UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

DIFERENCIAS Y SIMILITUDES ENTRE ALGUNOS HIPERESPACIOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
ERICK IVAN RODRÍGUEZ CASTRO

DIRECTOR
DOCTOR ALEJANDRO ILLANES MEJÍA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DOCTOR JORGE MARCOS MARTÍNEZ MONTEJANO
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

DOCTOR HUGO VILLANUEVA MÉNDEZ
DEPARTAMENTO DE ACTUARÍA, FÍSICA Y MATEMÁTICAS, UDLAP

CIUDAD DE MÉXICO, 31 DE AGOSTO DE 2022.

Índice general

Agradecimientos

> Tomó entonces Samuel una piedra y la erigió entre Mispá y Yesaná, y le dio el nombre de Eben Haézer, diciendo: "Hasta aquí nos ha socorrido Yahvé."
>
> *1 Samuel 7:12*

Al doctor Alejandro Illanes Mejía por la oportunidad de trabajar con él, por su enorme paciencia y su gran generosidad.

Al jurado que aceptó revisar este trabajo, gracias por su amabilidad y su tiempo.

Al doctor Jimmy Anel Naranjo Murillo, por su amistad y discusiones sobre continuos durante mis estudios de posgrado, especialmente en el periodo de la pandemia.

Al doctor Jorge Enrique Vega Acevedo, por su amistad y apoyo técnico en una de las imágenes de este escrito.

Al doctor José Juan Zacarías, por su amistad y por sus charlas a la distancia en el periodo de la pandemia.

A mi madre Consuelo Castro Villagómez por el apoyo y amor incondicional que siempre me ha brindado.

Esta tesis fue parcialmente apoyada por los proyectos: "Teoría de Continuos, Hiperespacios y Sistemas Dinámicos III", (IN 106319) of PAPIIT, DGAPA, UNAM; and "Teoría de Continuos e Hiperespacios, dos"(AI-S-15492) of CONACYT.

Introducción

Un continuo es un espacio topológico métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Los hiperespacios de un continuo X son ciertas familias de subconjuntos de X con alguna característica particular. Algunos de los hiperespacios más estudiados son:

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

Los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(X)$ han sido ampliamente estudiados por varios autores. Estas investigaciones han tenido diferentes direcciones, por ejemplo, se han encontrado resultados que permiten conocer mejor la estructura de estos hiperespacios a partir de las propiedades del continuo que los determina. Un ejemplo de esto es que en el estudio de estos hiperespacios es útil saber si éstos contienen celdas o cubos de Hilbert. Se conoce que el hiperespacio $C(X)$ contiene n-celdas si y sólo si X contiene n-odos ([10]). Se conoce también que $C_n(X)$ es un cubo de Hilbert si y sólo si X es localmente conexo sin arcos libres. Estos hiperespacios también han sido utilizados en el estudio de funciones inducidas, ya sea considerando los hiperespacios de manera separada, o cocientes combinándolos, por ejemplo, las suspensiones $C_n(X)/C(X)$, $F_n(X)/F_1(X)$ o $C_n(X)/F_n(X)$.

Otra manera de combinar estos hiperespacios es considerar hiperespacios de hiperespacios. Una observación interesante a este respecto es que si consideramos los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(C(X))$ para alguna $n \geq 2$, éstos son similares en el siguiente sentido. En cuanto al hiperespacio $C_n(X)$, estamos considerando la colección de cerrados de X con a lo más n componentes y en cuanto a $F_n(C(X))$, estamos considerando conjuntos de subcontinuos de X con a lo más n elementos. Si consideramos $E_1, ..., E_n$ elementos disjuntos dos a dos de $C(X)$, las vecindades pequeñas del elemento $E_1 \cup ... \cup E_n$ en $C_n(X)$ son homeomorfas a vecindades pequeñas del elemento $\{E_1, ..., E_n\}$ en $F_n(C(X))$. De tal manera que un primer acercamiento para un posible homeomorfismo entre $F_n(C(X))$ y $C_n(X)$ es la función unión

$$\bigcup : F_n(C(X)) \to C_n(X).$$

Sin embargo, esta función no es inyectiva, porque el subcontinuo X puede ser representado de muchas maneras diferentes como unión de n subcontinuos de X. De hecho, si un subcontinuo no degenerado C de X es expresado como unión de dos subcontinuos E_1, E_2 de X, entonces $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$.

De este análisis surge la pregunta que es la motivación principal de este trabajo:

¿Bajo qué condiciones sobre un continuo X y sobre $n \geq 2$, se tiene que los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(C(X))$ son homeomorfos?

Se sabe que los hiperespacios $C([0,1])$ y $C(S^1)$ son ambos homeomorfos a $[0,1]^2$, donde S^1 es la circunferencia unitaria. Por tanto, $F_2([0,1]^2)$ es homeomorfo a $F_2(C([0,1]))$ y a $F_2(C(S^1))$. Por otro lado, en [16], R. Molski mostró que $F_2([0,1]^2)$ es homeomorfo a $[0,1]^4$. En [13] se muestra el resultado de Schori que dice que $C_2([0,1])$ es homeomorfo a $[0,1]^4$. Por tanto, tenemos que $F_2(C([0,1]))$ es homeomorfo a $C_2([0,1])$. Sin embargo, en [13], A. Illanes mostró que $C_2([0,1])$ no es homeomorfo a $C_2(S^1)$. Más aún, en [9] mostró que $C_2(S^1)$ es homeomorfo al cono sobre un toro sólido. Por tanto, $C_2(S^1)$ no es homeomorfo a $F_2(C(S^1))$.

Entonces cuando X es el intervalo, los hiperespacios $C_2(X)$ y $F_2(C(X))$ son homeomorfos, pero cuando X es la circunferencia, los hiperespacios no lo son.

Sean $\mathcal{F}$ la familia de continuos localmente conexos sin arcos libres y $\mathcal{Q}$ el cubo de Hilbert. Como mencionamos anteriormente, si $X \in \mathcal{F}$, entonces $C_n(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{Q}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es una familia grande de continuos que cumple lo siguiente: Para toda $X \in \mathcal{F}$, los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(C(X))$ son homeomorfos a $\mathcal{Q}$.

En este trabajo probamos que para toda gráfica finita G diferente del intervalo y la circunferencia, el hiperespacio $F_n(C(G))$ no es homeomorfo a $C_n(G)$. También probamos que lo mismo sucede cuando en lugar de tomar una gráfica finita, consideramos un continuo que contiene subcontinuos terminales.

También exhibimos dos abanicos no localmente conexos (el armónico y el de Cantor) para los cuales los hiperespacios $F_n(C(X))$ y $C_n(X)$ no son homeomorfos y probamos que para el abanico localmente conexo conocido como F_ω, se cumple que $F_2(C(F_\omega))$ y $C_2(F_\omega)$ son homeomorfos.

Gracias al trabajo de D. W. Curtis en [2], se sabe que para algunas compactaciones especiales de un rayo, existe una retracción de $C_2(X)$ a $C(X)$. En este trabajo mostramos que para dos de las compactaciones abordadas en [2], también se puede retraer el hiperespacio $F_2(C(X))$ en $C(X)$.

Finalmente, mostramos que en cuanto a la labor de diferenciar a los hiperespacios $F_n(C(X))$ y $C_n(X)$, la propiedad de contractibilidad no es un buen discriminante, pues demostramos que para todo continuo X y para todo $n \geq 2$, el hecho de que $C_n(X)$ sea contráctil es equivalente a que $F_n(C(X))$ sea contráctil.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo incluimos (y/o recordamos) algunos resultados generales de topología e hiperespacios que nos ayudarán a desarrollar los temas centrales de este trabajo.

Lema 1. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos. Entonces f es continua en un punto $p \in X$ si y sólo si dada una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\lim p_n = p$, tenemos que existe una subsucesión $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim f(p_{n_k}) = f(p)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es continua en p. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim p_n = p$, entonces $\lim f(p_n) = f(p)$. Entonces para cualquier subsucesión $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos que $\lim_{k\to\infty} f(p_{n_k}) = f(p)$.

($\Leftarrow$) Demostraremos esta implicación por contrapositiva. Supongamos que f no es continua en p. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para $\delta > 0$ existe $q \in X$ tal que $d(p, q) < \delta$ y $d(f(p), f(q)) \geq \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $p_n \in X$ tal que $d(p_n, p) < \frac{1}{n}$ y $d(f(p_n), f(p)) \geq \varepsilon$. Con esto construimos una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim p_n = p$ pero $d(f(p_n), f(p)) \geq \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, ninguna subsucesión de $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ cumple que $\lim_{k\to\infty} f(p_{n_k}) = f(p)$. $\square$

Lema 2. *Sea X un continuo. Si $A \in 2^X$ y U es un subconjunto abierto de X tal que $A \subseteq U$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \subseteq U$.*

Demostración. Si $U = X$, por definición, para cualquier $\varepsilon > 0$, $N(\varepsilon, A) \subseteq X = U$. Supongamos entonces que $U \neq X$. Como $A \subseteq U$, tenemos que $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Como A y $X \setminus U$ son subconjuntos cerrados de X y X es compacto, entonces A y $X \setminus U$ son compactos y no vacíos. Por lo tanto, $H(A, X \setminus U) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{H(A,X\setminus U)}{2}$ y veamos que $N(\varepsilon, A) \subseteq U$. Si $p \in N(\varepsilon, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, p) < \varepsilon$. Entonces $p \in \mathcal{B}(\varepsilon, a)$. Si $p \in X \setminus U$, entonces $H(A, X \setminus U) \leq d(a, p)$. Entonces, $H(A, X \setminus U) < \varepsilon$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $p \in U$. $\square$

Lema 3. *Sea X un continuo. Para toda $n \geq 2$ se tiene que si $U_1, ..., U_n$ son abiertos no vacíos y disjuntos dos a dos de X, entonces el vietórico $\langle U_1, ...U_n \rangle_{F_n(X)}$ es homeomorfo a $U_1 \times ... \times U_n$.*

Demostración. Como $U_1, ..., U_n$ son ajenos dos a dos, cualquier elemento $\mathcal{A}$ del vietórico $\langle U_1, ..., U_n \rangle_{F_n(X)}$ es un conjunto de n elementos distintos $p_1, ..., p_n$ tales que $p_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Consideremos la función $h : \langle U_1, ..., U_n \rangle_{F_n(X)} \to U_1 \times ... \times U_n$ tal que a cada elemento $\{p_1, ..., p_n\} \in \langle U_1, ..., U_n \rangle_{F_n(X)}$ le asigna la n-ada ordenada $\langle p_1, ..., p_n \rangle$ en el producto $U_1 \times ... \times U_n$.

Sean $\{p_1, ..., p_n\}$ y $\{q_1, ..., q_n\}$ dos elementos del vietórico $\langle U_1, ..., U_n \rangle_{F_n(X)}$ tales que $p_i, q_i \in U_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$ y

$$h(\{p_1, ..., p_n\}) = \langle p_1, ..., p_n \rangle = \langle q_1, ..., q_n \rangle = h(\{q_1, ..., q_n\}).$$

Como las n-adas ordenadas son iguales, entonces $p_i = q_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto, $\{p_1, ..., p_n\} = \{q_1, ..., q_n\}$, es decir, h es inyectiva.

Si consideramos un elemento $\langle p_1, ..., p_n \rangle$ del producto $U_1 \times ... \times U_n$, es claro que $h(\{p_1, ..., p_n\}) = \langle p_1, ..., p_n \rangle$. Por tanto, h es suprayectiva.

Falta mostrar que tanto h como h^{-1} son continuas.

Si consideramos un abierto básico $V_1 \times ... \times V_n$ del producto $U_1 \times ... \times U_n$ tenemos que $h^{-1}[V_1 \times ... \times V_n] = \langle V_1, ..., V_n \rangle_{F_n(X)} \subseteq \langle U_1, ..., U_n \rangle_{F_n(X)}$. Por lo tanto, h es continua.

Por otro lado, si consideramos $V_1, ..., V_n$ abiertos de X tales que $V_i \subseteq U_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, tenemos que $h[\langle V_1, ..., V_n \rangle_{F(X)}] = V_1 \times ... \times V_n$ es un abierto del producto $U_1 \times ... \times U_n$. Por tanto, h^{-1} es continua. $\square$

Lema 4. *Sea X un continuo. Definimos la función unión $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ dada por $\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup\{A \subseteq X : A \in \mathcal{A}\}$. Entonces:*

1. *la función $\bigcup$ está bien definida, es decir, $\bigcup(\mathcal{A}) \in 2^X$,*
2. *$\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ es una función continua.*

Demostración. Para el probar el primer punto tenemos que demostrar que $\bigcup(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ y que $\bigcup(\mathcal{A})$ es cerrado en X.

Como $\mathcal{A} \neq \emptyset$, tomamos $A_0 \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} \subseteq 2^X$, se tiene que $A_0 \in 2^X$. Por tanto, $A_0 \neq \emptyset$ y $A_0 \subseteq \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\} = \bigcup(\mathcal{A})$. Por lo tanto, $\bigcup(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

Por otro lado, si $p \in cl(\bigcup(\mathcal{A}))$, entonces existe una sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\bigcup(\mathcal{A})$ que converge a p. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $p_n \in A_n$. Como $\mathcal{A}$ es cerrado en 2^X, se tiene que $\mathcal{A}$ es compacto. Entonces existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a A para algún $A \in \mathcal{A}$. Entonces $p \in A$ por lo que $p \in \bigcup\{A \subseteq X : A \in \mathcal{A}\} = \bigcup(\mathcal{A})$ y entonces $\bigcup(\mathcal{A})$ es un conjunto cerrado en X. Por lo tanto, $\bigcup(\mathcal{A}) \in 2^X$.

Ahora probaremos que la función $\bigcup$ es continua.

Sean $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ y $\varepsilon > 0$. Supongamos que $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\varepsilon, \mathcal{A})$, es decir, $H(\mathcal{C}, \mathcal{A}) < \varepsilon$. Así, $\mathcal{A} \subseteq N(\varepsilon, \mathcal{C})$ y $\mathcal{C} \subseteq N(\varepsilon, \mathcal{A})$. Veremos que $\bigcup(\mathcal{A}) \subseteq N(\varepsilon, \bigcup(\mathcal{C}))$.

Sea $p \in \bigcup(\mathcal{A})$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $p \in A$. Como $\mathcal{A} \in N(\varepsilon, \mathcal{C})$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $H(A, C) < \varepsilon$. Dado que $A \subseteq N(\varepsilon, C)$ existe $q \in C$ tal que $d(p, q) < \varepsilon$. Entonces $q \in \bigcup(\mathcal{C})$ y $d(p, q) < \varepsilon$. Así, $p \in N(\varepsilon, \bigcup(\mathcal{C}))$. Por lo tanto, $\bigcup(\mathcal{A}) \subseteq N(\varepsilon, \bigcup(\mathcal{C}))$. Análogamente podemos ver que $\bigcup(\mathcal{C}) \subseteq N(\varepsilon, \bigcup(\mathcal{A}))$. Por lo tanto, $H(\bigcup(\mathcal{A}), \bigcup(\mathcal{C})) < \varepsilon$. Con esto queda demostrado que $\bigcup$ es continua en $\mathcal{A}$. $\square$

Definición 5. Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Definimos $2^f : 2^X \to 2^Y$, la función inducida entre los hiperespacios 2^X y 2^Y, por $2^f(A) = f(A)$ (la imagen de A bajo f) para cada $A \in 2^X$.

Teorema 6. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces 2^f es continua.*

Demostración. Si $V_1, ..., V_n$ son abiertos no vacíos de Y, entonces

$$\langle V_1, ..., V_n \rangle_{2^Y} = \langle V_1 \cup ... \cup V_n \rangle_{2^Y} \cap \langle Y, V_1 \rangle_{2^Y} \cap ... \cap \langle Y, V_n \rangle_{2^Y}.$$

Entonces la colección

$$\mathcal{C} = \{\langle V \rangle_{2^Y} : V \text{ es abierto en } Y\} \cup \{\langle Y, V \rangle_{2^Y} : V \text{ es abierto en } Y\}$$

es una subbase para la topología de Vietoris en 2^Y. Para probar que 2^f es continua, basta probar que la imagen inversa de los elementos de $\mathcal{C}$ bajo 2^f son abiertos en 2^X.

Sea V un abierto no vacío de Y. Primero mostraremos que $(2^f)^{-1}(\langle V \rangle_{2^Y}) = \langle f^{-1}(V) \rangle_{2^X}$. Sea $A \in (2^f)^{-1}(\langle V \rangle_{2^Y})$ (la imagen inversa del vietórico $\langle V \rangle_{2^Y}$ bajo 2^f). Entonces $2^f(A) \in \langle V \rangle_{2^Y}$, por lo que $f(A) \subseteq V$ (la imagen de A bajo f). Por lo tanto, $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(V)$, por lo que $A \in \langle f^{-1}(V) \rangle_{2^X}$. Por otro lado, si $A \in \langle f^{-1}(V) \rangle_{2^X}$, entonces $A \subseteq f^{-1}(V)$ y $f(A) \subseteq V$. Por lo tanto, $2^f(A) \in \langle V \rangle_{2^Y}$ y $A \in (2^f)^{-1}(\langle V \rangle_{2^Y})$.

Ahora mostraremos que $(2^f)^{-1}(\langle Y, V \rangle_{2^Y}) = \langle X, f^{-1}(V) \rangle_{2^X}$. Supongamos que $A \in (2^f)^{-1}(\langle Y, V \rangle_{2^Y})$, entonces $2^f(A) \in \langle Y, V \rangle_{2^Y}$. De la definición del vietórico, tenemos que $f(A) \cap V \neq \emptyset$. Entonces $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, por lo que $A \in \langle X, f^{-1}(V) \rangle_{2^X}$. Por otro lado, si $A \in \langle X, f^{-1}(V) \rangle_{2^X}$, entonces $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, por lo que $f(A) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, $2^f(A) \in \langle Y, V \rangle_{2^Y}$, por lo que $A \in (2^f)^{-1}(\langle Y, V \rangle_{2^Y})$. $\square$

Corolario 7. *Sean X y Y continuos. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $2^f : 2^X \to 2^Y$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Por el Teorema 6 aplicado a las funciones f y f^{-1}, tenemos que 2^f es continua y la función $(2^f)^{-1} : 2^Y \to 2^X$ dada por $(2^f)^{-1}(A) = 2^{(f^{-1})}(A) = f^{-1}(A)$ (la imagen de A bajo f^{-1}) es continua. Finalmente, tenemos que $(2^f)^{-1} \circ 2^f(A) = f^{-1}(f[A]) = A$ y $2^f \circ (2^f)^{-1}(B) = f(f^{-1}[B])) = B$, pues f es biyectiva. Por lo tanto, $(2^f) \circ (2^f)^{-1} = Id_{2^Y}$ y $(2^f)^{-1} \circ (2^f) = Id_{2^X}$. Como $(2^f)^{-1}$ es la inversa de 2^f, hemos mostrado que 2^f es biyectiva, continua y su inversa también es continua. □

Definición 8. Sean $n \in \mathbb{N}$, X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Definimos $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ y la función inducida entre los hiperespacios $C_n(X)$ y $C_n(Y)$, por $C_n(f) = 2^f|_{C_n(X)}$.

Definimos $F_n(f) : F_n(X) \to F_n(Y)$ la función inducida entre los hiperespacios $F_n(X)$ y $F_n(Y)$, por $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$.

Teorema 9. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que si f es un homeomorfismo, entonces $C_n(f)$ y $F_n(f)$ son homeomorfismos.*

Demostración. Como f es homeomorfismo, por el Teorema 7, tenemos que 2^f es un homeomorfismo. Para toda $n \in \mathbb{N}$, definimos las funciones $(C_n(f))^{-1} = (2^f)^{-1}|_{C_n(Y)}$ y $(F_n(f))^{-1} = (2^f)^{-1}|_{F_n(Y)}$.

Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, las funciones $(C_n(f))^{-1}$ y $(F_n(f))^{-1}$ son las inversas de $C_n(f)$ y de $F_n(f)$ respectivamente. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n(f)$ y $F_n(f)$ son biyectivas. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que las funciones $C_n(f)$, $(C_n(f))^{-1}$, $F_n(f)$ y $(F_n(f))^{-1}$ son continuas pues son restricciones de funciones continuas. □

Lema 10. *Sea X un continuo y sean U y V abiertos ajenos de X. Entonces $\langle U \rangle_{C(X)} \times \langle V \rangle_{C(X)} \subseteq C(X) \times C(X)$ es homeomorfo a $\langle U, V \rangle_{C_2(X)} \subseteq C_2(X)$.*

Demostración. Sea $h : \langle U \rangle_{C(X)} \times \langle V \rangle_{C(X)} \to \langle U, V \rangle_{C_2(X)}$ la función dada por $h(\langle A, B \rangle) = A \cup B$. Mostraremos que h es un homeomorfismo.

Como $U \cap V = \emptyset$, cualquier elemento $F \in \langle U, V \rangle_{C_2(X)}$ cumple que $F = F_1 \cup F_2$, donde $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$. Definimos la función $h^{-1} : \langle U, V \rangle_{C_2(X)} \to \langle U \rangle_{C(X)} \times \langle V \rangle_{C(X)}$ dada por $h^{-1}(F_1 \cup F_2) = \langle F_1, F_2 \rangle$. Tenemos que

$$h^{-1} \circ h(\langle G_1, G_2 \rangle) = h^{-1}(G_1 \cup G_2) = \langle G_1, G_2 \rangle$$

y

$$h \circ h^{-1}(F_1 \cup F_2) = h(\langle F_1, F_2 \rangle) = F_1 \cup F_2.$$

Por lo tanto, h^{-1} es la inversa de h y h es biyectiva.

Probaremos ahora que h es continua. Como U y V son abiertos ajenos de X, entonces $\langle U \rangle_{C(X)}$ y $\langle V \rangle_{C(X)}$ son abiertos ajenos de $C(X)$. Por el Lema 3 tenemos que $\langle U\rangle_{C(X)} \times \langle V\rangle_{C(X)}$ es homeomorfo a $\langle\langle U\rangle_{C(X)}, \langle V\rangle_{C(X)}\rangle_{F_2(C(X))}$ y la función $f : \langle U\rangle_{C(X)} \times \langle V\rangle_{C(X)} \to \langle\langle U\rangle_{C(X)}, \langle V\rangle_{C(X)}\rangle_{F_2(C(X))}$ dada por $f(\langle A, B\rangle) = \{A, B\}$ es un homeomorfismo.

Por el Lema 4, la función $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ dada por $\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup\{A \subseteq X : A \in \mathcal{A}\}$ es continua. Sea $\langle A, B\rangle \in \langle U\rangle_{C(X)} \times \langle V\rangle_{C(X)}$, entonces

$$\bigcup \circ f(\langle A, B\rangle) = \bigcup(f(\langle A, B\rangle)) = \bigcup(\{A, B\}) = A \cup B = h(\langle A, B\rangle).$$

Por lo tanto, h es continua al ser composición de funciones continuas.

Ahora mostraremos que h^{-1} es continua. Mostraremos que para todo $\langle F_1, F_2\rangle \in \langle U\rangle_{C(X)} \times \langle V\rangle_{C(X)}$ y toda vecindad básica $\mathcal{U}$ de $\langle F_1, F_2\rangle$, existe una vecindad $\mathcal{V}$ de $h(\langle F_1, F_2\rangle)$ en $\langle U, V\rangle_{C_2(X)}$ tal que $h^{-1}[\mathcal{V}] \subseteq \mathcal{U}$.

Sea $\langle F_1, F_2\rangle \in \langle U\rangle_{C(X)} \times \langle V\rangle_{C(X)}$. Entonces $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$. Por el Lema 2, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $N(\varepsilon_1, F_1) \subseteq U$ y $N(\varepsilon_1, F_2) \subseteq V$. Sean $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{2}$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Definimos $\mathcal{U} = \mathcal{B}_{C(X)}(\varepsilon, F_1) \times \mathcal{B}_{C(X)}(\varepsilon, F_2)$ y $\mathcal{V} = \mathcal{B}_{C_2(X)}(\delta, F_1 \cup F_2)$. Veamos que $h^{-1}[\mathcal{V}] \subseteq \mathcal{U}$.

Sea $G \in \mathcal{V}$. Como $H_{C_2(X)}(G, F_1 \cup F_2) < \delta$, entonces

$$G \subseteq N(\delta, F_1 \cup F_2) = N(\delta, F_1) \cup N(\delta, F_2).$$

Supongamos que $G \subseteq N(\delta, F_1)$. Como $U \cap V = \emptyset$, $N(\delta, F_1) \subseteq N(\varepsilon, F_1) \subseteq U$ y $N(\delta, F_2) \subseteq N(\varepsilon, F_2) \subseteq V$, entonces $F_2 \nsubseteq N(\delta, G)$. Esto contradice que $H_{C_2(X)}(G, F_1 \cup F_2) < \delta$. Por lo tanto, $G \nsubseteq N(\delta, F_1)$. Análogamente, tenemos que $G \nsubseteq N(\delta, F_2)$. Por lo tanto, $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 \subseteq N(\delta, F_1) \subseteq U$ y $G_2 \subseteq N(\delta, F_2) \subseteq V$.

Como $G_1 \subseteq N(\delta, F_1)$ y $G_2 \subseteq N(\delta, F_2)$, entonces

$$N(\delta, G_1) \subseteq N(\delta, cl(N(\delta, F_1))) = N\left(\frac{\varepsilon}{2}, cl\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, F_1\right)\right)\right) \subseteq N(\varepsilon, F_1) \subseteq U,$$

y

$$N(\delta, G_2) \subseteq N(\delta, cl(N(\delta, F_2))) = N\left(\frac{\varepsilon}{2}, cl\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, F_2\right)\right)\right) \subseteq N(\varepsilon, F_2) \subseteq V,$$

Además, $F_1 \cup F_2 \subseteq N(\delta, G_1 \cup G_2) = N(\delta, G_1) \cup N(\delta, G_2)$, esto porque $H_{C_2(X)}(F_1 \cup F_2, G) < \delta$. Como $N(\delta, F_1) \subseteq U$, $N(\delta, G_1) \subseteq U$, $N(\delta, F_2) \subseteq V$, $N(\delta, G_2) \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$, entonces $F_1 \subseteq N(\delta, G_1)$ y $F_2 \subseteq N(\delta, G_2)$.

Por lo tanto, $H(F_1, G_1) < \varepsilon$ y $H(F_2, G_2) < \varepsilon$, es decir, $G_1 \in \mathcal{B}_{C(X)}(\varepsilon, F_1)$ y $G_2 \in \mathcal{B}_{C(X)}(\varepsilon, F_2)$. Concluimos entones que

$$h^{-1}(G) = h^{-1}(G_1 \cup G_2) = (G_1, G_2) \in \mathcal{B}_{C(X)}(\varepsilon, F_1) \times \mathcal{B}_{C(X)}(\varepsilon, F_2) = \mathcal{U}.$$

$\square$

Lema 11. *Sean X un continuo, $n \geq 2$, $F \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$ y $F_1, ..., F_n$ las distintas componentes de F. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $G \in \mathcal{B}_{C_n(X)}(\varepsilon, F)$, G cumple las siguientes propiedades:*

1. *$G \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$,*

2. *para toda $i \in \{1, ..., n\}$, existe una componente G_i tal que $H(F_i, G_i) < \varepsilon$,*

3. *para cualesquiera $i \neq j$, $N(\varepsilon, F_i) \cap N(\varepsilon, F_j) = \emptyset$ y $N(\varepsilon, G_i) \cap N(\varepsilon, G_j) = \emptyset$.*

Demostración. Sea $F = F_1 \cup ... \cup F_n \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$. Si $i, j \in \{1, , , .n\}$ y $i \neq j$, entonces $F_i \cap F_j = \emptyset$. Entonces existen abiertos disjuntos dos a dos $U_1, ..., U_n$ de X tales que $F_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por el Lema 2, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $N(\varepsilon_1, F_i) \subseteq U_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Sean $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{2}$ y $G \in \mathcal{B}_{C_n(X)}(\varepsilon, F)$. Como $H_{C_n(X)}(F, G) < \varepsilon$, entonces $G \subseteq N(\varepsilon, F) = N(\varepsilon, F_1) \cup ... \cup N(\varepsilon, F_n)$. Como para toda $i \in \{1, ..., n\}$, $N(\varepsilon, F_i) \subseteq U_i$ y $U_1, ..., U_n$ son ajenos dos a dos, entonces $G \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$. Además, $G = G_1 \cup ...G_n$, donde $G_1, ..., G_n$ son las distintas componentes de G y $G_i \subseteq N(\varepsilon, F_i)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Entonces para toda $i \in \{1, ..., n\}$, tenemos que

$$N(\varepsilon, G_i) \subseteq N(\varepsilon, cl(N(\varepsilon, F_i))) \subseteq N\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, cl(N(\varepsilon, F_i))\right) \subseteq N(\varepsilon_1, F_i) \subseteq U_i.$$

Además, $F_1 \cup ... \cup F_n \subseteq N(\varepsilon, G_1 \cup ... \cup G_n) \subseteq N(\varepsilon, G_1) \cup ... \cup N(\varepsilon, G_n)$, pues $H_{C_n(X)}(F_1 \cup ... \cup F_n, G) < \varepsilon$. Como para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $N(\varepsilon, F_i) \subseteq U_i$ y $U_1, ..., U_n$ son ajenos dos a dos, entonces $F_i \subseteq N(\varepsilon, G_i)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto, $H(F_1, G_1), ..., H(F_n, G_n)$ son menores que ε. $\square$

CAPÍTULO 2

Conexidad en pequeño en los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(C(X))$

En este capítulo recopilamos algunos resultados relacionados a la conexidad en pequeño en los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(C(X))$.

J. T. Goodykoontz en [6] abordó la conexidad local en el hiperespacio $C(X)$. Por otra parte, en [1], J. J. Charatonik y A. Illanes abordaron distintas variantes del concepto de conexidad local en distintos hiperespacios, en particular, en los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(X)$. A lo largo de esta sección haremos uso de algunos resultados de [6] y de [1] para estudiar la conexidad en pequeño en los hiperespacios $C_2(X)$ y $F_2(C(X))$.

La siguiente es la definición de un espacio localmente conexo que aparece en [1] que para nosotros es la definición de un espacio conexo en pequeño.

Definición 12. Un espacio X es **conexo en pequeño en un punto** p **de** X si y sólo si para cada subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$, se tiene que p es punto interior de la componente de U que tiene a p.

A continuación presentamos el Teorema 2 de [6].

Teorema 13. *Sean X un continuo y $A \in C(X)$, entonces $C(X)$ es conexo en pequeño en A si y sólo si para cada abierto U de X que contiene a A, los elementos de cada sucesión de continuos contenidos en U que converge a A están eventualmente contenidos en la componente de U a la que A pertenece.*

Lema 14. *Sean X un continuo, $A \in C(X)$ y $p \in A$. Si X es conexo en pequeño en p, entonces $C(X)$ es conexo en pequeño en A.*

Demostración. De acuerdo al Teorema 13 tenemos que mostrar que si U es un abierto de X que contiene a A, entonces los elementos de cada sucesión de continuos contenidos en U que converge a A, están eventualmente contenidos en la componente de U a la que A pertenece.

Sean U un subconjunto abierto de X tal que $A \subseteq U$ y $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subcontinuos de X tales que $A_i \subseteq U$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\lim A_i = A$. Como X es conexo en pequeño en p, la componente K de U que tiene a p cumple que $p \in int(K)$. Como $\lim A_i = A$, entonces existe una sucesión de puntos $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $p_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\lim p_i = p$. Como $\lim p_i = p$ y $p \in int(K)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i > N$ tenemos que $p_i \in int(K)$. Dada $i > N$ tenemos que $A_i \cap int(K) \neq \emptyset$. Entonces $A_i \cup K$ es conexo. Como $A_i \subseteq U$ y K es componente de U, entonces $A_i \subseteq K$. Por lo tanto, $C(X)$ es conexo en pequeño en A. □

A continuación presentamos versiones particulares de algunos resultados de [1]. En [1] los siguientes resultados están probados para espacios compactos y Hausdorff y los particularizamos para continuos. El siguiente teorema es una particularización del Teorema 2.12 de [1] y nos ofrece una forma de identificar a los elementos F con exactamente dos componentes en los que el hiperespacio $C_2(X)$ es conexo en pequeño a través de la conexidad en pequeño del hiperespacio $C(X)$ en las distintas componentes de F.

Teorema 15. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$ tales que $A_1, ..., A_n$ son las componentes de A. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *$C_n(X)$ es conexo en pequeño en A,*
2. *$C(X)$ es conexo en pequeño en A_i para cada $i \in \{1, ..., n\}$.*

El siguiente teorema se obtiene como una combinación del inciso (2.5.2) del Teorema 2.5 de [1] y del inciso (1.1.1) del Teorema 1.1 de [1].

Teorema 16. *Sea X un continuo y $A \in C(X)$. Entonces el hiperespacio 2^X es conexo en pequeño en A si y sólo si para todo abierto U de X tal que $A \subseteq U$, existe un conexo V de X tal que $A \subseteq int(V) \subseteq V \subseteq U$.*

Teorema 17. *Sean X un continuo, $n \geq 2$ y $A \in C_{n-1}(X)$. Entonces $C_n(X)$ es conexo en pequeño en A si y sólo si 2^X es localmente conexo en cada una de las componentes de A.*

Teorema 18. *Sean X un continuo, $A \in C(X)$ y $n \geq 2$. Entonces $C_n(X)$ es conexo en pequeño en A si y sólo si para todo subconjunto abierto U de X que contiene a A existe un conjunto conexo V tal que $A \subseteq int_X(V) \subseteq V \subseteq U$.*

El siguiente es una particularización del inciso (6.3.1) del Teorema 6.3 de [1] y nos brinda una herramienta para determinar los elementos A en los que el hiperespacio $F_n(X)$ es conexo en pequeño, a través de la conexidad en pequeño del continuo X en los elementos de A.

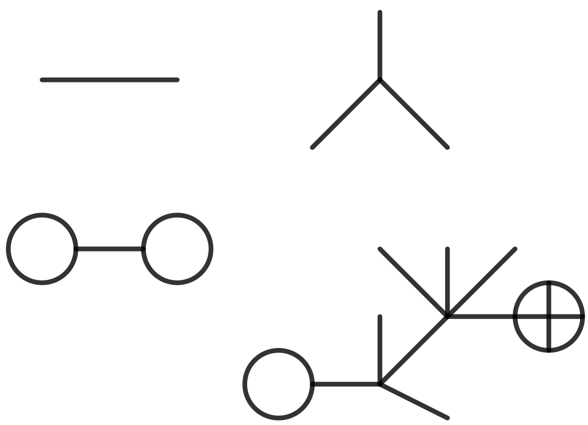
Teorema 19. *Sean X un continuo, $n, r \in \mathbb{N}$ con $r \leq n$ y $A = \{a_1, ..., a_r\} \in F_n(X)$, donde $a_1, ..., a_r$ son diferentes entre sí. Entonces $F_n(X)$ es conexo en pequeño A si y sólo si X es conexo en pequeño en cada a_i.*

CAPÍTULO 3

Gráficas finitas

En esta sección analizaremos los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(C(X))$ para los continuos llamados gráficas finitas.

Definición 20. Decimos que un continuo G es una **gráfica finita** si G es una unión finita de arcos tal que cualesquiera dos de ellos cuya intersección no sea vacía, sólo se intersectan en un punto que es extremo de ambos. A esos arcos les llamaremos las **aristas** de G.



La gráfica finita más sencilla es un arco. Se sabe que el hiperespacio $C([0,1])$ es homeomorfo a $[0,1]^2$. Por lo tanto, $F_2(C([0,1]))$ es homeomorfo a $F_2([0,1]^2)$. Por otro lado, en el corolario del Teorema 1 de [16], R. Molski mostró que $F_2([0,1]^2)$ es homeomorfo a $[0,1]^4$. En el Lema 2.2 de [13], se muestra el resultado de Schori que dice que $C_2([0,1])$ es homeomorfo a $[0,1]^4$. Por tanto, tenemos que $C_2([0,1])$ y $F_2(C([0,1]))$ son homeomorfos pues ambos son 4-celdas.

Para analizar estos hiperespacios de gráficas finitas distintas del intervalo, introduciremos algunos conceptos relacionados con las gráficas finitas.

Definición 21. Sea $n \geq 3$. Una gráfica finita G es un n**-odo** si es la unión de n arcos distintos $A_1, A_2, ..., A_n$ tales que existe un punto v que es extremo de todos ellos y $\{v\} = A_i \cap A_j$ si $i \neq j$. Al punto v lo llamaremos **vértice**.

Sean G una gráfica finita, $p \in G$ y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que n es el **orden** de p si existe una vecindad cerrada de p que es un n-odo, de tal manera que p se corresponde con el vértice del n-odo.

Diremos que el orden de p es 2 si existe una vecindad de p que es un arco, pero p no es un extremo de ese arco.

Diremos que el orden de p es 1 si existe una vecindad de p que es un arco, y p es un extremo de ese arco.

Denotaremos al orden de p como $ord(p)$.

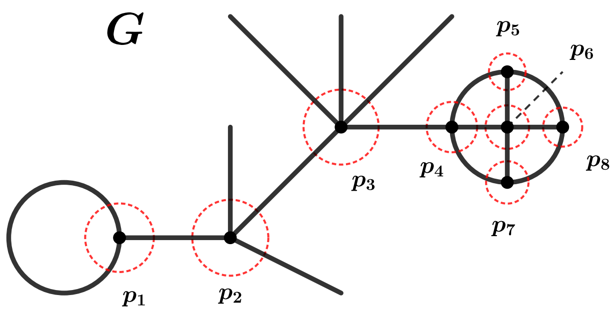
A los puntos de G de orden 1 les llamaremos **puntos terminales** de G.

A los puntos de G de orden 2 les llamaremos **puntos ordinarios** de G.

A los puntos de una gráfica G de orden mayor o igual a 3 les llamaremos **puntos de ramificación**.

Denotaremos por $R(G)$ al conjunto de puntos de ramificación de la gráfica G.

Ejemplo 22. Ejemplificamos esta definición en la siguiente gráfica G.



En la imagen están resaltados los puntos de ramificación de G, exhibiendo vecindades de cada uno, las cuales son n-odos. El orden de p_1 es 3, ya que tiene una vecindad que es un 3-odo cuyo vértice es p_1. El orden de p_2 es cuatro, pues existe una vecindad de p_2 que es un 4-odo el cual tiene como vértice a p_2. Procediendo de esta manera tenemos que:

- $ord(p_3) = 5$,
- $ord(p_4) = 4$,
- $ord(p_5) = 3$,
- $ord(p_6) = 4$,
- $ord(p_7) = 3$,
- $ord(p_8) = 3$.

Presentamos ahora un lema sencillo relacionado con los puntos de ramificación. Éste afirma que para cualquier gráfica finita G, no homeomorfa a un arco, existe un subcontinuo propio T de G que tiene a todos los puntos de ramificación de G.

Lema 23. *Sea G una gráfica finita. Entonces existe un subcontinuo propio T de G tal que $R(G) \subseteq T$.*

Demostración. Si G es un arco o una circunferencia, entonces $R(G) = \emptyset$. En esos casos consideramos p cualquier punto de G y definimos $T = \{p\}$. Entonces T es un subcontinuo propio de G que contiene al conjunto de puntos de ramificación de G.

Ahora analicemos el caso en el que G no es un arco ni una circunferencia. Construiremos a T recursivamente. Lo primero que notamos es que $R(G) \neq \emptyset$. Sea $p_1 \in R(G)$. Si p_1 es el único punto de ramificación, entonces hacemos $T = \{p_1\}$. Como p_1 es punto de ramificación de G, entonces T es un subcontinuo propio de G.

Si no, consideramos $p_2 \in R(G) \setminus \{p_1\}$. Sea T_1 un arco de p_2 a p_1 en G. Si $R(G) \subseteq T_1$, entonces definimos $T = T_1$. De modo que T_1 es un subcontinuo propio de G pues los extremos de T_1 son puntos de ramificación de G.

De otra forma, sea p_3 un punto de ramificación de G que no es elemento de T_1. Sea T_2 un arco de p_3 a p_2 en G. Si $R(G) \subseteq T_1 \cup T_2$, entonces definimos $T = T_1 \cup T_2$. p_3 es un punto terminal de T y es punto de ramificación de G, por lo que T es un subcontinuo propio de G.

Si no, entonces consideramos un punto de ramificación p_4 de G que no es elemento de $T_1 \cup T_2$ y T_3 un arco de p_4 a p_3 en G. Si $R(G) \subseteq T_1 \cup T_2 \cup T_3$, entonces definimos $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$. Como p_4 es punto terminal de T y punto de ramificación de G, entonces T es subcontinuo propio de G. Si T contiene a todos los puntos de ramificación de G ya terminamos.

Si no, continuamos recursivamente hasta agotar los puntos de ramificación de G con lo que podemos obtener un subcontinuo $T = T_1 \cup ... \cup T_n$ de G que contiene al conjunto de puntos de ramificación de G y un punto p_{n+1} que es punto terminal de T y punto de ramificación de G, por lo que T es subcontinuo propio de G. $\square$

Ahora introducimos el concepto de dimensión.

Definición 24. El conjunto vacío y sólo el conjunto vacío tiene dimensión -1.

Un espacio topológico X tiene **dimensión menor o igual a n en un punto** p si p tiene vecindades arbitrariamente pequeñas cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual a $n-1$.

El espacio X tiene dimensión menor o igual a n si X tiene dimensión menor o igual a n en cada uno de sus puntos.

El espacio X tiene dimensión n en el punto p si X tiene dimensión menor o igual a n en p y X no tiene dimensión menor o igual a $n-1$ en p.

El espacio X tiene dimensión n si la dimensión de X es menor o igual a n pero la dimensión no es menor o igual a $n-1$.

El espacio X tiene dimensión infinita si la dimensión de X no es menor o igual que ninguna $n \geq -1$.

Denotaremos $dim_p[X]$ a la dimensión del espacio X en el punto p y $dim(X)$ a la dimensión de X.

A continuación citaremos algunos resultados de la Teoría de la Dimensión que necesitaremos para probar el teorema principal de esta sección. Los presentaremos sin demostración pero dando referencias pertinentes por si el lector quiere hacer una consulta de las demostraciones de éstos. Es pertinente mencionar que algunos de ellos no son para nada triviales.

El siguiente es el Teorema 1.2 de [20].

Teorema 25. *Las nociones de que la dimensión de un espacio X en un punto p sea menor o igual a n, igual a n o infinita y que la dimensión de un espacio sea menor o igual a n, igual a n o que sea infinita son invariantes topológicos.*

El siguiente es el Teorema III 1 de [8].

Teorema 26. *Si la dimensión de X es menor o igual a n y A es un subespacio de X, entonces la dimensión de A es menor o igual a n.*

Lo que dice el siguiente resultado seguro que empata con la intuición. Éste es el Teorema 9.5 de [20].

Teorema 27. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, la dimensión de $[0,1]^n$ es n.*

Un resultado interesante es cómo se comporta la dimensión en el producto de espacios. El siguiente es conocido como el Teorema del Producto en dimensión y es el Teorema III 4 de [8].

Teorema 28. *Sean A y B dos espacios tales que al menos uno de ellos es no vacío. Entonces la dimensión del producto topológico de A y B es menor o igual que la suma de las dimensiones de cada uno.*

En vista de este teorema, es natural preguntarse bajo qué condiciones se cumple la ecuación logarítmica

$$dim(X \times Y) = dim(X) + dim(Y).$$

Se sabe que la ecuación se cumple cuando uno de los espacios tiene dimensión 0. Como consecuencia de los Teoremas 25 y 27 se tiene que en el caso en el que los espacios sean celdas también se cumple la ecuación anterior.

Teorema 29. $dim([0,1]^n \times [0,1]^m) = dim([0,1]^n) + dim([0,1]^m)$.

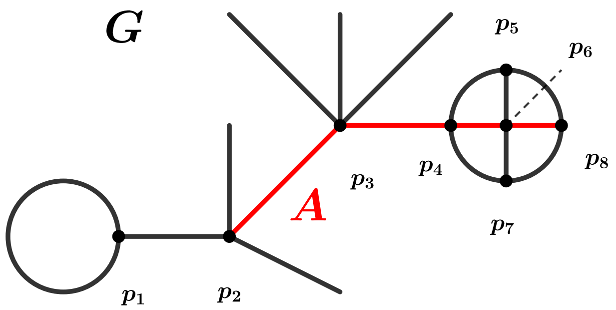
Acompañados del concepto de dimensión, regresamos a las gráficas finitas para exponer algunos resultados que nos permiten calcular la dimensión de algunos hiperespacios de gráficas finitas.

R. Duda obtuvo una fórmula para calcular la dimensión del hiperespacio $C(G)$ en los elementos A de $C(G)$ en 7.4 de [4].

Teorema 30. *Si G es una gráfica finita y $A \in C(G)$, entonces*

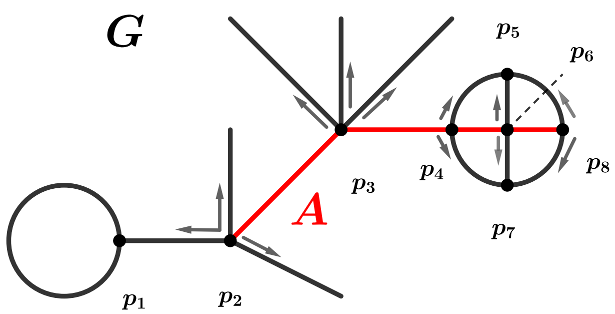
$$dim_A[C(G)] = 2 + \Sigma_{p \in R(G) \cap A}(ord(p) - 2).$$

La lectura del artículo [4] es bastante complicada. Afortunadamente el resultado anterior se encuentra expuesto de una manera más sencilla y más clara en el capítulo 11 de [11]. Para ilustrar lo que dice este teorema, consideremos la gráfica G del ejemplo anterior. En la siguiente imagen, se resalta un elemento A de $C(G)$.



