



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA CIVIL -**  
**GEOTECNIA**

**INFLUENCIA DE LAS JUNTAS DE CONSTRUCCIÓN EN EL**  
**COMPORTAMIENTO DE UNA CIMENTACIÓN RÍGIDA TIPO CAJÓN.**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

PRESENTA:

**ALEXANDER TORRES PÉREZ**

TUTOR  
DR. RIGOBERTO RIVERA CONSTANTINO, FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
COTUTOR  
M.I. CARMELINO ZEA CONSTANTINO, FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM

**CIUDAD DE MÉXICO A 29 DE ABRIL DE 2022.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



---

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: M.I. Deméneghi Colina Agustín

Secretario: Dr. Flores Castrellón Osvaldo

1er Vocal: Dr. Rivera Constantino Rigoberto

2do. Vocal: M. en I. Zea Constantino Carmelino

3er. Vocal: Dr. Hermosillo Arteaga Armando R.

Lugar donde se realizó la tesis: FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

NOMBRE

DR. RIGOBERTO RIVERA CONSTANTINO

FIRMA

-----



---

## **DEDICATORIA:**

Dedico esta tesis con todo mi cariño a mis padres Gladys y David, que a pesar de que la humanidad está viviendo tiempos difíciles debido a la pandemia del COVID-19 y que muchos han perdido a seres queridos, ellos aún están conmigo; acompañándome en mi camino, apoyándome en mis decisiones sean buenas o malas, aconsejándome para corregir cada paso en falso que doy y para animarme a seguir cuando el paso es firme y correcto. Les agradezco a ambos, por no haberse rendido a pesar de las condiciones y situaciones que hemos vivido como familia, espero tenerlos conmigo muchos años más.

## **AGRADECIMIENTOS:**

Le agradezco a usted Dr. Rigoberto Rivera por su gran paciencia y apoyo y también porque muchos sabemos de su cariño por la cátedra, lo noté cada día en sus clases y eso es algo que aprecia mucho un estudiante.

Le agradezco también al M.I. Carmelino Zea, por su apoyo en la mejora de este documento. Aunque no tuve el gusto de recibir una clase de usted en un aula, pero el tiempo dedicado a mejorar esta tesis se aprecia.

A los sinodales que a través de sus comentarios u observaciones aportaron su granito de arena.

Y por supuesto a mi familia, padres, hermanos, hermanas que siempre me recordaron mi compromiso con este trabajo de tesis, con mis asesores, con mi universidad (UNAM) e incluso con el Gobierno de la República, que a través de su programa de becas me fue posible dedicarme de tiempo completo.



ÍNDICE	Páginas
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>19</b>
1.1 <i>Justificación.....</i>	20
1.2 <i>Objetivos.....</i>	21
1.3 <i>Alcance.....</i>	21
<b>CAPÍTULO 2. ESTADO DEL ARTE.....</b>	<b>21</b>
<b>CAPÍTULO 3. TIPOLOGÍA Y FUNCIÓN DE LAS JUNTAS.....</b>	<b>23</b>
3.1 <i>Juntas de contracción.....</i>	23
3.2 <i>Juntas de dilatación.....</i>	23
3.3 <i>Juntas de construcción.....</i>	24
<b>CAPÍTULO 4. PRIMERA ETAPA DE DISEÑO: ANÁLISIS ESTÁTICO DE INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA.....</b>	<b>25</b>
4.1 <i>Desplazamientos verticales.....</i>	26
4.1.1 <i>Ecuación Matricial de Asentamientos (E.M.A.).....</i>	26
4.2 <i>Distribución de reacciones en contacto con la losa de cimentación.....</i>	33
4.3 <i>Elementos mecánicos de diseño para una cimentación rígida.....</i>	34
4.3.1 <i>Determinación del diagrama de fuerzas cortantes.....</i>	35
4.3.2 <i>Determinación del diagrama de momentos flexionantes.....</i>	37
4.4 <i>Ejemplo numérico de un análisis de interacción suelo-estructura.....</i>	40
<b>CAPÍTULO 5. SEGUNDA ETAPA DE DISEÑO: CIMENTACIÓN CON PONTONES.....</b>	<b>57</b>
5.1 <i>Juntas de construcción que se pueden emplear en cimentaciones tipo cajón.....</i>	57
5.2 <i>Selección del tipo y número de juntas de construcción.....</i>	59
5.3 <i>Convención de signos.....</i>	60
5.4 <i>Metodología matemática para calcular los cambios en las reacciones debido a la introducción de juntas.....</i>	61
5.1.1 <i>Conceptos matemáticos.....</i>	62
5.1.1.1 <i>Cálculo de las fuerzas cortantes en las juntas de construcción.....</i>	62
5.1.1.2 <i>Magnitud de cambio en las reacciones por la introducción de juntas.....</i>	66
5.1.1.3 <i>Momento plástico.....</i>	68
5.1.1.4 <i>Determinación del cambio en las reacciones.....</i>	71



---

5.2	<i>Estimación de los desplazamientos verticales totales debido al cambio de reacciones.</i>	76
5.3	<i>Desplazamientos verticales diferenciales permisibles.</i>	76
5.4	<i>Distorsiones angulares.</i>	76
5.5	<i>Elementos mecánicos de diseño finales.</i>	77
5.6	<i>Ejemplo numérico de una cimentación de pontones.</i>	78
5.6.1	<i>CASO a): Sistema de 3 pontones (n) y 2 de juntas (i).</i>	79
5.6.2	<i>CASO b) Sistema de 6 pontones (n) y 5 de juntas (i).</i>	121
5.7	<i>Análisis e interpretación de resultados.</i>	131
5.7.1	<i>Subcaso I del caso a): Sistema de tres pontones con una junta de construcción Tipo III y una Tipo IV.</i>	131
5.7.2	<i>Subcaso II: Sistema de tres pontones y dos juntas de construcción Tipo IV.</i>	133
5.7.3	<i>Subcaso III: Sistema de tres pontones y dos juntas de construcción Tipo III.</i>	135
5.7.3	<i>Diagramas comparativos de desplazamientos verticales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes de una cimentación rígida y los del caso a).</i>	137
5.7.4	<i>Subcaso I del caso b): Sistema de seis pontones con juntas de construcción Tipo III.</i>	138
5.7.5	<i>Subcaso II del caso b): Sistema de seis pontones con juntas de construcción Tipo III y IV.</i>	138
5.7.6	<i>Subcaso III del caso b): Sistema de seis pontones con juntas de construcción Tipo IV.</i>	139
5.7.7	<i>Diagramas comparativos de desplazamientos verticales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes de una cimentación rígida y los del caso b).</i>	140
<b>CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES.</b>		<b>143</b>
<b>CAPÍTULO 7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.</b>		<b>145</b>
<b>ANEXO A: PROGRAMA DE CÓMPUTO EN HOJA DE CÁLCULO (EXCEL).</b>		<b>146</b>
<b>APÉNDICE B: MATRICES DE INFLUENCIAS.</b>		<b>169</b>
<b>APÉNDICE C: APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN MATRICIAL DE ASENTAMIENTOS (E.M.A). CIMENTACIÓN TOTALMENTE FLEXIBLE.</b>		<b>171</b>
<b>APÉNDICE D: TABLAS RESUMEN Y GRÁFICAS CORRESPONDIENTES AL EJERCICIO DEL CASO b).</b>		<b>173</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

- Figura 1. Vista en planta de un edificio dividido en dovelas y áreas tributarias.
- Figura 2. Vista de perfil de un cajón de cimentación idealizado como una gran viga.
- Figura 3. Esfuerzo vertical en un punto.
- Figura 4. Factores de influencia para el esfuerzo unitario en la dovela 1.
- Figura 5. Distribución de reacciones  $Q_i$  en  $[F, L^{-1}]$  por cada dovela en una cimentación de comportamiento rígido.
- Figura 6. División de la viga en varias secciones.
- Figura 7. Ejemplo de diagrama de fuerzas cortantes para una cimentación rígida.
- Figura 8. Áreas de momento a partir del diagrama de fuerzas cortantes.
- Figura 9. Ejemplo de diagrama de momentos flexionantes para una cimentación rígida.
- Figura 10. Cargas y áreas tributarias.
- Figura 11. Factores de influencias debajo de las dovelas.
- Figura 12. Diagrama de desplazamientos verticales para una cimentación flexible.
- Figura 13. Distribución de reacciones finales  $Q_i$  por cada dovela.
- Figura 14. Viga dividida en secciones de cálculo.
- Figura 15. Diagrama de distribución de fuerzas cortantes para una cimentación rígida.
- Figura 16. Diagrama de momentos flexionantes para una cimentación rígida.
- Figura 17. Juntas de construcción Tipo I donde  $M=0$ ,  $S=0$  y  $T=0$ .
- Figura 18. Junta de construcción Tipo II donde  $M=0$ ,  $S=0$  y  $T \neq 0$ .
- Figura 19. Junta de construcción Tipo III donde  $M=0$ ,  $S \neq 0$  y  $T \neq 0$ .
- Figura 20. Junta de construcción Tipo IV donde  $M \neq 0$ ,  $S \neq 0$  y  $T \neq 0$ .



Figura 21. Representación de los elementos mecánicos en las juntas de construcción y convención de signos.

Figura 22. Vista en planta de una cimentación dividida en 3 secciones tipo pontón.

Figura 23. Vista en planta de una cimentación dividida en 4 secciones tipo pontón.

Figura 24. Arreglo de signos en los extremos de cada pontón de acuerdo con las ecuaciones (1) y (2).

Figura 25. Diagrama de esfuerzos elásticos e inelástico en un perfil de acero.

Figura 26. Diagrama de esfuerzos inelástico en un perfil de acero.

Figura 27. Diagrama de reacciones en los extremos de los pontones con juntas del Tipo III ( $i$ ) o IV ( $i+1$ ).

Figura 28. Diagrama de reacciones en los extremos de los pontones con una junta del Tipo III ( $i$ ) y una junta Tipo IV ( $i+1$ ).

Figura 29. Determinación de la magnitud  $Q_i$  en cada dovela, cuando se consideran juntas Tipo III ( $i$ ) o IV ( $i+1$ ).

Figura 30. Determinación de la magnitud  $Q_i$  en cada dovela, cuando se considera una junta Tipo III ( $i$ ) o IV ( $i+1$ ).

Figura 31. Diagrama típico de reacciones uniformes  $Q_i$  en cada dovela cuando se consideran juntas Tipo III o IV.

Figura 32. Diagrama típico de reacciones uniformes  $Q_i$  en cada dovela, cuando se considera una junta Tipo III ( $i$ ) y IV ( $i+1$ ).

Figura 33. Diagrama de reacciones finales  $Q_{fi}$  en cada dovela con juntas Tipo III ( $i$ ) o IV ( $i+1$ ).

Figura 34. Diagrama de reacciones finales  $Q_{fi}$  en cada dovela con una junta Tipo III ( $i$ ) y una junta Tipo IV ( $i+1$ ).

Figura 35. Distribución de cargas y momentos flexionantes para una cimentación rígida.

Figura 36. Cajón de cimentación dividido en 3 pontones.



Figura 37. Reacciones en los extremos de los pontones debido a una junta Tipo III (a) y una junta tipo IV (b).

Figura 38. Valores promedio de las reacciones por ancho de dovela cuando se introduce una junta Tipo III (a) y una junta tipo IV (b).

Figura 39. Distribución de las reacciones de corrección por ancho de dovela cuando se introduce una junta Tipo III (a) y una junta tipo IV (b).

Figura 40. Distribución de reacciones finales  $Q_{if}$  por ancho de dovela cuando se introduce una junta Tipo III (a) y una junta tipo IV (b).

Figura 41. Desplazamientos verticales para una cimentación con pontones (con una junta Tipo III y una junta Tipo IV).

Figura 42. Cargas y reacciones finales para una cimentación con pontones (con una junta Tipo III y una junta Tipo IV).

Figura 43. Diagrama de fuerzas cortantes finales para una cimentación con pontones (con una junta Tipo III y una junta Tipo IV).

Figura 44. Diagrama de momentos flexionantes finales para una cimentación con pontones (con una junta Tipo III y una junta Tipo IV).

Figura 45. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones debido a las juntas Tipo IV.

Figura 46. Valores promedio de las reacciones por ancho de dovela cuando se introducen juntas Tipo IV.

Figura 47. Distribución de los cambios de reacción por ancho de dovela cuando se introduce juntas Tipo IV.

Figura 48. Distribución de reacciones finales  $Q_{if}$  por ancho de dovela cuando se introduce juntas Tipo IV.

Figura 49. Desplazamientos verticales para una cimentación con pontones (con juntas Tipo IV).

Figura 50. Diagrama de fuerzas cortantes finales para una cimentación con pontones (con juntas Tipo IV).



Figura 51. Distribución de momentos flexionantes finales para una cimentación con pontones (con dos juntas Tipo IV).

Figura 52. Reacciones de corrección en los extremos de los pontones debido a juntas tipo III.

Figura 53. Reacciones de corrección por ancho de dovela cuando se introducen juntas Tipo III.

Figura 54. Distribución de las reacciones de corrección por ancho de dovela cuando se introducen juntas Tipo III.

Figura 55. Distribución de cargas  $P_i$  y reacciones finales  $Q_{if}$  para una cimentación con pontones (con juntas Tipo III).

Figura 56. Desplazamientos verticales para una cimentación con pontones (juntas Tipo III).

Figura 57. Diagrama de fuerzas cortantes finales para una cimentación con pontones (juntas Tipo III).

Figura 58. Distribución de momentos flexionantes finales para una cimentación con pontones (dos juntas Tipo III).

Figura 59. Ubicación de los momentos flexionantes que se requieren reducir.

Figura 60. Cimentación de 6 pontones y 5 juntas.

Figura 61. Reacciones de corrección por ancho de dovela cuando se introducen cinco juntas Tipo III.

Figura 62. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela cuando se introducen cinco juntas Tipo III.

Figura 63. Desplazamientos verticales totales para un sistema de 6 pontones y cinco juntas Tipo III.

Figura 64. Diagrama de momentos flexionantes reducidos conseguido con un sistema de 6 pontones y cinco juntas Tipo III.

Figura 65. Desplazamientos verticales totales para tres combinaciones de juntas Tipo III y IV.

Figura 66. Diagramas de momentos flexionantes reducidos e incrementados para tres combinaciones de juntas Tipo III y IV.



Figura 67. Desplazamientos verticales totales para un sistema de 6 pontones con juntas Tipo IV.

Figura 68. Diagrama de momentos flexionantes reducidos para un sistema de 6 pontones con juntas Tipo IV.

Figura 69. Comparativa entre los momentos flexionantes de una cimentación rígida y una cimentación con pontones (con una junta Tipo III y una Tipo IV).

Figura 70. Comparativa entre los desplazamientos verticales de una cimentación rígida, flexible y con pontones (con una junta Tipo III y una Tipo IV).

Figura 71. Comparativa entre los momentos flexionantes de una cimentación rígida y una cimentación con pontones (con juntas Tipo IV).

Figura 72. Comparativa entre los desplazamientos verticales de una cimentación rígida, flexible y con pontones (con dos juntas Tipo IV).

Figura 73. Comparativa entre los momentos flexionantes de una cimentación rígida y una cimentación con pontones (con juntas Tipo III).

Figura 74. Comparativa entre los desplazamientos verticales de una cimentación rígida, flexible y con pontones (con dos juntas Tipo III).

Figura 75. Comparativa entre el diagrama de desplazamientos verticales de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso a) para la cimentación con pontones. [Elaboración propia].

Figura 76. Comparativa entre el diagrama de fuerzas cortantes de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso a) para la cimentación con pontones. [Elaboración propia].

Figura 77. Comparativa entre el diagrama momentos flexionantes de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso a) para la cimentación con pontones. [Elaboración propia].

Figura 78. Comparativa entre el diagrama de desplazamientos verticales de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso b) para la cimentación con pontones (Juntas Tipo III y IV). [Elaboración propia].

Figura 79. Comparativa entre el diagrama de fuerzas cortantes de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso b) para la cimentación con pontones (Juntas Tipo III y IV). [Elaboración propia].



Figura 80. Comparativa entre el diagrama momentos flexionantes de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso b) para la cimentación con pontones (Juntas Tipo III y IV). [Elaboración propia].

Figura 81. Comparativa entre el diagrama de desplazamientos verticales de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso b) para la cimentación con pontones (Juntas Tipo IV). [Elaboración propia].

Figura 82. Comparativa entre el diagrama de fuerzas cortantes de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso b) para la cimentación con pontones (Juntas Tipo IV). [Elaboración propia].

Figura 83. Comparativa entre el diagrama momentos flexionantes de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso b) para la cimentación con pontones (Juntas Tipo IV). [Elaboración propia].

Figura 84. Portada de presentación del programa CCP. [Elaboración propia].

Figura 85. Ventana Menú del programa CCP. [Elaboración propia].

Figura 85.1. Ventana Datos previos para el diseño. [Elaboración propia].

Figura 85.1-a. Ventana Cargas P. [Elaboración propia].

Figura 85.1-b. Ventana Reacciones y esfuerzos por dovela  $Q_t$  y  $q$ . [Elaboración propia].

Figura 85.1-c. Ventana Dimensiones de la cimentación, claros y dovelas. [Elaboración propia].

Figura 85.1-d. Ventana Puntos de análisis en cada dovela. [Elaboración propia].

Figura 85.1-e. Ventana Matriz de factores de influencia  $I_z$ . [Elaboración propia].

Figura 85.1-f. Ventana Matriz de factores de influencia  $I_z$ . [Elaboración propia].

Figura 85.1-g. Ventana Diagrama de equilibrio (Cimentación rígida). [Elaboración propia].

Figura 85.1-h. Ventana Diagrama de fuerzas cortantes (Cimentación rígida). [Elaboración propia].

Figura 85.1-i. Ventana Diagrama de momentos flexionantes (Cimentación rígida). [Elaboración propia].



Figura 86. Ventana Sistema de Unidades. [Elaboración propia].

Figura 87. Ventana Número de juntas y número de pontones. [Elaboración propia].

Figura 88. Ventana de 2 juntas – 3 pontones. [Elaboración propia].

Figura 89. Ventana Dimensiones. [Elaboración propia].

Figura 90. Ventana Momentos plásticos y momentos flexionantes. [Elaboración propia].

Figura 91. Ventana Fuerzas cortantes en la ubicación de las juntas mecánicas. [Elaboración propia].

Figura 91.1. Ventana tabla de cálculos [Elaboración propia].

Figura 92. Ventana Reacciones de corrección  $\Delta Q_i$  por el método gráfico [Elaboración propia].

Figura 92.1. Ventana Esfuerzos y reacciones de corrección [Elaboración propia].

Figura 92.2. Ventana Diagrama simple para  $n$  número de dovelas [Elaboración propia].

Figura 93. Ventana Reacciones y esfuerzos finales por dovelas [Elaboración propia].

Figura 94. Ventana Desplazamientos verticales diferenciales y distorsiones angulares entre dovelas [Elaboración propia].

Figura 95.1. Ventana Diagrama de equilibrio [Elaboración propia].

Figura 95.2. Ventana Diagrama de desplazamientos verticales [Elaboración propia].

Figura 95.3. Ventana Diagrama de fuerzas cortantes [Elaboración propia].

Figura 95.4. Ventana Diagrama de momentos flexionantes [Elaboración propia].

Figura 96. Ventana Desplazamientos diferenciales y distorsiones angulares entre dovelas [Elaboración propia].

Figura 97. Ventana Desplazamientos diferenciales y distorsiones angulares entre dovelas [Elaboración propia].

Figura 98. Reacciones de corrección por ancho de dovela con la primera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Figura 99. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela con la primera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Figura 100. Desplazamientos verticales totales con la primera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Figura 101. Diagrama de momentos flexionantes reducidos con la primera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Figura 102. Valores promedio de las reacciones por ancho de dovela con la segunda selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Figura 103. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela con la segunda selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Figura 104. Desplazamientos verticales totales con la segunda selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Figura 105. Diagrama de momentos flexionantes reducidos con la segunda selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Figura 106. Reacciones de corrección por ancho de dovela con la tercera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Figura 107. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela con la tercera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Figura 108. Desplazamientos verticales totales con la tercera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Figura 109. Diagrama de momentos flexionantes reducidos con la tercera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Figura 110. Reacciones de corrección por ancho de dovela con la primera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Figura 111. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela con la primera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Figura 112. Desplazamientos verticales totales con la primera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.



Figura 113. Diagrama de momentos flexionantes reducidos con la primera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Figura 114. Valores promedio de las reacciones por ancho de dovela con la segunda propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Figura 115. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela con la segunda propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Figura 116. Desplazamientos verticales totales con la segunda propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Figura 117. Diagrama de momentos flexionantes reducidos con la segunda propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Figura 118. Reacciones de corrección por ancho de dovela con la tercera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Figura 119. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela con la tercera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Figura 120. Desplazamientos verticales totales con la tercera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Figura 121. Diagrama de momentos flexionantes reducidos con la tercera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.



---

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Reacciones finales  $Q_i$  para una cimentación rígida.

Tabla 2. Número de juntas a introducir de acuerdo con el número de pontones.

Tabla 3. Distorsiones angulares límites para estructuras a base de marcos de concreto armado.

Tabla 4. Coeficientes geométricos y mecánico para las ecuaciones del sistema de pontones con juntas Tipo III y IV.

Tabla 5. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones cuando se introduce una junta Tipo III y una Tipo IV.

Tabla 6. Coeficientes geométricos y mecánico para las ecuaciones del sistema de pontones con juntas Tipo IV.

Tabla 7. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con juntas Tipo IV.

Tabla 8. Coeficientes geométricos para un sistema de 6 pontones con juntas tipo III.

Tabla 9. Esfuerzos de corrección en los extremos de los 6 pontones con juntas Tipo III.

Tabla 10. Momentos flexionantes reducidos con la introducción de cinco juntas Tipo III.

Tabla 11. Tabla de valores de fuerzas cortantes en las juntas, momentos plásticos y momentos reducidos para un sistema de 6 pontones con juntas tipo III y IV.

Tabla 12. Valores de fuerzas cortantes, momentos plásticos y momentos flexionantes reducidos considerando juntas Tipo IV.

Tabla 13. Coeficientes geométricos para la primera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Tabla 14. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con la primera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Tabla 15. Coeficientes geométricos para la segunda selección y ubicación de juntas tipo III y IV.



---

Tabla 16. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con la segunda selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Tabla 17. Coeficientes geométricos para la tercera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Tabla 18. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con la tercera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.

Tabla 19. Coeficientes geométricos con la primera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Tabla 20. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con la primera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Tabla 21. Coeficientes geométricos con la segunda propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Tabla 22. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con la segunda propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Tabla 23. Coeficientes geométricos con la tercera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.

Tabla 24. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con la tercera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV.



---

## RESUMEN

Si una obra de ingeniería se desplanta sobre un depósito de suelo de mediana a muy alta compresibilidad, es inevitable que el depósito de suelo no presente deformaciones tanto totales como diferenciales. En vista de las características ingenieriles y condiciones del suelo el ingeniero de cimentaciones considera que una solución adecuada es mediante un cajón de cimentación totalmente compensado o parcialmente compensado. Sin embargo, la observación del comportamiento real de este tipo de cimentaciones construidas en depósitos de suelo de mediana a muy alta compresibilidad demuestra que aun así se originan deformaciones después de varios años de haber concluido la construcción de la estructura.

Las cimentaciones mencionadas son usualmente diseñadas como un cajón rígido donde las deformaciones de la cimentación tienden a ser uniformes, más no así las presiones de contacto que suelen concentrarse en las orillas del cajón cuando se trata de suelos finos compresibles. Por otro lado, en la práctica usual, el ingeniero de cimentaciones suele estimar los elementos mecánicos de diseño, tanto los momentos flexionantes como las fuerzas cortantes en la estructura de la cimentación, suponiendo que el desplazamiento vertical es constante en toda el área de cimentación. Sin embargo, en edificios muy largos, los momentos flexionantes tienden a ser muy grandes a causa de la suposición anterior, lo que conduce a realizar un diseño estructural en el que se demanda mucha área de acero de refuerzo longitudinal.

De lo expuesto anteriormente se plantean las siguientes preguntas, ¿existe alguna alternativa para reducir los momentos flexionantes y por ende el área de acero longitudinal? y si existe alguna alternativa, ¿se podría garantizar un adecuado balance entre las funciones propias del concreto y del acero a partir de sus características específicas y capacidades mecánicas?, ¿se conseguiría un menor costo directo?

En la presente tesis se desarrolla un programa de cómputo tomando como base el método propuesto por el Dr. Zeevaert (1973, 1983), relativo al comportamiento de una cimentación rígida y larga al dividirla en secciones (“pontones”) mediante juntas mecánicas, y su impacto en la distribución de presiones de contacto y desplazamientos verticales. En los capítulos posteriores se describe y desarrolla a detalle el método propuesto.

Queda demostrado que al habilitar juntas mecánicas de construcción en una cimentación larga tipo cajón se reduce de manera significativa los momentos flexionantes, además se ha demostrado que el número de juntas propuestas, la selección del tipo y ubicación de éstas dentro de la estructura de la cimentación tiene un efecto preponderante, ya que, así como se



---

puede reducir la magnitud de los momentos flexionantes, también se puede tener un efecto contrario, aumentar la magnitud de los momentos flexionantes. Por lo que, el ingeniero de cimentaciones deberá ser juicioso en el diseño de una cimentación con pontones.



---

## CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.

Con frecuencia el ingeniero de cimentaciones tiene que cimentar obras de ingeniería en depósitos de suelo de baja resistencia al esfuerzo cortante y de mediana a muy alta compresibilidad, es decir, en depósitos de suelo muy deformables debido a su origen y condiciones de depositación. En el análisis, el criterio aplicado por el ingeniero de cimentaciones para depósitos de suelo con estas características es remover un volumen de suelo que en peso sea igual al de la estructura a construir, lo cual se conoce como una cimentación totalmente compensada. Este tipo de cimentación consiste en una caja de concreto reforzado con retículas de contratraveses (diafragmas) que la dividen en secciones huecas (celdas), complementadas por una losa de cimentación, una losa tapa y muros de contención. Esta cimentación resulta de una gran rigidez, por lo que las deformaciones verticales tienden a ser uniformes, en el caso de suelos firmes compresibles, pero no así las presiones de contacto, siendo mayores en las esquinas de la cimentación.

Con la suposición de que los desplazamientos verticales son uniformes en toda el área de cimentación, el ingeniero de cimentaciones puede estimar los elementos mecánicos de diseño, tanto fuerzas cortantes como momentos flexionantes, siendo éstos últimos de menor magnitud en cajones de cimentación cortos. Por el contrario, en el caso de cajones de cimentación muy largos, los momentos flexionantes tienden a ser grandes, para una cierta distribución de las cargas sobre el cajón cimentación y la magnitud de las presiones de contacto en la interface suelo-losa; esto obliga a que en el diseño estructural se requiera de una mayor cantidad de acero de refuerzo longitudinal; si bien de los requisitos que debe cumplir una cimentación para que sea segura son estabilidad y funcionalidad, la economía es también un factor a tomar en cuenta, por lo que al requerirse mayor área de acero de refuerzo, se encarece la cimentación.

El Capítulo 2 inicia con una breve reseña histórica de la implementación de los “pontones” como alternativa de cimentación de puentes durante diferentes épocas de la humanidad cuando no se habían desarrollado procedimientos o técnicas para desplantar estructuras en el lecho de ríos o bien en el fondo marino.

En el Capítulo 3 se citan los tipos de juntas y se describen cada una de éstas, así como su función en ciertos tipos de elementos estructurales.

En el Capítulo 4 se aborda la *primera etapa de diseño*, la cual corresponde a un análisis estático de interacción suelo-estructura que permite conocer la distribución de reacciones de



contacto a nivel de desplante. Es decir, en la primera etapa se expone los parámetros mecánicos de deformabilidad del terreno de cimentación, las ecuaciones para estimar los desplazamientos verticales totales (método matricial de asentamientos EMA propuesto por el Dr. Zeevaert) para una cimentación que hipotéticamente se considera infinitamente rígida. Además, se ha incluido un ejemplo numérico donde se ha desarrollado con cierto detalle cada etapa de cálculo; los resultados obtenidos se reportan mediante tablas y diagramas.

Enseguida, en el Capítulo 5 se presenta la *segunda etapa de diseño* que concierne a la “Cimentación con pontones”, donde se ha descrito cada paso de cálculo, desde la selección del número de pontones, tipo, número y ubicación de las juntas de construcción en la estructura de cimentación tipo cajón. Se presentan las ecuaciones de cálculo y un procedimiento gráfico desarrollado para estimar las magnitudes de cambio de reacción debido a la introducción de juntas de construcción. Para su ilustración se ha retomado y ampliado el ejemplo numérico A.VIII Cimentación con Pontones, presentado en la referencia 6, el cual fue dividido en dos casos de estudio con diferentes combinaciones de juntas de construcción o juntas mecánicas.

Por último, en el Capítulo 6 se reportan las conclusiones a las que se llegaron después de haber revisado los dos casos estudiados y sus respectivos subcasos. Finalmente, se agregan algunos comentarios con el objetivo de orientar al ingeniero de cimentaciones en la aplicación del método propuesto, encaminado a la reducción de la magnitud de los momentos flexionantes en cimentaciones rígidas muy largas.

### 1.1 *Justificación*

En la literatura técnica la información es escasa en el tema de cimentaciones largas tipo cajón con pontones. Por supuesto, esto no significa que en la actualidad no existan estructuras cimentadas con pontones, se trata de información no documentada y publicada.

Además, de no haber información extensa sobre el tema en cuestión, no se tiene conocimiento de un programa de cómputo, comercial como herramienta auxiliar para que el ingeniero de cimentaciones pueda llevar a cabo este tipo de análisis, esto es, la determinación de los cambios de presiones de contacto y desplazamientos, cuando se emplean juntas de construcción mecánicas.



## 1.2 *Objetivos*

El objetivo principal de esta tesis es sistematizar mediante un programa de cómputo el método propuesto por el Dr. Zeevaert, relativo al uso de pontones en cimentaciones rígidas muy largas y su impacto en la distribución de presiones de contacto y desplazamientos. El método consiste en dividir la cimentación en varias secciones más pequeñas mediante la inclusión de pontones capaces de transmitir un efecto mecánico (fuerzas cortante, momento flexionante o torsionante); planteando las ecuaciones de compatibilidad de presiones de contacto en las juntas entre pontones se calculan los cambios de presiones en dichos puntos en la dirección longitudinal de la cimentación y a partir de éstos las reacciones finales con las que se evalúan los desplazamientos verticales totales y diferenciales. Si éstos resultan aceptables para este tipo de cimentación, se procede a calcular los elementos mecánicos requeridos para el diseño estructural de la cimentación.

## 1.3 *Alcance*

Desarrollar una hoja de cálculo en Excel para el método de Zeevaert, relativo al uso de pontones en cimentaciones rígidas muy largas, y su impacto en la distribución de presiones de contacto y desplazamientos en la cimentación, lo que en esta tesis se denomina segunda etapa de diseño. La hoja de cálculo deberá contemplar información de entrada como, por ejemplo, los resultados de un análisis de interacción suelo-cimiento: magnitudes y distribución de las presiones de contacto y desplazamientos, magnitudes de los momentos flexionantes, el ancho de cada dovela o área tributaria. Además, datos del sistema de pontones como: las dimensiones en el plano horizontal de los pontones, número de juntas, tipo, ubicación en sentido longitudinal de la cimentación y magnitud del momento plástico para el caso de la junta tipo IV. Estos datos servirán como datos de entrada para el programa. La hoja de cálculo deberá ser capaz de calcular, las magnitudes del cambio de presiones de contacto y las reacciones finales para una cimentación con pontones.

## **CAPÍTULO 2. ESTADO DEL ARTE.**

A lo largo de la historia, los ingenieros civiles y en especial el de cimentaciones ha tenido que usar su destreza para superar las barreras que el medio le impone cuando se trata de cimentar estructuras en medios difíciles. Tal es el caso de los puentes flotantes (puentes con pontones) que surgieron como respuesta a la necesidad de cruzar cauces que debido a su gran profundidad o anchura o a la inadecuada condición del suelo bajo el lecho marino o de la



inexistencia de tecnología en esa época, no se podía cimentar en suelo competente, esto es, sobre un suelo resistente y de baja compresibilidad.

De acuerdo con datos históricos el puente flotante o de pontones que se construyó por primera vez fue el Puente de Ciro El Grande en el año 536 a. C para cruzar el río Éufrates. Otros puentes flotantes antiguos de los que todavía hay referencias son el puente Darío, sobre el río Bósforo (493 a.C.) y el puente de Xerxes, sobre el estrecho de los Dardanelos (480 a.C.), ambos en Turquía [1].

El concepto o idea del pontón como elemento de sustentación o soporte data de varios siglos, en la época actual aún existen algunos puentes de este tipo, sin embargo, el pontón como elemento de sustentación para puentes ha caído en desuso debido al desarrollo de tecnología y de procedimientos constructivos que permiten cimentar muy por debajo del lecho marino. La tipología del pontón consiste en un cajón flotante continuo multicelular construido por tramos en la orilla y llevado a su posición definitiva mediante flotación. Los distintos tramos se enlazan entre ellos con uniones atornilladas o pretensadas. Por su parte, los pontones se anclan al fondo mediante cables tensados. Los puentes flotantes modernos se construyen mediante pontones fijos formados por cajones cerrados con forma de paralelepípedo o cilíndrica que se fijan al fondo mediante cables tensados, generalmente anclados a unos macizos apoyados en el lecho marino [1].

Hasta este párrafo sólo se ha mencionado el uso de pontones en puentes flotantes como una necesidad humana de cruzar cauces para comunicar comunidades o ciudades.

En la búsqueda de literatura técnica que trate la aplicación de pontones como elementos de cimentación de estructuras como puentes o edificios en suelo, se encontró que es muy escasa; solo el investigador Dr. Leonardo Zeevaert trata en su obra “*Foundation Engineering For Difficult Subsoil Conditions, 1983*”, el caso de un edificio de gran longitud desplantado mediante un sistema de pontones; en ella plantea un método que tiene como objetivo principal reducir los momentos flexionantes en la estructura de la cimentación.

El método que propone consiste en seccionar la estructura de la cimentación en una serie de cuerpos rígidos llamados pontones (flotadores) y entre pontones habilitar *juntas de construcción (mecánicas)*, conformándose de esta manera un sistema de cimentación con quiebres en las juntas. Con el sistema de pontones, unidos por juntas de construcción capaces de transmitir un efecto mecánico y que tienen cierta configuración geométrica, es posible controlar la flexibilidad de la cimentación y de esta manera reducir los momentos



flexionantes. Además, se busca cumplir también con las condiciones impuestas por la superestructura, esto es, que los desplazamientos verticales totales y diferenciales sean tolerables para la misma, de acuerdo con lo especificado en las normas y manuales de diseño vigentes.

En los capítulos 4 y 5 se describen a detalle las dos etapas de diseño que se deben realizar.

### **CAPÍTULO 3. TIPOLOGÍA Y FUNCIÓN DE LAS JUNTAS.**

Una junta de construcción se puede describir como una *abertura o separación habilitada en las estructuras que permite el desplazamiento libre horizontal pero no así el desplazamiento vertical que dependerá de la interacción con las otras juntas. Su uso proporciona mayor flexibilidad a la estructura*, es decir, en estructuras muy rígidas las juntas permiten darle ciertas características de flexibilidad.

Estas aberturas o separaciones tienen ciertas condiciones de funcionamiento y diseño de acuerdo con su función, para lo cual existen tres tipos:

- a) Juntas de contracción.
- b) Juntas de dilatación.
- c) Juntas de construcción.

#### *3.1 Juntas de contracción.*

Son las más frecuentes y pueden ser transversales o longitudinales, físicamente es un corte o indentación en el concreto que se realiza mientras el concreto todavía está fresco pero, sobre todo, antes que el elemento estructural esté sometido a esfuerzos de trabajo o a un gradiente térmico. Su espaciamiento puede ser de varios centímetros. Sea por fricción o por amarre con una construcción más rígida, es fácil que ocurran grietas en los puntos de debilidad. En la práctica las juntas de contracción son planos de debilidad hechos en forma intencionada buscando que las grietas se generen en la ubicación de éstas y no en los elementos de concreto. El uso principal de estas juntas es en pisos, techos, pavimentos y muros [2].

#### *3.2 Juntas de dilatación.*

Las juntas de dilatación se utilizan para evitar el agrietamiento de los elementos estructurales debido a cambios térmicos en el concreto. Se suelen colocar en donde hay



cambios abruptos en el espesor, desplazamientos o cambios en el tipo de construcción, por ejemplo, entre una losa de pavimento de un puente y la losa de la carretera. Las juntas de dilatación producen la separación completa entre dos partes de una losa y la abertura debe ser lo bastante grande para evitar la curvatura u otra deformación indeseable ocasionadas por la expansión del concreto. Para evitar que la junta se atasque con tierra y se vuelva ineficaz, la abertura se sella con un material compresible (madera impregnada de asfalto, láminas de poliuretano o poliestireno expandido, etc.). Para tener impermeabilidad, se debe colocar una barrera flexible contra agua a través de la junta. Si se desea transferencia de carga, se deben ahogar espigas entre las partes separadas por la junta. Los extremos deslizables de las espigas deben estar alojados en una tapa o protección metálica de ajuste preciso, a fin de dejar espacio para el movimiento de la espiga durante la expansión del concreto. Este espacio debe ser, por lo menos,  $\frac{1}{4}$  más largo que la anchura de la junta [2].

### 3.3 Juntas de construcción.

También llamadas juntas de colado o juntas frías, la literatura técnica nos describe que una junta de construcción se genera cuando se interrumpe el colado del concreto y para ligarlo con otro ya fraguado se pica con cincel la superficie y se lava con agua a poca presión para quitar una capa 0.5 cm de espesor aproximadamente, retirándolo por medio de un cepillo de alambre u otro procedimiento, con objeto de tener una superficie rugosa y resistente, ya que al reanudar el colado ésta debe tener la capacidad de unir al concreto nuevo con el existente, por lo que no debe permitir ningún movimiento [3].

Las juntas de construcción deben estar situadas donde causen menos debilitamiento de la estructura, es decir, se deben hacer y ubicar de manera que no perjudiquen la resistencia de la estructura [4]. Por otro lado, se deben tomar medidas para la transferencia del esfuerzo cortante y de otras fuerzas a través de las juntas de construcción. Cuando la fuerza cortante generada por cargas gravitacionales no sea importante, como usualmente ocurre a mitad del claro de elementos en flexión, puede ser adecuada una junta vertical sencilla. El diseño de la junta de construcción para tomar fuerzas laterales puede requerir de un análisis más detallado. [5]. Finalmente, cabe resaltar que las juntas de construcción a diferencia de las juntas de contracción (expansión), son necesarias por las operaciones de construcción, pero no necesariamente están diseñadas para permitir movimientos a través de la junta.

## CAPÍTULO 4. PRIMERA ETAPA DE DISEÑO: ANÁLISIS ESTÁTICO DE INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA.

En esta primera etapa de diseño se busca determinar la distribución de reacciones bajo la cimentación mediante un método de interacción suelo-cimiento; método que debe tomar en cuenta la rigidez de la cimentación para estimar las deformaciones del terreno de cimentación.

Un análisis de interacción suelo-estructura se basa en el principio de que tanto la subestructura como el terreno de cimentación experimentan desplazamientos de la misma magnitud en su interfaz, fenómeno que se conoce como compatibilidad de deformaciones. Por otro lado, un análisis de interacción suelo-estructura se puede realizar tanto para condiciones estáticas como para condiciones dinámicas, no obstante, en este trabajo sólo nos limitaremos a la condición estática.

Para ilustrar el procedimiento de cálculo, se muestra en las figuras 1 y 2, la vista en planta y en vista de perfil su cimentación tipo cajón idealizada como una gran viga, respectivamente.

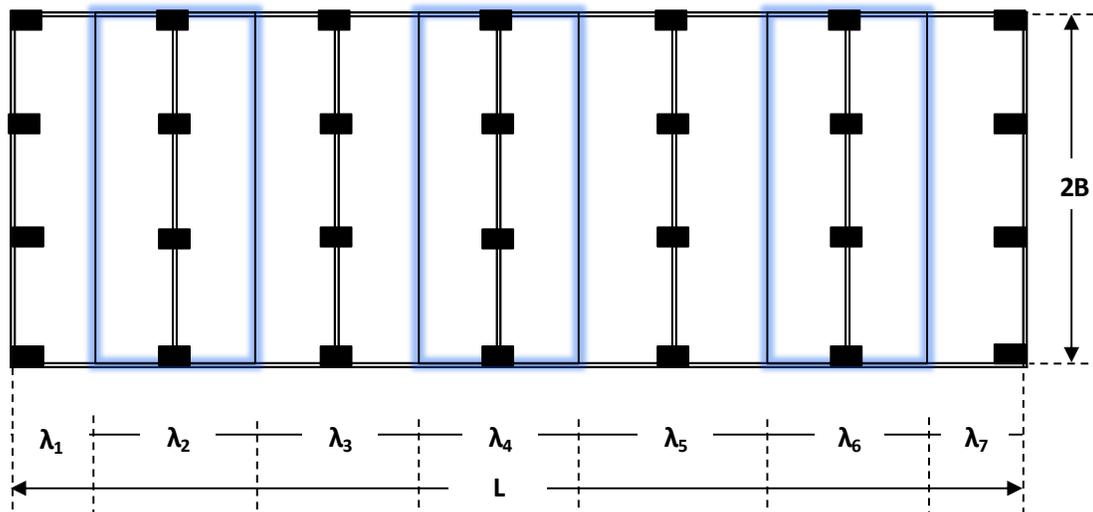


Figura 1. Vista en planta de un edificio dividido en dovelas o áreas tributarias [Elaboración propia].

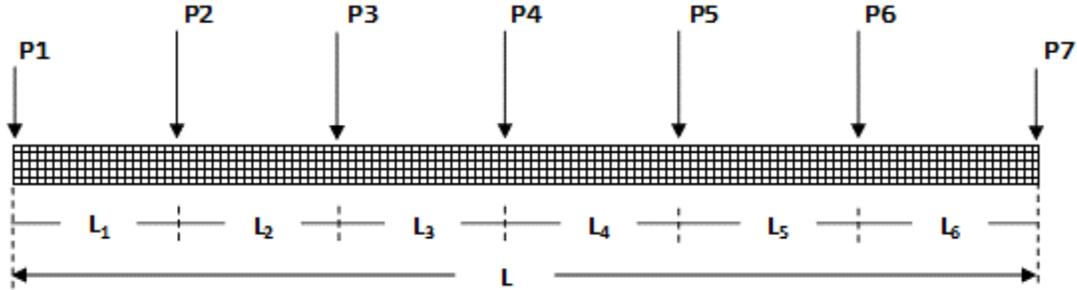


Figura 2. Vista de perfil de un cajón de cimentación idealizado como una gran viga flotante [Elaboración propia].

#### 4.1 Desplazamientos verticales.

Para determinar los desplazamientos verticales  $\delta_i$  se recurrirá al método matricial de asentamientos EMA propuesto por Zeevaert, el cual permite tomar en cuenta simultáneamente la distribución no uniforme de reacciones y la deformación de varios estratos compresibles.

##### 4.1.1 Ecuación Matricial de Asentamientos (E.M.A.).

Para aplicar este método, se deberán determinar las deformaciones volumétricas  $\alpha^k$  por cada estrato  $k$  (siendo  $N$  el número total de estratos) para un tiempo determinado  $t$ ; parámetro que está en función del coeficiente de compresibilidad volumétrica ( $m_v$ ) y del espesor de cada estrato ( $H$ ). Para construir la matriz de rigideces del suelo se deberán determinar los desplazamientos  $\Delta\delta_{ji}^k$  bajo cada punto deseado que se encuentre bajo una dovela o placa  $j$  (siendo  $M$  el número total de dovelas o placas en que se divida el área total de la cimentación en contacto con el suelo), por efecto de una presión unitaria que actúa en una dovela o placa  $i$  de área tributaria  $\bar{a}_i$  (Figura 3).

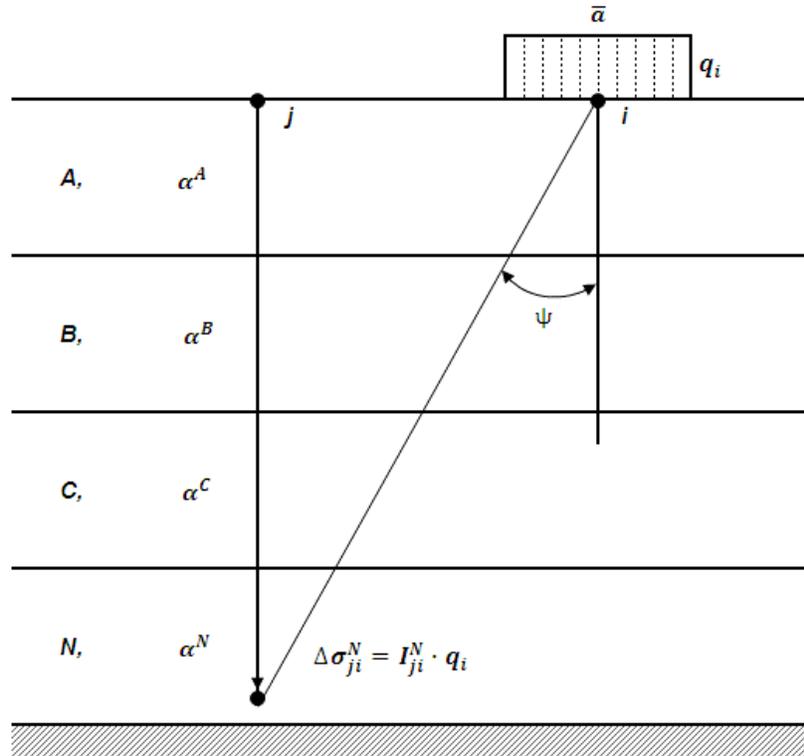


Figura 3. Esfuerzo vertical en un punto [6].

Si se determina el incremento de esfuerzo medio  $\Delta\sigma_{ji}^k$  en cada uno de los puntos deseados, la deformación en cada punto se podrá obtener mediante la siguiente ecuación:

$$\Delta\delta_{ji}^k = \alpha^k \cdot \Delta\sigma_{ji}^k \quad (1)$$

Donde:

$\Delta\delta_{ji}^k$  - desplazamiento en cada punto.

$\alpha^k$  - deformación volumétrica en el estrato  $k$ .

$\Delta\sigma_{ji}^k$  - esfuerzo a la mitad de cada estrato  $k$ .

El desplazamiento vertical bajo un área en el punto  $j$  será la suma de los desplazamientos de los estratos considerados:



$$\delta_{ji} = \sum_{k=1}^N \alpha^k \cdot \Delta\sigma_{ji}^k \quad (2)$$

Si tenemos que:

$$\Delta\sigma_{ji}^k = I_{ji}^k \cdot q_i \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en (2), se tiene:

$$\delta_{ji} = \sum_{k=1}^N \alpha^k \cdot I_{ji}^k \cdot q_i \quad (4)$$

La ecuación (4), es la deformación total bajo el punto  $j$ .

Bajo el supuesto de que el área está cargada con un esfuerzo unitario uniforme ( $q_i = +1$ ), entonces se podrá obtener el desplazamiento unitario vertical en  $j$  debido a la carga unitaria en  $i$  mediante la siguiente ecuación:

$$\delta_{ji} = \sum_{k=1}^N \alpha^k \cdot I_{ji}^k \cdot (1) \quad (5)$$

Para aplicar la ecuación (5) inicialmente se tendrá que calcular los esfuerzos bajo cada dovela a diferentes profundidades del depósito de suelo compresible. Mediante las soluciones de Boussinesq, Westergaard o Fröhlich para áreas rectangulares uniformemente cargadas y por supuesto la solución dependerá de la naturaleza del depósito de suelo, se describen a continuación:

a) Solución de Boussinesq (1885).

Esta solución asume que la carga concentrada o esfuerzo estará sobre un depósito de suelo homogéneo, semi-infinito, isotrópico y elástico. Sin embargo, si la naturaleza del depósito de suelo es estratificada es decir anisotrópico y con cambios de rigidez en la dirección vertical, la solución de Boussinesq no puede aplicarse rigurosamente [6].

b) Solución de Westergaard (1938).

Cuando una carga concentrada o esfuerzo se aplica sobre un depósito de suelo finamente estratificado se considera que es un medio anisotrópico; Westergaard (1938) propuso una solución para calcular la distribución del esfuerzo con respecto a la profundidad, con el supuesto de que la masa de suelo está restringida lateralmente y por lo tanto no habrá



deformación horizontal, pero es libre de deformarse en dirección vertical. En la naturaleza esto es parcialmente verdadero cuando la masa de suelo esta reforzada por varias capas rígidas de arena cementada muy cercanas entre ellas y con un bajo módulo de deformación [6].

c) Solución de Fröhlich (1942).

En las soluciones anteriores se tiene un caso de isotropía (Boussinesq) y un caso de anisotropía (Westergaard), soluciones que consideran un medio ideal elástico. Fröhlich en 1942 desarrolló las soluciones para diferentes casos de isotropía introduciendo el parámetro  $\chi$  con el cual toma en consideración el incremento del módulo de deformación del suelo con respecto a la profundidad, entre otros casos.

La magnitud del factor  $\chi$  de Fröhlich depende de la naturaleza del depósito de suelo y del área cargada. Fröhlich propuso un valor de  $\chi=1.5$  para depósitos de suelo fuertemente estratificados y reforzados por estratos o capas de mayor rigidez, aproximándose razonablemente a la solución de Westergaard. Un valor de  $\chi=2$  para un depósito de suelo estratificado donde los módulos de deformación son diferentes. Un valor de  $\chi=3$  cuando el depósito de suelo se puede considerar homogéneo, isotrópico y elástico, la distribución de esfuerzos es muy aproximada a la solución de Boussinesq. Y finalmente, un valor de  $\chi=4$  o mayor cuando se presente un depósito de arena de gran espesor, homogéneo, sin estratificación y con un módulo de deformación que disminuye con la profundidad [6].

Una vez seleccionada la solución que nos representa las condiciones del depósito de suelo, se divide la cimentación en dovelas de un mismo ancho o bien por áreas tributarias y se calculan los esfuerzos medios. A partir de estos esfuerzos se obtienen los factores de influencias  $I_{ji}^k$  en el centro y debajo de cada área de dovela y a diferentes profundidades con la expresión:

$$I_{ji}^k = \frac{\Delta\sigma_{ji}^k}{q_i} \quad (6)$$

Donde:

$I_{ji}^k$  - factor de influencia (adimensional).

$\Delta\sigma_{ji}^k$  - incremento de esfuerzo (p/e: Fröhlich  $\chi=2$ ).

$q_i$  - esfuerzo unitario (1, Peso/Área).

Al cargar la dovela o placa 1, con los valores obtenidos de la ecuación (6) se podrá construir la matriz de influencias al igual y como se muestra en la figura 4.

	$\bar{a}$								$i$	
	$q_i$									
A,	$I_{11}^A$	$I_{21}^A$	$I_{31}^A$	$I_{41}^A$	$I_{51}^A$	$I_{61}^A$	$I_{71}^A$	....	$I_{ji}^k$	$\alpha^A$
B,	$I_{11}^B$	$I_{21}^B$	$I_{31}^B$	$I_{41}^B$	$I_{51}^B$	$I_{61}^B$	$I_{71}^B$	....	$I_{ji}^k$	$\alpha^B$
C,	$I_{11}^C$	$I_{21}^C$	$I_{31}^C$	$I_{41}^C$	$I_{51}^C$	$I_{61}^C$	$I_{71}^C$	....	$I_{ji}^k$	$\alpha^C$
D,	$I_{11}^D$	$I_{21}^D$	$I_{31}^D$	$I_{41}^D$	$I_{51}^D$	$I_{61}^D$	$I_{71}^D$	....	$I_{ji}^k$	$\alpha^D$
E,	$I_{11}^E$	$I_{21}^E$	$I_{31}^E$	$I_{41}^E$	$I_{51}^E$	$I_{61}^E$	$I_{71}^E$	....	$I_{ji}^k$	$\alpha^E$
F,	$I_{11}^F$	$I_{21}^F$	$I_{31}^F$	$I_{41}^F$	$I_{51}^F$	$I_{61}^F$	$I_{71}^F$	....	$I_{ji}^k$	$\alpha^F$
G,	$I_{11}^G$	$I_{21}^G$	$I_{31}^G$	$I_{41}^G$	$I_{51}^G$	$I_{61}^G$	$I_{71}^G$	....	$I_{ji}^k$	$\alpha^G$
H,	$I_{11}^H$	$I_{21}^H$	$I_{31}^H$	$I_{41}^H$	$I_{51}^H$	$I_{61}^H$	$I_{71}^H$	....	$I_{ji}^k$	$\alpha^H$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N,	$I_{ji}^N$	....	$I_{ji}^N$	$\alpha^k$						

Figura 4. Factores de influencia para el esfuerzo unitario en la dovela 1 [7].

$$[I_{ji}^k] = \begin{bmatrix} I_{11}^A & I_{21}^A & I_{31}^A & I_{41}^A & I_{51}^A & I_{61}^A & I_{71}^A \\ I_{11}^B & I_{21}^B & I_{31}^B & I_{41}^B & I_{51}^B & I_{61}^B & I_{71}^B \\ I_{11}^C & I_{21}^C & I_{31}^C & I_{41}^C & I_{51}^C & I_{61}^C & I_{71}^C \\ I_{11}^D & I_{21}^D & I_{31}^D & I_{41}^D & I_{51}^D & I_{61}^D & I_{71}^D \\ I_{11}^E & I_{21}^E & I_{31}^E & I_{41}^E & I_{51}^E & I_{61}^E & I_{71}^E \\ I_{11}^F & I_{21}^F & I_{31}^F & I_{41}^F & I_{51}^F & I_{61}^F & I_{71}^F \\ I_{11}^G & I_{21}^G & I_{31}^G & I_{41}^G & I_{51}^G & I_{61}^G & I_{71}^G \end{bmatrix} \quad (7)$$

Con la matriz de influencias  $[I_{ji}^k]$  se podrá calcular los desplazamientos verticales unitarios debajo de la dovela 1, así como los desplazamientos verticales en las dovelas 2 a 7 debido al esfuerzo unitario  $q_i = +I$  aplicado en el área tributaria o dovela 1, simplemente multiplicándola por el vector de compresibilidades. De manera idéntica se aplica un esfuerzo unitario por cada dovela, obteniéndose sus respectivas matrices de influencias.

Debido a la forma en que se dispuso la división de los estratos se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$[\bar{\delta}_{ji}] = |\alpha^k| \cdot |I_{ji}^k|^T \quad (8)$$

O bien;

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} \\ \bar{\delta}_{21} \\ \bar{\delta}_{31} \\ \bar{\delta}_{41} \\ \bar{\delta}_{51} \\ \bar{\delta}_{61} \\ \bar{\delta}_{71} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^A \\ \alpha^B \\ \alpha^C \\ \alpha^D \\ \alpha^E \\ \alpha^F \\ \alpha^G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{11}^A & I_{11}^B & I_{11}^C & I_{11}^D & I_{11}^E & I_{11}^F & I_{11}^G \\ I_{21}^A & I_{21}^B & I_{21}^C & I_{21}^D & I_{21}^E & I_{21}^F & I_{21}^G \\ I_{31}^A & I_{31}^B & I_{31}^C & I_{31}^D & I_{31}^E & I_{31}^F & I_{31}^G \\ I_{41}^A & I_{41}^B & I_{41}^C & I_{41}^D & I_{41}^E & I_{41}^F & I_{41}^G \\ I_{51}^A & I_{51}^B & I_{51}^C & I_{51}^D & I_{51}^E & I_{51}^F & I_{51}^G \\ I_{61}^A & I_{61}^B & I_{61}^C & I_{61}^D & I_{61}^E & I_{61}^F & I_{61}^G \\ I_{71}^A & I_{71}^B & I_{71}^C & I_{71}^D & I_{71}^E & I_{71}^F & I_{71}^G \end{bmatrix} \quad (9)$$

Como la ecuación (8) se construye y se resuelve para cada punto en la superficie (1, 2, 3, ..., i), además con el producto de cada una se puede formar la matriz general, tal como se muestra a continuación:

$$[\bar{\delta}_{ji}] = \begin{bmatrix} |\bar{\delta}_{j1}|^T \\ |\bar{\delta}_{j2}|^T \\ |\bar{\delta}_{j3}|^T \\ |\bar{\delta}_{j4}|^T \\ |\bar{\delta}_{j5}|^T \\ |\bar{\delta}_{j6}|^T \\ |\bar{\delta}_{j7}|^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} & \bar{\delta}_{21} & \bar{\delta}_{31} & \bar{\delta}_{41} & \bar{\delta}_{51} & \bar{\delta}_{61} & \bar{\delta}_{71} \\ \bar{\delta}_{12} & \bar{\delta}_{22} & \bar{\delta}_{32} & \bar{\delta}_{42} & \bar{\delta}_{52} & \bar{\delta}_{62} & \bar{\delta}_{72} \\ \bar{\delta}_{13} & \bar{\delta}_{23} & \bar{\delta}_{33} & \bar{\delta}_{43} & \bar{\delta}_{53} & \bar{\delta}_{63} & \bar{\delta}_{73} \\ \bar{\delta}_{14} & \bar{\delta}_{24} & \bar{\delta}_{34} & \bar{\delta}_{44} & \bar{\delta}_{54} & \bar{\delta}_{64} & \bar{\delta}_{74} \\ \bar{\delta}_{15} & \bar{\delta}_{25} & \bar{\delta}_{35} & \bar{\delta}_{45} & \bar{\delta}_{55} & \bar{\delta}_{65} & \bar{\delta}_{75} \\ \bar{\delta}_{16} & \bar{\delta}_{26} & \bar{\delta}_{36} & \bar{\delta}_{46} & \bar{\delta}_{56} & \bar{\delta}_{66} & \bar{\delta}_{76} \\ \bar{\delta}_{17} & \bar{\delta}_{27} & \bar{\delta}_{37} & \bar{\delta}_{47} & \bar{\delta}_{57} & \bar{\delta}_{67} & \bar{\delta}_{77} \end{bmatrix} \quad (10)$$

La matriz expresada en la ecuación (10) se le conoce como **MATRIZ DE ASENTAMIENTOS POR CARGA VIRTUAL DEL SUELO** y al trasponerse y multiplicarse por el vector o matriz columna de reacciones reales proporciona el vector o matriz columna de los desplazamientos verticales reales de la superficie cargada. Por lo tanto, se obtiene finalmente:

$$[\delta_i] = [\bar{\delta}_{ji}]^T \cdot |q_i| \quad (11)$$

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} & \bar{\delta}_{12} & \bar{\delta}_{13} & \bar{\delta}_{14} & \bar{\delta}_{15} & \bar{\delta}_{16} & \bar{\delta}_{17} \\ \bar{\delta}_{21} & \bar{\delta}_{22} & \bar{\delta}_{23} & \bar{\delta}_{24} & \bar{\delta}_{25} & \bar{\delta}_{26} & \bar{\delta}_{27} \\ \bar{\delta}_{31} & \bar{\delta}_{32} & \bar{\delta}_{33} & \bar{\delta}_{34} & \bar{\delta}_{35} & \bar{\delta}_{36} & \bar{\delta}_{37} \\ \bar{\delta}_{41} & \bar{\delta}_{42} & \bar{\delta}_{43} & \bar{\delta}_{44} & \bar{\delta}_{45} & \bar{\delta}_{46} & \bar{\delta}_{47} \\ \bar{\delta}_{51} & \bar{\delta}_{52} & \bar{\delta}_{53} & \bar{\delta}_{54} & \bar{\delta}_{55} & \bar{\delta}_{56} & \bar{\delta}_{57} \\ \bar{\delta}_{61} & \bar{\delta}_{62} & \bar{\delta}_{63} & \bar{\delta}_{64} & \bar{\delta}_{65} & \bar{\delta}_{66} & \bar{\delta}_{67} \\ \bar{\delta}_{71} & \bar{\delta}_{72} & \bar{\delta}_{73} & \bar{\delta}_{74} & \bar{\delta}_{75} & \bar{\delta}_{76} & \bar{\delta}_{77} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{bmatrix} \quad (12)$$

A la ecuación (11) se le conoce como la Ecuación Matricial de Asentamientos (**EMA**) y proporciona los desplazamientos verticales reales para una cimentación de comportamiento totalmente flexible, sin embargo, también se usa para los casos de cimentación semi-rígida o rígida, pero por iteraciones.

Cuando se considera que la cimentación tendrá un comportamiento rígido se supone que los desplazamientos verticales en toda el área de contacto de la cimentación con el suelo serán uniformes o constantes, es decir  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_i = \delta'_a$ . Por lo que, el valor de este desplazamiento será el valor promedio de los resultados de la ecuación (12). Si los desplazamientos verticales de los primeros puntos son simétricos con los últimos puntos, la ecuación (13) puede ser aplicada.

$$\delta'_a = \left| \frac{2(\delta_1 \cdot \lambda_1 + \delta_2 \cdot \lambda_2 + \delta_3 \cdot \lambda_3 + \delta_4 \cdot \frac{\lambda_4}{2})}{L} \right| \quad (13)$$

Donde:

$\lambda_i$  = Ancho de las dovelas en la dirección longitudinal

$L$  = Largo de la planta de cimentación.

Como siguiente paso, de la ecuación (12) se despeja el vector o matriz columnar de reacciones  $q_i$  ya sea obteniendo la inversa de la matriz de flexibilidades:  $\{[\delta_{ji}]^T\}^{-1}$  o resolviendo el sistema de ecuaciones por un método conocido (Newton-Raphson, Cholesky, etc.). Para invertir la matriz se podrá recurrir a cualquier método disponible en la literatura matemática, como por el ejemplo el Método de Cofactores, Método de la Matriz Adjunta o el Método de Gauss. En términos generales queda:

$$[q_i] = \{[\delta_{ji}]^T\}^{-1} [\delta_{ji}] \quad (14)$$

Para determinar las reacciones  $q_i$  considerando un desplazamiento vertical uniforme en toda área de desplante, se multiplica la inversa de la matriz de flexibilidades del suelo con el vector o matriz columnar de desplazamientos verticales uniformes (Eq. 13).

$$[q_i] = \{[\delta_{ji}]^T\}^{-1} [\delta_a] \quad (15)$$

Con las nuevas reacciones  $q_i$  [F, L<sup>-2</sup>] se obtiene el nuevo peso total de la estructura (superestructura más sub-estructura) mediante la siguiente expresión:

$$\sum W_T = \sum q_i \cdot L \cdot 2B \quad (16)$$

El peso total obtenido con la ecuación (16) resulta ligeramente mayor al peso total real de la estructura por lo que se deberá realizar un ajuste, para ello se determina un factor de corrección con la siguiente expresión:

$$f = \frac{\sum W_R}{\sum W_T} \quad (17)$$

Finalmente, se corrigen las reacciones y el desplazamiento vertical uniforme.

$$[q_{fi}] = [q_i] \cdot f \quad (18)$$

$$[\delta_{af}] = [\delta_a] \cdot f \quad (19)$$

#### 4.2 Distribución de reacciones en contacto con la losa de cimentación.

Los esfuerzos  $q_{fi}$  correspondientes a cada dovela en unidades de presión se transforman a cargas linealmente repartidas  $Q_i$ , quedando con las unidades derivadas [F, L<sup>-1</sup>], con la expresión:

$$[Q_i] = [q_{fi}] \cdot 2B \quad (20)$$

Dónde:

$[Q_i]$  – reacciones en las dovelas, en unidad derivada [F, L<sup>-1</sup>].

