Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ciencias

CONEXIDAD LOCAL POR ARCOS EN HIPERESPACIOS DE CONTINUOS NO MÉTRICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

EDGAR COLÍN CRUZ

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. PATRICIA PELLICER COVARRUBIAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.

2022

Índice

Agradecimientos

A mis padres Alejandro y María Esther, por todo su apoyo y amor incondicional.

A mis hermanos Alonso y Marcela, que son mi guía y mayor ejemplo.

A mi sobrina Valeria, que es el orgullo de todos.

A mi profesora, tutora y más que eso, la Dra. Patricia Pellicer, por todas sus enseñanzas, su paciencia y, sobre todo, por brindarme su apoyo en todo momento.

A mis profesores y amigos, el Dr. Carlos Paniagua y el M. en C. Luis Paredes, que han sido parte fundamental en mi formación y desarrollo profesional.

A mis sinodales, que desde el primer momento me brindaron su tiempo y apoyo.

A todos mis amigos, en especial a Héctor, que también es parte de mi familia.

A mis alumnos, que me han acompañado durante este largo proceso.

Introducción

Un *continuo de Hausdorff* es un espacio compacto, conexo, de Hausdorff y no vacío. Si además X es metrizable, diremos que X es un *continuo*. Dado un espacio topológico X a las familias de subconjuntos de X que cumplen características específicas les llamamos *hiperespacios* de X. Algunos de los hiperespacios más conocidos son:

- $2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es compacto y no vacío}\}$ y
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$.

Desde nuestros primeros cursos de topología nos familiarizamos con el concepto de *conexidad por trayectorias*. Cuando X es un espacio que no es metrizable, no es tan conveniente utilizar trayectorias, pues no siempre podemos asegurar la existencia de funciones continuas del intervalo $[0, 1]$ al espacio X. Por tal motivo, en la Sección 4.2 introduciremos el concepto de *arco generalizado* (Definición 4.2.1). La motivación de tal definición es precisamente generalizar las propiedades, tanto de orden como topológicas, del intervalo $[0, 1]$ para una clase de espacios que no necesariamente son metrizables. De esta manera, en vez de considerar funciones continuas cuyo dominio sea $[0, 1]$, tomaremos funciones continuas para las cuales su dominio sea un arco generalizado. Este tipo de funciones será mucho más útil al considerar continuos de Hausdorff que no necesariamente son metrizables.

El presente trabajo está basado en algunos resultados de [4]. En tal artículo, J.T. Goodykoontz presenta condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla la arco-conexidad local de 2^X en elementos de $C(X)$ y 2^X, siempre y cuando X sea un continuo. Lo que se hará en esta tesis es generalizar estos resultados para cuando X no es metrizable; es decir, para cuando X es un continuo de Hausdorff.

En el Capítulo 1 se introducirá la notación general. Además, se probarán algunos resultados básicos que utilizaremos a lo largo de esta tesis.

En el Capítulo 2 presentaremos la definición de *conexidad local fuerte por continuos* (Definición 2.0.2). Asimismo, veremos algunas relaciones que existen entre tal definición y los conceptos de conexidad local y compacidad local.

En el Capítulo 3 introduciremos el concepto de hiperespacio, definiremos los hiperespacios tales como 2^X y $C(X)$ y veremos que podemos dotar a 2^X y $C(X)$ de una estructura de espacio topológico. Tal topología recibe el nombre de *topología de Vietoris*. También, veremos algunos resultados sobre la topología de Vietoris y sobre uniones en hiperespacios. Finalmente, se presentará la definición de *arco ordenado* en hiperespacios de continuos de Hausdorff (Definición 3.4.1), la cual es una herramienta muy importante dentro de la teoría de hiperespacios.

En el Capítulo 4 veremos que a partir de un conjunto totalmente ordenado podemos obtener un espacio topológico de manera natural, introduciremos el concepto de arco generalizado y presentaremos propiedades relevantes de esta clase de espacios.

Para el Capítulo 5 ya casi estaremos listos para generalizar las propiedades de arco-conexidad y de arco-conexidad local que Goodykoontz probó en [4]. Para esto, definiremos lo que son un camino y un camino inyectivo (Definición 5.2.1). Posteriormente, introduciremos los conceptos de conexidad por arcos y conexidad local por arcos (Definición 5.2.6 y Definición 5.2.7).

Para el Capítulo 6, probaremos las versiones no métricas de los teoremas sobre arco-conexidad local para 2^X que Goodykoontz demostró en [4, Teorema 1, p. 42] y [4, Teorema 2, p. 43]. Más precisamente, tales resultados nos darán condiciones necesarias y suficientes para que 2^X sea localmente conexo por arcos en elementos de $C(X)$ y 2^X, siempre y cuando X sea un continuo de Hausdorff.

Finalmente, en el Apéndice nos dedicaremos a recordar algunos conceptos sobre la convergencia de redes.

En la página 121 de [7], Makuchowski hace referencia al resultado obtenido por Goodykoontz en [4, Teorema 2, p. 43]. Menciona que, a pesar de que Goodykoontz hace la prueba para continuos métricos, de manera análoga se puede demostrar para continuos de Hausdorff. Por ello, hace omisión de la prueba. Por tal motivo, en esta tesis nos dimos a la tarea de hacer la demostración. En el camino descubrimos que había que usar más herramienta de la que parecía a simple vista, por lo que hubo que incluirla. Asimismo, hubo que rellenar algunos huecos que el mismo Goodykoontz no probó para el caso métrico. Makuchowski tampoco reparó en ello, por lo que tuvimos que rellenar estos huecos para el caso general, además de incluir toda la herramienta necesaria de los capítulos 4, 5, 6 y 7. Esto nos llevo por un camino nada sencillo, pero logramos ingeniárnoslas para obtener el resultado. En conclusión, en esta tesis presentamos argumentos que, hasta donde sabemos, no se habían desarrollado con anterioridad.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos la notación general que se utilizará a lo largo de este trabajo. Asimismo, probaremos algunos resultados sobre conexidad y compacidad local. Los resultados son relativamente sencillos, pero serán incluidos a fin de hacer este trabajo lo más autocontenido posible.

1.1 Notación y resultados generales

Los símbolos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ denotarán al conjunto de los números naturales y al conjunto de los números reales, respectivamente.

Los símbolos $\mathrm{int}_Y(A)$, $\mathrm{cl}_Y(A)$, $\mathrm{fr}_Y(A)$ y $\mathrm{ext}_Y(A)$ denotarán el interior, la cerradura, la frontera y el exterior de un conjunto A, relativo al subespacio Y, de un espacio topológico X, respectivamente. Si $X = Y$, se omitirán los subíndices.

Definición 1.1.1 Sea X un conjunto. Decimos que X *es no degenerado* si X tiene al menos dos elementos.

El siguiente resultado es muy conocido. Lo incluiremos pues se usará varias veces en capítulos posteriores.

Lema 1.1.2 *Sean X y Y espacios topológicos y sean $A_1, A_2, \cdots, A_n$ subconjuntos cerrados de X tales que $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Si $f_1 : A_1 \to Y$, $f_2 : A_2 \to Y, \ldots,$ $f_n : A_n \to Y$ son funciones continuas tales que para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y para todo $x \in A_i \cap A_j$ se tiene que $f_i(x) = f_j(x)$, entonces la función $h : X \to Y$ dada por:*

$$h(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si} \quad x \in A_1; \\ f_2(x), & \text{si} \quad x \in A_2; \\ \vdots & \\ f_n(x), & \text{si} \quad x \in A_n \end{cases}$$

está bien definida y es continua.

Prueba.

Como para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $x \in A_i \cap A_j$ se cumple que $f_i(x) = f_j(x)$, la función h está bien definida.

Sea K un subconjunto cerrado de Y. Puesto que $X = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} A_i$, entonces

$$h^{-1}[K] = h^{-1}[K] \cap \left(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} A_i \right) = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} (h^{-1}[K] \cap A_i). \qquad (1.1)$$

Además, por definición de h se sigue que

$$\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} (h^{-1}[K] \cap A_i) = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} f_i^{-1}[K]. \qquad (1.2)$$

De (1.1) y (1.2) se deduce que

$$h^{-1}[K] = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} f_i^{-1}[K]. \qquad (1.3)$$

Debido a que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ la función f_i es continua, se tiene que $f_i^{-1}[K]$ es cerrado en A_i y dado que A_i es cerrado en X, se concluye que $f_i^{-1}[K]$ es cerrado en X. Usando esto último y (1.3), obtenemos que $h^{-1}[K]$ es cerrado en X y por consiguiente h es continua. ■

1.2 Conexidad

Recordemos que un espacio es *conexo* si no se puede ver como la unión de dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos. En esta sección introducimos algunos resultados relacionados con la conexidad que usaremos más adelante.

Definición 1.2.1 Sean X un espacio topológico y $x, y \in X$. Una *cadena simple que conecta a x con y* es un conjunto $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ de subconjuntos abiertos de X, tal que $x \in U_1$, $y \in U_n$ y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y solo si $|i-j| \leqslant 1$.

Lema 1.2.2 *Sea X un espacio topológico. Entonces X es conexo si y solo si para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X y cada par de puntos $x, y \in X$, existe una cadena simple que conecta a x con y, formada por elementos de $\mathcal{U}$.*

Prueba. Supongamos que X es conexo. Sean $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X y $x, y \in X$. Consideremos el conjunto

$$Z = \{z \in X : \text{existe una cadena simple que conecta a } x \text{ con } z, \text{ formada por elementos de } \mathcal{U}\}.$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Luego, $\{U\}$ es una cadena simple que conecta a x con x. Por tanto $x \in Z$ y así

$$Z \neq \emptyset. \tag{1.4}$$

Sea $z \in Z$. Entonces existe $\{U_1, \ldots, U_m\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $x \in U_1$, $z \in U_m$ y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y solo si $|i-j| \leqslant 1$.

Si tomamos $w \in U_m$, se tiene que $\{U_1, \ldots, U_m\}$ es una cadena simple que conecta a x con w, es decir, $w \in Z$. Así, $U_m \subseteq Z$ y puesto que $z \in U_m \subseteq Z$ deducimos que

$$Z \text{ es abierto en } X. \tag{1.5}$$

A continuación mostraremos que

$$Z \text{ es cerrado en } X. \tag{1.6}$$

Sea $z \in \mathrm{cl}(Z)$. Debido a que $\mathcal{U}$ es cubierta abierta de X, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $z \in U$, y gracias a que $z \in \mathrm{cl}(Z)$ se sigue que $Z \cap U \neq \emptyset$.

Si consideramos $w \in Z \cap U$, existe $\{U_1, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que

$$x \in U_1 \text{ , } w \in U_n \text{ y } U_i \cap U_j \neq \emptyset \text{ si y solo si } |i-j| \leqslant 1. \tag{1.7}$$

Como $w \in U \cap U_n$, el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \text{ y } U_i \cap U \neq \emptyset\}$ es no vacío, por lo que podemos tomar

$$i' = \text{mín } \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \text{ y } U_i \cap U \neq \emptyset\}.$$

Para cada $j \in \{1, \dots, i'\}$, sea $U_j^* = U_j$ y fijemos $U_{i'+1}^* = U$. Observamos que $\{U_1^*, \dots, U_{i'}^*, U_{i'+1}^*\} \subseteq \mathcal{U}$ y es tal que $x \in U_1^*$ y $w \in U_{i'+1}^*$. Además, $U_{i'+1}^* \cap U_j^* \neq \emptyset$ si y solo si $j = i'$ o $j = i' + 1$. Usando esto último y (1.7) obtenemos que $\{U_1^*, \dots, U_{i'}^*, U_{i'+1}^*\}$ es una cadena simple que conecta a x con w, formada por elementos de $\mathcal{U}$. Dado que $z \in U_{i'+1}^*$, podemos concluir que $\{U_1^*, \dots, U_{i'}^*, U_{i'+1}^*\}$ también es una cadena simple que conecta a x con z, formada por elementos de $\mathcal{U}$. Por consiguiente, $z \in Z$ y por tanto se cumple (1.6).

De la conexidad de X y de (1.4), (1.5) y (1.6) se infiere que $X = Z$, garantizando que existe una cadena simple que conecta a x con y, formada por elementos de $\mathcal{U}$.

Recíprocamente, si suponemos que X es disconexo, entonces existen subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos U_1 y U_2 de X tales que $X = U_1 \cup U_2$.

Si definimos $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ y tomamos $x \in U_1$ y $y \in U_2$, se sigue que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X tal que no existe una cadena simple que conecta a x con y, formada por elementos de $\mathcal{U}$. ■

Lema 1.2.3 *Sean X un espacio topológico y $\{C_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de subespacios conexos de X. Si existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tal que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ se cumple que $C_\alpha \cap C_{\alpha_0} \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$ es conexo.*

Prueba. Sea $\{C_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de subespacios conexos de X y supongamos que existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tal que, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, se cumple que

$$C_\alpha \cap C_{\alpha_0} \neq \emptyset. \tag{1.8}$$

Sean U y V dos subconjuntos abiertos y ajenos de $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$ tales que $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha = U \cup V$. Dado que C_{α_0} es conexo podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$C_{\alpha_0} \subseteq U. \tag{1.9}$$

Si consideramos $\alpha \in \mathcal{A}$, gracias a que C_α es conexo, a (1.8) y a (1.9) se infiere que $C_\alpha \subseteq U$. Así, $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha \subseteq U$, por lo que $V = \emptyset$. Luego, $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$ es conexo. ■

Lema 1.2.4 *Sean X un espacio topológico y $\{C_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de subespacios conexos por trayectorias de X. Si existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tal que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, el conjunto $C_\alpha \cap C_{\alpha_0}$ es no vacío, entonces $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$ es conexo por trayectorias.*

Prueba. Si $w, z \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} C_\alpha$, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ tales que $w \in C_{\alpha_1}$ y $z \in C_{\alpha_2}$. Tomemos $x_1 \in C_{\alpha_0} \cap C_{\alpha_1}$ y $x_2 \in C_{\alpha_0} \cap C_{\alpha_2}$. Dado que $C_{\alpha_0}, C_{\alpha_1}$ y C_{α_2} son conexos por trayectorias, podemos considerar funciones continuas $f_0 : [0,1] \to C_{\alpha_0}$, $f_1 : [0,1] \to C_{\alpha_1}$ y $f_2 : [0,1] \to C_{\alpha_2}$ tales que:

$$\begin{array}{l} f_0(0) = x_1,\ f_0(1) = x_2,\ f_1(0) = w, \\ f_1(1) = x_1,\ f_2(0) = x_2 \text{ y } f_2(1) = z. \end{array} \tag{1.10}$$

Sean $h_0 : [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \to [0,1]$, $h_1 : [0, \frac{1}{3}] \to [0,1]$ y $h_2 : [\frac{2}{3}, 1] \to [0,1]$ dadas por

$$h_0(t) = 3t - 1,\ h_1(t) = 3t \text{ y } h_2(t) = 3t - 2. \tag{1.11}$$

Claramente h_0, h_1 y h_2 son continuas. Notamos que:

$$\begin{array}{l} h_0(\frac{1}{3}) = 0,\ h_0(\frac{2}{3}) = 1,\ h_1(0) = 0, \\ h_1(\frac{1}{3}) = 1,\ h_2(\frac{2}{3}) = 0\ y\ h_2(1) = 1. \end{array} \tag{1.12}$$

Fijemos funciones $g_0 : [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \to C_{\alpha_0}$, $g_1 : [0, \frac{1}{3}] \to C_{\alpha_1}$ y $g_2 : [\frac{2}{3}, 1] \to C_{\alpha_2}$ dadas por:

$$g_0 = f_0 \circ h_0,\ g_1 = f_1 \circ h_1 \text{ y } g_2 = f_2 \circ h_2. \tag{1.13}$$

Por ser composición de funciones continuas, g_0, g_1 y g_2 también lo son. Definamos una función $f : [0,1] \to X$ de la siguiente manera:

$$f(t) = \begin{cases} g_1(t), & \text{si} \quad t \in [0, \frac{1}{3}]; \\ g_0(t), & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]; \\ g_2(t), & \text{si} \quad t \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases} \tag{1.14}$$

Observamos que

$$\left[0, \tfrac{1}{3}\right] \cap \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right] = \left\{\tfrac{1}{3}\right\} \text{ y } \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right] \cap \left[\tfrac{2}{3}, 1\right] = \left\{\tfrac{2}{3}\right\}. \tag{1.15}$$

De (1.10), (1.12) y (1.13) se deduce que

$$\begin{array}{c} g_1\left(\frac{1}{3}\right) = (f_1 \circ h_1)(\frac{1}{3}) = f_1(1) = x_1 = f_0(0) = (f_0 \circ h_0)(\frac{1}{3}) = g_0\left(\frac{1}{3}\right) \\ \text{y} \\ g_0\left(\frac{2}{3}\right) = (f_0 \circ h_0)(\frac{2}{3}) = f_0(1) = x_2 = f_2(0) = (f_2 \circ h_2)(\frac{2}{3}) = g_2\left(\frac{2}{3}\right). \end{array} \tag{1.16}$$

Si conjuntamos (1.14), (1.15), (1.16) y el Lema 1.1.2, se infiere que f está bien definida y es continua. Además, por definición de f_0, f_1 y f_2 se tiene que

$f[[0,1]] \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$. Finalmente, de (1.10), (1.12), (1.13) y (1.14) se colige que

$$f(0) = g_1(0) = (f_1 \circ h_1)(0) = f_1(0) = w$$
$$\text{y}$$
$$f(1) = g_2(1) = (f_2 \circ h_2)(1) = f_2(1) = z.$$

Así, f es una trayectoria en $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$ de w a z. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$ es conexo por trayectorias. ■

Concluimos esta sección recordando los conceptos de vecindad y de conexidad local.

Definición 1.2.5 Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que un subconjunto U de X es *vecindad de x,* si $x \in \text{int}(U)$.

Definición 1.2.6 Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X es *localmente conexo en x* si para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subespacio abierto y conexo V de X tal que $x \in V$ y $V \subseteq U$. Si para cada $x \in X$ se cumple que X es localmente conexo en x, diremos que X es *localmente conexo.*

1.3 Compacidad Local

Dedicamos esta sección a recordar la definición de compacidad local y algunas de sus propiedades. La mayoría de los resultados de esta parte son muy conocidos, pero los introducimos a fin de que este trabajo quede lo más autocontenido posible.

Definición 1.3.1 Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X es *localmente compacto en x,* si existe una vecindad compacta U de x. Si para cada $x \in X$ el espacio X es localmente compacto en x, diremos que X es *localmente compacto.*

Observación 1.3.2 Sea X un espacio compacto. Dado que para cada $x \in X$, el espacio X es una vecindad compacta de x, se deduce que X es localmente compacto.

Lema 1.3.3 *Sea X un espacio topológico. Si X es localmente compacto y T_2, entonces X es $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Prueba.

Consideremos un subconjunto cerrado F de X y $p \in X \setminus F$. Por hipótesis X es localmente compacto, es decir, existe una vecindad compacta V de p en X. Dado que V es compacto y T_2, el subespacio V es T_4, por lo que V es $T_{3\frac{1}{2}}$. Sea

$$F' = \operatorname{fr}(V) \cup (F \cap V). \tag{1.17}$$

Puesto que X es T_2 y V es compacto, se tiene que V es cerrado en X. Así, $\operatorname{fr}(V)$ y $F \cap V$ son cerrados en V y, por consiguiente, F' es cerrado en V. Además, $p \in V \setminus F'$ y debido a que V es $T_{3\frac{1}{2}}$, existe una función continua $f : V \to [0, 1]$ tal que

$$f(p) = 0 \text{ y } f[F'] \subseteq \{1\}. \tag{1.18}$$

Sea $f' : X \to [0, 1]$ definida por:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad x \in V; \\ 1, & \text{si} \quad x \in \operatorname{cl}(X \setminus V). \end{cases} \tag{1.19}$$

Supongamos que existe $y \in V \cap \operatorname{cl}(X \setminus V)$. Como V es cerrado en X, se sigue que $V = \operatorname{cl}(V)$. Luego $V \cap \operatorname{cl}(X \setminus V) = \operatorname{cl}(V) \cap \operatorname{cl}(X \setminus V) = \operatorname{fr}(V)$, asegurando que $y \in \operatorname{fr}(V)$. Tomando en cuenta que $\operatorname{fr}(V) \subseteq F'$, de (1.18) se obtiene que $f(y) = 1$ y así f' está bien definida.

Por el Lema 1.1.2, la función f' es continua. Puesto que $p \in V$, de (1.18) y (1.19) deducimos que

$$f'(p) = f(p) = 0. \tag{1.20}$$

Observamos que

$$F = (F \cap V) \cup (F \cap (X \setminus V)). \tag{1.21}$$

Gracias a (1.17) y (1.21) se cumple que

$$F \subseteq F' \cup (X \setminus V) \subseteq F' \cup \operatorname{cl}(X \setminus V). \tag{1.22}$$

De (1.18), (1.19) y (1.22) se infiere que

$$f'[F] \subseteq \{1\}. \tag{1.23}$$

Finalmente, conjuntando (1.19), (1.20) y (1.23), se concluye que X es $T_{3\frac{1}{2}}$.
■

Lema 1.3.4 *Sea X un espacio localmente compacto y T_2. Si $x \in X$ y U es un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$, entonces existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq U$ y $\mathrm{cl}(V)$ es compacto.*

Prueba. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Como X es localmente compacto, existe un subconjunto W de X, el cual es una vecindad compacta de x. Luego, $x \in U \cap \mathrm{int}(W)$. Dado que X es locamente compacto y T_2, por el Lema 1.3.3 el espacio X es $T_{3\frac{1}{2}}$ y por lo tanto T_3. Así, existe un subconjunto abierto V de X tal que

$$x \in V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq U \cap \mathrm{int}(W) \subseteq U \cap W. \tag{1.24}$$

De (1.24) se deduce que $\mathrm{cl}(V) \subseteq U$ y $\mathrm{cl}(V) \subseteq W$. Finalmente, puesto que $\mathrm{cl}(V)$ es un subconjunto cerrado del subespacio compacto W, se concluye que $\mathrm{cl}(V)$ es compacto. ■

Lema 1.3.5 *Sea X un espacio T_2, localmente conexo y localmente compacto. Si $x \in X$ y U es un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$, entonces existe un subespacio abierto y conexo V de X tal que $x \in V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq U$ y $\mathrm{cl}(V)$ es compacto y conexo.*

Prueba. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Como X es localmente compacto y T_2, por el Lema 1.3.4 existe un subconjunto abierto W de X tal que

$$x \in W \subseteq \mathrm{cl}(W) \subseteq U \ \text{ y } \ \mathrm{cl}(W) \text{ es compacto.} \tag{1.25}$$

Dado que X es localmente conexo, existe un subespacio abierto y conexo V de X tal que $x \in V \subseteq W$. Usando esto último y (1.25) se sigue que $\mathrm{cl}(V) \subseteq U$ y que $\mathrm{cl}(V)$ es compacto. Finalmente, puesto que V es conexo, se concluye que $\mathrm{cl}(V)$ es conexo. ■

Lema 1.3.6 *Sea X un espacio T_2, localmente conexo y localmente compacto. Si U es un subespacio conexo y abierto de X y $x, y \in U$, entonces existe un subespacio compacto y conexo $L \subseteq X$ tal que $x, y \in L$ y $L \subseteq U$.*

Prueba. Sean U un subespacio conexo y abierto de X y $x, y \in U$.

Tomemos $z \in U$. Como X es localmente conexo, localmente compacto y T_2, por el Lema 1.3.5 existe un subespacio conexo y abierto W_z de X tal que

$$z \in W_z \subseteq \mathrm{cl}(W_z) \subseteq U \ \text{ y } \ \mathrm{cl}(W_z) \text{ es compacto y conexo.} \tag{1.26}$$

Consideremos el conjunto $\mathcal{W} = \{W_z : z \in U\}$ y notemos que es una cubierta abierta para U. Por el Lema 1.2.2 existe $\{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq U$ tal que

$$x \in W_{z_1}, y \in W_{z_n} \text{ y } W_{z_i} \cap W_{z_j} \neq \emptyset \text{ si y solo si } |i - j| \leqslant 1. \tag{1.27}$$

Sea $L = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} \mathrm{cl}(W_{z_i})$. Gracias a (1.26) y (1.27) podemos asegurar que $L \subseteq U$ y que L es conexo. Además, puesto que L es una unión finita de espacios compactos, se tiene que L también lo es. Luego, L es el subespacio buscado. ■

Capítulo 2

Conexidad Local Fuerte por Continuos

En este capítulo introducimos un concepto que usualmente no se estudia en los cursos de topología: la conexidad local fuerte por continuos. Comparamos este concepto con otros conocidos, como la conexidad local y la compacidad local. Concluiremos el capítulo con un ejemplo que ilustrará la diferencia entre la conexidad local y la conexidad local fuerte por continuos.

Definición 2.0.1 Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un *continuo de Hausdorff* si X es un espacio compacto, conexo, T_2 y no vacío. Si dados un espacio topológico Y, y un subespacio A de Y, se tiene que A es un continuo de Hausdorff, diremos que A es un *subcontinuo de* Y.

Definición 2.0.2 Sean X un espacio T_2 y $x \in X$. Decimos que X es *fuertemente localmente conexo por continuos en* x si para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto V de X que cumple lo siguiente: $x \in V \subseteq U$ y para cada subconjunto cerrado B de X con la propiedad de que $B \subseteq V$, existe un subcontinuo L de X tal que $B \subseteq L \subseteq V$. Si para todo $x \in X$ el espacio X es fuertemente localmente conexo por continuos en x, diremos que X es *fuertemente localmente conexo por continuos.*

Los siguientes seis resultados nos darán información sobre relaciones entre la conexidad local fuerte por continuos y la conexidad (compacidad) local.

Teorema 2.0.3 *Si X es un espacio T_2, localmente conexo y localmente compacto, entonces X es fuertemente localmente conexo por continuos.*

Prueba. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Como X es localmente conexo, localmente compacto y T_2, gracias al Lema 1.3.5 existe un subespacio abierto y conexo V de X tal que

$$x \in V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq U \text{ y } \mathrm{cl}(V) \text{ es compacto.} \tag{2.1}$$

Si B es un subconjunto cerrado de X tal que $B \subseteq V$, entonces $B \subseteq \mathrm{cl}(V)$. De esto último y de (2.1), se sigue que B es compacto. Para cada $z \in B$, por el Lema 1.3.5 podemos considerar un subespacio abierto y conexo V_z de X tal que $z \in V_z \subseteq \mathrm{cl}(V_z) \subseteq V$ y $\mathrm{cl}(V_z)$ es compacto. Observamos que $\{V_z : z \in B\}$ es una cubierta abierta para B, por lo que existe $\{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq B$ tal que

$$B \subseteq \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} V_{z_i} \subseteq \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} \mathrm{cl}(V_{z_i}) \subseteq V. \tag{2.2}$$

Utilizando el hecho de que V es un subespacio abierto y conexo de X, y el Lema 1.3.6, obtenemos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe un subespacio compacto y conexo L_i de X tal que

$$\{z_1, z_i\} \subseteq L_i \text{ y } L_i \subseteq V. \tag{2.3}$$

Sean $K = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} L_i$ y $W = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} \mathrm{cl}(V_{z_i})$. Debido a que K y W son uniones finitas de espacios compactos, estos espacios son compactos. Usando (2.3) y el Lema 1.2.3 derivamos que K es conexo. Si definimos $L = W \cup K$, dado que L es una unión finita de espacios compactos, se colige que L también lo es. Además, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ el subespacio $\mathrm{cl}(V_{z_i})$ es conexo y $\mathrm{cl}(V_{z_i}) \cap K \neq \emptyset$. Luego, por el Lema 1.2.3 se concluye que L es conexo. Así, L es un continuo de Hausdorff y, finalmente, de (2.2) y (2.3) se infiere que $B \subseteq L \subseteq V$. Por consiguiente, L es un subcontinuo de X tal que $B \subseteq L \subseteq V$ y, por lo tanto, X es fuertemente localmente conexo por continuos en x. ∎

Corolario 2.0.4 *Si X es un continuo de Hausdorff localmente conexo, entonces X es fuertemente localmente conexo por continuos.*

Prueba. Dado que X es compacto, de la Observación 1.3.2 se sigue que X es localmente compacto. Así, por el Teorema 2.0.3 se obtiene que X es fuertemente localmente conexo por continuos. ∎

Lema 2.0.5 *Sean X un espacio T_2 y $x \in X$. Si X es fuertemente localmente conexo por continuos en x, entonces X es localmente conexo en x.*

Prueba. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Como X es fuertemente localmente conexo por continuos en x, existe un subconjunto abierto V de X que cumple lo siguiente: $x \in V \subseteq U$ y para cada subconjunto cerrado B de X con la propiedad de que $B \subseteq V$, existe un subcontinuo L de X tal que $B \subseteq L \subseteq V$.

A continuación probaremos que

$$V \text{ es conexo.} \tag{2.4}$$

Consideremos $z \in V$. Dado que X es T_1, se sigue que $\{z\}$ es un subconjunto cerrado de X. Luego, $\{x, z\}$ es un subconjunto cerrado de X tal que $\{x, z\} \subseteq V$, por lo que existe un subcontinuo L_z de X tal que $\{x, z\} \subseteq L_z \subseteq V$. Así, el conjunto $\{L_z : z \in V\}$ es una familia de subespacios conexos de X con las siguientes características:

$$V = \bigcup_{z \in V} L_z \text{ y, para cada } z \in V, \text{ se tiene que } L_z \cap L_x \neq \emptyset. \tag{2.5}$$

Gracias a (2.5) y al Lema 1.2.3, se deduce (2.4). Finalmente, como V es un subespacio abierto y conexo de X tal que $x \in V \subseteq U$, se concluye que X es localmente conexo en x. ■

Lema 2.0.6 *Sean X un espacio T_3 y $x \in X$. Si X es fuertemente localmente conexo por continuos en x, entonces X es localmente compacto en x.*

Prueba. Notamos que X es un subconjunto abierto de X. Como X es fuertemente localmente conexo por continuos en x, podemos tomar un subconjunto abierto V de X que cumple lo siguiente: $x \in V$ y para cada subconjunto cerrado B de X con la propiedad de que $B \subseteq V$, existe un subcontinuo L de X tal que $B \subseteq L \subseteq V$. Dado que X es T_3, podemos tomar un subconjunto abierto W de X tal que

$$x \in W \subseteq \mathrm{cl}(W) \subseteq V. \tag{2.6}$$

Puesto que $\mathrm{cl}(W)$ es cerrado en X, podemos encontrar un subcontinuo L de X tal que $\mathrm{cl}(W) \subseteq L \subseteq V$. Gracias a esto último y a (2.6), se tiene que $x \in W \subseteq L$, por lo que L es una vecindad compacta de x. Por lo tanto, X es localmente compacto en x. ■

Corolario 2.0.7 *Sea X un espacio T_3. Entonces X es fuertemente localmente conexo por continuos si y solo si X es localmente conexo y localmente compacto.*

Prueba. Supongamos que X es fuertemente localmente conexo por continuos y sea $x \in X$. Como X es T_3, en particular es T_2. Luego, por el Lema 2.0.5, se tiene que X es localmente conexo en x. Gracias a que X es T_3 y al Lema 2.0.6, se infiere que X es localmente compacto en x. Por lo tanto, X es localmente conexo y localmente compacto.

Recíprocamente, supongamos que X es localmente conexo y localmente compacto. Puesto que X es T_3, también es T_2. Así, por el Teorema 2.0.3, se concluye que X es fuertemente localmente conexo por continuos. ■

Corolario 2.0.8 *Sea X un continuo de Hausdorff. Entonces X es fuertemente localmente conexo por continuos si y solo si X es localmente conexo.*

Prueba. Dado que X es un continuo de Hausdorff, se tiene que X es compacto y T_2. De la Observación 1.3.2 se sigue que X es localmente compacto. Gracias a esto último y a que X es T_2, del Lema 1.3.3 se infiere que X es $T_{3\frac{1}{2}}$. Luego, X es T_3 y así, por el Corolario 2.0.7 se colige que X es fuertemente localmente conexo por continuos si y solo si X es localmente conexo. ■

Del Lema 2.0.5 se infiere que si X es un continuo de Hausdorff, x es un elemento de X y el espacio X es fuertemente localmente conexo por continuos en x, entonces X es localmente conexo en x. En el Ejemplo 2.0.14 mostraremos un continuo de Hausdorff X para el cual el recíproco de esta última afirmación no es válido. Para ello introduciremos algunas notaciones y observaciones.

Definición 2.0.9 Sean X un espacio topológico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x \in X$. Decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a x* si para cada subconjunto abierto U de X con la propiedad de que $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in U$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, lo denotaremos por:

$$x_n \to x.$$

Definición 2.0.10 Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $w \in \mathbb{R}^n$. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos los siguientes conjuntos:

$$A + w = \{a + w : a \in A\} \text{ y } \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}.$$

Observación 2.0.11 Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $w \in \mathbb{R}^n$. Notamos que la función $g_w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $g_w(x) = x + w$ es continua. De igual manera, $g_{-w} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $g_{-w}(x) = x + (-w)$ también lo es. Finalmente, $g_w \circ g_{-w} = Id_{\mathbb{R}^n}$ y $g_{-w} \circ g_w = Id_{\mathbb{R}^n}$, por lo que g_w es un homeomorfismo.

Observación 2.0.12 Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Advertimos que la función $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determinada por $f_\alpha(x) = \alpha x$ es continua. Similarmente, la función $f_{\alpha^{-1}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuya regla de correspondencia es $f_{\alpha^{-1}}(x) = \alpha^{-1}x$ vuelve a ser continua. Por último, $f_\alpha \circ f_{\alpha^{-1}} = Id_{\mathbb{R}^n}$ y $f_{\alpha^{-1}} \circ f_\alpha = Id_{\mathbb{R}^n}$, por lo que f es un homeomorfismo.

