UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE MÚSICA

ÁREAS MATEMÁTICAS APLICADAS EN LA CREACIÓN E IMPROVISACIÓN MUSICAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN COMPOSICIÓN

PRESENTA:
MERCADO CONTRERAS ADRIÁN

DRA. BERENICE GUADALUPE CARO COCOTLE
ASESORA DE TESIS
DR. JOSÉ FRANCISCO CORTÉS ÁLVAREZ
PROFESOR DE ÁREA

CIUDAD DE MÉXICO, 2022

Declaro conocer el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, plasmado en la Legislación Universitaria. Con base en las definiciones de integridad y honestidad ahí especificadas, aseguro que el presente trabajo es original y enteramente de mi autoría. Todas las citas de obras elaboradas por otros autores, o sus referencias, aparecen aquí debida y adecuadamente señaladas, así como acreditadas mediante las convenciones editoriales correspondientes.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, que me han dado su apoyo incondicional desde que comencé en la música cuando tenía 13 años. Crecí en una familia amorosa, la cual, siempre trató de inculcarme los mejores valores y de procurar que a mí y a mis hermanos nunca nos faltara nada. Cuando decidí dedicarme al estudio de la música de manera profesional, tuve un apoyo pleno por parte de ellos, sin mencionar todo el cariño y la ayuda emocional que siempre he recibido de su parte, sin el apoyo y el amor de mis padres esta tesis no sería posible.

A mis profesores del Centro de las Artes de San Luis Potosí, quienes me ayudaron en todo momento y pusieron todo su empeño y dedicación para que yo y muchos jóvenes de la escena musical pudiéramos dedicarnos a esta bella profesión.

A mis profesores de la Facultad de Música de la UNAM, por haberme formado como músico a nivel profesional y haber compartido sus conocimientos, apoyo y experiencias conmigo siempre que les fue posible.

Esta tesis está dedicada a la memoria de Higinio Martínez y Enrique Contreras, que la tierra les sea leve.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene como intención presentar algunas propuestas musicales construidas a partir de algunas áreas matemáticas que son usadas con frecuencia en la composición musical. El principal objetivo de la presente tesis es mostrar algunas de las aplicaciones que pueden tener estas áreas matemáticas en cualquier género de la música.

El estudio de las matemáticas se ha convertido en uno de los temas básicos para la enseñanza de la composición y análisis musical. Si bien es verdad que la aproximación entre matemáticas y música es muy antigua (con pensadores como Pitágoras o Arquitas), es en el siglo XX cuando se produce una aproximación muy importante entre la música y las ciencias exactas. Es en este siglo cuando aparecen numerosas técnicas compositivas construidas a partir de distintas áreas matemáticas. Sin embargo, hay dos defectos que suelen tener algunos de los textos que proponen aplicaciones de sistemas matemáticos en la música. Por un lado, una rigidez que no permite el pleno desarrollo de la creatividad en la creación musical y, por otro lado, lo poco accesibles que son estos métodos en cuanto a su metalenguaje. Existen autores que dejaron excelentes tratados para acercar a los músicos al uso de sistemas matemáticos y de la física, como es el caso de Iannis Xenakis con su obra *Formalized Music* o el texto del compositor mexicano Herbert Vázquez *Fundamentos teóricos de la música atonal*.[1] Si bien algunos de estos tratados tocan estos temas de manera sencilla, otros llegan a ser inaccesibles para un músico que no tiene formación en matemáticas. Cuestiones que podrían ser autoevidentes para un estudiante de ciencias exactas, resultan totalmente ajenas para un artista. Además, ocurrió otro fenómeno el cuál es importante mencionar: Algunos de los ejemplos más conocidos de sistemas musicales del siglo XX (como podría ser el serialismo) intentaron matematizar, hasta sus últimas consecuencias, a la composición musical (irónicamente, esto fue la cúspide del proyecto modernista). Con esto se generó un resultado que algunos críticos de arte, como fue el caso de Roger Scruton en una entrevista llamada *Beauty and meaning*,[2] tacharon de “mecanicista”. Si bien se han generado obras muy interesantes y

---

[1] Iannis Xenakis (1963), *Formalized Music; Thoughts and mathematics in composition,* Nueva York, Estados Unidos, Pendragon Press.
Herbert Vázquez (2006), *Fundamentos teóricos de la música atonal,* Ciudad de México, México, Dirección General de Publicaciones y Fomento Editorial.

[2] Roger Scruton (2011), *Beauty and meaning; Music and morality, An interview with Roger Scruton,* Entrevista realizada por el Postgraduate Journal of Aesthetics, Vol. 8, No. 1.

complejas, algunos de estos sistemas dejaron de lado una cuestión central en las artes como es la percepción.

Otro punto importante es que, hasta ahora, la mayor parte de modelos musicales construidos por compositores contemporáneos se han utilizado principalmente en la creación de música académica-contemporánea. Muchos jazzistas desarrollaron diversos e interesantes sistemas de aplicación de matemáticas al jazz como John Coltrane, Anthony Braxton y Jerry Bergonzi, de quienes se hablará con más detalle en el capítulo dos. Sin embargo, la mayoría de compositores contemporáneos se han enfocado en el uso de áreas matemáticas para aplicarlas en la música académica. Otro de los objetivos principales de esta tesis será mostrar diversos ejemplos de aplicación de áreas matemáticas, no solamente a la música académica-contemporánea, sino también a géneros de la llamada “música popular".

Es a partir de estas problemáticas que surge la pregunta del problema: ¿Qué características deben tener este tipo de tratados para que los músicos puedan interesarse en temas interdisciplinarios como podría ser el de las matemáticas y la música? La primera hipótesis es que si este tipo de tratados se encuentran escritos en un lenguaje accesible, entonces será más fácil que los músicos puedan acercarse a este tipo de propuestas interdisciplinarias. La segunda hipótesis es que si los tratados no se centran únicamente en música académica e incluyen también aplicaciones de este tipo de sistemas y modelos matemáticos en música popular o de cualquier género, quizás se pueda llegar a un mayor número de lectores. Finalmente, considero que es importante ofrecer modelos que permitan a los músicos un cierto grado de elección y un uso pleno de su creatividad, ya que pienso que no es muy adecuado ofrecer sistemas completamente mecánicos o rígidos que no permitan el uso de la percepción en la creación y ejecución musical, aun cuando éstos tengan su base en las matemáticas.

Como compositor me he dedicado durante dos años a estudiar distintas áreas de las matemáticas para poder proponer algunas técnicas de aplicación de conceptos matemáticos en el análisis y la creación musical. Muchas de mis obras contienen distintos elementos de los temas que se explicarán en los tres capítulos de la presente tesis. En cada capítulo se incluirán distintos ejemplos de aplicación de fractales, combinatoria y teoría de juegos en la música académica, popular y también algunos ejemplos de obras del autor de la presente tesis, con la intención de mostrarle al lector algunos de los procesos que he incluido en mi quehacer musical.

El primer capítulo hablará sobre la Geometría Fractal, desde sus conceptos básicos, las características que tienen este tipo de objetos y algunas propuestas de aplicación de esta área de las matemáticas en la música popular. Los Fractales han proporcionado una nueva manera de entender el mundo. Los músicos han hecho uso de este tipo de estructuras geométricas para generar distintos materiales y estructuras musicales complejas, así como también para el análisis musical. Además, se hará una breve mención de la Teoría del Caos y el uso de algoritmos para la creación e improvisación musical dentro del jazz.

El segundo capítulo abordará de una forma sencilla los fundamentos de la combinatoria, área elemental en las matemáticas pero también en la composición musical, dado que, como se explicará más adelante, la combinatoria ha estado presente desde hace mucho tiempo en la práctica musical. Se hablará sobre el concepto de función, conjunto y permutación. Después, se darán algunos ejemplos de cómo permutar desde una melodía hasta una estructura musical completa. Además, se explicarán los conceptos básicos de la teoría de gráficos y de sus posibles aplicaciones en la composición contemporánea o en una improvisación de jazz.

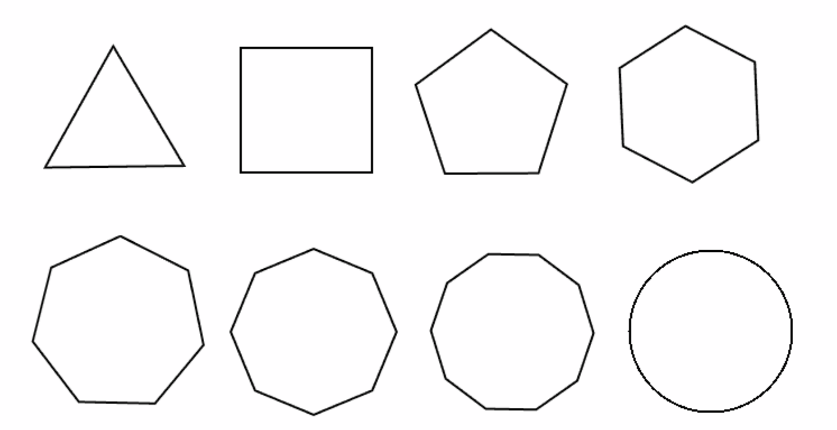
El tercer capítulo, por su parte, abordará una explicación básica de una de las áreas matemáticas que ha tenido diversas aplicaciones en las ciencias sociales y las artes: La teoría de juegos. Primero, se explicarán cuáles son los juegos más comunes y cuáles son sus características, así como algunos de los conceptos básicos para poder entender esta teoría como son las matrices. Después, se explicará uno de los ejemplos más paradigmáticos dentro de la teoría de juegos: El dilema de los prisioneros. Finalmente, se mostrarán algunas de las posibles aplicaciones de esta teoría en la música.

CAPÍTULO 1. Fractales, algoritmos y teoría del caos

Historia y conceptos básicos.

La geometría fractal es un área de las matemáticas relativamente nueva, aparece a finales de los 70 y se le atribuye al matemático Benoit Mandelbrot.[3] Michael F. Barnsley en su libro *Fractals Everywhere*,[4] menciona que las fractales vienen a revolucionar la imagen inofensiva que tenemos de muchos elementos de la naturaleza como bosques, nubes, o elementos del universo como galaxias y estrellas. Se dice que la Geometría Fractal es la "Geometría de la Naturaleza", ya que existen muchos sistemas naturales caóticos que son descritos a través de los fractales como las turbulencias en el aire o en el agua, todo lo relacionado a ramificaciones (desde un árbol hasta las redes neuronales), propagaciones de poblaciones o enfermedades. Los fractales también se encuentran presentes en estructuras aparentemente sencillas como la superficie de un globo. En general, todo objeto natural presenta nuevos niveles de estructura a distintas escalas.

En matemáticas se considera que una figura geométrica es regular cuando todos sus lados y ángulos miden lo mismo, a este tipo de figuras también se les conoce como polígonos regulares, entre ellas se encuentran figuras como el cuadrado, el triángulo, el pentágono, etc. (Figura A-1):



Polígonos regulares, Figura A-1.

Por su parte, una figura geométrica se considera que es irregular si sus lados y ángulos no miden lo mismo. En el caso de los fractales, se pueden definir como objetos

[3] Universidad de Barcelona, *¿Qué es un Fractal?* [Folleto], última fecha de consulta 27 de junio 2022: http://www.ub.edu/matefest_infofest2011/triptics/fractal.pdf
[4] Michael F. Barnsley, (1993), *Fractals Everywhere,* Texas, Estados Unidos, Morgan Kaufmann Publishers.

geométricos irregulares que tienen una estructura esencial que se reitera en diferentes escalas. Su principal característica es que su apariencia y la manera en que se distribuyen estadísticamente no varían, aun cuando se modifique la escala empleada en la observación. Para poder entender el concepto de fractal mejor, hay que observar algunos ejemplos.

Uno de los fractales más sencillos de construir es el Triángulo de Sierpinski, desarrollado por el matemático polaco Waclaw Sierpinski en 1915 antes de que se desarrollara formalmente la Geometría Fractal. El proceso de construcción de esta figura geométrica es muy sencillo. Lo primero para generar esta figura es tomar un triángulo cualquiera y unir todos los puntos medios de sus tres lados para dividir el triángulo en cuatro (Figura A-2):

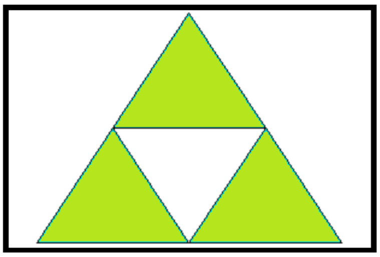


Figura A-2.

Dejando de lado el triángulo central que está boca abajo, este mismo proceso se le puede aplicar a cada uno de los tres triángulos que se encuentran en color verde, se unen los puntos medios de cada uno de sus lados y se dividen en cuatro (Figura A-3):

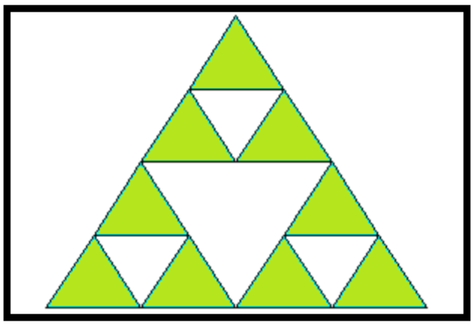
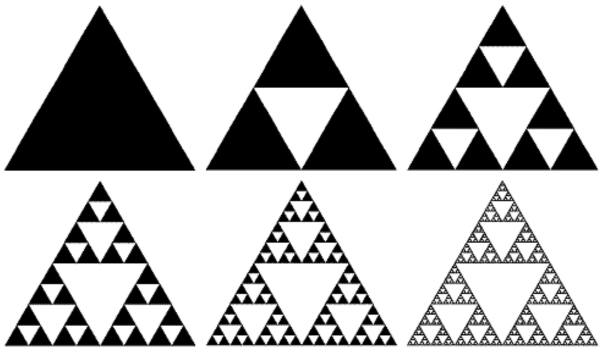


Figura A-3.

Esta figura A-3 tiene una característica que es importante notar, y es que cada uno de los tres triángulos internos ahora tiene la misma estructura que el triángulo inicial. A eso se refiere cuando se dice que los fractales tienen una estructura esencial que se reitera en diferentes escalas, porque cada una de sus partes tiene estructura similar al objeto completo. A esto se le conoce en geometría fractal como autosimilitud, concepto clave para entender la aplicación de fractales en música. Este mismo proceso se puede repetir infinitas veces, a cada una de las repeticiones del proceso se le llama iteración. La siguiente figura es el triángulo de Sierpinski después de cinco iteraciones, es decir, después de cinco veces de haber aplicado el mismo proceso (Figura A-4):



Triángulo de Sierpinski después de 5 iteraciones, Figura A-4.

Desde mucho antes del desarrollo de la Geometría Fractal, se podían encontrar este tipo de figuras irregulares que se consideraban excepciones a la matemática tradicional, pero se creía que estas figuras eran muy escasas y raramente surgían en la naturaleza. Los primeros en notar que esos objetos irregulares no eran meras excepciones fueron Henri Poincaré, conocido también como el padre de la Teoría del Caos (en la cual los Fractales juegan un rol importante), y George Cantor, quien desarrollaría el *Conjunto de Cantor* (Figura A-5):

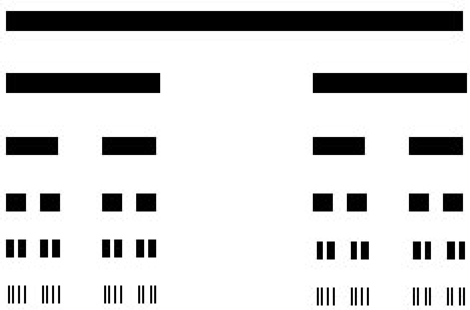
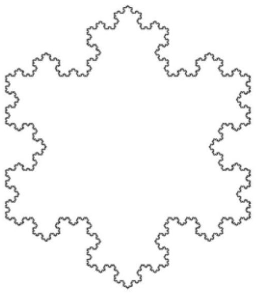


Figura A-5.

Si se observa con atención, se notará que la figura conocida como Conjunto de Cantor tiene la misma característica que el Triángulo de Sierpinski, es decir, que cada una de sus partes es similar al objeto completo, o que la microestructura de la figura es igual a la macroestructura. En este caso particular se tiene una figura en la que debajo de la línea más larga se encuentran dos líneas y un espacio, de la misma forma, cada una de las dos líneas que se encuentran por debajo de la línea más grande tienen también dos líneas y un espacio y este proceso se repite infinitas veces. Esta es la manera en la que se construye el Conjunto de Cantor.

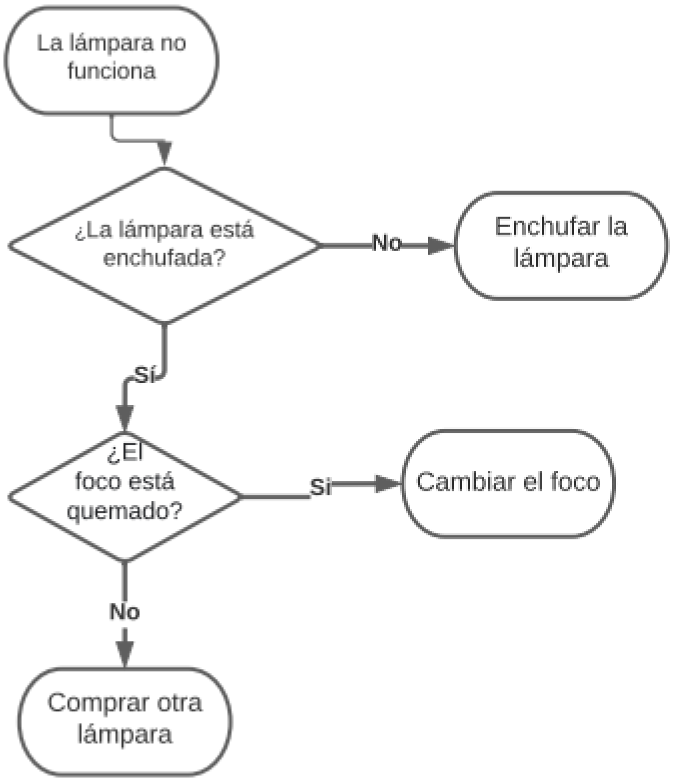
Otro de los objetos fractales más conocidos es el Copo de nieve de Koch, también llamado estrella o isla de Koch, diseñado por el matemático sueco Helge Von Koch en 1904 en un artículo titulado *Acerca de una curva continua que no posee tangentes y obtenida por los métodos de la geometría elemental* (Figura A-6):[5]



Copo de nieve de Koch, Figura A-6.

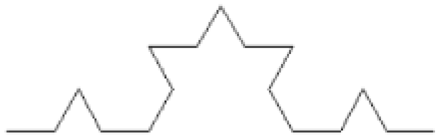
El proceso para obtener el Copo de nieve de Koch es el mismo que el del Triángulo de Sierpinski o el Conjunto de Cantor. Mathew Shelton explica cuál es el proceso para obtener el Copo de nieve de Koch:[6] Lo primero es tener una imagen o figura generadora, en este caso, la figura generadora será una línea. Después, se asigna una instrucción que altera la figura. Finalmente, la iteración de esa instrucción sobre la figura generadora será el algoritmo que genere el fractal (Figura A-8). Un algoritmo es un conjunto de instrucciones bien definidas que permiten llegar a un fin específico o solucionar un problema. Hay muchas formas de crear y representar algoritmos, por ejemplo, con un diagrama de flujo (Figura A-7):

[5] H. Von Koch (1904), *Acerca de una curva continua que no posee tangentes y obtenida por los métodos de la geometría elemental*, Archivo de Matemáticas, Astronomía y Física, pp. 681-704.
[6] Mathew Shelton (2019), *Introducción a la Geometría Fractal*, curso impartido en la página Fractal Tec, última fecha de consulta: 15 de enero de 2021. http://www.fractaltec.org/local-cgi/cutecast/cutecast.pl



Instrucciones a seguir cuando se tiene una lámpara que no funciona, Figura A-7.

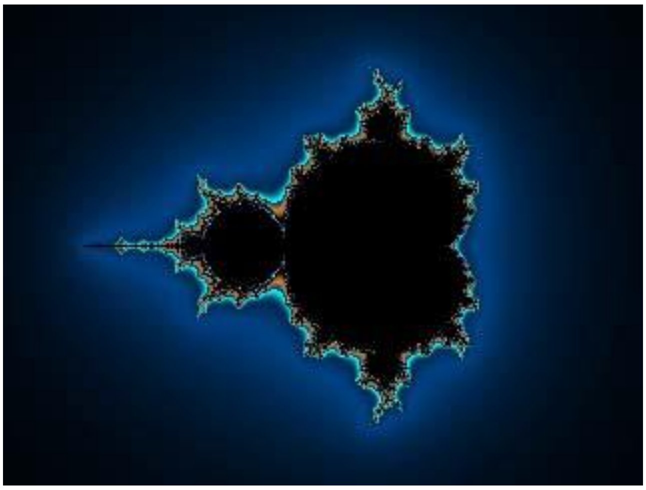
Este ejemplo muestra cómo resolver el problema de una lámpara que no funciona, mostrando diferentes soluciones para diferentes casos. Los algoritmos están constituidos de tres partes: un input o entrada (la cual, es la información que se introduce en el algoritmo y con la que va a trabajar para poder ofrecer una solución), un proceso (que es el conjunto de pasos que seguirá el algoritmo a partir de los datos de entrada para llegar a la solución) y un output o salida (la cual, es el resultado que se obtiene después de haber insertado la información y haber sido procesada por el algoritmo). Para construir algoritmos es necesario abstraer las características del problema a través de un proceso de análisis. A su vez, estos problemas deben estar relacionados con sus variables. Una vez analizados los problemas, se puede modelar una solución, la cual debe implementarse usando un lenguaje de programación adecuado para ese modelo o diseño. Para poder iterar un fractal, como el Copo de nieve de Koch u otros fractales, es necesario el uso de programas especiales y softwares, no es posible realizar este proceso a mano, ni siquiera a computadora, dado que se necesita una cantidad infinita de iteraciones. Sin embargo, las computadoras pueden ofrecer una mejor aproximación al fractal. Entonces, el proceso para obtener el Copo de nieve de Koch es el siguiente:

1. Imagen generadora	
2. Aplicación del algoritmo	
3. Iteración o repetición del algoritmo (se comienza a generar el fractal)	

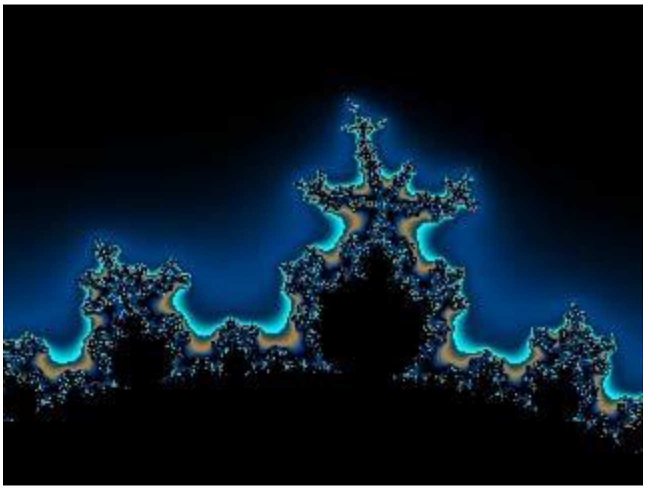
Procedimiento para obtener el Copo de nieve de Koch, Figura A-8.

Si el lector observa la figura A-5 y la compara con la figura A-4, se dará cuenta que cada una de las pequeñas partes del Copo de Nieve de Koch es similar al objeto completo, al igual que como lo eran el Triángulo de Sierpinski y el Conjunto de Cantor.

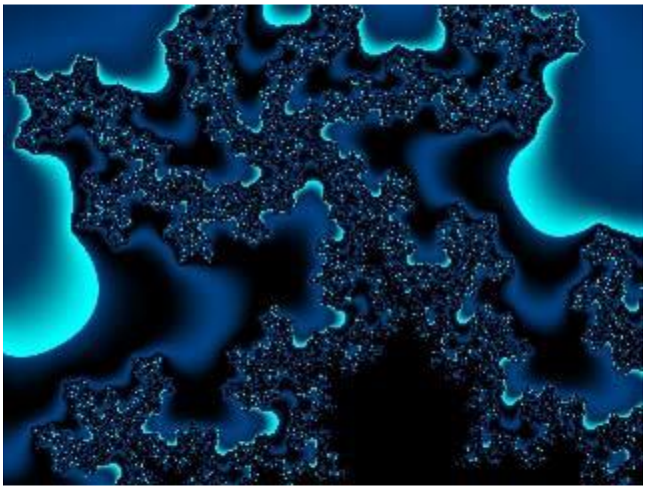
Un ejemplo de figura fractal que es muy útil para comprender el concepto de Autosimilitud es el Conjunto de Mandelbrot, desarrollado por el matemático Benoit Mandelbrot, uno de los pioneros de la Geometría Fractal (Figuras B-1, B-2, B-3 y B-4):



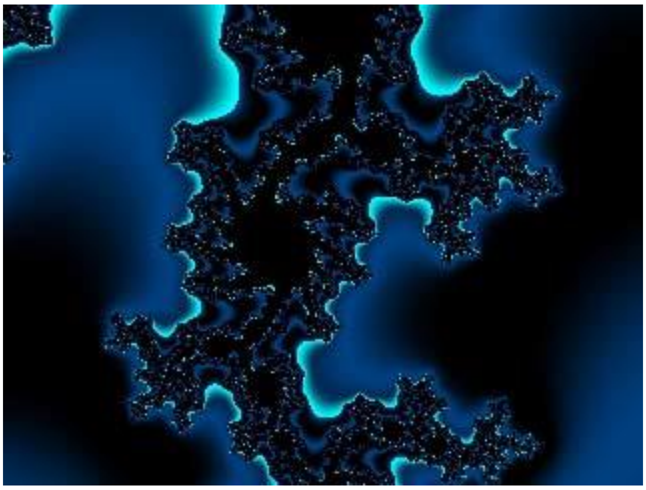
Conjunto de Mandelbrot completo, figura B-1.



Conjunto de Mandelbrot con una ampliación en una de sus zonas, Figura B-2.



Conjunto de Mandelbrot con cinco ampliaciones consecutivas en esa misma zona, Figura B-3.



Conjunto de Mandelbrot con 10 ampliaciones consecutivas en esa misma zona. Figura B-4.

Es verdad que si se hace la ampliación del Conjunto de Mandelbrot en otra área, las imágenes que se generan serán distintas. Sin embargo, hay algo que todas estas imágenes tienen en común y es el hecho de que son muy similares, sin importar la fracción de fractal que se tome. Los fractales, en general, tienen patrones similares o regularidades, esto es lo que se entiende por autosimilitud.

Como se mencionó al inicio, es muy común encontrar elementos de la naturaleza que siguen una lógica fractal. Benoit Mandelbrot solía usar el ejemplo de la isla de Gran Bretaña, ya que ésta tiene una naturaleza fractal y es muy similar al Conjunto de Mandelbrot. Por ejemplo, si se observa la costa de Gran Bretaña desde un satélite, se pueden ver bordes más armónicos y con líneas casi rectas, pero si se intenta medir desde un avión, entonces, se notará que los bordes no son tan armónicos como se habían visto desde el satélite. Por último, si la persona se encuentra parada encima de la isla, notará que hay miles de rocas y rugosidades. En los tres casos, el perímetro de la isla será completamente diferente. Se puede hablar de muchos otros ejemplos como podría ser el cerebro humano, los rayos o los ríos vistos desde un satélite, sin embargo, ahora se mostrarán algunos ejemplos dentro de la música.

Música y fractales

Existen diversos ejemplos de estructuras autosimilares en la música. El mejor ejemplo de esto es el blues de 12 compases. El blues está hecho con patrones de 3x4 a diferentes escalas y a lo largo de diferentes ejes. Por ejemplo, el ritmo "shuffle" normalmente divide el compás de 4/4 en tresillos de corcheas, a su vez, la forma estándar de la canción de blues es de tres grupos de cuatro compases cada uno, es decir, el blues tiene una estructura autosimilar (tres contra cuatro).

La música académica o de concierto también puede ser analizada bajo la lógica de la autosimilitud. Kenneth Hsu, geólogo e investigador de la universidad de Zurich, y su hijo Andrew Hsu (quién es músico) se han dedicado a analizar la música de Bach, Mozart y el Folklor Sueco desde la perspectiva de las matemáticas. Kenneth y Andrew han encontrado una lógica fractal en el uso de intervalos y escalas en diversas obras.[7] La música de Johann Sebastian Bach es, sin duda, la mejor para analizar con el uso de fractales, esto debido a la habilidad de Bach para generar transformaciones musicales

[7] Roger Lewin (1991), *La estructura fractal de la música,* Revista Issue 1767, publicado el 4 de mayo del año 1991, última fecha de consulta: 11 de julio de 2022: https://www.newscientist.com/article/mg13017674-100-science-the-fractal-structure-of-music/

derivadas matemáticamente. Es muy común encontrar una jerarquía intrínseca en sus obras, que van desde intervalos, frases, hasta secciones completas. Se puede realizar, por ejemplo, un pequeño análisis del Aire en su Suite Francesa No. 2 (Figura C-1):[8]

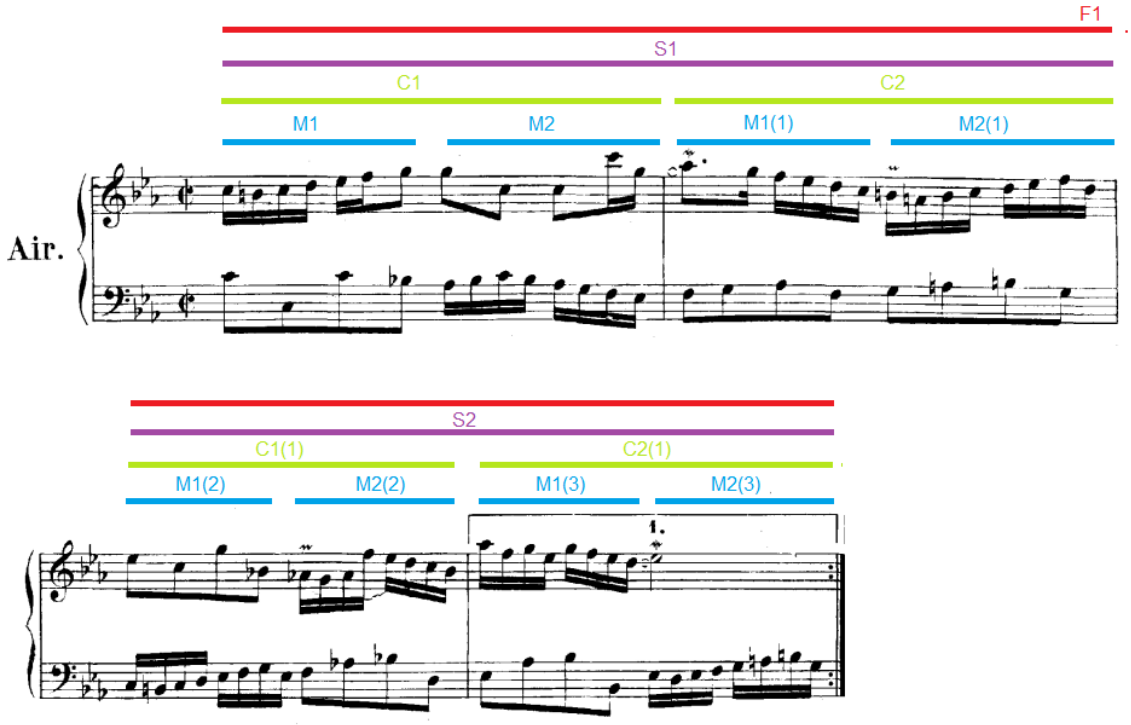


Figura C-1.