$[q_{fi}]$  – esfuerzos finales corregidos en la dovela, en unidad derivada  $[F, L^{-2}]$ .

$2B$  – ancho del cajón de cimentación, en unidad de longitud  $[m]$ .

La distribución de reacciones o cargas uniformemente repartidas bajo la cimentación dependerá de la configuración deformada de la cimentación. En la figura 5, se muestra un ejemplo de la distribución de reacciones a lo largo de la cimentación.

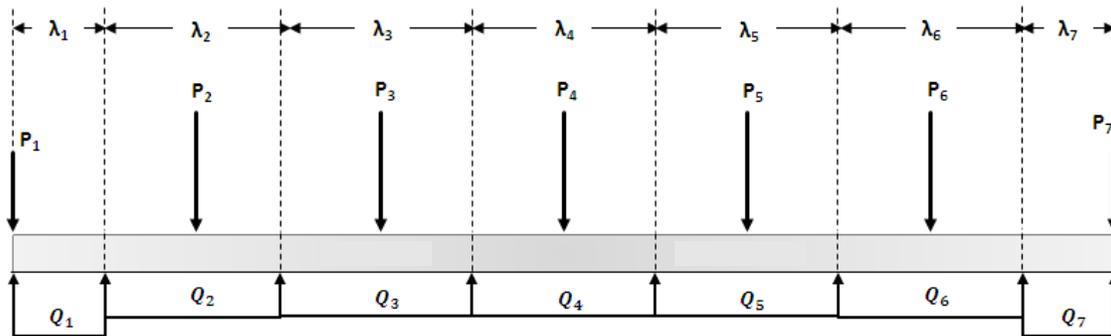


Figura 5. Distribución de reacciones  $Q_i$  en  $[F, L^{-1}]$  por cada dovela en una cimentación de comportamiento rígido [7].

#### 4.3 Elementos mecánicos de diseño para una cimentación rígida.

Debido a las cargas aplicadas sobre la cimentación rígida tipo cajón, se desarrollan fuerzas cortantes internas y momentos flexionantes que varían de un punto a otro a lo largo del eje de la cimentación. Para el análisis estructural de la cimentación la idealizamos como una gran viga flotante y determinamos las fuerzas cortantes y momentos flexionantes representándolos finalmente en gráficas denominadas diagramas y que brindarán información detallada sobre la variación de los elementos mecánicos a lo largo del eje y permitiendo ubicar los valores máximos y mínimos tanto para las fuerzas cortantes como para los momentos flexionantes.

Conocida la distribución de cargas  $P_i$  sobre la cimentación y las reacciones  $Q_i$ , es posible mediante las ecuaciones de la estática calcular los elementos mecánicos de diseño y cuantificar la cantidad de acero de refuerzo y su distribución en el eje longitudinal y transversal de la losa de fondo del cajón de cimentación.



La convención de signos que se utilizará será la que se aplica con mayor frecuencia en la práctica de la ingeniería. Las direcciones positivas son las siguientes: las reacciones  $Q_i$  que actúan hacia arriba sobre la viga. Las direcciones negativas son las siguientes: las fuerzas o cargas  $P_i$  que gravitan sobre la viga (cimentación).

#### 4.3.1 *Determinación del diagrama de fuerzas cortantes.*

Para determinar el diagrama de fuerzas cortantes a partir de la distribución de reacciones  $Q_i$  estas deben ser transformadas a cargas puntuales y sumarlas o restarlas aritméticamente con las cargas  $P_i$  que gravitan sobre la cimentación. Se calcula el valor de la fuerza cortante en distintas secciones de la viga, se trazan estos valores como ordenadas a lo largo del eje de la viga y se unen los puntos obtenidos para definir el diagrama. Recordemos que la fuerza cortante en una sección de la viga es igual a la suma de todas las fuerzas que actúan del lado izquierdo o derecho de dicha sección. Las fuerzas se calculan sección por sección (forma discreta), o puede establecerse una ecuación que permita calcular el valor en cualquier sección en forma continua [8].

El diagrama correspondiente lo dibujamos por arriba y por abajo del eje de la viga, además, para formular las ecuaciones en términos de la longitud de la viga  $L$  o bien en función de los anchos de dovelas  $\lambda_i$ , es necesario elegir el origen y un sentido de  $\lambda$ . Aunque, la elección es arbitraria, es común que el origen se ubique del lado izquierdo de la viga y la dirección positiva sea hacia la derecha.

El procedimiento para determinar las fuerzas cortantes en una localización específica de la viga es como se describe a continuación.

1. Tomando a la figura 5 como ejemplo, se divide en secciones transversales perpendiculares al eje longitudinal de la viga en el punto donde se quiere calcular las fuerzas cortantes, así se corta la viga en varias partes.

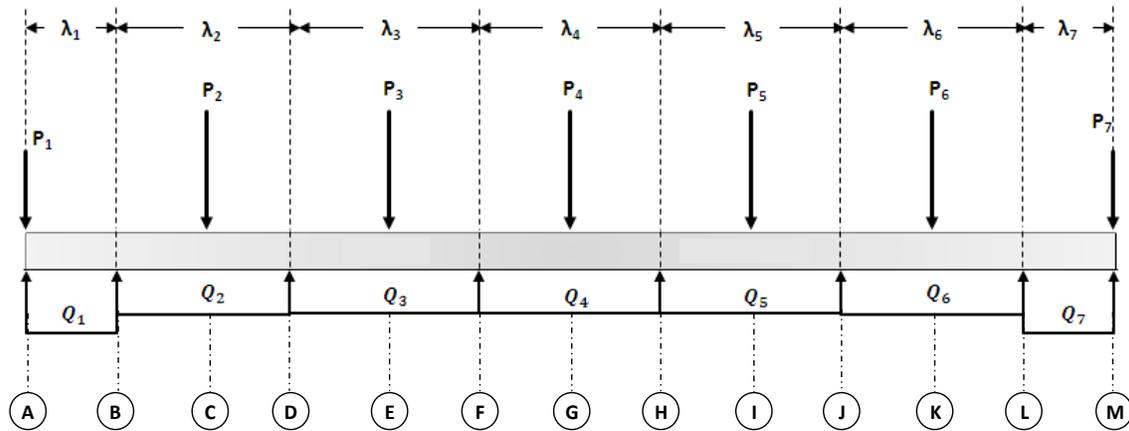


Figura 6. División de la viga en varias secciones [Elaboración propia].

- Se determina el cortante del lado izquierdo y derecho de la sección sumando aritméticamente las componentes en la dirección perpendicular al eje de la viga de todas las fuerzas externas y reacciones actuantes en la porción seleccionada. Si se utiliza la porción de la izquierda para el análisis, entonces las fuerzas externas que actúan hacia arriba se consideran positivas, mientras que las fuerzas externas que actúan hacia abajo son negativas. A continuación, se muestra un ejemplo, tomando como referencia la figura 6.

Sección **A**: Lado izquierdo,  $L = 0$

$$S_1 = -P_1$$

Sección **B**: Lado izquierdo,

$$S_2 = -P_1 + Q_1 \cdot \lambda_1$$

Sección **C**:

Lado izquierdo,

$$S_4 = -P_1 + Q_1 \cdot \lambda_1 + Q_2 \cdot \frac{\lambda_2}{2}$$

Lado derecho,

$$S_5 = -P_1 + Q_1 \cdot \lambda_1 + Q_2 \cdot \frac{\lambda_2}{2} - P_2$$

Sección D:

Lado izquierdo,

$$S_6 = -P_1 + Q_1 \cdot \lambda_1 - P_2 + Q_2 \cdot \lambda_2$$

Sección E:

Lado izquierdo,

$$S_7 = -P_1 + Q_1 \cdot \lambda_1 - P_2 + Q_2 \cdot \lambda_2 + Q_3 \cdot \frac{\lambda_3}{2}$$

Lado derecho,

$$S_8 = -P_1 + Q_1 \cdot \lambda_1 - P_2 + Q_2 \cdot \lambda_2 + Q_3 \cdot \frac{\lambda_3}{2} - P_3$$

De manera análoga se establecen las ecuaciones para todas las secciones y se determinan los cortantes en los puntos de interés, obteniéndose un diagrama de fuerzas cortantes como el que se muestra en la figura 7.

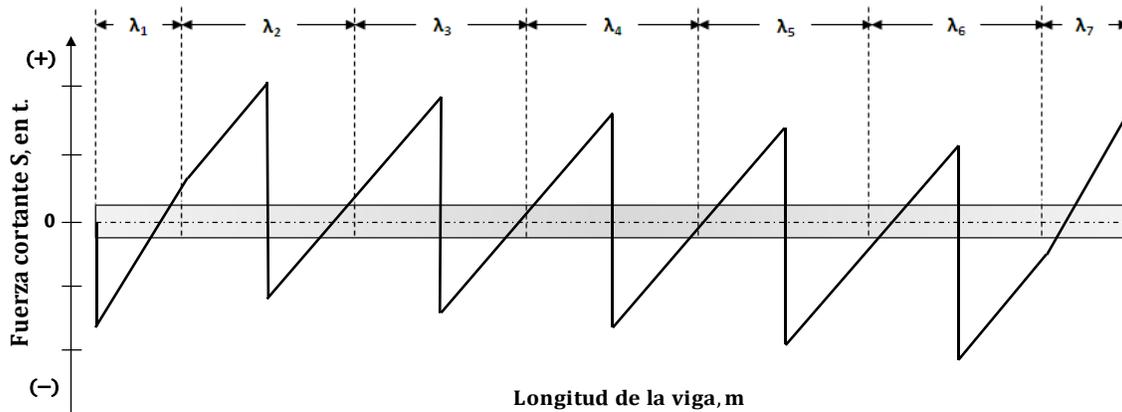


Figura 7. Ejemplo de diagrama de fuerzas cortantes para una cimentación rígida [Elaboración propia].

#### 4.3.2 Determinación del diagrama de momentos flexionantes.

Un método muy útil y fácil para determinar el diagrama de momentos flexionantes en vigas flotantes es el método de área de momentos. A partir del diagrama de fuerzas cortantes se puede calcular y determinar los momentos máximos y mínimos. Se comienza en primer lugar por el cálculo de las áreas de cada triángulo, para ello hay que calcular la longitud de

sus bases. El método está enfocado en determinar los momentos flexionantes en puntos específicos a lo largo de la viga, en lugar de construir la ecuación general de la elástica. El procedimiento semi-gráfico es el siguiente [8].

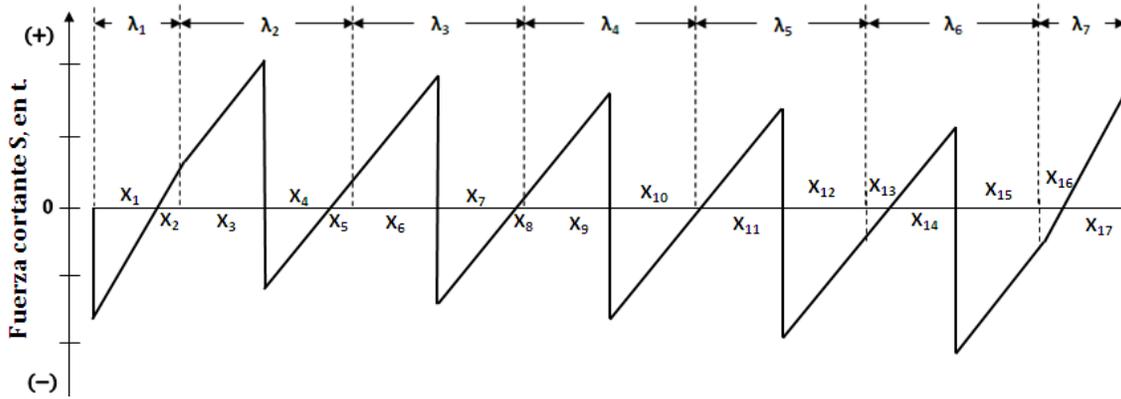


Figura 8. Áreas de momento a partir del diagrama de fuerzas cortantes [Elaboración propia].

1. Se calculan los valores de las bases de cada triángulo ( $X_1 \dots X_n$ ) en valor absoluto dividiendo la fuerza cortante entre la reacción como carga uniformemente distribuida.

Por ejemplo, para el tramo  $0 < L \leq \lambda_1$ :

$$X_1 = \left| \frac{S_1}{Q_1} \right| = \left| \frac{-P_1}{Q_1} \right|$$

$$X_2 = \left| \frac{S_2}{Q_1} \right| = \left| \frac{-P_1 + Q_1 \cdot \lambda_1}{Q_1} \right|$$

Para el tramo  $\lambda_1 < L \leq \lambda_1 + \lambda_2$ :

$$X_3 = \left| \frac{S_2}{Q_2} \right| = \left| \frac{(-P_1 + Q_1 \cdot \lambda_1 + Q_2 \cdot \frac{\lambda_2}{2}) - (-P_1 + Q_1 \cdot \lambda_1)}{Q_2} \right|$$

De manera similar se calculan los valores para  $X_4$  a  $X_{16}$ .

2. Una vez calculado los valores de  $X_n$  por cada triángulo, el momento flexionante será igual al área de cada triángulo. El cálculo se inicia de izquierda a derecha y a mayor distancia del origen se suma el momento flexionante anterior, por ejemplo:

En  $X = 0$ , el momento flexionante es igual a cero.

$$M_0 = 0$$

A una distancia del origen igual a  $\lambda - X_1$ , la magnitud del momento flexionante es igual a:

$$M_1 = M_0 + \frac{S_1 \cdot X_1}{2}$$

A una distancia del origen igual  $\lambda_1$ , la magnitud del momento flexionante es igual a:

$$M_2 = M_1 + \frac{S_2 \cdot X_2}{2}$$

A una distancia del origen igual  $\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2}$ , la magnitud del momento flexionante es igual a:

$$M_3 = M_2 + \left[ \frac{(S_3 - S_2) \cdot X_3}{2} + (S_2 \cdot X_3) \right]$$

Para este caso tenemos un triángulo y un rectángulo por lo que el contenido de los corchetes representa la suma de las áreas de momentos de las dos figuras.

De manera análoga se calculan los momentos flexionantes a todo lo largo de la viga, resultando por ejemplo un diagrama como el que se muestra a continuación.

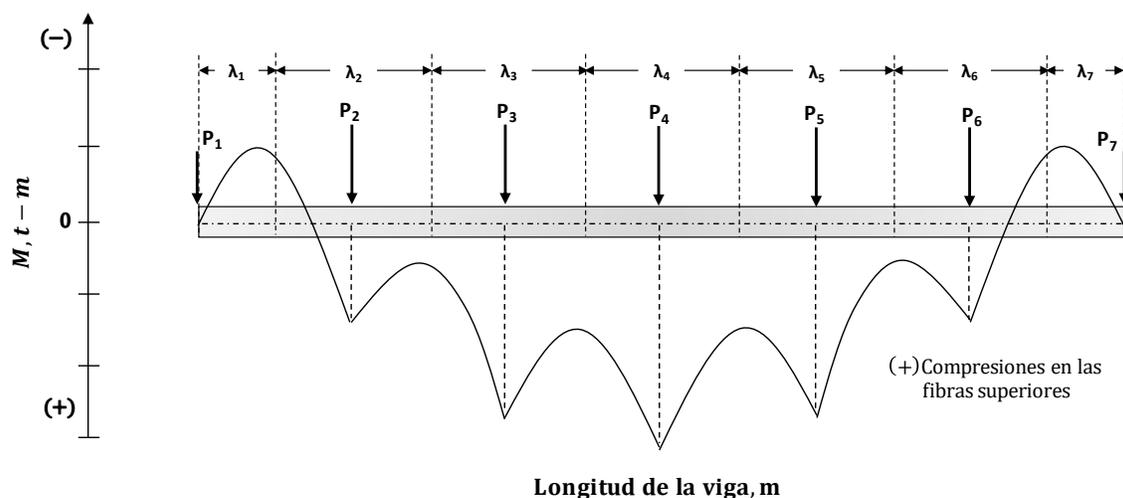


Figura 9. Ejemplo de diagrama de momentos flexionantes en una cimentación rígida. [6].

El diagrama mostrado en la figura 9 señala la ubicación de los máximos y mínimos momentos flexionantes en toda la longitud de la cimentación idealizada como una gran viga. Asimismo, muestra qué tramos estarán sometidos a compresiones y cuales a tensiones.



En el diseño estructural de cimentaciones los materiales comunes para construir cimentaciones son el concreto y el acero; no está por demás recordar que el concreto simple sin refuerzo es resistente a la compresión, pero es débil en tensión, lo que limita su aplicabilidad como material estructural. Para resistir las tensiones de acuerdo con la figura 9, se emplea acero de refuerzo, generalmente en forma de barras, colocado en los tramos donde se desarrollarán tensiones bajo acciones de servicios. El acero restringe el desarrollo de grietas originadas por la poca resistencia a la tensión del concreto [10].

El uso del refuerzo no está limitado sólo a la finalidad anterior, también se emplea en los tramos de compresión para:

- Aumentar la resistencia de la losa de cimentación.
- Reducir las deformaciones debidas a cargas de larga duración.
- Proporcionar confinamiento lateral al concreto.

#### 4.4 Ejemplo numérico de un análisis de interacción suelo-estructura.

Para desarrollar este ejercicio, se tomará el ejemplo A.VIII Cimentación de pontones, presentado en el libro “*Foundation Engineering For Difficult Subsoil Conditions*” del Dr. Leonardo Zeevaert. El cual consiste es desplantar un edificio mediante un cajón de cimentación del caso compensado.

Los datos para el diseño son los siguientes:

- a) Sus dimensiones en planta son: 12 m de ancho, 60 m de largo, 720 m<sup>2</sup> de área.
- b) El terreno de cimentación es un depósito de arcilla compresible, homogéneo e isotrópico con un espesor de 20 m, dividido en subcapas de 2.86 m y un coeficiente de variación volumétrica  $m_v=0.010$  cm<sup>2</sup>/kg que corresponde al nivel de esfuerzo inducido en la masa de suelo por las cargas de la cimentación y para un cierto tiempo del fenómeno de consolidación de los suelos, por ejemplo, para  $t=15$  años. Las cargas son distribuidas de acuerdo con la figura 10.
- c) La carga promedio, por unidad de área, es de 10 t/m<sup>2</sup>.
- d) Debido a que se considera que el depósito de suelo es homogéneo e isotrópico, la solución más razonable que se aplica para calcular los esfuerzos verticales  $\sigma_{ji}^k$  es la de Boussinesq ( $\chi=3$ ).

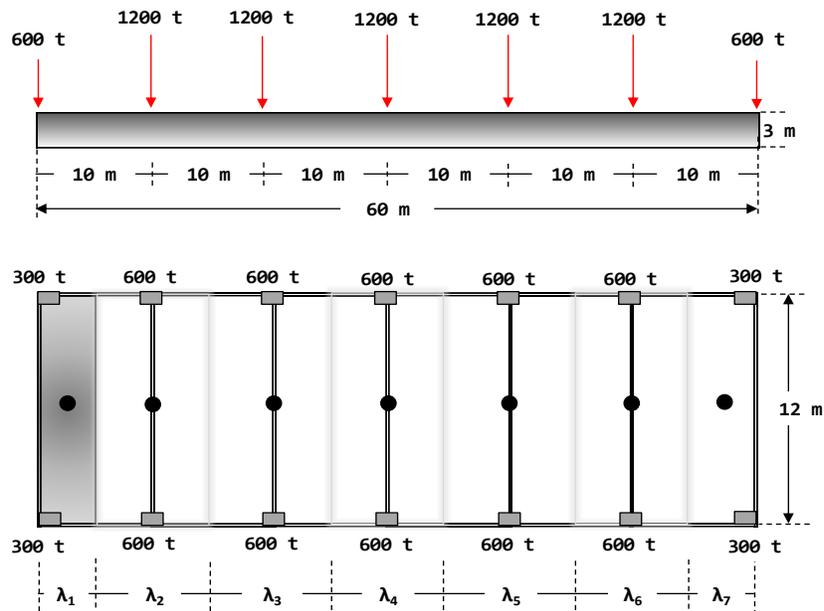


Figura 10. Cargas y áreas tributarias [6].

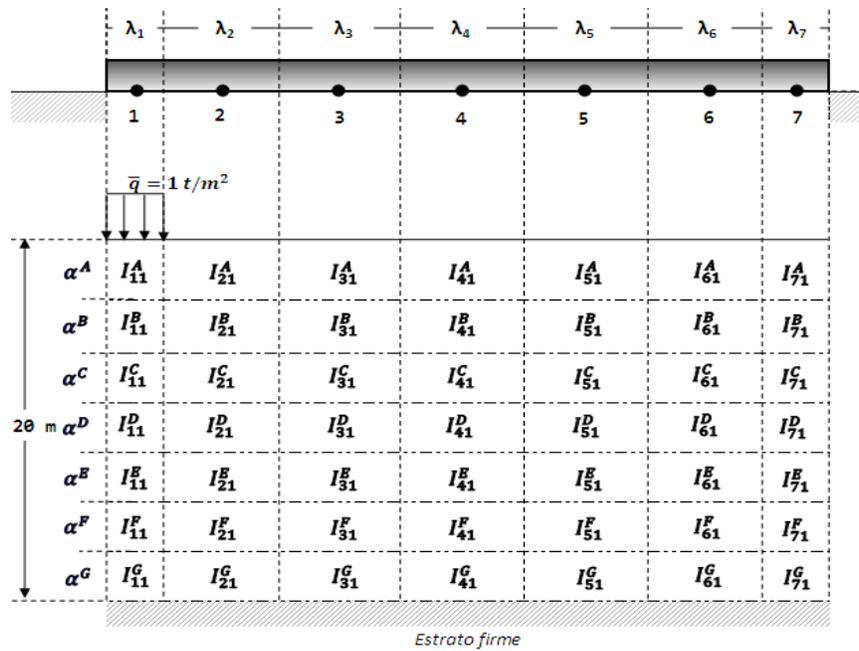


Figura 11. Factores de influencias debajo de las dovelas [6].

PROCEDIMIENTO:

1. Subdividimos el área de cimentación en siete dovelas. Para este ejercicio las dovelas intermedias tienen un ancho de 10 m y las dovelas de los extremos 5 m (Figura 11).
2. Se aplica una carga unitaria en la dovela 1 y mediante la solución de Boussinesq para áreas rectangulares uniformemente cargadas se obtienen los incrementos de esfuerzos verticales debajo de la dovela 1 y su influencia por debajo y al centro de las 6 dovelas restantes, a la profundidad media de cada estrato. Su representación matricial es:

$$[\sigma_{ji}^N] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^A & \sigma_{21}^A & \sigma_{31}^A & \sigma_{41}^A & \sigma_{51}^A & \sigma_{61}^A & \sigma_{71}^A \\ \sigma_{11}^B & \sigma_{21}^B & \sigma_{31}^B & \sigma_{41}^B & \sigma_{51}^B & \sigma_{61}^B & \sigma_{71}^B \\ \sigma_{11}^C & \sigma_{21}^C & \sigma_{31}^C & \sigma_{41}^C & \sigma_{51}^C & \sigma_{61}^C & \sigma_{71}^C \\ \sigma_{11}^D & \sigma_{21}^D & \sigma_{31}^D & \sigma_{41}^D & \sigma_{51}^D & \sigma_{61}^D & \sigma_{71}^D \\ \sigma_{11}^E & \sigma_{21}^E & \sigma_{31}^E & \sigma_{41}^E & \sigma_{51}^E & \sigma_{61}^E & \sigma_{71}^E \\ \sigma_{11}^F & \sigma_{21}^F & \sigma_{31}^F & \sigma_{41}^F & \sigma_{51}^F & \sigma_{61}^F & \sigma_{71}^F \\ \sigma_{11}^G & \sigma_{21}^G & \sigma_{31}^G & \sigma_{41}^G & \sigma_{51}^G & \sigma_{61}^G & \sigma_{71}^G \\ \sigma_{11}^H & \sigma_{21}^H & \sigma_{31}^H & \sigma_{41}^H & \sigma_{51}^H & \sigma_{61}^H & \sigma_{71}^H \end{bmatrix}$$

La matriz anterior representa los niveles de esfuerzos debido a la aplicación de un incremento de carga unitaria en la dovela 1. El primer subíndice (*j*) de cada elemento que conforma la matriz indica la dovela donde se desea conocer el incremento de esfuerzo vertical y el segundo subíndice (*i*) denota la dovela donde se ha aplicado la carga unitaria  $\bar{q}$  y el superíndice indica el estrato donde se quiere conocer el incremento de esfuerzo vertical.

Los valores para la matriz de incremento de esfuerzos verticales debido a la carga unitaria en la dovela 1 es:

$$\sigma_{ji}^N = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \mathbf{0.9414453} & 0.0033361 & 0.0000503 & 0.0000053 & 0.0000011 & 0.0000003 & 0.0000002 \\ \hline \mathbf{0.5791357} & 0.0433785 & 0.0011851 & 0.0001351 & 0.0000295 & 0.0000091 & 0.0000044 \\ \hline \mathbf{0.3407827} & 0.0769385 & 0.0042810 & 0.0005631 & 0.0001288 & 0.0000408 & 0.0000199 \\ \hline \mathbf{0.2138749} & 0.0826488 & 0.0084540 & 0.0013307 & 0.0003251 & 0.0001063 & 0.0000525 \\ \hline \mathbf{0.1434538} & 0.0747831 & 0.0123122 & 0.0023482 & 0.0006208 & 0.0002109 & 0.0001059 \\ \hline \mathbf{0.1017402} & 0.0635857 & 0.0150410 & 0.0034609 & 0.0009978 & 0.0003543 & 0.0001814 \\ \hline \mathbf{0.0754522} & 0.0530047 & 0.0165063 & 0.0045188 & 0.0014251 & 0.0005310 & 0.0002781 \\ \hline \end{array}$$

De manera análoga se conforman las matrices aplicando un incremento de esfuerzo unitario dovela por dovela.

Aplicando la ecuación (6) se determinan los factores de influencias  $I_{ji}^N$  y se construyen las matrices de factores de influencias (Figura 11).



$$I_{ji}^N = \frac{\Delta\sigma_{ji}^N}{\bar{q}_i}$$

Como el esfuerzo  $\bar{q}_i$  es unitario, los factores de influencias resultan iguales a los incrementos de esfuerzos verticales, por lo que la matriz de factores de influencias nos queda igual. Debido al incremento de esfuerzo vertical en la dovela 1, se tiene:

$$I_{ji}^N = \begin{bmatrix} 0.9414453 & 0.0033361 & 0.0000503 & 0.0000053 & 0.0000011 & 0.0000003 & 0.0000002 \\ 0.5791357 & 0.0433785 & 0.0011851 & 0.0001351 & 0.0000295 & 0.0000091 & 0.0000044 \\ 0.3407827 & 0.0769385 & 0.0042810 & 0.0005631 & 0.0001288 & 0.0000408 & 0.0000199 \\ 0.2138749 & 0.0826488 & 0.0084540 & 0.0013307 & 0.0003251 & 0.0001063 & 0.0000525 \\ 0.1434538 & 0.0747831 & 0.0123122 & 0.0023482 & 0.0006208 & 0.0002109 & 0.0001059 \\ 0.1017402 & 0.0635857 & 0.0150410 & 0.0034609 & 0.0009978 & 0.0003543 & 0.0001814 \\ 0.0754522 & 0.0530047 & 0.0165063 & 0.0045188 & 0.0014251 & 0.0005310 & 0.0002781 \end{bmatrix}$$

Las respectivas matrices de influencias para las dovelas 2 a 7 se presentan en el apéndice A.

- Se obtiene la transpuesta de cada matriz de factores de influencias.

$$[I_{ji}^N]^T = \begin{bmatrix} 0.9414453 & 0.5791357 & 0.3407827 & 0.2138749 & 0.1434538 & 0.1017402 & 0.0754522 \\ 0.0033361 & 0.0433785 & 0.0769385 & 0.0826488 & 0.0747831 & 0.0635857 & 0.0530047 \\ 0.0000503 & 0.0011851 & 0.0042810 & 0.0084540 & 0.0123122 & 0.0150410 & 0.0165063 \\ 0.0000053 & 0.0001351 & 0.0005631 & 0.0013307 & 0.0023482 & 0.0034609 & 0.0045188 \\ 0.0000011 & 0.0000295 & 0.0001288 & 0.0003251 & 0.0006208 & 0.0009978 & 0.0014251 \\ 0.0000003 & 0.0000091 & 0.0000408 & 0.0001063 & 0.0002109 & 0.0003543 & 0.0005310 \\ 0.0000002 & 0.0000044 & 0.0000199 & 0.0000525 & 0.0001059 & 0.0001814 & 0.0002781 \end{bmatrix}$$

- Deformación volumétrica por cada estrato  $\alpha^N$ .

La deformación volumétrica se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$\alpha^N = m_v \cdot d_i$$

Dónde:

$\alpha^N$  - deformación volumétrica, en  $m^3/t$ .

N – estrato de análisis.

$m_v$  – coeficiente de compresibilidad volumétrica,  $m^2/t$ .

$d_i$  – espesor del estrato de análisis, en m.



$$\alpha^A = m_v \cdot d_i = \left(0.0010 \frac{m^2}{t}\right) (2.857 m) = 0.002857 \frac{m^3}{t}$$

El depósito de suelo es, homogéneo e isótropo y se ha dividido en capas del mismo espesor, por lo que, los coeficientes de deformación volumétrica tienen el mismo valor, es decir:

$$\alpha^A = \alpha^B = \alpha^C = \dots = \alpha^G$$

Con los resultados obtenidos se construye el vector o matriz columnar de coeficientes de deformación volumétrica siguiente:

$$\begin{bmatrix} \alpha^A \\ \alpha^B \\ \alpha^C \\ \alpha^D \\ \alpha^E \\ \alpha^F \\ \alpha^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.002857 \\ 0.002857 \\ 0.002857 \\ 0.002857 \\ 0.002857 \\ 0.002857 \\ 0.002857 \end{bmatrix} \text{ en } [m^3/t]$$

5. Desplazamiento vertical considerando una carga unitaria ( $q=1 \text{ t/m}^2$ ).

Para obtener el desplazamiento total en cada elemento del vector de desplazamiento  $\bar{\delta}_{ji}$ , se multiplica el vector columna de deformación volumétrica por cada fila de la matriz transpuesta de factores de influencias, los productos que resultan se suman aritméticamente, obteniéndose el desplazamiento punto por punto (1 a 7).

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} \\ \bar{\delta}_{21} \\ \bar{\delta}_{31} \\ \bar{\delta}_{41} \\ \bar{\delta}_{51} \\ \bar{\delta}_{61} \\ \bar{\delta}_{71} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11}^A & I_{11}^B & I_{11}^C & I_{11}^D & I_{11}^E & I_{11}^F & I_{11}^G \\ I_{21}^A & I_{21}^B & I_{21}^C & I_{21}^D & I_{21}^E & I_{21}^F & I_{21}^G \\ I_{31}^A & I_{31}^B & I_{31}^C & I_{31}^D & I_{31}^E & I_{31}^F & I_{31}^G \\ I_{41}^A & I_{41}^B & I_{41}^C & I_{41}^D & I_{41}^E & I_{41}^F & I_{41}^G \\ I_{51}^A & I_{51}^B & I_{51}^C & I_{51}^D & I_{51}^E & I_{51}^F & I_{51}^G \\ I_{61}^A & I_{61}^B & I_{61}^C & I_{61}^D & I_{61}^E & I_{61}^F & I_{61}^G \\ I_{71}^A & I_{71}^B & I_{71}^C & I_{71}^D & I_{71}^E & I_{71}^F & I_{71}^G \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \alpha^A \\ \alpha^B \\ \alpha^C \\ \alpha^D \\ \alpha^E \\ \alpha^F \\ \alpha^G \end{bmatrix}$$

$[I_{ji}^N]^T$							$[\alpha^N]$	$[\bar{\delta}_{ji}]$
0.9414453	0.5791357	0.3407827	0.2138749	0.1434538	0.1017402	0.0754522	0.0028570	0.0068450
0.0033361	0.0433785	0.0769385	0.0826488	0.0747831	0.0635857	0.0530047	0.0028570	0.0011362
0.0000503	0.0011851	0.0042810	0.0084540	0.0123122	0.0150410	0.0165063	0.0028570	0.0001652
0.0000053	0.0001351	0.0005631	0.0013307	0.0023482	0.0034609	0.0045188	0.0028570	0.0000353
0.0000011	0.0000295	0.0001288	0.0003251	0.0006208	0.0009978	0.0014251	0.0028570	0.0000101
0.0000003	0.0000091	0.0000408	0.0001063	0.0002109	0.0003543	0.0005310	0.0028570	0.0000036
0.0000002	0.0000044	0.0000199	0.0000525	0.0001059	0.0001814	0.0002781	0.0028570	0.0000018



$$\begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} \\ \bar{\delta}_{21} \\ \bar{\delta}_{31} \\ \bar{\delta}_{41} \\ \bar{\delta}_{51} \\ \bar{\delta}_{61} \\ \bar{\delta}_{71} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.006845 \\ 0.001136 \\ 0.000165 \\ 0.000035 \\ 0.000010 \\ 0.000003 \\ 0.000001 \end{bmatrix}, \text{ en m}^3/\text{t}.$$

Se realizan operaciones considerando las seis matrices transpuestas de factores de influencias restantes (Apéndice A). Los resultados finales son:

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta}_{12} \\ \bar{\delta}_{22} \\ \bar{\delta}_{32} \\ \bar{\delta}_{42} \\ \bar{\delta}_{52} \\ \bar{\delta}_{62} \\ \bar{\delta}_{72} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.002724 \\ 0.009517 \\ 0.001544 \\ 0.000239 \\ 0.000054 \\ 0.000016 \\ 0.000007 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{13} \\ \bar{\delta}_{23} \\ \bar{\delta}_{33} \\ \bar{\delta}_{43} \\ \bar{\delta}_{53} \\ \bar{\delta}_{63} \\ \bar{\delta}_{73} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000365 \\ 0.001544 \\ 0.009517 \\ 0.001544 \\ 0.000239 \\ 0.000054 \\ 0.000016 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{14} \\ \bar{\delta}_{24} \\ \bar{\delta}_{34} \\ \bar{\delta}_{44} \\ \bar{\delta}_{54} \\ \bar{\delta}_{64} \\ \bar{\delta}_{74} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000076 \\ 0.000239 \\ 0.001544 \\ 0.009517 \\ 0.001544 \\ 0.000239 \\ 0.000076 \end{bmatrix}, \text{ en m}^3/\text{t}.$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta}_{15} \\ \bar{\delta}_{25} \\ \bar{\delta}_{35} \\ \bar{\delta}_{45} \\ \bar{\delta}_{55} \\ \bar{\delta}_{65} \\ \bar{\delta}_{75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000021 \\ 0.000054 \\ 0.000239 \\ 0.001544 \\ 0.009517 \\ 0.001544 \\ 0.000365 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{16} \\ \bar{\delta}_{26} \\ \bar{\delta}_{36} \\ \bar{\delta}_{46} \\ \bar{\delta}_{56} \\ \bar{\delta}_{66} \\ \bar{\delta}_{76} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000007 \\ 0.000016 \\ 0.000054 \\ 0.000239 \\ 0.001544 \\ 0.009517 \\ 0.002724 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{17} \\ \bar{\delta}_{27} \\ \bar{\delta}_{37} \\ \bar{\delta}_{47} \\ \bar{\delta}_{57} \\ \bar{\delta}_{67} \\ \bar{\delta}_{77} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000002 \\ 0.000004 \\ 0.000010 \\ 0.000035 \\ 0.000165 \\ 0.001136 \\ 0.006845 \end{bmatrix}, \text{ en m}^3/\text{t}.$$

Con las matrices columna de desplazamientos verticales se construye la matriz de desplazamientos unitarios  $\bar{\delta}_{ji}$ , debido a una carga unitaria.

$$\bar{\delta}_{ji} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} & \bar{\delta}_{21} & \bar{\delta}_{31} & \bar{\delta}_{41} & \bar{\delta}_{51} & \bar{\delta}_{61} & \bar{\delta}_{71} \\ \bar{\delta}_{12} & \bar{\delta}_{22} & \bar{\delta}_{32} & \bar{\delta}_{42} & \bar{\delta}_{52} & \bar{\delta}_{62} & \bar{\delta}_{72} \\ \bar{\delta}_{13} & \bar{\delta}_{23} & \bar{\delta}_{33} & \bar{\delta}_{43} & \bar{\delta}_{53} & \bar{\delta}_{63} & \bar{\delta}_{73} \\ \bar{\delta}_{14} & \bar{\delta}_{24} & \bar{\delta}_{34} & \bar{\delta}_{44} & \bar{\delta}_{54} & \bar{\delta}_{64} & \bar{\delta}_{74} \\ \bar{\delta}_{15} & \bar{\delta}_{25} & \bar{\delta}_{35} & \bar{\delta}_{45} & \bar{\delta}_{55} & \bar{\delta}_{65} & \bar{\delta}_{75} \\ \bar{\delta}_{16} & \bar{\delta}_{26} & \bar{\delta}_{36} & \bar{\delta}_{46} & \bar{\delta}_{56} & \bar{\delta}_{66} & \bar{\delta}_{76} \\ \bar{\delta}_{17} & \bar{\delta}_{27} & \bar{\delta}_{37} & \bar{\delta}_{47} & \bar{\delta}_{57} & \bar{\delta}_{67} & \bar{\delta}_{77} \end{bmatrix}$$



$$[\bar{\delta}_{ji}] = \begin{bmatrix} 0.0068450 & 0.0011362 & 0.0001652 & 0.0000353 & 0.0000101 & 0.0000036 & 0.0000018 \\ 0.0027235 & 0.0095168 & 0.0015442 & 0.0002386 & 0.0000536 & 0.0000159 & 0.0000074 \\ 0.0003653 & 0.0015442 & 0.0095168 & 0.0015442 & 0.0002386 & 0.0000536 & 0.0000159 \\ 0.0000756 & 0.0002386 & 0.0015442 & 0.0095168 & 0.0015442 & 0.0002386 & 0.0000756 \\ 0.0000211 & 0.0000536 & 0.0002386 & 0.0015442 & 0.0095168 & 0.0015442 & 0.0003653 \\ 0.0000074 & 0.0000159 & 0.0000536 & 0.0002386 & 0.0015442 & 0.0095168 & 0.0027235 \\ 0.0000018 & 0.0000036 & 0.0000101 & 0.0000353 & 0.0001652 & 0.0011362 & 0.0068450 \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos verticales unitarios están en m<sup>3</sup>/t.

La matriz de desplazamientos verticales unitarios es la MATRIZ DE DESPLAZAMIENTOS POR CARGA UNITARIA DEL SUELO.

6. Desplazamiento vertical considerando el esfuerzo real ( $q=10 \text{ t/m}^2$ ).

Los desplazamientos antes obtenidos, son considerando una carga unitaria, por lo que, para obtener los desplazamientos verticales reales, es decir, para una carga  $q=10 \text{ t/m}^2$ , se multiplica la matriz transpuesta de desplazamientos por carga unitaria del suelo con el vector de cargas reales  $[q_i]$ . La ecuación que resulta de este producto se le conoce como Ecuación Matricial de Asentamientos (E.M.A.)

$$[\delta_i] = [\bar{\delta}_{ji}]^T \cdot [q_i] \quad \text{o bien} \quad \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} & \bar{\delta}_{12} & \bar{\delta}_{13} & \bar{\delta}_{14} & \bar{\delta}_{15} & \bar{\delta}_{16} & \bar{\delta}_{17} \\ \bar{\delta}_{21} & \bar{\delta}_{22} & \bar{\delta}_{23} & \bar{\delta}_{24} & \bar{\delta}_{25} & \bar{\delta}_{26} & \bar{\delta}_{27} \\ \bar{\delta}_{31} & \bar{\delta}_{32} & \bar{\delta}_{33} & \bar{\delta}_{34} & \bar{\delta}_{35} & \bar{\delta}_{36} & \bar{\delta}_{37} \\ \bar{\delta}_{41} & \bar{\delta}_{42} & \bar{\delta}_{43} & \bar{\delta}_{44} & \bar{\delta}_{45} & \bar{\delta}_{46} & \bar{\delta}_{47} \\ \bar{\delta}_{51} & \bar{\delta}_{52} & \bar{\delta}_{53} & \bar{\delta}_{54} & \bar{\delta}_{55} & \bar{\delta}_{56} & \bar{\delta}_{57} \\ \bar{\delta}_{61} & \bar{\delta}_{62} & \bar{\delta}_{63} & \bar{\delta}_{64} & \bar{\delta}_{65} & \bar{\delta}_{66} & \bar{\delta}_{67} \\ \bar{\delta}_{71} & \bar{\delta}_{72} & \bar{\delta}_{73} & \bar{\delta}_{74} & \bar{\delta}_{75} & \bar{\delta}_{76} & \bar{\delta}_{77} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{\delta}_{ji}]^T \quad [q_i] \quad [\delta_i]$$

0.0068450	0.0027235	0.0003653	0.0000756	0.0000211	0.0000074	0.0000018
0.0011362	0.0095168	0.0015442	0.0002386	0.0000536	0.0000159	0.0000036
0.0001652	0.0015442	0.0095168	0.0015442	0.0002386	0.0000536	0.0000101
0.0000353	0.0002386	0.0015442	0.0095168	0.0015442	0.0002386	0.0000353
0.0000101	0.0000536	0.0002386	0.0015442	0.0095168	0.0015442	0.0001652
0.0000036	0.0000159	0.0000536	0.0002386	0.0015442	0.0095168	0.0011362
0.0000018	0.0000074	0.0000159	0.0000756	0.0003653	0.0027235	0.0068450

 $\cdot$ 

10.0000
10.0000
10.0000
10.0000
10.0000
10.0000
10.0000

 $=$ 

0.10040
0.12509
0.13073
0.13153
0.13073
0.12509
0.10035

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10040 \\ 0.12509 \\ 0.13073 \\ 0.13153 \\ 0.13073 \\ 0.12509 \\ 0.10040 \end{bmatrix} \text{ en m} = \begin{bmatrix} 10.00 \\ 12.50 \\ 13.07 \\ 13.15 \\ 13.07 \\ 12.50 \\ 10.00 \end{bmatrix}, \text{ en cm.}$$

El análisis de desplazamientos verticales antes realizado, corresponde a una cimentación de comportamiento flexible (Figura 12). La simetría en los desplazamientos verticales es debido al modo en que se dispuso la división del área de cimentación en dovelas del mismo ancho y largo, así como considerar que los parámetros de compresibilidad corresponden a un medio isótropo y homogéneo.

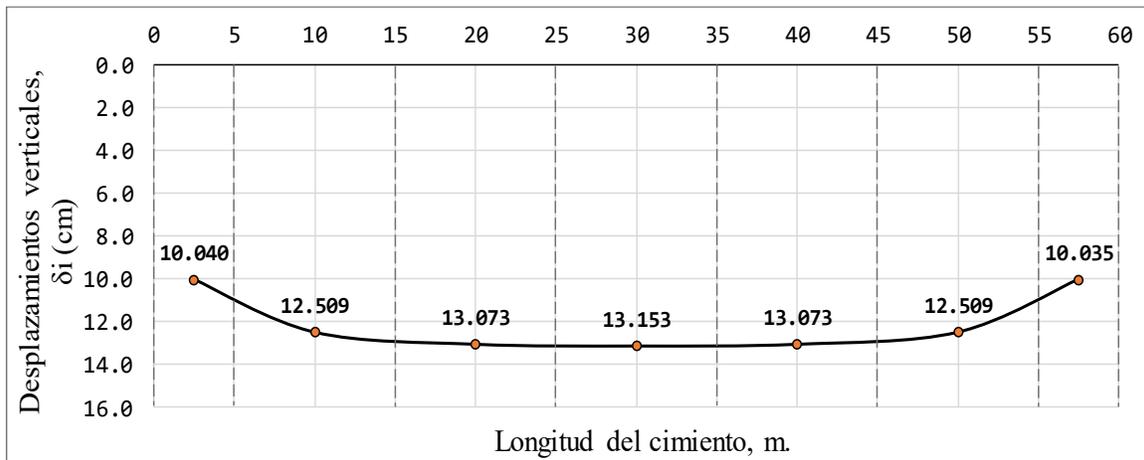


Figura 12. Diagrama de desplazamientos verticales totales para una cimentación flexible  
[Elaboración propia].

### 7. Desplazamientos verticales y distribución de esfuerzos en una cimentación rígida.

Si se considera que la cimentación tendrá un comportamiento rígido se infiere que los desplazamientos en toda el área de contacto de la cimentación con el suelo serán uniformes o constantes. Para calcular la distribución de esfuerzos por cada dovela, de la ecuación matricial de asentamientos (E.M.A.) se despeja la matriz columna de esfuerzos  $[q_i]$  y a partir de los desplazamientos verticales obtenidos del análisis de una cimentación de comportamiento flexible se determina un desplazamiento vertical uniforme o constante. Lo descrito anteriormente se realiza de la siguiente manera:

$$[q_i] = \{[\delta_{ji}]^T\}^{-1} [\delta'_a]$$



$$\delta'_a = 2 \left( \frac{\delta_1 \cdot \lambda_1 + \delta_2 \cdot \lambda_1 + \delta_3 \cdot \lambda_3 + \delta_4 \cdot \frac{\lambda_4}{2}}{L} \right)$$

Entonces:

$$\delta'_a = 2 \left( \frac{10 \text{ cm} \cdot 500 \text{ cm} + 12.50 \text{ cm} \cdot 1000 \text{ cm} + 13.07 \cdot 1000 \text{ cm} + 13.15 \cdot 500 \text{ cm}}{6000 \text{ cm}} \right)$$

$$\delta'_a = 12.39 \text{ cm}$$

Por lo tanto:

$$[\delta'_a] = \begin{bmatrix} 12.39 \\ 12.39 \\ 12.39 \\ 12.39 \\ 12.39 \\ 12.39 \end{bmatrix}, \text{ en cm.}$$

Como siguiente paso, se debe obtener la inversa de la matriz de flexibilidades, es decir:

$$\{[\delta_{ji}]^T\}^{-1}$$

Para determinar si la matriz es invertible, se debe cumplir que su determinante sea diferente de cero ( $\text{Det. } [\delta_{ji}]^T \neq 0$ ). Si el determinante,  $[[\delta_{ji}]^T]$ , es no nulo, entonces diremos que la matriz  $[\delta_{ji}]^T$  es invertible, es decir, existe la matriz inversa,  $\{[\delta_{ji}]^T\}^{-1}$ .

Para calcular el determinante de la matriz se utilizó el Método de Cofactores, los resultados son:

$$\{[\delta_{ji}]^T\}^{-1} = \begin{bmatrix} 153.3809 & -44.1004 & 1.3205 & -0.3153 & -0.0685 & -0.0304 & -0.0117 \\ -18.3629 & 113.1992 & -17.6915 & 0.2092 & -0.1790 & -0.0471 & -0.0172 \\ 0.3433 & -17.6321 & 110.7710 & -17.5619 & 0.2014 & -0.1759 & -0.0390 \\ -0.1578 & 0.2168 & -17.5627 & 110.7686 & -17.5626 & 0.2168 & -0.1578 \\ -0.0390 & -0.1759 & 0.2016 & -17.5620 & 110.7710 & -17.6321 & 0.3433 \\ -0.0172 & -0.0454 & -0.1895 & 0.2108 & -17.6915 & 113.1992 & -18.3629 \\ -0.0114 & -0.0444 & 0.0193 & -0.3293 & 1.3207 & -44.1005 & 153.3809 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación matricial de asentamientos y sustituyendo por un vector columnar de desplazamientos verticales uniformes:





$$R = \left(13.653 \frac{t}{m^2}\right)(5 m)(12 m) + \left(9.556 \frac{t}{m^2}\right)(10 m)(12 m) + \left(9.406 \frac{t}{m^2}\right)(10 m)(12 m) \\ + \left(9.388 \frac{t}{m^2}\right)(10 m)(12 m) + \left(9.406 \frac{t}{m^2}\right)(10 m)(12 m) \\ + \left(9.555 \frac{t}{m^2}\right)(10 m)(12 m) + \left(13.660 \frac{t}{m^2}\right)(5 m)(12 m)$$

$$R = 7,316.222 t$$

El factor de corrección es:

$$f = \frac{W_c}{R} = \frac{7,200 t}{7,316.222 t} = 0.984$$

Con el factor  $f=0.984$ , se corrige el valor de  $\delta'_a$  y finalmente se obtiene los esfuerzos  $q_i$  corregidos:

Los esfuerzos corregidos finales por cada dovela son:

$$[q_i] \cdot f = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{bmatrix} \cdot f = \begin{bmatrix} 13.653 \\ 9.556 \\ 9.406 \\ 9.388 \\ 9.406 \\ 9.555 \\ 13.660 \end{bmatrix} \cdot (0.984) = \begin{bmatrix} 13.436 \\ 9.404 \\ 9.257 \\ 9.239 \\ 9.257 \\ 9.403 \\ 13.443 \end{bmatrix}, \text{ en } t/m^2.$$

Resolviendo nuevamente para obtener la reacción R:

$$R = \left(13.436 \frac{t}{m^2}\right)(5 m)(12 m) + \left(9.404 \frac{t}{m^2}\right)(10 m)(12 m) + \left(9.257 \frac{t}{m^2}\right)(10 m)(12 m) \\ + \left(9.239 \frac{t}{m^2}\right)(10 m)(12 m) + \left(9.257 \frac{t}{m^2}\right)(10 m)(12 m) \\ + \left(9.403 \frac{t}{m^2}\right)(10 m)(12 m) + \left(13.443 \frac{t}{m^2}\right)(5 m)(12 m)$$

$$R = 7,200 t$$

Los desplazamientos verticales uniformes finales para una cimentación rígida son:

$$[\delta'_a] \cdot f = \begin{bmatrix} 12.39 \\ 12.39 \\ 12.39 \\ 12.39 \\ 12.39 \\ 12.39 \\ 12.39 \end{bmatrix} (0.984) = \begin{bmatrix} 12.19 \\ 12.19 \\ 12.19 \\ 12.19 \\ 12.19 \\ 12.19 \\ 12.19 \end{bmatrix}, \text{ en } cm.$$

En la tabla 1 se consignan los resultados obtenidos y en la figura 13 el diagrama de distribución de cargas  $P_i$  y las reacciones  $Q_i$  por dovela como carga uniformemente distribuida.

Tabla 1. Reacciones finales  $Q_i$  para una cimentación rígida [Elaboración propia].

Dovela	Área	Reacción uniforme, q	Carga, $P_i$	Reacción, $q_i$	Carga, $P_{qn}$	Reacción corregida, $q_c$	Carga, $P_{qc}$	$Q_i$
	$m^2$	$t/m^2$	t	$t/m^2$	t	$t/m^2$	t	$t/m^2$
1	60	10.000	600.00	13.653	819.210	13.4368	806.206	161.241
2	120	10.000	1200.00	9.556	1146.719	9.4043	1128.516	112.852
3	120	10.000	1200.00	9.407	1128.813	9.2575	1110.895	111.089
4	120	10.000	1200.00	9.389	1126.651	9.2397	1108.767	110.877
5	120	10.000	1200.00	9.407	1128.813	9.2575	1110.895	111.089
6	120	10.000	1200.00	9.556	1146.719	9.4043	1128.516	112.852
7	60	10.000	600.00	13.653	819.210	13.4368	806.206	161.241
Factor, f:		0.984	7200.00		7316.136		7200.00	

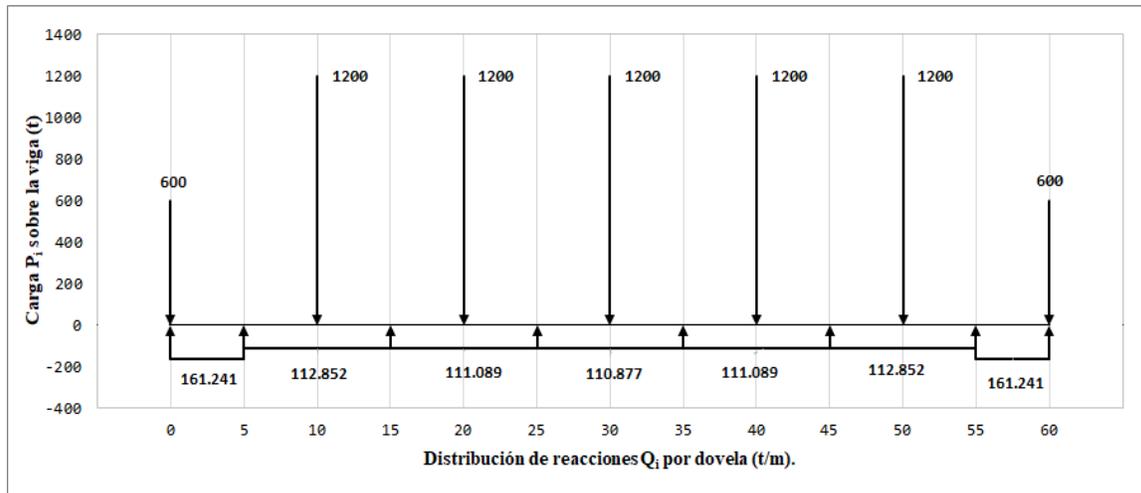


Figura 13. Distribución de cargas  $P_i$  y reacciones finales  $Q_i$  por cada dovela [Elaboración propia].

### 9. Diagrama de fuerzas cortantes.

Con apoyo de la figura 13 se calculan las fuerzas cortantes, para ello se seleccionan varias secciones de interés a lo largo de la gran viga.

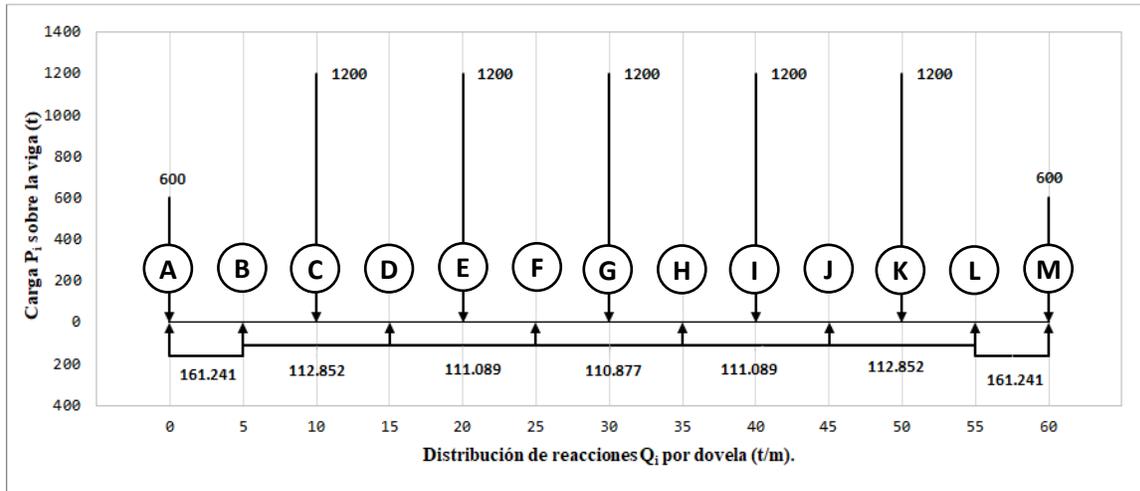


Figura 14. Viga dividida en secciones de cálculo (A- M). [Elaboración propia]

Sección **A**:  $L=0$

Lado izquierdo,

$$S_1 = -P_1 = -600 \text{ t}$$

Sección **B**:  $L=5 \text{ m}$

Lado izquierdo,

$$S_2 = -S_1 + Q_1 \cdot \lambda_1 = -600 \text{ t} + \left(161.241 \frac{\text{t}}{\text{m}}\right) (5 \text{ m}) = 206.21 \text{ t}$$

Sección **C**:  $L=10 \text{ m}$

Lado izquierdo,

$$S_4 = S_2 + Q_2 \cdot \frac{\lambda_2}{2} = 206.21 \text{ t} + \left(112.852 \frac{\text{t}}{\text{m}}\right) \left(\frac{10 \text{ m}}{2}\right) = 770.46 \text{ t}$$

Lado derecho,

$$S_5 = S_4 - P_2 = 770.46 \text{ t} - 1200 \text{ t} = -429.54 \text{ t}$$

Sección **D**:  $L=15 \text{ m}$



Lado izquierdo,

$$S_6 = S_5 + Q_2 \cdot \lambda_2 = -429.54 t + \left(112.852 \frac{t}{m}\right) (5 m) = 134.72 t$$

Sección E: L=20 m

Lado izquierdo,

$$S_7 = S_6 + Q_3 \cdot \frac{\lambda_3}{2} = 134.72 t + \left(111.089 \frac{t}{m}\right) (5 m) = 690.17 t$$

Lado derecho,

$$S_8 = S_7 - P_3 = 690.17 t - 1200 t = -509.83 t$$

Sección F: L=25 m

Lado izquierdo,

$$S_9 = S_8 + Q_3 \cdot \frac{\lambda_3}{2} = -509.83 t + \left(111.089 \frac{t}{m}\right) (5 m) = 45.62 t$$

Sección G: L=30 m

Lado izquierdo,

$$S_{10} = S_9 + Q_4 \cdot \frac{\lambda_4}{2} = 45.62 t + \left(110.877 \frac{t}{m}\right) (5 m) = 600 t$$

Lado derecho,

$$S_{11} = S_{10} - P_4 = 600 t - 1200 t = -600 t$$

Con el mismo procedimiento se establecen las ecuaciones para las secciones del lado derecho del centro de línea y se determinan los cortantes en los puntos de interés, obteniéndose el diagrama final de fuerzas cortantes que se muestra en la figura 15.

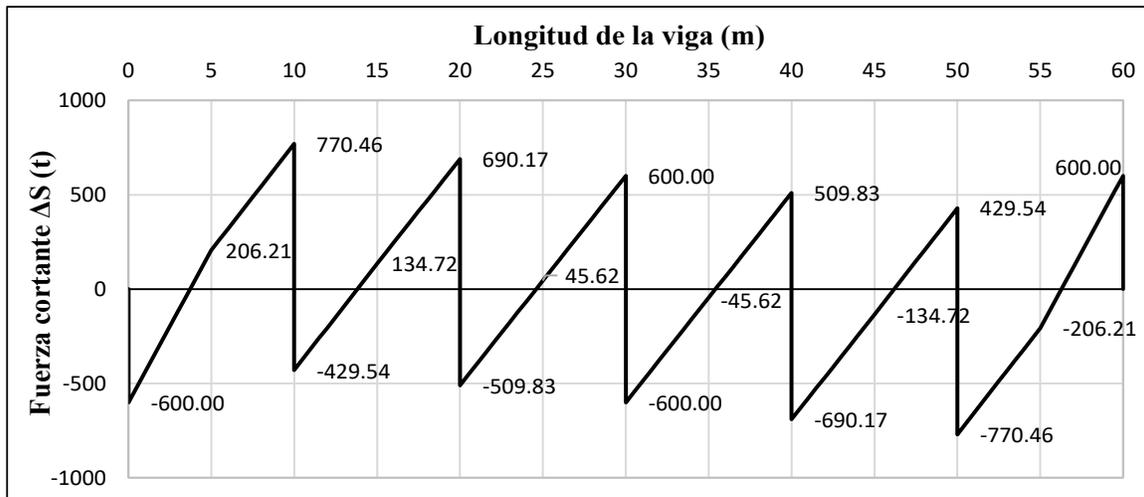


Figura 15. Diagrama de distribución de fuerzas cortantes para una cimentación rígida. [Elaboración propia]

### 10. Diagrama de momentos flexionantes.

1. Se calculan los valores de las bases de cada triángulo ( $X_1$  a  $X_{18}$ ) en valor absoluto dividiendo la fuerza cortante  $S_i$  entre la reacción.

Tramo  $0 < L \leq 5 m$ :

$$X_1 = \left| \frac{S_1}{Q_1} \right| = \left| \frac{-P_1}{Q_1} \right| = \left| \frac{-600 t}{161.241 t/m} \right| = 3.721 m$$

$$X_2 = \left| \frac{S_2}{Q_1} \right| = \left| \frac{-P_1 + Q_1 \cdot \lambda_1}{Q_1} \right| = \left| \frac{-600 t + 161.241 \frac{t}{m} \cdot 5m}{161.241 t/m} \right| = 1.278 m$$

Para el tramo  $5 m < L \leq 10 m$ :

$$X_3 = \left| \frac{S_2}{Q_2} \right| = \left| \frac{(-P_1 + Q_1 \cdot \lambda_1 + Q_2 \cdot \frac{\lambda_2}{2}) - (-P_1 + Q_1 \cdot \lambda_1)}{Q_2} \right|$$

$$X_3 = \left| \frac{(-600 t + 161.241 \frac{t}{m} \cdot 5m + 112.852 \frac{t}{m} \cdot \frac{10 m}{2}) - (-600 t + 161.241 \frac{t}{m} \cdot 5m)}{112.852} \right|$$

$$X_3 = 5 m$$

De manera similar se calculan los valores de  $X_4$  a  $X_{18}$ .



Los momentos flexionantes se calculan de izquierda a derecha y a mayor distancia del origen se suma el momento flexionante anterior:

En  $X = 0$ , el momento flexionante es igual a cero.

$$M_0 = 0$$

$L=3.721$  m:

$$M_1 = M_0 + \frac{S_1 \cdot X_1}{2} = 0 + \left( \frac{-600 \cdot 3.721}{2} \right) = -1,116.30 \text{ t} \cdot \text{m}$$

A una distancia del origen igual  $5$  m, la magnitud del momento flexionante es igual a:

$$M_2 = -1,116.30 \text{ t} \cdot \text{m} + \left( \frac{206.21 \text{ t} \cdot 1.278 \text{ m}}{2} \right) = -984.49 \text{ t} \cdot \text{m}$$

A una distancia del origen igual  $10$  m, la magnitud del momento flexionante es igual a:

$$M_3 = -984.49 \text{ t} \cdot \text{m} + \left[ \frac{(770.46 \text{ t} - 206.21 \text{ t}) \cdot 5 \text{ m}}{2} + (206.21 \text{ t} \cdot 5 \text{ m}) \right] = 1,457.19 \text{ t} \cdot \text{m}$$

Para este caso tenemos un triángulo y un rectángulo por lo que el contenido de los corchetes representa la suma de las áreas de momentos de las dos figuras.

