UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El problema sobredeterminado de Serrin

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Cristian Edimar Morales Encinos

TUTORA

Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2022

Ta stojol te jme'

Dedicado a
mi madre

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a Concepción Encinos Sántiz, mi madre, por su inmenso amor maternal. A mis abuelos maternos, Juan y Rosa, por inculcarme a temprana edad a trabajar y persistir por lo que quiero. A mis hermanos y hermanas, a mis tías, especialmente a Maurilia.

A mi asesora Mónica Clapp, por su dedicación y paciencia para realizar este trabajo. Al Dr. Alberto Saldaña de Fuentes, por sus apreciadas sugerencias, tanto para la elaboración de esta tesis como en la vida escolar.

Agradezco al PROGRAMA UNIVERSITARIO DE ESTUDIOS DE LA DIVERSIDAD CULTURAL Y LA INTERCULTURALIDAD que a través del SISTEMA DE BECAS PARA ESTUDIANTES DE PUEBLOS INDIGENAS Y AFRODECENDIENTES DE LA UNAM, me permitió ser parte de la comunidad de becarios. El apoyo económico que recibí de este programa fue de vital importancia para mi desarrollo académico durante la licenciatura.

Agradezco a la UNAM el apoyo económico otorgado para la elaboración de esta tesis a través de una beca de titulación con cargo al proyecto UNAM-DGAPA-PAPIIT IN100718.

Índice general

Introducción

Consideramos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = -c & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{S}$$

donde Ω es un dominio acotado suave en $\mathbb{R}^N$, $\frac{\partial \cdot}{\partial \nu}$ denota a la derivada normal exterior y c es una constante positiva.

Se trata de un problema *sobredeterminado*, ya que las primeras dos condiciones

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

determinan de manera única a la solución u de (P); ver [1, Teorema 16.29]. El principio fuerte del máximo asegura que $u > 0$ en Ω; ver Teorema 1.1.4.

La pregunta es entonces:

Problema 0.0.1. *Dada $c > 0$, ¿para qué dominios Ω existe una solución del problema (S)?*

Notemos que, si u es solución de (S), entonces el teorema de la divergencia establece la siguiente relación entre la medida de Ω y la de su frontera:

$$|\Omega|_N = -\int_\Omega \Delta u = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = c\,|\partial\Omega|_{N-1},$$

donde $|\cdot|_N, |\cdot|_{N-1}$ denotan a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^{N-1}$ respectivamente. De lo anterior vemos que la constante positiva c no es arbitraria sino que $c = \frac{|\Omega|_N}{|\partial\Omega|_{N-1}}$.

James Serrin demostró en [6] el siguiente resultado:

Teorema 0.0.2 (Serrin 1971)**.** *Si existe una solución $u \in C^2(\overline{\Omega})$ del problema (S), entonces Ω es una bola de radio $R := Nc$ y*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x-\xi|^2}{2N},$$

donde ξ es el centro de la bola.

El objetivo de este trabajo es exponer a detalle la demostración del Teorema 0.0.2 que se encuentra en las Secciones 1 y 2 del artículo de Serrin [6]. La introducción de [6] contiene una amplia motivación física para estudiar este problema. Serrin hizo la prueba basándose en el método del plano móvil de Alexandrov, los principios del máximo y una generalización del Lema de Hopf.

En el articulo [5] de C. Nitsch y C. Trombetti, se pueden encontrar otras demostraciones del teorema de Serrin, como la de Weinberger que es bastante corta donde solo utiliza la identidad de Pohozaev y el principio fuerte del máximo.

Para abordar la demostración de Serrin, en el Capítulo 1 discutiremos brevemente los principios del máximo y el lema de Hopf para el operador de Laplace, la demostración de estos resultados clásicos también se pueden encontrar por ejemplo, en el libro de Evans [3], Sección 6.4. En este capítulo, enunciaremos y demostraremos a detalle una generalización del lema de Hopf. Una vez hecho esto, en el Capítulo 2, veremos concretamente la prueba del Teorema 0.0.2.

Capítulo 1

Principio del máximo y lema de Hopf

En este capítulo trabajaremos en algunas propiedades interesantes del operador de Laplace. Sean Ω un subconjunto abierto, conexo y acotado en $\mathbb{R}^N$ con frontera suave y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que

$$\Delta u \geq 0 \qquad \text{en } \Omega. \tag{1.0.1}$$

En la Sección 1.1 veremos los principios del máximo, que establecen que si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ satisface la desigualdad (1.0.1), entonces u no puede alcanzar su máximo en Ω, a menos que u sea una función constante. Como consecuencia inmediata de este resultado, veremos que si $u \leq 0$ en la frontera de Ω, entonces $u < 0$ en Ω a no ser que $u \equiv 0$. En la Sección 1.2, veremos el Lema de Hopf que establece que si u satisface de nuevo (1.0.1) y se maximiza en un punto de la frontera de Ω, entonces la derivada normal exterior en ese punto debe de ser estrictamente positiva. Estos resultados clásicos se encuentran por ejemplo, en el libro de Evans [3], Sección 6.4.

En la sección 1.3 veremos el segundo resultado principal de esta tesis.

Lema 1.0.1 (Lema de Hopf generalizado). *Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera $\mathcal{C}^2$, $Q \in \partial\Omega$, ν_Q la normal unitaria exterior en Q y T un hiperplano en $\mathbb{R}^N$ que contiene a $\{Q + t\nu_Q,\ t \in \mathbb{R}\}$. T divide a Ω en dos abiertos. Sea D uno de ellos.*
Si $w \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$ es tal que $w \not\equiv 0$ y

$$\begin{cases} -\Delta w \geq 0 & \text{en } D, \\ \quad w \geq 0 & \text{en } D, \\ \quad w(Q) = 0, & \end{cases}$$

y $s \in \mathbb{R}^N$ entra a D en Q, entonces

$$\text{o bien} \quad \frac{\partial w}{\partial s}(Q) > 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(Q) > 0.$$

La idea fundamental de la prueba de este resultado, así como el lema de Hopf, consiste en encontrar una función auxiliar que satisfaga los principios del máximo en una región adecuada y que en el punto Q la función alcance su máximo. Este resultado es más delicado que el lema de Hopf, ya que en el punto Q no es posible encontrar una bola abierta B que se quede completamente contenida en D y que $Q \in \partial D$.

