



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

MODELOS DE CRECIMIENTO DE  
POBLACIÓN

**TESINA**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

LINCENCIADO EN ACTUARÍA

PRESENTA :

RENDÓN ROSAS RODOLFO

ASESORA:

DRA. MARÍA DEL CARMEN GONZÁLEZ VIDEGARAY



SANTA CRUZ ACATLÁN, ESTADO DE MÉXICO 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. Contexto . . . . .	4
1.2. Marco Teórico . . . . .	5
1.2.1. Conceptos Básicos de Probabilidad . . . . .	5
1.2.2. Variable Aleatoria . . . . .	8
1.2.3. Esperanza . . . . .	9
1.2.4. Esperanza Condicional . . . . .	13
1.2.5. Propiedades de la Esperanza Condicional . . . . .	16
1.2.6. Martingalas . . . . .	17
1.2.7. Cadenas de Markov . . . . .	19
1.2.8. Ecuación Fundamental de la Demografía . . . . .	21
1.3. Antecedentes . . . . .	22
1.3.1. Proceso de Galton-Watson . . . . .	22
1.3.2. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas . . . . .	23
1.3.3. Modelos Matriciales de Multirregión Estocástica . . . . .	23
1.3.4. Proceso de Poisson . . . . .	24
1.4. Justificación . . . . .	24
1.5. Objetivo . . . . .	24
<b>2. Material y Métodos</b>	<b>25</b>
2.1. Población . . . . .	25
2.2. Modelos Matemáticos . . . . .	25
2.2.1. Proceso de Galton Watson . . . . .	25
2.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (SDE) . . . . .	29
2.3.1. Modelo Malthusiano de Crecimiento Exponencial . . . . .	30
2.3.2. Formula de Ito . . . . .	31
2.4. Software R . . . . .	32
2.5. Software Python . . . . .	32

---

<b>3. Resultados</b>	<b>32</b>
3.1. Resultados en cuadros . . . . .	32
3.1.1. Proceso de Galton-Watson . . . . .	33
3.1.2. Modelo Malthusiano de Crecimiento Exponencial . . . . .	51
3.2. Resultados en Figuras . . . . .	67
3.2.1. Proceso de Galton-Watson . . . . .	68
3.2.2. Modelo Malthusiano de Crecimiento Exponencial . . . . .	76
<b>4. Discusión</b>	<b>84</b>
4.1. Discusión interna . . . . .	84
4.2. Discusión externa . . . . .	85
4.3. Limitaciones e investigaciones futuras . . . . .	87

---

# Modelos de Crecimiento de Población

## Resumen

El presente artículo nos da un panorama acerca de la importancia de considerar la aleatoriedad que debe ser implementada en los modelos de crecimiento poblacional, debido a que una población es imposible que crezca de manera lineal debido a los eventos catastróficos a los que está expuesto la población. La metodología usada se basó en procesos estocásticos como lo son el uso de procesos de Galton-Watson y los movimientos brownianos usados dentro de una ecuación diferencial estocástica. Fue implementada la metodología anteriormente mencionada dentro de la población de Tequisquiapan de entre los Censos del 2000 y 2010 realizados por INEGI donde se hicieron quince simulaciones por cada modelo para medir el crecimiento de la población, en dichas simulaciones se encontraron resultados por debajo y por arriba de los resultados determinísticos comprobando con esto que la población puede crecer tanto menos de lo esperado como más de lo esperado. Al final del análisis de esta muestra se llegó a la conclusión que para tener datos con mayor confiabilidad o que fueran mucho más precisos se debió considerar las variables dentro de la Ecuación Fundamental de la Demografía, así como también que el modelo implementado por ecuaciones diferenciales estocásticas tuvo resultados más cercanos a los datos reales.

## Palabras Clave

Galton-Watson, Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, Crecimiento de Población, Demografía Matemática

## Keywords

Galton-Watson, Stochastic Differential Equations, Population Growth, Mathematical Demography

---

# 1. Introducción

## 1.1. Contexto

Con el paso de los años la humanidad ha tenido diversos cambios en la estructura de su población, pues el contexto histórico nos menciona guerras, epidemias y diferentes factores que han influido en el crecimiento de la población. A partir de la llegada de la revolución industrial y de los avances en la salud, la estructura de la población empezó a tener cambios muy radicales. Por ello al término de la Segunda Guerra Mundial fue tema de discusión el acelerado crecimiento de la población [Livi-Bacci, 2014]. Debido a esto el estudio de las poblaciones tomo gran importancia y algunos de los métodos utilizados fue calculado bajo resultados determinísticos, sin embargo una población no se comporta de dicho modo, pues hay factores que no pueden determinarse mediante el uso de estos modelos y además de todo esto se sabe que la aleatoriedad en los modelos son bastantes útiles para la medición de sistemas complejos y sobre todo para los que pueden ser encontrados en el ámbito biológico [Norris, 1998, Boyce et al., 2006]. Por ello, el uso de los modelos estocásticos para medir el crecimiento de una población es de vital importancia, donde se consideran aquellos eventos atípicos que pueden afectar al crecimiento de una población y los riesgos de extinción que estos conllevan [Clark, 2003, Boyce et al., 2006, Chevin et al., 2017], se debe tomar en cuenta que para poder determinar un valor aleatorio es necesario el uso de los valores históricos para así darle un direccionamiento correcto a los modelos, pues estos sin depender de los datos históricos de una población podrían llevarnos a resultados mucho más alejados de la realidad, es decir, que a pesar de que los resultados son estocásticos al final de todo siempre van a depender de los datos históricos de una población [Clark, 2003].

Tabla 1: Modelos Deterministas versus Modelos Probabilísticos. Fuente: Elaboración Propia

<b>Modelos Deterministas</b>	<b>Modelos Probabilísticos</b>
Exponencial Malthusiano	Proceso de Galton-Watson
Logístico	Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (SDE)
Modelos No Lineales	Proceso de Poisson

---

Dentro de la Tabla 1 vemos algunos ejemplos de modelos determinísticos normalmente usados para medir el crecimiento poblacional y por otro lado modelos probabilísticos para medir el crecimiento poblacional, los cuales estaremos trabajando a lo largo de este trabajo de investigación.

## 1.2. Marco Teórico

### 1.2.1. Conceptos Básicos de Probabilidad

En este apartado de la investigación se mencionarán los principales conceptos matemáticos de probabilidad que nos darán la estructura necesaria para el desarrollo de los modelos matemáticos usados dentro de este artículo, por ello, hablemos acerca de como está conformada la estructura de un espacio de probabilidad.

**Definición: Espacio Muestral  $\Omega$ .** Fuente: [Ash, 2000]

El espacio muestral  $\Omega$  es un conjunto cuyos elementos están en correspondencia uno a uno con los todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

**Definición:  $\sigma$ -álgebra.** Fuente: [Ash, 2008]

Se le denomina a una clase de eventos  $\mathcal{F}$  como  $\sigma$ -álgebra a una colección de subconjuntos de  $\Omega$  los cuales satisfacen las siguientes tres características:

$$\Omega \in \mathcal{F} \tag{1}$$

$$\text{Si } A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \tag{2}$$

$$\text{Si } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \tag{3}$$

Las propiedades (2) y (3) son llamadas cerraduras bajo complementos y bajo uniones finitas o contables respectivamente, así entonces la mínima  $\sigma$ -álgebra va a estar dada por  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$  la cual es una  $\sigma$ -álgebra sin información almacenada.

Una vez dadas estas definiciones es posible hablar de la asignación de probabilidades a eventos de un espacio muestral, si a un conjunto que llamaremos evento  $A \in \mathcal{F}$  es posible asociarle una

---

medida  $\mathbb{P}(A)$  tal que se pueda tener una certeza de que dicho evento pueda suceder, entonces dicha medida  $\mathbb{P}(A)$  puede ser un numero entre 0 y 1, además de esto si dicho evento es  $\mathbb{P}(\Omega)$  se dice que es 1.

Además si se tiene una familia infinita numerable de eventos disjuntos a pares  $\{A_i\}_{i \geq 1}$  se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \quad (4)$$

Una vez introducido este concepto podemos hablar formalmente de lo que es una medida de probabilidad.

**Definición: Medida de Probabilidad  $\mathbb{P}(\cdot)$ .** Fuente: [Ash, 2008]

Una función que le asigna un numero  $\mathbb{P}(A)$  a un conjunto  $A \in \mathcal{F}$  es llamado medida de probabilidad en  $\mathcal{F}$ , si satisface las siguientes condiciones.

$$\mathbb{P}(A) \geq 0, \text{ para cualquier } A \in \mathcal{F} \quad (5)$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \quad (6)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i) \text{ si } A_i \text{ son disjuntos en } \mathcal{F} \quad (7)$$

**Definición: Espacios de Probabilidad.** Fuente: [Ash, 2008]

Un espacio de probabilidad es un triple  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , donde  $\Omega$  es un conjunto,  $\mathcal{F}$  una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ , y  $\mathbb{P}$  una medida de probabilidad en  $\mathcal{F}$  [Ash, 2008]. Que además de lo ya mencionado anteriormente cumple lo siguiente:

1.  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3. Si  $B \subset A$ , entonces  $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$ ; por consecuencia se tiene que  
 $\mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$
4.  $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots$

---

**Definición: Independencia.** Fuente: [Ash, 2008]

Dos eventos A y B dentro de un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  son independientes sí y sólo si  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ . En general, si se tiene una familia de conjuntos  $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ , posiblemente infinito, es una colección de eventos arbitrarios del espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Se dice que son independientes sí y sólo si para cada conjunto finito de distintos índices  $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{I}$  se tiene que

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k}) \quad (8)$$

**Definición: Probabilidad Condicional.** Fuente: [Ash, 2008]

Cuando resulta que dos eventos A y B no son independientes entre sí, se busca una manera de ver cuales son los efectos que llevan un evento sobre otro, por ello el concepto de condicional, nos ayuda a buscar una forma de medir dichos eventos con efectos dados por el otro, es decir, los efectos que tiene A dado que el evento B sucede y viceversa.

Siguiendo esta lógica, se define como probabilidad condicional de A dado B como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad (9)$$

**Teorema: Probabilidad Total.** Fuente: [Ash, 2008]

Sea  $B_1, B_2, \dots$  una familia finita o infinita numerable de eventos mutuamente excluyentes y disjuntos. Si A es cualquier evento, entonces

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap B_i) \quad (10)$$

Así,  $\mathbb{P}(A)$  se puede calcular encontrando una lista de eventos mutuamente excluyentes, donde A sucede, y agregando las probabilidades individuales. Entonces

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i) \quad (11)$$

Donde se toma la suma para aquellos i para los cuales  $\mathbb{P}(B_i) > 0$ . Así  $\mathbb{P}(A)$  es un promedio

---

ponderado de las probabilidades condicionales  $\mathbb{P}(A|B_i)$

### 1.2.2. Variable Aleatoria

De forma intuitiva, una variable aleatoria es una cantidad que es medible dentro de un experimento aleatorio. Si  $\Omega$  es un espacio muestral, y el resultado de un experimento es  $\omega$ , se lleva a cabo un proceso de medición para obtener un numero  $X(\omega)$ . Así una variable aleatoria es una funcion de valores reales en un espacio muestral, sabiendo esto es posible definir de manera formal el concepto de variable aleatoria [Ash, 2008].

**Definición: Conjuntos de Borel.** Fuente: [Ash, 2000]

Una medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  es determinada en la colección de conjuntos de Borel en  $\mathbb{R}$ , es denotada por  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  y define la  $\sigma$ -algebra más pequeña de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que contienen todos los intervalos  $(a, b]$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Es importante saber que  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  puede ser descrita como la intersección de todas las  $\sigma$ -algebra que contienen los intervalos de la forma  $(a, b]$ . Tambien, si una  $\sigma$ -algebra contiene todos los intervalos abiertos, debe contener todos los intervalos  $(a, b]$ , y viceversa. Para

$$(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( a, b + \frac{1}{n} \right) \text{ y } (a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( a, b - \frac{1}{n} \right) \quad (12)$$

Así  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  es la  $\sigma$ -algebra más pequeña que contiene todos los intervalos abiertos.

**Definición: Variable Aleatoria.** Fuente: [Ash, 2008]

Una variable aleatoria en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es una función de valores reales  $X$  definido en  $\Omega$ , tal que para todo subconjunto de Borel  $\mathcal{B}$  de los reales,  $\{\omega : X(\omega) \in \mathcal{B}\}$  pertenecientes a  $\mathcal{F}$ .

**Definición: Variable Aleatoria Discreta.** Fuente: [Ash, 2008]

Una variable aleatoria  $X$  es llamada discreta si el conjunto de posibles eventos de  $X$  es finito

---

o infinito numerable. Si  $x_1, x_2$  son los eventos de  $X$  que pertenecen a  $\mathcal{B}$ , entonces

$$\mathbb{P}\{X \in \mathcal{B}\} = \mathbb{P}\{X = x_1 \text{ o } X = x_2 \text{ o } \dots\} \quad (13)$$

$$= \mathbb{P}\{X = x_1\} + \mathbb{P}\{X = x_2\} + \dots = \sum_{x \in \mathcal{B}} f_X(x) \quad (14)$$

Donde  $f_X(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , es la función de probabilidad de  $X$ , definida por  $f_X(x) = \mathbb{P}\{X = x\}$ . Así la probabilidad de un evento que involucra  $X$  se encuentra por la suma de la función de probabilidad sobre el conjunto de puntos favorables del evento.

**Definición: Función de Distribución.** Fuente: [Ash, 2008]

Otra manera de caracterizar a la variable aleatoria  $X$  es por medio de la función de distribución, definida por  $F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Además de esto, si  $X$  es discreta y  $\mathbb{P}\{X = x_n\} = p_n > 0$ , con  $n = 1, 2, \dots$  y además  $\sum_n p_n = 1$  entonces  $F_x$  tiene saltos de magnitud  $p_n$ ,  $F_X$  es constante entre saltos.

**Definición: Variable Aleatoria Absolutamente Continua.** Fuente: [Ash, 2008]

La variable aleatoria  $X$  es llamada absolutamente continua si hay una función no negativa  $f = f_X$  definida en  $\Omega$  tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt, \forall x \in \mathbb{R} \quad (15)$$

Donde  $f_X$  es llamada función de densidad de  $X$ , además  $F_X(x)$  debe aproximarse a 1 cuando  $x \rightarrow \infty$ ; por lo tanto  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = 1$ .

### 1.2.3. Esperanza

El concepto de la esperanza nos dice cual es valor dentro de un experimento aleatorio que es más posible que salga, debido a que el experimento ha sido repetido  $n$  veces, y cada uno de los ensayos del experimento aleatorio es independiente de los otros, dada la información obtenida de los ensayos se puede calcular el valor promedio de los ensayos, dicho esto definimos de manera formal la definición de esperanza.

---

**Definición: Esperanza.** Fuente: [Ash, 2008]

Sea  $X$  una variable aleatoria simple, es decir, variable aleatoria discreta que toma solo finitos valores posibles. Se define a la esperanza de  $X$  como

$$E(X) = \sum_x x \mathbb{P}\{X = x\} \quad (16)$$

Ya que  $X$  es simple, es una suma finita y no hay problemas de convergencia. Para el caso continuo se tiene de manera similar, dada una variable aleatoria  $X$  simple se tiene que

$$E(X) = \int_{\Omega} x f_X(x) dx \quad (17)$$

**Definición: Varianza.** Fuente: [Ash, 2008]

Sea  $X$  variable aleatoria con  $E(X) < \infty$  se define como varianza de  $X$  como

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) \quad (18)$$

Consecuencia de esta definición se tiene que

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (19)$$

Estos conceptos pueden ser generalizados para el caso de vectores aleatorios y ya que la teoría sigue los mismos caminos de los conceptos mostrados anteriormente son analogos para el caso general.

**Propiedades de la Esperanza.** Fuente: [Ash, 2008]

Las primeras dos propiedades de la esperanza nos dicen que la esperanza es lineal.

1. Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad dado. Entonces

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) \quad (20)$$

---

2. Si  $X$  es una variable aleatoria con esperanza finita, y  $c \in \mathbb{R}$  entonces  $E(cX)$  existe y

$$E(cX) = cE(X) \quad (21)$$

3. Si  $X_1 \leq X_2$ , entonces  $E(X_1) \leq E(X_2)$ , asumiendo que ambas esperanzas existen.

4. Si  $X \geq 0$  y  $E(X) = 0$ , entonces  $X$  es casi seguramente 0, es decir,  $\mathbb{P}\{X = 0\} = 1$

5. Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes

a) Si todas las  $X_i$  son no negativas, entonces

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1) E(X_2) \cdots E(X_n) \quad (22)$$

b) Si  $E(X_i) < \infty, \forall i$  entonces  $E(X_1 X_2 \cdots X_n) < \infty$  y

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1) E(X_2) \cdots E(X_n) \quad (23)$$

6. Sea  $X$  variable aleatoria con media finita  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  (posiblemente infinita). Si  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces

$$Var(aX + b) = a^2 \sigma^2 \quad (24)$$

7. Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes, cada una con esperanza finita. Entonces

$$Var(X_1 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) \quad (25)$$

8. Si  $E(X^k) < \infty$  y  $0 < j < k$ , entonces  $E(X_j)$  es también finita.

Una vez dadas las definiciones anteriores podemos introducir algunos conceptos que pueden ser agregados al estudio de la Esperanza que son importantes, como lo son la Desigualdad de Chebyshev y la Ley Débil de los grandes números.

---

**Teorema. Desigualdad de Chebyshev** Fuente: [Ash, 2008]

a) Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa, y  $b > 0$  con  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\mathbb{P}\{X \geq b\} \leq \frac{E(X)}{b} \quad (26)$$

b) Sea  $X$  una variable aleatoria arbitraria,  $c \in \mathbb{R}$ , y  $\varepsilon, m > 0$  con  $\varepsilon, m \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\mathbb{P}\{|X - c| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(|X - c|^m)}{\varepsilon^m} \quad (27)$$

**Teorema. Ley Débil de los Grandes Números.** Fuente: [Ash, 2008]

Para cada  $n = 1, 2, \dots$  supongamos que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son variables aleatorias independientes sobre un espacio de probabilidad, cada una con media y varianza finita. Asuma que las varianzas de cada variable son uniformemente acotadas, es decir, asuma que hay algún número positivo  $M$  tal que  $\sigma_i^2 \leq M \forall i$ . Sea  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Entonces, para algún  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \quad (28)$$

**Teorema. Ley Fuerte de los Grandes Números.** Fuente: [Ash, 2008]

Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad. Suponiendo que tienen cuatro momentos uniformemente acotados, es decir, para algún número positivo  $M$ ,

$$E[|X_i - E(X_i)|^4] \leq M \quad (29)$$

Para todo  $i$ . Sea  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , entonces

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \rightarrow 0 \text{ c.s.} \quad (30)$$

En particular, si  $E(X_i) = m \forall i$ , entonces  $E(S_n) = nm$ , por lo tanto

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow m \text{ c.s.} \quad (31)$$

---

### 1.2.4. Esperanza Condicional

Antes ya hemos definido el concepto de la probabilidad condicional donde hablamos de como un evento puede tener algun tipo de efecto sobre otro evento dentro de un mismo espacio de probabilidad. Ahora, toca hablar acerca de la esperanza condicional, donde vemos que tiene una variable aleatoria sobre otra variable aleatoria. Sabiendo esto, como primer paso es definir que es una función de densidad condicional.

**Definición. Función de Densidad Conjunta.** Fuente: [Ash, 2008]

De manera similar al caso unidimensional definamos sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , tal que  $\mathbb{P}(B) = \int \int_B f(x) dx$  para todos los rectangulos B.

Definimos a  $X_1(x, y) = x, X_2(x, y) = y$ , entonces

$$\mathbb{P}\{(X_1, X_2) \in B\} = \mathbb{P}(B) = \int \int_B f_{12}(x, y) dx dy \quad (32)$$

Donde  $f$  es función de densidad conjunta, al ser una funcion de densidad, cumple los mismos criterios del caso unidimensional como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1 \quad (33)$$

**Definición. Función de Densidad Condicional.** Fuente: [Ash, 2008]

Dado un espacio de probabilidad definimos la función de densidad condicional de  $X_2$  dado  $X_1 = x$  como

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \quad (34)$$

La función de densidad condicional esta definida solo si  $f_1(x) > 0$ .

**Definición. Esperanza Condicional.** Fuente: [Ash, 2008]

Si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $g(X_2)$  es una variable aleatoria sobre espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,

---

dicho esto, la esperanza condicional de  $g(X_2)$  dado  $X_1 = x$  está dada por

$$E[g(X_2)|X_1 = x] = \int_{\mathbb{R}} g(y)f(y|x) dy \quad (35)$$

Si  $g \geq 0$  o si la integral es absolutamente convergente.

**Definición. Concepto General de Esperanza Condicional.** Fuente: [Ash, 2008]

Si  $E(X_2|X_1 = x) = g(x)$ , la definimos como  $E(X_2|X_1) = g(X_1)$ . Entonces  $E(X_2|X_1)$  es una función definida en  $\Omega$ . Veamos que pasa con el teorema de esperanza total.

$$E(X_2) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)E(X_2|X_1 = x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)g(x) dx \quad (36)$$

entonces

$$E(X_2) = E(E(X_2|X_1)) \quad (37)$$

La esperanza de la esperanza condicional de  $X_2|X_1$  es la esperanza de  $X_1$ .