Tenemos que $R(G) \cap A = \{p_2, p_3, p_4, p_6, p_8\}$. Ahora para visualizar una vecindad de A, nos preguntamos cómo son los elementos de $C(X)$ cercanos al elemento A.

Especificamente podemos extender un poco a A a partir de los puntos p_2, p_3, p_4, p_6 y p_8 sobre los arcos de la gráfica G que inciden en esos puntos. Como se muestra en la imagen, tenemos 12 posibilidades para hacerlo. Tomando estos 12 caminos para extender al elemento A, en una vecindad de A tendríamos una 12-celda, la cual, como ya mencionamos, tiene dimensión 12.



Ahora usando el Teorema 30 para calcular la dimensión del hiperespacio $C(X)$, tenemos lo siguiente:

$$dim_A[C(G)] = 2 + \Sigma_{p\in(R(G)\cap A)}(ord(p) - 2).$$

Tomando en cuenta que $R(G) \cap A = \{p_2, p_3, p_4, p_6, p_8\}$ y los órdenes en el ejemplo 22 tenemos que

$$dim_A[C(G)] = 2 + \Sigma_{p\in\{p_2,p_3,p_4,p_6,p_8\}}(ord(p) - 2) =$$

$$= 2 + (4 - 2) + (5 - 2) + (4 - 2) + (4 - 2) + (3 - 2) = 12.$$

Una vez que hemos ilustrado el Teorema 30 señalaremos que para calcular la dimensión de $C(G)$ en un elemento A de $C(G)$, Duda demostró que $C(G)$ es una unión finita de celdas y que $dim_A[C(G)]$ es la dimensión de la celda de mayor dimensión en $C(G)$ que contiene al elemento A. Esto es consecuencia de 5.4 de [4] y el Teorema III 2 de [8] y lo enunciamos en el siguiente lema:

Lema 31. *Sean G una gráfica finita, A un elemento de $C(G)$ tal que $dim_A[C(G)] = n$ y $\mathcal{U}$ una vecindad de A en $C(G)$. Entonces $\mathcal{U}$ contiene una n-celda que tiene a A.*

La doctora Verónica Martínez de la Vega, extendió en [15] la fórmula de Duda a los hiperespacios $C_n(G)$. Citamos la extensión de la fórmula en el siguiente teorema que sólo cubre el inciso (a) del Teorema 2.4 de [15]:

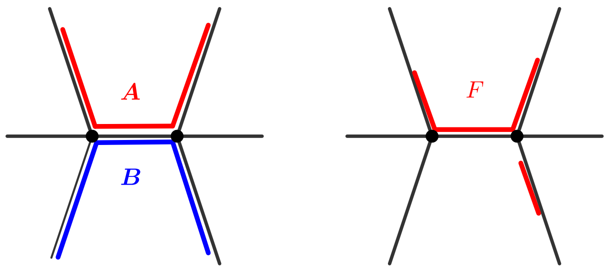
Teorema 32. *Sean G una gráfica finita y A un elemento de $C_n(X)$. Entonces*

$$dim_A[C_n(G)] = 2n + \Sigma_{p\in(R(G)\cap A)}(ord(p) - 2).$$

El proceso para obtener esta fórmula es diferente y más complicado que el que usó Duda porque no se sabe si $C_n(G)$ tiene que ser un poliedro para toda gráfica finita G, mientras que Duda sí mostró que $C(G)$ es un poliedro si G es una gráfica finita. El Teorema 32 no sólo nos ofrece una herramienta útil para calcular la dimensión de $C_n(G)$, sino que nos muestra que los puntos de ramificación juegan un papel importante en este cálculo al igual que pasa en la fórmula de Duda.

Ya tenemos todos los elementos necesarios para demostrar el teorema principal de esta sección. Antes de presentarlo, exponemos brevemente las ideas principales detrás de este resultado.

Como hemos visto en los dos teoremas anteriores, los puntos de ramificación de una gráfica finita juegan un papel importante al momento de calcular la dimensión de los hiperespacios $C_n(G)$. Consideramos un punto de ramificación p de una gráfica finita G y un elemento F en el hiperespacio $C_2(G)$ que tiene a p, p es elemento de alguna de las componentes (quizás sólo tenga una componente) de F. Por lo que un elemento F sólo puede hacer uso de p una vez para sumar en el cálculo de su dimensión. Sin embargo, en el hiperespacio $F_2(C(G))$ podemos considerar un par de elementos diferentes y superpuestos de $C(G)$ tales que ambos tienen a p como elemento, pudiendo sumar dos veces la aportación que hace p en el hiperespacio $C_2(G)$ al momento de calcular la dimensión. De esta manera, demostraremos que si una gráfica finita G tiene al menos un punto de ramificación, entonces la dimensión de $F_2(C(G))$ es mayor que la dimensión de $C_2(G)$.



$\{A, B\} \in F_2(C(G))$ $\qquad$ $F \in C_2(G)$

Teorema 33. *Sea G una gráfica finita tal que G no es homeomorfa a un intervalo ni a una circunferencia. Entonces $F_2(C(G))$ no es homeomorfo a $C_2(G)$.*

Demostración. Por el Lema 23, existe un subcontinuo propio T de G que tiene a todos los puntos de ramificación de G, es decir, $R(G) \subseteq T$.

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos abiertos de $C(G)$ tales que

- $T \in \mathcal{U}$ y $G \in \mathcal{V}$,
- $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Por el Lema 3 aplicado a los abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ del continuo $C(G)$ tenemos que

$$\langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle_{F_2(C(G))} \cong \mathcal{U} \times \mathcal{V}.$$

Por el Teorema 25, $dim(\langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle_{F_2(C(G))}) = dim(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$.

Por el Teorema 32,

$$\dim_T[C(G)] = 2 + \Sigma_{p \in R(G) \cap T}(ord(p) - 2)$$

y

$$\dim_G[C(G)] = 2 + \Sigma_{p \in R(G)}(ord(p) - 2).$$

Como $R(G) \subseteq T$, tenemos que

$$\dim_T[C(G)] = 2 + \Sigma_{p \in R(G)}(ord(p) - 2) = \dim_G[C(G)].$$

Sea $m = 2 + \Sigma_{p \in R(G)}(ord(p) - 2)$.

Por el Lema 31, $\mathcal{U}$ contiene una m-celda que tiene a T como elemento y $\mathcal{V}$ contiene una m-celda que tiene a G como elemento. Como $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son ajenos, entonces dichas m-celdas son ajenas.

Por el Teorema 26, tenemos que

$$\dim([0,1]^m \times [0,1]^m) \leq \dim(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$$

Por los teoremas 29 y 27, tenemos que

$$\dim([0,1]^m \times [0,1]^m) = 2m.$$

Por lo tanto,

$$2m \leq dim(\mathcal{U} \times \mathcal{V}).$$

Esto nos dice que la dimensión de $F_2(C(G))$ es al menos $2m$.

Por otro lado, podemos ver por la fórmula del Teorema 32 que la dimensión del hiperespacio $C_2(G)$ en cualquiera de sus elementos depende de los puntos de ramificación de G que tenga como elementos. De tal manera que la mayor dimensión del hiperespacio $C_2(G)$ se obtiene en los elementos de este hiperespacio que contienen a $R(G)$. Por lo tanto, podemos calcular la dimensión del hiperespacio $C_2(G)$ calculando la dimensión del hiperespacio en G, es decir:

$$\dim[C_2(G)] = \dim_G[C_2(G)] = 2(2)+\Sigma_{p\in R(G)}(ord(p)-2) = 4+\Sigma_{p\in R(G)}(ord(p)-2).$$

Como $G \ncong [0,1]$ y G no es homeomorfa a una circunferencia, entonces G tiene al menos un punto de ramificación, por lo que $\Sigma_{p\in R(G)}(ord(p)-2) \geq 1$.

Por tanto,

$$4+\Sigma_{p\in R(G)}(ord(p)-2) < 4+2\Sigma_{p\in R(G)}(ord(p)-2) = 2m,$$

y entonces

$$\dim[C_2(G)] = 4+\Sigma_{p\in R(G)}(ord(p)-2) < 2m \leq \dim(F_2(C(G))).$$

Como la dimensión del hiperespacio $C_2(G)$ es menor que la dimensión del hiperespacio $F_2(C(G))$, por el Teorema 25 tenemos que $F_2(C(G))$ no es homeomorfo a $C_2(G)$. □

Podemos generalizar el teorema anterior con el siguiente resultado:

Teorema 34. *Si G es una gráfica finita no homeomorfa al intervalo $[0,1]$ ni a una circunferencia, entonces $C_n(G)$ no es homeomorfo a $F_n(C(G))$ para ninguna $n \geq 2$.*

Para probar este resultado procediendo como en el teorema anterior necesitamos lo siguiente:

1. Generar n diferentes subcontinuos $K_1, K_2, ..., K_n$ de G tales que cada uno de ellos contenga al conjunto de puntos de ramificación de G.

2. Separar a los subcontinuos $K_1, K_2, ..., K_n$ con n diferentes vecindades ajenas $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ..., \mathcal{U}_n$ en $C(X)$.

3. Considerar el vietórico

$$\langle \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ..., \mathcal{U}_n \rangle_{F_n(C(X))}.$$

4. Finalmente, verificar que este vietórico tiene una dimensión mayor que la dimensión de $C_n(G)$ usando la fórmula del Teorema 32.

El siguiente lema muestra que es posible el punto 1 en la lista anterior.

Lema 35. *Sean G una gráfica finita que no es homeomorfa al intervalo ni a una circunferencia. Para toda $n \geq 3$, existen $K_1, K_2, ..., K_n \in C(G)$, distintos dos a dos, tales que $R(G) \subseteq K_i$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Demostración. Por el Lema 23, existe un subcontinuo propio T de G tal que $R(G) \subseteq T$. Sea $\alpha : [0, 1] \to C(G)$ un arco ordenado de T a G. Sean $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$. Definimos, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $K_i = \alpha(t_i)$.

Como α es arco ordenado y $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$, entonces

$$\alpha(t_1) \subsetneq \alpha(t_2) \subsetneq ... \subsetneq \alpha(t_n).$$

Además $R(G) \subseteq T = K_1$, por lo que $R(G) \subseteq K_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. □

Ahora procedemos a probar el Teorema 34.

Demostración. Sea G una gráfica finita que no es homeomorfa a un intervalo ni a una circunferencia. El caso en el que $n = 2$ está probado en el Teorema 33. Sea $n \geq 3$. Por el Lema 35, existen subcontinuos distintos $K_1, K_2, ..., K_n$ de G tales que cada uno contiene al conjunto de los puntos de ramificación de G. Separamos a los subcontinuos $K_1, K_2, ..., K_n$ con vecindades disjuntas dos a dos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ..., \mathcal{U}_n$ en $C(G)$.

Consideremos el vietórico $\langle \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ..., \mathcal{U}_n \rangle_{F_n(C(G))}$.

Por el Lema 3 aplicado a los abiertos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ..., \mathcal{U}_n$ del continuo $C(G)$ tenemos que

$$\langle \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ..., \mathcal{U}_n \rangle_{F_n(C(G))} \cong \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times ... \times \mathcal{U}_n.$$

Por el Lema 25,

$$dim(\langle \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ..., \mathcal{U}_n \rangle_{F_n(C(G))}) = dim(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times ... \times \mathcal{U}_n).$$

Además, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $R(G) \subseteq K_i$, por lo que, por el Teorema 32, tenemos que para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$dim_{K_i}[C(G)] = 2 + \Sigma_{p \in R(G)}(ord(p) - 2).$$

Sea $m = 2 + \Sigma_{p \in R(G)}(ord(p) - 2)$.

Por el Teorema 31, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathcal{U}_i$ contiene una m-celda que tiene a K_i como elemento. Como las vecindades $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ..., \mathcal{U}_n$ son ajenas dos a dos, entonces las m-celdas contenidas en las vecindades $\mathcal{U}_i$ son ajenas dos a dos.

Por el Teorema 26, tenemos que

$$dim(\underbrace{[0,1]^m \times ... \times [0,1]^m}_{n \text{ veces}}) \leq dim(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times ... \times \mathcal{U}_n).$$

Por los teoremas 29 y 27, tenemos que

$$dim(\underbrace{[0,1]^m \times ... \times [0,1]^m}_{n \text{ veces}}) = n \cdot m.$$

Por lo tanto,

$$n \cdot m \leq dim(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times ... \times \mathcal{U}_n).$$

Esto nos dice que la dimensión de $F_n(C(G))$ es al menos $n \cdot m$.

Por otro lado, podemos ver, por la fórmula del Teorema 32, que la dimensión del hiperespacio $C_n(G)$ en cualquiera de sus elementos depende de los puntos de ramificación de G que tiene como elementos. De tal manera que la mayor dimensión del hiperespacio $C_n(G)$ se obtiene en los elementos de este hiperespacio que contienen a $R(G)$. Por lo tanto, podemos calcular la dimensión del hiperespacio $C_n(G)$ calculando la dimensión del hiperespacio en G, es decir:

$$dim[C_n(G)] = dim_G[C_n(G)] = 2n + \Sigma_{p \in R(G)}(ord(p) - 2).$$

Como G no es homeomorfa a un intervalo ni a una circunferencia, entonces G tiene al menos un punto de ramificación, por lo que $\Sigma_{p \in R(G)}(ord(p) - 2) \geq 1$.

Por tanto,

$$2n + \Sigma_{p \in R(G)}(ord(p) - 2) < 2n + n\Sigma_{p \in R(G)}(ord(p) - 2) \leq n \cdot m$$

y entonces

$$dim[C_n(G)] = 2n + \Sigma_{p \in R(G)}(ord(p) - 2) < n \cdot m \leq dim(F_n(C(G)).$$

Como la dimensión del hiperespacio $C_n(G)$ es menor que la dimensión del hiperespacio $F_n(C(G))$, por el Teorema 25 tenemos que $F_n(C(G))$ no es homeomorfo a $C_n(G)$. $\square$

Con esto terminamos el resultado principal de este capítulo. En el capítulo 8, daremos una versión más fuerte del Teorema 34, pues mostraremos en el Teorema 188 que los hiperespacios $F_n(C(X))$ y $C_n(X)$ no son homeomorfos para ninguna $n \geq 2$ si X pertenece a una colección de continuos de la cual las gráficas finitas distintas al intervalo y a la circunferencia son elementos.

Terminamos este capítulo con una pregunta aún por contestar con respecto a la comparación de los hiperespacios $C_n(G)$ y $F_n(C(G))$ en el contexto de las gráficas finitas.

Pregunta. Sea $n \geq 3$, ¿es $F_n(C([0,1]))$ homeomorfo a $C_n([0,1])$?

CAPÍTULO 4

Abanicos

Después de mostrar que la única gráfica finita X que cumple que $C_n(X)$ y $F_n(C(X))$ $(n = 2)$ son homeomorfos es el intervalo $[0, 1]$, volteamos a revisar otros continuos relativamente simples. Por esta razón en este capítulo estudiamos el abanico armónico y el de Cantor. Como se puede ver, mostramos que, cuando X es uno de esos abanicos, $C_n(X)$ y $F_n(C(X))$ no son homeomorfos. Para esto, hacemos un estudio cuidadoso de los elementos de conexidad en pequeño de esos hiperespacios, combinándolo con cálculos de dimensión. En la segunda parte de este capítulo analizamos F_ω (el abanico localmente conexo que no es un árbol). Sorpresivamente resultó que $C_2(F_\omega)$ es homeomorfo a $F_2(C(F_\omega))$. Como se puede intuir, no es fácil dar el homeomorfismo necesario, su construcción pasa por la famosa caracterización del cubo de Hilbert dada por H. Toruńczyk.

4.1. El abanico armónico

Definición 36. Describiremos al abanico armónico en el plano en coordenadas polares.

Denotaremos por $\mathcal{S}$ a la sucesión armónica junto con su límite, es decir, $\mathcal{S} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

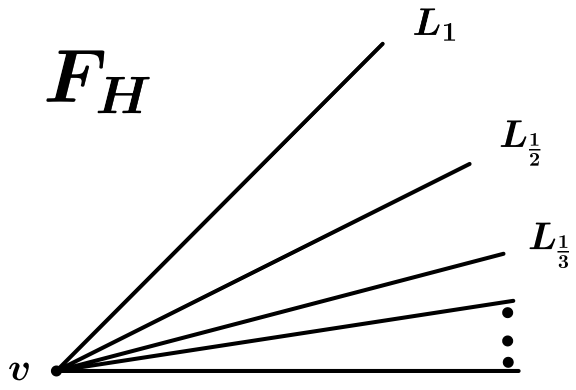
Para cada $\theta \in \mathcal{S}$, sea $L_\theta = \{\langle t, \theta\rangle : t \in [0, 1]\}$.

El abanico armónico es el espacio $F_H = \bigcup\{L_\theta : \theta \in \mathcal{S}\}$ con la topología que hereda del plano. Tenemos pues que el abanico armónico es la unión numerable de los segmentos L_θ.

Al punto $\langle 0, 0\rangle$ le llamaremos v por ser el **vértice** de F_H.

En lo siguiente cuando queramos referirnos a los segmentos que conforman al abanico armónico en la definición, lo haremos como **segmentos** L_θ.

Por otro lado, cuando hagamos referencia a los **segmentos abiertos** L_θ, nos referiremos a los segmentos $L_\theta \setminus \{v\}$ con $\theta \in \mathcal{S}$.



El resultado principal de esta sección es que si $n \geq 2$, los hiperespacios $C_n(F_H)$ y $F_n(C(F_H))$ no son homeomorfos. Para esto analizaremos las propiedades topológicas de la dimensión y la conexidad local.

Con respecto a la conexidad local, buscamos los elementos en los cuales los hiperespacios $C_n(F_H)$ y $F_n(C(F_H))$ son conexos en pequeño.

A continuación presentamos algunos resultados que nos serán de utlilidad para identificar los elementos de conexidad en pequeño del hiperespacio $C_n(F_H)$. El siguiente lema caracteriza los elementos de conexidad en pequeño del abanico armónico.

Lema 37. *Sea $p \in F_H$. Entonces F_H es conexo en pequeño en p si y sólo si p no es elemento del segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $p \in L_0 \setminus \{v\}$. Entonces p es elemento del abierto $U = F_H \setminus \{v\}$ de F_H y la componente de U que tiene a p es $L_0 \setminus \{v\}$ cuyo interior es vacío. Por lo tanto, F_H no es conexo en pequeño en p.

($\Leftarrow$) Sean p un punto de F_H que no es elemento del segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$ y U un subconjunto abierto de F_H que tiene a p. Si $p = v$, consideramos $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(\varepsilon, v) \subseteq U$. Notamos que $\mathcal{B}(\varepsilon, v)$ es conexo, pues es una unión de conexos que tienen al vértice v en común. Por lo tanto, v es elemento del interior de la componente de U que tiene a v. Si $p \neq v$, entonces $p \in L_\theta \setminus \{v\}$ para alguna $\theta \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$. Tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(\varepsilon, p) \subseteq U \cap (L_\theta \setminus \{v\})$. Entonces $\mathcal{B}(\varepsilon, p)$ es un subintervalo del segmento abierto $L_\theta \setminus \{v\}$, el cual es conexo. Por lo tanto, $\mathcal{B}(\varepsilon, p)$ está contenido en la componente de U que tiene a p. Por lo tanto, en ambos casos, F_H es conexo en pequeño en p. $\square$

Ahora caracterizaremos a los elementos en los que el hiperespacio $C(F_H)$ es conexo en pequeño.

Lema 38. *Sea $A \in C(F_H)$. Entonces $C(F_H)$ es conexo en pequeño en A si y sólo si A no está contenido en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$.*

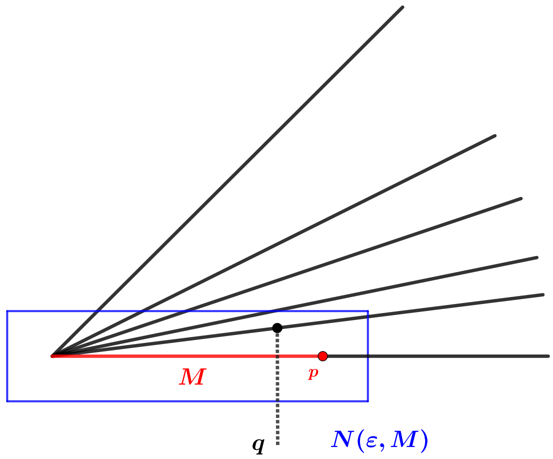
Demostración. ($\Rightarrow$) Demostraremos esta implicación por contrapositiva.

Supongamos que $A \subseteq L_0 \setminus \{v\}$. Usando coordenadas polares, como en la Definición 36, tenemos que existen $0 < a \leq b \leq 1$ tales que $A = \{\langle t, 0\rangle : t \in [a, b]\}$. Definimos $A_0 = \{\langle t, 0\rangle : t \in [a, b]\}$, $B_0 = \{\langle s, 0\rangle : s \in [0, \frac{a}{2}]\}$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos $A_i = \{\langle t, \frac{1}{i}\rangle : t \in [a, b]\}$ y $B_i = \{\langle s, \frac{1}{i}\rangle : s \in [0, \frac{a}{2}]\}$. Tenemos que $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} B_i$ es cerrado en F_H por lo que $U = F_H \setminus B$ es un abierto de F_H que además contiene a A y a cada elemento de la sucesión $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, la cual converge a A. Tenemos que la componente de $F_H \setminus B$ que contiene a A está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$ y ningún elemento de la sucesión $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ está contenido en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$. Por el Teorema 13, $C(X)$ no es localmente conexo en A.

($\Leftarrow$) Supongamos que A no está contenido en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$, entonces existe $p \in A$ tal que p no es elemento de $L_0 \setminus \{v\}$. Por el Lema 37, F_H es conexo en pequeño en p. Como A tiene un punto de conexidad en pequeño de F_H, por el Lema 14 tenemos que $C(F_H)$ es conexo en pequeño en A. □

Lema 39. *Sean $\varepsilon > 0$, $p = \langle a, 0\rangle$ un punto en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$ y M el arco de v a p. Entonces para todo $q \in N(\varepsilon, M)$, el arco que une a v con q está contenido en $N(\varepsilon, M)$.*

En atención al lector, no daremos una demostración de este lema, pues la siguiente ilustración hace que sea claro. Si tenemos un arco M contenido en el segmento límite L_0 tal que uno de sus extremos es el vértice v, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ la nube $N(\varepsilon, M)$ es arcoconexa, pues la nube es prácticamente una unión de segmentos con el vértice en común, como se muestra en la siguiente imagen.



Lema 40. *Sea $A \in C(F_H)$ tal que A no está contenido en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$, entonces $C_n(F_H)$ es conexo en pequeño en A.*

Demostración. Sea U un abierto de F_H tal que $A \subseteq U$ y sea K la componente de U que contiene a A. Mostraremos que $A \subseteq int(K)$. Sea $p \in A$. Si p no es elemento del segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$, por el Lema 37 tenemos que F_H es conexo en pequeño en p, por lo que p es elemento del interior de K.

Finalmente, si $p \in L_0 \setminus \{v\}$, como A no está contenido en $L_0 \setminus \{v\}$ y A es conexo, entonces el arco M que une a v con p está contenido en A. Por el Lema 2, existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, M) \subseteq U$. Por el Lema 39, para toda $q \in N(\varepsilon, M)$, el arco que une a v con q está contenido en $N(\varepsilon, M)$. Por lo tanto, $N(\varepsilon, M)$ es conexo, por lo que $p \in N(\varepsilon, M) \subseteq K$.

Por lo tanto, $A \subseteq int(K)$. Por el Teorema 18, $C_n(F_H)$ es conexo en pequeño en A. □

Ahora procedemos a caracterizar los elementos de conexidad en pequeño del hiperespacio $C_n(F_H)$ para $n \geq 2$.

Lema 41. *Sean $n \geq 2$ y $A \in C_n(F_H)$. Entonces $C_n(F_H)$ es conexo en pequeño en A si y sólo si ninguna componente de A está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Demostraremos esta implicación por contrapositiva.

Supongamos que alguna componente de A está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$. Dividiremos la demostración de esta implicación en dos casos: $A \in C_{n-1}(F_H)$ o $A \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$.

Caso 1. Supongamos que $A \in C_{n-1}(F_H)$ y sea A_1 una componente de A que está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$. Sea U un abierto de F_H

tal que $A_1 \subseteq U$, $(A \setminus A_1) \cap U = \emptyset$ y $v \notin U$. Por el Lema 2, existe $\varepsilon > 0$ tal que $A_1 \subseteq N(\varepsilon, A_1) \subseteq U$.

Notamos que la componente de $N(\varepsilon, A_1)$ que contiene a A_1 es $N(\varepsilon, A_1) \cap (L_0 \setminus \{v\})$ e $int(N(\varepsilon, A_1) \cap (L_0 \setminus \{v\})) = \emptyset$. Por lo tanto, si V es conexo y $A_1 \subseteq V \subseteq N(\varepsilon, A_1)$, entonces $int(V) = \emptyset$. Por el Teorema 16, 2^{F_H} no es conexo en pequeño en A_1. Por el Teorema 17, $C_n(F_H)$ no es conexo en pequeño en A.

Caso 2. Supongamos que $A \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$. Sea A_1 una componente de A que está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$. Por el Lema 38, $C(F_H)$ no es conexo en pequeño en A_1. Por el Teorema 15, $C_n(F_H)$ no es conexo en pequeño en A.

($\Leftarrow$) Sea $A \in C_n(F_H)$ y supongamos que ninguna componente de A está contenida en el segmento abierto $L_0 \setminus \{v\}$. Dividiremos la demostración de esta implicación en dos casos: $A \in C_{n-1}(F_H)$ o $A \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$.

Caso 1. Supongamos que $A \in C_{n-1}(F_H)$. Sea D una componente de A.

En el caso en el que $v \notin D$, como ninguna componente de A está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$, tenemos que existe $\theta \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ tal que $D \subseteq L_\theta \setminus \{v\}$. Sea U un abierto de F_H tal que $D \subseteq U$. Por el Lema 2, existe $\varepsilon > 0$ tal que $D \subseteq N(\varepsilon, D) \subseteq U$. Definimos $O = N(\varepsilon, D) \cap (L_\theta \setminus \{v\})$. Tenemos que O es abierto de F_H pues es intersección de dos abiertos de F_H y $D \subseteq O$. Notamos que O es conexo. Como $D \subseteq O \subseteq U$, por el Teorema 16, 2^{F_H} es conexo en pequeño en D.

En el caso en el que $v \in D$, tomamos un abierto U de F_H tal que $D \subseteq U$. Por el Lema 2, existe $\varepsilon > 0$ tal que $D \subseteq N(\varepsilon, D) \subseteq U$. Como $v \in D$, entonces $N(\varepsilon, D)$ es conexo. Por el Teorema 16, 2^{F_H} es conexo en pequeño en D.

Hemos demostrado que 2^{F_H} es conexo en pequeño en toda componente de A. Por el Teorema 17, tenemos que $C_n(F_H)$ es conexo en pequeño en A.

Caso 2. Si $A \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$. Como ninguna componente de A está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$, por el Lema 38, $C(F_H)$ es conexo en pequeño en cada componente de A. Por el Teorema 15, $C_n(F_H)$ es conexo en pequeño en A. □

Ahora vamos a caracterizar a los elementos en los que el hiperespacio $F_n(C(F_H))$ es conexo en pequeño.

Teorema 42. *Sean $n \geq 2$ y $\mathcal{A} \in F_n(C(F_H))$. Entonces $F_n(C(F_H))$ es conexo en pequeño en $\mathcal{A}$ si y sólo si ningún elemento de $\mathcal{A}$ está contenido en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que algún elemento A de $\mathcal{A}$ está contenido en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$. Entonces A es un elemento de $C(F_H)$ que está contenido en el segmento abierto $L_0 \setminus \{v\}$. Por el Teorema 38, $C(F_H)$ no es conexo en pequeño A. Por el Teorema 19, $F_n(C(F_H))$ no es conexo en pequeño $\mathcal{A}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que ningún elemento de $\mathcal{A}$ está contenido en el segmento abierto $L_0 \setminus \{v\}$. Por el Teorema 38, $C(F_H)$ es conexo en pequeño en los elementos de $\mathcal{A}$. Por el Teorema 19, $F_n(C(F_H))$ es conexo en pequeño en $\mathcal{A}$. $\square$

Una vez que hemos caracterizado los elementos de conexidad en pequeño de ambos hiperespacios, procedemos a analizar la propiedad de la dimensión.

Definición 43. Sean X un continuo y $p \in X$. Definimos **el espacio anclado de** X **en** p, denotado por $C(\{p\}, X)$, como la colección de todos los subcontinuos de X que tienen a p como elemento.

El siguiente es el Teorema 2.3 de [5].

Teorema 44. *Sea X un abanico con un número infinito de puntos finales y sea v el vértice de X. Entonces $C(\{v\}, X)$ es homeomorfo a un cubo de Hilbert.*

Usando este resultado probamos lo siguiente.

Lema 45. *Sean $n \geq 2$ y $F \in C_n(F_H)$ tales que $v \in F$. Entonces la dimensión de $C_n(F_H)$ en F es infinita.*

Demostración. Sean $F_1, ..., F_r$ las componentes de F. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v \in F_1$. Sean $U_1, ..., U_r$ abiertos en F_H tales que

1. $cl(U_i) \cap cl(U_j) = \emptyset$ para cualesquiera $i, j \in \{1, ..., r\}$ con $i \neq j$, y
2. $F_i \subseteq U_i$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$.

Por el Teorema 44, $C(F_H)$ tiene dimensión infinita en F_1. Como $\langle U_1 \rangle_{C(F_H)}$ es abierto en $C(F_H)$ y $F_1 \in \langle U_1 \rangle_{C(F_H)}$, tenemos que $\langle U_1 \rangle_{C(F_H)}$ también tiene dimensión infinita en F_1. Como $\langle cl(U_1) \rangle_{C(F_H)} \times \{F_2\} \times ... \times \{F_r\}$ es homeomorfo a $\langle cl(U_1) \rangle_{C(F_H)}$, tenemos que $dim_{\langle F_1, F_2, ..., F_r \rangle}(\langle cl(U) \rangle \times \{F_2\} \times ... \times \{F_r\})$ es infinita. Como la función $\varphi : cl(\langle U_1 \rangle) \times \{F_2\} \times ... \times \{F_r\} \to C_r(F_H)$ dada por

$$\varphi(\langle A, F_2, ..., F_r \rangle) = A \cup F_2 \cup ... \cup F_r$$

es un encaje y $F = \varphi(\langle F_1, F_2, ..., F_r \rangle)$, tenemos que $dim_F(Im\varphi)$ es infinita. Por lo tanto, la dimensión de $C_r(F_H)$ en F es infinita. Como $C_r(F_H) \subseteq C_n(F_H)$, entonces la dimensión de $C_n(F_H)$ en F es infinita. $\square$

Lema 46. *Sean $n \geq 2$ y $\mathcal{A} \in F_n(C(F_H))$ tales que $v \in \bigcup \mathcal{A}$. Entonces la dimensión de $F_n(C(F_H))$ en $\mathcal{A}$ es infinita.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_r\}$ y que $v \in A_1$. Por el Teorema 44, tenemos que $C(F_H)$ tiene dimensión infinita en A_1. Sean $\mathcal{U}$ abierto en $F_n(C(F_H))$ y $\mathcal{U}_0 = cl_{F_n(C(F_H))}(\mathcal{U})$ tales que $\{A_1\} \in \mathcal{U}$ y $\{A_2\}, ..., \{A_r\} \notin \mathcal{U}_0$.

Entonces $\mathcal{U}_0 \cap F_1(C(F_H))$ tiene dimensión infinita en $\{A_1\}$.

Entonces $(\mathcal{U}_0 \cap F_1(C(F_H))) \times \{A_2\} \times ... \times \{A_r\}$ es homeomorfo a $\mathcal{U}_0 \cap F_1(C(F_H))$ y tiene dimensión infinita en $\langle\{A_1\}, A_2, ..., A_r\rangle$.

Definimos $\varphi : (\mathcal{U}_0 \cap F_1(C(F_H))) \times \{A_2\} \times ... \times \{A_r\} \to F_r(C(F_H))$, dada por $\varphi(\langle\{B\}, A_2, ..., A_r\rangle) = \{B, A_2, ..., A_r\}$.

Notemos que φ es un encaje y $\mathcal{A} = \varphi(\langle\{A_1\}, A_2, ..., A_r\rangle)$. Por tanto, $dim_{\mathcal{A}}[Im\varphi]$ es infinita.

Como $Im\varphi \subseteq F_n(C(F_H))$, concluimos que la dimensión de $F_n(C(F_H))$ en $\mathcal{A}$ es infinita. □

Lema 47. *Sea $F \in C_n(F_H)$ tal que $F \cap L_0 = \emptyset$. Entonces $dim_F[C_n(F_H)]$ es finita.*

Demostración. Como $v \notin F$, F tiene un número finito de componentes, y puesto que $F \cap L_0 = \emptyset$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que F está contenido en el interior del conjunto $T = L_1 \cup L_{\frac{1}{2}} \cup ... \cup L_{\frac{1}{m}} \subseteq F_H$. Por el Teorema 32 aplicado a la gráfica T y al elemento $F \in C_n(T)$, tenemos que $dim_F[C_n(T)] = 2n$. Ya que $F \in \langle T \setminus \{v\}\rangle_{C_n(F_H)} \subseteq C_n(T)$, tenemos que $C_n(T)$ es una vecindad de F en $C_n(F_H)$. Por tanto $dim_F[C_n(F_H)] = dim_F[C_n(T)] = 2n$. □

Lema 48. *Sea $\mathcal{A} \in F_n(C(F_H))$ tal que $(\bigcup \mathcal{A}) \cap L_0 = \emptyset$. Entonces $dim_{\mathcal{A}}[F_n(C(F_H))]$ es finita.*

Demostración. Dada $A \in \mathcal{A}$, A es un subcontinuo de F_H tal que $A \cap L_0 = \emptyset$. De manera que A está contenido en L_θ para alguna $\theta \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$. Ya que $\mathcal{A}$ es finito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup \mathcal{A}$ está contenido en el interior del conjunto

$$T = L_1 \cup L_{\frac{1}{2}} \cup ... \cup L_{\frac{1}{m}}.$$

Por el Teorema 32, $dimC(T)$ es finita. En la prueba del Lema 3.1 de [3], se muestra que si X es un continuo que tiene dimensión finita, entonces la dimensión de $F_n(X)$ es menor o igual que $n(dimX)$, por lo tanto, como $dimC(T)$ es finita, tenemos que $dim[F_n(C(T))]$ es finita.

Dada $A \in \mathcal{A}$, tenemos que $A \in \langle int_{F_H}(T)\rangle_{C(F_H)}$. Esto muestra que $\mathcal{A} \in \langle\langle int_{F_H}(T)\rangle_{C(F_H)}\rangle_{F_n(C(F_H))}$. Dada $\mathcal{B} = \langle\langle int_{F_H}(T)\rangle_{C(F_H)}\rangle_{F_n(C(F_H))}$ y dada $B \in \mathcal{B}$, tenemos que $B \in \langle int_{F_H}(T)\rangle_{C(F_H)}$, así que $B \subseteq int_{F_H}(T) \subseteq T$. Así que $B \in C(T)$. Esto muestra que $\mathcal{B} \in F_n(C(T))$. Por tanto

$$\langle\langle int_{F_H}(T)\rangle_{C(F_H)}\rangle_{F_n(C(F_H))} \subseteq F_n(C(T)).$$

Hemos probado que $F_n(C(T))$ es una vecindad de $\mathcal{A}$ en $F_n(C(F_H))$. Por tanto $dim_{\mathcal{A}}[F_n(C(F_H))] = dim_{\mathcal{A}}[F_n(C(T))]$, la cual es finita. □

Una vez hecho este análisis nuestro objetivo es caracterizar a los elementos de ambos hiperespacios que sean de conexidad en pequeño y que tengan dimensión infinita.

Teorema 49. *Sean $n \geq 2$ y $F \in C_n(F_H)$. Entonces $C_n(F_H)$ tiene dimensión infinita y es conexo en pequeño en F si y sólo si $v \in F$ y ninguna componente de F está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Demostraremos esta implicación por contrapositiva. Sea $F \in C_n(F_H)$. Dividiremos la demostración de esta implicación en dos casos: $v \notin F$ o alguna componente de F está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$.

Caso 1. Si alguna componente de F está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$, entonces por el Teorema 41 $C_n(F_H)$ no es conexo en pequeño en F.

Caso 2. Si $v \notin F$ y ninguna componente de F está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$, entonces existen $\theta_1, ..., \theta_m \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ tales que las componentes de F están contenidas en segmentos abiertos $L_{\theta_1} \setminus \{v\}, ..., L_{\theta_m} \setminus \{v\}$. Por el Lema 47, tenemos que la dimensión de $C_n(F_H)$ en F es finita.

($\Leftarrow$) Supongamos que $v \in F$ y ninguna componente de F está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$. Por el Teorema 41 tenemos que $C_n(F_H)$ es conexo en pequeño en F y por el Lema 45 el hiperespacio $C_n(F_H)$ tiene dimensión infinita en F. □

Ahora caractericemos los elementos de $F_n(C(F_H))$ que son de dimensión infinita y de conexidad local.

Teorema 50. *Sean $n \geq 2$ y $\mathcal{A}$ un elemento de $F_n(C(F_H))$. Entonces $F_n(C(F_H))$ es conexo en pequeño y tiene dimensión infinita en $\mathcal{A}$ si y sólo si algún elemento de $\mathcal{A}$ tiene al vértice de F_H como elemento y ningún elemento de $\mathcal{A}$ está contenido en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Demostraremos esta implicación por contrapositva.

En el caso en el que algún elemento de $\mathcal{A}$ está contenido en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$, por el Teorema 42, $F_n(C(F_H))$ no es conexo en pequeño en $\mathcal{A}$.

En el caso en el que ningún elemento de $\mathcal{A}$ tiene al vértice de F_H como elemento y ninguno de los elementos de $\mathcal{A}$ está contenido en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$. Entonces $(\bigcup \mathcal{A}) \cap L_0 = \emptyset$. Por el Lema 48, tenemos que la dimensión de $F_n(C(F_H))$ en $\mathcal{A}$ es finita.

($\Leftarrow$) Supongamos que algún elemento de $\mathcal{A}$ tiene al vértice de F_H y que ninguno de sus elementos está contenido en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$. Por el Teorema 42, $F_n(C(F_H))$ es conexo en pequeño en $\mathcal{A}$ y por el Lema 46 $F_n(C(F_H))$ tiene dimensión infinita en $\mathcal{A}$. □

Definición 51. Sean $n \geq 2$ y $\mathcal{H}_n(X)$ uno de los hiperespacios $C_n(X)$ o $F_n(C(X))$. Diremos que un elemento $\mathcal{A}$ de $\mathcal{H}_n(X)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si $\mathcal{H}_n(X)$ tiene dimensión infinita y es conexo en pequeño en $\mathcal{A}$.

Definimos los siguientes subespacios de los hiperespacios que estudiamos

Definición 52. Sea $n \geq 2$ y $\mathcal{H}_n(X)$ uno de los hiperespacios $C_n(X)$ o $F_n(C(X))$. Definimos $\mathcal{E}(\mathcal{H}_n(X))$ a la colección de elementos de $\mathcal{H}_n(X)$ que tienen una base de vecindades β tal que todo básico $\mathcal{U}$ de β cumple lo siguiente: para todo $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$, $\mathcal{A}$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Como las propiedades de conexidad local y de dimensión son propiedades topológicas, si existiera un homeomorfismo $h : C_n(F_H) \to F_n(C(F_H))$, entonces $h[\mathcal{E}(C_n(F_H))] = \mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$. Nuestro objetivo en este punto de la sección es caracterizar a los elementos de $\mathcal{E}(\mathcal{H}_n(F_H))$ para cada uno de los dos hiperespacios que estamos estudiando y diferenciarlos topológicamente.

Ya sabemos cuáles son los elementos que tienen la propiedad $\mathcal{P}$ en ambos hiperespacios, ahora tenemos que encontrar elementos que además de poseer la propiedad $\mathcal{P}$, también posean vecindades compuestas únicamente por elementos con la propiedad $\mathcal{P}$. Así que comencemos con el análisis en el hiperespacio $C_n(F_H)$.

Vamos a usar las siguientes familias de funciones.

Dada $t \in (0,1)$, definimos $f_t : F_H \to F_H$ dada por $f_t(p) = tp$.

Lema 53. *Para toda $t \in (0,1)$ se cumple lo siguiente*

1. *f_t es continua.*
2. *Para toda $p \in F_H$, $\|p - f_t(p)\| \leq 1 - t$.*
3. *$f_t(v) = v$.*

Dada $m \in \mathbb{N}$, definimos $g_m : F_H \to F_H$ dada por

$$g_m(\langle t, \theta \rangle) \begin{cases} \langle t, \theta \rangle, & \text{si } \theta \in \{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{m}\}, \\ \langle t, \frac{1}{m} \rangle, & \text{si } \theta \in \{0\} \cup \{\frac{1}{m+1}, ...\}. \end{cases}$$

Lema 54. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, se cumple lo siguiente*

1. *g_m es continua.*
2. *Para toda $p \in F_H$, $\|p - g_m(p)\| \leq \frac{1}{m}$.*
3. *$g_m(v) = v$.*

Lema 55. *Sean $\varepsilon > 0$, $n \geq 2$ y $F \in C_n(F_H)$. Si F es disconexo y toda componente de F está contenida en un segmento de F_H, entonces existe $G \in C_n(F_H)$ tal que G es ε-cercano a F, G es disconexo y cada componente de G está contenida en algún segmento abierto de F_H distinto del segmento límite.*

Demostración. Sean $F_1, ..., F_m$ las componentes de F. Entonces para cada $i \in \{1, ..., m\}$, existe $\theta_i \in \mathcal{S}$ tal que $F_i \subseteq L_{\theta_i}$. Podemos suponer que $\theta_1 \leq ... \leq \theta_m$. Usando coordenadas polares, como en la Definición 36, tenemos que para todo $i \in \{1, ..., m\}$, existen $a_i, b_i \in [0, 1]$ tales que $F_i = \{\langle t, \theta_i \rangle : a_i \leq t \leq b_i\}$.

Veamos que existe $E \in C_n(F_H)$ que satisface las condiciones que le pedimos a F, que está $\frac{\varepsilon}{3}$-cercano a F y además E no interseca al segmento abierto $L_0 \setminus \{v\}$.

En el caso en el que F no intersecta a $L_0 \setminus \{v\}$, definimos $E = F$.

En el caso en el que $F \cap (L_0 \setminus \{v\}) \neq \emptyset$, tenemos dos posibilidades: todas las componentes de F están contenidas en el segmento límite L_0 o al menos alguna componente de F está contenida en algún segmento abierto de F_H distinto del segmento abierto límite.

1. $\theta_1 = ... = \theta_m = 0$.

Consideramos $s \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{s} < \frac{\varepsilon}{3}$. Definimos $E = g_s[F]$. Tenemos que todas las componentes de E están contenidas en el segmento $L_{\frac{1}{s}}$, por lo que E no interseca al segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$. Además, $H(F, E) = 0 < \frac{\varepsilon}{3}$.

2. $r < m$, $\theta_1 = ... = \theta_r = 0$ y $\theta_{r+1} > 0$. Consideramos $s \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{s} < \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{3}, \theta_{r+1}\}$. Definimos $E = g_s[F]$. Tenemos que E tiene la misma cantidad de componentes que F, $g_s[F_1], ..., g_s[F_r]$ son las componentes de E contenidas en el segmento $L_{\frac{1}{s}}$ y $g_s[F_{r+1}] = F_{r+1}, ..., g_s[F_m] = F_m$ son las componentes de E contenidas respectivamente en los segmentos $L_{\theta_{r+1}}$,..., L_{θ_m}. Por lo tanto, ninguna componente de E interseca al segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$. Finalmente, por el inciso 2 del Lema 54, $H(E, F) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Con esto hemos mostrado que existe $E \in C_n(F_H)$ tal que E es disconexo, toda componente de E está contenida en un segmento de F_H, E es ε-cercano a F y E no interseca al segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$.

Tomamos $t_0 \in (0, 1)$ tal que $1 - t_0 < \frac{\varepsilon}{3}$. Definimos $D = f_{t_0}(E)$. Por el inciso 2 del Lema 53, $H(E, D) \leq 1 - t_0 < \frac{\varepsilon}{3}$. Como f_{t_0} es una homotecia, el número de componentes de D coincide con el de E y cada componente de D está contenida en el mismo segmento que su correspondiente componente de E, así que D no interseca a $L_0 \setminus \{v\}$.

