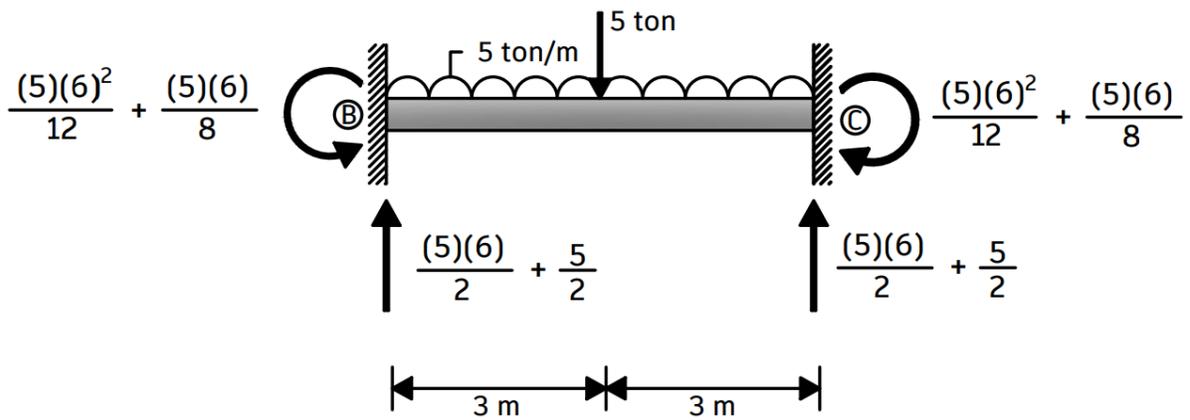
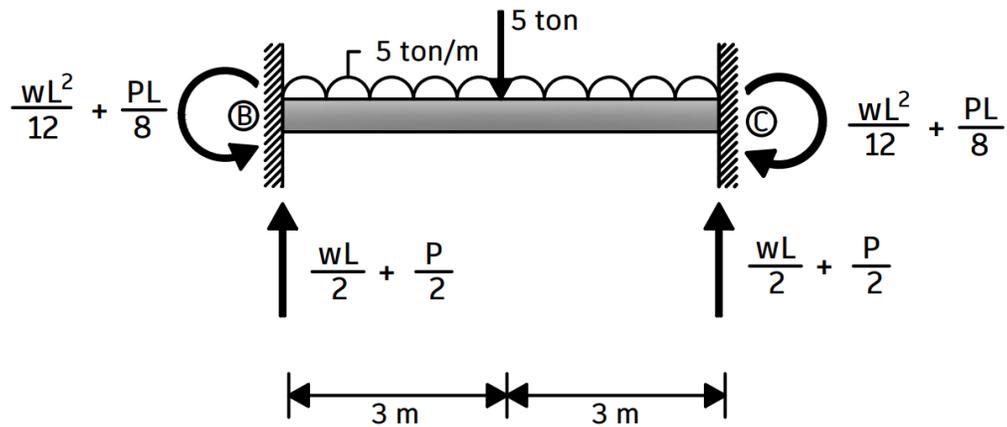
Valores de los momentos de empotramiento perfecto y reacciones en los apoyos, obtenidos de la tabla 4.2:



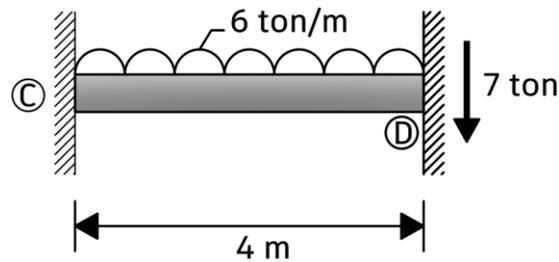


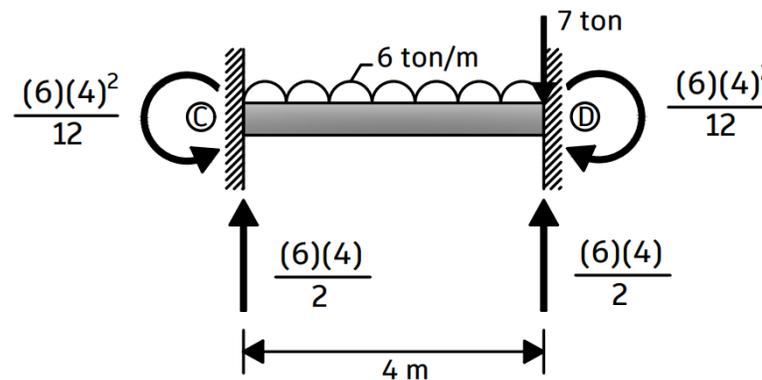
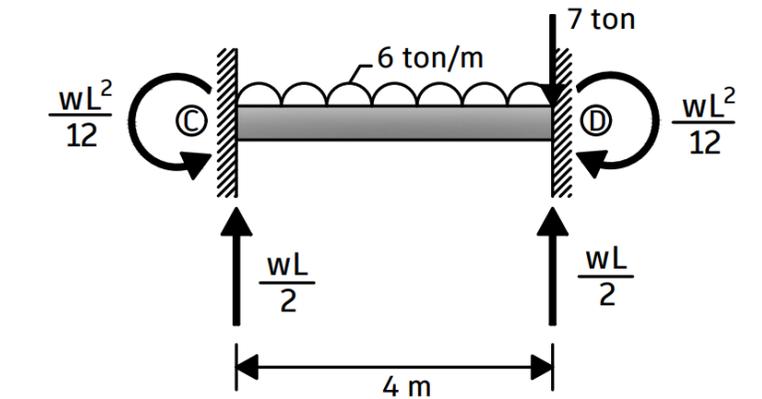
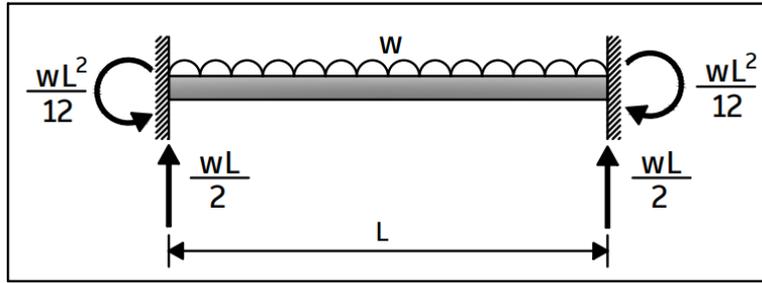
VIGA 2





VIGA 3



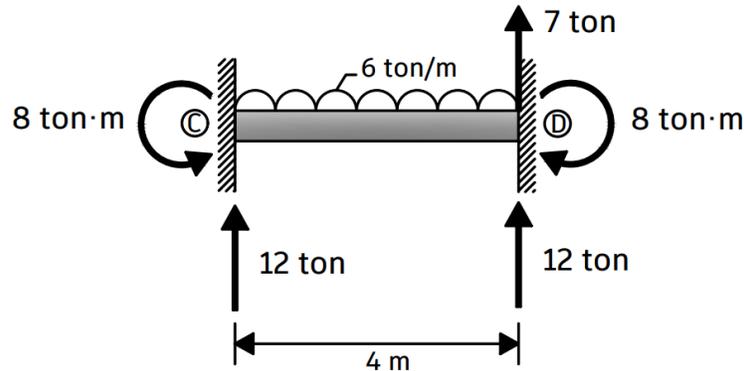


Las fuerzas externas que se encuentran aplicadas en algún punto donde se restringen sus grados de libertad con un empotramiento, se les cambiará el sentido para la construcción del vector de fuerzas, por ejemplo, si en una viga hiperestática existe una fuerza en sentido gravitacional (\downarrow) en algún apoyo o en algún punto donde se restringen sus grados de libertad con un empotramiento, para la construcción del vector de fuerzas, la fuerza se colocará en sentido anti gravitacional (\uparrow).

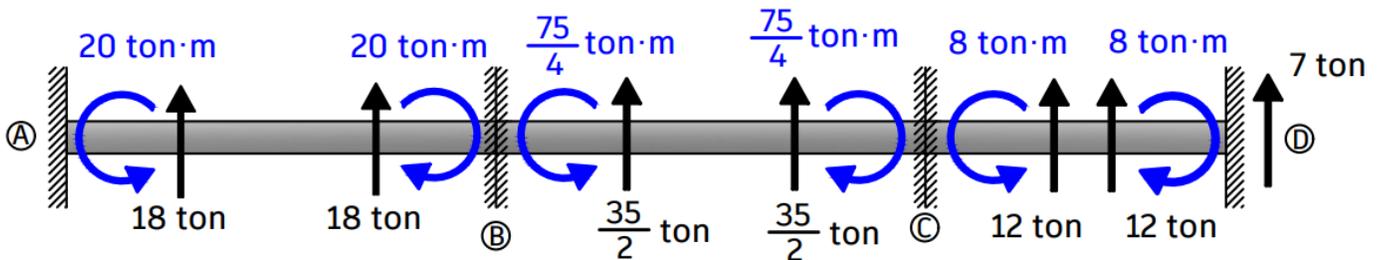
De igual manera, esta regla aplica para los momentos, por ejemplo, si en una viga existe un momento en sentido horario (\curvearrowright) en algún apoyo o en algún punto donde se restringen sus grados de libertad con un empotramiento, para la construcción del vector de fuerzas, el momento se colocará en sentido antihorario (\curvearrowleft).

En la viga hiperestática que se esta resolviendo, existe una fuerza de 7 toneladas en sentido gravitacional (\downarrow) aplicada en el punto D, por lo que, para la construcción del

vector de fuerzas, se le cambiará el sentido a esta fuerza y se colocará en sentido anti gravitacional (\uparrow):



Se colocan en una viga los valores de las fuerzas y los momentos de empotramiento perfecto que se calcularon en cada tramo de la viga por separado:

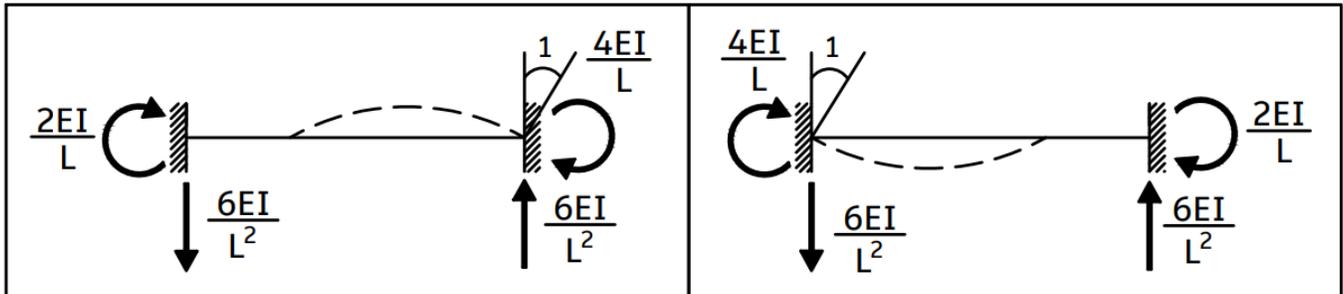


Se restringió la rotación en el apoyo B, por lo que en el vector de fuerzas se colocará la suma de los momentos que se encuentran en el empotramiento B. Se restringió la rotación en el punto C, por lo que se colocará en el vector de fuerzas la suma de los momentos que se encuentran en el empotramiento C. Se restringió la rotación en el punto D, por lo que se colocará en el vector de fuerzas el momento del empotramiento D, y también se restringió el desplazamiento vertical en el mismo punto, por lo que en el vector de fuerzas se colocará la suma de las fuerzas que se encuentran en el empotramiento D:

$$\{ F \} \rightarrow \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \\ M_D \\ F_D \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 20 - \frac{75}{4} \\ \frac{75}{4} - 8 \\ 8 \\ 7 + 12 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{43}{4} \\ 8 \\ 19 \end{Bmatrix}$$

PASO ④: imposición de desplazamientos y rotaciones unitarias y obtención de los coeficientes de rigidez para la construcción de la matriz de rigidez [K].

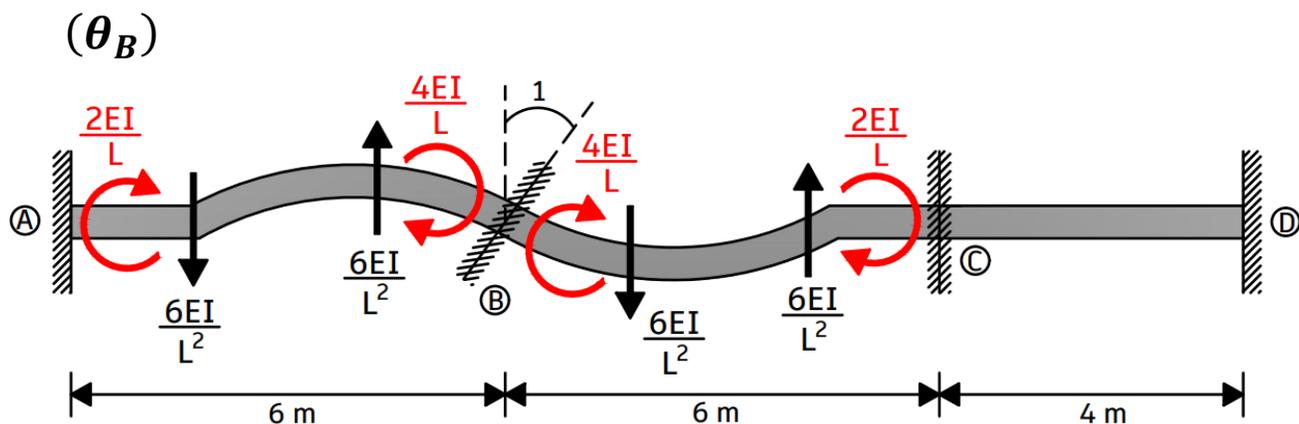
Se impone una rotación unitaria en el punto B ya que en este punto se restringió una rotación, para que después, utilizando la tabla 4.1 se calculen los coeficientes de rigidez en la viga que no presenta ninguna carga externa:

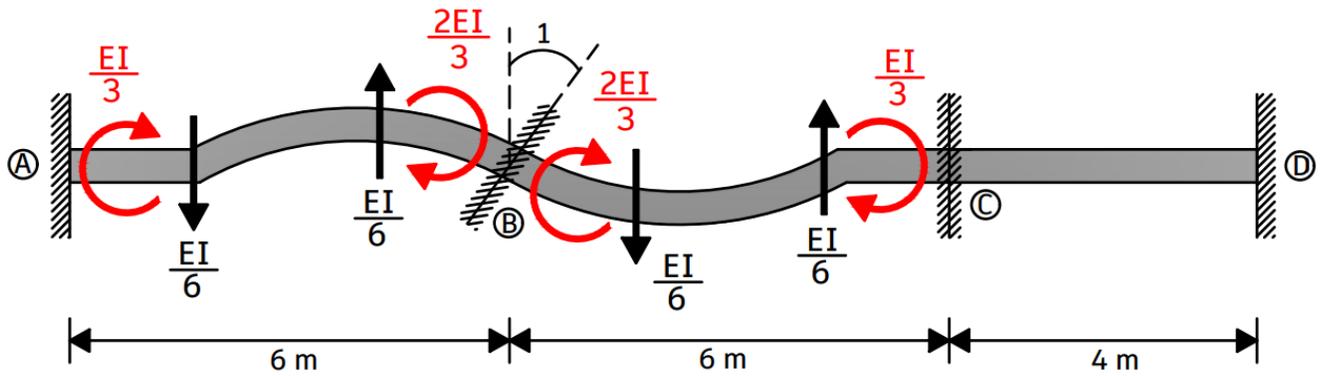
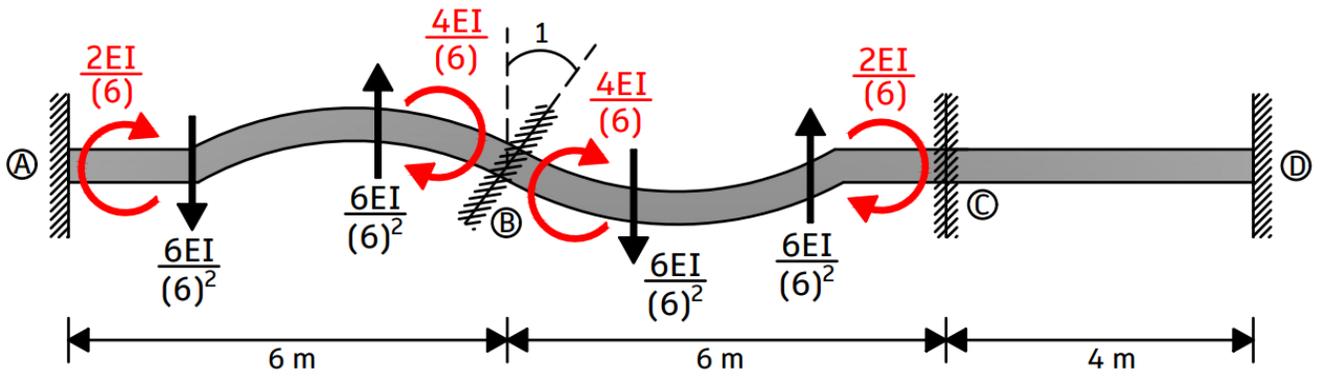


Se puede observar que, en una viga doblemente empotrada, en el apoyo empotrado donde se aplica una rotación unitaria, siempre tendrá un momento positivo de $(4EI/L)$, y el otro apoyo empotrado tendrá un momento positivo de $(2EI/L)$. También se tendrán dos fuerzas que provoquen un momento opuesto al de los momentos que están presentes en los apoyos empotrados, es decir, que el sentido de las dos fuerzas provoque un momento negativo antihorario.

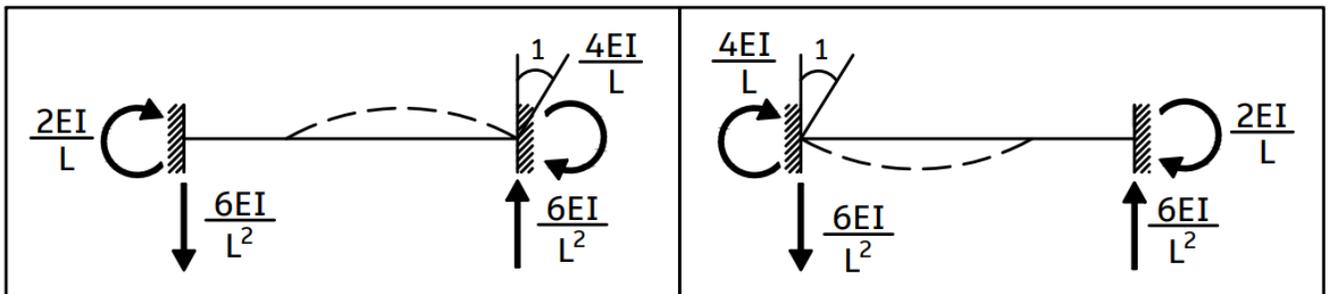
Se debe de entender perfectamente lo que se trata de explicar, para poder colocar los momentos y las fuerzas en el sentido correcto, para que no haya error alguno cuando se construya la matriz de rigidez.

