



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA VIBRACIÓN DE
EDIFICIOS Y CÁLCULO DE LAS FRF MEDIANTE
RELACIONES DE RECURRENCIA**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

PRESENTA:

MARIO ALFREDO ORTEGA RODRIGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA

INSTITUTO DE INGENIERÍA



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Esta página se dejó en blanco intencionalmente

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (CONACYT), así como al proyecto DGAPA-PAPIIT-IT101420, por el apoyo económico brindado durante el transcurso de la maestría y en la realización de este trabajo.

Dedicatorias

A mis padres y a mis hermanos, especialmente a mi hermana Emma, por sus oportunas recomendaciones en la redacción de la tesis.

A mis amigos: Fernando Martínez López, Roberto Ramírez Santiago, Pedro Damián Méndez Mercado, Edgar Montoya Quintanar, Javier Iván Luna Rodríguez, Karla Mitzué Villalobos Arias y Zenaida Cruz Ramírez; por hacer del confinamiento acaecido por la pandemia una cosa más amena.

RESUMEN

Se presenta un par de relaciones de recurrencia innovadoras que permiten el cálculo de las funciones de respuesta en frecuencia para edificios de cortante de sistema MDOF; se prueba que dichas relaciones están bien condicionadas por lo cual pueden ser utilizadas con confianza en algoritmos numéricos. Asimismo, se ilustra el proceso para realizar simulaciones numéricas a partir de éstas y, finalmente, se utilizan para mostrar qué modelos con la estructura de Mikota presentan cancelación de polos y ceros.

ABSTRACT

A proposal about a couple of innovative recurrence relations that allow calculating the frequency response functions for MDOF system shear buildings is presented. It is proved that these relationships are well conditioned, so they can be used with confidence in numerical algorithms. The process for performing numerical simulations from these is illustrated. Finally, are used to show that models with the Mikota structure exhibit pole-zero cancellation.

ÍNDICE

Resumen	V
Abstract	V
Introducción	1
1. Antecedentes teóricos	4
1.1 Modelo simplificado de edificio de múltiples pisos.....	4
1.2 Ecuaciones de movimiento	6
1.3 Función de respuesta en frecuencia (FRF).....	10
1.4 Soluciones analíticas	12
1.4.1 Entrada del sistema SDOF	14
1.4.2 Salida del sistema SDOF.....	16
1.4.3 Función de respuesta en frecuencia del sistema SDOF.....	19
2. Simulación numérica	20
2.1 Simulación mediante el Método de Newmark	21
2.1.1 Expresiones para la integración directa	21
2.1.2 Estabilidad y precisión del método	23
2.1.3 Algoritmo para la simulación.....	26
2.1.4 Análisis de convergencia	28
2.1.5 Solución de sistemas de ecuaciones con matriz tridiagonal	29
2.2 Simulación mediante IDFT a partir de las FRF	35
2.2.1 Consideraciones sobre el análisis de Fourier	35

2.2.2	Proceso de simulación	40
2.2.3	Precisión del método.....	44
2.2.4	Algoritmo para la simulación.....	47
2.2.5	Análisis de convergencia	49
3.	Cálculo de las FRF mediante relaciones de recurrencia.....	50
3.1	Relaciones de recurrencia A y H	51
3.1.1	Cálculo de las FRF mediante TDMA Ad hoc.....	51
3.1.2	Relación de recurrencia A.....	53
3.1.3	Relación de recurrencia H	54
3.1.4	Algoritmo para el cálculo de las FRF.....	54
3.2	Relación de recurrencia B	56
3.2.1	Antecedentes.....	56
3.2.2	Derivación de la relación de recurrencia.....	57
3.2.3	Algoritmo para el cálculo de las FRF.....	58
3.3	Precisión de las FRF mediante relaciones de recurrencia	59
3.3.1	Condicionamiento de Skeel.....	60
3.3.2	Condicionamiento de los términos de las relaciones de recurrencia	61
3.3.3	Sensibilidad de las FRF al cálculo por relaciones de recurrencia	64
3.4	Cancelación de polos y ceros.....	68
4.	Análisis de resultados.....	73
4.1	Prueba de convergencia de la simulación por Newmark	75
4.1.1	Prueba en modelo no amortiguado	76
4.1.2	Prueba en modelo amortiguado	79
4.2	Prueba de convergencia de la simulación por IDFT.....	82
4.2.1	Prueba en modelo con amortiguamiento grande.....	82
4.2.2	Prueba en modelo con amortiguamiento moderado	84
4.3	Precisión de las FRF mediante relaciones de recurrencia	86
4.4	Casos de cancelación de polos y ceros	93
5.	Conclusiones y recomendaciones	96
	Apéndice A.....	98

A.1	Existencia de la descomposición LDU	100
A.2	Existencia de la descomposición LU <i>ad hoc</i>	103
A.3	Relación con los menores principales líderes.....	105
Apéndice B.....		107
B.1	Relación con los menores principales anti-líderes	108
B.2	Inexistencia de raíces en común entre dos términos consecutivos	110
B.3	Cancelación de polos y ceros en la FRF y su relación con la RR-A y la RR-B.....	112
Apéndice C.....		114
C.1	Solución analítica del sistema 3-DOF.....	115
C.2	Envolvente del sistema 3-DOF	116
Referencias		117

INTRODUCCIÓN

En países sísmicos como México, donde las estructuras están constantemente sometidas a perturbaciones del suelo, resulta imprescindible tener una comprensión clara de la vibración que podrían experimentar éstas. Al conocer cuán grande puede ser el movimiento de la estructura, se puede reconocer si ésta se encuentra en riesgo de colapso o si podrá soportar la vibración provocada por un temblor grande.

Entre las estructuras frecuentemente analizadas se encuentran los edificios, pues el diseño de los mismos debe ser tal que no exponga la integridad de sus habitantes. En este contexto, resulta de gran interés la simulación numérica, pues ésta proporciona una descripción cuantitativa del comportamiento que tendría un edificio ante una perturbación sísmica, sin exponer a sus residentes.

Por este motivo, se han desarrollado diversos métodos que permiten simular la vibración de edificios, siendo uno de los más conocidos la integración directa de las ecuaciones de movimiento mediante el método de Newmark. Adicionalmente, bajo el enfoque de sistemas, se ha logrado explicar el comportamiento de cada piso debido a la perturbación sísmica mediante relaciones de recurrencia, las cuales suelen utilizarse para el análisis de identificabilidad.

Si bien, las relaciones de recurrencia poseen propiedades que las hacen adecuadas para análisis sofisticados, poco se ha explorado su uso para fines de simulación. En este tenor, surgen dos grandes cuestionamientos: ¿se pueden ocupar las relaciones de recurrencia para hacer simulaciones? y ¿es viable la utilización de las relaciones de recurrencia en algoritmos numéricos o presentan dificultades numéricas?

Con ello en mente, se elaboró la siguiente hipótesis: Es viable usar las relaciones de recurrencia para calcular *funciones de respuesta en frecuencia* (FRF) sin exhibir inconvenientes numéricos; además, es posible ocupar estas relaciones para fines de simulación.

Con lo anterior, el objetivo de la tesis es plantear una alternativa para el cálculo de las FRF mediante relaciones de recurrencia, las cuales fácilmente se traducen en algoritmos, así como mostrar que éstas pueden aplicarse en la elaboración de simulaciones numéricas de manera eficiente.

Este propósito demanda dos objetivos particulares:

- El primer objetivo particular es mostrar cómo se pueden realizar simulaciones numéricas a partir de las FRF, compararlas con las metodologías preexistentes y calcular su costo computacional.
- El segundo objetivo es probar que el cálculo de las FRF mediante relaciones de recurrencia se puede realizar de manera precisa y a un bajo costo computacional.

Las relaciones de recurrencia desarrolladas en la presente tesis tienen expresiones más simples que sus predecesoras y son aplicables incluso a modelos amortiguados. Adicionalmente, en virtud de las características que éstas poseen, se presenta cómo pueden aplicarse para reconocer un posible fenómeno de cancelación de polos y ceros.

En función de lo anterior, el presente escrito se divide en cinco capítulos:

El primer capítulo hace una revisión ágil del modelo matemático concerniente a la vibración de estructuras, finalizando con algunas soluciones analíticas para edificios de una sola planta.

El segundo capítulo corresponde a la simulación numérica de la vibración de edificios. En este capítulo se contempla tanto la forma habitual para realizar simulaciones, es decir, mediante el método de Newmark; así como la forma que requiere el conocimiento de las FRF. En ambos casos, se muestran los alcances teóricos de estos enfoques, sus algoritmos y las pruebas para validarlos.

El tercer capítulo concierne a las relaciones de recurrencia y al cálculo de las FRF a partir de éstas. El capítulo se divide en cuatro apartados; los primeros dos exponen las relaciones de recurrencia; el tercero muestra qué tan sensibles son dichas relaciones —así como el cálculo de las FRF a partir de éstas— a errores numéricos; y finalmente, el último apartado ilustra su utilidad para identificar posibles cancelaciones entre polos y ceros.

El cuarto capítulo muestra las pruebas empíricas que validan tanto la teoría como los algoritmos presentados en esta tesis. Por un lado, se interpretan los resultados de la prueba de convergencia para los dos esquemas de simulación y; por el otro, se compara la precisión alcanzada en el cálculo de las FRF, tanto por las relaciones de recurrencias como también por los algoritmos usuales para resolver sistemas de ecuaciones. Al final del capítulo también se presentan ejemplos de cancelación de polos y ceros para algunos modelos presentes en la literatura, los cuales se identificaron empleando los desarrollos de esta tesis.

Finalmente, en el quinto capítulo, se presentan las conclusiones y las recomendaciones concernientes a la investigación realizada.

1. ANTECEDENTES TEÓRICOS

Este capítulo está destinado a exponer el modelado matemático que permite explicar la vibración de un edificio ante una perturbación sísmica.

Para este propósito se ha dividido el capítulo en tres apartados; el primero expone las características que deben considerarse para tener un modelo sencillo pero realista, que caracterice a la estructura mediante sus componentes más significativos; el segundo, describe la interacciones de estos componentes a partir de leyes físicas, es decir, se obtienen las ecuaciones que rigen este modelo matemático; finalmente, en el tercero se muestran algunas de las soluciones que satisfacen dichas ecuaciones.

1.1 Modelo simplificado de edificio de múltiples pisos

En dinámica estructural, los desplazamientos independientes que definen las posiciones de las masas en relación con su posición de equilibrio original se denominan *grados de libertad*.

El modelo que se abordará en esta tesis corresponde al modelo más sencillo de los sistemas discretos de múltiples grados de libertad (sistemas MDOF del inglés *multi-degree-of-freedom*), éste se conoce bien como modelo de edificio de cortante o bien como modelo de cortante de sistema MDOF. A continuación se presenta una síntesis de lo expuesto por Chopra (2020, pp. 358-359), Cimellaro y Marasco (2018, pp. 104-106), así como Winkel (2017, pp. 41-44) sobre este tema.

En el modelo de edificio de cortante, los desplazamientos de la estructura ocurren en la misma dirección que el movimiento del terreno y, cuando dicho movimiento ocurre una componente a la vez, los grados de libertad de un edificio coinciden con la cantidad de pisos de éste.

Para que este modelo sea aplicable se deben cumplir ciertas suposiciones:

1) Pisos rígidos y movimiento rígido del suelo

Los pisos y el movimiento del suelo son totalmente rígidos transfiriendo así el desplazamiento a todas las columnas por igual. Esta suposición también se traduce en que la flexibilidad de la estructura es proporcionada en su totalidad por las columnas.

2) Masa concentrada a nivel del techo / Columnas sin masa

La masa se distribuye en todo el edificio, pero se idealizará como si estuviera concentrada al nivel del techo en cada piso. Este supuesto suele ser apropiado para edificios con varios niveles, porque la mayor parte de la masa del edificio se encuentra, en efecto, al nivel de techo.

3) Edificio de planta simétrica

Esto significa que el centro de masa y el centro de rigidez de cada piso son coincidentes (véase figura 1). Un sistema de planta simétrica no experimentará ningún movimiento torsional a menos que el movimiento de la base incluya la torsión, en consecuencia, todos los grados de libertad son desplazamientos en la misma dirección que el movimiento del terreno.

Con esta idealización cada propiedad de los elementos que componen la estructura (vigas, columnas, muros, etcétera) se concentran en tres componentes puros distintos por cada piso; las propiedades inerciales se concentran en la masa, las elásticas en la rigidez y la disipación de la energía en el amortiguamiento. Dichas propiedades se reparten en dos estructuras básicas por piso, la propiedad masa se restringe a la masa concentrada, mientras que la propiedad de rigidez y amortiguamiento se atribuyen a una barra elástica sin masa.

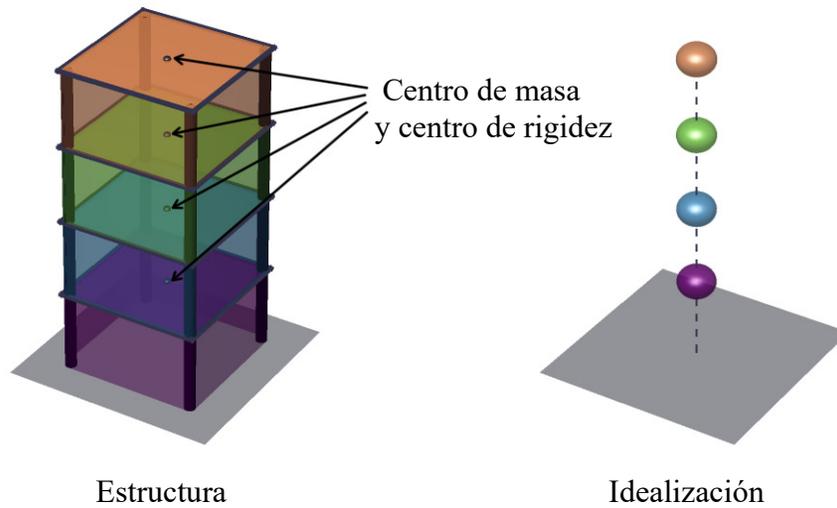


Figura 1. Modelo simplificado de edificio de múltiples pisos
 La idealización de la estructura consiste en partículas de masa concentrada, una por cada piso, conectadas por barras elásticas sin masa.

1.2 Ecuaciones de movimiento

Para el desarrollo de esta tesis, se ha supuesto un modelo de edificio de cortante que parte del reposo y una perturbación sísmica cuyo movimiento de terreno ocurre en una sola componente; por ende, todos los grados de libertad corresponden a desplazamientos en la misma dirección que el movimiento del terreno. Adicionalmente, se considera que el movimiento de la estructura es pequeño, por lo cual se deforma dentro de su límite elástico lineal. Por último, para describir el proceso mediante el cual la amplitud de la vibración disminuye, se ha optado por el esquema de amortiguamiento viscoso lineal.

En la figura 2 se ilustra el modelo de edificio de cortante caracterizado por sus componentes de masa, rigidez y amortiguamiento, además se muestran los desplazamientos inducidos por el movimiento del terreno.

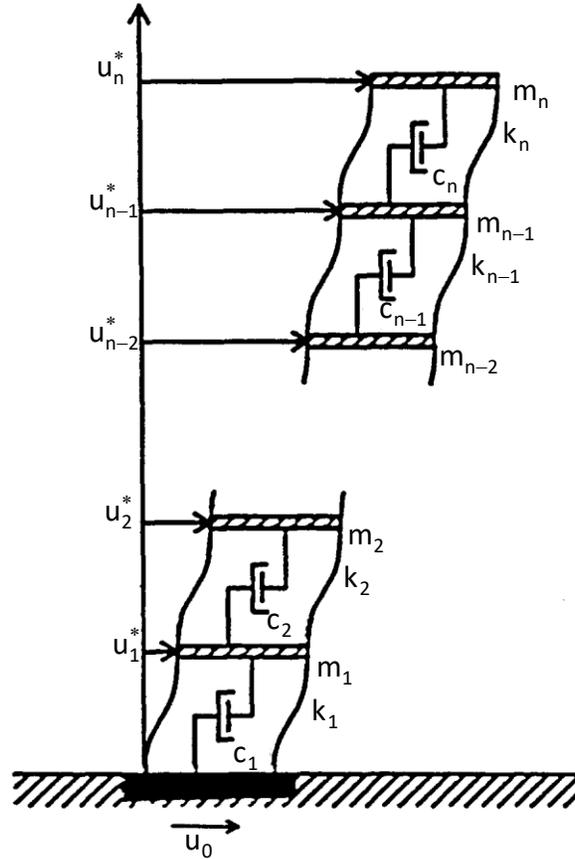


Figura 2. Grados de libertad y componentes que caracterizan un de edificio de cortante

En la idealización de edificio de cortante, cada piso se caracteriza por su masa, rigidez y amortiguamiento.

El movimiento del terreno induce desplazamientos en la misma dirección que éste en cada grado de libertad. Adaptado de Imai, Yun, Maruyama & Shinozuka (1989)

En esta tesis el desplazamiento del terreno se indica por u_0 , el desplazamiento absoluto de la j -ésima masa por u_j , y el desplazamiento relativo de dicha masa y el terreno (es decir la deformación) por u_j^* .

En cada instante de tiempo, estos desplazamientos se relacionan mediante

$$u_j = u_0 + u_j^* \quad (1)$$

El desplazamiento relativo $u_j^*(t)$ inducido por el movimiento del terreno $u_0(t)$ también puede ser entendido como el desplazamiento relativo producido por fuerzas externas $-m_j \ddot{u}_0(t)$ que someten a la estructura cuando su base es estacionaria, tal como se observa en la figura 3.

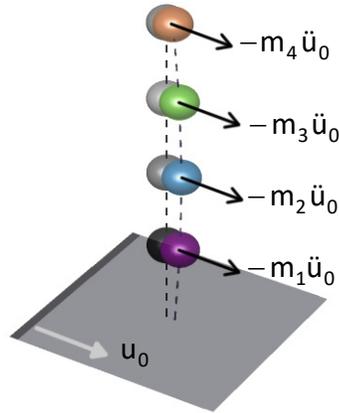


Figura 3. Fuerza sísmica efectiva

El desplazamiento relativo de la estructura debida al movimiento del terreno es idéntico al desplazamiento de una estructura de base estacionaria sometido a fuerzas externas que se oponen al desplazamiento.

En la figura 4 se presenta el diagrama de cuerpo libre en un instante de tiempo (no se ha considerado amortiguamiento), donde se muestra la aplicación del principio de equilibrio dinámico de D' Alembert; la masa se ha reemplazado por su fuerza de inercia, representada mediante una línea discontinua para distinguir esta fuerza ficticia de las fuerzas reales.

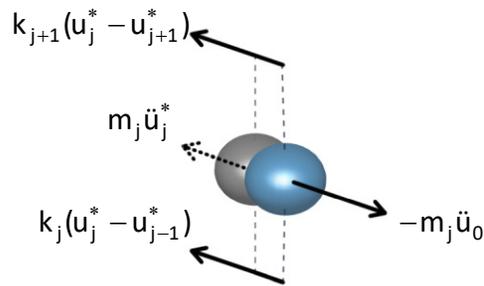


Figura 4. Diagrama de cuerpo libre aplicando equilibrio dinámico

La fuerza inercial ficticia (línea discontinua) es igual al producto de la masa por su aceleración y actúa en dirección opuesta a ésta, con esto, el sistema está en equilibrio.

Aplicando dicho principio se establece un equilibrio dinámico que resulta en la expresión

$$m_j \ddot{u}_j^* + c_j (\dot{u}_j^* - \dot{u}_{j-1}^*) - c_{j+1} (\dot{u}_{j+1}^* - \dot{u}_j^*) + k_j (u_j^* - u_{j-1}^*) - k_{j+1} (u_{j+1}^* - u_j^*) = -m_j \ddot{u}_0$$

El conjunto de estas ecuaciones puede ser expresado en notación matriz-vector como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{K}\mathbf{u}^* = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_0 \quad (2)$$

donde $\mathbf{u}^* = \{u_1^*, u_2^*, u_3^*, \dots, u_n^*\}^T$, $\mathbf{1}$ es el vector *todos unos* (un vector columna de n elementos todos iguales a uno), \mathbf{M} es una matriz diagonal de orden n con $[M]_{jj} = m_j$ y, finalmente, tanto \mathbf{C} como \mathbf{K} son matrices simétricas tridiagonales con la siguiente estructura

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} + c_n & -c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} & c_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} + k_n & -k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{n-1} & k_n \end{bmatrix}$$

Haciendo uso de (1), (2) puede ser expresada en el sistema de referencia absoluto como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{1}\dot{u}_0 + \mathbf{K}\mathbf{1}u_0$$

Expresión que se simplifica al realizar el producto matriz-vector del lado derecho pues éste es una forma escalada del primer vector de la base canónica ($\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0, \dots, 0\}^T$), con esto, dicha expresión adopta la forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = c_1\mathbf{e}_1\dot{u}_0 + k_1\mathbf{e}_1u_0 \quad (3)$$

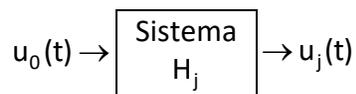
1.3 Función de respuesta en frecuencia (FRF)

De cumplirse las consideraciones expuestas al inicio del apartado *Ecuaciones de movimiento*, se puede asegurar que las ecuaciones que gobiernan la vibración del edificio corresponden a ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes, tal como se muestra en Oppenheim, Willsky y Nawab (1997, p. 116). Esto es especialmente relevante pues permite explicar la respuesta de una estructura ante una perturbación sísmica como un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal, lo último en virtud de que el sistema permanece en reposo antes de la excitación sísmica.

De este modo, la respuesta de la estructura ante una perturbación sísmica corresponde a un sistema de una entrada y múltiples salidas. La entrada corresponde al movimiento del terreno, y las múltiples salidas al movimiento de las masas concentradas que representan a los pisos.

Para fines prácticos, se considerará la respuesta de un piso genérico de la estructura. Para ello, la señal de entrada será el registro del sensor al nivel del terreno mientras que la salida (o respuesta) será el registro de un sensor en el j-ésimo piso (considerando que la planta baja, situada al nivel de terreno, es el piso cero).

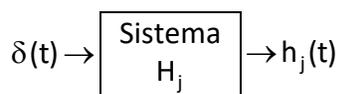
Bajo esta consideración, el sistema formado por el desplazamiento del terreno y el desplazamiento (absoluto) del j-ésimo piso viene dada por



Por las consideraciones antes mencionadas el sistema es lineal e invariante en el tiempo, de tal modo que es válido representar la respuesta del sistema como una convolución en el tiempo, es decir

$$u_j(t) = h_j(t) * u_0(t)$$

Donde $h_j(t)$ es la respuesta al impulso unitario. La representación de ésta en diagrama de bloque es



Por el teorema de convolución, la respuesta puede expresarse en el dominio de la frecuencia como

$$U_j(\omega) = H_j(\omega) \cdot U_0(\omega)$$

Se conoce como *función de respuesta en frecuencia* o *FRF* (del inglés *frequency response function*), al cociente de la transformada de Fourier de la salida del sistema y la transformada de Fourier de la entrada¹. Para el sistema *terreno* \rightarrow *j-ésimo piso* este queda como

$$H_j(\omega) = \frac{U_j(\omega)}{U_0(\omega)} \quad (4)$$

Si se conoce la respuesta al impulse unitario, entonces la FRF se obtiene aplicando la transformada de Fourier a ésta

$$\mathcal{F}[h_j(t)] = H_j(\omega)$$

En esta tesis, la FRF se denotará bien como $H(f)$ o bien como $H(\omega)$, el primero cuando la frecuencia esté reportada en Hz y el segundo cuando lo esté en rad/s.

Cabe mencionar que, si se aplica transformada de Laplace a $h(t)$ el resultado se denomina *función de transferencia* y suele denotarse como $H(s)$. La función de transferencia bajo el cambio de variable $s=i\omega$ puede ser referida como función de transferencia en el dominio de la frecuencia.

De acuerdo a Chu (2008, pp. 291-293), Shmaliy (2007, pp. 276-279), así como Beerends *et al.* (2003, p. 312), pueden existir diferencias entre la FRF y la función de transferencia en el dominio de la frecuencia dependiendo si la definición de transformada de Laplace fue unilateral o bilateral; sin embargo, para sistemas causales ambas conducen al mismo resultado. Dado que el análisis de señales típicamente aborda sistemas causales, como los derivados de fenómenos físicos, en algunas disciplinas la FRF suele referirse simplemente como función de transferencia.

¹ La FRF también puede ser referida como curva de respuesta en frecuencia, respuesta en frecuencia del sistema o simplemente respuesta en frecuencia.

Nótese que, si en (4) se cambiara tanto en la entrada como en la salida los registros de desplazamiento por velocidad o aceleración, la FRF permanecería inalterada. Esto es porque en el dominio de la frecuencia tanto la aceleración como la velocidad son formas escaladas del desplazamiento y al realizar el cociente, ese factor de escala se anula.

Por último, cabe señalar que en el campo de dinámica estructural se definen varias FRF dependiendo de cómo se hayan registrado tanto la entrada como la salida y no hay razón para que éstas deban coincidir en unidades. Cuando las unidades coinciden y están referidas en coordenadas absolutas, el módulo de la FRF suele denominarse transmisibilidad (del tipo de registro). La expresión de la transmisibilidad de desplazamiento es idéntica a la transmisibilidad de velocidad y a la transmisibilidad de aceleración e incluso a la transmisibilidad de fuerza. Existen otros tipos de transmisibilidad (por ejemplo, las deducidas cuando difieren las unidades de la entrada y la salida) los cuales pueden ser consultados en Chopra (2020, pp. 86-89) y Thorby (2008, pp. 83-94).

1.4 Soluciones analíticas

La solución analítica es una expresión matemática que proporciona toda la información sobre el comportamiento del sistema para cualquier conjunto de parámetros. Si bien ésta generalmente sólo existe para problemas sencillos, aún es de interés para la comprensión del fenómeno descrito y también lo es para calibrar los métodos de simulación.

Uno de estos problemas sencillos corresponde al sistema de un grado de libertad (SDOF del inglés *single-degree-of-freedom*), para éste se conocen soluciones analíticas bajo ciertos pulsos de entrada, los cuales pueden ser consultados en Lalanne (2002) así como Chopra (2020)².

² Cabe aclarar que las expresiones que a continuación se muestran han sido adecuadas para la presente tesis, ya sea porque la convención de transformada era distinta, o porque el pulso de entrada era descrito como una fuerza y no por su desplazamiento (el enfoque adoptado en esta tesis). Todas las soluciones que se presentan fueron corroboradas por el autor de esta tesis.

En este apartado se expondrán las soluciones analíticas para un sistema SDOF que responde a un pulso sinusoidal de medio ciclo. Se ha elegido este pulso pues, de los pulsos para los que se tienen solución analítica, es el más adecuado para probar los métodos de simulación presentados en esta tesis.

El sistema MDOF expuesto en (3) se simplifica para el sistema SDOF, adoptando la forma

$$m\ddot{u}_1 + c\dot{u}_1 + ku_1 = c\dot{u}_0 + ku_0 \quad (5)$$

Bajo esta elección de parámetros (masa, coeficiente de amortiguamiento y rigidez), es posible generar la misma respuesta con distintos conjuntos de parámetros, pues no hay un conjunto único. Una forma más conveniente de caracterizar la respuesta de un sistema SDOF es mediante el siguiente par de parámetros:

Frecuencia natural de vibración no amortiguada	y	Fracción del amortiguamiento crítico
$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$		$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_{cr}} \quad \text{donde} \quad c_{cr} = 2\sqrt{km}$

El calificativo natural hace alusión a un sistema que vibra sin ningún tipo de excitación externa, es decir, de forma libre o natural. Cabe decir que el término frecuencia natural de vibración se aplica tanto a ω_n como a f_n .

Respecto a la fracción del amortiguamiento crítico, como su nombre indica, se define en relación al amortiguamiento crítico. El amortiguamiento crítico (c_{cr}) se denomina así porque es el valor más pequeño de c que inhibe por completo la oscilación.

En esta tesis se concentrará la atención en sistemas subamortiguados ($c < c_{cr}$) porque todas las estructuras de interés entran dentro de esta categoría ya que, de acuerdo a Chopra (2020, p. 409), su fracción de amortiguamiento es menor a 20%.

Dividiendo (5) entre la masa y bajo los cambios de variable antes mencionados, se obtiene

$$\ddot{u}_1 + 2\zeta\omega_n\dot{u}_1 + \omega_n^2 u_1 = 2\zeta\omega_n\dot{u}_0 + \omega_n^2 u_0$$

La cual es una ecuación diferencial ordinaria cuyo término de la derecha es conocido, la expresión de este último está en función del movimiento prescrito en la base, es decir, el movimiento del terreno.

1.4.1 Entrada del sistema SDOF

Para este apartado, la entrada del sistema (el desplazamiento prescrito en la base) corresponde al pulso sinusoidal de medio ciclo, el cual está definido por

$$u_0(t, t_d) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{t_d}\right) & 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Donde t_d es la duración del pulso. Para fines de comparación se ha elegido $t_d = \frac{1}{2}T_n$, es decir, una duración del pulso igual a la mitad del periodo natural vibración del sistema no amortiguado. Todas las soluciones analíticas presentadas en este apartado siguen esta premisa. La figura 5 muestra el movimiento del terreno (o señal de entrada) bajo la condición antes mencionada ($t_d = \frac{1}{2}T_n$).

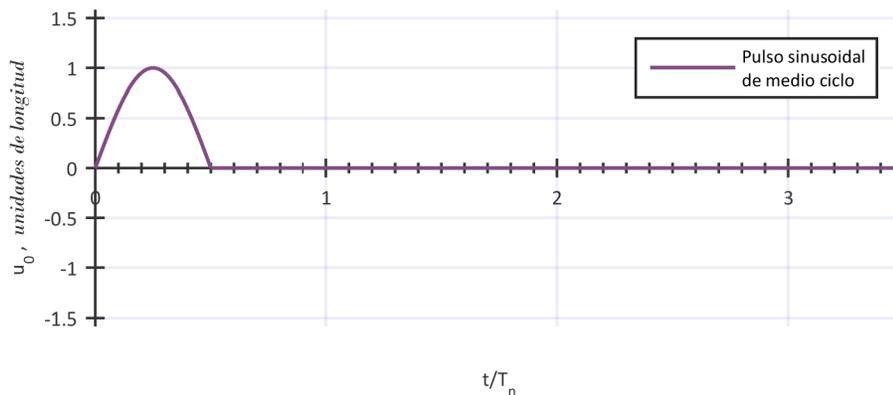


Figura 5. Entrada del sistema en el dominio del tiempo

La entrada del sistema corresponde a un pulso sinusoidal de medio ciclo con duración igual a la mitad del periodo natural del sistema no amortiguado, el desplazamiento máximo del pulso es la unidad.

La transformada de Fourier de la entrada viene dada por la expresión

$$U_0(f, t_d) = \begin{cases} \frac{2t_d}{\pi} \left(\frac{e^{-i\pi f t_d}}{1 - (2f t_d)^2} \right) \cos(\pi f t_d) & f \neq \pm \frac{1}{2t_d} \\ \text{sgn}(f) \frac{t_d}{2i} & f = \pm \frac{1}{2t_d} \end{cases}$$

La figura 6 muestra la gráfica del módulo de la señal de entrada en el dominio de la frecuencia, nuevamente se ha considerado $t_d = \frac{1}{2}T_n$.

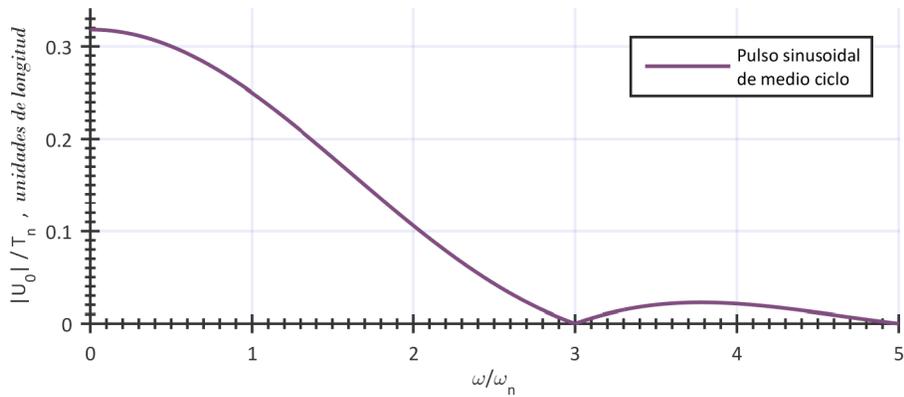


Figura 6. Entrada del sistema en el dominio de la frecuencia

La entrada del sistema corresponde a un pulso sinusoidal de medio ciclo con duración igual a la mitad del periodo natural del sistema no amortiguado, la amplitud se ha escalado para mantener la generalidad de la gráfica.

1.4.2 Salida del sistema SDOF

La respuesta del sistema, es decir el desplazamiento que experimenta la masa concentrada en el modelo idealizado SDOF, se compone de tres fases: Previa a la excitación, en el que sistema permanece en reposo; fase de vibración forzada, en el cual el sistema está sometido al movimiento del terreno y ; fase de vibración libre, aquí el movimiento del terreno se ha detenido y la estructura vibra en libertad de estímulos.