**Definición. Esperanza Condicional respecto a Eventos.** Fuente: [Ash, 2008]

Sea  $A$  un subconjunto de Borel de  $\Omega$ . Entonces suponiendo que se cumple para la variable aleatoria  $X_2 I_{\{X_1 \in A\}}$ , tenemos

$$E[X_2 I_{\{X_1 \in A\}}] = E[E(X_2 I_{\{X_1 \in A\}}|X_1)] \quad (38)$$

Pero habiendo observado a  $X_1$ ,  $X_2 I_{\{X_1 \in A\}}$  será  $X_2$  si  $X_1 \in A$ , 0 en otro caso, así de manera intuitiva esperamos que

$$E[X_2 I_{\{X_1 \in A\}}|X_1] = I_{\{X_1 \in A\}} E(X_2|X_1) \quad (39)$$

Por lo que parece razonable esperar entonces que

$$E[X_2 I_{\{X_1 \in A\}}] = E[I_{\{X_1 \in A\}} E(X_2|X_1)] \forall A \in \Omega \quad (40)$$

---

Resulta que si  $X_1$  es una variable aleatoria arbitraria y  $X_2$  variable aleatoria cuya esperanza existe, hay una variable aleatoria  $X$ , de la forma  $g(X_1)$  para alguna función medible de Borel  $g$ , tal que

$$E(X_2 I_{\{X_1 \in A\}}) = E(I_{\{X_1 \in A\}} X) \forall A \in \Omega \quad (41)$$

**Definición. Esperanza Condicional dada una  $\sigma$ -álgebra.** Fuente: [Ash, 2000]

Es importante mencionar la importancia de definir la esperanza respecto a una  $\sigma$ -álgebra en un espacio muestral  $\Omega$ . Para ello si  $Y$  es una variable aleatoria extendida sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  donde la esperanza existe, y  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$  un objeto aleatorio, entonces  $g(x) = E(Y|X = x)$  es caracterizado como  $\mathbb{P}_X : (\Omega', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  que satisface

$$\int_{\{X \in A\}} Y d\mathbb{P} = \int_A E(Y|X = x) d\mathbb{P}_X(x), A \in \mathcal{F}' \quad (42)$$

Ahora, sea  $h(\omega) = g(X(\omega))$ , entonces  $h : (\Omega', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Así  $h(\omega)$  es la esperanza condicional de  $Y$ , dado  $X$  tomando el valor de  $X(\omega) = x$ , consecuentemente,  $h$  mide el valor medio de  $Y$  dado  $X$ . Es análoga la siguiente expresión para  $h$ . Afirmamos que

$$\int_{\{X \in A\}} h d\mathbb{P} = \int_{\{X \in A\}} Y d\mathbb{P} \text{ para algún } A \in \mathcal{F}' \quad (43)$$

**Teorema.** Fuente: [Ash, 2000]

Sea  $Y$  una variable aleatoria extendida en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\mathcal{G}$  una sub  $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ . Suponiendo que  $E(Y)$  existe. Entonces hay una función  $E(Y|\mathcal{G}) : (\Omega, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , llamada la esperanza condicional de  $Y$  dado  $\mathcal{G}$ , tal que

$$\int_C Y d\mathbb{P} = \int_C E(Y|\mathcal{G}) d\mathbb{P} \text{ para cada } C \in \mathcal{G} \quad (44)$$

**Teorema.** Fuente: [Ash, 2000]

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  espacio de probabilidad,  $\mathcal{G}$  sub  $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ , con  $B \in \mathcal{F}$ . Hay una función

---

$\mathbb{P}(B|\mathcal{G}) : (\Omega, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , llamada probabilidad condicional de B dado  $\mathcal{G}$ , tal que

$$\mathbb{P}(C \cap B) = \int_C \mathbb{P}(B|\mathcal{G}) d\mathbb{P} \text{ para cada } C \in \mathcal{G} \quad (45)$$

Cualquiera de estas funciones deben coincidir, y el hecho que

$$\mathbb{P}(B|\mathcal{G}) = E(I_B|\mathcal{G}) \quad (46)$$

### 1.2.5. Propiedades de la Esperanza Condicional

Ya hemos definido algunas propiedades de la esperanza condicional de una variable aleatoria respecto de otra variable aleatoria y ademas respecto de eventos del mismo espacio de probabilidad, ahora toca hablar de las propiedades fundamentales de la esperanza condicional respecto de una  $\sigma$ -algebra

**Teorema.** Fuente: [Ash, 2000]

Si  $Y$  es una constante  $k$  c.s., entonces

- a)  $E(Y|\mathcal{G}) = k$  c.s.
- b)  $E(Y|X = x) = k$  c.s. si  $Y_1 \leq Y_2$  c.s., entonces
- c)  $E(Y_1|\mathcal{G}) \leq E(Y_2|\mathcal{G})$  c.s.
- d)  $E(Y_1|X = x) \leq E(Y_2|X = x)$  c.s.
- e)  $|E(Y|\mathcal{G})| \leq E(|Y||\mathcal{G})$  c.s.
- f)  $|E(Y|X = x)| \leq E(|Y||X = x)$  c.s.

**Teorema.** Fuente: [Ash, 2000]

Si  $a, b \in \mathbb{R}$ , y  $aE(Y_1) + bE(Y_2)$  está bien definido, entonces

$$E(aY_1 + bY_2|\mathcal{G}) = aE(Y_1|\mathcal{G}) + bE(Y_2|\mathcal{G}) \text{ c.s.} \quad (47)$$

**Teorema.** Fuente: [Ash, 2000]

Si  $Y_n \geq 0, \forall n$ , y  $Y_n \uparrow Y$  c.s., entonces

- 
- a)  $E(Y_n|\mathcal{G}) \uparrow E(Y|\mathcal{G})$  c.s.
- b)  $E\left(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n|\mathcal{G}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} E(Y_n|\mathcal{G})$  c.s.  
 Para toda  $Y_n \geq 0$
- c)  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n|\mathcal{G}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n|\mathcal{G})$  c.s.  
 Para  $B_1, B_2, \dots$  conjuntos disjuntos en  $\mathcal{F}$

**Teorema.** Fuente: [Ash, 2000]

Si  $Y$  es integrable, entonces

$$E[E(Y|\mathcal{G})] = E(Y) \quad (48)$$

**Teorema.** Fuente: [Ash, 2000]

Sea  $B$  es un evento  $\mathcal{G}$  relativo de  $\mathbb{P}$ . Entonces

$$E(Y|\mathcal{G}) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B Y d\mathbb{P} = \frac{E(YI_B)}{\mathbb{P}(B)} \quad (49)$$

**Teorema.** Fuente: [Ash, 2000]

Si  $X$  es  $\mathcal{G}$ -medible y  $YX$  son integrables, entonces  $E(YX|\mathcal{G}) = XE(Y|\mathcal{G})$  c.s., en particular,  $E(X|\mathcal{G}) = X$  c.s.

### 1.2.6. Martingalas

En esta sección introduciremos el concepto de proceso estocástico, el cual está dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y es una familia de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \in T}$ , donde el índice  $T$  puede ser cualquier conjunto. Si  $T = \mathbb{N}$ , un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias  $X_n$  en un espacio de probabilidad, y los índices  $0, 1, \dots$  representan una sucesión en el tiempo.

**Definición. Martingalas.** Fuente: [Ash, 2000]

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  espacio de probabilidad,  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesion de variables aleatorias integrales en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , y  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$  una sucesion creciente de sub  $\sigma$ -algebras de  $\mathcal{F}$ ; donde  $X_n$  es  $\mathcal{F}_n$ -medible, es decir,  $X_n : (\Omega, \mathcal{F}_n) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . La sucesion  $\{X_n\}$  es llamada martingala sobre  $\mathcal{F}_n$  sii para todo  $n = 1, 2, \dots$  se tiene que  $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ , una submartingala sii  $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$  y una supermartingala sii  $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$ .

**Definición. Desigualdad de Jensen.** Fuente: [Ash, 2000]

Sea  $g$  una función convexa  $g : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathcal{I}$  es un intervalo abierto de los reales, acotados o no acotados. Sea  $X$  variable aleatoria en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , con  $X(\omega) \in \mathcal{I} \forall \omega$ . Suponga que  $E(X) < \infty$ . Si  $\mathcal{H}$  es una sub  $\sigma$ -algebra de  $\mathcal{F}$ , entonces

$$E[g(X)|\mathcal{H}] \geq g[E(X|\mathcal{H})], \text{ en particular se tiene} \quad (50)$$

$$E[g(X)] \geq g[E(X)] \quad (51)$$

**Teorema. Omisión Opcional de Halmos.** Fuente: [Ash, 2000]

- a) Sea  $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$  una submartingala,  $g$  convexa, función creciente dada por  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $g(X_n)$  es integrable para toda  $n$ , entonces  $\{g(X_n), \mathcal{F}_n\}$  es una submartingala.
- b) Sea  $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$  una martingala,  $g$  función convexa dada por  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $g(X_n)$  es integrable para toda  $n$ , entonces  $\{g(X_n), \mathcal{F}_n\}$  es una submartingala. Así si  $r \geq 1$ ,  $\{X_n\}$  es una martingala y  $|X_n|^r$  es integrable para toda  $n$ , entonces  $\{|X_n|^r\}$  es una submartingala.

**Teorema. Omisión Opcional de Halmos.** Fuente: [Ash, 2000]

Sea  $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$  una submartingala. Sea  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  variables aleatorias definidas por

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{si } (X_1, \dots, X_k) \in B_k \\ 0 & \text{si } (X_1, \dots, X_k) \notin B_k \end{cases} \quad (52)$$

---

donde  $B_k$  son conjuntos arbitrarios en  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Además

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1, \\ Y_2 &= X_1 + \varepsilon_1(X_2 - X_1) \\ &\vdots \\ Y_n &= X_1 + \varepsilon_1(X_2 - X_1) + \cdots + \varepsilon_{n-1}(X_n - X_{n-1}) \end{aligned}$$

Entonces  $\{Y_n, \mathcal{F}_n\}$  es también una submartingala y  $E(Y_n) \leq E(X_n) \forall n$ . Si  $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$  es una martingala, entonces  $\{Y_n, \mathcal{F}_n\}$  es martingala también y  $E(Y_n) = E(X_n) \forall n$

**Teorema. Desigualdad de Cruce de Doob.** Fuente: [Ash, 2000]

Sea  $\{X_k, \mathcal{F}_k, k = 1, 2, \dots, n\}$  una submartingala. Si  $a$  y  $b$  son números reales, con  $a < b$ , sea  $U_{ab}$  el número de cruces de  $(a, b)$  por  $X_1, \dots, X_n$  definidos de la siguiente manera.

Sea  $T_1 = T_1(\omega)$  el primer entero en  $\{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $X_{T_1} \leq a$ ,  $T_2$  el primer entero más grande que  $T_1$  tal que  $X_{T_2} \geq b$ ,  $T_3$  el primer entero más grande que  $T_2$  tal que  $X_{T_3} \leq a$ ,  $T_4$  el primer entero más grande que  $T_3$  tal que  $X_{T_4} \geq b$ , y así sucesivamente. Si  $N$  es el número finito,  $T_i$ , definimos  $U_{ab} = N/2$  si  $N$  es par, y  $(N - 1)/2$  si  $N$  es impar. Entonces

$$E(U_{ab}) \leq \frac{1}{b-a} E[(X_n - a)^+] \quad (53)$$

**Teorema. Convergencia de Submartingala.** Fuente: [Ash, 2000]

Sea  $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$  una submartingala. Si  $\sup_n E(X_n^+) < \infty$ , hay una variable aleatoria  $X_\infty$  tal que  $X_n \rightarrow X_\infty$  casi seguramente.

### 1.2.7. Cadenas de Markov

En este apartado se definen las propiedades básicas de una cadena de Markov debido que dentro de la investigación haremos uso de ellas para la aplicación de los procesos de Galton-Watson que como se verá más adelante es un ejemplo de una cadena de Markov a tiempo discreto y un caso más general de esto un proceso de Yule o el proceso de nacimiento puro que resultan ser cadenas de Markov a tiempo continuo.

---

**Definición. Espacio de estados.** Fuente: [Norris, 1998]

Sea  $I$  un conjunto numerable. Cada  $i \in I$  es llamado estado e  $I$  es llamado espacio de estados. Decimos que  $\lambda = (\lambda_i : i \in I)$  es una medida en  $I$  si  $0 \leq \lambda_i \leq \infty \forall i \in I$ . Si además la masa total  $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ , entonces se le llama a  $\lambda$  una distribución. Dada una variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow I$  sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Supongamos que se tiene lo siguiente

$$\lambda_i = \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = i\}) \quad (54)$$

Entonces  $\lambda$  define una distribución de  $X$ .

**Definición. Matriz Estocástica.** Fuente: [Norris, 1998]

Decimos que una matriz  $P = (p_{ij} : i, j \in I)$  es estocástica si toda fila  $(p_{ij} : j \in I)$  es una distribución.

**Definición. Cadena de Markov.** Fuente: [Norris, 1998]

Dichos los conceptos anteriores es posible definir de manera forma lo que es una cadena de Markov en terminos de la matriz  $P$ . Decimos que  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  es una cadena de Markov con distribución inicial  $\lambda$  y matriz de transición  $P$  si

- a)  $X_0$  tiene distribución  $\lambda$
- b) Para  $n \geq 0$ , condicionado a  $X_n = i$ ,  $X_{n+1}$  tiene distribución  $(p_{ij} : j \in I)$  y es independiente de  $X_0, \dots, X_{n-1}$ .

De manera más explicita, estas condiciones establecen que, para  $n \geq 0$  y  $i_1, \dots, i_{n+1} \in I$

- a)  $\mathbb{P}(X_0 = i_1) = \lambda_{i_1}$
- b)  $\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_1, \dots, X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$ .

Decimos que  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  es cadena de Markov  $(\lambda, P)$ . Si  $\{X_n\}_{0 \leq n \leq N}$  es una sucesion finita de variables aleatorias que satisfacen a) y b) para  $n = 0, \dots, N-1$ , entonces decimos nuevamente que  $\{X_n\}_{0 \leq n \leq N}$  es cadena de Markov  $(\lambda, P)$

**Teorema.** Fuente: [Norris, 1998]

---

Un proceso estocástico a tiempo discreto  $\{X_n\}_{0 \leq n \leq N}$  es cadena de Markov  $(\lambda, P)$  sí y solo si para todo  $i_1, \dots, i_N \in I$

$$\mathbb{P}(X_0 = i_1, X_1 = i_2, \dots, X_N = i_N) = \lambda_{i_1} p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_{N-1} i_N} \quad (55)$$

**Teorema. Propiedad de Markov.** Fuente: [Norris, 1998]

Sea  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  cadena de Markov  $(\lambda, P)$ . Entonces, condicional a  $X_m = i$ ,  $\{X_{m+n}\}_{n \geq 0}$  es cadena de Markov  $(\delta_i, P)$ , donde  $\delta_i = (\delta_{ij} : j \in I)$  es la unidad de masa en  $i$ , definida como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (56)$$

y es independiente de las variables aleatorias  $X_0, \dots, X_m$ .

**Teorema.** Fuente: [Norris, 1998]

Sea  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  cadena de Markov  $(\lambda, P)$ . Entonces, para todo  $n, m \geq 0$ , se tiene lo siguiente

- a)  $\mathbb{P}(X_n = j) = (\lambda P^n)_j$
- b)  $\mathbb{P}_i(X_n = j) = \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_m = i) = p_{ij}^{(n)}$  Donde  $p_{ij}^{(n)}$  es la probabilidad a  $n$  pasos de el estado  $i$  al estado  $j$ .

### 1.2.8. Ecuación Fundamental de la Demografía

La ecuación fundamental de la demografía o ecuación compensadora nos ayuda a medir de forma determinística el crecimiento de la población la cual consta de tres variables sustancialmente importantes dentro de la dinámica poblacional como lo son la natalidad, la mortalidad y la migración [Valdés, 2000].

$$\mathbf{P}_f = \mathbf{P}_i + \mathbf{N} - \mathbf{M} + \mathbf{I} - \mathbf{E} \quad (57)$$

Dónde cada variable representa:

- $\mathbf{P}_f$  = Población final
- $\mathbf{P}_i$  = Población inicial

- 
- $\mathbf{N}$  = Nacimientos
  - $\mathbf{M}$  = Defunciones
  - $\mathbf{I}$  = Inmigrantes
  - $\mathbf{E}$  = Emigrantes

De acuerdo con la ecuación 57 es posible proyectar la densidad poblacional gracias a sus distintas variables consideradas.

### 1.3. Antecedentes

Las cualidades humanas respecto a su razonamiento es lo que nos ha permitido persistir sobre la tierra desde hace unos miles de años [Livi-Bacci, 2014], sin embargo, existía la problemática de no observar de que maneras han logrado persistir las poblaciones durante tanto tiempo y bajo que dinámica se comportan los crecimientos de sus poblaciones, no es hasta la llegada de diversos autores que se empezaron a preocupar acerca de la importancia del crecimiento de las poblaciones ya sea como preocupación socioeconómica o ya sea para buscar una solución para controlar de manera exitosa la dinámica poblacional [Malthus and Ortiz, 1951, Livi-Bacci, 2014].

En la primer parte se hace mención del por qué es importante con el uso de los modelos de dinámicas de población introducir el ruido aleatorio de los eventos por la importancia de considerar casos atípicos que no hay manera de cuantificar mediante un modelo determinístico [Boyce et al., 2006], por ello, para empezar a abordar los modelos probabilísticos es importante mencionar el impacto que han causado algunos autores y sus correspondientes trabajos sobre la teoría probabilística como lo han sido William Feller y Smith con sus aportes sobre los procesos de renovación y la teoría de fluctuaciones [Feller, 1968, Mode, 1975].

#### 1.3.1. Proceso de Galton-Watson

Este modelo fue estudiado por primera vez por Galton y Watson, lo cual explica el nombre del proceso denominado de la misma forma, un estudio entre estos alrededor de la década de

---

1870, donde se preguntaron acerca de la desaparición de los apellidos en las familias, a pesar de que estas pudieran presentar un auge en su población, este estudio consistía en considerar la probabilidad de que un individuo masculino denominado  $p_k$  podía tener  $k$  hijos dentro de una familia por lo que se trataba de estudiar era la probabilidad que dentro de la generación  $n$ -ésima de dicha familia no tuviera ningún descendiente masculino y por consiguiente la extinción de su apellido. Es por ello que para el ámbito de la dinámica poblacional nos es de gran utilidad usar dicho proceso, el estudio de estos procesos tuvo mucho más profundización en los trabajos de Bellman y Harris [Watson and Galton, 1875, Mode, 1975, Norris, 1998]. Sin embargo, como mucho de los modelos suele tener sus desventajas, en este caso se encuentra una problemática en los supuestos de dicho modelo, pues su reproducción es unisexual y esto en el caso del crecimiento de la población humana no es válida como tal, pero puede ser adaptada considerando la propuesta de Galton y Watson tomando el enfoque de la reproducción masculina en las generaciones [Watson and Galton, 1875, Norris, 1998], los trabajos de diversos autores ayudaron a eliminar estos problemas de la reproducción unisexual y adaptar el problema para medir la reproducción humana [Crump and Mode, 1968, 1969, Ryan, 1968, Jagers, 1969, Durham, 1971, Mode, 1975].

### 1.3.2. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Uno de los modelos determinísticos más usados en la demografía matemática es el Modelo de Crecimiento Exponencial Malthusiano el cual resulta ser una ecuación diferencial al cual es posible implementar un proceso estocástico y por consiguiente volverse una ecuación diferencial estocástica, es útil manejar un modelo de dicha forma, pues se le asocia un proceso estocástico a un modelo poblacional aunque aparentemente su comportamiento no sea igual nos da una certeza de un posible comportamiento aleatorio [Artzrouni and Reneke, 1990].

### 1.3.3. Modelos Matriciales de Multirregión Estocástica

Una manera adecuada de analizar el crecimiento de las poblaciones es mediante el uso de los modelos matriciales de multirregión estocástica del que se puede extraer valores reducidos sin la pérdida de información valiosa [Alonso and Sanz, 2009]. La utilidad de estos modelos proviene de la posibilidad de medir la migración de las poblaciones como también lo cual

---

resulta útil para medir la población humana, estos modelos resultan ser determinísticos pero afortunadamente con la posibilidad de poder implementar la estocasticidad de las poblaciones [Cohen, 1982, Rogers, 1995, Alonso and Sanz, 2009].

#### **1.3.4. Proceso de Poisson**

De manera similar a los modelos matriciales, nos encontramos con modelos que desde raíz resultan ser bajo un sentido probabilístico, que viéndolo de su manera discreta resulta ser parte de los modelos de Galton-Watson, pues como se podrá ver más adelante estos mismos resultan ser una cadena de Márkov con espacio de estados discreto, pero en este caso lo llevaremos a un caso donde su espacio de estados es continuo. Los procesos de Poisson resultan ser caso más simple de una cadena de Márkov a tiempo continuo, y generalmente es el modelo probabilístico usado para cualquier espacio de estados descoordinado de eventos discretos, pero en un tiempo continuo [Norris, 1998].

### **1.4. Justificación**

La importancia que tienen los modelos demográficos nos pueden ayudar a encontrar soluciones a las diferentes problemáticas que se viven actualmente a nivel mundial donde se sabe que la población mundial va en crecimiento, pues esto representa un problema socioeconómico al haber desabasto de recursos en algunas zonas geográficas y que han sido tema de preocupación durante ya hace más de medio siglo [Malthus and Ortiz, 1951], por ello, mediante el uso de la demografía estocástica nos ayudará a cuantificar información sustancialmente diferente a la que un modelo clásico de la demografía matemática nos puede brindar, al considerar eventos aleatorios los cuales representarán a aquellos eventos que hacen que la dinámica de la población no se comporte de manera lineal y de manera determinística [Boyce et al., 2006].

### **1.5. Objetivo**

El objetivo de este trabajo de investigación es hacer una comparativa entre algunos de los modelos probabilísticos antes mencionados para medir el crecimiento de la población contra lo comparativa de los modelos determinísticos clásicos, para ver la eficiencia de cada uno en

---

los aspectos de poder detectar la explosión demográfica, observar que tan aproximada puede llegar a ser la proyección probabilista a los datos reales de la población y con ello obtener una conclusión sobre si los modelos probabilísticos son mejores que los modelos determinísticos que normalmente son implementados para proyectar las poblaciones.

## 2. Material y Métodos

### 2.1. Población

La población que utilizaremos fue extraída de INEGI de los Censos del 2000 y del 2010 del Municipio de Tequisquiapan, Estado de Querétaro población dividida por Grupos Quinquenales que van desde 0 años, 1 a 5 años hasta 85 años y más.

### 2.2. Modelos Matemáticos

#### 2.2.1. Proceso de Galton Watson

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  espacio de probabilidad, el proceso de Galton-Watson es un proceso estocástico  $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$  que representa el tamaño de la población en la generación  $n$ , el modelo supone una población inicial  $Z_0 = 1$ .

La distribución de probabilidad de  $Z_1$  está dada por  $\mathbb{P}(Z_1 = k) = p_k$  donde  $k$  representa el número de hijos en la generación 1, además por definición se tiene que  $\sum p_k = 1$  [Harris, 1964]. Dada la construcción del modelo es claro ver que el proceso de Galton-Watson es una cadena de Markov, entonces su probabilidad de transición está dada por:

$$P_{ij} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = j | Z_n = i) \text{ con } i, j, n = 0, 1, 2, \dots \quad (58)$$

En (56) nos dice la probabilidad de tener  $j$  hijos en la generación  $n+1$  dado que en la generación  $n$  tiene  $i$  hijos [Harris, 1964]. Estas probabilidades de transición están definidas para cada  $i$  y  $j$ , además se tiene que no está definida la probabilidad condicional si  $P(Z_n = i) = 0$ .

Con el proceso ya definido procederemos a definir unas propiedades importantes y necesarias para poder definir las probabilidades de extinción.