Una vez explicado como colocar el sentido horario o antihorario de los momentos y el sentido gravitacional o anti gravitacional de las fuerzas, se pasa a calcular los coeficientes de rigidez de cada viga imponiendo una rotación o un desplazamiento, dependiendo del apoyo y el grado de libertad que se restringió:

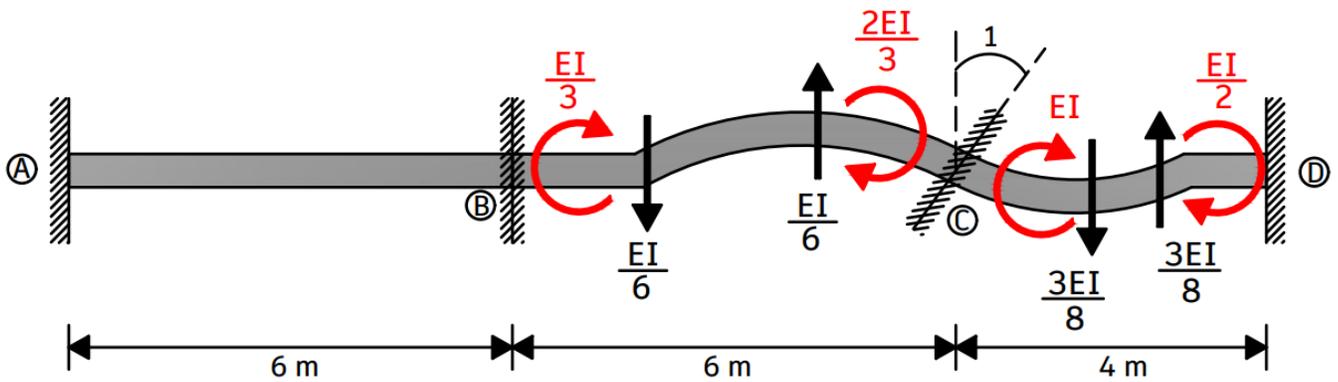
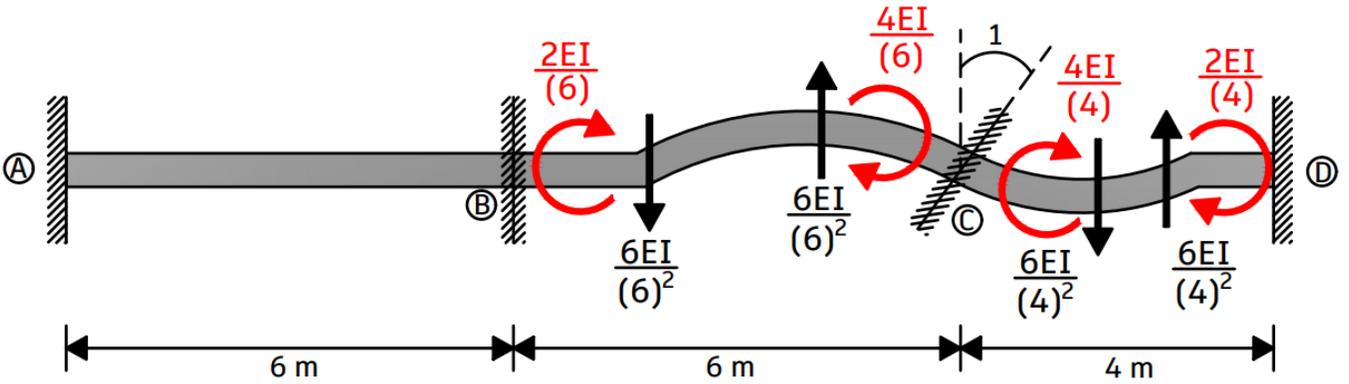
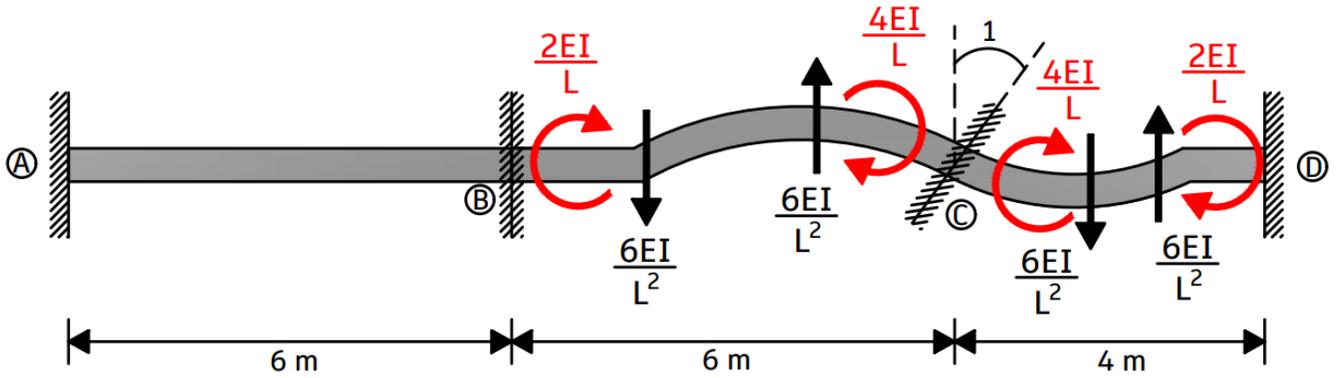




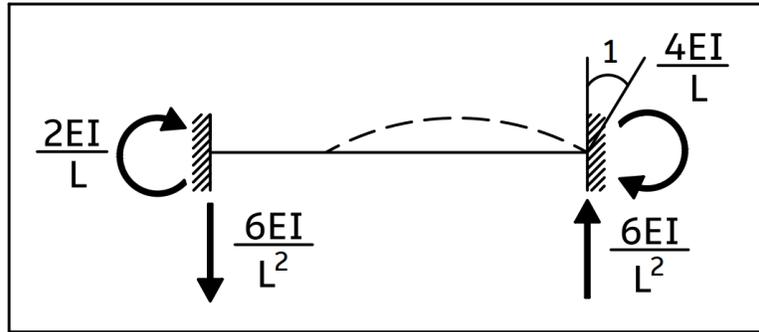
Se restringió con un empotramiento una rotación en el punto C, por lo que, se impondrá una rotación unitaria en el empotramiento C y se calcularán los coeficientes de rigidez que se generan, utilizando la tabla 4.1:



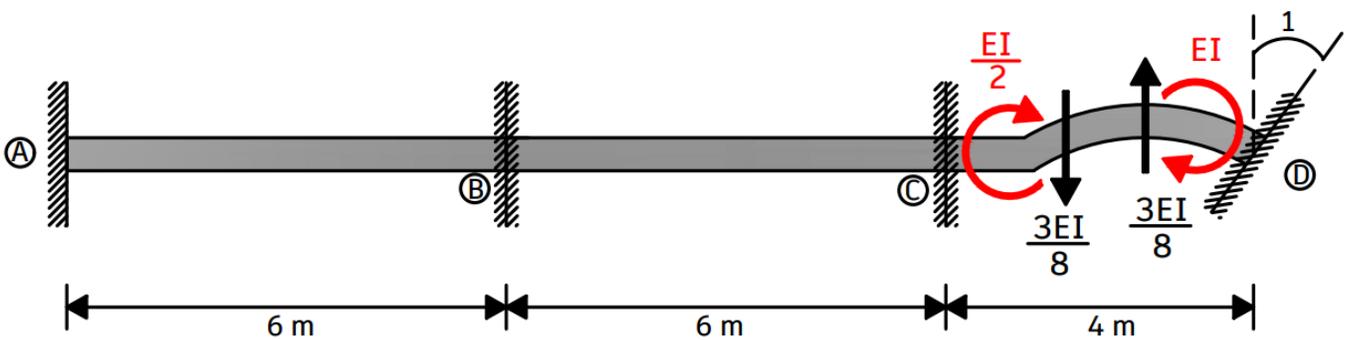
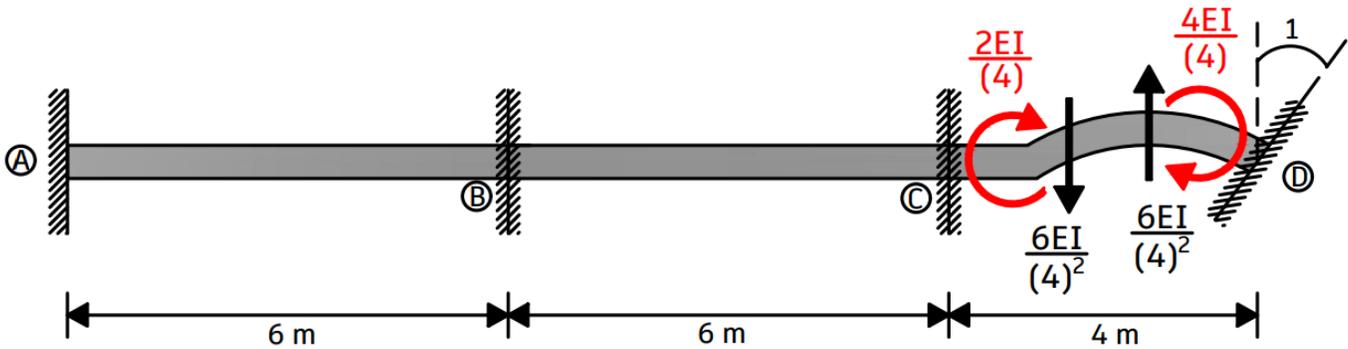
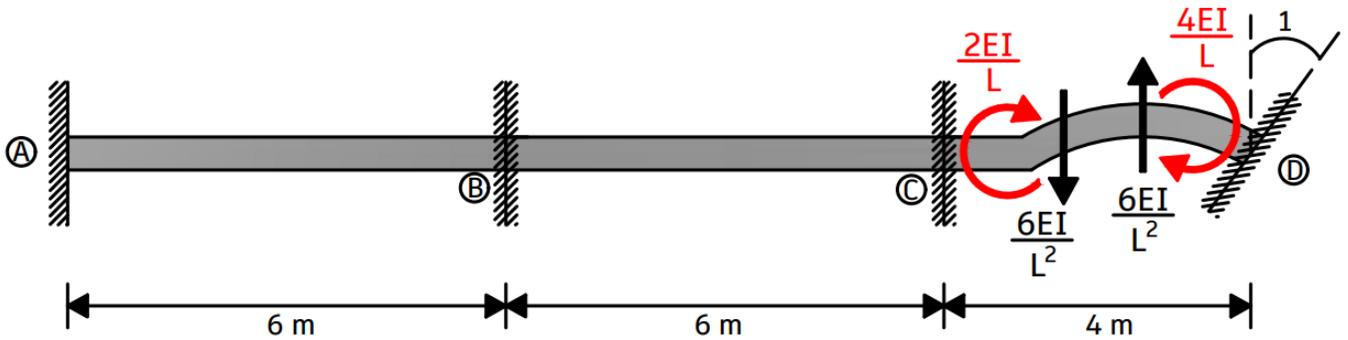
(θ_C)



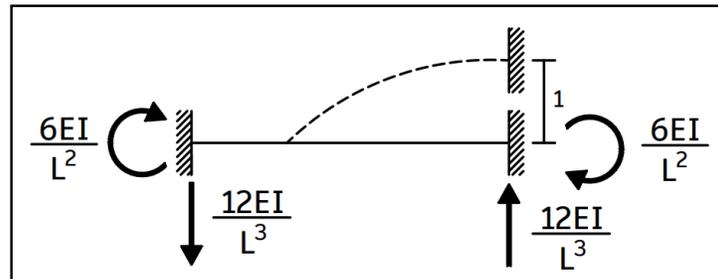
Se restringió con un empotramiento una rotación en el punto D, por lo que, se impondrá una rotación unitaria en el empotramiento D y se calcularán los coeficientes de rigidez que se generan, utilizando la tabla 4.1:



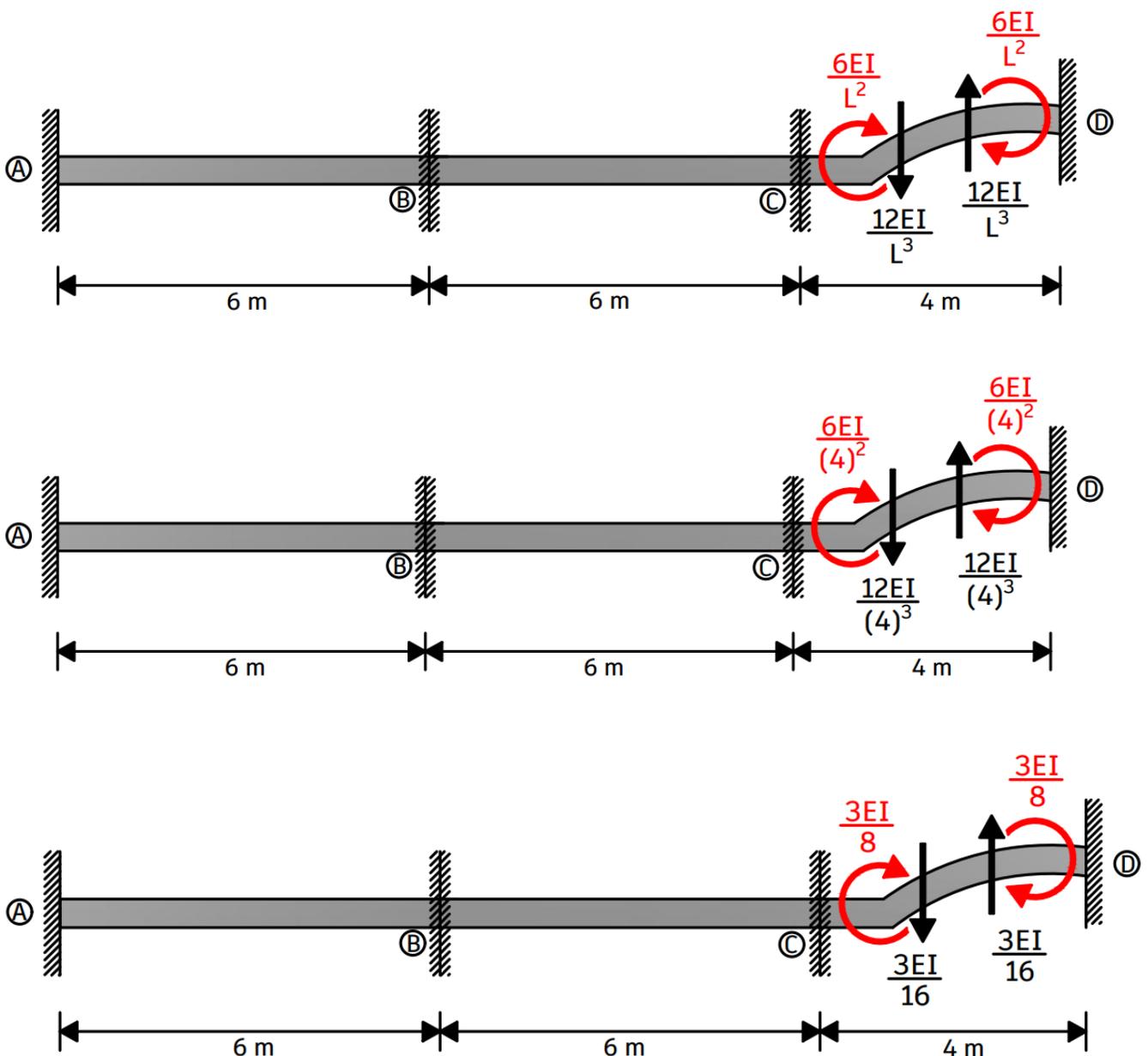
(θ_D)



En el mismo punto D, se restringió con un empotramiento el desplazamiento vertical, por lo que, se impondrá un desplazamiento unitario en el empotramiento D y se calcularán los coeficientes de rigidez que se generan, utilizando la tabla 4.1:



(Δ_{ZD})



Como se restringió una rotación en los apoyos B, C y en el punto D, se colocará en la matriz de rigidez el momento o la suma de los momentos que se encuentren en los empotramientos B, C y D. También se restringió un desplazamiento vertical en el punto D, por lo que en la matriz de rigidez se colocará la fuerza o la suma de las fuerzas que se encuentren en el punto D.

Así mismo, con los coeficientes de rigidez que se calcularon al imponer una rotación unitaria en los empotramientos B, C, D, y un desplazamiento unitario en el empotramiento D, se construirá la matriz de rigidez, la cual quedará de la siguiente manera:

$$[K] = \begin{matrix} & \theta_B & \theta_C & \theta_D & \Delta_{zD} & & \\ \begin{matrix} M_B \\ M_C \\ M_D \\ F_D \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{2EI}{3} + \frac{2EI}{3} & \frac{EI}{3} & 0 & 0 \\ \frac{EI}{3} & \frac{2EI}{3} + EI & \frac{EI}{2} & \frac{3EI}{8} \\ 0 & \frac{EI}{2} & EI & \frac{3EI}{8} \\ 0 & \frac{3EI}{8} & \frac{3EI}{8} & \frac{3EI}{16} \end{bmatrix} & = & EI & \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} & \begin{matrix} M_B \\ M_C \\ M_D \\ F_D \end{matrix} \end{matrix}$$

Se puede observar que en la primera columna se colocaron los momentos que se encuentran en los empotramientos B, C, D y la fuerza que se encuentra en el empotramiento D, que se generaron al imponer una rotación unitaria en el empotramiento B. En la segunda columna se colocaron los momentos y la fuerza que se encuentran en los mismos empotramientos, que se generaron al imponer una rotación unitaria en el empotramiento C. Esta secuencia se repite para cada columna de la matriz de rigidez al imponer una rotación en cada grado de libertad que se restringió.

De esta manera se construye la matriz de rigidez y es fácil de entender visualmente la secuencia que se sigue, por lo que no debe haber problema alguno cuando se construya dicha matriz. Se puede observar que la matriz de rigidez se construye en función de la imposición de desplazamientos o rotaciones unitarias en los grados de libertad que se restringen y de los momentos o fuerzas que se generan al realizar esta imposición.

Es de gran importancia que se entienda a la perfección como se debe de construir una matriz de rigidez, ya que, si se coloca un momento o una fuerza en un sentido

incorrecto o con un valor incorrecto, el resultado que se obtenga será erróneo, por esa razón, se debe de prestar atención en los ejercicios que se están realizando.

Se dijo al principio de esta sección que, para comprobar que la formación de la matriz de rigidez es correcta, se debe de tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- La matriz debe de ser simétrica, es decir, la matriz debe de ser cuadrada, donde el número de columnas debe ser igual al número de filas y los valores de una columna deben de ser igual a los valores de una fila, es decir, que el elemento en el renglón i y columna j es igual al elemento el renglón j y columna i .
- Los valores de la diagonal principal de la matriz deben ser mayores a cero.
- La matriz original menos su matriz transpuesta debe de ser igual a cero.

Y se puede observar que la matriz del ejercicio cumple con estos requisitos, por lo que se concluye que la matriz es correcta.

PASO ⑤: Se construye el vector de desplazamiento $\{u\}$.

La construcción del vector de desplazamiento es fácil, ya que solo se deben de colocar los grados de libertad que se desconocen y que se restringieron con un empotramiento para que después se les impusiera un valor unitario.

En este ejercicio los grados de libertad que se desconocen, son las rotaciones en los puntos B, C, D, y el desplazamiento vertical en el punto D, por lo que, con estas rotaciones y el desplazamiento se creará el vector de desplazamiento:

$$\{u\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ \Delta_{ZD} \end{Bmatrix}$$

Es importante mencionar que estas rotaciones son las incógnitas, las cuales se calculara su valor utilizando la ecuación 4.1 que se vio al principio de esta sección.