Dado que para toda $e \in E$, $\|e\| \leq 1$, tenemos que para toda $p \in D$,

$$\|p\| \leq t_0 < 1.$$

Sean $D_1, ..., D_m$ las componentes de D. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ tales que para toda $i \in \{1, ..., m\}$, $D_i \subseteq L_{\alpha_i}$. Para toda $i \in \{1, ..., m\}$, existen $a_i, b_i \in [0, 1]$ tales que $D_i = \{\langle t, \alpha_i \rangle : a_i \leq t \leq b_i\}$. Como $\langle b_i, \alpha_i \rangle \in D$, se sigue que $b_i \leq t_0$.

Fijamos $r_0 > 0$ tal que $r_0 < 1 - t_0$.

Para cada $i \in \{1, ..., m\}$, hacemos $G_i = \{\langle t, \alpha_i\rangle : a_i + r_0 \leq t \leq b_i + r_0\}$. Como $b_i + r_0 < 1$, tenemos que $G_i \subseteq F_H$. Ya que $0 < a_i + r_0$, tenemos que $v \notin G_i$. Notemos que $H(D_i, G_i) = r_0 < 1 - t_0 < \frac{\varepsilon}{3}$. Como los arcos $D_1, ..., D_m$ son ajenos dos a dos, tenemos que $G_1, ..., G_m$ son ajenos dos a dos. Por tanto $G = G_1 \cup ... \cup G_m$, es un elemento de $C_n(F_H)$, $v \notin G$, las componentes de G son $G_1, ..., G_m$ y cada una de ellas está contenida en un segmento abierto de F_H, diferente de $L_0 \setminus \{v\}$.

Además $H(F, G) \leq H(F, E) + H(E, D) + H(D, G) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. □

Lema 56. *Sean $n \geq 2$, $F \in C_{n-1}(F_H)$ tal que $v \in F$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $G \in C_n(F_H)$ tal que G es ε-cercano a F y alguna componente de G está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Definimos $E = g_m(F)$. Por el inciso 2 del Lema 54, $H(F, E) \leq \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como $v \in F$, por el inciso 3 del Lema 54, $E \cap L_0 = \{v\}$.

Finalmente, $E \in C_{n-1}(F_H)$. Esto porque al aplicar la función g_m a F, el número de componentes de E es menor o igual que el número de componentes de F.

Definimos $G = E \cup \{\langle \frac{\varepsilon}{2}, 0\rangle\}$. Entonces $H(E, G) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Como $E \in C_{n-1}(F_H)$ y el número de componentes de G es igual al número de componentes de E más uno, entonces $G \in C_n(F_H)$. Además, $H(F, G) \leq H(F, E) + H(E, G) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Por último, $\{\langle \frac{\varepsilon}{2}, 0\rangle\}$ es una componente de G contenida en $L_0 \setminus \{v\}$. □

Lema 57. *Sea $A \in C(F_H)$. Si existen $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, $\alpha \neq \beta$ tales que $A \cap (L_\alpha \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ y $A \cap (L_\beta \setminus \{v\}) \neq \emptyset$, entonces $v \in A$.*

Demostración. Supongamos que $v \notin A$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha < \beta$. Entonces los abiertos $\bigcup\{L_\theta : \beta \leq \theta \leq 1\} \setminus \{v\}$ y $\bigcup\{L_\theta : \theta < \beta\} \setminus \{v\}$ intersecados con A forman una desconexión de A en F_H. Esto contradice el hecho de que A sea subcontinuo de F_H. Por lo tanto, $v \in A$. □

Teorema 58. *Sean $n \geq 2$ y $F \in C_n(F_H)$. Entonces $F \in \mathcal{E}(C_n(F_H))$ si y sólo si $F \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$, alguna componente de F intersecta al menos a dos segmentos abiertos distintos y ninguna componente de F está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Demostraremos esta implicación por contrapositiva.

Dividiremos la demostración de esta implicación en tres casos: $F \in C_{n-1}(F_H)$ o toda componente intersecta a lo más a un segmento abierto de F_H o alguna componente de F está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$.

Caso 1. $F \in C_{n-1}(F_H)$.

En el caso en el que $v \notin F$, cada componente de F está contenida en algún segmento abierto de F_H. Si alguna componente de F está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$, entonces por el Lema 41 $C_n(F_H)$ no es conexo en pequeño en F y entonces $F \notin \mathcal{E}(C_n(F_H))$. Si ninguna componente de F está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$, entonces $F \cap L_0 = \emptyset$. Por el Lema 47, la dimensión de $C_n(F_H)$ en F es finita y $F \notin \mathcal{E}(C_n(F_H))$.

En el caso en el que $v \in F$, por el Lema 56, cualquier vecindad de F tiene un elemento G que tiene una componente contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$. Por el Lema 41, $C_n(F_H)$ no es conexo en pequeño en G, por lo que $F \notin \mathcal{E}(C_n(F_H))$.

Caso 2. Ninguna de las componentes de F intersecta a dos segmentos abiertos de F_H.

Por el Lema 55, para cada $\varepsilon > 0$, existe $G \in C_n(X)$, tal que G es ε-cercano a F y cada componente de G está contenida en algún segmento abierto de F_H distinto del segmento abierto límite. Entonces $G \cap L_0 = \emptyset$. Por el Lema 47, la dimensión de $C_n(F_H)$ en G es finita. Esto implica que $F \notin \mathcal{E}(C_n(F_H))$.

Caso 3. Alguna componente de F está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$.

Por el Lema 41, $C_n(F_H)$ no es conexo en pequeño en F, por lo que $F \notin \mathcal{E}(C_n(F_H))$.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que $F \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$, que alguna componente de F intersecta al menos a dos segmentos abiertos de F_H y que ninguna componente de F está contenida en el segmento abierto límite $L_0 \setminus \{v\}$ de F_H.

Sean $F_1, ..., F_n$ las componentes de F. Supongamos sin pérdida de generalidad que F_1 es la componente de F que intersecta al menos a dos segmentos abiertos de F_H. Por el Lema 57, $v \in F_1$. Como para toda $i \in \{2, ..., n\}$, $F_1 \cap F_i = \emptyset$ y $v \in F_1$, entonces para toda $i \in \{2, ..., n\}$, existe $\theta_i \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ tal que $F_i \subseteq L_{\theta_i} \setminus \{v\}$. Sea $\varepsilon_1 > 0$ tal que

1. Para toda $i \in \{2, ..., n\}$, $N(\varepsilon_1, F_i) \subseteq L_{\theta_i} \setminus \{v\}$,
2. Para cualesquiera $i \neq j$, $N(\varepsilon_1, F_i) \cap N(\varepsilon_1, F_j) = \emptyset$, y
3. si $A \in C(F_H)$ y $H(A, F_1) < \varepsilon_1$, entonces A intersecta a dos segmentos abiertos distintos de F_H.

Por el Lema 11, existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ tal que para todo $G \in \mathcal{B}_{C_n(F_H)}(\varepsilon, F_1 \cup ... \cup F_n)$, se tiene que $G = G_1 \cup ... \cup G_n \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$, y $H(F_1, G_1), ..., H(F_n, G_n)$ son menores que ε.

Definimos $\mathcal{W} = \mathcal{B}_{C_n(F_H)}(\varepsilon, F)$. Sea $G \in \mathcal{W}$. Como $H(G, F_1 \cup ... \cup F_n) < \varepsilon$, entonces $G = G_1 \cup ... \cup G_n \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$ y $H(F_1, G_1), ...H(F_n, G_n)$ son menores que ε. Como $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, entonces G_1 intersecta al menos a dos segmentos abiertos de F_H y $G_i \subseteq L_{\theta_i} \setminus \{v\}$ para cada $i \in \{2, ..., n\}$. Por el Teorema 49, G tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Por lo tanto, $F \in \mathcal{E}(C_n(F_H))$. $\square$

Ahora caracterizamos a los elementos de $\mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$.

Teorema 59. *Sean $n \geq 2$ y $\mathcal{A} \in F_n(C(F_H))$. Entonces $\mathcal{A} \in \mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$ si y sólo si algún elemento de $\mathcal{A}$ intersecta al menos a dos segmentos abiertos distintos de F_H y ningún elemento de $\mathcal{A}$ está contenido en el segmento L_0.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Demostraremos esta implicación por contrapositiva. Sea $\varepsilon > 0$. Dividiremos la prueba de esta implicación en dos casos: ningún elemento de $\mathcal{A}$ interseca al menos a dos segmentos abiertos distintos de F_H o algún elemento de $\mathcal{A}$ está contenido en el segmento abierto L_0.

Caso 1. Ningún elemento de $\mathcal{A}$ interseca a dos segmentos abiertos distintos de F_H.

Sea $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_r\}$. Entonces para cada $i \in \{1, ..., r\}$ existe $\theta_i \in \mathcal{S}$ tal que $A_i \subseteq L_{\theta_i}$. Entonces existen subcontinuos $B_1, ..., B_r$ de F_H tales que $H(A_i, B_i) < \varepsilon$ y $B_i \subseteq L_{\theta_i} \setminus \{v\}$ para cada $i \in \{1, ..., r\}$. Entonces $(\bigcup\{B_1, ..., B_r\}) \cap L_0 = \emptyset$. Por el Lema 48, tenemos que la dimensión de $F_n(C(F_H))$ en $\{B_1, ..., B_r\}$ es finita y además $\{B_1, ..., B_r\}$ es ε-cercano a $\mathcal{A}$ en $F_n(C(F_H))$. Por tanto, $\mathcal{A} \notin \mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$.

Caso 2. Sea $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_r\}$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $A_1 \subseteq L_0$. Entonces existe $B \in C(F_H)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$ y $B \subseteq L_0 \setminus \{v\}$. Entonces $\{B, A_2, ..., A_r\}$ es ε-cercano a $\mathcal{A}$ en $F_n(C(F_H))$ y por el Lema 42, $F_n(C(F_H))$ no es conexo en pequeño en $\{B, A_2, ..., A_r\}$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \notin \mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$.

($\Leftarrow$) Supongamos que algún elemento de $\mathcal{A}$ interseca a dos segmentos abiertos de F_H y que ningún elemento de $\mathcal{A}$ está contenido en el segmento L_0. Sea $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_r\}$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que A_1 interseca a dos segmentos abiertos distintos $L_\alpha \setminus \{v\}$ y $L_\beta \setminus \{v\}$ y ninguna A_i está contenida en el segmento L_0. Elegimos $\varepsilon > 0$ que cumpla lo siguiente:

1. Para cualesquiera $i, j \in \{1, ..., r\}$ tales que $i \neq j$, tenemos que $\mathcal{B}_{C(F_H)}(\varepsilon, A_i) \cap \mathcal{B}_{C(F_H)}(\varepsilon, A_j) = \emptyset$,

2. para todo $B \in C(F_H)$ tal que $H(A_1, B) < \varepsilon$, B interseca a dos segmentos abiertos de F_H y

3. para todo $i \in \{2, ..., r\}$ y para todo $B \in C(F_H)$, si $H(B, C_i) < \varepsilon$, B no está contenido en el segmento L_0.

Para cada $i \in \{1, ..., r\}$, definimos $\mathcal{U}_i = \mathcal{B}_{C(F_H)}(\varepsilon, A_i)$ y $\mathcal{W} = \langle \mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_r \rangle_{F_n(C(F_H))}$.

Sea $\{B_1, ..., B_m\} \in \mathcal{W}$. Como $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_r$ son disjuntos dos a dos, entonces para cada $i \in \{1, ..., m\}$, existe $j \in \{1, ..., r\}$ tal que $B_i \in \mathcal{U}_j$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B_1 \in \mathcal{U}_1$. Como $B_1 \in \mathcal{U}_1$, tenemos que B_1 interseca a dos segmentos abiertos $L_{\theta_1} \setminus \{v\}$ y $L_{\theta_2} \setminus \{v\}$. Por el Lema 57, $v \in B_1$. Además, para todo $i \in \{2, ..., m\}$, existe $j \in \{1, ..., r\}$ tal que $B_i \in \mathcal{U}_j$. Por lo tanto, para todo $i \in \{2, ..., m\}$, B_i no está contenido en el segmento límite L_0. Entonces, por el Teorema 50, $\{B_1, ..., B_m\}$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Con esto generamos una vecindad de $\mathcal{A}$ en $F_n(C(F_H))$ compuesta sólo de elementos con la propiedad $\mathcal{P}$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \in \mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$. $\square$

Una vez que hemos caracterizado a los elementos de los espacios $\mathcal{E}(C_n(F_H))$ y $\mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$, vamos a probar que son topológicamente distintos. Probaremos que el segundo es conexo mientras que el primero no lo es.

Lema 60. *Sean $n \geq 2$, $F \in C_n(F_H) \setminus C(F_H)$ y E una componente de F tal que $E \subseteq L_\theta \setminus \{v\}$ para algún $\theta \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. *$N(\varepsilon, E) \subseteq L_\theta \setminus \{v\}$,*
2. *$cl(N(\varepsilon, E)) \cap cl(N(\varepsilon, F \setminus E)) = \emptyset$, y*
3. *si $G \in C(F_H)$ y $H(E, G) < \varepsilon$, entonces $cl(N(\varepsilon, G)) \cap cl(N(\varepsilon, F \setminus E)) = \emptyset$.*

Demostración. Tenemos que E y $F \setminus E$ son cerrados disjuntos de F_H. Entonces existen abiertos disjuntos O y V de F_H tales que $E \subseteq O$ y $F \setminus E \subseteq V$. Definimos $U = O \cap (L_\theta \setminus \{v\})$. Tenemos que U es abierto de F_H ya que es la intersección de dos abiertos de F_H. Además, $E \subseteq U$ y $U \cap V = \emptyset$.

Por el Lema 2, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $E \subseteq N(\varepsilon_1, E) \subseteq U$ y $F \setminus E \subseteq N(\varepsilon_1, F \setminus E) \subseteq V$.

Sea $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Como $\varepsilon < \varepsilon_1$, entonces

$$N(\varepsilon, E) \subseteq N(\varepsilon_1, E) \subseteq U \subseteq L_\theta \setminus \{v\}.$$

Por otro lado, como $\varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{2}$, tenemos que

$$cl(N(\varepsilon, E)) \subseteq N(\varepsilon_1, E) \subseteq U$$

y

$$cl(N(\varepsilon, F \setminus E)) \subseteq N(\varepsilon_1, F \setminus E) \subseteq V$$

Como U y V son disjuntos, entonces $cl(N(\varepsilon, E)) \cap cl(N(\varepsilon, F \setminus E)) = \emptyset$.

Finalmente, tomamos $G \in C(F_H)$ tal que $H(E, G) < \varepsilon$. Entonces

$$G \subseteq N(\varepsilon, E) \subseteq cl(N(\varepsilon, E)) \subseteq N(\varepsilon, E) \subseteq U.$$

Como $F \setminus E \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$, entonces

$$cl(N(\varepsilon, G)) \cap cl(N(\varepsilon, F \setminus E)) = \emptyset.$$

$\square$

Lema 61. *Para todo $F \in \mathcal{E}(C_n(F_H))$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $G \in \mathcal{B}_{C_n(F_H)}(\varepsilon, F)$ se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *$G \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$,*
2. *alguna componente de G interseca al menos a dos segmentos abiertos de F_H,*
3. *para todo $\theta \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$, el número de componentes de F contenidas en el segmento abierto $L_\theta \setminus \{v\}$ y el número de componentes de G contenidas en el segmento abierto $L_\theta \setminus \{v\}$ son iguales.*

Demostración. Sea $F \in \mathcal{E}(C_n(F_H))$. Entonces $F \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$. Si $F_1, ..., F_n$ son las distintas componentes de F, podemos suponer sin pérdida de generalidad que F_1 es la componente de F que interseca al menos a dos segmentos abiertos de F_H y para cada $i \in \{2, ..., n\}$, existe $\theta_i \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ tal que $F_i \subseteq L_{\theta_i} \setminus \{v\}$.

Tomamos $\varepsilon_1 > 0$ tal que si $E \in C(F_H)$ y $H(E, F_1) < \varepsilon_1$, entonces E interseca al menos a dos segmentos abiertos de F_H.

Para cada $i \in \{2, ..., n\}$, aplicamos el Lema 60 a F_i para obtener ε_i tal que

1. $N(\varepsilon_i, F_i) \subseteq L_{\theta_i} \setminus \{v\}$,
2. $cl(N(\varepsilon_i, F_i)) \cap cl(N(\varepsilon_i, F \setminus F_i)) = \emptyset$, y
3. si $G \in C(F_H)$ y $H(F_i, G) < \varepsilon_i$, entonces $cl(N(\varepsilon_i, G)) \cap cl(N(\varepsilon_i, F \setminus F_i)) = \emptyset$.

Sea $0 < \varepsilon < \text{mín}\{\frac{\varepsilon_1}{2}, ..., \frac{\varepsilon_n}{2}\}$. Tomamos $G \in C_n(F)$ tal que $H_{C_n(F_H)}(F, G) < \varepsilon$. Entonces $G \subseteq N(\varepsilon, F) = N(\varepsilon, F_1) \cup ... \cup N(\varepsilon, F_n)$.

Tomamos $i, j \in \{1, ..., n\}$ distintos. Como $\varepsilon < \text{mín}\{\varepsilon_i, \varepsilon_j\}$, entonces

$$cl(N(\varepsilon, F_i)) \cap (cl(N(\varepsilon, F \setminus F_i) = \emptyset.$$

Como $F_j \subseteq F \setminus F_i$, entonces $N(\varepsilon, F_j) \subseteq cl(N(\varepsilon, F \setminus F_i))$. Por lo tanto,

$$N(\varepsilon, F_i) \cap N(\varepsilon, F_j) = \emptyset.$$

Por lo tanto, $N(\varepsilon, F_1), ..., N(\varepsilon, F_n)$ son disjuntos dos a dos.

Supongamos que existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $N(\varepsilon, F_i) \cap G = \emptyset$. Sea $p \in F_i$. Como $F \subseteq N(\varepsilon, G)$, entonces existe $q \in G$ tal que $d(p, q) < \varepsilon$. Como $G \subseteq N(\varepsilon, F)$ y $G \cap N(\varepsilon, F_i) = \emptyset$, entonces $p \in N(\varepsilon, F_j)$ para alguna $j \neq i$. Como $\varepsilon < \frac{\varepsilon_j}{2}$, entonces

$$\mathcal{B}(\varepsilon, q) \subseteq N(\varepsilon, F_j) \subseteq N\left(\frac{\varepsilon_j}{2}, F_j\right) \subseteq N\left(\frac{\varepsilon_j}{2}, cl\left(N\left(\frac{\varepsilon_j}{2}, F_j\right)\right)\right) \subseteq N(\varepsilon_j, F_j).$$

Esto contradice que $cl(N(\varepsilon_j, F_j)) \cap cl(N(\varepsilon_j, F \setminus F_j)) = \emptyset$. Por lo tanto, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $G \cap N(\varepsilon, F_i) \neq \emptyset$.

Como $G \subseteq N(\varepsilon, F_1) \cup ... \cup N(\varepsilon, F_n)$, los conjuntos $N(\varepsilon, F_1), ..., N(\varepsilon, F_n)$ son ajenos dos a dos y $N(\varepsilon, F_i) \cap G \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, entonces G tiene n componentes $G_1, ..., G_n$ tales que $G_i \subseteq N(\varepsilon, F_i)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Mostremos ahora que $H(F_i, G_i) < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Ya tenemos que $G_i \subseteq N(\varepsilon, F_i)$ para cada $i \in \{1, ...n\}$. Basta demostrar que para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $F_i \subseteq N(\varepsilon, G_i)$.

Como $H_{C_n(F_H)}(F, G) < \varepsilon$, entonces

$$F_i \subseteq F \subseteq N(\varepsilon, G) = N(\varepsilon, G_1) \cup ... \cup N(\varepsilon, G_n).$$

Supongamos que $F_i \not\subseteq N(\varepsilon, G_i)$, entonces existen $p \in F_i$ y $j \neq i$ tal que $p \in N(\varepsilon, G_j)$. Como $\varepsilon < \frac{\varepsilon_j}{2}$ y $G_j \subseteq N(\varepsilon, F_j)$ entonces

$$N(\varepsilon, G_j) \subseteq N(\varepsilon, cl(N(\varepsilon, F_j))) \subseteq N\left(\frac{\varepsilon_j}{2}, cl\left(N\left(\frac{\varepsilon_j}{2}, F_j\right)\right)\right) \subseteq N(\varepsilon_j, F_j).$$

Como $N(\varepsilon, F_j) \cap N(\varepsilon, F_k) = \emptyset$ para toda $k \neq j$, F_i es disconexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $F_i \subseteq N(\varepsilon, G_i)$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$.

Por lo tanto, $H(F_i, G_i) < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Como $\varepsilon < \varepsilon_1$, entonces G_1 interseca al menos a dos segmentos abiertos de F_H. Como para toda $i \in \{2, ..., n\}$ tenemos que $\varepsilon < \varepsilon_i$, entonces $G_i \subseteq L_{\theta_i} \setminus \{v\}$. □

Lema 62. *El espacio $\mathcal{E}(C_n(F_H))$ no es conexo.*

Demostración. Definimos

$$\mathcal{U} = \{F \in \mathcal{E}(C_n(F_H)) : \text{sólo una componente de } F \text{ no está contenida en } L_1 \setminus \{v\}\}$$

y

$$\mathcal{V} = \mathcal{E}(C_n(F_H)) \setminus \mathcal{U}.$$

Demostraremos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ forman una desconexión de $\mathcal{E}(C_n(F_H))$. Primero veamos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abiertos.

Sea $F \in \mathcal{U}$. Como $F \in \mathcal{E}(C_n(F_H))$, $F \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$. Si $F_1, ..., F_n$ son las distintas componentes de F, podemos suponer sin pérdida de generalidad que F_1 interseca a dos segmentos abiertos de F_H. Como $F \in \mathcal{U}$, entonces $F_2, ..., F_n$ están contenidas en $L_1 \setminus \{v\}$. Por el Lema 61, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $G \in \mathcal{B}_{C_n(F_H)}(\varepsilon, F)$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $G \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$,

2. alguna componente de G interseca al menos a dos segmentos abiertos de F_H,

3. $n - 1$ componentes de G están contenidas en $L_1 \setminus \{v\}$.

Entonces $\mathcal{B}_{C_n(F_H)}(\varepsilon, F) \subseteq \mathcal{U}$, por lo que $\mathcal{U}$ es abierto.

Sea $E \in \mathcal{V}$. Como $E \in \mathcal{E}(C_n(F_H))$, $E \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$. Si $E_1, ..., E_n$ son las distintas componentes de E, podemos suponer sin pérdida de generalidad que E_1 interseca a dos segmentos abiertos de F_H. Como $E \notin \mathcal{U}$, para cada $i \in \{2, ..., n\}$, existe $\theta_i \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ tal que $E_i \subseteq L_{\theta_i} \setminus \{v\}$ y existe algún $j \in \{2, ..., n\}$ tal que $\theta_j \neq 1$. Por el Lema 61, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $G \in \mathcal{B}_{C_n(F_H)}(\varepsilon, E)$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $G \in C_n(F_H) \setminus C_{n-1}(F_H)$,

2. alguna componente de G interseca al menos a dos segmentos abiertos de F_H,

3. para todo $\theta \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$, el número de componentes de E contenidas en el segmento abierto $L_\theta \setminus \{v\}$ y el número de componentes de G contenidas en el segmento abierto $L_\theta \setminus \{v\}$ son iguales.

Sea $G \in \mathcal{B}_{C_n(F_H)}(\varepsilon, E)$, entonces por 1 y 2, tenemos que $G \in \mathcal{E}(C_n(F_H))$. Como hay al menos una componente de E contenida en el segmento abierto $L_{\theta_j} \setminus \{v\}$, entonces por 3 tenemos que al menos una componente de G está contenida en el segmento abierto $L_{\theta_j} \setminus \{v\}$. Como $\theta_j \neq 1$, entonces $G \notin \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_{C_n(F_H)}(\varepsilon, E) \subseteq \mathcal{V}$, por lo que $\mathcal{V}$ es abierto.

Por definición, $\mathcal{E}(C_n(F_H)) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

Tomamos $p_1, ..., p_{n-1} \in L_1 \setminus \{v\}$ y $q_1, ..., q_{n-1} \in L_{\frac{1}{4}} \setminus \{v\}$. Definimos

$$E = L_{\frac{1}{2}} \cup L_{\frac{1}{3}} \cup \{p_1, ..., p_{n-1}\}$$

y

$$F = L_{\frac{1}{2}} \cup L_{\frac{1}{3}} \cup \{q_1, ..., q_{n-1}\}.$$

Tenemos que $L_{\frac{1}{2}} \cup L_{\frac{1}{3}}$ es componente tanto de E como de F que interseca a los segmentos abiertos $L_{\frac{1}{2}} \setminus \{v\}$ y $L_{\frac{1}{3}} \setminus \{v\}$. Las componentes restantes de E están contenidas en el segmento abierto $L_1 \setminus \{v\}$ y las componentes restantes de F están contenidas en el segmento abierto $L_{\frac{1}{4}} \setminus \{v\}$, por lo que $E \in \mathcal{U}$ y $F \in \mathcal{V}$. Por lo que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son no vacíos.

Por lo tanto, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ forman una desconexión de $\mathcal{E}(C_n(F_H))$. □

Lema 63. *Para todo $n \geq 2$, el espacio $\mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$ es conexo.*

Demostración. Mostraremos que el espacio $\mathcal{E}(F_n(C(F_H))$ es conexo por trayectorias. Esto lo haremos mostrando que para cualquier $\mathcal{A} \in \mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$ existe una trayectoria $\alpha : [0, 1] \to F_n(C(F_H))$ de $\mathcal{A}$ a $\{F_H\}$ tal que para todo $t \in [0, 1]$, $\alpha(t) \in \mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$.

Sea $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_r\} \in \mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$. Para todo $i \in \{1, ..., r\}$ tomamos un arco ordenado $\beta_i : [0,1] \to C(F_H)$ de A_i a F_H. Definimos la función $\alpha : [0,1] \to F_n(C(F_H))$ dada por $\alpha(t) = \{\beta_1(t), ..., \beta_r(t)\}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que:

- $A_1 \cap (L_{\theta_1} \setminus \{v\}) \neq \emptyset \neq A_1 \cap (L_{\theta_2} \setminus \{v\})$ para algunos θ_1 y θ_2 en $\mathcal{S}$ tales que $\theta_1 \neq \theta_2$, y
- para todo $i \in \{2, ..., r\}$, $A_i \nsubseteq L_0$.

Como para todo $i \in \{1, ..., r\}$, β_i es un arco ordenado, entonces para todo $t \in [0,1]$, $A_i \subseteq \beta_i(t)$. Por lo tanto, para todo $t \in [0,1]$ se tiene que:

- $\beta_1(t) \cap (L_{\theta_1} \setminus \{v\}) \neq \emptyset \neq \beta_1(t) \cap (L_{\theta_2} \setminus \{v\})$, y
- para toda $i \in \{2, ..., r\}$, $\beta_i(t) \nsubseteq L_0$.

Por lo tanto, para todo $t \in [0,1]$, tenemos que $\alpha(t) \in \mathcal{E}(F_n(C(F_H))$. $\square$

Con todo el trabajo desarrollado concluimos con el resultado que anunciamos desde el principio.

Corolario 64. *Para todo $n \geq 2$, los hiperespacios $C_n(F_H)$ y $F_n(C(F_H))$ no son homeomorfos.*

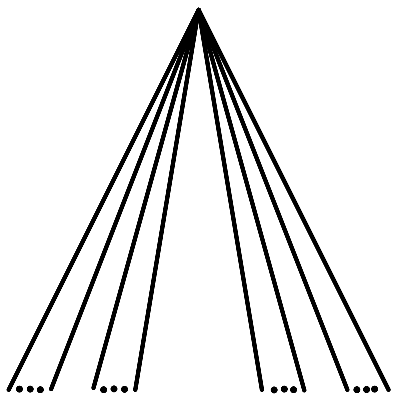
Demostración. Como la dimensión y la conexidad local son propiedades topológicas, entonces si existiera un homeomorfismo $h : C_n(F_H) \to F_n(C(F_H))$ entre ambos hiperespacios, la imagen bajo h de $\mathcal{E}(C_n(F_H))$ sería $\mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$. Por lo que h restringido a $\mathcal{E}(C_n(F_H))$ sería un homeomorfismo entre los subespacios $\mathcal{E}(C_n(F_H))$ y $\mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$. Sin embargo, $\mathcal{E}(C_n(F_H))$ no es conexo y $\mathcal{E}(F_n(C(F_H)))$ es conexo, lo cual es una contradicción. $\square$

4.2. El abanico de Cantor

Después de analizar el abanico armónico, consideramos un abanico más complejo: el abanico de Cantor.

Definición 65. Dados puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ denotamos por pq al segmento convexo que los une. Denotamos por $\mathcal{C}$ al conjunto ternario de Cantor y nos referiremos a el simplemente como **conjunto de Cantor**. Definimos $v = (\frac{1}{2}, 1)$. Al punto v le llamaremos el **vértice** del abanico. Para cada $x \in \mathcal{C}$ definimos $p_x = (x, 0)$. Definimos $L_x = vp_x$.

Definimos el abanico de Cantor como el conjunto $\bigcup\{L_x : x \in \mathcal{C}\}$. Denotaremos al abanico de Cantor por $F_{\mathcal{C}}$. A los segmentos L_x les llamaremos los **segmentos** del abanico de Cantor.



En esta sección demostraremos que los hiperespacios $C_n(F_{\mathcal{C}}))$ y $F_n(C(F_{\mathcal{C}}))$ no son homeomorfos. Aunque este espacio es más complejo que el abanico armónico, demostrar que los hiperespacios no son homeomorfos resulta más sencillo. Para esto, demostraremos que los elementos en los que el hiperespacio $C_n(X)$ no es conexo en pequeño forman un conjunto denso en $C_n(X)$ mientras que en $F_n(C(X))$ existe una vecindad compuesta únicamente de elementos de conexidad en pequeño.

Lema 66. *Sean X un continuo, p un punto de corte de X, U y V dos abiertos disjuntos y no vacíos de X tales que $X \setminus \{p\} = U \cup V$ y X es conexo en pequeño en p. Entonces para todo $B \in \langle U, V, X\rangle_{C(X)}$, $p \in B$ y $C(X)$ es conexo en pequeño en B.*

Demostración. Si $p \notin B$, entonces $B \subseteq U \cup V$, $B \cap U \neq \emptyset$ y $B \cap V \neq \emptyset$, lo cual contradice la conexidad de B. Por tanto $p \in B$. Por el Lema 14, $C(X)$ es conexo en pequeño en B. $\square$

Definición 67. Para un continuo X y $n \geq 2$, denotamos por $\mathcal{CP}(F_n(C(X)))$ al conjunto

$$\{\mathcal{A} \in F_n(C(X)) : F_n(C(X)) \text{ es conexo en pequeño en } \mathcal{A}\}$$

y por $\mathcal{CP}(C_n(X))$ al conjunto

$$\{E \in C_n(X) : C_n(X) \text{ es conexo en pequeño en } E\}.$$

Lema 68. *Sean X un continuo, p un punto de corte en X y $n \geq 2$. Entonces $int_{F_n(C(X))}(\mathcal{CP}(F_n(C(X)))) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sean U y V dos abiertos disjuntos y no vacíos de X tales que $U \cup V = X \setminus \{p\}$.

Por el Lema de las orejas los conjuntos $A = U \cup \{p\}$ y $B = V \cup \{p\}$ son subcontinuos de X. Usando un arco ordenado de A a X, podemos encontrar subcontinuos B_1,..., B_n de X tales que $A \subsetneq B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq ... \subsetneq B_{n-1} \subsetneq B_n = X$.

Elegimos puntos $p_1 \in B_1 \setminus A$, $p_2 \in B_2 \setminus B_1$, $p_3 \in B_3 \setminus B_2$,..., $p_n \in B_n \setminus B_{n-1}$ y abiertos U_1, U_2,..., U_{n-1} de X con las siguientes propiedades.

$B_1 \subseteq U_1$ y $cl_X(U_1) \cap \{p_2, ..., p_n\} = \emptyset$,

$B_2 \cup cl_X(U_1) \subseteq U_2$ y $cl_X(U_2) \cap \{p_3, ..., p_n\} = \emptyset$,

$B_3 \cup cl_X(U_2) \subseteq U_3$ y $cl_X(U_3) \cap \{p_4, ..., p_n\} = \emptyset$,

...

$B_{n-1} \cup cl_X(U_{n-2}) \subseteq U_{n-1}$ y $p_n \notin cl(U_{n-1})$.

Sean $U_0 = U$ y $U_n = X$.

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, definimos

$$\mathcal{U}_i = \langle U_i \rangle_{C(X)} \cap \langle U, X \setminus cl_X(U_{i-1}), X \rangle_{C(X)}.$$

Notemos que $\mathcal{U}_i$ es abierto en $C(X)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Como para toda $i \in \{1, ..., n\}$, $B_i \subseteq U_i$, $p_i \in B_i \setminus cl_X(U_{i-1})$ y $U \subseteq B_i$, entonces $B_i \in \mathcal{U}_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Si $1 \leq i < j \leq n$ y existe $D \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$, entonces $D \subseteq U_i$ y

$$\emptyset \neq D \cap (X \setminus cl_X(U_{j-i})) \subseteq D \cap (X \setminus cl_X(U_i)),$$

lo cual es absurdo. Por tanto $\mathcal{U}_1$,..., $\mathcal{U}_n$ son ajenos dos a dos.

Sea $\mathfrak{U} = \langle \mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_n \rangle_{F_n(C(X))}$. Entonces $\mathfrak{U}$ es abierto en $F_n(C(X))$. Notamos que $\{B_1, ..., B_n\} \in \mathfrak{U}$, así que $\mathfrak{U} \neq \emptyset$.

Dado $\mathcal{D} \in \mathfrak{U}$, $\mathcal{D}$ interseca a cada uno de los conjuntos $\mathcal{U}_1$,..., $\mathcal{U}_n$, y como éstos son ajenos dos a dos y $\mathcal{D}$ tiene a lo más n elementos, entonces tenemos que $\mathcal{D}$ tiene exactamente n elementos D_1,..., D_n tales que $D_1 \in \mathcal{U}_1$,..., $D_n \in \mathcal{U}_n$.

Dada $i \in \{1, ..., n\}$, $D_i \cap U \neq \emptyset$ y

$$\emptyset \neq D_i \cap (X \setminus cl_X(U_{i-1})) \subseteq D_i \cap (X \setminus cl_X(U)) = D_i \cap V.$$

De manera que D_i interseca a V y a U para cada $i \in \{1, ..., n\}$, por lo que $D_i \in \langle U, V, X\rangle_{C(X)}$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por el Lema 66, $C(X)$ es conexo en pequeño en D_i para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Por el Lema 19, $F_n(C(X))$ es conexo en pequeño en $\mathcal{D}$ para toda $\mathcal{D} \in \mathfrak{U}$. Por tanto $int_{F_n(C(X))}(\mathcal{CP}(F_n(C(X)))) \neq \emptyset$. $\square$

Lema 69. *Sean $x \in \mathcal{C}$ y $F \in C(F_{\mathcal{C}})$ tales que $F \subseteq L_x \setminus \{v\}$. Si $\varepsilon > 0$ es tal que $v \notin N(\varepsilon, F)$, entonces existen sucesiones $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(F_{\mathcal{C}})$ tales que:*

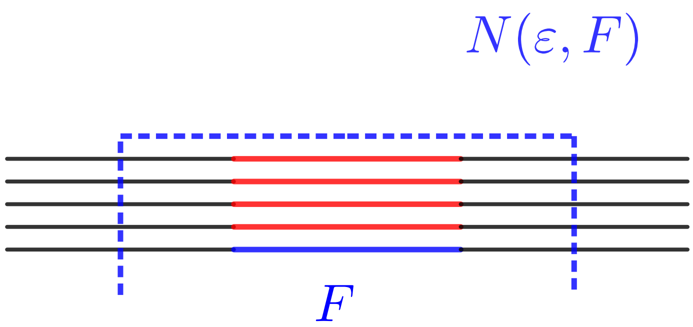
1. *Para toda $n \in \mathbb{N}$, $y_n \neq x$,*

2. *para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subseteq N(\varepsilon, F)$, y*

3. *$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a F.*

En atención al lector, para no llenarlo de símbolos, no daremos una demostración de este lema, pues la siguiente ilustración hace que sea claro. En la imagen podemos ver un subcontinuo F de $C(F_{\mathcal{C}})$ que no tiene al vértice y por tanto es un arco contenido en algún segmento $L_x \setminus \{v\}$.

Como todos los puntos del conjunto de Cantor son puntos de acumulación, entonces existen sucesiones de segmentos distintos de $F_{\mathcal{C}}$ que convergen a L_x. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ podemos encontrar arcos dentro de los segmentos que convergen a L_x que converjan a F contenidos en la nube $N(\varepsilon, F)$.



Lema 70. *Sea $F \in C(F_{\mathcal{C}})$ tal que $v \notin F$. Entonces $C(F_{\mathcal{C}})$ no es conexo en pequeño en F.*

Demostración. Como $v \notin F$, entonces existe $x \in \mathcal{C}$ tal que $F \subseteq L_x \setminus \{v\}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $v \notin N(\varepsilon, F)$. Notamos que la componente de $N(\varepsilon, F)$ que tiene a F es $N(\varepsilon, F) \cap L_x \setminus \{v\}$. Por el Lema 69, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos de $F_{\mathcal{C}}$ contenida en el abierto $N(\varepsilon, F)$, que converge a F y tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \nsubseteq L_x \setminus \{v\}$. Por el Teorema 13, tenemos que $C(F_{\mathcal{C}})$ no es conexo en pequeño en F. □

Lema 71. *Sean X un continuo, $n \geq 2$ y $\varepsilon > 0$. Entonces para todo $F \in C_n(X)$, existe $G \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$ tal que G es ε-cercano a F.*

Demostración. En el caso en el que $F \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$, definimos $G = F$.

En el caso en el que $F \in C_{n-1}(X)$, tenemos que F tiene m componentes y que $m < n$.

Si $F \neq X$, por la conexidad de X, existe un punto $p \in Fr_X(F)$. Entonces $\mathcal{B}(\varepsilon, p) \setminus F$ es un abierto no vacío de X. Por la conexidad de X, $\mathcal{B}(\varepsilon, p)$ no puede ser finito. Por tanto es posible elegir puntos diferentes entre sí, $p_{m+1}, ..., p_n \in \mathcal{B}(\varepsilon, p) \setminus F$. Definimos $G = F \cup \{p_{m+1}, ..., p_n\}$. Entonces G tiene exactamente n componentes y es ε-cercano a F.

Finalmente, si $F = X$, usando un arco ordenado de un conjunto singular $\{q\}$ a X, podemos encontrar un subcontinuo G_1 de X tal que $H(F, G_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $G_1 \neq X$. Procediendo como en el párrafo previo, podemos encontrar un elemento $G \in$

$C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$ tal que $H(G_1, G) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto

$$H(F, G) \leq H(F, G_1) + H(G_1, G) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$\square$

Teorema 72. *Sean $n \geq 2$ y $F \in C_n(F_{\mathcal{C}})$. Entonces para toda vecindad $\mathcal{U}$ de F en $C_n(F_{\mathcal{C}})$, existe $G \in \mathcal{U}$ tal que $C_n(F_{\mathcal{C}})$ no es conexo en pequeño en G.*

Demostración. Sean $n \geq 2$, $F \in C_n(F_{\mathcal{C}})$ y $\varepsilon > 0$. Por el Lema 71, existe $G \in C_n(F_{\mathcal{C}}) \setminus C_{n-1}(F_{\mathcal{C}})$ que es ε-cercano a F. Sean $G_1, ..., G_n$ las distintas componentes de G. Como $n \geq 2$, existe alguna componente de G que no tiene al vértice. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v \notin G_1$. Por el Lema 70, tenemos que $C(F_{\mathcal{C}})$ no es conexo en pequeño en G_1. Por el Teorema 15, tenemos que $C_n(F_{\mathcal{C}})$ no es conexo en pequeño en G. $\square$

Teorema 73. *Para todo $n \geq 2$, $F_n(C(F_{\mathcal{C}}))$ no es homeomorfo a $C_n(F_{\mathcal{C}})$.*

Demostración. Sea $n \geq 2$. Supongamos que existe un homeomorfismo

$$h : F_n(C(F_{\mathcal{C}})) \to C_n(F_{\mathcal{C}}).$$

Como la conexidad en pequeño es una propiedad topológica, entonces la imagen bajo h de $\mathcal{CP}(F_n(C(F_{\mathcal{C}})))$ es $\mathcal{CP}(C_n(F_{\mathcal{C}}))$. Como h es homeomorfismo, entonces la imagen bajo h de $int_{F_n(C(F_{\mathcal{C}}))}(\mathcal{CP}(F_n(C(F_{\mathcal{C}}))))$ es $int_{C_n(F_{\mathcal{C}})}(\mathcal{CP}(C_n(F_{\mathcal{C}})))$.

Como el vértice v es un punto de corte de $F_{\mathcal{C}}$, entonces por el Lema 68, tenemos que $int_{F_n(C(F_{\mathcal{C}}))}(\mathcal{CP}(F_n(C(F_{\mathcal{C}})))) \neq \emptyset$.

Por otro lado, por el Lema 72, $int_{C_n(F_{\mathcal{C}})}(\mathcal{CP}(C_n(F_{\mathcal{C}}))) = \emptyset$. Esto contradice que $h[int_{F_n(C(F_{\mathcal{C}}))}(\mathcal{CP}(F_n(C(F_{\mathcal{C}}))))] = int_{C_n(F_{\mathcal{C}})}(\mathcal{CP}(C_n(F_{\mathcal{C}})))$.

Por lo tanto, para todo $n \geq 2$, no existe homeomorfismo entre $F_n(C(F_{\mathcal{C}}))$ y $C_n(F_{\mathcal{C}})$. $\square$

Como se puede observar, el argumento usado para el abanico armónico no se puede usar para el de Cantor y lo mismo ocurre en la otra dirección. Como no pudimos encontrar un argumento unificado, la siguiente pregunta resulta natural.

Pregunta. ¿Existe un abanico no localmente conexo X tal que para alguna $n \geq 2$, $C_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(C(X))$?

4.3. El abanico F_ω

Ahora analizaremos un abanico que es localmente conexo: el continuo conocido como F_ω. Mostraremos que los hiperespacios $C_2(F_\omega)$ y $F_2(C(F_\omega))$ son homeomorfos.

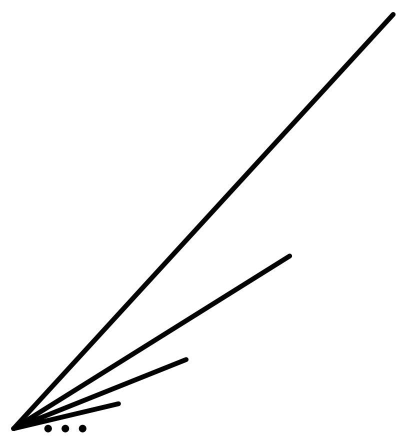
Definición 74. El continuo conocido como F_ω es definido como la unión de una sucesión de segmentos de recta cuya longitud tiende a 0, donde todos los segmentos tienen un extremo en común.

Describiremos al continuo F_ω en el plano en coordenadas polares. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $L_n = \{\langle t, \frac{1}{n}\rangle : t \in [0, \frac{1}{n}]\}$.

Definimos $F_\omega = \bigcup\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Al punto $\langle 0, 0\rangle$ le llamaremos el vértice de F_ω y lo denotaremos por v.

A lo largo de esta sección cuando hagamos referencia a los segmentos de F_ω, nos referiremos a los **segmentos** L_n de la definición del continuo. Por otro lado, cuando hagamos referencia a los **segmentos abiertos de** F_ω, nos referiremos a los segmentos $L_n \setminus \{v\}$.



Definición 75. Para toda $A \in C(F_\omega)$, denotamos por $C_2(A, F_\omega)$ al conjunto $\{E \in C_2(F_\omega) : A \subseteq E\}$.

Mostraremos que el espacio $C_2(\{v\}, F_\omega)$ es homeomorfo a un cubo de Hilbert. Para esto usaremos algunos conceptos y resultados que presentamos a continuación.

Definición 76. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Una función continua y suprayectiva $r : X \to Y$ es una **retracción** si $r|_Y$ es la función identidad sobre Y.

Diremos que Y es un **retracto** de X si existe una retracción $r : X \to Y$.

Teorema 77. *Sea X un espacio métrico. Si Y es un retracto de X, entonces Y es cerrado en X.*

Demostración. Mostraremos que $X \setminus Y$ es abierto en X. Sean $r : X \to Y$ una retracción y $x \in X \setminus Y$. Tenemos que $r(x) \in Y$. Como $r(x) \in Y$ y $x \in X \setminus Y$, entonces $x \neq r(x)$. Tomamos dos abiertos disjuntos U y V de X tales que $r(x) \in U$ y $x \in V$. Por la continuidad de r, tenemos que $r^{-1}(U \cap Y)$ es un abierto de X tal que $x \in r^{-1}(U \cap Y)$. Definimos $W = r^{-1}(U \cap Y) \cap V$. Entonces W es un abierto de X tal que $x \in W$.

Mostraremos que $W \subseteq X \setminus Y$. Sea $w \in W$. Tenemos que $w \in V$ y $w \in r^{-1}(U \cap Y)$. Entonces $r(w) \in U \cap Y$. Como $U \cap V = \emptyset$, entonces $r(w) \neq w$. Por lo tanto, $w \in X \setminus Y$. $\square$

Definición 78. Decimos que un espacio métrico X es un **retracto absoluto** si para cualquier espacio métrico Z y cualquier encaje $h : X \to Z$ tal que $h(X)$ es un cerrado de Z, se tiene que $h(X)$ es retracto de Z.

