



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

CONTROL DE FUERZA SOBRE SUPERFICIES CON ALTOS COEFICIENTES
DE FRICCIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
M. I. LAURO FERNANDO VÁZQUEZ ALBERTO

TUTOR PRINCIPAL
DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM
COMITÉ TUTOR
DR. LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ ICAZA LONGORIA, INSTITUTO DE INGENIERÍA,
UNAM
DR. LEONID FRIDMAN, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ ICAZA LONGORIA

Secretario: DR. LEONID FRIDMAN

1^{er}. Vocal: DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ

2^{do}. Vocal: DR. EMMANUEL NUÑO ORTEGA

3^{er}. Vocal: DR. ALEJANDRO RODRÍGUEZ ÁNGELES

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

TUTOR DE TESIS:

DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ

FIRMA

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Al Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez.

Al proyecto **PAPIIT IN117820** *Control y regulación de fuerza en sistemas de teleoperación bilateral.*

A mi familia.

TABLA DE CONTENIDO

1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	2
1.2. Objetivo	4
1.3. Motivación	5
1.4. Metodología	5
1.5. Contribución	5
1.6. Organización de la tesis	6

2. Preliminares	7
2.0.1. Controladores clásicos	8
2.0.2. Controladores robustos	9
2.0.3. Controladores por Modos Deslizantes	9
3. Descripción del robot	20
3.1. Modelo Dinámico	20
3.1.1. Análisis cinemático	21
3.1.2. Cuaterniones	22
3.1.3. Cuaterniones duales	26
3.1.4. Uso de los cuaterniones	27
3.1.5. Cinemática inversa.	29
4. Control de Posición y Fuerza	31
4.1. Modelo del robot	32
4.2. Control de fuerza sin modelo	33
5. Experimentos	38

5.1. Descripción del experimento	38
6. Conclusiones	52
Bibliografía	55
Índice de figuras	62

CAPÍTULO

1

INTRODUCCIÓN

El desempeño de robots manipuladores se ve frecuentemente comprometido por la influencia de fuerzas de fricción. En la mayoría de los casos la minimización del error en la ejecución de tareas demandará la implementación de un controlador adecuado capaz de lidiar con los efectos de la fricción, [1]. Las condiciones de trabajo varían significativamente con la carga o con el movimiento. Los efectos de la fricción son dependientes de la posición y de la velocidad del manipulador, de múltiples factores como la naturaleza de los materiales de contacto, lubricación entre ellos, temperatura, etc. A la fricción la envuelve un gran número de procesos complejos que son altamente difíciles de modelar y que residen principalmente en el contacto con la superficie, [2], [3], [4]. Ya que la fricción se define como la reacción de fuerza tangencial entre dos superficies en contacto, cuando el manipulador y la superficie están en contacto se analiza la fricción que existe tangente a la fuerza que ejerce el efector final con la superficie. La fuerza de fricción depende del área real de contacto y no del área aparente del cuerpo deslizando. La fricción al contacto entre una superficie y un robot afecta su desempeño, propiciando oscilaciones, inestabilidad, par articular excesivo, errores de seguimiento y desgastes mecánicos [5].

Durante las últimas décadas, el control de la fuerza de los robots se ha estudiado ampliamente. Desde un punto de vista puramente teórico, este tipo de dispositivos se pueden modelar con mucha precisión, pero en la práctica no es posible obtener un modelo preciso. Además, la superficie de contacto puede presentar efectos de alta fricción que disminuyen en gran medida el rendimiento general del sistema. Por lo tanto, parece ser una idea natural implementar esquemas de control que no estén completamente basados en el modelo del sistema y al mismo tiempo sean capaces de lidiar con algunos tipos de perturbaciones [6]. Entre muchas opciones posibles, los controladores de modos deslizantes son de especial interés.

1.1. Estado del arte

Los primeros pasos sobre reflexión de fuerza en un sistema robóticos se remontan a los años 50 cuando [7] y [8] realizaron experimentos para el manejo de sustancias radioactivas. Hasta el año de 1986 se realizó un análisis basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov para el seguimiento de posición de un sistema robótico [9]. Tres años más tarde se presentó el *control por compliancia compartida* [10] en donde se trata el problema de las oscilaciones creadas por el contacto repentino del robot con un ambiente rígido. Mediante un filtro paso bajas se logró amortiguar estas oscilaciones y lograr un comportamiento estable. La mayor parte de los trabajos están basados en las propiedades de pasividad de las señales que sirven para conectar los subsistemas que forman la cadena robot-canal de comunicación-ambiente y en el control adaptable.

En [3] se trata con el problema de incertidumbre en el modelo de los robots y del entorno, definiendo el concepto de igualación de impedancia asintótica débil aproximada, que es muy útil cuando se utiliza control adaptable. En [2] y [4] se trata el problema de la incertidumbre paramétrica en el modelo de los manipuladores así como el desconocimiento de la superficie, donde se garantiza estabilidad y robustez utilizando un controlador adaptable. El primer trabajo con ambiente desconocido y sin medición de fuerza fue presentado en [11], donde se aplica control adaptable para lograr la transparencia. Años después, los mismos autores analizan las ventajas de utilizar retroalimentación de fuerza para mejorar la estabilidad y el desempeño del sistema [12], [13]. Algunas aplicaciones de este método orientadas a la cirugía médica pueden encontrarse en [14] y [15]. En los últimos

años, el enfoque principal de la investigación en control de fuerza ha sido respecto al problema de la superficie desconocida, en [16] se aborda el problema de superficies suaves y se describen los mapeos no lineales de fuerza y posición. El seguimiento simultáneo de una trayectoria deseada en el espacio de trabajo de un manipulador y la fuerza de la trayectoria sobre una superficie deseada ha sido uno de los problemas más estudiados ya que muchas aplicaciones involucran robots manipuladores que interactúen con el medio. De acuerdo con su grado de autonomía, los robots pueden clasificarse en: teleoperados de funcionamiento repetitivo y, autónomos o inteligentes. Estos robots son normalmente utilizados en trabajos de localización remota, en tareas difíciles de automatizar y en entornos no estructurados. El objetivo principal es que el robot en estudio logre interactuar con el entorno de una manera que resulte útil en el desempeño de tareas específicas. En general existe un lazo interno de retroalimentación cuyo objetivo es que los robots se comporten de la forma deseada estableciendo algoritmos de control que permitan conseguir la mayor interacción directamente con el entorno.

La estabilidad de los controladores propuestos ha podido ser garantizada, para resolver este problema es necesaria la información de sensores como la posición, velocidad y fuerza garantizando la estabilidad de lazo cerrado.

Existen dos formas de resolver el problema del control de fuerza y movimiento. La forma directa y la indirecta. A la segunda se le llama controlador de impedancia y admitancia [17] y logra una interacción de fuerza deseada controlando el movimiento del manipulador sin hacer uso explícito de un lazo de control. La forma directa utiliza el control paralelo [18] y la estrategia de control híbrida de posición/fuerza [19], esta última es más apropiada cuando el movimiento del manipulador está restringido a una superficie rígida ya que se basa en la descomposición del espacio de trabajo en subespacios de movimiento controlado y fuerza controlada. Los enfoques anteriores requieren el modelo cinemático y dinámico del manipulador en cuestión. Se asume que la posición y velocidad de las articulaciones del manipulador al igual que la fuerza de contacto son conocidas. Si la geometría de la superficie es desconocida, es necesario encontrar la solución a esas incertidumbres haciendo uso de distintos métodos de identificación.

La descripción de la geometría de una superficie rígida es el punto crítico, ya que las incertidumbres en ésta pueden guiar a la inestabilidad en el lazo de control [20]. La idea básica es reconstruir la superficie en términos de la medición de la posición, velocidad y de la fuerza. Sin embargo en muchas

aplicaciones se desea tener un número mínimo de sensores. Para el contacto con superficies rígidas, se han utilizados algunas soluciones basadas en observadores lineales [21], [22], observadores no lineales basados en el control PID [23], y observadores GPI [24]. Todos los observadores de fuerza citados requieren un modelo dinámico preciso del robot. Los esquemas propuestos en la literatura se dividen en impedancia y admitancia. Una alternativa a estos modelos se basa en restricciones holonómicas [25], [26]. Las propiedades dinámicas de los robots afectan la estabilidad, robustez y transparencia del sistema completo. Por lo tanto el dispositivo de interfaz ideal es aquel que tiene una baja fricción e inercia, tiene un amplio rango de fuerza y tiene un volumen de trabajo adecuado.

En [27], [28], de la aceleración se estima la fuerza de contacto con la superficie; a partir de esta idea se toma otro enfoque para poder estimar la fuerza y la velocidad. El problema es la falta de medición de la velocidad el cual se puede resolver mediante el uso de observadores o diferenciadores. Al no contar con sensores de velocidad y fuerza se utiliza un controlador *GPI* [29] (Generalized Proportional Integral), el cual es una extensión dinámica del estado y un observador de alta ganancia, que en conjunto son conocidos como observadores Proporcionales Integrales Generalizados. El resultado deseado es garantizar la acotación final de los errores de seguimiento de posición, velocidad y fuerza.

1.2. Objetivo

Se considera el problema del control híbrido de posición/fuerza sobre superficies rígidas en presencia de altos coeficientes de fricción en donde sólo es posible realizar la medición de la posición articular y de la fuerza; dado este sistema, se desea lograr que el robot manipulador siga una trayectoria de posición y fuerza considerando que se tiene conocimiento exacto de la geometría del ambiente en el que se desenvuelve el robot y que no se cuenta con medición directa de la velocidad. Se considera que la fricción presente en las articulaciones de cada robot es despreciable; sin embargo, la fricción que está presente al contacto con la superficie no lo es.

1.3. Motivación

Los altos niveles de fricción se suelen compensar por medio de la generación de un modelo que pueda describir de manera precisa este efecto con el fin de cancelarlo en la implementación del controlador. En este trabajo se considera la compensación del efecto de fricción sin necesidad de tener que modelarlo. La idea básica es considerarlo como una perturbación y eliminarlo mediante una técnica de control robusto.

1.4. Metodología

Se toma en cuenta el problema de la estimación de la velocidad para un robot en funcionamiento autónomo. Se emplea el diferenciador de Levant en lugar de utilizar un observador para estimar la velocidad. Al mismo tiempo, el controlador se basa en un Continuous Terminal Sliding Mode Algorithm (CTSMA), lo que permite obtener un mayor rendimiento en el seguimiento de posición y de fuerza sobre superficies con altos coeficientes de fricción. Para lograr el seguimiento de posición y fuerza, en este esquema es común asumir que la fuerza de contacto del efector final del robot y la posición angular, se pueden medir. Las ventajas de utilizar este esquema se resumen a obtener mejores resultados en comparación con otros métodos que requieren conocimiento exacto del modelo del robot.

1.5. Contribución

Se aplicó el método para resolver el problema de control de posición y de fuerza de un robot manipulador sobre una superficie rígida en presencia de fricción desconocida, en el cual la medición de las velocidades de cada articulación no está disponible. El diferenciador de Levant fue aplicado para estimar la velocidad de cada una de las articulaciones del robot, con mejores resultados que otros observadores muestran basados en el modelo del robot.

El esquema propuesto muestra exitosamente que compensa la fuerza de fricción en el seguimiento de posición y de fuerza sobre superficies con altos coeficientes de fricción.

Parte de este problema ya ha sido resuelto utilizando otros métodos. Sin embargo, hasta el momento no se ha reportado un resultado utilizando el enfoque propuesto en esta tesis, que presenta algunas ventajas ya mencionadas sobre otros algoritmos. Además, se realizó la validación experimental para el control de posición y fuerza.

1.6. Organización de la tesis

Este trabajo está conformado de 6 Capítulos. En el Capítulo 1 se presenta la introducción con la descripción del problema. El Capítulo 2 presenta el estado actual del tema y las publicaciones y trabajos relevantes relacionados, se introducen las bases teóricas de los modos deslizantes, se abordan las distintas generaciones que se han desarrollado. En el Capítulo 3 se presentan las características del sistema. El Capítulo 4 se enfoca en la descripción del algoritmo de control Continuous Terminal Sliding Mode Algorithm (CTSMA) junto al diferenciador de tercer orden a utilizar en el sistema, también se muestran los métodos utilizados para el seguimiento de trayectorias del robot. El Capítulo 5 muestra los resultados experimentales obtenidos de la implementación del algoritmo para el control simultáneo de fuerza y posición sobre una superficie rígida conocida con altos coeficientes de fricción. El Capítulo 6 contiene las conclusiones y comentarios finales de este trabajo.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

En el área de la robótica el seguimiento de trayectorias mediante la técnica de modos deslizantes se ha utilizado en diferentes tipos de robots. En [30] se muestran los resultados obtenidos de utilizar el control por modos deslizantes de alto orden en un robot paralelo accionado de forma neumática. En [31] se realiza el seguimiento de trayectorias para robots móviles. En [32] se implementan distintos controladores continuos por modos deslizantes en un robot paralelo de dos grados de libertad.

Para generar una trayectoria continua que minimice el error de seguimiento se han utilizado diferentes técnicas de control como el control predictivo [33], que hace uso de algoritmos de optimización. Incluso para lograr los objetivos hay trabajos realizados en diferentes áreas, como en [34] en donde se utilizan redes neuronales junto a la técnica de modos deslizantes para realizar el seguimiento de trayectorias de robots manipuladores. En todos los trabajos anteriores, lo que se desea es obtener una alta eficiencia en el seguimiento de trayectorias deseadas en términos de la minimización del error de posición bajo perturbaciones e incertidumbres.

El problema en común que tratan de solucionar los trabajos anteriores es la incertidumbre y en

general las perturbaciones que aparecen en el sistema. Para lograr el objetivo deseado se hace uso de las técnicas de control por modos deslizantes. La teoría clásica del control por modos deslizantes está detallada por el Prof. Utkin en [35]. Para los algoritmos de segundo orden se aborda el algoritmo Twisting [36], el cual asegura la convergencia en tiempo finito de los estados de sistema, en este caso posición y velocidad par un sistema de segundo orden, pero el problema al que se enfrenta es el *chattering*, el cual crea un daño directo sobre los actuadores en su implementación [37]. Parte de la literatura acerca del control por modos deslizantes se encuentra en [38], [39].