La respuesta del sistema en el dominio del tiempo se ha dividido en dos casos:

Caso 1: Sistema no amortiguado

$$u_1(t, T_n) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_n}\right) - \frac{2\pi t}{T_n} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_n}\right) & 0 \leq t < \frac{1}{2}T_n \\ -\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_n}\right) & t \geq \frac{1}{2}T_n \end{cases}$$

Caso 2: Sistema amortiguado

$$u_1(t, T_n, \zeta) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ + \sin\left(\frac{2\pi t}{T_n}\right) - \frac{1}{2\zeta} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_n}\right) \\ + \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\frac{2\pi t}{T_n}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_D} + \arcsin(\zeta)\right) & 0 \leq t < \frac{1}{2}T_n \\ + \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\frac{2\pi t}{T_n}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_D} + \arcsin(\zeta)\right) \\ + \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\frac{2\pi t - \pi T_n}{T_n}} \cos\left(\frac{2\pi t - \pi T_n}{T_D} + \arcsin(\zeta)\right) & t \geq \frac{1}{2}T_n \end{cases}$$

Para la mayoría de las estructuras el factor de amortiguamiento crítico suele ser pequeño (debajo de 20% de acuerdo a Chopra, 2020, p. 409), si bien el periodo de vibración de un sistema amortiguado es mayor que el periodo de un sistema sin amortiguamiento, para los valores típicos en estructuras los periodos de vibración amortiguado y no amortiguado se pueden considerar iguales. El efecto más importante del amortiguamiento se refleja en el rápido decaimiento de la vibración. En la figura 7 se presenta la respuesta del sistema a distintos factores de amortiguamiento: $\zeta = 0, 2, 5$ y 10%.

Periodo natural de vibración amortiguada : $T_D = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

—Curva envolvente—
Rapidez de decaimiento de la vibración causada por el pulso sinusoidal ($t_d = \frac{1}{2}T_n$). : $\frac{\sqrt{1 + e^{2\pi\zeta} + 2e^{\pi\zeta} \cos(\pi\sqrt{1-\zeta^2})}}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}$

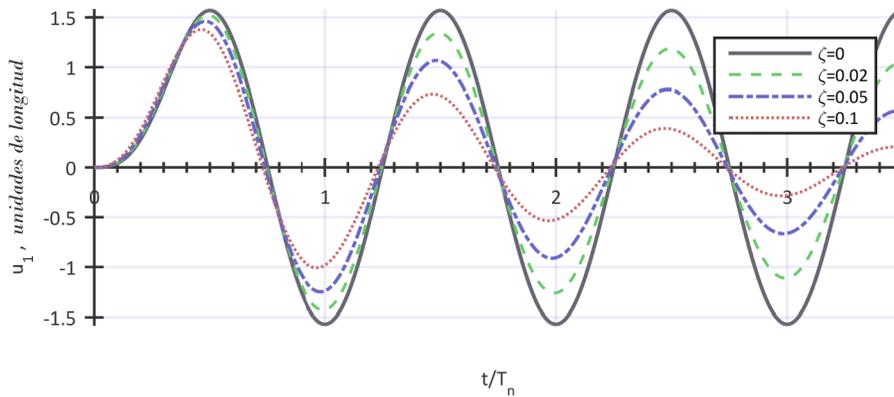


Figura 7. Salida del sistema en el dominio del tiempo

La salida del sistema es la respuesta al pulso sinusoidal de medio ciclo, se muestran distintas respuestas dependiendo del valor del amortiguamiento. Como puede observarse el cambio más notable corresponde a la rapidez del decaimiento de la vibración.

La transformada de Fourier de la salida viene dada por la expresión

$$U_1(f, T_n, \zeta) = \frac{1 + 2i\zeta f T_n}{1 + 2i\zeta f T_n - (f T_n)^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{T_n}{\pi} \left(\frac{e^{-\frac{i\pi f T_n}{2}}}{1 - (f T_n)^2} \right) \cos\left(\frac{\pi f T_n}{2}\right), \quad f \neq \pm \frac{1}{T_n} \\ \operatorname{sgn}(f) \frac{T_n}{4i}, \quad f = \pm \frac{1}{T_n} \end{array} \right.$$

En lo que respecta a ésta, cuando se analiza su módulo se observa un pico en lo que se denomina frecuencia resonante, una frecuencia resonante se define como la frecuencia de excitación en la que se presenta la amplitud más grande. Como era de esperarse, el amortiguamiento desplaza la frecuencia resonante hacia bajas frecuencias, sin embargo, para amortiguamientos pequeños este cambio es insignificante. Donde se observa claramente la influencia del amortiguamiento es en la reducción de la amplitud. En la figura 8 se presenta la respuesta del sistema a distintos factores de amortiguamiento: $\zeta = 0, 2, 5$ y 10% .

$$\begin{aligned} \text{Frecuencia resonante} & : \frac{\omega_p}{\omega_n} \approx 1 - \frac{3}{2}\zeta^2 + 3\zeta^4 - 7\zeta^6 + 9\zeta^8 \\ \text{Amplificación alcanzada en} & : \frac{|U_1(\omega_p)|}{T_n} \approx \frac{1}{8}\zeta^{-1} + \frac{25}{64}\zeta - \frac{81}{128}\zeta^3 \\ \text{la frecuencia resonante} & \end{aligned}$$

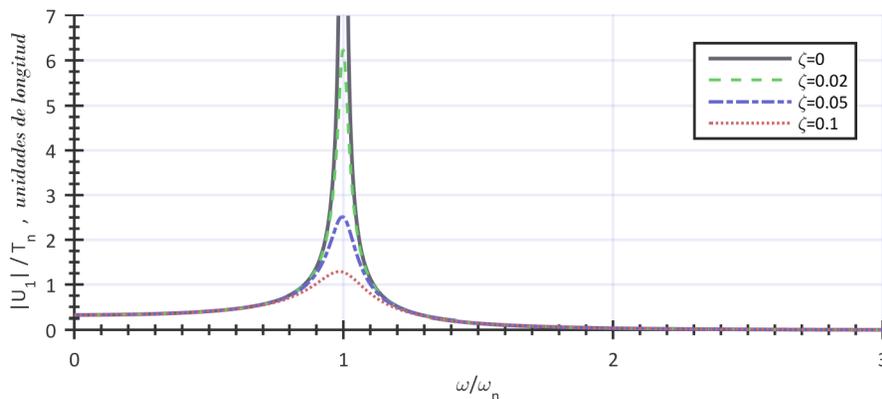


Figura 8. Salida del sistema en el dominio de la frecuencia

La salida del sistema es la respuesta al pulso sinusoidal de medio ciclo, se muestran distintas respuestas dependiendo del valor del amortiguamiento. Como puede observarse el cambio más notable corresponde a la amplitud en la frecuencia resonante.

1.4.3 Función de respuesta en frecuencia del sistema SDOF

La deducción de la FRF es inmediata, basta con aplicar la transformada Fourier en (5) y dividir la entrada (U_1) entre la salida (U_0), resultando la expresión

$$H(f, T_n, \zeta) = \frac{1 + 2i\zeta f T_n}{1 + 2i\zeta f T_n - (f T_n)^2}$$

Al igual que antes, el amortiguamiento desplaza la frecuencia resonante hacia bajas frecuencias, aunque no de forma apreciable. El efecto más importante nuevamente se refleja en el decaimiento de su amplitud. En la figura 9 se presenta el módulo de FRF del sistema SDOF (en el campo de dinámica estructural es mejor conocido como transmisibilidad), éste se presenta para distintos factores de amortiguamiento: $\zeta = 0, 2, 5$ y 10%.

$$\text{Frecuencia resonante} : \frac{\omega_p}{\omega_n} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\sqrt{8\zeta^2 + 1} - 1}}{2\zeta} & \zeta \neq 0 \\ 1 & \zeta = 0 \end{cases}$$

$$\approx 1 - \zeta^2 + \frac{7}{2}\zeta^4 - \frac{33}{2}\zeta^6 + \frac{715}{8}\zeta^8$$

$$\text{Amplificación alcanzada en la frecuencia resonante} : |H(\omega_p)| = \sqrt{\frac{8\zeta^4 - 4\zeta^2 - 1 - \sqrt{8\zeta^2 + 1}}{8\zeta^4 - 8\zeta^2}}$$

$$\approx \frac{1}{2}\zeta^{-1} + \frac{5}{4}\zeta - \frac{37}{16}\zeta^3 + \frac{289}{32}\zeta^5$$

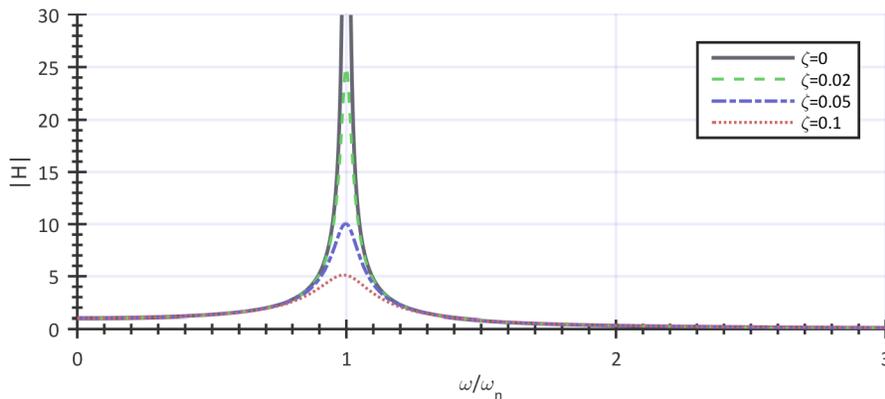


Figura 9. FRF del sistema SDOF
Se muestran distintas FRF dependiendo del valor del amortiguamiento. Como puede observarse el cambio más notable corresponde a la amplitud en la frecuencia resonante.

2. SIMULACIÓN NUMÉRICA

Para fines académicos o de diseño resulta conveniente conocer la respuesta de una estructura ante una perturbación sísmica a partir de sus parámetros físicos. Esto requiere, por un lado, partir de un modelo físico con algún nivel de refinamiento del cual se deducen las ecuaciones gobernantes, y por el otro, una manera de encontrar una solución que las satisfaga.

Este capítulo abordará la manera computacional de encontrar la solución a las ecuaciones descritas en el primer capítulo para obtener así la respuesta del sistema. El ejercicio de obtener la respuesta del sistema haciendo uso de algoritmos computacionales es conocido como *simulación*.

Para esto, el capítulo se ha dividido en dos partes. La primera corresponde a la simulación mediante un esquema de integración directa, en particular, al método de Newmark; y la segunda aborda la simulación a partir de la FRF y bajo la aplicación de la transformada inversa discreta de Fourier.

2.1 Simulación mediante el Método de Newmark

En 1959 Nathan M. Newmark publicó un artículo denominando *A method of computation for structural dynamics* donde propone un método de integración de un solo paso para el cálculo de la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Dicho método revolucionó el campo de integración numérica y aún funge como punto de comparación en desarrollos recientes.

Este método predice el desplazamiento, velocidad y aceleración futuros dadas las condiciones actuales de estos. Existen diversas formas de implementar dicho método, por ejemplo, Chopra (2020, pp. 165-173) plantea un sistema de ecuaciones cuya incógnita es el vector de desplazamiento relativo futuro y, a partir de éste, deduce tanto la velocidad como la aceleración relativa futura. Por otro lado, Géradin y Rixen (2015, pp. 522-539) así como en Hughes (1987, pp. 490-505) plantean el sistema para obtener la aceleración futura y con ella deducen las otras dos.

2.1.1 Expresiones para la integración directa

Para el desarrollo de esta tesis se ha optado por obtener, en primera instancia, el desplazamiento (absoluto) futuro y, posteriormente, la velocidad y aceleración (absoluta) futura. Ya sea que el vector incógnita fuese el vector de desplazamiento o el de aceleración, la estructura de la matriz del sistema no cambia, lo único que cambia es la estructura del vector de términos independientes.

El planteamiento para construir el sistema del método de Newmark es, en general, un proceso sencillo de sustitución entre la velocidad y la aceleración y sus aproximaciones. En virtud de que dicho proceso está minuciosamente explicado por los autores antes citados, no se ahondará en éste, sólo se presentarán las expresiones que resultan de dicho proceso para el tema en cuestión.

El modelo considerado en esta tesis supone que la estructura parte del reposo, por lo cual las condiciones iniciales corresponden a desplazamiento, velocidad y aceleración igual con cero; por otro lado, siempre es conocido el movimiento del terreno, es decir, se trata de un movimiento prescrito.

Al hacer uso del método de Newmark se predicen los desplazamientos en cada grado de libertad mediante la expresión

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}(t + \Delta t)$$

En ésta, la matriz del sistema está dada por

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{M} + 2\gamma\Delta t\mathbf{C} + 2\beta\Delta t^2\mathbf{K}$$

Mientras que el vector del sistema es

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t + \Delta t) = & \mathbf{M}[\mathbf{u}(t) \quad \dot{\mathbf{u}}(t) \quad \ddot{\mathbf{u}}(t)] \begin{bmatrix} 2 \\ 2\Delta t \\ (1-2\beta)\Delta t^2 \end{bmatrix} + \mathbf{C}[\mathbf{u}(t) \quad \dot{\mathbf{u}}(t) \quad \ddot{\mathbf{u}}(t)] \begin{bmatrix} 2\gamma\Delta t \\ 2(\gamma-\beta)\Delta t^2 \\ (\gamma-2\beta)\Delta t^3 \end{bmatrix} \\ & + 2\beta\Delta t^2 c_1 \dot{u}_o(t + \Delta t) \mathbf{e}_1 + 2\beta\Delta t^2 k_1 u_o(t + \Delta t) \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Nótese que dicho vector requiere del conocimiento del desplazamiento, velocidad y aceleración actual en toda la estructura y únicamente del movimiento prescrito (desplazamiento y velocidad) en lo que respecta al momento futuro.

Una vez conocidos los desplazamientos se pueden obtener las velocidades y las aceleraciones mediante las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} \dot{u}_j(t + \Delta t) &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (u_j(t + \Delta t) - u_j(t)) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{u}_j(t) + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{u}_j(t) \\ \ddot{u}_j(t + \Delta t) &= \frac{1}{\beta\Delta t^2} (u_j(t + \Delta t) - u_j(t)) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{u}_j(t) + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{u}_j(t) \end{aligned}$$

Bajo cierta elección de parámetros el método de Newmark degenera en el método de diferencia central, la implementación de éste se realiza en dos pasos y no requiere del conocimiento de velocidades y aceleraciones en la estructura.

La matriz para el método de diferencia central es

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{M} + \Delta t\mathbf{C}$$

Mientras que el vector del sistema viene dado por

$$\mathbf{b}(t + \Delta t) = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) & \mathbf{u}(t - \Delta t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} - 2\Delta t^2 \mathbf{K} \mathbf{u}(t) + \Delta t \mathbf{C} \mathbf{u}(t - \Delta t) \\ + 2\Delta t^2 k_1 u_0(t) \mathbf{e}_1 + 2\Delta t^2 c_1 \dot{u}_0(t) \mathbf{e}_1$$

Si hace falta, es posible calcular la velocidad y la aceleración mediante las siguientes expresiones

$$\dot{u} = \frac{u(t + \Delta t) - u(t - \Delta t)}{2\Delta t} \\ \ddot{u} = \frac{u(t + \Delta t) - 2u(t) + u(t - \Delta t)}{\Delta t^2}$$

En ambos casos, tanto en el método de Newmark convencional como en el diferencia central, se puede sustituir la velocidad del movimiento de terreno haciendo uso de la expresión para el cálculo de la velocidad. Esto puede resultar atractivo, por ejemplo, cuando se desea implementar el método de diferencia central haciendo uso únicamente de desplazamientos.

2.1.2 Estabilidad y precisión del método

El método de Newmark tiene casos bien conocidos, los parámetros de éstos así como algunas de sus propiedades se resumen en la tabla 1

Tabla 1: Esquemas de integración de la familia de Newmark ($\zeta=0$)

Método	Tipo	γ	β	Condición de estabilidad	$\frac{T^{\text{«num»}} - T^{\text{«ana»}}}{T^{\text{«ana»}}}$
Diferencia central	Explícito	$\frac{1}{2}$	0	$0 < \Delta t \leq \frac{1}{\pi} T_{\text{MIN}}$	$-\frac{\omega^2 \Delta t^2}{24}$
Método de Fox-Goodwin	Implícito	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$0 < \Delta t \leq \frac{\sqrt{6}}{2\pi} T_{\text{MIN}}$	$\mathcal{O}(\omega^4 \Delta t^4)$
Aceleración lineal	Implícito	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$0 < \Delta t \leq \frac{\sqrt{3}}{\pi} T_{\text{MIN}}$	$\frac{\omega^2 \Delta t^2}{24}$
Aceleración promedio	Implícito	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$0 < \Delta t < \infty$	$\frac{\omega^2 \Delta t^2}{12}$

El método de diferencia central se considera explícito en tanto la matriz del sistema sea diagonal, dado que la inversa de una matriz diagonal no representa ningún reto, la solución del sistema es inmediata. Para que la matriz del sistema sea diagonal tanto la matriz de masa como la de amortiguamiento deben ser diagonales.

La formulación usada en esta tesis no genera una matriz de amortiguamiento diagonal, y por ello, el método de diferencia central sólo es explícito en el caso no amortiguado. El resto de los métodos son implícitos en el sentido de que la solución no se obtiene de forma inmediata, estos requieren que se resuelva el sistema.

Sólo el método de aceleración promedio es incondicionalmente estable. El resto de los métodos son condicionalmente estables, esto implica que el tamaño del incremento de tiempo (Δt) tiene que ser menor que un valor crítico o, de lo contrario, la solución diverge.

La condición de estabilidad reportada en la tabla 1 corresponde al caso no amortiguado, en ella T_{MIN} corresponde al periodo más pequeño del sistema MDOF. En general, un amortiguamiento moderado se traduce en una condición de estabilidad ligeramente más flexible.

En la tabla 1 se reporta el comportamiento del error (y no el error propiamente) del periodo cuando se calcula con los distintos métodos. Como indica la tabla, el método de Fox-Goodwin es el que asintóticamente tiene el error de periodicidad más pequeño, sin embargo, este buen comportamiento está restringido al caso no amortiguado.

Las figura 10 y 11 muestran las respuesta de un sistema SDOF a un pulso sinusoidal de medio ciclo de duración $t_d = \frac{1}{2}T_n$, calculados mediante métodos clásicos de la familia de Newmark con incremento de tiempo $\Delta t = T_n/10$. El primer caso (figura 10), ilustra un sistema no amortiguado mientras que el segundo (figura 11) tiene una fracción de amortiguamiento $\zeta = 5\%$.

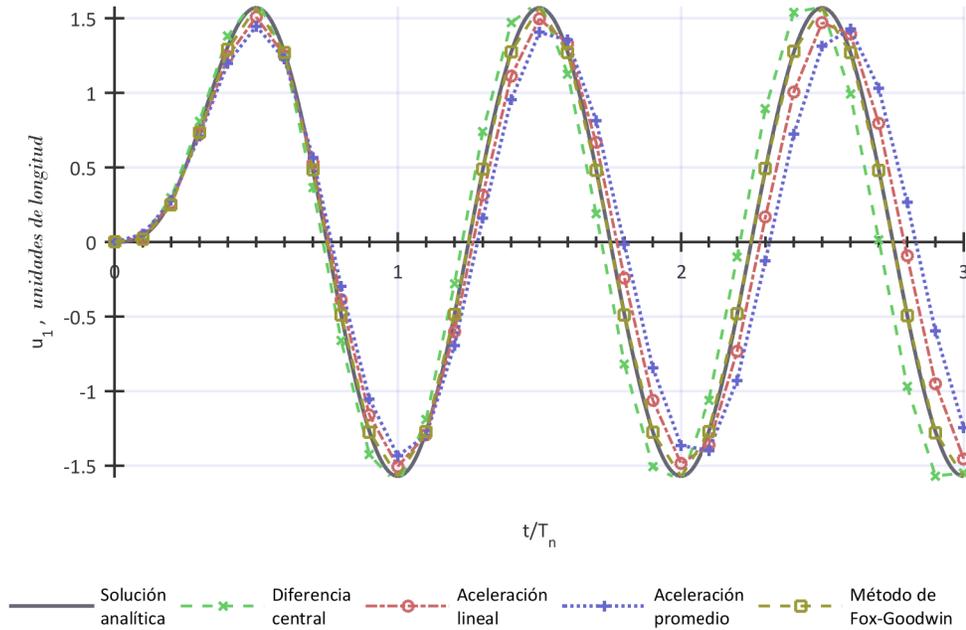


Figura 10. Salida del sistema no amortiguado mediante cuatro métodos numéricos y la solución teórica

La salida del sistema no amortiguado es la respuesta al pulso sinusoidal de medio ciclo de duración $t_d = \frac{1}{2}T_n$, se muestran en líneas discontinuas las distintas respuestas dependiendo del método numérico, en estos el incremento de tiempo fue $\Delta t = T_n/10$, y en línea continua la solución teórica.

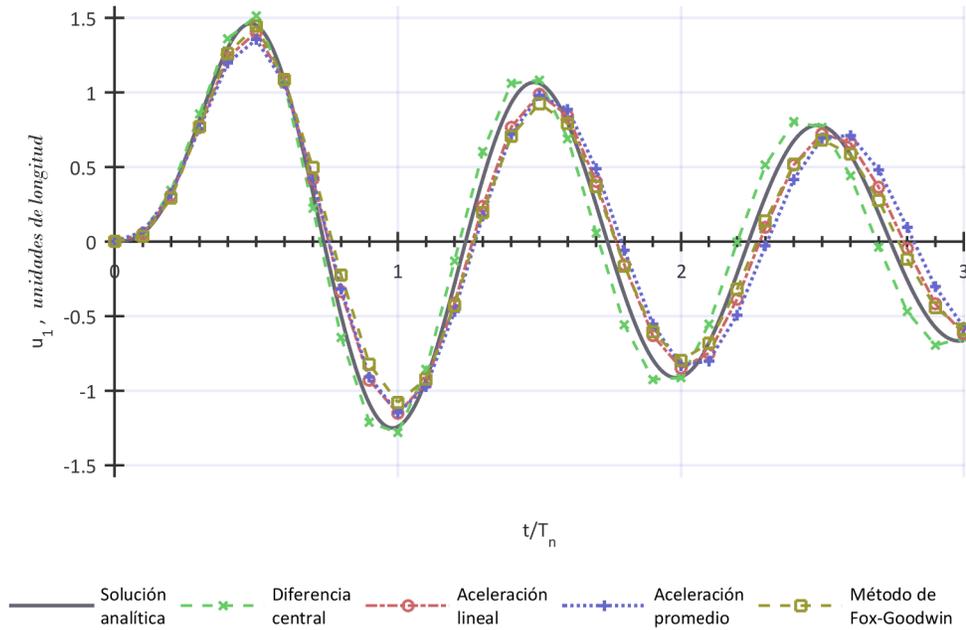


Figura 11. Salida del sistema amortiguado ($\zeta = 0.05$) mediante cuatro métodos numéricos y la solución teórica

La salida del sistema amortiguado ($\zeta = 0.05$) es la respuesta al pulso sinusoidal de medio ciclo de duración $t_d = \frac{1}{2}T_n$, se muestran en líneas discontinuas las distintas respuestas dependiendo del método numérico, en estos el incremento de tiempo fue $\Delta t = T_n/10$, y en línea continua la solución teórica.

Para el caso no amortiguado se ha estimado el periodo numérico que exhibe cada método usando la expresión del error reportada en la tabla 1. Considerando que $\Delta t = T_n/10$ el comportamiento del periodo numérico es

$$T_n^{\text{«DC»}} \approx T_n^{\text{«ana»}} \left(1 - \frac{\pi^2}{600} \right) \quad T_n^{\text{«FG»}} \approx T_n^{\text{«ana»}}$$

$$T_n^{\text{«AL»}} \approx T_n^{\text{«ana»}} \left(1 + \frac{\pi^2}{600} \right) \quad T_n^{\text{«AP»}} \approx T_n^{\text{«ana»}} \left(1 + \frac{\pi^2}{300} \right)$$

En simples palabras, con respecto al periodo natural, el periodo numérico del método de diferencia central se contrae, mientras el resto se expande, siendo el método de Fox-Goodwin el que menos cambio presenta si se habla del caso no amortiguado; si se habla del caso amortiguado, su cambio es comparable al del resto.

Como dato final, cuando se usa un paso de tiempo suficientemente pequeño se logra una buena precisión a un bajo costo computacional para los métodos clásicos de la familia de Newmark; de hecho; su precisión es de segundo orden y resulta de la elección $\gamma = \frac{1}{2}$.

2.1.3 Algoritmo para la simulación

Los códigos presentados a continuación suponen la existencia de rutinas especializadas para generar ciertas variables, ésta es una forma elegante de referir a las distintas ecuaciones antes presentadas. La excepción es la rutina *resuelveSistema*, la cual puede ser implementada de varias maneras, en el apartado *Solución de sistemas de ecuaciones con matriz tridiagonal* se exponen algunas de éstas.

Algoritmo 1: Simulación mediante el método de Newmark

Este algoritmo requiere una rutina externa para resolver el sistema $\mathbf{A}\mathbf{u}(t+\Delta t)=\mathbf{b}$.

#Se generan las matrices de rigidez, amortiguamiento y masa

1 $\mathbf{K}, \mathbf{C}, \mathbf{M} \leftarrow \text{ensamblarMatrices}(\mathbf{k}, \mathbf{c}, \mathbf{m})$

#Se construye la matriz del método de Newmark

2 $\mathbf{A} \leftarrow \text{generaMatrizDelSistema}(\mathbf{K}, \mathbf{C}, \mathbf{M}, \gamma, \beta, \Delta t)$

#Se inicializa el sistema, éste parte del reposo

3 $\mathbf{u}(t_0), \dot{\mathbf{u}}(t_0), \ddot{\mathbf{u}}(t_0) \leftarrow \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}$

#Para cada tiempo de la simulación $\{t_1, \dots, t_m\}$

4 **Para** $j = 0, \dots, m-1$

#Se prescribe el movimiento en la base, bien usando los datos de un registro o bien de la evaluación de una función

5 $\mathbf{u}_0(t_{j+1}), \dot{\mathbf{u}}_0(t_{j+1}) \leftarrow \mathbf{u}_{\text{prescrito}}(j+1), \dot{\mathbf{u}}_{\text{prescrito}}(j+1),$

#Se construye el vector de términos independientes del sistema

6 $\mathbf{b} \leftarrow \text{generaVectorDelSistema}(\mathbf{u}(t_j), \dot{\mathbf{u}}(t_j), \ddot{\mathbf{u}}(t_j), \mathbf{u}_0(t_{j+1}), \dot{\mathbf{u}}_0(t_{j+1}),$
 $\gamma, \beta, \Delta t)$

#Se actualizan los desplazamientos

7 $\mathbf{u}(t_{j+1}) \leftarrow \text{resuelveSistema}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

#Se actualizan las velocidades y aceleraciones

8 $\dot{\mathbf{u}}(t_{j+1}), \ddot{\mathbf{u}}(t_{j+1}) \leftarrow \text{generaActualización}(\mathbf{u}(t_j), \dot{\mathbf{u}}(t_j), \ddot{\mathbf{u}}(t_j), \gamma, \beta, \Delta t, \mathbf{u}(t_{j+1}))$

Fin del bucle

Tanto en el algoritmo 1 como en el algoritmo 2, la tarea más demandante dentro del bucle corresponde a la línea 7. Como se verá en el siguiente apartado, se puede resolver este sistema de ecuaciones de forma eficiente con un costo computacional de $\mathcal{O}(n)$, donde n es el número de pisos.

Si se analiza la totalidad del algoritmo, entonces la parte más demandante corresponde al bucle, el cual se ejecuta m veces, donde m es la cantidad de tiempos. Por esto, el costo computacional de ambos es de $\mathcal{O}(m \cdot n)$.

Algoritmo 2: Simulación mediante el método de diferencia central

Este algoritmo requiere una rutina externa para resolver el sistema $\mathbf{A}\mathbf{u}(t+\Delta t)=\mathbf{b}$.

#Se generan las matrices de rigidez, amortiguamiento y masa

1 $\mathbf{K}, \mathbf{C}, \mathbf{M} \leftarrow \text{ensamblarMatrices}(\mathbf{k}, \mathbf{c}, \mathbf{m})$

#Se construye la matriz del método de diferencia central

2 $\mathbf{A} \leftarrow \text{generaMatrizDelSistema}(\mathbf{C}, \mathbf{M}, \Delta t)$

#Se inicializa el sistema, éste parte del reposo

3 $\mathbf{u}(t_{-1}), \mathbf{u}(t_0) \leftarrow \mathbf{0}, \mathbf{0}$

#Para cada tiempo de la simulación $\{t_1, \dots, t_m\}$

4 **Para** $j = 0, \dots, m-1$

#Se prescribe el movimiento en la base, bien usando los datos de un registro o bien de la evaluación de una función

5 $u_0(t_j), \dot{u}_0(t_j) \leftarrow u_{\text{prescrito}}(j), \dot{u}_{\text{prescrito}}(j),$

#Se construye el vector de términos independientes del sistema

6 $\mathbf{b} \leftarrow \text{generaVectorDelSistema}(\mathbf{u}(t_{j-1}), \mathbf{u}(t_j), u_0(t_j), \dot{u}_0(t_j), \Delta t)$

#Se actualizan los desplazamientos

7 $\mathbf{u}(t_{j+1}) \leftarrow \text{resuelveSistema}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

Fin del bucle

2.1.4 Análisis de convergencia

De acuerdo a Boisvert *et al.* (2005, p. 29), un análisis de convergencia permite, por un lado, probar la validez de un código y, por el otro, conocer los límites del mismo.

Se dice que un método tiene orden de convergencia p , cuando la norma del error se comporta asintóticamente como $c(\Delta t)^p$, es decir, adopta este comportamiento cuando Δt es lo suficientemente pequeño.

El proceso de validación consiste en examinar el error obtenido al usar valores Δt cada vez más pequeños. Suponiendo que tanto Δt_i así como Δt_{i+1} son suficientemente pequeños, entonces ambos se comportan como predice su descripción asintótica. Por esto, es posible determinar experimentalmente un orden de convergencia observado \hat{p} a medida que $\Delta t \rightarrow 0$.

Para el problema abordado en esta tesis, éste se calcula como

$$\frac{\ln\left(\frac{\left\| \mathbf{u}_i^{\text{«num»}} - \mathbf{u}^{\text{«ana»}} \right\|_F}{\left\| \mathbf{u}_{i+1}^{\text{«num»}} - \mathbf{u}^{\text{«ana»}} \right\|_F}\right)}{\ln(\Delta t_i / \Delta t_{i+1})} = \hat{p}$$

Para los parámetros clásicos de Newmark $p=2$ (salvo el método de Fox-Goodwin). Si la codificación del método fue mal realizada entonces se puede obtener $\hat{p} \approx 1$, en vez del teórico esperado. Si Δt se torna demasiado pequeño, es posible que las limitaciones derivadas de la *aritmética de precisión finita* no permitan alcanzar un orden superior a 1.

2.1.5 Solución de sistemas de ecuaciones con matriz tridiagonal

La matriz del sistema que resulta del método de Newmark es una combinación lineal de las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento, es decir, de una matriz diagonal y dos matrices tridiagonales. Por este motivo la matriz del sistema es, en general, tridiagonal.

Un sistema de $n \times n$ resuelto mediante descomposición LU (o eliminación gaussiana) sin conocimiento previo de la estructura tendrá un costo computacional de $\mathcal{O}(n^3)$, sin embargo, cuando se considera que la estructura es tridiagonal (y el sistema se puede resolver sin pivoteo) el costo se reduce a $\mathcal{O}(n)$. El algoritmo que permite esto se conoce bien como TDMA (del inglés *Tri-Diagonal Matrix Algorithm*) o bien como algoritmo de Thomas³.

³ De acuerdo a Ames (1977, p. 52), el método fue descubierto de manera individual por varios autores, pero fue difundido como método de Thomas gracias al trabajo de David M. Young quien hace mención al método implementado por Llewellyn H. Thomas en un reporte técnico de 1949 para resolver problemas elípticos. Dicho método fue descrito formalmente y publicado de manera amplia en un artículo de Bruce, Peaceman, Rachford y Rice en 1953.

El TDMA utiliza una instancia particular de la factorización LU sin pivoteo, debido a que la factorización LU no es única, existen distintas versiones del algoritmo⁴. Las versiones más habituales están basadas en las descomposiciones LU-*Doolittle* y LU-*Crout*.

Con el fin de mejorar el desempeño de los algoritmos es común que estos se presenten en su versión *in situ*, es decir, sin requerir espacio de almacenamiento adicional sobrescribiendo la salida en la entrada a medida que se va ejecutando. La forma *in situ* se consigue almacenando **U** en **A** así como los vectores **y** y **x** en el vector **b**.

Para un sistema $n \times n$ cuya matriz del sistema es tridiagonal y no singular, de expresión $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, sus elementos serán denotados como

$$\begin{bmatrix} a_1^* & a_1^+ & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2^- & a_2^* & a_2^+ & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3^- & a_3^* & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}^* & a_{n-2}^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^- & a_{n-1}^* & a_{n-1}^+ \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^- & a_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

La factorización LU sin pivoteo de una matriz tridiagonal conserva dicha estructura en cada uno de sus factores y, por ello, tanto la matriz triangular superior como la triangular inferior constan de dos diagonales.

El TDMA esencialmente se divide en dos pasos: Primero realiza la descomposición LU sin pivoteo al tiempo que realiza el proceso de sustitución hacia adelante, es decir, $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ y $\mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b}$; el segundo paso consiste en resolver el sistema mediante sustitución hacia atrás, esto es, $\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y}$.