El siguiente es la Proposición 7.7 de la página 97 de [7].

Lema 79. *Todo retracto de un retracto absoluto es un retracto absoluto.*

El siguiente es el Teorema II_m de [22].

Teorema 80. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n(X)$ es un retracto absoluto.*

Definición 81. Sea (X, d) un continuo. Decimos que A es un **Z-conjunto en** X si y sólo si A es un subconjunto cerrado de X y para todo $\varepsilon > 0$, existe una función $f_\varepsilon : X \to X \setminus A$ tal que $d(x, f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in X$.

El siguiente resultado es el Teorema 1 de [23]. Este teorema es conocido como la Caracterización de Toruńczyk del cubo de Hilbert

Teorema 82. *Si X es un retracto absoluto, compacto y métrico tal que la función identidad sobre X puede ser aproximada por funciones continuas cuyas imágenes son Z-conjuntos en X, entonces X es un cubo de Hilbert.*

Lo primero que haremos es mostrar que el espacio $C_2(\{v\}, F_\omega)$ es un retracto absoluto.

Definición 83. Sea $A \in C_2(F_\omega) \setminus C_2(\{v\}, F_\omega)$.

Diremos que A es del **tipo 1** si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq L_n \setminus \{v\}$.

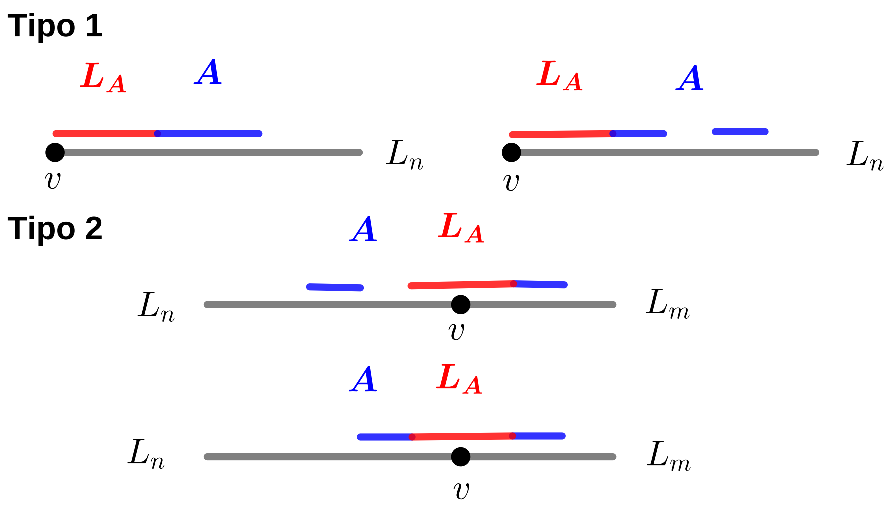
Diremos que A es del **tipo 2** si existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \neq m$, $A \subseteq (L_n \setminus \{v\}) \cup (L_m \setminus \{v\})$, $A \cap (L_n \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ y $A \cap (L_m \setminus \{v\}) \neq \emptyset$.

Denotamos por ε_A al supremo del conjunto $\{\varepsilon > 0 : \mathcal{B}(\varepsilon, v) \cap A = \emptyset\}$.

Notemos que $\varepsilon_A = \text{mín}\{d(v, a) : a \in A\}$.

Definimos L_A como sigue

$$L_A = \begin{cases} \{\langle t, \frac{1}{n}\rangle : 0 \leq t \leq \varepsilon_A\}, & \text{si } A \text{ es del tipo 1 y } A \subseteq L_n, \\ \{\langle t, \frac{1}{n}\rangle : 0 \leq t \leq \varepsilon_A\} \cup \{\langle t, \frac{1}{m}\rangle : 0 \leq t \leq \varepsilon_A\}, & \text{si } A \text{ es del tipo 2 y} \\ & A \subseteq L_n \cup L_m. \end{cases}$$



Sean $A \in C_2(F_\omega) \setminus C_2(\{v\}, F_\omega)$ y $0 < \varepsilon_A < \varepsilon$. Entonces $L_A \subseteq \mathcal{B}(\varepsilon, v)$.

Consideramos la función $r : C_2(F_\omega) \to C_2(\{v\}, F_\omega)$ dada por

$$r(A) = \begin{cases} A, & \text{si } A \in C_2(\{v\}, F_\omega), \\ A \cup L_A, & \text{si } A \in C_2(F_\omega) \setminus C_2(\{v\}, F_\omega). \end{cases}$$

Lema 84. *La función r es una retracción.*

Demostración. Tenemos, por la definición de r, que para todo $A \in C_2(\{v\}, F_\omega)$, $r(A) = A$. Ya que para toda $A \in C_2(F_\omega) \setminus C_2(\{v\}, F_\omega)$, $v \in L_A$, tenemos que $r(A) \in C_2(\{v\}, F_\omega)$.

Veamos ahora que r es continua. Sean $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_2(F_\omega)$ y $A \in C_2(F_\omega)$ tales que $\lim A_i = A$. Mostraremos que $\lim r(A_i) = r(A)$. Dividiremos la prueba en los siguientes dos casos: $A \in C_2(F_\omega) \setminus C_2(\{v\}, F_\omega)$ o $A \in C_2(\{v\}, F_\omega)$.

Caso 1. $A \in C_2(F_\omega) \setminus C_2(\{v\}, F_\omega)$.

Entonces A es del tipo 1 o del tipo 2.

En el caso en el que A es del tipo 1, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq L_n \setminus \{v\}$. Como $L_n \setminus \{v\}$ es un abierto de F_ω, por el Lema 2, existe $\delta > 0$ tal que

$$A \subseteq N(\delta, A) \subseteq L_m \setminus \{v\}.$$

Sea $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$. Como $\lim A_i = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i > N$, entonces $H(A, A_i) < \varepsilon$.

Sea $i > N$. Entonces $A_i \subseteq N(\varepsilon, A) \subseteq N(\delta, A) \subseteq L_n \setminus \{v\}$. Entonces A_i es del tipo 1. Como $H(A_i, A) < \varepsilon$, entonces $|\varepsilon_{A_i} - \varepsilon_A| < \varepsilon$. Por lo tanto, $H(L_{A_i}, L_A) < \varepsilon$, por lo que $H(A_i \cup L_{A_i}, A \cup L_A) < \varepsilon$.

En el caso en el que A es del tipo 2, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \neq m$, $A \subseteq (L_n \setminus \{v\}) \cup (L_m \setminus \{v\})$, $A \cap (L_n \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ y $A \cap (L_m \setminus \{v\}) \neq \emptyset$.

Como $(L_n \setminus \{v\}) \cup (L_m \setminus \{v\})$ es un abierto de F_ω, por el Lema 2, existe $\delta > 0$ tal que $A \subseteq N(\delta, A) \subseteq (L_n \setminus \{v\}) \cup (L_m \setminus \{v\})$.

Sea $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$. Como $\lim A_i = A$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i > N$, entonces $H(A, A_i) < \varepsilon$.

Sea $i > N$. Entonces A_i es del tipo 2. Como $H(A, A_i) < \varepsilon$, entonces

$$|\varepsilon_A - \varepsilon_{A_i}| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $H(L_A, L_{A_i}) < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$H(r(A), r(A_i)) = H(A \cup L_A, A_i \cup L_{A_i}) < \varepsilon.$$

Caso 2. $A \in C_2(\{v\}, F_\omega)$.

Tomamos $\varepsilon > 0$. Como $\lim A_i = A$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i > N$, entonces $H(A_i, A) < \varepsilon$.

Sea $i > N$. Tenemos que $A_i \in C_2(\{v\}, F_\omega)$ o $A_i \in C_2(F_\omega) \setminus C_2(\{v\}, F_\omega)$.

Si ocurre que $A_i \in C_2(\{v\}, F_\omega)$. Entonces $r(A_i) = A_i$. Como $r(A) = A$, entonces $H(r(A_i), r(A)) = H(A_i, A) < \varepsilon$.

Si se cumple que $A_i \in C_2(F_\omega) \setminus C_2(\{v\}, F_\omega)$. Como $A \subseteq N(\varepsilon, A_i)$ y $v \in A$, entonces existe $a \in A_i$ tal que $d(a, v) < \varepsilon$. Por lo tanto, $\varepsilon_{A_i} < \varepsilon$. Por lo tanto, $L_{A_i} \subseteq \mathcal{B}(\varepsilon, v) \subseteq N(\varepsilon, A)$.

Como $H(A_i, A) < \varepsilon$, entonces $A_i \subseteq N(\varepsilon, A)$. Por lo tanto,

$$r(A_i) = A_i \cup L_{A_i} \subseteq N(\varepsilon, A).$$

Por otro lado, como $H(A_i, A) < \varepsilon$, entonces

$$A \subseteq N(\varepsilon, A_i) \subseteq N(\varepsilon, A_i \cup L_{A_i}) \subseteq N(\varepsilon, r(A_i)).$$

Por lo tanto, $H(r(A_i), r(A)) < \varepsilon$.

□

Corolario 85. *$C_2(\{v\}, F_\omega)$ es un retracto absoluto.*

Demostración. Como F_ω es localmente conexo, por el Teorema 80, $C_2(F_\omega)$ es un retracto absoluto. Por el Lema 84, $C_2(\{v\}, F_\omega)$ es retracto de $C_2(F_\omega)$. Por el Lema 79, $C_2(\{v\}, F_\omega)$ es retracto absoluto. □

Ahora mostraremos que la función identidad sobre el espacio $C_2(\{v\}, F_\omega)$ puede ser aproximada por funciones continuas cuyas imágenes son Z-conjuntos en el espacio $C_2(\{v\}, F_\omega)$.

Definición 86. Para toda $0 \leq \varepsilon < 1$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, denotamos por L_n^ε al conjunto

$$\left\{ \left\langle t, \frac{1}{n} \right\rangle : 0 \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2n} \right\}.$$

Definimos $F_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n^\varepsilon$.

Notamos que para toda $0 \leq \varepsilon < 1$, $F_\varepsilon \in C(F_\omega)$. Además, $F_0 = \{v\}$.

Lema 87. *Para todo $0 \leq \varepsilon < 1$, el espacio $C_2(F_\varepsilon, F_\omega)$ es cerrado en $C_2(F_\omega)$.*

Lema 88. *Para toda $0 < \varepsilon < 1$, $C_2(F_\varepsilon, F_\omega)$ es un Z-conjunto en $C_2(\{v\}, F_\omega)$.*

Demostración. Por el Lema 87, $C_2(F_\varepsilon, F_\omega)$ es cerrado en $C_2(F_\omega)$.

Dada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función $r_n : F_\omega \to F_\omega$ dada por

$$r_n(p) = \begin{cases} p, & \text{si } p \in \bigcup_{i \leq n} L_i, \\ v, & \text{si } p \in F_\omega \setminus (\bigcup_{i \leq n} L_i). \end{cases}$$

Notemos que r_n es continua, así es una retracción de F_ω en la unión de los primeros n segmentos de F_ω y $d(p, r_n(p)) \leq \frac{1}{n+1}$ para toda $p \in F_\omega$.

Por el Lema 6, la función inducida $C(r_n) : C(F_\omega) \to C(F_\omega)$ dada por

$$C(r_n)(A) = r_n[A]$$

es continua.

Definimos $g_n = C(r_n)|_{C_2(\{v\},F_\omega)}$.

Entonces g_n es continua. Además, para todo $A \in C_2(\{v\}, F_\omega)$,

$$H_{C_2(F_\omega)}(A, g_n(A)) < \frac{1}{n}.$$

Ahora, si $A \in C_2(F_\varepsilon, F_\omega)$, entonces $F_\varepsilon \subseteq A$. Por tanto, para todo $m \in \mathbb{N}$, $A \cap (L_m \setminus \{v\}) \neq \emptyset$.

Por otro lado, si $m > n$, se tiene que para todo $E \in C_2(\{v\}, F_\omega)$,

$$g_n(E) \cap (L_m \setminus \{v\}) = \emptyset.$$

Por lo tanto, $g_n[C_2(\{v\}, F_\omega)] \cap C_2(F_\varepsilon, F_\omega) = \emptyset$.

Por lo tanto, $C_2(F_\varepsilon, F_\omega)$ es un Z-conjunto en $C_2(\{v\}, F_\omega)$. □

Lema 89. *Para toda $\varepsilon > 0$, existe una función $f_\varepsilon : C_2(\{v\}, F_\omega) \to C_2(\{v\}, F_\omega)$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $A \in C_2(\{v\}, F_\omega)$, $H_{C_2(F_\omega)}(A, f_\varepsilon(A)) < \varepsilon$ y*

2. *la imagen de f_ε es un Z-conjunto en $C_2(\{v\}, F_\omega)$.*

Demostración. Sea $0 < \varepsilon < 1$.

Consideremos la función $f_\varepsilon : C_2(\{v\}, F_\omega) \to C_2(F_\varepsilon, F_\omega)$ dada por

$$f_\varepsilon(A) = A \cup F_\varepsilon.$$

Sea $A \in C_2(\{v\}, F_\omega)$. Como $A \subseteq A \cup F_\varepsilon = f_\varepsilon(A)$, entonces $A \subseteq N(\varepsilon, f_\varepsilon(A))$.

Por otro lado, para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que la longitud de L_n^ε es $\frac{\varepsilon}{2n}$ y $\frac{\varepsilon}{2n} < \varepsilon$. Entonces $F_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n^\varepsilon \subseteq \mathcal{B}(\varepsilon, v)$. Como $A \in C_2(\{v\}, F_\omega)$, entonces $v \in A$, por lo que $F_\varepsilon \subseteq \mathcal{B}(\varepsilon, A) \subseteq N(\varepsilon, A)$. Además, $A \subseteq N(\varepsilon, A)$. Por lo tanto,

$$f_\varepsilon(A) = A \cup F_\varepsilon \subseteq N(\varepsilon, A).$$

Por lo tanto, $H_{C_2(F_\omega)}(A, f_\varepsilon(A)) < \varepsilon$.

Tenemos que $C_2(F_\varepsilon, F_\omega) \subseteq C_2(\{v\}, F_\omega)$ y para todo $E \in C_2(F_\varepsilon, F_\omega)$, se tiene que $f_\varepsilon(E) = E \cup F_\varepsilon = E$. Por lo tanto, f_ε es suprayectiva.

Por el Lema 88, la imagen de f_ε es un Z-conjunto en $C_2(\{v\}, F_\omega)$. □

Corolario 90. *$C_2(\{v\}, F_\omega)$ es un cubo de Hilbert.*

Demostración. Por el Lema 87, $C_2(\{v\}, F_\omega)$ es cerrado en $C_2(F_\omega)$. Como $C_2(F_\omega)$ es compacto, entonces $C_2(\{v\}, F_\omega)$ es un compacto.

Por el Lema 85, $C_2(\{v\}, F_\omega)$ es retracto absoluto. Por el Lema 89, la función identidad sobre $C_2(\{v\}, F_\omega)$ puede ser aproximada por funciones continuas cuyas imágenes son Z-conjuntos en $C_2(\{v\}, F_\omega)$. Por el Teorema 82, $C_2(\{v\}, F_\omega)$ es un cubo de Hilbert. □

Definición 91. Para cada $A \in C(F_\omega)$, denotamos por $F_2(A, C(F_\omega))$ al conjunto

$$\{\mathcal{B} \in F_2(C(F_\omega)) : A \text{ está contenido en algún elemento de } \mathcal{B}\}.$$

En particular, denotamos por $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ al conjunto

$$\left\{\mathcal{B} \in F_2(C(F_\omega)) : v \in \bigcup \mathcal{B}\right\}.$$

Ahora mostraremos que el espacio $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es un retracto absoluto.

Lema 92. *El espacio $F_2(C(F_\omega))$ es un retracto absoluto.*

Demostración. Como F_ω es localmente conexo, por el Teorema 80, $C(F_\omega)$ es un retracto absoluto. Como $C(F_\omega)$ es un continuo, podemos pensarlo encajado en un cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$. Como $C(F_\omega)$ es retracto absoluto, existe una retracción $r : \mathcal{Q} \to C(F_\omega)$.

Consideramos la función inducida $F_2(r) : F_2(\mathcal{Q}) \to F_2(C(F_\omega))$, dada por $F_2(r)(\{a, b\}) = \{r(a), r(b)\}$. Entonces $F_2(r)$ es una retracción. Como $F_2(\mathcal{Q})$ es homeomorfo a $\mathcal{Q}$ (Teorema 2.4 de [12]) y $\mathcal{Q}$ es retracto absoluto, por el Lema 79, $F_2(C(F_\omega))$ es un retracto absoluto. □

Lema 93. *Sean $a_1, b_1, a_2, b_2 \in (0, 1]$ y $\varepsilon > 0$ tales que*

- $0 < \text{mín}\{a_1, b_1\} - \varepsilon$,
- $|a_2 - a_1| < \varepsilon$ *y*
- $|b_2 - b_1| < \varepsilon$.

Entonces $|\text{mín}\{a_1, b_1\} - \text{mín}\{a_2, b_2\}| < \varepsilon$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a_1 \leq b_1$. Entonces $\text{mín}\{a_1, b_1\} = a_1$.

Como $|a_2 - a_1| < \varepsilon$, entonces $a_1 - \varepsilon < a_2 < a_1 + \varepsilon$.

Como $|b_2 - b_1| < \varepsilon$, entonces $b_1 - \varepsilon < b_2 < b_1 + \varepsilon$

Como $a_1 \leq b_1$, entonces $a_1 - \varepsilon \leq b_1 - \varepsilon < b_2$.

En el caso en el que $a_1 - \varepsilon < b_2 < a_1 + \varepsilon$, entonces

$$a_1 - \varepsilon < \text{mín}\{a_2, b_2\} < a_1 + \varepsilon,$$

es decir, $|\text{mín}\{a_1, b_1\} - \text{mín}\{a_2, b_2\}| = |a_1 - \text{mín}\{a_2, b_2\}| < \varepsilon$.

En el caso en el que $a_1 + \varepsilon \leq b_2$, como $a_2 < a_1 + \varepsilon$, entonces $a_2 < b_2$, es decir, $\text{mín}\{a_2, b_2\} = a_2$. Por lo tanto, $|a_1 - a_2| = |\text{mín}\{a_1, b_1\} - \text{mín}\{a_2, b_2\}| < \varepsilon$. □

Definición 94. Sea $\{A, B\} \in F_2(C(F_\omega)) \setminus F_2(\{v\}, C(F_\omega))$. Definimos

$$\varepsilon_{\{A,B\}} = \text{mín}\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}.$$

Ver la Definición 83.

Definición 95. Sea $\{A, B\} \in F_2(C(F_\omega)) \setminus F_2(\{v\}, C(F_\omega))$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ (posiblemente $n = m$), $0 < a_1 \leq a_2 \leq \frac{1}{n}$ y $0 < b_1 \leq b_2 \leq \frac{1}{m}$ tales que

$$A = \left\{ \left\langle t, \frac{1}{n} \right\rangle : a_1 \leq t \leq a_2 \right\} \subseteq L_n \setminus \{v\}$$

y

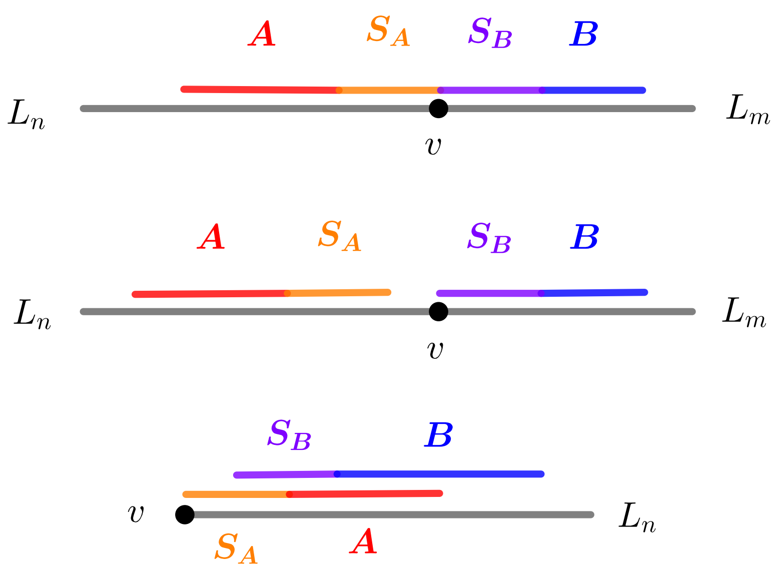
$$B = \left\{ \left\langle t, \frac{1}{m} \right\rangle : b_1 \leq t \leq b_2 \right\} \subseteq L_m \setminus \{v\}.$$

Denotamos por S_A al conjunto

$$\left\{ \left\langle t, \frac{1}{n} \right\rangle : a_1 - \varepsilon_{\{A,B\}} \leq t \leq a_1 \right\}.$$

Denotamos por S_B al conjunto

$$\left\{ \left\langle t, \frac{1}{m} \right\rangle : b_1 - \varepsilon_{\{A,B\}} \leq t \leq b_1 \right\}.$$



Notamos que la longitud de S_A y de S_B es $\varepsilon_{\{A,B\}}$.

Consideramos la función $r : F_2(C(F_\omega)) \to F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ dada por

$$r(\{A,B\}) = \begin{cases} \{A,B\}, & \text{si } \{A,B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega)), \\ \{A \cup S_A, B \cup S_B\}, & \text{si } \{A,B\} \notin F_2(\{v\}, C(F_\omega)). \end{cases}$$

Lema 96. *La función r es una retracción*

Demostración. Por la definción de r, tenemos que $r|_{F_2(\{v\},C(F_\omega))} = id_{F_2(\{v\},C(F_\omega))}$.

Veamos ahora que r es continua. Sean $\{\{A_i, B_i\}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $F_2(C(F_\omega))$ y $\{A,B\}$ un elemento de $F_2(C(F_\omega))$ tales que $\lim\{A_i, B_i\} = \{A,B\}$. Mostraremos que $\lim r(\{A_i, B_i\}) = r(\{A,B\})$.

Dividiremos esta prueba en los siguientes dos casos: $\{A,B\} \in F_2(C(F_\omega)) \setminus F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ o $\{A,B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.

Caso 1. $\{A,B\} \in F_2(C(F_\omega)) \setminus F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.

Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $A \subseteq L_n \setminus \{v\}$ y $B \subseteq L_m \setminus \{v\}$. Por el Lema 2, existe $\delta > 0$ tal que

$$A \subseteq N(\delta, A) \subseteq L_n \setminus \{v\}$$

y

$$B \subseteq N(\delta, B) \subseteq L_m \setminus \{v\}.$$

Sea $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$. Como $\lim\{A_i, B_i\} = \{A,B\}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i > N$, entonces $H_{F_2(C(F_\omega))}(\{A_i, B_i\}, \{A,B\}) < \varepsilon$.

Sea $i > N$. Como $H_{F_2(C(F_\omega))}(\{A_i, B_i\}, \{A,B\}) < \varepsilon$, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $H(A_i, A) < \varepsilon$ y $H(B_i, B) < \varepsilon$.

Como $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$, entonces $A_i \subseteq L_n \setminus \{v\}$ y $B_i \subseteq L_m \setminus \{v\}$, entonces $|\varepsilon_{A_i} - \varepsilon_A| < \varepsilon$ y $|\varepsilon_{B_i} - \varepsilon_B| < \varepsilon$. Por el Lema 93, $|\min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\} - \min\{\varepsilon_{A_i}, \varepsilon_{B_i}\}| < \varepsilon$. Por lo tanto, $|\varepsilon_{\{A,B\}} - \varepsilon_{\{A_i,B_i\}}| < \varepsilon$.

Entonces, $H(S_A, S_{A_i}) < \varepsilon$ y $H(S_B, S_{B_i}) < \varepsilon$.

Entonces, $H(A \cup S_A, A_i \cup S_{A_i}) < \varepsilon$ y $H(B \cup S_B, B_i \cup S_{B_i}) < \varepsilon$.

Entonces, $H_{F_2(C(F_\omega))}(\{A \cup S_A, B \cup S_B\}, \{A_i \cup S_{A_i}, B \cup S_{B_i}\}) < \varepsilon$.

Por lo tanto, $H_{F_2(C(F_\omega))}(r(\{A,B\}), r(\{A_i, B_i\})) < \varepsilon$.

Caso 2. $\{A,B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\lim\{A_i, B_i\} = \{A,B\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i > N$, entonces

$$H_{F_2(C(F_\omega))}(\{A_i, B_i\}, \{A,B\}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $i > N$.

En el caso en el que $\{A_i, B_i\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$, entonces

$$H_{F_2(C(F_\omega))}(r(\{A_i, B_i\}), r(\{A,B\})) = H_{F_2(C(F_\omega))}(\{A_i, B_i\}, \{A,B\}) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

En el caso en el que $\{A_i, B_i\} \in F_2(C(F_\omega)) \setminus F_2(\{v\}, C(F_\omega))$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v \in A$, $H(A, A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H(B, B_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como $v \in A$ y $H(A, A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces existe $a \in A_i$ tal que $d(v, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, $\varepsilon_{\{A,B\}} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Por lo tanto,

$$S_{A_i} \subseteq \mathcal{B}\left(\frac{\varepsilon}{2}, v\right) \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, A\right) \subseteq N(\varepsilon, A).$$

Como $H(A, A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $A_i \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, A\right) \subseteq N(\varepsilon, A)$.

Por lo tanto, $A_i \cup S_{A_i} \subseteq N(\varepsilon, A)$.

Como $H(A, A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces

$$A \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, A_i\right) \subseteq N(\varepsilon, A_i) \subseteq N(\varepsilon, A_i \cup S_{A_i}).$$

Por lo tanto, $H(A_i \cup S_{A_i}, A) < \varepsilon$.

Por otro lado, como $\varepsilon_{\{A,B\}} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ y $H(B, B_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces existe $b \in B$ tal que $d(b, b_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ donde b_i es el punto de B_i más cercano al vértice.

Como S_{B_i} tiene longitud $\varepsilon_{\{A,B\}} < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $S_{B_i} \subseteq \mathcal{B}(\varepsilon, b) \subseteq N(\varepsilon, B)$.

Como $H(B, B_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $B_i \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, B\right) \subseteq N(\varepsilon, B)$.

Por lo tanto, $B_i \cup S_{B_i} \subseteq N(\varepsilon, B)$.

Por otro lado, como $H(B, B_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces

$$B \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, B_i\right) \subseteq N(\varepsilon, B_i) \subseteq N(\varepsilon, B_i \cup S_{B_i}).$$

Por lo tanto, $H(B, B_i \cup S_{B_i}) < \varepsilon$.

Como $H(A, A_i \cup S_{A_i}) < \varepsilon$ y $H(B, B_i \cup S_{B_i}) < \varepsilon$, entonces

$$H_{F_2(C(F_\omega))}(\{A, B\}, \{A_i \cup S_{A_i}, B_i \cup S_{B_i}\}) = H_{F_2(C(F_\omega))}(r(\{A, B\}), r(\{A_i, B_i\})) < \varepsilon.$$

□

Corolario 97. *El espacio $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es retracto absoluto.*

Demostración. Por el Lema 92, tenemos que $F_2(C(F_\omega))$ es retracto absoluto. Por el Lema 96, tenemos que $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es retracto de $F_2(C(F_\omega))$. Por el Lema 79, tenemos que $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es retracto absoluto. □

Lema 98. *El espacio $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es cerrado en $F_2(C(F_\omega))$.*

Demostración. Por el Lema 96, tenemos que $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es retracto del espacio $F_2(C(F_\omega))$. Luego, por el Teorema 77, $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es cerrado. □

Ahora mostraremos que la función identidad sobre el espacio $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ puede ser aproximada por funciones continuas cuyas imagenes son Z-conjuntos en el espacio $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.

Definición 99. Una métrica ρ para un continuo X es una métrica **convexa** si para cualesquiera $x, y \in X$, existe $z \in X$ tal que

$$\rho(x, z) = \frac{\rho(x, y)}{2} = \rho(y, z).$$

Definición 100. Definimos $\rho : F_\omega \times F_\omega \to \mathbb{R}^+$ dada por $\rho(\langle x, y\rangle)$ es la longitud del arco en F_ω que une a x con y.

Lema 101. *La métrica ρ es convexa.*

Definición 102. Definimos $K_\rho : [0, \infty) \times C(F_\omega) \to C(F_\omega)$ dada por

$$K_\rho(t, A) = \{x \in F_\omega : \rho(\langle x, y\rangle) \leq t \text{ para algún } y \in A\}.$$

El siguiente es el Teorema 3.3 de [17]

Teorema 103. *Sea (X, ρ) un continuo. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *K_ρ es continua,*
2. *$cl(N_\rho(t, A)) = K_\rho(t, A)$ para cada $t > 0$ y para cada $A \in 2^X$.*

El siguiente es el Corolario 3.4 de [17]

Corolario 104. *Si (X, ρ) es un continuo y ρ es una métrica convexa, entonces K_ρ es continua.*

Como corolario de los dos resultados anteriores tenemos el siguiente resultado.

Corolario 105. *Para todo $\varepsilon > 0$, la función $\varphi_\varepsilon : C(F_\omega) \to C(F_\omega)$ dada por*

$$\varphi_\varepsilon(A) = cl(N_\rho(\varepsilon, A))$$

es una función continua.

Lema 106. *Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ y para todo $A \in C(F_\omega)$ tal que $v \in A$, tenemos que $cl\Big(N_\rho\Big(\frac{1}{n}, A\Big)\Big) \cap (L_m \setminus \{v\}) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $A \in C(F_\omega)$ tales que $v \in A$. Sea $r = \max\{n, m\}$. Consideramos al punto $p = \Big\langle \frac{1}{2r}, \frac{1}{m} \Big\rangle$. Tenemos que $\rho(v, p) = \frac{1}{2r} < \frac{1}{n}$ y $p \in L_m \setminus \{v\}$. Por lo tanto, $p \in cl\Big(N_\rho\Big(\frac{1}{n}, A\Big)\Big) \cap (L_m \setminus \{v\})$. $\square$

Como para todo $t > 0$, φ_t es una función continua, por el Lema 6 tenemos que la función inducida $F_2(\varphi_t) : F_2(C(F_\omega)) \to F_2(C(F_\omega))$ dada por

$$F_2(\varphi_t)(\{A, B\}) = \{\varphi_t(A), \varphi_t(B)\} = \{cl(N_\rho(t, A)), cl(N_\rho(t, B))\}$$

es continua para cada $t > 0$.

Definición 107. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n = F_2(\varphi_{\frac{1}{n}})|_{F_2(\{v\}, C(F_\omega))}$.

Tenemos que $Imf_n \subseteq F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ y f_n es continua para toda $n \in \mathbb{N}$, pues es restricción de una función continua.

Lema 108. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $\mathcal{A} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$, $H(\mathcal{A}, f_{2n}(\mathcal{A})) < \frac{1}{n}$.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{A} = \{A, B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$. Tenemos que

$$A \subseteq cl\Bigg(N_\rho\bigg(\frac{1}{2n}, A\bigg)\Bigg) \subseteq N\Bigg(\frac{1}{n}, cl\Bigg(N_\rho\bigg(\frac{1}{2n}, A\bigg)\Bigg)\Bigg).$$

Por otro lado,

$$cl\Bigg(N_\rho\bigg(\frac{1}{2n}, A\bigg)\Bigg) \subseteq N\Bigg(\frac{1}{2n}, cl\Bigg(N_\rho\bigg(\frac{1}{2n}, A\bigg)\Bigg)\Bigg) \subseteq N\bigg(\frac{1}{n}, A\bigg).$$

Por lo tanto, $H\Big(A, cl\Big(N_\rho\big(\frac{1}{n}, A\big)\Big)\Big) < \frac{1}{n}$. Análogamente,

$$H\Big(B, cl\Big(N_\rho\big(\frac{1}{n}, B\big)\Big)\Big) < \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto, $H_{F_2(C(F_\omega))}\Bigg(\{A, B\}, \Bigg\{cl\Bigg(N_\rho\bigg(\frac{1}{2n}, A\bigg)\Bigg), cl\Bigg(N_\rho\bigg(\frac{1}{2n}, B\bigg)\Bigg)\Bigg\}\Bigg) =$

$$= H_{F_2(C(F_\omega))}(\mathcal{A}, f_{2n}(\mathcal{A})) < \frac{1}{n}.$$

□

Lema 109. *Para toda $n \in \mathbb{N}$, Imf_n es cerrado en $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$.

Por el Lema 98, tenemos que $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es cerrado en $F_2(C(F_\omega))$. Como $F_2(C(F_\omega))$ es compacto, entonces $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es compacto.

Como f_n es continua y $dom(f_n) = F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es compacto, entonces Imf_n es compacto en $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.

Como Imf_n es compacto en $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$, entonces Imf_n es cerrado, pues $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es métrico. □

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función $r_n : F_\omega \to F_\omega$ dada por

$$r_n(p) = \begin{cases} p, & \text{si } p \in \bigcup_{i \leq n} L_i, \\ v, & \text{si } p \in F_\omega \setminus (\bigcup_{i \leq n} L_i). \end{cases}$$

Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, r_n es continua y es una retracción de F_ω en la unión de los primeros n segmentos de F_ω.

Por el Lema 6 la función inducida $C(r_n) : C(F_\omega) \to C(F_\omega)$ dada por

$$C(r_n)(A) = r_n[A]$$

es continua para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por el Lema 6, la función inducida $F_2(C(r_n)) : F_2(C(F_\omega)) \to F_2(C(F_\omega))$ dada por $F_2(C(r_n))(\{A, B\}) = \{C(r_n)(A), C(r_n)(B)\}$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 110. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $G_n = F_2(C(r_n))|_{F_2(\{v\}, C(F_\omega))}$.

Lema 111. *Para todo $A \in C(F_\omega)$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, $H(A, C(r_n)(A)) < \frac{1}{n}$.*

Demostración. Veamos que para toda $p \in F_\omega$, $d(p, r_n(p)) < \frac{1}{n}$. En el caso en que $p \in \bigcup_{i \leq n} L_i$, $r_n(p) = p$ y la desigualdad es clara. En el caso en que $p \notin \bigcup_{i \leq n} L_i$, tenemos que $p \in L_i$, para alguna $i > n$. Como la longitud de L_i es igual a $\frac{1}{i+1} < \frac{1}{n}$, tenemos que $d(p, v) < \frac{1}{n}$, así que $d(r_n(p), p) < \frac{1}{n}$. Dada $A \in C(F_\omega)$, para cada $a \in A$, $d(r_n(a), a) < \frac{1}{n}$, de manera que $H(r_n(A), A) < \frac{1}{n}$ (pues $r_n(A) \subseteq N\left(A, \frac{1}{n}\right)$ y $A \subseteq N(r_n(A), \frac{1}{n})$). □

Lema 112. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\{A, B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$,*

$$H_{F_2(C(F_\omega))}(\{A, B\}, G_n(\{A, B\})) < \frac{1}{n}.$$

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\{A, B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$. Por el Lema 111, tenemos que $H(A, C(r_n)(A)) < \frac{1}{n}$ y $H(B, C(r_n)(B)) < \frac{1}{n}$, entonces

$$H_{F_2(C(F_\omega))}(\{A, B\}, G_n(\{A, B\})) = H_{F_2(C(F_\omega))}(\{A, B\}, \{C(r_n)(A), C(r_n)(B)\}) < \frac{1}{n}.$$

□

Lema 113. *Para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $Imf_n \cap ImG_m = \emptyset$.*

Demostración. Sea $\{A, B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v \in A$.

Entonces $cl\Big(N\big(\frac{1}{n}, A\big)\Big) \cap (L_j \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ para todo $j, n \in \mathbb{N}$

Por lo tanto, si $\{C, D\} \in Imf_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $C \cap (L_j \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ para toda $j \in \mathbb{N}$ o $D \cap (L_j \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ para toda $j \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, para toda $n \in \mathbb{N}$, si $\{C, D\} \in ImG_n$, entonces $C \cap (L_{n+1} \setminus \{v\}) = \emptyset$ y $D \cap (L_{n+1} \setminus \{v\}) = \emptyset$.

Por lo tanto, $Imf_n \cap ImG_m = \emptyset$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$. $\square$

Corolario 114. *Para toda $n \in \mathbb{N}$, Imf_n es un Z-conjunto en $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 109, tenemos que Imf_n es cerrado en $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Consideramos la función G_m definida en la Definición 110. Por el Lema 112, para todo $\{A, B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$,

$$H_{F_2(C(F_\omega))}(\{A, B\}, G_m(\{A, B\})) < \frac{1}{m}.$$

Por el Lema 113, $Imf_n \cap ImG_m = \emptyset$.

Por lo tanto, Imf_n es un Z-conjunto en $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$. $\square$

Corolario 115. *El espacio $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es un cubo de Hilbert.*

Demostración. Por el Corolario 97, tenemos que $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es un retracto absoluto.

Por el Lema 98, tenemos que $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es cerrado en $F_2(C(F_\omega))$. Como $F_2(C(F_\omega))$ es compacto, entonces $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es compacto.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos la función $f_{n+1} : F_2(\{v\}, C(F_\omega)) \to F_2(\{v\}, C(F_\omega))$. Por el Lema 108, para toda $\mathcal{A} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$, $H(\mathcal{A}, f_{n+1}(\mathcal{A})) < \frac{1}{n}$.

Finalmente, por el Corolario 114, Imf_{n+1} es un Z-conjunto en $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.

Por el Teorema 82, $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es un cubo de Hilbert. $\square$

Definición 116. Denotamos por $\partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$ a la frontera del espacio $C_2(\{v\}, F_\omega)$ en el espacio $C_2(F_\omega)$.

Ahora vamos a caracterizar a los elementos de $\partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$.

Lema 117. *Sea $F \in C(F_\omega)$ tal que F interseca a tres segmentos abiertos distintos de F_ω. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $G \in C_2(F_\omega)$ es ε-cercano a F, alguna componente de G interseca a dos segmentos abiertos distintos de F_ω y $v \in G$.*

Demostración. Por hipótesis, existen $i, j, k \in \mathbb{N}$ distintos tales que $F \cap (L_i \setminus \{v\})$, $F \cap (L_j \setminus \{v\})$ y $F \cap (L_k \setminus \{v\})$ son no vacíos. Entonces existen $b_i \in (0, \frac{1}{i}]$, $b_j \in (0, \frac{1}{j}]$, $b_k \in \left(0, \frac{1}{k}\right]$ tales que

$$F \cap L_i = \left\{\left\langle r, \frac{1}{i}\right\rangle : 0 \leq r \leq b_i\right\},$$

$$F \cap L_j = \left\{ \left\langle s, \frac{1}{j} \right\rangle : 0 \leq s \leq b_j \right\}$$

y

$$F \cap L_k = \left\{ \left\langle t, \frac{1}{k} \right\rangle : 0 \leq t \leq b_k \right\}.$$

Consideremos los puntos $p_i = \left\langle b_i, \frac{1}{i} \right\rangle$, $p_j = \left\langle b_j, \frac{1}{j} \right\rangle$ y $p_k = \left\langle b_k, \frac{1}{k} \right\rangle$. Los puntos p_i, p_j y p_k son los extremos distintos del vértice de $F \cap L_i$, $F \cap L_j$ y $F \cap L_k$, respectivamente. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(\varepsilon, p_i) \subseteq L_i \setminus \{v\}$, $\mathcal{B}(\varepsilon, p_j) \subseteq L_j \setminus \{v\}$ y $\mathcal{B}(\varepsilon, p_k) \subseteq L_k \setminus \{v\}$

Sea $G \in C_2(F_\omega)$ que es ε-cercano a F. Entonces $F \subseteq N(\varepsilon, G)$. Entonces existen $q_i, q_j, q_k \in G$ tales que $d(p_i, q_i) < \varepsilon$, $d(p_j, q_j) < \varepsilon$ y $d(p_k, q_k) < \varepsilon$. Por la propiedad de ε, tenemos que $q_i \in L_i \setminus \{v\}$, $q_j \in L_j \setminus \{v\}$ y $q_k \in L_k \setminus \{v\}$. Entonces G interseca a los segmentos abiertos $L_i \setminus \{v\}$, $L_j \setminus \{v\}$ y $L_k \setminus \{v\}$. Si G es conexo, entonces $v \in G$. Si G es disconexo, al tener G dos componentes, alguna de sus componentes, digamos G_1, interseca al menos a dos de los tres segmentos abiertos $L_i \setminus \{v\}$, $L_j \setminus \{v\}$ y $L_k \setminus \{v\}$. Como G_1 es conexo, entonces $v \in G_1$. Por lo tanto, $v \in G$. □

Lema 118. *Sea $F \in C_2(F_\omega) \setminus C(F_\omega)$ tal que alguna componente de F interseca al menos a dos segmentos abiertos de F_ω. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $G \in C_2(F_\omega)$ que es ε-cercano a F, alguna componente de G interseca a dos segmentos abiertos de G y $v \in G$.*

Demostración. Sea $F \in C_2(F_\omega) \setminus C(F_\omega)$ tal que alguna componente de F interseca al menos a dos segmentos abiertos de F_ω. Sean F_1 y F_2 las dos componentes de F. Supongamos sin pérdida de generalidad que F_1 interseca al menos a dos segmentos abiertos de F_ω. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ distintos tales que $F_1 \cap (L_n \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ y $F_1 \cap (L_m \setminus \{v\}) \neq \emptyset$. Sean $p_n \in F_1 \cap (L_n \setminus \{v\})$ y $p_m \in F_1 \cap (L_m \setminus \{v\})$.

Por el Lema 11, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que para todo $G \in \mathcal{B}_{C_2(F_\omega)}(\varepsilon, F)$, G es la unión de dos subcontinuos G_1 y G_2 de F_ω tales que G_1 es ε_1-cercano a F_1, G_2 es ε_1-cercano a F_2 y $N(\varepsilon_1, F_1) \cap N(\varepsilon_1, F_2) = \emptyset$.

Sea $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ tal que $\mathcal{B}(\varepsilon, p_n) \subseteq L_n \setminus \{v\}$ y $\mathcal{B}(\varepsilon, p_m) \subseteq L_m \setminus \{v\}$.

Sea $G \in \mathcal{B}_{C_2(F_\omega)}(\varepsilon, F)$. Como $\varepsilon < \varepsilon_1$, entonces G es la unión de dos subcontinuos G_1 y G_2 de F_ω tales que G_1 es ε-cercano a F_1, G_2 es ε-cercano a F_2 y $N(\varepsilon, F_1) \cap N(\varepsilon, F_2) = \emptyset$. Como $F_1 \subseteq N(\varepsilon, G_1)$, entonces existen $q_n, q_m \in G_1$ tales que $d(p_n, q_n) < \varepsilon$ y $d(p_m, q_m) < \varepsilon$. Como G_1 es conexo, entonces $v \in G_1 \subseteq G$. □

Lema 119. *Sea $F \in C_2(F_\omega)$. Entonces $F \in \partial(C_2(\{v\}, F_\omega)$ si y sólo si $v \in F$ y F cumple alguna de las siguientes propiedades:*

1. *F es conexo e interseca a lo más a dos segmentos abiertos de F_ω, o*

2. *F es disconexo y cada componente de F está contenida en algún segmento de F_ω.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Probaremos esta implicación por contrapositiva. Supongamos que F no cumple ni la propiedad 1 ni la propiedad 2. Dividiremos esta prueba en dos casos: F es conexo o F es disconexo.

Caso 1. F es conexo.

En este caso F interseca al menos a 3 segmentos abiertos distintos de F_ω. Por el Lema 117, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $G \in \mathcal{B}_{C_2(F_\omega)}(\varepsilon, F)$, alguna componente de G interseca al menos a dos segmentos abiertos de F_ω. Por lo tanto, $v \in G$ y $F \in int(C_2(\{v\}, F_\omega))$, así que, $F \notin \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$.

Caso 2. F es disconexo.

En este caso alguna componente de F interseca al menos a dos segmentos abiertos distintos de F_ω. Por el Lema 118, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $G \in \mathcal{B}_{C_2(F_\omega)}(\varepsilon, F)$, alguna componente de G interseca a dos segmentos abiertos distintos de F_ω. Esto implica que $v \in G$ y $F \in int(C_2(\{v\}, F_\omega))$, así que, $F \notin \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $v \in F$ y F cumple la propiedad 1 o la propiedad 2.

Caso 1. F es conexo e intersecta a lo más a dos segmentos abiertos de F_ω.

Sean $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

En el caso en el que F no interseca a ningún segmento abierto de F_ω, entonces $F = \{v\}$. Consideramos el punto $p = \left\langle \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle$. Entonces $v \notin \{p\}$ y $H(\{p\}, \{v\}) < \varepsilon$. Por lo tanto, $F \in \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$.

En el caso en el que F sólo intersecta a un segmento abierto de F_ω, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F \subseteq L_m$. Usando coordenadas polares como en la Definición 74, existe $0 < b \leq \frac{1}{m}$ tal que $F = \{\langle t, \frac{1}{m} \rangle : 0 \leq t \leq b\}$. Sea $0 < \delta < \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b}{2}\}$. Definimos $G = \{\langle t, \frac{1}{m} \rangle : \delta \leq t \leq b\}$. Entonces $v \notin G$ y $H(F, G) < \varepsilon$. Por lo tanto, $F \in \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$.

