UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ZOCLOS Y RADICALES DE RETÍCULAS

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
MAT. JESUS ADRIAN CELIS GONZÁLEZ

DIRECTORA
DRA. BERTHA MARÍA TOMÉ ARREOLA
FACULTAD DE CIENCIAS (UNAM)

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO AGOSTO DE 2022

Introducción

El desarrollo de la teoría de retículas comenzó con el trabajo de Garret Birkhoff en la mitad del siglo XX. En una serie de artículos demostró la importancia de esta teoría y probó que ésta provee un marco de trabajo unificador para muchas diciplinas matemáticas. Birkhoff junto con Valère Glivenko, Karl Menger, John von Neumann, Oystein Ore y otros, desarrollaron suficientemente la teoría de retículas como para convencer a la comunidad matemática de su importancia. El concepto de retículas modulares ha sido de suma importancia en la actualidad, pues ha generalizado y a su vez probado distintos resultados de la Teoría de Módulos y Anillos. Además la Teoría de Retículas tiene aplicaciones en Lógica, Geometría, Álgebra, Análisis Funcional y Teoría de Conjuntos.
La teoría de retículas está basada en una relación de orden ($\leq$). Dicha relación de orden es un orden parcial. Dados dos órdenes parciales, una función entre ellos es un morfismo de órdenes si preserva el orden. También recordemos que el supremo de un conjunto S (en un orden parcial), si existe, se denota por $\bigvee S$ y es la menor de las cotas superiores para S, de forma similar se define el ínfimo ($\bigwedge S$). Una retícula es un orden parcial donde cualesquiera dos elementos tienen un supremo y un ínfimo. En este trabajo trabajaremos con retículas acotadas donde hay un elemento mayor (denotado por 1) y un elemento menor (denotado por 0).
Esta tesina está basada en el artículo Radicals and socles of lattices de B. Stenström [6], y se divide en tres capítulos. El primer capítulo contiene las nociones de morfismos entre retículas, retículas complementadas, teoría general de retículas compactamente generadas y conjuntos independientes. En

el segundo estudiamos la condición de cadenas ascendentes y descendentes en retículas. Estos dos capítulos contienen la teoría necesaria para entender y poder resolver los problemas expuestos en el artículo, los cuales se tratan en el capítulo tres.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Morfismos de Retículas

Definición 1.1.1 *Sean L y M retículas. Decimos que $f : L \to M$ es un morfismo de retículas si $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ y $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ para todo $a, b \in L$. Un morfismo de retículas que es biyectivo se llama isomorfismo de retículas.*

Lema 1.1.1 *Cada morfismo de retículas es un morfismo de órdenes.*

Demostración.
Sean L, M retículas y $f : L \to M$ un morfismo de retículas. Consideremos $a, b \in L$ con $a \leq b$. Entonces $a \wedge b = a$, de aquí $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \leq f(b)$. Por lo tanto $f(a) \leq f(b)$, es decir, $f : L \to M$ es morfismo de órdenes.
■

Definición 1.1.2 *Sean $(L, \leq)$ y $(M, \leq)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. Un isomormisfo de órdenes parciales es una función $f : L \to M$ que preserva el orden tal que existe $g : M \to L$ que preserva el orden y $f \circ g = Id_M$, $g \circ f = Id_L$.*

Lema 1.1.2 *Toda función inversa de un isomorfismo de retículas también es un isomorfismo de retículas.*

Demostración.
Sean L, M retículas y $f : L \to M$ un isomorfismo de retículas. Consideremos $f^{-1} : M \to L$ la función inversa de f. Para todo $u, v \in M$ tenemos que $f^{-1}(u \vee v) = f^{-1}(ff^{-1}(u) \vee ff^{-1}(v)) = f^{-1}(f(f^{-1}(u) \vee f^{-1}(v)) = f^{-1}(u) \vee f^{-1}(v)$. La prueba de que $f^{-1}(u \wedge v) = f^{-1}(u) \wedge f^{-1}(v)$ es similar a la anterior. ■

Teorema 1.1.1 *Sean L y M retículas. Entonces $f : L \to M$ es un isomorfismo de retículas si y sólo si es un isomorfismo de órdenes.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Se sigue del *Lema* 1.1.1
$\Leftarrow$) Veamos que para todo $a, b \in L$, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$. Como f es morfismo de órdenes tenemos que $f(a), f(b) \leq f(a \vee b)$. Ahora, consideremos $c' \in M$ tal que $f(a) \leq c'$ y $f(b) \leq c'$. Como $f : L \to M$ es una función biyectiva existe un único $c \in L$ tal que $f^{-1}(c') = c$. Como $f^{-1} : M \to L$ también es un isomorfismo de órdenes, tenemos que

$$f^{-1}(f(a)) \leq f^{-1}(c') \text{ y } f^{-1}(f(b)) \leq f^{-1}(c').$$

De aquí podemos concluir que

$$a = f^{-1}(f(a)) \leq f^{-1}(c') = c \text{ y } b = f^{-1}(f(b)) \leq f^{-1}(c') = c,$$

por lo que $a \vee b \leq c$. Usando el hecho de que f es un morfismo de órdenes tenemos que $f(a \vee b) \leq f(c) = c'$. Entonces $f(a), f(b) \leq f(a \vee b)$ y tenemos que $f(a \vee b) \leq c'$, por lo que $f(a) \vee f(b) = f(a \vee b)$. La prueba de que $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ es similar. ■

Definición 1.1.3 *Sea L una retícula. L es modular si para todo $a, b, c \in L$ con $b \leq a$ tenemos que $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$.*

Teorema 1.1.2 *Sean L una retícula modular y $a, b \in L$. Entonces los intervalos $[a \wedge b, a]$ y $[b, a \vee b]$ son isomorfos como retículas.*

Demostración.
Por el *Teorema* 1.1.1 basta probar que existe un isomorfismo de órdenes

entre los intervalos. Para cada $x \in [a \wedge b, a]$, definamos $\varphi(x) = x \vee b$. Como $x \leq a$, tenemos que $b \leq x \vee b \leq a \vee b$, por lo que φ está bien definida.
Para cada $y \in [b, a \vee b]$ consideremos $a \wedge y \in L$. Como $b \leq y$, entonces $a \wedge b \leq a \wedge y \leq a$, por lo que $a \wedge y \in [a \wedge b, a]$. Como $y \leq a \vee b$, entonces $y = y \wedge (a \vee b)$. Además L es modular y $b \leq y$, así que $y = y \wedge (a \vee b) = b \vee (a \wedge y)$. Por lo tanto, dado $y \in [b, a \vee b]$ tenemos que $\varphi(a \wedge y) = (a \wedge y) \vee b = y$, por lo que φ es suprayectiva.
Consideremos $x_1, x_2 \in [a \wedge b, a]$. Como $a \wedge b \leq x_1, x_2$ tenemos que $x_1 = x_1 \vee (a \wedge b)$ y de forma similar $x_2 = x_2 \vee (a \wedge b)$. Supongamos que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, entonces $x_1 \vee b = x_2 \vee b$. De aquí, $a \wedge (x_1 \vee b) = a \wedge (x_2 \vee b)$ y como L es modular y $x_1, x_2 \leq a$, tenemos que $x_1 = x_1 \vee (a \wedge b) = x_2 \vee (a \wedge b) = x_2$. Por lo tanto φ es inyectiva.
Finalmente, veamos que φ es morfismo de órdenes. Consideremos $x_1, x_2 \in [a \wedge b, a]$ tales que $x_1 \leq x_2$, entonces $\varphi(x_1) = x_1 \vee b \leq x_2 \vee b = \varphi(x_2)$. Por otro lado, supongamos que $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$. Por lo que hicimos anteriormente, $x_1 = a \wedge \varphi(x_1) \leq a \wedge \varphi(x_2) = x_2$, de manera que φ es un isomorfismo de órdenes. ■

1.2. Complementos

Definición 1.2.1 *Sea L una retícula con 0 y 1.*

1. *Dado $a \in L$, decimos que $b \in L$ es un complemento de a si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$.*

2. *Decimos que L es complementada si para todo $a \in L$ existe al menos un elemento $a^* \in L$ tal que a^* es un complemento de a.*

Definición 1.2.2 *Sea L una retícula con 0 y 1.*

1. *Sean $[a, b] \subseteq L$ y $x \in L$. Si existe $y \in L$ tal que $x \wedge y = a$ y $x \vee y = b$, entonces y es un complemento de x relativo al intervalo $[a, b]$.*

2. *L es relativamente complementada si para cada $x \in L$ y cada intervalo $[a, b]$ que lo contenga, x tiene un complemento relativo en $[a, b]$.*

Lema 1.2.1 *Sean L una retícula modular y $a \in L$ un elemento con complemento en L. Si los complementos de a son comparables entonces a tiene un único complemento en L.*

Demostración.
Sean $c, d \in L$ complementos de a y supongamos que $c \leq d$. Tenemos, por la modularidad, que $d = d \wedge 1 = d \wedge (c \vee a) = c \vee (d \wedge a) = c \vee 0 = c$. Por lo tanto $c = d$. ■

Definición 1.2.3 *Sean L una retícula con 0 y 1 y $a, b, c \in L$.*

1. *Si $a \lneq b$ y ($a \leq c \lneq b$ implica $c = a$), diremos que a está cubierto por b.*
2. *Si 0 está cubierto por a, diremos que a es un átomo.*
3. *Si a está cubierto por 1, diremos que a es un coátomo (elemento propio máximo).*