⁴ De acuerdo a Horn y Johnson (2012, p. 218), así como Higham (2002, p. 161), para matrices invertibles, existe una descomposición única LDU (sin pivoteo) —donde **L** es una matriz unitriangular inferior, **D** una matriz diagonal y **U** una matriz unitriangular superior—, si y sólo si todos sus menores principales líderes son distintos de cero.

Para matrices singulares, ésta existe y es única si y sólo si los k-ésimos menores principales líderes son distintos de cero con $k \in \{1, \dots, n-1\}$, en otro caso, la descomposición puede existir, pero no es única.

Si la matriz tiene descomposición LDU entonces se puede definir de manera única la descomposición \mathcal{LU} (sin pivoteo) imponiendo que la matriz \mathcal{L} (o \mathcal{U}) coincida con la matriz correspondiente de la descomposición LDU, esto es, que su diagonal principal conste de puros unos.

Bajo estas condiciones no hace falta hacer referencia a la matriz L , ésta queda implícita en el proceso de sustitución hacia adelante. Para denotar los elementos involucrados en la sustitución hacia atrás se usará la notación

$$\begin{bmatrix} u_1^* & u_1^+ & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2^* & u_2^+ & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^* & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-2}^* & u_{n-2}^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n-1}^* & u_{n-1}^+ \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & u_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

La versión del TDMA abordada por Ames (1977, pp. 52-53); Press *et al.* (1992, pp. 50-51), así como Morton y Mayers (2005, p. 24) puede entenderse como una instancia particular del algoritmo para resolver sistemas lineales mediante descomposición *LU-Crout*. El algoritmo 3 muestra una forma de implementarlo, en éste no se muestra u^* debido a que esta descomposición satisface $u^* = \mathbf{1}$.

Una segunda versión del TDMA puede ser consultada en Mazumder (2016, pp. 112-113); Süli y Mayers (2003, pp. 94-95), así como Quarteroni, Sacco y Saleri (2007, pp. 93-94), y puede ser entendida como una instancia particular del algoritmo para resolver sistemas lineales mediante descomposición *LU-Doolittle*. El algoritmo 4 muestra una forma de implementarlo, en éste no se muestra u^+ debido a que éste coincide con a^+ .

Una tercera versión se desarrolló para la presente tesis, la cual sirve de justificación para las relaciones de recurrencia presentadas en el capítulo 3. A diferencia de las descomposiciones *LU-Crout* y *LU-Doolittle*, en ésta no se exige una matriz unitriangular; en vez de ello se pide que $y = L^{-1}b$ sea un vector con todos sus elementos iguales a uno. Por este motivo se hace referencia a ésta como versión *ad hoc*, pues la descomposición es distinta si b es distinta, o dicho de otro modo, la descomposición es *ad hoc* para b . Esta tercera forma del TDMA puede no ser aplicable para resolver el sistema

aun cuando los algoritmos 3 y 4 si lo sean, por ejemplo, el algoritmo 5 no es aplicable cuando el primer elemento de \mathbf{b} es cero⁵.

El algoritmo 5 muestra la implementación de esta tercera forma; en éste; el vector \mathbf{y} no se indica pues corresponde al vector $\mathbf{1}$.

Algoritmo 3: TDMA - Versión Crout

Versión en la cual la matriz triangular superior (U) es unitriangular, es decir, los elementos de la diagonal principal de U son 1

#Descomposición y sustitución hacia adelante

$$1 \quad y_1 \leftarrow \frac{b_1}{a_1^*}$$

$$2 \quad u_1^+ \leftarrow \frac{a_1^+}{a_1^*}$$

3 **Para** $i = 2, \dots, n-1$

$$4 \quad \left| \quad y_i \leftarrow \frac{b_i - a_i^- \cdot y_{i-1}}{a_i^* - a_i^- \cdot u_{i-1}^+} \right.$$

$$5 \quad \left. \quad u_i^+ \leftarrow \frac{a_i^+}{a_i^* - a_i^- \cdot u_{i-1}^+} \right.$$

Fin del bucle

$$6 \quad y_n \leftarrow \frac{b_n - a_n^- \cdot y_{n-1}}{a_n^* - a_n^- \cdot u_{n-1}^+}$$

#Sustitución hacia atrás

$$7 \quad x_n \leftarrow y_n$$

8 **Para** $i = n-1, \dots, 1$

$$9 \quad \left| \quad x_i \leftarrow y_i - u_i^+ \cdot x_{i+1} \right.$$

Fin del bucle

⁵ Se puede definir la descomposición LU-*Ad hoc* de la matriz no singular \mathbf{A} como el par de matrices $(\mathbf{L}^*, \mathbf{U}^*)$ tal que $\mathbf{L}^* \mathbf{U}^* = \mathbf{A}$ y $[\mathbf{L}^*]^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Donde \mathbf{L}^* es una matriz triangular inferior, \mathbf{U}^* una matriz triangular superior y $\mathbf{1}$ el vector “todos unos”, un vector cuyos elementos son todos unos.

Si la descomposición LU-*Ad hoc* existe, entonces satisface las siguientes expresiones.

- $\mathbf{L}^* = \mathbf{L} \text{diag}(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{b})$
- $\mathbf{U}^* = [\text{diag}(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{b})]^{-1} \mathbf{D} \mathbf{U}$

Donde \mathbf{L} , \mathbf{D} y \mathbf{U} son las matrices de la descomposición LDU sin pivoteo y *diag* es una función matricial cuyo resultado es una matriz diagonal con los elementos del vector en la diagonal de ésta.

Para que la descomposición LU-*Ad hoc* de la matriz \mathbf{A} exista entonces debe existir la descomposición LDU sin pivoteo y, adicionalmente, los elementos del vector $\mathbf{p} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b}$ deben ser distintos de cero.

Algoritmo 4: TDMA - Versión Doolittle

Versión en la cual la matriz triangular inferior (L) es unitriangular, es decir, los elementos de la diagonal principal de L son 1

#Descomposición y sustitución hacia adelante

1 $y_1 \leftarrow b_1$

2 $u_1^* \leftarrow a_1^*$

3 **Para** $i = 2, \dots, n$

4 $y_i \leftarrow b_i - \frac{a_i^- \cdot y_{i-1}}{u_{i-1}^*}$

5 $u_i^* \leftarrow a_i^* - \frac{a_i^- \cdot a_{i-1}^+}{u_{i-1}^*}$

Fin del bucle

#Sustitución hacia atrás

6 $x_n \leftarrow \frac{y_n}{u_n^*}$

7 **Para** $i = n-1, \dots, 1$

8 $x_i \leftarrow \frac{y_i - a_i^+ \cdot x_{i+1}}{u_i^*}$

Fin del bucle

Todos estos algoritmos requieren realizar de forma implícita una descomposición LU sin pivoteo, lo cual sólo es posible si la matriz admite descomposición LDU sin pivoteo. Para que una matriz invertible tenga descomposición LDU sin pivoteo es condición suficiente que dicha matriz sea diagonal estrictamente dominante o definida positiva.

Si bien el sistema formado por el método de Newmark es tridiagonal, aún se debe garantizar que es susceptible de ser resuelto por el TDMA. De acuerdo a Meirovitch (1980, pp. 36-37) y Chopra (2020, p. 602) derivado de que la energía cinética es una función definida positiva, la matriz de masa **M** también lo es. La energía potencial debida a las fuerzas restauradoras en general es una función semidefinida positiva, sin embargo, las estructuras de ingeniería civil están soportadas, por lo cual no es posible el movimiento de cuerpo rígido (que tiene energía potencial nula) y, por tanto, la matriz de rigidez **K** también es definida positiva. La energía disipada no puede ser negativa (no se gana energía), así que cuando menos la matriz de amortiguamiento **C** es semidefinida positiva. En estructuras reales **C** también es definida positiva, pues siempre hay pérdida de energía.

Algoritmo 5: TDMA - Versión Ad hoc

Versión en la cual la sustitución hacia adelante conduce a un vector “todos uno”, es decir, los elementos del vector $\mathbf{y}=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$ son 1

#Descomposición y sustitución hacia adelante

$$\begin{array}{l} 1 \quad u_1^* \leftarrow \frac{a_1^*}{b_1} \\ 2 \quad u_1^+ \leftarrow \frac{a_1^+}{b_1} \\ 3 \quad \text{Para } i = 2, \dots, n-1 \\ 4 \quad \left| \quad u_i^* \leftarrow \frac{a_i^* \cdot u_{i-1}^* - a_i^- \cdot u_{i-1}^+}{b_i \cdot u_{i-1}^* - a_i^-} \right. \\ 5 \quad \left| \quad u_i^+ \leftarrow \frac{a_i^+ \cdot u_{i-1}^*}{b_i \cdot u_{i-1}^* - a_i^-} \right. \\ \quad \text{Fin del bucle} \\ 6 \quad u_n^* \leftarrow \frac{a_n^* \cdot u_{n-1}^* - a_n^- \cdot u_{n-1}^+}{b_n \cdot u_{n-1}^* - a_n^-} \end{array}$$

#Sustitución hacia atrás

$$\begin{array}{l} 7 \quad x_n \leftarrow \frac{1}{u_n^*} \\ 8 \quad \text{Para } i = n-1, \dots, 1 \\ 9 \quad \left| \quad x_i \leftarrow \frac{1 - u_i^+ \cdot x_{i+1}}{u_i^*} \right. \\ \quad \text{Fin del bucle} \end{array}$$

Lo anterior garantiza que la matriz del sistema formado por el método de Newmark es definida positiva, pues se trata de una combinación lineal no negativa con al menos una matriz definida positiva⁶. En conclusión, el sistema formado por el método de Newmark se resuelve de manera eficiente mediante el TDMA.

⁶ Esto es consecuencia de la siguiente observación:

Sea $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ matrices semidefinidas positivas y sea $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ números reales no negativos. Entonces $\sum \alpha_j \mathbf{A}_j$ es semidefinida positiva. Si existe un $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_k > 0$ y \mathbf{A}_k es definida positiva, entonces $\sum \alpha_j \mathbf{A}_j$ es definida positiva. Puede consultar la prueba de esta observación en Horn y Johnson (2012, p. 430).

2.2 Simulación mediante IDFT a partir de las FRF

Cuando se trata con sistemas lineales e invariantes en el tiempo, es posible obtener la solución de las ecuaciones gobernantes mediante la transformada de Fourier y su transformada inversa, sin embargo, en la práctica no se usan éstas, sino sus versiones discretas.

Las versiones discretas de la transformada de Fourier y su inversa son más adecuadas para una implementación numérica y poseen prácticamente las mismas propiedades que las versiones continuas, salvo una: la propiedad de convolución. En la versión discreta la propiedad de convolución se sustituye por la de convolución circular.

Como se verá en el siguiente capítulo, las FRF se diseñan suponiendo la versión continua de transformada y se calculan para un conjunto discreto de frecuencias. Para cuestiones de simulación esto es relevante, pues utilizar una versión discreta de transformada con una versión continua de la FRF trae consigo ciertos efectos, los cuales serán abordados en este apartado.

2.2.1 Consideraciones sobre el análisis de Fourier

En este apartado se revisan algunos aspectos relevantes del análisis de Fourier concernientes a la simulación mediante el uso de las FRF. Para esto, se parte de las definiciones sin normalizar de la transformada de Fourier (FT del inglés *Fourier Transform*), la transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT del inglés *Discrete-Time Fourier Transform*) y la transformada discreta de Fourier (DFT del inglés *Discrete Fourier Transform*). El apartado finaliza con algunas observaciones sobre el proceso de llenado con ceros (mejor conocido como *Zero-Padding*), así como del fenómeno de traslapamiento (mejor conocido como fenómeno de *Aliasing*).

Para la discusión de estos conceptos conviene distinguir entre funciones muestreadas y la secuencia que se construye con dichas muestras. Para construir una función muestreada se multiplica la función original por un tren de impulsos. Cada impulso está separado uno de otro por una cantidad constante de tiempo Δt y uno de estos impulsos acontece en $t=0$. Matemáticamente esto se expresa como

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) \delta(t - t_n)$$

donde $t_n = n\Delta t$.

Suponiendo una función de duración finita, la secuencia que se construye con los tiempos muestreados es

$$\{x(t_n)\}_{n=L, \dots, M} = \{x(t_L), x(t_{L+1}), x(t_{L+2}), \dots, x(t_{M-2}), x(t_{M-1}), x(t_M)\}$$

La convención de transformada y transformada inversa de Fourier adoptadas en esta tesis están dadas por

Transformada de Fourier	Transformada inversa de Fourier
$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ $= \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$	$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$ $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

Si la FT recibe por argumento la función muestreada entonces se conoce como DTFT y la inversa de éste es conocida como IDTFT, las expresiones que permiten su cálculo son

DTFT $[x_s(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}[x_s(t)]$	IDTFT $[X(\omega)] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$
$X(\omega) = \mathcal{F}[x_s(t)]$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-i\omega t_n}$	$x(t_n) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$ $= \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{2\pi/\Delta t} X(\omega) e^{i\omega t_n} d\omega$

La DTFT al igual que la FT conduce a un espectro continuo, sin embargo, a diferencia de la FT el espectro de la DTFT es una función periódica en la frecuencia con periodo $2\pi/\Delta t$; es decir,

$$X^{\text{«DTFT»}}(\omega) = X^{\text{«DTFT»}}\left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta t}\right) \quad \text{para} \quad -\infty < \omega < \infty$$

Por ello, la integración requerida en la IDTFT se puede realizar sobre cualquier segmento de longitud $2\pi/\Delta t$.

La relación que existe entre los espectros de ambas transformadas es

$$X^{\text{«DTFT»}}(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X^{\text{«FT»}}\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t}n\right)$$

Es decir, la $X^{\text{«DTFT»}}(\omega)$ consiste en un número infinito de réplicas del espectro $X^{\text{«FT»}}(\omega)$, colocadas a intervalos de $2\pi/\Delta t$ en el eje ω , como se ilustra en la figura 12. Considerando que la frecuencia de muestreo es $\omega_s = 2\pi/\Delta t$, si $X^{\text{«FT»}}(\omega)$ está limitada en banda con un ancho de banda ω_c y Δt se elige lo suficientemente pequeño como para satisfacer que $\omega_s > 2\omega_c$, entonces el espectro $X^{\text{«DTFT»}}(\omega)$ es una copia de $X^{\text{«FT»}}(\omega)$ (escalada por $1/\Delta t$) en la banda base. El caso límite $\omega_s = 2\omega_c$ se denomina frecuencia de muestreo de Nyquist. Siempre que el muestreo se realice por encima de ésta no se producirá distorsión por *aliasing* espectral, es decir, la banda base del espectro no se superpondrá con las réplicas.

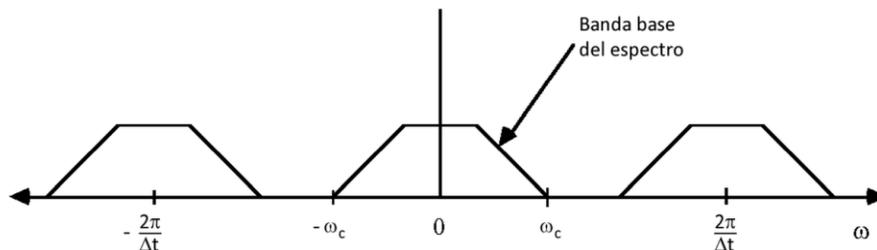


Figura 12. Espectro de la DTFT entendida como réplicas del espectro de la FT

Una función limitada en banda que es muestreada por encima de la frecuencia de muestreo de Nyquist no produce *aliasing* espectral. Adaptado de Jenkins (2003, Cap. 4)

De acuerdo a Kamen (2011) en la práctica, $X^{\text{«DTFT»}}(\omega)$ se calcula sólo para un conjunto discreto de frecuencias. Esto es posible bajo la suposición de que la función es periódica en el tiempo (repitiéndose cada N muestras) y haciendo uso de la DFT de N puntos. La definición de ésta y su transformada inversa se presentan a continuación.

$\text{DFT}[\{x(t_n)\}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}[\{x(t_n)\}]$	$\text{IDFT}[\{X(\omega_k)\}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}[\{X(\omega_k)\}]$
$X(\omega_k) = \mathcal{F}[\{x(t_n)\}]$ $= \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{-i\omega_k t_n}$ $= \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{-i2\pi \frac{kn}{N}}$	$x(t_n) = \mathcal{F}^{-1}[\{X(\omega_k)\}]$ $= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\omega_k) e^{i\omega_k t_n}$ $= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\omega_k) e^{i2\pi \frac{kn}{N}}$

donde $\omega_k = 2\pi \frac{k}{N\Delta t}$.

La DFT de una secuencia $\{x(t_n)\}_{n=0,\dots,N-1}$ es otra secuencia definida (por convención) en el intervalo de 0 a $2\pi/\Delta t$. El espectro de la DFT al igual que el de la DTFT es periódico, pero en la práctica se restringe su dominio a los primeros N elementos.

La DTFT de una función muestreada que se repite cada N muestras puede expresarse a partir de la DFT de la siguiente manera

$$X(\omega^p) = \mathcal{F}[x_s^p(t)]$$

$$= \sum_{k=0}^{P-1} X^{\text{«DFT»}}(\omega_k^p) \delta(\omega - \omega_k^p) \quad \text{para} \quad 0 \leq \omega^p < \frac{2\pi}{\Delta t}$$

aquí, $x_s^p(t)$ es una señal periódica y continua, de la forma de una función muestreada

$$x_s^p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^p(t_n) \delta(t - t_n)$$

Sin embargo $X^{\text{«DFT»}}(\omega_k^p)$ es una secuencia y resulta de aplicar la DFT a la secuencia

$$\{x(t_n)\}_{n=0,\dots,N-1} = \{x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{N-3}), x(t_{N-2}), x(t_{N-1})\}$$

es decir, sobre la secuencia que se construye tomando los primeros N elementos.

Para el desarrollo de esta tesis es relevante mostrar las implicaciones de adicionar ceros a la secuencia (*Zero-Padding*). Considérese una secuencia de P elementos con $P \geq N$, donde los primeros N elementos corresponden a la secuencia $\{x(t_n)\}_{n=0,\dots,N-1}$ y el resto son ceros, es decir

$$\{x(t_n)\}_{n=0,\dots,P-1} = x(t_0), \dots, x(t_{N-1}), 0, \dots, 0$$

Suponiendo que esta secuencia describe a una función periódica muestreada, el ingreso de ceros provocará que la función periódica demore más en tiempo en repetirse. Cuando $P \rightarrow \infty$ la función será precedida por una infinidad de ceros pues se ha supuesto periódica, por otro lado, una función de periodo infinito es, en esencia, una función aperiódica. Por tanto, el ingresar una infinidad de ceros en la secuencia se traduce en una función causal de duración finita con N muestras relevantes, es decir

$$x_s^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) \delta(t - t_n)$$

al aplicar la DTFT sobre ésta se obtiene

$$\begin{aligned} X^*(\omega) &= \mathcal{F}[x_s^*(t)] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{-i\omega t_n} \end{aligned}$$

expresión claramente parecida a la que define la DFT, salvo por su naturaleza continua.

Una forma más práctica de entender la conexión que existe entre el espectro de una señal discreta y la misma con *Zero-Padding*, es la presentada por (Smith, 2003, p. 177), la cual resulta de la siguiente relación

$$\text{DFT}[\text{ZeroPad}(\{x(t_n)\}, P)] = \text{Interp}(\text{DFT}[\{x(t_n)\}], P)$$

donde *ZeroPad* es la función que rellena de ceros hasta completar P elementos y *Interp* es la función de interpolación ideal de banda limitada de un espectro, el cual toma un espectro e interpola (y también extrapola) P valores en el rango de 0 a $2\pi/\Delta t$, tornándose una función continua para el caso límite $P \rightarrow \infty$.

De acuerdo a Smith (2003, pp. 97-139), también es posible interpretar a la DFT como una operación de producto interno que calcula el coeficiente de la proyección de un vector $\{x(t_n)\}$, sobre el vector de una senoide compleja $\{e^{i\omega_k t_n}\}$. Como tal $X(\omega_k)$ es una medida de la amplitud y fase de una senoide compleja de cierta frecuencia contenida en la señal. Esta interpretación resulta interesante, pues permite visualizar a la DFT como una matriz de cambio de base y el espectro de la señal como la forma alternativa que adopta ésta en una base distinta.

Como consecuencia de esto, el espectro de la DFT es una representación íntegra de la señal en virtud de las sinusoides que se usaron como base y, por tanto, es posible trabajar con esta nueva representación (cumpliéndose la mayoría de las propiedades de la FT) y regresar al dominio del tiempo sin error alguno.

Por lo anterior, el fenómeno de *aliasing* espectral, así como el derrame o fuga espectral (*spectral leakage*) deberán entenderse como el precio pagado por estimar el espectro de la FT usando el espectro de la DTFT vía DFT.

Finalmente, se debe señalar que toda función muestreada que es llevada a un dominio transformado es susceptible de manifestar el fenómeno de *aliasing*. Por ello, la aplicación de la IDFT también puede exponerla, en cuyo caso se denomina *aliasing* temporal (Amidror, 2013, pp. 134-136).

2.2.2 *Proceso de simulación*

El proceso de simulación a partir de las FRF consta de tres pasos.

1. Se calcula el espectro de la entrada: Para esto, dado un registro de tiempo con el movimiento prescrito (por ejemplo, un registro sísmico) se añaden ceros en él hasta completar el tiempo de simulación deseado y, a continuación, se utiliza la DFT para obtener su espectro.
2. Se calcula el espectro de la salida: Después del cálculo de la FRF, haciendo uso del teorema de convolución, se calcula éste multiplicando el espectro de la entrada por la FRF.
3. Se obtiene la respuesta del sistema en el dominio del tiempo: Esto se logra mediante la aplicación de la IDFT en el espectro de la salida.

Para fines de simulación, de poco sirve tener una representación fidedigna de los espectros en el dominio de la frecuencia pues, estrictamente hablando, se manipulan las señales en el dominio transformado de la DFT, el cual puede ser referido como *frecuencias-DFT*, designación que alude a las frecuencias de las sinusoides usadas como base.

Por esto, el primer paso se puede realizar sin lidiar con el fenómeno de *aliasing* espectral (o con *leakage*), pues se irá del dominio del tiempo al de las *frecuencias-DFT* y de regreso. De hecho, mejorar la representación en frecuencias (es decir, buscar que el espectro DFT se parezca lo más posible al espectro FT), no reduce de forma apreciable el error de la simulación. Esto se muestra en las figura 13 y 14, la primera corresponde a la entrada del sistema y ejemplifica la reducción del fenómeno de *aliasing* espectral (lo cual se logra aumentando la tasa de muestreo), mientras que la segunda corresponde a su salida; el sistema es de un modelo SDOF con fracción de amortiguamiento $\zeta = 5\%$.

Si bien los fenómenos de *aliasing* espectral y *leakage* no tienen un impacto directo sobre la simulación, sí lo puede tener la elección del Δt . Un Δt pequeño permite alcanzar frecuencias más altas, por esto, si se busca simulaciones de alta precisión es conveniente considerar las aportaciones de éstas.

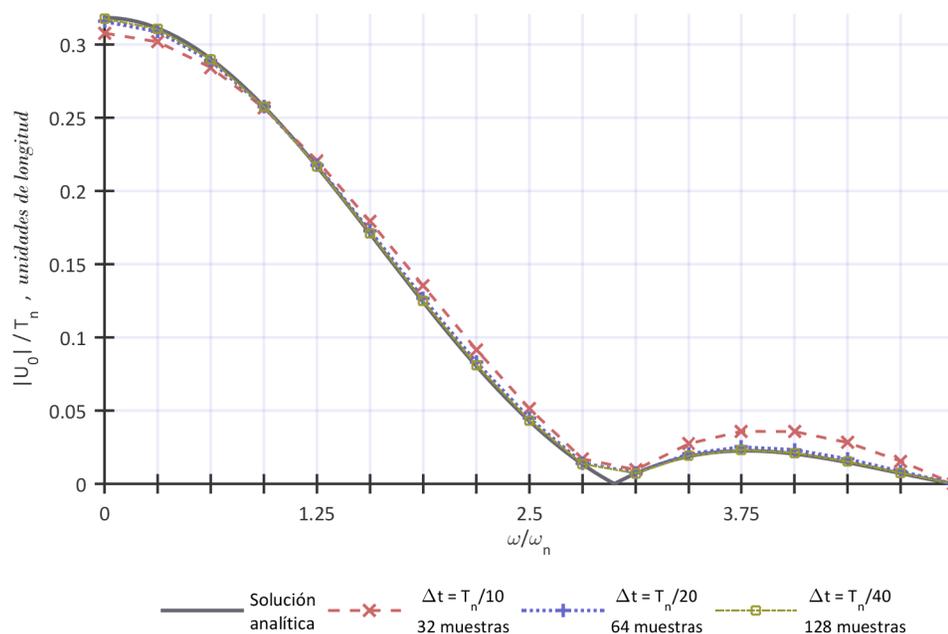


Figura 13. Disminución del fenómeno de aliasing espectral mediante el aumento de la tasa de muestreo

Al aumentar la tasa de muestreo se reduce la distorsión producida por aliasing espectral, se muestran en líneas discontinuas la estimación de la FT a partir de la DFT y en línea continua la solución teórica

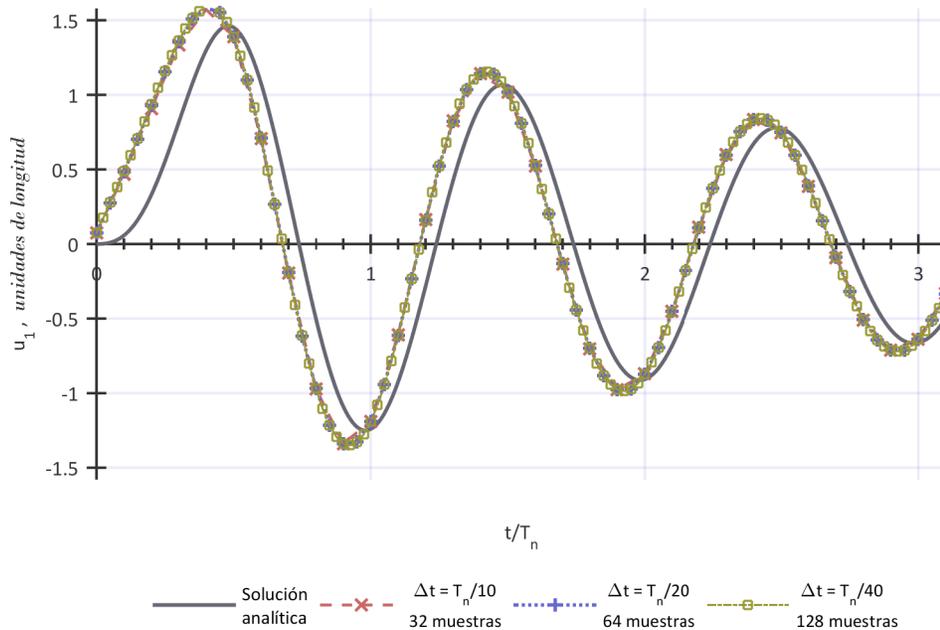


Figura 14. Respuesta obtenida al considerar diferentes tasas de muestreo

La respuesta del sistema al pulso sinusoidal de medio ciclo de duración $t_d = \frac{1}{2}T_n$, ha sido calculado considerando diferentes tasas de muestreo pero manteniendo el tiempo de observación igual ($N \cdot \Delta t = 3.2 T_n$). Se muestran en líneas discontinuas el resultado de la simulación y en línea continua la solución teórica.

En lo que respecta al segundo paso del proceso de simulación, debido a la propiedad de periodicidad implícita de la DFT, la causalidad de la señal de entrada se torna borrosa, pues se ha supuesto implícitamente periódica. Como consecuencia de esto, la propiedad de convolución lineal de la FT se convierte en la propiedad de convolución circular en la DFT.

Lo anterior, a su vez, provoca que el producto del espectro de la entrada por la FRF (es decir, el espectro de la salida) pueda manifestar empalmes cuando se transforma al dominio del tiempo. Esto sucederá si la ocurrencia de las réplicas tiene un periodo menor que el tiempo requerido para la correcta reconstrucción de la señal de salida, fenómeno conocido como *aliasing* temporal.

Acorde al punto anterior, el último paso muestra una complicación. El modelo abordado en esta tesis contempla amortiguamiento viscoso y, en teoría, la respuesta de la estructura continúa por siempre, aunque con amplitudes infinitesimalmente pequeñas (Chopra, 2020, p. 56). Debido a que la reconstrucción de la señal requiere un tiempo de simulación infinito y sólo se pretende simular un tiempo finito, cuando se utilice la IDFT se exhibirá el fenómeno de *aliasing* temporal.

En la figura 15 se muestra el espectro de la salida de un modelo SDOF con fracción de amortiguamiento $\zeta = 5\%$, la entrada fue un pulso sinusoidal de medio ciclo de duración $t_d = \frac{1}{2}T_n$ con incremento de tiempo $\Delta t = T_n/10$. Las distintas gráficas fueron calculadas con la misma señal de entrada, pero con diferente duración en el registro (rellenando de ceros al final del registro), lo cual se traduce como un aumento de la tasa de muestreo en la frecuencia. La figura 16 muestra el resultado de aplicar la IDFT a estos espectros, semejante a lo que ocurre con el *aliasing* espectral, el aumentar la tasa de muestreo en frecuencia reduce el fenómeno de *aliasing* temporal.

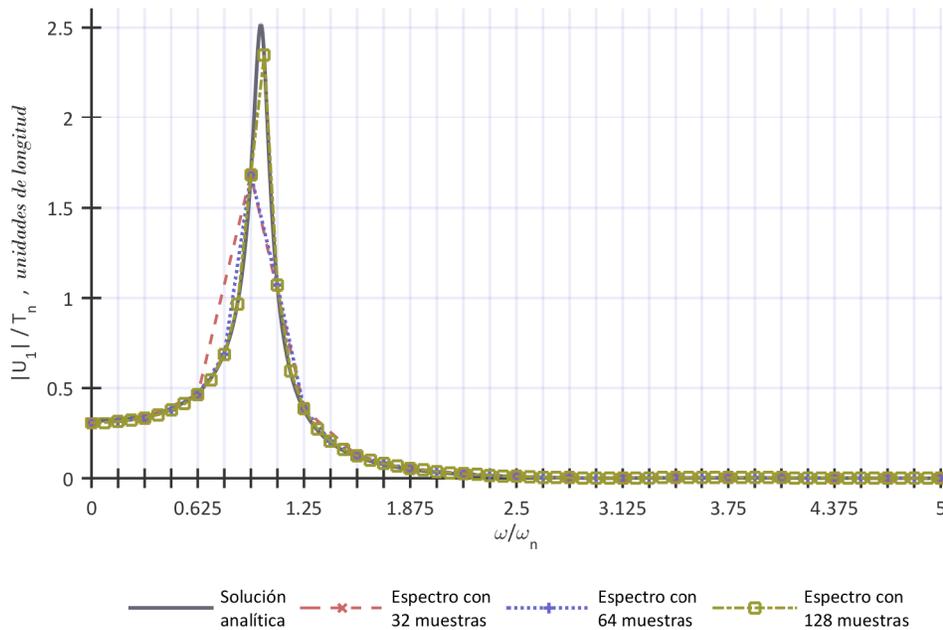


Figura 15. Respuesta en el dominio de la frecuencia considerando registros con Zero-Padding

La respuesta en frecuencia corresponde al producto del espectro de la entrada con la FRF.

El efecto de mantener el incremento de tiempo constante ($\Delta t = T_n/10$) y extender el tiempo del registro se traduce en un muestreo mayor del espectro.

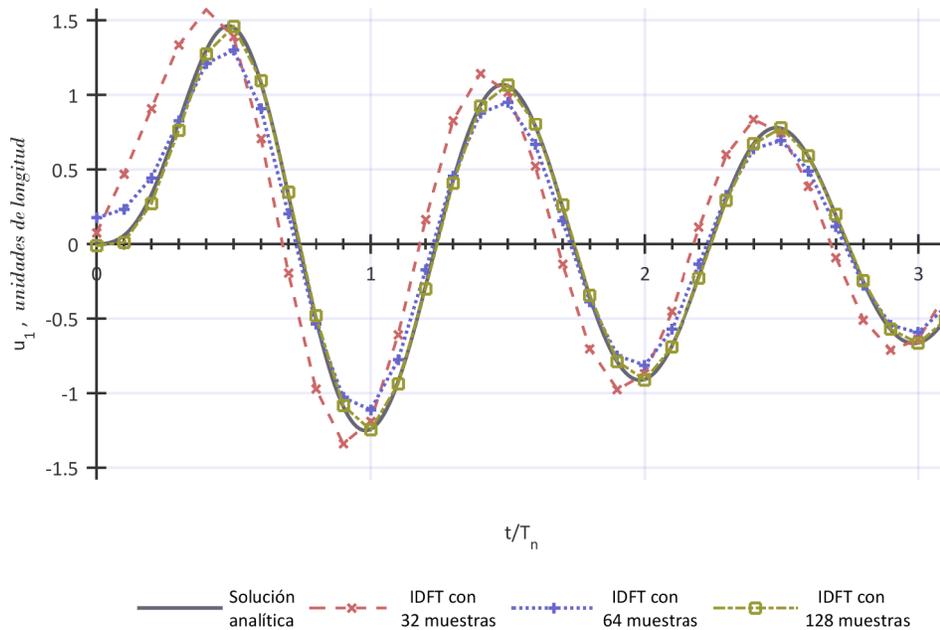


Figura 16. Respuesta en el dominio del tiempo considerando registros con Zero-Padding

Al aumentar el tamaño del registro mediante Zero-Padding se reduce la distorsión producida por aliasing temporal en la simulación. Se muestran en líneas discontinuas el resultado de la simulación y en línea continua la solución teórica.