PASO ⑥: Se calculan los valores de las rotaciones reales, utilizando la ecuación 4.1.

$$[K]\{u\} + \{F\} = 0$$

Como el vector de desplazamiento $\{u\}$ es la incógnita en la ecuación 4.1, se despeja este vector para conocer los valores de las rotaciones que conforman este vector:

$$\{u\} = -[K]^{-1}\{F\}$$

Se sustituye la matriz de rigidez y los vectores calculados en los pasos anteriores:

$$\begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \\ \Delta_{ZD} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 4/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 5/3 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 1/2 & 1 & 3/8 \\ 0 & 3/8 & 3/8 & 3/16 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 5/4 \\ 43/4 \\ 8 \\ 19 \end{Bmatrix}$$

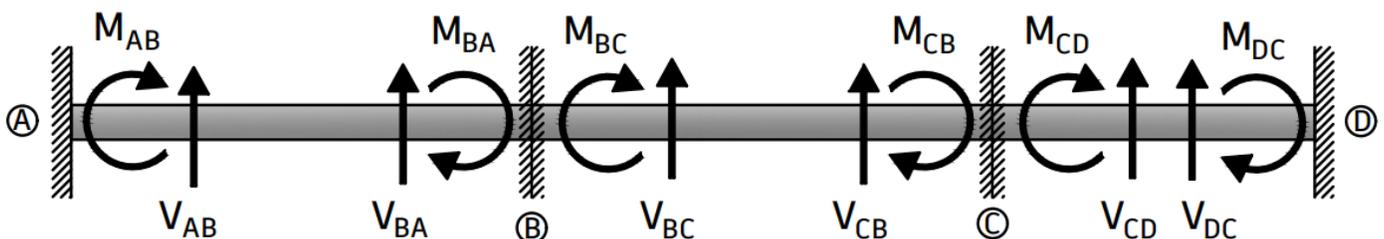
Resolviendo la ecuación, se obtiene como resultado las siguientes rotaciones:

$$\theta_B = -\frac{717}{28EI} \quad \theta_C = \frac{2763}{28EI} \quad \theta_D = \frac{6123}{28EI} \quad \Delta_{ZD} = -\frac{15457}{21EI}$$

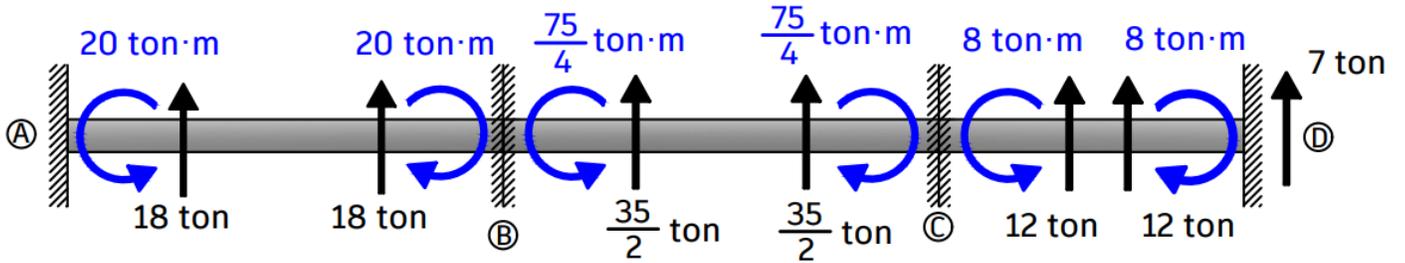
PASO ⑦: Con ayuda del desplazamiento, las rotaciones, los coeficientes de rigidez y los momentos de empotramiento, se calculan los valores de las fuerzas y momentos en cada apoyo.

Convención de Signos

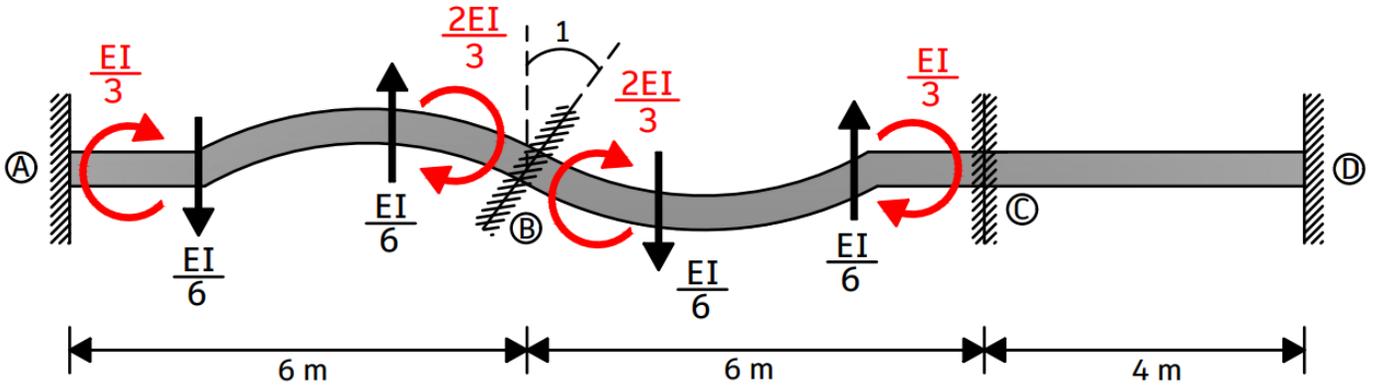
Positivo (+)	Negativo (-)



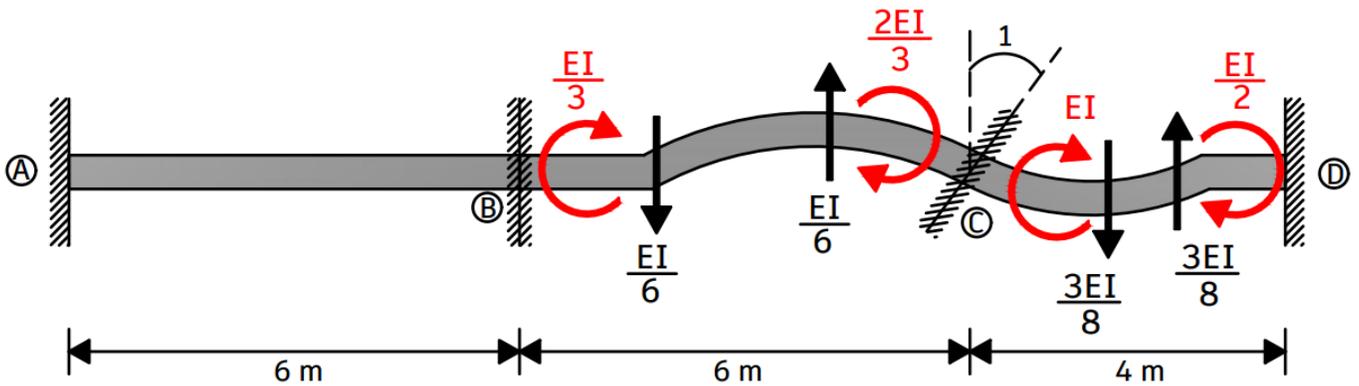
Fuerzas y momentos generados por el sistema de cargas



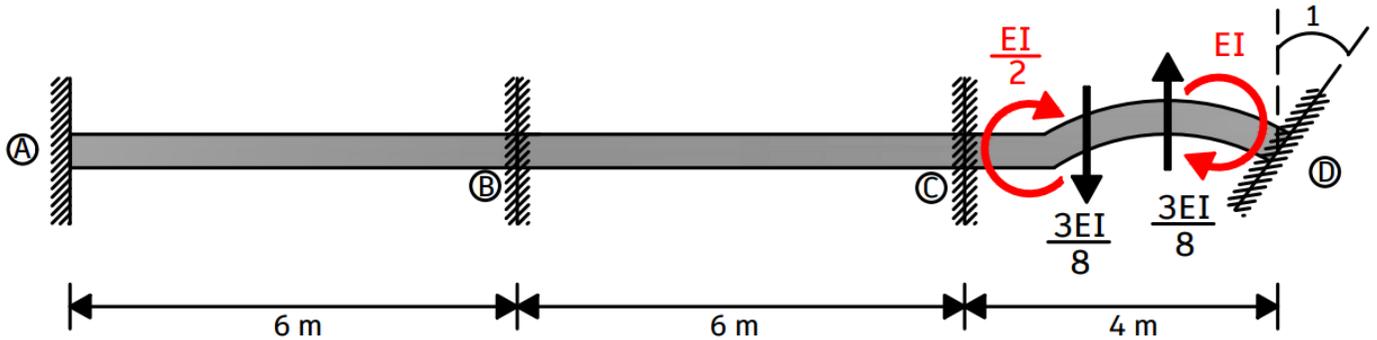
$$\left(\theta_B = -\frac{717}{28EI} \right)$$



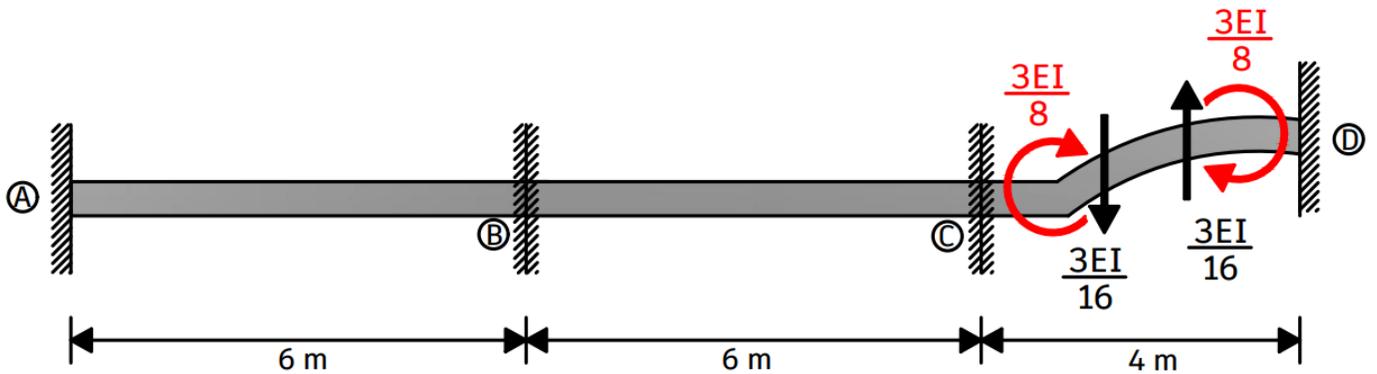
$$\left(\theta_C = \frac{2763}{28EI} \right)$$



$$\left(\theta_D = \frac{6123}{28EI}\right)$$



$$\left(\Delta_{ZD} = -\frac{15457}{21EI}\right)$$



Para calcular el valor de las fuerzas y los momentos en cada empotramiento, se hará una suma y multiplicación de valores, por ejemplo, para calcular el valor del momento M_{AB} , se hará una suma de momentos, el momento de empotramiento perfecto, más el momento que se generó cuando se impuso una rotación unitaria en el empotramiento B multiplicado por el valor real de la rotación en B (θ_B), más el momento que se generó cuando se impuso una rotación unitaria en el empotramiento C multiplicado por el valor real de la rotación en C (θ_C), más el momento que se generó cuando se impuso una rotación unitaria en el empotramiento D multiplicado por el valor real de la rotación en D (θ_D), más la fuerza que se generó cuando se impuso un desplazamiento unitario en el empotramiento D multiplicado por el valor real del desplazamiento en D (Δ_{ZD}). El resultado de la suma será el valor del momento (M_{AB}) en el apoyo A.

Este procedimiento será similar para cada momento y para las fuerzas en lugar de hacer una suma de momentos, se hará una suma de fuerzas, pero el procedimiento será similar, como se muestra a continuación:

$$M_{AB} = -20 + \frac{EI}{3}(\theta_B) = -20 + \frac{EI}{3}\left(-\frac{717}{28EI}\right)$$

$$M_{AB} = -\frac{799}{28} \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_{AB} = 18 - \frac{EI}{6}(\theta_B) = 18 - \frac{EI}{6}\left(-\frac{717}{28EI}\right)$$

$$V_{AB} = \frac{1247}{56} \text{ ton}$$

$$M_{BA} = 20 + \frac{2EI}{3}(\theta_B) = 20 + \frac{2EI}{3}\left(-\frac{717}{28EI}\right)$$

$$M_{BA} = \frac{41}{14} \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_{BA} = 18 + \frac{EI}{6}(\theta_B) = 18 + \frac{EI}{6}\left(-\frac{717}{28EI}\right)$$

$$V_{BA} = \frac{769}{56} \text{ ton}$$

$$M_{BC} = -\frac{75}{4} + \frac{2EI}{3}(\theta_B) + \frac{EI}{3}(\theta_C) = -\frac{75}{4} + \frac{2EI}{3}\left(-\frac{717}{28EI}\right) + \frac{EI}{3}\left(\frac{2763}{28EI}\right)$$

$$M_{BC} = -\frac{41}{14} \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_{BC} = \frac{35}{2} - \frac{EI}{6}(\theta_B) - \frac{EI}{6}(\theta_C) = \frac{35}{2} - \frac{EI}{6}\left(-\frac{717}{28EI}\right) - \frac{EI}{6}\left(\frac{2763}{28EI}\right)$$

$$V_{BC} = \frac{149}{28} \text{ ton}$$

$$M_{CB} = \frac{75}{4} + \frac{EI}{3}(\theta_B) + \frac{2EI}{3}(\theta_C) = \frac{75}{4} + \frac{EI}{3}\left(-\frac{717}{28EI}\right) + \frac{2EI}{3}\left(\frac{2763}{28EI}\right)$$

$$M_{CB} = 76 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_{CB} = \frac{35}{2} + \frac{EI}{6}(\theta_B) + \frac{EI}{6}(\theta_C) = \frac{35}{2} + \frac{EI}{6}\left(-\frac{717}{28EI}\right) + \frac{EI}{6}\left(\frac{2763}{28EI}\right)$$

$$V_{CB} = \frac{831}{28} \text{ ton}$$

$$M_{CD} = -8 + EI(\theta_C) + \frac{EI}{2}(\theta_D) + \frac{3EI}{8}(\Delta_{ZD})$$

$$M_{CD} = -8 + EI\left(\frac{2763}{28EI}\right) + \frac{EI}{2}\left(\frac{6123}{28EI}\right) + \frac{3EI}{8}\left(-\frac{15457}{21EI}\right)$$

$$M_{CD} = -76 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_{CD} = 12 - \frac{3EI}{8}(\theta_C) - \frac{3EI}{8}(\theta_D) - \frac{3EI}{16}(\Delta_{ZD})$$

$$V_{CD} = 12 - \frac{3EI}{8}\left(\frac{2763}{28EI}\right) - \frac{3EI}{8}\left(\frac{6123}{28EI}\right) - \frac{3EI}{16}\left(-\frac{15457}{21EI}\right)$$

$$V_{CD} = 31 \text{ ton}$$

$$M_{DC} = 8 + \frac{EI}{2}(\theta_C) + EI(\theta_D) + \frac{3EI}{8}(\Delta_{ZD})$$

$$M_{DC} = 8 + \frac{EI}{2}\left(\frac{2763}{28EI}\right) + EI\left(\frac{6123}{28EI}\right) + \frac{3EI}{8}\left(-\frac{15457}{21EI}\right)$$

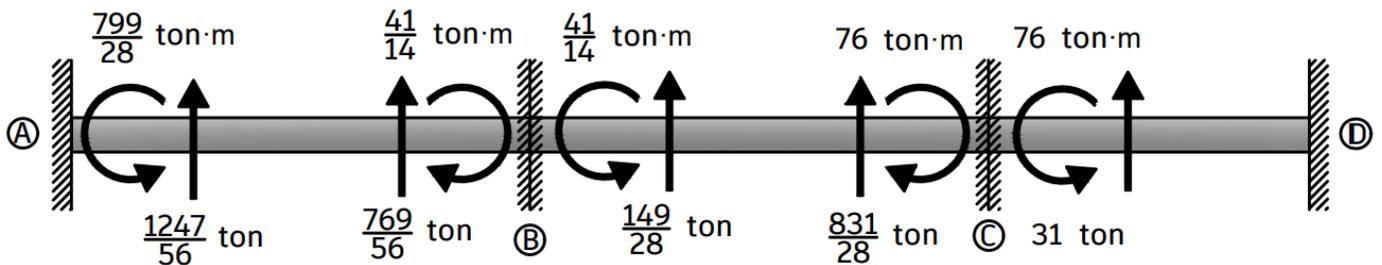
$$M_{DC} = 0$$

$$V_{DC} = 12 - \frac{3EI}{8}(\theta_C) - \frac{3EI}{8}(\theta_D) - \frac{3EI}{16}(\Delta_{ZD})$$

$$V_{DC} = 12 + 7 + \frac{3EI}{8}\left(\frac{2763}{28EI}\right) + \frac{3EI}{8}\left(\frac{6123}{28EI}\right) + \frac{3EI}{16}\left(-\frac{15457}{21EI}\right)$$

$$V_{DC} = 0$$

Se colocan los momentos y las fuerzas calculadas en la viga con empotramientos:



Se suman los momentos y las fuerzas en los empotramientos B y C. El momento y la fuerza resultante de la suma en cada empotramiento, será el valor de la reacción presente en cada apoyo de la viga original:

$$M_A = M_{AB} = -\frac{799}{28} \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_A = V_{AB} = \frac{1247}{56} \text{ ton}$$

$$M_B = M_{BA} + M_{BC} = \frac{41}{14} \text{ ton} \cdot \text{m} - \frac{41}{14} \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$V_B = V_{BA} + V_{BC} = \frac{769}{56} \text{ ton} + \frac{149}{28} \text{ ton} = \frac{1067}{56} \text{ ton}$$

$$M_C = M_{CB} + M_{CD} = 76 \text{ ton} \cdot \text{m} - 76 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$V_C = V_{CB} + V_{CD} = \frac{831}{28} \text{ ton} + 31 \text{ ton} = \frac{1699}{28} \text{ ton}$$

$$M_D = M_{DC} = 0$$

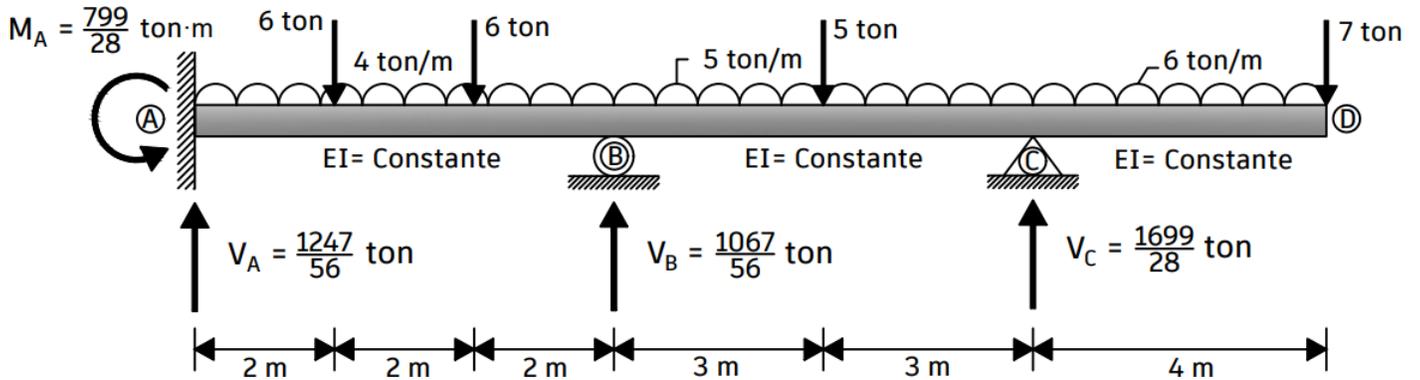
$$V_D = V_{DC} = 0$$

Al calcular los valores de los momentos y las fuerzas en cada empotramiento y al hacer la suma de estos mismos, se puede observar que, solo se tendrán los valores de cada reacción presente en los diferentes apoyos que conforman la viga original. Por ejemplo, en el punto A de la viga original se tiene un apoyo empotrado y se sabe que un apoyo empotrado se tiene como reacciones un momento, una fuerza vertical y una fuerza horizontal, por lógica se sabe que no se tendrán fuerzas horizontales en ningún apoyo, pero al realizar la suma de los momentos y fuerzas calculadas, se obtuvo el valor de un momento en el apoyo empotrado A y una fuerza en el mismo apoyo.