Proposición 1.2.1 *Sea L una retícula modular con 0 y 1. Entonces L es complementada si y sólo si L es relativamente complementada.*

Demostración.
$\Leftarrow$) Esto es claro pues $[0, 1]$ es un subeintervalo de sí mismo.
$\Rightarrow$) Supongamos que L es complementada. Sean $a, b \in L$ y $x \in [a, b]$. Como L es complementada existe $x^* \in L$ tal que $x \wedge x^* = 0$ y $x \vee x^* = 1$. Consideremos el elemento $(a \vee x^*) \wedge b$. Usando la modularidad de L tenemos que

$$x \wedge ((a \vee x^*) \wedge b) = (x \wedge b) \wedge (a \vee x^*) = x \wedge (b \wedge (a \vee x^*)) =$$
$$x \wedge (a \vee (b \wedge x^*)) = a \vee (x \wedge (b \wedge x^*)) = a \vee (x^* \wedge x) = a \vee 0 = a.$$

Por otro lado,

$$x \vee ((a \vee x^*) \wedge b) = (x \vee (a \vee x^*)) \wedge b = ((x \vee a) \vee x^*) \wedge b = (x \vee x^*) \wedge b = 1 \wedge b = b.$$

Por lo tanto $(a \vee x^*) \wedge b$ es un complemento relativo de x en $[a, b]$. Por lo tanto, L es relativamente complementada. ■

Lema 1.2.2 *Sea L una retícula modular y complementada. Un elemento $a \in L$ es un átomo si y sólo si cada complemento de a es un coátomo.*

Demostración.
Sean $a \in L$ y a^* un complemento de a, entonces $a \wedge a^* = 0$ y $a \vee a^* = 1$. Por el *Teorema* 1.1.2, tenemos el siguiente isomorfismo de retículas

$$[0, a] = [a \wedge a^*, a] \cong [a^*, a \vee a^*] = [a^*, 1].$$

Así, $[0, a]$ tiene el mismo número de elementos que $[a^*, 1]$. Como a es átomo $2 = |[0, a]| = |[a^*, 1]|$. Por lo tanto, 1 cubre a a^* y a^* es un coátomo.
El recíproco es análogo. ■

Definición 1.2.4 *Sea L una retícula con 0 y 1.*

1. *Sean $b, c \in L$. Decimos que c es un seudocomplemento de b en L si $b \wedge c = 0$ y c es máximo con esta propiedad.*

2. *Una retícula L es seudocomplementada si todo elemento en L tiene al menos un seudocomplemento y relativamente seudocomplementada si tiene un seudocomplemento relativo en cada intervalo que lo contenga.*

Lema 1.2.3 *Sea L una retícula modular con 0 y 1. Entonces cada complemento es un seudocomplemento.*

Demostración.
Sea $a \in L$ con complemento b, entonces $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$. Ahora, sea $b' \in L$ tal que $b \leq b'$ y $a \wedge b' = 0$. Entonces $a \vee b' \geq a \vee b = 1$. Así, b' es un complemento de a comparable con b. Por el *Lema* 1.2.1, $b' = b$.
Por lo tanto b es un seudocomplemento de a. ■

1.3. Retículas Compactamente Generadas

Definición 1.3.1 *Sea L una retícula. Decimos que $\{c_i : i \in I\} \subseteq L$ es un conjunto directo (inverso) si para todo $i, j \in I$, existe $k \in I$ con $c_i \vee c_j \leq c_k$ ($c_k \leq c_i \wedge c_j$).*

Observación 1.3.1 *Sea L una retícula y $S \subseteq L$ una cadena, entonces S es un conjunto directo e inverso.*

Definición 1.3.2 *Sea L una retícula. L es continua superiormente si para todo conjunto directo $\{c_i : i \in I\}$ y $a \in L$, tenemos que $a \wedge \bigvee_{i \in I} c_i = \bigvee_{i \in I}(a \wedge c_i)$. Por otro lado, L es continua inferiormente si para todo conjunto inverso $\{c_i : i \in I\}$ y $a \in L$, tenemos que $a \vee (\bigwedge_{i \in I} c_i) = \bigwedge_{i \in I}(a \vee c_i)$.*

Definición 1.3.3 *Dada una retícula L, decimos que $f \in L$ es compacto (finitamente generado) si siempre que $f \leq \bigvee S$, para algún conjunto directo $S \subseteq L$, entonces existe $x \in S$ de manera que $f \leq x$.*

Recordemos que una retícula L es completa si cada subconjunto de L tiene un supremo y un ínfimo.

Lema 1.3.1 *Sean L una retícula completa y $D \subseteq L$ no vacío. Si D es un conjunto directo y $F \subseteq D$ es finito y no vacío entonces existe $d_0 \in D$ de tal que $\bigvee F \leq d_0$.*

Demostración. (Por inducción sobre el cardinal de F).
Si $F = \{a\}$, claramente $\bigvee F = a$ y $a \in D$.
Supongamos la afirmación válida para todo subconjunto de n elementos. Sea $F \subseteq D$ tal que $F = \{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}$. Entonces $F = \{a_1, ..., a_n\} \cup \{a_{n+1}\}$; así, $\bigvee F = (\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \vee a_{n+1}$. Aplicando la hipótesis de inducción a $\{a_1, ..., a_n\}$ tenemos que existe $d_1 \in D$ tal que $\bigvee_{i=1}^{n} a_i \leq d_1$. Como D es un conjunto directo, dados $d_1, a_{n+1} \in D$, entonces existe $d_0 \in D$ tal que $d_1 \vee a_{n+1} \leq d_0$. Finalmente, por la transitividad del orden, $\bigvee F \leq d_0$. ■

Proposición 1.3.1 *Sean L una retícula completa y $f \in L$. Entonces f es compacto si y sólo si para todo $U \subseteq L$ no vacío con $f \leq \bigvee U$ existe $F \subseteq U$ finito tal que $f \leq \bigvee F$.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $f \in L$ compacto y $U \subseteq L$ no vacío con $f \leq \bigvee U$. Consideremos $\mathcal{F} =$

$\{\bigvee F : F \subseteq U$ y F finito $\}$. Veamos que $\mathcal{F}$ es un conjunto directo en L. Sean $s, t \in \mathcal{F}$. Entonces $s = \bigvee F_1$ y $t = \bigvee F_2$ con $F_1, F_2 \subseteq U$ finitos. Consideremos $F_1 \cup F_2$ que es un subconjunto finito de U. Por propiedades del supremo, tenemos que $\bigvee(F_1 \cup F_2) = (\bigvee F_1) \vee (\bigvee F_2)$. Por lo tanto $\bigvee(F_1 \cup F_2) \in \mathcal{F}$ y $s \vee t \leq \bigvee(F_1 \cup F_2)$.
Ahora, para cada $F \subseteq U$ finito tenemos que $\bigvee F \leq \bigvee U$, de manera que $\bigvee \mathcal{F} \leq \bigvee U$. Por otro lado, para cada $x \in U$ tenemos que $x \leq \bigvee\{x\}$ y $\bigvee\{x\} \in \mathcal{F}$. Entonces por la transitividad del orden $x \leq \bigvee \mathcal{F}$ para todo $x \in U$. Concluimos, por propiedades del supremo, que $\bigvee U \leq \bigvee \mathcal{F}$.
Finalmente, como $f \leq \bigvee U \leq \bigvee \mathcal{F}$ y f es compacto, existe $t' \in \mathcal{F}$ tal que $f \leq t'$. Entonces $f \leq \bigvee F$ con $F \subseteq U$ finito.
$\Leftarrow$) Sea D un conjunto directo en L, y supongamos que para todo $U \subseteq L$ con $f \leq \bigvee U$ existe $F \subseteq U$ finito tal que $f \leq \bigvee F$. Si $f \leq \bigvee D$ entonces existe $F \subseteq D$ finito tal que $f \leq \bigvee F$. Ahora, por el *Lema* 1.3.1, existe $d_0 \in D$ con $\bigvee F \leq d_0$ y por la transitividad del orden $f \leq d_0$. ∎

Proposición 1.3.2 *Sean L una retícula completa y $S \subseteq L$ finito. Si todos los elementos de S son compactos entonces $\bigvee S$ es compacto.*

Demostración.
Basta probar la afirmación para $S = \{a, b\}$ con a, b compactos (la generalización se sigue por inducción). Sabemos que $\bigvee S = a \vee b$.
Sea D un conjunto directo tal que $a \vee b \leq \bigvee D$. Por la transitividad del orden, $a, b \leq \bigvee D$. Como a y b son compactos existen $d_0, d_1 \in D$ tales que $a \leq d_0$ y $b \leq d_1$. Ahora, como D es un conjunto directo, existe $d \in D$ tal que $d_0 \vee d_1 \leq d$. De esta manera, $\bigvee S = a \vee b \leq d_0 \vee d_1 \leq d$. ∎

Definición 1.3.4 *Sea L una retícula completa. Decimos que L es compacta (o finitamente generada) si $1 \in L$ es compacto.*

Proposición 1.3.3 *Sean L una retícula compacta y $a \in L - \{1\}$. Entonces la subretícula $[a, 1]$ tiene al menos un coátomo.*