1.1. Principios del Máximo

Sean Ω un subconjunto abierto, conexo y acotado en $\mathbb{R}^N$ y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Supongamos que u tiene un máximo local en $x \in \Omega$. Entonces, sabemos de los cursos de cálculo, que en este punto las derivadas parciales de u satisfacen que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_N}(x) = 0$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) \leq 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) \leq 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}(x) \leq 0.$$

Así, en un máximo local, se satisface la desigualdad

$$\Delta u \leq 0.$$

Esto nos asegura que si una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ satisface la desigualdad estricta

$$\Delta u(x) > 0 \tag{1.1.1}$$

para cada punto $x \in \Omega$, entonces u no puede alcanzar su máximo en Ω.
Es importante establecer un principio del máximo menos restrictivo que la desigualdad (1.1.1). Mostraremos a continuación que el principio del máximo anterior es válido incluso cuando la desigualdad (1.1.1) no es estricta, a menos que u sea constante.

Teorema 1.1.1 (Principio del máximo)**.** *Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que*

$$\Delta u \geq 0 \qquad \textit{en } \ \Omega.$$

Si u alcanza su máximo M en algún punto de Ω, entonces $u \equiv M$ en Ω.

Demostración. Sea $x \in \Omega$, entonces existe $r > 0$ tal que el conjunto abierto $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^N \ : \|x - y\| < r\}$ esté completamente contenido en Ω. Para todo $\rho \in (0, r)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_{B_\rho(x)} \Delta u(y)dy &= \rho^N \int_{B_1(0)} \Delta u(x+\rho z)\,dz \\
&= \rho^N \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+\rho z)\cdot z\,dS_z,
\end{aligned}
$$

lo que implica que

$$
0 \leq \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+\rho z)\cdot z\,dS_z,
$$

luego,

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_0^r \left(\int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+\rho z)\cdot z\,dS_z \right) d\rho &= \int_{\partial B_1(0)} \left(\int_0^r \nabla u(x+\rho z)\cdot z\,d\rho \right) dS_z \\
&= \int_{\partial B_1(0)} (u(x+rz)-u(x))\,dS_z \\
&= \int_{\partial B_1(0)} u(x+rz)\,dS_z - |\partial B_1(0)|_{N-1}\,u(x).
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$
u(x) \leq \frac{1}{|\partial B_1(0)|_{N-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x+rz)\,dS_z = \frac{1}{|\partial B_r(x)|_{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\,dS_y. \qquad (1.1.2)
$$

Ahora bien, supongamos u alcanza su máximo M en algún punto $x_0 \in \Omega$. Entonces, $u \leq M$ y $u(x_0) = M$, deducimos de la desigualdad (1.1.2) que

$$
\frac{1}{|\partial B_r(x_0)|_{N-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y)\,dS_y = M \qquad \forall\, r > 0 \quad \text{tal que} \quad \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega,
$$

por lo que u debe ser idénticamente igual a M para cualquier bola abierta centrado en x_0 tal que su cerradura este contenida en Ω. De no ser así, por la continuidad de u, podemos encontrar $r > 0$ tal que $B_r(x_0)$ esté completamente contenida en Ω, un subconjunto B de $\partial B_r(x_0)$ de medida no nula (la medida en $\mathbb{R}^{N-1}$), y $t < M$ tal que $u(y) \leq t$ para todo $y \in B$, con lo que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\partial B_r(x_0)|}\int_{\partial B_r(x_0)} u(y)\,dS_y &= \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|}\int_{(\partial B_r(x_0))\setminus B} u(y)\,dS_y + \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|}\int_B u(y)\,dS_y \\
&\leq \frac{|(\partial B_r(x_0))\setminus B|_{N-1} M}{|\partial B_r(x_0)|_{N-1}} + \frac{|B|_{N-1} t}{|\partial B_r(x_0)|_{N-1}} \\
&< \frac{M|(\partial B_r(x_0))\setminus B|_{N-1}}{|\partial B_r(x_0)|_{N-1}} + \frac{|B|_{N-1} M}{|\partial B_r(x_0)|_{N-1}} = M.
\end{aligned}$$

Así que, $A = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ es abierto, pero también cerrado por la continuidad de u. La conexidad de Ω implica que, o bien $A = \emptyset$ o bien $A = \Omega$. $\square$

Hacemos hincapié en que en la prueba anterior, no utilizamos el hecho de que Ω sea acotado, utilizando este hecho, obtenemos que si además $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y u no es constante, entonces necesariamente u se maximiza en la frontera de Ω.

Corolario 1.1.2. *Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ es tal que*

$$\Delta u \geq 0 \qquad \text{en } \Omega,$$

entonces,

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x). \tag{1.1.3}$$

Como consecuencia inmediata de los dos resultados anteriores, tenemos los dos siguientes teoremas.

Teorema 1.1.3 (Principio del máximo débil)**.** *Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ una solución de*

$$\begin{cases} -\Delta u \leq 0 & \text{en } \Omega, \\ \quad u \leq 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces $u \leq 0$ en Ω.

Teorema 1.1.4 (Principio fuerte del máximo)**.** *Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ una solución de*

$$\begin{cases} -\Delta u \leq 0 & en\ \Omega, \\ u \leq 0 & en\ \Omega. \end{cases}$$

Entonces, o bien $u \equiv 0$ en Ω, o bien $u < 0$ en Ω.