En el caso en el que F intersecta solamente a dos segmentos abiertos de F_ω, entonces existen $l, m \in \mathbb{N}$ tales que $l \neq m$ y $F \subseteq L_l \cup L_m$. Usando coordenadas polares como en la Definición 74, existen $0 < b_l \leq \frac{1}{l}$ y $0 < b_m \leq \frac{1}{m}$ tales que

$$F = \left\{ \left\langle t, \frac{1}{l} \right\rangle : 0 \leq t \leq b_l \right\} \cup \left\{ \left\langle r, \frac{1}{m} \right\rangle : 0 \leq r \leq b_m \right\}.$$

Sea $0 < \delta < \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b_l}{2}, \frac{b_m}{2}\}$. Definimos

$$G = \left\{ \left\langle t, \frac{1}{l} \right\rangle : \delta \leq t \leq b_l \right\} \cup \left\{ \left\langle r, \frac{1}{m} \right\rangle : \delta \leq r \leq b_m \right\}.$$

Entonces $v \notin G$ y $H(F, G) < \varepsilon$. Por lo tanto, $F \in \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$.

Caso 2. F es disconexo y cada componente de F está contenida en algún segmento de F_ω.

Sean F_1 y F_2 las dos componentes de F. Supongamos sin pérdida de generalidad que $v \in F_1$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $F_1 \subseteq L_n$ y $F_2 \subseteq L_m \setminus \{v\}$. Usando coordenadas polares como en la Definición 74, existen $0 \leq b_1 \leq \frac{1}{n}$ y $0 < a_2 \leq b_2 \leq \frac{1}{m}$ tales que $F_1 = \{\langle t, \frac{1}{n}\rangle : 0 \leq t \leq b_1\}$ y $F_2 = \{\langle r, \frac{1}{m}\rangle : a_2 \leq r \leq b_2\}$. Sea $\varepsilon > 0$.

En el caso en el que $b_1 = 0$, entonces $F_1 = \{v\}$. Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $r > m + n$ y $\frac{1}{r} < \varepsilon$. Consideramos al punto $p = \langle \frac{1}{r}, \frac{1}{r}\rangle$. Definimos $G = \{p\} \cup F_2$. Entonces $v \notin G$ y $H(F, G) < \varepsilon$. Por lo tanto, $F \in \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$.

En el caso en el que $0 < b_1$, consideramos $0 < \delta < \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b_1}{2}\}$. Definimos $G = \{\langle t, \frac{1}{n}\rangle : \delta \leq t \leq b_1\} \cup F_2$. Entonces $v \notin G$ y $H(F, G) < \varepsilon$. Por lo tanto, $F \in \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$. □

Definición 120. Denotamos por $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ a la frontera de $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ en el espacio $F_2(C(F_\omega))$.

Ahora vamos a caracterizar a los elementos de $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$.

Lema 121. *Sea $\mathcal{A} \in F_2(C(F_\omega))$ tal que algún elemento de $\mathcal{A}$ interseca al menos a dos segmentos abiertos de F_ω. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\mathcal{C} \in F_2(C(F_\omega))$ que es ε-cercano a $\mathcal{A}$, algún elemento de $\mathcal{C}$ interseca a dos segmentos abiertos de F_ω y $v \in \bigcup \mathcal{C}$.*

Demostración. Dividiremos esta prueba en dos casos: $\mathcal{A} = \{A\}$ o $\mathcal{A} = \{A, B\}$ con $A \neq B$.

Caso 1. $\mathcal{A} = \{A\}$ y existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m \neq n$, $A \cap (L_m \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ y $A \cap (L_n \setminus \{v\}) \neq \emptyset$.

Sean $p_n \in A \cap (L_n \setminus \{v\})$ y $p_m \in A \cap (L_m \setminus \{v\})$. Tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(\varepsilon, p_n) \subseteq L_n \setminus \{v\}$, $\mathcal{B}(\varepsilon, p_m) \subseteq L_m \setminus \{v\}$. Sea $\mathcal{C} = \{C, D\} \in F_2(C(F_\omega))$ tal que $\mathcal{C}$ es ε-cercano a $\mathcal{A}$. Entonces $H(A, C) < \varepsilon$ y $H(A, D) < \varepsilon$. Entonces $A \subseteq N(\varepsilon, C)$ y $A \subseteq N(\varepsilon, D)$. Entonces existen $c_n, c_m \in C$ y $d_n, d_m \in D$ tales que $d(p_n, c_n) < \varepsilon$, $d(p_m, c_m) < \varepsilon$, $d(p_n, d_n) < \varepsilon$ y $d(p_m, d_m) < \varepsilon$. Por la propiedad de ε, $c_n, d_n \in L_n \setminus \{v\}$ y $c_m, d_m \in L_m \setminus \{v\}$. Entonces tanto C como D intersecan a dos segmentos abiertos de F_ω. Como C y D son conexos, entonces $v \in C$ y $v \in D$.

Caso 2. $\mathcal{A} = \{A, B\}$ y A interseca a dos segmentos abiertos de F_ω.

En este caso existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \neq m$, $A \cap (L_n \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ y $A \cap (L_m \setminus \{v\}) \neq \emptyset$. Sean $p_n \in A \cap L_n \setminus \{v\}$ y $p_m \in A \cap L_m \setminus \{v\}$. Tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(\varepsilon, p_n) \subseteq L_n \setminus \{v\}$ y $\mathcal{B}(\varepsilon, p_m) \subseteq L_m \setminus \{v\}$. Sea $\mathcal{C} = \{C, D\}$ que es ε-cercano a $\mathcal{A}$, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $H(A, C) < \varepsilon$. Entonces $A \subseteq N(\varepsilon, C)$. Entonces existen $c_n, c_m \in C$ tales que $d(p_n, c_n) < \varepsilon$ y $d(p_m, c_m) < \varepsilon$. Por la propiedad de ε, $c_n \in L_n \setminus \{v\}$ y $c_m \in L_m \setminus \{v\}$. Por la conexidad de C, $v \in C$. □

Lema 122. *Sea $\mathcal{A} \in F_2(C(F_\omega))$. Entonces $\mathcal{A} \in \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ si y sólo si cada uno de los elementos de $\mathcal{A}$ está contenido en algún segmento de F_ω y algún elemento de $\mathcal{A}$ tiene al vértice.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Demostraremos esta implicación por contrapositiva.

Supongamos que algún elemento de $\mathcal{A}$ interseca al menos a dos segmentos abiertos de F_ω o que ningún elemento de $\mathcal{A}$ tiene al vértice.

Caso 1. Algún elemento de $\mathcal{A}$ interseca al menos a dos segmentos abiertos distintos de F_ω.

Por el Lema 121, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\mathcal{C} \in \mathcal{B}_{F_2(C(F_\omega))}(\varepsilon, \mathcal{A})$, algún elemento de $\mathcal{C}$ interseca a dos segmentos abiertos de F_ω. Por lo tanto, $\mathcal{A} \in int_{F_2(C(F_\omega))}(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ y $\mathcal{A} \notin \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$.

Caso 2. $v \notin \bigcup \mathcal{A}$.

Tomamos $A \in \mathcal{A}$. Por hipótesis tenemos que $v \notin A$. Utilizando coordenadas polares como en la Definición 74, existen $n \in \mathbb{N}$ y $a, b \in (0, \frac{1}{n}]$ tales que $a \leq b$ y $A = \left\{\left\langle t, \frac{1}{n}\right\rangle : a \leq t \leq b\right\}$. Entonces $v \notin N(\frac{a}{2}, A)$. Por lo tanto, para todo $B \in \mathcal{B}_{C(F_\omega)}(\frac{a}{2}, A)$, $v \notin B$.

Por lo tanto, para todo $A \in \mathcal{A}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $H(A, B) < \varepsilon$, entonces $v \notin B$. Por lo tanto, para todo $\mathcal{C} \in \mathcal{B}_{F_2(C_(F_\omega))}(\varepsilon, \mathcal{A})$, $v \notin \bigcup \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \notin \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{A} \in F_2(C(F_\omega))$ tal que cada elemento de $\mathcal{A}$ está contenido en algún segmento de F_ω y algún elemento de $\mathcal{A}$ tiene al vértice.

Sea A un elemento de $\mathcal{A}$ tal que $v \in A$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq L_n$. Usando coordenadas polares como en la Definición 74, existe $0 \leq b \leq \frac{1}{n}$ tal que $A = \left\{\left\langle t, \frac{1}{n}\right\rangle : 0 \leq t \leq b\right\}$.

Sea $\varepsilon > 0$.

En el caso en el que $b = 0$, entonces $A = \{v\}$. Tomamos $r \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{r} < \varepsilon$. Consideramos al punto $p = \left\langle \frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right\rangle$. Definimos $C = \{p\}$. Entonces $v \notin C$ y $H(A, C) < \varepsilon$.

En el caso en el que $0 < b$, tomamos $0 < \delta < \text{mín}\left\{\frac{b}{2}, \varepsilon\right\}$. Definimos

$$C = \left\{\left\langle t, \frac{1}{n}\right\rangle : \delta \leq t \leq b\right\}.$$

Entonces $v \notin C$ y $H(A, C) < \varepsilon$.

Con esto demostramos que para cualquier elemento A de $\mathcal{A}$ tal que $v \in A$, existe $C \in C(F_\omega)$ tal que $v \notin C$ y $H(A, C) \leq \varepsilon$. Sean A y B los elementos de $\mathcal{A}$.

Si $v \in A \cap B$, tomamos $C, D \in C(F_\omega)$ tales que $H(A, C) < \varepsilon$, $H(B, D) < \varepsilon$ y $v \notin C \cup D$. Por lo tanto, $H_{F_2(C(F_\omega))}(\{A, B\}, \{C, D\}) < \varepsilon$ y $v \notin C \cup D$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \in \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$.

Si $v \in A \setminus B$, tomamos $C \in C(F_\omega)$ tal que $H(A,C) < \varepsilon$ y $v \notin C$. Considerando al par $\{C,B\}$, tenemos que $H(\{A,B\},\{C,B\}\}) < \varepsilon$ y $v \notin B \cup C$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \in \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$. $\square$

Ahora mostraremos que $\partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$ y $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ son Z-conjuntos en $C_2(\{v\}, F_\omega))$ y en $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ respectivamente.

Lema 123. *El espacio $\partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$ es un Z-conjunto en $C_2(\{v\}, F_\omega)$.*

Demostración. Tenemos que $\partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$ es un cerrado en $C_2(F_\omega)$. Por el Lema 119, tenemos que $\partial(C_2(\{v\}, F_\omega)) \subseteq C_2(\{v\}, F_\omega)$. Por lo tanto, $\partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$ es cerrado en $C_2(\{v\}, F_\omega)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos la función $f_{\frac{1}{n}} : C_2(\{v\}, F_\omega) \to C_2(\{v\}, F_\omega)$ dada por $f_{\frac{1}{n}}(A) = A \cup F_{\frac{1}{n}}$ definida en la demostración del Lema 89

Tenemos que $f_{\frac{1}{n}}$ es continua. Además, para todo $A \in C_2(\{v\}, F_\omega)$,

$$H(A, f_{\frac{1}{n}}(A)) < \frac{1}{n}.$$

Por otro lado, $F_{\frac{1}{n}} \cap (L_j \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por el Lema 119, si $E \in \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$E \cap (L_j \setminus \{v\}) = \emptyset.$$

Por lo tanto, $Imf_{\frac{1}{n}} \cap \partial(C_2(\{v\}, F_\omega)) = \emptyset$.

Por lo tanto, $\partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$ es un Z-conjunto en $C_2(\{v\}, F_\omega)$. $\square$

Lema 124. *El espacio $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ es un Z-conjunto en $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.*

Demostración. Tenemos que $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ es cerrado en $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ pues $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ es un cerrado de $F_2(C(F_\omega))$ y está contenido en $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos la función $f_{2n} : F_2(\{v\}, C(F_\omega)) \to F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ definida en la Definición 107.

Sea $\mathcal{A} = \{A, B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$. Por el Lema 108, tenemos que

$$H(\mathcal{A}, f_{2n}(\mathcal{A})) < \frac{1}{n}.$$

Por el Lema 106, tenemos que para todo $m \in \mathbb{N}$, $cl\Big(N_\rho\big(\frac{1}{2n}, A\big)\Big) \cap (L_m \setminus \{v\}) \neq \emptyset$.

Por el Lema 122, tenemos que

$$f_{2n}(\mathcal{A}) = \left\{ cl\left(N_\rho\left(\frac{1}{2n}, A\right)\right), cl\left(N_\rho\left(\frac{1}{2n}, B\right)\right)\right\} \notin \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega))).$$

$\square$

Definición 125. Denotamos por $\mathcal{B}^0$ al espacio $\{\mathcal{A} \in F_2(C([0,1])) : 0 \in \bigcup \mathcal{A}\}$.

Denotamos por $\mathcal{B}^1$ al espacio $\{\mathcal{A} \in F_2(C([0,1])) : 1 \in \bigcup \mathcal{A}\}$.

Definición 126. Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Denotamos por $\sim_f$ a la relación en X tal que $x \sim_f y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$.

Lema 127. *Sean X y Y continuos. Supongamos que $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva. Entonces Y es homeomorfo a $X/\sim_f$.*

Demostración. Consideremos la función $h : X/_{\sim_f} \to Y$ dada por $h([x]_{\sim_f}) = f(x)$.

Por la definición de $\sim_f$, tenemos que h está bien definida. Además, la función $h^{-1} : Y \to X_{\sim_f}$ dada por $h^{-1}(f(x)) = [x]_{\sim_f}$ es inversa de h.

Sea $\pi : X \to X/_{\sim_f}$ la proyección dada por $\pi(x) = [x]_{\sim_f}$. Tenemos que

$$h \circ \pi = f.$$

Como f es continua, por la propiedad fundamental de las identificaciones, tenemos que h es continua. Como f es una identificación, π es continua y $h^{-1} \circ f = \pi$, entonces por la propiedad fundamental de las identificaciones, tenemos que h^{-1} es continua. $\square$

Lema 128. *El espacio $\mathcal{B}^0$ es homeomorfo a $[0,1]^3$.*

Demostración. Consideramos el triángulo

$$T = \{\langle a, b\rangle \in [0,1] \times [0,1] : 0 \le a \le b \le 1\}.$$

Consideramos la función $g : [0,1] \times T \to \mathcal{B}^0$ dada por

$$g(\langle t, \langle a, b\rangle\rangle) = \{[0,t], [a,b]\}.$$

Sean $\{\langle t_n, \langle a_n, b_n\rangle\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,1] \times T$ y $\langle t, \langle a, b\rangle\rangle$ un elemento de $[0,1] \times T$ tales que $\lim \langle t_n, \langle a_n, b_n\rangle\rangle = \langle t, \langle a, b\rangle\rangle$. Entonces

$$\lim g(\langle t_n, \langle a_n, b_n\rangle\rangle) = \{[0,t_n], [a_n,b_n]\} = \{[0,t], [a,b]\}.$$

Por lo tanto, g es continua.

Para cada $\{[0,t], [a,b]\} \in \mathcal{B}^0$, tenemos que $g(\langle t, \langle a, b\rangle\rangle) = \{[0,t], [a,b]\}$. Por tanto, g es suprayectiva.

Consideramos la relación $\sim_g$ en $[0,1] \times T$ dada por $\langle t, \langle a, b\rangle\rangle \sim_g \langle s, \langle c, d\rangle\rangle$ si y sólo si $g(\langle t, \langle a, b\rangle\rangle) = g(\langle s, \langle c, d\rangle\rangle)$. Por el Lema 127, tenemos que $\mathcal{B}^0$ es homeomorfo al cociente $([0,1] \times T)/\sim_g$.

Notamos que $g(\langle t, \langle a, b\rangle\rangle) = g(\langle s, \langle c, d\rangle\rangle)$ si y sólo si $\{[0,t], [a,b]\} = \{[0,s], [c,d]\}$ y esto ocurre si y sólo si se cumple una de las siguientes condiciones:

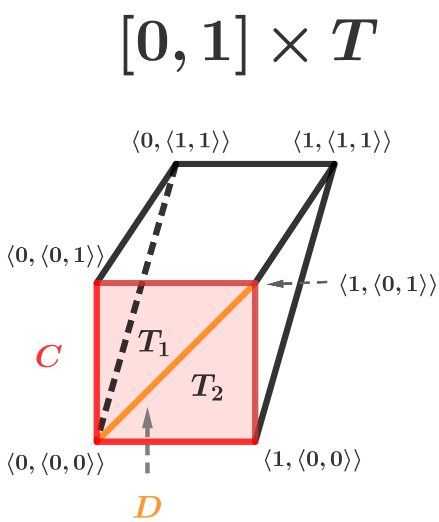
1. $t = s$, $a = c$ y $b = d$,
2. $a = 0 = c$, $t = d$ y $s = b$.

En el caso en el que $a \neq 0$, tenemos que $g^{-1}[\{\{[0,t],[a,b]\}\}] = \{\langle t, \langle a, b\rangle\rangle\}$. En el caso en el que $a = 0$, tenemos que

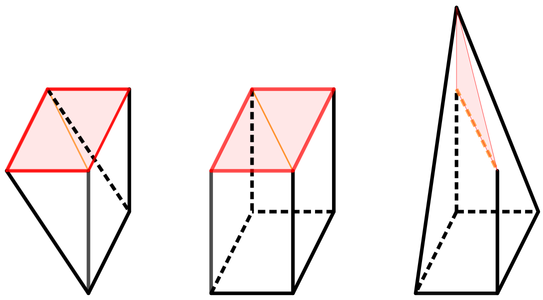
$$g^{-1}[\langle\langle[0,t],[a,b]\rangle\rangle] = \{\langle t, \langle 0, b\rangle\rangle, \langle b, \langle 0, t\rangle\rangle\}.$$

Los elementos de la forma $\langle t, \langle 0, b\rangle\rangle$ son precisamente los pertenecientes al cuadrado $C = [0,1] \times (\{0\} \times [0,1]) \subseteq [0,1] \times T$. Además, si $t = b$, $\langle t, \langle 0, t\rangle\rangle$ es elemento de la diagonal D de C y $g^{-1}[\{\{[0,t],[0,t]\}\}] = \{\langle t, \langle 0, t\rangle\rangle\}$.

Denotamos por T_1 al triángulo $\{\langle t, \langle 0, b\rangle\rangle \in [0,1] \times T : t < b\}$ y por T_2 al triángulo $\{\langle s, \langle 0, d\rangle\rangle \in [0,1] \times T : d < s\}$. Notamos que $C = T_1 \cup T_2 \cup D$.



Entonces cada elemento de $[0,1] \times T$ que no pertenece a $T_1 \cup T_2$ está relacionado bajo $\sim_g$ únicamente consigo mismo. Y cada elemento de $\langle t, \langle 0, b\rangle\rangle$ de T_1 está relacionado con el elemento $\langle b, \langle 0, t\rangle\rangle$ de T_2. Por tanto, el espacio $([0,1] \times T)/\sim_g$ es el espacio que se genera a partir del prisma $[0,1] \times T$ al identificar el triángulo T_1 con el triángulo T_2 de la siguiente manera: al elemento $\langle t, \langle 0, b\rangle\rangle$ de T_1, lo identificamos con el punto $\langle b, \langle 0, t\rangle\rangle$ de T_2, o lo que es lo mismo, doblando el cuadrado C por su diagonal.



Con la imagen anterior, es fácil convencerse de que el espacio $([0,1]\times T)/\sim_g$ es homeomorfo a $[0,1]^3$. $\square$

Definición 129. Para cada $n\in\mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{E}_n$ al conjunto

$$\mathcal{E}_n=\{\mathcal{A}\in F_2(C(L_n)):\{v\}\in\mathcal{A}\}.$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{B}_v^n$ al conjunto

$$\mathcal{B}_v^n=\{\mathcal{A}\in F_2(C(L_n)):v\in\bigcup\mathcal{A}\}.$$

Lema 130. *Sean X un continuo y $x\in X$. Entonces $\{A\in F_2(X):x\in A\}$ es cerrado en $F_2(X)$.*

Demostración. Sean $U=X\setminus\{x\}$ y $\mathcal{U}=\langle U\rangle_{F_2(X)}$.

Entonces $\mathcal{U}=F_2(X)\setminus\{A\in F_2(X):x\in A\}$.

Como $\mathcal{U}$ es abierto en $F_2(X)$, concluimos que $\{A\in F_2(X):x\in A\}$ es cerrado en $F_2(X)$. $\square$

Lema 131. *Para todo $n\in\mathbb{N}$, existe un homeomorfismo $g:\mathcal{B}_v^n\to Cono(\mathcal{E}_n)$ tal que para todo $\mathcal{A}\in\mathcal{E}_n$, $g(\mathcal{A})=\langle\mathcal{A},0\rangle$.*

Demostración. Al igual que en el Lema 128, consideramos el prisma $\mathbb{P}=[0,1]\times T$ donde T es el tríangulo

$$T=\{\langle a,b\rangle\in[0,1]\times[0,1]:0\leq a\leq b\leq 1\}.$$

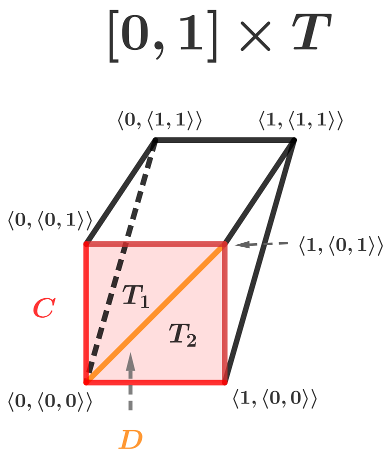
Consideramos también el cuadrado $C=T_1\cup T_2\cup D$ donde T_1 es el triángulo

$$T_1=\{\langle t,\langle 0,b\rangle\rangle\in[0,1]\times T:t<b\},$$

T_2 es el triángulo

$$T_2=\{\langle s,\langle 0,d\rangle\rangle\in[0,1]\times T:d<s\}$$

y D es la diagonal
$$D = \{\langle t, \langle 0, t\rangle\rangle : t \in [0, 1]\}.$$



Le pedimos al lector que se imagine y se convenza de que si identificamos los triángulos T_1 y T_2, doblando el cuadrado C por su diagonal resulta un espacio Z que es homeomorfo a $\mathbb{P}$ y que de hecho, se puede dar un homeomorfismo entre Z y $\mathbb{P}$ que es la identidad en el triángulo $T_3 = \{0\} \times T$.

Y entonces el lector ya puede imaginarse que existe un homeomorfismo entre Z y el cono de T_3 que es la identidad en T_3.

En el Lema 128 mostramos que $\mathcal{B}^0 = \{\mathcal{A} \in F_2(C([0, 1])) : 0 \in \bigcup \mathcal{A}\}$ es homeomorfo a Z. En la demostración, identificamos a cada elemento $\langle t, \langle a, b\rangle\rangle$ de $\mathbb{P}$ con el par $\{[0, t], [a, b]\}$. Entonces, como los puntos de T_3 son los de la forma $\langle 0, \langle a, b\rangle\rangle$, con $0 \leq a \leq b \leq 1$, éstos se identifican con los pares de la forma $\{[0, 0], [a, b]\} = \{\{0\}, [a, b]\}$ que son precisamente los puntos de $\mathcal{E} = \{\mathcal{A} \in F_2(C([0, 1])) : \{0\} \in \mathcal{A}\}$. Por tanto, existe un homeomorfismo $f : \mathcal{B}^0 \to Cono(\mathcal{E})$, tal que para todo $\mathcal{A} \in \mathcal{B}^0$, $f(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{A}, 0\rangle$.

Tomando un homeomorfismo $h : [0, 1] \to L_n$ que manda a 0 en v, se obtiene que $h(\mathcal{B}^0) = \mathcal{B}_v^n$ y $h(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_n$. Por tanto, existe un homeomorfismo $g : \mathcal{B}_v^n \to Cono(\mathcal{E}_n)$ tal que para todo $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_v^n$, $g(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{A}, 0\rangle$. $\square$

Definición 132. Denotamos por D^0 al espacio $\{F \in C_2([0, 1]) : 0 \in F\}$.

Denotamos por D^1 al espacio $\{F \in C_2([0, 1]) : 1 \in F\}$.

Definición 133. Decimos que $F \in C_2(L_n)$ **tiene la propiedad** P_n si y sólo si F cumple las siguientes propiedades:

1. $v \in F$,
2. Si $F \in C_2(L_n) \setminus C(L_n)$, entonces $\{v\}$ es una componente de F.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por E_n al espacio

$$E_n = \{F \in C_2(L_n) : F \text{ tiene la propiedad } P_n\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por D_v^n al espacio

$$D_v^n = \{F \in C_2(L_n) : v \in F\}.$$

Lema 134. *Para toda $n \in \mathbb{N}$, existe un homeomorfismo $G : D_v^n \to Cono(E_n)$ tal que para todo $F \in E_n$, $G(F) = \langle F, 0\rangle$.*

Demostración. Sea $g_n : [0,1] \to L_n$ un homeomorfismo tal que $g_n(1) = v$. Entonces $g_n^{-1}(E_n) = g_n^{-1}(\{A \in C(L_n) : v \in A\} \cup$
$\{A \in C_2(L_n) \setminus C(L_n) : \{v\} \text{ es una componente de } A\}) = \mathcal{E}$,
donde
$\mathcal{E} = \{A \in C([0,1]) : 1 \in A\} \cup$
$\{A \in C_2([0,1]) \setminus C([0,1]) : \{1\} \text{ es una componente de } A\} =$

$$= \{[a,b] \cup \{1\} \in C_2([0,1]) : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Además $g_n^{-1}(D_v^n) = g_n^{-1}(\{A \in C_2(L_n) : v \in A\}) = \mathcal{D}$, donde

$$\mathcal{D} = \{A \in C_2([0,1]) : 1 \in A\}.$$

Ya que g_n es un homeomorfismo, para probar nuestro lema, basta con que mostremos que existe un homeomorfismo $f : \mathcal{D} \to Cono(\mathcal{E})$ tal que para toda $A \in \mathcal{E}$, $f(A) = \langle A, 0\rangle$.

En el Lema 2.2 de [13] se probó el resultado de R. Schori que dice que $C_2([0,1])$ es homeomorfo a $[0,1]^4$. En la prueba de este lema, se definieron varios conjuntos y funciones, y se probaron varias propiedades que mencionamos a continuación.

- $\mathcal{D}_0^1 = \{A \in C_2([0,1]) : \{0,1\} \subseteq A\}$,
- $\mathcal{D} = \{A \in C_2([0,1]) : 1 \in A\}$,
- $T = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$,
- $\Delta = \{\langle a,a\rangle \in T : a \in [0,1]\}$,
- $h : T \to \mathcal{D}_0^1$, dada por $h(\langle a,b\rangle) = [0,a] \cup [b,1]$,

- $g : Cono(\mathcal{D}_0^1) \to \mathcal{D}$, dada por $g(\langle A, t\rangle) = t + (1-t)A$.

Se mostró que g es un homeomorfismo, que h es continua y que $h(\langle a, b\rangle) = h(\langle c, d\rangle)$ si y sólo si $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ o ($a = b$ y $c = d$).

Ahora definimos S el continuo que resulta de identificar la diagonal Δ en un solo punto. Sea $\pi : T \to S$ la identificación. Entonces $\pi(\langle a, b\rangle) = \pi(\langle c, d\rangle)$ si y sólo si $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ o $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in \Delta$, lo que es equivalente a: $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ o ($a = b$ y $c = d$). Entonces las fibras de la función h coinciden con las de π. El Teorema de la Transgresión, garantiza que existe un homeomorfismo $\varphi : \mathcal{D}_0^1 \to S$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathcal{D}_0^1 \arrow[d, "\varphi"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Notemos que S es una 2-celda, de manera que $\mathcal{D}_0^1$ también es una 2-celda.

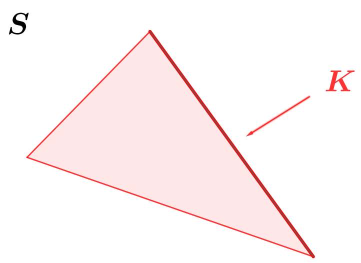
Sea $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \cap \mathcal{D}_0^1 = \{A \in \mathcal{E} : 0 \in A\} = \{[0, a] \cup \{1\} : 0 \leq a \leq 1\}$.

Entonces $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{D}_0^1$ y $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$.

Sea $A \in \mathcal{E}_0$. Entonces $A = [0, a] \cup \{1\}$, con $a \leq 1$. Así que, para $\langle a, b\rangle \in T$, $h(\langle a, b\rangle) \in \mathcal{E}_0$, si y sólo si $[0, a] \cup [b, 1] \in \mathcal{E}_0$, es decir, $a = b$ o ($a < 1$ y $b = 1$), equivalentemente $\langle a, b\rangle \in \Delta$ o $\langle a, b\rangle \in [0, 1] \times \{1\}$. Por tanto, $h^{-1}(\mathcal{E}_0) = \Delta \cup ([0, 1] \times \{1\})$. Esto implica que $\varphi(\mathcal{E}_0) = \pi(h^{-1}(\mathcal{E}_0)) = \pi(\Delta \cup ([0, 1] \times \{1\}))$. Como $\pi(\Delta) = \pi(\langle 1, 1\rangle) \in \pi([0, 1] \times \{1\})$, tenemos que $\varphi(\mathcal{E}_0) = \pi([0, 1] \times \{1\})$.

Esto prueba que $\mathcal{E}_0$ es homeomorfo a $\pi([0, 1] \times \{1\})$.

Sea $K = \pi([0, 1] \times \{1\})$. Recordemos que S es una 2-celda y como $[0, 1] \times \{1\}$ es un segmento en la frontera de T, tenemos que K es un arco en la frontera de S. Podemos entonces representar a S como un triángulo con K como uno de sus lados.



Veamos que $g(\mathcal{E}_0 \times [0,1]) = \mathcal{E}$.

Dadas $A \in \mathcal{E}_0$ y $t \in [0,1]$, sabemos que $A = [0,a] \cup \{1\}$ para alguna $a \in [0,1]$, así que $g(A,t) = (t + (1-t)([0,a] \cup \{1\})) = [t, t+(1-t)a] \cup \{1\}$. Notemos que $t \leq t + (1-t)a \leq 1$, de modo que $g(A,t) = [t, a_1] \cup \{1\}$, donde $a_1 = t + (1-t)a$. Entonces $g(A,t) \in \mathcal{E}$. Por otra parte, si tomamos $[a,b] \cup \{1\}$, con $0 \leq a \leq b \leq 1$ y $a < 1$, hacemos $t = a$ y $a_1 = \frac{b-a}{1-a}$. Entonces $t, \frac{b-a}{1-a} \in [0,1]$ y $g([0,a_1] \cup \{1\}, t) = [a, a + (1-a)(\frac{b-a}{1-a})] \cup \{1\} = [a,b] \cup \{1\}$. Así que $[a,b] \cup \{1\} \in g(\mathcal{E}_0 \times [0,1])$.

En el caso en que $a = 1$, $[a,b] \cup \{1\} = \{1\}$ y, entonces $g([0,1],1) = [1, 1+0] \cup \{1\} = \{1\}$. Así que en este caso, también se cumple que $[a,b] \cup \{1\} \in g(\mathcal{E}_0 \times [0,1])$.

Por tanto, $\mathcal{E} = g(\mathcal{E}_0 \times [0,1])$. Esto nos indica que (topológicamente) $\mathcal{E}$ es el cono sobre $\mathcal{E}_0$.

Como $\varphi : \mathcal{D}_0^1 \to S$ es un homeomorfismo y $\varphi(\mathcal{E}_0) = K$, tenemos que $\hat{\varphi} : Cono(\mathcal{D}_0^1) \to Cono(S)$ dada por $\hat{\varphi}(A,t) = (\varphi(A), t)$ es un homeomorfismo que envía el cono de $\mathcal{E}_0$ en el cono de K. Entonces $\hat{\varphi}$ envía a $\mathcal{E}$ en el cono de K.

Sea L el cono de K dentro del cono de S. Entonces $L = K \times [0,1] = \hat{\varphi}(\mathcal{E})$. Como S es un triángulo, $Cono(S)$ es un tetraedro. Ya que K es un lado de S, L es una cara del tetraedro $Cono(S)$. De manera que $Cono(S)$ también es el cono de L. Entonces $Cono(S) = Cono(L)$ (y lo podemos pensar de las dos maneras).

Sea $\sigma : \mathcal{D} \to Cono(S) = Cono(L)$ dada por $\sigma = \hat{\varphi} \circ g^{-1}$. Como $\mathcal{E} = g(\mathcal{E}_0 \times [0,1])$, $\sigma(\mathcal{E}) = \hat{\varphi}(\mathcal{E}_0 \times [0,1]) = Cono(K) = L \times \{0\}$. Por tanto la función $\alpha = \sigma|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to L \times \{0\}$ es un homeomorfismo. Escribimos $\alpha = \alpha_1 \times \{0\}$. Entonces $\alpha_1 : \mathcal{E} \to L$ es un homeomorfismo y consideramos el homeomorfismo $\beta : Cono(\mathcal{E}) \to Cono(L)$ dado por $\beta(A,t) = (\alpha_1(A), t)$.

Definimos $f : \mathcal{D} \to Cono(\mathcal{E})$ por $f = \beta^{-1} \circ \sigma$. Entonces f es un homeomorfismo. Dada $A \in \mathcal{E}$, $f(A) = \beta^{-1}(\sigma(A)) = \beta^{-1}(\alpha_1(A), 0) = \langle A, 0 \rangle$. Por tanto $f(A) = \langle A, 0 \rangle$ para toda $A \in \mathcal{E}$. $\square$

Lema 135. *Para toda $n \in \mathbb{N}$, la función $h_n : \mathcal{E}_n \to E_n$ dada por*

$$h_n(\{A, B\}) = A \cup B$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Es claro que h_n es una función continua.

Veamos que es inyectiva.

Sean $\{\{v\}, A\}, \{\{v\}, B\} \in \mathcal{E}_n$. Por la definición de $\mathcal{E}_n$, tenemos que existen números $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1$ y $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq 1$ tales que

$$A = \left\{ \left\langle \frac{t}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle : a_1 \leq t \leq a_2 \right\}$$

y

$$B = \left\{ \left\langle \frac{r}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle : b_1 \leq r \leq b_2 \right\}.$$

Supongamos que $A \neq B$. Entonces $a_1 \neq b_1$ o $a_2 \neq b_2$.

Caso 1. $a_1 \neq b_1$.

En este caso podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_1 < b_1$. Si $a_1 = 0 = a_2$, entonces $h_n(\{\{v\}, A\}) = \{\{v\}\}$. Como $0 = a_1 < b_1$, entonces

$$\left\langle \frac{b_1}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle \in (B \cup \{v\}) \setminus (A \cup \{v\}).$$

Si $a_2 > 0$, entonces existe $a_1 \leq c_1 < \text{mín}\{a_2, b_1\}$. Entonces

$$\left\langle \frac{c_1}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle \in (A \cup \{v\}) \setminus (B \cup \{v\}).$$

Caso 2. $a_2 \neq b_2$.

En este caso podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_2 < b_2$. Entonces $\langle \frac{b_2}{n}, \frac{1}{n} \rangle \in (B \cup \{v\}) \setminus (A \cup \{v\})$.

En ambos casos, tenemos que $h_n(\{\{v\}, A\}) \neq h_n(\{\{v\}, B\})$. Por lo tanto, h_n es inyectiva.

Ahora veamos que h_n es suprayectiva. Sea $F \in E_n$.

Caso 1. F es conexo.

Por la definición de E_n, tenemos que $v \in F \subseteq L_n$. Entonces $\{\{v\}, F\} \in \mathcal{E}_n$ y $h_n(\{\{v\}, F\}) = \{v\} \cup F = F$.

Caso 2. F es disconexo.

Sean F_1 y F_2 las componentes de F. Por la definición de E_n, tenemos que $F_1 \cup F_2 \subseteq L_n$ y alguna de las componentes es $\{v\}$. Entonces $\{F_1, F_2\} \in \mathcal{E}_n$ y $h_n(\{F_1, F_2\}) = F_1 \cup F_2 = F$.

Por lo tanto, h_n es suprayectiva.

Por el Lema 130 aplicado al continuo $C(L_n)$ y a $\{v\}$, tenemos que $\mathcal{E}_n$ es cerrado en $F_2(C(L_n))$. Como $F_2(C(L_n))$ es compacto, entonces $\mathcal{E}_n$ es compacto. Además, E_n es métrico. Como h_n es una biyección continua de un espacio compacto a un espacio Hausdorff, entonces h_n es homeomorfismo. $\square$

Corolario 136. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un homeomorfismo $H_n : \mathcal{B}_v^n \to D_v^n$ que extiende a h_n.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 131, tenemos que existe un homeomorfismo $g_1 : \mathcal{B}_v^n \to Cono(\mathcal{E}_n)$ tal que $g_1(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{A}, 0 \rangle$ para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_n$.

Por el Lema 135, tenemos que la función $h_n : \mathcal{E}_n \to E_n$ dada por

$$h_n(\{A, B\}) = A \cup B$$

es un homeomorfismo. Entonces la función $g_2 : Cono(\mathcal{E}_n) \to Cono(E_n)$ dada por $g_2(\langle \mathcal{A}, t \rangle) = \langle h_n(\mathcal{A}), t \rangle$ es un homeomorfismo.

Por el Lema 134, existe un homeomorfismo $g_3 : Cono(E_n) \to D_v^n$ tal que $g_3(\langle A, 0\rangle) = A$ para cada $A \in E_n$.

Entonces la función $g_3 \circ g_2 \circ g_1 : \mathcal{B}_v^n \to D_v^n$ es un homeomorfismo.

Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_n$. Tenemos que $g_1(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{A}, 0\rangle$. Además, $g_2(\langle \mathcal{A}, 0\rangle) = \langle h_n(\mathcal{A}), 0\rangle$. Finalmente, $g_3(\langle h_n(\mathcal{A}), 0\rangle) = h_n(\mathcal{A})$. Por lo tanto, $g_3 \circ g_2 \circ g_1(\mathcal{A}) = h_n(\mathcal{A})$ para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_n$. $\square$

Definición 137. Para cada $n \in \mathbb{N}$, fijamos un homeomorfismo de $\mathcal{B}_v^n$ a D_v^n que extiende a h_n cuya existencia está asegurada por el Corolario 136 y lo denotamos por H_n.

Definición 138. Definimos la función $J : \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega))) \to \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$ dada por

$$J(\{A, B\}) = \begin{cases} A \cup B, & \text{si } A \subseteq L_n,\ B \subseteq L_m \text{ y } n \neq m, \\ H_n(\{A, B\}), & \text{si } A \cup B \subseteq L_n. \end{cases}$$

A continuación argumentaremos que J es una función de $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ a $\partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$.

Por el Lema 122, si $\{A, B\} \in \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$, entonces $v \in A \cup B$ y tanto A como B están contenidos en algún segmento de F_ω. Supongamos primero que $A \subseteq L_n$, $B \subseteq L_m$ y $n \neq m$.

En el caso en el que $v \in A \cap B$, entonces $A \cup B$ es conexo e interseca a lo más a los segmentos abiertos $L_n \setminus \{v\}$ y $L_m \setminus \{v\}$. Por el Lema 119, $A \cup B \in \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$.

En el caso en el que $v \in A \setminus B$, entonces $A \cup B$ es disconexo, $v \in A \subseteq L_n$ y $B \subseteq L_m$. Por el Lema 119, tenemos qu e $A \cup B \in \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$.

Ahora veamos el caso en el que $A \cup B \subseteq L_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces $H_n(\{A, B\}) \in D_v^n$, es decir, $v \in H_n(\{A, B\})$. Por otro lado, $H_n(\{A, B\}) \subseteq L_n$. Por el Lema 119, $H_n(\{A, B\}) \in \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$.

Sea $\{A, B\} \in \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ tal que $A \cup B \subseteq L_n$, $A \subseteq L_n$, $B \subseteq L_m$ y $n \neq m$.

Como $B \subseteq L_n \cap L_m$, entonces $B = \{v\}$. Entonces $\{A, B\} \in \mathcal{E}_n$. Como H_n extiende a h_n. Entonces $H_n(\{A, B\}) = h_n(\{A, B\}) = A \cup B$.

Con esto mostramos que J es una función.

Teorema 139. *El espacio $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ es homeomorfo a $\partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$.*

Demostración. Para demostrar este teorema mostraremos que la función J de la Definición 138 es un homeomorfismo.

Veamos que J **es una función continua**.

Sean $\{A_n, B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ y $\{A, B\}$ un elemento de $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ tales que $\lim_{n\to\infty}\{A_n, B_n\} = \{A, B\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\lim A_n = A$ y que $\lim B_n = B$. Como la función J está definida en dos partes, existe una infinidad de números n para los cuales $\{A_n, B_n\}$ cumple la primera parte de la definición de la función J o existe una infinidad de números n para los cuales $\{A_n, B_n\}$ cumple la segunda parte de la definición de la función J. Entonces existe una subsucesión $\{\{A_{n_k}, B_{n_k}\}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para toda $k \in \mathbb{N}$ cumple alguna de las dos partes de la definición de la función J. Mostraremos que para dicha subsucesión se cumple que $\lim_{k\to\infty} J(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = J(\{A, B\})$. Por el Lema 1, esto implica que J es continua.

Para no usar una notación innecesariamente complicada, podemos suponer que la sucesión completa satisface alguna de las dos partes de la definición de la función J. Por lo que distinguimos dos casos.

Caso 1. Para toda $n \in \mathbb{N}$, existen $r_n, s_n \in \mathbb{N}$ distintos, tales que $A_n \subseteq L_{r_n}$ y $B_n \subseteq L_{s_n}$.

En este caso, por la definición de la función J, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} J(\{A_n, B_n\}) = \lim_{n\to\infty} A_n \cup B_n = A \cup B.$$

Como para toda $n \in \mathbb{N}$, $\{A_n, B_n\} \in \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ y $\{A, B\}$ es un elemento de $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$, por la Lema 122, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, cada uno de los continuos A_n y B_n está contenido en algún segmento de F_ω, tanto A como B están contenidos en algún segmento de F_ω y $v \in A \cup B$.

Afirmamos que si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $A \cup B \subseteq L_r$, entonces $\{v\} \in \{A, B\}$. Supongamos que $\{v\} \notin \{A, B\}$. Como $A \subseteq L_r$ y $A \neq \{v\}$, tenemos que $A \cap L_r \setminus \{v\} \neq \emptyset$. Sea $U = L_r \setminus \{v\}$. Entonces U es abierto en X y $A \in \langle X, U\rangle$. Ya que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in \langle X, U\rangle$ para toda $n \geq N$. Así que $A_n \cap L_r \setminus \{v\} \neq \emptyset$. Sea $n \geq N$. Como $A_n \subseteq L_{r_n}$, concluimos que $r = r_n$. Por tanto, para toda $n \geq N$, $r = r_n$. Similarmente, existe $M \geq N$ tal que para toda $n \geq M$, $r = s_n$. En particular $s_M = r_M$, lo que es una contradicción. Esto prueba que $\{v\} \in \{A, B\}$. De manera que $\{A, B\} \in \mathcal{E}_r$ (Definición 129). Entonces $J(\{A, B\}) = H_r(\{A, B\}) = h_r(\{A, B\}) = A \cup B$. En el caso en que A y B están contenidos en diferentes intervalos de F_ω también tenemos que $J(\{A, B\}) = A \cup B$.

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} J(\{A_n, B_n\}) = \lim_{n\to\infty} A_n \cup B_n = A \cup B = J(\{A, B\}).$$

Caso 2. Para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $r_n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \cup B_n \subseteq L_{r_n}$.

En el caso en el que existen $r \in \mathbb{N}$ y una subsucesión $\{\{A_{n_k}, B_{n_k}\}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que para toda $k \in \mathbb{N}$, $A_{n_k} \cup B_{n_k} \subseteq L_r$, entonces por la definición de la función J y por la continuidad de la función H_r, tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} J(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = \lim_{k\to\infty} H_r(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = H_r(\{A, B\}).$$

Como $F_2(C(L_r))$ es cerrado y $\lim_{k\to\infty}\{A_{n_k}, B_{n_k}\} = \{A, B\}$, entonces $\{A, B\} \in F_2(C(L_r))$, es decir, $A \cup B \subseteq L_r$. Por la definición de la función J, tenemos que $J(\{A, B\}) = H_r(\{A, B\})$. Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} J(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = \lim_{k\to\infty} H_r(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = H_r(\{A, B\}) = J(\{A, B\}).$$

En el caso en el que para toda $m \in \mathbb{N}$, el número de elementos de la sucesión $\{\{A_n, B_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuya unión está contenida en el segmento L_m es finito. Entonces es posible construir $m_1 < m_2 < m_3 < ...$ y una subsucesión $\{\{A_{n_k}, B_{n_k}\}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que

$$A_{n_k} \cup B_{n_k} \subseteq L_{m_k}.$$

Como la longitud de los segmentos de F_ω tiende a cero a medida que sus índices correspondientes tienden a infinito, entonces $\lim_{k\to\infty}\{A_{n_k}, B_{n_k}\} = \{A, B\} = \{\{v\}\}$. Por la Definición 129, tenemos que $\{\{v\}\} \in \mathcal{E}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 135, tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $h_n(\{\{v\}\}) = \{v\}$. Por el Definición 137, tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $H_n(\{\{v\}\}) = h_n(\{\{v\}\}) = \{v\}$. Por la definición de la función J, tenemos que $J(\{\{v\}\}) = H_1(\{\{v\}\}) = \{v\}$.