Demostración. Consideremos $S = [a, 1] - \{1\}$. S es no vacío pues $a \in S$. Veamos que S tiene un elemento máximo. Sea $C \subseteq S$ una cadena. Probemos que $\bigvee C \in S$. Para todo $c \in C$ tenemos que $a \leq c < 1$, por lo tanto $a \leq \bigvee C \leq 1$. Afirmamos $\bigvee C < 1$. En caso contrario, como C es un conjunto directo (por ser cadena) y L es compacta, existe $c_0 \in C$ tal que $1 \leq c_0$. Luego $c_0 = 1$, pero esto contradice el hecho de que $c_0 \in S$. Por lo tanto $\bigvee C \in S$ y por el Lema de Zorn, existe un elemento máximo distinto de 1 en $[a, 1]$, tal elemento es un coátomo. ■

Definición 1.3.5 *Sea L una retícula completa. Decimos que L es compactamente generada (o algebraica) si para todo $c \in L$ existe $S \subseteq L$ tal que todo $s \in S$ es compacto y $c = \bigvee S$.*

Observación 1.3.2 *Sean L una retícula compactamente generada y $a, b \in L$. Entonces $a \leq b$ si y sólo si para cada $c \in L$ compacto tal que $c \leq a$ se tiene que $c \leq b$.*

Teorema 1.3.1 *Toda retícula compactamente generada es continua superiormente.*

Demostración.
Sean L una retícula compactemente generada, $a \in L$ y $D \subseteq L$ un conjunto directo. Veamos que $a \wedge (\bigvee\limits_{d \in D} d) = \bigvee\limits_{d \in D} (a \wedge d)$.
Consideremos $a \wedge d$ con $d \in D$. Claramente $d \leq \bigvee\limits_{d \in D} d$. Se sigue que $a \wedge d \leq a \wedge (\bigvee\limits_{d \in D} d)$. De esto se concluye que $\bigvee\limits_{d \in D} (a \wedge d) \leq a \wedge (\bigvee\limits_{d \in D} d)$. Para probar la otra desigualdad usaremos la *Observación* 1.3.2. Sea $c \in L$ compacto tal que $c \leq a \wedge (\bigvee\limits_{d \in D} d)$. Por definición tenemos que $c \leq a$ y $c \leq \bigvee\limits_{d \in D} d$. Como D es un conjunto directo y c es un elemento compacto en L existe $d_0 \in D$ con $c \leq d_0$. Se sigue que $c \leq a \wedge d_0 \leq \bigvee\limits_{d \in D} (a \wedge d)$. Por la *Observacion* 1.3.2, $a \wedge (\bigvee\limits_{d \in D} d) \leq \bigvee\limits_{d \in D} (a \wedge d)$. ■

Lema 1.3.2 *Sean L una retícula compactamente generada y $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Entonces $k \in [a, b]$ es compacto en la subretícula $[a, b]$ si y sólo si existe $c \in L$ compacto tal que $k = a \vee c$ y $a \vee c \leq b$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $k \in [a, b]$ compacto. Como L es una retícula compactamente generada, existe una familia de elementos compactos $\{c_i\}_{i\in I}$ tales que $k = \bigvee_{i\in I} c_i$. Claramente, $k = a \vee k = a \vee (\bigvee_{i\in I} c_i) = \bigvee_{i\in I}(a \vee c_i)$, con $a \vee c_i \in [a, b]$ pues $c_i \leq k \leq b$. Por ser k compacto en $[a, b]$, la *Proposición* 1.3.1 implica que existe $J \subseteq I$ finito tal que $k = \bigvee_{i\in J}(a \vee c_i) = a \vee (\bigvee_{i\in J} c_i) = a \vee c \leq b$, donde $c = (\bigvee_{i\in J} c_i)$ es compacto en L por la *Proposición* 1.3.2.

$\Leftarrow$) Sean $c \in L$ compacto y $X \subseteq [a, b]$ con $a \vee c \leq \bigvee X$. Entonces $c \leq \bigvee X$. Como c es compacto existe $F \subseteq X$ finito con $c \leq \bigvee F$, además $F \subseteq [a, b]$. Por lo tanto, $a \vee c \leq \bigvee F$ y entonces $a \vee c$ es compacto en $[a, b]$. ■

Lema 1.3.3 *Sean L una retícula completa y continua superiormente y $a \in L$. Los elementos compactos en la subretícula $[0, a]$ son exactamente los elementos compactos de L que pertenecen a $[0, a]$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si $c \in [0, a]$ es compacto en L entonces es claramente compacto en $[0, a]$.

$\Leftarrow$) Sean $c \in [0, a]$ compacto en $[0, a]$ y D un conjunto directo en L con $c \leq \bigvee_{d\in D} d$. Como $c \in [0, a]$ tenemos que $c = a \wedge c \leq a \wedge \bigvee_{d\in D} d \leq \bigvee_{d\in D} (a \wedge d)$, por ser L continua superiormente. Ahora, $c \leq \bigvee_{d\in D} (a \wedge d)$, donde $\{a \wedge d : d \in D\}$ es un conjunto directo en $[0, a]$, de manera que existe $d_0 \in D$ tal que $c \leq a \wedge d_0 \leq d_0$. Por lo tanto c es compacto en L. ■

Proposición 1.3.4 *Sean L una retícula compactamente generada y $a \in L$. Entonces $[0, a]$ es también compactamente generada.*

Demostración.

Se sigue del *Teorema* 1.3.1 y del *Lema* 1.3.3. ■

Proposición 1.3.5 *Sean L una retícula completa y $a \in L$.*

1. *Si c es compacto en L, entonces $c \vee a$ es compacto en $[a, 1]$.*

2. Si L es una retícula compacta, entonces $[a, 1]$ también es una retícula compacta.

3. Si L es una retícula compactamente generada, entonces la subrectícula $[a, 1]$ es compactamente generada.

Demostración.

1. Sea $c \in L$ compacto. Supongamos que $c \vee a \leq \bigvee_{i \in I} a_i$ con $\{a_i : i \in I\} \subseteq [a, 1]$. Por transitividad $c \leq \bigvee_{i \in I} a_i$, luego existe $F \subseteq I$ finito de manera que $c \leq \bigvee_{i \in F} a_i$ y

$$c \vee a \leq (\bigvee_{i \in F} a_i) \vee a \leq \bigvee_{i \in F} (a_i \vee a) \leq \bigvee_{i \in F} a_i.$$

2. Se sigue de 1) tomando $c = 1$ pues L es compacta.

3. Si L es compactamente generada y $x \in [a, 1]$, entonces $x = \bigvee_{i \in I} c_i$, donde c_i es compacto en L para todo $i \in I$. Entonces $x = a \vee x = a \vee (\bigvee_{i \in I} c_i) = \bigvee_{i \in I} (a \vee c_i)$. Por 1), cada $a \vee c_i$ es un elemento compacto en $[a, 1]$.

■

1.4. Conjuntos Independientes

En esta sección, L es una retícula modular.

Definición 1.4.1 *Un subconjunto finito $S \subseteq L - \{0\}$ es independiente si $a \wedge (\bigvee (S - \{a\})) = 0$ para cada $a \in S$. Un subconjunto arbitrario de $L - \{0\}$ es independiente si todos sus subconjuntos finitos son independientes.*

Proposición 1.4.1 *Sean L una retícula y $\{a_i\}_{i \in I}$ un subconjunto independiente finito. Si $I = F \cup K$, donde $F \cap K = \emptyset$, entonces*

$$(\bigvee_{f \in F} a_f) \wedge (\bigvee_{k \in K} a_k) = 0.$$

Demostración.

Supongamos que $I = \{1, ..., n\}$, $F = \{1, ..., p\}$ y $K = \{p+1, ..., n\}$. La demostración es por inducción sobre p.

Si $p = 1$ entonces por definición de conjunto independiente, la afirmación se cumple. Supongamos la afirmación válida para $p-1$. Sea $b = (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) \wedge (\bigvee_{k=p+1}^{n} a_k)$. Tenemos que $a_p \leq \bigvee_{i=1}^{p} a_i$, por lo que, usando la modularidad, obtenemos

$$a_p \vee b = a_p \vee ((\bigvee_{i=1}^{p} a_i) \wedge (\bigvee_{p+1}^{n} a_k)) = (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) \wedge (a_p \vee \bigvee_{k=p+1}^{n} a_k) = (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) \wedge (\bigvee_{k=p}^{n} a_k).$$

Por lo tanto,

$$(\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \wedge (a_p \vee b) = (\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \wedge ((\bigvee_{i=1}^{p} a_i) \wedge (\bigvee_{k=p}^{n} a_k)) = (\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \wedge (\bigvee_{k=p}^{n} a_k).$$

Usando la hipótesis de inducción concluimos que

$$(\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \wedge (a_p \vee b) = 0.$$

Por otro lado,

$$(\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee b = (\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee ((\bigvee_{i=1}^{p} a_i) \wedge (\bigvee_{k=p+1}^{n} a_k)) =$$

$$(\bigvee_{i=1}^{p} a_i) \wedge ((\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee (\bigvee_{k=p+1}^{n} a_k)) = (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) \wedge (\bigvee_{t \neq p} a_t) \leq \bigvee_{t \neq p} a_t.$$

Concluimos que

$$a_p \wedge ((\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee b) \leq a_p \wedge (\bigvee_{t \neq p} a_t) = 0.$$

Ahora, usando la modularidad tenemos que

$$(a_p \vee b) \wedge (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) = (a_p \vee b) \wedge (a_p \vee (\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i)) =$$
$$a_p \vee ((a_p \vee b) \wedge (\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i)) = a_p \vee 0 = a_p \ (1),$$

y también

$$((\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee b) \wedge (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) = ((\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee b) \wedge (a_p \vee (\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i)) =$$
$$(\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee (a_p \wedge ((\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee b)) = (\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee 0 = \bigvee_{i=1}^{p-1} a_i. \ (2)$$

Para concluir, por (1) y (2), tenemos que

$$b \leq (a_p \vee b) \wedge (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) = a_p$$

y

$$b \leq ((\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee b) \wedge (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) = \bigvee_{i=1}^{p-1} a_i.$$

Con esto tenemos que $b \leq a_p \wedge (\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) = 0$, por la independencia. Así, $b = 0$.