1.2. El lema de Hopf

Ahora supongamos que la frontera de Ω es de clase $\mathcal{C}^2$.

Definición 1.2.1. *Sea η el vector normal unitario exterior en el punto $x_0 \in \partial\Omega$. Decimos que el vector ν apunta hacia afuera desde Ω en el punto x_0 si*

$$\nu \cdot \eta > 0.$$

Si $w \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, definimos la derivada direccional exterior de w sobre la frontera de Ω en el punto x_0 en la dirección ν como

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) := \lim_{t \to 0^+} \frac{w(x_0 - t\nu) - w(x_0)}{-t}. \tag{1.2.1}$$

Note que el límite anterior siempre existe y es igual a

$$\lim_{x \to x_0} \nu \cdot \nabla w(x) = \nu \cdot \nabla w(x_0).$$

Además, si w satisface que $w(x) \leq w(x_0)$ para todo $x \in \Omega$, es inmediato de (1.2.1) que $\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$.

Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ que satisface que $-\Delta u \leq 0$ en Ω. Si u alcanza su máximo en $x_0 \in \partial\Omega$, entonces la derivada direccional de u en x_0 tomada en cualquier dirección en la frontera que apunta hacia fuera de Ω no puede ser negativa. De

ser así, la función comenzaría a crecer a medida que ingresamos a Ω en x_0. Por lo que el máximo no puede ocurrir en x_0, tenemos entonces que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$.
A continuación probaremos que, a menos que u sea una función constante, la desigualdad $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$ es estricta en x_0.

Teorema 1.2.2 (Lema de Hopf)**.** *Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ que satisface*

$$-\Delta u \leq 0 \quad en\, \Omega,$$

y supongamos que existe un punto $x_0 \in \partial\Omega$ tal que

$$u(x_0) > u(x) \qquad para\ todo\, x \in \Omega.$$

Si además Ω satisface la condición de la esfera interior en x_0; esto es, si existe una bola abierta B tal que $B \subset \Omega$ y $x_0 \in \partial B$, entonces la derivada direcional exterior

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

donde ν es un vector que apunta hacia afuera de B en el punto x_0.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $B = B_r(0)$ para algún $r > 0$. Consideramos la función positiva w en $B_r(0)$ definida por

$$w(x) = e^{-\lambda\|x\|^2} - e^{-\lambda r^2} \qquad \text{para } x \in B_r(0),$$

para $\lambda > 0$ aún por determinar.
Mediante un cálculo directo,

$$\Delta w(x) = e^{-\lambda\|x\|^2}\left(4\lambda^2\|x\|^2 - 2N\lambda\right).$$

En la región $A = B_r(0) \setminus B_{\frac{r}{2}}(0)$, ver Figura 1.1, es fácil ver que

$$\Delta w > 0, \qquad \text{si } \lambda \geq \frac{2N+1}{r^2}.$$

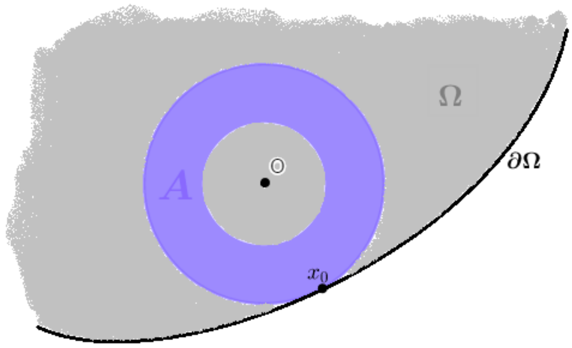


Figura 1.1: $A = B_r(0) \setminus B_{\frac{r}{2}}(0)$

Luego, fija tal λ, definimos para $\varepsilon > 0$

$$w_\varepsilon(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon w(x).$$

Es claro que, $\Delta w_\varepsilon \geq 0$ en A, $w_\varepsilon \leq 0$ sobre $\partial B_r(0)$ y $w_\varepsilon(x_0) = 0$. Como $u(x) < u(x_0)$ para $\|x\| = \frac{r}{2}$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $w_\varepsilon(x) < 0$ para $\|x\| = \frac{r}{2}$. Con lo que

$$\begin{cases} \Delta w_\varepsilon \geq 0 & \text{en } A, \\ w_\varepsilon \leq 0 & \text{sobre } \partial A, \\ w_\varepsilon(x_0) = 0. \end{cases}$$

Por tanto, del Corolario 1.1.2, w_ε alcanza su máximo en el punto x_0. Esto implica que

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$$

o

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) = -\varepsilon \nu \cdot \nabla w(x_0) = -\varepsilon \nu \cdot \left(-2\lambda e^{-\lambda r^2} x_0\right) = 2\varepsilon \lambda e^{-\lambda r^2} \nu \cdot \eta(x_0) > 0.$$

□

1.3. Una generalización del lema de Hopf

A continuación daremos una generalización del Lema 1.2.2.