Tenemos que para toda $k \in \mathbb{N}$, $H_{m_k}(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) \subseteq L_{m_k}$. Como la longitud de los segmentos de F_ω tiende a 0 cuando los índices tienden a infinito, entonces $\lim_{k\to\infty} H_{m_k}(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = \{v\}$.

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} J(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = \lim_{k\to\infty} H_{m_k}(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = \{v\} = J(\{\{v\}\}) = J(\{A, B\}).$$

Con esto terminamos la demostración de que J es continua.

Veamos que J **es inyectiva**.

Sean $\{A, B\}, \{C, D\} \in \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ tales que $\{A, B\} \neq \{C, D\}$.

Caso 1. Los pares $\{A, B\}$ y $\{C, D\}$ cumplen la segunda parte de la definición de J para la misma $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $A \cup B \subseteq L_n$ y $C \cup D \subseteq L_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Como H_n es inyectiva, entonces $H_n(\{A, B\}) \neq H_n(\{C, D\})$.

Caso 2. $A \cup B \subseteq L_n$, $(C \cup D) \cap (L_m \setminus L_n) \neq \emptyset$ para algunas $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \neq m$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $C \cap (L_m \setminus L_n) \neq \emptyset$.

Como $A \cup B \subseteq L_n$, entonces $J(\{A, B\}) = H_n(\{A, B\}) \in C_2(L_n)$.

Si $C \cup D \subseteq L_m$, entonces $H_m(\{C, D\}) \in C_2(L_m)$. Como $C \cap (L_m \setminus L_n) \neq \emptyset$, entonces $\{C, D\} \neq \{\{v\}\}$. Por la Definición 129, tenemos que $\{\{v\}\} \in \mathcal{E}_m$. Por la Definición 137, $H_m(\{\{v\}\}) = h_m(\{\{v\}\}) = \{v\} \cup \{v\} = \{v\}$. Como H_m es biyectiva, entonces $H_m(\{C, D\}) \neq \{v\}$. Como $C_2(L_n) \cap C_2(L_m) = \{\{v\}\}$, entonces $H_m(\{C, D\}) \notin C_2(L_n)$. Por lo tanto, $J(\{A, B\}) \neq J(\{C, D\})$.

Si $C \cup D \nsubseteq L_m$, como $\{C, D\} \in \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$, por la Definición 122, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $C \subseteq L_m$ y que existe $r \neq m$

tal que $D \subseteq L_r$. Entonces $\{C, D\}$ cumple la primera parte de J, por lo que $J(\{C, D\}) = C \cup D$. Por otro lado, como $A \cup B \subseteq L_n$, entonces $J(\{A, B\}) = H_n(\{A, B\})$. Por el Corolario 137, tenemos que $H_n(\{A, B\}) \subseteq L_n$. Como

$$(C \cup D) \cap (L_m \setminus L_n) \neq \emptyset,$$

entonces $J(\{A, B\}) \neq J(\{C, D\})$.

Notemos que con estos dos primeros casos, abarcamos los casos en el que alguno de los pares cumple la segunda parte de la definición de J. **Falta por considerar los casos en los que ambos pares** $\{A, B\}$ **y** $\{C, D\}$ **cumplen la primera parte de la definición de** J **pero no la segunda**.

Caso 3. Los pares $\{A, B\}$ y $\{C, D\}$ cumplen la primera parte de la definición de J para los mismos $m, n \in \mathbb{N}$. Es decir, $A \cup C \subseteq L_n$, $A \cap (L_n \setminus \{v\}) \neq \emptyset$, $C \cap (L_n \setminus \{v\}) \neq \emptyset$, $B \cup D \subseteq L_m$, $B \cap (L_m \setminus \{v\}) \neq \emptyset$, $D \cap (L_m \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ para algunos $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n \neq m$.

Como $\{A, B\} \neq \{C, D\}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A \notin \{C, D\}$, es decir, $A \neq C$ y $A \neq D$.

Si $A \neq C$, entonces existe $a \in L_n \setminus \{v\}$ tal que $a \in A \setminus C$ o existe $c \in L_n \setminus \{v\}$ tal que $c \in C \setminus A$.

En el caso en el que existe $a \in L_n \setminus \{v\}$ tal que $a \in A \setminus C$, entonces $a \in A \cup B = J(\{A, B\})$. Como $D \subseteq L_m$, entonces $a \notin D$. Por lo tanto, $a \notin C \cup D = J(\{C, D\})$. Por lo tanto, $J(\{A, B\}) \neq J(\{C, D\})$.

El caso en el que existe $c \in L_n \setminus \{v\}$ tal que $c \in C \setminus A$ es análogo.

Caso 4. $A \subseteq L_n$, $A \cap (L_n \setminus \{v\}) \neq \emptyset$, $B \subseteq L_m$, $B \cap (L_m \setminus \{v\}) \neq \emptyset$, $C \subseteq L_r$, $C \cap (L_r \setminus \{v\}) \neq \emptyset$, $D \subseteq L_s$ y $D \cap (L_s \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ para algunos $n, m, r, s \in \mathbb{N}$ tales que $\{n, m\} \neq \{r, s\}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $r \notin \{n, m\}$. Elegimos $c \in C \cap L_r \setminus \{v\}$. Entonces $c \in C \cup D \setminus A \cup B = J(\{C, D\}) \setminus J(\{A, B\})$. Por lo tanto, $J(\{A, B\}) \neq J(\{C, D\})$.

Ahora veamos que J **es suprayectiva**. Sea $F \in \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$. Por el Lema 119, tenemos que $v \in F$ y cumple alguno de los siguientes dos casos:

1. F es conexo e interseca a lo más a dos segmentos abiertos de F_ω, o

2. F es disconexo y cada componente de F está contenida en algún segmento de F_ω.

Caso 1. F es conexo e interseca a lo más a dos segmentos abiertos de F_ω.

Si F es conexo y F no interseca a ningún segmento abierto de F_ω, entoncees $F = \{v\}$. En este caso, $J(\{\{v\}\}) = \{v\}$.

Si F es conexo e interseca a un único segmento abierto de F_ω, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F \cap (L_n \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ y $F \subseteq L_n$. Como $v \in F$, entonces F es un subarco de L_n tal que uno de sus extremos es v. Entonces $\{\{v\}, F\} \in \mathcal{E}_n$ y $J(\{\{v\}, F\}) = H_n(\{\{v\}, F\}) = h_n(\{\{v\}, F\}) = \{v\} \cup F = F$.

Si F es conexo e interseca a dos segmentos abiertos distintos de F_ω, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ distintos tales que $F \cap (L_n \setminus \{v\}) \neq \emptyset$ y $F \cap (L_m \setminus \{v\}) \neq \emptyset$. Definimos $A = F \cap L_n$ y $B = F \cap L_m$. Entonces $v \in A \cap B$, $A \subseteq L_n$ y $B \subseteq L_m$. Por lo tanto, $\{A, B\} \in \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$. Además, $J(\{A, B\}) = A \cup B = F$.

Caso 2. F es disconexo y cada componente de F está contenida en algún segmento de F_ω.

En el caso en el que $F \subseteq L_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, como $F \in \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$, por el Lema 119, tenemos que $v \in F$. Entonces $F \in D_v^n$. Como H_n es suprayectiva, entonces existe $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_v^n$ tal que $H_n(\mathcal{A}) = F$. Por la Definición 129, $v \in \bigcup \mathcal{A}$ y cada elemento de $\mathcal{A}$ está contenido en L_n. Por el Lema 122, entonces $\mathcal{A} \in \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$. Por lo tanto, existe $\mathcal{A} \in \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ tal que

$$J(\mathcal{A}) = H_n(\mathcal{A}) = F.$$

En el caso en el que F_1 y F_2 son las componentes de F, $F_1 \subseteq L_n$, $F_2 \subseteq L_m$ y $m \neq n$, tenemos que $v \in F$ por el Lema 119. Supongamos sin pérdida de generalidad que $v \in F_1$. Por el Lema 122, tenemos que el par $\{F_1, F_2\} \in \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$. Entonces $J(\{F_1, F_2\}) = F_1 \cup F_2 = F$.

Con esto terminamos de mostrar que J es suprayectiva.

Como $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ es cerrado en $F_2(C(F_\omega))$ y $F_2(C(F_\omega))$ es compacto, entonces $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ es compacto. Además, $\partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$ es métrico. Como J es una biyección continua de un espacio compacto a un espacio Hausdorff, entonces J es un homeomorfismo. $\square$

El siguiente es el Teorema 1.3 de [5] y es conocido como el Teorema de homogeneidad de Anderson.

Teorema 140. *Sean A y B dos Z-conjuntos en un cubo de Hilbert Q. Si $h : A \to B$ es un homeomorfismo, entonces existe un homeomorfismo $H : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ tal que H es extensión de h.*

Teorema 141. *Existe un homeomorfismo $H : F_2(\{v\}, C(F_\omega)) \to C_2(\{v\}, F_\omega)$ tal que H es extensión del homeomorfismo $J : \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)) \to \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$ (véase Definición 138 y Lema 139).*

Demostración. Por el Lema 115, tenemos que $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es un cubo de Hilbert.

Por el Lema 90, tenemos que $C_2(\{v\}, F_\omega)$ es un cubo de Hilbert.

Por el Lema 124, tenemos que $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$ es un Z-conjunto en el cubo de Hilbert $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.

Por el Lema 123, tenemos que $\partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$ es un Z-conjunto en el cubo de Hilbert $C_2(\{v\}, F_\omega)$.

Por el Lema 139, $J : \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega))) \to \partial(C_2(\{v\}, F_\omega))$ es un homeomorfismo.

Por el Teorema 140, existe un homeomorfismo

$$H : F_2(\{v\}, C(F_\omega)) \to C_2(\{v\}, F_\omega)$$

que extiende a J. $\square$

Definición 142. Fijamos un homeomorfismo de $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ a $C_2(\{v\}, F_\omega)$ que extiende al homeomorfismo J de la Definición 138 cuya existencia está asegurada por el Teorema 141 y lo denotamos por K.

Lema 143. *Existe un homeomorfismo $g : Cono(\mathcal{B}^0) \to F_2(C([0,1]))$ tal que $g(\langle \mathcal{A}, 0\rangle) = \mathcal{A}$ para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{B}^0$ (véase Definición 125).*

Demostración. Consideramos la función $h : Cono(\mathcal{B}^1) \to F_2(C([0,1]))$ dada por

$$h(\langle \{A, B\}, t\rangle) = \{(1-t)A, (1-t)B\}.$$

Como $h(\langle \{A, B\}, 1\rangle) = \{\{0\}\}$ para cada $\{A, B\} \in \mathcal{B}^1$, entonces h está bien definida.

Claramente h es continua.

Veamos que h **es inyectiva**. Supongamos que $h(\langle \{A, B\}, t\rangle) = h(\langle \{C, D\}, s\rangle)$. Entonces $\{(1-t)A, (1-t)B\} = \{(1-s)C, (1-s)D\}$.

Como $\{A, B\}, \{C, D\} \in \mathcal{B}^1$, entonces $1 \in (A \cup B) \cap (C \cup D)$.

Entonces

$$1 - t = \text{máx}\{((1-t)A) \cup ((1-t)B)\}$$

y

$$1 - s = \text{máx}\{((1-s)C) \cup ((1-s)D)\}.$$

Como $\{(1-t)A, (1-t)B\} = \{(1-t)C, (1-t)D\}$, entonces

$$(1-t)A \cup (1-t)B = (1-s)C \cup (1-s)D.$$

Por lo tanto, $1 - t = 1 - s$, así que, $t = s$.

En el caso en el que $t = s = 1$, $\langle \{A, B\}, t\rangle$ representa al mismo elemento que $\langle \{C, D\}, s\rangle$ en el cono de $\mathcal{B}^1$.

En el caso en el que $t < 1$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(1-t)A = (1-t)C$ y $(1-t)B = (1-t)D$. Entonces $A = C$ y $B = D$. Entonces $\{A, B\} = \{C, D\}$. Por lo tanto, h es inyectiva.

Ahora veamos que h **es suprayectiva**. Sea $\{[a, b], [c, d]\} \in F_2(C([0,1]))$

En el caso en el que $\{[a, b], [c, d]\} = \{\{0\}\}$, la imagen del vértice de $Cono(\mathcal{B}^1)$ bajo h es $\{\{0\}\}$.

En el caso en el que $\{[a, b], [c, d]\} \neq \{\{0\}\}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $b \leq d$. Sea $t = 1 - d$. Entonces $d = 1 - t$.

Consideramos al par $\mathcal{A} = \{[\frac{a}{d}, \frac{b}{d}], [\frac{c}{d}, 1]\}$. Como $b \leq d$, entonces $\mathcal{A} \in \mathcal{B}^1$. Además,

$$h(\langle \mathcal{A}, t\rangle) = \left\{ d\left[\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right], d\left[\frac{c}{d}, 1\right]\right\} = \{[a,b],[c,d]\}.$$

Por lo tanto, h es suprayectiva.

Como h es una biyección continua, $Cono(\mathcal{B}^1)$ es compacto y $F_2(C([0,1]))$ es métrico, entonces h es un homeomorfismo.

Consideremos el homeomorfismo $f : [0,1] \to [0,1]$ dado por $f(t) = 1 - t$.

Por el Lema 9, tenemos que la función inducida $F_2(C(f)) : F_2(C([0,1])) \to F_2(C([0,1]))$ es un homeomorfismo.

Como $f(0) = 1$, entonces $F_2(C(f))[\mathcal{B}^0] = \mathcal{B}^1$. Por lo tanto, $F_2(C(f))|_{\mathcal{B}^0} : \mathcal{B}^0 \to \mathcal{B}^1$ es homeomorfismo.

Entonces la función $F : Cono(\mathcal{B}^0) \to Cono(\mathcal{B}^1)$ dada por

$$F(\langle\{A,B\}, t\rangle) = \langle F_2(C(f))(\{A,B\}), t\rangle$$

es un homeomorfismo.

Entonces la función $g = F_2(C(f)) \circ h \circ F : Cono(\mathcal{B}^0) \to F_2(C([0,1]))$ es un homeomorfismo pues g es composición de homeomorfismos.

Sea $\{A,B\} \in \mathcal{B}^0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} g(\langle\{A,B\},0\rangle) &= F_2(C(f))(h(\langle F_2(C(f))(\{A,B\}),0\rangle)) = \\ &= F_2(C(f))(h(\langle\{C(f)(A), C(f)(B)\},0\rangle)) = \\ &= F_2(C(f))(\{(1-0)C(f)(A),(1-0)C(f)(B)\}) = \\ &= F_2(C(f))(\{C(f)(A), C(f)(B)\}) = \\ &= \{C(f)(C(f)(A)), C(f)(C(f)(B))\} = \{A,B\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g(\langle \mathcal{A}, t\rangle) = \mathcal{A}$ para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{B}^0$. □

Lema 144. *Para toda $n \in \mathbb{N}$, existe un homeomorfismo $h : Cono(\mathcal{B}_v^n) \to F_2(C(L_n))$ tal que $h(\langle \mathcal{A}, 0\rangle) = \mathcal{A}$ para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_v^n$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos un homeomorfismo $f_n : [0,1] \to L_n$ tal que $f_n(0) = v$. Por el Lema 9, tenemos que la función inducida $F_2(C(f_n)) : F_2(C([0,1])) \to F_2(C(L_n))$ es un homeomorfismo.

Como $f_n(0) = v$, entonces $F_2(C(f_n))[\mathcal{B}^0] = \mathcal{B}_v^n$. Entonces $F_2(C(f_n))|_{\mathcal{B}^0} : \mathcal{B}^0 \to \mathcal{B}_v^n$ es un homeomorfismo.

Entonces la función $h_n : Cono(\mathcal{B}^0) \to Cono(\mathcal{B}_v^n)$ dada por

$$h_n(\langle \mathcal{A}, t\rangle) = \langle F_2(C(f_n))(\mathcal{A}), t\rangle$$

es un homeomorfismo.

Por el Lema 143, tenemos que existe un homeomorfismo $g : Cono(\mathcal{B}^0) \to F_2(C([0,1]))$ tal que $g(\langle \mathcal{A}, 0\rangle) = \mathcal{A}$ para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{B}^0$.

Entonces la composición $h = F_2(C(f_n)) \circ g \circ h_n^{-1} : Cono(\mathcal{B}_v^n) \to F_2(C(L_n))$ es un homeomorfismo.

Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_v^n$. Tenemos que
$h(\langle \mathcal{A}, 0\rangle) = F_2(C(f_n))(g(h_n^{-1}(\langle \mathcal{A}, 0\rangle))) = F_2(C(f_n))(g(\langle F_2(C(f_n))^{-1}(\mathcal{A}), 0\rangle))$.
Como $F_2(C(f_n))^{-1}(\mathcal{A}) \in \mathcal{B}^0$, tenemos que
$F_2(C(f_n))(g(\langle F_2(C(f_n))^{-1}(\mathcal{A}), 0\rangle)) = F_2(C(f_n))(F_2(C(f_n))^{-1}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$.
Por lo tanto, $h(\langle \mathcal{A}, 0\rangle) = \mathcal{A}$ para toda $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_v^n$. □

Lema 145. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un homeomorfismo $g : Cono(D_v^n) \to C_2(L_n)$ tal que $g(\langle F, 0\rangle) = F$ para todo $F \in D_v^n$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. En el Lema 2.2 de [13] se probó que la función $h : Cono(D^1) \to C_2([0,1])$ dada por $h(\langle A, t\rangle) = (1-t)A$ es un homeomorfismo.

Notamos que para todo $A \in D^1$, $h(\langle A, 0\rangle) = (1-0)A = A$.

Consideramos un homeomorfismo $f_n : [0,1] \to L_n$ tal que $f_n(1) = v$.

Por el Lema 9, tenemos que la función inducida $C_2(f_n) : C_2([0,1]) \to C_2(L_n)$ dada por $C_2(f_n)(A) = f_n[A]$ es un homeomorfismo.

Como $f_n(1) = v$, entonces $C_2(f_n)[D^1] = D_v^n$. Entonces la función

$$C_2(f_n)|_{D^1} : D^1 \to D_v^n$$

es un homeomorfismo.

Entonces la función $h_n : Cono(D^1) \to Cono(D_v^n)$ dada por

$$h_n(\langle A, t\rangle) = \langle C_2(f_n)(A), t\rangle$$

es un homeomorfismo.

Entonces la composición

$$g = C_2(f_n) \circ h \circ h_n^{-1} : Cono(D_v^n) \to C_2(L_n)$$

es un homeomorfismo pues g es composición de homeomorfismos.

Sea $F \in D_v^n$. Tenemos que
$g(\langle F, 0\rangle) = C_2(f_n)(h(h_n^{-1}(\langle F, 0\rangle))) = C_2(f_n)(h(\langle C_2(f_n)^{-1}(F), 0\rangle))$.
Como $C_2(f_n)^{-1}(F) \in D_1$, entonces
$C_2(f_n)(h(\langle C_2(f_n)^{-1}(F), 0\rangle)) = C_2(f_n)(C_2(f_n)^{-1}(F)) = F$.
Por lo tanto, $g(\langle F, 0\rangle) = F$ para todo $F \in D_v^n$. □

Teorema 146. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un homeomorfismo $f : F_2(C(L_n)) \to C_2(L_n)$ tal que para todo $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_v^n$, $f(\mathcal{A}) = H_n(\mathcal{A})$ donde H_n es el homeomorfismo de la Definición 137.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$.

Por el Lema 144, existe un homeomorfismo $g_1 : F_2(C(L_n)) \to Cono(\mathcal{B}_v^n)$ tal que $g_1(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{A}, 0 \rangle$ para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_v^n$.

Consideramos el homeomorfismo $H_n : \mathcal{B}_v^n \to D_v^n$ de la Definición 137. Entonces la función $g_2 : Cono(\mathcal{B}_v^n) \to Cono(D_v^n)$ dada por $g_2(\langle \mathcal{A}, t \rangle) = \langle H_n(\mathcal{A}), t \rangle$ es un homeomorfismo.

Por el Lema 145, existe un homeomorfismo $g_3 : Cono(D_v^n) \to C_2(L_n)$ tal que $g_3(\langle A, 0 \rangle) = A$ para cada $A \in D_v^n$.

Entonces la composición $g_3 \circ g_2 \circ g_1 : F_2(C(L_n)) \to C_2(L_n)$ es un homeomorfismo.

Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_v^n$. Tenemos que

$g_3(g_2(g_1(\mathcal{A}))) = g_3(g_2(\langle \mathcal{A}, 0 \rangle)) = g_3(\langle H_n(\mathcal{A}), 0 \rangle) = H_n(\mathcal{A})$. □

Definición 147. Para cada $n \in \mathbb{N}$, fijamos un homeomorfismo de $F_2(C(L_n))$ a $C_2(L_n)$ que extiende al homeomorfismo H_n de la definición 137 cuya existencia está asegurada por el Teorema 146 y lo denotamos por K_n

Teorema 148. *El hiperespacio $F_2(C(F_\omega))$ es homeomorfo al hiperespacio $C_2(F_\omega)$.*

Demostración. Consideramos la función K de la Definición 142 y para cada $n \in \mathbb{N}$ la función K_n de la Definición 147.

Definimos la función $G : F_2(C(F_\omega)) \to C_2(F_\omega)$ dada por

$$G(\{A, B\}) = \begin{cases} K(\{A, B\}), & \text{si } \{A, B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega)), \\ K_n(\{A, B\}), & \text{si } A \cup B \subseteq L_n, \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}, \\ A \cup B, & \text{si } A \subseteq L_n \setminus \{v\},\ B \subseteq L_m \setminus \{v\} \text{ y } m \neq n. \end{cases}$$

Veamos que G es continua. Sean $\{A_n, B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $F_2(C(F_\omega))$ y $\{A, B\}$ un elemento de $F_2(C(F_\omega))$ tales que $\lim_{n \to \infty} \{A_n, B_n\} = \{A, B\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\lim A_n = A$ y que $\lim B_n = B$. Como la función G está definida en tres partes, para alguna de ellas hay una infinidad de números n para los cuales $\{A_n, B_n\}$ cumple dicha parte. Entonces para alguna de las partes de la definición de la función G, existe una subsucesión $\{\{A_{n_k}, B_{n_k}\}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que para toda $k \in \mathbb{N}$, el par $\{A_{n_k}, B_{n_k}\}$ cumple dicha parte. Mostraremos que para dicha subsucesión se cumple que $\lim_{k \to \infty} G(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = G(\{A, B\})$. Por el Lema 1, esto implica que G es continua en $\{A, B\}$.

Para no usar una notación innecesariamente complicada, podemos suponer que para alguna de las tres partes de la definición de G, la sucesión completa satisface dicha parte. Por lo que distinguimos tres casos:

Caso 1. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $\{A_n, B_n\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.

Como $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ es cerrado y $\lim_{n \to \infty} \{A_n, B_n\} = \{A, B\}$, entonces

$$\{A, B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega)).$$

Por la definición de la función G y la continuidad de la función K, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} G(\{A_n, B_n\}) = \lim_{n\to\infty} K(\{A_n, B_n\}) = K(\{A, B\}) = G(\{A, B\}).$$

Caso 2. Para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $r_n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \cup B_n \subseteq L_{r_n}$.

En el caso en el que existen $r \in \mathbb{N}$ y una subsucesión $\{\{A_{n_k}, B_{n_k}\}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que para toda $k \in \mathbb{N}$, $A_{n_k} \cup B_{n_k} \subseteq L_r$, entonces por la definición de la función G y por la continuidad de la función K_r, tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} G(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = \lim_{k\to\infty} K_r(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = K_r(\{A, B\}).$$

Como $F_2(C(L_r))$ es cerrado y $\lim_{k\to\infty}\{A_{n_k}, B_{n_k}\} = \{A, B\}$, entonces $\{A, B\} \in F_2(C(L_r))$, es decir, $A \cup B \subseteq L_r$. Por la definición de la función G, tenemos que $G(\{A, B\}) = K_r(\{A, B\})$. Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} G(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = \lim_{k\to\infty} K_r(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = K_r(\{A, B\}) = G(\{A, B\}).$$

En el caso en el que para toda $m \in \mathbb{N}$, el número de elementos de la sucesión $\{\{A_n, B_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuya unión está contenida en el segmento L_m es finito. Entonces es posible construir $m_1 < m_2 < m_3 < ...$ y una subsucesión $\{\{A_{n_k}, B_{n_k}\}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que

$$A_{n_k} \cup B_{n_k} \subseteq L_{m_k}.$$

Como la longitud de los segmentos de F_ω tiende a cero a medida que sus índices correspondientes tienden a infinito, entonces $\lim_{k\to\infty}\{A_{n_k}, B_{n_k}\} = \{A, B\} = \{\{v\}\}$. Por la Definición 129, tenemos que $\{\{v\}\} \in \mathcal{E}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 135, tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $h_n(\{\{v\}\}) = \{v\}$. Por la Definición 137, tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $H_n(\{\{v\}\}) = h_n(\{\{v\}\}) = \{v\}$. Por la Definición 147, tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $K_n(\{\{v\}\}) = H_n(\{\{v\}\}) = \{v\}$. Por la definición de la función G, tenemos que $G(\{\{v\}\}) = K_1(\{\{v\}\}) = \{v\}$.

Tenemos que para toda $k \in \mathbb{N}$, $K_{m_k}(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) \subseteq L_{m_k}$. Como la longitud de los segmentos de F_ω tiende a 0 cuando los índices tienden a infinito, entonces $\lim_{k\to\infty} K_{m_k}(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = \{v\}$.

Por lo tanto, $\lim_{k\to\infty} G(\{A_{n_k}, B_{n_k}\}) = \{v\} = G(\{\{v\}\}) = G(\{A, B\})$.

Caso 3. Para toda $n \in \mathbb{N}$, existen $r_n, s_n \in \mathbb{N}$ distintos tales que $A_n \subseteq L_{r_n} \setminus \{v\}$ y $B_n \subseteq L_{s_n} \setminus \{v\}$.

Por la definición de la función G, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} G(\{A_n, B_n\}) = \lim_{n\to\infty} A_n \cup B_n = A \cup B.$$

En el caso en el que existen $r, s \in \mathbb{N}$ distintos tales que $A \subseteq L_r \setminus \{v\}$ y $B \subseteq L_s \setminus \{v\}$, entonces $G(\{A, B\}) = A \cup B$.

Como $\{A, B\}$ es límite de pares $\{A_n, B_n\}$ tales que sus elementos están contenidos en segmentos distintos de F_ω, existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $A \subseteq L_r$ y $B \subseteq L_s$.

Supongamos que $r \neq s$. Como ya vimos el caso en que $A \subseteq L_r \setminus \{v\}$ y $B \subseteq L_s \setminus \{v\}$, podemos suponer que $v \in A \cup B$. Por la Definición 91, tenemos que

$$\{A, B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega)).$$

Por la definición de la función G, $G(\{A, B\}) = K(\{A, B\})$. Por la Definición 122, $\{A, B\} \in \partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega)))$. Por la Definición 142, tenemos que $K(\{A, B\}) = J(\{A, B\})$. Por la Definición 138, tenemos que

$$G(\{A, B\}) = K(\{A, B\}) = J(\{A, B\}) = A \cup B.$$

Ahora supongamos que $r = s$. Entonces $G(\{A, B\}) = K_r(\{A, B\})$. Como $A \subseteq L_r$ y $A \neq \{v\}$, tenemos que $A \cap L_r \setminus \{v\} \neq \emptyset$. Sea $U = L_r \setminus \{v\}$. Entonces U es abierto en X y $A \in \langle X, U\rangle$. Ya que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in \langle X, U\rangle$ para toda $n \geq N$. Así que $A_n \cap L_r \setminus \{v\} \neq \emptyset$. Sea $n \geq N$. Como $A_n \subseteq L_{r_n}$, concluimos que $r = r_n$. Por tanto, para toda $n \geq N$, $r = r_n$. Similarmente, existe $M \geq N$ tal que para toda $n \geq M$, $r = s_n$. En particular $s_M = r_M$, lo que es una contradicción. Esto prueba que $\{v\} \in \{A, B\}$. Por la Definición 129, tenemos que $\{A, B\} \in \mathcal{E}_r$. Por el Lema 135, tenemos que $h_r(\{A, B\}) = A \cup B$. Por la Definición 147, tenemos que $K_r(\{A, B\}) = H_r(\{A, B\})$. Por la Definición 137, tenemos que $H_r(\{A, B\}) = h_r(\{A, B\}) = A \cup B$.

Con esto concluimos que $\lim G(\{A_n, B_n\}) = A \cup B = G(\{A, B\})$.

Con esto terminamos la prueba de que G es continua.

Veamos que G **es inyectiva**.

Sean $\{A, B\}, \{C, D\} \in F_2(C(F_\omega))$ tales que $\{A, B\} \neq \{C, D\}$.

Caso 1. $\{A, B\}, \{C, D\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.

En este caso, como K es inyectiva, entonces

$$G(\{A, B\}) = K(\{A, B\}) \neq K(\{C, D\}) = G(\{C, D\}).$$

Caso 2. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \cup B, C \cup D \subseteq L_n \setminus \{v\}$

En este caso, como K_n es inyectiva, entonces

$$G(\{A, B\}) = K_n(\{A, B\}) \neq K_n(\{C, D\}) = G(\{C, D\}).$$

Caso 3. $\{A, B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ y $C \cup D \subseteq L_n \setminus \{v\}$.

Por el Lema 122, tenemos que $\partial(F_2(\{v\}, C(F_\omega))) \subseteq F_2(\{v\}, C(F_\omega))$. Entonces, $G(\{A, B\}) \in C_2(\{v\}, F_\omega)$. Por otro lado, como $\{C, D\} \in F_2(C(F_\omega)) \setminus F_2(\{v\}, C(F_\omega))$, entonces $G(\{C, D\}) = K_n(\{C, D\})$. Por el Teorema 146, tenemos que K_n extiende al homeomorfismo H_n de la Definición 137. Por lo tanto, $K_n(\{C, D\}) \notin D_v^n$. Por lo tanto, $K_n(\{C, D\}) \notin C_2(\{v\}, F_\omega)$. Por lo tanto,

$$G(\{A, B\}) \neq G(\{C, D\}).$$

Caso 4. $\{A, B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$, $C \subseteq L_n \setminus \{v\}$, $D \subseteq L_m \setminus \{v\}$ y $m \neq n$.

En el caso anterior argumentamos que $G(\{A, B\}) \in C_2(\{v\}, F_\omega)$. Por otro lado, $G(\{C, D\}) = C \cup D \notin C_2(\{v\}, F_\omega)$. Por lo tanto, $G(\{A, B\} \neq G(\{C, D\})$.

Con esto completamos los casos en los que algún par es elemento de $F_2(\{v\}, C(F_\omega))$. Resta analizar los casos en los que ambos pares son elementos de $F_2(C(F_\omega)) \setminus F_2(\{v\}, C(F_\omega))$.

Caso 5. Existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $A \cup B \subseteq L_n \setminus \{v\}$, $C \subseteq L_m \setminus \{v\}$ y $m \neq n$.

Como $\{C, D\} \in F_2(C(F_\omega)) \setminus F_2(\{v\}, C(F_\omega))$, entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $D \subseteq L_r \setminus \{v\}$. Como $A \cup B \subseteq L_n \setminus \{v\}$, entonces $G(\{A, B\}) = K_n(\{A, B\})$.

En el caso en el que $r = m$, como $C \cup D \subseteq L_m \setminus \{v\}$ tenemos que $G(\{C, D\}) = K_m(\{C, D\})$. De acuerdo con la Definición 147, $K_n(\{A, B\}) \subseteq L_n$ y $K_m(\{C, D\}) \subseteq L_m$. Entonces tenemos que la única forma en la que podría pasar que $K_n(\{A, B\}) = K_m(\{C, D\})$ es que $K_n(\{A, B\}) = \{v\} = K_m(\{C, D\})$. Por la Definición 147, tenemos que K_n y K_m extienden a las funciones H_n y H_m, respectivamente. De acuerdo con la Definición 137, las funciones H_n y H_m extienden a las funciones $h_n : \mathcal{E}_n \to E_n$ y $h_m : \mathcal{E}_m \to E_m$, respectivamente. Por el Lema 135, tenemos que $h_n(\{A, B\}) = A \cup B$ y $h_m(\{C, D\}) = C \cup D$. De acuerdo a la Definición 129, tenemos que $\{\{v\}\} \in \mathcal{E}_n$ y $\{\{v\}\} \in \mathcal{E}_m$ y $h_n(\{\{v\}\} = \{v\} \cup \{v\} = \{v\} = h_m(\{\{v\}\})$. Por lo tanto, $K_n(\{\{v\}\}) = \{v\} = K_m(\{\{v\}\})$. Como tanto K_n como K_m son inyectivas y $\{A, B\} \neq \{\{v\}\} \neq \{C, D\}$, entonces $G(\{A, B\}) \neq G(\{C, D\})$.

En el caso en el que $r \neq m$, como $C \subseteq L_m \setminus \{v\}$ y $D \subseteq L_r \setminus \{v\}$, entonces $G(\{C, D\}) = C \cup D$. De acuerdo con la Definición 147, tenemos que $K_n(\{A, B\}) \subseteq L_n$. Como $C \subseteq L_m \setminus \{v\}$ y $m \neq n$, entonces $(C \cup D) \cap (L_m \setminus \{v\}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $G(\{A, B\}) \neq G(\{C, D\})$.

Caso 6. Existen $m, n, s \in \mathbb{N}$ tales que $A \subseteq L_n \setminus \{v\}$, $B \subseteq L_m \setminus \{v\}$, $C \subseteq L_s \setminus \{v\}$ y m, n, s son distintos dos a dos.

En el caso en el que $D \subseteq L_s \setminus \{v\}$, tenemos que $G(\{A, B\}) = A \cup B$ y $G(\{C, D\}) = K_s(\{C, D\})$. Ya mostramos en el caso anterior (Caso 5) que bajo estas condiciones, $G(\{A, B\}) \neq G(\{C, D\})$.

En el caso en el que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \neq s$ y $D \subseteq L_r \setminus \{v\}$, entonces $G(\{A, B\}) = A \cup B$ y $G(\{C, D\}) = C \cup D$. Como $A \cup B \subseteq (L_n \cup L_m) \setminus \{v\}$, $C \subseteq L_s \setminus \{v\}$ y n, m, s son distintos dos a dos, entonces

$$G(\{A, B\}) = A \cup B \neq C \cup D = G(\{C, D\}).$$

Caso 7. Existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $A \cup C \subseteq L_n \setminus \{v\}$, $B \cup D \subseteq L_m \setminus \{v\}$ y $m \neq n$.

Como $\{A,B\} \neq \{C,D\}$, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A \notin \{C,D\}$, es decir, $A \neq C$. Entonces $A \nsubseteq C$ o $C \nsubseteq A$.

En el caso en el que $A \nsubseteq C$, tenemos que existe $a \in A \setminus C$. Entonces $a \in A \cup B = G(\{A,B\})$. Como $A \subseteq L_n \setminus \{v\}$, $D \subseteq L_m \setminus \{v\}$ y $m \neq n$, entonces $a \notin D$. Por lo tanto, $a \notin C \cup D = G(\{C,D\})$. Por lo tanto, $G(\{A,B\}) \neq G(\{C,D\})$.

El caso en el que $C \nsubseteq A$ es análogo.

Con esto mostramos que G es inyectiva.

Veamos ahora que G **es suprayectiva**.

Sea $F \in C_2(F_\omega)$.

Caso 1. $F \in C_2(\{v\}, F_\omega)$.

Como K es suprayectiva, existe $\{A,B\} \in F_2(\{v\}, C(F_\omega))$ tal que

$$G(\{A,B\}) = K(\{A,B\}) = F.$$

Caso 2. $F \in C_2(F_\omega) \setminus C_2(\{v\}, F_\omega)$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F \subseteq L_n \setminus \{v\}$.

En este caso como K_n es suprayectiva, entonces existe $\{A,B\} \in F_2(C(L_n))$ tal que $G(\{A,B\}) = K_n(\{A,B\}) = F$.

Caso 3. $F \in C_2(F_\omega) \setminus C_2(\{v\}, F_\omega)$, F_1 y F_2 son las componentes de F y existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m \neq n$, $F_1 \subseteq L_n \setminus \{v\}$ y $F_2 \subseteq L_m \setminus \{v\}$.

En este caso, $G(\{F_1, F_2\}) = F_1 \cup F_2$.

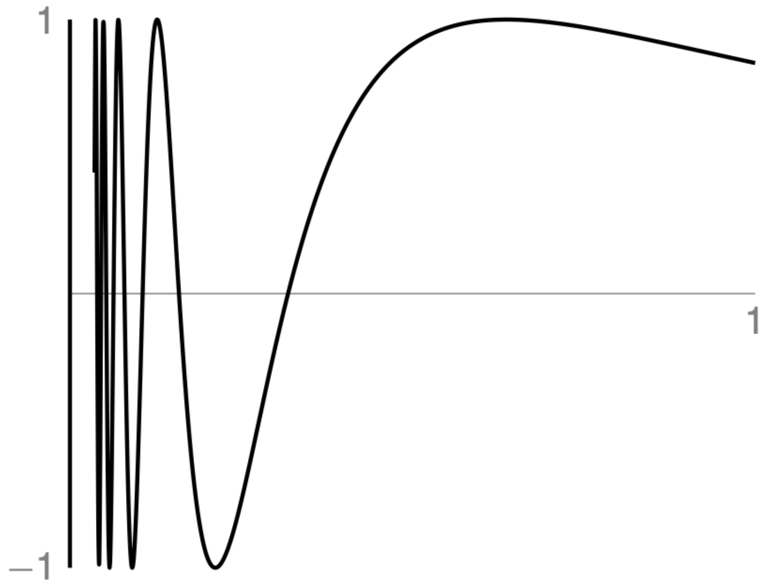
Como G es una biyección continua, $F_2(C(F_\omega))$ es compacto y $C_2(F_\omega)$ es métrico, entonces G es un homeomorfismo. □

CAPÍTULO 5

Continuos con subcontinuos terminales

Después de estudiar los abanicos, buscamos otras familias naturales en las que se pudiera determinar si $C_n(X)$ y $F_n(C(X))$ son homeomorfos. Esto hizo que pusiéramos nuestro esfuerzo en las compactaciones del rayo $[0, 1)$. Como veremos en este capítulo la respuesta fue contundente. La única compactación del rayo para la que estos hiperespacios pueden ser homeomorfos es el continuo $[0, 1]$.

Definición 149. Al continuo que resulta de la cerradura de la gráfica de la función $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ en el intervalo $(0, 1]$ le llamaremos **compactación** $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ o simplemente $sen\left(\frac{1}{x}\right)$.



El segmento límite de esta compactación posee la siguiente peculiaridad.

Consideremos un subcontinuo propio A del segmento límite y B un subcontinuo propio del rayo de la compactación. Si queremos unir a A con B por medio de una trayectoria en $C_2(X)$, necesitamos pasar por el segmento límite de la compactación. Esto implica que si al hiperespacio $C_2(X)$ le quitamos el segmento límite, nos queda un espacio que no es conexo por trayectorias. Por otro lado, el hiperespacio $F_2(C(X))$ es más versátil a este respecto. No sólo en el caso de que X sea la compactación $sen\left(\frac{1}{x}\right)$, sino en el caso en que X sea cualquier compactación del rayo con residuo no degenerado. Algo que demostraremos en esta sección es que si X es un continuo, entonces para todo $\mathcal{A} \in F_2(C(X))$, se tiene que $F_2(C(X)) \setminus \{\mathcal{A}\}$ es conexo por trayecorias.

Con este análisis, tenemos que para el caso en el que X es la compactación $sen\left(\frac{1}{x}\right)$, los hiperespacios $C_2(X)$ y $F_2(C(X))$ no son homeomorfos. Resulta ser que la peculiaridad que tiene el segmento límite de la compactación, tiene un nombre especial en la literatura. Como veremos en este capítulo.

Definición 150. Sea X un continuo. Un subcontinuo propio no degenerado Y de X es un **subcontinuo terminal de** X si para cualquier subcontinuo Z de X tal que $Z \cap Y \neq \emptyset \neq Z \cap (X \setminus Y)$, tenemos que $Y \subseteq Z$.

En esta sección mostraremos que para toda $n \geq 2$, si un continuo X tiene un subcontinuo terminal E, entonces $C_n(X) \setminus \{E\}$ no es conexo por trayectorias. Por otra parte, demostraremos que para toda $n \geq 2$ y para todo continuo X se cumple que si $\mathcal{A} \in F_n(C(X))$, entonces $F_n(C(X)) \setminus \{\mathcal{A}\}$ es un espacio conexo por trayectorias.

Teorema 151. *Sean X un continuo y F un subcontinuo terminal de X. Entonces para toda $n \geq 2$, $C_n(X) \setminus \{F\}$ no es conexo por trayectorias.*

Demostración. En el Teorema 11.5 de [21] se demostró que si F es un subcontinuo terminal de X, entonces $2^X \setminus \{F\}$ no es conexo por arcos. Para hacer esto, se probó que para cualquier función continua $f : [0,1] \to 2^X$ tal que $f(0) \in C(F) \setminus \{F\}$ y $f(1) \nsubseteq F$ se cumple que si $t_0 = \sup\{t \in [0,1] : f(t) \subseteq F\}$, entonces $f(t_0) = F$. De tal manera que si consideramos un subcontinuo propio E de F, un subcontinuo G de X tal que $G \nsubseteq F$ y una trayectoria $\alpha : [0,1] \to C_n(X)$ de E a G, entonces al ver a α como una función de $[0,1]$ a 2^X, tenemos que α pasa por F. Por lo tanto, $C_n(X) \setminus \{F\}$ no es conexo por trayectorias. $\square$

Ahora probaremos que para cualquier continuo X conexo por arcos y cualquier $n \geq 2$, si al hiperespacio $F_n(X)$ le quitamos un elemento, obtenemos un espacio conexo por trayectorias.

Teorema 152. *Sean X un continuo conexo por arcos, $n \geq 2$ y $A \in F_n(X)$. Entonces $F_n(X) \setminus \{A\}$ es un espacio conexo por trayectorias.*

Demostración. Sea $p \in X \setminus A$. Mostraremos que para cualquier $B \in F_n(X) \setminus \{A\}$, existe una trayectoria $\alpha : [0,1] \to F_n(X)$ de $\{p\}$ a B tal que para toda $t \in [0,1]$, $\alpha(t) \neq A$.

Sea $B = \{b_1, ..., b_m\} \in F_n(X)$ tal que $A \neq B$. Como $p \notin A$, entonces $\{p\} \neq A$. Como X es conexo por arcos, para toda $i \in \{1, ..., m\}$ existe una función continua $\alpha_i : [0,1] \to X$ tal que $\alpha_i(0) = p$ y $\alpha_i(1) = b_i$ y además:

- si $b_i \neq p$, entonces α_i es inyectiva, y
- si $b_i = p$, entonces α_i es la función constante b_i.

Analizaremos dos casos sobre la cardinalidad de B: $m = 1$ y $2 \leq m \leq n$.

Caso 1. $m = 1$.

Tenemos entonces que $B = \{b_1\}$.

En el caso en el que existe $t \in [0,1]$ tal que $\{\alpha_1(t)\} = A$, entonces existe $a \in X$ tal que $A = \{a\}$. Como $A \neq B$, tenemos que $b_1 \notin A$. Consideramos la función $\alpha : [0,1] \to F_n(X)$ dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} \{p, \alpha_1(2t)\}, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \{b_1, \alpha_1(2t-1)\}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Notamos que las dos partes de la definición de α son continuas, pues α_1 es continua. Como

$$\left\{p, \alpha_1\left(2\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\} = \{p, \alpha_1(1)\} = \{p, b_1\} = \{b_1, \alpha_1(0)\} = \left\{b_1, \alpha_1\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)\right\},$$

entonces las evaluaciones en $\frac{1}{2}$ de las dos partes de la definición de α coinciden. Por el Lema del pegado, α es continua. Como $\alpha(0) = \{p, \alpha_1(2(0))\} = \{p, \alpha_1(0)\} = \{p\}$ y $\alpha(1) = \{b_1, \alpha_1(2(1) - 1)\} = \{b_1, \alpha_1(1)\} = \{b_1\} = B$, entonces α es una trayectoria de $\{p\}$ a B. Notamos que para toda $t \in [0,1]$, $\alpha(t) \cap \{p, b_1\} \neq \emptyset$. Como $A \cap \{p, b_1\} = \emptyset$, tenemos que para todo $t \in [0,1]$, $\alpha(t) \neq A$.

En el caso en el que para toda $t \in [0,1]$, $\{\alpha_1(t)\} \neq A$, consideramos la función $\alpha : [0,1] \to F_n(X)$ dada por $\alpha(t) = \{\alpha_1(t)\}$. Como $\alpha(0) = \{\alpha_1(0)\} = \{p\}$ y $\alpha(1) = \{\alpha_1(1)\} = \{b_1\} = B$, entonces la función α es una trayectoria de $\{p\}$ a B que no pasa por A.

Caso 2. $2 \leq m$.

Analizaremos dos posibilidades para la cardinalidad de A: $|A| \leq m$ y $m < |A|$.