■

Proposición 1.4.2 *Sean L una retícula y $A \subseteq L - \{0\}$ independiente. Si $a \in L - \{0\}$ cumple que para cualquier conjunto finito $X \subseteq A$, $a \wedge (\bigvee_{x \in X} x) = 0$ entonces el conjunto $A \cup \{a\}$ es independiente.*

Demostración.
Sea $B \subseteq A \cup \{a\}$ finito. Si $B \subseteq A$ no hay nada que probar pues A es independiente. Supongamos que $B = A' \cup \{a\}$ con $A' \subseteq A$ finito. Terminamos si vemos que para cualquier $a^* \in A'$, $a^* \wedge (a \vee (\bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x)) = 0$. Esto se sigue de la modularidad de L y las siguientes igualdades:

$$(\bigvee_{b \in A'} b) \wedge ((\bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x) \vee a) = (\bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x) \vee (a \wedge (\bigvee_{b \in A'} b)) =$$

$$(\bigvee_{x\in A'-\{a^*\}} x)\vee 0=\bigvee_{x\in A'-\{a^*\}} x.$$

De lo anterior se sigue que

$$a^*\wedge(a\vee(\bigvee_{x\in A'-\{a^*\}} x))=(a^*\wedge(\bigvee_{b\in A'} b))\wedge(a\vee(\bigvee_{x\in A'-\{a^*\}} x))=$$

$$a^*\wedge((\bigvee_{b\in A'} b)\wedge(a\vee(\bigvee_{x\in A'-\{a^*\}} x)))=a^*\wedge(\bigvee_{x\in A'-\{a^*\}} x)=0,$$

pues $A'\subseteq A$ y A es independiente. ■

Definición 1.4.2 *Una retícula completa L se llama semiatómica si 1 es el supremo de los átomos de L.*

Teorema 1.4.1 *Si L es una retícula modular, continua superiormente y semiatómica entonces es complementada.*

Demostración.
Sea $a\in L-\{1\}$. Como L es semiatómica, existe $s\in L$ átomo tal que $a\wedge s=0$. En caso contrario, $a\wedge s=s$ para todo átomo en L y así $s\leq a$, con lo que $a=1$. Sea $\{s_i\}_{i\in I}$ el conjunto de todos los átomos en L. Consideremos el conjunto $A=\{J\subseteq I:\{s_i\}_{i\in J}$ es independiente y $a\wedge(\bigvee_{i\in J} s_i)=0\}$. Este conjunto está parcialmente ordenado por la inclusión. Además, A es no vacío por lo dicho anteriormente.
Sea $\{J_k\}_{k\in K}$ una cadena en A. Entonces cada $\{s_i\}_{i\in J_k}$ es un conjunto independiente de átomos y $a\wedge(\bigvee_{i\in J_k} s_i)=0$ para cada $k\in K$. Sea $b_k=\bigvee_{i\in J_k} s_i$. Como $\{J_k\}_{k\in K}$ es un cadena, dados $l,m\in K$, tenemos que $J_l\subseteq J_m$ o $J_m\subseteq J_l$. Luego $b_l\leq b_m$ o $b_m\leq b_l$, por lo que $\{b_k\}_{k\in K}$ es un cadena. Entonces, como L es continua superiormente, se sigue que $a\wedge(\bigvee_{k\in K} b_k)=\bigvee_{k\in K}(a\wedge b_k)=0$.
Por otro lado, sea $F\subseteq\bigcup_{k\in K}\{s_i\}_{i\in J_k}$ finito. Como F es finito y $\{J_k\}_{k\in K}$ es una cadena existe $k_0\in K$ tal que $F\subseteq\{s_i\}_{i\in J_{k_0}}$. Además como $\{s_i\}_{i\in J_{k_0}}$ es independiente, F es independiente. Por lo tanto, $\bigcup_{k\in K}\{s_i\}_{i\in J_k}$ es independiente.

Ahora, como $\bigvee \bigcup_{k\in K} \{s_i\}_{i\in J_k} = \bigvee_{k\in K} b_k$, por el Lema de Zorn, existe una familia independiente máxima de átomos $\{s_i\}_{i\in J}$ con la propiedad de que $a \wedge (\bigvee_{i\in J} s_i) = 0$.

Sea $c = \bigvee_{i\in J} s_i$. Veamos que $a \vee c = 1$. Como L es semiatómica, basta probar que $a \vee c$ es mayor o igual a todo átomo en L. Supongamos lo contrario, entonces existe $t \in L$ átomo tal que $t \nleq a \vee c$. Luego $t \wedge (a \vee c) = 0$ y aplicando la modularidad, tenemos que $a \wedge (c \vee t) \leq (a \vee c) \wedge (c \vee t) = c \vee ((a \vee c) \wedge t) = c$. Entonces $(t \vee c) \wedge a \leq c \wedge a = 0$. Por otro lado, $t \wedge c \leq t \wedge (c \vee a) = 0$. Por la *Proposición* 1.4.2, $\{t\} \cup \{s_i\}_{i\in J}$ es independiente. Con estas observaciones se contradice la maximidad de J. ■

Capítulo 2

Retículas Noetherianas y Artinianas

En este capítulo todas las retículas serán completas y modulares.

2.1. Propiedades Elementales

Definición 2.1.1 *Una retícula L es artiniana (respectivamente noetheriana) si satisface la condición de cadena descendente (ascendente) sobre sus elementos.*

Lema 2.1.1 *Sea L una retícula. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *L es artiniana (noetheriana).*

2. *Todo $A \subseteq L$ y $A \neq \emptyset$ tiene un subconjunto finito F tal que $\bigwedge A = \bigwedge F$ (respectivamente, $\bigvee A = \bigvee F$).*

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2) Sea $A \subseteq L$ con $A \neq \emptyset$. Consideremos $U = \{\bigwedge F : F \subseteq A, F \text{ finito}\}$. Veamos que por ser L artiniana U tiene un elemento mínimo.
Supongamos lo contrario. Como $A \neq \emptyset$ existe $F_1 \subseteq A$ finito tal que $\bigwedge F_1$ no

es mínimo en U. Luego existe $F_2 \subseteq A$ finito tal que $\bigwedge F_2 \lneq \bigwedge F_1$. Repitiendo nuestro argumento podemos construir recursivamente la sucesión

$$\bigwedge F_1 \gneq \bigwedge F_2 \gneq ... \gneq \bigwedge F_n \gneq ...$$

donde cada F_i es finito. Pero dicha sucesión no se estaciona, por lo que L no sería artiniana. Por lo tanto existe $F_0 \subseteq A$ tal que $\bigwedge F_0$ es mínimo en U. Como $F_0 \subseteq A$ tenemos que $\bigwedge F_0 \geq \bigwedge A$.
Sea $a \in A$, tenemos que $(\bigwedge F_0) \wedge a = \bigwedge(F_0 \cup \{a\}) = \bigwedge F_0$ por la minimalidad de $\bigwedge F_0$. Por lo tanto, $\bigwedge F_0 = \bigwedge A$.
2) $\Rightarrow$ 1) Consideremos una sucesión no creciente $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq ...$ de elementos en L. Por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n = \bigwedge_{n=1}^{N} a_n = a_N$$

De aquí concluimos que $a_N = a_n$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto, L es artiniana.
La prueba para L noetheriana es dual. ∎

Lema 2.1.2 *Si L una retícula noetheriana (artiniana) entonces L tiene coátomos (átomos).*

Demostración.
Sea L una retícula noetheriana y consideremos $S = \{x \in L : x < 1\}$. Claramente $S \neq \emptyset$. Supongamos que S no tiene elementos máximos. Entonces dado $a_1 < 1$ existe $a_2 \in L$ tal que $a_1 < a_2 < 1$. De forma recursiva podemos construir la sucesión

$$a_1 < a_2 < ... < a_n < ... < 1$$

la cual no se estaciona, hecho que contradice que L sea una retícula noetheriana. Entonces existen elementos máximos en S y esos elementos son coátomos en L.
La prueba de existencia de átomos en retículas artinianas es análoga. ∎

Proposición 2.1.1 *Sean L una retícula y $a \in L$. Entonces L es artiniana (noetheriana) si y sólo si $[0, a]$ y $[a, 1]$ son artinianas (respectivamente, noetherianas).*