Notación 2.0.13 Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $x \neq y$, denotaremos al segmento de recta que va de x a y por:

$$xy.$$

Ejemplo 2.0.14 En $\mathbb{R}^3$, denotemos el punto $(0,0,0)$ por p_0. Sea C la circunferencia que resulta de intersecar el cilindro $x^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ con el plano $y = 0$. Fijemos una sucesión inyectiva $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de C tal que:

$$a_n = (a_1^n, 0, a_3^n) \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } a_n \longrightarrow p_0 \text{ (ver Figura 1.1).} \tag{2.7}$$

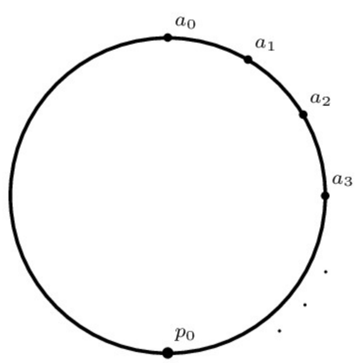

Figura 1.1: La circunferencia C y la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Consideremos sucesiones $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por:

$$b_n = (a_1^n, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n+2}, a_3^n) \text{ y } c_n = (0, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n+2}, 0) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Definamos

$$Y = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n b_n \cup b_n c_n)) \text{ (ver Figura 1.2).} \tag{2.9}$$

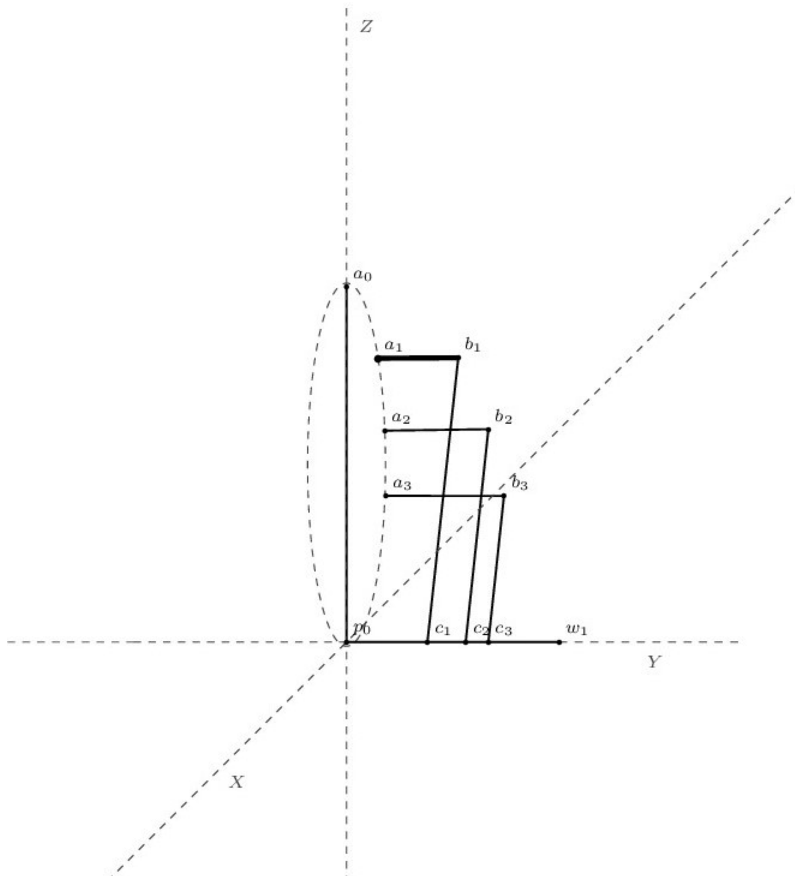

Figura 1.2: El espacio Y.

Consideremos la sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:

$$w_n = (0, \frac{1}{2^n}, 0) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Dado $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea $X_k = (\frac{1}{2^{k-1}})Y + w_k$ (ver Definición 2.0.10) y tomemos las funciones $g_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con reglas de correspondencia $g_k(x) = x + w_k$ y $f_k(x) = (\frac{1}{2^{k-1}})x$, respectivamente. Gracias a la Observación 2.0.11 y a la Observación 2.0.12, la función $g_k \circ f_k$ es un homeomorfismo. Notamos que

$$(g_k \circ f_k)[Y] = \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) Y + w_k = X_k. \tag{2.11}$$

Además

$$\text{diám}(X_k) \longrightarrow 0. \tag{2.12}$$

Observamos que $(g_k \circ f_k)(p_0) = w_k$ y $(g_k \circ f_k)(w_1) = w_{k-1}$, por lo que

$$(g_k \circ f_k)[p_0 w_1] = w_k w_{k-1} \subseteq X_k. \tag{2.13}$$

Finalmente, precisamos el espacio X como

$$X = \text{cl}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} X_k) = p_0 w_0 \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} X_k \right) \text{ (ver Figura 1.3).} \tag{2.14}$$

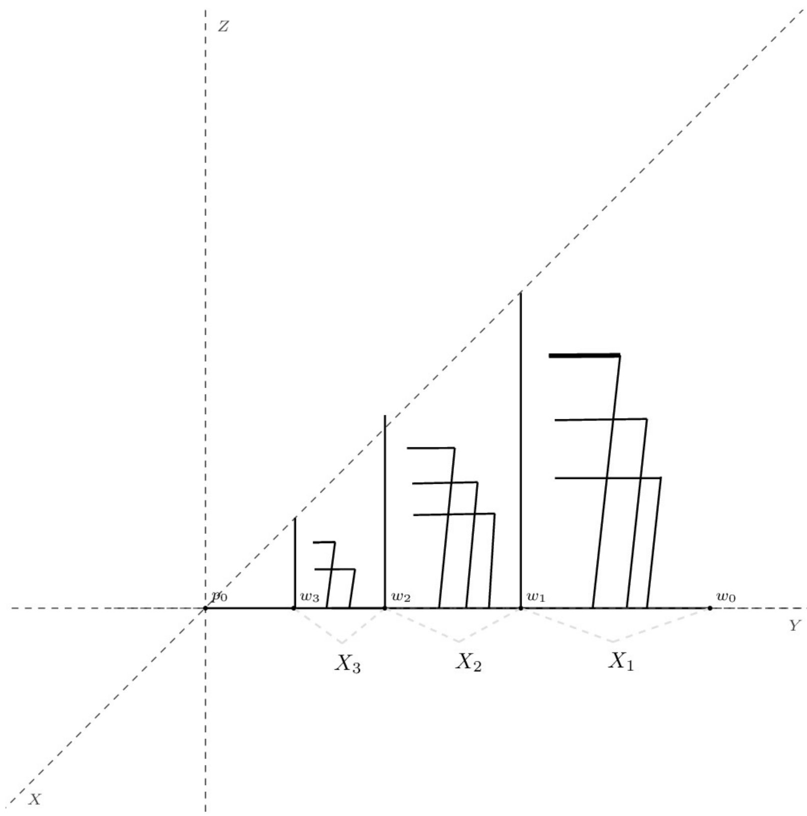

Figura 1.3: El espacio X.

Lema 2.0.15 *Si X es el espacio definido en el Ejemplo 2.0.14, entonces X es un continuo de Hausdorff.*

Prueba. Por (2.9) del Ejemplo 2.0.14, Y es un subespacio cerrado de $[0,1]^3$. Puesto que $[0,1]^3$ es compacto y T_2, se colige que

$$Y \text{ es compacto y } T_2. \tag{2.15}$$

Notamos que

$$Y = p_0w_1 \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_nb_n \cup b_nc_n)\right). \tag{2.16}$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, los espacios a_nb_n y b_nc_n son conexos por trayectorias, $a_nb_n \cap b_nc_n = \{b_n\}$ y $\{b_n\}$ es conexo por trayectorias, del Lema 1.2.4 se deduce que

$$a_nb_n \cup b_nc_n \text{ es conexo por trayectorias.} \tag{2.17}$$

Por otra parte, p_0w_1 es un subespacio conexo por trayectorias de Y tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $p_0w_1 \cap (a_nb_n \cup b_nc_n)$ es no vacío. De esto último, de (2.16), de (2.17) y del Lema 1.2.4 se desprende que Y es conexo por trayectorias y por consiguiente

$$Y \text{ es conexo.} \tag{2.18}$$

Por lo tanto,

$$Y \text{ es un continuo de Hausdorff.} \tag{2.19}$$

Debido a que X es un subespacio cerrado de $[0,1]^3$ y $[0,1]^3$ es compacto y T_2, se infiere que

$$X \text{ es compacto y } T_2. \tag{2.20}$$

Dado que para cada $k > 0$, el espacio X_k es homeomorfo a Y, se obtiene que

$$X_k \text{ es conexo por trayectorias.} \tag{2.21}$$

Además, para todo $k > 0$ tenemos que

$$X_k \cap p_0w_0 \neq \emptyset. \tag{2.22}$$

Gracias a (2.14) del Ejemplo 2.0.14, a (2.21), a (2.22) y al Lema 1.2.4 se colige que X es conexo por trayectorias. Luego,

$$X \text{ es conexo.} \tag{2.23}$$

Finalmente, de (2.20) y (2.23) se deriva que

$$X \text{ es un continuo de Hausdorff.}$$

■

Lema 2.0.16 *Si X es el espacio definido en el Ejemplo 2.0.14, entonces X es localmente conexo en p_0.*

Prueba. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $p_0 \in U$. De (2.10) del Ejemplo 2.0.14 se sigue que

$$w_k \longrightarrow p_0. \tag{2.24}$$

Gracias a (2.13) del Ejemplo 2.0.14 se colige que

$$w_k \in X_k. \tag{2.25}$$

Debido a (2.12) del Ejemplo 2.0.14, (2.24) y (2.25) existe $K \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geqslant K$, se tiene que $X_k \subseteq U$. Si $V = X \setminus \left(\bigcup_{k \leqslant K} X_k\right)$, entonces V es un subconjunto abierto de X, $p_0 \in V \subseteq U$ y V es conexo. Luego, X es localmente conexo en p_0. ■

Lema 2.0.17 *Si X es el espacio definido en el Ejemplo 2.0.14, entonces X no es fuertemente localmente conexo por continuos en p_0.*

Prueba. Si $U = X \setminus \{w_0\}$, entonces U es abierto en X y $p_0 \in U$. Sea V un subconjunto abierto de X tal que $p_0 \in V \subseteq U$. A consecuencia de (2.24) podemos elegir $K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $k \geqslant K$, se tiene que $w_k \in V$ y K es el mínimo número natural con esta propiedad. Así,

$$w_K \in V \text{ y } K \neq 0. \tag{2.26}$$

Consideremos la sucesión $\{\frac{1}{2^{K-1}}a_n + w_K\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es un subconjunto del plano $y = \frac{1}{2^K}$. Notemos que

$$\frac{1}{2^{K-1}}a_n + w_K \longrightarrow w_K. \tag{2.27}$$

De (2.26) y (2.27) se infiere que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{\frac{1}{2^{K-1}}a_n + w_K : n \geqslant N\} \subseteq V. \tag{2.28}$$

Fijemos $B = \{\frac{1}{2^{K-1}}a_n + w_K : n \geqslant N\} \cup \{w_K\}$. Conjuntando (2.26), (2.27) y (2.28) se deduce que B es cerrado en X y $B \subseteq V$. Supongamos que existe un subcontinuo L de X tal que $B \subseteq L \subseteq V$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos el subespacio $\frac{1}{2^{K-1}}(a_n b_n \cup b_n c_n) + w_K$ de X_K. Dado que L es conexo y $B \subseteq L$, se colige que para cada $n \geqslant N$, el subespacio $\frac{1}{2^{K-1}}(a_nb_n \cup b_nc_n) + w_K$ está contenido en L. Consecuentemente,

$$\bigcup_{n \geqslant N} \left(\frac{1}{2^{K-1}}(a_nb_n \cup b_nc_n) + w_K \right) \subseteq L \subseteq V. \tag{2.29}$$

Gracias a que L es un continuo de Hausdorff y a (2.29) se obtiene que

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n \geqslant N} \left(\frac{1}{2^{K-1}}(a_nb_n \cup b_nc_n) + w_K \right) \right) \subseteq \mathrm{cl}(L) = L. \tag{2.30}$$

Observamos que

$$w_{K-1} \in \mathrm{cl}\left(\{ \frac{1}{2^{K-1}}c_n + w_K : n \geqslant N \} \right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n \geqslant N} \left(\frac{1}{2^{K-1}}(a_nb_n \cup b_nc_n) + w_K \right) \right).$$

Debido a esto último, a (2.29) y a (2.30) se sigue que $w_{K-1} \in V$, lo cual contradice la elección de K. Por lo tanto, X no es fuertemente localmente conexo por continuos en p_0. ∎

Capítulo 3

Hiperespacios

Parte medular del presente trabajo es el estudio de espacios nuevos a partir de espacios ya conocidos. Tal es el caso de los hiperespacios. En este capítulo introduciremos el concepto de hiperespacio. Además, veremos que a cada hiperespacio definido se le puede dar una estructura de espacio topológico. Asimismo, daremos prueba o referencia de algunos resultados que posteriormente nos serán de gran utilidad.

Definición 3.0.1 Sea X un espacio topológico. Un *hiperespacio de* X es una familia de subconjuntos de X que cumple características específicas.

Dado un espacio X, los hiperespacios que consideraremos en este trabajo son los siguientes:

- $2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es compacto y no vacío}\}$,
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$,
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}$, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

A continuación definiremos la topología para estos hiperespacios.

Definición 3.0.2 Sean X un espacio topológico y $U_1, \ldots, U_k$ subconjuntos de X. Al conjunto

$$\langle U_1, \ldots, U_k \rangle = \{A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

lo llamamos el *vietórico* de $U_1, \ldots, U_k$.

Lema 3.0.3 *[2, Proposición 1.20, p. 25] Sea X un espacio topológico. Entonces el conjunto*

$$\beta = \{\langle U_1, \ldots, U_k \rangle : k \in \mathbb{N} \text{ y } U_i \text{ es abierto en } X \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

es base para una topología en 2^X; ésta es llamada la topología de Vietoris.

En adelante, dado un espacio X, consideraremos a los hiperespacios $C(X)$, $C_n(X)$ y $F_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, como subespacios de 2^X.

Los siguientes cinco resultados no los demostraremos, pero resaltan la importancia de que un espacio sea un continuo de Hausdorff, para el estudio de sus hiperespacios.

Lema 3.0.4 *[2, Proposición 1.23, p. 27] Sea X un continuo de Hausdorff. El hiperespacio 2^X es un espacio topológico de Hausdorff.*

Lema 3.0.5 *[2, Teorema 1.26, p. 28] Sea X un continuo de Hausdorff. El hiperespacio 2^X con la topología de Vietoris es compacto.*

Lema 3.0.6 *[2, Corolario 1.28, p. 29] Sea X un continuo de Hausdorff. El hiperespacio $C(X)$ es compacto.*

Lema 3.0.7 *[2, Corolario 2.24, p. 41] Sea X un continuo de Hausdorff. Los hiperespacios $C(X)$ y 2^X son conexos.*

Conjuntando el Lema 3.0.4, el Lema 3.0.5, el Lema 3.0.6 y el Lema 3.0.7 obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.0.8 *Sea X un continuo de Hausdorff. Entonces los hiperespacios $C(X)$ y 2^X son continuos de Hausdorff.*

Gracias al Teorema 3.0.8, dado un continuo de Hausdorff X, en adelante podremos usar que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son también continuos de Hausdorff.

3.1 Resultados sobre la topología de Vietoris

En esta sección estudiaremos algunas propiedades sobre la topología de Vietoris. Algunas serán probadas y otras solamente serán enunciadas con la referencia correspondiente, pero todas y cada una de ellas serán de gran importancia para el desarrollo del presente trabajo.

Lema 3.1.1 *Sean X un espacio topológico y $A \in 2^X$. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos y ajenos que satisfacen que $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$. Entonces*

$$A \cap \mathrm{fr}(U_1) = \emptyset \text{ y } A \cap \mathrm{fr}(U_2) = \emptyset.$$

Prueba. Dado que $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$ se sigue que $A \subseteq U_1 \cup U_2$. Sea $i \in \{1, 2\}$. Sin pérdida de generalidad pensemos que $i = 1$. Supongamos que existe $x \in A \cap \mathrm{fr}(U_1)$. Como U_1 es abierto ocurre que $U_1 \cap \mathrm{fr}(U_1) = \emptyset$. Así, $x \in U_2$. En vista de que U_2 es abierto en X y $x \in \mathrm{fr}(U_1)$ se colige que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. De esta manera, llegamos al resultado. ■

Lema 3.1.2 *Sean X un espacio topológico y $V_1, \ldots, V_n$ subconjuntos de X. Si existen B y L elementos de 2^X tales que*

1. *$B \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$;*
2. *$L \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$ y*
3. *$B \subseteq L$,*

entonces $L \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$.

Prueba. Puesto que $L \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$, basta probar que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que

$$L \cap V_i \neq \emptyset.$$

Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que $B \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$, se sigue que

$$\emptyset \neq B \cap V_i \subseteq L \cap V_i.$$

Consecuentemente, $L \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$. ■

Corolario 3.1.3 *Sean X un continuo de Hausdorff y $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos de X. Si existen $C, E \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ con la propiedad de que $C \subseteq E$, entonces $\{D \in 2^X : C \subseteq D \subseteq E\} \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$.*

Prueba. Tomemos $D \in 2^X$ con la característica de que $C \subseteq D \subseteq E$. A continuación probaremos que

$$D \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle. \tag{3.1}$$

Dado que $E \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ obtenemos que

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Luego,

$$D \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Debido a que $C \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y al Lema 3.1.2, se infiere (3.1). ■

Lema 3.1.4 *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{L} \subseteq 2^X$. Sean U y V subconjuntos de X tales que $\bigcup \mathcal{L} = U \cup V$, entonces $\mathcal{L} \subseteq \langle U \rangle \cup \langle V \rangle \cup \langle U, V \rangle$.*

Prueba. Sea $A \in \mathcal{L}$. Luego,

$$A \subseteq \bigcup \mathcal{L}. \tag{3.2}$$

Si existe $W \in \{U, V\}$ tal que $A \subseteq W$, se sigue que

$$A \in \langle W \rangle \subseteq \langle U \rangle \cup \langle V \rangle.$$

Supongamos que $A \nsubseteq U$ y $A \nsubseteq V$. Dado que $\bigcup \mathcal{L} = U \cup V$, por (3.2) se tiene que

$$A \in \langle U, V \rangle.$$

Consecuentemente, $A \in \langle U \rangle \cup \langle V \rangle \cup \langle U, V \rangle$. ■

La prueba del siguiente resultado es un poco técnica, por lo que solamente lo enunciaremos. Usaremos este resultado en el Corolario 3.1.6.

Lema 3.1.5 *[6, Proposición 1.26, p. 16] Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff, $A \in 2^X \setminus C(X)$ y M una componente de A. Si W es un subconjunto abierto de X tal que $M \subseteq W$, entonces existe un subconjunto abierto U de X de tal manera que $M \subseteq U \subseteq \mathrm{cl}(U) \subseteq W$, $\mathrm{fr}(U) \cap A = \emptyset$ y $A \setminus U \neq \emptyset$.*

Corolario 3.1.6 *Sea X un continuo de Hausdorff y sea $A \in 2^X \setminus C(X)$. Si K es una componente de A, entonces para cada subconjunto abierto W de X con la propiedad de que $K \subseteq W$, existen subconjuntos abiertos y ajenos U_1 y U_2 de X con las siguientes características:*

1. $K \subseteq U_1 \subseteq W$;
2. $\mathrm{fr}(U_1) \cap A = \emptyset$;
3. $A \setminus U_1 \subseteq U_2$ y
4. $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$.

Prueba. Gracias al Lema 3.1.5 podemos encontrar un subconjunto abierto U_1 de X tal que

$$K \subseteq U_1 \subseteq \mathrm{cl}(U_1) \subseteq W, \ \ \mathrm{fr}(U_1) \cap A = \emptyset \text{ y } A \setminus U_1 \neq \emptyset. \tag{3.3}$$

Notamos que $A \setminus \mathrm{cl}(U_1) = A \setminus (U_1 \cup \mathrm{fr}(U_1)) = (A \setminus U_1) \cap (A \setminus \mathrm{fr}(U_1)) = A \setminus U_1$. Luego,

$$A \setminus \mathrm{cl}(U_1) = A \setminus U_1. \tag{3.4}$$

Sea $U_2 = X \setminus \mathrm{cl}(U_1)$. Así, U_2 es abierto en X y $A \setminus U_1 \subseteq U_2$. Veamos que

$$A \in \langle U_1, U_2 \rangle. \tag{3.5}$$

De (3.3) y (3.4) se sigue que

$$A \cap U_1 \neq \emptyset \text{ y } A \cap U_2 = A \setminus U_1 \neq \emptyset. \tag{3.6}$$

Debido a que $\mathrm{cl}(U_1) = U_1 \cup \mathrm{fr}(U_1)$, teniendo en cuenta (3.3) obtenemos que

$$A = (A \cap \mathrm{cl}(U_1)) \cup (A \setminus \mathrm{cl}(U_1)) = (A \cap U_1) \cup (A \setminus \mathrm{cl}(U_1))$$
y
$$(A \cap U_1) \cup (A \setminus \mathrm{cl}(U_1)) \subseteq U_1 \cup (X \setminus \mathrm{cl}(U_1)) = U_1 \cup U_2.$$

Finalmente, de (3.6) deducimos (3.5). ■

El siguiente resultado nos dará condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla la contención entre vietóricos.

Lema 3.1.7 *Sean X un espacio topológico y $U_1, \ldots, U_k, V_1, \ldots, V_n$ subconjuntos no vacíos de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle \subseteq \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$.

2. $\bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} U_i \subseteq \bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\}} V_j$ *y para cada* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *existe* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *tal que* $U_i \subseteq V_j$.

Prueba. Supongamos que $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle \subseteq \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$. Si $x \in \bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} U_i$, entonces existe $i' \in \{1, \ldots, k\}$ con la propiedad de que $x \in U_{i'}$. Dado $i \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i'\}$, sea $x_i \in U_i$. Así,

$$\{x_i : i \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i'\}\} \cup \{x\} \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle. \tag{3.7}$$

Del hecho de que $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle \subseteq \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ y de (3.7), se infiere que

$$\{x_i : i \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i'\}\} \cup \{x\} \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle.$$

Luego, $\{x_i : i \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i'\}\} \cup \{x\} \subseteq \bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\}} V_j$, por lo que $x \in \bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\}} V_j$. De esto último se deduce que

$$\bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} U_i \subseteq \bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\}} V_j.$$

A continuación mostraremos que

$$\text{para cada } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ existe } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ tal que } U_i \subseteq V_j. \tag{3.8}$$

Supongamos que existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, podemos encontrar $z_i \in U_i \setminus V_j$. Consideremos el conjunto $B = \{z_i : i \in \{1, \ldots, k\}\}$. Observamos que

$$B \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle \text{ y } B \cap V_j = \emptyset.$$

En otras palabras, $B \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle$ y $B \notin \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$, lo cual es una contradicción. Luego, se cumple (3.8).

Recíprocamente, supongamos que

$$\bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} U_i \subseteq \bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\}} V_j \text{ y que} \tag{3.9}$$

$$\text{para cada } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ existe } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ tal que } U_i \subseteq V_j. \tag{3.10}$$

Si tomamos $A \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle$, entonces

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} U_i \text{ y} \tag{3.11}$$

$$\text{para cada } i \in \{1, \dots, k\}, \text{ el conjunto } U_i \cap A \text{ es no vacío.} \tag{3.12}$$

Conjuntando (3.9) y (3.11),

$$A \subseteq \bigcup_{j \in \{1,\dots,n\}} V_j. \tag{3.13}$$

Gracias a (3.10) y (3.12), se colige que

$$\text{para cada } j \in \{1, \dots, n\} \text{ la intersección de } A \text{ con } V_j \text{ es no vacía.} \tag{3.14}$$

Finalmente, debido a (3.13) y (3.14), podemos concluir que $A \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle$.
■

En los siguientes tres resultados se verá la relación que hay entre un vietórico y su cerradura.

Corolario 3.1.8 *Sean X un espacio topológico y $U_1, \dots, U_k$ subconjuntos no vacíos de X. Entonces $\langle U_1, \dots, U_k \rangle \subseteq \langle \mathrm{cl}(U_1), \dots, \mathrm{cl}(U_k) \rangle$.*

Prueba. Notamos que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, ocurre que

$$U_i \subseteq \mathrm{cl}(U_i). \tag{3.15}$$

Así,

$$\bigcup_{i \in \{1,\dots,k\}} U_i \subseteq \bigcup_{i \in \{1,\dots,k\}} \mathrm{cl}(U_i). \tag{3.16}$$

Del Lema 3.1.7, se infiere que $\langle U_1, \dots, U_k \rangle \subseteq \langle \mathrm{cl}(U_1), \dots, \mathrm{cl}(U_k) \rangle$. ■

Lema 3.1.9 *Sean X un espacio topológico y $U_1, \dots, U_k$ subconjuntos no vacíos de X. Entonces $\langle \mathrm{cl}(U_1), \dots, \mathrm{cl}(U_k) \rangle$ es un subconjunto cerrado de 2^X.*

Prueba. Notamos que

$$\langle \mathrm{cl}(U_1), \dots, \mathrm{cl}(U_k) \rangle \subseteq \mathrm{cl}_{2^X} \left(\langle \mathrm{cl}(U_1), \dots, \mathrm{cl}(U_k) \rangle \right). \tag{3.17}$$

A continuación mostraremos que

$$\mathrm{cl}_{2^X} \left(\langle \mathrm{cl}(U_1), \dots, \mathrm{cl}(U_k) \rangle \right) \subseteq \langle \mathrm{cl}(U_1), \dots, \mathrm{cl}(U_k) \rangle. \tag{3.18}$$

Sea $A \in \mathrm{cl}_{2^X}\left(\langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k)\rangle\right)$. Si $A \notin \langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k)\rangle$, entonces

$$A \nsubseteq \bigcup_{i\in\{1,\ldots,k\}} \mathrm{cl}(U_i) \text{ o existe } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ tal que } A \cap \mathrm{cl}(U_i) = \emptyset. \tag{3.19}$$

CASO 1. Si $A \nsubseteq \bigcup_{i\in\{1,\ldots,k\}} \mathrm{cl}(U_i)$.

Observamos que $A \in \left\langle X \setminus \left(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,k\}} \mathrm{cl}(U_i)\right), X\right\rangle$. Dado que el conjunto $\left\langle X \setminus \left(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,k\}} \mathrm{cl}(U_i)\right), X\right\rangle$ es abierto en 2^X y $A \in \mathrm{cl}_{2^X}\left(\langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k)\rangle\right)$, podemos encontrar

$$B \in \langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k)\rangle \cap \left\langle X \setminus \left(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,k\}} \mathrm{cl}(U_i)\right), X\right\rangle.$$

Luego, $B \subseteq \bigcup_{i\in\{1,\ldots,k\}} \mathrm{cl}(U_i)$ y $B \cap \left(X \setminus \left(\bigcup_{i\in\{1,\ldots,k\}} \mathrm{cl}(U_i)\right)\right) \neq \emptyset$, lo que es una contradicción.

CASO 2. Si existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $A \cap \mathrm{cl}(U_i) = \emptyset$.

En este caso, $A \in \langle X \setminus \mathrm{cl}(U_i)\rangle$. Puesto que $\langle X \setminus \mathrm{cl}(U_i)\rangle$ es abierto en 2^X y $A \in \mathrm{cl}_{2^X}\left(\langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k)\rangle\right)$, existe $C \in \langle X \setminus \mathrm{cl}(U_i)\rangle \cap \langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k)\rangle$. Así, $C \subseteq X \setminus \mathrm{cl}(U_i)$ y, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, el conjunto $C \cap \mathrm{cl}(U_j)$ es no vacío, generando nuevamente una contradicción.

Conjuntando el CASO 1 y el CASO 2, deducimos que (3.19) no puede ocurrir. Consecuentemente $A \in \langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k)\rangle$. Por lo tanto, se cumple (3.18).

Finalmente, gracias a (3.17) y (3.18) se colige que $\langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k)\rangle$ es un subconjunto cerrado de 2^X.

■

Lema 3.1.10 *Sean X un espacio topológico y $U_1, \ldots, U_k$ subconjuntos no vacíos de X. Entonces $\langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k)\rangle = \mathrm{cl}_{2^X}(\langle U_1, \ldots, U_k\rangle)$.*

Prueba. Del Corolario 3.1.8 se sigue que

$$\langle U_1, \ldots, U_k\rangle \subseteq \langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k)\rangle. \tag{3.20}$$

Gracias al Lema 3.1.9, se colige que

$$\mathrm{cl}_{2^X}(\langle U_1, \ldots, U_k\rangle) \subseteq \mathrm{cl}_{2^X}(\langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k)\rangle) = \langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k)\rangle. \tag{3.21}$$

Veamos que

$$\langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k) \rangle \subseteq \mathrm{cl}_{2^X}(\langle U_1, \ldots, U_k \rangle). \tag{3.22}$$

Sean $A \in \langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k) \rangle$ y $V_1, \ldots, V_n$ subconjuntos abiertos de X tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$. Dado $i \in \{1, \ldots, k\}$, fijemos $a_i \in A \cap \mathrm{cl}(U_i)$. Puesto que $A \subseteq \bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\}} V_j$, existe $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_i \in V_{j_i}$. Como $a_i \in \mathrm{cl}(U_i)$, podemos encontrar $z_{j_i} \in U_i \cap V_{j_i}$. Tomemos $B_1 = \{z_{j_i} : i \in \{1, \ldots, k\}\}$. Entonces

$$B_1 \subseteq \textstyle\bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} (U_i \cap V_{j_i}) \text{ y} \tag{3.23}$$

$$\text{para cada } i \in \{1, \ldots, k\}, \text{ se tiene que } z_{j_i} \in B_1 \cap (U_i \cap V_{j_i}). \tag{3.24}$$

Consideremos $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_k\}$. En vista de que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$, podemos elegir $b_j \in A \cap V_j$. Además, $A \in \langle \mathrm{cl}(U_1), \ldots, \mathrm{cl}(U_k) \rangle$, implicando que $b_j \in A \subseteq \bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} \mathrm{cl}(U_i) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} U_i\right)$. Luego, existe $z_j \in V_j \cap \left(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} U_i\right)$. Si $B_2 = \{z_j : j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_k\}\}$, ocurre lo siguiente:

$$B_2 \subseteq \bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j_1,\ldots,j_k\}} \left(V_j \cap \left(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} U_i \right) \right) \tag{3.25}$$

y para cada $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_k\}$ obtenemos que

$$z_j \in B_2 \cap \left(V_j \cap \left(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} U_i \right) \right). \tag{3.26}$$

Debido a (3.23) y (3.25) deducimos que

$$B_1 \cup B_2 \subseteq \left(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} (U_i \cap V_{j_i}) \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j_1,\ldots,j_k\}} \left(V_j \cap \left(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} U_i \right) \right) \right).$$

Consecuentemente,

$$B_1 \cup B_2 \subseteq \bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} U_i \text{ y } B_1 \cup B_2 \subseteq \bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\}} V_j. \tag{3.27}$$

Además, por (3.24) y (3.26),

$$\begin{array}{c} \text{para cada } i \in \{1, \ldots, k\}, (B_1 \cup B_2) \cap U_i \neq \emptyset \text{ y} \\ \text{para cada } j \in \{1, \ldots, n\}, (B_1 \cup B_2) \cap V_j \neq \emptyset. \end{array} \tag{3.28}$$

Gracias a (3.27) y (3.28),

$$B_1 \cup B_2 \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_n \rangle.$$

De esta manera, queda mostrado (3.22). ■

3.2 Resultados sobre uniones en hiperespacios

Dado un subconjunto de 2^X, se sigue que la unión de sus elementos es un subconjunto de X. En esta sección probaremos que hay ciertas propiedades de subconjuntos de 2^X que se preservan bajo este tipo de unión.

El siguiente lema ilustra una propiedad que puede que para nosotros sea natural o intuitiva.

Definición 3.2.1 Sean X un espacio topológico y $\{U_1, \ldots, U_n\}$ una familia finita de subconjuntos de X. Si $\mathcal{V} = \{U_1, \ldots, U_n\}$, definimos

$$\langle \mathcal{V} \rangle = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle.$$

Lema 3.2.2 *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de 2^X. Entonces $\bigcup \mathcal{U}$ es abierto en X.*

Prueba. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de 2^X. Veamos que

$$\bigcup \mathcal{U} \text{ es abierto en } X. \tag{3.29}$$

Si $x \in \bigcup \mathcal{U}$, entonces existe $K \in 2^X$ tal que

$$x \in K \in \mathcal{U}. \tag{3.30}$$

Dado que $\mathcal{U}$ es abierto en 2^X y $K \in \mathcal{U}$, podemos encontrar un subconjunto finito $\mathcal{V}$ de subconjuntos abiertos de X tal que

$$K \in \langle \mathcal{V} \rangle \subseteq \mathcal{U}. \tag{3.31}$$

Sea $V = \bigcup \mathcal{V}$. Notamos que

$$V \text{ es abierto en } X \text{ y } K \subseteq V. \tag{3.32}$$

Tomemos $y \in V$. De (3.31) se colige que

$$y \in K \cup \{y\} \in \langle \mathcal{V} \rangle \subseteq \mathcal{U}.$$

Luego,

$$y \in \bigcup \mathcal{U}.$$

Así,

$$V \subseteq \bigcup \mathcal{U}. \tag{3.33}$$

Finalmente, conjuntando (3.30), (3.32) y (3.33), se infiere (3.29).

■

El siguiente resultado corresponde a la propiedad de compacidad.