Como se puede observar en la imagen, toda la estructura de esta primera frase deriva de la estructura del primer compás. El primer compás está construido por dos motivos diferentes, luego, la primera semifrase está construida por dos compases distintos, finalmente, la primera frase se construye con base en dos semifrases diferentes. Se puede observar que la estructura de esta primera frase es perfectamente autosimilar (Figura C-2). De hecho, un lector atento habrá notado que el análisis de esta primera frase se podría representar con un Conjunto de Cantor (Revisar de nuevo la Figura A-3):

[8] Audio 1. Johann Sebastian Bach - Suite Francesa No. 2 “Aire”. Las Suites francesas, BWV 812–817 son un grupo de seis suites para clave escritas por el compositor alemán Johann Sebastian Bach entre 1722 y 1725. Última fecha de consulta 5 de septiembre del 2022: https://www.youtube.com/watch?v=q8wyG4gRwjg&ab_channel=PaulBarton

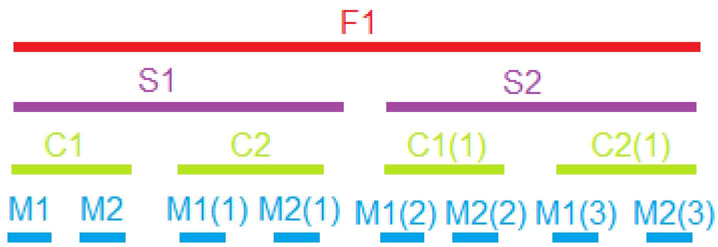


Figura C-2.

Como ya se mencionó, el Conjunto de Cantor es un ejemplo de figura perfectamente autosimilar. Este tipo de estructura se puede encontrar en cientos de obras y canciones de la música popular.

Las fractales se pueden aplicar en el análisis de obras canónicas que, intuitivamente o intencionalmente, están organizadas con base en la autosimilitud. Este tipo de análisis es aplicable a la música de cualquier género. El siguiente ejemplo es una sección de un tema del álbum de John Coltrane *A Love supreme*,[9] en específico, de la segunda parte llamada *Resolution* (Figura C-3). Se puede observar que el intérprete, en este caso John Coltrane, está siguiendo una lógica fractal, ya que la estructura del tema es autosimilar y después de esta sección los motivos usados por el intérprete cambian radicalmente. Cada uno de los motivos usados en la frase 2 y 3 provienen de la frase 1. Como cada frase está compuesta por 3 motivos, la sección completa está compuesta por 3 frases, generando una estructura perfectamente autosimilar:

[9] Audio 2. John Coltrane - Resolution. A Love Supreme es un álbum de jazz grabado por el cuarteto de John Coltrane el 9 de diciembre de 1964 en el estudio de Rudy Van Gelder en Englewood Cliffs, Nueva Jersey. Link a la grabación: https://www.youtube.com/watch?v=ll3CMgiUPuU&ab_channel=Jazzaddict98

Transcripción del tema *Resolution* en *A Love Supreme*, Figura C-3.[10]

Uno de los primeros compositores del siglo XX en sacar provecho del recurso de la micro y macro composición a través de estructuras autosimilares fue el compositor estadounidense John Cage, quien acuñó el término “Fractal Würfelspiel” en honor al juego de dados (Würfelspiel) de Mozart. John Cage utilizó este recurso para generar estructuras autosimilares en su sexteto de percusiones. La obra puede entenderse de la siguiente manera: La pieza comienza con dieciséis compases divididos en cinco frases de diferente longitud, la primera frase contiene cuatro compases; la segunda, tres; la tercera, dos; la cuarta, tres; y la quinta, cuatro (4, 3, 2, 3, 4). Después, la primera sección tendría una longitud de cuatro de estas microestructuras de dieciséis compases cada una, dado que 4 es el primer número de la microestructura, derivando así la macroestructura de la

[10] Transcripción realizada por JOWCOL MUSIC, última fecha de consulta 30 de abril del 2022: https://www.sheetmusicdirect.com/es-ES/se/ID_No/434852/Product.aspx

microestructura y generando de ésta una estructura autosimilar. La siguiente sección tendría tres de estas microestructuras y la siguiente sección, dos. Después, vendría otra sección compuesta de tres microestructuras y finalmente se terminaría con una sección compuesta de cuatro microestructuras. La obra completa quedaría de la siguiente manera:

(4, 3, 2, 3, 4) (4, 3, 2, 3, 4) (4, 3, 2, 3, 4) (4, 3, 2, 3, 4) = Primera sección. (4 microestructuras)
(4, 3, 2, 3, 4) (4, 3, 2, 3, 4) (4, 3, 2, 3, 4) = Segunda sección. (3 microestructuras)
(4, 3, 2, 3, 4) (4, 3, 2, 3, 4) = Tercera sección. (2 microestructuras)
(4, 3, 2, 3, 4) (4, 3, 2, 3, 4) (4, 3, 2, 3, 4) = Cuarta sección. (3 microestructuras)
(4, 3, 2, 3, 4) (4, 3, 2, 3, 4) (4, 3, 2, 3, 4) (4, 3, 2, 3, 4) = Quinta sección. (4 microestructuras)

Las fractales no se limitan al análisis de melodías o canciones populares, ni mucho menos se puede aplicar solamente a la composición en música de concierto, hay una aplicación directa para la ejecución de piezas de carácter improvisatorio, como es el caso de las improvisaciones en el jazz. Una manera de usar las fractales en la música popular es generando una estructura autosimilar para la sección de solos en un jam, obviamente con previo acuerdo de los intérpretes. En el blues de 12 compases, por ejemplo, se puede tener una estructura de solos improvisados donde los primeros 4 compases sólo se pueda improvisar usando 3 notas, en los siguientes 4 compases solamente usando 2 notas y en los últimos 4 compases usando de nuevo 3 notas. A partir de esta microestructura se puede generar la macroestructura de los solos. Así, un solista podría tocar 3 vueltas de solo, un segundo solista 2 vueltas de solo y un tercer solista 3 vueltas de solo:

3, 2, 3 / 3, 2, 3 / 3, 2, 3 / = 3 vueltas
3, 2, 3 / 3, 2, 3 / = 2 vueltas
3, 2, 3 / 3, 2, 3 / 3, 2, 3 / = 3 vueltas

Esto significa que un solista, que podría ser cualquier instrumento, (por ejemplo, una trompeta) haría solos utilizando alguna escala (por poner un ejemplo: la escala pentatónica) en la primera sección con 3 notas, en la siguiente, con 2, y en la última sección, con 3:

3, 2, 3 / 3, 2, 3 / 3, 2, 3 / = 3 vueltas (3 vueltas porque el primer número de la microestructura es 3)

Este primer solista tocaría 3 vueltas de solo (con base en la geometría fractal, el 3 es el primer número de la serie). Después, se podría tener a otro instrumento (por ejemplo, un contrabajo). Siguiendo exactamente la misma lógica, el contrabajo haría dos vueltas de solo, pero utilizando otra escala de su elección, por lo cual, la estructura de su solo quedaría de la siguiente manera:

3, 2, 3 / 3, 2, 3 / = 2 vueltas (2 que es el segundo número de la microestructura)

Finalmente, se podría tener a la batería improvisando. La batería no es un instrumento que se encuentre habilitado para hacer escalas, por lo que se podrían sustituir la cantidad de notas a usar por la cantidad de percusiones a usar. En la primera sección, el baterista solamente podría usar 3 accesorios de la batería para solear, sean estos tambores, platillos o algún otro tipo de percusión. Después, en la siguiente sección, el baterista solamente podría utilizar 2 elementos de su batería para poder solear. Por último, el baterista usaría 3 accesorios de su batería para solear en los últimos 4 compases. El baterista tendría que hacer 3 vueltas de solo para completar la estructura, aunque también podría alternar con otro solista cada cuatro compases como es habitual en el jazz (a esto se le conoce en el jazz como *Trading Fours*). Así, la estructura general de los solos quedaría de la siguiente forma:

3, 2, 3 / 3, 2, 3 / 3, 2, 3 / = 3 vueltas (Primer Solista)
3, 2, 3 / 3, 2, 3 / = 2 vueltas (Segundo solista)
3, 2, 3 / 3, 2, 3 / 3, 2, 3 / = 3 vueltas (Tercer solista)

Otro ejemplo podría ser el uso de estructuras autosimilares para la generación de ostinatos. Se entiende por ostinato a un motivo musical que se repite durante varios compases y que normalmente es relativamente corto. Para este ejemplo, se pueden tener dos ostinatos, al primer ostinato se le asigna la letra A y al segundo ostinato la letra B, estos dos ostinatos (A y B) pueden ser similares y cada uno con la duración de un compás. De esta forma, se pueden agrupar los ostinatos de la siguiente forma:

X := A, A, A, B, A, A, B, B, A, B, B, B

A esta primera estructura de ostinatos se le llamará X, aunque se le puede asignar cualquier otra letra.[11] Como se puede notar, hay dos problemas principales con el uso de las duraciones proporcionales. En primer lugar, existe la longitud potencialmente excesiva de la estructura final, después de dos iteraciones, la estructura tendría 144 barras de largo (12 secciones de 12 barras cada una), y después de tres iteraciones, 1728 barras de largo (12 × 12 × 12). En segundo lugar, después de tantas repeticiones, el patrón eventualmente se volvería predecible. Entonces, en lugar de crear 11 estructuras más usando estas mismas proporciones, se podría crear una estructura más, la cual, podría estar compuesta de otros dos ostinatos diferentes a los que se les puede llamar C y D respectivamente. A esta segunda estructura se le llamará Y:

Y:= C, C, C, D, C, C, D, D, C, D, D, D

De esta manera, se pueden organizar las estructuras X e Y de la misma manera en que se estructuran los ostinatos, generando una estructura autosimilar. Debido a que en matemáticas también se pueden usar letras del alfabeto griego, a esta macroestructura que contiene a X e Y se le puede llamar Alpha (**α**):

α:= X, X, X, Y, X, X, Y, ,Y, X, Y, Y, Y

Con este procedimiento se obtiene una estructura con un carácter más variado, menos homogéneo y con una estructura autosimilar.

Un proceso muy común para la creación de fractales es por medio de algoritmos. El uso de algoritmos es una forma muy interesante de generar materiales y estructuras musicales. Uno de los ejemplos más paradigmáticos en el uso de algoritmos para la creación musical es el de la compositora finlandesa Kaija Saariaho. Saariaho se ha caracterizado por el uso de técnicas de composición asistidas por ordenadores. Es muy común en la práctica de la compositora el uso de generadores fractales que trabajan con

[11] Es muy común en matemáticas asignar letras como X, Y, N, etc. para poder identificar más fácilmente un elemento o conjunto de elementos.

algoritmos, por ejemplo, para desarrollar masas muy interesantes de timbres y sonidos electrónicos, por ejemplo, en su obra "*Nymphéa, Jardín Secreto III*".[12] La obra, como explica María Dolores Romero Ortiz,[13] emplea distintas técnicas asistidas por ordenadores para diseñar materiales sonoros, que van desde timbres, ritmos, hasta la elección de los instrumentos a usar por cada movimiento. Saariaho ha mencionado que este tipo de técnicas compositivas con base en ordenadores le parecen más libres y orgánicas que las técnicas ya conocidas en el ámbito contemporáneo, como el serialismo y otro tipo de sistemas musicales del siglo XX.

En cuanto a los algoritmos, se puede tener un procedimiento simple que ayude a generar diferentes materiales musicales. Por ejemplo, un algoritmo que indique un proceso sencillo como "transportar el lick una segunda hacia arriba", representado en un diagrama de flujo (Figura D-1):

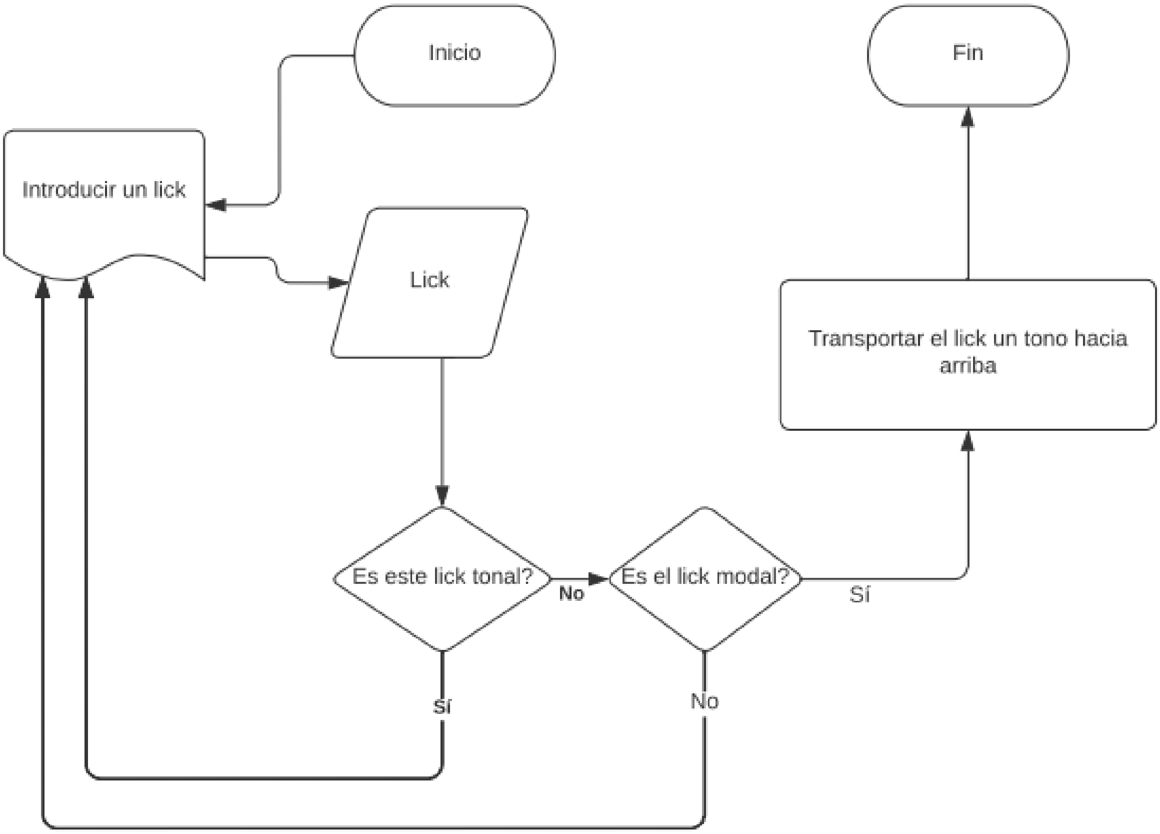


Figura D-1.

[12] Audio 3. Kaija Saariaho - *Nymphea Secret Garden III.* Obra para cuarteto de cuerdas y electrónica, compuesta en el año 1987. Link a la grabación: https://www.youtube.com/watch?v=RboRFnTY-nM&ab_channel=KronosQuartet-Topic

[13] María Dolores Romero Ortíz (2021), *El jardín japonés en Six Japanese Gardens de Kaija Sariaho,* revista Quodlibet, Numéro 75, vol. 1, pp. 272-340.

En este caso, el algoritmo está pidiendo un lick modal, el algoritmo no especifica si el lick debe ser estar en un modo en específico, por lo que el input podría ser el siguiente:

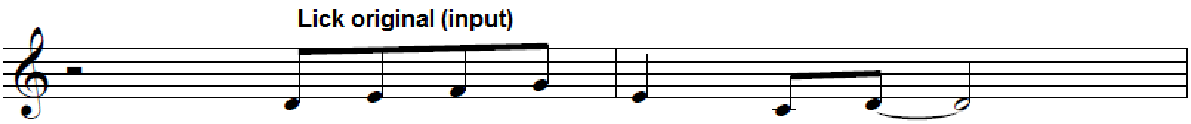


Figura D-2

Como sucede con los fractales, el proceso de aplicación de un algoritmo se puede repetir varias veces. Como se mencionó anteriormente, a este proceso se le conoce como iteración del algoritmo. Los outputs después de aplicar el algoritmo y aplicando dos iteraciones serían los siguientes (Figura D-3):[14]

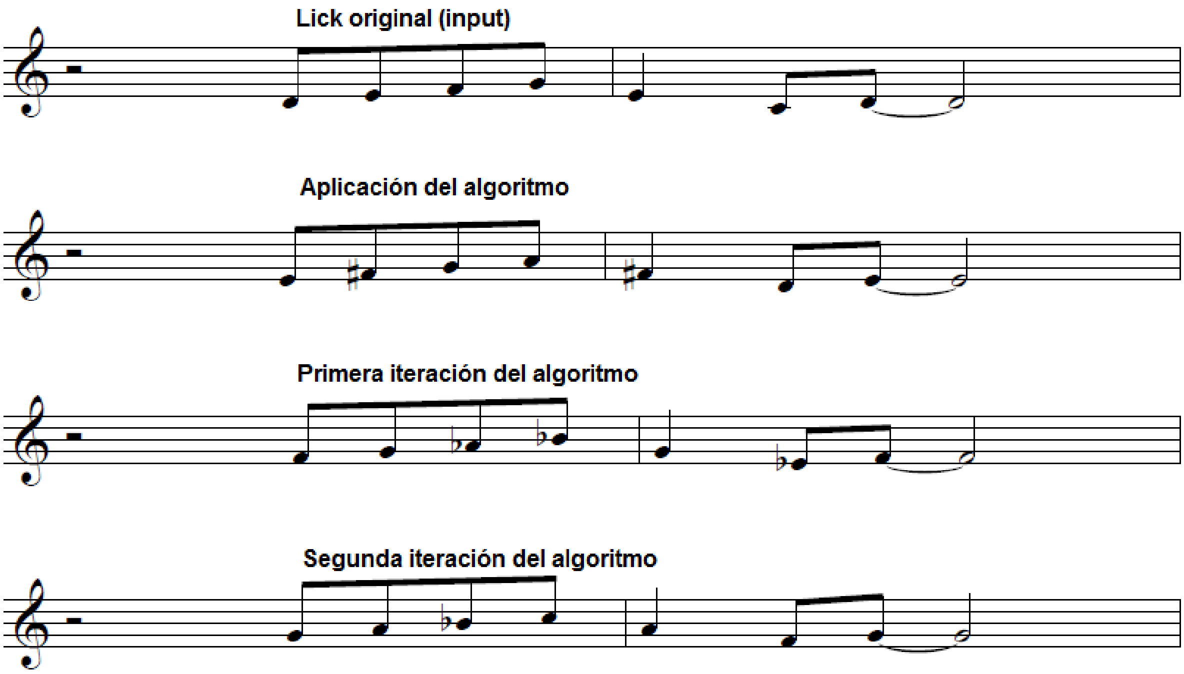


Figura D-3.

Para este ejemplo se utilizó un proceso muy simple como una transposición de segunda hacia arriba, pero se podrían usar procesos más complejos. Por ejemplo, se puede aplicar un proceso que convierta los valores rítmicos del lick al doble de duración o en

[14] Audio 4. Ejemplo de la transposición de un lick usando un algoritmo. Link al audio: https://www.youtube.com/watch?v=_rQCPIX1WFw&ab_channel=Adri%C3%A1nMercadoContreras

todo caso a la mitad de la duración por cada vez que se aplique el algoritmo. Se pueden aplicar técnicas propias del dodecafonismo como una inversión, retrógrado o retrógrado de la inversión. Se puede usar un algoritmo que transforme una escala de modo mayor a escala de tonos enteros (aunque al aplicar el algoritmo una segunda vez no se generaría un resultado diferente). También, podrían aplicarse permutaciones y técnicas de la combinatoria como las que se explicarán en los siguientes capítulos.

Teoría del caos y su relación con la música

Para concluir este capítulo, hay que explicar otro tema que está relacionado con la geometría fractal y que puede tener un uso dentro de la música, sobre todo porque esta teoría, además de tener una base matemática, tiene también una base filosófica: La Teoría del Caos. Desde una intuición pre-teórica, el lector podría imaginar que este concepto tiene su origen en el eterno conflicto entre el orden y el caos, dos elementos que aparentemente son irreconciliables, pero que al mismo tiempo se complementan. Sin embargo, a diferencia de lo que se entiende por caos de forma intuitiva, un sistema caótico es aquel que presenta una gran sensibilidad a las condiciones iniciales. Según el matemático Ian Stewart, en su libro *¿Juega Dios a los dados?*,[15] es al astrónomo Pierre Simon Laplace a quién se le suele atribuir la primera formulación del determinismo científico. El determinismo científico argumenta que si en un instante determinado se conocieran las posiciones y velocidades de todas las partículas en el universo, se podría calcular cómo se comportarán estas partículas en el futuro y al mismo tiempo saber cómo se comportaban en el pasado. Sin embargo, esta hipótesis tuvo que ser cambiada cuando Heisenberg presentó su Principio de Incertidumbre,[16] el cual, postulaba que no se podía saber al mismo tiempo y con precisión la posición y la velocidad de las partículas (aunque para Heisenberg sí que era posible predecir una combinación de posición y velocidad). Después, lo que quedaba de certidumbre desapareció cuando se tuvieron en cuenta los efectos de los agujeros negros: la pérdida de partículas e información dentro de los agujeros negros dio a entender que las partículas que salían eran fortuitas. Se pueden calcular las probabilidades pero no hacer ninguna predicción en firme. Por lo tanto, ahora

[15] Ian Stewart (1989), *¿Juega Dios a los Dados?* Nueva Jersey, Estados Unidos, Blackwell Publishing, ISBN: 978-0-631-23251-3.
[16] Si se desea saber más sobre el principio de incertidumbre, se puede consultar el siguiente artículo: https://www.mat.uc.cl/~rolando.rebolledo/Azar/Trabajos/Ferrer.pdf

se sabe que el universo no está determinado por las leyes de la ciencia, en contra de lo que creía Laplace. Hoy día, es sabido que la capacidad para predecir el futuro está severamente limitada por la complejidad de las ecuaciones, y por el hecho de que a menudo exhiben una propiedad denominada caos.

La teoría del caos ayuda a entender mejor cómo se comportan muchos sistemas naturales y reales, pero también puede aplicarse a sistemas ideales. Se entiende que un sistema es caótico cuando tiene las siguientes tres características:

1. Son sistemas deterministas: Dadas ciertas condiciones iniciales siempre se obtiene el mismo resultado. Por lo tanto, un sistema puramente aleatorio no es considerado caótico.
2. Son sistemas muy sensibles a las condiciones iniciales: Es decir, un cambio ligero en esas condiciones supone un cambio enorme, a largo plazo, en el comportamiento del sistema
3. Son sistemas que, modificando ligeramente las condiciones iniciales, alcanzan prácticamente cualquier estado válido dentro del sistema.

Uno de los ejemplos más conocidos es el llamado "Efecto Mariposa", desarrollado por el matemático Edward Lorenz.[17] En el año de 1961, Lorenz se encontraba desarrollando un modelo matemático que pudiera pronosticar distintos fenómenos meteorológicos. Para esto, Lorenz introducía en su modelo todas las variables posibles como dirección del viento, humedad, presión etc. A partir de esto, Lorenz observaba todos los posibles fenómenos meteorológicos que se podían producir. Sin embargo, cuando Lorenz introducía por segunda vez los datos para verificar los resultados, se daba cuenta que eran diferentes a los que había obtenido la primera vez, y que el segundo pronóstico del tiempo era distinto al primero. Al inicio, ambos pronósticos eran muy similares, sin embargo, conforme avanzaba el tiempo, ambos resultados eran cada vez más diferentes. La explicación a este fenómeno consiste en que el computador de Lorenz redondeaba los datos en cada prueba, por lo que se dio cuenta que existía una diferencia de decimales, aparentemente insignificante, entre cada prueba. Esta mínima diferencia en los decimales

[17] Carlos Serrano (2021), *¿Qué son la teoría del caos y el efecto mariposa? Y cómo nos ayudan a entender mejor el universo,* Artículo de opinión publicado el día 5 de diciembre, Revista BBC, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: bbc.com/mundo/noticias-59525600

provocaba, con el paso del tiempo, diferencias muy grandes entre cada pronóstico. Esto explicaría, por ejemplo, como la onda producida por el aleteo de una mariposa en Tokio podría provocar, con el paso del tiempo, un huracán en Texas (aunque esto es solamente una imagen mental para ejemplificar el tipo de consecuencias que generan pequeños cambios de las condiciones iniciales en un sistema caótico).

Todos los sistemas caóticos siguen una trayectoria hacia determinados puntos, a estos puntos se les conoce como atractores. En el ejemplo de Edward Lorenz, el modelo que él diseñó generaba un patrón que, por mera coincidencia, simulaba el dibujo de las alas de una mariposa (Figura D-4). Curiosamente, los atractores de un sistema forman figuras de carácter fractal.

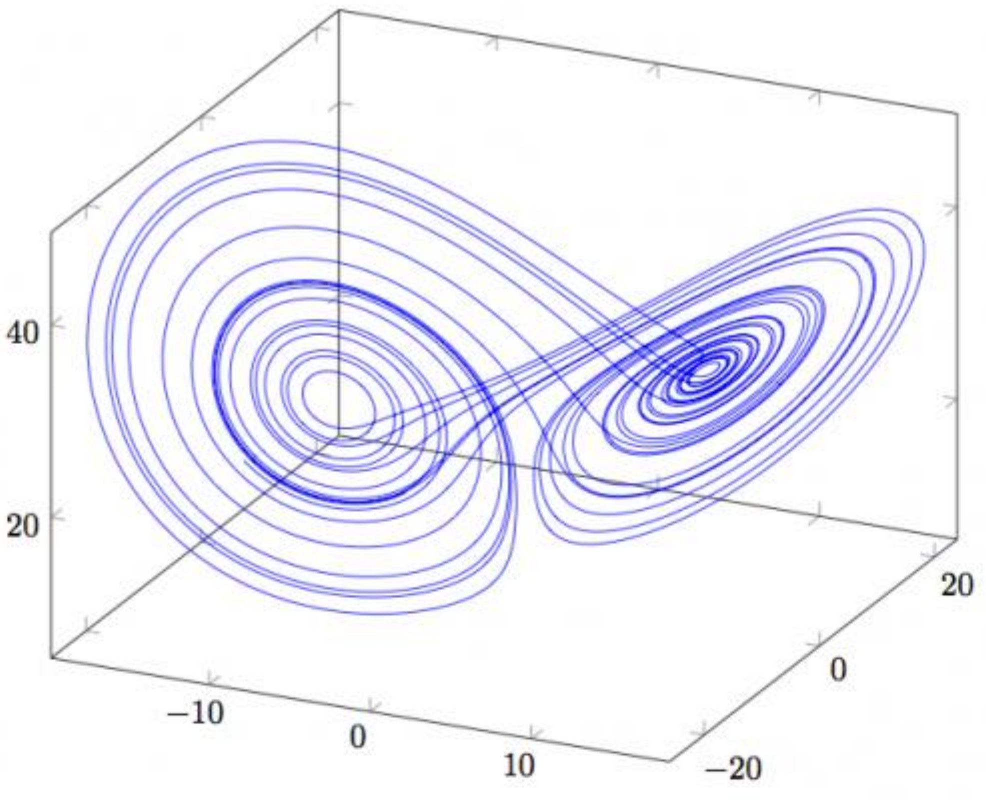


Figura D-4.

Existen numerosos compositores que han utilizado esta nueva teoría para generar técnicas de creación muy complejas. Como recién se mencionó, además de la base matemática que contiene esta teoría, también tiene una base filosófica. La teoría del caos entiende que el universo no sigue un modelo determinista, no es un reloj o una máquina que podamos entender a la perfección cómo se comportará en el futuro. El universo es caótico, no son los seres humanos los que crean la inestabilidad, ésta ya existe de por sí. En la música se puede encontrar este carácter caótico en diversas obras. En muchas ocasiones, se considera que una obra es buena cuanto menos predecible es. Un ejemplo de esto es el cuarteto de cuerdas de Ludwig Van Beethoven *La Gran Fuga*.[18] Este cuarteto es una de las obras más complejas de Beethoven, dado que rompe con diversas normas estéticas, armónicas y musicales. Pero lo que la hace más interesante es su carácter impredecible, por ejemplo: secciones de la obra en las que parece que la pieza va a terminar y no concluye o momentos en los que los oyentes no tienen idea de a dónde irá la obra o cuándo terminará. Por el contrario, una obra que es predecible, normalmente no suele llamar la atención de oyentes atentos (entendiendo que es una obra que busca tener una función intelectual y no una función recreativa). Son los contrastes y lo inesperado lo que genera un interés en las artes. Georg Friedrich Hegel creía que el barroco era el periodo de dominación de la música como género artístico principal,[19] esto con base en su construcción ontológica ascendente-teleológica que va desde el espíritu subjetivo, pasando por el espíritu objetivo para, finalmente, llegar al espíritu absoluto. Y es que muchos pensadores, como fue el caso de Hegel, consideraron que el barroco musical llevó la disonancia, la armonía y el contrapunto a niveles nunca antes vistos. Muchos compositores barrocos, como el caso de Buxtehude y Bach, gustaban de los fuertes contrastes sonoros, ya sea entre coros, entre familias de instrumentos o entre solista y orquesta (a diferencia del renacimiento musical donde las texturas y timbres tenían un carácter mucho más uniforme). Desde entonces el contraste se ha convertido en uno de los conceptos básicos dentro de la composición musical.