2.2.3 Precisión del método

Limitando el análisis al tiempo de simulación, sólo las repeticiones (implícitas) ocurridas antes de la simulación contribuyen al error por *aliasing* temporal, en éste, la contribución más importante corresponde al solapamiento de la repetición inmediata anterior. La figura 17 muestra este hecho, obsérvese que se ha usado la solución analítica para calcular los solapamientos derivados de las repeticiones, como se puede notar, la respuesta es idéntica a la que se manifiesta por el fenómeno de *aliasing* temporal cuando se aplica la IDFT.

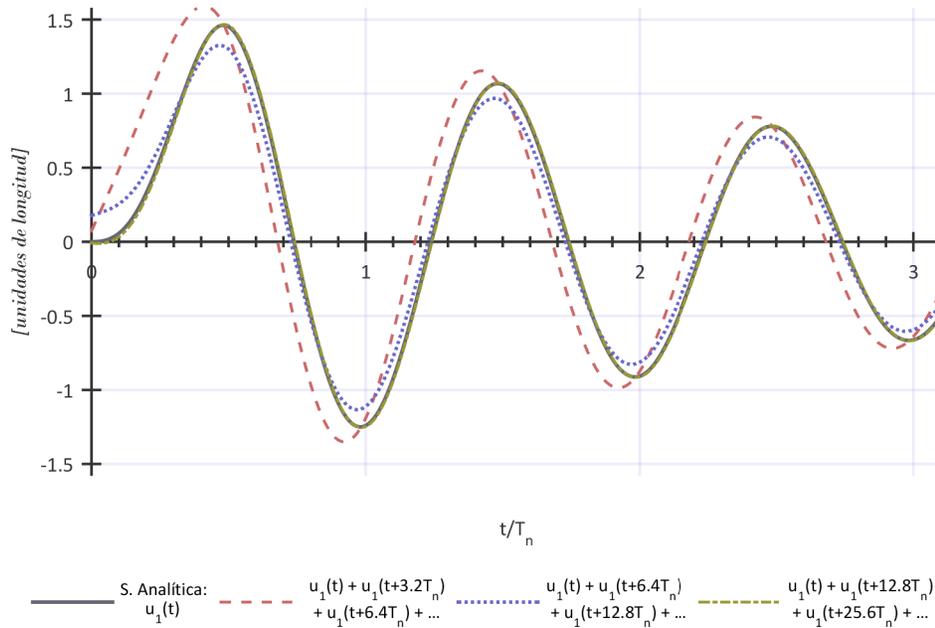


Figura 17. Respuesta contaminada mediante repeticiones de la misma

La salida del sistema amortiguado ($\zeta = 5\%$) es la respuesta al pulso sinusoidal de medio ciclo de duración $t_d = \frac{1}{2}T_n$. Se muestra en línea continua la solución teórica y en líneas discontinuas el efecto de superponer repeticiones de ésta sobre sí misma.

El error por *aliasing* temporal, definido como la diferencia entre la señal contaminada por las réplicas y la señal real, tiene un comportamiento oscilatorio alrededor de cero, véase figura 18. Debido a ese comportamiento oscilatorio, el error puede ser cero en múltiples ocasiones sin que esto garantice su reducción, lo que si lo garantiza la reducción del error es que la envolvente de dicho error tienda a cero.

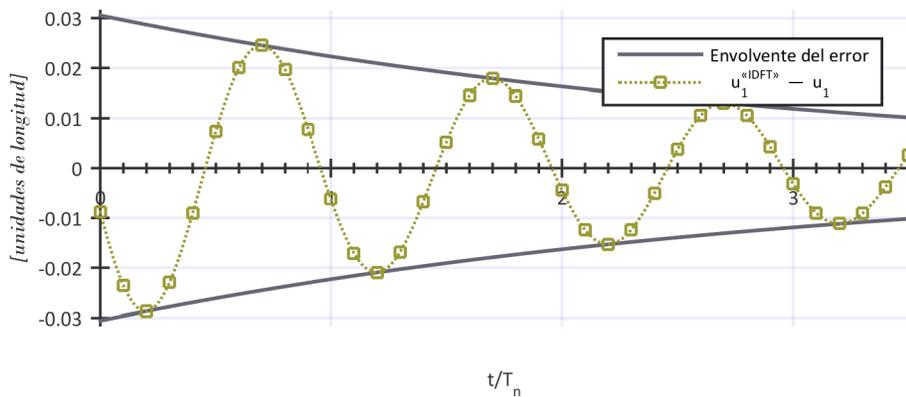


Figura 18. Error por aliasing temporal

El error en la simulación mediante IDFT tiene un comportamiento oscilatorio, este error es consecuencia de la superposición de las repeticiones (implícitas) de la señal. Se muestra en línea continua la envolvente del error, si el error de la simulación disminuye entonces la amplitud de la envolvente también lo hará.

Mediante el análisis de la envolvente, se puede definir una cota del error provocado por el *aliasing* temporal. Esto se expresa matemáticamente como

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{Envel}\left(u^{\text{«IDFT»}}(t) - u^{\text{«ana»}}(t)\right)}{\text{Envel}\left(u^{\text{«ana»}}(t)\right)} &= \frac{\text{Envel}\left(\sum_{m=0}^{\infty} u^{\text{«ana»}}(t + mN\Delta t) - u^{\text{«ana»}}(t)\right)}{\text{Envel}\left(u^{\text{«ana»}}(t)\right)} \\
 &= \frac{\text{Envel}\left(u^{\text{«ana»}}(t + N\Delta t) + u^{\text{«ana»}}(t + 2N\Delta t) + u^{\text{«ana»}}(t + 3N\Delta t) + \dots\right)}{\text{Envel}\left(u^{\text{«ana»}}(t)\right)} \\
 &\approx \frac{\text{Envel}\left(u^{\text{«ana»}}(t + N\Delta t)\right)}{\text{Envel}\left(u^{\text{«ana»}}(t)\right)}
 \end{aligned}$$

Donde *Envel* descarta las oscilaciones y retorna la función envolvente. La expresión aproximada se justifica porque considera lo que es, por mucho, la aportación más importante al error en este procedimiento.

El caso más sencillo de analizar corresponde a un modelo SDOF subamortiguado en vibración libre, la solución general de éste en términos de las contribuciones de amplitud y fase es (Cimellaro y Marasco, 2018, p. 23)

$$u_1(t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_D t + \phi)$$

En este caso, la cota de error se aproxima por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{Envel}\left(u^{\text{«IDFT»}}(t) - u^{\text{«ana»}}(t)\right)}{\text{Envel}\left(u^{\text{«ana»}}(t)\right)} &\approx \frac{\text{Envel}\left(u^{\text{«ana»}}(t + N\Delta t)\right)}{\text{Envel}\left(u^{\text{«ana»}}(t)\right)} \\
 &\approx \frac{Ce^{-\zeta\omega_n(t+N\Delta t)}}{Ce^{-\zeta\omega_n t}} \\
 &\approx e^{-\zeta\omega_n N\Delta t}
 \end{aligned}$$

Es decir, el error por *aliasing* temporal es a lo sumo una fracción de la curva envolvente de la respuesta y esa fracción puede ser tan pequeña como se requiera con sólo aumentar *N*.

Lo anterior es válido sólo para modelos amortiguados. Para modelos no amortiguados, la expresión revela que el error no se reduce; de hecho, el error es mucho mayor de lo predicho por la aproximación. En un modelo no amortiguado todas las réplicas aportan significativamente al error, por lo que la aproximación no es válida.

Las siguientes observaciones siguen siendo válidas en sistemas MDOF amortiguados

1. Mientras más grande el amortiguamiento, menor contaminación por *aliasing* temporal.
2. Mientras más largo el tiempo de simulación, mayor reducción del *aliasing* temporal.

La respuesta de los sistemas MDOF es una superposición de distintas componentes sinusoidales, algunas decaen más rápido y otras más lento. Por lo antes expuesto, el decaimiento más lento es el que determina el desempeño de este enfoque.

2.2.4 Algoritmo para la simulación

En el algoritmo 6 los arreglos de datos se representan encerrando entre llaves los nombres de estos, si el nombre posee un subíndice significa que pertenece a una colección de arreglos. Por ejemplo, la colección de las FRF, es una colección de n arreglos, todos con la misma cantidad de frecuencias. Adicionalmente se podrá representar un arreglo de datos listando los elementos de este, por ejemplo {0,1,2,3}.

La mayoría de las rutinas requeridas por el algoritmo 6 suelen estar incluidas en los lenguajes modernos, o bien, se encuentran en bibliotecas especializadas. La única excepción es *generaFRF*, la cual será expuesta en el capítulo 3.

De acuerdo a Chu (2008, p. 375) al igual que Brigham (1988, p. 8) tanto la FFT como la IFFT son implementaciones óptimas de la DFT y la IDFT respectivamente, éstas operan usualmente con una cantidad de datos m igual a una potencias de dos, aunque existen algoritmos donde m puede ser un número compuesto. El costo computacional de las versiones optimas es de $\mathcal{O}(m \log m)$.

Algoritmo 6: Simulación mediante IDFT a partir de las FRF

Este algoritmo requiere una rutina externa para generar las FRF

#Se rellena el registro con ceros hasta completar el tiempo de simulación deseado, para fines de optimización, la cantidad total de elementos debe ser igual a una potencia de dos

$$1 \quad \{u_0\} \leftarrow \text{ZeroPad}(\{\text{registro}\}, m)$$

#Se construye el espectro-DFT de la entrada

$$2 \quad \{U_0\} \leftarrow \text{FFT}(\{u_0\})$$

#Se crea el vector de frecuencias-DFT. En virtud de la simetría del espectro, no hace falta considerar las frecuencias negativas

$$3 \quad \{\omega\} \leftarrow \frac{2\pi}{m\Delta t} \{0, 1, \dots, \frac{1}{2}m\}$$

#Se calculan las FRF

$$4 \quad [\{H_1\} \quad \dots \quad \{H_N\}] \leftarrow \text{generaFRF}(\{\omega\}, \{k\}, \{c\}, \{m\})$$

#Se calculan los desplazamientos para cada piso $\{u_1, \dots, u_n\}$

$$5 \quad \text{Para } j = 1, \dots, n$$

#Se calcula la respuesta del piso debido al movimiento del terreno en el dominio de las frecuencias-DFT. Se fuerza la simetría del espectro

$$6 \quad \{U_j\} \leftarrow \text{generaSimetríaHermitiana}(\{H_j\} \cdot \{U_0\})$$

#Se obtiene la respuesta en el dominio del tiempo

$$7 \quad \{u_j\} \leftarrow \text{IFFT}(\{U_j\})$$

Fin del bucle

La parte más demandante del código es el bucle, y en éste, la rutina IFFT. Debido a que el bucle se ejecuta n veces (donde n es el número de pisos), y en cada iteración se llama a la rutina IFFT con m elementos (donde m es el número de tiempos a simular), se concluye que el costo computacional del algoritmos es $\mathcal{O}(m \log m \cdot n)$.

En algunos lenguajes de programación se tienen implementaciones que resuelven la línea 6 y la línea 7 con la misma rutina. Ejemplos de estos son la rutina *irfft* de NumPy así como la función *ifft* de Matlab bajo la especificación '*symmetric*'.

2.2.5 Análisis de convergencia

Para mostrar que el error decae exponencialmente se ha utilizado la curva envolvente, sin embargo, también se puede realizar mediante el análisis del valor cuadrático medio.

El concepto que permite esto es conocido como *valor eficaz* de la forma de onda, o bien como *RMS* (del inglés, *root mean square*) de la forma de onda. De manera gruesa, se puede decir que el RMS de la forma de onda es una fracción de su curva envolvente.

Por otro lado, si se aplica la norma de Frobenius a cualquier matriz se consigue una forma escalada del RMS de los elementos de la ésta. Más aún, cuando se simula un sistema MDOF el resultado obtenido es la respuesta en cada piso para un conjunto finito de tiempos, es decir, una matriz.

Por lo antes dicho, el RMS de la forma de onda y la norma de Frobenius de la matriz que resulta de la simulación se pueden considerar proporcionales, en virtud de esto, es posible deducir una expresión que permita determinar experimentalmente la convergencia de la solución.

Manteniendo Δt constante y examinando el error obtenido al aumentar N , lo esperado es que la aportación sinusoidal que más tarde en decaer sea la que más contribuya al error.

Suponiendo que se puede expresar la respuesta como una superposición de sistemas SDOF y considerando que tanto N_i así como N_{i+1} son suficientemente grandes (de tal modo que la componente sinusoidal que se ha visto menos afectada por el amortiguamiento domine en amplitud sobre las otras, en pocas palabras, después de un tiempo prolongado), entonces se puede emplear la siguiente expresión

$$\frac{\ln \left(\frac{\left\| \mathbf{u}_i^{\text{«IDFT»}} - \mathbf{u}^{\text{«ana»}} \right\|_F}{\left\| \mathbf{u}_{i+1}^{\text{«IDFT»}} - \mathbf{u}^{\text{«ana»}} \right\|_F} \right)}{N_{i+1} \Delta t - N_i \Delta t} \approx \min\{\zeta_j \omega_j\}_{j=1, \dots, n}$$

Si Δt no es lo suficientemente pequeño, es posible que no se pueda alcanzar la precisión predicha, pues una reconstrucción fidedigna requiere de la información de las altas frecuencias.

3. CÁLCULO DE LAS FRF MEDIANTE RELACIONES DE RECURRENCIA

Una relación de recurrencia es una expresión que relaciona el término de una secuencia con uno o más términos que la preceden. Los valores de los primeros términos, requeridos para iniciar el cálculo del resto, se denominan condiciones iniciales.

En 1978, Udwadia y Sharma presentaron una relación de recurrencia para obtener la función de transferencia de un edificio de cortante sujeto a una perturbación en la base considerando un modelo no amortiguado, estas relaciones fueron ocupadas para determinar si dicha estructura podría manifestar alguna singularidad durante la identificación del sistema. Ese mismo año, Udwadia *et al.* extendieron el desarrollo a sistemas con amortiguamiento viscoso.

Recientemente, Franco *et al.* (2006) mostraron que la relación de recurrencia formulada por Udwadia y Sharma, así como una segunda emparentada con ésta, permiten el análisis de identificabilidad en estructuras no amortiguadas cuando el actuador se posiciona en cualquier piso del edificio.

Las relaciones de recurrencia presentadas en este capítulo están destinadas a generar las FRF de una estructura sometida a una perturbación en la base. Son aplicables incluso a modelos amortiguados y, al igual que las relaciones de Franco *et al.*, pueden ser usadas para el análisis de identificabilidad pues los términos de éstas se relacionan con los menores principales líderes y los menores principales anti-líderes, los cuales son el sustento de la teoría presentada por dichos autores.

A diferencia de Udwadia y Sharma, así como de Franco *et al.*, las relaciones de recurrencia aquí presentadas no sólo persiguen un fin teórico, sino también un fin práctico: uno que requiere la manipulación numérica de los mismos.

Por este motivo, se ha dividido el capítulo en cuatro apartados, los primeros dos exponen las relaciones de recurrencia; el tercero muestra qué tan confiables son éstas si se calculan numéricamente y qué tanto se ven afectadas las FRF si se utilizan dichas expresiones para su cálculo numérico; finalmente, el último apartado ilustra una consecuencia teórica que permite identificar si el modelo presenta cancelación entre polos y ceros.

3.1 Relaciones de recurrencia A y H

Este apartado está destinado a exponer un par de relaciones de recurrencia que permiten obtener las FRF, éstas se relacionan por un lado, con el TDMA - Versión *Ad hoc*, y por el otro con los menores principales líderes.

3.1.1 Cálculo de las FRF mediante TDMA Ad hoc

Partiendo de (3), la cual se repite aquí para comodidad del lector

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{C}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}\right) + \mathbf{M}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u}\right) = k_1 u_0 \mathbf{e}_1 + c_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} u_0\right) \mathbf{e}_1 \quad (3)$$

Se obtiene la respuesta al impulso unitario en cada piso imponiendo que el movimiento prescrito en el terreno corresponda a una delta de Dirac, estos están contenidos en el vector $\mathbf{h} = \{h_1(t), \dots, h_n(t)\}^T$, con esto, la ecuación se transforma en

$$\mathbf{K}\mathbf{h} + \mathbf{C}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{h}\right) + \mathbf{M}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{h}\right) = k_1 \delta(t) \mathbf{e}_1 + c_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta(t)\right) \mathbf{e}_1$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación anterior, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que permiten el cálculo de las FRF (el vector ahora está en el dominio de la frecuencia, es decir, $\mathbf{h} = \{H_1(\omega), \dots, H_n(\omega)\}^T$), agrupando términos semejantes la ecuación adopta la forma

$$\left[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right] \mathbf{h} = (k_1 + i\omega c_1) \mathbf{e}_1 \quad (6)$$

La matriz de este sistema es, de hecho, la matriz de estudio del problema matricial de valor propio, valor característico o eigenvalor para la determinación de frecuencias y modos de vibración natural. De acuerdo a Chopra (2020, p. 602) si el sistema es no amortiguado las frecuencias naturales de vibración tornan a dicha matriz en una matriz singular. Por otro lado, para sistemas amortiguados, siempre que la cantidad de amortiguamiento no sea muy grande (lo suficientemente pequeña como para asegurar la vibración libre oscilatoria en todos los modos) entonces se tendrán valores característicos complejos y, a menos que la frecuencia adquiera valores complejos (con parte imaginaria no nula), la matriz es invertible.

Al ejecutar la primera parte del TDMA - Versión *Ad hoc* (algoritmo 5) para resolver el sistema en (6) se obtiene el siguiente sistema equivalente (se ha reportado en el apéndice A la demostración que justifica el poder aplicar este algoritmo).

$$\begin{bmatrix} a_2 & -\eta_1^{\text{cmplx}} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -\eta_2^{\text{cmplx}} a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -\eta_{n-1}^{\text{cmplx}} a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(\omega) \\ H_2(\omega) \\ H_3(\omega) \\ \vdots \\ H_{n-1}(\omega) \\ H_n(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Posteriormente, la segunda parte del algoritmo resuelve el sistema equivalente utilizando sustitución hacia atrás, proceso que puede prescindir del vector de términos independientes pues todos sus elementos se establecieron en uno.

Es de destacar el hecho de que se puede construir la matriz únicamente mediante el conocimiento de los términos a_j y η_j^{cmplx} (definidos más adelante), de hecho, el conocimiento de estos permite resolver el sistema sin construir la matriz.

3.1.2 Relación de recurrencia A

La *relación de recurrencia A* (RR-A), corresponde a la expresión que define a los términos a_j cuando se ejecuta el TDMA - Versión *Ad hoc* de forma analítica.

Por conveniencia, se definirá un nuevo término γ_j^{cmplx} , al igual que η_j^{cmplx} , la etiqueta *cmplx* alude a su naturaleza compleja para el caso amortiguado, si el amortiguamiento es nulo entonces ambos términos se tornan reales. Las expresiones que definen a estos son

$$\eta_j^{\text{cmplx}} = \frac{k_{j+1} + i\omega c_{j+1}}{k_j + i\omega c_j} \quad \gamma_j^{\text{cmplx}} = 1 - \omega^2 \left(\frac{m_j}{k_j + i\omega c_j} \right)$$

En particular, el primer parámetro puede entenderse como el cociente entre rigideces complejas, es decir, con el efecto de amortiguamiento incluido. Si el amortiguamiento es nulo, entonces corresponde propiamente al cociente de rigidez.

En cuanto a_j , ésta se define como una relación de recurrencia de orden dos, lineal y homogénea, cuya expresión es

$$a_{j+1} = (\gamma_j^{\text{cmplx}} + \eta_j^{\text{cmplx}})a_j - \eta_{j-1}^{\text{cmplx}} a_{j-1} \quad , \quad 2 \leq j \leq n \quad (7)$$

Con condiciones iniciales

$$a_0 = 0 \quad \text{y} \quad a_1 = 1 \quad (7\text{-Ini})$$

Y las siguientes restricciones

$$|\eta_0^{\text{cmplx}}| < \infty \quad \text{y} \quad \eta_n^{\text{cmplx}} = 0$$

Las restricciones permiten utilizar la misma relación de recurrencia sin desenrollar en casos; en este sentido, las restricciones son de utilidad práctica pero admiten un significado físico. La primera restricción remite a la rigidez del suelo, cuyo valor no es relevante pero debe ser distinto de cero ya que está soportando a la estructura. El segundo puede entenderse como un hipotético piso de aire en la cima de la estructura, el cual no ofrece resistencia alguna y por ello tiene rigidez nula.

Cabe mencionar que los términos de la RR-A se relacionan con los menores principales líderes de la matriz de estudio del problema de valor propio mediante la siguiente expresión (consúltese el apéndice A para ver la prueba):

$$\det\left(\left[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}\right]_{\{1,\dots,m\}}\right) = a_{m+1} \prod_{j=1}^m (k_j + i\omega c_j) \quad (8)$$

3.1.3 Relación de recurrencia H

La *relación de recurrencia H* (RR-H), corresponde a la expresión que define a las FRF de cada piso cuando se ejecuta el proceso sustitución hacia atrás del TDMA - Versión *Ad hoc*.

$$H_{j-1} = \frac{1 + \eta_{j-1}^{\text{cmplx}} a_{j-1} H_j}{a_j}, \quad 2 \leq j \leq n \quad (9)$$

Donde la FRF del último piso está dada por

$$H_n = \frac{1}{a_{n+1}} \quad (9\text{-Ini})$$

3.1.4 Algoritmo para el cálculo de las FRF

En las computadoras modernas, un código puede tener mejor desempeño cuando el algoritmo se encuentra vectorizado. La vectorización es un tipo de paralelismo de datos donde se ejecuta una única instrucción sobre múltiples objetos de datos.

Las relaciones de recurrencia desarrolladas en esta tesis tienen la virtud de ser fácilmente vectorizables, aún más, la cantidad de memoria adicional requerida se puede reducir de $\mathcal{O}(m \cdot n)$ a $\mathcal{O}(m)$ colocando los términos de la RR-H sobre los términos de la RR-A.

En el algoritmo 7 los arreglos de datos se representan encerrando entre llaves los nombres de estos, si el nombre posee un subíndice significa que pertenece a una colección de arreglos. Los arreglos de elementos constantes {0} y {1} hacen referencia al contenido de los mismos. Por último, las operaciones que se realizan entre dichos arreglos son elemento a elemento.

Algoritmo 7: FRF a partir de la RR-A y la RR-H

Este algoritmo no almacena los términos de la RR-A

#Relación de recurrencia A

- 1 $\{\text{previo}\} \leftarrow \{0\}$
- 2 $\{H_1\} \leftarrow \{1\}$
- 3 **Para** $j = 1, \dots, n-1$
- 4 $\left| \begin{array}{l} \{H_{j+1}\} \leftarrow \left(\{\gamma_j^{\text{cmplx}}\} + \{\eta_j^{\text{cmplx}}\} \right) \cdot \{H_j\} - \{\eta_{j-1}^{\text{cmplx}}\} \cdot \{\text{previo}\} \\ \{ \text{previo} \} \leftarrow \{H_j\} \end{array} \right.$
- 5

Fin del bucle

#Relación de recurrencia H

- 6 $\{\text{actual}\} \leftarrow \{H_n\}$
- 7 $\{H_n\} \leftarrow \frac{1}{\{\gamma_n^{\text{cmplx}}\} \cdot \{H_n\} - \{\eta_{n-1}^{\text{cmplx}}\} \cdot \{\text{previo}\}}$
- 8 **Para** $j = n, \dots, 2$
- 9 $\left| \begin{array}{l} \{\text{previo}\} \leftarrow \{H_{j-1}\} \\ \{H_{j-1}\} \leftarrow \frac{1 + \{\eta_{j-1}^{\text{cmplx}}\} \cdot \{\text{previo}\} \cdot \{H_j\}}{\{\text{actual}\}} \end{array} \right.$
- 10
- 11 $\left| \begin{array}{l} \{\text{actual}\} \leftarrow \{\text{previo}\} \end{array} \right.$

Fin del bucle

El costo computacional de este algoritmo involucra indirectamente el tamaño de los arreglos, el cual es m y corresponde al número de frecuencias. En la práctica no es posible procesar todos los elementos de un arreglo a la vez, lo que en realidad se hace es procesar grupos de p elementos. Por esto, un algoritmo vectorizado es en teoría p veces más rápido, o lo que es igual, su tiempo de ejecución se reduce a una fracción de m .

Es inmediato reconocer que el algoritmo realiza dos ciclos de alrededor de n iteraciones (donde n es el número de pisos), por tanto, su costo computacional es $\mathcal{O}(m \cdot n)$.

3.2 Relación de recurrencia B

Este apartado está destinado a exponer la última de las relaciones de recurrencia, ésta se relacionan por un lado, con la solución del sistema mediante la regla de Cramer, y por el otro, con los menores principales anti-líderes.

3.2.1 Antecedentes

Una alternativa para calcular las FRF es resolviendo (6) mediante la regla de Cramer

$$H_j = \frac{\det \left(\left[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right] \leftarrow_j (k_1 + i\omega c_1) \mathbf{e}_1 \right)}{\det(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})}$$

Planteándose este objetivo, Udwadia y Sharma en 1978 fueron capaces de generar la relación de recurrencia con planteamientos derivados del análisis de la matriz de Jacobi⁷. La *relación de recurrencia de Udwadia y Sharma* (RR-US) tiene la virtud de que, al igual que cuando se aplica la regla de Cramer, la FRF puede ser encontrada mediante el cociente de dos términos. En el caso de la RR-US también se requiere de la multiplicación por un factor de escala.

Dicho factor de escala aparece porque se analiza una forma transformada del sistema. Ésta transformación conlleva a cálculos intermedios con raíces cuadradas y elementos elevados al cuadrado, los cuales se anulan mutuamente en el resultado final. Cabe mencionar que tanto la RR-US, así como también las relaciones de Franco *et al.*, fueron concebidas considerando sistemas no amortiguados, lo cual les permitió trabajar con matrices de elementos reales⁸.

⁷ Existen distintas definiciones para Matriz de Jacobi, sin embargo, lo que es común en todas es lo siguiente: Una matriz de Jacobi es una matriz tridiagonal irreducible, simétrica y de elementos reales.

⁸ El caso amortiguado bajo la transformada de Laplace, y restringiendo el dominio de la transformada únicamente a valores reales, también conduce a una matriz de elementos reales. Este aspecto fue examinado por Udwadia *et al.* (1978).

3.2.2 Derivación de la relación de recurrencia

En este apartado se expondrá una relación de recurrencia (aplicable también a sistemas amortiguados) íntimamente relacionada con la regla de Cramer, la cual se construye buscando satisfacer la siguiente expresión

$$H_j = \frac{b_j}{b_0} \quad (10)$$

Como el término a_{n+1} se relaciona con el determinante de la matriz del sistema, se propone que

$$b_0 = a_{n+1}$$

Por tanto, para satisfacer la FRF del último piso (véase 9-Ini) se debe cumplir que

$$b_n = 1$$

Partiendo de la RR-H (la cual se repite abajo para comodidad del lector)

$$H_{j-1} = \frac{1 + \eta_{j-1}^{\text{cmplx}} a_{j-1} H_j}{a_j}, \quad 2 \leq j \leq n \quad (9)$$

Se sustituye (10) en (9), obteniéndose

$$b_{j-1} = \frac{a_{n+1} + \eta_{j-1}^{\text{cmplx}} a_{j-1} b_j}{a_j}, \quad 2 \leq j \leq n$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por a_j , se obtiene

$$a_j b_{j-1} = a_{n+1} + \eta_{j-1}^{\text{cmplx}} a_{j-1} b_j, \quad 2 \leq j \leq n$$

Igualdad que también puede expresarse como

$$a_{j+1} b_j = a_{n+1} + \eta_j^{\text{cmplx}} a_j b_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n \quad (\text{considerando } b_{n+1} = 0)$$

Restando

$$a_{j+1} b_j - a_j b_{j-1} = \eta_j^{\text{cmplx}} a_j b_{j+1} - \eta_{j-1}^{\text{cmplx}} a_{j-1} b_j, \quad 2 \leq j \leq n$$

Haciendo uso de (7) se obtiene

$$[(\gamma_j^{\text{cmplx}} + \eta_j^{\text{cmplx}})a_j - \eta_{j-1}^{\text{cmplx}} a_{j-1}]b_j - a_j b_{j-1} = \eta_j^{\text{cmplx}} a_j b_{j+1} - \eta_{j-1}^{\text{cmplx}} a_{j-1} b_j, \quad 2 \leq j \leq n$$

Simplificando se consigue la *relación de recurrencia B* (RR-B), la cual es una relación de recurrencia de orden dos, lineal y homogénea, cuya expresión es

$$b_{j-1} = (\gamma_j^{\text{cmplx}} + \eta_j^{\text{cmplx}})b_j - \eta_j^{\text{cmplx}} b_{j+1}, \quad 2 \leq j \leq n \quad (11)$$

Con condiciones iniciales

$$b_{n+1} = 0 \quad \text{y} \quad b_n = 1 \quad (11\text{-Ini})$$

Cabe mencionar que los términos de la RR-B se relacionan con los menores principales anti-líderes de la matriz de estudio del problema de valor propio mediante la siguiente expresión (consúltese el apéndice B para ver la prueba):

$$\det \left(\left[\mathbf{K} + i\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M} \right]_{\{m+1, \dots, n\}} \right) = b_m \prod_{j=m+1}^n (k_j + i\omega c_j) \quad (12)$$

3.2.3 Algoritmo para el cálculo de las FRF

Al igual que el algoritmo 7, el algoritmo que resulta de esta relación de recurrencia es fácilmente vectorizable y puede implementarse reduciendo la memoria adicional requerida de $\mathcal{O}(m \cdot n)$ a $\mathcal{O}(m)$ colocando los términos de la RR-B sobre la salida, es decir, sobre la colección de las FRF.

Como antes, los arreglos de datos se representan encerrando entre llaves los nombres de estos, si el nombre posee un subíndice significa que pertenece a una colección de arreglos. Los arreglos de elementos constantes {0} y {1} hacen referencia al contenido de los mismos. Por último, las operaciones que se realizan entre dichos arreglos son elemento a elemento.

De modo semejante a como se hizo con el algoritmo 7, se deduce que el costo computacional del algoritmo 8 es $\mathcal{O}(m \cdot n)$. Lo anterior se deduce porque los arreglos contienen m elementos (con m igual al número de frecuencias) y se realizan dos ciclos de alrededor de n iteraciones (donde n es el número de pisos).

Algoritmo 8: FRF a partir de la RR-B

Este algoritmo no almacena los términos de la RR-B

#Relación de recurrencia B

$$1 \quad \{\text{siguiente}\} \leftarrow \{0\}$$

$$2 \quad \{H_n\} \leftarrow \{1\}$$

3 **Para** $j = n, \dots, 2$

$$4 \quad \left| \begin{array}{l} \{H_{j-1}\} \leftarrow \left(\{\gamma_j^{\text{cmplx}}\} + \{\eta_j^{\text{cmplx}}\} \right) \cdot \{H_j\} - \{\eta_j^{\text{cmplx}}\} \cdot \{\text{siguiente}\} \end{array} \right.$$

$$5 \quad \left| \begin{array}{l} \{\text{siguiente}\} \leftarrow \{H_j\} \end{array} \right.$$

Fin del bucle

$$6 \quad \{\text{siguiente}\} \leftarrow \left(\{\gamma_1^{\text{cmplx}}\} + \{\eta_1^{\text{cmplx}}\} \right) \cdot \{H_1\} - \{\eta_1^{\text{cmplx}}\} \cdot \{\text{siguiente}\}$$

#Cálculo de las FRF

7 **Para** $j = 1, \dots, n$

$$8 \quad \left| \begin{array}{l} \{H_j\} \leftarrow \frac{\{H_j\}}{\{\text{siguiente}\}} \end{array} \right.$$

Fin del bucle

3.3 Precisión de las FRF mediante relaciones de recurrencia

Cuando se ingresa amortiguamiento al modelo se evita que la matriz del sistema se torne singular, si éste es muy pequeño, la matriz del sistema aún estará cerca de ser singular en las frecuencias resonantes. En ocasiones, esto puede afectar negativamente el desempeño de un algoritmo, en particular, reduciendo la precisión en la solución cuando se calcula con aritmética de precisión finita.

Debido a las limitaciones computacionales, es preferible el uso de la aritmética de precisión finita a la aritmética exacta. Cuando se utiliza precisión finita los números se expresan de forma aproximada mediante el redondeo de los mismos, incluso los datos de entrada terminarán manifestando un error pequeño inducido por el redondeo.

Es deseable que un algoritmo que presenta un pequeño error en la entrada halle la solución manteniendo el margen de error pequeño. Se dice que un algoritmo es poco sensible al error de la entrada, si el margen de error se mantiene pequeño. Por el contrario, se dice que es muy sensible al error de la entrada, si el margen de error se torna grande.

3.3.1 *Condicionamiento de Skeel*

Una forma de cuantificar cuán sensible es un algoritmo numérico al error de la entrada es mediante el número de condición.