Teorema 3.2.3 *Sean X un continuo de Hausdorff y $\mathcal{A}$ un subespacio compacto de 2^X. Entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es un subespacio compacto de X.*

Prueba. Sea $\mathcal{A}$ un subespacio compacto de 2^X. Ya que X es un continuo de Hausdorff, basta probar que $\bigcup \mathcal{A}$ es cerrado en X. Veamos que

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \text{ es abierto en } X. \tag{3.34}$$

Si $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, para cada $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $A \subseteq \bigcup \mathcal{A} \subseteq X \setminus \{x\}$. Así,

$$\mathcal{A} \subseteq \langle X \setminus \{x\} \rangle.$$

Como 2^X es compacto y T_2, entonces 2^X es T_4. Consecuentemente, 2^X es T_3. De este modo, para cada $A \in \mathcal{A}$ existen $U_1^A, \ldots, U_{n_A}^A$ subconjuntos abiertos de X tales que

$$A \in \langle U_1^A, \ldots, U_{n_A}^A \rangle \subseteq \mathrm{cl}(\langle U_1^A, \ldots, U_{n_A}^A \rangle) \subseteq \langle X \setminus \{x\} \rangle. \tag{3.35}$$

Gracias al Lema 3.1.10 se sigue que

$$\mathrm{cl}(\langle U_1^A, \ldots, U_{n_A}^A \rangle) = \langle \mathrm{cl}(U_1^A), \ldots, \mathrm{cl}(U_{n_A}^A) \rangle. \tag{3.36}$$

Observamos que $\{\langle U_1^A, \ldots, U_{n_A}^A \rangle \ : A \in \mathcal{A}\}$ es una cubierta abierta para $\mathcal{A}$. Puesto que $\mathcal{A}$ es compacto, podemos encontrar $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ tales que

$$\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} \langle U_1^{A_i}, \ldots, U_{n_{A_i}}^{A_i} \rangle. \tag{3.37}$$

Dado $i \in \{1, \ldots, k\}$, fijemos

$$B_i = \bigcup_{j \in \{1, \ldots, n_{A_i}\}} \mathrm{cl}(U_j^{A_i}). \tag{3.38}$$

Notamos que B_i es cerrado en X, por lo que

$$\bigcup_{i \in \{1, \ldots, k\}} B_i \text{ es cerrado en } X. \tag{3.39}$$

Conjuntando (3.37) y (3.38), inferimos que

$$\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{i \in \{1, \ldots, k\}} B_i. \tag{3.40}$$

Sea $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por (3.38), el conjunto B_i es elemento de $\langle \mathrm{cl}(U_1^A), \ldots, \mathrm{cl}(U_{n_A}^A) \rangle$. Así, por (3.35) y (3.36) se tiene que $B_i \in \langle X \setminus \{x\} \rangle$. Consecuentemente

$$B_i \subseteq X \setminus \{x\}.$$

Luego,

$$\bigcup_{i \in \{1, \ldots, k\}} B_i \subseteq X \setminus \{x\}. \tag{3.41}$$

Combinando (3.40) y (3.41)

$$\{x\} \subseteq X \setminus \left(\bigcup_{i \in \{1, \ldots, k\}} B_i \right) \subseteq X \setminus \left(\bigcup \mathcal{A} \right). \tag{3.42}$$

Finalmente, de (3.39) y (3.42) deducimos (3.34).

■

Los siguientes tres resultados corresponden a la propiedad de conexidad.

Lema 3.2.4 *Sea X un continuo de Hausdorff y sean H y K subconjuntos de X tales que* $\mathrm{cl}(H) \cap K = \emptyset$ *y* $\mathrm{cl}(K) \cap H = \emptyset$. *Si* $\mathcal{H} = \{A \in 2^X : A \subseteq H\}$ *y* $\mathcal{K} = \{A \in 2^X : A \cap K \neq \emptyset\}$, *entonces* $\mathrm{cl}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{K} = \emptyset$ *y* $\mathrm{cl}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{H} = \emptyset$.

Prueba. Sea $A \in \mathrm{cl}(\mathcal{H})$. A continuación probaremos que

$$A \subseteq \mathrm{cl}(H). \tag{3.43}$$

Supongamos por el contrario que $A \cap (X \setminus \mathrm{cl}(H)) \neq \emptyset$, entonces

$$A \in \langle X, X \setminus \mathrm{cl}(H) \rangle.$$

Gracias a que $A \in \mathrm{cl}(\mathcal{H})$, podemos elegir $L \in 2^X$ con la propiedad de que

$$L \in \mathcal{H} \cap \langle X, X \setminus \mathrm{cl}(H) \rangle.$$

Así, $L \subseteq H$ y $L \cap (X \setminus H) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por consiguiente, (3.43) es cierto. Luego

$$A \cap K = \emptyset,$$

por lo que

$$A \notin \mathcal{K}.$$

De esta manera, queda demostrado que

$$\mathrm{cl}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{K} = \emptyset. \tag{3.44}$$

Si $A \in \mathrm{cl}(\mathcal{K})$, veremos que

$$A \cap \mathrm{cl}(K) \neq \emptyset. \tag{3.45}$$

Si se da el caso de que $A \subseteq X \setminus \mathrm{cl}(K)$, entonces

$$A \in \langle X \setminus \mathrm{cl}(K) \rangle.$$

Usando que $A \in \mathrm{cl}(\mathcal{K})$ es posible escoger $L \in 2^X$ de tal modo que

$$L \in \mathcal{K} \cap \langle X \setminus \mathrm{cl}(K) \rangle.$$

En otras palabras, $L \cap K \neq \emptyset$ y $L \subseteq X \setminus K$, lo cual es absurdo. Consecuentemente, (3.45) es verdadero. Por lo tanto,

$$A \nsubseteq H,$$

concluyendo que

$$A \notin \mathcal{H}.$$

Por ende,

$$\mathrm{cl}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{H} = \emptyset. \tag{3.46}$$

Finalmente, combinando (3.44) y (3.46) hemos llegado al resultado.

■

Lema 3.2.5 *Sean X un conjunto, $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X y $K \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Si $K \neq \emptyset$, entonces el conjunto $\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{A} : A \cap K \neq \emptyset\}$ es no vacío.*

Prueba. Sea $x \in K$. Entonces existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $x \in B$. Luego $B \cap K \neq \emptyset$, por lo que $B \in \mathcal{K}$. ■

Lema 3.2.6 *Sean X un continuo de Hausdorff y $\mathcal{A}$ un subespacio conexo de 2^X. Si $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es conexo.*

Prueba. Sean H_1 y H_2 subconjuntos de X tales que

$$\mathrm{cl}(H_1) \cap H_2 = \emptyset,\ \mathrm{cl}(H_2) \cap H_1 = \emptyset \text{ y } H_1 \cup H_2 = \bigcup \mathcal{A}. \tag{3.47}$$

A continuación probaremos que

$$H_1 = \emptyset \text{ o } H_2 = \emptyset. \tag{3.48}$$

Tomando $Y \in \mathcal{A} \cap C(X)$, notamos que

$$Y \subseteq \bigcup \mathcal{A}.$$

Gracias a que $Y \in C(X)$ y a (3.47), existe $i \in \{1, 2\}$ tal que

$$Y \subseteq H_i.$$

Si $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$, definimos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{H}_i = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq H_i\} \text{ y } \mathcal{H}_j = \{A \in \mathcal{A} : A \cap H_j \neq \emptyset\}. \tag{3.49}$$

Dado $A \in \mathcal{A}$ se colige que

$$A \subseteq \bigcup \mathcal{A}. \tag{3.50}$$

De (3.47) y (3.50) se sigue que

$$A \subseteq H_i \text{ o } A \cap H_j \neq \emptyset.$$

Luego,

$$A \in \mathcal{H}_i \cup \mathcal{H}_j.$$

Entonces

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}_i \cup \mathcal{H}_j. \tag{3.51}$$

Debido a (3.49) y a (3.51), obtenemos que

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_i \cup \mathcal{H}_j. \tag{3.52}$$

Sabemos que $Y \subseteq H_i$. Así

$$Y \in \mathcal{H}_i,$$

es decir

$$\mathcal{H}_i \neq \emptyset. \tag{3.53}$$

Por otro lado, de (3.47), (3.49) y el Lema 3.2.4, se tiene que

$$\mathrm{cl}(\mathcal{H}_i) \cap \mathcal{H}_j = \emptyset \text{ y } \ \mathrm{cl}(\mathcal{H}_j) \cap \mathcal{H}_i = \emptyset. \tag{3.54}$$

Como $\mathcal{A}$ es conexo y se cumplen (3.52), (3.53) y (3.54), se infiere que $\mathcal{H}_j = \emptyset$. Por el Lema 3.2.5, resulta que $H_j = \emptyset$. De esta manera, se deduce (3.48).

■

El siguiente resultado es muy conocido, por lo que no lo demostraremos. Lo recordamos aquí pues lo usaremos en el Lema 3.2.8.

Teorema 3.2.7 *(del cable cortado)[5, Teorema 12.9, p. 101] Sea X un espacio compacto y de Hausdorff y sean A y B subconjuntos cerrados y no vacíos de X, tales que ninguna componente de X interseca tanto a A como a B. Entonces existen subconjuntos abiertos y cerrados U y V de X con las siguientes propiedades:*

1. *$U \cap V = \emptyset$;*
2. *$A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y*
3. *$U \cup V = X$.*

Los siguientes tres resultados dan información sobre las componentes de una unión. Son de gran importancia y los usaremos en la Sección 6.3.

Lema 3.2.8 *Sean X un continuo de Hausdorff, $A, B \in 2^X$ y $a \in A$. Sea $\mathcal{L}$ un subcontinuo de 2^X con la propiedad de que A y B son elementos de $\mathcal{L}$. Sea K la componente de $\bigcup \mathcal{L}$ tal que $a \in K$. Entonces $K \cap B \neq \emptyset$.*

Prueba. Supongamos por el contrario que $K \cap B = \emptyset$. Luego, $a \in X \setminus B$. Puesto que $\mathcal{L}$ es compacto, por el Teorema 3.2.3 se tiene que

$$\bigcup \mathcal{L} \text{ es compacto.} \tag{3.55}$$

Por otro lado, dado que X es de Hausdorff se sigue que

$$\bigcup \mathcal{L} \text{ es de Hausdorff.} \tag{3.56}$$

Notamos que $\{a\}$ y B son subconjuntos cerrados y no vacíos de $\bigcup \mathcal{L}$ tales que ninguna componente de $\bigcup \mathcal{L}$ interseca a ambos. Gracias a (3.55), a (3.56) y al Teorema 3.2.7, existen subconjuntos cerrados U y V de $\bigcup \mathcal{L}$ con las siguientes propiedades:

1. $U \cap V = \emptyset$;
2. $\{a\} \subseteq U$, $B \subseteq V$ y
3. $\bigcup \mathcal{L} = U \cup V$.

Del Lema 3.1.4 se infiere que

$$\mathcal{L} \subseteq \langle U \rangle \cup \langle V \rangle \cup \langle U, V \rangle. \tag{3.57}$$

Como U y V son cerrados en $\bigcup \mathcal{L}$ y $\bigcup \mathcal{L}$ es cerrado en X, obtenemos que

$$U \text{ y } V \text{ son cerrados en } X.$$

Por el Lema 3.1.9 sabemos que

$$\langle U \rangle, \langle V \rangle \text{ y } \langle U, V \rangle \text{ son cerrados en } 2^X. \tag{3.58}$$

Observamos que $A \in \langle U \rangle \cup \langle U, V \rangle$ y $B \in \langle V \rangle$, por lo que

$$\langle U \rangle \cup \langle U, V \rangle \neq \emptyset \text{ y } \langle V \rangle \neq \emptyset. \tag{3.59}$$

Además, como $U \cap V = \emptyset$ se colige que

$$(\langle U \rangle \cup \langle U, V \rangle) \cap \langle V \rangle = \emptyset. \tag{3.60}$$

Conjuntando (3.57), (3.58), (3.59) y (3.60), llegamos a que $\mathcal{L}$ es disconexo, lo cual es una contradicción.

■

Corolario 3.2.9 *Sean X un continuo de Hausdorff y $B \in 2^X$. Sea $\mathcal{L}$ un subcontinuo de 2^X con la propiedad de que $B \in \mathcal{L}$. Si K es una componente de $\bigcup \mathcal{L}$, entonces $K \cap B \neq \emptyset$.*

Prueba. Tomemos $a \in K$. Como $K \subseteq \mathcal{L}$ podemos encontrar $A \in \mathcal{L}$ con la cualidad de que $a \in A$. Así, del Lema 3.2.8 se sigue que $K \cap B \neq \emptyset$. ■

Lema 3.2.10 *Sean X un continuo de Hausdorff y $\mathcal{A}$ un subcontinuo de 2^X. Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A} \cap C_N(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in C_N(X)$.*

Prueba. A razón del Teorema 3.2.3 resulta que

$$\bigcup \mathcal{A} \in 2^X. \tag{3.61}$$

Fijemos $Y \in \mathcal{A} \cap C_N(X)$ y notemos que

$$Y \subseteq \bigcup \mathcal{A}.$$

Consideremos el conjunto $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ de componentes de Y. Observamos que $m \in \{1, \ldots, N\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ determinemos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{K}_i = \{C : C \text{ es componente de } \bigcup \mathcal{A} \text{ y } C \cap Y_i \neq \emptyset\}. \tag{3.62}$$

Definamos

$$K_i = \bigcup \mathcal{K}_i. \tag{3.63}$$

Del Lema 1.2.3 se colige que

$$K_i \text{ es conexo.} \tag{3.64}$$

Además, de (3.62) se sigue que

$$\bigcup_{i=1}^{m} K_i \subseteq \bigcup \mathcal{A}. \tag{3.65}$$

Por otro lado, dado $z \in \bigcup \mathcal{A}$, tomemos la componente C_z de $\bigcup \mathcal{A}$ de tal manera que

$$z \in C_z.$$

Gracias al Lema 3.2.8 se infiere que $C_z \cap Y \neq \emptyset$. Por ende, podemos hallar $i \in \{1, \ldots, m\}$ que cumpla que $C_z \cap Y_i \neq \emptyset$. A consecuencia de (3.62) y (3.63) ocurre que $z \in C_z \subseteq K_i$, por lo que $z \in \bigcup_{j=1}^{m} K_j$. Por lo tanto,

$$\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} K_j. \tag{3.66}$$

Conjuntando (3.65) y (3.66) llegamos a que

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{m} K_j.$$

Finalmente, en vista de (3.61) y (3.64) podemos concluir que

$$\bigcup \mathcal{A} \in C_m(X) \subseteq C_N(X).$$

■

3.3 Una función especial

En esta sección se estudiará una función específica. Tal función aparece a lo largo de la Sección 6.3, pues es indispensable para poder probar el Lema 6.3.12. Cabe resaltar que dicho lema es parte fundamental de este trabajo, puesto que es la implicación directa de uno de los resultados principales: el Teorema 6.3.25.

Comenzaremos introduciendo un lema, el cual será muy útil al estudiar las propiedades de la función en cuestión.

Lema 3.3.1 *[6, Lema 3.10, p. 50] Sean X un espacio compacto y de Hausdorff, U y V subconjuntos abiertos y ajenos de X y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de 2^X tal que $\mathcal{U} \subseteq \langle U, V\rangle$. Si A es un elemento de $\mathcal{U}$, entonces existe un abierto básico $\langle P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots, P_m\rangle$ de 2^X tal que:*

1. $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{cl}(P_i) \subseteq U$;
2. $\bigcup_{i=n+1}^{m} \mathrm{cl}(P_i) \subseteq V$;
3. $A \in \langle P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots, P_m\rangle$
   $\subseteq \langle \mathrm{cl}(P_1), \ldots, \mathrm{cl}(P_n), \mathrm{cl}(P_{n+1}), \ldots, \mathrm{cl}(P_m)\rangle \subseteq \mathcal{U}$.

La prueba del Lema 3.3.1 está hecha para cuando X es un espacio métrico compacto. Se utiliza la métrica para justificar que X es T_3. Si suponemos que X es compacto y de Hausdorff, entonces X es T_4. En particular, X será T_3. De esta manera, se puede sustituir la hipótesis de que X es métrico por la hipótesis de que X es de Hausdorff.

A partir de este momento y hasta el final de esta sección, se dará prueba o referencia de resultados relacionados con propiedades que cumple la función que definiremos en el Lema 3.3.2.

Lema 3.3.2 *[6, Lema 2.18, p. 36] Sean X un espacio topológico, U y V subconjuntos abiertos y ajenos de X y $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ tal que $\mathcal{B} \subseteq \langle U, V \rangle$. Si $f : \mathcal{B} \to \langle U \rangle$ está dada por $f(B) = B \cap U$, entonces f está bien definida y es continua.*

Lema 3.3.3 *[6, Lema 3.11, p. 52] Sean X un espacio topológico, U y V subconjuntos abiertos y ajenos de X y $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots, P_m$ subconjuntos no vacíos de X tales que $\bigcup_{i=1}^{n} P_i \subseteq U$, $\bigcup_{i=n+1}^{m} P_i \subseteq V$ y $\langle P_1, \ldots, P_m \rangle \subseteq \langle U, V \rangle$. Si $f : \langle P_1, \ldots, P_m \rangle \to \langle U \rangle$ está dada por $f(B) = B \cap U$, entonces $f(\langle P_1, \ldots, P_m \rangle) = \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$.*

Corolario 3.3.4 *Sea X un continuo de Hausdorff y sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X. Si consideramos $f : \langle U_1, U_2 \rangle \to \langle U_1 \rangle$ dada por $f(B) = B \cap U_1$, entonces f es abierta.*

Prueba. Fijemos un subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de 2^X de tal manera que

$$\mathcal{U} \subseteq \langle U_1, U_2 \rangle.$$

Tomemos $C \in f[\mathcal{U}]$ y $B \in \mathcal{U}$ de tal forma que $f(B) = C$. Gracias al Lema 3.3.1, existe un abierto básico $\langle P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots, P_m \rangle$ de 2^X tal que:

1. $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{cl}(P_i) \subseteq U_1$;
2. $\bigcup_{i=n+1}^{m} \mathrm{cl}(P_i) \subseteq U_2$ y
3. $B \in \langle P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots, P_m \rangle$
   $\subseteq \langle \mathrm{cl}(P_1), \ldots, \mathrm{cl}(P_n), \mathrm{cl}(P_{n+1}), \ldots, \mathrm{cl}(P_m) \rangle \subseteq \mathcal{U}$.

Del Lema 3.3.3 se obtiene que

$$f(\langle P_1, \ldots, P_m\rangle) = \langle P_1, \ldots, P_n\rangle.$$

De la Propiedad 3 se sigue que $C = f(B) \in f[\langle P_1, \ldots, P_m\rangle] \subseteq f[\mathcal{U}]$. Así, $C \in \langle P_1, \ldots, P_n\rangle \subseteq f[\mathcal{U}]$. Por ende, $f[\mathcal{U}]$ es abierto en 2^X. Por lo tanto, f es abierta. ■

Lema 3.3.5 *[6, Lema 3.12, p. 53] Sean X un espacio compacto y de Hausdorff, U y V subconjuntos abiertos y ajenos de X y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de 2^X tal que $\mathcal{B} \subseteq \langle U, V\rangle$. Si $f : \mathcal{U} \to \langle U\rangle$ está dada por $f(B) = B \cap U$, entonces $\bigcup f[\mathcal{U}]$ es un subconjunto abierto de X.*

Lema 3.3.6 *Sean X un continuo de Hausdorff y $A \in 2^X$. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X que satisfacen que $A \in \langle U_1, U_2\rangle$. Sea $\mathcal{V}$ un subconjunto abierto de 2^X tal que $A \in \mathcal{V} \subseteq \langle U_1, U_2\rangle$. Si consideramos $f : \langle U_1, U_2\rangle \to \langle U_1\rangle$ dada por $f(B) = B \cap U_1$, entonces se cumple lo siguiente:*

1. *$\bigcup f[\mathcal{V}] \subseteq U_1$;*
2. *$A \cap (\bigcup f[\mathcal{V}]) = A \cap U_1$ y*
3. *$A \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}]) = \emptyset$.*

Prueba. Empezaremos demostrando la Propiedad 1. Sea $x \in \bigcup f[\mathcal{V}]$. Por ende, existe $B \in f[\mathcal{V}]$ de tal manera que $x \in B$. Puesto que $f[\mathcal{V}] \subseteq \langle U_1\rangle$ se sigue que $B \subseteq U_1$. Así, $x \in U_1$. Por lo tanto,

$$\bigcup f[\mathcal{V}] \subseteq U_1. \tag{3.67}$$

Por consiguiente,

$$A \cap (\bigcup f[\mathcal{V}]) \subseteq A \cap U_1. \tag{3.68}$$

Ahora, probaremos la Propiedad 2. Tomemos $z \in A \cap U_1$. Notamos que $A \in \mathcal{V}$ y $f(A) = A \cap U_1$. Es decir, $z \in f(A) \in f[\mathcal{V}]$. Luego, $z \in A \cap (\bigcup f[\mathcal{V}])$. Consecuentemente,

$$A \cap U_1 \subseteq A \cap (\bigcup f[\mathcal{V}]). \tag{3.69}$$

Conjuntando (3.68) y (3.69) llegamos a que

$$A \cap \left(\bigcup f[\mathcal{V}]\right) = A \cap U_1. \tag{3.70}$$

A continuación probaremos la Propiedad 3. Gracias a (3.67) se tiene que

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup f[\mathcal{V}]\right) \subseteq \mathrm{cl}(U_1).$$

Así,

$$\begin{gathered} A \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}]) \subseteq A \cap \mathrm{cl}(U_1) \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}]) \\ \text{y} \\ A \cap \mathrm{cl}(U_1) \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}]) = (U_1 \cup \mathrm{fr}(U_1)) \cap (A \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}])). \end{gathered} \tag{3.71}$$

Notamos que

$$\begin{gathered} (U_1 \cup \mathrm{fr}(U_1)) \cap (A \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}])) \\ = (U_1 \cap A \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}])) \cup (\mathrm{fr}(U_1) \cap A \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}])). \end{gathered} \tag{3.72}$$

Del Lema 3.3.5 se sigue que $\bigcup f[\mathcal{V}]$ es un subconjunto abierto de X. Por (3.70) resulta que

$$\begin{gathered} U_1 \cap A \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}]) = (\bigcup f[\mathcal{V}]) \cap A \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}]) \\ \text{y} \\ (\bigcup f[\mathcal{V}]) \cap A \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}]) \subseteq (\bigcup f[\mathcal{V}]) \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}]) = \emptyset. \end{gathered} \tag{3.73}$$

Por el Lema 3.1.1 colegimos que $A \cap \mathrm{fr}(U_1) = \emptyset$, por lo que

$$\mathrm{fr}(U_1) \cap A \cap \mathrm{fr}\left(\bigcup f[\mathcal{V}]\right) \subseteq \mathrm{fr}(U_1) \cap A = \emptyset. \tag{3.74}$$

Conjuntando (3.71), (3.72), (3.73) y (3.74) inferimos que

$$A \cap \mathrm{fr}\left(\bigcup f[\mathcal{V}]\right) \subseteq (U_1 \cup \mathrm{fr}(U_1)) \cap (A \cap \mathrm{fr}\left(\bigcup f[\mathcal{V}]\right)) = \emptyset.$$

En conclusión, $A \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}]) = \emptyset$. ■

3.4 Arcos ordenados

En esta sección introducimos el concepto de arco ordenado. A pesar de que algunos resultados únicamente serán enunciados, cabe señalar que los arcos ordenados son una herramienta muy importante para el estudio de la teoría de hiperespacios de continuos. En esta tesis, también tienen gran relevancia y se usarán en las secciones 4.2 y 5.2. Posteriormente, aparecerán de nuevo en el Capítulo 6.

Definición 3.4.1 Sean X un continuo de Hausdorff y $A, B \in 2^X$. Un *arco ordenado de A a B* es un subespacio $\mathcal{A}$ de 2^X que cumple lo siguiente:

1. $\mathcal{A}$ es no degenerado;
2. $\mathcal{A}$ es compacto y conexo;
3. para cada $C, D \in \mathcal{A}$ se tiene que $C \subseteq D$ o $D \subseteq C$ y
4. $A = \bigcap \mathcal{A}$ y $B = \bigcup \mathcal{A}$.

El siguiente teorema es fundamental, pues nos da condiciones necesarias y suficientes para asegurar la existencia de arcos ordenados.

Teorema 3.4.2 *[2, Teorema 2.15, p. 35] Sean X un continuo de Hausdorff y $A, B \in 2^X$, tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B si y solo si toda componente de B interseca a A.*

A partir de aquí y hasta el final de esta sección, se probarán algunos resultados sobre arcos ordenados que utilizaremos para probar el Teorema 4.2.21.

Lema 3.4.3 *Sean X un continuo de Hausdorff y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Supongamos que existen subconjuntos $U_1, \ldots, U_n$ de X tales que $A, B \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de A a B, entonces $\mathcal{A} \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$.*

Prueba. Del Corolario 3.1.3 se sigue que $\{D \in 2^X : A \subseteq D \subseteq B\} \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Además, $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cap \{D \in 2^X : A \subseteq D \subseteq B\}$. Por ende, $\mathcal{A} \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. ■

Lema 3.4.4 *Sean X un continuo de Hausdorff, $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$ y $\mathcal{A}$ un arco ordenado de A a B. Si $C, D \in \mathcal{A}$, entonces los conjuntos $\mathcal{H} = \{F \in \mathcal{A} : C \subsetneq F\}$, $\mathcal{K} = \{F \in \mathcal{A} : F \subsetneq D\}$ y $\mathcal{M} = \{F \in \mathcal{A} : C \subsetneq F \subsetneq D\}$ son abiertos en $\mathcal{A}$.*

Prueba. Notamos que $F \in \mathcal{H}$ si y solo si $F \in \mathcal{A}$ y $C \subsetneq F$. Esto ocurre si y solo si $F \in \mathcal{A} \cap \langle X, X \setminus C\rangle$, que es abierto en $\mathcal{A}$.
A continuación probaremos que

$$\mathcal{K} = \mathcal{A} \cap \left(\bigcup_{d \in D} \langle X \setminus \{d\}\rangle \right). \tag{3.75}$$

Consideremos $F \in \mathcal{K}$. Luego, $F \in \mathcal{A}$ y $F \subsetneq D$. Tomemos $z \in D \setminus F$. Así,

$$F \in \mathcal{A} \cap \langle X \setminus \{z\}\rangle,$$

por lo que

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A} \cap \left(\bigcup_{d \in D} \langle X \setminus \{d\}\rangle \right). \tag{3.76}$$

Si $L \in \mathcal{A} \cap \left(\bigcup_{d \in D}\langle X \setminus \{d\}\rangle\right)$, existe $d \in D$ con la propiedad de que $L \in \langle X \setminus \{d\}\rangle$. De esta manera, $L \in \mathcal{A}$ y $L \subseteq X \setminus \{d\}$. Como $d \in D \setminus L$ y $\mathcal{A}$ es un arco ordenado, podemos asegurar que $L \subsetneq D$. Consecuentemente $L \in \mathcal{K}$ y, por lo tanto,

$$\mathcal{A} \cap \left(\bigcup_{d \in D} \langle X \setminus \{d\}\rangle \right) \subseteq \mathcal{K}. \tag{3.77}$$

Conjuntando (3.76) y (3.77) inferimos (3.75). Además, para cada $d \in D$ el conjunto $\langle X \setminus \{d\}\rangle$ es abierto en 2^X. Por ende, $\bigcup_{d \in D}\langle X \setminus \{d\}\rangle$ es abierto en 2^X. De (3.75) resulta que $\mathcal{K}$ es abierto en $\mathcal{A}$.
Finalmente, observamos que $\mathcal{M} = \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$. En conclusión, $\mathcal{M}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{A}$. ■

Lema 3.4.5 *Sean X un continuo de Hausdorff, $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$ y $\mathcal{A}$ un arco ordenado de A a B. Sean $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos de X. Si $C \in \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ y $C \subsetneq B$, entonces existe $D \in \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ de tal manera que $C \subsetneq D$.*

Prueba. Contemplemos

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i. \tag{3.78}$$

Notemos que

$$C \subseteq U.$$

Dado $F \in \mathcal{A}$, podemos garantizar que $F \subseteq C$ o $C \subsetneq F$. De esta manera $F \in \langle U \rangle$ o $F \in \langle X, X \setminus C \rangle$, resultando que

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A} \cap \langle U \rangle) \cup (\mathcal{A} \cap \langle X, X \setminus C \rangle). \tag{3.79}$$

También,

$$\mathcal{A} \cap \langle U \rangle \text{ y } \mathcal{A} \cap \langle X, X \setminus C \rangle \text{ son abiertos en } \mathcal{A}. \tag{3.80}$$

Además,

$$C \in \mathcal{A} \cap \langle U \rangle \text{ y } B \in \mathcal{A} \cap \langle X, X \setminus C \rangle.$$

Gracias a que $\mathcal{A}$ es conexo, a (3.79) y a (3.80) se colige que

$$(\mathcal{A} \cap \langle U \rangle) \cap (\mathcal{A} \cap \langle X, X \setminus C \rangle) \neq \emptyset.$$

Fijemos

$$D \in (\mathcal{A} \cap \langle U \rangle) \cap (\mathcal{A} \cap \langle X, X \setminus C \rangle).$$

Como $\mathcal{A}$ es un arco ordenado, $C, D \in \mathcal{A}$ y $D \cap (X \setminus C) \neq \emptyset$, se deduce que $C \subsetneq D$. Adicionalmente se satisface que $D \subseteq U$. Finalmente, conjuntando (3.78) y el Lema 3.1.2 podemos concluir que $D \in \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. ■

Lema 3.4.6 *Sean X un continuo de Hausdorff, $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$ y $\mathcal{A}$ un arco ordenado de A a B. Sean $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos de X. Si $C \in \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $A \subsetneq C$, entonces existe $E \in \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ de tal manera que $E \subsetneq C$.*

Prueba. Consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{K} = \{F \in \mathcal{A} : F \subsetneq C\}.$$

Del Lema 3.4.4 se deriva que

$$\mathcal{K} \text{ es abierto en } \mathcal{A}. \tag{3.81}$$

Asimismo,

$$\mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n, X \rangle \text{ es abierto en } \mathcal{A}. \tag{3.82}$$

Puesto que $C \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ se satisface que

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right) \cup X \tag{3.83}$$

y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, el conjunto

$$C \cap U_i \text{ es no vacío.}$$

Por ende,

$$C \in \langle U_1, \ldots, U_n, X \rangle.$$

Dado $L \in \mathcal{A}$ se cumple que $L \subsetneq C$ o $C \subseteq L$. Si $L \subsetneq C$ resulta que $L \in \mathcal{K}$. Si $C \subseteq L$, del Lema 3.1.2 se deduce que $L \in \langle U_1, \ldots, U_n, X \rangle$. Por consiguiente,

$$\mathcal{A} = \mathcal{K} \cup (\mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n, X \rangle). \tag{3.84}$$

Además,

$$A \in \mathcal{K} \text{ y } C \in \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n, X \rangle.$$

En vista de que $\mathcal{A}$ es conexo, de (3.81), de (3.82) y de (3.84) se sigue que

$$\mathcal{K} \cap (\mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n, X \rangle) \neq \emptyset.$$

Tomemos $E \in \mathcal{K} \cap (\mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n, X \rangle)$. Entonces para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $E \cap U_i \neq \emptyset$. A causa de (3.83) podemos asegurar que $E \subsetneq C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. En conclusión, $E \in \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, lo que nos lleva al resultado. ■

Capítulo 4

La topología del orden

En el presente capítulo, veremos que a partir de un conjunto totalmente ordenado podemos obtener un espacio topológico de manera natural. Asimismo, combinaremos ambas estructuras para probar algunos resultados que, a pesar de que son ya conocidos, agregaremos a este trabajo a fin de que quede lo más autocontenido posible. Además, introduciremos el concepto de arco generalizado. Tal concepto es fundamental en el desarrollo de esta tesis y lo estudiaremos más a fondo en la Sección 4.2.

4.1 Resultados generales

4.1.1 Conjuntos totalmente ordenados

Empezaremos esta subsección recordando un par de definiciones.

Definición 4.1.1 Sean $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado, $A \subseteq X$ y $a \in X$. Diremos que *a es el supremo de A* si a es cota superior de A y para cada $z \in X$ tal que z es cota superior de A, se tiene que $a \leqslant z$. Al elemento a lo denotaremos por $\sup A$.

Definición 4.1.2 Sean $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado, $B \subseteq X$ y $b \in X$. Diremos que *b es el ínfimo de B* si b es cota inferior de B y para cada $w \in X$ con la propiedad de que w es cota inferior de B, se tiene que $w \leqslant b$. Al elemento b lo denotaremos por $\operatorname{ínf} B$.

El siguiente resultado, a pesar de que está enunciado para un conjunto totalmente ordenado, nos habla de propiedades con las que ya estamos familiarizados.

Lema 4.1.3 *Sean $\langle X, \leqslant\rangle$ un conjunto totalmente ordenado y $A \subseteq X$.*

1. *Si existe* $\sup A$*, entonces para cada $x \in X$ con la propiedad de que $x < \sup A$, existe $c \in A$ de tal manera que $x < c \leqslant \sup A$.*

2. *Si existe* $\inf A$*, entonces para cada $y \in X$ con la propiedad de que $\inf A < y$, existe $d \in A$ de tal manera que $\inf A \leqslant d < y$.*

Prueba. Sea $x \in X$ con la cualidad de que $x < \sup A$. Luego, x no es cota superior de A. Así, podemos encontrar $c \in A$ de tal suerte que $x < c \leqslant \sup A$. Análogamente, si tomamos $y \in X$ con la característica de que $\inf A < y$, se tiene que y no es cota inferior de A. Consecuentemente podemos hallar $d \in A$ que cumple que $\inf A \leqslant d < y$. ■

Definición 4.1.4 Sea $\langle X, \leqslant\rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Decimos que X *cumple la propiedad del supremo* si para todo subconjunto no vacío y acotado superiormente B de X, existe $\sup B$.

Definición 4.1.5 Sea $\langle X, \leqslant\rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Decimos que X *cumple la propiedad del ínfimo* si para todo subconjunto no vacío y acotado inferiormente B de X, existe $\inf B$.

Los siguientes tres resultados nos relacionan las propiedades del supremo y del ínfimo.

Lema 4.1.6 *Sea $\langle X, \leqslant\rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Si X cumple la propiedad del supremo, entonces X cumple la propiedad del ínfimo.*

Prueba. Sea B un subconjunto de X no vacío y acotado inferiormente. Tomemos $x \in X$ tal que x es cota inferior de B. Consideremos el siguiente conjunto:

$$A = \{z \in X : \text{para cada } b \in B \text{ se tiene que } z \leqslant b\}. \tag{4.1}$$

Notamos que $x \in A$. Además $B \neq \emptyset$, por lo que A es acotado superiormente. Como X cumple la propiedad del supremo, podemos encontrar $a \in X$ de tal manera que

$$a = \sup A.$$

Si elegimos $l \in X$ con la cualidad de que l es cota inferior de B, de (4.1) obtenemos que $l \in A$. Luego, $l \leqslant a$.
En caso de que hubiese $w \in B$ de tal manera que $w < a$, por el Lema 4.1.3 existiría $t \in (w, a] \cap A$, lo cual es una contradicción. Consecuentemente a es cota inferior de B, por lo que $a = \inf B$. ■

Lema 4.1.7 *Sea $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Si X cumple la propiedad del ínfimo, entonces X cumple la propiedad del supremo.*

Prueba. Sea A un subconjunto de X no vacío y acotado superiormente. Consideremos $z \in X$ de tal manera que z es cota superior de A. Definamos el siguiente conjunto:

$$B = \{w \in X : \text{para cada } a \in A \text{ se tiene que } a \leqslant w\}. \tag{4.2}$$

Observamos que $z \in B$. Puesto que $A \neq \emptyset$, podemos hallar una cota inferior para B. Debido a que X cumple la propiedad del ínfimo, existe $b \in X$ de tal manera que

$$b = \inf B.$$

Si $l \in X$ es una cota superior de A, de (4.2) obtenemos que $l \in B$. Así, $b \leqslant l$. Por otro lado, si tuviésemos $t \in A$ de tal suerte que $b < t$, por el Lema 4.1.3 podríamos elegir $s \in [b, t) \cap B$, en contradicción con (4.2). Por lo tanto b es cota superior de A, concluyendo que $b = \sup A$. ■

Corolario 4.1.8 *Sea $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Entonces X cumple la propiedad del supremo si y solo si X cumple la propiedad del ínfimo.*

En la siguiente observación, retomamos el concepto de arco ordenado.