Definición 1.3.1. *Sean D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, $Q \in \partial D$ y $s \in \mathbb{R}^N$. Decimos que s* entra a *D* en *Q si existe t_0 tal que $Q + ts \in D$ para todo $t \in (0, t_0)$.*

Si $w \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$ definimos $f(t) := w(Q + st)$. Entonces $f \in \mathcal{C}^2([0, t_0))$ y

$$\frac{\partial w}{\partial s}(Q) = \lim_{t \to 0^+} f'(t) = f'(0),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(Q) = \lim_{t \to 0^+} f''(t) = f''(0).$$

Lema 1.3.2 (Lema de Hopf generalizado)**.** *Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera $\mathcal{C}^2$, $Q \in \partial\Omega$, ν_Q la normal unitaria exterior en Q y T un hiperplano en $\mathbb{R}^N$ que contiene a $\{Q + t\nu_Q : t \in \mathbb{R}\}$. T divide a Ω en dos abiertos. Sea D uno de ellos.*
Si $w \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$ es tal que $w \not\equiv 0$ y

$$\begin{cases} -\Delta w \geq 0 & \text{en } D, \\ w \geq 0 & \text{en } D, \\ w(Q) = 0, \end{cases}$$

y $s \in \mathbb{R}^N$ entra a D en Q, entonces

$$\text{o bien} \quad \frac{\partial w}{\partial s}(Q) > 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(Q) > 0.$$

Demostración. Como Ω es de clase C^2, existe B_1 una bola abierta contenida en Ω tal que $\partial B_1 \cap \partial\Omega = \{Q\}$. Sea B_2 la bola abierta con centro en Q y radio $\frac{1}{2}r_1$ donde r_1 es el radio de B_1. Definimos

$$K := B_1 \cap B_2 \cap D,$$
$$\Gamma := \partial K \cap \partial B_2,$$
$$\Gamma' := (\partial K \cap T) \cup (\partial K \cap \partial B_1),$$

ver Figura 1.2.

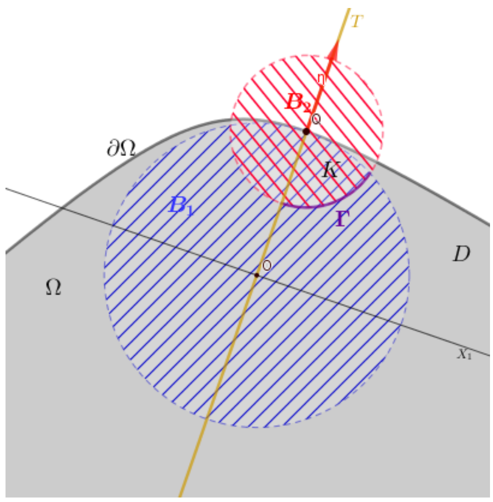


Figura 1.2: $K = B_1 \cap B_2 \cap D, \Gamma = \partial K \cap \partial B_2$

Elegimos un sistema de coordenadas con el origen en el centro de B_1 y con

T igual al hiperplano $x_1 = 0$; además podemos suponer que

$$D = \{(x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \Omega \ : \ x_1 > 0\}.$$

Ahora definamos la función auxiliar

$$z(x) = x_1(e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha r_1^2}),$$

donde α es un número real positivo a determinar.
Es claro que

$$z > 0 \text{ en } K, \quad z = 0 \quad \text{sobre } \Gamma' \quad \text{y} \quad z(x) \leq x_1 \quad \forall\, x \in \Gamma.$$

Mediante un simple cálculo tenemos que

$$\Delta z(x) = 2\alpha x_1 e^{-\alpha|x|^2}(2\alpha|x|^2 - (N+2)).$$

Como $|x| \geq \frac{1}{2}r_1$ en K, podemos elegir α suficientemente grande, digamos $\alpha = (N+2)r_1^{-2}$ para obtener $\Delta z > 0$ en K.

Por otra parte, como $w \not\equiv 0$, el principio fuerte del máximo (Teorema 1.1.4) asegura que $w > 0$ en D. Notamos que Γ interseca la frontera de D solo en el hiperplano T. Además, la distancia de $\Gamma \cap T$ a las esquinas de D es positiva.
Afirmamos que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$w(x) \geq \epsilon x_1 \quad \text{en} \quad \Gamma. \tag{1.3.1}$$

En efecto, dividimos $\Gamma \cap T$ en dos conjuntos disjuntos $\Gamma \cap T = A_0 \cup A_+$, donde

$$A_+ = \{x \in \Gamma \cap T \ : \ w(x) > 0\}, \qquad A_0 = \{x \in \Gamma \cap T \ : \ w(x) = 0\}.$$

Notamos que para cualquier $\epsilon > 0$, $w(x) \geq \epsilon x_1$ para cualquier $x \in \Gamma \cap T$, pues $x_1 = 0$. También, para cualquier $x \in A_0$ se satisface la condición de la esfera interior, luego por el lema de Hopf (Lema 1.2.2)

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial w}{\partial e_1}(x) > 0.$$

Como en particular $w \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(x) > 0 \qquad \text{para todo } x \in \overline{A_\delta}, \qquad A_\delta := \{x \in \overline{D} \,:\, \operatorname{dist}(x, A_0) < \delta\}.$$

Como $\frac{\partial w}{\partial x_1} > 0$ en $\overline{A_\delta}$, podemos encontrar $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} - \varepsilon_1 > 0 \quad \text{en } A_\delta.$$

Sean $\varphi = w - \varepsilon_1 x_1$ y $x = (x_1, x') \in A_\delta$, entonces $\varphi(0, x') = w(0, x') \geq 0$ y por lo tanto

$$\varphi(x) \geq \varphi(x) - \varphi(0, x') = \left(\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(s x_1, x')\, ds \right) x_1 > 0,$$

es decir,

$$w(x) > \varepsilon_1 x_1 \qquad \text{en } A_\delta.$$

Notemos que $\Gamma \setminus A_\delta = \Gamma \setminus (\Gamma \cap A_\delta)$ es cerrado, pues A_δ es un abierto relativo a $\overline{D}$, con lo que $\Gamma \cap A_\delta$ es un abierto en Γ. Como $A_0 \subset A_\delta$, $w > 0$ en el compacto $\Gamma \setminus A_\delta$ (por la definición de A_+, y por el hecho que $w > 0$ en D), tenemos también que existe una constante positiva $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$w(x) > \varepsilon_2 \quad \text{en } \Gamma \setminus A_\delta.$$

El hecho de que $x_1 \leq r_1$ para todo $x = (x_1, x') \in \Gamma$, nos garantiza que

$$w(x) > \frac{\varepsilon_2}{r_1} x_1.$$

Tomando $\epsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1, \frac{\varepsilon_2}{r_1}\}$ obtenemos la afirmación (1.3.1).