A una distancia de  $15$  m del origen:

$$M_5 = 1,457.19 \text{ t} \cdot \text{m} + \left( \frac{-429.54 \text{ t} \cdot 3.807 \text{ m}}{2} \right) + \left( \frac{134.63 \text{ t} \cdot 1.193 \text{ m}}{2} \right) = 719.44 \text{ t} \cdot \text{m}$$

A una distancia del origen igual  $20$  m:

$$M_6 = 719.44 \text{ t} \cdot \text{m} + \left[ \frac{(690.05 \text{ t} - 134.63 \text{ t}) \cdot 5 \text{ m}}{2} + (134.72 \text{ t} \cdot 5 \text{ m}) \right] = 2,782.38 \text{ t} \cdot \text{m}$$

A una distancia de  $25$  m del origen:

$$M_5 = 2,782.38 \text{ t} \cdot \text{m} + \left( \frac{-509.83 \text{ t} \cdot 4.591 \text{ m}}{2} \right) + \left( \frac{45.62 \text{ t} \cdot 0.409 \text{ m}}{2} \right) = 1,621.84 \text{ t} \cdot \text{m}$$

A una distancia de  $30$  m del origen:

$$M_6 = 1,621.84 \text{ t} \cdot \text{m} + \left[ \frac{(600 \text{ t} - 45.62 \text{ t}) \cdot 5 \text{ m}}{2} + (45.62 \text{ t} \cdot 5 \text{ m}) \right] = 3,235.89 \text{ t} \cdot \text{m}$$

De manera análoga se calculan los momentos flexionantes a todo lo largo de la viga, resultando un diagrama como el que se muestra en seguida.

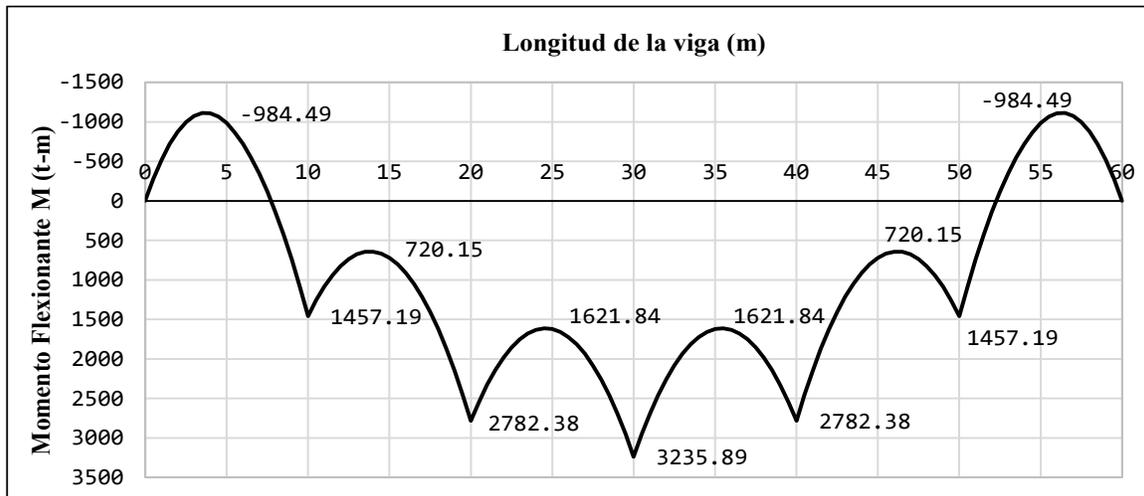


Figura 16. Diagrama de momentos flexionantes para una cimentación rígida [6].

El diagrama en la figura 16 muestra la ubicación y magnitud de los momentos flexionantes máximo y mínimo, donde los valores positivos corresponden a los tramos que estarán sujetos a tensiones en la fibra inferior y los valores negativos a los tramos que estarán sometidos a tensiones en la fibra superior.

Conocida la distribución de las fuerzas cortantes y momentos flexionantes en la dirección longitudinal y transversal de la cimentación y las secciones o tramos donde se tendrán esfuerzos de tensión y esfuerzos de compresión se procede al diseño estructural. Para resistir las tensiones en los tramos donde se ha previsto esfuerzos de tensión se colocará acero de refuerzo en forma de barra el cual restringirá la aparición de grietas que se originan por la baja resistencia del concreto a los esfuerzos de tensión. Lo anterior no se limita sólo a los tramos sometidos a esfuerzos de tensión, también se empleará en los tramos sometidos a esfuerzos de compresión con la finalidad de incrementar la resistencia del elemento reforzado, minimizar las deformaciones producidas por las cargas que gravitarán sobre la cimentación y para confinar el concreto lateral, con lo que indirectamente se incrementará su resistencia a los esfuerzos de compresión.

Si se plantea la necesidad de lograr mayor economía en el diseño estructural, tal propósito se puede lograr con el método que se aborda en el siguiente capítulo. El diagrama de momentos flexionantes de la figura 16 será de utilidad para conocer los valores y ubicar los momentos flexionantes máximos que tendrán que ser reducidos.



## CAPÍTULO 5. SEGUNDA ETAPA DE DISEÑO: CIMENTACIÓN CON PONTONES.

Para reducir la magnitud de los elementos mecánicos de diseño (Fuerza cortante, Momento Flexionante y Torsionante) y ganar economía en el diseño estructural, en esta etapa la estructura de cimentación, analizada primero con rigidez infinita, se divide en secciones más pequeñas llamadas pontones y se selecciona un determinado número y tipo de juntas, dando origen a una cimentación, que, en conjunto, presenta ciertas características de flexibilidad. Para estimar las nuevas reacciones de contacto debido a la introducción de juntas de construcción, se establece un conjunto de ecuaciones de primer orden (lineales) que satisfagan las condiciones de compatibilidad de presiones de contacto en las juntas entre pontones. Con las reacciones finales se analiza nuevamente los desplazamientos verticales para verificar el diseño por desplazamientos totales y diferenciales permisibles. En el caso de que los desplazamientos diferenciales permisibles sean mayores a los permitidos o señalados en normas de diseño se modifica una de las juntas o las juntas necesarias y los cálculos se repiten hasta que los desplazamientos diferenciales permisibles sean satisfechos. Finalmente, se calculan las fuerzas cortantes y momentos flexionantes definitivos requeridos en el diseño estructural de la cimentación con pontones.

### 5.1 Juntas de construcción que se pueden emplear en cimentaciones tipo cajón.

Las juntas de construcción o mecánicas que se suelen habilitar en cajones de cimentación, cuando se usan pontones, son bastante diferentes a las ya descritas en el capítulo 3. Para el caso de juntas de construcción en cimentaciones largas tipo cajón el Dr. Zeevaert, 1983, propone los siguientes tipos, las cuales se caracterizan por tener su propia configuración geométrica y son capaces de transmitir algún efecto mecánico. A continuación, se hace una descripción de algunas de ellas, cuyo uso es más frecuente en ingeniería de cimentaciones.

En una junta de construcción específica, se identifican como  $M$  al momento flexionante,  $S$  a la fuerza cortante y  $T$  al momento torsionante, generado debidos a las reacciones y cargas que están actuando sobre la estructura de la cimentación.

#### Junta de construcción **Tipo I.**

El tipo de unión o junta **I** (Fig. 17) es un punto libre, y ninguna fuerza es transmitida de un pontón a otro. Por lo tanto, las juntas son libres de desplazamientos verticales y rotar sin influenciar o ser influenciadas por los otros pontones [6].

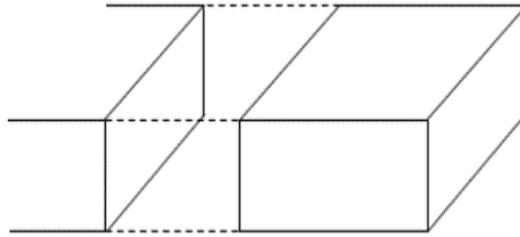


Figura 17. Junta de construcción Tipo I donde  $M=0$ ,  $S=0$  y  $T=0$  [Elaboración propia].

### Junta de construcción Tipo II.

El tipo de junta II (Fig. 18) es capaz de transmitir sólo torsión entre pontones, sin embargo, permite desplazamientos verticales diferenciales entre pontones. [6]

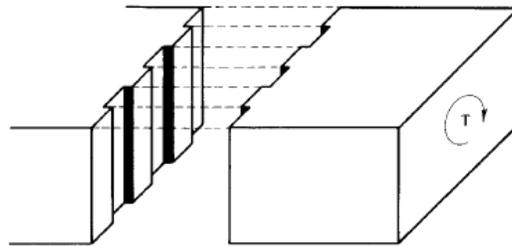


Figura 18. Junta de construcción Tipo II donde  $M=0$ ,  $S=0$  y  $T \neq 0$  [6].

### Junta de construcción Tipo III.

El tipo de junta III (Fig. 19) está diseñada de tal manera que la fuerza contante o el momento torsionante puedan ser transmitidos, siendo el momento flexionante igual a cero. Esta junta permite sólo rotación entre los pontones. [6]

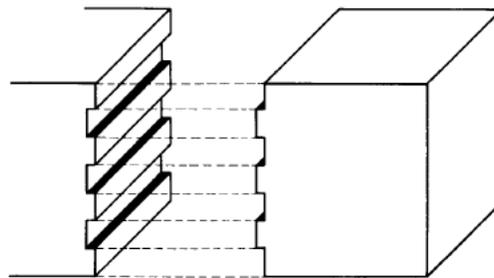


Figura 19. Junta de construcción Tipo III donde  $M=0$ ,  $S \neq 0$  y  $T \neq 0$ . [6]

#### Junta de construcción **Tipo IV**.

El tipo de junta **IV** (Fig. 20) está diseñada para tomar la fuerza cortante, momento torsionante y un momento flexionante plástico. La junta se diseña estructuralmente para satisfacer este propósito. Principalmente se usan cuando es necesario ajustar los asentamientos diferenciales a valores permisibles, lo cual no es posible con los otros tipos de juntas. [6]

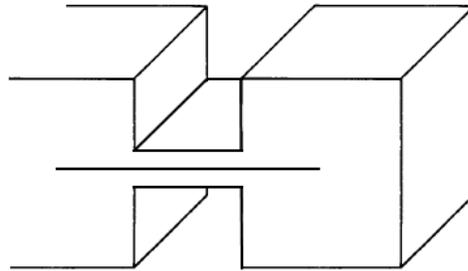


Figura 20. Junta de construcción Tipo IV donde  $M \neq 0$ ,  $S \neq 0$  y  $T \neq 0$  [Elaboración propia].

#### 5.2 Selección del tipo y número de juntas de construcción.

El método propuesto por el Dr. Zeevaert (1983) para reducir la magnitud de los elementos mecánicos de diseño es introduciendo una o varias juntas de construcción del tipo III y/o IV, con lo cual se divide la estructura de cimentación en secciones más pequeñas (pontones), de comportamiento rígido, pero que, en conjunto, resulta una cimentación con mayor flexibilidad.

Para seleccionar el número de juntas que se deben implementar en un problema particular, hay que tomar en cuenta las dimensiones en planta y la distribución de cargas sobre la subestructura. Por otra parte, el diagrama de momentos flexionantes construido a partir de los resultados obtenidos del análisis de interacción suelo-cimiento rígido nos muestra dónde se tienen los mayores momentos flexionantes y, por ende, dónde es conveniente introducir algún tipo de junta de construcción que permita reducir la magnitud de éstos.

Identificando como  $n$  al pontón e  $i$  a la junta, en la tabla 2 se consigna el número de juntas a introducir de acuerdo con el número de pontones en que queda dividida la cimentación.



Tabla 2. Número de juntas a introducir de acuerdo con el número de pontones.

Número de pontones	Número de juntas
$n$	$i$
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
⋮	⋮
$n$	$i=n-1$

En la tabla anterior se ha escrito la ecuación  $i=n-1$  para determinar el número de juntas, la cual está en función del número de secciones o pontones ( $n$ ).

### 5.3 Convención de signos.

Para analizar cada sección o pontón se le idealiza como una viga flotante rígida, adoptando una convención de signos para que los cortantes y momentos tengan significado físico. En la figura 21 se indica la convención de signos adoptada en este trabajo para la fuerza cortante y el momento flexionante.

Considerando un punto geométrico de giro central y ficticio en cada sección, se considera que las fuerzas cortantes  $\Delta S$  son positivas sin importar su sentido, ya sea con dirección vertical ascendente o descendente y para el caso de los momentos flexionantes  $\Delta M$  se consideran positivos cuando giran en sentido de las manecillas del reloj y negativos con sentido contrario al de las manecillas del reloj. Esta es la convención de signos propuesta.

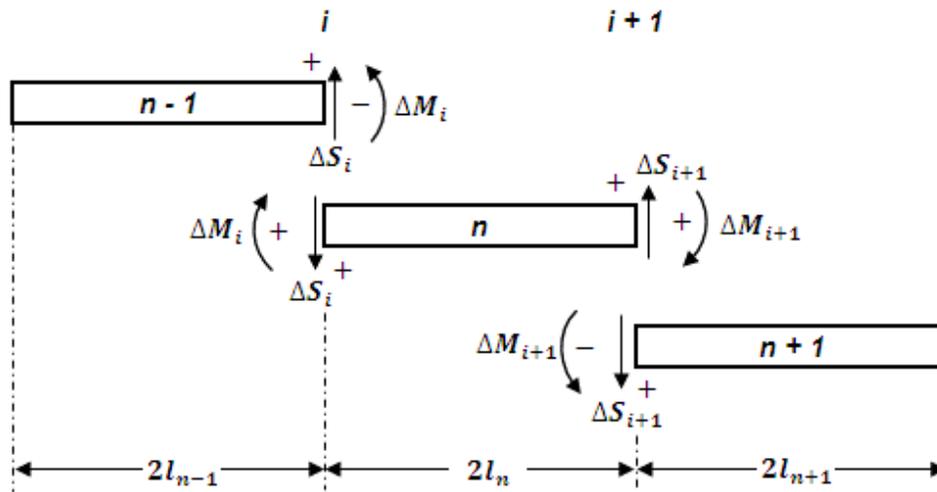


Figura 21. Representación de los elementos mecánicos en las juntas de construcción y convención de signos. [6]

En la junta  $i$  se observa que para el pontón  $n-1$  actúa una fuerza cortante  $\Delta S_i$  con dirección vertical ascendente y un momento flexionante  $\Delta M_i$  con giro en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Ha de notarse que las mismas fuerzas actúan sobre el pontón  $n$ . Sin embargo, para mantener el equilibrio estático en ambos pontones estas fuerzas actúan en sentido contrario. De manera similar se plantea la misma situación en la junta  $i+1$ , entre los pontones  $n$  y  $n+1$ . Por otro lado, si analizamos el equilibrio de cada pontón, las fuerzas cortantes actúan como un *par* que contrarresta el efecto de los momentos flexionantes, manteniendo el equilibrio individual del pontón. Si la sub-estructura se divide en más secciones tipo pontón, entonces, se establece la misma convención de signos y el mismo criterio de análisis.

#### 5.4 Metodología matemática para calcular los cambios en las reacciones debido a la introducción de juntas.

Al diseñar una estructura de cimentación compensada de gran longitud, primero se deberá calcular los elementos mecánicos en la dirección longitudinal, es decir, los momentos iniciales, fuerzas cortantes y momentos torsionantes de la cimentación en su dimensión mayor.

Tanto las reacciones como los elementos mecánicos de diseño se obtienen bajo la suposición de que la estructura de cimentación tiene una rigidez infinita para lo cual se realiza un análisis de interacción suelo-estructura ya descrito en la unidad 4.

### 5.1.1 Conceptos matemáticos.

#### 5.1.1.1 Cálculo de las fuerzas cortantes en las juntas de construcción.

Tomando en cuenta que se debe cumplir la compatibilidad de deformaciones y que debe existir interacción mecánica entre juntas, Zeevaert propone la siguiente ecuación general para calcular la magnitud de las fuerzas cortantes  $\Delta S$  en las juntas *i-th*.

$$a_{n-1}\Delta S_{i-1} + (b_{n-1} + b_n)\Delta S_i + a_n\Delta S_{i+1} = (c_{n-1} + c_n) \quad (1)$$

La ecuación anterior se establece similarmente para cada junta (*i-th*) habilitada en la estructura de la cimentación, de esta manera se obtiene un conjunto de ecuaciones lineales. El sistema de ecuaciones al resolverse mediante alguno de los métodos algebraicos permite conocer las magnitudes de las fuerzas cortantes  $\Delta S$  en cada junta (*i-th*).

La solución primero consiste en encontrar los valores de los coeficientes geométricos del sistema de pontones,  $a_{n-th}$ ,  $b_{n-th}$  y  $c_{n-th}$  para cada pontón, los cuales se pueden calcular mediante las siguientes expresiones:

$$a_{n-th} = \left[ \frac{l_{n-th}}{S_{n-th}} - \frac{1}{A_{n-th}} \right] = \frac{2}{A_{n-th}} \quad (2)$$

$$b_{n-th} = \left[ \frac{l_{n-th}}{S_{n-th}} + \frac{1}{A_{n-th}} \right] = \frac{4}{A_{n-th}} \quad (3)$$

$$c_{n-th} = \frac{\Delta M_i + \Delta M_{i+1}}{S_{n-th}} \quad (4)$$

Donde:

$$S_{n-th} = \frac{1}{3} A_{n-th} \cdot l_{n-th} \quad (5)$$

$$A_{n-th} = 2B \cdot 2l_{n-th} \quad (6)$$

En el cual:

$A_{n-th}$  – es el área de contacto entre un pontón y el terreno de cimentación.

$S_{n-th}$  – es el módulo de sección correspondiente a un pontón en el plano horizontal.

$l_{n-th}$  – es la mitad de la longitud total del pontón en la dirección longitudinal de análisis.

$2B$  – es el ancho del pontón.

$2l_{n-th}$  – es la longitud del pontón.

$\Delta M_i$  – es el momento flexionante en la junta  $i$  (obtenido en la primera etapa de diseño).

$\Delta M_{i+1}$  – es el momento flexionante en la junta  $i+1$  (obtenido en la primera etapa de diseño).

Para establecer las ecuaciones a partir de la ecuación (1), nos auxiliaremos de la figura 22; para nuestro ejemplo la cimentación se ha dividido en 3 secciones o pontones.

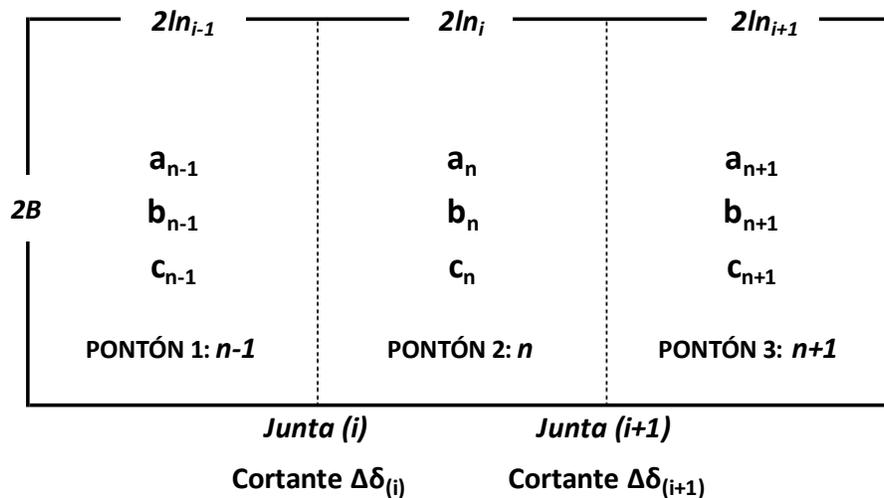


Figura 22. Vista en planta de una cimentación dividida en 3 secciones tipo pontón [Elaboración propia].

De acuerdo con la tabla 2, para introducir una junta, la estructura de la cimentación se debe dividir en dos pontones como mínimo.

A partir de la ecuación general y con  $n=2$  e  $i=1$ :



$$a_{n-1}\Delta S_{i-1} + (b_{n-1} + b_n)\Delta S_i + a_n\Delta S_{i+1} = (c_{n-1} + c_n)$$

$$a_{2-1}\Delta S_{1-1} + (b_{2-1} + b_2)\Delta S_1 + a_2\Delta S_{1+1} = (c_{2-1} + c_2)$$

Resolviendo operaciones en los subíndices, se tiene:

$$a_1\Delta S_0 + (b_1 + b_2)\Delta S_1 + a_2\Delta S_2 = (c_1 + c_2)$$

Para la junta  $i$ , le ecuación es:

$$(b_1 + b_2)\Delta S_1 + a_2\Delta S_2 = (c_1 + c_2)$$

Se debe aclarar que el término  $a_2\Delta S_2 = 0$ , si y solo si, hay una sola junta en el sistema.

Para establecer la ecuación para una segunda junta se considera un sistema de 3 pontones ( $n=3$ ), al cual le corresponde un número de juntas igual a  $i=n-1$ , es decir  $i=2$ .

A partir de la ecuación general y con  $n=3$  e  $i=2$ :

$$a_{n-1}\Delta S_{i-1} + (b_{n-1} + b_n)\Delta S_i + a_n\Delta S_{i+1} = (c_{n-1} + c_n)$$

$$a_{3-1}\Delta S_{2-1} + (b_{3-1} + b_3)\Delta S_2 + a_3\Delta S_{2+1} = (c_{3-1} + c_3)$$

Resolviendo operaciones en los subíndices, se tiene:

$$a_2\Delta S_1 + (b_2 + b_3)\Delta S_2 + a_3\Delta S_3 = (c_2 + c_3)$$

Para la junta  $i+1$ , le ecuación es:

$$a_2\Delta S_1 + (b_2 + b_3)\Delta S_2 + a_3\Delta S_3 = (c_2 + c_3)$$

Bajo el mismo supuesto el término  $a_3\Delta S_3 = 0$ , si y solo si, hay dos juntas en el sistema.

Para establecer la ecuación para una tercera junta se considera un sistema de 4 pontones ( $n=4$ ), al cual le corresponde un número de juntas igual a  $i=n-1$ , es decir  $i=3$  (Figura 23).

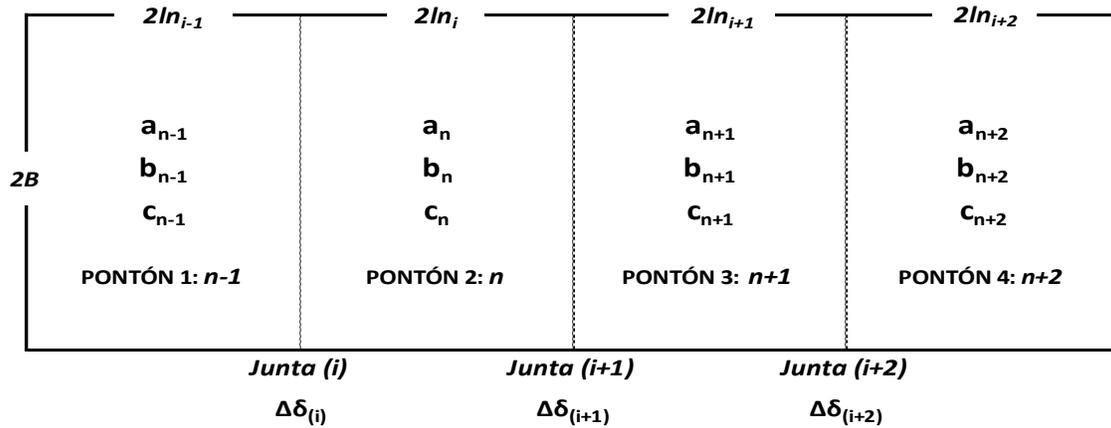


Figura 23. Vista en planta de una cimentación dividida en 4 secciones tipo pontón [Elaboración propia].

A partir de la ecuación general y con  $n=4$  y  $i=3$ :

$$a_{n-1}\Delta S_{i-1} + (b_{n-1} + b_n)\Delta S_i + a_n\Delta S_{i+1} = (c_{n-1} + c_n)$$

$$a_{4-1}\Delta S_{3-1} + (b_{4-1} + b_4)\Delta S_3 + a_4\Delta S_{3+1} = (c_{4-1} + c_4)$$

Resolviendo operaciones en los subíndices, se tiene:

$$a_3\Delta S_2 + (b_3 + b_4)\Delta S_3 + a_4\Delta S_4 = (c_3 + c_4)$$

Para la junta  $i+2$ , le ecuación es:

$$a_3\Delta S_2 + (b_3 + b_4)\Delta S_3 + a_4\Delta S_4 = (c_3 + c_4)$$

El término  $a_4\Delta S_4 = 0$ , si y solo si, hay tres juntas en el sistema.

Finalmente, para una estructura de cimentación dividida en un sistema de 4 pontones ( $n=4$ ), las ecuaciones para hallar la magnitud de las fuerzas cortantes  $\Delta S_{i+th}$  son:

$$(b_1 + b_2)\Delta S_1 + a_2\Delta S_2 = (c_1 + c_2) \quad \text{(I)}$$

$$a_2\Delta S_1 + (b_2 + b_3)\Delta S_2 + a_3\Delta S_3 = (c_2 + c_3) \quad \text{(II)}$$

$$a_3\Delta S_2 + (b_3 + b_4)\Delta S_3 + a_4\Delta S_4 = (c_3 + c_4) \quad \text{(III)}$$

Si un sistema de 6 pontones ( $n=6$ ), le corresponde un número de juntas igual a  $i=5$ , por lo que, las ecuaciones adicionales son:

$$a_4\Delta S_3 + (b_4 + b_5)\Delta S_4 + a_5\Delta S_5 = (c_4 + c_5) \quad (IV)$$

$$a_5\Delta S_4 + (b_5 + b_6)\Delta S_5 + a_6\Delta S_6 = (c_5 + c_6) \quad (V)$$

De manera análoga se establecen las ecuaciones según el número de juntas consideradas en el sistema de cimentación con pontones. El sistema de ecuaciones se resuelve con algún método algebraico conocido.

Debe aclararse que independientemente del número de ecuaciones en el sistema, el primer término de la primera ecuación ( $a_1\Delta S_0$ ) y el tercer término de la última ecuación establecida (por ejemplo:  $a_6\Delta S_6$ ) serán igual a cero, esto es, se considera que en los extremos izquierdo y derecho del cajón de cimentación que se encuentran en contacto con el terreno de cimentación no habrá una junta física.

#### 5.1.1.2 Magnitud de cambio en las reacciones por la introducción de juntas.

Es común que en el diseño de cimentaciones un cajón corto o de gran longitud sobre el cual gravitan cargas y actúa una cierta distribución de reacciones debido al suelo en contacto con su losa de fondo (Figura 13), se diseñe bajo el supuesto de que éste es de rigidez infinita, lo que lleva a obtener elementos mecánicos de diseño de mayor magnitud. Para reducir la magnitud de los elementos mecánicos de diseño se puede considerar la introducción de juntas en la estructura de la cimentación, convenientemente ubicadas, donde el diagrama de momentos iniciales señale los de mayor magnitud (Figura 16).

Una vez que se ha dividido la estructura de la cimentación en secciones más pequeñas (pontones) y cada una de comportamiento rígido, se conforma un sistema de cimentación con cierta flexibilidad.

Identificado a los pontones como por ejemplo  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$  y a las juntas como " $i$ " y " $i+1$ " (Figura 22), el cambio en las reacciones se calcula mediante las siguientes expresiones matemáticas:

$$(\Delta q_i)_{n-th} = \frac{\Delta S_i - \Delta S_{i+1}}{A_n} - \frac{\Delta M_i + \Delta M_{i+1}}{S_n} + \frac{\Delta S_i + \Delta S_{i+1}}{S_n} l_n \quad (7)$$

$$(\Delta q_{i+1})_{n-th} = \frac{\Delta S_i - \Delta S_{i+1}}{A_n} + \frac{\Delta M_i + \Delta M_{i+1}}{S_n} - \frac{\Delta S_i + \Delta S_{i+1}}{S_n} l_n \quad (8)$$



Donde:

$(\Delta q_i)_n$  – es el cambio de reacción en la junta  $i$  correspondiente al pontón  $n$ .

$(\Delta q_{i+1})_n$  – es el cambio de reacción en la junta  $i+1$  correspondiente al pontón  $n$ .

$\Delta S_i$  – es la fuerza cortante en la junta  $i$  correspondiente al pontón  $n$ .

$\Delta S_{i+1}$  – es la fuerza cortante en la junta  $i+1$  correspondiente al pontón  $n$ .

$\Delta M_i$  – es el momento flexionante en la junta  $i$  correspondiente al pontón  $n$ .

$\Delta M_{i+1}$  – es el momento flexionante en la junta  $i+1$  correspondiente al pontón  $n$ .

$A_n$  – es el área de contacto entre el pontón  $n$  y el terreno de cimentación.

$S_n$  – es el módulo de sección correspondiente al pontón  $n$ .

$l_n$  – es la mitad de la longitud total del pontón  $n$ , en la dirección longitudinal de análisis.

De manera análoga las ecuaciones (7) y (8) pueden ser escritas para los pontones  $n-1$  y  $n+1$  y todos los pontones que formen el sistema.

De lo anterior se puede establecer las siguientes condiciones de compatibilidad:

Entre los pontones  $n-1$  y  $n$ , junta  $i$ .

$$(\Delta q_i)_{n-1} = (\Delta q_i)_n \quad (9)$$

Entre los pontones  $n$  y  $n+1$ , junta  $i+1$ .

$$(\Delta q_{i+1})_n = (\Delta q_{i+1})_{n+1} \quad (10)$$

De manera similar se escribirían las ecuaciones para los pontones “ $n+2$ ”, “ $n+3$ ”, etc., lo que implicaría un número mayor de juntas ( $i+2$ ,  $i+3$ , etc.)

Finalmente, los cambios en las reacciones  $\Delta q$ , debido a la junta entre pontones ( $i$  y  $i+1$ ), se calculan con las ecuaciones (7) y (8). En la figura 24 se muestra el arreglo de signos que toman las ecuaciones (7) y (8), respectivamente para determinar la magnitud del cambio de las reacciones en los extremos de cada pontón.

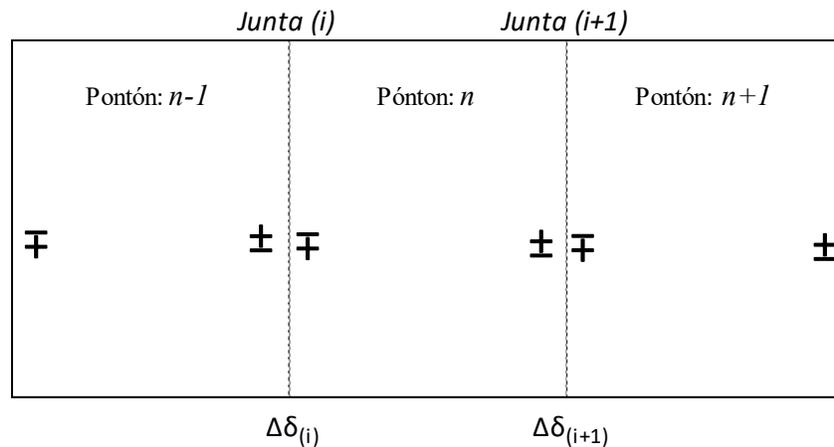


Figura 24. Arreglo de signos en los extremos de cada pontón de acuerdo con las ecuaciones (7) y (8) [Elaboración propia].

Se debe aclarar que  $\Delta M_i$ , es la reducción necesaria del momento flexionante y se establece a partir de una curva de momento flexionante inicial en la ubicación de la junta *i-th*.

### 5.1.1.3 Momento plástico.

La distribución de esfuerzos normales en régimen plástico supone que todas las fibras de una sección de acero (no sólo la más alejada) alcanzan el límite elástico de cálculo, de modo que el diagrama de esfuerzos es uniforme respecto al eje centroidal de la sección considerada. En la figura 25 se muestra el estado de esfuerzos elástico y plástico en una sección I de acero (Figura 25). [11]

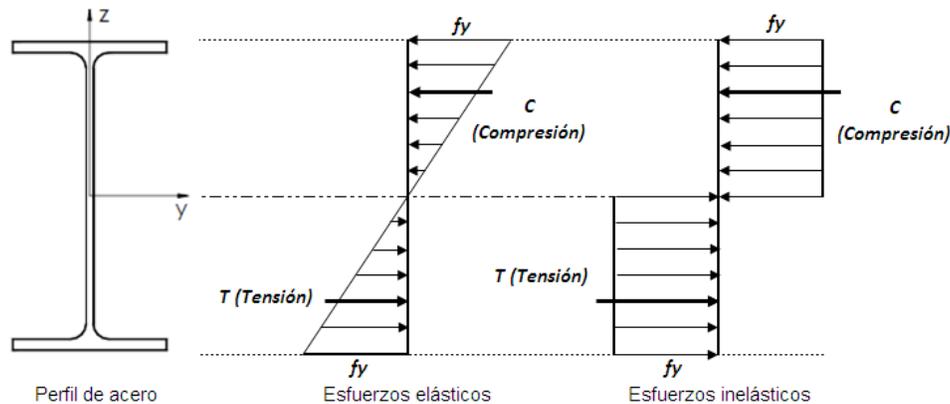


Figura 25. Diagrama de esfuerzos elásticos e inelástico en un perfil de acero [Elaboración propia].

Se define el momento plástico resistente  $M_{pi}$  de un perfil de acero como aquel que es capaz de plastificar todas y cada una de las fibras de la sección. Su valor es igual a:

$$M_{pi} = f_y \cdot Z_p \quad (11)$$

Donde:

$f_y$  – es el esfuerzo de fluencia en el régimen plástico ( $2400\text{kg/cm}^2 < f_y < 4200\text{kg/cm}^2$ ).

$Z_p$  – es el módulo plástico.

El módulo plástico se calcula considerando que la sección solicitada a flexión ha plastificado, estando una parte de ésta a compresión y la otra a tensión, de modo que para que la sección esté en equilibrio, es necesario que la fuerza resultante de la parte a compresión sea igual a la fuerza resultante de la parte a tensión. (Figura 26).

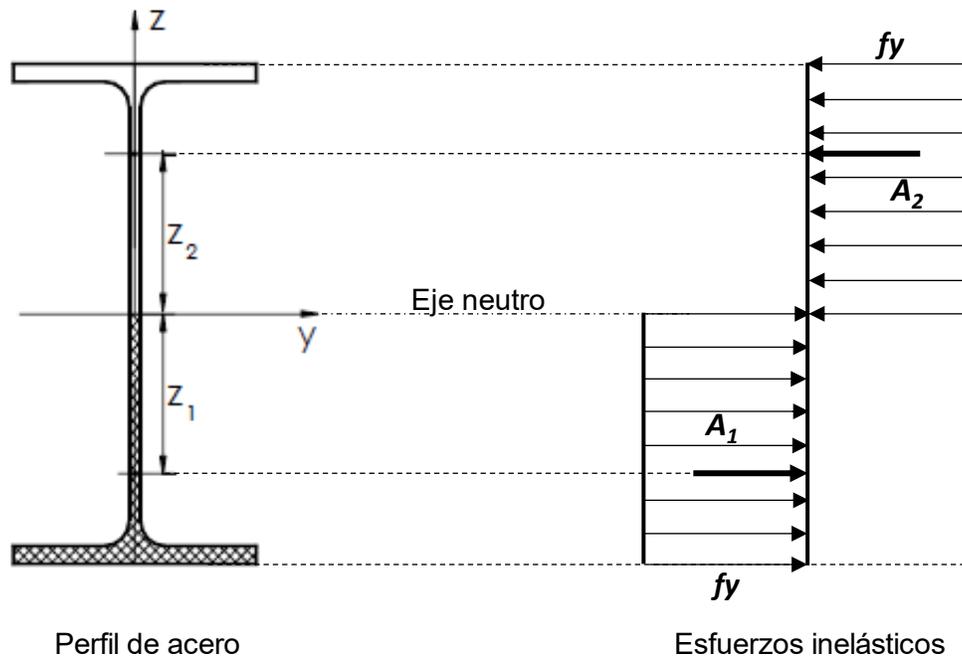


Figura 26. Diagrama de esfuerzos inelástico en un perfil de acero. [Elaboración propia]

De lo descrito en el párrafo anterior y representado esquemáticamente en la figura 26, se expresa matemáticamente como:

$$A_1 \cdot f_y = A_2 \cdot f_y \quad (12)$$



Entonces:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$$

Siendo A, el área total, suma de las áreas del diagrama trabajando a compresión y a tensión.

La ecuación (12) representa un par de fuerzas que equilibra al momento resistente plástico, por tanto:

$$M_{pi} = A_1 \cdot f_y \cdot Z_1 + A_2 \cdot f_y \cdot Z_2 \quad (13)$$

Reescribiendo la ecuación (13) queda:

$$M_{pi} = f_y \cdot (Z_1 + Z_2) \cdot \frac{A}{2} \quad (14)$$

Se define al módulo plástico como:

$$Z_p = (Z_1 + Z_2) \cdot \frac{A}{2} \quad (15)$$

Donde:

$f_y$  – es el esfuerzo de fluencia del acero.

$Z_1, Z_2$  – es la distancia media entre curvas de transición en las lamas de perfiles laminados, en mm.

$A_1, A_2$  – son las áreas del diagrama de esfuerzos trabajando a compresión y a tensión respectivamente.

Los módulos plásticos de los perfiles de acero se encuentran tabulados en manuales de construcción de elementos de acero, como el manual IMCA.

Cuando los desplazamientos verticales diferenciales entre pontones sean considerables en magnitud, se tiene como opción el tipo de junta IV el cual considera la colocación de un elemento de acero, esto implica tomar en cuenta un momento plástico  $M_{pi}$ , entonces la corrección del momento flexionante  $\Delta M_i$  se obtiene mediante la ecuación siguiente:

$$\Delta M_i = M_i - M_{pi} \quad (16)$$



Donde:

$\Delta M_i$  – es la reducción del momento flexionante  $M_i$  debido a un perfil de acero que confiere un momento plástico resistente  $M_{pi}$ .

$M_{pi}$  – es el momento plástico resistente en una junta tipo IV, que considera la inclusión de un elemento de acero (perfil).

$M_i$  – es el momento flexionante obtenido en un análisis de interacción-suelo-estructura (I.S.E.).

#### 5.1.1.4 Determinación del cambio en las reacciones.

Una vez calculadas las reacciones  $\Delta q_i$  con las ecuaciones (7) y (8) presentadas en el punto 4.4.1.2, mediante un método gráfico se determinará la distribución de reacciones por ancho de dovela. A continuación, se presentan los pasos a seguir.

1. Como primer paso es recomendable pasar los valores de las reacciones  $\Delta q_i$  que resultaron en unidades de presión a cargas uniformemente repartidas  $Q_i$  (en unidades de fuerza por unidad de longitud), por consiguiente, las ecuaciones son:

Para el pontón *n-th*.

Lado izquierdo:

$$Q_{(n-th)} = [(\Delta q_i)_{n-th}] \cdot 2B \quad (17)$$

Lado derecho:

$$Q_{(n-th)} = [(\Delta q_{i+1})_{n-th}] \cdot 2B \quad (18)$$

De manera análoga se pueden establecer ecuaciones para cada pontón en que se dividió la estructura de la cimentación.

Con los resultados obtenidos de las ecuaciones (17) y (18), se grafican los diagramas correspondientes, los cuales tienen una variación lineal entre juntas y su distribución depende del tipo de junta propuesta.

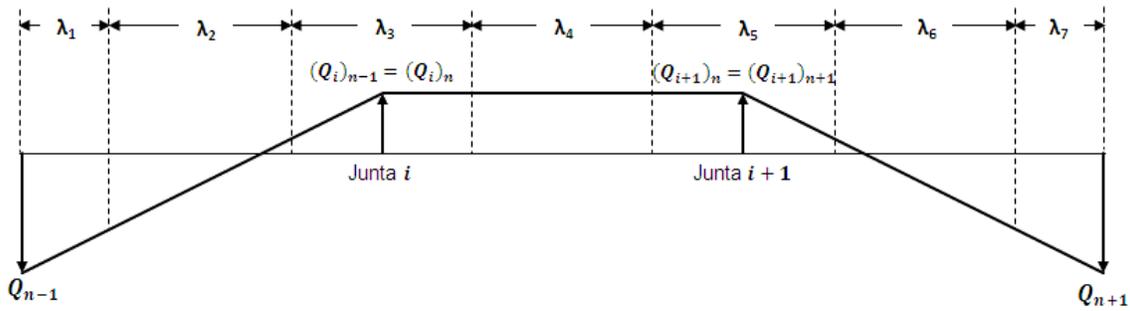


Figura 27. Diagrama de reacciones en los extremos de los pontones con juntas del Tipo III ( $i$ ) o IV ( $i+I$ ) [Elaboración propia]

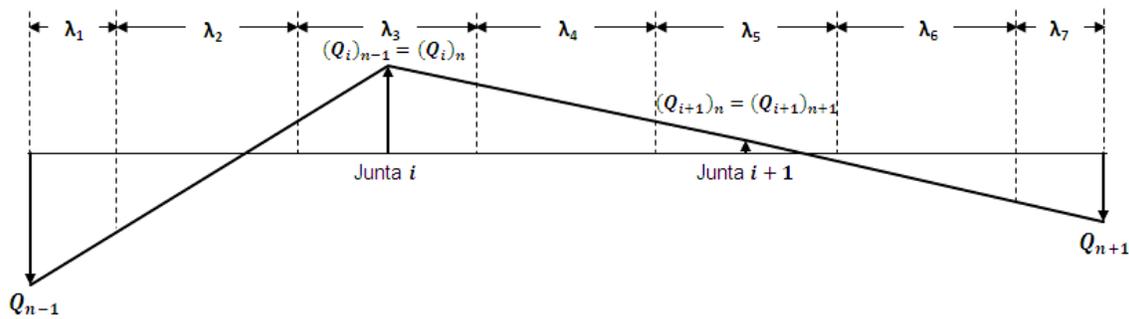


Figura 28. Diagrama de reacciones en los extremos de los pontones con una junta del Tipo III ( $i$ ) y una junta Tipo IV ( $i+I$ ). [6]

- En el segundo paso se determina la magnitud de la reacción en el punto medio del ancho de la dovela ( $\lambda$ ) a partir del diagrama de la figura 29 ó 30 según corresponda. Por facilidad, se puede trazar el diagrama de la figura 29 ó 30 en un programa de dibujo (AutoCAD) en escala 1:1 y medir directamente la distancia del punto medio de la longitud de la dovela hasta intersectar la línea del diagrama, por ejemplo:

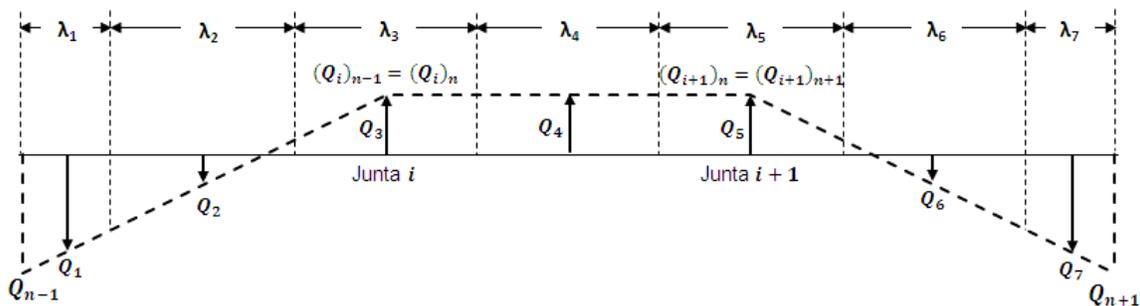


Figura 29. Determinación de la magnitud  $Q_i$  en cada dovela, cuando se consideran juntas Tipo III ( $i$ ) o IV ( $i+I$ ). [Elaboración propia]

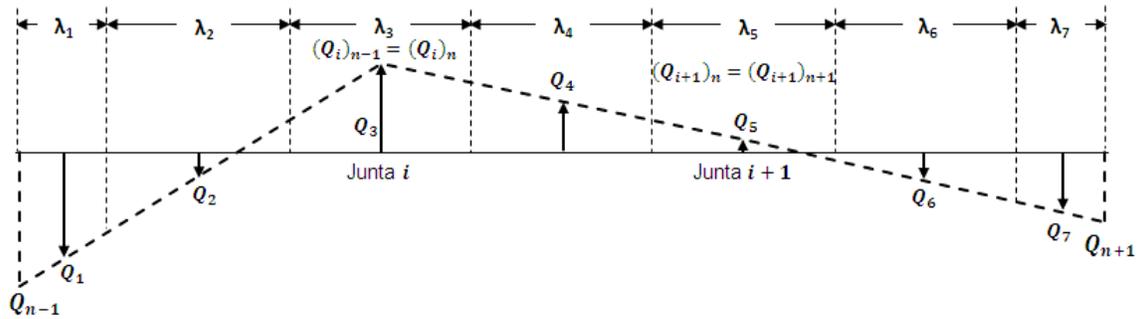


Figura 30. Determinación de la magnitud  $Q_i$  en cada dovela, cuando se considera una junta Tipo III ( $i$ ) o IV ( $i+I$ ) [Elaboración propia].

3. Se traza un diagrama de reacciones a partir de los valores de  $Q_i$  (t/m) obtenidos en el paso 2, se supone una distribución uniforme en todo el ancho  $\lambda$  de la dovela.

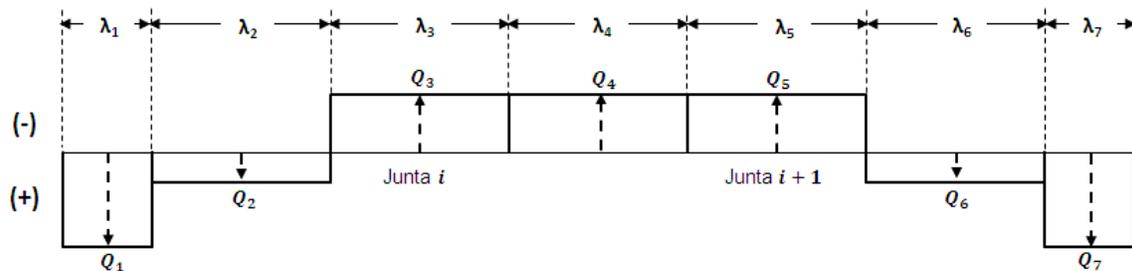


Figura 31. Diagrama típico de reacciones uniformes  $Q_i$  en cada dovela cuando se consideran juntas Tipo III o IV [Elaboración propia].

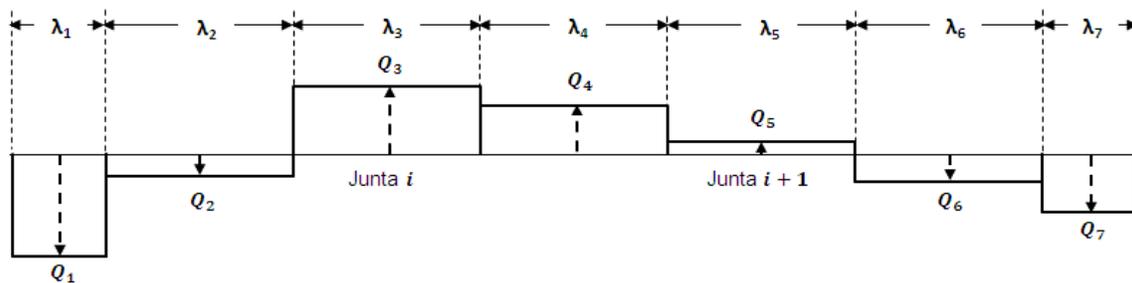


Figura 32. Diagrama típico de reacciones uniformes  $Q_i$  en cada dovela, cuando se considera una junta Tipo III ( $i$ ) y IV ( $i+I$ ) [Elaboración propia].

4. Finalmente, al diagrama de reacciones obtenido en la primera etapa de diseño se suma o resta aritméticamente con las reacciones obtenidas en el paso 3, dovela por dovela, para obtener las reacciones finales  $Q_f$ . Las reacciones obtenidas de un análisis como

cimentación rígida se toman como positivas y en el caso del cambio de reacciones debido a las juntas *i-th*, se toman como negativas las que tienen dirección vertical hacia abajo y positivas con dirección vertical hacia arriba.

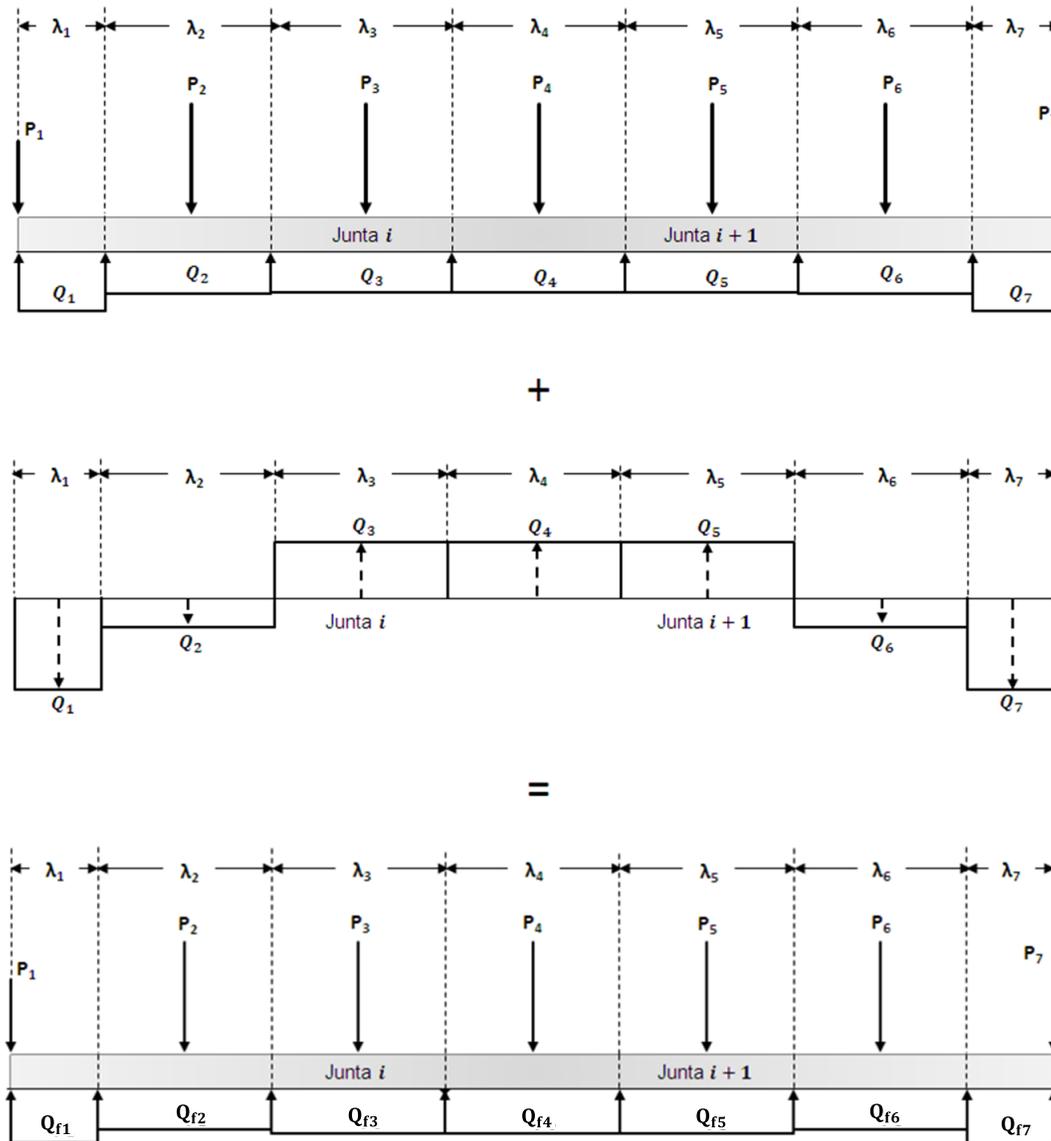


Figura 33. Diagrama de reacciones finales  $Q_{fi}$  en cada dovela con juntas Tipo III (*i*) o IV (*i+1*).  
[Elaboración propia]

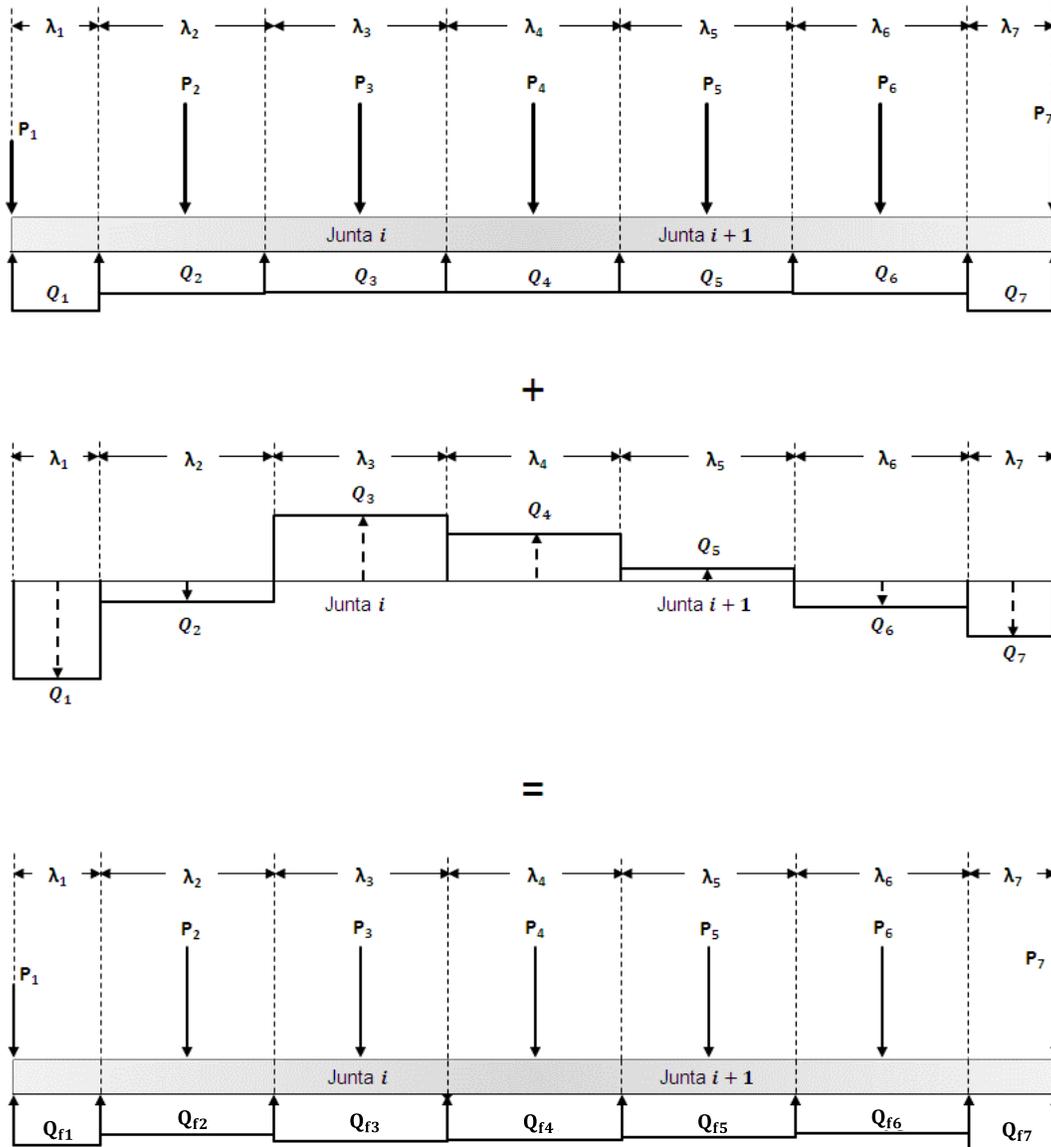


Figura 34. Diagrama de reacciones finales  $Q_{fi}$  en cada dovela con una junta Tipo III ( $i$ ) y una junta Tipo IV ( $i+1$ ). [Elaboración propia]

### 5.2 *Estimación de los desplazamientos verticales totales debido al cambio de reacciones.*

Para el cálculo de los desplazamientos verticales totales las reacciones finales  $Q_{fi}$  se manejarán en unidades de presión, obteniéndose los valores  $q_{fi}$ . Con los valores de los esfuerzos finales  $q_{fi}$  se forma una matriz columna de esfuerzos que se sustituirá en la ecuación matricial de asentamientos (EMA) presentada en el Capítulo 3.

Donde:

$$[q_{fi}] = \left[ \frac{Q_{fi}}{2B} \right] \quad (19)$$

Entonces,

$$[\delta_{ji}] = \{ [\delta_{ji}]^T \} [q_{fi}] \quad (20)$$

### 5.3 *Desplazamientos verticales diferenciales permisibles.*

Los desplazamientos diferenciales calculados entre pontones  $\Delta\delta_i$  deberán estar dentro de rangos tolerables para la propia superestructura. Cuando los desplazamientos verticales diferenciales resulten de mayor magnitud que los permisibles y no se pueda satisfacer lo especificado en las normas o manuales de diseño, se deberá considerar un tipo de junta diferente al propuesto; por ejemplo, si el tipo de junta propuesto es de Tipo III, podrán analizarse juntas de Tipo IV, las cuales consideran la creación de un momento plástico. No obstante, si ya se habían adoptado juntas Tipo IV, se podrá considerar un momento plástico de mayor magnitud; los cálculos se repetirán hasta seleccionar un momento plástico apropiado que permita satisfacer los desplazamientos verticales diferenciales permisibles.

### 5.4 *Distorsiones angulares.*

Las distorsiones angulares que sufre una superestructura en distintos puntos se evalúan dividiendo el desplazamiento diferencial entre el claro. Para nuestra revisión es la distancia correspondiente entre centros geométricos de dovelas adyacentes. De los análisis realizados se debe garantizar que una vez que acabe el proceso de consolidación (primaria y secundaria), los desplazamientos verticales totales y/o diferenciales y las distorsiones angulares que pudiera sufrir la superestructura estén dentro de los límites máximos permitidos como aceptables para garantizar un buen comportamiento en condiciones de servicio. Es por ello por lo que Zeevaert (1983) propone que las distorsiones angulares entre pontones, girando éstos como cuerpos rígidos, cumplan las siguientes relaciones.

Cuando se introduzcan juntas **Tipo III** la distorsión angular no debe exceder un valor de 0.002, es decir:

$$\frac{\Delta\delta_{diferencial}}{l} < \frac{1}{500}$$

Cuando se introduzcan juntas **Tipo IV** la distorsión angular no debe exceder un valor de 0.001, es decir:

$$\frac{\Delta\delta_{diferencial}}{l} < \frac{1}{1000}$$

En la tabla 3 se consigan los valores de distorsiones angulares límites reportados en la literatura técnica, definidos en función del desplazamiento vertical diferencial entre el claro.

Tabla 3. Distorsiones angulares límites para estructuras a base de marcos de concreto armado. [11].

Fuente	Relación entre desplazamiento diferencial/claro
Instituto de Ingeniería, 1993	0.001 (marcos de concreto)
Lambe & Whitman, 2000	1/500 = 0.002 (límite seguro para edificios donde no se permiten grietas)
	1/250 = 0.004 (inclinación visible de edificios)
	1/150 = 0.0066 (daños estructurales)
Sowers, 1962	0.0025 a 0.004

De la tabla anterior, se puede concluir que las distorsiones angulares propuestas por Zeevaert son congruentes con lo reportando en la literatura técnica de 0.001 para estructuras con marcos de concreto y 0.002 en los que no se permiten grietas.

### 5.5 Elementos mecánicos de diseño finales.

Con las reacciones finales obtenidas en el punto 5.1.1.4, se calculan las fuerzas cortantes y momentos flexionantes finales y se construyen sus respectivos diagramas. Para esto último se puede recurrir a un software comercial o bien aplicando los métodos descritos en los puntos 4.3.1 y 4.3.2 del Capítulo 4. Los diagramas servirán para el diseño estructural de la cimentación con pontones.



### 5.6 Ejemplo numérico de una cimentación de pontones.

El siguiente diseño corresponde a la segunda etapa del ejemplo A.VIII Cimentación con Pontones (Zeevaert, 1983), en el cual se ilustra paso a paso como reducir la magnitud de los elementos mecánicos de diseño cuando se incluyen varias juntas mecánicas en una cimentación rígida muy larga. Aunque, en el ejemplo sólo considera la aplicación de una junta tipo III y una Tipo IV, se extenderá para los casos en que las dos juntas son del tipo III o bien si las dos juntas son del tipo IV. Además, se abordará un caso cuando el número de juntas es mayor e impar.

Los dos casos son:

- a) Cimentación dividida en 3 pontones rígidos y 2 juntas de construcción.
  - I. Una junta tipo III y el otro tipo IV (Ejemplo A.VIII)
  - II. Dos juntas tipo IV.
  - III. Dos juntas tipo III.
- b) Cimentación dividida en 6 pontones rígidos y 5 juntas de construcción.
  - I. Juntas tipo III.
  - II. Combinación de juntas tipo III y IV.
  - III. Juntas tipo IV.

Para ilustrar el procedimiento se tomará el ejemplo del inciso a) relativo a una cimentación totalmente compensada tipo cajón con dimensiones en planta de: ancho  $2B=12$  m y largo  $L=60$  m. Además, la revisión sólo se hará en el sentido longitudinal del cajón de cimentación. A continuación, se describe el primer caso.

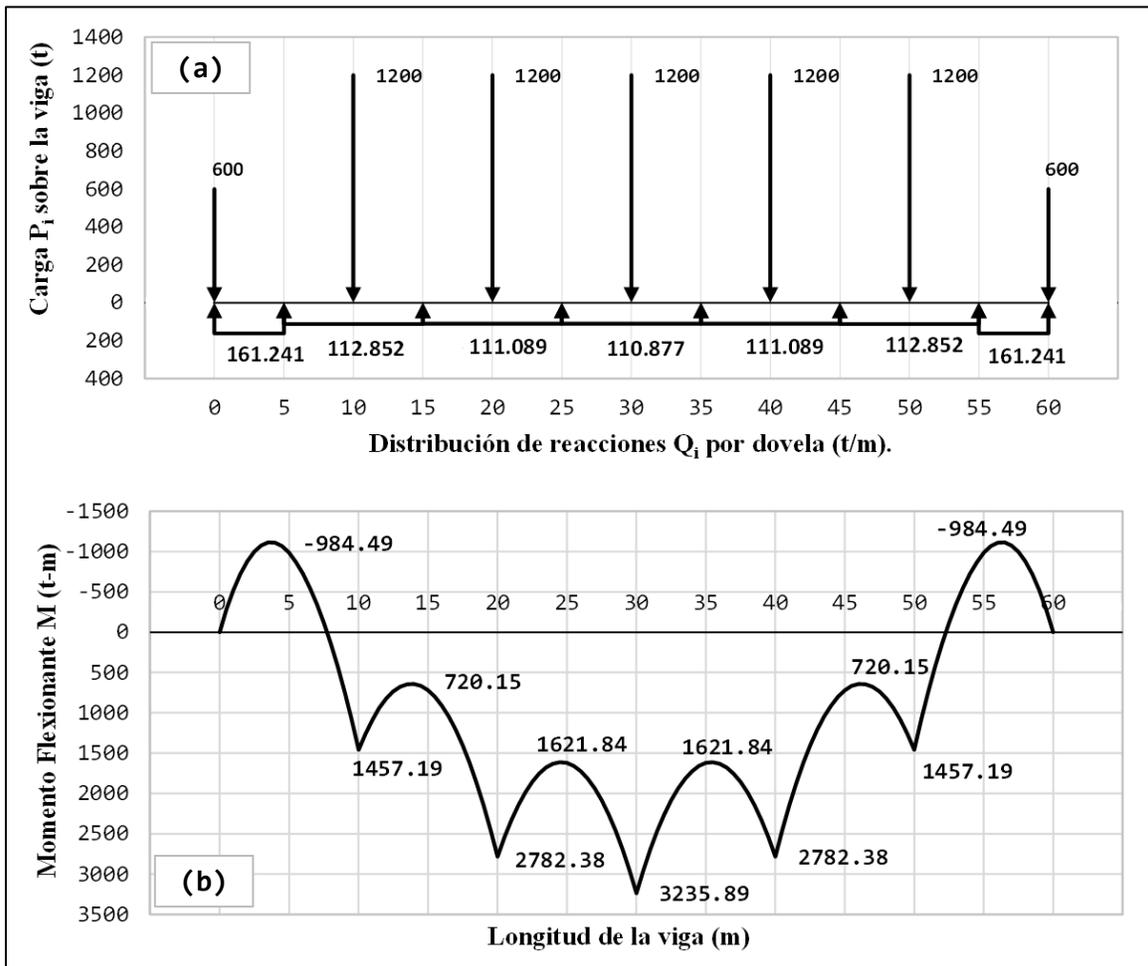


Figura 35. Distribución de cargas (a) y momentos flexionantes (b) para una cimentación rígida. [Elaboración propia].