Observación 4.1.9 Sean X un continuo de Hausdorff y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de A a B, entonces $\langle \mathcal{A}, \subseteq \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

4.1.2 La topología inducida

En esta subsección definimos la topología del orden y vemos algunas propiedades de la misma.

Definición 4.1.10 Sean $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado y $a, b \in X$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}, [a, b] = \{x \in X : a \leqslant x \leqslant b\},$$

$$[a, b) = \{x \in X : a \leqslant x < b\}, (a, b] = \{x \in X : a < x \leqslant b\},$$

$$[a, \rightarrow) = \{x \in X : a \leqslant x\}, (\leftarrow, a] = \{x \in X : x \leqslant a\},$$

$$(a, \rightarrow) = \{x \in X : a < x\}, (\leftarrow, a) = \{x \in X : x < a\} \text{ y}$$

$$(\leftarrow, \rightarrow) = X.$$

Definición 4.1.11 Sea $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado y sea

$$\mathcal{S} = \{(a, \rightarrow) : a \in X\} \cup \{(\leftarrow, b) : b \in X\}.$$

Definimos *la topología del orden en X inducida por $\leqslant$* como la topología generada por la subbase $\mathcal{S}$.

Estamos listos para probar nuestra primera propiedad acerca de la topología del orden.

Lema 4.1.12 *Sea $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado y consideremos la topología del orden inducida por $\leqslant$ en X. Entonces X es de Hausdorff.*

Prueba. Tomemos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Puesto que $\langle X, \leqslant \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x < y$. Si existe $z \in X$ con la cualidad de que $x < z < y$, podemos inferir lo siguiente:

$$x \in (\leftarrow, z), y \in (z, \rightarrow),$$

$$(\leftarrow, z) \text{ y } (z, \rightarrow) \text{ son abiertos en } X \text{ y}$$

$$(\leftarrow, z) \cap (z, \rightarrow) = \emptyset.$$

En caso contrario se cumple que

$$x \in (\leftarrow, y), y \in (x, \rightarrow),$$

$$(\leftarrow, y) \text{ y } (x, \rightarrow) \text{ son abiertos en } X \text{ y}$$
$$(\leftarrow, y) \cap (x, \rightarrow) = \emptyset.$$

Por lo tanto, X es de Hausdorff. ■

Lo que queremos hacer ahora es estudiar la propiedad de compacidad. Por ende, aquí recordamos la siguiente definición:

Definición 4.1.13 Sean X un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{F}$ *cumple la propiedad de la intersección finita* si para cualquier subconjunto finito $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$ se tiene que $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

El teorema que enunciaremos a continuación es muy conocido, por lo que no se incluirá la prueba del mismo.

Teorema 4.1.14 *[9, Teorema 17.4, p. 118] Sea X un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es compacto;*
2. *cada familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita, tiene intersección no vacía.*

Lema 4.1.15 *Sea $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Si X tiene la topología del orden inducida por $\leqslant$ y X es compacto, entonces X posee un elemento máximo.*

Prueba. Consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{K} = \{[x, \rightarrow) : x \in X\}.$$

Notamos que

$$\mathcal{K} \text{ es una familia de subconjuntos cerrados de } X. \tag{4.3}$$

A continuación probaremos que

$$\mathcal{K} \text{ cumple la propiedad de la intersección finita.} \tag{4.4}$$

Tomemos $x_1, \ldots, x_k \in X$ y veamos que

$$\bigcap_{i=1}^{k} [x_i, \rightarrow) \neq \emptyset. \tag{4.5}$$

Dado que $\langle X, \leqslant \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado, podemos elegir $l \in \{1, \ldots, k\}$ de tal manera que $x_l = \max\{x_1, \ldots, x_k\}$.
Así,

$$x_l \in \bigcap_{i=1}^{k} [x_i, \rightarrow),$$

por lo que (4.5) es verdadero. Por consiguiente, se cumple (4.4).
En virtud de (4.3), de (4.4) y del Teorema 4.1.14, podemos encontrar $x^* \in \bigcap \mathcal{K}$.
Además, si $y \in X$ se sigue que $[y, \rightarrow) \in \mathcal{K}$. Consecuentemente, $x^* \in [y, \rightarrow)$ y, por ende, $y \leqslant x^*$. Luego, $x^* = \max X$. ■

Lema 4.1.16 *Sea $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Si X tiene la topología del orden inducida por $\leqslant$ y X es compacto, entonces X posee un elemento mínimo.*

Prueba. Sea

$$\mathcal{L} = \{(\leftarrow, x] : x \in X\}.$$

Entonces, $\mathcal{L}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X.
Consideremos $x_1, \ldots, x_k \in X$. Como $\langle X, \leqslant \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado, existe $m \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x_m = \min\{x_1, \ldots, x_k\}$.
Luego,

$$x_m \in \bigcap_{i=1}^{k} (\leftarrow, x_i].$$

Así, $\mathcal{L}$ cumple la propiedad de la intersección finita. Gracias a que $\mathcal{L}$ es una familia de cerrados y al Teorema 4.1.14, podemos encontrar $x^* \in \bigcap \mathcal{L}$.
Por otro lado, si $y \in X$ se sigue que $(\leftarrow, y] \in \mathcal{L}$. En consecuencia, $x^* \in (\leftarrow, y]$ y, por lo tanto, $x^* \leqslant y$. En conclusión, $x^* = \min X$. ■

Corolario 4.1.17 *Sea $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Si X tiene la topología del orden inducida por $\leqslant$ y X es compacto, entonces X posee un elemento máximo y un elemento mínimo.*

El siguiente resultado está relacionado con la propiedad de conexidad.

Lema 4.1.18 *Sea $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Si X tiene la topología del orden inducida por $\leqslant$ y X es conexo, entonces X cumple la propiedad del ínfimo.*

Prueba. Sea B un subconjunto no vacío de X y tomemos $m \in X$ de tal manera que m es cota inferior de B. Consideremos el siguiente conjunto:

$$A = \{x \in X : \text{para cada } b \in B \text{ se tiene que } x \leqslant b\}.$$

Observamos que

$$m \in A. \tag{4.6}$$

Si existe $l \in A \cap B$, entonces l es cota inferior de b. Además, si $z \in X$ es cualquier otra cota inferior de B, se tiene que $z \leqslant l$. Consecuentemente, $l = \text{ínf}\, B$.
Supongamos que $A \cap B = \emptyset$. De este modo,

$$\emptyset \neq B \subseteq X \setminus A. \tag{4.7}$$

Notamos que $A = \bigcap_{b \in B}(\leftarrow, b]$, por lo que

$$A \text{ es cerrado en } X.$$

De (4.6) y (4.7) obtenemos que

$$A \notin \{\emptyset, X\}.$$

Como X es conexo, podemos asegurar que

$$\text{int}(A) \neq A = \text{cl}(A) = \text{int}(A) \cup \text{fr}(A).$$

Por ende, podemos encontrar $z \in \text{fr}(A) \setminus \text{int}(A)$. Puesto que $z \in A$, se sigue que z es cota inferior de B. Además, si hubiera $a \in A$ con la propiedad de que $z < a$, llegaríamos a que $z \in (\leftarrow, a) \subseteq A$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $z = \text{ínf}\, B$. ■

Lo que sigue ahora es estudiar un poco qué sucede con los subespacios de un conjunto totalmente ordenado.

Notación 4.1.19 Sean $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado y $A \subseteq X$. Denotamos por $\leqslant_A$ a la restricción de $\leqslant$ al conjunto A.

Observación 4.1.20 Si $\langle X, \leqslant \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado y $A \subseteq X$, resulta que $\langle A, \leqslant_A \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

Lema 4.1.21 *Sean $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado, $A \subseteq X$ y consideremos a X con la topología del orden inducida por $\leqslant$. Entonces la topología en A inducida por $\leqslant_A$ es subconjunto de la topología de subespacio para A.*

Prueba. Notamos que para cualesquiera $a, b \in A$ se cumple lo siguiente:

1. $\{x \in A : x <_A a\} = (\leftarrow, a) \cap A$;

2. $\{x \in A : a <_A x\} = (a, \rightarrow) \cap A$ y

3. $\{x \in A : a <_A x <_A b\} = (a, b) \cap A$.

Es decir, cada subconjunto abierto básico de la topología de A inducida por $\leqslant_A$ es también abierto en la topología de subespacio para A, con lo que llegamos al resultado. ■

En general, el recíproco del Lema 4.1.21 no se cumple:

Ejemplo 4.1.22 Sea $\leqslant$ el orden usual en $\mathbb{R}$ y fijémonos en $\mathbb{R}$ con la topología del orden inducida por $\leqslant$. Sea $A = \{-1\} \cup \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Observamos que $\{-1\} = (-2, 0) \cap A$, por lo que $\{-1\}$ es un elemento de la topología de subespacio para A. Sin embargo, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{t \in A : -1 \leqslant_A t < \frac{1}{n+1}\}$ es elemento de la topología del orden inducida por $\leqslant_A$ y no degenerado. En conclusión, $\{-1\}$ no pertenece a la topología del orden inducida por $\leqslant_A$.

Bajo ciertas condiciones, sí podemos asegurar que la topología del orden y la de subespacio coinciden. Esto último queda ilustrado en el siguiente resultado:

Lema 4.1.23 *Sean $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado, $A \subseteq X$ y consideremos a X con la topología del orden inducida por $\leqslant$. Supongamos que A satisface lo siguiente:*

1. *A es no degenerado;*

2. *para cada $a \in A \setminus \{\max A\}$ y cada $x \in X$ con la cualidad de que $a < x$, existe $a_1 \in (a, x) \cap A$ y*

3. *para cualquier $a \in A \setminus \{\min A\}$ y cualquier $x \in X$ con la característica de que $x < a$, existe $a_2 \in (x, a) \cap A$.*

Entonces la topología en A inducida por $\leqslant_A$ coincide con la topología de subespacio para A.

Prueba. Denotemos por $\tau_{\leqslant_A}$ y por τ_A a la topología del orden inducida por $\leqslant_A$ en A y a la topología de subespacio para A, respectivamente. Del Lema 4.1.21 se obtiene que $\tau_{\leqslant_A} \subseteq \tau_A$.
Consideremos $U \in \tau_A$ y $a \in U$. Así, podemos encontrar un intervalo abierto W de X de tal manera que

$$a \in W \cap A \subseteq U. \tag{4.8}$$

CASO 1. Si $a = \operatorname{mín} A$, existe $x \in X$ con la característica de que $a < x$ y $[a, x) \cap A \subseteq W \cap A$. De la Propiedad 1 se desprende que $a \in A \setminus \{\operatorname{máx} A\}$. Gracias a la Propiedad 2, podemos hallar $a_1 \in (a, x) \cap A$. Luego, $a \in \{z \in A : a \leqslant_A z <_A a_1\} \subseteq [a, x) \cap A \subseteq U$.
CASO 2. Si $a = \operatorname{máx} A$, podemos tomar $x \in X$ con la peculiaridad de que $x < a$ y $(x, a] \cap A \subseteq W \cap A$. Notando la Propiedad 1 se puede afirmar que $a \in A \setminus \{\operatorname{mín} A\}$. De la Propiedad 3 se deriva que hay un elemento a_2 en el conjunto $(x, a) \cap A$. En vista de (4.8) resulta que

$$a \in \{z \in A : a_2 <_A z \leqslant_A a\} \subseteq (x, a] \cap A \subseteq U.$$

CASO 3. Si $a \in A \setminus \{\operatorname{mín} A, \operatorname{máx} A\}$, podemos fijar $x, y \in X$ que satisfagan que $x < a < y$ y $(x, y) \cap A \subseteq W \cap A$. Debido a la Propiedad 2 y a la Propiedad 3, podemos elegir $a_1 \in (x, a) \cap A$ y $a_2 \in (a, y) \cap A$. De (4.8) se infiere que $a \in \{z \in A : a_1 <_A z <_A a_2\} \subseteq (x, y) \cap A \subseteq U$.
Conjuntando el CASO 1, el CASO 2 y el CASO 3 concluimos que $U \in \tau_{\leqslant_A}$. Por lo tanto, $\tau_{\leqslant_A} = \tau_A$. ■

4.1.3 Un espacio cociente particular

Esta subsección está dedicada a la construcción de un espacio cociente específico. Tal espacio aparece nuevamente en las secciones 4.2 y 5.2 y es de vital importancia para demostrar el Teorema 4.2.19 y el Teorema 5.2.19.

Observación 4.1.24 Sean $\langle X, \leqslant_X\rangle$ y $\langle Y, \leqslant_Y\rangle$ conjuntos totalmente ordenados tales que $X \cap Y = \emptyset$ y existen $\operatorname{máx} X$ y $\operatorname{mín} Y$. Definamos la siguiente relación en $X \cup Y$:

$$x \backsim y \text{ si y solo si } x = y \text{ o } \{x, y\} \subseteq \{\operatorname{máx} X, \operatorname{mín} Y\}. \tag{4.9}$$

Notamos que $\backsim$ es una relación de equivalencia en $X \cup Y$. Dado $x \in X \cup Y$, denotamos la clase de equivalencia de x por

$$\tilde{x} = \{y \in X \cup Y : x \sim y\}. \tag{4.10}$$

Así, podemos considerar el conjunto cociente

$$Z_X^Y = \{\tilde{x} : x \in X \cup Y\}. \tag{4.11}$$

Ahora, establezcamos una relación de orden $\leqslant$ en Z_X^Y como sigue:

$$\tilde{x} \leqslant \tilde{y} \text{ si y solo si } \begin{cases} x, y \in X \text{ y } x \leqslant_X y \\ \text{o} \\ x, y \in Y \text{ y } x \leqslant_Y y \\ \text{o} \\ x \in X \text{ y } y \in Y \\ \text{o} \\ \{x, y\} \subseteq \{\text{máx}\, X, \text{mín}\, Y\}. \end{cases} \tag{4.12}$$

Lema 4.1.25 *Sean $\langle X, \leqslant_X \rangle$ y $\langle Y, \leqslant_Y \rangle$ conjuntos totalmente ordenados tales que $X \cap Y = \emptyset$ y existen $\text{máx}\, X$ y $\text{mín}\, Y$. Si Z_X^Y y $\leqslant$ son como en (4.11) y (4.12) respectivamente, entonces $\leqslant$ está bien definida.*

Prueba. Sean $\tilde{x}, \tilde{y} \in Z_X^Y$ de tal manera que $\tilde{x} \leqslant \tilde{y}$ y tomemos $w \in \tilde{x}$ y $z \in \tilde{y}$. Denotemos por v^* al conjunto $\{\text{máx}\, X, \text{mín}\, Y\}$.
CASO 1. Si $\{\tilde{x}, \tilde{y}\} \cap \{v^*\} = \emptyset$ se tiene que $w = x$ y $z = y$. Luego, $\tilde{w} \leqslant \tilde{z}$.
CASO 2. Supongamos que $\{\tilde{x}, \tilde{y}\} \cap \{v^*\} \neq \emptyset$.
SUBCASO 2.1. Si ocurre que $\tilde{x} = v^*$ y $\tilde{y} = v^*$ se sigue que $\{w, z\} \subseteq \{\text{máx}\, X, \text{mín}\, Y\}$. Por (4.12) de la Observación 4.1.24 resulta que $\tilde{w} \leqslant \tilde{z}$.
SUBCASO 2.2. Si pasa que $\tilde{x} \neq v^*$ o $\tilde{y} \neq v^*$, deducimos que $\tilde{x} \neq \tilde{y}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\tilde{x} \neq v^*$. Por consiguiente, $\tilde{y} = v^*$. Puesto que $\tilde{x} \leqslant \tilde{y}$, a consecuencia de (4.9) y (4.12) de la Observación 4.1.24 podemos asegurar que $\tilde{x} = \{x\} \subseteq X \setminus \{\text{máx}\, X\}$. Por ende $w = x$ y $z \in \{\text{máx}\, X, \text{mín}\, Y\}$. A causa de (4.12) de la Observación 4.1.24 se concluye que $\tilde{w} \leqslant \tilde{z}$.
Finalmente, conjuntando el CASO 1 y el CASO 2 llegamos a que $\leqslant$ está bien definida. ■

Observación 4.1.26 Sean $\langle X, \leqslant_X \rangle$ y $\langle Y, \leqslant_Y \rangle$ conjuntos totalmente ordenados tales que $X \cap Y = \emptyset$ y existen $\max X$ y $\min Y$. Definamos Z_X^Y y $\leqslant$ como en (4.11) y (4.12) de la Observación 4.1.24, respectivamente. Por el Lema 4.1.25 tenemos que $\leqslant$ está bien definida. Además, puesto que $\langle X, \leqslant_X \rangle$ y $\langle Y, \leqslant_Y \rangle$ son conjuntos totalmente ordenados resulta que $\langle Z_X^Y, \leqslant \rangle$ es también un conjunto totalmente ordenado.

Lo que sigue ahora es definir el espacio suma, que es otro ejemplo de un espacio que se construye a partir de espacios ya conocidos.

Observación 4.1.27 Sean X y Y espacios topológicos tales que $X \cap Y = \emptyset$. Consideremos la siguiente familia de subconjuntos de $X \cup Y$:

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \cup Y : \text{ para cada } Z \in \{X, Y\}, \text{ el conjunto } A \cap Z \text{ es abierto en } Z\}. \tag{4.13}$$

Entonces $\mathcal{T}$ es una topología para $X \cup Y$.

Definición 4.1.28 Sean X y Y espacios topológicos tales que $X \cap Y = \emptyset$. Llamamos *la suma topológica de X y Y* al espacio obtenido al considerar la topología $\mathcal{T}$ definida en (4.13) de la Observación 4.1.27 en $X \cup Y$. A este espacio lo denotaremos por $X \oplus Y$.

Observación 4.1.29 Sean X y Y espacios topológicos tales que $X \cap Y = \emptyset$. Si $i_X : X \to X \oplus Y$ e $i_Y : Y \to X \oplus Y$ son la función inclusión de X en $X \oplus Y$ y la función inclusión de Y en $X \oplus Y$ respectivamente, se tiene que i_X e i_Y son continuas.

Los siguientes tres resultados nos muestran la relación que hay entre la topología del orden y la topología cociente, para el espacio Z_X^Y.

Lema 4.1.30 *Sean $\langle X, \leqslant_X \rangle$ y $\langle Y, \leqslant_Y \rangle$ conjuntos totalmente ordenados tales que $X \cap Y = \emptyset$ y existen $\max X$ y $\min Y$. Consideremos Z_X^Y y $\leqslant$ definidos como en (4.11) y (4.12) de la Observación 4.1.24, respectivamente. Supongamos que X y Y tienen la topología del orden generada por $\leqslant_X$ y $\leqslant_Y$, respectivamente. Si $p : X \oplus Y \to Z_X^Y$ es la función cociente, entonces la topología cociente inducida por p en Z_X^Y es subconjunto de la topología del orden generada por $\leqslant$ en Z_X^Y.*

Prueba. Denotemos por τ_p a la topología cociente inducida por p en Z_X^Y, por $\tau_\leqslant$ a la topología del orden generada por $\leqslant$ en Z_X^Y y por v al conjunto $\{\text{máx}\, X, \text{mín}\, Y\}$. Sean $U \in \tau_p$ y $\tilde{x} \in U$. Así, $p^{-1}[U]$ es abierto en $X \oplus Y$ y $p^{-1}(\tilde{x}) \subseteq p^{-1}[U]$. En vista de la Observación 4.1.27 obtenemos que $p^{-1}[U] \cap X$ y $p^{-1}[U] \cap Y$ son subconjuntos abiertos de X y Y, respectivamente.
CASO 1. Si $\tilde{x} \neq v$ se tiene que $x \in X \setminus \{\text{máx}\, X\}$ o $x \in Y \setminus \{\text{mín}\, Y\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in X \setminus \{\text{máx}\, X\}$.
SUBCASO 1. Si $x \neq \text{mín}\, X$ podemos encontrar elementos z y w de X que satisfagan que $z < x < w$ y $(z, w) \subseteq p^{-1}[U] \cap X$. Luego, $\tilde{x} \in (\tilde{z}, \tilde{w}) \subseteq U$. En este subcaso, $U \in \tau_\leqslant$.
SUBCASO 2. Si ocurre que $x = \text{mín}\, X$, podemos hallar $t \in X$ con la característica de que $x \in [x, t) \subseteq p^{-1}[U] \cap X$. Por consiguiente, $\tilde{x} \in [\tilde{x}, \tilde{t}) \subseteq U$. En este subcaso, $U \in \tau_\leqslant$.
CASO 2. Supongamos que $\tilde{x} = v$. Por ende, podemos tomar $z \in X$ y $w \in Y$ que cumplen que $\emptyset \neq (z, \text{máx}\, X] \subseteq p^{-1}[U] \cap X$ y $\emptyset \neq [\text{mín}\, Y, w) \subseteq p^{-1}[U] \cap Y$. Consecuentemente, $\tilde{x} \in (\tilde{z}, \tilde{w}) \subseteq U$. En este caso, $U \in \tau_\leqslant$.
Conjuntando el CASO 1 y el CASO 2 concluimos que $\tau_p \subseteq \tau_\leqslant$. ■

Lema 4.1.31 *Sean $\langle X, \leqslant_X \rangle$ y $\langle Y, \leqslant_Y \rangle$ conjuntos totalmente ordenados tales que $X \cap Y = \emptyset$ y existen $\text{máx}\, X$ y $\text{mín}\, Y$. Consideremos Z_X^Y y $\leqslant$ definidos como en (4.11) y (4.12) de la Observación 4.1.24, respectivamente. Supongamos que X y Y tienen la topología del orden generada por $\leqslant_X$ y $\leqslant_Y$, respectivamente. Si $p : X \oplus Y \to Z_X^Y$ es la función cociente, entonces la topología del orden generada por $\leqslant$ en Z_X^Y está contenida en la topología cociente inducida por p en Z_X^Y.*

Prueba. Bastará probar que cada elemento subbásico de la topología inducida por el orden $\leqslant$ en Z_X^Y pertenece a la topología cociente inducida por p en Z_X^Y. Sea $\tilde{x} \in Z_X^Y$.
CASO 1. Si $x \in X$, notemos que

$$p^{-1}[(\leftarrow, \tilde{x})] = (\leftarrow, x) \text{ y } p^{-1}[(\tilde{x}, \rightarrow)] = (x, \text{máx}\, X] \cup Y.$$

A consecuencia de la Observación 4.1.27 se sigue que $(\leftarrow, \tilde{x})$ y $(\tilde{x}, \rightarrow)$ son subconjuntos abiertos de Z_X^Y con la topología cociente inducida por p.
CASO 2. Si sucede que $x \in Y$, observamos que

$$p^{-1}[(\leftarrow, \tilde{x})] = X \cup [\text{mín}\, Y, x) \text{ y } p^{-1}[(\tilde{x}, \rightarrow)] = (x, \rightarrow).$$

De la Observación 4.1.27 se desprende que $(\leftarrow, \tilde{x})$ y $(\tilde{x}, \rightarrow)$ son subconjuntos abiertos de Z_X^Y con la topología cociente inducida por p.
Finalmente, gracias al CASO 1 y al CASO 2 hemos terminado. ■

Corolario 4.1.32 *Sean $\langle X, \leqslant_X \rangle$ y $\langle Y, \leqslant_Y \rangle$ conjuntos totalmente ordenados tales que $X \cap Y = \emptyset$ y existen $\max X$ y $\min Y$. Consideremos Z_X^Y y $\leqslant$ definidos como en (4.11) y (4.12) de la Observación 4.1.24, respectivamente. Supongamos que X y Y tienen la topología del orden generada por $\leqslant_X$ y $\leqslant_Y$, respectivamente. Si $p : X \oplus Y \to Z_X^Y$ es la función cociente, entonces la topología cociente en Z_X^Y coincide con la topología del orden generada por $\leqslant$ en Z_X^Y.*

El siguiente lema nos habla de un tipo de "inclusión" de los espacios X y Y en el espacio Z_X^Y.

Lema 4.1.33 *Sean $\langle X, \leqslant_X \rangle$ y $\langle Y, \leqslant_Y \rangle$ conjuntos totalmente ordenados tales que $X \cap Y = \emptyset$ y existen $\max X$ y $\min Y$. Consideremos Z_X^Y y $\leqslant$ definidos como en (4.11) y (4.12) de la Observación 4.1.24, respectivamente. Supongamos que X tiene la topología del orden inducida por $\leqslant_X$ y Z_X^Y tiene la topología del orden inducida por $\leqslant$. Si definimos la función $f : X \to Z_X^Y$ como $f(x) = \tilde{x}$ y la función $g : Y \to Z_X^Y$ como $g(y) = \tilde{y}$, entonces f y g son continuas.*

Prueba. Sea $p : X \oplus Y \to Z_X^Y$ la función cociente. Si $i_X : X \to X \oplus Y$ e $i_Y : Y \to X \oplus Y$ están definidas como en la Observación 4.1.29, para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$ se cumple lo siguiente:

$$(p \circ i_X)(x) = \tilde{x} \text{ y } (p \circ i_Y)(y) = \tilde{y}.$$

Luego, $f = p \circ i_X$ y $g = p \circ i_Y$. Conjuntando la Observación 4.1.29 y el Corolario 4.1.32 se deduce que f y g son continuas. ■

El resultado final de esta subsección, nos arroja las propiedades de compacidad y conexidad para Z_X^Y, a partir de la compacidad y la conexidad de X y Y.

Lema 4.1.34 *Sean $\langle X, \leqslant_X \rangle$ y $\langle Y, \leqslant_Y \rangle$ conjuntos totalmente ordenados tales que $X \cap Y = \emptyset$ y existen $\max X$ y $\min Y$. Consideremos Z_X^Y y $\leqslant$ definidos como en (4.11) y (4.12) de la Observación 4.1.24, respectivamente. Supongamos que X, Y y Z_X^Y tienen la topología del orden generada por $\leqslant_X$, $\leqslant_Y$ y $\leqslant$, correspondientemente. Si X y Y son conexos y compactos, entonces Z_X^Y es conexo y compacto.*

Prueba. Tomemos las funciones $f : X \to Z_X^Y$ y $g : Y \to Z_X^Y$ con las siguientes asignaciones:

$$f(x) = \tilde{x} \text{ y } g(y) = \tilde{y}.$$

Debido a que X y Y son conexos y al Lema 4.1.33 resulta que

$$f[X] \text{ y } g[Y] \text{ son conexos.} \tag{4.14}$$

Además, $\{\max X, \min Y\} \in f[X] \cap g[Y]$. También,

$$Z_X^Y = f[X] \cup g[Y]. \tag{4.15}$$

Conjuntando (4.14) y el Lema 1.2.3, concluimos que

$$Z_X^Y \text{ es conexo.}$$

Por otro lado, dado que X y Y son compactos, gracias al Lema 4.1.33

$$f[X] \text{ y } g[Y] \text{ son compactos.}$$

Finalmente, de (4.15) se puede deducir que

$$Z_X^Y \text{ es compacto.}$$

■

4.2 Arcos generalizados

Desde los primeros cursos de Cálculo nos familiarizamos con el intervalo $[0, 1]$ y sus propiedades, tanto de orden como topológicas. El objetivo de esta sección es generalizar estas propiedades para introducir el concepto de arco generalizado. Asimismo, se darán condidiones necesarias y suficientes para que un continuo de Hausdorff sea un arco generalizado.

Definición 4.2.1 Sea X un espacio topológico. Diremos que X *es un arco generalizado* si se cumplen las siguientes propiedades:

1. X es no degenerado;

2. existe $\leqslant \subseteq X \times X$ de tal manera que $\langle X, \leqslant \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado;
3. para cualquier subconjunto no vacío A de X, existen $\sup A$ e $\text{ínf}\, A$;
4. para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x < y$, existe $z \in X$ con la cualidad de que $x < z < y$ y
5. la topología de X es la topología del orden inducida por $\leqslant$.

Observación 4.2.2 Si X es un arco generalizado, por 1 y 3 de la Definición 4.2.1 existen $\text{máx}\, X$ y $\text{mín}\, X$.

Notamos que el intervalo $[0, 1]$ y el cuadrado lexicográfico son algunos ejemplos de arcos generalizados.

Teniendo en cuenta la Propiedad 2 y la Propiedad 5 de la Definición 4.2.1 y el Lema 4.1.12 podemos inferir el siguiente resultado:

Lema 4.2.3 *Si X es un arco generalizado, entonces X es de Hausdorff.*

Los siguientes dos lemas nos hablan de un par de propiedades que cumplen el supremo y el ínfimo, con respecto al operador cerradura.

Lema 4.2.4 *Sean X un arco generalizado y A un subconjunto no vacío de X. Si $\alpha = \sup A$, entonces $\alpha \in \text{cl}(A)$.*

Prueba. Si $\alpha = \text{mín}\, X$, se infiere que $A = \{\alpha\}$. Es decir, $\alpha \in \text{cl}(A)$. Supongamos que $\text{mín}\, X < \alpha$ y consideremos un subconjunto abierto U de X tal que

$$\alpha \in U.$$

De este modo, podemos hallar $x \in X$ con la propiedad de que

$$x < \alpha \text{ y } (x, \alpha] \subseteq U. \tag{4.16}$$

Puesto que $\alpha = \sup A$, gracias al Lema 4.1.3 podemos tomar $c \in A$ con la cualidad de que

$$x < c \leqslant \alpha.$$

De (4.16) se sigue que

$$c \in A \cap U.$$

Por lo tanto, $\alpha \in \text{cl}(A)$. ■

Lema 4.2.5 *Sean X un arco generalizado y A un subconjunto no vacío de X. Si $\beta = \inf A$, entonces $\beta \in \mathrm{cl}(A)$.*

Prueba. Si $\beta = \max X$, deducimos que $A = \{\beta\}$. Por ende, $\beta \in \mathrm{cl}(A)$.
En caso contrario, $\beta < \max X$. Consideremos un subconjunto abierto V de X con la propiedad de que

$$\beta \in V.$$

Por consiguiente, podemos encontrar $x \in X$ tal que

$$\beta < x \text{ y } [\beta, x) \subseteq V. \tag{4.17}$$

Dado que $\beta = \inf A$, debido al Lema 4.1.3 podemos elegir $d \in A$ con la cualidad de que

$$\beta \leqslant d < x.$$

De (4.17) se obtiene que

$$d \in V \cap A.$$

En conclusión, $\beta \in \mathrm{cl}(A)$. ■

En algún curso de Cálculo, se prueba la compacidad del espacio $[0, 1]$. Intuyendo que lo que estamos haciendo es generalizar las propiedades del intervalo, podemos pensar que pasa lo mismo con los arcos generalizados. Esto último queda escrito en el siguiente resultado:

Lema 4.2.6 *Si X es un arco generalizado, entonces X es compacto.*

Prueba. Fijemos $a = \min X$ y $b = \max X$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X y definamos

$$H = \{x \in X : \text{hay un subconjunto finito } \mathcal{B}_x \text{ de } \mathcal{U}, \text{ tal que } [a, x] \subseteq \bigcup \mathcal{B}_x\}. \tag{4.18}$$

Puesto que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para X, podemos tomar $U \in \mathcal{U}$ con la propiedad de que $a \in U$, por lo que $[a, a] \subseteq U$. Así,

$$H \neq \emptyset.$$

Por 3 de la Definición 4.2.1, existe $h = \sup H$.
Enseguida se demostrará que

$$h \in H. \tag{4.19}$$

Si $h = a$, trivialmente se cumple lo que queremos.
En otro caso, supongamos que $a < h$ y consideremos $W \in \mathcal{U}$ de tal manera que $h \in W$. Como W es abierto en X, podemos hallar $w \in X$ con la cualidad de que

$$w < h \text{ y } (w, h] \subseteq W.$$

Dado que $w < h$ y $h = \sup H$, gracias al Lema 4.1.3 podemos elegir $c \in H \cap (w, h]$. En virtud de (4.18), existe un subconjunto finito $\mathcal{B}_c$ de $\mathcal{U}$ con la característica de que

$$[a, c] \subseteq \bigcup \mathcal{B}_c.$$

Notamos que

$$[a, h] = [a, c] \cup (c, h] \subseteq \left(\bigcup \mathcal{B}_c\right) \cup W.$$

Consecuentemente, se cumple (4.19).
A continuación probaremos que

$$h = b. \tag{4.20}$$

Supongamos que $h < b$ y seleccionemos un subconjunto finito $\mathcal{B}_h$ de $\mathcal{U}$ de tal suerte que $[a, h] \subseteq \bigcup \mathcal{B}_h$. Asimismo, fijamos $V \in \mathcal{B}_h$ y $l \in X$ con la peculiaridad de que

$$h \in [h, l) \subseteq V.$$

En vista de 4 de la Definición 4.2.1, podemos tomar $d \in X$ que cumpla que $h < d < l$. Observamos que

$$[a, d] \subseteq [a, h] \cup [h, l) \subseteq \left(\bigcup \mathcal{B}_h\right) \cup V.$$

Concluimos que $d \in H$, lo que contradice la elección de h.
Por lo tanto, hemos inferido (4.20). ∎

A continuación, daremos la definición de lo que es un intervalo. Como veremos un poco más adelante, cuando se trata de arcos generalizados, la noción de intervalo está relacionada con la de conexidad

Definición 4.2.7 Sean $\langle X, \leqslant\rangle$ un conjunto totalmente ordenado y $A \subseteq X$. Decimos que A es un *intervalo* si para cualesquiera $x, y \in A$ con la propiedad de que $x \leqslant y$, se tiene que si z es elemento de X y $x \leqslant z \leqslant y$, entonces $z \in A$.