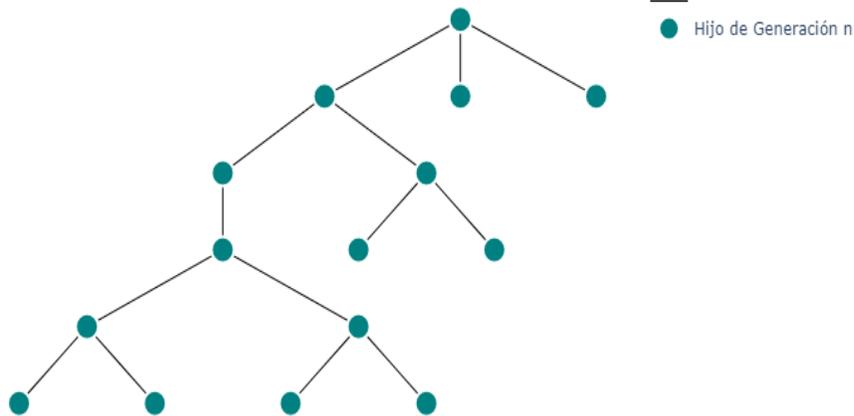


Figura 1: Proceso de Galton-Watson. Fuente: Elaboración propia.

**Función Generadora de Probabilidad.** Fuente: [Harris, 1964]

Sea  $f$  la función generadora de probabilidad dada por

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad |s| \leq 1 \quad (59)$$

Donde  $s \in \mathbb{C}$

La función generadora de probabilidad nos ayuda a calcular la probabilidad de extinción del proceso de Galton-Watson o en otras palabras a calcular en que generación de  $Z_i = 0$ . Las iteraciones de la función generadora  $f(s)$  se definen como

$$f_0(s) = s, \quad f_1(s) = f(s) \quad (60)$$

$$f_{n+1}(s) = f[f_n(s)], \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad (61)$$

Es fácil ver que cada una de las iteraciones es una función generadora de probabilidad [Harris, 1964], y por consecuente de (58) y (59) se generaliza a

$$f_{m+n}(s) = f_m[f_n(s)], \quad \text{con } m, n = 0, 1, \dots \quad (62)$$

$$f_{n+1}(s) = f_n[f(s)] \quad (63)$$

La segunda expresión es un caso particular del primero y el cual utilizaremos más adelante

para más resultados.

**La función generadora de  $Z_n$ .** Fuente: [Harris, 1964]

El siguiente resultado que fue descubierto por [Watson and Galton, 1875].

**Teorema.** La función generadora de  $Z_n$  es la  $n$ -ésima iteración de  $f_n(s)$ . Sea  $f_{(n)}(s)$  la función generadora de  $Z_n$ , con  $n = 0, 1, \dots$ . Bajo la condición que  $Z_n = k$ , la distribución de  $Z_{n+1}$  es la función generadora  $[f(s)]^k$ , con  $k = 0, 1, \dots$  entonces  $Z_{n+1}$  es

$$f_{(n+1)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) [f(s)]^k = f_{(n)}[f(s)], \text{ con } n = 0, 1, \dots \quad (64)$$

De la definición de  $f_{(0)}$  y  $f_0$ , se sigue ambas expresiones son iguales. Usando (60) y (61), se puede obtener por inducción que  $f_{(n)}(s) = f_n(s)$ , para  $n = 0, 1, \dots$

**Momentos de  $Z_n$ .** Fuente: [Harris, 1964]

Sean  $m = E(Z_1)$  y  $\sigma^2 = Var(Z_1) = E(Z_1^2) - m^2$ . Notemos que  $m = f'(1)$  y  $\sigma^2 = f''(1) + m - m^2$ . Obtenemos los momentos de  $Z_n$  diferenciando la ecuación (59) o la (61) en  $s = 1$ . Así se obtiene lo siguiente

$$f'_{n+1}(1) = f'[f_n(1)]f'_n(1) = f'(1)f'_n(1) \quad (65)$$

Usando inducción se llega a que  $f'_n(1) = m^n$ . Si  $f''(1) < \infty$ , volviendo a diferenciar se obtiene lo siguiente

$$f''_{n+1}(1) = f'(1)f''_n(1) + f''(1)[f'_n(1)]^2 \quad (66)$$

Repetiendo este proceso podemos obtener  $f''_n(1)$ , así

$$Var(Z_n) = E(Z_n^2) - [E(Z_n)]^2 = \begin{cases} \frac{\sigma^2 m^n (m^n - 1)}{m^2 - m} & \text{si } m \neq 1 \\ n\sigma^2 & \text{si } m = 1 \end{cases} \quad (67)$$

---

**Teorema.** Fuente: [Harris, 1964]

La esperanza de  $E(Z_n) = m^n$ , con  $n = 0, 1, \dots$ . Si  $Var(Z_1) = \sigma^2 < \infty$ , entonces la  $Var(Z_n)$  está dada por (65).

Ahora, consideremos el problema propuesto por [Watson and Galton, 1875], el cual se menciona en la parte de la introducción, se buscaba encontrar el fenómeno de la extinción de los apellidos de las familias.

**Definición. Probabilidad de Extinción.** Fuente: [Harris, 1964]

Por extinción se hace referencia al evento de una sucesión aleatoria  $\{Z_n\}$  consiste de ceros para todo valor finito de valores de  $n$ . Ya que  $Z_n$  es un valor entero, la extinción es el evento en el que  $Z_n \rightarrow 0$ . Y como  $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0 | Z_n = 0) = 1$ , se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n \rightarrow 0) &= \mathbb{P}(Z_n = 0) \\ &= \mathbb{P}[(Z_1 = 0) \cup (Z_2 = 0) \cup \dots] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[(Z_1 = 0) \cup \dots \cup (Z_n = 0)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim f_n(0)\end{aligned}\tag{68}$$

**Definición.** Fuente: [Harris, 1964]

Sea  $q$  la probabilidad de extinción, definimos entonces

$$q = \mathbb{P}(Z_n \rightarrow 0) = \lim f_n(0)\tag{69}$$

**Teorema.** Fuente: [Harris, 1964]

Si  $m = E(Z_1) \leq 1$ , la probabilidad de extinción es 1. Si  $m > 1$ , la probabilidad de extinción es la única solución no negativa menor que 1 de la ecuación

$$f(s) = s\tag{70}$$

---

### 2.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (SDE)

Otra manera de poder obtener resultados aleatorios nos los da las ecuaciones diferenciales estocásticas, de donde se pueden obtener resultados aleatorios siguiendo algunas técnicas determinísticas para medir el crecimiento de las poblaciones. Un ejemplo de este es el que nos proporcionan el Modelo Malthusiano de Crecimiento Exponencial [Artzrouni and Reneke, 1990].

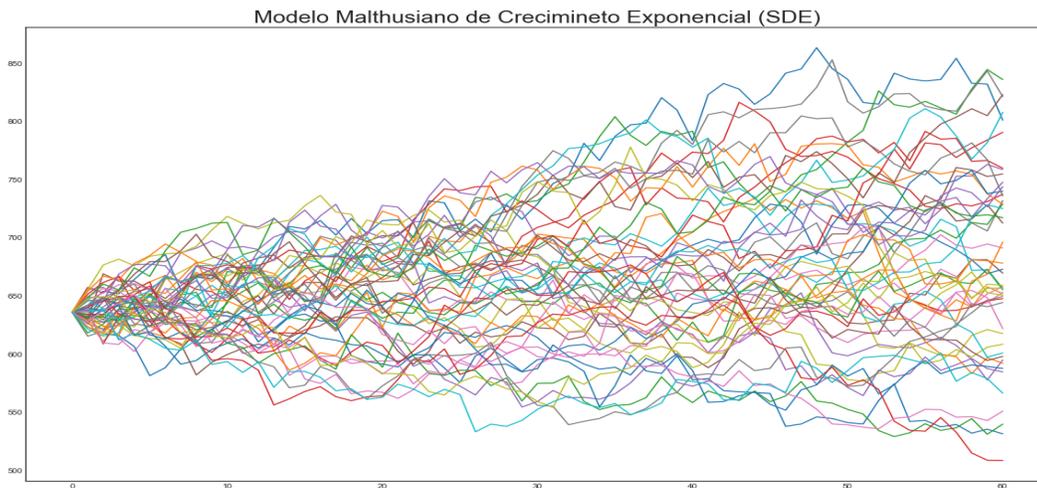


Figura 2: Simulación de 50 trayectorias aleatorias del Modelo Malthusiano de Crecimiento Exponencial. Fuente: Elaboración propia.

---

### 2.3.1. Modelo Malthusiano de Crecimiento Exponencial

Derivado del modelo original determinístico exponencial que es obtenido mediante la ecuación con ley de crecimiento exponencial dado por  $N(t)$  que denota el tamaño de la población en el tiempo  $t$  y la cual satisface la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \quad (71)$$

Donde la trayectoria del tamaño de la población está dada por  $N(t) = N(0)e^{rt}$  y donde  $N(0)$  representa la población inicial que se evalúa con tasa de crecimiento constante  $r$ . Cuando esta tasa es positiva resulta darnos resultados poco reales hablando demográficamente debido a su ilimitado crecimiento exponencial, aunque teóricamente hablando los resultados que nos proporciona son de gran importancia para el estudio del crecimiento de las poblaciones [Artzrouni and Reneke, 1990]. Para implementar las estocasticidades dentro de esta tasa se le implementa una tasa dada por el proceso estocástico

$$r(t) = r + sW(t) \quad (72)$$

Donde  $r$  y  $s$  son constantes y  $W$  es un ruido aleatorio llamado proceso de Wiener o en su defecto Movimiento Browniano. Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial de (69) tenemos que

$$\frac{dN(t)}{dt} = [r + sW(t)]N(t) \quad (73)$$

Desarrollando el producto tenemos que

$$dN(t) = rN(t)dt + sN(t)dB(t) \quad (74)$$

Integrando ambas partes de la ecuación se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$N(t) - N(t_0) = r \int_{t_0}^t N(t)dt + s \int_{t_0}^t N(t)dB(t) \quad (75)$$

---

Donde  $dB(t) = W(t)dt$ , para poder resolver esta parte de la ecuación (72) es necesario definir conceptos del cálculo estocástico sobre movimientos brownianos pues resulta ambiguo resolverlo en el sentido de Riemann-Stieltjes o Lebesgue-Stieltjes [Artzrouni and Reneke, 1990].

### 2.3.2. Formula de Ito

Sea  $X(t)$  un proceso estocástico que satisface la ecuación diferencial estocástica dada por

$$dX(t) = f[t, X(t)]dt + g[t, X(t)]dB(t) \quad (76)$$

Y sea  $(t, x) \rightarrow F(t, x) \rightarrow F(t, x) \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}$  donde  $F(t, x)$  es de clase  $C^2$  sobre  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Entonces  $Y(t) = F(t, X(t))$  es un proceso estocástico que satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dY(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t) \quad (77)$$

Donde

$$f(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x)f(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x)g^2(t, x) \quad (78)$$

y

$$g(t, x) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, x)g(t, x) \quad (79)$$

Con base a estos resultados es asertivo obtener la Formula de Ito para la ecuación (72) donde se observa que  $f(t, N(t)) = rN(t)$ ,  $g(t, N(t)) = sN(t)$  de donde se puede tomar la función  $F(t, x) = \ln x$ . Así entonces queda definido el proceso estocástico  $Y(t) = \ln x$  que satisface

$$d \ln N(t) = \frac{dN(t)}{N(t)} - \frac{s^2 dt}{2} \quad (80)$$

Y por lo tanto

$$\int_0^t \frac{dN(u)}{N(u)} = \int_0^t d \ln N(u) + \int_0^t \frac{s^2 du}{2} \quad (81)$$

---

Por lo tanto, integrando se obtiene la solución a la ecuación diferencial estocástica dada en la ecuación (72)

$$N(t) = N(0) \exp\left[\left(r - \frac{s^2}{2}\right)t + sB(t)\right] \quad (82)$$

## 2.4. Software R

Como ya se ha mencionado en el apartado de Población nos guiamos del Software R con algunas bibliotecas necesarias para el desarrollo de los resultados obtenidos las cuales fueron: Readr, Stats, ggplot2 y Plotly.

## 2.5. Software Python

De igual manera, para generar adicionalmente algunos resultados gráficos en la librería plotly, debido a que esta librería en el software R tiene algunas limitantes que solo se encuentran en Python, además de esto se usará para simular los modelos propuestos en la parte de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas. Así entonces, las librerías utilizadas para la parte de este software fueron: Pandas, Matplotlib, Plotly y Numpy.

# 3. Resultados

## 3.1. Resultados en cuadros

La población que usamos fue extraída de los datos obtenidos de INEGI, a la cual se le aplicó el método de un 1/16, con motivo de corregir la información mostrada, las correcciones que pueden ser visualizadas en Tabla 2 y Tabla 3, fueron realizadas en el Software R, el primer modelo que se analizó fue el Proceso de Galton-Watson, el cual se ha visto que es un modelo bueno para realizar una proyección de una población.

---

### 3.1.1. Proceso de Galton-Watson

Tabla 2: Población corregida del Censo del 2000. Municipio: Tequisquiapan, Estado: Querétaro. Fuente: Elaboración Propia

<b>Grupo Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	530	595	1125
1 a 4 años	2420	2278	4698
5 a 9 años	2950	2873	5823
10 a 14 años	3129	3060	6189
15 a 19 años	3026	2956	5982
20 a 24 años	2659	2770	5429
25 a 29 años	2269	2539	4808
30 a 34 años	1923	2208	4131
35 a 39 años	1679	1934	3613
40 a 44 años	1483	1637	3120
45 a 49 años	1205	1271	2476
50 a 54 años	927	943	1870
55 a 59 años	698	712	1410
60 a 64 años	535	597	1132
65 a 69 años	458	534	992
70 a 74 años	386	445	831
75 a 79 años	300	327	627
80 a 84 años	204	226	430
85 y más años	116	133	249

Tabla 3: Población corregida del Censo del 2010. Municipio: Tequisquiapan, Estado: Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

<b>Grupo Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	599	585	1184
1 a 4 años	2529	2428	4957
5 a 9 años	3128	3013	6141
10 a 14 años	3258	3185	6443
15 a 19 años	3401	3273	6674
20 a 24 años	3329	3243	6572
25 a 29 años	2874	2953	5827
30 a 34 años	2356	2691	5047
35 a 39 años	2181	2647	4828
40 a 44 años	2118	2475	4593
45 a 49 años	1837	2077	3914
50 a 54 años	1521	1697	3218
55 a 59 años	1248	1377	2625
60 a 64 años	972	1052	2024
65 a 69 años	742	814	1556
70 a 74 años	566	673	1239
75 a 79 años	450	540	990
80 a 84 años	333	362	695
85 y más años	203	252	455

Es necesario realizar la corrección de las poblaciones para proceder a calcular las tasas de crecimiento las cuales usamos propiamente para calcular mediante los modelos propuestos las proyecciones correspondientes, usamos crecimiento exponencial en este caso, de la cual se le realizó una modificación usando la distribución exponencial con el fin de obtener resultados aleatorios de crecimiento. Las tasas de crecimiento utilizadas para medir la proyección aleatoria de la población fueron las mostradas en la Tabla 4.

Tabla 4: Tasas de Crecimiento Exponencial obtenidas del Censo del 2000 y 2010.  
Municipio: Tequisquiapan, Estado: Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	0.01184576	-0.00164057	0.00494754
1 a 4 años	0.00426428	0.00617238	0.00519419
5 a 9 años	0.00567087	0.00460528	0.00514659
10 a 14 años	0.00391037	0.00387527	0.00389302
15 a 19 años	0.01130792	0.00986013	0.0105952
20 a 24 años	0.02175112	0.0152593	0.01849326
25 a 29 años	0.02287813	0.01462045	0.01860533
30 a 34 años	0.01965626	0.01914781	0.01938483
35 a 39 años	0.02531916	0.03037665	0.0280592
40 a 44 años	0.03449692	0.04001111	0.03742924
45 a 49 años	0.04081246	0.0475362	0.04432224
50 a 54 años	0.04792812	0.05686983	0.05254041
55 a 59 años	0.05624334	0.06384205	0.06015494
60 a 64 años	0.05779303	0.0548353	0.05624444
65 a 69 años	0.04669987	0.04080378	0.04357066
70 a 74 años	0.03704752	0.04003976	0.03866136
75 a 79 años	0.0392455	0.04855139	0.04421024
80 a 84 años	0.04742992	0.04559927	0.04647208
85 y más años	0.05416594	0.06185738	0.05835011

A partir de estas tasas de crecimiento se realizaron las correspondientes simulaciones donde observamos la aleatoriedad de la población como se muestran en las siguientes tablas de las poyecciones.

Tabla 5: Simulación uno de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	346	56	402
01 a 04 años	449	640	1089
05 a 09 años	401	432	833
10 a 14 años	1714	1427	3141
15 a 19 años	3234	2198	5432
20 a 24 años	2937	1912	4849
25 a 29 años	2076	2264	4340
30 a 34 años	2444	3577	6021
35 a 39 años	3242	4426	7668
40 a 44 años	3406	4401	7807
45 a 49 años	3337	4422	7759
50 a 54 años	3230	4068	7298
55 a 59 años	2537	2636	5173
60 a 64 años	1584	1525	3109
65 a 69 años	983	1260	2243
70 a 74 años	842	1244	2086
75 a 79 años	643	925	1568
80 a 84 años	463	644	1107
85 y mas años	429	346	775

Tabla 6: Simulación dos de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	325	40	365
01 a 04 años	507	709	1216
05 a 09 años	406	433	839
10 a 14 años	1740	1476	3216
15 a 19 años	3226	2237	5463
20 a 24 años	2997	2004	5001
25 a 29 años	2111	2368	4479
30 a 34 años	2563	3676	6239
35 a 39 años	3412	4550	7962
40 a 44 años	3526	4595	8121
45 a 49 años	3305	4437	7742
50 a 54 años	3219	4046	7265
55 a 59 años	2601	2661	5262
60 a 64 años	1630	1556	3186
65 a 69 años	954	1245	2199
70 a 74 años	796	1194	1990
75 a 79 años	704	895	1599
80 a 84 años	499	722	1221
85 y mas años	444	399	843

Tabla 7: Simulación tres de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	316	45	361
01 a 04 años	492	674	1166
05 a 09 años	382	436	818
10 a 14 años	1710	1458	3168
15 a 19 años	3205	2223	5428
20 a 24 años	2910	1933	4843
25 a 29 años	2103	2290	4393
30 a 34 años	2514	3615	6129
35 a 39 años	3320	4480	7800
40 a 44 años	3379	4426	7805
45 a 49 años	3326	4374	7700
50 a 54 años	3154	4013	7167
55 a 59 años	2555	2606	5161
60 a 64 años	1552	1512	3064
65 a 69 años	927	1206	2133
70 a 74 años	756	1161	1917
75 a 79 años	623	835	1458
80 a 84 años	465	635	1100
85 y mas años	432	359	791

Tabla 8: Simulación cuatro de población . Municipio: Tequisquiapan, Estado: Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	348	54	402
01 a 04 años	441	645	1086
05 a 09 años	404	435	839
10 a 14 años	1676	1401	3077
15 a 19 años	3197	2136	5333
20 a 24 años	2884	1838	4722
25 a 29 años	2058	2256	4314
30 a 34 años	2481	3536	6017
35 a 39 años	3275	4357	7632
40 a 44 años	3312	4411	7723
45 a 49 años	3295	4336	7631
50 a 54 años	3171	3976	7147
55 a 59 años	2584	2647	5231
60 a 64 años	1573	1523	3096
65 a 69 años	962	1261	2223
70 a 74 años	831	1223	2054
75 a 79 años	693	945	1638
80 a 84 años	490	705	1195
85 y mas años	429	387	816

Tabla 9: Simulación cinco de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	341	49	390
01 a 04 años	491	698	1189
05 a 09 años	406	444	850
10 a 14 años	1696	1408	3104
15 a 19 años	3219	2164	5383
20 a 24 años	2931	1908	4839
25 a 29 años	2120	2322	4442
30 a 34 años	2508	3575	6083
35 a 39 años	3280	4466	7746
40 a 44 años	3411	4455	7866
45 a 49 años	3293	4334	7627
50 a 54 años	3182	4013	7195
55 a 59 años	2582	2646	5228
60 a 64 años	1593	1538	3131
65 a 69 años	963	1229	2192
70 a 74 años	790	1189	1979
75 a 79 años	661	898	1559
80 a 84 años	468	675	1143
85 y mas años	449	379	828

Tabla 10: Simulación seis de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	338	47	385
01 a 04 años	480	662	1142
05 a 09 años	413	452	865
10 a 14 años	1721	1473	3194
15 a 19 años	3282	2214	5496
20 a 24 años	2982	1938	4920
25 a 29 años	2089	2340	4429
30 a 34 años	2419	3613	6032
35 a 39 años	3217	4437	7654
40 a 44 años	3290	4338	7628
45 a 49 años	3194	4232	7426
50 a 54 años	3063	3888	6951
55 a 59 años	2480	2544	5024
60 a 64 años	1578	1479	3057
65 a 69 años	966	1231	2197
70 a 74 años	796	1227	2023
75 a 79 años	678	898	1576
80 a 84 años	466	681	1147
85 y mas años	408	368	776

Tabla 11: Simulación siete de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	295	40	335
01 a 04 años	517	725	1242
05 a 09 años	448	490	938
10 a 14 años	1822	1498	3320
15 a 19 años	3299	2291	5590
20 a 24 años	3062	2048	5110
25 a 29 años	2183	2396	4579
30 a 34 años	2578	3686	6264
35 a 39 años	3369	4584	7953
40 a 44 años	3470	4534	8004
45 a 49 años	3332	4411	7743
50 a 54 años	3167	4004	7171
55 a 59 años	2502	2601	5103
60 a 64 años	1528	1453	2981
65 a 69 años	913	1191	2104
70 a 74 años	794	1159	1953
75 a 79 años	705	896	1601
80 a 84 años	501	720	1221
85 y mas años	466	390	856

Tabla 12: Simulación ocho de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	335	42	377
01 a 04 años	486	685	1171
05 a 09 años	401	442	843
10 a 14 años	1740	1430	3170
15 a 19 años	3276	2217	5493
20 a 24 años	2978	1929	4907
25 a 29 años	2101	2330	4431
30 a 34 años	2485	3612	6097
35 a 39 años	3278	4474	7752
40 a 44 años	3389	4431	7820
45 a 49 años	3266	4307	7573
50 a 54 años	3092	3902	6994
55 a 59 años	2488	2562	5050
60 a 64 años	1604	1523	3127
65 a 69 años	923	1257	2180
70 a 74 años	816	1153	1969
75 a 79 años	692	883	1575
80 a 84 años	486	709	1195
85 y mas años	438	382	820