De igual manera, por lógica se sabe que en el apoyo móvil y en el apoyo fijo, debe de estar presente una fuerza vertical (fuerza cortante) pero no un momento flexionante y como se puede observar, al realizar la suma de los valores de los momentos y las fuerzas en los empotramientos B y C, el momento en cada empotramiento tiene un valor igual a cero, pero si se tiene un valor para cada fuerza cortante presente en cada empotramiento.

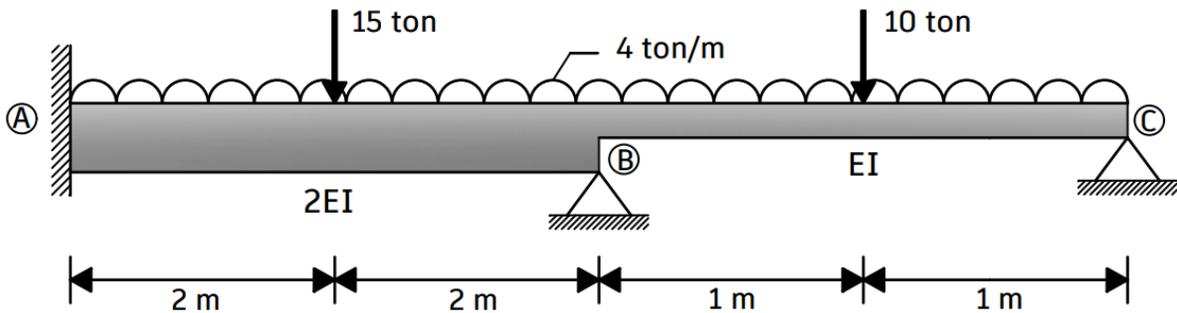
En el punto D al no tener ningún apoyo, no deberá tener ningún momento o fuerza y como se puede observar, el valor del momento y la fuerza presente en el

empotramiento D son iguales a cero, por lo que se puede concluir que el procedimiento matemático que se realizó es correcto y las reacciones en la viga hiperestática original quedan de la siguiente manera:



En los dos ejercicios anteriores, se resolvieron vigas hiperestáticas donde el módulo de elasticidad y el momento de inercia es constante en toda la longitud de la viga, por lo que se resolverá un ejercicio donde el módulo de elasticidad y el momento de inercia ya no es constante.

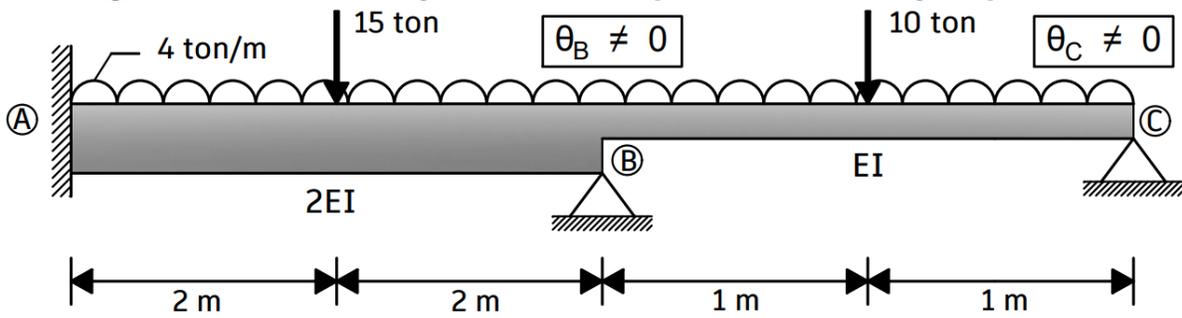
Ejercicio 4.3. Calcular el valor de las reacciones en cada apoyo de una viga hiperestática utilizando el método de las rigideces. La viga es sometida a un sistema de cargas como se muestra a continuación:



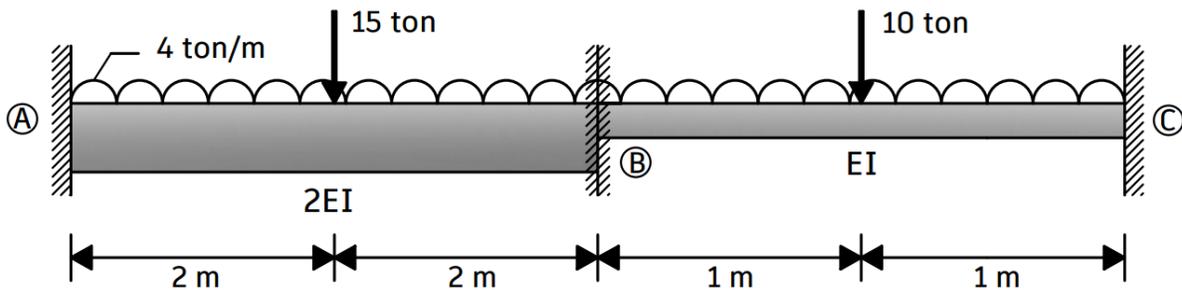
Se puede observar en la viga que, en el primer claro de 4 metros el módulo de elasticidad y el momento de inercia es dos veces mayor al del segundo claro de 2 metros, por lo que este cambio de propiedad se deberá de tomar en cuenta cuando se calculen los coeficientes de rigidez.

Se pasa a resolver la viga hiperestática empleando los pasos que se han seguido en los ejercicios pasados.

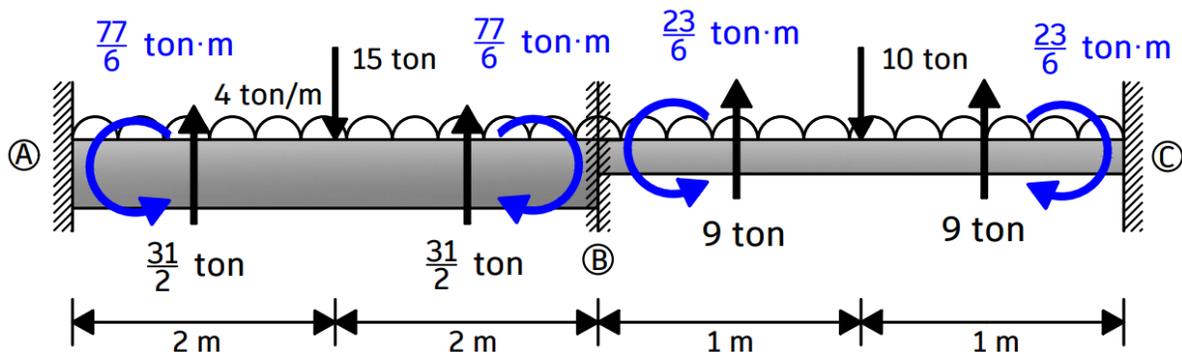
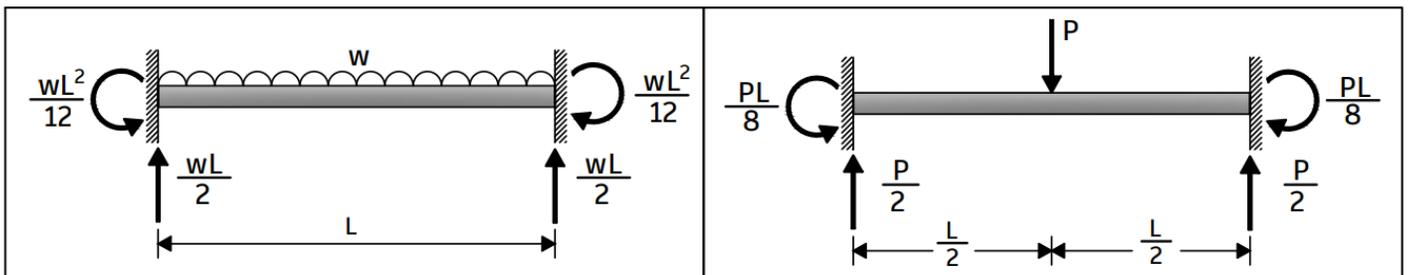
PASO ①: Se identifican los grados libertad presentes en la viga hiperestática.



PASO ②: Se restringen los grados de libertad rotacionales con un empotramiento.

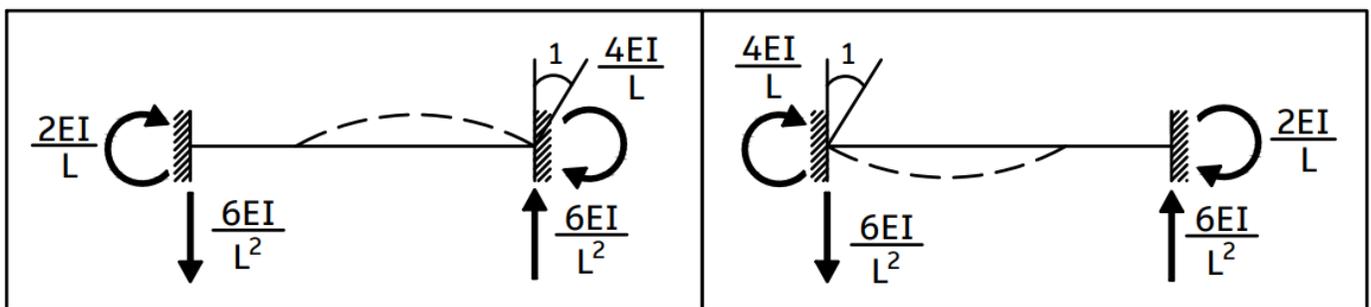


PASO ③: Se calculan los momentos de empotramiento perfecto y reacciones de la viga restringida con empotramientos y se construye el vector de fuerzas $\{F\}$. Para calcular los valores de los momentos y reacciones se hará uso de la tabla 4.2.

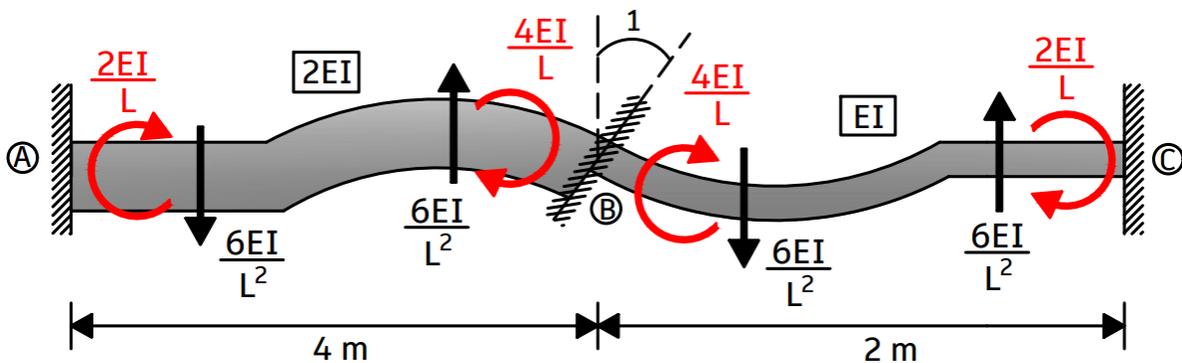


$$\{ F \} \rightarrow \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{77}{6} - \frac{23}{6} \\ \frac{23}{6} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 9 \\ \frac{23}{6} \end{Bmatrix}$$

PASO ④: imposición de rotaciones unitarias y obtención de los coeficientes de rigidez angular para la construcción de la matriz de rigidez [K].

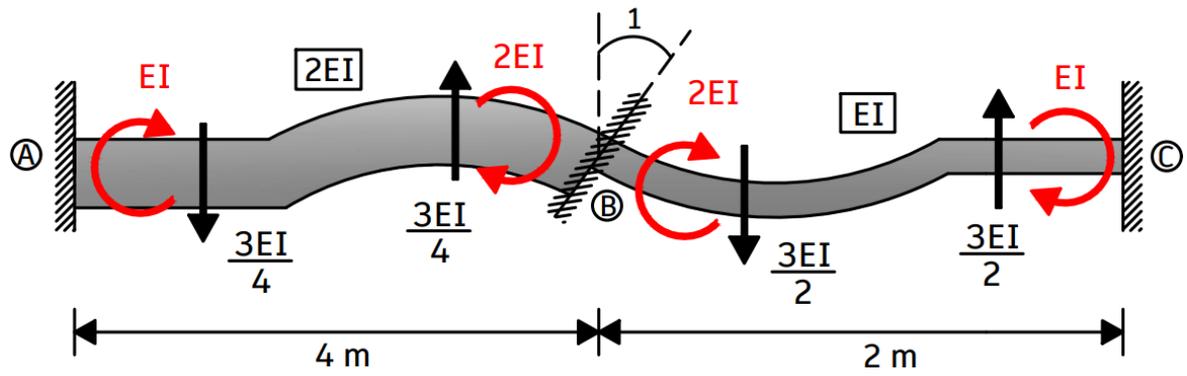
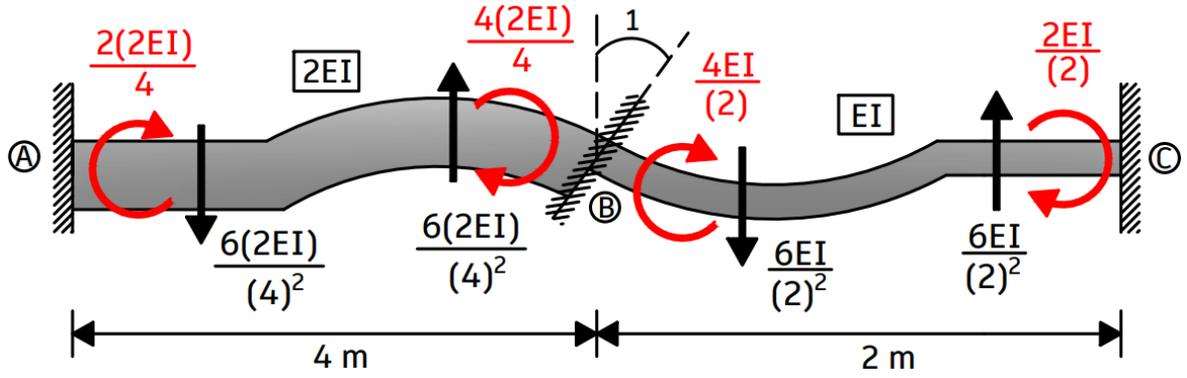


(θ_B)

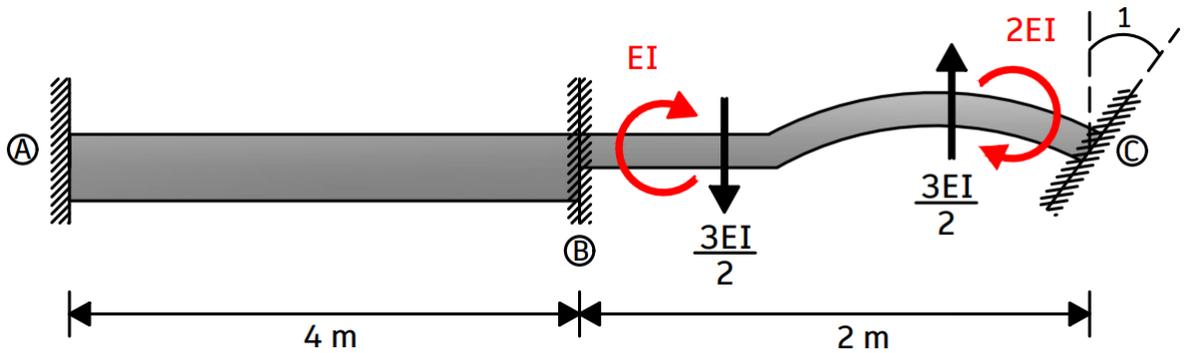
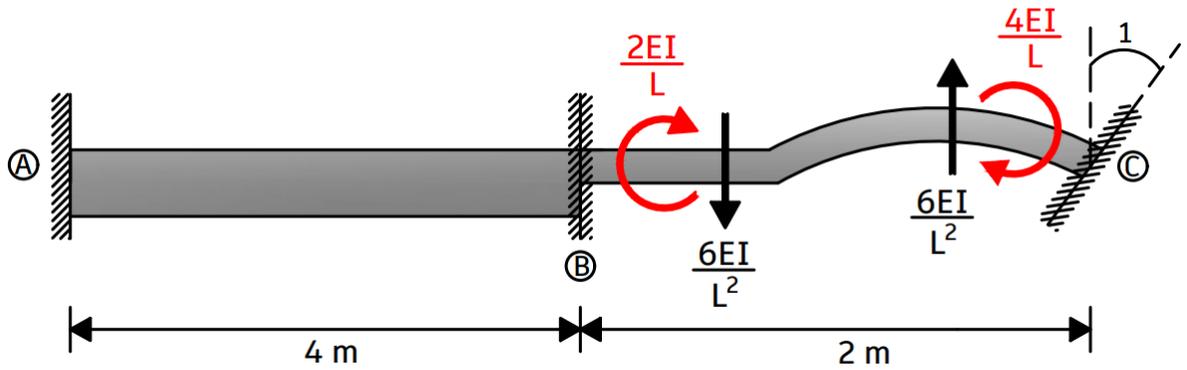


El módulo de elasticidad y el momento de inercia del primer claro es dos veces mayor al del segundo claro y este cambio de propiedad se debe de tomar en cuenta en el cálculo de los coeficientes de rigidez.