De acuerdo con el diagrama de momentos flexionantes mostrado en la figura 35, los mayores momentos flexionantes se localizan en  $L=20, 30$  y  $40$  m, la magnitud de los momentos flexionantes son  $M=2782.38$  t-m,  $3235.89$  t-m y  $2781.38$  t-m, respectivamente.

#### 5.6.1 CASO a): Sistema de 3 pontones (n) y 2 de juntas (i).

##### Subcaso a): Con una junta Tipo III y una Tipo IV.

La propuesta de Zeevaert en su diseño fue introducir dos juntas, una del tipo III a una distancia de 20 m y otra junta del tipo IV a una distancia de 40 m a partir del origen en el lado izquierdo. La junta del tipo III admite una fuerza cortante y la junta de tipo IV, además,

de una fuerza cortante, toma en cuenta el desarrollo de un momento plástico resistente el cual para este ejemplo es  $M_p=800 \text{ t-m}$ , proporcionado por un conjunto de varillas que mantendrá unido los pontones.

Procedimiento de cálculo:

Sea la figura 36 la cimentación tipo cajón dividida en 3 pontones enumerados como **1**, **2**, **3** y dos juntas identificadas como **(a)** y **(b)**. Se precisa conocer los cambios en las reacciones debido a la introducción de juntas de construcción, así como investigar si los desplazamientos verticales diferenciales no rebasan los valores límites establecidos por las normas de diseño y finalmente si con la introducción de juntas mecánicas se reduce la magnitud de los momentos flexionantes.

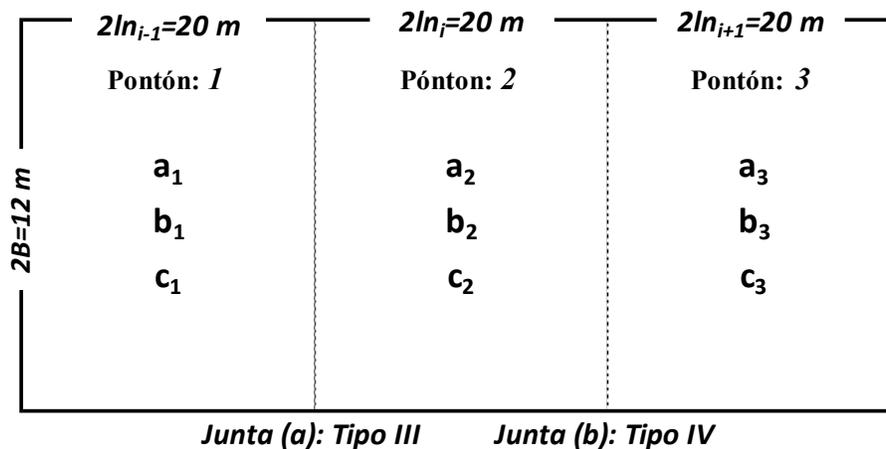


Figura 36. Cajón de cimentación dividido en 3 pontones [Elaboración propia].

1. A partir de la ecuación general se establece una ecuación por junta:

$$a_{n-1}\Delta S_{i-1} + (b_{n-1} + b_n)\Delta S_i + a_n\Delta S_{i+1} = (c_{n-1} + c_n) \quad (21)$$

Sea  $n=2$  e  $i=1$  y sustituyendo en los subíndices de la ecuación general entonces la primera ecuación queda de la forma.

$$a_{2-1}\Delta S_{1-1} + (b_{2-1} + b_2)\Delta S_1 + a_2\Delta S_2 = (c_{2-1} + c_2)$$

Resolviendo operaciones en los subíndices:

$$a_1\Delta S_0 + (b_1 + b_2)\Delta S_1 + a_2\Delta S_2 = (c_1 + c_2)$$



Donde:

$$a_1 \Delta S_0 = 0$$

Por lo tanto, la primera ecuación a resolver es:

$$(b_1 + b_2) \Delta S_a + a_2 \Delta S_b = (c_1 + c_2) \quad (22)$$

Sea  $n=3$  e  $i=2$ , sustituyendo en los subíndices de la ecuación general entonces la segunda ecuación queda de la forma.

$$a_{3-1} \Delta S_{2-1} + (b_{3-1} + b_3) \Delta S_2 + a_3 \Delta S_{2+1} = (c_{3-1} + c_3)$$

Resolviendo operaciones en los subíndices:

$$a_2 \Delta S_1 + (b_2 + b_3) \Delta S_2 + a_3 \Delta S_3 = (c_2 + c_3)$$

Donde:

$$a_3 \Delta S_3 = 0$$

Por lo tanto, la segunda ecuación a resolver es:

$$a_2 \Delta S_1 + (b_2 + b_3) \Delta S_2 = (c_2 + c_3) \quad (23)$$

2. Establecida las ecuaciones se procede a calcular los valores de los coeficientes geométricos del sistema de pontones,  $a_{n-th}$ ,  $b_{n-th}$  y  $c_{n-th}$  para cada pontón.

Pontón 1:

$$A_1 = 2B \cdot 2l_1 = (12 \text{ m})(20 \text{ m}) = 240 \text{ m}^2$$

$$S_1 = \frac{1}{3} A_1 \cdot l_1 = \frac{1}{3} (240 \text{ m}^2)(10 \text{ m}) = 800 \text{ m}^3$$

$$a_1 = \frac{2}{A_1} = \frac{2}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.00833}{\text{m}^2}$$

$$b_1 = \frac{4}{A_{n-th}} = \frac{4}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.017}{\text{m}^2}$$



Recordemos que la convención de signos adoptada es: con giro en sentido de las manecillas del reloj es positivo (+) y con giro en sentido contrario a las manecillas del reloj es negativo (-). Para establecer los signos de los momentos nos apoyamos de la figura 13 (Punto 5.3).

$$c_1 = \frac{\Delta M_0 + \Delta M_{(a)}}{S_{n-1}} = \frac{0 + (-2782.38 \text{ t} \cdot \text{m})}{800 \text{ m}^3} = -3.477 \frac{\text{t}}{\text{m}^2}$$

Pontón 2:

$$A_2 = 2B \cdot 2l_2 = (12 \text{ m})(20 \text{ m}) = 240 \text{ m}^2$$

$$S_2 = \frac{1}{3} A_2 \cdot l_2 = \frac{1}{3} (240 \text{ m}^2)(10 \text{ m}) = 800 \text{ m}^3$$

$$a_2 = \frac{2}{A_2} = \frac{2}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.00833}{\text{m}^2}$$

$$b_2 = \frac{4}{A_2} = \frac{4}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.017}{\text{m}^2}$$

La junta (a) es del tipo III la cual no genera un momento adicional por lo que el momento solo a considerar será de  $\Delta M_{(a)}=2782.38 \text{ t-m}$  y en la junta (b) es del tipo IV el cual admite un momento plástico resistente, así que el momento reducido en esta junta será  $\Delta M_{(b)}=M_{(b)}-M_p(b)$ , es decir  $M_{(b)}=2782.38 - 800 = 1982.38 \text{ t-m}$ .

$$c_2 = \frac{\Delta M_{(a)} + \Delta M_{(b)}}{S_2} = \frac{2782.38 \text{ t} \cdot \text{m} + (-1982.38 \text{ t} \cdot \text{m})}{800 \text{ m}^3} = 1.00$$

Pontón 3:

$$A_3 = 2B \cdot 2l_3 = (12 \text{ m})(20 \text{ m}) = 240 \text{ m}^2$$

$$S_3 = \frac{1}{3} A_3 \cdot l_3 = \frac{1}{3} (240 \text{ m}^2)(10 \text{ m}) = 800 \text{ m}^3$$

$$a_3 = \frac{2}{A_3} = \frac{2}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.00833}{\text{m}^2}$$

$$b_3 = \frac{4}{A_3} = \frac{4}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.017}{\text{m}^2}$$

$$c_3 = \frac{\Delta M_{(b)} + \Delta M_{(0)}}{S_3} = \frac{(1982.38 \text{ t-m}) + 0}{800 \text{ m}^3} = 2.477$$

En la tabla 4 se consignan los valores de los coeficientes **a**, **b** y **c**, para las ecuaciones del sistema.

Tabla 4. Coeficientes geométricos para las ecuaciones del sistema de pontones con juntas Tipo III y IV. [6].

Coeficientes geométricos	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Uds.
	Junata a		Junta b				
$An = 2B \cdot 2ln$	240		240		240		$\text{m}^2$
$Sn = (An \cdot ln)/3$	800		800		800		$\text{m}^3$
$an = 2/An$	0.00833		0.00833		0.00833		$1/\text{m}^2$
$bn = 4/An$	0.017		0.017		0.017		$1/\text{m}^2$
$\Delta M_i$	0	-2782.38	2782.38	-1982.38	1982.38	0	t-m
$\Delta M_i + \Delta M_{i+1}$	-2782.38		800		1982.380		t-m
$Cn = (\Delta M_i + \Delta M_{i+1})/Sn$	-3.478		1.00		2.478		$\text{t}/\text{m}^2$

Calculados los coeficientes **a**, **b** y **c**, se sustituyen en las ecuaciones (21) y (22) establecidas a partir de la ecuación general.

Sustituyendo los valores correspondientes:

$$(0.017 + 0.017)\Delta S_{(a)} + 0.00833\Delta S_{(b)} = (-3.478 + 1)$$

$$0.00833\Delta S_{(a)} + (0.017 + 0.017)\Delta S_{(b)} = (1 + 2.478)$$

El sistema de ecuaciones lineales a resolver es:

$$0.0333\Delta S_{(a)} + 0.00833\Delta S_{(b)} = -2.478 \quad (\text{I})$$

$$0.00833\Delta S_{(a)} + 0.0333\Delta S_{(b)} = +3.478 \quad (\text{II})$$

- Debido a la introducción de dos juntas de construcción del tipo III y IV, la fuerza cortante es  $\Delta S \neq 0$ , resolviendo el sistema de ecuaciones lineales obtenemos (Solución por el Método de Sarrus):

$$\Delta S_{(a)} = -107.119 \text{ t}$$



$$\Delta S_{(b)} = +131.119 t$$

4. Con las ecuaciones (7) y (8) se calculan los esfuerzos de corrección  $\Delta q_i$  en los extremos izquierdo y derecho de cada pontón.

Para el pontón 1.

$$(\Delta q_{izq.})_1 = \frac{\Delta S_0 - \Delta S_{(a)}}{A_1} \mp \frac{\Delta M_0 + \Delta M_{(a)}}{S_1} \pm \frac{\Delta S_0 + \Delta S_{(a)}}{S_1} l_1$$

$$(\Delta q_{izq.})_1 = \frac{[0 - (-107.119 t)]}{240 m^2} - \frac{[0 + (2782.38 t - m)]}{800 m^2} + \frac{[0 + (-107.119 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{izq.})_1 = 2.585 \frac{t}{m^2}$$

$$(\Delta q_{der.})_1 = \frac{[0 - (-107.119 t)]}{240 m^2} + \frac{[0 + (2782.38 t - m)]}{800 m^2} - \frac{[0 + (-107.119 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{der.})_1 = -1.693 \frac{t}{m^2}$$

Para el pontón 2.

$$(\Delta q_{izq.})_2 = \frac{\Delta S_{(a)} - \Delta S_{(b)}}{A_2} \mp \frac{\Delta M_{(a)} + \Delta M_{(b)}}{S_2} \pm \frac{\Delta S_{(a)} + \Delta S_{(b)}}{S_2} l_2$$

$$(\Delta q_{izq.})_2 = \frac{[-107.119 t - (131.119 t)]}{240 m^2} - \frac{[2782.380 t - m + (-1982.380 t - m)]}{800 m^2} + \frac{[-107.119 t - (131.119 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{izq.})_2 = 1.693 \frac{t}{m^2}$$

$$(\Delta q_{der.})_2 = \frac{[-107.119 t - (131.119 t)]}{240 m^2} + \frac{[2782.38 t - m + (-1982.38 t - m)]}{800 m^2} - \frac{[-107.119 t - (131.119 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{der.})_2 = -0.293 \frac{t}{m^2}$$



Para el pontón 3.

$$(\Delta q_{izq.})_3 = \frac{\Delta S_{(b)} - \Delta S_{(0)}}{A_3} \mp \frac{\Delta M_{(b)} + \Delta M_{(0)}}{S_3} \pm \frac{\Delta S_{(b)} + \Delta S_{(0)}}{S_3} l_3$$

$$(\Delta q_{izq.})_3 = \frac{[131.119 t - (131.119 t)]}{240 m^2} - \frac{[(2782.38 t - m - 800 t - m) + (0)]}{800 m^2} + \frac{[131.119 t + (0 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{izq.})_3 = -0.293 \frac{t}{m^2}$$

$$(\Delta q_{der.})_3 = \frac{[131.119 t - (131.119 t)]}{240 m^2} + \frac{[(2782.38 t - m - 800 t - m) + (0)]}{800 m^2} - \frac{[131.119 t + (0 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{der.})_3 = 1.385 \frac{t}{m^2}$$

Tabla 5. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones cuando se introduce una junta Tipo III y una Tipo IV. [6]

Esfuerzos de corrección	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Uds.
		Junta a	Junta b				
$\Delta S$	0	↓ -107.119	↑ -107.119	↑ 131.119	↓ 131.119	0	t
$(\Delta S_i - \Delta S_{i+1})/A_n$	0.446		-0.993		0.546		t/m <sup>2</sup>
$\mp (\Delta M_i + \Delta M_{i+1})/S_n$	± 3.48		∓ 1.00		∓ 2.48		t/m <sup>2</sup>
$\pm (\Delta S_i + \Delta S_{i+1}) \cdot l_n/S_n$	∓ 1.34		± 0.30		± 1.64		t/m <sup>2</sup>
$\Delta q_i$	2.585	-1.693	-1.693	-0.293	-0.293	1.385	t/m <sup>2</sup>

5. Los esfuerzos  $\Delta q_i$  que están en unidades de presión es conveniente convertirlos a cargas uniformemente repartidas  $Q_i$ , es decir, en unidades de fuerza por metro, por consiguiente, las ecuaciones para su conversión son:

Para el pontón 1.

Lado izquierdo:

$$Q_{(izq.)} = [(\Delta q_{izq.})_1] \cdot 2B = \left(2.585 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = 31.02 \frac{t}{m}$$



Lado derecho en junta **(a)**:

$$Q_{(der.)} = [(\Delta q_{der.})_1] \cdot 2B = \left(-1.693 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = -20.312 \frac{t}{m}$$

Para el pontón 2.

Lado izquierdo en junta **(a)**:

$$Q_{(izq.)} = [(\Delta q_{izq.})_2] \cdot 2B = \left(-1.693 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = -20.312 \frac{t}{m}$$

Lado derecho en junta **(b)**:

$$Q_{(der.)} = [(\Delta q_{der.})_2] \cdot 2B = \left(-0.293 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = -3.512 \frac{t}{m}$$

Para el pontón 3.

Lado izquierdo en junta **(b)**:

$$Q_{(izq.)} = [(\Delta q_{izq.})_3] \cdot 2B = \left(-0.293 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = -3.512 \frac{t}{m}$$

Lado derecho:

$$Q_{(der.)} = [(\Delta q_{der.})_3] \cdot 2B = \left(1.385 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = 16.624 \frac{t}{m}$$

Una vista gráfica de los resultados se muestra en la figura 37, donde se puede apreciar que las reacciones de corrección  $Q_i$  debido a la introducción de dos juntas de construcción tienen una *variación lineal* a lo largo de cada pontón, en el sentido longitudinal. Para poder sumar algebraicamente estos efectos con los obtenidos de la cimentación rígida, se considerará una *reacción uniforme promedio* en cada dovela. Para ello se medirá la magnitud de la reacción  $Q_i$  al centro de cada dovela, en la figura 30 y 31 se tiene la representación gráfica de los resultados por ancho de dovela.

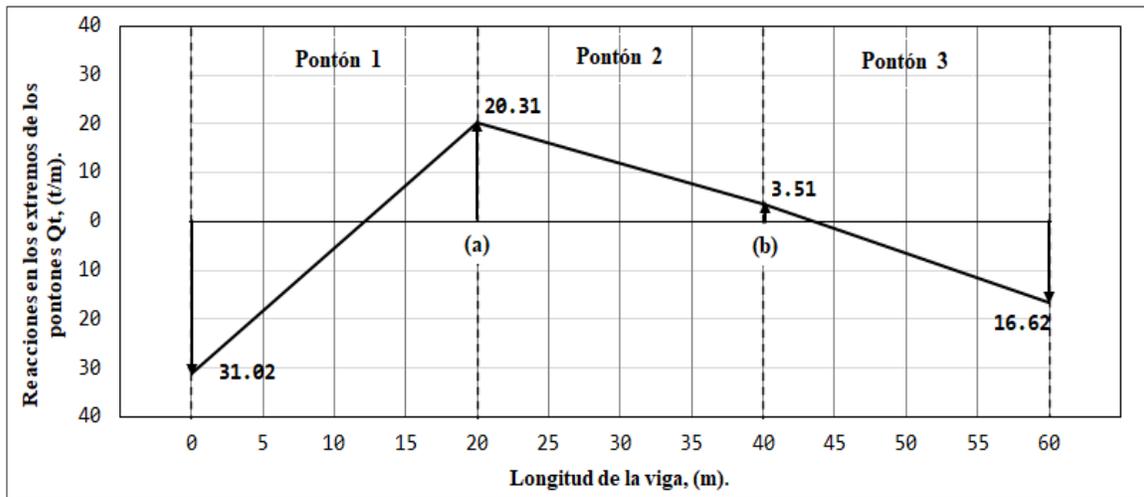


Figura 37. Reacciones en los extremos de los pontones debido a una junta Tipo III (a) y una junta tipo IV (b). [Elaboración propia]

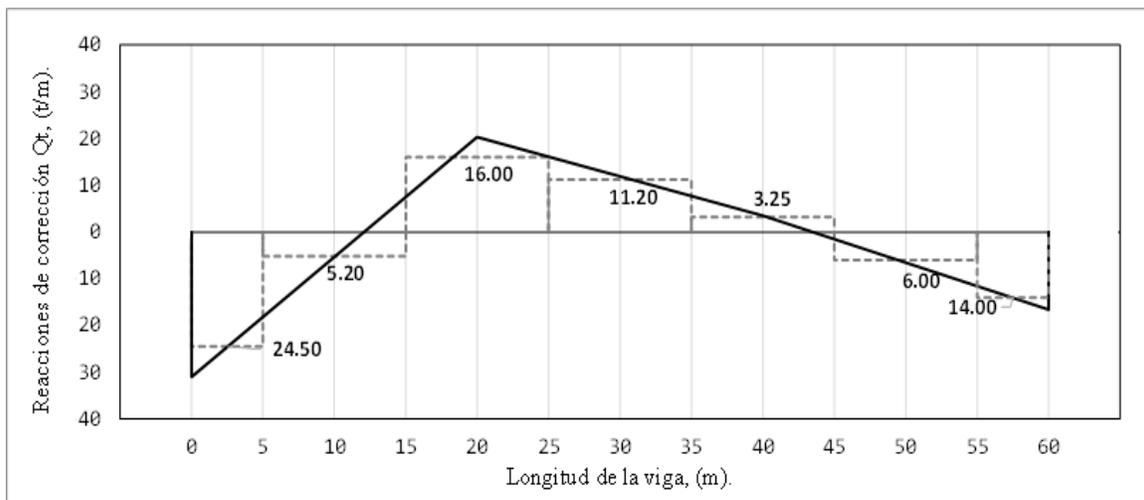


Figura 38. Valores promedio de las reacciones por ancho de dovela cuando se introduce una junta Tipo III (a) y una junta tipo IV (b). [Elaboración propia]

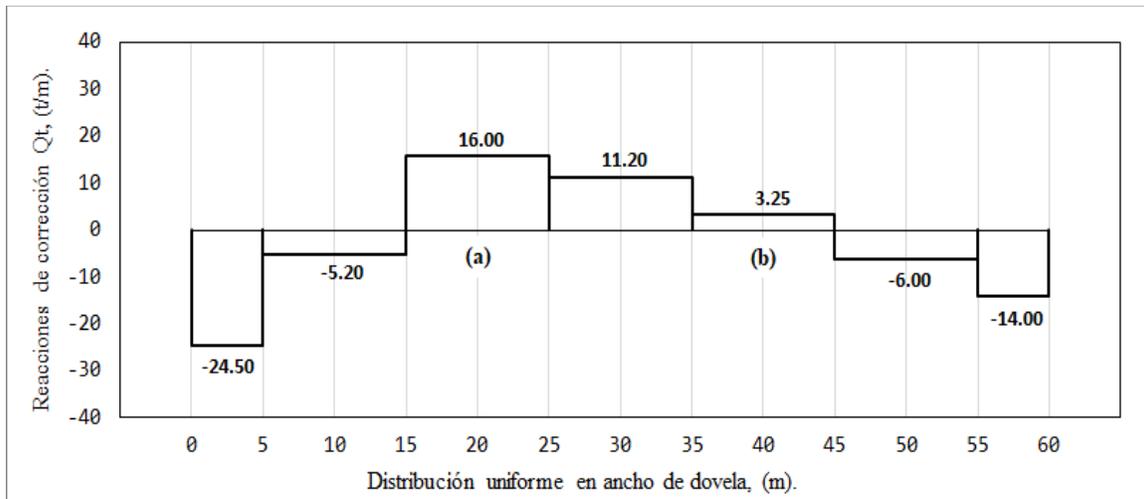


Figura 39. Distribución de las reacciones de corrección por ancho de dovela cuando se introduce una junta Tipo III (a) y una junta tipo IV (b). [Elaboración propia]

6. Por consiguiente, las reacciones para una cimentación rígida se suman algebraicamente con los valores promedio de las reacciones de corrección dovela por dovela, en la figura 40 se observan los resultados graficados. La convención de signos aplicada fue: las reacciones se tomaron como positivas con dirección vertical hacia arriba y negativas con dirección vertical hacia abajo.

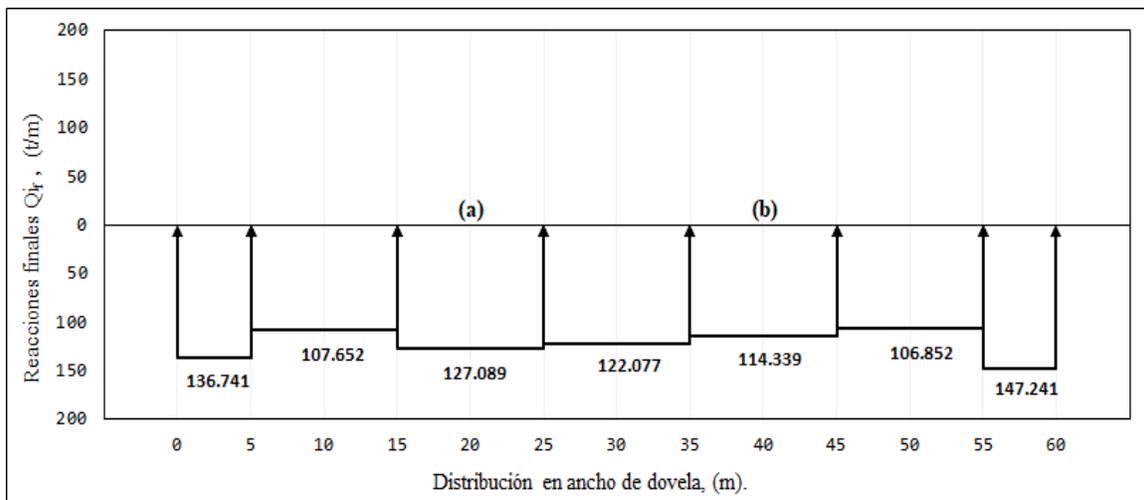


Figura 40. Distribución de reacciones finales  $Q_{if}$  por ancho de dovela cuando se introduce una junta Tipo III (a) y una junta tipo IV (b). [Elaboración propia]



7. Las reacciones finales  $Q_{fi}$  se transforman a esfuerzos  $q_{fi}$  formando un vector o matriz columna de esfuerzos que sustituimos en la ecuación matricial de asentamientos y resolviendo el producto de matrices se obtienen los desplazamientos verticales.

$$|q_{fi}| = \left| \frac{Q_{fi}}{2B} \right|$$

$$|\delta_{ji}| = \{[\delta_{ji}]^T\} |q_{fi}|$$

Reacciones en t/m a esfuerzos en t/m<sup>2</sup>.

$$\begin{bmatrix} q_{f1} \\ q_{f2} \\ q_{f3} \\ q_{f4} \\ q_{f5} \\ q_{f6} \\ q_{f7} \end{bmatrix} = \left( \frac{1}{12m} \right) \begin{bmatrix} 137.741 \text{ t/m} \\ 107.652 \text{ t/m} \\ 127.089 \text{ t/m} \\ 122.077 \text{ t/m} \\ 114.339 \text{ t/m} \\ 105.852 \text{ t/m} \\ 147.241 \text{ t/m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.395 \\ 8.971 \\ 10.591 \\ 10.173 \\ 9.528 \\ 8.904 \\ 12.270 \end{bmatrix}, \text{ en t/m}^2.$$

$[\bar{\delta}_{ji}]^T$							$ q_i $	$\delta_i$
0.00685	0.00272	0.00037	0.00008	0.00002	0.00001	0.00000	11.3951	0.10736
0.00114	0.00952	0.00154	0.00024	0.00005	0.00002	0.00000	8.9710	0.11780
0.00017	0.00154	0.00952	0.00154	0.00024	0.00005	0.00001	10.5908	0.13511
0.00004	0.00024	0.00154	0.00952	0.00154	0.00024	0.00004	10.1731	0.13298
0.00001	0.00005	0.00024	0.00154	0.00952	0.00154	0.00017	9.5283	0.12529
0.00000	0.00002	0.00005	0.00024	0.00154	0.00952	0.00114	8.9043	0.11657
0.00000	0.00001	0.00002	0.00008	0.00037	0.00272	0.00685	12.2701	0.11280

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10736 \\ 0.11780 \\ 0.13511 \\ 0.13298 \\ 0.12529 \\ 0.11657 \\ 0.11280 \end{bmatrix} \text{ en m} = \begin{bmatrix} 10.736 \\ 11.780 \\ 13.511 \\ 13.298 \\ 12.529 \\ 11.657 \\ 11.280 \end{bmatrix}, \text{ en cm.}$$

Los desplazamientos verticales corresponden a una cimentación con pontones.

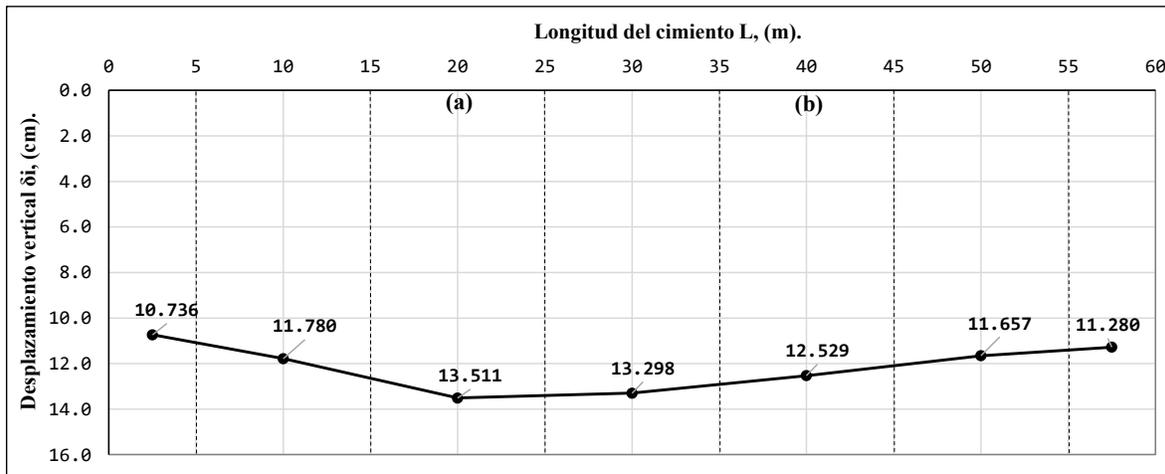


Figura 41. Desplazamientos verticales totales para una cimentación con pontones (con una junta Tipo III y una junta Tipo IV). [Elaboración propia]

8. Las distorsiones angulares las evaluamos dividiendo el desplazamiento diferencial entre el claro.

Para el pontón que tiene en común la junta **Tipo III** la distorsión angular no debe exceder un valor de 0.002, es decir:

$$\frac{\Delta\delta_{diferencial}}{l} < \frac{1}{500} \quad \frac{(13.511 \text{ cm} - 11.780)}{1000 \text{ cm}} < \frac{1}{500} \quad 0.000173 < 0.002$$

Para el pontón que tiene en común la junta **Tipo IV** la distorsión angular no debe exceder un valor de 0.001, es decir:

$$\frac{\Delta\delta_{diferencial}}{l} < \frac{1}{1000} \quad \frac{(12.529 \text{ cm} - 11.657)}{1000 \text{ cm}} < \frac{1}{1000} \quad 0.000872 < 0.001$$

9. Las fuerzas cortantes se calcularán de acuerdo con lo descrito en el punto 4.3.1. En la figura 42 se muestra las secciones donde es de interés conocer las fuerzas cortantes.

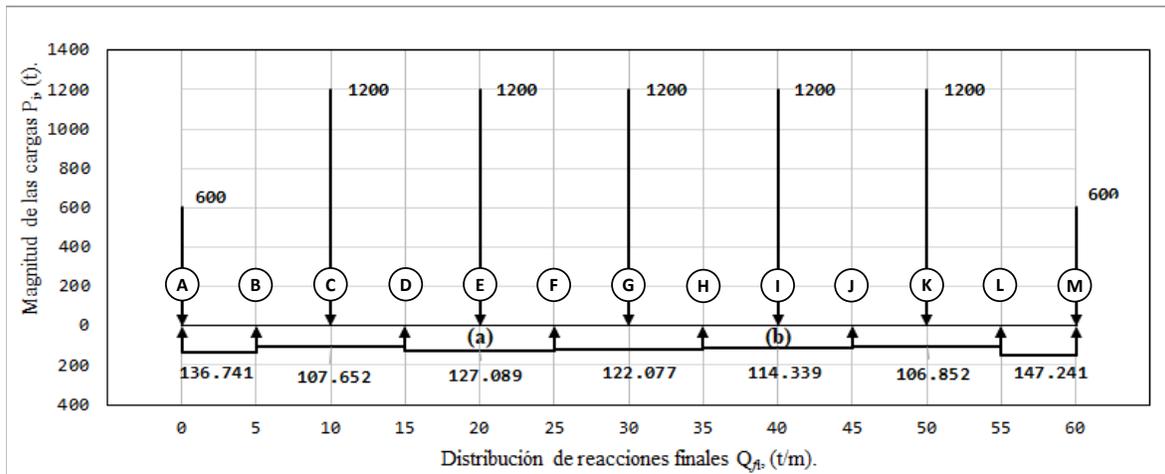


Figura 42. Cargas y reacciones finales para una cimentación con pontones (con una junta Tipo III y una junta Tipo IV). [Elaboración propia]

Sección **A**:  $L=0$

Lado izquierdo,

$$S_1 = -P_1 = -600 t$$

Sección **B**:  $L=5 m$

Lado izquierdo,

$$S_2 = -S_1 + Q_1 \cdot \lambda_1 = -600 t + \left(136.741 \frac{t}{m}\right) (5 m) = 83.70 t$$

Sección **C**:  $L=10 m$

Lado izquierdo,

$$S_3 = S_2 + Q_2 \cdot \frac{\lambda_2}{2} = 83.70 t + \left(107.652 \frac{t}{m}\right) \left(\frac{10 m}{2}\right) = 621.96 t$$

Lado derecho,

$$S_4 = S_3 - P_2 = 621.96 t - 1200 t = -578.04 t$$

Sección **D**:  $L=15 m$

$$S_5 = S_4 + Q_2 \cdot \lambda_2 = -578.04 t + \left(107.652 \frac{t}{m}\right) (5 m) = -39.38 t$$



Sección E: L=20 m

Lado izquierdo,

$$S_6 = S_5 + Q_3 \cdot \frac{\lambda_3}{2} = -39.38 t + \left(127.089 \frac{t}{m}\right) (5 m) = 595.67 t$$

Lado derecho,

$$S_7 = S_6 - P_3 = 595.67 t - 1200 t = -604.33 t$$

Sección F: L=25 m

$$S_8 = S_7 + Q_3 \cdot \frac{\lambda_3}{2} = -604.33 t + \left(127.089 \frac{t}{m}\right) (5 m) = 31.12 t$$

Sección G: L=30 m

Lado izquierdo,

$$S_9 = S_8 + Q_4 \cdot \frac{\lambda_4}{2} = 31.12 t + \left(122.077 \frac{t}{m}\right) \left(\frac{10 m}{2}\right) = 641.50 t$$

Lado derecho,

$$S_{10} = S_9 - P_4 = 641.50 t - 1200 t = -558.50 t$$

Sección H: L=35 m

$$S_{11} = S_{10} + Q_4 \cdot \frac{\lambda_4}{2} = -558.50 t + \left(122.077 \frac{t}{m}\right) \left(\frac{10 m}{2}\right) = 51.88 t$$

Sección I: L=40 m

Lado izquierdo,

$$S_{12} = S_{11} + Q_5 \cdot \frac{\lambda_5}{2} = 51.88 t + \left(114.339 \frac{t}{m}\right) \left(\frac{10 m}{2}\right) = 623.58 t$$

Lado derecho,

$$S_{13} = S_{12} - P_5 = 623.58 t - 1200 t = -576.42 t$$

Sección J: L=45 m



$$S_{14} = S_{13} + Q_5 \cdot \frac{\lambda_5}{2} = -576.42 t + \left(114.339 \frac{t}{m}\right) \left(\frac{10 m}{2}\right) = -4.72 t$$

Sección **K**: L=50 m

Lado izquierdo,

$$S_{15} = S_{14} + Q_6 \cdot \frac{\lambda_6}{2} = -4.72 t + \left(106.852 \frac{t}{m}\right) \left(\frac{10 m}{2}\right) = 529.54 t$$

Lado derecho,

$$S_{16} = S_{15} - P_6 = 529.54 t - 1200 t = -670.46 t$$

Sección **L**: L=55 m

$$S_{17} = S_{16} + Q_5 \cdot \frac{\lambda_5}{2} = -670.46 t + \left(106.852 \frac{t}{m}\right) \left(\frac{10 m}{2}\right) = -136.21 t$$

Sección **M**: L=60 m

Lado izquierdo,

$$S_{18} = S_{17} + Q_7 \cdot \lambda_7 = -136.21 t + \left(147.241 \frac{t}{m}\right) (5 m) = 600 t$$

Lado derecho,

$$S_{19} = S_{18} - P_7 = 600 t - 600 t = 0$$

Calculadas las fuerzas cortantes en los puntos de interés, se graficaron sus valores a como se muestra en la figura 43.

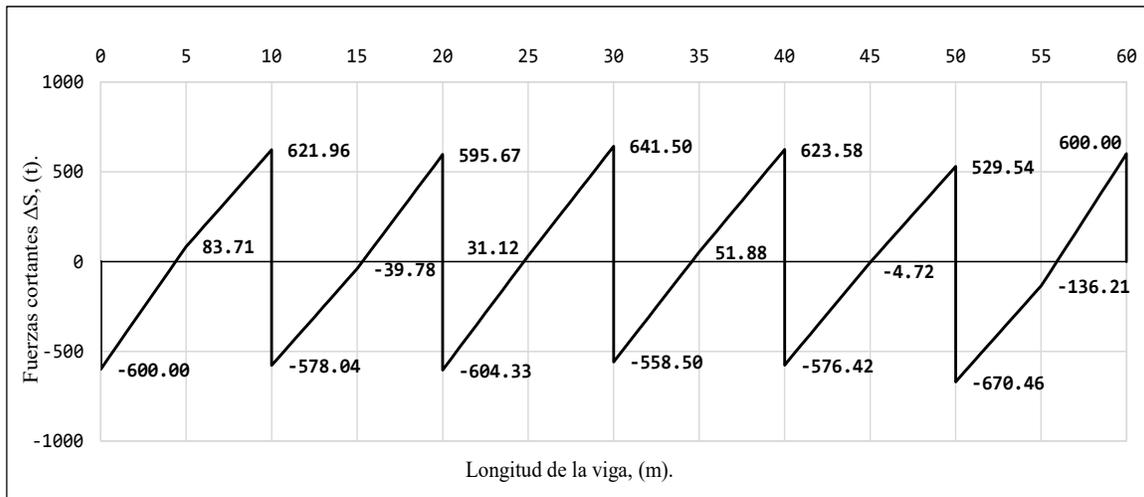


Figura 43. Diagrama de fuerzas cortantes finales para una cimentación con pontones (con una junta Tipo III y una junta Tipo IV). [Elaboración propia]

10. Los momentos flexionantes se calcularán de izquierda a derecha para  $0 \leq L \leq 30$  m y de derecha a izquierda para  $30 \text{ m} \leq L \leq 60$  m:

Se calculan los valores de las bases de cada triángulo ( $X_1$  a  $X_{18}$ ) en valor absoluto dividiendo la fuerza cortante  $S_i$  entre la reacción  $Q_i$ .

Tramo  $0 < L \leq 5$  m:

$$X_1 = \left| \frac{S_1}{Q_1} \right| = \left| \frac{-P_1}{Q_1} \right| = \left| \frac{-600 \text{ t}}{136.741 \text{ t/m}} \right| = 4.387 \text{ m}$$

$$X_2 = \left| \frac{S_2}{Q_1} \right| = \left| \frac{83.71}{136.741 \text{ t/m}} \right| = 0.612 \text{ m}$$

Para el tramo  $5 \text{ m} < L \leq 10$  m:

$$X_3 = \left| \frac{S_3 - S_2}{Q_2} \right| = \left| \frac{621.96 \text{ t} - 83.71 \text{ t}}{107.652 \text{ t/m}} \right| = 5.00$$

Para el tramo  $10 \text{ m} < L \leq 15$  m:

$$X_4 = \left| \frac{S_4 - S_5}{Q_2} \right| = \left| \frac{-578.04 \text{ t} - (-39.78 \text{ t})}{107.652 \text{ t/m}} \right| = 5.00$$



Para el tramo  $15\text{ m} < L \leq 20\text{ m}$ :

$$X_5 = \left| \frac{S_5}{Q_3} \right| = \left| \frac{-39.78\text{ t}}{127.089\text{ t/m}} \right| = 0.313\text{ m}$$

$$X_6 = \left| \frac{S_6}{Q_3} \right| = \left| \frac{595.67\text{ t}}{127.089\text{ t/m}} \right| = 4.687\text{ m}$$

Para el tramo  $20\text{ m} < L \leq 25\text{ m}$ :

$$X_7 = \left| \frac{S_7}{Q_3} \right| = \left| \frac{-604.33\text{ t}}{127.089\text{ t/m}} \right| = 4.755\text{ m}$$

$$X_8 = \left| \frac{S_8}{Q_3} \right| = \left| \frac{31.12\text{ t}}{127.089\text{ t/m}} \right| = 0.244\text{ m}$$

Para el tramo  $25\text{ m} < L \leq 30\text{ m}$ :

$$X_9 = \left| \frac{S_9 - S_8}{Q_4} \right| = \left| \frac{647.3\text{ t} - (35.5\text{ t})}{122.371\text{ t/m}} \right| = 5.00\text{ m}$$

Para el tramo  $30\text{ m} < L \leq 35\text{ m}$ :

$$X_{10} = \left| \frac{S_{10}}{Q_4} \right| = \left| \frac{-558.50\text{ t}}{122.077\text{ t/m}} \right| = 4.574\text{ m}$$

$$X_{11} = \left| \frac{S_{11}}{Q_4} \right| = \left| \frac{51.88\text{ t}}{122.071\text{ t/m}} \right| = 0.424\text{ m}$$

Para el tramo  $35\text{ m} < L \leq 40\text{ m}$ :

$$X_{12} = \left| \frac{S_{12} - S_{11}}{Q_5} \right| = \left| \frac{623.58\text{ t} - 51.88\text{ t}}{114.339\text{ t/m}} \right| = 5.00\text{ m}$$

Para el tramo  $40\text{ m} < L \leq 45\text{ m}$ :

$$X_{13} = \left| \frac{S_{13}}{Q_5} \right| = \left| \frac{-529.54\text{ t}}{114.339\text{ t/m}} \right| = 4.631\text{ m}$$

$$X_{14} = \left| \frac{S_{14}}{Q_5} \right| = \left| \frac{-4.72\text{ t}}{114.339\text{ t/m}} \right| = 0.0412\text{ m}$$



Para el tramo  $45\text{ m} < L \leq 50\text{ m}$ :

$$X_{15} = \left| \frac{S_{15} - S_{14}}{Q_6} \right| = \left| \frac{529.54\text{ t} - (-4.72\text{ t})}{106.852\text{ t/m}} \right| = 5.00\text{ m}$$

Para el tramo  $50\text{ m} < L \leq 55\text{ m}$ :

$$X_{16} = \left| \frac{S_{16} - S_{17}}{Q_6} \right| = \left| \frac{-670.46\text{ t} - (136.21\text{ t})}{106.852\text{ t/m}} \right| = 5.00\text{ m}$$

Para el tramo  $55\text{ m} < L \leq 60\text{ m}$ :

$$X_{17} = \left| \frac{S_{17}}{Q_7} \right| = \left| \frac{-136.21}{147.241\text{ t/m}} \right| = 0.925\text{ m}$$

$$X_{18} = \left| \frac{S_{18}}{Q_7} \right| = \left| \frac{-600}{147.241\text{ t/m}} \right| = 4.07\text{ m}$$

Los momentos flexionantes se calculan de izquierda a derecha hasta el centro de línea de la cimentación y de derecha a izquierda, para cada caso se suma o resta el momento flexionante anterior:

En  $X = 0$ , el momento flexionante es igual a cero.

$$M_0 = 0$$

$L=4.387\text{ m}$ :

$$M_1 = M_0 + \frac{S_1 \cdot X_1}{2} = 0 + \left( \frac{-600 \cdot 4.387}{2} \right) = -1,316.10\text{ t} \cdot \text{m}$$

$L=5\text{ m}$ :

$$M_2 = -1,316.10\text{ t} \cdot \text{m} + \left( \frac{83.71\text{ t} \cdot 0.612\text{ m}}{2} \right) = -1,290.74\text{ t} \cdot \text{m}$$

$L=10\text{ m}$ :

$$M_3 = -1,290.74\text{ t} \cdot \text{m} + \left[ \frac{(621.96\text{ t} - 83.71\text{ t}) \cdot 5\text{ m}}{2} + (83.71\text{ t} \cdot 5\text{ m}) \right] = 473.44\text{ t} \cdot \text{m}$$



L=15 m:

$$M_5 = 473.44 t - m + \left[ \frac{[(-578.04) - (-39.78 t)] \cdot 5m}{2} + (-39.78 t \cdot 5 m) \right] = -1,071.10 t - m$$

L=20 m:

$$M_6 = -1,071.10 t - m + \left[ \frac{(-39.78 t) \cdot 0.244 m}{2} + \frac{(595.67 t) \cdot 4.755 m}{2} \right] = 318.63 t - m$$

L=25 m:

$$M_5 = 318.63 t - m + \left( \frac{-604.33 t \cdot 4.755 m}{2} \right) + \left( \frac{31.12 t \cdot 0.244 m}{2} \right) = -1,114.40 t - m$$

L=30 m:

$$M_6 = -1,114.40 t - m + \left[ \frac{(641.50 t - 31.12 t) \cdot 5m}{2} + (31.12 t \cdot 5 m) \right] = 567.14 t - m$$

De derecha a izquierda:

L=60 m:

$$M_{13} = 0$$

L=55 m:

$$M_{12} = 0 + \left[ -\frac{(600 t) \cdot 4.073 m}{2} - \frac{(-136.21 t \cdot 0.925 m)}{2} \right] = -1159.49 t - m$$

L=50 m:

$$M_{11} = -1159.49 t - m + \left[ -\frac{(-670.46 t - (-136.21 t)) \cdot 5 m}{2} - (-136.21 t \cdot 5 m) \right] \\ = 857.19 t - m$$

L=45 m:

$$M_{10} = 857.19 t - m + \left[ -\frac{(529.54 t - 4.72 t) \cdot 5 m}{2} - (4.72 t \cdot 5 m) \right] = -454.85 t - m$$

L=40 m:

$$M_9 = -454.85 \text{ t-m} + \left[ -\frac{(4.72 \text{ t} \cdot 0.0412 \text{ m})}{2} - \frac{(-576.42 \text{ t} \cdot 4.631 \text{ m})}{2} \right] = 998.01 \text{ t-m}$$

L=35 m:

$$M_8 = 998.01 \text{ t-m} + \left[ -\frac{[623.58 \text{ t} - (51.88 \text{ t}) \cdot 5 \text{ m}]}{2} - (51.88 \text{ t} \cdot 5 \text{ m}) \right] = -690.65 \text{ t-m}$$

L=30 m:

$$M_7 = -690.65 \text{ t-m} + \left[ -\frac{(51.88 \text{ t}) \cdot 0.424 \text{ m}}{2} - \frac{(-558.59 \text{ t}) \cdot 4.574 \text{ m}}{2} \right] = 567.14 \text{ t-m}$$

Los momentos flexionantes en los puntos de interés, se graficaron sus valores a como se muestra en la figura 44.

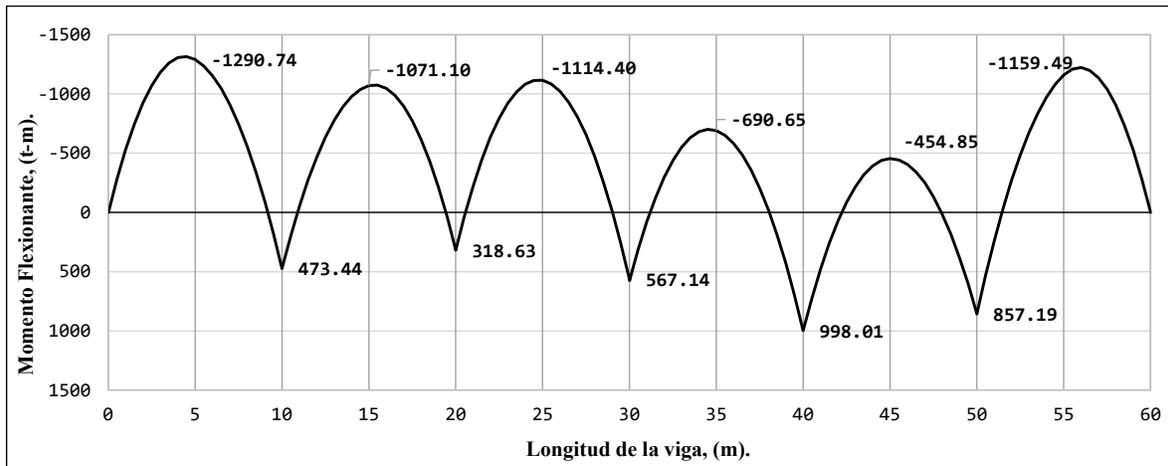


Figura 44. Diagrama de momentos flexionantes finales para una cimentación con pontones (con una junta Tipo III y una junta Tipo IV) [Elaboración propia].



**Subcaso a): Con dos juntas Tipo IV.**

Para este ejemplo se omitirán los cálculos que nos lleva al mismo resultado del ejemplo anterior y se presentarán los resultados finales.

1. Nuevamente, a partir de la ecuación (21) se establece una ecuación por junta, lo que nos lleva a las ecuaciones (22) y (23) desarrolladas en el subcaso a).

$$a_{n-1}\Delta S_{i-1} + (b_{n-1} + b_n)\Delta S_i + a_n\Delta S_{i+1} = (c_{n-1} + c_n) \quad (21)$$

$$(b_1 + b_2)\Delta S_1 + a_2\Delta S_2 = (c_1 + c_2) \quad (22)$$

$$a_2\Delta S_1 + (b_2 + b_3)\Delta S_2 = (c_2 + c_3) \quad (23)$$

2. Establecida las ecuaciones se procede a calcular los valores de los coeficientes geométricos del sistema de pontones,  $a_{n-th}$ ,  $b_{n-th}$  y  $c_{n-th}$  para cada pontón.

Pontón 1:

$$A_1 = 2B \cdot 2l_1 = (12 \text{ m})(20 \text{ m}) = 240 \text{ m}^2$$

$$S_1 = \frac{1}{3}A_1 \cdot l_1 = \frac{1}{3}(240 \text{ m}^2)(10 \text{ m}) = 800 \text{ m}^3$$

$$a_1 = \frac{2}{A_1} = \frac{2}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.00833}{\text{m}^2}$$

$$b_1 = \frac{4}{A_1} = \frac{4}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.017}{\text{m}^2}$$

$$Mp_{(a)} = 800 \text{ t-m}$$

$$M_{(a)} = 2782.38 \text{ t-m}$$

$$\Delta M_{(a)} = M_{(a)} - Mp_{(a)} = (2782.38 \text{ t-m}) - (800 \text{ t-m}) = 1982.38 \text{ t-m}$$

$$Mp_{(b)} = 800 \text{ t-m}$$



$$M_{(b)} = 2782.38 t - m$$

$$\Delta M_{(b)} = M_{(b)} - Mp_{(b)} = (2782.38 t - m) - (800 t - m) = 1982.38 t - m$$

El momento reducido en la junta identificada como **(a)** será de  $\Delta M_{(a)} = 1982.38 t - m$  y para la segunda junta identificada como **(b)** será  $\Delta M_{(b)} = 1982.38 t - m$ .

De la convención de signos adoptada, con giro en sentido de las manecillas del reloj es positivo (+) y con giro en sentido contrario al de las manecillas del reloj es negativo (-).

$$c_1 = \frac{\Delta M_0 + \Delta M_{(a)}}{S_{n-1}} = \frac{0 + (-1982.38 t - m)}{800 m^3} = -2.478 \frac{t}{m^2}$$

Pontón 2:

$$A_2 = 2B \cdot 2l_2 = (12 m)(20 m) = 240 m^2$$

$$S_2 = \frac{1}{3} A_2 \cdot l_2 = \frac{1}{3} (240 m^2)(10 m) = 800 m^3$$

$$a_2 = \frac{2}{A_2} = \frac{2}{240 m^2} = \frac{0.00833}{m^2}$$

$$b_2 = \frac{4}{A_2} = \frac{4}{240 m^2} = \frac{0.017}{m^2}$$

$$c_2 = \frac{\Delta M_{(a)} + \Delta M_{(b)}}{S_n} = \frac{(1982.38 t - m) + (-1982.38 t - m)}{800 m^3} = 0$$

Pontón 3:

$$A_3 = 2B \cdot 2l_3 = (12 m)(20 m) = 240 m^2$$

$$S_3 = \frac{1}{3} A_3 \cdot l_3 = \frac{1}{3} (240 m^2)(10 m) = 800 m^3$$

$$a_3 = \frac{2}{A_3} = \frac{2}{240 m^2} = \frac{0.00833}{m^2}$$



$$b_3 = \frac{4}{A_3} = \frac{4}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.017}{\text{m}^2}$$

$$c_3 = \frac{\Delta M_{(b)} + \Delta M_{(0)}}{S_3} = \frac{1982.38 \text{ t} - m + 0}{800 \text{ m}^3} = 2.478$$

En la tabla 5 se consignan los valores de los coeficientes **a**, **b** y **c**, para las ecuaciones del sistema.

Tabla 6. Coeficientes geométricos para las ecuaciones del sistema de pontones con juntas Tipo IV [Elaboración propia].

Coeficientes geométricos	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Uds.
	Junta a		Junta b				
$An = 2B \cdot 2ln$	240		240		240		$\text{m}^2$
$Sn = (An \cdot ln)/3$	800		800		800		$\text{m}^3$
$an = 2/An$	0.00833		0.00833		0.00833		$1/\text{m}^2$
$bn = 4/An$	0.01667		0.01667		0.01667		$1/\text{m}^2$
$\Delta mi$	0	-1982.38	1982.38	-1982.38	1982.38	0	$\text{t} - m$
$\Delta M_i + \Delta M_{i+1}$	-1982.38		0.00		1982.38		$\text{t} - m$
$Cn = (\Delta M_i + \Delta M_{i+1})/Sn$	-2.478		0.00		2.478		$\text{t}/\text{m}^2$

Calculados los coeficientes **a**, **b** y **c** para cada pontón se sustituyen en las ecuaciones antes establecidas a partir de la ecuación general.

En la primera y segunda ecuación sustituimos los valores correspondientes y cambiamos la nomenclatura de las juntas a **(a)** y **(b)**:

$$(0.017 + 0.017)\Delta S_{(a)} + 0.00833\Delta S_{(b)} = (-2.478 + 0)$$

$$0.00833\Delta S_{(a)} + (0.017 + 0.017)\Delta S_{(b)} = (0 + 2.478)$$

El sistema de ecuaciones lineales a resolver es:

$$0.0333\Delta S_{(a)} + 0.00833\Delta S_{(b)} = -2.478 \quad (I)$$

$$0.00833\Delta S_{(a)} + 0.0333\Delta S_{(b)} = +2.478 \quad (II)$$



3. Debido a la introducción de dos juntas de construcción del tipo IV, las cuales admiten una fuerza cortante  $\Delta S \neq 0$  y un momento plástico resistente  $\Delta M_p$  calculado en el punto 2; resolviendo el sistema de ecuaciones lineales obtenemos:

$$\Delta S_{(a)} = -99.119 t$$

$$\Delta S_{(b)} = +99.119 t$$

4. Los esfuerzos de corrección  $\Delta q$  en los extremos izquierdo y derecho de cada ponton son:

Para el pontón 1.

$$(\Delta q_{izq.})_1 = \frac{\Delta S_0 - \Delta S_{(a)}}{A_1} \mp \frac{\Delta M_0 + \Delta M_{(a)}}{S_1} \pm \frac{\Delta S_0 + \Delta S_{(a)}}{S_1} l_1$$

$$(\Delta q_{izq.})_1 = \frac{[0 - (-99.119 t)]}{240 m^2} - \frac{[0 + (-1982.38 t - m)]}{800 m^2} + \frac{[0 + (-99.119 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{izq.})_1 = 1.652 \frac{t}{m^2}$$

$$(\Delta q_{der.})_1 = \frac{[0 - (-99.119 t)]}{240 m^2} + \frac{[0 + (-1982.38 t - m)]}{800 m^2} - \frac{[0 + (-99.119 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{der.})_1 = -0.826 \frac{t}{m^2}$$

Para el pontón 2.

$$(\Delta q_{izq.})_2 = \frac{\Delta S_{(a)} - \Delta S_{(b)}}{A_2} \mp \frac{\Delta M_{(a)} + \Delta M_{(b)}}{S_2} \pm \frac{\Delta S_{(a)} + \Delta S_{(b)}}{S_2} l_2$$

$$(\Delta q_{izq.})_2 = \frac{[-99.119 t - (99.119 t)]}{240 m^2} - \frac{[1982.38 t - m + (-1982.38 t - m)]}{800 m^2} + \frac{[-99.119 t + (99.119 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{izq.})_2 = -0.826 \frac{t}{m^2}$$



$$(\Delta q_{der.})_2 = \frac{[-99.119 t - (99.119 t)]}{240 m^2} + \frac{[1982.38 t - m + (-1982.38 t - m)]}{800 m^2} - \frac{[-99.119 t + (99.119 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{der.})_2 = -0.826 \frac{t}{m^2}$$

Para el pontón 3.

$$(\Delta q_{izq.})_3 = \frac{\Delta S_{(b)} - \Delta S_{(0)}}{A_3} \mp \frac{\Delta M_{(b)} + \Delta M_{(0)}}{S_3} \pm \frac{\Delta S_{(b)} + \Delta S_{(0)}}{S_3} l_3$$

$$(\Delta q_{izq.})_3 = \frac{[99.119 t - (0)]}{240 m^2} - \frac{[(1982.38 t - m) + (0)]}{800 m^2} + \frac{[99.119 t + (0 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{izq.})_3 = -0.826 \frac{t}{m^2}$$

$$(\Delta q_{der.})_3 = \frac{[99.119 t - (0)]}{240 m^2} + \frac{[(1982.38 t - m) + (0)]}{800 m^2} - \frac{[99.119 t + (0 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{der.})_3 = 1.652 \frac{t}{m^2}$$

Tabla 7. Esfuerzos de corrección para una cimentación con pontones con juntas Tipo IV  
[Elaboración propia].

Esfuerzos de corrección	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Uds.
	Junta a		Junta b				
$\Delta S$	0	↓ -99.12	↑ -99.1	↑ 99.12	↓ 99.12	0	t
$(\Delta S_i - \Delta S_{i+1})/A_n$	0.413		-0.826		0.413		t/m <sup>2</sup>
$\mp (\Delta M_i + \Delta M_{i+1})/S_n$	± 2.48		∓ 0.00		∓ 2.48		t/m <sup>2</sup>
$\pm (\Delta S_i + \Delta S_{i+1}) \cdot l_n/S_n$	∓ 1.24		± 0.00		± 1.24		t/m <sup>2</sup>
$\Delta q_i$	1.652	-0.826	-0.826	-0.826	-0.826	1.652	t/m <sup>2</sup>

5. Los esfuerzos  $\Delta q_i$  que están en unidades de presión es preferible convertirlas a cargas uniformemente repartidas  $Q_i$ .



Para el pontón 1.

Lado izquierdo:

$$Q_{(izq.)} = [(\Delta q_{izq.})_1] \cdot 2B = \left(1.652 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = 19.824 \frac{t}{m}$$

Lado derecho en junta (a):

$$Q_{(der.)} = [(\Delta q_{der.})_1] \cdot 2B = \left(-0.826 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = -9.912 \frac{t}{m}$$

Para el pontón 2.

Lado izquierdo en junta (a):

$$Q_{(izq.)} = [(\Delta q_{izq.})_2] \cdot 2B = \left(-0.826 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = -9.912 \frac{t}{m}$$

Lado derecho en junta (b):

$$Q_{(der.)} = [(\Delta q_{der.})_2] \cdot 2B = \left(-0.826 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = -9.912 \frac{t}{m}$$

Para el pontón 3.

Lado izquierdo en junta (b):

$$Q_{(izq.)} = [(\Delta q_{izq.})_3] \cdot 2B = \left(-0.826 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = -9.912 \frac{t}{m}$$

Lado derecho:

$$Q_{(der.)} = [(\Delta q_{der.})_3] \cdot 2B = \left(1.652 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = 19.824 \frac{t}{m}$$

La figura 45 muestra las reacciones de corrección  $Q_i$  en los extremos de los pontones debido a la inclusión de dos juntas de construcción Tipo IV, se puede apreciar que las reacciones de corrección  $Q_i$  tienen una *variación lineal* a lo largo de cada pontón, en el sentido longitudinal. Para poder sumar algebraicamente estos efectos con los obtenidos de la cimentación rígida, se considerará una *reacción uniforme promedio* en cada dovela. Para ello se medirá la magnitud de la reacción  $Q_i$  al centro de cada dovela, en la figura 46 y 47 se tiene la representación gráfica de los resultados por ancho de dovela.

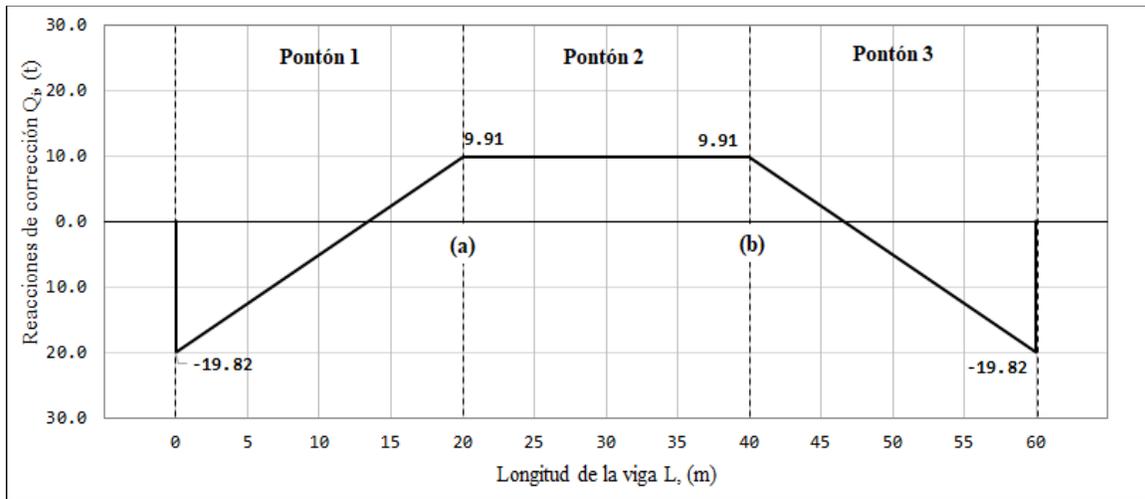


Figura 45. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones debido a las juntas Tipo IV. [Elaboración propia]

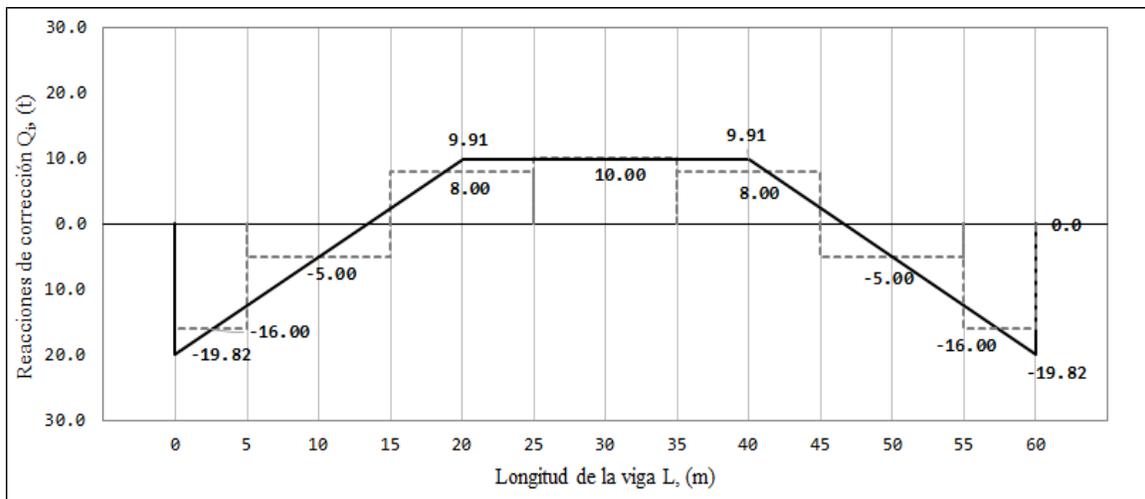


Figura 46. Valores promedio de las reacciones por ancho de dovela cuando se introducen juntas Tipo IV. [Elaboración propia]

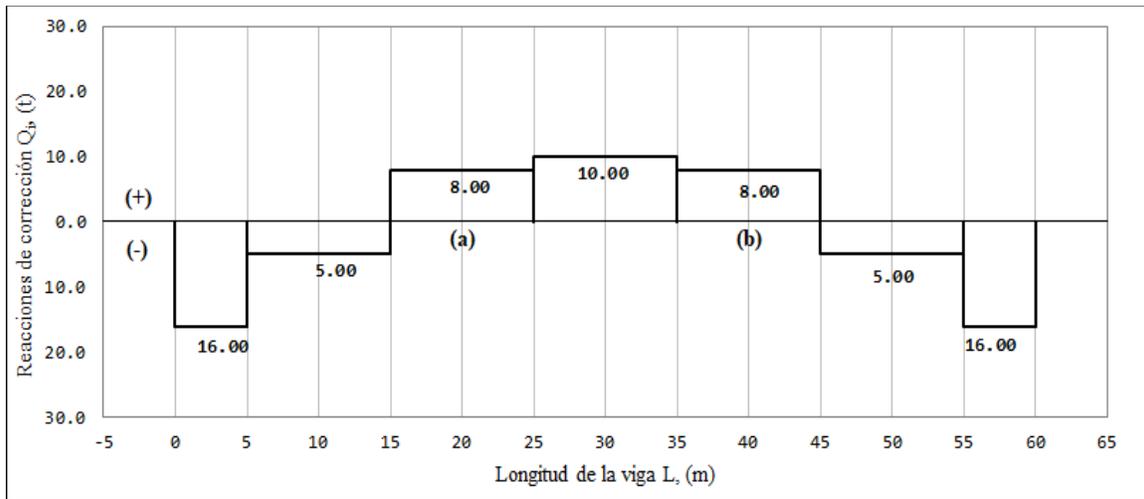


Figura 47. Distribución de las reacciones de corrección por ancho de dovela cuando se introduce juntas Tipo IV. [Elaboración propia]

- Por consiguiente, las reacciones para una cimentación rígida se suman o restan aritméticamente con los valores promedio de cambio de reacción dovela por dovela, los resultados están graficados en la figura 48. La convención de signos aplicada fue: las reacciones se toman como positivas con dirección vertical hacia arriba y negativas con dirección vertical hacia abajo.