Demostración.
$\Rightarrow$) Si L es artiniana (noetheriana) entonces claramente cada subretícula de L es artiniana (noetheriana).
$\Leftarrow$) Sea $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión no creciente de elementos en L.
Consideremos la sucesión $\{a_i \wedge a\}_{i\in\mathbb{N}}$. Tenemos que $0 \leq a_i \wedge a \leq a$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\{a_i \wedge a\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq [0, a]$. Como $[0, a]$ es una retícula artiniana y la sucesión es no creciente, tenemos que existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{l_1} \wedge a = a_n \wedge a$ para todo $n \geq l_1$.
Por otro lado, consideremos la sucesión $\{a_i \vee a\}_{i\in\mathbb{N}}$. Tenemos que $a \leq a_i \vee a \leq 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Concluimos que $\{a_i \vee a\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq [a, 1]$. Como $[a, 1]$ es una retícula artiniana y la sucesión es no creciente, tenemos que existe $l_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{l_2} \vee a = a_n \vee a$ para todo $n \geq l_2$.
Sea $N = max\{l_1, l_2\}$. Sabemos que las sucesiones $\{a_i \wedge a\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{a_i \vee a\}_{i\in\mathbb{N}}$ se estacionan para $n \geq N$. Sean $b = a_N \wedge a = a_{N+1} \wedge a = ...$ y $c = a_N \vee a = a_{N+1} \vee a = ...$ Entonces $b \leq a_{N+k} \leq a_N \leq c$ y usando la modularidad de L tenemos que $a_{N+k} = a_{N+k} \vee b = a_{N+k} \vee (a_N \wedge a) = a_N \wedge (a \vee a_{N+k}) = a_N \wedge (a \vee a_N) = a_N \wedge c = a_N$. Así, $a_{N+k} = a_N$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
El caso en el que L es noetheriana es dual. ■

Proposición 2.1.2 *Sea L una retícula. Todo elemento $a \in L$ es compacto si y sólo si la retícula es noetheriana.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que todo elemento en L es compacto y sea $a_1 \leq a_2 \leq ...$ una sucesión no decreciente en L. Sea $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y tomemos $c = \bigvee A = \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Como $c \leq \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ y c es compacto existe $F \subseteq A$ finito tal que $c \leq \bigvee F$. Como F es finito y subconjunto de una cadena existe $a_N \in F$ tal que $\bigvee F = a_N$. Entonces $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = c \leq a_N$, de donde $a_N = a_n$ para todo $n \geq N$.
$\Leftarrow$) Sea $c \in L$ y $\emptyset \neq U \subseteq L$ tal que $c \leq \bigvee U$. Por el *Lema* 2.1.1 existe $F_0 \subseteq U$ finito tal que $\bigvee F_0 = \bigvee U$. Entonces $c \leq \bigvee F_0$, por lo tanto c es compacto. ■

Corolario 2.1.1 *Toda retícula noetheriana es compactamente generada.*

Demostración.
Es directo a partir de la *Proposición* 2.1.2. ■

Corolario 2.1.2 *Toda retícula noetheriana es continua superiormente.*

Demostración.
Se sigue del *Corolario* 2.1.1 y del *Teorema* 1.3.1. ■

2.2. Series de Composición

Definición 2.2.1 *Dos intervalos A y B son similares si existen elementos $a, b \in L$ tales que $\{A, B\} = \{[a \wedge b, a], [b, a \vee b]\}$ (como dos conjuntos de retículas; es decir, uno de los intervalos tiene la forma $[a \wedge b, a]$ y el otro tiene la forma $[b, a \vee b]$) y son proyectivos si existe una colección de intervalos $A = I_0, I_1, ..., I_n = B$ tales que I_{k-1} e I_k son similares para todo $1 \leq k \leq n$.*

Definición 2.2.2 *Sean L una retícula y $a, b \in L$. Dos sucesiones*

$$a = a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_m = b \tag{2.1}$$

$$a = b_0 \leq b_1 \leq ... \leq b_n = b \tag{2.2}$$

son equivalentes si $m = n$ y existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que los intervalos $[a_{i-1}, a_i]$ y $[b_{\sigma(i)-1}, b_{\sigma(i)}]$ son proyectivos.

Observación 2.2.1 *Sea L una retícula modular. Todo par de intervalos similares y todo par de intervalos proyectivos son isomorfos.*

Demostración.
Por el *Teorema* 1.1.2, la modularidad implica $[a \wedge b, a] \cong [b, a \vee b]$. ■

Definición 2.2.3 *Una sucesión es refinamiento de otra sucesión si se obtiene insertando nuevos elementos.*

Teorema 2.2.1 *En una retícula modular cualesquiera dos sucesiones entre los mismos dos elementos tienen refinamientos equivalentes.*

Demostración.
Para dos sucesiones $a = a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_m = b$ y $a = b_0 \leq b_1 \leq ... \leq b_n = b$, denotamos por $a_{ij} = (a_i \wedge b_j) \vee b_{j-1}$ y $b_{ji} = (b_j \wedge a_i) \vee a_{i-1}$ donde $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$ respectivamente. Usando la modularidad de L tenemos que $a_{ij} = (a_i \vee b_{j-1}) \wedge b_j$, $b_{ji} = (b_j \vee a_{i-1}) \wedge a_i$. Denotemos por $x = a_i \wedge b_j$ y $y = a_{i-1j}$; así, $x \vee y = (a_i \wedge b_j) \vee ((a_{i-1} \wedge b_j) \vee b_{j-1}) = (a_i \wedge b_j) \vee b_{j-1} = a_{ij}$, $x \wedge y = (a_i \wedge b_j) \wedge (a_{i-1} \vee b_{j-1})$. Entonces $[a_{i-1j}, a_{ij}] = [y, x \vee y]$ y $[x \wedge y, x] = [(a_i \wedge b_j) \wedge (a_{i-1} \vee b_{j-1}), a_i \wedge b_j]$.
De forma análoga, si denotamos por $x' = b_j \wedge a_i$ y $y' = b_{j-1i}$, invirtiendo i con j, obtenemos $[x' \wedge y', x'] = [(a_i \wedge b_j) \wedge (a_{i-1} \vee b_{j-1}), a_i \wedge b_j]$ y $[y', x' \vee y'] = [b_{j-1i}, b_{ji}]$. De aquí se sigue que los intervalos $[b_{j-1i}, b_{ji}]$ y $[a_{i-1j}, a_{ij}]$ son proyectivos pues

$$[b_{j-1i}, b_{ji}] = [y', x' \vee y'] \cong [x' \wedge y', x'] = [x \wedge y, x] \cong [y, x \vee y] = [a_{i-1j}, a_{ij}].$$

Entonces, de las sucesiones (2.1) y (2.2) obtenemos las sucesiones

$$a = a_{01} \leq a_{01} \leq a_{11} \leq a_{21} \leq ... \leq a_{m1} \leq a_{12} \leq ... \leq a_{mn} = b \tag{2.3}$$

$$a = b_{01} \leq b_{11} \leq b_{11} \leq b_{21} \leq ... \leq b_{n1} \leq b_{12} \leq ... \leq b_{nm} = b \tag{2.4}$$

pero $b_{ni} = (b_n \vee a_{i-1}) \wedge a_i = (b \vee a_{i-1}) \wedge a_i = b \wedge a_i = a_i$ y $a_{mj} = (a_m \vee b_{j-1}) \wedge b_j = (b \vee b_{j-1}) \wedge b_j = b \wedge b_j = b_j$. Por lo tanto, (2.4) es un refinamiento de (2.1) y (2.3) es un refinamiento de (2.2). Además, (2.3) y (2.4) son equivalentes (usando la identidad). $\blacksquare$

Definición 2.2.4 *Una sucesión entre dos elementos a y b es llamada serie de composición si*

$$a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$$

no tiene refinamientos (es decir, $[a_{k-1}, a_k] = \{a_{k-1}, a_k\}$ para todo $1 \leq k \leq n$). Al número n se le conoce como la longitud de la serie de la composición.

Corolario 2.2.1 ***(Jordan-Hölder)*** *En una retícula modular, cualesquiera dos series de composición entre los mismos dos elementos son equivalentes.*
$\blacksquare$

Por el $Teorema$ 2.2.1, en una retícula modular L toda serie de composición entre a y b, elementos de L, tiene la misma longitud; así podemos denotar su longitud por $l[a, b]$.

Definición 2.2.5 *Sea L una retícula acotada. Denotaremos por* $l(L)$ *a* $l[0, 1]$ *y diremos que L es de longitud finita (si existe una cadena finita entre* 0 *y* 1*).*

Teorema 2.2.2 *Una retícula modular tiene longitud finita si y sólo si es artiniana y noetheriana.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $0 = a_0 < a_1 < ... < a_n = 1$ una serie de composición en L. Entonces, la subretícula $[a_{i-1}, a_i] = \{a_{i-1}, a_i\}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, por lo tanto cada uno de estos intervalos es artiniano y noetheriano.
Aplicando la $Proposición$ 2.1.1, como $[0, a_1]$ y $[a_1, a_2]$ son noetherianas (artinianas) tenemos que $[0, a_2]$ es noetheriana (artiniana). Tomando $[0, a_2]$ y $[a_2, a_3]$ y usando nuevamente el $Teorema$ 2.1.1, tenemos que $[0, a_3]$ es noetheriana (artiniana). Aplicando este argumento $n-2$ veces más, concluimos que $L = [0, 1]$ es noetheriana y artiniana.
$\Leftarrow$) Como L es noetheriana, existe $a_1 \in L$ coátomo. Consideremos $\{x \in L : x \leq a_1 \text{ y } a_1 \neq x\}$. Como L es noetheriana, el conjunto anterior tiene un elemento máximo a_2. De manera recursiva, podemos construir la sucesión decreciente $... < a_n < ... < a_2 < a_1 < a_0 = 1$. Como L es artiniana la sucesión es finita. Supongamos que su último término es a_m. Si $a_m \neq 0$ entonces $\{x \in L : x \leq a_m \text{ y } x \neq a_m\}$ tiene un elemento máximo $a_{m+1} < a_m$, lo cual contradice la minimalidad de a_m, por lo que $a_m = 0$. Por construcción, $[a_{i-1}, a_i] = \{a_{i-1}, a_i\}$ para cada $k \in \{1, ..., m\}$. Entonces L tiene una serie de composición. ■

Capítulo 3

Zoclos y Radicales de Retículas

En este capítulo L es acotada y completa.