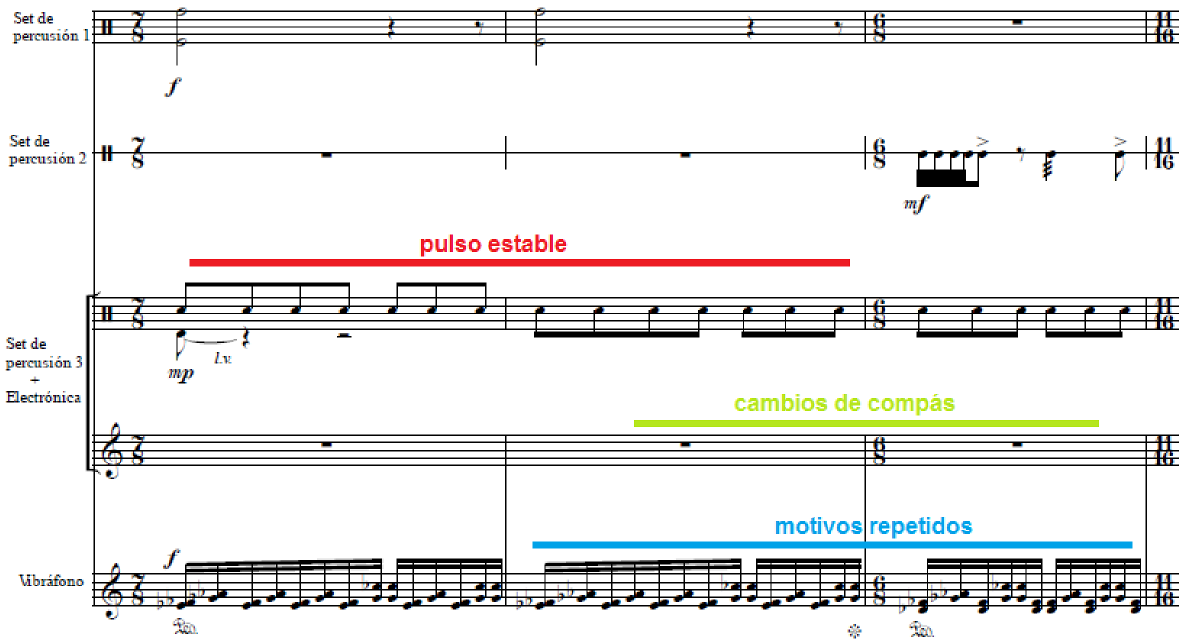
La teoría del caos como teoría física y filosófica puede tener una aplicación interesante en la música. El siguiente ejemplo es un cuarteto de percusiones compuesto por el autor de la presente tesis, construida con base en la filosofía propia de la teoría del caos.[20] La obra fue compuesta para cuarteto de percusiones y electrónica. En general, la obra tiene 4 secciones. La primera es una sección relativamente ordenada, dado que, a

[18] Audio 5. La Grosse Fuge (en español: Gran Fuga) es un único movimiento para cuarteto de cuerdas compuesto por Ludwig van Beethoven entre 1825 y 1826 Interpretación de la gran fuga por el cuarteto de cuerdas Alban Berg: https://www.youtube.com/watch?v=13ygvpIg-S0&ab_channel=NataliaKaratjeva

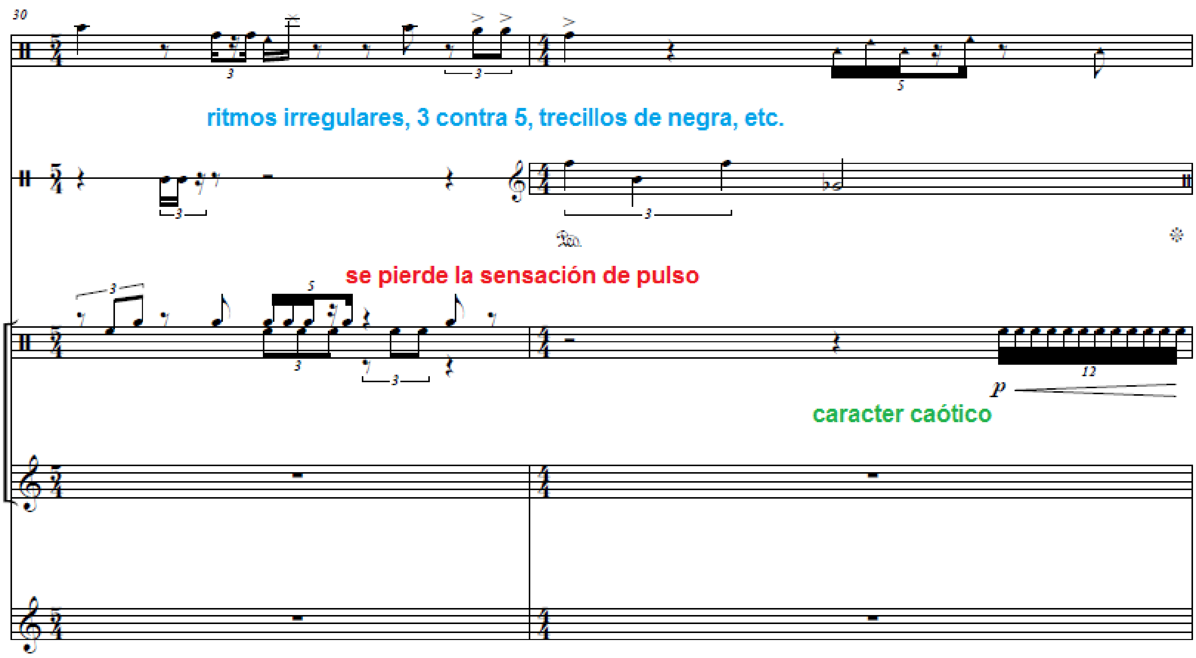
[19] Georg Wilhelm Friedrich Hegel [1834] (1989), *Lecciones sobre la estética,* Barcelona, España, traducción al español de Raúl Gabas.

[20] Audio 6. Adrián Mercado - Una teoría del caos. Obra para cuarteto de percusiones y electrónica. Link a la grabación original: https://www.youtube.com/watch?v=aspeBJxduJc

pesar de que se tiene un pulso y ciertos motivos que se van repitiendo, está compuesta de diversos cambios de compases irregulares. La segunda sección, por su parte, es completamente aleatoria. En esta parte de la obra se pierde el pulso y todos los motivos ejecutados por los intérpretes tienen un carácter impredecible (sin embargo, el oyente podrá notar que aún se preservan algunos elementos de la primera sección). El concepto central de la obra es que poco a poco se comienza a transformar en un sistema completamente diferente al inicial y después, conforme sigue avanzando la pieza, regresa a su estado original. Tanto la sección tres como la sección cuatro siguen la lógica de las secciones primera y segunda respectivamente, pero con materiales mucho más intensos. Esta obra es el reflejo de la teoría del caos hecha música. La obra se construye desde materiales muy ordenados para poco a poco desembocar en materiales completamente aleatorios y desordenados. La obra constantemente se transforma, alimentando así el poder imaginativo del oyente y pasando de estructuras ordenadas a estructuras desordenadas y viceversa (Figura D-5 y D-6):



Compases 1-3 de la obra *Una teoría del caos*, materiales ordenados, Figura D-5.



Compases 30 y 31 de la obra *Una teoría del caos*, materiales más desordenados que los del inicio, Figura D-6.

Este mismo concepto, como sucede con las estructuras autosimilares, es aplicable a una interpretación en vivo al momento de interpretar una pieza de jazz. Podría pensarse, por ejemplo, en una vuelta de solos en la que los intérpretes respeten la estructura armónica del standard, por decirlo rápidamente, una vuelta de solos tradicional sin ninguna novedad. Después, la siguiente vuelta podría tener dos compases en los que se respete la armonía del estándar y dos compases con un carácter mucho más libre del tipo “Free jazz”.[21] Luego, la tercera vuelta podría ser completamente de Free jazz, tanto para el solista como los acompañantes, y mientras más desordenado, mejor. Como se mencionó en párrafos anteriores, los sistemas caóticos generan patrones a través de lo que se conoce en teoría del caos como “atractores”. Para este ejemplo, se pueden usar algunos acordes que funcionen como atractores o puntos pivote para que el solista y los acompañantes no se pierdan. Pensando en un standard de una duración de 32 compases, los intérpretes podrían acordar en, por ejemplo, cada 8 compases llegar al acorde original

[21] El free jazz es uno de los subgéneros propios del jazz que le permite a los intérpretes una mayor libertad de expresión y de improvisación. Definición tomada de la página *The Jazz Piano Site,* última fecha de consulta 09 de Agosto de 2022: https://www.thejazzpianosite.com/jazz-piano-lessons/modern-jazz-theory/free-jazz/
Audio 7. Ejemplos de free jazz:
Ejemplo 1, Ornette Coleman – Free Jazz:
https://www.youtube.com/watch?v=8bRTFr0ytA8&ab_channel=MUSIC%3F
Ejemplo 2, :

del tiempo uno y después de eso regresar al aleatorismo. De esta forma, los intérpretes tendrían varios puntos de llegada en esta vuelta de solo y sería más difícil perderse. Este mismo principio puede aplicarse también a parámetros como ritmo o dinámicas, pero respetando la cantidad de compases del standard, para poder regresar poco a poco a la estructura prístina. Después, se podría tener una vuelta igual a la segunda, para que en la última vuelta del solo se regrese a la estructura del standard original. Si se quiere llevar esto a otro nivel, se puede aplicar también el concepto de estructura autosimilar combinado con el concepto de caos.

CAPÍTULO 2. Combinatoria, funciones y teoría de gráficas

Conceptos básicos de combinatoria y teoría de conjuntos

Se pueden encontrar diferentes vestigios sobre combinatoria en algunas civilizaciones antiguas. El más conocido es el cuadrado mágico (Figura E-1), desarrollado por matemáticos de origen chino alrededor del siglo VII a.C. y también por matemáticos árabes del siglo VII d.C.[22] Un cuadrado mágico es una tabla compuesta por números enteros, de forma tal que la suma de los números por columnas, filas y diagonales principales sea siempre la misma, esa suma se denomina la constante mágica. La introducción de los cuadrados mágicos en occidente se produjo con Emanuel Moschopoulos en el siglo XIV, quien dio algunos métodos para su construcción. A partir de entonces, estas construcciones atrajeron la atención de grandes matemáticos como Fermat, Pascal, Leibniz y Euler. Es justo con Blaise Pascal y Pierre Fermat que surge la combinatoria con su teoría de juegos de azar, y estos trabajos, a su vez, formaron los fundamentos de la teoría de la probabilidad, ya que contenían los principios para determinar el número de combinaciones de elementos de un conjunto. De esta forma, se estableció la tradicional conexión entre combinatoria y probabilidad. Es Leibniz quien introdujo el término combinatoria en su obra *Disertación acerca del Arte Combinatorio,*[23] la cual, dio la primera construcción sistemática y perfeccionó el simbolismo combinatorio. Bernoulli publicó en 1703 su obra *Ars Conjectandi,* en la que define a la combinatoria de la siguiente manera:[24] "La combinatoria nos enseña a enumerar todos los modos posibles en que un conjunto de objetos puede mezclarse y combinarse de manera que estemos seguros que no hemos omitido ninguna de las posibles combinaciones."

---

[22] Pedro Alegría (2009), *La magia de los cuadrados mágicos,* Revista Sigma, No. 34, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://www.ehu.eus/~mtpalezp/descargas/magiacuadrada.pdf

[23] Gottfried Wilhelm Leibniz (1992) [1666], *"Disertación acerca del arte combinatorio",* Santiago de Chile: Universidad Católica de Chile.

[24] Jakob Bernoulli (2005) [1713], *"The Art of Conjecturing, together with Letter to a Friend on Sets in Court Tennis"*, Baltimore, Estados Unidos, John Hopkins Press.

En este cuadrado mágico la constante mágica es 15. En general, si nuestro cuadrado mágico tuviera “n” filas y “n” columnas, esa constante sería n (n+1) /2. Figura E-1.

Placa de hierro con un cuadrado mágico de orden 6 de la dinastía Yuan (1271–1368). Figura E-2.

Por lo tanto, a partir de la definición que ofrece Bernoulli, se puede definir a la combinatoria como el área de las matemáticas que se ocupa de estudiar los procedimientos y las estrategias para contar todas las posibles agrupaciones y combinaciones de los elementos de un determinado conjunto. De forma intuitiva, se suele entender que un conjunto es toda colección de elementos. Por ejemplo, se puede hablar de un conjunto de personas, de instrumentos musicales, de letras, etc. Una constelación, por ejemplo, es un conjunto de estrellas. Un mes, por ejemplo, es un conjunto de días. Existen varias formas de representar matemáticamente a los conjuntos, la más común es a través de llaves. La representación del conjunto de los números naturales (es decir, todos los números positivos excepto el cero) es la siguiente:

N = {1, 2, 3, 4, 5, … }

Cuando un elemento pertenece a un conjunto se utiliza el símbolo ∈, que se conoce en matemáticas como símbolo de pertenencia. Por ejemplo, si 1 es un elemento del conjunto N, se representa con 1 ∈ N y significa que 1 pertenece a N.

Las tres formas básicas de agrupar o combinar un conjunto son: ordenaciones, permutaciones y combinaciones. Este capítulo se centrará únicamente en las permutaciones. Se entiende como permutación a un cambio o variación del orden o la posición de los elementos de un conjunto. Julio Estrada y Jorge Gil en su texto *Música y Teoría de Grupos Finitos,*[25] utilizan el conjunto de los colores primarios (que para efectos prácticos se le asignará la letra C) para explicar de la forma más sencilla lo que es una permutación:

C = {rojo, amarillo, azul}

A este conjunto se le puede aplicar una permutación que, por ejemplo, intercambie el lugar del color rojo por el del color amarillo:

C = {amarillo, rojo, azul}

Esta permutación se puede escribir de tal forma que en la fila superior se encuentre el conjunto original y en la fila inferior se encuentre el conjunto después de la permutación:

$$\begin{pmatrix} rojo & amarillo & azul \\ amarillo & rojo & azul \end{pmatrix}$$

Después, se le pueden asignar números a cada uno de los elementos del conjunto, este procedimiento no es obligatorio, pero ayudará a entender mejor el uso de la combinatoria en la música. Se puede asignar el número 1 al color rojo, el número 2 al color amarillo y el número 3 al color azul, por lo que la permutación anterior quedaría de la siguiente forma:

---

[25] Julio Estrada, Jorge Gil (1984) *Música y Teoría de Grupos Finitos*, México: Universidad Nacional Autónoma de México, pp. 7-8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La permutación anterior también se puede escribir de una tercera forma, la cual, es la más común dentro del área de la combinatoria:

(1 2) (3) (4)

Esta forma de escribir una permutación quiere decir que el 1 toma la posición del 2 y a su vez el 2 toma la posición del 1. Por su parte, el número 3 y el número 4 se mantienen fijos. A las permutaciones también se les pueden asignar letras. Se pueden usar, por ejemplo, las letras del alfabeto griego. En este caso se usará la letra alpha:

$$\alpha = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \ldots\ldots & \alpha(n) \end{array}$$

En esta matriz se colocan los elementos del conjunto en la primera fila y en la fila de abajo sus imágenes transformadas por la permutación alpha (α):

$$\alpha = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

En este caso, alfa sería la permutación que envía el 1 al 3, el 3 lo envía al 1 y el 2 lo deja fijo. Entonces, los números que no quedan fijos, en este caso el 1 y el 3, se dice que son movidos por la permutación alfa. El siguiente ejemplo es una permutación beta:

$$\beta = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}$$

En este caso se tiene una permutación beta que envía el 1 al 2, el 2 al 3 y el 3 lo envía al 1, en este caso, ningún elemento se queda fijo. Para que el concepto de permutación quede claro, se ofrecerá un último ejemplo de una permutación delta:

$$\delta = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{matrix}$$

Como recién se mencionó, la forma más común para escribir una permutación es la siguiente:

$\delta = (1\ 2\ 3)\ (4)\ (5)$

En la operación delta, el 1 va al 2, el 2 va al 3 y el 3 va al 1 (el último elemento del paréntesis se transforma en el primero), pero 4 y 5 se quedan fijos. 4 y 5 son ejemplos de "uno" ciclos o ciclos de longitud uno, mientras que 1, 2 y 3 es un ciclo de longitud tres o un "tres" ciclo. Se dice que son ciclos de longitud uno porque sólo tienen un elemento el cual no se mueve, en cambio, cuando se tiene un ciclo de longitud tres, implica que existen tres elementos que se moverán.

Para conocer la cantidad de permutaciones que tiene un conjunto se debe contar la cantidad de elementos que tiene dicho conjunto y obtener el factorial de ese número. El factorial de un número es el resultado de la multiplicación de ese número por todos los números naturales o positivos que le anteceden excluyendo al cero, esta función se representa de la siguiente forma: $n!$ (siendo n un número cualquiera). Si se quisiera conocer cuál es el factorial de 4 se debe multiplicar a 4 por todos los números que le anteceden a excepción del cero, estos números serían el 1, el 2 y el 3, por lo que la operación quedaría de la siguiente forma: 1x2x3x4 = 24. Por ejemplo, suponiendo que se tienen 5 personas (persona A, persona B, persona C, persona D y persona E) y 5 sillas con diferente posición (silla 1, silla 2, silla 3, silla 4 y silla 5), para conocer la cantidad de distintas formas en las que se pueden acomodar a esas cinco personas en esos cinco lugares es necesario encontrar el factorial de 5. Para la silla 1 se tienen a cinco personas que podrían sentarse en ésta, es decir, se tienen cinco escenarios diferentes en los que hay una persona sentada en el lugar número 1. Suponiendo que ya se ocupó la primera silla, se tienen cuatro personas que podrían sentarse en la silla número 2, ergo, la cantidad de escenarios en los que se tienen a dos personas sentadas es 5x4 =20 escenarios. Después de haber ocupado esos dos lugares, aún se tienen tres personas que todavía no tienen lugar, por lo que se tienen tres escenarios diferentes para sentar a esas tres personas en la silla número 3, las opciones ahora son 5x4x3 = 60. Siguiendo la misma lógica, ahora sólo quedan dos personas para el lugar 4, ergo, dos posibles escenarios para sentar a dos personas diferentes en la silla número 2. Finalmente, queda una persona que puede sentarse en el lugar 5. Por lo tanto, el total de escenarios o casos que se tienen es 5x4x3x2x1 = 120, o sea, 5 factorial. Al conjunto inicial de elementos, esto es, antes de realizar cualquier permutación, se le conoce como identidad.

Es importante mencionar algunos conceptos de la teoría de conjuntos que serán claves para entender las aplicaciones que tiene la combinatoria en la música. Se le dice "cardinal de un conjunto X" al total de elementos diferentes, sin repetir, que tiene un conjunto. Se puede representar por card(X) o por |X|. Para contar los elementos de dos o más conjuntos, se debe saber si tienen o no tienen elementos comunes, esto es lo que se conoce como el principio de adición. En caso de no tener elementos comunes, simplemente se procede a sumar todos los elementos de los dos conjuntos. La siguiente ecuación puede traducirse de esta manera: "Si la intersección (∩) entre X e Y es igual al conjunto vacío (Ø), esto es, si entre X e Y no existen elementos comunes o repetidos, esto implica (⇒) que la unión (∪) de los conjuntos X e Y es igual a la suma de los elementos de X más los elementos de Y":

$$X \cap Y = \emptyset \Rightarrow |X \cup Y| = |X| + |Y|$$

En caso de que existan elementos comunes, se suma el número de elementos de cada conjunto y se resta el número de elementos que se repiten, es decir, la intersección entre ambos conjuntos. La siguiente ecuación se puede traducir de esta forma: "Si la intersección (∩) entre el conjunto X y el conjunto Y es diferente (≠) al conjunto vacío (Ø), esto es, existen elementos comunes o repetidos entre X e Y, esto implica (⇒) que la unión (∪) entre X e Y es igual a la suma de los elementos de X más los elementos de Y pero restando los elementos que ambos conjuntos tienen en común, o sea, su intersección:

$$X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow |X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

Combinatoria, teoría de conjuntos y música

Diferentes autores han tomado características de la combinatoria para la creación y la composición musical. Antes de mencionar a algunos compositores del siglo XX, es importante decir que al realizar el análisis de obras de diferentes periodos musicales, como podrían ser el medievo, barroco, clásico, etc. se pueden encontrar algunos elementos propios de la combinatoria. Tal es el caso de las fugas de Bach o las sonatas de Beethoven, en las cuales, se pueden encontrar técnicas similares a las usadas en el siglo XX para variar las alturas o incluso fragmentos completos de su música. Durante el siglo XX se generaron algunas propuestas interesantes para la aplicación de la combinatoria y la teoría de conjuntos en la composición musical. Algunos de los pioneros de esta práctica fueron los compositores Milton Babbitt, Allen Forte y Robert Morris.

La combinatoria no sólo puede aplicarse en la música académica o de concierto, también puede tener un uso directo en la música popular y sobre todo puede usarse como recurso improvisatorio. Uno de los casos más conocidos es el del compositor Jerry Bergonzi en su libro *Inside Improvisation.*[26] Bergonzi propone un sistema de improvisación de tetracordes con el uso de permutaciones. La razón por la que el autor utiliza tetracordes es porque el factorial de 4 es igual a 24, es decir, existen 24 diferentes formas de variar esas cuatro notas. Uno de los ejemplos que muestra Bergonzi es con el uso de la escala pentatónica. El autor explica que para la escala pentatónica se pueden usar las notas Do, Re, Mi y Sol, sin usar la nota La, dado que con cinco notas las diferentes posibilidades de combinación serían 120. Con esto se generan 24 grupos de permutaciones:

{C,D,E,G}	**{C,D,G,E}**	**{C,E,D,G}**	**{C,E,G,D}**	**{C,G,D,E}**	**{C,G,E,D}**
{D,C,E,G}	**{D,C,G,E}**	**{D,E,C,G}**	**{D,E,G,C}**	**{D,G,C,E}**	**{D,G,E,C}**
{E,C,D,G}	{E,C,G,D}	{E,D,C,G}	{E,D,G,C}	{E,G,C,D}	{E,G,D,C}
{G,C,D,E}	{G,C,E,D}	{G,D,C,E}	{G,D,E,C}	{G,E,C,D}	{G,E,D,C}

Las primeras dos filas de agrupaciones (en negritas) quedarían de la siguiente forma:

Primeras dos filas de permutaciones de la escala pentatónica, el resto de permutaciones y ejemplos se encuentran en el libro *Inside Improvisation*, Figura E-3.

Siguiendo estos mismos principios, se procede a sugerir algunos ejemplos. Para este primer ejemplo, el standard usado será *Autumn Leaves*.[27] Autumn Leaves es una canción del compositor Joseph Kosma, con letra original de Jaques Prévert y traducción al inglés de Johnny Mercer. Se puede comenzar con algo muy simple como permutar el tema de esta pieza (Imagen E-4):

Primero siete compases del tema "Autumn Leaves", Figura E-4.

Esta primera sección A se puede dividir, por ejemplo, en 4 conjuntos melódicos. El primer conjunto *a* estaría conformado por las notas Mi, Fa#, Sol y Do. El conjunto *b* tendría a las notas Re, Mi Fa# y Si. Después, el conjunto, *c* estaría conformado por las notas Do, Re, Mi, La y, finalmente, el conjunto *d* tendría a las notas Si, Do#, Re# y Sol. Cada uno de estos conjuntos tiene un total de 4 elementos diferentes, por lo que los cuatro conjuntos coinciden en que su card(X) = 4. Aplicando la fórmula: $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$, se puede conocer la cantidad de elementos diferentes que se tiene entre los cuatro

[26] Jerry Bergonzi (1994), *Inside Improvisation,* Mainz: Advance Music, Vol. 1.
[27] Ted Gioia (2012), *The Jazz Standards,* Inglaterra: Oxford University Press, página 24.
Audio 8. Autumn Leaves: https://www.youtube.com/watch?v=u6GN6y1erf0

conjuntos (en este caso particular no se consideró a las notas que se repiten en diferentes octavas como notas o elementos distintos, sin embargo, si el intérprete o compositor desea tomar a este tipo de notas como elementos diferentes es perfectamente posible):[28]

$a \cup b$ = {Mi, Fa#, Sol, Do, Re, Si}
$(a \cup b) \cup c$ = {Mi, Fa#, Sol, Do, Re, Si, La}
$(a \cup b \cup c) \cup d$ = {Mi, Fa#, Sol, Do, Re, Si, La, Do#, Re#}

Aplicando análisis combinatorio, se sabe que se tienen 9 notas diferentes, las cuales se pueden combinar de distintas maneras. Si se quisiera permutar el conjunto ($a \cup b \cup c \cup d$) se sabe que existen 362880 formas de hacerlo ($9! = 362880$)

Otra posibilidad podría ser permutar cada uno de los conjuntos por separado. Como mencionan los autores Octavio Agustín-Aquino, Mariana Montiel, Janine du Plessis y Emilio Lluis-Puebla en su libro *Una introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música*,[29] se pueden asignar números a cada uno de los elementos del conjunto para que sea más fácil realizar la operación. Dado que todos los conjuntos están conformados por 4 notas, la cantidad de escenarios posibles para cada conjunto es de 24 ($4! = 24$). El conjunto a consiste en las notas Mi, Fa#, Sol y Do en ese orden, a cada uno de estos elementos se le puede asignar un número:

Mi: 1
Fa#: 2
Sol: 3
Do: 4

A este primer conjunto se le puede aplicar una permutación α (alpha) que mande el elemento 2 al 4, el 4 al 2 y los elementos 1 y 3 se queden fijos:

[28] Si se desea tomar a las notas repetidas como elementos distintos, se recomienda asignar números a cada una de las notas como se hizo con el ejemplo de los colores primarios.
[29] Emilio Lluis Puebla, Janine du Plessis, Octavio Agustín-Aquino y Mariana Montiel (2009), *Una Introducción a la Teoría de Grupos con Aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música*, Sociedad Matemática Mexicana. Publicaciones Electrónicas, Serie Textos, vol. 10.

α: (1) (3) (2 4)

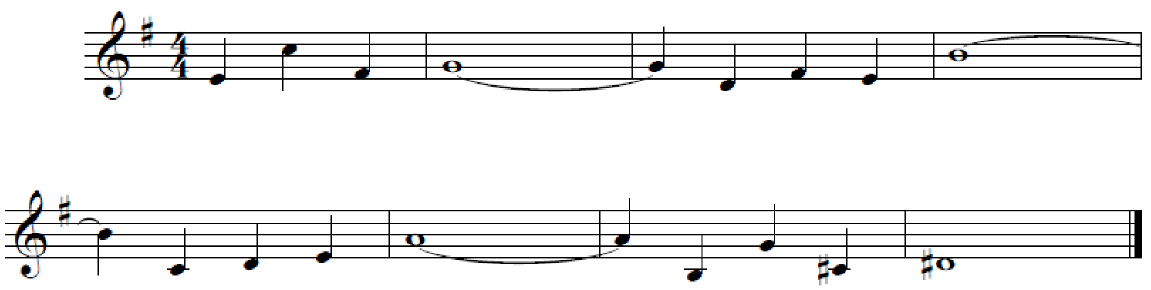
Después, al conjunto *b* se le asignan los mismos números 1, 2, 3, 4 para las notas Re, Mi, Fa# y Si respectivamente, se le aplica una permutación β (beta) que mande el 2 al 3, el 3 al 2, mientras que 1 y 4 se mantienen fijos:

β: (1) (2 3) (4)

El conjunto *c*, por ejemplo, podría quedarse fijo para mantener un motivo que recuerde al tema. De esta forma, al conjunto *d* se le asignan los números 1, 2, 3 y 4 a las notas Si, Do#, Re#, Sol respectivamente. Aplicando una permutación γ (gamma) que mande el 2 al 4, el 3 al 2 y el 4 al 3, el conjunto *d* sería permutado la siguiente forma:

γ: (1) (2 4 3)

Así, después de aplicar las permutaciones, el tema quedaría de la siguiente manera (Figura E-5):[30]



Tema de Autumn Leaves después de aplicar las diferentes permutaciones, Figura E-5.

Por fines prácticos, se puede sustituir el acorde de Em7 del compás 7 por un acorde de Em (maj7) ó cambiar el Re# de la melodía por un Re natural, de esta manera se evita esa segunda menor que se genera entre la melodía y la séptima del acorde. Estas simples operaciones generan para el oyente atento una variedad simple pero efectiva. Teniendo 4

[30] Audio 9. Primeros 4 compases de Autumn Leaves después de aplicar las permutaciones. Link al audio: https://www.youtube.com/watch?v=wSPVGirrTgg&ab_channel=Adri%C3%A1nMercadoContreras

elementos por motivo se tienen entonces 24 opciones de combinación para estos conjuntos (4 factorial).

Se pueden permutar también el orden de los acordes, tomando la primera frase de Autumn Leaves: Am7, D7, Gmaj7, Cmaj7, F#m7b5. Entonces, se asignan números a cada uno de los acordes:

Am7 = 1
D7 = 2
Gmaj7 = 3
Cmaj7 = 4
F#m7b5 = 5

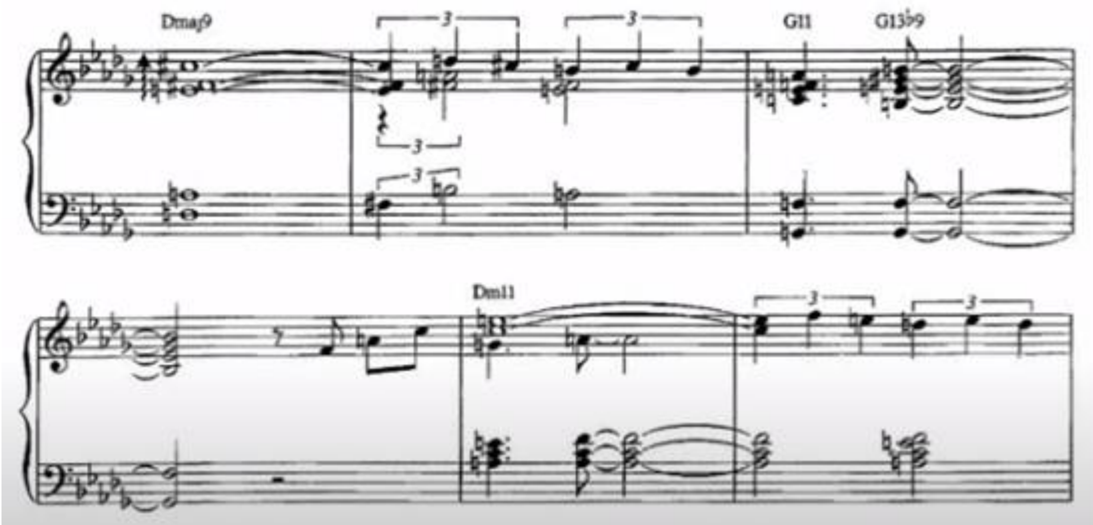
Con esto se tiene una posibilidad de 120 combinaciones (5 factorial). Por poner un ejemplo, se puede hacer la siguiente operación:

(1, 2, 4) (3) (5)

En este caso, el primer acorde Am7 se convierte ahora en D7 (El 1 va al 2), el segundo acorde D7 se convierte en Cmaj7 (2 va al 4), el tercero se mantiene como Gmaj7 (el 3 se queda fijo), el cuarto acorde Cmaj7 se convierte en Am7 (el 4 va al 1) y el quinto se mantiene como F#m7b5 (el 5 se queda fijo). Entonces, el nuevo orden sería este: D7, Cmaj7, Gmaj7, Am7 y F#m7b5. Esto también puede aplicarse a una improvisación en vivo, obviamente con previo acuerdo entre los intérpretes.