Tabla 13: Simulación nueve de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	343	41	384
01 a 04 años	480	683	1163
05 a 09 años	416	461	877
10 a 14 años	1735	1444	3179
15 a 19 años	3287	2222	5509
20 a 24 años	2930	1915	4845
25 a 29 años	2107	2292	4399
30 a 34 años	2505	3616	6121
35 a 39 años	3311	4444	7755
40 a 44 años	3433	4446	7879
45 a 49 años	3349	4371	7720
50 a 54 años	3219	4003	7222
55 a 59 años	2629	2675	5304
60 a 64 años	1627	1555	3182
65 a 69 años	1003	1312	2315
70 a 74 años	803	1255	2058
75 a 79 años	696	930	1626
80 a 84 años	523	723	1246
85 y mas años	471	398	869

Tabla 14: Simulación diez de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	298	36	334
01 a 04 años	507	699	1206
05 a 09 años	405	452	857
10 a 14 años	1760	1494	3254
15 a 19 años	3284	2250	5534
20 a 24 años	3022	1985	5007
25 a 29 años	2169	2393	4562
30 a 34 años	2558	3723	6281
35 a 39 años	3362	4551	7913
40 a 44 años	3470	4501	7971
45 a 49 años	3305	4443	7748
50 a 54 años	3162	3974	7136
55 a 59 años	2483	2503	4986
60 a 64 años	1485	1409	2894
65 a 69 años	902	1157	2059
70 a 74 años	744	1143	1887
75 a 79 años	665	852	1517
80 a 84 años	518	731	1249
85 y mas años	473	398	871

Tabla 15: Simulación once de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	346	56	402
01 a 04 años	464	638	1102
05 a 09 años	399	449	848
10 a 14 años	1718	1453	3171
15 a 19 años	3288	2231	5519
20 a 24 años	2883	1882	4765
25 a 29 años	2062	2275	4337
30 a 34 años	2403	3566	5969
35 a 39 años	3209	4378	7587
40 a 44 años	3277	4352	7629
45 a 49 años	3178	4228	7406
50 a 54 años	3144	3927	7071
55 a 59 años	2525	2562	5087
60 a 64 años	1561	1479	3040
65 a 69 años	965	1242	2207
70 a 74 años	815	1201	2016
75 a 79 años	709	931	1640
80 a 84 años	483	739	1222
85 y mas años	466	392	858

Tabla 16: Simulación doce de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	313	34	347
01 a 04 años	452	621	1073
05 a 09 años	400	456	856
10 a 14 años	1711	1443	3154
15 a 19 años	3253	2223	5476
20 a 24 años	2904	1912	4816
25 a 29 años	2054	2263	4317
30 a 34 años	2441	3563	6004
35 a 39 años	3270	4447	7717
40 a 44 años	3412	4428	7840
45 a 49 años	3222	4315	7537
50 a 54 años	3057	3888	6945
55 a 59 años	2472	2545	5017
60 a 64 años	1525	1464	2989
65 a 69 años	923	1177	2100
70 a 74 años	788	1137	1925
75 a 79 años	696	912	1608
80 a 84 años	480	693	1173
85 y mas años	436	366	802

Tabla 17: Simulación trece de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	310	40	350
01 a 04 años	467	654	1121
05 a 09 años	407	448	855
10 a 14 años	1781	1476	3257
15 a 19 años	3307	2238	5545
20 a 24 años	2971	1932	4903
25 a 29 años	2063	2281	4344
30 a 34 años	2425	3541	5966
35 a 39 años	3211	4378	7589
40 a 44 años	3307	4355	7662
45 a 49 años	3228	4256	7484
50 a 54 años	3140	3912	7052
55 a 59 años	2568	2603	5171
60 a 64 años	1541	1497	3038
65 a 69 años	927	1219	2146
70 a 74 años	748	1157	1905
75 a 79 años	666	891	1557
80 a 84 años	476	682	1158
85 y mas años	457	374	831

Tabla 18: Simulación catorce de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	308	49	357
01 a 04 años	520	692	1212
05 a 09 años	411	448	859
10 a 14 años	1762	1475	3237
15 a 19 años	3257	2247	5504
20 a 24 años	2927	1949	4876
25 a 29 años	2061	2325	4386
30 a 34 años	2466	3608	6074
35 a 39 años	3277	4434	7711
40 a 44 años	3311	4413	7724
45 a 49 años	3265	4280	7545
50 a 54 años	3134	3940	7074
55 a 59 años	2509	2564	5073
60 a 64 años	1521	1473	2994
65 a 69 años	899	1199	2098
70 a 74 años	760	1108	1868
75 a 79 años	647	882	1529
80 a 84 años	470	696	1166
85 y mas años	441	368	809

Tabla 19: Simulación quince de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	339	49	388
01 a 04 años	444	642	1086
05 a 09 años	406	443	849
10 a 14 años	1738	1468	3206
15 a 19 años	3250	2185	5435
20 a 24 años	2910	1881	4791
25 a 29 años	2056	2253	4309
30 a 34 años	2488	3554	6042
35 a 39 años	3296	4399	7695
40 a 44 años	3376	4461	7837
45 a 49 años	3269	4359	7628
50 a 54 años	3163	3993	7156
55 a 59 años	2490	2580	5070
60 a 64 años	1546	1463	3009
65 a 69 años	948	1209	2157
70 a 74 años	839	1203	2042
75 a 79 años	708	936	1644
80 a 84 años	502	714	1216
85 y mas años	432	391	823

Una vez realizados los resultados anteriores se pudo observar como la población fué variando, una cosa que es importante señalar es que el modelo escogido en este caso modificó considerablemente la población, esto podrá ser más notable cuando se observen los resultados en figuras, y los cambios más notables se encuentran en las poblaciones en los primeros grupos de edad debido a sus bajas tasas de crecimiento dieron como resultado que bajaran el numero de sus poblaciones, y por consecuente que la población se concentre más entre las poblaciones

de 30 a 60 años.

Estas proyecciones quizá no hayan sido las más adecuadas para simular a futuro una población a cinco años, sin embargo, es necesario mencionar que la población tiende a tener este mismo comportamiento con el paso de los años y dado que lo que se espera en un futuro muy cercano es que la pirámide poblacional se invierta de la forma en que se está observando en las simulaciones anteriores, refiriéndose a lo anterior a que hayan poblaciones mucho más viejas y menor número de nacimientos.

### 3.1.2. Modelo Malthusiano de Crecimiento Exponencial

En este apartado mostramos los resultados de las quince simulaciones realizadas bajo el Modelo Malthusiano de Crecimiento Exponencial, el cual resulta ser una ecuación diferencial estocástica y la cual fue con la que comparamos con el Proceso de Galton-Watson para medir su efectividad de proyección.

Tabla 20: Simulación uno por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	623.775943	567.499394	1189.73266
01 a 04 años	2534.63978	2450.19392	4987.21148
05 a 09 años	3240.74985	3226.03918	6470.22747
10 a 14 años	3532.0624	3365.03039	6900.41671
15 a 19 años	3644.59046	3426.3848	7071.56657
20 a 24 años	3164.42245	3109.93248	6273.48679
25 a 29 años	2552.19549	2899.57667	5455.16084
30 a 34 años	2431.19153	3018.64331	5452.22514
35 a 39 años	2473.01186	2963.27427	5438.27999
40 a 44 años	2214.45163	2583.11521	4798.54682
45 a 49 años	1900.63438	2212.42136	4112.50348
50 a 54 años	1626.40312	1859.59153	3486.2332
55 a 59 años	1276.67401	1357.49373	2635.46755
60 a 64 años	921.464045	978.49863	1900.41955
65 a 69 años	669.441897	805.887762	1476.18164
70 a 74 años	538.184897	675.038342	1213.04909
75 a 79 años	408.535528	480.38844	889.039224
80 a 84 años	261.789169	336.922207	598.795557
85 y mas años	215.818034	268.431267	481.920283

Tabla 21: Simulación dos por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	624.625824	568.378326	1191.42192
01 a 04 años	2538.09317	2453.98873	4994.29261
05 a 09 años	3245.1653	3231.0356	6479.41428
10 a 14 años	3536.87475	3370.24208	6910.21433
15 a 19 años	3649.55613	3431.69151	7081.6072
20 a 24 años	3168.7339	3114.74908	6282.39426
25 a 29 años	2555.6728	2904.06748	5462.9064
30 a 34 años	2434.50398	3023.31852	5459.96653
35 a 39 años	2476.38128	2967.86373	5446.00158
40 a 44 años	2217.46877	2587.11589	4805.36008
45 a 49 años	1903.22395	2215.84792	4118.34266
50 a 54 años	1628.61906	1862.47163	3491.18316
55 a 59 años	1278.41345	1359.59618	2639.20954
60 a 64 años	922.71952	980.014109	1903.11787
65 a 69 años	670.353997	807.135905	1478.27761
70 a 74 años	538.918162	676.083828	1214.77145
75 a 79 años	409.092149	481.132456	890.301534
80 a 84 años	262.145851	337.444025	599.645762
85 y mas años	216.112081	268.847008	482.604542

Tabla 22: Simulación tres por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	635.717885	579.864449	1213.47769
01 a 04 años	2583.16445	2503.58037	5086.74769
05 a 09 años	3302.79272	3296.33026	6599.36214
10 a 14 años	3599.68233	3438.34991	7038.13722
15 a 19 años	3714.36469	3501.04115	7212.70294
20 a 24 años	3225.00406	3177.69376	6398.69486
25 a 29 años	2601.05626	2962.75458	5564.03652
30 a 34 años	2477.73573	3084.41551	5561.04223
35 a 39 años	2520.35669	3027.84006	5546.81876
40 a 44 años	2256.84643	2639.39784	4894.31761
45 a 49 años	1937.02127	2260.62707	4194.58202
50 a 54 años	1657.53996	1900.10955	3555.81245
55 a 59 años	1301.11542	1387.0717	2688.06697
60 a 64 años	939.105108	999.818809	1938.34867
65 a 69 años	682.258096	823.44698	1505.6437
70 a 74 años	548.488233	689.746526	1237.25947
75 a 79 años	416.356778	490.855463	906.782926
80 a 84 años	266.801018	344.263292	610.746492
85 y mas años	219.949785	274.280026	491.538588

Tabla 23: Simulación cuatro por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	636.821544	581.008823	1215.67313
01 a 04 años	2587.64904	2508.52124	5095.95069
05 a 09 años	3308.52664	3302.83564	6611.30179
10 a 14 años	3605.93167	3445.13556	7050.87071
15 a 19 años	3720.81314	3507.95052	7225.75225
20 a 24 años	3230.60293	3183.965	6410.27145
25 a 29 años	2605.57191	2968.60163	5574.10304
30 a 34 años	2482.03728	3090.50267	5571.10334
35 a 39 años	2524.73223	3033.81557	5556.85413
40 a 44 años	2260.7645	2644.60675	4903.17247
45 a 49 años	1940.3841	2265.08846	4202.17091
50 a 54 años	1660.41759	1903.85946	3562.24567
55 a 59 años	1303.37427	1389.80912	2692.93026
60 a 64 años	940.735473	1001.79197	1941.85555
65 a 69 años	683.442553	825.07207	1508.36773
70 a 74 años	549.440454	691.107755	1239.49794
75 a 79 años	417.079608	491.824176	908.423489
80 a 84 años	267.264207	344.942703	611.851462
85 y mas años	220.331636	274.821323	492.427885

Tabla 24: Simulación cinco por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	636.21915	580.384172	1214.47481
01 a 04 años	2585.20128	2505.82429	5090.92746
05 a 09 años	3305.39698	3299.28471	6604.78483
10 a 14 años	3602.52068	3441.43165	7043.92046
15 a 19 años	3717.29348	3504.17907	7218.62962
20 a 24 años	3227.54698	3180.54187	6403.95266
25 a 29 años	2603.1072	2965.41005	5568.60848
30 a 34 años	2479.68943	3087.18003	5565.61174
35 a 39 años	2522.34399	3030.55387	5551.37658
40 a 44 años	2258.62596	2641.76349	4898.33927
45 a 49 años	1938.54862	2262.65323	4198.0287
50 a 54 años	1658.84693	1901.81259	3558.73426
55 a 59 años	1302.14136	1388.31491	2690.27576
60 a 64 años	939.845594	1000.71493	1939.94141
65 a 69 años	682.796057	824.185022	1506.88088
70 a 74 años	548.920717	690.364735	1238.27613
75 a 79 años	416.685076	491.295409	907.528029
80 a 84 años	267.011391	344.57185	611.248342
85 y mas años	220.123215	274.525858	491.942485

Tabla 25: Simulación seis por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	636.083584	580.243609	1214.20514
01 a 04 años	2584.65043	2505.21741	5089.79704
05 a 09 años	3304.69266	3298.48566	6603.31826
10 a 14 años	3601.75306	3440.59817	7042.35638
15 a 19 años	3716.50139	3503.3304	7217.02675
20 a 24 años	3226.85925	3179.77158	6402.53069
25 a 29 años	2602.55253	2964.69185	5567.37199
30 a 34 años	2479.16105	3086.43234	5564.37591
35 a 39 años	2521.80653	3029.8199	5550.14391
40 a 44 años	2258.14469	2641.12368	4897.25161
45 a 49 años	1938.13555	2262.10524	4197.09655
50 a 54 años	1658.49347	1901.35199	3557.94405
55 a 59 años	1301.8639	1387.97868	2689.67839
60 a 64 años	939.645332	1000.47257	1939.51065
65 a 69 años	682.650567	823.985413	1506.54629
70 a 74 años	548.803753	690.197535	1238.00117
75 a 79 años	416.596289	491.176422	907.326515
80 a 84 años	266.954497	344.488398	611.112616
85 y mas años	220.076311	274.459371	491.833251

Tabla 26: Simulación siete por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	637.008976	581.203196	1216.04599
01 a 04 años	2588.41065	2509.36045	5097.51368
05 a 09 años	3309.50042	3303.94059	6613.32955
10 a 14 años	3606.99299	3446.28812	7053.0333
15 a 19 años	3721.90826	3509.12409	7227.96848
20 a 24 años	3231.55377	3185.03018	6412.23756
25 a 29 años	2606.33879	2969.59476	5575.81269
30 a 34 años	2482.76781	3091.53658	5572.81206
35 a 39 años	2525.47532	3034.83051	5558.55849
40 a 44 años	2261.4299	2645.49149	4904.67633
45 a 49 años	1940.9552	2265.84624	4203.45977
50 a 54 años	1660.90629	1904.49638	3563.33825
55 a 59 años	1303.75788	1390.27407	2693.75621
60 a 64 años	941.012354	1002.12712	1942.45114
65 a 69 años	683.643706	825.348093	1508.83036
70 a 74 años	549.602167	691.338961	1239.87811
75 a 79 años	417.202365	491.988713	908.702113
80 a 84 años	267.342869	345.058101	612.039124
85 y mas años	220.396485	274.913263	492.578919

Tabla 27: Simulación ocho por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	615.220967	558.661138	1172.73392
01 a 04 años	2499.87765	2412.03451	4915.95487
05 a 09 años	3196.30354	3175.79673	6377.78173
10 a 14 años	3483.62079	3312.62329	6801.82448
15 a 19 años	3594.60555	3373.02216	6970.52898
20 a 24 años	3121.02296	3061.49828	6183.85205
25 a 29 años	2517.19259	2854.41856	5377.21823
30 a 34 años	2397.84817	2971.63085	5374.32448
35 a 39 años	2439.09494	2917.12413	5360.57858
40 a 44 años	2184.08082	2542.88568	4729.98583
45 a 49 años	1874.56752	2177.96503	4053.74459
50 a 54 años	1604.09729	1830.63019	3436.42237
55 a 59 años	1259.16465	1336.35207	2597.81234
60 a 64 años	908.82633	963.259457	1873.26661
65 a 69 años	660.260621	793.336837	1455.09015
70 a 74 años	530.803787	664.52527	1195.7172
75 a 79 años	402.932536	472.906853	876.336751
80 a 84 años	258.198777	331.674968	590.240046
85 y mas años	212.858128	264.250708	475.034671

Tabla 28: Simulación nueve por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	614.891478	558.321074	1172.07943
01 a 04 años	2498.53881	2410.56627	4913.2113
05 a 09 años	3194.59173	3173.86358	6374.22232
10 a 14 años	3481.7551	3310.60685	6798.02842
15 a 19 años	3592.68042	3370.96895	6966.63876
20 a 24 años	3119.35146	3059.6347	6180.40088
25 a 29 años	2515.84447	2852.68104	5374.21724
30 a 34 años	2396.56398	2969.82197	5371.3251
35 a 39 años	2437.78865	2915.34844	5357.58687
40 a 44 años	2182.91111	2541.33779	4727.34605
45 a 49 años	1873.56357	2176.63927	4051.48221
50 a 54 años	1603.2382	1829.51586	3434.50452
55 a 59 años	1258.49029	1335.53861	2596.36252
60 a 64 años	908.339597	962.673108	1872.22115
65 a 69 años	659.90701	792.853921	1454.27807
70 a 74 años	530.519509	664.120764	1195.04988
75 a 79 años	402.716741	472.618988	875.847672
80 a 84 años	258.060496	331.473073	589.910637
85 y mas años	212.74413	264.089855	474.769557

Tabla 29: Simulación diez por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	627.413853	571.262801	1196.96417
01 a 04 años	2549.422	2466.44253	5017.52507
05 a 09 años	3259.65016	3247.43285	6509.55523
10 a 14 años	3552.66166	3387.3458	6942.35927
15 a 19 años	3665.84599	3449.10708	7114.54943
20 a 24 años	3182.87761	3130.55619	6311.61871
25 a 29 años	2567.0801	2918.80539	5488.31875
30 a 34 años	2445.37043	3038.66163	5485.36521
35 a 39 años	2487.43466	2982.92541	5471.3353
40 a 44 años	2227.36649	2600.2453	4827.71366
45 a 49 años	1911.71903	2227.09317	4137.50037
50 a 54 años	1635.88843	1871.92353	3507.42345
55 a 59 años	1284.11967	1366.49603	2651.48662
60 a 64 años	926.838096	984.987603	1911.9708
65 a 69 años	673.346134	811.232056	1485.15426
70 a 74 años	541.323633	679.5149	1220.42232
75 a 79 años	410.918139	483.574165	894.44304
80 a 84 años	263.315944	339.156527	602.435195
85 y mas años	217.076702	270.211385	484.849523

Tabla 30: Simulación once por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	639.475409	583.761701	1220.95295
01 a 04 años	2598.4327	2520.40686	5118.08303
05 a 09 años	3322.31446	3318.48481	6640.01548
10 a 14 años	3620.95889	3461.45896	7081.4935
15 a 19 años	3736.31911	3524.57154	7257.13458
20 a 24 años	3244.06602	3199.05094	6438.11205
25 a 29 años	2616.43027	2982.66716	5598.31205
30 a 34 años	2492.38083	3105.14578	5595.29932
35 a 39 años	2535.2537	3048.19009	5580.98823
40 a 44 años	2270.18592	2657.13716	4924.46755
45 a 49 años	1948.47038	2275.82068	4220.42145
50 a 54 años	1667.33714	1912.88013	3577.71694
55 a 59 años	1308.8059	1396.39417	2704.62598
60 a 64 años	944.655856	1006.53856	1950.28927
65 a 69 años	686.290704	828.981343	1514.91875
70 a 74 años	551.73017	694.382293	1244.88123
75 a 79 años	418.817729	494.154488	912.368884
80 a 84 años	268.377993	346.577076	614.508808
85 y mas años	221.249837	276.123454	494.56656

Tabla 31: Simulación doce por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	630.042828	573.984326	1202.1912
01 a 04 años	2560.10453	2478.19278	5039.43613
05 a 09 años	3273.30867	3262.90379	6537.98184
10 a 14 años	3567.54794	3403.48328	6972.6759
15 a 19 años	3681.20654	3465.53879	7145.61799
20 a 24 años	3196.21443	3145.47031	6339.18095
25 a 29 años	2577.83662	2932.71073	5512.28572
30 a 34 años	2455.61697	3053.13796	5509.31929
35 a 39 años	2497.85745	2997.13621	5495.2281
40 a 44 años	2236.69955	2612.633	4848.79583
45 a 49 años	1919.72947	2237.70315	4155.56844
50 a 54 años	1642.74309	1880.84147	3522.74003
55 a 59 años	1289.50036	1373.00608	2663.06541
60 a 64 años	930.721712	989.680134	1920.3202
65 a 69 años	676.167574	815.096806	1491.63979
70 a 74 años	543.591876	682.752143	1225.75179
75 a 79 años	412.639959	485.877937	898.348988
80 a 84 años	264.419284	340.772286	605.065973
85 y mas años	217.986292	271.498686	486.966815

Tabla 32: Simulación trece por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	649.092681	593.750826	1240.09405
01 a 04 años	2637.51135	2563.53518	5198.32014
05 a 09 años	3372.2798	3375.26955	6744.1122
10 a 14 años	3675.41563	3520.69023	7192.51135
15 a 19 años	3792.51079	3584.88277	7370.90598
20 a 24 años	3292.85455	3253.79198	6539.04349
25 a 29 años	2655.77958	3033.70552	5686.0778
30 a 34 años	2529.86453	3158.27994	5683.01783
35 a 39 años	2573.38218	3100.34964	5668.48238
40 a 44 años	2304.32796	2702.60516	5001.66931
45 a 49 años	1977.77404	2314.76372	4286.58576
50 a 54 años	1692.41275	1945.61266	3633.80545
55 a 59 años	1328.48944	1420.28878	2747.02689
60 a 64 años	958.862833	1023.7621	1980.8643
65 a 69 años	696.612046	843.166581	1538.6684
70 a 74 años	560.027814	706.264318	1264.39746
75 a 79 años	425.116461	502.610286	926.672254
80 a 84 años	272.414214	352.507581	624.142573
85 y mas años	224.577283	280.848381	502.319969

Tabla 33: Simulación catorce por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	653.539768	598.376719	1248.94906
01 a 04 años	2655.58156	2583.5076	5235.43924
05 a 09 años	3395.38408	3401.56617	6792.26917
10 a 14 años	3700.59677	3548.11981	7243.87016
15 a 19 años	3818.49417	3612.81248	7423.53864
20 a 24 años	3315.41467	3279.14217	6585.73615
25 a 29 años	2673.97496	3057.34102	5726.67978
30 a 34 años	2547.19722	3182.886	5723.59797
35 a 39 años	2591.01303	3124.50437	5708.95872
40 a 44 años	2320.11545	2723.66107	5037.38421
45 a 49 años	1991.32423	2332.79797	4317.19453
50 a 54 años	1704.00787	1960.77087	3659.75298
55 a 59 años	1337.59124	1431.3542	2766.6423
60 a 64 años	965.432228	1031.73819	1995.00886
65 a 69 años	701.384699	849.735664	1549.65541
70 a 74 años	563.864696	711.766801	1273.42601
75 a 79 años	428.029034	506.526107	933.289246
80 a 84 años	274.280588	355.253956	628.599322
85 y mas años	226.115915	283.036462	505.906833

Tabla 34: Simulación quince por el Modelo Malthusiano Exponencial de la población proyectada de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	654.261776	599.128165	1250.38696
01 a 04 años	2658.51536	2586.75199	5241.46673
05 a 09 años	3399.13518	3405.83788	6800.08903
10 a 14 años	3704.68506	3552.57557	7252.20994
15 a 19 años	3822.71271	3617.34947	7432.08527
20 a 24 años	3319.07743	3283.26014	6593.31823
25 a 29 años	2676.92907	3061.18045	5733.27283
30 a 34 años	2550.01128	3186.88309	5730.18747
35 a 39 años	2593.87549	3128.42814	5715.53137
40 a 44 años	2322.67864	2727.08146	5043.18368
45 a 49 años	1993.52418	2335.72752	4322.16486
50 a 54 años	1705.8904	1963.23322	3663.96641
55 a 59 años	1339.06896	1433.15171	2769.8275
60 a 64 años	966.498805	1033.03386	1997.30568
65 a 69 años	702.159565	850.802769	1551.43951
70 a 74 años	564.487635	712.660643	1274.89209
75 a 79 años	428.501906	507.162206	934.36373
80 a 84 años	274.583604	355.700086	629.323021
85 y mas años	226.36572	283.391901	506.489277

Ahora hagamos un comparativa con la proyección con las tasas utilizadas en la Tabla 4 pero usando un crecimiento exponencial.