Definición 3.0.1 *Sea L una retícula.*

1. *L es atómicamente generada si todo elemento de L es supremo de átomos.*

2. *L es localmente atómica si para todo $a < 1$ existe un elemento que cubre a a.*

3.1. Zoclo y elementos esenciales

En esta sección supondremos que L es una retícula modular y compactamente generada.
Sea K un subconjunto de L tal que si $a \in K$, $b \leq a$ y b es compacto, entonces $b \in K$.

Definición 3.1.1 *Un elemento $a \in L$ se llama K-esencial si $a \wedge c \neq 0$ para todo $c \neq 0$ en K. El K-zoclo de L es el supremo de todos los átomos en K, y se denota por $zoc_K(L)$.*

Proposición 3.1.1 *El conjunto de todos los elementos K-esenciales es un filtro en L. (Es decir,*

1. *Si $a \leq b$ y a es K-esencial entonces b es K-esencial.*
2. *Si a, b son K-esenciales entonces $a \wedge b$ es K-esencial).*

Demostración.
Sean a un elemento K-esencial y $b \in L$ tal que $a \leq b$. Consideremos $c \in K$ distinto de cero, entonces $0 < a \wedge c \leq b \wedge c$; así, $b \wedge c \neq 0$.
Sean a, c elementos K-esenciales y $d \in K$ distinto de cero, entonces $a \wedge d \neq 0$. Luego, como L es compactamente generada, existe $e \in K$ compacto distinto de cero tal que $e \leq a \wedge d$. Entonces

$$(a \wedge c) \wedge d = c \wedge (a \wedge d) \geq c \wedge e \neq 0$$

pues c es K-esencial. Por lo tanto, $a \wedge c$ es K-esencial. ■

Proposición 3.1.2 *$zoc_K(L) \leq b$ para todo elemento K-esencial b.*

Demostración.
Sean a un átomo en K y b un elemento K-esencial. Como b es K-esencial, $b \wedge a \neq 0$. Pero $0 < b \wedge a \leq a$ y a es átomo; así, $a = b \wedge a$, con lo que $a \leq b$. Concluimos que $zoc_K(L) \leq b$. ■

Proposición 3.1.3 *Si $zoc_K(L) \leq a$, entonces a es el ínfimo de un conjunto de elementos K-esenciales.*

Demostración.
Sea e el ínfimo de todos los elementos K-esenciales mayores o iguales a a. Si $a < e$, como L es compactamente generada, existe $b \in L$ compacto tal que $b \leq e$ y $b \nleq a$.
Sea $A = \{c \in L : a \leq c, b \nleq c\}$, que es no vacío pues $a \in A$. Consideremos C una cadena no vacía en A. Claramente $a \leq \bigvee C$. Si ocurriera que $b \leq \bigvee C$ entonces, como b es compacto, existe $c \in C$ tal que $b \leq c$. Pero $c \in C \subseteq A$, lo cual es una contradicción. Por el Lema de Zorn, existe $m \in A$ máximo. Veamos que m es K-esencial.

Supongamos que existe $d \in K$, con $d \neq 0$ tal que $m \wedge d = 0$. Para todo elemento compacto $d_i \leq d$, por la propiedad de K, tenemos que $d_i \in K$ y, por la maximidad de m, $b \leq m \vee d_i$ (pues $m \wedge d_i = 0$ y por tanto $d_i \nleq m$). Por hipótesis, $zoc_K(L) \leq a$ y $zoc_K(L) \wedge d \leq a \wedge d \leq m \wedge d = 0$; es decir, la retícula $[0, d]$ no tiene átomos ya que todos ellos serían elementos de K. Como la retícula L es compactamente generada, si denotamos por $\{d_i\}_{i \in I}$ el conjunto de todos los elementos compactos en $[0, d]$, tenemos que $\bigwedge\limits_{i \in I} d_i \neq 0$ cubriría a 0; en otras palabras, sería un átomo en $[0, d]$, por lo que $\bigwedge\limits_{i \in I} d_i = 0$. Observemos que $m \leq \bigwedge\limits_{i \in I}(m \vee d_i) \leq m \vee d$, pues $d_i \leq d$ para todo $i \in I$. Usando la modularidad, tenemos que

$$\bigwedge_{i \in I}(m \vee d_i) = (\bigwedge_{i \in I}(m \vee d_i)) \wedge (m \vee d) = m \vee ((\bigwedge_{i \in I}(m \vee d_i)) \wedge d) =$$
$$m \vee (\bigwedge_{i \in I}((m \vee d_i) \wedge d)) = m \vee (\bigwedge_{i \in I}(d_i \vee (m \wedge d))) = m \vee (\bigwedge_{i \in I} d_i),$$

pues $m \wedge d = 0$. Con esta igualdad podemos concluir que $b \leq \bigwedge\limits_{i \in I}(m \vee d_i) = m \vee (\bigwedge\limits_{i \in I} d_i) = m \vee 0 = m$, lo cual no es posible pues $m \in A$. Por lo tanto, m es K-esencial.
Entonces, por lo dicho en el primer párrafo, tenemos que $b \leq e \leq m$, lo que contradice que $m \in A$. Luego, $a = e$. ■

Teorema 3.1.1 *El K-zoclo de L es el ínfimo de todos los elementos K-esenciales de L.*

Demostración.
Según la *Proposición* 3.1.3, $zoc_K(L)$ es el ínfimo de todos los elementos K-esenciales de L mayores o iguales al $zoc_K(L)$. Pero según la *Proposición* 3.1.2, éstos son todos los elementos K-esenciales de L. ■

3.2. Radicales y elementos pequeños

Definición 3.2.1 *Sea L una retícula completa.*

1. *$a \in L$ se llama pequeño(superfluo) si $a \vee c \neq 1$ para todo $c \in L - \{1\}$. Denotamos por $S(L)$ al conjunto de todos los elementos pequeños de L.*

2. *El radical de L es el ínfimo de todos los oátomos en L, y éste se denota por $rad(L)$.*

Proposición 3.2.1 *El conjunto de todos los elementos pequeños en L es un ideal.*

Demostración.
Sea $I = \{x \in L : x \text{ es pequeño } \}$. Sean $x \in I$, $y \leq x$ y $z \in L$ tal que $z \neq 1$. Entonces $y \vee z \leq x \vee z < 1$, por lo que $y \in I$.
Por otro lado, consideremos $x_1, x_2 \in I$ y $z \in L - \{1\}$, entonces $x_2 \vee z = c \neq 1$ pues x_2 es pequeño. Tenemos que $(x_1 \vee x_2) \vee z = x_1 \vee (x_2 \vee z) = x_1 \vee c \neq 1$ pues $c \neq 1$ y x_1 es pequeño. Por lo tanto, I es ideal. ■

Proposición 3.2.2 *Si a es pequeño, entonces $a \leq rad(L)$.*

Demostración.
Sea $c \neq 1$ un elemento máximo en L. Entonces $a \vee c \in \{c, 1\}$ y como a es pequeño, $a \vee c \neq 1$. Tenemos entonces que $c = a \vee c$. Así, $a \leq c$ para todo $c \in L$ máximo. Por lo tanto, $a \leq rad(L)$. ■

Proposición 3.2.3 *Si a es compacto y $a \leq rad(L)$, entonces a es pequeño.*

Demostración.
Supongamos que a no es pequeño. Entonces existe $b \neq 1$ tal que $b \vee a = 1$. Claramente $a \nleq b$. Veamos que podemos escoger b máximo con esta propiedad.
Sea $A = \{c \in L : a \vee c = 1 \text{ y } a \nleq c\}$, que es no vacío pues $b \in A$. Sea $C \subseteq A$ una cadena no vacía en A. Sea $c \in C$, entonces $c \leq \bigvee C$ y por lo tanto, $a \vee \bigvee C \geq a \vee c = 1$; así, $a \vee \bigvee C = 1$.
Supongamos que $a \leq \bigvee C$. Como a es un elemento compacto, existe un elemento $c \in C$ tal que $a \leq c$, lo cual es una contradicción pues $C \subseteq A$. Por lo tanto, $a \nleq \bigvee C$. Por el Lema de Zorn, existe un elemento máximo

$d \in A$. Además, d es máximo en L, pues si $c \in L$ es tal que $d < c$, como d es máximo en A tenemos que $a \leq c$. Entonces $1 = a \vee d = c$, por lo que $c = 1$. De aquí, tenemos que $a \leq rad(L) \leq d$, lo que contradice el hecho de que $a \nleq d$. ■

Teorema 3.2.1 *Si L es compactamente generada, entonces su radical es el supremo de todos los elementos pequeños de L.*

Demostración.
Por la *Proposición* 3.2.2, $\bigvee S(L) \leq rad(L)$. Supongamos que $\bigvee S(L) < rad(L)$. Como L es compactamente generada, existe un elemento compacto $a \in L$ tal que $a \nleq \bigvee S(L)$ y $a \leq rad(L)$. Por la *Proposición* 3.2.3, dicho a debería ser pequeño y por tanto $a \leq \bigvee S(L)$, lo cual es una contradicción. ■

Proposición 3.2.4
1. *Para todo $a \in L$, $rad[a,1] \geq a \vee rad(L)$.*
2. *Si $a \leq rad(L)$, entonces $rad[a,1] = rad(L)$.*
3. *Si 1 es compacto, entonces $rad(L)$ es pequeño en L.*

Demostración.