Para presentar un ejemplo de permutación de frases completas se usará el tema de *La chica de Ipanema*, la cual, es una canción de bossa nova compuesta en 1962 por Antonio Carlos Jobim, con letra de Vinicius de Moraes y traducción al inglés de Norman Gimbel. La siguiente imagen es el tema de *La chica de Ipanema* con armonización de Oscar Peterson (Figura E-6):[31]

[31] Ted Gioia (2012), *The Jazz Standards,* Inglaterra: Oxford University Press, página 128.
Audio 10. *Garota de Ipanema* (en español *La chica de Ipanema*):
https://www.youtube.com/watch?v=AWxyzVbiT98



Fragmento de un solo de Oscar Peterson en La chica de Ipanema, Figura E-6.[32]

Este fragmento podría dividirse en grupos de 2 o 3 compases, pero en este ejemplo el fragmento se dividirá por cada compás. Entonces, al primer compás se le asigna el número 1, al siguiente el 2 y así sucesivamente. A este conjunto se le asigna una letra que podría ser la letra C, entonces el conjunto quedaría de la siguiente forma:

C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A este conjunto C se le aplica una permutación alfa del siguiente tipo:

α: (1) (2 5 6) (3) (4)

En este caso, el compás 2 ahora tiene la información del compás 5, el 5 se convierte en 6 y el 6 ahora tiene la información del compás 2, por lo que este fragmento quedaría de la siguiente manera (Figura E-7):[33]

[32] Audio 11. Link a la grabación original de la grabación de Oscar Peterson: https://www.youtube.com/watch?v=WeDjbJMb1yw
[33] Audio 12. Solo de Oscar Peterson después de aplicar permutaciones. Link al audio: https://www.youtube.com/watch?v=eMmIQleoF8Y&feature=youtu.be&ab_channel=Adri%C3%A1nMercadoContreras

Fragmento del solo de Oscar Peterson después de aplicar la permutación alpha, Figura E-7.

Este tipo de permutaciones se pueden aplicar a cualquier parámetro de la música (como sucede con el serialismo) como pueden ser el ritmo, las dinámicas, la agógica, etc.

Funciones y algunos ejemplos musicales

Otro concepto que es importante dentro de la combinatoria y en general en las matemáticas es el concepto de función. Una función asigna a los elementos de un conjunto A (conocido como dominio) otro elemento de un conjunto B (conocido como codominio). Estos, a su vez, forman un nuevo conjunto asociado a la función (conocido como rango). Para poder comprender mejor este concepto es común usar el ejemplo de una máquina que se encarga de "transformar" los elementos de un conjunto. Suponiendo que se tiene un conjunto X que contiene los siguientes elementos: {1, 2, 3}. Los elementos de este conjunto serán asignados por una función *f* que representa la siguiente ecuación: x+1. Esto significa que la letra x de la ecuación x+1 debe ser sustituida por todos los elementos del conjunto X (o sea 1+1, 2+1, 3+1) (Figura F-1):

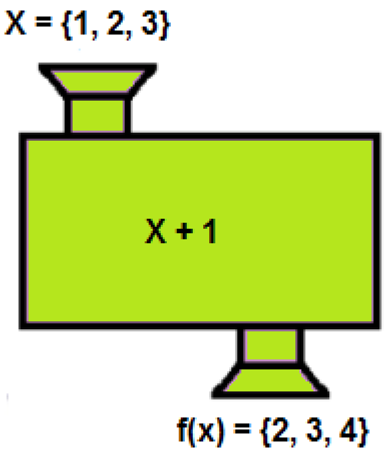


Figura F-1.

Después de que los elementos de X fueron asignados por la función F (es decir, después de que se le sumó 1 a cada elemento del conjunto X, porque F = x+1), el conjunto resultante es el siguiente: $f(x) = \{2, 3, 4\}$. Una permutación sería un ejemplo de una función de un conjunto en sí mismo que es "uno a uno" o "biyectiva", por ejemplo, la permutación α: (1 2 3 4) podría escribirse de la siguiente forma:

$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$

$1 \rightarrow f(1) = 2$

$2 \rightarrow f(2) = 3$

$3 \rightarrow f(3) = 4$

$4 \rightarrow f(4) = 1$

A partir de esta idea se generan funciones que pueden generar nuevo material musical. Por ejemplo, en las vueltas de solo, se puede aplicar una función que asigne a los acordes mayores un acorde menor y viceversa, pero sólo alterando la tercera del acorde, manteniendo la misma calidad de la séptima, novena, etc. y respetando la libertad de los intérpretes de agregar las extensiones que deseen a los acordes. La siguiente función puede traducirse de la siguiente forma: "La función de x es igual a un acorde menor si equis es igual a un acorde mayor, y es igual a un acorde mayor si equis es igual a un acorde menor:

$$f(x) = \begin{cases} \text{Acorde mayor, si } x = \text{Acorde menor} \\ \text{Acorde menor, si } x = \text{Acorde mayor} \end{cases}$$

Para aplicar esta función se pueden tomar de nuevo los primeros 8 acordes del standard *Autumn Leaves*:

Am7 | D7 | Gmaj7 | Cmaj7
F#m7b5 | B7 | Em | Em

Al aplicar la función, los acordes quedarían de la siguiente forma:

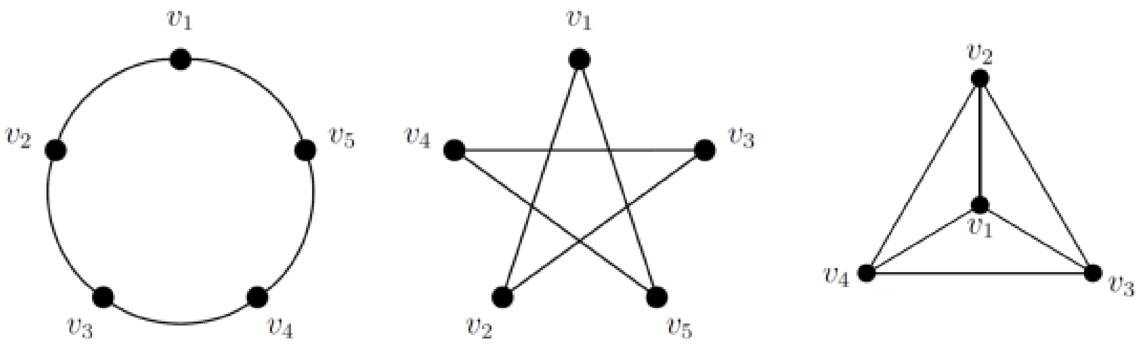
A7 | Dm7 | Gm (maj7) | Cm (maj7)
F#7 (b5) | B_7 | E | E

Una de las ventajas del jazz es que los acordes del tipo menor con séptima mayor son válidos, por lo que en este caso no se estaría rompiendo ninguna regla de la composición. En el jazz es muy común el principio de rearmonización, que permite cambiar la armonía original de un standard sustituyendo los acordes originales por acordes de la misma función, quitando acordes, alterando el acorde original o construyéndolo a partir de intervalos como cuartas o quintas en lugar de terceras. Otra posibilidad es tener una función con restricciones, por ejemplo, una función que rearmonice los compases múltiplos de 4, pero que los acordes originales de esos compases deban ser, por fuerza, sustituidos por acordes de la misma función, mientras que el resto de compases no puede ser alterado:

f (x) = Rearmonizar el compás con acordes de la misma función, si x = un compás múltiplo de 4.

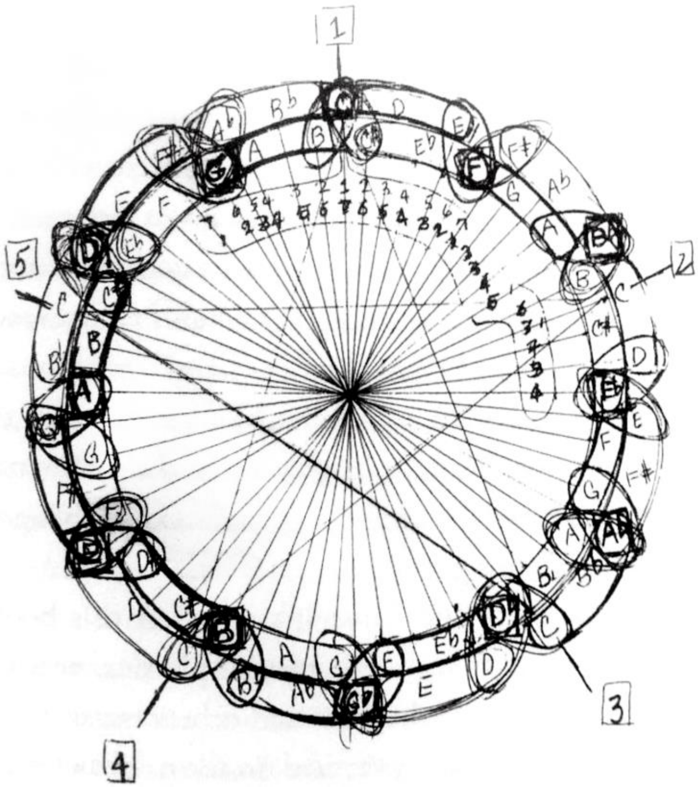
Música y teoría de gráficas

Otra teoría que puede ayudar a generar estructuras y combinaciones interesantes en la música es la teoría de gráficas. La teoría de gráficas o teoría de las gráficas es una rama de las matemáticas discretas que estudia a los gráficos y sus propiedades, entendiendo por gráfico a toda estructura constituida por un conjunto de elementos llamados vértices y aristas. Por ejemplo (Figura F-2):



Diferentes ejemplos de gráficas, Figura F-2.

Ejemplos de teoría de gráficas dentro de la música contemporánea son muchos y muy variados, pero también existen algunos casos dentro del ámbito popular. En la introducción de esta tesis, se habló un poco del interés que tuvo John Coltrane por las teorías científicas de su época. Coltrane fue el autor del círculo Coltrane, que es una de las representaciones gráficas más famosas dentro de la música (Figura F-3):



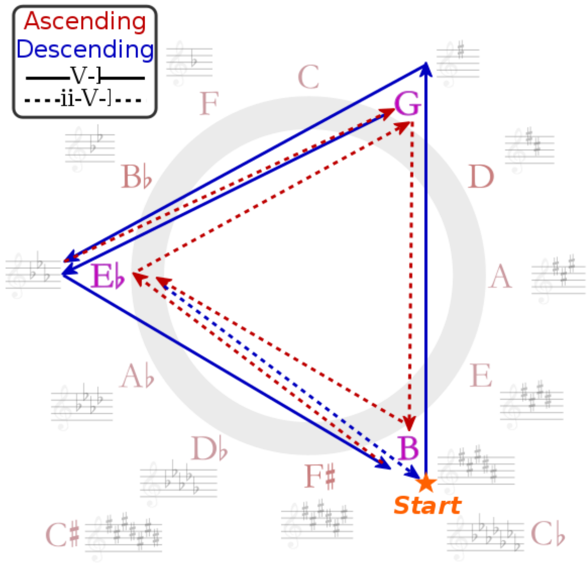
Círculo Coltrane, Figura F-3.

Stephon Alexander, en su libro *The Jazz of Physics*,[34] menciona que así como el universo tiene una macroestructura y se encuentra relacionado geométricamente, la música también lo está. La aportación más importante del físico y filósofo Albert Einstein fue su llamada *Teoría de la relatividad*.[35] Según Stephon Alexander, Einstein consideraba que era mejor el término *Teoría de invariantes*, ya que lo que esta teoría explica es que hay elementos como la velocidad de la luz que, bajo las transformaciones de la relatividad, es invariante. En el caso de las figuras geométricas, se tienen figuras como el círculo, el cual, si este es rotado una cierta cantidad de grados, no es posible notar alguna diferencia en su composición. Lo mismo si se gira un triángulo equilátero de forma tal que alguno de los lados se convierta en la base. Cuando Einstein habla de invariantes está hablando de simetría. Coltrane aplicó este principio para la creación de su Círculo Coltrane y para la composición de múltiples obras, uno de los ejemplos más emblemáticos es el estándar Giant Steps.[36] Una de las particularidades que tiene este standard es el uso de multitónicas, ya que constantemente (y a veces después de cada compás) cambia de tonalidad con el uso de acordes dominantes secundarios y cadencias II-V-I. Esta característica, combinada con un tempo muy rápido, hacen de este standard uno de los más complicados para llevar a cabo una improvisación. La elección de las tonalidades por parte de Coltrane no fue aleatoria, ya que las tres tonalidades que son la base de este standard (B, G y Eb) generan un triángulo equilátero en el círculo de quintas (Figura F-4):

[34] Stephon Alexander (2016), *The Jazz of Physics: The Secret Link Between Music and the Structure of the Universe,* Basic Books.

[35] La teoría de la relatividad es una teoría según la cual las leyes físicas se transforman cuando se cambia el sistema de referencia; se demuestra que es imposible hallar un sistema de referencia absoluto. Diccionario Oxford.

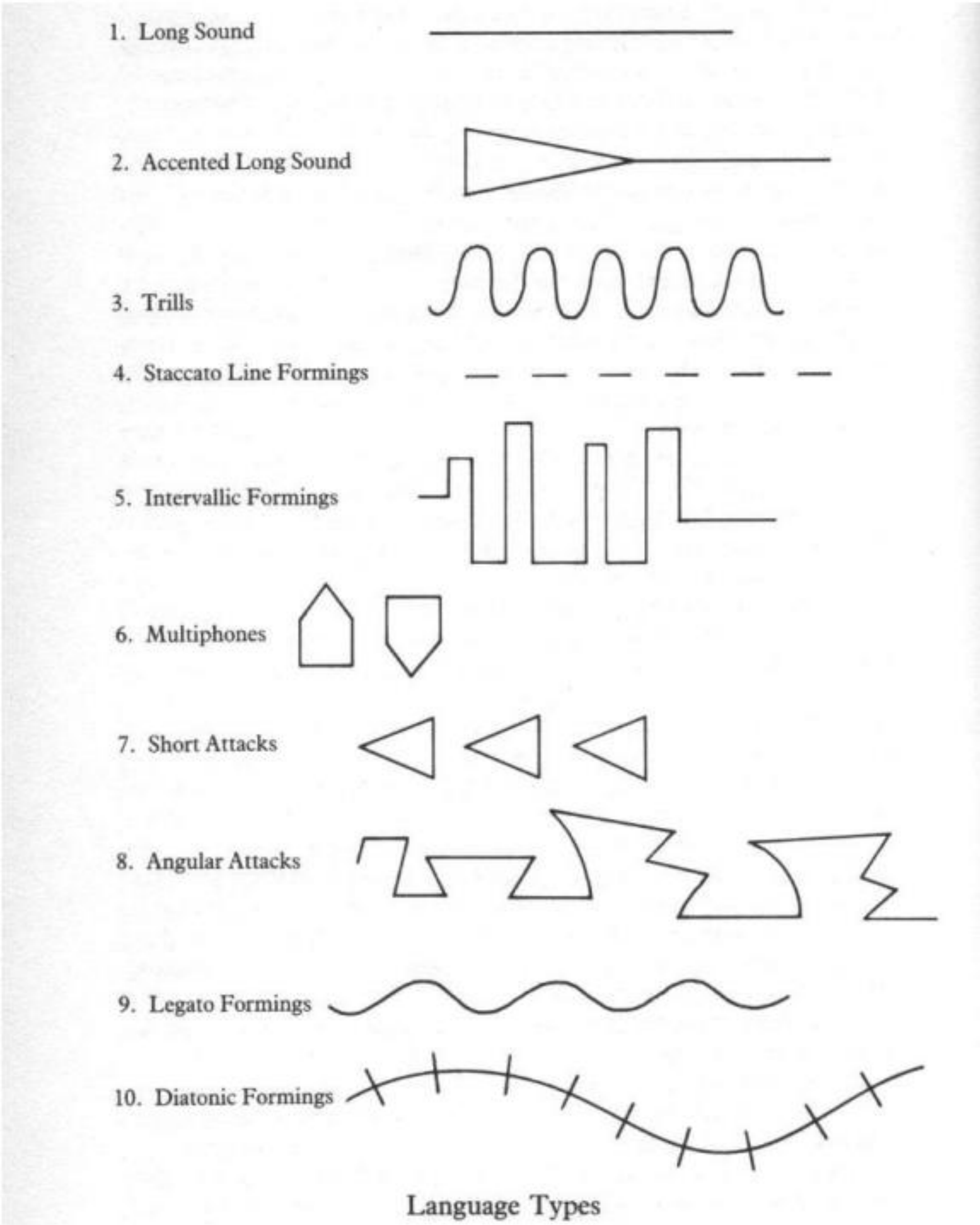
[36] Audio 13. Giant Steps es el quinto álbum de estudio de John Coltrane como líder. El álbum, su primera grabación para Atlantic Records, fue grabado entre mayo y diciembre de 1956. Link al álbum original: youtube.com/watch?v=xy_fxxj1mMY



Relación entre los acordes del estándar Giant Steps, Figura F-4.

Otro compositor que hizo uso de las representaciones gráficas en su música fue el jazzista Anthony Braxton. Lo que más le preocupaba a Braxton era crear varios componentes musicales para incorporarlos a un sistema modular. En general, el compositor buscaba materiales musicales que estuvieran hechos con base en su carácter y timbre, para así crear estructuras musicales interesantes. Con este principio, Anthony Braxton generó un sistema de composición al que se refirió como su “nueva ciencia”. La siguiente figura, según el compositor, es la representación diez ejemplos de un grupo de más de 100 "clasificaciones de sonido" que construyó a lo largo de los años y que constituyen los principales componentes de su música (Figura F-5):[37]

[37] Graham Lock (1985), *Forces in Motion: Anthony Braxton and the Meta-reality of Creative Music.* Inglaterra, Reino Unido, pp 3-4.



Anthony Braxton luego cambió sus 10 tipos de idioma a 12 tipos de idioma, agregando formas gradiente y sub-identidad. Figura F-5.

Las gráficas y las figuras geométricas que son simétricas tienen múltiples aplicaciones en el análisis combinatorio y la música. Teniendo como ejemplo los primeros cinco acordes del standard *Autumn Leaves*, si en lugar de asignarle un número a cada uno de los acordes se le asigna un vértice, entonces, se puede hacer una representación gráfica de estos primeros cinco acordes de la siguiente forma (Figura F-6):

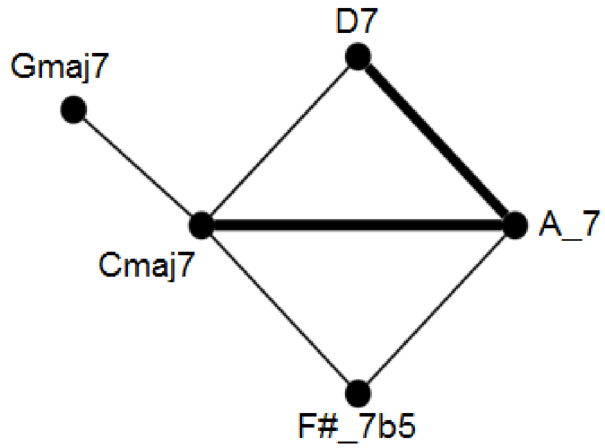


Figura F-6.

En la Figura F-6, se dice que el acorde A_7 tiene grado 3, ya que tiene oportunidad de moverse hacia tres vértices diferentes. Por su parte, D7 y F#_7b5 tienen grado dos, ya que pueden moverse hacia dos vértices diferentes. Cmaj7 tiene grado cuatro y Gmaj7 tiene grado uno. Este tipo de representaciones gráficas ofrecen una forma diferente y no convencional de escribir partituras, que le permiten al intérprete decidir el orden en el que desea interpretar ciertos elementos de la composición. Los vértices de las gráficas pueden representar desde acordes, compases completos con información diferente (que puede ser desde una nota hasta un ritmo) o incluso movimientos completos como el siguiente ejemplo, el cual, es una obra del autor de la presente tesis.

La siguiente obra consta de 10 miniaturas cortas para piano. Cada uno de estos materiales tiene asignado un vértice (*v1, v2. v3, etc.)* que se encuentra escrito al inicio de la obra a manera de título. El orden para tocar la obra es decidido enteramente por el intérprete. No es necesario, por ejemplo, comenzar en el vértice uno (*v1*), cualquiera de los vértices es válido para ser el inicio o el final de la obra. Sin embargo, el orden en el que serán interpretados los materiales deben tener como base los vértices del siguiente gráfico, el cual, se conoce en teoría de gráficos como Gráfico de Petersen (Figura F-7):[38]

[38] En teoría de gráficas, el gráfico de Petersen es un grafo de 10 vértices y 15 aristas. Lleva el nombre de su creador Julius Petersen.

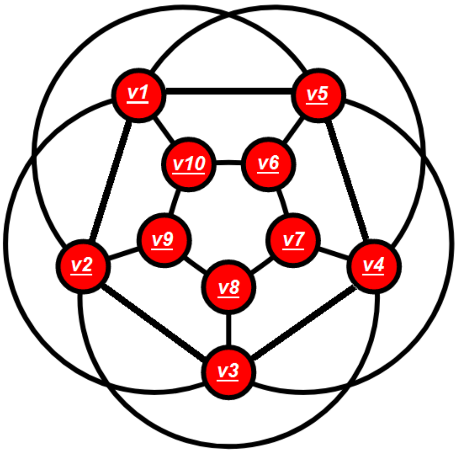


Gráfico de Petersen, Figura F-7.

La principal condición para trazar una trayectoria es que se pase por todos los vértices sin repetir ninguno. Por ejemplo, la siguiente trayectoria v6, v5, v4, v7, v8, v3, v2, v9, v10, v1 sería correcta:

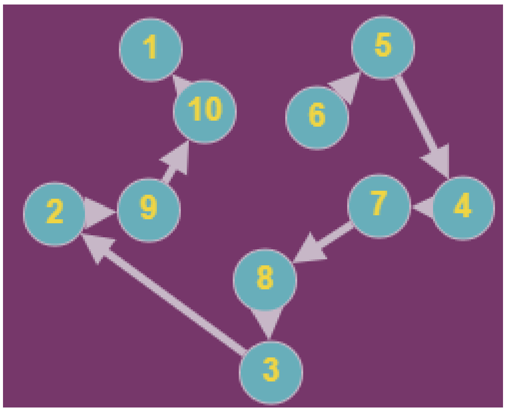


Figura F-8.

La posibilidad de combinaciones es grande, pero se debe recorrer únicamente por los vértices que se encuentran unidos. Una trayectoria del tipo v5, v7, v3 sería errónea, dado que esos vértices no se encuentran unidos. Sin embargo, una trayectoria del tipo v1, v4, v5 sería válida. Cada uno de estos breves movimientos es una idea musical completa y cada uno, a su vez, tiene una esencia propia. Por ejemplo, el movimiento 9 está inspirado en los estudios de Conlon Nancarrow, el movimiento 5, por su parte, le pide al intérprete cantar y tocar al mismo tiempo. Lo más interesante en esta obra es que cada interpretación será diferente, además, se le permite al intérprete, de alguna manera, participar en la composición musical. [39]

Existe otro tipo de gráfica conocida como gráfica completa, en la cual, toda pareja de vértices son adyacentes, es decir, todos los vértices se encuentran conectados por un arista. Si la gráfica tiene n cantidad de vértices, se denota a la gráfica como k_n. En este ejemplo se tienen dos gráficas, una con cuatro vértices que se denomina como K4 y otra gráfica con cinco vértices que se denomina como K5 (Figura F-9):

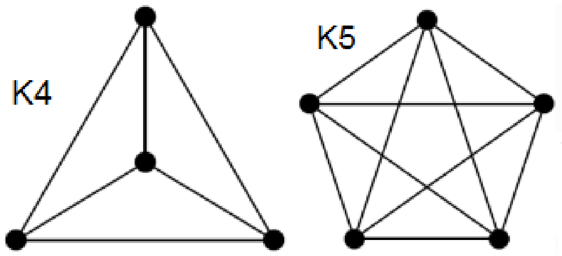


Figura F-9.

Este tipo de gráficos se pueden aplicar también en la música popular. Se podría pensar en un estándar construido con base en una gráfica completa, donde cada uno de los vértices representan una frase. Así, los intérpretes pueden escoger la combinación que ellos deseen e incluso realizar una combinación diferente por cada vuelta (se invita al lector a generar su propia composición con base en este principio). Para este ejemplo particular, se usarán los primeros 8 compases del standard Autumn Leaves, en el que cada uno de los vértices representa un compás, se sugiere probar las siguientes trayectorias para la siguiente gráfica de la Figura F-10:[40]

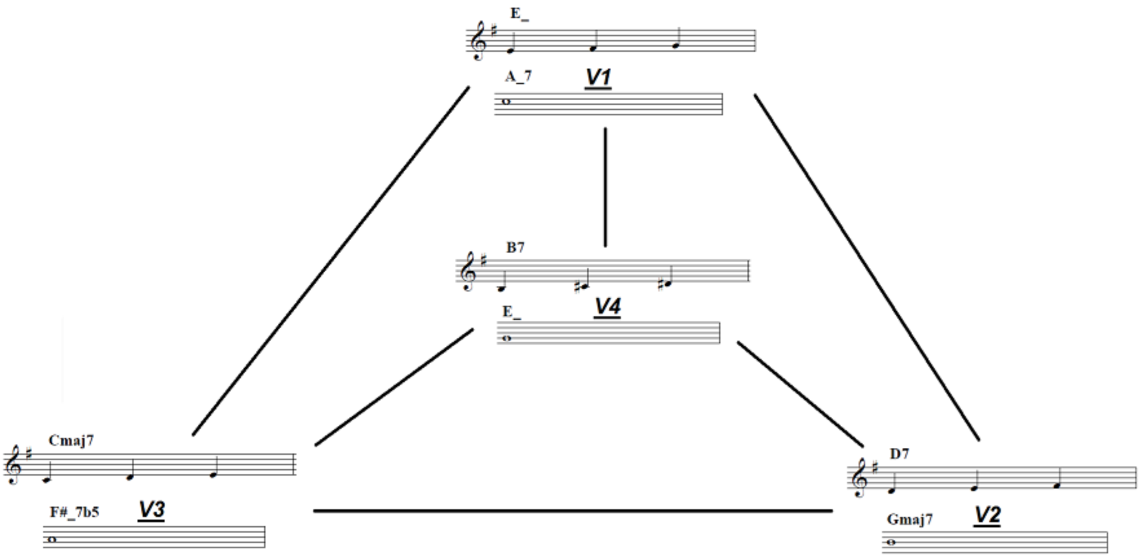
v_1, v_3, v_2, v_4

v_2, v_1, v_3, v_4

v_3, v_2, v_1, v_4

[39] Audio 14. Adrián Mercado - Grafos (2022), obra para piano solo, link a la obra: https://www.youtube.com/watch?v=KtM-h5yeBRI

[40] Una trayectoria v1, v3, v2, v4 indica que se debe pasar primero por el vértice 1, luego por el vértice 3, después por el vértice 2 y finalmente por el vértice 4.



Representación de los primeros ocho compases de Autumn Leaves usando una gráfica k_4, Figura F-10.

La ventaja que puede tener una gráfica para un intérprete respecto de una permutación escrita con números, es que cuando se asignan números a cada nota, acorde o frase, es necesario realizar las operaciones y aprenderlas bien antes de poder realizar la ejecución de la obra. Sin embargo, las gráficas podrían permitir al intérprete tomar decisiones en el momento de la ejecución sin necesidad de realizar ninguna operación escrita. Además de gráficas, se puede hacer uso de otro tipo de figuras geométricas. Si se tiene una figura geométrica de 3 dimensiones, en este caso el cubo, se puede usar para permutar, por ejemplo, escalas. Lo primero es establecer una trayectoria que se puede denominar como X, la cual, será siempre la misma para recorrer los vértices del cubo, independientemente de las permutaciones realizadas (Figura F-11):

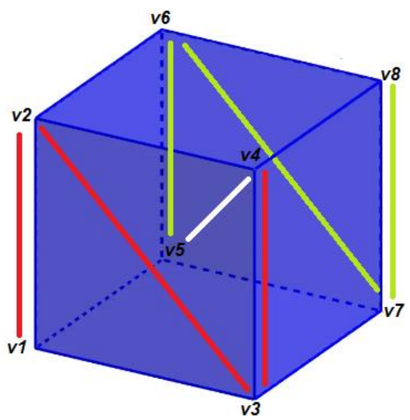


Figura F-11.

Luego, la escala utilizada para este ejemplo será Do armónica, creada por Bartok y muy común en el jazz. La escala armónica tiene el 4 grado alterado, aumentado un semitono, y el séptimo grado alterado, disminuido un semitono. Por lo cual, la escala armónica de Do quedaría de la siguiente forma:

Do, Re, Mi, Fa#, Sol, La, Sib, Do.

Si las notas se colocan en el cubo, tomando en cuenta la trayectoria X, resultaría una figura con las siguientes características:

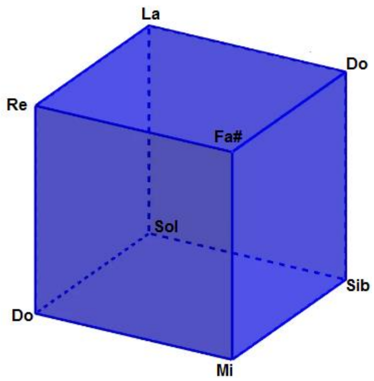


Figura F-12.