Observación 4.2.8 Sean $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado y $A \subseteq X$. Si A es un intervalo y $x, y \in A$ son tales que $x \leqslant y$, entonces (x, y), $[x, y)$, $(x, y]$ y $[x, y]$ son subconjuntos de A.

Lema 4.2.9 *Sean X un arco generalizado y $A \subseteq X$. Si A es conexo, entonces A es un intervalo.*

Prueba. El resultado se probará por contrapuesta. Supongamos que A no es un intervalo. Por ende, existen $x, y \in A$ tales que $x < y$ y existe $z \in X$ con la propiedad de que $x < z < y$, pero $z \notin A$. Notamos que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $(\leftarrow, z) \cap A$ y $(z, \rightarrow) \cap A$ son subconjuntos abiertos y ajenos de A;
2. $x \in (\leftarrow, z) \cap A$, $y \in (z, \rightarrow) \cap A$ y
3. $A = ((\leftarrow, z) \cap A) \cup ((z, \rightarrow) \cap A)$.

Consecuentemente, A es disconexo. ∎

Lema 4.2.10 *Sean X un arco generalizado y $A \subseteq X$. Si A es un intervalo, entonces A es conexo.*

Prueba. Supongamos por el contrario que A no es conexo. Por consiguiente, existen subconjuntos no vacíos U y V de A con las siguientes propiedades:

1. U y V son abiertos y cerrados en A;
2. $U \cap V = \emptyset$ y
3. $A = U \cup V$.

Sean $a \in U$ y $b \in V$. Puesto que $\langle X, \leqslant \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a < b$. Definamos

$$H = \{t \in U : t < b\}.$$

Notamos que $a \in H$. Por 3 de la Definición 4.2.1, podemos considerar $h = \sup H$. Así,

$$a \leqslant h \leqslant b.$$

Como A es un intervalo y $a, b \in A$, podemos colegir que

$$h \in A.$$

Del Lema 4.2.4 se deriva que

$$h \in \mathrm{cl}(H).$$

Luego,

$$h \in A \cap \mathrm{cl}(H) = \mathrm{cl}_A(H).$$

Además, $H \subseteq U$ y U es cerrado en A, por lo que $\mathrm{cl}_A(H) \subseteq U$. Consecuentemente,

$$h \in U.$$

Por lo tanto,

$$h < b.$$

Dado que U es abierto en A, podemos hallar $y \in X$ tal que

$$y < b \text{ y } h \in [h, y) \cap A \subseteq U. \tag{4.21}$$

En vista de que A es un intervalo, de que $h, b \in A$ y de que para cualquier $z \in [h, y)$ se tiene que $h \leqslant z < b$, podemos deducir que

$$[h, y) \subseteq A.$$

A consecuencia de (4.21) se sigue que

$$(h, y) \subseteq U.$$

De la propiedad 4 de la Definición 4.2.1 obtenemos que existe $s \in U$ de tal manera que $h < s$, lo que contradice la elección de h. Por lo tanto, A es conexo. ■

Corolario 4.2.11 *Sean X un arco generalizado y $A \subseteq X$. Entonces A es conexo si y solo si A es un intervalo.*

Ya hemos probado que todo arco generalizado es de Hausdorff, conexo y compacto. Por esta razón, podemos deducir el siguiente resultado:

Teorema 4.2.12 *Si X es un arco generalizado, entonces X es un continuo de Hausdorff.*

Prueba. Gracias al Lema 4.2.3, al Lema 4.2.6 y a la Propiedad 1 de la Definición 4.2.1 colegimos que X es compacto, de Hausdorff y no vacío. Además, notamos que

$$X \text{ es un intervalo.}$$

En virtud del Corolario 4.2.11 se obtiene que X es conexo.
Por lo tanto, X es un continuo de Hausdorff. ■

La idea ahora es ver qué condiciones necesitamos para que un espacio sea un arco generalizado. Tales condiciones las veremos en los siguientes dos resultados.

Lema 4.2.13 *Sea $\langle X, \leqslant\rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Si X tiene la topología del orden inducida por $\leqslant$ y X es conexo, entonces X satisface la propiedad 4 de la Definición 4.2.1.*

Prueba. Sean $x, y \in X$ tales que $x < y$. Notamos que $(\leftarrow, x]$ y $[y, \rightarrow)$ son subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de X. Como X es conexo, se tiene que

$$(x, y) = X \setminus ((\leftarrow, x] \cup [y, \rightarrow)) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $z \in X$ con la propiedad de que

$$x < z < y.$$

■

Teorema 4.2.14 *Sea $\langle X, \leqslant\rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Si X es no degenerado, tiene la topología del orden inducida por $\leqslant$, es compacto y es conexo, entonces X es un arco generalizado.*

Prueba. Claramente, se cumplen las condiciones 1, 2 y 5 de la Definición 4.2.1. Dado que X es compacto, del Corolario 4.1.17 se sigue que podemos encontrar

$$\min X \text{ y } \max X.$$

Notamos que cualquier subconjunto no vacío B de X es acotado superiormente e inferiormente. Gracias a que X es conexo y al Lema 4.1.18, existe $\inf B$. Además, del Corolario 4.1.8 se infiere que también podemos hallar $\sup B$, por lo que se cumple 3 de la Definición 4.2.1.
Finalmente, a consecuencia de que X es conexo y al Lema 4.2.13 obtenemos

que se satisface la condición 4 de la Definición 4.2.1.
Concluyentemente, X es un arco generalizado. ■

Conjuntando el Teorema 4.2.12 y el Teorema 4.2.14, inferimos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.15 *Sea $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Entonces X es un arco generalizado si y solo si X es un continuo de Hausdorff no degenerado y con la topología del orden inducida por $\leqslant$.*

En el siguiente resultado, se prueba que en los arcos generalizados, los intervalos cerrados considerados como subespacios, poseen la topología del orden.

Lema 4.2.16 *Sea $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Si X es un arco generalizado, entonces para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x < y$, la topología del orden inducida por $\leqslant_{[x,y]}$ coincide con la topología de subespacio para $[x, y]$.*

Prueba. Como $x < y$, el conjunto $[x, y]$ tiene la Propiedad 1 del Lema 4.1.23. Sean $a \in [x, y)$, $w \in (a, \rightarrow)$ y $z = \text{mín}\{y, w\}$. A causa de la Propiedad 4 de la Definición 4.2.1 podemos encontrar $t \in (a, z)$. Además, dado que $a, z \in [x, y]$ y que $[x, y]$ es un intervalo, se deduce que $t \in [x, y]$. Luego, $[x, y]$ cumple la Propiedad 2 del Lema 4.1.23.
Análogamente, si elegimos $b \in (x, y]$, $l \in (\leftarrow, b)$ y $s = \text{máx}\{x, l\}$, debido a la Propiedad 4 de la Definición 4.2.1 podemos hallar $v \in (s, b)$. Como $s, b \in [x, y]$ y $[x, y]$ es un intervalo, se colige que $v \in [x, y]$. Consecuentemente, $[x, y]$ satisface la Propiedad 3 del Lema 4.1.23.
Finalmente, por el Lema 4.1.23 hemos concluido. ■

Para el siguiente teorema retomaremos la definición del espacio Z_X^Y de la Observación 4.1.24. Además, atenderemos la importancia de que los espacios X y Y sean arcos generalizados.

Teorema 4.2.17 *Sean $\langle X, \leqslant_X \rangle$ y $\langle Y, \leqslant_Y \rangle$ conjuntos totalmente ordenados tales que $X \cap Y = \emptyset$ y existen $\text{máx}\, X$ y $\text{mín}\, Y$. Consideremos Z_X^Y y $\leqslant$ definidos como en (4.11) y (4.12) de la Observación 4.1.24, respectivamente. Supongamos que X, Y y Z_X^Y tienen la topología del orden generada por $\leqslant_X$, $\leqslant_Y$ y $\leqslant$, correspondientemente. Si X y Y son arcos generalizados, entonces Z_X^Y es un arco generalizado.*

Prueba. Dado que $X \cap Y = \emptyset$ y que X y Y son no degenerados se tiene que $\min X \neq \max Y$. Luego, Z_X^Y es no degenerado. A consecuencia del Teorema 4.2.15 se sigue que X y Y son continuos de Hausdorff. Así, del Lema 4.1.34 y del Lema 4.1.12 resulta que Z_X^Y es un continuo de Hausdorff. Gracias al Teorema 4.2.15, llegamos a que Z_X^Y es un arco generalizado. ■

Definición 4.2.18 Sean $\langle X, \leqslant_X \rangle$ y $\langle Y, \leqslant_Y \rangle$ conjuntos totalmente ordenados tales que $X \cap Y = \emptyset$ y existen $\max X$ y $\min Y$. Al espacio $\langle Z_X^Y, \leqslant \rangle$ definido en la Observación 4.1.24, lo llamamos *la concatenación de X y Y.*

De esta manera, el Teorema 4.2.17 queda reescrito como sigue:

Teorema 4.2.19 *La concatenación de dos arcos generalizados es también un arco generalizado.*

Corolario 4.2.20 *La concatenación finita de arcos generalizados es también un arco generalizado.*

Retomemos el concepto de arco ordenado. El siguiente resultado nos dice que los conceptos de arco ordenado y de arco generelizado no solamente están relacionados por la palabra “arco”.

Teorema 4.2.21 *Sean X un continuo de Hausdorff y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de A a B, entonces $\mathcal{A}$ es un arco generalizado con la topología del orden inducida por la contención en $\mathcal{A}$.*

Prueba. Denotemos por τ y τ' a la topología de subespacio de $\mathcal{A}$ y a la topología del orden inducida por la contención en $\mathcal{A}$, respectivamente.
Dados $C, D \in \mathcal{A}$, notamos que $(\leftarrow, D) = \{F \in \mathcal{A} : F \subsetneq D\}$ y $(C, \rightarrow) = \{F \in \mathcal{A} : C \subsetneq F\}$. Del Lema 3.4.4 se infiere que $(\leftarrow, D), (C, \rightarrow) \in \tau$. Por lo tanto, la subbase $\mathcal{S} = \{(\leftarrow, D), (C, \rightarrow) : C, D \in \mathcal{A}\}$ cumple que $\mathcal{S} \subseteq \tau$. Así,

$$\tau' \subseteq \tau. \tag{4.22}$$

Tomemos ahora subconjuntos abiertos $U_1, \ldots, U_n$ de X y consideremos el abierto básico $\mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. A continuación se probará que

$$\mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \in \tau'. \tag{4.23}$$

Fijemos $C \in \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$.
CASO 1. Si $C = A$, resulta que $C \subsetneq B$. Gracias al Lema 3.4.5 podemos encontrar $D \in \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ de tal suerte que $C \subsetneq D$. Por el Lema 3.4.3 se satisface que

$$C \in (\leftarrow, D) \subseteq \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle.$$

CASO 2. Si $C = B$, es claro que $A \subsetneq C$. Debido al Lema 3.4.6 podemos hallar $E \in \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ de tal manera que $E \subsetneq C$. A consecuencia del Lema 3.4.3 se colige que

$$C \in (E, \rightarrow) \subseteq \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle.$$

CASO 3. Si $A \subsetneq C \subsetneq B$, conjuntando el Lema 3.4.5 y el Lema 3.4.6, elegimos $M, N \in \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ con la cualidad de que $M \subsetneq C \subsetneq N$. Teniendo en cuenta el Lema 3.4.3 se deriva que

$$C \in (M, N) \subseteq \mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle.$$

En vista del CASO 1, del CASO 2 y del CASO 3 llegamos a que (4.23) es verdadero, lo que nos lleva a que

$$\tau \subseteq \tau'. \tag{4.24}$$

Combinando (4.22) y (4.24), colegimos que $\tau = \tau'$. Finalmente, notamos que $\mathcal{A}$ es un continuo de Hausdorff, no degenerado y con la topología del orden inducida por $\subseteq$. Gracias al Teorema 4.2.15 hemos terminado. ■

Corolario 4.2.22 *Sean X un continuo de Hausdorff y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de A a B, entonces $\{A, B\} \subseteq \mathcal{A}$.*

Prueba. Del Teorema 4.2.21 se tiene que $\mathcal{A}$ es un arco generalizado con la topología del orden inducida por la contención en $\mathcal{A}$. Además, dado $C \in \mathcal{A}$, debido a la Propiedad 4 de la Definición 3.4.1 se cumple que $A \subseteq C \subseteq B$. Se sigue que $A = \inf \mathcal{A}$ y $B = \sup \mathcal{A}$. Finalmente, gracias a la Observación 4.2.2 concluimos que $\{A, B\} \subseteq \mathcal{A}$. ■

Concluimos esta sección con el siguiente resultado. Es un poco técnico, pero lo ocuparemos a lo largo de la Sección 6.3.

Lema 4.2.23 *Sean X un continuo de Hausdorff y $\mathcal{K}$ un subcontinuo de 2^X. Consideremos $K \in \mathcal{K}$ y $N \in \mathbb{N}$. Si existe $E \in C_N(X)$ tal que $K \subseteq E$ y cada componente de E interseca a K, entonces $(\bigcup \mathcal{K}) \cup E \in C_N(X)$.*

Prueba. Si $K = E$, en vista del Lema 3.2.10 se consigue el resultado. Supongamos que $K \subsetneq E$. Gracias al Teorema 3.4.2 podemos encontrar un arco ordenado $\mathcal{A}$ de K a E. Del Corolario 4.2.22 se deduce que

$$\{K, E\} \subseteq \mathcal{A}.$$

De la Propiedad 2 de la Definición 3.4.1 resulta que $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de 2^X. Como $K \in \mathcal{A} \cap \mathcal{K}$, a consecuencia del Lema 1.2.3 se colige que $\mathcal{K} \cup \mathcal{A}$ es un subcontinuo de 2^X. Puesto que $E \in (\mathcal{K} \cup \mathcal{A}) \cap C_N(X)$, a razón del Lema 3.2.10 se satisface que

$$\bigcup (\mathcal{K} \cup \mathcal{A}) \in C_N(X). \tag{4.25}$$

Por otro lado, de la Propiedad 4 de la Definición 3.4.1 se sigue que $\bigcup \mathcal{A} = E$. Consecuentemente,

$$\bigcup (\mathcal{K} \cup \mathcal{A}) = \left(\bigcup \mathcal{K}\right) \cup \left(\bigcup \mathcal{A}\right) = \left(\bigcup \mathcal{K}\right) \cup E. \tag{4.26}$$

Finalmente, combinando (4.25) y (4.26) hemos terminado. ■

Capítulo 5

Conexidad por caminos y por arcos

Recordemos que una *trayectoria* es una función continua del intervalo $[0,1]$ a un espacio X. Cuando X no es un espacio métrico, difícilmente podemos asegurar la existencia de este tipo de funciones. Una vez que sabemos qué es un arco generalizado, estamos listos para generalizar la noción de trayectoria. En este capítulo introduciremos los conceptos de camino y de camino inyectivo. Asimismo, daremos la definición de conexidad por caminos y de conexidad por arcos y probaremos algunos resultados canónicos.

5.1 Intervalos de constancia

En esta sección introduciremos la definición de intervalo maximal de constancia y daremos prueba o referencia de algunos resultados. Tales resultados nos ayudarán a probar el Lema 5.2.9.

Definición 5.1.1 Sean $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado, Y un conjunto y $f : X \to Y$ una función. Consideremos $x, y \in X$ tales que $x \leqslant y$. Decimos que $[x, y]$ es un *intervalo de constancia de* f, si existe $c \in Y$ con la propiedad de que para cada $z \in [x, y]$ se tiene que $f(z) = c$. Más aún, decimos que $[x, y]$ es un *intervalo maximal de constancia de* f si $[x, y]$ es un intervalo de constancia de f y, para cualquier intervalo de constancia $[z, w]$ de f con la cualidad de que $[x, y] \subseteq [z, w]$, se cumple que $[x, y] = [z, w]$.

Teorema 5.1.2 *[8, p. 879] Sean X un arco generalizado y Y un espacio de Hausdorff. Si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces existen un arco generalizado C, un encaje $g : C \to Y$ y una función continua y creciente $\alpha : X \to C$, con la cualidad de que si $[t_0, t_1]$ es un intervalo maximal de constancia de α, entonces $f(t_0) = f(t_1) = (g \circ \alpha)(t_0)$.*

Lema 5.1.3 *Sean X y C arcos generalizados. Si existe una función continua y creciente $\alpha : X \to C$, entonces cada elemento de X pertenece a un intervalo maximal de constancia de α.*

Prueba. Sea $z \in X$ y consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{H} = \{[t, l] \subseteq X : z \in [t, l] \text{ y } \alpha \text{ es constante en } [t, l]\}.$$

Fijemos $[t, l] \in \mathcal{H}$. Como $z \in [t, l]$ y α es constante en $[t, l]$, podemos afirmar que $\alpha[[t, l]] = \{\alpha(z)\}$. Por consiguiente

$$\alpha[\bigcup \mathcal{H}] = \alpha[\bigcup_{[t,l]\in\mathcal{H}} [t, l]] = \bigcup_{[t,l]\in\mathcal{H}} \alpha[[t, l]] = \{\alpha(z)\}. \tag{5.1}$$

Por otro lado, dado $H \in \mathcal{H}$, del Corolario 4.2.11 se sigue que H es conexo. Además, $z \in H$. Del Lema 1.2.3 se infiere que $\bigcup \mathcal{H}$ es conexo. Por ende, $\mathrm{cl}(\bigcup \mathcal{H})$ es conexo. Así, del Corolario 4.2.11 se colige que $\mathrm{cl}(\bigcup \mathcal{H})$ es un intervalo. Debido a la Propiedad 3 de la Definición 4.2.1, podemos hallar $\sup \mathrm{cl}(\bigcup \mathcal{H})$ e $\inf \mathrm{cl}(\bigcup \mathcal{H})$, que los denotaremos por b y a, respectivamente. Gracias al Lema 4.2.4 y al Lema 4.2.5 se tiene que

$$\{a, b\} \subseteq \mathrm{cl}(\bigcup \mathcal{H}).$$

Consecuentemente,

$$\mathrm{cl}(\bigcup \mathcal{H}) = [a, b]. \tag{5.2}$$

Sea $\gamma = \alpha(z)$. En vista de que C es de Hausdorff podemos asegurar que $\{\gamma\}$ es cerrado en C. También α es continua, por lo que

$$\alpha^{-1}(\gamma) = \mathrm{cl}(\alpha^{-1}(\gamma)). \tag{5.3}$$

Por otra parte, de (5.1) se deriva que

$$\bigcup \mathcal{H} \subseteq \alpha^{-1}(\gamma).$$

Teniendo en cuenta (5.3) obtenemos que

$$\mathrm{cl}(\bigcup \mathcal{H}) \subseteq \mathrm{cl}(\alpha^{-1}(\gamma)) = \alpha^{-1}(\gamma).$$

Por lo tanto,

$$\alpha[\mathrm{cl}(\bigcup \mathcal{H})] \subseteq \alpha[\alpha^{-1}(\gamma)] = \{\gamma\} = \{\alpha(z)\}. \tag{5.4}$$

Conjuntando el hecho de que $z \in \bigcup \mathcal{H}$, (5.2) y (5.4), llegamos a que $\mathrm{cl}(\bigcup \mathcal{H})$ es un intervalo maximal de constancia de α, que tiene a z como elemento. ■

Corolario 5.1.4 *Sean X un arco generalizado y Y un espacio de Hausdorff. Si $f : X \to Y$ es una función continua y existen un arco generalizado C, un encaje $g : C \to Y$ y una función continua y creciente $\alpha : X \to C$, con la cualidad de que si $[t_0, t_1]$ es un intervalo maximal de constancia de α se cumple que $f(t_0) = f(t_1) = (g \circ \alpha)(t_0)$, entonces $f(\min X) = (g \circ \alpha)(\min X)$ y $f(\max X) = (g \circ \alpha)(\max X)$.*

Prueba. Por el Lema 5.1.3 hay intervalos maximales de constancia $[t, l]$ y $[s, m]$ de α tales que $\min X \in [t, l]$ y $\max X \in [s, m]$. Así, $\min X = t$ y $\max X = m$. Notamos que

$$f(\min X) = f(t) = (g \circ \alpha)(t) = (g \circ \alpha)(\min X). \tag{5.5}$$

Por hipótesis tenemos que $f(s) = f(m) = (g \circ \alpha)(s)$. También, α es constante en $[s, m]$. Por ende, $\alpha(s) = \alpha(m)$. Así,

$$f(\max X) = f(m) = f(s) = (g \circ \alpha)(s) = (g \circ \alpha)(m) = (g \circ \alpha)(\max X). \tag{5.6}$$

Combinando (5.5) y (5.6) hemos concluido. ■

5.2 Resultados sobre caminos

En esta sección empezaremos por generalizar el concepto de trayectoria.

Definición 5.2.1 Sean Y un espacio topológico y $z, w \in Y$. Si existen un arco generalizado X y una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(\min X) = z$ y $f(\max X) = w$, diremos que $f[X]$ *es un camino de z a w en Y*. Si además f es inyectiva, diremos que $f[X]$ *es un camino inyectivo de z a w en Y*.

Los siguientes tres resultados nos dicen que los arcos generalizados y los caminos inyectivos están estrechamente relacionados.

Lema 5.2.2 *Sea $\langle X, \leqslant\rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Si X es un arco generalizado, entonces para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x < y$, existe un camino inyectivo de x a y en X.*

Prueba. Sean $x, y \in X$ de tal manera que $x < y$. Gracias al Lema 4.2.3, al Lema 4.2.6 y al Corolario 4.2.11 se sigue que $[x, y]$ es un continuo de Hausdorff no degenerado. También, del Lema 4.2.16 resulta que $[x, y]$ tiene la topología del orden inducida por $\leqslant_{[x,y]}$. Del Teorema 4.2.15 se colige que

$$[x, y] \text{ es un arco generalizado.}$$

Si $f : [x, y] \to X$ es la función inclusión, se tiene que f es continua e inyectiva. Además,

$$f(\text{mín}[x, y]) = x \text{ y } f(\text{máx}[x, y]) = y.$$

Luego, $f([x, y])$ es un camino inyectivo de x a y en X. ■

Lema 5.2.3 *Sean $\langle X, \leqslant\rangle$ un conjunto totalmente ordenado y $z, w \in X$ tales que $z < w$. Si $z = \text{mín}\, X$, $w = \text{máx}\, X$, existe un camino inyectivo de z a w en X y X tiene la topología del orden inducida por $\leqslant$, entonces X es un arco generalizado.*

Prueba. Sean Y un arco generalizado y $f : Y \to X$ una función continua e inyectiva con la cualidad de que $f[Y]$ es un camino inyectivo de z a w en X. Del Teorema 4.2.15 se deriva que

$$Y \text{ es un continuo de Hausdorff.}$$

Puesto que f es continua, se infiere que

$$f[Y] \text{ es compacto y conexo.} \tag{5.7}$$

Del Lema 4.2.9 se deduce que $f[Y]$ es un intervalo. Dado que $z, w \in f[Y]$ resulta que

$$f[Y] = X.$$

Además, en vista del Lema 4.1.12 se colige que

$$X \text{ es de Hausdorff.}$$

De (5.7) se sigue que

$$X \text{ es un continuo de Hausdorff.}$$

Finalmente, del Teorema 4.2.15 se concluye que X es un arco generalizado. ■

Corolario 5.2.4 *Sea $\langle X, \leqslant \rangle$ un conjunto totalmente ordenado con elemento máximo y elemento mínimo, distintos entre sí. Si X tiene la topología del orden inducida por $\leqslant$, entonces X es un arco generalizado si y solo si para cada $x, y \in X$ tales que $x < y$, existe un camino inyectivo de x a y en X.*

Prueba. Si X es un arco generalizado, del Lema 5.2.2 se obtiene la implicación directa.
Recíprocamente, si tomamos $\operatorname{mín} X$ y $\operatorname{máx} X$ podemos hallar un camino inyectivo de $\min X$ a $\max X$ en X. Así, por el Lema 5.2.3 podemos colegir que X es un arco generalizado. ■

A partir de los conceptos de camino y de camino inyectivo, podemos definir las siguientes tres propiedades:

Definición 5.2.5 Sea Y un espacio topológico. Diremos que Y es *conexo por caminos* si para cualesquiera $z, w \in Y$, existe un camino de z a w en Y.

Definición 5.2.6 Sea Y un espacio topológico. Diremos que Y es *conexo por arcos* si para cualesquiera $z, w \in Y$ tales que $z \neq w$, existe un camino inyectivo de z a w en Y.

Definición 5.2.7 Sean Y un espacio topológico y $y \in Y$. Diremos que Y *es localmente conexo por arcos en y* si para cualquier subconjunto abierto U de Y tal que $y \in U$, existe un subespacio abierto y conexo por arcos V de Y con la propiedad de que $y \in V \subseteq U$.

Los enunciados comprendidos entre la Observación 5.2.8 y el Lema 5.2.12, son algunos resultados canónicos correspondientes a las propiedades de conexidad por caminos, conexidad por arcos y conexidad local por arcos, así como ciertas relaciones entre ellas, la conexidad y la conexidad local.

Observación 5.2.8 Sea X un espacio topológico. Si X es conexo por arcos, entonces X es conexo por caminos.

Lema 5.2.9 *Sea Y un espacio topológico. Si Y es conexo por caminos y de Hausdorff, entonces Y es conexo por arcos.*

Prueba. Sean $z, w \in Y$ tales que $z \neq w$. Como Y es conexo por caminos, existen un arco generalizado X y una función continua $f : X \to Y$ de tal suerte que $f(\min X) = z$ y $f(\max X) = w$. Gracias a que Y es de Hausdorff y al Teorema 5.1.2, podemos hallar un arco generalizado C, un encaje $g : C \to Y$ y una función continua y creciente $\alpha : X \to C$, con la propiedad de que si $[t_0, t_1]$ es un intervalo maximal de constancia de α, se cumple que $f(t_0) = f(t_1) = (g \circ \alpha)(t_0)$. Denotemos por m_X y M_X a los elementos mínimo y máximo de X, respectivamente.
Dado que α es creciente,

$$\alpha(m_X) \leqslant \alpha(M_X). \tag{5.8}$$

A causa de que C es un arco generalizado, del Lema 4.2.3 y del Corolario 4.2.11 podemos inferir que

$$[\alpha(m_X), \alpha(M_X)] \text{ es conexo y de Hausdorff.} \tag{5.9}$$

También, $[\alpha(m_X), \alpha(M_X)]$ es cerrado en C. Teniendo en cuenta el Teorema 4.2.15, podemos asegurar que

$$[\alpha(m_X), \alpha(M_X)] \text{ es compacto.} \tag{5.10}$$

Del Corolario 5.1.4 se obtiene que

$$f(m_X) = (g \circ \alpha)(m_X) \text{ y } f(M_X) = (g \circ \alpha)(M_X).$$

Luego,

$$(g \circ \alpha)(m_X) = z \text{ y } (g \circ \alpha)(M_X) = w. \tag{5.11}$$

Además g es un encaje, por lo que

$$g \restriction_{[\alpha(m_X), \alpha(M_X)]} \text{ es continua e inyectiva.} \tag{5.12}$$

Debido a que $z \neq w$, a (5.11) y a (5.8) se colige que

$$\alpha(m_X) < \alpha(M_X).$$

En vista de (5.9), de (5.10), del Lema 4.2.16 y del Teorema 4.2.15 deducimos que

$$[\alpha(m_X), \alpha(M_X)] \text{ es un arco generalizado.}$$

Finalmente, considerando (5.11) y (5.12) concluimos que $g([\alpha(m_X), \alpha(M_X)])$ es un camino inyectivo de z a w en Y. ■

Lema 5.2.10 *Sea X un espacio topológico. Si X es conexo por arcos, entonces X es conexo.*

Prueba. Fijemos $x \in X$. Si $X = \{x\}$, se cumple que X es conexo. Supongamos que $X \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Dado que X es conexo por arcos, para cada $y \in X \setminus \{x\}$ existen un arco generalizado A_y y una función continua e inyectiva $f_y : A_y \to X$ de tal manera que $f[A_y]$ es un camino inyectivo de x a y en X. Del Teorema 4.2.15 se obtiene que A_y es conexo. Como f es continua, podemos asegurar que $f[A_y]$ es conexo. Consideremos la familia

$$\{f[A_y] : y \in X\}.$$

Puesto que para cada $y \in X$ se cumple que $x \in f[A_y]$, gracias al Lema 1.2.3 resulta que

$$\bigcup_{y \in X} f[A_y] \text{ es conexo.}$$

Finalmente, notando que $X = \bigcup_{y \in X} f[A_y]$ podemos concluir que X es conexo. ■

Corolario 5.2.11 *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Si X es localmente conexo por arcos en x, entonces X es localmente conexo en x.*

Prueba. Fijemos un subconjunto abierto U de X de tal suerte que $x \in U$. Como X es localmente conexo por arcos en x, podemos encontrar un subsespacio abierto y conexo por arcos V de X con la peculiaridad de que $x \in V \subseteq U$. A consecuencia del Lema 5.2.10 se tiene que V es conexo. Por lo tanto, X es localmente conexo en x. ■

Lema 5.2.12 *Sean X y Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si X es conexo por arcos, entonces Y es conexo por caminos.*

Prueba. Sean $w, z \in Y$. Como f es suprayectiva, existen $x, y \in X$ de tal manera que

$$f(x) = w \text{ y } f(y) = z. \tag{5.13}$$

De la Observación 5.2.8 se colige que X es conexo por caminos. Luego, existen un arco generalizado A y una función continua $g : A \to X$ de tal suerte que

$$g(\text{mín}\, A) = x \text{ y } g(\text{máx}\, A) = y. \tag{5.14}$$

Dado que f y g son continuas se tiene que $f \circ g$ es continua. Además, combinando (5.13) y (5.14) resulta que

$$\begin{gathered}(f \circ g)(\text{mín}\, A) = f(x) = w \\ \text{y} \\ (f \circ g)(\text{máx}\, A) = f(y) = z.\end{gathered}$$

En conclusión, $(f \circ g)[A]$ es un camino de w a z en Y. Por lo tanto, Y es conexo por caminos. ■

Un resultado general correspondiente a trayectorias nos dice que dado un espacio X y $x, y, z \in X$, si existen trayectorias de x a y y de y a z, entonces existe una trayectoria de x a z. Para nuestra buena suerte, también tenemos un resultado general para caminos. Por ende, nos enfocaremos en recopilar las herramientas necesarias para poder probar dicho resultado (Teorema 5.2.19).

Observación 5.2.13 Sea $\langle X, \leqslant_X \rangle$ un conjunto totalmente ordenado y sea i cualquier conjunto. Definamos la siguiente relación de orden en $X \times \{i\}$:

$$(x, i) \leqslant_{X \times \{i\}} (y, i) \text{ si y solo si } x \leqslant_X y. \tag{5.15}$$

Entonces

$$\langle X \times \{i\}, \leqslant_{X \times \{i\}} \rangle \text{ es un conjunto totalmente ordenado.} \tag{5.16}$$

Además, si existe $\text{máx}\, X$, entonces $\text{máx}(X \times \{i\}) = (\text{máx}\, X, i)$ y si existe $\text{mín}\, X$, entonces $\text{mín}(X \times \{i\}) = (\text{mín}\, X, i)$.

Lema 5.2.14 *Sea $\langle X, \leqslant_X \rangle$ un conjunto totalmente ordenado y sea i cualquier conjunto. Definamos $\leqslant_{X \times \{i\}}$ como en (5.15) de la Observación 5.2.13. Supongamos que X y $X \times \{i\}$ tienen la topología del orden generada por $\leqslant_X$ y $\leqslant_{X \times \{i\}}$, respectivamente. Si $f : X \to X \times \{i\}$ está definida por $f(x) = (x, i)$ y $g : X \times \{i\} \to X$ está dada por $g((x, i)) = x$, entonces f y g son continuas. Más aún, f y g son homeomorfismos.*

Prueba. Notamos que, dado $x \in X$ se satisface que

$$(f \circ g)((x,i)) = f(x) = (x,i) \text{ y } (g \circ f)(x) = g((x,i)) = x.$$

Por ende,

$$f \circ g = id_{X\times\{i\}} \text{ y } g \circ f = id_X. \tag{5.17}$$

También, para cada $z \in X$ se cumple que

$$f^{-1}[(\leftarrow,(z,i))] = (\leftarrow,z) \text{ y } f^{-1}[((z,i),\rightarrow)] = (z,\rightarrow).$$

Es decir, $f^{-1}[(\leftarrow,(z,i))]$ y $f^{-1}[((z,i),\rightarrow)]$ son subconjuntos abiertos de X. Luego,

$$f \text{ es continua.} \tag{5.18}$$

Por otro lado, para cualquier $w \in X$ resulta que

$$g^{-1}[(\leftarrow,w)] = (\leftarrow,(w,i)) \text{ y } g^{-1}[(w,\rightarrow)] = ((w,i),\rightarrow).$$

Por consiguiente, $g^{-1}[(\leftarrow,w)]$ y $g^{-1}[(w,\rightarrow)]$ son subconjuntos abiertos de $X \times \{i\}$. Por lo tanto,

$$g \text{ es continua.} \tag{5.19}$$

Finalmente, conjuntando (5.17), (5.18) y (5.19) se concluye que f y g son homeomorfismos. ■

Corolario 5.2.15 *Sea $\langle X, \leqslant_X\rangle$ un conjunto totalmente ordenado y sea i un conjunto. Definamos $\leqslant_{X\times\{i\}}$ como en (5.15) de la Observación 5.2.13. Supongamos que X y $X \times \{i\}$ tienen la topología del orden generada por $\leqslant_X$ y $\leqslant_{X\times\{i\}}$, respectivamente. Si X es un arco generalizado, entonces $X \times \{i\}$ es un arco generalizado.*

Prueba. Del Teorema 4.2.15 se obtiene que

$$X \text{ es un continuo de Hausdorff no degenerado.}$$

Gracias Lema 5.2.14, la función $f : X \to X \times \{i\}$ definida por $f(x) = (x,i)$ es un homeomorfismo. Así,

$$X \times \{i\} \text{ es un continuo de Hausdorff no degenerado.}$$

Finalmente, aplicando el Teorema 4.2.15 concluimos que $X \times \{i\}$ es un arco generalizado. ■

Corolario 5.2.16 *Sean X un espacio topológico y $x, y \in X$. Sea $\langle Y, \leqslant_Y \rangle$ un conjunto totalmente ordenado y sea i cualquier conjunto. Definamos $\leqslant_{Y\times\{i\}}$ como en (5.15) de la Observación 5.2.13. Supongamos que Y y $Y \times \{i\}$ tienen la topología del orden generada por $\leqslant_Y$ y $\leqslant_{Y\times\{i\}}$, respectivamente. Si Y es un arco generalizado y hay una función continua $f : Y \to X$ de tal manera que $f[Y]$ es un camino de x a y en X, entonces existe una función continua $F : Y \times \{i\} \to X$ de tal manera que $F[Y \times \{i\}]$ es un camino de x a y en X.*

Prueba. Dado que Y es un arco generalizado, por el Corolario 5.2.15 conseguimos que

$$Y \times \{i\} \text{ es un arco generalizado.} \tag{5.20}$$

Tomemos $f' : Y \times \{i\} \to Y$ con regla de correspondencia $f'((y, i)) = y$. Del Lema 5.2.14 se sigue que

$$f' \text{ es continua.}$$

Precisemos $F : Y \times \{i\} \to X$ como

$$F = f \circ f'. \tag{5.21}$$

Luego,

$$F \text{ es continua.} \tag{5.22}$$

Debido a la Observación 5.2.13 podemos asegurar que

$$\max(Y \times \{i\}) = (\max Y, i) \text{ y } \min(Y \times \{i\}) = (\min Y, i).$$

En vista de (5.21) resulta que

$$\begin{gathered} F(\max(Y \times \{i\})) = (f \circ f')(\max(Y \times \{i\})) = (f \circ f')((\max Y, i)) \\ \text{y} \\ (f \circ f')((\max Y, i)) = f(\max Y) = y. \end{gathered} \tag{5.23}$$

Asimismo,

$$\begin{gathered} F(\min(Y \times \{i\})) = (f \circ f')(\min(Y \times \{i\})) = (f \circ f')((\min Y, i)) \\ \text{y} \\ (f \circ f')((\min Y, i)) = f(\min Y) = x. \end{gathered} \tag{5.24}$$

Conjuntando (5.20), (5.22), (5.23) y (5.24) concluimos que $F[Y \times \{i\}]$ es un camino de x a y en X. ■

Corolario 5.2.17 *Sean X un espacio topológico y $x, y, z \in X$. Si existe un camino de x a y en X y existe un camino de y a z en X, entonces existen arcos generalizados A y B y existen funciones continuas $F : A \to X$ y $G : B \to X$ con las siguientes características:*

1. *$A \cap B = \emptyset$;*
2. *$F[A]$ es un camino de x a y en X y*
3. *$G[B]$ es un camino de y a z en X.*

Prueba. Consideremos conjuntos totalmente ordenados $\langle Y, \leqslant_Y \rangle$ y $\langle W, \leqslant_W \rangle$ y funciones $f : Y \to X$ y $g : W \to X$ con las siguientes propiedades:

1. Y y W son arcos generalizados que poseen la topología del orden generada por $\leqslant_Y$ y por $\leqslant_W$, respectivamente;
2. f y g son continuas;
3. $f(\min Y) = x$, $f(\max Y) = y$, $g(\min W) = y$ y $g(\max W) = z$.