2.0.1. Controladores clásicos

El modelo dinámico de un manipulador describe un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, no lineales y acopladas. Por lo tanto en un control clásico, el que la mayoría de los robots industriales que se utilizan en procesos de manufactura requieren por lo general, que el efector final se desplace, siguiendo una trayectoria deseada, para lograrlo utilizan un algoritmo de control clásico tipo PID. Las ventajas de este algoritmo son la facilidad de implementación y el pequeño costo computacional. Las desventajas principales son que la respuesta del robot varía según su configuración, se producen sobreoscilaciones e imprecisión en los movimientos rápidos, no son robustos ante perturbaciones y presentan bajo desempeño en presencia de incertidumbre en los parámetros del manipulador, debido a estas características es necesario utilizar controladores robustos.

Algunos algoritmos de control [40], [41] que se han utilizado comúnmente son el Control Proporcional de realimentación de velocidad, el control Proporcional Derivativo *PD*, Control por Par Calculado, Control *PD+*, Control Proporcional Derivativo con compensador de gravedad, Control *PD* con compensación precalculada de gravedad; Control basado en la estructura pasiva de los robots rígidos como el algoritmo de Control con modelo conocido, el Control adaptable y el Control Robusto.

2.0.2. Controladores robustos

Las estrategias de control robusto se desarrollan con el fin de estabilizar sistemas que presentan errores en el modelo y dinámicas no modeladas. En robótica aparecen frecuentemente modelos con incertidumbre, éstas se deben a cambios en la carga del robot, simplificación del modelo dinámico y fuerzas de fricción, entre otras. La incertidumbre hace que los parámetros de desempeño del sistema y el error de seguimiento se vean afectados [42], [43]. Por lo tanto, es importante diseñar esquemas de control robusto contemplando la no linealidad de la dinámica de los manipuladores.

Algunos autores han aplicado estrategias de control robusto en el seguimiento de trayectorias, control de sistemas neumáticos, de vehículos no tripulados y de motores, obteniendo muy buenos resultados. Por tal motivo, este trabajo busca una ley de control robusta eficiente con respecto de los esfuerzos de control en el caso de la incertidumbre paramétrica.

Para sistemas de grado relativo uno, el problema de incertidumbre paramétrica y dinámicas no modeladas en la implementación física se ha solucionado mediante el uso del control por modos deslizantes [35], entre otras. Para sistemas de grado relativo dos el problema para los controladores es mayor pero el control por modos deslizantes garantiza la compensación exacta de las incertidumbres y la convergencia de los estados en tiempo finito. La única desventaja que se puede dar en la implementación de estos algoritmos es la naturaleza del sistema, las características físicas de actuadores y sensores.

2.0.3. Controladores por Modos Deslizantes

El concepto de control por modos deslizantes (CMD) fue propuesto en Rusia [35] y es reconocido como una herramienta para sistemas complejos de alto orden no lineales que operan bajo incertidumbres y perturbaciones externas e internas tanto para regulación, control de trayectorias, diferenciación y observación. El control por modos deslizantes es una de las más eficientes técnicas de control robusto para sistemas bajo fuertes condiciones de incertidumbre e insensible ante perturbaciones acopladas a la señal de control. Por estas características que lo definen el control por

modos deslizantes se ha aplicado en la solución de infinidad de problemas.

El objetivo principal del controlador es compensar de forma exacta incertidumbres acopladas a la señal de control manteniendo las variables de deslizamiento en cero. Para lograr el objetivo, se necesita una conmutación de frecuencia infinita. Desde el punto de vista de implementación, este control convencional no es deseable ya que las oscilaciones causadas por la conmutación de alta frecuencia conducen al problema del *chattering* [39], [44], (castaño u oscilación) que es un efecto causado por dinámicas no modeladas en cascada las cuales incrementan el grado relativo del sistema y perturban el modo deslizante del sistema; pero gracias a nuevas generaciones de controladores por modos deslizantes, este problema se ha disminuido significativamente.

Distintas estrategias de control por modos deslizantes CMD se han implementado para sistemas de grado relativo dos, con un problema en común, el *chattering*, el cual deteriora al sistema; en el caso de los robots se produce en los actuadores de cada articulación. Para la implementación se busca y es necesario evitar el *chattering* generando una señal de control continua y suave pero sin perder la robustez del algoritmo de control que hace frente a las perturbaciones e incertidumbres del modelo.

Los controladores por modos deslizantes de orden superior [39], [36] recientemente propuestos garantizan la estabilidad en tiempo finito de los estados de sistemas SISO a pesar de las perturbaciones o incertidumbres acopladas. Los modos deslizantes de orden superior tienen como principal característica la disminución del *chattering* [39], [44] ya que los controladores de orden superior por modos deslizantes son continuos en general.

A continuación se muestran las principales ventajas de las generaciones de control por modos deslizantes.

Sistema de segundo orden con incertidumbre acoplada

Se considera un sistema de segundo orden con incertidumbre acoplada al control para los algoritmos mencionados:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + \delta(t, x_1, x_2)\end{aligned}\tag{2-1}$$

A continuación se muestran las generaciones de control por modos deslizantes [45].

Primera generación

Primera generación de Modos Deslizantes de primer orden [39]. Algoritmo convencional de primer orden.

$$\begin{aligned}u_1 &= -\rho \text{sign}(s) \\ \rho &= D + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\end{aligned}\tag{2-2}$$

con $D > |\delta(x_1, x_2)|$ y $\alpha > 0$ garantiza convergencia en tiempo finito a la superficie deslizante y convergencia asintótica de los estados del sistema. La condición de convergencia está dada por la función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}s^2\tag{2-3}$$

$$\dot{V} = -\alpha V^{\frac{1}{2}}, \alpha > 0\tag{2-4}$$

$$s = x_1 + qx_2 \quad (2-5)$$

(2-5) es la superficie de deslizamiento

$$u_1 = -qx_2 - \rho \text{sign}(s) \quad (2-6)$$

$$\rho = D + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \quad (2-7)$$

(2-7) es la ganancia con la cual la ley de control (2-6) hace que la superficie deslizante converja a cero en tiempo finito.

Ventajas:

- Precisión.
- Convergencia en tiempo finito a la superficie deslizante.
- Incertidumbres acotadas.

Desventajas:

- *Chattering* (castaño u oscilación).
- Salidas con grado relativo 1.
- Convergencia asintótica de las variables deslizables.
- Garantiza insensibilidad solo ante perturbaciones acopladas.

Segunda generación

Twisting El twisting [36] es un algoritmo de control por modos deslizantes de segundo orden que no requiere de una superficie de deslizamiento.

Considerando el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + f(x, t)\end{aligned}\tag{2-8}$$

donde $f(x, t)$ indica perturbaciones e incertidumbres desconocidas.

Se diseña el control u

$$u = -\alpha \text{sign}(\dot{x}) - \beta \text{sign}(x)\tag{2-9}$$

con $D > |\delta(x_1, \dot{x}_2)|$ y $\alpha - D > \beta > D$ garantiza convergencia en tiempo finito de los estados de sistemas mecánicos de segundo orden.

La condición de convergencia está dada por la función de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \alpha^2 x^2 + \gamma |x_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(x_1) x_2 + \alpha |x_1| x_2^2 + \frac{1}{4} x_2^4\tag{2-10}$$

$$\gamma < \frac{4\sqrt{2}}{3} (\beta - D) \sqrt{\alpha}, / \alpha - D > \beta > D\tag{2-11}$$

Ventajas:

- Garantiza precisión cuadrática de convergencia respecto a la salida deslizante.

- No requiere de una superficie deslizante para sistemas mecánicos de grado relativo 1.
- Para sistemas de grado relativo r : el orden de la dinámica deslizante se reduce hasta $(r - 2)$. Aún es necesario el diseño de la superficie de deslizamiento de orden $(r - 2)$.

Tercera generación

El algoritmo Super-Twisting [46] (*STA* por sus siglas en inglés) genera una señal de control continua y requiere de una superficie de deslizamiento.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x, t) + g(x, t)u \\
 u &= -k_1|x|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(x) + v \\
 \dot{v} &= -k_2\text{sign}(x)
 \end{aligned} \tag{2-12}$$

$x \in \mathbb{R}$, $k_1 = 1.5\sqrt{\Delta}$ y $k_2 = 1.1\Delta$, $\Delta \geq |\ddot{x}|$, $f(x(t), t)$ es *Lipschitz*. $g(x(t), t)$ es *Lipschitz*.

Garantiza convergencia exponencial de los estados del sistema y convergencia en tiempo finito de las superficies.

El STA tiene las siguientes ventajas

- Señal de control continua.
- Asegura la convergencia de los estados en tiempo finito.
- Atenuación del *Chattering* (castaño u oscilación).
- El diferenciador se obtiene usando el algoritmo Super-Twisting.
- Compensa perturbaciones Lipschitz [47] exactamente.
 - Estimación exacta en tiempo finito de las derivadas con ausencia de ruido.

El STA tiene las siguientes desventajas

- Grado relativo $r \geq 2$. Necesita una superficie deslizante. Los estados convergen asintóticamente al origen.
- Es robusto ante perturbaciones cuya derivada sea acotada.

Cuarta generación

Controladores por modos deslizantes de orden arbitrario [48]

$$\begin{aligned}\dot{X} &= F(t, X) + G(t, X)u, X \in R^n, u \in R \\ \sigma &= \sigma(X, t) \in R\end{aligned}\tag{2-13}$$

σ su grado relativo r es fijo y conocido.

El problema de control se convierte en la estabilización en tiempo finito de la ecuación diferencial incierta

$$\sigma^{(r)} = f(t, X) + g(t, X)u\tag{2-14}$$

y la inclusión diferencial

$$\sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u\tag{2-15}$$

donde C , K_m y K_M son constantes conocidas.

Controladores anidados “Nested” por modos deslizantes de orden arbitrario

Estos controladores resuelven el problema de la estabilización exacta en tiempo finito para una salida con grado relativo arbitrario.

Garantizan la estabilización de $\sigma = 0$ y de sus sucesivas derivadas hasta $r - 1$.

Nested Third Order Singular Terminal Algorithm

$$u = -\alpha \text{sign}(\ddot{\sigma} + 2(|\dot{\sigma}|^3 + |\sigma|^2)^{\frac{1}{6}} \text{sign}(\dot{\sigma} + |\sigma|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\sigma))) \quad (2-16)$$

Nested Fourth Order Singular Terminal Algorithm

$$u = -\alpha \text{sign}(\ddot{\sigma} + 3(\ddot{\sigma}^6 + \dot{\sigma}^4 + \sigma^3)^{\frac{1}{12}} \times \text{sign}(\ddot{\sigma} + (\dot{\sigma}^4 + |\sigma|^3)^{\frac{1}{6}} \text{sign}(\dot{\sigma} + 0.5|\sigma|^{\frac{3}{4}} \text{sign}(\sigma)))) \quad (2-17)$$

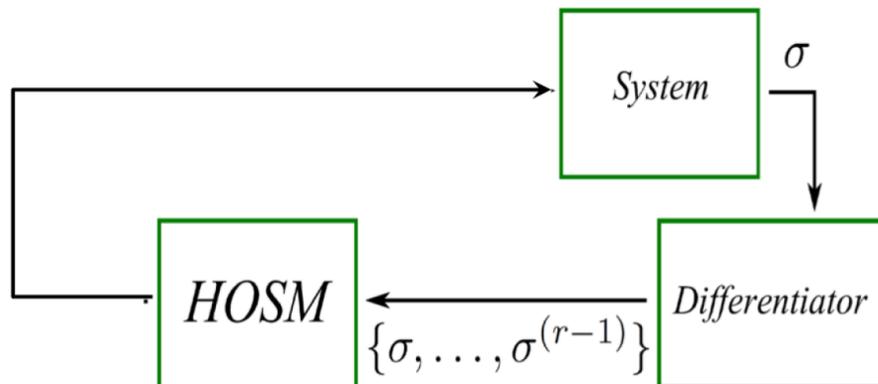


Figura 2-1: Implementación del controlador *HOSM* anidado de realimentación de salida [49].

Ventajas sobre “Nested” *HOSM*

- Asegura $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ en tiempo finito.

- Compensación exacta de perturbaciones para sistemas SISO (Single Input-Single Output) con grado relativo r .
- Asegura la precisión r -ésima para la salida de deslizamiento con respecto al paso de discretización y las dinámicas parasitas rápidas.
- No necesita una superficie deslizante.

Desventajas:

- Produce una señal de control discontinua.
- La estrategia contra el chattering requiere la reconstrucción de la perturbación ($\sigma^{(r)}$)

Quinta generación

Controladores por modos deslizantes continuos de orden arbitrario [49].

Algoritmo Twisting continuo (CTA)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + f(x, t) \end{aligned} \tag{2-18}$$

$$u = -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}} - \int_0^t (k_3[x_1]^0 + k_4[x_2]^0) d\tau \tag{2-19}$$

donde k_1, k_2, k_3 y k_4 son ganancias positivas. Considerando la notación $[z]^P = |z|^P \text{sign}(z)$

Sistema de lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}} + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3[x_1]^0 - k_4[x_2]^0 + \rho\end{aligned}\tag{2-20}$$

$$\rho = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t} \text{ y } |\rho| < 1$$

Ventajas:

- Algoritmos homogéneos de grado $\delta_f = -1$ con pesos de homogeneidad $\rho = 3, 2, 1$
- La única información que necesita para garantizar la convergencia en tiempo finito de las tres variables x_1, x_2 y x_3 es la salida (x_1) y su derivada (x_2).
- La precisión corresponde al modo deslizante de tercer orden.

Algoritmo por modos deslizantes continuos singular terminal (CSTSMA)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + f(x, t)\end{aligned}\tag{2-21}$$

$$u = -k_1[\phi]^{\frac{1}{2}} - k_3 \int_0^t [\phi]^0 d\tau\tag{2-22}$$

donde $\phi = (x_2 + k_2[x_1]^{\frac{2}{3}})$ y k_1, k_2, k_3 son ganancias positivas.

Sistema de lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1[\phi]^{\frac{1}{2}} + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3[\phi]^0 + \rho\end{aligned}\tag{2-23}$$

$$\rho = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t} \text{ y } |\rho| < 1$$

Algoritmo por modos deslizantes contínuos no singular terminal (CNTSMA)

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2-24}$$

$$\dot{x}_2 = u + f(x, t)$$

$$u = -k_1[\phi_N]^{\frac{1}{3}} - k_3 \int_0^t [\phi_N]^0 d\tau \tag{2-25}$$

donde $\phi_N = (x_1 + k_2[x_1]^{\frac{3}{2}})$ y k_1, k_2, k_3 son ganancias positivas.