En el caso en el que $|A| \leq m$, como $A \neq B$, entonces existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $b_i \notin A$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $b_1 \notin A$. Por el Caso 1, tenemos que existe una trayectoria γ de $\{p\}$ a $\{b_1\}$ que no pasa por A. Entonces basta con mostrar que existe una trayectoria $\alpha : [0,1] \to F_n(X)$ de $\{b_1\}$ a B que no pasa por A. Como X es conexo por arcos, para cada $i \in \{2, ..., m\}$, existe una trayectoria $\beta_i : [0,1] \to X$ de b_1 a b_i. Consideramos la función $\alpha : [0,1] \to F_n(X)$ dada por $\alpha(t) = \{b_1, \beta_2(t), ..., \beta_m(t)\}$. Tenemos que α es continua, pues β_2,..., β_m son continuas. Como para todo $i \in \{2, ..., m\}$, $\beta_i(0) = b_1$, tenemos que

$$\alpha(0) = \{b_1, \beta_2(0), ..., \beta_m(0)\} = \{b_1\}.$$

Como para toda $i \in \{2, ..., m\}$, $\beta_i(1) = b_i$, tenemos que

$$\alpha(1) = \{b_1, \beta_2(1), ..., \beta_m(1)\} = \{b_1, ..., b_m\} = B.$$

Por lo tanto, α es una trayectoria de $\{b_1\}$ a B.

Como para todo $t \in [0,1]$, $b_1 \in \alpha(t)$ y $b_1 \notin A$, entonces para todo $t \in [0,1]$, $\alpha(t) \neq A$.

En el caso en el que $m < |A|$, consideramos la función $\alpha : [0,1] \to F_n(X)$ dada por $\alpha(t) = \{\alpha_1(t), ..., \alpha_m(t)\}$. La función α es continua, pues $\alpha_1, ..., \alpha_m$ son continuas. Como para toda $i \in \{1, ..., m\}$, $\alpha_i(0) = p$ y $\alpha_i(1) = b_i$, tenemos que

$$\alpha(0) = \{\alpha_1(0), ..., \alpha_m(0)\} = \{p\}$$

y

$$\alpha(1) = \{\alpha_1(1), ..., \alpha_m(1)\} = \{b_1, ..., b_m\} = B.$$

Por tanto, α es una trayectoria de $\{p\}$ a B. Notamos que para toda $t \in [0,1]$, la cardinalidad de $\alpha(t)$ es menor o igual que m. Como la cardinalidad de A es mayor que m, tenemos que para toda $t \in [0,1]$, $\alpha(t) \neq A$. $\square$

Tenemos que si X es un continuo, entonces $C(X)$ es conexo por arcos, por lo tanto, como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 153. *Sean X un continuo, $n \geq 2$ y $\mathcal{A} \in F_n(C(X))$. Entonces $F_n(C(X)) \setminus \{\mathcal{A}\}$ es conexo por trayectorias.*

Hemos demostrado que para toda $n \geq 2$ y para todo continuo X, si a $F_n(C(X))$ le quitamos un elemento, lo que nos queda es un espacio conexo por trayectorias. Por otro lado, si $n \geq 2$, X es un continuo y F es un subcontinuo terminal de X, entonces $C_n(X) \setminus \{F\}$ no es conexo por trayectorias. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 154. *Si X es un continuo que tiene subcontinuos terminales, entonces los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(C(X))$ no son homeomorfos para ninguna $n \geq 2$.*

CAPÍTULO 6

Promedios

Recordemos que un promedio es una retracción de $F_2(X)$ sobre $F_1(X)$. Los continuos X que admiten promedios han sido ampliamente estudiados. En partícular, se sabe que el continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ no admite promedios y que el continuo que consiste de una espiral rodeando una circunferencia tampoco admite promedios. Trabajando con el hiperespacio $F_2(C(X))$ se observa que $C(X)$ tiene mejores propiedades que X. En este capítulo reforzamos esta afirmación pues mostramos que cuando X es el continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ o la espiral rodeando una circunferencia, se tiene que $C(X)$ admite promedios.

En 1939 M. Wojdysławski mostró lo siguiente.

Teorema 155. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $C_n(X)$ es un retracto absoluto.*

Una consecuencia de este teorema es el siguiente corolario.

Corolario 156. *Sean X un continuo localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces existen retracciones $r_n : C_n(X) \to C(X)$ y $R_n : F_n(C(X)) \to F_1(C(X))$.*

Esto nos indica que para los continuos localmente conexos, ambos hiperespacios se pueden retraer a $C(X)$. Nos preguntamos si lo mismo ocurre para continuos no localmente conexos.

En [2], D. W. Curtis muestra que para una colección de compactaciones existe una retracción del hiperespacio 2^X en el hiperespacio $C(X)$. Como consecuencia tenemos que para estas compactaciones, existe una retracción del hiperespacio $C_n(X)$ a $C(X)$.

En esta sección mostraremos que para dos de esas compactaciones el hiperespacio $F_2(C(X))$ también se puede retraer al hiperspacio $F_1(C(X))$.

Las retracciónes del hiperespacio $F_2(C(X))$ en el hiperespacio $C(X)$ tienen una relación con los promedios.

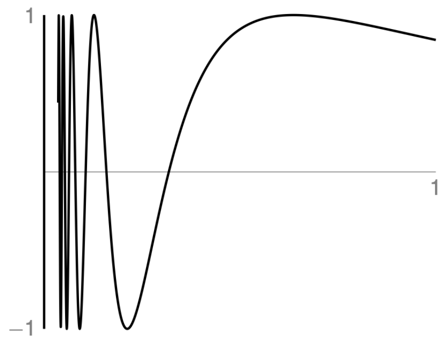
Definición 157. Sea X un continuo. Un **promedio para** X es una función continua $m : F_2(X) \to X$ tal que para todo $p \in X$, $m(\{p\}) = p$.

Tenemos que si existe un promedio para $C(X)$, dicho promedio es una función continua $M : F_2(C(X)) \to C(X)$ tal que $M(\{C\}) = C$. Es decir, M es una retracción del hiperespacio $F_2(C(X))$ en el hiperespacio $C(X)$.

6.1. La curva del topólogo $sen(\frac{1}{x})$.

La primera de las compactaciones que analizaremos es la curva del topólogo. En el Teorema 1.1 de [18] se muestra que si X es la curva del topólogo, entonces $C(X)$ es homeomorfo a $Cono(X)$. De tal forma que para mostrar que $C(X)$ admite promedios, dotaremos de un promedio al cono de X.

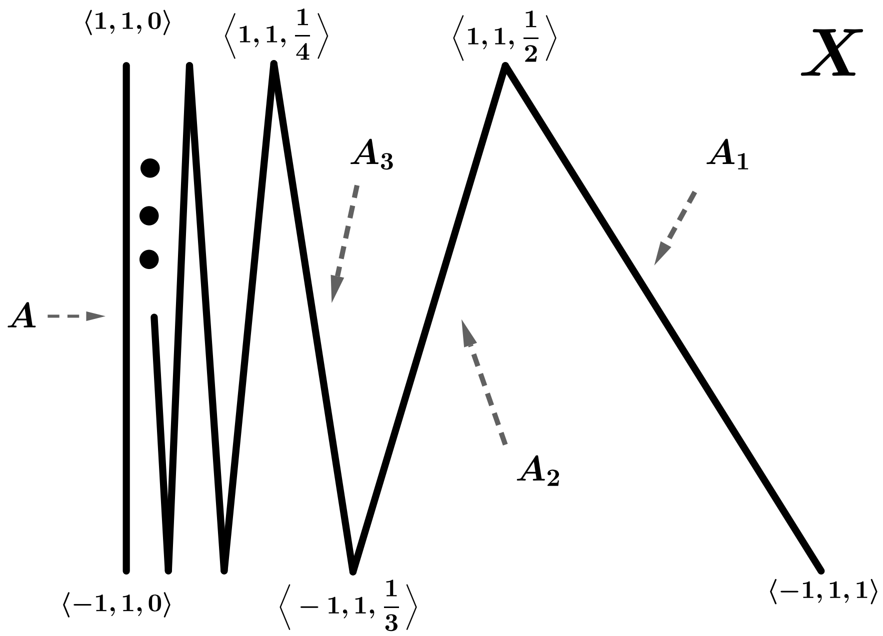
Recordamos que la curva del topólogo X es la cerradura de la gráfica de la función $sen(\frac{1}{x})$ en el intervalo $(0, 1]$.



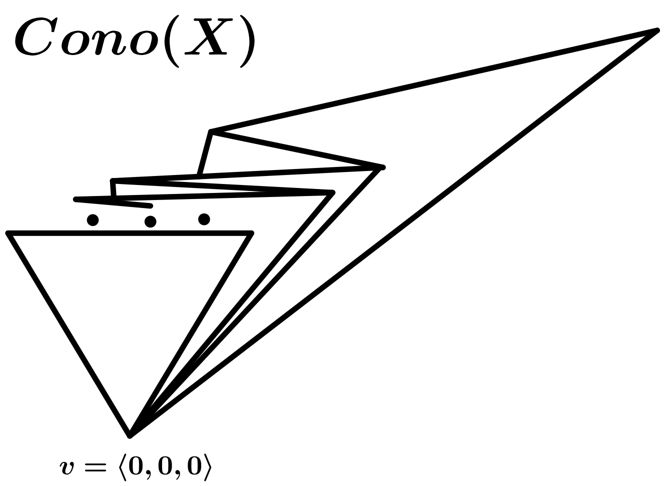
Para mayor simplicidad en el análisis que haremos, tomaremos el siguiente espacio X, el cual es homeomorfo a la curva del topólogo en el espacio.

Definición 158. Para todo $n \in \mathbb{N}$, denotamos por A_n el segmento rectilíneo cuyos extremos son los puntos $\left\langle (-1)^n, 1, \frac{1}{n} \right\rangle$ y $\left\langle (-1)^{n+1}, 1, \frac{1}{n+1} \right\rangle$. Denotamos por A el segmento rectilíneo cuyos extremos son los puntos $\langle 1, 1, 0 \rangle$ y $\langle -1, 1, 0 \rangle$.

Definimos $X = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup A$.



Tomamos ahora el cono de X cuyo vértice v es el punto $\langle 0,0,0\rangle$.



Lo primero que haremos es dotar de un promedio al triángulo límite de $Cono(X)$.

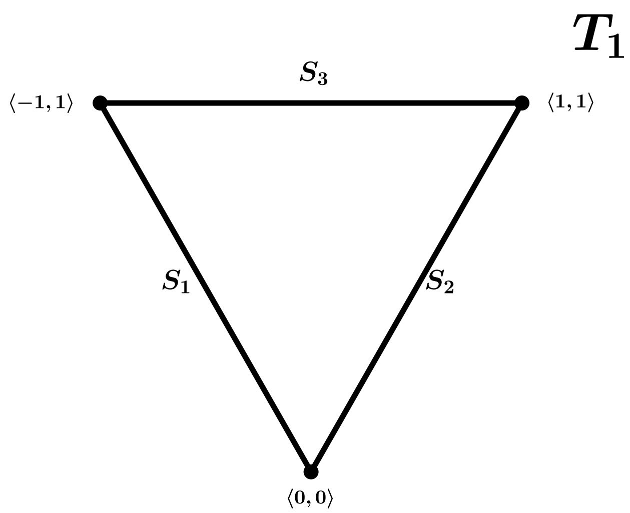
6.1.1. Triángulo límite

Para no lidiar con la tercera coordenada, en lugar del triángulo límite T del $Cono(X)$, cuyos vértices son los puntos $\langle -1,1,0\rangle$, $\langle 1,1,0\rangle$ y $\langle 0,0,0\rangle$, consideraremos el triángulo T_1 en el plano cuyos vértices son $\langle -1,1\rangle$, $\langle 1,1\rangle$ y $\langle 0,0\rangle$.

Definición 159. Denotamos por S_1 al lado de T_1 determinado por los puntos $\langle -1,1\rangle$ y $\langle 0,0\rangle$.

Denotamos por S_2 al lado de T_1 determinado por los puntos $\langle 1,1\rangle$ y $\langle 0,0\rangle$.

Denotamos por S_3 al lado de T_1 determinado por los puntos $\langle -1,1\rangle$ y $\langle 1,1\rangle$.



Definición 160. Consideramos la homotecia $H : T_1 \times [0,1] \to T_1$ dada por $H(\langle p,t\rangle) = (1-t)p$.

Definimos la función $f : T_1 \setminus \{\langle 0,0\rangle\} \to S_3$ dada por

$$f(\langle a,b\rangle) = \left\langle \frac{a}{b}, 1\right\rangle.$$

Como $\langle a,b\rangle \in T_1 \setminus \{\langle 0,0\rangle\}$, $|a| \leq b$, así que $|\frac{a}{b}| \leq 1$.

Definimos la función $g : T_1 \setminus \{\langle 0,0\rangle\} \to [0,1]$ dada por $g(\langle a,b\rangle) = 1-b$.

Lema 161. *Para todo $p \in T_1 \setminus \{\langle 0,0\rangle\}$, $H(\langle f(p), g(p)\rangle) = p$.*

Demostración. Sea $\langle a,b\rangle \in T_1 \setminus \{\langle 0,0\rangle\}$. Entonces

$$\begin{aligned} H(\langle f(\langle a,b\rangle), g(\langle a,b\rangle)\rangle) &= H\Big(\Big\langle\Big\langle \frac{a}{b}, 1\Big\rangle, 1-b\Big\rangle\Big) = \\ &= (1-(1-b))\Big\langle \frac{a}{b}, 1\Big\rangle = \\ &= \langle a,b\rangle. \end{aligned}$$

□

Definición 162. Definimos la función $m_1 : F_2(S_3) \to T_1$ dada por la siguiente regla, considerando que $-1 \le a \le b \le 1$,

$$m_1(\{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle\}) = \begin{cases} \langle b, 1-(b-a)\rangle, & \text{si } b \le 0, \\ \langle a, 1-(b-a)\rangle, & \text{si } 0 \le a, \\ \langle 0, 1-\text{máx}\{-a,b\}\rangle, & \text{si } a \le 0 \le b. \end{cases}$$

Notemos que si $b \le 0$, $-b \le 1-b+a \le 1$; si $0 \le a$, $a \le 1-b+a \le 1$; y si $a \le 0 \le b$, $0 \le 1-\text{máx}\{-a,b\} \le 1$. De manera que $m_1(\{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle\}) \in T_1$.

Lema 163. *La función m_1 es continua y para todo $\langle a,1\rangle \in S_3$, $m_1(\{\langle a,1\rangle\}) = \langle a,1\rangle$.*

Demostración. Notemos que las tres partes de la definición de m_1 son continuas. Veamos entonces que la evaluación coincide en los pares $\{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle\}$ que cumplen dos o tres condiciones de la definición de m_1.

Sean $-1 \le a \le b \le 1$.

En el caso en el que $b \le 0$ y $0 \le a$, tenemos que $a = b = 0$. En las tres partes de la definición de m_1, tenemos que $m(\{\langle 0,1\rangle\}) = \langle 0,1\rangle$.

En el caso en el que $a \le 0 \le b$ y $b \le 0$, tenemos que $a \le b = 0$. De acuerdo con la primera parte de la definición de m_1, tenemos que

$$m_1(\{\langle a,1\rangle, \langle 0,1\rangle\}) = \langle 0, 1-(0-a)\rangle = \langle 0, 1+a\rangle;$$

de acuerdo con la tercera parte de la definición de m_1, tenemos que

$$m_1(\{\langle a,1\rangle, \langle 0,1\rangle\}) = \langle 0, 1-\text{máx}\{-a,0\}\rangle = \langle 0, 1+a\rangle.$$

Finalmente, en el caso en el que $0 \le a$ y $a \le 0 \le b$, entonces $0 = a \le b$. De acuerdo con la segunda parte de la definición de m_1, tenemos que

$$m_1(\{\langle 0,1\rangle, \langle b,1\rangle\}) = \langle 0, 1-(b-0)\rangle = \langle 0, 1-b\rangle;$$

de acuerdo con la tercera parte de la definición de m_1, tenemos que

$$m_1(\{\langle 0,1\rangle, \langle b,1\rangle\}) = \langle 0, 1-\text{máx}\{0,b\}\rangle = \langle 0, 1-b\rangle.$$

Ahora veamos que para todo $\langle a, 1\rangle \in S_3$, $m_1(\{\langle a, 1\rangle\}) = \langle a, 1\rangle$.

En el caso en el que $a < 0$ o $a > 0$, tenemos que

$$m_1(\langle a, 1\rangle) = \langle a, 1 - (a - a)\rangle = \langle a, 1 - 0\rangle = \langle a, 1\rangle.$$

En el caso en el que $a = 0$, tenemos que

$$m_1(\langle 0, 1\rangle) = \langle 0, 1 - \text{máx}\{-0, 0\}\rangle = \langle 0, 1\rangle.$$

$\square$

Definición 164. Definimos la función $m_{T_1} : F_2(T_1) \to T_1$ dada por

$$m_{T_1}(\{\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\}) = \begin{cases} H(\langle m_1(\{f(\langle a, b\rangle), f(\langle c, d\rangle)\}), \text{máx}\{g(\langle a, b\rangle), g(\langle c, d\rangle)\}\rangle), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \langle 0, 0\rangle \notin \{\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\}, \\ \langle 0, 0\rangle, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \langle 0, 0\rangle \in \{\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\}. \end{cases}$$

Teorema 165. *La función m_{T_1} es un promedio para T_1.*

Demostración. Tenemos que la primera parte de la definición de m_{T_1} es una composición de funciones continuas.

Por otro lado, consideramos sucesiones $\{\langle a_n, b_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\langle c_n, d_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\text{lím}\langle a_n, b_n\rangle = \langle 0, 0\rangle$, $\text{lím}\langle c_n, d_n\rangle = \langle c, d\rangle$, y para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle 0, 0\rangle \notin \{\langle a_n, b_n\rangle, \langle c_n, d_n\rangle\}.$$

Entonces $\text{lím}\, b_n = 0$, por lo que $\text{lím}\, g(\langle a_n, b_n\rangle) = 1$.

Entonces

$$\text{lím}\,\text{máx}\{g(\langle a_n, b_n\rangle), g(\langle c, d\rangle)\} = 1.$$

Como $|H(\langle p, t\rangle)| = |(1 - t)p| \leq (1 - t)\sqrt{2}$ para toda $\langle p, t\rangle \in T_1 \times [0, 1]$, concluimos que

$$\text{lím}\, H(\langle m_1(\{f(\langle a_n, b_n\rangle), f(\langle c, d\rangle)\}), \text{máx}\{g(\langle a_n, b_n\rangle), g(\langle c, d\rangle)\}\rangle) = \langle 0, 0\rangle.$$

Por lo tanto, m_{T_1} es continua.

Ahora veamos que para todo $\langle a, b\rangle \in T_1$, $m_{T_1}(\{\langle a, b\rangle\}) = \langle a, b\rangle$.

En el caso en el que $\langle a, b\rangle = \langle 0, 0\rangle$, por la segunda parte de la definición de m_{T_1}, tenemos que $m_{T_1}(\{\langle 0, 0\rangle\}) = \langle 0, 0\rangle$.

En el caso en el que $\langle a, b\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$, tenemos que

$$m_{T_1}(\{\langle a, b\rangle\}) = H(\langle m_1(\{f(\langle a, b\rangle)\}), g(\langle a, b\rangle)\rangle).$$

Por el Lema 163, tenemos que $m_1(\{f(\langle a, b\rangle)\}) = f(\langle a, b\rangle)$.

Por el Lema 161, tenemos que $H(\langle f(\langle a, b\rangle), g(\langle a, b\rangle)\rangle) = \langle a, b\rangle$.

$\square$

Lema 166. *Para todo $\{p,q\} \in F_2(T_1)$, se cumple lo siguiente:*

1. *si $p \in S_1$, entonces $m_{T_1}(\{p,q\}) \in S_1$,*
2. *si $p \in S_2$, entonces $m_{T_1}(\{p,q\}) \in S_2$.*

Demostración. Sean $p = \langle a,b\rangle, q = \langle c,d\rangle \in T_1$.
1. Supongamos que $p \in S_1$.
En el caso en el que $p = \langle 0,0\rangle$, entonces $m_{T_1}(\{p,q\}) = \langle 0,0\rangle \in S_1$.
En el caso en el que $p \neq \langle 0,0\rangle$ y $q \neq \langle 0,0\rangle$, tenemos que

$$m_{T_1}(\{p,q\}) = H(\langle m_1(\{f(\langle a,b\rangle), f(\langle c,d\rangle)\}), \text{máx}\{g(\langle a,b\rangle), g(\langle c,d\rangle)\}\rangle).$$

Como $p \in S_1$, entonces $p = \langle -t,t\rangle$ para alguna $0 < t \leq 1$.
Tenemos que $f(\langle -t,t\rangle) = \left\langle \frac{-t}{t}, 1\right\rangle = \langle -1,1\rangle$ y $f(\langle c,d\rangle) = \langle \frac{c}{d}, 1\rangle$.
En el caso en el que $\frac{c}{d} \leq 0$, tenemos que

$$m_1(\{f(p), f(q)\rangle\}) = \left\langle \frac{c}{d}, 1 - \left(\frac{c}{d} - (-1)\right)\right\rangle = \left\langle \frac{c}{d}, -\frac{c}{d}\right\rangle \in S_1.$$

En el caso en el que $0 \leq \frac{c}{d}$, tenemos que

$$m_1(\{f(p), f(q)\}) = \left\langle 0, 1 - \text{máx}\left\{ -(-1), \frac{c}{d}\right\}\right\rangle = \langle 0,0\rangle \in S_1$$

Por tanto en ambos casos $m_1(\{f(p), f(q)\}) \in S_1$. Recordemos que para toda $\langle p,t\rangle \in T_1 \times [0,1]$, $H(\langle p,t\rangle) = (1-t)p$, así que si $p \in S_1$, entonces $H(\langle p,t\rangle) \in S_1$. Por tanto,

$$H(\langle m_1(\{f(\langle a,b\rangle), f(\langle c,d\rangle)\}), \text{máx}\{g(\langle a,b\rangle), g(\langle c,d\rangle)\}\rangle) \in S_1.$$

2. Supongamos que $p \in S_2$.
En el caso en el que $p = \langle 0,0\rangle$, tenemos que $m_{T_1}(\{p,q\}) = \langle 0,0\rangle \in S_2$.
En el caso en el que $p \neq \langle 0,0\rangle$ y $q \neq \langle 0,0\rangle$, tenemos que

$$m_{T_1}(\{p,q\}) = H(\langle m_1(\{f(\langle a,b\rangle), f(\langle c,d\rangle)\}), \text{máx}\{g(\langle a,b\rangle), g(\langle c,d\rangle)\}\rangle).$$

Como $p \in S_2$, entonces $p = \langle t,t\rangle$ para alguna $0 < t \leq 1$.
Tenemos que $f(\langle t,t\rangle) = \langle \frac{t}{t}, 1\rangle = \langle 1,1\rangle$ y $f(\langle c,d\rangle) = \langle \frac{c}{d}, 1\rangle$.
En el caso en el que $0 \leq \frac{c}{d}$, tenemos que

$$m_1(\{f(p), f(q)\}) = \left\langle \frac{c}{d}, 1 - \left(1 - \frac{c}{d}\right)\right\rangle = \left\langle \frac{c}{d}, \frac{c}{d}\right\rangle \in S_2.$$

En el caso en el que $\frac{c}{d} \leq 0$, tenemos que

$$m_1(\{f(p), f(q)\}) = \left\langle 0, 1 - \text{máx}\left\{1, -\frac{c}{d}\right\}\right\rangle = \langle 0, 0\rangle.$$

Como en ambos casos $m_1(\{f(p), f(q)\}) \in S_2$, entonces

$$H(\langle m_1(\{f(\langle a, b\rangle), f(\langle c, d\rangle)\}), \text{máx}\{g(\langle a, b\rangle), g(\langle c, d\rangle)\}\rangle) \in S_2.$$

□

6.1.2. Cono de la curva del topólogo

Definición 167. Denotamos por T al triángulo cuyos vértices son los puntos $\langle -1, 1, 0\rangle$, $\langle 1, 1, 0\rangle$ y $\langle 0, 0, 0\rangle$.

Denotamos por L_1 al lado de T cuyos vértices son $\langle -1, 1, 0\rangle$ y $\langle 0, 0, 0\rangle$.
Denotamos por L_2 al lado de T cuyos vértices son $\langle 1, 1, 0\rangle$ y $\langle 0, 0, 0\rangle$.
Denotamos por L_3 al lado de T cuyos vértices son $\langle -1, 1, 0\rangle$ y $\langle 1, 1, 0\rangle$.
Definimos la función $m_T : F_2(T) \to T$ dada por

$$m_T(\{\langle a, b, 0\rangle, \langle c, d, 0\rangle\}) = \langle x, y, 0\rangle,$$

donde $\langle x, y\rangle = m_{T_1}(\{\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\})$.

Como consecuencia del Teorema 165, tenemos el siguiente resultado.

Lema 168. *La función m_T es un promedio para T.*

Como consecuencia del Lema 166, tenemos el siguiente resultado.

Lema 169. *Para todo $\{p, q\} \in F_2(T)$, se cumple lo siguiente*

1. *Si $p \in L_1$, entonces $m_T(\{p, q\}) \in L_1$,*
2. *si $p \in L_2$, entonces $m_T(\{p, q\}) \in L_2$.*

Definición 170. Denotamos por $v = \langle 0, 0, 0\rangle$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos $p_n = \langle (-1)^n, 1, \frac{1}{n}\rangle$.
Denotamos por T_n al triángulo determinado por los puntos v, p_n y p_{n+1}.
Denotamos por L_1^n al lado de T_n cuyos extremos son v y

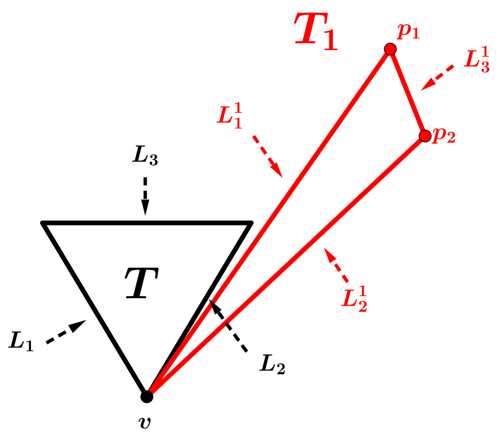
- p_{n+1}, si n es par, o
- p_n, si n es impar.

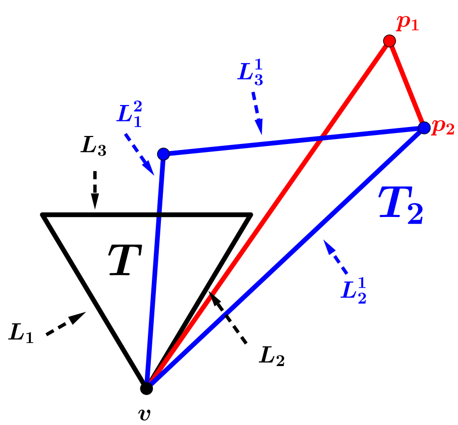
Denotamos por L_2^n al lado de T_n cuyos extremos son v y

- p_{n+1}, si n es impar, o
- p_n, si n es par.

Denotamos por L_3^n al lado de T_n cuyos vértices son p_n y p_{n+1}.

Denotamos así a los lados de los triángulos T_n de manera que se correspondan con los lados del triángulo T. De tal manera que para todo $n > 1$, $L_1^n = L_1^{n+1}$. Además, para toda $n \in \mathbb{N}$, $L_2^n = L_2^{n+1}$. A continuación ilustramos la definición anterior para T_1 y T_2.





Definición 171. Denotamos por $P : Cono(X) \to T$ a la función dada por

$$P(\langle a, b, c\rangle) = \langle a, b, 0\rangle.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $P_n : T_n \to T$ como la función P restringida al triángulo T_n.

Como la función P_n proyecta el triángulo T_n al triángulo T, tenemos el siguiente resultado.

Lema 172. *La función P es continua y para toda $n \in \mathbb{N}$, la función P_n es un homeomorfismo.*

Definición 173. Definimos la función $m : F_2(Cono(X)) \to Cono(X)$ dada por

$$m(\{p, q\}) = \begin{cases} P_k^{-1}(m_T(\{P(p), P(q)\})), & \text{si } n \leq k,\ p \in T_n \text{ y } q \in T_k, \\ m_T(\{P(p), P(q)\}), & \text{si } \{p, q\} \cap T \neq \emptyset. \end{cases}$$

Lema 174. *La función m está bien definida.*

Demostración. Sean $p, q \in T$. Si $p = v$, entonces $P(v) = v$ y $m_T(\{P(v), P(q)\}) = m_T(\{v, P(q)\}) = v$, y como $P_k^{-1}(v) = v$, tenemos que no importa cual de las dos definiciones apliquemos, tenemos que $m(\{p, q\}) = v$. De manera que m está bien definida en este caso. Podemos suponer entonces que $v \notin \{p, q\}$. Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $p, q \in Cono(X)$ tales que $n \leq k$, $p \in T_n$ y $q \in T_k$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $q \in L_1^k$ y que $L_1^k = L_1^{k+1}$. Tenemos que $P(q) \in L_1$. Por el Lema 169, tenemos que $m_T(\{P(p), P(q)\}) \in L_1$. Como $L_1^k = L_1^{k+1}$, entonces

$$P_k^{-1}(m_T(\{P(p), P(q)\})) = P_{k+1}^{-1}(m_T(\{P(p), P(q)\})).$$

□

Lema 175. *La función m es un promedio para $Cono(X)$.*

Demostración. Veamos que m es continua.

Dadas $k, n \in \mathbb{N}$ con $n \leq k$, sea

$$\mathcal{A}(n, k) = \{\{p, q\} \in F_2(Cono(X)) : p \in T_n \text{ y } q \in T_k\}.$$

Entonces $\mathcal{A}(n, k) = \langle T_n, T_k\rangle_{F_2(Cono(X))}$ es cerrado en $F_2(Cono(X))$ y la definición de m está dada por una composición de funciones continuas. Como ya vimos que m está bien definida, tenemos que $m|_{\mathcal{A}(n,k)}$ es continua.

Sea $\mathcal{A} = \{p, q\} \in F_2(Cono(X))$. Veamos que m es continua en $\mathcal{A}$. Consideramos tres casos.

Caso 1. $\mathcal{A} \cap T = \emptyset$.

En este caso, podemos suponer que $n \leq k$, $p \in T_n$ y $q \in T_k$. Sea

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{A}(n', k') : 1 \leq n' \leq k' \leq k+1\}.$$

Como $m|_{\mathcal{A}(n',k')}$ es continua para cualesquiera $1 \leq n' \leq k' \leq k+1$ y m está bien definida, tenemos que $m|_{\mathcal{B}}$ es continua. Como $\mathcal{A} \in int_{F_2(Cono(X))}(\mathcal{B})$, tenemos que m es continua en $\mathcal{A}$.

Caso 2. $v \in \mathcal{A}$.

Para este caso, necesitamos primero ver que si $\langle x, y, z\rangle \in Cono(X)$, entonces $0 \leq z \leq y \leq 1$. Para ver esto, primero observemos que $X \subseteq [-1, 1] \times \{1\} \times [0, 1]$. Definimos $\rho : Cono(X) \to \mathbb{R}^2$ por $\rho(\langle x, y, z\rangle) = \langle y, z\rangle$. Como el $Cono(X)$ está contenido en la pirámide con base en el rectángulo $[-1, 1] \times \{1\} \times [0, 1]$ y vértice en $\langle 0, 0, 0\rangle$. La proyección ρ aplicada a esta pirámide es el triángulo de vértices $\langle 1, 0\rangle$, $\langle 1, 1\rangle$ y $\langle 0, 0\rangle$ y, en coordenadas, este triángulo está dado por

$$\{\langle y, z\rangle \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq z \leq y \leq 1\}.$$

Esto termina la prueba de la afirmación.

Ahora sí, veamos la demostración de la continuidad de m en $\mathcal{A}$. Supongamos que $p = v = \lim p_n$, $q = \lim q_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \neq v$, $p_n = \langle x_n, y_n, z_n\rangle$ y $q_n = \langle u_n, v_n, w_n\rangle$.

Calculemos:

$$\begin{aligned} m_T(\{P(p_n), P(q_n)\}) &= m_T(\{\langle x_n, y_n, 0\rangle, \langle u_n, v_n, 0\rangle\}) = \\ &= \langle m_{T_1}(\{\langle x_n, y_n\rangle, \langle u_n, v_n\rangle\}), 0\rangle = \end{aligned}$$

$$= \langle H(\langle m_1(\{f(\langle x_n, y_n\rangle), f(\langle u_n, v_n\rangle)\}), \text{máx}\{g(\langle x_n, y_n\rangle), g(\langle u_n, v_n\rangle)\}\rangle), 0\rangle =$$
$$= \langle H(\langle m_1(\{f(\langle x_n, y_n\rangle), f(\langle u_n, v_n\rangle)\}), \text{máx}\{1 - y_n, 1 - v_n\}), 0\rangle).$$

Sean $r_n = \text{máx}\{1-y_n, 1-v_n\} \geq 1-y_n$ y $\langle s_n, t_n\rangle = m_1(\{f(\langle x_n, y_n\rangle), f(\langle u_n, v_n\rangle)\})$. Ya que $\lim p_n = \langle 0, 0, 0\rangle$, tenemos que $\lim y_n = 0$. De manera que $\lim r_n = 1$. Entonces $m_{T_1}(\{P(p_n), P(q_n)\}) = H(\langle s_n, t_n\rangle, r_n) = (1 - r_n)\langle s_n, t_n\rangle$. Por tanto $\lim m_T(\{P(p_n), P(q_n)\}) = \langle 0, 0, 0\rangle$.

Dada $n \in \mathbb{N}$, $m(\{p_n, q_n\})$ es de la forma $m_T(\{P(p_n), P(q_n)\})$ o de la forma $P_k^{-1}(m_T(\{P(p_n), P(q_n)\})) = P_k^{-1}(\langle H(\langle s_n, t_n\rangle, r_n), 0\rangle) = \langle (1 - r_n)\langle s_n, t_n\rangle, z_n\rangle$ para alguna $z_n \in [0, 1]$. Ambas formas son del tipo $\langle (1 - r_n)\langle s_n, t_n\rangle, z_n\rangle$ para alguna $z_n \in [0, 1]$ (en la primera forma ponemos $z_n = 0$). Como $m(\{p_n, q_n\})$, por lo que probamos al principio de este caso, tenemos que $0 \leq z_n \leq (1 - r_n)t_n \leq 1 - r_n$. Por tanto $\lim z_n = 0$.

Por tanto $\lim m(\{p_n, q_n\}) = \lim\langle(1-r_n)\langle s_n, t_n\rangle, z_n\rangle = \langle 0,0,0\rangle = m(\{p,q\})$. Esto completa la prueba de que m es continua en $\{p,q\}$.

Caso 3. $\{p,q\} \cap T \neq \emptyset$ y $v \notin \{p,q\}$.

Podemos suponer que $p \in T$ (y claro, $p \neq v$). Notemos que $p \notin T_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Sean $\varepsilon > 0$ y $K \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{K} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como la función $\{a,b\} \to m_T(\{P(a), P(b)\})$ de $F_2(Cono(X))$ en $Cono(X)$ es continua, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{1}{K}$, $\mathcal{B}_\delta(p) \cap (T_1 \cup ... \cup T_K) = \emptyset$ y si $H(\{p,q\},\{a,b\}) < \delta$, entonces $|m_T(\{P(p),P(q)\}) - m_T(\{P(a),P(b)\})| < \frac{1}{K}$.

Sea $\{a,b\} \in F_2(Cono(X))$ tal que $H(\{p,q\},\{a,b\}) < \delta$. Para concluir que m es continua, veremos que $|m(\{p,q\}) - m(\{a,b\})| < \varepsilon$. En el caso en que $\{a,b\} \cap T \neq \emptyset$, tenemos que

$$|m(\{p,q\}) - m(\{a,b\})| = |m_T(\{P(p),P(q)\}) - m_T(\{P(a),P(b)\})| < \frac{1}{K} < \varepsilon$$

y entonces se cumple la desigualdad buscada. Supongamos ahora que $\{a,b\} \cap T = \emptyset$. Como $\{p,q\} \subseteq N_\delta(\{a,b\})$, podemos suponer que $|p-a| < \delta$. De manera que existe $k > K$ tal que $a \in T_k$. Entonces $m(\{a,b\}) = P_n^{-1}(m_T(\{P(a),P(b)\}))$, donde $n \geq k$ (la elección de n depende del conjunto T_i tal que $b \in T_i$. Si $i \geq k$, entonces $n = i$ y si $i < k$, entonces $n = k$).

Aquí hacemos un paréntesis para argumentar que para toda $c \in T$,

$$|P_n^{-1}(c) - c| \leq \frac{1}{n}.$$

Sea $e = P_n^{-1}(c) = \langle x,y,z\rangle$. Entonces $P_n(e) = c = \langle x,y,0\rangle$. Como $e \in T_n$ y T_n es el triángulo con vértices $\langle(-1)^n, 1, \frac{1}{n}\rangle$, $\langle(-1)^{n+1}, 1, \frac{1}{n+1}\rangle$ y $\langle 0,0,0\rangle$, z es una combinación convexa de los números 0, $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n+1}$. Por tanto $0 \leq z \leq \frac{1}{n}$. Como $|P_n^{-1}(c) - c| = |\langle x,y,z\rangle - \langle x,y,0\rangle| \leq |z| \leq \frac{1}{n}$, concluimos que $|P_n^{-1}(c) - c| \leq \frac{1}{n}$.

Entonces

$$|m(\{p,q\}) - m(\{a,b\})| = |m_T(\{P(p),P(q)\}) - P_n^{-1}(m_T(\{P(a),P(b)\}))| \leq$$

$$\leq |m_T(\{P(p),P(q)\}) - m_T(\{P(a),P(b)\})| +$$

$$|m_T(\{P(a),P(b)\}) - P_n^{-1}(m_T(\{P(a),P(b)\}))| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Por tanto m es continua en $\{p,q\}$.

Esto termina la prueba de que m es continua.

Ahora veamos que para todo $a \in Cono(X)$, $m(\{a\}) = a$.

Sea $\{a\} \in F_2(Cono(X))$.

En el caso en el que $a \in T$, entonces $m(\{a\}) = m_T(\{a\})$. Como m_T es promedio para T, entonces $m(\{a\}) = m_T(\{a\}) = a$.

En el caso en el que $a \in T_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$m(\{a\}) = P_n^{-1}(m_T(\{P(a)\})).$$

Como m_T es promedio para T y $P(\{a\}) \in T$, entonces

$$m(\{a\}) = P_n^{-1}(m_T(\{P(a)\})) = P_n^{-1}(P(a)) = a.$$

Por lo tanto, m es promedio para $Cono(X)$. $\square$

6.2. Espiral

En esta sección denotaremos por e a la función $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $e(\theta) = \langle cos\theta, sen\theta\rangle$. También definimos la función $g : [1, \infty) \to (1, 2]$ dada por $g(\theta) = \frac{1+\theta}{\theta}$. Notemos que g es un homeomorfismo con inversa $g^{-1}(t) = \frac{1}{t-1}$.

Denotamos por S a la circunferencia unitaria definida por:

$$S = \{\langle e(\theta), 1\rangle \in \mathbb{R}^3 : \theta \in [1, \infty)\}.$$

Definimos por R al siguiente conjunto

$$R = \{\langle g(\theta)e(\theta), 1\rangle \in \mathbb{R}^3 : \theta \in [1, \infty)\}.$$

Definimos entonces $E = S \cup R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{1\}$.

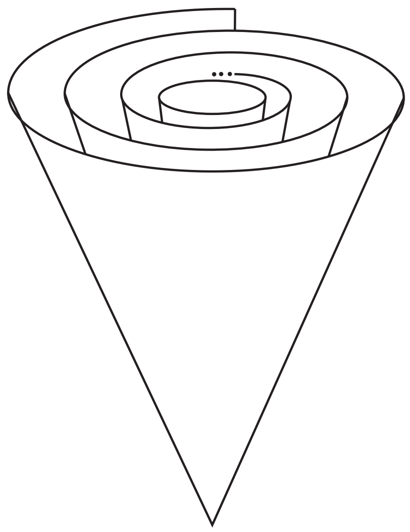
Podemos construir los conos de S, R y E en $\mathbb{R}^3$ uniendo a los puntos de estos conjuntos con el origen $\langle 0, 0, 0\rangle$ de $\mathbb{R}^3$, y obtenemos:

$$Cono(S) = \{(1 - r)\langle 0, 0, 0\rangle + rp \in \mathbb{R}^3 : p \in S \text{ y } r \in [0, 1]\} =$$

$$\{\langle re(\theta), r\rangle \in \mathbb{R}^3 : \theta \in [1, \infty) \text{ y } r \in [0, 1]\},$$

$$Cono(R) = \{\langle rg(\theta)e(\theta), r\rangle \in \mathbb{R}^3 : \theta \in [1, \infty) \text{ y } r \in [0, 1]\}, \text{ y}$$

$$Cono(E) = \{rp \in \mathbb{R}^3 : p \in E \text{ y } r \in [0, 1]\} = Cono(S) \cup Cono(R).$$



Notemos que cada uno de los puntos de $Cono(R) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}$ tiene la forma $p = \langle p_1, p_2, p_3\rangle = \langle r_p g(\theta_p)e(\theta_p), r_p\rangle$, donde $\theta_p \in [1, \infty)$ y $r_p \in (0,1]$. Notemos que r_p es la proyección de p en la tercera coordenada y $\theta_p = g^{-1}(\frac{1}{r_p}(r_p g(\theta_p))) = g^{-1}(\frac{1}{r_p}||r_p g(\theta_p)e(\theta_p)||) = g^{-1}(\frac{1}{p_3}||(p_1,p_2)||)$. Esto prueba que las funciones $p \to r_p$ y $p \to \theta_p$ de $Cono(R) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}$ en $(0,1]$ y $[1,\infty)$, respectivamente están bien definidas y son continuas.

En esta sección definiremos un promedio para el cono de E. Empezaremos definiendo promedios para los espacios $Cono(R)\setminus\{\langle 0,0,0\rangle\}$ y $Cono(S)\setminus\{\langle 0,0,0\rangle\}$. Los definiremos de manera paralela para no repetir argumentos de manera innecesaria.

6.2.1. Promedio para $Cono(R) \setminus \{(0,0,0)\}$.

Dados puntos $p = \langle r_p g(\theta_p)e(\theta_p), r_p\rangle$ y $q = \langle r_q g(\theta_q)e(\theta_q), r_q\rangle$ en $Cono(R) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}$, con $\theta_q \leq \theta_p$, como e tiene periodo 2π, existe $\theta(p,q) \in [\theta_p - \pi, \theta_p + \pi]$ tal que $e(\theta(p,q)) = e(\theta_q)$.

Definimos

$$r(p,q) = \frac{1}{\pi}(\pi - |\theta_p - \theta(p,q)|)\min\{r_p, r_q\}.$$

Definimos $m_R : F_2(Cono(R) \setminus \{(0,0,0)\}) \to Cono(R)$ por

$$m_R(\{p,q\}) = \Big\langle r(p,q) g\Big(\frac{\theta(p,q)+\theta_p}{2}\Big) e\Big(\frac{\theta(p,q)+\theta_p}{2}\Big), r(p,q)\Big\rangle.$$

6.2.2. Promedio para $Cono(S) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}$.

Dados puntos $p = \langle r_p e(\theta_p), r_p\rangle$ y $q = \langle r_q e(\theta_q), r_q\rangle$ en $Cono(S) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}$, como e tiene periodo 2π, existe $\theta(p,q) \in [\theta_p - \pi, \theta_p + \pi]$ tal que $e(\theta(p,q)) = e(\theta_q)$.

Definimos
$$r(p,q) = \frac{1}{\pi}(\pi - |\theta_p - \theta(p,q)|)\,\text{mín}\{r_p, r_q\}.$$

Definimos $m_S : F_2(Cono(S) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}) \to Cono(S)$ por
$$m_S(\{p,q\}) = \Big\langle r(p,q) e\Big(\frac{\theta(p,q)+\theta_p}{2}\Big), r(p,q)\Big\rangle.$$

Lema 176. *m_R y m_S están bien definidas.*

Demostración. Para empezar, en el caso en que $\theta(p,q) \in \{\theta_p - \pi, \theta_p + \pi\}$, se podría escoger cualquiera de los dos valores, pero para ambos valores tenemos que $|\theta_p - \theta(p,q)| = \pi$, así que $r(p,q) = 0$, y el valor tanto de m_R como de m_S es igual a $\langle 0,0,0\rangle$. Por tanto, no importa cual de los valores $\theta_p - \pi$ o $\theta_p + \pi$ tomamos.

Por otra parte, notemos que si $\theta_q = \theta_p$, podemos tomar las siguientes dos opciones: $\theta(p,q) \in [\theta_p - \pi, \theta_p + \pi]$ es tal que $e(\theta(p,q)) = e(\theta_q) = e(\theta_p)$ o $\theta(q,p) \in [\theta_q - \pi, \theta_q + \pi]$ es tal que $e(\theta(q,p)) = e(\theta_p) = \theta_q$. En ambos casos $\theta(p,q)$ y $\theta(q,p)$ coinciden con el valor común $\theta_p = \theta_q$. Así que $r(\{p,q\}) = \text{mín}\{r_p, r_q\}$ y $\frac{\theta(p,q)+\theta_p}{2} = \theta_p = \frac{\theta(q,p)+\theta_q}{2}$. Por tanto, en los dos casos los promedios m_R y m_S coinciden.