En virtud de que las matrices tratadas en esta tesis presentan ceros estructurales, los cuales no ingresan errores en la solución, se ha optado por usar el número de condición de Skeel, pues éste permite acotar el margen de error de una manera más ajustada.

De acuerdo a Watkins (2002, p. 177) así como Higham (2002, p. 123), el número de condición de Skeel de una matriz viene dado por

$$\text{skeel}(\mathbf{A}) = \left\| |\mathbf{A}^{-1}| |\mathbf{A}| \right\|_{\infty}$$

Aquí, si \mathbf{A} es una matriz con elementos a_{ij} , entonces $|\mathbf{A}|$ es una matriz con la misma dimensión y con elementos $|a_{ij}|$.

A grandes rasgos, el número de condición de Skeel para una matriz no singular da una idea del cuán grande puede ser la sensibilidad de la solución \mathbf{x} , la única solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, sin importar la entrada \mathbf{b} ; o dicho de otro modo; suponiendo que la entrada \mathbf{b} es tal que la sensibilidad en \mathbf{x} no podría empeorar más.

3.3.2 Condicionamiento de los términos de las relaciones de recurrencia

En este apartado se estudiará la sensibilidad de los términos de las relaciones de recurrencia a una perturbación en sus datos entrada. Para esto, se hará uso del número de condición de sus matrices asociadas, siguiendo la estrategia planteada por Kapenga (1986, pp. 31-37).

La matriz asociada a la RR-A se obtiene ensamblando en una matriz todas las ecuaciones asociadas a los términos a_j , dicha matriz adopta la forma

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1^{\text{cmplx}} - \eta_1^{\text{cmplx}} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \eta_1^{\text{cmplx}} & -\gamma_2^{\text{cmplx}} - \eta_2^{\text{cmplx}} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\gamma_{n-1}^{\text{cmplx}} - \eta_{n-1}^{\text{cmplx}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \eta_{n-1}^{\text{cmplx}} & -\gamma_n^{\text{cmplx}} & 1 \end{bmatrix}$$

De esta forma, los términos de la RR-A se obtienen al resolver el sistema $\Theta \mathbf{a} = \mathbf{e}_1$, donde $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}^T$. De modo semejante, los términos de la RR-B se obtienen al resolver el sistema $\Theta^T \mathbf{b} = \mathbf{e}_n$, donde $\mathbf{b} = \{b_0, \dots, b_n\}^T$.

Es deseable que el cálculo de los términos de la RR-A y de la RR-B se realice de manera precisa, pues estos se utilizarán finalmente para calcular las FRF. Sin embargo, tanto $\text{skeel}(\Theta)$ como $\text{skeel}(\Theta^T)$ sólo permanecen pequeños en la vecindad de los ceros de los menores principales de $[\mathbf{K} + i\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}]$.

En la práctica, las frecuencias de interés corresponden a un intervalo que contiene a las frecuencias resonantes, por tanto, dicho intervalo también contienen los ceros de los menores principales⁹. Por esto, para fines prácticos, se puede asegurar que los términos de estas relaciones de recurrencia se calculan de manera precisa.

⁹ Suponiendo un modelo no amortiguado, es posible utilizar el teorema del entrelazado de Cauchy para mostrar que todos los ceros de los menores principales están en el intervalo acotado por la frecuencia natural menor y la frecuencia natural mayor. Puede consultarse esta prueba en Horn y Johnson (2012, pp. 242-298).

Por otro lado, en un modelo amortiguado los ceros corresponden a frecuencias complejas. Afortunadamente, para modelos sub-amortiguado (típico en estructuras), dichas frecuencias complejas se posicionan cerca de los ceros del modelo no amortiguado.

Para ilustrar el comportamiento de $\text{skeel}(\Theta)$ y $\text{skeel}(\Theta^T)$ se ha utilizado el modelo de la tabla 2

Tabla 2: Ejemplo de parámetros de un modelo 3-DOF con amortiguamiento clásico

Piso	m	k	c	Frecuencia natural no amortiguada	Fracción de amortiguamiento
1	240	3600	3600α	$\omega_1 = 3$	$\zeta_1 = 1.5\alpha$
2	16	240	240α	$\omega_2 = 4$	$\zeta_2 = 2.0\alpha$
3	3	48	48α	$\omega_3 = 5$	$\zeta_3 = 2.5\alpha$

Suponiendo un modelo sin amortiguamiento, las frecuencias que tornan cero a algún menor principal (ya sea éste un menor principal líder, un menor principal anti-líder o el determinante) se presentan en la tabla 3.

Tabla 3: Frecuencias angulares que tornan cero a algún menor principal en el modelo 3-DOF no amortiguado ($\alpha=0$)

	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	4	$\sqrt{21}$	$\sqrt{24}$	5
Determinante	✓			✓			✓
Menor principal líder*			✓	✓	✓		
Menor principal anti-líder*		✓		✓		✓	

* Se ha excluido al determinante

Como puede observarse en las figura 19, en el rango de las frecuencias de interés (e incluso un poco más lejos), se tiene un número de condición bastante pequeño, alcanzando sus valores más bajos donde se concentran la mayor cantidad de ceros.

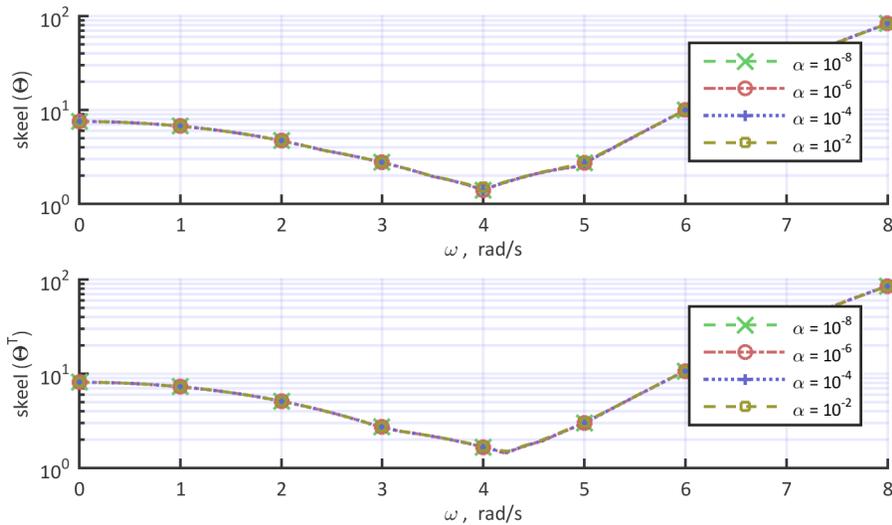


Figura 19. Número de condición de las matrices asociadas a las relaciones de recurrencia

El número de condición de Skeel de las matrices asociadas a la RR-A y la RR-B tienen un comportamiento parecido, ambos alcanzan sus valores más bajos cerca de los ceros de los menores principales y son prácticamente insensibles al amortiguamiento.

La regla empírica presentada por Watkins (2002, p. 165) afirma que: si el número de condición está en torno a 10^t , entonces la solución calculada puede llegar a perder hasta t cifras significativas de precisión. Por tanto, los términos de las relaciones de recurrencia se calculan de forma precisa, al menos en las frecuencias de interés.

Tabla 4: Número de condición de las matrices asociadas a las relaciones de recurrencia
(desarrollo en serie alrededor de 0, las expresiones son al menos 95% precisas para $0 \leq \alpha \leq 0.02$)

ω [rad/s]	skeel(Θ)	skeel(Θ^T)
0	$\frac{113}{15}$	$\frac{203}{25}$
1	$\frac{269}{40} + \frac{4247903}{5278500}\alpha^2$	$\frac{109}{15} + \frac{129721}{153000}\alpha^2$
2	$\frac{47}{10} + \frac{18007}{1575}\alpha^2$	$\frac{767}{150} + \frac{14349799}{1204875}\alpha^2$
3	$\frac{69}{25} + \frac{6381}{175}\alpha^2$	$\frac{109}{40} + \frac{74223}{1400}\alpha^2$
$\sqrt{10}$	$\frac{187}{75} + \frac{4702}{99}\alpha^2$	$\frac{37}{15} + \frac{7\sqrt{5/2}}{6}\alpha + \frac{4585}{144}\alpha^2$
$\sqrt{13}$	$\frac{371}{200} + \frac{4513483}{39600}\alpha^2$	$\frac{31}{15} + \frac{7943}{99}\alpha^2$
4	$\frac{7}{5} + \frac{808}{75}\alpha + \frac{704}{45}\alpha^2$	$\frac{5}{3} + \frac{8}{15}\alpha + \frac{8384}{45}\alpha^2$
$\sqrt{21}$	$\frac{259}{120} + \frac{5497457}{22000}\alpha^2$	$\frac{29}{15} + \frac{49\sqrt{21}}{50}\alpha + \frac{269843}{2000}\alpha^2$
$\sqrt{24}$	$\frac{37}{15} + \frac{322\sqrt{2/3}}{25}\alpha + \frac{39268}{125}\alpha^2$	$\frac{203}{75} + \frac{620608}{1375}\alpha^2$
5	$\frac{109}{40} + 5\alpha + \frac{260725}{336}\alpha^2$	$3 + 5\alpha + \frac{1610225}{9072}\alpha^2$
6	$\frac{299}{30} + \frac{2970861}{17875}\alpha^2$	$\frac{107}{10} + \frac{1966323}{31625}\alpha^2$
7	$\frac{1261}{40} - \frac{26687890523}{24935625}\alpha^2$	$\frac{2473}{75} - \frac{3047202739}{2511000}\alpha^2$
8	$83 - \frac{63185168896}{11100375}\alpha^2$	$\frac{6413}{75} - \frac{5352700292608}{901597125}\alpha^2$

La figura 19 también revela que $\text{skeel}(\Theta)$ y $\text{skeel}(\Theta^T)$ tienen un comportamiento semejante y, para fines prácticos, no se alteran con el amortiguamiento. La tabla 4 da cuenta de esto, para valores pequeños de α el número de condición no cambia sustancialmente. Se ha supuesto que el amortiguamiento es lo suficientemente pequeño como para asegurar la vibración libre oscilatoria en todos los modos.

3.3.3 Sensibilidad de las FRF al cálculo por relaciones de recurrencia

Como se vio anteriormente, la RR-A y la RR-H pueden ser entendidas como una implementación de la descomposición LU para resolver el sistema $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \mid (k_1 + i\omega c_1)\mathbf{e}_1]$. De igual manera, la RR-B puede ser entendida como la aplicación de la regla de Cramer para resolver dicho sistema.

Por ello, la sensibilidad de las FRF al cálculo por dichas relaciones de recurrencia está supeditada al condicionamiento de la matriz $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]$.

Adicionalmente, cuando se resuelve un sistema mediante el uso de la descomposición LU es importante que el condicionamiento de las matrices \mathbf{L} y \mathbf{U} sean pequeños, caso contrario, se superpondrán los efectos de la sensibilidad de cada matriz en el resultado.

A diferencia de $\text{skeel}(\Theta)$ y $\text{skeel}(\Theta^T)$, tanto $\text{skeel}(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})$ como $\text{skeel}(\mathbf{U})$ crecen en torno a los menores principales líderes.

En particular, $\text{skeel}(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})$ crece en torno a los ceros del determinante, esto es, cerca de las frecuencias resonantes. Si el sistema es no amortiguado, el número de condición resulta infinito en las frecuencias naturales, pues la matriz se torna singular.

En lo que respecta a $\text{skeel}(\mathbf{U})$, éste crece en torno a los ceros de los menores principales líderes de $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]$ excluyendo al determinante. Éste puede expresarse en función de los términos de la RR-A como

$$\text{skeel}(\mathbf{U}) = 1 + 2 \max \left\{ \sum_{m=j+1}^n \left| \frac{a_j \cdot (k_m + i\omega c_m)}{a_m \cdot (k_j + i\omega c_j)} \right| \right\}_{j=1, \dots, n-1}$$

Cabe mencionar que $\text{skeel}(\mathbf{U})$ es el mismo independientemente del tipo de factorización LU del que proceda, siempre y cuando éste se haya realizado sin pivoteo. El condicionamiento de las matrices \mathbf{U} y $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]$ es suficiente para esclarecer la sensibilidad de las FRF cuando se utilizan las relaciones de recurrencia, no hace falta $\text{skeel}(\mathbf{L})$ porque la información que proporciona es redundante.

Las figura 20 y 21 muestran el comportamiento de $\text{skeel}(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})$ y $\text{skeel}(\mathbf{U})$ respectivamente, se puede observar cómo estos son sensibles al amortiguamiento, siquiera, en las frecuencias antes referidas.

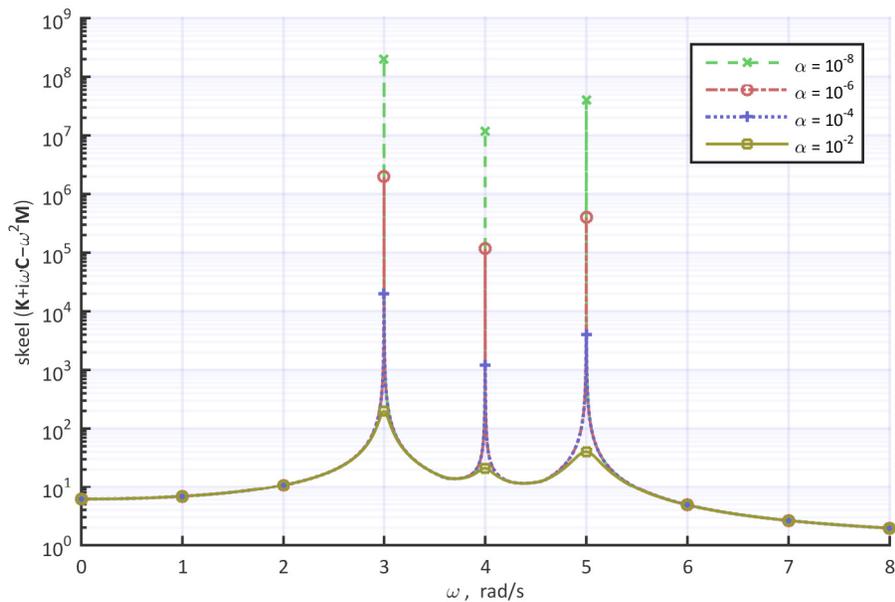


Figura 20. Número de condición de la matriz $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]$
 El número de condición de Skeel de la matriz $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]$ crece en la vecindad de las frecuencias resonantes y decrece lejos de éstas. Mientras menor sea el amortiguamiento, más grande el número de condición.

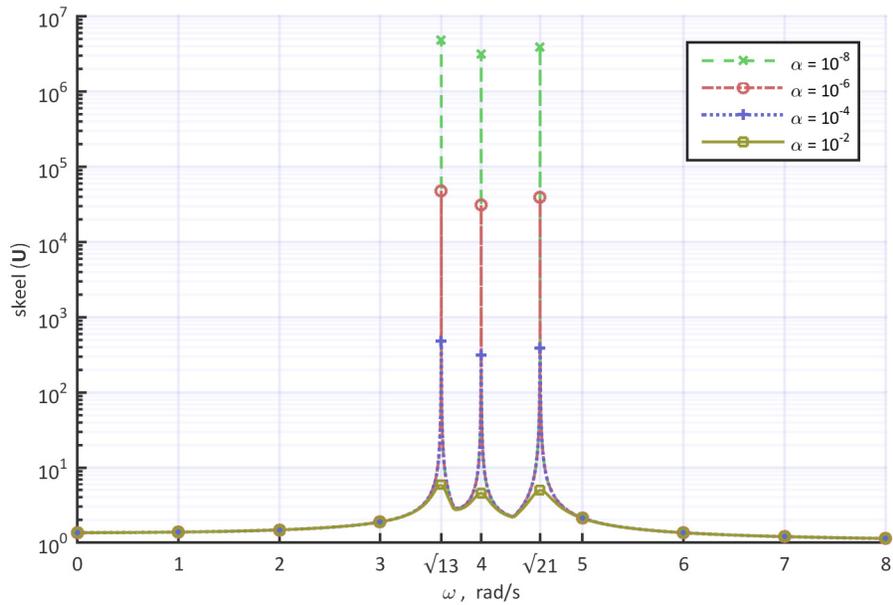


Figura 21. Número de condición de la matriz U

El número de condición de Skeel de la matriz U crece en la vecindad de los ceros de los menores principales líderes (excluyendo al determinante) y decrece lejos de éstos. Mientras menor sea el amortiguamiento, más grande el número de condición.

Como se muestra en la tabla 5, las frecuencias que son especialmente sensibles al amortiguamiento (resaltados en la tabla) incrementan el valor del número de condición de forma inversamente proporcional al amortiguamiento. Esto concuerda con el hecho de que el número de condición puede considerarse como una medida de cuán cerca está una matriz de ser singular, tornándose infinito si la matriz es singular. Para un modelo no amortiguado, estas frecuencias son precisamente donde la matriz se hace singular.

Tabla 5: Número de condición de las matrices asociadas a la solución de las FRF
(desarrollo en serie alrededor de 0, las expresiones son al menos 95% precisas para $0 \leq \alpha \leq 0.005$)

ω [rad/s]	skeel($\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}$)	skeel(\mathbf{U})
0	$\frac{153}{25}$	$\frac{123}{91}$
1	$\frac{41}{6} - \frac{1253431}{1468800}\alpha^2$	$\frac{11}{8} - \frac{83}{3200}\alpha^2$
2	$\frac{1129}{105} - \frac{2757775168}{59038875}\alpha^2$	$\frac{25}{17} - \frac{312592}{397953}\alpha^2$
3	$\frac{2}{\alpha} + \frac{166695}{12544}\alpha$	$\frac{15}{8} - \frac{26109}{896}\alpha^2$
$\sqrt{10}$	$\frac{817}{15} - \frac{581432}{27}\alpha^2$	$\frac{23}{11} - \frac{103900}{1331}\alpha^2$
$\sqrt{13}$	$\frac{43}{3} + \frac{247\sqrt{13}}{18}\alpha - \frac{617357}{720}\alpha^2$	$\frac{9}{52\sqrt{13}\alpha} + 1 + \frac{12991}{512\sqrt{13}}\alpha$
4	$\frac{5}{42\alpha} + \frac{575}{63} + \frac{4302308}{416745}\alpha$	$\frac{1}{32\alpha} + \frac{7}{5} + \frac{\alpha}{4}$
$\sqrt{21}$	$13 + \frac{147\sqrt{21}}{10}\alpha - \frac{1946133}{400}\alpha^2$	$\frac{5}{28\sqrt{21}\alpha} + 1 + \frac{13759\sqrt{21}}{17920}\alpha$
$\sqrt{24}$	$\frac{251}{5} - \frac{510530688}{1375}\alpha^2$	$\frac{27}{11} - \frac{1054656}{1331}\alpha^2$
5	$\frac{2}{5\alpha} + \frac{4806605}{145152}\alpha$	$\frac{17}{8} - \frac{398125}{1152}\alpha^2$
6	$\frac{161}{33} - \frac{622038464}{2295975}\alpha^2$	$\frac{31}{23} - \frac{1217808}{304175}\alpha^2$
7	$\frac{79}{30} + \frac{34641385499}{4861296000}\alpha^2$	$\frac{67}{56} + \frac{297577}{114048}\alpha^2$
8	$\frac{4193}{2145} + \frac{4012819767181312}{165930836482125}\alpha^2$	$\frac{827}{731} + \frac{1325768704}{390617891}\alpha^2$

3.4 Cancelación de polos y ceros

Cuando se utiliza la regla de Cramer para calcular las FRF es posible reconocer un polinomio complejo en el numerador y otro en el denominador.

$$H_j = \frac{\det \left(\left[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right] \leftarrow_j (k_1 + i\omega c_1) \mathbf{e}_1 \right)}{\det(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})}$$

Un cero es el valor para el cual H_j es igual a cero, por tanto, los ceros corresponden a las raíces del numerador. Por otro lado, un polo es el valor para el cual H_j alcanza una amplificación infinita, es decir, las raíces del denominador.

En algunas ocasiones, al obtener las FRF puede existir coincidencia entre polos y ceros, los cuales son susceptibles de cancelarse. Por ejemplo, considérese el sistema de la tabla 2. Las FRF para este sistema se presentan en la tabla 6, como puede observarse H_2 presenta una coincidencia de un polo y un cero.

Tabla 6: Expresión de las FRF en forma de polos y ceros

$$H_3(\omega, \alpha) = -3600 \times \frac{(1 + i\omega\alpha)^3}{(\omega^2 - 9i\omega\alpha - 9)(\omega^2 - 16i\omega\alpha - 16)(\omega^2 - 25i\omega\alpha - 25)}$$

$$H_2(\omega, \alpha) = 225 \times \frac{(1 + i\omega\alpha)^2 (\omega^2 - 16i\omega\alpha - 16)}{(\omega^2 - 9i\omega\alpha - 9)(\omega^2 - 16i\omega\alpha - 16)(\omega^2 - 25i\omega\alpha - 25)}$$

$$H_1(\omega, \alpha) = -15 \times \frac{(1 + i\omega\alpha)(\omega^2 - 10i\omega\alpha - 10)(\omega^2 - 24i\omega\alpha - 24)}{(\omega^2 - 9i\omega\alpha - 9)(\omega^2 - 16i\omega\alpha - 16)(\omega^2 - 25i\omega\alpha - 25)}$$

Si bien este tipo de fenómenos difícilmente podrían encontrarse en la realidad, podrían no ser tan extraños en modelos con fines académicos. Algunas de las razones para conocer si un modelo presenta una cancelación de un polo y un cero pueden ser la identificabilidad del sistema, así como la controlabilidad y la observabilidad. Por ejemplo, si sólo se dispusiera un sensor en el suelo y otro en el segundo piso, se podría tener la falsa impresión de que el sistema se trata de un edificio de dos plantas, pues dos pisos son suficientes para reproducir la respuesta observada.

Para ilustrar mejor el comportamiento de dicha cancelación, en la figura 22 se presenta la amplitud de las FRF y en la figura 23 la respuesta de este sistema a un pulso sinusoidal de medio ciclo de duración $t_d = \pi$.

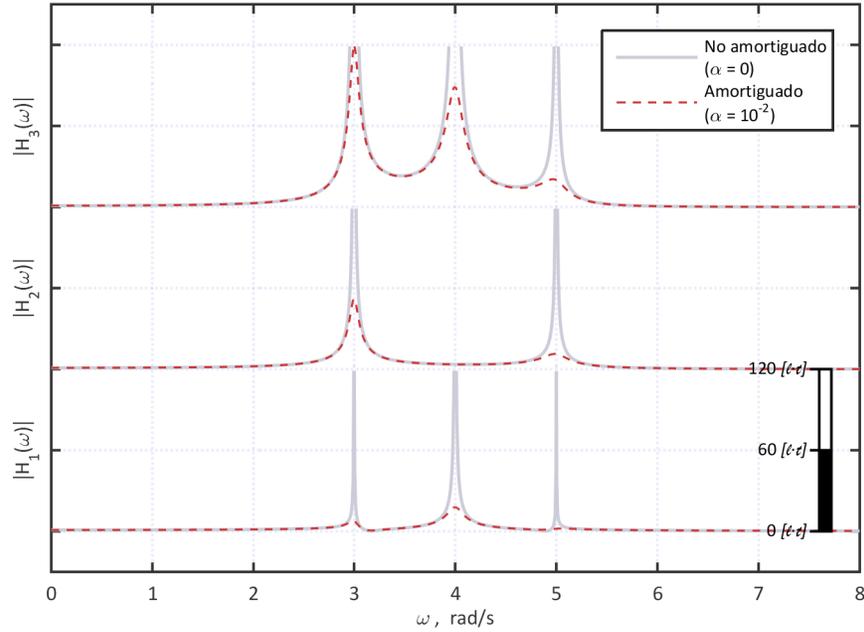


Figura 22. FRF de un sistema 3-DOF que presenta cancelación de un polo y un cero
Ejemplo de cancelación de un polo y un cero en un sistema 3-DOF. Como puede observarse, el segundo piso no responde a la segunda frecuencia resonante.

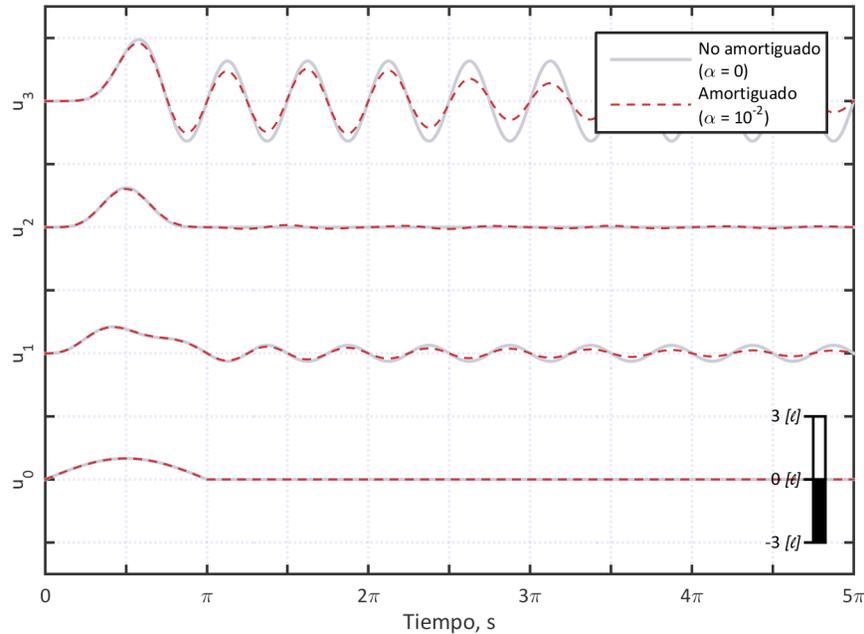


Figura 23. Respuesta de un sistema 3-DOF que presenta cancelación de un polo y un cero
La salida del sistema es la respuesta al pulso sinusoidal de medio ciclo de duración $t_d = \pi$. La respuesta es tal que en vibración libre domina el segundo modo, como el segundo piso es insensible a éste, parece permanecer en reposo.

El modelo antes presentado fue especialmente diseñado para enfatizar el efecto de la cancelación, se ha propuesto un pulso sinusoidal de medio ciclo con duración $t_d = \pi$, porque la respuesta del sistema a este pulso es tal, que una vez iniciada la vibración libre se ve dominado por el segundo modo, de hecho, el caso no amortiguado sólo manifiesta éste.

Si se echa un vistazo a los modos de vibración de la estructura (figura 24), se puede observar que el segundo modo, efectivamente, no presenta desplazamientos en el segundo piso. Ésta es la razón por la cual el segundo piso parece no moverse una vez iniciada la vibración libre.

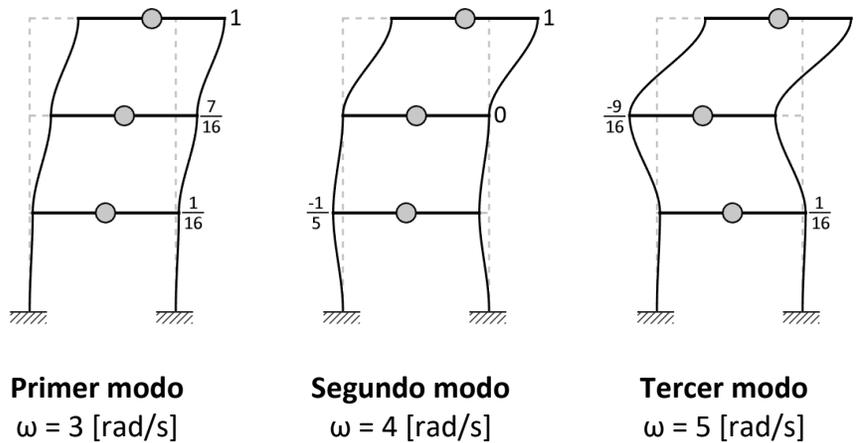


Figura 24. Modos de vibrar de un sistema 3-DOF que presenta cancelación de un polo y un cero

Se puede observar que el modo asociado a la frecuencia que presenta la cancelación del polo y el cero (segundo modo), presenta un desplazamiento nulo en el piso en que ocurre dicha cancelación (segundo piso).

Se puede probar que en caso de existir coincidencia entre un polo y un cero para H_j , entonces a_j y b_j tienen un cero en común (la demostración puede ser consultada en el apéndice B). Para ilustrar esto se ha utilizado la siguiente función (propuesta de la tesis).

$$f(a,b) = \frac{1}{2r^2} \left(\frac{r^2 + r}{r \cdot \tanh(|a|) + 1} + \frac{r^2 + r}{r \cdot \tanh(|b|) + 1} - 2r \right) \quad (13)$$

Esta función revela la posición de las raíces de dos funciones y puede ser aplicado a modelos ligeramente amortiguados:

- Si $f(a,b) \approx \frac{1}{2}$ entonces $a_j(\omega) \approx 0$ o bien $b_j(\omega) \approx 0$, pero no ambas.
- Si $f(a,b) \approx 1$ entonces ambas se aproximan a cero.
- El parámetro r es la resolución de la línea con la que se denota la raíz y debe ser un valor real positivo; si r es grande, la resolución aumenta y las líneas se tornan delgadas; si r es pequeña, la resolución disminuye y las líneas se tornan gruesas difuminándose a medida que se alejan de la raíz.

La figura 25 ilustra la aplicación de dicha función en el modelo en discusión.

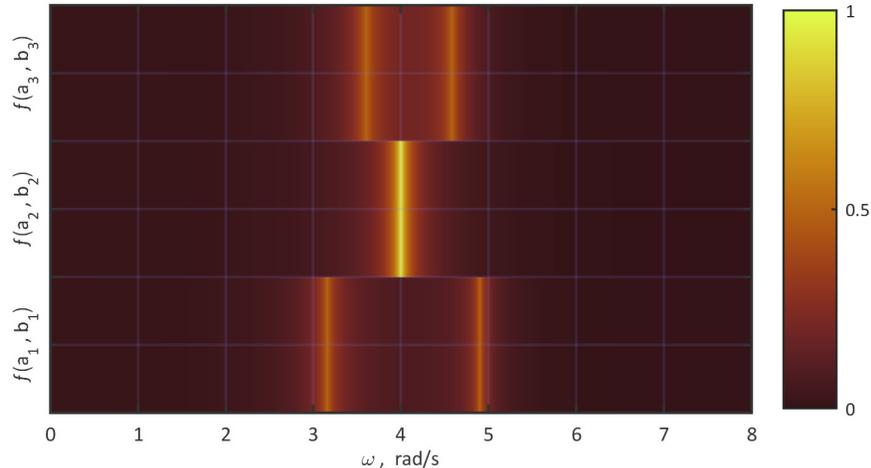


Figura 25. Patrón de ceros asociados a los menores principales líderes y anti-líderes

Las líneas brillantes revelan la posición de los ceros de los menores principales líderes y anti-líderes, los cuales coinciden con los ceros de los términos de la RR-A y la RR-B, respectivamente. No se han considerado los ceros del determinante. La iluminación máxima (≈ 1) indica la presencia de cancelación de un polo y un cero.

Recordando que $a_1 = 1$ y $b_n = 1$ se pueden concluir lo siguiente:

- **No existe el fenómeno de cancelación en el primer piso:** Esto porque $a_1 = 1$ y no puede tener raíces en común con b_1 .
- **No existe el fenómeno de cancelación en el último piso:** Esto porque $b_n = 1$ y no puede tener raíces en común con a_n .

- **El fenómeno de cancelación sólo puede ocurrir para modelos de edificio de cortante con tres pisos o más:** Si la estructura fuera menor a tres pisos no se podría presentar dicho fenómeno, pues alguno de sus pisos o sería el primero, o sería el último o ambos.

En virtud de que las raíces del menor principal líder y del menor principal anti-líder de orden j se corresponden con las raíces de los términos a_j y b_j respectivamente (ecuaciones 8 y 12), el verificar si ambos términos tienen ceros en común equivale a verificar si ambos menores lo tienen.

Si se considera a ω como una variable, entonces ambos menores se traducen en polinomios. De acuerdo a Akritas (1993), se puede conocer si dos polinomios tienen ceros en común mediante su *resultante*, éste suele ser calculado mediante el determinante de la *matriz de Sylvester*. Haciendo uso de esta estrategia, se obtuvo que el modelo de edificio de cortante más pequeño que manifiesta el fenómeno de cancelación de polos y ceros es de la forma

Tabla 7: Parámetros que producen cancelación de un polo y un cero

Piso	m	k	c
1	m_1	k_1	c_1
2	m_2	k_2	c_2
3	m_3	$(k_1 + k_2) \left(\frac{m_3}{m_1} \right)$	$(c_1 + c_2) \left(\frac{m_3}{m_1} \right)$

Esto ilustra el potencial de las relaciones de recurrencia desarrolladas para esta tesis, pues no sólo permite inspeccionar si existe la cancelación de polos y ceros en las FRF, sino que también justifican metodologías más elegantes para encontrar todos los escenarios que podrían generarlos.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Este capítulo de resultados se divide en cuatro apartados. Los primeros dos conciernen a la simulación numérica; el tercero, a la precisión de las FRF obtenidas mediante distintos métodos, incluyendo las relaciones de recurrencia; y el último a una aplicación de dichas relaciones para identificar modelos con cancelación de polos y ceros.