El conjunto inicial o identidad de esta escala es el siguiente: {Do, Re, Mi, Fa#, Sol, La Sib, Do}.[41] Si se le asigna un número a cada nota el cubo quedaría de la siguiente manera:

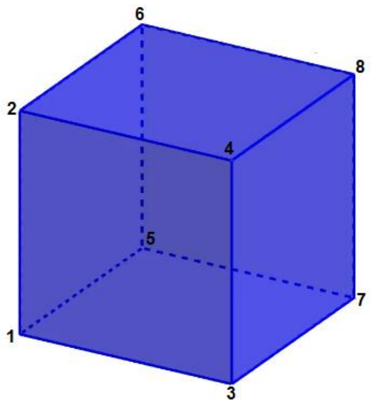


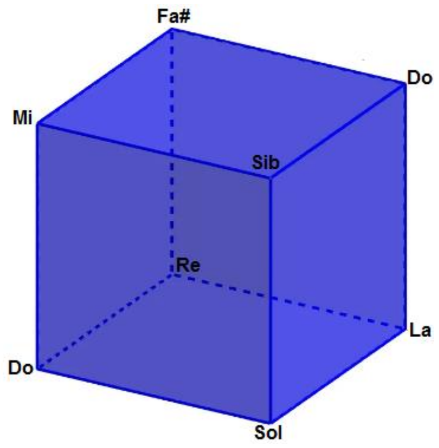
Figura F-13.

[41] Como el lector podrá notar, para este ejemplo si se tomó como un elemento diferente a una nota repetida en diferente escala, en este caso el Do.

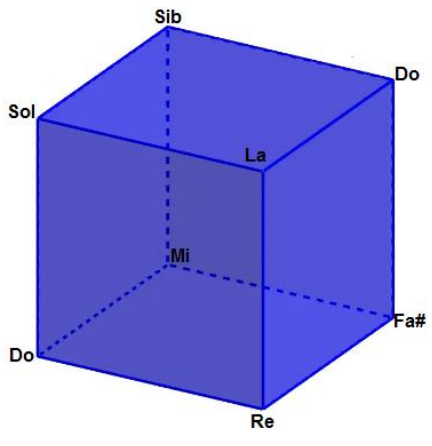
Entonces, se tiene que Do = 1, Re = 2, Mi = 3, Fa# = 4, Sol = 5, La = 6, Sib = 7 y Do (octava arriba) = 8. La identidad de este conjunto sería: (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8). Entonces, se puede aplicar una permutación alfa y beta de la siguiente forma (Figuras F-14 y F-15):

Operación α: (1) (2, 3, 5) (4, 7, 6) (8)

Operación β: (1) (2, 5, 3) (4, 6, 7) (8)



Operación 1 Alfa, Figura F-14.



Operación 2 Beta, Figura F-15.

Identidad:

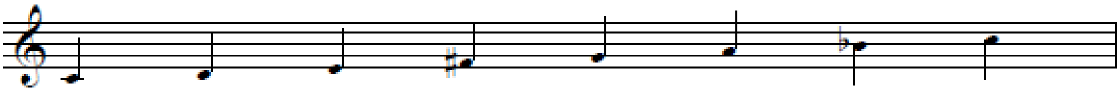


Figura F-16.

Operación 1:

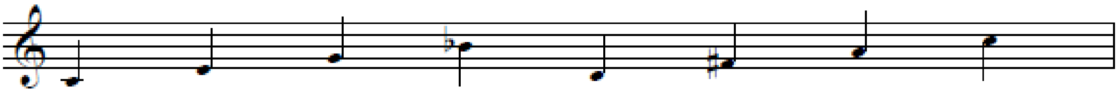


Figura F-17.

Operación 2:

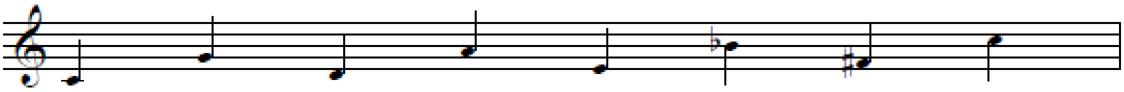
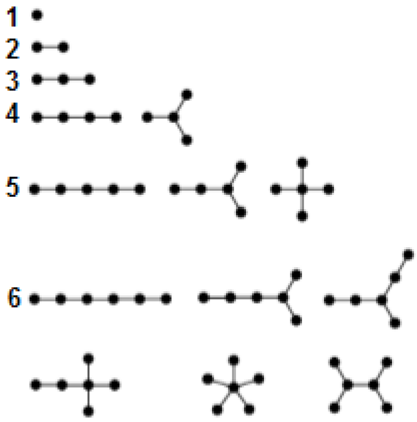


Figura F-18.

Otro tipo de gráfica que es útil en la combinatoria es el árbol. Un árbol es una gráfica que es conexa y acíclica, es decir, es una gráfica que está conectada y en la que sólo puedes regresar a donde empezaste repitiendo todo el camino recorrido, a diferencia de la gráfica completa (Figura G-1):[42]



Todos los tipos de árboles hasta órden 6, Figura G-1.

[42] Si una gráfica no es conexa pero cada uno de sus elementos es acíclico, entonces, se le llama “bosque”

Gracias a este tipo de gráficas se pueden generar redes musicales muy complejas, que trazan diferentes caminos y trayectorias posibles para los intérpretes. Regresando al ejemplo de *Autumn leaves*, y como ya se mencionó, se pueden permutar también frases completas para añadir variedad. La siguiente imagen es un fragmento de una transcripción de la introducción de *Autumn Leaves* interpretada por Oscar Peterson (Figura G-2)[43]. Para este ejemplo, se permutarán los elementos que pertenecen a la voz de la soprano. Si se toman sólo las notas de la soprano se obtendría un conjunto con un total de 40 elementos, sin embargo, si sólo se cuentan los elementos diferentes se tendría un total de 8 elementos (contando apoyaturas, adornos y, en este caso, tomando a las notas repetidas en diferente octava como un elemento diferente). Luego, se divide el conjunto en un total de 4 subconjuntos de 2 compases cada uno, a los cuales se les asigna una letra.[44] Para el primer subconjunto se asigna la letra A, para el segundo la letra B, para el tercero siguiente C y al último D:

Figura G-2.

Como el lector podrá notar, el conjunto B es una repetición literal del conjunto A, esto es, B es un subconjunto de A. Si se aplica el principio de adición al subconjunto A y C para saber cuántos elementos distintos existen entre estos dos subconjuntos se obtiene lo siguiente:

[43] Audio 15. Oscar Peterson - Autumn Leaves (transcripción): https://www.youtube.com/watch?v=sSVl7ake-3U

[44] Se dice que un conjunto X es subconjunto de otro conjunto Y si todos los elementos de ese conjunto X pertenecen al conjunto Y. Por ejemplo, si X = 1, 2, 3 y Y= 1, 2, 3, 4, 5, se puede decir entonces que X es un subconjunto de Y.

$|A \cup C| = |A| + |C| - |A \cap C| = 8$

Entonces, se obtienen un total de 8 elementos diferentes (ya restados los elementos de la intersección de ambos y los elementos repetidos dentro del mismo conjunto). Ahora, si se pone atención, el conjunto D es una repetición del conjunto C, y a su vez, el conjunto C es una repetición del conjunto A, sólo que transpuesto en un intervalo de cuarta hacia arriba. De esta manera, se concluye que la frase completa está hecha del mismo conjunto repetido cuatro veces pero en diferentes transposiciones, por lo que se procede a sólo permutar el conjunto A.[45] Entonces, se asignan números a cada uno de los elementos del conjunto:

Do: 1
Si: 2
La: 3
Fa: 4
Sol: 5

Entonces se asigna una permutación alfa, beta y gamma de la siguiente forma:

α: (1) (2, 3, 4) (5)
β: (1, 2) (3, 4) (5)
γ: (1 2 3) (4, 5)

Para generar un árbol, se asigna una letra al conjunto identidad, a la que se le llamará X. Con estas tres permutaciones se puede generar un árbol que indique diferentes caminos a seguir para permutar estos primeros 8 compases, iniciando en el conjunto identidad. Además, esto se puede combinar con una función *f* que indique que se debe transportar el motivo una cuarta hacia arriba al momento de llegar al compás 5 (Figura G-3):

[45] Es importante mencionar que estos ejemplos no son formularios, es decir, son interpretaciones que hace el propio autor de la presente tesis, pero que el lector, siguiendo estos mismos principios, puede hacer las combinaciones que él desee siguiendo sus propios parámetros.

F(x) = Transportar el motivo una cuarta hacia arriba al llegar al compás 5

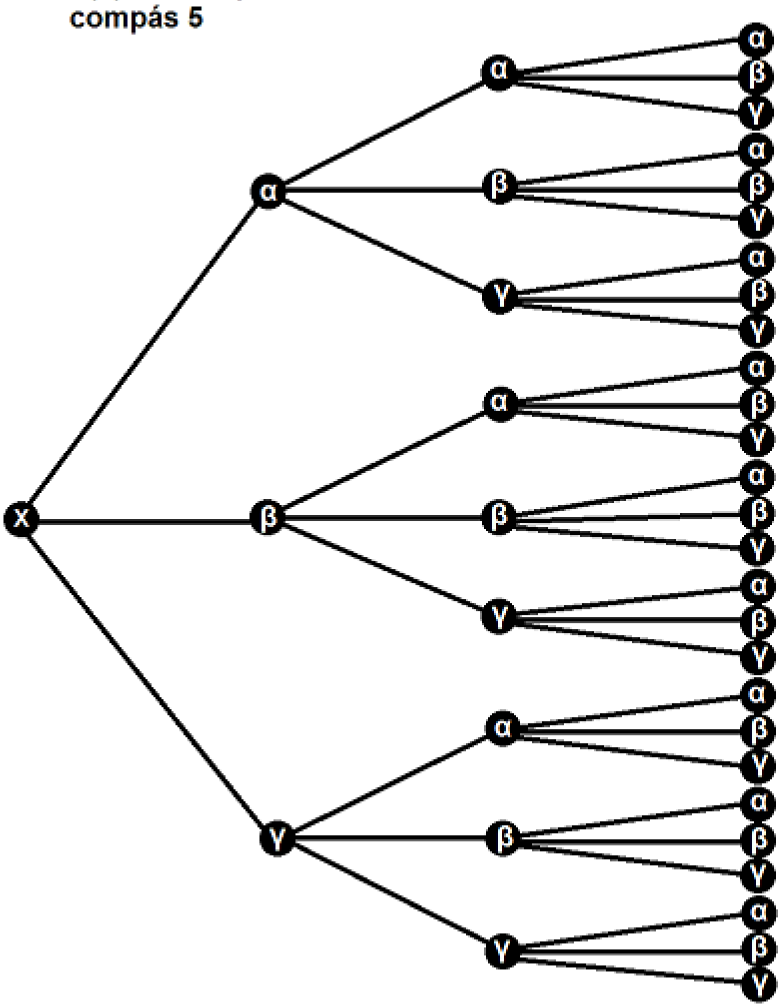


Figura G-3

CAPÍTULO 3. Teoría de juegos

Conceptos básicos de la teoría de juegos

La Teoría de Juegos tiene muchas y diferentes aplicaciones para distintas ramas del conocimiento. Inició en la matemática y poco a poco se fue aplicando en distintos campos como la biología, sociología, economía, psicología, ciencias de la computación y por supuesto en la música. Es Antoine Augustin Cournot, en su libro *Investigaciones de los principios matemáticos de la teoría de la riqueza,*[46] quien explica cómo un duopolio puede llegar a una versión del equilibrio de Nash (concepto que se explicará en los siguientes párrafos), ya que se alcanzará gradualmente un nivel de precios y de producción adecuado. Este libro es considerado por muchos el principal antecesor de la teoría de juegos. Es el libro de John von Neuman y Oskar Morgenstern, *Teoría de juegos y comportamiento económico,*[47] el considerado el iniciador de la interdisciplina en la teoría de juegos. El Princeton University Press publicó una edición conmemorativa por su 60º aniversario, describiendo al libro como un texto clásico que sería el predecesor de toda la teoría de juegos moderna.

De manera general, se podría decir que la Teoría de Juegos se encarga de estudiar las distintas problemáticas que llegan a tener los seres humanos en su vida cotidiana, ya que en esta se dan situaciones en las que dos o más personas tienen que elegir estrategias y tomar decisiones en problemas en los que se ven afectadas mutuamente. Un juego conlleva un número bien delimitado de jugadores, al que se puede denominar *N*, un conjunto de estrategias, que se podrían denominar como *M,* y una recompensa, perdida o castigo que le corresponde a cada uno luego de cada partida. Cada una de las estrategias suele ser complicada, ya que conllevan un procedimiento distinto en situaciones diferentes. Además, cada juego tiene sus propias estrategias, hay algunos juegos que tienen muy pocas estrategias y son muy sencillos, pero hay otros juegos, como el ajedrez, que tienen un gran número de movimientos posibles (todos los juegos convencionales de mesa son casos particulares estudiados por la teoría de juegos). Las principales categorías en la teoría de juegos son las siguientes:

---

[46] Antoine Augustin Cournot (1838), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, París, Francia, Libreria de la Real Universidad de Francia.
[47] John Von Neumann, Oskar Morgenstern (1944), *Teoría de juegos y comportamiento económico,* Nueva Jersey, Estados Unidos, Princeton University Press, ISBN 978-0-691-13061-3 (Edición del 60º aniversario).

- Simétricos o asimétricos: En este tipo de juego las recompensas y los castigos son los mismos para cada jugador, el ejemplo típico de esto es el dilema del prisionero (más adelante se explicará en qué consiste el dilema del prisionero), pero también podría ser el juego conocido como la caza del ciervo. En cambio, el juego del dictador es un juego asimétrico.[48]
- Juegos de suma cero: Cuando un jugador gana, el otro pierde exactamente la misma cantidad. El ajedrez o el poker serían ejemplos de juegos de suma cero. Un juego de fútbol no puede ser considerado un juego de suma cero, ya que si se empata se gana un punto, pero si se gana se suman tres (pensando en la temporada de apertura o clausura de los juegos de primera división).
- Juego de suma no-nula: Se refiere a un juego que trata de una situación en donde la ganancia o pérdida de un jugador, después de tomar una decisión o realizar una jugada, no resulta necesariamente en la pérdida o la ganancia de otros jugadores. Por decirlo rápidamente, es un juego donde las ganancias y las pérdidas de todos los jugadores no suman cero y todos tienen oportunidad de ganar.
- Juegos cooperativos: En este juego los jugadores forman un equipo para poder conseguir un objetivo, el equipo analiza las mejores estrategias y se asumen acuerdos para escoger la mejor solución posible y que maximice los resultados. Los objetivos de los participantes se prestan parcialmente para darse una cooperación y parcialmente para entrar en conflicto. El cooperar o no dependerá de los intereses de los participantes, con el fin de obtener el mayor beneficio posible. (este tipo de juego se lleva a cabo, por ejemplo, cuando un ensamble de jazz se pone de acuerdo para la interpretación de un estándar).
- Equilibrio de Nash: Es una situación que puede suceder al final de un juego, en este caso ninguno de los jugadores puede ganar nada si el resto de los jugadores mantienen su estrategia, no hay forma en que alguna de las partes pueda cambiar su decisión individual sin terminar empeorando.
- Simultáneos o secuenciales: En los juegos secuenciales cada jugador actúa después de otro, mientras que en los simultáneos actúan a la vez.

[48] El juego del dictador no será explicado esta tesis, sin embargo, proporciono una fuente para el lector si este desea conocer en qué consiste (última fecha de consulta: 27/07/2022): https://economipedia.com/definiciones/juego-del-dictador.html

- Juegos de información perfecta y de información imperfecta: Los juegos de información perfecta consisten en que cada uno de los jugadores conocen las jugadas que el resto de jugadores han hecho, mientras que en los imperfectos no.

El dilema de los prisioneros

Uno de los ejemplos más paradigmáticos dentro de la teoría de juegos es el dilema de los prisioneros. El juego fue originalmente planteado por el matemático estadounidense Merril Flood y el matemático polaco Melvin Dresher.[49] El juego consiste en dos sospechosos de un crimen, sospechoso A y sospechoso B. Cuando la policía los arresta y los lleva a la comisaría a declarar, coloca a los dos sospechosos en habitaciones diferentes completamente aisladas. Los policías se dan cuenta que no existen suficientes pruebas para condenar a alguno de los dos, por lo que intentan hacer que alguno de los sospechosos confiese. La policía entonces intenta negociar con ellos y les ofrece dos opciones: Culpar a su compañero o declararse inocentes. En caso de que Sospechoso A culpe a Sospechoso B, pero Sospechoso B no culpe a Sospechoso A, entonces Sospechoso A saldría libre de prisión y Sospechoso B sería condenado a diez años de cárcel. Si Sospechoso B culpa a Sospechoso A y Sospechoso A no culpa a Sospechoso B, entonces Sospechoso B saldría libre y Sospechoso A pasaría diez años en la cárcel. En el caso de que ambos sospechosos se declaren culpables, se les daría a ambos cinco años de cárcel. Sin embargo, si los dos sospechosos se declaran inocentes, la condena sería sólo de dos años para cada uno. El juego del dilema de los prisioneros se puede representar con la siguiente matriz:[50]

		Sospechoso B		
		No delatar	-	Delatar
	No delatar	(2,2)	-	(10,0)
Sospechoso A	-	-		-
	Delatar	(0,10)	-	(5,5)

[49] Miguel A. Hernandez (2021), *El dilema del prisionero*, Revista Historia Hoy, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://historiahoy.com.ar/el-dilema-del-prisionero-n4354/
[50] Una matriz es un conjunto de elementos que están acomodados en filas y columnas. Por ejemplo, una matriz 2x2 sería una matriz que tiene dos filas y dos columnas, una matriz 3x3 sería una matriz con tres filas y dos columnas, etc.

Se dice que este juego se puede observar desde un punto de vista cooperativo, dado que si ambos jugadores deciden no delatar al otro, entonces, esto los llevaría a una *Mejora de Pareto*, es decir, una situación donde ambos lograrían beneficiarse, pasando sólo dos años en prisión. Ésta sería la situación más probable si el juego fuera de información perfecta, es decir, si ambos jugadores supieran que estrategia tomará el otro. Sin embargo, como ambos sospechosos se encuentran aislados, ninguno de los dos sabe qué decisión tomará el otro sospechoso. La mayoría de matemáticos, sociólogos y psicólogos coinciden en que lo más probable es que ambos jugadores terminen delatando, ya que delatar es la situación más segura para ambos. Si Sospechoso A delata, puede salir libre o quedarse cinco años en prisión, pero si no delata, entonces, tendrá que quedarse diez años en prisión, dado que Sospechoso A no sabe qué decisión tomará Sospechoso B, por lo tanto, lo más seguro para Sospechoso A es delatar, y lo mismo para Sospechoso B. Posteriormente, sería el matemático Albert Tucker quien se encargaría de formalizar matemáticamente el juego.

El dilema de los prisioneros no se encuentra libre de críticas, dado que la cantidad de variables al momento de modelar esta situación es inmensa. La formalización matemática del dilema de los prisioneros tuvo diversas críticas que argumentaban que las acciones y decisiones de los seres humanos son discretas y discontinuas, es decir, es imposible poder predecir con total certeza cómo se comportará un ser humano bajo determinadas condiciones, por lo que no tiene sentido hablar de, por ejemplo, la derivada de una acción humana o un agregado de acciones humanas, por lo que no se considera que una formalización matemática aporte algo relevante para un contexto determinado. ¿Qué pasaría si, por ejemplo, ambos sospechosos son mejores amigos desde que eran pequeños? En esta situación, lo más probable es que ninguno de los dos sospechosos delate, dado que, aunque no saben con completa seguridad que decisión tomará el otro sospechoso, existe un lazo social que podría empujar a ambos a cooperar. Como éstas, existen muchas otras variables. Por ejemplo, pueden existir diferentes situaciones psicológicas y fisiológicas que alteren la capacidad decisión de los sospechosos, o valores personales en los que cree cada persona, conceptos éticos que podrían empujar a ambos sospechosos a que, aun cuando no se conozcan, ambos terminen cooperando. Aun con estas objeciones, se puede pensar que en una situación donde ambos sospechosos no se conocen, lo más probable es que ambos prisioneros delaten.

Matrices y aplicaciones de la teoría de juegos en música

Antes de proponer algunas aplicaciones prácticas que tiene la teoría de juegos en la música, es importante explicar un concepto elemental del álgebra lineal: La matriz. Una matriz es una agrupación de elementos que permiten ordenar datos, facilitando su manejo. Estas matrices normalmente tienen forma de tabla cuadrada o rectangular y están ordenadas en filas y columnas, las cuales, permiten multiplicar y sumar cantidades. Si se tiene, por ejemplo, una matriz "A" con una cantidad *m* de filas y una cantidad *n* de columnas, se dice que A es una matriz del tipo *m*-por-*n*:

$$
\text{A mxn} = \begin{matrix} a_{1-1} & a_{1-2} & a_{1-3} & \dots\ a_{1-n} \\ a_{2-1} & a_{2-2} & a_{2-3} & \dots\ a_{2-n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\ \ \dots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \dots\ a_{m-n} \end{matrix}
$$

Así, una matriz que tiene, por ejemplo, 2 filas y 2 columnas se le denomina "matriz 2x2", una matriz que tiene 4 filas y 3 columnas se le denomina "matriz 4x3", etc. Normalmente, la letra *m* representa el número de filas que tiene una matriz, desde la fila 1 hasta la fila *m*, y *n* representa el número de columnas que contiene una matriz, desde la columna 1 hasta la *n*. La matriz de pagos, por su parte, es un tipo de matriz que resume toda la información necesaria para calcular los pagos, recompensas o castigos de un determinado juego. Por ejemplo, si se piensa en el juego "Piedra, papel o tijeras", la matriz de pagos sería la siguiente:

	Piedra	Papel	Tijeras
Piedra	0	-1	+1
Papel	+1	0	-1
Tijera	-1	+1	0

El pago que recibe el jugador I del jugador II en un juego de suma cero, donde un jugador lo gana todo y el otro pierde todo, (en caso de que el jugador I ganase la partida) sería la suma de todos los elementos de la matriz. Para representar todas las posibles estrategias que se pueden llevar a cabo en un juego se utiliza una matriz con las siguientes características:

Jugador II

			Estrategia 1	. . .	Estrategia n
	Estrategia 1	-	a_{1-1}	-	a_{1-n}
Jugador I		-	|		|
	Estrategia m	-	a_{m-1}	-	a_{m-n}

Los renglones son llamados estrategias puras para el jugador I y las columnas son llamadas estrategias puras para el jugador II. Se les dice estrategias puras porque existen juegos en los que se pueden usar combinaciones de estrategias, las estrategias sin combinaciones serían estrategias puras, mientras que a las estrategias combinadas se les denomina estrategias mixtas.

Existen algunos ejemplos de compositores del siglo XX que utilizaron la teoría de juegos en la composición, uno de los casos más paradigmáticos es el de Iannis Xenakis con su obra *Stratégie,* a la que el compositor define como un juego de suma cero entre dos directores de orquesta. El siguiente es un análisis de *Stratégie* realizado por el musicólogo Bernardo García-Bernalt Alonso.[51] Según el autor del análisis, en Stratégie ambos directores son los jugadores protagonistas del juego, la orquesta sería algo así como las herramientas o los materiales para realizar el juego (así como en un juego de mesa podrían ser las fichas o los dados) y no tiene capacidad de elección dentro de la ejecución de la obra, sólo se limita a seguir las indicaciones del director, el cual les indicará sobre qué textura deberán improvisar. Las orquestas se sitúan en ambos lados del escenario de modo que los directores están espalda contra espalda. Cada director puede usar seis texturas musicales, cada una de estas representa una estrategia pura, que es posible combinar para generar estrategias mixtas. El total de estrategias que tiene cada director, contando estrategias puras y mixtas, es de 19 (Figura H-1):

---

[51] Bernardo García-Bernalt (2021), *Stratégie de Iannis Xenakis, teoría de juegos y música.* Revista Diarivm VSAL, Universidad de Salamanca, Facultad de estética, teoría de las artes y musicología, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://diarium.usal.es/bgarcia/2012/07/10/strategie-de-iannis-xenakis-teoria-de-juegos-y-musica/
Audio 16. Iannis Xenakis - Strategie, Año 1961. Link a la grabación: https://www.youtube.com/watch?v=Ipwbze36uj0&ab_channel=WelleszTheatre.

Tácticas básicas

I.- Instrumentos de viento **II.-** Instrumentos de percusión **III.-** Golpes con la mano en la caja de resonancia de los instrumentos de cuerda. **IV.-** Efectos puntillistas en los instrumentos de cuerda. **V.-** *Glissandi* con los instrumentos de cuerda. **VI.-** Armónicos contiuos en los instrumentos de cuerda

Tácticas "compuestas"

VII = I & II	VIII = I & III	IX = I & IV	X = I & V	XI = I & VI
XII = II & III	XIII = II & IV	XIV = II & V	XV = II & VI	
XVI = I & II & III	XVII = I & II & IV	XVIII = I & II & V	XIX = I & II & VI	

Total de estrategias que puede llevar a cabo cada uno de los directores, Figura H-1.

Tanto la duración de cada estrategia como la duración total de la obra deberán ser pactadas de antemano por los directores. Ambos directores cuentan con la misma partitura que es la siguiente matriz de pagos (Figura H-2):

128 Formalized Music

MATRIX OF THE GAME

Conductor Y (columns) / Conductor X (rows)

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	
I	116	10	84	-48	4	-52	-60	-40	132	-44	-8	-36	-22	24	-46	102	138	-38	32	2
II	-56	96	-44	-22	-24	52	-50	-14	72	28	6	-48	-20	-16	-10	-24	-36	-20	44	3
III	-110	-2	96	96	24	0	4	-56	-32	-24	4	-52	-48	-40	-16	-44	-16	20	72	1
IV	0	-20	24	84	4	-12	12	-12	-28	8	-8	-24	-40	4	22	-10	-16	28	-16	11
V	-110	-204	-86	4	104	-8	44	20	-8	4	8	-8	-38	-24	-16	40	8	20	-24	1
VI	24	44	12	-14	-6	64	24	-8	24	4	-24	-40	-52	-44	24	64	4	4	-48	7
VII	-56	-52	20	16	36	44	44	4	-52	-48	0	-46	-36	-12	-20	-40	-44	16	40	6
VIII	-32	-8	-52	-8	12	4	4	48	-44	-12	8	-52	-4	8	32	-36	-40	-16	24	3
IX	-36	10	-16	-32	2	4	-44	-52	52	44	2	48	-18	64	24	22	-36	-28	-52	6
X	-48	22	-22	4	-4	32	-46	-16	8	-36	-24	-4	8	32	24	4	-8	20	-32	4
XI	4	24	26	-4	4	-28	-36	-12	20	4	64	68	4	40	-12	-2	-24	-27	-32	10
XII	-36	-196	-188	-28	-34	-42	36	32	24	0	-32	74	76	-4	4	-32	-28	40	76	7
XIII	166	-20	-42	-40	-52	-44	14	-16	4	22	-14	80	72	-26	-58	40	-18	78	42	2
XIV	32	-14	-34	0	-32	-52	36	12	-12	36	24	-28	42	76	-48	-64	-30	-29	72	5
XV	-20	8	4	28	-28	14	0	20	2	-4	-32	14	26	-56	46	-36	12	-8	14	4
XVI	88	88	104	-28	20	16	-2	-16	20	-20	-50	-26	-8	-36	-40	108	-24	-33	60	9
XVII	32	92	52	-28	16	8	-44	-48	-32	0	-16	-16	-20	-32	24	-30	96	52	-36	8
XVIII	-36	-24	8	4	0	-2	52	78	-12	-4	36	-8	28	-24	-16	-14	42	-12	-40	9
XIX	-52	-52	-66	4	6	-6	-4	44	-66	-4	44	12	44	40	16	-46	44	-42	-32	4
	1	1	2	3	7	11	3	3	4	6	9	2	5	7	10	4	4	8	10	100

Fig. IV–5. Strategy

Two-person Game. Value of the Game = 0.

- Woodwinds
- Normal percussion
- Strings striking sound-boxes
- Strings pizzicato
- Strings glissando
- Strings sustained

Combinations of two and three different tactics

Matriz de pagos de Stratégie, Figura H-2.

Así mismo, cada uno de los directores debe calcular las estrategias que utilizará de forma predeterminada, tomando en cuenta estrategias que optimicen su resultado final. La aplicación que puede tener la teoría de juegos en música va relacionada sobre todo al campo de la improvisación, por lo que esta teoría tiene un gran potencial para el género jazz.

El procedimiento que se aplica a una improvisación en el jazz es muy similar al que se aplica en la música contemporánea, en el caso específico de *Stratégie* de Xenakis, la improvisación tiene un papel importante en la obra y se escapa de una de las características más comunes de la música académica que es escribir meramente lo que se desea que sea interpretado. El primer ejemplo será el de un juego de información imperfecta (como sucede con el dilema de los prisioneros). Es posible simular el conflicto que tienen dos jugadores en un juego de información imperfecta a través de un conflicto entre dos ensambles de jazz. Para este ejemplo se utilizará el estándar *Round About Midnight* de los compositores Thelonious Monk y Cootie William,[52] el cual, tiene una estructura tradicional A y B:[53]

[52] Ted Gioia (2012), *The Jazz Standards,* Inglaterra: Oxford University Press, página 345.
[53] Audio 17. Round Midnight es un estándar de jazz firmado en 1944 por el pianista Thelonious Monk, de quien fue la idea original, y el trompetista Cootie William. Link a la obra: https://www.youtube.com/watch?v=IKayR1oqC7w

Partitura de Round Midnight, Figura H-3.