Además

$$w \geq 0 \text{ en } \Gamma'.$$

Consecuentemente, la función $w - \epsilon z$ satisface que

$$\begin{cases} -\Delta(w - \epsilon z) > 0 & \text{en } K, \\ \quad w - \epsilon z \geq 0 & \text{sobre } \partial K, \end{cases}$$

y, por los principios del máximo (Teoremas 1.1.3 y 1.1.4), se tiene que

$$w - \epsilon z > 0 \quad \text{en } K.$$

Además, $(w - \epsilon z)(Q) = 0$.

Si s entra a D en Q, entonces s entra a K en Q. Por lo tanto, $Q + ts \in K$ para todo $t \in (0, t_0)$ con $t_0 > 0$. Sea $f(t) := (w - \epsilon z)(Q + ts)$. Entonces,

$$\frac{\partial(w - \epsilon z)}{\partial s}(Q) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{(w - \epsilon z)(Q + ts)}{t} \geq 0.$$

Si $\frac{\partial(w-\epsilon z)}{\partial s}(Q) = 0$, entonces $\frac{\partial^2(w-\epsilon z)}{\partial s^2}(Q) \geq 0$. Así pues,

$$\text{o bien } \frac{\partial(w - \epsilon z)}{\partial s}(Q) > 0, \quad \text{o bien } \frac{\partial^2(w - \epsilon z)}{\partial s^2}(Q) \geq 0.$$

Un cálculo directo muestra que

$$\frac{\partial z}{\partial s}(Q) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(Q) > 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} &\text{o bien} \quad \frac{\partial w}{\partial s}(Q) > 0, \\ &\text{o bien} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(Q) \geq \epsilon \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(Q) > 0. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Capítulo 2

El teorema de Serrin

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = -c, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.0.1}$$

donde Ω es un dominio acotado suave en $\mathbb{R}^N$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ denota a la derivada normal exterior y c es una constante positiva.

En este capítulo demostraremos el resultado principal de esta tesis, que afirma lo siguiente.

Teorema 2.0.1 (Serrin 1971). *Si existe una solución $u \in C^2(\overline{\Omega})$ del problema (2.0.1), entonces Ω es una bola de radio $R := Nc$ y*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x-\xi|^2}{2N},$$

donde ξ es el centro de la bola.

El argumento de Serrin se basa en el método del plano móvil. Este método consiste en considerar, para cada dirección $\zeta \in \mathbb{R}^N$, a un hiperplano ortogonal a ζ que viaja desde el infinito en la dirección de ζ hasta tocar al dominio Ω. Al continuar avanzando, barre a una porción de Ω. En los primeros instantes, la reflexión respecto al hiperplano de la porción barrida por él estará contenida en Ω. Detenemos el movimiento del hiperplano cuando deja de estarlo y llamamos H_ζ al hiperplano final.

El punto crucial del argumento de Serrin consiste en demostrar que el dominio Ω y la solución de (2.0.1) son invariantes bajo la reflexión respecto al hiperplano H_ζ para cualquier $\zeta \in \mathbb{R}^N$, ver Proposición 2.1.2.

Una vez demostrada la afirmación anterior, usando un argumento de simetría concluimos que Ω es, o bien una bola, o bien un anillo, y que la solución u de (2.0.1) es una función radial. La definición de H_ζ y la Proposición 2.1.2 descartan la posibilidad de que Ω sea un anillo.

2.1. El método del plano movil

Sea Ω un dominio acotado y suave de $\mathbb{R}^N$. Entendemos por *dominio* a un subconjunto abierto y conexo.

Para cada $\zeta \in \mathbb{R}^N$ con $|\zeta| = 1$ y $t \in \mathbb{R}$, denotamos por $H_{\zeta,t}$ al hiperplano ortogonal a ζ que pasa por $t\zeta$, por $E_{\zeta,t}$ al semiespacio abierto cuya frontera es $H_{\zeta,t}$ y cuya normal exterior es ζ, y por $\rho_{\zeta,t}$ a la reflexión sobre $H_{\zeta,t}$. Definimos

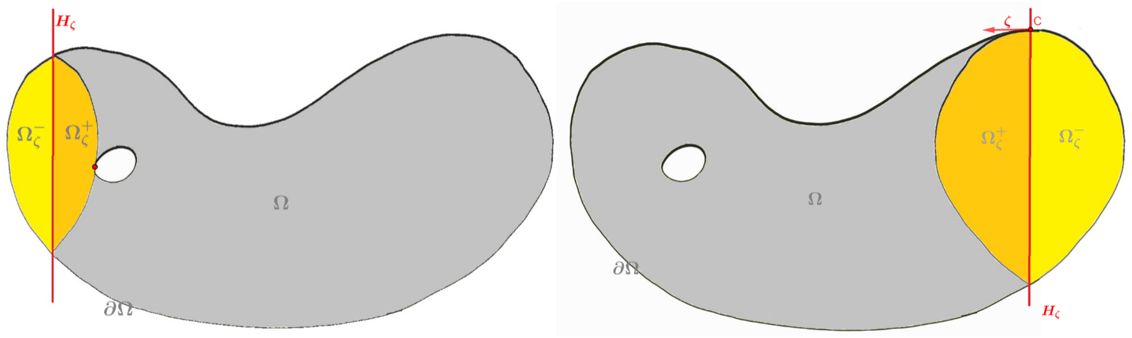
$$\Omega^-_{\zeta,t} := \Omega \cap E_{\zeta,t} \qquad \text{y} \qquad \Omega^+_{\zeta,t} := \rho_{\zeta,t}(\Omega^-_{\zeta,t}).$$

Sea t_ζ el número real más pequeño para el que se cumple al menos una de las siguientes afirmaciones:

(1) o bien $(\partial\Omega^+_{\zeta,t_\zeta} \setminus H_{\zeta,t_\zeta}) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$,

(2) o bien ζ es tangente a $\partial\Omega$ en un punto $Q \in H_{\zeta,t_\zeta} \cap \partial\Omega$.