Definamos $\leqslant_{Y\times\{0\}}$ y $\leqslant_{W\times\{1\}}$ como en (5.15) de la Observacíon 5.2.13, correspondientemente. Supongamos que $Y \times \{0\}$ y $W \times \{1\}$ tienen la topología del orden generada por $\leqslant_{Y\times\{0\}}$ y $\leqslant_{W\times\{1\}}$, respectivamente. Fijemos $A = Y \times \{0\}$ y $B = W \times \{1\}$. Luego,

$$A \cap B = \emptyset.$$

También, del Corolario 5.2.15 se sigue que

$$A \text{ y } B \text{ son arcos generalizados.}$$

Gracias al Corolario 5.2.16 podemos encontrar funciones continuas $F : A \to X$ y $G : B \to X$ de tal suerte que $F[A]$ es un camino de x a y en X y $G[B]$ es un camino de y a z en X. ■

Teorema 5.2.18 *[1, Teorema 3.2, p. 123-124] Sean X, Y y Z espacios topológicos, $p : X \to Y$ una identificación y $h : X \to Z$ una función continua. Si para cada $y \in Y$, la función $h \restriction_{p^{-1}(y)}$ es constante, entonces $h \circ p^{-1} : Y \to Z$ es una función continua y $(h \circ p^{-1}) \circ p = h$.*

Ahora sí, estamos listos para enunciar y demostrar un resultado general para la unión de caminos:

Teorema 5.2.19 *Sean X un espacio topológico y $x, y, z \in X$. Si existe un camino de x a y en X y existe un camino de y a z en X, entonces existe un camino de x a z en X.*

Prueba. Gracias al Corolario 5.2.17, podemos considerar conjuntos totalmente ordenados $\langle Y, \leqslant_Y \rangle$ y $\langle W, \leqslant_W \rangle$ y funciones $f : Y \to X$ y $g : W \to X$ con las siguientes propiedades:

1. $Y \cap W = \emptyset$;
2. Y y W son arcos generalizados que poseen la topología del orden generada por $\leqslant_Y$ y por $\leqslant_W$, respectivamente;
3. f y g son continuas;
4. $f(\min Y) = x$, $f(\max Y) = y$, $g(\min W) = y$ y $g(\max W) = z$.

Denotemos por m_Y y M_Y a los elementos mínimo y máximo de Y, respectivamente y por m_W y M_W a los elementos mínimo y máximo de W, correspondientemente.
Tomemos Z_Y^W y $\leqslant$ como en (4.11) y (4.12) de la Observación 4.1.24. Si Z_Y^W tiene la topología del orden inducida por $\leqslant$, del Teorema 4.2.19 se desprende que

$$Z_Y^W \text{ es un arco generalizado.} \tag{5.25}$$

Definamos una función $h : Y \oplus W \to X$ como

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad x \in Y; \\ g(x), & \text{si} \quad x \in W. \end{cases} \tag{5.26}$$

Puesto que f y g son continuas se sigue que $h \restriction_Y$ y $h \restriction_W$ son continuas. También, Y y W son subconjuntos cerrados de $Y \oplus W$. Además, $Y \cap W = \emptyset$. En vista de (5.26), por el Lema 1.1.2 podemos inferir que

$$h \text{ está bien definida y es continua.} \tag{5.27}$$

Sea $p : Y \oplus W \to Z_Y^W$ la función cociente. Considerando el Corolario 4.1.32 resulta que la topología del orden inducida por $\leqslant$ en Z_Y^W coincide con la topología cociente inducida por p en Z_Y^W.
Por otro lado, si $\tilde{t} \in Z_Y^W$ obtenemos que $p^{-1}[\{\tilde{t}\}] = \{t\}$ o bien $p^{-1}[\{\tilde{t}\}] = \{M_Y, m_W\}$. Gracias a (5.26) y a la Propiedad 4, en ambos casos se satisface

que h evaluada en $p^{-1}[\{\tilde{t}\}]$ es un conjunto unipuntual. Del Teorema 5.2.18 se deduce que

$$h \circ p^{-1} : Z_Y^W \to X \text{ es una función continua y } (h \circ p^{-1}) \circ p = h. \tag{5.28}$$

Observamos que $\min Z_Y^W = p(m_Y)$ y $\max Z_Y^W = p(M_W)$. A razón de (5.26) podemos concretar que

$$\begin{gathered} (h \circ p^{-1})(\min Z_Y^W) = (h \circ p^{-1})(p(m_Y)) = h(m_Y) = f(m_Y) = x \\ \text{y} \\ (h \circ p^{-1})(\max Z_Y^W) = (h \circ p^{-1})(p(M_W)) = h(M_W) = g(M_W) = z. \end{gathered} \tag{5.29}$$

Conjuntando (5.25), (5.28) y (5.29) concluimos que $(h \circ p^{-1})[Z_Y^W]$ es un camino de x a z en X. ■

Corolario 5.2.20 *Sean X un espacio topológico y $x_1, \ldots, x_k \in X$. Si para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ existe un camino de x_i a x_{i+1} en X, entonces existe un camino de x_1 a x_k en X.*

Prueba. Por hipótesis, hay un camino de x_1 a x_2 en X. Recursivamente, supongamos que hemos encontrado un camino de x_1 a x_{k-1} en X. Sabemos que podemos hallar un camino de x_{k-1} a x_k en X. Así, gracias al Teorema 5.2.19 hemos concluido. ■

Para terminar esta sección, veremos que el concepto de arco ordenado y el de camino inyectivo están estrechamente relacionados.

Lema 5.2.21 *Sean X un continuo de Hausdorff y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de A a B, entonces $\mathcal{A}$ es un camino inyectivo de A a B en 2^X.*

Prueba. Por el Teorema 4.2.21 se tiene que $\mathcal{A}$ es un arco generalizado con la topología del orden inducida por la contención en $\mathcal{A}$. Sea $f : \mathcal{A} \to 2^X$ la función inclusión, entonces f es continua e inyectiva.
Además,

$$\min \mathcal{A} = A \text{ y } \max \mathcal{A} = B.$$

Luego,

$$f(\min \mathcal{A}) = f(A) = A \text{ y } f(\max \mathcal{A}) = f(B) = B.$$

Consecuentemente, $\mathcal{A}$ es un camino inyectivo de A a B en 2^X.

■

Capítulo 6

Conexidad local por arcos en 2^X

En este capítulo se demostrarán los resultados principales del presente trabajo. Dichos resultados nos dan condiciones necesarias y suficientes para que 2^X sea localmente conexo por arcos en elementos de $C(X)$ y 2^X. Asimismo, se probará que podemos relacionar la propiedad de conexidad local por arcos en 2^X con la propiedad de conexidad local fuerte por continuos en X.

6.1 Resultados para elementos de $C(X)$

En esta sección, nos enfocaremos en estudiar la propiedad de conexidad local por arcos de 2^X en elementos de $C(X)$.

Lema 6.1.1 *Sean X un continuo de Hausdorff y $M \in C(X)$. Si 2^X es localmente conexo por arcos en M, entonces para cada subconjunto abierto U de X tal que $M \subseteq U$, existe un subconjunto abierto V de X que cumple lo siguiente:*

1. *$M \subseteq V \subseteq U$ y*

2. *para cada subconjunto cerrado B de X con la propiedad de que $B \subseteq V$, existe un subcontinuo L de X tal que $B \subseteq L \subseteq V$.*

Prueba. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $M \subseteq U$. Entonces $M \in \langle U \rangle$. Como 2^X es localmente conexo por arcos en M, existe un subespacio abierto y conexo por arcos $\mathcal{V}$ de 2^X que cumple que

$$M \in \mathcal{V} \subseteq \langle U \rangle. \tag{6.1}$$

Definamos

$$V = \bigcup \mathcal{V}. \tag{6.2}$$

Notamos que

$$M \subseteq V \subseteq U.$$

Además, del Lema 3.2.2 se infiere que

$$V \text{ es abierto en } X.$$

Sea B un subconjunto cerrado de X tal que $B \subseteq V$ y tomemos $b \in B$. Gracias a (6.2), podemos elegir $B_b \in \mathcal{V}$ tal que $b \in B_b$. Puesto que 2^X es T_3, podemos encontrar una familia $\{V_1^b, \ldots, V_{n_b}^b\}$ de subconjuntos abiertos de X que cumple lo siguiente:

$$B_b \in \langle V_1^b, \ldots, V_{n_b}^b \rangle \subseteq \mathrm{cl}(\langle V_1^b, \ldots, V_{n_b}^b \rangle) \subseteq \mathcal{V} \text{ y } b \in V_1^b. \tag{6.3}$$

Así, $\{V_1^b : b \in B\}$ es una cubierta abierta para B y, dado que B es compacto, existen $b_1, \ldots, b_k \in B$ de tal manera que

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} V_1^{b_j}. \tag{6.4}$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, sea

$$C_{b_j} = \bigcup_{i=1}^{n_{b_j}} \mathrm{cl}(V_i^{b_j}). \tag{6.5}$$

Del Lema 3.1.10 y de (6.3) se deduce que

$$C_{b_j} \in \langle \mathrm{cl}(V_1^{b_j}), \ldots, \mathrm{cl}(V_{n_{b_j}}^{b_j}) \rangle \subseteq \mathcal{V}. \tag{6.6}$$

Debido a que $\mathcal{V}$ es conexo por arcos, a (6.1) y a (6.6), existe un camino inyectivo $\mathcal{L}_j$ tal que

$$\mathcal{L}_j \subseteq \mathcal{V} \text{ y } \{M, C_{b_j}\} \subseteq \mathcal{L}_j. \tag{6.7}$$

Si $L_j = \bigcup \mathcal{L}_j$, entonces

$$M \subseteq L_j \subseteq V \text{ y } C_{b_j} \subseteq L_j. \tag{6.8}$$

Conjuntando que M es un subcontinuo de X y (6.7), por el Lema 3.2.6 se sigue que

$$L_j \text{ es conexo.}$$

Además, por el Teorema 3.2.3 se obtiene que

$$L_j \text{ es compacto.}$$

Por consiguiente

$$L_j \in C(X). \tag{6.9}$$

Sea $L = \bigcup_{j=1}^{k} L_j$. De (6.8), (6.9) y el Lema 1.2.3, se infiere que

$$L \in C(X).$$

En virtud de (6.4), (6.5), y (6.8) resulta que

$$B \subseteq L.$$

Finalmente, de (6.8) se concluye que

$$L \subseteq V.$$

■

Los siguientes dos resultados técnicos los utilizaremos para demostrar el Lema 6.1.4.

Lema 6.1.2 *Sean X un continuo de Hausdorff y $V_1, \ldots, V_n$ subconjuntos abiertos de X. Consideremos $B_1, B_2, L \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ tales que $L \in C(X)$, $B_1 \subsetneq L$ y $B_2 \subsetneq L$. Entonces existe un camino de B_1 a B_2 en $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$.*

Prueba. En vista del Teorema 3.4.2, podemos tomar arcos ordenados $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ de B_1 a L y de B_2 a L, respectivamente. Del Corolario 3.1.3 se deduce que

$$\mathcal{L}_1 \subseteq \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \text{ y } \mathcal{L}_2 \subseteq \langle V_1, \ldots, V_n \rangle.$$

Debido al Lema 5.2.21 y al Teorema 5.2.19, hay un camino de B_1 a B_2 en $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$. ■

Lema 6.1.3 *Sean X un continuo de Hausdorff y $V_1, \ldots, V_n$ subconjuntos abiertos de X. Consideremos $B_1, B_2, L \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ tales que $B_1 \neq B_2$, $L \in C(X)$ y $B_1 \cup B_2 \subseteq L$. Entonces existe un camino de B_1 a B_2 en $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$.*

Prueba. Notamos que para cada $j \in \{1, 2\}$ se cumple que

$$B_j \subseteq B_1 \cup B_2 \subseteq L.$$

Dado que $B_1 \neq B_2$ se tiene que $B_1 \neq L$ o bien $B_2 \neq L$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $B_1 \neq L$. Así, $B_1 \subsetneq L$ y $B_2 \subseteq L$. Si $B_2 = L$, a consecuencia del Teorema 3.4.2, podemos encontrar un arco ordenado $\mathcal{H}$ de B_1 a B_2. Gracias al Lema 3.4.3 y al Lema 5.2.21 se sigue el resultado.
Si por el contrario, $B_2 \subsetneq L$, del Lema 6.1.2 concluimos que podemos hallar un camino de B_1 a B_2 en $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$.
■

Lema 6.1.4 *Sean X un continuo de Hausdorff y $M \in C(X)$. Si para cada subconjunto abierto U de X tal que $M \subseteq U$, existe un subconjunto abierto V de X que cumple lo siguiente:*

1. *$M \subseteq V \subseteq U$ y*

2. *para cada subconjunto cerrado B de X con la propiedad de que $B \subseteq V$, existe un subcontinuo L de X tal que $B \subseteq L \subseteq V$,*

entonces existe una base local para M, formada por vietóricos conexos por arcos.

Prueba. Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ una familia de subconjuntos abiertos de X tal que $M \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Si $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, resulta que $M \subseteq U$. Por hipótesis, existe un subconjunto abierto V de X tal que:

1. $M \subseteq V \subseteq U$ y

2. para cada subconjunto cerrado B de X con la propiedad de que $B \subseteq V$, existe un subcontinuo L de X tal que $B \subseteq L \subseteq V$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea

$$V_i = V \cap U_i. \tag{6.10}$$

Notemos que

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_i = \bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i) = V \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right) = V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i. \tag{6.11}$$

Así,

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i.$$

El hecho de que $M = M \cap V$ y $M \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ implica que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$M \cap V_i = M \cap (V \cap U_i) = M \cap U_i \neq \emptyset.$$

Luego,

$$M \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle.$$

Conjuntando (6.10) y (6.11), del Lema 3.1.7 se desprende que

$$\langle V_1, \ldots, V_n \rangle \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle.$$

Enseguida, se probará que

$$\langle V_1, \ldots, V_n \rangle \text{ es conexo por arcos.} \tag{6.12}$$

Sean B_1 y B_2 elementos de $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ tales que $B_1 \neq B_2$. Entonces $B_1 \cup B_2$ es cerrado en X. Notemos además que

$$B_1 \cup B_2 \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle. \tag{6.13}$$

Gracias a que $B_1 \cup B_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, a (6.11) y a la Propiedad 2, podemos encontrar un subcontinuo L de X con la cualidad de que $B_1 \cup B_2 \subseteq L \subseteq V$. Por el Lema 3.1.2, por (6.13) y por (6.11) se sigue que

$$L \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle.$$

Debido al Lema 6.1.3, hay un camino de B_1 a B_2 en $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$. Consecuentemente, $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ es conexo por caminos. Finalmente, del Lema 5.2.9 se concluye (6.12). ■

A consecuencia del Lema 6.1.1 y del Lema 6.1.4, podemos inferir la siguiente caracterización:

Teorema 6.1.5 *Sean X un continuo de Hausdorff y $M \in C(X)$. Entonces 2^X es localmente conexo por arcos en M si y solo si para cada subconjunto abierto U de X tal que $M \subseteq U$, existe un subconjunto abierto V de X que cumple lo siguiente:*

1. *$M \subseteq V \subseteq U$ y*
2. *para cada subconjunto cerrado B de X con la propiedad de que $B \subseteq V$, existe un subcontinuo L de X tal que $B \subseteq L \subseteq V$.*

Corolario 6.1.6 *Sean X un continuo de Hausdorff y $x \in X$. Entonces 2^X es localmente conexo por arcos en $\{x\}$ si y solo si X es fuertemente localmente conexo por continuos en x.*

Prueba. Supongamos que 2^X es localmente conexo por arcos en $\{x\}$ y sea U un subconjunto abierto de X con la cualidad de que $x \in U$. Luego, $\{x\} \subseteq U$. En vista del Teorema 6.1.5 podemos hallar un subconjunto abierto V de X con las siguientes características:

1. $\{x\} \subseteq V \subseteq U$ y
2. para cada subconjunto cerrado B de X con la peculiaridad de que $B \subseteq V$, existe un subcontinuo L de X de tal forma que $B \subseteq L \subseteq V$.

Por ende, X es fuertemente localmente conexo por continuos en x.
Recíprocamente, si X es fuertemente localmente conexo por continuos en x, para cualquier subconjunto abierto S de X de tal suerte que $x \in S$, existe un subconjunto abierto W de X con la particularidad de que $x \in W \subseteq S$ y, para cada subconjunto cerrado K de X que satisfaga que $K \subseteq W$, hay un subcontinuo M de X tal que $K \subseteq M \subseteq W$. Así, del Teorema 6.1.5 se deriva que 2^X es localmente conexo por arcos en $\{x\}$. ■

6.2 Un resultado técnico

En esta sección introduciremos algunos resultados técnicos relacionados con la escritura de elementos de 2^X, a partir de los abiertos básicos de la topología de Vietoris. Usaremos estos resultados técnicos en la prueba de los teoremas principales de la Sección 6.3.

Observación 6.2.1 Sean X un continuo de Hausdorff, $B \in 2^X$ y $U_1, \ldots, U_n$ una familia de subconjuntos abiertos de X tales que $B \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Sea

$$I = \{i \in \{1, \ldots, n\} : B \cap \mathrm{fr}(U_i) \neq \emptyset\}. \tag{6.14}$$

Supongamos que $i \in I$. Puesto que X es un continuo de Hausdorff y $B \cap \mathrm{fr}(U_i)$ es cerrado en X, se sigue que

$$B \cap \mathrm{fr}(U_i) \text{ es compacto.} \tag{6.15}$$

Como $B \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, fijamos

$$b_i \in B \cap U_i. \tag{6.16}$$

Dado $x \in B \cap \mathrm{fr}(U_i)$, definimos

$$J_x = \{j \in \{1, \ldots, n\} : x \in U_j\}. \tag{6.17}$$

Debido a que $x \in \mathrm{fr}(U_i)$, a que U_i es abierto y a que $b_i \in U_i$, podemos encontrar un subconjunto abierto V_x^i de X tal que

$$b_i \notin V_x^i \text{ y } x \in V_x^i \subseteq \mathrm{cl}(V_x^i) \subseteq \bigcap_{j \in J_x} U_j. \tag{6.18}$$

Notamos que $\{V_x^i : x \in B \cap \mathrm{fr}(U_i)\}$ es una cubierta abierta para $B \cap \mathrm{fr}(U_i)$. Gracias a (6.15), existe $\{x_1, \ldots, x_{m_i}\} \subseteq B \cap \mathrm{fr}(U_i)$ de tal manera que

$$B \cap \mathrm{fr}(U_i) \subseteq \bigcup_{l=1}^{m_i} V_{x_l}^i. \tag{6.19}$$

Para cada $l \in \{1, \ldots, m_i\}$, escribamos

$$V_{x_l}^i = V_{(i,l)}. \tag{6.20}$$

Consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{V} = \{V_{(i,l)} : (i,l) \in I \times \{1, \ldots, m_i\}\}. \tag{6.21}$$

Así, si $i \in \{1, \ldots, n\}$, podemos definir

$$C_i = \begin{cases} B \cap U_i, & \text{si} \quad i \notin I; \\ (B \cap U_i) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m_i} V_{(i,l)}\right), & \text{si} \quad i \in I. \end{cases} \tag{6.22}$$

A causa de (6.16) y de (6.18), se colige que

$$C_i \neq \emptyset. \tag{6.23}$$

Finalmente, teniendo en cuenta los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{V}_i = \{V \in \mathcal{V} : \mathrm{cl}(V) \subseteq U_i\} \text{ y } \mathcal{A}_i = \{\mathrm{cl}(V) : V \in \mathcal{V}_i\}, \tag{6.24}$$

podemos precisar

$$B_i = C_i \cup \Big(B \cap \Big(\bigcup \mathcal{A}_i\Big)\Big). \tag{6.25}$$

A consecuencia de (6.23), resulta que

$$\emptyset \neq B_i \subseteq U_i. \tag{6.26}$$

Lema 6.2.2 *Sean X un continuo de Hausdorff, $B \in 2^X$ y $U_1, \ldots, U_n$ una familia de subconjuntos abiertos de X tales que $B \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Si se define I como en (6.14) de la Observación 6.2.1 e $i \notin I$, entonces $B \cap \mathrm{cl}(U_i) = B \cap U_i$. En particular, si C_i es como en (6.22) de la Observación 6.2.1, el conjunto C_i es cerrado en X cada vez que $i \notin I$.*

Prueba. Notamos que

$$\mathrm{cl}(U_i) = U_i \cup \mathrm{fr}(U_i).$$

Puesto que $i \notin I$ se tiene que $B \cap \mathrm{fr}(U_i) = \emptyset$.
Luego,

$$B \cap \mathrm{cl}(U_i) = B \cap (U_i \cup \mathrm{fr}(U_i)) = (B \cap U_i) \cup (B \cap \mathrm{fr}(U_i)) = B \cap U_i.$$

Así, si C_i es como en (6.22) de la Observación 6.2.1, el conjunto C_i es cerrado en X cada vez que $i \notin I$. ■

Lema 6.2.3 *Sean X un continuo de Hausdorff, $B \in 2^X$ y $U_1, \ldots, U_n$ una familia de subconjuntos abiertos de X tales que $B \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Si se define I como en (6.14) de la Observación 6.2.1 e $i \in I$, entonces*

$$(B \cap \mathrm{cl}(U_i)) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m_i} V_{(i,l)}\right) = (B \cap U_i) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m_i} V_{(i,l)}\right).$$

En particular, si C_i es como en (6.22) de la Observación 6.2.1, el conjunto C_i es cerrado en X cada vez que $i \in I$.

Prueba. Notamos que
$$\mathrm{cl}(U_i) = U_i \cup \mathrm{fr}(U_i). \tag{6.27}$$
Puesto que $i \in I$ se tiene que
$$B \cap \mathrm{fr}(U_i) \subseteq \bigcup_{l=1}^{m_i} V_{(i,l)}.$$
Luego,
$$(B \cap \mathrm{fr}(U_i)) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m_i} V_{(i,l)} \right) = \emptyset. \tag{6.28}$$
De (6.27) se infiere que
$$(B \cap \mathrm{cl}(U_i)) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m_i} V_{(i,l)} \right) = \left[(B \cap U_i) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m_i} V_{(i,l)} \right) \right] \cup \left[(B \cap \mathrm{fr}(U_i)) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m_i} V_{(i,l)} \right) \right].$$
Finalmente, de (6.28) se concluye que
$$(B \cap \mathrm{cl}(U_i)) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m_i} V_{(i,l)} \right) = (B \cap U_i) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m_i} V_{(i,l)} \right).$$
Así, si C_i es como en (6.22) de la Observación 6.2.1, el conjunto C_i es cerrado en X cada vez que $i \in I$. ■

Corolario 6.2.4 *Sean X un continuo de Hausdorff, $B \in 2^X$ y $U_1, \ldots, U_n$ una familia de subconjuntos abiertos de X tales que $B \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Si B_i es como en (6.25) de la Observación 6.2.1, entonces $B_i \in 2^X$. Más aún, $B_i \in \langle U_i \rangle$.*

Prueba. De (6.22) y (6.25) de la Observación 6.2.1 se sigue que
$$B_i = C_i \cup \left(B \cap \left(\bigcup \mathcal{A}_i \right) \right).$$
En vista del Lema 6.2.2 y del Lema 6.2.3, se infiere que
$$C_i \text{ es cerrado en } X.$$

Conjuntando (6.21) y (6.24) de la Observación 6.2.1, obtenemos que $\mathcal{A}_i$ es una familia finita de subconjuntos cerrados de X, por lo que

$$B_i \text{ es cerrado en } X.$$

Finalmente, en virtud de (6.26) de la Observación 6.2.1 podemos concluir que

$$B_i \in \langle U_i \rangle.$$

■

Lema 6.2.5 *Sean X un continuo de Hausdorff y $U_1, \ldots, U_n$ una familia de subconjuntos abiertos de X. Si $B \in 2^X$ y $B \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, entonces existen $B_1, \ldots, B_n \in 2^X$ con las siguientes propiedades:*

1. *para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $B_i \in \langle U_i \rangle$ y*
2. *$B = \bigcup_{i=i}^n B_i$.*

Prueba. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea B_i como en (6.25) de la Observación 6.2.1. Del Corolario 6.2.4 se sigue que

$$B_i \in \langle U_i \rangle.$$

A continuación probaremos que

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

De (6.22) y (6.25) de la Observación 6.2.1 resulta que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$B_i \subseteq B.$$

Luego,

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subseteq B. \tag{6.29}$$

Sea $b \in B$. Como $B \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ de tal manera que $b \in B \cap U_i$.
CASO 1. Si $B \cap \mathrm{fr}(U_i) = \emptyset$, debido a (6.22) y a (6.25) de la Observación 6.2.1 se deriva que

$$b \in B_i.$$

CASO 2. Supongamos que $B \cap \mathrm{fr}(U_i) \neq \emptyset$ y sea $b_i \in X$ como en (6.16) de la Observación 6.2.1. Por (6.14), (6.22) y (6.25) de la Observación 6.2.1 surge que

$$B_i = \left[(B \cap U_i) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m_i} V_{(i,l)}\right)\right] \cup \left[B \cap \left(\bigcup \mathcal{A}_i\right)\right].$$

Si $b \in (B \cap U_i) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m_i} V_{(i,l)}\right)$, automáticamente $b \in B_i$.
Si por el contrario $b \notin (B \cap U_i) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m_i} V_{(i,l)}\right)$, existe $l \in \{1, \ldots, m_i\}$ con la propiedad de que

$$b \in V_{(i,l)}. \tag{6.30}$$

Gracias a (6.17), a (6.18) y a (6.20) de la Observación 6.2.1, podemos encontrar $j' \in \{1, \ldots, n\}$ con la cualidad de que

$$\mathrm{cl}(V_{(i,l)}) \subseteq U_{j'}.$$

Teniendo en cuenta (6.21) y (6.24) de la Observación 6.2.1, deducimos que

$$V_{(i,l)} \in \mathcal{V}_{j'}.$$

Por consiguiente

$$\mathrm{cl}(V_{(i,l)}) \in \mathcal{A}_{j'}. \tag{6.31}$$

Conjuntando (6.30) y (6.31), obtenemos que

$$b \in B \cap \left(\bigcup \mathcal{A}_{j'}\right).$$

Notando (6.25) de la Observación 6.2.1,

$$b \in B_{j'}.$$

Así, del CASO 1 y del CASO 2, inferimos que

$$B \subseteq \bigcup_{i=i}^{n} B_i.$$

Finalmente, de (6.29) se concluye que

$$B = \bigcup_{i=i}^{n} B_i.$$

■

6.3 Resultados para elementos de 2^X

En esta sección ya estamos listos para presentar los teoremas fundamentales de este trabajo: aquellos que caracterizan la conexidad local por arcos en elementos de 2^X.

Comenzamos esta última sección enunciando dos resultados importantes sobre la conexidad local de 2^X, en elementos de $C(X)$ y de 2^X, respectivamente.

Teorema 6.3.1 *[3, Teorema 2, p. 390] Sean X un continuo de Hausdorff y $M \in C(X)$. Entonces 2^X es localmente conexo en M si y solo si para cada subconjunto abierto U de X tal que $M \subseteq U$, existe un subsespacio abierto y conexo V de X con la característica de que $M \subseteq V \subseteq U$.*

Teorema 6.3.2 *[3, Teorema 5, p. 395] Sean X un continuo de Hausdorff y $A \in 2^X$. Entonces 2^X es localmente conexo en A si y solo si 2^X es localmente conexo en cada componente de A.*

Los siguientes tres resultados son muy técnicos, pero los necesitaremos para probar el Lema 6.3.12, que es la implicación directa de uno de los teoremas más importantes de esta tesis: el Teorema 6.3.25.

Lema 6.3.3 *Sean X un continuo de Hausdorff y $A \in 2^X$. Sea Q un subconjunto abierto de X tal que $A \cap Q \neq \emptyset$ y $A \cap \mathrm{fr}(Q) = \emptyset$. Si 2^X es localmente conexo en A, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ y existe $E \in C_N(X)$ que satisface que $A \cap Q \subseteq E \subseteq Q$ y toda componente de E interseca a $A \cap Q$.*

Prueba. Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{C} = \{C \in C(X) : C \text{ es componente de } A \text{ y } C \cap Q \neq \emptyset\}.$$

Notamos que

$$A \cap Q \subseteq \bigcup \mathcal{C}. \tag{6.32}$$

Además, teniendo en cuenta que $A \cap \mathrm{fr}(Q) = \emptyset$ y que $Q = \mathrm{int}(Q)$ podemos asegurar que

$$A \cap Q = A \cap \mathrm{int}(Q) = A \setminus (\mathrm{fr}(Q) \cup \mathrm{ext}(Q)) = A \setminus \mathrm{ext}(Q).$$

Por consiguiente, $A \cap Q$ es cerrado en X. Así, debido a que X es un continuo de Hausdorff llegamos a que

$$A \cap Q \text{ es compacto.} \tag{6.33}$$

Tomemos $C \in \mathcal{C}$. Puesto que $C \subseteq A$ y $A \cap \text{fr}(Q) = \emptyset$ se sigue que $C \cap \text{fr}(Q) = \emptyset$. Luego,

$$C \subseteq \text{int}(Q) \cup \text{ext}(Q).$$

Dado que C es conexo, $Q = \text{int}(Q)$ y $C \cap Q \neq \emptyset$ resulta que

$$C \subseteq Q.$$

Como X compacto y de Hausdorff, X es T_4. en particular, X es T_3. También C es compacto. Por consiguiente, podemos considerar un subconjunto abierto W_C de X con la peculiaridad de que

$$C \subseteq W_C \subseteq \text{cl}(W_C) \subseteq Q. \tag{6.34}$$

Por hipótesis sabemos que 2^X es localmente conexo en A. Del Teorema 6.3.2 se deduce que 2^X es localmente conexo en C. Asimismo, gracias al Teorema 6.3.1 podemos encontrar un subespacio abierto y conexo V_C de X de tal suerte que

$$C \subseteq V_C \subseteq W_C.$$

De (6.34) se colige que

$$C \subseteq V_C \subseteq \text{cl}(V_C) \subseteq Q. \tag{6.35}$$

A consecuencia de (6.32) obtenemos que

$$A \cap Q \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} V_C.$$

En virtud de (6.33) podemos hallar $C_1, \ldots, C_N \in \mathcal{C}$ de tal manera que

$$A \cap Q \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} V_{C_j} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \text{cl}(V_{C_j}) \subseteq Q.$$

Determinemos $E = \bigcup_{j=1}^{N} \text{cl}(V_{C_j})$. Consecuentemente, $A \cap Q \subseteq E \subseteq Q$. Sabemos que para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$, el conjunto V_{C_j} es conexo. Luego,

$\mathrm{cl}(V_{C_j})$ es conexo. Así, $E \in C_N(X)$. Fijemos una componente L de E y $x \in L$. Entonces existe $j \in \{1, \ldots, N\}$ con la característica de que $x \in \mathrm{cl}(V_{C_j}) \subseteq E$. Por (6.35), $C_j \subseteq \mathrm{cl}(V_{C_j}) \subseteq L$. Por definición de $\mathcal{C}$, el conjunto $C_j \cap (A \cap Q)$ es no vacío, por lo que $L \cap (A \cap Q) \neq \emptyset$. De esta forma, hemos terminado. ■

Lema 6.3.4 *Sean X un continuo de Hausdorff, $A \in 2^X$ y A_1 una componente de A. Supongamos que 2^X es localmente conexo en A. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X que satisfacen que $A_1 \subseteq U_1$ y $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$. Sea $\mathcal{V}$ un subespacio abierto y conexo por arcos de 2^X tal que $A \in \mathcal{V} \subseteq \langle U_1, U_2 \rangle$. Consideremos $f : \langle U_1, U_2 \rangle \to \langle U_1 \rangle$ dada por $f(B) = B \cap U_1$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ y existe $E \in C_N(X)$ que cumple que $A \cap (\bigcup f[\mathcal{V}]) \subseteq E \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]$ y cada componente K de E interseca al conjunto $A \cap (\bigcup f[\mathcal{V}])$.*

Prueba. Por el Lema 3.3.6 obtenemos lo siguiente:

1. $\bigcup f[\mathcal{V}] \subseteq U_1$;
2. $A \cap (\bigcup f[\mathcal{V}]) = A \cap U_1$ y
3. $A \cap \mathrm{fr}\,(\bigcup f[\mathcal{V}]) = \emptyset$.