Sistema de lazo cerrado

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -k_1[\phi_N]^{\frac{1}{3}} + x_3 \tag{2-26}$$

$$\dot{x}_3 = -k_3[\phi_N]^0 + \rho$$

$$\rho = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t} \text{ y } |\rho| < 1$$

Ventajas:

- Algoritmos homogéneos de grado $\delta_f = -1$ con pesos $\rho = 3, 2, 1$
- La única información que necesita para garantizar la convergencia en tiempo finito de las tres variables x_1, x_2 y x_3 es la salida (x_1) y su derivada (x_2).
- La precisión corresponde al modo deslizante de tercer orden.

CAPÍTULO

3

DESCRIPCIÓN DEL ROBOT

3.1. Modelo Dinámico

Se considera un robot manipulador de n grados de libertad como una cadena cinemática sujeto a restricciones holonómicas. Si las variables articulares se consideran como coordenadas generalizadas, entonces se puede utilizar el método de Euler-Lagrange para modelarlo [50]. Se considera $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ el vector de coordenadas generalizadas y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ el vector de pares de entrada.

El modelo dinámico del robot en contacto con una superficie rígida está dado por

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (3-1)$$

donde, para el manipulador, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de Coriolis y fuerzas centrífugas, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas gravitacionales, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares de entrada, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el vector de multiplicadores de Lagrange

(físicamente representa la fuerza aplicada del manipulador sobre una superficie en el punto de contacto), y $\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \triangleq \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es el gradiente de m restricciones holonómicas, expresada en términos de coordenadas generalizadas, definidas por

$$\varphi(\mathbf{q}) = 0 \quad (3-2)$$

Estas restricciones también se pueden definir en términos de las coordenadas del efector final $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (3-3)$$

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad (3-4)$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el Jacobiano analítico del manipulador. $\mathbf{J}_{\varphi x} \triangleq \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{J}(\mathbf{q})$.

Tenga en cuenta que con una normalización adecuada se puede hacer $\|\mathbf{J}_{\varphi x}\| = 1$. Por simplicidad, se asume que los robots solo tienen articulaciones de revolución. En tal caso, para cada manipulador, se mantienen las siguientes propiedades conocidas [51].

3.1.1. Análisis cinemático

La cinemática directa consiste en obtener la posición del efector final $p = (p_x, p_y)$, a partir de los valores de posición angular de cada articulación reescribiendo $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$, $q_3 = \theta_3$, $q_4 = \theta_4$, $q_5 = \theta_5$, $q_6 = \theta_5$ [50].

La cinemática inversa consiste en obtener los valores de posición angular de cada articulación θ_i , a partir de la posición del efector final $p = (p_x, p_y, p_z)$ y orientación (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) .

El algoritmo que se sigue para obtener de manera sistemática la cinemática directa y la cinemática inversa se obtiene mediante el uso de cuaterniones, ya que al utilizar este método se obtienen ventajas más eficientes en la implementación dentro del sistema.

3.1.2. Cuaterniones

Cuaternión unitario

Los cuaterniones son un álgebra inventada por Sir William Rowan Hamilton en 1843 [52]. Originalmente fue definida como la relación de velocidad angular (cociente) entre pares de vectores en \mathbb{R}^3 . Algebraicamente, el cuaternión es una extensión de los números complejos. Su interpretación geométrica es equivalente a la parametrización de Euler en mecanismos, los cuales tienen utilidad para representar rotaciones.

En términos de los ejes de Euler $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$ y un ángulo θ (parametrización eje/ángulo) el cuaternion puede expresarse como

$$\eta = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3-5)$$

$$\epsilon_x = a_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3-6)$$

$$\epsilon_y = a_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3-7)$$

$$\epsilon_z = a_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3-8)$$

por lo tanto, un cuaternión es un vector de la forma

$$\boldsymbol{\nu} = \eta + \epsilon_x \mathbf{i} + \epsilon_y \mathbf{j} + \epsilon_z \mathbf{k} \quad (3-9)$$

donde η es la componente escalar de $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z]$ es el vector de componentes. Una notación abreviada es $\boldsymbol{\Gamma} = (\eta, \boldsymbol{\epsilon})$ con $\eta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^3$. El conjunto de cuaterniones $\boldsymbol{\Gamma}$ es un vector de cuarta dimensión, y la forma en que se representa una multiplicación entre cuaterniones es mediante la notación “.”. El conjugado del cuaternión $\boldsymbol{\Gamma} = (\eta, \boldsymbol{\epsilon})$ de \mathbf{R} que representa a la matriz \mathbf{R}^{-1} está dado por “.”

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} = (\eta, -\epsilon) \quad (3-10)$$

El producto entre dos cuaterniones tiene la forma simple en términos del producto cruz y el producto interno entre los vectores en \mathbb{R}^3 . Si $\mathbf{\Gamma}_1 = (\eta_1, \epsilon_1)$ y $\mathbf{\Gamma}_2 = (\eta_2, \epsilon_2)$ son cuaterniones, donde $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ son las partes escalares de $\mathbf{\Gamma}_1$ y $\mathbf{\Gamma}_2$, y $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}^3$ son la parte vectorial, puede mostrarse algebraicamente que el producto de dos cuaterniones satisface

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_1 \cdot \mathbf{\Gamma}_2 &= (\eta_1\eta_2 - \epsilon_1 \cdot \epsilon_2, \eta_1\epsilon_2 + \eta_2\epsilon_1 + \epsilon_1 \times \epsilon_2) \\ &= (\eta_1\eta_2 - \epsilon_1 \cdot \epsilon_2, \eta_1\epsilon_2 + \eta_2\epsilon_1 + S(\epsilon_1)\epsilon_2) \end{aligned} \quad (3-11)$$

La parametrización vía cuaternión obedece la siguiente restricción

$$\eta^2 + \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 = 1 \quad (3-12)$$

o en forma simplificada

$$\eta^2 + \epsilon^T \epsilon = 1 \quad (3-13)$$

la restricción (3-13) da al cuaternión el nombre de cuaternión unitario. Al igual que la parametrización eje/ángulo, existen dos expresiones que describen la misma orientación (η, ϵ) y $(-\eta, -\epsilon)$. Pero si el ángulo de rotación es restringido a un rango $\theta \in [-\pi, \pi]$, entonces el escalar η nunca será negativo y la representación del cuaternión es única; con lo cual se resuelve el problema de no-unicidad. Así mismo el cuaternión está libre de singularidades [17].

La matriz de rotación correspondiente a un cuaternión dado, puede obtenerse mediante

$$\mathbf{R}(\eta, \epsilon) = (\eta^2 + \epsilon^T \epsilon) \mathbf{I} + 2\epsilon \epsilon^T + 2\eta \mathbf{S}(\epsilon) \quad (3-14)$$

Por otro lado, el cuaternión correspondiente a una matriz de rotación es

$$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} \quad (3-15)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{sign}(r_{32} - r_{23})\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \text{sign}(r_{13} - r_{31})\sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \text{sign}(r_{21} - r_{12})\sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

Supóngase que si el sistema \sum_1 rota instantáneamente con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ sobre \sum_0 . Entonces, el cuaternión unitario $\sum = (\eta, \boldsymbol{\epsilon})$ que representa \sum_1 relativo a \sum_0 evoluciona en el tiempo conforme a la siguiente ecuación diferencial [53]

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\omega}^T \\ \boldsymbol{\omega} & \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

La relación entre la derivada temporal del cuaternión y la velocidad angular de un cuerpo se establece mediante la así llamada regla de propagación

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\omega} \quad (3-18)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\eta, \boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{\omega} \quad (3-19)$$

donde

$$\mathbf{E}(\eta, \boldsymbol{\epsilon}) = \eta\mathbf{I} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (3-20)$$

Para referirse al problema de describir la orientación mutua entre dos sistemas coordenados,

$$\boldsymbol{\Gamma}_{21} = (\eta_{21}, {}^1\boldsymbol{\epsilon}_{21}) \quad (3-21)$$

representa el cuaternión que es extraído directamente de 1R_2 . Nótese que la parte vectorial del cuaternión es la misma cuando nos referimos a Σ_2 , i.e. ${}^1\epsilon_{21} = {}^2\epsilon_{21}$

La ecuación (3-21) puede expresarse en forma de cuaternión como

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cdot \Gamma_{21} \quad (3-22)$$

donde (η_2, ϵ_2) se obtienen usando (3-15) y (3-16), y la expresión de la orientación mutua entre dos sistemas puede ser calculado como

$$\Gamma_{21} = \Gamma^{-1} \cdot \Gamma_2 \quad (3-23)$$

Utilizando (3-10) y (3-22), el par $(\eta_{21}, \epsilon_{21})$ representa el error de orientación [17]

$$\eta_{21} = \delta\eta = \eta_1\eta_2 + \epsilon_1^T \epsilon_2 \quad (3-24)$$

$$\epsilon_{21} = \delta\epsilon = \eta_1\epsilon_2 - \eta_2\epsilon_1 - S(\epsilon_1)\epsilon_2 \quad (3-25)$$

donde el par $(\delta\eta, \delta\epsilon)$ es la orientación relativa entre los marcos de referencia Σ_1 y Σ_2 ; si Σ_1 y Σ_2 denotarán la orientación deseada y actual relativa a la base del manipulador, entonces las ecuaciones (3-24) y (3-25) pueden interpretarse como un error de orientación. Cuando los dos marcos coinciden, $\eta_1 = \eta_2$ y $\epsilon_1 = \epsilon_2$, se obtiene la ecuación (3-13) que

$$\delta\eta = 1 \quad \delta\epsilon = 0 \quad (3-26)$$

recíprocamente a $\delta\epsilon = 0$

$$\eta_1\epsilon_2 - \eta_2\epsilon_1 = S(\epsilon_1)\epsilon_2 \quad (3-27)$$

pero el vector $\eta_1\epsilon_2 - \eta_2\epsilon_1$ y $S(\epsilon_1)\epsilon_2$ son ortogonales entre sí. De esta manera, la ecuación (3-27)

sólo puede ser válida si ambos vectores son cero; en otras palabras,

$$\boldsymbol{\epsilon}_2 = \frac{\eta_2}{\eta_1} \boldsymbol{\epsilon}_1 \quad (3-28)$$

Además, por medio de la condición de norma de la ecuación (3-13), $\delta\boldsymbol{\epsilon} = 0$ implica

$$\delta\eta = \eta_1\eta_2 + \boldsymbol{\epsilon}_1^T \boldsymbol{\epsilon}_2 = \pm 1 \quad (3-29)$$

sustituyendo (3-28) en (3-29) y haciendo uso de la normalidad de $(\eta_1, \boldsymbol{\epsilon}_1)$ se obtiene

$$(\eta_1, \boldsymbol{\epsilon}_1) = (\pm\eta_2, \pm\boldsymbol{\epsilon}_2) \quad (3-30)$$

donde ambos describen la misma orientación. Ahora puede establecerse que $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ es una representación lógica para el error de orientación entre dos sistemas coordenados.

La regla de propagación (3-18) y (3-19) para el cuaternión unitario (3-21) puede escribirse como

$$\eta_{21} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_{21}^T \Delta^1 \boldsymbol{\omega}_{21} \quad (3-31)$$

$${}^1\boldsymbol{\epsilon}_{21} = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\eta_{21}, {}^1\boldsymbol{\epsilon}_{21}) \Delta^1 \boldsymbol{\omega}_{21} \quad (3-32)$$

con \mathbf{E} definido como en (3-20) [17],

3.1.3. Cuaterniones duales

Los cuaterniones duales reducen el volumen de los cálculos algebraicos, hacen que la solución sea más sencilla y sólida, permiten unificar la traslación y la rotación en un solo estado; en lugar de

tener que definir vectores separados. Si bien las matrices ofrecen una alternativa comparable a los cuaterniones duales, pueden ser ineficientes y engorrosas en comparación. De hecho, los cuaterniones duales proveen una transformación rígida minimalista computacional, inequívoca, compacta y sin singularidad. Además, se ha demostrado que los cuaterniones duales son la forma más eficiente y compacta de representar traslaciones y rotaciones. El cuaternión dual puede representar tanto traslación como rotación, cada cuaternión dual consta de ocho elementos o dos cuaterniones. Los dos elementos del cuaternión se denominan parte real y parte dual.

El cuaternión dual se representa de la forma

$$\hat{q} = (\hat{q}_s, \hat{\mathbf{q}}_v) \quad (3-33)$$

o

$$\hat{q} = q + \varepsilon q^o \quad (3-34)$$

donde $\hat{q}_s = q_s + \varepsilon q_s^o$ es el escalar dual, $\hat{\mathbf{q}}_v = \mathbf{q}_v + \varepsilon \mathbf{q}_v^o$ es el vector dual, q y q^o son cuaterniones y ε es el factor dual [54], [55].

3.1.4. Uso de los cuaterniones

En aplicaciones industriales con sistemas robóticos y de automatización, se exige que los robots manipuladores sigan con precisión una trayectoria deseada. Este objetivo se puede lograr encontrando un mapeo que transforme la trayectoria deseada en el movimiento de las articulaciones del robot. También se puede describir como un mapeo del espacio de coordenadas cartesianas al espacio articular.

En la cinemática de robots se utilizan varios métodos y la teoría de los tornillos, *screw theory*, es uno de los más importantes entre ellos. La solución basada en la teoría de tornillos ofrece una forma más compacta y consistente para la cinemática del robot que la de transformación homogénea. En

la teoría de tornillos, cada transformación de un cuerpo rígido o un sistema de coordenadas con respecto a un sistema de coordenadas de referencia se puede expresar mediante un desplazamiento de tornillo, que es una traslación a lo largo de un eje con una rotación de un ángulo alrededor del mismo eje.

Las ventajas en el uso de la teoría de tornillos mediante cuaterniones duales en la obtención de la cinemática directa y la cinemática inversa radica en no presentar singularidades, son computacionalmente más eficientes en la implementación, simplifican el análisis del mecanismo ya que proveen una descripción geométrica del movimiento rígido y evitan obtener múltiples soluciones [56].