Ver por ejemplo Figura 2.



(a) Caso 1 (b) Caso 2

Figura 2.1: Dos posibles casos para Ω^+_{ζ,t_ζ}.

Definimos

$$H_\zeta := H_{\zeta,t_\zeta}, \qquad \Omega_\zeta^\pm := \Omega^\pm_{\zeta,t_\zeta} \qquad \text{y} \qquad \Omega_\zeta := \Omega_\zeta^- \cup (H_\zeta \cap \Omega) \cup \Omega_\zeta^+.$$

Observaciones 2.1.1. *De las definiciones anteriores se sigue que*

(i) $\Omega_\zeta \subset \Omega$,

(ii) $\partial\Omega_\zeta^- \setminus H_\zeta$ *es la gráfica de una función suave* φ_ζ *definida en un subconjunto abierto de* H_ζ.

Proposición 2.1.2. *Si existe una solución* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *de* (2.0.1) *entonces, para cada* $\zeta \in \mathbb{R}^N$ *con* $|\zeta| = 1$, *se cumple que* $\Omega_\zeta = \Omega$ *y la función* u *es simétrica respecto a* H_ζ, *i.e.,* $u(\rho_\zeta x) = u(x)$ *para todo* $x \in \Omega$.

Demostración. Definimos $v : \Omega_\zeta \to \mathbb{R}$ por

$$v(x) = u(\rho_\zeta x), \qquad x \in \Omega_\zeta^+,$$
$$v(x) = u(x), \qquad x \in \Omega_\zeta^- \cup (H_\zeta \cap \Omega).$$

Claramente v satisface:

$$\begin{cases} -\Delta v = 1 & \text{en } \Omega_\zeta^+, \\ \quad v = u & \text{sobre } \partial\Omega_\zeta^+ \cap H_\zeta, \\ \quad v = 0 \text{ y } \frac{\partial v}{\partial \nu} = -c, & \text{sobre } \partial\Omega_\zeta^+ \setminus H_\zeta. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Como Ω_ζ^+ esta contenido en Ω, podemos considerar la función $u - v$ en Ω_ζ^+. De (2.1.1) y del hecho $u > 0$ en Ω, obtenemos

$$\begin{cases} -\Delta(u - v) = 0 & \text{en } \Omega_\zeta^+, \\ \quad u - v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_\zeta^+ \cap H_\zeta, \\ \quad u - v \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega_\zeta^+ \setminus H_\zeta. \end{cases}$$

Del Teorema 1.1.3, se sigue que $u - v \geq 0$ en Ω_ζ^+. Luego, el principio fuerte del máximo (1.1.4) afirma que, o bien

$$u - v > 0 \quad \text{en } \Omega_\zeta^+ \tag{2.1.2}$$

o bien $u \equiv v$ en Ω_ζ^+. Del último caso se sigue el resultado. En efecto, argumentando por contradicción, supongamos que existe $x \in \Omega \setminus \Omega_\zeta$. Sea $\sigma : [0,1] \to \Omega$ una función continua tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) \in \Omega_\zeta$. Entonces $\sigma(t) \in \partial\Omega_\zeta^+ \setminus H_\zeta$ para algún $t \in [0,1]$ y, puesto que $\rho_\zeta(\sigma(t)) \in \partial\Omega$, se tiene que

$$u(\sigma(t)) = v(\sigma(t)) = u(\rho_\zeta(\sigma(t))) = 0.$$

Esta es una contradicción, ya que $u(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Así pues, bastará demostrar que $u = v$ en Ω_ζ^+.

Supongamos que ocurre el caso (1), es decir Ω_ζ^+ es internamente tangente a

$\partial\Omega$ en un punto x_0 que no pertenece a H_ζ, entonces Ω_ζ^+ satisface la condición de la esfera interior en $x_0 \in \partial\Omega_\zeta^+$, pues Ω es de clase C^2, y supongamos por contradicción que (2.1.2) es cierto. Entonces, el lema de Hopf asegura que

$$\frac{\partial(u-v)}{\partial\nu}(x_0) > 0,$$

pero esto contradice (2.0.1) y (2.1.1) que implican

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_0) = \frac{\partial v}{\partial\nu}(x_0) = -c.$$

Concluimos que (2.1.2) no puede ocurrir en el caso (1).

El caso (2) es mucho más complicado ya que el Lema de Hopf (Teorema 1.2.2) no se puede aplicar, pues Ω_ζ^+ no satisface la condición de la esfera interior en $Q \in \partial\Omega_\zeta^+$. La prueba hace uso del Lema de Hopf generalizado (Lema 1.3.2). El objetivo es demostrar que $u-v$ tiene en Q un cero de segundo orden. Para hacer esto, fijamos un sistema de coordenadas con el origen en Q, el eje x_N en la dirección de la normal interior a $\partial\Omega$ en Q, y el eje x_1 en la dirección de ζ, eso es, normal a H_ζ. En este sistema de coordenadas, localmente sabemos que existen una bola abierta B con centro en 0 en $\mathbb{R}^{N-1}$, $\epsilon > 0$ y $\phi \in \mathcal{C}^\infty(B)$ tales que

$$(B\times(-\epsilon,\epsilon))\cap\partial\Omega = \{(x',\phi(x')) :\ x' \in B\},$$
$$(B\times(-\epsilon,\epsilon))\cap\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N :\ (x_1,x_2,\dots,x_{N-1}) \in B,\ x_N > \phi(x_1,x_2,\dots x_{N-1})\}.$$