Del Lema 3.3.2 se sigue que f está bien definida y es continua. De la Propiedad 2 se desprende que

$$\emptyset \neq f(A) = A \cap U_1 = A \cap \left(\bigcup f[\mathcal{V}]\right). \tag{6.36}$$

Aplicando el Lema 3.3.5 inferimos que

$$\bigcup f[\mathcal{V}] \text{ es abierto en } X. \tag{6.37}$$

Conjuntando (6.36), (6.37), la Propiedad 3 y que 2^X es localmente conexo en A, teniendo en cuenta el Lema 6.3.3 podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ y $E \in C_N(X)$ con la singularidad de que

$$A \cap \left(\bigcup f[\mathcal{V}]\right) \subseteq E \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]$$

y toda componente de K de E satisface que

$$K \cap [A \cap \left(\bigcup f[\mathcal{V}]\right)] \neq \emptyset.$$

■

Lema 6.3.5 *Sean X un continuo de Hausdorff, $A \in 2^X$ y A_1 una componente de A. Supongamos que 2^X es localmente conexo en A. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X que satisfacen que $A_1 \subseteq U_1$ y $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$. Sea $\mathcal{V}$ un subespacio abierto y conexo por arcos de 2^X tal que $A \in \mathcal{V} \subseteq \langle U_1, U_2 \rangle$. Consideremos $f : \langle U_1, U_2 \rangle \to \langle U_1 \rangle$ dada por $f(B) = B \cap U_1$. Entonces para cada $B \in 2^X$ con la característica de que $B \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]$, existen $b_1, \ldots, b_k \in B$ de tal forma que para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ podemos hallar una familia $\{V_1^{b_j}, \ldots, V_{n_{b_j}}^{b_j}\}$ de subconjuntos abiertos de X que cumpla lo siguiente:*

1. $\mathrm{cl}(\langle V_1^{b_j}, \ldots, V_{n_{b_j}}^{b_j} \rangle) \subseteq f[\mathcal{V}]$,
2. $b_j \in V_1^{b_j}$ *y*
3. $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} V_1^{b_j}$.

Adicionalmente, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ podemos encontrar un subcontinuo $\mathcal{L}_j$ de 2^X, con la peculiaridad de que $\{f(A), \bigcup_{i=1}^{n_{b_j}} \mathrm{cl}(V_i^{b_j})\} \subseteq \mathcal{L}_j \subseteq f[\mathcal{V}]$.

Prueba. Del Corolario 3.3.4 se sigue que

$$f[\mathcal{V}] \text{ es abierto en } 2^X. \tag{6.38}$$

Dado, $b \in B$ podemos elegir $B_b \in f[\mathcal{V}]$ tal que $b \in B_b$. Puesto que 2^X es T_3, gracias a (6.38) podemos encontrar una familia $\{V_1^b, \ldots, V_{n_b}^b\}$ de subconjuntos abiertos de X que cumple lo siguiente:

$$B_b \in \langle V_1^b, \ldots, V_{n_b}^b \rangle \subseteq \mathrm{cl}(\langle V_1^b, \ldots, V_{n_b}^b \rangle) \subseteq f[\mathcal{V}] \text{ y } b \in V_1^b. \tag{6.39}$$

Así, $\{V_1^b : b \in B\}$ es una cubierta abierta para B y, dado que B es compacto, existen $b_1, \ldots, b_k \in B$ de tal manera que

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} V_1^{b_j}.$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, sea

$$C_{b_j} = \bigcup_{i=1}^{n_{b_j}} \mathrm{cl}(V_i^{b_j}).$$

Del Lema 3.1.10 y de (6.39) se deduce que

$$C_{b_j} \in \langle \mathrm{cl}(V_1^{b_j}), \ldots, \mathrm{cl}(V_{n_{b_j}}^{b_j}) \rangle \subseteq f[\mathcal{V}]. \tag{6.40}$$

En vista que $\mathcal{V}$ es conexo por arcos y que f es continua, del Lema 5.2.12 se colige que

$$f[\mathcal{V}] \text{ es conexo por caminos.} \tag{6.41}$$

Debido a que $A \in \mathcal{V}$, a (6.40) y a (6.41), existe un camino $\mathcal{L}_j$ tal que

$$\mathcal{L}_j \subseteq f[\mathcal{V}] \text{ y } \{f(A), C_{b_j}\} \subseteq \mathcal{L}_j.$$

■

A continuación se introducirá un nuevo concepto al que denominaremos Propiedad ($\star$). Inmediatamente después se probarán algunos resultados correspondientes a la misma. Dichos resultados son algo técnicos, pero sin ellos no hubiera sido posible demostrar uno de los teoremas principales de este trabajo (Teorema 6.3.25).

Definición 6.3.6 Sean X un continuo de Hausdorff, $A \in 2^X$ y A_1 una componente de A. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X que satisfacen que $A_1 \subseteq U_1$ y $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$. Sea $\mathcal{V}$ un subconjunto abierto de 2^X tal que $A \in \mathcal{V} \subseteq \langle U_1, U_2 \rangle$. Consideremos $f : \langle U_1, U_2 \rangle \to \langle U_1 \rangle$ dada por $f(B) = B \cap U_1$. Sea $D \subseteq X$. Decimos que *D cumple la Propiedad ($\star$)* si ocurre lo siguiente:

I. $D \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]$ y

II. para cada subconjunto cerrado B de X de tal manera que $B \subseteq D$, existe $L_B \in C(X)$ con la característica de que $A_1 \cup B \subseteq L_B \subseteq D$.

Lema 6.3.7 *Sean X un continuo de Hausdorff, $A \in 2^X$ y A_1 una componente de A. Supongamos que 2^X es localmente conexo en A. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X que satisfacen que $A_1 \subseteq U_1$ y $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$. Sea $\mathcal{V}$ un subespacio abierto y conexo por arcos de 2^X tal que $A \in \mathcal{V} \subseteq \langle U_1, U_2 \rangle$. Consideremos $f : \langle U_1, U_2 \rangle \to \langle U_1 \rangle$ dada por $f(B) = B \cap U_1$. Definamos el siguiente conjunto:*

$$P = \bigcup \{L \in C(X) : A_1 \subseteq L \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]\}. \tag{6.42}$$

Entonces P cumple la Propiedad ($\star$) de la Definición 6.3.6.

Prueba. Por el Lema 3.3.6 obtenemos que:

1. $\bigcup f[\mathcal{V}] \subseteq U_1$,
2. $A \cap (\bigcup f[\mathcal{V}]) = A \cap U_1$ y
3. $A \cap \operatorname{fr}(\bigcup f[\mathcal{V}]) = \emptyset$.

Notamos que

$$P \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]. \tag{6.43}$$

Consideremos un subconjunto cerrado B de X con la cualidad de que

$$B \subseteq P. \tag{6.44}$$

Probaremos que existe $M \in C(X)$ de tal manera que

$$A_1 \cup B \subseteq M \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]. \tag{6.45}$$

Debido al Lema 6.3.5, existen $b_1, \ldots, b_k \in B$ de tal forma que para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ podemos hallar una familia $\{V_1^{b_j}, \ldots, V_{n_{b_j}}^{b_j}\}$ de subconjuntos abiertos de X que cumpla lo siguiente:

4. $\operatorname{cl}(\langle V_1^{b_j}, \ldots, V_{n_{b_j}}^{b_j} \rangle) \subseteq f[\mathcal{V}]$,
5. $b_j \in V_1^{b_j}$ y
6. $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} V_1^{b_j}$.

Además, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ podemos encontrar un subcontinuo $\mathcal{L}_j$ de 2^X, con la peculiaridad de que

$$\{f(A), \bigcup_{i=1}^{n_{b_j}} \operatorname{cl}(V_i^{b_j})\} \subseteq \mathcal{L}_j \subseteq f[\mathcal{V}]. \tag{6.46}$$

De la Propiedad 6 se consigue que

$$B = \bigcup_{j=1}^{k} (B \cap V_1^{b_j}). \tag{6.47}$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, fijemos

$$C_{b_j} = \bigcup_{i=1}^{n_{b_j}} \mathrm{cl}(V_i^{b_j}). \tag{6.48}$$

De (6.46) se infiere que

$$f(A) \subseteq \bigcup \mathcal{L}_j \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}] \text{ y } C_{b_j} \subseteq \bigcup \mathcal{L}_j \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]. \tag{6.49}$$

Por otro lado, gracias al Lema 6.3.4, existe $N \in \mathbb{N}$ y existe $E \in C_N(X)$ que satisface que

$$A \cap \left(\bigcup f[\mathcal{V}]\right) \subseteq E \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}] \tag{6.50}$$

y para cada componente K de E resulta que

$$K \cap [A \cap \left(\bigcup f[\mathcal{V}]\right)] \neq \emptyset. \tag{6.51}$$

Sabemos que $f(A) = A \cup U_1$. A razón de que $\mathcal{L}_j$ es un subcontinuo de 2^X y combinando la Propiedad 2, (6.50) y (6.51), en vista del Lema 4.2.23 se sigue que $(\bigcup \mathcal{L}_j) \cup E$ tiene a lo más N componentes. Supongamos que $\{E_1^j, \ldots, E_{d_j}^j\}$ es el conjunto de componentes de $(\bigcup \mathcal{L}_j) \cup E$. Así,

$$\left(\bigcup \mathcal{L}_j\right) \cup E = \bigcup_{l=1}^{d_j} E_l^j \text{ y } d_j \in \{1, \ldots, N\}. \tag{6.52}$$

Consideremos

$$H_j = \{h \in \{1, \ldots, d_j\} : E_h^j \cap B \neq \emptyset\}. \tag{6.53}$$

Elijamos $h \in H_j$ y

$$b_h \in E_h^j \cap B. \tag{6.54}$$

A consecuencia de (6.44) y (6.42) existe $T_h^j \in C(X)$ de tal suerte que

$$b_h \in T_h^j \text{ y } A_1 \subseteq T_h^j \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]. \tag{6.55}$$

Definamos

$$L_j = \bigcup_{h \in H_j} (T_h^j \cup E_h^j). \tag{6.56}$$

Teniendo en cuenta (6.54) y (6.55), del Lema 1.2.3 se colige que

$$T_h^j \cup E_h^j \in C(X). \tag{6.57}$$

Como $A_1 \in C(X)$, combinando (6.55), (6.56), (6.57) y el Lema 1.2.3 se deduce que

$$A_1 \subseteq \bigcup_{h \in H_j} (T_h^j \cup E_h^j) = L_j \text{ y } L_j \in C(X). \tag{6.58}$$

También, de (6.49), (6.50), (6.52), (6.55) y (6.56) se desprende que

$$L_j = \bigcup_{h \in H_j} (T_h^j \cup E_h^j) \subseteq \left(\bigcup f[\mathcal{V}]\right) \cup E \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]. \tag{6.59}$$

A continuación probaremos que

$$B \cap V_1^{b_j} \subseteq L_j. \tag{6.60}$$

Si $x \in B \cap V_1^{b_j}$, conjuntando (6.47), (6.48) y (6.49) pasa que

$$x \in B \cap C_{b_j} \subseteq \bigcup \mathcal{L}_j. \tag{6.61}$$

Puesto que $\bigcup \mathcal{L}_j \subseteq (\bigcup \mathcal{L}_j) \cup E$, por (6.52) podemos tomar $l \in \{1, \ldots, d_j\}$ de tal forma que

$$x \in E_l^j. \tag{6.62}$$

Por ende, $x \in B \cap E_l^j$. A causa de (6.53), el elemento l pertenece a H_j. A base de (6.56) podemos asegurar que $x \in L_j$, llegando a (6.60). Ahora, definamos

$$M = \bigcup_{j \in \{1, \ldots, k\}} L_j. \tag{6.63}$$

Recordemos (6.58). Aplicando el Lema 1.2.3 se acierta que

$$A_1 \subseteq M \in C(X). \tag{6.64}$$

Asimismo, juntando (6.63), (6.47) y (6.60) se logra que

$$B = \bigcup_{j=1}^{k} (B \cap V_1^{b_j}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} L_j = M. \tag{6.65}$$

Reparando en (6.59) y (6.63) ocurre que

$$M = \bigcup_{j\in\{1,\ldots,k\}} L_j \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]. \tag{6.66}$$

Uniendo (6.64), (6.65) y (6.66) hemos probado (6.45). Por último, fijándonos en (6.43) y (6.45) podemos concluir que P cumple la Propiedad ($\star$) de la Definición 6.3.6. ■

Lema 6.3.8 *Sean X un continuo de Hausdorff, $A \in 2^X$ y A_1 una componente de A y supongamos que 2^X es localmente conexo en A. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X que satisfacen que $A_1 \subseteq U_1$ y $A \in \langle U_1, U_2\rangle$. Sea $\mathcal{V}$ un subespacio abierto y conexo por arcos de 2^X tal que $A \in \mathcal{V} \subseteq \langle U_1, U_2\rangle$. Consideremos $f : \langle U_1, U_2\rangle \to \langle U_1\rangle$ dada por $f(B) = B \cap U_1$. Definamos el siguiente conjunto:*

$$P = \bigcup\{L \in C(X) : A_1 \subseteq L \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]\}. \tag{6.67}$$

Entonces $A \cap P \subseteq int(P)$.

Prueba. Como $f[\mathcal{V}] \subseteq \langle U_1\rangle$ se colige que

$$\bigcup f[\mathcal{V}] \subseteq U_1. \tag{6.68}$$

También, del Lema 6.3.7 se obtiene que P tiene la Propiedad ($\star$) de la Definición 6.3.6. Tomemos $x \in A \cap P$. Puesto que $x \in P$ y X es T_2, resulta que $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de X con la característica de que $\{x\} \subseteq P$. Gracias a la Propiedad II de la Definición 6.3.6, existe $L_x \in C(X)$ de tal suerte que

$$A_1 \cup \{x\} \subseteq L_x \subseteq P \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]. \tag{6.69}$$

Sea A_x la componente de A que tiene como elemento a x. Luego,

$$x \in A_x \cap \left(\bigcup f[\mathcal{V}]\right). \tag{6.70}$$

Notamos que $A_x \subseteq A \in \mathcal{V} \subseteq \langle U_1, U_2\rangle$. Por ende,

$$A_x \subseteq A \subseteq U_1 \cup U_2. \tag{6.71}$$

Dado que A_x es conexo, conjuntando que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, (6.68), (6.70) y (6.71) llegamos a que

$$A_x \subseteq U_1.$$

Así,

$$A_x = A_x \cap U_1 \subseteq A \cap U_1 = f(A) \in f[\mathcal{V}].$$

Por consiguiente,

$$A_x \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}].$$

A razón del Lema 3.3.5 se deduce que $\bigcup f[\mathcal{V}]$ es abierto en X. En vista de que X es compacto y de Hausdorff, X es T_3. También, A_x es compacto, por lo que podemos hallar un subconjunto abierto W de X de tal manera que

$$A_x \subseteq W \subseteq \mathrm{cl}(W) \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]. \tag{6.72}$$

Por otro lado, debido a que 2^X es localmente conexo en A, del Teorema 6.3.2 se sigue que 2^X es localmente conexo en A_x. Aplicando el Teorema 6.3.1 podemos encontrar un subespacio abierto y conexo C de X con la particularidad de que

$$A_x \subseteq C \subseteq W. \tag{6.73}$$

Dado que $x \in A_x$, podemos asegurar que

$$x \in C. \tag{6.74}$$

A continuación se probará que

$$C \subseteq P. \tag{6.75}$$

Fijemos $z \in C$. Observamos que

$$\mathrm{cl}(C) \in C(X) \text{ y } z \in \mathrm{cl}(C). \tag{6.76}$$

Combinando (6.69), (6.74) y el Lema 1.2.3 se da que

$$A_1 \subseteq \mathrm{cl}(C) \cup L_x \in C(X). \tag{6.77}$$

Asimismo, uniendo (6.69), (6.72) y (6.73) se satisface que

$$\mathrm{cl}(C) \cup L_x \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]. \tag{6.78}$$

Además, considerando (6.76), (6.77) y (6.78) podemos concluir que $z \in P$, lo que nos lleva a (6.75). Finalmente, reparando en (6.74) se desprende que $x \in \mathrm{int}(P)$. Por lo tanto, $A \cap P \subseteq \mathrm{int}(P)$. ■

Lema 6.3.9 *Sean X un continuo de Hausdorff, $A \in 2^X$ y A_1 una componente de A y supongamos que 2^X es localmente conexo en A. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X que satisfacen que $A_1 \subseteq U_1$ y $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$. Sea $\mathcal{V}$ un subespacio abierto y conexo por arcos de 2^X tal que $A \in \mathcal{V} \subseteq \langle U_1, U_2 \rangle$. Consideremos $f : \langle U_1, U_2 \rangle \to \langle U_1 \rangle$ dada por $f(B) = B \cap U_1$. Sea $x \in X$ y asumamos la existencia de un elemento B de $f[\mathcal{V}]$ tal que $x \in B$. Tomemos una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en X de tal forma que $x_\lambda \to x$. Entonces existen $\lambda_0 \in \Lambda$ y un subcontinuo $\mathcal{L}$ de 2^X con la característica de que*

$$\mathcal{L} \subseteq f[\mathcal{V}] \text{ y } \{f(A), B \cup \mathrm{cl}(C_{(\lambda_0, x_\lambda)})\} \subseteq \mathcal{L}.$$

Prueba. Del Corolario 3.3.4 se sigue que f es abierta, por lo que $f[\mathcal{V}]$ es abierto en 2^X. Dado que 2^X es T_3, podemos considerar un abierto básico $\langle W_1, \ldots, W_n \rangle$ de 2^X de tal manera que

$$B \in \langle W_1, \ldots, W_n \rangle \subseteq \mathrm{cl}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle) \subseteq f[\mathcal{V}] \text{ y } x \in W_1. \tag{6.79}$$

Gracias al Lema 3.1.10 resulta que

$$\mathrm{cl}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle) = \langle \mathrm{cl}(W_1), \ldots, \mathrm{cl}(W_n) \rangle. \tag{6.80}$$

Puesto que $x_\lambda \to x$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ de tal suerte que

$$C_{(\lambda_0, x_\lambda)} \subseteq W_1 \subseteq \mathrm{cl}(W_1).$$

Luego,

$$\mathrm{cl}(C_{(\lambda_0, x_\lambda)}) \subseteq \mathrm{cl}(W_1). \tag{6.81}$$

Observamos que

$$B \cup \mathrm{cl}(C_{(\lambda_0, x_\lambda)}) \in 2^X. \tag{6.82}$$

Conjuntando (6.79), (6.80) y (6.81) se obtiene que

$$\begin{gathered} B \subseteq B \cup \mathrm{cl}(C_{(\lambda_0, x_\lambda)}) \subseteq \textstyle\bigcup_{i=1}^n \mathrm{cl}(W_i) \\ \text{y} \\ B \in \langle \mathrm{cl}(W_1), \ldots, \mathrm{cl}(W_n) \rangle \subseteq f[\mathcal{V}]. \end{gathered} \tag{6.83}$$

En vista de (6.82) y (6.83), debido al Lema 3.1.2 colegimos que

$$B \cup \mathrm{cl}(C_{(\lambda_0, x_\lambda)}) \in \langle \mathrm{cl}(W_1), \ldots, \mathrm{cl}(W_n) \rangle \subseteq f[\mathcal{V}]. \tag{6.84}$$

Por otro lado, dado que $\mathcal{V}$ es conexo por arcos, del Lema 5.2.12 se deduce que

$$f[\mathcal{V}] \text{ es conexo por caminos.}$$

Teniendo en cuenta (6.84) existe un camino $\mathcal{L}$ de tal forma que

$$\mathcal{L} \subseteq f[\mathcal{V}] \text{ y } \{f(A), B \cup \mathrm{cl}(C_{(\lambda_0, x_\lambda)})\} \subseteq \mathcal{L}.$$

Finalmente, notando que $\mathcal{L}$ es un subcontinuo de 2^X hemos terminado. ■

En la prueba del Lema 6.3.10, se utilizarán resultados conocidos sobre redes. A fin de que tales resultados no interrumpan la continuidad de esta sección, serán incluidos en el Apéndice.

Lema 6.3.10 *Sean X un continuo de Hausdorff, $A \in 2^X$ y A_1 una componente de A y supongamos que 2^X es localmente conexo en A. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X que satisfacen que $A_1 \subseteq U_1$ y $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$. Sea $\mathcal{V}$ un subespacio abierto y conexo por arcos de 2^X tal que $A \in \mathcal{V} \subseteq \langle U_1, U_2 \rangle$. Consideremos $f : \langle U_1, U_2 \rangle \to \langle U_1 \rangle$ dada por $f(B) = B \cap U_1$. Sea $x \in X$ y admitamos la existencia de un elemento B de $f[\mathcal{V}]$ tal que $x \in B$. Tomemos una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en X de tal forma que $x_\lambda \to x$. Supongamos que existen $\lambda_0 \in \Lambda$ y un subcontinuo $\mathcal{L}$ de 2^X con la característica de que*

$$\mathcal{L} \subseteq f[\mathcal{V}] \text{ y } \{f(A), B \cup \mathrm{cl}(C_{(\lambda_0, x_\lambda)})\} \subseteq \mathcal{L}. \tag{6.85}$$

Para cada $\lambda \geq \lambda_0$ sea L_λ la componente de $\bigcup \mathcal{L}$ de tal forma que

$$x_\lambda \in L_\lambda. \tag{6.86}$$

Entonces existe $L \in C(X)$ que satisface lo siguiente:

1. *L es punto de acumulación de $\{L_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\}$;*
2. *$L \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]$;*
3. *$x \in L$ y*
4. *$L \cap A \neq \emptyset$.*

Prueba. Como X es de Hausdorff, del Teorema 3.2.3 se sigue que

$$\bigcup \mathcal{L} \text{ es cerrado en } X. \tag{6.87}$$

Así, para cualquier $\lambda \geq \lambda_0$ se cumple que

$$L_\lambda \in C(X).$$

En vista del Lema 3.2.8, para cada $\lambda \geq \lambda_0$ se tiene que

$$\emptyset \neq L_\lambda \cap f(A) = L_\lambda \cap (A \cap U_1) \subseteq L_\lambda \cap A. \tag{6.88}$$

Ya que $C(X)$ es compacto, a razón del Teorema 7.0.15 y la Observación 7.0.8 podemos tomar $L \in C(X)$ con la peculiaridad de que

$$L \text{ es punto de acumulación de } \{L_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\}.$$

Debido al Teorema 7.0.13 podemos elegir una sub-red $\{L_{\lambda_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$ de $\{L_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\}$ con la particularidad de que

$$L_{\lambda_\delta} \to L. \tag{6.89}$$

Combinando el hecho de que cada $\delta \in \Delta$ obedece que $L_{\lambda_\delta} \subseteq \bigcup \mathcal{L}$ y (6.87), del Lema 7.0.18 se deriva que

$$L \subseteq \bigcup \mathcal{L}.$$

Fijémonos en (6.85). Luego,

$$L \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}].$$

Además, aplicando el Lema 7.0.10 obtenemos que $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\}$ converge a x. Asimismo, del Lema 7.0.11 se consigue que

$$x_{\lambda_\delta} \to x. \tag{6.90}$$

Reparando en (6.86), para cada $\delta \in \Delta$ ocurre que $x_{\lambda_\delta} \in L_{\lambda_\delta}$. Reuniendo (6.89), (6.90) y Lema 7.0.17 se infiere que

$$x \in L.$$

Finalmente, conjuntando (6.88), (6.89) y el Lema 7.0.19 se concluye que

$$L \cap A \neq \emptyset.$$

■

Lema 6.3.11 *Sean X un continuo de Hausdorff, $A \in 2^X$ y A_1 una componente de A y supongamos que 2^X es localmente conexo en A. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X que satisfacen que $A_1 \subseteq U_1$ y $A \in \langle U_1, U_2\rangle$. Sea $\mathcal{V}$ un subespacio abierto y conexo por arcos de 2^X tal que $A \in \mathcal{V} \subseteq \langle U_1, U_2\rangle$. Consideremos $f : \langle U_1, U_2\rangle \to \langle U_1\rangle$ dada por $f(B) = B \cap U_1$. Definamos el siguiente conjunto:*

$$P = \bigcup\{L \in C(X) : A_1 \subseteq L \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]\}. \tag{6.91}$$

Entonces P es abierto en X.

Prueba. Sea $x \in P$. Notamos que $x \in \bigcup f[\mathcal{V}]$. Tomemos una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en X tal que $x_\lambda \to x$. Como $x \in \bigcup f[\mathcal{V}]$, podemos hallar $B \in f[\mathcal{V}]$ de tal suerte que $x \in B$. Gracias al Lema 6.3.9 existen $\lambda_0 \in \Lambda$ y un subcontinuo $\mathcal{L}$ de 2^X con la característica de que

$$\mathcal{L} \subseteq f[\mathcal{V}] \text{ y } \{f(A), B \cup \mathrm{cl}(C_{(\lambda_0,x_\lambda)})\} \subseteq \mathcal{L}.$$

Por ende,

$$\bigcup \mathcal{L} \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}] \text{ y } B \cup \mathrm{cl}(C_{(\lambda_0,x_\lambda)}) \subseteq \bigcup \mathcal{L}. \tag{6.92}$$

Observamos que $C_{(\lambda_0,x_\lambda)} \subseteq \mathrm{cl}(C_{(\lambda_0,x_\lambda)})$. Para cada $\lambda \geq \lambda_0$ consideremos la componente L_λ de $\bigcup \mathcal{L}$ de tal forma que

$$x_\lambda \in L_\lambda \subseteq \bigcup \mathcal{L}. \tag{6.93}$$

A consecuencia del Lema 6.3.10 podemos tomar $L \in C(X)$ que satisface lo siguiente:

1. L es punto de acumulación de $\{L_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\}$;
2. $L \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]$;
3. $x \in L$ y
4. $L \cap A \neq \emptyset$.

En vista del Teorema 7.0.13 podemos elegir una sub-red $\{L_{\lambda_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$ de $\{L_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\}$ con la propiedad de que

$$L_{\lambda_\delta} \to L. \tag{6.94}$$

Consideremos $a \in L \cap A$. Puesto que $x \in P$, podemos asegurar la existencia de un subcontinuo D de X que cumpla que

$$x \in D \text{ y } A_1 \subseteq D \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]. \tag{6.95}$$

De la Propiedad 2 se sigue que

$$A_1 \subseteq D \cup L \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]. \tag{6.96}$$

Debido a que $L \in C(X)$, la Propiedad 3 y (6.95), aplicando el Lema 1.2.3 llegamos a que

$$a \in D \cup L \in C(X). \tag{6.97}$$

Conjuntando (6.96) y (6.97) obtenemos que

$$a \in P \cap A.$$

Del Lema 6.3.8 se colige que $P \cap A \subseteq \operatorname{int}(P)$. Por ende,

$$a \in \operatorname{int}(P).$$

Por consiguiente,

$$L \cap A \subseteq \operatorname{int}(P).$$

De la Propiedad 4 resulta que

$$L \in \langle \operatorname{int}(P), X \rangle.$$

Usando (6.94) podemos elegir $\delta_0 \in \Delta$ con la cualidad de que

$$C_{(\delta_0, L_{\lambda_\delta})} \subseteq \langle \operatorname{int}(P), X \rangle.$$

A continuación se probará que para cada $\delta \geq \delta_0$ se da que

$$L_{\lambda_\delta} \subseteq P. \tag{6.98}$$

Fijemos $\delta \geq \delta_0$ y $s \in L_{\lambda_\delta}$. De (6.3) se tiene que

$$\emptyset \neq L_{\lambda_\delta} \cap \operatorname{int}(P) \subseteq L_{\lambda_\delta} \cap P.$$

Sea $t \in L_{\lambda_\delta} \cap P$. Luego, existe $F_t \in C(X)$ de tal modo que

$$t \in F_t \text{ y } A_1 \subseteq F_t \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]. \tag{6.99}$$

Como $L_{\lambda_\delta} \in C(X)$, del Lema 1.2.3 se infiere que $L_{\lambda_\delta} \cup F_t \in C(X)$. Además, podemos notar que

$$s \in L_{\lambda_\delta} \cup F_t \text{ y } A_1 \subseteq L_{\lambda_\delta} \cup F_t. \tag{6.100}$$

Tomemos en cuenta (6.92), (6.93) y (6.99). Así,

$$L_{\lambda_\delta} \cup F_t \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]. \tag{6.101}$$

Combinando (6.100) y (6.101) deducimos que $s \in P$, por lo que hemos probado (6.98). Por lo tanto, para cada $\delta \geq \delta_0$ pasa que

$$x_{\lambda_\delta} \in P.$$

Es decir,

$$C_{(\delta_0, x_{\lambda_\delta})} \subseteq P.$$

Finalmente, del Lema 7.0.16 se puede concluir que P es abierto. ■

A continuación probaremos uno de los resultados principales de esta sección. Nos daremos cuenta de que para poder demostrarlo, era necesario definir la Propiedad ($\star$) de la Definición 6.3.6.

Lema 6.3.12 *Sean X un continuo de Hausdorff y $A \in 2^X$. Si 2^X es localmente conexo por arcos en A, entonces 2^X es localmente conexo por arcos en cada componente de A.*

Prueba. Sea A_1 una componente de A. Si $A_1 = A$ se sigue el resultado. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A_1 \neq A$. Por consiguiente, $A \in 2^X \setminus C(X)$. Del Corolario 5.2.11 resulta que

$$2^X \text{ es localmente conexo en } A. \tag{6.102}$$

Consideremos un subconjunto abierto U de X tal que $A_1 \subseteq U$. Gracias al Corolario 3.1.6, existen subconjuntos abiertos y ajenos U_1 y U_2 de X con las siguientes características:

1. $A_1 \subseteq U_1 \subseteq U$;

2. $\text{fr}(U_1) \cap A = \emptyset$;

3. $A \setminus U_1 \subseteq U_2$ y

4. $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$.

Debido a que 2^X es localmente conexo por arcos en A y a la Propiedad 4 podemos encontrar un subespacio abierto y conexo por arcos $\mathcal{V}$ de 2^X con la cualidad de que

$$A \in \mathcal{V} \subseteq \langle U_1, U_2 \rangle. \tag{6.103}$$

Sea $f : \langle U_1, U_2 \rangle \to \langle U_1 \rangle$ dada por $f(B) = B \cap U_1$ y definamos el siguiente conjunto:

$$P = \bigcup \{L \in C(X) : A_1 \subseteq L \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]\}. \tag{6.104}$$

Notamos que $f[V] \subseteq \langle U_1 \rangle$, por lo que

$$\bigcup f[\mathcal{V}] \subseteq U_1. \tag{6.105}$$

Conjuntando las Propiedades 1, 2 y 4, (6.102) y (6.103), en vista del Lema 6.3.11 se infiere que

$$P \text{ es abierto en } X. \tag{6.106}$$

A consecuencia del Lema 6.3.7, el conjunto P cumple la Propiedad $(\star)$ de la Definición 6.3.6. Así, se satisface lo siguiente:

I. $P \subseteq \bigcup f[\mathcal{V}]$ y

II. para cada subconjunto cerrado B de X de tal manera que $B \subseteq P$, existe $L_B \in C(X)$ con la peculiaridad de que $A_1 \cup B \subseteq L_B \subseteq P$.

Observando la Propiedad I, (6.105) y la Propiedad 1 se obtiene que

$$A_1 \subseteq P \subseteq U_1 \subseteq U. \tag{6.107}$$

Combinando la Propiedad II, (6.106) y (6.107), a razón del Teorema 6.1.5 se puede concluir que 2^X es localmente conexo por arcos en A_1. ■

Ahora, introduciremos la definición de vietórico esencial. Dicha definición junto con algunos resultados, facilitará la prueba del Lema 6.3.18.

Definición 6.3.13 Sean X un espacio topológico y $A \in 2^X$. Decimos que un abierto básico $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ es *esencial con respecto a* A si $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $A \setminus \bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} U_j \neq \emptyset$.

A partir de este momento daremos prueba o referencia de algunos resultados técnicos. Dichas proposiciones nos ayudarán a probar el Lema 6.3.24.

Lema 6.3.14 *[6, Lema 2.17, p. 34] Sean X un espacio topológico T_3 y $A \in 2^X$. Si $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ es un abierto básico que contiene a A, entonces existe un abierto básico esencial con respecto a A contenido en $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$.*

Corolario 6.3.15 *Sean X un continuo de Hausdorff y $B \in 2^X$. Sea*

$$\{V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k}\}$$

una familia de subconjuntos abiertos de X con la característica de que

$$B \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle.$$

Entonces existen $B_1, \ldots, B_k \in 2^X$ con las siguientes propiedades:

1. *para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, se tiene que $B_j \in \langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle$ y*

2. *$B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$.*

Prueba. Gracias al Lema 6.2.5 podemos encontrar

$$B_1^{\alpha_1}, \ldots, B_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, B_1^{\alpha_k}, \ldots, B_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \in 2^X$$

que satisfagan lo siguiente:

a) para cualquier $j \in \{1, \ldots, k\}$ y cualquier $i \in \{1, \ldots, m_{\alpha_j}\}$ se cumple que $B_i^{\alpha_j} \in \langle V_i^{\alpha_j} \rangle$ y

b) $B = \bigcup_{j=1}^{k} \left(\bigcup_{i=1}^{m_{\alpha_j}} B_i^{\alpha_j} \right)$.