Tabla 35: Proyección exponencial a 2015 de la población de Tequisquiapan, Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia.

<b>Edad</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
0 años	636	580	1214
1 a 4 años	2685	2408	5082
5 a 9 años	3321	2988	6296
10 a 14 años	3459	3159	6606
15 a 19 años	3611	3246	6843
20 a 24 años	3534	3216	6738
25 a 29 años	3051	2929	5974
30 a 34 años	2501	2669	5175
35 a 39 años	2316	2625	4950
40 a 44 años	2249	2455	4709
45 a 49 años	1950	2060	4013
50 a 54 años	1615	1683	3299
55 a 59 años	1325	1366	2691
60 a 64 años	1032	1043	2075
65 a 69 años	788	807	1595
70 a 74 años	601	667	1270
75 a 79 años	478	536	1015
80 a 84 años	354	359	713
85 y más años	216	250	467

Los resultados son muy cercanos entre sí pero no iguales, pues mientras la Tabla 35 proviene de un cálculo determinístico, los resultados de la Tabla 5 a la Tabla 34 proviene de un resultado aleatorio y debido a esto los resultados de las simulaciones tienen valores tanto por arriba del valor determinístico como por debajo del valor determinístico.

### 3.2. Resultados en Figuras

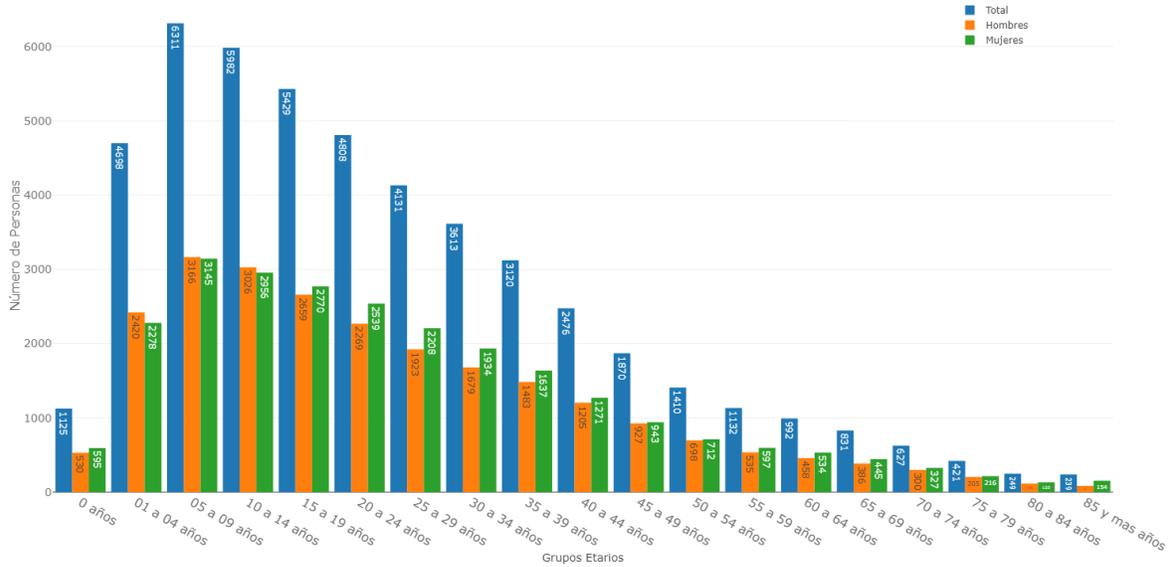


Figura 3: Población corregida del Censo del 2000. Municipio: Tequisquiapan, Estado: Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

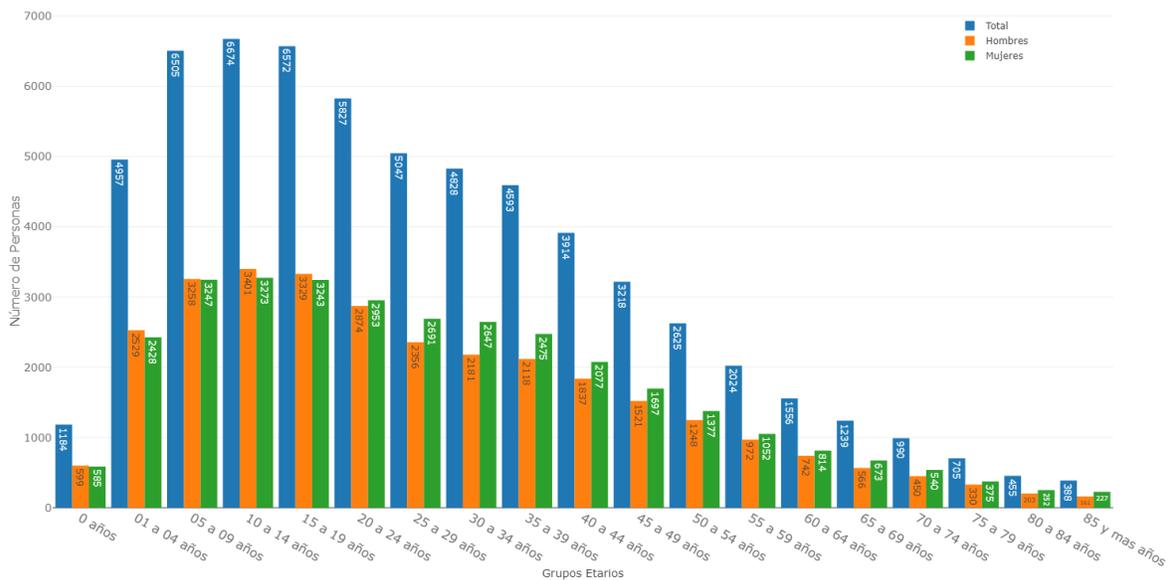


Figura 4: Población corregida del Censo del 2010. Municipio: Tequisquiapan, Estado: Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

Las dos anteriores figuras nos mostraron como la población de Tequisquiapan, Querétaro se ha ido modificando con el paso del tiempo, la distribución de la población ha tendido a crecer y sobre todo aumentado en algunos de los grupos etarios en donde es más notable ver como la población entre 10 años hasta los 39 años tuvo un aumento considerable con respecto a la observada en la , dados estos datos y de acuerdo a las transformaciones esperadas de la distribución de la población se podría observar que en una proyección de la población se cambie y se concentre sobre todo en los grupos etarios centrales, y de acuerdo a esperado a un largo plazo que la población se concentre en los últimos grupos etarios, teniendo así una población vieja casi en su totalidad.

A continuación se muestran las correspondientes simulaciones realizadas a partir del proceso de Galton-Watson, confirmando con esta que la población se tiende a estacionar en los grupos etarios centrales dadas las tasas de crecimiento obtenidas en los censos mostrados en las figuras anteriores.

### 3.2.1. Proceso de Galton-Watson

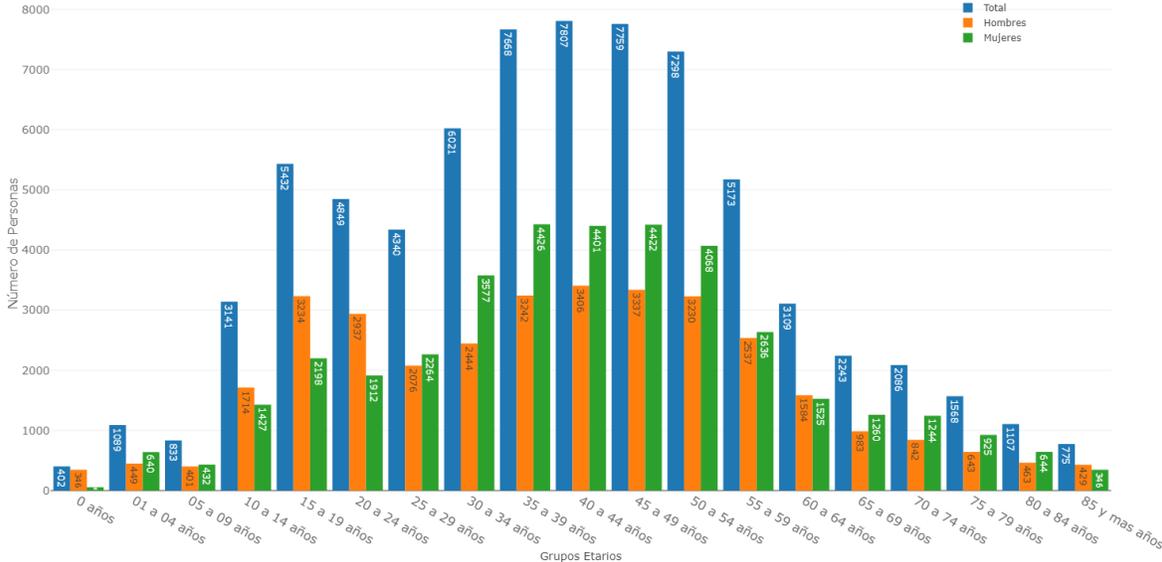


Figura 5: Simulación uno del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

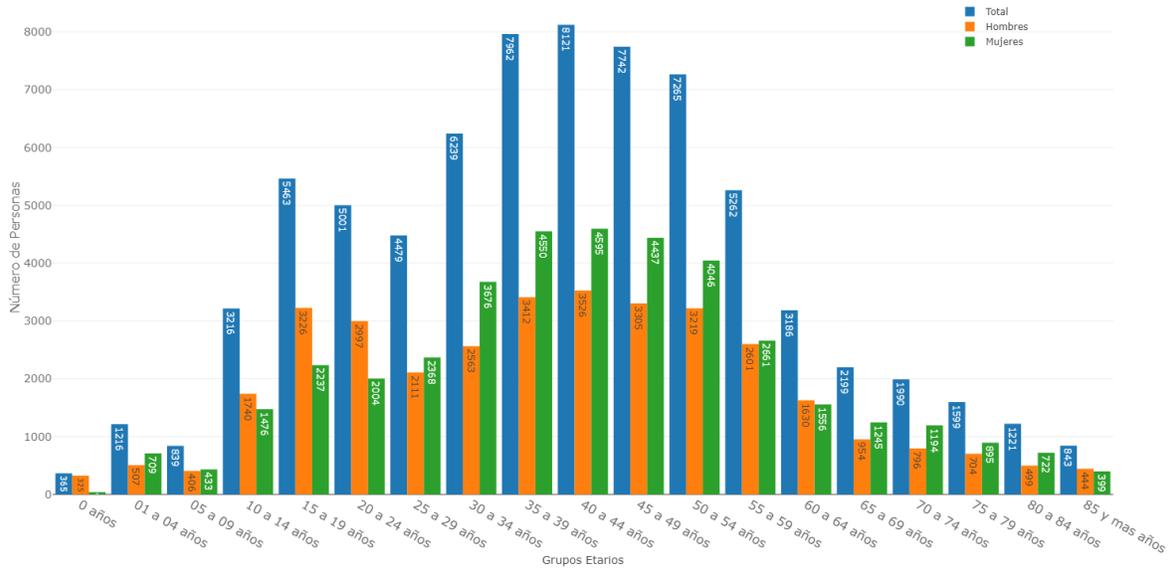


Figura 6: Simulación dos del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

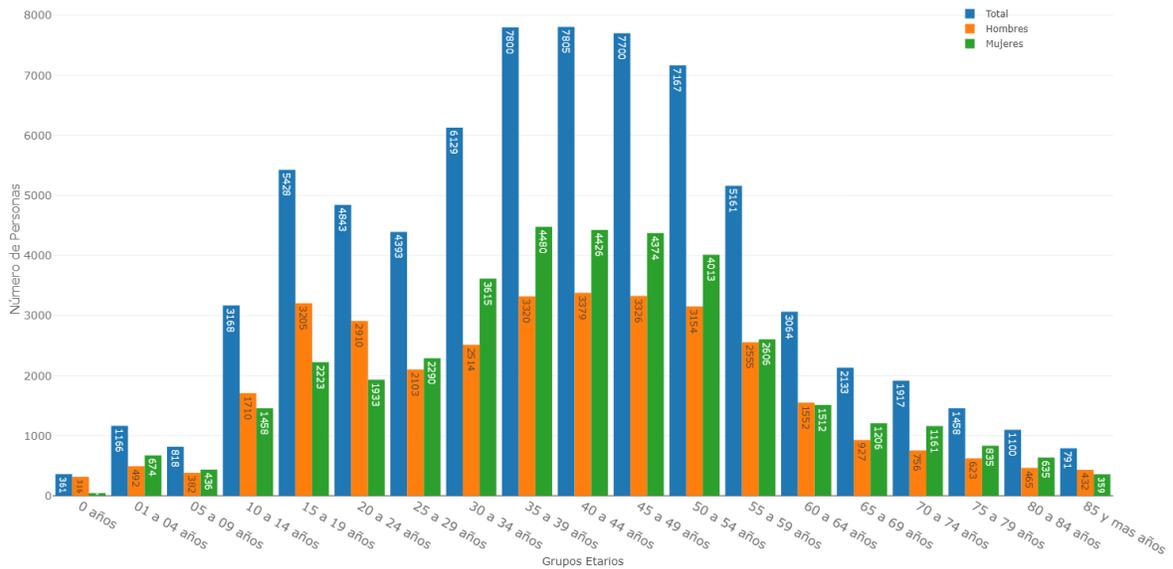


Figura 7: Simulación tres del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

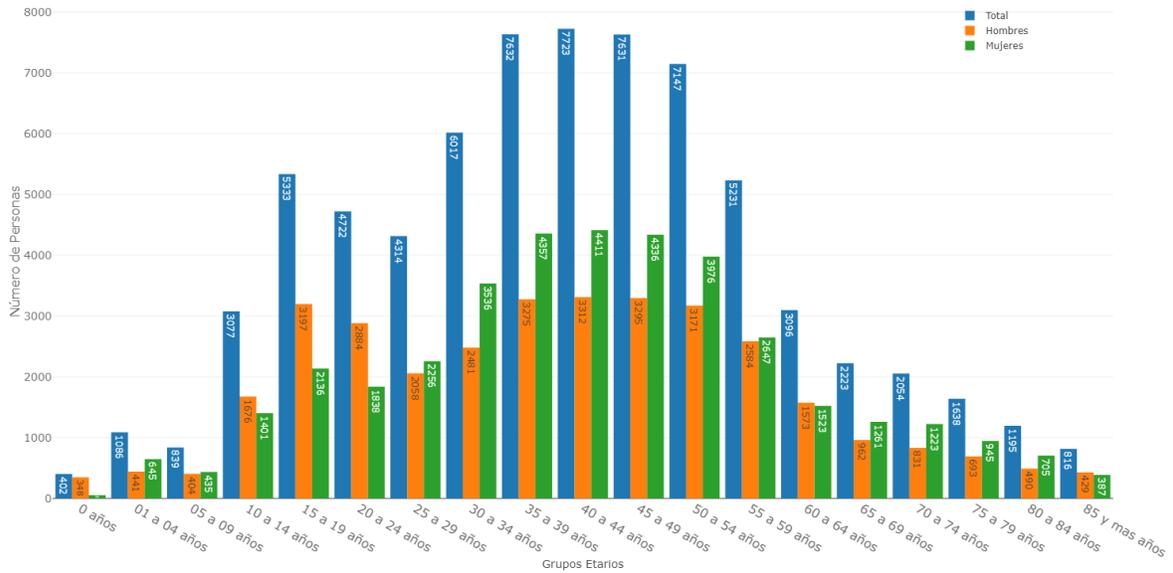


Figura 8: Simulación cuatro del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

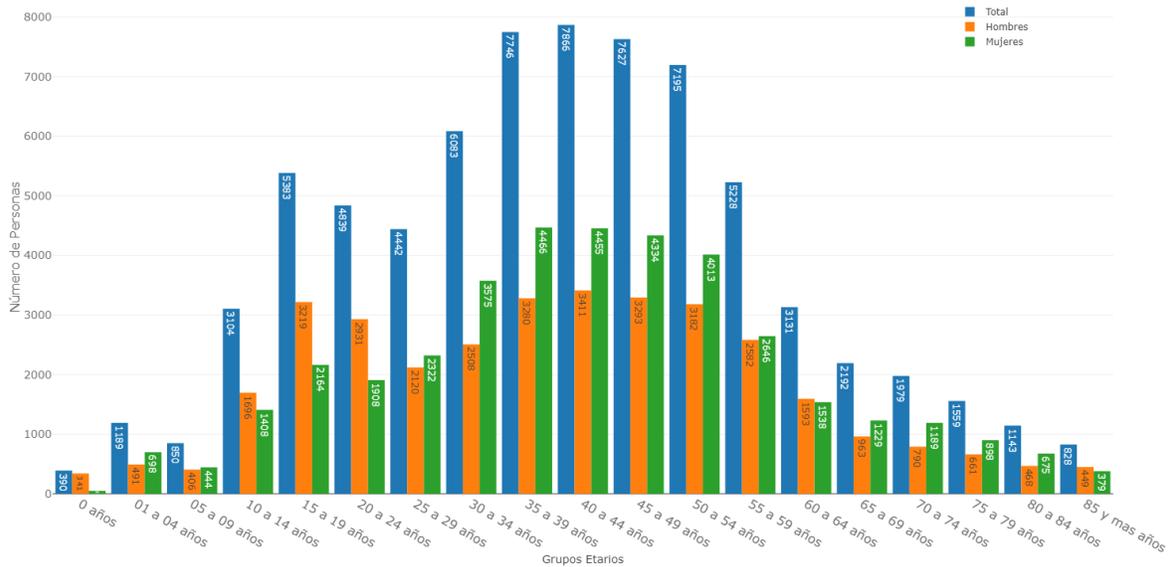


Figura 9: Simulación cinco del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

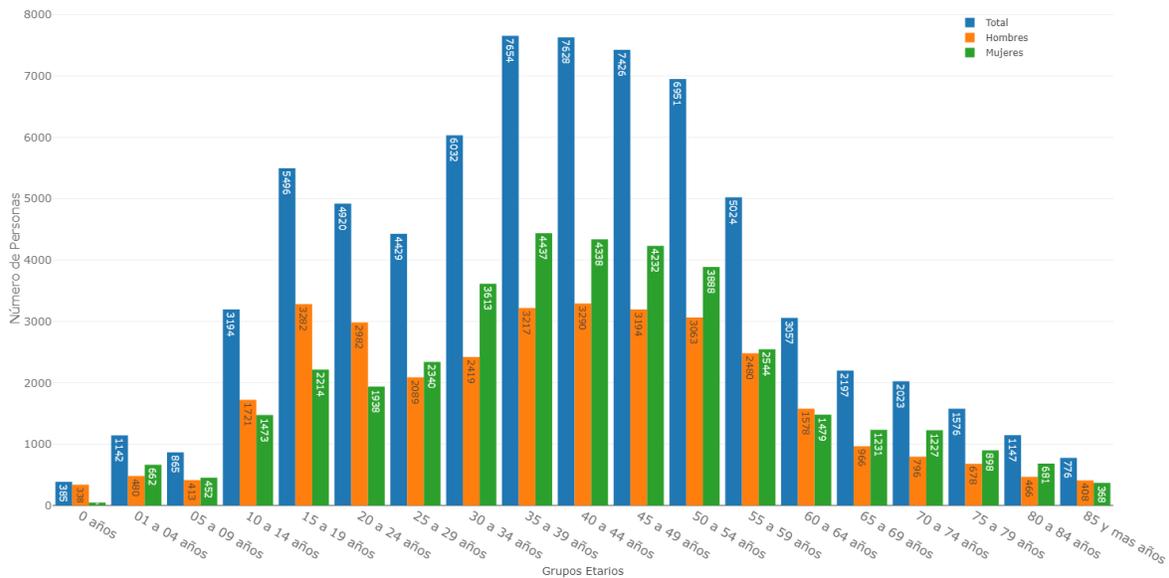


Figura 10: Simulación seis del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

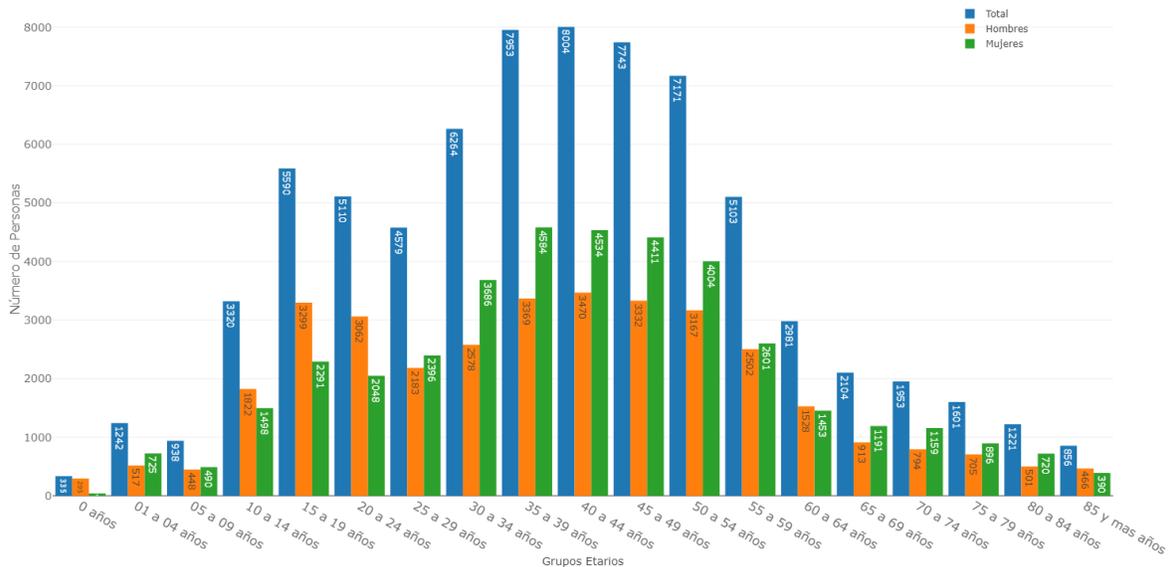


Figura 11: Simulación siete del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