Entonces, la frontera de Ω localmente está dada por la fórmula implícita

$$G(x_1,\dots,x_N) = x_N - \phi(x_1,\dots,x_{N-1}) = 0,$$

y el vector normal exterior unitario es

$$\nu(x)=\frac{-\nabla G(x)}{\|\nabla G(x)\|}=\frac{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x'),\dots,\frac{\partial\phi}{\partial x_{N-1}}(x'),-1\right)}{\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x')\right)^2\right)^{1/2}},$$

donde $x'=(x_1,\dots,x_{N-1})$. Como $u\in\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ las condiciones de frontera, $u=0$ en $\partial\Omega$ y $\frac{\partial u}{\partial\nu}=-c$ en $\partial\Omega$, se pueden escribir como

$$u(x_1,\dots,x_{N-1},\phi(x_1,\dots,x_{N-1}))=0, \tag{2.1.3}$$

y

$$-c=\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)=\nabla u(x)\cdot\nu(x)=\frac{\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x')\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial u}{\partial x_N}(x)}{\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x')\right)^2\right)^{1/2}},$$

donde $x=(x',\phi(x'))$ con $x'\in B$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x_N}-\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}=c\left\{1+\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)^2\right\}^{1/2}. \tag{2.1.4}$$

Derivando (2.1.3) con respecto a x_i, para $i=1,\dots,N-1$, tenemos por la regla de la cadena que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}=0. \tag{2.1.5}$$

Evaluando (2.1.5) y (2.1.4) en 0[1] y recalcando que $\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(0)=0$, para $i=1,\dots,N-1$ ya que $\nu(0)=e_N$, tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(0)=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x_N}(0)=c. \tag{2.1.6}$$

[1] Dependiendo del contexto a veces $0\in\mathbb{R}^{N-1}$ y a veces $0\in\mathbb{R}^N$.

Derivando de nuevo (2.1.5) con respecto a x_j, para $i,j=1,\ldots,N-1$, obtenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_N} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} = 0, \tag{2.1.7}$$

evaluando (2.1.7) en 0 y utilizando que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(0) + c\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 0 \quad \forall\, i,j = 1,\ldots,N-1. \tag{2.1.8}$$

Derivando de nuevo (2.1.4) con respecto a x_i, para $i=1,\ldots,N-1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_N} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_k} \right) \\ = c\frac{\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_k}}{\|\nabla G\|}, \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

y usando (2.1.6) obtenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_N \partial x_i}(0) = 0 \qquad \forall\, i = 1,\ldots,N-1. \tag{2.1.10}$$

Demostremos a continuación que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_1}(0) = 0 \qquad \forall\, j = 2,\ldots,N-1. \tag{2.1.11}$$

Como $t=0$ es el número real más pequeño para el cual existe un punto $Q \in H_{e_1,t} \cap \partial\Omega$ tal que e_1 es tangente a $\partial\Omega$ en Q, se tiene que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}) < 0 \qquad \text{si } \; x_1 < 0.$$

Como $\phi \in \mathcal{C}^1$, concluimos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(0, x_2, \ldots, x_{N-1}) \leq 0.$$

En particular, para $j = 2, \ldots, N-1$,

$$\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(te_j) - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(0)}{t} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(te_j)}{t} \begin{cases} \leq 0 & \text{si } \ t > 0, \\ \geq 0 & \text{si } \ t < 0. \end{cases}$$

De modo que, como ϕ es de clase $\mathcal{C}^2$, pasando al límite cuando $t \to 0$ obtenemos que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_1}(0) = 0 \qquad \forall\, j = 2, \ldots, N-1.$$

De lo anterior y la afirmación (2.1.8) se obtiene (2.1.11).

En las coordenadas elegidas, $\zeta = e_1$, $\rho_{e_1}(x_1, \ldots, x_N) = (-x_1, x_2, \ldots, x_N)$ y

$$v(x) = u(\rho_{e_1} x) \qquad \forall\, x = (x_1, \ldots, x_N), \quad x_1 > 0.$$

Por lo tanto, si denotamos por $\rho := \rho_{e_1}$,

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\rho x) & \text{si } \ i = 2, \ldots, N, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_i}(\rho x) & \text{si } \ i = 1. \end{cases}$$

Usando (2.1.6) concluimos que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(0) \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

Se tiene además

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(\rho x) & \text{si } i,j = 2,\ldots,N \text{ o } i=j=1, \\ -\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(\rho x) & \text{si } i=1,\ j=2,\ldots,N. \end{cases}$$

Usando (2.1.10) y (2.1.11) obtenemos que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}(0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(0) \qquad \forall\, i,j = 1,\ldots,N.$$

La función $w = u - v$ satisface que

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{en } \Omega_\zeta^+, \\ w \geq 0 & \text{en } \Omega_\zeta^+, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

Si θ es cualquier dirección que entra a Ω_ζ^+ en 0, el Lema de Hopf Generalizado (Lema 1.3.2) asegura que

$$\frac{\partial(u-v)}{\partial\theta}(0) > 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2(u-v)}{\partial\theta^2}(0) > 0,$$

lo que es una contradicción, ya que todas las primeras y segundas derivadas de $u - v$ se anulan en 0. $\square$

2.2. La demostración del Teorema de Serrin

El resultado siguiente será de gran importancia para culminar la demostración del Teorema 2.0.1. La demostración de este resultado fue tomada directamente de las notas del curso de Métodos Variacionales en Ecuaciones Diferenciales Parciales impartido por la Dra. Mónica Clapp, [2, Lema 4.50].