En lo que respecta a los primeros dos apartados, se muestra la prueba de convergencia para los algoritmos propuestos, primero usando el método de Newmark y después mediante IDFT. Dicha prueba revela si un algoritmo se comporta como predice la teoría y qué limitaciones se presentan en la práctica.

La prueba de convergencia requiere de un punto de comparación, es decir, de la solución analítica. Para esto se ha utilizado la solución analítica del modelo de la tabla 2, dicha solución se encuentra reportada en el apéndice C.

Para fines comparativos, también se ha construido la función vectorial $\mathbf{A}^{\text{«pEnv»}} = \{A_1^{\text{«pEnv»}}, \dots, A_n^{\text{«pEnv»}}\}^T$, ésta puede entenderse como la envolvente de los valores picos de los desplazamientos de cada piso (véase figura 26), la cual es válida en la etapa de vibración libre. Al igual que antes, la expresión de $\mathbf{A}^{\text{«pEnv»}}$ posee una expresión analítica que puede ser consultada en el apéndice C.

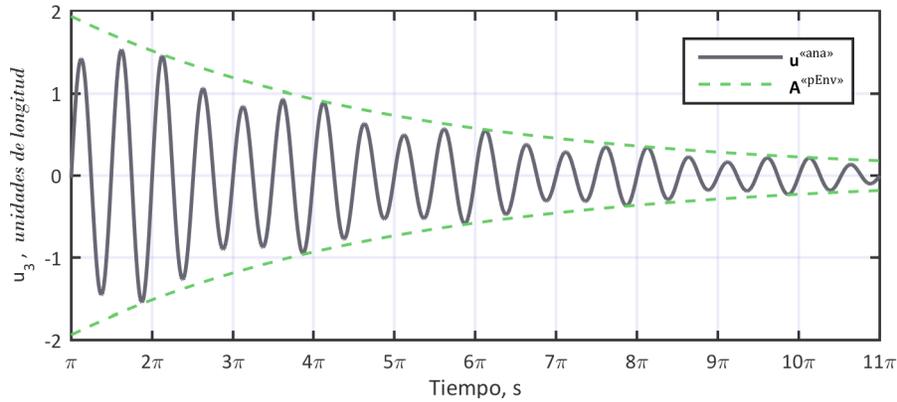


Figura 26. Comportamiento de la función envolvente del modelo propuesto

Se puede observar cómo la función envolvente diseñada para el modelo propuesto sólo se aproxima a los valores picos del desplazamiento. La respuesta corresponde al tercer piso una vez iniciada la vibración libre.

Debido a que la respuesta oscila alrededor de cero, no es factible usar el error relativo convencional, pues algunos valores se tornan cero. Por este motivo, se ha propuesto usar el error relativo respecto a $A^{\text{«pEnv»}}$, es decir, respecto a la amplitud de la curva envolvente.

Una segunda forma de medir una especie de error relativo, es mediante el cociente de las normas del error y el valor exacto. Aquí se debe recordar que la respuesta numérica puede ser vista como una matriz, pues se obtiene la respuesta de cada piso (renglones) respecto a un conjunto finito de tiempos (columnas).

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(t_1) & u_1(t_2) & \cdots & u_1(t_{N-1}) & u_1(t_N) \\ u_2(t_1) & u_2(t_2) & \cdots & u_2(t_{N-1}) & u_2(t_N) \\ u_3(t_1) & u_3(t_2) & \cdots & u_3(t_{N-1}) & u_3(t_N) \end{bmatrix}$$

Respuesta del sistema vista como matriz

4.1 Prueba de convergencia de la simulación por Newmark

Para las pruebas de convergencia se utilizó la información de las tres componentes, cada una con 128 muestras de tiempo repartidas de forma uniforme entre 0 s y 63.5 s. En cada prueba se redujo Δt_i a la mitad y, cuando fue necesario, se decimó el resultado (véase figura 27). Al final, todas las simulaciones terminaron con la misma cantidad de muestras y haciendo referencia a los mismos tiempos.



Figura 27. Proceso de decimación

Los datos obtenidos con la simulación se han denotado con círculos, estos se realizan con Δt_i , sin embargo, la mayoría se descarta (círculos vacíos). Sólo los datos que coinciden con los tiempos solicitados se conservan (círculos llenos).

En las tablas 8 a 15, se ha coloreado el error cuando no se satisface la condición de estabilidad, en estos, el error crece de forma desmedida.

Condición de estabilidad: $0 < \Delta t \leq \Delta t_c$

Diferencia central	Método de Fox-Goodwin	Aceleración lineal
$\Delta t_c = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{5} \approx 0.4000$	$\Delta t_c = \frac{\sqrt{6}}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{5} \approx 0.4899$	$\Delta t_c = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{5} \approx 0.6928$

También puede observarse que ambos errores poseen órdenes de magnitud similares, esto es porque ambas reportan algo parecido al error relativo.

Suponiendo que los errores reportados en las tablas se compartan como el error relativo, cuando el error esté en torno a 10^{-t} , será posible asignarle una interpretación un tanto tosca. De acuerdo a Higham (2002, p. 3), puede considerarse que la respuesta se ha calculado con alrededor de t cifras significativas correctas.

4.1.1 Prueba en modelo no amortiguado

Tabla 8: Prueba de convergencia: Diferencia central ($\alpha = 0$)

Δt_i	$\max \left\{ \frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ }{A^{\text{«pEnv»}}} \right\}$	$\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u^{\text{«ana»}}\ _F}$	$\ln \left(\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u_{i+1}^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F} \right)$
			$\ln(\Delta t_i / \Delta t_{i+1})$
2 ⁻¹	5.04 × 10 ⁷⁴	6.34 × 10 ⁷³	—
2 ⁻²	2.10 × 10 ⁰	1.40 × 10 ⁰	0.1577
2 ⁻³	1.93 × 10 ⁰	1.26 × 10 ⁰	1.7774
2 ⁻⁴	6.34 × 10 ⁻¹	3.67 × 10 ⁻¹	1.9939
2 ⁻⁵	1.58 × 10 ⁻¹	9.21 × 10 ⁻²	2.0010
2 ⁻⁶	3.90 × 10 ⁻²	2.30 × 10 ⁻²	2.0006
2 ⁻⁷	9.74 × 10 ⁻³	5.75 × 10 ⁻³	2.0002
2 ⁻⁸	2.43 × 10 ⁻³	1.44 × 10 ⁻³	2.0001
2 ⁻⁹	6.08 × 10 ⁻⁴	3.59 × 10 ⁻⁴	1.9999
2 ⁻¹⁰	1.52 × 10 ⁻⁴	8.98 × 10 ⁻⁵	2.0000
2 ⁻¹¹	3.81 × 10 ⁻⁵	2.24 × 10 ⁻⁵	2.0000
2 ⁻¹²	9.52 × 10 ⁻⁶	5.61 × 10 ⁻⁶	2.0000
2 ⁻¹³	2.38 × 10 ⁻⁶	1.40 × 10 ⁻⁶	2.0002

Tabla 9: Prueba de convergencia: Método de Fox-Goodwin ($\alpha = 0$)

Δt_i	$\max \left\{ \frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ }{A^{\text{«pEnv»}}} \right\}$	$\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u^{\text{«ana»}}\ _F}$	$\ln \left(\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u_{i+1}^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F} \right)$
			$\ln(\Delta t_i / \Delta t_{i+1})$
2 ⁻¹	4.22 × 10 ¹⁷	7.40 × 10 ¹⁶	—
2 ⁻²	5.46 × 10 ⁻¹	3.14 × 10 ⁻¹	3.7082
2 ⁻³	3.81 × 10 ⁻²	2.40 × 10 ⁻²	2.8615
2 ⁻⁴	5.30 × 10 ⁻³	3.30 × 10 ⁻³	2.0514
2 ⁻⁵	1.25 × 10 ⁻³	7.96 × 10 ⁻⁴	1.6725
2 ⁻⁶	3.06 × 10 ⁻⁴	2.50 × 10 ⁻⁴	2.2059
2 ⁻⁷	7.67 × 10 ⁻⁵	5.42 × 10 ⁻⁵	2.1862
2 ⁻⁸	1.93 × 10 ⁻⁵	1.19 × 10 ⁻⁵	1.9401
2 ⁻⁹	4.83 × 10 ⁻⁶	3.10 × 10 ⁻⁶	1.4556
2 ⁻¹⁰	1.19 × 10 ⁻⁶	1.13 × 10 ⁻⁶	2.0384
2 ⁻¹¹	2.98 × 10 ⁻⁷	2.75 × 10 ⁻⁷	2.0738
2 ⁻¹²	7.48 × 10 ⁻⁸	6.54 × 10 ⁻⁸	0.6921
2 ⁻¹³	6.82 × 10 ⁻⁸	4.05 × 10 ⁻⁸	

Tabla 10: Prueba de convergencia: Aceleración lineal ($\alpha = 0$)

Δt_i	$\max \left\{ \frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ }{A^{\text{«pEnv»}}} \right\}$	$\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u^{\text{«ana»}}\ _F}$	$\ln \left(\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u_{i+1}^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F} \right)$ $\ln(\Delta t_i / \Delta t_{i+1})$
2 ⁻¹	2.07 × 10 ⁰	1.35 × 10 ⁰	-0.0059
2 ⁻²	1.97 × 10 ⁰	1.36 × 10 ⁰	0.1696
2 ⁻³	1.86 × 10 ⁰	1.21 × 10 ⁰	1.7459
2 ⁻⁴	6.01 × 10 ⁻¹	3.60 × 10 ⁻¹	1.9751
2 ⁻⁵	1.56 × 10 ⁻¹	9.17 × 10 ⁻²	1.9965
2 ⁻⁶	3.90 × 10 ⁻²	2.30 × 10 ⁻²	1.9994
2 ⁻⁷	9.74 × 10 ⁻³	5.75 × 10 ⁻³	1.9998
2 ⁻⁸	2.43 × 10 ⁻³	1.44 × 10 ⁻³	1.9999
2 ⁻⁹	6.09 × 10 ⁻⁴	3.59 × 10 ⁻⁴	2.0000
2 ⁻¹⁰	1.52 × 10 ⁻⁴	8.98 × 10 ⁻⁵	2.0000
2 ⁻¹¹	3.80 × 10 ⁻⁵	2.24 × 10 ⁻⁵	2.0000
2 ⁻¹²	9.50 × 10 ⁻⁶	5.61 × 10 ⁻⁶	2.0000
2 ⁻¹³	2.28 × 10 ⁻⁶	1.35 × 10 ⁻⁶	2.0557

Tabla 11: Prueba de convergencia: Aceleración promedio ($\alpha = 0$)

Δt_i	$\max \left\{ \frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ }{A^{\text{«pEnv»}}} \right\}$	$\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u^{\text{«ana»}}\ _F}$	$\ln \left(\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u_{i+1}^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F} \right)$ $\ln(\Delta t_i / \Delta t_{i+1})$
2 ⁻¹	2.01 × 10 ⁰	1.30 × 10 ⁰	-0.0500
2 ⁻²	2.19 × 10 ⁰	1.35 × 10 ⁰	-0.1564
2 ⁻³	2.00 × 10 ⁰	1.50 × 10 ⁰	1.1158
2 ⁻⁴	1.19 × 10 ⁰	6.94 × 10 ⁻¹	1.9258
2 ⁻⁵	3.11 × 10 ⁻¹	1.83 × 10 ⁻¹	1.9922
2 ⁻⁶	7.81 × 10 ⁻²	4.59 × 10 ⁻²	1.9989
2 ⁻⁷	1.95 × 10 ⁻²	1.15 × 10 ⁻²	1.9997
2 ⁻⁸	4.87 × 10 ⁻³	2.87 × 10 ⁻³	1.9999
2 ⁻⁹	1.22 × 10 ⁻³	7.18 × 10 ⁻⁴	2.0000
2 ⁻¹⁰	3.04 × 10 ⁻⁴	1.80 × 10 ⁻⁴	2.0000
2 ⁻¹¹	7.60 × 10 ⁻⁵	4.49 × 10 ⁻⁵	2.0000
2 ⁻¹²	1.90 × 10 ⁻⁵	1.12 × 10 ⁻⁵	2.0000
2 ⁻¹³	4.72 × 10 ⁻⁶	2.79 × 10 ⁻⁶	2.0094

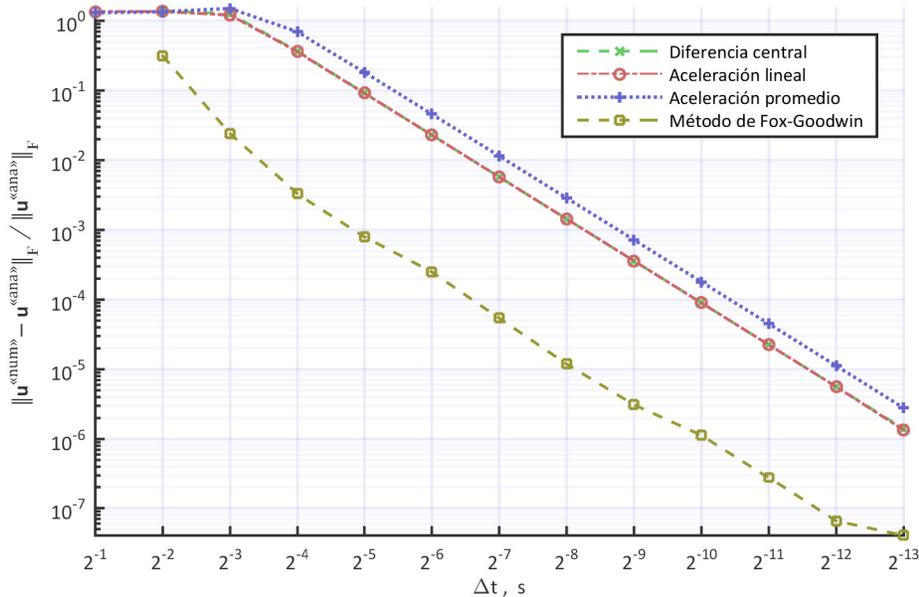


Figura 28. Prueba de convergencia de cuatro métodos numéricos para un sistema no amortiguado

La tendencia a exhibir una recta bajo una representación logarítmica es un indicador del desempeño del algoritmo, si la pendiente de esa recta coincide con el orden de convergencia teórico entonces el algoritmo se desempeña correctamente.

Como se puede observar en la figura 28 (y también en las tablas de la 8 a la 11), a partir de cierto Δt el error adquiere un orden de convergencia cuadrático, con excepción del método de Fox-Goodwin.

Teóricamente el método de Fox-Goodwin debería exhibir un orden cuártico, pero éste es difícil de lograr cuando se utiliza aritmética de precisión finita. Se puede ver que la primera vez que desciende el error en este método, el orden de convergencia observado está próximo al teórico ($p=4$), sin embargo, poco a poco ese orden observado se degrada al caso cuadrático y finalmente al caso lineal.

Pese a la rápida degradación del orden de convergencia observado en el método de Fox-Goodwin, en lo que respecta a sistemas lineales, éste es el método más preciso de la familia de Newmark para sistemas no amortiguados.

4.1.2 Prueba en modelo amortiguado

Tabla 12: Prueba de convergencia: Diferencia central ($\alpha = 1/256$)

Δt_i	$\max \left\{ \frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ }{A^{\text{«pEnv»}}} \right\}$	$\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u^{\text{«ana»}}\ _F}$	$\ln \left(\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u_{i+1}^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F} \right)$
			$\ln(\Delta t_i / \Delta t_{i+1})$
2^{-1}	2.16×10^{75}	6.17×10^{72}	—
2^{-2}	5.47×10^0	1.17×10^0	0.8033
2^{-3}	1.87×10^0	6.73×10^{-1}	1.8848
2^{-4}	6.12×10^{-1}	1.82×10^{-1}	1.9994
2^{-5}	1.51×10^{-1}	4.56×10^{-2}	2.0004
2^{-6}	3.75×10^{-2}	1.14×10^{-2}	2.0008
2^{-7}	9.34×10^{-3}	2.85×10^{-3}	2.0004
2^{-8}	2.34×10^{-3}	7.11×10^{-4}	2.0002
2^{-9}	5.84×10^{-4}	1.78×10^{-4}	1.9991
2^{-10}	1.46×10^{-4}	4.45×10^{-5}	2.0001
2^{-11}	3.64×10^{-5}	1.11×10^{-5}	1.9998
2^{-12}	9.11×10^{-6}	2.78×10^{-6}	2.0013
2^{-13}	2.28×10^{-6}	6.94×10^{-7}	

Tabla 13: Prueba de convergencia: Método de Fox-Goodwin ($\alpha = 1/256$)

Δt_i	$\max \left\{ \frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ }{A^{\text{«pEnv»}}} \right\}$	$\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u^{\text{«ana»}}\ _F}$	$\ln \left(\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u_{i+1}^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F} \right)$
			$\ln(\Delta t_i / \Delta t_{i+1})$
2^{-1}	5.23×10^{18}	2.12×10^{16}	—
2^{-2}	1.17×10^0	1.80×10^{-1}	2.9213
2^{-3}	7.32×10^{-2}	2.38×10^{-2}	2.4713
2^{-4}	3.18×10^{-2}	4.28×10^{-3}	2.5035
2^{-5}	1.05×10^{-2}	7.55×10^{-4}	0.5959
2^{-6}	7.52×10^{-3}	5.00×10^{-4}	1.4933
2^{-7}	3.45×10^{-3}	1.78×10^{-4}	1.2906
2^{-8}	1.46×10^{-3}	7.26×10^{-5}	1.1586
2^{-9}	4.75×10^{-4}	3.25×10^{-5}	0.4757
2^{-10}	2.67×10^{-5}	2.34×10^{-5}	0.9661
2^{-11}	1.35×10^{-5}	1.20×10^{-5}	1.0031
2^{-12}	6.64×10^{-6}	5.97×10^{-6}	1.0403
2^{-13}	3.24×10^{-6}	2.90×10^{-6}	

Tabla 14: Prueba de convergencia: Aceleración lineal ($\alpha = 1/256$)

Δt_i	$\max \left\{ \frac{\ u_i^{\text{num}} - u^{\text{ana}}\ }{A^{\text{pEnv}}} \right\}$	$\frac{\ u_i^{\text{num}} - u^{\text{ana}}\ _F}{\ u^{\text{ana}}\ _F}$	$\ln \left(\frac{\ u_i^{\text{num}} - u^{\text{ana}}\ _F}{\ u_{i+1}^{\text{num}} - u^{\text{ana}}\ _F} \right)$ $\ln(\Delta t_i / \Delta t_{i+1})$
2 ⁻¹	2.06 × 10 ¹	1.44 × 10 ⁰	0.2678
2 ⁻²	5.10 × 10 ⁰	1.19 × 10 ⁰	0.8633
2 ⁻³	1.87 × 10 ⁰	6.56 × 10 ⁻¹	1.8615
2 ⁻⁴	5.79 × 10 ⁻¹	1.80 × 10 ⁻¹	1.9885
2 ⁻⁵	1.49 × 10 ⁻¹	4.55 × 10 ⁻²	1.9973
2 ⁻⁶	3.76 × 10 ⁻²	1.14 × 10 ⁻²	1.9987
2 ⁻⁷	9.44 × 10 ⁻³	2.85 × 10 ⁻³	1.9955
2 ⁻⁸	2.37 × 10 ⁻³	7.15 × 10 ⁻⁴	1.9838
2 ⁻⁹	5.89 × 10 ⁻⁴	1.81 × 10 ⁻⁴	1.8464
2 ⁻¹⁰	1.47 × 10 ⁻⁴	5.02 × 10 ⁻⁵	1.6207
2 ⁻¹¹	3.77 × 10 ⁻⁵	1.63 × 10 ⁻⁵	1.3110
2 ⁻¹²	1.13 × 10 ⁻⁵	6.58 × 10 ⁻⁶	1.1433
2 ⁻¹³	3.92 × 10 ⁻⁶	2.98 × 10 ⁻⁶	

Tabla 15: Prueba de convergencia: Aceleración promedio ($\alpha = 1/256$)

Δt_i	$\max \left\{ \frac{\ u_i^{\text{num}} - u^{\text{ana}}\ }{A^{\text{pEnv}}} \right\}$	$\frac{\ u_i^{\text{num}} - u^{\text{ana}}\ _F}{\ u^{\text{ana}}\ _F}$	$\ln \left(\frac{\ u_i^{\text{num}} - u^{\text{ana}}\ _F}{\ u_{i+1}^{\text{num}} - u^{\text{ana}}\ _F} \right)$ $\ln(\Delta t_i / \Delta t_{i+1})$
2 ⁻¹	3.12 × 10 ¹	1.51 × 10 ⁰	0.2637
2 ⁻²	9.10 × 10 ⁰	1.26 × 10 ⁰	0.3130
2 ⁻³	2.01 × 10 ⁰	1.01 × 10 ⁰	1.5174
2 ⁻⁴	1.16 × 10 ⁰	3.53 × 10 ⁻¹	1.9607
2 ⁻⁵	2.97 × 10 ⁻¹	9.08 × 10 ⁻²	1.9961
2 ⁻⁶	7.46 × 10 ⁻²	2.28 × 10 ⁻²	1.9994
2 ⁻⁷	1.88 × 10 ⁻²	5.69 × 10 ⁻³	1.9989
2 ⁻⁸	4.71 × 10 ⁻³	1.42 × 10 ⁻³	1.9959
2 ⁻⁹	1.17 × 10 ⁻³	3.57 × 10 ⁻⁴	1.9571
2 ⁻¹⁰	2.92 × 10 ⁻⁴	9.19 × 10 ⁻⁵	1.8645
2 ⁻¹¹	7.36 × 10 ⁻⁵	2.53 × 10 ⁻⁵	1.6302
2 ⁻¹²	1.88 × 10 ⁻⁵	8.16 × 10 ⁻⁶	1.3432
2 ⁻¹³	5.65 × 10 ⁻⁶	3.22 × 10 ⁻⁶	

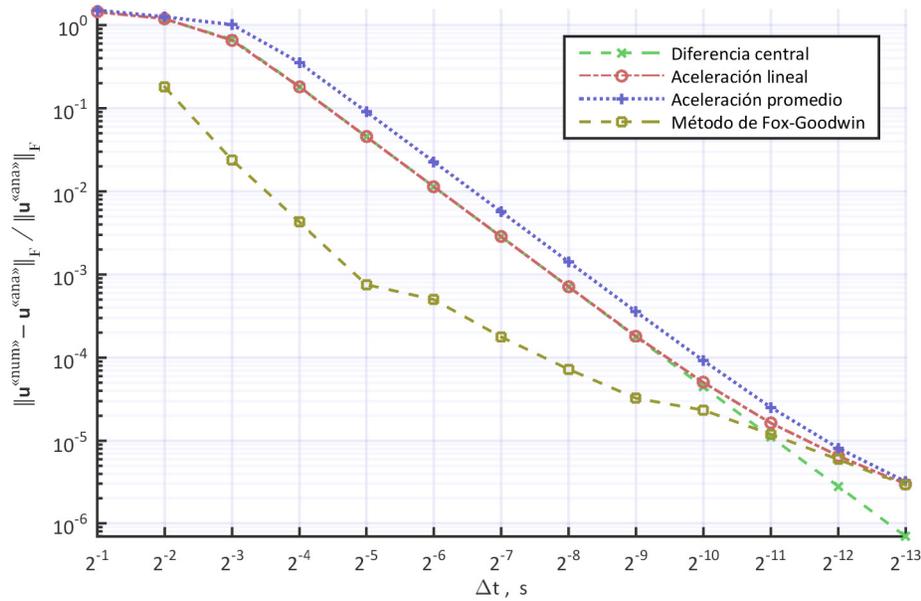


Figura 29. Prueba de convergencia de cuatro métodos numéricos para un sistema amortiguado

La tendencia a exhibir una recta bajo una representación logarítmica es un indicador del desempeño del algoritmo, si la pendiente de esa recta coincide con el orden de convergencia teórico entonces el algoritmo se desempeña correctamente.

En lo que concierne al modelo amortiguado, se puede mirar tanto en la figura 29, así como en las tablas 12 a 15, un orden de convergencia cuadrático que desciende a lineal. Sólo el método de diferencia central mantiene su orden de convergencia observado en torno al teórico ($p=2$), al menos, para los Δt mostrados.

Como antes, esta degradación se produce por las limitaciones acaecidas por el uso de aritmética de precisión finita. Una posible explicación de por qué el método de diferencia central no parece exhibirlo puede inferirse al mirar la matriz del sistema, en el caso del método de Newmark ésta es

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{M} + 2\gamma\Delta t\mathbf{C} + 2\beta\Delta t^2\mathbf{K}$$

mientras que para el método de diferencia central es de la forma

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{M} + \Delta t\mathbf{C}$$

Como se puede notar, la matriz del método de diferencia central depende de Δt pero no de su cuadrado y, al menos que Δt se torne demasiado pequeño, la suma en aritmética de precisión finita se podrá realizar sin problemas. Por el contrario, la matriz del método de Newmark requiere sumar elementos con tres órdenes de magnitud distintos, basta que Δt sea reduzca lo suficiente para que Δt^2 se vuelva demasiado pequeño y se comprometa la precisión con la que se realiza la suma.

4.2 Prueba de convergencia de la simulación por IDFT

Para estas pruebas se usaron de 64 muestras de tiempo. La primer prueba (la cual tiene un amortiguamiento grande) repartió su muestras de forma uniforme entre 0 s y 7.875 s, mientras que la segunda (con amortiguamiento más pequeño) lo hizo entre 0 s y 15.75 s. Se realizaron distintas simulaciones manteniendo fijo Δt y variando N_i (la cantidad de muestras), éstas se duplicaron en cada simulación. Las muestras que excedían el tiempo de observación fueron ignoradas, es decir, fueron calculadas pero no se consideraron para la realización de la gráfica o la prueba de convergencia.

En algunos casos, cuando Δt era lo suficientemente pequeño, se requirió decimar la respuesta (véase figura 30). Al final, todas las simulaciones terminaron con la misma cantidad de muestras y haciendo referencia a los mismos tiempos.



Figura 30. Proceso de selección y decimación

Los datos obtenidos con la simulación se han denotado con círculos. Los datos en el recuadro no se seleccionan por exceder el tiempo de observación requerido. De los restantes, sólo se conservan los que coinciden con los tiempos solicitados (círculos llenos).

4.2.1 Prueba en modelo con amortiguamiento grande

Tabla 16: Prueba de convergencia: Simulación mediante IDFT ($\alpha = 1/16$, $\Delta t = 2^{-13}$)

$N_i \Delta t$	$\max \left\{ \frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ }{A^{\text{«pEnv»}}} \right\}$	$\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u^{\text{«ana»}}\ _F}$	$\ln \left(\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u_{i+1}^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F} \right)$
			$N_{i+1} \Delta t - N_i \Delta t$
8	1.04×10^{-1}	6.34×10^{-2}	0.2648
16	1.06×10^{-2}	7.62×10^{-3}	0.2794
32	1.17×10^{-4}	8.72×10^{-5}	0.2739
64	1.33×10^{-8}	1.36×10^{-8}	

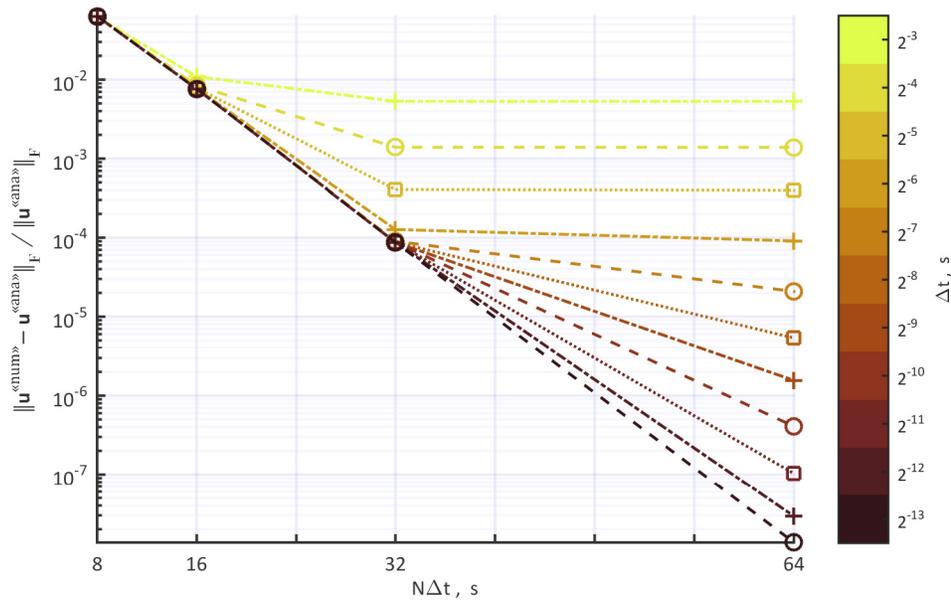


Figura 31. Prueba de convergencia en un modelo con amortiguamiento grande

Líneas del mismo color representan pruebas donde se modifica N y se mantiene fijo Δt .

El error disminuye exponencialmente al aumentar N, sin embargo, el descenso está limitado por la cantidad de frecuencias consideradas, esto es, por Δt .

En la figura 31 las líneas se van oscureciendo a medida que Δt disminuye, la tabla 16 corresponden al menor de los Δt utilizados (línea negra). Puede observarse cómo el error disminuye exhibiendo una tendencia lineal en escala semilogarítmica, lo que evidencia su comportamiento exponencial. Tal como predice la teoría, la pendiente de la recta se asocia a la aportación sinusoidal de más lento decaimiento

$$\begin{aligned} \min\{\zeta_j \omega_j\}_{j=1,\dots,3} &= \min\left\{\frac{3\alpha}{2} \cdot 3, \frac{4\alpha}{2} \cdot 4, \frac{5\alpha}{2} \cdot 5\right\}_{\alpha=1/16} \\ &= \min\left\{\frac{9}{32}, \frac{16}{32}, \frac{25}{32}\right\} \\ &= 0.28125 \end{aligned}$$

Una segunda forma de ver este decaimiento exponencial es observando los errores de la tabla 16, cuando se duplica el número de muestras el error se reduce casi como el cuadrado del valor anterior; para el primer error, éste se reduce con un factor de proporcionalidad cercano a 1; mientras que para el segundo es de aproximadamente 1.7. Como el modelo presenta un amortiguamiento grande, el factor de proporcionalidad es pequeño y rápidamente se alcanza una buena precisión.

Desafortunadamente, se requiere contar con la información de altas frecuencias, pues de lo contrario no se podrá mejorar la precisión de la solución. Lo anterior se explica porque la reconstrucción en tiempo utilizando pocas frecuencias es *correcta* para la cantidad de frecuencias consideradas. Una reconstrucción íntegra requeriría considerar la totalidad de las frecuencias, por lo cual, al disminuir Δt (aumentando el contenido de frecuencias) se hace posible disminuir el error.

Por esto, en la figura 31 se puede observar que para Δt pequeños (líneas amarillas), después de cierto número de muestras, la solución no mejora aun si se duplica la cantidad de éstas.

4.2.2 Prueba en modelo con amortiguamiento moderado

Tabla 17: Prueba de convergencia: Simulación mediante IDFT ($\alpha = 1/64$, $\Delta t = 2^{-15}$)

$N_i \Delta t$	$\max \left\{ \frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ }{A^{\text{«pEnv»}}} \right\}$	$\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u^{\text{«ana»}}\ _F}$	$\ln \left(\frac{\ u_i^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F}{\ u_{i+1}^{\text{«num»}} - u^{\text{«ana»}}\ _F} \right)$
			$N_{i+1} \Delta t - N_i \Delta t$
16	2.33×10^{-1}	1.37×10^{-1}	0.1108
32	9.14×10^{-2}	2.32×10^{-2}	0.0793
64	9.76×10^{-3}	1.83×10^{-3}	0.0700
128	1.11×10^{-4}	2.08×10^{-5}	0.0703
256	1.32×10^{-8}	2.56×10^{-9}	

Al igual que antes, la pendiente de la recta se asocia a la aportación sinusoidal de más lento decaimiento

$$\begin{aligned} \min\{\zeta_j \omega_j\}_{j=1, \dots, 3} &= \min \left\{ \frac{3\alpha}{2} \cdot 3, \frac{4\alpha}{2} \cdot 4, \frac{5\alpha}{2} \cdot 5 \right\} \Big|_{\alpha=1/64} \\ &= \min \left\{ \frac{9}{128}, \frac{16}{128}, \frac{25}{128} \right\} \\ &= 0.0703125 \end{aligned}$$

De manera semejante, al duplicar el número de muestras el error se reduce casi como el cuadrado del valor anterior; para el primer error, éste se reduce con un factor de proporcionalidad cercano a 1.1; mientras que para el segundo es de aproximadamente 6. Como el amortiguamiento es menor, el factor de proporcionalidad es más grande y la reducción del error es más lenta.

Comparado con la figura 31, la figura 32 muestra que se requirió duplicar más veces el número de muestras para reducir el error a un orden de magnitud en torno a 10^{-8} . Como antes, después de cierto número de muestras, las soluciones obtenidas con Δt pequeños (líneas amarillas) no mejoran aun cuando se duplican la cantidad de muestras.