Para obtener la cinemática directa del robot manipulador de seis grados de libertad rotacionales se siguen los siguientes pasos:

Determinar los ejes de todas las articulaciones.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= [0, 0, 1] & \mathbf{d}_2 &= [0, 1, 0] & \mathbf{d}_3 &= [0, 1, 0] \\ \mathbf{d}_4 &= [0, 0, 1] & \mathbf{d}_5 &= [0, 1, 0] & \mathbf{d}_6 &= [0, 0, 1] \end{aligned} \quad (3-35)$$

Deben calcularse los vectores de momento de todos los ejes.

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 &= \mathbf{p}_1 \times \mathbf{d}_1 & \mathbf{m}_2 &= \mathbf{p}_2 \times \mathbf{d}_2 & \mathbf{m}_3 &= \mathbf{p}_3 \times \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{m}_4 &= \mathbf{p}_4 \times \mathbf{d}_4 & \mathbf{m}_5 &= \mathbf{p}_5 \times \mathbf{d}_5 & \mathbf{m}_6 &= \mathbf{p}_6 \times \mathbf{d}_6 \end{aligned} \quad (3-36)$$

donde $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$ y \mathbf{p}_6 son cualquier punto en los vectores de dirección correspondientes $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4, \mathbf{d}_5$ y \mathbf{d}_6 .

El operador de transformación que está en forma de cuaternión dual se puede escribir utilizando los vectores de momento.

Los cuaterniones duales también se pueden utilizar como un operador de transformación de cuerpo rígido [57]. Una línea en las coordenadas de Plücker $L(\mathbf{m}, \mathbf{d})$ puede ser transformada a $L_R(\mathbf{m}_R, \mathbf{d}_R)$

utilizando los cuaterniones duales, [58]

$$\hat{l}_R = \hat{q}\Theta\hat{l}\Theta\hat{q}^* \quad (3-37)$$

Finalmente, la cinemática directa del robot manipulador se puede obtener de la siguiente manera

$$\check{l}'_6 = l'_6 + \varepsilon l'_6 = \hat{q}_{16}\Theta\hat{l}_6\Theta\hat{q}_{16}^* = \hat{q}_{16}\Theta(l_6 + \varepsilon l_6^o)\Theta\hat{l}_6\Theta\hat{q}_{16}^* \quad (3-38)$$

$$\check{l}'_5 = l'_5 + \varepsilon l'_5 = \hat{q}_{15}\Theta\hat{l}_5\Theta\hat{q}_{15}^* = \hat{q}_{15}\Theta(l_5 + \varepsilon l_5^o)\Theta\hat{l}_5\Theta\hat{q}_{15}^* \quad (3-39)$$

donde $\hat{q}_{16} = \hat{q}_1\Theta\hat{q}_2\Theta\hat{q}_3\Theta\hat{q}_3\Theta\hat{q}_5\Theta\hat{q}_6$ y $\hat{q}_{15} = \hat{q}_1\Theta\hat{q}_2\Theta\hat{q}_3\Theta\hat{q}_3\Theta\hat{q}_5$

La orientación del efector final es la parte real del cuaternion dual \check{l}'_6 y la posición del efector final es

$$\mathbf{p}_6 = \left(V \left\{ R \left\{ \hat{q}_{16}\Theta\hat{l}_6\Theta\hat{q}_{16}^* \right\} \right\} \times V \left\{ D \left\{ \hat{q}_{16}\Theta\hat{l}_6\Theta\hat{q}_{16}^* \right\} \right\} \right) + \left(V \left\{ R \left\{ \hat{q}_{15}\Theta\hat{l}_5\Theta\hat{q}_{15}^* \right\} \right\} \times V \left\{ D \left\{ \hat{q}_{15}\Theta\hat{l}_5\Theta\hat{q}_{15}^* \right\} \right\} \right) \cdot V \left\{ R \left\{ \hat{q}_{16}\Theta\hat{l}_6\Theta\hat{q}_{16}^* \right\} \right\} V \left\{ R \left\{ \hat{q}_{16}\Theta\hat{l}_6\Theta\hat{q}_{16}^* \right\} \right\} \quad (3-40)$$

3.1.5. Cinemática inversa.

Se tiene información de la posición y orientación del efector final tal que

$$\hat{q}_{in} = (\mathbf{q}_{in}, q_{in}^o) \quad (3-41)$$

donde $\mathbf{q}_{in} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ es la orientación del efector final, es la parte real del cuaternión dual \mathbf{q}_{in} y $\mathbf{q}_{in}^o = (q_0^o, q_1^o, q_2^o, q_3^o)$ es la posición del efector final, es la parte dual del cuaternión dual \mathbf{q}_{in}

En el problema cinemático inverso del manipulador de robot en serie, tenemos la información de posición y orientación del efector final tal que $\hat{\mathbf{q}}_{in} = (\mathbf{q}_{in}, \mathbf{q}_{in}^o)$ donde $\mathbf{q}_{in} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, que es la orientación del efector final, es la parte real del cuaternión dual $\hat{\mathbf{q}}_{in}$ y $\mathbf{q}_{in}^o = (q_0^o, q_1^o, q_2^o, q_3^o)$, que es la posición del efector final, es la parte dual del del cuaternión dual $\hat{\mathbf{q}}_{in}$.

El problema cinemático inverso general debe convertirse en los subproblemas apropiados de Paden-Kahan para obtener la cinemática inversa. Se siguen los pasos descritos en [56]

$$\mathbf{q}_{in}^o - \mathbf{p}_b = \left(\begin{array}{l} \left(\left(V \{ R \{ \hat{q}_{13} \Theta \hat{l}_6 \Theta \hat{q}_{13}^* \} \} \times V \{ D \{ \hat{q}_{13} \Theta \hat{l}_6 \Theta \hat{q}_{13}^* \} \} \right) + \right. \\ \left. \left(V \{ R \{ \hat{q}_{13} \Theta \hat{l}_5 \Theta \hat{q}_{13}^* \} \} \times V \{ D \{ \hat{q}_{13} \Theta \hat{l}_5 \Theta \hat{q}_{13}^* \} \} \right) \cdot V \{ R \{ \hat{q}_{13} \Theta \hat{l}_6 \Theta \hat{q}_{13}^* \} \} * V \{ R \{ \hat{q}_{13} \Theta \hat{l}_6 \Theta \hat{q}_{13}^* \} \} \right) - \\ \left(\left(V \{ R \{ \hat{q}_{12} \Theta \hat{l}_2 \Theta \hat{q}_{12}^* \} \} \times V \{ D \{ \hat{q}_{12} \Theta \hat{l}_2 \Theta \hat{q}_{12}^* \} \} \right) + \right. \\ \left. \left(V \{ R \{ \hat{q}_{12} \Theta \hat{l}_1 \Theta \hat{q}_{12}^* \} \} \times V \{ D \{ \hat{q}_{12} \Theta \hat{l}_1 \Theta \hat{q}_{12}^* \} \} \right) \cdot V \{ R \{ \hat{q}_{12} \Theta \hat{l}_2 \Theta \hat{q}_{12}^* \} \} * V \{ R \{ \hat{q}_{12} \Theta \hat{l}_2 \Theta \hat{q}_{12}^* \} \} \right) \end{array} \right) \quad (3-42)$$

$$\| \mathbf{q}_{in}^o - \mathbf{p}_b \| = \left\| \begin{array}{l} \left(V \{ R \{ \hat{q}_3 \Theta \hat{l}_6 \Theta \hat{q}_3^* \} \} \times V \{ D \{ \hat{q}_3 \Theta \hat{l}_6 \Theta \hat{q}_3^* \} \} \right) + \left(\left(V \{ R \{ \hat{q}_3 \Theta \hat{l}_5 \Theta \hat{q}_3^* \} \} \times V \{ D \{ \hat{q}_3 \Theta \hat{l}_5 \Theta \hat{q}_3^* \} \} \right) \cdot V \{ R \{ \hat{q}_3 \Theta \hat{l}_6 \Theta \hat{q}_3^* \} \} \right) * \\ V \{ R \{ \hat{q}_3 \Theta \hat{l}_6 \Theta \hat{q}_3^* \} \} - \left(\left(V \{ R \{ \hat{l}_2 \} \} \times V \{ D \{ \hat{l}_2 \} \} \right) + \left(V \{ R \{ \hat{l}_1 \} \} \times V \{ D \{ \hat{l}_1 \} \} \right) \cdot V \{ R \{ \hat{l}_2 \} \} * V \{ R \{ \hat{l}_2 \} \} \right) \end{array} \right\| \quad (3-43)$$

Utilizando (3-42), (3-43) y siguiendo los pasos descritos en [56], se obtienen las posiciones articulares $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ y θ_6 .

CAPÍTULO

4

CONTROL DE POSICIÓN Y FUERZA

En este capítulo se desarrolla la teoría necesaria para realizar el seguimiento de posición y de fuerza de un robot sobre una superficie rígida. En la Figura 4-1 se muestra un ejemplo de un manipulador en contacto con una superficie rígida. Se asume conocida la posición y orientación exacta de la superficie con respecto a la base del manipulador, lo cual implica que la restricción que surge cuando el manipulador está en contacto con la superficie se puede expresar en términos de las coordenadas articulares del robot. Ya que la superficie de contacto es rígida se utiliza el *principio de ortogonalización* [59] en el desarrollo del algoritmo de control simultáneo de fuerza y posición. Se considera que el manipulador se encuentra inicialmente en contacto con la superficie.

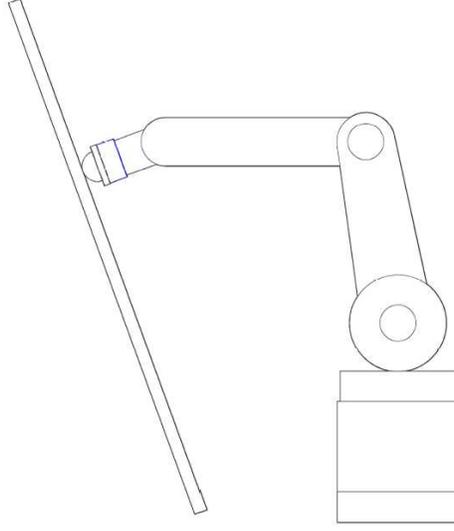


Figura 4-1: Robot en contacto con una superficie rígida.

4.1. Modelo del robot

Una representación en espacio de estados de (3-1) es dado por

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{q}_2 \quad (4-1)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{h}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)) + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}_1)\boldsymbol{\lambda}, \quad (4-2)$$

donde $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas, $\mathbf{q}_2 = \dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia definida positiva, $\mathbf{h}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in \mathbb{R}^n$ contiene el vector de Coriolis, fuerzas centrífugas, fuerzas gravitacionales y efectos de fricción. $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de multiplicadores de Lagrange (físicamente representa la fuerza aplicada del manipulador sobre una superficie en el punto de contacto), y $\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es el gradiente de las m restricciones holonómicas $\varphi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m$, i.e.

$$\varphi(\mathbf{q}) = 0 \quad (4-3)$$

Propiedad 4.1.1.

El vector $\dot{\mathbf{q}}$ se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (4-4)$$

donde $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})$, $\mathbf{P} = \mathbf{J}_\varphi^+ \mathbf{J}_\varphi$ y $\mathbf{J}_\varphi^+ = \mathbf{J}_\varphi^T (\mathbf{J}_\varphi \mathbf{J}_\varphi^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ representa la pseudoinversa de Moore-Penrose y $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisface $\text{rank}(\mathbf{Q}) = n - m$. Además, $\mathbf{Q}\mathbf{P} = \mathbf{O}$, $\mathbf{Q}\mathbf{J}_\varphi^T = \mathbf{O}$ y $\mathbf{J}_\varphi \mathbf{Q} = \mathbf{O}$.

La restricción para el movimiento del robot se define en coordenadas Cartesianas como

$$\varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (4-5)$$

En la restricción (4-5), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$ es un vector que contiene la posición Cartesiana del efector final, así como la parametrización de la orientación, es decir

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T \quad (4-6)$$

El vector normal a la superficie definida por la restricción se define como

$$\mathbf{J}_{\varphi x} \triangleq \nabla \varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (4-7)$$

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad (4-8)$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el Jacobiano analítico del manipulador. Tenga en cuenta que con una normalización adecuada se puede hacer $\|\mathbf{J}_{\varphi x}\| = 1$.

4.2. Control de fuerza sin modelo

En esta sección se propone el uso del Continuous Terminal Sliding Mode Algorithm (CTSMA) para el control de fuerza de robots manipuladores en contacto con superficies rígidas con altos

coeficientes de fricción. Se define el error de seguimiento como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_d \quad (4-9)$$

Se considera $\mathbf{q}_d(t)$ como un valor acotado deseado para la posición de cada una de las articulaciones del robot que satisface (4-3), cuya primera y segunda derivadas se supone que están acotadas, y $\mathbf{q}_1(t)$ como la posición angular real de cada motor.

El primer paso es proponer una ley de control que haga que el error de seguimiento sea cero tal que (4-3) se satisfaga incluso si físicamente no hay superficie.