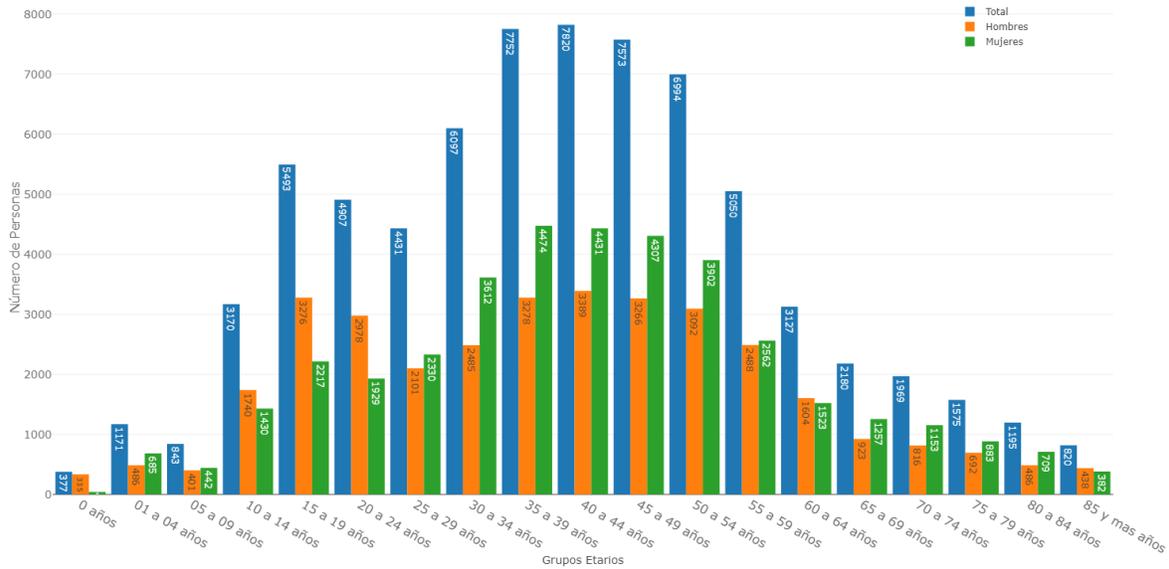


Figura 12: Simulación ocho del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

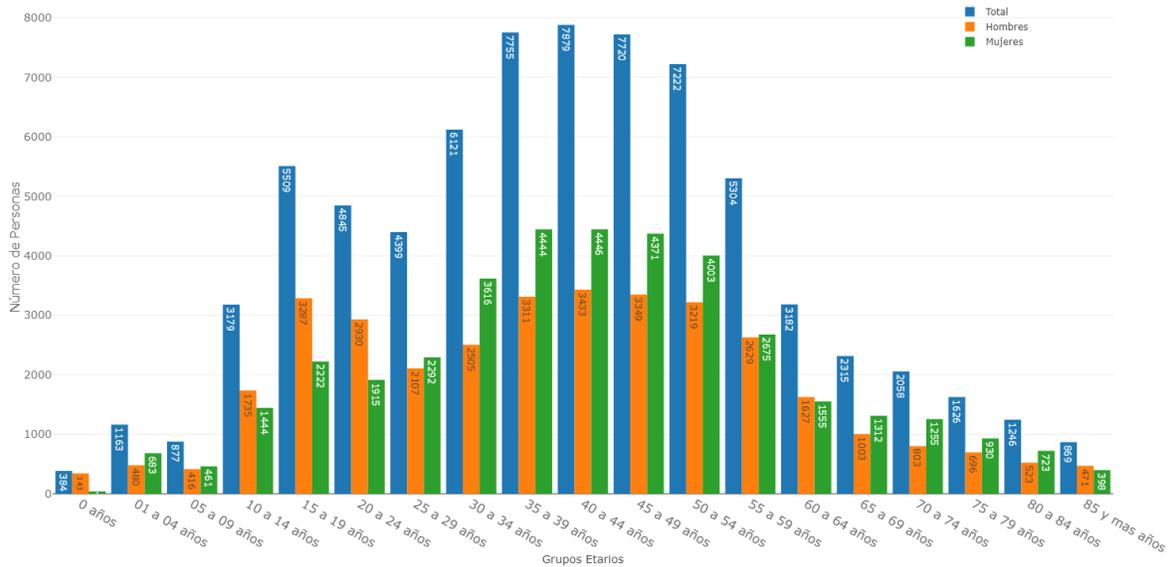


Figura 13: Simulación nueve del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

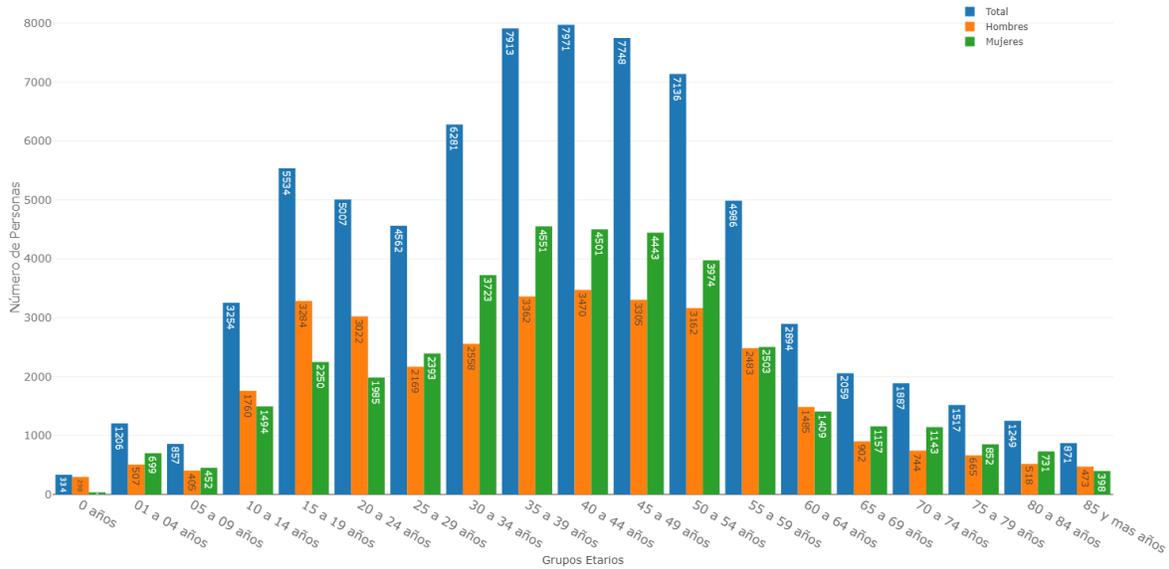


Figura 14: Simulación diez del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

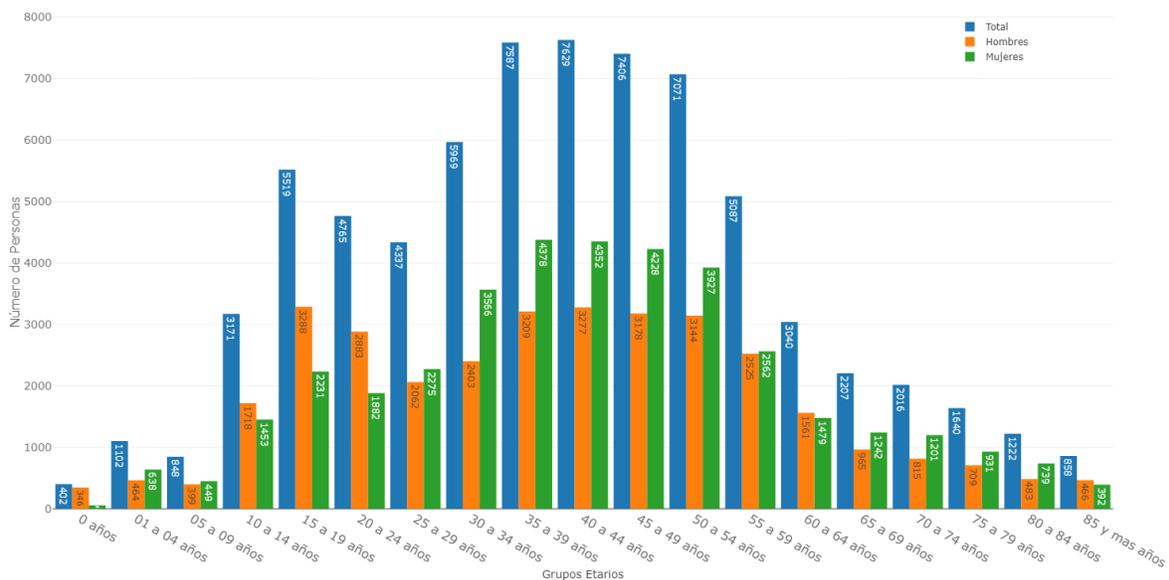


Figura 15: Simulación once del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

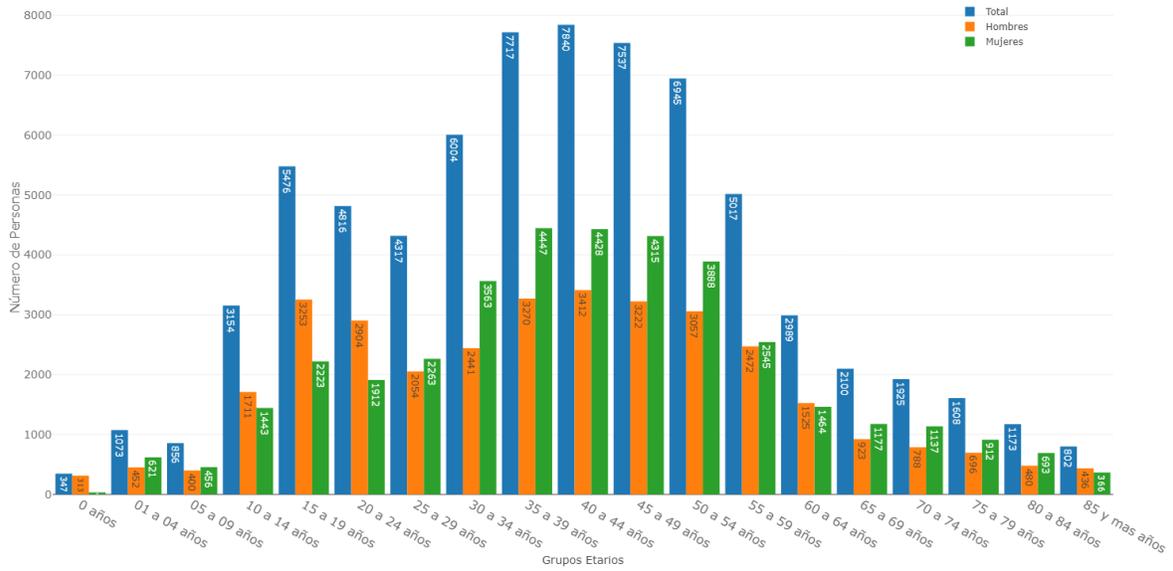


Figura 16: Simulación doce del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

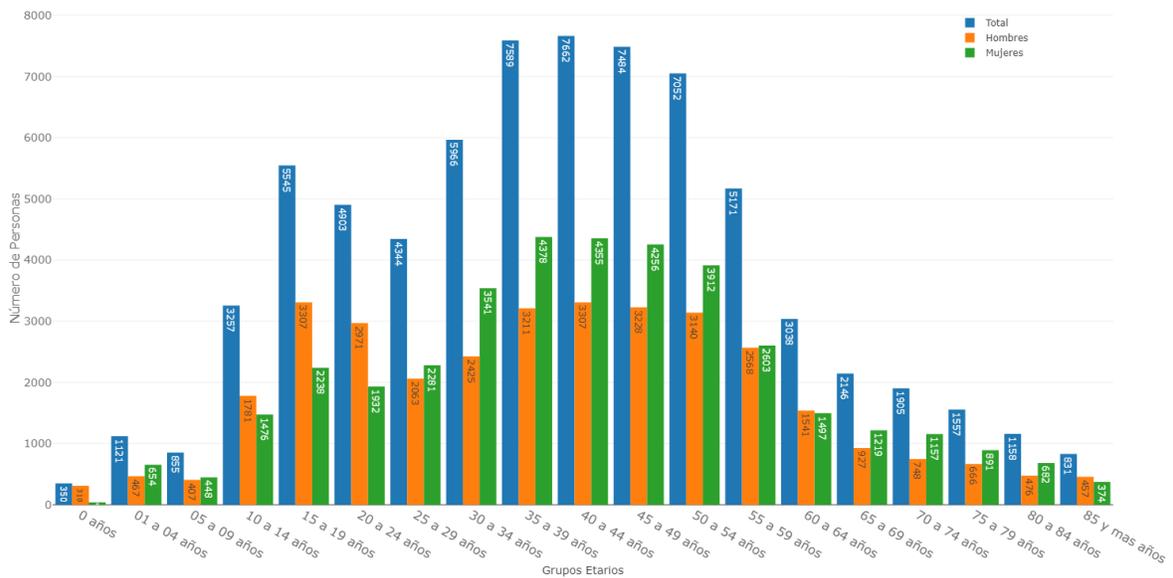


Figura 17: Simulación trece del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

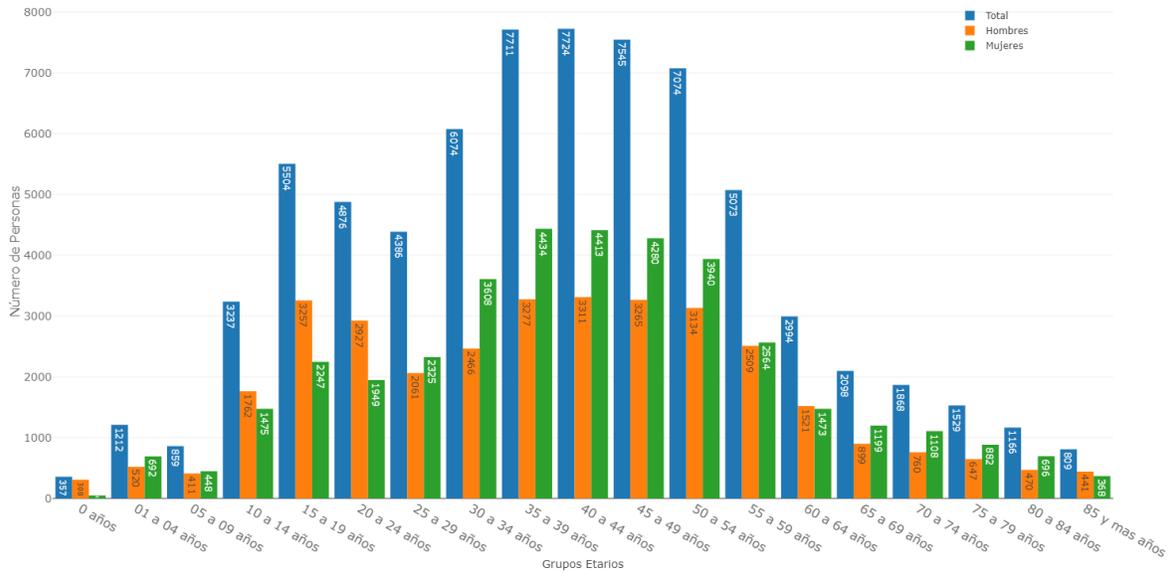


Figura 18: Simulación catorce del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

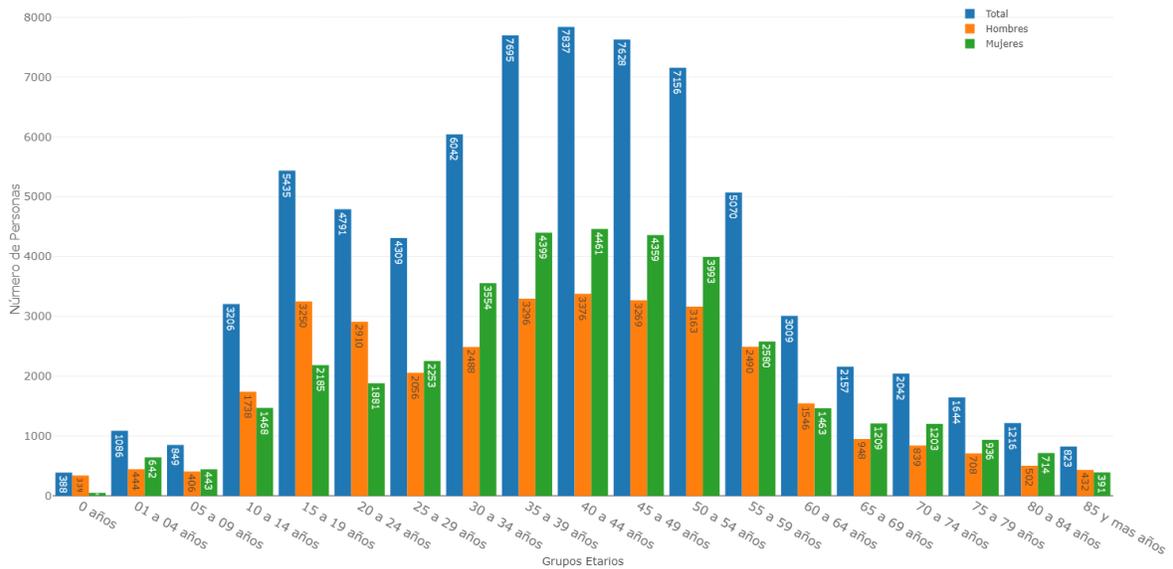


Figura 19: Simulación quince del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

Dadas las anteriores simulaciones fue muy notable ver que la población se haya modificado casi en su totalidad, indicando y confirmando lo antes mencionado acerca de que la distribución de la población donde se tiende a estacionar en los grupos etarios centrales, esto gracias a las tasas de crecimiento dadas por los censos del 2000 y del 2010, nuestras simulaciones sobre todo nos muestran una proyección de la población haciendo énfasis al cambio en la distribución de la población tal y como es muy mencionado en la teoría demográfica clásica donde la modificación de la piramide de la población es un fenómeno que un futuro muy cercano se podrá observar de manera real dando así una población vieja.

### 3.2.2. Modelo Malthusiano de Crecimiento Exponencial

A continuación se muestra otro método mencionado y conocido como Modelo Malthusiano Exponencial que está dado a una ecuación diferencial estocástica, donde además de considerar las anteriores tasas de crecimiento se le agrega un factor aleatorio conocido como ruido aleatorio.

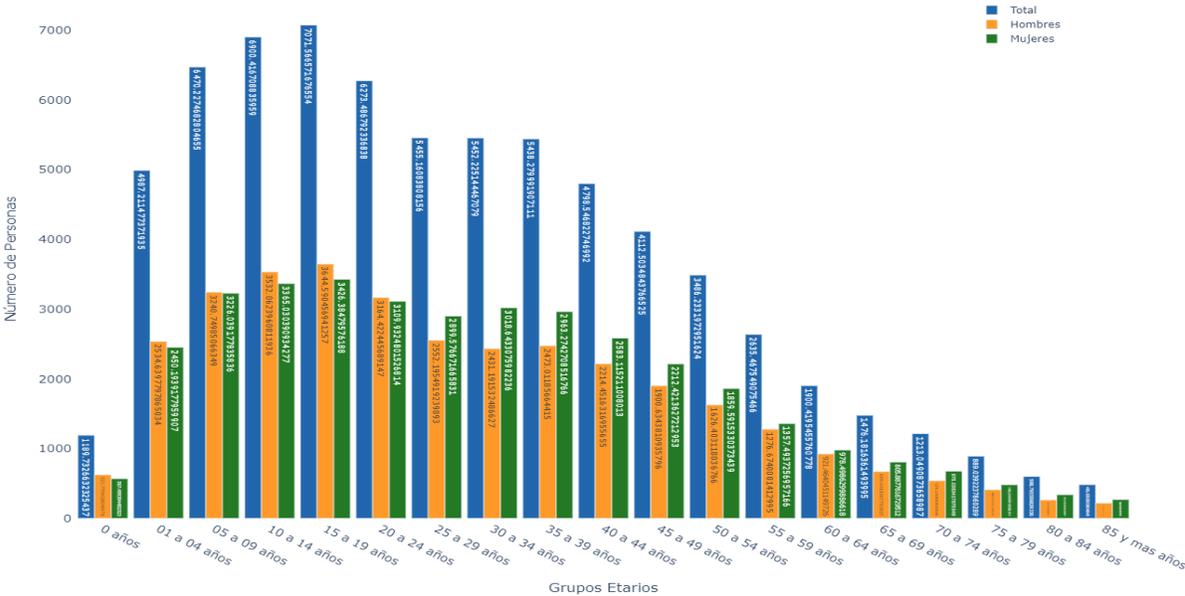


Figura 20: Simulación uno del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

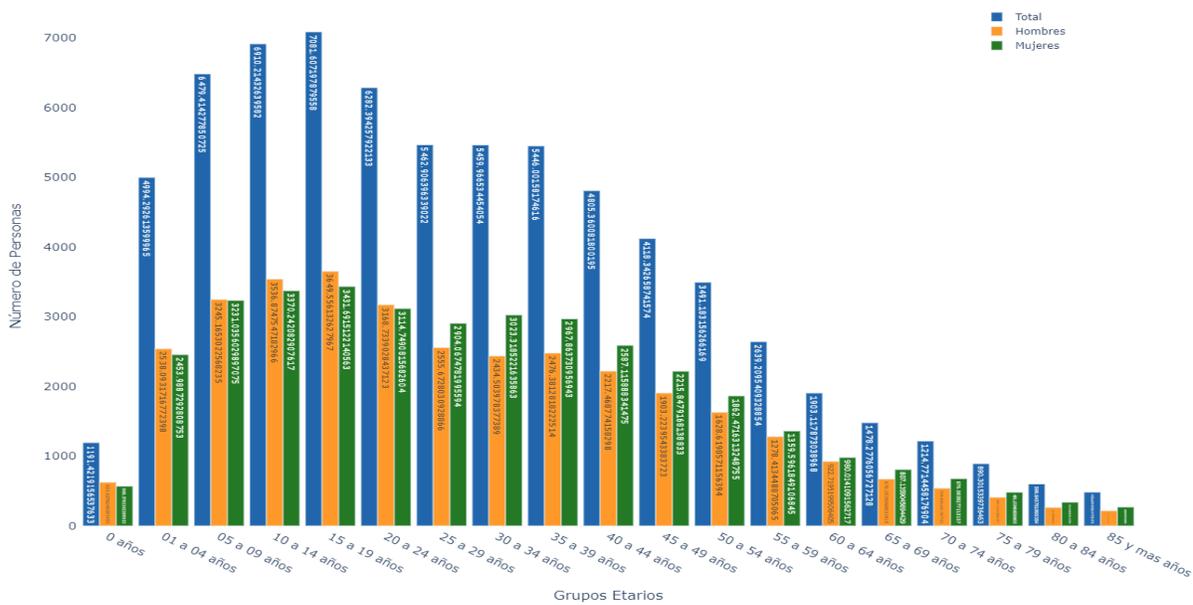


Figura 21: Simulación dos del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