En el caso de R, vimos antes que r_p y θ_p son únicas. En el caso de S, r_p está bien definido y depende continuamente de p porque es la tercera coordenada de p. En este caso, θ_p no es única pues en lugar de θ_p se puede tomar cualquier número de la forma $\theta_p + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Cuando tomamos $\theta_p + 2k\pi$, podemos tomar $\theta(p,q) + 2k\pi$ en lugar de $\theta(p,q)$. Notemos que al tomarlos así, el valor de $r(\{p,q\})$ no se altera y tampoco se alteran los valores de $e(\frac{\theta(p,q)+\theta_p}{2})$ y $m_S(\{p,q\})$. Observemos que una vez que se elige $\theta(p,q)$, las definiciones de $r(\{p,q\})$ y $m_S(\{p,q\})$ dejan de depender de θ_q, por lo tanto, para la definición de $m_S(\{p,q\})$ se puede tomar θ_q o cualquiera de sus equivalentes módulo 2π. Finalmente, si en lugar de tomar $\theta(p,q)$, tomamos un $\theta(q,p)$ tal que $e(\theta(q,p)) = e(\theta_p)$ y $\theta(q,p) \in [\theta_q - \pi, \theta_q + \pi]$, debido a que $e(\theta(q,p)) = e(\theta_p)$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta(q,p) = \theta_p + 2k\pi$. Entonces $\theta_p = \theta(q,p) - 2k\pi \in [(\theta_q - 2k\pi) - \pi, (\theta_q - 2k\pi) + \pi]$. Así que $\theta_q - 2k\pi \in [\theta_p - \pi, \theta_p + \pi]$ y $e(\theta_q - 2k\pi) = e(\theta_q)$, podemos entonces tomar $\theta(p,q) = \theta_q - 2k\pi$. Así que

$$\begin{aligned} r(p,q) &= \frac{1}{\pi}(\pi - |\theta_p - \theta(p,q)|)\,\text{mín}\{r_p, r_q\} = \\ &= \frac{1}{\pi}(\pi - |\theta_p - (\theta_q + 2k\pi)|)\,\text{mín}\{r_p, r_q\} = \\ &= \frac{1}{\pi}(\pi - |\theta_q - \theta(q,p)|)\,\text{mín}\{r_p, r_q\}. \end{aligned}$$

Además, $e\left(\frac{\theta(p,q)+\theta_p}{2}\right) = e\left(\frac{\theta_q-2k\pi+\theta_p}{2}\right) = e\left(\frac{\theta_q+2k\pi+\theta_p}{2}\right) = e\left(\frac{\theta(q,p)+\theta_q}{2}\right)$.

Hemos demostrado que da lo mismo tomar $e(p,q)$ que $e(q,p)$. □

Lema 177. *m_R y m_S son continuas.*

Demostración. Tomamos puntos $p = \langle p_1, p_2, p_3\rangle$, $q = \langle q_1, q_2, q_3\rangle$ en uno de los conjuntos $Cono(R) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}$ o $Cono(S) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}$.

Para el caso del $Cono(S)$, notemos que $r_p = p_3 > 0$ y $\frac{1}{p_3}\langle p_1, p_2\rangle$ es un elemento de la circunferencia unitaria S^1 en el plano complejo (centrada en el origen) y θ_p es un argumento de este punto. Sea W un abierto en S^1 con $\frac{1}{p_3}\langle p_1, p_2\rangle \in W$ tal que es posible definir una rama arg del argumento tal que $arg(\frac{1}{p_3}\langle p_1, p_2\rangle) = \theta_p$. Entonces existe un abierto U de $Cono(S^1)$ tal que $p \in U$ y para todo $p' = \langle p'_1, p'_2, p'_3\rangle \in U$, tenemos que $\frac{1}{p'_3}\langle p'_1, p'_2\rangle \in W$. De modo que es posible definir $\theta_{p'} = arg(\frac{1}{p'_3}\langle p'_1, p'_2\rangle)$ y obtener una función continua $p' \to \theta_{p'}$, de tal manera que $e(\theta_{p'}) = \frac{1}{p'_3}\langle p'_1, p'_2\rangle$. Además $p' = \langle p'_3 e(\theta_{p'}), p'_3\rangle$. Similarmente, existe un abierto V de $Cono(S^1)$ tal que $q \in V$ y para toda $q' = \langle q'_1, q'_2, q'_3\rangle \in V$, se puede definir continuamente un θ'_q tal que $q' = \langle q'_3 e(\theta_{q'}), q'_3\rangle$. En el Lema 176, vimos que podemos tomar cualquiera de los argumentos de p' (y de q') para definir m_S. De modo que podemos usar $\theta_{p'}$ y $\theta_{q'}$ para definir m_S en los respectivos puntos de U y V.

Tomamos $T \in \{R, S\}$. Para demostrar la continuidad de m_T, tomamos puntos $p, q \in Cono(T) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}$. Analizamos dos casos.

Caso 1. $\theta(p,q) \in (\theta_p - \pi, \theta_p + \pi)$.

Como $e(\theta_q) = e(\theta(p,q))$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta(p,q) = \theta_q + 2k\pi$. Entonces $|\theta_p - \theta_q - 2k\pi| < \pi$. Ya hemos visto que en el caso $T = R$, θ_p y θ_q dependen continuamente de p y q y en el caso en que $T = S$, podemos hacer que también dependan continuamente en vecindades de p y q. Entonces existen abiertos U y V de $Cono(T)$ tales que $p \in U$, $q \in V$ y que cumplen que si $p' \in U$ y $q' \in V$, entonces $|\theta_{p'} - \theta_{q'} - 2k\pi| < \pi$. De modo que $\theta_{q'} + 2k\pi \in (\theta_{p'} - \pi, \theta_{p'} + \pi)$. De manera que $\theta_{q'} + 2k\pi$ es el único número en $(\theta_{p'} - \pi, \theta_{p'} + \pi)$ tal que $e(\theta_{q'} + 2k\pi) = e(\theta_q)$. Por tanto, $\theta(p', q') = \theta_{q'} + 2k\pi$ en la vecindad $\langle U, V\rangle$. Como $\theta_{q'}$ depende continuamente de q', tenemos que $\theta(p', q')$ es una función continua de p' y q' en $\langle U, V\rangle$. Como en esta vecindad las funciones $p \to r_{p'}$ y $p \to \theta_{p'}$ son funciones continuas, concluimos que las funciones θ, r y g (para el caso en que $T = R$) son continuas en $\langle U, V\rangle$. Por tanto la función m_T es continua en el par (p,q).

Caso 2. $\theta(p,q) \in \{\theta_p - \pi, \theta_p + \pi\}$.

Tomamos sucesiones $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Cono(T) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}$ convergiendo a p y q, respectivamente. Como los números naturales n se pueden descomponer en los que cumplen que $\theta_{p_n} \leq \theta(p_n, q_n) \leq \theta_{p_n} + \pi$ y los que cumplen que $\theta_{p_n} - \pi \leq \theta(p_n, q_n) \leq \theta_{p_n}$. Basta con que consideremos sucesiones tales que para toda n cumplen una de las dos desigualdades. Vamos a suponer que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple la primera desigualdad. El caso de que cumpla la otra se puede tratar en forma similar. Como $\theta(p,q) \in \{\theta_p - \pi, \theta_p + \pi\}$, tenemos que $e(\theta(p,q)) = e(\theta_p \pm \pi) = e(\theta_p)e(\pi)^{\pm 1} = -e(\theta_p)$. De manera que $\frac{e(\theta_p)}{e(\theta_q)} = -1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos $z_n = \theta(p_n, q_n) - \theta_{p_n}$. Entonces $z_n \in [0, \pi]$ y

$$\lim_{n\to\infty} e(z_n) = \lim_{n\to\infty} e(\theta(p_n,q_n) - \theta_{p_n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{e(\theta(p_n,q_n))}{e(\theta_{p_n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{e(\theta_{q_n})}{e(\theta_{p_n})} = \frac{e(\theta_q)}{e(\theta_p)} = -1.$$

Por tanto, $z_n \in [0,\pi]$ y $\lim_{n\to\infty} e(z_n) = -1$. Esto implica que (tomando la rama del logaritmo correspondiente) que $\lim_{n\to\infty} z_n = \pi$.

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} |\theta_{p_n} - \theta(p_n, q_n)| = \pi$. De aquí que $\lim_{n\to\infty} r(p_n, q_n) = 0$. Ya que $|\theta_p - \theta(p,q)| = \pi$, tenemos que $r(p,q) = 0$. Así que $m_T(\{p,q\}) = \langle 0,0,0\rangle$.Ya que la función g es continua (en el caso en que $T = R$), $\lim_{n\to\infty} m_T(\{p_n,q_n\}) = \langle 0,0,0\rangle$. Por tanto, m_T es continua en $\{p,q\}$. □

Ya que hay una retracción natural de E sobre S, tenemos que hay una retracción natural $f : Cono(E) \to Cono(S)$ dada por

$$f(p) = \begin{cases} \langle re(\theta), r\rangle, & \text{si } \langle rg(\theta)e(\theta), r\rangle \in Cono(R), \\ p, & \text{si } p \in Cono(S)\ . \end{cases}$$

Es fácil probar que f es continua.

Lema 178. *Para cualesquiera $p, q \in Cono(R) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}$,*

$$f(m_R(\{p,q\})) = m_S(\{f(p), f(q)\}).$$

Demostración. Para probar esto, sean $p = \langle r_p g(\theta_p)e(\theta_p), r_p\rangle$ y $q = \langle r_q g(\theta_q)e(\theta_q), r_q\rangle$, con $\theta_q \le \theta_p$. Sea $\theta(p,q) \in [\theta_p - \pi, \theta_p + \pi]$ tal que $e(\theta(p,q)) = e(\theta_q)$. Así que

$$m_R(\{p,q\}) = \Big\langle r(p,q) g\Big(\frac{\theta(p,q)+\theta_p}{2}\Big) e\Big(\frac{\theta(p,q)+\theta_p}{2}\Big), r(p,q)\Big\rangle,$$

donde $r(p,q) = \frac{1}{\pi}(\pi - |\theta_p - \theta(p,q)|)\min\{r_p, r_q\}$. Entonces

$$f(m_R(\{p,q\})) = \Big\langle r(p,q) e\Big(\frac{\theta(p,q)+\theta_p}{2}\Big), r(p,q)\Big\rangle.$$

Por otra parte, $f(p) = \langle r_p e(\theta_p), r_p\rangle$, $f(q) = \langle r_q e(\theta_q), r_q\rangle$ y $m_S(\{f(p), f(q)\}) = \Big\langle r(p,q) e\Big(\frac{\theta(p,q)+\theta_p}{2}\Big), r(p,q)\Big\rangle$. Por tanto, $f(m_R(\{p,q\})) = m_S(\{f(p), f(q)\})$. □

Definimos $m : F_2(Cono(E)) \to Cono(E)$ por

$$m(\{p,q\}) = \begin{cases} m_R(\{p,q\}), & \text{si } \{p,q\} \in F_2(Cono(R) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}), \\ m_S(\{f(p), f(q)\}), & \text{si } p,q \notin \{\langle 0,0,0\rangle\} \text{ y } \{p,q\} \cap Cono(S) \neq \emptyset, \\ \langle 0,0,0\rangle, & \text{si } \langle 0,0,0\rangle \in \{p,q\}. \end{cases}$$

Lema 179. *m es continua.*

Demostración. Para probar esta propiedad, tomemos $p, q \in Cono(E)$. Consideramos 3 casos.

Caso 1. $\{p, q\} \in F_2(Cono(R) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\})$.

Como $\{p, q\} \in F_2(Cono(R) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\})$ es abierto en $F_2(Cono(E))$ y m_R es continua, tenemos que m es continua en cada uno de los elementos de este conjunto. Entonces m es continua en $\{p, q\}$.

Tomemos sucesiones $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ que convergen respectivamente a p y a q. Para probar la continuidad de m en $\{p, q\}$ basta con que supongamos que la sucesión $\{m(\{p_n, q_n\})\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un elemento $w = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ en $Cono(E)$ y que probemos que $w = m(\{p, q\})$.

Caso 2. $p, q \notin \{\langle 0,0,0\rangle\}$ y $\{p, q\} \cap Cono(S) \neq \emptyset$.

En este caso, podemos suponer que $p \in Cono(S)$ y que $p_n, q_n \notin \{\langle 0,0,0\rangle\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Subcaso 2.1. Existe una infinidad de números n tales que $\{p_n, q_n\} \cap Cono(S) \neq \emptyset$.

Tomando una subsucesión si fuera necesario, podemos suponer que esto ocurre para toda n. Por la continuidad de las funciones f y m_S tenemos que

$$\begin{aligned} w &= \lim_{n\to\infty} m(\{p_n, q_n\}) \\ &= \lim_{n\to\infty} m_S(\{f(p_n), f(q_n)\}) = \\ &= m_S(\{f(p), f(q)\}) = m(\{p, q\}). \end{aligned}$$

Subcaso 2.2. Sólo un número finito de números n satisfacen que $\{p_n, q_n\} \cap Cono(S) \neq \emptyset$.

En este caso podemos suponer que ninguna n cumple esto y entonces tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\{p_n, q_n\} \in F_2(Cono(R) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\})$.

Subcaso 2.2.1. $w = \langle 0,0,0\rangle$.

Escribimos $p = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $q = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Entonces $u_3 = r_p > 0$ y $v_3 = r_q > 0$ (recordemos que $p \neq \langle 0,0,0\rangle \neq q$).

Notemos que

$$\begin{aligned} \langle 0,0,0\rangle = w &= \lim_{n\to\infty} m(\{p_n, q_n\}) \\ &= \lim_{n\to\infty} m_R(\{p_n, q_n\}) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\langle r(p_n, q_n) g\left(\frac{\theta(p_n, q_n) + \theta_{p_n}}{2}\right) e\left(\frac{\theta(p_n, q_n) + \theta_{p_n}}{2}\right), r(p_n, q_n)\right\rangle. \end{aligned}$$

De aquí tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} r(p_n, q_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}(\pi - |\theta_{p_n} - \theta(p_n, q_n)|) \min\{r_p, r_q\} = 0.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \min\{r_{p_n}, r_{q_n}\} = \min\{r_p, r_q\} > 0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \pi - |\theta_{p_n} - \theta(p_n, q_n)| = 0.$$

Así que $\lim_{n\to\infty} |\theta_{p_n} - \theta(p_n, q_n)| = \pi$. Entonces, a medida que n crece, los valores de $\theta_{p_n} - \theta(p_n, q_n)$ se aproximan a π o a $-\pi$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e(\theta_{p_n})}{e(\theta_{q_n})} = \lim_{n\to\infty} e(\theta_{p_n} - \theta(p_n, q_n)) = -1.$$

Dado que f es continua, $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(p)$ y $\lim_{n\to\infty} f(q_n) = f(q)$. Así que $\lim_{n\to\infty}\langle r_{p_n} e(\theta_{p_n}), r_{p_n}\rangle = \langle r_p e(\theta_p), r_p\rangle$ y $\lim_{n\to\infty}\langle r_{q_n} e(\theta_{q_n}), r_{q_n}\rangle = \langle r_q e(\theta_q), r_q\rangle$. De modo que $\lim_{n\to\infty} e(\theta_{p_n}) = e(\theta_p)$ y $\lim_{n\to\infty} e(\theta_{q_n}) = e(\theta_q)$. Por tanto,

$$e(\theta_p) = -e(\theta_q) = e(\theta_q + \pi).$$

Entonces

$$m(\{p, q\}) = m_S(\{f(p), f(q)\}).$$

Notemos que para calcular $m_S(\{f(p), f(q)\})$, se elige

$$\theta(f(p), f(q)) \in [\theta_p - \pi, \theta_p + \pi]$$

tal que $e(\theta(f(p), f(q))) = e(\theta_{f(q)}) = e(\theta_q)$. De manera que se puede elegir

$$\theta(f(p), f(q)) = \theta_p + \pi.$$

De modo que $r(f(p), f(q)) = \frac{1}{\pi}(\pi - |\theta_p - \theta(f(p), f(q))|) \min\{r_p, r_q\} = 0$. Por tanto,

$$m(\{p, q\}) = m_S(\{f(p), f(q)\}) = \langle 0, 0, 0\rangle = w.$$

Subcaso 2.2.2. $w \neq \langle 0, 0, 0\rangle$.

Por las continuidades de f y m_S, el Lema 178 y como $\lim_{n\to\infty}\{p_n, q_n\} = \{p, q\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(w) &= \lim_{n\to\infty} f(m(\{p_n, q_n\})) = \\ &= \lim_{n\to\infty} f(m_R(\{p_n, q_n\})) = \\ &= \lim_{n\to\infty} m_S(\{f(p_n), f(q_n)\}) = \\ &= m_S(\{f(p), f(q)\}) = m(\{p, q\}). \end{aligned}$$

De manera que $m(\{p, q\}) = f(w)$.

Por otra parte, como

$$\lim_{n\to\infty}\langle r_{p_n} g(\theta_{p_n}) e(\theta_{p_n}), r_{p_n}\rangle = \lim_{n\to\infty} p_n = p = \langle r_p e(\theta_p), r_p\rangle$$

y $\lim_{n\to\infty} r_{p_n} = r_p > 0$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} g(\theta_{p_n})e(\theta_{p_n}) = e(\theta_p)$. Así que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{p_n}}{1+\theta_{p_n}} = \lim_{n\to\infty} g(\theta_{p_n}) = \lim_{n\to\infty} ||g(\theta_{p_n})e(\theta_{p_n})|| = ||e(\theta_p)|| = 1.$$

De modo que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\theta_{p_n}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{\theta_{p_n}}{1-\theta_{p_n}} - 1) = 0$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \theta_{p_n} = \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\theta(p_n, q_n) \in [\theta_{p_n} - \pi, \theta_{p_n} + \pi]$. Esto implica que $\lim_{n\to\infty} \theta(p_n, q_n) = \infty$. De manera que $\lim_{n\to\infty} g\Big(\frac{\theta(p_n,q_n)+\theta_{p_n}}{2}\Big) = 1$. Dado que

$$\begin{aligned}
\langle w_1, w_2, w_3\rangle = w &= \lim_{n\to\infty} m(\{p_n, q_n\}) = \\
&= \lim_{n\to\infty} m_R(\{p_n, q_n\}) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big\langle r(p_n, q_n) g\Big(\frac{\theta(p_n, q_n) + \theta_{p_n}}{2}\Big) e\Big(\frac{\theta(p_n, q_n) + \theta_{p_n}}{2}\Big), r(p_n, q_n)\Big\rangle,
\end{aligned}$$

obtenemos que $w_3 = \lim_{n\to\infty} r(p_n, q_n) > 0$ (pues $w \neq \langle 0, 0, 0\rangle$). Esto implica que $||\langle w_1, w_2\rangle|| = \lim_{n\to\infty} ||\langle r(p_n, q_n) g(\frac{\theta(p_n,q_n)+\theta_{p_n}}{2}) e(\frac{\theta(p_n,q_n)+\theta_{p_n}}{2})\rangle|| = w_3$. De manera que $1 = ||\langle \frac{w_1}{w_1}, \frac{w_2}{w_3}\rangle||$ y existe $\theta \in [1, \infty)$ tal que $\langle \frac{w_1}{w_1}, \frac{w_2}{w_3}\rangle = e(\theta)$. De modo que $w = \langle w_3 e(\theta), w_3\rangle$. Por tanto, $w \in Cono(S)$ y $f(w) = w$. Con esto concluimos que $m(\{p, q\}) = w$ y terminamos el Caso 2.

Caso 3. $\langle 0, 0, 0\rangle \in \{p, q\}$.

En este caso podemos suponer que $p = \langle 0, 0, 0\rangle$. Si para una infinidad de números n se tiene que $\langle 0, 0, 0\rangle \in \{p_n, q_n\}$, entonces $w = \langle 0, 0, 0\rangle = m(\{p, q\})$. Podemos suponer entonces que para ningún número n se tiene que $\langle 0, 0, 0\rangle \in \{p_n, q_n\}$. Escribimos $p_n = \langle p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, p_3^{(n)}\rangle$ y $q_n = \langle q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, q_3^{(n)}\rangle$. Como $\lim_{n\to\infty} p_n = \langle 0, 0, 0\rangle$. Entonces $\lim_{n\to\infty} p_3^{(n)} = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \min\{p_3^{(n)}, q_3^{(n)}\} = 0$. Esto implica que $\lim_{n\to\infty} r(p_n, q_n) = 0$ y como $m(\{p_n, q_n\})$ es igual a $m_R(\{p_n, q_n\})$ o a $m_S(\{p_n, q_n\})$, concluimos que $w = \lim_{n\to\infty} m(\{p_n, q_n\}) = \langle 0, 0, 0\rangle = m(\{p, q\})$.

Esto termina el Caso 3 □

Teorema 180. *m es un promedio.*

Demostración. Sea $p \in Cono(E)$. En el caso en el que $p = \langle 0, 0, 0\rangle$, por la definición de m, tenemos que $m(\{p\}) = \langle 0, 0, 0\rangle = p$.

En el caso en el que $p \in Cono(R) \setminus \{\langle 0, 0, 0\rangle\}$, por la definición de m, tenemos que

$$\begin{aligned}
m(\{p\}) &= m_R(\{p\}) = \\
&= \Big\langle r(p, p) g\Big(\frac{\theta(p, p) + \theta_p}{2}\Big) e\Big(\frac{\theta(p, p) + \theta_p}{2}\Big), r(p, p)\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Como $\theta(p, p) = \theta_p$, entonces $r(p, p) = \frac{1}{\pi}(\pi - |\theta_p - \theta(p, p)|) r_p = r_p$. Por lo tanto, $m(\{p\}) = \langle r_p g(\theta_p) e(\theta_p), r_p\rangle = p$.

Finalmente, en el caso en el que $p \in Cono(S) \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}$, por la definición de m, tenemos que

$$\begin{aligned} m(\{p\}) &= m_S(\{f(p)\}) = \\ &= m_S(\{p\}) = \\ &= \left\langle r(p,p)e\left(\frac{\theta(p,p)+\theta_p}{2}\right), r(p,p)\right\rangle. \end{aligned}$$

Como $\theta(p,p) = \theta_p$, entonces $r(p,p) = \frac{1}{\pi}(\pi - |\theta_p - \theta(p,p)|)r_p = r_p$. Por lo tanto, $m(\{p\}) = \langle r_p e(\theta_p), r_p\rangle = p$. Por lo tanto, m es promedio. $\square$

En vista de los resultados de este capítulo, las siguientes preguntas surgen de manera natural.

Pregunta. ¿Existe un continuo X tal que $F_2(C(X))$ no admite promedios?, ¿existe una tal X que sea una compactación del rayo $[0,1)$?, ¿y si X es una compactación del rayo $[0,1)$ con residuo un arco?

CAPÍTULO 7

Contractibilidad

Para diferenciar los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(C(X))$ buscamos entre las distintas propiedades topológicas. En esta sección mostramos que la contractibilidad no es útil para este fin, pues vemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, el que $C_n(X)$ sea contráctil es equivalente a que $F_n(C(X))$ sea contráctil.

Teorema 181. *Sea X un continuo. Para toda $n \geq 2$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *2^X es contráctil,*

2. *$C_n(X)$ es contráctil,*

3. *$C(X)$ es contráctil.*

Demostración. Sea $n \geq 2$. Probaremos simultáneamente $(1 \Rightarrow 2)$ y $(2 \Rightarrow 3)$, es decir, probaremos que el hecho de que 2^X es contráctil implica que $C_n(X)$ es contráctil y que el hecho de que $C_n(X)$ es contráctil implica que $C(X)$ es contráctil.

Sean $G_1 : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ y $G_2 : C_n(X) \times [0,1] \to C_n(X)$ funciones continuas que cumplen las siguientes propiedades:

- para todo $E \in 2^X$, $G_1(\langle E, 0\rangle) = E$ y $G_1(\langle E, 1\rangle) = X$ y

- para todo $F \in C_n(X)$, $G_2(\langle F, 0\rangle) = F$ y $G_2(\langle F, 1\rangle) = X$.

Por medio de la función G_1 construiremos una contracción H_1 de $C_n(X)$ y por medio de la función G_2 construiremos una contracción H_2 de $C(X)$.

Definimos las funciones $J_1 : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ y $J_2 : C_n(X) \times [0,1] \to 2^X$ dadas por

$$J_1(\langle E, t\rangle) = \bigcup\{G_1(\langle E, s\rangle) : 0 \leq s \leq t\}$$

y

$$J_2(\langle F, t\rangle) = \bigcup\{G_2(\langle F, s\rangle) : 0 \leq s \leq t\},$$

respectivamente.

Por el Lema 16.3 de [21], tenemos que J_1 y J_2 son funciones continuas.

Notemos que se cumplen las siguientes propiedades:

- Para todo $E \in 2^X$, $J_1(\langle E, 0\rangle) = \bigcup\{G_1(\langle E, 0\rangle)\} = G_1(\langle E, 0\rangle) = E$ y
$$J_1(\langle E, 1\rangle) = \bigcup\{G_1(\langle E, t\rangle) : 0 \leq t \leq 1\} = X,$$
- para toda $F \in C_n(X)$, $J_2(\langle F, 0\rangle) = \bigcup\{G_2(\langle F, 0\rangle)\} = G_2(\langle F, 0\rangle) = F$ y $J_2(\langle F, 1\rangle) = \bigcup\{G_2(\langle F, t\rangle) : 0 \leq t \leq 1\} = X$ y
- para todo $E \in 2^X$ y para todo $F \in C_n(X)$, $J_1(\{E\} \times [0, 1])$ y $J_2(\{F\} \times [0, 1])$ son arcos ordenados en 2^X de E a X y de F a X, respectivamente.

Por el Teorema 1.8 de [21], tenemos que se cumplen las siguientes propiedades:

- si $A \in C_n(X)$, entonces para todo $B \in J_1(\{A\} \times [0, 1])$, $B \in C_n(X)$.
- si $C \in C(X)$, entonces para todo $D \in J_2(\{C\} \times [0, 1])$, $D \in C(X)$.

Por lo tanto, para todo $\langle A, t\rangle \in C_n(X)\times[0, 1]$ y para todo $\langle C, s\rangle \in C(X)\times[0, 1]$, $J_1(\langle A, t\rangle) \in C_n(X)$ y $J_2(\langle C, s\rangle) \in C(X)$.

Hacemos $H_1 = J_1|_{C_n(X)\times[0,1]} : C_n(X) \times [0, 1] \to C_n(X)$ y $H_2 = J_2|_{C(X)\times[0,1]} : C(X) \times [0, 1] \to C(X)$. Entonces las funciones $H_1 : C_n(X) \times [0, 1] \to C_n(X)$ y $H_2 : C(X) \times [0, 1] \to C(X)$ son continuas, pues J_1 y J_2 son funciones continuas. Además, notamos que se cumple lo siguiente:

- para todo $A \in C_n(X)$,
$$H_1(\langle A, 0\rangle) = J_1(\langle A, 0\rangle) = A$$
y
$$H_1(\langle A, 1\rangle) = J_1(\langle A, 1\rangle) = X,$$
- para todo $C \in C(X)$,
$$H_2(\langle C, 0\rangle) = J_2(\langle C, 0\rangle) = C$$
y
$$H_2(\langle C, 1\rangle) = J_2(\langle C, 1\rangle) = X.$$

Por lo tanto, las funciones H_1 y H_2 son contracciones de $C_n(X)$ y de $C(X)$, respectivamente.

($3 \Rightarrow 1$) Ésta es una de las implicaciones del Teorema 16.7 de [21]. $\square$

Teorema 182. *Sea X un continuo. Si X es contráctil, entonces $F_n(X)$ es contráctil para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que X es contráctil. Entonces existen $a \in X$ y una función continua $H : X \times [0,1] \to X$ tal que para todo $x \in X$, $H(\langle x, 0\rangle) = x$ y $H(\langle x, 1\rangle) = a$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $H_n : F_n(X) \times [0,1] \to F_n(X)$ dada por

$$H_n(\langle\{x_1, ..., x_m\}, t\rangle) = \{H(\langle x_1, t\rangle), ..., H(\langle x_m, t\rangle)\}.$$

Entonces H_n es una función continua tal que

$$H_n(\langle\{x_1, ..., x_m\}, 0\rangle) = \{H(\langle x_1, 0\rangle), ..., H(\langle x_m, 0\rangle)\} = \{x_1, .., x_m\}$$

y

$$H_n(\langle\{x_1, ..., x_m\}, 1\rangle) = \{H(\langle x_1, 1\rangle), ..., H(\langle x_m, 1\rangle)\} = \{a\}.$$

Por lo tanto, H_n es una contracción.

□

El siguiente es el Teorema 9.1 de [11]:

Teorema 183. *Para cualquier continuo X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$F_1(X)$ es contráctil en $C(X)$,*
2. *$F_1(X)$ es contráctil en 2^X,*
3. *$C(X)$ es contráctil,*
4. *2^X es contráctil.*

Teorema 184. *Sea X un continuo. Para todo $n \geq 2$ se cumple que $C_n(X)$ es contráctil si y sólo si $F_n(C(X))$ es contráctil.*

Demostración. Sea $n \geq 2$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $C_n(X)$ es contráctil. Por el Teorema 181, tenemos que $C(X)$ es contráctil. Aplicando el Teorema 182 al continuo $C(X)$ tenemos que $F_n(C(X))$ es contráctil.

($\Leftarrow$) Supongamos que $F_n(C(X))$ es contráctil. Entonces existe una función continua $K : F_n(C(X)) \times [0,1] \to F_n(C(X))$ tal que para todo $\mathcal{A} \in F_n(C(X))$ se tiene que

- $K(\langle \mathcal{A}, 0\rangle) = \mathcal{A}$,

- $K(\langle \mathcal{A}, 1\rangle) = \{X\}$.

Definimos $c : F_1(X)\times[0,1] \to 2^X$ tal que para todo $p \in X$ y para todo $t \in [0,1]$, $c(\langle\{p\}, t\rangle) = \bigcup K(\langle\{\{p\}\}, t\rangle)$. Entonces

- c es continua,
- para todo $p \in X$, $c(\langle\{p\}, 0\rangle) = \bigcup K(\langle\{\{p\}\}, 0\rangle) = \bigcup\{\{p\}\} = \{p\}$,
- para todo $p \in X$, $c(\langle\{\{p\}\}, 1\rangle) = \bigcup K(\langle\{\{p\}\}, 1\rangle) = \bigcup\{X\} = X$.

Entonces c es una contracción de $F_1(X)$ en 2^X, es decir, $F_1(X)$ es contráctil en 2^X. Por el Teorema 183 $C(X)$ es contráctil. Finalmente, por el Teorema 181, $C_n(X)$ es contráctil.

$\square$

CAPÍTULO 8

k-odos y n-celdas

En este capítulo veremos una generalización del resultado principal del Capítulo 1.

Definición 185. Sean X un continuo, B un subcontinuo de X y $k \in \mathbb{N}$. Decimos que B es un k-**odo** de X si existe un subcontinuo A de B tal que $B \setminus A$ tiene al menos k componentes. Notamos que B es un 1-odo si y sólo si B es no degenerado.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Una m-celda es un continuo homeomorfo al producto cartesiano $[0,1]^m$

El siguiente resultado es el Corolario 5.9 de [19].

Corolario 186. *Sean X un continuo y A un subcontinuo propio de X. Entonces si K es una componente de $X \setminus A$, entonces $K \cup A$ es un continuo.*

El siguiente resultado aparece en el Teorema 2.6 de [14].

Teorema 187. *Sean X un continuo y $1 \leq n \leq m$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$C_n(X)$ contiene una m-celda,*

2. *existen números naturales $k_1, ..., k_n$ y subcontinuos disjuntos dos a dos $B_1, ...,$ B_n de X tales que para todo $i \in \{1, , , .n\}$, B_i es un k_i-odo en X y*

$$k_1 + ... + k_n = m.$$

Teorema 188. *Sean X un continuo conexo por arcos y $m > 2$ tales que X contiene un m-odo pero no contiene $(m+1)$-odos. Entonces para todo $n \geq 2$, el hiperespacio $F_n(C(X))$ contiene mn-celdas pero $C_n(X)$ no.*

Demostración. Sea B un m-odo de X. Entonces existe un subcontinuo A de X tal que $A \subseteq B$ y $B \setminus A$ tiene al menos m componentes.

Sean $C_1, C_2, ..., C_m$ distintas componentes de $B \setminus A$.

Sean $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ arcos ordenados de A a $A \cup C_1, A \cup C_2, ..., A \cup C_m$, respectivamente.

Definimos

$$\mathcal{R} = \{\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\} \in F_n(C(X)) : Y_i = \alpha_1(t_1^i) \cup ... \cup \alpha_n(t_n^i) \text{ y } t_1^i, ..., t_n^i \in [\tfrac{2(i-1)}{2n-1}, \tfrac{2i-1}{2n-1}]\}.$$

Como la función $\varphi : [0, \frac{1}{2n-1}]^m \times [\frac{2}{2n-1}, \frac{3}{2n-1}]^m \times ... \times [\frac{2n-2}{2n-1}, \frac{2n-1}{2n-1}]^m \to F_n(C(X))$ dada por

$$\varphi(t_1^1, ..., t_n^1, t_1^2, ..., t_n^2, ..., t_1^n, ..., t_n^n) =$$
$$= \{\alpha_1(t_1^1) \cup ... \cup \alpha_n(t_n^1), \alpha_1(t_1^2) \cup ... \cup \alpha_n(t_n^2), ..., \alpha(t_1^n) \cup ... \cup \alpha(t_n^n)\}$$

es continua e inyectiva, tenemos que $\mathcal{R}$ es una nm-celda en $F_n(C(X))$.

Demostraremos que $C_n(X)$ no tiene nm-celdas, por contradicción. Supongamos que $C_n(X)$ contiene una nm-celda. Por el Teorema 187 existen n números naturales $k_1, ..., k_n$ y subcontinuos disjuntos dos a dos $B_1, ..., B_n$ de X tales que para todo $i \in \{1, ..., n\}$, B_i es un k_i-odo de X y $k_1 + k_2 + ... + k_n = nm$.

Como X no contiene $(m+1)$-odos, entonces para todo $i \in \{1, ..., n\}$, tenemos que $k_i = m$.

Como $n \geq 2$, consideramos a los m-odos B_1 y B_2. Como B_1 y B_2 son m-odos de X, existen subcontinuos A_1 y A_2 de B_1 y B_2, respectivamente, tales que $B_1 \setminus A_1$ y $B_2 \setminus A_2$ tienen al menos m componentes.

Sean $H_1, ..., H_m$ componentes distintas de $B_1 \setminus A_1$ y $K_1, ..., K_m$ componentes distintas de $B_2 \setminus A_2$.

Sean $p_1 \in H_1$ y $q_1 \in K_1$. Como X es arco conexo, entonces existe un arco L_1 en X tal que p_1 y q_1 son sus puntos extremos.

Sea $\alpha : [0,1] \to L_1$ un homeomorfismo tal que $\alpha(0) = p_1$ y $\alpha(1) = q_1$. Definimos $t_1 = \text{ínf}\{t \in [0,1] : \alpha(t) \in cl(K_1) \cup ... \cup cl(K_m)\}$. Como α es continua, entonces $t_1 > 0$. Definimos $t_0 = \sup\{t \in [0, t_1] : \alpha(t) \in cl(H_1) \cup ... \cup cl(H_m)\}$. Como α es continua, entonces

$$\alpha(t_0) \in cl(H_1) \cup ... \cup cl(H_m)$$

y

$$\alpha(t_1) \in cl(K_1) \cup ... \cup cl(K_m).$$

Podemos suponer que $\alpha(t_0) \in cl(H_1)$ y $\alpha(t_1) \in cl(K_1)$. Por el Corolario 186, tenemos que $A_1 \cup H_1$ y $A_2 \cup K_1$ son continuos. Entonces

$$\alpha(t_0) \in cl(H_1) \subseteq A_1 \cup H_1$$

y

$$\alpha(t_1) \in cl(K_1) \subseteq A_2 \cup K_1.$$

Como α es continua y $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, entonces $t_0 < t_1$. Notamos que para todo $t_0 < s < t_1$, $\alpha(s) \cap H_i = \emptyset$ si $i > 1$ y $\alpha(s) \cap K_j = \emptyset$ si $j > 1$.

Hacemos $L = \{\alpha(s) : t_0 \leq s \leq t_1\}$. Entonces L es un arco en X que cumple las siguientes propiedades:

- $\alpha(t_0) \in (A_1 \cup H_1) \cap L$,
- $\alpha(t_1) \in (A_2 \cup K_1) \cap L$,
- si $i > 1$, entonces $L \cap H_i = \emptyset$ y
- si $j > 1$, entonces $L \cap K_j = \emptyset$.

Definimos $T_1 = A_1 \cup H_1 \cup ... \cup H_m$ y $T_2 = A_2 \cup K_1 \cup ... \cup K_m$. Por el Corolario 186, tenemos que para todo $i \in \{1, ..., m\}$, $A_1 \cup H_i$ y $A_2 \cup K_i$ son continuos. Como $A_1 \cup H_1, ..., A_m \cup H_m$ son continuos que tienen a A_1 como subcontinuo en común, entonces T_1 es un continuo. Como $A_2 \cup K_1, ..., A_2 \cup K_m$ son continuos que tienen a A_2 como subcontinuo en común, entonces T_2 es un continuo.

Definimos $T = T_1 \cup T_2 \cup L$. Como T_1, T_2 y L son continuos, $\alpha(t_0) \in T_1 \cap L$ y $\alpha(t_1) \in T_2 \cap L$, entonces T es un continuo.

Definimos $A = A_1 \cup H_1 \cup L \cup A_2 \cup K_1$. Como $A_1 \cup H_1$, $A_2 \cup K_1$ y L son continuos, $\alpha(t_0) \in (A_1 \cup H_1) \cap L$ y $\alpha(t_1) \in (A_2 \cup K_1) \cap L$, entonces A es un subcontinuo de T.

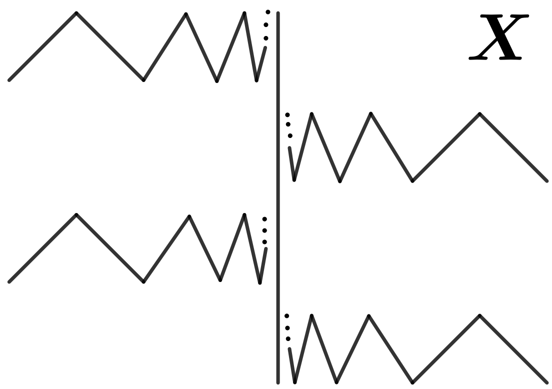
Como $\alpha(t_0) \in H_1 \cup A$, $\alpha(t_1) \in K_1 \cup A_2$ y para todo $t_0 < s < t_1$, si $i > 1$ y $j > 1$, entonces $\alpha(s) \notin H_i$ y $\alpha(s) \notin K_j$, entonces tenemos que se cumplen las siguientes propiedades:

- $T \setminus A = H_2 \cup ... \cup H_m \cup K_2 \cup ... \cup K_m$,
- para toda $i > 1$, entonces H_i es componente de $T \setminus A$,
- para toda $j > 1$, entonces K_j es componente de $T \setminus A$.

Entonces $T \setminus A$ tiene al menos $2m - 2$ componentes.

Como $m > 2$, entonces $2m - 2 > m$, por lo que $2m - 2 \geq m + 1$. Por lo tanto, $T \setminus A$ tiene al menos $m + 1$ componentes, es decir, T es un $(m + 1)$-odo. Esto es una contradicción, la cual surge de suponer que $C_n(X)$ contiene nm-celdas. $\square$

En lo referente a continuos conexos por arcos que contengan k-odos pero no $(k + 1)$- odos, con $k \geq 3$, resulta natural pensar en la unión de tres o más arcos tales que existe un punto v que es extremos de todos y que la intersección de cualesquiera dos de ellos sea v. Sin embargo, también pertenecen a esta categoría continuos como el que se muestra en la siguiente figura, el cual esta compuesto por un segmento al cual le convergen cuatro rayos.



Al final del Capítulo 1 mencionamos que el Teorema 188 es una versión más fuerte del Teorema 34. Para ver esto, demostraremos que las gráficas finitas distintas del intervalo y de la circunferencia cumplen las hipótesis del Teorema 188. De la Definición 20, podemos notar que las gráficas finitas son conexas por arcos. Entonces resta por mostrar que si G es una gráfica finita que no es homeomorfa al intervalo ni a la circunferencia, entonces existe $k > 2$ tal que G contiene k-odos, pero no contiene $(k+1)$-odos. Este hecho lo mostramos en el siguiente lema.

Lema 189. *Sea G una gráfica finita que no es homeomorfa al intervalo ni a la circunferencia. Entonces existe $k > 2$ tal que G contiene algún k-odo, pero no contiene $k+1$-odos.*

Demostración. Sea G una gráfica finita que no es homeomorfa al intervalo ni a la circunferencia. Entonces $R(G) \neq \emptyset$. Notemos que si $p \in R(G)$, entonces existe una vecindad cerrada B de p tal que B es un n-odo de G para alguna $n > 2$, es decir, $B \setminus \{p\}$ tiene al menos n componentes. Esto implica que el conjunto $N = \{n \in \mathbb{N} : G \text{ contiene algún } n\text{-odo}\}$ no es vacío y para todo $n \in N$, $n > 2$.

A continuación mostraremos que N es un conjunto acotado. Esto implica que N tiene máximo, de tal manera que si $k = \max N$, entonces $k > 2$, G contiene k-odos pero no contiene $k+1$-odos.

Sea $m = \Sigma_{p \in R(G)} ord(p)$. Sea B un n-odo de G. Entonces existe un subcontinuo A de B tal que $B \setminus A$ tiene al menos n componentes. Sean $K_1, ..., K_n$ distintas componentes de $B \setminus A$.

Por el Corolario 186, tenemos que $A \cup K_i$ es un subcontinuo de la gráfica G para toda $i \in \{1, ..., n\}$, de tal manera que $A \cup K_i$ es conexo por arcos para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Como $m > 2$, entonces $A \cap R(G) \neq \emptyset$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, consideramos puntos $p_1, ...p_n$ elementos de $K_1, ..., K_n$, respectivamente. Como $A \cup K_i$ es un continuo conexo por arcos para cada $i \in \{1, ..., n\}$, entonces para todo $i \in \{1, ..., n\}$, podemos unir a cada p_i con algún elemento $q_i \in A \cap R(G)$ con un arco L_i tal que $L_i \cap A \cap R(G) = \{q_i\}$. Por lo tanto, $n \leq m = \Sigma_{p \in R(G)} ord(p)$. Por lo tanto, m es cota superior del conjunto N. $\square$

Con esto obtenemos el siguiente corolario del Teorema 188, el cual tiene como consecuencia el Teorema 34.

Corolario 190. *Sea G una gráfica finita que no es homeomorfa al intervalo ni a la circunferencia. Entonces para toda $n \geq 2$, existe $m > 2$ tal que $F_n(C(G))$ contiene nm-celdas pero $C_n(G)$ no.*

Bibliografía

[1] J. J. Charatonik and A. Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mountain J. Math., Vol. 11, (1986), 165-170.

[2] D. W. Curtis, *A hyperspace retraction theorem for a class of half-line compactifications*, Topology Proc., Vol. 11, (1986), 165-170.

[3] D. W. Curtis and N. T. Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$-dimensional linear metric spaces*, Topology Appl., Vol. 19, (1985), 251-260.

[4] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph, I*, Fund. Math., Vol. 62, (1968), 265-286.

[5] C. Eberhart and S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of cones and fans*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 77, No. 2 (1979), 279-288.

[6] J. T. Goodykoontz Jr., *More on connectedness im kleinem and local connectedness in $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 65, No. 2 (1977), 357-364.

[7] S. T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State University Press, Detroit (1965).

[8] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton University Press, (1941).

[9] A. Illanes, *A model for the hyperspace $C_2(S^1)$*, Questions Answers Gen. Topology, Vol. 22, (2004), 117-130.

[10] A. Illanes, *Cells and cubes in hyperspaces*, Fund. Math., Vol. 130, (1988), 57-65.

[11] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Mat., Vol. 28, (2004).

[12] A. Illanes, S. Macías and S. B. Nadler Jr., *Symmetric products and Q-manifolds*, Contemp. Math., Vol. 246, (1999), 137-141.

[13] A. Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique*, Houston J. Math., 4, (2015), 347-363.

[14] A. Illanes and V. Martínez-de-la-Vega, *Cells in n-fold hyperspaces*, Colloq. Math., Vol.152, No.1, (2018), 45-53.

[15] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of n-fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math., Vol. 32, No.3, (2006), 783-799.

[16] R. Molski, *On symmetric products*, Fund. Math., Vol. 44, No.2, (1957), 165-170.

[17] S. B. Nadler, Jr., *A characterization of locally connected continua by hyperspace retractions*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 67, No.1, (1977), 167-176.

[18] Sam B. Nadler, Jr., *Continua whose cone and hyperspace are homeomorphic*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 230, (1977), 321-345.

[19] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory, An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., (1992).

[20] S. B. Nadler, Jr., *Dimension theory: An introduction with exercises*, Aportaciones Mat., Vol.28 (2002).

[21] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets. A text with research questions*, Aportaciones Mat., Vol. 33 (2006).

[22] M. Wojdislawski, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, Fund. Math., Vol. 32 (1939) 184-192.

[23] H. Toruńczyk, *On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds*, Fund. Math., Vol. 106 (1980) 31-40.