Lema 2.2.1. *Si* $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *cumple que* $u(x) = u(-x)$ *y* $u(x) = u(\varphi_1(x))$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$*, donde* $\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_N) := (2a_1 - x_1, x_2, ..., x_N)$*, entonces*

$$u(x_1, x_2, ..., x_N) = u(x_1 + 4a_1, x_2, ..., x_N) \qquad \forall\, (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Si además $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ *con* $q \in [1, \infty)$ *y* $u \neq 0$*, entonces* $a_1 = 0$.

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, ..., x_N) &= u(-x_1, -x_2, ..., -x_N) \\ &= u(2a_1 + x_1, x_2, ...x_N) \\ &= u(-2a_1 - x_1, x_2, ..., x_N) \\ &= u(4a_1 + x_1, x_2, ..., x_N). \end{aligned}$$

Es decir u es $4a_1 - periodica$ en la variable x_1.
Si $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $u \neq 0$ y $a_1 \neq 0$, entonces

$$m \int_{|x_1| < 2|a_1|} |u|^q < \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Esta es una contradicción . Por tanto, $a_1 = 0$. □

Demostración del Teorema 2.0.1. Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ es solución del problema (2.0.1) denotamos por $\bar{u}$ a su extensión trivial a $\mathbb{R}^N$, es decir,

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Entonces, la Proposición 2.1.2 asegura que $\bar{u}$ es simétrica respecto a H_{e_j} para todo $j = 1, ..., N$, es decir, existen $a_1, a_2, ..., a_N \in \mathbb{R}$ tales que Ω_ζ y $\bar{u}$ son invariantes respecto a la reflexión $\varrho_j(x_1,\dots,x_N) = (x_1,\dots,2a_j - x_j,\dots,x_N)$ sobre el hiperplano $x_j = a_j$ para cada $j = 1,\dots,N$.

Definamos

$$w(x) := \bar{u}(a-x) \qquad \text{con } a = (a_1,\dots,a_N).$$

Veamos que w es una función radial.

Se tiene que $w(x) = w(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. En efecto, para cada $j = 1,\dots,N$ se tiene que

$$\begin{aligned} w(x_1,\dots,x_j,\dots,x_N) &= \bar{u}(a_1 - x_1,\dots,a_j - x_j,\dots,x_N) \\ &= \bar{u}(a_1 - x_1,\dots,2a_j - (a_j - x_j),\dots,x_N) \\ &= \bar{u}(a_1 - x_1,\dots,a_j + x_j,\dots,x_N) \\ &= w(x_1,\dots,-x_j,\dots,x_N). \end{aligned}$$

Probaremos ahora que w es invariante respecto a la reflexión sobre cualquier hiperplano que pasa por el origen. Sea $\zeta \in \mathbb{R}^N$ tal que $|\zeta| = 1$. La Proposición 2.1.2 asegura que existe $t_\zeta \in \mathbb{R}$ tal que w es invariante respecto a la reflexión sobre el hiperplano ortogonal a ζ que pasa por $t_\zeta\zeta$ ($v(x) := u(a-x)$ satisface una ecuación similar a (2.0.1) pero en $\Omega' = a - \Omega$ y $\bar{v}(x) = \bar{u}(a-x)$). Aplicando el Lema 2.2.1 concluimos que $t_\zeta = 0$ (cambiando coordenadas). Esto prueba que w es invariante respecto a la reflexión sobre el hiperplano perpendicular a ζ que pasa por el origen, para todo $\zeta \in \mathbb{R}^N$.

Para probar que w es radial, tomemos $y_1 \neq y_2 \in \mathbb{R}^N$ tales que $|y_1| = |y_2|$. Entonces y_2 es la imagen de y_1 bajo la reflexión sobre el hiperplano perpendicular a $\zeta = \frac{y_1 - y_2}{\|y_1 - y_2\|}$ que pasa por el origen, es decir, $\varrho_{\zeta,0}(y_1) = y_2$, teniendo así $\bar{u}(y_1) = \bar{u}(y_2)$. Esto prueba que $\bar{u}$ es radial.

En consecuencia,

$$\Omega = \bar{u}^{-1}(0,\infty)$$

es un dominio radial, es decir, o bien Ω es un anillo, o bien Ω es una bola.

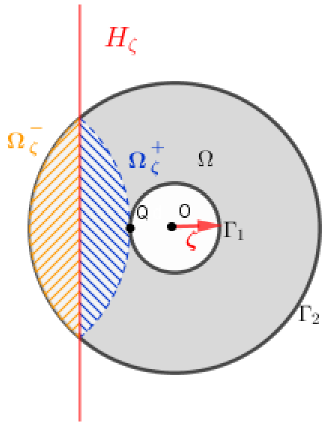


Figura 2.2: La frontera de Ω_ζ^+ es tangente a $\Gamma_1$en el punto Q y $\Omega_\zeta \neq \Omega$.

En el primer caso obtendríamos una contradicción a la Proposición 2.1.2, ver Figura 2.2. En consecuencia, Ω es una bola. $\square$

Bibliografía

[1] Clapp, Mónica: Análisis Matemático. Segunda edición. Colección Papirhos, Serie Textos, Núm. 2, Instituto de Matemáticas de la UNAM, México, 2017.

[2] Clapp, Mónica: Métodos Variacionales en Ecuaciones Diferenciales Parciales. Notas del curso impartido en la Facultad de Ciencias de la UNAM, noviembre 2019.

[3] Evans, Lawrence C.: Partial Differential Equations. Graduate Texts in Mathematics No. 19. American Mathematical Society, Providence RI, 2010.

[4] Gidas, B., Ni, W.-M., Nirenberg, L.: Symmetry and related properties via the maximum principle. Comm. Math. Phys., 1979, 68: 209–243.

[5] Nitsch, C.; Trombetti, C.: The classical overdetermined Serrin problem. Complex Var. Elliptic Equ. 63 (2018), no. 7-8, 1107–1122.

[6] Serrin, James: A symmetry problem in potential theory. Arch. Rational Mech. Anal. 43 (1971), 304–318.