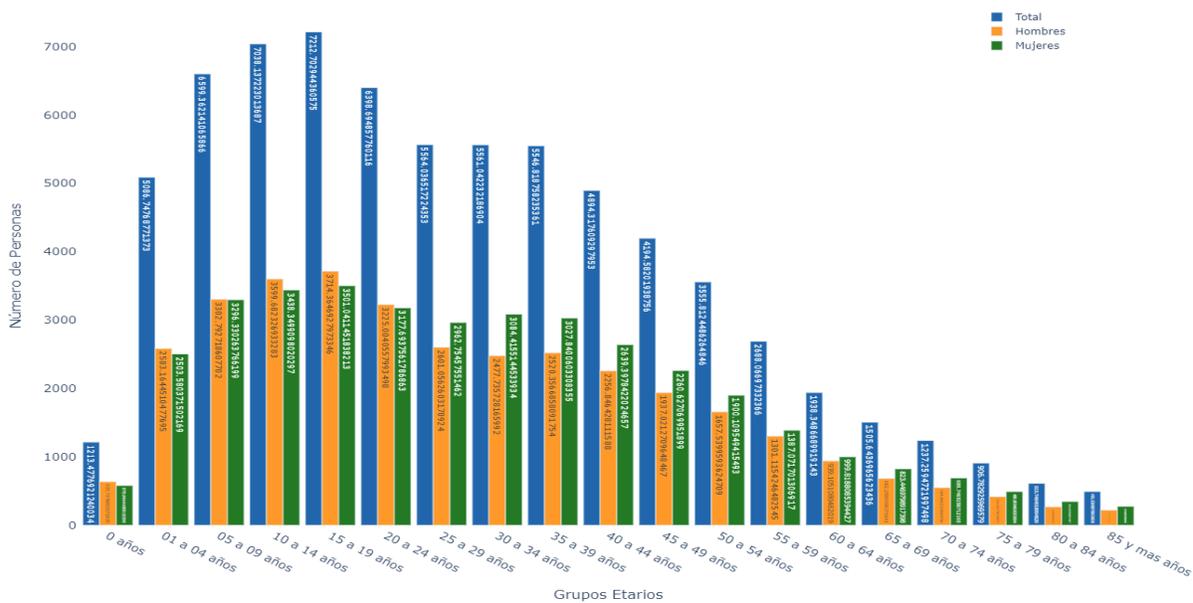


Figura 22: Simulación tres del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

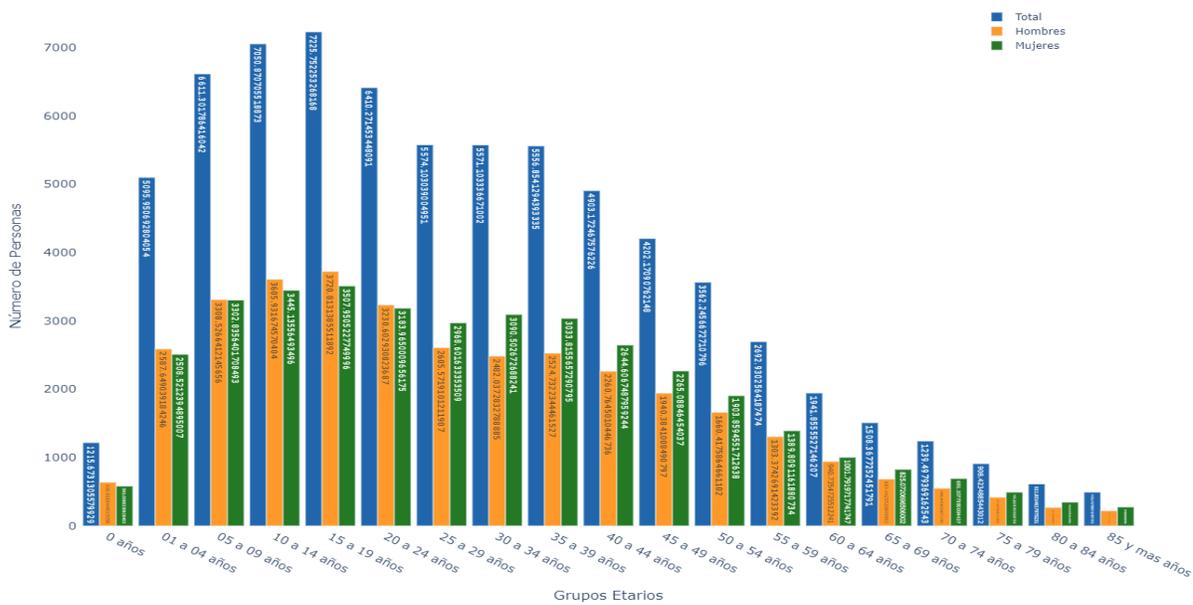


Figura 23: Simulación cuatro del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

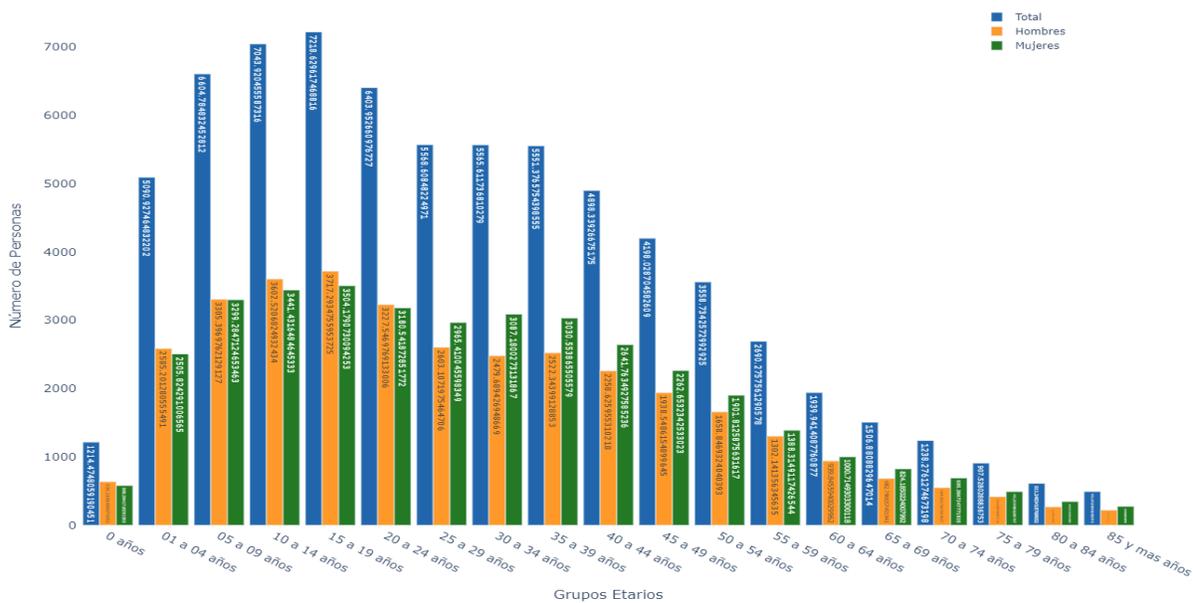


Figura 24: Simulación cinco del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

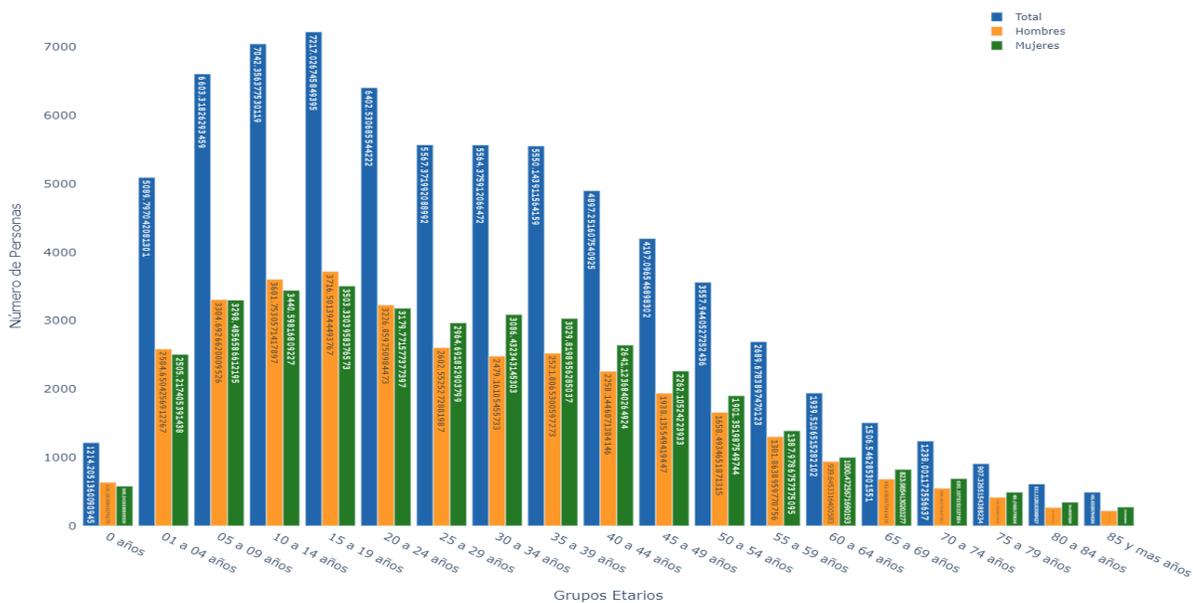


Figura 25: Simulación seis del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

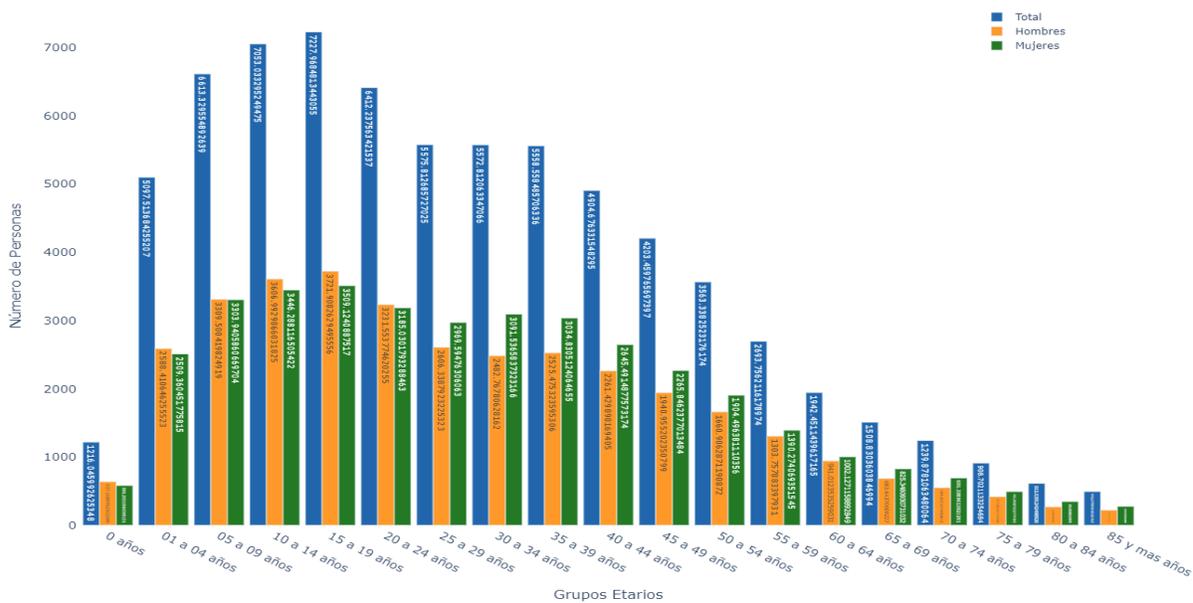


Figura 26: Simulación siete del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

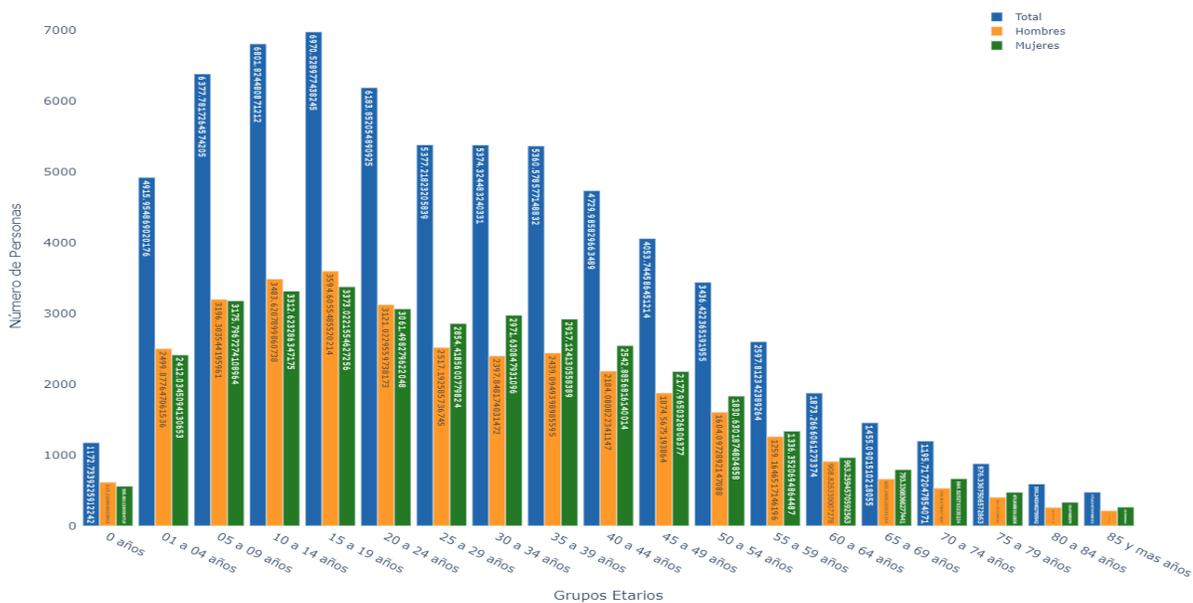


Figura 27: Simulación ocho del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

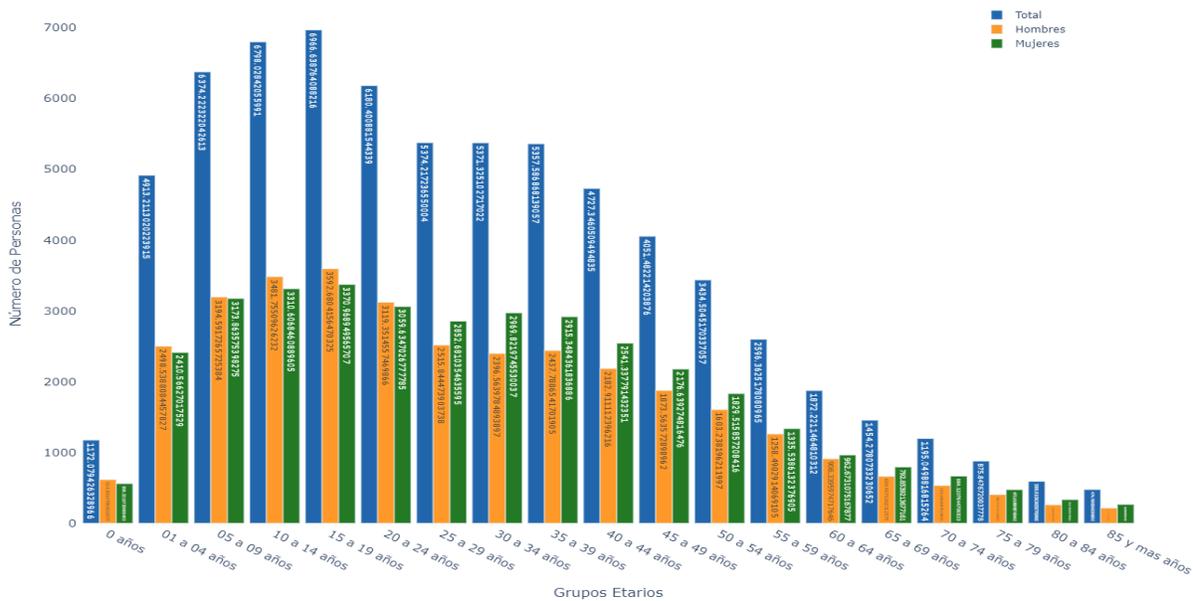


Figura 28: Simulación nueve del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

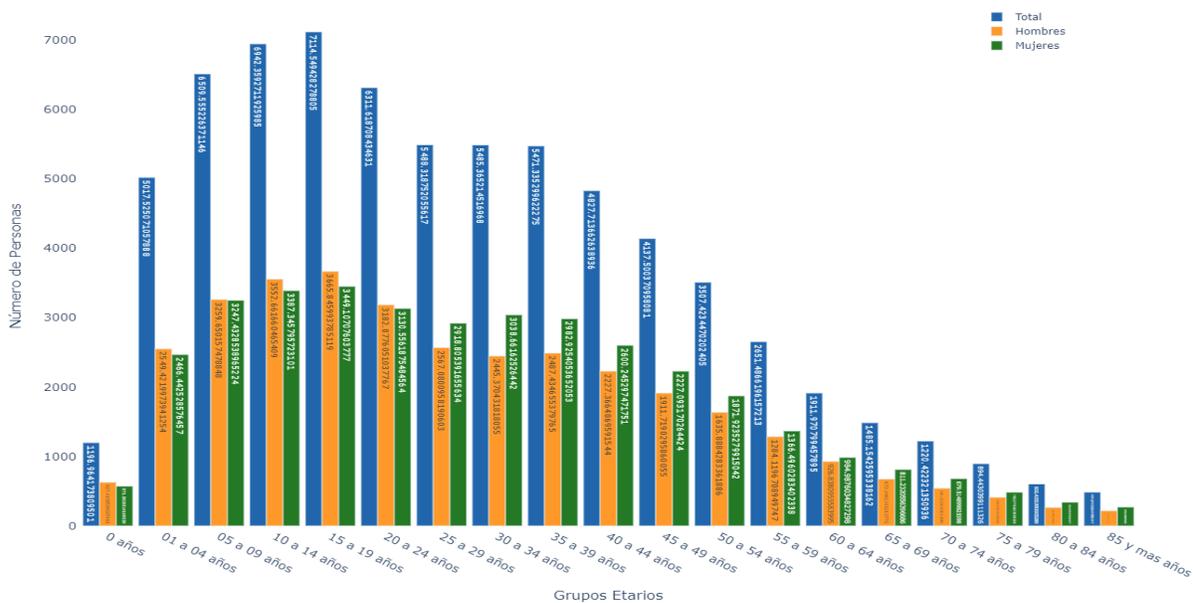


Figura 29: Simulación diez del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

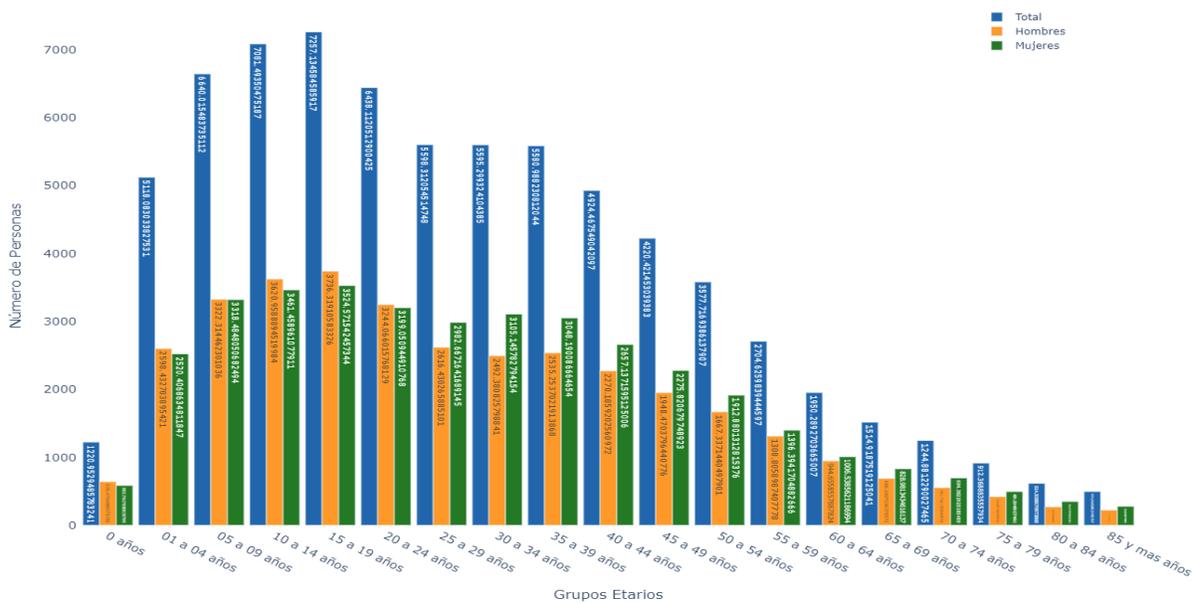


Figura 30: Simulación once del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