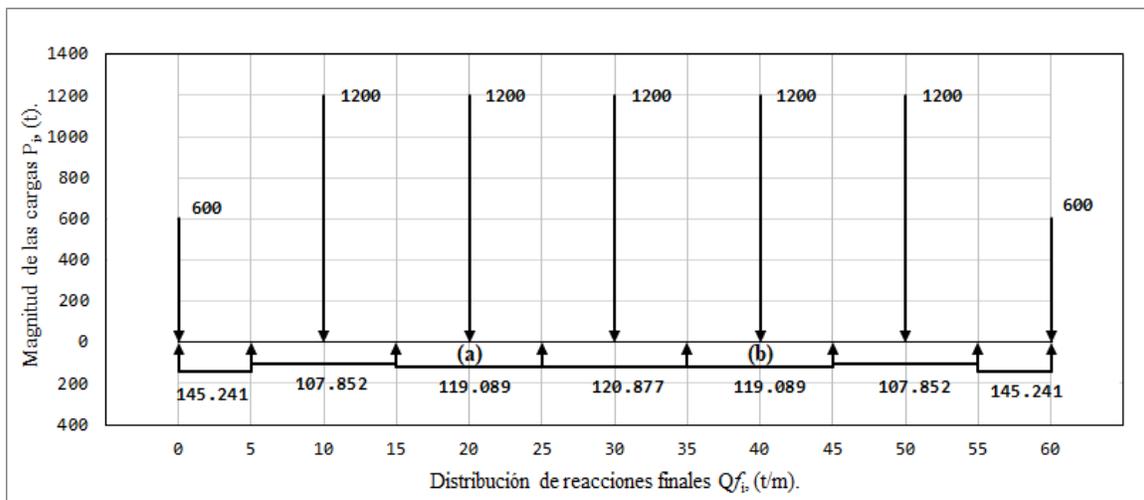


Figura 48. Distribución de cargas  $P_i$  y de reacciones finales  $Q'_{if}$  por ancho de dovela cuando se introduce juntas Tipo IV. [Elaboración propia]



7. Las reacciones finales  $Q_{fi}$  se transforman a esfuerzos  $q_{fi}$  formando un vector columnar de esfuerzos que sustituimos en la ecuación matricial de asentamientos; resolviendo el producto de matrices se obtienen los desplazamientos verticales.

$$[q_{fi}] = \left[ \frac{Q_{fi}}{2B} \right]$$

$$[\delta_{ji}] = \{ [\bar{\delta}_{ji}]^T \} [q_{fi}]$$

Reacciones en t/m a esfuerzos en t/m<sup>2</sup>.

$$\begin{bmatrix} q_{f1} \\ q_{f2} \\ q_{f3} \\ q_{f4} \\ q_{f5} \\ q_{f6} \\ q_{f7} \end{bmatrix} = \left( \frac{1}{12 m} \right) \begin{bmatrix} 145.241 t/m \\ 107.852 t/m \\ 119.089 t/m \\ 120.877 t/m \\ 119.089 t/m \\ 107.852 t/m \\ 145.241 t/m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.103 \\ 8.988 \\ 9.924 \\ 10.073 \\ 9.924 \\ 8.988 \\ 12.103 \end{bmatrix}, \text{ en t/m}^2.$$

$[\bar{\delta}_{ji}]^T$							$ q_i $	$\delta_i$
0.00685	0.00272	0.00037	0.00008	0.00002	0.00001	0.00000	12.1034	0.11201
0.00114	0.00952	0.00154	0.00024	0.00005	0.00002	0.00000	8.9876	0.11773
0.00017	0.00154	0.00952	0.00154	0.00024	0.00005	0.00001	9.9241	0.12885
0.00004	0.00024	0.00154	0.00952	0.00154	0.00024	0.00004	10.0731	0.13165
0.00001	0.00005	0.00024	0.00154	0.00952	0.00154	0.00017	9.9241	0.12885
0.00000	0.00002	0.00005	0.00024	0.00154	0.00952	0.00114	8.9876	0.11773
0.00000	0.00001	0.00002	0.00008	0.00037	0.00272	0.00685	12.1034	0.11201

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.11201 \\ 0.11773 \\ 0.12885 \\ 0.13165 \\ 0.12885 \\ 0.11773 \\ 0.11201 \end{bmatrix} \text{ en m} = \begin{bmatrix} 11.201 \\ 11.773 \\ 12.885 \\ 13.165 \\ 12.885 \\ 11.773 \\ 11.201 \end{bmatrix}, \text{ en cm.}$$

Los desplazamientos verticales corresponden a una cimentación con pontones y juntas Tipo IV.

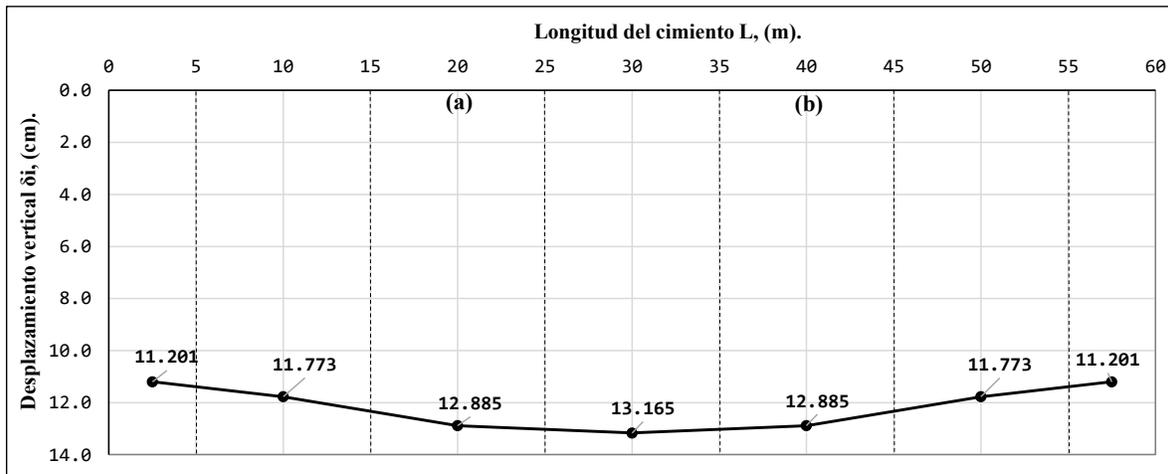


Figura 49. Desplazamientos verticales para una cimentación con pontones (con juntas Tipo IV). [Elaboración propia].

Las distorsiones angulares las evaluamos dividiendo el desplazamiento diferencial entre el claro.

Para los pontones que tienen en común la junta **Tipo IV** la distorsión angular no debe exceder un valor de 0.001, es decir:

Entre pontón 1 y 2;

$$\frac{\Delta\delta_{diferencial}}{l} < \frac{1}{1000} \quad \frac{(12.885 \text{ cm} - 11.773 \text{ cm})}{1000 \text{ cm}} < \frac{1}{1000} \quad 0.00011 < 0.001$$

Entre pontón 2 y 3;

$$\frac{\Delta\delta_{diferencial}}{l} < \frac{1}{1000} \quad \frac{(12.885 \text{ cm} - 11.773 \text{ cm})}{1000 \text{ cm}} < \frac{1}{1000} \quad 0.00011 < 0.001$$

- Las fuerzas cortantes se calcularon de acuerdo con lo descrito en el punto 4.3.1. En la gráfica de la figura 50 se tiene la distribución a lo largo de la estructura de la cimentación.

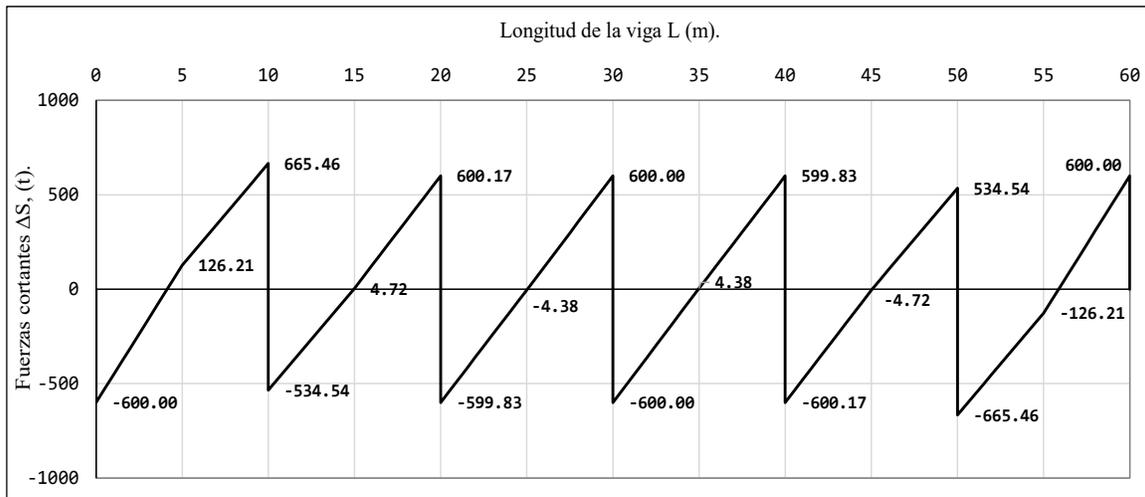


Figura 50. Diagrama de fuerzas cortantes finales para una cimentación con pontones (con juntas Tipo IV). [Elaboración propia]

9. Los momentos flexionantes se calcularon de acuerdo con lo descrito en el punto 4.3.2. En la gráfica de la figura 51 se tiene la distribución a lo largo de la estructura de la cimentación.

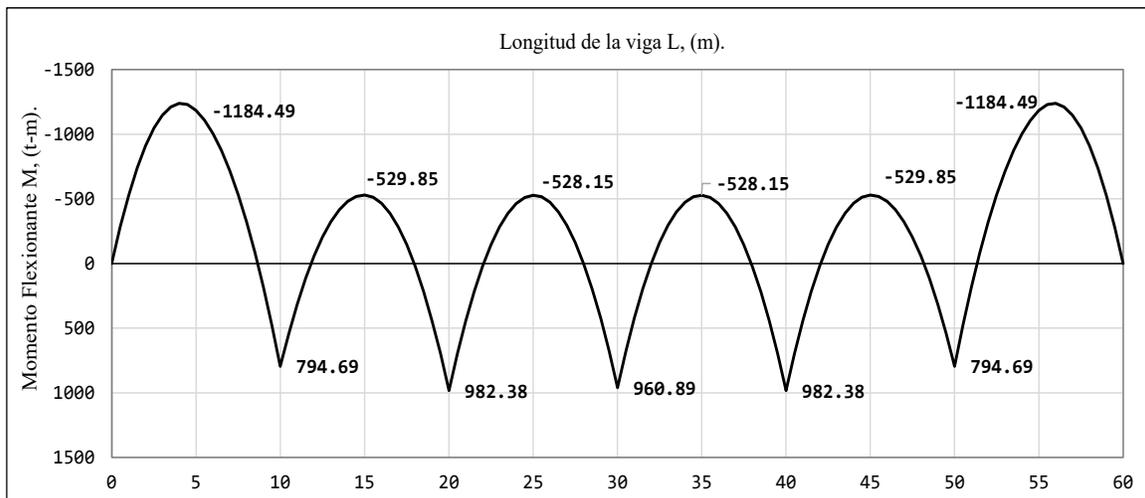


Figura 51. Distribución de momentos flexionantes finales para una cimentación con pontones (con dos juntas Tipo IV). [Elaboración propia]



**Subcaso a): Con dos juntas Tipo III.**

Para este ejemplo también se omitirán los cálculos que nos lleva al mismo resultado del ejemplo anterior y se presentarán los resultados finales.

1. A partir de la ecuación (21) se establece una ecuación por junta. Lo que nos lleva a aplicar las ecuaciones (22) y (23) nuevamente.

$$a_{n-1}\Delta S_{i-1} + (b_{n-1} + b_n)\Delta S_i + a_n\Delta S_{i+1} = (c_{n-1} + c_n) \quad (21)$$

$$(b_1 + b_2)\Delta S_1 + a_2\Delta S_2 = (c_1 + c_2) \quad (22)$$

$$a_2\Delta S_1 + (b_2 + b_3)\Delta S_2 = (c_2 + c_3) \quad (23)$$

2. Establecida las ecuaciones se procede a calcular los valores de los coeficientes geométricos del sistema de pontones,  $a_{n-th}$ ,  $b_{n-th}$  y  $c_{n-th}$  para cada pontón.

Pontón 1:

$$A_1 = 2B \cdot 2l_1 = (12 \text{ m})(20 \text{ m}) = 240 \text{ m}^2$$

$$S_1 = \frac{1}{3}A_1 \cdot l_1 = \frac{1}{3}(240 \text{ m}^2)(10 \text{ m}) = 800 \text{ m}^3$$

$$a_1 = \frac{2}{A_1} = \frac{2}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.00833}{\text{m}^2}$$

$$b_1 = \frac{4}{A_1} = \frac{4}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.017}{\text{m}^2}$$

El momento reducido en la junta identificada como **(a)** será de  $\Delta M_{(a)} = 2782.38 \text{ t-m}$  y para la segunda junta identificada como **(b)** será  $\Delta M_{(b)} = 2782.38 \text{ t-m}$ .

De la convención de signos adoptada, con giro en sentido de las manecillas del reloj es positivo (+) y con giro en sentido contrario al de las manecillas del reloj es negativo (-).

$$c_1 = \frac{\Delta M_0 + \Delta M_{(a)}}{S_1} = \frac{0 + (-2782.38 \text{ t-m})}{800 \text{ m}^3} = -3.478 \frac{\text{t}}{\text{m}^2}$$

Pontón 2:

$$A_2 = 2B \cdot 2l_2 = (12 \text{ m})(20 \text{ m}) = 240 \text{ m}^2$$



$$S_2 = \frac{1}{3} A_2 \cdot l_2 = \frac{1}{3} (240 \text{ m}^2)(10 \text{ m}) = 800 \text{ m}^3$$

$$a_2 = \frac{2}{A_2} = \frac{2}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.00833}{\text{m}^2}$$

$$b_2 = \frac{4}{A_2} = \frac{4}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.017}{\text{m}^2}$$

$$c_2 = \frac{\Delta M_{(a)} + \Delta M_{(b)}}{S_2} = \frac{(2782.38 \text{ t-m}) + (-2782.38 \text{ t-m})}{800 \text{ m}^3} = 0$$

Pontón 3:

$$A_3 = 2B \cdot 2l_3 = (12 \text{ m})(20 \text{ m}) = 240 \text{ m}^2$$

$$S_3 = \frac{1}{3} A_3 \cdot l_3 = \frac{1}{3} (240 \text{ m}^2)(10 \text{ m}) = 800 \text{ m}^3$$

$$a_3 = \frac{2}{A_3} = \frac{2}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.00833}{\text{m}^2}$$

$$b_3 = \frac{4}{A_3} = \frac{4}{240 \text{ m}^2} = \frac{0.017}{\text{m}^2}$$

$$c_3 = \frac{\Delta M_{(b)} + \Delta M_{(0)}}{S_3} = \frac{2782.38 \text{ t-m} + 0}{800 \text{ m}^3} = 3.478$$

En la tabla 6 se consignan los valores de los coeficientes **a**, **b** y **c**, para las ecuaciones del sistema.

Tabla 8. Coeficientes geométricos y mecánico para las ecuaciones del sistema de pontones con juntas Tipo III [Elaboración propia].

Coeficientes geométricos	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Uds.
	Junta a		Junta b				
$An = 2B \cdot 2ln$	240		240		240		$m^2$
$Sn = (An \cdot ln)/3$	800		800		800		$m^3$
$an = 2/An$	0.00833		0.00833		0.00833		$1/m^2$
$bn = 4/An$	0.01667		0.01667		0.01667		$1/m^2$
$\Delta mi$	0	-2782.38	2782.38	-2782.38	2782.38	0	t-m
$\Delta M_i + \Delta M_{i+1}$	-2782.38		0.00		2782.38		t-m
$Cn = (\Delta M_i + \Delta M_{i+1})/Sn$	-3.478		0.00		3.478		$t/m^2$

Calculados los coeficientes geométricos **a**, **b** y **c** para cada pontón se sustituyen en las ecuaciones antes establecidas a partir de la ecuación general.

En la primera y segunda ecuación sustituimos los valores correspondientes y cambiamos la nomenclatura de las juntas **a** (**a**) y **b**):

$$(0.017 + 0.017)\Delta S_{(a)} + 0.00833\Delta S_{(b)} = (-3.478 + 0)$$

$$0.00833\Delta S_{(a)} + (0.017 + 0.017)\Delta S_{(b)} = (0 + 3.478)$$

El sistema de ecuaciones lineales a resolver es:

$$0.0333\Delta S_{(a)} + 0.00833\Delta S_{(b)} = -3.476 \quad (I)$$

$$0.00833\Delta S_{(a)} + 0.0333\Delta S_{(b)} = +3.476 \quad (II)$$

- Debido a la introducción de dos juntas de construcción del tipo III, las cuales admiten una fuerza cortante ( $\Delta S \neq 0$ ); resolviendo el sistema de ecuaciones lineales obtenemos:

$$\Delta S_{(a)} = -139.119 t$$

$$\Delta S_{(b)} = +139.119 t$$

- Los esfuerzos de corrección  $\Delta q$  en los extremos izquierdo y derecho de cada pontón son:



Para el pontón 1.

$$(\Delta q_{izq.})_1 = \frac{\Delta S_0 - \Delta S_{(a)}}{A_1} \mp \frac{\Delta M_0 + \Delta M_{(a)}}{S_1} \pm \frac{\Delta S_0 + \Delta S_{(a)}}{S_1} l_1$$

$$(\Delta q_{izq.})_1 = \frac{[0 - (-139.119 t)]}{240 m^2} - \frac{[0 + (-2782.38 t - m)]}{800 m^2} + \frac{[0 + (-139.119 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{izq.})_1 = 2.319 \frac{t}{m^2}$$

$$(\Delta q_{der.})_1 = \frac{[0 - (-139.119 t)]}{240 m^2} + \frac{[0 + (-2782.38 t - m)]}{800 m^2} - \frac{[0 + (-139.119 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{der.})_1 = -1.159 \frac{t}{m^2}$$

Para el pontón 2.

$$(\Delta q_{izq.})_2 = \frac{\Delta S_{(a)} - \Delta S_{(b)}}{A_2} \mp \frac{\Delta M_{(a)} + \Delta M_{(b)}}{S_2} \pm \frac{\Delta S_{(a)} + \Delta S_{(b)}}{S_2} l_2$$

$$(\Delta q_{izq.})_2 = \frac{[-139.119 t - (139.119 t)]}{240 m^2} - \frac{[2782.38 t - m + (-27982.38 t - m)]}{800 m^2} + \frac{[-139.119 t + (139.119 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{izq.})_2 = -1.159 \frac{t}{m^2}$$

$$(\Delta q_{der.})_2 = \frac{[-139.119 t - (139.119 t)]}{240 m^2} + \frac{[2782.38 t - m + (-27982.38 t - m)]}{800 m^2} - \frac{[-139.119 t + (139.119 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{der.})_2 = -1.159 \frac{t}{m^2}$$

Para el pontón 3.

$$(\Delta q_{izq.})_3 = \frac{\Delta S_{(b)} - \Delta S_{(0)}}{A_3} \mp \frac{\Delta M_{(b)} + \Delta M_{(0)}}{S_3} \pm \frac{\Delta S_{(b)} + \Delta S_{(0)}}{S_3} l_3$$



$$(\Delta q_{izq.})_3 = \frac{[139.119 t - (0)]}{240 m^2} - \frac{[(2782.38 t - m) + (0)]}{800 m^2} + \frac{[139.119 t + (0 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{izq.})_3 = -1.159 \frac{t}{m^2}$$

$$(\Delta q_{der.})_3 = \frac{[139.119 t - (0)]}{240 m^2} + \frac{[(2782.38 t - m) + (0)]}{800 m^2} - \frac{[139.119 t + (0 t)]}{800 m^2} (10 m)$$

$$(\Delta q_{der.})_3 = 2.319 \frac{t}{m^2}$$

Tabla 9. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con juntas Tipo III [Elaboración propia].

Esfuerzos de corrección	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Uds.
	Junta a		Junta b				
$\Delta S$	0	↓ -139.12	↑ -139.1	↑ 139.12	↓ 139.12	0	t
$(\Delta S_i - \Delta S_{i+1})/An$	0.580			-1.159		0.580	t/m <sup>2</sup>
$\mp (\Delta M_i + \Delta M_{i+1})/Sn$	± 3.48			∓ 0.00		∓ 3.48	t/m <sup>2</sup>
$\pm (\Delta S_i + \Delta S_{i+1}) \cdot ln/Sn$	∓ 1.74			± 0.00		± 1.74	t/m <sup>2</sup>
$\Delta q_i$	2.319	-1.159	-1.159	-1.159	-1.159	2.319	t/m <sup>2</sup>

5. Los esfuerzos  $\Delta q_i$  que están en unidades de presión es preferible convertirlas a cargas uniformemente repartidas  $Q_i$ .

Para el pontón 1.

Lado izquierdo:

$$Q_{(izq.)} = [(\Delta q_{izq.})_1] \cdot 2B = \left(2.319 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = 27.824 \frac{t}{m}$$

Lado derecho en junta (a):

$$Q_{(der.)} = [(\Delta q_{der.})_1] \cdot 2B = \left(-1.159 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = -13.912 \frac{t}{m}$$

Para el pontón 2.

Lado izquierdo en junta (a):

$$Q_{(izq.)} = [(\Delta q_{izq.})_2] \cdot 2B = \left(-1.159 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = -13.912 \frac{t}{m}$$

Lado derecho en junta **(b)**:

$$Q_{(der.)} = [(\Delta q_{der.})_2] \cdot 2B = \left(-1.159 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = -13.912 \frac{t}{m}$$

Para el pontón 3.

Lado izquierdo en junta **(b)**:

$$Q_{(izq.)} = [(\Delta q_{izq.})_3] \cdot 2B = \left(-1.159 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = -13.912 \frac{t}{m}$$

Lado derecho:

$$Q_{(der.)} = [(\Delta q_{der.})_3] \cdot 2B = \left(2.319 \frac{t}{m^2}\right) (12 m) = 27.824 \frac{t}{m}$$

La figura 52 nos muestra las reacciones de corrección  $Q_i$  en los extremos de los pontones debido a la introducción de dos juntas de construcción Tipo III, se puede apreciar que las reacciones de corrección  $Q_i$  tienen una *variación lineal* a lo largo de cada pontón, en el sentido longitudinal. Para poder sumar algebraicamente estos efectos con los obtenidos de la cimentación rígida, se considerará una *reacción uniforme promedio* en cada dovela, en la figura 53 y 54 se tiene la representación gráfica de los resultados por ancho de dovela.

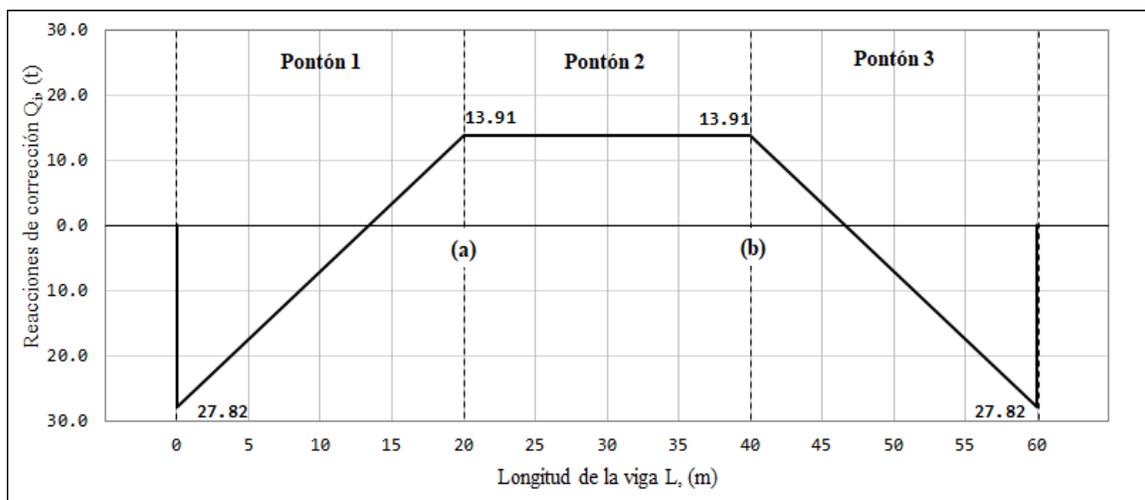


Figura 52. Reacciones de corrección en los extremos de los pontones debido a juntas tipo III.  
[Elaboración propia]

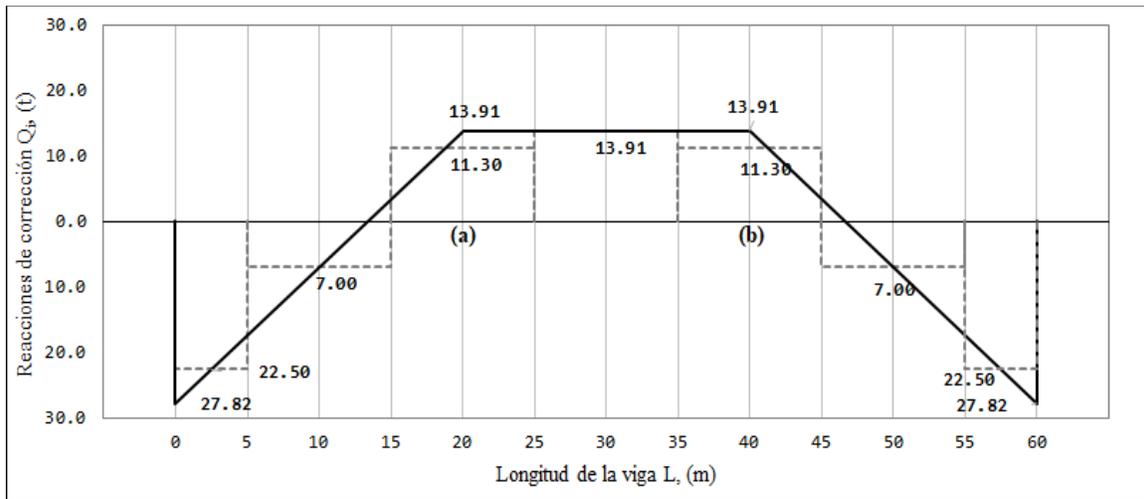


Figura 53. Reacciones de corrección por ancho de dovela cuando se introducen juntas Tipo III. [Elaboración propia]

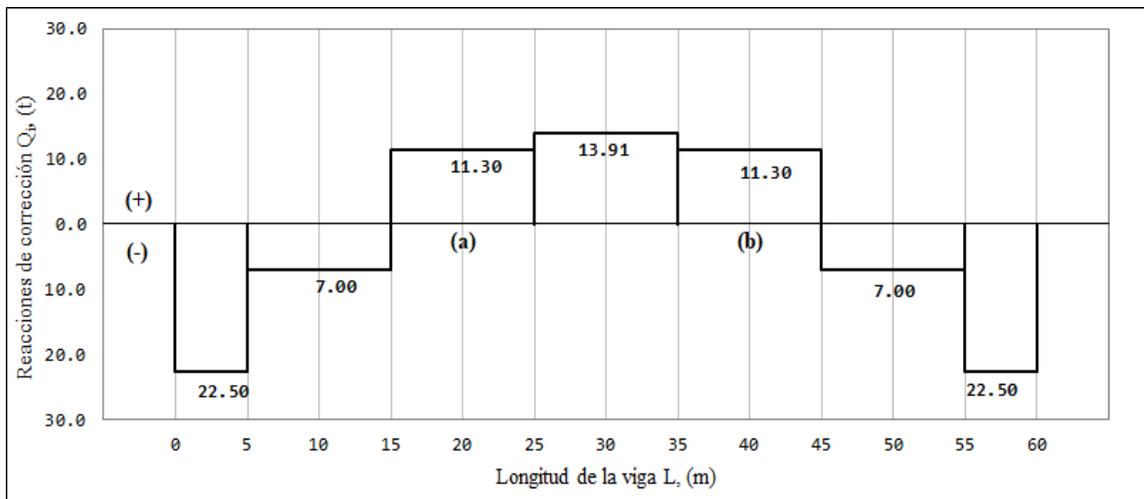


Figura 54. Distribución de las reacciones de corrección por ancho de dovela cuando se introducen juntas Tipo III. [Elaboración propia]

- Por consiguiente, las reacciones para una cimentación rígida se suman o restan aritméticamente con los valores promedio de cambio de reacción dovela por dovela, los resultados están graficados en la figura 55. La convención de signos aplicada fue: las reacciones se toman como positivas con dirección vertical hacia arriba y negativas con dirección vertical hacia abajo.

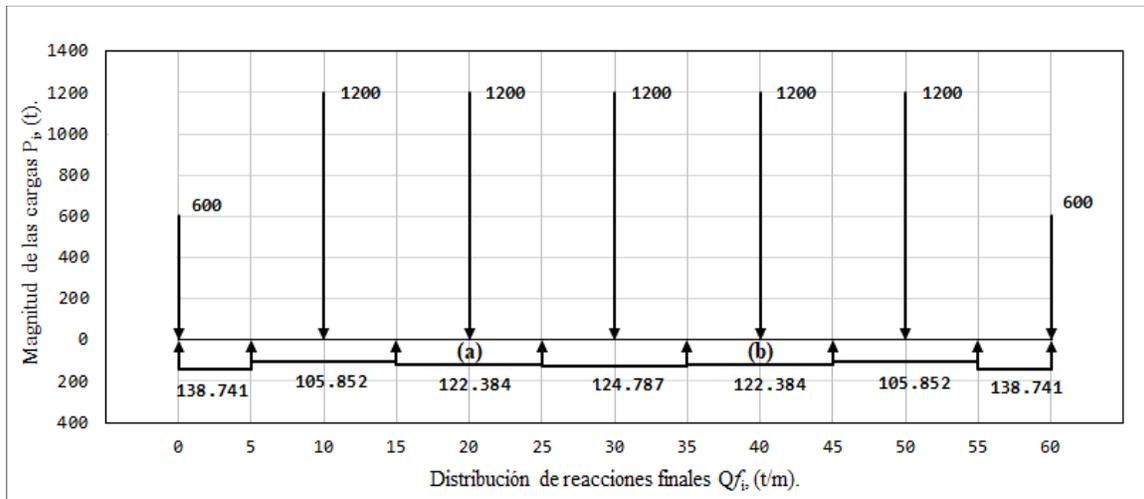


Figura 55. Distribución de cargas  $P_i$  y reacciones finales  $Q_{fi}$  para una cimentación con pontones (con juntas Tipo III). [Elaboración propia].

7. Las reacciones finales  $Q_{fi}$  se transforman a esfuerzos  $q_{fi}$  formando un vector columnar de esfuerzos que sustituimos en la ecuación matricial de asentamientos; resolviendo el producto de matrices se obtienen los desplazamientos verticales.

$$[q_{fi}] = \left[ \frac{Q_{fi}}{2B} \right]$$

$$[\delta_{ji}] = \{ [\delta_{ji}]^T \} [q_{fi}]$$

Recciones en t/m a esfuerzos en t/m<sup>2</sup>.

$$\begin{bmatrix} q_{f1} \\ q_{f2} \\ q_{f3} \\ q_{f4} \\ q_{f5} \\ q_{f6} \\ q_{f7} \end{bmatrix} = \left( \frac{1}{12 \text{ m}} \right) \begin{bmatrix} 138.741 \text{ t/m} \\ 105.852 \text{ t/m} \\ 122.384 \text{ t/m} \\ 124.787 \text{ t/m} \\ 122.384 \text{ t/m} \\ 105.852 \text{ t/m} \\ 138.741 \text{ t/m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.561 \\ 8.821 \\ 10.198 \\ 10.398 \\ 10.198 \\ 8.821 \\ 11.561 \end{bmatrix}, \text{ en t/m}^2.$$

$[\bar{\delta}_{ji}]^T$							$ q_i $	$\delta_i$
0.00685	0.00272	0.00037	0.00008	0.00002	0.00001	0.00000	11.5618	0.10798
0.00114	0.00952	0.00154	0.00024	0.00005	0.00002	0.00000	8.8210	0.11604
0.00017	0.00154	0.00952	0.00154	0.00024	0.00005	0.00001	10.1991	0.13167
0.00004	0.00024	0.00154	0.00952	0.00154	0.00024	0.00004	10.3989	0.13549
0.00001	0.00005	0.00024	0.00154	0.00952	0.00154	0.00017	10.1991	0.13167
0.00000	0.00002	0.00005	0.00024	0.00154	0.00952	0.00114	8.8210	0.11604
0.00000	0.00001	0.00002	0.00008	0.00037	0.00272	0.00685	11.5618	0.10798

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10798 \\ 0.11604 \\ 0.13167 \\ 0.13549 \\ 0.13167 \\ 0.11604 \\ 0.10798 \end{bmatrix} \text{ en m} = \begin{bmatrix} 10.798 \\ 11.604 \\ 13.167 \\ 13.549 \\ 13.167 \\ 11.604 \\ 10.798 \end{bmatrix}, \text{ en cm.}$$

Los desplazamientos verticales corresponden a una cimentación con pontones y con juntas Tipo III.

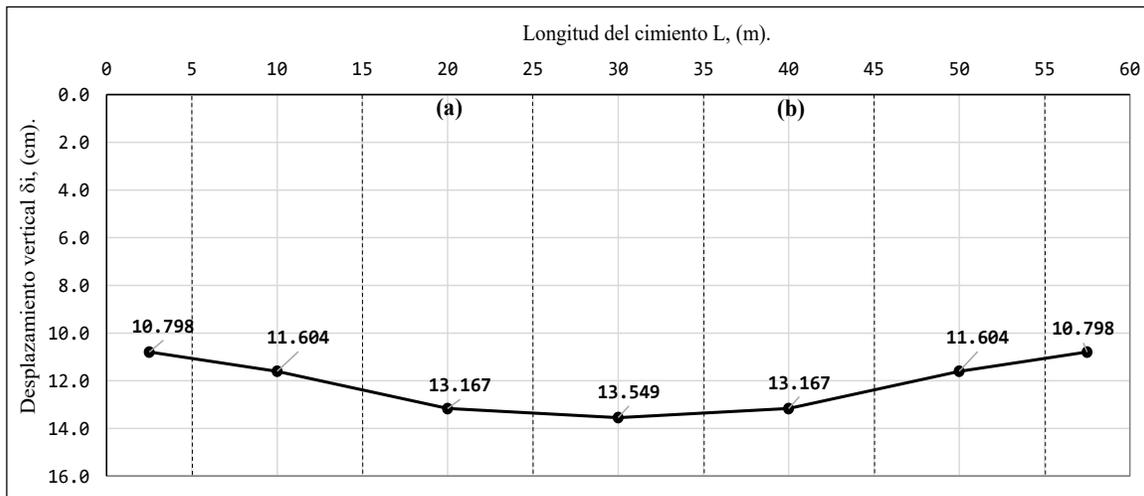


Figura 56. Desplazamientos verticales totales para una cimentación con pontones (con juntas Tipo III). [Elaboración propia].

- Las distorsiones angulares las evaluamos dividiendo el desplazamiento diferencial entre el claro.

Para los pontones que tienen en común la junta **Tipo III** la distorsión angular no debe exceder un valor de 0.002, es decir:

Entre pontón 1 y 2;

$$\frac{\Delta\delta_{diferencial}}{l} < \frac{1}{500} \quad \frac{(13.167 \text{ cm} - 11.604 \text{ cm})}{1000 \text{ cm}} < \frac{1}{500} \quad 0.0016 < 0.002$$

Entre pontón 2 y 3;

$$\frac{\Delta\delta_{diferencial}}{l} < \frac{1}{500} \quad \frac{(13.167 \text{ cm} - 11.604 \text{ cm})}{2000 \text{ cm}} < \frac{1}{500} \quad 0.0016 < 0.002$$

9. Las fuerzas cortantes se calcularon de acuerdo con lo descrito en el punto 4.3.1. En la gráfica de la figura 57 se tiene la distribución a lo largo de la estructura de la cimentación.

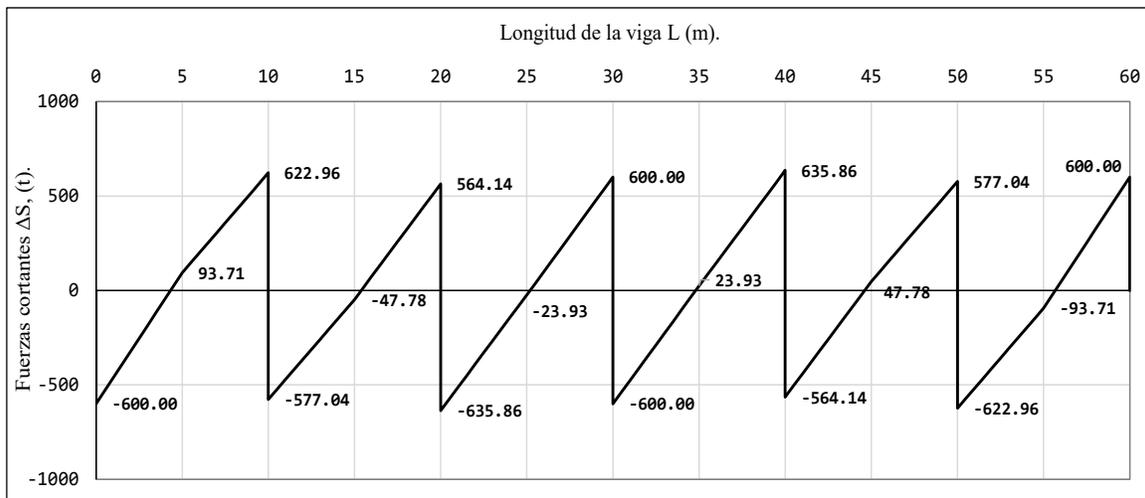


Figura 57. Diagrama de fuerzas cortantes finales para una cimentación con pontones (con juntas Tipo III). [Elaboración propia]

10. Los momentos flexionantes se calcularon de acuerdo con lo descrito en el punto 4.3.2. En la gráfica de la figura 58 se tiene su distribución en el sentido longitudinal de la estructura de la cimentación.

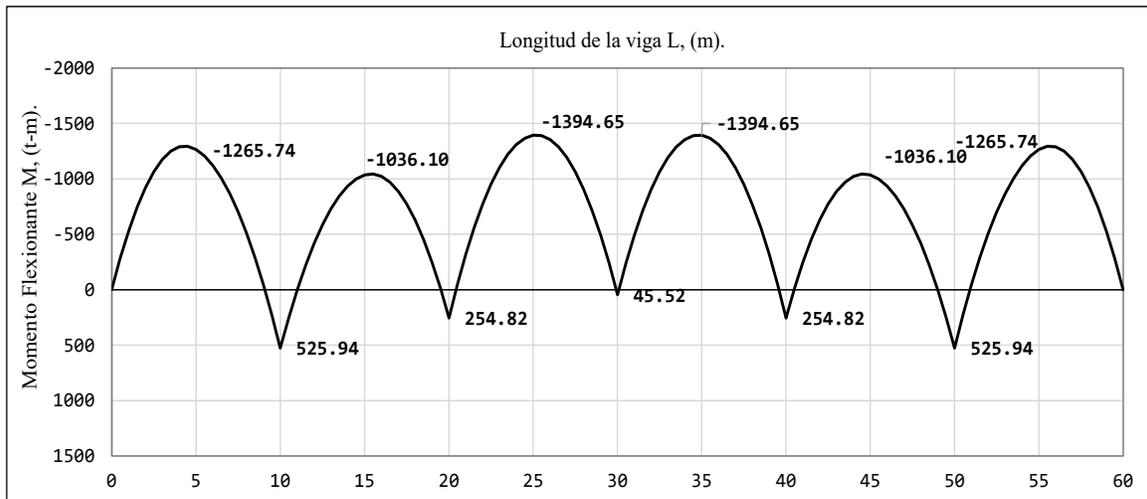


Figura 58. Distribución de momentos flexionantes finales para una cimentación con pontones (con dos juntas Tipo III). [Elaboración propia]

### 5.6.2 CASO b) Sistema de 6 pontones (n) y 5 de juntas (i).

Si se requiere reducir la magnitud de los elementos mecánicos de diseño y particularmente los momentos flexionantes que resultan para el diseño estructural de una losa rígida de fondo de un cajón de cimentación bastará introducir una sola junta de construcción donde se sitúe el momento máximo. Para fines ilustrativos se presentará el caso de un sistema de 6 pontones y 5 juntas de construcción.

El diagrama de momentos flexionantes de la figura 59 pertenece a una cimentación tipo cajón modelada como una gran viga bajo el supuesto de que esta es infinitamente rígida; en el diagrama se contempla que los mayores momentos se sitúan en la fibra inferior y que corresponde a la zona que desarrollará efectos de tensión.

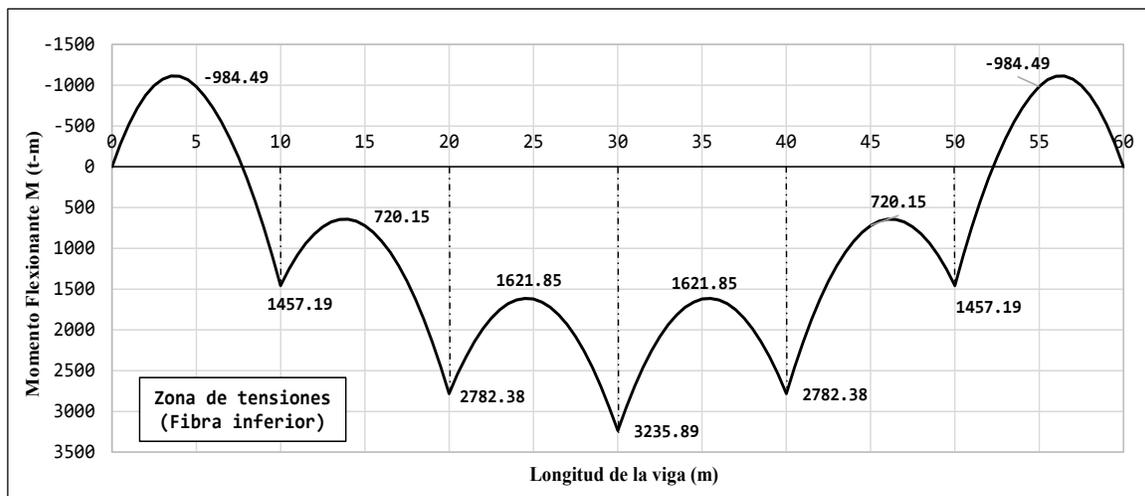


Figura 59. Ubicación de los momentos flexionantes que se requieren reducir. [Elaboración propia]

Se propone reducir la magnitud de los momentos flexionantes ubicados a los 10 m, 20 m, 30 m, 40 y 50 m a partir del origen, mediante la introducción de una junta de construcción ya sea del tipo III, IV o bien la combinación de éstas. Con esta propuesta se genera una cimentación que tendrá cierta flexibilidad al conformarse por 6 pontones y 5 juntas de construcción.

La figura 60 muestra una vista en planta de la cimentación dividida en seis secciones de dimensiones iguales con 5 juntas de construcción referidas como (a), (b), (c), (d) y (e).

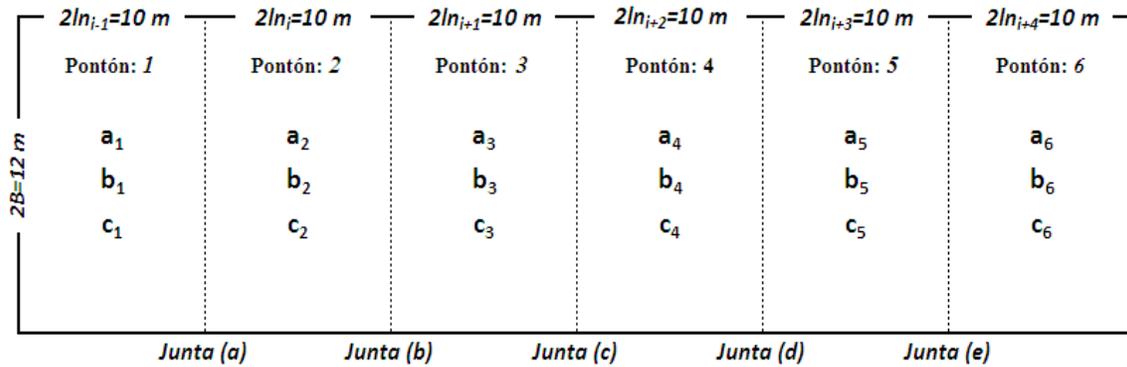


Figura 60. Cimentación de 6 pontones y 5 juntas. [Elaboración propia]

A partir de la ecuación general (ecuación 21) se establece una ecuación por junta:

$$a_{n-1}\Delta S_{i-1} + (b_{n-1} + b_n)\Delta S_i + a_n\Delta S_{i+1} = (c_{n-1} + c_n)$$

Las ecuaciones que conforman el sistema son:

$$a_1\Delta S_0 + (b_1 + b_2)\Delta S_1 + a_2\Delta S_2 = (c_1 + c_2) \quad \text{(I)}$$

$$a_2\Delta S_1 + (b_2 + b_3)\Delta S_2 + a_3\Delta S_3 = (c_2 + c_3) \quad \text{(II)}$$

$$a_3\Delta S_2 + (b_3 + b_4)\Delta S_3 + a_4\Delta S_4 = (c_3 + c_4) \quad \text{(III)}$$

$$a_4\Delta S_3 + (b_4 + b_5)\Delta S_4 + a_5\Delta S_5 = (c_4 + c_5) \quad \text{(IV)}$$

$$a_5\Delta S_4 + (b_5 + b_6)\Delta S_5 + a_6\Delta S_6 = (c_5 + c_6) \quad \text{(V)}$$

Donde el primer término de la primera ecuación ( $a_1\Delta S_0$ ) y el tercer término de la última ecuación establecida  $a_6\Delta S_6$  serán igual a cero.

Por consiguiente, los pasos de cálculo son los descritos en el punto 5.1.1.1 del capítulo V. A continuación, se presentarán tablas resúmenes de los cálculos y sus respectivas gráficas para su análisis e interpretación.



**Subcaso I): Con juntas Tipo III.**

Tabla 8. Coeficientes geométricos para un sistema de 6 pontones con juntas tipo III.

Coeficientes geométricos	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Pontón 4		Pontón 5		Pontón 6		Uds.
	Junta a		Junta b		Junta c		Junta d		Junta e				
An	120		120		120		120		120		120		m <sup>2</sup>
Sn	200		200		200		200		200		200		m <sup>3</sup>
an	0.0167		0.0167		0.0167		0.0167		0.0167		0.0167		1/m <sup>2</sup>
bn	0.0333		0.0333		0.0333		0.0333		0.0333		0.0333		1/m <sup>2</sup>
ΔM <sub>i</sub>	0	-1457.19	1457.19	-2782.38	2782.38	-3235.89	3235.89	-2782.38	2782.38	-1457.19	1457.19	0	t-m
ΔM <sub>i</sub> + ΔM <sub>i+1</sub>		-1457.19		-1325.19		-453.51		453.51		1325.19		1457.19	t-m
Cn	-7.29		-6.63		-2.27		2.27		6.63		7.29		t/m <sup>2</sup>

Sistema de ecuaciones lineales a resolver para hallar la magnitud de las fuerzas cortantes en cada junta de construcción propuesta:

$$0.0667\Delta S_{(a)} + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0 + 0 + 0 = -13.912 \quad (I)$$

$$0.0167\Delta S_{(a)} + 0.0667\Delta S_{(b)} + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0 + 0 = -8.893 \quad (II)$$

$$0 + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0.0667\Delta S_{(c)} + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0 = 0 \quad (III)$$

$$0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0.0667\Delta S_{(d)} + 0.0167\Delta S_{(e)} = +8.883 \quad (IV)$$

$$0 + 0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0.0667\Delta S_{(e)} = +13.912 \quad (V)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con el método de eliminación de Gauss-Jordan [12], las fuerzas cortantes para cada junta son:

$$\Delta S_{(a)} = -187.016 t$$

$$\Delta S_{(b)} = -86.648 t$$

$$\Delta S_{(c)} = 0$$

$$\Delta S_{(d)} = +86.648 t$$

$$\Delta S_{(e)} = +187.016 t$$

Tabla 9. Esfuerzos de corrección en los extremos de los 6 pontones con juntas Tipo III [Elaboración propia].

Esfuerzos de corrección	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Pontón 4		Pontón 5		Pontón 6		Uds.
	Junta a	Junta b	Junta c	Junta d	Junta e	Junta a	Junta b	Junta c	Junta d	Junta e	Junta a	Junta b	
$\Delta S$	0	-187.02	-187.02	-86.65	-86.65	0.00	0.00	86.65	86.65	187.02	187.02	0	t
$(\Delta S_i - \Delta S_{i+1})/A_n$	1.558	-0.836	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.836	-0.836	-0.836	1.558	1.558	t/m <sup>2</sup>
$\mp (\Delta M_i + \Delta M_{i+1})/S_n$	-7.29	-6.63	-2.27	2.27	2.27	2.27	2.27	6.63	6.63	6.63	7.29	7.29	t/m <sup>2</sup>
$\pm (\Delta S_i + \Delta S_{i+1}) \cdot l_n/S_n$	-4.68	-6.84	-2.17	2.17	2.17	2.17	2.17	6.84	6.84	6.84	4.68	4.68	t/m <sup>2</sup>
$\Delta q_i$	4.169	-1.052	-1.052	-0.621	-0.621	-0.823	-0.823	-0.621	-0.621	-1.052	-1.052	4.169	t/m <sup>2</sup>

En la figura siguiente se ha graficado los esfuerzos  $\Delta q_i$  transformados en cargas uniformemente repartidas  $Q_i$ , además se muestra los cambios de reacción por ancho de dovela.

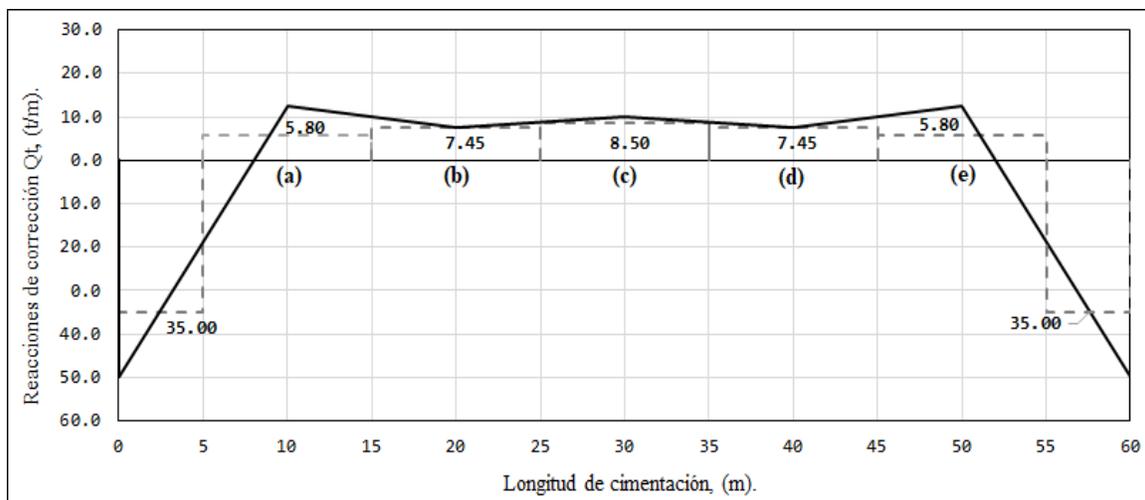


Figura 61. Reacciones de corrección por ancho de dovela cuando se introducen cinco juntas Tipo III. [Elaboración propia]

Por consiguiente, las reacciones promedio presentadas en la figura 60 se suman o restan con las reacciones de la figura 13, con las reacciones que resulten (figura 62) se estimará los desplazamientos verticales totales y diferenciales por dovela con la aplicación de la ecuación matricial de asentamientos (E.M.A). En la figura 63 se tienen las magnitudes que resultaron de la ecuación matricial de asentamientos.

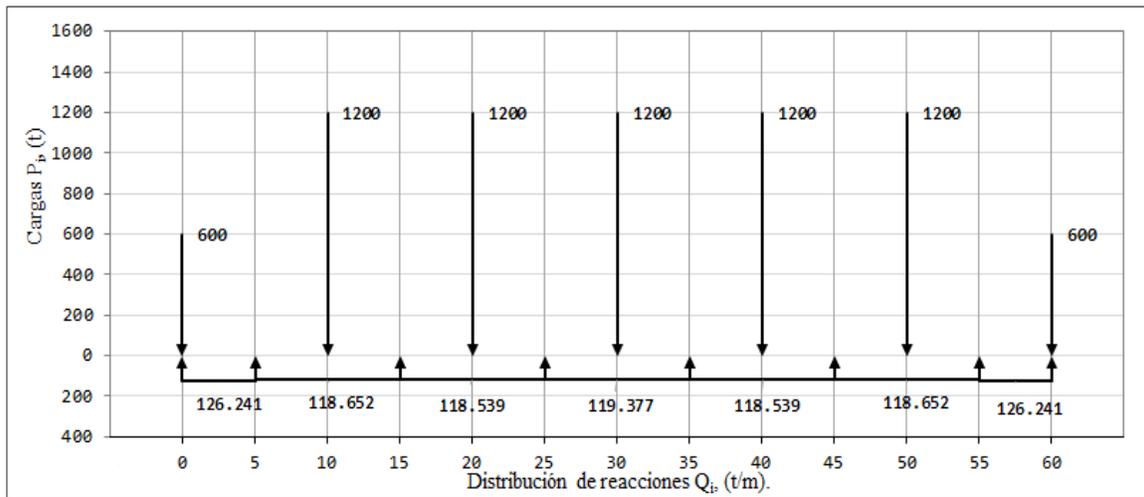


Figura 62. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela cuando se introducen cinco juntas Tipo III. [Elaboración propia]

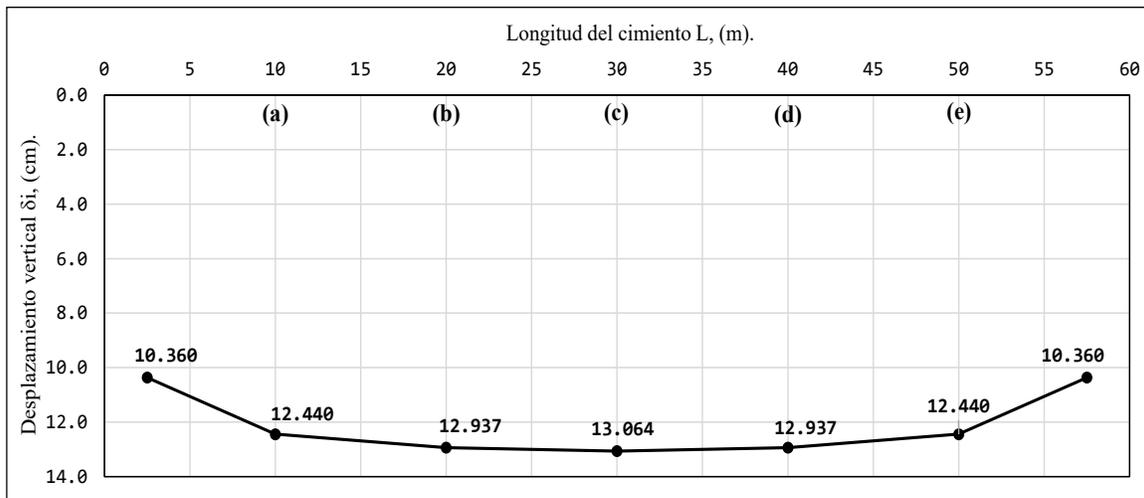


Figura 63. Desplazamientos verticales totales para un sistema de 6 pontones y cinco juntas Tipo III. [Elaboración propia].

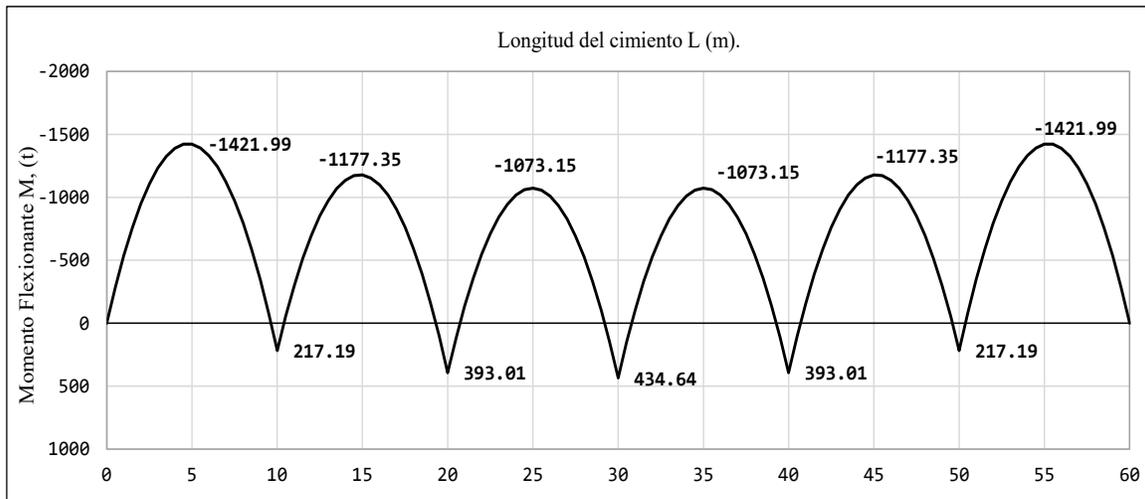


Figura 64. Diagrama de momentos flexionantes reducidos conseguido con un sistema de 6 pontones y cinco juntas Tipo III. [Elaboración propia]

Tabla 10. Momentos flexionantes reducidos con la introducción de cinco juntas Tipo III. [Elaboración propia]

Momento flexionante (Cimentación Rígida), t-m.	1457.18	2782.38	3235.89	2782.38	1457.18	Diagrama	
Junta, <i>i-th</i>	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Desplazamientos	Momentos
Fuerza cortante $\Delta S_{i+th}$ , t.	-187.016	-86.648	0.000	86.648	187.016	Figura 63	Figura 64
Momento flexionante reducido, t-m.	217.190	393.010	434.640	393.010	217.190		

$\Delta S_{i+th}$ : Fuerzas cortantes en cada junta, obtenidas de la solución del sistema de ecuaciones lineales.

**Subcaso II): Con juntas Tipo III y Tipo IV.**

En este subcaso se puede considerar una serie de combinaciones de las juntas Tipo III y Tipo IV, en la tabla 11 se presentan algunas propuestas de combinaciones para ejemplificar cual sería el comportamiento del sistema de pontones. Además, se consignan los valores de las fuerzas cortantes  $\Delta S_{i+th}$  para cada junta según la combinación, así como los momentos flexionantes reducidos obtenidos.

Tabla 11. Tabla de valores de fuerzas cortantes en las juntas, momentos plásticos y momentos reducidos para un sistema de 6 pontones con juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

Momento flexionante (Cimentación Rígida), t-m.	1457.18	2782.38	3235.89	2782.38	1457.18	Diagrama	
Junta, <i>i-th</i>	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Desplazamientos verticales finales	Momentos
	Tipo IV	Tipo IV	Tipo III	Tipo IV	Tipo IV		
Momento plástico $\Delta M_{p_{i+th}}$ , t-m.	800	800	0	800	800	Figura 65/Curva 1	Figura 66/Curva 1
Fuerza cortante $\Delta S_{i+th}$ , t.	-107.02	-166.65	0.00	166.65	107.02		
Momento flexionante reducido $\Delta M_{i+th}$ , t-m.	863.49	901.13	-114.11	901.13	863.49		
Junta, <i>i-th</i>	Tipo III	Tipo IV	Tipo IV	Tipo IV	Tipo III	Figura 65/Curva 2	Figura 66/Curva 2
Momento plástico $\Delta M_{p_{i+th}}$ , t-m.	0	800	800	800	0		
Fuerza cortante $\Delta S_{i+th}$ , t.	-139.02	-38.65	0.00	38.65	139.02		
Momento flexionante reducido $\Delta M_{i+th}$ , t-m.	394.69	1569.88	1460.89	1569.88	394.69	Figura 65/Curva 3	Figura 66/Curva 3
Junta, <i>i-th</i>	Tipo III	Tipo IV	Tipo III	Tipo IV	Tipo III		
Momento plástico $\Delta M_{p_{i+th}}$ , t-m.	0	800	0	800	0		
Fuerza cortante $\Delta S_{i+th}$ , t.	-123.02	-102.65	0.00	102.65	123.02		
Momento flexionante reducido $\Delta M_{i+th}$ , t-m.	619.69	3094.88	1960.89	3094.88	619.69		

$\Delta S_{i+th}$ : Fuerzas cortantes en cada junta, obtenidas de la solución del sistema de ecuaciones lineales.