Para ese objetivo, considere el algoritmo Continuous Terminal Sliding Mode Algorithm (CTSMA) dado en [45] y [60]

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4-10)$$

$$\dot{x}_2 = -k_1|\phi|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\phi) + x_3 \quad (4-11)$$

$$\dot{x}_3 = -k_3\text{sign}(\phi) + \rho \quad (4-12)$$

donde $\phi = x_2 + k_2|x_1|^{\frac{2}{3}}\text{sign}(x_1)$, x_1, x_2, x_3 representan los estados en lazo cerrado, e.g. errores de seguimiento, y ρ es una perturbación acotada. Con una adecuada elección de ganancias k_1, k_2 y k_3 se puede demostrar que tanto x_1 y x_2 se aproximan a cero en un tiempo finito. Se introduce la siguiente versión vectorial para un controlador de seguimiento.

$$\boldsymbol{\tau}_{CTSMA} = -\mathbf{K}_1\|\boldsymbol{\phi}\|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\boldsymbol{\phi}) + \mathbf{x}_3 \quad (4-13)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = -\mathbf{K}_3\text{sign}(\boldsymbol{\phi}) \quad (4-14)$$

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{x}_2 + \mathbf{Q}\mathbf{K}_2\|\mathbf{x}_1\|^{\frac{2}{3}}\text{sign}(\mathbf{x}_1) \quad (4-15)$$

donde $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}$, $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{e}}$ y $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices positivas definidas, con

$$\text{sign}(\boldsymbol{\phi}) = [\text{sign}(\phi_1) \cdots \text{sign}(\phi_n)]^T \quad (4-16)$$

donde ϕ_i es el i -ésimo elemento de $\boldsymbol{\phi}$ para $i = 1, \dots, n$ y $\text{sign}(0) = 0$. Nótese que la matriz \mathbf{Q} en (4-15) se usa para mapear $\mathbf{K}_2\|\mathbf{x}_1\|^{\frac{2}{3}}\text{sign}(\mathbf{x}_1)$ al plano tangente en el punto de contacto con la

superficie rígida. Por otro lado, $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{q}_2 - \dot{\mathbf{q}}_d$ requiere las mediciones de velocidad, las cuales se asumen desconocidas. Para superar este inconveniente, se utilizará el diferenciador de Levant [61]. Para estimar $\dot{\mathbf{q}}$ se implementa el siguiente diferenciador de Levant de tercer orden [61], [62]

$$\dot{\zeta}_0 = \mathbf{v}_0 \quad (4-17)$$

$$\mathbf{v}_0 = -2L^{\frac{1}{3}}|\zeta_0 - \mathbf{q}_1|^{\frac{2}{3}}\text{sign}(\zeta_0 - \mathbf{q}_1) + \zeta_1 \quad (4-18)$$

$$\dot{\zeta}_1 = \mathbf{v}_1 \quad (4-19)$$

$$\mathbf{v}_1 = -1.5L^{\frac{1}{2}}|\zeta_1 - \mathbf{v}_0|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\zeta_1 - \mathbf{v}_0) + \zeta_2 \quad (4-20)$$

$$\dot{\zeta}_2 = \mathbf{v}_2 \quad (4-21)$$

$$\mathbf{v}_2 = -1.1L(\zeta_2 - \mathbf{v}_1) \quad (4-22)$$

donde $L = 1$, $\zeta_1 = \hat{\mathbf{q}}_2$ representa la estimación de la velocidad.

Observación 4.2.1. El esquema de control (4-13)-(4-14) sustituido en (3-1) genera la siguiente dinámica de lazo cerrado.

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{q}_2 \quad (4-23)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_2 = -\mathbf{H}^{-1} \left(\mathbf{K}_1 \|\boldsymbol{\phi}\|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\boldsymbol{\phi}) + \mathbf{x}_3 + \mathbf{h} \right) \quad (4-24)$$

para $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$.

Claramente (4-23),(4-24) y (4-15) no representan n sistemas desacoplados de la forma (4-10)-(4-12) cuyas propiedades de estabilidad y robustez están bien estudiadas. Hasta donde se tiene conocimiento, no existe ningún análisis de estabilidad formal para el caso multivariable de ninguna ley de control similar a (4-13)-(4-15). En cambio, la bondad del enfoque se probará experimentalmente. Se ha elegido el diferenciador de Levant porque es exacto y cuenta con muchas ventajas para ser implementado.

Para diseñar un esquema de control de fuerza, se supone $m = 1$ en (4-3), tal que $\lambda = \boldsymbol{\lambda}$ es una

cantidad escalar que representa la magnitud de la fuerza perpendicular al plano tangente en el punto de contacto. Entonces, si la ley de control (4-13) es capaz de mover el efector final del robot a lo largo de la restricción (4-3) exactamente, en vista de la Propiedad 4.1.1 el término $\tau_{CT SMA}$ se puede complementar con un componente perpendicular a la superficie real para aplicar cualquier fuerza deseada. Para este objetivo, se define

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_d \quad (4-25)$$

$$\Delta F = \int_{t_0}^t \Delta\lambda d\vartheta \quad (4-26)$$

donde $\lambda_d > 0$ es la fuerza deseada acotada.

La ley de control propuesta para ser probada es por tanto la siguiente

$$\tau = \tau_{CT SMA} - \mathbf{J}_\varphi^T \lambda_d + \mathbf{J}_\varphi^+ k_{Fi} \Delta F \quad (4-27)$$

donde $k_{Fi} > 0$ es la fuerza integral. Los vectores \mathbf{J}_φ^T y \mathbf{J}_φ^+ hacen que la acción de control de la fuerza actúe exclusivamente perpendicular a la superficie de contacto.

El principio de ortogonalización para robots manipuladores en contacto con una superficie sobre la que se ejerce fuerza se basa en la observación física de que la fuerza resultante aplicada por el manipulador está sobre la normal al plano tangente al punto de contacto del robot con dicha superficie y el movimiento del robot está contenido en dicho plano tangente. Este principio fue propuesto por Arimoto en [63] y ha sido utilizado en diversos esquemas de control simultáneo de fuerza y posición [59], [64], [65], [66].

Para obtener la descomposición del espacio cartesiano en los subespacios de movimiento libre y movimiento restringido, se utilizan las matrices de proyección \mathbf{P}_x y \mathbf{Q}_x . La primera de ellas mapea cualquier vector en el espacio cartesiano en el subespacio normal al plano tangente a la superficie en el punto de contacto. La matriz $\mathbf{Q}_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mapea un vector en el espacio cartesiano al plano tangente a la superficie en el punto de contacto y es utilizado como el espacio de movimiento libre del robot, Figura 4-2.

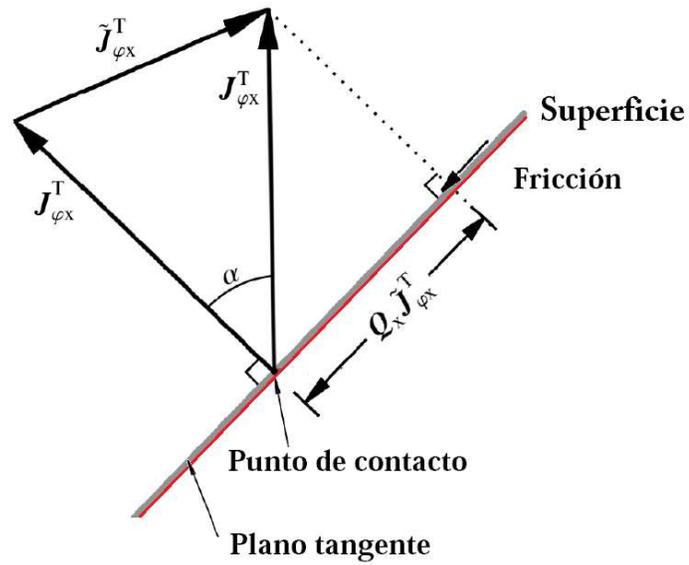


Figura 4-2: Espacios ortogonales.

$\tau_{CT SMA}$ está diseñada exclusivamente para mover al robot sobre la restricción (4-3). La fuerza perpendicular no afecta cuando hay una superficie real Figura 4-2, pero la fricción sí, por lo tanto rechaza una sin afectar a la otra.

La demostración del esquema de control propuesto se encuentra en [67]

CAPÍTULO

5

EXPERIMENTOS

Este capítulo se enfoca a los resultados obtenidos experimentalmente del seguimiento de trayectorias predefinidas de posición y de fuerza. Se presentan los resultados experimentales para demostrar el rendimiento del enfoque utilizado donde las perturbaciones (fricción), las incertidumbres de modelado y la dinámica no modelada son inevitables.

5.1. Descripción del experimento

En esta sección se presentan los resultados experimentales con el robot manipulador. El banco de pruebas consta de un robot industrial *CRS A465* de 6 grados de libertad equipado con un sensor de fuerza JR3 y cuyo efector final es una punta de dedo de metal [68]. La tarea consiste en el seguimiento de fuerza y posición sobre una superficie rígida de madera. Distintos factores influyen en el sistema real, como el ruido, dinámicas no modeladas y específicamente características de los actuadores como el tiempo de muestreo, el tiempo de respuesta, la resolución que manejan y

las instrucciones necesarias mediante codificación para el seguimiento de posición y de fuerza. La trayectoria de posición deseada es el segmento de una elipse proyectada sobre un plano inclinado $\angle 56^\circ$ que es la superficie de contacto de madera rígida real. Al final, la tarea consiste en seguir una trayectoria curva desde el punto $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (-0.086, 0.0755, -0.1053)[m]$ al punto $(x(t_f), y(t_f), z(t_f)) = (-0.2307, 0.0012, -0.2317)[m]$ siguiendo la elipse proyectada y donde $t_f = 15[s]$ es un tiempo final predefinido. Para hacer esto, la cinemática inversa del robot se calcula en línea para generar la trayectoria deseada correspondiente en coordenadas conjuntas. Es importante señalar que se elige la orientación deseada para que sea perpendicular a la superficie para aumentar el rendimiento del seguimiento de la fuerza. Se calcularon polinomios de quinto orden 5-2 para ir de la posición inicial a la final comenzando y terminando con velocidades cero y aceleraciones en $t = t_0$ y $t = t_f$, respectivamente. Simultáneamente, se programó otro polinomio de quinto orden 5-2 para definir la fuerza deseada λ_d satisfaciendo $\lambda_d(t_0) = 0[N]$ y $\lambda_d(t_f) = 25[N]$.

Se considera una trayectoria de quinto orden:

$$q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad (5-1)$$

Se tienen seis restricciones:

- Dos de ellas dadas por las configuraciones inicial y final q_0 y q_f
- Dos por las velocidades inicial y final v_0 y v_f
- Dos debidas a las restricciones de aceleración inicial y final α_0 y α_f

De (5-1) sustituyendo las restricciones y derivando se obtiene

$$\begin{aligned}
q_0 &= a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2 + a_3 t_0^3 + a_4 t_0^4 + a_5 t_0^5 \\
v_0 &= a_1 + 2a_2 t_0 + 3a_3 t_0^2 + 4a_4 t_0^3 + 5a_5 t_0^4 \\
\alpha_0 &= 2a_2 + 6a_3 t_0 + 12a_4 t_0^2 + 20a_5 t_0^3 \\
q_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\
v_f &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\
\alpha_f &= 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3
\end{aligned} \tag{5-2}$$

en forma matricial este sistema de ecuaciones se escribe como

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ v_0 \\ \alpha_0 \\ q_f \\ v_f \\ \alpha_f \end{bmatrix} \tag{5-3}$$

Haciendo la suposición que en el tiempo t_i la n -ésima variable de articulación satisface

$$\begin{aligned}
q_n(t_i) &= q_i \\
\dot{q}_n(t_i) &= 0 \\
\ddot{q}_n(t_i) &= 0
\end{aligned} \tag{5-4}$$

deseando que llegue a los valores en t_f generando una trayectoria suave

$$\begin{aligned}
q_n(t_f) &= q_f \\
\dot{q}_n(t_f) &= 0 \\
\ddot{q}_n(t_f) &= 0
\end{aligned} \tag{5-5}$$

(5-3) se reescribe como

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ 0 \\ 0 \\ q_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

El problema se reduce a encontrar los valores de los coeficientes a_i , que dan solución a la ecuación matricial. La solución del sistema es:

$$a_0 = \frac{q_i t_f^3 (t_f^2 - 5t_f t_i + 10t_i^2)}{(t_f - t_i)^5} - \frac{q_f t_i^3 (10t_f^2 - 5t_f t_i + t_i^2)}{(t_f - t_i)^5} \quad (5-7)$$

$$a_1 = \frac{30q_f t_f^2 t_i^2}{(t_f - t_i)^5} - \frac{30q_i t_f^2 t_i^2}{(t_f - t_i)^5} \quad (5-8)$$

$$a_2 = \frac{30q_i t_f^2 t_i + 30q_i t_f t_i^2}{(t_f - t_i)^5} - \frac{30q_f t_f^2 t_i + 30q_f t_f t_i^2}{(t_f - t_i)^5} \quad (5-9)$$

$$a_3 = \frac{q_f (10t_f^2 + 40t_f t_i + 10t_i^2)}{(t_f - t_i)^5} - \frac{q_i (10t_f^2 + 40t_f t_i + 10t_i^2)}{(t_f - t_i)^5} \quad (5-10)$$

$$a_4 = \frac{q_i (15t_f + 15t_i)}{(t_f - t_i)^5} - \frac{q_f (15t_f + 15t_i)}{(t_f - t_i)^5} \quad (5-11)$$

$$a_5 = \frac{6q_f}{(t_f - t_i)^5} - \frac{6q_i}{(t_f - t_i)^5} \quad (5-12)$$

se considera

$$\begin{aligned}a_0 &= 0.315 \\a_1 &= 0 \\a_2 &= 0 \\a_3 &= -3 \\a_4 &= 45 \\a_5 &= -180\end{aligned}\tag{5-13}$$

Las condiciones finales de los polinomios de quinto orden deben ser especificadas de forma cuidadosa con el único fin de evitar posiciones finales monótonas. Se puede encontrar una trayectoria suave que une dos puntos en el espacio asumiendo condiciones iniciales y finales adecuadas; la trayectoria se forma como una serie de polinomios unidos, cada uno teniendo unas condiciones iniciales iguales a las condiciones finales del predecesor, así la trayectoria tiene continuidad C^2 . Las trayectorias se dan con condiciones finales e iniciales iguales a cero para velocidades y aceleraciones. Se tienen seis restricciones, una para cada configuración inicial y final, velocidades y aceleraciones iniciales y finales.

Las condiciones necesarias para el seguimiento de trayectorias se describen como

Posición inicial:

- Posición (conocida)
- Velocidad (conocida, normalmente cero)
- Aceleración (conocida, normalmente cero)

Posición final:

- Posición (conocida)

- Velocidad (conocida, normalmente cero)
- Aceleración (conocida, normalmente cero)

Posiciones intermedias:

- Posición (conocida, continúa respecto al segmento anterior de la trayectoria)
- Velocidad (continúa respecto al segmento anterior de la trayectoria)
- Aceleración (continúa respecto al segmento anterior de la trayectoria)

El problema es encontrar una trayectoria que conecte una posición inicial a una posición final satisfaciendo las restricciones de las posiciones finales. Se considera el seguimiento de trayectorias solo para el efector final ya que las posiciones angulares para toda la cadena cinemática se calculan mediante la cinemática inversa.

El controlador recibe la referencia de las variables asociadas a la trayectoria que seguirá el efector final. De acuerdo a la información entregada por los sensores, se generan las acciones de control adecuadas para cada actuador según el algoritmo de control empleado. La asignación de una trayectoria a seguir es para suavizar el movimiento sobre una serie de puntos predefinida.