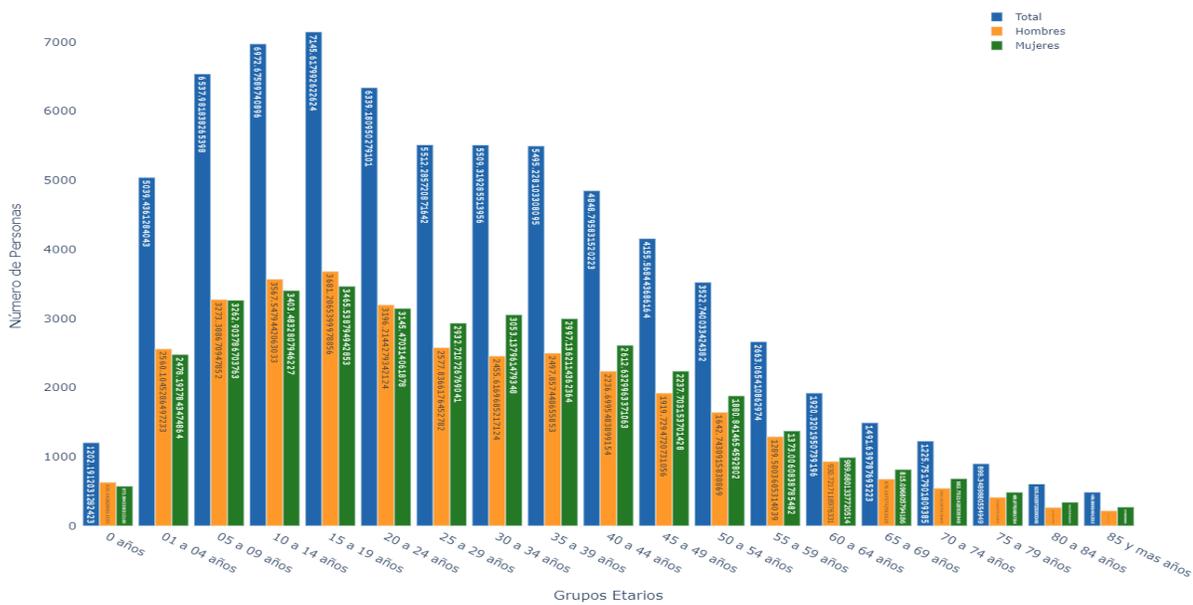


Figura 31: Simulación doce del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

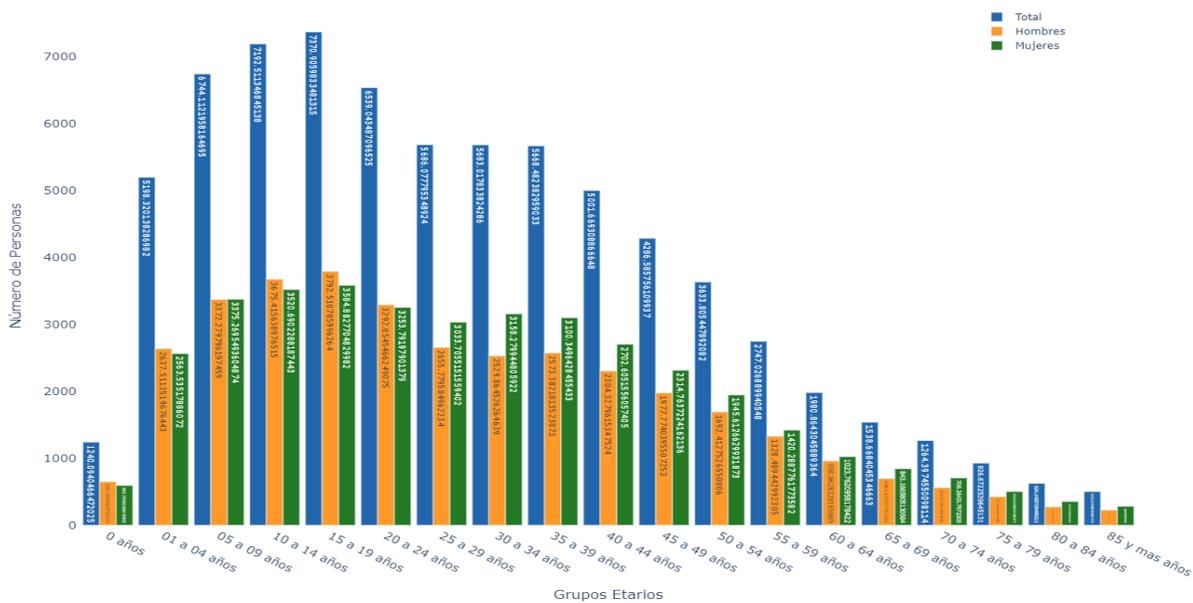


Figura 32: Simulación trece del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

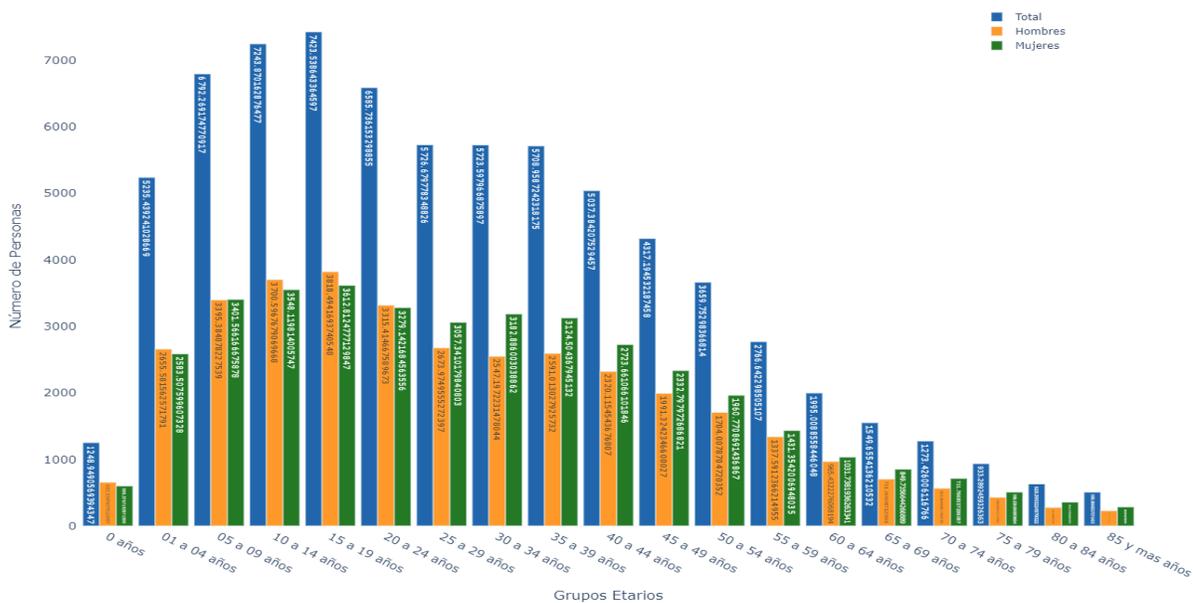


Figura 33: Simulación catorce del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

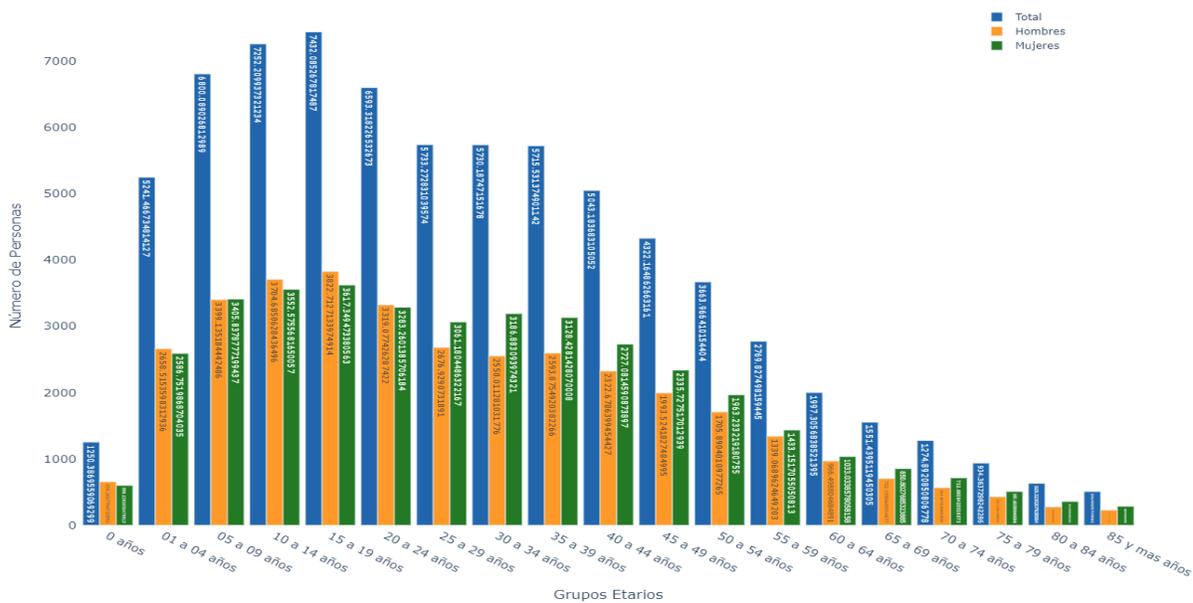


Figura 34: Simulación quince del municipio de Tequisquiapan, Querétaro. Fuente: Elaboración propia.

---

## 4. Discusión

### 4.1. Discusión interna

A partir de las tasas obtenidas de la Tabla 4 que fueron conseguidas de manera determinística se pudieron hacer simulaciones del crecimiento exponencial, con el fin de poder hacer inferencia de los resultados obtenidos en las simulaciones correspondientes para el Proceso de Galton-Watson donde es claro que se notaron los cambios de poblaciones en las distintas simulaciones, sobre todo es importante señalar los cambios en la distribución de los grupos etarios, los cuales se agruparon de manera centrada en los grupos etarios que van de los 30 a 60 años, siendo estos un claro ejemplo de como es muy probable que la población tenga esta distribución en un mediano y largo plazo, esto debido a que se espera que la distribución de las poblaciones se concentren en los últimos grupos etarios, teniendo así una población vieja, esto como causa de una maduración de la transición demográfica esperada [Zavala, 2014].

Por otro lado, revisamos el Modelo Malthusiano de Crecimiento Exponencial, el cual es un resultado determinístico de la solución a una ecuación diferencial, y la cual tiene un resultado extendido en el sentido estocástico dando así lugar a una ecuación diferencial estocástica, en estos resultados se hallaron resultados muy cercanos a los obtenidos en los resultados determinísticos debido a que las tasas para cada grupo etario resultan no variar a la hora de aplicar el modelo y es por eso que se acercan tanto al resultado determinístico. Estas simulaciones nos dan un resultado más real a lo que viene siendo la proyección de la población debido a que la población es imposible que se pueda comportar de manera lineal su crecimiento, por lo que de esta manera los resultados pueden acercarse más a lo que presenten los resultados reales en un conteo rápido de población, y dependiendo que tan por arriba o abajo salgan de los resultados oficiales presentados por [INEGI, 2015].

Dicho esto veamos que los datos presentados de la población total de Tequisquiapan en 2015 por [INEGI, 2015] fue de 70,742 y comparando con los resultados obtenidos por el crecimiento exponencial determinístico nos dio un resultado de 70,768 por lo que por parte de este resultado hubo sobreestimación del crecimiento de la población. En el caso de las simulaciones del proceso de Galton-Watson se encontró una sobreestimación superior a la encontrada en el resultado determinístico teniendo un promedio de 72,646 entre las quince simulaciones rea-

---

lizadas, sin embargo, se cumple el hecho de que es imposible que la población pueda crecer de manera lineal, en este caso analizado se ha mostrado que generalmente los eventos aleatorios presentados a lo largo del tiempo no pueden hacer que el resultado determinístico sean precisos, pero se considera el hecho de que la población puede tener una población esperada superior a la real como también una población esperada inferior a la real [Boyce et al., 2006]. Ahora, analizando los resultados obtenidos de las simulaciones del Modelo Malthusiano Exponencial nos indicaron que en promedio la población registró un total de 72,074 personas, lo cual al igual que el proceso de Galton-Watson presentó sobreestimación de la población, sin embargo, comparando con este mismo presentó una mejor precisión en dichos resultados, debido a que el modelo está diseñado sobre todo para medir el crecimiento de la población humana, mientras que el proceso de Galton-Watson está diseñado para medir la población de distintos tipos de organismos, estos resultados obtenidos de ambos modelos pueden mejorar si se consideran algunos factores importantes de la población, como lo son las variables de la Ecuación Fundamental de la Demografía, es decir, considerar la natalidad, la mortalidad y los movimientos migratorios de la población, y es con estas variables con lo que se podrían obtener mejores resultados.

Estos modelos ayudarían sobre todo a los demógrafos el considerar eventos aleatorios para poder observar posibles trayectorias que pudiera tomar la población debido a eventos no esperados como lo son los eventos catastróficos como movimientos telúricos, desastres biológicos o cualquier clase de evento que podría afectar a la población de forma mortal, así como posibles cambios repentinos en las tasas de fecundidad que pudieran aumentar de manera acelerada el crecimiento de la población. En otros casos, estos modelos también nos pueden ayudar a analizar posibles cambios en las estructuras de las poblaciones de diversos tipos de animales, y con ello evitar una posible extinción de estos, o en otros casos a estudiar la dinámica poblacional de algunos microorganismos que pueden beneficiar o afectar a la población humana [Hui et al., 2017].

## 4.2. Discusión externa

Diversos autores han trabajado en modelos para poder proyectar la dinámica de la población usando algunas técnicas ya mencionadas anteriormente en este trabajo de investigación

---

así como otras. Una de estas resultó ser una estrategia jerárquica para modelar las tasas de crecimiento poblacional, donde tenía la ventaja de no asignar una causa específica para poder emplear la variabilidad de sus tasas, este modelo usó técnicas bayesianas y de modelos jerárquicos para poder obtener estas tasas bajo tres distintos escenarios, siendo uno de estos el más viable y con mayor credibilidad al momento de realizar las simulaciones, sin embargo, este modelo se enfoca más al medir la supervivencia de una población, el cual está ligado a medir la mortalidad de la población más que el análisis del crecimiento de la población [Clark, 2003].

Para poder medir poblaciones con diferentes situaciones ambientales, es decir, que cuentan con distintas situaciones que influyen en sus necesidades de supervivencia como pueden ser falta de recursos o abundancia de estos se han usado modelos matriciales en los cuales se le ha agregado un factor aleatorio el cual representa un evento que afecta sobre las necesidades de estas poblaciones, dado que hablamos de modelos matriciales se ha visto que resultan ser cadenas de markov bivariado, siendo esta otra técnica para poder medir el crecimiento de la población, sin embargo, este está enfocado más a medir como la población puede migrar hacia otros distintos lugares y sufrir de distintas situaciones, sin embargo, esta técnica de agregar a un modelo matricial un factor estocástico no fue el más indicado y por lo tanto no tan útil para medir el crecimiento poblacional [Alonso and Sanz, 2009].

En los siguientes trabajos analizados se observó que otra técnica utilizada para la proyección del crecimiento de la población fueron la realización de una comparativa de persistencia entre distintos tipos de poblaciones, es decir, el como la interacción entre dichas poblaciones afectan en su crecimiento, las técnicas usadas fue usando el Proceso de Nacimiento y Muerte el cual es un resultado ejemplar de un Proceso de Poisson y por lo tanto, una extensión continua de una cadena de markov, el proceso usa las tasas de fecundidad y de mortalidad para así medir una aproximación a la población esperada que en su defecto el objetivo de esta es tratar de medir la probabilidad de extinción de alguna de las poblaciones, el caso generalizado de este modelo da lugar a una ecuación diferencial estocástica donde se toman los tres factores analizados dentro de estos los cuales son la tasa de mortalidad, la tasa de fecundidad y la tasa de crecimiento de población. Finalmente al llegar a una posible solución, fue aplicado al modelo epidemiológico conocido como la Ecuación Diferencial Estocástica Susceptible-Infectado-Susceptible (SIS) la cual nos explica como la interacción entre una cierta población con un microorganismo

---

puede infectar a la población dando así a un número determinado de infectados para poder ser llamado o clasificado como epidemia, luego así evaluar la probabilidad de que cada individuo expuesto a dicho microorganismo pueda curarse y volver a ser un individuo expuesto a volver a enfermar [Allen and Allen, 2003, Allen et al., 2005, Greenhalgh et al., 2015].

Por último y quizá uno de los trabajos más importantes a señalar nos habla de una implementación más fuerte de los procesos de Galton-Watson, la cual divide en distintos modelos para medir las distintas variables que influyen sobre la reproducción humana, es importante señalar que el uso de esta variable tan importante dentro de la proyección de la población tiene implícitamente considerada las tasas de mortalidad, y siendo más específicos, las tasas de mortalidad infantil, esto ya que hablar de estas tasas nos ayudan a entender por qué en algunas poblaciones se empiezan a presentar menor número de nacimientos. Los modelos presentados en este trabajo nos indican como las edades de reproducción femenina influyen también en el crecimiento de la población, entre otras de las cuestiones que se marcan son los procesos individuales entre cada sexo y la interacción que se muestra entre estos, así como el agregado de la función de transición la cual nos indican los cambios censales que se observan en la distribución de la población, la conclusión que se llega es la que se ha llegado en este trabajo de investigación donde se ha señalado que el no considerar todas las variables indicadas en la Ecuación Fundamental de la Demografía es el principal problema que se nos presentará para poder predecir el crecimiento o decrecimiento de la población [Mode, 1975, Keyfitz, 1972].

### **4.3. Limitaciones e investigaciones futuras**

Algunas de las limitaciones que hubo para un mejor desarrollo de la investigación fueron buscar modelos que consideren todas las variables dentro de la Ecuación Fundamental de la Demografía, ya que algunos de estos modelos solo consideraban uno o dos variables de estas, pero no todas en conjunto, siguiendo la metodología de la corrección de poblaciones y de crecimiento hizo que hubiera algunas confusiones para sacar mayor variedad de datos. Es por esta razón que para futuras investigaciones se deja desarrollar de estas maneras la medición de los crecimientos de las poblaciones de manera aleatoria puesto que es un área de mucha importancia para los demógrafos y que podría ayudar a una mejor planeación de las necesidades de la población.

---

## Referencias

- Edward J. Allen, Linda J.S. Allen, and Henri Schurz. A comparison of persistence-time estimation for discrete and continuous stochastic population models that include demographic and environmental variability. *Mathematical Biosciences*, 196(1):14–38, 2005. ISSN 00255564. doi: 10.1016/j.mbs.2005.03.010.
- Linda J.S. Allen and Edward J. Allen. A comparison of three different stochastic population models with regard to persistence time. *Theoretical Population Biology*, 64(4):439–449, 2003. ISSN 00405809. doi: 10.1016/S0040-5809(03)00104-7.
- Juan Antonio Alonso and Luis Sanz. Approximating the distribution of population size in stochastic multiregional matrix models with fast migration. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 367(1908):4801–4827, dec 2009. ISSN 1364-503X. doi: 10.1098/rsta.2009.0162.
- Marc Artzrouni and James Reneke. Stochastic Differential equations in mathematical demography: a review. *Applied Mathematics and Computation*, 38(1):7–21, 1990. ISSN 00963003. doi: 10.1016/0096-3003(90)90078-H.
- Robert B Ash. *Probability and measure theory*. 2000. ISBN 0120652021. URL <http://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=GkqQoRpCO2QC&oi=fnd&pg=PR7&dq=Probability+and+Measure+Theory&ots=EnQHMGFPFC&sig=ABhDd3CniC3447u-p15wVCS86ug>.
- Robert B Ash. *Basic probability theory*, volume 18. 2008. ISBN 9780486466286. doi: 10.1007/978-94-007-4056-3\_2.
- Mark S Boyce, Chirakkal V Haridas, Charlotte T Lee, and The Nceas Stochastic Demography Working Group. Demography in an increasingly variable world. *Trends in ecology & evolution*, 21(3):141–8, mar 2006. ISSN 0169-5347. doi: 10.1016/j.tree.2005.11.018.
- Luis Miguel Chevin, Olivier Cotto, and Jaime Ashander. Stochastic evolutionary demography under a fluctuating optimum phenotype. *American Naturalist*, 190(6):786–802, 2017. ISSN 00030147. doi: 10.1086/694121.

- 
- James S. Clark. Uncertainty and Variability in Demography and Population Growth: A Hierarchical Approach. *Ecology*, 84(6):1370–1381, 2003.
- Joel E. Cohen. Multiregional age structured populations with changing vital rates: weak and strong stochastic ergodic theorems. *Multiregional mathematical demography*, pages 477–503, nov 1982. ISSN 1098-6596. doi: 10.1088/1751-8113/44/8/085201.
- Kenny S. Crump and Charles J. Mode. A general age-dependent branching process. I. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24(3):494–508, 1968. ISSN 10960813. doi: 10.1016/0022-247X(68)90005-X.
- Kenny S. Crump and Charles J. Mode. A General Age-Dependent Branching Process. II. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 25:8–17, 1969.
- Stephen D . Durham. Limit Theorems for a General Critical Branching Process. *Journal of Applied Probability*, 8(1):1–16, 1971.
- William Feller. An introduction to probability theory and its applications. Vol. 1. 1968.
- David Greenhalgh, Yanfeng Liang, Xuerong Mao, and Yuan Lou. Demographic stochasticity in the SDE SIS epidemic model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 20(9):2859–2884, 2015. ISSN 15313492. doi: 10.3934/dcdsb.2015.20.2859.
- Theodore E. Harris. The theory of branching process. 1964.
- Cang Hui, Gordon A. Fox, and Jessica Gurevitch. Scale-dependent portfolio effects explain growth inflation and volatility reduction in landscape demography. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 114(47):12507–12511, 2017. ISSN 10916490. doi: 10.1073/pnas.1704213114.
- INEGI. 2015.
- P. Jagers. A general stochastic model for population development. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 84–103, 1969.
- Nathan Keyfitz. On future population. *Journal of the American Statistical Association*, 67(338):347–363, 1972.

- 
- Massimo Livi-Bacci. Población y sustentabilidad: Temas abiertos para el siglo XXI. *Papeles de Poblacion*, 20(82):13–26, 2014. ISSN 14057425.
- TR Malthus and T Ortiz. Ensayo sobre el principio de la población. *Fondo de cultura económica*, 4, 1951.
- Charles J. Mode. Perspectives in stochastic models of human reproduction: A review and analysis. *Theoretical Population Biology*, 8(3):247–291, 1975. ISSN 10960325. doi: 10.1016/0040-5809(75)90045-3.
- James R Norris. *Markov chains*, volume 2. Cambridge University Press, 1 edition, 1998. URL <https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=qM65VRmOJZAC&oi=fnd&pg=PA3&dq=J.+R.+Norris.+Markov+chains,+volume+2+of+Cambridge+Series+in+Statistical+and+Probabilistic+Mathematics.+Cambridge+University+Press,+Cambridge,+1998.+Reprint+of+1997&ots=0IDO1wwX2h&sig=kFtVbWXZuDpjzl5NUS{ }U8QoUPcs>.
- A. Rogers. Multiregional demography. 1995.
- Thomas Arthur Ryan. On age-dependent branching processes. *Cornell University*, 1968.
- Luz María Valdés. *Población reto del tercer milenio: curso interactivo introductorio a la demografía*. UNAM, 2000.
- H. W. Watson and Francis Galton. On the Probability of the Extinction of Families. *The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*, 4:138–144, 1875.
- María Eugenia Zavala. La transición demográfica en México (1895-2010): ¿Una transición original? *Los Mexicanos: Un Balance del Cambio Demográfico*. Fondo de Cultura Económica, pages 80–114, 2014.