Las tablas de coeficientes geométricos **a**, **b** y **c**, de los cambios de reacción **Q<sub>i</sub>** y su respectivo diagrama, pueden consultarse en el apéndice D en b1, b2 y b3.

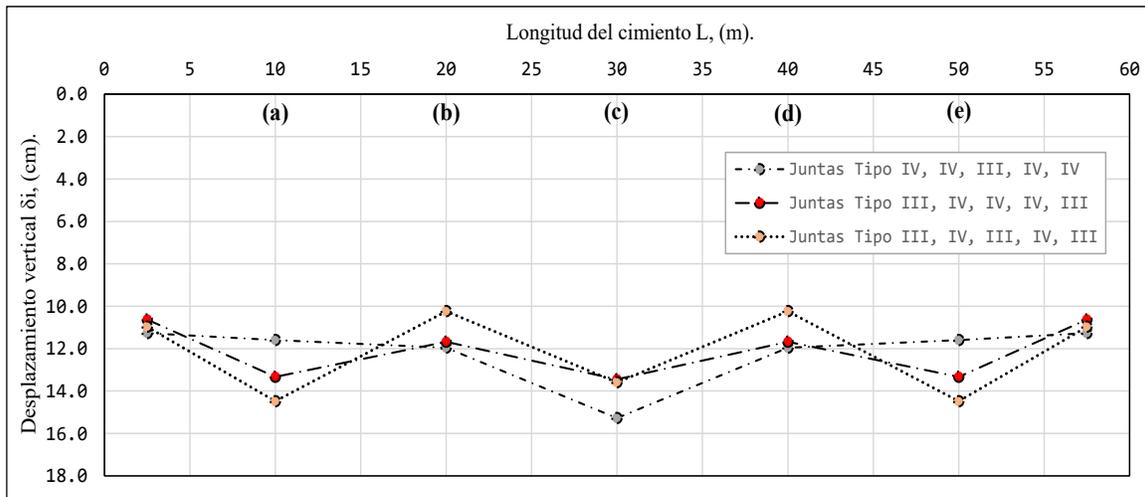


Figura 65. Desplazamientos verticales totales para tres combinaciones de juntas Tipo III y IV. [Elaboración propia].

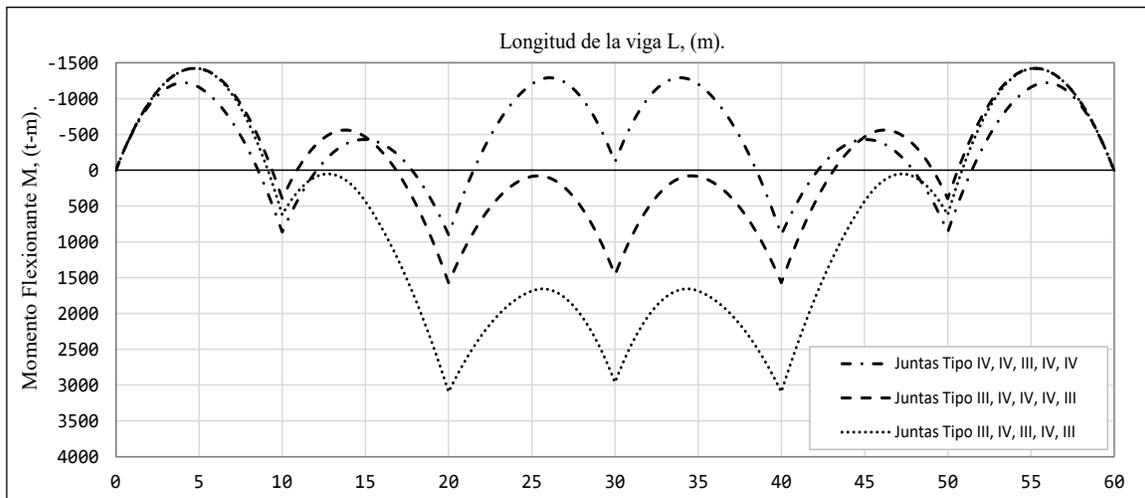


Figura 66. Diagramas de momentos flexionantes reducidos e incrementados para tres combinaciones de juntas Tipo III y IV. [Elaboración propia].

### Subcaso III): Con juntas Tipo IV.

Para este subcaso se puede considerar solo juntas Tipo IV, en la tabla 12 se presentan algunas propuestas según la magnitud del momento plástico para ejemplificar cual sería el comportamiento del sistema de pontones. Además, se consignan los valores de las fuerzas cortantes  $\Delta S_{i+th}$  para cada junta según la magnitud del momento plástico en cada junta, así como los momentos flexionantes reducidos obtenidos.

Tabla 12. Valores de fuerzas cortantes, momentos plásticos y momentos flexionantes reducidos considerando juntas Tipo IV. [Elaboración propia]

Momento flexionante (Cimentación Rígida), t-m.	1457.18	2782.38	3235.89	2782.38	1457.18	Diagrama	
Junta, $i-th$	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Desplazamientos verticales finales	Momentos
	Tipo IV						
Momento plástico $\Delta M_{p_{i+th}}$ , t-m.	800	800	1000	800	800	Figura 67/Curva 1	Figura 68/Curva 1
Fuerza cortante $\Delta S_{i+th}$ , t.	-127.02	-86.65	0.00	86.65	127.02		
Momento flexionante reducido $\Delta M_{i+th}$ , t-m.	809.19	709.88	1020.52	709.88	809.19		
Momento plástico $\Delta M_{p_{i+th}}$ , t-m.	800	800	600	800	800	Figura 67/Curva 2	Figura 68/Curva 2
Fuerza cortante $\Delta S_{i+th}$ , t.	-118.87	-118.39	0.00	118.39	118.87		
Momento flexionante reducido $\Delta M_{i+th}$ , t-m.	849.31	891.01	742.89	891.01	849.31		
Momento plástico $\Delta M_{p_{i+th}}$ , t-m.	800	800	800	800	800	Figura 67/Curva 2	Figura 68/Curva 3
Fuerza cortante $\Delta S_{i+th}$ , t.	-123.02	-102.65	0.00	102.65	123.02		
Momento flexionante reducido $\Delta M_{i+th}$ , t-m.	825.94	769.88	810.89	769.88	825.94		

$\Delta S_{i+th}$ : Fuerzas cortantes en cada junta, obtenidas de la solución del sistema de ecuaciones lineales.

Las tablas de coeficientes geométricos **a**, **b** y **c**, de los cambios de reacción  $Q_i$  y su respectivo diagrama pueden consultarse en el apéndice D en b4, b5 y b6.

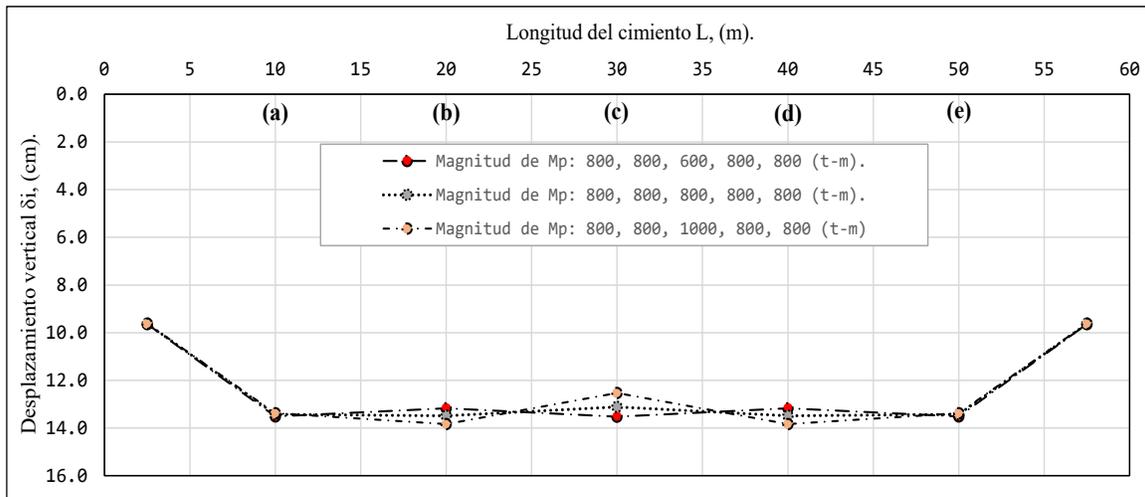


Figura 67. Desplazamientos verticales totales para un sistema de 6 pontones con juntas Tipo IV. [Elaboración propia].

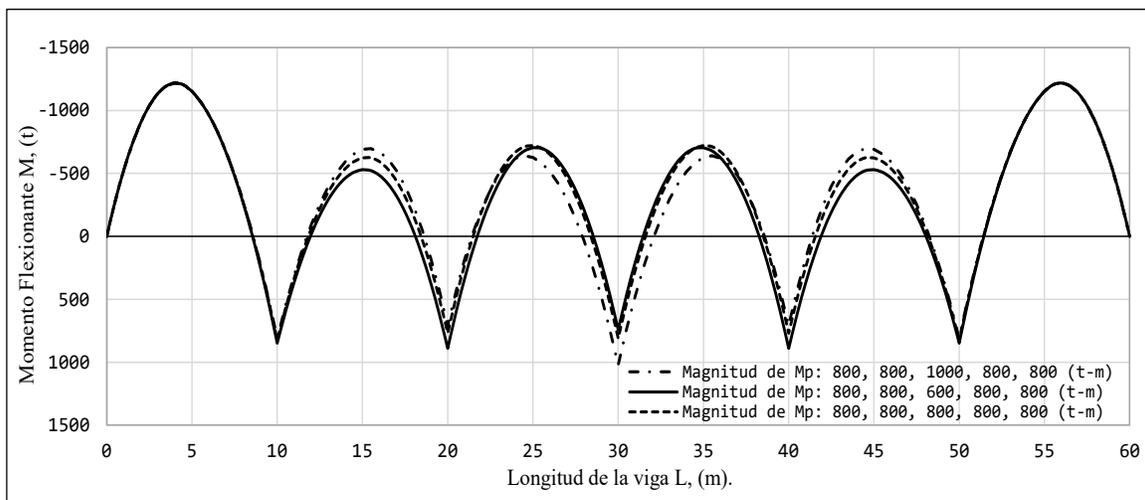


Figura 68. Diagrama de momentos flexionantes reducidos para un sistema de 6 pontones con juntas Tipo IV. [Elaboración propia].

## 5.7 *Análisis e interpretación de resultados.*

### 5.7.1 *Subcaso I del caso a): Sistema de tres pontones con una junta de construcción Tipo III y una Tipo IV.*

Al introducir juntas de construcción en la estructura de la cimentación tipo cajón, una de tipo III y una de tipo IV, éstas admitirán fuerza cortante y torsión dada su configuración geométrica y adicionalmente la junta tipo IV un momento plástico. Se ha visto en los resultados que los momentos flexionantes se han reducido de manera considerable comparado con los momentos flexionantes que resultaron de analizar la cimentación como un elemento infinitamente rígido; lo que permitirá ganar mayor economía en el diseño estructural, requiriendo menos área de acero longitudinal, transversal y área de acero de refuerzo por efecto de cortante. Un aspecto importante que se puede observar si comparamos ambos diagramas de momentos es que la cimentación semiflexible tendrá efectos de tensión tanto en la fibra inferior como superior, a diferencia de la cimentación rígida donde los efectos de tensión se ubicarán casi en su totalidad en la fibra inferior; recordemos que en el diseño estructural se debe evitar que estos efectos de tensión superen ciertos valores críticos para no que se produzcan rupturas o deformaciones excesivas en el elemento cimentación (Figura 69).

Por otro lado, los desplazamientos totales y diferenciales se incrementaron ligeramente con respecto al estimado para la misma cimentación rígida (Figura 70). Sin embargo, no rebasan los valores que se consideran aceptables de acuerdo con lo especificado en las normas o manuales de diseño para este tipo de cimentación que es una de las soluciones más adecuadas cuando nos encontramos suelos altamente compresibles en el sitio de construcción.

Las distorsiones angulares o giros no rebasan de igual manera los límites establecidos para estructuras de concreto de 0.001 y 0.002 para evitar las grietas. Por lo tanto, al considerar introducir una junta de tipo III y una de tipo IV a la estructura de la cimentación no causará daños estructurales, no perjudicará su funcionamiento, no afectará el aspecto arquitectónico del edificio y no dañará a las colindancias.

Si los desplazamientos verticales diferenciales resultaran de mayor magnitud por encima de los valores límites establecidos se debe cambiar el tipo de junta, por ejemplo, del tipo III al tipo IV el cual admite un momento plástico resistente que proporciona rigidez al interactuar los pontones en común; y si la junta es del tipo IV se selecciona un perfil de acero de

proporcione un mayor momento plástico al utilizado en el análisis para ajustar los desplazamientos verticales totales.

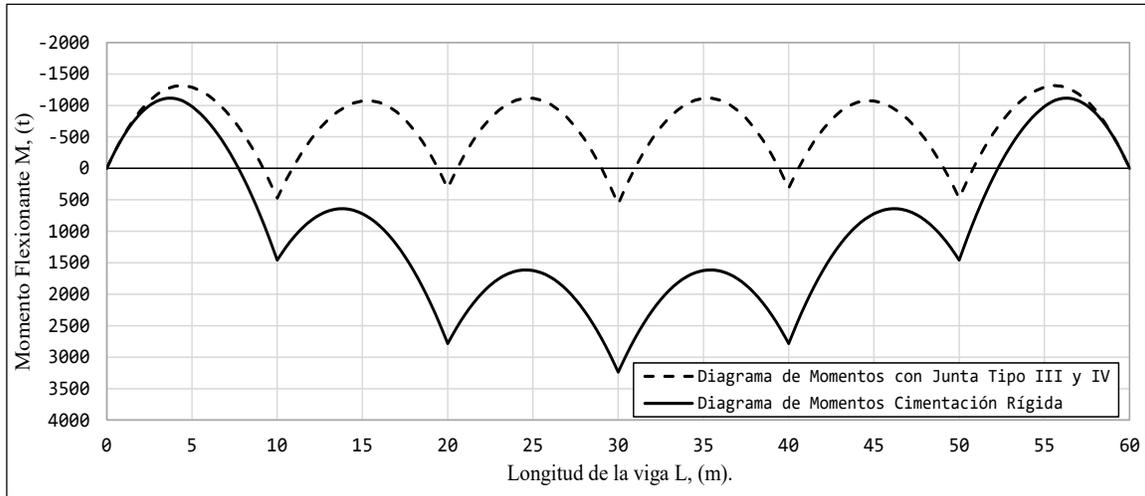


Figura 69. Comparativa entre los momentos flexionantes de una cimentación rígida y una cimentación con pontones (con una junta Tipo III y una Tipo IV) [Elaboración propia].

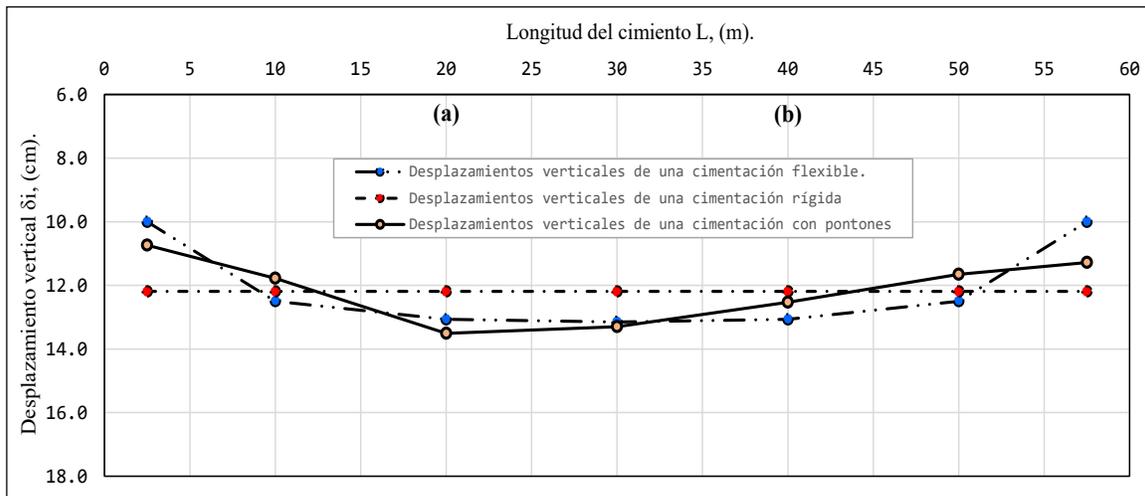


Figura 70. Comparativa entre los desplazamientos verticales de una cimentación rígida, flexible y con pontones (con una junta Tipo III y una Tipo IV) [Elaboración propia].



5.7.2 Subcaso II: Sistema de tres pontones y dos juntas de construcción Tipo IV.

Si las juntas de construcción seleccionadas para ser habilitadas en nuestra cimentación son del tipo IV, éstas admitirán una fuerza cortante y torsión, dada su configuración geométrica, adicionalmente permitirán un momento plástico resistente que conferirá mayor rigidez a la interacción entre pontones. Como el subcaso anterior, se ha visto en los resultados que los momentos flexionantes se han reducido de manera importante comparado con los momentos flexionantes que resultaron de analizar la cimentación como un elemento infinitamente rígido; esto también permitirá ganar mayor economía en el diseño estructural, requiriendo menos área de acero longitudinal y transversal. Se puede observar que al igual del subcaso I ocurre una disminución de los efectos de tensión en la fibra inferior, sin embargo, los efectos de tensión se presentan tanto en la fibra inferior como superior (Figura 71).

En este sistema, los desplazamientos verticales totales y diferenciales se incrementaron ligeramente con respecto al estimado para la cimentación rígida (Figura 72). A pesar de ello, no sobrepasa los valores que se consideran aceptables de acuerdo con lo establecido en las normas o manuales de diseño (P/e: NTCCDMX).

Las distorsiones angulares o giros no rebasaron de igual manera los límites establecidos de 0.001 y 0.002 para estructuras de concreto. Por lo tanto, al considerar introducir juntas de tipo IV a la estructura de la cimentación no causará daños estructurales, no perjudicará su funcionamiento, no afectará el aspecto arquitectónico del edificio y no dañará a las colindancias.

Si los desplazamientos verticales diferenciales resultaran de mayor magnitud por encima de los valores límites establecidos se deberá incrementar el momento plástico resistente mediante la selección de un perfil de acero que confiera un momento plástico que proporcione mayor rigidez al interactuar los pontones y permita ajustar los desplazamientos verticales diferenciales a valores aceptables.

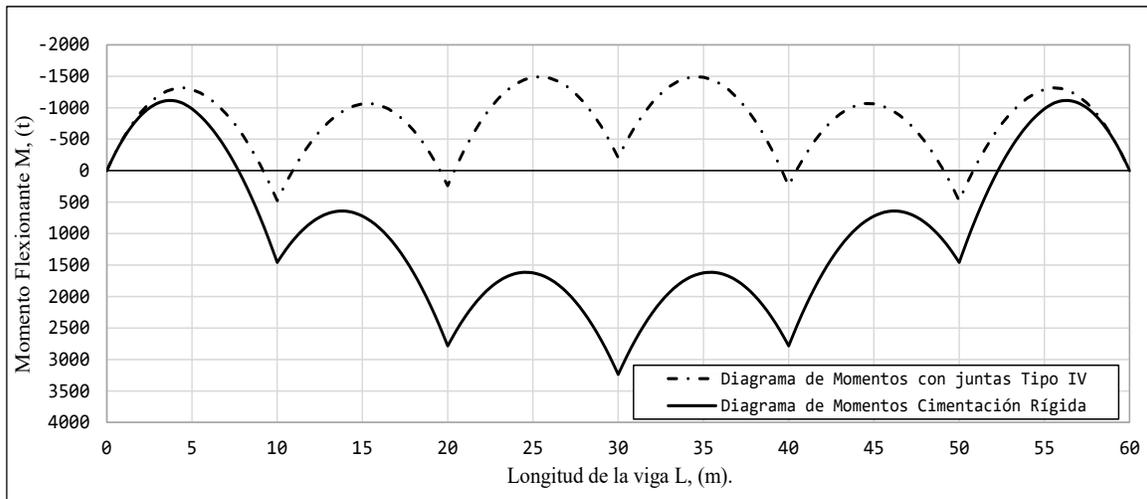


Figura 71. Comparativa entre los momentos flexionantes de una cimentación rígida y una cimentación con pontones (con dos juntas Tipo IV) [Elaboración propia].

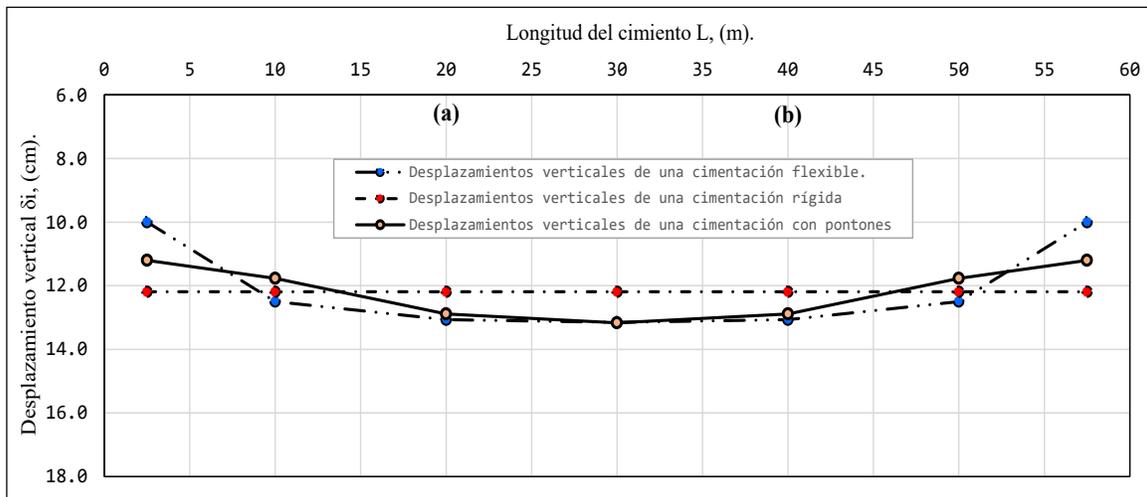


Figura 72. Comparativa entre los desplazamientos verticales de una cimentación rígida, flexible y con pontones (con dos juntas Tipo IV) [Elaboración propia].



### 5.7.3 Subcaso III: Sistema de tres pontones y dos juntas de construcción Tipo III.

En el diseño se puede considerar las juntas de construcción del tipo III para ser habilitadas en nuestra cimentación; estas admitirán una fuerza cortante y un momento torsionante dada su configuración geométrica. Como en los subcasos anteriores, se ha visto en los resultados que los momentos flexionantes se han reducido de manera cuantiosa comparado con los momentos flexionantes que resultaron de analizar la cimentación como un elemento muy rígido; lo que permitirá ganar mayor economía en el diseño estructural, requiriendo menos área de acero longitudinal, transversal y área de acero de refuerzo por efecto de cortante. Comparado con los subcasos I y II se aprecia a través de los diagramas de momentos que para la cimentación con pontones con juntas de construcción del tipo III los efectos de tensión se desarrollarán mayoritariamente en la fibra superior y por el contrario en la fibra inferior se tendrán los efectos de compresión (Figura 73).

En este subcaso, los desplazamientos verticales totales por dovela son sensiblemente iguales, aunque se incrementaron ligeramente con respecto al valor calculado cimentación rígida (Figura 74). No obstante, no excede los valores que se consideran aceptables de acuerdo con lo especificado en las normas o manuales de diseño (P/e: NTCCDMX).

Las distorsiones angulares o giros no rebasaron de igual manera los límites establecidos para estructuras de concreto de 0.001 y 0.002 para evitar las grietas. Por lo que al considerar introducir juntas de tipo IV a la estructura de la cimentación no causará daños estructurales, no perjudicará su funcionamiento, no afectará el aspecto arquitectónico del edificio y no dañará a las colindancias.

Si los desplazamientos verticales diferenciales resultaran de mayor magnitud por encima de los valores límites establecidos se deberá incrementar el momento plástico resistente mediante la selección de un perfil de acero que confiera un momento plástico mayor y que proporcionará mayor rigidez al interactuar los pontones; lo que nos permitirá ajustar los desplazamientos verticales diferenciales a valores aceptables.

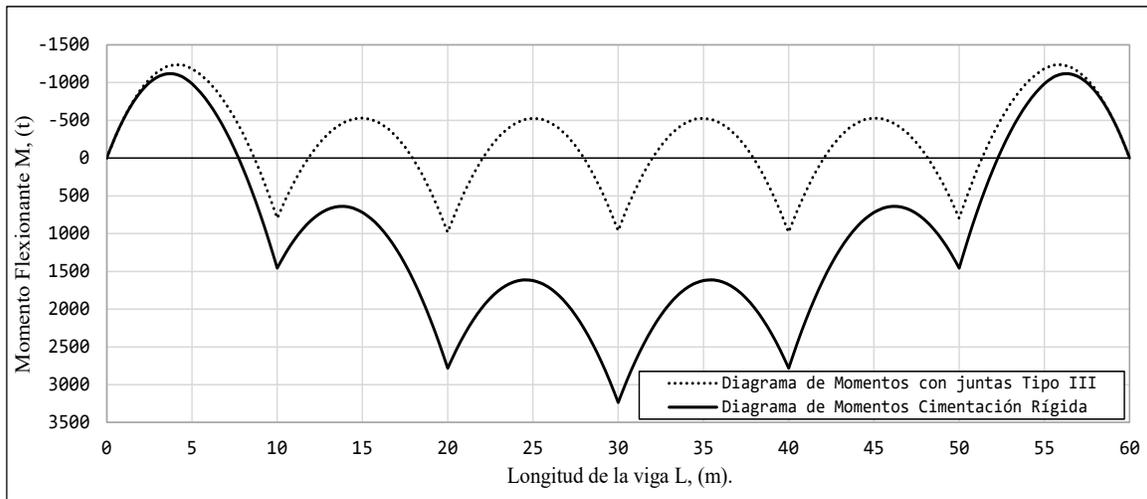


Figura 73. Comparativa entre los momentos flexionantes de una cimentación rígida y una cimentación con pontones (con dos juntas Tipo III). [Elaboración propia]

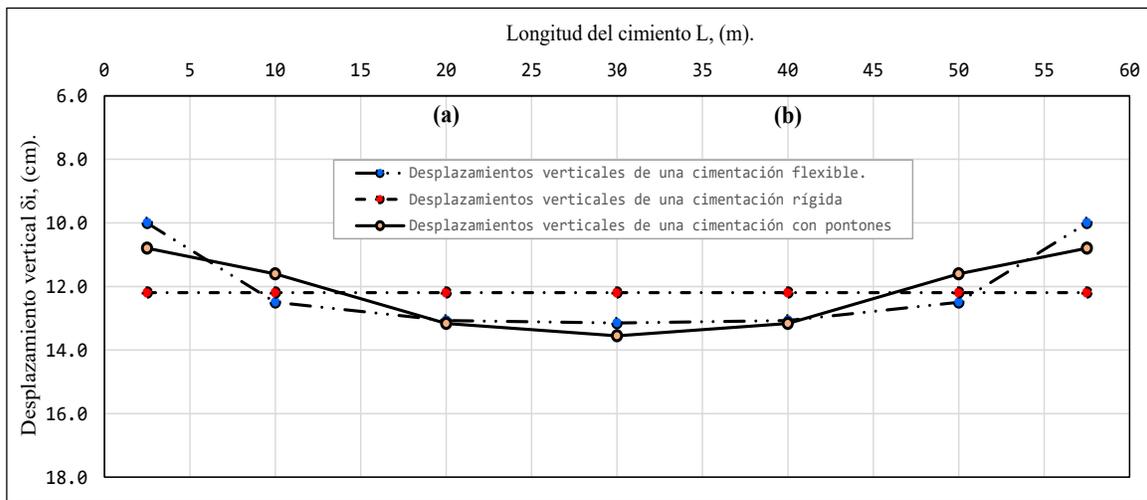


Figura 74. Comparativa entre los desplazamientos verticales de una cimentación rígida, flexible y con pontones (con dos juntas Tipo III). [Elaboración propia].

5.7.3 Diagramas comparativos de desplazamientos verticales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes de una cimentación rígida y los del caso a).

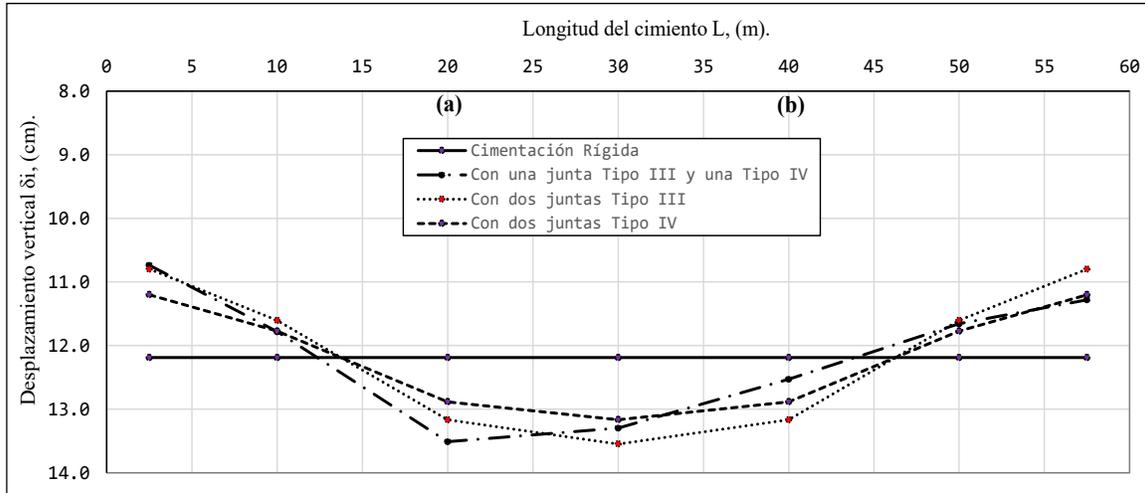


Figura 75. Comparativa entre el diagrama de desplazamientos verticales de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso a) para la cimentación con pontones. [Elaboración propia].

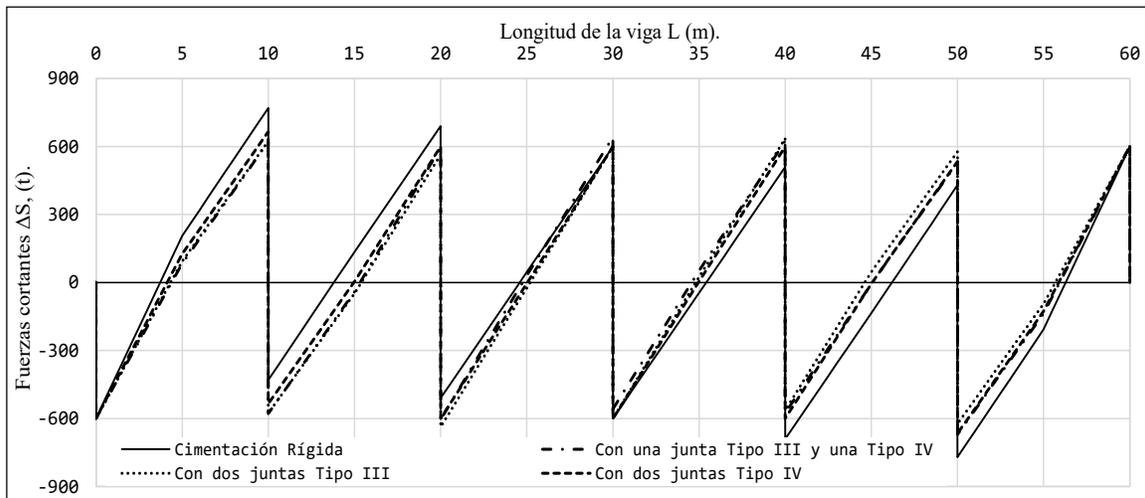


Figura 76. Comparativa entre el diagrama de fuerzas cortantes de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso a) para la cimentación con pontones. [Elaboración propia].

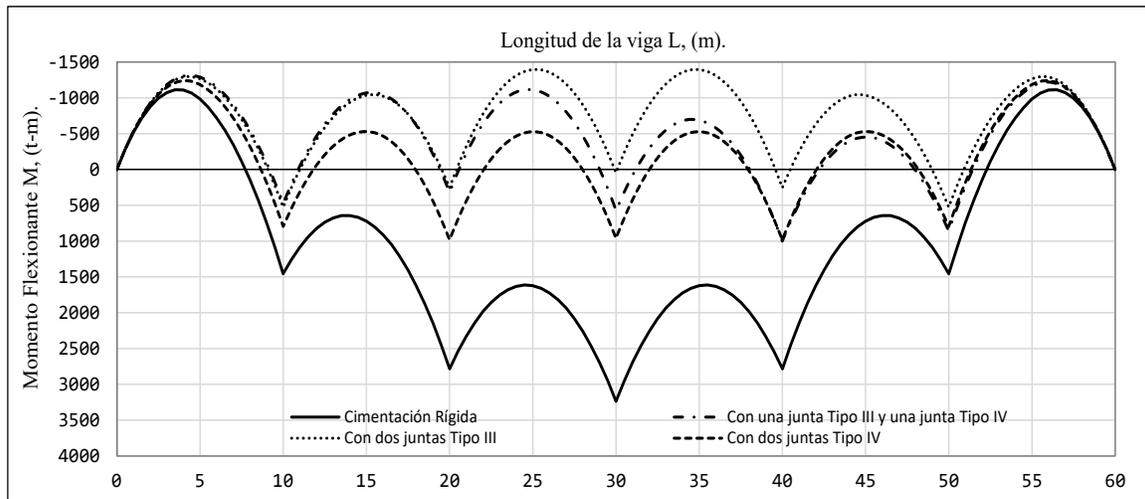


Figura 77. Comparativa entre el diagrama momentos flexionantes de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso a) para la cimentación con pontones. [Elaboración propia].

#### 5.7.4 Subcaso I del caso b): Sistema de seis pontones con juntas de construcción Tipo III.

Los resultados obtenidos para esta propuesta de solución indican que el comportamiento de un sistema de cimentación conformado de 6 pontones con 5 juntas de construcción del tipo III, incrementa levemente los desplazamientos verticales totales y diferenciales, con respecto a los obtenidos para una cimentación rígida, pero son aceptables para este tipo de cimentación dada sus magnitudes. Las distorsiones angulares o giros quedan por debajo de los límites de 0.001 y 0.002, establecidos para estructuras de concreto donde se debe evitar el desarrollo de grietas. A partir de la nueva distribución de reacciones  $Q_i$  y las cargas  $P_i$  se obtuvo que los elementos mecánicos de diseño tanto fuerzas cortantes como momentos flexionantes se redujeron de manera importante, con lo que se logra el objetivo de economizar área de acero longitudinal, transversal y por efecto de cortante en el diseño estructural, traduciéndose en menos costo.

#### 5.7.5 Subcaso II del caso b): Sistema de seis pontones con juntas de construcción Tipo III y IV.

En este subcaso se busca lograr el objetivo de reducir la magnitud de los momentos flexionantes mediante la selección de juntas tipo III y tipo IV, ubicadas según convenga. Se analizaron 3 posibles selecciones y ubicaciones de juntas de construcción para conocer cuál sería el probable comportamiento del sistema de pontones. De acuerdo con los valores consignados en la tabla 11, con la primera propuesta (Tipo IV, IV, III, IV, IV) se logra disminuir los momentos flexionantes, sin embargo, los desplazamientos diferenciales



obtenidos generan que el giro entre los pontones con juntas en común del tipo III resulte mayor a 0.002; es probable que si se considera un momento plástico menor en las juntas tipo IV podamos ajustar los desplazamientos totales y diferenciales a valores permisibles.

Con la segunda propuesta de juntas (Tipo III, IV, IV, IV, III), se logra disminuir los momentos flexionantes (figura 66 – diagrama 2). Y en la tercera propuesta de selección y ubicación de juntas definitivamente no se logra disminuir los momentos flexionantes (Figuras 66 – diagrama 3), al contrario, se incrementa su valor muy cercano a los momentos flexionantes de inicio (cimentación rígida). Es posible que con un momento plástico mayor en las juntas tipo IV se reduzcan los momentos flexionantes y se ajusten de mejor manera los desplazamientos verticales totales, diferenciales y las distorsiones angulares o giros

#### *5.7.6 Subcaso III del caso b): Sistema de seis pontones con juntas de construcción Tipo IV.*

Finalmente, si seleccionamos un conjunto de juntas tipo IV con un elemento de acero que nos proporcione un momento plástico adecuado se logra reducir los momentos flexionantes (Tabla 12 y figura 68 – diagrama 1, 2 y 3). En cuanto a los desplazamientos verticales totales y los giros, los primeros se incrementan muy poco comparado al desplazamiento vertical total para una cimentación rígida y con respecto a los segundos resultan mucho menores al valor límite de 0.002; de no cumplirse esta condición, se pueden ajustar los desplazamientos verticales totales mediante la selección de un momento plástico ya sea menor o mayor (Figura 67– diagramas 1, 2 y 3 respectivamente).

5.7.7 Diagramas comparativos de desplazamientos verticales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes de una cimentación rígida y los del caso b).

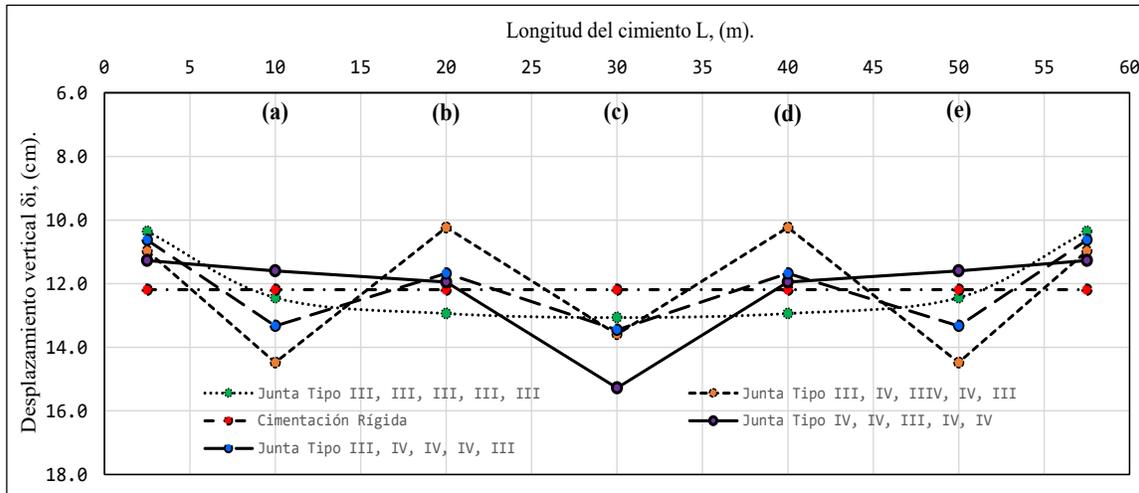


Figura 78. Comparativa entre el diagrama de desplazamientos verticales de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso b) para la cimentación con pontones (Juntas Tipo III y IV). [Elaboración propia].

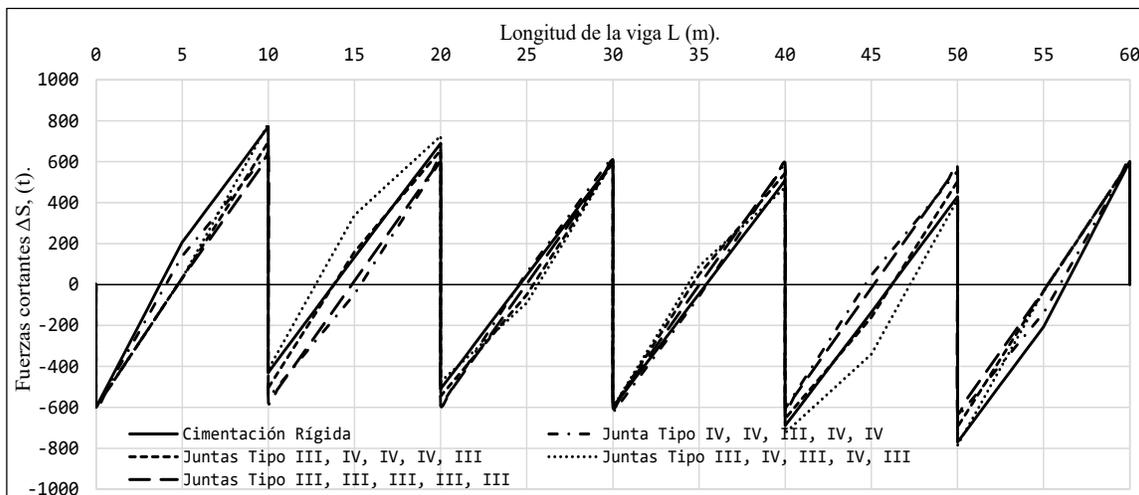


Figura 79. Comparativa entre el diagrama de fuerzas cortantes de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso b) para la cimentación con pontones (Juntas Tipo III y IV). [Elaboración propia].

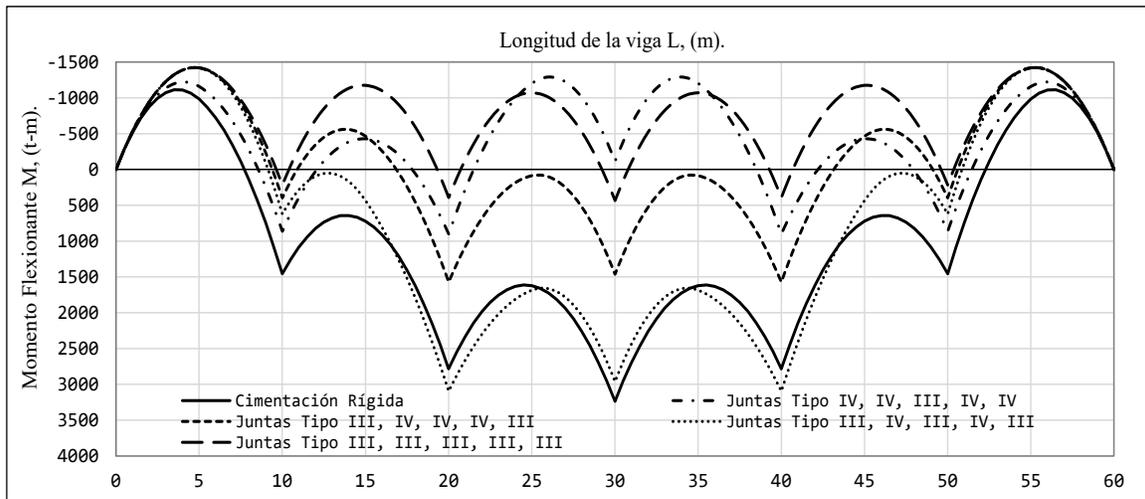


Figura 80. Comparativa entre el diagrama momentos flexionantes de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso b) para la cimentación con pontones (Juntas Tipo III y IV). [Elaboración propia].

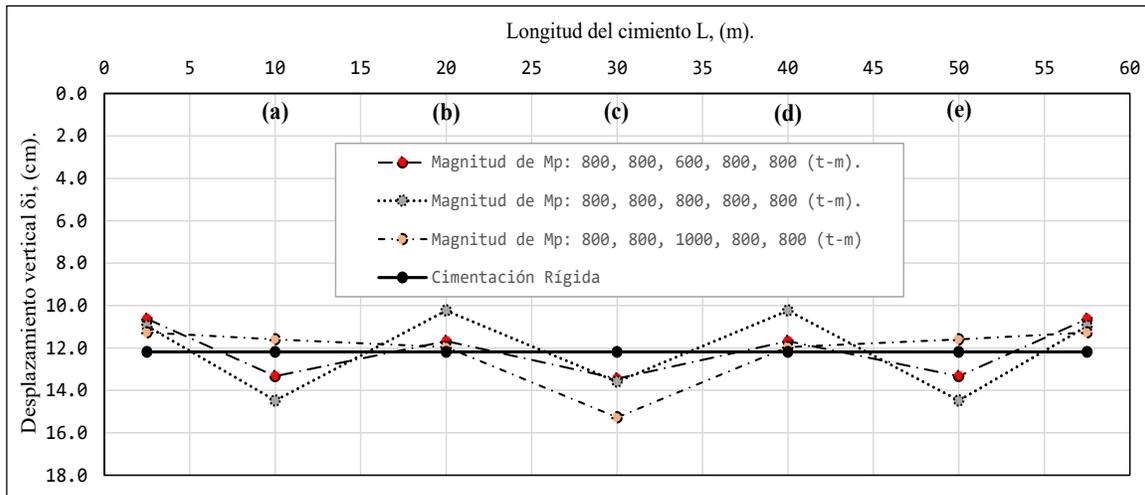


Figura 81. Comparativa entre el diagrama de desplazamientos verticales de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso b) para la cimentación con pontones (Juntas Tipo IV). [Elaboración propia].

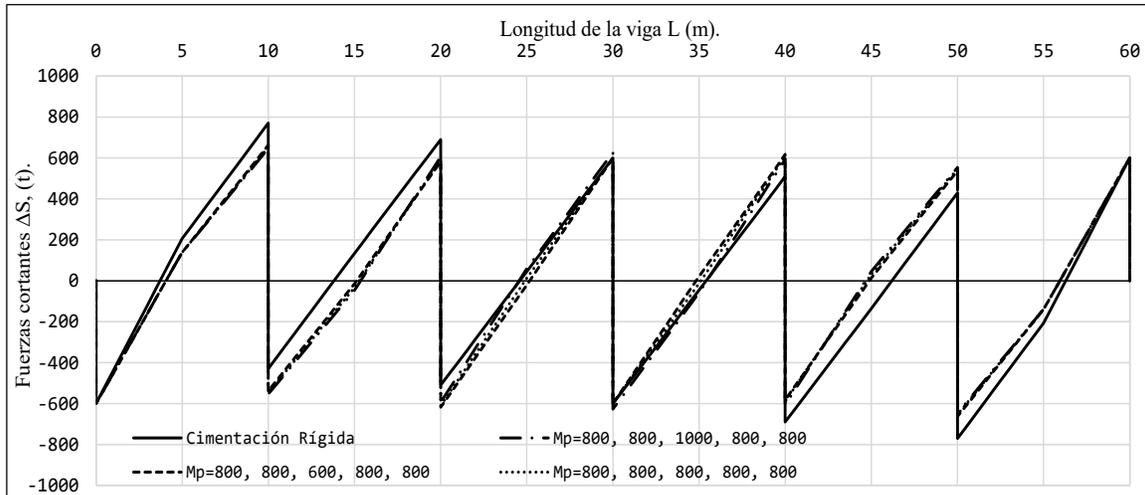


Figura 82. Comparativa entre el diagrama de fuerzas cortantes de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso b) para la cimentación con pontones (Juntas Tipo IV). [Elaboración propia].

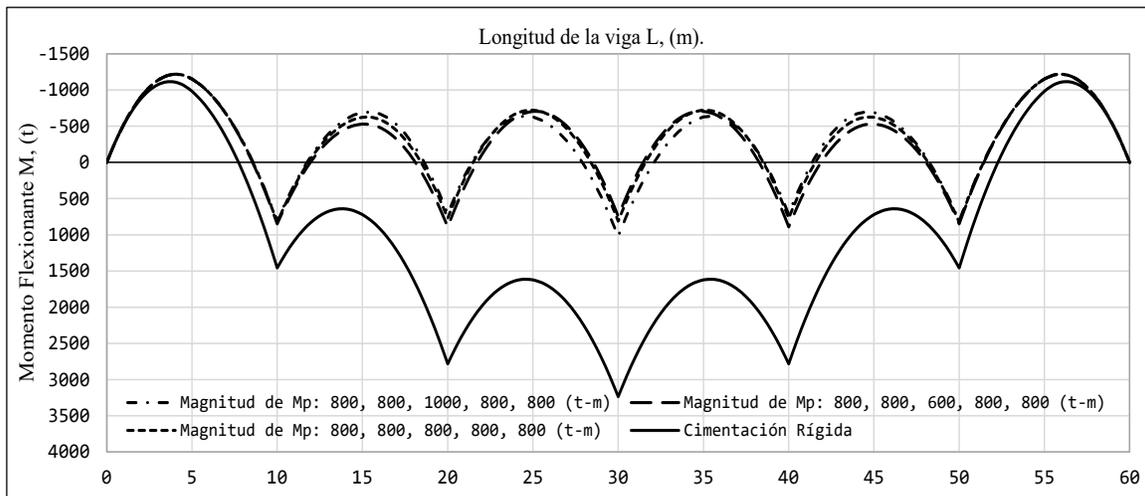


Figura 83. Comparativa entre el diagrama momentos flexionantes de una cimentación rígida y los obtenidos en el caso b) para la cimentación con pontones (Juntas Tipo IV). [Elaboración propia].



## CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES.

En esta tesis se ha desarrollado un programa de cómputo en una hoja de Excel, tomando como base el método de Zeevaert, que permite estudiar el comportamiento de cimentaciones muy largas rígidas, tipo cajón, cuando se dividen en secciones (pontones) unidas por juntas mecánicas, denominadas por el autor tipo I, II, III y IV. Las tres últimas pueden aportar algún efecto mecánico único o combinado (fuerza cortante, momento flexionante y momento torsionante) permitiendo a la cimentación rígida modificar su comportamiento al proporcionarle cierta flexibilidad, con lo cual los momentos flexionantes en las juntas se pueden eliminar requiriendo de esta manera menos acero de refuerzo. Es de esperarse que las juntas tipo I al ser libres no haya efecto mecánico y por lo tanto no ofrecen un adecuado comportamiento al sistema y funcionalmente genera entre los pontones escalones que pueden obstruir y hacer incómodo el paso de personas y equipos con ruedas o incluso vehículos.

En el desarrollo de la segunda etapa de cálculo se ha demostrado numéricamente que al introducir o habilitar juntas de construcción en la estructura de una cimentación tipo cajón se redistribuyen y modifican las magnitudes de las reacciones de contacto y los desplazamientos verticales. Asimismo, se pudo comprobar numéricamente que el empleo de juntas mecánicas cambia el comportamiento de la estructura de cimentación de rígida a menos rígida. Se pudo constatar que las juntas de construcción con sus respectivos efectos mecánicos generaron cambios en la distribución de presiones de contacto en el sentido longitudinal de la cimentación, teniendo éstos una variación lineal entre juntas. Para simplificar dicha distribución, se uniformaron sus valores, mediante el método gráfico descrito en el cuerpo de este trabajo en el punto 5.1.1.4. Los valores promedio de las presiones de contacto se obtuvieron proyectando una línea del ancho medio de la dovela hasta intersectar a la gráfica, tales valores se consideraron uniformes en todo el ancho de sus respectivas dovelas y finalmente se representaron los valores de cambio y de corrección a las reacciones correspondientes a una cimentación rígida.

Con las reacciones finales queda demostrado que se puede reducir de manera significativa los momentos flexionantes que se tomarán en cuenta para el diseño estructural de la losa de fondo del cajón, así como se ha comprobado que al cambiar el comportamiento de la cimentación se incrementan ligeramente los desplazamientos verticales totales, mismos que pueden ser ajustados modificando el tipo de junta y donde el ingeniero de cimentaciones deberá tener especial cuidado de no rebasar los valores límites establecidos en las normas de diseño para este tipo de cimentación y que en la literatura generalmente se les denomina cajones de una sola unidad, pudiendo ser la cimentación, totalmente compensada,



parcialmente compensada o sobre compensada. De manera paralela se debe garantizar que el sistema conformado por las secciones más pequeñas (pontones) no sufran giros que provoquen distorsiones angulares en la superestructura, causando daños estructurales, perjudicando su funcionamiento, el aspecto arquitectónico del edificio y daño a las colindancias.

Con fines ilustrativos se revisó una propuesta de un sistema de seis pontones, con el cual se buscó investigar si con la adición de un mayor número de juntas se lograba reducir en mayor magnitud los momentos flexionantes. Se concluyó que efectivamente se reducen de manera significativa los momentos flexionantes, sin embargo, ésto dependerá del número de juntas propuestas, de la selección del tipo y ubicación de éstas dentro de la estructura de cimentación, dado que en una de las propuestas la inclusión de juntas tuvo el efecto contrario, es decir, los momentos flexionantes resultaron mayores a los que se obtienen para una cimentación de comportamiento rígido. No obstante, ésto no significa que la propuesta debiera ser completamente desechada, ya que depende de otra variable como lo es el momento plástico resistente atribuido a un elemento de acero que da forma a la junta tipo IV.

Finalmente, al hacer uso de juntas como las aquí analizadas en proyectos reales, se debe garantizar un buen desempeño de la superestructura y de su cimentación, por los cambios de comportamiento que involucra la inclusión de este tipo de elementos.



---

## CAPÍTULO 7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [1]. [https://upcommons.upc.edu > bitstream > handle](https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle)
- [2]. Diseño y ejecución de juntas en pavimentos y soleras de hormigón, 201, Guía Técnica. Págs. 2-7.
- [3]. Normas y especificaciones para estudios, proyectos, construcción e instalaciones, 2015, Volumen 6, Tomo III. INIFED Infraestructura Educativa. Pág. 7.
- [4]. Instituto mexicano del cemento y del concreto A.C, 2002, Manual para supervisar obras de concreto, Pág. 93.
- [5]. Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, A.C. 2004, Reglamento para las Construcciones de Concreto Estructural ACI 318-02, Pág. 22.
- [6]. Zeevaert, L. (1983). “Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions”. De. Van Nostrand Reinhold Co. New York, 2nd edition. Págs. 150-171, 326-331, 632-639.
- [7]. Zeevaert, L. (1980). “Interacción Suelo-Estructura de Cimentación”. Ed. Limusa, México. Págs. 14-32.
- [8]. Kassimali, Aslam, (2015). “Análisis Estructural”. De Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., 5ta. Edición. Págs. 168-171.
- [9]. Torres P. Alexander, Apuntes del curso: “Diseño de elementos de concreto I”, (2008), Facultad de Ingeniería, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [10]. Torres P. Alexander, Apuntes del curso: “Diseño de elementos de acero”, (2009), Facultad de Ingeniería, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [11]. Instituto de Ingeniería, 1993 “Normas complementarias para diseño y construcción de cimentaciones, DDF. Series del Instituto de Ingeniería No. ES-6. UNAM, México.
- [12]. <http://es.onlimeschool.com/math/assistance/equation/gaus/>



---

## ANEXO A: PROGRAMA DE CÓMPUTO EN HOJA DE CÁLCULO (EXCEL).

El programa Cimentación con Pontones CCP programado en un documento de Excel, es una herramienta que permite al usuario rápidamente determinar las magnitudes de las reacciones de corrección al introducir juntas mecánicas en una cimentación tipo cajón y por ende las reacciones finales para la cimentación con pontones.

Las consideraciones teóricas y la metodología matemática para calcular los cambios en las reacciones (de una cimentación rígida) por la introducción de juntas mecánicas descritas en el capítulo 5 se han programado en un documento de Excel con una interfaz interactiva que permite al usuario desplazarse muy fácilmente a través de todas las ventanas de interés.

El documento de Excel contiene los conceptos matemáticos para calcular las fuerzas cortantes que se desarrollan por la introducción de las juntas mecánicas (en la ubicación de estas), la determinación de las reacciones de corrección mediante un método gráfico, las reacciones y presiones finales, la estimación de los desplazamientos verticales totales y diferenciales a partir de las reacciones y presiones finales, las distorsiones angulares entre dovelas, los elementos mecánicos de diseño finales (fuerzas cortantes y momentos flexionantes).

A continuación, se describe la interfaz interactiva del Programa CCP para mostrar al usuario su uso.

*Empezando.*

*Portada del programa CCP.*

Cuando el usuario abre el documento por primera vez, la siguiente ventana aparecerá en el área de trabajo de Excel:

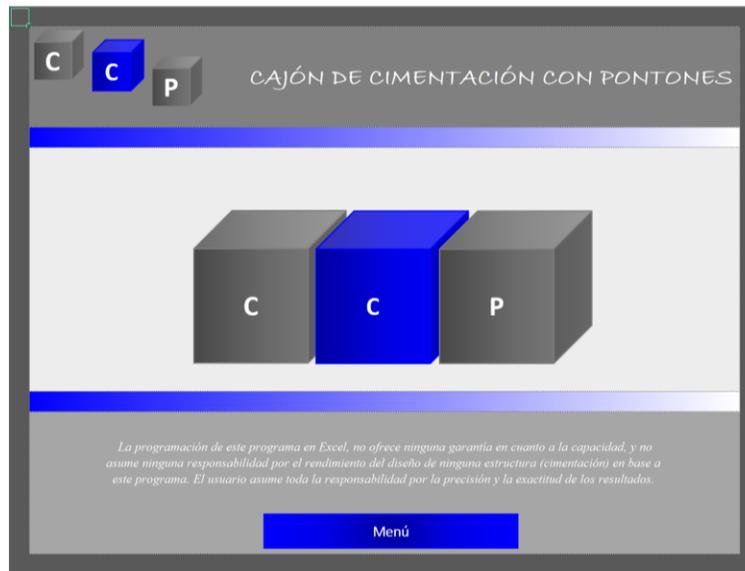


Figura 84. Portada de presentación del programa CCP. [Elaboración propia].

La figura 84 muestra la portada o inicio del programa CCP, es la primera ventana que el usuario observará. En la parte inferior central se ubica el botón **menú**, que con un clic, lo desplazará a la ventana **menú**.

*Menú.*

Al dar clic en el botón menú, nos conduce a una ventana con los siguientes 4 botones (Figura 85):

- Botón **Inicio** permite al usuario regresar a la portada o ventana de inicio del programa.
- Botón **Datos previos para el diseño**. Al dar clic se desplegará una ventana, donde el usuario deberá proveer los siguientes datos.
  - Magnitud de cargas puntuales, peso cimentación, etc.
  - Magnitud de las reacciones (Reacciones por dovela obtenidas de un análisis de interacción suelo-estructura para una cimentación rígida).
  - Dimensiones en planta de la cimentación (ancho y largo), longitud de claros y longitud de anchos de dovelas.
  - Coordenadas o puntos de análisis (centros geométricos).
  - Matriz de factores de influencias.
  - Reacciones por dovela (obtenidas de un análisis de interacción suelo-estructura para una cimentación rígida).

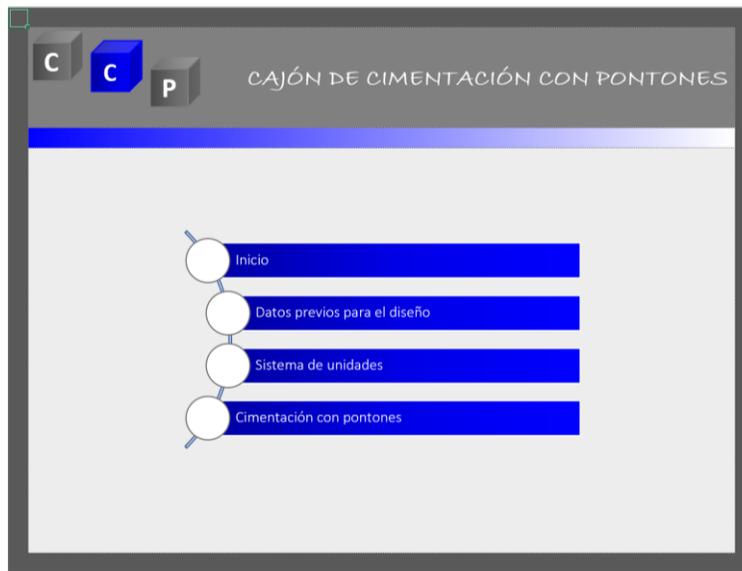


Figura 85. Ventana **Menú** del programa CCP. [Elaboración propia].

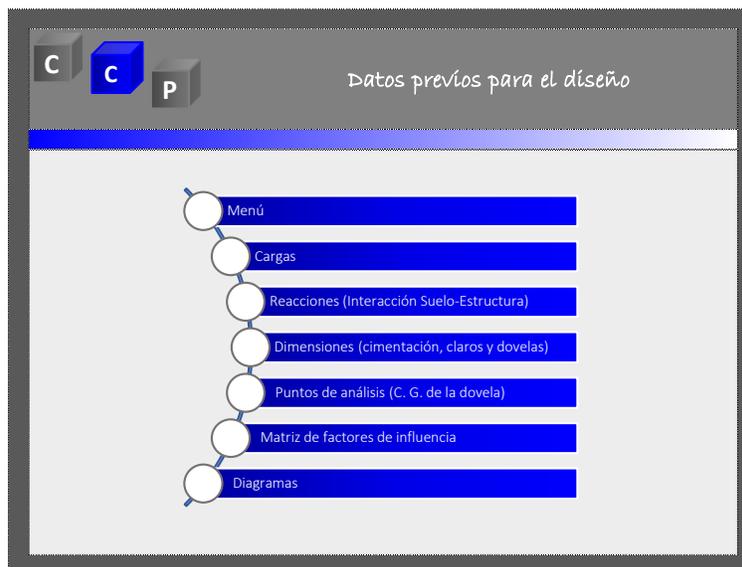


Figura 85.1. Ventana **Datos previos para el diseño**. [Elaboración propia].

De las figuras 85.1-a a la figura 76.1-i, se muestran las ventanas respectivas.

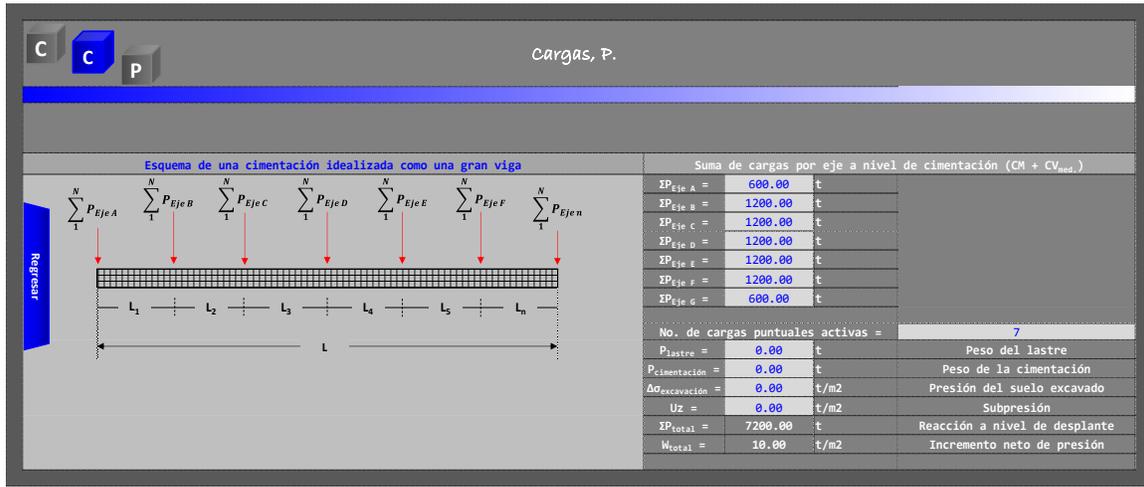


Figura 85.1-a. Ventana **Cargas P.** [Elaboración propia].