Antes de comenzar el juego, los ensambles deberán “echarse un volado” para saber cuál de los dos comenzará, es obvio que el ensamble que comience probablemente elija la estrategia que suma más puntos para iniciar, sin embargo, el ensamble debe tener en cuenta que si se equivoca al momento de tocar la estrategia o no la toca de forma adecuada no sumará los puntos indicados. Mientras más dificultad tenga la estrategia más puntos sumará y viceversa, más adelante se explicarán cuáles serán las estrategias y cuántos puntos sumará cada una. Ninguno de los intérpretes de los ensambles podrá conocer las estrategias que tomará el otro ensamble (por eso es de información imperfecta). Además, será necesario un juez (que se encuentre enfrente de los dos ensambles) que se dedique a anotar los puntos que sume cada ensamble y que decida si el ensamble tocó la estrategia de forma adecuada para entonces asignar los puntos correspondientes o quitar los puntos que considere. Los ensambles podrán predeterminar las estrategias que usarán, sin embargo, si resulta que el ensamble rival toca una de las estrategias que el otro ensamble había elegido antes de que sea su turno de ejecutar esa estrategia, éste se verá obligado a escoger otra estrategia para ejecutar en la siguiente vuelta de solos, es decir, no es posible para ninguno de los dos ensambles repetir una estrategia que ya fue tocada, ya sea por el mismo ensamble o por el ensamble contrario. Los ensambles deben estar situados de forma tal que se encuentren de espaldas. Además de esto, el juego, evidentemente, será finito, en este caso particular, el juego durará un total de 6 vueltas de solos. El ensamble que pierda el volado comenzará tocando el tema, mientras el otro ensamble se pone de acuerdo en cuál estrategia tomará para la primera vuelta de solos. Es importante mencionar dos puntos: el primero es que el tocar el tema del estándar elegido no suma ni resta puntos, el segundo es que en ningún momento los dos ensambles tocaran juntos salvo al momento de regresar al tema final. Durante el tiempo en el que uno de los ensambles está tocando, el otro ensamble tendrá que seguir discutiendo cuáles serán las estrategias que se tomarán. El juego como tal comienza en el momento que empiezan las vueltas de solos y termina cuando concluyen las mismas. Para este ejemplo particular se definirán cinco estrategias puras, donde cada una de esas estrategias tendrá una duración equivalente a los 16 compases del estándar (24 compases si se toman en cuenta los compases de la repetición de la sección A). Como el estándar tiene una sección A y una sección B, se pueden generar estrategias mixtas compuestas de dos estrategias puras, donde una se utilice en la sección A y la otra en la sección B. Para las estrategias mixtas, en este caso particular, no importa el orden en que se combinen, es decir, I+II y II+I no cuentan como dos estrategias diferentes, sino como una sola. De esta forma, se tienen cinco estrategias puras y diez estrategias mixtas. Las cinco estrategias puras serían las siguientes:

ESTRATEGIAS SIMPLES O PURAS

I-. Cambiar de estilo cada 4 compases (por ejemplo, de jazz a latin).

II-. Cambiar todos los acordes dominantes por su sustituto tritonal.[54]

[54] La sustitución tritonal es el tipo más común de acorde sustituto, consiste en usar el acorde dominante que se encuentra una segunda menor arriba de la tónica, en vez de usar el acorde dominante que se encuentra a una quinta hacia arriba de distancia, fuente: Mark Levine (2003), *El libro del Jazz Piano,* California: Estados Unidos, página 36.

III-. Hacer una modulación por terceras (a la tonalidad que está a una tercera mayor o menor) cada cuatro compases. [55]

IV-. Improvisar intercalando entre un compás de 7/8 y uno de 5/8 cada cuatro compases.

V-. Improvisar intercalando entre un compás de 7/8 y uno de 5/8 por cada compás.

ESTRATEGIAS MIXTAS

I + II, I + III, I + IV, I + V

II + III, II + IV, II + V

III + IV, III + V

IV + V

Entonces se establecen los puntajes con la siguiente matriz:

	I	II	III	IV	V
I	2	2	2	3	4
II	2	2	2	3	4
III	2	2	2	4	4
IV	3	3	4	3	5
V	4	4	4	5	5

Figura H-3.

[55] La modulación por terceras consiste en cambiar la tonalidad hacia la tónica que se encuentra una tercera mayor o menor hacia arriba o hacia abajo, fuente: María Tardío y Antonio Risueño (2016), *Modulación por terceras,* Artículo publicado en el blog *Aula virtual de María Tardío*, última fecha de consulta 09/Agosto/2022: https://aulavirtualmtardio.wordpress.com/2016/02/15/modulacion-por-terceras/#:~:text=La%20modulaci%C3%B3n%20por%20terceras&text=Cuando%20el%20resultado%20de%20esta,o%20hasta%20dos%20notas%20crom%C3%A1ticas.

Como el lector podrá observar, la diagonal de izquierda-arriba a derecha-abajo representa todas los puntajes de las estrategias puras mientras que el resto de entradas representa las estrategias mixtas.

Ninguno de los dos ensambles puede saber qué decisión tomará el otro ensamble, como sucede con el dilema de los prisioneros. El ensamble ganador será aquel que haya logrado sumar la mayor cantidad de puntos. El premio podría ser, por ejemplo, que el ensamble ganador pueda tocar el standard de su preferencia, mientras que el ensamble perdedor tendrá que esperar al siguiente juego para poder ganar y así poder tocar el standard de su elección. En el hipotético caso de que se produzca un empate, los dos ensambles podrían tocar al mismo tiempo algún standard de su preferencia. Se podría hacer entonces una ronda de juegos y una ronda de una interpretación libre ejecutada por el ensamble ganador del último juego.

Este sería apenas un ejemplo de lo que podría ser un juego entre dos ensambles de jazz, sin embargo, las posibilidades son ilimitadas. Se pueden generar muchos tipos de estrategias y premios diferentes, incluso, se podrían generar estrategias derivadas de fractales y combinatoria.

Además de juegos de suma información imperfecta, se pueden usar otro tipo de juegos en la aplicación musical. Un ejemplo de esto es el juego cooperativo. Se le llama juego cooperativo ya que, a diferencia del juego de suma cero, los jugadores buscan una mezcla de estrategias que les permita obtener el resultado más óptimo. Para este ejemplo, el estándar elegido será nuevamente *Round About Midnight.* Entonces, se tiene un escenario donde hay dos intérpretes o jugadores (jugador A y jugador B) y una sección de solos de 24 compases (tomando en cuenta la repetición de la sección A). El juego sería de pregunta y respuesta, donde los dos músicos tendrán que improvisar durante 8 compases, cada uno usando diferentes estrategias. El total de estrategias posibles para este juego en particular será de ocho para cada jugador, con cuatro estrategias puras y cuatro estrategias mixtas (es decir, que cada jugador tendrá sus propias estrategias). En total, sumando las 8 estrategias para jugador A y las 8 estrategias para jugador B se tendrían un total de 16 estrategias. En este caso particular, el juego durará 3 vueltas de solo, teniendo un total de 72 compases.

Después, se debe delimitar en qué momento improvisará cada uno de los jugadores. Como el juego es de pregunta y respuesta, simplemente hay que delimitar quién comenzará tocando los primeros 8 compases de las vueltas de solo. Nótese que si el jugador A es quién comienza a improvisar en la primera vuelta, será el jugador B quién comience a improvisar en la segunda, dado que el jugador A comenzaría tocando la sección A y el jugador B tocaría la repetición de la sección A. Luego, el jugador A tocaría la sección B, por lo que al jugador B le tocaría empezar la segunda vuelta. Entonces, se procede a establecer todas las posibles estrategias para cada uno de los jugadores, en este caso el estándar usado es *Round About Midnight*. Este estándar en particular se encuentra en la tonalidad de Do menor, aunque con varias particularidades. Por ejemplo, en los primeros dos compases se utiliza para el tema lo que bien parece la escala de Do menor melódica[56]. Además, contiene varios acordes secundarios y una cadencia II - V - I hacia Re bemol mayor (cada una de las estrategias para el juego implica el análisis armónico de la pieza que se va a ejecutar y ser lo más específico posible con la descripción de cada una de las estrategias para el juego). Se procede entonces a establecer las ocho estrategias para el jugador A. La estrategia I consistirá en tocar exclusivamente arpegios de cada uno de los acordes de Cm (maj7), Gm7, C7 y Fmaj7. La estrategia II consistiría en tocar en estilo bebop. Después, la estrategia III podría consistir en usar acordes cuartales, por ejemplo, improvisar solamente usando las notas de los acordes de Csus4, Gsus4, Csus4 y Fsus4. Finalmente, la estrategia IV consistirá en tocar solamente escalas blues (menores o mayores).

Después, se procede a escoger las estrategias para el jugador B. La estrategia I podría consistir en tocar exclusivamente escalas disminuidas para los acordes menores y escalas de tonos enteros para los acordes mayores. Después, la estrategia II consistiría en tocar la sustitución tritonal de todos los acordes dominantes (en este caso, los acompañantes deben estar atentos para realizar el cambio armónico). La estrategia III consistiría en tocar exclusivamente el modo súper locrio en los acordes dominantes. Finalmente, la estrategia IV consistirá en tocar escalas exóticas que correspondan a cada uno de los acordes (al final del párrafo se explicará la estructura de cada una de las escalas sugeridas). En este caso se puede escoger la escala Hirajoshi para el acorde de Fm7, la escala Frigia mayor para el acorde de Bb7, la escala Kumoi para el acorde de Ebmaj7, escala Shiouzhi para el

[56] Importante mencionar que en el jazz la escala menor melódica se toca de la misma forma de manera ascendente y descendente.

acorde de Ebm7, Húngara mayor para Ab7, escala Doble Armónica Mayor para el acorde de Dbmaj7, escala Simétrica para el acorde de Dm7b5 y finalmente la escala Judía para el acorde de G7b9. En la elección de escalas exóticas se debe tener cuidado con la calidad y las extensiones de cada acorde, en este caso se escogieron estas escalas dado que cada una de ellas coinciden con las notas que componen a los acordes y su calidad. Al igual que para el jugador A, las estrategias V, VI, VII y VIII serán combinaciones de dos estrategias puras elegidas de forma libre.

Estructura de las escalas exóticas mencionadas:
Hirajoshi: 1, 2, b3, 5, b6
Frigia Mayor: 1, b2, 3, 4, 5, b6, b7
Kumoi: 1, 3, 4, 6, 7
Shiouzhi: 1, b2, 4, 5, b6
Húngara mayor: 1, #2, 3, #4, 5, 6, b7
Dobre Armónica Mayor: 1, b2, 3, 4, 5, b6, 7
Simétrica: 1, b2, b3, ♮3, #4, 5, 6, b7
Judía: 1, b2, 3, 4, 5, b6, b7

Finalmente, se establece los puntajes con una matriz, al igual que como se hizo con el ejemplo anterior:

	I	II	III	IV
I	1	2	2	3
II	2	1	2	3
III	2	2	2	4
IV	3	3	4	3

Figura H-4.

CONCLUSIONES

Algunos de los ejemplos expuestos en la presente tesis son derivados de trabajos que yo como compositor realicé anteriormente y que me sirvieron para mejorar mi práctica musical y profundizar en las áreas matemáticas. Como el lector habrá observado, el capítulo uno hizo uso, principalmente, de dos conceptos de la geometría fractal para su aplicación a la música. El primero de ellos fue el concepto de autosimilitud, el cual, es básico para poder adentrarse en el mundo de los fractales. El concepto de autosimilitud tiene un gran potencial de aplicación dentro de la música para generar todo tipo de estructuras y materiales musicales sumamente complejos. Por su parte, los algoritmos se han convertido en una forma muy común de hacer música. En esta tesis solamente se ofreció una forma de generar material musical con el concepto de diagrama de flujo, sin embargo, existen muchos y diversos tipos de algoritmos de programación que pueden tener un uso dentro de la música popular y académica. Finalmente, la teoría del caos nos ofrece una nueva forma de analizar, interpretar y crear música. Como se mencionó en el capítulo uno, si bien la teoría del caos tiene una base matemática, también tiene una base filosófica, que puede servir como parámetro para generar y componer música muy interesante. Desde hace ya mucho tiempo, los compositores (algunos de forma no intencional) han generado diferentes estructuras musicales que pueden analizarse desde el concepto de autosimilitud. Los fractales nos ofrecen una nueva forma de crear música y sobre todo de poder entenderla.

Algo similar sucede con el área de la combinatoria aplicada a la música. La combinatoria, como se demostró en el capítulo dos, se ha aplicado desde hace mucho tiempo en la música. La permutación de conjuntos musicales ofrece una forma sencilla de poder variar los materiales musicales. Como se mencionó en ese mismo capítulo, la aplicación de permutaciones no se limita únicamente a la altura de notas. El serialismo en sus comienzos solamente se aplicaba a un sólo parámetro con la serie de doce notas de Schöenberg. Sin embargo, poco a poco el mismo criterio se comenzó a aplicar al ritmo, a los compases, a la agógica, al tempo, etc. Este mismo criterio puede ser aplicado a la música con base en las permutaciones. Cualquier parámetro musical puede ser permutado, lo que permite generar materiales musicales muy diversos. Por su parte, los gráficos nos ofrecen una forma diferente de escribir música. Durante el siglo XX, los compositores buscaron distintas formas de involucrar más a los intérpretes en las obras. Es sabido que una obra musical, por muy estricta que esta sea, siempre será ejecutada de forma distinta por dos intérpretes. La teoría de gráficos puede ser útil para romper esta barrera que aún existe entre compositor e intérprete, ya que el segundo tendría oportunidad de decidir, por ejemplo, el orden en el que se interpretará una obra. Quizás para algunos compositores esto pudiera ser una contradicción, dado que, supuestamente, el trabajo de un intérprete es simplemente el de ejecutar lo más fiel a la partitura posible lo que está escrito en la partitura. Sin embargo, hay muchos compositores que les interesa generar obras en las que el intérprete participe de forma directa en la parte de la composición y pueda tomar decisiones. Finalmente, el concepto de función también tiene diversos tipos de aplicaciones en la música popular y académica. Los ejemplos de funciones expuestos en la presente tesis fueron apenas unos cuantos ejemplos sencillos para que el lector pudiera familiarizarse con este concepto. Sin embargo, este mismo concepto puede llevarse hasta sus últimas consecuencias y generar materiales muy interesantes. Se podría pensar, por ejemplo, en funciones que tengan valores parametrizados y que, bajo ciertas condiciones, sus valores pudieran ir cambiando a lo largo de la ejecución de la obra. Existen muchos y diferentes tipos de funciones matemáticas que pueden ofrecer a los músicos diversas formas de improvisar y crear música nueva.

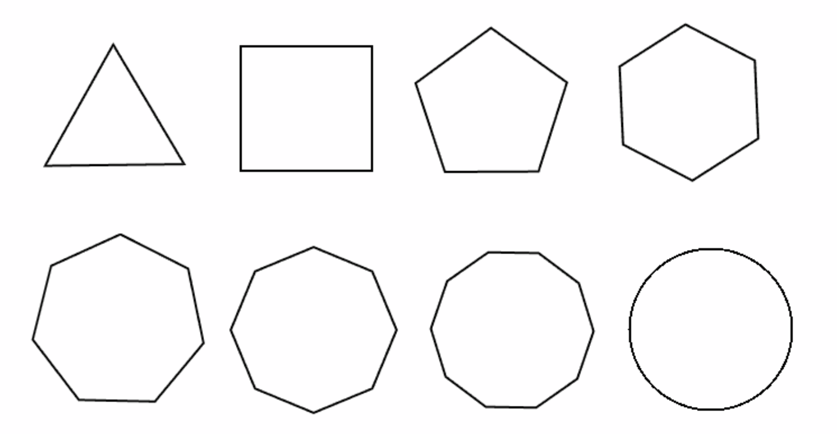
En el caso de la teoría de juegos, sucede algo similar a lo que sucede con la teoría de grafos o teoría de gráficos. En la presente tesis apenas se mostraron dos ejemplos con dos tipos de juegos: el de información imperfecta y el cooperativo. Existen muchos más tipos de juegos e incluso se pueden hacer distintas combinaciones entre estos (por ejemplo, el dilema de los prisioneros es una combinación de distintos juegos). Las matrices, por su parte, no solamente pueden usarse para generar matrices de pagos para los juegos musicales. Por sí mismas, pueden tener diferentes aplicaciones dentro de la música, desde la creación de partituras hasta distintas formas de combinar materiales musicales. Como sucede en combinatoria o fractales, las matrices pueden usarse para cualquier parámetro musical, por ejemplo, se podría pensar en distintas células rítmicas ordenadas en estrategias combinables entre sí, recursos como dinámicas o incluso estilos diferentes. Se podría pensar en una matriz que incluya distintos tipos de estilos sobre los cuales improvisar como podría ser el swing, la música afrocaribeña, la samba o el funk.

Mi reflexión como compositor y músico es que los creadores musicales e intérpretes deben estar al tanto de las nuevas técnicas que nos ofrecen las ciencias positivas para incluirlas en nuestro quehacer musical. Los músicos siempre están en busca de nuevas formas de creación e interpretación, las artes en general nos empujan a buscar nuevas formas de expresión. Considero que las matemáticas nos pueden brindar esas herramientas, aunque esto también implique un compromiso por parte de los músicos de estar al tanto de las nuevas teorías que nos ofrecen las ciencias. Por otro lado, considero que existen sistemas musicales, construidos con base en las matemáticas, que suelen ser demasiado restrictivos. Algunos sistemas, como el serialismo, suelen ser mecanicistas en exceso, provocando que, muchas veces, la percepción en el proceso creativo sea anulada casi por completo. La música y las artes no son ciencias exactas, y esa es una de sus principales fortalezas. Entonces, la propuesta sería pensar en modelos que proporcionen herramientas para la creación y el análisis de la música, pero sin caer en una sistematización exagerada de la misma. Dentro de esa flexibilidad puede caber entonces la posibilidad de generar nuevos métodos de aplicación de las matemáticas y la física en la música.

El objetivo de esta tesis fue, a partir de los aportes realizados por distintos matemáticos y músicos, mostrar algunos ejemplos de aplicación de áreas matemáticas a la música. Quizás el lector habrá notado que, en su totalidad, los ejemplos que se mostraron en esta tesis no eran del todo restrictivos, es decir, no intentaban mostrar una serie de pasos, a manera de recetario, para los compositores e intérpretes. En la introducción se hizo una breve crítica a lo restrictivos que suelen ser los sistemas musicales del siglo XX. Y es que el problema con ese tipo de sistemas es que inhiben una parte esencial de la composición musical como es la propia percepción del compositor. En todo caso, podría ser mejor pensar en modelos que simplemente ayuden a los compositores y a los intérpretes a generar nuevos y variados materiales musicales, para que estos, a su vez, pueden moldearse bajo sus propios criterios. Los objetivos secundarios de la tesis fueron, por una parte, mostrar cuál fue mi acercamiento con estas teorías matemáticas y despertar el interés de los músicos en este tipo de sistemas, pero también que este tipo de escritos sirvan como parteaguas de futuros modelos matemáticos para aplicación musical, tanto para la música académica como para la música popular. Esta última tiene un gran potencial para ser usada con base en distintas áreas matemáticas. Esta tesis es apenas un pequeño acercamiento a todo el mundo de posibilidades que existen entre la relación música y ciencias, un lector atento habrá notado la cantidad de distintas opciones que se tienen con el uso de estos recursos y que esta tesis contiene apenas unos cuantos ejemplos sencillos, que permitirán en el futuro generar sistemas más complejos dentro de la música popular. Las posibilidades son muy grandes, desde el uso de las matemáticas discretas, el álgebra lineal, la geometría no euclidiana, el cálculo, la probabilidad etc. Esta tesis es un llamado a los músicos a seguir formándose en estos temas y utilizar este tipo de recursos para generar nuevos modelos de creación, dejando de lado el purismo y pensando en una música con carácter holístico que haga uso de todas las herramientas que tiene en sus manos para componer e interpretar.

ANEXOS

COMPENDIO DE IMÁGENES



Polígonos regulares, Figura A-1. Imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa Paint.

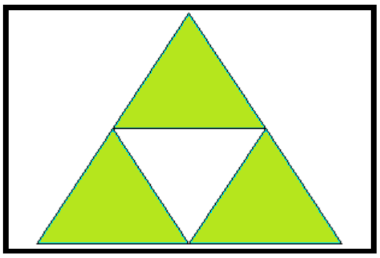


Figura A-2. Imágen tomada de la página Asociación Seat, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: http://www.asociacionceat.org/aw/2/sierpinski.htm#:~:text=El%20Tri%C3%A1ngulo%20de%20Sierpinski%20tambi%C3%A9n,)%2Flog(2)~%3D1.58496.

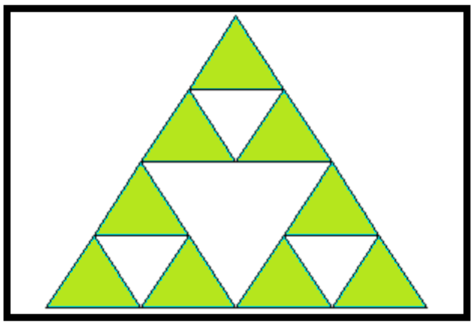
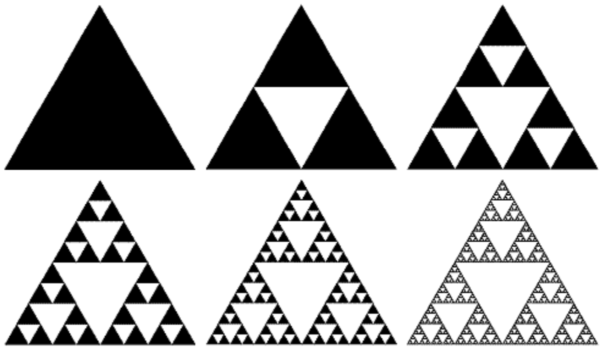


Figura A-3. Imágen tomada de la página Asociación Seat, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: http://www.asociacionceat.org/aw/2/sierpinski.htm#:~:text=El%20Tri%C3%A1ngulo%20de%20Sierpinski%20tambi%C3%A9n,)%2Flog(2)~%3D1.58496.



Triángulo de Sierpinski después de 5 iteraciones, Figura A-4. Imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa de edición Paint.

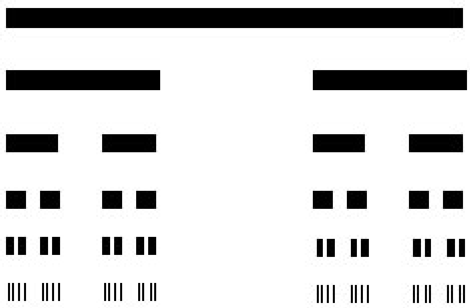
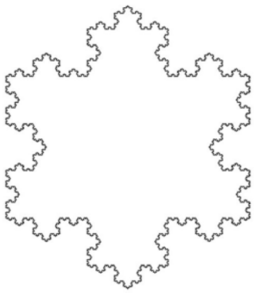
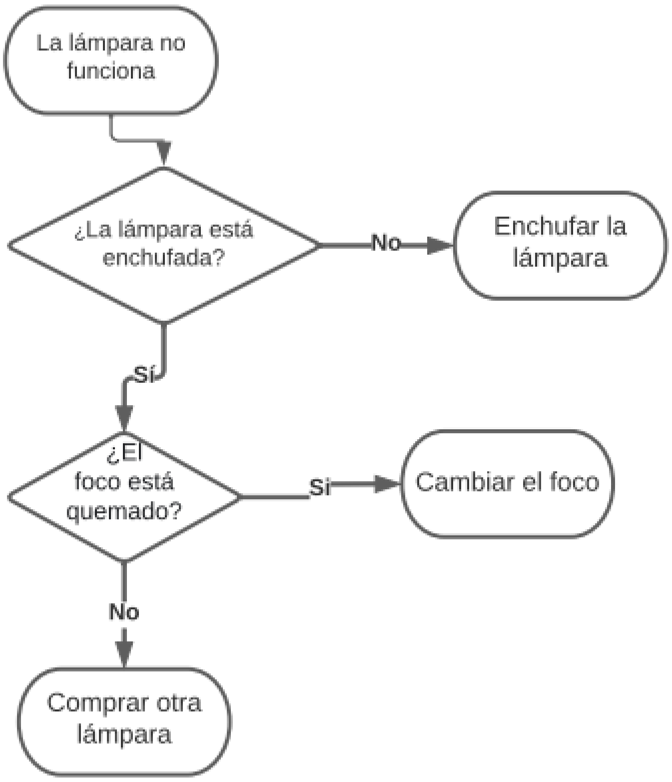


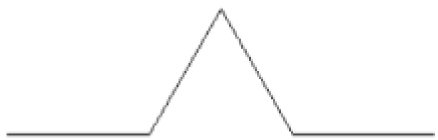
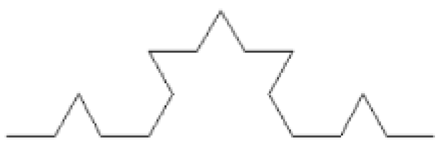
Figura A-5. Conjunto de Cantor, Imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa de edición Paint.



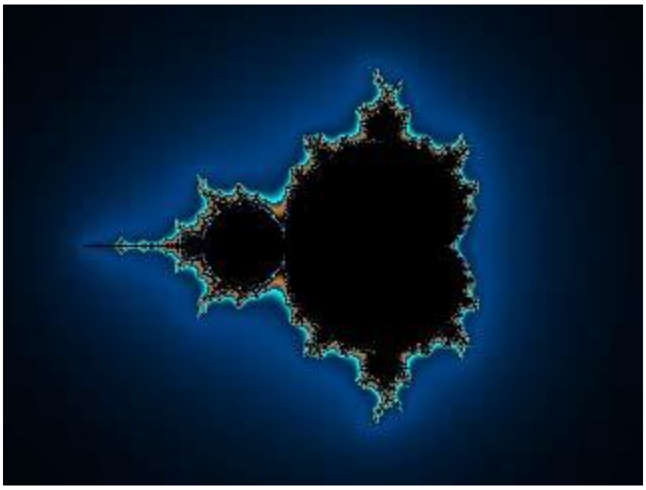
Copo de nieve de Koch, Figura A-6. Imagen tomada del Curso de Geometría Fractal impartido en el año 2003 en el sitio fractaltec.org, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/pdf/CursoGeometriaFractal.pdf



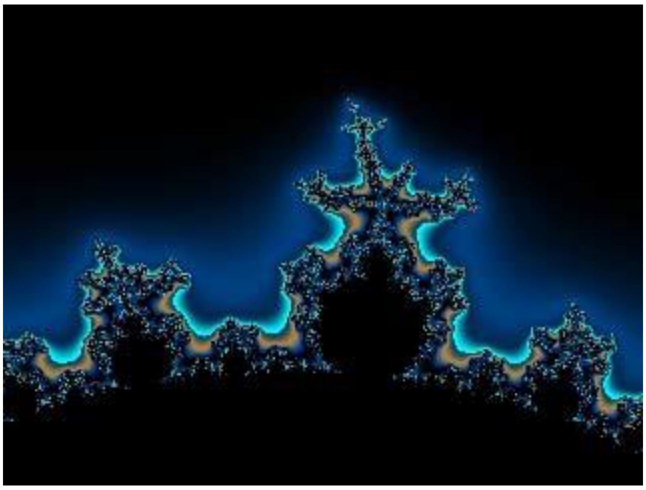
Instrucciones para reparar una lámpara, Figura A-7. Imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa Lucidchart.

4. Imagen generadora	
5. Aplicación del algoritmo	
6. Iteración o repetición del algoritmo (se comienza a generar el fractal)	

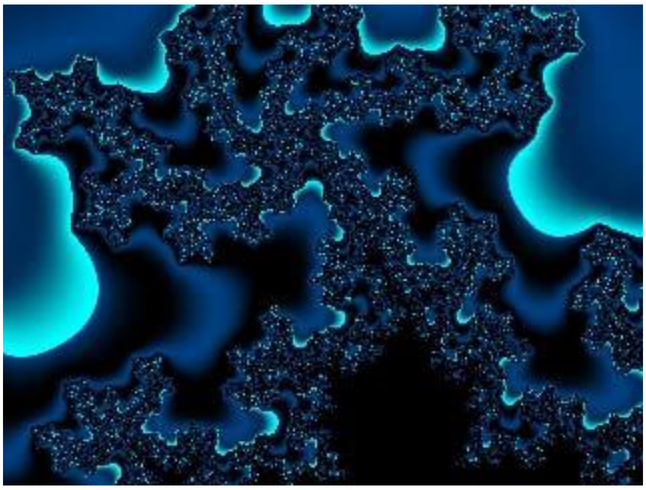
Procedimiento para obtener el Copo de nieve de Koch, Figura A-8. Imagen tomada del Curso de Geometría Fractal impartido en el año 2003 en el sitio fractaltec.org, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/pdf/CursoGeometriaFractal.pdf



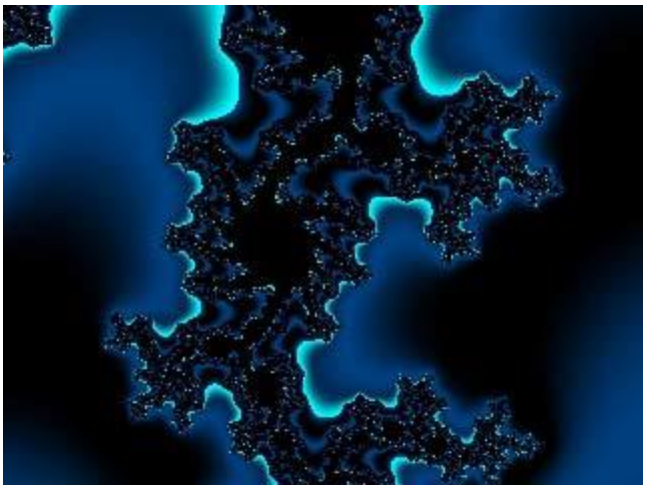
Conjunto de Mandelbrot completo, figura B-1. Imagen tomada del Curso de Geometría Fractal impartido en el año 2003 en el sitio fractaltec.org, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/pdf/CursoGeometriaFractal.pdf



Conjunto de Mandelbrot con una ampliación en una de sus zonas, Figura B-2. Imagen tomada del Curso de Geometría Fractal impartido en el año 2003 en el sitio fractaltec.org, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/pdf/CursoGeometriaFractal.pdf



Conjunto de Mandelbrot con cinco ampliaciones consecutivas en esa misma zona, Figura B-3. Imagen tomada del Curso de Geometría Fractal impartido en el año 2003 en el sitio fractaltec.org, última fecha de consulta 11 de julio del 2022:
http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/pdf/CursoGeometriaFractal.pdf



Conjunto de Mandelbrot con 10 ampliaciones consecutivas en esa misma zona. Figura B-4. Imagen tomada del Curso de Geometría Fractal impartido en el año 2003 en el sitio fractaltec.org, última fecha de consulta 11 de julio del 2022:
http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/pdf/CursoGeometriaFractal.pdf

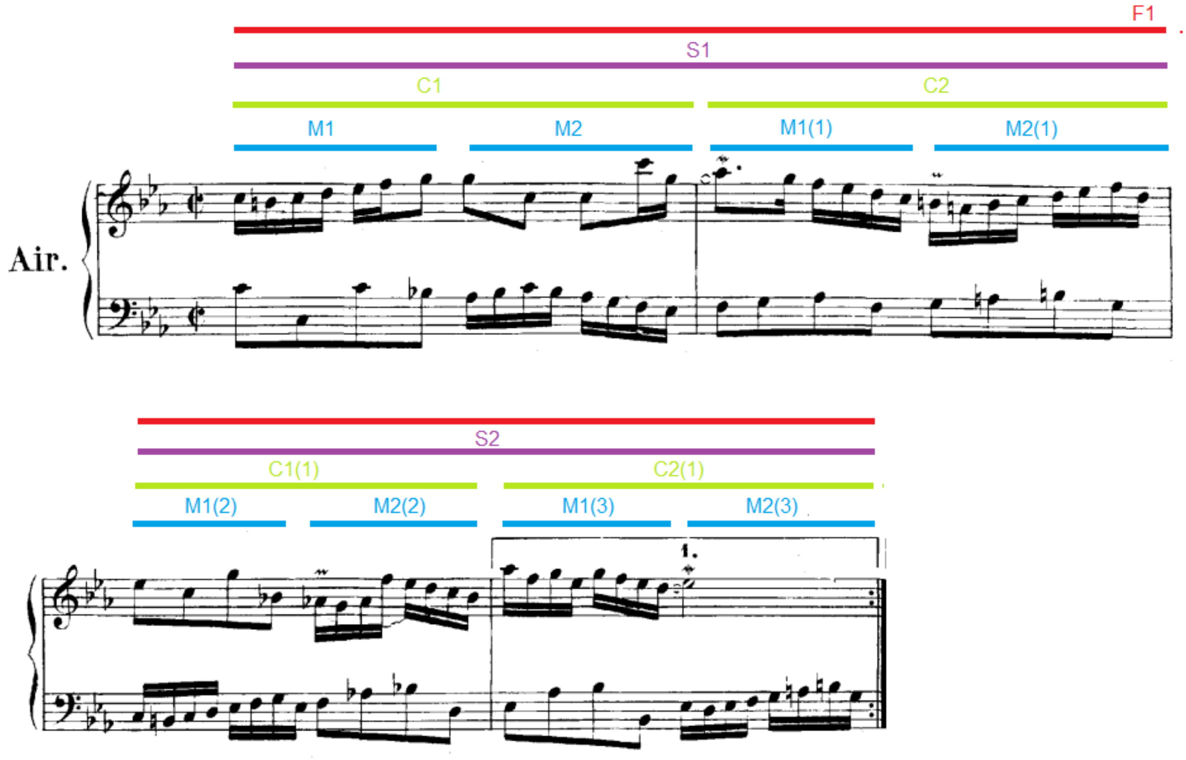


Figura C-1. Análisis e imagen realizados por el autor de la presente tesis con el programa de edición Paint.