Observación 5.1.1. El hecho de que la superficie de contacto sea de madera y la trayectoria de la posición deseada cambie continuamente de dirección aumentan los efectos de fricción, que no se tienen en cuenta explícitamente porque la Propiedad 4.1.1 asume que la superficie de contacto no tiene fricción. El objetivo principal es probar las propiedades de robustez del CTSMA propuesto porque la fricción representa una perturbación no despreciable.

Para tener un punto de comparación, una versión simplificada del enfoque basado en observador de posición / fuerza de Integral Proporcional Generalizado (*GPI*) introducido en [66] se emplea asumiendo la restricción conocida.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & -\mathbf{K}_p \mathbf{e}_1 - \mathbf{K}_v (\hat{\mathbf{q}}_2 - \dot{\mathbf{q}}_d) \\ & - \mathbf{Q} \mathbf{K}_i \int_0^t \mathbf{e}_1 d\vartheta - \mathbf{J}_\varphi^T \boldsymbol{\lambda}_d + \mathbf{J}_\varphi^+ \mathbf{k}_{F_i GPI} \Delta \bar{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (5-14)$$

Para evitar la medición de las velocidades articulares del manipulador y la fuerza de contacto, [66] proponen el siguiente observador lineal de alta ganancia

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1 = \hat{\mathbf{q}}_2 + \boldsymbol{\lambda}_{p+1} \tilde{\mathbf{q}}_1 \quad (5-15)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_2 = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{q}_1 \left(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{N}(\mathbf{q}_1, \hat{\mathbf{q}}_2) \right) + \hat{\mathbf{z}}_1 + \boldsymbol{\lambda}_p \tilde{\mathbf{q}}_1 \quad (5-16)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_1 = \hat{\mathbf{z}}_2 + \boldsymbol{\lambda}_{p-1} \tilde{\mathbf{q}}_1 \quad (5-17)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_2 = \hat{\mathbf{z}}_3 + \boldsymbol{\lambda}_{p-2} \tilde{\mathbf{q}}_1 \quad (5-18)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{(p-1)} = \hat{\mathbf{z}}_p + \boldsymbol{\lambda}_1 \tilde{\mathbf{q}}_1 \quad (5-19)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_p = \boldsymbol{\lambda}_0 \tilde{\mathbf{q}}_1, \quad (5-20)$$

donde $\tilde{\mathbf{q}}_1 \triangleq \mathbf{q}_1 - \hat{\mathbf{q}}_1$, y $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{q}_1, \hat{\mathbf{q}}_2) = \mathbf{C}(\mathbf{q}_1, \hat{\mathbf{q}}_2) \hat{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{D} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_2 + \mathbf{g}(\mathbf{q}_1)$. Nótese que $\hat{\mathbf{q}}_2$ se emplea en lugar de \mathbf{q}_2 para evitar mediciones de velocidad.

Comparado con el enfoque de anterior, tiene la principal desventaja de lograr solo el acotamiento final de los errores de seguimiento (aunque el acotamiento final puede hacerse arbitrariamente pequeño). Además, el modelo del robot es necesario y se emplea en el diseño y la implementación del observador, que es otro inconveniente clave.

En cuanto a las ganancias de control para (4-13)-(4-15) se eligieron

$\mathbf{K}_1 = \text{diag}\{9.000, 64.72, 47.52, 9.204, 41.38, 8.636\}$, $\mathbf{K}_2 = \text{diag}\{3.447, 5.552, 4.854, 5.275, 4.802, 3.573\}$ y $\mathbf{K}_3 = \text{diag}\{1.618, 3.971, 3.236, 1.873, 3.236, 1.208\}$. También se estableció $\mathbf{k}_{F_i} = 2.18$ y para el diferenciador de Levant fue elegido $L = 1$. Las ganancias del *GPI* se eligieron

Error [°]	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
GPI	0.2369	0.9319	0.1876	0.1347	0.1720	0.2242
CTSMA	0.2048	0.4663	0.1215	0.1258	0.1584	0.2172

Tabla 5-1: RMSE - seguimiento de posiciones articulares

$\mathbf{K}_p = \text{diag}\{1175, 4386, 4121, 932, 852, 364\}$, $\mathbf{K}_v = \text{diag}\{26, 115, 104, 62, 58.2, 17.3\}$ y $\mathbf{K}_i = \text{diag}\{28, 107, 106, 63, 56.4, 105\}$, $\mathbf{k}_{FiGPI} = 2.03$.

La Figura 5-1 muestra el comportamiento de seguimiento en coordenadas articulares. Se puede ver que a pesar de los efectos de alta fricción, ambos esquemas muestran un rendimiento similar, con la excepción de la articulación q_2 , donde claramente el CTSMA ofrece un mejor resultado.

La Figura 5-2 muestra el error en el seguimiento de la posición correspondiente en coordenadas articulares, donde también se puede apreciar claramente que el enfoque CTSMA ofrece mejores resultados en general, pero especialmente para la articulación q_2 .

Una forma alternativa de establecer objetivamente qué esquema tiene un mejor rendimiento es calcular los errores de raíz cuadrática media (RMSE) como $\text{RMSE}(e) = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p (e(k))^2}$, donde e es cualquier variable de interés y p es el tamaño de la muestra. La Tabla 5-1 muestra los resultados de los errores de seguimiento de posición, lo que confirma lo que se pudo apreciar en las figuras anteriores.

Dado que las velocidades de las articulaciones no están disponibles, no es posible determinar qué tan exacta es realmente la estimación de la velocidad. Sin embargo, la Figura 5-3 muestra el error $\dot{e} = \hat{\mathbf{q}}_2 - \mathbf{q}_d$ para ambos esquemas. Se tiene en cuenta que esto representa un abuso de notación, ya que el valor real \dot{e} es desconocido. Aunque los errores son de pequeña magnitud, existe algún tipo de *chattering* debido a la naturaleza de ambos enfoques utilizados para estimar las velocidades. La Tabla 5-2 muestra el RMSE correspondiente para confirmar que efectivamente es el CTSMA en conjunto con el Diferenciador de Levant que tiene un mejor desempeño.

La Figura 5-4 muestra el seguimiento de fuerza, también el CTSMA tiene un rendimiento mucho mejor. Se tiene en cuenta que las mediciones de fuerza son muy ruidosas en ambos casos, y la razón

Error $\left[\frac{\circ}{s}\right]$	\dot{e}_1	\dot{e}_2	\dot{e}_3	\dot{e}_4	\dot{e}_5	\dot{e}_6
GPI	0.2072	0.0918	0.1131	0.0413	0.1270	0.1086
CTSMA	0.1573	0.0569	0.1121	0.0303	0.1216	0.1080

Tabla 5-2: RMSE - velocidades estimadas

Error $[N]$	$\Delta\lambda_d$
GPI	0.4914
CTSMA	0.4015

Tabla 5-3: RMSE - Fuerzas

puede ser que ambos controladores estén tratando de compensar la alta fricción sobre la superficie. Esto significa que el CTSMA posee mayores propiedades de robustez, como se confirma en la Tabla 5-3 y en la Figura 5-5, que muestra el error correspondiente.

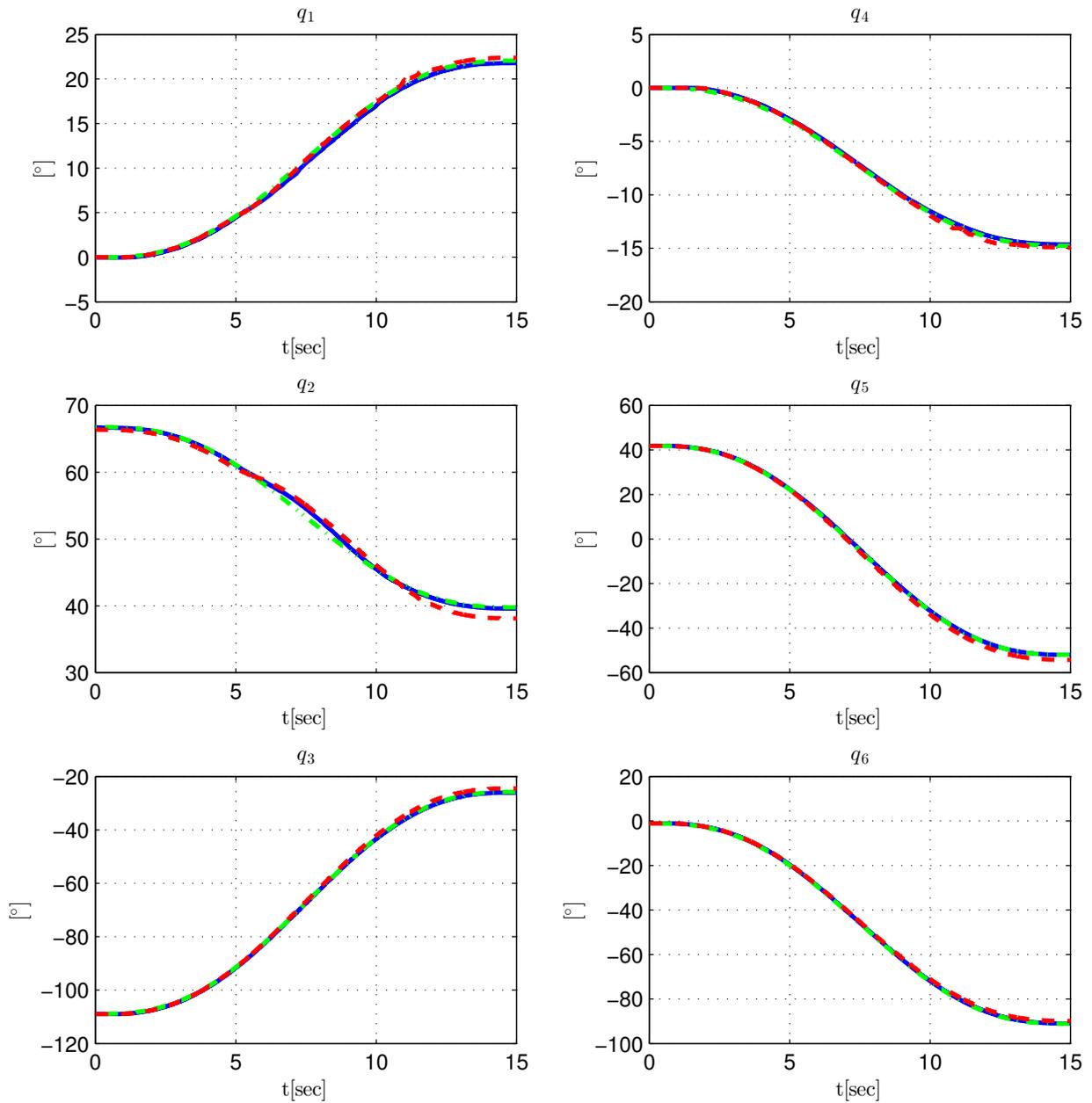


Figura 5-1: Seguimiento de posición articular. Esquema CTSMA (—), enfoque basado en GPI (---), trayectoria deseada (- · - · - ·)

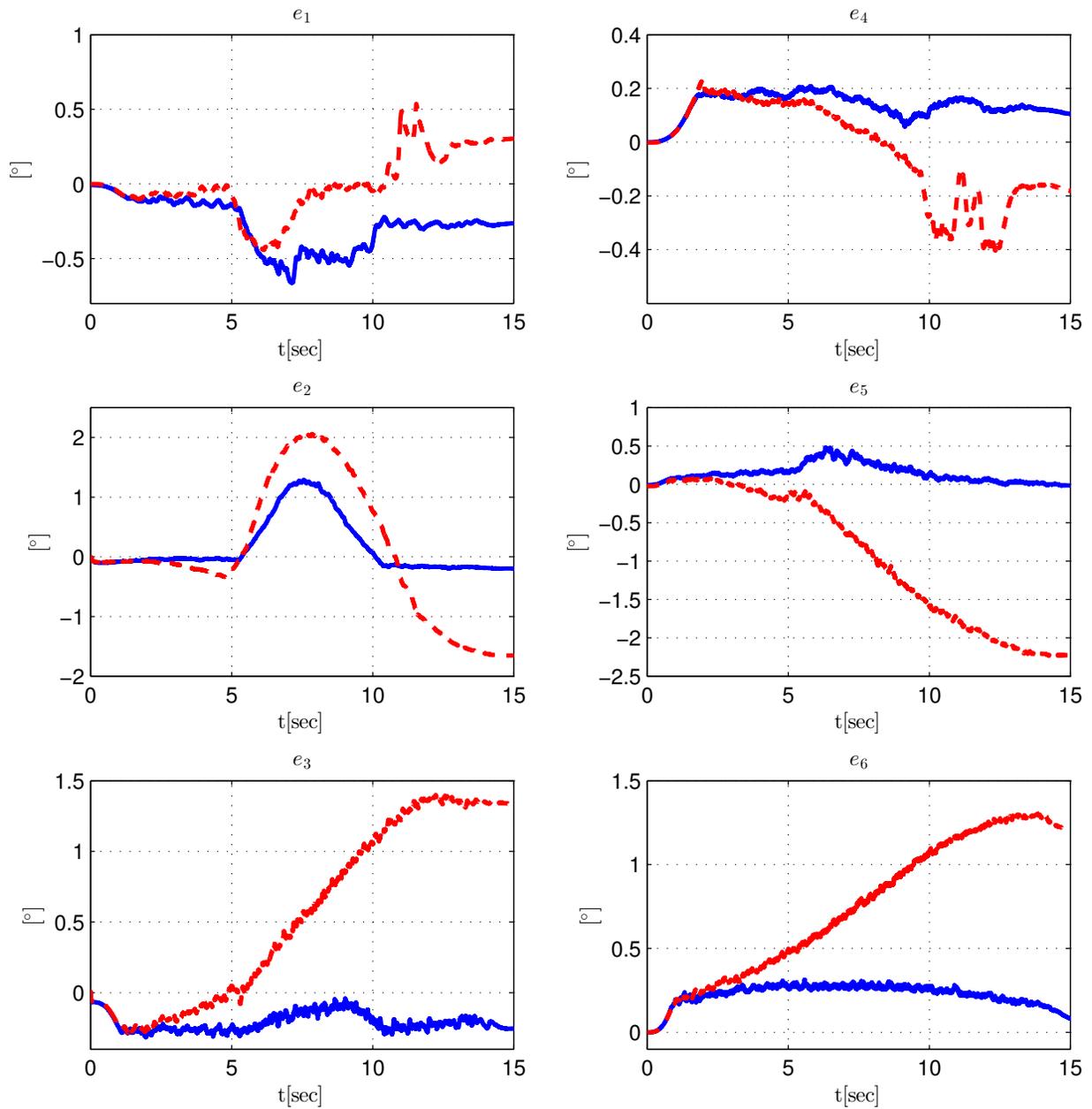


Figura 5-2: Error del seguimiento de posición articular. Esquema CTSMA (—), enfoque basado en GPI (---)