Se podrá observar que, no hay gran complejidad cuando se resuelven vigas hiperestáticas donde el módulo de elasticidad y el momento de inercia no es constante, en el caso del ejercicio que se está resolviendo, solo se debe de sustituir el valor de $2EI$ en los coeficientes de rigidez del primer claro, como se muestra a continuación:



(θ_C)



Construcción de la matriz de rigidez con ayuda de los coeficientes de rigidez calculados:

$$[K] = \begin{array}{cc|cc} & & \theta_B & \theta_C & & \\ & & \hline & & 2EI + 2EI & EI & M_B & \\ & & \hline & & EI & 2EI & M_C & \\ & & \hline \end{array} = EI \begin{array}{cc|cc} & & \theta_B & \theta_C & & \\ & & \hline & & 4 & 1 & M_B & \\ & & \hline & & 1 & 2 & M_C & \\ & & \hline \end{array}$$

PASO ⑤: Construcción del vector de desplazamiento $\{u\}$.

$$\{u\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix}$$

PASO ⑥: Se calculan los valores de las rotaciones reales, utilizando la ecuación 4.1.

$$[K]\{u\} + \{F\} = 0$$

Como el vector de desplazamiento $\{u\}$ es la incógnita en la ecuación 4.1, se despeja este vector para conocer los valores de las rotaciones que conforman este vector:

$$\{u\} = -[K]^{-1}\{F\}$$

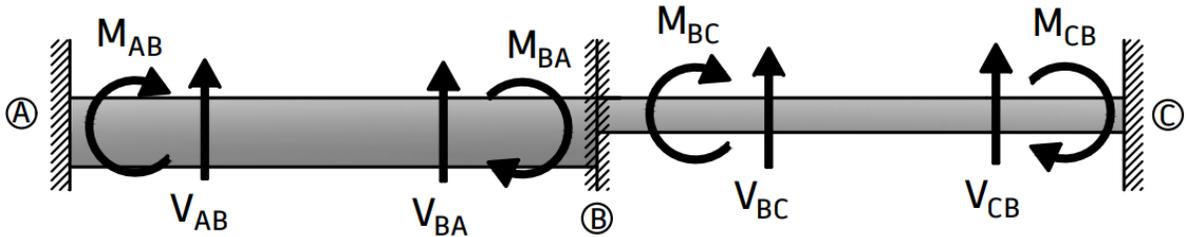
Se sustituye la matriz de rigidez y los vectores calculados en los pasos anteriores:

$$\begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = -\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 9 \\ \frac{23}{6} \end{Bmatrix}$$

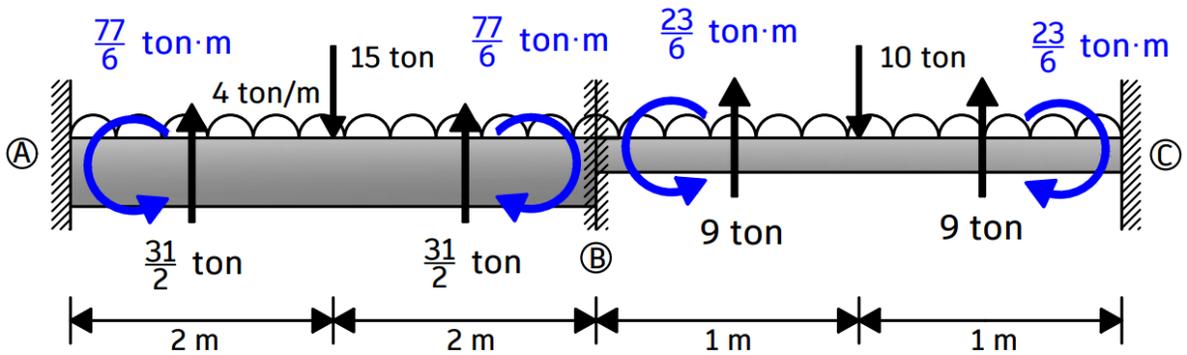
Resolviendo la ecuación, se obtiene como resultado las siguientes rotaciones:

$$\theta_B = -\frac{85}{42EI} \qquad \theta_C = -\frac{19}{21EI}$$

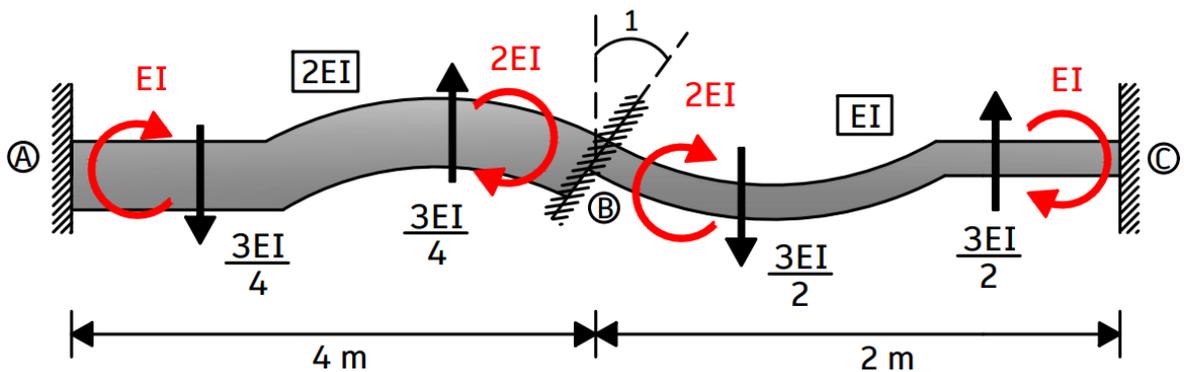
PASO ⑦: Se calculan los valores de las fuerzas y momentos en cada apoyo con ayuda de las rotaciones, los coeficientes de rigidez y los momentos de empotramiento.



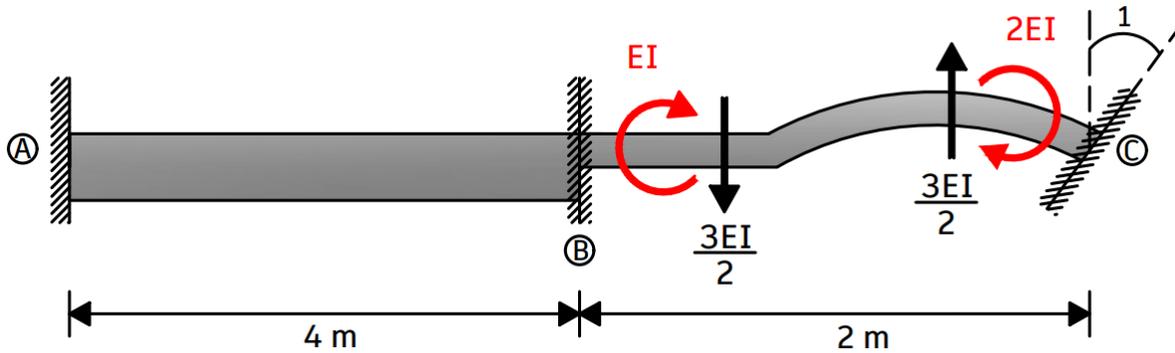
Fuerzas y momentos generados por el sistema de cargas



$$\left(\theta_B = -\frac{85}{42EI} \right)$$



$$\left(\theta_C = -\frac{19}{21EI}\right)$$



$$M_{AB} = -\frac{77}{6} + EI(\theta_B) = -\frac{77}{6} + EI\left(-\frac{85}{42EI}\right) \quad \therefore M_{AB} = -\frac{104}{7} \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_{AB} = \frac{31}{2} - \frac{3EI}{4}(\theta_B) = \frac{31}{2} - \frac{3EI}{4}\left(-\frac{85}{42EI}\right) \quad \therefore V_{AB} = \frac{953}{56} \text{ ton}$$

$$M_{BA} = \frac{77}{6} + 2EI(\theta_B) = \frac{77}{6} + 2EI\left(-\frac{85}{42EI}\right) \quad \therefore M_{BA} = \frac{123}{14} \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_{BA} = \frac{31}{2} + \frac{3EI}{4}(\theta_B) = \frac{31}{2} + \frac{3EI}{4}\left(-\frac{85}{42EI}\right) \quad \therefore V_{BA} = \frac{783}{56} \text{ ton}$$

$$M_{BC} = -\frac{23}{6} + 2EI(\theta_B) + EI(\theta_C) = -\frac{23}{6} + 2EI\left(-\frac{85}{42EI}\right) + EI\left(-\frac{19}{21EI}\right)$$

$$M_{BC} = -\frac{123}{14} \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_{BC} = 9 - \frac{3EI}{2}(\theta_B) - \frac{3EI}{2}(\theta_C) = 9 - \frac{3EI}{2}\left(-\frac{85}{42EI}\right) - \frac{3EI}{2}\left(-\frac{19}{21EI}\right)$$

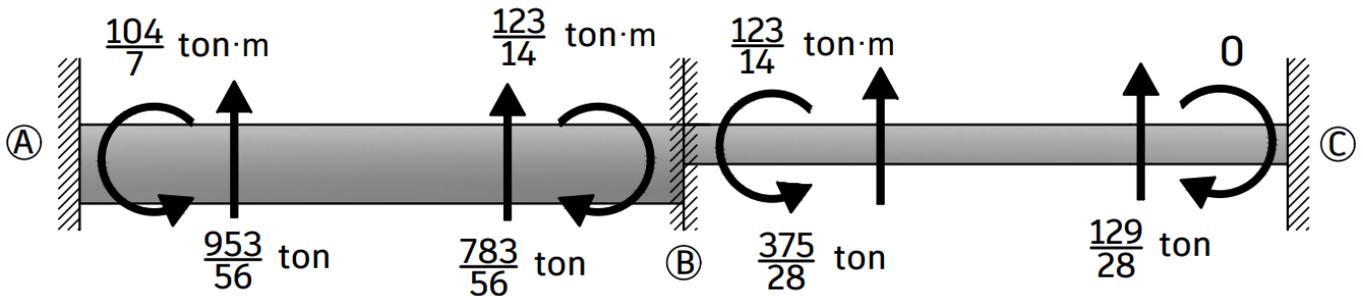
$$V_{BC} = \frac{375}{28} \text{ ton}$$

$$M_{CB} = \frac{23}{6} + EI(\theta_B) + 2EI(\theta_C) = \frac{23}{6} + EI\left(-\frac{85}{42EI}\right) + 2EI\left(-\frac{19}{21EI}\right)$$

$$M_{CB} = 0$$

$$V_{CB} = 9 + \frac{3EI}{2}(\theta_B) + \frac{3EI}{2}(\theta_C) = 9 + \frac{3EI}{2}\left(-\frac{85}{42EI}\right) + \frac{3EI}{2}\left(-\frac{19}{21EI}\right)$$

$$V_{CB} = \frac{129}{28} \text{ ton}$$



Se suman los momentos y las fuerzas y los resultados serán los valores de las reacciones presentes en la viga original:

$$M_A = M_{AB} = -\frac{104}{7} \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_A = V_{AB} = \frac{953}{56} \text{ ton}$$

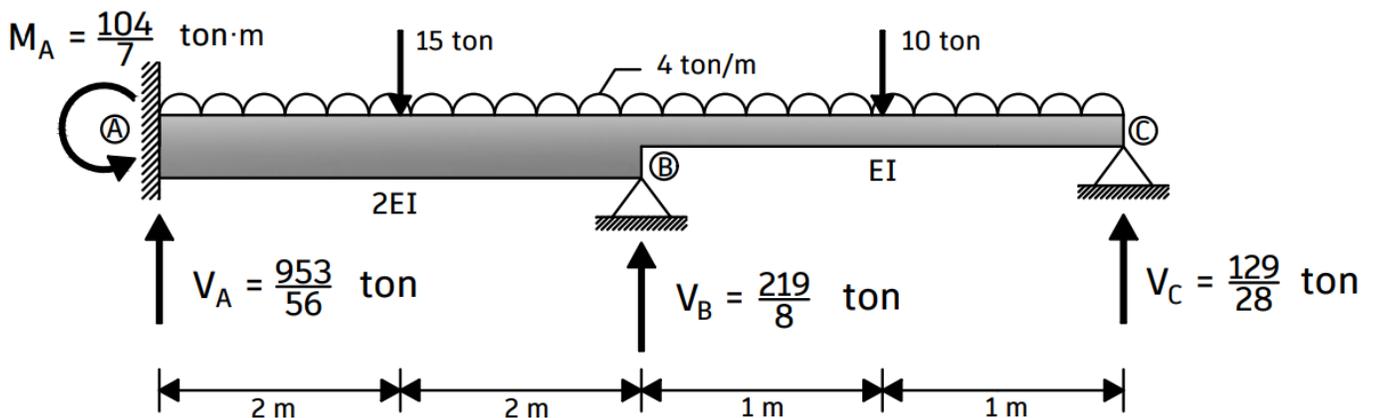
$$M_B = M_{BA} + M_{BC} = \frac{123}{14} \text{ ton} \cdot \text{m} - \frac{123}{14} \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$V_B = V_{BA} + V_{BC} = \frac{783}{56} \text{ ton} + \frac{375}{28} \text{ ton} = \frac{219}{8} \text{ ton}$$

$$M_C = M_{CB} = 0$$

$$V_C = V_{CB} = \frac{129}{28} \text{ ton}$$

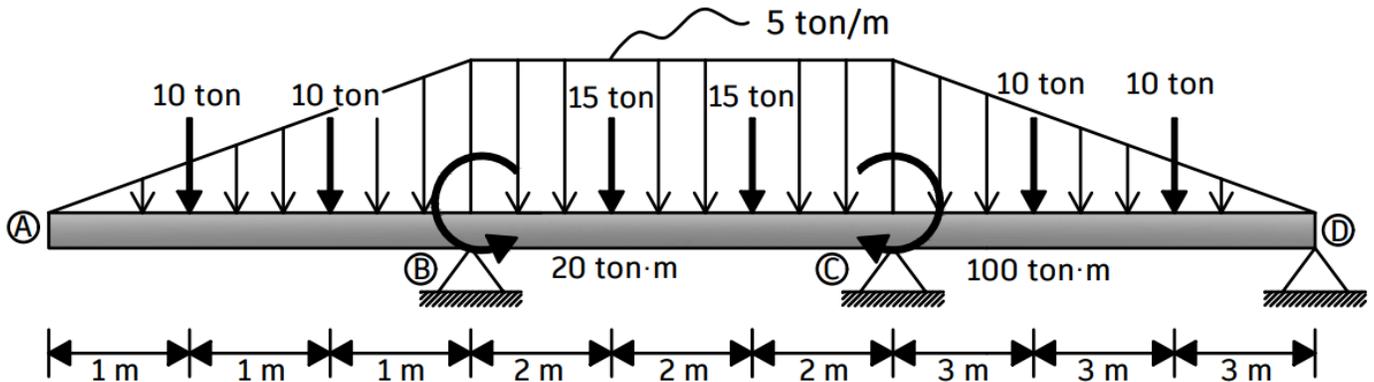
Se sustituyen los valores de los momentos y reacciones en la viga original y se concluye con el ejercicio.



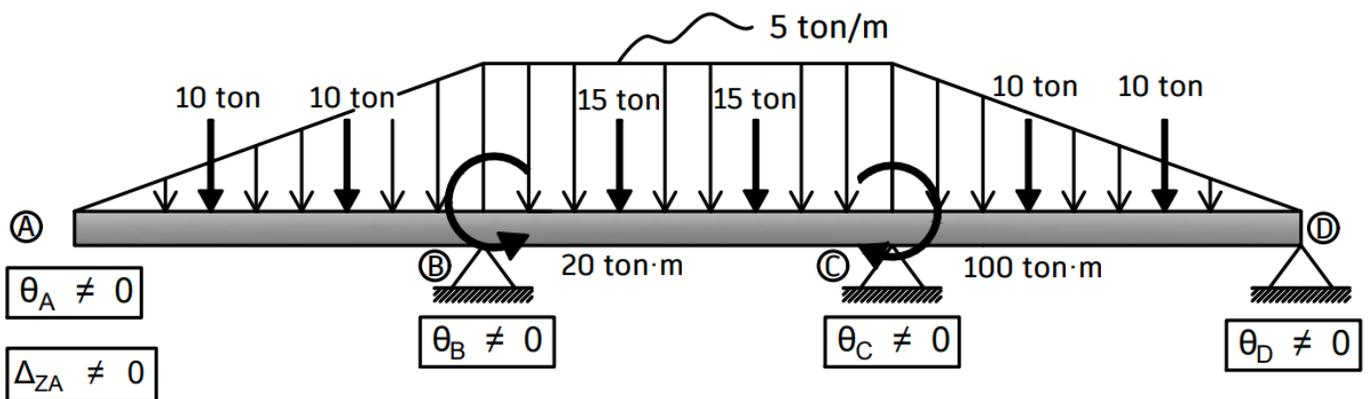
Se resolverá un ultimo ejercicio utilizando el método de las rigideces para concluir con el tema y con la presente tesis.

Ejercicio 4.4: Calcular las reacciones en los apoyos fijos de una viga hiperestática utilizando el método de las rigideces, se supone que la sección transversal es constante por lo que también lo es el valor del módulo de elasticidad (E) y el momento de inercia (I). La viga hiperestática es sometida a un sistema de cargas como se muestra a continuación:

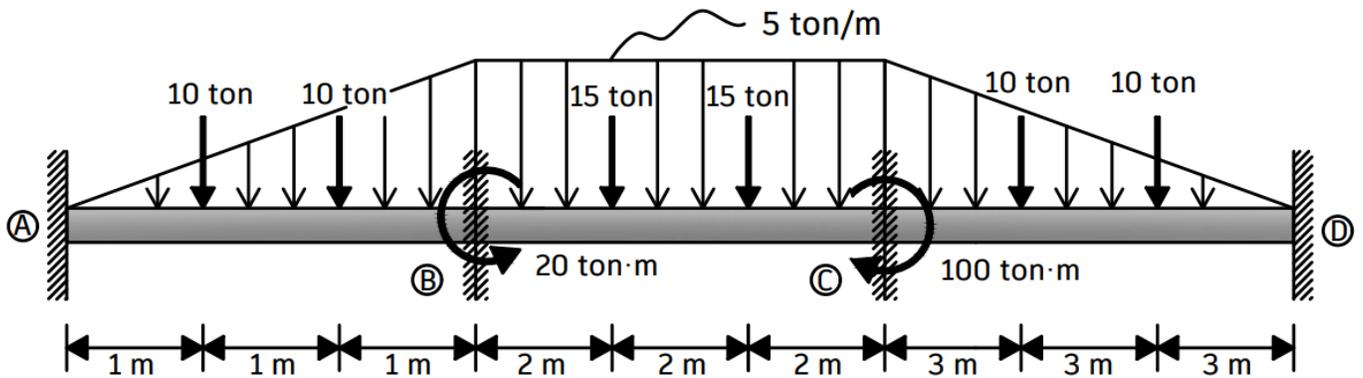
EI = Constante



PASO ①: Se identifican los grados de libertad presentes en la viga hiperestática.