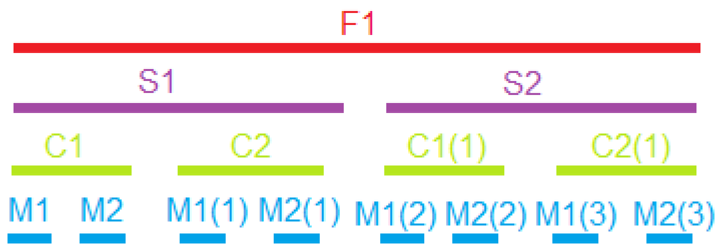


Figura C-2. Figura realizada por el autor de la presente tesis con el programa de edición Paint.

Transcripción del tema de *Resolution* en *A love Supreme*, Figura C-3.[57] La transcripción fue realizada por la página JOWCOL MUSIC, el autor de la transcripción es anónimo. El análisis hecho con base en el principio de autosimilitud fue realizado por el autor de la presente tesis apoyado con el programa de edición Paint.

[57] Transcripción realizada por JOWCOL MUSIC, última fecha de consulta 30 de abril del 2022: https://www.sheetmusicdirect.com/es-ES/se/ID_No/434852/Product.aspx

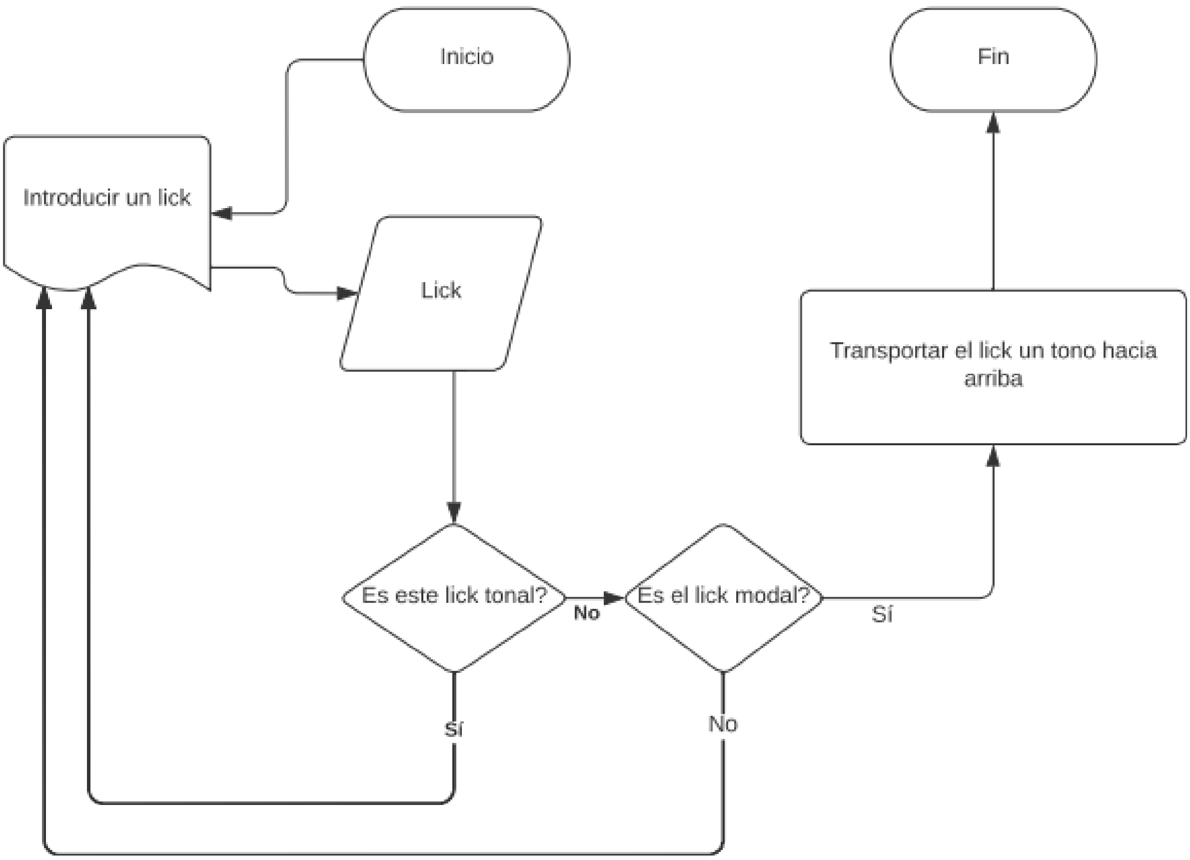


Figura D-1. Imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa Lucidchart.

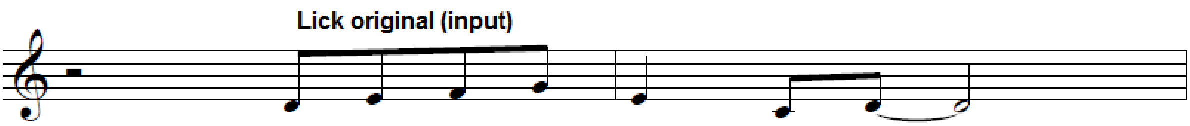


Figura D-2. Figura generada con el programa de edición de partituras Finale.

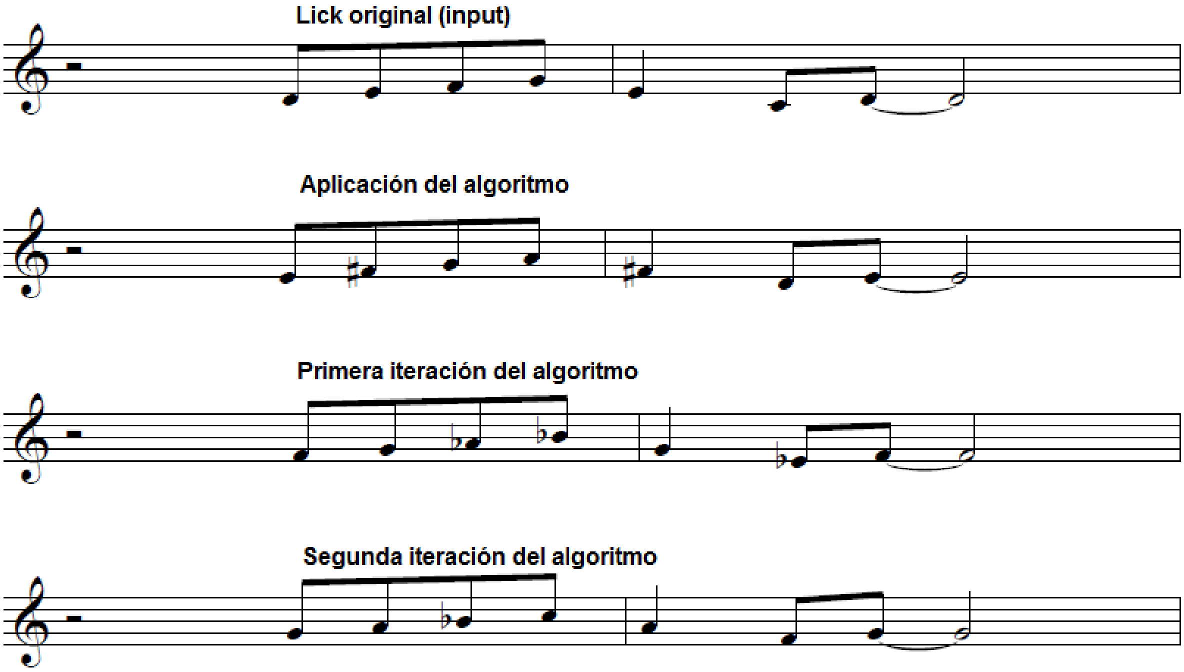


Figura D-3. Imagen realizada por el autor de la presente tesis, usando los programas Finale y Paint.

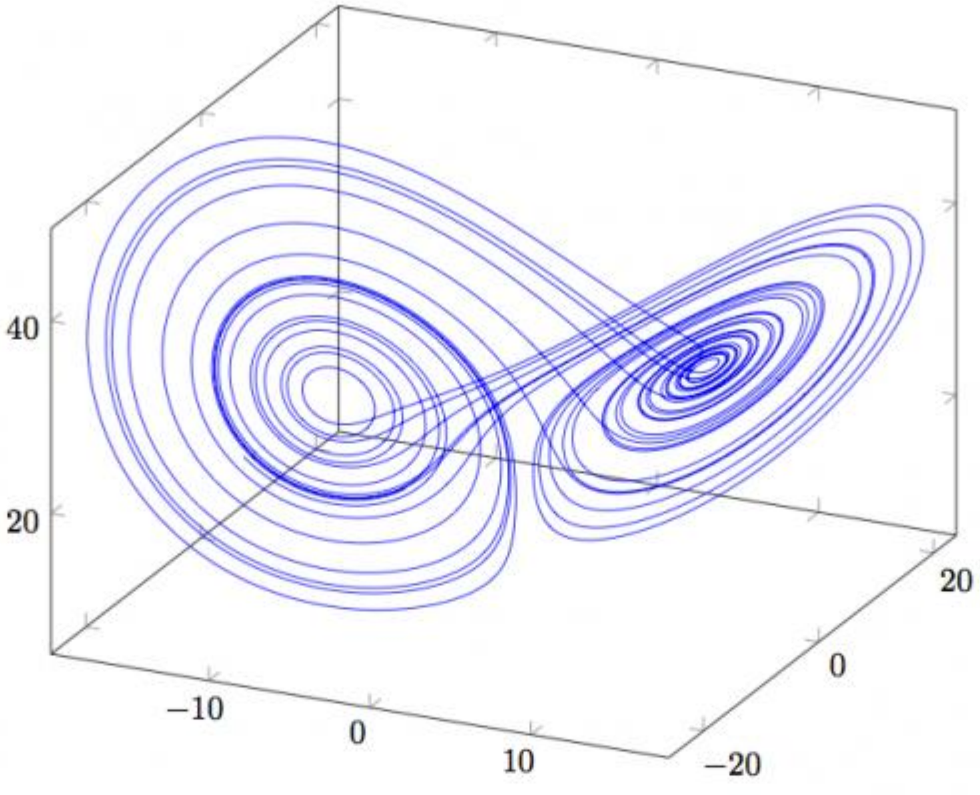
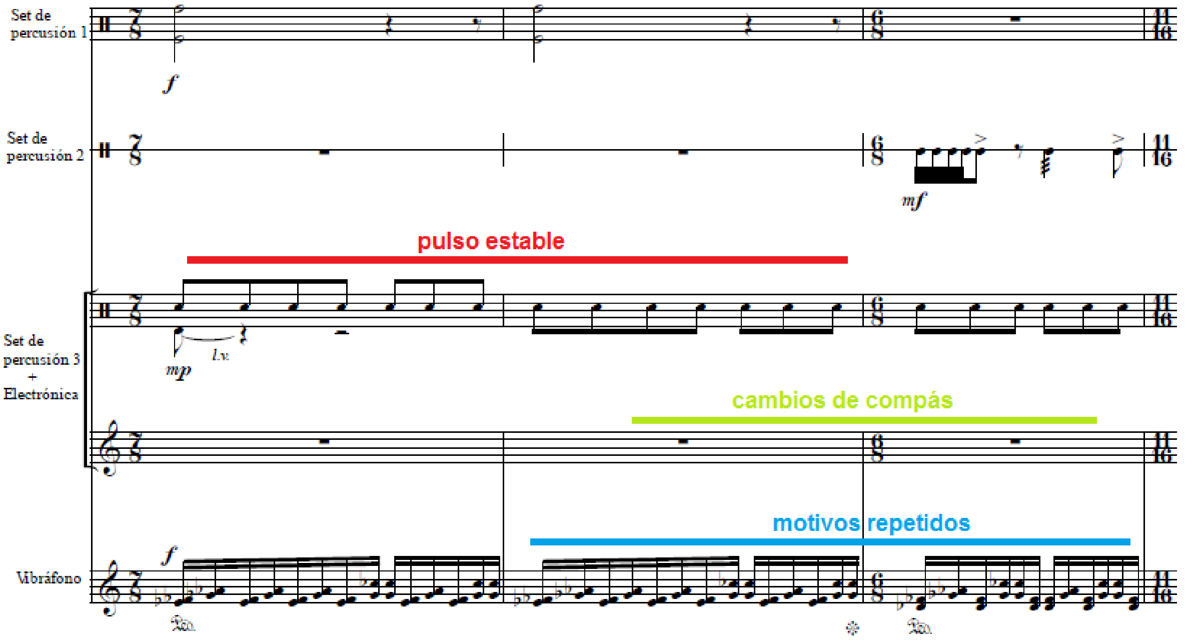
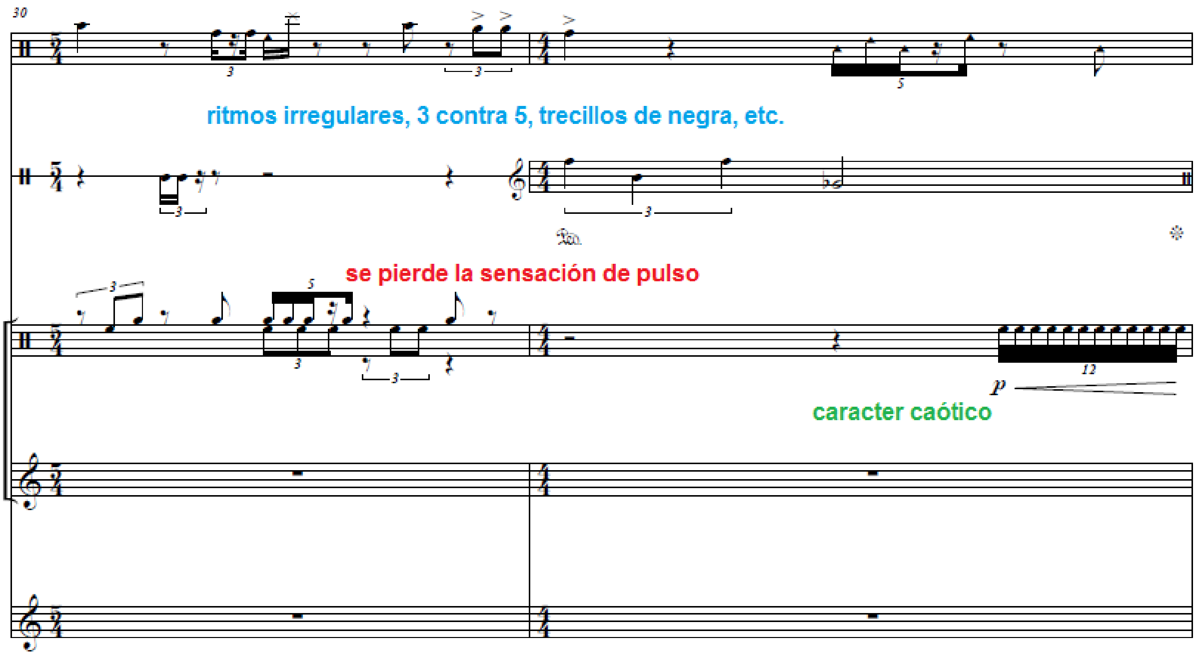


Figura D-4. Imagen tomada del artículo *Qué son la teoría del caos y el efecto mariposa, y cómo nos ayudan a entender mejor el universo),* última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://www.bbc.com/mundo/noticias-59525600



Inicio de la obra “Una teoría del caos”, materiales ordenados, Figura D-5. La obra es del autor de la presente tesis.



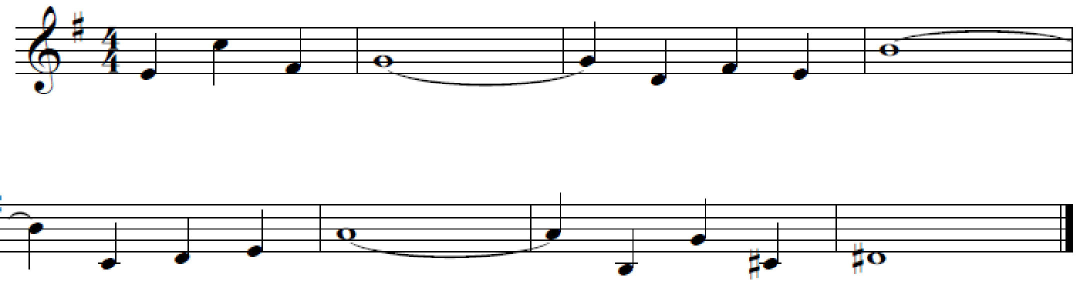
Compáses 30 y 31 de la obra “Una teoría del caos”, materiales más desordenados que los del inicio, Figura D-6. La obra es del autor de la presente tesis.

En este cuadrado mágico la constante mágica es 15, Figura E-1. Imagen tomada del artículo *Como las matemáticas ayudaron a China a crear un imperio.* última fecha de consulta: https://www.elobservador.com.uy/nota/como-las-matematicas-ayudaron-a-china-a-crear-un-imperio-y-a-que-su-emperador-lograra-acostarse-con-121-mujeres-cada-15-dias--20192993935

Placa de hierro con un cuadrado mágico de orden 6 de la dinastía Yuan (1271–1368). Figura E-2. Imagen tomada del artículo *Kameas: Cuadros Mágicos*, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://www.circulodebrujas.com/teosofia/kameas-cuadros-magicos/

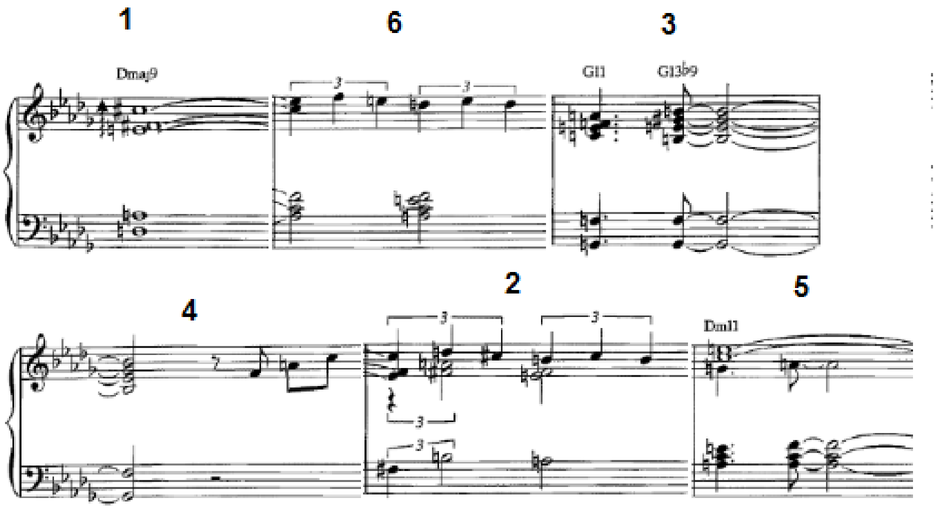
Primeras dos filas de permutaciones de la escala pentatónica, el resto de permutaciones y ejemplos se encuentran en el libro Inside Improvisation, Figura E-3.

Primeros siete compases del tema “Autumn Leaves”, Figura E-4. Imagen tomada del *Real Book 1,* Quinta edición, página 36.



Tema de Autumn Leaves después de aplicar las diferentes permutaciones, Figura E-5. Imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa Finale.

Fragmento de un solo de Oscar Peterson en La chica de Ipanema, Figura E-6. Imagen tomada de la página Piano Play, última fecha de consulta 22 de julio del 2022: http://piano-play.com/



Fragmento del solo de Oscar Peterson después de aplicar la permutación alpha, Figura E-7. Imagen tomada de la página Piano Play, última fecha de consulta 22 de julio del 2022: http://piano-play.com/

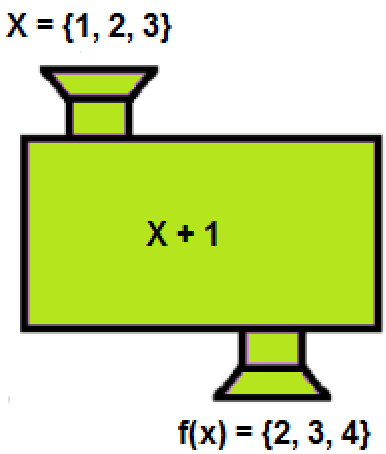
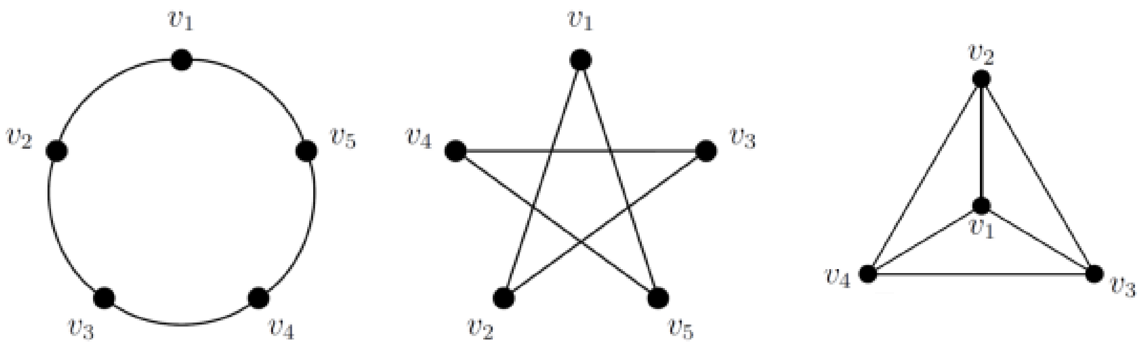
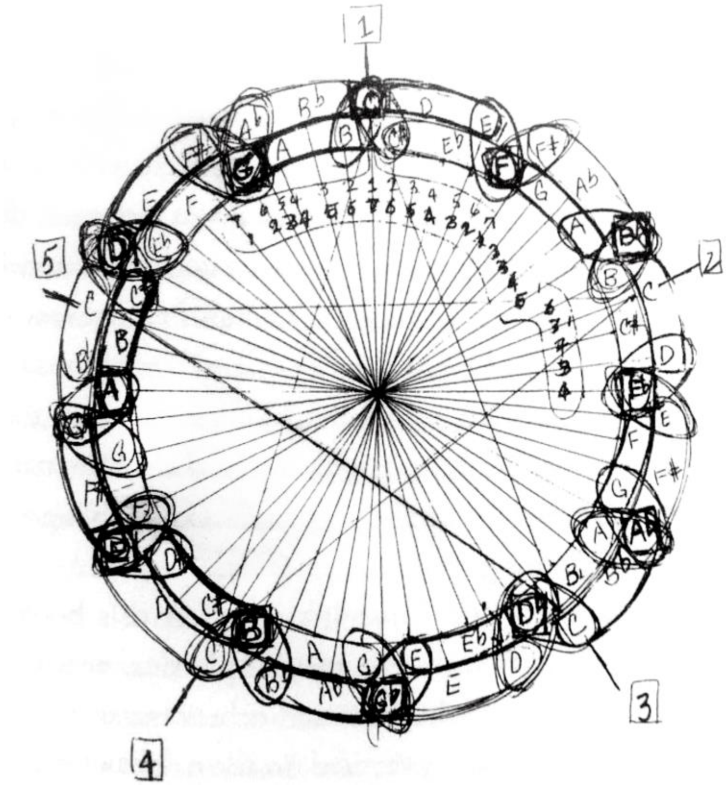


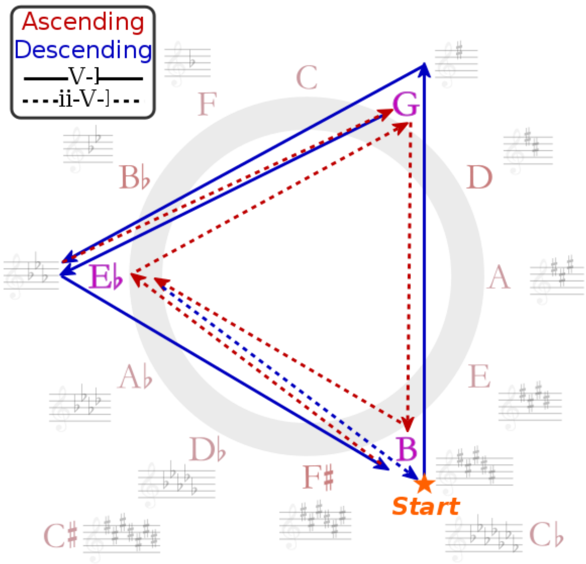
Figura F-1. Imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa Paint.



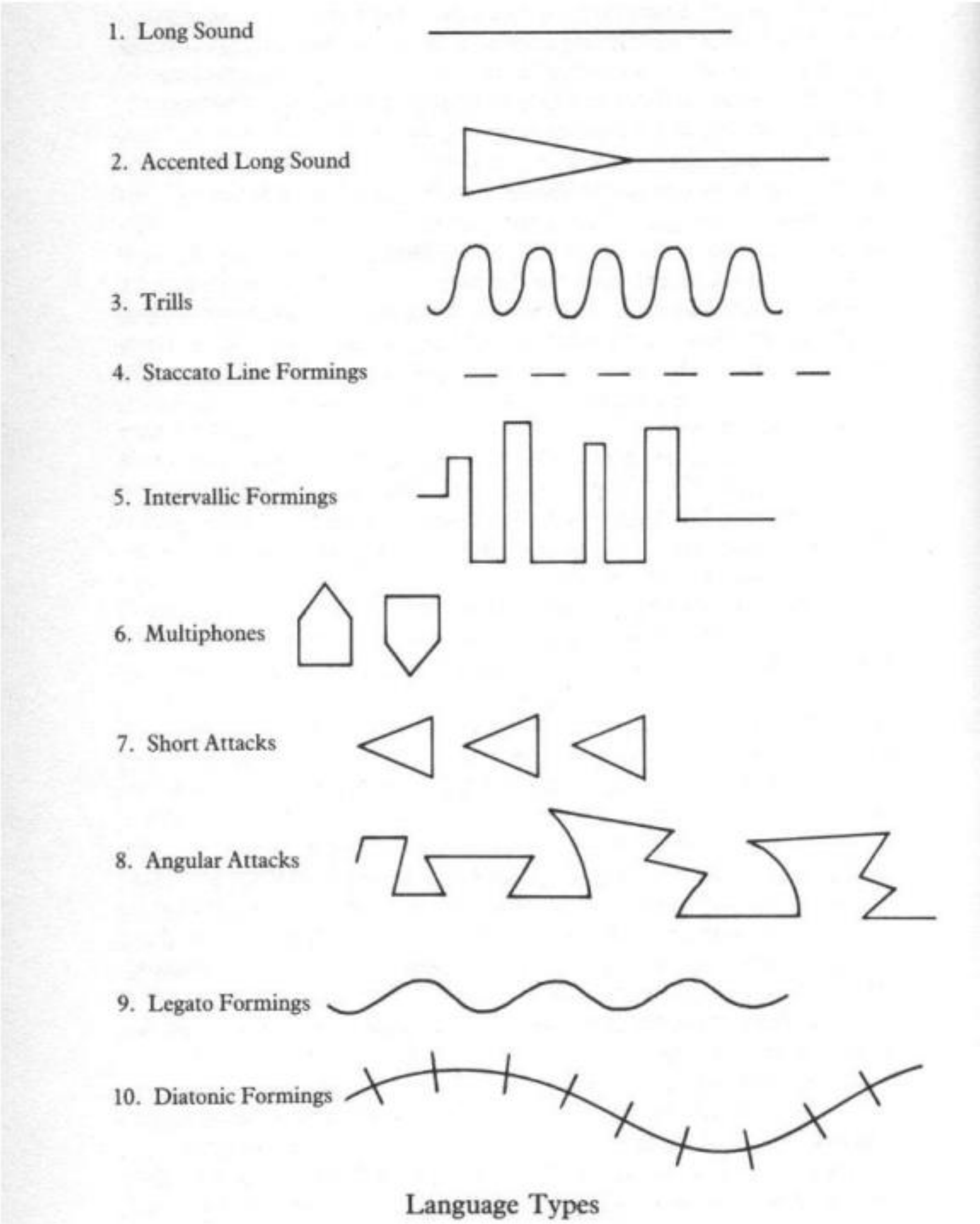
Diferentes ejemplos de gráficas, Figura F-2. Imagenes realizadas por el autor de la presente tesis con los programas Paint y Word.