Figura 85.1-b. Ventana **Reacciones y esfuerzos por dovela  $Q_t$  y  $q$ .** [Elaboración propia].

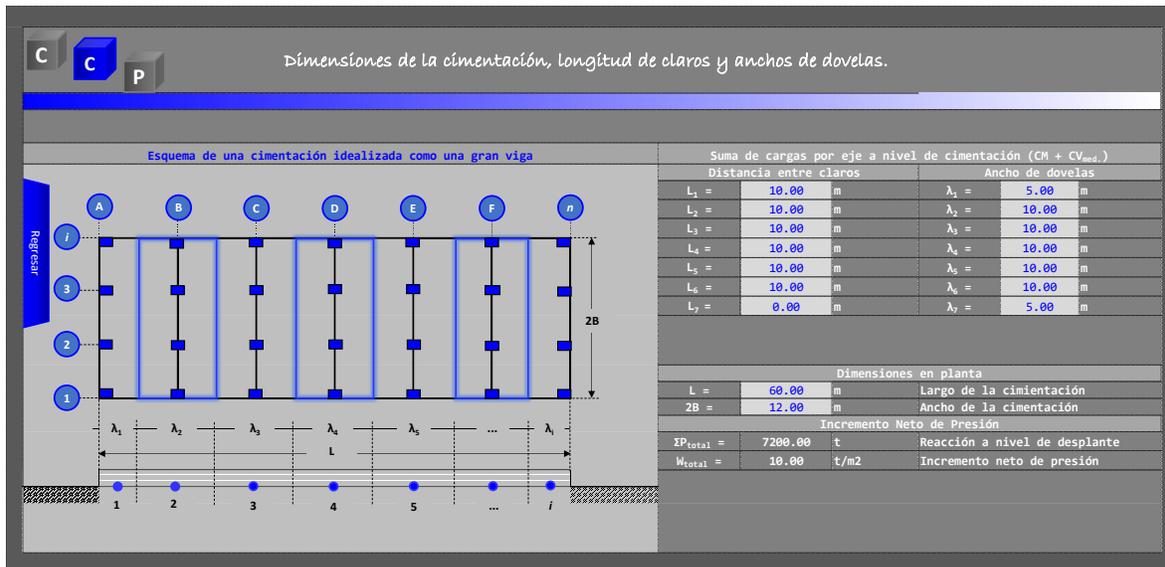


Figura 85.1-c. Ventana **Dimensiones de la cimentación, claros y dovelas.** [Elaboración propia].



Figura 85.1-d. Ventana **Puntos de análisis en cada dovela.** [Elaboración propia].



Figura 85.1-e. Ventana **Matriz de factores de influencia  $I_z$** . [Elaboración propia].



Figura 85.1-f. Ventana **Matriz de factores de influencia  $I_z$** . [Elaboración propia].

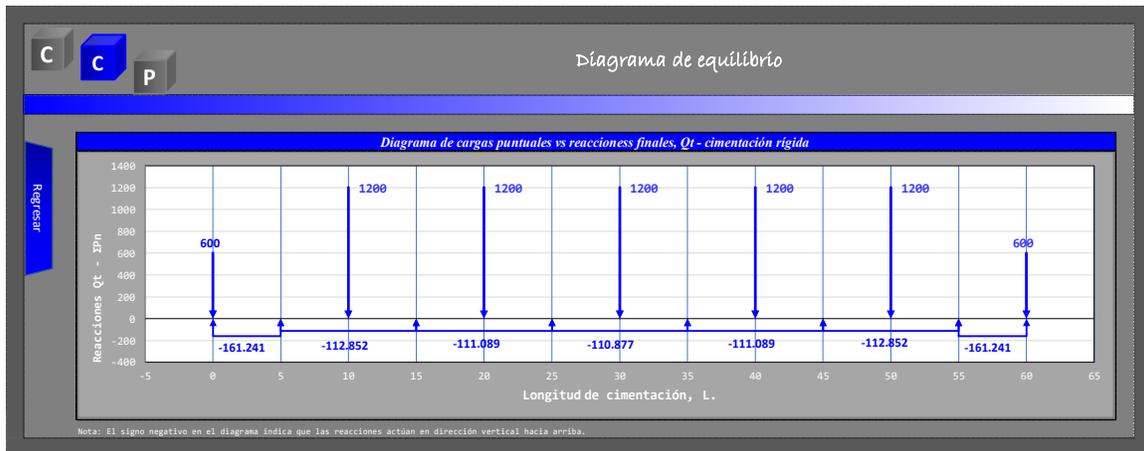


Figura 95.1-g. Ventana **Diagrama de equilibrio (Cimentación rígida)**. [Elaboración propia].

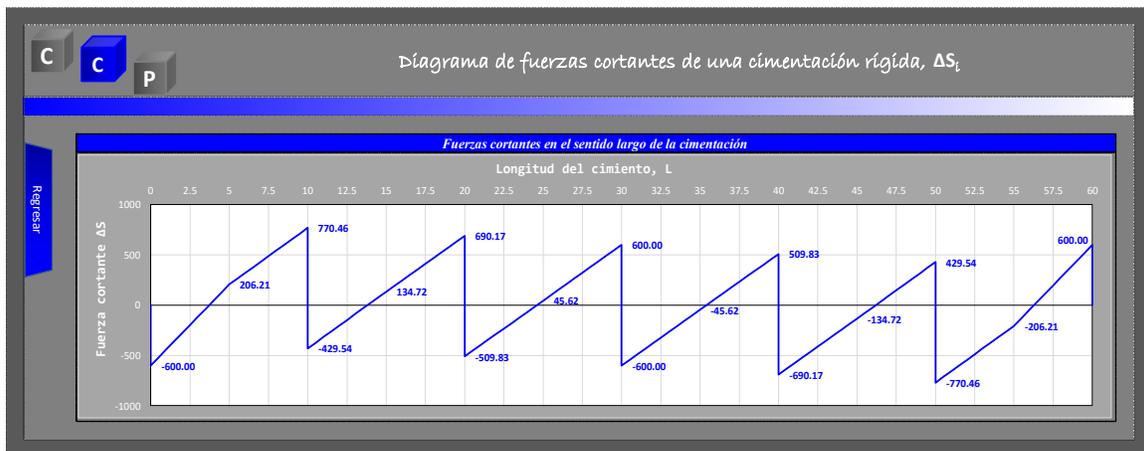


Figura 85.1-h. Ventana **Diagrama de fuerzas cortantes (Cimentación rígida)**. [Elaboración propia].

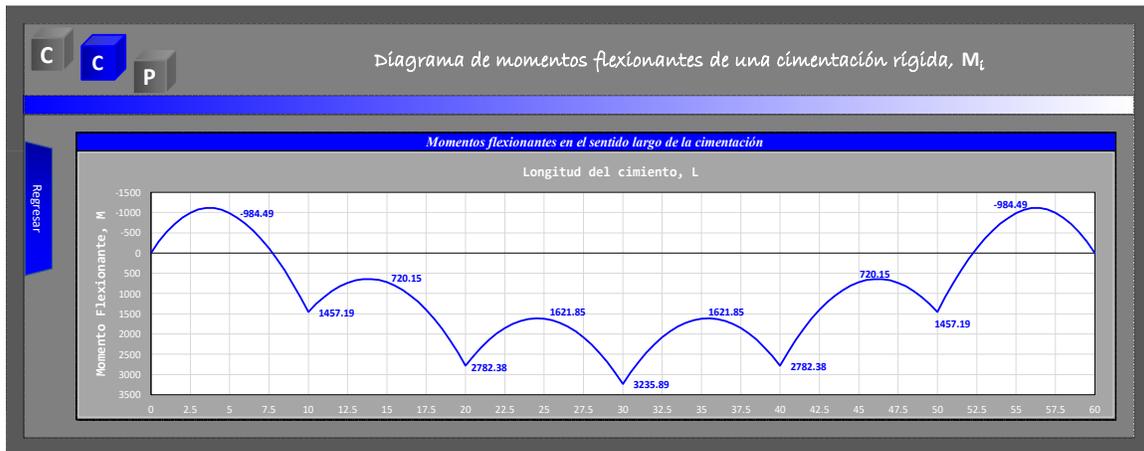


Figura 85.1-i. Ventana **Diagrama de momentos flexionantes (Cimentación rígida)**. [Elaboración propia].

- Botón **Sistema de Unidades** permite al usuario seleccionar el sistema de unidades a aplicar (Figura 86), además en la ventana se encuentra el botón **menú**, el cual permite regresar al menú principal. El programa permite aplicar los dos sistemas de unidades más usados en México y Latinoamérica, el Sistema Métrico Decimal y el Sistema Internacional de Unidades (SI). En la ventana Sistema de Unidades, en la parte superior derecha aparece una casilla con la leyenda “Sistemas de unidades a aplicar”; si desea aplicar el Sistema Métrico Decimal el usuario debe capturar el número 0 (cero) en la casilla o bien si desea aplicar el Sistema Internacional de Unidades, el usuario debe capturar el número 1 (uno) en la casilla.

Seleccionado el sistema de unidades a aplicar, automáticamente se asigna una unidad básica o unidad derivada según corresponda en su forma abreviada a cada concepto (carga puntual, módulo, distancia, etc.) en sus respectivas casillas. Las unidades seleccionadas se reflejarán en cada ventana y el programa trazará los datos en congruencia con las unidades.

Para el caso del número de cifras significativas, el usuario podrá auxiliarse con las herramientas de Excel y establecer el número de cifras de acuerdo con su preferencia.

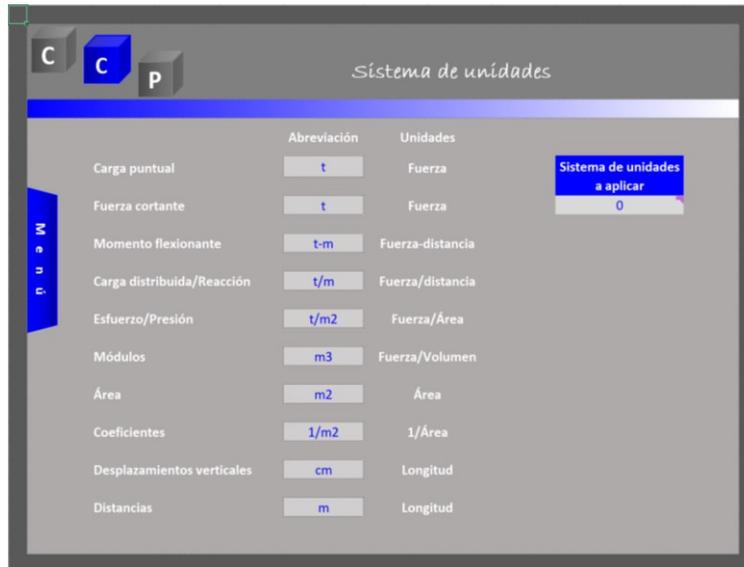


Figura 86. Ventana **Sistema de Unidades**. [Elaboración propia].

- Botón **Cimentación con pontones** permite al usuario navegar hacia la ventana donde podrá seleccionar el número de juntas y de pontones para su análisis. La ventana muestra cuatro opciones, de 2 a 5 juntas y de 3 a 5 pontones (Figura 87). Una vez seleccionado el número de juntas y número de pontones, al dar clic sobre el botón de su selección, navegará a una nueva ventana de opciones (Figura 79). Las cuales se describen a continuación:

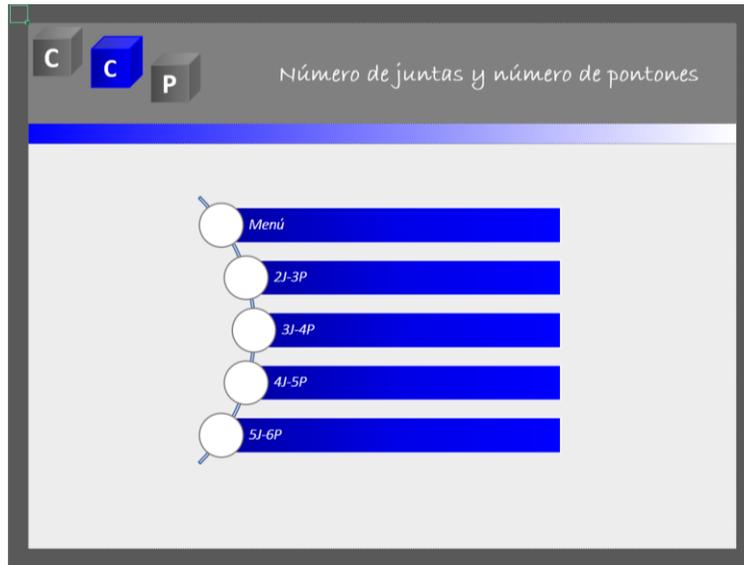


Figura 87. Ventana **Número de juntas y número de pontones**. [Elaboración propia].

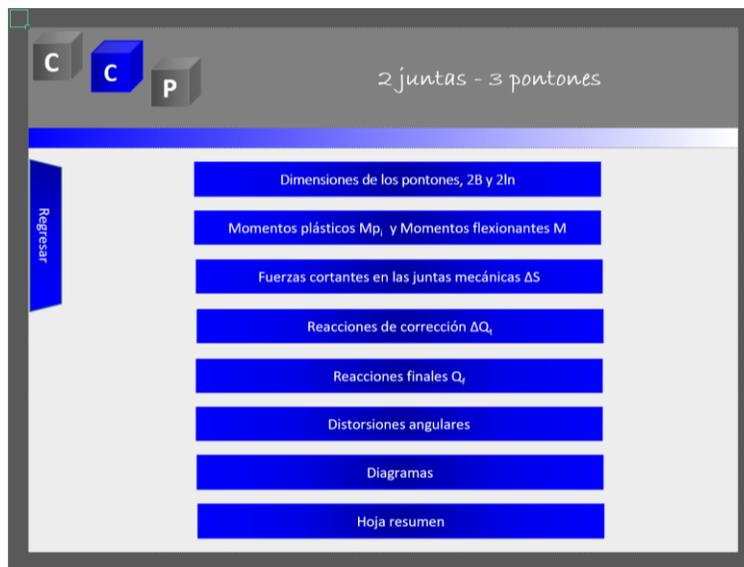


Figura 88. Ventana de **2 juntas – 3 pontones**. [Elaboración propia].

- Botón **Dimensiones de los pontones**. Al dar clic navegará hacia una ventana donde el usuario debe capturar las dimensiones en planta, ancho y largo de cada pontón (Figura 89).

Pontón 1		
2B =	12	m
2ln <sub>i-1</sub> =	20	m

Pontón 2		
2B =	12	m
2ln <sub>i</sub> =	20	m

Pontón 3		
2B =	12	m
2ln <sub>i+1</sub> =	20	m

Figura 89. Ventana Dimensiones. [Elaboración propia].

- Botón **Momentos plásticos  $M_p$  y Momentos flexionantes  $M$** . Al dar clic navegará hacia una ventana donde el usuario debe capturar las magnitudes de los momentos plásticos en caso de que su selección sea la junta tipo IV o bien capturar un valor cero, si la junta de su selección es del tipo III; además, el usuario debe capturar las magnitudes de los momentos flexionantes a ser reducidos de acuerdo a un diagrama previo de momentos flexionantes, construido a partir de las cargas y reacciones resultado de un análisis de interacción suelo-estructura para una cimentación rígida (Figura 90).



Figura 90. Ventana Momentos plásticos y momentos flexionantes. [Elaboración propia].

- Botón **Fuerzas cortantes en las juntas mecánicas  $\Delta S_i$** . Al dar clic, el usuario navegará a una ventana que le mostrará las magnitudes de las fuerzas cortantes ( $\Delta S_i$ ) desarrolladas por la introducción de las juntas mecánicas (Figura 91 y 91.1). Además, la ventana desplegada contiene el botón **Tabla de cálculos**, que al dar clic le mostrará al usuario una tabla de ecuaciones aplicadas y resultados originados por los datos previamente establecidos y capturados.

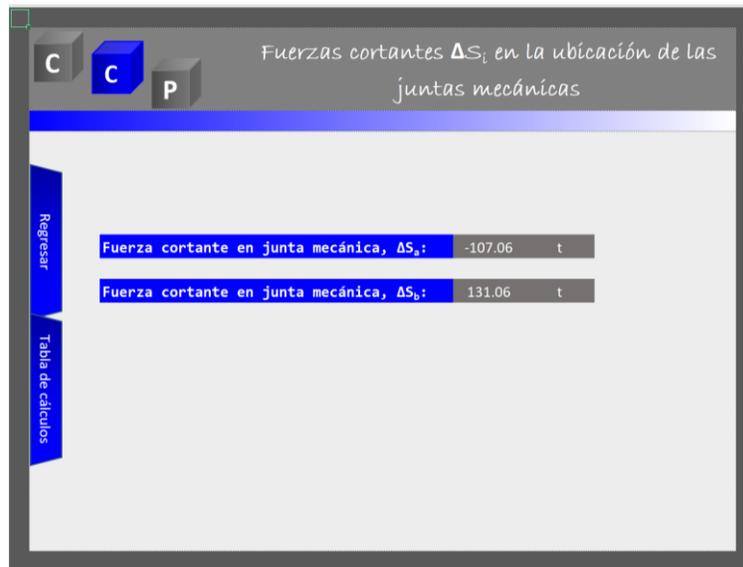


Figura 91. Ventana Fuerzas cortantes en la ubicación de las juntas mecánicas. [Elaboración propia].

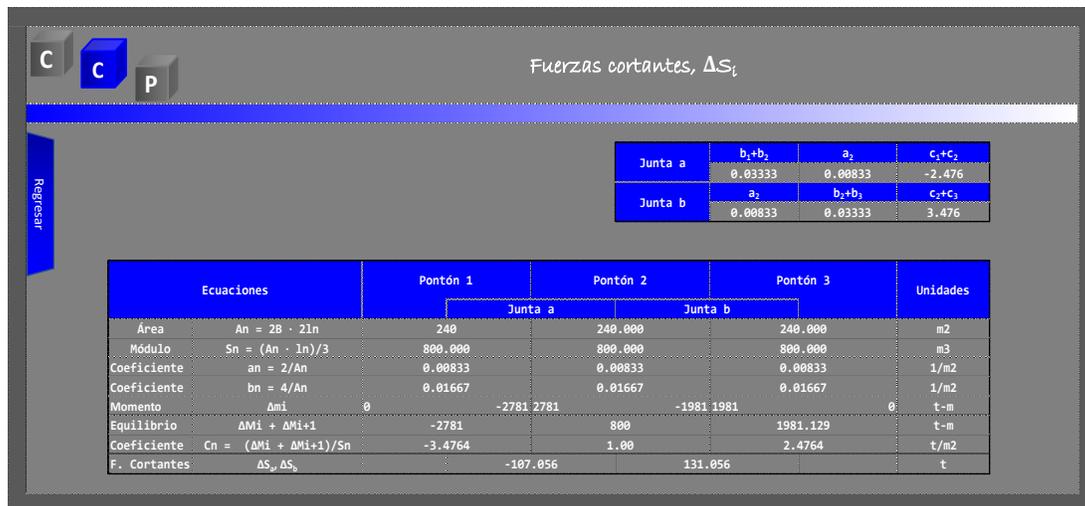


Figura 91.1. Ventana tabla de cálculos [Elaboración propia].

- Botón **Reacciones de corrección  $\Delta q_i$** . Al dar clic, el usuario navegará a una ventana que muestra una tabla y un diagrama (Figura 92 a 92.2). La tabla y el diagrama ayudarán al usuario a estimar mediante un método gráfico (manual y visual) las magnitudes de las reacciones de corrección, considerándose éstas



como uniformemente distribuidas. La tabla está habilitada y limitada para 7 casillas (una por dovela), donde el usuario al estimar mediante aproximación debe capturar el valor estimado. El método gráfico consiste en lo siguiente:

1. Ubicar la distancia media de cada dovela ( $\lambda_i$ ) propuesta.
2. A partir del eje horizontal en valor cero, proyectar imaginariamente una línea vertical hacia arriba o hacia abajo según convenga hasta intersectar la gráfica trazada en línea roja.
3. Capture el valor estimado en la tabla ubicada en la parte superior izquierda y en su respectiva casilla.
4. Si la gráfica se ubica por debajo o por arriba del eje horizontal en la ordenada 0 (cero), conviene acompañar el valor estimado con su respectivo signo ( $\pm$ ).
4. De manera análoga, aplique los pasos 1 a 4 para las  $n$  número de dovelas propuestas.

El diagrama genera por sí solo la gráfica de reacciones (con línea roja) en términos de las unidades derivadas  $[F, L^{-1}]$ , el cual representa las reacciones en los extremos de los pontones y que se unen de extremo a extremo mediante una línea, representando una variación lineal de magnitudes en todo lo largo de cada pontón. Además, una vez estimado y capturado la reacción de corrección, en el diagrama aparecerá de manera gráfica las magnitudes representadas como cargas uniformemente distribuidas en todo el ancho de la dovela.

La ventana contiene dos botones adicionales, **Ecuaciones** y **Diagrama Simple**. Al dar clic en el primer botón el usuario navegará a una ventana que muestra las ecuaciones aplicadas y los resultados obtenidos que dan forma al diagrama. El segundo botón permite al usuario navegar a una ventana que contiene un diagrama que se le ha denominado simple. Este diagrama solo muestra la gráfica construida a partir de las reacciones obtenidas en los extremos de los pontones. El objetivo de esta gráfica es que el usuario obtenga de igual manera las reacciones de corrección para  $n$  número de dovelas o franjas, con la única limitante de que las reacciones de corrección estimadas no se mostrarán de manera gráfica en el diagrama.

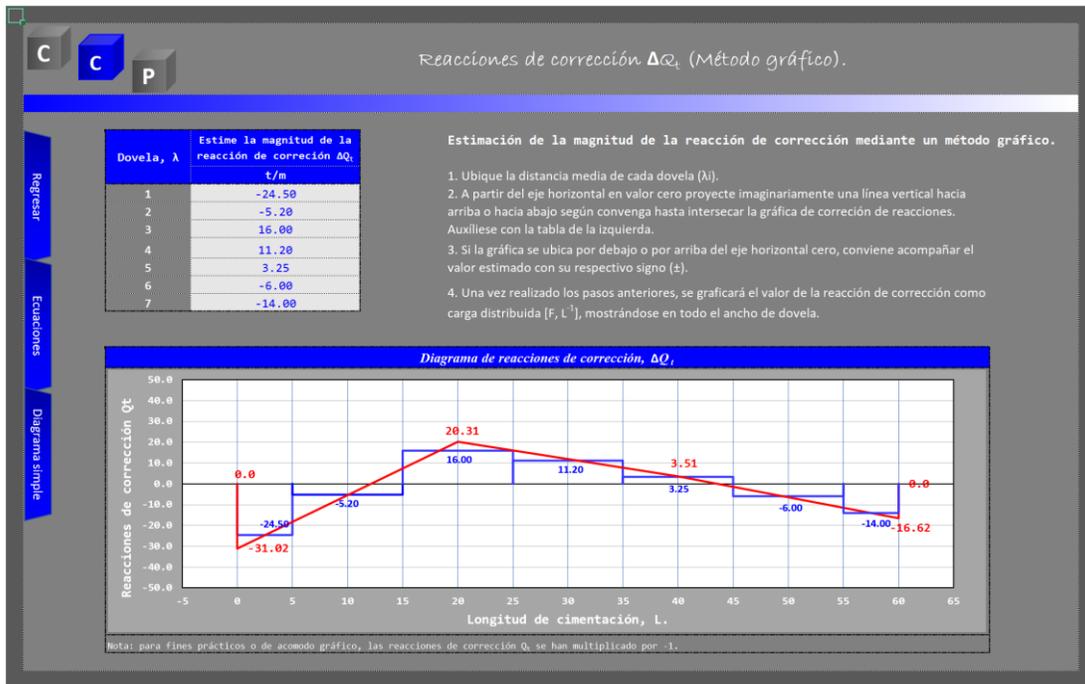


Figura 92. Ventana Reacciones de corrección  $\Delta Q_i$  por el método gráfico [Elaboración propia].

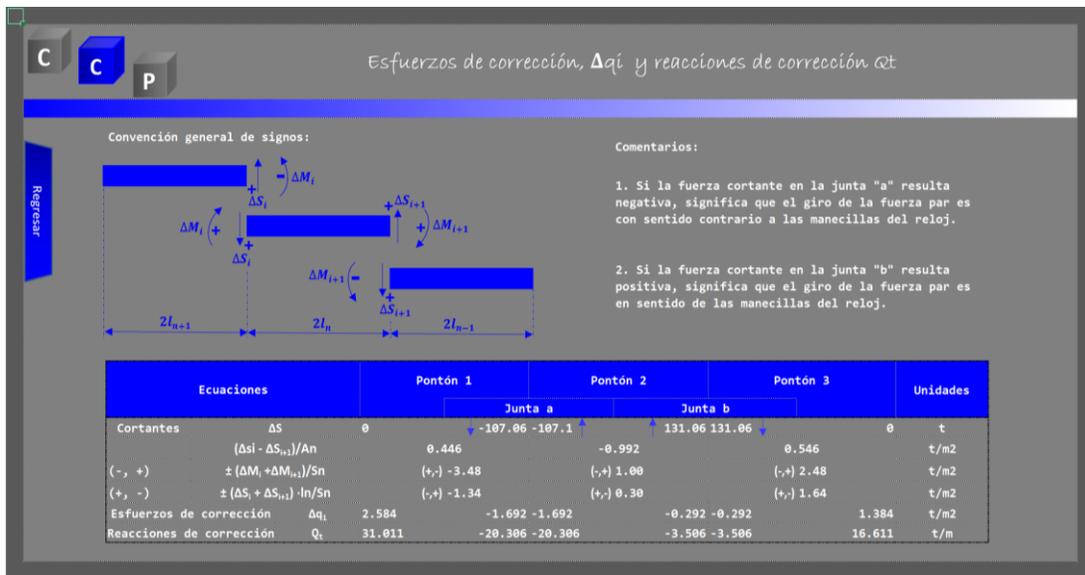


Figura 92.1. Ventana Esfuerzos y reacciones de corrección [Elaboración propia].

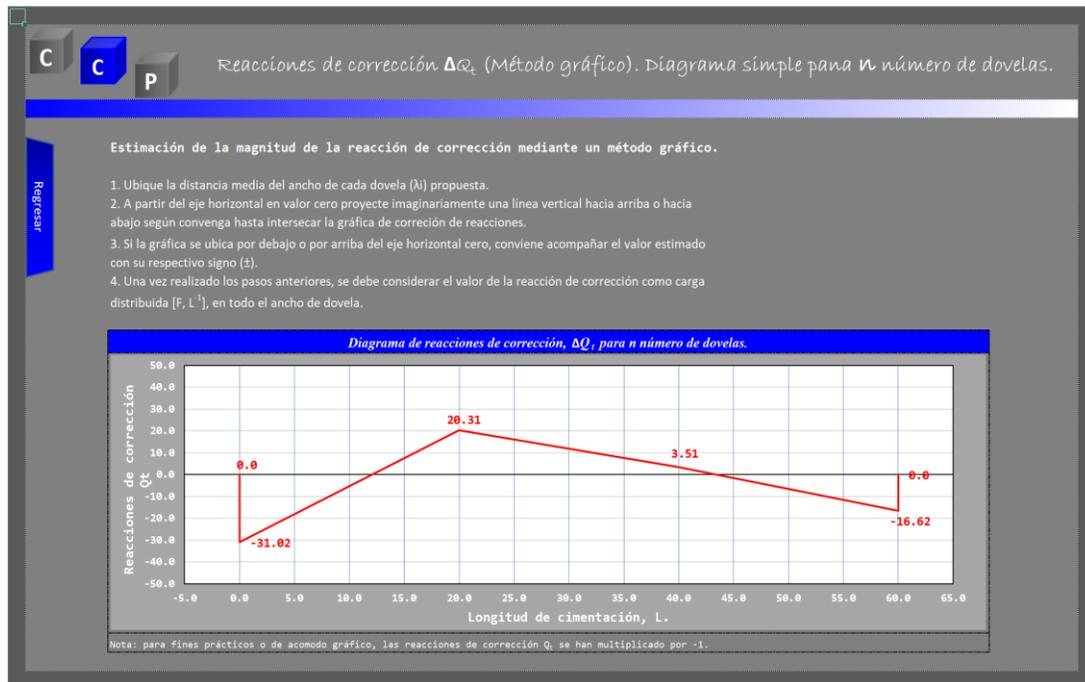


Figura 92.2. Ventana Diagrama simple para  $n$  número de dovelas [Elaboración propia].

- Botón **Reacciones finales  $Q_f$** . Al dar clic, el usuario navegará a una ventana que muestra una tabla de resultados (Figura 93). La tabla contiene un resumen de magnitudes de reacciones para una cimentación rígida, reacciones de corrección, reacciones finales y esfuerzos o presiones finales. La ventana contiene el botón **Regresar**, que al dar clic le permite navegar a la ventana anterior.

Reacciones y esfuerzos finales por dovela,  $Q_f$  y  $q$ .

Dovela	Reacciones cimentación rígida $Q_i$	Magnitud de las reacciones de corrección, $\Delta Q_i$	Reacciones finales corregidas cimentación con pontones $Q_{f_i}$	Esfuerzos finales cimentación con pontones, $q$
	t/m	t/m	t/m	t/m <sup>2</sup>
1	161.241	-24.500	136.741	11.395
2	112.852	-5.200	107.652	8.971
3	111.089	16.000	127.089	10.591
4	110.877	11.200	122.077	10.173
5	111.089	3.250	114.339	9.528
6	112.852	-6.000	106.852	8.904
7	161.241	-14.000	147.241	12.270

Figura 93. Ventana Reacciones y esfuerzos finales por dovelas [Elaboración propia].

- Botón **Distorsiones angulares**. Al dar clic, el usuario navegará a una ventana que muestra los desplazamientos verticales diferenciales así como los valores de distorsiones angulares entre dovelas (Figura 94). La ventana contiene el botón **Regresar**, que al dar clic le permite al usuario navegar a la ventana anterior.

Desplazamientos diferenciales y distorsiones angulares entre dovelas

Desplazamiento diferencial entre dovela 2 y 3	0.15906	cm
Desplazamiento diferencial entre dovela 3 y 4	0.35888	cm
Desplazamiento diferencial entre dovela 4 y 5	0.60674	cm
Desplazamiento diferencial entre dovela 5 y 6	0.82252	cm
Distorsión angular entre dovela 2 y 3	0.00016	
Distorsión angular entre dovela 3 y 4	0.00036	
Distorsión angular entre dovela 4 y 5	0.00061	
Distorsión angular entre dovela 5 y 6	0.00082	

Figura 94. Ventana Desplazamientos verticales diferenciales y distorsiones angulares entre dovelas [Elaboración propia].

- Botón **Diagramas**. Al dar clic, el usuario navegará a una ventana que muestra cuatro opciones de diagramas (Figura 95). Al dar clic en el primer botón, el usuario navegará a la ventana que le mostrará un diagrama de equilibrio, construido a partir de las cargas puntuales establecidas en datos previos para el diseño y de las reacciones finales para una cimentación con pontones (Figura 95.1). Al dar clic en el segundo botón, el usuario navegará a la ventana que le mostrará un diagrama de desplazamientos verticales totales correspondiente a la cimentación con pontones (Figura 95.2). Al dar clic en el tercer botón, el usuario navegará a la ventana que le mostrará un diagrama de fuerzas cortantes, construido a partir de las cargas puntuales establecidas en datos previos para el diseño y de las reacciones finales para una cimentación con pontones (Figura 95.3). Al dar clic en el cuarto botón, el usuario navegará a la ventana que le mostrará un diagrama de momentos flexionantes finales para la cimentación con pontones, construido a partir de las magnitudes de las cargas puntuales y de las reacciones finales (Figura 95.4) La ventana contiene el botón **Regresar**, que al dar clic le permite al usuario navegar a la ventana anterior.

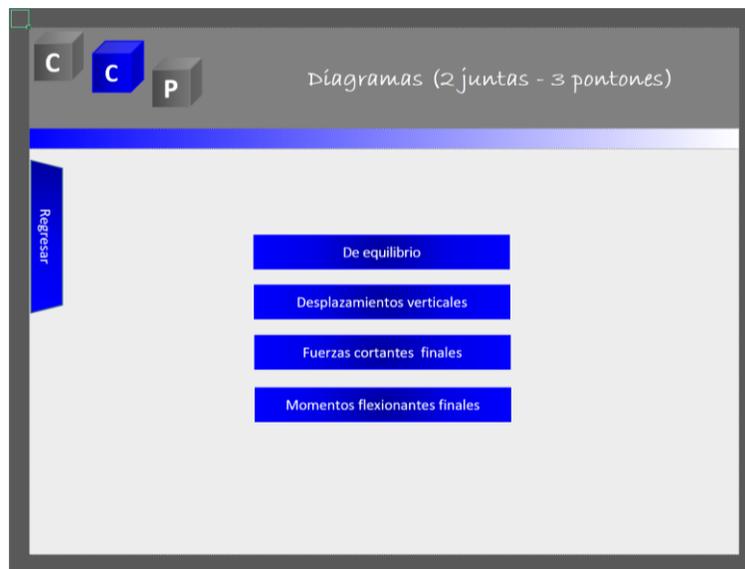


Figura 95. Ventana Diagramas [Elaboración propia]

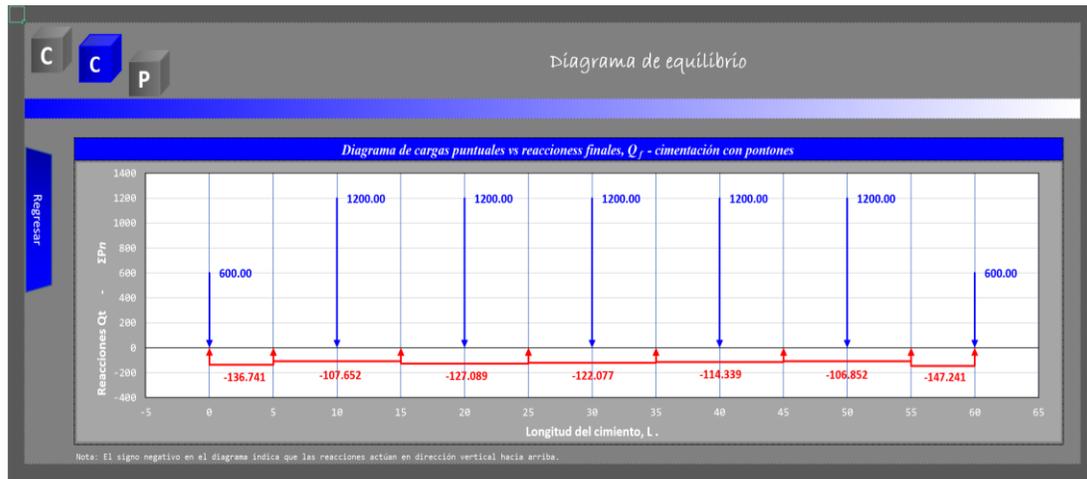


Figura 95.1. Ventana Diagrama de equilibrio [Elaboración propia].

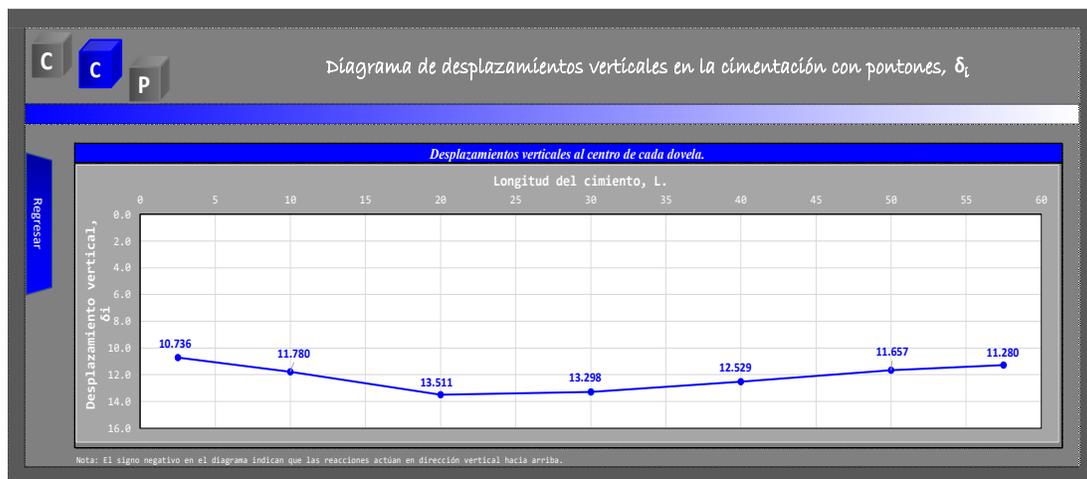


Figura 95.2. Ventana Diagrama de desplazamientos verticales [Elaboración propia].

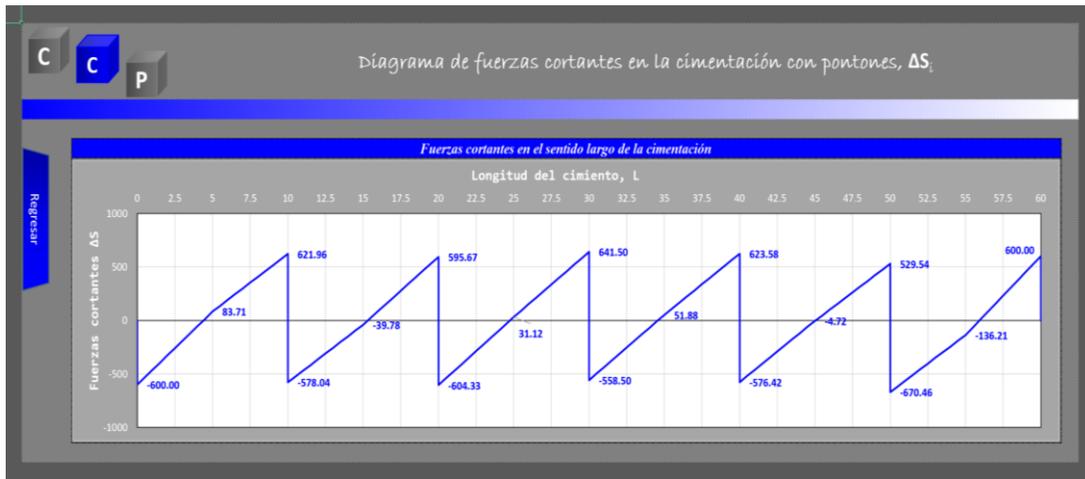


Figura 95.3. Ventana Diagrama de fuerzas cortantes [Elaboración propia].

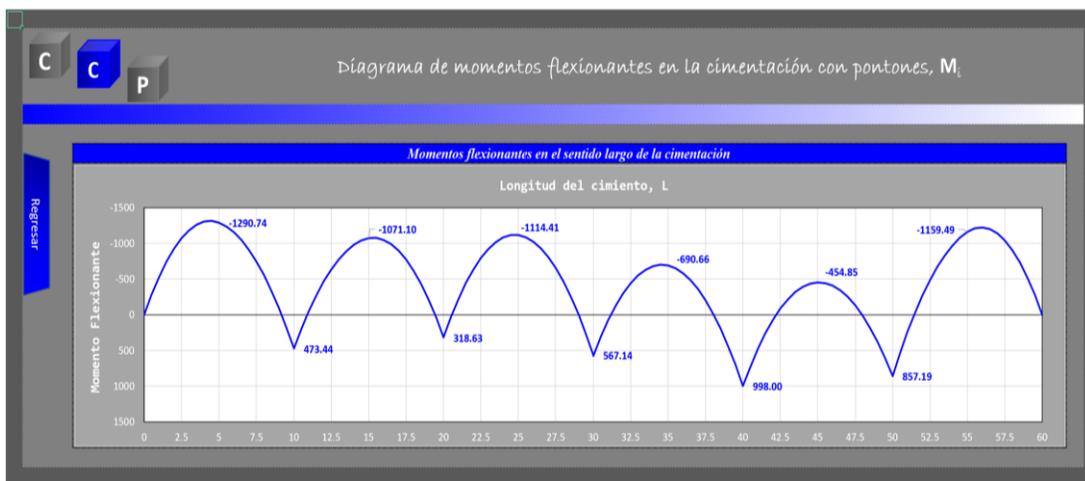


Figura 95.4. Ventana Diagrama de momentos flexionantes [Elaboración propia].



Figura 96. Ventana Desplazamientos diferenciales y distorsiones angulares entre dovelas [Elaboración propia].

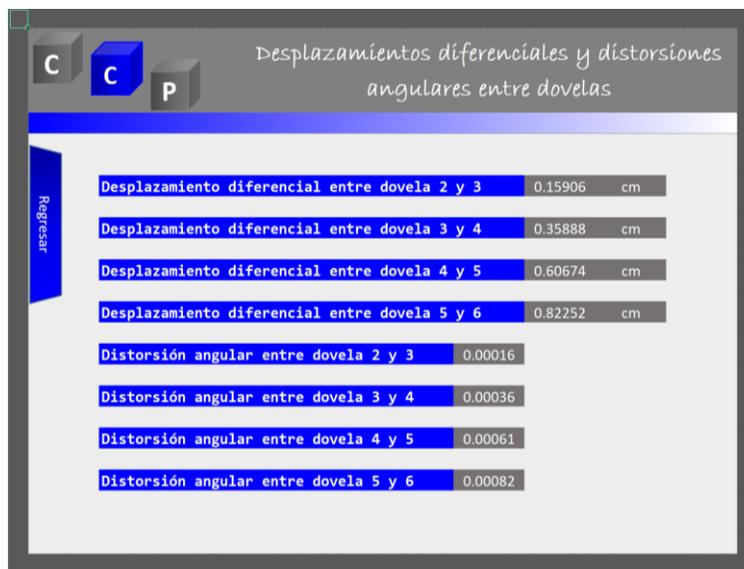


Figura 97. Ventana Desplazamientos diferenciales y distorsiones angulares entre dovelas [Elaboración propia].



*Alcances del programa.*

1. Diseño para una cimentación con pontones que considere de 3 a 6 pontones y de 2 a 5 juntas mecánicas.
2. Con el diagrama simple de reacciones de corrección se puede estimar de manera aproximada la magnitud de cambio de las reacciones de corrección para  $n$  número de dovelas o franjas.

*Limitaciones.*

En general la hoja de cálculo está programada tomando en cuenta las siguientes limitaciones:

1. No tiene conversión de unidades, por lo que, el usuario deberá capturar las magnitudes físicas de acuerdo con el sistema de unidades seleccionado (Sistema Métrico Decimal o el Sistema Internacional de Unidades).
2. 7 cargas puntuales.
3. 7 dovelas o franjas.
4. Reacciones finales (de una cimentación rígida) distribuidas en el ancho de 7 dovelas o franjas.
5. Aplicación de la ecuación matricial de asentamientos construida a partir de 7 dovelas y 7 estratos.
6. Se debe capturar los elementos de la ecuación matricial de asentamientos en celdas o casillas.
7. Desplazamientos verticales considerando solo 7 dovelas o franjas.
8. Desplazamientos diferenciales y distorsiones angulares considerando 7 dovelas o franjas.
9. Diagrama de equilibrio considerando solo 7 cargas puntuales y las reacciones finales distribuidas en 7 dovelas o franjas.
10. Diagrama de desplazamientos verticales totales considerando 7 dovelas o franjas.
11. Diagrama de fuerzas cortantes considerando 7 cargas puntuales y distribución de reacciones en 7 dovelas o franjas.
12. Diagrama de momentos flexionantes considerando 7 cargas puntuales y distribución de reacciones en 7 dovelas o franjas.
13. Diseño para cimentación con pontones de 3 a 6 pontones y de 2 a 5 juntas mecánicas.



---

*Notas adicionales.*

El programa CCP al ser programado en un documento de Excel, nos facilita aplicar sus herramientas, como por ejemplo: desplazarnos por el área de trabajo, guardar cambios o archivos, ajustar o modificar los diagramas en valores de los ejes, colores y espesores para líneas, modificar escalas, etc.

*Aclaraciones.*

La programación de este programa en Excel no ofrece ninguna garantía en cuanto a la capacidad, y no asume ninguna responsabilidad por el rendimiento del diseño de ninguna estructura (cimentación) en base a este programa. El usuario asume toda la responsabilidad por la precisión, la exactitud y comprensión de los resultados.



**APÉNDICE B: MATRICES DE INFLUENCIAS.**

**Matriz de influencia debido a un esfuerzo unitario  $\bar{q}$  en la Dovela 2**

$$I_{ji}^N = \begin{bmatrix} 0.0264453 & \mathbf{0.9872793} & 0.0036029 & 0.0000646 & 0.0000076 & 0.0000017 & 0.0000007 \\ 0.1600900 & \mathbf{0.8048011} & 0.0489038 & 0.0015428 & 0.0001947 & 0.0000453 & 0.0000190 \\ 0.1965918 & \mathbf{0.5581492} & 0.0932397 & 0.0056998 & 0.0008189 & 0.0001990 & 0.0000849 \\ 0.1818409 & \mathbf{0.3788935} & 0.1086254 & 0.0115951 & 0.0019598 & 0.0005056 & 0.0002207 \\ 0.1546403 & \mathbf{0.2648246} & 0.1059591 & 0.0174631 & 0.0035121 & 0.0009733 & 0.0004369 \\ 0.1280781 & \mathbf{0.1923315} & 0.0959736 & 0.0220818 & 0.0052663 & 0.0015789 & 0.0007322 \\ 0.1055870 & \mathbf{0.1447557} & 0.0841754 & 0.0250531 & 0.0070021 & 0.0022782 & 0.0010945 \end{bmatrix}$$

**Matriz de influencia debido a un esfuerzo unitario  $\bar{q}$  en la Dovela 3**

$$I_{ji}^N = \begin{bmatrix} 0.0001339 & 0.0036029 & \mathbf{0.9872793} & 0.0036029 & 0.0000646 & 0.0000076 & 0.0000017 \\ 0.0030566 & 0.0489038 & \mathbf{0.8048011} & 0.0489038 & 0.0015428 & 0.0001947 & 0.0000453 \\ 0.0104943 & 0.0932397 & \mathbf{0.5581492} & 0.0932397 & 0.0056998 & 0.0008189 & 0.0001990 \\ 0.0196710 & 0.1086254 & \mathbf{0.3788935} & 0.1086254 & 0.0115951 & 0.0019598 & 0.0005056 \\ 0.0274157 & 0.1059591 & \mathbf{0.2648246} & 0.1059591 & 0.0174631 & 0.0035121 & 0.0009733 \\ 0.0323932 & 0.0959736 & \mathbf{0.1923315} & 0.0959736 & 0.0220818 & 0.0052663 & 0.0015789 \\ 0.0347102 & 0.0841754 & \mathbf{0.1447557} & 0.0841754 & 0.0250531 & 0.0070021 & 0.0022782 \end{bmatrix}$$

**Matriz de influencia debido a un esfuerzo unitario  $\bar{q}$  en la Dovela 4**

$$I_{ji}^N = \begin{bmatrix} 0.0000119 & 0.0000646 & 0.0036029 & \mathbf{0.9872793} & 0.0036029 & 0.0000646 & 0.0000119 \\ 0.0003032 & 0.0015428 & 0.0489038 & \mathbf{0.8048011} & 0.0489038 & 0.0015428 & 0.0003032 \\ 0.0012508 & 0.0056998 & 0.0932397 & \mathbf{0.5581492} & 0.0932397 & 0.0056998 & 0.0012508 \\ 0.0029174 & 0.0115951 & 0.1086254 & \mathbf{0.3788935} & 0.1086254 & 0.0115951 & 0.0029174 \\ 0.0050770 & 0.0174631 & 0.1059591 & \mathbf{0.2648246} & 0.1059591 & 0.0174631 & 0.0050770 \\ 0.0073819 & 0.0220818 & 0.0959736 & \mathbf{0.1923315} & 0.0959736 & 0.0220818 & 0.0073819 \\ 0.0095210 & 0.0250531 & 0.0841754 & \mathbf{0.1447557} & 0.0841754 & 0.0250531 & 0.0095210 \end{bmatrix}$$

**Matriz de influencia debido a un esfuerzo unitario  $\bar{q}$  en la Dovela 5**

$$I_{ji}^N = \begin{bmatrix} 0.0000024 & 0.0000076 & 0.0000646 & 0.0036029 & \mathbf{0.9872793} & 0.0036029 & 0.0001339 \\ 0.0000628 & 0.0001947 & 0.0015428 & 0.0489038 & \mathbf{0.8048011} & 0.0489038 & 0.0030566 \\ 0.0002737 & 0.0008189 & 0.0056998 & 0.0932397 & \mathbf{0.5581492} & 0.0932397 & 0.0104943 \\ 0.0006881 & 0.0019598 & 0.0115951 & 0.1086254 & \mathbf{0.3788935} & 0.1086254 & 0.0196710 \\ 0.0013073 & 0.0035121 & 0.0174631 & 0.1059591 & \mathbf{0.2648246} & 0.1059591 & 0.0274157 \\ 0.0020897 & 0.0052663 & 0.0220818 & 0.0959736 & \mathbf{0.1923315} & 0.0959736 & 0.0323932 \\ 0.0029680 & 0.0070021 & 0.0250531 & 0.0841754 & \mathbf{0.1447557} & 0.0841754 & 0.0347102 \end{bmatrix}$$



**Matriz de influencia debido a un esfuerzo unitario  $\bar{q}$  en la Dovela 6**

$$I_{ji}^N =$$

0.0000007	0.0000017	0.0000076	0.0000646	0.0036029	<b>0.9872793</b>	0.0264453
0.0000190	0.0000453	0.0001947	0.0015428	0.0489038	<b>0.8048011</b>	0.1600900
0.0000849	0.0001990	0.0008189	0.0056998	0.0932397	<b>0.5581492</b>	0.1965918
0.0002207	0.0005056	0.0019598	0.0115951	0.1086254	<b>0.3788935</b>	0.1818409
0.0004369	0.0009733	0.0035121	0.0174631	0.1059591	<b>0.2648246</b>	0.1546403
0.0007322	0.0015789	0.0052663	0.0220818	0.0959736	<b>0.1923315</b>	0.1280781
0.0010945	0.0022782	0.0070021	0.0250531	0.0841754	<b>0.1447557</b>	0.1055870

**Matriz de influencia debido a un esfuerzo unitario  $\bar{q}$  en la Dovela 7**

$$I_{ji}^N =$$

0.0000002	0.0000003	0.0000011	0.0000053	0.0000503	0.0033361	<b>0.9414453</b>
0.0000044	0.0000091	0.0000295	0.0001351	0.0011851	0.0433785	<b>0.5791357</b>
0.0000199	0.0000408	0.0001288	0.0005631	0.0042810	0.0769385	<b>0.3407827</b>
0.0000525	0.0001063	0.0003251	0.0013307	0.0084540	0.0826488	<b>0.2138749</b>
0.0001059	0.0002109	0.0006208	0.0023482	0.0123122	0.0747831	<b>0.1434538</b>
0.0001814	0.0003543	0.0009978	0.0034609	0.0150410	0.0635857	<b>0.1017402</b>
0.0002781	0.0005310	0.0014251	0.0045188	0.0165063	0.0530047	<b>0.0754522</b>



**APÉNDICE C: APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN MATRICIAL DE  
ASENTAMIENTOS (E.M.A). CIMENTACIÓN TOTALMENTE FLEXIBLE.**

**Desplazamiento vertical debido a una carga unitaria  $\bar{q}$  en la Dovela 2**

$$[I_{ji}^N]^T \cdot [\alpha^N] = [\delta_{ji}]$$

$[I_{ji}^N]^T$							$[\alpha^N]$	$[\delta_{ji}]$
0.0264453	0.1600900	0.1965918	0.1818409	0.1546403	0.1280781	0.1055870	0.002857	0.002724
<b>0.9872793</b>	<b>0.8048011</b>	<b>0.5581492</b>	<b>0.3788935</b>	<b>0.2648246</b>	<b>0.1923315</b>	<b>0.1447557</b>	0.002857	0.009517
0.0036029	0.0489038	0.0932397	0.1086254	0.1059591	0.0959736	0.0841754	0.002857	0.001544
0.0000646	0.0015428	0.0056998	0.0115951	0.0174631	0.0220818	0.0250531	0.002857	0.000239
0.0000076	0.0001947	0.0008189	0.0019598	0.0035121	0.0052663	0.0070021	0.002857	0.000054
0.0000017	0.0000453	0.0001990	0.0005056	0.0009733	0.0015789	0.0022782	0.002857	0.000016
0.0000007	0.0000190	0.0000849	0.0002207	0.0004369	0.0007322	0.0010945	0.002857	0.000007

**Desplazamiento vertical debido a una carga unitaria  $\bar{q}$  en la Dovela 3**

$$[I_{ji}^N]^T \cdot [\alpha^N] = [\delta_{ji}]$$

$[I_{ji}^N]^T$							$[\alpha^N]$	$[\delta_{ji}]$
0.0001339	0.0030566	0.0104943	0.0196710	0.0274157	0.0323932	0.0347102	0.002857	0.000365
0.0036029	0.0489038	0.0932397	0.1086254	0.1059591	0.0959736	0.0841754	0.002857	0.001544
<b>0.9872793</b>	<b>0.8048011</b>	<b>0.5581492</b>	<b>0.3788935</b>	<b>0.2648246</b>	<b>0.1923315</b>	<b>0.1447557</b>	0.002857	0.009517
0.0036029	0.0489038	0.0932397	0.1086254	0.1059591	0.0959736	0.0841754	0.002857	0.001544
0.0000646	0.0015428	0.0056998	0.0115951	0.0174631	0.0220818	0.0250531	0.002857	0.000239
0.0000076	0.0001947	0.0008189	0.0019598	0.0035121	0.0052663	0.0070021	0.002857	0.000054
0.0000017	0.0000453	0.0001990	0.0005056	0.0009733	0.0015789	0.0022782	0.002857	0.000016

**Desplazamiento vertical debido a una carga unitaria  $\bar{q}$  en la Dovela 4**

$$[I_{ji}^N]^T \cdot [\alpha^N] = [\delta_{ji}]$$

$[I_{ji}^N]^T$							$[\alpha^N]$	$[\delta_{ji}]$
0.0000119	0.0003032	0.0012508	0.0029174	0.0050770	0.0073819	0.0095210	0.002857	0.000076
0.0000646	0.0015428	0.0056998	0.0115951	0.0174631	0.0220818	0.0250531	0.002857	0.000239
0.0036029	0.0489038	0.0932397	0.1086254	0.1059591	0.0959736	0.0841754	0.002857	0.001544
<b>0.9872793</b>	<b>0.8048011</b>	<b>0.5581492</b>	<b>0.3788935</b>	<b>0.2648246</b>	<b>0.1923315</b>	<b>0.1447557</b>	0.002857	0.009517
0.0036029	0.0489038	0.0932397	0.1086254	0.1059591	0.0959736	0.0841754	0.002857	0.001544
0.0000646	0.0015428	0.0056998	0.0115951	0.0174631	0.0220818	0.0250531	0.002857	0.000239
0.0000119	0.0003032	0.0012508	0.0029174	0.0050770	0.0073819	0.0095210	0.002857	0.000076



**Desplazamiento vertical debido a una carga unitaria  $\bar{q}$  en la Dovela 5**

$$[I_{ji}^N]^T \cdot [\alpha^N] = [\delta_{ji}]$$

$[I_{ji}^N]^T$							$[\alpha^N]$	$[\delta_{ji}]$
0.0000024	0.0000628	0.0002737	0.0006881	0.0013073	0.0020897	0.0029680	0.002857	0.000021
0.0000076	0.0001947	0.0008189	0.0019598	0.0035121	0.0052663	0.0070021	0.002857	0.000054
0.0000646	0.0015428	0.0056998	0.0115951	0.0174631	0.0220818	0.0250531	0.002857	0.000239
0.0036029	0.0489038	0.0932397	0.1086254	0.1059591	0.0959736	0.0841754	0.002857	0.001544
<b>0.9872793</b>	<b>0.8048011</b>	<b>0.5581492</b>	<b>0.3788935</b>	<b>0.2648246</b>	<b>0.1923315</b>	<b>0.1447557</b>	0.002857	0.009517
0.0036029	0.0489038	0.0932397	0.1086254	0.1059591	0.0959736	0.0841754	0.002857	0.001544
0.0001339	0.0030566	0.0104943	0.0196710	0.0274157	0.0323932	0.0347102	0.002857	0.000365

**Desplazamiento vertical debido a una carga unitaria  $\bar{q}$  en la Dovela 6**

$$[I_{ji}^N]^T \cdot [\alpha^N] = [\delta_{ji}]$$

$[I_{ji}^N]^T$							$[\alpha^N]$	$[\delta_{ji}]$
0.0000007	0.0000190	0.0000849	0.0002207	0.0004369	0.0007322	0.0010945	0.002857	0.000007
0.0000017	0.0000453	0.0001990	0.0005056	0.0009733	0.0015789	0.0022782	0.002857	0.000016
0.0000076	0.0001947	0.0008189	0.0019598	0.0035121	0.0052663	0.0070021	0.002857	0.000054
0.0000646	0.0015428	0.0056998	0.0115951	0.0174631	0.0220818	0.0250531	0.002857	0.000239
0.0036029	0.0489038	0.0932397	0.1086254	0.1059591	0.0959736	0.0841754	0.002857	0.001544
<b>0.9872793</b>	<b>0.8048011</b>	<b>0.5581492</b>	<b>0.3788935</b>	<b>0.2648246</b>	<b>0.1923315</b>	<b>0.1447557</b>	0.002857	0.009517
0.0264453	0.1600900	0.1965918	0.1818409	0.1546403	0.1280781	0.1055870	0.002857	0.002724

**Desplazamiento vertical debido a una carga unitaria  $\bar{q}$  en la Dovela 7**

$$[I_{ji}^N]^T \cdot [\alpha^N] = [\delta_{ji}]$$

$[I_{ji}^N]^T$							$[\alpha^N]$	$[\delta_{ji}]$
0.0000002	0.0000044	0.0000199	0.0000525	0.0001059	0.0001814	0.0002781	0.002857	0.000002
0.0000003	0.0000091	0.0000408	0.0001063	0.0002109	0.0003543	0.0005310	0.002857	0.000004
0.0000011	0.0000295	0.0001288	0.0003251	0.0006208	0.0009978	0.0014251	0.002857	0.000010
0.0000053	0.0001351	0.0005631	0.0013307	0.0023482	0.0034609	0.0045188	0.002857	0.000035
0.0000503	0.0011851	0.0042810	0.0084540	0.0123122	0.0150410	0.0165063	0.002857	0.000165
0.0033361	0.0433785	0.0769385	0.0826488	0.0747831	0.0635857	0.0530047	0.002857	0.001136
<b>0.9414453</b>	<b>0.5791357</b>	<b>0.3407827</b>	<b>0.2138749</b>	<b>0.1434538</b>	<b>0.1017402</b>	<b>0.0754522</b>	0.002857	0.006845



**APÉNDICE D: TABLAS RESUMEN Y GRÁFICAS CORRESPONDIENTES  
AL EJERCICIO DEL CASO b).**

**b.1) Primera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.**

Junta a): Tipo IV, L=10 m,  $\Delta M_{p(a)}=800$  t-m.

Junta b): Tipo IV, L=20 m,  $\Delta M_{p(b)}=800$  t-m.

Junta c): Tipo III, L=30 m,  $\Delta M_{p(c)}=0$ .

Junta d): Tipo IV, L=40 m,  $\Delta M_{p(d)}=800$  t-m.

Junta e): Tipo IV, L=50 m,  $\Delta M_{p(e)}=800$  t-m.