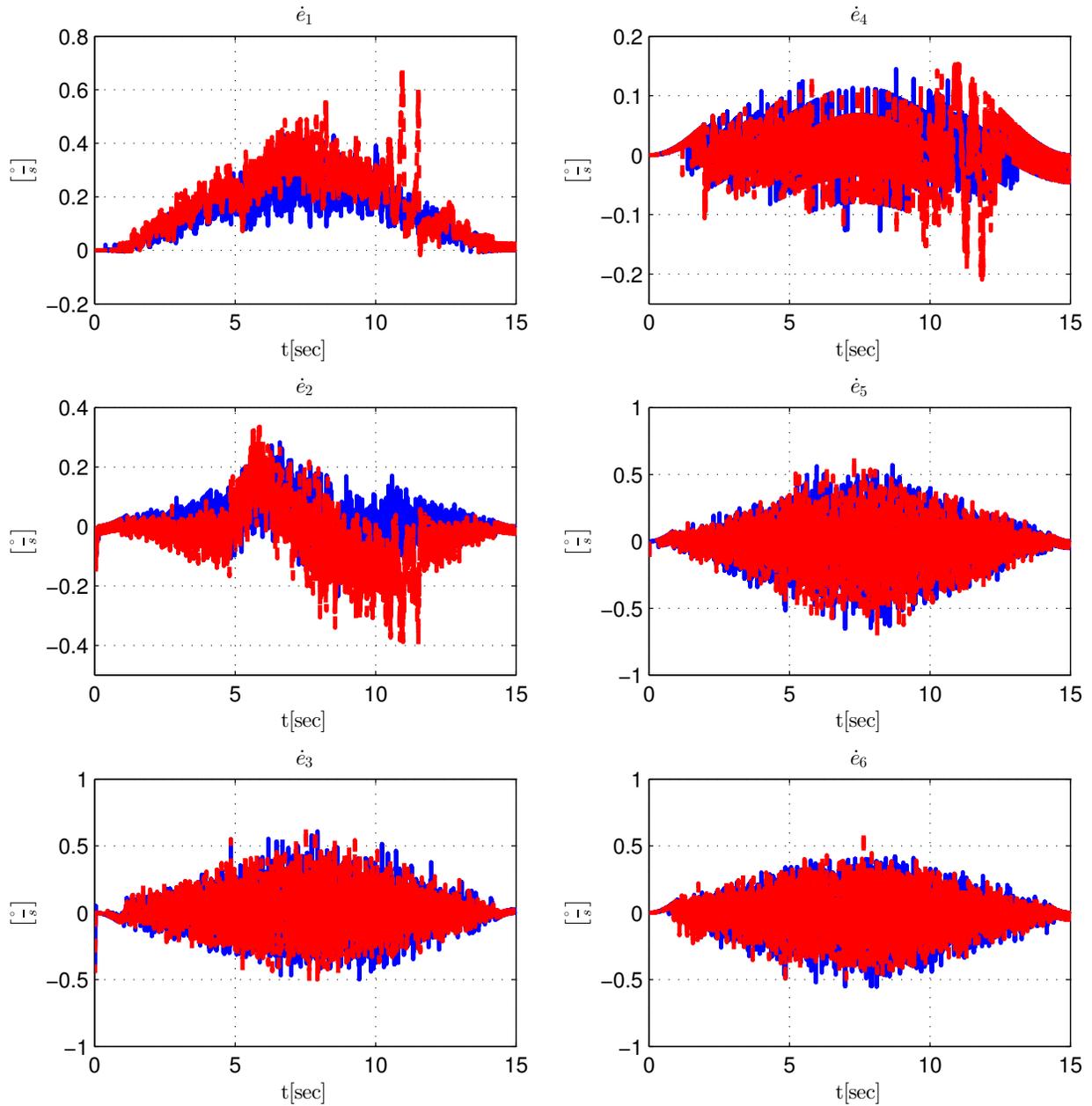


Figura 5-3: Error de la estimación de velocidad. Esquema CTSM (—), enfoque basado en GPI(- -)

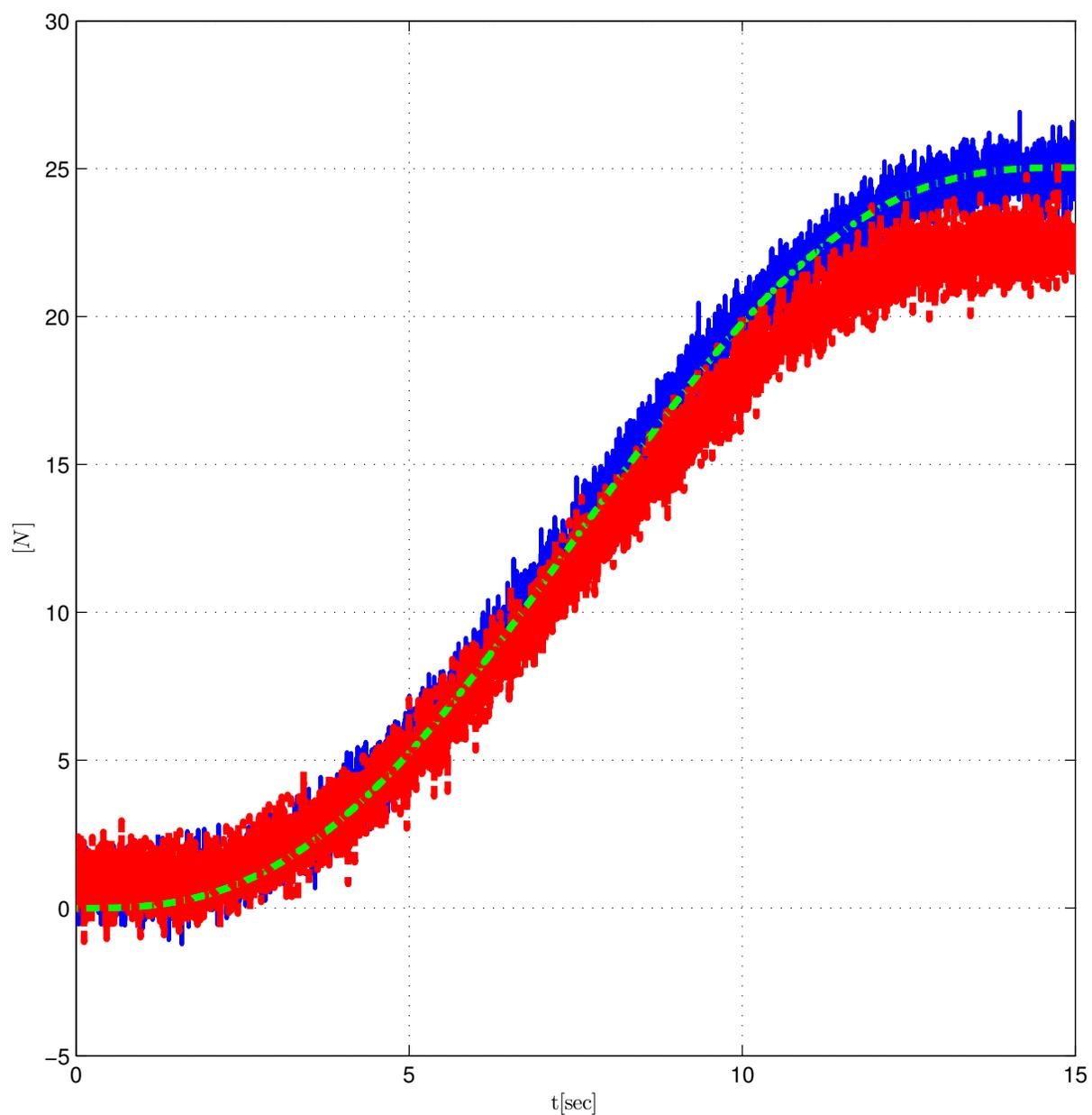


Figura 5-4: Seguimiento de fuerza. Esquema CTSSMA (—), enfoque basado en GPI (---), trayectoria deseada (-.-.-)

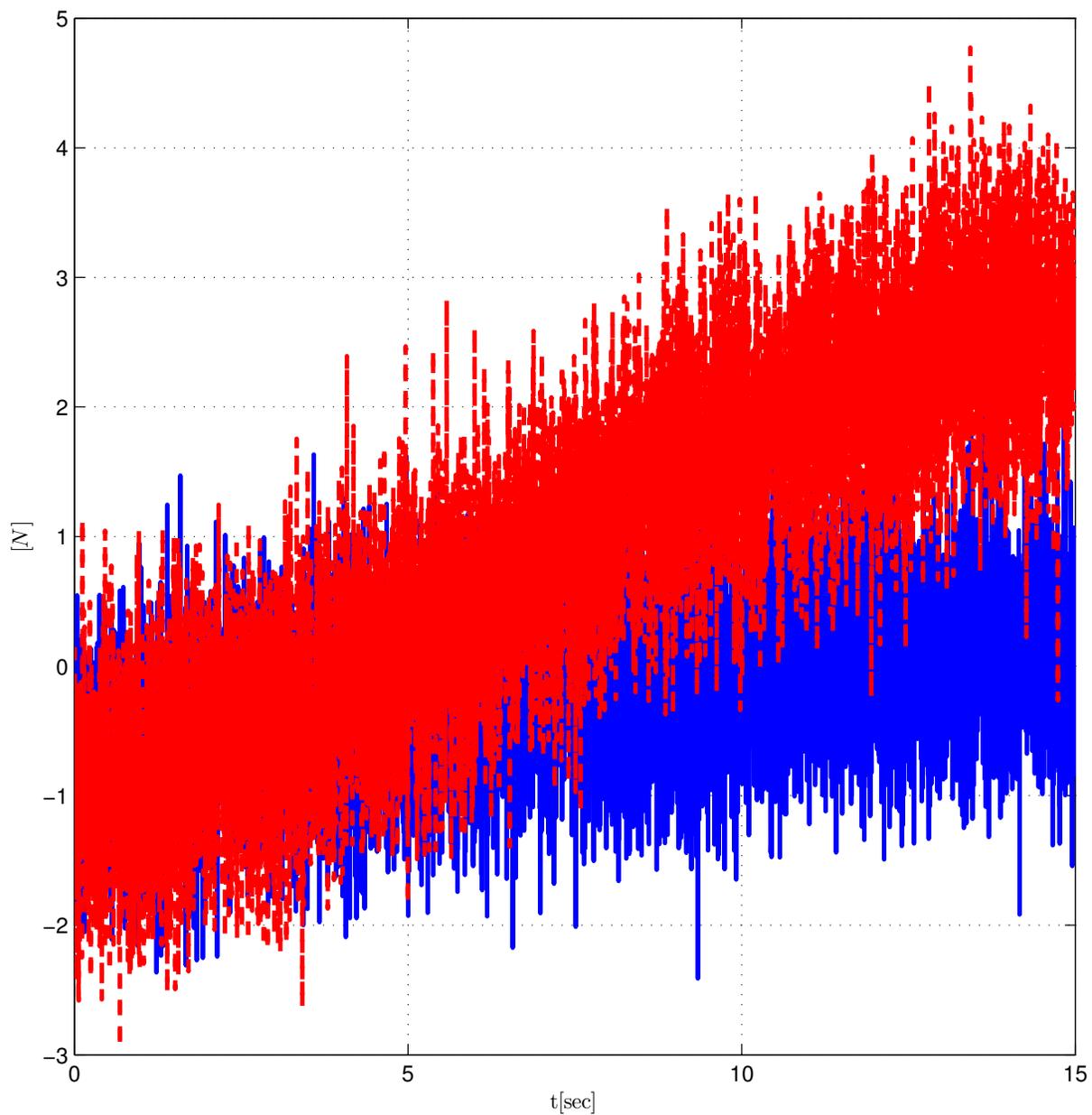


Figura 5-5: Error del seguimiento de fuerza. Esquema CTSMA (—), enfoque basado en GPI (---)

CAPÍTULO

6

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha presentado la implementación de un esquema de control robusto para el seguimiento de trayectorias de posición y de fuerza basado en el conocido algoritmo Continuous Terminal Sliding Mode Algorithm (CTSMA) y el diferenciador de Levant. El esquema propuesto se prueba experimentalmente para aplicar fuerza sobre una superficie de madera para aumentar los efectos de fricción y el rendimiento obtenido es superior en comparación con un esquema de control / observador de GPI basado en un modelo.

Para demostrar la versatilidad del algoritmo de control utilizado, se implementa en una plataforma en la cual no es común hacer uso de esta técnica de control. Los resultados obtenidos son satisfactorios, y se demuestra la capacidad que tiene el algoritmo de control en aplicaciones con alto grado de incertidumbre en el sistema para el seguimiento de trayectorias. Se desarrollaron todas las herramientas computacionales necesarias para la implementación que permiten solucionar el problema planteado y cumplir con el objetivo de esta tesis.

Se describe la arquitectura de control del sistema y los procedimientos de implementación de control

de posición y de movimiento del robot. Diferentes trayectorias han sido programadas y ejecutadas sobre el prototipo demostrando la versatilidad que logra el seguimiento de cualquier trayectoria. Los resultados experimentales muestran que el sistema es capaz de seguir las trayectorias deseadas para un conjunto de puntos del efector final en tiempo finito, contemplando únicamente este seguimiento de trayectorias.