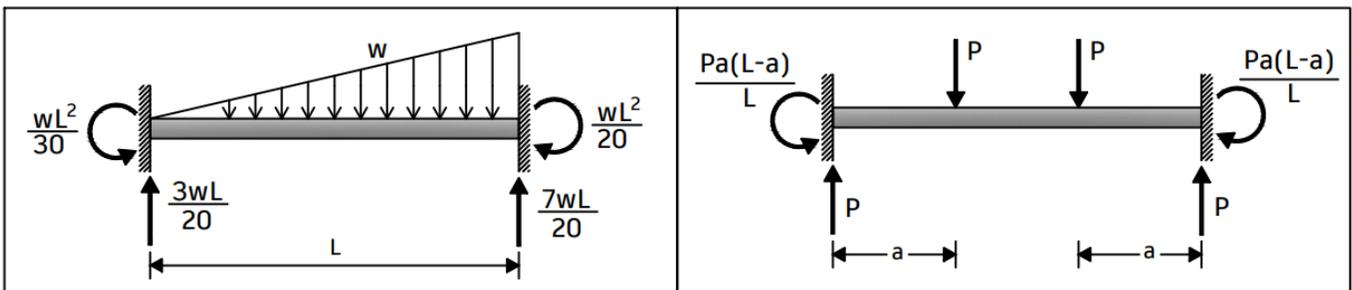
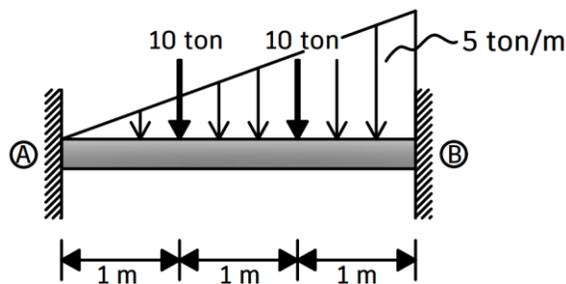


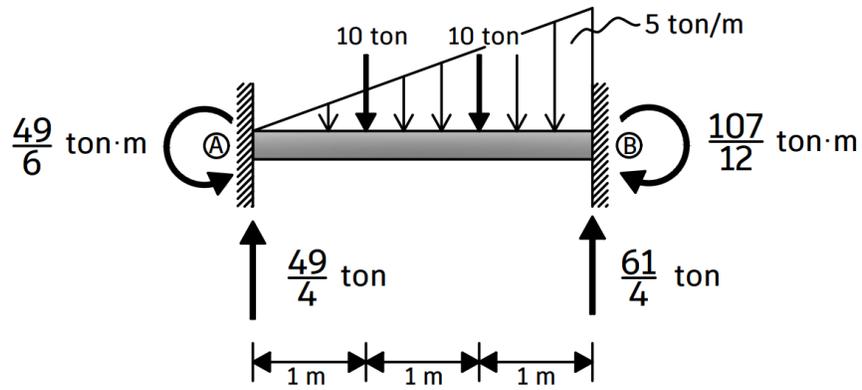
PASO ②: Se restringen los grados de libertad rotacionales con un empotramiento.



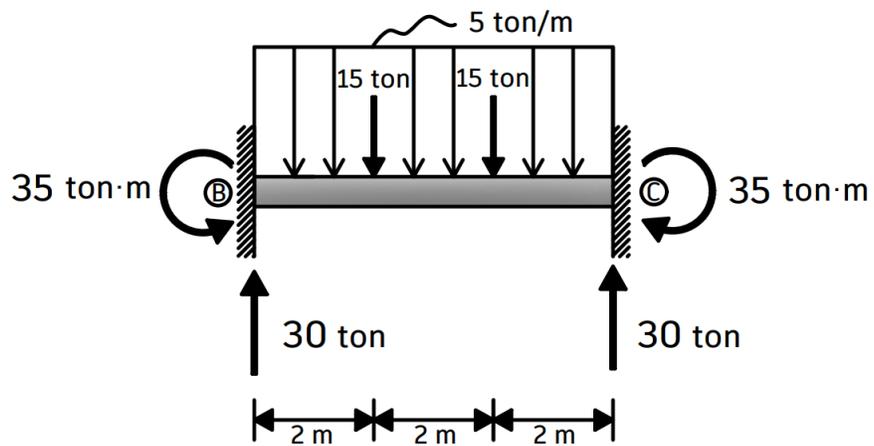
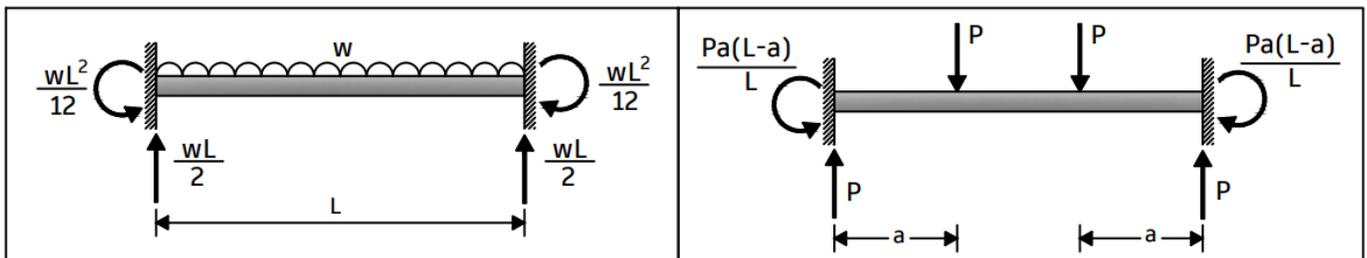
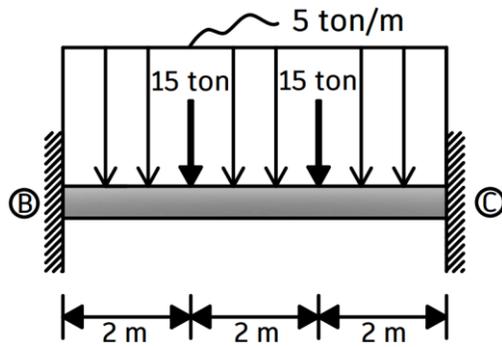
PASO ③: Se calculan los momentos de empotramiento perfecto y reacciones de la viga restringida con empotramientos y se construye el vector de fuerzas $\{F\}$. Para calcular los valores de los momentos y reacciones, se hará uso de la tabla 4.2.

VIGA 1

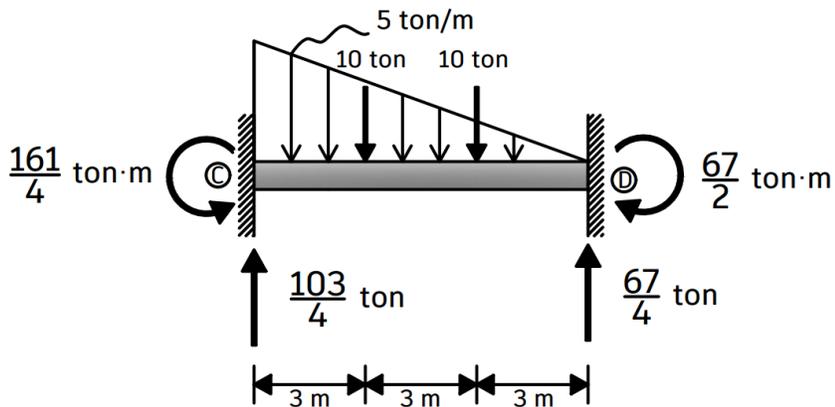
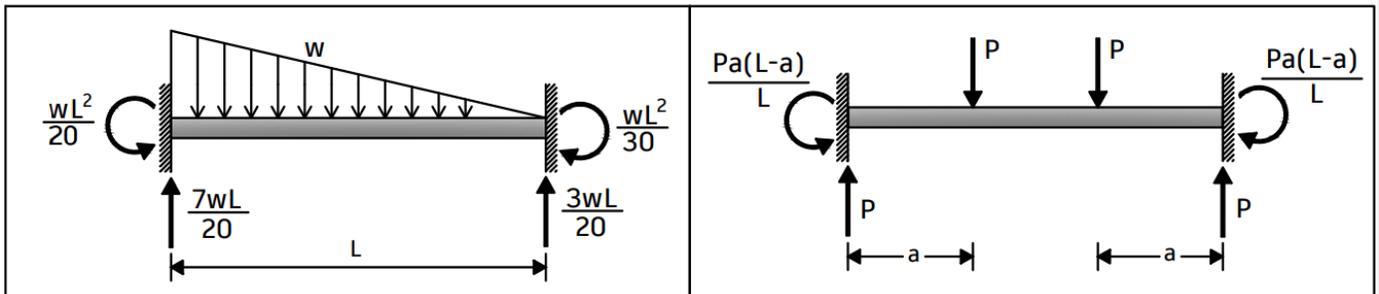
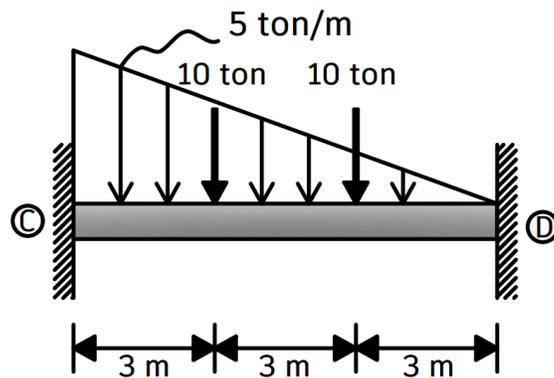




VIGA 2

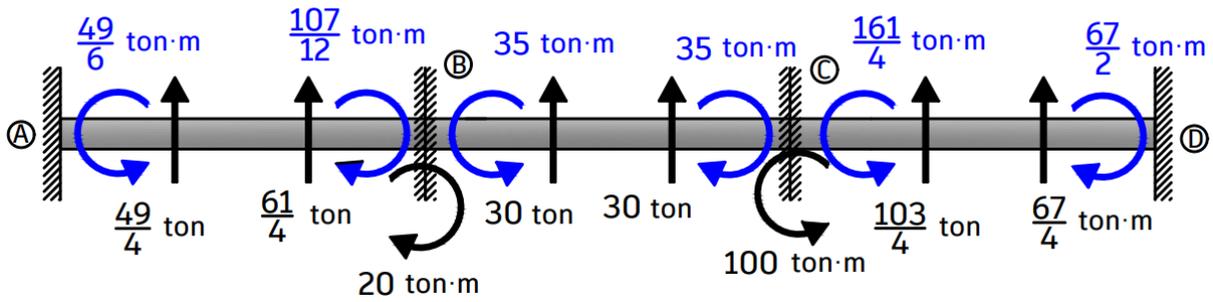


VIGA 3



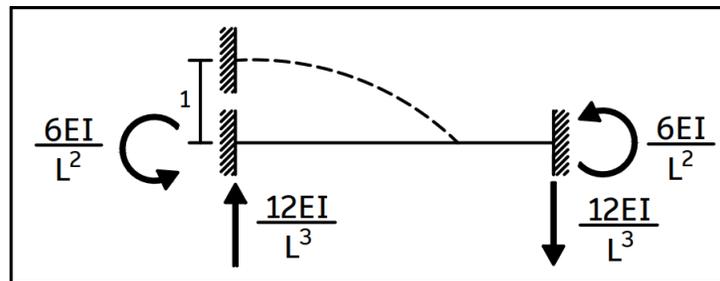
En la viga original se tienen dos momentos, un momento negativo en sentido antihorario de $20 \text{ ton}\cdot\text{m}$ en el apoyo fijo B y un momento positivo en sentido horario de $100 \text{ ton}\cdot\text{m}$ en el apoyo fijo C. Se menciona que los momentos o las fuerzas que se encuentran aplicadas en un punto o en un apoyo donde se restringió un grado de libertad con un empotramiento, se les cambiaría el sentido para la construcción del vector de fuerzas, por lo que, el momento aplicado en el punto B de $20 \text{ ton}\cdot\text{m}$ se colocará en sentido horario y el momento aplicado en el punto C de $100 \text{ ton}\cdot\text{m}$ se colocará en sentido antihorario en la siguiente viga, para la construcción del vector de fuerzas.

Fuerzas y momentos generados por el sistema de cargas

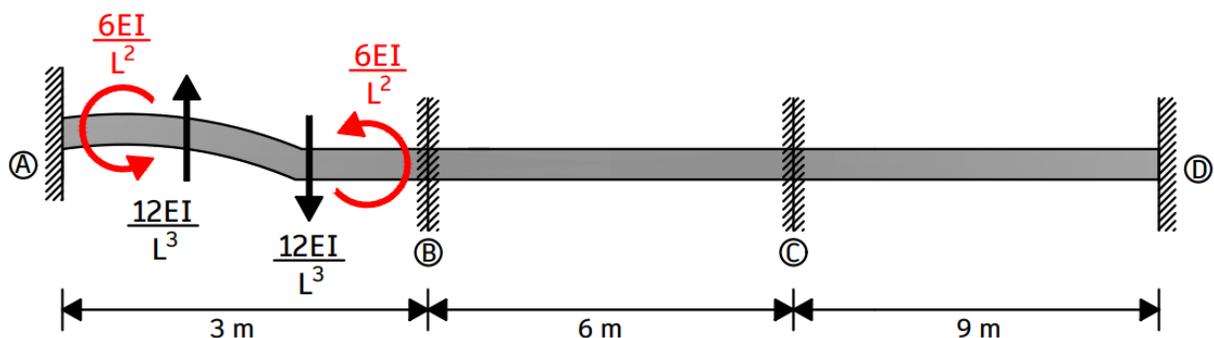


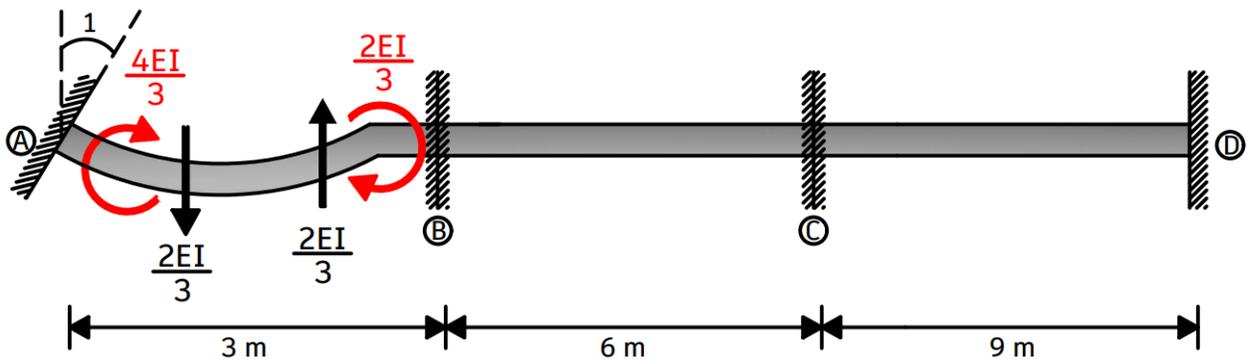
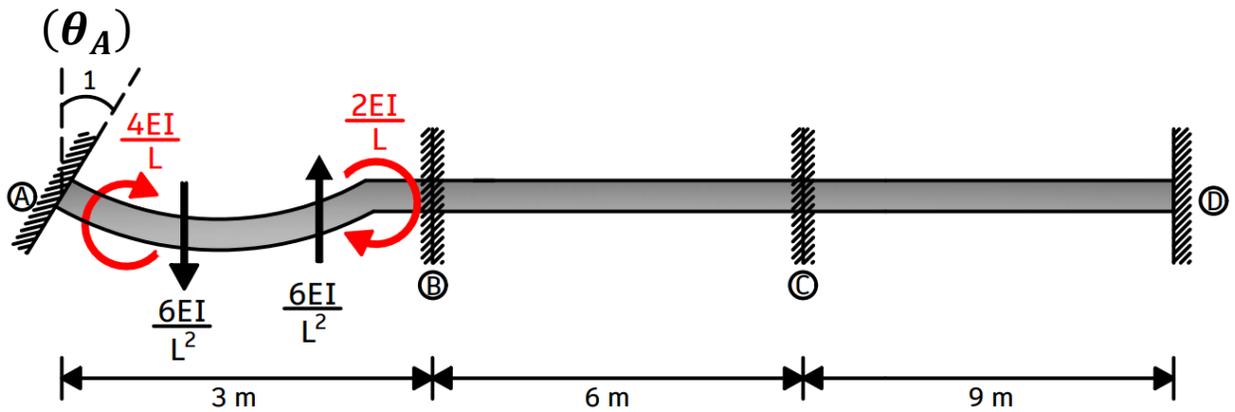
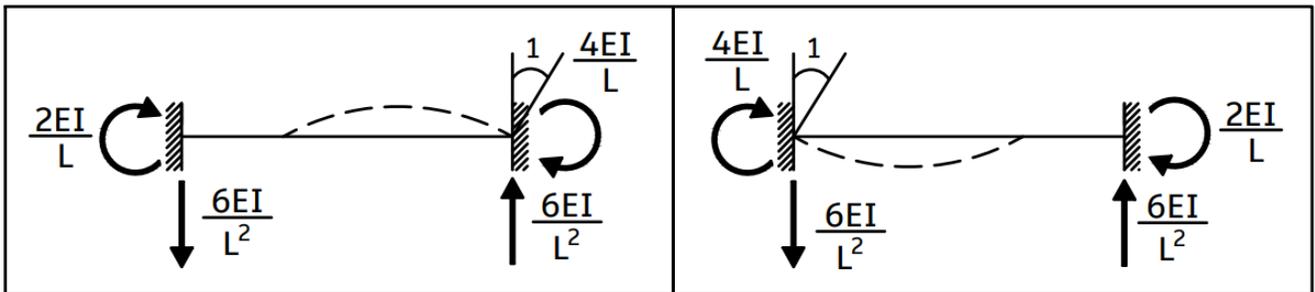
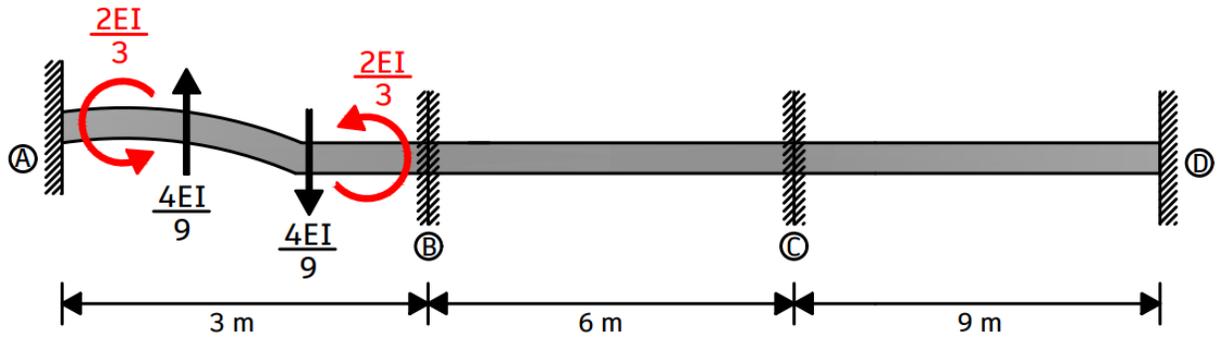
$$\{ F \} \rightarrow \begin{Bmatrix} F_A \\ M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{49}{4} \\ -\frac{49}{6} \\ \frac{107}{12} - 35 + 20 \\ 35 - \frac{161}{4} - 100 \\ \frac{67}{2} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{49}{4} \\ -\frac{49}{6} \\ \frac{73}{12} \\ -\frac{421}{4} \\ \frac{67}{2} \end{Bmatrix}$$

PASO ④: Imposición de desplazamientos y rotaciones unitarias, y obtención de los coeficientes de rigidez para la construcción de la matriz de rigidez [K].