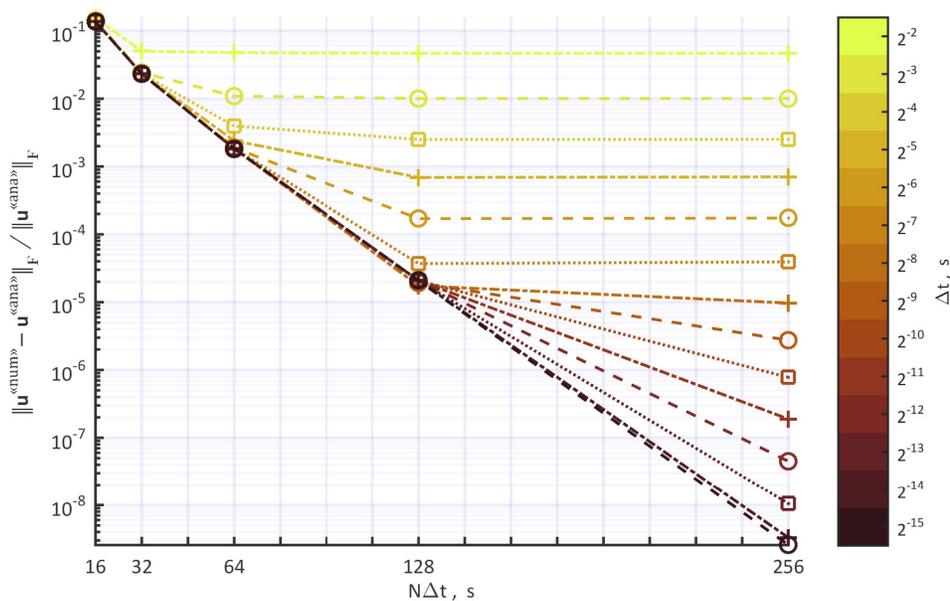


Figura 32. Prueba de convergencia en un modelo con amortiguamiento moderado

Líneas del mismo color representan pruebas donde se modifica N y se mantiene fijo Δt .

El error disminuye exponencialmente al aumentar N, sin embargo, el descenso está limitado por la cantidad de frecuencias consideradas, esto es, por Δt .

El fuerte de este método es su rápida reducción del error, aunque únicamente es aplicable a modelos amortiguados. Si bien la condición de requerir de altas frecuencias para mejorar su precisión hace de esta estrategia de simulación un tanto costosa, aún resulta un esquema atractivo si se desea conseguir una alta precisión en los resultados.

4.3 Precisión de las FRF mediante relaciones de recurrencia

Para este estudio, se han puesto a prueba cinco algoritmos numéricos para ilustrar la precisión conseguida cuando se calculan las FRF, dichos algoritmos son:

- TDMA - Versión *Crout* (algoritmo 3)
- TDMA - Versión *Doolittle* (algoritmo 4)
- FRF a partir de la RR-A y la RR-H (algoritmo 7)
- FRF a partir de la RR-B (algoritmo 8)
- ZGTSV (algoritmo de la biblioteca LAPACK, versión 3.4.0)

Estrictamente hablando, se ha utilizado los TDMA y el ZGTSV para resolver el sistema cuya solución son las FRF, véase (6).

El algoritmo ZGTSV es una rutina especializada en resolver sistemas lineales con elementos complejos de matriz tridiagonal mediante eliminación gaussiana con pivoteo parcial. LAPACK es una biblioteca que proporciona algoritmos robustos concernientes al álgebra lineal numérica y un referente en lenguajes modernos que proporcionan sus propias rutinas matemáticas.

Se eligió resolver mediante eliminación gaussiana con pivoteo parcial porque, de acuerdo a Watkins (2002, p. 163) así como Higham (2002, pp. 178-179), en la práctica se puede considerar a éste como un algoritmo estable para la gran mayoría de matrices. De tal forma que, si la matriz no puede resolverse de forma estable por TDMA, seguramente si lo hará por ZGTSV.

No se ha considerado el TDMA - Versión *Ad hoc* porque el cálculo de las FRF mediante la RR-A y la RR-H hace en esencia lo mismo. Previo a la utilización de los algoritmos para calcular las FRF mediante relaciones de recurrencia, se verificó que los términos de la RR-A y la RR-B fuesen calculados de forma precisa.

Los algoritmos fueron implementados con números de punto flotante de doble precisión, mientras que la solución considerada como *exacta* se calculó con números de punto flotante de cuádruple precisión (referidos como *binary128* bajo el estándar IEEE). Las FRF *exactas* se obtuvieron con una versión modificada del ZGTSV que opera con

cuádruple precisión y, del mismo modo, los términos *exactos* de la RR-A y la RR-B fueron calculados mediante las relaciones de recurrencia en cuádruple precisión.

Algunos resultados fueron validados con la solución obtenida mediante cómputo simbólico, se verificó que la solución obtenida con cuádruple precisión tuviera una cantidad de cifras significativas correctas siempre mayor que la que pudiese encontrarse con doble precisión. De acuerdo a Watkins (2002, p. 141), se puede decir que los números de punto flotante de doble precisión (en el estándar IEEE) poseen 16 cifras significativas (lo anterior es una aproximación burda pero práctica), por tal motivo, se verificó que las soluciones obtenidas con cuádruple precisión estuvieran por encima de 17 cifras significativas correctas.

Con la solución *exacta* (calculada con cuádruple precisión) se realizó un análisis de sensibilidad dividiendo la norma del error entre la norma de la solución *exacta*. Se utilizó la norma infinito para ser congruente con la teoría, pues el número de condición de Skeel se relaciona con ésta.

Para ilustrar la precisión obtenida por los algoritmos al calcular las FRF se ha optado por el modelo 4-DOF mostrado en la tabla 18

Tabla 18: Ejemplo de parámetros de un modelo 4-DOF con amortiguamiento clásico

Piso	m	k	c	Frecuencia natural no amortiguada	Fracción de amortiguamiento
1	12	48	48α	$\omega_1 = 1$	$\zeta_1 = 0.5\alpha$
2	6	36	36α	$\omega_2 = 2$	$\zeta_2 = 1.0\alpha$
3	4	24	24α	$\omega_3 = 3$	$\zeta_3 = 1.5\alpha$
4	3	12	12α	$\omega_4 = 4$	$\zeta_4 = 2.0\alpha$

Se prefirió el modelo 4-DOF al modelo 3-DOF que se había venido trabajando, porque a medida que aumentan los grados de libertad se incrementan triangularmente los menores principales líderes (como $\frac{1}{2}n\{n+1\}$). Por lo visto en el capítulo 3, resulta conveniente conocer las frecuencias que tornan cero a dichos menores cuando se considera el modelo no amortiguado, estos se presentan en la tabla 19.

Tabla 19: Frecuencias angulares que tornan cero a algún menor principal líder en el modelo 4-DOF no amortiguado ($\alpha=0$)

	1	ω_1	2	$\sqrt{7}$	ω_2	3	$\sqrt{13}$	ω_3	4
Determinante	✓		✓			✓			✓
Menor principal líder*		✓	✓	✓	✓		✓	✓	

$$\omega_k = \sqrt{\frac{26}{3} + \frac{2\sqrt{133}}{3} \cos\left(\frac{2\pi k}{3} + \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{449}{133\sqrt{133}}\right)\right)} \approx \begin{cases} 1.5560 & k=1 \\ 2.8119 & k=2 \\ 3.9588 & k=3 \end{cases}$$

* Se ha excluido al determinante

Las frecuencias reportadas en la tabla 19, son las frecuencias en que la sensibilidad de los algoritmos para el cálculo de las FRF se torna crítica. Se ha coloreado en verde las frecuencias que ocultarán este efecto por su cercanía con otras del mismo tipo.

Las figuras 33 y 34 ilustran la precisión lograda al calcular los términos de la RR-A y la RR-B con aritmética de precisión finita en doble precisión, así como la frontera teórica del error. La figura 33 corresponde al modelo 3-DOF de la tabla 2, mientras que la figura 34 al modelo 4-DOF de la tabla 18.

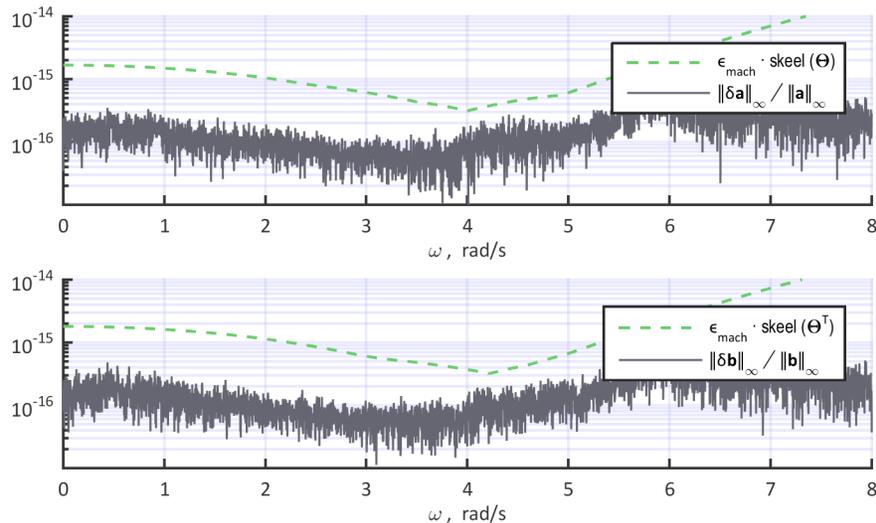


Figura 33. Error en el cálculo de los términos de las relaciones de recurrencia para el sistema 3-DOF

En línea discontinua se muestra la frontera teórica del error, ésta corresponde al número de condición de Skeel por la épsilon de la máquina para números de punto flotante de doble precisión. En línea continua se muestra el error cometido al calcular los términos con dicha precisión.

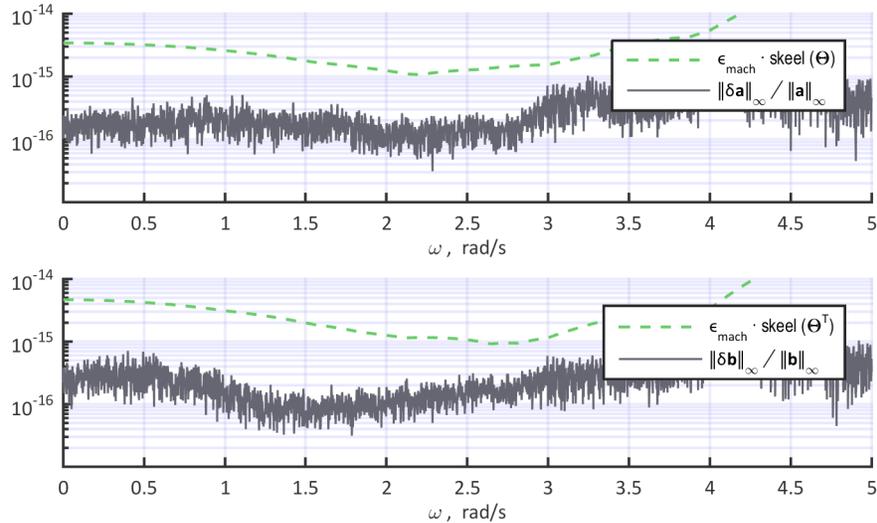


Figura 34. Error en el cálculo de los términos de las relaciones de recurrencia para el sistema 4-DOF

En línea discontinua se muestra la frontera teórica del error, ésta corresponde al número de condición de Skeel por la épsilon de la máquina para números de punto flotante de doble precisión. En línea continua se muestra el error cometido al calcular los términos con dicha precisión.

Semejante a como se hizo antes, se puede suponer que este cociente de normas se comporta como el error relativo; por tanto, un error en torno a 10^{-t} revela que alrededor de t cifras significativas se calcularon correctamente. Por esto, las figuras 33 y 34 revelan que los términos de las relaciones de recurrencia se calcularon prácticamente con toda la precisión que se podía ofrecer al usar doble precisión. Adicionalmente, se corrobora que el error está por debajo de la frontera teórica, por tanto, se garantiza que el margen de error al calcular los términos de las relaciones de recurrencia es pequeño.

En lo que respecta al cálculo de las FRF, para facilitar la visualización de los datos, se suavizó el cociente de las normas mediante una regresión local de un polinomio de segundo grado (estimación tipo *LOESS*) sobre los datos vistos en escala semilogarítmica (véase figura 35)

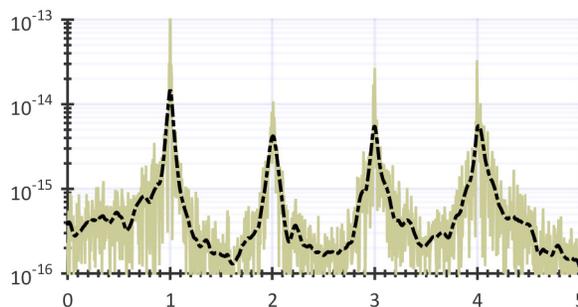


Figura 35. Ejemplo del suavizado realizado a los cocientes

El tipo de suavizado aplicado no modifica la posición de los picos, pero sí subestima levemente la amplitud de los mismos.

La primera prueba se realizó con un modelo poco amortiguado ($\alpha=10^{-6}$), por tanto, las matrices estuvieron cerca de ser singulares y la sensibilidad del algoritmo al error en la entrada se magnificó.

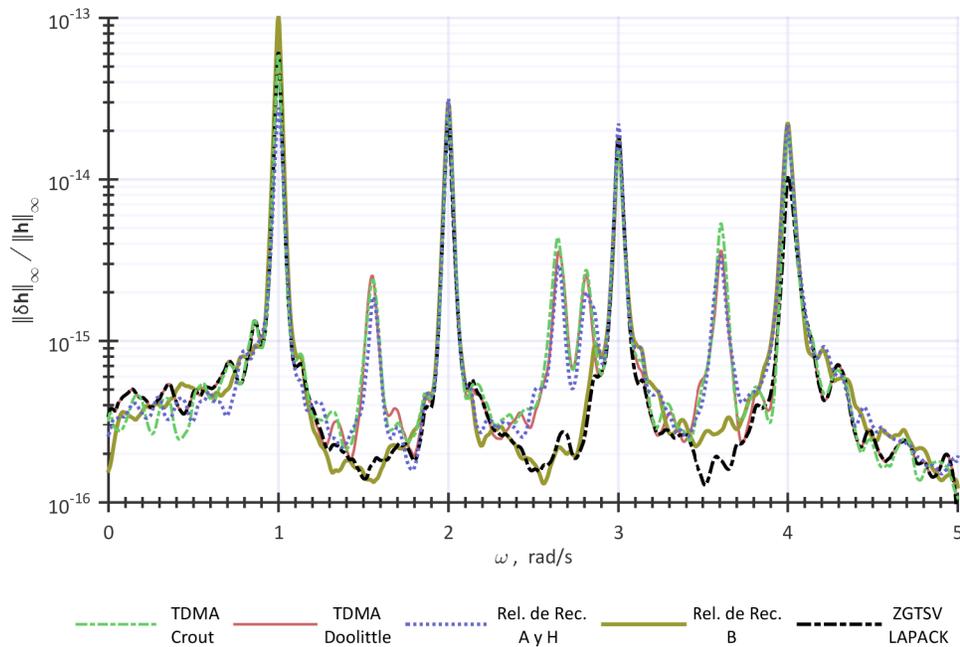


Figura 36. Error en el cálculo de las FRF para un modelo poco amortiguado

En línea oscura y discontinua se muestra el error cometido por un algoritmo robusto y en líneas de color el error concerniente a los algoritmos presentados en esta tesis.

En la figura 36 se puede observar, tal como predice la teoría, que los algoritmos pierden precisión en la vecindad de las frecuencias resonantes. Adicionalmente, los algoritmos que implementan la descomposición LU sin pivoteo, así como el que está basado en éste, manifiestan una pérdida de precisión adicional en torno a los ceros de los menores principales líderes.

Nuevamente, suponiendo que este cociente de normas se comporta como el error relativo, se deduce que una gran cantidad de frecuencias pueden ser calculadas casi sin pérdida de precisión al utilizar un algoritmo robusto o bien, la RR-B.

En las tablas 20, 21 y 22 se puede observar lo antes dicho: el primer dato (el cociente) corresponde a la solución exacta; seguida de ésta, viene su representación decimal; posteriormente, las soluciones numéricas calculadas con los distintos algoritmos. Se ha resaltado en rojo las cifras calculadas correctamente.

Tabla 20: Solución calculada en una frecuencia donde el problema está bien condicionado

$\text{Re}\{H_4(0.5, 10^{-6})\} =$	$\frac{13953515625015362789062506357032226563671089843750081}{9389496445667572564888005891886001588001282226562581}$
Repr. Decimal:	1.486077097505445457299970564157197362684...
Sol: IEEE 128-bit:	1.48607709750544545729997056415719769
TDMA Crout:	1.4860770975054471
TDMA Doolittle:	1.4860770975054476
RR-A y RR-H:	1.4860770975054456
RR-B:	1.4860770975054456
ZGTSV (LAPACK):	1.4860770975054476

Tabla 21: Solución calculada entorno al cero de un menor principal líder (distinto del det.)

$\text{Im}\{H_4(1.556, 10^{-6})\} =$	$\frac{251720014645276591903162015556555828413993177664836144271973750}{149675095161002389222551341724184181018391166679290981857846825588661}$
Repr. Decimal:	1.6817762124988569645016282229923968486585... $\times 10^{-6}$
Sol: IEEE 128-bit:	1.681776212498856964501628222992394872 $\times 10^{-6}$
TDMA Crout:	1.68177621250144079 $\times 10^{-6}$
TDMA Doolittle:	1.68177621250144079 $\times 10^{-6}$
RR-A y RR-H:	1.68177621249885776 $\times 10^{-6}$
RR-B:	1.68177621249885925 $\times 10^{-6}$
ZGTSV (LAPACK):	1.68177621249885607 $\times 10^{-6}$

Tabla 22: Solución calculada entorno a una frecuencia resonante

$\text{Re}\{H_4(2, 10^{-6})\} =$	$\frac{1898437500041625000000187874999999919}{1977539062540570312500199890625000081}$
Repr. Decimal:	-0.960000000001353955555257455755065672677...
Sol: IEEE 128-bit:	-0.96000000000135395555522971976463465
TDMA Crout:	-0.95999056141006023
TDMA Doolittle:	-0.95999056141006067
RR-A y RR-H:	-0.96001070668404809
RR-B:	-0.96000540849693938
ZGTSV (LAPACK):	-0.95999056141006045

Por último, la figura 37 muestra cómo el error se reduce cuando se aumenta el amortiguamiento ($\alpha=10^{-3}$), o dicho de otro modo, el margen de error se torna pequeño al aumentar el amortiguamiento.

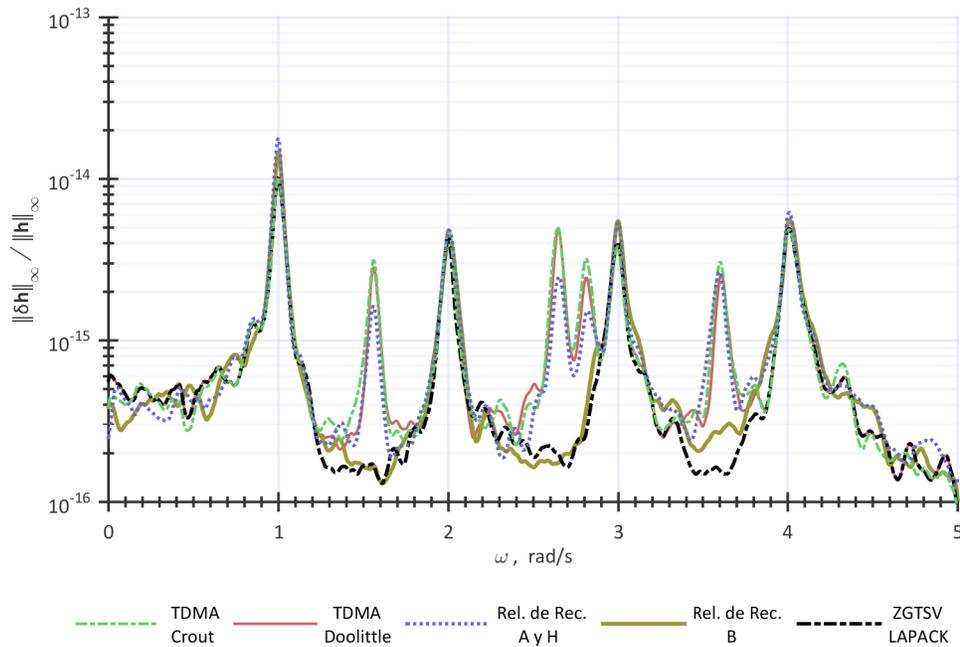


Figura 37. Error en el cálculo de las FRF para un modelo con amortiguamiento moderado

Se muestra el cociente de las normas entre el error de la FRF y la solución exacta.
 En línea oscura se muestra el resultado mediante un algoritmo robusto y
 en líneas de color los algoritmos presentados en esta tesis.

Para fines prácticos, al menos que el amortiguamiento sea muy pequeño, todos los algoritmos pueden calcular las FRF con suficiente precisión. Entre los algoritmos presentados en esta tesis, la solución obtenida a partir de la RR-B es la más precisa, con una precisión semejante a la que se obtendría con un algoritmo robusto para resolver sistemas de ecuaciones, además, tiene la ventaja de ser más económico en cuanto número de operaciones.

4.4 Casos de cancelación de polos y ceros

En 2001, Mikota conjeturó que cierta configuración especial de osciladores MDOF (no amortiguados) tendría la virtud de que sus frecuencias naturales coincidirían con los números naturales (o serían proporcionales a estos). Esta conjetura fue probada de formas distintas por Weber y Anders (2007) así como por Müller y Hou (2007). Dentro de las aplicaciones que se le han dado a esta configuración especial, está el de probar algoritmos de simulación, así como también el de probar algoritmos para el cálculo de valores propios.

La configuración de Mikota posee el siguiente formato

$$m_j = m / j, \quad k_j = (n + 1 - j) \hat{k}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Con lo anterior, las frecuencias naturales son múltiplos enteros de $\sqrt{\hat{k}/m}$.

Si bien los modelos con la configuración de Mikota tienen cualidades bastante deseables en el ámbito académico, varios de ellos presentan el fenómeno de cancelación entre polos y ceros. Para ilustrar esto se ha utilizado la teoría desarrollada en esta tesis sobre tres modelos con la configuración de Mikota, los correspondientes a cuatro, cinco y siete pisos (figuras 38, 39 y 40 respectivamente). En particular, se utilizó la función de la expresión (13), ésta función muestra el piso y la frecuencia donde se presenta una cancelación de un polo y un cero mediante una marca luminosa.

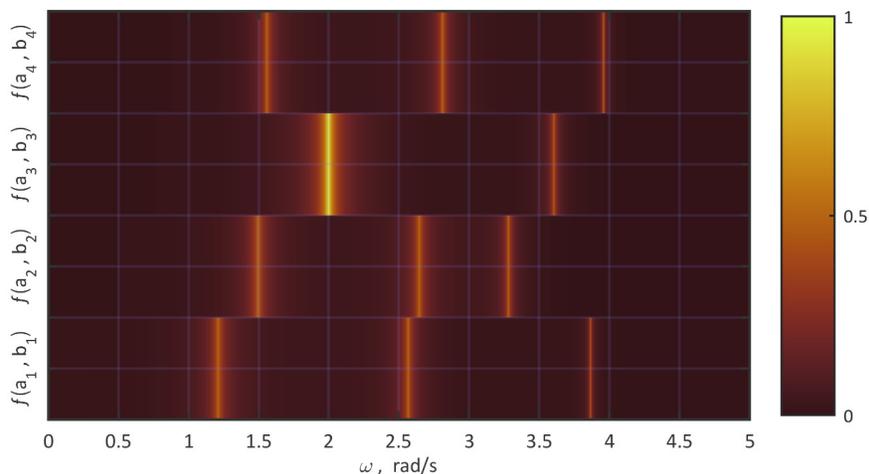


Figura 38. Patrón de ceros asociados a los menores principales para la configuración de Mikota 4-DOF

Las líneas brillantes revelan la posición de los ceros de los menores principales líderes y anti-líderes, los cuales coinciden con los ceros de los términos de la RR-A y la RR-B, respectivamente. No se han considerado los ceros del determinante. La iluminación máxima (≈ 1) indica la presencia de cancelación de un polo y un cero.

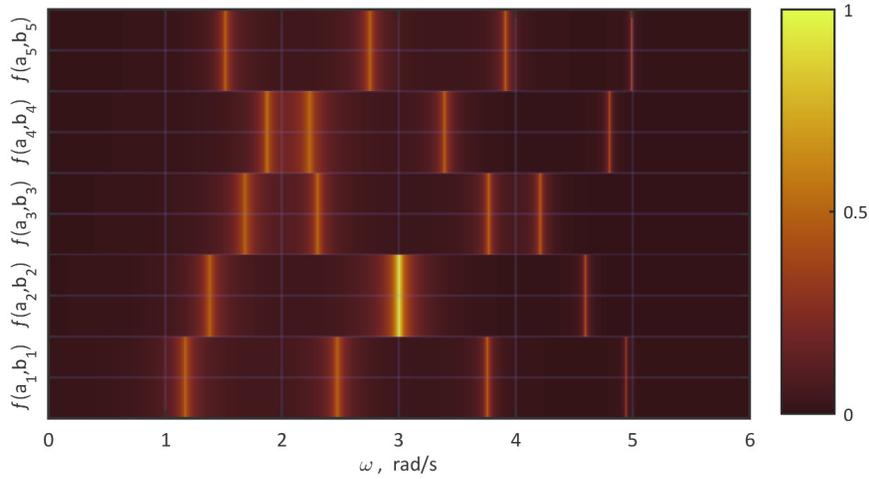


Figura 39. Patrón de ceros asociados a los menores principales para la configuración de Mikota 5-DOF

Las líneas brillantes revelan la posición de los ceros de los menores principales líderes y anti-líderes, los cuales coinciden con los ceros de los términos de la RR-A y la RR-B, respectivamente. No se han considerado los ceros del determinante. La iluminación máxima (≈ 1) indica la presencia de cancelación de un polo y un cero.

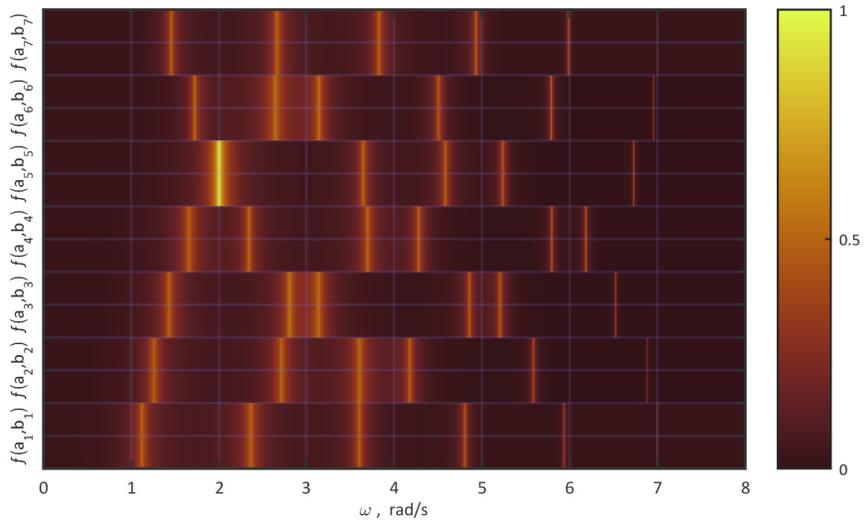


Figura 40. Patrón de ceros asociados a los menores principales para la configuración de Mikota 7-DOF

Las líneas brillantes revelan la posición de los ceros de los menores principales líderes y anti-líderes, los cuales coinciden con los ceros de los términos de la RR-A y la RR-B, respectivamente. No se han considerado los ceros del determinante. La iluminación máxima (≈ 1) indica la presencia de cancelación de un polo y un cero.

Para validar los resultados antes mostrados, se calcularon los modos asociados a las frecuencias que exhibían dicha cancelación. Como puede verse en la figura 41 el piso donde ocurre dicha cancelación no exhibe movimiento.

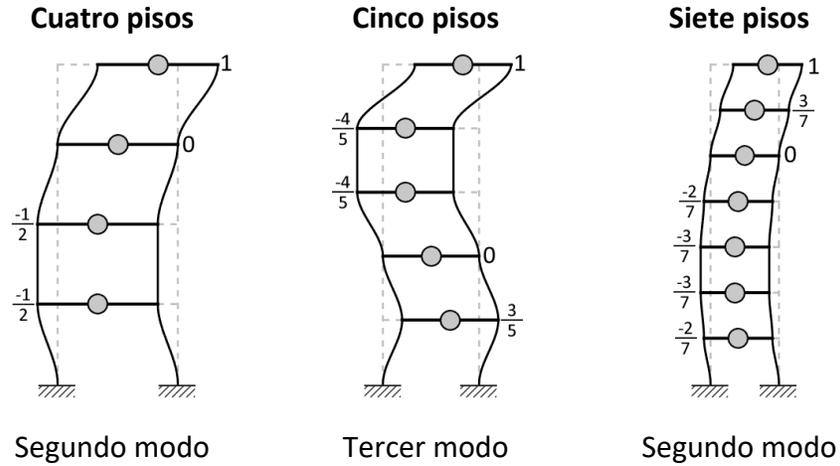


Figura 41. Modos de vibrar de tres sistemas que presenta cancelación de un polo y un cero
 Se puede observar que el modo asociado a la frecuencia que presenta la cancelación del polo y el cero presenta un desplazamiento nulo en el piso en que ocurre dicha cancelación.

Algunos otros modelos con la configuración de Mikota que presentan cancelación de polos y ceros se presentan en la tabla 23.

Tabla 23: Cancelación de polos y ceros en modelos con la configuración de Mikota

Número de pisos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Cancelación de polos y ceros	x	x	x	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	x	✓	✓	x	x	✓

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Partiendo de los resultados expuestos, es válido afirmar que:

- Las relaciones de recurrencia pueden ser ocupadas para el cálculo de las FRF y la precisión que éstas exhiben es comparable a la que se obtendría si se calcularan resolviendo el sistema de ecuaciones mediante algoritmos robustos.
- Las FRF pueden ser ocupadas para realizar simulaciones numéricas exhibiendo un buen desempeño en cuanto tiempo y uso de memoria. De hecho, su desempeño mejora cuanto más grande sea el amortiguamiento en el modelo.
- Comparado con el método de Newmark, el planteamiento propuesto en esta tesis no permite abordar modelos no amortiguados, y el de Newmark sí, siendo el método de Fox-Goodwin el que mejor desempeño tiene cuando se aborda este caso.
- Si se persigue que las simulaciones sean sumamente precisas, el orden de precisión en el método de Newmark puede descender al caso lineal cuando se abordan modelos fuertemente amortiguados. Por el contrario, una simulación precisa a partir de las FRF puede resultar bastante costosa si el modelo tiene un amortiguamiento escaso.
- Se pueden ocupar las relaciones de recurrencia para identificar una posible cancelación de polos y ceros en el modelo. De los modelos conocidos en la literatura, los que poseen la configuración de Mikota exhiben este fenómeno con cierta regularidad.

Si bien esta tesis se ha limitado al análisis de Fourier, cabe señalar que las relaciones de recurrencia (bajo un cambio de variable adecuado) también son válidas en el dominio de Laplace. En función de lo anterior, se recomienda explorar el potencial de éstas para análisis de otra índole.

Finalmente, también se aconseja el uso de las relaciones de recurrencia propuestas en esta tesis para realizar desarrollos teóricos pues, al no requerir del cálculo de raíces cuadradas ni de potencias al cuadrado, sus expresiones son más simples que las de sus predecesoras.

APÉNDICE A

Para la deducción de la *Relación de recurrencia A* (RR-A) y la *Relación de recurrencia H* (RR-H) se supuso que el *Tri-Diagonal Matrix Algorithm* versión *ad hoc* era viable, pero no se dio prueba alguna de ello. Este apartado está destinado a justificar lo anterior, en particular, se probará que si $a_j \neq 0$ para $j=1, \dots, n$ entonces:

- 1) La descomposición LDU sin pivoteo de la matriz $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]$ existe.
- 2) La descomposición LU *ad hoc* de la matriz $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]$ bajo el vector de términos independientes $(k_1 + i\omega c_1)\mathbf{e}_1$ existe.

Adicionalmente, se probará la relación existente entre los términos de la RR-A y los menores principales líderes de la matriz $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]$.

Para probar la existencia de la descomposición LDU sin pivoteo, así como de la descomposición LU *ad hoc* se hará uso de la siguiente notación:

- La matriz asociada a la RR-H será referida como \mathbf{U}^* , es decir

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} a_2 & -\eta_1^{\text{cmplx}} a_1 & & & \\ & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\eta_{n-1}^{\text{cmplx}} a_{n-1} & \\ & & & & a_{n+1} \end{bmatrix}$$

- Los elementos de la matriz $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]$, serán denotados como

$$[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} p_1 & s_2 & & \\ s_2 & p_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & s_n \\ & & s_n & p_n \end{bmatrix}$$

donde

$$s_j = -(k_j + i\omega c_j)$$

$$p_j = \begin{cases} (k_j + i\omega c_j) + (k_{j+1} + i\omega c_{j+1}) - \omega^2 m_j & 1 \leq j \leq n-1 \\ (k_n + i\omega c_n) - \omega^2 m_n & j = n \end{cases}$$

- Sólo se hará referencia a los factores \mathbf{D} y \mathbf{U} de la descomposición LDU sin pivoteo pues, de acuerdo a Watkins (2002, p. 84), $\mathbf{L} = \mathbf{U}^T$. Los elementos de estos serán representados de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} p_1 & s_2 & & \\ s_2 & p_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & s_n \\ & & s_n & p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ u_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & u_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Para el cálculo de los elementos d_j y u_k se podrá hacer uso del algoritmo A1. La descomposición de la matriz no existe cuando se presenta algún $d_j = 0$ para $1 \leq j \leq n-1$. Si el único elemento de la matriz diagonal igual a cero es d_n significa que la descomposición se realizó sobre una matriz singular.