Círculo Coltrane, Figura F-3. Imagen tomada del artículo *El alma matemática de la música, el círculo de John Coltrane,* última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://culturamas.es/2017/11/06/el-alma-matematica-de-la-musica-el-circulo-de-john-coltrane/#:~:text=Conocido%20como%20el%20c%C3%ADrculo%20de,sostenidos)%20y%20sus%20tonalidades%20relativas.



Relación entre los acordes del estándar Giant Steps, Figura F-4. El autor de la imagen es el usuario "Naturrien" de la página *Wikimedia Commons*



Anthony Braxton luego cambió sus 10 tipos de idioma a 12 tipos de idioma, agregando formas gradiente y sub-identidad. Imagen tomada del libro *Forces in Motion* de Graham Lock, página 4. Figura F-5.

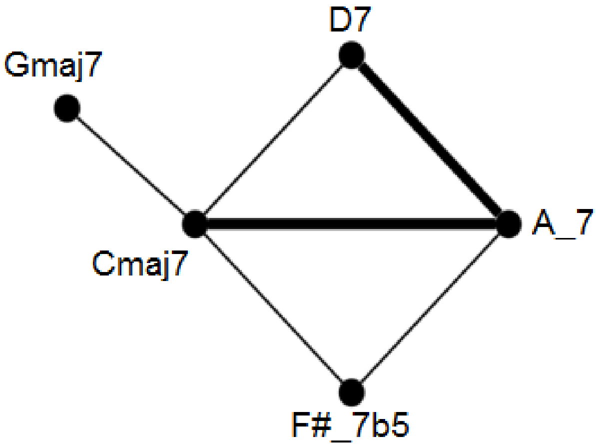


Figura F-6. Imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa Paint.

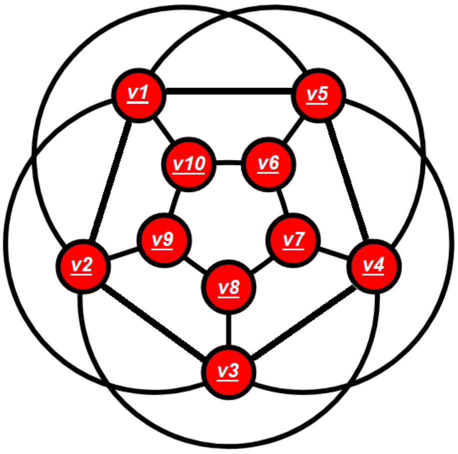


Gráfico de Petersen, Figura F-7. Imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa Paint.

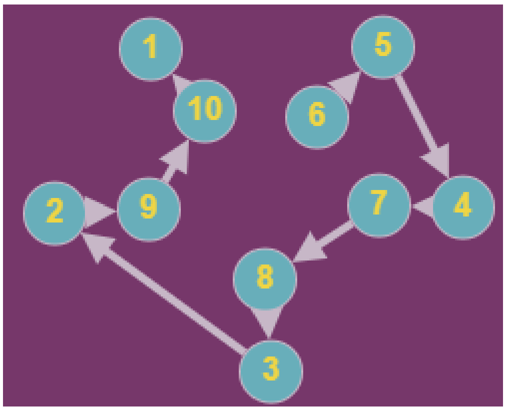


Figura F-8. Imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa Infogram.

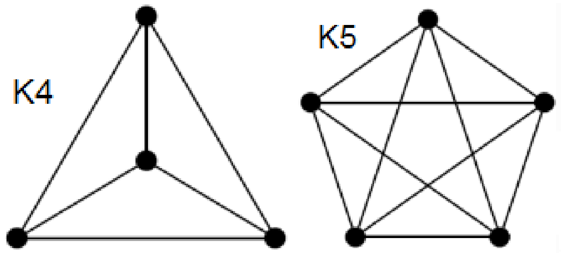
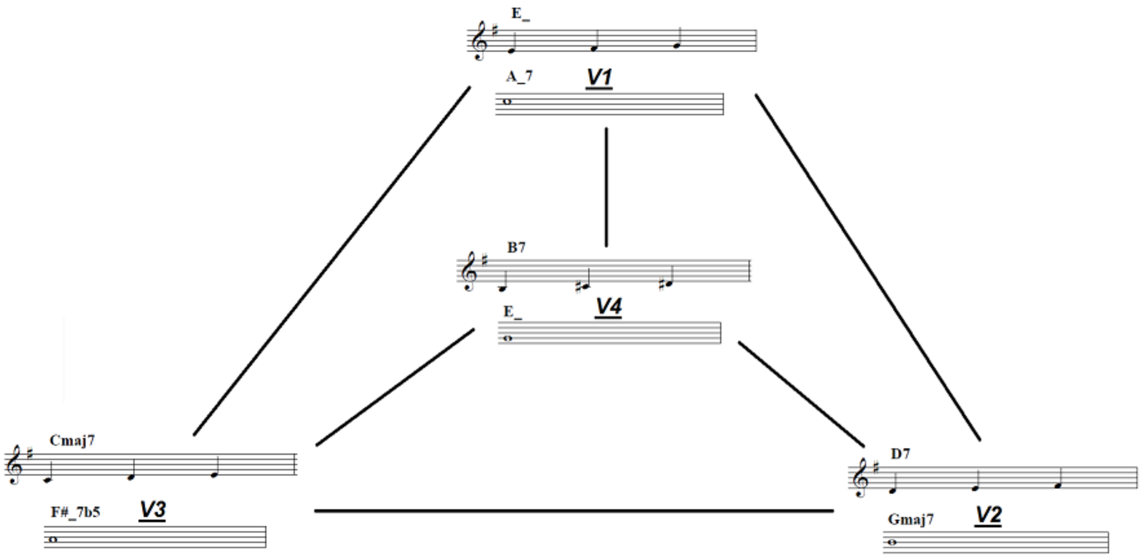


Figura F-89. Imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa Paint.



Representación de los primeros ocho compases de Autumn Leaves usando una gráfica $\square_4$, Figura F-10. Imagen realizada por el autor de la presente tesis con los programas Finale y Paint.

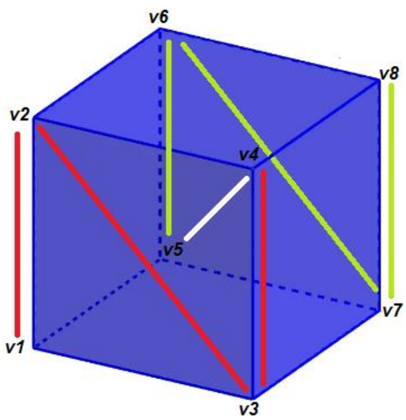


Figura F-11. Imagen tomada de la página “Neurochispas” y editada por el autor de la presente tesis con el programa Paint. Última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://www.neurochispas.com/wiki/partes-de-un-cubo/

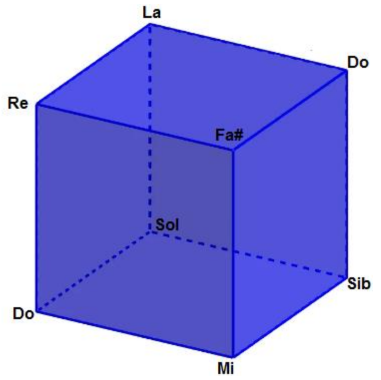


Figura F-12. Imagen tomada de la página “Neurochispas” y editada por el autor de la presente tesis con el programa Paint. Última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://www.neurochispas.com/wiki/partes-de-un-cubo/

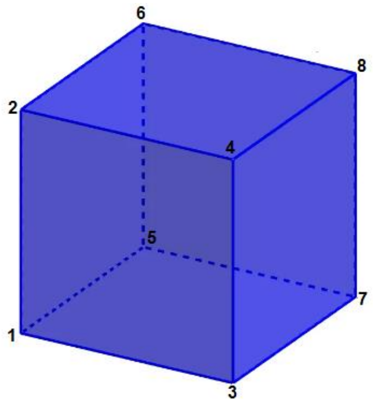


Figura F-13. Imagen tomada de la página “Neurochispas” y editada por el autor de la presente tesis con el programa Paint. Última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://www.neurochispas.com/wiki/partes-de-un-cubo/

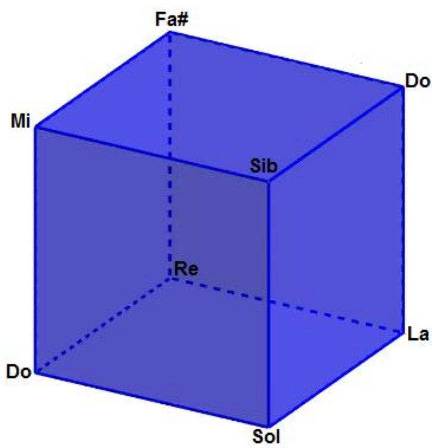


Figura F-14. Imagen tomada de la página “Neurochispas” y editada por el autor de la presente tesis con el programa Paint. Última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://www.neurochispas.com/wiki/partes-de-un-cubo/

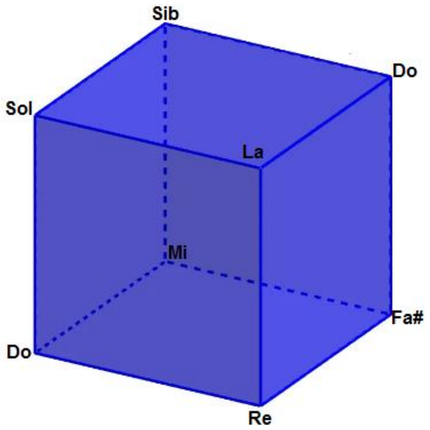


Figura F-15. Imagen tomada de la página “Neurochispas” y editada por el autor de la presente tesis con el programa Paint. Última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://www.neurochispas.com/wiki/partes-de-un-cubo/

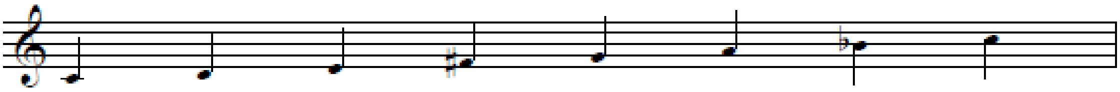


Figura F-16. Conjunto inicial, imagen creada con el editor de partituras Finale.

Operación 1:

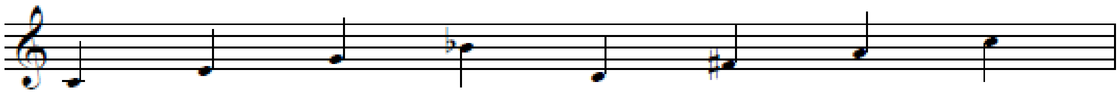


Figura F-17. Conjunto después de aplicar la permutación alfa, imagen creada con el editor de partituras Finale.

Operación 2:

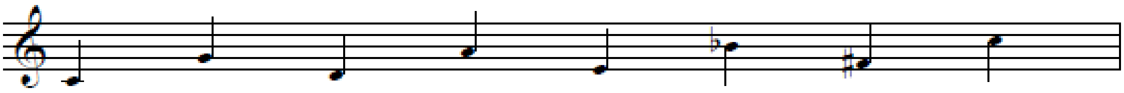
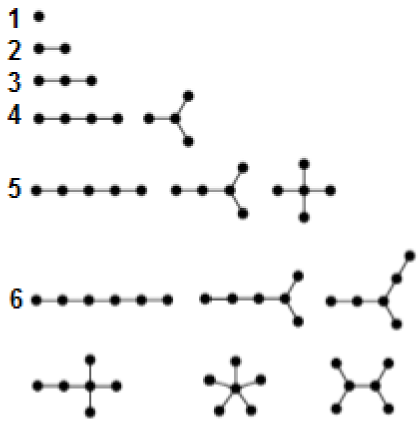


Figura F-18. Conjunto después de aplicar la permutación alfa, imagen creada con el editor de partituras Finale.



Todos los tipos de árboles hasta órden 6, Figura G-1. Imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa Paint.

Figura G-2. Imagen tomada de la página Piano Play, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: http://piano-play.com/

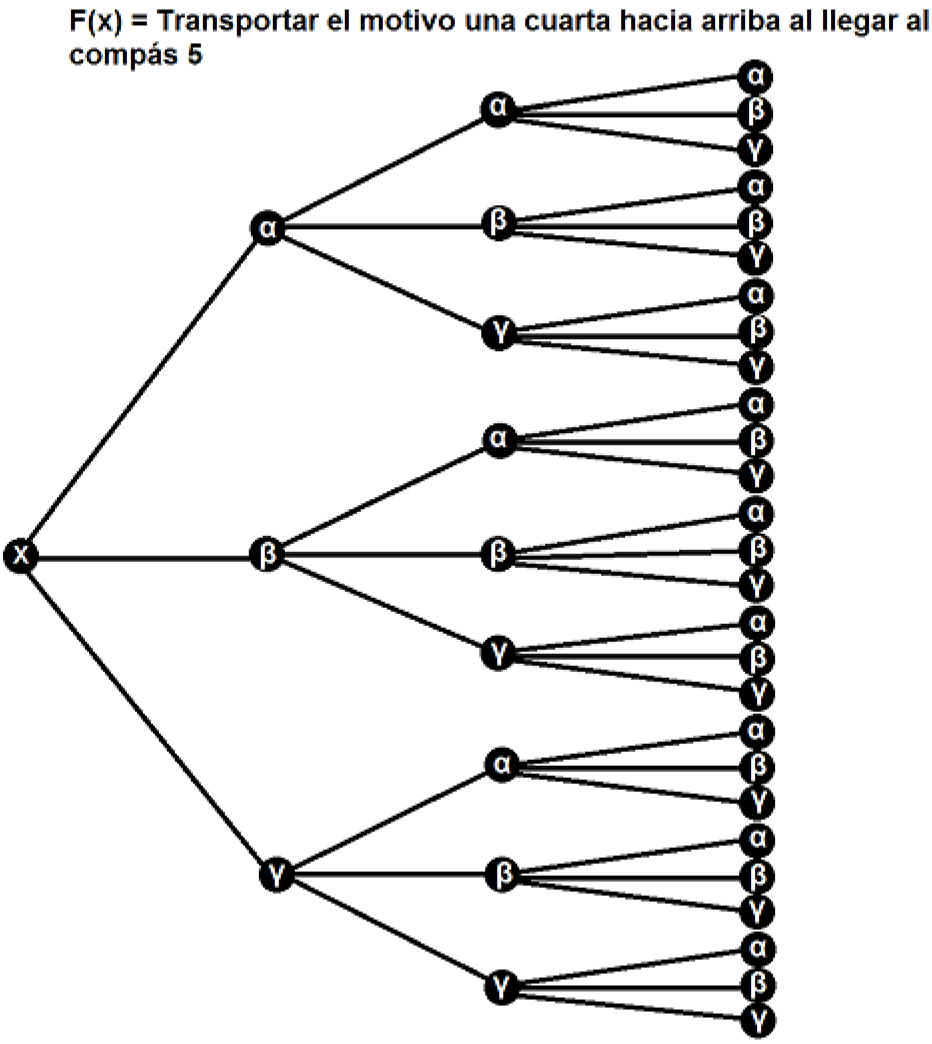


Figura G-3. Imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa de edición Paint.

Tácticas básicas

I.- Instrumentos de viento
II.- Instrumentos de percusión
III.- Golpes con la mano en la caja de resonancia de los instrumentos de cuerda.
IV.- Efectos puntillistas en los instrumentos de cuerda.
V.- *Glissandi* con los instrumentos de cuerda.
VI.- Armónicos contiuos en los instrumentos de cuerda

Tácticas "compuestas"

VII = I & II	VIII = I & III	IX = I & IV	X = I & V	XI = I & VI
XII = II & III	XIII = II & IV	XIV = II & V	XV = II & VI	
XVI = I & II & III	XVII = I & II & IV	XVIII = I & II & V	XIX = I & II & VI	

Total de estrategias que puede llevar a cabo cada uno de los directores, Figura H-1. Autor de la imagen: Bernardo García-Bernalt.

128 Formalized Music

MATRIX OF THE GAME

Conductor Y (columns)

Conductor X (rows)

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	
I I*	116	10	84	-48	4	-52	-60	-40	132	-44	-8	-36	-22	24	-46	102	138	-38	32	2
II	-56	96	-44	-22	-24	52	-50	-14	72	28	6	-48	-20	-16	-10	-24	-36	-20	44	3
III	-110	-2	96	96	24	0	4	-56	-32	-24	4	-52	-48	-40	-16	-44	-16	20	72	1
IV	0	-20	24	84	4	-12	12	-12	-28	8	-8	-24	-40	4	22	-10	-16	28	-16	11
V	-110	-204	-86	4	104	-8	44	20	-8	4	8	-8	-38	-24	-16	40	8	20	-24	1
VI	24	44	12	-14	-6	64	24	-8	24	4	-24	-40	-52	-44	24	64	4	4	-48	7
VII	-56	-52	20	16	36	44	44	4	-52	-48	0	-46	-36	-12	-20	-40	-44	16	40	6
VIII	-32	-8	-52	-8	12	4	4	48	-44	-12	8	-52	-4	8	32	-36	-40	-16	24	3
IX	-36	10	-16	-32	2	4	-44	-52	52	44	2	48	-18	64	24	22	-36	-28	-52	6
X	-48	22	-22	4	-4	32	-46	-16	8	-36	-24	-4	8	32	24	4	-8	20	-32	4
XI	4	24	26	-4	4	-28	-36	-12	20	4	64	68	4	40	-12	-2	-24	-27	-32	10
XII	-36	-196	-188	-28	-34	-42	36	32	24	0	-32	74	76	-4	4	-32	-28	40	76	7
XIII	166	-20	-42	-40	-52	-44	14	-16	4	22	-14	80	72	-26	-58	40	-18	78	42	2
XIV	32	-14	-34	0	-32	-52	36	12	-12	36	24	-28	42	76	-48	-64	-30	-29	72	5
XV	-20	8	4	28	-28	14	0	20	2	-4	-32	14	26	-56	46	-36	12	-8	14	4
XVI	88	88	104	-28	20	16	-2	-16	20	-20	-50	-26	-8	-36	-40	108	-24	-33	60	9
XVII	32	92	52	-28	16	8	-44	-48	-32	0	-16	-16	-20	-32	24	-30	96	52	-36	8
XVIII	-36	-24	8	4	0	-2	52	78	-12	-4	36	-8	28	-24	-16	-14	42	-12	-40	9
XIX	-52	-52	-66	4	6	-6	-4	44	-66	-4	44	12	44	40	16	-46	44	-42	-32	4
	1	1	2	3	7	11	3	3	4	6	9	2	5	7	10	4	4	8	10	100

Fig. IV–5. Strategy

Two-person Game. Value of the Game = 0.

- Woodwinds
- Normal percussion
- Strings striking sound-boxes
- Strings pizzicato
- Strings glissando
- Strings sustained

Combinations of two and three different tactics

Matriz de pagos de Stratégie, Figura H-2. Autor de la imagen: Bernardo García-Bernalt

Partitura de *Round Midnight*, Figura H-3. Imagen tomada de *The Real Book 1*, Quinta edición, pagina 364.

	I	II	III	IV	V
I	2	2	2	3	4
II	2	2	2	3	4
III	2	2	2	4	4
IV	3	3	4	3	5
V	4	4	4	5	5

Figura H-3. Matriz de pagos del juego cooperativo en Round Midnight, imagen realizada por el autor de la presente tesis con el programa de edición Paint.

	I	II	III	IV
I	1	2	2	3
II	2	1	2	3
III	2	2	2	4
IV	3	3	4	3

Figura H-4.

AUDIOS

Audio 1. Johann Sebastian Bach - Suite Francesa No. 2 “Aire” .Las Suites francesas, BWV 812–817 son un grupo de seis suites para clave escritas por el compositor alemán Johann Sebastian Bach entre 1722 y 1725. Link a la grabación: https://www.youtube.com/watch?v=q8wyG4gRwjg&ab_channel=PaulBarton

Audio 2. John Coltrane - *Resolution*. A Love Supreme es un álbum de jazz grabado por el cuarteto de John Coltrane el 9 de diciembre de 1964 en el estudio de Rudy Van Gelder en Englewood Cliffs, Nueva Jersey. Link a la grabación: https://www.youtube.com/watch?v=ll3CMgiUPuU&ab_channel=Jazzaddict98

Audio 3. Kaija Saariaho - *Nymphea Secret Garden III*. Obra para cuarteto de cuerdas y electrónica, compuesta en el año 1987. Link a la grabación: https://www.youtube.com/watch?v=RboRFnTY-nM&ab_channel=KronosQuartet-Topic

Audio 4. Ejemplo de la transposición de un lick usando un algoritmo. Link al audio: https://www.youtube.com/watch?v=_rQCPIX1WFw&ab_channel=Adri%C3%A1nMercadoContreras

Audio 5. La Grosse Fuge (en español: Gran Fuga) es un único movimiento para cuarteto de cuerdas compuesto por Ludwig van Beethoven entre 1825 y 1826 Interpretación de la gran fuga por el cuarteto de cuerdas Alban Berg: https://www.youtube.com/watch?v=13ygvpIg-S0&ab_channel=NataliaKaratjeva

Audio 6. Adrián Mercado - *Una teoría del caos*. Obra para cuarteto de percusiones y electrónica. Link a la grabación original: https://www.youtube.com/watch?v=aspeBJxduJc

Audio 7. El free jazz es uno de los estilos o subgéneros propios del jazz. La expresión se utiliza en inglés, aunque la traducción "jazz libre" expresa igualmente el sentido del término. Ejemplo de free jazz: https://www.youtube.com/watch?v=8bRTFr0ytA8&ab_channel=MUSIC%3F

Audio 8. Autumn Leaves es una versión de la canción *Les feuilles mortes* de Jacques Prévert y Joseph Kosma. Fue el primer sencillo en Italia y Francia del álbum Fame, lanzado en 1978. Para escuchar la canción: https://www.youtube.com/watch?v=u6GN6y1erf0

Audio 9. Primeros 4 compases de Autumn Leaves después de aplicar las permutaciones. Link al audio: https://www.youtube.com/watch?v=wSPVGirrTgg&ab_channel=Adri%C3%A1nMercadoContreras

Audio 10. *Garota de Ipanema* (en español *La chica de Ipanema*) es una canción de bossa nova compuesta en 1962, con letra de Vinícius de Moraes y música de Antonio Carlos Jobim. Link a la canción: https://www.youtube.com/watch?v=AWxyzVbiT98

Audio 11. Link a la grabación original del solo de Oscar Peterson: https://www.youtube.com/watch?v=WeDjbJMb1yw

Adio 12. Solo de Oscar Peterson después de aplicar permutaciones. Link al audio: https://www.youtube.com/watch?v=eMmIQleoF8Y&ab_channel=Adri%C3%A1nMercadoContreras

Audio 13. Giant Steps es el quinto álbum de estudio de John Coltrane como líder. El álbum, su primera grabación para Atlantic Records, fue grabado entre mayo y diciembre de 1956. Link al álbum original: youtube.com/watch?v=xy_fxxj1mMY

Audio 14. Adrián Mercado - Grafos (2022), obra para piano solo, link a la obra: https://www.youtube.com/watch?v=KtM-h5yeBRI

Audio 15. Oscar Peterson - Autumn Leaves (transcripción): https://www.youtube.com/watch?v=sSVl7ake-3U

Audio 16. Iannis Xenakis - Strategie, Año 1961. Link a la grabación: https://www.youtube.com/watch?v=Ipwbze36uj0&ab_channel=WelleszTheatre.

Audio 17. Round Midnight es un estándar de jazz firmado en 1944 por el pianista Thelonious Monk, de quien fue la idea original, y el trompetista Cootie William. Link a la obra: https://www.youtube.com/watch?v=IKayR1oqC7w

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alegría, Pedro (2009), *La magia de los cuadrados mágicos*, Revista Sigma, No. 34, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://www.ehu.eus/~mtpalezp/descargas/magiacuadrada.pdf

Alexander, Stephon (2016), *The Jazz of Physics: The Secret Link Between Music and the Structure of the Universe,* Basic Books.

Barnsley, Michael F. (1993), *Fractals Everywhere,* Texas, Estados Unidos, Morgan Kaufmann Publishers.

Bergonzi, Jerry (1994), *Inside Improvisation,* Mainz: Advance Music, Vol. 1.

Bernoulli, Jakob (2005) [1713], *"The Art of Conjecturing, together with Letter to a Friend on Sets in Court Tennis"*, Traducción por Edith Sylla, Baltimore, Estados Unidos, John Hopkins Press.

Cournot, Antoine Augustin (1838), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, París, Francia, Libreria de la Real Universidad de Francia.

Estrada, Julio, Jorge Gil (1984) *Música y Teoría de Grupos Finitos*, México: Universidad Nacional Autónoma de México.

García-Bernalt, Bernardo (2021), *Stratégie de Iannis Xenakis, teoría de juegos y música*. Revista Diarivm VSAL, Universidad de Salamanca, Facultad de estética, teoría de las artes y musicología, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://diarium.usal.es/bgarcia/2012/07/10/strategie-de-iannis-xenakis-teoria-de-juegos-y-musica/

Gioia, Ted (2012), *The Jazz Standards,* Inglaterra: Oxford University Press, página 24.

Gioia, Ted (2012), *The Jazz Standards,* Inglaterra: Oxford University Press, página 128.

Hegel, Georg Wilhelm Friedrich [1834] (1989), *Lecciones sobre la estética*, Barcelona, España, traducción al español de Raúl Gabas.

Hernandez, Miguel A. (2021), *El dilema del prisionero*, Revista Historia Hoy, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: https://historiahoy.com.ar/el-dilema-del-prisionero-n4354/

Koch, H. Von (1904), *Acerca de una curva continua que no posee tangentes y obtenida por los métodos de la geometría elemental*, Archivo de Matemáticas, Astronomía y Física, pp. 681-704.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1666), *"Disertación acerca del arte combinatorio",* Universidad Católica de Chile.

Lewin, Roger (1991), *La estructura fractal de la música,* Revista Issue 1767, publicado el 4 de mayo del año 1991, última fecha de consulta: 11 de julio de 2022: https://www.newscientist.com/article/mg13017674-100-science-the-fractal-structure-of-music/

Lock, Graham (1985), *Forces in Motion: Anthony Braxton and the Meta-reality of Creative Music.* Inglaterra, Reino Unido, pp 3-4.

Lluis Puebla, Emilio, Janine du Plessis, Octavio Agustín-Aquino y Mariana Montiel (2009) *Una Introducción a la Teoría de Grupos con Aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música*, Sociedad Matemática Mexicana. Publicaciones Electrónicas, Serie Textos, vol. 10.

Neumann, John, Oskar Morgenster (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Nueva Jersey, Estados Unidos, Princenton University Press.

Romero Ortíz, María (2021), *El jardín japonés en Six Japanese Gardens de Kaija Sariaho,* revista Quodlibet, Numéro 75, vol. 1, pp. 272-340.

Scruton, Roger (2011), *Beauty and meaning; Music and morality, An interview with Roger Scruton*, Entrevista realizada por el Postgraduate Journal of Aesthetics, Vol. 8, No. 1.

Serrano, Carlos (2021), *¿Qué son la teoría del caos y el efecto mariposa? Y cómo nos ayudan a entender mejor el universo,* Artículo de opinión publicado el día 5 de diciembre, Revista BBC, última fecha de consulta 11 de julio del 2022: bbc.com/mundo/noticias-59525600

Stewart, Ian (1989), *¿Juega Dios a los Dados?* Nueva Jersey, Estados Unidos, Blackwell Publishing, ISBN: 978-0-631-23251-3.

Shelton, Mathew (2019), *Introducción a la Geometría Fractal*, curso impartido en la página Fractal Tec, última fecha de consulta: 15 de enero de 2021.

Universidad de Barcelona, ¿Qué es un Fractal? [Folleto], última fecha de consulta 27 de junio 2022: http://www.ub.edu/matefest_infofest2011/triptics/fractal.pdf

Vázquez, Herbert (2006), *Fundamentos teóricos de la música atonal,* Ciudad de México, México, Dirección General de Publicaciones y Fomento Editorial.

Xenakis, Iannis (1963), *Formalized Music; Thoughts and mathematics in composition,* Nueva York, Estados Unidos, Pendragon Press.

BIBLIOGRAFÍA

Aceff, Flor y Emilio Lluis Puebla (2006), *Matemática en la matemática, música, medicina y aeronáutica*, México: Sociedad Matemática Mexicana, Publicaciones Electrónicas.

Aquino, Octavio A. y Emilio Lluis Puebla (2011), "Una invitación a la teoría matemática de la música. II. Armonía y contrapunto", *Ciencias* 102, abril-junio, pp. 68-77, última fecha de consulta: 19 de abril de 2022: https://www.revistaciencias.unam.mx/pt/103-revistas/revista-ciencias-101/841-una-invitacion-a-la-teoria-matematica-de-la-musica-i.html

Barron, E.N. (2008), *Game Theory, An Introduction*, Estados Unidos, John Wiley Sons.

Brothers, Harlan (2006), *Structural Scaling in Bach´s Cello Suite No. 3,* Londres: World Scientific Publishing Company, vol. 15, no. 1, abril, pp. 89-95.

Descartes, René [1618] (2001), *Compendio de música*, Madrid: Editorial Tecnos.

Kadanoff, Leo P. (1986), "On two levels", *Physics Today*, vol. 39, no. 9, septiembre, página 7.

Madden, Charles (1999), *Fractals in Music*, *Introductory Mathematics for Musical Analysis*, Salt Lake City: High Art Press.

Montiel, Mariana (1996), *Matemáticas y música, perspectivas a través del tiempo,* Tesis, Universidad Nacional Autónoma de México.

Perez, Alberto (2019), *La teoría del caos: las leyes de lo impredecible,* Colombia: Rba Libros.

R. Wilhelmi, Miguel (2004), *Combinatoria y Probabilidad*, Granada, España, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Strang, Gilbert (2016), *Introduction to Linear Algebra*, Massachusetts Institute of Technology, Wellesley Cambridge Press.