Para el algoritmo utilizado el Continuous Terminal Sliding Mode Algorithm (CTSMA) se puede observar la convergencia del error de seguimiento a una vecindad cercana a cero y el aumento del desempeño. Las señales de control continuo para cada articulación que se obtuvieron mediante el CTSMA atenuaron los efectos del *chattering*, con que el seguimiento de trayectorias fue el deseado a pesar de la fuerza de fricción desconocida, las perturbaciones y dinámicas no modeladas, las posiciones angulares de cada actuador deseadas se alcanzaron en el tiempo definido para el seguimiento de las trayectorias con movimientos suaves debido a la convergencia garantizada por el algoritmo de control. Sin embargo el error de seguimiento se vio afectado debido a las propiedades físicas de los actuadores en varios segmentos sin alterar el seguimiento en secciones finales de la trayectoria las cuales se consideran de mayor interés. El uso del diferenciador de tercer orden contribuyó a la eficiencia obtenida en los resultados ya que obtuvo una buena estimación de las señales continuas de velocidad de cada articulación utilizando solo la información de la posición.

Para el controlador utilizado si se desea mayor exactitud es necesario programar diferenciadores exactos y robustos pero éstos conllevan un cálculo matemático más complejo y por lo tanto un mayor procesamiento por parte del microcontrolador.

El algoritmo de control utilizado es robusto ante incertidumbres y perturbaciones acotadas y acopladas a la señal de control lo que permite compensar errores de imprecisión en específico dinámicas no modeladas, al igual permitió comprobar la robustez de la metodología de control por modos deslizantes ya que sin contemplar un modelo dinámico del sistema logró el objetivo propuesto. Esto se pudo observar en los errores de seguimiento de trayectorias.

Con base en los resultados obtenidos se especifican las características más importantes del algoritmo utilizado con lo que se puede tener un panorama más amplio si se desea implementar esta metodología en el seguimiento de posición y fuerza.

Por tanto, se puede concluir que la metodología empleada es muy prometedora, mientras que queda como trabajo futuro proporcionar una prueba de estabilidad técnica. Vale la pena señalar que hasta ahora tal prueba no existe para ningún enfoque similar en el caso multivariable.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Arne Wahrburg, Elena Morara, Gianluca Cesari, Björn Matthias, and Hao Ding. Cartesian contact force estimation for robotic manipulators using kalman filters and the generalized momentum. In *2015 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*, pages 1230–1235, 2015.
- [2] H. K. Lee, M. H. Shin, and M. J. Chung. Adaptive controller of master-slave systems for transparent teleoperation. In *International Conference on Advanced Robotics*, pages 1021–1026, 1997.
- [3] M. Shi, G. Tao, H. Liu, and J. H. Downs. Adaptive control of teleoperation systems. In *Proceedings of the 38th. Conference on Decision and Control*, pages 791–796, 1999.
- [4] H. K. Lee and M. J. Chung. Adaptive controller of master-slave systems for transparent teleoperation. *Journal of Robotic System, John Wiley and Sons*, 15(8):465–475, 1998.
- [5] Rafael Kelly and Víctor Santibáñez. Control de movimiento de robots manipuladores. In *Pearson Prentice Hall*, pages ISBN 84-205-3831-0, 2003.

- [6] J. Moreno L. Fridman and Eds. R. Iriarte. *Sliding Modes after the first Decade of the 21st Century*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012.
- [7] R. C. Goertz. Electronically controlled manipulator. *Nucleonics*, 12(11):46–47, 1954.
- [8] R. C. Goertz and F. Bevilacqua. A force-reflecting positional servomechanism. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 7(2):23–41, 1952.
- [9] F. Miyasaki, S. Matsubayashi, T. Yoshimi, and S. Arimoto. A new control methodology toward advanced teleoperation of master-slave robot systems. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3:997–1002, 1986.
- [10] B. Hannaford and W. S. Kim. Force reflection, shared control and time delay in telemanipulation. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 1:117–121, 1989.
- [11] K. Hashtrudi-Zaad and S.E. Salcudean. Adaptive transparent impedance reflecting teleoperation. *In proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1369–1374, 1996.
- [12] K. Hashtrudi-Zaad and S.E. Salcudean. On the use of local force feedback for transparent teleoperation. *In proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1863–1869, 1999.
- [13] K. Hashtrudi-Zaad and S.E. Salcudean. Transparency in time-delayed systems and the effect of local force feedback for transparent teleoperation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(1):108–114, 2002.
- [14] M. Tavaloki, R. Patel, and M. Moallem. A force master-slave systems for minimally invasive surgery. *In proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems.*, pages 3077–3082, 2003.
- [15] M. Tavaloki, A. Aziminejad, and M. Moallem. Enhanced transparency in haptics-based master-slave systems. *In proceedings of the 2007 American Control Conference.*, pages 1455–1460, 2007.
- [16] P. Malysz and S. Sirouspour. Nonlinear and filtered force/position mappings in bilateral teleoperation with application to enhanced stiffness discrimination. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, 25(5):1134–1149, 2009.

- [17] Bruno Siciliano and Luigi Villani. *Robot Force Control*. Kluwer academic, 1999.
- [18] S. Chiaverini and L. Sciavicco. The parallel approach to force/position control of robotic manipulator. *Robotics and Automation, IEEE Transactions*, 9(4):361–373, 1993.
- [19] M. H. Raibert and J. J. Craig. Hybrid position/force control for manipulators. *J. Dyn. Syst. Meas. Control* 103, pages 126–133, 1981.
- [20] D. Wang and H. McClamroch. Stability analysis of the equilibrium of a constrained mechanical system. *International Journal of Control*, 60(5):733–746, 1994.
- [21] P. Hacksel and S. Salcudean. Estimation of environment forces and rigid-body velocities using observers. *IEEE International Conference on, San Diego, CA*, vol.2 doi:10.1109/ROBOT.1994.351233.:931–936, 1994.
- [22] J. C. Martínez-Rosas, M. A. Arteaga-Pérez, and A. Castillo-Sánchez. Decentralized control of cooperative robots without velocity-force measurements. *Automatica*, 42:329–336, 2006.
- [23] M. A. Arteaga-Pérez, J. C. Rivera-Dueñas, and A. Gutiérrez-Giles. Velocity and force observers for the control of robot manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 135(6):329–336, 2013.
- [24] A. Gutiérrez-Giles and M. A. Arteaga-Pérez. Gpi based velocity/force observer design for robot manipulators. *ISA Transactions*, 53(4):929–938, 2014.
- [25] S. Arimoto. Joint-space orthogonalization and passivity for physical interpretations of dextrous robot motions under geometric constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5(4):259–284, 1995.
- [26] Y.-H. Liu, S. Arimoto, V. Parra-Vega, and K. Kitagaki. Decentralized adaptive control of multiple manipulators in cooperations. *International Journal of Control*, 67(5):649–673, 1997.
- [27] A. Gutiérrez-Giles and M. A. Arteaga-Pérez. Transparent bilateral teleoperation interacting with unknown remote surfaces with a force/velocity observer design. *International Journal of Control*, pages 1–27, 2016.
- [28] I. A. Gutiérrez-Giles. Transparent teleoperation with unknown surfaces and force estimation. Master’s thesis, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, 2016.

- [29] H. Sira-Ramírez, M. Ramírez-Neria, and A. Rodríguez-Angeles. On the linear control of non-linear mechanical systems. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1999–2004, Dec 2010.
- [30] Schindele D. and Aschemann H. Trajectory tracking of a pneumatically driven parallel robot using higher-order smc. In *Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), 2010 15th International Conference on*, pages 387–392, Aug 2010.
- [31] Dongkyoung Chwa. Sliding-mode tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots in polar coordinates. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 12(4):637–644, July 2004.
- [32] Ruiz Gasca Marco Antonio. Implementación de controladores continuos por modos deslizantes a un robot paralelo de 2-gdl. Master’s thesis, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, 2014.
- [33] Pierre-Brice Wieber. Trajectory free linear model predictive control for stable walking in the presence of strong perturbations. pages 137–142, 2005.
- [34] Dong Xu, Dongbin Zhao, Jianqian Yi, and Xiangmin Tan. *Trajectory tracking control of omnidirectional wheeled mobile manipulators: robust neural network-based sliding mode approach*. IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics-part B: cybernetics, vol., 39, no. 3, 2009.
- [35] Utkin V. *Sliding modes in control and optimization*. Springer (1992), (translated from Russian edition 1981).
- [36] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control* 58(6)., pages 1247–1263, 1993.
- [37] V. Utkin and Hoon Lee. Chattering problem in sliding mode control systems. In *Variable Structure Systems, 2006. VSS’06. International Workshop on*, pages 346–350, June 2006.
- [38] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Mode control in Electro-Mechanical Systems*. CRC Press, 2009.
- [39] Y. Shtessel, C. Edwards, Fridman L., and Levant A. *Sliding Mode control and Observation*. Springer, 2013.

- [40] Lorenzo Sciavicco and Bruno Siciliano. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer-Verlag., 2008.
- [41] Rafael Kelly y Víctor Santibáñez. *Control de movimiento de robots manipuladores*. Ed. Pearson Prentice-Hall., 2003.
- [42] H. G. Sage, M. F. De Mathelin, and E. Ostertag. Robust control of robot manipulators: A survey. *International Journal of Control*, 72(16):1498–1522, 1999.
- [43] Recep Burkan and Ibrahim Uzmay. Logarithmic based robust approach to parametric uncertainty for control of robot manipulators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 15(10):427–436, 2005.
- [44] Wilfrid Perruquetti. *Sliding Mode Control in Engineering*. Marcel Dekker, Inc., New York, NY, USA, 2002.
- [45] Leonid Fridman, Jaime A. Moreno, Bijnan Bandyopadhyay, Shyam Kamal, and Asif Chalanga. *Continuous Nested Algorithms : The Fifth Generation of Sliding Mode Controllers*, pages 5–35. Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [46] Moreno J. A. and Osorio M. Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 57(4):1035–1040, (2012).
- [47] A. S. Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers*. Elsevier, 2008.
- [48] Yuri Shtessel, Christopher Edwards and Leonid Fridman, and Arie Levant. *Sliding Mode control and Observation*. Springer, 2014.
- [49] Leonid Fridman, Jaime A. Moreno, Bijnan Bandyopadhyay, Shyam Kamal, and Asif Chalanga. Continuous nested algorithms : The fifth generation of sliding mode controllers. In Xinghuo Yu and Mehmet Önder Efe, editors, *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*, volume 24 of *Studies in Systems, Decision and Control*, pages 5–35. Springer International Publishing, 2015.
- [50] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, and M. Vidyasagar. *Robot Modeling and Control*. John Wiley and Sons, 2006.
- [51] M. A. Arteaga-Pérez. On the properties of a dynamic model of flexible robot manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 120:8–14, 1998.

- [52] M. Koecher and R. Remmert. *Hamilton's Quaternions*, pages 189–220. Springer New York, New York, NY, 1991.
- [53] S. Joseph and C. Yuan. Closed-loop manipulator control using quaternion feedback. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 4(4):434–440, 1988.
- [54] Dapeng Han, Qing Wei, and Ze-Xiang Li. Kinematic control of free rigid bodies using dual quaternions. *International Journal of Automation and Computing*, 5:319–324, 07 2008.
- [55] K. Dongmin. Dual quaternion application to kinematic calibration of wrist-mounted camera. *Journal of Robotic Sysyems*, 13(3):53–162, 1996.
- [56] Emre Sariyildiz, Eray Cakiray, and Hakan Temeltas. A comparative study of three inverse kinematic methods of serial industrial robot manipulators in the screw theory framework. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 8, 11 2011.
- [57] J.M. Selig. *Geometric Fundamentals Of Robotics*. Springer, 2 edition, November 2005.
- [58] S. Wei J.S. Dai S. Qiao D. Gan, Q. Liao. Dual quaternion based inverse kinematics of the general spatial 7r mechanism. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 222:1593–1598, 2008.
- [59] S. Arimoto, Y. Liu, and T. Naniwa. The orthogonalization principle for robot manipulators. pages 507-512. Proceedings of the IFAC Congress on Automatic Control, 1993.
- [60] Shyam Kamal, Jaime A. Moreno, Asif Chalanga, Bijnan Bandyopadhyay, and Leonid M. Fridman. Continuous terminal sliding-mode controller. *Automatica*, 69:308–314, 2016.
- [61] Arie Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control - INT J CONTR*, 76:924–941, 06 2003.
- [62] Asif Chalanga, Shyam Kamal, Leonid M. Fridman, Bijnan Bandyopadhyay, and Jaime A. Moreno. Implementation of super-twisting control: Super-twisting and higher order sliding-mode observer-based approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63:3677–3685, 2016.
- [63] S. Arimoto, Y. Liu, and T. Naniwa. Model-based adaptive hybrid control for geometrically constrained robots. pages 618-623. Proceedings of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1993.

-
- [64] E. C. Dean-León, V. Parra-Vega, and A. Espinosa-Romero. Global uncalibrated visual servoing for constrained robots working on an uncalibrated environments. Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Beijing, China, October, 9-15 2006.
- [65] Jorge Gudino-Lau and Marco A. Arteaga. Dynamic model, control and simulation of cooperative robots: A case study. In Jonas Buchli, editor, *Mobile Robotics, Moving Intelligence*, chapter 13. IntechOpen, Rijeka, 2006.
- [66] Alejandro Gutiérrez-Giles and Marco A. Arteaga-Pérez. Transparent bilateral teleoperation interacting with unknown remote surfaces with a force/velocity observer design. *International Journal of Control*, 92(4):840–857, 2019.
- [67] Lauro F. Vázquez-Alberto and Marco A. Arteaga. A continuous terminal sliding mode algorithm for robot manipulators: An application to force control. *International Journal of Control*, 0(ja):1–0, 2022.
- [68] Juan C. Rivera-Dueñas and Marco A. Arteaga-Pérez. Robot force control without dynamic model: theory and experiments. *Robotica*, 31(1):149–171, 2013.

ÍNDICE DE FIGURAS

2-1. Implementación del controlador <i>HOSM</i> anidado de realimentación de salida [49]. . .	16
4-1. Robot en contacto con una superficie rígida.	32
4-2. Espacios ortogonales.	37
5-1. Seguimiento de posición articular. Esquema CTSMA (—), enfoque basado en GPI (- - -), trayectoria deseada (- . - . - .)	47
5-2. Error del seguimiento de posición articular. Esquema CTSMA (—), enfoque basado en GPI (- - -)	48
5-3. Error de la estimación de velocidad. Esquema CTSMA (—), enfoque basado en GPI(- - -)	49

5-4. Seguimiento de fuerza. Esquema CTSMA (—), enfoque basado en GPI (- - -), trayectoria deseada (- · - · - ·) 50

5-5. Error del seguimiento de fuerza. Esquema CTSMA (—), enfoque basado en GPI (- - -) 51