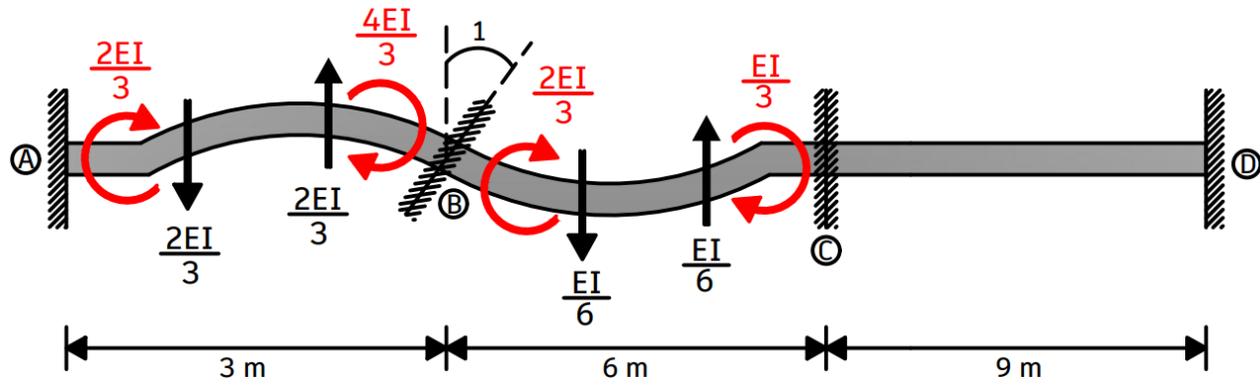
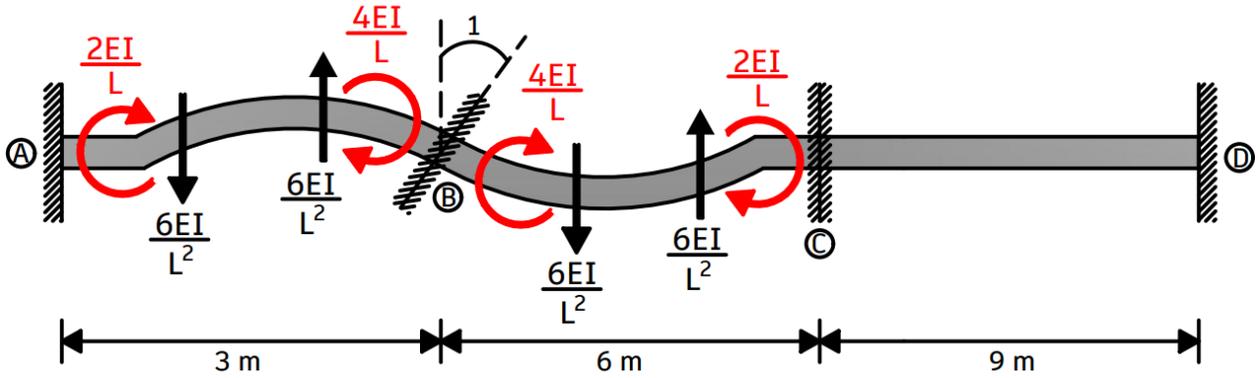


(Δ_{ZA})

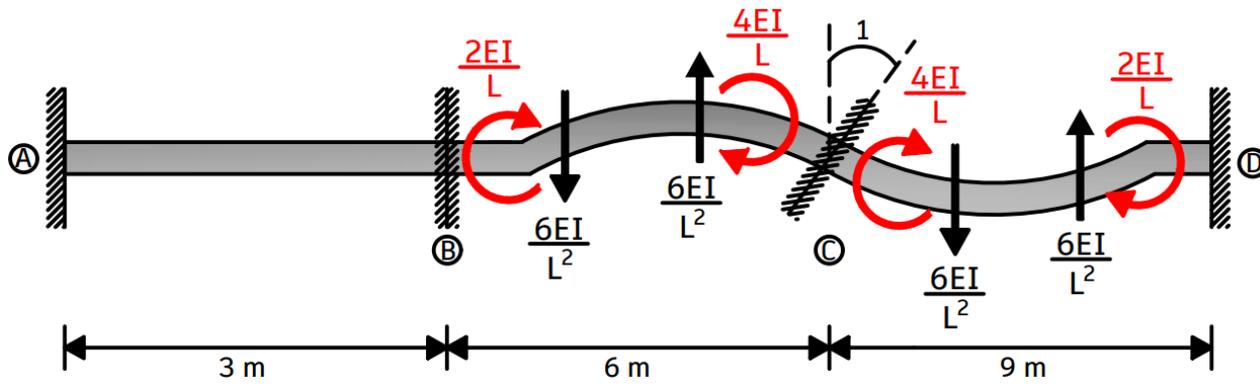


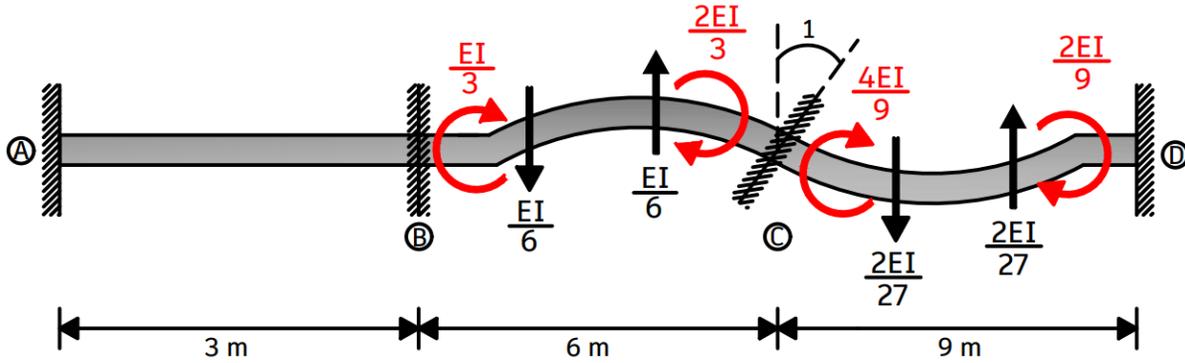


(θ_B)

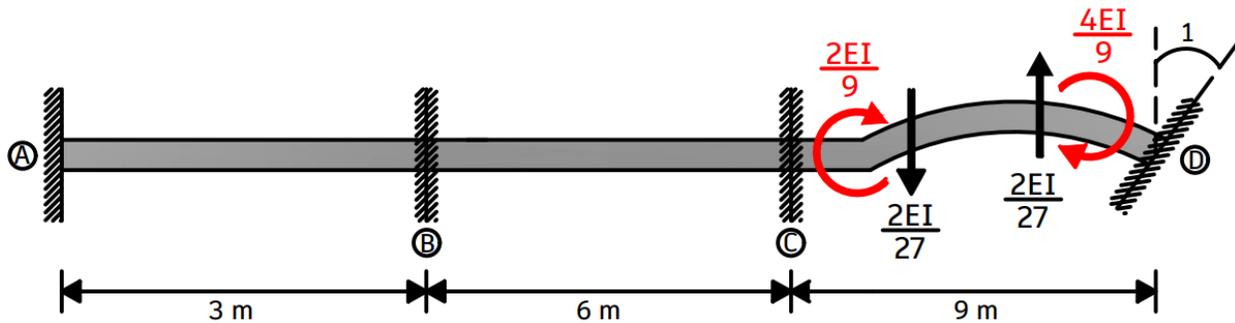
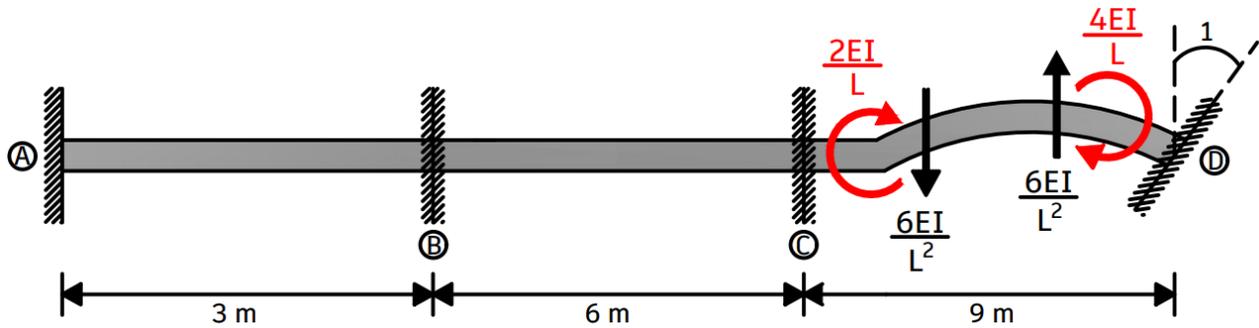


(θ_C)





(θ_D)



Constricción de la matriz de rigidez:

MATRIZ DE RIGIDEZ [K]

Δ_{ZA}	θ_A	θ_B	θ_C	θ_D
$\frac{4EI}{9}$	$-\frac{2EI}{3}$	$-\frac{2EI}{3}$	0	0
$-\frac{2EI}{3}$	$\frac{4EI}{3}$	$\frac{2EI}{3}$	0	0
$-\frac{2EI}{3}$	$\frac{2EI}{3}$	$\frac{4EI}{3} + \frac{2EI}{3}$	$\frac{EI}{3}$	0
0	0	$\frac{EI}{3}$	$\frac{2EI}{3} + \frac{4EI}{9}$	$\frac{2EI}{9}$
0	0	0	$\frac{2EI}{9}$	$\frac{4EI}{9}$

F_A	$\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0
M_A	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
M_B	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	0
M_C	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{2}{9}$
M_D	0	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

PASO ⑤: Se construye el vector de desplazamiento $\{u\}$.

$$\{u\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \Delta_{ZA} \\ \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{Bmatrix}$$

PASO ⑥: Se calculan los valores reales del desplazamiento y las rotaciones, utilizando la ecuación 4.1.

$$[K]\{u\} + \{F\} = 0$$

$$\{u\} = -[K]^{-1}\{F\}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{ZA} \\ \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{Bmatrix} = -\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{49}{4} \\ -\frac{49}{6} \\ \frac{73}{12} \\ -\frac{421}{4} \\ \frac{67}{2} \end{Bmatrix}$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos como resultado:

$$\Delta_{ZA} = -\frac{2073}{5EI}$$

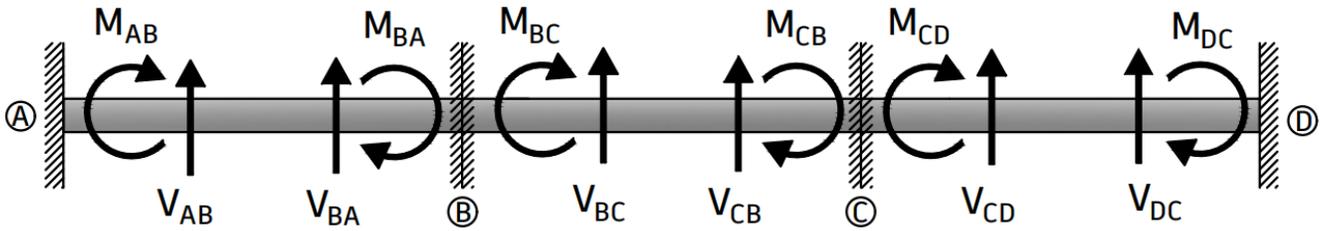
$$\theta_A = -\frac{5773}{40}$$

$$\theta_B = -\frac{1137}{10EI}$$

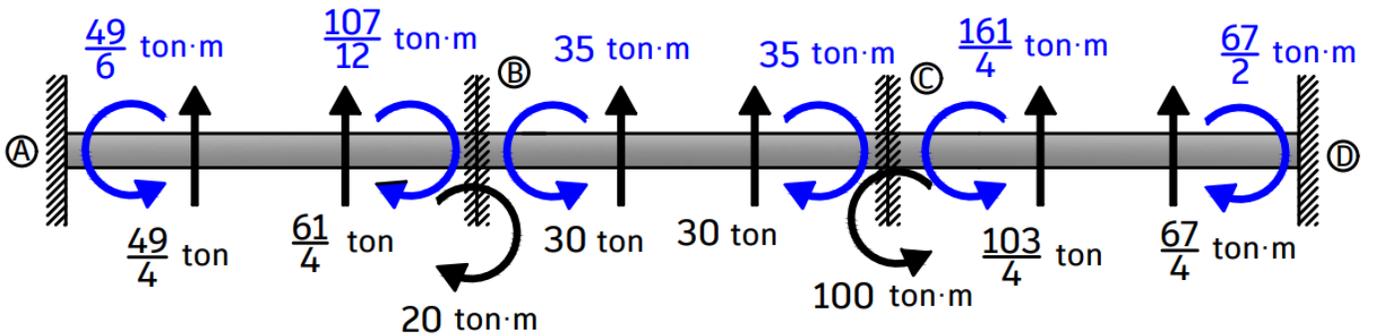
$$\theta_C = \frac{1599}{10EI}$$

$$\theta_D = -\frac{6213}{40EI}$$

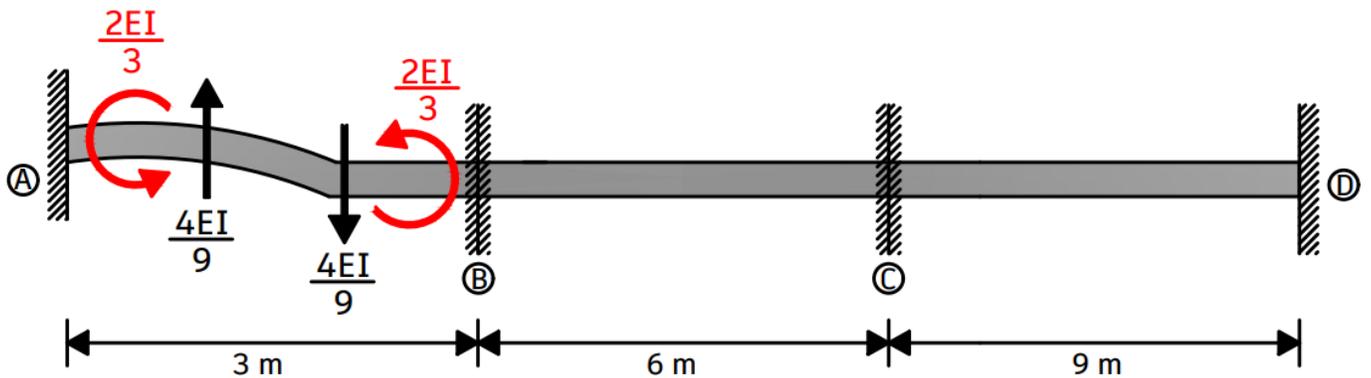
PASO ⑦: Se calculan los valores de las fuerzas y momentos en cada apoyo, con ayuda del desplazamiento, las rotaciones, los coeficientes de rigidez, las reacciones y los momentos de empotramiento.



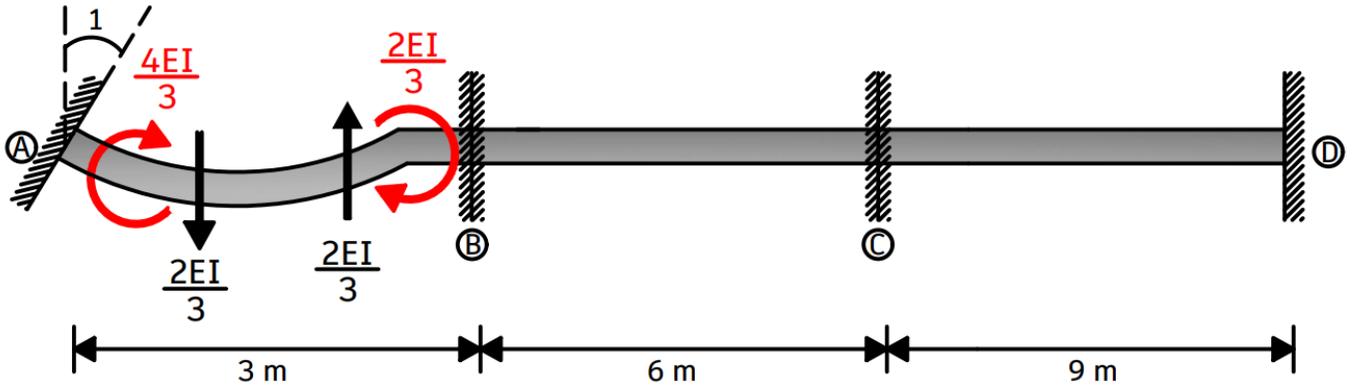
Fuerzas y momentos generados por el sistema de cargas



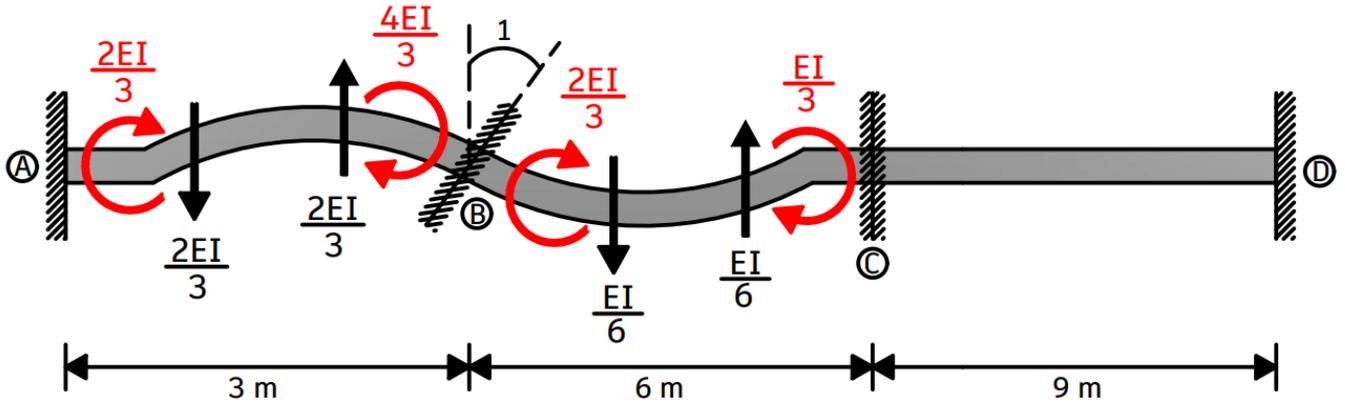
$$\left(\Delta_{ZA} = -\frac{2073}{5EI} \right)$$



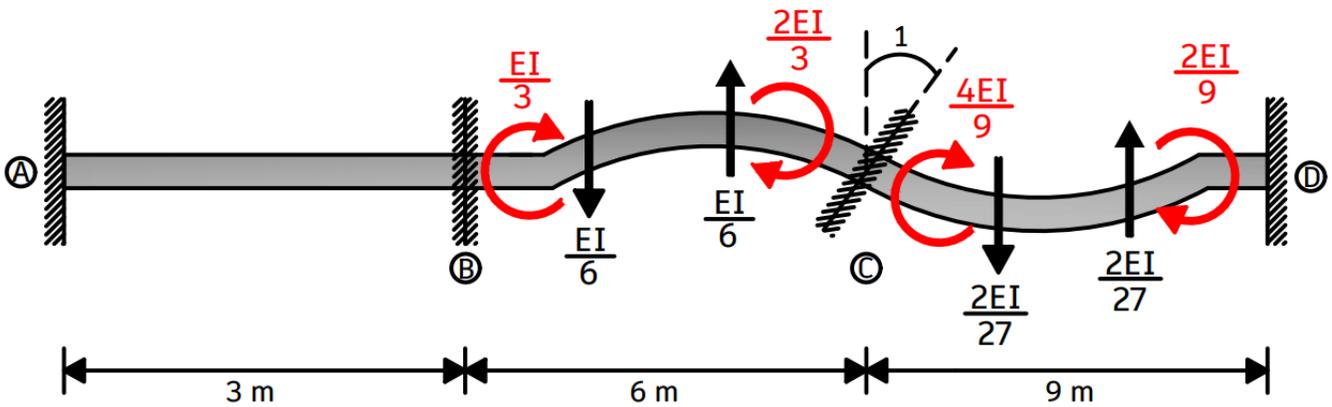
$$\left(\theta_A = -\frac{5773}{40EI} \right)$$