Dado $j \in \{1, \ldots, k\}$, definamos

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{m_{\alpha_j}} B_i^{\alpha_j}. \tag{6.108}$$

Así,

$$B_j \in 2^X.$$

Combinando la Propiedad a) y (6.108) resulta que

$$B_j \in \langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle.$$

Por otro lado, conjuntando la Propiedad b) y (6.108) se colige que

$$B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j.$$

De esta manera, hemos terminado. ■

Observación 6.3.16 Sean X un continuo de Hausdorff y $U_1, \ldots, U_n$ una familia de subconjuntos abiertos de X. Sea $A \in 2^X$ con la cualidad de que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ el conjunto de componentes de A. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, consideremos

$$\mathcal{U}_\alpha = \{W \in \{U_1, \ldots, U_n\} : W \cap A_\alpha \neq \emptyset\}. \tag{6.109}$$

Luego, existe $\{U_1^\alpha, \ldots, U_{n_\alpha}^\alpha\} \subseteq \{U_1, \ldots, U_n\}$ de tal manera que

$$\mathcal{U}_\alpha = \{U_1^\alpha, \ldots, U_{n_\alpha}^\alpha\}. \tag{6.110}$$

Entonces

$$A_\alpha \in \langle U_1^\alpha, \ldots, U_{n_\alpha}^\alpha \rangle. \tag{6.111}$$

El siguiente resultado nos muestra una propiedad importante que cumplen los abiertos vietóricos esenciales.

Lema 6.3.17 *Sean X un continuo de Hausdorff y $U_1, \ldots, U_n$ una familia de subconjuntos abiertos de X. Sea $A \in 2^X$ con la cualidad de que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ es esencial con respecto a A. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ el conjunto de componentes de A. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, consideremos $\mathcal{U}_\alpha$ y $U_1^\alpha, \ldots, U_{n_\alpha}^\alpha$ como en (6.109) y (6.110) de la Observación 6.3.16, correspondientemente. Sea $\{V_1^\alpha, \ldots, V_{m_\alpha}^\alpha\}$ una familia de subconjuntos abiertos de X con la peculiaridad de que*

$$A_\alpha \in \langle V_1^\alpha, \ldots, V_{m_\alpha}^\alpha \rangle \subseteq \langle U_1^\alpha, \ldots, U_{n_\alpha}^\alpha \rangle. \tag{6.112}$$

Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{A}$ tales que

$$A \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle.$$

Prueba. Puesto que $A = \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ y A es compacto, gracias a (6.112) podemos encontrar componentes $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_k}$ de A, de tal forma que

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \left(\bigcup\{V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j}\} \right). \tag{6.113}$$

Teniendo en cuenta (6.112), para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ y cada $t \in \{1, \ldots, m_{\alpha_j}\}$ se sigue que

$$A \cap V_t^{\alpha_j} \neq \emptyset. \tag{6.114}$$

Así, de (6.113) resulta que

$$A \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle. \tag{6.115}$$

Debido al Lema 3.1.7 y a (6.112), para cualquier $j \in \{1, \ldots, k\}$ podemos asegurar que

$$\bigcup\{V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j}\} \subseteq \bigcup\{U_1^{\alpha_j}, \ldots, U_{n_{\alpha_j}}^{\alpha_j}\} \subseteq \bigcup_{l=1}^{n} U_l. \tag{6.116}$$

Consecuentemente,

$$\bigcup_{j=1}^{k} \left(\bigcup\{V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j}\} \right) \subseteq \bigcup_{l=1}^{n} U_l. \tag{6.117}$$

Ahora, fijemos $l \in \{1, \ldots, n\}$. Como $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ es esencial con respecto a A, podemos tomar

$$a \in A \setminus \bigcup_{p \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{l\}} U_p. \tag{6.118}$$

Notando (6.113) y (6.116), existen $j \in \{1, \ldots, k\}$ y $s \in \{1, \ldots, n_{\alpha_j}\}$ con la peculiaridad de que

$$a \in U_s^{\alpha_j}. \tag{6.119}$$

A razón de (6.112) y del Lema 3.1.7 podemos hallar $t \in \{1, \ldots, m_{\alpha_j}\}$ de tal suerte que

$$V_t^{\alpha_j} \subseteq U_s^{\alpha_j}. \tag{6.120}$$

Observando (6.118) y (6.119) llegamos a que $U_s^{\alpha_j} = U_l$. Es decir,

$$V_t^{\alpha_j} \subseteq U_l. \tag{6.121}$$

Combinando (6.117), (6.121) y el Lema 3.1.7 se deduce que

$$\langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle. \tag{6.122}$$

Finalmente, conjuntando (6.115) y (6.122) hemos terminado. ■

El siguiente resultado nos dice que, bajo ciertas condiciones, podemos encontrar un vietórico conexo por arcos, intermedio entre un elemento de 2^X y un abierto vietórico que lo contiene.

Lema 6.3.18 *Sean X un continuo de Hausdorff y $U_1, \ldots, U_n$ una familia de subconjuntos abiertos de X. Sea $A \in 2^X$ con la cualidad de que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ es esencial con respecto a A. Si 2^X es localmente conexo por arcos en cada componente de A, entonces existen subconjuntos abiertos $V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k}$ de X con las siguientes características:*

1. *$A \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y*

2. *para cualquier $j \in \{1, \ldots, k\}$, el vietórico $\langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle$ es un subespacio conexo por arcos de 2^X.*

Prueba. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ el conjunto de componentes de A. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, consideremos $\mathcal{U}_\alpha$ y $U_1^\alpha, \ldots, U_{n_\alpha}^\alpha$ como en (6.109) y (6.110) de la Observación 6.3.16, correspondientemente. De la Observación 6.3.16 se sigue que

$$A_\alpha \in \langle U_1^\alpha, \ldots, U_{n_\alpha}^\alpha \rangle.$$

Como 2^X es localmente conexo por arcos en A_α, combinando el Teorema 6.1.5 y el Lema 6.1.4 podemos asegurar la existencia de un abierto básico $\langle V_1^\alpha, \ldots, V_{m_\alpha}^\alpha \rangle$ que cumpla que

$$\begin{gathered} A_\alpha \in \langle V_1^\alpha, \ldots, V_{m_\alpha}^\alpha \rangle \subseteq \langle U_1^\alpha, \ldots, U_{n_\alpha}^\alpha \rangle. \\ \text{y} \\ \langle V_1^\alpha, \ldots, V_{m_\alpha}^\alpha \rangle \text{ es conexo por arcos.} \end{gathered} \tag{6.123}$$

Gracias al Lema 6.3.17, podemos encontrar $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{A}$ tales que

$$A \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle. \tag{6.124}$$

Conjuntando (6.123) y (6.124) hemos terminado. ■

Lema 6.3.19 *Sean X un espacio topológico y $B \in 2^X$. Sean $B_1, \ldots, B_k \in 2^X$ de tal manera que $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$. Sean $V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k}$ subconjuntos abiertos de X con la característica de que para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ sucede que*

$$B_j \in \langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle. \tag{6.125}$$

Entonces $B \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle$.

Prueba. Por hipótesis, dado $j \in \{1, \ldots, k\}$ se cumple que

$$B_j \subseteq \bigcup \{V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j}\} \tag{6.126}$$

y para cualquier $i \in \{1, \ldots, m_{\alpha_k}\}$ se satisface que

$$B_j \cap V_i^{\alpha_j} \neq \emptyset. \tag{6.127}$$

Gracias que $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ y a (6.126) inferimos que

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \left(\bigcup \{V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j}\} \right). \tag{6.128}$$

Además, de (6.127) podemos deducir que si $j \in \{1, \ldots, k\}$ e $i \in \{1, \ldots, m_{\alpha_j}\}$ pasa que

$$B_j \cap V_i^{\alpha_j} \neq \emptyset. \tag{6.129}$$

Combinando (6.128) y (6.129) concluimos que

$$B \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle.$$

■

Los siguientes cuatro resultados nos serán de gran utilidad para la demostración del recíproco del Lema 6.3.12 (Lema 6.3.24). Dicha prueba consiste en la construcción de ciertos caminos.

Lema 6.3.20 *[6, Lema 2.7, p. 30] Sean X un espacio topológico y $B \in 2^X$. Si $f : 2^X \to 2^X$ está dada por $f(D) = D \cup B$, entonces f es una función continua.*

Lema 6.3.21 *Sean X un espacio topológico y $B, C \in 2^X$. Sean $B_1, \ldots, B_k$, $C_1, \ldots, C_k \in 2^X$ de tal manera que*

$$B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j \text{ y } C = \bigcup_{j=1}^{k} C_j.$$

Supongamos que existen subconjuntos abiertos $V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k}$ de X con la característica de que para cualquier $j \in \{1, \ldots, k\}$ sucede que

$$B_j, C_j \in \langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle. \tag{6.130}$$

Si para cada $j \in \{1, k\}$ hay un camino de B_j a C_j en $\langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle$, entonces existen caminos de B a $C_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^{k} B_i\right)$ y de $\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} C_i\right) \cup B_k$ a C en $\langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle$.

Prueba. Dado $j \in \{1, k\}$, consideremos un arco generalizado K_j y una función continua $g_j : K_j \to 2^X$ de tal suerte que

$$g_j[K_j] \text{ es un camino de } B_j \text{ a } C_j \text{ en } \langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle. \tag{6.131}$$

Fijemos $f_1 : g_1[K_1] \to 2^X$ y $f_k : g_k[K_k] \to 2^X$ de tal forma que

$$f_1(L) = L \cup \left(\bigcup_{i=2}^{k} B_i\right) \text{ y } f_k(L) = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} C_i\right) \cup L. \tag{6.132}$$

A consecuencia del Lema 6.3.20 se satisface que f_1 y f_k son funciones continuas. Si definimos

$$F_1 = f_1 \circ g_1 \text{ y } F_k = f_k \circ g_k, \tag{6.133}$$

podemos asegurar que

$$F_1 \text{ y } F_k \text{ son continuas.} \tag{6.134}$$

Ahora, tomemos $L \in g_1[K_1]$ y $L' \in g_k[K_k]$. A razón de (6.131) ocurre que

$$L \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1} \rangle \text{ y } L' \in \langle V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle.$$

Debido a (6.130) y al Lema 6.3.19 se sigue que

$$L \cup \left(\bigcup_{i=2}^{k} B_i\right), \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} C_i\right) \cup L' \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle. \tag{6.135}$$

Conjuntando (6.132), (6.133) y (6.135) inferimos que para cualesquiera $l \in K_1$ y cada $l' \in K_k$ se da que

$$F_1(l), F_k(l') \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle.$$

Luego,

$$F_1[K_1], F_k[K_k] \subseteq \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle. \tag{6.136}$$

Observando (6.131), (6.132) y (6.133) resulta que

$$\begin{array}{c} F_1(\text{mín}\, K_1) = (f_1 \circ g_1)(\text{mín}\, K_1) = f_1(B_1) = \bigcup_{i=1}^k B_i \\ \text{y} \\ F_1(\text{máx}\, K_1) = (f_1 \circ g_1)(\text{máx}\, K_1) = f_1(C_1) = C_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^k B_i\right). \end{array} \tag{6.137}$$

Asimismo,

$$\begin{array}{c} F_k(\text{mín}\, K_k) = (f_k \circ g_k)(\text{mín}\, K_k) = f_k(B_k) = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} C_i\right) \cup B_k \\ \text{y} \\ F_k(\text{máx}\, K_k) = (f_k \circ g_k)(\text{máx}\, K_k) = f_k(C_k) = \bigcup_{i=1}^k C_i. \end{array} \tag{6.138}$$

De (6.134), (6.136), (6.137) y (6.138) y del hecho de que $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$ y $C = \bigcup_{j=1}^k C_j$ podemos concluir que $F_1[K_1]$ y $F_k[K_k]$ son caminos de B a $C_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^k B_i\right)$ y de $\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} C_i\right) \cup B_k$ a C en $\langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle$, respectivamente. ■

Lema 6.3.22 *Sean X un espacio topológico y $B, C \in 2^X$. Sean $B_1, \ldots, B_k$, $C_1, \ldots, C_k \in 2^X$ de tal manera que*

$$B = \bigcup_{j=1}^k B_j \text{ y } C = \bigcup_{j=1}^k C_j.$$

Supongamos que existen subconjuntos abiertos $V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k}$ de X con la característica de que para cualquier $j \in \{1, \ldots, k\}$ sucede que

$$B_j, C_j \in \langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle. \tag{6.139}$$

Si para cada $j \in \{2, \ldots, k-1\}$ hay un camino de B_j a C_j en $\langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle$, entonces para cualquier $j \in \{2, \ldots, k-1\}$ existe un camino de $\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} C_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=j}^k B_i\right)$ a $\left(\bigcup_{i=1}^{j} C_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=j+1}^k B_i\right)$ en $\langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle$.

Prueba. Para cada $j \in \{2, \ldots, k-1\}$ consideremos un arco generalizado K_j y una función continua $g_j : K_j \to 2^X$ de tal suerte que

$$g_j[K_j] \text{ es un camino de } B_j \text{ a } C_j \text{ en } \langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle. \tag{6.140}$$

Dado $j \in \{2, \ldots, k-1\}$, definamos $f_j : g_j[K_j] \to 2^X$ de la siguiente manera:

$$f_j(L) = \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} C_i \right) \cup L \cup \left(\bigcup_{i=j+1}^{k} B_i \right). \tag{6.141}$$

Del Lema 6.3.20 se sigue que

$$f_j \text{ es una función continua.} \tag{6.142}$$

Sea $F_j : K_j \to 2^X$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$F_j(t) = (f_j \circ g_j)(t). \tag{6.143}$$

Como g_j es continua, de (6.142) se infiere que

$$F_j \text{ es continua.} \tag{6.144}$$

Ahora, tomemos $j \in \{2, \ldots, k-1\}$ y $L \in g_j[K_j]$. A razón de (6.140) ocurre que

$$L \in \langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle.$$

Debido a (6.139) y al Lema 6.3.19 se colige que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} C_i \right) \cup L \cup \left(\bigcup_{i=j+1}^{k} B_i \right) \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle. \tag{6.145}$$

Conjuntando (6.141), (6.143) y (6.145), para cualquier $l \in K_j$ podemos asegurar que

$$F_j(l) \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle.$$

Por ende,

$$F_j[K_j] \subseteq \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle. \tag{6.146}$$

Teniendo en cuenta (6.140) y (6.143) notamos que

$$\begin{gathered} F_j(\text{mín}\, K_j) = (f_j \circ g_j)(\text{mín}\, K_j) = f_j(B_j) \\ \text{y} \\ F_j(\text{máx}\, K_j) = (f_j \circ g_j)(\text{máx}\, K_j) = f_j(C_j). \end{gathered} \tag{6.147}$$

Además, de (6.141) se da que

$$\begin{gathered} f_j(B_j) = \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} C_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=j}^{k} B_i\right) \\ \text{y} \\ f_j(C_j) = \left(\bigcup_{i=1}^{j} C_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=j+1}^{k} B_i\right). \end{gathered} \tag{6.148}$$

Combinando (6.147) y (6.148) resulta que

$$\begin{gathered} F_j(\text{mín}\, K_j) = \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} C_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=j}^{k} B_i\right) \\ \text{y} \\ F_j(\text{máx}\, K_j) = \left(\bigcup_{i=1}^{j} C_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=j+1}^{k} B_i\right). \end{gathered}$$

Finalmente, de (6.144) y (6.146) se deduce que $F_j[K_j]$ es un camino de $\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} C_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=j}^{k} B_i\right)$ a $\left(\bigcup_{i=1}^{j} C_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=j+1}^{k} B_i\right)$ en el abierto vietórico $\langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle$. ■

Corolario 6.3.23 *Sean X un espacio topológico y $B, C \in 2^X$. Sean $B_1, \ldots, B_k$, $C_1, \ldots, C_k \in 2^X$ de tal manera que*

$$B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j \text{ y } C = \bigcup_{j=1}^{k} C_j.$$

Supongamos que existen subconjuntos abiertos $V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k}$ de X con la característica de que para cualquier $j \in \{1, \ldots, k\}$ sucede que

$$B_j, C_j \in \langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle.$$

Si para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ hay un camino de B_j a C_j en $\langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle$, entonces $B, C \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle$ y además existe un camino de B a C en $\langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle$.

Prueba. Gracias al Lema 6.3.21 podemos encontrar caminos $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_k$ de B a $C_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^{k} B_i\right)$ y de $\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} C_i\right) \cup B_k$ a C en $\langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle$, respectivamente. Así,

$$B, C \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle.$$

Debido al Lema 6.3.22, dado $j \in \{2, \ldots, k-1\}$ podemos tomar un camino $\mathcal{L}_j$ de $\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} C_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=j}^{k} B_i\right)$ a $\left(\bigcup_{i=1}^{j} C_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=j+1}^{k} B_i\right)$ en 2^X de tal suerte que

$$\mathcal{L}_j \subseteq \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle.$$

Finalmente, en vista del Corolario 5.2.20 hemos terminado. ■

Lema 6.3.24 *Sean X un continuo de Hausdorff y $A \in 2^X$. Si 2^X es localmente conexo por arcos en cada componente de A, entonces 2^X es localmente conexo por arcos en A.*

Prueba. Sea $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ un abierto básico tal que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Debido al Lema 6.3.14, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ es esencial con respecto a A. A consecuencia del Lema 6.3.18, podemos encontrar subconjuntos abiertos $V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k}$ de X con las siguientes características:

1. $A \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y

2. para cualquier $j \in \{1, \ldots, k\}$, el vietórico $\langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle$ es un subespacio conexo por arcos de 2^X.

A continuación probaremos que

$$\langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle \text{ es conexo por arcos.} \tag{6.149}$$

Sean $B, C \in \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle$. Gracias al Corolario 6.3.15, existen $B_1, \ldots, B_k, C_1, \ldots, C_k \in 2^X$ con las siguientes propiedades:

a) para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, se tiene que $B_j, C_j \in \langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle$;

b) $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ y

c) $C = \bigcup_{j=1}^{k} C_j$.

Teniendo en cuenta la Propiedad 2 y la Propiedad a), para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ podemos hallar un camino inyectivo $\mathcal{L}_j$ de B_j a C_j en $\langle V_1^{\alpha_j}, \ldots, V_{m_{\alpha_j}}^{\alpha_j} \rangle$. Notando la Propiedad a), la Propiedad b) y la Propiedad c), en vista del Corolario 6.3.23 sucede que existe un camino $\mathcal{L}$ de B a C en 2^X con la cualidad de que

$$\mathcal{L} \subseteq \langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle.$$

Luego,

$$\langle V_1^{\alpha_1}, \ldots, V_{m_{\alpha_1}}^{\alpha_1}, \ldots, V_1^{\alpha_k}, \ldots, V_{m_{\alpha_k}}^{\alpha_k} \rangle \text{ es conexo por caminos.}$$

Como 2^X es de Hausdorff, aplicando el Lema 5.2.9 concluimos (6.149). Finalmente, conjuntando la Propiedad 1 y (6.149) hemos terminado. ■

A consecuencia del Lema 6.3.12 y del Lema 6.3.24 podemos inferir una de las caracterizaciones más importantes de este trabajo (y la más importante de esta sección):

Teorema 6.3.25 *Sean X un continuo de Hausdorff y $A \in 2^X$. Entonces 2^X es localmente conexo por arcos en A si y solo si 2^X es localmente conexo por arcos en cada componente de A.*

Corolario 6.3.26 *Sean X un continuo de Hausdorff y $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq X$. Entonces 2^X es localmente conexo por arcos en $\{x_1, \ldots, x_k\}$ si y solo si para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene que X es fuertemente localmente conexo por continuos en x_j.*

Prueba. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de componentes de $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Notamos que

$$\mathcal{C} = \{\{x_i\} : i \in \{1, \ldots, k\}\}. \tag{6.150}$$

Supongamos que 2^X es localmente conexo por arcos en $\{x_1, \ldots, x_k\}$ y consideremos $j \in \{1, \ldots, k\}$. Gracias a (6.150) y al Teorema 6.3.25 se colige que 2^X es localmente conexo por arcos en $\{x_j\}$. Por el Corolario 6.1.6 se deduce que X es fuertemente localmente conexo por continuos en x_j.
Recíprocamente, si para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ se cumple que X es fuertemente localmente conexo por continuos en x_j, del Corolario 6.1.6 resulta que para cualquier $j \in \{1, \ldots, k\}$ se da que 2^X es localmente conexo por arcos en $\{x_j\}$. Combinando (6.150) y el Teorema 6.3.25 llegamos a que 2^X es localmente conexo por arcos en $\{x_1, \ldots, x_k\}$. ■

El siguiente resultado es consecuencia directa del Corolario 6.3.26.

Corolario 6.3.27 *Sean X un continuo de Hausdorff, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $A \in F_n(X)$. Entonces 2^X es localmente conexo por arcos en A si y solo si X es fuertemente localmente conexo por continuos en cada elemento de A.*

Capítulo 7

Apéndice: Redes

Este capítulo adicional está dedicado a recordar resultados fundamentales de un tipo especial de convergencia: la convergencia de redes. El concepto de red es muy útil, pues es una noción que se puede aplicar a cualquier espacio topológico, sea métrico o no. Daremos referencia o prueba de algunos resultados que se utilizaron en la Sección 6.3.

Definición 7.0.1 Sean Λ un conjunto y $\leqslant$ una relación en Λ. Decimos que $\langle \Lambda, \leqslant \rangle$ es un *conjunto dirigido* si para cualesquiera elementos λ,λ_1 y λ_2 de Λ se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\lambda \leqslant \lambda$;

2. si $\lambda \leqslant \lambda_1$ y $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, entonces $\lambda \leqslant \lambda_2$ y

3. existe $\lambda_3 \in \Lambda$ con la característica de que $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$ y $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$.

Observación 7.0.2 Sea $\langle \Lambda, \leqslant \rangle$ un conjunto dirigido y consideremos $\lambda_0 \in \Lambda$. Entonces $\langle \{\lambda \in \Lambda : \lambda \geq \lambda_0\}, \leqslant \rangle$ es también un conjunto dirigido.

Definición 7.0.3 Sean X un conjunto y $\langle \Lambda, \leqslant \rangle$ un conjunto dirigido. Si $P : \Lambda \to X$ es una función, diremos que $P[\Lambda]$ es *una red en* X. Si para cada $\lambda \in \Lambda$ denotamos a $P(\lambda)$ por x_λ, entonces $P[\Lambda] = \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Definición 7.0.4 Sea X un conjunto y sean $\langle \Lambda, \leqslant \rangle$ y $\langle \Delta, \preceq \rangle$ conjuntos dirigidos. Sean $P : \Lambda \to X$ y $\varphi : \Delta \to \Lambda$ funciones. Supongamos que para cualesquiera elementos δ_1 y δ_2 de Δ y para cada $\lambda \in \Lambda$ se cumple lo siguiente:

1. si $\delta_1 \preceq \delta_2$, entonces $\varphi(\delta_1) \leqslant \varphi(\delta_2)$ y
2. existe $\delta \in \Delta$ tal que $\lambda \leqslant \varphi(\delta)$.

Entonces diremos que $(P \circ \varphi)[\Delta]$ es *una sub-red de* $P[\Lambda]$. Si para cada $\delta \in \Delta$ denotamos a $(P \circ \varphi)(\delta)$ por x_{λ_δ}, entonces $(P \circ \varphi)[\Delta] = \{x_{\lambda_\delta}\}_{\delta \in \Delta}$.

Observación 7.0.5 Toda sub-red de una red, es también una red.

Observación 7.0.6 Toda red es sub-red de sí misma.

Notación 7.0.7 Sean X un conjunto, $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red en X y $\lambda^* \in \Lambda$. Denotaremos por $C_{(\lambda^*, x_\lambda)}$ al conjunto $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda^*\}$.

Observación 7.0.8 Sean X un conjunto, $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red en X y $\lambda^* \in \Lambda$. En vista de la Observación 7.0.2 se tiene que $C_{(\lambda^*, x_\lambda)}$ también es una red en X.

Definición 7.0.9 Sean X un espacio topológico, $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red en X y $x \in X$. Decimos que $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *converge a* x si para cada subconjunto abierto U de X con la propiedad de que $x \in U$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $C_{(\lambda_0, x_\lambda)} \subseteq U$. En general, lo denotaremos por $x_\lambda \to x$.

Lema 7.0.10 *Sean X un espacio topológico y $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red en X. Sea $x \in X$ tal que $x_\lambda \to x$. Consideremos $\lambda^* \in \Lambda$. Entonces $C_{(\lambda^*, x_\lambda)}$ converge a x.*

Prueba. Sea U un subconjunto abierto de X de tal manera que $x \in U$. Como $x_\lambda \to x$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ con la cualidad de que $C_{(\lambda_0, x_\lambda)} \subseteq U$. Gracias la Propiedad 3 de la Definición 7.0.1 podemos encontrar $\lambda_1 \in \Lambda$ de tal suerte que $\lambda_1 \geq \lambda_0$ y $\lambda_1 \geq \lambda^*$. Así,

$$C_{(\lambda_1, x_\lambda)} \subseteq C_{(\lambda^*, x_\lambda)}$$
$$\text{y}$$
$$C_{(\lambda_1, x_\lambda)} \subseteq C_{(\lambda_0, x_\lambda)} \subseteq U.$$

Es decir, existe $\lambda_1 \geq \lambda^*$ con la característica de que $C_{(\lambda_1, x_\lambda)} \subseteq U$. Por lo tanto, $C_{(\lambda^*, x_\lambda)}$ converge a x. ■

Lema 7.0.11 *Sean X un espacio topológico y $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red en X. Sea $x \in X$ tal que $x_\lambda \to x$. Entonces toda sub-red de $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a x.*

Prueba. Consideremos una sub-red $\{x_{\lambda_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$ de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Fijemos un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$. Dado que $x_\lambda \to x$ podemos hallar $\lambda_0 \in \Lambda$ con la peculiaridad de que

$$C_{(\lambda_0, x_\lambda)} \subseteq U. \tag{7.1}$$

En vista de la Propiedad 2 de la Definición 7.0.4 podemos elegir $\delta_0 \in \Delta$ que cumpla que $\lambda_{\delta_0} \geq \lambda_0$. Gracias la Propiedad 1 de la Definición 7.0.4, para cada $\delta \geq \delta_0$ podemos asegurar que $\lambda_\delta \geq \lambda_{\delta_0}$. A razón de la Propiedad 2 de la Definición 7.0.1 se obtiene que $\lambda_\delta \geq \lambda_0$. Consecuentemente,

$$C_{(\delta_0, x_{\lambda_\delta})} \subseteq C_{(\lambda_0, x_\lambda)}.$$

Así, de (7.1) se colige que $C_{(\delta_0, x_{\lambda_\delta})} \subseteq U$. En conclusión, $x_{\lambda_\delta} \to x$. ■

Definición 7.0.12 Sean X un espacio topológico, $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red en X y $x \in X$. Decimos que x es *punto de acumulación de* $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ si para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y cada $\lambda_0 \in \Lambda$, existe $\lambda \geq \lambda_0$ cumple que $x_\lambda \in U$.

Teorema 7.0.13 *[9, Teorema 11.5, p. 75] Sean X un espacio topológico y $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red en X. Fijemos $x \in X$. Entonces x es punto de acumulación de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ si y solo si existe una sub-red de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ que converge a x.*

Teorema 7.0.14 *[9, Teorema 11.7, p. 75] Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Tomemos $x \in X$. Entonces $x \in \mathrm{cl}(A)$ si y solo si existe una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en X tal que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq A$ y $x_\lambda \to x$.*

Teorema 7.0.15 *[9, Teorema 17.4, p. 118] Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y solo si toda red en X tiene un punto de acumulación.*

Lema 7.0.16 *Sea X un espacio topológico y sea U un subconjunto de X. Entonces U es abierto en X si y solo si para cada $x \in U$ y para cada red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en X tal que $x_\lambda \to x$, existe una sub-red $\{x_{\lambda_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$ de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ y existe $\delta_0 \in \Delta$ con la característica de que $C_{(\delta_0, x_{\lambda_\delta})} \subseteq U$.*

Prueba. Supongamos que U es abierto en X. Consideremos $x \in U$ y una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en X con la cualidad de que $x_\lambda \to x$. Luego, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ de tal suerte que

$$C_{(\lambda_0,x_\lambda)} \subseteq U.$$

Notando la Observación 7.0.6 hemos terminado la implicación directa.
El recíproco se probará por contrapuesta. Si U no es abierto en X, existe $x \in U \setminus \mathrm{int}(U)$. Equivalentemente, $x \in U$ y $x \in X \setminus \mathrm{int}(U) = \mathrm{cl}(X \setminus U)$. Gracias al Lema 7.0.14 podemos encontrar una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en X que cumpla que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X \setminus U$ y $x_\lambda \to x$. Asimismo, si $\{x_{\lambda_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$ es una sub-red de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se obtendrá que $\{x_{\lambda_\delta}\}_{\delta\in\Delta} \subseteq X \setminus U$. Finalmente, para cualquier $\delta_0 \in \Delta$ se satisfará que $C_{(\delta_0,x_{\lambda_\delta})} \subseteq X \setminus U$, con lo que hemos terminado la prueba. ■

A partir de este punto y hasta el final del presente capítulo, se probarán algunos resultados canónicos sobre convergencia de redes en el hiperespacio 2^X.

Lema 7.0.17 *Sea X un continuo de Hausdorff y sea $\{D_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq 2^X$ una red. Asumamos que existe $D \in 2^X$ de tal manera que $D_\lambda \to D$ y tomemos $x \in X$. Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X$ tal que $x_\lambda \to x$ y para cada $\lambda \in \Lambda$, el elemento x_λ pertenece a D_λ. Entonces $x \in D$.*

Prueba. Supongamos que $x \notin D$. Dado que X es compacto y de Hausdorff, X es T_4. Como D y $\{x\}$ son subconjuntos cerrados y ajenos de X, podemos escoger subconjuntos abiertos U y V de X, ajenos y con la particularidad de que $D \subseteq U$ y $\{x\} \subseteq V$. Puesto que $D_\lambda \to D$ y $D \in \langle U\rangle$, podemos asegurar la existencia de $\lambda_1 \in \Lambda$ de tal manera que

$$C_{(\lambda_1,D_\lambda)} \subseteq \langle U\rangle. \tag{7.2}$$

En vista de que $x_\lambda \to x$ y $x \in V$, podemos fijar $\lambda_2 \in \Lambda$ de tal suerte que

$$C_{(\lambda_2,x_\lambda)} \subseteq V. \tag{7.3}$$

Teniendo en cuenta la propiedad 3 de la Definición 7.0.1, podemos hallar $\lambda_3 \in \Lambda$ con la peculiaridad de que $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$ y $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$. Por consiguiente, si $\lambda \in \Lambda$ y $\lambda_3 \leqslant \lambda$, por la Propiedad 2 de la Definición 7.0.1 podemos aseverar que $\lambda_1 \leqslant \lambda$ y $\lambda_2 \leqslant \lambda$. Así, gracias a (7.2) y a (7.3) resulta que $D_\lambda \in \langle U\rangle$ y $x_\lambda \in V$. Además, $x_\lambda \in D_\lambda$. Por lo tanto, $x_\lambda \in U \cap V$, lo cual es una contradicción. ■

Lema 7.0.18 *Sea X un continuo de Hausdorff y sea $\{D_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq 2^X$ una red. Asumamos que existe $D \in 2^X$ de tal manera que $D_\lambda \to D$. Sea K un subconjunto cerrado de X tal que para cada $\lambda \in \Lambda$, el elemento D_λ está contenido en K. Entonces $D \subseteq K$.*

Prueba. Supongamos por el contrario que $D \cap (X \setminus K) \neq \emptyset$. Se sigue que

$$D \in \langle X, X \setminus K\rangle. \tag{7.4}$$

Dado que K es cerrado en X se tiene que $X \setminus K$ es abierto en 2^X. Luego,

$$\langle X, X \setminus K\rangle \text{ es abierto en } 2^X.$$

Como $D_\lambda \to D$, en vista de (7.4) existe $\lambda_0 \in \Lambda$ con la característica de que

$$C_{(\lambda_0, D_\lambda)} \subseteq \langle X, X \setminus K\rangle.$$

Por ende, para cada $\lambda \geq \lambda_0$ resulta que

$$D_\lambda \cap (X \setminus K) \neq \emptyset,$$

lo cual es una contradicción. En conclusión, $D \subseteq K$. ■

Lema 7.0.19 *Sea X un continuo de Hausdorff y sea $\{D_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq 2^X$ una red. Asumamos que existe $D \in 2^X$ de tal manera que $D_\lambda \to D$. Sea $K \in 2^X$ tal que para cada $\lambda \in \Lambda$, el conjunto $D_\lambda \cap K$ es no vacío. Entonces $D \cap K \neq \emptyset$.*

Prueba. Si $D \subseteq X \setminus K$ se satisface que

$$D \in \langle X \setminus K\rangle.$$

Dado que K es cerrado en X se colige que $X \setminus K$ es abierto en X. Por lo tanto,

$$\langle X \setminus K\rangle \text{ es abierto en } 2^X.$$

Teniendo en cuenta que $D_\lambda \to D$ podemos hallar $\lambda_0 \in \Lambda$ con la peculiaridad de que

$$C_{(\lambda_0, D_\lambda)} \subseteq \langle X \setminus K\rangle.$$

Es decir, para cualquier $\lambda \geq \lambda_0$ pasa que

$$D_\lambda \subseteq X \setminus K,$$

lo que es un absurdo. En conclusión, $D \cap K \neq \emptyset$. ■

Bibliografía

[1] Dugundji, James, *Topology,* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1996.

[2] García Velázquez, Luis Miguel (2015), *Hiperespacios de Continuos No Métricos,* Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, (www.tesiunam.dgb.unam.mx).

[3] Goodykoontz, Jr., Jack T., *Connectedness im Kleinen and Local Connectedness in* 2^X *and* $C(X)$*,* Pacific J. Math., 53(1974), 387-397.

[4] Goodykoontz, Jr., Jack T., *Local Arcwise Connectedness in* 2^X *and* $C(X)$*,* Houston J. Math., Vol. 4, No. 1, 1978, 41-47.

[5] Illanes, A., and Nadler, S. B., Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances,* Monographs and Textbooks in pure and applied mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1999.

[6] Jacobo Villegas, Eduardo (2015), *Conexidad en Pequeño y Conexidad Local en Hiperespacios,* Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, (www.tesiunam.dgb.unam.mx).

[7] Makuchowski, Wladyslaw, *On local connectedness in hyperspaces,* Bull. Pol. Acad. Sci., Math., Vol. 47, No. 2, 1999, 119-126.

[8] Ward, A., J., *A generalization of arc-connectedness,* Proc. Camb. Phil. Soc. (1965), 61, 879-880.

[9] Willard, Stephen, *General Topology,* Dover Publications, Inc., New York, 2004.