1. Si $a \in L$, entonces $rad[a,1] \geq a$. Además,

   $$rad(L) = \bigwedge\{c \in L : c \text{ es máximo en } L\} \leq \bigwedge\{c \in L : c \text{ es máximo en } L \text{ y } a \leq c\} = rad[a,1].$$

   Por lo tanto, $rad[a,1] \geq a \vee rad(L)$.

2. Si $a \leq rad(L)$ entonces $a \leq c$ para todo $c \in L$ máximo distinto de 1. Así, $rad[a,1] = rad(L)$.

3. Sea $a \in L$ tal que $rad(L) \vee a = 1$. Por 1), $rad[a,1] = 1$. Veamos que esto es posible sólo cuando $a = 1$. Supongamos que $a < 1$.
   Sea $A = \{x \in L : a \leq x < 1\}$, que es no vacío pues $a \in A$. Sea $C \subseteq A$ una cadena no vacía. Como $C \neq \emptyset$ existe $c \in C$, entonces $a \leq c \leq \bigvee C$. Supongamos que $\bigvee C = 1$. Como el 1 es compacto, existe $c \in C$ tal

que $c = 1$, lo cual no es posible. Así, $\bigvee C < 1$. Por el Lema de Zorn, existe un elemento máximo en A, que es máximo en L.

Así, si $a \neq 1$, el intervalo $[a, 1]$ tiene un elemento máximo distinto de 1 y la única forma de que $rad[a, 1] = 1$ es que $a = 1$. Luego, $rad(L)$ es pequeño.

■

Proposición 3.2.5 *Si L es modular y $a \in L$, entonces $rad[0, a] \leq rad(L)$.*

Demostración.
Sea $c \in L$ un elemento máximo. Si $a \leq c$, entonces $rad[0, a] \leq c$. Si $a \nleq c$, entonces $a \wedge c$ es máximo en $[0, a]$ pues, por el *Teorema* 1.1.2, tenemos que $[a \wedge c, a] \cong [c, a \vee c] = [c, 1]$. Así, $rad[0, a] \leq a \wedge c \leq c$. Concluimos que $rad[0, a] \leq rad(L)$. ■

Definición 3.2.2 *Sea $a \in L$. Si $b \in L$ es un complemento de a, se escribe $a \oplus b = 1$ y se dice que a y b son sumandos directos.*

Proposición 3.2.6 *Si L es modular y $a \oplus b = 1$, entonces $rad(L) = rad[0, a] \oplus rad[0, b]$.*

Demostración.
Por la *Proposición* 3.2.5, tenemos que $rad[0, a] \vee rad[0, b] \leq rad(L)$. Además, $rad[0, a] \wedge rad[0, b] \leq a \wedge b = 0$.

Sea c un elemento máximo en $[0, a]$, como a y b son complementarios $b \nleq c$. Por el *Teorema* 1.1.2 y la modularidad, tenemos que

$$[c, a] = [c \vee (a \wedge b), a] = [a \wedge (c \vee b), a] \cong [c \vee b, (c \vee b) \vee a] = [c \vee b, 1].$$

Por lo tanto, $c \vee b$ es máximo en L.

Sea $\{c_i\}_{i \in I}$ el conjunto de los elementos máximos en $[0, a]$. Veamos que $\bigwedge_{i \in I}(c_i \vee b) = (\bigwedge_{i \in I} c_i) \vee b$. Tenemos que $b \leq \bigwedge_{i \in I}(c_i \vee b) \leq 1 = a \vee b$. Usando la modularidad, se sigue que

$$\bigwedge_{i \in I}(c_i \vee b) = (a \vee b) \wedge (\bigwedge_{i \in I}(c_i \vee b)) = b \vee (a \wedge (\bigwedge_{i \in I}(c_i \vee b))) =$$
$$b \vee (\bigwedge_{i \in I} a \wedge (b \vee c_i)) = b \vee (\bigwedge_{i \in I}(c_i \vee (b \wedge a))) = b \vee (\bigwedge_{i \in I} c_i),$$

pues $a \oplus b = 1$. Concluimos que $rad[0,a] \vee b = (\bigwedge_{i\in I} c_i) \vee b = \bigwedge_{i\in I}(c_i \vee b) \geq rad(L)$, pues $c_i \vee b$ es máximo en L para todo $i \in I$. De forma similar, $rad[0,b] \vee a \geq rad(L)$.
Finalmente, utilizando la modularidad, tenemos que

$$rad(L) \leq (rad[0,a] \vee b) \wedge (rad[0,b] \vee a) = rad[0,a] \vee (b \wedge (rad[0,b] \vee a)) =$$
$$rad[0,a] \vee (rad[0,b] \vee (a \wedge b)) = rad[0,a] \vee rad[0,b].$$

■

Proposición 3.2.7 *Si L es continua superiormente, modular y atómicamente generada, entonces $rad(L) = 0$.*

Demostración.
Por el *Teorema* 1.4.1, L es complementada. Supongamos que $rad(L) \neq 0$. Sea $\{s_i\}_{i\in J}$ un conjunto independiente máximo de átomos contenido en $[0, rad(L)]$. La prueba de la existencia de este conjunto es análoga a lo hecho en el *Teorema* 1.4.1. Afirmamos que $c = \bigvee_{i\in J} s_i = rad(L)$. Si $c < rad(L)$, entonces existe un átomo $t \leq rad(L)$ tal que $t \nleq c$. Así $t \wedge c = 0$ y por la *Proposición* 1.4.2, $\{s_i\}_{i\in J} \cup \{t\}$ es independiente y está contenido en $[0, rad(L)]$, lo cual es una contradicción.
Sea t_i el complemento de s_i para cada $i \in J$. Por el *Lema* 1.2.2, t_i es un elemento máximo. Ahora, $1 = t_i \vee s_i \leq t_i \vee rad(L)$. Entonces $rad(L) \nleq t_i$ para todo $i \in J$, lo que es una contradicción. ■

3.3. Retículas con Radical Cero

Proposición 3.3.1 *Sea L una retícula noetheriana y localmente atómica. Entonces L es de longitud finita.*

Demostración.
Por el *Teorema* 2.2.2, basta probar que L es artiniana.
Sea $A = \{a \in L : [0,a] \text{ es artiniana}\}$ que es no vacía pues $0 \in A$. Como L es noetheriana, existe un elemento $a \in L$ máximo en A. Además, $a > 0$ pues

L localmente atómica, implica que existe un átomo c y la retícula $[0, c]$ es artiniana. Supongamos que $a < 1$. Como L es localmente atómica, existe un elemento b que cubre a a. Afirmamos que $[0, b]$ es una retícula artiniana. Hagamos primero dos observaciones:

1. Si $c \leq b$ y $c \nleq a$ entonces $a \leq c \vee a$ y $c \vee a \leq b$. Como b cubre a a tenemos que $c \vee a = b$ (pues si $c \vee a = a$ implica $a \leq c$, lo cual es imposible).

2. Si $c' < c$ y $c' \nleq a$, por 1), tenemos que $c' \vee a = b$. Aplicando el $Teorema$ 1.1.2, tenemos que $[a \wedge c', a \wedge c] = [(a \wedge c) \wedge c', a \wedge c] \cong [c', c' \vee (a \wedge c)] = [c', c]$ pues, por la modularidad, $c' \vee (a \wedge c) = c \wedge (a \vee c') = c \wedge b = c$. Por el isomorfismo anterior, concluimos que $a \wedge c' < a \wedge c$.

Sea $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente en $[0, b]$. Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c_N \leq a$ entonces para todo $m \geq N$, tenemos que $c_m \leq a$. Como $[0, a]$ es artiniana existe $N_0 \geq N$ tal que $c_m = c_{N_0}$ para todo $m \geq N_0$.
Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $c_n \nleq a$ y que la sucesión no se estaciona; es decir, para cada $c_{n_1} \in \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ existe $n_2 \geq n_1$ tal que $c_{n_2} < c_{n_1}$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que la sucesión $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface que $c_{n+1} < c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Por las observaciones 1) y 2), la sucesión $\{c_n \wedge a\}_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente en $[0, a]$ e infinita, lo cual contradice que $[0, a]$ sea una retícula artiniana. Así, $[0, b]$ es artiniana, lo que contradice la minimalidad de a. Por lo tanto, $a = 1$ y L es artiniana. ■

Teorema 3.3.1 *Sean L una retícula modular y $a \in L$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $i)$ $[0, a]$ *es atómicamente generada y de longitud finita.*
$ii)$ $[0, a]$ *es complementada en L.*

2. $i)$ $a \wedge rad(L) = 0$.
$ii)$ $[0, a]$ *es artiniana.*

3. *i)* $a \wedge rad(L) = 0$.

ii) $[0, a]$ *es localmente atómica.*

iii) $[0, a]$ *es noetheriana.*

4. *i)* $a \wedge rad(L) = 0$.

ii) $[0, a]$ *es noetheriana.*

iii) *Si* $b \in L$ *y* $a \nleq b$*, entonces existe un átomo* $u \leq a$ *tal que* $b \wedge u = 0$.