Tabla 13. Coeficientes geométricos para la primera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.  
[Elaboración propia]

Coeficientes geométricos	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Pontón 4		Pontón 5		Pontón 6		Uds.
	Junta a		Junta b		Junta c		Junta d		Junta e				
An	120		120		120		120		120		120		m <sup>2</sup>
Sn	200		200		200		200		200		200		m <sup>3</sup>
an	0.0167		0.0167		0.0167		0.0167		0.0167		0.0167		1/m <sup>2</sup>
bn	0.0333		0.0333		0.0333		0.0333		0.0333		0.0333		1/m <sup>2</sup>
$\Delta M_i$	0	-657.19	657.19	-1982.38	1982.38	-3235.89	3235.89	-1982.38	1982.38	-657.19	657.19	0	t-m
$\Delta M_i + \Delta M_{i+1}$	-657.19		-1325.19		-1253.51		1253.51		1325.19		657.19		t-m
Cn	-3.29		-6.63		-6.27		6.27		6.63		3.29		t/m <sup>2</sup>

Sistema de ecuaciones lineales a resolver para hallar la magnitud de las fuerzas cortantes en cada junta de construcción propuesta:

$$0.0667\Delta S_{(a)} + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0 + 0 + 0 = -9.912 \quad \text{(I)}$$

$$0.0167\Delta S_{(a)} + 0.0667\Delta S_{(b)} + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0 + 0 = -12.893 \quad \text{(II)}$$

$$0 + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0.0667\Delta S_{(c)} + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0 = 0 \quad \text{(III)}$$

$$0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0.0667\Delta S_{(d)} + 0.0167\Delta S_{(e)} = +12.893 \quad \text{(IV)}$$

$$0 + 0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0.0667\Delta S_{(e)} = +9.912 \quad \text{(V)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con el método de eliminación de Gauss-Jordan, las fuerzas cortantes para cada junta son:

$$\Delta S_{(a)} = -107.016 t$$

$$\Delta S_{(b)} = -166.648 t$$

$$\Delta S_{(c)} = 0$$

$$\Delta S_{(d)} = +166.648t$$

$$\Delta S_{(e)} = +107.016 t$$

Tabla 14. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con la primera selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

Esfuerzos de corrección	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Pontón 4		Pontón 5		Pontón 6		Uds.
	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	
$\Delta S$	0	-107.02	-107.02	-166.65	-166.65	0.00	0.00	166.65	166.65	107.02	107.02	0	t
$(\Delta s_i - \Delta S_{i+1})/An$	0.892		0.497		-1.389		-1.389		0.497		0.892		t/m <sup>2</sup>
$\mp (\Delta M_i + \Delta M_{i+1})/Sn$	-3.29		-6.63		-6.27		6.27		6.63		3.29		t/m <sup>2</sup>
$\pm (\Delta S_i + \Delta S_{i+1}) \cdot ln/Sn$	-2.68		-6.84		-4.17		4.17		6.84		2.68		t/m <sup>2</sup>
$\Delta q_i$	1.502	0.281	0.281	0.713	0.713	-3.490	-3.490	0.713	0.713	0.281	0.281	1.502	t/m <sup>2</sup>

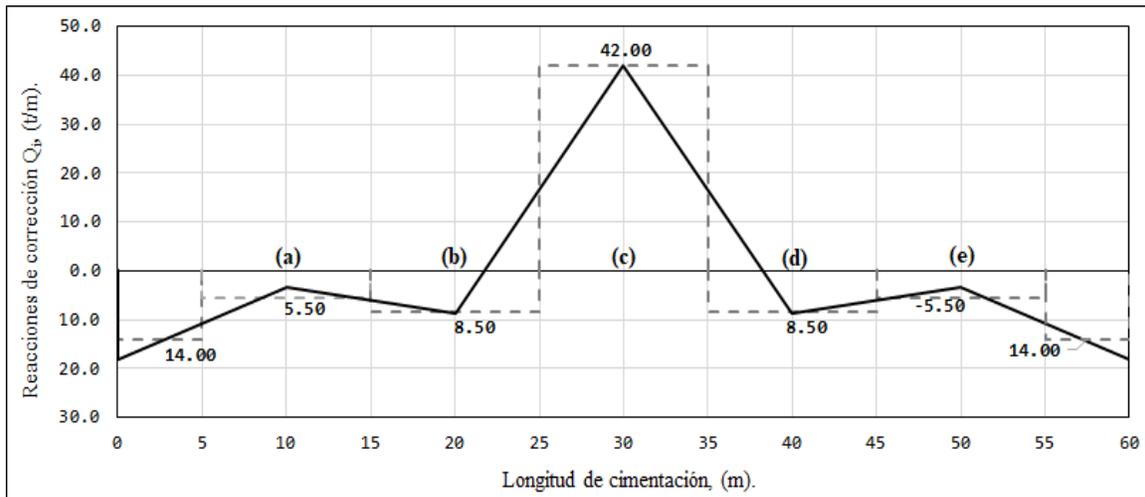


Figura 98. Reacciones de corrección por ancho de dovela con la primera selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

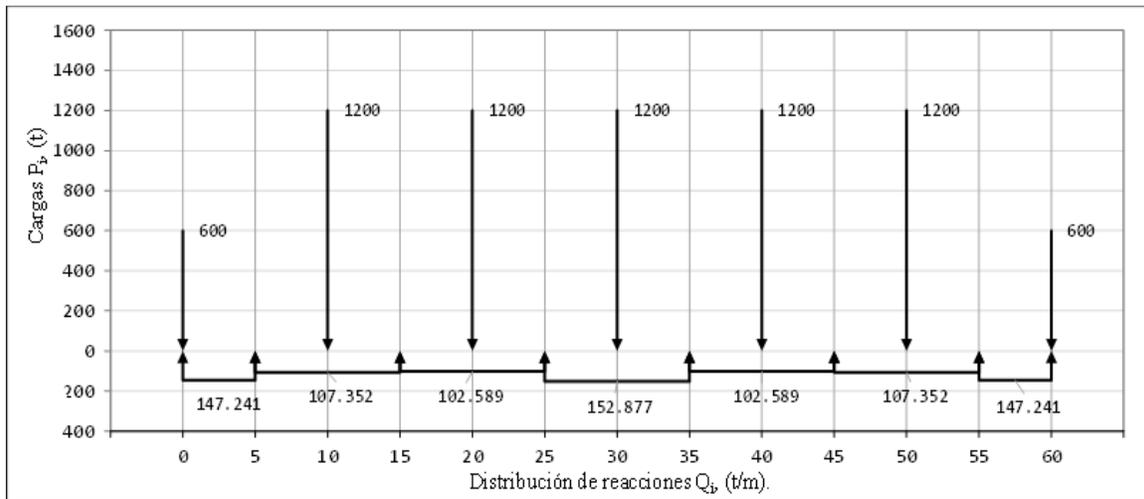


Figura 99. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela con la primera selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

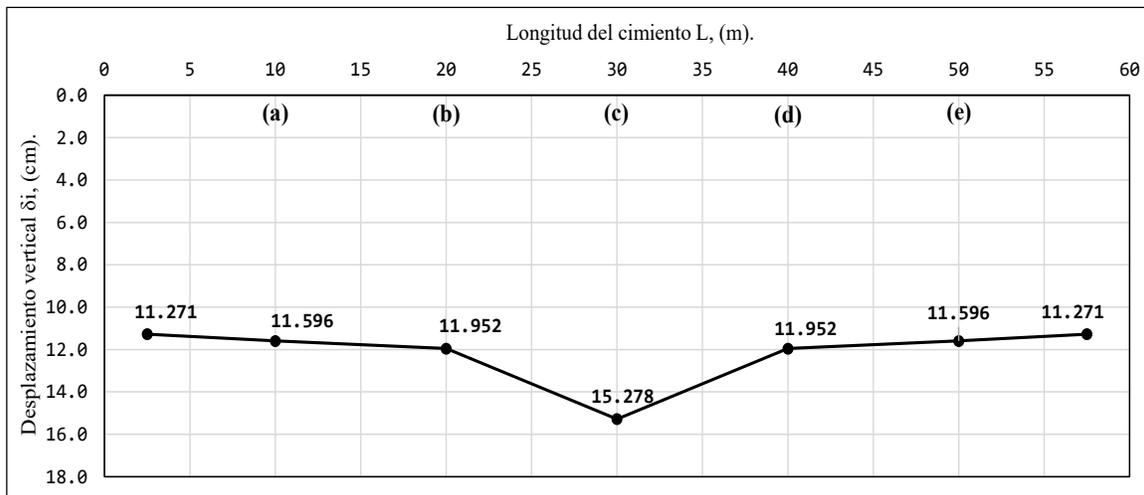


Figura 100. Desplazamientos verticales totales con la primera selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

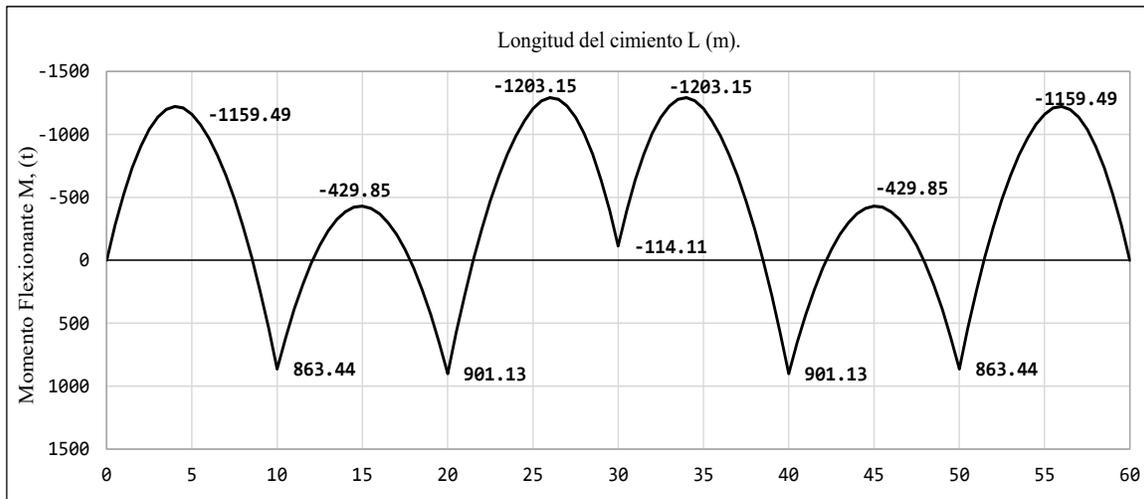


Figura 101. Diagrama de momentos flexionantes reducidos con la primera selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

**b.2) Segunda selección y ubicación de juntas tipo III y IV.**

Junta a): Tipo III, L=10 m,  $\Delta Mp_{(a)}=0$ .

Junta b): Tipo IV, L=20 m,  $\Delta Mp_{(b)}=800$  t-m.

Junta c): Tipo IV, L=30 m,  $\Delta Mp_{(c)}=800$  t-m.

Junta d): Tipo IV, L=40 m,  $\Delta Mp_{(d)}=800$  t-m.

Junta e): Tipo III, L=50 m,  $\Delta Mp_{(e)}=0$ .

Tabla 15. Coeficientes geométricos para la segunda selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

Coeficientes geométricos	Pontón 1	Pontón 2		Pontón 3		Pontón 4		Pontón 5		Pontón 6	Uds.		
		Junta a	Junta b	Junta c	Junta d	Junta e							
An	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	m <sup>2</sup>		
Sn	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	m <sup>3</sup>		
an	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	1/m <sup>2</sup>		
bn	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	1/m <sup>2</sup>		
$\Delta M_i$	0	-1457.19	1457.19	-1982.38	1982.38	-2435.89	2435.89	-1982.38	1982.38	-1457.19	1457.19	0	t-m
$\Delta M_i + \Delta M_{i+1}$		-1457.19	-525.19	-525.19	-453.51	-453.51	453.51	453.51	525.19	525.19	1457.19	1457.19	t-m
Cn	-7.29	-7.29	-2.63	-2.63	-2.27	-2.27	2.27	2.27	2.63	2.63	7.29	7.29	t/m <sup>2</sup>

Sistema de ecuaciones lineales a resolver para hallar la magnitud de las fuerzas cortantes en cada junta de construcción propuesta:



$$\begin{aligned}
 0.0667\Delta S_{(a)} + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0 + 0 + 0 &= -9.912 & \text{(I)} \\
 0.0167\Delta S_{(a)} + 0.0667\Delta S_{(b)} + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0 + 0 &= -4.893 & \text{(II)} \\
 0 + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0.0667\Delta S_{(c)} + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0 &= 0 & \text{(III)} \\
 0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0.0667\Delta S_{(d)} + 0.0167\Delta S_{(e)} &= +4.893 & \text{(IV)} \\
 0 + 0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0.0667\Delta S_{(e)} &= +9.912 & \text{(V)}
 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con el método de eliminación de Gauss-Jordan, las fuerzas cortantes para cada junta son:

$$\Delta S_{(a)} = -139.016 t$$

$$\Delta S_{(b)} = -38.648 t$$

$$\Delta S_{(c)} = 0$$

$$\Delta S_{(d)} = +38.648 t$$

$$\Delta S_{(e)} = +139.016 t$$

Tabla 16. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con la segunda selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

Esfuerzos de corrección	Pontón 1 ↓	↑ Pontón 2 ↑	↓ Pontón 3 ↑	↓ Pontón 4 ↑	↓ Pontón 5 ↑	↓ Pontón 6	Uds.						
	Junta a	Junta b	Junta c	Junta d	Junta e								
$\Delta S$	0	-139.02	-139.02	-38.65	-38.65	0.00	0.00	38.65	38.65	139.02	139.02	0	t
$(\Delta S_i - \Delta S_{i+1})/A_n$	1.158		-0.836		-0.322		-0.322		-0.836		1.158		t/m <sup>2</sup>
$\mp(\Delta M_i + \Delta M_{i+1})/S_n$	-7.29		-2.63		-2.27		2.27		2.63		7.29		t/m <sup>2</sup>
$\pm(\Delta S_i + \Delta S_{i+1}) \cdot l_n/S_n$	-3.48		-4.44		-0.97		0.97		4.44		3.48		t/m <sup>2</sup>
$\Delta q_i$	4.969	-2.652	-2.652	0.979	0.979	-1.623	-1.623	0.979	0.979	-2.652	-2.652	4.969	t/m <sup>2</sup>

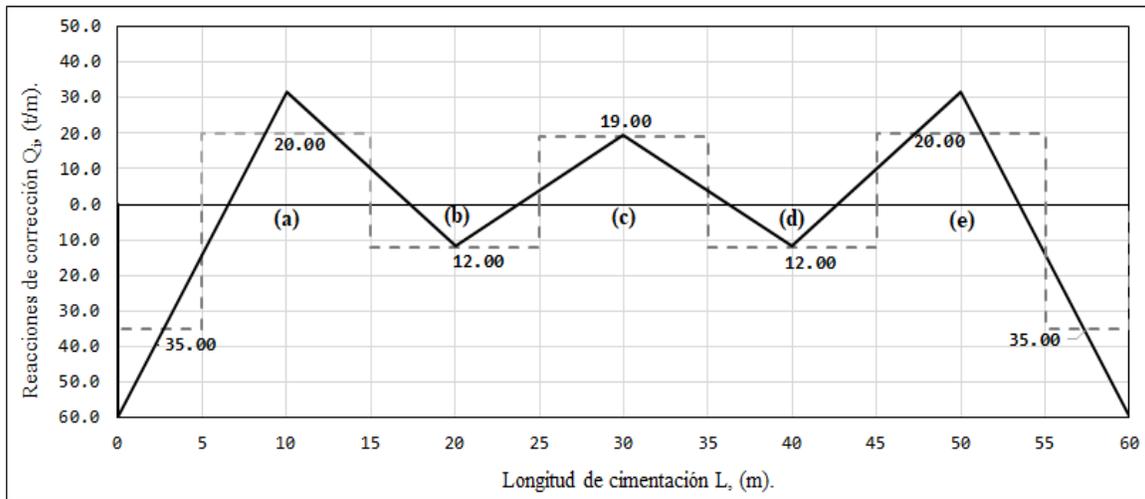


Figura 102. Reacciones de corrección por ancho de dovela con la segunda selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

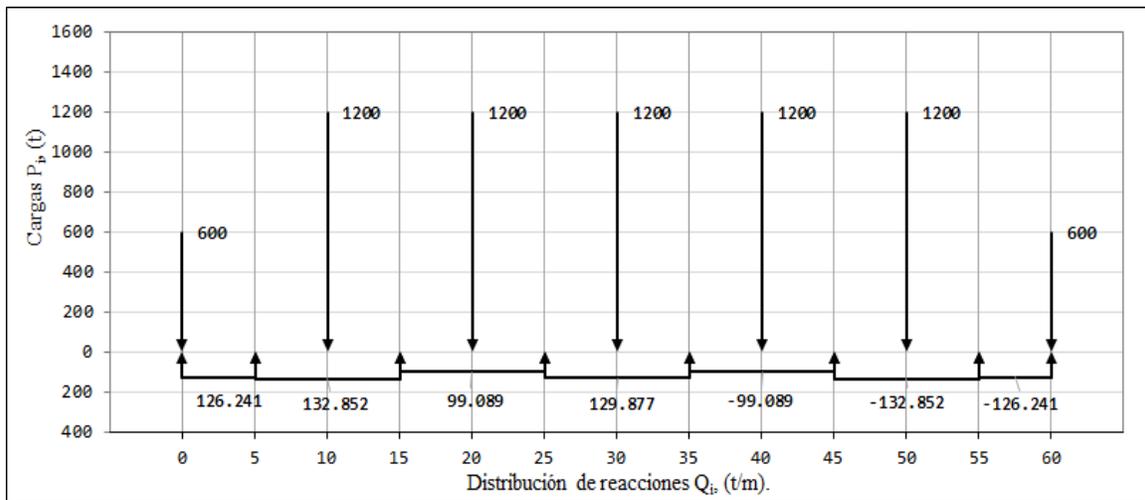


Figura 103. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela con la segunda selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

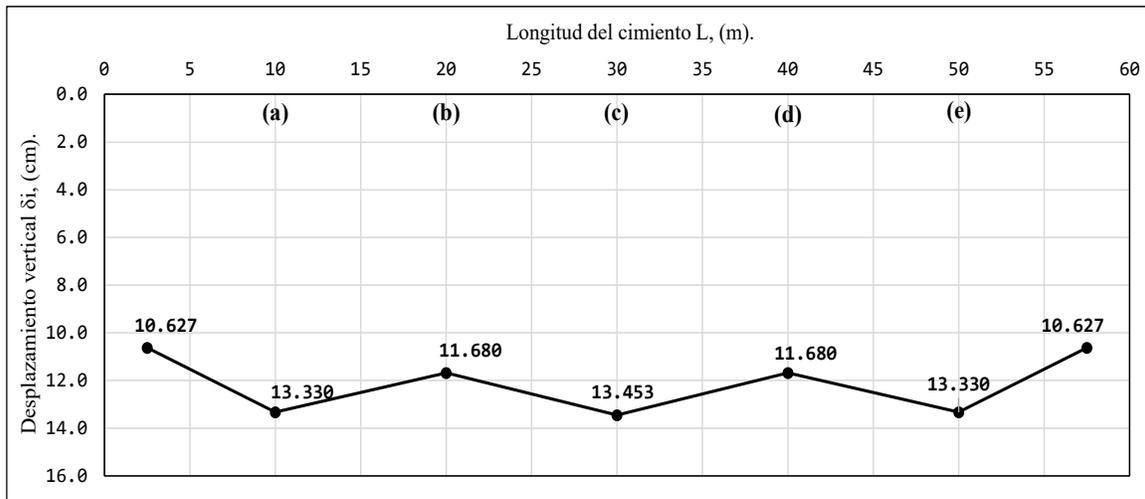


Figura 104. Desplazamientos verticales totales con la segunda selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

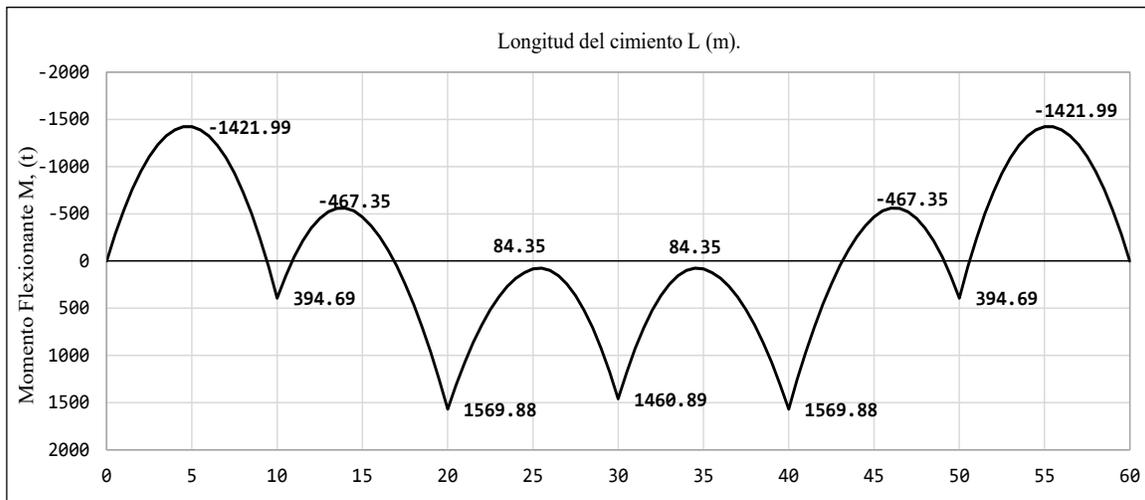


Figura 105. Diagrama de momentos flexionantes reducidos con la segunda selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]



**b.3) Tercer selección y ubicación de juntas tipo III y IV.**

Junta a): Tipo III, L=10 m,  $\Delta Mp_{(a)}=0$ .

Junta b): Tipo IV, L=20 m,  $\Delta Mp_{(b)}=800$  t-m.

Junta c): Tipo III, L=30 m,  $\Delta Mp_{(c)}=0$ .

Junta d): Tipo IV, L=40 m,  $\Delta Mp_{(d)}=800$  t-m.

Junta e): Tipo III, L=50 m,  $\Delta Mp_{(e)}=0$ .

Tabla 17. Coeficientes geométricos para la tercera selección y ubicación de juntas tipo III y IV.  
[Elaboración propia]

Coeficientes geométricos	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Pontón 4		Pontón 5		Pontón 6		Uds.
	Junta a		Junta b		Junta c		Junta d		Junta e				
An	120		120		120		120		120		120		m <sup>2</sup>
Sn	200		200		200		200		200		200		m <sup>3</sup>
an	0.0167		0.0167		0.0167		0.0167		0.0167		0.0167		1/m <sup>2</sup>
bn	0.0333		0.0333		0.0333		0.0333		0.0333		0.0333		1/m <sup>2</sup>
$\Delta M_i$	0	-1457.19	1457.19	-1982.38	1982.38	-3235.89	3235.89	-1982.38	1982.38	-1457.19	1457.19	0	t-m
$\Delta M_i + \Delta M_{i+1}$		-1457.19		-525.19		-1253.51		1253.51		525.19		1457.19	t-m
Cn		-7.29		-2.63		-6.27		6.27		2.63		7.29	t/m <sup>2</sup>

Sistema de ecuaciones lineales a resolver para hallar la magnitud de las fuerzas cortantes en cada junta de construcción propuesta:

$$0.0667\Delta S_{(a)} + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0 + 0 + 0 = -9.912 \quad \text{(I)}$$

$$0.0167\Delta S_{(a)} + 0.0667\Delta S_{(b)} + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0 + 0 = -8.893 \quad \text{(II)}$$

$$0 + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0.0667\Delta S_{(c)} + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0 = 0 \quad \text{(III)}$$

$$0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0.0667\Delta S_{(d)} + 0.0167\Delta S_{(e)} = +8.893 \quad \text{(IV)}$$

$$0 + 0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0.0667\Delta S_{(e)} = +9.912 \quad \text{(V)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con el método de eliminación de Gauss-Jordan, las fuerzas cortantes para cada junta son:

$$\Delta S_{(a)} = -123.016 t$$

$$\Delta S_{(b)} = -102.648 t$$

$$\Delta S_{(c)} = 0$$

$$\Delta S_{(d)} = +102.648 t$$

$$\Delta S_{(e)} = +123.016 t$$

Tabla 18. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con la tercera selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

Esfuerzos de corrección	Pontón 1 ↓ ↑		Pontón 2 ↑ ↓		Pontón 3 ↓ ↑		Pontón 4 ↑ ↓		Pontón 5 ↓ ↑		Pontón 6 ↑ ↓		Uds.
	Junta a	Junta b	Junta b	Junta c	Junta c	Junta d	Junta d	Junta e	Junta e	Junta e	Junta f	Junta f	
$\Delta S$	0	-123.02	-123.02	-102.65	-102.65	0.00	0.00	102.65	102.65	123.02	123.02	0	t
$(\Delta S_i - \Delta S_{i+1})/A_n$	1.025	-0.170	-0.170	-0.855	-0.855	0.00	0.00	0.855	0.855	-0.170	-0.170	1.025	t/m <sup>2</sup>
$\mp(\Delta M_i + \Delta M_{i+1})/S_n$	-7.29		-2.63		-6.27		6.27		2.63		7.29		t/m <sup>2</sup>
$\pm(\Delta S_i + \Delta S_{i+1}) \cdot l_n/S_n$	-3.08		-5.64		-2.57		2.57		5.64		3.08		t/m <sup>2</sup>
$\Delta q_i$	5.236	-3.185	-3.185	2.846	2.846	-4.557	-4.557	2.846	2.846	-3.185	-3.185	5.236	t/m <sup>2</sup>

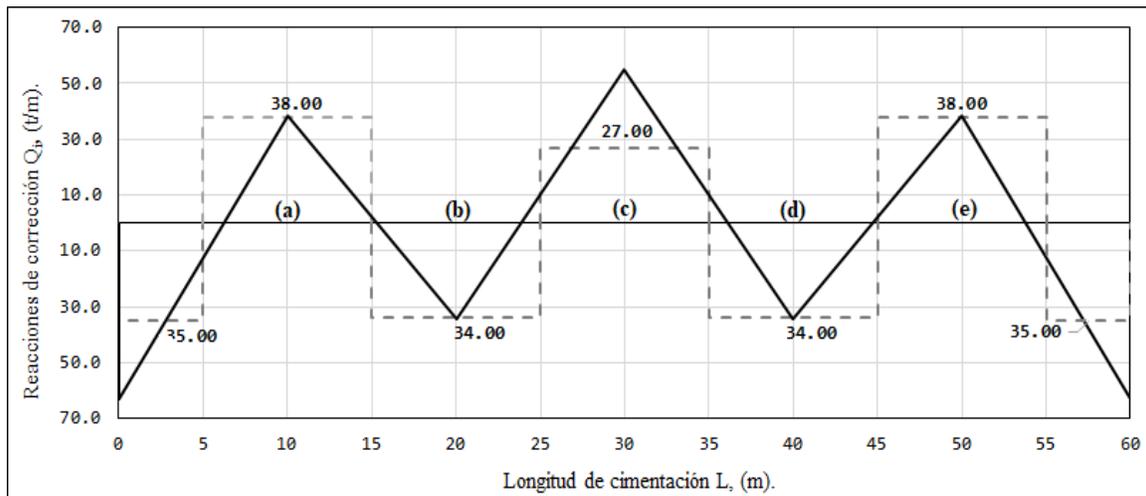


Figura 106. Reacciones de corrección por ancho de dovela con la tercera selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

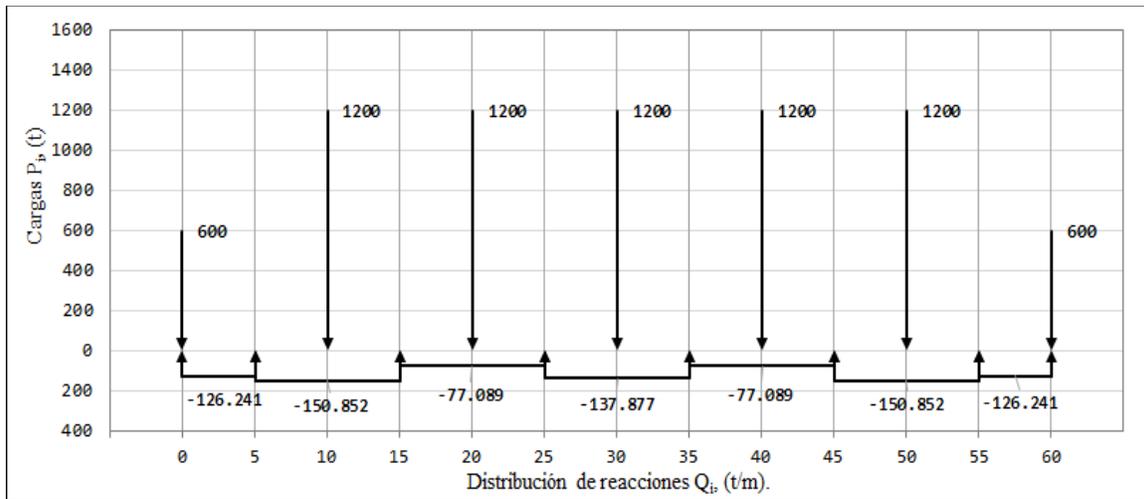


Figura 107. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela con la tercera selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

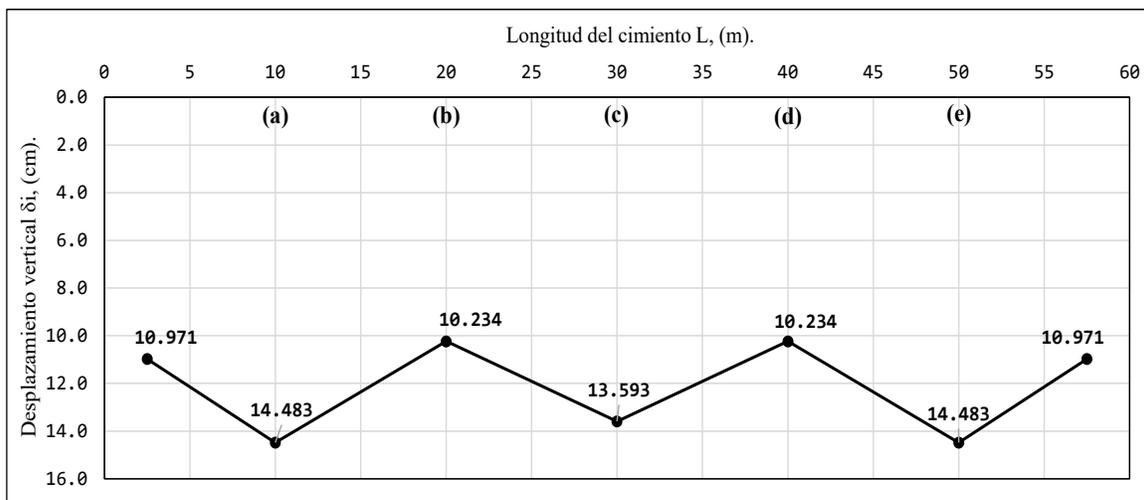


Figura 108. Desplazamientos verticales totales con la tercera selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia].

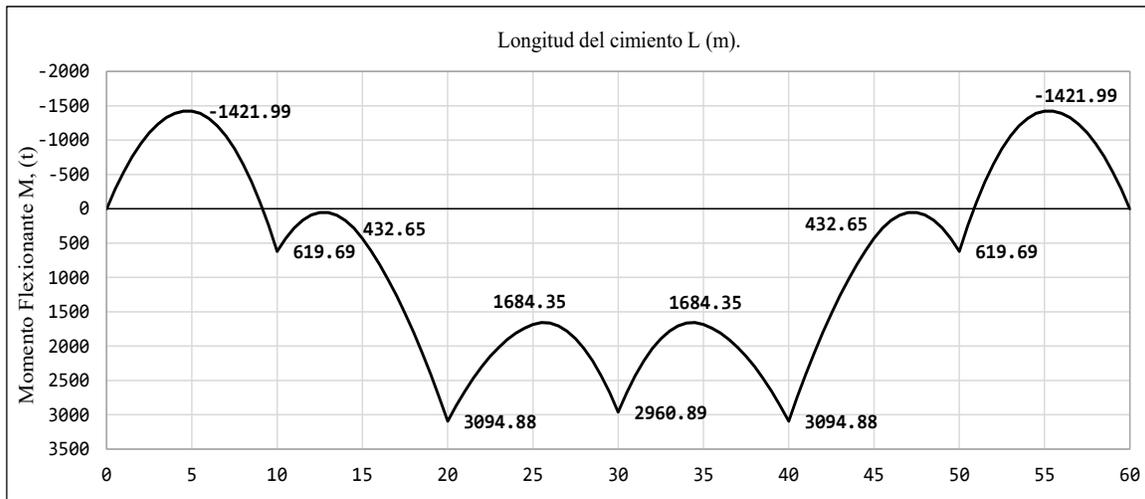


Figura 109. Diagrama de momentos flexionantes reducidos con la tercera selección y ubicación de juntas tipo III y IV. [Elaboración propia]

**b.4) Primera selección de valores de momento plástico para las juntas tipo IV.**

Junta a): Tipo IV, L=10 m,  $\Delta M_{p(a)}=800$  t-m.

Junta b): Tipo IV, L=20 m,  $\Delta M_{p(b)}=800$  t-m.

Junta c): Tipo IV, L=30 m,  $\Delta M_{p(c)}=1000$  t-m.

Junta d): Tipo IV, L=40 m,  $\Delta M_{p(d)}=800$  t-m.

Junta e): Tipo IV, L=50 m,  $\Delta M_{p(e)}=800$  t-m.

Tabla 19. Coeficientes geométricos con la primera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

Coeficientes geométricos	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Pontón 4		Pontón 5		Pontón 6		Uds.
	Junta a	Junta b	Junta c	Junta d	Junta e								
An	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	m <sup>2</sup>	
Sn	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	m <sup>3</sup>	
an	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	1/m <sup>2</sup>	
bn	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	1/m <sup>2</sup>	
$\Delta M_i$	0	-657.19	657.19	-1982.38	1982.38	-2235.89	2235.89	-1982.38	1982.38	-657.19	657.19	0	t-m
$\Delta M_i + \Delta M_{i+1}$	-657.19	-1325.19	-1325.19	-253.51	-253.51	253.51	253.51	1325.19	1325.19	1325.19	657.19	657.19	t-m
Cn	-3.29	-6.63	-6.63	-1.27	-1.27	1.27	1.27	6.63	6.63	6.63	3.29	3.29	t/m <sup>2</sup>

Sistema de ecuaciones lineales a resolver para hallar la magnitud de las fuerzas cortantes en cada junta de construcción propuesta:



$$\begin{aligned}
 0.0667\Delta S_{(a)} + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0 + 0 + 0 &= -9.912 & \text{(I)} \\
 0.0167\Delta S_{(a)} + 0.0667\Delta S_{(b)} + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0 + 0 &= -7.893 & \text{(II)} \\
 0 + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0.0667\Delta S_{(c)} + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0 &= 0 & \text{(III)} \\
 0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0.0667\Delta S_{(d)} + 0.0167\Delta S_{(e)} &= +7.893 & \text{(IV)} \\
 0 + 0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0.0667\Delta S_{(e)} &= +9.912 & \text{(V)}
 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con el método de eliminación de Gauss-Jordan, las fuerzas cortantes para cada junta son:

$$\Delta S_{(a)} = -127.016 t$$

$$\Delta S_{(b)} = -86.648 t$$

$$\Delta S_{(c)} = 0$$

$$\Delta S_{(d)} = +86.648 t$$

$$\Delta S_{(e)} = +127.016 t$$

Tabla 20. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con la primera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

Esfuerzos de corrección	Pontón 1 ↓	↑ Pontón 2 ↑	↓ Pontón 3 ↑	↓ Pontón 4 ↑	↓ Pontón 5 ↑	↓ Pontón 6						
	Junta a	Junta b	Junta c	Junta d	Junta e							
$\Delta S$	0	-127.02	-127.02	-86.65	-86.65	0.00	0.00	86.65	86.65	127.02	127.02	0
$(\Delta s_i - \Delta S_{i+1})/A_n$	1.058		-0.336		-0.722		-0.722		-0.336		1.058	
$\mp (\Delta M_i + \Delta M_{i+1})/S_n$		-3.29		-6.63		-1.27		1.27		6.63		3.29
$\pm (\Delta S_i + \Delta S_{i+1}) \cdot l_n/S_n$		-3.18		-5.34		-2.17		2.17		5.34		3.18
$\Delta q_i$	1.169	0.948	0.948	-1.621	-1.621	0.177	0.177	-1.621	-1.621	0.948	0.948	1.169

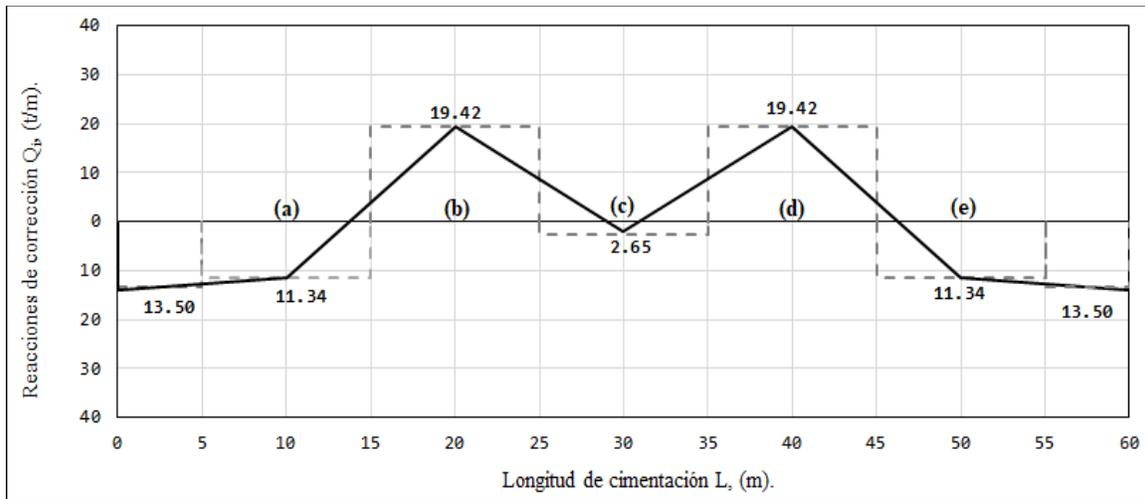


Figura 110. Reacciones de corrección por ancho de dovela con la primera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

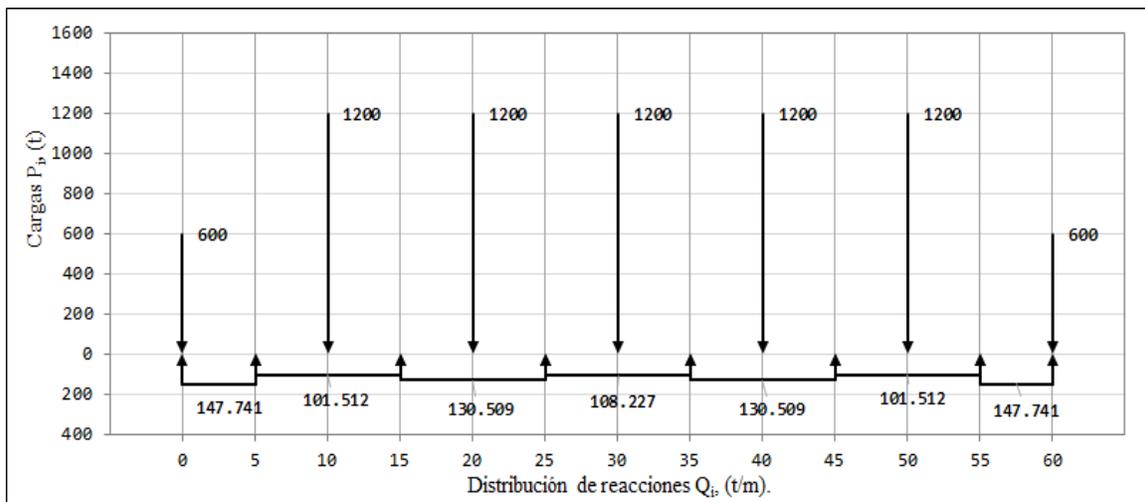


Figura 111. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela con la primera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

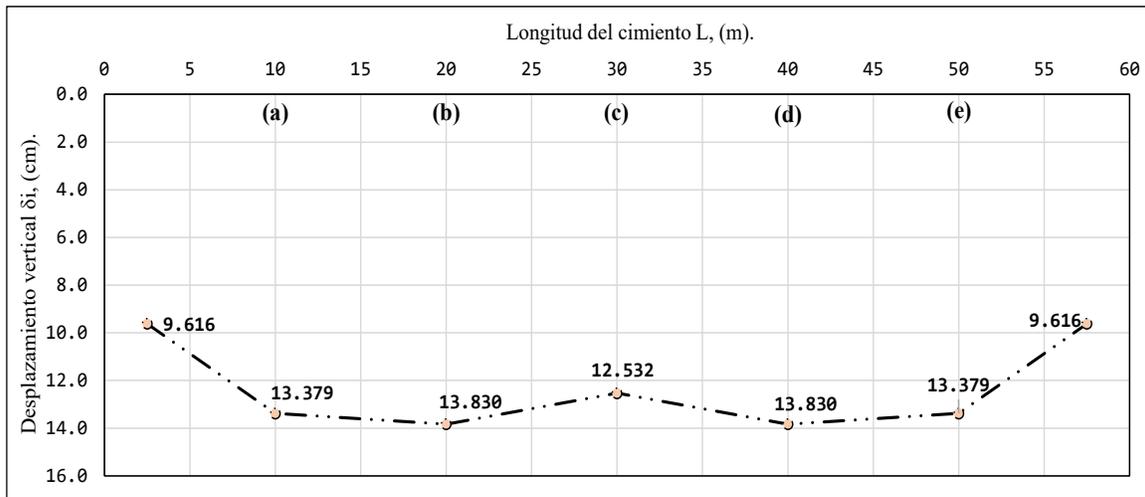


Figura 112. Desplazamientos verticales totales con la primera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

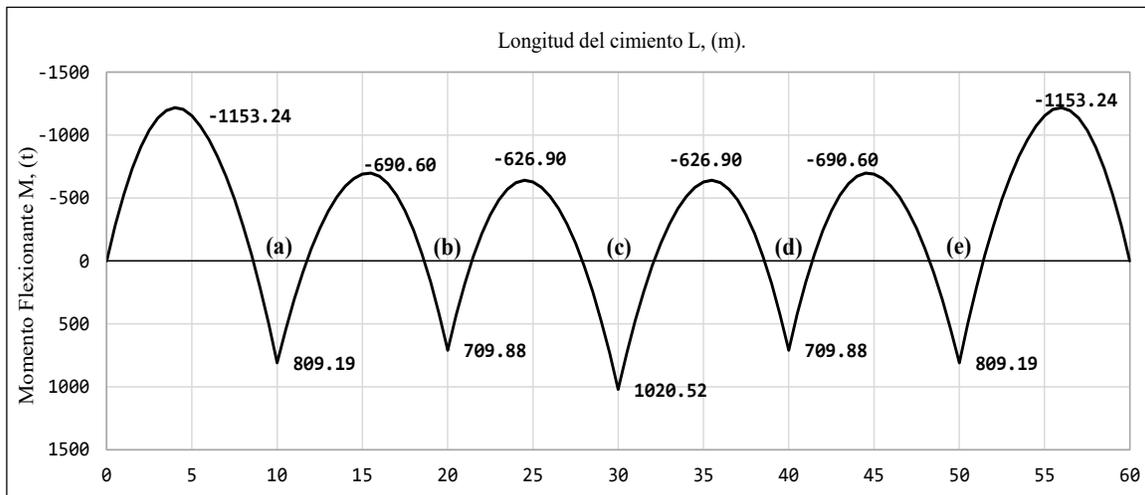


Figura 113. Diagrama de momentos flexionantes reducidos con la primera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]



**b.5) Segunda selección de valores de momento plástico para las juntas tipo IV.**

Junta a): Tipo IV, L=10 m,  $\Delta M_{p(a)}=800$  t-m.

Junta b): Tipo IV, L=20 m,  $\Delta M_{p(b)}=800$  t-m.

Junta c): Tipo IV, L=30 m,  $\Delta M_{p(c)}=600$  t-m.

Junta d): Tipo IV, L=40 m,  $\Delta M_{p(d)}=800$  t-m.

Junta e): Tipo IV, L=50 m,  $\Delta M_{p(e)}=800$  t-m.

Tabla 21. Coeficientes geométricos con la segunda propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

Coeficientes geométricos	Pontón 1	Pontón 2		Pontón 3		Pontón 4		Pontón 5		Pontón 6	Uds.		
		Junta a	Junta b	Junta c	Junta d	Junta e							
An	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	m <sup>2</sup>		
Sn	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	m <sup>3</sup>		
an	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	0.0167	1/m <sup>2</sup>		
bn	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	1/m <sup>2</sup>		
$\Delta M_i$	0	-657.19	657.19	-1982.38	1982.38	-2635.89	2635.89	-1982.38	1982.38	-657.19	657.19	0	t-m
$\Delta M_i + \Delta M_{i+1}$	-657.19	-657.19	-1325.19	-1325.19	-653.51	-653.51	653.51	653.51	1325.19	1325.19	657.19	657.19	t-m
Cn	-3.29	-3.29	-6.63	-6.63	-3.27	-3.27	3.27	3.27	6.63	6.63	3.29	3.29	t/m <sup>2</sup>

Sistema de ecuaciones lineales a resolver para hallar la magnitud de las fuerzas cortantes en cada junta de construcción propuesta:

$$0.0667\Delta S_{(a)} + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0 + 0 + 0 = -9.912 \quad \text{(I)}$$

$$0.0167\Delta S_{(a)} + 0.0667\Delta S_{(b)} + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0 + 0 = -9.893 \quad \text{(II)}$$

$$0 + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0.0667\Delta S_{(c)} + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0 = 0 \quad \text{(III)}$$

$$0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0.0667\Delta S_{(d)} + 0.0167\Delta S_{(e)} = +9.893 \quad \text{(IV)}$$

$$0 + 0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0.0667\Delta S_{(e)} = +9.912 \quad \text{(V)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con el método de eliminación de Gauss-Jordan, las fuerzas cortantes para cada junta son:

$$\Delta S_{(a)} = -119.016 t$$

$$\Delta S_{(b)} = -118.648 t$$

$$\Delta S_{(c)} = 0$$

$$\Delta S_{(d)} = +118.648 t$$

$$\Delta S_{(e)} = +119.016 t$$

Tabla 22. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con la segunda propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

Esfuerzos de corrección	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Pontón 4		Pontón 5		Pontón 6		Uds.
	↓	↑	↑	↓	↓	↑	↑	↓	↓	↑	↑	↓	
$\Delta S$	0	-119.02	-119.02	-118.65	-118.65	0.00	0.00	118.65	118.65	119.02	119.02	0	t
$(\Delta S_i - \Delta S_{i+1})/A_n$		0.992	-0.003		-0.989		-0.989		-0.003		0.992		t/m <sup>2</sup>
$\mp (\Delta M_i + \Delta M_{i+1})/S_n$		-3.29		-6.63		-3.27		3.27		6.63		3.29	t/m <sup>2</sup>
$\pm (\Delta S_i + \Delta S_{i+1}) \cdot l_n/S_n$		-2.98		-5.94		-2.97		2.97		5.94		2.98	t/m <sup>2</sup>
$\Delta q_i$	1.302	0.681	0.681	-0.687	-0.687	-1.290	-1.290	-0.687	-0.687	0.681	0.681	1.302	t/m <sup>2</sup>

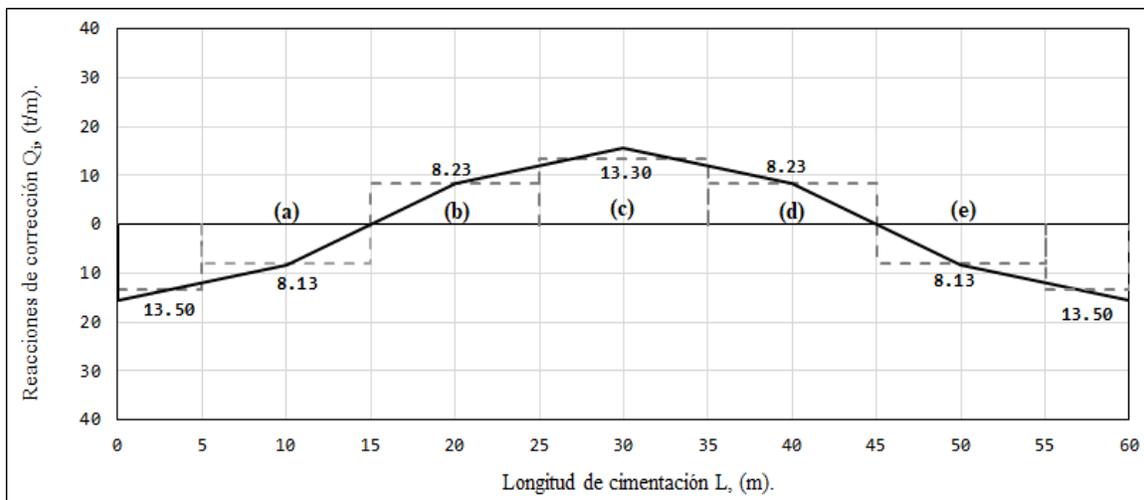


Figura 114. Reacciones de corrección por ancho de dovela con la segunda propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

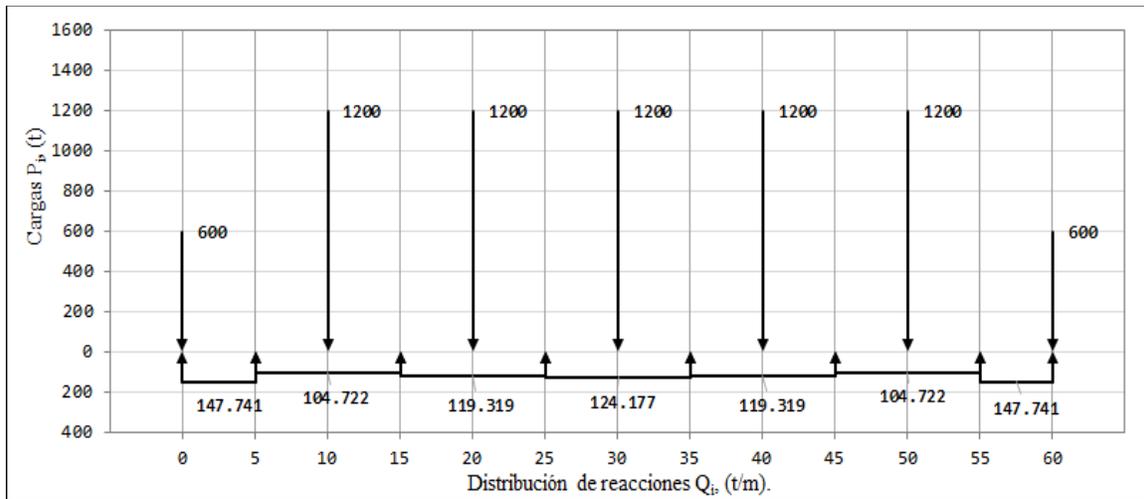


Figura 115. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela con la segunda propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

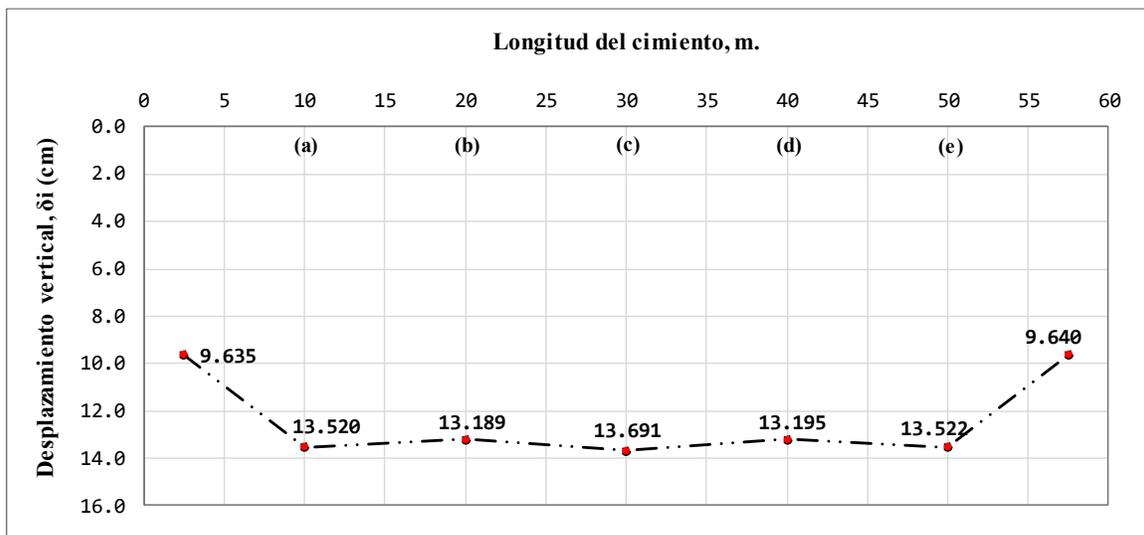


Figura 116. Desplazamientos verticales totales con la segunda propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia].

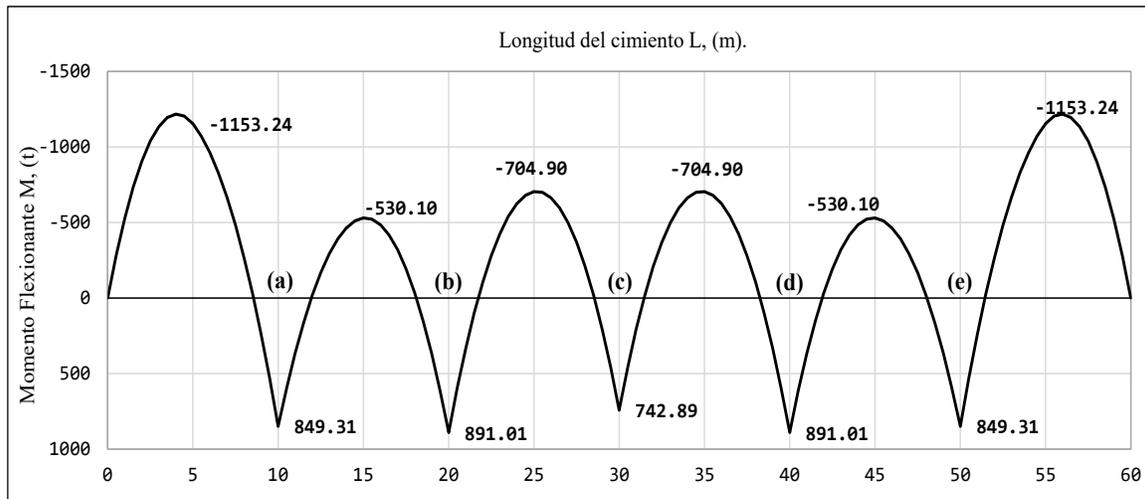


Figura 117. Diagrama de momentos flexionantes reducidos con la segunda propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

### b.6) Tercera selección de valores de momento plástico para las juntas tipo IV.

Junta a): Tipo IV,  $L=10$  m,  $\Delta M_{p(a)}=800$  t-m.

Junta b): Tipo IV,  $L=20$  m,  $\Delta M_{p(b)}=800$  t-m.

Junta c): Tipo IV,  $L=30$  m,  $\Delta M_{p(c)}=800$  t-m.

Junta d): Tipo IV,  $L=40$  m,  $\Delta M_{p(d)}=800$  t-m.

Junta e): Tipo IV,  $L=50$  m,  $\Delta M_{p(e)}=800$  t-m.

Tabla 23. Coeficientes geométricos con la tercera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

Coeficientes geométricos	Pontón 1		Pontón 2		Pontón 3		Pontón 4		Pontón 5		Pontón 6		Uds.
	Junta a		Junta b		Junta c		Junta d		Junta e				
An	120		120		120		120		120		120		$m^2$
Sn	200		200		200		200		200		200		$m^3$
an	0.0167		0.0167		0.0167		0.0167		0.0167		0.0167		$1/m^2$
bn	0.0333		0.0333		0.0333		0.0333		0.0333		0.0333		$1/m^2$
$\Delta M_i$	0	-657.19	657.19	-1982.38	1982.38	-2435.89	2435.89	-1982.38	1982.38	-657.19	657.19	0	t-m
$\Delta M_i + \Delta M_{i+1}$		-657.19		-1325.19		-453.51		453.51		1325.19		657.19	t-m
Cn	-3.29		-6.63		-2.27		2.27		6.63		3.29		$t/m^2$

Sistema de ecuaciones lineales a resolver para hallar la magnitud de las fuerzas cortantes en cada junta de construcción propuesta:



$$\begin{aligned}
 0.0667\Delta S_{(a)} + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0 + 0 + 0 &= -9.912 & \text{(I)} \\
 0.0167\Delta S_{(a)} + 0.0667\Delta S_{(b)} + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0 + 0 &= -8.893 & \text{(II)} \\
 0 + 0.0167\Delta S_{(b)} + 0.0667\Delta S_{(c)} + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0 &= 0 & \text{(III)} \\
 0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(c)} + 0.0667\Delta S_{(d)} + 0.0167\Delta S_{(e)} &= +8.893 & \text{(IV)} \\
 0 + 0 + 0 + 0.0167\Delta S_{(d)} + 0.0667\Delta S_{(e)} &= +9.912 & \text{(V)}
 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con el método de eliminación de Gauss-Jordan, las fuerzas cortantes para cada junta son:

$$\Delta S_{(a)} = -122.016 t$$

$$\Delta S_{(b)} = -102.648 t$$

$$\Delta S_{(c)} = 0$$

$$\Delta S_{(d)} = +102.648 t$$

$$\Delta S_{(e)} = +122.016 t$$

Tabla 24. Esfuerzos de corrección en los extremos de los pontones con la tercera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

Esfuerzos de corrección	Pontón 1 ↓	↑ Pontón 2 ↑	↓ Pontón 3 ↑	↓ Pontón 4 ↑	↓ Pontón 5 ↑	↓ Pontón 6	Uds.						
	Junta a	Junta b	Junta c	Junta d	Junta e								
$\Delta S$	0	-123.02	-123.02	-102.65	-102.65	0.00	0.00	102.65	102.65	123.02	123.02	0	t
$(\Delta S_i - \Delta S_{i+1})/A_n$	1.025		-0.170		-0.855		-0.855		-0.170		1.025		t/m <sup>2</sup>
$\mp (\Delta M_i + \Delta M_{i+1})/S_n$	-3.29		-6.63		-2.27		2.27		6.63		3.29		t/m <sup>2</sup>
$\pm (\Delta S_i + \Delta S_{i+1}) \cdot l_n/S_n$	-3.08		-5.64		-2.57		2.57		5.64		3.08		t/m <sup>2</sup>
$\Delta q_i$	1.236	0.815	0.815	-1.154	-1.154	-0.557	-0.557	-1.154	-1.154	0.815	0.815	1.236	t/m <sup>2</sup>

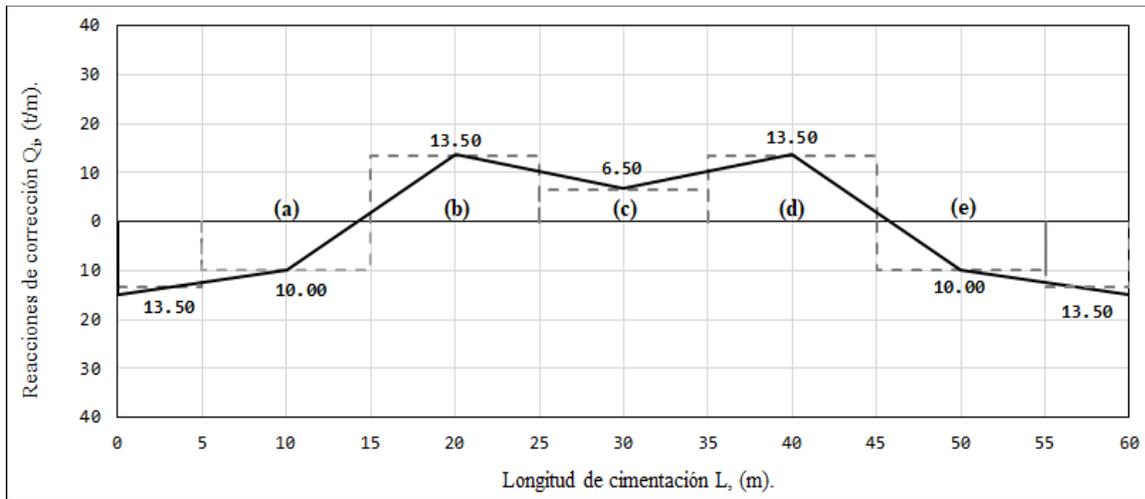


Figura 118. Reacciones de corrección por ancho de dovela con la tercera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

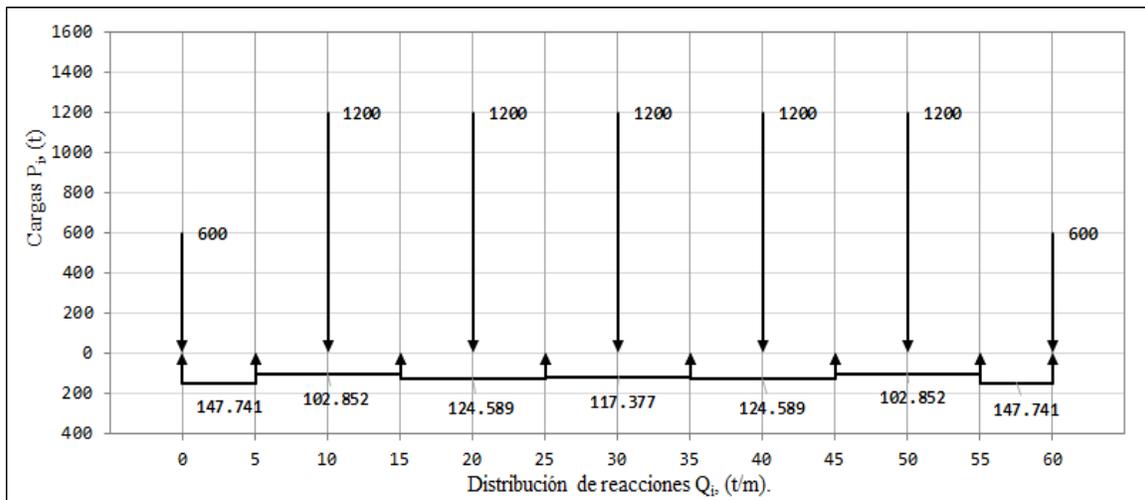


Figura 119. Cargas  $P_i$  y distribución de reacciones  $Q_i$  por ancho de dovela con la tercera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]

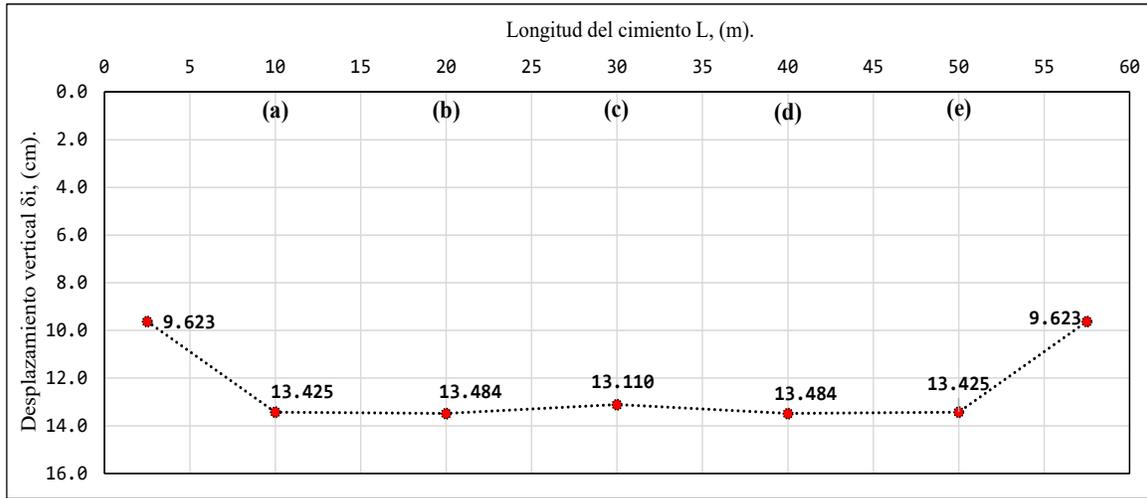


Figura 120. Desplazamientos verticales totales con la tercera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia].

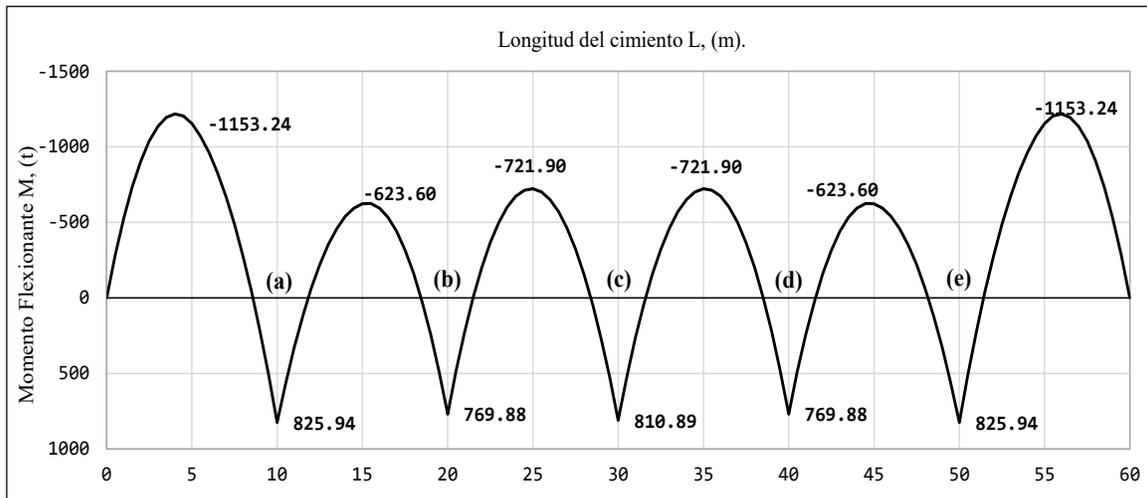


Figura 121. Diagrama de momentos flexionantes reducidos con la tercera propuesta de valores de momentos plásticos en las juntas tipo IV. [Elaboración propia]