Algoritmo A1: Descomposición $\mathbf{U}^T\mathbf{D}\mathbf{U}$ de una matriz simétrica tridiagonal

- 1 $d_1 \leftarrow p_1$
- 2 **Para** $i = 1, \dots, n-1$
- 3 $u_i \leftarrow \frac{s_{i+1}}{d_i}$
- 4 $d_{i+1} \leftarrow p_{i+1} - u_i^2 \cdot d_i$

Fin del bucle

A.1 Existencia de la descomposición LDU

En este apartado se probará que si \mathbf{U}^* es invertible o, lo que es igual, los términos de la RR-A son distintos de cero, existe la descomposición LDU sin pivoteo.

La prueba también es válida para \mathbf{U}^* singular si únicamente $a_{n+1} = 0$, esta apreciación se ha puntualizado al final del apartado. La prueba de la existencia de la descomposición LDU se realizará por contradicción.

- Hipótesis:

- El algoritmo para obtener la descomposición $\mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U}$ de una matriz tridiagonal simétrica es correcto. Si la matriz no admite dicha descomposición entonces la ejecución del algoritmo producirá al menos un $d_j = 0$ para $1 \leq j \leq n-1$.
- H:
- La matriz \mathbf{U}^* es invertible. Si ésta tiene relación con la matriz $[\mathbf{K} + i\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}]$ deberá probarse (a priori no se supone relación alguna).

- Conclusión:

Si la matriz \mathbf{U}^* es invertible ambas afirmaciones son ciertas:

- La matriz unitriangular superior que se construye dividiendo cada fila de la matriz \mathbf{U}^* por el elemento coincidente con la diagonal principal es, de hecho, la matriz \mathbf{U} de la descomposición $\mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U}$.
- Q:
- La ejecución del algoritmo para obtener la descomposición $\mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U}$ de la matriz $[\mathbf{K} + i\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}]$ se realiza sin producir algún $d_j = 0$ para $1 \leq j \leq n-1$, por tanto, la descomposición LDU existe.

- Supongamos que:

Pese a que \mathbf{U}^* es invertible, al menos una de las siguientes afirmaciones es cierta:

- Q:
- \mathbf{U}^* no está relacionada con \mathbf{U} de la forma antes mencionada.
 - La ejecución del algoritmo aún puede presentar algún $d_j = 0$ con $j \neq n$.

- Partiendo de las hipótesis y las suposiciones buscaremos llegar a una contradicción evidente

Observación: Si la matriz \mathbf{U}^* es invertible entonces $a_j \neq 0$ para $j=1, \dots, n+1$.

Razón: En cuanto al primer término, lo anterior es cierto porque $a_1 = 1$ por ser condición inicial. En cuanto al resto, estos deben ser distintos de cero pues se ha supuesto que la matriz es invertible y su determinante es distinto de cero. Al tratarse de una matriz triangular, el determinante de la matriz es igual al producto de los elementos de la diagonal principal y, como el producto es distinto de cero, todos los elementos en la diagonal deben ser distintos de cero.

- *Proposición 1*

Las siguientes igualdades no se satisfacen, al menos, simultáneamente:

$$u_j = \frac{s_{j+1}}{d_j}$$

$$\begin{aligned} d_{j+1} &= p_{j+1} - u_j^2 \cdot d_j \\ &= p_{j+1} - u_j \cdot s_{j+1} \end{aligned}$$

Razón: Se ha supuesto que la ejecución del algoritmo aún puede presentar algún $d_j = 0$ (con $j \neq n$) lo cual conducirá a un error pues, alguna de estas igualdades (asignaciones en el algoritmo), no es válida cuando $d_j = 0$.

Nota: Esta proposición puede no cumplirse siempre y cuando sí lo haga la *Proposición 2*.

- *Proposición 2*

Las siguiente igualdad es falsa:

$$u_j = -\eta_j^{\text{cmplx}} \frac{a_j}{a_{j+1}}$$

Razón: Se ha supuesto que la matriz unitriangular superior que se construye dividiendo cada fila de \mathbf{U}^* por el elemento coincidente con la diagonal principal no puede ser la matriz \mathbf{U} , es decir

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & u_{n-1} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & -\eta_1^{\text{cmplx}} \frac{a_1}{a_2} & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\eta_{n-1}^{\text{cmplx}} \frac{a_{n-1}}{a_n} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: Esta proposición puede no cumplirse siempre y cuando sí lo haga la *Proposición 1*.

• *Proposición 3*

Las siguientes igualdades no se satisfacen, al menos, simultáneamente:

$$d_j = -\frac{s_{j+1} a_{j+1}}{\eta_j^{\text{cmplx}} a_j}$$

$$d_{j+1} = p_{j+1} + \frac{\eta_j^{\text{cmplx}} a_j s_{j+1}}{a_{j+1}}$$

Razón: Se ha sustituido la igualdad de la *Proposición 2* en las igualdades de la *Proposición 1*. Como se ha supuesto que necesariamente una de las proposiciones se cumple (y por tanto, una de las igualdades no es cierta), entonces, dichas igualdades no pueden cumplirse.

Observación: Las siguientes expresiones son equivalentes

$$d_j = -\frac{s_{j+1} a_{j+1}}{\eta_j^{\text{cmplx}} a_j}$$

$$d_j = p_j + \frac{\eta_{j-1}^{\text{cmplx}} a_{j-1} s_j}{a_j}$$

Razón: Igualando ambas expresiones y despejando a_{j+1} se obtiene que

$$a_{j+1} = -\frac{p_j}{s_{j+1}} \eta_j^{\text{cmplx}} a_j - \frac{s_j}{s_{j+1}} \eta_j^{\text{cmplx}} \eta_{j-1}^{\text{cmplx}} a_{j-1}$$

sin embargo

$$\frac{p_j}{s_{j+1}} = -\left(\frac{\gamma_j^{\text{cmplx}}}{\eta_j^{\text{cmplx}}} + 1 \right) \quad \text{y} \quad \frac{s_j}{s_{j+1}} = \frac{1}{\eta_j^{\text{cmplx}}}$$

por lo cual

$$a_{j+1} = (\gamma_j^{\text{cmplx}} + \eta_j^{\text{cmplx}}) a_j - \eta_{j-1}^{\text{cmplx}} a_{j-1}$$

la última igualdad se cumple por construcción, pues corresponde a la relación de recurrencia.

Observación: La siguiente expresión no puede ser cero

$$d_j = -\frac{s_{j+1} a_{j+1}}{\eta_j^{\text{cmplx}} a_j} = -s_j \frac{a_{j+1}}{a_j}$$

Razón: Por un lado, $a_j \neq 0$ para $j = \{1, \dots, n+1\}$ y, por el otro, la rigidez no es nula, razón por la cual $s_j \neq 0$ (lo mismo para η_j^{cmplx}). En consecuencia $d_j \neq 0$.

De acuerdo con la última observación, la *Proposición 3* no se cumple y, en consecuencia, no se cumplen tanto la *Proposición 1* como la *Proposición 2*. Pero esto es una contradicción, porque se había supuesto que al menos una de las primeras proposiciones se cumplía y ninguna se cumple.

$H \wedge \neg Q \rightarrow C$:

- Por lo tanto, la suposición $\neg Q$ se rechaza y se acepta la veracidad de Q . Lo cual demuestra que la descomposición LDU sin pivoteo existe siempre que los elementos de la RR-A sean distintos de cero.

Nótese que si únicamente a_{n+1} fuese cero ($a_j \neq 0$ para $j = 1, \dots, n$), entonces se obtendría que $d_n = 0$, pero la descomposición sólo exige que $d_j \neq 0$ para $1 \leq j \leq n-1$, por lo cual, la descomposición LDU es factible incluso en este caso.

A.2 Existencia de la descomposición LU *ad hoc*

Tal como se menciona en el apartado *Solución de sistemas de ecuaciones con matriz tridiagonal*, la descomposición LU *ad hoc* existe cuando existe la descomposición LDU sin pivoteo y además se satisface que todos los elementos del vector $\mathbf{p} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$ son distintos de cero.

En el apartado anterior, se ha probado la existencia de la descomposición LDU de la matriz $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]$ bajo el supuesto de $a_j \neq 0$ para $j=1, \dots, n$, por lo cual, sólo falta probar que todos los elementos del vector $\mathbf{p} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$ son distintos de cero para $\mathbf{b} = (k_1 + i\omega c_1)\mathbf{e}_1$.

Para este propósito resulta adecuado conocer \mathbf{L}^{-1} . Como \mathbf{L} es una matriz unitriangular, entonces \mathbf{L} puede expresarse como la suma de la matriz identidad y una matriz nilpotente, es decir

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} + \mathbf{N}$$

De esta forma, su inversa se puede expresar mediante la expansión de una serie de Neumann. En principio, la inversión por esta vía requeriría sumar una cantidad infinita de matrices, sin embargo, por las características que poseen las matrices nilpotentes, la suma se torna finita. La expresión para invertir una matriz unitriangular por esta vía es

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{N} + \mathbf{N}^2 - \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{N}^{n-1}$$

Recordando que para el problema en estudio $\mathbf{L} = \mathbf{U}^T$ y aplicando lo antes mencionado se obtiene que

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ u_1 & 1 & & & & \\ & u_2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & u_{n-1} & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -s_1 \begin{bmatrix} (+1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 \cdot u_1 \\ (+1) \cdot 1 \cdot u_1 \cdot u_2 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sin embargo

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{m-1} (-u_j) &= \prod_{j=1}^{m-1} \left(\eta_j^{\text{cmplx}} \frac{a_j}{a_{j+1}} \right) \\ &= \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{s_{j+1}}{s_j} \frac{a_j}{a_{j+1}} \right) \\ &= \frac{s_m}{s_1} \frac{a_1}{a_m} \\ &= \frac{s_m}{s_1} \frac{1}{a_m} \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ u_1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & u_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} s_1/a_1 \\ s_2/a_2 \\ \vdots \\ s_n/a_n \end{bmatrix}$$

Al igual que antes, se sigue el supuesto de que $a_j \neq 0$ para $j=1, \dots, n$ y, como la rigidez no es nula, entonces $s_j \neq 0$. Por lo tanto, todos los elementos del vector \mathbf{p} son distintos de cero. Este resultado, aunado a la existencia de la descomposición LDU, prueban la existencia de la descomposición LU *ad hoc* para este vector (y bajo este supuesto).

A.3 Relación con los menores principales líderes

Los términos de la RR-A se relacionan con lo que en inglés se denomina *leading principal minors* y que puede traducirse como menores principales líderes o menores principales dominantes. Un menor principal líder de orden m es el determinante de la submatriz formada por las m primeras filas y las m primeras columnas de la matriz.

Si la matriz \mathbf{A} tiene factorización LDU sin pivoto entonces los menores principales líderes se relacionan con los elementos de la matriz diagonal \mathbf{D} mediante.

$$\det\left([\mathbf{A}]_{\{1, \dots, m\}}\right) = \prod_{j=1}^m d_j$$

Aplicado a la matriz de estudio se obtiene que

$$\begin{aligned} \det\left([\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]_{\{1, \dots, m\}}\right) &= \prod_{j=1}^m d_j \\ &= \prod_{j=1}^m \left(-s_j \frac{a_{j+1}}{a_j}\right) \\ &= \frac{a_{m+1}}{a_1} \prod_{j=1}^m (-s_j) \\ &= a_{m+1} \prod_{j=1}^m (k_j + i\omega c_j) \end{aligned}$$

Es decir, los términos a_j son una forma escalada de los menores principales líderes. Por esto, no es de sorprenderse que la condición de existencia de la descomposición LDU sin pivoteo, el cual asegura la existencia de dicha descomposición si los menores principales líderes son distintos de cero, sea equivalente a la condición requerida para los términos a_j .

Por último, existen una razón de peso para pensar que en el modelo amortiguado satisface $a_j \neq 0$ para $j=1, \dots, n+1$. Si ω se deja como variable entonces los términos $a_j(\omega)$ corresponden a cocientes de polinomios con coeficientes complejos para $j=2, \dots, n+1$. Si $a_j(\omega^*)=0$ entonces ω^* es una raíz. Lo habitual para un polinomio complejo es que las raíces también sean complejas (con parte imaginaria no nula), como ω sólo toma valores reales lo esperado es $a_j(\omega) \neq 0$.

APÉNDICE B

Este apéndice contiene las pruebas de dos aseveraciones hechas en el capítulo 3:

- La primera de éstas se realizó en el apartado *Relación de recurrencia B*, aquí se dio una expresión que relaciona los términos de dicha relación con los menores principales anti-líderes (en inglés *anti-leading principal minors*) de la matriz $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]$.
- La segunda se realizó en el apartado *Cancelación de polos y ceros*, aquí se enuncia que de existir coincidencia entre un polo y un cero para H_j , entonces a_j y b_j tienen un cero en común.

Para probar el segundo punto se necesitará mostrar primero que no existen raíces en común entre dos términos consecutivos de la *Relación de recurrencia A* (RR-A) así como tampoco entre la *Relación de recurrencia B* (RR-B).

Al igual que antes, los elementos de la matriz $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]$, serán denotados como

$$[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} p_1 & s_2 & & \\ s_2 & p_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & s_n \\ & & s_n & p_n \end{bmatrix}$$

donde

$$s_j = -(k_j + i\omega c_j)$$

$$p_j = \begin{cases} (k_j + i\omega c_j) + (k_{j+1} + i\omega c_{j+1}) - \omega^2 m_j & 1 \leq j \leq n-1 \\ (k_n + i\omega c_n) - \omega^2 m_n & j = n \end{cases}$$

Lo cual corresponde al determinante de una matriz por bloques, por tanto

$$M_{1m} = \det \left(\begin{bmatrix} s_2 & p_2 & s_3 & & & \\ & s_3 & p_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & s_{m-1} & & \\ & & & & p_{m-1} & \\ & & & & & s_m \end{bmatrix} \right) \det \left(\begin{bmatrix} p_{m+1} & s_{m+2} & & & \\ s_{m+2} & p_{m+2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & s_n \\ & & & s_n & p_n \end{bmatrix} \right)$$

Como el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal se obtiene que

$$M_{1m} = \prod_{j=2}^m (s_j) \cdot \det \left(\left[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right]_{\{m+1, \dots, n\}} \right)$$

Sustituyendo, se llega a una expresión que relaciona la FRF del m-ésimo piso con el determinante y un menor principal anti-líder

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}) \cdot H_m &= -s_1 \cdot (-1)^{1+m} \cdot \prod_{j=2}^m (s_j) \cdot \det \left(\left[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right]_{\{m+1, \dots, n\}} \right) \\ &= \prod_{j=1}^m (-s_j) \cdot \det \left(\left[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right]_{\{m+1, \dots, n\}} \right) \\ &= \prod_{j=1}^m (k_j + i\omega c_j) \cdot \det \left(\left[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right]_{\{m+1, \dots, n\}} \right) \end{aligned}$$

Por otro lado, la misma FRF se relaciona con los términos de RR-B y RR-A mediante

$$H_j = \frac{b_j}{b_0} = \frac{b_j}{a_{n+1}}$$

Y como

$$\det(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}) = a_{n+1} \prod_{j=1}^n (k_j + i\omega c_j)$$

Se concluye que

$$\det \left(\left[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right]_{\{m+1, \dots, n\}} \right) = b_m \prod_{j=m+1}^n (k_j + i\omega c_j)$$

Es decir, los términos b_j son una forma escalada de los menores principales anti-líderes.

B.2 Inexistencia de raíces en común entre dos términos consecutivos

Para probar que no existen raíces en común entre dos términos consecutivos de la RR-A y la RR-B, se procederá mediante inducción matemática, planteemos la demostración en dos etapas.

- *Paso 1 (Base de la Inducción)*

Procedemos a mostrar que

los primeros términos de la RR-A | los últimos términos de la RR-B
no tienen raíces en común. Por definición

$$a_1(\omega) = 1$$

$$b_n(\omega) = 1$$

es decir, es una función constante distinta de cero. Si ésta tuviera alguna raíz en común bien con

$$a_0(\omega) \text{ o bien con } a_2(\omega)$$

$$b_{n+1}(\omega) \text{ o bien con } b_{n-1}(\omega)$$

entonces existiría ω^* talque

$$a_1(\omega^*) = 0$$

$$b_n(\omega^*) = 0$$

pero esto no puede ser por tratarse de una función constante distinta de cero

Por tanto, se satisface que

$$\text{No } \exists \omega^* \text{ talque } a_0(\omega^*) = a_1(\omega^*) = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{No } \exists \omega^* \text{ talque } b_{n+1}(\omega^*) = b_n(\omega^*) = 0 \quad \checkmark$$

y

$$\text{No } \exists \omega^* \text{ talque } a_1(\omega^*) = a_2(\omega^*) = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{No } \exists \omega^* \text{ talque } b_n(\omega^*) = b_{n-1}(\omega^*) = 0 \quad \checkmark$$

• Paso 2 (Paso Inductivo)

Partimos de la suposición (hipótesis de Inducción) de que el j -ésimo par de términos de la relación de recurrencia no tienen ceros común

$$H.I. : \quad \text{No } \exists \omega^* \text{ tal que } a_{j-1}(\omega^*) = a_j(\omega^*) = 0 \quad \Bigg| \quad H.I. : \quad \text{No } \exists \omega^* \text{ tal que } b_{j+1}(\omega^*) = b_j(\omega^*) = 0$$

haciendo uso de ésta afirmación, se buscará demostrar que el siguiente par de términos también cumple con dicha afirmación (el de no tener ceros en común)

$$H.Q.D. : \quad \text{No } \exists \omega^* \text{ tal que } a_j(\omega^*) = a_{j+1}(\omega^*) = 0 \quad \Bigg| \quad H.Q.D. : \quad \text{No } \exists \omega^* \text{ tal que } b_j(\omega^*) = b_{j-1}(\omega^*) = 0$$

haciendo uso de la expresión que relaciona el siguiente término con los anteriores

$$a_{j+1} = (\gamma_j^{\text{cmplx}} + \eta_j^{\text{cmplx}})a_j - \eta_{j-1}^{\text{cmplx}} a_{j-1} \quad \Bigg| \quad b_{j-1} = (\gamma_j^{\text{cmplx}} + \eta_j^{\text{cmplx}})b_j - \eta_j^{\text{cmplx}} b_{j+1}$$

se puede probar la afirmación a demostrar por contradicción.

Supóngase que el siguiente par de términos se tornan cero cuando se evalúan en ω^* , por lo cual la expresión anterior adopta la forma

$$0 = (\gamma_j^{\text{cmplx}} + \eta_j^{\text{cmplx}}) \cdot 0 - \eta_{j-1}^{\text{cmplx}} a_{j-1}(\omega^*) \quad \Bigg| \quad 0 = (\gamma_j^{\text{cmplx}} + \eta_j^{\text{cmplx}}) \cdot 0 - \eta_j^{\text{cmplx}} b_{j+1}(\omega^*)$$

debido a que $\eta_j^{\text{cmplx}} \neq 0$ para $j \in \{1, \dots, n-1\}$ la igualdad sólo puede cumplirse si

$$a_{j-1}(\omega^*) = a_j(\omega^*) = a_{j+1}(\omega^*) = 0 \quad \Bigg| \quad b_{j+1}(\omega^*) = b_j(\omega^*) = b_{j-1}(\omega^*) = 0$$

pero esto es una contradicción, porque se había supuesto que el j -ésimo par de términos en la relación de recurrencia no tenían ceros en común (hipótesis de Inducción) y el siguiente par requiere que sí los tenga.

Por lo tanto, la suposición de que el siguiente par de términos tienen ceros en común se rechaza y se acepta la veracidad de que no se tienen ceros en común entre dos términos consecutivos.

Sabiendo que la afirmación es cierta para el primer par de términos, entonces se cumple para el segundo par, como es cierto para el segundo par se cumple para el tercer par y así sucesivamente.

B.3 Cancelación de polos y ceros en la FRF y su relación con la RR-A y la RR-B

Si se aplica la regla de Cramer en el sistema $[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \mid -s_1 \mathbf{e}_1]$ se puede reconocer un polinomio en el numerador, cuyas raíces son los ceros, y otro polinomio en el denominador, cuyas raíces son los polos.

$$H_m = \frac{\det \left(\left[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right]_m \leftarrow -s_1 \mathbf{e}_1 \right)}{\det \left(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right)}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^m (k_j + i\omega c_j) \cdot \det \left(\left[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right]_{\{m+1, \dots, n\}} \right)}{\det \left(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right)}$$

Supóngase que existe ω^* tal que

$$\det \left(\left[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right]_{\{m+1, \dots, n\}} \right) \Big|_{\omega=\omega^*} = \det \left(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right) \Big|_{\omega=\omega^*} = 0$$

Por lo antes visto, esto equivale a

$$b_m \Big|_{\omega=\omega^*} = a_{n+1} \Big|_{\omega=\omega^*} = 0$$

Cuando se dedujo la RR-B se obtuvo que

$$a_m b_{m-1} = a_{n+1} + \eta_{m-1}^{\text{cmplx}} a_{m-1} b_m$$

Evalutando en ω^*

$$a_m \Big|_{\omega=\omega^*} \cdot b_{m-1} \Big|_{\omega=\omega^*} = 0$$

Lo cual se cumple si $a_m \Big|_{\omega=\omega^*} = 0$ o bien si $b_{m-1} \Big|_{\omega=\omega^*} = 0$, sin embargo, se debe recordar

que $b_m \Big|_{\omega=\omega^*} = 0$ y no existen ceros en común entre dos términos consecutivos de la RR-

B, por tanto, $a_m \Big|_{\omega=\omega^*} = 0$ y $b_{m-1} \Big|_{\omega=\omega^*} \neq 0$.

Esto prueba que si existe coincidencia entre un polo y un cero para H_m , entonces a_m y b_m tienen ceros en común.

Por otro lado, utilizando el hecho de que no existen ceros en común entre la RR-A, se llega a la siguiente conclusión

$$\begin{aligned} b_m \Big|_{\omega=\omega^*} = a_{n+1} \Big|_{\omega=\omega^*} = 0 & \Rightarrow a_m \Big|_{\omega=\omega^*} = 0 \\ a_m \Big|_{\omega=\omega^*} = a_{n+1} \Big|_{\omega=\omega^*} = 0 & \Rightarrow b_m \Big|_{\omega=\omega^*} = 0 \\ a_m \Big|_{\omega=\omega^*} = b_m \Big|_{\omega=\omega^*} = 0 & \Rightarrow a_{n+1} \Big|_{\omega=\omega^*} = 0 \end{aligned}$$

En simples palabras, si existe coincidencia entre un polo y un cero para H_m , entonces a_m , b_m y a_{n+1} tienen ceros en común.

APÉNDICE C

Este apéndice contiene la solución analítica de un sistema 3-DOF amortiguado, cuyos parámetros se presentan en la tabla C1

Tabla C1: Parámetros de una estructura 3-DOF con amortiguamiento clásico

Piso	m	k	c	Frecuencia natural no amortiguada	Fracción de amortiguamiento
1	240	3600	3600α	$\omega_1 = 3$	$\zeta_1 = 1.5\alpha$
2	16	240	240α	$\omega_2 = 4$	$\zeta_2 = 2.0\alpha$
3	3	48	48α	$\omega_3 = 5$	$\zeta_3 = 2.5\alpha$

Se ha utilizado como entrada del sistema el siguiente pulso

$$u_0(t) = \begin{cases} \sin(t) & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

La salida está expresada en términos de la *solución homogénea* (u_H) y la *solución particular* (u_p) de un sistema SDOF que responde a este pulso en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq \pi$.

$$u_H(t, \omega_n, \zeta) = e^{-\omega_n \zeta t} A_0(\omega_n, \zeta) \cos(\omega_D(\omega_n, \zeta) t + \varphi(\omega_n, \zeta))$$

$$u_p(t, \omega_n, \zeta) = \frac{\omega_n^2 (\omega_n^2 + 4\zeta^2 - 1) \sin(t) - 2\omega_n \zeta \cos(t)}{(2\omega_n \zeta)^2 + (\omega_n^2 - 1)^2}$$

A su vez, estas soluciones están expresadas en términos de la frecuencia amortiguada (ω_D), la amplitud de la senoide en el tiempo igual a cero (A_0) y su fase (φ).

$$\omega_D(\omega_n, \zeta) = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$A_0(\omega_n, \zeta) = \frac{\omega_n}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(\omega_n^4 - 2(1 - 2\zeta^2)\omega_n^2 + 1)}}$$

$$\varphi(\omega_n, \zeta) = \text{asin} \left(\frac{2\zeta^2 + \omega_n^2 - 1}{\sqrt{(2\omega_n\zeta)^2 + (\omega_n^2 - 1)^2}} \right)$$

C.1 Solución analítica del sistema 3-DOF

Con esto, la respuesta del sistema al pulso sinusoidal de medio ciclo se expresa como:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{112} & \frac{5}{7} & \frac{1}{16} \\ \frac{25}{16} & 0 & -\frac{9}{16} \\ \frac{25}{7} & -\frac{25}{7} & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t < 0 \\ \begin{bmatrix} u_H\left(t, 3, \frac{3\alpha}{2}\right) + u_p\left(t, 3, \frac{3\alpha}{2}\right) \\ u_H\left(t, 4, \frac{4\alpha}{2}\right) + u_p\left(t, 4, \frac{4\alpha}{2}\right) \\ u_H\left(t, 5, \frac{5\alpha}{2}\right) + u_p\left(t, 5, \frac{5\alpha}{2}\right) \end{bmatrix} \quad 0 \leq t < \pi \\ \begin{bmatrix} u_H\left(t, 3, \frac{3\alpha}{2}\right) + u_H\left(t - \pi, 3, \frac{3\alpha}{2}\right) \\ u_H\left(t, 4, \frac{4\alpha}{2}\right) + u_H\left(t - \pi, 4, \frac{4\alpha}{2}\right) \\ u_H\left(t, 5, \frac{5\alpha}{2}\right) + u_H\left(t - \pi, 5, \frac{5\alpha}{2}\right) \end{bmatrix} \quad t \geq \pi \end{array} \right.$$

C.2 Envoltente del sistema 3-DOF

Adicionalmente, se ha propuesto una función que envuelva a la solución analítica para $t \geq \pi$. Ésta ha sido expresada en función de la amplitud de la curva envolvente del sistema SDOF en vibración libre ($A_0^{\text{«env»}}$).

$$A_0^{\text{«env»}}(\omega_n, \zeta) = \sqrt{1 + e^{2\pi\omega_n\zeta} + 2e^{\pi\omega_n\zeta} \cos(\pi \cdot \omega_D(\omega_n, \zeta))}$$

La envolvente propuesta está definida como

$$\begin{bmatrix} A_1^{\text{«pEnv»}}(t) \\ A_2^{\text{«pEnv»}}(t) \\ A_3^{\text{«pEnv»}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{112} & \frac{5}{7} & \frac{1}{16} \\ \frac{25}{16} & 0 & \frac{9}{16} \\ \frac{25}{7} & \frac{25}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0^{\text{«env»}}\left(3, \frac{3\alpha}{2}\right) e^{-3\left(\frac{3\alpha}{2}\right)t} \\ A_0^{\text{«env»}}\left(4, \frac{4\alpha}{2}\right) e^{-4\left(\frac{4\alpha}{2}\right)t} \\ A_0^{\text{«env»}}\left(5, \frac{5\alpha}{2}\right) e^{-5\left(\frac{5\alpha}{2}\right)t} \end{bmatrix}$$

Estrictamente hablando, la envolvente propuesta está ligeramente encima de los valores picos del movimiento en vibración libre, sin embargo, dicho exceso no es perceptible a simple vista.

REFERENCIAS

- Akritas, A. G. (1993). Sylvester's forgotten form of the resultant. *The Fibonacci Quarterly*, 31(4), 325–332. <http://www.fq.math.ca/Scanned/31-4/akritas.pdf>
- Ames, W. F. (1977). *Numerical methods for partial differential equations* (2.^a ed.). Academic Press.
- Amidor, I. (2013). *Mastering the Discrete Fourier Transform in one, two or several dimensions: pitfalls and artifacts*. Springer.
- Beerends, R. J., ter Morsche, H. G., van den Berg, J. C. y van de Vrie, E. M. (2003). *Fourier and Laplace transforms*. Cambridge University Press.
- Boisvert, R. F., Cools, R. y Einarsson, B. (2005). Assessment of accuracy and reliability. En B. Einarsson (Ed.), *Accuracy and reliability in scientific computing*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Brigham, E. O. (1988). *Fast Fourier Transform and its applications*. Prentice Hall.
- Chopra, A. K. (2020). *Dynamics of structures in SI units* (5.^a ed.). Pearson Education.
- Chu, E. C. (2008). *Discrete and continuous fourier transforms: Analysis, applications and fast algorithms*. Chapman and Hall/CRC.
- Cimellaro, G. P. y Marasco, S. (2018). *Introduction to dynamics of structures and earthquake engineering*. Springer International Publishing.

- Franco, G., Betti, R. y Longman, R. W. (2006). On the uniqueness of solutions for the identification of linear structural systems. *Journal of applied mechanics*, 73(1), 153–162. <https://doi.org/10.1115/1.2062829>
- Gérardin, M. y Rixen, D. (2015). *Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics* (3.^a ed.). Wiley.
- Higham, N. J. (2002). *Accuracy and stability of numerical algorithms* (2.^a ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Horn, R. A. y Johnson, C. R. (2012). *Matrix analysis* (2.^a ed.). Cambridge University Press.
- Hughes, T. J. R. (1987). *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall.
- Imai, H., Yun, C.-B., Maruyama, O., y Shinozuka, M. (1989). Fundamentals of system identification in structural dynamics. *Probabilistic engineering mechanics*, 4(4), 162–173. [https://doi.org/10.1016/0266-8920\(89\)90022-2](https://doi.org/10.1016/0266-8920(89)90022-2)
- Jenkins, W. K. (2003). Fourier Series, Fourier Transforms, and the DFT. En W.-K. Chen (Ed.), *The circuits and filters handbook* (2.^a ed., p. 122). CRC Press.
- Kamen, E. W. (2011). The Fourier, Laplace, and z-Transforms. En W. S. Levine (Ed.), *The control handbook: control system fundamentals* (2.^a ed.). CRC Press.
- Kapenga, D. L. (1986). *An investigation into the numeric solution of linear recurrence relations* [Tesis de maestría, Western Michigan University]. ScholarWorks@WMU. https://scholarworks.wmich.edu/masters_theses/1333
- Lalanne, C. (2002). *Mechanical shock*. CRC Press.
- Mazumder, S. (2016). *Numerical Methods for partial differential equations: finite difference and finite volume methods*. Academic Press.
- Meirovitch, L. (1980). *Computational methods in structural dynamics*. Sijthoff y Noordhoff.
- Mikota, J. (2001). Frequency tuning of chain structure oscillators to place the natural frequencies at $\Omega(1)$ and $N-1$ integer multiples $\Omega(2) \dots \Omega(N)$. *ZAMM*, 81, 201–202.
- Morton, K. W. y Mayers, D. F. (2005). *Numerical solution of partial differential equations* (2.^a ed.). Cambridge University Press.

- Müller, P. C., y Hou, M. (2007). On natural frequencies and eigenmodes of a linear vibration system. *ZAMM*, 87(5), 348–351. <https://doi.org/10.1002/zamm.200610319>
- Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3), 67–94. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098>
- Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., y Nawab, S. H. (1997). *Signals and Systems* (2.^a ed.). Prentice Hall.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. y Flannery, B. P. (1992). *Numerical recipes in C: the art of scientific computing* (2.^a ed.). Cambridge University Press.
- Quarteroni, A., Sacco, R. y Saleri, F. (2007). *Numerical mathematics* (2.^a ed.). Springer.
- Shmaliy, Y. (2007). *Continuous-time systems*. Springer.
- Smith, J. O. (2003). *Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT): with audio applications*. W3K Publishing.
- Süli, E. y Mayers, D. F. (2003). *An introduction to numerical analysis*. Cambridge University Press.
- Thorby, D. (2008). *Structural dynamics and vibration in practice: an engineering handbook*. Elsevier/Butterworth-Heinemann.
- Udwadia, F. E. y Sharma, D. K. (1978). Some uniqueness results related to building structural identification. *SIAM Journal on applied mathematics*, 34(1), 104–118. <https://doi.org/10.1137/0134009>
- Udwadia, F. E., Sharma, D. K. y Shah, P. C. (1978). Uniqueness of damping and stiffness distributions in the identification of soil and structural systems. *Journal of applied mechanics*, 45(1), 181–187. <https://doi.org/10.1115/1.3424224>
- Watkins, D. S. (2002). *Fundamentals of matrix computations* (2.^a ed.). Wiley-Interscience.
- Weber, W., y Anders, B. (2007). A proof of MIKOTA's conjecture. *PAMM*, 7(1), 4050013–4050014. <https://doi.org/10.1002/pamm.200700483>
- Winkel, B. (2017). Simplified multi-storey shear building model. En Bryan, K. y Winkel, B. (2020). *Differential equations: a toolbox for modeling the world* (Cap. 5). SIMIODE.