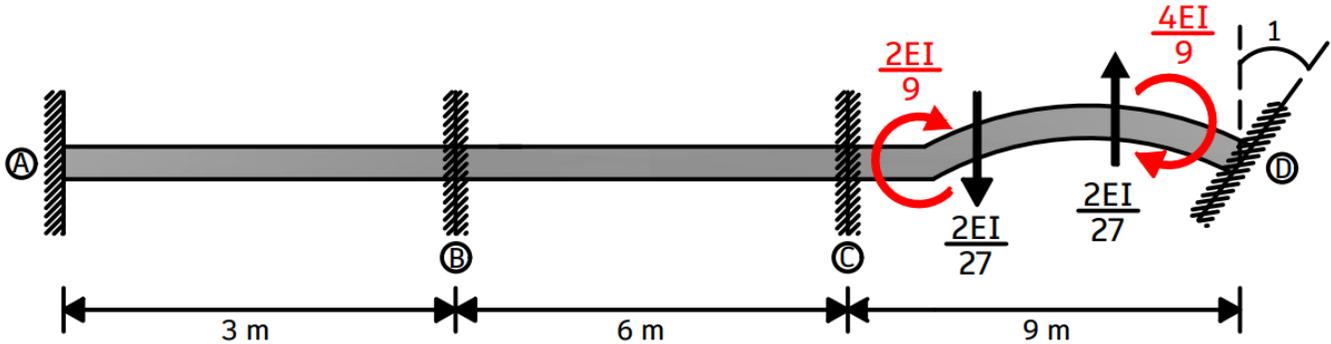
$$\left(\theta_B = -\frac{1137}{10EI} \right)$$



$$\left(\theta_C = \frac{1599}{10EI} \right)$$



$$\left(\theta_D = -\frac{6213}{40EI}\right)$$



$$M_{AB} = -\frac{49}{6} - \frac{2EI}{3}(\Delta_{ZA}) + \frac{4EI}{3}(\theta_A) + \frac{2EI}{3}(\theta_B)$$

$$M_{AB} = -\frac{49}{6} - \frac{2EI}{3}\left(-\frac{2073}{5EI}\right) + \frac{4EI}{3}\left(-\frac{5773}{40EI}\right) + \frac{2EI}{3}\left(-\frac{1137}{10EI}\right)$$

$$M_{AB} = 0$$

$$V_{AB} = \frac{49}{4} + \frac{4EI}{9}(\Delta_{ZA}) - \frac{2EI}{3}(\theta_A) - \frac{2EI}{3}(\theta_B)$$

$$V_{AB} = \frac{49}{4} + \frac{4EI}{9}\left(-\frac{2073}{5EI}\right) - \frac{2EI}{3}\left(-\frac{5773}{40EI}\right) - \frac{2EI}{3}\left(-\frac{1137}{10EI}\right)$$

$$V_{AB} = 0$$

$$M_{BA} = \frac{107}{12} - \frac{2EI}{3}(\Delta_{ZA}) + \frac{2EI}{3}(\theta_A) + \frac{4EI}{3}(\theta_B)$$

$$M_{BA} = \frac{107}{12} - \frac{2EI}{3}\left(-\frac{2073}{5EI}\right) + \frac{2EI}{3}\left(-\frac{5773}{40EI}\right) + \frac{4EI}{3}\left(-\frac{1137}{10EI}\right)$$

$$M_{BA} = \frac{75}{2} \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_{BA} = \frac{61}{4} - \frac{4EI}{9}(\Delta_{ZA}) + \frac{2EI}{3}(\theta_A) + \frac{2EI}{3}(\theta_B)$$

$$V_{BA} = \frac{61}{4} - \frac{4EI}{9}\left(-\frac{2073}{5EI}\right) + \frac{2EI}{3}\left(-\frac{5773}{40EI}\right) + \frac{2EI}{3}\left(-\frac{1137}{10EI}\right)$$

$$V_{BA} = \frac{55}{2} \text{ ton}$$

$$M_{BC} = -35 + \frac{2EI}{3}(\theta_B) + \frac{EI}{3}(\theta_C) = -35 + \frac{2EI}{3}\left(-\frac{1137}{10EI}\right) + \frac{EI}{3}\left(\frac{1599}{10EI}\right)$$

$$M_{BC} = -\frac{115}{2} \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_{BC} = 30 - \frac{EI}{6}(\theta_B) - \frac{EI}{6}(\theta_C) = 30 - \frac{EI}{6}\left(-\frac{1137}{10EI}\right) - \frac{EI}{6}\left(\frac{1599}{10EI}\right)$$

$$V_{BC} = \frac{223}{10} \text{ ton}$$

$$M_{CB} = 35 + \frac{EI}{3}(\theta_B) + \frac{2EI}{3}(\theta_C) = 35 + \frac{EI}{3}\left(-\frac{1137}{10EI}\right) + \frac{2EI}{3}\left(\frac{1599}{10EI}\right)$$

$$M_{CB} = \frac{1037}{10} \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_{CB} = 30 + \frac{EI}{6}(\theta_B) + \frac{EI}{6}(\theta_C) = 30 + \frac{EI}{6}\left(-\frac{1137}{10EI}\right) + \frac{EI}{6}\left(\frac{1599}{10EI}\right)$$

$$V_{CB} = \frac{377}{10} \text{ ton}$$

$$M_{CD} = -\frac{161}{4} + \frac{4EI}{9}(\theta_C) + \frac{2EI}{9}(\theta_D) = -\frac{161}{4} + \frac{4EI}{9}\left(\frac{1599}{10EI}\right) + \frac{2EI}{9}\left(-\frac{6213}{40EI}\right)$$

$$M_{CD} = -\frac{37}{10} \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$V_{CD} = \frac{103}{4} - \frac{2EI}{27}(\theta_C) - \frac{2EI}{27}(\theta_D) = \frac{103}{4} - \frac{2EI}{27}\left(\frac{1599}{10EI}\right) - \frac{2EI}{27}\left(-\frac{6213}{40EI}\right)$$

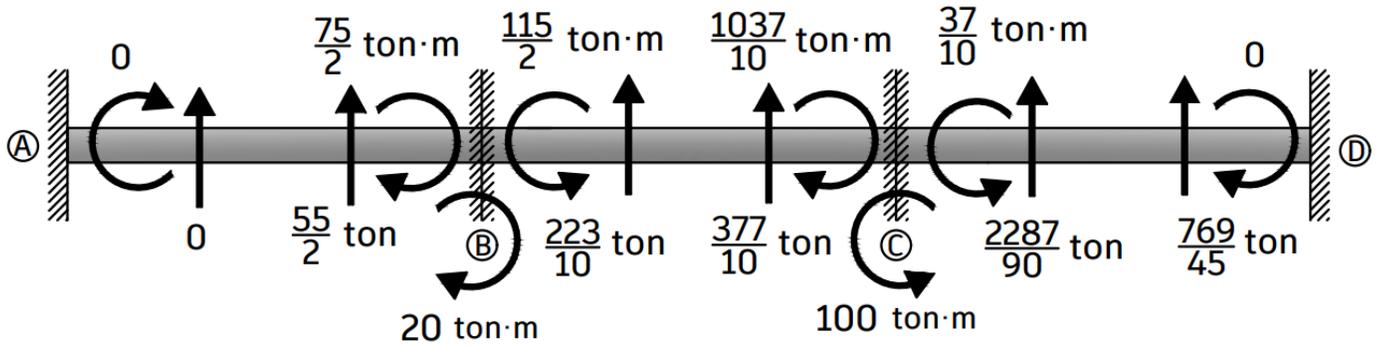
$$V_{CD} = \frac{2287}{90} \text{ ton}$$

$$M_{DC} = \frac{67}{2} + \frac{2EI}{9}(\theta_C) + \frac{4EI}{9}(\theta_D) = \frac{67}{2} + \frac{2EI}{9}\left(\frac{1599}{10EI}\right) + \frac{4EI}{9}\left(-\frac{6213}{40EI}\right)$$

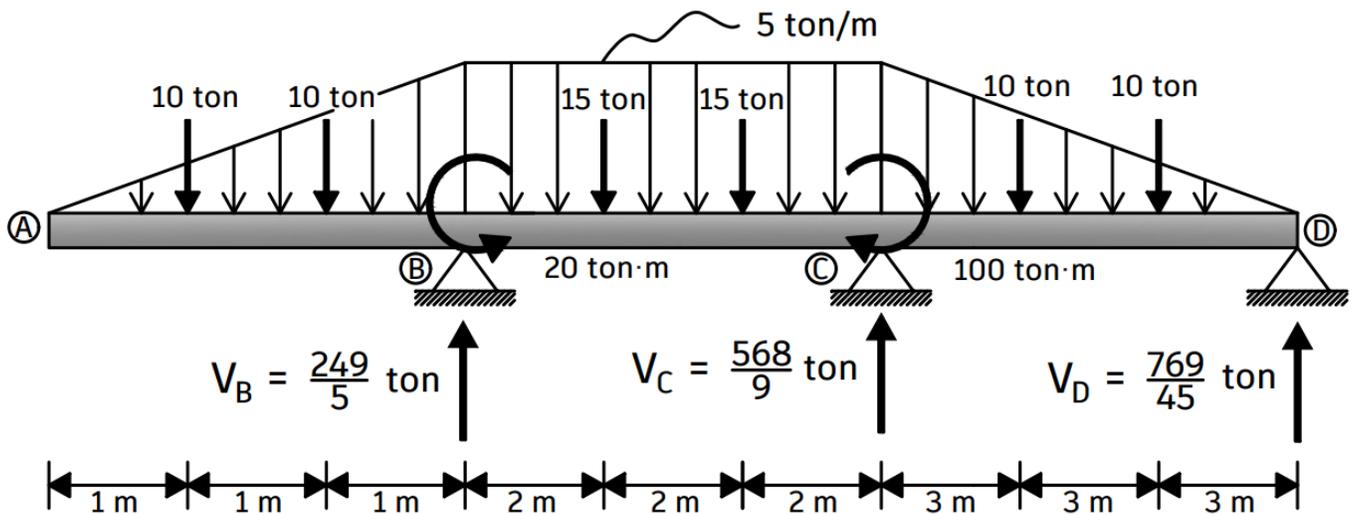
$$M_{DC} = 0$$

$$V_{DC} = \frac{67}{4} + \frac{2EI}{27}(\theta_C) + \frac{2EI}{27}(\theta_D) = \frac{67}{4} + \frac{2EI}{27}\left(\frac{1599}{10EI}\right) + \frac{2EI}{27}\left(-\frac{6213}{40EI}\right)$$

$$V_{DC} = \frac{769}{45} \text{ ton}$$



La suma de los momentos en los empotramientos B y C deben de ser igual a cero y el resultado de la suma de las fuerzas en los mismos empotramientos serán los valores de las reacciones en los apoyos fijos de la viga original, por lo que el valor de las reacciones de cada apoyo fijo de la viga original, quedan de la siguiente manera:



Una vez teniendo las reacciones en los apoyos de una viga hiperestática se pueden calcular las ecuaciones del momento flexionante y fuerza córtate, también se pueden calcular las ecuaciones del desplazamiento y de rotación para conocer la configuración deformada del sistema estructural que se este resolviendo.

Con el método de las rigideces, no solo se conocen las reacciones en los apoyos de una viga hiperestática, sino que también se conocen los valores de los desplazamientos o rotaciones que se restringen con un empotramiento, por lo que será sencillo calcular las ecuaciones del desplazamiento y de rotación utilizando el método de la doble integración y como ya se conocen los valores de las rotaciones o desplazamientos presentes en la viga, no será necesario calcular sus valores empleado el principio del trabajo virtual para conocer una nueva condición de frontera, como se vio en los ejercicios que se resolvieron en el tema del método de la doble integración.

Al tener los valores de las reacciones en los apoyos de una viga hiperestática y al hacer una sumatoria de fuerzas verticales, puede que el resultado sea igual a cero, pero esto no significa que el ejercicio este resuelto correctamente. Para confirmar que los valores de las reacciones en los apoyos calculados con el método de las rigideces son los correctos, se debe de calcular la ecuación del desplazamiento y de rotación y con estas ecuaciones se deben de cumplir las condiciones de frontera presentes en la viga que se esté resolviendo.

En conclusión, para confirmar que los valores de las reacciones en los apoyos de una viga hiperestática son los correctos, al calcular la ecuación del desplazamiento y de rotación de la viga que se esté resolviendo, se deben de cumplir las condiciones de frontera para confirmar que la viga fue resulta correctamente.

Como se pudo observar en el transcurso de los ejercicios resueltos en esta sección, el método de las rigideces no tiene gran complejidad, solo de debe de tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se deben de conocer perfectamente los grados de libertad que se encuentren presentes en la viga hiperestática que se este resolviendo, para que después se restrinjan con un empotramiento y no haya error.
- Cuando se imponga un desplazamiento o una rotación unitaria, se debe de ser cuidadoso en colocar las fuerzas y los momentos en el sentido o en la dirección correcta, ya que, si se coloca un momento o una fuerza en un sentido incorrecto, los resultados que obtengan serán erróneos.
- Cuando se construya la matriz de rigidez, se recomienda que se preste atención si la matriz es simétrica, porque en caso de que no lo sea, se deberá de revisar los coeficientes de rigidez porque probablemente se colocó un momento o una fuerza con un sentido o valor incorrecto.
- Al inicio de cada ejercicio que se resuelva, se deberá de tener en cuenta la convención de signos, para que no haya error.
- Por último, para confirmar que los valores de las reacciones son correctos, se deben de calcular las ecuaciones del desplazamiento y de rotación y se deberán de cumplir las condiciones de fronteras presentes en la viga que se este resolviendo.

De esta manera se concluye con los temas y los ejercicios que conforman la presente tesis.

CONCLUSIONES

Como se pudo observar en el transcurso de todos los capítulos que componen la presente tesis, es indispensable tener conocimientos matemáticos en las materias de álgebra, cálculo diferencial e integral, estática y estructuras isostáticas que se imparten en la carrera de ingeniería civil, esto con el fin de que el lector pueda tener una mejor comprensión en los métodos numéricos que se presentaron con anterioridad.

Es fundamental que el lector pueda recordar de las clases de la materia de estructuras isostáticas el método de los cortes para el cálculo de las ecuaciones de los momentos flexionantes de los diferentes elementos estructurales tipo viga, ya que como se observó en el transcurso de la presente tesis, en todos los métodos es indispensable el uso de las ecuaciones de momentos flexionantes y de igual manera se debe tener un amplio conocimiento matemático en el cálculo integral.

Se hizo una explicación a detalle de una serie de pasos a seguir de los diversos métodos más utilizados en el campo laboral para el cálculo de desplazamientos verticales. Quedará a criterio personal de cada lector que método le pareció sencillo, complejo, entendible, práctico, laborioso, y cual método utilizar en la práctica profesional.

Al concluir se espera como objetivo principal que el lector pueda entender y dominar perfectamente cada uno de los métodos numéricos, ya que es de gran importancia que los estudiantes de ingeniería civil que ejerzan en el área de estructuras en el campo laboral, puedan calcular con precisión los desplazamientos que se generan en los diferentes elementos estructurales que son sometidos a fuerzas externas, ya que en la Ciudad de México existe un reglamento que se le conoce como "Las Normas Técnicas Complementarias", que nos dice, que para la revisión del estado límite de servicio de una obra de infraestructura, los desplazamientos o las deformaciones que se calculan en los elementos estructurales no deben ser mayores a las deformaciones permisibles que se encuentran especificadas en este reglamento. Por lo que es fundamental que se tenga un dominio en el cálculo de deformaciones o desplazamientos.

Existen programas computacionales como lo son ETABS, SAP2000, STAAD PRO, que puede calcular desplazamientos o deformaciones en cada elemento estructural como vigas, columnas, armaduras, marcos, etc. Es recomendable que como estudiantes de la carrera de ingeniería civil se tenga la iniciativa de aprender el manejo de estos programas computacionales para que cuando se ejerza la profesión en el campo laboral, se facilite el análisis y diseño estructural de cualquier obra de infraestructura.

Esto con el fin de que el profesionista pueda elaborar con ayuda de los programas computacionales, modelos matemáticos que puedan tener un comportamiento estructural que en términos racionales se asemejen al problema físico que se tiene que estudiar (ante la incertidumbre de los comportamientos de los materiales y en los procesos constructivos), estos modelos matemáticos deberán ser eficientes y precisos en los cuales se tenga una seguridad estructural confiable.

Con el avance de la tecnología, se van creando diversos programas computacionales, que le otorgarán mejores ofertas laborales a los ingenieros civiles recién egresados que tengan el conocimiento de manipular estos programas, ya que en diversa empresa que se dedican a la construcción, solicitan ingenieros que tenga un amplio conocimiento en las nuevas tecnologías.

Pero para dominar estos programas computacionales, se debe tener una base sólida de todos los conocimientos matemáticos que imparten los profesores en las aulas de clases, para que se pueda introducir modelos estructurales y a su vez se puedan interpretar los resultados que arroje el programa y se pueda entender el lenguaje matemático que emiten estos programas computacionales.

Cabe recalcar y enfatizar que los programas computacionales comerciales solo son una herramienta que le facilitan al ingeniero estructurista conocer el valor de las deformaciones presentes en un estructura, estos programas permiten el ahorro de tiempo para calcular deformaciones, ya que con ayuda de estos programas, un ingeniero estructurista no tardará horas o hasta días en realizar un análisis y un diseño estructural, pero es importante que se entienda que los programas como ETABS o SAP200 solo son una herramienta de trabajo y estos programas no podrán sustituir el criterio ingenieril ni el juicio ingenieril y mucho menos podrán sustituir el conocimiento y la experiencia que pueda tener un ingeniero estructurista, por lo que, es obligación del ingeniero estructurista tener un conocimiento sólido en el área de la ingeniería estructural para que con sus propios criterios ingenieriles pueda realizar un buen diseño estructural con la ayuda de los programas computacionales.

En la presente tesis solo se enfocó en la enseñanza del procedimiento matemático que se requiere para calcular deformaciones en elementos estructurales tipo vigas, pero existen libros en los cuales te enseñan y te explican el procedimiento para calcular desplazamientos verticales y deformaciones angulares en los diferentes elementos estructurales como son vigas, armaduras y marcos. Se recomienda leer estos libros para obtener un sólido conocimiento en el análisis estructural, para que en las materias que se presenten en los próximos semestres de la carrera, no se tenga problema alguno en el entendimiento de los diferentes temas que se puedan presentar.

REFERENCIAS

- Óscar M. González Cuevas. (2017). Análisis Estructural. México: Limusa.
- Aslam Kassimali. (2015). Análisis Estructural. México: Cengage Learning.
- Jack C. McCormac. (abril 2010). Análisis de Estructuras, Métodos Clásico y Matricial. Ciudad de México: Alfaomega.
- Hibbeler, R. C. (2012). Análisis Estructural. Ciudad de México: Pearson.
- Molina Elvira, M. (2021). Apuntes de Estructuras Isostáticas. Estado de México, México: Apuntes Tomados en Clase.
- Molina Elvira, M. (2021). Apuntes de Comportamiento de Materiales. Estado de México, México: Apuntes Tomados en Clase.
- Paniagua Lovera, C. (2021). Apuntes de Análisis Estructural. Estado de México, México: Apuntes Tomados en Clase.