5. *i)* $a \wedge rad(L) = 0$.

ii) $[0, a]$ *es noetheriana.*

iii) *Para todo* $b \leq a$ *existe un elemento* c *mínimo tal que* $b \vee c = 1$.

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 4) Sea $b \in L$ el complemento de a. Por la *Proposición* 3.2.6, tenemos que $rad(L) = rad[0, a] \oplus rad[0, b]$.
Además, como $[0, a]$ es de longitud finita, por el *Teorema* 2.2.2, es noetheriana y, por el *Corolario* 2.1.2, $[0, a]$ es una retícula continua superiormente. Como $[0, a]$ es continua superiormente y atómicamente generada, por la *Proposición* 3.2.7, concluimos que $rad[0, a] = 0$. Finalmente, $a \wedge rad(L) = a \wedge rad[0, b] \leq a \wedge b = 0$.
Sea $b \in L$ tal que $a \nleq b$. Como $[0, a]$ es atómicamente generada entonces $a = \bigvee_{i \in J} c_i$, donde c_i es átomo para todo $i \in J$. Entonces existe $j \in J$ tal que $c_j \nleq b$ y $c_j \wedge b = 0$, pues $c_j \wedge b \leq c_j$ y como c_j es átomo, $c_j \wedge b \in \{0, c_j\}$ pero $c_j \nleq b$.

4) $\Rightarrow$ 3) Resta probar que $[0, a]$ es localmente atómica.
Sea $b \in [0, a]$ tal que $0 \leq b < a$. Por $4iii$), como $a \nleq b$ existe un átomo $u \leq a$ tal que $b \wedge u = 0$. Por el *Teorema* 1.1.2, tenemos que $[0, u] = [b \wedge u, u] \cong [b, b \vee u]$. Como u es átomo, $|[b, b \vee u]| = 2$, por lo que $b \vee u$ cubre a b.

3) $\Rightarrow$ 2) Como $[0, a]$ es noetheriana y localmente atómica, por la *Proposición* 3.3.1, es artiniana.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que a no tiene complemento en L. Sea $A = \{c \in$

$[0,a] : c$ no es complementado$\}$. Como $[0,a]$ es artiniana y $A \neq \emptyset$, existe $b \in A$ un elemento mínimo. Observemos que $b \neq 0$ pues 0 es complementado y por $2i)$, tenemos que $b \wedge rad(L) = 0$. Entonces $b \wedge (\bigwedge_{i \in I} m_i) = 0$, donde $\{m_i\}_{i \in I}$ denota el conjunto de todos los elementos máximos en L. Luego, existe $m \in \{m_i\}_{i \in I}$ tal que $b \vee m = 1$, pues si $b \vee m_i = m_i$ para todo $i \in I$ entonces $b \leq m_i$ para todo $i \in I$ y así $b \leq rad(L)$, lo cual es una contradicción pues $b \neq 0$. Se sigue que $b \wedge m < b$ pues si $b = b \wedge m$, entonces $b \leq m$ y $m = m \vee b = 1$. Por la minimalidad de b, tenemos que $b \wedge m$ tiene un complemento $c \in L$.

Sea $d = c \wedge m$. Veamos que d es un complemento de b. Tenemos que $b \wedge d = b \wedge (c \wedge m) = (b \wedge m) \wedge c = 0$. Por otro lado, aplicando la modularidad, tenemos $(b \wedge m) \vee d = (b \wedge m) \vee (c \wedge m) = m \wedge ((b \wedge m) \vee c) = m \wedge 1 = m$. Finalmente, $1 = b \vee m = b \vee ((b \wedge m) \vee d) = b \vee d$. Por lo tanto, b es complementado, lo que es una contradicción. Así, a es complementado.

Si $a' \leq a$ entonces a' satisface las condiciones de 2), por lo que a' tiene un complemento en L. Aplicando la *Proposición* 1.2.1, podemos concluir que la retícula $[0,a]$ es complementada, y por la misma proposición, tenemos que $[0,a']$ es complementada para todo $a' \leq a$.

Supongamos ahora que existe $a' \leq a$ tal que a' no es el supremo de todos los átomos contenidos en $[0,a']$. Sea $u = \bigvee\{c \in [0,a'] : c$ es átomo$\}$. Entonces $u < a'$, luego existe $v \in [0,a']$ tal que $u \vee v = a'$ y $u \wedge v = 0$. Como $[0,v]$ es artiniana, existe un átomo $c \leq v$; pero $c \leq u$ pues $c \in [0,a']$, lo cual es una contradicción ya que $c \neq 0$. Por lo tanto, para todo $a' \leq a$, $a' = \bigvee\{c \in [0,a'] : c$ es átomo$\}$ y $[0,a]$ es localmente atómica.

Por el *Teorema* 2.2.2, nos resta probar que $[0,a]$ es noetheriana.

Sea $A = \{c \in L : c < a$ y $[c,a]$ es noetheriana$\}$. Por el *Lema* 2.1.2 y el *Lema* 1.2.2, $A \neq \emptyset$ pues $[0,a]$ tiene coátomos por ser artiniana y complementada. Como $A \subseteq [0,a]$ es no vacío y $[0,a]$ es artiniana, existe $b \in A$ mínimo. Afirmamos que $b = 0$.

Supongamos que $b \neq 0$. Como $[0,b] \subseteq [0,a]$, la subretícula $[0,b]$ es artiniana, modular y complementada; así, existe $m \in [0,b]$ máximo (coátomo). Por construcción b cubre a m. Consideremos la subretícula $[m,a] \subseteq [0,a]$. Como las subretículas $[m, b]$ y $[b, a]$ son noetherianas, por la *Proposición* 2.2.1, $[m, a]$ es noetheriana, lo que contradice la minimalidad de b en A. Por lo tanto, $b = 0$ y $[0, a]$ es noetheriana.

1) $\Rightarrow$ 5) La prueba de que $a \wedge rad(L) = 0$ es indéntica a la que se hizo en 1) $\Rightarrow$ 2). Como $[0, a]$ es de longitud finita, por el *Teorema* 2.2.2, $[0, a]$ es noetheriana.
Sea $b \leq a$, como $[0, a]$ es complementada en L, existe $c \in L$ tal que $b \vee c = 1$ y $b \wedge c = 0$. Veamos que c es mínimo con la propiedad de que $b \vee c = 1$. Sea $b' \in L$ tal que $b' \leq c$ y $b \vee b' = 1$. Entonces, por la modularidad, $b' = b' \vee 0 = b' \vee (c \wedge b) = c \wedge (b' \vee b) = c \wedge 1 = c$. Por lo tanto, $b' = c$

5) $\Rightarrow$ 1) Probemos primero que $[0, a]$ es complementada en L. Sean $b \leq a$ y $c \in L$ mínimo tal que $b \vee c = 1$. Veamos que $b \wedge c$ es un elemento pequeño en $[0, c]$. Sea $d \leq c$ tal que $(b \wedge c) \vee d = c$, entonces $1 = b \vee c = b \vee ((b \wedge c) \vee d) = b \vee d$ y $d = c$ por la minimalidad de c. Así, $b \wedge c$ es pequeño en $[0, c]$. Entonces, por la *Proposición* 3.2.5, $b \wedge c \leq a \wedge rad[0, c] \leq a \wedge rad(L) = 0$.
Por lo tanto, $[0, a]$ es complementada en L y como además es noetheriana, para concluir nos resta probar que $[0, a]$ es artiniana (pues tendriamos las hipótesis de 2) y ya probamos 2) $\Rightarrow$ 1)).
Sea $A = \{c \in [0, a] : 0 < c \text{ y } [0, c] \text{ es artiniana}\}$. Por el *Lema* 2.1.2 y el *Lema* 1.2.2, $A \neq \emptyset$ pues $[0, a]$ tiene átomos por ser noetheriana y complementada. Como $A \subseteq [0, a]$ es no vacío y $[0, a]$ es noetheriana, existe $b \in A$ máximo. Afirmamos que $b = a$.
Supongamos que $b \neq a$. Como $[b, a] \subseteq [0, a]$, la subretícula $[b, a]$ es noetheriana, modular y complementada; así existe $c \in [b, a]$ átomo. Por construcción c cubre a b. Entonces las subretículas $[0, b]$ y $[b, c]$ son artinianas y por la *Proposición* 2.2.1, tenemos que $[0, c]$ es artiniana. Esto contradicce la maximalidad de b en A. Por lo tanto, $b = a$ y $[0, a]$ es artiniana. ■

Corolario 3.3.1 *Una retícula modular L es atómicamente generada y de longitud finita si y sólo si es artiniana y $rad(L) = 0$.*

Demostración.

En el *Teorema* 3.3.1 basta tomar $a = 0$. ■

Bibliografía

[1] Calugareanu, G. *Lattice Concepts of Module Theory.* Kluwer Academic Publishers, 2000.

[2] Celis, J. A. *Retículas Artinianas y Noetherianas.* Editorial Académica Española, 2018.

[3] Davey, B., and Priestley, H. *Introduction to Lattices and Order.* Cambridge, 1990.

[4] Donnellan, T. *Lattice Theory.* Pergamon Press, 1968.

[5] Grätzer, G. *General Lattice Theory.* Birkhäuser, 1998.

[6] Stenström, B. *Radicals and socles of lattices*, vol. 20: 258-261. 1969.